Skriptum zur Vorlesung

Finanzmathematik

von Prof. Dr. Jan Prüß und PD Dr. Roland Schnaubelt
ausgearbeitet von

Dipl. wirtsch.-math. Martin Schultze

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik/Informatik
Institut für Analysis

Version vom: 10.04.2006

Vorwort

Optionen auf risikobehaftete Anlagen oder Waren, wie z.B. Aktien oder Erdgas, sind zu einem wichtigen Instrument der Finanzwirtschaft geworden. Ein großes Problem für den Ausgeber sowie für den Zeichner einer Option stellt die Frage der Bewertung dar: Wie hoch sollte der Preis der Option zum Ausgabezeitpunkt sein? Dazu kommt bei Optionen, deren Ausübungszeitpunkt, wie z.B. bei amerikanischen Optionen, nicht festgelegt ist, die Frage nach der optimalen Ausübungsstrategie. Ein entscheidender Beitrag zur Lösung dieser Probleme wurde von Black und Scholes erzielt. Deren Resultate wurden später mit einem Nobelpreis gewürdigt.

Der von Black und Scholes erreichte Durchbruch basierte auf einer konsequenten Anwendung mathematischer Methoden. Ihre Theorie verwendet sowohl den Itô-Kalkül, also stochastische Methoden, als auch partielle Differentialgleichungen. Sie leiteten die grundlegende partielle Differentialgleichung zur Bewertung von Optionen her, die Black-Scholes Gleichung. Seit Erscheinen ihrer bahnbrechenden Arbeiten hat sich dieser Bereich der Wirtschaftsmathematik rasant entwickelt und ist zu einer anspruchsvollen und interessanten mathematischen Theorie geworden.

Dieses Skriptum ist aus einer Vorlesung zu dieser Thematik entstanden, die Prof. Dr. Jan Prüß und PD Dr. Roland Schnaubelt im Sommersemester 2003 an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg gehalten haben. Die Veranstaltung soll periodisch angeboten werden und wendet sich an Studenten der Mathematik im Hauptstudium, insbesondere sollte sie für Studenten der Wirtschaftsmathematik ein Muss sein.

Ziel der Vorlesung ist es, eine Einführung in die mathematische Theorie der Bewertung von Optionen zu geben. Voraussetzungen sind lediglich elementare Kenntnisse über Analysis, Lineare Algebra und Stochastik, wie sie im Grundstudium vermittelt werden. Die Vorlesung ist zweigeteilt; im zweiten Teil werden die weitergehenden stochastischen Methoden bereitgestellt, die im ersten Teil, der eigentlichen Finanzmathematik, benötigt werden. Durch geeignete Organisation des Materials müssen diese Teile nicht nacheinander sondern können parallel gelesen werden: Pro Woche befasst sich eine Vorlesung mit Finanzmathematik, die zweite mit den stochastischen Hilfsmitteln. Dadurch kann ein langer, "trockener" Vorspann vermieden werden, die Vorlesung ist von Beginn an auch für Nichtstochastiker spannend.

An dieser Stelle möchten wir uns noch herzlich bei Dipl. wirtsch.-math. Martin Schultze bedanken, der das Skriptum mit viel Engagement erstellt hat.

Halle, Oktober 2005

Prof. Dr. Jan Prüß und PD Dr. Roland Schnaubelt

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Analysis der Finanzmathematik

Kapitel 1

Diskrete Modelle

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der *Bewertung von Optionen* auf risikobehaftete Anlagen in einem Zeitschritt. Die grundlegenden Begriffe *Hedging*, *No-Arbitrage-Opportunity* (NAO) und *risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße* (RNW) werden eingeführt und diskutiert.

1.1 Zwei Anlagen, zwei Zustände

1.1.1 Wir betrachten zunächst 2 Zeitpunkte:

$$\begin{aligned} t &= 0 \text{ (Gegenwart) und} \\ t &= 1 \text{ (Zukunft).} \end{aligned}$$

Weiterhin gebe es am Markt zwei Arten von Wertpapieren, ein risikoloses mit Zinsrate $r \geq 0$ und ein risikobehaftetes (z.B. eine Aktie). Die Aktie habe den Wert

$$\begin{cases} S & : t = 0 \\ S_u \text{ bzw. } S_d & : t = 1 \quad \text{wobei } S_u > S_d. \end{cases}$$

Eine *Call-Option* beschreibt nun das Recht die Aktie zur Zeit $t = 1$ zu dem in $t = 0$ festgelegten Preis K zu kaufen. Der Wert der Option zur Zeit $t = 1$ beträgt damit

$$[S_u - K]_+ \text{ bzw. } [S_d - K]_+.$$

Es stellt es sich aber die Frage, *welchen Preis sollte die Option zur Zeit* $t = 0$ *haben?*

Ein *Portfolio* ist ein Paar $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, wobei α die Menge an risikolos angelegtem Geld beschreibt und β die Menge an Aktien. Somit hat das Portfolio zur Zeit $t = 0$ einen Wert von

$$\alpha + \beta S,$$

wenn o.B.d.A. wir den Preis der risikolosen Anlage zur Zeit $t = 0$ auf 1 normieren.

Wählen wir nun ein Portfolio (α^*, β^*), das dem Wert der Option in der Zukunft entspricht, ein sog. *Hedging-Portfolio*, dann gilt

$$\begin{aligned} (1 + r)\alpha^* + \beta^* S_u &= [S_u - K]_+ =: C_u \\ (1 + r)\alpha^* + \beta^* S_d &= [S_d - K]_+ =: C_d, \end{aligned}$$

also

$$\beta^* = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} > 0, \quad (1 + r)\alpha^* = C_u - S_u \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}.$$

Ein solches Portfolio dient dem Verkäufer der Option zur Absicherung für die Zukunft. Damit ergibt sich ein *fairer Preis* c für die Option zur Zeit $t = 0$ von

$$c := \alpha^* + \beta^* S,$$

das heißt

$$c = \frac{1}{1+r}(qC_u + (1-q)C_d), \text{ mit } q = \frac{(1+r)S - S_d}{S_u - S_d}.$$

Analog erhalten wir für den Preis p einer *Put-Option*, die das Recht des Verkaufs der Aktie zum Preis K beinhaltet, als

$$p = \frac{1}{1+r}(qP_u + (1-q)P_d),$$

wobei

$$P_j = [K - S_j]_+, \quad j = u, d.$$

Proposition 1.1 (Paritätsgesetz). *Bei Optionen wie bisher betrachtet gilt stets*

$$c = p + S - \frac{K}{1+r}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} c - p &= \frac{q([S_u - K]_+ - [K - S_u]_+) + (1-q)([S_d - K]_+ - [K - S_d]_+)}{1+r} \\ &= \frac{q(S_u - K) + (1-q)(S_d - K)}{1+r} \\ &= S - \frac{K}{1+r} \end{aligned}$$

□

Falls $(1+r)S \in [S_d, S_u]$ gilt, so ist q eine Zahl im Intervall $[0, 1]$. q interpretieren wir dann als *risikoneutrale Wahrscheinlichkeit*, mit der S_u zu $t = 1$ eintritt. Bei q entspricht die Aktie im Mittel der risikolosen Anlage:

$$(1+r)S = \mathbb{E}_q(S_1),$$

wobei S_1 die Zufallsvariable ist, die den Wert der Aktie zur Zeit $t = 1$ beschreibt, und $\mathbb{E}_q$ die Erwartung zum Wahrscheinlichkeitsmaß $Q = (q, 1-q)$ bezeichnet.
Demnach gilt auch

$$c = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_q(C_1),$$

und C_1 ist die Zufallsvariable, die den Wert des Portfolios zur Zeit $t = 1$ darstellt.

1.1.2 Ein Arbitrage ist ein Portfolio (α, β) mit gegenwärtigem nichtpositivem Wert, für das ein zukünftiger positiver Wert zu erwarten ist. Formal bedeutet das

$$\alpha + \beta S \leq 0 \wedge \alpha(1+r) + \beta S_i \geq 0 \wedge \alpha(1+r) + \beta S_j > 0$$

für $i, j = d, u$ und $i \neq j$. Die *No-Arbitrage-Opportunity (NAO)* ist nun eine Eigenschaft des Marktes, die besagt, dass es kein Arbitrage-Portfolio gibt.

Proposition 1.2. *Die NAO gilt genau dann, wenn* $(1+r)S \in (S_d, S_u)$.

Beweis: Für die Implikation von links nach rechts setzen wir zunächst $\alpha = -S$ und $\beta = 1$. Damit erhalten wir durch Anwendung der Definition der NAO:

$$S_d \leq S_1 = \beta S_1 < -\alpha(1+r) = S(1+r).$$

Mit $\alpha = S$ und $\beta = -1$ erhalten wir analog

$$S_u \geq S_1 = -\beta S_1 > \alpha(1+r) = S(1+r).$$

Die äußeren Terme beider Ungleichungen liefern damit das gewünschte Ergebnis. Für die Umkehrung existiert nun ein $q \in (0,1)$, so dass

$$(1+r)S = qS_u + (1-q)S_d$$

gilt. Nehmen wir nun an, dass

$$\alpha(1+r) + \beta S_d \geq 0 \wedge \alpha(1+r) + \beta S_u \geq 0$$

ist, nicht aber beide mit Gleichheit erfüllt sind, so folgt nach Voraussetzung

$$\alpha(1+r) + \beta(1+r)S > 0,$$

also schon

$$\alpha + \beta S > 0$$

und damit NAO. □

Bemerkung 1.3. Jeder Preis außer dem fairen liefert die Existenz eines Arbitrages im um die Option erweiterten Markt.

Beweis: Sei u^* der faire Preis einer Option, das heißt

$$u^* = \alpha^* + \beta^* S$$

mit einem Hedging-Portfolio (α^*, β^*) für diese Option. Das Paar (α^*, β^*) löst als Hedge das lineare Gleichungssystem

$$(1+r)\alpha^* + \beta^* S_u = Z_u \quad \text{und} \quad (1+r)\alpha^* + \beta^* S_d = Z_d,$$

wenn Z_u und Z_d den Optionsertrag bei steigendem beziehungsweise fallendem Aktienpreis zur Zeit $t = 1$ beschreiben. Sei nun der wirkliche Optionspreis u größer als u^*, dann wählen wir das Portfolio $\theta := (\alpha^* + u - u^*, \beta^*, -1)$ im erweiterten Markt. Dabei bezieht sich die dritte Komponente auf die Anzahl der gehaltenen Optionen. Dieses Portfolio besitzt somit den Wert

$$\alpha * + u - u^* + \beta^* S - u = \alpha^* + \beta^* S - u^* = 0$$

zur Zeit $t = 0$, sowie die möglichen Werte

$$(1+r)(\alpha^* + u - u^*) + \beta^* S_u - Z_u = (1+r)(u - u^*) > 0 \quad \text{oder}$$
$$(1+r)(\alpha^* + u - u^*) + \beta^* S_d - Z_d = (1+r)(u - u^*) > 0$$

zur Zeit $t = 1$. Damit stellt θ im erweiterten Markt ein Arbitrage dar. Im Falle $u < u^*$ ist entsprechend $-\theta$ ein Arbitrage des erweiterten Marktes. □

1.1.3 Nun können wir uns aber fragen, ob eine Option überhaupt ein sinnvolles Finanzgut ist, schließlich scheint sie durch den gewählten Ansatz identisch mit einem geeigneten Portfolio zu sein. Zur Begründung der Existenz von Optionen dient uns die folgende *Risiko-Analyse*: Sei $p \in (0,1)$ die subjektive Wahrscheinlichkeit eines Individuums dafür, dass $S_1 = S_u$ und somit $C_1 = C_u$ eintreten wird. Wir betrachten nun die Gewinnraten $R = (S_1 - S)/S$ der Aktie und $T = (C_1 - c)/c$ der Option. So erhalten wir für den Erwartungswert m_S und die Varianz (Volatilität) v_S^2 von R

$$\begin{aligned}
m_S &:= \mathbb{E}_p(R) = \frac{pS_u + (1-p)S_d}{S} - 1, \\
v_S^2 &:= \mathbf{D}_p^2(R) = \mathbb{E}_p(R^2) - \mathbb{E}_p(R)^2 \\
&= p(1-p)\left(\frac{S_u - S}{S} - \frac{S_d - S}{S}\right)^2 \\
&= p(1-p)\left(\frac{S_u - S_d}{S}\right)^2.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir für T

$$\begin{aligned}
m_c &:= \mathbb{E}_p(T) = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{c} - 1, \\
v_c^2 &:= \mathbf{D}_p^2(R) = p(1-p)\left(\frac{C_u - C_d}{c}\right)^2.
\end{aligned}$$

Satz 1.4. *Sei*

$$\Omega := \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \cdot \frac{S}{c}$$

die ***Elastizität*** *der Option. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen*

$$m_c - r = \Omega(m_S - r) \quad \textit{sowie} \quad v_c^2 = \Omega^2 v_S^2.$$

Insbesondere gilt $[m_c - r]_+ \geq [m_S - r]_+$ *und* $v_c^2 \geq v_S^2$.

Beweis: Die zweite Behauptung folgt direkt aus der Definition der Elastizität. Die erste Behauptung gilt wegen

$$\begin{aligned}
m_c - r &= \frac{C_u - C_d}{c}(p - q) \\
&= \Omega \frac{S_u - S_d}{S}(p - q) \\
&= \Omega(m_S - r).
\end{aligned}$$

Es gilt weiter $\Omega \geq 1$, woraus die behaupteten Ungleichungen folgen, denn $\Omega \geq 1$ ist äquivalent dazu, dass

$$(C_u - C_d)S \geq (S_u - S_d)c$$

gilt, mit einem fairen c und dem risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß also

$$\begin{aligned}
(C_u - C_d)S &\geq \frac{S_u - S_d}{1+r}(qC_u + (1-q)C_d) \\
&= \frac{S_u - S_d}{1+r}\left[\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}((1+r)S - S_d) + C_d\right] \\
&= (C_u - C_d)S - \frac{C_u - C_d}{1+r}S_d + \frac{S_u - S_d}{1+r}C_d.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist wiederum äuqivalent zu

$$C_u S_d \geq S_u C_d,$$

mit den Definitionen von C_u und C_d also zu

$$[S_u - K]_+ S_d \geq [S_d - K]_+ S_u.$$

Diese Aussage ist nun aber wahr, da $0 \leq S_d \leq S_u$ nach Voraussetzung gilt. □

1.1.4 Betrachten wir nun *unvollständige Märkte*, so gibt es in der Zukunft nicht nur 2, sondern $k > 2$ viele Zustände der Welt. Als Marktbestandteile gebe es weiter eine risikolose Anlage und eine Aktie. Die stochastische Variable S_1 nimmt nun die möglichen Werte aus $\{s_1, ..., s_k\}$ an. Der Wert des Portfolios (α, β) in $t = 1$ beschreibt sich dann mit Hilfe der Zufallvariable

$$H := (1 + r)\alpha + S_1 \beta$$

mit den Ausprägungen $h_j = (1 + r)\alpha + s_j \beta$, wobei $j = 1, ..., k$.
Die stochastische Variable H heißt dann *replizierbar*, falls es ein Portfolio (α, β) gibt, so dass $H = (1 + r)\alpha + S_1\beta$ gilt, dass heißt $h_j = (1 + r)\alpha + s_j\beta$ für alle $j = 1, ..., k$.
Damit ist $([s_j - K]_+)_{j=1}^k$ im allgemeinen nicht replizierbar, das bedeutet ein *Hedging* der Option ist i.a. nicht möglich. Somit lässt sich auch nicht unbedingt ein expliziter Preis für die Option angeben, aber ein Intervall der Form

$$\left(\inf_{Q \in \mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_Q(H)}{1 + r}, \sup_{Q \in \mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_Q(H)}{1 + r} \right),$$

falls inf < sup.
In dieser Intervallangabe setzen wir $H = [S_1 - K]_+$ im Fall einer Call-Option und $H = [K - S_1]_+$ im Fall eines Puts sowie $\mathcal{P}$ die Menge risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten. Eine Wahrscheinlichkeit Q heißt nun *risikoneutral*, wenn

$$\mathbb{E}_Q(S_1) = (1 + r)S$$

gilt. Genauer bedeutet das:

$$Q = (q_j)_{j=1}^k : \quad q_j > 0 \;\forall j = 1, ..., k, \quad \sum_{j=1}^k q_j = 1, \quad \sum_{j=1}^k q_j s_j = (1 + r)S.$$

Wir sehen leicht, dass $\mathcal{P} \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn

$$S_d := \min_{j=1,\ldots,k} s_j < (1 + r)S < S_u := \max_{j=1,\ldots,k} s_j.$$

Nun können wir das folgende Resultat zeigen:

Proposition 1.5. *Seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, S_d und S_u wie oben definiert und gelte $S_d \leq (1 + r)S \leq S_u$. Dann gelten auch*

(a) $\quad \sup_{Q \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_Q(g(S_1)) = g(S_u)\frac{S(1+r)-S_d}{S_u - S_d} + g(S_d)\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d}$ *und*
(b) $\quad \inf_{Q \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_Q(g(S_1)) \geq g((1 + r)S)$.

In (b) gilt die Gleichheit, falls $(1 + r)S = s_j$ für ein $j \in \{1, ..., k\}$ ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst (a). Nach den Definitionen von S_d und S_u haben wir $S_d \leq s_j \leq S_u$ für jedes $j \in \{1, ..., k\}$ und damit die Existenz von $\lambda_j \in [0,1]$ mit $s_j = \lambda_j S_u + (1-\lambda_j) S_d$. Da g konvex ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(g(S_1)) &= \sum_{j=1}^{k} q_j g(s_j) = \sum_{j=1}^{k} q_j g(\lambda_j S_u + (1-\lambda_j) S_d) \\
&\leq g(S_u) \sum_{j=1}^{k} q_j \lambda_j + g(S_d) \sum_{j=1}^{k} q_j (1-\lambda_j) \\
&= q g(S_u) + (1-q) g(S_d)
\end{aligned}$$

mit $q = \sum_j q_j \lambda_j \in [0,1]$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(1+r)S &= \sum_{j=1}^{k} q_j s_j = S_u \sum_{j=1}^{k} q_j \lambda_j + S_d \left(1 - \sum_{j=1}^{k} q_j \lambda_j\right) \\
&= q S_u + (1-q) S_d,
\end{aligned}$$

also

$$q = \frac{(1+r)S - S_d}{S_u - S_d}.$$

Es folgt die Ungleichung

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_Q(g(S_1)) \leq q g(S_u) + (1-q) g(S_d).$$

Die Umkehrung erhalten wir mit der Wahl einer Folge $(q_j)_n$ mit $q_{j,n} \to 0$ falls $S_d < s_j < S_u$.
Für (b) betrachten wir die Jensen-Ungleichung

$$g((1+r)S) = g(\mathbb{E}_Q(S_1)) \leq \mathbb{E}_Q(g(S_1)).$$

Damit gilt also schon

$$g((1+r)S) \leq \inf_{Q \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_Q(g(S_1)).$$

Ist $(1+r)S = s_j$, dann ergibt eine Folge $q_{i,n} \to 0$ für $i \neq j$ und $q_{j,n} \to 1$ die Gleichheit in (b). □

1.2 d+1 Anlagen, k Zustände

1.2.1 Wir betrachten wie zuvor die beiden Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$, eine risikolose Anlage mit dem Preis $S^0 > 0$ zur Zeit $t = 0$ und nun d risikobehaftete Anlagen mit Preisen S^i $(i = 1, ..., d)$ zur Zeit $t = 0$.
V bezeichnet im Folgenden die Matrix der Anlagenpreise zur Zeit $t = 1$, das heißt

$$V = (v_j^i)_{\substack{i=0,\dots,d \\ j=1,\dots,k}} \in \mathbb{R}^{k \times (d+1)}.$$

Der obere Index steht dabei für die Anlage und der untere für den Zustand. Daher gilt für alle $j = 1, ..., k$

$$v_j^0 = (1+r)S^0,$$

wobei wir weiterhin annehmen, dass $r \geq 0$ gilt. Ein Portfolio wächst in diesem Kontext auch in seiner Dimension. Ein Portfolio $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ hat daher den Wert $S \cdot \theta$ zur Zeit $t = 0$ mit $S = (S^0, ..., S^d)$ und $V_j \cdot \theta = \sum_{i=0}^{d} v_j^i \theta_i = (V\theta)_j$ im Zustand j zur Zeit $t = 1$.

Bezeichnung 1.6. *Seien $u, v \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ genau dann, wenn $u^i \geq v^i$ für jedes $i = 1, ..., n$ gilt.*
Entsprechendes gilt für $>$.

Definition 1.7. *(i) Ein Portfolio θ heißt **Arbitrage**, falls gilt*

$$S \cdot \theta < 0 \wedge V\theta = 0 \quad \textit{oder} \quad S \cdot \theta \leq 0 \wedge V\theta \geq 0 \wedge V\theta \neq 0.$$

*(ii) Es gilt **NAO**, falls es kein Arbitrage gibt.*

Bemerkung 1.8. NAO gilt genau dann, wenn für jedes θ folgende Implikation gilt:

$$S \cdot \theta \leq 0 \wedge V\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S \cdot \theta = 0 \wedge V\theta = 0.$$

Satz 1.9. *NAO gilt genau dann, wenn es ein $\beta \in \mathbb{R}^k$ gibt, so dass $\beta > 0$ und $S = V^T\beta$. Die β_j $(j = 1, ..., k)$ heißen dann Zustandspreise.*

Beweis: Gehen wir zunächst von der Existenz eines solchen β aus, so gelten für alle Portfolios θ die folgenden Implikationen:

$$(i) \quad V\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \beta \cdot (V\theta) = (V^T\beta) \cdot \theta = S \cdot \theta \text{ und}$$

$$(ii) \quad V\theta \geq 0 \wedge V\theta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \beta \cdot (V\theta) = (V^T\beta) \cdot \theta = S \cdot \theta,$$

also gilt NAO.
Gelte nun NAO, so definieren wir

$$U := \left\{ z \in \mathbb{R}^{k+1} : z = \begin{bmatrix} -S^T \\ V \end{bmatrix} x, \, x \in \mathbb{R}^{d+1} \right\} = R\left(\begin{bmatrix} -S^T \\ V \end{bmatrix} \right) \quad \text{und}$$

$$W := \left\{ z \in \mathbb{R}^{k+1} : z \geq 0, \sum_{j=0}^{k} z_j = 1 \right\}.$$

U ist somit ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^{k+1}$, W ist kompakt und konvex.
Für $z \in U \cap W$ ist $z_j \geq 0 \, \forall j$, $\sum_j z_j = 1$ und $z = (z_0, z^1)$ mit $z_0 = -S \cdot x \geq 0$ und $z^1 = Vx \geq 0$. Die letzten beiden Eigenschaften widersprechen aber der NAO, also ist $U \cap W = \emptyset$.
Mit dem Trennungssatz von Minkowski (vgl. Elliott, Kopp [15, Theorem 3.1.1]) folgt die Existenz eines $\beta = (\beta_0, \beta^1) \in \mathbb{R}^{k+1}$ sowie die Existenz einer reellen Zahl b, so dass die Ungleichungen

$$z \cdot \beta = 0 < b \leq w \cdot \beta \quad \forall z \in U, w \in W$$

gelten. Wegen $w = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in W$ (1 an j-ter Stelle) ist dabei $\beta_j > 0$ für jedes $j = 0, 1, ..., k$. Aus

$$z = \begin{bmatrix} -S^T \\ V \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -S \cdot x \\ Vx \end{bmatrix} \quad \text{folgt}$$

$$(-S \cdot x)\beta_0 + \beta^1 \cdot (Vx) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Wählen wir o.B.d.A. $\beta_0 = 1$, so gilt $(S - V^T\beta^1) \cdot x = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ und damit $S = V^T\beta^1$, also die Behauptung. □

Zur Interpretation der β_j^1 $(j = 1, ..., k)$ dienen uns die folgenden Überlegungen:

Es sind $S = V^T\beta^1$ und $S^0 = (1+r)S^0 \sum_j \beta_j^1$, also $1 = \sum_j (1+r)\beta_j^1$. Damit definiert $Q = (q_j)_{j=1}^k$ mit $q_j := (1+r)\beta_j^1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem $\mathbb{R}^k$, so dass $S = 1/(1+r)V^TQ$ gilt. Q ist damit ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (RNW).
Mit $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt also

$$S \cdot \theta = \frac{1}{1+r}(V^TQ) \cdot \theta = \frac{1}{1+r}Q \cdot (V\theta) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(V\theta).$$

Für die Gewinnrate $(v_j^i - S^i)/S^i$ der i-ten Anlage ergibt sich bestätigend:

$$\mathbb{E}_Q\left(\frac{v_j^i - S^i}{S^i}\right) = \frac{\mathbb{E}_Q(v_j^i) - S^i}{S^i} = \frac{(1+r)S^i - S^i}{S^i} = r.$$

Definition 1.10. *Ein Markt heißt **vollständig**, falls V surjektiv ist.*

Man beachte bei dieser Definition, dass ein Markt nur dann vollständig sein kann, wenn $k \leq d+1$ gilt.

Korollar 1.11. *Ist der Markt vollständig, so gibt es höchstens ein RNW.*

Beweis: Ist V surjektiv, dann ist V^T injektiv und damit β eindeutig bestimmt, also auch das RNW. □

Korollar 1.12. *Ist der Markt vollständig und gilt NAO, so existiert genau ein RNW Q. Für eine Option mit Ertrag $z \in \mathbb{R}^k$ ist der faire Preis gegeben durch*

$$\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(z).$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt direkt aus Satz 1.9 und Korollar 1.11. Mit Hilfe der angegebenen Konstruktion von Q folgt dann die zweite Behauptung analog zum Beweis von Bemerkung 1.3. □

Ist der Zustand einer Call-Option auf die Anlage i zur Zeit $t = 1$ gleich j, so hat sie dann den Wert $[v_j^i - K]_+$. Damit ergibt sich ein fairer Preis für diese Option als

$$\begin{aligned} c^i &= \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^k q_j[v_j^i - K]_+ \\ &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q([V^i - K]_+). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir den fairen Preis einer Put-Option auf die Anlage i als

$$p^i = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q([K - V^i]_+).$$

Proposition 1.13. *Auch in diesem Fall gilt die Put-Call-Parität für jede risikobehaftete Anlage.*

Beweis:

$$
\begin{aligned}
c^i - p^i &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(\underbrace{[V^i - K]_+ - [K - V^i]_+}_{V^i - K}) \\
&= \frac{1}{1+r}(1+r)S^i - \frac{K}{1+r} \\
&= S^i - \frac{K}{1+r}
\end{aligned}
$$

□

1.2.2 Betrachten wir nun auch hier *unvollständige Märkte*. Es sei $z \in \mathbb{R}^k$ ein gesetzter Zielwert für mögliche zukünftige Portfoliowerte und es gelte NAO. Außerdem definieren wir zu z die folgenden Mengen:

$$\overline{M}(z) := \{\theta \cdot S : V\theta \geq z\} \quad \text{sowie} \quad \underline{M}(z) := \{\theta \cdot S : V\theta \leq z\}.$$

Diese Mengen sind nichtleer. Im Beweis des folgenden Satzes zeigen wir, dass $\overline{M}(z)$ ($\underline{M}(z)$) nach unten (oben) beschränkt ist. Nach Stroth [27, Korollar 21.15] existieren somit

$$\overline{S}(z) := \min \overline{M}(z) \quad \text{und} \quad \underline{S}(z) := \max \underline{M}(z).$$

$\overline{S}(z)$ kann dabei als Verkaufspreis und $\underline{S}(z)$ als Kaufpreis für den Zielwert z betrachtet werden.

Satz 1.14. *Es gelte NAO und $\mathcal{P}$ bezeichne wieder die Menge der RNW (vgl. S.13). Dann sind*

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \overline{S}(z) = \sup_{Q\in\mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_Q(z)}{1+r} \text{ und} \\
(b) & \underline{S}(z) = \inf_{Q\in\mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_Q(z)}{1+r},
\end{array}
$$

insbesondere also $\underline{S}(z) \leq \overline{S}(z)$.

Beweis: Aufgrund der Dualität der Aussagen zueinander genügt es, (a) zu zeigen. Dazu sei θ wie in der Definition, also $V\theta \geq z$, und Q ein RNW. Dann gilt

$$\mathbb{E}_Q(z) = Q \cdot z \leq Q \cdot (V\theta) = (V^TQ) \cdot \theta = (1+r)S \cdot \theta,$$

also

$$\frac{\mathbb{E}_Q(z)}{1+r} \leq \inf\{\theta \cdot S : V\theta \geq z\} = \overline{S}(z)$$

und damit auch

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}} \frac{\mathbb{E}_Q(z)}{1+r} \leq \overline{S}(z).$$

Sei nun θ so, dass $\theta \cdot S = \overline{S}(z)$ und $V\theta \geq z$ gelten. Mit dem Satz von Kuhn und Tucker (vgl. Lange [22, Proposition 4.2.1]) folgt dann die Existenz von $\beta_j \geq 0$ mit

$$S - \sum_{j=1}^{k} \beta_j V_j = 0 \quad \text{und } \beta_j((V\theta)_j - z_j) = 0$$

für alle $j = 1, ..., k$. Es folgt

$$S = V^T\beta,$$

also

$$(V^T\beta) \cdot \theta = \beta \cdot (V\theta) = \sum_j \underbrace{\beta_j((V\theta)_j - z_j)}_{=0} + \beta \cdot z$$

und daher

$$\overline{S}(z) = S \cdot \theta = \beta \cdot z =: \frac{\mathbb{E}_Q(z)}{1+r}.$$

Da damit $S^0 = (1+r)S^0 \sum_j \beta_j$ gilt, ist $\sum_j q_j = 1$. Es sei ferner $\tilde{Q}$ das RNW, das wir in Satz 1.9 erhalten haben. Für kleines $\epsilon > 0$ setzen wir

$$Q_\epsilon := (1-\epsilon)Q + \epsilon\tilde{Q},$$

dann ist Q_ϵ ein RNW und

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}_{Q_\epsilon}(z) = \mathbb{E}_Q(z) = (1+r)\overline{S}(z).$$

Somit folgt die Behauptung. □

Satz 1.15. *Es gelte NAO, $\underline{S}(z) < \overline{S}(z)$, und es sei $z \in \mathbb{R}^k$ fest. Dann gilt*

$$\underline{S}(z) < S(z) < \overline{S}(z)$$

für jeden Preis $S(z)$, der keine Arbitrage zulässt.

Beweis: Annahme: $S(z) \geq \overline{S}(z)$. Also gibt es ein θ mit

$$S(z) \geq \theta \cdot S \text{ und } V\theta \geq z.$$

Es folgt

$$-z + V\theta \geq 0 \text{ und } -S(z) + \theta \cdot S \leq 0.$$

Da $S(z)$ der Preis ist, der keine Arbitrage zulässt, folgt mit NAO

$$z = V\theta \text{ und } S \cdot \theta = S(z),$$

also

$$\overline{S}(z) \leq S(z) = S \cdot \theta \leq \underline{S}(z),$$

im ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Die zweite Ungleichung folgt analog. □

Ist V surjektiv, so gibt es also ein θ_0, so dass

$$V\theta_0 = \begin{pmatrix} 1+r \\ \vdots \\ 1+r \end{pmatrix},$$

also ein Portfolio, dass einer risikolosen Anlage entspricht, ein *Hedging Portfolio*.

1.3 Optimaler Konsum und Portfoliowahl

Seien $R_0 > 0$ das Vermögen zur Zeit $t = 0$, $R_j > 0$ die Einkünfte im Zustand j zur Zeit $t = 1$, $C_0 \geq 0$ der Konsum zur Zeit $t = 0$ und $C_j \geq 0$ der Konsum im Zustand j zur Zeit $t = 1$. Mit diesen Bezeichnungen und der Annahme, dass konsumiertes Vermögen nicht in ein Portfolio θ investiert werden kann, ergeben sich folgende Verträglichkeiten:

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & R_0 \geq C_0 + \theta \cdot S & (t=0) \\ (ii) & R_j \geq C_j - (V\theta)_j & (t=1) \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

für alle j. Sei weiter $u = u(C)$ eine *Nutzenfunktion*, das heißt $u \in C(\mathbb{R}_+^{k+1}; \mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \cap C^1((0,\infty)^{k+1}; \mathbb{R})$ mit

$$\begin{array}{lll} (i) & \partial_j u(C) = \frac{\partial u}{\partial C_j} > 0 & \forall j = 0, ..., k, \\ (ii) & u \text{ ist strikt konkav} & \text{und} \\ (iii) & \lim_{C_j \to 0} \partial_j u(C) = \infty & \forall j = 0, ..., k. \end{array}$$

Typische eindimensionale Nutzenfunktionen sind:

$$u(C) = C^\alpha,\ \alpha \in (0,1) \quad \text{oder} \quad u(C) = \log C.$$

Satz 1.16. *Sei u eine Nutzenfunktion, dann besitzt das Problem*

$$u(C^*) = \max\{u(C) : C \text{ erfüllt } (1.1)\}$$

genau dann eine Lösung, falls NAO gilt. Diese optimale Lösung ist eindeutig bestimmt und streng positiv.

Beweis: 1.Schritt: Sei zunächst $C^* = (C_0^*, C^{1*})$ optimal mit Portfolio θ^*.
Annahme: θ^a sei ein Arbitrage, also

$$S \cdot \theta^a \leq 0 \text{ und } V\theta^a \geq 0, \text{ aber nicht beide gleich } 0.$$

Wir betrachten $C' := (C_0^* - S \cdot \theta^a, C^{1*} + V\theta^a)$. C' erfüllt (1.1) mit $\theta = \theta^* + \theta^a$, da C^* (1.1) erfüllt:

$$C_0^* - S \cdot \theta^a + \sum_{i=0}^{d} (\theta_i^* + \theta_i^a) S_i = C_0^* + \theta^* \cdot S \leq R_0$$
$$C_j^* + (V\theta^a)_j - \sum_{i=0}^{d} (\theta_i^* + \theta_i^a) v_j^i = C_j^* - V\theta^* \leq R_j.$$

Da u Nutzenfunktion ist, insbesondere also streng wachsend, folgt $u(C^*) < u(C')$, was einen Widerspruch zur Optimalität von C^* darstellt. Also existiert kein Arbitrage, es gilt NAO.

2.Schritt: Gelte nun NAO. Wir zeigen nun, dass

$$M := \{(C, \theta) : C \text{ erfüllt } (1.1) \text{ und } \theta \perp N\begin{pmatrix} -S^T \\ V \end{pmatrix}\}$$

eine kompakte Menge ist, denn dann liefert der Satz vom Maximum die Existenz einer optimalen Lösung.
Annahme: Sei $(C^n, \theta^n) \subseteq M$ mit $|\theta^n| \to \infty$. Dann gilt o.B.d.A.

$$\theta'^n = \frac{\theta^n}{|\theta^n|} \to \theta' \neq 0$$

und (1.1)(i) ergibt

$$S \cdot \theta'^n \leq \frac{R_0 - C_0^n}{|\theta^n|} \leq \frac{R_0}{|\theta^n|} \to 0,$$

also nach dem Grenzübergang

$$S \cdot \theta' \leq 0.$$

Es folgt weiter mit (1.1)(ii)

$$V\theta'^n \geq \frac{C^n - R}{|\theta^n|} \geq \frac{-R}{|\theta^n|} \to 0,$$

also in der Grenze

$$V\theta' \geq 0.$$

Beide Ungleichungen liefern uns mit NAO, dass $V\theta' = 0$ und $S \cdot \theta' = 0$ gelten, also $\theta' = 0$, da $\theta' \in N\binom{-S^T}{V}^{\perp}$. Das aber ist ein Widerspruch zur Annahme. Also sind die θ^n beschränkt und damit auch die C^n, das heißt, M ist kompakt.

3.Schritt: Seien C^* und C^{**} mit θ^* und θ^{**} zwei verschiedene optimale Lösungen. Da (1.1) eine konvexe Menge beschreibt, erfüllt auch $\overline{C} := (C^* + C^{**})/2$ diese Bedingung. u ist streng konkav und $C^* \neq C^{**}$, also folgt

$$u(\overline{C}) > \frac{u(C^*) + u(C^{**})}{2} = \max_{(1.1)} u(C).$$

Dieser Widerspruch impliziert die Eindeutigkeit der Lösung.

4.Schritt: u ist streng wachsend, also muss die optimale Lösung Bedingung (1.1) mit Gleichheiten erfüllen:

$$\begin{aligned} R_0 &= C_0^* + \theta^* \cdot S \quad \text{und} \\ R_j &= C_j^* - (V\theta^*)_j. \end{aligned}$$

Da $R_0, R_j > 0$ sind, ergibt sich für hinreichend kleine $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &C_0^* + \epsilon(\theta^* \cdot S) > 0 \quad \text{und} \\ &C_j^* - \epsilon(V\theta^*)_j > 0. \end{aligned}$$

Nun lassen sich R_0 und R_j zerlegen in

$$\begin{aligned} R_0 &= \underbrace{C_0^* + \epsilon(\theta^* \cdot S)}_{=:C_0'} + \underbrace{(1-\epsilon)\theta^*}_{=:\theta} \cdot S \\ R_j &= \underbrace{C_j^* - \epsilon(V\theta^*)_j}_{=:C_j'} - (V \underbrace{(1-\epsilon)\theta^*}_{=\theta})_j, \end{aligned}$$

wobei das so erzeugte C' (1.1) erfüllt. u ist konkav, also gilt

$$u(C') \geq u(C^*) + \epsilon \partial_0 u(C')(S \cdot \theta^*) - \epsilon \sum_{j=1}^{k} \partial_j u(C')(V\theta^*)_j.$$

Mit

$$h_j := \begin{cases} \theta^* \cdot S & : j = 0 \\ -(V\theta^*)_j & : j = 1, ..., k \end{cases}$$

gilt somit

$$u(C') \geq u(C^*) + \epsilon \sum_{j=0}^{k} \partial_j u(C') h_j.$$

Wäre nun $C_0^* = 0$, dann hätten wir $\partial_0 u(C') \to \infty$ für $\epsilon \to 0$ und $h_0 > 0$. Analog erhalten wir für $C_j^* = 0$ die Konvergenz $\partial_j u(C') \to \infty$ für $\epsilon \to 0$ und $(V\theta^*)_j < 0$, also für hinreichend kleine $\epsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{k} \partial_j u(C') h_j > 0$$

im Widerspruch zur Optimalität von C^*. Daher muss C^* strikt positiv sein. □

Satz 1.16 erlaubt eine weitere Interpretation risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten und liefert eine weitere Methode zu ihrer Bestimmung. Ist nämlich C^* das Optimum gemäß Satz 1.16, so ergibt die Lagrange-Funktion

$$L(C,\theta;\lambda) = u(C) - \lambda_0(C_0 + \theta\cdot S - R_0) - \lambda_1\cdot(C - V\theta - R)$$

für (C^*,θ^*) und den Lagrange-Multiplikator λ^* die Relationen

$$\begin{aligned} \nabla_C u(C^*) - \lambda^* &= 0, \\ -\lambda_0^* S_0 + (V^T\lambda^*)_0 &= 0 \quad \text{und} \\ -\lambda_0^* S_j + (V^T\lambda^*)_j &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lambda^* = \nabla_C u(C^*),$$

und nach Eigenschaft (i) einer Nutzenfunktion sind die partiellen Ableitungen $\partial_k u$ streng positiv, also

$$S = V^T(\lambda^*/\lambda_0^*) = V^T\left(\frac{\nabla_C u(C^*)}{\partial_0 u(C^*)}\right).$$

Es sind damit

$$\beta = \left(\frac{\nabla_C u(C^*)}{\partial_0 u(C^*)}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned} C_0 + \theta\cdot S &= R_0 \quad \text{und} \\ C - V\theta &= R, \end{aligned}$$

also die Restriktionen erfüllt.
Man beachte, dass ein solches β durch die Wahl einer Nutzenfunktion festgelegt wird, aber es gibt natürlich viele solcher Funktionen!

Kapitel 2

Diskrete dynamische Modelle

In diesem Kapitel betrachten wir die gleiche Situation wie in Kapitel 1, aber mit endlich vielen diskreten Zeitschritten, wobei die Zustände durch einen (endlichen) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ beschrieben werden. Die Preise zu den Zeiten $n \in \{1, ..., N\}$ sind nun Zufallsvariablen, wie auch die Portfolien. Die NAO wird neu formuliert und mit Hilfe von *Martingalmaßen* charakterisiert. Schließlich können Optionen mittels solcher Maße bewertet werden.

2.1 Setting

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_j\}_{j=0}^N$ eine Filtration, also $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq .. \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Ferner beschreibe $S_n : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ mittels $S_n = (S_n^i)_{i=0}^d$ die Preise der $d+1$ Anlagen zur Zeit $t = n$ für $n = 0, ..., N$, wobei die 0-te risikolos ist. O.B.d.A. normieren wir die Preise dabei so, dass $S_0^0 = 1$ und $S_n^0 = (1+r)^n$ sind, r sei also die Zinsrate der risikolosen Anlage.
Weiterhin nehmen wir an, dass $(S_n)_{n=0}^N$ $\{\mathcal{F}_n\}$-adaptiert ist (S_n ist also für jedes n $\mathcal{F}_n$-messbar) und die Momente bis zur zweiten Ordnung existieren, das heißt $S_n \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_n, P; \mathbb{R}^{d+1})$.

Definition 2.1. *Eine* ***Portfolio-Strategie*** *ist eine Familie von $d+1$-dimensionalen Zufallsvariablen $\theta = (\theta_n)_{n=1}^N$, so dass θ_n^i $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar für jedes $n = 1, ..., N$ und jedes $i = 0, ..., d$ ist, und $S_n \cdot \theta_n \in L_1(P)$ gilt.*
θ_n heißt ***Portfolio*** *zur Zeit $t = n$.*
$V_n(\theta) := S_n \cdot \theta_n$ ist der ***Wert*** *der Portfolio-Strategie zur Zeit $t = n$. Für den gegenwertigen Portfoliowert $V_0(\theta)$ definieren wir zusätzlich $\theta_0 = \theta_1$.*
Man beachte, dass $V_n(\theta)$ unter den gegebenen Voraussetzungen $\mathcal{F}_n$-messbar ist.

