Versicherungsmathematik: Personenversicherung

Skript zur Vorlesung im
Winter 2005 an der JKU Linz

Jörn Saß

joern.sass@oeaw.ac.at
RICAM, Austrian Academy of Sciences
Altenbergerstrasse 69, A-4040 Linz

18. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

Dank

Für Durchsicht und Korrektur danke ich Wolfgang Putschögl.

Literatur

Gerber, H.U.: *Lebensversicherungsmathematik*, Springer, 1986

Gerber, H.U.: *Life Insurance Mathematics*, Springer, 2nd ed. 1995

Grundmann, W. und Luderer, B. *Formelsammlung Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse*, Teubner, 2. Aufl. 2003

Isenbart, F. und Münzner, H.: *Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium*, Gabler, 1994

Koller, M.: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*, Springer, 2000

Milbrodt, H., Helbig, M.: *Mathematische Methoden der Personenversicherung*, de Gruyter, 1999

Schachermayer, W., Schmock, U., Kusolitsch, N.: *SKRIPTUM Lebensversicherungsmathematik*, TU Wien, 2003

Wolfsdorf, K.: *Versicherungsmathematik: Teil 1 Personenversicherung*, Teubner, 1997

Aus dem allgemeinen bürgerlichen Gesetzbuch

ABGB § 1288. Wenn jemand die Gefahr des Schadens, welcher einen Andern ohne dessen Verschulden treffen könnte, auf sich nimmt, und ihm gegen einen gewissen Preis den bedungenen Ersatz zu leisten verspricht; so entsteht der Versicherungsvertrag. Der Versicherer haftet dabei für den zufälligen Schaden, und der Versicherte für den versprochenen Preis.

1 Zinsrechnung (Finanzmathematik)

1.1 Zinsen

Definition 1.1.1 Der *Zinssatz* (*die Zinsrate*) i bezeichnet die Zinsen, die in einem Jahr auf ein Kapital 1 gezahlt werden (Kapitaländerung bezogen auf das Anfangskapital). $p = 100i$ bezeichnet den *Zinsfuß* (in %). Wir nehmen $i \geq 0$ an. Für viele Betrachtungen würde $i > -1$ genügen. Ferner

Aufzinsungsfaktor $r := 1 + i$,

Abzinsungs-/Diskontierungsfaktor $v := \frac{1}{r}$,

Diskontrate, vorschüssiger Zinssatz $d := 1 - v$
(Kapitalveränderung pro Jahr bezogen auf das Endkapital).

Es gelten

$$v = \frac{1}{1+i}, \quad d = \frac{i}{1+i} = v\, i, \quad d\, r = i.$$

Mit $K_t = K(t)$ bezeichnen wir ein Kapital zur Zeit $t \in [0, \infty)$. Oft

$$t = n + \frac{k}{m}, \quad n, m, k \in I\!N,$$

n entspricht Jahren, m den betrachteten Perioden pro Jahr, z.B. 2, 4, 12, 360.
Eine *nachschüssige* Zahlung bezieht sich auf den vorangehenden Zeitraum, eine *vorschüssige* Zahlung auf den nachfolgenden Zeitraum.
Für Zinssatz i und nachschüssige Verzinsung von Kapital K_0 über ein Jahr erhalten wir

$$K_1 = K_0 + K_0\, i = (1 + i)K_0 = r\, K_0,$$

umgekehrt

$$K_0 = \frac{1}{r} K_1 = v\, K_1.$$

Bei vorschüssiger Verzinsung mit Zinssatz d und jeweiliger Wiederanlage des zur Zeit 0 ausbezahlten Zinses ergibt sich

$$K_1 = K_0 + d\, K_0 + d^2 K_0 + d^3 K_0 + \ldots = \frac{1}{1-d} K_0 = (1 + i)K_0,$$

d.h. die vorschüssige Verzinsung mit d entspricht der nachschüsigen Verzinsung mit i.

Definition 1.1.2 Für die Verzinsung über mehrere Jahre verwenden wir die *zusammengesetzte* (auch *exponentielle, geometrische*) Verzinsung gegeben durch

$$K_n = K_0 \underbrace{(1+i)\dots(1+i)}_{n\text{-mal}} = K_0(1+i)^n,$$

oder allgemeiner für einen Zeitraum $[0,t]$, $t \geq 0$,

$$K_t = (1+i)^t.$$

Bemerkung 1.1.1 Neben der zusammengesetzten Verzinsung werden teilweise auch die *lineare Verzinsung* $K_t = K_0(1+t\,i)$ oder die *gemischte Verzinsung*

$$K_t = K_0(1+i)^{[t]}(1+(t-[t])i),$$

wobei $[t] = \max\{n \in I\!N_0 \,:\, n \leq t\}$, betrachtet.

Beispiel 1.1.1 Zahlungsstrom mit Zuzahlungen
Ein *Zahlungsstrom* $(K_0, c_1, \dots, c_n)$ bestehend aus Grundkapital K_0 und weiteren Zahlungen c_k zur Zeit k, $k = 1, \dots, n$ wird mit zusammengesetzter Verzinsung verzinst. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} K_n &= (1+i)K_{n-1} + c_n \\ &= (1+i)((1+i)K_{n-2} + c_{n-1}) + c_n \\ &= (1+i)^n K_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} c_k, \end{aligned}$$

umgekehrt ergibt sich bei Abzinsung der *Barwert*

$$v^n K_n = K_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k c_k.$$

Definition 1.1.3 Der *Barwert* eines Zahlungsstromes $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ ist die Summe aller auf den Vertragsbeginn abgezinsten Zahlungen. Ist ein Endzeitpunkt festgelegt, so ist der *Endwert* die Summe aller auf diesen Endzeitpunkt aufgezinsten Zahlungen.
Zwei Zahlungsströme heißen *äquivalent*, wenn ihre Barwerte übereinstimmen (**Äquivalenzprinzip**).

Für das Äquivalenzprinzip kann man jeden beliebigen Zeitpunkt mit entsprechender Auf- und Abzinsung wählen.
Zu dem Zahlungsstrom in Beispiel 1.1.1 ist es äquivalent,

$$\tilde{K}_0 = K_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k c_k$$

zur Zeit 0 ohne weitere Zahlungen anzulegen.

1.2 Unterjährige Verzinsung

Beispiel 1.2.1 Erfolgt statt der jährlichen Verzinsung mit 8% eine vierteljährliche Verzinsung mit 8/4% = 2%, so gilt

$$K_1 = K_0(1+0.02)^4 \approx K_0(1+0.0824)$$

d.h. der *nominellen Zinsrate* von 8% (Kapitalzuwachs je Zeit und Kapitaleinheit) entspricht die *effektive (jährliche)* Zinsrate 8.24%.

Definition 1.2.1 Der *nominelle Zinssatz* i_m für die *Konversionsperiode* $1/m$ ergibt sich aus dem *effektiven* Zinssatz i zu

$$i_m := m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right), \qquad \text{d.h.} \quad \frac{i_m}{m} = \frac{K_0(1+i)^{\frac{1}{m}} - K_0}{K_0}$$

und die *nominelle Diskontrate* d_m zu

$$d_m := m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right) = m\left(1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right), \qquad \text{d.h.} \quad \frac{d_m}{m} = \frac{K_0(1+i)^{\frac{1}{m}} - K_0}{(1+i)^{\frac{1}{m}}K_0}.$$

Umgekehrt gelten $i = (1+i_m/m)^m - 1$, $d = 1-(1-d_m/m)^m$.
Wir können i_m als Funktion der Konversionsperiode betrachten:

$$i_m = f(1/m), \qquad \text{wobei} \quad f:(0,\infty)\to[0,\infty), \quad f(t) = \frac{(1+i)^t - 1}{t} = \frac{r^t - r^0}{t},$$

d.h.

$$\lim_{m\to\infty} i_m = \lim_{t\to 0} f(t) = \frac{d}{dt}r^t\bigg|_{t=0} = \ln(r).$$

Der Grenzwert existiert, da $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ fallend und durch 0 nach unten beschränkt ist ($i \geq 0$), siehe auch Lemma 1.2.1.

Definition 1.2.2 $\delta := \ln(r) = \ln(1+i)$ heißt die *Zinsintensität*.

Es gilt

$$(1+i)^t = r^t = \mathrm{e}^{\delta\, t}.$$

d.h. die jährliche Verzinsung mit i entspricht der *kontinuierlichen Verzinsung* mit δ.

Lemma 1.2.1 *Für $i \geq 0$ gelten*

$$d \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots \leq \delta \leq \ldots \leq i_3 \leq i_2 \leq i$$

sowie

$$\lim_{m\to\infty} d_m = \delta = \lim_{m\to\infty} i_m.$$

Beweis: Wie oben schreibe $i_m = f(1/m)$ mit $f(t) = \frac{r^t-1}{t}$. Unter Benutzung der Definition von δ und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{\delta t} - 1}{t} = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\delta t)^{k-1}}{k!}$$

Da $r \geq 1 + i \geq 1$, ist f monoton wachsend in t, daher i_m monoton fallend in m. Damit existiert auch der Grenzwert, der oben bereits berechnet wurde. Mit analoger Argumentation erhalten wir die entsprechenden Aussagen für d_m. $\square$

Definition 1.2.3 Der *innere* (*effektive*) Zinssatz eines Zahlungsstroms $(c_0, c_{t_1}, c_{t_2}, \ldots)$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$, ist der Zinssatz unter dem der Barwert des Zahlungsstroms 0 wird.

