Jan Kallsen

Einführung in die zeitdiskrete Finanzmathematik

13. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Mathematische Hilfsmittel

In diesem Kapitel werden einige Ergebnisse zu maß- bzw. wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffen zusammengestellt, die in einer einführenden Vorlesung vielleicht nicht zur Sprache kamen. Ferner wird als funktionalanalytisches Hilfsmittel der auf dem Satz von Hahn-Banach basierende Trennungssatz zitiert, der für einige Beweise benötigt wird.

0.1 Absolutstetigkeit und Äquivalenz

Ein ganz wesentlicher Kunstgriff in der Finanzmathematik besteht darin, neben dem eigentlichen Wahrscheinlichkeitsmaß weitere zu betrachten, unter denen bestimmte Erwartungswerte verschwinden. Dabei interessiert man sich aber vorwiegend für solche Maße, unter denen die Mengen mit positiver Wahrscheinlichkeit dieselben wie unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß sind. Solche *äquivalenten* Maßwechsel spielen auch in der Statistik eine wichtige Rolle.

Seien μ, ν Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$.

Definition 0.1 Das Maß ν heißt **absolutstetig** bezüglich μ, falls jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist. Man schreibt dafür $\nu \ll \mu$.

Dabei ist eine μ-Nullmenge eine beliebige Teilmenge einer Menge $N \in \mathscr{F}$ mit $\mu(N) = 0$. Man fordert bei Nullmengen also nicht unbedingt die Messbarkeit. Dies ist bisweilen aus technischen Gründen sinnvoll.

Definition 0.2 μ und ν heißen **äquivalent**, falls $\mu \ll \nu$ und $\nu \ll \mu$. Man schreibt dafür $\mu \sim \nu$.

Der Satz von Radon-Nikodým besagt, dass das dominierte Maß bei Absolutstetigkeit schon eine Dichte bzgl. des dominierenden Maßes besitzt.

Satz 0.3 (Radon-Nikodým) *Sei μ σ-endlich. Dann sind äquivalent:*

1. *ν hat eine μ-Dichte f (d. h. $\nu(A) = \int_A f d\mu$ für alle $A \in \mathscr{F}$).*

2. $\nu \ll \mu$.

Die Dichte $f =: \frac{d\nu}{d\mu}$ *ist* μ*-fast überall eindeutig.*

0.2 Bedingte Erwartung

Bei einfachen Zufallsexperimenten hat man es in der Regel mit nur zwei unterschiedlichen Informationsständen zu tun. *Vor dem Experiment* liegt der Ausgang noch weitgehend im Dunkeln, und man kann lediglich Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Ereignisse angeben. *Nach dem Experiment* hingegen ist der eingetretene Zustand vollständig determiniert. Dies spiegelt sich auch bei Zufallsvariablen X wider. Nach dem Experiment kennt man X exakt, vorher gibt man sich z. B. mit dem Erwartungswert $E(X)$ als „erwartetem“ Mittelwert zufrieden.

Wenn sich Zufallsexperimente jedoch über einen längeren Zeitraum hinziehen, erscheint diese Betrachtungsweise unangemessen. Mit dem Fortschreiten der Zeit werden die Vorstellungen über den Ausgang des Experiments immer präziser. Es erscheint daher wünschenswert, Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte *auf Grundlage der zum augenblicklichen Zeitpunkt vorhandenen Information* zu betrachten. Dazu muss man jedoch zunächst den etwas vagen Begriff der vorhandenen Information mathematisch präzisieren. Es gehört zu den außerordentlich fruchtbaren Ideen der Wahrscheinlichkeitstheorie, dies mit Hilfe von σ-Algebren zu bewerkstelligen, die ja in der Maßtheorie zunächst nur als Definitionsbereiche von Maßen in Erscheinung treten, für die sich – wie etwa beim Lebesguemaß – die Potenzmenge als zu groß erweist.

Inwiefern steht nun eine σ-Algebra $\mathscr{C}$ für den Umfang an Information, der zu einem gegebenen Zeitpunkt zur Verfügung steht? Dies geschieht in der Form, dass $\mathscr{C}$ genau die Ereignisse enthält, von denen wir schon zum gegenwärtigen Zeitpunkt sicher sagen können, ob sie eintreten oder nicht.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel. Wir würfeln dreimal mit einem Würfel und bezeichnen die Ergebnisse als X_1, X_2, X_3. Nach dem ersten Würfelwurf sind bereits all die Ereignisse entschieden, die sich nur auf diesen ersten Wurf beziehen, z. B. das Ereignis $\{X_1 \text{ ist gerade}\}$. Die zu diesem Informationsstand passende σ-Algebra $\mathscr{C}$ ist daher die von der Zufallsvariablen X_1 erzeugte, d. h. $\mathscr{C} = \sigma(X_1) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$. Aber auch die Vorstellungen hinsichtlich noch nicht determinierter Ereignisse und Zufallsvariablen können sich nach dem ersten Wurf geändert haben. Zum Beispiel gilt für die Augensumme $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 10{,}5$; nach dem ersten Wurf hingegen erwarten wir im Mittel $X_1 + E(X_2) + E(X_3) = X_1 + 7$, da die Zufallsvariable X_1 für uns nun nicht mehr zufällig ist.

Man bezeichnet diesen Erwartungswert auf Grundlage der Information $\mathscr{C}$ als *bedingten Erwartungswert gegeben* $\mathscr{C}$ und schreibt $E(X|\mathscr{C})$. *Bedingte Wahrscheinlichkeiten* lassen sich durch die Definition $P(A|\mathscr{C}) = E(1_A|\mathscr{C})$ als Spezialfall bedingter Erwartungswerte auffassen. Damit die Abbildung $A \mapsto P(A|\mathscr{C})$ aber auch σ-additiv ist, wie man es von einem Wahrscheinlichkeitsmaß erwartet, sind einige maßtheoretische Hürden zu überwinden, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Wir beschränken uns daher auf bedingte Erwartungswerte.

Seien $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{F}$ (d. h. $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$). Ferner sei X eine $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable.

Satz 0.4 *Falls X nichtnegativ (oder integrierbar) ist, dann existiert eine P-fast sicher eindeutige $\mathscr{C}$-messbare nichtnegative (bzw. integrierbare) Zufallsvariable $E(X|\mathscr{C})$ derart, dass*

$$\int_C E(X|\mathscr{C}) dP = \int_C X dP$$

für alle $C \in \mathscr{C}$.

Beweisidee: Sei zunächst $X \geq 0$. Definiere ein Maß $Q := XP$. Nach dem Satz von Radon-Nikodým hat $Q|_{\mathscr{C}}$ eine $P|_{\mathscr{C}}$-Dichte. Man zeigt dann, dass diese Dichte die gewünschten Eigenschaften besitzt. Für integrierbares X zerlegt man wie üblich $X = X^+ - X^-$. $\square$

Definition 0.5

1. $E(X|\mathscr{C})$ heißt **bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{C}$**.
2. $E(X|\mathscr{C})$ kann durch die Festlegung $E(X|\mathscr{C}) := E(X^+|\mathscr{C}) - E(X^-|\mathscr{C})$ auch noch im Falle $E(|X||\mathscr{C}) < \infty$ definiert werden.

Der bedingte Erwartungswert ist also implizit über gewünschte Eigenschaften und nicht explizit durch eine Formel festgelegt. In abzählbaren Wahrscheinlichkeitsräumen kann aber auch eine explizite Definition angegeben werden (vgl. Übungsaufgabe).

Eigenschaften 0.6 *Sei X nichtnegativ oder integrierbar. Dann gelten:*

1. *$E(X|\mathscr{C}) = X$, falls X $\mathscr{C}$-messbar ist.*
2. *$E(X|\mathscr{C}) = E(X)$, falls $\sigma(X)$ und $\mathscr{C}$ unabhängig sind.*
3. *$E(E(X|\mathscr{C})) = E(X)$*
4. *$E(E(X|\mathscr{C})|\mathscr{D}) = E(X|\mathscr{D})$, falls $\mathscr{D}$ Unter-σ-Algebra von $\mathscr{C}$ ist.*
5. *Die Abbildung $X \mapsto E(X|\mathscr{C})$ ist linear und monoton.*
6. *Für die bedingten Erwartungswert gelten die Sätze von der monotonen und der majorisierten Konvergenz sowie die Jensensche Ungleichung.*
7. *Für $\mathscr{C}$-messbares $Y \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ gilt $E(XY|\mathscr{C}) = E(X|\mathscr{C})Y$, falls die Ausdrücke sinnvoll sind, d. h. falls $X, Y \geq 0$ oder X, XY integrierbar sind. Insbesondere gilt $E(XY) = E(E(X|\mathscr{C})Y)$.*

Lemma 0.7 *Seien Y eine Zufallsvariable und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $g(X,Y)$ nichtnegativ oder integrierbar ist. Falls X $\mathscr{C}$-messbar und Y unabhängig von $\mathscr{C}$ ist, dann gilt:*

$$E(g(X,Y)|\mathscr{C}) = \int g(X,y)P^Y(dy).$$

Beweis. Sei zunächst g nichtnegativ. Im Zusammenhang mit dem Satz von Fubini wird gezeigt, dass die Abbildung $x \mapsto \int g(x,y)P^Y(dy)$ Borel-messbar ist. Somit ist auch die Zufallsvariable $\int g(X,y)P^Y(dy)$ als Verkettung zweier messbarer Abbildungen $\mathscr{C}$-messbar. Für $C \in \mathscr{C}$ definiere $Z := 1_C$. Da (X,Z) unabhängig von Y ist, gilt $P^{(X,Z)} \otimes P^Y = P^{(X,Z,Y)}$. Mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_C \int g(X,y)P^Y(dy)dP &= \int\int g(X,y)ZP^Y(dy)dP \\
&= \int\int g(x,y)zP^Y(dy)P^{(X,Z)}(d(x,z)) \\
&= \int g(x,y)zP^{(X,Z,Y)}(d(x,z,y)) \\
&= \int g(X,Y)ZdP \\
&= \int_C g(X,Y)dP,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Der Beweis für integrierbares $g(X,Y)$ verläuft analog. Die Integrierbarkeit von $g(X,Y)$ folgt mit der obigen Rechnung angewandt auf $|g(X,Y)|$ und $C = \Omega$:

$$E(|\int g(X,y)P^Y(dy)|) \leq E(\int |g(X,y)|P^Y(dy)|) = E(|g(X,Y)|) < \infty.$$

$\square$

Bezeichnung. $E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$ für messbare Abbildungen $Y : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\Gamma, \mathscr{G})$ mit Werten in einem messbaren Raum $(\Gamma, \mathscr{G})$.

Die Eigenschaft *$\mathscr{C}$-Messbarkeit* der bedingten Erwartung ist intuitiv so zu verstehen, dass $E(X|\mathscr{C})$ durch die Information in $\mathscr{C}$ determiniert ist. Wenn nun die σ-Algebra $\mathscr{C}$ von einer Zufallsvariablen Y erzeugt ist, sollte man erwarten, dass sich $E(X|\mathscr{C})$ als Funktion von Y schreiben lässt. Die folgende Bemerkung zeigt, dass dies in der Tat der Fall ist.

Bemerkung. Sei $Y : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\Gamma, \mathscr{G})$ mit Werten in einem messbaren Raum $(\Gamma, \mathscr{G})$. Dann ist X genau dann $\sigma(Y)$-messbar, wenn es eine messbare Abbildung $g : (\Gamma, \mathscr{G}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathscr{B}})$ gibt mit $X = g \circ Y$.

0.3 L^p-Räume und Trennungssatz

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Lemma 0.8 *Für $p \in [1, \infty)$ ist*

$$L^p(\Omega, \mathscr{F}, P) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X\ \mathscr{F}\textit{-messbar}, E(|X|^p) < \infty\}$$

ein Banachraum bzgl. der Norm $\|X\|_p := (E(|X|^p))^{1/p}$, falls man P-fast sicher gleiche Zufallsvariablen miteinander identifiziert.

Im strengen Sinne ist $X \mapsto \|X\|_p$ nur eine Seminorm, da auch fast sicher verschwindende Zufallsvariablen den Wert 0 erhalten. Formal exakt kommt man zu einem Banachraum, wenn man statt der Menge der Zufallsvariablen die Menge der Äquivalenzklassen unter der Äquivalenzrelation *fast sichere Gleichheit* betrachtet. Wir folgen hier der üblichen praktischen, wenn auch etwas ungenauen Tradition, fast sicher gleiche Zufallsvariablen überall dort miteinander zu identifizieren, wo dies geboten erscheint (z. B. auch bei Gleichungen über bedingte Erwartungswerte).

Definition 0.9 Für $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiere das P**-wesentliche Supremum** durch

$$\operatorname{ess\,sup} X := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : X \leq \alpha\ P\text{-fast sicher}\}.$$

Lemma 0.10

$$L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, P) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X\ \mathscr{F}\textit{-messbar}, \operatorname{ess\,sup} |X| < \infty\}$$

ist ein Banachraum bzgl. der Norm $\|X\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |X|$, falls man P-fast sicher gleiche Zufallsvariablen miteinander identifiziert.

Lemma 0.11 *$L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ist sogar ein Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts $(X, Y) \mapsto E(XY)$.*

Lemma 0.12 *Für $p \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist L^q der Dualraum von L^p bzgl. der Identifikation $Y(X) := E(XY)$ für $X \in L^p$, $Y \in L^q$.*

Satz 0.13 (Trennungssatz) *Seien X ein normierter Raum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $x' \in X' := \{T : X \to \mathbb{R} : T$ linear und stetig$\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass $x'(x) \leq \alpha$ für alle $x \in M$ und $x'(x_0) > \alpha$.*

Der Beweis basiert auf dem Satz von Hahn-Banach, vgl. z. B. [Wer02], Theorem III.2.5.

Anschaulich besagt der vorstehende Satz, dass man eine abgeschlossene, konvexe Menge M und einen nicht in ihr liegenden Punkt x_0 durch eine Hyperebene, nämlich die Menge $\{x \in X : x'(x) = \alpha\}$, in dem Sinne voneinander trennen kann, dass alle Punkte von M auf der einen Seite, der Punkt x_0 hingegen auf der anderen Seite der Hyperebene liegen.

Kapitel 1

Diskrete stochastische Analysis

In der stochastischen Finanzmathematik fasst man Wertpapierkursverläufe, wie man sie in der Zeitung oder auf dem Bildschirm verfolgen kann, als *stochastische Prozesse*, d. h. als zufällige Funktionen der Zeit, auf. Auch die variierende Zahl der Wertpapiere im Anlageportfolio sowie das daraus resultierende Anlagevermögen fallen in diesen Rahmen. Die zugehörigen mathematischen Begriffe, die auch ganz unabhängig von der Finanzmathematik angewandt werden, werden in diesem Kapitel vorgestellt. Wir beschränken uns dabei an dieser Stelle auf eine diskrete Menge von Zeitpunkten (etwa Tage, Minuten, Sekunden). Der kontinuierliche Fall erfordert eine erheblich kompliziertere Theorie.

1.1 Stochastische Prozesse

Wie schon im vorigen Kapitel angedeutet, spielt die bis zum jeweiligen Zeitpunkt zur Verfügung stehende Information eine wichtige Rolle. Entscheidungen wie z. B. der Kauf oder Verkauf von Wertpapieren können ja nur auf dem derzeitigen Wissen über den Zustand des Finanzmarktes oder der Welt gründen. Mathematisch wird diese Information durch den Begriff der *Filtrierung* ausgedrückt.

Definition 1.1 Eine **Filtrierung** $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ist eine Folge von σ-Algebren $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_n$ für $m \leq n$. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ heißt **filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum**.

Die σ-Algebra $\mathscr{F}_n$ steht für die bis zur Zeit n angesammelte Information. $A \in \mathscr{F}_n$ bedeutet, dass wir schon zur Zeit n wissen, ob das Ereignis A eintritt oder nicht.

Von nun an sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ gegeben.

Definition 1.2

1. Ein **stochastischer Prozess** $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen.

2. Ein Prozess X heißt **adaptiert**, falls X_n $\mathscr{F}_n$-messbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das n steht dabei wie oben schon für einen Zeitparameter. Ein stochastischer Prozess beschreibt also den zufälligen Zustand eines Systems durch die Zeit hindurch. Der Wertebereich von X_n ist üblicherweise $\mathbb{R}$ oder allgemeiner $\mathbb{R}^d$, etwa wenn es sich bei X_n um den Kurs eines oder mehrerer Wertpapiere zum Zeitpunkt n handelt. Falls nichts anderes vermerkt ist, nehmen wir alle Prozesse als reellwertig an.

Adaptiertheit bedeutet, dass wir den derzeitigen Wert des Prozesses kennen, zumindest insofern, als er von zufälligen Einflüssen abhängt. Insbesondere ist jeder deterministische Prozess adaptiert. Wir betrachten ab jetzt fast ausschließlich solche adaptierten Prozesse.

Bemerkung. Wir identifizieren einen Prozess X manchmal auch mit einer Abbildung $X : \Omega \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^d$) oder einer Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (bzw. $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$). Er kann also auch als Zufallsvariable aufgefasst werden, deren Werte Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^d$) sind.

Bezeichnung.

1. Adaptierte Prozesse nennen wir auch **diskrete Semimartingale**.

2. Wir benutzen die Notation $n- := n - 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0- := 0$. Ferner sei $\Delta X_n := X_n - X_{n-}$.

Hier wie auch später im Text verwenden wir vergleichsweise hochtrabende Bezeichnungen für ganz einfache Dinge (z. B. *stochastisches Integral* für eine Summe usw.). Die Idee ist, eine möglichst weitgehende Analogie zur allgemeinen stochastischen Analysis zu erzielen, wo die entsprechenden Begriffe und Ergebnisse oft einen hohen technischen Aufwand erfordern. Die hier behandelten zeitdiskreten Resultate lassen sich auch als Spezialfälle der allgemeinen Semimartingaltheorie auffassen.

Etwas stärker als Adaptiertheit ist der folgende Begriff.

Definition 1.3 Ein Prozess X heißt **vorhersehbar**, falls X_n $\mathscr{F}_{n-}$-messbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das bedeutet, dass der Wert von X_n ist schon kurz vor dem Zeitpunkt n bekannt ist. Vorhersehbare Prozesse spielen bei der stochastischen Integration eine zentrale Rolle.

Bislang ist offen, welche Gestalt die Filtrierung tatsächlich besitzt. Denkbar ist zumindest im Rahmen des mathematischen Modells, dass unser ganzes nicht-deterministisches Wissen aus der Beobachtung eines einzigen stochastischen Prozesses X, etwa eines Aktienkursverlaufs, herrührt:

Definition 1.4 Die Filtrierung $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **von dem Prozess X erzeugt**, falls $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zufällige Zeitpunkte, die nur insofern nicht deterministisch sind, als sie von zufälligen Ereignissen in der Vergangenheit abhängen können, heißen *Stoppzeiten*.

Definition 1.5 Eine **Stoppzeit** ist eine Abbildung $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine äquivalente Definition ist $\{T = n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Anschaulich heißt das, dass wir aufgrund der uns zur Verfügung stehenden Information $\mathscr{F}_n$ zu jedem Zeitpunkt n entscheiden können, ob wir „Stopp!“ sagen müssen oder nicht. Eine Stoppzeit ist z. B. der erste Zeitpunkt, zu dem ein Vulkan ausbricht, sofern die Beobachtung des Vulkans in der Informationsstruktur $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten ist. Auch jeder deterministische Zeitpunkt ist eine Stoppzeit. Keine Stoppzeit ist hingegen der Zeitpunkt *genau 3 Stunden vor dem Vulkanausbruch*, denn dazu müsste man in die Zukunft blicken können. Auf Grundlage der im Augenblick vorhandenen Information ist i. a. nicht sicher, ob dieser Zeitpunkt schon gekommen ist.

Ein typisches Beispiel einer Stoppzeit ist die erste Eintrittszeit eines Prozesses in eine Menge, etwa der Zeitpunkt, an dem der Aktienindex DAX zum ersten Mal die Schwelle 4000 überwindet.

Lemma 1.6 *Sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertiges diskretes Semimartingal und $B \in \mathscr{B}^d$. Dann ist $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}$ eine Stoppzeit.*

Beweis. Sei $t \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{T \leq n\} = \cup_{m\leq n}\{X_m \in B\} \in \mathscr{F}_n$, da $\{X_m \in B\} \in \mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_n$ für $m \leq n$. □

Für das „Einfrieren“ eines Prozesses ab einem gewissen Zeitpunkt gibt es einen eigenen mathematischen Begriff.

Definition 1.7 Für einen Prozess X und eine Stoppzeit T ist **der bei T gestoppte Prozess** X^T definiert durch $X_n^T := X_{T\wedge n}$.

Ein gestoppter Prozess bleibt also ab der zugehörigen Stoppzeit konstant.

1.2 Martingale

Der Martingalbegriff ist von zentraler Bedeutung für die stochastische Analysis. Auch die moderne Finanzmathematik wird in vielfältiger Weise von ihm durchdrungen.

Definition 1.8 Ein **Martingal** (bzw. **Submartingal, Supermartingal**) ist ein adaptierter stochastischer Prozess X derart, dass $E(|X_n|) < \infty$ und $E(X_n|\mathscr{F}_m) = X_m$ (bzw. $\geq X_m$, $\leq X_m$) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$.

Man kann sich unter einem Martingal z. B. das Spielkapital in einem fairen Spiel vorstellen. Als Beispiel sei etwa ein Roulettespiel betrachtet, wo der Einsatz bei Fallen von *Rot* verdoppelt wird. Wir setzen über mehrere Ausspielungen hinweg 1 € auf *Rot* und bezeichnen den Spielkapitalprozess als X. Wenn nun *Rot* mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fällt, dann sind wir nach jeder Ausspielung im Mittel so reich wie vorher, d. h. X ist ein Martingal. Für die (beschränkte) Zukunft ist im Mittel weder ein Gewinn noch ein Verlust zu erwarten.

In Wirklichkeit ist das Roulettespiel unfair zu Gunsten der Spielbank, da nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$ *Rot* fällt. Daher entsprechen die realen Gegebenheiten eher einem Supermartingal. Anlagen in risikobehaftete Wertpapiere wie etwa Aktien hingegen werden die meisten Anleger nur tätigen wollen, wenn zumindest im Mittel ein Gewinn zu erwarten ist, d. h. wenn es sich um Submartingale handelt.

Lemma 1.9 *Anstelle von $E(X_n|\mathscr{F}_m) = X_m$ (bzw. $\geq, \leq$) für $m \leq n$ reicht es in der vorigen Definition zu zeigen, dass $E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ (bzw. $\geq, \leq$) für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Beweis. Wegen $E(X_n|\mathscr{F}_{n-2}) = E(E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})|\mathscr{F}_{n-2})$ usw. folgt dies mit vollständiger Induktion. □

Die einfachsten Martingale erhält man, indem man unabhängige, zentrierte Zufallsvariablen sukzessive aufsummiert.

Beispiel 1.10 Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer Zufallsvariablen mit $E(X_n) = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ Dann wird durch $S_n := \sum_{m=1}^n X_m$ und $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ein Martingal S bzgl. $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert.

Auch aus einer einzigen Zufallsvariablen kann man ein Martingal erzeugen.

Lemma 1.11 *Sei Y eine Zufallsvariable mit $E(|Y|) < \infty$. Dann wird durch $X_n := E(Y|\mathscr{F}_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal X definiert (das* **von Y erzeugte Martingal***).*

Beweis. Die Adaptiertheit ist offensichtlich. Die Integrierbarkeit folgt aus der Jensenschen Ungleichung wegen $E(|X_n|) \leq E(|E(Y|\mathscr{F}_n)|) \leq E(E(|Y||\mathscr{F}_n)) = E(|X_n|) < \infty$. Ferner gilt $E(X_n|\mathscr{F}_m) = E(E(Y|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_m) = E(Y|\mathscr{F}_m) = X_m$ für $m \leq n$. □

Umgekehrt kann man sich fragen, ob jedes Martingal von einer Zufallsvariablen erzeugt wird. Das hieße, dass man die Menge der Martingale mit der Menge der integrierbaren Zufallsvariablen identifizieren könnte. Das ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, sondern nur unter einer zusätzlichen gleichgradigen Integrabiliätsbedingung oder wenn die Zeitindexmenge (hier $\mathbb{N}$) nach oben beschränkt ist, wie es in den folgenden Kapiteln der Fall sein wird.

Beispiel 1.12 Sei $Q \sim P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann heißt das von $\frac{dQ}{dP}$ erzeugte Martingal Z der **Dichteprozess von Q bzgl.** P, und es gilt $Z_n = \frac{dQ|_{\mathscr{F}_n}}{dP|_{\mathscr{F}_n}}$.

Wenn man in Lemma 1.9 auf die Integrierbarkeit der X_n verzichtet, erhält man die etwas größere Klasse der lokalen Martingale.

Definition 1.13 Ein **lokales Martingal** ist ein adaptierter Prozess X mit $E(|X_0|) < \infty$ sowie $E(|X_n||\mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ und $E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Der Begriff des lokalen Martingals ist weniger intuitiv als der des Martingals, lässt sich aber in der stochastischen Analysis oft nicht umgehen, da er größere Stabiltät unter Operationen wie stochastischer Integration besitzt. Ein häufig auftretendes Problem besteht darin zu zeigen, dass ein vorliegendes lokales Martingal ein wirkliches Martingal ist (vgl. auch Lemma 1.25).

Lemma 1.14 *Jedes nichtnegative lokale Martingal ist ein Martingal.*

Beweis. Übungsaufgabe □

Lemma 1.15 *Seien X, Y lokale Martingale und $N \in \mathbb{N}$ mit $X_N = Y_N$. Dann gilt $X_n = Y_n$ für $n = 0, \ldots, N$.*

Beweis. Dies folgt induktiv für $n = N, N-1, \ldots, 0$. □

Lokale Martingale sind also durch ihren Wert in der Zukunft schon zu jedem früheren Zeitpunkt determiniert. Dies gilt allerdings nur in diskreter Zeit.

Wie wir gesehen haben, erwartet man bei einem Martingal für die Zukunft im Mittel den heutigen Wert. Ein allgemeiner Prozess hingegen könnte einen positiven, negativen oder auch wechselnden Trend aufweisen. Dies wird durch die Doobsche Zerlegung formalisiert. Sie zerlegt den Zuwachs ΔX_n eines beliebigen Prozesses in einen kurzfristigen, vorhersehbaren Trend ΔA_n und eine zufällige Abweichung ΔM_n von diesem Trend.

Satz 1.16 (Doob-Zerlegung) *Sei X ein diskretes Semimartingal mit $E(|X_n| < \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich X fast sicher eindeutig in der Form*

$$X = X_0 + M + A$$

zerlegen, wobei M ein Martingal mit $M_0 = 0$ und A ein vorhersehbarer Prozess mit $A_0 = 0$ sind. A heißt **Kompensator** *von X.*

Beweis. Definiere $A_n := \sum_{m=1}^{n} E(\Delta X_m | \mathscr{F}_{m-1})$ und $M := X - X_0 - A$. Dann ist $\Delta M_n = \Delta X_n - E(\Delta X_n | \mathscr{F}_{n-1})$. Offensichtlich ist M adaptiert, integrierbar und $E(\Delta M_n | \mathscr{F}_{n-1}) = 0$.

Umgekehrt sei $X = X_0 + M + A$ eine beliebige Zerlegung wie im Satz. Wegen der Vorhersehbarkeit von A und der Martingaleigenschaft von M gilt dann

$$\Delta A_n = E(\Delta A_n | \mathscr{F}_{n-1}) = E(\Delta X_n | \mathscr{F}_{n-1}) - E(\Delta M_n | \mathscr{F}_{n-1}) = E(\Delta X_n | \mathscr{F}_{n-1})$$

für alle n, woraus die Eindeutigkeit folgt. □

Bemerkung. Falls X ein Submartingal (bzw. Supermartingal) ist, dann ist A monoton wachsend (bzw. fallend).

