Vorlesungsskript „Stochastische Finanzmathematik"

Christoph Kühn

aktuelle Version: 28. Juni 2006

Dies ist das Skript zu einer einführenden, dreistündigen Vorlesung in Finanzmathematik, die ich im Sommersemester 2003 am Fachbereich Mathematik der Goethe-Universität Frankfurt gehalten habe. Ziel war es, den Teilnehmer grundlegende Begriffe, Zusammenhänge und Methoden aus der Finanzmathematik näherzubringen, wie z.B. selbstfinanzierende Handelsstrategien, Arbitragemöglichkeit, Numéraire, Martingalmaße, Forwards, Optionen, Superhedging, Risikominimierung. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Bewertung und (teilweisen) Absicherung von Derivaten sowie der Portfoliooptimierung.

Ich habe mich auf zeitdiskrete Modelle beschränkt, was den Vorteil hat, dass man schon in einer einführenden Vorlesung bis zu aktuellen Forschungsproblemen vorstoßen kann. Folge ist zudem, dass der *vollständige* Markt, der sich durch eindeutige arbitragefreie Derivatepreise auszeichnet, sich schnell als sehr eingeschränkter Spezialfall entpuppt, und der *unvollständige* Markt zum Regelfall wird.

Aufgrund der Kürze der Zeit mussten natürlich einige Kompromisse gemacht werden. Es wurde deshalb bewusst nur der Aktienmarkt behandelt und zum Beispiel der Bondmarkt („Zinsstrukturkurven") außen vor gelassen. Dieser wird in einer späteren Vorlesung im Rahmen zeitstetiger Modelle behandelt werden. Auch das Thema Risikomaße ist Gegenstand eines späteren Seminars.

Neben einigen anderen Einflüssen hält sich das Skript phasenweise sehr eng an **Kallsen** [8] und **Föllmer und Schied** [4]. Bei Philipp Hornung möchte ich mich für das Korrekturlesen bedanken. Dies ist eine **erste Version** des Skriptes. Daher bin ich für weitere Fehlerkorrekturen und Verbesserungsvorschläge sehr dankbar.

Inhaltsverzeichnis

0 Grundlagen

Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nennen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum

Ω: "beliebige" Menge, $\omega \in \Omega$ nennen wir ein **Ergebnis**

$\mathcal{F}$: Mengensystem bestehend aus Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$. $A \in \mathcal{F}$ nennen wir ein **Ereignis**. $\mathcal{F}$ soll zudem eine σ-Algebra sein, d.h. folgende Eigenschaften besitzen

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

(iv) Wahrscheinlichkeitsmaß P: $\mathcal{F} \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, σ-additiv, d.h. für jede Folge von disjunkten Ereignissen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ gilt $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Interpretation: $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist beobachtbares Ereignis}\}$.

Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zusammen mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. In dieser Vorlesung ist die Zeit diskret, d.h. $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$. $\mathbb{F}$ ist eine Familie von Teil-σ-Algebren mit

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$$

Interpretation: $\mathbb{F}$ beschreibt den Informationsverlauf. $\mathcal{F}_t$ steht für die Information, die wir zum Zeitpunkt t haben. $A \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass zum Zeitpunkt t bekannt ist, ob das Ereignis A eingetreten ist oder nicht (d.h. es ist bekannt, ob $\omega \in A$ oder $\omega \notin A$). In der Regel setzen wir voraus, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ("triviale σ-Algebra", keine Information) und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Beispiel 0.1 (T-facher Münzwurf). $\Omega = \{0,1\}^T$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

$$\mathcal{F}_t = \{A \in 2^{\Omega} \mid A = A_1 \times \{0,1\}^{T-t} \textit{ für ein } A_1 \in 2^{\left(\{0,1\}^t\right)}\}$$

($2^{\left(\{0,1\}^t\right)}$ symbolisiert die Potenzmenge der Menge $\{0,1\}^t$).

Für $T = 2$ und $t = 1$ bedeutet dies

$$\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset, \{(0,0),(0,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\big\}.$$

Definition 0.2. *Die Menge*

$$\mathcal{B} := \sigma(\{B \subset \mathbb{R} \mid B \text{ ist offen}\}) := \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathbb{G}} \mathcal{G},$$

mit

$$\mathbb{G} = \left\{\mathcal{G} \subset 2^{\mathbb{R}} \text{ mit } \{B \subset \mathbb{R} \mid B \text{ ist offen}\} \subset \mathcal{G} \text{ und } \mathcal{G} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\right\}$$

nennen wir die Borelsche-σ-Algebra.

Da beliebige Schnitte von σ-Algebren wieder σ-Algebren sind, ist $\mathcal{B}$ in der Tat eine σ-Algebra.

Definition 0.3. *Eine Abbildung $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, die $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$-messbar ist, d.h.*

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

nennen wir eine reellwertige Zufallsvariable. Die Menge

$$\sigma(Y) := \sigma(\{Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{Y^{-1}(B) \mid B \text{ offene Teilmenge des } \mathbb{R}\})$$

ist die von der Zufallsvariablen Y erzeugte σ-Algebra (die kleinste σ-Algebra, die alle Urbilder $Y^{-1}(B)$ enthält).

Aus technischen Gründen, die aber zum Verständnis der Vorlesung nicht weiter wichtig sind, können wir im Fall, dass Ω überabzählbar ist, i.A. nicht mehr allen Teilmengen von Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnen (wenn zudem das Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmte wünschenswerte Eigenschaften haben soll). Für die Erfordernisse der stochastischen Modellierung ist die Menge $\{Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ allerdings gross genug (Es ist gar nicht so einfach, eine Teilmenge des $\mathbb{R}$ anzugeben, die nicht Element aus $\mathcal{B}$ ist).

0.1 Bedingter Erwartungswert

Sei Y eine reellwertige $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable mit $E(|Y|) < \infty$ und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Es gibt eine P-f.s. eindeutige* $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable Z mit

$$\int_A Y \, dP = \int_A Z \, dP, \qquad \forall A \in \mathcal{G}. \tag{0.1}$$

*D.h. für Zufallsvariablen Z_1, Z_2, die (0.1) erfüllen, gilt $P(Z_1 = Z_2) = 1$. Eindeutigkeit ist klar: man setze für A die $\mathcal{G}$-messbaren Mengen $\{\omega \in \Omega \mid Z_1(\omega) < Z_2(\omega)\}$ und $\{\omega \in \Omega \mid Z_1(\omega) > Z_2(\omega)\}$ ein.

Die Zufallsvariable $E(Y|\mathcal{G}) := Z$ wird als eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y unter der Information $\mathcal{G}$ bezeichnet.

Bemerkung 0.4. *Für die triviale σ-Algebra $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, bedeutet die geforderte $\mathcal{G}$-Messbarkeit von Z, dass Z eine konstante Abbildung ist, d.h. $Z(\omega) = z_0$ für alle $\omega \in \Omega$. Setzt man in (0.1) $A = \Omega$, dann sieht man, dass $Z = E(Y)$. Der absolute Erwartungswert kann also als bedingter Erwartungswert bzgl. der trivialen σ-Algebra gesehen werden.*

Bemerkung 0.5. *Im Fall, dass Ω abzählbar ist, lässt sich die Existenz von Z in (0.1) elementar beweisen (Z lässt sich leicht konstruieren): In diesem Fall existiert eine abzählbare Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Atomen von $\mathcal{G}$, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und*[†]

$$\mathcal{G} = \{A \in 2^\Omega \mid A = \bigcup_{i\in J} A_i \text{ für ein } J \subset I\}. \tag{0.2}$$

Eine Version des bedingte Erwartungswert von Y unter $\mathcal{G}$ ist die folgende Zufallsvariable: Für $\omega \in A_i$ setze

$$E(Y|\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} \frac{E(Y 1_{A_i})}{P(A_i)} & : \text{wenn } P(A_i) > 0. \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die so konstruierte Zufallsvariable Bedingung (0.1) erfüllt.

Bemerkung 0.6. *Für den allgemeinen Fall muss (müsste) die Existenz von Z in (0.1) natürlich noch gezeigt werden. Dazu gibt es verschiedene Wege: (1) Projektion von Y auf den Unterraum der $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen. (2) Betrachte das Maß $\mu(A) := E(1_A Y)$ für $A \in \mathcal{G}$ und bilde die sog. Radon-Nikodym-Ableitung von μ bzgl. des Maßes $P|_{\mathcal{G}}$.*

[†]Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$. Wir wollen zeigen, dass es zu der σ-Algebra $\mathcal{G}$ eine abzählbare Familie von Atomen gibt. Definiere $A_1 := \bigcap_{B\in\mathcal{G},\ \omega_1\in B} B$. A_1 lässt sich als *abzählbarer* Schnitt schreiben, indem man alle $\omega = \omega_2, \omega_3, \ldots$ durchläuft und schaut, ob man sie von ω_1 trennen kann, d.h. ob es ein $B \in \mathcal{G}$ gibt mit $\omega_1 \in B$ aber $\omega \notin B$. Damit folgt $A_1 \in \mathcal{G}$. Wenn $A_1 = \Omega$, sind wir fertig (In diesem Fall muss $\mathcal{G}$ jedoch trivial sein. Für jedes $B \in \mathcal{G}$ gilt nämlich $A_1 \subset B$ oder $A_1 \subset B^c$). Ansonsten sei n die kleinste natürliche Zahl > 1 mit $\omega_n \notin A_1$. Setze $A_2 := \bigcap_{B\in\mathcal{G},\ \omega_n\in B} B$. Es gilt wieder $A_2 \in \mathcal{G}$. Außerdem $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (sei $\omega \in A_1 \cap A_2$, es gilt für alle $B \in \mathcal{G}$ die Äquivalent $\omega_1 \in B \Leftrightarrow \omega \in B \Leftrightarrow \omega_n \in B$. Dies wäre aber ein Widerspruch zu $\omega_n \notin A_1$). Fährt man so fort, so konstruiert man die Familie von Atomen (Eigenschaft (0.2) lässt sich leicht zeigen).

Satz 0.7 (Eigenschaften der bedingten Erwartung). *Seien Y_1, Y_2 und Y Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E(|Y_1|) < \infty$, $E(|Y_2|) < \infty$, $E(|Y|) < \infty$. Ferner seien $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}$ Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Dann gelten folgende Aussagen*

(i) (Linearität) Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist $E[\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \mid \mathcal{G}] = \lambda_1 E[Y_1 \mid \mathcal{G}] + \lambda_2 E[Y_2 \mid \mathcal{G}]$

(ii) Ist Y_1 $\mathcal{G}$-messbar, so ist $E[Y_1 Y_2 \mid \mathcal{G}] = Y_1 E[Y_2 \mid \mathcal{G}]$ und $E[Y_1 \mid \mathcal{G}] = Y_1$.

(iii) (Satz vom iterierten Erwartungswert) Ist $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, so ist

$$E[E[Y \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1] = E[Y \mid \mathcal{G}_1].$$

(iv) (Monotonie) Ist $Y_1 \leq Y_2$, so ist

$$E[Y_1 \mid \mathcal{G}] \leq E[Y_2 \mid \mathcal{G}].$$

(v) (Jensensche Ungleichung) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, so ist $\infty \geq E[\varphi(Y) \mid \mathcal{G}] \geq \varphi(E[Y \mid \mathcal{G}])$

(vi) Sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig, dann gilt

$$E[Y_1 \mid Y_2] := E[Y_1 \mid \sigma(Y_2)] = E[Y_1].$$

Beweis. Ad (i): Seien Z_1 und Z_2 Versionen des bedingten Erwartungswertes von Y_1 bzw. Y_2 unter der Information $\mathcal{G}$. Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist die Zufallsvariable $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ $\mathcal{G}$-messbar und aus der Linearität des absoluten Erwartungswertes folgt

$$\begin{aligned} E\left(1_A(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)\right) &= \lambda_1 E\left(1_A Z_1\right) + \lambda_2 E\left(1_A Z_2\right) \\ &= \lambda_1 E\left(1_A Y_1\right) + \lambda_2 E\left(1_A Y_2\right) \\ &= E\left(1_A(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)\right), \quad \forall A \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Ad (ii): Zunächst soll die Aussage nur für den Fall gezeigt werden, dass Y_1 eine Indikatorfunktion ist, d.h. $Y_1 = 1_B$ für ein $B \in \mathcal{G}$. Sei Z_2 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y_2 unter $\mathcal{G}$. Da $A, B \in \mathcal{G} \implies A \cap B \in \mathcal{G}$, folgt

$$E(1_A Y_1 Z_2) = E(1_{A\cap B} Z_2) = E(1_{A\cap B} Y_2) = E(1_A Y_1 Y_2), \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Außerdem ist $Y_1 Z_2$ $\mathcal{G}$-messbar. Also ist $Y_1 Z_2$ bedingter $\mathcal{G}$-Erwartungswert von $Y_1 Y_2$. Wegen (i) gilt die Aussage auch für sog. Elementarfunktionen $Y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{G}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und die allgemeine Aussage folgt mit einem Grenzübergang.

Ad (iii): Sei Z_1 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y gegeben die Information $\mathcal{G}_1$ und Z_2 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y gegeben die Information $\mathcal{G}_2$. Es gilt also $E(1_A Z_1) = E(1_A Y)$, $\forall A \in \mathcal{G}_1$ und $E(1_A Z_2) = E(1_A Y)$, $\forall A \in \mathcal{G}_2$. Wegen $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ folgt $E(1_A Z_1) = E(1_A Z_2)$, $\forall A \in \mathcal{G}_1$. Da Z_1 $\mathcal{G}_1$-messbar ist, ist Z_1 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Z_2 gegeben die Information $\mathcal{G}_2$. Insbesondere ist der Ausdruck $E[E[Y \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1]$ wohldefiniert, d.h. der bedingte $\mathcal{G}_1$-Erwartungswert hängt nicht von der Version des bedingten $\mathcal{G}_2$-Erwartungswertes ab (bis auf die nicht vermeidbare Unbestimmtheit auf einer $\mathcal{G}_1$-messbaren P-Nullmenge).

Ad (iv): Es gilt $E(1_A Z_1) = E(1_A Y_1) \leq E(1_A Y_2) = E(1_A Z_2)$, $\forall A \in \mathcal{G}$. Setzte $A := \{Z_1 > Z_2\} \in \mathcal{G}$. Es folgt $P(Z_1 \leq Z_2) = 1$.

Ad (v): Der Beweis wird hier nur für den Fall geführt, dass φ differenzierbar ist. Aus der Konvexität von φ folgt

$$\varphi(Y) \geq \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})) + \varphi'(E(Y \mid \mathcal{G}))(Y - E(Y \mid \mathcal{G})), \quad P-\text{fast sicher.}$$

und damit

$$\begin{aligned} E[\varphi(Y) \mid \mathcal{G}] &\geq \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})) + E[\varphi'(E(Y \mid \mathcal{G}))(Y - E(Y \mid \mathcal{G})) \mid \mathcal{G}] \\ &= \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})) + \varphi'(E(Y \mid \mathcal{G}))\underbrace{E[Y - E(Y \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}]}_{=0} \\ &= \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})), \quad P-\text{fast sicher.} \end{aligned}$$

□

1 Modellierung arbitragefreier Finanzmärkte

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,\ldots,T\}}, P)$, wobei $T \in \mathbb{N}$. Eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,\ldots,T\}}$ ist eine Folge von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für $s \leq t$. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ steht für die Information, die zum Zeitpunkt t vorhanden ist: $A \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass wir zum Zeitpunkt t wissen, ob das Ereignis A eingetreten ist oder nicht.

Eine *Stoppzeit* ist eine Abbildung $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ mit $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t = 0, 1, \dots, T$. Anschaulich entspricht τ einer Stoppentscheidung, in die immer nur die jeweils zur Verfügung stehende Information einfließt.

Proposition 1.1. *Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ ist genau dann eine Stoppzeit, wenn $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t = 0, 1, \dots, T$.*

Beweis. Sei τ eine Stoppzeit. Es gilt $\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau \leq t - 1\}$. Da $\{\tau \leq t\}$ und $\{\tau \leq t - 1\}$ beide aus $\mathcal{F}_t$ sind, folgt $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Erfülle τ die Bedingung aus Proposition 1.1. Es gilt $\{\tau \leq t\} = \bigcup_{s=0}^{t} \underbrace{\{\tau = s\}}_{\in \mathcal{F}_s}$. Da $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$, folgt $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, also ist τ eine Stoppzeit. $\square$

Ein *stochastischer Prozess* ist eine Abbildung $X : \Omega \times \{0, \dots, T\} \to \mathbb{R}^d$. Mit X_t bezeichnen wir die t-Schnitte der Abbildung X, d.h. $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\omega \mapsto X(\omega, t)$. Ein stochastischer Prozess lässt sich somit auch mit der Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ identifizieren.

Alternativ kann man einen stochastischen Prozess auch als Zufallsvariable auffassen, deren Werte Funktionen der Zeit sind, d.h. Abbildungen $\mathcal{T} \to \mathbb{R}^d$. Dies ist z.B. im Fall $\mathcal{T} = [0, T]$ angebracht, wenn man möchte, dass ein Prozess P-f.s. stetige Pfade hat.

In diskreten Modellen benutzen wir die Notation $t- := t - 1$. Ferner sei $\Delta X_t := X_t - X_{t-} = X_t - X_{t-1}$. X_- und ΔX bezeichnen somit die stochastischen Prozesse $(X_{t-1})_{t=0,1,\dots,T}$ bzw. $(X_t - X_{t-1})_{t=0,1,\dots,T}$. Wird auf diese Prozesse zurückgegriffen, so interessiert der Wert für $t = 0$ nicht, so dass wir X_{-1} beliebig wählen können.

Diese Notation vereinfacht die Darstellung und berücksichtigt, dass sich zeitdiskrete Prozesse als spezielle zeitstetige Prozesse mit càdlàg (rechtsstetig mit existierenden linken Limiten) Pfaden interpretieren lassen, die nur bei den Gitterpunkten $\{1, \dots, T\}$ ihren Wert verändern und dazwischen konstant sind. Definiere dazu den Prozess: $\widetilde{X} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ mit $\widetilde{X}_t(\omega) := X_{[t]}(\omega)$, wobei $[t] := \max\{s \in \mathbb{N}_0 \mid s \leq t\}$. Für $t \in \{1, \dots, T\}$ gilt $\lim_{s \uparrow t,\, s<t} \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_{t-1}$. *Wenn wir in einer späteren Vorlesung zum "allgemeinen zeitstetigen Fall" übergehen, müssen die Notationen also nicht mehr geändert werden.* Viele Resultate gelten auch für "wirklich" zeitstetige Prozesse und die Formeln sehen dann genauso aus.

Definition 1.2. *(i) Ein Prozess X heißt* adaptiert*, wenn X_t für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist.*

(ii) Ein Prozess X heißt vorhersehbar*, wenn X_t für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ $\mathcal{F}_{t-}$-messbar ist, d.h. der Wert von X_t ist schon in $t-1$ bekannt ($\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$).*

Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$ heißt von X erzeugt, wenn $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$

Ein adaptierter stochastischer Prozess X mit $E(|X_t|) < \infty$ ist ein Martingal, wenn

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s, \quad P-\text{f.s.}, \quad \text{für } s \leq t. \tag{1.3}$$

(1.3) besagt, dass X_s eine Version des bedingten Erwartungswertes von X_t unter der Information $\mathcal{F}_s$ sein muss, also $E(1_A X_s) = E(1_A X_t)$, $\forall A \in \mathcal{F}_s$.

X ist ein Supermartingal (bzw. Submartingal), wenn statt (1.3) $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$ (bzw. $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$) gilt, d.h. $E(1_A(X_t - X_s)) \leq 0$ (bzw. $E(1_A(X_t - X_s)) \geq 0$).

Definition 1.3. *Sei X ein diskreter adaptierter Prozess und H ein diskreter vorhersehbarer Prozess (für die Definition in diskreter Zeit würde adaptiert ausreichen).*

Unter dem stochastischen Integral *von H nach X verstehen wir den folgendermaßen definierten Prozess $H \bullet X$,*

$$H \bullet X_t := \int_0^t H_s \, dX_s := \sum_{s=1}^{t} H_s^\top \Delta X_s,$$

wobei $\sum_{s=1}^{0} := 0$. Den Prozess H bezeichnen wir als Integranden und den Prozess X als Integrator.

In der Finanzmathematik spielen stochastische Integrale eine wichtige Rolle. Man kann sie nämlich als Gewinn einer Handelsstrategie interpretieren. Betrachte dafür einen Markt mit $d+1$ Wertpapieren, deren *Preisprozess* durch den adaptierten stochastischen Prozess $S = (S^0, \dots, S^d)$ modelliert werden soll. S_t^i bezeichne also den Preis von Wertpapier i zum Zeitpunkt t. Wir nehmen an, dass $S > 0$, P-f.s. Eine *Handelsstrategie* $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$ wird als $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger *vorhersehbarer* Prozess modelliert. φ_t^i steht für die Anzahl der Wertpapiere i, die in der Handelsperiode zwischen $t-1$ und t in unserem Portfolio sind. φ_t^i ist also die Investition in den Sprung ΔS_t^i. Wenn der Investor keine prophetische

Gaben besitzen soll, sollte man annehmen, dass bei der Entscheidung über φ_t^i die zufällige Komponente des Kurssprungs ΔS_t^i (bzw. die Information über S_t^i) noch nicht antizipiert werden kann. Wir nehmen also an, dass die Zufallsvariable φ_t^i $\mathcal{F}_{t-1}(=\mathcal{F}_{t-})$-messbar sein muss.

Macht das Wertpapier i zum Zeitpunkt t den Sprung ΔS_t^i, so resultiert hieraus, dass sich der Wert des Portfolios um den Betrag $\varphi_t^i \Delta S_t^i$ verändert. Damit korrespondiert der Wert des Portfolio mit einem stochastischen Integral, d.h. $v_0 + \varphi \bullet S_t$ (v_0 Startkapital).

Bevor wir wieder zu den Handelsstrategien kommen, noch ein paar Definitionen und einfache Rechenregeln:

Proposition 1.4. *Seien X, Y reellwertige adaptierte und H, K reellwertige vorhersehbare Prozesse. Dann gilt:*

(i) $H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X$

(ii) Partielle Integration $XY = X_0Y_0 + X_- \bullet Y + Y \bullet X = X_0Y_0 + X \bullet Y + Y_- \bullet X$

(iii) Wenn X ein Martingal und H beschränkt ist, dann ist der Prozess $H \bullet X$ ein Martingal.

Beweis. (i) $H \bullet (K \bullet X)_t = \sum_{s=1}^t H_s \Delta(K \bullet X)_s = \sum_{s=1}^t H_s K_s \Delta X_s = (HK) \bullet X_t$
(ii)

$$\begin{aligned} X_tY_t &= X_0Y_0 + \sum_{s=1}^t (X_sY_s - X_{s-1}Y_{s-1}) \\ &= X_0Y_0 + \sum_{s=1}^t (X_{s-1}(Y_s - Y_{s-1}) + Y_s(X_s - X_{s-1})) \\ &= X_0Y_0 + X_- \bullet Y_t + Y \bullet X_t \end{aligned}$$

(iii) Zu zeigen ist, dass $H \bullet X$ adaptiert und integrierbar ist und dass gilt $E(H \bullet X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = H \bullet X_{t-1}$. Adaptiertheit ist klar, da $H \bullet X_t$ nur von $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen abhängt. Sei $|H_t| \le m \in \mathbb{R}$. Wegen $|H \bullet X_t| \le m \sum_{s=1}^t |\Delta X_s| \le 2m \sum_{s=1}^t |X_s|$ ist $H \bullet X_t$

integrierbar. Für alle $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} E(H \bullet X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\sum_{s=1}^{t} H_s \Delta X_s \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sum_{s=1}^{t-1} H_s \Delta X_s + H_t E(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= H \bullet X_{t-1} + 0. \end{aligned}$$

□

Satz 1.5. *[Doob-Zerlegung] Sei $X = (X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit $E|X_t| < \infty$ für $t = 0, 1, \dots, T$. Dann lässt sich X in folgender Weise zerlegen:*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

wobei $M_0 = A_0 = 0$, M ein Martingal ist und A ein vorhersehbarer stochastischer Prozess. Diese Zerlegung ist P-f.s. eindeutig.

A lässt sich als Drift-Komponente des Prozesses interpretieren und M sind die aufaddierten (unsystematischen) Schwankungen um diesen Trend.

Beweis. Für $t \geq 1$ setze $A_t := \sum_{i=1}^{t} E(\Delta X_i \mid \mathcal{F}_{i-1})$. M ergibt sich dann aus $\Delta M_t = \Delta X_t - \Delta A_t = \Delta X_t - E(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$. Offenbar ist A_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar und $E(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Damit ist die Existenz bewiesen. Nehmen nun an, es gäbe eine weitere solche Zerlegung $X_t = X_0 + \widetilde{M}_t + \widetilde{A}_t$,, wobei $\widetilde{M}_0 = \widetilde{A}_0 = 0$, $\widetilde{M}$ ein Martingal ist und $\widetilde{A}$ ein vorhersehbarer stochastischer Prozess. Für den oben definierten Prozess A gilt

$$A_t = \sum_{i=1}^{t} E(\Delta X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=1}^{t} E(\Delta(\widetilde{M} + \widetilde{A})_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=1}^{t} \Delta \widetilde{A}_i = \widetilde{A}_t.$$

Damit gilt Eindeutigkeit. □

Ein Portfolio heißt *selbstfinanzierend*, wenn die Veränderung seines Wertes

$$V := V(\varphi) := \varphi^\top S$$

(ausschließlich) aus den Preisveränderungen der enthaltenen Wertpapiere resultiert. Es gibt also keine externe Kapitalentnahme oder -zuführung. Alle Umschichtungen im Portfolio müssen kostenneutral erfolgen. Dies lässt sich mathematisch durch folgende Definition ausdrücken.