Z.B. für $(K_0, 0, \ldots, 0, -K_0(1+i)^n)$, entsprechend einer Anlage von K_0 über n Jahre, ist i der innere Zinssatz.
Für Zahlungsströme der Form $(c_0, \ldots, c_n)$ mit Zahlungen $c_0, \ldots, c_{n-1} \geq 0$, $c_j > 0$ für mindestens ein $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, und $c_n = -C < 0$ (der Anleger bekommt Geld) ist zu lösen

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} c_k r^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathrm{e}^{\delta(n-k)} =: f(\delta)$$

für $1 + i = \mathrm{e}^{\delta}$. Unter diesen Bedingungen ist f stetig und streng monoton wachsend, d.h. eine eindeutige Lösung existiert. Ist $\sum_{k=0}^{n-1} c_k < C$, so ist $i > 0$.

Bemerkung 1.2.1 Bei kontinuierlicher Verzinsung wird die *Dynamik* der Kapitalentwicklung beschrieben durch die Differentialgleichung

$$K'(t) = K(t)\delta, \quad t \in (0, \infty), \quad K(0) = K_0.$$

Lässt man allgemeiner zeitabhängige stetige Zinsintensität δ und stetige Zuzahlungen c zu, so ergibt sich die Dynamik

$$K'(t) = K(t)\delta(t) + c(t), \quad t \in (0, \infty), \quad K(0) = K_0$$

mit Lösung

$$K_t = K_0 \mathrm{e}^{\int_0^t \delta(s)\, ds} + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t \delta(u)\, du} c(s)\, ds.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel 1.1.1. Beachte, dass der Zinssatz i dann nicht mehr konstant wäre.

1.3 Zeitrenten

Eine *Zeitrente* ist ein Zahlungsstrom zu äquidistanten Zeitpunkten mit zu Beginn festgelegter Zahlungsdauer und -höhe. Im Unterschied dazu hängt eine *Leibrente* vom Leben einer oder mehrerer Personen ab.

Ewige Renten

Jedes Jahr wird eine Kapitaleinheit ausgezahlt.
Der Barwert der vorschüssigen ewigen Rente ist

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d},$$

der nachschüssigen ewigen Rente

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 \ldots = v\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{v}{d} = \frac{1}{i},$$

der um l Jahre aufgeschobenen ewigen Renten

$$_{l|}\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = v^l \ddot{a}_{\overline{\infty}|}, \quad _{l|}a_{\overline{\infty}|} = v^l a_{\overline{\infty}|}\,,$$

der Renten mit m Zahlungen (der Höhe $1/m$) pro Jahr

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \ldots = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m(1-v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1}{d_m}$$

und

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{d_m} = \frac{1}{i_m}\,.$$

Temporäre Renten

Der Barwert für die vorschüssige n-jährige temporäre Rente der Höhe 1 ist

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d},$$

und entsprechend wie für die ewigen Renten

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}, \quad \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d_m}, \quad a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i_m}\,.$$

Zusätzlich sind jetzt die Endwerte von Interesse. Diese werden mit einem entsprechenden Kürzel bezeichnet, wobei das 'a' durch ein 's' ersetzt wird. Zum Beispiel

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r^n + r^{n-1} + \ldots + r = \frac{r^n - 1}{d},$$

und $s_{\overline{n}|} = \frac{r^n-1}{i}$.

Steigende und fallende Renten

Wir betrachten eine möglich Klasse von steigenden Renten, die durch zwei Parameter beschrieben werden: Es erfolgen m Zahlungen pro Jahr, startend mit $\frac{1}{m\,q}$ und diese Zahlungen werden q mal pro Jahr um $\frac{1}{m\,q}$ erhöht (erste Auszahlung entspricht erster Erhöhung). q sei dabei ein Teiler von m. Die Barwerte der vorschüssigen und nachschüsigen ewigen Renten sind

$$\begin{aligned}
(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{q}\,\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} + v^{\frac{1}{q}}\,\frac{1}{q}\,\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} + v^{\frac{2}{q}}\,\frac{1}{q}\,\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} + \dots \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}\,\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{q}} \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}\,\ddot{a}^{(q)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d_m}\,\frac{1}{d_q},
\end{aligned}$$

und

$$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{\infty}|} = v^{\frac{1}{m}}(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i_m}\,\frac{1}{d_q}.$$

Für die entsprechenden temporären Renten gilt

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = (I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} - v^n(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} - v^n\,n\,\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}|} - n\,v^n}{d_m}$$

und

$$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i_m}\,.$$

Temporäre fallende Renten, die dem umgekehrten Auszahlungsschema folgen, werden mit einem 'D' anstatt eines 'I' bezeichnet. Aus der Beziehung $(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} + (D^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = (n + 1/q)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ folgt zum Beispiel

$$(D^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{n - a^{(q)}_{\overline{n}|}}{d_m}\,.$$

Achtung: Ist ein Parameter gleich 1, so wird er in der Regel nicht notiert, d.h. $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ bezeichnet die jährlich um eine Einheit steigende Rente.

Allgemeine Renten

Zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots$ erfolgen Zahlungen $c_0, c_1, c_2 \dots$. Dann ergibt sich (falls die Reihe konvergiert!) der Barwert zu

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,v^k$$

Im Fall der Konvergenz gilt dann

$$a = c_0 \ddot{a}_{\overline{\infty}|} + (c_1 - c_0)v\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|} + (c_2 - c_1)v\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|} + \ldots = \frac{1}{d}\left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k (c_k - c_{k-1})\right) ,$$

wobei die Reihe konvergiert. Dies kann die Berechnung der Barwerte für gewisse Formen steigender Renten vereinfachen.

1.4 Rückzahlung einer Schuld

Eine *Anleihe* ist ein Vertrag zwischen einem Gläubiger und einem Schuldner, wobei der Gläubiger ein Kapital K ausleiht und der Schuldner ein bezüglich eines fixierten Zinssatzes äquivalentes Kapital zurückzahlt.
Bei der *Tilgung durch Ratenzahlung* über n Jahre wird ein konstanter Anteil K/n pro Jahr zurückgezahlt. Es variiert der Zinsendienst auf Z_k auf das vor Zeit k geschuldete Kapital $K-(k-1)K/n$, d.h. $Z_k = i(1-(k-1)/n)K = i(n+1-k)K/n$. Eine Rechnung zeigt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(K/n + Z_k)v^k &= \frac{K}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} v^k + i\sum_{k=1}^{n} v^k(n+1-k)\right)\\
&= \frac{K}{n}\left(a_{\overline{n}|} + i(n+1)a_{\overline{n}|} - i(Ia)_{\overline{n}|}\right)\\
&= \frac{K}{n}\left(r\, a_{\overline{n}|} + i\, n\, a_{\overline{n}|} - (\ddot{a}_{\overline{n}|} - n\, v^n)\right)\\
&= \frac{K}{n}\left(r\, a_{\overline{n}|} + n(1-v^n) - r\, a_{\overline{n}|} + n\, v^n\right)\\
&= K,
\end{aligned}$$

d.h. die Zahlungen sind äquivalent zu dem geschuldeten Kapital.
Bei der *Tilgung durch Annuitäten* sind die Zahlungen (Tilgung + Zinsendienst) jedes Jahr konstant. Die konstante Zahlung, die Annuität A, bestimmt sich aus

$$A(v + \ldots + v^n) = A\, a_{\overline{n}|} = K,$$

d.h. $A = K/a_{\overline{n}|} = i\,K/(1-v^n)$.

Beispiel 1.4.1 Eine Kreditgeber verspricht für einen Kredit der Höhe $K = 10000$ € einen effektiven Zinssatz $i = 6,99\%$. Welchen monatlichen ($m = 12$) konstanten Raten A_m entspricht das bei einer Rückzahlung über $n = 6$ Jahre?
Es gilt

$$mA_m\, a_{\overline{n}|}^{(m)} = K,$$

somit

$$A_m = \frac{K\, i_m}{m\,(1-v^n)} = 169,41 \text{ €}.$$

2 Sterblichkeit

2.1 Die Restlebensdauer

Definition 2.1.1 Die Zufallsvariable T_x mit Werten in $[0,\infty)$ modelliere die *Restlebensdauer* eines x-jährigen. Wird zwischen Frauen und Männern unterschieden, so wird T_y für die Restlebensdauer einer y-jährigen geschrieben (und weiterhin T_x für die der Männer). Dabei seien $x, y \geq 0$, meistens benutzen wir $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Zum zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß P bezeichne $G_x(t) = P(T_x \leq t)$ die Verteilungsfunktion von T_x.

Annahme 2.1.1 Wir nehmen an, dass eine Dichte $g_x(t) = G'_x(t)$ existiert und dass die *Stationaritätsannahme*

$$P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s + t \,|\, T_x > s) \tag{2.1}$$

für alle $x, s, t \geq 0$ erfüllt ist.

Standardmäßig wird notiert

$$\begin{aligned}
{}_tq_x = G_x(t), &\qquad t-\text{jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines } x\text{-jährigen},\\
{}_tp_x = 1 - G_x(t), &\qquad t-\text{jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines } x\text{-jährigen}\\
{}_{s|t}q_x = G_x(s+t) - G_x(s) &\quad = \quad P(s < T_x \leq s+t).
\end{aligned}$$

Eine '1' wird nicht notiert, q_x bezeichnet also die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger im folgenden Jahr stirbt.
Aus den Eigenschaften der Verteilungsfunktion ($G_x(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} G_x(t) = 1$, G monoton wachsend) und der Existenz der Dichte folgt, dass ${}_tq_x$ (${}_tp_x$) als Funktion von t stetig, differenzierbar, wachsend (fallend) ist und es gelten ${}_0q_x = 0$ (${}_0p_x = 1$) sowie $\lim_{t\to\infty} {}_tq_x = 1$ ($\lim_{t\to\infty} {}_tp_x = 0$).
Unter der Stationaritätsannahme (2.1) gilt

$${}_tp_{x+s} = P(T_{x+s} > t) = P(T_x > s+t \,|\, T_x > s) = \frac{P(T_x > s+t)}{P(T_x > s)} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x}\,, \tag{2.2}$$

d.h. die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines $x+s$-jährigen stimmt mit der $s+t$-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-jährigen gegeben das s-jährige Überleben überein. Entsprechend gilt

$${}_{s|t}q_x = P(T_x \leq s+t \,|\, T_x > s)P(T_x > s) = P(T_{x+s} \leq t)P(T_x > s) = {}_sp_x\, {}_tq_{x+s}\,.$$

Ferner folgt durch Iteration von (2.2)

$$ {}_np_x = \prod_{k=0}^{n-1} p_{x+k} \tag{2.3} $$

d.h. die n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ist als Produkt der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten darstellbar.