Bemerkung 2.2. Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_n)_{n=1}^N$, für die jedes X_n schon $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist, nennen wir ***vohersagbar***.

Definition 2.3. *Eine Portfolio-Strategie heißt* ***selbstfinanzierend****, falls*

$$\theta_n \cdot S_n = \theta_{n+1} \cdot S_n$$

für alle $n = 1, ..., N-1$ gilt.

Definition 2.4. *(i) Ein* ***Arbitrage*** *ist eine selbstfinanzierende Portfolio-Strategie θ mit*

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & P(V_0(\theta) = 0) = 1, \\ (\beta) & P(V_N(\theta) \geq 0) = 1 \quad \textit{und} \\ (\gamma) & P(V_N(\theta) > 0) > 0. \end{array}$$

(ii) ***NAO*** *bedeutet, dass der Markt kein Arbitrage zulässt.*

Bemerkung 2.5. Gelten (α) und (β), so ist (γ) äquivalent zu

$$(\gamma') \quad \mathbb{E}_P(V_N(\theta)) > 0.$$

Definition 2.6. *Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P, Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißen* ***äquivalent****, falls gilt*

$$P(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Um die Preise und Portfoliowerte der verschiedenen Zeitpunkte vergleichbar zu machen, sollen diese abgezinst werden:

$$\begin{aligned} \hat{S}_n^i &:= \frac{S_n^i}{(1+r)^n} = \frac{S_n^i}{S_n^0} \\ \hat{V}_n(\theta) &:= \frac{V_n(\theta)}{(1+r)^n} = \theta_n \cdot \hat{S}_n \\ &= \theta_n \cdot (\underbrace{\hat{S}_n - \hat{S}_{n-1}}_{=:\Delta \hat{S}_n}) + \underbrace{\theta_n \cdot \hat{S}_{n-1}}_{\overset{(*)}{=} \theta_{n-1} \cdot \hat{S}_{n-1}} \\ &= \ldots = \theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n + \theta_{n-1} \cdot \Delta \hat{S}_{n-1} + \ldots + \theta_{n-k} \cdot \hat{S}_{n-k} \quad \forall k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

(*) folgt mit der Selbstfinanzierung des θ.
Speziell bedeutet das für den Wert der Strategie θ

$$\begin{aligned} \hat{V}_N(\theta) &= \sum_{n=1}^{N} \theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n + \theta_0 \cdot \hat{S}_0 \quad \text{und} \\ V_N(\theta) &= (1+r)^N \hat{V}_N(\theta), \end{aligned}$$

wobei $\theta_0 \cdot \hat{S}_0 = \theta_0 \cdot S_0$ das zur Zeit $t = 0$ investierte Kapital beschreibt.

2.2 Äquivalente Martingalmaße

Proposition 2.7. *Sei Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß derart, dass $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ ein $(d+1)$-wertiges Q-Martingal ist und $\hat{V}_n(\theta) \in L_1(Q)$ für jedes $n = 0, ..., N$. Dann ist auch $(\hat{V}_n(\theta))_{n=0}^N$ ein Q-Martingal. Es gilt NAO.*

Beweis: $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ ist *Q-Martingal* genau dann, wenn $\hat{S}_n \in L_1(Q)$ für alle $n = 0, ..., N$ und es gelten die nachfolgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (i) & (\hat{S}_n) \text{ ist } \{\mathcal{F}_n\}\text{-adaptiert} \\ (ii) & \mathbb{E}_Q(\hat{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \hat{S}_n \ \mathcal{F}_n\text{-f.s., also } \mathbb{E}_Q(\Delta \hat{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0. \end{array}$$

Wir zeigen also die entsprechenden Eigenschaften für $(\hat{V}_n(\theta))$.
(i): folgt aus Definition

(ii):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(\hat{V}_{n+1}(\theta)|\mathcal{F}_n) - \hat{V}_n(\theta) &= \mathbb{E}_Q(\hat{V}_{n+1}(\theta) - \hat{V}_n(\theta)|\mathcal{F}_n)\\ &= \mathbb{E}_Q(\theta_{n+1} \cdot \Delta\hat{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\ &\overset{(*)}{=} \theta_{n+1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}_Q(\Delta\hat{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n)}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Somit ist $(\hat{V}_n(\theta))_{n=0}^N$ also ein Q-Martingal. Die Gleichung (*) folgt hierbei aus der $\mathcal{F}_n$-Messbarkeit der stochastischen Variable θ_{n+1}.
Es verbleibt uns noch zu zeigen, dass NAO gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(\hat{V}_N(\theta)) &= \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\hat{V}_N(\theta)|\mathcal{F}_{N-1})) = \mathbb{E}_Q(\hat{V}_{N-1}(\theta))\\ &= \ \ldots = \hat{V}_0(\theta) = V_0(\theta) = \theta_0 \cdot S_0\end{aligned}$$

Sei nun $V_0(\theta) = 0$ und $P(V_N(\theta) \geq 0) = 1$. Mit der Q-Martingaleigenschaft und der Äquivalenz beider Maße ergibt sich

$$\mathbb{E}_Q(\underbrace{\hat{V}_N(\theta)}_{\geq 0}) = 0,$$

also

$$P(\hat{V}_N(\theta) > 0) = 0.$$

Es gilt folglich NAO. □

Definition 2.8. *Ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q, für das $(\hat{S}_n)_{n=0}^N$ ein Martingal bildet, heißt* ***risikoneutrales Martingalmaß (RNMM)****.*

Satz 2.9 (Fundamentalsatz). *Es gelte NAO, $\mathcal{F}$ sei endlich. Dann gibt es ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so dass $(\hat{S}_n)$ ein Q-Martingal bildet. Dabei ist $dQ = Z\,dP$ mit einem beschränkten Z.*
Es gilt dann nach Proposition 2.7 für den Wert der Portfoliostrategie θ zur Zeit $t = n$

$$\mathbb{E}_Q(\hat{V}_n(\theta)) = V_0(\theta) = \theta_0 \cdot S_0.$$

Beweis: In einem ersten Schritt definieren wir die Mengen

$$\mathcal{C} = \{X \in L_1(P) :\ X \geq 0, \mathbb{E}_P(X) = 1\} \text{ und}$$

$$\mathcal{V} = \{X \in L_1(P) :\ \exists\theta \text{ selbstfinanzierende Strategie mit } V_0(\theta) = 0, V_N(\theta) = X\}.$$

$\mathcal{C}$ ist somit kompakt und konvex und $\mathcal{V}$ sogar ein endlich dimensionaler Teilraum (da $\mathcal{F}$ als endlich angenommen wurde). NAO impliziert, dass beide Mengen disjunkt sind: Wäre $X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{V}$, so gäbe es ein θ mit den Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll}(\alpha) & V_0(\theta) = 0 & \Rightarrow\ P(V_0(\theta) = 0) = 1,\\ (\beta) & V_N(\theta) = X & \Rightarrow\ P(V_N(\theta) \geq 0) = 1,\\ (\gamma) & \mathbb{E}_P(X) = \mathbb{E}_P(V_N(\theta)) = 1 & \Rightarrow\ P(V_N(\theta) > 0) > 0.\end{array}$$

Damit wäre θ ein Arbitrage, also ein Widerspruch zur NAO.
Der Trennungssatz eines Kompaktums von einer abgeschlossenen Menge liefert nun die Existenz eines Funktionals $\phi \in L_\infty(P)$ und die zweier Skalare b_0, b_1 mit der Beziehung

$$\langle\phi|V\rangle \leq b_0 < b_1 \leq \langle\phi|X\rangle \quad \forall V \in \mathcal{V}, X \in \mathcal{C}.$$

Mit $V = 0$ sehen wir, dass $b_0 \geq 0$ ist. Somit ist $\phi \geq 0$, nach Normierung gilt ferner $\mathbb{E}(\phi) = 1$. Weiter sehen wir für $X = \chi_A/P(A)$, dass $b_1 \leq \int_A \phi/P(A)dP$ gilt. Dabei ist $A \in \mathcal{F}$ beliebig mit $P(A) > 0$.
In einem zweiten Schritt definieren wir nun mit Hilfe des ϕ das zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß Q mittels

$$Q(A) := \int_A \phi dP \geq b_1 P(A).$$

Da $\mathcal{V}$ ein linearer Raum ist, können wir in den obigen Ungleichungen V durch tV ($t \in \mathbb{R}$) ersetzen und erhalten damit

$$\operatorname{sgn}(t)\langle \phi | V \rangle \leq b_0/|t|.$$

Der Übergang zu den Grenzen $\pm\infty$ in t liefert somit

$$0 = \langle \phi | V \rangle = \int_\Omega \phi V dP = \int_\Omega V dQ = \mathbb{E}_Q(V) \quad \forall V \in \mathcal{V}.$$

Im dritten Schritt nehmen wir uns ein $\theta^* = \{\theta_n^*\}_{n=0}^N$ mit $\theta_n^* \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, P; \mathbb{R}^d)$, also eine Strategie bezüglich der risikobehafteten Anlagen. Diese ergänzen wir zur selbstfinanzierenden Strategie θ, indem wir

(i)	$\theta_0^0 := -\sum_{i=1}^d S_0^i \theta_0^i$	$(\Rightarrow V_0(\theta) = 0)$
(ii)	$\theta_{n+1}^0 := \theta_n^0 + \sum_{i=1}^d (\theta_n^i - \theta_{n+1}^i)\hat{S}_n^i$	$(n = 0, ..., N-1;$ beachte: $\hat{S}_n^0 = 1)$

setzen. Damit ist $\theta := (\theta^0, \theta^*)^T$ vorhersagbar und $V_n(\theta) \in L_1(P)$. Ferner ist θ selbstfinanzierend, denn

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} \cdot \hat{S}_n &= \theta_{n+1}^0 \hat{S}_n^0 + \sum_{i=1}^d \theta_{n+1}^i \hat{S}_n^i \\ &= \theta_n^0 \hat{S}_n^0 + \sum_{i=1}^d \theta_n^i \hat{S}_n^i \\ &= \theta_n \cdot \hat{S}_n. \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\begin{aligned} V_0(\theta) = 0 = \mathbb{E}_Q(\hat{V}_N(\theta)) = \mathbb{E}_Q(\sum_{n=1}^N \theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n) &= \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n) \\ = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})) \\ = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \mathbb{E}_Q(\Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})). \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\theta_n^* = \mathbb{E}_Q(\Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})$, so ergibt sich

$$0 = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})^2).$$

Daraus folgt schon, dass $\mathbb{E}_Q(\Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ für jedes n ist, also

$$\mathbb{E}_Q(\hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}_Q(\hat{S}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \hat{S}_{n-1}.$$

$\{\hat{S}_n\}_{n=0}^N$ bildet somit ein Q-Martingal. □

Bemerkung 2.10. Die Definition eines Arbitrage für den Fall $N = 1$ ist hier schwächer formuliert als in Kapitel 1. Das Analogon zu Kapitel 1 ist:

$$\theta \text{ ist Arbitrage} \quad \Leftrightarrow \quad V_0(\theta) \leq 0 \wedge P(V_N(\theta) \geq 0) = 1 \wedge \mathbb{E}_P(V_N(\theta)) > 0.$$

Offenbar ist ein Arbitrage im Sinne von Definition 2.4 ein Arbitrage in diesem erweiterten Sinn. Die Umkehrung gilt jedoch auch, denn NAO im Sinne von Definition 2.4 impliziert die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes Q gemäß Satz 2.9. Ist nun θ ein Arbitrage im erweiterten Sinn, so gilt

$$0 < \mathbb{E}_Q(\hat{V}_N(\theta)) = \mathbb{E}_Q(\theta_0 \cdot S_0) = \theta_0 \cdot S_0 \leq 0,$$

also ein Widerspruch.

2.3 Vollständige Märkte und Bewertungen

Definition 2.11. *X heißt **replizierbar**, falls es eine selbstfinanzierende Strategie θ gibt, so dass $X = V_N(\theta)$ gilt. Ein solches θ heißt **Hedging-Strategie** für X.*
*Ein Markt heißt **vollständig**, falls jedes $X \in L_1(P)$ replizierbar ist.*

Ist X replizierbar, so gilt mit geeignetem θ

$$\frac{X}{(1+r)^N} = \hat{V}_N(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n \cdot \Delta\hat{S}_n.$$

Seien Q ein beliebiges RNMM und X beschränkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\left(\frac{X}{(1+r)^N}\right) &= \mathbb{E}_Q(V_0(\theta)) + \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \Delta\hat{S}_n) \\
&= V_0(\theta) + \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \Delta\hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})) \\
&= V_0(\theta) + \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \underbrace{\mathbb{E}_Q(\Delta\hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})}_{=0}) \\
&= V_0(\theta).
\end{aligned}$$

Proposition 2.12. *(i) Ist der Markt vollständig, so gibt es höchstens ein RNMM.*
(ii) Ist der Markt vollständig und gilt NAO, so ist der Wertprozess $(V_n(\theta))_{n=0}^N$ der X replizierenden Portfolio-Strategie θ P-f.s. eindeutig bestimmt durch

$$V_n(\theta) = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_n), \quad n = 0, ..., N.$$

Beweis: (i) Seien Q_1 und Q_2 zwei RNMM. Mit obiger Überlegung erhalten wir also für jedes replizierbare und beschränkte X

$$\mathbb{E}_{Q_1}(X) = \mathbb{E}_{Q_2}(X).$$

Da der Markt vollständig ist, haben wir diese Beziehung also für alle beschränkten X. Damit gilt aber schon $Q_1 = Q_2$.

(ii) Nach dem Fundamentalsatz (vgl. Satz 2.9 beziehungsweise Satz 2.15) existiert ein RNMM Q. Damit gilt für jede das X replizierende Strategie θ und jeden Zeitpunkt $n \in \{0, ..., N\}$

$$\hat{V}_n(\theta) = \mathbb{E}_Q(\hat{V}_N(\theta)|\mathcal{F}_n) = \frac{\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_n)}{(1+r)^N},$$

da $(V_n(\theta))_{n=0}^N$ ein Q-Martingal bildet (vgl. Proposition 2.7). Wir haben damit

$$V_n(\theta) = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_n),$$

der Wertprozess $(V_n(\theta))_{n=0}^N$ ist also P-f.s. eindeutig bestimmt und somit unabhängig vom replizierenden θ, da nach (i) Q eindeutig ist. □

Bemerkung 2.13. Da wir Optionspreise über den entsprechenden Wert einer Hedging-Strategie bestimmen, sind in einem vollständigen Markt bei geltender NAO die Preise zu jedem Zeitpunkt wohldefiniert. Diese fairen Preise sind die einzigen im erweiterten Markt arbitragefreien.

Betrachten wir nun speziell einen Call auf die Anlage i $(i = 1, ..., d)$, das heißt mit $X = [S_N^i - K]_+$, so erhalten wir zur Zeit n den Preis

$$c_n^i(\theta) = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}_Q([S_N^i - K]_+|\mathcal{F}_n).$$

Analog erhalten wir für den europäischen Put auf Anlage i, also mit $X = [K - S_N^i]_+$, zur Zeit n den Preis

$$p_n^i(\theta) = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}_Q([K - S_N^i]_+|\mathcal{F}_n).$$

In dieser Darstellung sehen wir auch, dass wieder die Parität zwischen europäischen Put und Call besteht:

$$\begin{aligned} c_n^i(\theta) - p_n^i(\theta) &= (1+r)^{n-N}\mathbb{E}_Q([S_N^i - K]_+ - [K - S_N^i]_+|\mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^{n-N}[\mathbb{E}_Q(S_N^i|\mathcal{F}_n) - K] \\ &= S_n^i - (1+r)^{n-N}K. \end{aligned}$$

Satz 2.14. *Für jede der d risikobehafteten Anlagen i $(i = 1, ..., d)$ gilt zu allen Zeitpunkten n $(n = 0, ..., N)$ die Put-Call Parität europäischer Optionen, das heißt*

$$c_n^i(\theta) - p_n^i(\theta) = S_n^i - (1+r)^{n-N}K.$$

Beweis: vgl. Herleitung. □

Abschließend zu diesem Kapitel läßt sich also feststellen, dass zunächst das RNMM Q und eine Strategie θ (eine Hedging-Strategie) gesucht sind, bevor entsprechende Preise bestimmt werden können. Dies kann zum Beispiel über ein Optimierungsproblem geschehen (vgl. Dana, Jeanblanc [11]), indem man den *Wohlstand* zur Zeit N maximiert:

$$\max_{Q,\theta}\{\mathbb{E}_Q(U(V_N(\theta))) \text{ mit } V_0(\theta) = x, V_N(\theta) \geq 0\},$$

wobei U eine Nutzenfunktion wie in Abschnitt 1.3 ist.

2.4 Der Fundamentalsatz für beliebige Zustandsräume

In diesem Abschnitt wollen wir uns nocheinmal dem Fundamentalsatz, also Satz 2.9, widmen, nun aber im allgemeineren Fall beliebiger Zustandräume $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Die Zeitmenge bleibt unverändert $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., N\}$, und die betrachtete Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{T}}$ habe o.B.d.A. die Eigenschaften $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Die allgemeinere Formulierung des Satzes lautet dann:

Satz 2.15 (Fundamentalsatz). *Es gelte NAO, der Zustandsraum sei wie oben beschrieben. Dann gibt es ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so dass $(\hat{S}_n)_{n \in \mathbb{T}}$ ein Q-Martingal bildet. Dabei ist $dQ = Z\,dP$ mit einem beschränkten Z. Weiter gilt für den Wert der Portfoliostrategie θ zur Zeit $t = n$*

$$\mathbb{E}_Q(\hat{V}_n(\theta)) = V_0(\theta) = \theta_0 \cdot S_0.$$

Für den Beweis benötigen wir aber noch den folgenden Satz:

Satz 2.16. *Seien $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ messbar und $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Dann sind die beiden nachstehenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es gibt kein beschränktes $\mathcal{C}$-messbares $\theta : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit $Y \cdot \theta \geq 0$ P-f.s. und $P(Y \cdot \theta > 0) > 0$,

(ii) Es gibt ein beschränktes $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Z > 0$ P-f.s., $\mathbb{E}(Z|Y|) < \infty$ und $\mathbb{E}(ZY|\mathcal{C}) = 0$.

Beweis: Diesen Beweis werden wir zunächst nur für beschränktes Y führen, und in diesem Fall nicht nur die genannte Äquivalenz zeigen, sondern mittels eines Ringschlusses zusätzlich die Äquivalenz von (i) und (ii) zu

(iii) $K \cap L_1^+ = \{0\}$ und

(iv) $\overline{K - L_1^+} \cap L_1^+ = \{0\}$,

wobei der Kegel K durch

$$K := \{Y \cdot \theta : \theta \text{ ist beschränkte } \mathcal{C}\text{-messbare } m\text{-dimensionale Zufallsvariable}\}$$

definiert ist, $L_1^+ = L_1^+(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bedeutet und der Abschluss im L_1-Sinn zu verstehen ist. Danach übertragen wir dann die Aussage des Satzes auch auf unbeschränkte Y.

Schritt 1 ((ii)⇒(i)): Seien θ eine m-dimensionale beschränkte und $\mathcal{C}$-messbare Zufallsvariable, so dass $Y \cdot \theta \geq 0$ P-f.s. gilt, und Z wie in (ii). Dann folgt

$$\mathbb{E}(Y \cdot \theta Z|\mathcal{C}) = \theta \cdot \mathbb{E}(YZ|\mathcal{C}) = 0,$$

also auch

$$\mathbb{E}(Y \cdot \theta Z) = 0.$$

Da nach Voraussetzung dieser Integrand nichtnegativ ist, gilt P-f.s. $Y \cdot \theta Z = 0$, und wegen $Z > 0$ sogar $Y \cdot \theta = 0$ P-f.s., also (i).

Schritt 2 ((i)⇒(iii)): Nehmen wir an, es gebe ein $f \neq 0$ in $K \cap L_1^+$. Dann gibt es zunächst ein $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$ und $f(A) > 0$. Weiterhin gibt es nach Definition des Kegels K ein $\mathcal{C}$-messbares beschränktes θ, so dass $f = Y \cdot \theta \geq 0$ gilt. Damit haben wir dann auch

$$P(Y \cdot \theta > 0) = P(f > 0) \geq P(A) > 0,$$

also ein Widerspruch zu (i).

Schritt 3 ((iii)⇒(iv)): Sei also $f \in \overline{K - L_1^+} \cap L_1^+$, dann existieren eine Folge $h_n \in L_1^+$ sowie eine Folge beschränkter $\mathcal{C}$-messbarer θ_n, so dass

$$0 \leq f = \lim_{n\to\infty} Y \cdot \theta_n - h_n \quad P\text{-f.s.}$$

gilt. Wegen $h_n \geq 0$ erhalten wir somit die Ungleichungen

$$(1) \qquad 0 \leq f \leq \liminf_{n\to\infty} Y \cdot \theta_n \quad P\text{-f.s.}.$$

Wir definieren nun die folgenden Teilmengen von Ω

$$\Omega_1 := \{\omega : \liminf_{n\to\infty} |\theta_n| \leq 1\},$$

$$\Omega_k := \{\omega : k-1 < \liminf_{n\to\infty} |\theta_n| \leq k\} \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

$$\Omega_0 := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \quad \text{und} \quad \Omega_\infty := \Omega \setminus \Omega_0.$$

Diese Mengen liegen aufgrund der $\mathcal{C}$-messbarkeit der θ_n in $\mathcal{C}$. Damit können wir jetzt ein geeignetes Grenzelement θ_∞ konstruieren. Ist dabei $\omega \in \Omega_0$, so gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\omega \in \Omega_k$. Wir wählen in diesem Fall

$$\theta_\infty(\omega) \in HP(\frac{\theta_n}{k}) \cap \overline{B_1(0)},$$

wobei HP die Menge der Häufungspunkte bezeichnet. Diese Wahl ist möglich, da der Schnitt aufgrund der Konstruktion der Ω_k nichtleer ist und die θ_n beschränkt sind. Im Fall von $\omega \in \Omega_\infty$ wählen wir

$$\theta_\infty(\omega) \in HP(\frac{\theta_n}{|\theta_n|}).$$

$\theta_\infty : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist somit wieder $\mathcal{C}$-messbar und beschränkt, das heißt $Y \cdot \theta_\infty \in K$. Aufgrund der Beschränktheit beider Größen und des endlichen Maßes von Ω, liegt dieses Produkt auch in L_1. Weiter haben wir $Y \cdot \theta_\infty \geq 0$, denn mit (1) wissen wir

$$-\epsilon \leq Y \cdot \theta_n$$

für jedes $\epsilon > 0$ und alle $n \geq N(\epsilon)$. Dividieren wir diese Ungleichung nun auf Ω_k durch k beziehungsweise auf Ω_∞ durch $|\theta_n|$ und betrachten die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung für jeden Häufungspunkt von θ_n/k beziehungsweise von $\theta_n/|\theta_n|$, insbesondere also auch für θ_∞. Wir haben somit $Y \cdot \theta_\infty \in K \cap L_1^+$, nach Voraussetzung also

$$(2) \qquad Y \cdot \theta_\infty = 0 \quad P\text{-f.s. auf } \Omega.$$

Für $\omega \in \Omega_0$, das heißt $\omega \in \Omega_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir mit (1) und (2)

$$0 \leq \frac{f}{k} \leq \liminf_{n\to\infty} Y \cdot \frac{\theta_n}{k} \leq Y \cdot \theta_\infty = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

also

$$(3) \qquad f = 0 \quad P\text{-f.s. auf } \Omega_0.$$

Sei nun $\omega \in \Omega_\infty$. Gilt $Y(\omega) = 0$, so impliziert auch hier (1) schon $f(\omega) = 0$. Für $Y(\omega) \neq 0$ muss wegen (2) im eindimensionalen Fall $m = 1$ bereits $\theta_\infty(\omega) = 0$ gelten, was außerhalb einer Nullmenge auf Ω_∞ aber nicht möglich ist, da nach Konstruktion P-f.s. $|\theta_\infty(\Omega_\infty)| = 1$ gilt. Damit ist für $m = 1$ die Behauptung gezeigt.

Für $m \geq 2$ führen wir im Induktionsschritt eine Dimensionsreduktion um eins durch. Die Induktionsannahme lautet daher: die Implikation $(iii) \Rightarrow (iv)$ gilt im $m-1$ dimensionalen Fall, die Dimension geht dabei über Y in den Kegel $K = K(Y)$ ein. Auf Ω_∞ definieren wir nun $k = k(\omega) := i$ den Komponentenindex, für den θ_∞ am größten ist, also $|\theta_\infty^i| \geq |\theta_\infty^j|$ für alle $j = 1, ..., m$ gilt. Damit ist $|\theta_\infty^k| \geq \frac{1}{m} > 0$ für jedes $\omega \in \Omega_\infty$, wegen $|\theta_\infty(\Omega_\infty)| = 1$. Wir wählen nun so ein $\omega \in \Omega_\infty$ beliebig aber fest, dann haben wir mit (2)

$$0 = Y \cdot \theta_\infty = \sum_{i=1}^m Y_i \theta_\infty^i = \sum_{i=1, i \neq k}^m Y_i \theta_\infty^i + Y_k \theta_\infty^k,$$

also

$$Y_k = -\sum_{i=1, i \neq k}^m Y_i \frac{\theta_\infty^i}{\theta_\infty^k}.$$

Wir habe somit weiter für dieses ω

$$\begin{aligned} Y \cdot \theta_n &= \sum_{i=1, i \neq k}^m Y_i \theta_n^i + Y_k \theta_n^k \\ &= \sum_{i=1, i \neq k}^m Y_i \left(\theta_n^i - \frac{\theta_\infty^i}{\theta_\infty^k} \theta_n^k \right). \end{aligned}$$

Wir definieren nun $(m-1)$-dimensionale Zufallsvariablen $\overline{Y}$ und $\overline{\theta}_n$ durch

$$\overline{Y}_i := \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega_0 \\ Y_i \chi_{\{i<k\}} + Y_{i+1} \chi_{\{i \geq k\}}, & \omega \in \Omega_\infty \end{cases}$$

und

$$\overline{\theta}_n^i := \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega_0 \\ \left(\theta_n^i - \frac{\theta_\infty^i}{\theta_\infty^k} \theta_n^k \right) \chi_{\{i<k\}} + \left(\theta_n^{i+1} - \frac{\theta_\infty^{i+1}}{\theta_\infty^k} \theta_n^k \right) \chi_{\{i \geq k\}}, & \omega \in \Omega_\infty. \end{cases}$$

Damit sind auch $\overline{Y}$ beschränkt, die $\overline{\theta}_n$ $\mathcal{C}$-messbar und nach Konstruktion von k beschränkt, das heißt $\overline{Y} \cdot \overline{\theta}_n \in K(\overline{Y})$. Außerdem gilt mit der Wahl dieser Zufallsvariablen auf Ω_∞

$$Y \cdot \theta_n = \overline{Y} \cdot \overline{\theta}_n.$$

Wählen wir weiter $\overline{h}_n \in L_1^+$ als

$$\overline{h}_n := \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega_0 \\ h_n, & \omega \in \Omega_\infty, \end{cases}$$

dann ist mit (3)

$$0 \leq f = \lim_{n \to \infty} \overline{Y} \cdot \overline{\theta}_n - \overline{h}_n \quad P\text{-f.s. in ganz } \Omega,$$

also $f \in \overline{K(\overline{Y}) - L_1^+} \cap L_1^+$ und nach Induktionsannahme somit

$$f = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Schritt 4 ((iv)⇒(ii)): Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$. Dann ist die charakteristische Funktion $\chi_A \neq 0$, nach Voraussetzung gilt damit $\chi_A \notin \overline{K - L_1^+}$. Nun ist im L_1 die Menge $B := \overline{K - L_1^+}$ abgeschlossen und konvex, nach dem Trennungssatz von

Hahn-Banach existiert also ein Funktional $Z \in L_\infty = L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, das χ_A von B strikt trennt, das heißt

$$(4) \qquad Z(\chi_A) > \sup\{Z(f-g) : \, f \in K, g \in L_1^+\}.$$

Betrachten wir dabei die speziellen Funktionen $f = 0 \in K$ und $g_n = n\chi_{\{Z<0\}} \in L_1^+$, so erhalten wir die Ungleichung

$$(5) \qquad \mathbb{E}(Z\chi_A) = Z(\chi_A) > \sup_n -Z(g_n) = \sup_n \mathbb{E}(-Zg_n) = \sup_n n \int_{\{Z<0\}} |Z| dP \geq 0.$$

Wegen der Beschränktheit der rechten Seite gilt daher $P(\{Z < 0\}) = 0$, also

$$Z \geq 0 \quad P\text{-f.s.},$$

im Allgemeinen aber nicht $Z > 0$ P-f.s.. Verwenden wir nun $g = 0 \in L_1^+$ in (4), so erhalten wir

$$\mathbb{E}(Z\chi_A) = Z(\chi_A) > \sup_{f \in K} Z(f) = \sup_{f \in K} \mathbb{E}(Zf) = \sup_\theta \mathbb{E}(ZY \cdot \theta),$$

wobei sich das letzte Supremum auf die Menge der $\mathcal{C}$-messbaren und beschränkten θ bezieht. Die Beschränktheit der rechten Seite

$$\sup_\theta \mathbb{E}(ZY \cdot \theta) = \sup_\theta \mathbb{E}(\theta \cdot \mathbb{E}(ZY|\mathcal{C}))$$

impliziert nun, dass $\mathbb{E}(ZY|\mathcal{C})$ P-f.s. schon 0 sein muss. Dass

$$\mathbb{E}(Z|Y|) = \int_\Omega Z|Y| dP < \infty$$

gilt, folgt schon aus $Z \in L_\infty$, da Y als beschränkt angenommen wird und Ω endliches Maß besitzt. Ein so konstruiertes $Z = Z_A$ erfüllt somit schon alle Bedingungen der Aussage (ii) bis auf die strikte Positivität. Wir suchen daher noch ein Element Z der nichtleeren Menge

$$H := \{Z \in L_\infty : \, Z \geq 0 \, P\text{-f.s.}, \, \mathbb{E}(ZY|\mathcal{C}) = 0 \, P\text{-f.s.}\}$$

mit $P(\{Z = 0\}) = 0$. Dazu definieren wir p als die infimale Wahrscheinlichkeit, dass ein Z aus H gleich 0 ist:

$$p := \inf_{Z \in H} P(\{Z = 0\}).$$

Dann wählen wir eine Minimalfolge $(Z_n) \subset H$, so dass $P(\{Z_n = 0\}) \to_{n\to\infty} p$ gilt, und setzen

$$Z_\infty := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{Z_n}{|Z_n|_\infty}.$$

Damit ist auch $Z_\infty \in L_\infty$, denn

$$|Z_\infty|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1,$$

$Z_\infty \geq 0$, da $Z_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{E}(Z_\infty Y|\mathcal{C}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{-n}}{|Z_n|_\infty} \mathbb{E}(Z_n Y|\mathcal{C}) = 0,$$

da schon alle $\mathbb{E}(Z_n Y|\mathcal{C})$ gleich 0 sind. Also gehört auch Z_∞ zu H. Weiter haben wir damit, nach Konstruktion von Z_∞ und der Wahl von Z_n:

$$p \leq P(\{Z_\infty = 0\}) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}) \leq P(\{Z_n = 0\}) \to_{n\to\infty} p,$$

also $P(\{Z_\infty = 0\}) = p$. p ist somit bezüglich seiner Definition sogar ein Minimum, das an der Stelle $Z_\infty \in H$ angenommen wird. Damit bleibt zu zeigen, dass $p = 0$ gilt. Nehmen wir nun $p > 0$ an, dann hat die Menge

$$A := \{Z_\infty = 0\}$$

positive Wahrscheinlichkeit. Nach obiger Konstruktion gibt es daher ein zu A gehöriges $Z_A \in H$. Setzen wir schließlich

$$Z := Z_\infty + Z_A,$$

so gehört auch Z wieder zu H und es gilt

$$P(\{Z = 0\}) = P(\{Z_\infty = 0\} \cap \{Z_A = 0\}) = p - P(\{\chi_A = 1\} \cap \{Z_A > 0\}). \tag{6}$$

Wegen der Trennungseigenschaft (5) gilt

$$\mathbb{E}(Z_A \chi_A) = Z_A(\chi_A) > 0.$$

Somit existiert eine Menge $\overline{\Omega} \in \mathcal{F}$ mit $P(\overline{\Omega}) > 0$, so dass $Z_A(\overline{\Omega}) > 0$ und $\chi_A(\overline{\Omega}) = 1$ gelten. Somit erhalten wir mit (6) aber

$$P(\{Z = 0\}) \leq p - P(\overline{\Omega}) < p,$$

also einen Widerspruch zur Minimalität von p bezüglich solcher Wahrscheinlichkeiten.

Schritt 5 ((i)⇔(ii) für unbeschränkte Y): Die Implikation (ii)⇒(i), wie in Schritt 1 gezeigt, ist unabhängig von der Beschränktheit des Y. Es genügt daher die Umkehrung zu zeigen. Gilt also (i) für Y, so auch für das beschränkte $\overline{Y} := \frac{Y}{1+|Y|}$. Die Gültigkeit des Satzes für beschränkte Y haben wir schon gezeigt, das heißt es gibt ein beschränktes $\overline{Z} > 0$ zu $\overline{Y}$ mit den Eigenschaften aus (ii). Mit $Z := \frac{\overline{Z}}{1+|Y|}$ haben wir also

(a) $Z > 0$ ist beschränkt, (b) $\mathbb{E}(Z|Y|) = \mathbb{E}(\overline{Z}|\overline{Y}|) < \infty$ und
(c) $\mathbb{E}(ZY|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\overline{ZY}|\mathcal{C}) = 0$.

Damit gehört Z zu Y, es gilt also (ii). □

Bemerkung 2.17. Im Falle der trivialen σ-Algebra $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist der Satz 2.16 äquivalent zu Satz 1.9 in Abschnitt 1.2.

Beweis des Fundamentalsatzes 2.15: Nach Voraussetzung gilt die NAO, also gibt es auch kein Arbitrage in einzelnen Zeitschritten. Gäbe es ein Arbitrage im n-ten Schritt, dann gibt es ein $\mathcal{F}_{n-1}$-messbares α mit $\hat{S}_{n-1} \cdot \alpha = 0$, $\hat{S}_n \cdot \alpha \geq 0$ und $P(\hat{S}_n \cdot \alpha > 0) > 0$. Wählen wir also eine Strategie θ, die im n-ten Schritt das Arbitrage-Portfolio α nutzt und sonst seinen Wert über die risikolose Anlage hält, also

$$\theta_0 \equiv \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-1} = 0, \quad \theta_n = \alpha \text{ und } \theta_{n+1} = \ldots = \theta_N = (\hat{S}_n \cdot \alpha, 0, ..., 0),$$

so stellt diese ein Arbitrage im Sinne von Definition 2.4 dar.
Wir definieren nun die Zuwächse des abgezinsten Preisvektors in n-ten Zeitschritt

$$\Delta\hat{S}_n := \hat{S}_n - \hat{S}_{n-1}, \quad n = 1, ..., N.$$

Damit haben wir die Zerlegung

$$\hat{S}_N = \sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{S}_k + \hat{S}_0 = \sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{S}_k + S_0.$$

Nun wenden wir Satz 2.16 mittels Rückwärtsinduktion auf die Zufallsvariable

$$Y = \Delta\hat{S}_n \mathbb{E}(\prod_{j=n+1}^{N} Z_j | \mathcal{F}_n)$$

in jedem einzelnen Zeitschritt an, wobei wir $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ und $\mathcal{C} = \mathcal{F}_{n-1}$ wählen. Die NAO in den Einzelschritten liefert die Eigenschaft (i) des Satzes, also resultiert wegen (ii) ein $\mathcal{F}_{n-1}$-messbares beschränktes Z_n mit

$$Z_n > 0 \, P\text{-f.s. und } \mathbb{E}(Z_n \Delta\hat{S}_n \mathbb{E}(\prod_{j=n+1}^{N} Z_j | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Damit gilt

$$\mathbb{E}(\Delta\hat{S}_n \prod_{j=n}^{N} Z_j | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Z_n \Delta\hat{S}_n \mathbb{E}(\prod_{j=n+1}^{N} Z_j | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{S}_N \prod_{j=1}^{N} Z_j) &= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(\Delta\hat{S}_n \prod_{j=1}^{N} Z_j) + \mathbb{E}(S_0 \prod_{j=1}^{N} Z_j) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(\Delta\hat{S}_n \prod_{j=n}^{N} Z_j | \mathcal{F}_{n-1})}_{=0} \prod_{j=1}^{n-1} Z_j) + S_0 \mathbb{E}(\prod_{j=1}^{N} Z_j), \end{aligned}$$

also

$$\mathbb{E}(\hat{S}_N \prod_{j=1}^{N} Z_j) = S_0 \mathbb{E}(\prod_{j=1}^{N} Z_j).$$

Wir definieren nun das Maß Q mittels

$$Q(A) = \frac{1}{\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{N} Z_j)} \int_A \prod_{j=1}^{N} Z_j dP, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Damit ist Q äquivalent zu P und es gilt $\mathbb{E}_Q(\hat{S}_N) = S_0 = \hat{S}_0$. Weiterhin haben wir für $n = 1, ..., N$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(\hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}_Q(\Delta\hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}_Q(\hat{S}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{N} Z_j)} \cdot \mathbb{E}_P(\Delta\hat{S}_n \prod_{j=1}^{N} Z_j | \mathcal{F}_{n-1}) + \hat{S}_{n-1} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{N} Z_j)} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} Z_j \underbrace{\mathbb{E}_P(\Delta\hat{S}_n \mathbb{E}_P(\prod_{j=n+1}^{N} Z_j | \mathcal{F}_n) Z_n | \mathcal{F}_{n-1})}_{=0} + \hat{S}_{n-1} \\ &= \hat{S}_{n-1}, \end{aligned}$$

also die Martingaleigenschaft von $(\hat{S}_n)_{n \in \mathbb{T}}$ bezüglich des Maßes Q. □

Kapitel 3

Amerikanische Optionen I

Ab jetzt sollen sogenannte *amerikanische Optionen* betrachtet werden. Im Gegensatz zu den bisher untersuchten *europäischen Optionen* können sie nicht nur zum Endzeitpunkt T sondern zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \leq T$ ausgeübt werden. Der amerikanische Call beinhaltet also das Recht, die zugehörige risikobehaftete Anlage zum Ausübungspreis K innerhalb des Zeitraumes $[0, T]$ zu erwerben. T heißt Verfallszeitpunkt.
Man sieht leicht, dass es aufwendiger sein wird, an faire Preise für diese Optionen zu kommen, da sie eben nicht nur einen Ausübungszeitpunkt besitzen. Es ist aber auch sofort plausibel, dass der Preis einer amerikanischen Option immer mindestens so hoch sein wird wie der einer entsprechenden europäischen Option, da mit ihr mehr Rechte und Möglichkeiten erworben werden. Wie nun aber genau sind diese Optionen zu bewerten zu Zeitpunkten $t \in [0, T]$ und insbesondere für $t = 0$? Wie sehen zugehörige Hedging Strategien aus?
In diesem Kapitel soll dazu der diskrete Fall betrachtet werden. Es sei dafür $n = t$ aus dem diskreten Zeitintervall $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., N\}$.

3.1 Die Snell-Hülle

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{T}})$ die stochastische Basis mit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ als Filtration, wobei wie bisher $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ ist.
Weitere Bezeichnungen seien wie gehabt: $S_n^0 > 0$ ist der Preis der risikolosen Anlage zur Zeit n, also $S_n^0 = S_0^0(1 + r)^n$ mit $r \geq 0$, und S_n^i $(i = 1, ..., d)$ die Preise der d risikobehafteten Anlagen zur Zeit n. Der Wert eines Calls auf die Anlage i beträgt also zur Zeit n $Z_n = [S_n^i - K]_+$ und der eines Puts $Z_n = [K - S_n^i]_+$. Allgemein ist der Wertprozess $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ ein adaptierter stochastischer Prozess.
In diesem Kapitel nehmen wir an, es existiert ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω, so dass $\{\hat{S}_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ mit $\hat{S}_n := S_n/S_n^0$ ein Q-Martingal bildet und $dQ = Z\,dP$ mit einem beschränkten Z gilt. Weiter sei der Markt vollständig, das heißt jedes Z_n ist durch eine selbstfinanzierende Portfolio Strategie replizierbar.
Wie sieht nun der faire Preis U_n zur Zeit n aus? Nun, um keine Arbitragemöglichkeiten zuzulassen, müssen gelten:

$$\begin{aligned} (a) \quad & U_N = Z_N, \\ (b1) \quad & U_{N-1} \geq Z_{N-1}, \\ (b2) \quad & U_{N-1} \geq S_{N-1}^0 \mathbb{E}_Q \left(\frac{U_N}{S_N^0} | \mathcal{F}_{N-1} \right) \end{aligned}$$

sowie zu (b1) und (b2) entsprechende Eigenschaften für frühere Zeitpunkte. Wir definieren daher induktiv (startend mit (a)) für $n = N, ..., 1$

$$U_{n-1} := \max\left\{Z_{n-1}, S^0_{n-1}\mathbb{E}_Q\left(\frac{U_n}{S^0_n}|\mathcal{F}_{n-1}\right)\right\},$$

die *Snell-Hülle* der Z_n.