1.3 Stochastisches Integral

Der zentrale Begriff der stochastischen Analysis ist das stochastische Integral, das im Zeitdiskreten nichts anderes als eine Summe ist.

Definition 1.17 Sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertiges diskretes Semimartingal und H ein $\mathbb{R}^d$-wertiger vorhersehbarer (oder zumindest adaptierter) Prozess. Unter dem **stochastischen Integral** von H nach X versteht man das folgendermaßen definierte diskrete Semimartingal $H \bullet X$:

$$H \bullet X_n := \int_0^n H_m dX_m := \sum_{m=1}^n H_m^\top \Delta X_m.$$

Motivieren lässt sich das stochastische Integral sehr schön durch die folgende finanzmathematische Anschauung, auch wenn es davon unabhängig entwickelt wurde. Dazu fassen wir, wie wir es auch in den folgenden Kapiteln tun werden, X als den Kursverlauf einer Aktie und H_n als die Anzahl an Aktien auf, die wir zur Zeit n besitzen. Durch die Kursänderung der Aktie zwischen $n-1$ und n ändert sich nun unser Anlagevermögen, nämlich gerade um $H_n(X_n - X_{n-1}) = H_n \Delta X_n$. Das Integral $H \bullet X_n$ steht also für die kumulativen Handelsgewinne oder -verluste zwischen den Zeitpunkten 0 und n, wie sie sich aus Kursänderungen (und nicht etwa durch Kauf oder Verkauf von Wertpapieren) ergeben. Wenn wir ein Portfolio aus mehreren Aktien besitzen, werden X und H vektorwertig. H_n^i steht in diesem Fall für die Anzahl an Aktien vom Typ i und X_n^i für deren Kurs. Die Handelsgewinne zwischen $n-1$ und n ergeben sich nunmehr als Skalarprodukt $H_n^\top(X_n - X_{n-1}) = H_n^\top \Delta X_n$. Auch im vektorwertigen Fall lässt sich also das Integral $H \bullet X_n$ als kumulativer Handelsgewinn auffassen.

Bei der obigen Interpretation muss man jedoch sehr vorsichtig sein, in welcher Reihenfolge sich die Dinge zum Zeitpunkt n ereignen. Wenn wir $H_n(X_n - X_{n-1})$ als den Kursgewinn zum Zeitpunkt n deuten, bedeutet dies offenbar, dass wir unser Portfolio H_n gekauft haben, *bevor* sich der Aktienkurs von X_{n-1} nach X_n geändert hat, also gewissenmaßen am Ende des vorigen Zeitpunkts $n-1$, nachdem sich der Preis X_{n-1} schon eingestellt hatte. Daher erscheint es plausibel, dass wir zur Wahl von H_n auch nur die bis zum Zeitpunkt $n-1$ gesammelte Information verwenden können und insbesondere nicht den Wert X_n, der für uns im Augenblick des Kaufs des Portfolios noch im Dunkeln liegt. Dies motiviert auch zumindest aus finanzmathematischer Sicht, warum man sich überwiegend auf die Betrachtung vorhersehbarer Integranden beschränkt. Denn um die Adaptiertheit von $H \bullet X$ zu gewährleisten, würde ja die Adaptiertheit von H reichen.

Definition 1.18 Seien X, Y reellwertige diskrete Semimartingale. Unter der **Kovariation** von X und Y versteht man das durch

$$[X, Y]_n := \sum_{m=1}^n \Delta X_m \Delta Y_m$$

definierte diskrete Semimartingal $[X, Y]$. Im Falle $X = Y$ spricht man von der **quadratischen Variation** von X.

Die Kovariation ist – zumindest im zeitdiskreten Fall – vor allem für die Regel der partiellen Integration (vgl. Lemma 1.20) von Interesse.

Definition 1.19 Seien X, Y Martingale derart, dass $E(|[X,Y]|_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt der Kompensator von $[X,Y]$ **vorhersehbare quadratische Kovariation** von X und Y und wird mit $\langle X,Y\rangle$ bezeichnet. Im Falle $X = Y$ spricht man wieder von der **vorhersehbaren quadratischen Variation** von X.

Bemerkung. Offenbar ist $\Delta\langle X,Y\rangle_n = E(\Delta X_n \Delta Y_n|\mathscr{F}_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$.

Die vorhersehbare quadratische Kovariation von Martingalen kann als eine Art dynamische Verallgemeinerung der Kovarianz zentrierter Zufallsvariablen aufgefasst werden. Wir benötigen sie aus technischen Gründen für den Satz von Girsanow (Lemma 1.27) und im Zusammenhang mit finanzmathematischen Fragestellungen in Kapitel 4.

Lemma 1.20 *Seien X, Y diskrete Semimartingale und H, K vorhersehbare Prozesse. Dann gelten:*

1. $H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X$
2. $[H \bullet X, K \bullet Y] = (HK) \bullet [X,Y]$
3. *die Regel der* **partiellen Integration***:*
$$\begin{aligned} XY &= X_0Y_0 + X_- \bullet Y + Y \bullet X \\ &= X_0Y_0 + X_- \bullet Y + Y_- \bullet X + [X,Y] \end{aligned}$$
4. *Falls $E(|[X,Y]_n|) < \infty$ und $E(|[H \bullet X, K \bullet Y]_n|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist*
$$\langle H \bullet X, K \bullet Y\rangle = (HK) \bullet \langle X,Y\rangle.$$
5. *Wenn X ein lokales Martingal ist, dann ist $H \bullet X$ ein lokales Martingal.*
6. *Wenn X ein Martingal und H beschränkt sind, dann ist $H \bullet X$ ein Martingal.*
7. *Wenn X ein Supermartingal und H nichtnegativ und beschränkt sind, dann ist $H \bullet X$ ein Supermartingal.*
8. *Wenn X ein Martingal und T eine Stoppzeit sind, dann ist auch X^T ein Martingal.*
9. *Wenn X ein Supermartingal und T eine Stoppzeit sind, dann ist auch X^T ein Supermartingal.*

Intuitiv bedeuten die beiden letzten Regeln, dass ein gestopptes faires (bzw. ungünstiges) Spiel fair (bzw. ungünstig) bleibt. Man kann also bei dem oben betrachteten Roulettespiel den mittleren Gewinn nicht dadurch steigern, dass man zu einem geschickt gewählten Zeitpunkt das Spielkasino verlässt.

Beweis. 1. $H \bullet (K \bullet X)_n = \sum_{m=1}^n H_m \Delta(K \bullet X)_m = \sum_{m=1}^n H_m K_m \Delta X_m = (HK) \bullet X_n$

2. Für festes n gilt

$$\begin{aligned}[H \bullet X, K \bullet Y]_n &= \textstyle\sum_{m=1}^n \Delta(H \bullet X)_m \Delta(K \bullet Y)_m \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^n H_m K_m \Delta X_m \Delta Y_m \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^n (HK)_m \Delta[X,Y]_m \\ &= (HK) \bullet [X,Y]_n.\end{aligned}$$

3. Für festes n gelten

$$\begin{aligned}X_n Y_n &= X_0 Y_0 + \textstyle\sum_{m=1}^n (X_m Y_m - X_{m-1} Y_{m-1}) \\ &= X_0 Y_0 + \textstyle\sum_{m=1}^n (X_{m-1}(Y_m - Y_{m-1}) + Y_m(X_m - X_{m-1})) \\ &= X_0 Y_0 + X_- \bullet Y_n + Y \bullet X_n\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}Y \bullet X_n &= \textstyle\sum_{m=1}^n Y_m \Delta X_m \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^n (Y_{m-1} \Delta X_m + (Y_m - Y_{m-1}) \Delta X_m) \\ &= Y_- \bullet X_n + [X,Y]_n.\end{aligned}$$

4. Es reicht zu zeigen, dass die Zuwächse übereinstimmen. Dies gilt wegen

$$\begin{aligned}\Delta((HK) \bullet \langle X,Y \rangle_n) &= H_n K_n \Delta \langle X,Y \rangle_n \\ &= H_n K_n E(\Delta[X,Y]_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= E(H_n K_n \Delta[X,Y]_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &\overset{2.}{=} E(\Delta[H \bullet X, K \bullet Y]_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \Delta \langle H \bullet X, K \bullet Y \rangle_n.\end{aligned}$$

5. Die Adaptiertheit von $H \bullet X$ ist klar, da $H \bullet X_n$ eine Linearkombination $\mathscr{F}_n$-messbarer Zufallsvariabler ist. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist

$$\begin{aligned}E(|H \bullet X_n| | \mathscr{F}_{n-1}) &= E(|H \bullet X_{n-1} + H_n \Delta X_n| | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &\le E(|H \bullet X_{n-1}| + |H_n| |\Delta X_n| | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= |H \bullet X_{n-1}| + |H_n| E(|\Delta X_n| | \mathscr{F}_{n-1})\end{aligned}$$

fast sicher endlich, da X ein lokales Martingal ist. Die Martingalbedingung folgt wegen

$$\begin{aligned}E(H \bullet X_n | \mathscr{F}_{n-1}) &= E(H \bullet X_{n-1} + H_n \Delta X_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= H \bullet X_{n-1} + H_n E(\Delta X_n | \mathscr{F}_{n-1})\end{aligned}$$

aus der lokalen Martingaleigenschaft von X.

6. Im Lichte der vorigen Eigenschaft ist nur noch die Integrierbarkeit von $H \bullet X_n$ zu zeigen. Diese folgt wegen $|H \bullet X_n| = |\sum_{m=1}^n H_m \Delta X_m| \le \sum_{m=1}^n |H_m|(|X_m| + |X_{m-1}|)$ aus der Integrierbarkeit der X_n.

7. Dies folgt analog zu 6.

8.,9. Definiere den Prozess H durch $H_n := 1_{\{T \geq n\}}$. H ist vorhersehbar, denn für festes n ist $\{H_n = 1\} = \{T \geq n\} = \{T \leq n\}^C \in \mathscr{F}_{n-}$. Ferner ist $X^T = X_0 + H \bullet X$, denn $X_0 + H \bullet X_n = X_0 + \sum_{m=1}^{n \wedge T} \Delta X_m = X_{n \wedge T} = X_n^T$. Mit Eigenschaft 6 bzw. 7 folgt die Behauptung. □

Bemerkung.

1. Das stochastische Integral $H \bullet X$ ist linear in H und X.

2. Die Kovariation $[X, Y]$ und die vorhersehbare Kovariation $\langle X, Y \rangle$ sind linear in X und Y.

3. Die obigen Aussagen gelten auch für vektorwertige Prozesse, sofern sich sinnvolle Aussagen ergeben. Z. B. ist $H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X$, falls K, X $\mathbb{R}^d$-wertig sind.

Die Itô-Formel ist im Zeitdiskreten nichts anderes als eine mehr oder weniger kompliziert aufgeschriebene Teleskopsumme und spielt auch keine große Rolle. In der zeitstetigen Analysis ist sie dagegen von zentraler Bedeutung, weswegen wir sie hier der Vollständigkeit halber ebenfalls erwähnen.

Satz 1.21 (Itô-Formel) *Seien X ein $\mathbb{R}^d$-wertiges diskretes Semimartingal und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $f(X)$ ein diskretes Semimartingal, und es gilt:*

$$
\begin{aligned}
f(X_n) &= f(X_0) + \sum_{m=1}^{n} (f(X_m) - f(X_{m-})) \\
&= f(X_0) + (\partial f(X_-)) \bullet X_n + \sum_{m=1}^{n} \Big(f(X_m) - f(X_{m-}) - \partial f(X_{m-})^\top \Delta X_m \Big)
\end{aligned}
$$

Beweis. durch einfaches Nachrechnen. □

Bemerkung. Wenn die Sprünge ΔX „klein“ sind und f zweifach stetig differenzierbar ist, dann gilt näherungsweise

$$
f(X_n) \approx f(X_0) + (\partial f(X_-)) \bullet X_n + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{ij} f(X_-) \bullet [X^i, X^j]_n \tag{1.1}
$$

(d. h. $f(X_n) \approx f(X_0) + f'(X_-) \bullet X_n + \frac{1}{2} f''(X_-) \bullet [X, X]_n$ für reellwertiges X).

Beweis. Die Näherungsformel folgt mit einer Taylorentwicklung 2. Ordnung: $f(X_n) \approx f(X_{n-}) + \partial f(X_{n-})^\top \Delta X_n + \frac{1}{2} \partial_{ij} f(X_{n-}) \Delta X_n^i \Delta X_n^j$. □

Stochastische Exponentiale sind Prozesse von multiplikativer Gestalt und spielen in der stochastischen Analysis eine wichtige Rolle. Sie lassen sich gut finanzmathematisch illustrieren: Wenn ΔX_n als Zins zwischen den Zeitpunkten $n - 1$ und n ausgeschüttet wird

(d. h. aus 1 € bei $n-1$ werden $1+\Delta X_n$ € zur Zeit n), dann gibt $\mathscr{E}(X)$ an, wie sich ein Anfangskapital von 1 € durch die Zeit hindurch mit Zins und Zinseszins entwickelt.

Definition 1.22 Sei X ein reellwertiges diskretes Semimartingal. Unter dem **stochastischen Exponential** $\mathscr{E}(X)$ versteht man das diskrete Semimartingal Z, das die Gleichung

$$Z = 1 + Z_- \bullet X$$

löst.

Für das stochastische Exponential gibt es eine einfache explizite Darstellung.

Lemma 1.23 *Es gilt* $\mathscr{E}(X)_n = \prod_{m=1}^n (1+\Delta X_m)$.

Beweis. Die Produktdarstellung zeigt man induktiv via

$$Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-1}\Delta X_n = \textstyle\prod_{m=1}^{n-1}(1+\Delta X_m)(1+\Delta X_n) = \prod_{m=1}^{n}(1+\Delta X_n).$$

□

Bemerkung. Wenn die Sprünge ΔX „klein“ sind, dann gilt näherungsweise

$$\mathscr{E}(X)_n \approx \exp\Big(X_n - X_0 - \frac{1}{2}[X,X]_n\Big). \tag{1.2}$$

Beweis. In der Näherung $o((\Delta X_m)^2) \approx 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\exp(X_n - X_0 - \tfrac{1}{2}[X,X]_n) = \textstyle\prod_{m=1}^n \exp(\Delta X_m)\exp(-\tfrac{1}{2}(\Delta X_m)^2) \\
&= \textstyle\prod_{m=1}^n (1+\Delta X_m + \tfrac{1}{2}(\Delta X_m)^2 + o((\Delta X_m)^2)(1-\tfrac{1}{2}(\Delta X_m)^2 + o((\Delta X_m)^2)) \\
&= \textstyle\prod_{m=1}^n (1+\Delta X_m + \tfrac{1}{2}(\Delta X_m)^2 - \tfrac{1}{2}(\Delta X_m)^2 + o((\Delta X_m)^2)) \\
&\approx \textstyle\prod_{m=1}^n (1+\Delta X_m) = \mathscr{E}(X)_n.
\end{aligned}$$

□

In der folgenden Rechenregel für das stochastische Exponential taucht im Vergleich zur gewöhnlichen Exponentialfunktion noch ein Kovariationsterm auf.

Lemma 1.24 (Yorsche Fomel) *Für diskrete Semimartingale* X, Y *gilt*

$$\mathscr{E}(X)\mathscr{E}(Y) = \mathscr{E}(X+Y+[X,Y]).$$

Beweis. Nach Lemma 1.20 gilt

$$\begin{aligned}
&\mathscr{E}(X)\mathscr{E}(Y) = \mathscr{E}(X)_0\mathscr{E}(Y)_0 + \mathscr{E}(X)_- \bullet \mathscr{E}(Y) + \mathscr{E}(Y)_- \bullet \mathscr{E}(X) + [\mathscr{E}(X), \mathscr{E}(Y)] \\
&= 1 + (\mathscr{E}(X_-)\mathscr{E}(Y_-)) \bullet Y + (\mathscr{E}(X_-)\mathscr{E}(Y_-)) \bullet X + (\mathscr{E}(X_-)\mathscr{E}(Y_-)) \bullet [X,Y] \\
&= 1 + (\mathscr{E}(X)\mathscr{E}(Y))_- \bullet (Y + X + [X,Y])
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Im Fall zeitlich homogener Prozesse fallen die Begriffe Martingal und lokales Martingal zusammen.

Lemma 1.25 *Sei X ein diskretes Semimartingal mit $X_0 = 0$ und derart, dass die Zuwächse ΔX_n für $n = 1, 2, \dots$ identisch verteilt und unabhängig von $\mathscr{F}_{n-1}$ sind. Wenn X (bzw. $\mathscr{E}(X)$) ein lokales Martingal ist, dann ist X (bzw. $\mathscr{E}(X)$) ein Martingal.*

Beweis. Sei zunächst X ein lokales Martingal. Dann ist $E(|\Delta X_n|) = E(|\Delta X_n||\mathscr{F}_{n-1}) < \infty$. Daher ist auch $E(|X_n|) < \infty$ und somit X ein Martingal.

Sei nun $\mathscr{E}(X)$ ein lokales Martingal. Dann ist

$$E(|\Delta X_1|) = E(|\Delta X_1||\mathscr{F}_0) = E(|\Delta \mathscr{E}(X)_1||\mathscr{F}_0) < \infty$$

und somit

$$E(|\mathscr{E}(X)_n|) = E\Big(\prod_{m=1}^{n} |1 + \Delta X_m|\Big) = \prod_{m=1}^{n} E(|1 + \Delta X_m|) = (E(|1 + \Delta X_1|))^n < \infty.$$

Es folgt, dass $\mathscr{E}(X)$ ein echtes Martingal ist. □

Da die Definition des Martingals einen Erwartungswert beinhaltet, ist sie nicht invariant unter Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes. Der folgende Satz zeigt, wie man anhand des Dichteprozesses feststellen kann, ob ein Prozess ein Martingal unter einem gegebenen äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Solche Maßwechsel, unter denen gewisse Prozesse zu Martingalen werden, spielen in der Finanzmathematik eine wichtige Rolle.

Lemma 1.26 *Sei $Q \sim P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichteprozess Z, und sei X ein diskretes Semimartingal. X ist genau dann ein (lokales) Q-Martingal, wenn XZ ein (lokales) P-Martingal ist.*

Beweis. Die Adaptiertheit ist klar. Nach der verallgemeinerten Bayesschen Formel (Blatt 2, Aufgabe 2) gilt

$$Z_{n-1} E_Q(|X_n||\mathscr{F}_{n-1}) = E_P(|Z_n X_n||\mathscr{F}_{n-1}),$$

d. h. $E_Q(|X_n||\mathscr{F}_{n-1})$ ist genau dann endlich, wenn $E_P(|Z_n X_n||\mathscr{F}_{n-1})$ endlich ist. Ebenfalls aus der verallgemeinerten Bayesschen Formel ergibt sich

$$Z_{n-1} E_Q(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) = E_P(Z_n X_n|\mathscr{F}_{n-1}).$$

X ist genau dann ein lokales Q-Martingal, wenn die linke Seite für $n = 1, 2, \dots$ mit $Z_{n-1} X_{n-1}$ übereinstimmt. Analog ist ZX ist genau dann ein lokales P-Martingal, wenn die rechte Seite für $n = 1, 2, \dots$ mit $Z_{n-1} X_{n-1}$ übereinstimmt. Somit folgt die Äquivalenz für lokale Martingale.

Die entsprechende Aussage für Martingale ergibt sich aus der Betrachtung der Integrabilität:

$$E_Q(|X_n|) = E_P(\tfrac{dQ}{dP}|X_n|) = E_P(E_P(\tfrac{dQ}{dP}|\mathscr{F}_n)|X_n|) = E_P(|Z_n X_n|).$$

□

Der Satz von Girsanow liefert die Doob-Zerlegung eines P-Martingals unter einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß Q in Abhängigkeit des Dichteprozesses von Q.

Lemma 1.27 (Girsanow) *Sei $Q \sim P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichteprozess Z. Ferner sei X ein Martingal mit $X_0 = 0$ und $E(|[Z, X]_n|) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$X - \frac{1}{Z_-} \bullet \langle Z, X \rangle$$

ein Q-lokales Martingal, wobei die vorhersehbare Kovariation bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes P zu verstehen ist.

Beweis. Für $C := \{Z_n = 0\}$ gilt

$$Q(C) = E_P(\tfrac{dQ}{dP} 1_C) = E_P(Z_n 1_C) = 0,$$

also auch $P(C) = 0$ und somit $Z_n \neq 0$ fast sicher. Folglich ist der vorhersehbare Prozess $A := \frac{1}{Z_-} \bullet \langle Z, X \rangle$ wohldefiniert. Nach Lemma 1.20 ist

$$\begin{aligned} (X - A)Z &= XZ - AZ \\ &= X_- \bullet Z + Z_- \bullet X + [Z, X] - Z_- \bullet A - A \bullet Z \\ &= X_- \bullet Z + Z_- \bullet X + ([Z, X] - \langle X, Z \rangle) - A \bullet Z \end{aligned}$$

ein P-lokales Martingal. Die Behauptung folgt mit Lemma 1.26. □

Der Standard-Irrpfad ist gewissermaßen das einfachste Martingal überhaupt (nach den konstanten Prozessen).

Definition 1.28 Seien $p \in (0, 1)$, $a, b > 0$. Unter einem **einfachen Irrpfad** verstehen wir ein Semimartingal X mit $X_0 = 0$ derart, dass $(\Delta X_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit

$$P(\Delta X_n = a) = 1 - P(\Delta X_n = -b) = p.$$

Im Fall $a = b = 1$, $p = \frac{1}{2}$ sprechen wir von einem **Standard-Irrpfad**.

Nur sehr einfache Prozesse X wie der Standard-Irrpfad oder dessen asymmetrische oder gestoppte Varianten besitzen die folgende Darstellungseigenschaft, dass sich jedes Martingal bzgl. ihrer Filtrierung schon als stochastisches Integral nach X schreiben lässt. Diese Eigenschaft hängt in der Finanzmathematik eng mit der Vollständigkeit von Märkten zusammen (vgl. Kapitel 3).

Satz 1.29 (Martingaldarstellungssatz) *Seien X ein einfacher Irrpfad mit $ap = b(1 - p)$. Wenn $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die von X erzeugte Filtrierung ist, dann gibt es für jedes Martingal Y einen vorhersehbaren Prozess H derart, dass $Y = Y_0 + H \bullet X$.*

Beweis. Da ΔY_n $\sigma(\Delta X_1, \dots, \Delta X_n)$-messbar ist, gibt es eine Funktion $f_n : \{-b, a\}^n \to \mathbb{R}$ mit $\Delta Y_n = f_n(\Delta X_1, \dots, \Delta X_n)$. Da Y ein Martingal ist, gilt

$$0 = E(\Delta Y_n | \mathscr{F}_{n-1}) = p f_n(\Delta X_1, \dots, \Delta X_{n-1}, a) + (1 - p) f_n(\Delta X_1, \dots, \Delta X_{n-1}, -b)$$

nach Lemma 0.7, also

$$\tfrac{1}{a} f_n(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_{n-1}, a) = -\tfrac{1}{b} f_n(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_{n-1}, -b) =: H_n.$$

Dann ist

$$H_n \Delta X_n = f_n(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_{n-1}, a) = \Delta Y_n$$

im Falle $\Delta X_n = a$ und analog für $\Delta X_n = -b$. $\square$

Kapitel 2

Mathematische Marktmodellierung

In diesem Kapitel wird der allgemeine mathematische Rahmen abgesteckt, den wir zur Behandlung verschiedener konkreter Fragestellungen benötigen.

2.1 Wertpapiere und Handelsstrategien

In der stochastischen Finanzmathematik geht es überwiegend um Fragen, die mit dem Wertpapierhandel zusammenhängen. Im mathematischen Modell des Finanzmarktes kommen daher vor allem zwei Arten von stochastischen Prozessen zum Tragen: *Wertpapierpreisprozesse*, die das Auf und Ab der Kurse beschreiben, und *Handelsstrategien*, die für unser eigenes Anlageportfolio stehen.

Gegeben sei ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiges diskretes Semimartingal $S = (S^0, \dots, S^d)$, der **Preisprozess** der $d + 1$ Wertpapiere am Markt.

Die Zufallsvariable S_n^i gibt den Preis oder Kurs von Wertpapier i zur Zeit n an. Konkrete Modelle werden wir am Schluss des Kapitels kennenlernen.

Mit den Wertpapieren können wir handeln. Dies wird ebenfalls durch einen stochastischen Prozess ausgedrückt.

Definition 2.1 Eine **Handelsstrategie** (oder ein **Portfolio**) ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger vorhersehbarer Prozess $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$. Der **Wertprozess** oder **Vermögensprozess** des Portfolios ist

$$V(\varphi) := \varphi^\top S.$$

φ_n^i bezeichnet die Anzahl der Wertpapiere vom Typ i in unserem Portfolio zur Zeit n. Auch diese ist in dem Sinne zufällig, dass wir sie von zufälligen Ereignissen wie z. B. Kursentwicklungen der Aktien bis zum Zeitpunkt n abhängig machen können. Dies erklärt, warum es sich bei Handelsstrategien um adaptierte Prozesse handeln sollte. Warum fordert man aber Vorhersehbarkeit? Dies hängt, wie wir im letzten Kapitel schon angedeutet haben, mit der zeitlichen Abfolge der Ereignisse zusammen. Zwischen den Zeitpunkten $n - 1$ und n

ändern sich sowohl die Kurse als auch das Anlageportfolio. Wir folgen der Konvention, dass zunächst das Portfolio von φ_{n-1} zu φ_n umgeschichtet wird und danach die Kursänderung von S_{n-1} nach S_n stattfindet. Das neue Portfolio φ_n wird also noch zu den Preisen S_{n-1} erworben. Insbesondere steht uns für die Wahl von φ_n die Information über S_n noch nicht zur Verfügung; wir können sie nur von den Ereignissen bis zur Zeit $n-1$ abhängig machen. Dies wird gerade durch die Vorhersehbarkeit ausgedrückt. Der Wert $V_n(\varphi)$ schließlich wird nach der Kursänderung der Wertpapiere bestimmt, also zu Preisen S_n. Man beachte, dass es sich in der Definition um ein Skalarprodukt handelt. Es werden also die Bestände der verschiedenen Papiere aufsummiert. Bargeld im engeren Sinne ist im Modell übrigens nicht vorgesehen. Stattdessen wird auch das Bankkonto, auf dem das nicht anderweitig angelegte Vermögen ruht, als ein Wertpapier angesehen (vgl. Abschnitt 2.4).

In diesem einführenden Text beschränken wir uns auf einen in verschiedener Hinsicht idealisierten Finanzmarkt. Wir nehmen an, dass sich Wertpapiere in beliebigen reellen – also auch gebrochenen oder negativen – Stückzahlen halten lassen. Dies erscheint vor allem bei negativen Stückzahlen als abwegig. Es ist aber in der Praxis mit gewissen Einschränkungen durchaus möglich, Wertpapiere zu verkaufen, die man gar nicht besitzt (*Leerverkauf*), wenn zu einem späteren Zeitpunkt das entsprechende Gegengeschäft getätigt wird. Ferner treten im mathematischen Modell keinerlei Transaktionskosten oder Dividendenausschüttungen auf, Guthaben- und Schuldenzinsen stimmen überein, und die Kursentwicklung wird durch unseren Handel nicht beeinflusst. Wir betrachten also weder sehr große Anleger, die Preise sehr wohl beeinflussen können, noch sehr kleine, für die Transaktionskosten und Gebühren eine Rolle spielen. Ebensowenig passt dieser allgemeine Rahmen auf Märkte, an denen so wenig gehandelt wird, dass die Differenz zwischen Geld- und Briefkurs, also den Kursen für Käufer und Verkäufer des Wertpapiers, nicht vernachlässigt werden kann.

Im Gegensatz zur den Wertpapierkursen können wir über die Handelsstrategie je nach unseren Bedürfnissen selbst bestimmen. Wir beschränken uns allerdings ausschließlich auf in folgendem Sinne *selbstfinanzierende* Strategien.