Definition 2.1.2 Die *Lebenserwartung* eines x-jährigen ist

$$ \mathring{e}_x = \mathbb{E}[T_x] = \int_0^\infty t\, g_x(t) dt \ . $$

Oft ist die folgende Identität nützlich:

$$ \begin{aligned} \mathring{e}_x &= \int_0^\infty t\, g_x(t) dt = \int_0^\infty t\, G_x'(t) dt \\ &= \int_0^\infty t(-\frac{d}{dt}\, {}_tp_x) dt = [-{}_tp_x\, t]_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_x\, dt \\ &= \int_0^\infty {}_tp_x\, dt \left(= \int_0^\infty P(T_x > t)\, dt \right). \end{aligned} $$

Beispiel 2.1.1 Es hat immer einen besonderen Reiz, die Sterblichkeit durch *analytische Sterbegesetze* zu beschreiben, z.B. nahm de Moivre (1724) an, dass T_0 gleichverteilt zwischen 0 und einem Höchstalter ω sei, d.h.

$$ g_0(t) = \frac{1}{\omega}, \quad G_0(t) = P(T_0 \le t) = \frac{t}{\omega}. $$

Aus der Stationaritätsannahme folgt

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= P(T_x > t) = P(T_0 > x + t \,|\, T_0 > x) \\ &= 1 - \frac{P(x < T_0 \le x + t)}{1 - P(T_0 \le x)} \\ &= 1 - \frac{G_0(x+t) - G_0(x)}{1 - G_0(x)} \\ &= \frac{\omega - x - t}{\omega - x} \ . \end{aligned} $$

Damit

$$ G_x(t) = 1 - {}_tp_x = \frac{t}{\omega - x}, \quad t \in [0, \omega), $$

d.h. auch T_x ist gleichverteilt, allerdings auf (x, ω). Somit ist die (restliche) Lebenserwartung

$$ \mathring{e}_x = \frac{\omega - x}{2}. $$

De Moivre benutzte $\omega = 86$.

Für realistischere Sterbegesetze modelliert man häufig die Sterblichkeitsintensität.

Definition 2.1.3 Die *Sterblichkeitsintensität* μ_{x+t} des x-jährigen im Alter $x+t$ ist gegeben durch

$$ {}_tp_x = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} $$

also

$$ \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln({}_tp_x) \; . $$

Beispiel 2.1.2 Im Fall von de Moivre, Beispiel 2.1.1 gilt

$$ \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \left(\ln(\omega - x - t) - \ln(\omega - x)\right) = \frac{1}{\omega - x - t}, \quad 0 < t < \omega - x \; , $$

Gompertz (1824) nimmt für $B > 0$, $C > 1$ an

$$ \mu_{x+t} = B\, C^{x+t}, \quad t > 0 \; , $$

Makeham (1860) verfeinert den Ansatz durch die altersunabhängige Konstante $A > 0$,

$$ \mu_{x+t} = A + B\, C^{x+t}, \quad t > 0 \; , $$

und Weibull (1939) schlägt polynomiales Wachstum vor $(k > 0, n > 0)$,

$$ \mu_{x+t} = k\,(x+t)^n \; . $$

Zur Beschreibung der Sterblichkeit genügen diese Modelle nicht. Man ist auf empirische Daten angewiesen (siehe Abschnitt 2.3 über Sterbetafeln).

2.2 Die abgerundete Restlebensdauer

Definition 2.2.1 Die *gestutzte Restlebensdauer* für einen x-jährigen ist $K_x = [T_x]$ und der unterjährige Anteil der Restlebensdauer ist $U_x = T_x - K_x$.

Es gilt

$$ \begin{aligned} P(K_x = k) &= P(k \leq T_x < k+1) = P(k < T_x \leq k+1) \\ &= P(T_x \leq k+1 \,|\, T_x > k) P(T_x > k) = {}_kp_x \, q_{x+k}, \end{aligned} $$

d.h. die Verteilung der diskreten Zufallsvariable K_x ist bestimmt durch Wahrscheinlichkeiten q_{x+k}, ${}_kp_x$, die sich unter Berücksichtigung von (2.3) aus Sterbetafeln ablesen lassen. Man führt die *gestutzte Lebenserwartung* eines x-jährigen als

$$ e_x = \mathbb{E}[K_x] $$

ein. Die unterjährige Restlebenszeit U_x kann auf verschiedene Arten modelliert werden.

Gleichverteilung, Linearität von q_{x+k}

Sei U_x gleichverteilt, d.h. $P(U_x \le u) = u$, $u \in [0,1]$. Dann gilt

$$\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}\,.$$

Lemma 2.2.1 *Unter der Gleichverteilungsannahme sind K_x und U_x genau dann unabhängig, wenn $u \mapsto {}_u q_x$ linear auf $[0,1]$ ist.*

Beweis: Die Unabhängigkeit ist äquivalent zu $P(U_x \le u \,|\, K_x = k) = u$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $u \in [0,1]$. Andererseits gilt per definitionem

$$P(U_x \le u \,|\, K_x = k) = \frac{P(U_x \le u, K_x = k)}{P(K_x = k)} = \frac{{}_{k|u}q_x}{{}_{k|}q_x} = \frac{{}_k p_x \; {}_u q_{x+k}}{{}_k p_x \; q_{x+k}} = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}}\,.$$

□

Für $U_x^{(m)} := \frac{1}{m}\lceil m\,U_x \rceil$ ist

$$P(U_x^{(m)} = j/m) = \frac{1}{m}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines bestimmten m-tel Jahres zu sterben.

Konstante Sterbeintensität

Bei Annahme konstanter Sterbeintensität $\mu_{x+u} = c$, $u \in (0,1)$, gilt

$${}_u p_x = e^{-c\,u} = (e^{-c})^u = (p_x)^u,$$

und somit

$$P(R_x \le u \,|\, K_x = k) = \frac{{}_s q_{x+k}}{q_{x+k}} = \frac{1 - (p_{x+k})^s}{1 - p_{x+k}}.$$

U_x und K sind also nicht unabhängig.

Balducci-Annahme

Die teilweise in Nordamerika verwendete Balducci-Annahme nimmt ${}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)\,q_x$, $u \in (0,1)$ an. U_x und K_x sind wiederum nicht unabhängig.

2.3 Sterbetafeln

Eine *Sterbetafel* ist (im wesentlichen) eine Tabelle von einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten. Diese liefern uns die Verteilung von K_x. In Abhängigkeit der Modellierung von U_x lässt sich dann auch die Verteilung von T_x bestimmen.

Weitere Bezeichnungen sind l_x für die Anzahl der Lebenden, definiert durch

$$l_0 = 100\,000, \quad l_{x+1} = p_x\, l_x,$$

$d_x = l_x - l_{x+1}$ für die Anzahl der Toten in $(x, x+1]$ und L_x für die bis $x+1$ zu durchlebenden Jahre, d.h. für gleichverteiltes U_x

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \, .$$

Als Lebenserwartung wird in der Regel $\mathring{e}_x$ für gleichverteiltes U_x verwendet (und einfach mit 'e_x' bezeichnet). Diese kann man dann berechnen aus

$$\mathring{e}_x\, l_x = \sum_{z \geq x} L_z \, .$$

Sterbetafeln werden für unterschiedliche Personengruppen erstellt.
Unterschieden werden *Periodentafeln*, bei denen die Sterbewahrscheinlichkeiten auf Grundlage der Sterbewahrscheinlichkeiten innerhalb einer Periode ermittelt werden und *Generationentafeln*, in denen die Sterbewahrscheinlichkeiten neben dem Alter auch von dem Geburtsjahr abhängen. In *Dekrementtafeln* werden mehrere Ausscheideursachen betrachtet (nicht nur Tod).
Ferner kann das Eintrittsalter von Bedeutung sein (z.B. bei Selektion durch einen Gesundheischeck). Die entsprechenden Sterbewahrscheinlichkeiten eines $(x+t)$-jährigen, der im Alter x eingetreten ist, werden mit $q_{[x]+t}$ notiert und in *Selektionstafeln* zusammengefasst. Hierbei zeigt sich, dass nach einer gewissen Periode das Eintrittsalter häufig unerheblich ist, das heißt man wird nur für eine Selektionsperiode p die unterschiedlichen $q_{[x]}, q_{[x]+1}, \ldots q_{[x]+p-1}$ erfassen und dann mit den gemittelten $q_{x+p}, q_{x+p+1}, \ldots$ fortsetzen. Dies führt zu *Schlusstafeln*.
Wird lediglich nach dem Alter abgestuft, so spricht man von einer *Aggregattafel*. In den Beispielen werden wir zumeist die Sterbetafel 1990/92 für Österreich verwenden.

3 Versicherungsleistungen

In diesem Kapitel betrachten wir Leistungen des Versicherungsunternehmens (VU), die vom Todeszeitpunkt des Versicherungsnehmers (Versicherten, VR) abhängen.