Proposition 3.1. *$\{\hat{U}_n\} := \{U_n/S^0_n\}$ ist adaptiert und bzgl. Q ein Supermartingal, das heißt es gilt $\mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq \hat{U}_n$ für alle n. $\{\hat{U}_n\}$ ist das kleinste Supermartingal, das $\{\hat{Z}_n\}$ dominiert. Außerdem dominiert $\{\hat{U}_n\}$ den Preisprozess der zugehörigen europäischen Option $\{\hat{u}_n\} = \{\mathbb{E}_Q(\hat{Z}_N|\mathcal{F}_n)\}$.*

Beweis: Es gilt nach Definition

$$\hat{U}_n = \max\{\hat{Z}_n, \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n)\} \geq \begin{cases} \hat{Z}_n \\ \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n). \end{cases}$$

Die obere Ungleichung besagt, dass $\{\hat{U}_n\}$ das $\{\hat{Z}_n\}$ dominiert, und die untere, dass $\{\hat{U}_n\}$ ein Supermartingal ist.
Sei $\{Y_n\}$ ein weiteres Supermartingal mit $Y_n \geq \hat{Z}_n$ für jedes $n \in \mathbb{T}$. Damit gilt zunächst $Y_N \geq \hat{Z}_N = \hat{U}_N$. Aus $Y_{n+1} \geq \hat{U}_{n+1}$ folgt aber

$$Y_n \geq \begin{cases} \mathbb{E}_Q(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ \hat{Z}_n, \end{cases}$$

also auch $Y_n \geq \max\{\hat{Z}_n, \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n)\} = \hat{U}_n$. Damit ist gezeigt, dass $\{\hat{U}_n\}$ das kleinste dominierende Supermartingal ist.
Die letzte Behauptung ist klar für $n = N$. Gelte sie nun für $n \in \{1, ..., N\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \hat{U}_{n-1} &\geq \mathbb{E}_Q(\hat{U}_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &\geq \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\hat{Z}_N|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_N|\mathcal{F}_{n-1}), \end{aligned}$$

mittels Rückwärtsinduktion also die Behauptung. □

3.2 Stoppzeiten

Definition 3.2. *Eine Zufallsvariable $\tau: \Omega \to \mathbb{T}$ heißt **Stoppzeit** (bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{T}}$), falls $\{\omega: \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ (oder äquivalent dazu $\{\omega: \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$) für jedes $n \in \mathbb{T}$ gilt.*

Sei jetzt $\{X_n\}$ ein adaptierter Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann definieren wir $X^\tau_n := X_{n\wedge\tau}$ mit $n \wedge \tau := \min\{n, \tau\}$, das heißt

$$X^\tau_k(\omega) = \begin{cases} X_k(\omega), & k \leq \tau(\omega) \\ X_{\tau(\omega)}(\omega), & k \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

Proposition 3.3. *Sei $\{X_n\}$ adaptiert und τ eine Stoppzeit. Dann ist auch $\{X^\tau_n\}$ adaptiert. Ist $\{X_n\}$ ein (Super-)Martingal, so auch $\{X^\tau_n\}$.*

Beweis: X_n^τ lässt sich als Teleskopsumme schreiben, der Form

$$X_n^\tau = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j (X_j - X_{j-1})$$

mit $\phi_j = \chi_{\{j \le \tau\}}$. Da

$$\{\omega:\ j \le \tau(\omega)\} = \Omega \backslash \{\omega:\ j > \tau(\omega)\} = \Omega \backslash \underbrace{\{\omega:\ j-1 \ge \tau(\omega)\}}_{\in \mathcal{F}_{j-1}} \in \mathcal{F}_{j-1},$$

sind die ϕ_j $\mathcal{F}_{j-1}$-messbar, also vorhersagbar, und damit die $\{X_n^\tau\}$ adaptiert.
Sei nun $\{X_n\}$ ein (Super-)Martingal. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(X_n^\tau|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}_Q(X_0|\mathcal{F}_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_Q(\phi_j(X_j - X_{j-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= X_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\mathbb{E}_Q(X_j|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{j-1}) \\
&= X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j(X_j - X_{j-1}) + \underbrace{\phi_n}_{\ge 0} \underbrace{(\mathbb{E}_Q(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1})}_{=(\le)0} \\
&= (\le) X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j(X_j - X_{j-1}) \\
&= X_{n-1}^\tau,
\end{aligned}$$

also auch $\{X_n^\tau\}$ ein (Super-)Martingal. □

Die Snell-Hülle $\{\hat{U}_n\}$ ist ein Supermartingal. Gilt nun $\hat{Z}_n < \hat{U}_n$ für ein $n \in \mathbb{T}$, so ist $\hat{U}_n = \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Daher ist es naheliegend eine geeignete Stoppzeit einzuführen. Wir definieren

$$\tau^*(\omega) := \min\{n:\ \hat{U}_n(\omega) = \hat{Z}_n(\omega)\}$$

als die *minimale Stoppzeit* für $\{\hat{U}_n\}$.

Proposition 3.4. *τ^* (wie oben definiert) ist eine Stoppzeit und $\{\hat{U}_n^*\} := \{\hat{U}_n^{\tau^*}\}$ ist ein Q-Martingal.*

Beweis: Zur ersten Aussage: Es gilt

$$\{\tau^* = 0\} = \{\hat{U}_0 = \hat{Z}_0\} \in \mathcal{F}_0 \quad \text{und}$$

$$\{\tau^* = k\} = \underbrace{\{\hat{U}_k = \hat{Z}_k\}}_{\in \mathcal{F}_k} \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} \underbrace{\{\hat{U}_j > \hat{Z}_j\}}_{\in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_k,$$

also ist τ^* eine Stoppzeit.
Zur zweiten Aussage: Wir schreiben $\hat{U}_n^*$ wieder als Teleskopsumme

$$\hat{U}_n^* = \hat{U}_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\hat{U}_j - \hat{U}_{j-1}),$$

wobei $\phi_j = \chi_{\{j \le \tau^*\}}$. Damit ist $\hat{U}_{n+1}^* - \hat{U}_n^* = \phi_{n+1}(\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n)$, also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}^* - \hat{U}_n^*|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}_Q(\underbrace{\phi_{n+1}}_{\mathcal{F}_n\text{-messbar}}(\hat{U}_{n+1} - \hat{U}_n)|\mathcal{F}_n) \\
&= \phi_{n+1}(\mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \hat{U}_n).
\end{aligned}$$

Ist $\phi_{n+1} = 1$, so gilt $\tau^* \geq n+1$ und damit (wegen der Definition von τ^*) $\hat{U}_n > \hat{Z}_n$ sowie (wegen der Definition von $\hat{U}_n$) $\mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \hat{U}_n$.
Somit gilt für alle $n \in \mathbb{T}$

$$\mathbb{E}_Q(\hat{U}^*_{n+1} - \hat{U}^*_n|\mathcal{F}_n) = 0,$$

also ist $\{\hat{U}^*_n\}$ ein Q-Martingal. □

Korollar 3.5. *Es gilt* $\hat{U}_0 = \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_{\tau^*}|\mathcal{F}_0) = \sup_\tau \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0)$, *wobei* τ *die Stoppzeiten durchläuft.*

Beweis: $\{\hat{U}^*_n\}$ ist Martingal, also ist

$$\begin{aligned}\hat{U}_0 &= \hat{U}_{0\wedge\tau^*} = \hat{U}^*_0 \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}^*_N|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{N\wedge\tau^*}|\mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{\tau^*}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_{\tau^*}|\mathcal{F}_0) \\ &\leq \sup_\tau \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0).\end{aligned}$$

Andererseits ist τ Stoppzeit, also $\{\hat{U}^\tau_n\}$ ein Supermartingal, das heißt

$$\hat{U}_0 = \hat{U}^\tau_0 \geq \mathbb{E}_Q(\hat{U}^\tau_N|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Damit gilt auch $\hat{U}_0 \geq \sup_\tau \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0)$, also die Behauptung. □

Definition 3.6. $\hat{U}_0$ *heißt* ***fairer Preis*** *der Option auf die Anlage zur Zeit* $n = 0$.

Speziell zeigt sich hier die schon zu Beginn erwähnte Eigenschaft $\hat{U}_0 \geq \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_N|\mathcal{F}_0)$, dass der Wert amerikanischer Optionen nicht kleiner als der der entsprechenden europäischen sein kann.

Bemerkung 3.7. Allgemeiner als im Korollar 3.5 beschrieben gilt:

$$\hat{U}_n = \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_{\tau^*_n}|\mathcal{F}_n) = \sup_{\tau\geq n} \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_n)$$

mit $\tau^*_n(\omega) := \min\{k \geq n : \ \hat{U}_k(\omega) = \hat{Z}_k(\omega)\}$. Der Beweis dazu erfolgt analog dem des Korollars.

Vergleichen wir nun auch diese Preise zur Zeit n mit denen der europäischen Optionen (also für $\tau \equiv N$), so haben wir wieder die erwartete Ungleichung.

Definition 3.8. *Eine Stoppzeit* τ *heißt* ***optimal*** *bzgl.* $\{Z_n\}$, *falls gilt:*

$$\mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0) = \sup_\sigma \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\sigma|\mathcal{F}_0).$$

Mit dieser Definition gilt der folgende Satz:

Satz 3.9. *Eine Stoppzeit* τ *ist genau dann optimal, wenn*

$$\begin{array}{ll} (a) & \hat{Z}_\tau = \hat{U}_\tau \text{ f.s. und} \\ (b) & \hat{U}^\tau_n \text{ ist } Q\text{-Martingal} \end{array}$$

gelten. Insbesondere ist wegen (a) und Korollar 3.5 τ^* *die kleinste optimale Stoppzeit.*

Beweis: Wir zeigen zuerst die Implikation: Aus (a) und (b) folgt, dass τ optimal ist. Mit dem Korollar 3.5 und den Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned}\sup_\sigma \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\sigma|\mathcal{F}_0) &= \hat{U}_0 \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}_N^\tau|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0).\end{aligned}$$

Nach Definition ist τ also optimal.
Bleibt zu zeigen, dass für optimales τ (a) und (b) folgen. Sei also τ optimal. Dann haben wir mit Korollar 3.5

$$\hat{U}_0 = \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau|\mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Da $\{\hat{U}_n^\tau\}$ aber ein Supermartingal ist, gilt zudem

$$\mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_Q(\hat{U}_N^\tau|\mathcal{F}_0) \leq \hat{U}_0^\tau = \hat{U}_0.$$

Diese Ungleichungen implizieren Gleichheiten. Es folgt damit

$$\mathbb{E}_Q(\underbrace{\hat{U}_\tau - \hat{Z}_\tau}_{\geq 0}|\mathcal{F}_0) = 0,$$

also $\hat{U}_\tau = \hat{Z}_\tau$ P-f.s. und somit (a).
Um (b) zu zeigen, benutzen wir wieder die Supermartingaleigenschaft von $\{\hat{U}_n^\tau\}$. Es gelten

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_0^\tau \geq \mathbb{E}_Q(\hat{U}_n^\tau|\mathcal{F}_0)$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}_N^\tau|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}_Q(\underbrace{\mathbb{E}_Q(\hat{U}_N^\tau|\mathcal{F}_{N-1})}_{\leq \hat{U}_{N-1}^\tau}|\mathcal{F}_n) \\ &\leq \ldots \leq \mathbb{E}_Q(\hat{U}_n^\tau|\mathcal{F}_n) = \hat{U}_n^\tau.\end{aligned}$$

Setzen wir die zweite Ungleichung in die erste ein, so erhalten wir mit (a)

$$\begin{aligned}\hat{U}_0 &\geq \mathbb{E}_Q(\hat{U}_n^\tau|\mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau) = \mathbb{E}_Q(\hat{Z}_\tau) = \hat{U}_0.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus der Optimalität der Stoppzeit τ. Es gilt also $\mathbb{E}_Q(\hat{U}_n^\tau|\mathcal{F}_0) = \hat{U}_0$ für jedes $n \in \mathbb{T}$. Weiter haben wir

$$\begin{aligned}0 &\leq \mathbb{E}_Q(\underbrace{\hat{U}_n^\tau - \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}^\tau|\mathcal{F}_n)}_{\geq 0}|\mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}_n^\tau|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}^\tau|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{U}_n^\tau|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}^\tau|\mathcal{F}_0) = 0\end{aligned}$$

also $\hat{U}_n^\tau = \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{n+1}^\tau|\mathcal{F}_n)$, das heißt $\{\hat{U}_n^\tau\}$ ist ein Martingal, und damit gilt (b). $\square$

3.3 Die Doob-Zerlegung

Lemma 3.10. *Sei $\{\hat{X}_n\}$ ein Supermartingal. Dann lässt sich $\hat{X}_n$ für jedes $n \in \mathbb{T}$ zerlegen in*

$$\hat{X}_n = \hat{M}_n - \hat{A}_n,$$

wobei $\{\hat{M}_n\}$ ein Martingal ist, $\hat{A}_0 = 0$ und $\{\hat{A}_n\}$ vorhersagbar und nicht fallend ist. $\{\hat{M}_n\}$ und $\{\hat{A}_n\}$ sind dabei eindeutig bestimmt.

Beweis: Vgl. Satz 7.4 im Stochastikteil! □

Die Zerlegung eines Supermartingals wie in Lemma 3.10 heißt *Doob-Zerlegung.*

Definition 3.11. *Mit $\{\hat{A}_n\}$ aus der Doob-Zerlegung von $\{\hat{U}_n\}$ definieren wir*

$$\tau_{\max}(\omega) := \begin{cases} \min\{n \in \{0, ..., N-1\} : \hat{A}_{n+1}(\omega) > 0\}, & \hat{A}_N(\omega) > 0 \\ N, & \textit{sonst} \end{cases}$$

*als die **maximale Stoppzeit** für ein Supermartingal.*

Proposition 3.12. *$\tau_{\max}$ ist die größte optimale Stoppzeit für $\{\hat{U}_n\}$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage in 4 Schritten.
Schritt 1: Es gilt nach Definition 3.11

$$\{\tau_{\max} = k\} = \underbrace{\{\hat{A}_k(\omega) = 0\}}_{\in \mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k} \cap \underbrace{\{\hat{A}_{k+1}(\omega) > 0\}}_{\in \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_k,$$

also ist $\tau_{\max}$ nach Definition 3.2 eine Stoppzeit.

Schritt 2: Definition 3.11 liefert uns weiter

$$\begin{aligned} \hat{U}_n^{\tau_{\max}} &= \hat{U}_{\tau_{\max} \wedge n} = \hat{M}_{\tau_{\max} \wedge n} - \underbrace{\hat{A}_{\tau_{\max} \wedge n}}_{=0} \\ &= \hat{M}_{\tau_{\max} \wedge n} = \hat{M}_n^{\tau_{\max}}, \end{aligned}$$

also ist $\{\hat{U}_n^{\tau_{\max}}\}$ wegen den Eigenschaften der Doob-Zerlegung ein Q-Martingal.

Schritt 3: Es ist

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\tau_{\max}} &= \chi_{\{\tau_{\max} = N\}} \hat{U}_N + \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{\{\tau_{\max} = j\}} \hat{U}_j \\ &= \chi_{\{\tau_{\max} = N\}} \hat{Z}_N + \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{\{\tau_{\max} = j\}} \max\{\hat{Z}_j, \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{j+1} | \mathcal{F}_j)\}. \end{aligned}$$

Auf der Menge $\{\omega : \tau_{\max} = j\}$ gelten $\hat{A}_{j+1} > 0$ und $\hat{A}_j = 0$ sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{j+1} | \mathcal{F}_j) &= \mathbb{E}_Q(\hat{M}_{j+1} | \mathcal{F}_j) - \mathbb{E}_Q(\hat{A}_{j+1} | \mathcal{F}_j) \\ &= \hat{M}_j - \hat{A}_{j+1} < \hat{M}_j = \hat{U}_j. \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{U}_{\tau_{\max}} = \hat{Z}_{\tau_{\max}}$.

Die Schritte 2 und 3 implizieren nun mit Satz 3.9, dass $\tau_{\max}$ eine optimale Stoppzeit ist.
Schritt 4: Sei τ eine weitere optimale Stoppzeit mit $P(\tau > \tau_{\max}) > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_Q(\hat{U}_\tau|\mathcal{F}_0) = \underbrace{\mathbb{E}_Q(\hat{M}_\tau|\mathcal{F}_0)}_{=\hat{U}_0} - \underbrace{\mathbb{E}_Q(\hat{A}_\tau|\mathcal{F}_0)}_{>0} < \hat{U}_0 = \sup_\sigma \mathbb{E}_Q(\hat{U}_\sigma|\mathcal{F}_0).$$

Damit kann τ aber nicht mehr optimal sein. Also ist $\tau_{\max}$ schon die größte optimale Stoppzeit für $\{\hat{U}_n\}$. □

3.4 Hedging

Die fairen Preise einer Option mit Ertragsprozess $\{Z_n\}$ haben wir bereits bestimmt. Sie sind

$$U_N = Z_N, \qquad U_n = S_n^0 \sup_{\tau\geq n} \mathbb{E}_Q\left(\frac{Z_\tau}{S_\tau^0}|\mathcal{F}_n\right) \quad (n = N-1, ..., 0).$$

Die entsprechenden Werte einer europäischen Option erhalten wir mit der festen Stoppzeit $\tau \equiv N$, also

$$u_n = \frac{S_n^0}{S_N^0}\mathbb{E}_Q(Z_N|\mathcal{F}_n).$$

Für eine Hedging-Strategie betrachten wir nun eine Strategie, die dem Schutz des Optionsverkäufers dient. $\{\hat{U}_n\} = \{\hat{M}_n\} - \{\hat{A}_n\}$ sei die Doob-Zerlegung der abgezinsten Optionspreise. Da wir den Markt als vollständig angenommen haben, existiert eine Portfolio Strategie θ, die $\hat{M}_N$ repliziert, also gilt

$$\hat{M}_N = \hat{V}_N(\theta) = \hat{V}_0(\theta) + \sum_{j=1}^N \theta_j \cdot \Delta\hat{S}_j.$$

Nun ist $\{\hat{V}_n(\theta)\}$ wieder ein Q-Martingal, also gilt

$$\hat{V}_n(\theta) = \mathbb{E}_Q(\hat{V}_N(\theta)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_Q(\hat{M}_N|\mathcal{F}_n) = \hat{M}_n.$$

Damit haben wir $\hat{U}_n = \hat{V}_n(\theta) - \hat{A}_n$ für jedes $n \in \mathbb{T}$ und, da die A_n nichtnegativ sind, $V_n(\theta) \geq U_n$. Diese Ungleichung hängt dabei nicht von der gewählten Hedging Strategie θ ab, da ihr Wertpozess schon durch die zu replizierende Zufallsvariable und das eindeutig bestimmte RNMM Q gegeben ist (vgl. Proposition 2.12(ii)).

Aus den letzten Abschnitten wissen wir bereits: Die optimale Zeit zum Ausüben der Option ist eine Stoppzeit τ. Solange $U_n > Z_n$ gilt, wird nicht ausgeübt, daher muss gelten $\hat{U}_\tau = \hat{Z}_\tau$. Dies führt zu einer natürlichen Wahl von $\tau = \tau_{\min} = \tau^*$. Es darf auch nicht nach $\tau_{\max}$ ausgeübt werden, denn für $n > \tau_{\max}$ gilt $\hat{A}_n > 0$ und damit $\hat{U}_n < \hat{V}_n$ (diese für den Verkäufer günstige Wahl kann für den Optionsinhaber nicht optimal sein). Da dieser Fall also im Optimalfall nicht eintreten kann, ist die angegebene Strategie θ schon eine optimale Hedging Strategie. Ist $\tau \leq \tau_{\max}$ so ist $\{\hat{U}_n^\tau\}$ ein Q-Martingal und somit τ eine optimale Stoppzeit.
Zusammenfassend also gilt:

Satz 3.13. *Sei $\{Z_n\}$ der Ertragsprozess einer amerikanischen Option. Dann gelten:*
(a) Der faire Preis der Option ist zur Zeit n

$$U_n = S_n^0 \sup_{\tau\geq n} \mathbb{E}_Q\left(\frac{Z_\tau}{S_\tau^0}|\mathcal{F}_n\right),$$

insbesondere also $U_0 = \sup_\tau \mathbb{E}_Q(Z_\tau/S^0_\tau|\mathcal{F}_0)$.
(b) Eine optimale Hedging Strategie θ *ist gegeben durch* $\hat{V}_N(\theta) = \hat{M}_N$, *wobei* $\hat{M}_N$ *von dem Martingal der Doob-Zerlegung der Snell-Hülle zu* $\{Z_n\}$ *stammt. Es ist*

$$\hat{V}_N(\theta) = \hat{Z}_N + \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{Z}_j - \mathbb{E}_Q(\hat{U}_{j+1}|\mathcal{F}_j)).$$

Dies folgt aus der Darstellung (2) in Abschnitt 7.4.
(c) Wählt der Inhaber der Option eine optimale Stoppzeit τ, *so gibt es keine Arbitragemöglichkeit für den Verkäufer und der Inhaber realisiert den Gewinn* $V_\tau(\theta)$.

Nun können wir uns noch die Frage stellen: Was wird bei amerikanischen Optionen aus der Paritätsrelation?
Dazu fixieren wir o.B.d.A. $S^0_0 = 1$ und betrachten einen Call, also $Z_n = [S^i_n - K]_+$, mit dem Preis $U_0 = \sup_\tau \mathbb{E}_Q(Z_\tau/S^0_\tau)$ und einen entsprechenden Put, das heißt $\bar{Z}_n = [K - S^i_n]_+$, mit Preis $\bar{U}_0 = \sup_\tau \mathbb{E}_Q(\bar{Z}_\tau/S^0_\tau)$. Mit diesen Daten gilt

$$\begin{aligned}
U_0 &= \sup_\tau \mathbb{E}_Q(\underbrace{[S^i_\tau - K]_+}_{=S^i_\tau - K + [K - S^i_\tau]_+}/S^0_\tau) \\
&\le \sup_\tau \mathbb{E}_Q(\hat{S}^i_\tau - K/S^0_\tau) + \bar{U}_0 \\
&= S^i_0 - K \inf_\tau \mathbb{E}_Q((S^0_\tau)^{-1}) + \bar{U}_0,
\end{aligned}$$

also

$$\boxed{U_0 - \bar{U}_0 \le S^i_0 - K \inf_\tau \mathbb{E}_Q((S^0_\tau)^{-1}).}$$

Allgemeiner können wir analog bestimmen, dass

$$U_n - \bar{U}_n \le S^i_n - S^0_n K \sup_{\tau \ge n} \mathbb{E}_Q((S^0_\tau)^{-1}|\mathcal{F}_n).$$

Wir haben außerdem für den Preis u_n des zugehörigen europäischen Calls

$$\begin{aligned}
u_n &= S^0_n \mathbb{E}_Q([S^i_N - K]_+/S^0_N|\mathcal{F}_n) \\
&\ge S^0_n \mathbb{E}_Q(\hat{S}^i_N - K/S^0_N|\mathcal{F}_n) \\
&= S^0_n \hat{S}^i_n - S^0_n K/S^0_N \\
&= S^i_n - K \underbrace{\frac{S^0_n}{S^0_N}}_{\le 1} \ge S^i_n - K,
\end{aligned}$$

da die Anlage 0 mit einer positiven Zinsrate verzinst wird. Damit gilt jedenfalls $u_n \ge S^i_n - K$ und $u_n \ge 0$, also $u_n \ge [S^i_n - K]_+ = Z_n$ für jedes n. Da $\{\hat{u}_n\}$ zudem ein Q-Martingal ist, folgt $\hat{U}_n = \hat{u}_n$, also $U_n = u_n$ für jedes n.
Der Wert eines amerikanischen Calls ist folglich gleich dem Wert eines entsprechenden europäischen Calls. **Aber:** Dies ist für Verkaufsoptionen im allgemeinen falsch.

3.5 Konsum-Investment-Strategie

Es sei $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{T}}$ ein Prozess, der für $c_n \ge 0$ Konsum (Verbrauch) bedeutet, sowie im Fall $c_n \le 0$ für zusätzliche Investitionen steht. Damit ändert sich die Definition der *selbstfinanzierenden Portfolio Strategie* θ im folgenden Sinne:

$$(1) \qquad \theta_{n-1} \cdot S_{n-1} - c_n = \theta_n \cdot S_{n-1}.$$

Beachte, dass dies die $\mathcal{F}_{n-1}$-messbarkeit von c_n impliziert. Eine *zulässige Konsum-Investment-Strategie (ZKI-Strategie)* ist somit ein Paar (θ, c) vorhersagbarer Prozesse, das (1) erfüllt.
Wir haben

$$\begin{array}{ll} (i) & V_n - V_{n-1} = \Delta V_n = \theta_n \cdot (S_n - S_{n-1}) - c_n = \theta_n \cdot \Delta S_n - c_n \\ (ii) & V_n = V_0 + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta S_j - \sum_{j=1}^n c_j \\ (iii) & \hat{V}_n = \hat{V}_0 + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta \hat{S}_j - \sum_{j=1}^n \hat{c}_j \\ (iv) & \Delta \hat{V}_n = \theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n - \hat{c}_n, \end{array}$$

wobei $\hat{S}_j = S_j / S_j^0$ und $\hat{c}_j = c_j / S_{j-1}^0$ bedeuten.

Sei (θ, c) eine ZKI-Strategie mit $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{T}$. Dann gilt mit (iv)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(\Delta \hat{V}_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}_Q(\theta_n \cdot \Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}_Q(\hat{c}_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \theta_n \underbrace{\mathbb{E}_Q(\Delta \hat{S}_n | \mathcal{F}_{n-1})}_{=0} - \hat{c}_n \leq 0. \end{aligned}$$

$\{\hat{V}_n\}$ ist in diesem Fall also ein Q-Supermartingal.

Sei jetzt $\{\hat{U}_n\}$ ein Q-Supermartingal, $\{\hat{U}_n\} = \{\hat{M}_n\} - \{\hat{A}_n\}$ seine Doob-Zerlegung und θ die selbstfinanzierende Strategie (im herkömmlichen Sinne) mit $\hat{M}_N = \theta_N \cdot \hat{S}_N$. Dann ist

$$\mathbb{E}_Q(\hat{U}_N | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_Q(\hat{M}_N | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}_Q(\hat{A}_N | \mathcal{F}_n),$$

und wegen $\theta_N \cdot \hat{S}_N = \theta_0 \cdot \hat{S}_0 + \sum_{j=1}^N \theta_j \cdot \Delta \hat{S}_j$

$$\mathbb{E}_Q(\hat{M}_N | \mathcal{F}_n) = \theta_0 \cdot \hat{S}_0 + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta \hat{S}_j.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \hat{U}_n &= \hat{M}_n - \hat{A}_n \\ &= \mathbb{E}_Q(\hat{M}_N | \mathcal{F}_n) - \hat{A}_n \\ &= \theta_0 \cdot \hat{S}_0 + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta \hat{S}_j - \sum_{j=1}^n \Delta \hat{A}_j. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $c_j := (1+r)^{j-1} \Delta \hat{A}_j$ und $\vartheta_n := \theta_n + (d_n, 0)$, wobei $d_0 = 0$ und $d_n = d_{n-1} + \hat{c}_n$ für $n = 1, ..., N$ ist. Dann bildet (ϑ, c) eine ZKI-Strategie.
Diese Überlegungen ergeben das folgende Resultat:

Korollar 3.14. *Sei $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{T}}$ der Ertragsprozess einer amerikanischen Option. Dann gibt es eine ZKI-Strategie (θ, c), die die Snell-Hülle $\{\hat{U}_n\}_{n \in \mathbb{T}}$ repliziert, also dass*

$$\hat{U}_n = \theta_0 \cdot \hat{S}_0 + \sum_{j=1}^n \theta_j \cdot \Delta \hat{S}_j - \sum_{j=1}^n \hat{c}_j$$

gilt, wobei $\hat{c}_j \geq 0$ für jedes $j = 1, ..., n$ ist.

Kapitel 4

Das Black-Scholes-Modell

Dieses Kapitel bildet das Kernstück der Vorlesung, nämlich die Black-Scholes Theorie zur Bewertung europäischer Optionen im zeitkontinuierlichen Fall. Im Gegensatz zum diskreten Fall sind die Preisprozesse S_t^i nicht beliebige adaptierte stochastische Prozesse, sondern es wird angenommen, dass sie stochastischen Differentialgleichungen genügen. Wir werden zeigen, dass es ein äquivalentes Martingalmaß Q gibt, so dass die abgezinsten Preise ein Martingal bilden, dass NAO gilt und dass der Markt vollständig ist. Die fairen Preise sind von der Form $u(t, S_t)$, und $\theta_t = \nabla u(t, S_t)$ ist eine zugehörige Hedging-Strategie, wobei $u(t, x)$ der berühmten Black-Scholes Gleichung genügt. Der mit einem Stern gekennzeichnete Abschnitt, der sich mit der analytischen Behandlung der Black-Scholes Gleichung befasst, kann beim Lesen übersprungen werden.

4.1 Setting

Die Situation aus den letzten Kapiteln soll jetzt zeitstetig betrachtet werden. Dafür sei $J := [0, T]$ das zugrunde gelegte Zeitintervall. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei wie gehabt ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit der vollständigen Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in J}$, also

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \cup \mathcal{N} \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F} \quad \forall s, t \in J, s < t,$$

wobei $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}$ bedeutet. Es gebe wieder $d + 1$ Anlagen, die 0-te risikolos, die restlichen d risikobehaftet, mit Preisen $S_t^i : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i = 0, ..., d)$ zur Zeit $t \in J$. $\{S_t\} = \{[S_t^0, ..., S_t^d]^T\} \in L_2(J \times \Omega; \mathbb{R}^{d+1})$ sei der $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptierte vektorwertige Preisprozess.
Wir nehmen an, S_t sei durch stochastische Differentialgleichungen gegeben. *Formal* bedeutet das:

$$(1) \begin{cases} dS_t^0 = r(t) S_t^0 dt, & S_0^0 = 1 \\ dS_t^i = \mu^i(t) S_t^i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(t) S_t^i dB_t^j, & S_0^i \neq 0 \text{ als AW gegeben,} \end{cases}$$

wobei $i = 1, ..., d$ und $t \in J$. $r \in L_\infty(J)$ ist die deterministische Zinsrate der risikolosen Anlage zur Zeit t, $\mu^i \in L_\infty(J \times \Omega)$ die Wachstumsraten, $\sigma_j^i \in L_\infty(J \times \Omega)$ die Varianzen (Volatilitäten) und $\{B_t\}_{t \in J}$ eine m-dimensionale Brownsche Bewegung mit unabhängigen Komponenten B_t^j. Ferner nehmen wir an, dass $\mathcal{F}_t$ die vervollständigte von den $\{B_s\}_{s \leq t}$ induzierte σ-Algebra ist. $\{\mu^i(t)\}$ und $\{\sigma_j^i(t)\}$ seien adaptierte Prozesse, dass heißt $\mu^i(t)$ und $\sigma_j^i(t)$ sind $\mathcal{F}_t$-messbar. Wir definieren

$$\mu(t) = (\mu^1(t), ..., \mu^d(t))^T \quad \text{und} \quad \sigma(t) = (\sigma_j^i(t))_{i,j}.$$

(1) bedeutet eigentlich:

$$\begin{cases} S_t^0 = 1 + \int_0^t r(\tau) S_\tau^0 d\tau \\ S_t^i = S_0^i + \int_0^t \mu^i(\tau) S_\tau^i d\tau + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_j^i(\tau) S_\tau^i dB_\tau^j, \end{cases}$$

wobei die Integrale über die dB_τ^j als Itô-Integrale zu verstehen sind. Beachte, dass wir o.B.d.A. $S_0^i \neq 0$ für alle i annehmen können, da $S_0^i = 0$ schon $S_t^i \equiv 0$ ergibt. Außerdem gilt $S_t \in L_2(P)$.
Weiter sei für $t \in J$

$$\theta = \{\theta_t\} = \{[\theta_t^0, ..., \theta_t^d]^T\}$$

eine *Portfolio-Strategie*, dass heißt θ ist $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptiert und $\theta_t^i S_t^i \in L_2(J \times \Omega)$ für jedes $i = 0, ..., d$. Startet man also mit einem Anfangskapital von x, so beträgt das Kapital unter θ zur Zeit $t \in J$:

$$x + \int_0^t \theta_\tau \cdot dS_\tau = x + \sum_{i=0}^d \int_0^t \theta_\tau^i dS_\tau^i.$$

Definition 4.1. *Eine Portfolio-Strategie θ **finanziert (repliziert)** ein $X \in L_2(P)$, falls*

$$\theta_T \cdot S_T = X \quad \textit{und} \quad \theta_t \cdot S_t = \theta_0 \cdot S_0 + \int_0^t \theta_\tau \cdot dS_\tau \quad \forall t \in J.$$

*Gibt es zu X ein finanzierendes θ, so heißt X **finanzierbar (replizierbar)**. Wir bezeichnen dann $\theta_t \cdot S_t$ als **fairen Preis** der Option mit Ertrag X.*

Bemerkung 4.2. Die Begriffe in Definition 4.1 sind analog zu denen in Kapitel 2. Die erste Bedingung an eine finanzierende Strategie entspricht $V_N(\theta) = X$ $(T = N)$ und die zweite der ***Selbstfinanzierungsbedingung***. Diese lässt sich formal als

$$d\theta_t \cdot S_t + d\theta_t \cdot dS_t = 0$$

schreiben.

Definition 4.3. *Eine selbstfinanzierende Portfolio-Strategie θ heißt **Arbitrage**, falls gelten:*

$$\begin{array}{ll} (i) & P(\theta_0 \cdot S_0 = 0) = 1, \\ (ii) & P(\theta_T \cdot S_T \geq 0) = 1 \quad \textit{und} \\ (iii) & P(\theta_T \cdot S_T > 0) > 0 \quad (\textit{das heißt } \mathbb{E}_P(\theta_T \cdot S_T) > 0). \end{array}$$

***NAO** gilt, falls es kein Arbitrage gibt.*

Definition 4.4. *Der Markt heißt **vollständig**, falls jedes $X \in L_2(P)$ repliziert werden kann.*

Auch die abgezinsten Preise seien analog zum vorigen Kapitel definiert, dass heißt hier für $t \in J$:

$$\hat{S}_t = \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) S_t,$$

insbesondere also $\hat{S}_t^0 = 1$. Die Itô-Formel (vgl. Theorem 10.5 und Korollar 10.8) liefert dann mit (1):

$$d\hat{S}_t^i = (\mu^i(t) - r(t)) \hat{S}_t^i dt + \hat{S}_t^i \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(t) dB_t^j.$$

4.2 Äquivalente Martingalmaße

Definition 4.5. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt (für den Markt)* ***risikoneutral****, falls*

(i) *Q ist äquivalent zu P und*
(ii) *$\{\hat{S}_t\}_{t \in J}$ bildet ein Martingal bezüglich Q,*
also $S_t \in L_1(Q)$ und $\mathbb{E}_Q(\hat{S}_t|\mathcal{F}_s) = \hat{S}_s \quad \forall s, t \in J, s < t$.

Wir nennen risikoneutrale Maße (RNM) deshalb auch äquivalente Martingalmaße (EMM).

Beim Wechsel von P zu Q können sich die Integrabilitätseigenschaften eines Portfolios θ ändern. Deswegen wird im Folgenden das zugrunde liegende Maß in der Regel angegeben. Insbesondere schreiben wir

$$V_2(Q) := \{h \in L_2(J \times \Omega, \lambda \otimes Q) : h \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-adaptiert}\}.$$

Proposition 4.6. *Es gelte NAO. Dann sind die (fairen) Preise P-f.s. eindeutig bestimmt.*

Beweis: Wir betrachten nur die Zeit $t = 0$. Angenommen die Preise sind nicht wohldefiniert. Dann gibt es zwei Portfolien θ und φ, die die Option replizieren und zur Zeit $t = 0$ unterschiedlichen Wert besitzen. O.B.d.A. würde also gelten:

$$\theta_T \cdot S_T = \varphi_T \cdot S_T \quad \text{und} \quad \theta_0 \cdot S_0 < \varphi_0 \cdot S_0 \quad P\text{-f.s..}$$

O.B.d.A. sei weiter $r \equiv 0$, da der Zinseffekt der Anlage 0 auch in den Preisen der restlichen Anlagen berücksichtigt werden kann, ohne dass deren Struktur dabei verändert wird, also $S_t^0 \equiv 1$. Daraus definieren wir nun die Portfolien $\psi := \theta - \varphi$ und $\bar{\psi} := \psi + v$, mit $v = [-\psi_0 \cdot S_0, 0, ..., 0]^T \geq 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_0 \cdot S_0 &= 0, \\
\psi_t \cdot S_t - \psi_0 \cdot S_0 &= \psi_t \cdot S_t - \psi_0 \cdot S_0 S_t^0 = \bar{\psi}_t \cdot S_t \quad \text{und} \\
\psi_t \cdot S_t - \psi_0 \cdot S_0 &= \int_0^t \psi_\tau \cdot dS_\tau = \int_0^t \bar{\psi}_\tau \cdot dS_\tau, \quad \text{also}
\end{aligned}$$

$$\bar{\psi}_t \cdot S_t = \bar{\psi}_0 \cdot S_0 + \int_0^t \bar{\psi}_\tau \cdot dS_\tau.$$

$\bar{\psi}$ ist also selbstfinanzierend und es gilt

$$\bar{\psi}_T \cdot S_T = \psi_T \cdot S_T - \psi_0 \cdot S_0 S_T^0 = 0 - \psi_0 \cdot S_0 > 0.$$

Damit ist $\bar{\psi}$ ein Arbitrage, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Proposition 4.7. *Sei $\{\hat{S}_t\}$ ein Q-Martingal ($Q \sim P$) und θ eine selbstfinanzierende* ***elementare Portfolio-Strategie****, dass heißt $\theta = \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{[t_i, t_{i+1})} \theta_i$ mit $\theta_i \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t_i})$. Dann ist auch $\{\hat{V}_t\} = \{\theta_t \cdot \hat{S}_t\}$ ein Q-Martingal. Insbesondere gilt NAO für elementare Strategien.*

Beweis: Wir wählen $t > s$. O.B.d.A. sei $t = t_{l+1}$ und $s = t_k$ $(l \geq k)$, sonst verfeinern wir entsprechend die Zerlegung t_i von J. Mit $\hat{S}_i := \hat{S}_{t_i}$ gilt dann

$$\hat{V}_t = \hat{V}_s + \int_s^t \theta_\tau \cdot d\hat{S}_\tau = \hat{V}_s + \sum_{i=k}^{l} \theta_i \cdot (\hat{S}_{i+1} - \hat{S}_i) \quad \text{und damit}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(\hat{V}_t|\mathcal{F}_s) &= \hat{V}_s + \sum_{i=k}^{l} \mathbb{E}_Q(\theta_i \cdot (\hat{S}_{i+1} - \hat{S}_i)|\mathcal{F}_{t_k}) \\
&= \hat{V}_s + \sum_{i=k}^{l} \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(\theta_i \cdot (\hat{S}_{i+1} - \hat{S}_i)|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_{t_k}) \\
&= \hat{V}_s + \sum_{i=k}^{l} \mathbb{E}_Q(\theta_i \cdot \underbrace{\mathbb{E}_Q(\hat{S}_{i+1} - \hat{S}_i|\mathcal{F}_{t_i})}_{=0}|\mathcal{F}_{t_k}) \\
&= \hat{V}_s,
\end{aligned}$$

also die Behauptung. Insbesondere folgt aus $\hat{V}_0 = \theta_0 \cdot \hat{S}_0 = 0$ schon $\mathbb{E}_Q(\hat{V}_T) = 0$, also gilt NAO. □

Hier könnte man *beliebige* Preisprozesse $\hat{S}_t$ zulassen! Aber diese Proposition ist insofern unbefriedigend, als dass nur elementare Portfolio-Strategien zugelassen sind. Allerdings gibt es für beliebige Preisprozesse $\hat{S}_t$ bereits in der Definition von $\hat{V}_t$ Schwierigkeiten. Daher stammt die Annahme, dass S_t einer stochastischen Differentialgleichung genügt.

Nehmen wir nun an, es existieren $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptierte $\gamma^j \in L_\infty(J \times \Omega)$ mit

$$(2) \qquad \mu^i(t) - r(t) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^i(t)\gamma_t^j$$

für jedes $i = 1, ..., d$, also

$$\mu(t) - r(t) = \sigma(t)\gamma_t,$$

dann gilt

$$(3) \qquad d\hat{S}_t^i = (\mu^i(t) - r(t))\hat{S}_t^i dt + \hat{S}_t^i \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^i(t) dB_t^j = \hat{S}_t^i \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^i(t) \underbrace{(\gamma_t^j dt + dB_t^j)}_{=:dB_t^{*j}}.$$

Wir suchen nun ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathcal{F}$, so dass $\{B_t^*\}$ eine BB bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ist. Wenden wir dazu das Theorem von Girsanov (vgl. Theorem 12.5) mit $\{h_t\} = \{-\gamma_t\}$ an, so erhalten wir das gewünschte Maß Q. Nach (3) bilden die abgezinsten Preise $\{\hat{S}_t\} = \{\hat{S}_0 + \int_0^t \hat{S}_\tau \sigma_\tau dB_\tau^*\}$ ein Q-Martingal.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von γ ist die Surjektivität von $\sigma(t)$ für jedes $t \in J$, also Rang $\sigma(t) = d$. Äquivalent dazu sind die Injektivität von $\sigma^T(t)$ beziehungsweise die positive Definitheit von $\sigma(t)\sigma^T(t)$.
Damit erfüllt

$$\gamma(t) = \sigma^T(t)(\sigma(t)\sigma^T(t))^{-1}(\mu(t) - r(t))$$

die Gleichung (2).
Damit γ aus L_∞ ist, benötigen wir die Beschränktheit von $(\sigma\sigma^T)^{-1}$, was wiederum äquivalent zu

$$(\sigma(t)\sigma^T(t)\xi|\xi) \geq \alpha|\xi|, \quad t \in J, \, \xi \in \mathbb{R}^d \quad P\text{-f.s.} \tag{4.1}$$

ist, mit einem $\alpha > 0$ unabhängig von t und ξ. Schließlich erhalten wir für jede selbstfinanzierende Portfoliostrategie θ (bzgl. Q)

$$\begin{aligned}
d(\theta_t \cdot \hat{S}_t) &= e^{-\int_0^t r(s)ds} d(\theta_t \cdot S_t) - r(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}\theta_t \cdot S_t dt \\
&= e^{-\int_0^t r(s)ds}\theta_t \cdot dS_t - r(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}\theta_t \cdot S_t dt \\
&= \theta_t \cdot d\hat{S}_t
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbb{E}_Q(\theta_T \cdot \hat{S}_T) = \mathbb{E}_Q(\theta_0 \cdot \hat{S}_0) + \mathbb{E}_Q(\int_0^T \theta_\tau^* \cdot (\mathrm{diag}(\hat{S}_\tau^*)\sigma_\tau dB_\tau^*) = \mathbb{E}_Q(\theta_0 \cdot \hat{S}_0),$$

wobei $\hat{S}_t^* = [\hat{S}_t^1, ..., \hat{S}_t^d]^T$ und $\theta_t^* = [\theta_t^1, ..., \theta_t^d]^T$ bedeuten, so dass NAO gilt.