Definition 2.2 Eine Handelsstrategie φ heißt **selbstfinanzierend**, falls

$$(\Delta\varphi_n)^\top S_{n-1} = 0$$

für $n = 1, 2, \dots$

Die Selbstfinanzierungsbedingung bedeutet, dass das Anlagevermögen zwar zwischen den verschiedenen Wertpapieren umgeschichtet werden kann, dass aber nach dem Zeitpunkt 0 weder Kapital zugeführt noch entnommen wird. Wenn man, wie im vorigen Kapitel motiviert, das stochastische Integral als kumulative Handelsgewinne bzw. -verluste interpretiert, liefert das folgende Lemma eine intuitive Form der Selbstfinanzierungsbedingung. Der Wert des Portfolios gleicht dem Anfangskapital zuzüglich Kursgewinnen oder -verlusten aus dem Handel mit den veschiedenen Wertpapieren.

Lemma 2.3 *Eine Handelsstrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$V(\varphi) = V_0(\varphi) + \varphi \bullet S.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \varphi \bullet S_n \text{ für alle } n \geq 0 \\
\iff\ & \Delta(\varphi^\top S)_n = \varphi_n^\top \Delta S_n \text{ für alle } n \geq 1 \\
\iff\ & \varphi_n^\top S_n - \varphi_{n-1}^\top S_{n-1} = \varphi_n^\top S_n - \varphi_n^\top S_{n-1} \text{ für alle } n \geq 1 \\
\iff\ & (\varphi_n - \varphi_{n-1})^\top S_{n-1} = 0 \text{ für alle } n \geq 1
\end{aligned}$$

□

Die mathematische Theorie wird dadurch stark vereinfacht, dass man nicht mit Währungseinheiten arbeitet, sondern die Kurse stattdessen als Vielfache eines beliebigen Referenzwertpapiers, des sogenannten *Numeraires*, ausdrückt. Oft wählt man dafür ein besonders einfaches Wertpapier, z. B. eine risikolose festverzinsliche Anlage (*Bank*- oder *Sparkonto*). Der Preisprozess des Numeraires sei S^0, das ab jetzt als positiv vorausgesetzt wird.

Definition 2.4

$$\hat{S} := \frac{1}{S^0} S = \left(1, \frac{S^1}{S^0}, \dots, \frac{S^d}{S^0}\right)$$

heißt **diskontierter Preisprozess**. Ferner heißt

$$\hat{V}(\varphi) := \frac{1}{S^0} V(\varphi) = \varphi^\top \hat{S}$$

diskontierter Wert- oder **Vermögensprozess** der Strategie φ.

Die Selbstfinanzierungsbedingung kann auch mit Hilfe von diskontierten Größen ausgedrückt werden.

Lemma 2.5 *Eine Strategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\hat{V}(\varphi) = \hat{V}_0 + \varphi \bullet \hat{S}.$$

Beweis. Offenbar ist φ genau dann selbstfinanzierend, wenn $(\Delta\varphi_n)^\top \hat{S}_{n-1} = 0$ für alle n. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 2.3 für $\hat{S}$ anstelle S. □

Man beachte, dass das stochastische Integral $\varphi \bullet \hat{S}$ im diskontierten Preisprozess nicht vom Numeraireanteil φ^0 abhängt.

Die Selbstfinanzierungsbedingung schränkt die Wahl der $d+1$ Wertpapiere durch eine Nebenbedingung ein. Der folgende Satz zeigt aber, dass die Anlage in d Wertpapiere stets beliebig gewählt werden kann und dass dadurch die Position im verbleibenden Wertpapier (z. B. dem Numeraire) eindeutig festgelegt ist.

Lemma 2.6 *Für jeden vorhersehbaren Prozess $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ und jedes $V_0 \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess φ^0 derart, dass $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$ selbstfinanzierend ist mit $V_0(\varphi) = V_0$.*

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist φ genau dann selbstfinanzierend, wenn

$$\varphi_n^0 \hat{S}_n^0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d)^\top (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_n = \hat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_n,$$

d. h. genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \varphi_n^0 &= \hat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_n - (\varphi^1, \dots, \varphi^d)_n^\top (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_n \\ &= \hat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_{n-1} - (\varphi^1, \dots, \varphi^d)_n^\top (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_{n-1}. \end{aligned}$$

Dies ist offenbar ein vorhersehbarer Prozess. □

Zusammen mit der Tatsache, dass der diskontierte Wertprozess einer selbstfinanzierenden Strategie φ nicht vom Numeraireanteil φ^0 abhängt, illustriert das vorige Lemma, warum der Übergang zu diskontierten Größen die Buchführung so sehr vereinfacht: Selbstfinanzierende Strategien φ können in kanonischer Weise mit ihren frei wählbaren d letzten Komponenten $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ identifiziert werden. Für die Berechnung des Wertprozesses $V(\varphi) = S^0 \hat{V}(\varphi) = S^0(V_0 + \varphi \bullet \hat{S})$ wird φ^0 nicht benötigt. Wenn man sich tatsächlich einmal für den Numeraireanteil interessiert, kann man diesen leicht z. B. durch $\varphi^0 = \hat{V}(\varphi) - (\varphi^1, \dots, \varphi^d)^\top (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)$ erhalten. Wir betrachten daher überwiegend diskontierte Prozesse.

Bezeichnung. Wir identifizieren gelegentlich $(\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)$ mit $(\hat{S}^0, \hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)$ und vorhersehbare Prozesse $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ mit den selbstfinanzierenden Strategien $(\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ aus Lemma 2.6 zu $V_0 = 0$.

2.2 Erster Fundamentalsatz der Preistheorie

In diesem Abschnitt sei ein Endzeitpunkt $N \in \mathbb{N}$ gegeben, d. h. die Indexmenge ist jetzt $\{0, \dots, N\}$ statt $\mathbb{N}$.

In der Finanzmathematik nimmt man im allgemeinen an, dass ohne Anfangskapital keine risikolosen Gewinne (*Arbitragegewinne*) erwirtschaftet werden können. Man begründet dies intuitiv damit, dass solche Gelegenheiten von sogenannten Arbitragehändlern ausgenutzt und so unverzüglich zum Verschwinden gebracht werden, so dass sie, wenn überhaupt, dann nur kurzzeitig und in geringem Umfang auftreten. In der Tat werden Wertpapiere oder Devisen an verschiedenen Börsen zu sehr ähnlichen Preisen gehandelt. Andernfalls bestünde ein Arbitragegeschäft darin, ein Wertpapier an einem Ort billig zu kaufen und am anderen gleichzeitig teurer zu verkaufen. Statt auf Handel an verschiedenen Orten beziehen sich die Arbeitragegewinne im Sinne der folgenden Definition auf Handel zu verschiedenen Zeitpunkten.

Definition 2.7 Eine selbstfinanzierende Strategie φ heißt **Arbitrage**, falls

$$V_0(\varphi) = 0, \quad V_N(\varphi) \geq 0 \; P\text{-fast sicher}, \quad P(V_N(\varphi) > 0) > 0.$$

Der Markt heißt **arbitragefrei**, falls keine solche Strategie existiert.

Die unscheinbare Annahme der Arbitragefreiheit bildet eine wichtige Säule der stochastischen Finanzmathematik. Oben haben wir motiviert, dass sie dazu führt, dass die Kurse der gleichen Wertpapiere an verschiedenen Orten übereinstimmen. Die dynamische Entsprechung besteht darin, dass Portfolios, deren Werte zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft übereinstimmen werden, auch schon zu jedem früheren Zeitpunkt gleich viel wert sind.

Lemma 2.8 *Seien φ, ψ selbstfinanzierende Handelsstrategien mit $V_N(\varphi) = V_N(\psi)$. Wenn der Markt arbitragefrei ist, dann gilt $V_n(\varphi) = V_n(\psi)$ für $n = 0, \dots, N$.*

Insbesondere gilt in arbitragefreien Märkten $S^i = V(\varphi)$, falls φ eine selbstfinanzierende Strategie und $i \in \{0, \dots, d\}$ sind mit $S^i_N = V_N(\varphi)$.

Beweis. Sonst wähle man n und $A \in \mathscr{F}_n$ so, dass $\hat{V}_n(\psi) - \hat{V}_n(\varphi) > 0$. Seien

$$(\vartheta^1, \dots, \vartheta^d)_m := \begin{cases} 0 & \text{für } m \leq n \\ \big((\varphi^1, \dots, \varphi^d)_m - (\psi^1, \dots, \psi^d)_m\big)\, 1_A & \text{für } m = n+1, \dots, N \end{cases}$$

und ϑ die selbstfinanzierende Strategie zu $V_0 = 0$ aus Lemma 2.6. Dann gilt $\hat{V}_0(\vartheta) = 0$ und

$$\begin{aligned} \hat{V}_N(\vartheta) &= \vartheta \bullet \hat{S}_n + (\vartheta \bullet \hat{S}_N - \vartheta \bullet \hat{S}_n) \\ &= 0 \bullet \hat{S}_n + \Big((\varphi - \psi) \bullet \hat{S}_N - (\varphi - \psi) \bullet \hat{S}_n\Big)\, 1_A \\ &= \Big(\hat{V}_N(\varphi) - \hat{V}_N(\psi) - \hat{V}_n(\varphi) + \hat{V}_n(\psi)\Big)\, 1_A \\ &= \Big(\hat{V}_n(\psi) - \hat{V}_n(\varphi)\Big)\, 1_A. \end{aligned}$$

Dies ist überall nichtnegativ und positiv auf A; somit ist ϑ eine Arbitrage. Die zweite Aussage folgt durch Betrachtung von

$$\psi^j := \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Der folgende Satz verknüpft Arbitragefreiheit mit *äquivalenten Martingalmaßen*, die uns noch mehrfach in der Finanzmathematik begegnen werden. Intuitiv besagt der Satz, dass arbitragefreie Märkte unter hypothetischen Wahrscheinlichkeiten $P^\star$ als ein faires Spiel aufgefasst werden können, in dem sich Kursgewinne und -verluste im Mittel die Waage halten. Unter dem „wirklichen" Wahrscheinlichkeitsmaß P muss das nicht der Fall sein. Dort wird man eher erwarten, dass riskante Wertpapiere im Mittel stärker an Wert zunehmen als risikolose, um einen Ausgleich für das Verlustrisiko zu bieten.

Satz 2.9 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie) *Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein* **äquivalentes Martingalmaß** *gibt, d. h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ derart, dass $\hat{S}$ ein Q-Martingal ist.*

Beim Beweis dieses Resultats spielt der Satz von Hahn-Banach eine zentrale Rolle.

Beweis. Der untenstehende Beweis basiert auf [KS01]. Die Aussage folgt aus den Lemmata 2.14 und 2.15. □

Das folgende vorbereitende Lemma ist auch in der Statistik von Interesse.

Lemma 2.10 (Halmos-Savage) *Für eine Familie $\mathscr{P}$ von endlichen Maßen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathscr{P} \ll \mu$ für ein σ-endliches Maß μ (d. h. $P \ll \mu$ für alle $P \in \mathscr{P}$).*
2. *$\mathscr{P} \sim \mathscr{Q}$ für eine abzählbare Teilfamilie $\mathscr{Q}$ von $\mathscr{P}$ (d. h. N ist genau dann eine P-Nullmenge für alle $P \in \mathscr{P}$, wenn es P-Nullmenge für alle $P \in \mathscr{Q}$ ist).*

Beweis. O. B. d. A. sei $\mathscr{P}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Sonst normiere man entsprechend.

2⇒1: Definiere $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} P_n$ für $\mathscr{Q} = \{P_1, P_2, \dots\}$.

1⇒2: Für

$$\mathscr{R} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n : P_1, P_2, \ldots \in \mathscr{P}, c_1, c_2, \ldots \in [0,1], \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 \right\}$$

gilt $\mathscr{R} \ll \mu$ und $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$. Es reicht zu zeigen, dass ein $Q_0 \in \mathscr{R}$ existiert mit mit $\mathscr{R} \ll Q_0$. (Man wähle dann $\mathscr{Q} := \{P_1, P_2, \dots\}$ für die zu Q_0 gehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße $P_1, P_2, \dots$)

Definiere

$$\mathscr{C} := \left\{ C \in \mathscr{F} : \text{ Es existiert ein } Q \in \mathscr{R} \text{ mit } Q(C) > 0 \text{ und } \frac{dQ}{dP} > 0 \ \mu\text{-f.ü. auf } C \right\}.$$

Sei $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{C}$ mit $\mu(C_n) \uparrow \sup_{C \in \mathscr{C}} \mu(C)$. Definiere $C_\infty := \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Wenn $Q_n \in \mathscr{R}$ zu C_n gehört, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{dQ_n}{dP}$ Dichte von $Q_0 := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} Q_n$, also $C_\infty \in \mathscr{C}$.

Seien $Q \in \mathscr{R}$, $N \in \mathscr{F}$ mit $Q_0(N) = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q(N) = 0$. Definiere $C := \{\frac{dQ}{d\mu} > 0\}$ und $C_0 := \{\frac{dQ_0}{d\mu} > 0\}$. Wegen $Q_0(N \cap C_0) = 0$ ist $\mu(N \cap C_0) = 0$, also $Q(N \cap C_0) = 0$. Ferner ist $Q(N \cap C_0^C \cap C^C) = 0$.

Unter der Annahme $Q(N \cap C_0^C \cap C) > 0$ folgt $N \cap C_0^C \cap C \in \mathscr{C}$, also $C_0 \cup (N \cap C_0^C \cap C) \in \mathscr{C}$. Das impliziert aber $\mu(C_0 \cup (N \cap C_0^C \cap C)) > \mu(C_0) = \sup_{C \in \mathscr{C}} \mu(C)$, also einen Widerspruch.

Zusammen folgt $Q(N) = Q(N \cap C_0) + Q(N \cap C_0^C \cap C^C) + Q(N \cap C_0^C \cap C) = 0$. □

Das folgende Resultat enthält bereits das zentrale Argument für den Fundamentalsatz. Allerdings erfordert der Beweis, dass die Menge K, auf die dieses Lemma später angewandt wird, abgeschlossen ist, einen hohen Aufwand. Das y in Lemma 2.11 und die Zufallsvariable X_0 in Lemma 2.14 dienen übrigens nicht zum Beweis des Fundamentalsatzes, sondern werden erst im Zusammenhang mit späteren Ergebnissen benötigt.

Lemma 2.11 (Kreps-Yan) *Sei $K \supset -L^1_+$ ein abgeschlossener konvexer Kegel (d.h K abeschlossen, konvex, $\alpha\xi \in K$ für alle $\xi \in K, \alpha \geq 0$) mit $K \cap L^1_+ = \{0\}$ (wobei $L^1_+ := \{X \in L^1 : X \geq 0$ P-fast sicher$\}$). Ferner sei $y \in L^1 \setminus K$. Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ mit $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(P)$ und $E_Q(y) > 0$ und $E_Q(\xi) \leq 0$ für alle $\xi \in K$.*

Beweis. Nach Satz 0.13 gibt es für jedes $x \in \{y\} \cup L^1_+ \setminus \{0\}$ ein $z_x \in (L^1)' = L^\infty$ derart, dass $E(z_x\xi) < E(z_x x)$ für alle $\xi \in K$. Da K ein Kegel ist, gilt $E(z_x\xi) \leq 0$ für alle solchen x, ξ. Wegen $-L^1_+ \subset K$ sind ferner alle z_x fast sicher nichtnegativ. Aus $0 \in K$ folgt schließlich

$$E(z_x x) > 0 \text{ für alle } x \in \{y\} \cup L^1_+ \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

Wir können z_x für alle x so wählen, dass $E(z_x y) > 0$: Sonst ersetze man z_x durch $z_x^\alpha := \alpha z_x + (1-\alpha)z_y$ für geeignetes $\alpha \in (0,1)$. Wegen $E(z_y y) > 0$ und $E(z_y x) > 0$ gilt nämlich $E(z_x^\alpha x) > 0$ und $E(z_x^\alpha y) > 0$ für genügend kleine α.

O. B. d. A. sei ferner $z_x \leq 1$ fast sicher für alle x. Sonst ersetze man z_x durch $\frac{z_x}{\|z_x\|_\infty}$. Nach Lemma 2.10 existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\{z_{x_n}P : n \in \mathbb{N}\} \sim \{z_x P : x \in \{y\} \cup L^1_+ \setminus \{0\}\}.$$

Definiere $\varrho := \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} z_{x_n}$, $\widetilde{x} := 1_{\{\varrho=0\}}$, $Q := \frac{\varrho}{E(\varrho)}P$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $E(z_{x_n}\widetilde{x}) = 0$, also $E(z_x\widetilde{x}) = 0$ für alle $x \in L^1_+$. Wegen $\widetilde{x} \in L^1_+$ und (2.1) folgt $\widetilde{x} = 0$ fast sicher. Somit ist Q äquivalent zu P. □

In der Wahrscheinlichkeitstheorie taucht bisweilen das Problem auf, dass zwar für alle $\omega \in \Omega$ ein $X(\omega)$ mit gewissen gewünschten Eigenschaften existiert, dass aber nicht klar ist, ob die resultierende Abbildung X messbar bzgl. einer gegebenen σ-Algebra auf Ω ist. Diese Messbarkeit zeigt man gewöhnlich mit Hilfe von Sätzen über messbare Auswahl. Das folgende Lemma dient dazu, einen Verweis auf solche Resultate an dieser Stelle zu umgehen.

Lemma 2.12 *Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariablen mit $\liminf_{n\to\infty} |\eta_n| < \infty$. Dann gibt es eine konvergente Folge $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariablen derart, dass $(\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\omega \in \Omega$ eine Teilfolge von $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.*

Beweis. Seien $\tau_{0,0} := 0$ und

$$\tau_{k,0} := \inf\left\{m > \tau_{k-1,0} : ||\eta^m| - \liminf_{n\to\infty} |\eta_n|| < \tfrac{1}{k}\right\}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ Definiere $\widetilde{\eta}_{k,0} := \eta_{\tau_{k,0}} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \eta_m 1_{\{\tau_{k,0}=m\}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\widetilde{\eta}_{k,0}$ messbar und $\sup_{k\in\mathbb{N}} |\widetilde{\eta}_{k,0}| < \infty$. Definiere ferner $\tau_{0,1} := 0$ und

$$\tau_{k,1} := \inf\left\{m > \tau_{k-1,1} : ||\widetilde{\eta}^1_{m,0}| - \liminf_{n\to\infty} |\widetilde{\eta}^1_{n,0}| < \tfrac{1}{k}\right\}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ sowie $\widetilde{\eta}_{k,1} := \widetilde{\eta}_{\tau_{k,1},0}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\widetilde{\eta}_{k,1}$ messbar und $\widetilde{\eta}^1_{k,1}(\omega)$ konvergiert für alle $\omega \in \Omega$. Analog definiere man sukzessive Folgen $(\tau_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ und Teilfolgen

$(\widetilde{\eta}_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ für $i = 2, \ldots, d$, so dass $\widetilde{\eta}^i_{k,i}(\omega)$ konvergiert für alle $\omega \in \Omega$ konvergiert. Wähle nun $(\widetilde{\eta}_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\widetilde{\eta}_{k,d})_{k\in\mathbb{N}}$. □

Wir definieren $R_N := \{\varphi \bullet \hat{S}_N : \varphi \text{ vorhersehbar, } \mathbb{R}^d\text{-wertig}\}$ und $A_N := R_N - L^0_+$, wobei L^0_+ die Menge der fast sicher nichtnegativen Zufallsvariablen bezeichnet.

Lemma 2.13 *Wenn der Markt arbitragefrei ist, sind $A_N, R_N, \mathbb{R} + R_N$ abgeschlossen bzgl. stochastischer Konvergenz.*

Beweis. Zu A_N: Wir führen den Beweis durch Induktion nach N, hier als Zahl der Handelsintervalle verstanden. Für $N = 0$ folgt die Aussage aus der Abgeschlossenheit von L^0_+. Die Aussage sei gültig für $N-1$. Seien $(\varphi_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Strategien, $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L^0_+, ζ eine Zufallsvariable mit $\varphi_{(k)} \bullet \hat{S}_N - r_k \to \zeta$ P-fast sicher für $k \to \infty$. Zu zeigen ist, dass eine Stategie φ und ein $r \in L^0_+$ existieren mit $\zeta = \varphi \bullet \hat{S}_N - r$.

Definiere $A := \{\liminf_{k\to\infty} |\varphi_{(k),1}| = \infty\} \in \mathscr{F}_0$.

Fall 1: $P(A) = 0$. Nach Lemma 2.12 existiert eine fast sicher konvergente, $\mathscr{F}_0$-messbare punktweise Teilfolge von $(\varphi_{(k),1})_{k\in\mathbb{N}}$, o. B. d. A. $(\varphi_{(k),1})_{k\in\mathbb{N}}$ selbst, etwa mit Grenzwert φ_1. Somit gilt $\sum_{n=2}^N \varphi^\top_{(k),n}\Delta\hat{S}_n - r_k \to \zeta - \varphi_1^\top\Delta\hat{S}_1$ fast sicher. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Strategie $(\varphi_n)_{n\in\{2,\ldots,N\}}$ und $r \in L^0_+$ mit $\zeta - \varphi_1^\top\Delta\hat{S}_1 = \sum_{n=2}^N \varphi_n^\top\Delta\hat{S}_n - r$, also $\zeta = \varphi \bullet \hat{S}_N - r$.

Fall 2: $P(A) > 0$. Auf A definiere $\psi_{(k)} := \frac{\varphi_{(k)}}{|\varphi_{(k),1}|}$, $s_k := \frac{r_k}{|\varphi_{(k),1}|}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(\psi_{(k)} \bullet \hat{S}_N - s_k)1_A \to 0$ fast sicher für $k \to \infty$. Nach Lemma 2.12 existiert eine fast sicher konvergente, $\mathscr{F}_0$-messbare punktweise Teilfolge $(\widetilde{\psi}_{(k),1}1_A)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\psi_{(k),1}1_A)_{k\in\mathbb{N}}$, etwa mit Grenzwert $\widetilde{\psi}_1$. Dann ist

$$-\widetilde{\psi}_1^\top\Delta\hat{S}_1 = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=2}^N(\widetilde{\psi}_{(k),n}1_A)^\top\Delta\hat{S}_n - s_k1_A\right) = \sum_{n=2}^N\widetilde{\psi}_n\Delta\hat{S}_n - s$$

nach Induktionsvoraussetzung für eine Strategie $(\psi_n)_{n\in\{2,\ldots,N\}}$ und ein $s \in L^0_+$. Es folgt $\widetilde{\psi} \bullet \hat{S}_N = s \geq 0$ und somit $\widetilde{\psi} \bullet \hat{S}_N = 0$ wegen der Arbitragefreiheit. Wegen $|\widetilde{\psi}_1| = 1$ auf A existieren paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_d \in \mathscr{F}_0$ mit $A = \cup_{i=1}^d A_i$ und $\psi_1^i \neq 0$ auf A_i. Definiere

$$\widetilde{\varphi}_{(k),1} := \begin{cases} \varphi_{(k),1} - \frac{\varphi^d_{(k),1}}{\widetilde{\psi}^d_1}\widetilde{\psi}_1 & \text{auf } A_d \\ \varphi_{(k),1} & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt $\widetilde{\varphi}^d_{(k),1} = 0$ auf A_d und $\widetilde{\varphi}^\top_{(k),1}\Delta\hat{S}_1 = \varphi^\top_{(k),1}\Delta\hat{S}_1$, denn $\widetilde{\psi} \bullet \hat{S}_1 = 0$ nach Lemma 2.8. O. B. d. A. kann also $A_d = \varnothing$ gewählt werden. (Sonst gehe man zu einer modifizierten Folge mit gleichem Grenzwert ζ über.) Induktiv folgt, dass auch $A_{d-1}, \ldots, A_1 = \varnothing$ und somit $A = \varnothing$ gewählt werden kann.

Zu R_N: Dies wird analog zu A_N, jedoch mit $r_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Zu $\mathbb{R} + R_N$: O. B. d. A. sei $\hat{S}_0 = 0$. Die Abgeschlossenheit beweist man zum Beispiel, in dem man den Markt durch die Festlegungen $\mathscr{F}_{-1} := \{\varnothing, \Omega\}$, $\hat{S}_{-1} := (-1, 0, \ldots, 0)$ um einen zusätzlichen Zeitpunkt -1 erweitert. Dann entspricht die Menge

$$R_{N+1} = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \varphi_n^\top \Delta \hat{S}_n : \varphi \text{ vorhersehbar, } \mathbb{R}^d\text{-wertig} \right\}$$

in diesem erweiterten Markt der Menge $\mathbb{R} + R_N$ im ursprünglichen Markt. Man beachte dazu, dass für den obigen Beweis der Abgeschlossenheit von R_N nur die Arbitragefreiheit zwischen 1 und N benötigt wird. $\square$

Lemma 2.14 *Seien $X_0, \dots, X_k$ reellwertige Zufallsvariablen mit $X_0 \notin A_N$. Wenn der Markt arbitragefrei ist, gibt es ein äquivalentes Martingalmaß Q mit $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(P)$ derart, dass $X_0, \dots, X_k \in L^1(Q)$ und $E_Q(X_0) > 0$.*

Beweis. Definiere $\varrho := \exp(-\sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{d} |\hat{S}_n^i| + \sum_{j=0}^{k} |X_j|) \in (0, 1]$ und $P' := \frac{\varrho}{E(\varrho)} P$. Dann ist P' ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem $\hat{S}_n^i$ und X_j für $i = 1, \dots, d$, $n = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, k$ integrierbar sind. O. B. d. A. sei $P' = P$, da die Arbitragefreiheit invariant unter äquivalenten Maßwechseln ist. Nach Lemma 2.13 ist A_N abgeschlossen bzgl. stochastischer Konvergenz. Da L^1-Konvergenz stochastische Konvergenz impliziert, ist $A_N \cap L^1$ abgeschlossen in L^1. Wegen der Arbitragefreiheit gilt $R_N \cap L_+^0 = \{0\}$ und somit $A_N \cap L_+^0 = \{0\}$ und $A_N \cap L_+^1 = \{0\}$, wobei $L_+^1 := L^1 \cap L_+^0$. Nach Lemma 2.11 gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ mit $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(P)$ derart, dass $E_Q(X_0) > 0$ und $E_Q(\xi) \leq 0$ für alle $\xi \in A_N \cap L^1$. Seien nun $n \in \{1, \dots, N\}$, $i \in \{1, \dots, d\}$, $F \in \mathscr{F}_{n-1}$, und definiere eine Strategie φ durch

$$\varphi_m^j(\omega) := \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } m = n, j = i, \omega \in F \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $0 \geq E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_N) = E_Q(\pm 1_F \Delta \hat{S}_n^i)$, also $E_Q(\Delta \hat{S}_n^i | \mathscr{F}_{n-1}) = 0$. Somit sind $\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d$ Q-Martingale. $\square$

Lemma 2.15 *Wenn ein* **äquivalentes lokales Martingalmaß** Q *existiert (d. h. $Q \sim P$ und $\hat{S}$ ist Q-lokales Martingal), dann ist der Markt arbitragefrei.*

Beweis. Sei φ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger vorhersehbarer Prozess mit $\varphi \bullet \hat{S}_N \geq 0$. Wir zeigen induktiv, dass $E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_N | \mathscr{F}_n) = \varphi \bullet \hat{S}_n \geq 0$ fast sicher für $n = N, \dots, 0$: Für $n = N$ ist dies offensichtlich. Für den Induktionsschritt von n nach $n-1$ wird die Induktionsvoraussetzung und die Tatsache verwendet, dass $\varphi \bullet \hat{S}$ ein Q-lokales Martingal ist (vgl. Lemma 1.20(5)):

$$\begin{aligned} E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_N | \mathscr{F}_{n-1}) &= E_Q(E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_N | \mathscr{F}_n) | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= \varphi \bullet \hat{S}_{n-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_N) = E_Q(E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_N | \mathscr{F}_0)) = E_Q(\varphi \bullet \hat{S}_0) = E_Q(0) = 0$, also $\varphi \bullet \hat{S}_N = 0$ fast sicher. $\square$

2.3 Wertpapiere mit Dividenden

Bislang haben wir angenommen, dass auf die Wertpapiere keine Dividenden ausgeschüttet werden. Dies ist insbesondere im Zusammenhang mit Anleihen, für die ein regelmäßiger Zinskupon gutgeschrieben wird, unsinnig. Aber auch Futuresverträge, die wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden, können in geeigneter Weise als Wertpapiere mit Dividendenausschüttungen aufgefasst werden. Wir erweitern daher den im Abschnitt 2.1 eingeführten Begriffsapparat auf diesen Fall.