3.1 Barwert und Nettoeinmalprämie

In dem Fall, dass wir nur jährliche Zahlungen betrachten ist der *Barwert* einer Versicherungsleistung für einen x-jährigen VR von der Gestalt

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \, \mathbf{1}_{\{K_x = k\}},$$

wobei $z_k \geq 0$ die bereits abgezinsten Zahlungen im Falle dass der Tod in $[k, k+1)$ eintritt seien, und

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases} \qquad \omega \in \Omega,$$

die Indikatorfunktion bezeichnet. Der Barwert ist also eine Zufallsvariable. Der Erwartungswert des Barwertes,

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \, P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \, {}_kp_x \, q_{x+k}$$

wird *Nettoeinmalprämie (NEP)* genannt. Dies ist die Prämie die nach dem Äquivalenzprinzip für die Versicherung zu zahlen wäre, wenn die Leistung mit nur einer Zahlung bei Vertragsabschluss abgedeckt werden soll.

3.2 Erlebensfallversicherung

Eine n-jährige Erlebensfallversicherung ist eine Versicherung, bei der die Versicherungssumme n Jahre nach Vertragsabschluss ausgezahlt wird, falls der Versicherte noch lebt. Andernfalls erfolgt keine Auszahlung.
Wir betrachten die normierte Auszahlung von einer Einheit. Beschrieben wird sie durch

$$Z = v^n \mathbf{1}_{\{K_x \geq n\}}$$

also

$${}_nE_x := \mathbb{E}[Z] = v^n \, {}_np_x, \quad \mathrm{Var}[Z] = v^{2n} \, {}_np_x \, {}_nq_x \; .$$

Mit $E_x := {}_1E_x$ folgt wegen der Stationaritätsannahme

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= v^n \, {}_np_x = v^{n-1} \, {}_{n-1}p_{x+1} \, v \, p_x \\ &= {}_{n-1}E_{x+1}E_x = \ldots = E_{x+n-1} \ldots E_x . \end{aligned}$$

3.3 Todesfallversicherung

Auch *Ablebensversicherung* oder *Risikoversicherung.*

Einige Spezielle Versicherungen

(a) Eine n-jährige (kurze) Todesfallversicherung zahlt die Versicherungssumme am Ende des Todesjahres des VR aus, sofern der Tod innerhalb von n Jahren eintritt. Ansonsten erfolgt keine Auszahlung.
Somit

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \mathbf{1}_{\{K_x = k\}} = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = 0, \ldots, n-1, \\ 0, & K_x \geq n, \end{cases}$$

und

$${}_{|n}A_x := \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \ .$$

(b) Für eine lebenslange Todesfallversicherung ergibt sich

$$Z = v^{K_x+1}, \quad A_x := \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \ .$$

(c) Die um l *Jahre aufgeschobene n-jährige Todesfallversicherung* berechnet sich mit

$$Z = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^{k+1} \mathbf{1}_{\{K_x = k\}} = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = l, \ldots, l+n-1, \\ 0, & K_x \geq l+n, \end{cases}$$

zu

$${}_{l|n}A_x := \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} = {}_lE_x \, {}_{|n}A_{x+l} \ .$$

Speziell bezeichnet ${}_{l|}A_x$ die l Jahre aufgeschobene, lebenslange Todesfallversicherung. Es gilt

$${}_{|n}A_x = A_x - {}_{n|}A_x \ .$$

(d) Die l Jahre steigende n-jährige Todesfallversicherung ist gegeben durch

$$Z = \sum_{k=0}^{l-1} (k+1) v^{k+1} \mathbf{1}_{\{K_x = k\}} + l \sum_{k=l}^{n-1} v^{k+1} \mathbf{1}_{\{K_x = k\}} \ .$$

Also

$$ {}_{|n}\left(I_{\overline{l|}}A\right)_x := \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \min\{k+1, l\}\, {}_kp_x\, q_{x+k}\ . $$

Die lebenslang steigende Todesfallversicherung ergibt die NEP

$$ (IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}(k+1)\, {}_kp_x\, q_{x+k}\ . $$

Die entsprechenden fallenden Versicherungen werden mit 'D' anstatt 'I' bezeichnet.

Allgemeine Todesfallversicherung

Die allgemeine Todesfallversicherung ist von der Gestalt

$$ Z = v^{K_x+1} c_{K_x+1}, \quad c_{K_x+1}(\omega) = c_{K_x(\omega)+1}, $$

falls c_k die Zahlung ist wenn der VR in $[k-1, k)$ stirbt. Es gilt

$$ \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}\ . $$

Die NEP lässt sich aber auch auf die NEPn der Standardversicherungen zurückführen.

Satz 3.3.1 *Sei* $\mathbb{E}[Z] < \infty$.

(i) Mit $c_0 = 0$ *gilt* $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty}(c_{k+1} - c_k)\, {}_{k|}A_x$.

(ii) Falls $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = 0$, *so* $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{n}(c_k - c_{k+1})\, {}_{|k}A_x$.

Beweis: Siehe Vorlesung. □

Sofortige Auszahlung

In der Praxis zahlt ein VU bei der Todesfallversicherung die Versicherungssumme meist unmittelbar nach dem Ableben des VR aus.

Annahme 3.3.1 Angenommen die unterjährige Restlebenszeit U_x sei gleichverteilt auf $(0, 1)$ und unabhängig von K_x.

Dann gilt für die lebenslange Todesfallversicherung mit sofortiger Auszahlung

$$ Z = v^{T_x} $$

und

$$\overline{A}_x := \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[v^{T_x}] = \mathbb{E}[v^{K_x+1-1+U_x}] = \mathbb{E}[v^{K_x+1}]\,\mathbb{E}[r^{1-U_x}] = A_x\,\mathbb{E}[r^{1-U_x}]\ ,$$

wobei

$$\mathbb{E}[r^{1-U_x}] = \int_0^1 r^{1-u}\,du = \int_0^1 \mathrm{e}^{(\ln r)(1-u)}du = \frac{r-1}{\ln r} = \frac{i}{\delta}\ ,$$

also

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}\,A_x\ .$$

Für die allgemeine Todesfallversicherung mit sofortiger Auszahlung, gegeben durch

$$Z = v^{T_x}c(T_x), \quad c : [0,\infty) \to [0,\infty) \quad \text{messbar}\ ,$$

kann die NEP im Fall $\mathbb{E}[Z] < \infty$ auf die jährlichen Auszahlungen zurückgeführt werden:

Satz 3.3.2 *Es gelte Annahme 3.3.1 und $\mathbb{E}[Z] < \infty$ für $Z = v^{T_x}c(T_x)$. Dann*

(i) $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x\, q_{x+k} v^{k+1} c_{k+1}$, *wobei* $c_{k+1} = \int_0^1 r^{1-u}c(k+u)du$.

(ii) Ist die Auszahlungsfunktion c von der Gestalt $c(k+u) = c(k)$, $u \in [0,1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, so berechnet sich die Konstante c_{k+1} aus (i) zu

$$c_{k+1} = \frac{i}{\delta}\,c(k)\ .$$

Beweis: (i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z \mid K_x = k]\,P(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\mathbb{E}[r^{1-U_x}c(k+U_x)]\,P(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x\, q_{x+k} v^{k+1} \int_0^1 r^{1-u}c(k+u)du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x\, q_{x+k} v^{k+1} c_{k+1} \quad \text{mit} \quad c_{k+1} = \int_0^1 r^{1-u}c(k+u)du\ .
\end{aligned}$$

(ii) folgt mit der Rechnung, die wir oben für $\overline{A}_x$ durchgeführt haben. □

Zum Beispiel ist für die am Jahresende steigende sofort auszahlende Todesfallversicherung $c(k+u) = k+1$, $u \in [0,1)$, und daher

$$\left(I\overline{A}\right)_x = \frac{i}{\delta}\,(IA)_x\ .$$

Thielesche Differentialgleichung

Es gilt

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\
&= v\, q_x + v\, p_x \sum_{k=1}^{\infty} v^k\, {}_{k-1}p_{x+1}\, q_{x+1+k-1} \\
&= v\, q_x + v\, p_x\, A_{x+1} \qquad (3.1)\\
&= v\, q_x + v\, A_{x+1} - v\, q_x\, A_{x+1}\ . \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Die Zeile (3.1) hat die Interpretation, dass mit Wahrscheinlichkeit p_x beim Überleben des kommenden Jahres eine Ablebensversicherung A_{x+1} gekauft wird und im Todesfall die Auszahlung 1 erfolgt. Die Zeile (3.2) lässt sich interpretieren, dass der Betrag $v\, A_{x+1}$ auf ein Konto gelegt wird (liefert Wert $(1+i)v\, A_{x+1} = A_{x+1}$ im nächsten Jahr) und um im Todesfall den Restbetrag $1-A_{x+1}$ zu erhalten, wird eine einjährige Todesfallversicherung mit Auszahlung $1 - A_{x+1}$ abgeschlossen (NEP $v\, q_x$ bei Auszahlung 1).
Noch einmal anders geschrieben,

$$
A_{x+1}d = A_{x+1} - A_x + v\, q_x(1 - A_{x+1}), \qquad (3.3)
$$

d.h. die vorschüssigen Zinsen entsprechen der höheren NEP plus einer einjährigen Todesfallversicherung mit dem Restbetrag $1 - A_{x+1}$ als Versicherungssumme.
Alle diese Gleichungen liefern eine Rekursionsgleichung für A_x, A_{x+1}. Einer Rekursionsgleichung entspricht in stetiger Zeit eine Differentialgleichung.

Satz 3.3.3 *(Thielesche Differentialgleichung) Die NEP einer sofort fälligen lebenslangen Todesfallversicherung $\overline{A}_x$ genügt der DGl*

$$
\overline{A}_x\, \delta = \frac{\partial \overline{A}_x}{\partial x} + \mu_x(1 - \overline{A}_x)\ .
$$

Beweis: Siehe Vorlesung. □

Die Interpretation ist ähnlich wie die von Gleichung (3.3).