Definition 1.6. *Eine Handelsstrategie $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ heißt* selbstfinanzierend, *wenn für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ gilt $(\Delta\varphi_t)^\top S_{t-1} = \sum_{i=0}^d \Delta\varphi_t^i S_{t-1}^i = 0$.*

Proposition 1.7. *Eine Handelsstrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn $V_t := \varphi_t^\top S_t = \varphi_0^\top S_0 + \varphi \bullet S_t$ für alle $t = 0, \dots, T$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
& (\varphi_t - \varphi_{t-1})^\top S_{t-1} = 0 \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top S_t - \varphi_{t-1}^\top S_{t-1} = \varphi_t^\top S_t - \varphi_t^\top S_{t-1} \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \Delta(\varphi^\top S)_t = \Delta(\varphi \bullet S)_t \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top S_t = \varphi_0^\top S_0 + \varphi \bullet S_t \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

□

Definition 1.8. $\widehat{S} := \frac{1}{S^0} S = (1, \frac{S^1}{S^0}, \dots, \frac{S^d}{S^0})$ *heißt* abdiskontierter *Preisprozess.* $\widehat{V} := \varphi^\top \widehat{S}$ *bezeichne den zu der Handesstrategie φ gehörigen* abdiskontierten *Wertprozess.*

Proposition 1.9. *Eine Handelsstrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\widehat{V}_t = \widehat{V}_0 + \varphi \bullet \widehat{S}_t \tag{1.4}$$

Man beachte, dass $\varphi \bullet \widehat{S}_t$ nicht von φ^0 abhängt, da $\Delta\widehat{S}^0 = 0$.

Die Proposition besagt, dass die Selbstfinanzierungseigenschaft einer Strategie φ nicht davon abhängt, ob wir alle Wertgrößen als Vielfachheiten der Eins oder als Vielfachheiten des Numéraires S^0 verrechnen.

Beweis. Da $\varphi_t^\top S_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top S_{t-1} = 0$ genau dann wenn $\varphi_t^\top \widehat{S}_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top \widehat{S}_{t-1} = 0$, geht der Beweis analog zu Proposition 1.7:

$$\begin{aligned}
& \varphi_t^\top S_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top S_{t-1} = 0 \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top \widehat{S}_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top \widehat{S}_{t-1} = 0 \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top \widehat{S}_t - \varphi_t^\top \widehat{S}_{t-1} = \varphi_t^\top \widehat{S}_t - \varphi_{t-1}^\top \widehat{S}_{t-1} \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \Delta(\varphi \bullet \widehat{S})_t = \Delta(\varphi_t^\top \widehat{S}_t) \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_0^\top \widehat{S}_0 + \varphi_t \bullet \widehat{S}_t = \varphi_t^\top \widehat{S}_t \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

□

Satz 1.10. *Für jeden vorhersehbaren Prozess $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ und Startkapital v_0 existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess φ^0, so dass $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ selbstfinanzierend ist mit $\varphi_0^\top S_0 = v_0$.*

Beweis. Da $\widehat{S}^0 = 1$, ist (1.4) äquivalent zu

$$\varphi_t^0 = \widehat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d)_t - (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)^\top (\widehat{S}_t^1, \dots, \widehat{S}_t^d) \tag{1.5}$$

und da $\Delta(H \bullet X)_t = H_t^\top \Delta X_t$ ist (1.5) äquivalent zu

$$\varphi_t^0 = \widehat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d)_{t-1} - (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)^\top (\widehat{S}_{t-1}^1, \dots, \widehat{S}_{t-1}^d) \tag{1.6}$$

Die rechte Seite von (1.6) ist aber offenbar ein vorhersehbarer Prozess. □

Arbeitet man mit abdiskontierten Größen, hat dies den Vorteil, dass man die Komponenten φ^i, $i = 1, \dots, d$, frei voneinander wählen kann. Der verbleibende Rest des Vermögens wird dann in das "risikolose" Numéraire $\widehat{S}^0$ investiert. φ^0 ergibt sich dabei aus (1.6). Da der abdiskontierter Preisprozess $\widehat{S}^0$ aber konstant ist, geht die Anzahl φ^0 gar nicht in (1.4) ein.

Wichtig ist hier, dass das Numéraire ein *handelbares* Wertpapier ist. (Dies war für die beiden vorangegangenen Propositionen von keinerlei Bedeutung. Dort hätte man auch statt mit S^0 mit einem beliebigen positiven Prozess abdiskontieren können). Handelbarkeit eines Wertpapier bedeutet, dass man in ihm sowohl long als auch short gehen kann. "Short gehen" bedeutet dabei ökonomisch, dass man zum Zeitpunkt 0 den Betrag S_0^0 bekommt und dafür zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ den Betrag S_t^0 zurückzahlen muss. Die fälligen Zinszahlungen spiegeln sich in dem Anstieg des Prozesses S^0 wider. S^0 könnte den Wert eines Bankkontos in EUR darstellen, im einfachsten Fall $S_t^0 = s_0(1 + r)^t$, $r \in \mathbb{R}_+$.

In der Praxis lassen sich *Leerverkäufe* realisieren, indem man sich das Wertpapier leiht und es (anstatt es sicher aufzubewahren) an einen Dritten weiterverkauft. Dies bringt zunächst den Erlös S_0^i ein. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ ist man jedoch verpflichtet, die gleiche Aktie zum neuen Preis S_t^i wieder zu erwerben, um den Gläubiger zu befriedigen.

Es wird natürlich vorausgesetzt, dass Sollzins und Habenzins übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, kann man das nicht mehr so einfach modellieren.

Häufig wird von vorne herein mit abdiskontierten Größen gearbeitet, bzw. angenommen, dass "o.B.d.A." $S_t^0 = 1$ für aller t.

Definition 1.11. *Eine selbstfinanzierende Strategie φ (vorhersehbarer Prozess) heißt eine* Arbitragemöglichkeit, *wenn für den dazugehörigen Vermögensprozess $V = \varphi^\top S$ gilt $V_0 = 0$, $V_T \geq 0$ und $P(V_T > 0) > 0$. Ein Marktmodell heißt arbitragefrei, wenn es keine Arbitragemöglichkeit gibt.*

Bemerkung 1.12. *In diskreten Modellen reicht es, wenn wir für eine Arbitragestrategie $V_T \geq 0$ fordern. Wir müssen nicht noch verlangen, dass $V_t \geq 0$, für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ (oder wenigsten $V_t \geq -a$, $a \in \mathbb{R}_+$ (endlicher Kreditrahmen)). Wir werden nämlich später sehen (vgl. Proposition 1.17), dass, wenn in einem Markt eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.11 existiert (d.h. risikolose Gewinnmöglichkeit, wenn während der Laufzeit unbegrenzter Kredit gewährt werden kann), auch eine Arbitragestrategie existiert, deren Wertprozess $\widetilde{V}_t \geq 0$, für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ erfüllt (kein Kredit erforderlich). In zeitstetigen Modellen ist die Definition von Arbitragefreiheit jedoch etwas komplizierter.*

Definition 1.13. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q heißt äquivalentes Martingalmaß, wenn $Q \sim P$ (d.h. P und Q haben dieselben Nullmengen, $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$) und alle abdiskontierten Preisprozesse $\widehat{S}^i$, $i = 0, \ldots, d$ unter dem Maß Q Martingale sind, d.h. für $s \leq t$ gilt*

$$E_Q(\widehat{S}_t^i \mid \mathcal{F}_s) = \widehat{S}_s^i.$$

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße bezeichnen wir mit $\mathcal{M}^e(\widehat{S})$.

Satz 1.14 (1. Fundamentalsatz der Arbitragetheorie). *Ein Markt ist arbitragefrei genau dann, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß gibt, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ unter dem die abdiskontierten Wertpapierpreisprozesse $\widehat{S}^i$ Martingale sind.*

Lemma 1.15. *Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex mit $0 \notin C$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\lambda^\top x \geq \alpha$ für alle $x \in C$. Insbesondere gilt $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda^\top x = 0\} \cap C = \emptyset$.*

Beweis. Sei $r > 0$ eine nicht-negative reelle Zahl, so dass die Kugel $B(0, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y|| \leq r\}$ mit Mittelpunkt 0 und Radius r einen nicht-leeren Schnitt mit C besitzt (wobei $||\cdot||$ die euklidische Norm bezeichne, d.h. $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2)}$. Sei x_0 der Punkt an dem die Abbildung $x \mapsto ||x||$ auf der kompakten Menge $C \cap B(0,r)$ ihr Minimum annimmt. Es folgt, dass

$$||x|| \geq ||x_0||, \quad \forall x \in C. \tag{1.7}$$

x_0 ist gerade die Projektion des Ursprungs auf die konvexe Menge C. Für jedes $x \in C$ und $t \in [0,1]$ gilt wegen der Konvexität von C, dass $x_0 + t(x - x_0) \in C$ und damit wegen (1.7)

$$(x_0 + t(x - x_0))^\top (x_0 + t(x - x_0)) \geq x_0^\top x_0$$

also

$$2t(x - x_0)^\top x_0 + t^2 (x - x_0)^\top (x - x_0) \geq 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Schaut man sich die Entwicklung für $t \to 0$ an, so folgt daraus $(x - x_0)^\top x_0 \geq 0$ also

$$x^\top x_0 \geq x_0^\top x_0 =: \alpha \quad \forall x \in C.$$

□

Lemma 1.16. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, $U \cap K = \emptyset$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^\top x = 0$ für alle $x \in U$ und $\lambda^\top x > 0$ für alle $x \in K$.*

Beweis. Vektorräume sind per Definition nicht-leer. Der Fall $K = \emptyset$ ist offensichtlich. Also o.B.d.A. $K \neq \emptyset$.

Die Menge

$$C := K - U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (y,z) \in K \times U,\ x = y - z\}$$

ist konvex (da K und U konvex) und abgeschlossen (da K kompakt und U abgeschlossen) mit $0 \notin K$. Mit Lemma 1.15 folgt die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und eines $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\lambda^\top x \geq \alpha,\ \forall x \in C$ also

$$\lambda^\top y - \lambda^\top z \geq \alpha,\ \forall y \in K,\ z \in U. \tag{1.8}$$

Hält man ein beliebiges y fest und wendet (1.8) für jedes z auf alle seine Vielfachen an, so folgt wegen Homogenität, dass $\lambda^\top z = 0,\ \forall z \in U$. Dann folgt $\lambda^\top y \geq \alpha,\ \forall y \in K$. □

Man sieht sofort, dass Arbitragefreiheit in *diskreten* Modellen *nicht* von der Wahl des Numéraires abhängt (siehe Definition 1.11). D.h. wird hätten die Preise statt mit S^0 z.B. auch mit S^j, $j \in \{1, \ldots, d\}$ abdiskontieren können (In zeitstetigen Modellen ist dies etwas problematischer). Mit Satz 1.14 hängt damit die *Existenz* eines Martingalmaßes auch nicht von der Wahl des Numéraires ab. D.h. sind für das Numéraire S^0 die abdiskontierten Preisprozesse

$$\frac{S^i}{S^0}$$

Q-Martingale (wobei Q ein Maß mit $Q \sim P$), dann sind auch die bzgl. eines anderen Numéraires, z.B. S^j, abdiskontierten Preisprozess Martingale – allerdings i.A. auch bzgl. eines anderen Martingalmaßes Q^j. Zwischen Q und Q^j gilt der Zusammenhang

$$\frac{dQ^j}{dQ} = \frac{S_T^j}{S_T^0}\frac{S_0^0}{S_0^j}.$$

(Übung). Man muss also ein Numéraire und ein äquivalentes Martingalmaß als ein Paar (S^0, Q) sehen. In der Literatur wird häufig ein sog. "state price process" L definiert mit $L_t := \frac{1}{S_t^0} E\left(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right)$. Die Produktprozesse LS^i, $i = 0, \ldots, d$, sind P-Martingale.

Generell kommen in Satz 1.14 als Numéraire alle mit Wahrscheinlichkeit 1 strikt positiven Vermögensprozesse in Frage, d.h. die Prozesse $V_t = V_0 + \varphi \bullet S_t$ (insbesondere also alle S^j). Ökonomisch macht es natürlich Sinn, alles als Vielfaches der risikolosen Anlagemöglichkeit S^0 auszudrücken.

Wir werden Theorem 1.14 hier nur für $|\Omega| < \infty$ beweisen. Das Resultat wird aber auch für $|\Omega| = \infty$ benutzt werden. Der allgemeine Beweis ist einiges aufwendiger und kann zum Beispiel in Kapitel 5 von Irle [7] oder Föllmer/Schied [4], Theorem 5.17 nachgelesen werden.

Beweis von Theorem 1.14 für $|\Omega| < \infty$. $\Leftarrow$: Sei Q ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß (d.h. alle $\widehat{S}^i$, $i = 0, \ldots, d$ sind Q-Martingale) und sei φ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_0 = 0$ und $V_T \geq 0$. Dann ist $\varphi \bullet \widehat{S}_T = \widehat{V}_T \geq 0$. Nach Proposition 1.4(iii) ist $\varphi \bullet \widehat{S}$ aber ein Q-Martingal, also gilt $E_Q(\varphi \bullet \widehat{S}_T) = 0$ und wegen Nichtnegativität $Q(\varphi \bullet \widehat{S}_T \neq 0) = 0$. Da Q zu P äquivalent ist, gilt $\varphi \bullet \widehat{S}_T = 0$, P-f.s.

$\Rightarrow$: Dies ist die interessante Richtung. Die Idee besteht darin, die Menge der realisierbaren Endvermögen zum Startkapital 0 (eine Menge von Zufallsvariablen) von einer "gewissen Menge" nichtnegativer Auszahlungen durch ein lineares Funktional zu trennen. Wenn es keine Arbitragemöglichkeit gibt, sind diese beiden Mengen nämlich disjunkt. Vermöge des linearen Funktionals lässt sich dann ein Martingalmaß konstruieren.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist, also $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, für alle $\omega \in \Omega$.

Außerdem kann man o.B.d.A. annehmen, dass $P(\{\omega\}) > 0$, für alle $\omega \in \Omega$. Andernfalls gehe man zu einem neuen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', P', \mathcal{F}', (\mathcal{F}')_{t=0,\dots,T})$ über, der dies erfüllt: setze dazu einfach $\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid P(\{\omega\}) > 0\}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \Omega'$ bzw. $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_t \cap \Omega'$ (Spur-σ-Algebren) und $P' := P \mid_{\mathcal{F}'}$. Beide Aussagen im Satz sind invariant unter dieser Veränderung.

Setze $U := \{\varphi \bullet \widehat{S}_T \mid \varphi \text{ ein vorhersehbarer Prozess}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ und

$$K := \left\{ \sum_{\omega_0 \in \Omega} \mu_{\omega_0} 1_{\{\omega_0\}} \;\middle|\; \mu_{\omega_0} \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{\omega_0 \in \Omega} \mu_{\omega_0} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

$1_{\{\omega_0\}}$ ist die Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}$, die den Wert 1 für $\omega = \omega_0$ annimmt und Null sonst. U ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^\Omega$ und K eine kompakte, konvexe Menge. Jedes Element im Schnitt von U und K würde eine Arbitragemöglichkeit liefern. Deshalb gilt nach Voraussetzung $U \cap K = \emptyset$. Nach dem Hilfssatz existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ mit

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) x(\omega) = 0, \quad x \in U \tag{1.9}$$

und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) x(\omega) > 0 \quad \forall x \in K. \tag{1.10}$$

Da $1_{\{\omega_0\}} \in K$ gilt $\lambda(\omega_0) > 0$ für alle $\omega_0 \in \Omega$. Daher können wir vermöge

$$Q(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\widetilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\widetilde{\omega})}$$

ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q definieren.

Sei nun $i \in \{1, \dots, d\}$, $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Wir wählen folgende selbstfinanzierende Handelsstrategie

$$\varphi_u^j(\omega) := \begin{cases} 1(\omega \in A)1(u \in \{s+1, \dots, t\}) & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann setzte in (1.9) $x(\omega) = (\varphi \bullet \widehat{S}_T)(\omega) = 1_A(\omega)(\widehat{S}_t^i(\omega) - \widehat{S}_s^i(\omega))$ und es gilt $E_Q(1_A(\widehat{S}_t^i - \widehat{S}_s^i)) = \frac{1}{\sum_{\tilde{\omega}\in\Omega}\lambda(\tilde{\omega})}\sum_{\omega\in\Omega}\lambda(\omega)(\varphi \bullet \widehat{S}_T)(\omega) = 0$, also $E_Q(\widehat{S}_t^i - \widehat{S}_s^i|\mathcal{F}_s) = 0$, d.h. $\widehat{S}^i$ ist ein Q-Martingal. □

Proposition 1.17 (Einperiodenarbitrage). *Folgende Aussagen sind äquivalent*

(i) Es existiert eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.11.

(ii) Es existiert ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und ein $\eta \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ mit

$$\sum_{i=1}^d \eta^i \Delta\widehat{S}_t^i \geq 0 \text{ und } P\left(\sum_{i=1}^d \eta^i \Delta\widehat{S}_t^i > 0\right) > 0. \tag{1.11}$$

(iii) Es existiert ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und ein $\eta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$, so dass (1.11) gilt.

(iv) Es existiert eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.11 mit beschränkter Handelsstrategie $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$.

Beweis. (i)⇒(ii) Sei φ eine solche Arbitragestrategie und V der zugehörige Wertprozess (d.h. $V_0 = 0$). Sei

$$t := \min\{k | P(V_k \geq 0) = 1 \text{ und } P(V_k > 0) > 0\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $t \in \{1, \dots, T\}$.
1. Fall: $V_{t-1} = 0$. Dann erfüllt $\eta := \varphi_t$ Bedingung (ii).
2. Fall: $P(V_{t-1} \neq 0) > 0$. Dann gilt $P(V_{t-1} < 0) > 0$. Definiere $\eta := \varphi_t 1_{\{V_{t-1}<0\}}$. Da $P(V_t \geq 0) = 1$ gilt für $X := \sum_{i=1}^d \eta^i \Delta\widehat{S}_t^i = 1_{\{V_{t-1}<0\}}\Delta\widehat{V}_t$, dass $P(X \geq 0) = 1$ und $P(X > 0) > 0$ (Beachte, dass der abdiskontierte Vermögensprozess genau dann positiv ist, wenn der Vermögensprozess selber positiv ist).
(ii)⇒(iii) Insbesondere existiert auch eine beschränkte Einperiodenarbitragestrategie $\widetilde{\eta}$. Definiere $\widetilde{\eta} := 1_{\{\sum_{i=1}^d |\eta^i|>0\}} \frac{\eta}{\sum_{i=1}^d |\eta^i|}$.

(iii)⇒(iv) Für t und $\widetilde{\eta}$ wie oben definiere die letzten d-Komponenten eines vorhersehbaren stochastischen Prozesses

$$\varphi_s^i := \begin{cases} \widetilde{\eta}^i & \text{für } s = t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.12}$$

$i = 1, \dots, d$. φ^0 erhält man dann mit der Selbstfinanzierungsbedingung wie in (1.6). □

Bemerkung 1.18. *Insbesondere liefert φ aus (1.12) eine Strategie für die während der Laufzeit kein Kredit aufgenommen werden muss, vgl. Bemerkung 1.12.*

Für zeitstetige Modelle, d.h. $\mathcal{T} = [0, T]$, gilt die fundamentale Äquivalenz in Theorem 1.14 in dieser Form nicht mehr. Man muss den Begriff einer Arbitragemöglichkeit etwas verändern, um die Äquivalenz zu erhalten (und zwar für beide Richtungen). Darauf werden wir im zeitstetigen Teil näher eingehen.

Betrachtet man einen Markt der aus unendlich vielen Wertpapieren besteht, wird die Äquivalenz in Theorem 1.14 schlicht falsch. Die Existenz unendlich vieler Wertpapiere kann zum Beipiel auf sog. Anleihenmärkten (Bonds) relevant werden. Zu jedem möglichen Fälligkeitszeitpunkt existiert ein eigenes Wertpapier, das exakt zu diesem Zeitpunkt den Betrag 1 auszahlt.

1.1 Ausflug in eine Welt mit unendlich vielen Wertpapieren

Gegeben sei also der Fall abzählbar unendlich vieler Wertpapiere $S = (S^0, S^1, \dots)$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $S^0 = 1$, d.h. $\widehat{S} = S$. Der stochastische Prozess S nehme Werte im Raum l^∞ der beschränkten Folgen an, d.h. $S : \Omega \times \{0, \dots, T\} \to l^\infty$. l^∞ ist ein Banachraum im Bezug auf die Supremumsnorm.

Um Vermögensprozesse eindeutig definieren zu können, fordern wir von Handelsstrategien absolute Summierbarkeit, d.h. $\sum_{i=0}^\infty |\varphi_t^i(\omega)| < \infty$, P-f.s. Wegen $S_t(\omega) \in l^\infty$ ist auch die Folge $(\varphi_t^i(\omega) S_t^i(\omega))_{i=0,1,\dots}$ absolut summierbar. Unser Vermögen hängt also nicht davon ab, in welcher Reihenfolge wir unsere Aktienpositionen zusammenzählen und alle Definitionen für $d < \infty$ lassen sich problemlos übertragen (z.B. Selbstfinanzierungsbedingung $\sum_{i=0}^\infty \Delta\varphi_t^i S_{t-1}^i = 0$).

Proposition 1.19. *Wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q unter dem alle S^i, $i = 0, 1, \dots,$ Martingale sind, und zusätzlich $E_Q\left(\sup_{i\in\mathbb{N}_0}|S^i_t|\right) < \infty$ für alle $t = 0, 1, \dots, T$ gilt, dann ist der Markt arbitragefrei.*

Beweis. Der Beweis geht ganz analog zu der Hinrichtung von Satz 1.14. Seien alle S^i Q-Martingale und V der Vermögensprozess zu der selbstfinanzierenden Strategie φ mit $V_0 = 0$. Aus der Selbstfinanzierungsbedingung folgt, dass

$$\Delta V_t = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^i_t \Delta S^i_t. \tag{1.13}$$

Man kann sich überlegen, dass Proposition 1.17 sinngemäß auch für den Fall $d = \infty$ gilt (Übung). Damit kann man sich auf $\|\cdot\|_{l^1}$-beschränkte Handelsstrategien beschränken, d.h. o.B.d.A. $\sum_{i=0}^{\infty}|\varphi^i_t(\omega)| \leq 1$, für alle ω, t. Da

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi^i_t||\Delta S^i_t| \leq 2\|S\|_{l^\infty}.$$

kann man Erwartungswertbildung und Summation über i vertauschen und es gilt

$$E_Q(\Delta V_t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_Q(\varphi^i_t \Delta S^i_t) = 0,$$

wegen Proposition 1.4(iii) und da S^i Q-Martingale sind. Also $E_Q V_T = 0$. Aus $1 = P(V_T \geq 0) = Q(V_T \geq 0)$ würde also $1 = Q(V_T = 0) = P(V_T = 0)$ folgen. □

Das folgende Einperioden-Binomial-Modell zeigt, dass i.A. die andere Richtung von Theorem 1.14 nicht mehr gilt.

Beispiel 1.20. *Sei $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ und $P(\{\omega\}) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$. $T = 1$, $S_0 = (1, 1, \dots)$. S_1 ist gegeben durch $S^0_1 = 1$ und*

$$S^i_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \omega = i \\ 2 & \text{wenn } \omega = i+1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.14}$$

für $i \geq 1$. Zunächst zeigen wir, dass das Modell arbitragefrei ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine Strategie $\varphi \in l^1$ gibt mit $\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i S^i_0 = 0$ und $P(\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i S^i_1 \geq 0) = 1$.

Betrachte den Fall, dass $\omega = 1$ *eintritt. Es gilt*

$$0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i S_1^i(1) = \varphi^0 + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi^k = -\varphi^1$$

Analog folgt für $\omega > 1$

$$0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i S_1^i(\omega) = \varphi^0 + 2\varphi^{\omega-1} + \sum_{i=1, i \neq \omega-1, \omega}^{\infty} \varphi^i = \varphi^{\omega-1} - \varphi^{\omega}.$$

Es folgt sofort, dass $0 \geq \varphi^1 \geq \varphi^2 \geq \ldots$*. Dies ist aber nur möglich, wenn* $\varphi^i = 0$, $\forall i$ *da* $\varphi \in l^1$*. Trotzdem existiert kein Wahrscheinlichkeitsmaß* $Q \sim P$*, so dass* $E_Q(S_1^i) = S_0^i$ *für alle* i*. Für so ein Maß müsste nämlich gelten*

$$\begin{aligned} 1 &= E_Q(S_1^i) = 2Q(\{i+1\}) + \sum_{k=1, k \neq i, i+1}^{\infty} Q(\{k\}) \\ &= 1 + Q(\{i+1\}) - Q(\{i\}), \quad \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

Dies bedeutete aber, dass alle $Q(\{i\})$, $i \in \mathbb{N}$*, gleich wären. Da* $1 = Q(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(\{i\})$ *ist dies aber nicht möglich.*

Bemerkung 1.21. *Bei dem der Konstruktion (1.14) entsprechenden Beispiel mit endlich vielen Wertpapieren gibt es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß – und zwar die Gleichverteilung.*

2 Derivatebewertung und Hedging

Wir gehen wieder von einem Modell mit endlichem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$ aus. Viele Termingeschäfte lassen sich durch eine einzige Zufallsvariable H beschreiben, die die (abdiskontierte) Auszahlung an den Besitzer des entsprechenden Wertpapiers ausdrückt (meist zum Endzeitpunkt T). Andere Derivate sind aber auch von einer etwas komplizierteren Struktur.

Beispiel 2.1.

- Europäische Call Option: *Der Käufer dieser Option erwirbt das* Recht *(aber nicht die Pflicht), zum Zeitpunkt* T *Aktie* i *zum vorher festgelegten Preis* $K \in \mathbb{R}_+$ *zu kaufen. Zum Zeitpunkt* T *hat dieses Recht den Wert* $S_T^i - K$*, wenn* $S_T^1 > K$*. Im Fall* $S_T^1 \leq K$ *hat dieses Recht keinen Wert. Die Auszahlung ist also* *durch die Zufallsvariable* $H(\omega) = (S_T^i(\omega) - K)^+$ *geben. Bei der Optionspreisbewertung stellt man sich nun die Frage, wieviel dieses Recht, dessen Wert man zum Zeitpunkt* T *kennt, zu einem früheren Zeitpunkt* $t < T$ *wert ist.*

- Europäische Put Option: *Im Unterschied zur Call Option erwirbt der Käufer das Recht die Aktie i zum Zeitpunkt* T *zu* verk*aufen. Die zufällige Auszahlung ist* $(K - S^i)^+$.
- Forward: *Es wird zum Zeitpunkt* $t = \{0, \dots, T\}$ *vereinbart, dass der Käufer das Wertpapier* S^1 *zum Zeitpunkt* T *zum Preis* O_t *erwirbt, d.h. die Auszahlung an den Käufer ist* $H = S_T^1 - O_t$. *Wie gross ist* O_t *zu wählen, dass dieser Vertrag zum Zeitpunkt* t *nichts kostet, d.h.* 0 *ein fairer Preis für den Claim* H *ist ? Ist der riskolose Zins determinstisch, sei z.B. die Zinsrate konstant* $r > 0$, *d.h.* $S_t^0 = e^{rt}$, *dann ergibt sich für den Forward ein* modellunabhängiger *eindeutiger No-Arbitragr-Preis* $O_t = S_t e^{rt}$.
- Amerikanische Optionen: *Bei amerikanischen Call oder Put-Optionen kann der Käufer sein Kaufs- bzw. Verkaufsrecht nicht nur zum Endzeitpunkt* T *wahrnehmen, sondern zu jedem beliebigen Zeitpunkt* $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. *Eine amerikanische Option ist damit mindestens genauso viel wert, wie die entsprechende europäische Option. Wir stellen amerikanische Optionen statt durch eine Zufallsvariable durch einen stochastischen Prozess* $L = (L_t)_{t=0,\dots,T}$ *dar. Call Option* $L_t = (S_t^i - K)^+$, *Put Option* $L_t = (K - S_t^i)^+$.