Gegeben sei neben dem $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen Wertpapierpreisprozess S ein weiteres $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiges diskretes Semimartingal $D = (D^0, \dots, D^d)$ mit $D_0 = (0, \dots, 0)$, der **kumulative Dividendenprozess**. D_n^i steht für die Dividenden, die für Wertpapier S^i bis n bezahlt werden, d. h. zum Zeitpunkt n wird ΔD_n^i als Dividende ausgeschüttet.

Noch stärker als im dividendenfreien Fall muss die Reihenfolge der Ereignisse beachtet werden. Zum Zeitpunkt n finden drei Vorgänge statt: Das Portfolio wird von φ_{n-1} zu φ_n umgeschichtet, der Kurs der Wertpapiere ändert sich von S_{n-1} zu S_n, und Dividenden ΔD_n werden ausgeschüttet. Wir nehmen an, dass sie genau in dieser Abfolge stattfinden. Durch die Dividendenzahlung ändert sich das Portfolio, da wir auch das Bankkonto, dem die Dividende gutgeschrieben wird, als ein Wertpapier auffassen (in der Regel als Numeraire). Wir interpretieren φ_n als Portfolio vor Dividendenausschüttung, $V_n(\varphi)$ hingegen als Wert des Portfolios nach der Dividendenzahlung zur Zeit n. Dies motiviert die folgenden Definitionen.

Definition 2.16 Eine **Handelsstrategie** (oder ein **Portfolio**) ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger vorhersehbarer Prozess $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$. Der **Wertprozess** oder **Vermögensprozess** des Portfolios ist

$$V(\varphi) := \varphi^\top (S + \Delta D).$$

Eine Handelsstrategie φ heißt **selbstfinanzierend**, falls

$$\varphi_n^\top S_{n-1} = \varphi_{n-1}^\top (S_{n-1} + \Delta D_{n-1})$$

oder, anders ausgedrückt,

$$(\Delta \varphi_n)^\top S_{n-1} = \varphi_{n-1}^\top \Delta D_{n-1}$$

für $n = 1, 2, \dots$

Das Analogon von Lemma 2.3 bildet

Lemma 2.17 *Eine Handelsstrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$V(\varphi) = V_0(\varphi) + \varphi \bullet (S + D).$$

Beweis. Übungsaufgabe □

Zur Vereinfachung der Buchführung arbeiten wir wieder mit diskontierten Größen. Dazu seien das Numerairewertpapier S^0 als positiv vorausgesetzt und der diskontierte Preisprozess $\hat{S}$ wie bisher definiert.

Definition 2.18

$$\hat{D} := \frac{1}{S^0} \bullet D$$

heißt **diskontierter Dividendenprozess**. Ferner heißt

$$\hat{V}(\varphi) := \frac{1}{S^0} V(\varphi) = \varphi^\top (\hat{S} + \Delta \hat{D})$$

diskontierter Wert- oder **Vermögensprozess** der Strategie φ.

Im Gegensatz zu den anderen diskontierten Größen wird der diskontierte Dividendenprozess mit Hilfe eines stochastischen Integrals definiert. Dies führt zum einen zur intuitiven Formel $\Delta \hat{D}_n = \frac{\Delta D_n}{S_n^0}$ für die *augenblicklichen* Ausschüttungen und zum anderen dazu, dass sich die Selbstfinanzierungsbedingung in eingängiger Weise mit diskontierten Prozessen schreiben lässt.

Lemma 2.19 *Eine Handelsstrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\hat{V}(\varphi) = \hat{V}_0(\varphi) + \varphi \bullet (\hat{S} + \hat{D}).$$

Beweis. Offenbar ist φ genau dann selbstfinanzierend, wenn $(\Delta \varphi_n)^\top \hat{S}_{n-1} = \varphi_{n-1}^\top \Delta \hat{D}_{n-1}$ für alle n. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 2.17 für $\hat{S}$ anstelle S. □

Lemma 2.6 bleibt im Dividendenfall im Wortlaut gültig:

Lemma 2.20 *Für jeden vorhersehbaren Prozess $(\varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ und jedes $V_0 \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess φ^0 derart, dass $\varphi = (\varphi^0, \ldots, \varphi^d)$ selbstfinanzierend ist mit $V_0(\varphi) = V_0$.*

Beweis. Übungsaufgabe □

Zur Betrachtung des Zusammenhangs von Arbitrage und äquivalenten Martingalmaßen sei wiederum ein endlicher Zeithorizont $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner setzen wir voraus, dass auf das Numerairewertpapier S^0 keine Dividenden ausgeschüttet werden (d. h. $D^0 = 0$). **Arbitrage** wird wie in Abschnitt 2.1 definiert.

Aus der Tatsache, dass der Wertprozess selbstfinanzierender Strategien die gleiche Form wie im dividendenfreien Fall, jedoch mit $\hat{S} + \hat{D}$ anstelle $\hat{S}$ besitzt, ergibt sich direkt, dass sich der 1. Fundamentalsatz mit der entsprechenden Modifikation übertragen lässt.

Korollar 2.21 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie) *Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß für $\hat{S} + \hat{D}$ gibt, d. h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ derart, dass $\hat{S} + \hat{D}$ ein Q-Martingal ist.*

2.4 Konkrete Marktmodelle

Die bisherigen allgemeinen Aussagen gelten ganz unabhängig von der Verteilung der Preisprozesse. Zur Berechnung von Preisen und Strategien in den nächsten Kapiteln kommen wir aber um ein konkretes Modell nicht herum. Dessen Konstruktion ist eine delikate Aufgabe, bei der unterschiedliche Zielsetzungen eine Rolle spielen. Es sollte der ökonomischen Intuition zumindest nicht widersprechen und im Rahmen der Finanzmathematik handhabbar sein. Den entscheidenden Prüfstein bildet aber die Verträglichkeit mit realen Finanzdaten, über die in der Regel mit statistischen Methoden entschieden werden muss. Wir stellen an dieser Stelle ein einfaches Marktmodell für zwei Wertpapiere vor.

Diese Anlageform sieht unser Finanzmarktmodell nicht vor. An seine Stelle tritt das folgende festverzinsliche *Bankkonto* (*Geldmarktkonto*, *Sparkonto*, *Anleihe*)

$$S_n^0 = S_0^0 \exp(rn) = S_0^0(1+\tilde{r})^n = S_0^0 \mathscr{E}(\tilde{r}I)_n \tag{2.2}$$

mit $r \in \mathbb{R}$, $\tilde{r} := e^r - 1$ und $I_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es entspricht einer vollkommen risikolosen Anlage mit festem Zins, der nicht in Währungseinheiten ausbezahlt, sondern diesem Sparkonto gutgeschrieben und dadurch mitverzinst wird. Vereinfachend wird angenommen, dass es sich bei dem Zins $\tilde{r}$ um eine deterministische Konstante handelt. Wegen seiner einfachen Struktur bietet sich das Sparkonto als natürlicher Numeraire an, auch wenn im Grunde jede handelbare Anlage diese Rolle übernehmen könnte. Man beachte, dass die Existenz eines solchen Wertpapiers nicht der Arbitragefreiheit im Sinne von Definition 2.7 widerspricht, obleich das Sparkonto in gewissem Sinne risikolose Gewinne abwirft.

Das Sparkonto kann auch in negativen Stückzahlen gehalten werden, was einem Kredit entspricht, der mit derselben Rate wie ein mögliches Guthaben verzinst wird. In der Realität ist die Zinsstruktur natürlich wesentlich komplizierter als in diesem Modell mit festem Zins. Es gibt lang- und kurzfristige Anlagen mit mehr oder weniger variablem Zins, der zu verschiedenen Zeitpunkten ausbezahlt wird.

Als erstes und einziges nichttriviales Wertpapier betrachten wir eine *Aktie* oder *Fremdwährung*, deren Kursverlauf in folgender Form angenommen wird:

$$S_n^1 = S_0^1 \exp(X_n) = S_0^1 \prod_{m=1}^{n} (1+\Delta\widetilde{X}_m) = S_0^1 \mathscr{E}(\widetilde{X})_n. \tag{2.3}$$

Hierbei seien $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt, $X_0 = 0$ und

$$\widetilde{X}_n := \sum_{m=1}^{n} (e^{\Delta X_n} - 1). \tag{2.4}$$

Der Aktienpreisprozess hat im Prinzip dieselbe Struktur wie die Anleihe, nur dass hier der „Zins“ $\Delta\widetilde{X}_n$ für den Zeitraum von $n-1$ bis n in zufälliger Weise variiert, verursacht etwa durch den Eingang von unerwarteten Nachrichten und Informationen, die die Gewinnerwartungen der Anleger und damit den Kurs positiv oder negativ beeinflussen.

Im klassischen Standardmarktmodell werden die täglichen logarithmischen Renditen $\Delta\widetilde{X}_n$ zudem als normalverteilt vorausgesetzt, d. h. das Modell ist durch zwei Parameter

μ, σ^2 vollständig bestimmt. Im Verhältnis zu seiner einfachen Struktur beschreibt dieses Modell reale Finanzdaten recht gut. Einer genaueren Untersuchung hält es jedoch nicht stand. Die immer wieder beobachteten typischen Abweichungen haben zur Betrachtung einer Vielzahl alternativer Modelle geführt.

Wir wollen dies kurz anhand eines Beispiels illustrieren. In Abb. 2.1 ist der Kursverlauf des deutschen Aktienindex DAX von April 1991 bis April 2001 abgebildet. Eine Simulation von Aktienindexdaten, die auf Gleichung (2.3) mit normalverteilten logarithmischen Renditen beruht, ist in Abb. 2.2 gegenübergestellt. Qualitativ sehen sich diese Kursverläufe recht ähnlich. Etwas aufschlussreicher ist die Darstellung der *täglichen logarithmischen Renditen*

$$\log\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$$

in Abb. 2.3. Im Modell handelt es sich dabei um unabhängige, identisch normalverteilte Zufallsvariablen. Die tatsächlich beobachteten Daten weichen von einer entsprechenden Simulation (Abb. 2.4) in zweierlei Hinsicht ab. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *stylized facts*. Zum einen treten große Kursänderungen viel häufiger auf, als es dem Modell (2.3) mit einer zu den Daten passenden Varianz entspricht (*heavy tails*). Mehrmals traten im dargestellten Zeitraum Kursänderungen von mehr als 6% auf. Dies kommt im Normalverteilungsmodell im Mittel nur alle 1300 Jahre vor. Gerade solche Kurssprünge bergen aber ein gewaltiges Anlagerisiko. Man sollte sich daher stets fragen, in welchem Maße die anhand eines möglicherweise unpassenden Modells gewonnenen finanzmathematischen Resultate auf reale Gegebenheiten angewandt werden können.

Der angesprochene Mangel liegt aber weniger im Modell (2.3) an sich, als vielmehr in der Wahl der Normalverteilung begründet. Diese wird gewöhnlich durch den zentralen Grenzwertsatz motiviert, demzufolge sich die Summe vieler kleiner leidlich unabhängiger Einflüsse approximativ normalverteilt verhält. Tägliche Kursänderungen können aber durchaus durch einzelne große Kursänderungen dominiert sein, so dass die Normalverteilungsannahme ihrer Grundlage entbehrt. Exemplarisch ist in Abb. 2.5 eine Simulation mit einer Normal-invers-Gaußschen Verteilung dargestellt, die im Vergleich zur Normalverteilung bei gleicher Varianz mehr Masse in den Enden und im Zentrum besitzt.

Die Gegenüberstellung der Abbildungen 2.3 und 2.4, 2.5 macht jedoch noch einen weiteren Unterschied deutlich, der nun tatsächlich das Modell (2.3) betrifft. Große und kleine Kursänderungen treten im realen Datensatz jeweils gehäuft auf (*volatility clustering*). Dieses Verhalten kommt bei Prozessen mit unabhängigen, stationären Zuwächsen nicht vor.

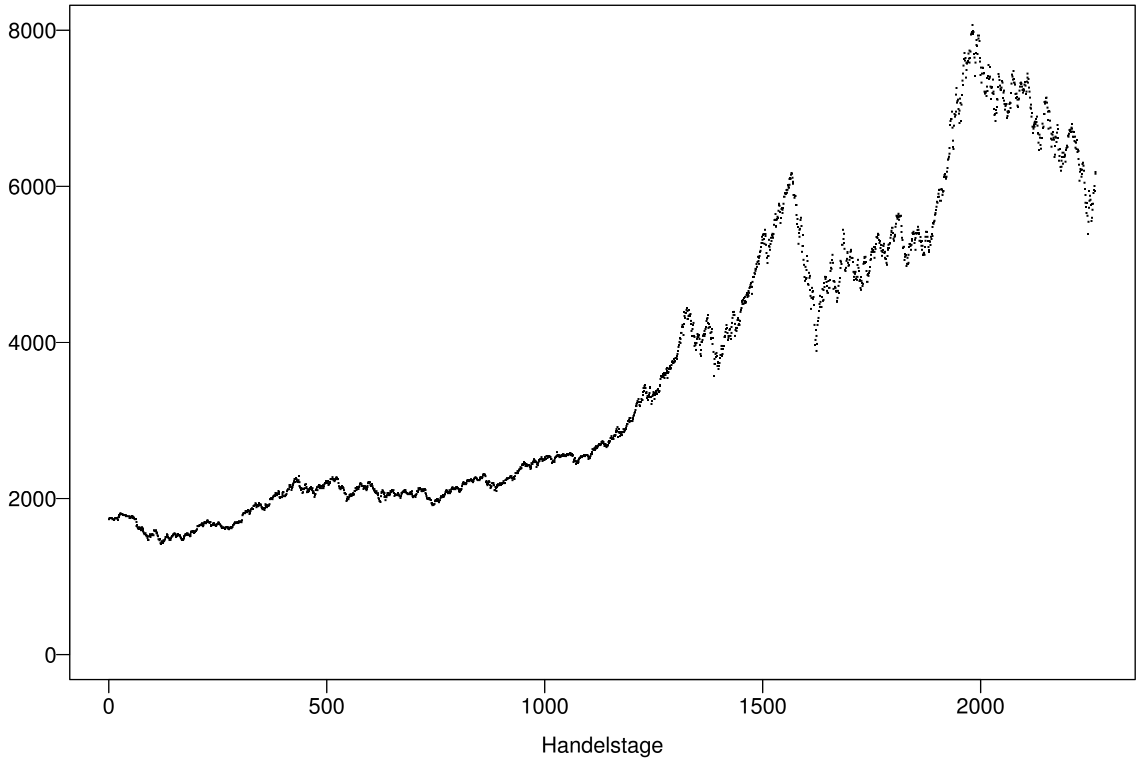

Abbildung 2.1: Kursverlauf des DAX April 1992 – April 2001

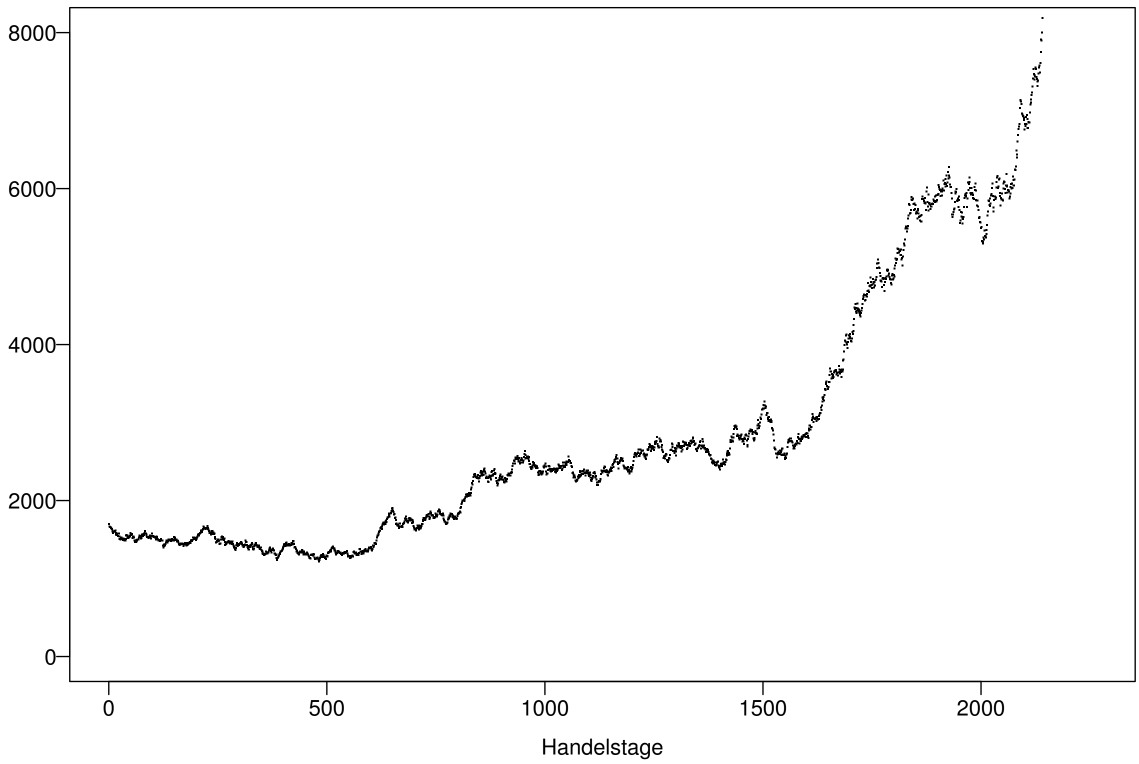

Abbildung 2.2: Kurssimulation nach Gleichung (2.3)

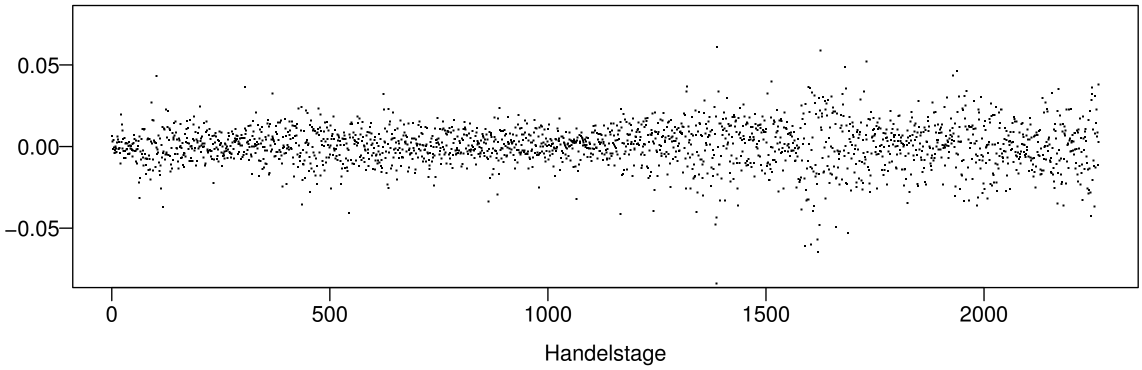

Abbildung 2.3: Tägliche logarithmische Renditen des DAX

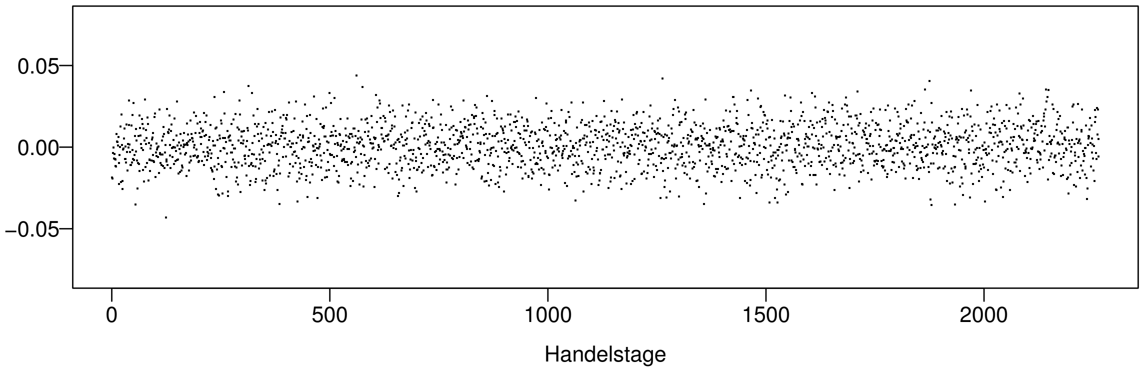

Abbildung 2.4: Simulation täglicher normalverteilter Renditen

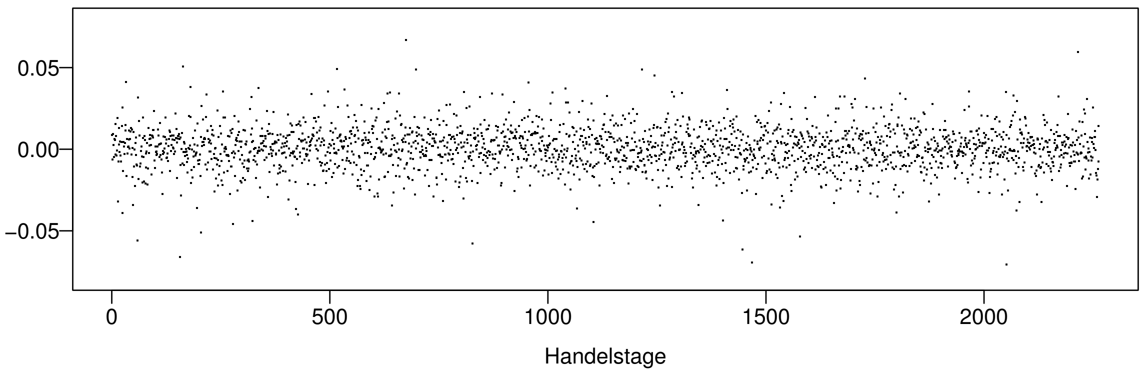

Abbildung 2.5: Simulation täglicher normal-invers Gaußscher Renditen

Kapitel 3

Bewerten und Hedgen von Derivaten

Unter Derivaten versteht man Wertpapiere oder Verträge, deren Wert in mehr oder weniger komplexer Weise vom Preis oder Kurs anderer, zugrundeliegender Wertpapiere oder Waren abhängt. Oft handelt es sich dabei um Termingeschäfte, d. h. es wird vertraglich vereinbart, ein bestimmtes Geschäft in der Zukunft zu einem jetzt schon vereinbarten Preis zu tätigen. Der Abschluss eines Termingeschäfts kann einerseits dazu dienen, die eigene Abhängigkeit von Kursschwankungen zu reduzieren, bedeutet aber für die Gegenseite, einem möglicherweise großen Risiko ausgesetzt zu werden. Daher besteht eine der zentralen Fragen der Finanzmathematik darin, wie das z. B. aus dem Verkauf eines Derivats entstehende Risiko durch Handel mit den zugrundeliegenden Wertpapieren reduziert oder abgesichert (neudeutsch *gehedgt*) werden kann. Eng damit zusammen hängt das ebenfalls wichtige Problem, einen fairen oder in gewissem Sinne rationalen Preis für ein Termingeschäft festzulegen.

Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Fragen liegt in der plausiblen Annahme der Arbitragefreiheit, die wir schon im letzten Kapitel kennengelernt haben. Bisweilen hat diese unscheinbare Annahme weitreichende Konsequenzen; in anderen Fällen dagegen hilft sie nicht viel weiter.

Unser allgemeines Marktmodell besteht wie im letzten Kapitel aus einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n=0,\dots,N}, P)$ mit Endzeitpunkt $N \in \mathbb{N}$ und einem $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen Wertpapierpreisprozess $S = (S^0, \dots, S^d)$ mit positivem Numeraire S^0. Der Markt sei arbitragefrei im Sinne von Definition 2.7. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$ und $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Das bedeutet, dass wir in unserem Marktmodell den Anfangszustand als deterministisch oder festgelegt betrachten und dass der Zufall erst ab Zeitpunkt 1 ins Geschehen eingreift.

3.1 Termingeschäfte

Viele, wenn auch nicht alle tatsächlich gehandelten Termingeschäfte lassen sich durch eine Zufallsvariable X beschreiben, die den Wert des Vertrages zum Endzeitpunkt N angibt. Wir betrachten einige Beispiele.

1. Eine *europäische Kauf*- oder *Call-Option* gibt dem Besitzer das Recht, eine festgeleg-

te Menge eines zugrundeliegenden Gutes an einem festgelegten Zeitpunkt (*Fälligkeit*) zu einem festgelegten Preis (*Basispreis*) zu erwerben. Eine Verpflichtung zum Kauf besteht nicht.

Eine solche Option lässt sich leicht als Zufallsvariable X darstellen. Wenn der Marktpreis des Gutes zum Fälligkeitszeitpunkt unterhalb des Basispreises liegt, ist die Option wertlos; liegt er hingegen oberhalb, so ist der Wert der Option die Differenz von Marktpreis und Basispreis. Selbst wenn nämlich der Besitzer der Option kein Interesse am Erwerb des Gutes hat, kann er durch dessen sofortigen Verkauf zu Marktpreisen diese Differenz als Gewinn realisieren. Eine Call-Option auf eine Einheit von Wertpapier S^1 mit Fälligkeit N und Basispreis K besitzt daher am Endzeitpunkt N den Wert

$$X = (S^1_N - K)^+ = \max(S^1_N - K, 0).$$

Oft findet daher bei Optionsgeschäften gar keine Lieferung mehr statt, sondern es wird nur noch der entsprechende Zahlungsausgleich vorgenommen. Dies kann in der Praxis wegen auftretender Transaktions- und Lagerhaltungskosten durchaus einen Unterschied bedeuten, den wir aber im Rahmen der hier gemachten idealisierenden Annahmen vernachlässigen.

Wird nur ein reiner Zahlungsausgleich vorgenommen, kann der Preis des zugrundeliegenden Gutes im Prinzip durch jede andere wohldefinierte Größe ersetzt werden, auch wenn es sich nicht im engeren Sinn um einen Preis handelt. So gibt es z. B. Optionen auf Indizes.

2. Die *europäische Verkaufs*- oder *Put-Option* entspricht direkt dem Call, nur dass hier ein Recht auf Verkauf statt auf Kauf des Gutes besteht. Ansonsten gilt das oben Gesagte. Eine Put-Option auf eine Einheit von Wertpapier S^1 mit Fälligkeit N und Basispreis K besitzt dementsprechend am Endzeitpunkt N den Wert

$$X = (K - S^1_N)^+.$$

3. Bei *amerikanischen Call/Put-Optionen* kann der Besitzer die Option zu jedem beliebigen Zeitpunkt bis zum Verfall ausüben. Er muss also nicht bis zur Fälligkeit warten. Insofern liegt hier im Gegensatz zu den europäischen Optionen ein echtes Wahlrecht vor. Dies erschwert die mathematische Behandlung, da der Verkäufer oder *Stillhalter* der Option jetzt zusätzlich mit der Unsicherheit konfrontiert ist, zu welchem Zeitpunkt das Kauf- bzw. Verkaufsrecht wahrgenommen wird. Amerikanische Optionen lassen sich im allgemeinen nicht wie europäische in Form einer Zufallsvariablen ausdrücken.