3.4 Gemischte Versicherung

Für die *gemischte Versicherung*, die eine Einheit am Ende des Todesjahres auszahlt, falls der Tod in n Jahren eintritt, und bei Überleben eine Auszahlung von einer Einheit nach Ablauf der n Jahre leistet, ist der Barwert

$$
Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x \leq n-1, \\ v^n, & K_x \geq n, \end{cases}
$$

d.h. $Z = Z_1 + Z_2$, wobei $Z_1 = v^{K_x+1}\mathbf{1}_{\{K_x \leq n-1\}}$ den Barwert einer kurzen Todesfallversicherung und $Z_2 = v^n \mathbf{1}_{\{K_x \geq n\}}$ den Barwert einer n-jährigen Erlebensfallversicherung bezeichnet. Somit berechnet sich die NEP zu

$$A_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z_1] + \mathbb{E}[Z_2] = {}_{|n}A_x + {}_nE_x \ .$$

3.5 Leibrenten

Eine *Leibrente* besteht aus Zahlungen zu äquidistanten Zeitpunkten, deren Dauer vom Leben der versicherten Person(en) abhängt.
Die Prämienzahlung des VR kann als Leibrente von VR an VU gesehen werden. Da Prämien zumeist vorschüssig gezahlt werden, konzentrieren wir uns im Folgenden auf vorschüssige Leibrenten.

Einige Leibrenten

In (a)–(d) betrachten wir Leibrenten mit jährlicher Auszahlung der Höhe 1.

(a) Die vorschüssige lebenslange Leibrente hat Barwert

$$Y = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{K_x} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d},$$

also NEP

$$\ddot{a}_x = \mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kp_x = \frac{1 - A_x}{d} \ .$$

(b) Die nachschüssige lebenslange Leibrente hat Barwert und NEP

$$Y = v + v^2 + \ldots + v^{K_x}, \quad a_x = \ddot{a}_x - 1 \ .$$

Hier wird also angenommen, dass nach dem Tod keine Auszahlung erfolgt, im Unterschied zu den Zeitrenten gilt also $a_x \neq v\,\ddot{a}_x$!

(c) Die *höchstens n-jährige (kurze) vorschüssige Leibrente* hat Barwert

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbf{1}_{\{K_x \geq k\}}$$

und NEP

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x \ .$$

Es gilt $1 = d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}$.

(d) Die Leibrenten können auch wieder um l Jahre aufgeschoben werden. Dann ergibt sich für die *aufgeschobene, vorschüssige, lebenslange Leibrente*

$$Y = \sum_{k=l}^{\infty} v^k \mathbf{1}_{\{K_x \geq k\}}$$

mit NEP

$$_{l|}\ddot{a}_x = \mathbb{E}[Y] = \sum_{k=l}^{\infty} v^k \,{}_k p_x = v^l \,{}_l p_x \sum_{k=l}^{\infty} v^{k-l} \,{}_{k-l} p_{x+l} = \,{}_l E_x \, \ddot{a}_{x+l}$$

und für die aufgeschobene n-jährige

$$_{l|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \,{}_l E_x \, \ddot{a}_{x+l:\overline{n}|} \,.$$

(e) Analog der Bezeichnungsweise für Zeitrenten werden mit

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k \,{}_k p_x$$

die ewig steigende und mit

$$(I_{\overline{m}|}\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) v^k \,{}_k p_x + m \sum_{k=m}^{n-1} v^k \,{}_k p_x$$

die m Jahre steigende, höchstens n-jährige, vorschüssige Leibrente bezeichnet. Für die entsprechenden fallenden Leibrenten wird wiederum ein 'D' anstatt eines 'I' geschrieben.

Unterjährig auszahlende Leibrenten

Bei m Zahlungen pro Jahr der Höhe $1/m$ ergibt sich der Barwert

$$Y = \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + \ldots + v^{K_x + U_x^{(m)} - \frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} \frac{1 - v^{K_x + U_x^{(m)}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1 - v^{K_x + U_x^{(m)}}}{d_m} \,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &:= \mathbb{E}[v^{K_x + U_x^{(m)}}] = \mathbb{E}[v^{K_x+1}] \, \mathbb{E}[v^{U_x^{(m)}-1}] \\ &= A_x \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{v\, m} v^{\frac{j}{m}} = A_x \frac{v^{\frac{1}{m}}}{v\, m} \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} \\ &= A_x \frac{v^{\frac{1}{m}} d}{v\, d_m} = A_x \frac{i}{i_m} \end{aligned}$$

folgt für die NEP

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathbb{E}[Y] = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d_m} = \frac{1 - i/i_m\, A_x}{d_m} = \frac{i_m - i\, A_x}{i_m\, d_m}\ .$$

Dabei entspricht $\frac{i}{i_m} A_x$ einer Todesfallversicherung, die am Ende des m-tel Jahres auszahlt, in dem der Tod eintritt.
Im Grenzfall ergibt sich die stetig auszahlende Leibrente

$$\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - \overline{A}_x}{\delta}. \tag{3.4}$$

Rekursionsformel

Es gilt

$$\ddot{a}_x = 1 + v\, p_x \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1}\, {}_{k-1}p_{x+1} = 1 + v\, \ddot{a}_{x+1} - v q_x\, \ddot{a}_{x+1},$$

d.h. die NEP setzt sich zusammen aus der sofortigen Zahlung 1, der diskontierten NEP der zukünfigen Rente minus einer Todesfallversicherung, die die zukünftige Rente ausgleicht, falls der Tod im kommenden Jahr eintritt.
Für die kontinuierliche Leibrente erhalten wir aus Satz 3.3.2 unter Einsetzen von (3.4) die Thielesche Differentialgleichung für die Leibrente

$$\frac{\partial}{\partial x}\, \bar{a}_x = (\delta + \mu_x)\, \bar{a}_x - 1\ .$$

Leibrente für nicht ganzzahliges Eintrittsalter

Unter der Unabhängigkeits- und Gleichverteilungsannahme gilt für ganzzahliges x, $u \in (0,1)$ nach Lemma 2.2.1,

$${}_uq_x = u\, q_x$$

damit

$${}_kp_{x+u} = \frac{{}_{k+u}p_x}{{}_up_x} = \frac{{}_kp_x\, {}_up_{x+k}}{{}_up_x} = \frac{{}_kp_x(1 - u\, q_{x+k})}{1 - u\, q_x}$$

und es folgt

$$\ddot{a}_{x+u} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_{x+u} = \ldots = \frac{1-u}{1 - u\, q_x}\, \ddot{a}_x + \frac{u - u\, q_x}{1 - u\, q_x}\, \ddot{a}_{x+1}\ .$$

4 Nettoprämien und Nettodeckungskapital

Nach dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip sollten Prämienzahlungen für eine Versicherungsleistung so erfolgen, dass die Erwartungswerte der Barwerte übereinstimmen.
Formal bedeutet das für den *Verlust* L des VU,

$$L = Z - Y,$$

Z Barwert der Versicherungsleistung, Y Barwert der Prämienzahlungen, dass nach dem Äquivalenzprinzip

$$\mathbb{E}[L] = 0$$

zu sein hat. Derart bestimmte Prämien bezeichnen wir als *Nettoprämien.* Im Falle, dass bei Vertragsabschluss alles in einer Prämie zu zahlen ist, entspricht diese Prämie dem Barwert der Versicherungsleistungen, der Nettoeinmalprämie (NEP). Üblicherweise werden die Prämienzahlungen verteilt, wichtigster Spezialfall sind Prämien konstanter Höhe.

4.1 Nettoprämien konstanter Höhe

Zum Beispiel für eine lebenslange Todesfallversicherung mit Versicherungssumme S werde lebenslang jährlich vorschüssig eine konstante Prämie Π gezahlt.
Dann folgt aus dem Äquivalenzprinzip

$$S\,A_x = \Pi\,\ddot{a}_x.$$

Also

$$\Pi = \frac{S\,A_x}{\ddot{a}_x}$$

ist die jährliche Prämie.
Wird die Prämie nur n Jahre gezahlt, so wäre

$$\Pi = \frac{S\,A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Bezeichnen wir mit

$$P_x(B_x), \quad P_{x:\overline{n}|}(B_x)$$

die Nettoprämien einer Versicherungsleistung mit Barwert B_x bei lebenslanger bzw. n-jähriger Prämienzahlung, so gilt also

$$P_x(S\,A_x) = S\,P_x(A_x) = \frac{S\,A_x}{\ddot{a}_x}, \quad P_{x:\overline{n}|}(S\,A_x) = \frac{S\,A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Die Indizierung am 'P' beschreibt die Zahlungsmodalitäten, entspricht also der Indizierung der Leibrente. So schreiben wir für die monatliche Prämie einer n-jährigen Todesfallversicherung

$$P^{(12)}_{x:\overline{n}|}(\,{}_nA_x) = \frac{{}_nA_x}{\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{n}|}} \;.$$

Beispiel 4.1.1 Für eine n-jährige Erlebensfallversicherung mit Prämienrückgewähr, die im Todesfall die bisher geleisteten Prämien am Ende des Todesjahrs nichtverzinst zurückerstattet, ist die konstante jährliche Prämie

$$\Pi = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_{|n}(IA)_x} \;.$$

4.2 Allgemeine Nettoprämien

Eine allgemeine Versicherung mit Prämienzahlung Π_k zur Zeit k und der Versicherungsleistung c_k zur Zeit k (am Ende des Todesjahres), falls der Tod im vorangegangenen Jahr eingetreten ist, können wir beschreiben durch den Verlust

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} c_{j+1}\, \mathbf{1}_{\{K_x=j\}} - \sum_{k=0}^{\infty} v^k \Pi_k\, \mathbf{1}_{\{K_x \ge k\}} \;. \tag{4.1}$$

Dabei nehmen wir stets an, dass die Erwartungswerte beider Reihen endlich seien. Lassen wir dabei auch negative Prämien zu, so können auch Erlebensfallversicherungen beschrieben werden (und damit auch gemischte). Die n-jährige Erlebensfallversicherung mit konstanter Prämienzahlung und Auszahlung S entspricht zum Beispiel

$$\begin{aligned} c_j &= 0, \quad j \ge 1, \\ \Pi_k &= P_{x:\overline{n}|}(S\,{}_nE_x), \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ \Pi_n &= -S. \end{aligned}$$

Die Prämien in (4.1) sind Nettoprämien, falls

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} c_{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j} - \sum_{k=0}^{\infty} v^k \Pi_k\, {}_kp_x = 0 \;.$$

Beachte, dass die Nettoprämien durch diese Gleichung nicht eindeutig bestimmt sind. Dazu braucht man eine weitere Bedingung an den Zahlungsmodus, zum Beispiel durch Forderung konstanter Prämien oder einer Einmalprämie.