Bei der Derivatebewertung geht es um die Frage, wie man eine Option mit einer zufälligen Auszahlung in der Zukunft heute fair bewerten kann. Eng verbunden mit der fairen Preisbestimmung für Derivate ist die Frage, inwiewert man das Risiko, was mit dem Verkauf oder den Kauf von Derivaten verbunden ist, mit einer gewöhnlichen Anlagestrategie, die nur die Underlyings (Aktien, Bonds) berücksichtigt, ausgleichen kann. Da die Auszahlung der Option meistens eine *nichtlineare* Funktion des Underlyingpreises ist, reicht es nicht aus, nur statische Hedgingstrategien zu betrachten ("kaufe k Aktien zum Zeitpunkt 0 und halte sie bis zum Zeitpunkt T"). Stattdessen müssen dynamische Strategien betrachtet werden, bei denen die Anzahl der Aktien im Portfolio ständig angepasst wird.

Definition 2.2. *Sei H ein europäischer Claim (Derivat, Option), d.h. eine Zufallsvariable mit $0 \leq H < \infty$, P-f.s. Ein adaptierter Prozess $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{t=0,\dots,T}$ heißt* Derivatepreisprozess *für den Claim H, wenn $\widetilde{S}_T = H$.*

$\widetilde{S}_t$ legt also den Preis des Claims H zum Zeitpunkt t fest. Was kann man sinnvolles über $\widetilde{S}_t$ sagen ? Wir behandeln Claims (Derivate, Optionen) im Prinzip wie "gewöhnliche" Wertpapiere. Sie werden zusammen mit den Underlyings (Aktien) auf einem Markt gehandelt. Die stochastischen Prozesse $(S^0, S^1, \dots, S^d)$, die den Preis der Underlyings beschreiben sollen, sind gewöhnlich vorgegeben. Ziel der *Derivate*bewertung ist es, daraus Schlussfolgerungen für die Derivatepreisprozesse zu ziehen. Bei europäischen Claims hat man für den Derivatepreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t=0,\dots,T}$ die Endbedingung $\widetilde{S}_T = H$. Also zum Beispiel $\widetilde{S}_T = (S^i_T - K)^+$ für eine Call Option auf die Aktie i.

Wir nehmen im folgenden stets an, dass der "ursprüngliche Markt", der nur aus den Underlyings $(S^0, S^1, \dots, S^d)$ besteht, arbitragefrei ist.

Korollar 2.3. *Seien $H^1, \dots, H^k$ europäische Claims und $S^{d+1}, \dots, S^{d+k}$ dazugehörige Derivatepreisprozesse. Der erweiterte Markt*‡

$$(S^0, \dots, S^d, S^{d+1}, \dots, S^{d+k})$$

ist genau dann arbitragefrei (d.h. im erweiterten Markt gibt es keine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.11), wenn

$$S^{d+i}_t = E_Q\left(\frac{S^0_t}{S^0_T} H^i \mid \mathcal{F}_t\right),\ i = 1, \dots, k,\ \text{für ein } Q \in \mathcal{M}^e(\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d). \tag{2.15}$$

(D.h. die abdiskontierten Derivatepreisprozesse $\frac{S^{d+i}_t}{S^0_t}$ sind Q-Martingale) $\mathcal{M}^e(\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d)$ ist die Menge der äquivalenten Martingalmaße (also alle Maße, die die abdiskontierten Preisprozesse der Underlyings zu Martingalen machen)

Beweis. Beide Richtungen folgen sofort aus Satz 1.14:
$\Leftarrow$ Sei $Q \in \mathcal{M}^e$ und $S^{d+1}, \dots, S^{d+k}$ wie in (2.15) definiert, d.h $\frac{S^{d+1}_t}{S^0_t} = E_Q\left(\frac{H^i}{S^0_T} \mid \mathcal{F}_t\right)$ sind Q-Martingale. Damit ist Q auch ein ÄMM im vergrößerten Markt

‡Handel ist sowohl in den "Underlyings" mit Preisprozessen $(S^0, \dots, S^d)$ als auch in den Derivaten mit Preisprozessen $(S^{d+1}, \dots S^{d+k})$ möglich

$(S^0, \dots, S^d, S^{d+1}, \dots, S^{d+k})$ (Q macht also auch die abdiskontierten Derivatepreisprozesse zu Martingalen) und es gilt dort wegen Satz 1.14 Arbitragefreiheit.
$\Rightarrow$ Seien $(\widetilde{S}^{d+1}, \dots \widetilde{S}^{d+k})$ Derivatepreise für $(H^1, \dots, H^k)$ im Sinne von Definition 2.2 und sei der erweiterte Markt $(S^0, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1}, \dots \widetilde{S}^{d+k})$ arbitragefrei. Mit Satz 1.14 folgt, dass es ein Maß $Q \sim P$ gibt, so dass die abdiskontierten Derivatepreise und die abdiskontierten Preise der Underlyings Q-Martingale sind. Zusammen mit der Endbedingung $\frac{\widetilde{S}_T^{d+i}}{S_T^0} = \frac{H^i}{S_T^0}$, $i = 0, \dots, k$, impliziert dies $\widetilde{S}_t^{d+i} = E_Q\left(\frac{S_t^0}{S_T^0} H^i \mid \mathcal{F}_t\right)$ und Q ist Martingalmaß bzgl. des Underlyingmarktes. $\square$

Damit ist ein enger Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit von Derivatepreisen und der Bewertung von Derivaten durch Erwartungswertbildung unter äquivalenten Martingalmaßen hergestellt.

Satz 2.4. *Sei H ein europäischer Claim. Dann sind äquivalent*

(1) H ist duplizierbar durch eine Strategie $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$ in den Underlyings.

(2) Es gibt genau einen Derivatepreisprozess S^{d+1} im Sinne von Definition 2.2, so dass der erweiterte Markt $(S^0, \dots, S^d, S^{d+1})$ arbitragefrei ist (nämlich $S^{d+1} = V(\varphi)$).

(3) Für jedes äquivalente Martingalmaß Q hat der bedingte Erwartungswert $E_Q(\widehat{H}|\mathcal{F}_t)$ den gleichen Wert (nämlich $\widehat{V}_t$).

Die Richtung (3) $\Rightarrow$ (1) werden wir hier nur für $|\Omega| < \infty$ beweisen.

Beweis. O.B.d.A. $S^0 = 1$, d.h. $\widehat{S} = S$ und $\widehat{H} = H$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Da $\mathcal{M}^e \neq \emptyset$ existiert nach Korollar 2.3 zumindest ein Derivatepreisprozess, der (2) erfüllt. Zu zeigen ist also nur die Eindeutigkeit. Sei V ein Vermögensprozess mit dem man H duplizieren kann, d.h.

$$V_t = v_0 + (\varphi^0, \dots \varphi^d) \bullet (S^0, \dots, S^d)_t \text{ und } V_T = H. \tag{2.16}$$

Vermöge der Darstellung (2.16) soll gezeigt werden, dass V ein Q-Martingal ist für alle $Q \in \mathcal{M}^e$. Wenn $(\varphi^0, \dots \varphi^d)$ beschränkt sind, folgt dies direkt aus Proposition 1.4(iii) und der Tatsache, dass $(S^0, \dots, S^d)$ ein Q-Martingal. Beschränktheit von $(\varphi^0, \dots \varphi^d)$ liegt natürlich stets vor, wenn $|\Omega| < \infty$.

Für den allgemeinen Fall kann man argumentieren, dass $(\varphi^0, \dots \varphi^d)$ als vorhersehbarer Prozess *lokal* beschränkt ist (Übungsaufgabe 3, Blatt1). Damit ist V ein *lokales Martingal.* Ausserdem folgt aus Arbitrageüberlegungen (im kleinen Underlyingmarkt), dass wegen $V_T \geq 0$ auch $V_t \geq 0$. Mit Übungsaufgabe 4, Blatt 1 (im Sommersemester 2003) ist aber in diskreter Zeit ein nichtnegatives lokales Martingal ein Martingal. Also ist V ein Q-Martingal für alle $Q \in \mathcal{M}^e$.

Sei nun $\widetilde{S}^{d+1}$ ein (abdiskontierter) Derivatepreisprozess zu H, so dass der erweiterte Markt arbitragefrei ist. Nach Korollar 2.3 existiert ein ÄMM Q, so dass $\widetilde{S}^{d+1}$ ein Q-Martingal ist. Die Differenz $\widetilde{S}^{d+1} - V(\varphi)$ ist also ein Q Martingal mit Endwert $H - H = 0$, wobei φ eine beliebige Strategie ist, die (1) erfüllt. Damit ist das ganze Martingal identisch null. Daraus folgt

$$\widetilde{S}_t^{d+1} = V_0 + \varphi \bullet S_t, \ \forall t = 0, \dots, T, \ \text{d.h } \widetilde{S}^{d+1} = V. \tag{2.17}$$

(2.17) liefert sowohl die Eindeutigkeit von $\widetilde{S}^{d+1}$ als auch des Vermögensprozesses $V(\varphi)$ für möglicherweise unterschiedliche Hedgingstrategien φ.

(2) $\Rightarrow$ (3): Korollar 2.3

(3) $\Rightarrow$ (1): Angenommen H ist nicht duplizierbar, d.h. $H \notin U := \{c + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_T \mid c \in \mathbb{R}, \varphi \text{ ist vorhersehbar}\}$. Wir werden zeigen, dass dann schon der Derivatepreis zum Zeitpunkt 0 nicht eindeutig ist. Bezüglich des Skalarproduktes $(X, Y) := E_Q(XY)$ für ein beliebigen (aber festes) ÄMM Q betrachten wir nun die Projektion $H = H^U + H^{U^\perp}$. D.h. $H^U \in U$ und $E_Q\left(H^{U^\perp} X\right) = 0$ für alle $X \in U$. Da nach Voraussetzung $H^{U^\perp} \neq 0$ können wir das folgende Wahrscheinlichkeitsmaß $Q' \sim P$ definieren

$$Q'(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{H^{U^\perp}(\omega)}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|}\right) Q(\{\omega\}).$$

Für eine Zufallsvariable X gilt

$$E_{Q'}(X) = E_Q(X) + \frac{E_Q(H^{U^\perp} X)}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|}.$$

Nach Konstruktion ist Q' positiv, d.h. $Q'(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, und wegen $1 \in U$ gilt $E_Q(H^{U^\perp} 1) = 0$ und damit $Q'(\Omega) = 1$. Des weiteren gilt für alle Elemente $U \ni Z = c + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_T$, dass

$$E_{Q'}(Z) = E_Q(Z) + \frac{1}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|} E_Q(H^{U^\perp} Z) = c + 0 = c. \tag{2.18}$$

Daher ist auch Q' ein ÄMM. Mit (2.18) gilt $E_{Q'}(H^U) = E_Q(H^U)$. Andererseits gilt $E_{Q'}(H^{U^\perp}) - E_Q(H^{U^\perp}) = \frac{1}{2\sup_{\omega'\in\Omega}|H^{U^\perp}(\omega')|} E_Q\left((H^{U^\perp})^2\right) > 0$. Also $E_{Q'}(H) > E_Q(H)$. Aus Nicht-Duplizierbarkeit des Claims folgt also, dass es verschiedene Martingalmaße gibt, bzgl. denen die Erwartungswerte des Claims unterschiedlich sind. □

Definition 2.5. *Ein Marktmodell heißt* vollständig, *wenn jeder beschränkte Claim H duplizierbar ist*[§].

Korollar 2.6 (2. Fundamentalsatz der Arbitragetheorie). *Ein arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn nur ein äquivalentes Martingalmaß existiert.*

Beweis. $\Leftarrow$: folgt aus (3) $\Rightarrow$ (1) in Satz 2.4.
$\Rightarrow$: Sei $A \in \mathcal{F}$. Wegen der Vollständigkeit lässt sich der Claim $H := S_T^0 1_A$ absichern. Nach (1) $\Rightarrow$ (3) in Satz 2.4 stimmt $E_Q\left(\frac{H}{S_T^0}\right) = Q(A)$ für alle ÄMM Q überein. Folglich gibt es nur ein ÄMM. □

Diskrete Modelle sind "fast immer" unvollständig. Ein Beispiel für ein *vollständiges* Modell:

Beispiel 2.7 (Cox-Ross-Rubinstein Modell). *Sei $S_t^0 = (1+r)^t$, $r > -1$ und*

$$S_t^1 = \prod_{i=1}^{t} A_i, \tag{2.19}$$

wobei $(A_i)_{i=0,\dots,T}$ unabhängig und identisch verteilt sind. $P(A_i = u) = p$ und $P(A_i = d) = 1-p$, $0 < d < u$ und $p \in (0,1)$. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t = \sigma(A_1 \dots, A_t)$, $t > 0$. Die No-Arbitrage-Bedingung für das Modell lautet $d < 1+r < u$. Gehe nun zu einem neuen Maß $Q \sim P$ über mit

$$Q(A_1 = x_1, \dots, A_T = x_T) = q^{\#\{i|x_i=u\}}(1-q)^{\#\{i|x_i=d\}}, \quad \forall x_i \in \{d,u\}. \tag{2.20}$$

Beachte, dass die A_i (auch) unter dem so definierten Maß Q stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. $\widehat{S}_t^1 = (1+r)^{-t} S_t^1$ ist genau dann ein Q-Martingal, wenn

$$qu + (1-q)d = 1+r, \tag{2.21}$$

[§] Formal besteht ein Marktmodell aus einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}, P)$ und den stochastischen Prozessen $S^0, S^1, \dots, S^d$, die die Preisprozesse der handelbaren Wertpapiere beschreiben. Vollständigkeit bedeutet also, dass jede in dem Wahrscheinlichkeitsmodell mögliche Auszahlung H (also z.B. $H = 1_A$ für ein $A \in \mathcal{F}$) durch Handel in den verfügbaren Wertpapieren duplizierbar ist.

d.h.

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} \in (0,1). \tag{2.22}$$

$A_i - 1$ ist die stochastische Rendite $:= \frac{S^1_i - S^1_{i-1}}{S^1_{i-1}}$ in der i-ten Periode. Bei der Rendite setzt man den i.A. zufälligen Gewinn einer Investition ins Verhältnis zum **gebundenen** *Kapital. Im Modell (2.19) sind die Renditen in verschiedenen Perioden also unabhängig und identisch verteilt.*

Satz 2.8 (Martingaldarstellungssatz). *Sei Bedingung (2.21) erfüllt, d.h. $\widehat{S}^1$ ist ein Q-Martingal. Dann gibt es für* **jedes** *Q-Martingal M einen vorhersehbaren Prozess $(H_t)_{t=1,\dots,T}$, so dass $M = M_0 + H \bullet \widehat{S}^1$.*

Beweis. Da ΔM_t $\sigma(A_1 \dots, A_t)$-messbar ist, gibt es eine Funktion $f_t : \{d,u\}^t \to \mathbb{R}$ mit $\Delta M_t = f_t(A_1, \dots, A_t)$. Da M ein Q-Martingal ist, gilt

$$0 = E_Q(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = q f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u) + (1-q) f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, d)$$

und damit

$$f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, d) = \frac{-q}{1-q} f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u) \tag{2.23}$$

Wähle nun

$$H_t := \frac{f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)}{\left(\frac{u}{1+r} - 1\right)(1+r)^{-(t-1)} \prod_{i=1}^{t-1} A_i} \quad t \geq 1 \tag{2.24}$$

Offenbar ist H_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar und wegen

$$\Delta \widehat{S}^1_t = \left(\frac{A_t}{1+r} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{t-1} A_i}{(1+r)^{t-1}},$$

(2.23) und (2.22) rechnet man leicht nach, dass

$$H_t \Delta \widehat{S}^1_t = f_t(A_1 \dots, A_t) = \Delta M_t.$$

Es gilt nämlich für $A_t = u$

$$H_t \Delta \widehat{S}^1_t = \frac{f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)}{\left(\frac{u}{1+r} - 1\right)(1+r)^{-(t-1)} \prod_{i=1}^{t-1} A_i} \left(\frac{u}{1+r} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{t-1} A_i}{(1+r)^{t-1}} = f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)$$

und für $A_t = d$

$$
\begin{aligned}
H_t \Delta \widehat{S}_t^1 &= \frac{f_t(A_1 \ldots, A_{t-1}, u)}{\left(\frac{u}{1+r} - 1\right)(1+r)^{-(t-1)} \prod_{i=1}^{t-1} A_i} \left(\frac{d}{1+r} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{t-1} A_i}{(1+r)^{t-1}} \\
&= f_t(A_1 \ldots, A_{t-1}, u) \frac{\frac{d}{1+r} - 1}{\frac{u}{1+r} - 1} \\
&\overset{(2.22)}{=} f_t(A_1 \ldots, A_{t-1}, u) \frac{-q}{1-q} \\
&\overset{(2.23)}{=} f_t(A_1 \ldots, A_{t-1}, d).
\end{aligned}
$$

$\square$

Sei H nun ein beliebiger europäischer Claim im Cox-Ross-Rubinstein Modell, d.h. eine Abbildung $\{d, u\}^T \to \mathbb{R}_+$. Wie kann man H nun hedgen ? Definiere das Q-Martingal M durch seinen Endwert $M_T = \frac{H}{(1+r)^T}$, d.h. $M_t = E_Q\left(\frac{H}{(1+r)^T} | \mathcal{F}_t\right)$ dann gibt es nach Satz 2.8 einen vorhersehbaren Prozess $(H_t)_{t=1,\ldots,T}$ mit $\Delta M_t = H_t \Delta \widehat{S}_t^1$.

H_t entspricht der Anzahl der risikobehafteten Aktien S^1, die man im Portfolio hält um sich gegen den Claim H (perfekt) abzusichern, d.h. in unseren üblichen Notationen $\varphi_t^1 = H_t$. Der Anteil φ_t^0 an dem risikolosen Bankkonto ergibt sich dann durch die Selbstfinanzierungsbedingung (vgl. (1.6))

$$\varphi_t^0 = E_Q\left(\frac{H}{(1+r)^T} | \mathcal{F}_{t-1}\right) - \varphi_t^1 \widehat{S}_{t-1}^1.$$

Nun wollen wir damit eine europäische Call-Option bewerten, also $S_T^2 = (S_T^1 - K)^+$. Wir wissen, dass sich der eindeutige No-Arbitrage-Preis zum Zeitpunkt t durch die Formel

$$S_t^2 = (1+r)^{-(T-t)} E_Q((S_T^1 - K)^+ | \mathcal{F}_t)$$

ergibt, wobei das Maß Q in (2.20) definiert ist. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
S_t^2 &= (1+r)^{-(T-t)} E_Q((S_T^1 - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= (1+r)^{-(T-t)} E_Q((S_t^1 \prod_{i=t+1}^{T} A_i - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= (1+r)^{-(T-t)} \sum_{j=0}^{T-t} \begin{pmatrix} T-t \\ j \end{pmatrix} q^j (1-q)^{T-t-j} \left(S_t^1 u^j d^{T-t-j} - K\right)^+.
\end{aligned}
$$

Proposition 2.9. *Wenn $S_T^2 = H = g(S_T^1)$, wobei g eine nicht-fallende Funktion ist (z.B. $g(x) = (x-K)^+$), dann ist $\varphi^1 \geq 0$, d.h. die (im Cox-Ross-Rubinstein Modell eindeutige) Hedging-Strategie benötigt keine Leerverkäufe. Analog folgt für nicht-wachsende Funktionen g (z.B. $g(x) = (K-x)^+$), dass $\varphi^1 \leq 0$.*

Beweis. Das Martingal aus Satz 2.8 ist gegeben durch $M_t = (1+r)^{-T} E_Q(g(S_T^1)|\mathcal{F}_t) = (1+r)^{-T} E_Q(g(S_T^1)|S_t^1)$. Offenbar ist mit g auch die Funktion $s \mapsto (1+r)^{-T} E_Q(g(s \prod_{i=t+1}^T A_i))$ nicht-fallend. Damit ist M_t nicht-fallend in S_t^1, d.h. für f_t aus dem Beweis von Satz 2.8 gilt $f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, u) \geq f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, d)$ und damit

$$f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, u) \geq 0 \geq f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, d).$$

Dies bedeutet für den Integranden in Satz 2.8, dass $0 \leq H_t = \varphi_t^1$. □

3 Portfoliooptimierung

Wir gehen nun von einer Agentin aus, die unter gegebenen Marktbedingungen "möglichst viel" aus ihrem Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$ machen möchte. Sie kann dabei im Markt $(S^0, \ldots, S^d)$ investieren

In diesem Abschnitt gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass $S^0 = 1$. Wir fangen also schon gleich mit den abdiskontierten Größen an.

Da wir Arbitragefreiheit voraussetzen wollen, kann die Agentin ihr Startvermögen v_0 nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 vermehren. Sie hat die Möglichkeit alles in S^0 zu investieren, so dass ihr Endvermögen gleich v_0 wäre. Möchte Sie mehr erreichen, muss sie riskieren zum Zeitpunkt T eventuell weniger als v_0 zu haben. Welches (zufällige) Endvermögen V_T ist nun unter allen realisierbaren Endvermögen das optimale ? Um dies beurteilen zu können, muss man die Nutzenfunktion bzw. die Risikoaversion unserer Agentin kennen.

3.1 Mittelwert-Varianz-Optimierung

Ein in der Praxis recht verbreiteter Ansatz ist die *Markowitz-Optimierung* (Mittelwert-Varianz-Optimierung)

(1) Sei $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Maximiere $E(V_T(\varphi))$ über alle selbstfinanzierenden Strategien φ mit $\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) = \sigma^2$.

(2) Sei $\mu \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Minimiere $\mathrm{Var}(V_T(\varphi))$ über alle selbstfinanzierenden Strategien φ mit $E(V_T(\varphi)) = v_0 + \mu$.

Satz 3.1. *Sei $|\Omega| < \infty$. Eine Strategie, die das Markowitz-Problem (2) für ein $\mu \in \mathbb{R}_+$ löst, löst auch das Problem (1) für ein $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. Solche Strategien heißen* **Mittelwert-Varianz-effizient**.

Die Umkehrung gilt offenbar nicht. Nehme dazu das Cox-Ross Rubinstein Modell, Beispiel 2.7, mit $pu + (1-p)d = 1$ (d.h. die Aktie ist bereits unter P ein Martingal und $Q = P$). Alle erzielbaren Endvermögen haben dann den Erwartungswert v_0. D.h. *jede* Strategie φ mit $\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) = \sigma^2$ löst Problem (1). Wenn $\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) > 0$, dann ist φ aber keine Lösung für Problem (2). Da alle realisierbaren Endvermögen den Erwartungswert v_0 besitzen, kann der Fall $\mu \neq 0$ ausgeschlossen werden. Für $\mu = 0$ liefert aber die selbstfinanzierende Strategie $\widetilde{\varphi}$ mit $\widetilde{\varphi}^i = 0$, $i = 1, \dots, d$, das konstante Endvermögen v_0 und damit bereits $\mathrm{Var}(V_T(\widetilde{\varphi})) = 0$.

Beweis von Satz 3.1. Sei φ zu gegebenem $\mu \in \mathbb{R}_+$ eine varianzminimierende Strategie. Wir zeigen, dass φ zu gegebenem $\sigma^2 := \mathrm{Var}(V_T(\varphi))$ erwartungswertmaximierend ist.

1. Fall $\sigma^2 = 0$. Für jede Strategie $\widetilde{\varphi}$ mit $\mathrm{Var}(V_T(\widetilde{\varphi})) = 0$ gilt $P(V_T(\widetilde{\varphi}) = E(V_T(\widetilde{\varphi}))) = 1$. Da der Markt arbitragefrei ist, impliziert dies $E(V_T(\widetilde{\varphi}))) = v_0$. Ohne Risiko kann also nicht mehr als v_0 herauskommen und φ ist Lösung von (1).