4. Bei einem *Forward*-Geschäft wird vertraglich vereinbart, eine festgelegte Menge eines zugrundeliegenden Gutes an einem festgelegten Zeitpunkt (*Fälligkeit*) zu einem festgelegten Preis (*Forwardpreis*) zu erwerben. Im Gegensatz zur Call-Option handelt es sich hier um eine Verpflichtung. Der Forwardpreis wird dabei so gewählt, dass

dieser Vertrag zu dem Zeitpunkt, an dem er geschlossen wird, nichts kostet. Man beachte den folgenden wichtigen, die Bezeichnungsweise betreffenden Unterschied zu Call/Put-Optionen: Unter dem *Optionspreis* versteht man im Gegensatz zum Forwardpreis nicht den Basispreis, zu dem das Gut bei Fälligkeit gehandelt wird, sondern den Preis, den die Option als eigenes Wertpapier hat.

Zur Darstellung in Form einer Zufallsvariablen betrachten wir ein Forwardgeschäft auf eine Einheit von Wertpapier S^1 mit Fälligkeit N, das am Zeitpunkt $n \in \{0, \ldots, N\}$ zum Forwardpreis O_n abgeschlossen wird. Der Wert des Forwards zum Zeitpunkt N beläuft sich dann auf

$$X = S_N^1 - O_n,$$

denn statt des Marktpreises S_N^1 muss der Besitzer des Forwards „nur" den vereinbarten Betrag O_n zum Erwerb von S^1 aufwenden, der allerdings auch höher als der Marktpreis sein kann.

5. Forward-Geschäfte werden in der Regel zwischen zwei Parteien (*over-the-counter*) abgeschlossen. Die börsengehandelte Version heißt *Future* und unterscheidet sich vom Forward durch ein buchhalterisches Detail, das das Verständnis etwas erschwert. Während beim Forward erst am Fälligkeitszeitpunkt Zahlungen erfolgen, geschieht dies beim Future jeden Tag. Je nachdem, ob der Marktpreis des zugrundeliegenden Gutes gestiegen oder gefallen ist, wird den Handelspartnern die entsprechende Preisänderung auf einem sogenannten *Marginkonto* gutgeschrieben oder belastet (*marking-to-market*).

   Formal kann man sich einen Future als einen Vertrag vorstellen, in den bzw. aus dem man jederzeit ohne Kosten ein- und aussteigen kann. Diesem Vertrag ist ein zeitlich veränderlicher Kurs, der *Futurespreis* U_n, zugeordnet, der dem obigen Forwardpreis ähnelt. Am Fälligkeitszeitpunkt N des Futures ist der Futurespreis wie beim Forward durch den Preis eines zugrundeliegenden Gutes festgelegt (z. B. $U_N = S_N^1$). Solange man den Future besitzt, wird einem jeden Tag die Futurespreisänderung $U_n - U_{n-1}$ gegenüber dem Vortag gutgeschreiben bzw. belastet. Lässt man die anfallenden Zinsen außer Acht, dann addieren sich die Gut- und Lastschriften zwischen n und N also zu $S_N^1 - U_n$, was der Auszahlung des Forwards entspricht, wenn man den Futurespreis durch den Forwardpreis ersetzt. Wegen der täglichen Zahlungströme lässt sich ein Future im allgemeinen nicht als zufällige Auszahlung in Form einer Zufallsvariablen darstellen.

3.2 Zweiter Fundamentalsatz der Preistheorie

Auch wenn nicht alle tatsächlich gehandelten Derivate in dieser Form darstellbar sind, nennen wir $\mathscr{F}_N$-meßbare Zufallsvariablen X alternativ **(zufällige) Auszahlung**, **Derivat** oder

Option. Die Zufallsvariable X steht dabei für den Wert des Vertrages zum Zeitpunkt N und

$$\hat{X} := \frac{X}{S_N^0}$$

dementsprechend für die **diskontierte Auszahlung**. Wie oben angekündigt soll es um die Frage gehen, zu welchem Preis der Vertrag zu einem früheren Zeitpunkt $n \in \{0, \dots, N\}$ gehandelt werden soll und wie das aus dem Verkauf eines Derivats resultierende Risiko gemindert werden kann.

Bei einer duplizierbaren Ausahlung im Sinne der folgenden Definition macht es keinen Unterschied, ob man die Option selbst oder das entsprechende duplizierende Portfolio φ besitzt – der Kontostand am Fälligkeitszeitpunkt ist derselbe. Eine solche Option ist also im dem Sinne überflüssig der redundant, als sie in Form der dynamischen Handelsstrategie φ ohnehin schon am Markt erhältlich ist.

Definition 3.1 Eine zufällige Auszahlung X heißt **duplizierbar**, falls eine selbstfinanzierende Strategie φ mit $X = V_N(\varphi)$ existiert. In diesem Fall heißt φ **(perfekte) Hedgingstrategie** von X.

Für duplizierbare Auszahlungen erhalten wir sofort eine naheliegende Antwort auf die Frage, wie wir uns gegen das Kursrisiko aus dem Verkauf einer solchen Option absichern können. Man kauft sich einfach die duplizierende, selbstfinanzierende Strategie φ. Der Endwert $V_N(\varphi)$ dieses Portfolios gleicht dann die Zahlungsverpflichtungen X in jedem Fall exakt aus. Man ist also perfekt abgesichert oder *gehedgt*.

Bemerkung. Eine zufällige Auszahlung ist offenbar genau dann duplizierbar, wenn ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess φ mit

$$\hat{X} = x + \varphi \bullet \hat{S}_N$$

existieren, wobei $\hat{S}$ hier als $\mathbb{R}^d$-dimensionaler Prozess $(\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)$ interpretiert wird (vgl. Bezeichnung 2.1).

Wir betrachten eine zufällige Auszahlung von nun an als eigenständiges, gehandeltes Wertpapier S^{d+1}, das zu jedem Zeitpunkt $n = 0, \dots, N$ einen Preis S_n^{d+1} besitzt. Das folgende Korollar zeigt, dass die Arbitragefreiheit die Menge der möglichen Derivatpreisprozesse durch eine Martingalbedingung einschränkt. Die einzig möglichen Optionspreise sind demgemäß bedingte Erwartungswerte unter äquivalenten Martingalmaßen.

Korollar 3.2 *Sei X eine zufällige Auszahlung. Ein Derivatpreisprozess S^{d+1} mit $S_N^{d+1} = X$ führt genau dann zu einem arbitragefreien Markt $(S^0, \dots, S^{d+1})$, wenn ein äquivalentes Martingalmaß Q für den Markt $(\hat{S}^0, \dots, \hat{S}^d)$ existiert mit $\hat{X} \in L^1(Q)$ und*

$$\hat{S}_n^{d+1} = E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_n)$$

für $n = 0, \dots, N$.

Beweis. $\Leftarrow$: Dies folgt aus dem ersten Fundamentalsatz 2.9, da Q ÄMM für $(S^0,\dots,S^{d+1})$ ist.

$\Rightarrow$: Nach dem ersten Fundamentalsatz 2.9 existiert ein ÄMM Q für $(S^0,\dots,S^{d+1})$. Insbesondere ist $\hat{X}=\hat{S}_N^{d+1}\in L^1(Q)$. □

In manchen Fällen legt die Arbitragefreiheit den Derivatpreisprozess sogar eindeutig fest. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Auszahlung duplizierbar ist, wenn sie also in Form einer Handelsstrategie schon am Markt erhältlich ist. Es liegt nahe, dass ihr Marktpreis dann mit dem Wert dieser duplizierenden Strategie übereinstimmt.

Satz 3.3 *Für jede zufällige Auszahlung X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *X ist durch eine selbstfinanzierende Strategie φ duplizierbar.*
2. *Es gibt genau einen Derivatpreisprozess S^{d+1} mit $X=S_N^{d+1}$, so dass $(S^0,\dots,S^{d+1})$ ein arbitragefreier Markt ist.*
3. *Für jedes ÄMM Q mit $\hat{X}\in L^1(Q)$ führt die Definition $S_n^{d+1}:=E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_n)$ zum selben Prozess S^{d+1}.*

In diesem Fall gilt $S^{d+1}=V(\varphi)$.

Beweis. 1⇒2: Zum Beweis der Existenz definiere $S^{d+1}:=V(\varphi)$. Definiere Sei ψ ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger vorhersehbarer Prozess mit $\psi\bullet(\hat{S}^1,\dots,\hat{S}^{d+1})_N\geq 0$. Wegen

$$\begin{aligned}\psi\bullet(\hat{S}^1,\dots,\hat{S}^{d+1})_N &= \textstyle\sum_{i=1}^d\psi^i\bullet\hat{S}_N^i+\psi^{d+1}\bullet(\varphi\bullet\hat{S})_N\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^d\psi^i\bullet\hat{S}_N^i+(\psi^{d+1}\bullet\varphi)\bullet\hat{S}_N\\ &= \left(\psi^1+\psi^{d+1}\varphi^1,\dots,\psi^d+\psi^{d+1}\varphi^d\right)\bullet\hat{S}_N\end{aligned}$$

und der Arbitragefreiheit von S ist $\psi\bullet(\hat{S}^1,\dots,\hat{S}^{d+1})_N=0$. d. h. der erweiterte Markt $(S^0,\dots,S^{d+1})$ ist arbitragefrei.

Für den Beweis der Eindeutigkeit sei S^{d+1} nun ein beliebiges Semimartingal mit Endwert $X=V_N(\varphi)$, so dass $(S^0,\dots,S^{d+1})$ arbitragefrei ist. Nach Lemma 2.8 gilt dann $S^{d+1}=V(\varphi)$.

2⇒3: Korollar 3.2

3⇒1: Wenn X nicht duplizierbar ist, existiert nach Lemma 2.14 ein ÄMM Q für S mit $\hat{X}\in L^1(Q)$. Nach Satz 0.13, angewandt auf $L^1(Q)$, die abgeschlossene Teilmenge $M:=(\mathbb{R}+R_N)\cap L^1(Q)$ (vgl. Lemma 2.13) und $x_0:=\hat{X}\in\mathbb{R}+R_N$, gibt es ein $\xi\in L^\infty(Q)$ mit $E_Q(\xi x)<E_Q(\xi x_0)$ für alle $x\in(\mathbb{R}+R_N)\cap L^1(Q)$. Da $\mathbb{R}+R_N$ ein Vektorraum ist, folgt $E_Q(\xi x)=0$ für alle $x\in(\mathbb{R}+R_N)\cap L^1(Q)$.

Definiere nun $\widetilde{Q}:=(1+\frac{\xi}{2\|\xi\|_\infty})Q$. Wegen $E_Q(\xi)=0$ ist $\widetilde{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Ferner ist $E_{\widetilde{Q}}(x)=E_Q(x)+\frac{1}{2\|\xi\|_\infty}E_Q(\xi x)=0$ für alle $x\in R_N\cap L^1(Q)$. Wie im Beweis von Lemma 2.14 folgt, dass $\hat{S}^1,\dots,\hat{S}^d$ $\widetilde{Q}$-Martingale sind. Es ist aber $E_{\widetilde{Q}}(\hat{X})=E_Q(\hat{X})+\frac{1}{2\|\xi\|_\infty}E_Q(\xi x_0)>E_Q(\hat{X})$ und somit $E_{\widetilde{Q}}(\hat{X}|\mathscr{F}_0)\neq E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_0)$,

d. h. Aussage 3 gilt nicht für X. $\square$

In der Situation des vorigen Satzes ist der Preisprozess S^{d+1} der einzige, der insofern fair ist, als kein Marktteilnehmer in Form von risikolosen Gewinnen vom Derivat profitieren kann.

Definition 3.4 Falls eine zufällige Auszahlung X duplizierbar ist, nennen wir S^{d+1} aus Satz 3.3 den **(eindeutigen) fairen Preisprozess** von X.

Für duplizierbare Auszahlungen haben wir befriedigende Antworten auf das Absicherungs- und das Bewertungsproblem gefunden. In glücklichen, aber leider eher seltenen Ausnahmefällen lässt sich schon jede zufällige Auszahlung duplizieren.

Definition 3.5 Der Markt heißt **vollständig**, falls jede zufällige Auszahlung X duplizierbar ist, für die $\hat{X}$ beschränkt ist. Der Markt heißt **perfekt**, falls sogar jede zufällige Auszahlung duplizierbar ist.

Neben der Arbitragefreiheit kann man auch die Vollständigkeit mit Hilfe von äquivalenten Martingalmaßen charakterisieren, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.6 (2. Fundamentalsatz der Preistheorie) *Für einen arbitragefreien Markt sind äquivalent:*

1. *Der Markt ist perfekt.*

2. *Der Markt ist vollständig.*

3. *Es gibt genau ein äquivalentes Martingalmaß.*

Beweis. 1⇒2: Das ist offensichtlich.

2⇒3: Für gegebenes $A \in \mathscr{F}_N$ definiere die zufällige Auszahlung $\hat{X} := 1_A$. Nach Satz 3.3 (1⇒3) stimmt $E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_0) = Q(A)$ für alle ÄMM Q überein. Somit gibt es nur ein ÄMM.

3⇒1: Dies folgt aus Satz 3.3 (3⇒1). $\square$

Im allgemeinen lässt sich eine beliebige zufällige Auszahlung nicht duplizieren. Mit Arbitrageargumenten kann der Anfangspreis dann nur zwischen einem unteren und einem oberen Preis eingegrenzt werden.

Definition 3.7 Sei X eine zufällige Auszahlung.

$$\pi_O(X) := \sup\left\{S_0^0 E_Q(\hat{X}) : Q \text{ ÄMM mit } \hat{X} \in L^1(Q)\right\}$$

heißt **oberer Preis** von X.

$$\pi_U(X) := \inf\left\{S_0^0 E_Q(\hat{X}) : Q \text{ ÄMM mit } \hat{X} \in L^1(Q)\right\}$$

heißt **unterer Preis** von X.

Der folgende Satz zeigt nicht nur, dass die Menge der möglichen Preise stets ein Intervall ist. Er beantwortet zudem die Frage, wieviel Anfangskapitel nötig ist, um gegen das Risiko aus dem Verkauf einer Option in jedem Fall gehedgt zu sein. Man benötigt mindestens den oberen Preis der Option, um sich eine solche *Superhedgingstrategie* leisten zu können.

Satz 3.8 *Seien X eine zufällige Auszahlung und $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Es existiert genau dann eine selbstfinanzierende Strategie φ mit $V_0(\varphi) = x$ und $V_N(\varphi) \geq X$ (bzw. $V_N(\varphi) \leq X$), wenn $x \geq \pi_O(X)$ (bzw. $x \leq \pi_U(X)$).*

2. *Falls X nicht duplizierbar ist, dann ist*

$$\left\{ S_0^0 E_Q(\hat{X}) : Q \text{ ÄMM mit } \hat{X} \in L^1(Q) \right\}$$

ein offenes Intervall (und andernfalls einelementig).

Beweis. 1. $\Rightarrow$: Seien φ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_N(\varphi) \geq X$ und Q ein ÄMM mit $\hat{X} \in L^1(Q)$. Da $\hat{V}(\varphi)$ ein Q-lokales Martingal ist, folgt induktiv $\hat{V}_n(\varphi) \geq E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_n)$ für $n = N, \dots, 0$. Wegen $\frac{x}{S_0^0} = \hat{V}_0(\varphi) \geq E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_0) = E_Q(\hat{X})$ folgt $x \geq \pi_O(X)$. Die Ungleichung $x \leq \pi_U(X)$ folgt analog.

$\Leftarrow$: Sonst ist $\hat{X} \notin \{\frac{x}{S_0^0} + \varphi \bullet \hat{S}_N : \varphi \text{ vorhersehbarer Prozess}\} - L_+^0$, also $\hat{X} - \frac{x}{S_0^0} \notin R_N - L_+^0 = A_N$ im Sinne von Abschnitt 2.2. Nach Lemma 2.14 gibt es ein ÄMM Q mit $\hat{X} - \frac{x}{S_0^0} \in L^1(Q)$ und $E_Q(\hat{X} - \frac{x}{S_0^0}) > 0$, also $\hat{X} \in L^1(Q)$ und $E_Q(\hat{X})S_0^0 > x \geq \pi_O(X)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Aussage für den unteren Preis folgt analog durch Betrachtung von $-X$ anstelle X.

2. $\{E_Q(\hat{X})S_0^0 : Q \text{ ÄMM mit } \hat{X} \in L^1(Q)\}$ ist ein Intervall, da die Menge der ÄMM konvex ist.

Sei nun $\pi_O(X) = E_Q(\hat{X})S_0^0$ für ein ÄMM Q mit $\hat{X} \in L^1(Q)$. Sei ferner φ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_0(\varphi) = \pi_O(X)$ und $V_N(\varphi) \geq X$. Induktiv folgt

$$E_Q(\hat{V}_N(\varphi) - \hat{X}|\mathscr{F}_n) = \hat{V}_n(\varphi) - E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_n) \geq 0$$

für $n = N, \dots, 0$. Wegen $\hat{V}_0(\varphi) - E_Q(\hat{X}|\mathscr{F}_0) = \frac{\pi_0(X)}{S_0^0} - \frac{\pi_0(X)}{S_0^0} = 0$ folgt $V_N(\varphi) = X$, also ist X duplizierbar. Analog ergibt sich die Aussage für die untere Intervallgrenze. □

Definition 3.9 Sei X eine zufällige Auszahlung. Eine selbstfinanzierende Strategie φ mit $V_0(\varphi) = \pi_O(X)$ und $V_N(\varphi) \geq X$ heißt **billigste Superhedgingstrategie** für X.

3.3 Beispiele

Wir betrachten nun einige konkrete Beispiele, in denen zufällige Auszahlungen dupliziert und daher auch eindeutig fair bewertet werden können.

3.3.1 Forward

Zur mathematischen Behandlung des Forwards betrachten wir eine zufällige Auszahlung der Form $X := S_N^1 - K$ für ein $K \in \mathbb{R}$. Ferner nehmen wir an, dass S_N^0 deterministisch ist, etwa weil es sich bei dem Numeraire wie im Standardmarktmodell ohnehin um ein Wertpapier mit festem Zins handelt oder weil S^0 eine zur Zeit N fällige Nullkuponanleihe ist. Im Markt $S = (S^0, S^1)$ hat die konstante und damit selbstfinanzierende Strategie $\varphi := (-K/S_N^0, 1)$ den Wert $V(\varphi)_n = S_n^1 - K\frac{S_n^0}{S_N^0}$. Wegen $V_N(\varphi) = S_N^1 - K = X$ ist somit X duplizierbar, und $V(\varphi)$ ist der einzige mit Arbitragefreiheit verträgliche Preisprozess des Derivats. Sei nun $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ fest gewählt. Der Forwardpreis O_n ist das K, das das Derivat bei Vertragsabschluss zur Zeit n wertlos macht, d. h.

$$O_n = S_n^1 \frac{S_N^0}{S_n^0} = \hat{S}_n^1 S_N^0.$$

Ein Forward lässt sich also schon dann perfekt hedgen, wenn eine Anleihe mit festem Zins existiert, die am Fälligkeitszeitpunkt des Forwards ausbezahlt wird. Über den Preisprozess des zugrundeliegenden Wertpapiers müssen jedoch keine Annahmen gemacht werden.

3.3.2 Future

Auf den ersten Blick scheint sich der Future der hier entwickelten Theorie durch seinen komplexen Zahlungsstrom zu entziehen. Bei näherem Hinsehen lässt er sich jedoch als Wertpapier mit – bisweilen negativen – Dividendenausschüttungen auffassen. Dessen Wert an sich ist dabei stets 0, da Einstieg in den und Kündigung des Vertrages jederzeit ohne Kosten möglich sind. Da man pro Futuresvertrag zum Zeitpunkt n gerade $\Delta U_n = U_n - U_{n-1}$ gutgeschrieben bekommt, kann man den Futurespreis U als einen Dividendenprozess interpretieren, der der Nebenbedingung $U_N = S_N^1$ genügt.

Betrachten wir also formal den Markt $S^0, S^1, (S^2, D^2)$, wobei S^0 wie immer der Numeraire, S^1 das Bezugswertpapier des Futures und $(S^2, D^2) = (0, U)$ den Future als Wertpapier mit Dividenden bezeichnen. S^0 wird als vorhersehbar vorausgesetzt. Wenn dieser Markt arbitragefrei ist, gibt es nach Korollar 2.21 ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ derart, dass $\hat{S}^1$ und $\hat{S}^2 + \hat{D}^2 = \frac{1}{S^0} \bullet U$ Q-Martingale sind. O.B.d.A. ist dann auch $U = S^0 \bullet \hat{D}^2$ ein Q-Martingal, da es nach Lemma 1.20 ein Q-lokales Martingal ist und Q nach Lemma 2.14 so gewählt werden kann, dass U Q-integrierbar ist. Folglich ist

$$U_n = E_Q(U_N | \mathscr{F}_n) = E_Q(S_N^1 | \mathscr{F}_n)$$

für $n = 0, \dots, N$. Man beachte, dass hier nicht wie sonst der *diskontierte* Preis ein Q-Martingal ist, sondern der Futurespreisprozess selbst. Da es sich dabei nicht um einen Preisprozess im engeren Sinne handelt, widerspricht dies nicht der Arbitragefreiheit.

Falls das Sparkonto S^0 deterministisch ist, folgt

$$U_n = E_Q(\hat{S}_N^1 S_N^0 | \mathscr{F}_n) = S_N^0 E_Q(\hat{S}_N^1 | \mathscr{F}_n) = \hat{S}_n^1 S_N^0 = S_n^1 \frac{S_N^0}{S_n^0},$$

d. h. der Futurespreis stimmt mit dem oben hergeleiteten Forwardpreis überein.

In diesem Fall lässt sich der Zahlungsstrom eines Futures durch Numeraire und Basiswertpapier duplizieren. Nach Abschnitt 2.3 gilt nämlich für den diskontierten Wertprozess der nur aus dem Future bestehenden Strategie φ:

$$\hat{V}(\varphi) = 0 + \frac{1}{S^0} \bullet D^2 = \frac{1}{S^0} \bullet (S_N^0 \hat{S}^1) = \frac{S_N^0}{S^0} \bullet \hat{S}^1.$$

Dies stimmt mit dem diskontierten Wert derjenigen selbstfinanzierenden Strategie ψ mit Anfangskapital 0 überein, die zum Zeitpunkt n gerade $\psi_n^1 = \frac{S_N^0}{S_n^0}$ Anteile des Basiswertpapiers S^1 hält.

Wir haben oben die Gleichheit von Futures- und Forwardpreisprozess im Falle deterministischer Zinsen hergeleitet, ohne dass Verteilungsannahmen an S^1 gemacht werden mussten. Interessanterweise unterscheiden sich jedoch die zugehörigen Duplikationsstrategien. Während man einen verkauften Forward durch Kauf genau einer zugrundeliegenden Aktie hedgt, enthält das Duplikationsportfolio für den Future S_N^0/S_n^0 Aktien, also insbesondere eine zeitlich variable Anzahl.

3.3.3 Europäische Call- und Put-Optionen im Binomialmodell

Europäische Call- und Put-Optionen sind in der Regel nicht duplizierbar. Nur in sehr einfachen Marktmodellen wie dem hier vorgestellten Binomial- oder Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist dies der Fall. Dieser Markt ist sogar vollständig, d. h. jede zufällige Auszahlung lässt sich fair bewerten und perfekt hedgen.

Der Markt bestehe aus einer Anleihe und einer Aktie wie in Abschnitt 2.4. Konkreter seien

$$S_n^0 = S_0^0 (1 + \tilde{r})^n$$

mit Konstanten $S_0^0 > 0$, $\tilde{r} \geq 0$ und

$$S_n^1 = S_0^1 \prod_{m=1}^{n} (1 + \Delta \widetilde{X}_m)$$

mit einer Konstanten $S_0^1 > 0$ und unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $\Delta\widetilde{X}_1, \dots, \Delta\widetilde{X}_N$, wobei $P(\Delta\widetilde{X}_n = u - 1) = p = 1 - P(\Delta\widetilde{X}_n = d - 1)$ mit $0 < d < 1 + \tilde{r} < u$ und $0 < p < 1$. Die Aktie kann in einer Zeiteinheit also nur um einen festen Prozentsatz steigen oder um einen ebenfalls festen Faktor fallen. Der diskontierte Preisprozess lässt sich darstellen als

$$\hat{S}_n^1 = \frac{S_0^1}{S_0^0} \prod_{m=1}^{n} \frac{1 + \Delta\widetilde{X}_m}{1 + \tilde{r}} = \hat{S}_0^1 \prod_{m=1}^{n} (1 + \Delta\hat{X}_m),$$

wobei $(\hat{X}_n)_{n=0,\dots,N}$ durch $\hat{X}_n := \sum_{m=1}^{n} (\frac{1+\Delta\widetilde{X}_m}{1+\tilde{r}} - 1)$ definiert sind.

Die Filtrierung $(\mathscr{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ sei von S^1 erzeugt und $\mathscr{F} = \mathscr{F}_N$ wie bisher. Die gesamte Information des Investors rührt also aus der Beobachtung des Kursverlaufs her. Da sich jedes der Tupel $(S_1^1, \dots, S_n^1)$, $(\hat{S}_1^1, \dots, \hat{S}_n^1)$, $(\Delta\hat{X}_1, \dots, \Delta\hat{X}_n)$ und $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$ in messbarer

Weise durch jedes der anderen Tupel ausdrücken lässt, wird die Filtrierung wahlweise auch von $\hat{S}^1$, $\Delta\hat{X}$ oder $\hat{X}$ erzeugt.

Auf der Suche nach einem äquivalenten Martingalmaß definieren wir $Q \sim P$ durch

$$Q(\Delta\hat{X}_1 = x_1, \ldots, \Delta\hat{X}_N = x_N) = q^{|\{n\in\{1,\ldots,N\}: x_n = \frac{u}{1+\tilde{r}}-1\}|}(1-q)^{|\{n\in\{1,\ldots,N\}: x_n = \frac{d}{1+\tilde{r}}-1\}|}$$

mit $q := \frac{1+\tilde{r}-d}{u-d}$. Anhand dieser Definition sieht man sofort, dass $\Delta\hat{X}_1, \ldots, \Delta\hat{X}_N$ unter Q eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen ist mit $Q(\Delta\hat{X}_n = \frac{u}{1+\tilde{r}} - 1) = q = 1 - Q(\Delta\widetilde{X}_n = \frac{d}{1+\tilde{r}} - 1)$. Insbesondere ist $\Delta\hat{X}_n$ unter Q unabhängig von $\sigma(\Delta\hat{X}_1, \ldots, \Delta\hat{X}_{n-1}) = \mathscr{F}_{n-1}$. Wegen

$$\begin{aligned} E_Q(\Delta\hat{X}_n|\mathscr{F}_{n-1}) &= E_Q(\Delta\hat{X}_n) \\ &= q(\tfrac{u}{1+\tilde{r}} - 1) + (1-q)(\tfrac{d}{1+\tilde{r}} - 1) \\ &= \tfrac{1+\tilde{r}-d}{u-d}\tfrac{u-1-\tilde{r}}{1+\tilde{r}} + \tfrac{u-1-\tilde{r}}{u-d}\tfrac{d-1-\tilde{r}}{1+\tilde{r}} = 0 \end{aligned}$$

ist $\hat{X}$ ein Q-Martingal. Da $\hat{S}^1$ wegen $\hat{S}^1 = \hat{S}^1_0\mathscr{E}(\hat{X})$ ein stochastisches Integral nach $\hat{X}$ ist, ist es nach Lemma 1.20 ebenfalls ein Q-lokales Martingal und wegen der Beschränktheit sogar ein Q-Martingal. Der betrachtete Markt ist also arbitragefrei nach Satz 2.9.

Zur Betrachtung der Vollständigkeit sei $\hat{Y}$ eine beliebige Zufallsvariable. Nach dem Martingaldarstellungssatz 1.29 gibt es eine reelle Zahl y und einen vorhersehbaren Prozess H mit $\hat{Y} = y + H \bullet \hat{X}_N = y + \frac{H}{\hat{S}^1_-} \bullet \hat{S}^1_N$. Aus der Bemerkung nach Definition 3.1 ergibt sich die Vollständigkeit des Marktes.