4.3 Nettodeckungskapital

Wir betrachten die allgemeine Versicherung aus Abschnitt 4.2 und setzen stets voraus, dass die betrachteten Prämien Nettoprämien sind. Es bezeichne ${}_kL$ den Verlust der Versicherung vom Zeitpunkt k an, abgezinst auf den Zeitpunkt k, d.h.

$$ {}_kL = \sum_{j=k}^{\infty} v^{j+1-k} c_{j+1}\, \mathbf{1}_{\{K_x=j\}} - \sum_{j=k}^{\infty} v^{j-k} \Pi_j\, \mathbf{1}_{\{K_x\geq j\}} \ . $$

Definition 4.3.1 Ist $P(K_x \geq k) > 0$, so heißt der Erwartungswert des zukünftigen Verlustes zur Zeit k gegeben dass der Versicherte zur Zeit k noch lebt, *Nettodeckungskapital*,

$$ {}_kV_x := \mathbb{E}[\, {}_kL_x \mid K_x \geq k] \ . $$

Lemma 4.3.1 *Es gilt die prospektive Darstellung*

$$ {}_kV_x = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} c_{k+j+1}\, {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty} v^j \Pi_{k+j}\, {}_jp_{x+k} $$

und die retrospektive Darstellung

$$ {}_kV_x = \frac{1}{{}_kE_x} \left(\sum_{j=0}^{k-1} v^j \Pi_j\, {}_jp_x - \sum_{j=0}^{k-1} v^{j+1} c_{j+1}\, {}_jp_x\, q_{x+j} \right) $$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Bei den meisten Versicherungen ist das Deckungskapital positiv, d.h. die zukünftige erwartete abdiskontierte Leistung übersteigt die zu erwartenden abdiskontierten Prämienzahlungen.

Lemma 4.3.2 *Für die allgemeine Versicherung gelten*

$$ {}_kV_x = v\, c_{k+1} q_{x+k} - \Pi_k + v\, p_{x+k}\, {}_{k+1}V_x, \tag{4.2} $$
$$ \Pi_k = (v\, {}_{k+1}V_x - {}_kV_x) + v\, q_{x+k}(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x). \tag{4.3} $$

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Während Gleichung (4.2) eine nützliche Rekursionsformel liefert, bietet (4.3) eine schöne Aussage über die Struktur der Prämie. Der erste Teil

$$ \Pi_k^s = v\, {}_{k+1}V_x - {}_kV_x $$

wird als *Sparprämie* bezeichnet, der zweite,

$$ \Pi_k^r = v\, q_{x+k}(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x), $$

als *Risikoprämie*. Bei positiver Risikoprämie macht das VU einen Verlust beim Tod von VR, bei negativer Risikoprämie einen Gewinn. Letzteres ist bei der Erlebensfallversicherung der Fall. Die Sparprämie kann sowohl positiv als auch negativ sein. Negativ wird sie zum Beispiel dann, wenn die Versicherung länger läuft als die Prämienzahlungen.
Die Prämien Π_k^n, $k \geq 0$, heißen *natürlich*, falls das Deckungskapital konstant gleich 0 ist. Aus der Darstellung (4.2) folgt

$$\Pi_k^n = v\, q_{x+k}, \quad k \geq 0.$$

Bemerkung 4.3.1 Für die unterjährige Berechnung des Deckungskapitals unter der Annahme gleichverteilter unterjähriger Restlebensdauer, unabhängig von der gestutzten Restlebensdauer, erhalten wir ähnlich wie am Ende von Abschnitt 3.5

$$_{k+u}V_x = \frac{1-u}{1-u\,q_{x+k}}\, v^{-u}\big(\,_kV_x + \Pi_k\big) + u\,\frac{1-q_{x+k}}{1-u\,q_{x+k}}\, v^{1-u}\,{}_{k+1}V_x\ .$$

Beispiel 4.3.1 Zur Entwicklung des Nettodeckungskapital mit der Laufzeit.

(a) Kurze Todesfallversicherung

(b) Erlebensfallversicherung

(c) Gemischte Versicherung

(d) Altersrente

Eine um l Jahre aufgeschobene n-jährige Leibrente, die durch Prämienzahlungen während der Aufschubzeit finanziert wird, kann mit

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \ldots = 0, \\ \Pi_1 &= \Pi_2 = \Pi_{l-1} = \frac{{}_{l|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{l}|}}, \\ \Pi_l &= \Pi_{l+1} = \ldots = \Pi_{l+n-1} = -1, \\ \Pi_{l+n} &= \Pi_{l+n+1} = \ldots = 0 \end{aligned}$$

als Spezialfall der allgemeinen Versicherung angesehen werden. Über die prospektive Darstellung in Lemma 4.3.1 können wir dann berechenen

$$_kV_x = \begin{cases} {}_{l-k|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n}|} - \dfrac{{}_{l|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{l}|}}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{l-k}|}\,, & k < l, \\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n+l-k}|}\,, & k \geq l. \end{cases}$$

4.4 Satz von Hattendorf

Der Verlust im (k+1)-ten Jahr bezogen auf den Jahresanfang ist gegeben durch

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & K_x < k, \\ v\, c_{k+1} - \Pi_k - {}_kV_x, & K_x = k, \\ v\, {}_{k+1}V_x - \Pi_k - {}_kV_x, & K_x > k. \end{cases}$$

Bei der Interpretation ist zu beachten, dass (4.2) geschrieben werden kann als

$$ {}_kV_x + \Pi_k = v\ \left(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V_x\, p_{x+k}\right), \tag{4.4}$$

wobei auf der linken Seite das Deckungskapital (die Reserve) plus die aktuelle Prämie stehen, auf der rechten Seite der erwartete Barwert des am Ende des Jahres benötigten Kapitals. Somit entspricht Λ_k dem am Jahresende tatsächlich benötigten Kapital minus dem zu Jahresanfang zu erwartetenden Kapital, beides diskontiert.
Unter Benutzung von (4.3) erhalten wir

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & = 0, & K_x < k, \\ -\Pi_k^r + v(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x) & = p_{x+k}\, v(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x), & K_x = k, \\ -\Pi_k^r & = -q_{x+k}\, v(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x), & K_x > k. \end{cases} \tag{4.5}$$

Unter Benutzung der Definitionen kann man nachrechnen, dass

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \Lambda_k, \tag{4.6}$$

d.h. der Gesamtverlust entspricht den abdiskontierten Verlusten der Einzeljahre.
Aus der Definition folgt sofort

$$\mathbb{E}[\Lambda_k \mid K_x < k] = 0,$$

es gilt aber auch wegen (4.4)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Lambda_k \mid K_x \geq k] &= \mathbb{E}[\Lambda_k\, \mathbf{1}_{\{K_x = k\}} \mid K_x \geq k] + \mathbb{E}[\Lambda_k\, \mathbf{1}_{\{K_x > k\}} \mid K_x \geq k] \\ &= (v\, c_{k+1} - \Pi_k - {}_kV_x)q_{x+k} + (v\, {}_{k+1}V_x - \Pi_k - {}_kV_x)p_{x+k} \\ &= v\, c_{k+1}q_{x+k} + v\, {}_{k+1}V_x\, p_{x+k} - ({}_kV_x + \Pi_k) = 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\mathbb{E}[\Lambda_k] = \mathbb{E}[\Lambda_k \mid K_x < k]P(K_x < k) + \mathbb{E}[\Lambda_k \mid K_x \geq k]P(K_x \geq k) = 0.$$

Zur Berechnung der Kovarianz sei o.B.d.A. $j < k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\Lambda_j, \Lambda_k) &= \mathbb{E}[\Lambda_j \Lambda_k] \\ &= \mathbb{E}[\Lambda_j \Lambda_k \mid K_x < k]P(K_x < k) + \mathbb{E}[\Lambda_j \Lambda_k \mid K_x \geq k]P(K_x \geq k) \\ &= 0 - \Pi_j^r\, \mathbb{E}[\Lambda_k \mid K_x \geq k]\, {}_kp_x = 0. \end{aligned}$$

Dieses überraschende Resultat ist der Satz von Hattendorf (1860):

Satz 4.4.1

$$\mathrm{Cov}(\Lambda_j, \Lambda_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Es folgt

$$\mathrm{Var}(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} \mathrm{Var}(\Lambda_k).$$

Dieser Satz ist also sehr nützlich zur Berechnung des Risikos (in Form der Varianz des Verlustes). Dazu müssen die einzelnen Varianzen berechnet werden. Für die allgemeine Versicherung folgt mit der zweiten Darstellung in (4.5)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\Lambda_k) &= \mathbb{E}[\Lambda_k^2] \\
&= \mathbb{E}[\Lambda_k^2 \,|\, K_x < k] P(K_x < k) + \mathbb{E}[\Lambda_k^2 \,|\, K_x \geq k] P(K_x \geq k) \\
&= 0 + \big((p_{x+k} v(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x))^2 q_{x+k} + (q_{x+k} v(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x))^2 p_{x+k} \big) \, {}_k p_x \\
&= v^2 (c_{k+1} - {}_{k+1}V_x)^2 \, {}_{k+1}p_x \, q_{x+k}.
\end{aligned}$$

5 Einbeziehung der Kosten

5.1 Kostenarten

Unterschieden werden

- Abschlusskosten, α-Kosten
  z.B. 60% einer Prämie oder ein gewisser Prozentsatz der Versicherungssumme, einmal zu Beginn anfallend.
- Inkassokosten, β-Kosten (allgemeine Verwaltungskosten)
  z.B. 3% der laufenden Prämie,
  während der Prämienzahlungsdauer jährlich anfallend.
- Verwaltungskosten, γ-Kosten (EDV, Löhne,...)
  z.B. 0.2% der Versicherungssumme,
  über die ganze Versicherungsdauer jährlich anfallend.