Theorem 4.8. *Es gelten die Standardannahmen des Kapitels und die Bedingung (4.1) mit einem $\alpha > 0$. Dann existiert ein RNM Q (äquivalent zu P), so dass $\{\hat{S}_t\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_t\}$ in $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ist. Insbesondere gilt dann NAO (bzgl. Q).*

Bemerkung 4.9.

- (i) Nach (3) und Proposition 12.4 mit $M_t = \hat{S}_t^i$ gilt $\hat{S}_t \in L_p(Q)$ für alle $p \in [1, \infty)$. Theorem 12.5 und Proposition 12.4 zeigen ferner, dass $dQ = M_T dP$ mit $M_T \in L_p(P)$ für alle $p \in [1, \infty)$. Somit gilt auch $\hat{S}_t \in L_p(P)$ für alle $p \in [1, \infty)$. Die Normen von $\hat{S}_t$ sind in beiden Räumen gleichmäßig beschränkt bzgl. $t \in J$.
- (ii) Zur Gültigkeit der Implikation: NAO $\Rightarrow$ $\exists$RNM Q $vgl. Delbaeu, Schachermayer$[13]!
- (iii) $\hat{S}_t > 0$ P-f.s., wenn $S_0 > 0$ (nach (3) und Proposition 12.4 mit $M_t = \hat{S}_t^i$).

Korollar 4.10. *Es gelten die Voraussetzungen des Theorems 4.8. Dann ist der Markt vollständig (bzgl. Q). Der faire Preis zur Zeit $t \in J$ einer europäischen Option mit Ertrag $X \in L_2(Q)$ ist gleich*

$$e^{-\int_t^T r(s)ds}\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_t).$$

Beweis: Sei $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ gegeben und $\tilde{X} := e^{-\int_0^T r(s)ds}X$. Dann ist $\{\tilde{V}_t\} = \{\mathbb{E}_Q(\tilde{X}|\mathcal{F}_t)\}$ ein Q-Martingal, wobei das Q aus dem Theorem 4.8 stammt. Der Darstellungssatz für Martingale (vgl. Theorem 12.1) besagt nun, dass $h^j \in V_2(Q)$ existieren, so dass $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t h_s \cdot dB_s^*$ für jedes $t \in J$ gilt. Wir können nun das System $h_t^j = \sum_{i=1}^d \sigma_j^i(t)\theta_t^i\hat{S}_t^i$ durch

$$\theta_t^* = (\mathrm{diag}(\hat{S}_t^*))^{-1}\sigma(t)(\sigma^T(t)\sigma(t))^{-1}h_t$$

lösen. Dabei ist $\hat{S}_t^* > 0$, da $\hat{S}_0^i > 0$, also $\mathrm{diag}(\hat{S}_t^*)$ invertierbar. Dann folgt mit (3)

$$\begin{aligned}\theta_t^* \cdot d\hat{S}_t^* &= \theta_t^* \cdot (\mathrm{diag}(\hat{S}_t^*)\sigma_t dB_t^*) \\ &= h_t \cdot dB_t^* = d\tilde{V}_t.\end{aligned}$$

Man beachte auch, dass $\theta_t^i \cdot \hat{S}_t^i \in V_2(Q)$ für jedes $i = 1, ..., d$ gilt. Wir setzen nun $\theta_t^0 := \tilde{V}_t - \theta_t^* \cdot \hat{S}_t^*$ und $V_t := e^{\int_0^t r(s)ds}\tilde{V}_t$. Dann gelten $V_T = X$, $V_t = \theta_t \cdot S_t$ mit der Strategie $\theta = \{\theta_t\} = \{[\theta_t^0, \theta_t^{*T}]^T\}$ und

$$\begin{aligned}\theta_t \cdot dS_t = \theta_t \cdot d(e^{\int_0^t r(s)ds}\hat{S}_t) &= \theta_t \cdot e^{\int_0^t r(s)ds}d\hat{S}_t + \theta_t \cdot r(t)e^{\int_0^t r(s)ds}\hat{S}_t dt \\ &= \theta_t^* \cdot e^{\int_0^t r(s)ds}d\hat{S}_t^* + r(t)V_t dt = dV_t.\end{aligned}$$

Also ist θ selbstfinanzierend und repliziert X, das heißt der Markt ist vollständig. Der faire Preis ist dann $\theta_t \cdot S_t = V_t$, wie in der Behauptung.

□

4.3 Die Black-Scholes Gleichung

Mit den Annahmen und Bezeichnungen

– B_t^j	m unabhängige Brownsche Bewegungen
– $S_0^i > 0$	$i = 1, ..., d$
– $\mathcal{F}_t$	die von $\{B_s\}_{s\le t}$ erzeugte vervollständigte σ-Algebra
– $r \in L_\infty(J)$	$J = [0, T]$
– $\sigma_j^i \in C(J)$	$i = 1, ..., d,\ j = 1, ..., m$
– $\mu^i \in L_\infty(J \times \Omega)$	adaptiert
– $\exists \alpha > 0 :$	$(\sigma_t\sigma_t^T \xi\vert\xi) \ge \alpha\vert\xi\vert^2,\ t \in J,\ \xi \in \mathbb{R}^d$

haben wir bereits folgendes System stochastischer Differentialgleichungen zur Beschreibung der zukünftigen Preise der $d + 1$ Anlagen:

$$(1)\begin{cases} dS_t^0 = & r(t)S_t^0 dt, \qquad\qquad\qquad\qquad S_0^0 = 1 \\ dS_t^i = & S_t^i(\mu^i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_j^i(t)dB_t^j), \quad S_0^i > 0 \quad (i = 1, ..., d). \end{cases}$$

Ziel und Idee ist es nun die selbstfinanzierende Portfolio-Strategie θ und die fairen Preise zur Zeit t zu finden, indem man sich eine Ertragsfunktion $g \in C(\mathbb{R}_+^d)$ vorgibt mit $g \ge 0$ sowie $|g(x)| \le C(1 + |x|)$, und $g(S_T^*) =: Z$ repliziert. Dabei ist wieder $S_t^* := (S_t^1, ..., S_t^d)^T$.
$Y_t := \theta_t \cdot S_t$ ist dann der faire Preis zur Zeit t mit der Endbedingung $Y_T = Z$.
Mögliche Funktionen für g sind zum Beispiel:

$$\begin{aligned} g(x) &= [x^k - K]_+ && \text{bei einem Call auf Anlage } k \\ g(x) &= [K - x^k]_+ && \text{bei einem Put auf Anlage } k. \end{aligned}$$

Die Grundidee besteht nun im Ansatz:

$$(4) \qquad Y_t = u(t, S_t^*).$$

Dabei gilt es $u(t, x)$ für $t \in J$ und $x = (x^1, ..., x^d) \in \mathbb{R}_+^d$ zu bestimmen.
u besitzt eine Endbedingung der Form $u(T, S_T^*) = Y_T = Z = g(S_T^*) \in L_2(P) \cap L_2(Q)$, also

$$u(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^d.$$

Die Itô-Formel auf die Ansatz-Gleichung angewendet und die Gleichungen (1) liefern

$$\begin{aligned} dY_t &= \partial_t u\, dt + \sum_{i=1}^d \partial_i u\, dS_t^i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,k,l} S_t^i \sigma_l^i \sigma_l^k S_t^k \partial_k \partial_i u\right) dt \\ &= \left(\partial_t u + \sum_i \partial_i u S_t^i \mu^i + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\sum_l \sigma_l^i \sigma_l^k\right) S_t^i S_t^k \partial_k \partial_i u\right) dt + \\ &\quad + \sum_j \left(\sum_i \sigma_j^i S_t^i \partial_i u\right) dB_t^j. \end{aligned}$$

Andererseits ist $Y_t = \theta_t \cdot S_t = \theta_t^* \cdot S_t^* + \theta_t^0 S_t^0$. Mit der Selbstfinanzierungsbedingung ergibt sich somit

$$\begin{aligned} dY_t &= \theta_t \cdot dS_t \\ &= \theta_t^0 r(t) S_t^0 dt + \sum_i \theta_t^i S_t^i \mu_t^i dt + \sum_i \sum_j \theta_t^i S_t^i \sigma_j^i(t) dB_t^j. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich beider Darstellungen nach Satz 10.4 ergibt im stochastischen Teil

$$\sigma_t^T(\mathrm{diag}(S_t^*)\nabla u) = \sigma_t^T(\mathrm{diag}(S_t^*)\theta_t^*).$$

Da σ^T injektiv ist, heißt das $S_t^i\partial_i u = \theta_t^i S_t^i$ für alle i, wählen wir also

$$(I) \qquad \theta_t^i = \partial_i u(t, S_t^*), \quad i = 1, ..., d.$$

Der Koeffizientenvergleich im deterministischen Teil liefert

$$\partial_t u + \nabla u\cdot(\mathrm{diag}(S_t^*)\mu_t) + \frac{1}{2}\sigma_t\sigma_t^T : (\mathrm{diag}(S_t^*)\nabla^2 u \mathrm{diag}(S_t^*)) = \theta_t^0 r_t S_t^0 + \theta_t^*\cdot(\mathrm{diag}(S_t^*)\mu_t).$$

Durch Einsetzen von (I) verbleibt uns

$$\partial_t u + \frac{1}{2}(\sigma_t\sigma_t^T) : (\mathrm{diag}(S_t^*)\nabla^2 u \mathrm{diag}(S_t^*)) = \theta_t^0 r_t S_t^0.$$

Da

$$u(t, S_t^*) = Y_t = \theta_t^* \cdot S_t^* + \theta_t^0 S_t^0$$

ist, gilt mit (I)

$$\theta_t^0 S_t^0 = u - \theta_t^* \cdot S_t^* = u - \nabla u \cdot S_t^*.$$

Wir wählen also

$$(II) \qquad \theta_t^0 = (S_t^0)^{-1}(u(t, S_t^*) - \nabla u(t, S_t^*) \cdot S_t^*).$$

Das durch (I) und (II) definierte θ erfüllt

$$\theta_t \cdot S_t = u(t, S_t^*) \text{ und } d(\theta_t \cdot S_t) = \theta_t \cdot d(S_t), \quad t \in J.$$

Setzen wir nun noch (II) in den deterministischen Teil des Koeffizientenvergleichs ein und ersetzen wieder S_t^* durch x, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung

$$(III) \qquad \partial_t u + \frac{1}{2}\underbrace{(\sigma_t\sigma_t^T)}_{=:a_t} : (\mathrm{diag}(x)\nabla^2 u \mathrm{diag}(x)) = r_t(u - x \cdot \nabla u), \quad x \in (0, \infty)^d.$$

Damit ist die berühmt gewordene Black-Scholes Gleichung in d Dimensionen zu lösen:

$$(BS)\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(t)x_i x_k\partial_i\partial_k u = & r(t)(u - \sum_i x_i\partial_i u), \quad x_i > 0, t \in J \\ u(T, x) = & g(x). \end{cases}$$

Man beachte, dass das Problem (BS) nicht mehr vom Drift μ_t abhängig ist!

Bei $a(t) = \sigma(t)\sigma^T(t)$ handelt es sich nach Voraussetzung um eine symmetrische, gleichmäßig beschränkte und gleichmäßig positiv definite Matrix. Daher ist (BS) parabolisch in umgekehrter Zeitrichtung.
Die starke Ausartung der Koeffizienten in (BS) auf $\partial\mathbb{R}_+^d$ können wir mittels Euler-Transformation beseitigen:
Wir ersetzen x durch e^y, das heißt x^i durch e^{y^i}, und u durch v mit der Eigenschaft

$$v(t, y) = u(t, x) = u(t, e^y) = v(t, \log x).$$

Für die ersten partiellen Ableitungen erhalten wir damit

$$x^i\partial_i u(t, x) = \partial_i v(t, \log x)$$

und für die zweiten partiellen Ableitungen

$$\partial_i\partial_j v(t,\log x) = (x^j\partial_j)(x^i\partial_i u)(t,x) = \begin{cases} x^i x^j \partial_i\partial_j u(t,x), & i \neq j \\ (x^i)^2\partial_i^2 u(t,x) + x^i\partial_i u(t,x), & i = j. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung für v lautet damit

$$\partial_t v + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t)\partial_i\partial_j v = r(t)\left(v - \sum_i \partial_i v\right) + \frac{1}{2}\sum_i a_{ii}(t)\partial_i v.$$

Die Zeitrichtung können wir nun noch durch zeitliche Spiegelung umkehren. Hierzu ersetzen wir t durch $t' := T - t$ und v durch w mit $w(t,y) = v(T-t,y)$. Damit erhalten wir nun die transformierte BS-Gleichung in w der Form:

$$(BS')\begin{cases} \partial_t w - \frac{1}{2}a(t') : \nabla_y^2 w = & -r(t')w + b(t')\cdot\nabla_y w, \quad t \in J, y \in \mathbb{R}^d \\ w(0,y) = & w_0(y) = g(e^y) \end{cases}$$

mit $b_i(t') = r(t') - a_{ii}(t')/2$.

Satz 4.11. *Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty)^d) \cap C([0,T] \times (0,\infty)^d)$ von (BS) mit $|u(t,x)| \leq C(1+|x|)$ für $(t,x) \in J \times (0,\infty)^d$ und höchstens eine Lösung $w \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ von (BS') mit $|w(t,y)| \leq Ce^{\alpha|y|}$ für $(t,y) \in J \times \mathbb{R}^d$ mit Konstanten $C, \alpha \geq 0$.*

Beweis: Wegen der Eindeutigkeit der Euler-Transformation sowie der Linearität von (BS) und (BS') reicht es, (BS') mit $w_0 = 0$ zu betrachten. Sei also w eine Lösung von (BS') mit $w(0) = w_0 = 0$ und den Eigenschaften aus der Behauptung. Wir werden nun $w \leq 0$ zeigen. Durch Betrachtung von $-w$ folgt dann schon $w \equiv 0$ und somit der Satz. Wählen wir dazu eine Funktion $\chi \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\chi(s) \geq (1+\alpha)|s|$ für $s \in \mathbb{R}$ sowie χ', χ'' beschränkt, und setzen dann $\varphi(y) = \prod e^{\chi(y_k)}$ für $y \in \mathbb{R}^d$. Es sei ferner $L = \partial_t - \frac{1}{2}a(t') : \nabla_y^2 - b(t')\cdot\nabla_y + r(t')$. Dann ist $|L\varphi| \leq \lambda\varphi$ für ein $\lambda > 0$. Wenn $w(t_0,y_0) > 0$ für ein $(t_0,y_0) \in J \times \mathbb{R}^d$, so gilt $t_0 > 0$ und $w(t_0,y_0) - \delta\varphi(y_0) > 0$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Wegen der Wachstumsvoraussetzung nimmt die Funktion $h(t,y) := e^{-\lambda t}w(t,y) - \delta\varphi(y)$ ihr strikt positives Maximum an einer Stelle $(t_1,y_1) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d$ an. Dort gilt

$$\partial_t h(t_1,y_1) \geq 0, \quad \nabla_y h(t_1,y_1) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_y^2 h(t_1,y_1) \text{ ist negativ semidefinit.}$$

Somit ergibt sich

$$a(t_1') : \nabla_y^2 h(t_1,y_1) = \operatorname{tr}(a(t_1')\nabla_y^2 h(t_1,y_1)) = \operatorname{tr}(a(t_1')^{1/2}\nabla_y^2 h(t_1,y_1)a(t_1')^{1/2}) \leq 0,$$

da $(a(t_1')^{1/2}\nabla_y^2 h(t_1,y_1)a(t_1')^{1/2}\xi|\xi) = (\nabla_y^2 h(t_1,y_1)a(t_1')^{1/2}\xi|a(t_1')^{1/2}\xi) \leq 0$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. Somit ist $(\lambda + L)h(t_1,y_1)$ strikt positiv. Andererseits gilt

$$(\lambda + L)h = -\delta\lambda\varphi - \delta L\varphi \leq 0,$$

also ein Widerspruch. □

Bemerkung 4.12 (Anwendbarkeit der Itô-Formel und Setting). Wir haben schon gesehen, dass $\{S_t^i\} \in V_2(P) \cap V_2(Q)$ für alle $i = 0,1,...,d$. Ferner zeigt Proposition 12.4, dass $\hat{S}_t^i > 0$ P-f.s. und somit auch $S_t > 0$ P-f.s. gilt.
Weiter haben wir nach Bemerkung 4.13 für den Put:

$$\begin{cases} u \in C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty)^d) \cap BC([0,T] \times (0,\infty)^d) \\ \partial_t u, x_i\partial_i u, x_i x_j \partial_{ij} u \in BC([0,T-\epsilon] \times (0,\infty)^d) \end{cases}$$

mit $\epsilon > 0$. Aufgrund der Parität (P) (vgl. Abschnitt 4.5.7) erfüllt u im Falle des Calls die gleichen Eigenschaften mit der Ausnahme, dass hier nur

$$|u(t,x)| \leq C(1+|x|)$$

gilt. Man kann aber zeigen, dass die Itô-Formel für $u(t,S_t^*)$ in dieser Situation genauso gilt. Dafür muss man im Beweis der Itô-Formel (vgl. Theorem 10.5) den Schritt 3 wie folgt abändern:
Man wendet Schritt 3 zunächst auf die Funktion $\chi_k u$ (k fest) an, wobei (χ_k) eine Folge von Abschneidern mit den folgenden Eigenschaften ist:

$$\begin{aligned}
&\chi_k \in C^2(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leq \chi_k \leq 1,\\
&\operatorname{supp}\chi_k \subset \{x \in \mathbb{R}^d : x_j \geq 1/k \text{ für alle } j = 1,...,d\},\\
&\chi_k(x) = 1, \text{ wenn } x_j \geq 2/k \text{ für alle } j = 1,...,d,\\
&|\partial_j \chi_k| \leq Ck \quad \text{und} \quad |\partial_{ij}\chi_k| \leq Ck^2.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von der dominierenden Konvergenz und den oben aufgeführten Wachstumseigenschaften von u folgt dann die Itô-Formel im Grenzwertfall $k \to \infty$. Ferner folgt aus Bemerkung 4.13 und der noch folgenden Eigenschaft (P) (vgl. Abschnitt 4.5), dass $x_i\partial_i u \in B([0,T] \times (0,\infty)^d)$ im Falle eines Calls und eines Puts ist. Somit gilt $\{\theta_t \cdot S_t\} \in V_2(P) \cap V_2(Q)$, und θ aus (I) und (II) ist in der Tat eine selbstfinanzierende Portfolio-Strategie, die den Ertrag $g(S_T^*)$ repliziert. Dies rechtfertigt den Ansatz (4) für die fairen Preise.

4.4 Die explizite Lösung der BS-Gleichung

Der schnellste und direkteste Weg die BS-Gleichung zu lösen geht über Fourier-Transformation von (BS') in der y-Variable. Die transformierte Gleichung hat die Gestalt

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w} + \frac{1}{2}(a(t')\xi|\xi)\tilde{w} = & -r(t')\tilde{w} + \imath(\xi \cdot b(t'))\tilde{w} \\ \tilde{w}(0) = & \tilde{w}_0. \end{cases}$$

Damit können wir ihre Lösung durch Variation der Konstanten direkt hinschreiben:

$$\tilde{w}(t,\xi) = \tilde{w}_0(\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}(Q_t\xi|\xi) - \int_0^t r(T-s)ds + \imath(\xi|b_0(t))\right)$$

mit $Q_t = \int_0^t a(T-s)ds$ und $b_0(t) = \int_0^t b(T-s)ds$.
Betrachten wir nun die Dichte der Gaußschen Normalverteilung, also

$$\gamma_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det\sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}(x-\mu)|x-\mu)\right),$$

und deren Fourier-Transformation

$$\tilde{\gamma}_{\mu,\sigma}(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma\xi|\xi)\right)\exp\left(-\imath(\xi|\mu)\right),$$

so können wir die Lösung der transformierten Gleichung wieder rücktransformieren. Damit erhalten wir

$$\boxed{(BSF') \qquad w(t,y) = \exp\left(-\int_0^t r(T-s)ds\right)\int_{\mathbb{R}^d} w_0(y-s)\gamma_{-b_0(t),Q_t}(s)ds}$$

für w, und nach Umkehrung der Euler-Transformation und Reversion der Zeit für u den folgenden Ausdruck:

$$u(t,x) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\int_{\mathbb{R}^d} g(e^s)\gamma_{b_t,P_t}(\log x - s)ds$$

mit $P_t = \int_t^T a(s)ds$, $b_t^i = -\int_t^T (r(s) - a_{ii}(s)/2)ds$, $e^s = (e^{s_1}, ..., e^{s_d})^T$ und $\log x = (\log x_1, ..., \log x_d)^T$.
Die Black-Scholes Formel (BSF) lautet somit

$$\boxed{(BSF) \qquad u(t,x) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\int_{\mathbb{R}_+^d} g(y)\gamma_{b_t,P_t}(\log\frac{x}{y})\frac{dy}{\prod_i y_i}.}$$

Bemerkung 4.13. Sei g und somit w_0 beschränkt, was im Falle des Puts zutrifft. Dann liefert (BSF'), dass $w \in BC^{1,2}([\epsilon,T]\times\mathbb{R}^d)\cap BC([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ für $\epsilon > 0$. Folglich gelten

$$\begin{cases} u \in C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty)^d) \cap BC([0,T] \times (0,\infty)^d) \\ \partial_t u, x_i\partial_i u, x_i x_j \partial_{ij} u \in BC([0,T-\epsilon] \times (0,\infty)^d) \end{cases}$$

für $i,j = 1,...,d$ mit $\epsilon > 0$. Wenn g global lipschitz ist und kompakten Träger hat, dann ist $x_i\partial_i u \in B([0,T] \times (0,\infty)^d)$. Dies gilt zum Beispiel für den Put.

Betrachten wir nun den Spezialfall $d = 1$, $a(t) \equiv \sigma^2$, $r(t) \equiv r$ für einen Call, also $g(x) = [x-K]_+$, so erhalten wir durch Einsetzen in (BSF) den fairen Preis

$$c(t,x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^\infty \frac{y-K}{y}\exp\left(-\frac{(\log(x/y) + (T-t)(r-\sigma^2/2))^2}{2(T-t)\sigma^2}\right)dy.$$

Mit den Substitionen

$$s := \frac{\log(x/y) + (T-t)(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad t' := T-t \quad \text{und}$$

$$S_x^{t'} := \frac{\log(x/K) + t'(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{t'}}$$

vereinfacht sich die Darstellung auf

$$c(t,x) = x\phi(S_x^{t'} + \sigma\sqrt{t'}) - Ke^{-rt'}\phi(S_x^{t'}),$$

wobei ϕ die Verteilungsfunktion der Gaußschen Normalverteilung ist, also

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt.$$

Häufig findet man diese Lösung auch in der Form:

$$\boxed{\begin{array}{c} c(t,x) = x\phi(d_1(t',x)) - Ke^{-rt'}\phi(d_2(t',x)) \\ \text{mit} \quad d_1(t',x) = S_x^{t'} + \sigma\sqrt{t'} \quad \text{und} \quad d_2(t',x) = S_x^{t'}. \end{array}}$$

4.5 Die Griechen der BS-Formel

Betrachten wir nun die BS-Formel für den Call mit $d = 1$ und $\sigma, r > 0$ konstant. Dann haben wir

$$c(t,x) = x\phi(d(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d(T-t,x) - \sigma\sqrt{T-t})$$

mit $\phi(s) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{s} e^{-\tau^2/2}d\tau$ und $d(t',x) = 1/(\sigma\sqrt{t'})(\log(x/K) + t'(r+\sigma^2/2))$. Im Folgenden stehe d für $d(T-t,x)$ und t' für $T-t$.
Die *Griechen* der BS-Formel sind partielle Ableitungen dieser und definiert, wie in den folgenden Abschnitten beschrieben.

4.5.1 Das Delta

$\Delta(t,x) := \partial_x c(t,x)$. Damit also

$$\begin{aligned}
\Delta(t,x) &= \phi(d) + x\phi'(d)\partial_x d - Ke^{-rt'}\phi'(d-\sigma\sqrt{t'})\partial_x d \\
&= \phi(d) + \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-d^2/2} - \frac{Ke^{-rt'}}{\sqrt{2\pi}}e^{-d^2/2+d\sigma\sqrt{t'}-t'\sigma^2/2}\right)\partial_x d \\
&= \phi(d) + \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-d^2/2} - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{x}{K}e^{-t'(r+\sigma^2/2)}e^{-d^2/2}e^{t'(r+\sigma^2/2)}\right)\partial_x d \\
&= \phi(d).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist Delta immer positiv. Blicken wir zurück zur Herleitung der BS-Gleichung, so sehen wir, dass das Delta gerade der Anteil der risikobehafteten Anlage im Portfolio ist. Da dieser also nicht negativ werden kann, ist es für das Modell nicht einschränkend, keinen Leerverkauf zuzulassen. Leerverkauf zuzulassen würde bedeuten, dass ein Verkauf der risikobehafteten Anlage möglich ist, auch wenn man diese gar nicht besitzt.

4.5.2 Die Volatilität Sigma

σ ist die Volatilität des Preisprozesses $\{S_t^*\}$, denn wir haben den Ansatz über die stochastische Differentialgleichung $dS_t^* = \mu S_t^* dt + \sigma S_t^* dB_t$ gewählt. Der analoge Koeffizient im Differential von c muss also die Volatilität der Option sein. Die Itô-Formel liefert dafür

$$dc_t = (\partial_t c + \mu S_t^*\partial_x c + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t^*}^2\partial_x^2 c)dt + (\sigma S_t^*\partial_x c)dB_t.$$

Daher definiert $\Sigma := \frac{\sigma S_t^*}{c_t}\partial_x c$ die Volatilität des Optionspreises.
Weiter definieren wir

$$\eta := \frac{S_t^*}{c_t}\partial_x c(t, S_t^*) \quad \text{bzw.} \quad \eta(t,x) = \frac{x\partial_x c(t,x)}{c(t,x)}$$

die *Elastizität des Optionspreises* auf den zugehörigen Anlagenpreis. Damit gilt $\Sigma = \eta\sigma$. Die Elastizität ist aber stets größer als 1, denn wir haben

$$\eta(t,x) = \frac{x\phi(d)}{x\phi(d) - \underbrace{Ke^{-rt'}\phi(d-\sigma\sqrt{t'})}_{>0}} > 1,$$

das heißt der Preis der Option reagiert überproportional auf Änderungen des Preises der Anlage.

Analog sei auch der Drift der Option definiert, also

$$\mu_c := \frac{1}{c}(\partial_t c + \mu x \partial_x c + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_x^2 c).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\mu_c - r &= \frac{1}{c}(\partial_t c + \mu x \partial_x c + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_x^2 c - rc) \\ &= \frac{1}{c}(\underbrace{\partial_t c + rx\partial_x c + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_x^2 c - rc}_{=0 \text{ wegen (BS)}} + \mu x \partial_x c - rx\partial_x c) \\ &= \frac{1}{c}(\mu - r)x\partial_x c \\ &= \eta(\mu - r)\end{aligned}$$

(Man vergleiche diese Fakten mit der Risikoanalyse im Abschnitt 1.1!).

4.5.3 Das Gamma

$\Gamma(t,x) := \partial_x^2 c(t,x)$. Also

$$\begin{aligned}\Gamma(t,x) &= \partial_x \Delta(t,x) = \partial_x \phi(d(t',x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \cdot \partial_x d \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \frac{1}{\sigma\sqrt{t'}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\sigma x \sqrt{t'}} \phi'(d) > 0.\end{aligned}$$

Damit ist $c(t,\cdot)$ eine streng wachsende konvexe Funktion.

4.5.4 Das Theta

$\Theta(t,x) := \partial_{t'} c(t,x))$. Also

$$\begin{aligned}\Theta(t,x) = &-\partial_t c(t,x) \\ &= x\phi'(d)\partial_{t'} d - \underbrace{Ke^{-rt'}\phi'(d-\sigma\sqrt{t'})}_{=x\phi'(d)}(\partial_{t'} d - \frac{\sigma}{2\sqrt{t'}}) + Kre^{-rt'}\phi(d-\sigma\sqrt{t'}) \\ &= \frac{\sigma x}{2\sqrt{t'}}\phi'(d) + Kre^{-rt'}\phi(d-\sigma\sqrt{t'}) > 0.\end{aligned}$$

Mit abnehmender Restlaufzeit verliert die Option also an Wert.

4.5.5 Das Rho

$\mathrm{R}(t,x) := \partial_r c(t,x)$. Also

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(t,x) &= x\phi'(d)\partial_r d - \underbrace{Ke^{-rt'}\phi'(d-\sigma\sqrt{t'})}_{=x\phi'(d)}\partial_r d + Kt'e^{-rt'}\phi(d-\sigma\sqrt{t'}) \\ &= Kt'e^{-rt'}\phi(d-\sigma\sqrt{t'}) > 0.\end{aligned}$$

Eine wirtschaftliche Interpretation dieses Vorzeichens könnte wie folgt lauten: Wenn der Zins steigt, so wird die risikolose Anlage attraktiver, so dass die Nachfrage nach der risikolosen Anlage steigt und die der Option sinkt. Um dieser Nachfrageverschiebung entgegen zu wirken, muss sich daher auch der Wert der Option bei dem höheren Zins schneller erhöhen, um als Alternative konkurrenzfähig zu bleiben. Es steigt also effektiv auch die Verzinsung der Option.

4.5.6 Das Vega

$\mathrm{Vega}(t,x) := \partial_\sigma c(t,x)$. Also

$$\begin{aligned}\mathrm{Vega}(t,x) &= x\phi'(d)\partial_\sigma d - Ke^{-rt'}\phi'(d-\sigma\sqrt{t'})(\partial_\sigma d - \sqrt{t'})\\ &= \sqrt{t'}Ke^{-rt'}\phi'(d-\sigma\sqrt{t'}) > 0.\end{aligned}$$

Der Preis der Option steigt mit der Volatilität der risikobehafteten Anlage.

4.5.7 Die Parität

Wir betrachten hier gleich den allgemeinen Fall. Seien dazu $d \in \mathbb{N}$, $r \in L_1(J)$ und $\sigma \in C(J)$ beliebig, dann gilt auch hier die Paritätsgleichung, wie sie schon in den ersten Kapiteln nachgewiesen wurde, das heißt

$$(P) \qquad c_k(t,S_t^*) - p_k(t,S_t^*) = S_t^k - K\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right).$$

Dabei löst c_k (BS) mit $g(x) = [x_k - K]_+$, c_k ist also der Preis für den Call auf die Anlage k, und p_k löst (BS) mit $g(x) = [K - x_k]_+$, p_k ist also der Preis des zugehörigen Puts. Da (BS) linear ist, ist $c_k - p_k$ demnach die Lösung zu $g(x) = x_k - K$.
Damit reduziert sich die Behauptung für die Gültigkeit der Parität wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von (BS) auf:

Proposition 4.14. *$u(t,x) = x_k - K\exp(-\int_t^T r(\tau)d\tau)$ ist Lösung von (BS) mit $g(x) = x_k - K$.*

Beweis: Die Endbedingung mit dem geforderten g gilt offensichtlich. Bleibt also zu zeigen, dass u auch der Differentialgleichung genügt. Bestimmen wir dafür die nötigen Ableitungen von u, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= -Kr(t)\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right),\\ \partial_i u &= \delta_{ik} \quad \text{und}\\ \partial_i\partial_j u &= 0.\end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Werte in die BS-Gleichung ergibt dann

$$\begin{aligned}\partial_t u + \frac{1}{2}a_{ij}x_ix_j\partial_i\partial_j u &= -Kr(t)\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right)\\ &= r(t)x_k - Kr(t)\exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right) - r(t)x_k\\ &= r(t)\cdot(u - x_i\partial_i u),\end{aligned}$$

und liefert damit die Behauptung. □

Unter Verwendung der Darstellung des Preises eines Calls für konstantes r und σ aus dem vorherigen Abschnitt im eindimensionalen Fall, liefert uns die Parität den fairen Preis des zugehörigen Puts als

$$\begin{aligned} p(t,x) &= c(t,x) - x + Ke^{-rt'} \\ &= x\phi(S_x^{t'} + \sigma\sqrt{t'}) - x + Ke^{-rt'} - Ke^{-rt'}\phi(S_x^{t'}) \\ &= Ke^{-rt'}\phi(-S_x^{t'}) - x\phi(-S_x^{t'} - \sigma\sqrt{t'}). \end{aligned}$$

Dabei gilt $t' = T - t$ und

$$S_x^{t'} = \frac{\log(x/K) + t'(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{t'}}.$$

4.6 (*) Analytische Behandlung von (BS)

In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode zur Behandlung von (BS) vorstellen, die unabhängig von der konkreten Lösungsformel ist und somit auch auf allgemeinere Probleme angewendet werden kann. Sie liefert außerdem Aussagen für das Verhalten bei $t \to T$. Startpunkt der folgenden Betrachtungen soll das Problem (BS') sein. Die Euler-Transformation hat hierbei das Halbraumproblem in ein Ganzraumproblem überführt. Die Annahmen sind

$$\begin{array}{ll} r \in C(J), & J = [0,T], \\ \sigma \in C(J;\mathbb{R}^{d\times m}) & \text{und} \\ (\sigma(t)\sigma^T(t)\xi|\xi) \geq \alpha|\xi|^2 & \forall \xi \in \mathbb{R}^d, t \in J, \end{array}$$

wobei $b_i(t) = r(t) - a_{ii}(t)/2$ und $a(t) = \sigma(t)\sigma^T(t)$ gelten.
Fixieren wir nun ein $\beta \in (0,1)$ und beschreiben damit den *kleinen Hölderraum*:

$$X := buc^\beta(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in C_b(\mathbb{R}^d) : \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} =: [u]_\beta < \infty \right.$$
$$\left. \text{und } \lim_{|h|\to 0} \frac{|u(x+h)-u(x)|}{|h|^\beta} = 0 \text{ glm. in } x \right\}.$$

Damit ist X ein Banachraum mit der Norm $|u|_\beta := |u|_\infty + [u]_\beta$.
Wir setzen für $t \in J$

$$(A(t))u(x) = -\frac{1}{2}a(t) : \nabla^2 u(x) + r(t)u(x) - b(t)\nabla u(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

$A(t)$ ist ein Differentialoperator mit dem Definitionsbereich

$$X_A := D(A(t)) = buc^{2+\beta}(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in buc^\beta(\mathbb{R}^d) : \partial_i\partial_j u \in buc^\beta(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Somit ist $A \in C(J, \mathcal{B}(X_A;X))$ und (BS') lässt sich als abstraktes Cauchy-Problem schreiben:

$$(CP) \begin{cases} \dot{w}(t) + A(t)w(t) = & f(t) \\ w(0) = & w_0. \end{cases}$$

Für die Behandlung von (CP) ist die folgende Aussage (ohne Beweis) hilfreich:

Satz 4.15 (Da Prato-Grisvard [12]). *Es gibt genau dann genau eine Lösung w von (CP) mit*

$$w \in C(J;X_A) \cap C^1(J;X),$$

wenn

$$\begin{cases} (i) & f \in C(J;X) \text{ und} \\ (ii) & w_0 \in X_A \end{cases}$$

gelten. Die Lösung hängt dann stetig von den Daten ab.

Damit erhalten wir direkt:

Korollar 4.16. *Sei $w_0 \in buc^{2+\beta}(\mathbb{R}^d)$ für ein $\beta \in (0,1)$. Dann besitzt (BS') genau eine Lösung*

$$w \in C(J; buc^{2+\beta}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(J; buc^{\beta}(\mathbb{R}^d)).$$

Insbesondere ist $w \in BC^{1,2}(J \times \mathbb{R}^d)$.

Wie aber transformiert sich nun $buc^{\beta}(\mathbb{R}^d)$ mittels der inversen Euler-Transformation? Offenbar gilt mit

$$v(x) = w(\log x), \quad x > 0$$

die Äquivalenz

$$v \in C_b(\mathbb{R}^d_+) \quad \Leftrightarrow w \in C_b(\mathbb{R}^d),$$

aber schon für BUC ist dies falsch.
Nun gilt mit den Vereinbarungen $e^y = x$, $e^h = \tau$, $e^{h_i} = \tau_i$, $(x\tau)_i = x_i\tau_i$, $(\log \tau)_i = \log \tau_i$ und $\mathbb{I} = [1, ..., 1]^T$

$$\begin{aligned}
\frac{|w(y+h) - w(y)|}{|h|^\beta} &= \frac{|v(e^{y+h}) - v(e^y)|}{|h|^\beta} \\
&= \frac{|v(x \cdot \tau) - v(x)|}{|h|^\beta} \\
&= \frac{|v(x \cdot \tau) - v(x)|}{|\tau - \mathbb{I}|^\beta} \cdot \frac{|\tau - \mathbb{I}|^\beta}{|\log \tau|^\beta} \\
&\sim C(\beta, d) \cdot \frac{|v(x \cdot \tau) - v(x)|}{|\tau - \mathbb{I}|^\beta}
\end{aligned}$$

für $\tau \to \mathbb{I}$. Daher definieren wir

$$\begin{aligned}
X := {}^{+}buc^{\beta}(\mathbb{R}^d_+) := \Bigg\{ v \in C_b(\mathbb{R}^d_+) : \sup_{x,\tau>0} \frac{|v(x \cdot \tau) - v(x)|}{|\tau - \mathbb{I}|^\beta} < \infty \\
\text{und } \lim_{\tau \to \mathbb{I}} \frac{|v(x \cdot \tau) - v(x)|}{|\tau - \mathbb{I}|^\beta} = 0 \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Diese Überlegungen ergeben:

Korollar 4.17. *Seien v_0, $x_i\partial_i v_0$, $x_i x_j \partial_i \partial_j v_0 \in {}^{+}buc^{\beta}(\mathbb{R}^d_+)$ für ein $\beta \in (0,1)$. Dann besitzt (BS) genau eine Lösung*

$$v \in C(J; {}^{+}buc^{\beta}(\mathbb{R}^d_+)) \cap C^{1,2}((0,T) \times (0,\infty)^d)$$

mit $x_i\partial_i v$, $x_i x_j \partial_i \partial_j v$, $\partial_t v \in C(J; {}^{+}buc^{\beta}(\mathbb{R}^d_+))$.

Bei dieser Betrachtungsweise treten aber Probleme auf:

(i) der Put:
Hier gilt $g(x) = [K - x_k]_+$, also

$$w_0(y) = g(e^y) = [K - e^{y_k}]_+ \in C^{1-}(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d),$$

aber $w_0 \notin buc^{2+\beta}(\mathbb{R}^d)$ für alle $\beta \in (0,1)$.

(ii) der Call:
Hier ist $g(x) = [x_k - K]_+$ unbeschränkt, also wächst $w_0(y) = [e^{y_k} - K]_+$ exponentiell. Wir haben aber einen Eindeutigkeitssatz für (BS') mit exponentiell beschränktem w_0, so dass wir die Parität nutzen können, um solche g auf das Problem (i) zurückzuführen. Daher beschränken wir uns auf die Betrachtung des Puts.

Einen Ausweg bietet der Ansatz von Angenent [1] für das Cauchy Problem (CPI):

$$(CPI)\left\{\begin{array}{rll} \dot{u} + Au = & f & t \in J \\ u(0) = & u_0. & \end{array}\right.$$

Darin ist $-A$ Generator einer beschränkten analytischen Halbgruppe in X. Wir definieren für $\alpha \in (0,1)$

$$D_A(\alpha, 0) := \left\{x \in X : \ |t^{1-\alpha} A e^{-tA} x| \le C \text{ und } t^{1-\alpha} A e^{-tA} x \to_{t\to 0} 0\right\}.$$

Mit $|x|_{\alpha,0} = |x| + \sup_{t\in J} |t^{1-\alpha} A e^{-tA} x|$ ist $D_A(\alpha, 0)$ ein Banachraum.
Für $\mu \in (0,1)$ und einen Banachraum Y setzen wir nun

$$\begin{aligned} C_{1-\mu}(J;Y) := & \Big\{ u : (0,T] \to Y \text{ stetig} : \lim_{t\to 0} t^{1-\mu} u(t) = 0 \text{ und} \\ & \qquad [u]_{1-\mu,Y} := \sup_{t\in J} |t^{1-\mu} u(t)|_Y < \infty \Big\}, \\ C^1_{1-\mu}(J;Y) := & \Big\{ u \in C^1((0,T];Y) : \ u, \partial_t u \in C_{1-\mu}(J;Y) \Big\} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} Z_0 &= C_{1-\mu}(J; D_A(\alpha,0)) \\ Z_1 &= C^1_{1-\mu}(J; D_A(\alpha,0)) \cap C_{1-\mu}(J; D_A(\alpha+1,0)). \end{aligned}$$

Für $u \in Z_1$ setzen wir $\gamma(u) = u(0)$. Dies ist nach Clement, Simonett [9, Remark 2.1] wohldefiniert. Angenents Resultat lautet dann:

Theorem 4.18. *Sei $-A$ der Generator einer beschränkten analytischen Halbgruppe in X, $\alpha, \mu \in (0,1)$. Dann ist*

$$(\frac{d}{dt} + A, \gamma) : \ Z_1 \to (Z_0, D_A(\alpha+\mu, 0))$$

ein Isomorphismus.