Insbesondere lassen sich europäische Call- und Put-Optionen perfekt hedgen. Wir wollen im folgenden deren Preis und Hedgingstrategie bestimmen. Sei dazu $Y := (S^1_N - K)^+$ die Auszahlung einer europäischen Call-Option mit Basispreis $K \in \mathbb{R}$. Für den diskontierten Endwert der Aktie gilt

$$\hat{S}^1_N = \hat{S}^1_0(\tfrac{u}{1+\tilde{r}})^U(\tfrac{d}{1+\tilde{r}})^{N-U}$$

mit $U = |\{n \in \{1,\ldots,N\} : \Delta\hat{X}_n = \frac{u}{1+\tilde{r}} - 1\}|$. Offenbar ist U unter Q eine mit Parametern N, q binomialverteilte Zufallsvariable. Ferner gilt $\hat{S}^1_N > K/S^0_N$ genau dann, wenn

$$U > a := \frac{\log(K/S^1_0) - N\log(d)}{\log(u/d)}.$$

Nach Satz 3.3 folgt für den fairen Preis des europäischen Calls:

$$\begin{aligned} \hat{S}^2_0 &= E_Q(\tfrac{Y}{S^0_N}) \\ &= E_Q((\hat{S}^1_N - \tfrac{K}{S^0_N})^+) \\ &= \textstyle\int(\hat{S}^1_N - \frac{K}{S^0_N})1_{(K/S^0_N,\infty)}(\hat{S}^1_N)dQ \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} q^n(1-q)^{N-n}\left(\hat{S}^1_0(\frac{u}{1+\tilde{r}})^n(\frac{d}{1+\tilde{r}})^{N-n} - \frac{K}{S^0_N}\right)1_{(a,\infty)}(n) \\ &= \textstyle\hat{S}^1_0\sum_{n=0}^N \binom{N}{n}\widetilde{q}^k(1-\widetilde{q})^{N-n}1_{(a,\infty)}(n) - \frac{K}{S^0_N}\sum_{n=0}^N\binom{N}{n}q^n(1-q)^{N-n}1_{(a,\infty)}(n) \\ &= \hat{S}^1_0 b(N,\widetilde{q})((a,\infty)) - \tfrac{K}{S^0_N}b(N,q)((a,\infty)) \\ &= \hat{S}^1_0 b(N,1-\widetilde{q})((-\infty,N-a]) - \tfrac{K}{S^0_N}b(N,1-q)((-\infty,N-a]), \end{aligned}$$

wobei $b(N,p)$ die Binomialverteilung mit Parametern N,p bezeichnet und

$$\widetilde{q} := \frac{u}{1+\tilde{r}}q = \frac{u(1+\tilde{r}-d)}{(1+\tilde{r})(u-d)}.$$

Analog ergibt sich

$$\hat{S}^2_n = E_Q(\tfrac{Y}{S^0_N}|\mathscr{F}_n) = \hat{S}^1_n b(N-n, 1-\widetilde{q})((-\infty, a_n]) - \tfrac{K}{S^0_N} b(N-n, 1-q)((-\infty, a_n])$$

für $n = 0, \dots, N$, wobei

$$a_n := \frac{\log(S^1_n/K) - (N-n)\log(d)}{\log(u/d)}.$$

Für den undiskontierten, fairen Preisprozess der Option ergibt sich also

$$S^2_n = S^1_n b(N-n, 1-\widetilde{q})((-\infty, a_n]) - K\tfrac{S^0_n}{S^0_N} b(N-n, 1-q)((-\infty, a_n]). \tag{3.1}$$

Zur Berechnung der Duplikationsstrategie schreiben wir $S^2_n = C(S^1_n, n)$ mit einer Funktion $C : \mathbb{R}_+ \times \{0, \dots, N\} \to \mathbb{R}_+$, deren Gestalt sich sofort aus Gleichung (3.1) ergibt. Sei $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$ eine Hedgingstrategie des Calls durch Handel von (S^0, S^1), d. h. $V_N(\varphi) = (S^1_N - K)^+ = S^2_N$. Für den diskontierten Wertprozess gilt dann $\hat{V}(\varphi) = \hat{S}^2$ und somit $\Delta\hat{S}^2_n = \varphi^1_n \Delta\hat{S}^1_n$. Im Falle eines steigenden Aktienkurses erhalten wir daraus

$$\tfrac{1}{S^0_n}C(S^1_{n-1}u, n) - \tfrac{1}{S^0_{n-1}}C(S^1_{n-1}, n-1) = \varphi^1_n \hat{S}^1_{n-1}(\tfrac{u}{1+\tilde{r}} - 1),$$

für fallenden Kurs entsprechend

$$\tfrac{1}{S^0_n}C(S^1_{n-1}d, n) - \tfrac{1}{S^0_{n-1}}C(S^1_{n-1}, n-1) = \varphi^1_n \hat{S}^1_{n-1}(\tfrac{d}{1+\tilde{r}} - 1).$$

Subtrahieren und Auflösen nach der Handelsstrategie ergibt für den Aktienanteil in der Hedgingstrategie des Calls:

$$\varphi^1_n = \frac{C(S^1_{n-1}u, n) - C(S^1_{n-1}d, n)}{S^1_{n-1}(u-d)}.$$

Den europäischen Put behandelt man analog oder mit Hilfe der *Call-Put-Parität* (vgl. Aufgabe 9 auf Blatt 3). Am Fälligkeitsdatum N gilt $(S^1_N - K)^+ - (K - S^1_N)^+ = S^1_N - K$. Der faire Preis der zufälligen Auszahlung auf der rechten Seite beträgt zum Zeitpunkt n gerade $S^1_n - KS^0_n/S^0_N$, wie in 3.3.1 gezeigt wurde. Aus Arbitragegründen muß also für den Call-Preis S^2_n und den Put-Preis S^3_n gelten: $S^2_n - S^3_n = S^1_n - KS^0_n/S^0_N$ für $n \in \{0, \dots, N\}$. Man erhält schließlich

$$S^3_n = K\tfrac{S^0_n}{S^0_N} b(N-n, 1-q)((-\infty, b_n]) - S^1_n b(N-n, 1-\widetilde{q})((-\infty, b_n])$$

als fairen Put-Preis zum Zeitpunkt n, wobei

$$b_n := \frac{\log(K/S^1_n) - (N-n)\log(d)}{\log(u/d)}.$$

3.4 Amerikanische Optionen

In diesem Abschnitt kommen wir auf amerikanische Optionen zu sprechen. Diese passen strenggenommen nicht in den Rahmen der entwickelten Theorie, da sie nicht wie europäische durch eine einzige Zufallsvarible darstellbar sind. Wir verwenden daher den zentralen Begriff *Arbitrage* sinngemäß als risikolosen Gewinn im Rahmen der gegebenen Handlungsmöglichkeiten, ohne ihn exakt zu definieren.

Mathematisch ist eine **amerikanische Option** durch ein diskretes Semimartingal X definiert. Dabei steht X_n für die Auszahlung, die man bei Ausüben der Option zum Zeitpunkt n bekommt.

Bemerkung. Betrachtet sei ein Markt, an dem sowohl eine amerkanische Option mit Ausübungsprozess X als auch eine europäische Option mit Endauszahlung X_N gehandelt werden. Wenn dieser Markt im anschaulichen Sinne arbitragefrei ist, dann muss die amerikanische Option zu jedem Zeitpunkt mindestens so teuer wie die europäische sein. Andernfalls kauft man die billige amerikanische Option und verkauft gleichzeitig die teurere europäische. Den Differenzbetrag investiert man z. B. in den Numeraire. Am Endzeitpunkt N gleichen sich die Auszahlung X_N und die Verpflichtung $-X_N$ der beiden Optionen aus, und es verbleibt die Anlage im Numeraire als risikoloser Gewinn.

Der folgende Satz zeigt, dass das Recht, eine Call-Option vorzeitig ausüben zu dürfen, zu keiner Wertsteigerung des Derivats führt.

Satz 3.10 *In einem Markt $S = (S^0, S^1, S^2, S^3)$ seien S^2, S^3 die Preisprozesse eines europäischen und eines amerikanischen Calls auf S^1 mit Basispreis K und Fälligkeitszeitpunkt N (d. h. $X_N = (S^1_N - K)^+$ ist die Endauszahlung von S^2, und $X = (S^1 - K)^+$ ist der Ausübungsprozess von S^3. Wenn der Numeraire S^0 monoton wachsend ist und der Markt im anschaulichen Sinne arbitragefrei ist, dann gilt $S^2 = S^3$.*

Beweis. Die obige Bemerkung zeigt $S^2 \leq S^3$. Falls $S^2 \geq S^3$ nicht gilt, gibt es einen Zeitpunkt n und eine Menge $A \in \mathscr{F}_n$ mit $P(A) > 0$ und $S^2_n < S^3_n$ auf A. Man konstruiere nun die folgende selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Anfangskapital 0: Bis n wird nicht gehandelt. Bei Eintreten von A^C wird auch danach nicht investiert. Bei Eintreten von A hingegen verkaufe man eine amerikanische Option zum Preis S^3_n, kaufe für einen Teil des Erlöses eine europäische Option und lege den Rest $S^3_n - S^2_n$ in Anteilen des Numeraires an. Falls der Käufer der amerikanischen Option diese nicht vorzeitig ausübt, gleichen sich Auszahlung $(S^1_N - K)^+$ und Zahlungsverpflichtung $-(S^1_N - K)^+$ der beiden Optionen aus. In diesem Fall verbleibt ein Gewinn aus der Anlage im Numeraire.

Was passiert, wenn der Stillhalter der amerikanischen Option diese zu einem Zeitpunkt $m < N$ ausübt? Er erhält dann von uns den Erlös $(S^1_m - K)^+ \leq S^1_m - K$, den wir durch Leerverkauf eines Anteils S^1 zum Preis S^1_m finanzieren. Den verbleibenden Betrag K legen wir im Numeraire an. Zum Zeitpunkt N haben diese beiden Anlagen den Wert $-S^1 + KS^0_N/S^0_m > S^1 - K$. Dieser möglicherweise negative Betrag wird vollständig durch die fällige europäische Option $S_N^2 = (S_N^1 - K)^+$ kompensiert. Wie im Fall ohne vorzeitiges Ausüben verbleibt uns ein risikoloser Gewinn aud der Anlage zum Zeitpunkt n. Wir erhalten somit einen Widerspruch zur Arbitragefreiheit. $\square$

Falls der Numeraireprozess S^0 konstant ist, gilt die Aussage von Satz 3.10 auch für Put-Optionen.

Der Ausübungszeitpunkt einer amerikanischen Option kann als eine Stoppzeit aufgefasst werden, die möglichst optimal gewählt werden sollte. Insofern führen amerikanische Optionen auf ein Problem *optimalen Stoppens*. Der folgende Satz zeigt, dass auch Snellsche Hüllen eng mit Stoppproblemen zusammenhängen, wo es darum geht, eine erwartete Auszahlung $E(X_\tau)$ über alle Stoppzeiten τ zu maximieren. Die in gewissem Sinne früheste und späteste optimale Stoppzeit τ_f und τ_s sind ebenfalls im Satz angegeben.

Definition 3.11 Sei X ein diskretes Semimartingal mit $E(|X_n|) < \infty$ für $n = 0, \dots, N$. Unter der **Snellschen Hülle** von X versteht man das durch $U_N := X_N$ und

$$U_n := \sup\{X_n, E(U_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}$$

für $n = N-1, \dots, 0$ rekursiv definierte diskrete Semimartingal.

Satz 3.12 *Für die Snellsche Hülle eines diskreten Semimartingals X gelten:*

1. *U ist das kleinste Supermartingal mit $U \geq X$.*

2. $$U_n = \sup_{\tau \in \mathscr{T}_n} E(X_\tau|\mathscr{F}_n) = E(X_{\tau_f}|\mathscr{F}_n) = E(X_{\tau_s}|\mathscr{F}_n)$$

   für $n = 0, \dots, N$, wobei $\mathscr{T}_n$ die Menge der $\{n, n+1, \dots, N\}$-wertigen Stoppzeiten bezeichne und

   $$\begin{aligned} \tau_f &:= \inf\{m \geq n : U_m = X_m\}, \\ \tau_s &:= \inf\{m \geq n : X_m > E(U_{m+1}|\mathscr{F}_m)\} \wedge N. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Wir zeigen induktiv $E(|U_n|) < \infty$ und $U_{n-1} \geq E(U_n|\mathscr{F}_{n-1})$ für $n = N, \dots, 0$, woraus die Supermartingaleigenschaft von U folgt. Für $n = N$ ist $U_n = X_N$ integrierbar. Die Ungleichung ist offensichtlich. Für $n < N$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$E(|U_n|) \leq E(|X_n| + |E(U_{n+1}|\mathscr{F}_n)|) \leq E(|X_n|) + E(|U_{n+1}|) < \infty.$$

Die Supermartingalungleichung ergibt sich wieder direkt aus der Definition.

Für die Minimalität betrachten wir ein weiteres Supermartingal mit $V \geq X$. Wir zeigen $V_n \geq U_n$ durch Induktion nach $n = N, \dots, 0$. Für $n = N$ ist nichts zu zeigen. Für $n < N$ gilt $V_n \geq X_n$ und nach Induktionsvoraussetzung $V_n \geq E(V_{n+1}|\mathscr{F}_n) \geq E(U_{n+1}|\mathscr{F}_n)$, also auch $V_n \geq U_n$.

2. Zunächst einmal gilt für jede Stoppzeit $\tau \in \mathscr{T}_n$

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_n) \leq E(U_\tau|\mathscr{F}_n) = E(U_N^\tau|\mathscr{F}_n) \leq U_n^\tau = U_n,$$

da U^τ nach Lemma 1.20 ein Supermartigal ist. Wegen $\tau_f, \tau_s \in \mathscr{T}_n$ bleibt also nur noch zu zeigen, dass $U_n = E(X_{\tau_f}|\mathscr{F}_n) = E(X_{\tau_s}|\mathscr{F}_n)$.

Wir zeigen induktiv, dass $E(U_{\tau_f \vee m}|\mathscr{F}_m) = U_m$ für $m = N, \dots, n$. Für $m = N$ ist nichts zu zeigen. Für $m < N$ sei $A := \{\tau_f \leq m\} \in \mathscr{F}_m$. Zunächst ist $E(1_A U_{\tau_f \vee m}|\mathscr{F}_m) = E(1_A U_m|\mathscr{F}_m) = 1_A U_m$. Ferner gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
E(1_{A^C} U_{\tau_f \vee m}|\mathscr{F}_m) &= E(1_{A^C} U_{\tau_f \vee (m+1)}|\mathscr{F}_m) \\
&= 1_{A^C} E(E(U_{\tau_f \vee (m+1)}|\mathscr{F}_{m+1})|\mathscr{F}_m) \\
&= 1_{A^C} E(U_{m+1}|\mathscr{F}_m) \\
&= 1_{A^C} U_m,
\end{aligned}$$

da $X_m \leq E(U_{m+1}|\mathscr{F}_m)$ auf A^C.

Für $m = n$ folgt $U_n = E(U_{\tau_f}|\mathscr{F}_n) = E(X_{\tau_f}|\mathscr{F}_n)$. Die Behauptung für τ_s zeigt man analog. □

Wir betrachten nun einen vollständigen, arbitragefreien Markt $(S^0, \dots, S^d)$ mit zugehörigem äquivalenten Martingalmaß Q. Ferner sei S^{d+1} der Preisprozess einer amerikanischen Option mit Auszahlungsprozess X. Das folgende Resultat zeigt, dass sich in vollständigen Märkten auch für amerikanische Optionen ein eindeutiger Preis ergibt, wenn man in diesem Rahmen sinngemäß mit Arbitragefreiheit argumentiert. Statt dem durch die Endauszahlung erzeugten Q-Martingal erhält man als Preisprozess hier das minimale Q-Supermartingal, das den Auszahlungsprozess dominiert.

Satz 3.13 *Wenn der Markt im anschaulichen Sinne arbitragefrei ist, ist der diskontierte Derivatpreisprozess $\hat{S}^{d+1}$ die Q-Snellsche Hülle von $\hat{X} := \frac{X}{S^0}$.*

Beweis. Wir bezeichnen die Q-Snellsche Hülle von $\hat{X}$ mit U.

Falls $\hat{S}^{d+1} \geq U$ nicht gilt, gibt es einen Zeitpunkt n und eine Menge $A \in \mathscr{F}_n$ mit $P(A) > 0$ und $\hat{S}^{d+1} < U$ auf A. Man konstruiere nun die folgende selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Anfangskapital 0: Bis n wird nicht gehandelt. Bei Eintreten von A^C wird auch danach nicht investiert. Bei Eintreten von A hingegen kaufe man zur Zeit n eine amerikanische Option für den Preis S_n^{d+1}. Diesen Kauf finanziert man durch Leerverkauf der Duplikationsstrategie der diskontierten Auszahlung $\hat{X}_{\tau_f}$ zum Preis $E_Q(\hat{X}_{\tau_f}|\mathscr{F}_n) = U_n S_n^0$. Die verbleibende Differenz $(U_n - \hat{S}_n^{d+1})S_n^0$ lege man in Anteilen des Numeraires an.

Zum Zeitpunkt τ_f übt man die Option aus und erhält dafür X_{τ_f} als Erlös. Dieser Betrag reicht gerade aus, um die obige Duplikationsstrategie aufzulösen. Es verbleibt einem ein risikoloser Gewinn aus der Anlage im Numeraire im Widerspruch zur Arbitragefreiheit.

Falls andererseits $\hat{S}^{d+1} \leq U$ nicht gilt, dann gibt es einen Zeitpunkt n und eine Menge $B \in \mathscr{F}_n$ mit $P(B) > 0$ und $\hat{S}^{d+1} > U$ auf B. Auch in diesem Fall kann man einen risikolosen Gewinn erzielen. Nach Satz 1.16 und der folgenden Bemerkung lässt sich U in der

Form $U = M + A$ mit einem Martingal M und einem monoton fallenden, vorhersehbaren Prozess A mit $A_0 = 0$ schreiben.

Wiederum handelt man nicht bis n und auch nicht bei Eintreten von B^C. Bei Eintreten von B hingegen verkaufe man eine amerikanische Option zum Preis S_n^{d+1}. Ein Teil des Erlöses wird zum Kauf der Duplikationsstratgie der diskontirten Auszahlung $M_N + A_n$ verwendet. Deren diskontierter Marktpreis zum Zeitpunkt n ist $E_Q(M_N + A_n|\mathscr{F}_n) = M_n + A_n = U_n$. Es verbleibt also ein Rest $(\hat{S}_n^{d+1} - U_n)S_n^0$ zur Anlage im Numeraire. Wenn der Stillhalter die Option zum Zeitpunkt m ausübt, erhält er von uns die Prämie X_m. Diese können wir vollständig durch Verkauf der obigen Duplikationsstrategie finanzieren, deren aktueller diskontierter Wert $M_m + A_n \geq M_m + A_m = U_m \geq \hat{X}_m$ ist. Auch in diesem Fall verbleibt uns die Anlage im Numeraire als risikoloser Gewinn. □

Die Tatsache, dass $\hat{S}^{d+1}$ kein Q-Martingal sein muss, widerspricht übrigens nicht der Arbitragefreiheit, wie es vielleicht im Hinblick auf den ersten Fundamentalsatz 2.9 scheint. Da man als Stillhalter der Option stets damit rechnen muss, dass der Inhaber die Option ausübt, lassen sich negative Mengen der Option nur eingeschränkt halten. Daher gilt z. B. Lemma 2.8 nicht für amerikanische Optionen.

Selbst im einfachen Binomialmodell erhält man für amerikanische Put-Optionen keinen expliziten Ausdruck mehr für den Wert, aber immerhin noch eine rekursive Formel. Da die Preise von europäischem und amerikanischem Call übereinstimmen, muss dieser Fall nicht erneut betrachtet werden.

Beispiel 3.14 Im Binomialmodell aus Abschnitt 3.3.3 sei S^2 der faire Preisprozess einer amerikanischen Put-Option auf S^1 mit Basispreis $K \in \mathbb{R}$, d. h. mit Auszahlungsprozess $Y = (K - S^1)^+$. Wir zeigen, dass es konvexe, monoton fallende Funktionen $g_0 \dots, g_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart gibt, dass der diskontierte Preis die Form $\hat{S}_n^2 = g_n(\hat{S}_n^1)$ hat. g_n ist rekursiv gegeben durch $g_N = (K/S_N^0 - x)^+$,

$$g_n(x) = \max\left((\tfrac{K}{S_n^0} - x)^+, qg_{n+1}(x\tfrac{u}{1+\tilde{r}}) + (1-q)g_{n+1}(x\tfrac{d}{1+\tilde{r}})\right).$$

Ferner gibt es ein $x_n \in [0, K/S_n^0]$ derart, dass

$$(\tfrac{K}{S_n^0} - x)^+ > qg_{n+1}(x\tfrac{u}{1+\tilde{r}}) + (1-q)g_{n+1}(x\tfrac{d}{1+\tilde{r}}) \quad \Longleftrightarrow \quad x < x_n.$$

Anschaulich bedeutet das, dass man im Fall $\hat{S}_n^1 < x_n$ die Option unbedingt ausüben sollte, da das Vermögen auf andere Weise besser angelegt ist.

Den Beweis dieser Aussagen führen wir durch Induktion nach $n = N, \dots, 0$, wobei wir als zusätzliche Behauptung mitbeweisen, dass $g_n = (K/S_n^0 - x)^+$ für $x < \frac{K}{S_n^0}(\frac{1+\tilde{r}}{u})^{N-n}$. Für $n = N$ gilt $\hat{S}_N^2 = (K/S_N^0 - \hat{S}_N^1)^+ = g_N(\hat{S}_N^1)$ wie gewünscht.

Für den Induktionsschritt von $n+1$ nach n erhält man nach Satz 3.13 und Lemma 0.7

$$\begin{aligned}\hat{S}_n^2 &= \max\left((\tfrac{K}{S_n^0} - \hat{S}_n^1)^+, E_Q(\hat{S}_{n+1}^2|\mathscr{F}_n)\right)\\ &= \max\left((\tfrac{K}{S_n^0} - \hat{S}_n^1)^+, E_Q(g_{n+1}(\hat{S}_n^1(1+\Delta\hat{X}_{n+1}))|\mathscr{F}_n)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left((\tfrac{K}{S_n^0} - \hat{S}_n^1)^+, q g_{n+1}(\hat{S}_n^1 \tfrac{u}{1+\tilde{r}}) + (1-q) g_{n+1}(\hat{S}_n^1 \tfrac{d}{1+\tilde{r}}) \right) \\
&= g_n(\hat{S}_n^1).
\end{aligned}
$$

Da nichtnegative Linearkombinationen und Maxima von monoton fallenden, konvexen Funktionen wieder monoton fallend und konvex sind, besitzen die g_n diese Eigenschaften.

Zum Nachweis der Zusatzbehauptung beachte man, dass im Falle $x < \frac{K}{S_n^0}(\frac{1+\tilde{r}}{u})^{N-n}$ auch $x\frac{u}{1+\tilde{r}} < \frac{K}{S_n^0}(\frac{1+\tilde{r}}{u})^{N-(n+1)}$ und somit nach Induktionsvoraussetzung

$$
\begin{aligned}
q g_{n+1}(x\tfrac{u}{1+\tilde{r}}) + (1-q) g_{n+1}(x\tfrac{d}{1+\tilde{r}}) &= q(\tfrac{K}{S_n^0} - x\tfrac{u}{1+\tilde{r}})^+ + (1-q)(\tfrac{K}{S_n^0} - x\tfrac{d}{1+\tilde{r}})^+ \\
&= \tfrac{K}{S_n^0} - x\tfrac{uq+d(1-q)}{1+\tilde{r}} = (\tfrac{K}{S_n^0} - x)^+
\end{aligned}
$$

gelten. Sei nun

$$
x_n := \sup\{x \in \mathbb{R} : (\tfrac{K}{S_n^0} - x)^+ > h(x)\}
$$

mit $h(x) := q g_{n+1}(x\frac{u}{1+\tilde{r}}) + (1-q) g_{n+1}(x\frac{d}{1+\tilde{r}})$. Dann ist $\frac{K}{S_n^0}(\frac{1+\tilde{r}}{u})^{N-n} \leq x_n \leq \frac{K}{S_n^0}$, denn $\{x \in \mathbb{R} : (\frac{K}{S_n^0} - x)^+ > h(x)\} \subset (-\infty, \frac{K}{S_n^0})$. Für $x \in [x_n, \frac{K}{S_n^0})$gilt wegen der Konvexität von h offenbar $(\frac{K}{S_n^0} - x)^+ \leq h(x)$.

Kapitel 4

Varianz-optimales Hedgen

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass sich Derivate unter gewissen Bedingungen perfekt hedgen lassen. Leider sind diese selbst für Standardoptionen wie z. B. europäische Calls nur selten gegeben. Wenn man wesentlich über das in Abschnitt 3.3.3 behandelte Binomialmodell hinausgeht, lassen sich diese Auszahlungen in aller Regel nicht mehr duplizieren, so dass der Bewertung und Absicherung mit Arbitrageargumenten weitgehend der Boden entzogen ist.

Wir haben in Kapitel 3 jedoch auch das Superhedging kennengelernt, das den Gedanken der perfekten Absicherung auf nicht duplizierbare Optionen überträgt. Leider erweist sich das zum Erstellen der billigsten Superhedgingstrategie erforderliche Anfangskapital, also der obere Preis der Option, in konkreten Marktmodellen als unvernünftig hoch. Oft besteht z. B. wie in der einfachen, in Aufgabe 16 auf Blatt 4 betrachteten Situation die billigste Superhedgingstrategie eines beliebigen europäischen Calls darin, die zugrundeliegende Aktie zu kaufen.

In der Literatur wurde eine Reihe von Vorschlägen gemacht, wie man sich im allgemeinen zumindest teilweise gegen das Kursrisiko absichern könnte. Wir stellen hier ansatzweise das Konzept des varianz-optimalen Hedgens vor. Die Idee besteht darin, die zufällige Auszahlung so gut wie möglich durch ein handelbares Portfolio zu approximieren, wenn man sie schon nicht duplizieren kann.

Das allgemeine Marktmodell sei das am Anfang von Kapitel 3 eingeführte. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, dass der diskontierte Wertprozess $\hat{S}$ ein Martingal mit $E(|\hat{S}_N|^2) < \infty$ ist. Dies ist eine recht grobe, aber vielleicht in erster Näherung akzeptable Annahme. Für den allgemeinen Fall lassen sich verwandte, aber im Detail deutlich aufwendigere Resultate zeigen. Ebenso wie in Kapitel 3 sei eine Option X gegeben, deren diskontierte Auszahlung $\hat{X} := X/S_N^0$ hier als quadratisch integrierbar vorausgesetzt wird. Wir arbeiten in diesem Kapitel ausschließlich mit diskontierten Größen. Dies wird in der Notation $\hat{}$ deutlich gemacht.

Die folgende Definition drückt aus, was unter einer besten Approximation verstanden werden soll:

Definition 4.1 Wir nennen φ **varianz-optimale Hedgingstrategie** für X, falls $\varphi = \vartheta$ den erwarteten quadratischen Hedgefehler

$$E\Big((\hat{V}_N(\vartheta) - \hat{X})^2\Big)$$

über alle alle selbstfinanzierenden Strategien ϑ minimiert.

Der erwartete quadratische Hedgefehler ist offenbar nur dann endlich, falls $E((\vartheta \bullet \hat{S}_N)^2) < \infty$. Da $\vartheta \bullet S$ ein lokales Martingal ist, folgt induktiv für $n = N, \dots, 0$ auch $E((\vartheta \bullet \hat{S}_n)^2) < \infty$. Wir betrachten daher im folgenden nur Handelsstrategien, die diese Integrierbarkeitsbedingung erfüllen.