Werden diese Kosten bei der Berechnung der Prämien berücksichtigt, so sprechen wir von ausreichenden Prämien. Berücksichtigt man bei der Berechnung des Deckungskapitals die Kosten und ausreichende Prämien, so erhält man das ausreichende Deckungskapital. Zur Kennzeichnung wird ein weiterer Index 'a' oben rechts benutzt.

5.2 Ausreichende Prämien

Als Beispiel betrachten wir eine gemischte Versicherung mit Laufzeit n Jahre, Zahlungsdauer m Jahre und Versicherungssumme S. Die Nettoprämie ist dann

$$\Pi := P_{x:\overline{m}|}(S\,A_{x:\overline{n}|}) = \frac{S\,A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}.$$

Wir wollen die ausreichende Prämie

$$\Pi^a = P^a_{x:\overline{m}|}(S\,A_{x:\overline{n}|})$$

bestimmen und machen den Ansatz

$$\Pi^a\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \Pi\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \alpha\,S + \beta\,\Pi^a\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma\,S\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

also (nach Division durch $\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$)

$$\Pi^a = \Pi + \Pi^\alpha + \Pi^\beta + \Pi^\gamma$$

mit den α-, β-, γ-Prämien

$$\Pi^\alpha = \frac{\alpha\, S}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}, \quad \Pi^\beta = \beta\,\Pi^a, \quad \Pi^\gamma = \gamma\, S\,\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}.$$

Auflösen ergibt

$$\Pi^a = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\, S$$

Entsprechende Formeln folgen für die Erlebensfall- und die Todesfallversicherung. Im Fall einer um l Jahre aufgeschobenen kurzen Todesfallversicherung ergibt sich

$$P^a_{x:\overline{m}|}(S\; {}_{l|n}A_x) = \frac{{}_{l|n}A_x + \alpha + \gamma\,\ddot{a}_{x:\overline{n+l}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\, S.$$

5.3 Tarifprämie

Bisher wurden die Prämienzahlungen nach dem Äquivalenzprinzip festgelegt. Dann ist der erwartete Verlust zwar gleich 0, die Wahrscheinlichkeit für einen großen Verlust, der zum Bankrott führen kann, kann aber immer noch nicht vernachlässigbar sein.
Die folgenden zwei Möglichkeiten werden benutzt:

(A) Es wird eine vorsichtige Kalkulation durchgeführt, z.B. basierend auf modifizierten Sterbetafeln, niedrigeren Zinsen, höheren Kosten (sogenannte Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung). Die Prämie wird dann aber immer noch als ausreichende Prämie wie in Abschnitt 5.2 berechnet.

(B) Man benutzt realistische Rechnungsgrundlagen (2. Ordnung), aber bewertet das Risiko und addiert jährlich einen Risikozuschlag zur Prämie hinzu.

Bei der Lebensversicherung ist das Vorgehen nach (A) üblich, bei den Rückversicherungen erfolgt in der Regel eine Risikobewertung.
Die so berechneten Prämien ergeben dann die Tarifprämien. Eine Versicherungsgesellschaft muss aber einen Großteil (z.B. 90%) ihres Gewinns wieder an die Versicherten ausschütten. Dies kann zu einer niedrigeren Zahlprämie führen.

5.4 Ausreichendes Deckungskapital

Definition 5.4.1 Das ausreichende Deckungskapital ${}_kV_x^a$ zur Zeit k ist der Erwartungswert, bedingt auf das Überleben $\{K_x \geq k\}$, der Differenz der Barwerte der zukünftigen Leistungen und der anfallenden Kosten, abzüglich der zukünftig zu zahlenden Prämien.

Für eine n-jährige Versicherung mit Versicherungssumme S, Prämienzahlung über m Jahre und Verwaltungskosten γ_j im $(j+1)$-ten Jahr setzen wir

$$\Pi^\alpha = \frac{\alpha\, S}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}, \quad \Pi^\gamma = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j v^j\, {}_jp_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\, S\ .$$

Dann

$$\begin{aligned} {}_kV_x^a &= {}_kV_x && (5.1)\\ &\quad + \alpha\, S\, \mathbf{1}_{\{k=0\}} - \Pi^\alpha \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}\mathbf{1}_{\{k<m\}} && (5.2)\\ &\quad + \Big(\beta\, \Pi^a\, \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} - \beta\, \Pi^a\, \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}\Big)\, \mathbf{1}_{\{k<m\}} && (5.3)\\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-k-1} \gamma_{k+j} v^j\, {}_jp_{x+k} - \Pi^\gamma \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}\mathbf{1}_{\{k<m\}}. && (5.4) \end{aligned}$$

Die Anteile des Deckungskapitals in den Zeilen (5.2), (5.3), (5.4) werden mit ${}_kV_x^\alpha$, ${}_kV_x^\beta$ bzw. ${}_kV_x^\gamma$ bezeichnet.

Bemerkung 5.4.1
(i) Zeile (5.1) entspricht der Versicherung gegen das eigentliche Risiko, (5.2), d.i. ${}_kV_x^\alpha$, einer Versicherung gegen die Abschlusskosten, ${}_kV_x^\beta$ einer Versicherung gegen die Inkassokosten und ${}_kV_x^\gamma$ gegen die Verwaltungskosten.
(ii) Es gilt ${}_kV_x^\beta = 0$, dieser Anteil braucht also nicht weiter betrachtet zu werden.
(iii) Ist $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1} =: \gamma$, so folgt

$${}_kV_x^\gamma = \gamma\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - \gamma\, \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}.$$

Falls zusätzlich $m = n$ gilt, so ist daher auch ${}_kV_x^\gamma = 0$.

5.5 Zillmerung

Da die Abschlusskosten gleich zu Beginn anfallen, wird der Anteil ${}_kV_x^\alpha$ des Deckungskapitals in (5.2) negativ für $k \geq 1$. Da negatives Deckungskapital unattraktiv für das Versicherungsunternehmen ist, stellt sich die Frage, welche Abschlusskosten (im wesentlichen die Belohnung für den Versicherungsmakler) maximal gewährt werden können, so dass das Deckungskapital positiv bleibt. Das Verfahren zur Bestimmung solch eines $\overline{\alpha}$ bezeichnet man als Zillmerung. Dabei werden die Verwaltungskosten außer Acht gelassen.

Definition 5.5.1 ${}_k\overline{V}_x := {}_kV_x + {}_kV_x^\alpha$ heißt das Zillmersche Deckungskapital und

$$\overline{\alpha} = \max\{\alpha \mid {}_k\overline{V}_x \geq 0 \text{ für alle } k = 0, \ldots, n\}$$

heißt Zillmersches Maximum.

Für $k > 0$ gilt also nach (5.1) -(5.2)

$$ {}_k\overline{V}_x := {}_kV_x - \alpha\, S\, \frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}. $$

Oft ist es der Fall (bei geeigneten Zinsen, Sterblichkeiten), dass

$$ \begin{aligned} k &\mapsto \ddot{a}_{x+k:\overline{m-k}|} \quad \text{fallend,} \\ k &\mapsto {}_kV_x \quad \text{zu Beginn steigend} \end{aligned} $$

sind. Dann genügt es, das Zillmersche Deckungskapital im Jahr $k = 1$ zu betrachten, d.h. zu lösen ist

$$ 0 = {}_1\overline{V}_x = {}_1V_x - \overline{\alpha}\, S\, \frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} $$

d.h.

$$ \overline{\alpha} = \frac{{}_1V_x\, \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{S\, \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}}. $$

6 Versicherungen auf verbundene Leben

Wir betrachten jetzt Versicherungen, die vom Leben mehrerer Personen abhängen, wie zum Beispiel Witwen-, Waisenrenten, oder Risiko-Partnerversicherungen.
Die sogenannten Verbindungsrenten können zum Beispiel auf den ersten Tod (eher unüblich) oder den letzten Tod abgeschlossen sein. Im letzteren Fall kann man bei zwei versicherten Personen den zweiseitigen und den einseitigen Übergang unterscheiden, bei denen an den verbleibenden Partner gezahlt wird bzw. nur einer der Partner begünstigt ist. Genauso sind Todesfallversicherungen auf den ersten und den letzten Tod gebräuchlich.
Wir gehen stets von p Personen aus.

Annahme 6.0.1 Die Restlebensdauern $T_{x_1}, \ldots, T_{x_p}$ seien unabhängig.

Beachte, dass dies eine starke Annahme ist, die in der Regel nicht erfüllt ist (zum Beispiel bei alten Ehepaaren).
Es werden Gruppenzustände u eingeführt, für die die Notation wie für eine Person ($u = x$) benutzt werden kann. Viele Resultate erscheinen dann in analoger Form.