Beweisidee: Wir wollen zeigen, dass die Lösung u von (CPI) in Z_1 liegt, wenn $u_0 \in D_A(\alpha+\mu, 0)$ und $f \in Z_0$. In einem ersten Schritt zeigen wir die Aussage für $f \equiv 0$: In diesem Fall gilt $u(t) = e^{-At} u_0$. Also ist

$$[Au]_{1-\mu, D_A(\alpha,0)} < \infty$$

äquivalent zu

$$S := \sup_{t,\tau\in J} |t^{1-\mu} \tau^{1-\alpha} A e^{-A\tau} A e^{-At} u_0| < \infty.$$

Für S haben wir jedoch die Abschätzung

$$\begin{aligned} S = & \sup_{t,\tau\in J} \frac{t^{1-\mu}\tau^{1-\alpha}}{(t+\tau)^{2-\mu-\alpha}} |(t+\tau)^{2-\mu-\alpha} A^2 e^{-A(t+\tau)} u_0| \\ & \le C \sup_{s\ge 0} |A e^{-As} u_0| s^{1-\mu-\alpha} \qquad \text{mit } s = (t+\tau)/2 \\ & < \infty, \end{aligned}$$

wenn $u_0 \in D_A(\alpha+\mu,0)$.
In einem zweiten Schritt zeige man die Aussage für $u_0 = 0$: Hier ist

$$u(t) = e^{-A(t-s)} f(s)ds.$$

Zudem haben wir

$$\begin{aligned}
[Au]_{1-\mu,D_A(\alpha,0)} &= \sup_{t,\tau\in J} \left| t^{1-\mu}\tau^{1-\alpha} A e^{-A\tau} A \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)ds \right| \\
&\le C \sup_{t,\tau\in J} t^{1-\mu}\tau^{1-\alpha} \int_0^t \left| \frac{Ae^{-A(t-s+\tau)/2}}{t-s+\tau} f(s) \right| ds \\
&\overset{(5)}{\le} C\|f\|_{Z_0} \sup_{t,\tau\in J} t^{1-\mu}\tau^{1-\alpha} \int_0^t \frac{1}{(t-s+\tau)^{2-\alpha}} \frac{ds}{s^{1-\mu}} \\
&\overset{s=t\sigma}{=} C\|f\|_{Z_0} \sup_{t,\tau\in J} t^{1-\mu}\tau^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{1}{(1-\sigma+\tau/t)^{2-\alpha}} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\mu}} \cdot \frac{t}{t^{2-\alpha}t^{1-\mu}} \\
&= C\|f\|_{Z_0} \sup_{h>0} h^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{d\sigma\cdot\sigma^{\mu-1}}{(1-\sigma+h)^{2-\alpha}} \\
&\overset{(6)}{\le} M < \infty,
\end{aligned}$$

wobei $h = \tau/t$ gesetzt wurde, und mit den Erklärungen

$$(5) \qquad \|f\|_{Z_0} = \sup_{s,\tau\in J} s^{1-\mu}\tau^{1-\alpha} |Ae^{-A\tau} f(s)| < \infty$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \int_0^{1/2} \frac{d\sigma\cdot\sigma^{\mu-1}}{(1-\sigma+h)^{2-\alpha}} \le \int_0^{1/2} \frac{d\sigma\cdot\sigma^{\mu-1}}{(1/2+h)^{2-\alpha}} \le C\frac{1}{(1+h)^{1-\alpha}} \\ \int_{1/2}^1 \frac{d\sigma\cdot\sigma^{\mu-1}}{(1-\sigma+h)^{2-\alpha}} \le C\int_{1/2}^1 \frac{d\sigma}{(1-\sigma+h)^{2-\alpha}} \le C\int_0^\infty \frac{dr}{(r+h)^{2-\alpha}} = \frac{C}{h^{1-\alpha}}. \end{cases}$$

□

Clement und Simonett [9] konnten Angenents Resultat mittels Lokalisierung in t auf den zeitabhängigen Fall verallgemeinern. Damit können wir nun das Problem für den Put lösen. Dazu sei $A(t)$ wie oben in $D_A(\alpha,0) = buc^{2\alpha}(\mathbb{R}^d)$ definiert, wobei $\alpha \in (0,1/2)$ sei und $\mu \in (0,1)$. Man kann zeigen, dass $-A(t)$ eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt. Gilt nun $2(\alpha+\mu) < 1$, so ist für $g(x) = [K-x]_+$

$$g \in C^{1-}(\mathbb{R}^d) \cap BUC(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow buc^{2(\alpha+\mu)}(\mathbb{R}^d) = D_A(\alpha+\mu,0).$$

Folglich existiert genau eine Lösung

$$u \in Z_0 \cap Z_1 \hookrightarrow C^{1,2}((0,T]\times\mathbb{R}^d),$$

also eine Lösung mit der gewünschten Regularität.

Kapitel 5

Amerikanische Optionen II

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit amerikanischen Optionen im zeitkontinuierlichen Fall. Diese Situation ist wesentlich komplexer als der diskrete Fall, daher beschränken wir uns auf 2 Anlagen, also nur eine risikobehaftete. Wir führen zunächst das kontinuierliche Analogon zur Snell-Hülle ein und leiten daraus die Bewertungsformel und die optimale Hedging-Strategie her. Danach befassen wir uns mit der Preisfunktion, die ein freies Randwertproblem für die eindimensionale Black-Scholes Gleichung erfüllt. Mittels Penalty-Approximation lässt sich dieses Problem schwach lösen, und schließlich leiten wir eine Darstellungsformel für die Lösung her. Auch hier kann der mit einem Stern gekennzeichnete Abschnitt beim ersten Lesen übersprungen werden.

5.1 Setting

Wir betrachten nun also das Zeitintervall $\mathbb{T} = [0, T]$. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei der zugrunde gelegte vollständige Wahrscheinlichkeitsraum, $\{B_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ eine Brownsche Bewegung mit der natürlichen und vervollständigen Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$. Wir betrachten nur 2 Anlagen, die Anlage 0 sei risikolos, mit der Zinsrate r versehen, und die Anlage 1 risikobehaftet. Die Wachstumsprozesse der zugehörigen Preise seien beschrieben durch

$$\begin{cases} dS_t^0 = & rS_t^0 dt, & S_0^0 = 1 \quad \Rightarrow \; S_t^0 = e^{rt} \\ dS_t^1 = & \mu_t S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dB_t, & S_0^1 > 0 \end{cases}$$

mit der Volatilität $\sigma > 0$ und dem adaptierten Drift $\mu_t \in L_\infty(\mathbb{T} \times \Omega)$.

Bemerkung 5.1. Es gilt

$$S_t^1 = S_0^1 e^{\sigma B_t} e^{-\sigma^2 t/2} e^{\int_0^t \mu_s ds}.$$

Dies folgt nach Proposition 12.4 und der Itô-Formel.

Definition 5.2. *Eine* ***Portfolio Strategie*** $\theta = \{\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1)\}_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein adaptierter Prozess, für den gilt*

$$\mathbb{E}_P\Big(\int_0^T |\theta_t^i S_t^i|^2 dt\Big) < \infty, \quad i = 0, 1.$$

Ein ***Konsum-Prozess*** *ist ein P-f.s. stetiger, adaptierter, nicht fallender, bei 0 startender Prozess $C = \{C_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, das heißt es gibt eine P-Nullmenge N, so dass für alle $\omega \notin N$ und $t \geq s$ gilt: $C_t(\omega)$ ist stetig in t und $C_t(\omega) \geq C_s(\omega)$.*
Ein ***Konsum-Investment-Prozess (KI-Prozess)*** *ist ein Paar (θ, C), wobei θ*

eine Portfolio Strategie und C ein Konsum-Prozess ist.
Ein KI-Prozess heißt ***selbstfinanzierend****, falls der Wert-Prozess $\{V_t(\theta)\}_{t\in\mathbb{T}}$ mit*

$$V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t = \theta_t^0 e^{rt} + \theta_t^1 S_t^1$$

die Bedingung

$$\begin{aligned} V_t(\theta) - V_0(\theta) &= \int_0^t \theta_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \theta_s^1 dS_s^1 - C_t \\ &= \int_0^t re^{rs}\theta_s^0 ds + \int_0^t \theta_s^1 \mu_s S_s^1 ds + \int_0^t \theta_s^1 \sigma S_s^1 dB_s - C_t \end{aligned}$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ erfüllt.

Bemerkung 5.3. Die Selbstfinanzierungsbedingung in Definition 5.2 bedeutet kurz geschrieben:

$$d\theta_t \cdot S_t + d\theta_t \cdot dS_t + dC_t = 0, \quad t \in \mathbb{T}$$

und entspricht damit der diskreten Version aus Abschnitt 3.5.

Mit den Erkenntnissen aus Kapitel 4 wissen wir, dass es genau ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q gibt, so dass der abgezinste Wertprozess der Aktie $\{\hat{S}_t^1\} = \{S_t^1 e^{-rt}\}$ ein Q-Martingal bildet. Es gilt

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \frac{\mu_t - r}{\sigma} dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\mu_t - r)^2}{\sigma^2} dt \right),$$

und $\{B_t^*\}_{t\in\mathbb{T}}$, definiert durch $dB_t^* = dB_t + (\mu_t - r)/\sigma\, dt$, ist eine Brownsche Bewegung bzgl. Q. Damit ist

$$dS_t^1 = rS_t^1 dt + \sigma S_t^1 dB_t^* \quad \text{bzw.} \quad d\hat{S}_t^1 = \sigma \hat{S}_t^1 dB_t^*,$$

und für den Wert-Prozess gilt folglich

$$\begin{aligned} V_t(\theta) &= V_0 + \int_0^t rV_s(\theta) ds + \int_0^t \sigma \theta_s^1 S_s^1 dB_s^* - C_t \quad \text{bzw.} \\ \hat{V}_t(\theta) &= V_0 + \int_0^t \hat{S}_s^1 \theta_s^1 \sigma dB_s^* - \hat{C}_t - \int_0^t re^{-rs} C_s ds, \end{aligned}$$

wobei $\hat{C}_t = e^{-rt} C_t$ bedeutet.
Wir treffen weiter folgende Notationen:

Bezeichnung 5.4. *$\tau : \Omega \to \mathbb{T}$ ist stets* ***Stoppzeit*** *bzgl. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, also $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ oder $\{t < \tau\} \in \mathcal{F}_t$.*
Wir schreiben $t \le \tau \le \bar{t}$ genau dann, wenn $P(\{\omega : \tau(\omega) \notin [t, \bar{t}]\}) = 0$ gilt.
$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ heißt ***Ertragsfunktion****, falls ψ stetig und linear beschränkt ist, also $\psi(x) \le M(1 + |x|)$ für $x \in \mathbb{R}$.*

Beispiele für solche Ertragsfunktionen sind $[x - K]_+$, $[K - x]_+$ oder $|K - x|$.

Beispiel 5.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\{X_t\}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden. Dann ist

$$\tau_U(\omega) := \inf\{t \ge 0 : X_t(\omega) \notin U\}$$

eine Stoppzeit.

Beweis: Es gibt abzählbar viele offene Mengen U_n mit $U = \bigcup U_n$ und $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$. Die Behauptung folgt dann aus

$$\{\omega : \tau_U(\omega) > t\} = \bigcup_n \bigcap_{r \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \{\omega : X_r(\omega) \in U_n\}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

□

Definition 5.6. *Sei $u(t,x)$ der zur Option P auf Anlage 1 gehörige Preisprozess mit Ertragsfunktion ψ. Eine* ***erweiterte Handelsstrategie*** *in (S^0, S^1, P) ist ein Quadrupel (θ, C, τ, k), wobei (θ, C) ein KI-Prozess, τ eine Stoppzeit und $k \in \mathbb{R}$ die Menge an bis τ gehaltenen Optionen ist, so dass für $t > \tau$ gilt*

$$\begin{cases} \theta_t^0 = & \theta_\tau^0 + \theta_\tau^1 S_\tau^1 / S_\tau^0 + k\psi(S_\tau^1)/S_\tau^0 \\ \theta_t^1 = & 0. \end{cases}$$

Diese ist ***selbstfinanzierend****, falls gilt:*

$$\begin{cases} V_t(\theta) = & V_0(\theta) + \int_0^t \theta_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \theta_s^1 dS_s^1 - C_t, & t \le \tau \\ C_t \equiv & C_\tau, & t > \tau. \end{cases}$$

Definition 5.7. *Es gilt* ***NAO****, falls es keine selbstfinanzierende erweiterte Handelsstrategie gibt mit*

$$\begin{array}{lllll} (i) & V_T(\theta) \ge 0 & P\text{-f.s.} & \text{und} & \theta_0^0 + \theta_0^1 S_0^1 + k\psi(S_0^1) < 0 \quad \text{bzw.} \\ (ii) & V_T(\theta) > 0 & P\text{-f.s.} & \text{und} & \theta_0^0 + \theta_0^1 S_0^1 + k\psi(S_0^1) = 0. \end{array}$$

5.2 Hedging und Bewertung

Definition 5.8. *Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine nichtleere Familie nichtnegativer Zufallvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann definieren wir das* ***Supremum*** $\sup_{i \in I} X_i$ *als eine Zufallsvariable X^* mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $X_i \le X^*$ *P-f.s. für jedes $i \in I$.*
(ii) *Ist Y eine Zufallsvariable, die (i) erfüllt, so gilt $X^* \le Y$ P-f.s..*

Bemerkung 5.9. Das in Definition 5.8 definierte Supremum existiert für positive, messbare Zufallsvariablen. Es ist nicht unbedingt ein punktweises Supremum (vgl. Karatzas, Shreve [18, Anhang A]).

Satz 5.10. *Sei $X_t := \sup_{t \le \tau \le T} \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau - t)}\psi(S_\tau^1)|\mathcal{F}_t)$. Damit gilt $X_t \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ sowie $X_t \ge \psi(S_t^1)$. (X_t heißt fairer Preis der Option P mit Ertragsfunktion ψ.) Wenn ψ zusätzlich beschränkt ist, gibt es Strategien θ^0 und θ^1 sowie einen Konsumprozess C, so dass*

$$X_t = V_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t rV_s(\theta)ds + \int_0^t \sigma\theta_s^1 S_s^1 dB_s^* - C_t$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Beweisskizze: Wir definieren $J_t := \sup_{t \le \tau \le T} \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}\psi(S_\tau^1)|\mathcal{F}_t)$. Wir haben dann $J_t \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ (vgl. Karatzas, Shreve [18, Proposition D.2]) und $\{J_t\}$ ist das kleinste Q-Supermartingal, das $\{e^{-rt}\psi(S_t^1)\}$ dominiert (vgl. Karatzas, Shreve [18, S. 353 und Theorem D.7]). (Genauer gesagt ist J_t dabei nur f.s. durch diese Gleichung

gegeben, wobei die Ausnahmemenge von t abhängen kann.) $\{J_t\}$ heißt *Snell-Hülle* von $\{e^{-rt}\psi(S_t^1)\}$. Die Supermartingaleigenschaft von $\{J_t\}$ zeigt man wie folgt:
Sei τ^* eine optimale Stoppzeit für t, also

$$(1) \qquad \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau^*}\psi(S^1_{\tau^*})|\mathcal{F}_t) = J_t,$$

dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(J_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(e^{-r\tau^*}\psi(S^1_{\tau^*})|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau^*}\psi(S^1_{\tau^*})|\mathcal{F}_s)\\ &\leq \sup_{t\leq\tau\leq T}\mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}\psi(S^1_\tau)|\mathcal{F}_s) \leq J_s.\end{aligned}$$

Dabei können wir für τ^* zum Beispiel

$$(2) \qquad \rho_t(\omega) = \inf\{s > t:\ J_s(\omega) = e^{-rs}\psi(S^1_s(\omega))\}$$

wählen (vgl. Karatzas, Shreve [18, Theorem D.12]; Die Bedingung D.29 kann mit Bemerkung 5.1 und der Doobschen Ungleichung (vgl. Satz 7.7) bewiesen werden). Da ψ Ertragsfunktion ist, ist $\{J_t\}$ rechtsstetig, regulär und gehört zur Klasse DL, das heißt die Menge $\{J_\tau : \tau \leq T, \tau \text{ ist Stoppzeit}\}$ ist gleichmäßig integrierbar für alle $T > 0$ (vgl. Karatzas, Shreve [18, Theorem D13]). Die Doob-Meyer-Zerlegung (vgl. Theorem 12.8 und Bemerkung 12.9) liefert dann $\{J_t\} = \{M_t\} - \{A_t\}$, wobei $\{M_t\}$ ein rechtsstetiges Q-Martingal und $\{A_t\}$ stetig und nichtfallend ist mit $A_0 = 0$. Wenn ψ beschränkt ist, dann ist $\{J_t\}$ beschränkt. In diesem Fall liefert der Beweis der Doob-Meyer-Zerlegung in Protter [26, S. 109], dass $M_T \in L_2(Q)$. Der Martingaldarstellungssatz (vgl. Theorem 12.1) besagt nun, dass es ein $\eta \in V_2(Q)$ gibt, so dass $M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s dB_s^*$ gilt. $X_t = e^{rt}J_t$ erfüllt damit

$$dX_t = rX_t dt + e^{rt}dJ_t = rX_t dt + e^{rt}\eta_t dB_t^* - e^{rt}dA_t.$$

Der Koeffizientenvergleich mit

$$dV_t(\theta) = r(\theta_t^0 e^{rt} + \theta_t^1 S_t^1)dt + \sigma S_t^1\theta_t^1 dB_t^* - dC_t$$

liefert die gesuchten Strategien und den gesuchten Konsum der Form

$$\begin{aligned}dC_t &= e^{rt}dA_t\\ \theta_t^1 &= e^{rt}\eta_t/(\sigma S_t^1)\\ \theta_t^0 &= J_t - \eta_t/\sigma.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.11. (i) Vergleich mit Kapitel 3:

$$U_n = S_n^0 \sup_{N\geq\tau\geq n}\mathbb{E}_Q(Z_\tau/S_\tau^0|\mathcal{F}_n),$$

also analoges Ergebnis mit $Z_\tau \rightsquigarrow \psi(S_\tau^1)$, $n \rightsquigarrow t$ und $S_n^0 \rightsquigarrow e^{rt}$.
(ii) Vergleich mit europäischen Optionen: Es gilt dort speziell $\tau \equiv T$. Somit erhalten wir auch im kontinuierlichen Fall die bekannte Ungleichung

$$X_t \geq \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}\psi(S_T^1)|\mathcal{F}_t) = \text{Preis der entsprechenden europäischen Option}$$

(vgl. Korollar 4.10).
(iii) Ein ***Hedge*** ist eine KI-Strategie (θ, C) mit $V_t(\theta) \geq X_t$ für jedes $t \in \mathbb{T}$.

Satz 5.12. *Sei ψ beschränkt. Ein Optionspreis $Y_0 \neq X_0$ (X_0 wie in Satz 5.10) liefert eine Arbitrage in dem um die Option erweiterten Markt.*

Beweis: Es gelte $Y_0 > X_0$. Dann wählen wir den KI-Prozess (θ^0, θ^1, C) wie im Beweis von Satz 5.10. Wir wählen weiter τ eine feste Stoppzeit und $\tilde{k} = -1$, das heißt eine Option wird verkauft, sowie

$$\tilde{\theta}_t^0 = \begin{cases} \theta_t^0, & t \in [0, \tau] \\ \theta_\tau^0 + \theta_\tau^1 e^{-r\tau} S_\tau^1 - \psi(S_\tau^1) e^{-r\tau}, & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_t^1 = \begin{cases} \theta_t^1, & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_t^2 = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, T] \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\tilde{C}_t = C_{t \wedge \tau},$$

wobei $\tilde{\theta}_t^2$ den Anteil der Option zum Preis Y_t im Portfolio darstellt, um eine erweiterte Handelsstrategie zu erhalten. Nach Satz 5.10 gilt

$$\begin{aligned} X_\tau = \theta_\tau^0 e^{r\tau} + \theta_\tau^1 S_\tau^1 &\geq \psi(S_\tau^1), \quad \text{also auch} \\ V_T(\tilde{\theta}) = e^{rT} \tilde{\theta}_T^0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\tilde{\theta}_0^0 + \tilde{\theta}_0^1 S_0^1 + \tilde{\theta}_0^2 Y_0 = X_0 - Y_0 < 0,$$

also ist der KI-Prozess ein Arbitrage und somit ein Widerspruch zur Voraussetzung, der die Annahme unmöglich macht.
Für den verbleibenden auszuschließenden Fall $Y_0 < X_0$ funktioniert der Beweis analog. Wir wählen hierbei $\tau = \rho_0$ aus (2) und erhalten im Vergleich zum ersten Fall entsprechend umgekehrte Vorzeichen (vgl. Elliott, Kopp [15, Theorem 8.2.5]). □

5.3 Das Komplementaritätsproblem

Wir definieren den Preis der amerikanischen Option zur Zeit t und für den Aktienpreis x durch

$$u(t, x) := \mathbb{E}_Q(X_t | S_t^1 = x),$$

wobei X_t durch Satz 5.10 gegeben ist. Somit folgt aus (1)

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau^* - t)} \psi(S_{\tau^*}^1) | \mathcal{F}_t) | S_t^1 = x) \\ &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau^* - t)} \psi(S_{\tau^*}^1) | S_t^1 = x) \\ &\leq \sup_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau - t)} \psi(S_\tau^1) | S_t^1 = x). \end{aligned}$$

Andererseits liefert Satz 5.10 für jede Stoppzeit $\tau \in [t, T]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(X_t | S_t^1 = x) &\geq \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau - t} \psi(S_\tau^1) | \mathcal{F}_t) | S_t^1 = x) \\ &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau - t} \psi(S_\tau^1) | S_t^1 = x). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau - t)} \psi(S_\tau^{t,x})),$$

wobei $S_s^{t,x}$ der durch

$$\begin{cases} dS_s^{t,x} = & rS_s^{t,x}ds + \sigma S_s^{t,x}dB_s^*, \quad s > t \\ S_t^{t,x} = & x \end{cases}$$

definierte Itô-Prozess ist.

Bemerkung 5.13. (i) Vergleich mit europäischen Optionen ($\tau \equiv T$) für beschränktes ψ: Die Feynman-Kac Formel angewendet auf (BS) liefert für den Preis europäischer Optionen $u_e(t,x)$

$$u(t,x) \geq \quad \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}\psi(S_T^{t,x})) \overset{(3)}{=} u_e(t,x).$$

Die Gleichung (3) kann man genauso wie im Satz 11.3 zeigen, da nach Bemerkung 4.12 die Itô-Formel für u_e und S_t^1 gilt. Dann folgt für den europäischen Call:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}[S_T^{t,x} - K]_+) &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}([K - S_T^{t,x}]_+ + S_T^{t,x} - K)) \\ &= p(t,x) + \mathbb{E}_Q(\hat{S}_T^{t,x}) - Ke^{-r(T-t)} \\ &= p(t,x) + x - Ke^{-r(T-t)} = c(t,x), \end{aligned}$$

da $\hat{S}$ ein Q-Martingal ist und die Parität gilt. Somit haben wir also $u(t,x) \geq u_e(t,x)$ auch für den Call.
(ii) Wegen der schwachen Eindeutigkeit stochastischer Differentialgleichungen (vgl. Øksendal [25, Lemma 5.3.1]) haben $S_{t+s}^{t,x}$ und $S_s^{0,x}$ ($s \geq 0$) diegleichen Verteilungen bzgl P (vgl. Øksendal [25, S. 108]). Für $t \in \mathbb{T}$ betrachten wir Stoppzeiten σ bzgl. $\{\mathcal{F}_{s+t} | s \geq 0\}$. Dann gilt

$$u(t,x) = \sup_{0 \leq \sigma \leq T-t} \mathbb{E}_Q(e^{-r\sigma}\psi(S_{t+\sigma}^{t,x})) = \sup_{0 \leq \sigma \leq T-t} \mathbb{E}_Q(e^{-r\sigma}\psi(S_\sigma^{0,x})).$$

Somit ist $u(\cdot,x)$ für festes x eine fallende Funktion.

Proposition 5.14. *$\psi(x) = [x-K]_+$ ist die Ertragsfunktion einer Kaufoption. Mit dieser gilt $u(t,x) = u_e(t,x)$ für alle $t \in \mathbb{T}, x > 0$.*

Beweis: Da die $\geq$-Relation gilt, muss nur noch die $\leq$-Relation gezeigt werden. Dazu sei o.B.d.A. $t = 0$ und $\tau \in [0,T]$ eine Stoppzeit. Es ist nach dem Optional-Sampling Theorem (vgl. Karatzas, Shreve [18, Problem 1.3.23])

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q([\hat{S}_T^1 - e^{-rT}K]_+ | \mathcal{F}_\tau) &\geq \mathbb{E}_Q(\hat{S}_T^1 - e^{-rT}K | \mathcal{F}_\tau) \\ &\geq \hat{S}_\tau^1 - e^{-r\tau}K, \end{aligned}$$

wobei die σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ aus den $A \in \mathcal{F}$ besteht, mit $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in J$. Durch Übergang zum Positivteil erhalten wir also

$$\mathbb{E}_Q([\hat{S}_\tau^1 - e^{-r\tau}K]_+) \leq \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q([\hat{S}_T^1 - e^{-rT}K]_+ | \mathcal{F}_\tau)) = u_e(0,x),$$

und der Übergang zum Supremum bzgl. der Stoppzeit τ liefert schließlich $u(0,x) \leq u_e(0,x)$ und damit die Behauptung. $\square$

Satz 5.15. *Sei $u \in C^{1-,2-}([0,T) \times \mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+)$ mit $|u(t,x)| \leq C(1+|x|)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{T} \times (0,\infty)$, $\partial_t u, x\partial_x u, x^2\partial_x^2 u \in BC([0,T-\epsilon] \times (0,\infty))$ für jedes $\epsilon > 0$ sowie*

$$(KP) \begin{cases} (1) & u(t,x) \geq & f(x), & (t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \\ (2) & \partial_t u - Au \leq & 0, & f.a.\ (t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \\ (3) & (\partial_t u - Au)(f-u) = & 0, & f.a.\ (t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \\ (4) & u(T,x) = & f(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

wobei A der BS-Operator ist, also

$$A = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 - rx\partial_x + r.$$

Dann gilt

$$u(t,x) = \sup_{t\le\tau\le T} \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau-t)} f(S_\tau^{t,x})).$$

Insbesondere besitzt (KP) höchstens eine Lösung.

Beweis: (exemplarisch für t=0) Definiere

$$M_t := e^{-rt}u(t,S_t^x) - \int_0^t e^{-rs}(\partial_s u - Au)(s,S_s^x)ds.$$

Wir behaupten, dass $\{M_t\}$ ist ein Q-Martingal. Die Itô-Formel (vgl. Theorem 10.5 und Bemerkung 4.12) ergibt

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}u(t,S_t^x)) &= [-re^{rt}u(t,S_t^x) + e^{-rt}\partial_t u(t,S_t^x)]dt + \\ &\quad + e^{-rt}\partial_x u(t,S_t^x)dS_t^x + e^{-rt}\frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 u(t,S_t^x)(S_t^x)^2 dt \\ &= e^{-rt}\Bigg[-ru(t,S_t^x) + \partial_t u(t,S_t^x) + r\partial_x u(t,S_t^x)S_t^x + \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 u(t,S_t^x)(S_t^x)^2\Bigg]dt + e^{-rt}\partial_x u(t,S_t^x)\sigma S_t^x dB_t^* \\ &= e^{-rt}(\partial_t u - Au)(t,S_t^x)dt + e^{-rt}\partial_x u(t,S_t^x)\sigma S_t^x dB_t^*. \end{aligned}$$

Damit gilt $dM_t = e^{-rt}\partial_x u(t,S_t^x)\sigma S_t^x dB_t^*$, dass heißt

$$M_t = M_0 + \underbrace{\int_0^t e^{-rs}\partial_x u(s,S_s^x)\sigma S_s^x dB_s^*}_{Q-Martingal}.$$

Mittels der nun gezeigten Behauptung folgt durch optional sampling (vgl. Karatzas, Shreve [17, Theorem 1.3.22 und Problem 1.3.23])

$$\mathbb{E}_Q(M_\tau) = \mathbb{E}_Q(M_0) = u(0,x)$$

für eine beliebige Stoppzeit $\tau \in \mathbb{T}$. Außerdem gilt wegen (KP2) $M_t \ge e^{-rt}u(t,S_t^x)$, also mit (KP1)

$$\mathbb{E}_Q(M_\tau) \ge \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}u(\tau,S_\tau^x)) \ge \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}f(S_\tau^x)).$$

Es gilt also

$$u(0,x) = \mathbb{E}_Q(M_\tau) \ge \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}f(S_\tau^x))$$

und damit auch

$$(4) \qquad u(0,x) \ge \sup_{0\le\tau\le T} \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}f(S_\tau^x)).$$

Setzen wir nun $\tau = \inf\{t \in \mathbb{T} : \ u(t,S_t^x) = f(S_t^x)\}$ dann ist τ eine Stoppzeit (vgl. Beispiel 5.5). Für $t \le \tau$ gilt wegen (KP3) $(\partial_t u - Au)(t,S_t^x) = 0$ und damit

$$(5) \qquad u(0,x) = \mathbb{E}_Q(M_\tau) = \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}u(\tau,S_\tau^x)) = \mathbb{E}_Q(e^{-r\tau}f(S_\tau^x)).$$

Aus (4) und (5) folgt somit die Behauptung. □

Bemerkung 5.16. (KP) steht für Komplementaritätsproblem, da wegen (KP3) immer eines, (KP1) oder (KP2), mit Gleichheit erfüllt sein muss.

Theoretischem Interesse dient nun der Vergleich einer amerikanischen Option mit einer entsprechenden nie endenden Option, das heißt mit $T = \infty$. Dazu betrachten wir das zu (KP) gehörige stationäre Problem

$$\begin{cases} u_\infty(x) \geq & f(x) \\ -Au_\infty \leq & 0 \\ -Au_\infty(u_\infty - f) = & 0. \end{cases}$$

In diesem Fall erhalten wir

Korollar 5.17. *Sei $u_\infty \in C^{2-}(\mathbb{R}_+)$ mit $|u_\infty(x)| \leq C(1+|x|)$ für alle $x \in (0,\infty)$ und $x\partial_x u_\infty, x^2\partial_x^2 u_\infty \in BC((0,\infty))$ die Lösung des zu (KP) gehörigen stationären Problems. Dann gilt*

$$u_\infty(x) = \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}_Q(e^{-r(\tau-t)} f(S_\tau^{t,x}))$$

für jedes $t \geq 0$. Insbesondere ist $u_\infty \geq u$ auf $\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$, wobei u die die Lösung von (KP) bezeichnet.

Beweis: Die erste Behauptung erhalten wir mit einem ähnlichen Argument, das wir für den Beweis von Satz 5.15 benutzt haben. Wir ersetzen hierbei lediglich die Funktion u durch u_∞, T durch ∞ und lassen ∂_t weg. Die gewünschte Darstellung für u_∞ ergibt sich somit für jedes $t \geq 0$. Vergleichen wir nun die Darstellungen von u aus Satz 5.15 mit der von u_∞ bei gleichem t, so erhalten wir die zweite Behauptung. □

5.4 Das freie Randwertproblem der BS-Gleichung

Wir zerlegen nun den Bereich $\mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ in $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$ mit

$$\mathcal{C} := \{(t,x) :\ u(t,x) > f(x)\} \quad \text{und} \quad \mathcal{R} := \{(t,x) :\ u(t,x) = f(x)\}.$$

$\mathcal{C}$ beschreibt den Bereich, in dem BS gilt und somit die Option gehalten wird, und $\partial\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ beschreibt den freien Rand, bei dessen Erreichen die Option ausgeübt werden sollte. In diesem Abschnitt wollen wir unsere Überlegungen auf den amerikanischen Put beschränken, das heißt auf die Ertragsfunktion $f(x) = [K-x]_+$.

Proposition 5.18. *Im Falle des amerikanischen Puts ist jeder Randpunkt aus $\partial_x\mathcal{C}(t)$ des Fortsetzungsgebietes für $t \in [0,T)$ kleiner als der Ausübungspreis K.*

Beweis: Um diese Behauptung zeigen zu können, definieren analog zu $\mathcal{C}$ ein theoretisches Fortsetzungsgebiet $\mathcal{C}_e$ für das entsprechende europäische Problem. Wir sehen leicht mit Hilfe der Eigenschaften der Lösung u_e und der Ertragsfunktion f, das dessen Rand sich schreiben läßt als

$$\partial_x\mathcal{C}_e(t) = \rho_e(t) := x,\ \text{wobei } u_e(t,x) = f(x) = [K-x]_+ \text{ gilt.}$$

Da u_e nun für $t \in [0,T)$ echt positiv ist, folgt zunächst

$$\rho_e(t) < K$$

für alle $t \in [0,T)$. Nach Bemerkung 5.13 (i) wissen wir aber auch, dass stets $u_e \leq u$ gilt. Da f und u_e im Fall des Puts monoton fallende und konvexe Funktionen sind (vgl. Abschnitt 4.5), folgt demnach auch

$$\max\{\partial_x\mathcal{C}(t)\} \leq \rho_e(t) < K$$

für alle $t \in [0,T)$, also die Behauptung. □

Satz 5.19. *Im Falle eines amerikanischen Puts entartet der Rand $\partial_x \mathcal{C}(t)$ zu einer Funktion $\rho(t)$ für $t \in [0, T)$. Diese Funktion ist nicht fallend.*

Beweis: Wir definieren zunächst die Funktion $\rho = \rho(t)$ als Teil des Randes durch

$$\rho(t) := \inf\{x : u(t, \bar{x}) > [K - \bar{x}]_+ \quad \forall \bar{x} > x\}$$

für $t \in [0, T)$, also als ersten Schnittpunkt der Lösung u mit der Ertragsfunktion f von rechts betrachtet. Diese Funktion ist offenbar der in Frage kommende Kandidat. Es bleibt uns also zu zeigen, dass es keine weiteren Punkte auf dem Rand des Fortsetzungsgebietes $\mathcal{C}$ gibt, außer den durch $(t, \rho(t))$ beschriebenen. Dazu definieren wir uns weiter das Gebiet "links" von ρ als

$$G := \{(t, x) : t \in (0, T), x \in (\rho_\infty, \rho(t))\}.$$

Dabei beschreibt ρ_∞ den kleinsten Randpunkt des zugehörigen stationären Problems, also $\rho_\infty := \inf \partial \mathcal{C}_\infty$ mit

$$\mathcal{C}_\infty := \{x : u_\infty(x) > f(x)\}.$$

Auf dem parabolischen Rand von G gilt nun

$$u(t, x) = f(x) = [K - x]_+ = K - x. \tag{6}$$

Dies liefert uns für $t = T$ die Endbedingung von (KP), für $x = \rho(t)$ die Definition von ρ und für $x = \rho_\infty$ (sogar für $x \leq \rho_\infty$) die Definition von ρ_∞ und Bemerkung 5.13 (i), denn in diesem Fall gilt $u_\infty = f$ und damit $f = u_\infty \geq u \geq f$. Die Gleichheit (6) folgt mit Proposition 5.18, da auf $\overline{G}$

$$x \leq \rho(t) \in \partial_x \mathcal{C}(t) < K$$

gilt. Nehmen wir nun an, dass die Funktion

$$w(t, x) := u(t, x) - f(x)$$

ein positives Maximum in $(t_0, x_0) \in G$ besitzt. Somit haben wir $x_0 < K$ und $w(t_0, x_0) > 0$, also

$$0 < K - x_0 = f(x_0) < u(t_0, x_0).$$

Da u aber Lösung von (KP) ist, muss die Differential(un)gleichung von (KP) in einer Umgebung von (t_0, x_0) mit Gleichheit erfüllt sein. Also ist u dort glatt und es gelten in (t_0, x_0)

$$\partial_t w = \partial_t u = 0, \quad \partial_x w = \partial_x u + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \partial_x^2 w = \partial_x^2 u \leq 0.$$

Damit bekommen wir den Widerspruch

$$0 = \partial_t u - Au = \underbrace{\partial_t u}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_x^2 u}_{\leq 0} + \underbrace{rx \partial_x u}_{<0} - \underbrace{ru}_{>0} < 0$$

bei Auswertung an der Stelle (t_0, x_0). Also existiert kein positives Maximum von w in G. Wenn ein positives Maximum bei $t_0 = 0$ angenommen wird, so gilt dort $\partial_t w = \partial_t u \leq 0$, so dass man ebenfalls einen Widerspruch erhält. Es gilt somit $w \leq 0$ auf $\overline{G}$ und damit $u \leq f$ auf $\overline{G}$. Außerdem gilt stets $u \geq f$, da u Lösung von (KP) ist, also stimmt u in G mit f überein, das heißt $G \subset \mathcal{R}$. Damit gibt es aber keine weiteren Randpunkte "links" von ρ, wir haben also

$$\partial_x \mathcal{C}(t) = \rho(t).$$

Die zweite Behauptung folgt dann aus der Definition von ρ und der Bemerkung 5.13(ii). $\square$

Für $x = \rho(t)$ gilt damit $u(t,\rho(t)) = f(\rho(t)) = [K-\rho(t)]_+ = K-\rho(t)$ und das Fortsetungsgebiet läßt sich schreiben als $\mathcal{C} = \{(t,x):\ x > \rho(t)\}$. Weiter gilt

$$\frac{u(t,\rho(t)+h)-u(t,\rho(t))}{h} \geq \frac{f(\rho(t)+h)-f(\rho(t))}{h},$$

in der Grenze für $h \to 0$ also

$$\partial_x u(t,\rho(t)) \geq f'(\rho(t)) = -1 \tag{7}$$

Proposition 5.20. *Anstelle von (7) gilt sogar die Gleichheit, also*

$$\partial_x u(t,\rho(t)) = f'(\rho(t)) = -1.$$

Beweis: Sei $\mathcal{D} = \{(t,x):\ t \in [t_1,t_2] \subset (0,T) \quad \wedge \quad \rho(t)-\epsilon \leq x \leq \rho(t)+\epsilon\}$, dann folgt mit (KP2)

$$\begin{aligned}
0 &\geq \iint_{\mathcal{D}} \left(\partial_t u + \frac{\sigma^2}{2}x^2\partial_x^2 u + rx\partial_x u - ru\right) dx\,dt \\
&= \iint_{\mathcal{D}} (\partial_t u - 2ru) dx\,dt + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\sigma^2}{2}x^2\partial_x u + rxu)\Big|_{\rho(t)-\epsilon}^{\rho(t)+\epsilon} dt - \iint_{\mathcal{D}} \sigma^2 x \partial_x u\,dx\,dt \\
&= \iint_{\mathcal{D}} (\partial_t u - 2ru + \sigma^2 u) dx\,dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\sigma^2}{2}x^2\partial_x u + rxu)\Big|_{\rho(t)-\epsilon}^{\rho(t)+\epsilon} dt - \int_{t_1}^{t_2} \sigma^2 xu\big|_{\rho(t)-\epsilon}^{\rho(t)+\epsilon} dt \\
&= \iint_{\mathcal{D}} (\partial_t u - 2ru + \sigma^2 u) dx\,dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\sigma^2}{2}(\rho(t)+\epsilon)^2\partial_x u(\rho(t)+\epsilon) - \frac{\sigma^2}{2}(\rho(t)-\epsilon)^2 f'(\rho(t)-\epsilon)\right) dt \\
&\quad + (r-\sigma^2)\int_{t_1}^{t_2} ((\rho(t)+\epsilon)u(\rho(t)+\epsilon) - (\rho(t)-\epsilon)f(\rho(t)-\epsilon))dt \\
&\overset{\epsilon\to 0}{\to} 0 + \frac{\sigma^2}{2}\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)^2 \underbrace{(\partial_x u(\rho(t)^+) - f'(\rho(t)))}_{\geq 0} dt,
\end{aligned}$$

also $\partial_x u(t,\rho(t)^+) = f'(\rho(t))$ und damit die Behauptung. $\square$

Somit erfüllt eine Lösung u von (KP) auch die folgende starke Formulierung dieses Problems: Gesucht sind $\rho(t)$ und $u(t,x)$ mit

$$(SKP)\begin{cases}
\partial_t u + \frac{\sigma^2}{2}x^2\partial_x^2 u + rx\partial_x u - ru = 0, & t \in [0,T), x > \rho(t) \\
u(T,x) = [K-x]_+ = 0, & x > \rho(T) \\
u(t,\rho(t)) = K - \rho(t), & t \in [0,T) \\
\partial_x u(t,\rho(t)) = -1, & t \in [0,T) \\
\rho(T) = K & \\
u \text{ beschränkt.} &
\end{cases}$$

Die Beschränktheit liefert uns dabei Satz 5.15 zusammen mit der Beschränktheit der Ertragsfunktion f im Falle eines Puts. Umgekehrt erfüllt eine Lösung $u \in C^{1-,2-}([0,T]\times(0,\infty)) \cap C([0,T]\times\mathbb{R}_+)$ von (SKP) auch (KP) (wobei man $u(t,x) = f(x)$ für $x \leq \rho(t)$ setzt).