Lemma 4.2 *Der diskontierte Vermögensprozess $\hat{V}(\varphi)$ einer varianz-optimalen Strategie φ ist eindeutig, falls eine solche existiert.*

Beweis. Für eine weitere optimale Strategie $\widetilde{\varphi}$ definiere $\psi := (\varphi + \widetilde{\varphi})/2$. Im Falle $P(\hat{V}_N(\varphi) \neq \hat{V}_N(\widetilde{\varphi})) > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} E\Big((\hat{V}_N(\psi) - \hat{X})^2\Big) &= E\Big((\tfrac{1}{2}(\hat{V}_N(\varphi) - \hat{X}) + \tfrac{1}{2}(\hat{V}_N(\widetilde{\varphi}) - \hat{X}))^2\Big) \\ &< \tfrac{1}{2}E((\hat{V}_N(\varphi) - \hat{X})^2) + \tfrac{1}{2}E((\hat{V}_N(\widetilde{\varphi}) - \hat{X})^2) \\ &= E((\hat{V}_N(\varphi) - \hat{X})^2) \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Optimalität von φ. Somit ist $\hat{V}_N(\varphi) = \hat{V}_N(\widetilde{\varphi})$ fast sicher. (Dies könnte man alternativ auch direkt aus der Eindeutigkeit der Orthogonalprojektion im L^2 ableiten.) Nach Lemma 2.8 stimmen sogar die ganzen Vermögensprozesse überein. □

Funktionalanalytisch formuliert handelt es sich bei dem diskontierten Endwert $\hat{V}_N(\varphi)$ der varianz-optimalen Strategie um die Orthogonalprojektion der diskontierten Auszahlung $\hat{X}$ im Hilbertraum L^2 auf den Unterraum der um eine additive Konstante verschobenen stochastischen Integrale nach $\hat{S}$. Ein zentrales mathematisches Hilfsmittel zur Berechnung varianz-optimaler Hedgingstrategien bildet die folgende Martingalzerlegung.

Satz 4.3 (Galtschuk-Kunita-Watanabe-Zerlegung) *Sei $\hat{V}$ ein Martingal mit $\hat{V}_N \in L^2$. Dann lässt sich $\hat{V}$ in der Form*

$$\hat{V} = \hat{V}_0 + \varphi \bullet \hat{S} + M \tag{4.1}$$

zerlegen, wobei φ ein vorhersehbarer, $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess ist mit $\varphi \bullet \hat{S}_n \in L^2$ für $n = 0, \dots, N$ und M ein zu $\hat{S}$ **orthogonales** *Martingal, d. h. $M\hat{S}^i$ ist ein Martingal für $i = 1, \dots, d$. Die Martingale $\varphi \bullet \hat{S}$ und M sind eindeutig. Der Integrand φ löst die vektorwertige Gleichung*

$$\Delta\langle \hat{V}, \hat{S} \rangle = \varphi^\top \Delta\langle \hat{S}, \hat{S} \rangle,$$

d. h.

$$\Delta\langle \hat{V}, \hat{S}^i \rangle_n = \sum_{j=1}^{d} \varphi_n^j \Delta\langle \hat{S}^j, \hat{S}^i \rangle_n \tag{4.2}$$

für $n = 1, \dots, N$ und $i = 1, \dots, d$.

Beweis. Nach Lemma 2.13 ist die Menge

$$\mathbb{R} + R_N = \{v + \vartheta \bullet \hat{S}_N : v \in \mathbb{R}, \vartheta \text{ vorhersehbar und } \mathbb{R}^d\text{-wertig}\}$$

abgeschlossen bzgl. stochastischer Konvergenz. Somit ist

$$(\mathbb{R} + R_N) \cap L^2 = \{\hat{V}_N(\varphi) : \varphi \text{ selbstfin. Strategie mit } \hat{V}_n(\varphi) \in L^2 \text{ für } n = 0, \dots, N\}$$

ein abgeschlossener Unterraum des L^2. Seien $Y = \hat{V}_N(\varphi) \in L^2$ die Orthogonalprojektion von $\hat{V}_N$ auf diesen Unterraum und U das durch Y erzeugte Martingal, d. h. $U_n = E(Y|\mathscr{F}_n)$. Nach Lemma 1.20 gilt dann $U = \hat{V}(\varphi)$. Setze $M := \hat{V} - U = \hat{V} - \hat{V}(\varphi)$. Als Differenz von Martingalen ist M ebenfalls ein Martingal.

Da Y die Orthogonalprojektion ist, gilt $E((\hat{V}_N - Y)\hat{V}_N(\vartheta)) = 0$ für alle selbstfinanzierenden Strategien ϑ mit $\hat{V}_n(\vartheta) \in L^2$ für $n = 0, \dots, N$. Insbesondere ist $\hat{V}_0 - \hat{V}_0(\varphi) = E(\hat{V}_N - \hat{V}_N(\varphi)) = 0$. (Betrachte dazu die selbstfinanzierende Strategie ϑ mit $\hat{V}_n(\vartheta) = 1$ für alle n.) Wir erhalten somit (4.1).

Seien $n \in \{1, \dots, N\}$ und $A \in \mathscr{F}_{n-1}$. Für den durch

$$\vartheta^i_m = \begin{cases} 1_A & \text{falls } j = i \text{ und } m \geq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definierten vorhersehbaren Prozess ϑ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= E((\hat{V}_N - Y)(\vartheta \bullet \hat{S}^i_N)) \\ &= E(M_N 1_A(\hat{S}^i_N - \hat{S}^i_{n-1})) \\ &= E(M_N 1_A \hat{S}^i_N) - E(E(M_N 1_A \hat{S}^i_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})) \\ &= E(M_N 1_A \hat{S}^i_N) - E(E(M_N|\mathscr{F}_{n-1}) 1_A \hat{S}^i_{n-1}) \\ &= E(1_A M_N \hat{S}^i_N) - E(1_A M_{n-1} \hat{S}^i_{n-1}), \end{aligned}$$

d. h. $M\hat{S}^i$ ist ein Martingal.

Da $[M, \hat{S}^i] = M\hat{S}^i - M_0\hat{S}^i_0 - M_- \bullet \hat{S}^i - \hat{S}^i_- \bullet M$ ein lokales Martingal und daher wegen seiner Integrierbarkeit sogar ein Martingal ist, folgt $\langle M, \hat{S}\rangle = 0$. Aus (4.1) ergibt sich $\langle \hat{V}, \hat{S}^i\rangle = \varphi \bullet \langle \hat{S}, \hat{S}^i\rangle + \langle M, \hat{S}^i\rangle = \varphi \bullet \langle \hat{S}, \hat{S}^i\rangle$, woraus (4.2) folgt.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\hat{V} = \hat{V}_0 + \widetilde{\varphi} \bullet \hat{S} + \widetilde{M}$ eine weitere solche Zerlegung. Dann ist $\langle M - \widetilde{M}, M - \widetilde{M}\rangle = \langle (\widetilde{\varphi} - \varphi) \bullet S, M - \widetilde{M}\rangle = (\widetilde{\varphi} - \varphi) \bullet \langle S, M - \widetilde{M}\rangle = 0$ und somit $M - \widetilde{M} = 0$ (z. B. wegen der Bemerkung nach Definition 1.19). □

Korollar 4.4 *Sei*

$$\hat{V} = \hat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet \hat{S} + M$$

die Galtschuk-Kunita-Watanabe-Zerlegung des Martingals $\hat{V}_n := E(\hat{X}|\mathscr{F}_n)$ *bezüglich* $\hat{S} = (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)$. *Dann ist die im Sinne von Lemma 2.6 zu* $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *und zum diskontierten Anfangskapital* $\hat{V}_0$ *gehörende selbstfinanzierende Strategie* φ *eine varianz-optimale Hedgingstrategie für* X. *Die Strategie* φ *löst die Gleichung*

$$\Delta\langle \hat{V}, \hat{S}\rangle = \varphi^\top \Delta\langle \hat{S}, \hat{S}\rangle,$$

im Sinne von (4.2). Der erwartete quadratische Hedgefehler ist

$$E((\hat{V}_N(\varphi) - \hat{X})^2) = E\Big(\langle \hat{V} - \varphi \bullet \hat{S}, \hat{V} - \varphi \bullet \hat{S}\rangle_N\Big)\,. \tag{4.3}$$

Beweis. Im Beweis von Satz 4.3 wurde gezeigt, dass $\hat{V}_N(\varphi) = \hat{V}_0 + \varphi \bullet \hat{S}_N$ die Orthogonalprojektion von $\hat{X}$ auf $\{\hat{V}_N(\vartheta) \in L^2 : \vartheta \text{ selbstfinanzierende Strategie}\}$ ist. Somit ist φ offenbar varianz-optimal.

Da M ein Martingal ist, ist

$$M^2 - \langle M, M\rangle = 2M_- \bullet M + [M, M] - \langle M, M\rangle$$

ein lokales Martingal, also wegen der Integrierbarkeit sogar ein Martingal. Somit erhalten wir $E(M_N^2) = E(\langle M, M\rangle_N)$, woraus wegen (4.1) Gleichung (4.3) folgt. □

Im Falle $d = 1$ erhält man die varianz-optimale Hedgingstrategie also als

$$\varphi_n^1 = \frac{\Delta\langle \hat{V}, \hat{S}^1\rangle_n}{\Delta\langle \hat{S}^1, \hat{S}^1\rangle_n}.$$

Der Numeraireanteil φ^0 ergibt sich wie immer aus der Selbstfinanzierungsbedingung.

Kapitel 5

Portfolio-Optimierung

Als Laie könnte man meinen, in der Finanzmathematik gehe es vorrangig darum, Strategien zu entwickeln, wie man möglichst schnell reich wird. Das ist keineswegs der Fall. Dennoch bildet das Problem, wie man sein Portfolio optimal zusammenstellen soll, durchaus eine der klassischen Fragestellungen. Wir diskutieren in diesem Kapitel als eine der möglichen Varianten die Erwartungsnutzenmaximierung des Endvermögens.

Wie in den Kapiteln zuvor arbeiten wir in einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n=0,\dots,N}, P)$ mit $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ und Endzeitpunkt $N \in \mathbb{N}$. Ferner sei ein arbitragefreier Wertpapierpreisprozess $S = (S^0, \dots, S^d)$ mit positivem Numeraire S^0 gegeben.

Wir betrachten eine Anlegerin, die ihr Endvermögen $V_N(\varphi)$ bei gegebenem Anfangskapital V_0 maximieren möchte. Nun ist $V_N(\varphi)$ aber eine Zufallsvariable, und die Tatsache, ob eine Strategie besser als eine andere abschneidet, hängt davon ab, ob und welche Wertpapiere steigen oder fallen. Man muss sich also zunächst einmal Gedanken machen, was man eigentlich maximieren oder optimieren möchte.

Der vielleicht spontane Gedanke, das mittlere Endvermögen, also den Erwartungswert $E(V_N(\varphi))$ zu maximieren, erweist sich bei näherer Betrachtung als wenig attraktiv. Er übersieht, dass sie meisten Menschen risikoscheu eingestellt sind. Ein solches Kriterium würde eine hochspekulative Anlage einem weitgehend risikolosen Sparbuch vorziehen, auch wenn das Sparbuch nur eine geringfügig kleinere mittlere Rendite abwirft. Man betrachtet daher eher Optimierungskriterien, die sowohl den Wunsch nach hoher erwarteter Rendite als auch die Abneigung gegen mögliche Verluste widerspiegeln.

Ein klassischer Ansatz besteht darin, anstelle des mittleren Endvermögens den mittleren Nutzen $E(u(\hat{V}_N(\varphi)))$ zu maximieren, den einem dieses Vermögen beschert. Dieser Nutzen wird durch eine *Nutzenfunktion* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ausgedrückt, die einem Geldbetrag den Grad an Zufriedenheit zuordnet, den man damit verbindet. Man fordert aus offensichtlichen Gründen, dass diese Funktion monoton wächst. Eine weitere wichtige Eigenschaft bildet die Konvexität. Sie bedeutet anschaulich, dass uns ein zusätzlicher Euro weniger Nutzenzuwachs bringt, als uns ein verlorener Euro an Unglück bereitet. Durch diese Eigenschaft, dass Verluste durch eine konkave Nutzenfunktion überproportional bestraft werden, fließen in das Optimierungsproblem ganz automatisch beide Ziele ein, nämlich der Wille, Gewinne zu erwirtschaften, bei gleichzeitiger Scheu vor dem Risiko. Über die Wahl der Nutzenfunktion lässt sich der Grad der Risikoabneigung steuern. Klassische Nutzenfunktionen sind z. B. die unten betrachteten Potenz- und Logarithmusfunktionen.

Definition 5.1 Jede monoton wachsende, streng konkave Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ bezeichnen wir als **Nutzenfunktion**. Eine selbstfinanzierende Strategie φ mit diskontiertem Anfangskapital $\hat{V}_0$ und $E((u(\hat{V}_N(\varphi)))^-) < \infty$ heißt **erwartungsnutzenoptimal** für u, falls φ die Abbildung $\vartheta \mapsto E(u(\hat{V}_N(\vartheta)))$ über alle solchen Strategien ϑ maximiert.

Ein einfaches Konvexitätsargument zeigt, dass erwartungsnutzenoptimale Strategien im wesentlichen eindeutig sind. Genauer bedeutet dies, dass ihr Wertprozess eindeutig festgelegt ist. Für die konkrete Handelsstrategie muss das, etwa bei Vorliegen redundanter Wertpapiere, nicht gelten.

Lemma 5.2 *Alle erwartungsnutzenoptimalen Strategien φ zur selben Nutzenfunktion u und zum selben Anfangskapital besitzen fast sicher denselben (diskontierten) Wertprozess $\hat{V}(\varphi)$.*

Beweis. Angenommen, es gibt optimale Strategien $\varphi, \widetilde{\varphi}$ mit $P(\hat{V}_N(\varphi) = \hat{V}_N(\widetilde{\varphi})) < 1$. Für $\psi := \frac{1}{2}(\varphi + \widetilde{\varphi})$ gilt dann

$$\begin{aligned} E(u(\hat{V}_N(\psi))) &= E\Big(u(\tfrac{1}{2}\hat{V}_N(\varphi) + \tfrac{1}{2}\hat{V}_N(\widetilde{\varphi}))\Big) \\ &> E\Big(\tfrac{1}{2}u(\hat{V}_N(\varphi)) + \tfrac{1}{2}u(\hat{V}_N(\widetilde{\varphi}))\Big) \\ &= E(u(\hat{V}_N(\varphi))) \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Optimalität von φ.

Somit stimmt das diskontierte Endvermögen aller erwartungsnutzenoptimalen Strategien φ überein. Nach Lemma 2.8 ist der ganze Wertprozess $\hat{V}(\varphi)$ unabhängig von der konkreten optimalen Strategie. □

Die Berechnung von erwartungsnutzenoptimalen Strategien ist im allgemeinen nicht einfach, da die Menge der Handelsstrategien sehr hochdimensional ist. Einen klassischen Ansatz bildet die *dynamische Programmierung*, bei der man die optimalen Lösungen mit Hilfe eines rekursiven Verfahrens ermittelt, das dem ähnelt, das wir bei der Berechnung des fairen Preises eines amerikanischen Puts im Cox-Ross-Rubinstein-Modell angewandt haben. Wir verwenden hier stattdessen Martingalmethoden, um in konkreten Fällen optimale Lösungen zu bestimmen.

Das Herzstück bildet das folgende hinreichende Kriterium für Optimalität. Es liefert zwar keine erwartungsnutzenoptimale Strategie, erlaubt aber den Nachweis, dass eine gegebene Kandidatenstrategie tatsächlich optimal ist.

Satz 5.3 *Seien u eine auf $u^{-1}(\mathbb{R})$ differenzierbare Nutzenfunktion und φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit diskontiertem Anfangskapital $\hat{V}_0$ und $E((u(\hat{V}_N(\varphi)))^-) < \infty$. Wenn das durch die Dichte*

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{u'(\hat{V}_N(\varphi))}{E(u'(\hat{V}_N(\varphi)))}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß Q ein äquivalentes Martingalmaß ist, dann ist φ erwartungsnutzenoptimal für u.

Beweis. O. B. d. A. ist $E((u(\hat{V}_N(\varphi)))^+) < \infty$, da φ sonst unendlichen Erwartungsnutzen besitzt. Sei ψ eine weitere selbstfinanzierende Handelsstrategie zum selben Anfangskapital und mit $E((u(\hat{V}_N(\psi)))^-) < \infty$. Wegen der Konvexität von u gilt

$$\begin{aligned} u(\hat{V}_N(\psi)) - u(\hat{V}_N(\varphi)) &\leq u'(\hat{V}_N(\varphi))(\hat{V}_N(\psi) - \hat{V}_N(\varphi)) \\ &= E(u'(\hat{V}_N(\varphi)))Z_N((\psi - \varphi) \bullet \hat{S}_N), \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei Z den Dichteprozess von Q bzgl. P bezeichnet. Da $(\psi - \varphi) \bullet \hat{S}$ nach Lemma 1.20 ein Q-lokales Martingal ist, ist $Z((\psi - \varphi) \bullet \hat{S})$ nach Lemma 1.26 ein P-lokales Martingal. Die linke Seite von (5.1) hat einen integrierbaren Negativteil, also kann auf beiden Seiten der Erwartungswert berechnet werden. Induktiv erhält man für $n = N-1, \dots, 0$:

$$E(Z_N((\psi - \varphi) \bullet \hat{S}_N)|\mathscr{F}_n) = E(Z_{n+1}((\psi - \varphi) \bullet \hat{S}_{n+1})|\mathscr{F}_n) = Z_n((\psi - \varphi) \bullet \hat{S}_n)$$

und somit $E(Z_N((\psi - \varphi) \bullet \hat{S}_N) = 0$. Mit (5.1) folgt $E(u(\hat{V}_N(\psi))) \leq E(u(\hat{V}_N(\varphi)))$. □

Der vorige Satz zeigt erneut, welch zentrale Rolle äquivalente Martingalmaße in der Finanzmathematik spielen. Ihre Existenz und Eindeutigkeit charakterisierten die Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit von Märkten, und nun treten sie erneut im Zusammenhang mit der Portfolio-Optimierung auf. Man beachte allerdings, dass dieses hinreichende Kriterium nicht notwendig ist (vgl. Aufgabe 24 auf Blatt 6). Dies ist nur für endliche Wahrscheinlichkeitsräume (d. h. mit $|\Omega| < \infty$) allgemein der Fall.

Man kann übrigens zeigen, dass das obige Martingalmaß Q ein in gewissem Sinne duales Minimierungsproblem löst, etwa dass es unter allen Martingalmaßen einen von der Nutzenfunktion abhängigen Abstand zu P minimiert. Auf diesen Zusammenhang soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Für beliebige Marktmodelle ist die Bestimmung der optimalen Strategie im obigen Sinne schwierig, wenn man von der logarithmischen Nutzenfunktion absieht, für die man in sehr allgemeinem Rahmen eine explizite Lösung herleiten kann. Wir beschränken uns daher auf ein zeitlich homogenes Marktmodell, das eine mehrdimensionale Verallgemeinerung des am Ende von Kapitel 2 vorgestellten Modells aus Aktie und festverzinslichem Wertpapier darstellt. Das festverzinsliche Bankkonto sei dabei wie bisher von der Form in (2.2). Analog zu (2.3) seien die Preisprozesse von d riskanten Wertpapieren dargestellt durch

$$S_n^i = S_0^i \exp(X_n^i) = S_0^i \prod_{m=1}^{n} (1 + \Delta \widetilde{X}_m^i) = S_0^i \mathscr{E}(\widetilde{X}^i)_n$$

für $i = 1, \dots, d$ und $n = 0, \dots, N$. Ähnlich wie zuvor seien dabei X bzw. $\widetilde{X}$ $\mathbb{R}^d$-wertige diskrete Semimartingale mit $X_0 = \widetilde{X}_0 = 0$, deren Zuwächse ΔX_n bzw. $\widetilde{\Delta} X_n$ unabhängig von $\mathscr{F}_{n-1}$ sind und deren Verteilung nicht von n abhängt. Der Zusammenhang von X und

$\widetilde{X}$ wird analog zu (2.4) beschrieben durch $\widetilde{\Delta} X^i_n = e^{\Delta X^i_n} - 1$. Für die diskontierten Prozesse ergibt sich

$$\hat{S}^i_n = \hat{S}^i_0 \prod_{m=1}^n (1 + \Delta \hat{X}^i_m) = S^i_0 \mathscr{E}(\hat{X}^i)_n$$

mit $\hat{X}^i_0 = 0$ und $\Delta \hat{X}^i_n = \frac{1+\Delta \widetilde{X}^i_n}{1+\tilde{r}} - 1$. Man beachte, dass die *verschiedenen Wertpapiere* durchaus abhängig sein können, nicht jedoch ihre relativen Wertänderungen zu *verschiedenen Zeitpunkten*.

In diesem Rahmen sollen nun optimale Strategien für Potenz- und Logarithmusfunktionen bestimmt werden. Dazu wird das obige Martingalkriterium verwendet. Die Schwierigkeit besteht vor allem darin, eine geeignete Kandidatenstrategie zu erraten, deren Optimalität man mittels dieses Kriteriums beweisen kann. Dazu macht man einen Ansatz, der darin besteht anzunehmen oder vielmehr zu hoffen, dass die Lösung von einer einfachen, durch wenige Parameter bestimmten Struktur ist. Diese wählt man anschließend so, wie es der Beweis der Optimalität erfordert.

Im obigen, zeitlich homogenen Marktmodell führt der Ansatz zum Ziel, dass die Anteile des Vermögens, die in die verschiedenen riskanten Wertpapiere investiert werden, durch die Zeit hindurch deterministisch und konstant bleiben. Sie sind unten mit dem Vektor γ bezeichnet. Die tatsächliche Anzahl der Wertpapiere ist dann natürlich von den gegenwärtigen Kursen und vom derzeitigen Vermögen abhängig. Der diskontierte Vermögensprozess und der Numeraireanteil φ^0 ergeben sich durch die Selbstfinanzierungsbedingung.

Im Beweis gilt es noch eine Schwierigkeit zu überwinden. Die Kenntnis von dQ/dP im hinreichenden Kriterium reicht im allgemeinen nicht aus, um festzustellen, ob Q ein äquivalentes Martingalmass ist. Dazu benötigt man den ganzen Dichteprozess Z. Auch hier führt wieder ein Ansatz zum Ziel, nämlich zu hoffen, dass die Proportionalität von Z_n zu $u'(\hat{V}_n(\varphi))$ nicht nur für N, sondern auch zu früheren Zeitpunkten gilt, auch wenn sich der Proportionalitätsfaktor durch die Zeit hindurch ändert.

Satz 5.4 *Seien $p \in (0, \infty)$ und u die durch*

$$u(x) := \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p} & \text{für } x > 0 \\ -\infty & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

definierte Nutzenfunktion. Im Falle $p = 1$ ersetze man den obigen undefinierten Ausdruck durch $u(x) = \log(x)$ für $x > 0$. Sei $\gamma \in \mathbb{R}^d$ so gewählt, dass $\gamma^\top \Delta \hat{X}_1 > -1$ fast sicher und

$$E\left(\frac{\Delta \hat{X}_1}{(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_1)^p}\right) = 0. \tag{5.2}$$

Definiere

$$\hat{V}_n := \hat{V}_0 \mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X})_n,$$

$$\varphi^i_n := \frac{\gamma^i}{\hat{S}^i_{n-1}} \hat{V}_{n-1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, d,$$

$$\varphi_n^0 := \hat{V}_{n-1} - (\varphi^1, \dots, \varphi^d)_n^\top (\hat{S}^1, \dots, \hat{S}^d)_{n-1}.$$

Dann ist φ eine erwartungsnutzenoptimale Strategie für u mit diskontiertem Wertprozess $\hat{V}$.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0 + \varphi \bullet \hat{S} &= \hat{V}_0 \left(1 + \textstyle\sum_{i=1}^d (\mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X})_- \frac{\gamma^i}{\hat{S}_-^i} \hat{S}_-^i) \bullet \hat{X}^i\right) \\
&= \hat{V}_0 \left(1 + \mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X})_- \bullet (\gamma^\top \hat{X})\right) \\
&= \hat{V}_0 \mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X}) = \hat{V}
\end{aligned}$$

ist $\hat{V}$ der diskontierte Wertprozess der zu $\hat{V}_0$ und $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ gehörenden selbstfinanzierenden Strategie, deren Numerairekomponente daher wie oben angegeben ist. Definiere

$$\alpha := (E((1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_1)^{-p}))^{1/p}$$

und

$$Z_n := (\alpha^n \mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X})_n)^{-p}$$

für $n = 0, \dots, N$. Aus $E(|\Delta \hat{X}_1|/(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_1)^p) < \infty$ folgt leicht $E(1/(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_1)^p) < \infty$, insbesondere existiert α. Ferner ist

$$E(|u(\hat{V}_N(\varphi))|) = \frac{\hat{V}_0^{1-p}}{1-p} E(\textstyle\prod_{n=1}^N |1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n|^{1-p}) < \infty$$

für $p \neq 1$, da $E(|1+\gamma^\top \Delta \hat{X}_n|^{1-p}) \leq E(\frac{1}{(1+\gamma^\top \Delta \hat{X}_1)^p}) + E(\frac{|\Delta \hat{X}_1|}{(1+\gamma^\top \Delta \hat{X}_1)^p})|\gamma| < \infty$. Für $u = \log$ gilt immerhin noch

$$E((\log(\hat{V}_N(\varphi)))^-) \leq (\log(\hat{V}_0))^- \textstyle\sum_{n=1}^N E((\log(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n))^-) < \infty,$$

da $E((\log(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n))^-) \leq E(\frac{|\Delta \hat{X}_1|}{1+\gamma^\top \Delta \hat{X}_1})|\gamma| < \infty$. Aus

$$Z_n = Z_{n-1} \alpha^{-p} \left(\frac{\mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X})_n}{\mathscr{E}(\gamma^\top \hat{X})_{n-1}}\right)^{-p} = Z_{n-1} \alpha^{-p} (1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n)^{-p}$$

folgt $Z = \mathscr{E}(M)$ mit $M_n := \sum_{m=1}^n ((\alpha(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_m))^{-p} - 1)$. Wegen

$$E(\alpha^{-p}(1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n)^{-p} | \mathscr{F}_{n-1}) = \frac{E((1+\gamma^\top \Delta \hat{X}_n)^{-p} | \mathscr{F}_{n-1})}{E((1+\gamma^\top \Delta \hat{X}_n)^{-p})} = 1$$

sind M somit auch Z lokale Martingale. Da M unabhängige und stationäre Zuwächse hat, sind M und Z nach Lemma 1.25 sogar Martingale. Z ist somit der Dichteprozess des Wahrscheinlichkeitsmaßes $Q \sim P$ mit Dichte Z_N. Nach der Bayesschen Formel (Blatt 2, Aufgabe 2) gilt

$$\begin{aligned}
E_Q(1_A(\Delta \hat{X}_n) | \mathscr{F}_{n-1}) &= E(1_A(\Delta \hat{X}_n) \frac{Z_n}{Z_{n-1}} | \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= E(1_A(\Delta \hat{X}_n) \alpha^{-p} (1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n)^{-p} | \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= E(1_A(\Delta \hat{X}_n) \alpha^{-p} (1 + \gamma^\top \Delta \hat{X}_n)^{-p})
\end{aligned}$$

für $n = 1, \dots, N$ und $A \in \mathscr{B}^d$. Insbesondere ist $\Delta\hat{X}_n$ bezüglich Q unabhängig von $\mathscr{F}_{n-1}$, und $\Delta\hat{X}_1, \dots, \Delta\hat{X}_n$ sind identisch verteilt für $n = 1, \dots, N$. Ebenso folgt

$$\begin{aligned} E_Q(\Delta\hat{X}_n|\mathscr{F}_{n-1}) &= E(\Delta\hat{X}_n\alpha^{-p}(1+\gamma^\top\Delta\hat{X}_n)^{-p}) \\ &= E(\Delta\hat{X}_n(1+\gamma^\top\Delta\hat{X}_n)^{-p})\alpha^{-p} = 0 \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, d$, d. h. $\hat{X}^i$ ist ein Q-lokales Martingal. Folglich ist auch $\hat{S}^i = \hat{S}^i_0\mathscr{E}(\hat{X}^i)$ ein Q-lokales Martingal und nach Lemma 1.25 sogar ein Q-Martingal. Mit Satz 5.3 folgt, dass φ erwartungsnutzenoptimal für u ist. $\square$

Die Bedingung (5.2) entspricht einem System von d Gleichungen mit d Unbekannten $\gamma^1, \dots, \gamma^d$. Auch wenn dieses Gleichungssystem nicht immer eine Lösung besitzen muss, so ist es in konkreten Modellen doch häufig der Fall.