2. Fall: $\sigma^2 := \mathrm{Var}(V_T(\varphi)) > 0$. Da φ (2) löst und der Erwartungswert v_0 bereits ohne Varianz erreicht werden kann folgt $\mu > 0$. Angenommen, es existiert eine selbstfinanzierende Strategie $\widetilde{\varphi}$ mit $\widetilde{\mu} := E(V_T(\widetilde{\varphi})) - v_0 > \mu$. Wähle eine selbstfinanzierende Strategie ψ mit Startkapital $V_0(\psi) = v_0$ und $\psi^i := \frac{\mu}{\widetilde{\mu}}\widetilde{\varphi}^i$ für $i = 1, \dots, d$. Dann ist $E(V_T(\psi)) = v_0 + \mu$ und $\mathrm{Var}(V_T(\psi)) = \left(\frac{\mu}{\widetilde{\mu}}\right)^2 \sigma^2 < \sigma^2$ im Widerspruch zur Optimalität von φ. $\square$

Beispiel 3.2 (Capital Asset Pricing Model (CAPM) für $T = 1$). *Im Einperiodenmodell sind vorhersehbare Strategien lediglich reellwertige Vektoren, d.h. $\varphi = \varphi_1 \in \mathbb{R}^d$. Die nullte Komponente φ_1^0 ergibt sich wie üblich aus der Selbstfinanzierungsbedingung und kommt hier deshalb nicht explizit vor.*

Beachte, dass $E(V_1(\varphi)) = v_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i E(\Delta S_1^i)$ *und*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) &= \sum_{i,j=1}^d \varphi^i \varphi^j \mathrm{Cov}(\Delta S_1^i, \Delta S_1^j) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \varphi^i \varphi^j \mathrm{Cov}(S_1^i, S_1^j).\end{aligned}$$

Möchte man nun das Problem (1) lösen, so ergeben sich folgende Optimalitätsbedingungen (1. Ordnung):

$$E(\Delta S_1^i) - 2\lambda \mathrm{Cov}(S_1^i, V_1(\varphi)) = 0, \quad \imath = 1, \ldots, d,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ *der Lagrange Multiplikator zu der Nebenbedingung* $\mathrm{Var}(V_T(\varphi) = \sigma^2$ *ist. Definiere die Kovarianzmatrix* $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ *des Zufallsvektors* $(S_1^1, \ldots, S_1^d)$ *durch* $C_{i,j} := \mathrm{Cov}(S_1^i, S_1^j)$*. C ist offenbar symmetrisch. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass C positiv definit ist (andernfalls gebe es redundante Wertpapiere, die man herausnehmen könnte). Definiere den Vektor* $d \in \mathbb{R}^d$ *durch* $d_i := E(\Delta S_1^i)$ $i = 1, \ldots, d$*. Die optimale Strategie* φ *ergibt sich als Lösung des folgenden Gleichungssystems:*

$$2C(\lambda\varphi) = d \tag{3.25}$$

$$\varphi^\top C \varphi = \sigma^2 \tag{3.26}$$

In (3.25) geht σ^2 *offenbar nicht ein. Löst man (3.25) nach* φ *auf, so erhält man*

$$\varphi = \frac{1}{2\lambda} C^{-1} d.$$

Eingesetzt in (3.26) folgt

$$\lambda^2 = \frac{d^\top C^{-1} d}{4\sigma^2}.$$

Setzt man $\widetilde{\varphi} := \lambda\varphi$*, so hängt* $\widetilde{\varphi}$ *offenbar nicht von der erlaubten Varianz* σ^2 *(entspricht der Risikoaversion der Agentin) ab. Zu jedem vorgegebenen* σ^2 *ist es also optimal,* φ *als ein Vielfaches von* $\widetilde{\varphi} = \frac{1}{2} C^{-1} d$ *zu wählen – mit Vielfachem* $\lambda = \sqrt{\frac{\widetilde{\varphi}^\top C \widetilde{\varphi}}{\sigma^2}}$*. Das optimale Portfolio lässt sich also stets als Linearkombination einer Investition in die risikolose Anlage* S^0 *und in das risikobehaftete* **Referenzportfolio** *mit Wert* $\sum_{i=1}^d \widetilde{\varphi}^i S^i$ *gewinnen.*

D.h. nur die Anzahl mit der das Referenzportfolio gekauft wird, hängt von der Risikoaversion ab. Diese Aussage bezeichnet man in der Literatur auch als "mutual fund theorem". In einer Welt, die nur aus Mittelwert-Varianz Optimierern besteht (mit möglicherweise unterschiedlichen Risikoaversionen), braucht man also neben einem risikolosen Bond nur einen einzigen Investmentfonds, um den Bedürfnissen aller Anleger gerecht zu werden.

Eine extrem risikoaverse Agentin ($\sigma^2 = 0$) würde nur in S^0 investieren, d.h. $\varphi = \frac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}$ mit $\lambda = \infty$, also $\varphi = 0$. Währenddessen würde eine risikotolerante Agentin (σ^2 groß) viel in das risikobehaftete Referenzportfolio investieren (eventuell sogar bei einer Shortposition in S^0), d.h. $\varphi = \frac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}$ mit $\lambda > 0$ klein.

3.2 Erwartungsnutzenoptimierung

Ein in der ökonomischen Theorie sehr verbreitete Ansatz ist die *Erwartungsnutzenoptimierung*. Die Agentin hat eine Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zunächst wird jedem möglichen Vermögen $x \in \mathbb{R}$ (zum Zeitpunkt T) ein Nutzen $u(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. $u(x) = -\infty$ kann dabei so interpretiert werden, dass das Vermögensniveau x absolut nicht akzeptabel ist und demnach mit Wahrscheinlichkeit 1 verhindert werden muss (etwa weil es den Ruin bedeuten würde). Die Funktion u soll zweimal differenzierbar sein mit $u'(x) > 0$ ("more is better than less") und $u''(x) < 0$ ("Gesetz" vom abnehmenden Grenznutzen). Die Agentin möchte nun ein (stochastisches) Endvermögen $V_T(\varphi)$ finden, das ihr einen möglichst hohen Erwartungsnutzen liefert. D.h. $E_P(u(V_T(\varphi)))$ ist über alle selbstfinanzierenden φ zu maximieren (Merton Problem). Das Startkapital $V_0 = v_0$ ist dabei vorgegeben.

Bemerkung 3.3. *Der Quotient $r(x) := \frac{-u''(x)}{u'(x)}$ wird als die* **Risikoaversion** *der Agentin in Abhängigkeit vom Wohlstandsniveau $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Die exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - \frac{1}{p}\exp(-px)$, $p \in (0, \infty)$ (siehe auch Satz 3.13), zeichnet sich dadurch aus, dass $r(x)$ nicht von x abhängt. Bei Potenz- und Logarithmusnutzenfunktionen (siehe Satz 3.11) nimmt $r(x)$ mit steigendem x ab. $r(x)$ kann wie folgt interpretiert werden: Zu jedem $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein eindeutiges $b = b(x, a)$ mit*

$$u(x - b) = \frac{1}{2}\left[u(x + a) + u(x - a)\right]. \tag{3.27}$$

Wegen der strengen Konkavität von u folgt aus $a \neq 0$, dass $b > 0$. Die risikolose Auszahlung x wäre nämlich mehr wert, als eine Auszahlung von $x + a$ bzw. $x - a$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. $b(x, a)$ wird auch als "certainty equivalent" zu der zufälligen Auszahlung "$x + a$ bzw. $x - a$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$" bezeichnet. Man halte nun $x \in \mathbb{R}$ fest und betrachte b als eine Funktion von $a \in \mathbb{R}$. Es gilt natürlich $b(0) = 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Diffbarkeit von $a \mapsto b(a)$. Leitet man (3.27) nach a ab, dann folgt

$$b'(a) = -\frac{1}{2} \frac{u'(x+a) - u'(x-a)}{u'(x - b(a))},$$

also insbesondere $b'(0) = 0$. D.h. für kleine a ist jeder Erwartungsnutzenoptimierer annähernd risikoneutral. Leitet man nochmal ab, dann folgt

$$b''(a) = \frac{[b'(a)]^2 u'(x - b(a)) - \frac{1}{2}\left[u''(x+a) + u''(x-a)\right]}{u'(x - b(a))},$$

also $b''(0) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = r(x)$, d.h. $b(x, a) = r(x)\left(\frac{1}{2}a^2 + o(a^2)\right)$ für $a \to 0$.

Standardvoraussetzung: $u(v_0) > -\infty$

v_0 entspricht dem Endvermögen, das man erhält, wenn man sein gesamtes Startkapital in das risikolose Bankkonto $S^0 = 1$ investiert. Würde dies bereits einen unendlich schlechten Nutzen implizieren, würde das Optimierungsproblem keinen Sinn ergeben.

Satz 3.4. *Wenn $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine streng konkave Nutzenfunktion ist (d.h. es gilt $u(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y)$ für $\lambda \in (0,1)$ und x, y mit $x \neq y$ und $u(x), u(y) > -\infty$, dann besitzen alle optimalen Strategien P-f.s. denselben Endwert $V_T(\varphi)$.*

Beweis. Annahme: Es gibt zwei optimale Strategien $\varphi, \widetilde{\varphi}$ mit $V_T(\varphi) \neq V_T(\widetilde{\varphi})$. Für $\psi := \frac{1}{2}(\varphi + \widetilde{\varphi})$ gilt dann

$$\begin{aligned} E\left(u(V_T(\psi))\right) &= E\left(u(V_T(\frac{1}{2}(\varphi + \widetilde{\varphi})))\right) \\ &> E\left(\frac{1}{2} u(V_T(\varphi)) + \frac{1}{2} u(V_T(\widetilde{\varphi}))\right) \\ &= E\left(u(V_T(\varphi))\right). \end{aligned}$$

Ein Widerspruch zur Optimalität von φ. □

Das Problem der stochastischen Optimierung über die Menge der *vorhersehbaren* Strategien $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ wollen wir durch folgende Identifikation (im Fall $|\Omega| < \infty$) auf ein geläufigeres endlichdimensionales Optimierungsproblem zurückführen.

Jedes $\mathcal{F}_t$ erzeugt eine endliche Zerlegung $(A_{t,1}, \dots, A_{t,m_t})$ von Ω, d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(A_{t,i}, \dots, A_{t,m_t})$, $\Omega = \cup_{i=1,\dots,m_t} A_{t,i}$ und $A_{t,i} \cap A_{t,j} = \emptyset$ für $i \neq j$. Zum Zeitpunkt t kann der Beobachter also sagen, welches der Ereignisse $A_{t,i}$, $i = 1, \dots, m_t$, eingetreten ist. Die Mengen $A_{t,i}$ nennt man auch die *Atome* der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$.

Eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathcal{F}_t$-messbar, wenn sie für festes i allen $\omega \in A_{t,i}$ den gleichen Wert zuordnet. Wir können also in diesem Fall schreiben $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{m_t} y_i 1_{A_{t,i}}(\omega)$, $y_i \in \mathbb{R}$.

Damit können wir zum Beispiel den $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zufallsvektor φ_t mit einem Element aus $\mathbb{R}^{m_{t-1}d}$ identifizieren. Es reicht aus, den Prozess $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ zu betrachten. Die Wertpapiere haben ihren ersten Sprung (in den man investieren kann) zum Zeitpunkt 1.

Wir identifizieren also jede Handelsstrategie $\varphi = (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)_{t=1,\dots,T}$ mit einem Element aus dem $\mathbb{R}^n$ mit $n := d + m_1 d + \ldots + m_{T-1} d$.

Satz 3.5. *Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : C \to \mathbb{R}$ eine diffbare konkave Funktion. Ferner seien $g_1 \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affine Funktionen (d.h. von der Form $g_i(x) = \alpha_i^\top x + \beta_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ und $\beta_i \in \mathbb{R}$). Sei $x_0 \in C$ mit $g_i(x_0) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Dann maximiert x_0 die Funktion f unter der Nebenbedingung $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ existiert, so dass x_0 die Funktion $x \mapsto f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda^i g_i(x)$ ohne Nebenbedingungen maximiert. Dies ist wiederum (wegen Konkavität) genau dann der Fall, wenn*

$$\operatorname{grad} f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda^i \operatorname{grad} g_i(x_0) = 0$$

λ kann unabhängig von der Lösung x_0 gewählt werden.

Beweis. Folgt aus Sätzen der konvexen Analysis, siehe Theoreme 28.1, 28.3, Korollar 28.2.2 in Rockafellar [14]. □

Satz 3.6 (Fundamentalsatz der Nutzenoptimierung). *Sei* $|\Omega| < \infty$ *und* u *eine streng monoton wachsende, konkave differenzierbare Nutzenfunktion mit* $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ *offen. Eine selbstfinanzierende Strategie* φ *ist genau dann erwartungsnutzenoptimal für* u*, wenn*

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{1}{\kappa}\, u'(\widehat{V}_T(\varphi)), \tag{3.28}$$

für ein ÄMM $P^\star$ *und ein* $\kappa \in \mathbb{R}$*.*

Bemerkung 3.7. *Die Voraussetzung, dass die Menge* $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ *offen sein muss, erscheint wenig überraschend. Betrachte etwa für* $p \in (0,1)$ *die CRRA-Nutzenfunktion ("constant relativ risk aversion")*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p} & : \text{wenn } x \geq 0 \\ -\infty & : x < 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Es gilt $u(0) = 0$ *aber* $u(x) = -\infty$ *für alle* $x < 0$*. Nehme an, in dem Optimierungsproblem gilt für das optimale Endvermögen* $V_T(\varphi)$*, dass* $P(\widehat{V}_T(\varphi) = 0) > 0$*. Da die Ableitung von* u *in* 0 *nicht existiert, lässt sich (3.28) gar nicht formulieren. Nimmt man stattdessen die rechtsseitige Ableitung (die auch in* 0 *existiert), so wird man kaum erwarten können, dass (3.28) gilt, da die rechtsseitige Ableitung von* u *in* 0 *das Absacken auf* $-\infty$ *natürlich nicht wiedergibt.*

Bemerkenswert ist allerdings, dass Satz 3.6 für $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ *offen, etwa* $u = \log$*, und* $|\Omega| = \infty$ *auch nicht gelten muss. Sogar wenn man die Aktienpreisprozesse* S^i *als beschränkt voraussetzt. In Fall logarithmischen Nutzens muss für das optimale Endvermögen* $V_T(\varphi)$ *natürlich gelten* $P(\widehat{V}_T(\varphi) > 0) = 1$*. Aber* $\frac{u'(\widehat{V}_T(\varphi))}{E\left(u'(\widehat{V}_T(\varphi))\right)}$ *muss nicht die Dichte eines äquivalenten Martingalmaßes sein*¶*.*

Bemerkung 3.8. *Im* **vollständigen** *Markt lässt sich aus (3.28) das optimale Endvermögen bereits gewinnen.* $P^\star$ *ist dort eindeutig und die Dichte* $\frac{dP^\star}{dP}$ *i.A. bekannt. Man mache für das optimale Endvermögen* X *den Ansatz* $X = (u')^{-1}(\kappa \frac{dP^\star}{dP})$*. Das unbekannte* $\kappa \in \mathbb{R}_+$ *bestimmt sich aus* $E_{P^\star}(u')^{-1}(\kappa \frac{dP^\star}{dP}) = E_{P^\star}X = v_0$*. Das Entscheidende ist nun, dass im*

¶Für Gegenbeispiel siehe Example 5.1 in Kramkov und Schachermayer [12].

vollständigen Markt die Bedingung $E_{P^\star}X = v_0$ bereits garantiert, dass sich das Endvermögen X mit einer Strategie φ und dem gegebenen Startkapital v_0 erzeugen lässt.

Für das (vollständige) Cox-Ross-Rubinstein Modell (vgl. Beispiel 2.7) ergibt dies folgendes: Die eindeutige Dichte ist gegeben durch

$$\frac{dP^*}{dP}(\omega) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\#\{i|x_i=u\}} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\#\{i|x_i=d\}} , \quad \textit{für } x_1 = A_1(\omega), \ldots , x_T = A_T(\omega) \ ,$$

wobei p die "objekte" Wahrscheinlichkeit ist und q die durch (2.22) gegebene Wahrscheinlichkeit unter dem eindeutigen Martingalmaß ("risikolose Wahrscheinlichkeit"). Insbesondere hängt die Zufallsvariable $\frac{dP^*}{dP}$ nur vom Endwert *S^1_T der Aktie ab (d.h. von der Anzahl der i mit $x_i = u$) und nicht auch von deren Werten vorher. Auch das optimale Endvermögen $\widehat{X}(\omega)$ hängt damit von ω nur über $S^1_T(\omega)$ ab, d.h. $\widehat{X} = h(S^1_T)$. Es folgt*

$$\widehat{X} = h(S^1_T) = (u')^{-1}\left(c\left(\frac{q}{p}\right)^j\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-j}\right), \quad \textit{wobei } j \textit{ durch } S^1_T = u^j d^{T-j} \textit{ gegeben ist}$$

und die Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ aus der Finanzierbarkeitsbedingung

$$E_Q(\widehat{X}) = \sum_{j=0}^{T} \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} h(u^j d^{T-j}) \stackrel{!}{=} v_0$$

folgt ($v_0 \in \mathbb{R}$ ist das gegebene Startkapital).

Beweis von Theorem 3.6. Wir verwenden die erwähnte Identifikation der Menge aller vorhersehbaren Handelsstrategien mit dem $\mathbb{R}^n$. Wie gewohnt bezeichnen wir die Menge der reellwertigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{R}^\Omega$. Seien nun $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}$ und $g_\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $\omega \in \Omega$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(\varphi, X) &:= E(u(X)) \\ g_\omega(\varphi, X) &:= X(\omega) - V_T(\varphi)(\omega) \end{aligned}$$

Dann ist φ genau dann erwartungsnutzenoptimal, wenn $(\varphi, V_T(\varphi))$ die Funktion f unter den Nebenbedingungen $g_\omega = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, optimiert. Man maximiert also den Erwartungsnutzen zunächst über alle Zufallsvariablen X. Die Nebenbedingungen g_ω garantieren, dass die Zufallsvariablen X auch als Endwert eines selbstfinanzierenden Vermögensprozesses $(V_t)_{t=0,1,\dots,T}$ mit gegebenem Startkapitel $v_0 \in \mathbb{R}$ darstellbar sind. Man beachte, dass ω im Beweis des Satzes gleich zweimal vorkommt. Zum einen existiert zu jedem Zustand $\omega \in \Omega$ eine **Nebenbedingung** g_ω, die die "Finanzierbarkeit" von $X(\omega)$ sichert. Zum anderen gibt ω einfach die Komponente von X an. $X(\omega)$ entspricht also einer **Variablen**. Nach Hilfssatz 3.5 ist $(\varphi, \widehat{V}_T(\varphi))$ genau dann ein Optimum des restringierten Problems, wenn eine reellwertige Zufallsvariable $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ existiert mit

$$\operatorname{grad} f(\varphi, V_T(\varphi)) - \sum_{\widetilde{\omega}\in\Omega} \lambda(\widetilde{\omega}) \operatorname{grad} g_{\widetilde{\omega}}(\varphi, \widehat{V}_T(\varphi)) = 0 \tag{3.30}$$

d.h. der Gradient von f lässt sich als Linearkombination der Gradienten der $\operatorname{grad} g_{\widetilde{\omega}}$ schreiben. (3.30) besteht aus $n + |\Omega|$ Gleichungen. Die ersten n Komponenten von f sind null. Daher bedeutet (3.30) dort (beachte: $V_T(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S = v_0 + \sum_{t=1}^T \varphi_t^\top \Delta S_t$), dass für alle $t = 1, \dots, T$ und alle $A_{t-1,j}$, $j = 1, \dots, m_{t-1}$ gilt

$$-\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) 1_{A_{t-1,j}}(\omega) \Delta S_t^i(\omega) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{3.31}$$

Setzen wir nun $\varrho(\omega) := \frac{\lambda(\omega)}{P(\{\omega\})}$ dann ist (3.31) äquivalent zu

$$E(\varrho 1_{A_{t-1,j}} \Delta S_t) = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

und damit

$$E(\varrho \Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

Die letzten $|\Omega|$ Komponenten von (3.30) bedeuten, dass

$$u'(X(\omega)) P(\{\omega\}) - \lambda(\omega) 1 = 0, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

also

$$u'(X(\omega)) = \varrho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

Setzt man weiter $\kappa := E\left(u'(V_T(\varphi))\right)$ und $\frac{dP^\star}{dP} := \frac{1}{\kappa}\, u'(V_T(\varphi))$. Damit ist φ genau dann eine erwartungsnutzenoptimale Strategie, wenn

$$E(\frac{dP^\star}{dP} \Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

d.h. wenn S ein $P^\star$-Martingal ist. Da $u' > 0$ ist $P^\star$ nach Konstruktion ein Wahrscheinlichkeitmaß.

□

Beispiel 3.9. *Nehme an, dass die Prozesse S^i schon Martingale bzgl. des ursprünglichen Maßes P sind. Es gilt natürlich*

$$\frac{dP}{dP} = \frac{u'(v_0)}{Eu'(v_0)}.$$

Aus Satz 3.6 folgt, dass v_0 das optimale Endvermögen ist (Natürlich ließe sich diese Aussage auch einfacher gewinnen !).

Bemerkung 3.10. *Wir haben bisher noch keine Aussage über die* Existenz *einer optimalen Strategie φ gemacht. Allgemein folgt aus der Existenz eines Martingalmaßes (Arbitragefreiheit) und der Konkavität von u noch* **nicht**, *dass das Optimierungsproblem $E_P(u(V_T(\varphi)))$ beschränkt ist, d.h. es könnte eine Folge $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Strategien geben mit $\lim_{n\to\infty} E_P(u(V_T(\varphi^{(n)}))) = \infty$.*

Wir betrachten nun als Verallgemeinerung des Cox-Ross-Rubinstein Modells einen zeitlich homogenen Markt, in dem die (abdiskontierten) Wertpapierpreisprozesse gegeben sind durch:

$$S_t^i = s_0^i \prod_{j=1}^{t}(1 + A_j^i), \quad t = 1, \ldots, T, \; i = 1, \ldots, d,$$

wobei $(A_j)_{j=1,\ldots,T}$ nun eine Folge von i.i.d. d-dimensionalen Zufallsvektoren $A_j = (A_j^1, \ldots, A_j^d)$ ist ($S^0 = 1$). A_j^i sind beliebige Zufallsvariablen mit $A_j^i > -1$. Für festes j dürfen $A_j^{i_1}$ und $A_j^{i_2}$ auch stochastisch abhängig sein. A_j^i nennt man auch die (stochastische) *Rendite* des Wertpapiers i in der j-ten Periode.

Für bestimmte Nutzenfunktionen, nämlich Potenz-, Logarithmus- und exponentielle Nutzenfunktionen, kann man in diesem Modell die optimale Strategie φ explizit berechnen und "schön" beschreiben.

Satz 3.11 (Potenz- und Logarithmusnutzenfunktion). *Sei $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x^{1-p}}{1-p}$ für ein $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Für $p = 1$ sei die Funktion u gegeben durch $x \mapsto \log(x)$*

(man kann sich vorstellen, dass $u = -\infty$ auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ bzw. $(-\infty, 0]$). Es existiere ein $\gamma \in \mathbb{R}^d$ mit $\gamma^\top A_t > -1$ und

$$E\left(\frac{A_1^i}{(1+\gamma^\top A_1)^p}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{3.32}$$

Definiere folgenden Vermögensprozess mit Startkapital v_0

$$V_t = v_0 \prod_{j=1}^{t} (1 + \gamma^\top A_j). \tag{3.33}$$

Dann ist

$$\varphi_t^i = \frac{\gamma^i}{S_{t-1}^i} V_{t-1}, \quad i = 1, \ldots, d \tag{3.34}$$

eine erwartungsnutzenoptimale Strategie und V der dazugehörige Vermögensprozess.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
v_0 + \varphi \bullet S_t &= v_0 + \sum_{j=1}^{t} \varphi_j^\top \Delta S_j \\
&= v_0 + \sum_{j=1}^{t} V_{j-1} \sum_{i=1}^{d} \frac{\gamma^i}{S_{j-1}^i} \Delta S_j^i \\
&= v_0 + \sum_{j=1}^{t} V_{j-1} \gamma^\top A_j \\
&= v_0 + \sum_{j=1}^{t} (V_j - V_{j-1}) \\
&= V_t,
\end{aligned}$$

wobei in der dritten Gleichung benutzt wird, dass $\frac{\Delta S_j^i}{S_{j-1}^i} = A_j^i$. Damit ist gezeigt, dass V der zu φ gehörige Vermögensprozess ist.

Definiere $\alpha := (E((1+\gamma^\top A_1)^{-p}))^{1/p}$ und den Dichteprozess $Z_t = \left(\frac{1}{\alpha^t \prod_{j=1}^t (1+\gamma^\top A_j)}\right)^p$, $t \geq 1$ und $Z_0 = 1$. Es gilt $Z_t = Z_{t-1} \alpha^{-p} (1 + \gamma^\top A_t)^{-p}$. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von A_t und $\mathcal{F}_{t-1}$ sowie der Definition von α ist Z damit ein (P-)Martingal, d.h. $E(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = Z_{t-1}$. Des weiteren gilt $Z_T > 0$ und $EZ_T = 1$. Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P^\star$ durch

$$\frac{dP^\star}{dP} := Z_T = \alpha^{-pT} u'(\prod_{j=1}^{T} (1 + \gamma^\top A_j)) = v_0^p \alpha^{-pT} u'(V_T(\varphi)) =: \frac{1}{\kappa} u'(V_T(\varphi)).$$

Nun wollen wir zeigen, dass S^i $P^\star$-Martingale sind. Dies ist äquivalent dazu, dass $(Z_t S_t^i)_{t=0,\dots,T}$ P-Martingale sind. Wegen

$$\begin{aligned} E(Z_t S_t^i|\mathcal{F}_{t-1}) &= S_{t-1}^i E(Z_t(1+A_t^i)|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= S_{t-1}^i Z_{t-1} + E(Z_t A_t^i|\mathcal{F}_{t-1}) \end{aligned}$$

müssen wir zeigen, dass $E(Z_t A_t^i|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Es gilt wegen der Unabhängigkeit der A_j und (3.32):

$$\begin{aligned} E(Z_t A_t^i|\mathcal{F}_{t-1}) &= Z_{t-1}\alpha^{-p} E(\frac{A_t^i}{(1+\gamma^\top A_t)^p}|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= Z_{t-1}\alpha^{-p} E(\frac{A_1^i}{(1+\gamma^\top A_1)^p}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus Satz 3.6 folgt, dass φ optimal ist. □

Bemerkung 3.12. *Man sieht sofort, dass die optimale Strategie (3.34) nicht vom Zeithorizont T abhängt. D.h. alle Rechnungen gingen durch, wenn man z.B. bei $t_0 < T$ abbrechen würde. Das optimale Endvermögen wäre dann V_{t_0} und das zugehörige Martingalmaß $\widetilde{P}^*$ wäre durch*

$$\frac{d\widetilde{P}^*}{dP} = Z_{t_0}$$

gegeben. Hier geht bereits die konstante relative Risikoaversion

$$R(x) := -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

ein. Es stellt sich die Frage, wann diese nette Eigenschaft auch für den **allgemeinen Fall** *gilt, dass $(A_t)_{t=0,\dots,T}$ nicht mehr unabhängig sein müssen (auch nicht identisch verteilt). Im folgenden werden wir uns überlegen, dass dies, wenn $u(x) = \ln(x)$ bzw. $p = 1$ der Fall ist. Man sieht zunächst, dass für $p = 1$ der Faktor α im Beweis von Satz 3.11 für alle $\gamma \in \mathbb{R}^d$ 1 ist. Dies ist der Grund dafür, dass man für die logarithmische Nutzenfunktion wie im unabhängigen Fall vorgehen kann. $\gamma \in \mathbb{R}^d$ wird nun durch einen vorhersehbaren stochastischen Prozess $(\gamma_t)_{t=1,\dots,T}$ ersetzt, wobei sich γ_t analog zu (3.32) bestimmt durch*

$$E\left(\frac{A_t^i}{1+\gamma_t^\top A_t}|\mathcal{F}_{t-1}\right) = 0, \quad i = 1,\dots,d.$$

Beachte, dass γ_t $\mathcal{F}_{t-1}$*-messbar sein soll, d.h. in den obigen Gleichungen wie ein Element aus dem* $\mathbb{R}^d$ *fungiert. (Für andere Nutzenfunktionen würde* α *dann von* ω *abhängen, was die Bedingung mit dem Marginalnutzen kaputt machen würde.) Der Beweis im logarithmischen Fall geht nun analog mit* $(\gamma_t)_{t=1,\dots,T}$ *statt* γ.