Satz 5.21. *Sei $u \in C^{1-,2-}([0,T]\times(0,\infty))\cap C([0,T]\times\mathbb{R}_+)$ eine Lösung von (SKP) mit $|\partial_x u(t,x)| \le C(1+|x|)$ für $0 \le t \le T-\epsilon$. Dann gelten für $x > \rho(t)$:*

$$\begin{array}{ll} (i) & u(t,x) > 0 \\ (ii) & \partial_x u(t,x) < 0 \\ (iii) & \partial_t u(t,x) < 0 \\ (iv) & \partial_x^2 u(t,x) > 0 \end{array}$$

Beweis: (i) folgt aus dem starken Maximumprinzip.
(ii) folgt mittels starken Maximumprinzip und

$$\partial_t u_x + \sigma^2/2\, x^2 \partial_x^2 u_x + (r+\sigma^2) x \partial_x u_x + r u_x - r u_x = 0,$$

$u_x(T,x) = 0$ sowie $u_x(t,\rho(t)) = -1$.
(iii) Es gilt $\partial_t u_t + \sigma^2/2\, x^2 \partial_x^2 u_t + rx\partial_x u_t - ru_t = 0$. Nach Bemerkung 5.13(ii) gilt $\partial_t u \le 0$. Somit zeigt das starke Maximumprinzip die strikte Ungleichung.
(iv) folgt direkt aus der DGL und den Eigenschaften (i)-(iii). □

Mit Hilfe der starken Formulierung können wir nun auch die analytische Lösung u_∞ des stationären Problems für den amerikanischen Put bestimmen. Der freie Rand entartet dann sogar zu einem Punkt ρ_∞, da auch er unabhängig vom Zeitpunkt t sein muss. Das entsprechende stark formulierte freie Randwertproblem lautet damit

$$(8) \begin{cases} -Au_\infty = & 0, \qquad x > \rho_\infty \\ u_\infty(\rho_\infty) = & K - \rho_\infty \\ u'_\infty(\rho_\infty) = & -1, \end{cases}$$

wobei eine beschränkte Funktion u_∞ und ein positiver Randwert ρ_∞ als Lösung gesucht werden. Die Beschränktheit der Lösung im Falle des Puts liefert uns Korollar 5.17 mit der Beschränktheit der Ertragsfunktion f.

Satz 5.22. *Das Problem (8) besitzt in $BC^2(\rho_\infty,\infty)$ die Lösung*

$$u_\infty(x) = \frac{\rho_\infty}{\gamma}\left(\frac{x}{\rho_\infty}\right)^{-\gamma}$$

mit dem Randpunkt

$$\rho_\infty = \frac{K}{1+1/\gamma},$$

wobei $\gamma = 2r/\sigma^2$ bedeutet.

Beweis: Wir führen zum Lösen der Differentialgleichung zunächst wieder die Euler-Transformation durch, das heißt

$$e^y := x, \quad e^\theta := \rho_\infty \quad \text{und} \quad v(y) := u_\infty(x).$$

Damit erhalten wir das zu lösende freie Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} v''(y) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) v'(y) - rv(y) = & 0, \qquad y > \theta \\ v(\theta) = & K - e^\theta \\ v'(\theta) = & -e^\theta. \end{cases}$$

Die charakeristische Gleichung dieses Problems

$$\frac{\sigma^2}{2} z^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2}) z - r = 0$$

besitzt offensichtlich die Lösungen

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{2r}{\sigma^2} = \gamma.$$

Damit hat v die Gestalt

$$v(y) = \alpha e^y + \beta e^{-\gamma y},$$

wobei die Beschränktheit von u_∞ beziehungsweise von v noch $\alpha = 0$ liefert. Die Randbedingungen ergeben weiter

$$e^\theta = \rho_\infty = \frac{\gamma K}{1+\gamma} = \frac{K}{1+1/\gamma} \quad \text{sowie} \quad \beta = \frac{e^{\theta(1+\gamma)}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\rho_\infty^{1+\gamma},$$

also

$$v(y) = \frac{1}{\gamma}\rho_\infty^{1+\gamma} e^{-\gamma y}.$$

Die Umkehrung der Euler-Transformation liefert dann

$$u_\infty(x) = \frac{\rho_\infty}{\gamma}\left(\frac{x}{\rho_\infty}\right)^{-\gamma}.$$

□

5.5 (*) Existenz von Lösungen und deren Approximation

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz einer Lösung für das schwache Problem (KP) nachweisen, deren Eindeutigkeit wir schon in Abschnitt 5.3 gezeigt haben. Dazu betrachten wir nun das Euler-transformierte und zeitreflektierte Problem, das heißt

$$(KP')\begin{cases} \partial_t w + Aw \geq 0 & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \\ w \geq g & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \\ (\partial_t w + Aw)(w-g) = 0 & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \\ w(0,\cdot) = g & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei hier A der transformierte BS-Operator ist, also

$$A = -\frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2 + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\partial_y + r,$$

und $g(y) = f(e^y) = [K - e^y]_+$ sowie $w(t,y) = u(T-t, e^y)$ bedeuten. Als numerisches Verfahren wollen wir die Penalty-Approximation nutzen, das heißt

$$(PA_\lambda)\begin{cases} \partial_t w_\lambda + Aw_\lambda + B_\lambda w_\lambda = 0 \\ w_\lambda(0,\cdot) = g, \end{cases}$$

mit dem Störterm $B_\lambda w_\lambda := -\frac{1}{\lambda}[g - w_\lambda]_+$ für $\lambda > 0$.

5.5.1 Da $-A$ eine analytische Halbgruppe in $L_p(\mathbb{R})$ erzeugt, liefert uns der Fixpunktsatz von Banach die eindeutige Existenz der Lösung w_λ von (PA$_\lambda$) im Raum $C(\mathbb{T}; L_p(\mathbb{R}))$. Nun ist

$$w_\lambda(t,y) = e^{-At}g(y) + (e^{-A\cdot} * \frac{1}{\lambda}[g(y) - w_\lambda(\cdot,y)]_+)(t),$$

also

$$w_\lambda \in C^\alpha(\mathbb{T}; L_p(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{T}; W_p^{2\alpha}(\mathbb{R}))$$

für $p \in [1, \infty)$ und $\alpha \in (0,1)$, sofern $g \in W_p^{2\alpha}(\mathbb{R})$ ist, beziehungsweise

$$w_\lambda \in C^\alpha(\mathbb{T}; L_\infty(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{T}; buc^{2\alpha}(\mathbb{R}))$$

für $p = \infty$ und $\alpha \in (0,1)$, sofern $g \in buc^{2\alpha}(\mathbb{R})$ gilt.
$B_\lambda w_\lambda$ besitzt dieselbe Regularität, mit maximaler Regularität bedeutet das also

$$w_\lambda \in H_p^1(\mathbb{T}; L_p(\mathbb{R})) \cap L_p(\mathbb{T}; H_p^2(\mathbb{R}))$$

für $p \in (1, \infty)$, falls $g \in W_p^{2-2/p}$ gilt, und nach [12] Da Prato, Grisvard

$$w_\lambda \in C^1(\mathbb{T}; buc^{2\alpha}(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{T}; buc^{2+2\alpha}(\mathbb{R}))$$

für $p = \infty$, falls $g \in buc^{2+2\alpha}(\mathbb{R})$ gilt. Also sind die w_λ regulär, wenn g gut genug ist. Die Anfangsregularität von g lässt sich nun mit Clement-Simonett beziehungsweise mit Prüß-Simonett durch Einführung von t-Gewichten noch drücken. Für das Gewicht $t^{1-\mu}$ genügen dann

$$g \in D_A(\alpha + \mu, 0) = buc^{2(\alpha+\mu)}(\mathbb{R})$$

mit $\mu > 0$ für $p = \infty$ beziehungsweise

$$g \in D_A(\mu - \frac{1}{p}, p) = W_p^{2\mu - 2/p}(\mathbb{R})$$

mit $\mu > \frac{1}{p}$ für $p \in (1, \infty)$.

5.5.2 Für $p = \infty$ definieren wir nun den mengenwertigen Operator

$$Bw := \{v \in L_\infty(\mathbb{R}) : \ v \leq 0, \ v = 0 \text{ auf } B_\epsilon(y) \text{ für } w(y) > g(y)\}$$

mit $D(B) = \{w \in L_\infty(\mathbb{R}) : \ w \geq g\}$. Ferner setzen wir

$$(A + B)w = Aw + Bw \quad \text{mit} \quad D(A + B) = D(A) \cap D(B).$$

Satz 5.23. *Der Operator $A + B$ wie oben definiert ist in $L_\infty(\mathbb{R})$ stark m-akkretiv für $g \in C^{1-}(\mathbb{R})$, wenn es ein $g_* \in L_\infty(\mathbb{R})$ gibt, so dass*

$$\int_{\mathbb{R}} (Ag) h dy \leq \int_{\mathbb{R}} g_* h dy$$

für jedes $h \in W_1^1(\mathbb{R})$ (im schwachen Sinne) gilt.

Beweis: Der Beweis erfolgt in 2 Schritten. Zunächst werden wir die Akkretivität von $A + B_\lambda$ gleichmäßig in λ zeigen und danach die Konvergenz für $\lambda \to 0$.

Schritt 1: Wir betrachten die Gleichung der Penalty-Approximation mit der rechten Seite f für das zugehörige stationäre Problem, also

$$(S_\lambda) \qquad Aw_\lambda + B_\lambda w_\lambda = Aw_\lambda - \frac{1}{\lambda}[g - w_\lambda]_+ = f.$$

Diese ist äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$w_\lambda = (A + \frac{1}{\lambda})^{-1}(f + \frac{1}{\lambda} g) + \frac{1}{\lambda}(A + \frac{1}{\lambda})^{-1}[w_\lambda - g]_+ =: Tw_\lambda.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|Tw_\lambda - T\overline{w}_\lambda|_\infty \leq & \frac{1}{\lambda} \cdot |(A + \frac{1}{\lambda})^{-1}|_{\infty \to \infty} \cdot |[w_\lambda - g]_+ - [\overline{w}_\lambda - g]_+|_\infty \\
\leq & \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{r + 1/\lambda} \cdot |w_\lambda - \overline{w}_\lambda|_\infty \\
= & \frac{1}{1 + r\lambda} \cdot |w_\lambda - \overline{w}_\lambda|_\infty,
\end{aligned}$$

also ist T eine strikte Kontraktion, sofern $r > 0$ ist. T ist bezüglich des $L_\infty(\mathbb{R})$ eine Selbstabbildung, da $w_\lambda \mapsto [w_\lambda - g]_+$ eine ist, sofern $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ gilt. Damit besitzt (S_λ) nach dem Kontraktionsprinzip zu jedem $f, g \in L_\infty(\mathbb{R})$ genau eine Lösung $w_\lambda \in L_\infty(\mathbb{R})$, wodurch auch w' und w'' in diesem Raum liegen. Es folgt ferner mit

$$Aw_{\lambda,i} + B_\lambda w_{\lambda,i} = f_i$$

für $i = 1, 2$, dass

$$|w_{\lambda,1} - w_{\lambda,2}| \leq \frac{\lambda}{1 + r\lambda} \cdot |f_1 - f_2| + \frac{1}{1 + r\lambda} \cdot |w_{\lambda,1} - w_{\lambda,2}|,$$

also

$$|w_{\lambda,1} - w_{\lambda,2}| \leq \frac{1}{r}|f_1 - f_2|$$

gilt. Damit ist aber $A + B_\lambda$ akkretiv in $L_\infty(\mathbb{R})$, gleichmäßig in λ.

Schritt 2: Wir betrachten weiter das Problem (S_λ). Im Satz 5.24 (s.u.) zeigen wir $|B_\lambda w_\lambda|_\infty \leq C$. Daraus folgt nun $|Aw_\lambda|_\infty \leq C$ und damit für $\lambda \to 0$ mit Arzela-Ascoli $w_\lambda \to w$ und $\partial_y w_\lambda \to \partial_y w$ lokalgleichmäßig sowie $Aw_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} f - v$ für ein $v \in L_\infty(\mathbb{R})$ und ein $w \in BUC^{2-}(\mathbb{R})$. Also gilt

$$(v|h) = \lim_{\lambda\to 0}(B_\lambda w_\lambda|h) = -\lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda}[g - w_\lambda]_+ h dy$$

für alle $h \in L_1(\mathbb{R})$. Damit folgt $v \leq 0$, also $Aw \geq f$ f.ü.. Wäre nun $w(y_0) < g(y_0)$ für ein $y_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt wegen Stetigkeit schon $w(y) < g(y) - \epsilon$ in einer Umgebung $B_\rho(y_0)$, also auch

$$w_\lambda(y) < g(y) - \epsilon/2 \quad \text{in } B_\rho(y_0) \text{ für } \lambda \leq \lambda_\epsilon.$$

Mit einem Abschneider χ folgt dann

$$(v|\chi) = -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}[g - w_\lambda]_+ \chi dy \leq -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{c\epsilon}{2} = -\infty,$$

also ein Widerspruch. Ebenso folgt $v \equiv 0$ in einer Umgebung eines Punktes $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $w(y_0) > g(y_0)$. Damit und mit den Voraussetzungen des Satzes folgt, dass $w \in BUC^{2-}(\mathbb{R})$ Lösung des stationären Problems

$$(S)\begin{cases} \quad Aw \geq & f \\ \quad w \geq & g \\ (Aw - f)(w - g) = & 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ ist. Somit ist $A + B$ m-akkretiv, die starke m-Akkretivität folgt mit $r > 0$. □

Mit dem Satz 5.23 folgt nun auch, dass das Problem

$$\begin{cases} \partial_t w + (A + B)w = & 0 \\ w(0, \cdot) = & g \end{cases}$$

in $L_\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ wohlgestellt ist. Weiter ist der erzeugte Halbfluss strikt kontraktiv, konvergiert also gegen die Lösung des stationären Problems, das heißt

$$w(t, \cdot) \to_{t\to\infty} w_\infty \quad \text{in } L_\infty(\mathbb{R}).$$

5.5.3 Sei nun also $Ag \leq g_*$ für ein $g_* \in L_\infty(\mathbb{R})$, was im Falle des Puts offensichtlich erfüllt ist. Dann finden wir die folgenden a-priori Schranken:

Satz 5.24. *Mit den Annahmen wie zuvor gelten*

$$|B_\lambda w_\lambda|_\infty \le |g_*|_\infty \quad \textit{und} \quad |\partial_t w_\lambda|_\infty \le |Ag|_\infty, \textit{ falls } g \in D(A).$$

Beweis: Es ist

$$\partial_t w_\lambda + A w_\lambda + B_\lambda w_\lambda = \partial_t w_\lambda + A w_\lambda - \frac{1}{\lambda}[g - w_\lambda]_+ = 0,$$

mit $v := g - w_\lambda$ also

$$\partial_t v + Av + \frac{1}{\lambda}[v]_+ = Ag.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir nun mit $[v]_+$ und erhalten somit

$$\begin{aligned}\partial_t \phi(v) + \overline{A}\phi(v) + \frac{2}{\lambda}\phi(v) &= Ag \cdot [v]_+ - \underbrace{\frac{\sigma^2}{2}(\partial_y v)^2 \phi''(v)}_{\ge 0} \\ &\le g_* \cdot [v]_+,\end{aligned}$$

wobei $\phi(s) := \frac{1}{2}[s]_+^2$ und $\overline{A} := A + r = -\frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2 + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\partial_y + 2r$ bedeuten. Mit dem Kern $k_t^{A+r+2/\lambda}$ von $e^{-(A+r+2/\lambda)t}$, also

$$k_t^{A+r+2/\lambda}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \cdot e^{-(2r+2/\lambda)t} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}[y-(\sigma^2/2-r)t]^2},$$

erhalten wir dann

$$\phi(v) \le k_t^{A+r+2/\lambda} * \phi(v_0) + \int_0^t k_{t-s}^{A+r+2/\lambda} * (g_* \cdot [v(s)]_+) ds.$$

Da wir $w_\lambda(0, \cdot) = g$ betrachten wollen, ist $v_0 = 0$, also auch $\phi(v_0) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[v]_+^2 = \phi(v) &\le \left(\int_0^t |k_s^{A+r+2/\lambda}|_1 ds\right) \cdot \sup g_* \cdot \sup [v]_+ \\ &\le \frac{1}{2(r + 1/\lambda)} \cdot |g_*|_\infty \cdot |[v]_+|_\infty,\end{aligned}$$

also

$$|[v]_+|_\infty \le \frac{1}{r + 1/\lambda} \cdot |g_*|_\infty$$

und damit, wegen den Definitionen von B_λ und v,

$$|B_\lambda w_\lambda|_\infty \le \frac{1}{1 + r\lambda} \cdot |g_*|_\infty \le |g_*|_\infty,$$

also die erste Behauptung.
Für die zweite Ungleichung differenzieren wir die Differentialgleichung (PA_λ) nach t und erhalten

$$\begin{cases} \partial_t v + Av + \frac{1}{\lambda} v \cdot \chi = & 0 \\ \qquad v(0, \cdot) = v_0 = & -A w_\lambda(0, \cdot) + \frac{1}{\lambda}[g - w_\lambda(0, \cdot)]_+ = -Ag, \end{cases}$$

wobei hier $v := \partial_t w_\lambda$ und $\chi := \chi_{\{g > w_\lambda\}}$ bedeuten. Nach Multiplikation mit v bekommen wir nun

$$\partial_t v \cdot v + Av \cdot v + \frac{1}{\lambda} v^2 \cdot \chi = 0,$$

also

$$\partial_t(\frac{1}{2}v^2) + A(\frac{1}{2}v^2) = -\frac{1}{\lambda}v^2 \cdot \chi - \frac{\sigma^2}{2}(\partial_y v)^2 - \frac{r}{2}v^2 =: f \le 0,$$

und damit

$$\frac{1}{2}v^2 = e^{-At}(\frac{1}{2}v_0^2) + e^{-At} * f \leq e^{-At}(\frac{1}{2}v_0^2).$$

Folglich ist, nach Definition von v,

$$|\partial_t w_\lambda|_\infty \leq e^{-rt}|v_0|_\infty \leq |Ag|_\infty.$$

□

Nach Satz 5.24 gilt nun

$$|B_\lambda w_\lambda|_\infty + |\partial_t w_\lambda|_\infty + |Aw_\lambda|_\infty \leq M,$$

falls $w_\lambda(0,\cdot) = g \in D(A)$ ist. Es folgt die Beschränktheit von $\{w_\lambda\} \subset BC^{1,2}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, und mit Arzela-Ascoli gilt für eine Teilfolge für $\lambda \to 0$

$$w_\lambda \to w,\ \partial_y w_\lambda \to \partial_y w \text{ gleichmäßig auf Kompakta in } \mathbb{T}\times\mathbb{R},$$

$$w_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} w,\ Aw_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} Aw,\ B_\lambda w_\lambda \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{w}$$

sowie $w \in BC^{1-,2-}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$. Dabei löst w f.ü.

$$\begin{cases} \partial_t w + Aw = & \overline{w} \\ w(0,\cdot) = & g. \end{cases}$$

Da $B_\lambda w_\lambda \leq 0$ gilt, folgt auch $\overline{w} \leq 0$, also $\partial_t w + Aw \geq 0$. Wie im elliptischen Fall sehen wir $w \geq g$ und dass aus $w > g$ die Gleichung $\partial_t w + Aw = 0$ folgt (vgl. hierzu Schritt 2 im Beweis von Satz 5.23). Damit ist w die Lösung von (KP') und es gilt insbesondere

$$w \in BC^{1-,2-}(\mathbb{T}\times\mathbb{R}).$$

Also hat w und damit auch u, die Lösung des nicht transformierten Problems, die geforderte Regularität zur Anwendung der Itô-Formel (vgl. Theorem 10.5 und Bemerkung 4.12) im Modell.

5.6 Darstellungsformel für die Lösung

Wir betrachten in diesem Abschnitt das freie Randwertproblem der Black-Scholes Gleichung für den amerikanischen Put in starker Formulierung (vgl. Abschnitt 5.4), das heißt

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{\sigma^2}{2}x^2\partial_x^2 u + rx\partial_x u - ru = & 0, & t\in[0,T), x > \rho(t) > 0 \\ u(T,x) = & [K-x]_+ & \\ u(t,\rho(t)) = & [K-\rho(t)]_+, & (u(t,x) \geq [K-x]_+) \\ \partial_x u(t,\rho(t)) = & -1 & \\ u \text{ beschränkt.} & & \end{cases}$$

Nach der Euler Transformation, das heißt mit

$$y = \log x, \quad \theta = \log\rho \text{ und } u(t,x) = v(t,y),$$

erhalten wir das Problem

$$\begin{cases} \partial_t v + \frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2 v + (r - \frac{\sigma^2}{2})\partial_y v - rv = & 0, & t\in[0,T), y > \theta(t) \\ v(T,y) = & [K-e^y]_+ & \\ v(t,\theta(t)) = [K-e^{\theta(t)}]_+ = & [K-\rho(t)]_+ & \\ \partial_y v(t,\theta(t)) = & -e^{\theta(t)} = -\rho(t) & \\ v \text{ beschränkt.} & & \end{cases}$$

Zur Lösung des Problems, bestimmen wir zunächst die Grundlösung der adjungierten Gleichung

$$\partial_t w - \frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2 w + (r - \frac{\sigma^2}{2})\partial_y w + rw = 0$$

mittels Fourier-Transformation in y. Die transformierte Gleichung

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{w} + (\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})\imath\xi + r)\tilde{w} = & 0 \\ \tilde{w}(0,\xi) = & 1 \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\tilde{w}(t,\xi) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t|\xi|^2 - \imath\xi(r-\frac{\sigma^2}{2})t} e^{-rt}.$$

Durch Anwendung der inversen Fourier-Transformation erhalten wir nun die Grundlösung

$$\begin{aligned} \gamma(t,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-rt} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(y-(r-\frac{\sigma^2}{2})t)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}} e^{\frac{y}{\sigma^2 t}(r-\frac{\sigma^2}{2})t} e^{-rt} e^{-\frac{(r-\sigma^2/2)^2 t^2}{2\sigma^2 t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}} e^{-y(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})} e^{-rt} e^{-t\frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{rt}{2} - \frac{\sigma^2}{8}t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}} e^{-y(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})} e^{-\frac{t}{2}(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})^2}. \end{aligned}$$

Um nun eine Darstellung für $v(t,y)$ zu finden, seien $t \in [0,T)$ und $y > \theta(t)$ fixiert, sowie $t_\epsilon = t + \epsilon$ und $\phi(s,z) = \gamma(s-t, z-y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} I_\epsilon &:= \int_{t_\epsilon}^T \frac{d}{ds} \int_{\theta(s)}^\infty (v(s,z) - [K - e^z]_+)\phi(s,z)dz\,ds \\ &= -\int_{t_\epsilon}^T \underbrace{(v(s,\theta(s)) - [K - e^{\theta(s)}]_+)}_{=0} \phi(s,\theta(s))d\theta(s) \\ &\quad + \int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\infty \partial_s v(s,z)\phi(s,z) + (v(s,z) - [K-e^z]_+)\partial_s\phi(s,z)dz\,ds. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Differentialgleichungen für $\partial_s v$ und $\partial_s \phi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} I_\epsilon = \int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\infty & \Big[\Big(-\frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2 v(s,z) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\partial_y v(s,z) + rv(s,z) \Big) \phi(s,z) \\ & + (v(s,z) - [K-e^z]_+) \Big(\frac{\sigma^2}{2}\partial_y^2\phi(s,z) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\partial_y\phi(s,z) - r\phi(s,z) \Big) \Big] dz\,ds, \end{aligned}$$

nach partieller Integration also

$$\begin{aligned}
I_\epsilon = &\int_{t_\epsilon}^T \frac{\sigma^2}{2}(\phi\partial_y v)(s,\theta(s))ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\infty (\partial_y v \partial_y \phi)(s,z)dz\,ds \\
&- \int_{t_\epsilon}^T \frac{\sigma^2}{2}((v - [K-e^{\theta(s)}]_+)\partial_y\phi)(s,\theta(s))ds \\
&- \int_{t_\epsilon}^T \frac{\sigma^2}{2}\int_{\theta(s)}^\infty ((\partial_y v + \chi_{(\theta(s),\kappa)}(z)e^z)\partial_y\phi)(s,z)dz\,ds \\
&- (r-\frac{\sigma^2}{2})\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\infty \partial_y(v\phi)(s,z)dz\,ds \\
&+ (r-\frac{\sigma^2}{2})\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa [K-e^z]_+\partial_y\phi(s,z)dz\,ds \\
&+ r\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\infty (v\phi - (v-[K-e^z]_+)\phi)(s,z)dz\,ds,
\end{aligned}$$

wobei $\kappa = \log K$ ist. Es ist also weiter

$$\begin{aligned}
I_\epsilon = &\int_{t_\epsilon}^T \Bigg(\frac{\sigma^2}{2}\partial_y v(s,\theta(s))\phi(s,\theta(s)) - \frac{\sigma^2}{2}\underbrace{(v(s,\theta(s)) - [K-e^{\theta(s)}]_+)}_{=0}\partial_y\phi(s,\theta(s)) \\
&\quad + (r-\frac{\sigma^2}{2})v(s,\theta(s))\phi(s,\theta(s))\Bigg)ds \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa e^z\partial_y\phi(s,z)dz\,ds + (r-\frac{\sigma^2}{2})\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa (K-e^z)\partial_y\phi(s,z)dz\,ds \\
&+ r\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa (K-e^z)\phi(s,z)dz\,ds,
\end{aligned}$$

also nach erneuter partieller Integration

$$\begin{aligned}
I_\epsilon = &\int_{t_\epsilon}^T -\frac{\sigma^2}{2}\rho(s)\phi(s,\theta(s)) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(K-\rho(s))\phi(s,\theta(s))ds \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa (e^z + K - e^z)\partial_y\phi(s,z)dz\,ds - r\int_{t_\epsilon}^T (K-\rho(s))\phi(s,\theta(s))ds \\
&+ r\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa e^z\phi(s,z)dz\,ds + r\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa (K-e^z)\phi(s,z)dz\,ds \\
&+ r\int_{t_\epsilon}^T \underbrace{(K-e^\kappa)}_{=0}\phi(s,\kappa)ds.
\end{aligned}$$

In dieser Darstellung heben sich einige Terme gegenseitig auf, so dass

$$\begin{aligned}
I_\epsilon = &-\frac{\sigma^2}{2}K\int_{t_\epsilon}^T \phi(s,\theta(s))ds - \frac{\sigma^2}{2}K\int_{t_\epsilon}^T (\phi(s,\kappa) - \phi(s,\theta(s))) \\
&+ rK\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa \phi(s,z)dz\,ds \\
= &\, rK\int_{t_\epsilon}^T \int_{\theta(s)}^\kappa \phi(s,z)dz\,ds - \frac{\sigma^2}{2}K\int_{t_\epsilon}^T \phi(s,\kappa)ds
\end{aligned}$$

gilt, und wir haben

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon = rK\int_t^T \int_{\theta(s)}^\kappa \phi(s,z)dz\,ds - \frac{\sigma^2}{2}K\int_t^T \phi(s,\kappa)ds.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}I_\epsilon = &\int_{\theta(T)}^{\infty} \underbrace{(v(T,z) - [K-e^z]_+)}_{=0} \phi(T,z)dz \\ &- \int_{\theta(t_\epsilon)}^{\infty} (v(t_\epsilon,z) - [K-e^z]_+)\phi(t_\epsilon,z)dz,\end{aligned}$$

und da $\gamma(\epsilon, z-y) \to \delta(z-y)$ für $\epsilon \to 0$, ist

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon = -v(t,y) + [K-e^y]_+, \quad \text{falls } y > \theta(t).$$

Für $v(t,y)$ erhalten wir damit

$$v(t,y) = [K-e^y]_+ + \frac{\sigma^2}{2} K \int_t^T \phi(s,\kappa)ds - rK \int_t^T \int_{\theta(s)}^{\kappa} \phi(s,z)dz\,ds,$$

und zusammenfassend unter Anwendung der Definition von ϕ die Darstellungsformel in der Form

$$\boxed{\begin{aligned}v(t,y) = [K-e^y]_+ + \frac{K\sigma^2}{2} &\int_t^T \gamma(s-t, \kappa-y)ds \\ - rK \int_t^T &\int_{\theta(s)}^{\kappa} \gamma(s-t, z-y)dz\,ds\end{aligned}}$$

für $t \in \mathbb{T}$ und $y > \theta(t)$, wobei $x = e^y$, $\kappa = \log K$, $\theta(t) = \log \rho(t)$ sowie

$$\gamma(t,y) = e^{-rt} \exp(-(y-(r-\sigma^2/2)t)^2/(2\sigma^2 t))/\sqrt{2\pi\sigma^2 t}$$

gelten. Diese Darstellung ähnelt allerdings der Darstellung des transformierten Preises v_e der zugehörigen europäischen Option noch nicht wirklich. Aus Abschnitt 4.5 erhalten wir mittels der Parität für diesen transformierten Preis

$$v_e(t,y) = Ke^{-rt'} \phi\left(\frac{\kappa - y - (r-\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right) - e^y \phi\left(\frac{\kappa - y - (r+\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right),$$

wobei $\kappa = \log K$ den transformierten Ausübungspreis, $t' = T - t$ die Restlaufzeit der Option und ϕ die Verteilungsfunktion der Gaußschen Normalverteilung bedeuten. Wir wissen nun bereits, dass der Preis der amerikanischen Option stets mindestens so hoch ist, wie der der europäischen, also müßte sich doch auch der Wert der in der amerikanischen Option enthaltenen zusätzlichen Rechte explizit bestimmen lassen. Dazu transformieren wir die gewonnene Darstellung noch ein wenig, und nutzen dabei die spezielle Gestalt der Grundlösung γ aus. Somit ist

$$\begin{aligned}\gamma(t,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-rt} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(y-(r-\sigma^2/2)t)^2} \\ &= \frac{e^{-rt}}{\sigma\sqrt{t}} \phi'\left(\frac{y-(r-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right),\end{aligned}$$

wobei ϕ' die Dichte der Gaußschen Normalverteilung beschreibt. Setzen wir nun dieses Ergebnis in unsere Darstellung von v ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}v(t,y) = [K-e^y]_+ + \frac{K\sigma^2}{2} &\int_0^{t'} \frac{e^{-rs}}{\sigma\sqrt{s}} \phi'\left(\frac{\kappa - y - (r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right) ds \\ - rK \int_0^{t'} \frac{e^{-rs}}{\sigma\sqrt{s}} &\int_{\theta(s+t)-y}^{\kappa-y} \phi'\left(\frac{z-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right) dz\,ds.\end{aligned}$$

Das innere Integral des letzten Summanden können wir nun auflösen und erhalten

$$
\begin{aligned}
v(t,y) &= [K-e^y]_+ + \frac{K\sigma^2}{2}\int_0^{t'} \frac{e^{-rs}}{\sigma\sqrt{s}}\phi'\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds \\
&- rK\int_0^{t'} e^{-rs}\left[\phi\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)-\phi\left(\frac{\theta(s+t)-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\right]ds.
\end{aligned}
$$

Führen wir jetzt eine partielle Integration am zweiten Integral durch, so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
v(t,y) = [K-e^y]_+ &+ rK\int_0^{t'} e^{-rs}\phi\left(\frac{\theta(s+t)-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds \\
&+ Ke^{-rs}\phi\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\Bigg|_{s=0}^{t'} \\
&+K\int_0^{t'} e^{-rs}\phi'\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\left[\frac{\kappa-y}{2\sigma s\sqrt{s}}+\frac{r-\sigma^2/2}{2\sigma\sqrt{s}}+\frac{\sigma^2}{2\sigma\sqrt{s}}\right]ds,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
v(t,y) = [K-e^y]_+ &+ rK\int_0^{t'} e^{-rs}\phi\left(\frac{\theta(s+t)-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds \\
&+ Ke^{-rt'}\phi\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right)-K\chi_{(-\infty,\kappa)}(y)-\frac{K}{2}\chi_{\{\kappa\}}(y) \\
&+ K\int_0^{t'} e^{-rs}\phi'\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\left[\frac{\kappa-y}{2\sigma s\sqrt{s}}+\frac{r+\sigma^2/2}{2\sigma\sqrt{s}}\right]ds.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Struktur der Dichte ϕ' können wir das letzte Integral mittels quadratischer Ergänzung umschreiben zu

$$
\begin{aligned}
K&\int_0^{t'} e^{-rs}\phi'\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\left[\frac{\kappa-y}{2\sigma s\sqrt{s}}+\frac{r+\sigma^2/2}{2\sigma\sqrt{s}}\right]ds \\
&= Ke^{-\kappa+y}\int_0^{t'} \phi'\left(\frac{\kappa-y-(r+\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\left[\frac{\kappa-y}{2\sigma s\sqrt{s}}+\frac{r+\sigma^2/2}{2\sigma\sqrt{s}}\right]ds \\
&= -e^y\int_0^{t'} \frac{d}{ds}\phi\left(\frac{\kappa-y-(r+\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds,
\end{aligned}
$$

und bekommen somit

$$
\begin{aligned}
v(t,y) = [K-e^y]_+ &- K\chi_{(-\infty,\kappa)}(y)+e^y\chi_{(-\infty,\kappa)}(y) \\
&+ rK\int_0^{t'} e^{-rs}\phi\left(\frac{\theta(s+t)-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds \\
&+ Ke^{-rt'}\phi\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right)-e^y\phi\left(\frac{\kappa-y-(r+\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right),
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
v(t,y) = &+ rK\int_0^{t'} e^{-rs}\phi\left(\frac{\theta(s+t)-y-(r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds \\
&+ Ke^{-rt'}\phi\left(\frac{\kappa-y-(r-\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right)-e^y\phi\left(\frac{\kappa-y-(r+\sigma^2/2)t'}{\sigma\sqrt{t'}}\right).
\end{aligned}
$$

Beziehen wir schließlich die oben angegebene Gestalt von v_e mit ein, so ist

$$v(t,y) = v_e(t,y) + \underbrace{rK\int_0^{t'} e^{-rs}\phi\left(\frac{\theta(s+t) - y - (r-\sigma^2/2)s}{\sigma\sqrt{s}}\right)ds}_{=:I\geq 0},$$

wobei das Integral I den nichtnegativen Zuschlag für das vorzeitige Ausübungsrecht der amerikanischen Option bezeichnet.

Teil II

Resultate aus der Stochastik

Kapitel 6

Bedingte Erwartungen

6.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stochastische Variable mit $X \geq 0$ oder $X \in L_1(P)$, so dass der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_P(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

wohldefiniert ist.
Mit $\mathcal{F} = X^{-1}(\mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen beschreibt, gibt es keine kleinere Unter-σ-Algebra $\mathcal{C}$ von $\mathcal{F}$, für die X messbar ist. Andererseits ist die Abbildung $\omega \mapsto \mathbb{E}(X)$ konstant, also messbar bezüglich der trivialen σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$. X selbst "beinhaltet" also alle seine Informationen, $\mathbb{E}(X)$ hingegen nur sehr wenige.
Weiß man nun a priori, dass die relevanten Mengen zu einer echten Unter-σ-Algebra $\mathcal{C}$ von $\mathcal{F}$ gehören, so genügt es, entsprechend weniger Informationen über X zu haben. Der Begriff der *bedingten Erwartung* liefert genau dieses.
Bevor wir nun die abstrakte Konstruktion ausführen, betrachten wir noch einen Spezialfall. Sei $\Omega = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} B_j$ eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $P(B_j) > 0$ für jedes $j \in \{1, ..., k\}$. Sei weiter $\mathcal{F}_0$ die durch $\{B_j\}_{j=1}^{k}$ erzeugte σ-Algebra. Dann bilden wir die Mittelwerte

$$\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP, \qquad j = 1, ..., k$$

und fassen sie zu einer neuen Zufallsvariable X_0 zusammen:

$$(1) \qquad X_0 = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) \chi_{B_j},$$

wobei χ_{B_j} die charakteristische Funktion von B_j bezeichnet. Dieses X_0 ist nun $\mathcal{F}_0$-messbar, da X_0 auf den Atomen B_j von $\mathcal{F}_0$ konstant ist. Es gilt

$$\int_{B_j} X_0 dP = \frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \cdot \int_{B_j} dP = \int_{B_j} X dP$$

für jedes $j = 1, ..., k$, also auch

$$(2) \qquad \int_B X_0 dP = \int_B X dP$$

für alle $B \in \mathcal{F}_0$. X_0 heißt *bedingte Erwartung* von X bezüglich der "Hypothese" $\mathcal{F}_0$. Wir beachten dabei, dass X_0 die beiden Bedingungen:

(*i*) X_0 ist $\mathcal{F}_0$-messbar
(*ii*) es gilt die Beziehung (2)

erfüllt. Diese beiden Eigenschaften können nun im Fall einer beliebigen Unter-σ-Algebra $\mathcal{C}$ von $\mathcal{F}$ zur Definition der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$ von X unter der "Hypothese" $\mathcal{C}$ herangezogen werden.

Definition 6.1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Eine stochastische Variable Y heißt* ***bedingte Erwartung*** *von X bezüglich der Hypothese $\mathcal{C}$, falls die Bedingungen*

(*i*) *Y ist $\mathcal{C}$-messbar*
(*ii*) *$\int_C Y dP = \int_C X dP$ für jedes $C \in \mathcal{C}$*

erfüllt sind.

6.2 Existenz und Eindeutigkeit

Die natürliche Frage, die sich aufgrund der Definition 6.1 stellt, ist die nach Existenz und Eindeutigkeit der bedingten Erwartung. Erst die Klärung dieser Frage rechtfertigt dann die Bezeichnung $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$. Dieses ist nun Inhalt des in diesem Abschnitt zentralen Satzes:

Satz 6.2. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X \geq 0$ oder $X \in L_1(P)$ sowie $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann existiert eine Zufallsvariable Y mit $Y \geq 0$ beziehungsweise $Y \in L_1(P)$ auf Ω, die $\mathcal{C}$-messbar ist und*

$$(3) \qquad \int_C Y dP = \int_C X dP \qquad \forall C \in \mathcal{C}$$

erfüllt. Y ist dabei bis auf P-fast sicher Gleichheit eindeutig bestimmt.

Beweis: Dieser Beweis beruht auf dem Satz von Radon-Nikodym (vgl. Bauer [2, Satz 17.10]). Hierzu wählen wir $X \geq 0$ und P_0 und Q seien die Einschränkungen von P beziehungsweise XP auf den Maßraum $(\Omega, \mathcal{C})$. Wegen

$$Q(C) = \int_C X dP$$

ist $Q(C) = 0$ für jedes $C \in \mathcal{C}$ mit $P_0(C) = P(C) = 0$, also ist Q schon P_0-stetig. Nach Radon-Nikodym gibt es daher eine P_0-f.s. eindeutig bestimmte und $\mathcal{C}$-messbare Funktion $Y \geq 0$ mit

$$Q(C) = \int_C Y dP_0 = \int_C Y dP,$$

dass heißt Y ist eine bedingte Erwartung von X bezüglich $\mathcal{C}$ gemäß der Definition 6.1.

Ferner ist Y P-f.s. eindeutig bestimmt, denn ist Y' eine weitere bedingte Erwartung von X bezüglich $\mathcal{C}$, so gilt $\{Y = Y'\} \in \mathcal{C}$ und $P(\{Y = Y'\}) = P_0(\{Y = Y'\}) = 1$.

Es bleibt uns nun noch die Behauptung für $X \in L_1(P)$ zu zeigen. Dafür zerlegen wir $X = X^+ - X^-$ in Positiv- und Negativteil. Damit erhalten wir $\mathcal{C}$-messbare Funktionen $Y^\pm \geq 0$ mit

$$\int_C Y^\pm dP = \int_C X^\pm dP < \infty$$

für jedes $C \in \mathcal{C}$. Insbesondere sind $Y^{\pm} \in L_1(\Omega, \mathcal{C}, P_0)$. Es folgt nun (3), wenn wir $Y = Y^+ - Y^-$ setzen. Ist $Y' = Y'^+ - Y'^-$ eine weitere bedingte Erwartung mit $Y'^{\pm} \geq 0$, so gilt

$$\int_C (Y^+ + Y'^-)dP = \int_C (Y'^+ + Y^-)dP$$

für jedes $C \in \mathcal{C}$, also $Y^+ + Y'^- = Y'^+ + Y^-$ P-f.s. und damit $Y = Y'$ P-f.s.. □

Bezeichnung 6.3. *Die bedingte Erwartung von X unter der Hypothese $\mathcal{C}$ schreiben wir als $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$. Wird dabei $\mathcal{C}$ von Zufallsvariablen Z_i für $i \in I$ erzeugt, das heißt $\mathcal{C} = \sigma(\{Z_i : i \in I\})$, so schreiben wir auch $\mathbb{E}(X|Z_i, i \in I) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C})$. Mittels der speziellen Zufallsgröße $X = \chi_A$ definieren wir die* ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** *von A unter $\mathcal{C}$ als $P(A|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\chi_A|\mathcal{C})$.*

6.3 Eigenschaften und Charakterisierung

Der folgende Satz fasst nun die wichtigsten Eigenschaften der bedingten Erwartung zusammen:

Proposition 6.4. *Seien $X_{(n)}, Y$ integrierbare (oder nichtnegative) Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und α, β reelle (nichtnegative) Zahlen. Dann gelten:*

(a) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C})) = \mathbb{E}(X), \quad \mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X)$
(b) *X ist $\mathcal{C}$-meßbar $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) = X$ P-f.s.*
(c) *$X = Y$ P-f.s. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{C})$ P-f.s.*
(d) *$X \equiv \alpha$ (konstant) $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \equiv \alpha$ P-f.s.*
(e) *$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|\mathcal{C}) = \alpha\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) + \beta\mathbb{E}(Y|\mathcal{C})$ P-f.s.*
(f) *$X \leq Y$ P-f.s. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{C})$ P-f.s.*
(g) *$|\mathbb{E}(X|\mathcal{C})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{C})$ P-f.s.*
(h) *$X_n \geq 0$, X_n mon. wachsend $\Rightarrow$ $\sup_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\sup_n X_n|\mathcal{C})$ P-f.s.*
(i) *$X_n \to X$ P-f.s., $|X_n| \leq |Y|$ P-f.s., $Y \in L_1(P)$*
$\Rightarrow$ *$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C})$ P-f.s. und in $L_1(P_0)$.*

Beweis: Die Beweise aller Aussagen sind relativ einfach. Exemplarisch zeigen wir hier nur (e), die Linearität. Es gilt

$$\int_C \mathbb{E}(X|\mathcal{C})dP = \int_C XdP, \quad \int_C \mathbb{E}(Y|\mathcal{C})dP = \int_C YdP$$

für jedes $C \in \mathcal{C}$, also auch

$$\int_C (\alpha\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) + \beta\mathbb{E}(Y|\mathcal{C}))dP = \int_C (\alpha X + \beta Y)dP$$

für jedes $C \in \mathcal{C}$. Die Eindeutigkeit der bedingten Erwartung ergibt dann (e).
Man merke sich diese Argumentation, die wesentlich auf der Eindeutigkeit der bedingten Erwartung beruht! □

Noch ist die bedingte Erwartung ein recht unhandliches Konstrukt. Daher liefert uns der folgende Satz eine nützliche Charakterisierung der bedingten Erwartung.