6.1 Der Zustand der verbundenen Leben

Der Zustand

$$u = x_1 : x_2 : \ldots : x_p$$

ist solange intakt wie alle Personen der Gruppe leben (joint-life status).
Für die 'Überlebenswahrscheinlichkeiten' dieses Zustandes gilt dann

$${}_tp_u = {}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_p} = P(T_u \geq t) = P(T_{x_1} \geq t, \ldots, T_{x_p} \geq t) = \prod_{j=1}^{p} {}_tp_{x_j},$$

wobei

$$T_u = \min\{T_{x_1}, \ldots, T_{x_p}\}.$$

Damit ist

$${}_tq_u = 1 - \prod_{j=1}^{p} {}_tp_{x_j} \, .$$

Entsprechendes gilt für die gestutzte Restlebensdauer $K_u = \min\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_p}\}$.

Beispiel 6.1.1 Die Todesfallversicherung auf den ersten Tod hat Barwert

$$Z = v^{K_u+1}$$

und daher die NEP

$$A_u = A_{x_1:x_2:\ldots:x_p} = \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_k p_{x_1:x_2:\ldots:x_p}\ q_{x_1+k:x_2+k:\ldots:x_p+k}$$

Beispiel 6.1.2 Für die Verbindungsrente auf den ersten Tod ergibt sich wie für ein Leben der Barwert

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ \mathbf{1}_{\{K_u \geq k\}} = \frac{1-v^{K_u+1}}{d}$$

und die NEP

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:\ldots:x_p} = \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_k p_{x_1:x_2:\ldots:x_p}$$

oder

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:\ldots:x_p} = \frac{1-\ A_{x_1:x_2:\ldots:x_p}}{d}.$$

6.2 Der Zustand des letzten Lebens

Der Zustand

$$u = \overline{x_1 : \ldots : x_p}$$

ist intakt, solange noch mindestens eine Person der Gruppe lebt (last-survivor status). Es ist für $T_u = \max\{T_{x_1}, \ldots, T_{x_p}\}$

$${}_t p_u = {}_t p_{\overline{x_1:\ldots:x_p}} = P(T_u \geq t) = P\left(\bigcup_{j=1}^{p}\{T_{x_j} \geq t\}\right).$$

Mit dem Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie (Siebformel) folgt

$${}_t p_u = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq p} P(T_{x_{i_1}} \geq t, \ldots, T_{x_{i_p}} \geq t) = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq p} {}_t p_{x_{i_1}:\ldots:x_{i_j}}$$

Mit der Abkürzung

$$S_j^t = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq p} {}_t p_{x_{i_1}:\ldots:x_{i_j}}$$

folgt also

$${}_t p_{\overline{x_1:\ldots:x_p}} = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1} S_j^t\ .$$

Auf der rechten Seite kommen nur die gut berechenbaren Überlebenswahrscheinlichkeiten für verbundene Leben aus dem letzten Abschnitt vor.

Beispiel 6.2.1 Für die Verbindungsrente auf den letzten Tod gilt

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{x_1:\ldots:x_p}} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_p}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} S_j^k \\ &= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \sum_{k=0}^{\infty} v^k S_j^k \end{aligned}$$

Setzen wir

$$S_j^{\ddot{a}} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le p} \ddot{a}_{x_{i_1}:\ldots:x_{i_j}}$$

so ergibt sich

$$\ddot{a}_{\overline{x_1:\ldots:x_p}} = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} S_j^{\ddot{a}}.$$

Beispiel 6.2.2 Für die NEP einer Todesfallversicherung auf das letzte Leben können wir wie in Abschnitt 6.1 zeigen, dass

$$A_{\overline{x_1:\ldots:x_p}} = 1 - d\, \ddot{a}_{\overline{x_1:\ldots:x_p}}$$

gilt. Mit der Bezeichnung

$$S_j^A := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le p} A_{x_{i_1}:\ldots:x_{i_j}}$$

folgt

$$A_{\overline{x_1:\ldots:x_p}} = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} S_j^A,$$

da

$$S_j^A = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le p} (1 - d\, \ddot{a}_{\overline{x_{i_1}:\ldots:x_{i_j}}}) = \binom{p}{j} - d\, S_j^{\ddot{a}}$$

und

$$\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} \binom{p}{j} = 1 + (1-1)^p = 1.$$

6.3 Beispielaufgabe

Siehe Vorlesung.

6.4 Verallgemeinerungen

Die Resultate in den Abschnitten 6.1 und 6.2 können entsprechend auch für n-jährige Versicherungen, unterjährige Zahlungen oder in stetiger Zeit erhalten werden.
Man kann natürlich noch allgemeinere Gruppenzustände betrachten. Zum Beispiel für die Zustände, dass mindestens m Personen leben oder dass genau m Personen der Gruppe noch leben, lassen sich verallgemeinerte Additionstheoreme und darauf aufbauend der Satz von Schuette-Nesbitt benutzen um die 'Überlebenswahrscheinlichkeiten' zu bestimmen.

7 Verschiedene Ausscheideursachen

Anstatt von 'Restlebenszeit' sprechen wir jetzt von 'Verbleibezeit' und unterscheiden mehrere Ausscheideursachen.
Ein naheliegendes Beispiel in der Lebensversicherung ist die Unterscheidung von Unfalltod und von nicht durch Unfall verursachtem Tod mit entsprechend unterschiedlichen Auszahlungen.

7.1 Modellierung

Neben einer Zufallsvariablen T_x, die (wie bisher) die Verbleibezeit eines x-Jährigen beschreibt, wird eine weitere Zufallsvariable J_x eingeführt, deren Wert aus $\{1, \ldots, n_j\}$ die Ausscheideursache des jetzt x-Jährigen angibt.
Die Verteilung wird beschrieben durch substochastische partielle Verteilungsfunktionen

$$G_{x,j}(t) := P(T_x \leq t, J_x = j), \quad j = 1, \ldots, n_j,$$

mit Dichten

$$g_{x,j}(t) := \frac{d}{dt} G_{x,j}(t), \quad j = 1, \ldots, n_j,$$

von denen wir wieder annehmen wollen, dass sie stetig seien. Die Verteilung von T_x ist dann gegeben durch

$$G_x(t) = P(T_x \leq t) = \sum_{j=1}^{n_j} G_{x,j}(t) \quad \text{oder} \quad g_x(t) = P(T_x \leq t) = \sum_{j=1}^{n_j} g_{x,j}(t).$$

Es werden die (t-jährigen) *partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten*

$${}_tq_{x,j} = G_{x,j}(t),$$

eingeführt und daraus die *Ausscheidewahrscheinlichkeit*

$${}_tq_x = \sum_{j=1}^{n_j} {}_tq_{x,j}$$

und die *Verbleibewahrscheinlichkeit*

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$$

bestimmt. Die Stationaritätsannahme muss jetzt durch die *Verträglichkeitsbedingung*

$$P(T_{x+s} > t, J_{x+s} = j) = P(T_x > s+t, J_x = j \,|\, T_x > s), \quad s \geq 0, t > 0, j = 1, \ldots, n_j,$$

ersetzt werden. Diese wollen wir im Folgenden stets voraussetzen. Dann folgen insbesondere

$$\begin{aligned} {}_{s|t}q_{x,j} &:= {}_{s+t}q_{x,j} - {}_{s}q_{x,j} = {}_{s}p_x \, {}_{t}q_{x+s,j}, \\ {}_{k}p_x &:= \prod_{l=0}^{k-1} p_{x+l}. \end{aligned}$$

Damit sind wir in der Lage bei Kenntnis der partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten

$$q_{x+k,j}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, \ldots, n_j,$$

zum Beispiel wenn diese vertafelt sind, für die gestutzten Verbeleibezeiten $K_x = [T_x]$ die Verteilung zu bestimmen:

$$P(K_x = k, J_x = j) = {}_{k}p_x \, q_{x+k,j}.$$

Unter einer Linearitätsannahme an die partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten ließen sich daraus ähnlich wie in Abschnitt 2.2 um Lemma 2.2.1 herum auch wieder Verteilungen für (T_x, J_x) bestimmen.

7.2 Allgemeine Ausscheideversicherung

Bei Auszahlung von $c_{k+1,j}$ bei Ausscheiden im $(k+1)$-ten Jahr mit der Ursache j ist der Barwert

$$Z = c_{K_x+1,j} \, v^{K_x+1}$$

und somit die NEP

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1,j} v^{k+1} \, {}_{k}p_x \, q_{x+k,j} \; .$$

Beispiel 7.2.1 Bestimmung der NEP einer 2-jährigen Todesfallversicherung für einen 20-Jährigen mit doppelter Auszahlung bei einem Unfalltod. Siehe Vorlesung.

7.3 Ausblick auf weitere Personenversicherungen

Die Lebensversicherung endet zumeist mit Tod, Ablauf oder Storno, d.h. bei Ende gibt es endlich viele Ausscheideursachen. Dies ermöglicht die relativ einfache Modellierung mit einer Zufallsvariablen für die Lebenszeit und eventuell einer weiteren für die Ausscheideursache.
Bei anderen Personenversicherungen wie zum Beispiel Kranken- oder Pensionsversicherung ist häufig jederzeit ein Wechsel zwischen endlich vielen Zuständen möglich. Diese

Versicherungen können daher adäquat nur durch einen stochastischen Prozess (einer Folge von Zufallsvariablen) beschrieben werden, der Werte in der Menge der möglichen Zustände annimmt. Im einfachsten Fall kann eine Markovkette verwendet werden, deren Übergangswahrscheinlichkeiten dann auch entsprechenden Tafeln entnommen werden können.
Zum Beispiel ist das der Fall für die *Schärtlin'sche Ausscheideordnung* in der Pensionsversicherung (1906), die die Zustände {Aktiver, Tod, Invalide, Storno, Alterspension} unterscheidet. Für die relevanten Übergangswahrscheinlichkeiten gibt es dann abgesehen von den unternehmensspezifischen Stornowahrscheinlichkeiten entsprechende länderspezifische Tafeln.