Für den logarithmischen Nutzen ist die optimales Strategie gegeben durch

$$\varphi_t^i = \frac{\gamma_t^i}{S_{t-1}^i} V_{t-1}, \quad i = 1, \dots, d$$

Das Optimierungsproblem ist also **myopisch** *("kurzsichtig"). Zur Bestimmung der optimalen Strategie braucht man nur das (optimale) Vermögen zum Zeitpunkt* $t-1$ *und die lokalen "stochastischen Charakteristiken" für den Sprung zwischen* $t-1$ *und* t *zu kennen (d.h. die bedingte Verteilung von* A_t *gegeben die Information* $\mathcal{F}_{t-1}$*). Die stochastische Verteilung des Aktienpreisprozesse* nach t *muss der Optimierer gar nicht kennen. Insbesondere geht der Zeithorizont nicht in die optimale Lösung ein.*

Satz 3.13 (Exponentialnutzenfunktion). *Sei* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $x \mapsto 1 - \frac{1}{p}\exp(-px)$ *für ein* $p \in (0, \infty)$*. Es existiere ein* $\gamma \in \mathbb{R}^d$ *mit*

$$E(A_1^i \exp(-\gamma^\top A_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{3.35}$$

Definiere folgenden Vermögensprozess mit Startkapital v_0

$$V_t := v_0 + \frac{1}{p}\gamma^\top (\sum_{j=1}^t A_j) \tag{3.36}$$

Dann ist

$$\varphi_t^i = \frac{\gamma^i}{p S_{t-1}^i}, \quad i = 1, \dots, d \tag{3.37}$$

eine erwartungsnutzenoptimale Strategie und V *der dazugehörige Vermögensprozess.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} v_0 + \varphi \bullet S_t &= v_0 + \sum_{j=1}^{t} \varphi_j^\top \Delta S_j \\ &= v_0 + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \frac{\gamma^i}{S_{j-1}^i} \Delta S_j^i \\ &= v_0 + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{t} \gamma^\top A_j \\ &= v_0 + \frac{1}{p} \gamma^\top (\sum_{j=1}^{t} A_j) \\ &= V_t, \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass V der zu φ gehörige Vermögensprozess ist.

Definiere $\alpha := \log(E(\exp(-\gamma^\top A_1)))$ und den Dichteprozess $Z_t = \exp(-\alpha t - \gamma^\top (\sum_{j=1}^{t} A_j))$, $t \geq 1$ und $Z_0 = 1$.

Es gilt $Z_t = Z_{t-1} \exp(-\alpha - \gamma^\top A_t)$. Damit ist Z wegen der stochastischen Unabhängigkeit von A_t und $\mathcal{F}_{t-1}$ sowie der Definition von α ein (P-)Martingal. Des weiteren gilt $Z_T > 0$ und $EZ_T = 1$. Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P^\star$ durch

$$\frac{dP^\star}{dP} := Z_T = \exp(-\alpha T + p v_0) \exp(-p v_0 - \gamma^\top (\sum_{j=1}^{T} A_j)) = \exp(-\alpha T + p v_0) u'(V_T(\varphi))$$

Nun wollen wir zeigen, dass S^i $P^\star$-Martingale sind. Wie im vorigen Beweis ist dafür zu zeigen, dass $E(Z_t A_t^i | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Es gilt wegen (3.35) und der Unabhängigkeit der A_j, dass

$$\begin{aligned} E(Z_t A_t^i | \mathcal{F}_{t-1}) &= Z_{t-1} \exp(-\alpha) E[\exp(-\gamma^\top A_t) A_t^i | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Satz 3.14. *Wir nehmen wieder an, dass $u(v_0) > -\infty$*

(a) Wenn eine erwartungsnutzenoptimale Strategie φ existiert, dann ist der Markt arbitragefrei.

(b) Nehme an, dass der Markt arbitragefrei ist und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

(i) $u(x_0) = -\infty$ *für ein* $x_0 < v_0$ *(damit natürlich auch* $u = -\infty$ *auf ganz* $(-\infty, x_0]$*)*

(ii) $\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x) < \infty$

Dann existiert eine erwartungsnutzenoptimale Strategie φ*.*

Beweis. Ad (a): Nehme an es gibt eine Arbitragestrategie ψ, d.h. $\psi \bullet S_T \geq 0$ und $P(\psi \bullet S_T > 0) > 0$, und eine erwartungsnutzenoptimale Strategie φ. Wegen $u' > 0$ gilt $u(v_0 + (\varphi + \psi) \bullet S_T) \geq u(v_0 + \varphi \bullet S_T)$ und $P(u(v_0 + (\varphi + \psi) \bullet S_T) > u(v_0 + \varphi \bullet S_T)) > 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von φ.

Ad (b): Sei der Markt arbitragefrei.

Vorüberlegung: Wir betrachten den linearen Unterraum $N = \{\eta | \eta \bullet S_T = 0\}$. Da es in dem Markt *redundante Wertpapiere* geben kann besteht i.A. N nicht nur aus der Null. Mit der Identifizierung der vorhersehbaren Prozesse mit dem $\mathbb{R}^n$ können wir zu N einen Orthogonalraum $N^\perp$ definieren. Jede vorhersehbare Strategie φ lässt sich somit schreiben als $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$, wobei $\varphi^{(1)} \in N$ und $\varphi^{(2)} \in N^\perp$. Da $\varphi^{(1)}$ in das Endvermögen nicht eingeht, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\varphi \in N^\perp$, d.h. o.B.d.A. $N = \{0\}$. Aus $\varphi \bullet S_T = 0$ folgt also stets, dass $\varphi = 0$.

ad (i): Nehme zunächst an, dass (i) gilt. Wir wollen zeigen, dass die Menge der zufälligen Endvermögen, die man mit gegebenem Startkapital v_0 erzeugen kann und die x_0 nicht unterschreiten, kompakt ist, d.h. $\mathcal{X}(v_0) = \{X \subset \mathbb{R}^\Omega | \exists\psi \text{ so dass } X = v_0 + \psi \bullet S_T \text{ und } X \geq x_0\}$ ist kompakt. Nehme an, dies wäre nicht der Fall. Dann existiert eine Folge $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}(v_0)$ mit $\lambda_n := \sup_{\omega\in\Omega} |X^{(n)}(\omega)|$ und $\lambda_n \to \infty$, wenn $n \to \infty$. Wegen der Vorüberlegung existiert zu jedem $X^{(n)}$ ein **eindeutiges** $\psi^{(n)}$ mit $X^{(n)} = v_0 + \psi^{(n)} \bullet S_T$.

O.B.d.A. konvergiert $\frac{X^{(n)}}{\lambda_n}$ gegen eine Zufallsvariable $\widetilde{X}$ und $\frac{\psi^{(n)}}{\lambda_n}$ gegen ein $\widetilde{\psi}$ mit $\widetilde{X} = \widetilde{\psi} \bullet S_T$. Es folgt also

$$\frac{x_0}{\lambda_n} \leq \frac{X^{(n)}}{\lambda_n} \to \widetilde{\psi} \bullet S_T, \quad n \to \infty$$

Es folgt daraus, dass $\widetilde{\psi} \bullet S_T \geq 0$ und damit $\widetilde{\psi} \bullet S_T = 0$ (No-Arbitrage) und schließlich $\widetilde{\psi} = 0$ (Vorbemerkung). Da $||\frac{X_n}{\lambda_n}||_{L^\infty} = 1$ kann dies aber nicht sein. Damit ist $\mathcal{X}(v_0)$ kompakt. Wegen Stetigkeit der Abbildung $\psi \mapsto E(u(V_T(\psi)))$ existiert eine optimale Strategie φ.

Sei nun (ii) vorausgesetzt. Der Beweis im Fall (i) war darauf aufgebaut, dass $V_T(\psi) \geq x_0$, für alle Strategien ψ mit $Eu(V_T(\psi)) > -\infty$ Statt alle Vermögensprozesse mit $Eu(V_T(\psi)) >$

$-\infty$ betrachten wir nun alle Vermögensprozesse, die zumindest den (erwarteten) Nutzen von v_0 liefern. Also $Eu(V_T(\psi)) \geq u(v_0)$. Natürlich können wir uns bei der Maximierung auf diese Strategien beschränken.

Da $\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x) - u(v_0) < \infty$, aber $\inf_{x\in\mathbb{R}} u(x) = -\infty$ folgt wegen $|\Omega| < \infty$ und $P(\{\omega\}) > 0$, dass es ein x_0' geben muss, so dass folgende Implikation gilt

$$Eu(V_T(\psi)) \geq u(v_0) \Rightarrow V_T(\psi) \geq x_0'.$$

Für x_0' hinreichend klein ist nämlich $V_T(\psi)(\omega) < x_0'$, für ein einziges ω, bereits ein Verlust im Erwartungswert im Vergleich zu $u(v_0)$, der auf $\Omega \setminus \{\omega\}$ wegen der Beschränktheit nach oben von u nicht wieder gutgemacht werden kann. Formal: $u(x_0') \leq u(v_0) - \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x) - u(v_0)}{\min_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})}$. Damit folgt der Fall (ii) analog zu Fall (i). □

4 Neutrale Derivatebewertung

In unvollständigen Märkten reichen Arbitrageargumente i.A. nicht aus, um eindeutige Derivatepreise zu bestimmen. Man erhält ein ganzes Intervall von No-Arbitrage-Preisen. Jeder Preis in diesem Intervall ist vereinbar mit der Bedingung, dass es keine risikolose Gewinnmöglichkeit geben soll. In vielen Modellen von praktischer Relevanz ist das Intervall dieser No-Arbitrage-Preise jedoch sehr groß und liefert nur "triviale Schranken" (wie die in Übungsaufgabe 1, Blatt 2). Daher ist man natürlich bemüht, einen Preis aus diesem Intervall herauszupicken, der besonders plausibel erscheint. Dies erfordert natürlich stärkere Annahmen an das Modell. Bei No-Arbitrage Argumenten reicht es aus, dass für die Agenten "mehr" besser als "weniger" ist, bzw. dass ein riskoloser Gewinn von niemandem ausgeschlagen würde.

Statt Arbitrageure, die nur an risikolosen Gewinnen interessiert sind, betrachten wir nun Nutzenoptimierer. Nehme an, dass eine *typische Marktteilnehmerin* eine Nutzenfunktion u hat und ausgehend von einem Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$ ihren Erwartungsnutzen $Eu(V_T(\varphi))$ maximieren möchte.

Definition 4.1. *Wir nennen Derivatepreisprozesse $S^{d+1}, \ldots, S^{d+n}$ mit $S_T^{d+i} = H^i$, $i = 1, \ldots, n$,* neutral*, wenn die repräsentative Nutzenmaximiererin bei diesem Preisprozess*

weder Short- noch Longpositionen des Derivates in ihrem Portfolio halten möchte. D.h. es existiert eine Strategie
$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d, \varphi^{d+1}, \dots, \varphi^{d+n})$, *die* $Eu(V_T(\cdot))$ *maximiert und für die gilt* $\varphi^{d+i} = 0$ *für* $i = 1, \dots, n$.

Da die Nutzenmaximiererin das Derivat zu einem neutralen Preis weder kaufen noch verkaufen will, erscheint es weder unter- noch überbewertet zu sein.

Satz 4.2. *Sei* u *eine auf einem offenen Intervall definierte, streng monoton wachsende, streng konkave, differenzierbare Nutzenfunktion. Es existiere eine optimale Strategie* $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *im Markt* $(S^0, S^1, \dots, S^d)$. *Dann hat jede endliche Folge von Optionen* $(H^1, \dots, H^n)$ *eindeutige neutrale Derivatepreisprozesse. Diese sind gegeben durch*

$$S_t^{d+i} = E_{P^\star}(H^i | \mathcal{F}_t), \tag{4.38}$$

wobei

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(V_T(\varphi^1, \dots, \varphi^d)}{E_P(u'(V_T(\varphi^1, \dots, \varphi^d)))}. \tag{4.39}$$

Beweis. Existenz: Seien S_t^{d+i} wie in (4.38) definiert. Damit ist $P^\star$ auch ein ÄMM im vergrößerten Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d, S^{d+1}, \dots, S^{d+n})$. Wegen

$$V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0, \dots, 0)) = V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d,))$$

und Satz 3.6 ist $(\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0, \dots, 0)$ eine optimale Strategie im vergrößerten Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d, S^{d+1}, \dots, S^{d+n})$.

Eindeutigkeit: Seien nun $(\widetilde{S}^{d+1}, \dots, \widetilde{S}^{d+n})$ neutrale Derivatepreisprozesse und $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d, 0, \dots, 0)$ eine optimale Strategie im vergrößerten Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1}, \dots, \widetilde{S}^{d+n})$. Dann ist natürlich $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)$ optimal im kleinen Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d)$. Somit gilt wegen der Eindeutigkeit des optimalen Endvermögens (Satz 3.4), dass $V_T((\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)) = V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d))$. Somit stimmt das durch

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \frac{u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d))}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))}$$

definierte Maß mit $P^\star$ aus (4.39) überein. Da nach Satz 3.6 die $\widetilde{S}^{d+i}$ $\widetilde{P}$-Martingale sind und wegen der Endbedingung $\widetilde{S}_T^{d+i} = H^i$ folgt die Eindeutigkeit. $\square$

5 Amerikanische Optionen

Definition 5.1. *Ein Amerikainischer Claim ist durch einen nichtnegativen Prozess* $L = (L_t)_{t=0,\dots,T}$ *gegeben.* L_t *ist die* **abdiskontierte** *Auszahlung des Claims zum Zeitpunkt* t.

Der *Käufer* eines amerikanischen Claims kann diesen jederzeit bis zum Verfallszeitpunkt T ausüben. Der Claim kann jedoch nur einmal ausgeübt werden. Sobald er ausgeübt ist, erhält der Käufer die entsprechende Auszahlung und alle weiteren Rechte verfallen. Anderseits kann der Claim auch nicht rückwirkend ausgeübt werden. Der Käufer kann also nicht zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ die Auszahlung L_{t_1} einfordern. Damit korrespondiert die optimale Ausübung mit einem optimalen Stopp-Problem.

Definition 5.2. *Eine Ausübungsstrategie für einen Amerikainischen Claim* L *ist eine Stoppzeit* τ, *die Werte in* $\{0, \dots, T\}$ *annehmen kann. Die Auszahlung ist dann gegeben durch* $L_{\tau(\omega)}(\omega)$.

Beispiel 5.3. *Bei amerikanischen Put bzw. Call Optionen ist die abdiskontierte Auszahlung gegeben durch* $L_t = e^{-rt}(K - S_t^1)^+$ *bzw.* $L_t = e^{-rt}(S_t^1 - K)^+$ *(r ist der "risikolose" Zinsatz, d.h.* $S_t^0 = e^{rt}$*).*

Bei gleichem Strike K ist die amerikanische Put Option genau dann "out of the money", wenn die Call Option "in the money" ist. Deshalb ist klar, dass die optimale Ausübung in der Regel zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgt. Insbesondere gilt die Put-Call-Parität für europäische Optionen (vgl. Blatt2, Aufgabe 2) hier nicht.

Beispiel 5.4. *Russische Optionen lassen sich als amerikanische Claims darstellen. Die Auszahlung bei Ausübung zum Zeitpunkt* $t \in \{0, \dots, T\}$ *ist gegeben durch*

$$L_t := (\max_{j=0,\dots,t} S_j^1 - c_1 t) \vee c_2, \quad c_1 > 0, c_2 \geq 0$$

Bemerkung 5.5. *Man kann natürlich jeden europäischen Claim* H *als Spezialfall eines amerikanischen Claims interpretieren kann. Setze dazu einfach*

$$L_t := \begin{cases} 0 & \textit{für } t < T \\ H & \textit{für } t = T \end{cases} \tag{5.40}$$

Beispiel 5.6 (Bermuda Option). *Eine Bermuda Option kann vom Käufer jederzeit innerhalb einer vorbestimmten Teilmenge $\mathcal{T} \subset \{0,\dots,T\}$ ausgeübt werden. Zum Beispiel zahlt die Option den Betrag $(S_t^1 - K)^+$, wenn sie zum Zeitpunkt t ausgeübt wird. Eine Bermuda Option kann also auch als eine spezielle amerikanische Option betrachtet werden mit $L_t = 0$ für $t \notin \mathcal{T}$. Damit ist eine Bermuda Option ein Finanzinstrument irgendwo zwischen einer amerikanischen Option mit $\mathcal{T} = \{0,\dots,T\}$ und einer europäischen Option mit $\mathcal{T} = \{T\}$ – ganz ähnlich wie Bermuda zwischen Amerika und Europa liegt.*

Beispiel 5.7 (Installment Option). *Eine Installment Option ist einerseits eine Option europäischen Typs, d.h. die (mögliche) Auszahlung an den Besitzer erfolgt zum Zeitpunkt T. Andererseits wird die fällige Prämie für eine Installment Option in verschiedenen Raten gezahlt und es besteht die Möglichkeit, die Prämienzahlung vorzeitig einzustellen – allerdings um den Preis, dass dann eine mögliche Auszahlung zum Zeitpunkt T entfällt. Da also sowohl die Einzahlungen als auch die mit der Option verbundene Auszahlung von der Stoppstrategie τ des Besitzers beeinflusst werden können, ist es sinnvoll mit L_t die Differenz aus Aus- und Einzahlungen zu modellieren (in Geldeinheiten zum Zeitpunkt t ausgedrückt), wenn der Besitzer den Vertrag zum Zeitpunkt t aufkündigt. Wenn r die risikolose Zinsrate pro Zeiteinheit ist, sieht L im Falle einer Call Option wie folgt aus:*

$$L_t = -\sum_{i=0}^{t-1}(1+r)^{t-i}, \quad t = 1,\dots,T-1$$

$$L_T = (S_T^1 - K)^+ - \sum_{i=0}^{T-1}(1+r)^{T-i}.$$

Um amerikanische Optionen analysieren zu können, brauchen wir zunächst ein paar weitere Hilfsmittel.

Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von $\mathcal{G}$-messbaren reellwertigen Zufallsvariablen ($\mathcal{X}$ ist i.A. überabzählbar) Wir wollen nun das Supremum der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{X}$ bilden. Wenn $\mathcal{X}$ abzählbar ist, können wir einfach das *punktweise Supremum* der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{X}$ bilden, d.h. $X^\star(\omega) := \sup_{X\in\mathcal{X}} X(\omega)$. $X^\star$ ist dann auch wieder ($\mathcal{G}$-)messbar, also eine Zufallsvariable. Im überabzählbaren Fall muss dies nicht mehr der Fall sein. Aber auch in Fällen, in denen das punktweise Supremum messbar ist, kann es zu unerwünschten Ergebnissen kommen, wenn man auf "P-fast-sicher"-Aussagen hinaus will. Betrachte dazu das folgende Beispiel: $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{X} = \{1_{\{y\}} | y \in [0,1]\}$ und P ist das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Dann gilt $\sup_{X \in \mathcal{X}} X(\omega) = 1$, $\forall \omega \in [0,1]$, aber $P(X = 0) = 1$ für jedes einzelne $X \in \mathcal{X}$.

Definition 5.8. *Eine Zufallsvariable Z ist ein essentielles Supremum von $\mathcal{X}$ bezüglich einer σ-Algebra $\mathcal{G}$ und eines Maßes P, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt*

(i) Z ist $\mathcal{G}$-messbar

(ii) $P(Z \geq X) = 1 \ \forall X \in \mathcal{X}$

(iii) Für jede $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable Z' die Eigenschaft (ii) erfüllt, gilt $P(Z' \geq Z) = 1$

Wir werden sehen, dass es P-f.s. ein eindeutiges essentielles Supremum gibt. Wir schreiben dann $\text{ess sup}\mathcal{X} := Z$. Das essentielle Infimum kann man dann durch $\text{ess inf}\mathcal{X} := -\text{ess sup}(-\mathcal{X})$ definieren.

Bemerkung 5.9. *Das Maß P brauchen wir bei der Definition nur zur Festlegung der Nullmengen, d.h. der Mengen $N \in \mathcal{G}$ mit $P(N) = 0$. Gehen wir also zu einem äquivalenten Martingalmaß Q über, so ändert sich die Definition nicht.*

Bemerkung 5.10. *Analog zu dem Supremum in $\mathbb{R}$ sucht man hier auch die kleinste Schranke, die alle $X \in \mathcal{X}$ dominiert. Nur sucht man diese Schranke in der Menge der $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen und versteht Dominanz im P-f.s. Sinne.*

Satz 5.11. *Für jede nichtleere Menge von reellwertigen Zufallsvariablen $\mathcal{X}$, gibt es ein bis auf P-Nullmengen eindeutiges essentielles Supremum (mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Ist darüberhinaus $\mathcal{X}$ maximumsstabil, d.h. $X_1, X_2 \in \mathcal{X} \implies X_1 \vee X_2 \in \mathcal{X}$, dann existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n = \text{ess sup}\mathcal{X}$ P-f.s.*

Beweis. Eindeutigkeit: Seinen Z_1, Z_2 zwei Zufallsvariablen, die (i)-(iii) erfüllen. Dann gilt $P(Z_2 \geq Z_1) = P(Z_1 \geq Z_2) = 1$.

Existenz: Sei $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \to [0,1]$ eine strikt monotone, stetige Funktion. Definiere folgende Menge $\widetilde{\mathcal{X}} := \{X_1 \vee \ldots \vee X_k | X_i \in \mathcal{X},\ k \in \mathbb{N}\}$. Sei $m := \sup_{X \in \widetilde{\mathcal{X}}} E_P f(X)$. Wegen $f \leq 1$ gilt auch $m \leq 1$. Es existiert eine monoton aufsteigende Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathcal{X}}$ mit $m = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P f(Y_n)$. Wir wollen zeigen, dass $Z := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ eine Version des essentiellen Supremums ist. Z kann Werte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ annehmen. Offenbar ist Z $\mathcal{G}$-messbar. Sei $X \in \mathcal{X}$. Da $Y_n \vee X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ folgt $E_P f(X \vee Z) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P f(X \vee Y_n) \leq m = E_P f(Z)$. Wegen $P(X \vee Z \geq Z) = 1$ und der strikten Monotonie von f folgt daraus, dass $P(X > Z) = P(f(X \vee Z) > f(Z)) = 0$ und damit (ii). Sei nun Z' eine Zufallsvariable mit $P(Z' \geq X) = 1\ \forall X \in \mathcal{X}$. Dann gilt $P(Z' \geq Y_n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ und damit $P(Z' \geq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Y_n) = P(Z' \geq Z) = 1$. □

In unseren Anwendungen ist $\mathcal{X}$ eine Menge von bedingten Erwartungswerten, genauer $\mathcal{X} = \{E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)|\tau \in \mathcal{S}_t\}$, wobei $\mathcal{S}_t$ die Menge der Stoppzeiten mit Werten in $\{t, t+1, \ldots, T\}$ ist. $\operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)$ bezeichne dann das essentielle Supremum der Menge $\mathcal{X} = \{E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)|\tau \in \mathcal{S}_t\}$ bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ und des Maßes P (letzteres kommt in der Notation nicht explizit zum Ausdruck. Da hierfür nur die Nullmengen ausschlaggebend sind, kann man auch bezüglich $Q \sim P$ sagen).

Definition 5.12. *Ein Q-*Supermartingal *X ist ein adaptierter Prozess mit $E_Q|X_t| < \infty$, $t = 0, \ldots, T$ und $E_Q(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$ für $s \leq t$.*
*X ist ein Q-*Submartingal*, wenn $-X$ ein Q-Supermartingal ist.*

5.1 Amerikanische Optionen in vollständigen Märkten

Sei U_t der minimale Betrag, den der Verkäufer zum Zeitpunkt t braucht, um sich gegen einen bis zum Zeitpunkt $t-1$ noch nicht ausgeübten amerikanischen Claim L absichern zu können. Zum Zeitpunkt T gilt natürlich

$$U_T = L_T. \tag{5.41}$$

Zum Zeitpunkt $T-1$ ist die erste Voraussetzung, dass $U_{T-1} \geq L_{T-1}$. Ausserdem muss U_{T-1} groß genug sein, um L_T hedgen zu könne (für den Fall, dass die Option zum Zeitpunkt $T-1$ noch nicht ausgeübt wird), d.h. $U_{T-1} \geq E_Q(L_T|\mathcal{F}_{T-1}) = E_Q(U_T|\mathcal{F}_{T-1})$, wobei Q

das *eindeutige* ÄMM ist. Es gilt also

$$U_{T-1} = L_{T-1} \vee E_Q(U_T|\mathcal{F}_{T-1}).$$

Man kann dieses Argument iterativ fortsetzen und erhält die Rückwärtsrekursion

$$U_T = L_T, \qquad U_{t-1} = L_{t-1} \vee E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}),\ t = 1, \dots, T. \tag{5.42}$$

Definition 5.13. *Sei L ein adaptierter Prozess mit $E_Q(\max_{t=0,\dots,T} L_t) < \infty$. Der Prozess $U^Q := U$ definiert in (5.42) heißt auch die Snell-Einhüllende des Prozesses L (bzgl. des Maßes Q).*

Beispiel 5.14. *Sei L wie in (5.40) definiert, d.h. wir haben den Spezialfall eines europäischen Claims, dann gilt $U_t^Q = E_Q(H|\mathcal{F}_t)$, $t = 0, \dots, T$, d.h. U^Q ist der Wertprozess einer den Claim H replizierenden Strategie.*

Proposition 5.15. *Die Snell-Einhüllende U^Q eines stochastischen Prozesses $L = (L_t)_{t=0,\dots,T}$ (bzgl. eines Maßes Q), erfüllt folgende Eigenschaften*

(i) U^Q ist ein Q-Supermartingal

(ii) $U_t^Q \geq L_t \ \forall t = 0, \dots, T$

(iii) Für jeden Prozess $\widetilde{U}$ der (i) und (ii) erfüllt, gilt $\widetilde{U}_t \geq U_t^Q \ \forall t = 0, \dots, T$.