Proposition 6.5. *Seien $X, Y \geq 0$ beziehungsweise $X, Y \in L_1(P)$ Zufallsvariablen, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra und Y messbar bezüglich $\mathcal{C}$. Y ist genau dann P-f.s. die bedingte Erwartung von X unter $\mathcal{C}$, wenn*

$$(4) \qquad \int_\Omega ZYdP = \int_\Omega ZXdP$$

für alle nichtnegativen beziehungsweise alle beschränkten $\mathcal{C}$-messbaren Z gilt.

Beweis: Wissen wir (4), so wählen wir $Z = \chi_C$ für $C \in \mathcal{C}$. Damit erfüllt Y die Definition der entsprechenden bedingten Erwartung von X. Umgekehrt folgt mittels der Definition 6.1 zunächst (4) für alle elementaren Funktionen. Durch Approximation folgt dann die Behauptung. □

Hieraus ergeben sich nun weitere wichtige Eigenschaften der bedingten Erwartung, die ihre Glättung beschreiben.

Proposition 6.6. *Seien $X, Y \geq 0$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{C}, \mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebren, dann gelten:*

$$\begin{array}{ll} (a) & Y \text{ ist } \mathcal{C}\text{-messbar} \Rightarrow \mathbb{E}(XY|\mathcal{C}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \\ (b) & \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{C})|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{C})\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \\ (c) & \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1)|\mathcal{C}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1). \end{array}$$

Selbiges gilt für $X, Y \in L_1(P)$.

Beweis: Für den Beweis nutzen wir die Charakterisierung der bedingten Erwartung aus Proposition 6.5. Da nun Y, Z $\mathcal{C}$-messbar sind, gilt

$$\int_\Omega (ZY)\mathbb{E}(X|\mathcal{C})dP = \int_\Omega (ZY)XdP = \int_\Omega Z(YX)dP = \int_\Omega Z(Y\mathbb{E}(X|\mathcal{C}))dP,$$

folglich somit (a). Die Behauptung (b) ist nun eine direkte Folgerung aus (a), da die bedingte Erwartung unter $\mathcal{C}$ auch $\mathcal{C}$-messbar ist. Es verbleibt uns noch (c) zu zeigen. Es ist

$$\int_C \mathbb{E}(X|\mathcal{C}_2)dP = \int_C XdP$$

für jedes $C \in \mathcal{C}_2$, also auch für alle $C \in \mathcal{C}_1$. Ferner gilt für $C \in \mathcal{C}_1$ die Gleichung $\int_C \mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1)dP = \int_C XdP$. Damit folgt aber schon

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1).$$

Da nun $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1)$ $\mathcal{C}_1$-messbar also auch $\mathcal{C}_2$-messbar ist, folgt andererseits mit (a)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1)|\mathcal{C}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C}_1),$$

und damit die Behauptung. □

Lemma 6.7. *Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit $dQ = MdP$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Sei ferner X eine nichtnegative Zufallsvariable oder $X \in L_1(P)$ mit $XM \in L_1(P)$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{C}) = \frac{\mathbb{E}_P(XM|\mathcal{C})}{\mathbb{E}_P(M|\mathcal{C})}.$$

Beweis: vgl. vorlesungsbegleitende Übungsaufgaben! □

Bemerkung 6.8. Für d-dimensionale Zufallsvariable X definiert man

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) := (\mathbb{E}(X_1|\mathcal{C}), ..., \mathbb{E}(X_d|\mathcal{C}))^T.$$

Es gelten somit die Eigenschaften der bedingten Erwartung des Abschnittes auch im vektorwertigen Fall.

6.4 Die Jensen-Ungleichung

Diesen Abschnitt widmen wir der berühmten *Jensen-Ungleichung* im Zusammenhang mit bedingten Erwartungen.

Satz 6.9. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X \in L_1(P)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt*

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X)).$$

Beweis: Sei μ die Verteilung von X und o.B.d.A. $g \geq 0$. Aufgrund der Stetigkeit von g gilt

$$\begin{aligned} g\left(\int_{-N}^{N} x d\mu(x)\right) &= g\left(\lim \sum_k x_{i_k}(\mu(x_{i_k}) - \mu(x_{i_{k-1}}))\right) \\ &= \lim \sum_k g(x_{i_k})(\mu(x_{i_k}) - \mu(x_{i_{k-1}})) \\ &= \int_{-N}^{N} g(x) d\mu(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x) = \mathbb{E}(g(X)). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$g(\mathbb{E}(X)) = g\left(\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} x d\mu(x)\right) \leq \mathbb{E}(g(X)).$$

□

Diese Ungleichung lässt sich nun auch auf bedingte Erwartungen übertragen.

Korollar 6.10. *Sei $X \in L_1(P)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Dann gilt*

$$g(\mathbb{E}(X|\mathcal{C})) \leq \mathbb{E}(g(X)|\mathcal{C}) \quad P\text{-f.s..}$$

Insbesondere ist

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{C})|^p \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{C}) \quad P\text{-f.s.}$$

für $p \geq 1$.

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ax + b \leq g(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Diese Zahlen existieren, da g konvex ist. Damit gilt nun

$$a\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) + b = \mathbb{E}(aX + b|\mathcal{C}) \leq \mathbb{E}(g(X)|\mathcal{C}) \quad P\text{-f.s..}$$

Weiter ist

$$g(x_0) = \sup_{a,b}\{ax_0 + b : \, ax + b \leq g(x) \text{ auf } \mathbb{R}\}$$

(vgl. Bauer [3, (3.27)]), also

$$g(\mathbb{E}(X|\mathcal{C})) \leq \mathbb{E}(g(X)|\mathcal{C}) \quad P\text{-f.s..}$$

□

Ist also $X \in L_2(P)$, so zeigt dieses Korollar, dass $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \in L_2(\Omega, \mathcal{C}, P_0)$ und

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{C})|_{L_2}^2 \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X|^2|\mathcal{C})) = \mathbb{E}(|X|^2) = |X|_{L_2}^2.$$

Ferner gilt $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C})|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C})$, dass heißt

$$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C}) : \, L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \to L_2(\Omega, \mathcal{C}, P_0)$$

ist eine Projektion. Tatsächlich ist $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C})$ die orthogonale Projektion.

Satz 6.11. *Seien $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $H_{\mathcal{F}} := L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sowie $H_{\mathcal{C}} := L_2(\Omega, \mathcal{C}, P_0)$. Dann ist der Operator $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{C})$ der bedingten Erwartung die orthogonale Projektion von $H_{\mathcal{F}}$ auf den abgeschlossenen Teilraum $H_{\mathcal{C}}$ von $H_{\mathcal{F}}$.*

Beweis: Es ist für $Y \in H_{\mathcal{C}}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (X - \mathbb{E}(X|\mathcal{C}))Y dP &= \int_\Omega XY dP - \int_\Omega \mathbb{E}(XY|\mathcal{C}) dP \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|\mathcal{C})) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XY) = 0. \end{aligned}$$

□

Kapitel 7

Martingale

7.1 Setting und Definition

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{T}$ eine geordnete Menge und $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ eine wachsende Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, dass heißt

$$s, t \in \mathbb{T}, s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Man sagt dann, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ ist eine *Filtration*. Die Indexmenge $\mathbb{T}$ heißt *Zeitmenge*. Typische Beispiele für $\mathbb{T}$ sind:

(a) diskret: $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., N\}$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$
(b) kontinuierlich: $\mathbb{T} = [0, T]$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Des Weiteren sei $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ eine Familie reeller integrierbarer Zufallsvariablen, indiziert mit derselben Indexmenge. Man sagt, dass $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ an die Filtration $\mathbb{F}$ *adaptiert* ist, wenn jedes X_t $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B})$-messbar ist, wobei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen beschreibt. $\mathbb{X}$ wird auch *stochastischer Prozess* genannt. Das Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ wird manchmal auch als *stochastische Basis* bezeichnet.
Ist $\mathbb{X}$ ein stochastischer Prozess, so gehört zu $\mathbb{X}$ die sogenannte *kanonische Filtration*

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(\{X_s^{-1}(\mathcal{B}) : s \leq t\}), \quad t \in \mathbb{T}.$$

$\mathbb{F}^0 := \{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{T}}$ ist damit die kleinste Filtration, an die $\mathbb{X}$ adaptiert ist.
Ist nun $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ eine stochastische Basis, so können wir die bedingten Erwartungen $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ bilden und mit X_s vergleichen. Dies führt uns dann zum Begriff des Martingals:

Definition 7.1. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ eine stochastische Basis. Der stochastische Prozess $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ heißt*

(a) ***Submartingal,*** *falls $X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$,*
(b) ***Supermartingal,*** *falls $X_s \geq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ beziehungsweise*
(c) ***Martingal,*** *falls $X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$*

für jedes $s \leq t$ mit $s, t \in \mathbb{T}$ erfüllt ist.

Bemerkung 7.2. (i) $\mathbb{X}$ ist genau dann ein Martingal, wenn $\mathbb{X}$ gleichzeitig Sub- und Supermartingal ist. $\mathbb{X}$ ist genau dann ein Supermartingal, wenn $-\mathbb{X} = \{-X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ ein Submartingal ist.

(ii) $\mathbb{X}$ ist genau dann ein Submartingal, wenn

$$\int_A X_s dP \leq \int_A X_t dP$$

für jedes $A \in \mathcal{F}_s$ und $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s \leq t$ erfüllt ist. Für Martingale und Supermartingale gilt die analoge Charakterisierung.

Die Implikation von links nach rechts folgt dabei durch Integration über $A \in \mathcal{F}_s$ unter Verwendung der Definition 6.1 der bedingten Erwartung. Die Umkehrung sehen wir so:
Es ist

$$\int_A (\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s) dP \geq 0$$

für jedes $A \in \mathcal{F}_s$ und $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s \leq t$. Nun ist $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s$ $\mathcal{F}_s$-messbar, es kann also

$$A = \{\omega : (\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s)(\omega) < 0\}$$

gewählt werden. Dann folgt aber $P(A) = 0$, also $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$.

(iii) Offensichtlich kann in den Definitionen stets $s < t$ angenommen werden.

(iv) Ist $\mathbb{X}$ ein Martingal, so können wir also X_s für $s < t$ aus X_t und $\mathcal{F}_s$ zurückgewinnen. Die Vergangenheit des Prozesses ist in der Filtration gespeichert, die momentane Zufallsvariable X_t genügt, um die Vergangenheit des Prozesses rekonstruieren zu können.

(v) Ist $\mathbb{T}$ diskret, also zum Beispiel $\mathbb{T} = \{0, 1, ..., N\}$ so genügt beispielsweise für die Submartingaleigenschaft der Nachweis von

$$X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

für jedes $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$.
Mit dieser Bedingung folgt dann

$$X_{n-1} \leq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_{n-1})$$

für jedes $n \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Die Behauptung folgt somit nach Induktion.

(vi) Ist $\mathbb{X}$ ein Submartingal, so gilt

$$\mathbb{E}(X_s) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(X_t)$$

für jedes $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s \leq t$. Also ist die Funktion $t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ wachsend. Für Martingale gilt daher $\mathbb{E}(X_t) \equiv$ konstant bezüglich $t \in \mathbb{T}$, weshalb häufig $\mathbb{E}(X_t) \equiv 0$ angenommen wird.

7.2 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir uns ein paar einfache Beispiele für Martingale anschauen.

(i) Folgendes ist das kanonische Beispiel eines Martingals. Sei $\mathbb{F}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und X eine reelle integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann setzen wir

$$X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$$

für $t \in \mathbb{T}$. Damit ist $\mathbb{X}$ ein Martingal, denn mit den Eigenschaften der bedingten Erwartung folgt:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s) = X_s$$

für jedes $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s \leq t$.

(ii) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller integrierbarer Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. X_n interpretieren wir als die Auszahlung aus einem Spiel zum Zeitpunkt n. Die Filtration definieren wir kanonisch, also durch

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_k^{-1}(\mathcal{B}) : k \leq n\}).$$

Ein Spiel heißt nun *fair*, falls $\mathbb{E}(X_0) = 0$ und $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ für jedes $n \geq 0$ gilt. Der Gesamtgewinn des Spielers nach n Versuchen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$$

ist dann ein Martingal, denn

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n) = S_n.$$

Analog führen die Bedingungen $\mathbb{E}(X_0) \geq 0$ und $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq 0$ für jedes $n \geq 0$ zu einem Submartingal. In diesem Fall hat der Spieler gegenüber dem Spieleanbieter Vorteile.

(iii) Ein faires Spiel wird insbesondere durch unabhängige Zufallsvariable X_n mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ beschrieben (vgl. Korollar 8.12).

7.3 Eigenschaften

Der folgende Satz fässt einige wichtige Eigenschaften von Sub-, Super- und Martingalen zusammen:

Satz 7.3. *Seien $\mathbb{F}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ $\mathbb{F}$-adaptierte stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

- *(a) Sind $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Sub-, Super- oder Martingale, so auch $\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y} = \{\alpha X_t + \beta Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.*
- *(b) Sind $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Martingale, so auch $\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
- *(c) Sind $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Submartingale, so auch* $\max\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}\} = \{\max\{X_t, Y_t\}\}_{t\in\mathbb{T}}$.
- *(d) Ist $\mathbb{X}$ ein Submartingal, so auch $\mathbb{X}^+ = \{X_t^+\}_{t\in\mathbb{T}}$.*
- *(e) Ist $\mathbb{X}$ ein Submartingal, so auch $g(\mathbb{X}) = \{g(X_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ mit einer wachsenden, konvexen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, falls $g(X_t) \in L_1(P)$ für jedes t.*
- *(f) Ist $\mathbb{X}$ ein Martingal, so ist $g(\mathbb{X})$ ein Submartingal mit einer konvexen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, falls $g(X_t) \in L_1(P)$ für jedes t.*
- *(g) Ist $\mathbb{X}$ ein Martingal, dann sind $|\mathbb{X}|$, $\mathbb{X}^+$, $\mathbb{X}^-$ und $|\mathbb{X}|^p$ $(p \geq 1)$ Submartingale, falls $|X_t|^p \in L_1(P)$ für jedes t.*
- *(h) Sei $\mathbb{X}$ ein Martingal, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ und $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein weiterer $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess. Sei ferner der Prozess $\mathbb{Y}$ definiert durch $Y_0 = X_0$ und $Y_{n+1} = Y_n + U_n \cdot (X_{n+1} - X_n)$. Dann ist auch $\mathbb{Y}$ ein Martingal, falls $X_n, U_n \in L_2(P)$ für jedes n.*

Beweis: Die Beweise aller Aussagen folgen direkt aus der Definition 7.1 und den Eigenschaften der bedingten Erwartung. Exemplarisch wollen wir daher nur (e) und (h) beweisen.

(e) bekommen wir mit Hilfe der Jensen-Ungleichung (vgl. Satz 6.9 und Korollar 6.10). Damit ist also

$$g(X_s) \leq g(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) \leq \mathbb{E}(g(X_t)|\mathcal{F}_s).$$

Für (h) benutzen wir zunächst die Definition des Prozesses $\mathbb{Y}$ und die Linearität der bedingten Erwartung. Wir haben also

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(U_n \cdot (X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n).$$

Y_n wird dabei aus den Zufallsvariablen $X_0, ..., X_n$ und $U_0, ..., U_{n-1}$ zusammengesetzt, ist somit also $\mathcal{F}_n$-messbar, dass heißt $\mathbb{Y}$ ist $\mathbb{F}$-adaptiert. Damit haben wir

$$\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_n) = Y_n.$$

Weiter bekommen wir mit der Adaptiertheit des Prozesses $\mathbb{U}$ und der Martingaleigenschaft von $\mathbb{X}$

$$\mathbb{E}(U_n \cdot (X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = U_n\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = U_n \cdot 0,$$

also

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Y_n + 0 = Y_n.$$

□

7.4 Doob-Zerlegung und Doobsche Ungleichungen

Satz 7.4 (Doob-Zerlegung). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ eine stochastische Basis, die Zeitmenge diskret, das heißt $\mathbb{T} = \{0, ..., n\}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, und $\mathbb{X}$ ein Supermartingal. Dann lässt sich X_n $(n \in \mathbb{T})$ zerlegen in*

$$(1) \qquad X_n = M_n - A_n,$$

wobei $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ ein Martingal und $\mathbb{A} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{T}}$ ein wachsender Prozess ist, mit $A_0 = 0$ und A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar für $n \in \mathbb{T}, n \geq 1$. Desweiteren ist diese Zerlegung P-f.s. eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir setzen $M_0 := X_0$ und $A_0 := 0$. Gilt die Eigenschaft (1) für die Indizes n und $n + 1$, so folgt

$$X_{n+1} - X_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n),$$

also mit der Martingaleigenschaft von $\mathbb{M}$ und der Messbarkeitseigenschaft von $\mathbb{A}$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n = -\mathbb{E}(A_{n+1} - A_n|\mathcal{F}_n) = A_n - A_{n+1}.$$

Wir definieren somit A_{n+1} induktiv als

$$A_{n+1} = A_n + X_n - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n).$$

Da $\mathbb{X}$ ein Supermartingal ist, ist $\mathbb{A}$ wegen dieser Definition wachsend. Die $\mathcal{F}_n$-messbarkeit des A_{n+1} ist durch die Adaptiertheit des $\mathbb{X}$ gegeben, denn

$$(2) \qquad A_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}(X_j - \mathbb{E}(X_{j+1}|\mathcal{F}_j)).$$

Damit ist der Prozess $\mathbb{A}$ gemäß den Anforderungen des Satzes konstruiert. Setzen wir nun wegen (1)

$$M_n = X_n + A_n,$$

so bleibt noch zu zeigen, dass $\mathbb{M}$ ein Martingal bildet. Die Adaptiertheit sehen wir direkt an der Definition, die Martingaleigenschaft können wir nachrechnen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + A_{n+1}\\ &= \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + A_n + X_n - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\ &= A_n + X_n = M_n\end{aligned}$$

Es bleibt somit noch die Eindeutigkeit der Zerlegung zu zeigen. Dazu nehmen wir an, dass wir eine weitere solche Zerlegung durch $\overline{\mathbb{M}}$ und $\overline{\mathbb{A}}$ gegeben haben. Dann bildet

$$\mathbb{M} - \overline{\mathbb{M}} = \mathbb{A} - \overline{\mathbb{A}}$$

ein Martingal, da $\mathbb{M}$ und $\overline{\mathbb{M}}$ Martingale sind, das vorhersagbar ist, da $\mathbb{A}$ und $\overline{\mathbb{A}}$ vorhersagbar sind. Es gilt also

$$A_n - \overline{A}_n = \mathbb{E}(A_n - \overline{A}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = A_{n-1} - \overline{A}_{n-1} \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $n = 1, ..., N$. Insbesondere haben wir auch

$$\mathbb{M} - \overline{\mathbb{M}} = \mathbb{A} - \overline{\mathbb{A}} \equiv A_0 - \overline{A_0} = 0 \quad P\text{-f.s.},$$

also die Behauptung. □

Definition 7.5. *Sei $\mathbb{X}$ ein stochastischer Prozess mit Zeitmenge $\mathbb{T} = J$. $\mathbb{X}$ besitzt **(P-f.s.) stetige Pfade**, falls die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ auf J für (f.a.) $\omega \in \Omega$ stetig ist.*

Bemerkung 7.6. (i) Wenn $\mathbb{T}$ diskret ist, sind die Pfade trivialerweise stetig.
(ii) Wenn $\mathbb{X}$ P-f.s. stetige Pfade mit der Nullmenge $N \in \mathcal{F}$ besitzt, so hat der Prozess $\tilde{\mathbb{X}}$ mit

$$\tilde{X}_t(\omega) := \begin{cases} X_t(\omega), & t \in \mathbb{T}, \omega \notin N \\ 0, & t \in \mathbb{T}, \omega \in N \end{cases}$$

stetige Pfade.

Wir definieren nun zu einem Prozess $\mathbb{X}$

$$X_t^*(\omega) := \sup_{s \in \mathbb{T}, s \leq t} |X_s(\omega)|$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und alle $\omega \in \Omega$. Hat $\mathbb{X}$ stetige Pfade für $\mathbb{T} = [0, T]$, so ist

$$(3) \quad X_t^*(\omega) = \lim_{n \to \infty} \max_{k=0,\dots,2^n} |X(k \cdot 2^{-n} t, \omega)|, \quad t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega,$$

also ist X_t^* für jedes t eine Zufallsvariable.

Satz 7.7 (Doobsche Ungleichungen). *Sei $\mathbb{X}$ ein Martingal mit stetigen Pfaden. Dann gelten für $t \in \mathbb{T}$*
(a) $\alpha P(X_t^* \geq \alpha) \leq \mathbb{E}(|X_t|)$ für alle $\alpha \geq 0$ sowie
(b) $X_t \in L_p(P)$ für ein $p > 1$, $t \in \mathbb{T} \Rightarrow ||X_t^*||_p \leq \frac{p}{p-1} ||X_t||_p$, insbesondere gilt dann auch $X_s \in L_p(P)$ für $s \leq t$, $s \in \mathbb{T}$.
Diese Aussagen gelten entsprechend auch für nichtnegative Submartingale.

Beweis: Es genügt den Satz für nichtnegative Submartingale zu zeigen, da wir sonst $\mathbb{X}$ durch $|\mathbb{X}|$ ersetzen.
Schritt 1 (diskrete Zeit): Seien also $\mathbb{T} = \{0, ..., N\}$ die Zeitmenge und $\alpha \geq 0$ eine feste Zahl. Dann defineren wir eine Zufallsvariable τ als ersten Zeitpunkt, zu dem $\mathbb{X}$ das Niveau α erreicht, das heißt $\tau(\omega) := \min\{m \in \mathbb{T} : X_m(\omega) \geq \alpha\}$ beziehungsweise $\tau(\omega) := \infty$, falls es kein solches $m \in \mathbb{T}$ gibt. Damit ist τ eine sogenannte Stoppzeit (vgl. Kapitel 3), denn es gilt

$$\{\tau \leq k\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq k\} = \bigcup_{m \leq k} \{\omega \in \Omega : X_m \geq \alpha\} \in \mathcal{F}_k, \quad k \in \mathbb{T}$$

und somit auch $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ für alle $k \in \mathbb{T}$. Es gilt ferner

$$\{X_n^* \geq \alpha\} = \{\tau \leq n\}$$

und aus $X_{\tau(\omega)}(\omega) \geq \alpha$ für $\tau \leq n$ folgt

$$\alpha \chi_{\{\tau \leq n\}} \leq X_\tau \chi_{\{\tau \leq n\}} = \sum_{0 \leq m \leq n} X_m \chi_{\{\tau = m\}}.$$

Damit und da $\mathbb{X}$ ein Submartingal ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha P(X_n^* \geq \alpha) = \alpha \mathbb{E}(\chi_{\{\tau \leq n\}}) &\leq \sum_{0 \leq m \leq n} \mathbb{E}(X_m \chi_{\{\tau = m\}}) \\ &\leq \sum_{0 \leq m \leq n} \mathbb{E}(X_n \chi_{\{tau = m\}}) = \mathbb{E}(X_n \sum_{0 \leq m \leq n} \chi_{\{\tau = m\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(X_n \chi_{\{\tau \leq n\}}) \leq \mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$

also die Behauptung (a).
Die Aussage (b) folgt nun aus dem folgenden Lemma 7.8.

Schritt 2 (zeitstetig): Nach (3) gilt $0 \leq \chi_{\{X_t^* > \alpha\}}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\{X_{t,n}^* > \alpha\}}(\omega) \leq 1$, wobei $X_{t,n}^*(\omega) := \max_{0 \leq k \leq 2^n} X(k \cdot 2^{-n} t, \omega) \leq X_t^*$ bedeutet. Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir nun $\lim_{n\to\infty} P(X_{t,n}^* > \alpha) = P(X_t^* > \alpha)$, mit (a) für diskrete Zeitmengen (Schritt 1) also $\alpha P(X_t^* > \alpha) \leq \mathbb{E}(X_t)$. Damit erhalten wir durch nochmalige Anwendung des Satzes von Lebesgue

$$\alpha P(X_t^* \geq \alpha) = \lim_{k\to\infty} (\alpha - \frac{1}{k}) P(X_t^* \geq \alpha - \frac{1}{k}) \leq \mathbb{E}(X_t),$$

das heißt die Behauptung (a).
Verwenden wir für X_t^* wieder die Darstellung (3), so liefert das Lemma von Fatou

$$||X_t^*||_p^p = \mathbb{E}((\lim_{n\to\infty} X_{t,n}^*)^p) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}((X_{t,n}^*)^p),$$

also mit dem Resultat (b) für diskrete Zeitmengen (Schritt 1) auch

$$||X_t^*||_p \leq \frac{p}{p-1} ||X_t||_p.$$

□

Lemma 7.8. *Seien X, Y nichtnegative Zufallsvariablen mit $Y \in L_p(P)$ für ein $p > 1$ und $\alpha P(X \geq \alpha) \leq \mathbb{E}(Y \chi_{\{X \geq \alpha\}})$ für $\alpha \geq 0$. Dann gilt*

$$||X||_p \leq \frac{p}{p-1} ||Y||_p.$$

Beweis: Sei $X_n := \min\{X, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann ist $X_n \in L_p(P)$ für jedes n und die Paare X_n, Y erfüllen die Voraussetzungen. Es gilt

$$(4) \quad z^p = p \int_0^z x^{p-1} dx = p \int_0^\infty x^{p-1} \chi_{[0,z]}(x) dx.$$

Setzen wir dabei $z = X_n$, so erhalten wir unter Verwendung des Satzes von Fubini und den Voraussetungen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^p) &= \mathbb{E}(p \int_0^\infty x^{p-1} \chi_{[0,X_n]}(x) dx) \\ &= p \int_0^\infty x^{p-1} \int_\Omega \chi_{[0,X_n]}(x) d\omega\, dx = p \int_0^\infty x^{p-2} x P(X_n \geq x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}(Y \chi_{\{X_n \geq x\}}) dx = p \mathbb{E}(Y \int_0^\infty x^{p-2} \chi_{[0,X_n]}(x) dx).\end{aligned}$$

Wenden wir nun wieder (4) an, jetzt mit $p-1$ und $z = X_n$, so liefert uns die Hölderungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^p) &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(Y X_n^{p-1}) \\ &\leq \frac{p}{p-1} ||Y||_p ||X_n||_p^{p-1},\end{aligned}$$

also

$$||X_n||_p \leq \frac{p}{p-1}||Y||_p.$$

Damit liefert nun das Lemma von Fatou die Behauptung für X:

$$\begin{aligned} ||X_p|| &= (\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n^p))^{1/p} \\ &\leq (\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^p))^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}||Y|_p. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.9. d-dimensionale Martingale $\mathbb{X}$ definiert man analog. Sie besitzen die entsprechenden Eigenschaften. Man beachte aber, dass hier $\mathbb{Y}$, definiert durch $Y_t := |X_t|_2$, ein Submartingal bildet, denn $Y_s = |\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)|_2 \leq \mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s)$ für $s \in \mathbb{T}$, $s \leq t$.

Kapitel 8

Der Wiener Prozess

8.1 Gaußsche Zufallsvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra im $\mathbb{R}^d$ sowie $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$-messbare Zufallsvariable.

Definition 8.1. *Die Fourier-Transformierte φ_X der Verteilung P_X von X heißt **charakteristische Funktion** zu X:*

$$\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}(e^{\imath(\xi|X)}) = \int_\Omega e^{\imath(\xi|X(\omega))} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath(\xi|x)} dP_X(x)$$

für $\xi \in \mathbb{R}^d$. Dabei ist

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B))$$

*mit $B \in \mathcal{B}$ die **Verteilung** von X.*

Definition 8.2. *Eine Zufallsvariable X heißt **Gaußverteilt** oder **Gaußsch** mit **Mittelwert** $m \in \mathbb{R}^d$ und **Kovarianz** $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$, falls Q symmetrisch und positiv semi-definit ist, sowie*

$$\varphi_X(\xi) = e^{\imath(\xi|m)} e^{-\frac{1}{2}(Q\xi|\xi)}$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. Wir schreiben

$$X \sim \mathcal{N}(m, Q).$$

Bemerkung 8.3. (i) Sei Q positiv definit. Dann existiert die Dichte der Verteilung einer Gaußschen Zufallsvariable und sie besitzt die Darstellung

$$g_{m,Q}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det Q^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}|Q^{-1/2}(x-m)|^2\right).$$

Das folgt aus der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath\xi\cdot x} g_{m,Q}(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det Q}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath\xi\cdot x} e^{-|Q^{-1/2}(x-m)|^2/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath\xi\cdot(Q^{1/2}y+m)} e^{-|y|^2/2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} e^{\imath\xi\cdot m} e^{-(Q\xi|\xi)/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y-\imath Q^{1/2}\xi|^2/2} dy \\
&= e^{\imath(\xi|m)} e^{-(Q\xi|\xi)/2} = \varphi_X(\xi).
\end{aligned}$$

(ii) Sei $X \equiv x_0$, so besitzt X die charakteristische Funktion $\varphi_X(\xi) = e^{\imath(\xi|x_0)}$.

(iii) Ist $X \sim \mathcal{N}(m, Q)$ mit einem positiv definiten Q, so besitzt X wegen (i) die Dichte $g_{m,Q}$. Damit gilt

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^d} x g_{m,Q}(x) dx = m$$

und

$$\mathbb{E}((X-m)(X-m)^T) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (x_i - m_i)(x_j - m_j) g_{m,Q}(x) dx \right\}_{i,j=1}^d = Q.$$

Also sind die Bezeichnungen Mittelwert für m und Kovarianz für Q in Definition 8.2 gerechtfertigt.

(iv) Seien $X \sim \mathcal{N}(m, Q)$, $n \in \mathbb{R}^k$ und $R \in \mathbb{R}^{k \times d}$, so ist

$$Y := n + RX \sim \mathcal{N}(n + Rm, RQR^T),$$

denn

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(\xi) &= \mathbb{E}(e^{\imath(\xi|Y)}) = e^{\imath(\xi|n)} \mathbb{E}(e^{\imath(R^T\xi|X)}) \\
&= e^{\imath(\xi|n)} e^{\imath(R^T\xi|m)} e^{-(QR^T\xi|R^T\xi)/2} \\
&= e^{\imath(\xi|n+Rm)} e^{-(RQR^T\xi|\xi)/2}.
\end{aligned}$$

(v) Sei $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, Q_n)$ eine Folge Gaußscher Zufallsvariablen, die P-f.s. gegen eine Zufallsvariable X konvergieren. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert φ_{X_n} punktweise gegen φ_X für $n \to \infty$, also $m_n \to m$ und $Q_n \to Q$. Dann ist auch X Gaußsch mit $X \sim \mathcal{N}(m, Q)$.

Definition 8.4. *Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_k$ mit $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, ..., k)$ heißen* ***unabhängig****, falls die von ihnen erzeugten σ-Algebren auf Ω unabhängig sind, das heißt falls die gemeinsame Verteilung von $(X_1, ..., X_k)$ das Produkt der einzelnen Verteilungen der X_i ist, also*

$$P(X_1 \in B_1, ..., X_k \in B_k) = \prod_{i=1}^k P(X_i \in B_i)$$

für alle $B_i \in \mathcal{B}$.

Bemerkung 8.5. (i) Seien $X_1, ..., X_k$ unabhängig sowie $f_1, ..., f_k$ Borel-messbare Funktionen. Dann sind auch die Zufallsvariablen $f_1(X_1), ..., f_k(X_k)$ unabhängig, denn

$$\begin{aligned}
P(f_i(X_i) \in B_i,\, i = 1, ..., k) &= P(X_i \in f_i^{-1}(B_i),\, i = 1, ..., k) \\
&= \prod_{i=1}^k P(X_i \in f_i^{-1}(B_i)) = \prod_{i=1}^k P(f_i(X_i) \in B_i).
\end{aligned}$$

(ii) Seien X_i $\mathcal{F}_i$-messbare Zufallsvariablen für $i = 1, ..., k$, wobei $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ unabhängige σ-Algebren sind. Dann sind auch $X_1, ..., X_k$ unabhängig.

(iii) Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_k$ sind genau dann unabhängig, wenn ihre gemeinsame Verteilung, also die von $X = (X_1, ..., X_k)$, gleich dem Produkt der Einzelverteilungen ist, das heißt

$$P_X = P_{X_1} \otimes ... \otimes P_{X_k}.$$

Satz 8.6. *Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_k$ sind genau dann unabhängig, wenn*

$$\mathbb{E}(e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot X_j}) = \prod_{j=1}^k \varphi_{X_j}(\xi_j)$$

gilt, wobei $X_j, \xi_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ ist.

Beweis: Sei $X = (X_1, ..., X_k) \in \mathbb{R}^d$ die entsprechend zusammengesetzte Zufallsvariable mit $d = \sum_{j=1}^k d_j$ und $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot X_j}) = \mathbb{E}(e^{\imath \xi \cdot X}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath \xi \cdot x} dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot x_j} dP_X(x),$$

mit der Unabhängigkeit der X_j also

$$\mathbb{E}(e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot X_j}) = \prod_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^{d_j}} e^{\imath \xi_j \cdot x_j} dP_{X_j} = \prod_{j=1}^k \varphi_{X_j}(\xi_j).$$

Für die Umkehrung definieren wir das Produktmaß $\mu = P_{X_1} \otimes ... \otimes P_{X_k}$. Wegen des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath \xi \cdot x} d\mu(x) = \prod_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}^{d_j}} e^{\imath \xi_j \cdot x_j} dP_{X_j}(x_j) = \prod_{j=1}^k \varphi_{X_j}(\xi_j).$$

Die Gleichung besagt damit

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\imath \xi \cdot x} d\mu(x) = \mathbb{E}(e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot X_j}) = \int_\Omega e^{\imath \xi \cdot X(\omega)} dP(\omega) = \varphi_X(\xi).$$

Die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation liefert uns also $\mu = P_X$ und damit die Behauptung. □

Korollar 8.7. *Seien $X_1, ..., X_k$ unabhängige Gaußverteilte Zufallsvariablen mit den Dimensionen $d_1, ..., d_k$. Dann ist auch $X = (X_1, ..., X_k)$ Gaußverteilt mit der Dimension $d = \sum_{j=1}^k d_j$.*

Beweis: Es gilt

$$\mathbb{E}(e^{\imath \xi \cdot X}) = \mathbb{E}(e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot X_j}).$$

Wegen der Unabhängigkeit der X_j haben wir somit

$$\mathbb{E}(e^{\imath \xi \cdot X}) = \prod_{j=1}^k \mathbb{E}(e^{\imath \xi_j \cdot X_j}) = \prod_{j=1}^k \varphi_{X_j}(\xi_j) = \prod_{j=1}^k e^{\imath \xi_j \cdot m_j} e^{-(Q_j \xi_j | \xi_j)/2},$$

also

$$\mathbb{E}(e^{\imath \xi \cdot X}) = e^{\imath \xi \cdot m} e^{-(Q \xi | \xi)/2}$$

mit

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}.$$

□

Definition 8.8. *Seien $X, Y \in L_2(P)$ zwei Zufallsvariablen mit zweitem Moment. X und Y heißen **unkorreliert**, falls*

$$\mathbb{E}(X_i Y_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_j)$$

für alle i, j gilt.

Bemerkung 8.9. (i) Seien X, Y unkorrelierte Zufallsvariablen gleicher Dimension mit der Eigenschaft $\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 0$. Dann ist

$$\mathbb{E}((X+Y)\cdot(X+Y)) = \mathbb{E}(X\cdot X) + 2\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y\cdot Y) = \mathbb{E}(X\cdot X) + \mathbb{E}(Y\cdot Y).$$

(ii) Seien X, Y unkorrelierte Zufallsvariablen und $a \in \mathbb{R}^{d_X}$ sowie $b \in \mathbb{R}^{d_Y}$. Dann sind auch $X - a$ und $Y - b$ unkorreliert, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_i - a_i)(Y_j - b_j)) &= \mathbb{E}(X_i Y_j) - a_i\mathbb{E}(Y_j) - b_j\mathbb{E}(X_i) + a_i b_j \\ &= (\mathbb{E}(X_i) - a_i)(\mathbb{E}(Y_j) - b_j).\end{aligned}$$

(iii) Speziell gilt für unkorrelierte Zufallsvariable X, Y

$$\mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(Y_j - \mathbb{E}(Y_j))) = 0.$$

Satz 8.10. *Seien X, Y je eine d_1- beziehungsweise d_2-dimensionale Zufallsvariablen, unabhängig und quadratisch integrierbar. Dann sind X und Y unkorreliert.*

Beweis: Aus $P_{(X,Y)} = P_{X_1} \otimes ... \otimes P_{X_{d_1}} \otimes P_{Y_1} \otimes ... \otimes P_{Y_{d_2}}$ und Fubini folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i Y_j) &= \int_\Omega X_i(\omega) Y_j(\omega) dP = \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}} x_i y_j dP_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} x_i y_j dP_Y(y) dP_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x dP_{X_i}(x) \int_{\mathbb{R}} y dP_{Y_j}(y) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_j)\end{aligned}$$

□

Definition 8.11. *Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Eine Zufallsvariable X heißt **unabhängig** von $\mathcal{C}$, wenn $\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ und $\mathcal{C}$ unabhängig im Sinne von Definition 8.4 sind.*

Korollar 8.12. *Sei die Zufallsvariable X unabhängig von $\mathcal{C}$, wobei $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{C}).$$

Beweis: Wir haben mit obigen Satz

$$\int_C X dP = \mathbb{E}(\chi_C X) = \mathbb{E}(\chi_C)\mathbb{E}(X) = \int_C \mathbb{E}(X) dP.$$

für alle $C \in \mathcal{C}$, also die Behauptung nach Definition 6.1. □

Satz 8.13. *Seien $X_1, ..., X_k$ Gaußverteilte Zufallsvariablen mit den Dimensionen $d_1, ..., d_k$. $X_1, ..., X_k$ sind genau dann unabhängig, falls $X = (X_1, ..., X_k)$ Gaußsch ist und die X_j paarweise unkorreliert sind.*

Beweis: Die Implikation von links nach rechts folgt schon aus Satz 8.10 und Korollar 8.7. Für die Umkehrung liefert uns die Unkorreliertheit der X_j die Kovarianzmatrix Q^X von X als

$$Q^X_{i,j} = \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ Q_j, & i = j \end{cases}$$

Für den Mittelwertvektor m^X von X gilt $m^X_j = m_j$. Da X Gaußsch ist haben wir mit $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$ in den zu den X_j gehörigen Dimensionen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\imath \sum_{j=1}^k \xi_j \cdot X_j}) &= \varphi_X(\xi) = e^{\imath \xi \cdot m^X} e^{-(Q^X \xi | \xi)/2} \\ &= \prod_{j=1}^k e^{\imath \xi_j \cdot m_j} e^{-(Q_j \xi_j | \xi_j)/2} = \prod_{j=1}^k \varphi_{X_j}(\xi_j). \end{aligned}$$

Der Satz 8.6 liefert dann die Behauptung. □

8.2 Definition des Wiener Prozesses

Der *Wiener Prozess* wird auch *Brownsche Bewegung* oder *Brownscher Prozess* genannt. Die Frage nach seiner Existenz wurde erstmals von Einstein gestellt, von Wiener später dann bewiesen. Was aber die Brownsche Bewegung genau ist, klärt die folgende Definition:

Definition 8.14. *Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{T} = [0, T]$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ die Zeitmenge. Dann ist eine (eindimensionale bei $t = 0$ startende)* ***Brownsche Bewegung*** *(kurz* ***BB****) ein reellwertiger stochastischer Prozess $\mathbb{B} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ mit den Eigenschaften:*

(a) $t \mapsto B_t(\omega)$ *ist stetig für jedes* $\omega \in \Omega$

(b) $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ *ist Gaußsch für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$*, wobei* $B_0 = 0$, $\mathbb{E}(B_t) = 0$ *und* $\mathbb{E}(B_t B_s) = \min\{t, s\} =: t \wedge s$ *für* $t, s \in \mathbb{T}$ *gilt.*

Bemerkung 8.15. Wenn $t \mapsto B_t(\omega)$ für $\omega \in \Omega \setminus N$ stetig ist, wobei $P(N) = 0$ und (b) gelten, dann können wir $B_t(\omega)$ für $t \geq 0$ und $\omega \in N$ gleich 0 setzen und erhalten somit eine BB im Sinne der Definition 8.14.