Da die optimale Strategie nur von der Ableitung der Nutzenfunktion abhängt, lässt sich der Logarithmus mit dem Fall $p = 1$ identifizieren, der in der Definition $x \mapsto x^{1-p}/(1-p)$ ausgenommen werden muss. In welcher Beziehung stehen die optimalen Strategien für verschiedene p zueinander? Dies lässt sich am besten im Rahmen einer linearen Näherung untersuchen. Wenn die relativen Kursänderungen $\Delta\hat{X}_n$ klein sind, kann man den Nenner in (5.2) durch $(1+\gamma^\top\Delta\hat{X}_1)^{-p} \approx 1 - p\gamma^\top\Delta\hat{X}_1$ approximieren. In dieser Näherung erhält man anstelle von (5.2) die quadratische Gleichung $E(\Delta\hat{X}_1) \approx pE(\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_1^\top)\gamma$, d. h.

$$\gamma \approx \frac{1}{p}\left(E(\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_1^\top)\right)^{-1} E(\Delta\hat{X}_1), \tag{5.3}$$

falls die Matrix

$$E(\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_1^\top) = \mathrm{Kov}(\Delta\hat{X}_1) + E(\Delta\hat{X}_1)(E(\Delta\hat{X}_1))^\top \approx \mathrm{Kov}(\Delta\hat{X}_1)$$

invertierbar ist. Das Mischungsverhältnis der verschiedenen risikobehafteten Wertpapiere $S^1, \dots, S^d$ im optimalen Portfolio hängt im Rahmen dieser Approximation also nicht vom Risikoaversionsparameter p ab. Dieser steuert nur, wie das Vermögen auf Sparkonto und riskante Wertpapiere verteilt wird. Vor allem im Fall einer einzigen Aktie erkennt man, dass das optimale Portfolio in etwa proportional zur erwarteten Überschussrendite $E(\Delta\hat{X}_1)$ (verglichen mit dem Sparkonto) und antiproportional zur Varianz $\mathrm{Var}(\Delta\hat{X}_1)$ ist. Da diese Varianz in gewisser Weise das der Aktie innewohnende Risiko repräsentiert, erscheint diese Form plausibel.

Es lohnt sich, sich kurz die allgemeine Struktur des optimalen Portfolios aus Satz 5.4 anzusehen. Es fällt auf, dass die Strategie nicht vom Anlagehorizont N abhängt. Dies steht im Widerspruch zum häufig verbreiteten Anlagetipp, dass der Anteil riskanter Wertpapiere wie etwa Aktien bei langfristiger Anlage höher sein sollte, weil man dann besonders von der höheren Rendite profitiere und die Kursschwankungen auf lange Sicht weniger ins Gewicht fallen. Das hier behandelte Optimierungskriterium spiegelt diesen Tipp nicht wider.

Durch Betrachtung der logarithmischen Rendite pro Zeiteinheit $\frac{1}{N}\log(V_N(\varphi)/V_0)$ kann man die Wertentwicklung eines Portfolios φ mit einem festverzinslichen Wertpapier der

Form $S_N^0 = S_0^0 e^{rN}$ vergleichen, für das der entsprechende Ausdruck $\frac{1}{N}\log(S_N^0/S_0^0) = r$ konstant ist. Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn der bislang feste Anlagehorizont N sehr groß gewählt wird. Falls der Grenzwert existiert, bezeichnet

$$\lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \log(V_N(\varphi)/V_0)$$

so etwas wie die *langfristige Rendite pro Zeiteinheit*. Im allgemeinen hängt diese natürlich vom zufälligen Kursverlauf der Wertpapiere ab. Es ist also nicht zu erwarten, dass es eine Handelsstrategie gibt, die sich in dieser Hinsicht unabhängig von der konkreten Realisation als optimal erweist. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass genau das der Fall ist: Auf lange Sicht ist das zur logarithmischen Nutzenfunktion gehörige Portfolio – das ja nach Satz 5.4 nicht vom Anlagehorizont N abhängt – jeder anderen Handelsstrategie mit Wahrscheinlichkeit 1 überlegen.

Satz 5.5 *Es sei φ die Handesstrategie aus Satz 5.4 für $u = \log$ (d. h. für $p = 1$). Für jede andere selbstfinanzierende Handelstrategie ψ zum selben Anfangskapital V_0 und mit $V(\psi) > 0$ gilt dann*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log\left(\frac{V_N(\psi)}{V_0}\right) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log\left(\frac{V_N(\varphi)}{V_0}\right) \quad \textit{fast sicher.}$$

Beweis. Zunächst beachte man, dass sie Strategie φ aus Satz 5.4 nicht vom Anlagehorizont N abhängt. O. B. d. A. sei $\hat{V}_0 = 1$. Wir betrachten zunächst den Markt bis zu einem festen Endzeitpunkt N. Im Beweis von Satz 5.4 wurde gezeigt, dass $Z = 1/\hat{V}(\varphi)$ der Dichteprozess eines äquivalenten Martingalmaßes Q ist (da in diesem Fall $p = 1$, $\alpha = 1$). Nach Lemma 1.20 ist somit $(\hat{V}_n(\psi))_{n=0,\dots,N}$ ein Q-lokales Martingal. Folglich ist $(Z_n\hat{V}_n(\psi))_{n=0,\dots,N}$ nach Lemma 1.26 ein positives P-lokales Martingal, also ein P-Martingal (Lemma 1.14).

Da dies für beliebiges N gilt, ist $M := Z\hat{V}(\psi)$ ein Martingal mit Indexmenge $\mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach einer der Doobschen Martingalungleichungen (siehe [JP04], Theorem 26.1) ist $xP(\sup_{n\geq N} M_n \geq x) \leq E(M_N) = 1$ für $x = e^{\varepsilon N}$. Somit ist

$$\textstyle\sum_{N=1}^\infty P(\sup_{n\geq N} \frac{1}{N}\log(M_n) > \varepsilon) \leq \sum_{N=1}^\infty e^{-\varepsilon N} < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gibt es fast sicher ein (von ω abhängiges) N_0 derart, dass $\sup_{n\geq N} \frac{1}{N}\log(M_n) \leq \varepsilon$ für $N \geq N_0$. Somit ist

$$\limsup_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \log(\hat{V}_N(\psi)) \leq \limsup_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \log(\hat{V}_N(\varphi)).$$

Da $\log(\hat{V}_N(\varphi)) = \sum_{n=1}^N \log(1 + \gamma^\top \Delta\hat{X}_n)$ eine Summe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit integrierbarem Negativteil ist, ist der Ausdruck auf der rechten Seite nach dem starken Gesetz der großen Zahlen fast sicher konvergent, d. h. es kann $\lim$ statt $\limsup$ geschrieben werden und die Behauptung folgt. □

Am Ende dieses Kapitels soll aber ein Punkt nicht verschwiegen werden, der die Anwendbarkeit der Ergebnisse betrifft. Um das optimale Portfolio berechnen zu können, benötigt man eine zuverlässige Schätzung der gemeinsamen Verteilung der Wertpapiere. Wir betrachten dazu den besonders einfachen Fall einer einzelnen Aktie, die zehn Jahre lang beobachtet wurde.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die täglichen logarithmischen Renditen

$$\log(S_n^1/S_{n-1}^1) = \log(1 + \Delta\widetilde{X}^1) = r + \log(1 + \Delta\hat{X}^1)$$

mit Parametern $r+\mu/250$ und $\sigma^2/250$ normalverteilt sind. Der Faktor 250 steht dabei für die Umrechnung von jährlichen in (handels)tägliche Parameter. Wegen (5.3) und $E(\Delta\hat{X}^1) \approx E(\log(1+\Delta\hat{X}^1))$ geht μ in etwa linear in das optimale Portfolio ein. Wir nehmen ferner an, dass die mittlere Rendite im zehnjährigen Beobachtungszeitraum 5% pro Jahr über dem risikolosen Zins lag und dass die Volatilität mit 25% pro Jahr sehr zuverlässig geschätzt wurde. Anders formuliert lauten unsere Schätzungen aufgrund der letzten zehn Jahre $\mu \approx 0{,}05$ und $\sigma \approx 0{,}25$. Wegen der Normalverteilungsannahme erhalten wir für den unbekannten, tatsächlichen Parameter μ ein 95%-Konfidenzintervall von $[-0{,}10; 0{,}20]$. Daran ändert sich auch dann nichts, wenn hochfreqeunte wie z. B. minütliche Kursdaten für den Beobachtungszeitraum vorliegen, sondern erst, wenn deutlich längere Zeitreihen zur Verfügung stehen. Dann aber stellt sich die Frage, ob noch von konstanten Parametern ausgegangen werden kann.

Mit anderen Worten kann selbst unter der stark vereinfachenden Annahme, dass sich der Aktienkurs in den letzten zehn Jahren nach demselben, einfachen und für die Zukunft gültigen Modell verhalten hat, nicht einmal mit großer Sicherheit gesagt werden, ob die Aktie überhaupt eine höhere durchschnittliche Rendite als das Sparkonto besitzt!

Dennoch liefern die obigen Sätze interessante qualitative Einsichten, die auch wertvoll sind, wenn die tatsächlichen Parameter kaum bestimmbar sind. Dazu gehört die schon angesprochene Struktur des Portfolios mit konstanten Anteilen, die vom Anlagehorizont unabhängig sind. Dazu gehört aber auch die Tatsache, dass es auf ganz lange Sicht ein in fast-sicherem Sinne bestes Portfolio gibt.

Kapitel 6

Kohärente Risikomessung

Wer an der Börse Geschäfte wie etwa einen Futureshandel tätigt, die möglicherweise spätere Zahlungsverpflichtungen nach sich ziehen, muß zur teilweisen Absicherung des Risikos ein Guthaben auf einem sogenannten *Marginkonto* hinterlegen. Auch bei anderen risikobehafteten Finanzgeschäften gibt es ähnliche Vorkehrungen, z. B. in Form einer erhöhten Eigenkapitalunterlegung. In der Arbeit [ADEH99] werden formale Kriterien diskutiert, denen ein Marginsystem unabhängig von seiner konkreten Ausgestaltung genügen sollte.

Wir gehen von einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\{0,1\}}, P)$ wie in den früheren Kapiteln aus, jedoch mit nur zwei Zeitpunkten 0, 1 und mit $|\Omega| < \infty$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Ferner sei $S > 0$ ein als risikolos erachtetes Wertpapier mit $S_0 = 1$, etwa die Anlage auf einem Marginkonto bei der Börse. Zufallsvariablen $X \in \mathbb{R}^\Omega =: \mathscr{L}$ fassen wir als Endkapital zum Zeitpunkt 1 infolge eines zum Zeitpunkt 0 getätigten Geschäftes auf. Jeder solchen zum Zeitpunkt 0 eingegangenen Verpflichtung soll eine Sicherheitsleistung $\varrho(X)$ zugeordnet werden, die zum Zeitpunkt 0 auf das Marginkonto überweisen werden muß (bzw. bei negativem Wert sogar abgebucht werden darf), um das Geschäft tätigen zu dürfen. An die Abbildung $X \mapsto \varrho(X)$ stellt man die folgenden einleuchtenden Anforderungen.

Definition 6.1 Eine Abbildung $\varrho : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ heißt **kohärentes Risikomaß**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *(Translationsinvarianz)* Für alle $X \in \mathscr{L}$, $x \in \mathbb{R}$ gilt $\varrho(X + S_1 x) = \varrho(X) - x$.

2. *(Subadditivität)* Für alle $X, Y \in \mathscr{L}$ gilt $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$.

3. *(Positive Homogenität)* Für alle $X \in \mathscr{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt $\varrho(\lambda X) = \lambda \varrho(X)$.

4. *(Monotonie)* Für alle $X, Y \in \mathscr{L}$ mit $X \leq Y$ gilt $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$.

Das erste Axiom bedeutet, dass die nötige Sicherheitsleistung zweier Auszahlungen, die sich um einen festen Betrag unterscheiden, gerade um einen entsprechenden Betrag differiert. Der Vorfaktor S_1 hat mit der Verzinsung auf dem Marginkonto zu tun. Die Sicherheitsleistung wird zum Zeitpunkt 0 getätigt, die Auszahlung erfolgt dagegen zum Zeitpunkt 1.

Da 1 € zum Zeitpunkt 0 gerade S_1 € am Zeitpunkt 1 entsprechen, muss x mit diesem Faktor multipliziert werden.

Das zweite Axiom besagt, dass die für ein Portfolio zu hinterlegende Sicherheit nicht die Summe der Sicherheiten für die Einzelgeschäfte übersteigt. Ferner soll die Sicherheitsleistung gemäß dem dritten Axiom nicht von der Größenordnung der Auszahlung abhängen, sondern linear anwachsen. Dass ferner größere Auszahlungen kleinere Sicherheiten erfordern sollten (viertes Axiom), liegt auf der Hand.

Alternativ könnte man auch die Menge der Verpflichtungen $X \in \mathscr{L}$ betrachten, die ohne zusätzliches Hinterlegen von Eigenkapital eingegangen werden dürfen. Denkbare Kriterien für eine derartige Akzeptanzmenge sind Inhalt der folgenden

Definition 6.2 Eine Menge $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}$ heißt **kohärente Akzeptanzmenge**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $L_+ := \{X \in \mathscr{L} : X \geq 0\} \subset \mathscr{A}$.
2. $L_{--} \cap \mathscr{A} = \varnothing$ für $L_{--} := \{X \in \mathscr{L} : X < 0\}$.
3. $\mathscr{A}$ ist konvex.
4. $\mathscr{A}$ ist ein positiv homogener Kegel, d. h. $\lambda\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Ähnlich wie oben lassen sich diese Kriterien anschaulich deuten: Nichtnegative Auszahlungen sind akzeptabel (1), streng negative inakzeptabel (2), Diversifikation ist wünschenswert (3), und Akzeptabilität ist unabhängig von der Größenordnung (4).

Den Zusammenhang zwischen den beiden obigen Begriffen verdeutlicht der folgende

Satz 6.3

1. *Wenn $\mathscr{A}$ eine kohärente Akzeptanzmenge ist, dann definiert*

$$\varrho_{\mathscr{A}}(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} : X + S_1 x \in \mathscr{A}\}$$

   ein kohärentes Risikomaß $\varrho_{\mathscr{A}}$.

2. *Wenn ϱ ein kohärentes Risikomaß ist, dann ist $\mathscr{A}_\varrho := \{X \in \mathscr{L} : \varrho(X) \leq 0\}$ eine abgeschlossene kohärente Akzeptanzmenge.*
3. *In diesen Fällen gilt $\mathscr{A}_{(\varrho_{\mathscr{A}})} = \overline{\mathscr{A}}$ bzw. $\varrho_{(\mathscr{A}_\varrho)} = \varrho$.*

Beweis.

1. Wegen der ersten zwei Bedingungen ist $\varrho_{\mathscr{A}}(X) \in \mathbb{R}$ für alle $X \in \mathscr{L}$.

   Wegen $\inf\{y \in \mathbb{R} : X + S_1(x+y) \in \mathscr{A}\} = \inf\{y \in \mathbb{R} : X + S_1 y \in \mathscr{A}\} - x$ gilt die Translationsinvarianz.

   Aus den Bedingungen 3 und 4 folgt $(X+Y) + S_1(x+y) \in \mathscr{A}$, falls $X + S_1 x \in \mathscr{A}$ und $Y + S_1 y \in \mathscr{A}$, also gilt die Subadditivität von ϱ.

Falls $\varrho_{\mathscr{A}}(X) < x$, dann gilt wegen Bedingung 4 $\lambda X + \lambda x S_1 \in \mathscr{A}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$, also $\varrho_{\mathscr{A}}(\lambda X) \leq \lambda x$. Andererseits gilt $\lambda X + \lambda x S_1 \notin \mathscr{A}$ und somit $\varrho_{\mathscr{A}}(\lambda X) \geq \lambda x$ für alle $\lambda \in (0,\infty)$, falls $\varrho_{\mathscr{A}}(X) > x$. Zusammen folgt die positive Homogenität von $\varrho_{\mathscr{A}}$.

Seien $X \leq Y$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $X + S_1 x \in \mathscr{A}$. Dann ist

$$Y + S_1 x = X + S_1 x + (Y - X) \in \mathscr{A}$$

wegen Bedingungen 1, 3, 4. Somit folgt die Monotonie von ϱ.

2. Wegen der positiven Homogenität gilt $\varrho(0) = 0$, woraus wegen der Monotonie $\varrho(X) \leq 0$ für alle $X \in L_+$ folgt.

   Sei $X \in L_{--}$. Aus der Monotonie folgt $\varrho(X) \geq \varrho(0) = 0$. Angenommen, es wäre $\varrho(X) = 0$. Es existiert ein $\alpha \in (0,\infty)$ mit $X + S_1\alpha \in L_{--}$. Wegen

$$0 = \varrho(0) \leq \varrho(X + S_1\alpha) = \varrho(X) - \alpha = -\alpha$$

   erhalten wir einen Widerspruch. Somit ist $L_{--} \cap \mathscr{A} = \varnothing$.

   Seien $\lambda \in [0,1]$, $X, Y \in \mathscr{L}$ mit $\varrho(X), \varrho(Y) \leq 0$. Wegen

$$\varrho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \varrho(\lambda X) + \varrho((1-\lambda)Y) = \lambda\varrho(X) + (1-\lambda)\varrho(Y) \leq 0$$

   folgt die Konvexität von $\mathscr{A}_\varrho$.

   Bedingung 4 ergibt sich direkt aus der positiven Homogenität von ϱ.

   Sei $X \in \mathscr{L}$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2}\varrho(X) > 0$. Für $Y \in \mathscr{L}$ mit $Y \leq X + S_1\varepsilon$ gilt dann

$$\varrho(Y) \geq \varrho(X + S_1\varepsilon) = \varrho(X) - \varepsilon > 0,$$

   was die Offenheit von $\mathscr{L} \setminus \mathscr{A}_\varrho$ impliziert.

3. Für $X \in \mathscr{A}$ gilt $\varrho_{\mathscr{A}}(X) \leq 0$ und somit $X \in \mathscr{A}_{(\varrho_{\mathscr{A}})}$. Mit $\mathscr{A}_{(\varrho_{\mathscr{A}})} \subset \overline{\mathscr{A}}$ und der Abgeschlossenheit von $\mathscr{A}_{(\varrho_{\mathscr{A}})}$ folgt $\mathscr{A}_{(\varrho_{\mathscr{A}})} = \overline{\mathscr{A}}$.

   Seien $X \in \mathscr{L}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $\varrho_{(\mathscr{A}_\varrho)}(X) < x$. Dann ist $X + S_1 x \in \mathscr{A}_\varrho$, also $\varrho(X + S_1 x) \leq 0$ und somit $\varrho(X) \leq x$. Folglich ist $\varrho \leq \varrho_{(\mathscr{A}_\varrho)}$. Umgekehrt seien $X \in \mathscr{L}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $\varrho(X) < x$, also $\varrho(X + S_1 x) < 0$ und somit $X + S_1 x \in \mathscr{A}_\varrho$. Dann gilt $\varrho_{(\mathscr{A}_\varrho)}(X + S_1 x) \leq 0$ und daher $\varrho_{(\mathscr{A}_\varrho)}(X) \leq x$. Folglich gilt auch $\varrho_{(\mathscr{A}_\varrho)} \leq \varrho$. □

Kohärente Risikomaße lassen sich mit Hilfe von Mengen sogenannter *verallgemeinerter Szenarien*, d. h. durch Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω charakterisieren. Ganz vage erinnert die Situation an den ersten Fundamentalsatz 2.9, da auch hier ein ökonomisch motivierter Begriff mathematisch mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmaßen ausgerückt wird. Dort waren die Anfangspreise von Wertpapieren Erwartungswerte der diskontierten Endpreise unter einem Martingalmaß. Hier ist die Situation etwas anders: $\varrho(X)$ oder besser

$-\varrho(X)$ sollte nur mit einiger Vorsicht als Preis interpretiert werden. Insbesondere ist die Abbildung ϱ in der Regel nichtlinear. Daher tritt in der Darstellung unten ein Supremum über eine Familie anstelle eines einzelnen Erwartungswertes auf. Zum zweiten haben wir keinen Handel mit Wertpapieren vorgesehen, weswegen hier anstelle von Martingalmaßen einfach Wahrscheinlichkeitsmaße auftreten. Wie beim ersten Fundamentalsatzes spielt aber ein Trennungssatz eine zentrale Rolle für den Beweis.

Satz 6.4 *Eine Abbildung $\varrho : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein kohärentes Risikomaß, wenn es eine Familie $\mathscr{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω gibt mit*

$$\varrho(X) = \sup\{E_Q(-\tfrac{1}{S_1}X) : Q \in \mathscr{P}\} \quad \textit{für alle } X \in \mathscr{L}.$$

Hilfssatz 6.5 *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offene, konvexe Menge und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \notin U$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^\top u < \lambda^\top x$ für alle $x \in U$.*

Beweis. Siehe z. B. [RW98], Theorem 2.39. □

Beweis von von Satz 6.4. $\Leftarrow$: Die Axiome rechnet man einfach nach.

$\Rightarrow$: Definiere $E^*(X) := \varrho(-S_1X)$ für alle $X \in \mathscr{L}$. Dann gilt $E^*(X+x) = E^*(X)+x$, $E^*(X+Y) \leq E^*(X) + E^*(Y)$, $E^*(\lambda X) = \lambda E^*(X)$, $(X \leq Y \Rightarrow E^*(X) \leq E^*(Y))$ für alle $X, Y \in \mathscr{L}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Sei $X_0 \in \mathscr{L}$. Es genügt zu zeigen, dass es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω derart gibt, dass $E_Q(X_0) = E^*(X_0)$ und $E_Q(X) \leq E^*(X)$ für alle $X \in \mathscr{L}$.

Wegen der positiven Homogenität können wir o. B. d. A. annehmen, dass $E^*(X_0) = 1$. Definiere $U := \{X \in \mathscr{L} : E^*(X) < 1\}$. Für $X \in U$, $\varepsilon := 1 - E^*(X)$, $Y < X + \frac{\varepsilon}{2}$ gilt $E^*(Y) < 1$, d. h. U ist offen. Wegen der Subadditivität ist U ferner konvex. Nach Hilfssatz 6.5 existiert eine lineare Abbildung $\gamma : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(X) < \gamma(X_0)$ für alle $X \in U$.

Wegen $0 \in U$ ist $\gamma(X_0) > 0$, also o. B. d. A. $\gamma(X_0) = 1 = E^*(X_0)$. Somit gilt

$$E^*(X) < 1 \Rightarrow \gamma(X) < 1 \tag{6.1}$$

für alle $X \in \mathscr{L}$.

Wegen der Monotonie von E^* gilt $(X \leq 0 \Rightarrow E^*(X) \leq E^*(0) = 0)$ für $X \in \mathscr{L}$, also $\lambda\gamma(X) = -\gamma(-\lambda X) > -1$ für $\lambda \in (0, \infty)$ und nichtnegatives $X \in \mathscr{L}$. Somit ist $\gamma(X) \geq 0$ für alle nichtnegativen $X \in \mathscr{L}$.

Aus (6.1) folgt $\gamma(c) < 1$ für $c \in (-\infty, 1)$, also $\gamma(1) \leq 1$. Umgekehrt ist $E^*(2X_0 - c) = 2 - c < 1$ für $c \in (1, \infty)$, also $2 - c\gamma(1) = \gamma(2X_0 - c) < 1$ und daher $\gamma(1) > \frac{1}{c}$. Zusammen folgt $\gamma(1) = 1$.

Für $X \in \mathscr{L}$, $c \in \mathbb{R}$ mit $E^*(X) < c$ folgt $E^*(X - c + 1) < 1$, also

$$\gamma(X) - c + 1 = \gamma(X - c + 1) < 1,$$

d. h. $\gamma(X) < c$. Somit ist $\gamma(X) \leq E^*(X)$ für alle $X \in \mathscr{L}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $Q : A \mapsto \gamma(1_A)$ hat nun die gewünschten Eigenschaften. □

Eine wichtige Rolle in der Praxis spielt der quantilbasierte *Value-at-risk*:

Definition 6.6 Sei $\alpha \in (0,1)$ gegeben. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\mathrm{VaR}_\alpha : \mathscr{L} \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto -\inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \le S_1 x) > \alpha\}$$

als **Value-at-risk** zum Niveau α.

Der Value-at-risk ist jedoch im allgemeinen kein kohärentes Risikomaß, da die Subadditivitätsbedingung verletzt ist:

Beispiel 6.7 Seien S^1, S^2 unabhängige Wertpapiere mit $P(S_1^i = 1) = 1 - P(S_1^i = 0) = 0{,}009$ für $i = 1, 2$. Ferner sei $S_0^0 = S_1^0 = 1$. Sei nun $X_i := -S_1^i$ für $i = 1, 2$. Dann ist $\mathrm{VaR}_{0{,}01}(X_i) = 0$ für $i = 1, 2$. Wegen $P(S_1^1 = 1$ oder $S_1^2 = 1) = 1 - 0{,}991^2 > 0{,}01$ ist $\mathrm{VaR}_{0{,}01}(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)) \ge \frac{1}{2} > 0 = \frac{1}{2}(\mathrm{VaR}_{0{,}01}(X_1) + \mathrm{VaR}_{0{,}01}(X_2))$.

Eine Alternative zum Value-at-risk bildet die *schlimmste bedingte Erwartung* im Sinne der folgenden

Definition 6.8 Sei $\alpha \in (0,1)$ gegeben. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\mathrm{WCE}_\alpha : \mathscr{L} \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \sup\left\{E(-\tfrac{1}{S_1}X|A) : P(A) > \alpha\right\}$$

als **schlimmste bedingte Erwartung** zum Niveau α.

Lemma 6.9 WCE_α *ist ein kohärentes Risikomaß mit* $\mathrm{VaR}_\alpha \le \mathrm{WCE}_\alpha$.

Beweis. WCE_α ist nach Satz 6.4 ein kohärentes Risikomaß, da $\mathscr{P} := \{P(\cdot|A) : P(A) > \alpha\}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω ist.

Seien $x \in \mathbb{R}$, $A := \{X \le S_1 x\}$ mit $P(A) > \alpha$. Dann ist

$$\mathrm{WCE}_\alpha(X) \ge E(-\tfrac{1}{S_1}X|A) = -\tfrac{S_0^0}{S_1^0}E(X|A) \ge -\tfrac{1}{S_1}S_1 x = -x.$$

Es folgt $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \le \mathrm{WCE}_\alpha(X)$. □

Literaturverzeichnis

[ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.

[JP04] J. Jacod and P. Protter. *Probability Essentials*. Springer, Berlin, second edition, 2004.

[KS01] Yu. Kabanov and C. Stricker. A teachers' note on no-arbitrage criteria. In *Séminaire de Probabilités XXXV*, volume 1755 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 149–152. Springer, Berlin, 2001.

[RW98] T. Rockafellar and R. Wets. *Variational Analysis*. Springer, Berlin, 1998.

[Wer02] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 2002.