Beweis. Ad (i): Wir müssen nur zeigen, dass $E_Q(U_{t+1}^Q|\mathcal{F}_t) \leq U_t^Q$. Direkt aus (5.42) folgt

$$U_t^Q = L_t \vee E_Q(U_{t+1}^Q|\mathcal{F}_t) \geq E_Q(U_{t+1}^Q|\mathcal{F}_t).$$

Ad (ii): auch klar.

Ad (iii): Sei $\widetilde{U}$ ein Supermartingal, das L dominiert. Dann gilt $\widetilde{U}_T \geq L_T = U_T^Q$. Wir fahren mit einer Rückwärtsinduktion fort. Nehme an, wir wüssten bereits, dass $\widetilde{U}_t \geq U_t^Q$. Zu zeigen: $\widetilde{U}_{t-1} \geq U_{t-1}^Q$. Da $\widetilde{U}$ ein Supermartingal ist, gilt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq E_Q(\widetilde{U}_t|\mathcal{F}_t).$$

Zusammen mit $\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1}$ und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1}^Q.$$

□

Satz 5.16 (Absicherung amerikanischer Optionen). *Sei Q das eindeutige ÄMM in einem vollständigen Markt und L die abdiskontierte Auszahlung eines amerikanischen Claims mit Snell-Einhüllenden U^Q. Dann existiert ein d-dimensionaler, vorhersehbarer stochastischer Prozess φ (Hedging-Strategie) mit*

$$U_t^Q + \sum_{j=t+1}^{u} \varphi_j^\top \Delta S_j \geq L_u, \qquad u = t, \dots, T, \tag{5.43}$$

mit der Konvention $\sum_{j=t+1}^{t} := 0$. Außerdem gilt für alle $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen $\widetilde{U}_t$, die (5.43) mit einer Strategie $\widetilde{\varphi}$ erfüllen, dass $\widetilde{U}_t \geq U_t^Q$. Also ist U_t^Q in der Tat das minimale Kapital, dass man zum Zeitpunkt t braucht, um L von t bis T zu hedgen.

Beweis. (1) Zur Gültigkeit von (5.43): Betrachte die Doob-Meyer-Zerlegung $U_t^Q = U_0^Q + M_t + A_t$ (vgl. Theorem 1.5). Da U^Q ein Supermartingal ist, ist A_t nicht-steigend und daher gilt für $u \geq t$, dass $U_t^Q + M_u - M_t \geq U_u^Q \geq L_u$ Wegen der Vollständigkeit des Marktes gibt es eine Darstellung $M_u = \varphi \bullet S_u$, d.h. $M_u - M_t = \sum_{j=t+1}^{u} \varphi_j^\top \Delta S_j$. Damit folgt $U_t^Q + \sum_{j=t+1}^{u} \varphi_j^\top \Delta S_j \geq U_u^Q \geq L_u$.

(ii) Zur Minimalität von U_t^Q: Erfülle $\widetilde{U}_t$ Bedingung (5.43) mit einer Strategie $\widetilde{\varphi}$. Definiere

$$V_u := \widetilde{U}_t + \sum_{j=t+1}^{u} \widetilde{\varphi}_j^\top \Delta S_j \geq L_u$$

$(V_u)_{u=t,\dots,T}$ ist nach unten beschränkt und damit mit Proposition 1.4 und Aufgabe 4 auf Übungsblatt 1 ein Q-Martingal, also insbesonders ein Q-Supermartingal. Da zudem $(V_u)_{u=t,\dots,T}$ den Prozess $(L_u)_{u=t,\dots,T}$ dominiert, dominiert er mit Proposition 5.15 auch $(U_u^Q)_{u=t,\dots,T}$. □

Satz 5.17. *Für die Snell-Einhüllende U^Q von L gibt es folgenden Ausdruck*

$$U_t^Q = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau | \mathcal{F}_t) = E_Q(L_{\tau^t} | \mathcal{F}_t), \tag{5.44}$$

wobei $\tau^t = \inf\{j \geq t | U_j^Q = L_j\}$. Insbesondere gilt also

$$U_0^Q = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau) = E_Q(L_{\tau^0}).$$

Bemerkung 5.18. *Im* vollständigen *Markt ist also die minimale Prämie, die der Verkäufer braucht, um sich gegen die Option abzusichern, gegeben durch* $U_0^Q = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau)$. *Wäre die Prämie strikt größer als* U_0^Q, *könnte der Verkäufer stets einen risikolosen Gewinn machen – völlig unabhängig von der Ausübungsstrategie des Käufers. Der Käufer dürfte sogar ein Insider sein, der zur optimalen Ausübung mehr Informationen zur Verfügung hat als durch die Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ *modelliert. Der Vermögensprozess des Verkäufers dominiert nämlich den Auszahlungsprozess auf dem gesamten Pfad und nicht nur für bestimmte Stoppzeiten, siehe Ungleichung (5.43) für* $t = 0$. *Würde der Käufer die Option zum Beispiel zum Zeitpunkt* $\tau = \min\{t \geq 0 | L_t = \max_j L_j\}$ *ausüben (was keine Stoppzeit ist !), so wäre der Verkäufer mit seiner Hedging-Strategie* φ *aus (5.43) trotzdem auf der sicheren Seite.*

Wäre umgekehrt die Prämie für den amerikanischen Claim strikt kleiner als $\sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau)$, *dann existierte natürlich eine Stoppzeit* τ, *so dass* $E_Q(L_\tau)$ *strikt größer als der Options-Preis. In diesem Fall könnte der Käufer des amerikanischen Claims einen risikolosen Gewinn machen: er könnte den Claim* $-L_\tau$ *mit dem Startkapital* $-E_Q(L_\tau)$ *replizieren und die Option zum Zeitpunkt* τ *ausüben. Damit wäre der Gewinn* $E_Q(L_\tau) -$ Prämie *gemacht.*

In diesem Sinne ist U_0^Q der eindeutige No-Arbitrage-Preis des amerikanischen Claims.

Beweis von Satz 5.17. Da U^Q ein Q-Supermartingal ist, gilt für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{S}_t$, dass

$$U_t^Q \geq E_Q(U_\tau^Q | \mathcal{F}_t) \geq E_Q(L_\tau | \mathcal{F}_t)$$

(Optional Stopping Theorem). Damit gilt natürlich auch

$$U_t^Q \geq \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau | \mathcal{F}_t).$$

Es bleibt in dem Beweis nur noch zu zeigen, dass $U_t^Q = E_Q(L_{\tau^t} | \mathcal{F}_t)$. Dies wiederum würde folgen, wenn man zeigen kann

$$U_t^Q = E_Q(U_{\tau^t}^Q | \mathcal{F}_t). \tag{5.45}$$

Wir müssen zeigen, dass der gestoppte Prozess $(U^Q)^{\tau^t}_s := U^Q_{s\wedge\tau^t}$ ein Martingal ist. Sei $s \in \{t, \dots, T-1\}$. Auf der Menge $\{\tau^t > s\}$ gilt $U^Q_s > L_s$. Daher gilt auf der Menge $\{\tau^t > s\}$ P-f.s.

$$(U^Q)^{\tau^t}_s = U^Q_s = L_s \vee E_Q(U^Q_{s+1}|\mathcal{F}_s) = E_Q(U^Q_{s+1}|\mathcal{F}_s) = E_Q((U^Q)^{\tau^t}_{s+1}|\mathcal{F}_s).$$

Auf der Menge $\{\tau^t \leq s\}$ gilt $(U^Q)^{\tau^t}_{s+1} = U^Q_{\tau^t} = (U^Q)^{\tau^t}_s$. Damit ist der gestoppte Prozess $(U^Q)^{\tau^t}$ ein Martingal und es gilt insbesondere (5.45). □

Definition 5.19. *Zu einem Prozess Z mit $Z \geq L$ definieren wir die Prozesse $Z^>$ und $Z^=$ durch*

$$Z^>_t = 1_{\{Z_- > L_-\}} \bullet Z_t \tag{5.46}$$

bzw.

$$Z^=_t = 1_{\{Z_- = L_-\}} \bullet Z_t \tag{5.47}$$

Es gilt natürlich $Z_t = Z_0 + Z^>_t + Z^=_t$.

Lemma 5.20. *(i) Setzen wir $Z = U^Q$ für U^Q aus (5.44), dann ist $U^{Q,>}$ ein Martingal und $U^{Q,=}$ ein Supermartingal.*

(ii) Sei umgekehrt $\widetilde{Z} \geq L$ ein Prozess mit $\widetilde{Z}_T = L_T$, so dass $\widetilde{Z}^>$ ein Q-Martingal und $\widetilde{Z}^=$ ein Q-Supermartingal ist, dann folgt bereits $\widetilde{Z} = U^Q$.

Bemerkung 5.21. *Lemma 5.20 kann als Verallgemeinerung der folgenden Aussage interpretiert werden: Es gibt genau ein Q-Martingal mit Endwert H, nämlich den Prozess $t \mapsto E_Q(H|\mathcal{F}_t)$. Ein Preisprozess für einen europäischen Claim ist also dadurch eindeutig bestimmt, dass der Endwert H ist und der Prozess ein Q-Martingal sein soll. Lemma 5.20 wird dagegen, wie wir später sehen werden, bei amerikanischen Claims eine wichtige Rolle spielen.*

Beweis von Lemma 5.20. Es gilt

$$\begin{aligned}
E_Q(\Delta U^{Q,>}_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E_Q(1_{\{U^Q_{t-1} > L_{t-1}\}} \Delta U^Q_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= E_Q(1_{\{U^Q_{t-1} > L_{t-1}\}} (U^Q_t - E_Q(U^Q_t|\mathcal{F}_{t-1}))|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= 1_{\{U^Q_{t-1} > L_{t-1}\}} E_Q(U^Q_t - E_Q(U^Q_t|\mathcal{F}_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $U^{Q,>}$ ein Martingal. Da mit Proposition 5.15 U^Q ein Q-Supermartingal ist, ist auch $U^{Q,=} = U^Q - U^{Q,>} - U_0^Q$ ein Q-Supermartingal.

Seien Z,$\widetilde{Z}$ zwei Prozesse mit $Z_T = \widetilde{Z}_T = L_T$, die die in (ii) formulierten Bedingungen erfüllen. Sei $t \in \{0, \dots, T-1\}$. Definiere $A_t := \{\widetilde{Z}_t < Z_t\}$ und $\tau_t := \inf\{s \geq t | \widetilde{Z}_s = Z_s\}$. Es gilt natürlich $\tau_t \leq T$. Der bei τ_t gestoppte Prozess $(Z_u)^{\tau_t}_{u=t,\dots,T}$ ist entweder konstant (wenn $t = \tau_t$) oder es gilt auf der Menge A_t, dass $Z^{\tau_t}_{s-1} > (\widetilde{Z})^{\tau_t}_{s-1} \geq L^{\tau_t}_{s-1}$ für $s = t+1, \dots, \tau_t$. Daraus folgt mit der Voraussetzung, dass $(1_{A_t}(u) Z_u)^{\tau_t}_{u=t,\dots,T}$ ein Martingal ist (weil Prozess auf der Menge A_t strikt größer als untere Schranke L), also

$$E_Q\left(1_{A_t}(Z_{\tau_t} - Z_t)\right) = 0. \tag{5.48}$$

Da $\widetilde{Z}$ ein Supermartingal ist, gilt

$$E_Q\left(1_{A_t}(\widetilde{Z}_{\tau_t} - \widetilde{Z}_t)\right) \leq 0. \tag{5.49}$$

Definiere die Zufallsvariable

$$X := 1_{A_t}\left[Z_{\tau_t} - \widetilde{Z}_{\tau_t} - (Z_t - \widetilde{Z}_t)\right]$$

Es gilt $1_{A_t}(Z_t - \widetilde{Z}_t) \geq 0$ und $Z_{\tau_t} - \widetilde{Z}_{\tau_t} = 0$. Also $X \leq 0$ und $Q(X < 0) = Q(A_t)$. Da aber wegen (5.48) und (5.49) $E_Q(X) \geq 0$ kann dies nur sein, wenn $Q(A_t) = 0$ (und damit auch $P(A_t) = 0$). Analog folgt, dass $P(\widetilde{Z}_t > Z_t) = 0$ und damit die P-f.s.-Eindeutigkeit. □

5.2 Amerikanische Optionen in unvollständigen Märkten

Definition 5.22. *Für einen amerikanischen Claim $(L_t)_{t=0,\dots,T}$ nennen wir einen adaptierten Prozess $(\widetilde{S}_t)_{t=0,\dots,T}$ einen Derivatepreisprozess, wenn $\widetilde{S}_t \geq L_t$, $t = 0, \dots, T-1$ und $\widetilde{S}_T = L_T$.*

Analog zu europäischen Claims wollen wir nun "neutrale" Preise für amerikanische Claims definieren. Diese haben sich ja dadurch ausgezeichnet, dass unter ihnen die Nachfrage nach Optionen dem Angebot von Optionen entspricht.

Möchte man nun amerikanische Optionen handeln, so kommt der zusätzliche Aspekt hinzu, dass die Option vorzeitig ausgeübt werden kann. Nehmen wir an, eine Agentin möchte eine Short-Position der amerikanischen Option in ihrem Portfolio halten. Sie verkauft z.B. die Option zum Zeitpunkt t_1 und beschließt, sie erst zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ wieder zurückzukaufen. Dies entspräche einer Handelsstrategie $\varphi_t^{d+1} = -1_{\{t_1+1,\dots,t_2\}}(t)$. Nun kann es aber natürlich sein, dass die amerikanische Option zwischenzeitlich vom Halter (Käufer) ausgeübt wird. Damit wäre die Agentin in ihrer Strategie φ^{d+1} "gestört". Man kann aber argumentieren, dass, wenn $\widetilde{S}_{t-1} > L_{t-1}$ (d.h. zum Zeitpunkt $t-1$ ist der Marktpreis $\widetilde{S}_{t-1}$ der amerikanischen Option strikt größer als der Ausübungswert) die Agentin nicht fürchten muss, dass die Option in $t-1$ ausgeübt wird. Würde die Option nämlich in $t-1$ ausgeübt, müsste die Agentin den Betrag L_{t-1} an den Besitzer der Option zahlen, könnte aber zum gleichen Zeitpunkt (also in $t-1$) die Option wieder neu auf dem Markt verkaufen und bekäme dafür den Preis $\widetilde{S}_{t-1}$. Die Agentin hätte also den risikolosen Gewinn $\widetilde{S}_{t-1} - L_{t-1} > 0$ erzielt, ohne dass sich ihre Positionen in der Option verändert hätten. **Also kann man annehmen, dass, wenn $\widetilde{S}_{t-1} > L_{t-1}$, die Option zum Zeitpunkt $t-1$ nicht ausgeübt wird.** In diesem Fall kann φ_t^{d+1} (Investition in den Sprung $\Delta\widetilde{S}_t$) frei gewählt werden (positiv oder negativ).

Dieses Argument kann aber in sich zusammenbrechen, wenn $\widetilde{S}_{t-1} = L_{t-1}$. Daher fordert wir, dass $\varphi_t^{d+1} \geq 0$ auf der Menge $\{\omega \in \Omega | \widetilde{S}_{t-1}(\omega) = L_{t-1}(\omega)\} \in \mathcal{F}_{t-1}$. Long-Positionen in amerikanischen Optionen sind dagegen generell unproblematisch, da der Besitzer der Option ja von niemandem gezwungen werden kann, die Option auszuüben.

Formal definieren wir folgende Handelsbeschränkungen.

Definition 5.23.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} := \ & \{\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d, \varphi^{d+1}) \text{ vorhersehbar und für alle } t = 1, \dots, T \text{ gilt} \\ & \qquad \varphi_t^{d+1} \geq 0 \text{ auf der Menge } S_{t-1}^{d+1} = L_{t-1}\}\end{aligned}$$

Um die Notationen zu vereinfachen nehmen wir an, dass es nur einen amerikanischen Claim gibt. Die Argumente lassen sich aber ohne irgendwelche Probleme, auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.

Definition 5.24. *Ein Derivatepreiprozess $\widetilde{S}^{d+1}$ für einen amerikanischen Claim L heißt neutral, wenn eine zulässige Strategie $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d, \varphi^{d+1}) \in \mathfrak{S}$ existiert, die $Eu(V_T(\cdot))$ unter der Nebenbedingung $\mathfrak{S}$ maximiert und für die gilt $\varphi^{d+1} = 0$.*

Satz 5.25. *Sei $|\Omega| < \infty$. Des weiteren sei u eine streng monoton wachsende, streng konkave, differenzierbare Nutzenfunktion und die Menge $\{x \in \mathbb{R} | u(x) > -\infty\}$ sei offen. Es existiere eine optimale Strategie $(\varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ im Markt $(S^0, S^1, \ldots, S^d)$. Dann hat jede amerikanische Option L einen eindeutigen neutralen Derivatepreisprozess. Dieser ist gegeben durch*

$$S_t^{d+1} = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{S}_t} E_{P^\star}(L_\tau | \mathcal{F}_t), \tag{5.50}$$

wobei

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(V_T(\varphi^1, \ldots, \varphi^d))}{E_P(u'(V_T(\varphi^1, \ldots, \varphi^d)))}.$$

Zum Beweis benötigen wir

Lemma 5.26. *Sei $\widetilde{\mathfrak{S}} \subset \{\varphi | \varphi \text{ vorhersehbar}\}$ die Menge der zulässigen Strategien in einem Erwartungsnutzen-Optimierungsproblem. Sei $\widetilde{\mathfrak{S}}$ konvex und $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ eine zulässige Strategie mit $u(v_0 + \varphi \bullet S_T) > -\infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) φ ist optimal unter der Nebenbedingung $\widetilde{\mathfrak{S}}$

(ii) $u'(V_T(\varphi))((\psi - \varphi) \bullet S_T)$ hat nicht-positiven Erwartungswert für alle zulässigen Strategien $\psi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ mit $u(v_0 + \psi \bullet S_T) > -\infty$.

Beweis. (ii)$\Rightarrow$(i): Sei $\psi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ eine zulässige Strategie mit $u(v_0 + \psi \bullet S_T) > -\infty$. Da u konkav ist gilt

$$\begin{aligned} E(u(v_0 + \psi \bullet S_T)) &\leq E(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)) + E(u'(v_0 + \varphi \bullet S_T)((\psi - \varphi) \bullet S_T)) \\ &\leq E(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)), \end{aligned}$$

woraus (i) folgt.

(i)$\Rightarrow$(ii): Sei $\psi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ mit $u(v_0 + \psi \bullet S_T) > -\infty$. Definiere $\psi^{(\lambda)} := \varphi + \lambda(\psi - \varphi)$ für $\lambda \in [0,1]$. Da $\widetilde{\mathfrak{S}}$ konvex und u konkav ist gilt $\psi^{(\lambda)} \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ und $u(V_T(\psi^{(\lambda)})) > -\infty$. Wegen der Optimalität von φ gilt

$$0 \geq E(u(v_0 + \psi^{(\lambda)} \bullet S_T)) - E(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)),$$

was gleich dem Ausdruck $\lambda E(\xi^{(\lambda)}((\psi-\varphi)\bullet S_T))$ für eine Zufallsvariable $\xi^{(\lambda)}$ mit Werten in $[u'(v_0+\varphi\bullet S_T), u'(v_0+\psi^{(\lambda)}\bullet S_T)]$ bzw. $[u'(v_0+\psi^{(\lambda)}\bullet S_T), u'(v_0+\varphi\bullet S_T)]$ ist. Da $\psi^{(\lambda)}\bullet S_T\to\varphi\bullet S_T$, gilt $\xi^{(\lambda)}\to u'(v_0+\varphi\bullet S_T)$ fast sicher für $\lambda\to 0$. Da $|\Omega|<\infty$ folgt sofort, dass

$$E(\xi^{(\lambda)}((\psi-\varphi)\bullet S_T))\to E(u'(v_0+\varphi\bullet S_T)((\psi-\varphi)\bullet S_T)),$$

für $\lambda\to 0$ und damit $E(u'(v_0+\varphi\bullet S_T)((\psi-\varphi)\bullet S_T))\leq 0$. □

Beweis von Satz 5.25. Existenz: Betrachte zu S^{d+1} aus (5.50) den Prozess $(S^{d+1})^>$ bezüglich der unteren Schranke L. Mit Lemma 5.20 folgt, dass $(S^{d+1})^>$ ein $P^\star$-Martingal ist. Sei $\psi\in\mathfrak{S}$ eine beliebige zulässige Strategie im vergrößerten Markt. Da $S^1,\dots,S^d$ $P^\star$-Martingale sind, ist mit Proposition 1.4(iii) auch das Integral $(\psi^1,\dots,\psi^d)\bullet(S^1,\dots,S^d)$ ein $P^\star$-Martingal. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\psi^{d+1}\bullet S^{d+1} &= \psi^{d+1}\bullet(S^{d+1})^= + \psi^{d+1}\bullet(S^{d+1})^> \\ &= \psi^{d+1}1_{\{S_-^{d+1}=L_-\}}\bullet(S^{d+1})^= + \psi^{d+1}1_{\{S_-^{d+1}>L_-\}}\bullet(S^{d+1})^>\end{aligned}$$

ein $P^\star$-Supermartingal. $(S^{d+1})^>$ ist nämlich ein $P^\star$-Martingal und somit das Integral $\psi^{d+1}1_{\{S_-^{d+1}>L_-\}}\bullet(S^{d+1})^>$ und $(S^{d+1})^=$ ist ein $P^\star$-Supermartingal und wegen der Nichtnegativität des Integranden $\psi^i 1_{\{S_-^{d+1}=L_-\}}$ auch das Integral $\psi^{d+1}1_{\{S_-^{d+1}=L_-\}}\bullet(S^{d+1})^=$.

Es folgt also, dass für jede Strategie $\psi\in\mathfrak{S}$ das Integral $\psi\bullet(S^1,\dots,S^{d+1})$ ein $P^\star$-Supermartingal ist, also insbesondere

$$E_{P^\star}(\psi\bullet(S^1,\dots,S^{d+1})_T)\leq 0.$$

Ausserdem ist $(\varphi^1,\dots,\varphi^d,0)\bullet(S^1,\dots,S^{d+1})$ ein $P^\star$-Martingal, also

$$E_{P^\star}((\varphi^1,\dots,\varphi^d,0)\bullet(S^1,\dots,S^{d+1})_T)=0.$$

Wegen

$$\frac{dP^\star}{dP}=\frac{u'(V_T(\varphi_1,\dots,\varphi^d))}{E_P(u'(V_T(\varphi_1,\dots,\varphi^d)))}$$

folgt daraus $E_P(u'(V_T(\varphi_1,\dots,\varphi^d,0))(\psi-(\varphi^1,\dots,\varphi^d,0))\bullet S_T)\leq 0$. Mit Lemma 5.26 folgt, dass $(\varphi^1,\dots,\varphi^d,0)$ eine optimale Strategie im Gesamtmarkt ist. Damit ist S^{d+1}

aus (5.50) ein neutraler Preisprozess.

Eindeutigkeit: Sei $\widetilde{S}^{d+1}$ ein neutraler Preisprozess und $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d, 0)$ eine im Markt $(S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1})$ optimale Strategie. Dann ist natürlich $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)$ optimal im kleinen Markt $(S^1, \dots, S^d)$. Somit gilt wegen der Eindeutigkeit des optimalen Endvermögens (Satz 3.4), dass $V_T((\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)) = V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d))$. Das durch

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \frac{u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d))}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))}$$

definierte Maß stimmt mit $P^\star$ aus (4.39) überein.

Betrachte die Strategie ψ mit

$$\psi^i = \widetilde{\varphi}^i, \qquad i = 1, \dots, d$$

und

$$\psi^{d+1} = c 1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} > L_{t_0-1}\}} 1_{\{t_0\}},$$

für $c \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ und eine Menge $A \in \mathcal{F}_{t_0-1}$, $t_0 \in \{1, \dots, T\}$. $\varepsilon > 0$ muss hinreichend klein gewählt werden, so dass sichergestellt ist, dass $u(V_T(\psi)) > -\infty$. Da $u(V_T(\widetilde{\varphi})) > -\infty$, $|\Omega| < \infty$ und die Menge $\{x \in \mathbb{R} | u(x) > -\infty\}$ offen ist, klappt dies immer. Aus der Optimalität der Strategie $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d, 0)$ und der Zulässigkeit der Strategie ψ folgt mit Lemma 5.26, dass

$$\begin{aligned}
0 &\geq E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d))(\psi - \widetilde{\varphi}) \bullet (S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1})_T) \\
&= \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} E_{P^\star}((\psi - \widetilde{\varphi}) \bullet (S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1})_T) \\
&= \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} E_{P^\star}(\psi^{d+1} \bullet \widetilde{S}^{d+1}_T) \\
&= \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} c E_{P^\star}(1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} > L_{t_0-1}\}} \Delta \widetilde{S}^{d+1}_{t_0}).
\end{aligned}$$

Da $c \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ gewählt werden kann, folgt $E_{P^\star}(1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} > L_{t_0-1}\}} \Delta \widetilde{S}^{d+1}_{t_0}) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_{t_0-1}$. Damit ist $(\widetilde{S}^{d+1})^>$ ein $P^\star$-Martingal.

Analog definiert man sich Strategien

$$\psi^i = \widetilde{\varphi}^i, \qquad i = 1, \dots, d$$

und

$$\psi^{d+1} = \varepsilon 1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1}=L_{t_0-1}\}} 1_{\{t_0\}}.$$

Statt $c \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ kann man hier nur $c = \varepsilon$ wählen, wegen des Verbots von Leerverkäufen. Man erhält analog

$$0 \geq \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} E_{P^\star}\left(1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1}=L_{t_0-1}\}} \Delta \widetilde{S}^{d+1}_{t_0}\right).$$

Damit ist $(\widetilde{S}^{d+1})^=$ ein $P^\star$-Supermartingal.

Insgesamt folgt mit Lemma 5.20(ii), dass $\widetilde{S}^{d+1} = S^{d+1}$. □

5.3 Optimale Ausübung einer amerikanischen Option

Gegben die Formel (5.50) stellt sich die Frage, wann man denn eine amerikanische Option ausüben soll, bzw. welche Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}_0$ den maximalen Erwartungswert liefert. Für Call-Optionen (ohne Dividenden) gibt es da eine einfache Antwort.

Proposition 5.27. *Sei Q irgendein ÄMM (im unvollständigen Markt z.B. das neutrale Maß aus (4.39)), $r, K \geq 0$. Dann gilt*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(e^{-r\tau}(S^1_\tau - K)^+) = E_Q(e^{-rT}(S^1_T - K)^+).$$

Beweis. Sei $\tau \in \mathcal{S}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& E_Q(e^{-rT}(S^1_T - K)^+) \\
= \; & E_Q\left[E_Q((e^{-rT}S^1_T - e^{-rT}K)^+ | \sigma(S_\tau))\right] \\
\geq \; & E_Q\left[(E_Q(e^{-rT}S^1_T | \sigma(S_\tau)) - e^{-rT}K)^+)\right] \\
= \; & E_Q\left[(e^{-r\tau}S^1_\tau - e^{-rT}K)^+\right] \\
\geq \; & E_Q\left[e^{-r\tau}(S^1_\tau - K)^+\right].
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte und die zweite aus $r, K \geq 0$. □

Bei amerikanischen Put-Optionen gibt es i.A. keine triviale Lösung. Nehme dazu wieder das Cox-Ross-Rubinstein-Modell. Wir nehmen an, dass $r \geq 0$. A_i kann die Werte d oder u annehmen. $0 < d < u$. Aus Arbitragegründen folgt $d < 1 + r < u$. Wir nehmen zusätzlich an, dass $d < 1$. Q ist das eindeutige ÄMM aus (2.20).

Betrachte den Wert einer Put Option in Abhängigkeit vom Startwert x des Underlyings:

$$\pi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q \left[\frac{(K - x \prod_{i=1}^{\tau} A_i)^+}{(1+r)^\tau} \right].$$

$(K - x)^+$ wird auch als *intrinsischer Wert* und $\pi(x) - (K - x)^+$ als *Zeitwert* der Option bezeichnet. Bei amerikanischen Optionen ist der Zeitwert natürlich nichtnegativ.

π ist offenbar eine konvexe, monoton fallende Funktion. Für $x \leq \frac{K}{u^T}$ "very deep in the money" gilt auf jeden Fall

$$\pi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q \left[\frac{(K - x \prod_{i=1}^{\tau} A_i)^+}{(1+r)^\tau} \right] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q \left[\frac{K - x \prod_{i=1}^{\tau} A_i}{(1+r)^\tau} \right] = K - x.$$

Hier ist es also optimal, die Option sofort auszuüben. Für $x \geq \frac{K}{d^T}$ "very deep out of the money" gilt $\pi(x) = 0$. Für $x \in [K, \frac{K}{d^T})$ hat die Option keinen intrinsischen aber einen Zeitwert, d.h. $\pi(x) > 0$. Insgesamt folgt:

Es existiert ein $x^\star \in [\frac{K}{u^T}, K]$ mit $\pi(x) = (K - x)^+$ für $x \leq x^\star$ und $\pi(x) > (K - x)^+$ für $x \in (x^\star, K/d^T)$.

Sei die abdiskontierte Auszahlung L eines amerikanischen Claims gegeben durch $L_t = (1+r)^{-t} h(t, S_t)$, $h : \{0, \dots, T\} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Beispiele $h(t, x) = (x - K)^+$ oder $h(t, x) = (K - x)^+$.

Dann lässt sich der Preis des Claims durch eine Wertfunktion $v : \{0, \dots, T\} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ beschreiben. Der stochastische Prozess $v(t, S_t)$ ist der Preisprozess der Option. v lässt sich rekursiv bestimmen durch,

$$v(T, x) = h(T, x) \tag{5.51}$$

und

$$v(t, x) = \max\{h(t, x), \frac{qv(t+1, xu) + (1-q)v(t+1, xd)}{1+r}\}. \tag{5.52}$$

(5.51) und (5.52) liefern einen Algorithmus für die Berechnung des Preises einer amerikanischen Option: Zunächst wertet man (5.51) für alle möglichen Zustände $x = u^k d^{T-k}$, $k = 0, \ldots, T$ aus. Dann berechne man $v(T-1, x)$ für $x = u^k d^{T-1-k}$, $k = 0, \ldots, T-1$ durch Gleichung (5.52). Bei Anwendungen in der Praxis ist von mindestens $T = 30$ Zeitschritten auszugehen. Da der Aufwand mit 2^T wächst, ist dieses Verfahren nicht sehr effizient.

5.4 Δ-Hedging für amerikanische Claims

Der abdiskontierte Preisprozess $\frac{v(t,S_t)}{(1+r)^t}$ ist ein Q-Supermartingal. Seine Sprünge lassen sich wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{v(t,S_t)}{(1+r)^t}\right] &= \frac{v(t,S_t)}{(1+r)^t} - \frac{v(t-1,S_{t-1})}{(1+r)^{t-1}} \\
&= \frac{1}{(1+r)^{t-1}}\left[(1+r)^{-1}v(t,S_t) - \max\{h(t-1,S_{t-1}),(1+r)^{-1}E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})\}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^t}\left[v(t,S_t) - E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})\right] \\
&\quad -\frac{1}{(1+r)^{t-1}}[h(t-1,S_{t-1}) - (1+r)^{-1}E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})]^+ \\
&= \varphi_t^1 \Delta\left[\frac{S_t}{(1+r)^t}\right] - \frac{1}{(1+r)^{t-1}}[h(t-1,S_{t-1}) - (1+r)^{-1}E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})]^+.
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Hedging-Strategie φ_t^1 (Anzahl der Aktien) analog zu der Hedging-Strategie für europäische Claims (vgl. (2.24)) durch

$$\begin{aligned}
\varphi_t^1 &= \frac{v(t,S_{t-1}u) - E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})}{(1+r)\left(\frac{u}{1+r}-1\right)S_{t-1}} \\
&= \frac{(1-q)[v(t,S_{t-1}u) - v(t,S_{t-1}d)]}{(1+r)\left(\frac{u}{1+r}-1\right)S_{t-1}} \quad t \geq 1. \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

φ_t^0 ergibt sich dann durch

$$\varphi_t^0 = \frac{v(t-1,S_{t-1}) - \varphi_t^1 S_{t-1}}{(1+r)^{t-1}}.$$

Bei einer amerikanischen Option sichert der Verkäufer natürlich nur solange ab, bis die Option ausgeübt wird. D.h., wenn die Option zum Zeitpunkt $t-1$ noch nicht ausgeübt ist, hält sich der Verkäufer zwischen $t-1$ und t φ_t^1 Aktien.

6 Superhedging

Eine zentrale Rolle für das Superhedging in unvollständigen Märkten spielt eine simultane Doob-Meyer-Zerlegung (vgl. Satz 1.5). "Simultan" bedeutet, dass die Zerlegung nicht bzgl. eines einzigen Maßes durchgeführt wird, sondern simultan bzgl. einer ganzen Familie von Maßen.

Zur Vorbereitung brauchen wir noch ein paar mathematische Hilfsmittel.

Proposition 6.1. *Sei Q ein zu P äquivalentes Martingalmaß mit Dichte Y (d.h. $Q(A) = E_P(1_A Y)$ $\forall A \in \mathcal{F}$) und sei $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gelten folgende Aussagen*

(a) $\frac{dQ}{dP} \mid_{\mathcal{G}} = E_P(Y|\mathcal{G})$

(b) Es gilt $\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{Y}$.

(c) Es gilt für alle $\mathcal{F}$-messbaren Zufallsvariablen $F \geq 0$

$$E_Q(F|\mathcal{G}) = \frac{E_P(FY|\mathcal{G})}{E_P(Y|\mathcal{G})}.$$

Bemerkung 6.2. *Bezeichnet man mit $Z_t := E_P(Y|\mathcal{F}_t)$ den Dichteprozess von Q bzgl. P, dann besagt die Proposition 6.1 Teil (c), dass*

$$E_Q(F|\mathcal{F}_t) = \frac{E_P(FZ_T|\mathcal{F}_t)}{Z_t}.$$

Beweis. Ad (a): Sei $A \in \mathcal{G}$. Es gilt $Q(A) = \int_A Y\,dP = \int_A E_P(Y|\mathcal{G})\,dP$. Da $E_P(Y|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-messbar folgt die Behauptung.

Ad (b): Wegen $Q \sim P$ gilt $P(Y > 0) = 1$ und $Q(Y > 0) = 1$.

Eine Zufallsvariable $X \geq 0$ ist Dichte von Q_2 bzgl. Q_1 genau dann, wenn $E_{Q_2}(F) = E_{Q_1}(FX)$ für alle Zufallsvariablen $F \geq 0$. Es gilt also $E_Q(F) = E_P(FY)$ für alle $F \geq 0$. Mit F durchläuft auch $F' := FY$ alle nichtnegativen Zufallsvariablen und es gilt $E_Q(F'/Y) = E_P(F')$.

Ad (c): Sei $G \geq 0$ eine $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable. Es gilt

$$E_Q\left[GF\right] = E_P\left[GFY\right] = E_P\left[GE_P(FY|\mathcal{G})\right]. \tag{6.54}$$

Nach Teil (a) und Teil (b) ist die Dichte von P bzgl. Q auf der σ-Algebra $\mathcal{G}$ gegeben durch $1/E_P(Y|\mathcal{G})$. Dies ergibt

$$E_P\left[GE_P(FY|\mathcal{G})\right] = E_Q\left[G\frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})\right]. \tag{6.55}$$

(6.54) und (6.55) ergeben, dass

$$E_Q\left[1_A F\right] = E_Q\left[1_A\frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})\right], \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Damit ist $\frac{E_P(FY|\mathcal{G}}{E_P(Y|\mathcal{G})}$ eine Version des bedingten Erwartungswertes von F unter Q gegeben die Information $\mathcal{G}$. Es gilt also Aussage (c). $\square$

Lemma 6.3. *Seien P_1 und P_2 zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße, $t_0 \in \{0, \ldots, T\}$ und $B \in \mathcal{F}_{t_0}$. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitmaß $\widetilde{P}$ mit folgenden Eigenschaften*

(a) $\widetilde{P}(A) = P_1(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{t_0}$.

(b) Für jede Zufallsvariable $F \geq 0$ gilt

$$E_{\widetilde{P}}(F|\mathcal{F}_{t_0}) = E_{P_1}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + E_{P_2}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_B.$$

Das neue Maß verhält sich also "bis t_0 wie P_1 und nach t_0 entweder wie P_1 oder P_2".

Beweis. Eindeutigkeit: Erfülle $\widetilde{P}$ die Bedingungen (a) und (b). Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}$

$$\widetilde{P}(A) = E_{P_1}\left[P_1(A|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + P_2(A|\mathcal{F}_{t_0})1_B\right]. \tag{6.56}$$

Damit wäre das Maß $\widetilde{P}$ eindeutig bestimmt. Bleibt die Existenz zu zeigen (es ist noch nicht klar, dass $\widetilde{P}$ aus (6.56) auch tatsächlich (b) erfüllt). Bezeichne mit Z_t die Dichte von P_2 bezüglich P_1 auf der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ (mit der vorherigen Proposition gilt also $Z_t = E_{P_1}(Z_T|\mathcal{F}_t)$). Definiere

$$\widetilde{Z}_T := 1_{\Omega\setminus B} + \frac{Z_T}{Z_{t_0}}1_B \tag{6.57}$$

und $d\widetilde{P}/dP_1 := \widetilde{Z}_T$. Für $A \in \mathcal{F}_{t_0}$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(A) = E_{P_1}(\widetilde{Z}_T 1_A) &= E_{P_1}(E_{P_1}(\widetilde{Z}_T 1_A|\mathcal{F}_{t_0})) \\
&= E_{P_1}(1_{A\cap(\Omega\setminus B)} + 1_{A\cap B}\frac{E_{P_1}(Z_T|\mathcal{F}_{t_0})}{Z_{t_0}}) \\
&= E_{P_1}(1_A).
\end{aligned}$$

Damit ist (a) erfüllt.

Für jede Zufallsvariable $F \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} E_{\widetilde{P}}(F|\mathcal{F}_{t_0}) &= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T|\mathcal{F}_{t_0})} E_{P_1}(\widetilde{Z}_T F|\mathcal{F}_{t_0}) \\ &= \frac{1}{1_{\Omega\backslash B} + 1_B}\left[E_{P_1}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\backslash B} + \frac{1}{Z_{t_0}} E_{P_1}(FZ_T|\mathcal{F}_{t_0})1_B\right] \\ &= E_{P_1}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\backslash B} + E_{P_2}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_B. \end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichheit gilt jeweils wegen Proposition 6.1 (c). Damit ist Bedingung (b) erfüllt. □

Definition 6.4. *Sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Wir nennen $\mathcal{Q}$ stabil, wenn für alle P_1, $P_2 \in \mathcal{Q}$, $t_0 \in \{0, \ldots, T\}$ und $B \in \mathcal{F}_{t_0}$ das Maß $\widetilde{P}$ aus Lemma 6.3 in $\mathcal{Q}$ enthalten ist.*

Lemma 6.5. *Die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^e$ ist stabil.*

Beweis. Seien P_1, P_2 ÄMM. Es ist zu zeigen, dass für alle $t = 1, \ldots, T$, $A \in \mathcal{F}_t$

$$E_{\widetilde{P}}(\Delta S_t^i 1_A) = 0.$$

Für $t \in \{1, \ldots, t_0\}$ folgt dies direkt aus den Eigenschaften (a) und der Tatsache, dass die entsprechende Aussage für das ÄMM P_1 gilt. Für $t \in \{t_0 + 1, \ldots, T\}$ gilt mit Proposition 6.1(c)

$$\begin{aligned} E_{\widetilde{P}}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{t-1})} E_{P_1}\left(\widetilde{Z}_T \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{t-1})}\left[1_{\Omega\backslash B} E_{P_1}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) + 1_B \frac{1}{Z_{t_0}} E_{P_1}\left(Z_T \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{t-1})}\left[1_{\Omega\backslash B} \underbrace{E_{P_1}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}_{=0} + 1_B \frac{Z_{t-1}}{Z_{t_0}} \underbrace{E_{P_2}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}_{=0}\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei Z wie oben der Dichteprozess von P_2 bzgl. P_1 ist und $\widetilde{Z}_T$ in (6.57) definiert ist. □

Lemma 6.6. *Seien $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}^e$, $t_0 \in \{0, \ldots, T\}$, $B \in \mathcal{F}_{t_0}$ und $\widetilde{Q}$ das in Lemma 6.3 konstruierte Maß. Dann existiert für die Werte zum Zeitpunkt t_0 der Snell-Einhüllenden eines Prozesses L bzgl. der Maße Q_1, Q_2 und $\widetilde{Q}$ folgender Zusammenhang:*

$$U_{t_0}^{\widetilde{Q}} = U_{t_0}^{Q_1} 1_{\Omega\backslash B} + U_{t_0}^{Q_2} 1_B.$$

Beweis. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_{t_0}$. Nach Eigenschaft Lemma 6.3(b) von $\widetilde{Q}$ gilt

$$E_{\widetilde{Q}}(L_\sigma|\mathcal{F}_{t_0}) = E_{Q_1}(L_\sigma|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + E_{Q_2}(L_\sigma|\mathcal{F}_{t_0})1_B.$$

Da mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_{t_0}$ auch $\widetilde{\sigma} = \sigma_1 1_{\Omega\setminus B} + \sigma_2 1_B$ auch eine Stoppzeit in $\mathcal{S}_{t_0}$ ist, folgt die Behauptung. □

Definition 6.7. *Sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und L ein adaptierter nichtnegativer Prozess mit*

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(L_t) < \infty, \quad t = 0, \dots, T.$$

Die obere Snell-Einhüllende des Prozesses L bzgl. $\mathcal{Q}$ ist definiert durch

$$U_t^\uparrow := \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} U_t^Q, \quad t = 0, \dots, T, \tag{6.58}$$

wobei U^Q die Snell-Einhüllende bzgl. des Maßes Q ist.

Bemerkung 6.8. *Das essentielle Supremum in (6.58) wird bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ und dem Maß P gebildet. Da das Maß beim essentiellen Supremum aber nur über die Nullmengen eingeht, kann man auch jedes $Q \in \mathcal{M}^e$ nehmen.*

(5.44) in (6.58) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} U_t^\uparrow &= \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t) \\ &= \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t). \end{aligned} \tag{6.59}$$

Definition 6.9. *Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtleere Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Ein adaptierter Prozess U heißt ein $\mathcal{Q}$-Supermartingal, wenn U ein Q-Supermartingal für alle $Q \in \mathcal{Q}$. Analog sind $\mathcal{Q}$-(Sub-)Martingale definiert.*

Beispiel 6.10. *Sei $\mathcal{Q} = \mathcal{M}^e$. Jeder Wertprozess $V(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S$, der durch eine Konstante nach unten beschränkt ist, ist ein $\mathcal{M}^e$-Martingal.*

Satz 6.11. *Sei $\mathcal{Q}$ stabil. Die obere Snell-Einhüllende $U^\uparrow$ aus (6.58) ist das kleinste $\mathcal{Q}$-Supermartingal, das L dominiert. Außerdem erfüllt $U^\uparrow$ die folgende Rekursion:*

$$U_T^\uparrow = L_T, \qquad U_{t-1}^\uparrow = L_{t-1} \vee \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_t^\uparrow|\mathcal{F}_{t-1}), t = 1, \dots, T. \tag{6.60}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $U^\uparrow$ die Rekursion (6.60) erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned} U^\uparrow_{t-1} &= \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}}\left[L_{t-1} \vee E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1})\right] \\ &= L_{t-1} \vee \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) \end{aligned} \tag{6.61}$$

Fixiere ein $Q^\star \in \mathcal{Q}$. Bezeichne mit $\mathcal{Q}_t(Q^\star)$ die Menge der Maße Q, die auf $\mathcal{F}_t$ mit $Q^\star$ übereinstimmen (d.h. $Q(A) = Q^\star(A)\ \forall A \in \mathcal{F}_t$).

1) Da U_t^Q $\mathcal{F}_t$-messbar ist, gilt für alle $Q \in \mathcal{Q}_t(Q^\star)$

$$E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{Q^\star}(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{6.62}$$

2) Die Menge $\{U_t^Q|Q \in \mathcal{Q}_t(Q^\star)\}$ ist maximumsstabil. Nimmt man nämlich zwei Maße $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_t(Q^\star)$ und betrachte deren Snell-Einhüllenden zum Zeitpunkt t, $U_t^{Q_1}$ und $U_t^{Q_2}$, dann kann man sich mit Lemma 6.3 ein neues Maß $\widetilde{Q}$ konstruieren. Wähle dafür $B := \{U_t^{Q_2} > U_t^{Q_1}\}$. $\widetilde{Q}$ stimmt auf $\mathcal{F}_t$ mit $Q^\star$ überein und mit Lemma 6.6 gilt für die Snell-Einhüllende $U_t^{\widetilde{Q}} = \max\{U_t^{Q_1}, U_t^{Q_2}\}$.

3) Wegen Lemma 6.6 gilt

$$\text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} U_t^Q = \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q^\star)} U_t^Q \tag{6.63}$$

Wegen (6.63) und der Maximumsstabilität in Schritt 2 existiert eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}_t(Q^\star)$ mit $U_t^{Q_k} \nearrow U_t^\uparrow$ (P-f.s.), wenn $k \nearrow \infty$. Monotone Konvergenz für bedingte Erwartungswerte zeigt, dass

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) &\overset{(6.62)}{=} \text{ess sup}_{Q^\star\in\mathcal{Q}} \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q^\star)} E_{Q^\star}(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \text{ess sup}_{Q^\star\in\mathcal{Q}} \lim_{k\to\infty} E_{Q^\star}(U_t^{Q_k}|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \text{ess sup}_{Q^\star\in\mathcal{Q}} E_{Q^\star}(U_t^\uparrow|\mathcal{F}_{t-1}). \end{aligned}$$

Zusammen mit (6.61) beweist dies die Rekursion (6.60).

Nun wollen wir zeigen, dass $U^\uparrow$ ein $\mathcal{Q}$-Supermartingal ist. Wegen (6.60) gilt für alle $Q \in \mathcal{Q}$

$$U_t^\uparrow \geq L_t \vee E_Q(U_{t+1}^\uparrow|\mathcal{F}_t) \geq E_Q(U_{t+1}^\uparrow|\mathcal{F}_t).$$

Da $U_0^\uparrow$ eine endliche Konstante ist und wegen der Integrierbarkeits-Bedingung ist $U^\uparrow$ ein $\mathcal{Q}$-Supermartingal.

Sei $\widetilde{U}$ ein anderes $\mathcal{Q}$-Supermartingal, das L dominiert. Wir zeigen wieder durch Rückwärtsinduktion, dass $\widetilde{U} \geq U^\uparrow$. Es gilt:

$$\widetilde{U}_T \geq L_T = U_T^\uparrow.$$

Es gelte $\widetilde{U}_t \geq U_t^\uparrow$. Daraus folgt für alle $Q^\star \in \mathcal{Q}$

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee E_{Q^\star}(\widetilde{U}_t | \mathcal{F}_{t-1}) \geq L_{t-1} \vee E_{Q^\star}(U_t^\uparrow | \mathcal{F}_{t-1}).$$

Wegen (6.60) folgt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee \text{ess sup}_{Q^\star \in \mathcal{Q}} E_{Q^\star}(U_t^\uparrow | \mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1}^\uparrow.$$

□

Lemma 6.12. *Seien $U \in \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \notin U$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\sup_{u \in U} \lambda^\top u < \lambda^\top x$.*

Satz 6.13. *Für einen adaptierten, nichtnegativen Prozess U sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) U ist ein $\mathcal{M}^e$-Supermartingal.

(b) Es existieren ein adaptierter nichtfallender Prozess A und eine vorhersehbare Strategie φ, so dass

$$U_t = U_0 + \varphi \bullet S_t - A_t, \quad \forall t = 0, \dots, T. \tag{6.64}$$

Bemerkung 6.14. *Da der Prozess $\varphi \bullet S$ aus (6.64) nach unten durch die Konstante U_0 beschränkt ist, ist $\varphi \bullet S$ ein $\mathcal{M}^e$-Martingal (Übungsblatt 1).*
Die Zerlegung (6.64) wird auch eine optionale Zerlegung *des $\mathcal{M}^e$-Supermartingals U genannt. Der Prozess A braucht nämlich im Gegensatz zu der Doob-Meyer-Zerlegung bezüglich eines einzigen Maßes Q nicht mehr vorhersehrbar sondern nur noch "optional" zu sein. Optional ist in zeitdiskreten Modellen äquivalent zu adaptiert. Dafür ist die*

simultane Doob-Meyer-Zerlegung (simultan bezüglich mehreren Maßen) i.A. nicht mehr eindeutig.

Beweis. (b)$\Rightarrow$(a): Da $\varphi \bullet S$ ein Q-Martingal und $Q(\Delta A \geq 0) = 1$ für alle $Q \in \mathcal{M}^e$ folgt (a).

(a)$\Rightarrow$(b): Der Beweis wird hier nur für $|\Omega| < \infty$ geführt. Für den allgemeinen Fall siehe Föllmer/Schied (2002), Theorem 7.5. Wir können dann wieder o.B.d.A. annehmen, dass $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist und $P(\{\omega\}) > 0,\ \forall \omega \in \Omega$ (vgl. Beweis von Theorem 1.14).

Wir müssen zeigen, dass für alle $t = 1, \ldots, T$ ein $\mathcal{F}_{t-1}$-messbarer Zufallsvektor η und eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable $R \geq 0$ existieren, so dass

$$U_t - U_{t-1} = \eta^\top \Delta S_t - R_t. \tag{6.65}$$

Annahme es gäbe keine Darstellung (6.65), d.h. $U_t - U_{t-1} \notin \mathcal{X} := \{\eta^\top \Delta S_t | \eta \text{ ist } \mathcal{F}_{t-1}\text{-messbar}\} - \mathbb{R}^\Omega_+$. Die Menge $\mathcal{X}$ ist offenbar abgeschlossen und konvex. Damit ist Lemma 6.12 anwendbar und es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$ mit

$$\alpha := \sup_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) x(\omega) < \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \Delta U_t(\omega) =: \delta. \tag{6.66}$$

Da $\mathcal{X}$ ein Kegel ist, der die Null enthält, gilt $\alpha = 0$. Da $-1_{\{\lambda < 0\}} \in \mathcal{X}$ folgt hieraus, dass $-\sum_{\omega \in \Omega} 1_{\{\lambda < 0\}}(\omega)\lambda(\omega) \leq 0$ und damit $\lambda \geq 0$.

Sei Q ein äquivalentes Martingalmaß mit $Q(\{\omega\}) := q(\omega) > 0$, $q \in \mathbb{R}^{|\Omega|}_+$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass mit λ auch $\lambda + \varepsilon q$ die Ungleichung (6.66) erfüllt (für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt nämlich $\sum_{\omega \in \Omega} q(\omega)x(\omega) \leq 0$). Damit kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\lambda > 0$ und ein neues *äquivalentes* Wahrscheinlichkeitmaß

$$Q^\lambda(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\widetilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\widetilde{\omega})}$$

definieren. Sei $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Da $\pm 1_A \Delta S_t \in \mathcal{X}$ gilt $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) 1_A(\omega) \Delta S_t(\omega) = 0$. Q^λ ist also ein ÄMM. Da aber der Prozess U ein $\mathcal{M}^e$-Supermartingal ist, ist er insbesondere ein Q^λ-Supermartingal und damit

$$0 \geq \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \Delta U_t(\omega) =: \delta.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\alpha = 0$. $\square$

Definition 6.15. *Sei $v_0 \in \mathbb{R}_+$. Eine Stategie $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ heißt eine Superhedging-Strategie zum Startkapital v_0 für den amerikanischen Claim L , wenn*

$$v_0 + \varphi \bullet S_t \geq L_t, \quad t = 0, \dots, T. \tag{6.67}$$

Bemerkung 6.16. *Wie schon in Bemerkung 5.5 angemerkt, kann man jeden europäischen Claim $H \geq 0$ als amerikanischen Claim mit Auszahlungsprozess*

$$L_t := \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ H & \text{für } t = T \end{cases}$$

interpretieren. Wegen $H \geq 0$ folgt in einem arbitragefreien Markt aus $v_0 + \varphi \bullet S_T \geq H$, dass $v_0 + \varphi \bullet S_t \geq 0$, $t = 0, \dots, T$. Damit ist im europäischen Fall (6.67) äquivalent zu

$$v_0 + \varphi \bullet S_T \geq H. \tag{6.68}$$

Definition 6.17. *Bezeichne mit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}_+$ die Menge der Startkapitale mit denen L supergehedged werden kann, d.h. $x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists \varphi$ s.d. $x + \varphi \bullet S \geq L$.*

Korollar 6.18. *Es gilt $\mathcal{I} = [U_0^\uparrow, \infty)$, wobei*

$$U_0^\uparrow = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau).$$

Für europäische Claims gilt

$$U_0^\uparrow = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} E_Q(H).$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{I}$, d.h. $\exists \varphi$ s.d. $x + \varphi \bullet S \geq L$. Da der Prozess $x + \varphi \bullet S$ ein $\mathcal{M}^e$-Martingal ist und mit Satz 6.11 $U^\uparrow$ das kleinste $\mathcal{M}^e$-Supermartingal ist, das L dominiert, folgt $x \geq U_0^\uparrow$. Andererseits folgt aus Satz 6.13 die Existenz einer Strategie φ mit $U_0^\uparrow + \varphi \bullet S_t \geq U_t^\uparrow \geq L_t$, $t = 0, \dots, T$. □

7 Minimierung des Hedging-Fehlers in unvollständigen Märkten

Gegeben sei ein europäischer Claim mit (abdiskontierter) Auszahlung $H \geq 0$. In einem unvollständigen Markt existiert in der Regel kein Paar (v_0, φ) mit $v_0 + \varphi \bullet S_T = H$, d.h. H

ist nicht replizierbar. Trotzdem kann der Verkäufer des Claims natürlich versuchen, das eingegangene Risiko zumindest teilweise abzusichern, indem er durch Wahl einer Handelsstrategie φ "möglichst nahe" an die stochastische Auszahlung H kommt. Zum Beispiel könnte er versuchen, die erwartete quadratische Abweichung (bzgl. des ursprünglichen Maßes) zu minimieren, d.h.

$$E_P\,(H - v_0 - \varphi \bullet S_T)^2 \qquad \min_{\varphi, v_0}\ ! \tag{7.69}$$

Auf dieses Problem werden wir später zurückkommen. Zunächst schauen wir uns eine lokale Variante dieses Kriteriums an.

Definition 7.1. *Ein allgemeiner Vermögensprozess bestimmt sich durch eine Strategie φ und einen adaptierten Kapitalzuführungsprozess C, d.h.*

$$V_t(\varphi, C) = \varphi \bullet S_t + C_t, \quad t = 0, \dots, T$$

C_t kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen (Kapitalzufuhr- bzw. -entnahme).

Wenn $C_t \neq 0$ für ein $t \geq 1$, dann ist V nicht mehr selbstfinanzierend.

Annahme 7.2. *Wir nehmen in diesem Kapitel durchgehend an, dass der (abdiskontierte) Claim H und die (abdiskontierten) Preisprozesse S^i quadratintegrierbar bzgl. des ursprünglichen Maßes P sind.*

Definition 7.3. *Eine L^2-zulässige Strategie für H ist ein Paar (φ, C) mit*

$$V_T(\varphi, C) = H$$

und $\varphi \bullet S_t, C_t \in L^2(P)$, $\forall t = 0, \dots, T$.

Natürlich existiert zu jedem Claim H ein allgemeiner Vermögensprozess $V(\varphi, C)$ mit $V_T(\varphi, C) = H$. Da nicht nur zum Zeitpunkt 0 sondern auch zu späteren Zeitpunkten Kapital zugeführt werden darf, besteht eine "Hedging-Möglichkeit" darin, bis zum Zeitpunkt T nichts zu machen und dann den gesamten Betrag H zuzuschießen, d.h. $\Delta C_T = H$.

Definition 7.4. *Zu (φ, C) definiere den Prozess R^{loc} durch*

$$R_t^{\mathrm{loc}}(\varphi, C) := E_P[(C_{t+1} - C_t)^2 | \mathcal{F}_t], \quad t = 0, \dots, T-1$$

Eine L^2-zulässige Strategie $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ mit $\widehat{V}(\widehat{\varphi}, \widehat{C}) = \widehat{\varphi} \bullet S + \widehat{C}$ heißt lokal risikominimierende Strategie, wenn für alle $t = 0, \dots, T-1$:

$$R_t^{\mathrm{loc}}(\widehat{\varphi}, \widehat{C}) \leq R_t^{\mathrm{loc}}(\varphi, C),$$

für alle L^2-zulässigen Strategien (φ, C) mit $V_{t+1} = \widehat{V}_{t+1}$.

Bemerkung 7.5. *Für $T = 1$ stimmt wegen $V_T(\varphi, C) = H$ das lokale Kriterium mit dem globalen (7.69) überein. Bei einem lokalen Kriterium vergleicht man eine Strategie immer nur mit Strategien, die außerhalb einer Umgebung gleich sind. Hier vergleicht man alle allgemeinen Vermögensprozesse mit gegebenem Wert in V_{t+1} und schaut, mit welchem V_t und φ_{t+1} man diesen am besten (im Sinne des obigen Kriteriums) erreicht.*

Definition 7.6. *Eine L^2-zulässige Strategie (φ, C) heißt "im Mittel selbstfinanzierend", wenn der Kostenprozess C ein P-Martingal ist, d.h.*

$$E_P[C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t] = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Die bedingte Kovarianz zweier Zufallsvariablen W und Z bzgl. P ist definiert als

$$\mathrm{Cov}(W, Z | \mathcal{F}_t) := E_P[WZ | \mathcal{F}_t] - E_P[W | \mathcal{F}_t] E_P[Z | \mathcal{F}_t].$$

Die bedingte Varianz ist dann durch

$$\mathrm{Var}(W | \mathcal{F}_t) := \mathrm{Cov}(W, W | \mathcal{F}_t)$$

definiert.

Definition 7.7. *Zwei adaptierte Prozesse U und Y heißen streng P-orthogonal, wenn*

$$\mathrm{Cov}(U_{t+1} - U_t, Y_{t+1} - Y_t | \mathcal{F}_t) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Wenn einer der beiden Prozesse U, Y ein P-Martingal ist, dann gilt

$$\mathrm{Cov}(U_{t+1} - U_t, Y_{t+1} - Y_t | \mathcal{F}_t) = E_P[(U_{t+1} - U_t)(Y_{t+1} - Y_t) | \mathcal{F}_t] = 0.$$

Satz 7.8. *Eine L^2-zulässige Strategie (φ, C) ist genau dann lokal risikominimierend, wenn sie im Mittel selbstfinanzierend ist und der Kostenprozess C streng P-orthogonal zu den Preisprozessen S^i, $i = 1, \dots, d$ ist.*

Beweis. Es gilt die Zerlegung

$$R_t^{\mathrm{loc}}(\varphi, C) = \mathrm{Var}(C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t) + E[C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t]^2$$

Da sich die bedingte Varianz nicht verändert, wenn man $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariablen addiert, lässt sich der erste Ausdruck auf der rechten Seite schreiben als

$$\mathrm{Var}(C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t) = \mathrm{Var}(V_{t+1} - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1} | \mathcal{F}_t) \tag{7.70}$$

Der zweite Ausdruck erfüllt

$$E[C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t]^2 = \left(E[V_{t+1} | \mathcal{F}_t] - \varphi_{t+1}^\top E[\Delta S_{t+1} | \mathcal{F}_t] - V_t\right)^2 \tag{7.71}$$

Wir nehmen V_{t+1} als gegeben an (t fest) und leiten notwendige und hinreichende Bedingungen für die Optimalität von V_t und φ_{t+1} her. Da der Wert von (7.70) unabhängig von V_t ist, muss V_t den Ausdruck (7.71) minimieren, d.h.

$$V_t = E[V_{t+1} | \mathcal{F}_t] - \varphi_{t+1}^\top E[\Delta S_{t+1} | \mathcal{F}_t]. \tag{7.72}$$

Der Wert von (7.70) ist eine quadratische Form in dem $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvektor φ_{t+1}. Damit ist (7.70) minimal genau dann, wenn φ_{t+1} die lineare Gleichungen

$$\mathrm{Cov}(V_{t+1} - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1}, \Delta S_{t+1}^i | \mathcal{F}_t) = 0, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{7.73}$$

löst. (7.72) ist äquivalent zu

$$E[C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t] = E[V_{t+1} - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1} | \mathcal{F}_t] - V_t = 0. \tag{7.74}$$

Außerdem ist gegeben (7.72) Bedingung (7.73) äquivalent zu

$$E[\Delta C_{t+1} \Delta S_{t+1}^i | \mathcal{F}_t] = 0, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{7.75}$$

Hier geht ein, dass die bedingte Kovarianz sich nicht verändert, wenn man die $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable V_t vom ersten Argument subtrahiert.

V_T durch H vorgegeben ist, besteht der Beweis nun einfach aus einer Rückwärtsinduktion: (7.74) und (7.75) sind zusammen mit der Endbedingung $V_T = H$ notwendig und hinreichend für die lokale Optimalität von (φ, C). $\square$

Der Beweis liefert ein Rezept zur rekursiven Bestimmung der risikominimierenden Strategie. Wenn V_{t+1} bereits bestimmt ist, dann minimiere

$$E[(C_{t+1}-C_t)^2|\mathcal{F}_t] = E[(V_{t+1}-V_t-\varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1})^2|\mathcal{F}_t]$$

über V_t und φ_{t+1}. Das ist eine bedingte Version eines linearen Regressionsproblems. Im Fall $d=1$ existiert für (7.72) und (7.73) die folgende Lösung.

$$\begin{aligned} \widehat{V}_T &:= H, \\ \widehat{\varphi}_{t+1} &:= \frac{\mathrm{Cov}(\widehat{V}_{t+1}, \Delta S^1_{t+1}|\mathcal{F}_t)}{\sigma^2_{t+1}} 1_{\{\sigma_{t+1}\neq 0\}}, \\ \widehat{V}_t &= E[\widehat{V}_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \widehat{\varphi}_{t+1} E[\Delta S^1_{t+1}|\mathcal{F}_t], \end{aligned} \tag{7.76}$$

wobei $\sigma^2_{t+1} := \mathrm{Var}(\Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t)$. Der Kostenprozess ergibt sich aus $\widehat{C}_t = \widehat{V}_t - \widehat{\varphi} \bullet S_t$. Es bedarf aber noch einer Zusatzbedingung, die sicherstellt, dass die Strategie $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ L^2-zulässig ist.

Proposition 7.9. *Betrachte einen Markt mit nur einem risikobehafteten Wertpapier (d.h. d=1) und nehme an, dass da eine Konstante C existiert mit*

$$\left(E_P[\Delta S^1_t|\mathcal{F}_{t-1}]\right)^2 \leq C\sigma^2_t, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{7.77}$$

Dann definiert obige Rekursion eine lokal risikominimierende Strategie $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$. Außerdem stimmt jede andere lokal risikominimierende Strategie mit $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ bis auf Modifikationen von $\widehat{\varphi}_t$ auf der Menge $\{\sigma^2_t = 0\}$ überein.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ L^2-zulässig ist. Offenbar folgt aus der Rekursion (7.76) und (7.77)

$$\begin{aligned} E[(\widehat{\varphi}_t \Delta S^1_t)^2] &= E\left[\frac{\mathrm{Cov}(\widehat{V}_t, \Delta S^1_t|\mathcal{F}_{t-1})^2}{\sigma^4_t} E[(\Delta S^1_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}] 1_{\{\sigma^2_t>0\}}\right] \\ &\leq (1+C) E\left[\frac{\mathrm{Cov}(\widehat{V}_t, \Delta S^1_t|\mathcal{F}_{t-1})^2}{\sigma^2_t}\right] \\ &\leq (1+C) E\left[\mathrm{Var}(\widehat{V}_t|\mathcal{F}_{t-1})\right] \end{aligned}$$

Für $t=T$ ist der letzte Ausdruck P-f.s. endlich, da $\widehat{V}_T = H$ quadratintegrierbar ist. Damit ist $\widehat{\varphi}_T \Delta S^1_T \in L^2(P)$. Damit folgt aus (7.76), dass auch $\widehat{V}_{T-1} \in L^2(P)$ und $\Delta\widehat{C}_T \in L^2(P)$.

Das Argument läßt sich also rekursiv fortsetzen und es folgt, dass die in (7.76) definierte Strategie L^2-zulässig ist. Nehme man nun eine andere Handelsstrategie φ'_{t+1}. Aus (7.76) und der Bedingung (7.73) folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Cov}((\varphi'_{t+1} - \widehat{\varphi}_{t+1})\Delta S^1_{t+1}, \Delta S^1_{t+1} | \mathcal{F}_t) \\ &= (\varphi'_{t+1} - \widehat{\varphi}_{t+1})\mathrm{Var}(\Delta S^1_{t+1} | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Auf der Menge $\sigma^2_{t+1} > 0$ muss also gelten, dass $\varphi'_{t+1} = \widehat{\varphi}_{t+1}$. □

Bemerkung 7.10. *Der vorhersehbare Prozess*

$$\sum_{u=1}^{t} \frac{E[\Delta S^1_u | \mathcal{F}_{u-1}]^2}{\mathrm{Var}(\Delta S^1_u | \mathcal{F}_{u-1})}, \quad t = 1, \dots, T$$

(mit der Konvention $\frac{0}{0} := 0$*), wird auch der Mean-Variance-Tradeoff-Prozess von* S^1 *genannt. Bedingung (7.77) besagt also, dass der Mean-Variance-Tradeoff (endlich und) beschränkt ist.*

Bemerkung 7.11. *Die Voraussetzung (7.77) ist äquivalent zu der Existenz eines* $\delta < 1$ *mit*

$$\left(E[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]\right)^2 \leq \delta E[(\Delta S^1_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}], \quad t = 1, \dots, T \tag{7.78}$$

(7.77) ist nämlich äquivalent zu

$$\left(E_P[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]\right)^2 \leq C\left(E_P[(\Delta S^1_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - E_P[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]^2\right), \quad t = 1, \dots, T.$$

Für $\delta = \frac{C}{1+C}$ *ist dies wiederum äquivalent zu (7.78).*

Beispiel 7.12. *Betrachte man ein Modell mit einer einzigen risikobehafteten Aktie und einem Bond mit Preisprozess* $(1+r)^t$, $r > -1$. *Der abdiskontierte Preisprozess der Aktie ist gegeben durch*

$$S^1_t = \prod_{j=1}^{t} \frac{1 + A_j}{1 + r},$$

wobei die stochastischen Renditen $(A_j)_{j=1,\dots,T}$ *i.i.d. mit* $A_1 > -1$ *und* $A_1 \in L^2(P)$. S^1_t *ist dann auch quadratintegrierbar.*

Bezeichne $\widetilde{\mu} := E_P(A_1)$ *und* $\widetilde{\sigma}^2 := \mathrm{Var}(A_1)$. *Dann gilt*

$$E[\Delta S_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}^1 \frac{\widetilde{\mu} - r}{1 + r}$$
$$\mathrm{Var}(\Delta S_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}) = (S_{t-1}^1)^2 \frac{\widetilde{\sigma}^2}{(1 + r)^2}$$

Damit ist Bedingung (7.77) hier automatisch erfüllt und eine lokal risikominimierende Strategie existiert (wenn $\widetilde{\sigma}^2 = 0$ *folgt in einem arbitragefreien Modell, dass* $\widetilde{\mu} = r$*). Außerdem ist* P *genau dann ein Martingalmaß, wenn* $\widetilde{\mu} = r$*.*

Nun kommen wir wieder zum allgemeinen Fall mit $d > 1$ riskobehafteten Wertpapieren zurück, d.h. $S = (S^0, \dots, S^d)$.

Korollar 7.13. *Eine lokal riskominimierende Strategie existiert genau dann, wenn* H *zerlegbar ist in*

$$H = c + \varphi \bullet S_T + L_T \tag{7.79}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, $L_t, \varphi \bullet S_t \in L^2(P)$, $t = 1, \dots, T$, *und* $(L_t)_{t=0,\dots,T}$ *ist ein* P*-Martingal, das orthogonal zu allen* S^i *steht und* $L_0 = 0$*. Wenn der Markt arbitragefrei ist, dann sind* c *und der Prozess* L *in der Zerlegung (7.79) eindeutig.*

Beweis. Wenn $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ eine lokal riskominimierende Strategie ist, dann ist nach Theorem 7.8 $L_t := \widehat{C}_t - \widehat{C}_0$ ein quadratintegrierbares P-Martingal, das streng orthogonal zu den Preisprozessen S^i ist. Damit erhalten wir eine Zerlegung (7.79). Wenn umgekehrt eine Zerlegung (7.79) existiert, dann ist φ mit dem Kostenprozess $C := c + L$ mit Theorem 7.8 eine lokal riskominimierende Strategie.

Um die Eindeutigkeit von L zu zeigen, nehme an, es gäbe eine weitere Zerlegung $(\widetilde{c}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{L})$. Wegen obigem ist auch $\widetilde{\varphi}$ mit dem Kostenprozess $\widetilde{C} := \widetilde{c} + \widetilde{L}$ eine lokal riskominimierende Strategie. Damit gilt, dass

$$\mathrm{Cov}((\widetilde{\varphi}_T - \varphi_T)^\top \Delta S_T, \Delta S_T^i | \mathcal{F}_{T-1}] = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Multipliziert man diese bedingten Kovarianzen mit den $\mathcal{F}_{T-1}$-messbaren Zufallsvariablen $\widetilde{\varphi}_T^i - \varphi_T^i$ und addiert alles auf, dann folgt

$$\mathrm{Var}((\widetilde{\varphi}_T - \varphi_T)^\top \Delta S_T | \mathcal{F}_{T-1}) = 0,$$

d.h. die Differenz $\widetilde{\varphi}_T \Delta S_T - \varphi_T \Delta S_T$ ist $\mathcal{F}_{T-1}$-messbar und damit gilt, da der Markt arbitragefrei ist, dass $\widetilde{\varphi}_T \Delta S_T = \varphi_T \Delta S_T$. Es folgt $\Delta \widetilde{L}_T = \Delta L_T$ und $\widetilde{c} + \widetilde{\varphi} \bullet S_{T-1} + \widetilde{L}_{T-1} = c + \varphi \bullet S_{T-1} + L_{T-1}$. Nun kann man rekursiv fortfahren und erhält $\widetilde{L} = L$. □

Lemma 7.14. *Für zwei quadratintegrierbare Martingale M und N sind folgende Bedingungen äquivalent*

(a) M und N sind streng orthogonal.

(b) Das Produkt MN ist ein Martingal.

Beweis. Aus der Martingaleigenschaft von M und N folgt

$$E[\Delta M_t \Delta N_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[M_t N_t | \mathcal{F}_{t-1}] - M_{t-1} N_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn MN ein Martingal ist. □

Sei $\mathcal{H}^2$ die Menge der quadratintegrierbaren P-Martingale. Wegen $M_t = E_P(M_T | \mathcal{F}_t)$, kann jedes $M \in \mathcal{H}^2$ mit seinem Endwert identifiziert werden. Außerdem fasst man alle Zufallsvariablen, die P-f.s. übereinstimmen zu einer Äquivalenzklasse zusammen. Wir definieren auf $\mathcal{H}^2$ das Skalarprodukt

$$(M, N)_{\mathcal{H}^2} := E_P[M_T N_T], \quad M, N \in \mathcal{H}^2.$$

Damit wird $\mathcal{H}^2$ zu einer Hilbertraum-Isomorphie zu $L^2(P)$.

Definition 7.15. *Ein Teilraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}^2$ wird stabil genannt, wenn $M^\tau \in \mathcal{Y}$ für alle $M \in \mathcal{Y}$ und $\tau \in \mathcal{S}$.*

Proposition 7.16. *Für einen stabilen Teilraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}^2$ und für $L \in \mathcal{H}^2$ mit $L_0 = 0$ sind folgende Bedingungen äquivalent*

(a) L ist orthogonal zu $\mathcal{Y}$, d.h.

$$(L, M)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad \forall M \in \mathcal{Y}.$$

(b) L ist streng orthogonal zu $\mathcal{Y}$, d.h.

$$E[\Delta L_t \Delta M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \forall t = 1, \dots, T, \; M \in \mathcal{Y}.$$

(c) Das Produkt LM ist für alle $M \in \mathcal{Y}$ ein Martingal.

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus Lemma 7.14. Die Richtung $(c) \implies (a)$ ist wegen $0 = L_0 = L_0 M_0$ trivial. Bleibt zu zeigen: $(a) \implies (c)$. Sei $M \in \mathcal{Y}$. Da $\mathcal{Y}$ stabil ist, sind auch die gestoppten Prozesse M^τ in der Menge $\mathcal{Y}$ und damit nach Voraussetzung $E_P(L_T M_\tau) = 0$. Es gilt

$$0 = E_P[L_T M_\tau] = E_P[M_\tau E_P(L_T|\mathcal{F}_\tau)] = E_P[M_\tau L_\tau].$$

Nach Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 folgt, dass der Prozess LM ein Martingal ist. □

Satz 7.17 (Kunita-Watanabe-Zerlegung). *Wenn S ein quadratintegrierbares Martingal unter dem ursprünglichen Maß P ist, dann besitzt jedes Martingal $M \in \mathcal{H}^2$ eine Darstellung wie in (7.79)*

$$M_t = M_0 + \varphi \bullet S_t + L_t, \quad t = 0, \dots, T,$$

wobei $L_t, \varphi \bullet S_t \in L^2(P)$, $t = 1, \dots, T$, und $(L_t)_{t=0,\dots,T}$ ist ein P-Martingal, das orthogonal zu allen S^i steht und $L_0 = 0$.

Beweis. Bezeichne mit $\mathcal{X}$ die Menge der Handelsstrategien φ, so dass $\varphi \bullet S_t \in L^2(P)$ für $t = 1, \dots, T$. Die Menge $\mathcal{G} = \{\varphi \bullet S | \varphi \in \mathcal{X}\}$ ist ein linearer Unterraum des $\mathcal{H}^2$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist. Da $\varphi \bullet S$ ein Martingal ist, gilt

$$(\varphi \bullet S, \varphi \bullet S)_{\mathcal{H}^2} = E_P\left[(\varphi \bullet S_T)^2\right] = \sum_{t=1}^{T} E_P\left[(\varphi_t^\top \Delta S_t)^2\right].$$

Wenn also $\varphi^{(n)} \bullet S$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}^2$ ist, dann sind $(\varphi_t^{(n)})^\top \Delta S_t$, $t = 1, \dots, T$, Cauchy-Folgen in $L^2(P)$. Mit Lemma 1.60 in Föllmer/Schied ist der $L^2(P)$-Limes von $(\varphi_t^{(n)})^\top \Delta S_t$ wieder von der Form $\varphi_t^\top \Delta S_t$, also ist $\mathcal{G}$ abgeschlossen.

Außerdem ist $\mathcal{G}$ stabil. Nehme dazu ein $\varphi \in \mathcal{X}$ und eine Stoppzeit τ. Es gilt $\varphi \bullet S_{t\wedge\tau} = \widetilde{\varphi} \bullet S_t$, wobei $\widetilde{\varphi}_s := \varphi_s 1_{\{\tau \geq s\}}$. $\widetilde{\varphi}$ ist vorhersehbar und wegen

$$\begin{aligned} E_P[(\widetilde{\varphi} \bullet S_t)^2 | \mathcal{F}_\tau] &= E_P\left[(E_P[\varphi \bullet S_t | \mathcal{F}_\tau])^2\right] \\ &\leq E_P\left[(\varphi \bullet S_t)^2\right] \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ist $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist, ist die orthogonale Zerlegung $M - M_0 = N + L$ wohldefiniert (mit $N \in \mathcal{G}$ und $(L, G)_{\mathcal{H}^2} = 0$, $\forall G \in \mathcal{G}$). Da M und N P-Martingale sind, ist auch L ein P-Martingal. Mit Proposition 7.16 folgt, dass L streng orthogonal zu $\mathcal{G}$ und damit zu S^i, $i = 1, \dots, d$. Die Eindeutigkeit von L folgt mit Korollar 7.13, da das Modell wegen $P \in \mathcal{M}^e$ arbitragefrei ist. □

Korollar 7.18. *Wenn P selber ein Martingalmaß ist, dann existiert eine lokal risikominimierende Strategie. Diese Strategie ist eindeutig in dem Sinne, dass der Wertprozess $\widehat{V}$ eindeutig bestimmt ist, nämlich*

$$\widehat{V}_t = E_P[H|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, \dots, T$$

und der Kostenprozess gegeben ist durch

$$\widehat{C}_t = \widehat{V}_0 + L_t, \quad t = 0, \dots, T$$

wobei L das streng orthogonale P-Martingal in der Kunita-Watanabe Zerlegung von $\widehat{V}$ ist.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 7.17 und Korollar 7.13. □

Literatur

[1] N. Bingham and R. Kiesel. *Risk-Neutral Valuation.* Springer, New York, 1998.

[2] F. Delbaen and W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Mathematische Annalen*, 312:215–250, 1998.

[3] H. Föllmer and Y. Kabanov. Optional decomposition and Lagrange multipliers. *Finance & Stochastics*, 2:69–81, 1998.

[4] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance – An Introduction in Discrete Time.* Walter de Gruyter, New York, first edition, 2002.

[5] T. Goll and J. Kallsen. A complete explicit solution to the log-optimal portfolio problem. *The Annals of Applied Probability*, 13:774–799, 2003.

[6] J. Hull. *Options, Futures and other Derivatives.* Prentice Hall, Upper Saddle River, third edition, 1997.

[7] A. Irle. *Finanzmathematik – Die Bewertung von Derivaten.* Teubner, Stuttgart, 1998.

[8] Kallsen J. *Eine Rundreise durch die Finanzmathematik.* Vorlesungsskript, Universität Freiburg, 2001.

[9] J. Kallsen. Utility-based derivative pricing in incomplete markets. In H. Geman, D. Madan, and S. Pliska, editors, *Mathematical Finance – Bachelier Congress 2000*, pages 313–338. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[10] J. Kallsen and C. Kühn. Pricing Derivatives of American and Game Type in Incomplete Markets. *Finance & Stochastics*, 8(2):261–284, 2004.

[11] D. Kramkov. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. *Probability Theory and Related Fields*, 105:459–479, 1996.

[12] D. Kramkov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 9:904–950, 1999.

[13] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, London, 1996.

[14] T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[15] M. Schweizer. Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 37:339–363, 1991.

[16] M. Schweizer. A guided tour through quadratic hedging approaches. In E. Jouini, J. Cvitanic, and M. Musiela, editors, *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, pages 538–574. Cambridge University Press, 2001.