Anstelle der Eigenschaft (b) in Definition 8.14 gibt es noch eine alternative Charakterisierung der Brownschen Bewegung:

Satz 8.16. *Die Eigenschaft (b) in Definition 8.14 ist äquivalent dazu, dass P-f.s. $B_0 = 0$ gilt, die Zuwächse $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ unabhängig sind, für jede Wahl von Zeitpunkten $0 \leq t_1 < ... < t_n (\leq T)$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, und dass die Zuwächse Gaußverteilt sind, gemäß $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ mit $s, t \in \mathbb{T}$ und $s \leq t$.*

Beweis: Zeigen wir zunächst, dass aus (b) die genannten Eigenschaften folgen. Dazu definieren wir $\Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ als den k-ten Zuwachs für $k = 1, ..., n$ bei einer solchen wachsenden Folge von Zeitpunkten und einem $n \in \mathbb{N}$. Dabei wählen wir $t_0 = 0$. Mit (b) haben wir somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta B_k \Delta B_l) &= \mathbb{E}(B_{t_k} B_{t_l} - B_{t_{k-1}} B_{t_l} - B_{t_k} B_{t_{l-1}} + B_{t_{k-1}} B_{t_{l-1}}) \\ &= t_k \wedge t_l - t_{k-1} \wedge t_l - t_k \wedge t_{l-1} + t_{k-1} \wedge t_{l-1} \\ &= \begin{cases} t_k - t_{k-1}, & k = l \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \end{aligned}$$

also unkorrelierte Zuwächse. Da nach Voraussetzung $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ Gaußsch ist, ist wegen Bemerkung 8.3 (iii) auch der Vektor der Zuwächse Gaußsch, und diese sind wegen ihrer Unkorreliertheit somit unabhängig (vgl. Satz 8.13). Die Verteilungsparameter der Zuwächse bestimmen sich als

$$\mathbb{E}(B_t - B_s) = \mathbb{E}(B_t) - \mathbb{E}(B_s) = 0$$

und

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - 2(t \wedge s) + s = t - s$$

für $s \leq t$, also die Behauptung.
Für die Umkehrung wissen wir sofort

$$\mathbb{E}(B_t) = \mathbb{E}(B_t - B_0) = 0$$

und

$$B_t = B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t).$$

Das zweite Moment eines Zuwachses bestimmt sich nach Voraussetzung somit als

$$t - s = \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = \mathbb{E}(B_t^2) - 2\mathbb{E}(B_t B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) = t - 2\mathbb{E}(B_t B_s) + s,$$

also

$$\mathbb{E}(B_t B_s) = (t + s - (t - s))/2 = s = t \wedge s$$

für $s \leq t \leq T$. Nach Korollar 8.7 ist $\Delta B := (\Delta B_1, ..., \Delta B_n)$ Gaußsch, also mit Bemerkung 8.3 (iii) auch $B := (B_{t_1}, ..., B_{t_n})$, da $B^T = A \cdot \Delta B^T$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Bemerkung 8.17. Auf jedem Wahrscheinlichkeitsraum, der abzählbar viele unabhängige Gaußverteilte Zufallsvariablen zulässt, gibt es mit Zeitmenge $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{T} = [0, T]$ einen stochastischen Prozess $\mathbb{B}$, so dass $\mathbb{B}$ eine BB ist (vgl. Krylov [20, Theorem II.2.6]).

Sei daher im Weiteren $\mathbb{B}$ stets eine BB auf dem zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum mit gegebener Zeitmenge. Ihr ist mit $\mathbb{F}^B = \{\mathcal{F}_t^B\}_{t \in \mathbb{T}}$ eine vervollständigte Filtration, die kanonische, zugeordnet, die durch

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma(\{B_s : s \leq t\}) \cup \mathcal{N} = \sigma(\{B_s^{-1}(A) : s \leq t, A \in \mathcal{B}\}) \cup \mathcal{N}$$

gegeben ist, wobei $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}$ die Menge der Nullmengen beschreibt. Hierbei und im Folgenden nehmen wir an, dass $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vollständig ist.

8.3 Eigenschaften des Wiener Prozesses

Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes gelten nun

Satz 8.18. *Sei $\mathbb{B}$ eine BB ($\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{T} = [0, T]$). Dann gelten:*
(a) $B_t - B_s$ *und* $\mathcal{F}_\tau^B$ *sind unabhängig für* $\tau \leq s < t (\leq T)$ *und*
(b) *die Markov-Eigenschaft:* $P(B_t \in A | \mathcal{F}_s^B) = P(B_t \in A | B_s)$.
Insbesondere gilt auch $\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$.

Beweis: Beweisen wir zunächst die Aussage (a). Dazu wählen wir

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n := s < t$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Also ist $B_t - B_s$ unabhängig von

$$\sigma := \sigma(B_{s_n} - B_{s_{n-1}}, ..., B_{s_1} - B_0) = \sigma(B_{s_n}, ..., B_{s_1}).$$

Da n und die s_i beliebig gewählt sind, ist $B_t - B_s$ unabhängig von $\sigma(\{B_r : r \leq s\})$ und somit auch von $\mathcal{F}_\tau^B$.
Für den Beweis der Aussage (b) setzen wir $D := A_1 \times A_2 \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Damit gilt

$$P((B_t - B_s, B_s) \in D|\mathcal{F}_s^B) = \mathbb{E}(\chi_{\{B_t - B_s \in A_1\}}\chi_{\{B_s \in A_2\}}|\mathcal{F}_s^B),$$

da $\chi_{\{B_s \in A_2\}}$ $\mathcal{F}_s^B$-messbar ist also

$$P((B_t - B_s, B_s) \in D|\mathcal{F}_s^B) = \chi_{\{B_s \in A_2\}}\mathbb{E}(\chi_{\{B_t - B_s \in A_1\}}|\mathcal{F}_s^B).$$

(a) liefert uns nun

$$\begin{aligned} P((B_t - B_s, B_s) \in D|\mathcal{F}_s^B) &= \chi_{\{B_s \in A_2\}}\mathbb{E}(\chi_{\{B_t - B_s \in A_1\}}) \\ &= \chi_{\{B_s \in A_2\}}\mathbb{E}(\chi_{\{B_t - B_s \in A_1\}}|B_s) \\ &= P((B_t - B_s, B_s) \in D|B_s). \end{aligned}$$

Die soeben gezeigte Beziehung gilt nun für jedes $D \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$. Setzen wir nun speziell $D := \{(x, y) : x + y \in A\}$ für $A \in \mathcal{B}$, dann ist $(B_t - B_s, B_s) \in D$ äquivalent zu $B_t \in A$. Also liefert uns die gezeigte Beziehung

$$P(B_t \in A|\mathcal{F}_s^B) = P(B_t \in A|B_s).$$

□

Satz 8.19. *Sei $\mathbb{B}$ eine BB. Dann sind $\{B_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ und $\{B_t^2 - t\}_{t \in \mathbb{T}}$ Martingale bezüglich $\mathbb{F}^B$.*

Beweis: Die Adaptiertheit beider Prozesse ist offensichtlich, da $\mathbb{F}^B$ die durch $\mathbb{B}$ erzeugte Filtration umfasst. Es bleibt also noch die Martingaleigenschaft in beiden Fällen nachzurechnen. Wir haben

$$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s^B) = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s^B) + B_s,$$

mit Satz 8.18 (a) also

$$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s^B) = \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s = 0 + B_s.$$

Für den zweiten Prozess betrachten wir nun die bedingte Erwartung

$$\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s^B) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s^B) + 2\mathbb{E}(B_t B_s|\mathcal{F}_s^B) - \mathbb{E}(B_s^2|\mathcal{F}_s^B).$$

Der Satz 8.18 (a) und die Martingaleigenschaft von $\mathbb{B}$ liefern uns somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) + 2B_s\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s^B) - B_s^2 \\ &= t - s + 2B_s^2 - B_s^2 \end{aligned}$$

da $t > s$, also

$$\mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s^B) = B_s^2 - s.$$

□

Bemerkung 8.20. (a) Ist $\mathbb{B}$ eine BB mit Zeitmenge $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, dann auch
(i) $\{-B_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ mit der Filtration $\mathbb{F}^B$,
(ii) $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}B_{\alpha t}\}_{t\in\mathbb{T}}$ $(\alpha > 0)$ mit der Filtration $\{\mathcal{F}^B_{\alpha t}\}_{t\in\mathbb{T}}$ und
(iii) $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\in\mathbb{T}}$ $(s > 0)$ mit der Filtration $\{\mathcal{F}^B_{t+s}\}_{t\in\mathbb{T}}$.
(b) Ist $\mathbb{B}$ eine BB, so ist $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$X_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$$

für $\alpha > 0$ ein Martingal.
(c) Die Aussagen von Satz 8.18 und Satz 8.19 gelten auch für die nicht vervollständigte Filtration $\{\sigma(\{B_s : s \leq t\})\}_{t\in\mathbb{T}}$ von $\mathbb{B}$.

Beweis von Bemerkung 8.20 (b): Da $\mathbb{F}^\mathbb{B}$ auch durch $\mathbb{X}$ erzeugt wird, ist $\mathbb{X}$ ein adaptierter Prozess. Die Martingaleigenschaft sehen wir wie folgt: Wegen $t > s \geq 0$, gilt $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Damit ist

$$\mathbb{E}(e^{\alpha(B_t - B_s)}) = \int_\mathbb{R} e^{\alpha x}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}dx,$$

nach quadratischer Ergänzung also

$$\mathbb{E}(e^{\alpha(B_t - B_s)}) = \int_\mathbb{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(x-\alpha(t-s))^2}{2(t-s)}}dx \cdot e^{\frac{\alpha^2}{2}(t-s)} = e^{\frac{\alpha^2}{2}(t-s)}.$$

Das Integral ergibt 1, da der Integrand die Dichte einer $\mathcal{N}(\alpha(t-s), t-s)$-verteilten Zufallsvariable ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}^B_s) &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t}\mathbb{E}(e^{\alpha(B_t-B_s)}e^{\alpha B_s}|\mathcal{F}^B_s) \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}t+\alpha B_s}\mathbb{E}(e^{\alpha(B_t-B_s)}) = X_s,\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Satz 8.21. *Seien $0 \leq s < t < \infty$ und $t_{i,n} = s + (t-s)i \cdot 2^{-n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung des Intervalls $[s,t]$, wobei i die Werte $0, ..., 2^n$ durchläuft. Sei weiter X_n definiert durch*

$$X_n := \sum_{i=0}^{2^n-1}(B_{t_{i+1,n}} - B_{t_{i,n}})^2.$$

Dann gelten:
(a) $\sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}((X_n - (t-s))^2) < \infty$
(b) $X_n \to_{n\to\infty} (t-s)$ *P-f.s.*
(c) $B(\cdot,\omega) \notin BV_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *für fast alle* $\omega \in \Omega$
(d) $B(\cdot,\omega)$ *ist nirgends differenzierbar für fast alle* $\omega \in \Omega$.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir jedoch noch das folgende Lemma:

Lemma 8.22. *Sei $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallvariablen mit $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(Y_n^2) < \infty$. Dann gilt $Y_n \to_{n\to\infty} 0$ P-f.s..*

Beweis: Die Tschebyscheffsche Ungleichung ergibt für jedes $\eta > 0$ die Beziehung $P(Y^2 > \eta) \leq \mathbb{E}(Y^2)/\eta$ für eine Zufallsvariable mit zweitem Moment. Für die Y_n bedeutet dies nach Voraussetzung

$$\sum_{n=1}^\infty P(Y_n^2 > \eta) \leq \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(Y_n^2)/\eta < \infty,$$

also

$$\sum_{n=N}^{\infty} P(Y_n^2 > \eta) \to_{N\to\infty} 0.$$

Setzen wir nun

$$A_n := \{Y_n^2 > \eta\}, \quad B_N := \bigcup_{n\geq N} A_n \quad \text{und} \quad B_\infty := \bigcap_{N\geq 1} B_N,$$

dann wissen wir , dass $P(B_\infty) = 0$ ist und $Y_n^2(\omega) \leq \eta$ auf B_∞^C für hinreichend großes n gilt. Da nun $\eta = 1/k > 0$ mit $k \in \mathbb{N}$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir also $Y_n \to_{n\to\infty} 0$ P-f.s.. □

Beweis des Satzes 8.21: Wir definieren zunächst die Zuwächse

$$\Delta B_{i,n} = B_{t_{i+1,n}} - B_{t_{i,n}}.$$

Diese sind nach Satz 8.16 für festes $n \in \mathbb{N}$ allesamt unabhängig, also auch ihre Quadrate. Da Unabhängigkeit schon Unkorreliertheit impliziert (vgl. Satz 8.10), folgt somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_n - (t-s))^2) = & \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{E}[((\Delta B_{i,n})^2 - (t-s)\cdot 2^{-n})^2] \\
& +2\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=i+1}^{2^n-1} \mathbb{E}[((\Delta B_{i,n})^2 - 2^{-n}(t-s))((\Delta B_{n,j})^2 - 2^{-n}(t-s))] \\
= & \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{E}[((\Delta B_{i,n})^2 - (t-s)\cdot 2^{-n})^2],
\end{aligned}$$

denn $2^{-n}(t-s) = \mathbb{E}((\Delta B_{i,n})^2)$ für jedes $i \in \{0, ..., 2^n - 1\}$. Damit gilt weiter

$$\mathbb{E}((X_n - (t-s))^2) = 2^{-2n}(t-s)^2 \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{\Delta B_{i,n}}{\sqrt{2^{-n}(t-s)}}\right)^2 - 1\right)^2\right],$$

wobei jedes $Y_{i,n} := \Delta B_{i,n}/\sqrt{2^{-n}(t-s)}$ eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable ist. Somit haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_n - (t-s))^2) &= 2^{-2n}(t-s)^2 \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{E}(Y_{i,n}^4 - 2Y_{i,n}^2 + 1) \\
&= 2^{-2n}(t-s)^2 \cdot 2 \cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz der geometrischen Reihe liefert uns nun (a). Lemma 8.22 liefert dann $X_n \to_{n\to\infty} t-s$ P-f.s., also (b).
Die Behauptung (c) beweisen wir indirekt. Nehmen wir also an, $B(\cdot,\omega)$ ist in $BV_{[s,t]}$ für Zeitpunkte $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s < t$. Dann erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
X_n(\omega) &\leq \sup_i |\Delta B_{i,n}(\omega)| \cdot \sum_i |\Delta B_{i,n}(\omega)| \\
&\leq \sup_i |\Delta B_{i,n}(\omega)| \cdot ||B(\cdot,\omega)||_{BV_{[s,t]}}
\end{aligned}$$

Die Norm ist nach Annahme beschränkt und das Supremum geht für $n \to \infty$ gegen 0, da die Pfade einer BB P-f.s. stetig sind. Andererseits wissen wir bereits, dass die $X_n(\omega)$ P-f.s. den Grenzwert $t-s$ für $n \to \infty$ besitzen. Also haben wir mit

$$0 < t - s = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \leq 0$$

einen Widerspruch konstruiert. Die Annahme muss falsch sein, also gilt (c).
Zum Beweis der Aussage (d) sei hier beispielsweise auf Bauer [3, Korollar] verwiesen. □

Bemerkung 8.23. Es gilt der Satz von ***Kolmogorov-Prohorov*** (vgl. Bauer [3, Satz 39.4]):
Sei $\mathbb{X}$ ein stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden (P-f.s.) und der Zeitmenge $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Gelte weiter

$$\exists a > 0,\, b > 1,\, c > 0 : \mathbb{E}(|X_t - X_s|^a) \leq c|t-s|^b$$

für $s, t \in \mathbb{T}$. Dann ist die Funktion $\{t \mapsto X_t(\omega)\}$ P-f.s. in $C^{\frac{b-1}{a}}(\mathbb{T})$.
Speziell erhalten wir mit diesem Satz für $\mathbb{X} = \mathbb{B}$ und den Konstanten $a = 2^{n+1}$ und $b = 2^n$ mit einem $n \in \mathbb{N}$ die Zeitregularität der BB P-f.s. als

$$\{t \mapsto B_t(\omega)\} \in C^{(2^n-1)/2^{n+1}}(\mathbb{R}_+),$$

also

$$\{t \mapsto B_t(\omega)\} \in C^\alpha(\mathbb{R}_+) \quad P\text{-f.s. für jedes } \alpha \in [0, 1/2).$$

8.4 Die mehrdimensionale Brownsche Bewegung

Es seien $\mathbb{B}^1, ..., \mathbb{B}^m$ unabhängige eindimensionale BBs auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, das heißt die Zufallsvariablen $(B^1_{t_1}, ..., B^1_{t_n}), ..., (B^m_{t_1}, ..., B^m_{t_n})$ sind unabhängig für alle $t_1, ..., t_n \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\mathbb{B} := (\mathbb{B}^1, ..., \mathbb{B}^m)^T$ **m-dimensionale BB**. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

$\mathbb{E}(B_t) = 0, \quad \mathbb{E}(B^i_t B^j_s) = \delta_{ij} \min\{t, s\},$
$(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ ist Gaußverteilt sowie
$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ ist Gaußverteilt und unabhängig

für alle $t, s, t_1, ..., t_n \in \mathbb{T}$, $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \{1, ..., m\}$. Die Verteilung der Zuwächse lässt sich genauer charakterisieren als

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|I), \quad t, s \in \mathbb{T}.$$

Wir definieren zu $\mathbb{B}$ die vervollständigte kanonische Filtration $\mathbb{F}^B$ durch

$$\mathcal{F}^B_t := \sigma(\{B^j_s : s \leq t, j = 1, ..., m\}) \cup \mathcal{N},$$

mit $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}$. Damit ist $\mathbb{B}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}^B$, da Satz 8.18 entsprechend für die m-dimensionale BB gilt.

Kapitel 9

Das Itô-Integral

9.1 Das Problem der Formulierung stochastischer Integrale

Ziel dieses Kapitels soll es sein, das stochastische Integral

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

zu definieren, wobei $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $\mathbb{B}$ eine eindimensionale BB bezüglich Zeitmenge $\mathbb{T}$ ist. Ein Problem dabei ist, dass die Funktion $t \mapsto B_t(\omega)$ P-f.s. nicht von beschränkter Variation auf $J := [a,b] \subset \mathbb{T}$ ist! Wir wollen es trotzdem versuchen und dabei die Eigenschaften der BB geeignet nutzen. Auf jeden Fall sollte das Integral die Eigenschaft

$$(1) \qquad \int_a^b dB_t = B_b - B_a \quad P\text{-f.s.}$$

erfüllen, wobei $a, b \in \mathbb{R}_+$ beliebig sind mit $a < b$. Betrachten wir nun die beiden Funktionen

$$f_1(t,\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

und

$$f_2(t,\omega) := \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}}(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

mit einer Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ des Zeitintervalls $J = [a,b]$. Bei Verfeinerung dieser Zerlegung würde man erwarten, dass sowohl

$$\int_a^b f_1(t,\omega)dB_t(\omega)$$

als auch

$$\int_a^b f_2(t,\omega)dB_t(\omega)$$

gegen das Integral

$$\int_a^b B_t dB_t$$

konvergieren. Nun ist mit der Forderung (1)

$$I_1 := \int_a^b f_1(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}(\omega)\int_{t_j}^{t_{j+1}} dB_t(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j}\Delta B_j$$

mit $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ und

$$I_2 := \int_a^b f_2(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}}\Delta B_j.$$

Damit gilt unter Verwendung der Eigenschaften bedingter Erwartungen und der der BB

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_1) &= \sum_j \mathbb{E}(B_{t_j}\Delta B_j) = \sum_j \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_{t_j}\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j}))\\ &= \sum_j \mathbb{E}(B_{t_j}\mathbb{E}(\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j})) = \sum_j \mathbb{E}(B_{t_j}\underbrace{\mathbb{E}(\Delta B_j)}_{=0}) = 0,\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_2) &= \sum_j \mathbb{E}((\Delta B_j)^2) + \sum_j \mathbb{E}(B_{t_j}\Delta B_j)\\ &= \mathbb{E}((\Delta B_j)^2) = \sum_j (t_{j+1} - t_j) = b - a.\end{aligned}$$

Daher treffen wir die Annahme, dass der Prozess $\{f(t,\cdot)\}_{t\in J}$ $\mathbb{F}^B$-adaptiert ist. f_1 besitzt nun diese Eigenschaft, f_2 aber nicht!

9.2 Definition des Itô-Integrals

Definition 9.1. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann definieren wir die Klasse der $\mathbb{F}^B$-adaptierten L_p-Funktionen als*

$$V_p := V_p(J) := \{f \in L_p(J\times\Omega) : \{f(t,\cdot)\}_{t\in J} \text{ ist } \mathbb{F}^B\text{-adaptiert}\}.$$

Hierbei verstehen wir die Adaptiertheitsbedingung wie folgt: Für eine Äquivalenzklasse in $L_p(J\times\Omega)$ existiert ein adaptierter Repräsentant. Dies ist äquivalent dazu, dass jeder Repräsentant für fast alle t $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Aus dieser Beobachtung folgt, dass V_p ein Banachraum ist.
Für die Klasse V_2 soll nun das Itô-Integral definiert werden.

Definition 9.2. *Sei $f \in V_\infty$ **einfach**, das heißt $f = \sum_k f_k\chi_{[t_k,t_{k+1})}$, wobei f_k Zufallsvariablen sind und die t_k eine Zerlegung des Intervalls $J = [a,b]$ bilden. Dann definieren wir das zugehörige stochastische Integral als*

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega) := \sum_k f_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Das folgende Lemma ist zentral.

Lemma 9.3. *Sei $f \in V_\infty$ einfach. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\int_a^b |f(t)|^2dt) &= \int_a^b\int_\Omega |f(t,\omega)|^2dP\,dt\\ &= \int_\Omega |\int_a^b f(t)dB_t|^2dP = \mathbb{E}(|\int_a^b f(t)dB_t|^2).\end{aligned}$$

Beweis: Sei ΔB_i wieder der i-te Zuwachs $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ der BB bei der entsprechenden Zerlegung des Intervalls $J = [a, b]$. Dann ist laut Definition 9.2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\int_a^b f(t)dB_t|^2) &= \sum_{i,j} \mathbb{E}(f_i f_j \Delta B_i \Delta B_j) \\ &= 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(f_i f_j \Delta B_i \Delta B_j) + \sum_i \mathbb{E}(f_i^2 (\Delta B_i)^2).\end{aligned}$$

Sei $i < j$, dann sind $f_i, f_j, \Delta B_i$ messbar bezüglich $\mathcal{F}^B_{t_j}$ und ΔB_j ist unabhängig von $\mathcal{F}^B_{t_j}$. Damit haben wir für jeden Summanden der Doppelsumme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f_i f_j \Delta B_i \Delta B_j) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_i f_j \Delta B_i \Delta B_j | \mathcal{F}^B_{t_j})) \\ &= \mathbb{E}(f_i f_j \Delta B_i \mathbb{E}(\Delta B_j | \mathcal{F}^B_{t_j})) \\ &= \mathbb{E}(f_i f_j \Delta B_i \underbrace{\mathbb{E}(\Delta B_j)}_{=0}) = 0.\end{aligned}$$

Für die quadratischen Glieder der Summe hingegen erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f_i^2 (\Delta B_i)^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_i^2 (\Delta B_i)^2 | \mathcal{F}^B_{t_i})) \\ &= \mathbb{E}(f_i^2 \mathbb{E}((\Delta B_i)^2 | \mathcal{F}^B_{t_i})) \\ &= \mathbb{E}(f_i^2 \underbrace{\mathbb{E}((\Delta B_i)^2)}_{=t_{i+1}-t_i}) = \mathbb{E}(f_i^2)(t_{i+1} - t_i).\end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen folgt somit unter Verwendung der Definition des Lebesgue-Integrals und des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\int_a^b f(t)dB_t|^2) &= \sum_i \mathbb{E}(f_i^2)(t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_a^b \mathbb{E}(f(t)^2)dt = \mathbb{E}(\int_a^b |f(t)|^2 dt),\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Für allgemeine Funktionen $f \in V_2$ verwenden wir nun Approximation.

Lemma 9.4. *Sei $f \in V_p$, $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es eine Folge einfacher $f_n \in V_\infty$ mit $f_n \to_{n\to\infty} f$ in V_p.*

Beweis: O.B.d.A können wir für diesen Beweis $f \in V_\infty$ annehmen, was wir in einem ersten Beweisschritt zeigen werden. Danach werden wir den Beweis für diese f führen.

Schritt 1: Sei $f \in V_p$. Dann setzen wir

$$g_n := \begin{cases} n, & f \geq n \\ f, & -n \leq f \leq n \\ -n, & f \leq -n. \end{cases}$$

Damit ist $g_n \in V_\infty$ und $g_n \to_{n\to\infty} f$ in V_p. Beachte, dass g_n $\mathbb{F}^B$-adaptiert ist. Es genügt nun, die Behauptung für die g_n zu zeigen.

Schritt 2: Sei f nun in V_∞. Dann definieren wir eine Folge von Treppen durch

$$\psi_n(t) := \frac{j-1}{2^n} \quad \text{für } \frac{j-1}{2^n} \leq t < \frac{j}{2^n},\ j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Wählen wir $s \in [0,1]$, so setzen wir weiter

$$h_{n,s}(t,\omega) := f(\psi_n(t-s)+s,\omega), \quad t \in J,\, \omega \in \Omega.$$

Wegen $\psi_n(t) \in (t-2^{-n},t]$, also $t-2^{-n} < \psi_n(t-s)+s \leq t$, ist $h_{n,s} \in V_\infty$ und einfach, und es gilt

$$h_{n,s}(t,\omega) = f(t-\tau_{n,s},\omega)$$

mit einem $\tau_{n,s} \to_{n\to\infty} 0$ bei festem s. Somit haben wir

$$\int_J ||f(t,\cdot)-h_{n,s}(t,\cdot)||^p_{L_p(P)} dt \to_{n\to\infty} 0$$

für jedes $s \in [0,1]$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt dann

$$\int_0^1 \int_J ||f(t,\cdot)-h_{n,s}(t,\cdot)||^p_{L_p(P)} dt\, ds \to_{n\to\infty} 0.$$

Also existeren ein $s \in [0,1]$ und eine Teilfolge n_k, so dass

$$h_{n_k,s} \to_{k\to\infty} f \quad \text{in } V_p.$$

□

Definition 9.5. *Sei $f \in V_2$. Dann setzen wir*

$$\int_a^b f dB_t = L_2(P)\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dB_t,$$

*wobei $f_n \in V_\infty$ einfach sind mit $f_n \to_{n\to\infty} f$ in V_2. Dieses stochastische Integral heißt **Itô-Integral** von f.*

Bemerkung 9.6. (i) Die Definition des Itô-Integrals ist unabhängig von der Wahl der Folge, denn ist $g_n \in V_\infty$ einfach eine weitere Folge mit $g_n \to_{n\to\infty} f$ in V_2, so folgt $f_n - g_n \to_{n\to\infty} 0$ in V_2. Lemma 9.3 liefert dann

$$\mathbb{E}(|\int_a^b f_n dB_t - \int_a^b g_n dB_t|^2) = \mathbb{E}(\int_a^b |f_n - g_n|^2 dt) \to_{n\to\infty} 0.$$

(ii) Die Abbildung $f \mapsto \int_a^b f(t) dB_t$ ist eine Isometrie von V_2 nach $L_2(P)$, die ***Itô-Isometrie***.

9.3 Eigenschaften des Itô-Integrals

Die wichtigsten Eigenschaften des Itô-Integrals enthält der folgende Satz:

Satz 9.7. *Seien $f, g, f_n \in V_2$. Dann gelten*
- *(a)* $\int_a^b f dB_t = \int_a^c f dB_t + \int_c^b f dB_t$ *für* $a < c < b$,
- *(b)* $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dB_t = \alpha \int_a^b f dB_t + \beta \int_a^b g dB_t$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- *(c)* $\int_a^b dB_t = B_b - B_a$,
- *(d)* $\mathbb{E}(\int_a^b f dB_t) = 0$,
- *(e)* $\int_a^b f dB_t$ *ist* $\mathcal{F}_b^B$*-messbar,*
- *(f)* $\mathbb{E}(|\int_a^b f dB_t|^2) = \mathbb{E}(\int_a^b |f|^2 dt)$ *und*
- *(g)* $f_n \to_{n\to\infty} f$ *in* $V_2 \Leftrightarrow \int_a^b f_n dB_t \to_{n\to\infty} \int_a^b f dB_t$ *in* $L_2(P)$.

Beweis: Alle Aussagen dieses Satzes folgen mehr oder weniger direkt aus der Definition des Integrals, insbesondere durch die angegebene Approximation. Exemplarisch wollen wir daher nur (e) beweisen:
Die Zufallsvariablen $X_n := \int_a^b f_n(t)dB_t$, wobei die f_n die Approximierenden der Funktion f sind, sind $\mathcal{F}_b^B$-messbar, und eine Teilfolge konvergiert P-f.s. gegen $X := \int_a^b f(t)dB_t$. Da $\mathbb{F}^B$ die P-Nullmengen enthält, ist auch X $\mathcal{F}_b^B$-messbar. □

Schauen wir uns nun ein Beispiel für das Itô-Integral an. Wir betrachten die Folge

$$f_n(s,\omega) = \sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^n}\chi_{[t_j^n,t_{j+1}^n)}(s),$$

wobei die $t_j^n = j \cdot 2^{-n} \cdot t$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,t]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden. Es gilt $f_n(t) \to_{n\to\infty} f = B_t$ in V_2, denn

$$||f_n - f||_2^2 = \sum_j \int_{t_j^n}^{t_{j+1}^n} \mathbb{E}(|B_t - B_{t_j^n}|^2)dt = \frac{1}{2}\sum_j (t_{j+1}^n - t_j^n)^2 \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-n}(b-a).$$

Nun ist mit $\Delta B_j = B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}$

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(s)dBs = \lim_{n\to\infty}\sum_j B_{t_j^n}\Delta B_j \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_j \left(B_{t_{j+1}^n}^2 - B_{t_j^n}^2 - (\Delta B_j)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}B_t^2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_j (\Delta B_j)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\sum_j(\Delta B_j)^2 - t)^2) &= \sum_j \mathbb{E}((\Delta B_j)^4 + t^2 - 2t(\Delta B_j)^2 + \sum_{i\neq j}(\Delta B_i)^2(\Delta B_j)^2) \\
&= \sum_j 3(\Delta t_j)^2 + t^2 - 2t\Delta t_j + \sum_{i\neq j}\Delta t_i \Delta t_j \\
&= 2\sum_j (\Delta t_j)^2 + \sum_{i,j}\Delta t_i\Delta t_j - t^2 \\
&= 2\sum_j (\Delta t_j)^2 = 2\cdot 2^{-n}t \to_{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Itô-Integral zu

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2},$$

im Widerspruch zur Intuition aus dem Deterministischen. Hier würde man erwarten, dass

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2$$

ist.

Theorem 9.8. *Sei $f \in V_2$. Dann gelten*

(a) $\{\int_0^t f(s)dB_s\}_{t\ge 0}$ *und* $\{(\int_0^t f(s)dB_s)^2 - \int_0^t |f(s)|^2 ds\}_{t\ge 0}$ *sind Martingale bezüglich* $\mathbb{F}^B$*,*

(b) *Es gibt einen* $\mathbb{F}^B$*-adaptierten stochastischen Prozess* I_t*, der* P*-f.s. stetige Pfade besitzt und in* (t,ω) *messbar ist, so dass* $I_t = \int_0^t f(s)dB_s$ *für alle* $t \ge 0$ P*-f.s. gilt.*

Beweis: (a) Nach Satz 9.7 (e) sind die Prozesse $\{\int_0^t f(s)dB_s\}$ und $\{(\int_0^t f(s)dB_s)^2\}$ adaptiert. Nach Lemma 9.4 gibt es einfache $f_n \in V_\infty$, die in $L_2(J \times \Omega)$ gegen f konvergieren. Mit diesen ist der Prozess $\{\int_0^t |f_n(s)|^2 ds\}$ adaptiert und für jedes feste t konvergiert die zugehörige Zufallsvariable in $L_2(P)$ gegen $\int_0^t |f(s)|^2 ds$. Somit sind beide Prozesse in der Behauptung $\mathbb{F}^B$-adaptiert. Es genügt nun die Martingaleigenschaft jeweils für die approximierenden f_n zu zeigen.

Sei also $f \in V_\infty$ einfach, t_j die zugehörige Zerlegung von $[0,t]$, $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ die zur BB gehörigen Zuwächse und $s \in [0,t]$, wobei o.B.d.A. $s = t_k$ für ein k ist. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t f(\tau)dB_\tau|\mathcal{F}_s^B) &= \int_0^s f(\tau)dB_\tau + \mathbb{E}(\int_s^t f(\tau)dB_\tau|\mathcal{F}_s^B) \\
&= \int_0^s f(\tau)dB_\tau + \sum_{j\geq k} \mathbb{E}(f_j\Delta B_j|\mathcal{F}_s^B) \\
&= \int_0^s f(\tau)dB_\tau + \sum_{j\geq k} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_j\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j}^B)|\mathcal{F}_s^B) \\
&= \int_0^s f(\tau)dB_\tau + \sum_{j\geq k} \mathbb{E}(f_j \underbrace{\mathbb{E}(\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j}^B)}_{=0}|\mathcal{F}_s^B) \\
&= \int_0^s f(\tau)dB_\tau,
\end{aligned}
$$

also die Behauptung für den ersten Prozess. Auf ähnliche Weise erhalten wir auch

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_s^t f(\tau)dB_\tau)^2|\mathcal{F}_s^B) &= \sum_{i,j} \mathbb{E}(f_if_j\Delta B_i\Delta B_j|\mathcal{F}_s^B) \\
&= 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_if_j\Delta B_i\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j}^B)|\mathcal{F}_s^B) \\
&\quad + \sum_j \mathbb{E}(\mathbb{E}(f_j^2(\Delta B_j)^2|\mathcal{F}_{t_j}^B)|\mathcal{F}_s^B) \\
&= 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(f_if_j\Delta B_i \underbrace{\mathbb{E}(\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j}^B)}_{=0}|\mathcal{F}_s^B) \\
&\quad + \sum_j \mathbb{E}(f_j^2 \underbrace{\mathbb{E}((\Delta B_j)^2|\mathcal{F}_{t_j}^B)}_{t_{j+1}-t_j}|\mathcal{F}_s^B) \\
&= \mathbb{E}(\int_s^t f(\tau)^2 d\tau|\mathcal{F}_s^B).
\end{aligned}
$$

Folglich gilt mit $J_t := \int_0^t f(\tau)dB_\tau$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}((\int_0^t f(\tau)dB_\tau)^2 - \int_0^t f(\tau)^2 d\tau|\mathcal{F}_s^B) \\
&\quad = \mathbb{E}(J_t^2 - \int_0^t f(\tau)^2 d\tau|\mathcal{F}_s^B) \\
&\quad = \mathbb{E}((J_t - J_s)^2 + 2J_tJ_s - J_s^2|\mathcal{F}_s^B) - \int_0^s f(\tau)^2 d\tau - \mathbb{E}(\int_s^t f(\tau)^2 d\tau|\mathcal{F}_s^B) \\
&\quad = \mathbb{E}(\int_s^t f(\tau)^2 d\tau|\mathcal{F}_s^B) + 2J_s \underbrace{\mathbb{E}(J_t|\mathcal{F}_s^B)}_{=J_s} - J_s^2 - \int_0^s f(\tau)^2 d\tau - \mathbb{E}(\int_s^t f(\tau)^2 d\tau|\mathcal{F}_s^B) \\
&\quad = (\int_0^s f(\tau)dB_\tau)^2 - \int_0^s f(\tau)^2 d\tau,
\end{aligned}
$$

und somit die Behauptung für den zweiten Prozess.

(b) Ist $f \in V_\infty$ einfach mit der Zerlegung t_j des Intervalls $[0,T]$, so ist

$$\int_0^t f(s)dB_s = \sum_{j=0}^{k-1} f_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + f_k(B_t - B_{t_k}),$$

falls $t_k \leq t < t_{k+1}$ gilt. Dies zeigt die schon die Stetigkeit des Pfades, da $\mathbb{B}$ stetige Pfade besitzt.

Ist nun $f \in V_2$, so approximieren wir f durch einfache $f_n \in V_\infty$. Dann setzen wir

$$I(t) := \int_0^t f(s)dB_s, \quad \text{und } I_n(t) := \int_0^t f_n(s)dB_s.$$

Da $\{I_n - I_m\}$ ein Martingal ist, gilt mit der *Doobschen Ungleichung* (vgl. Abschnitt 7.4, Satz 7.7)

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_n(t) - I_m(t)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}((I_n(T) - I_m(T))^2) \to_{n,m\to\infty} 0$$

für jedes feste $\epsilon > 0$. Zu $\epsilon = 2^{-k}$ gibt es daher ein n_k mit

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_n(t) - I_m(t)| \geq 2^{-k}) \leq 2^{-k}, \quad n, m \geq n_k.$$

O.B.d.A. wählen wir die Folge n_k nun wachsend und setzen $n = n_{k+1}$ und $m = n_k$. Dann folgt

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)| \geq 2^{-k}) \leq 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Definieren wir jetzt

$$A_k := \{\omega : \sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_{k+1}}(t,\omega) - I_{n_k}(t,\omega)| > 2^{-k}\},$$

so folgt

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}),$$

also $\sum_k \chi_{A_k} < \infty$ P-f.s.. Daher gibt es eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, so dass es zu jedem $\omega \notin N$ ein $k(\omega)$ gibt mit $\omega \notin A_k$ für alle $k \geq k(\omega)$. Das bedeutet aber

$$\sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_{k+1}}(t,\omega) - I_{n_k}(t,\omega)| \leq 2^{-k}$$

für $k \geq k(\omega)$, also gilt für alle $\omega \notin N$

$$\sup_{0\leq t\leq T} |I_{n_l}(t,\omega) - I_{n_k}(t,\omega)| \leq \sum_{j=k}^{l} 2^{-j} \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} \to_{l\geq k\to\infty} 0.$$

Daher konvergiert $I_{n_k}(t,\omega)$ für $\omega \notin N$ und gleichmäßig in t gegen eine messbare Funktion $I : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit stetigen Pfaden. Andererseits konvergiert $I_{n_k}(t,\cdot)$ in $L_2(P)$ gegen $\int_0^t f(s)dB_s$. Somit gilt für alle $t \geq 0$

$$I(t,\omega) = \int_0^t f(s)dB_s \quad P\text{-f.s..}$$

□

Bemerkung 9.9. Im Folgenden verwenden wir als Itô-Integral stets die stetige Modifikation I_t aus Theorem 9.8. Beachte, dass I_t auch ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}^B$ ist.

Bemerkung 9.10 (mehrdimensionales Itô-Integral). Sei $\mathbb{B}$ eine m-dimensionale BB mit vervollständigter Filtration $\mathbb{F}^B$. Weiter seien $u_{jk} \in L_2(J\times\Omega)$ $\mathbb{F}^B$-adaptiert für alle $j = 1,...,d$ und $k = 1,...,m$. Dann schreiben wir

$$\int_J u_t dB_t = [\sum_k \int_J u_{1k}(t)dB_t^k, ..., \sum_k \int_J u_{dk}(t)dB_t^k]^T.$$

Dieses d-dimensionale Itô-Integral hat die analogen Eigenschaften wie das eindimensionale Itô-Integral.

Beweis: Zuerst beachte man, dass $\{B_t^j\}_{t>0}$ ein $\mathbb{F}^B$-Martingal ist und dass $B_t^j - B_s^j$ unabhängig von $\mathcal{F}_s^B$ ist für jedes $j = 1,...,d$ und jedes $t > s > 0$ (vgl. Abschnitt 8.4). Deswegen kann man die eindimensionalen Itô-Integrale $\int_0^t u_{jk}(t)dB_t^k$ bezüglich $\mathbb{F}^B$ genauso definieren wie in Abschnitt 9.2. Für dieses Integral gelten Satz 9.7 und Theorem 9.8 entsprechend bezüglich $\mathbb{F}^B$. Das oben eingeführte d-dimensionale Itô-Integral ist somit wohldefiniert und erfüllt ebenfalls die Entsprechungen von Satz 9.7 und Theorem 9.8. Hierbei ist nur die Itô-Isometrie nicht sofort klar. Es reicht die Isometrie für $d = 1$ und einfache $u = (\sum_i u_i^k \chi_{[t_i,t_{i+1})})_{k=1}^m$ zu zeigen. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\int_J u_t \cdot dB_t|^2) &= \mathbb{E}(|\sum_{k,i} u_i^k \Delta B_i^k|^2) = \sum_{k,l,i,j} \mathbb{E}(u_i^k u_j^l \Delta B_i^k \Delta B_j^l) \\
&= \sum_{k,l,i} \mathbb{E}(u_i^k u_i^l \mathbb{E}(\Delta B_i^k \Delta B_i^l|\mathcal{F}_{t_i}^B)) + 2\sum_{\substack{i<j\\k,l}} \mathbb{E}(u_i^k u_j^l \Delta B_i^k \mathbb{E}(\Delta B_j^l|\mathcal{F}_{t_j}^B)) \\
&= \sum_{i,k,l} \mathbb{E}(u_i^k u_j^l)\mathbb{E}(\Delta B_i^k \Delta B_j^l) = \sum_{i,k} \mathbb{E}((u_i^k)^2)\mathbb{E}((\Delta B_i^k)^2) \\
&= \sum_{i,k} \mathbb{E}((u_i^k)^2)\cdot \Delta t_i = \mathbb{E}(\int_J |u(t)|^2 dt).
\end{aligned}$$

□

Kapitel 10

Die Itô-Formel

10.1 Itô-Prozesse

Definition 10.1. *Seien $\mathbb{B}$ eine eindimensionale BB auf der Zeitmenge $\mathbb{T} = [0, T]$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, X_0 P-f.s. konstant, $u \in V_1$ und $v \in V_2$. Dann heißt $\mathbb{X}$, definiert durch*

$$X_t(\omega) := X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s(\omega), \quad t \in J$$

ein ***Itô-Prozess****, wobei $J = \mathbb{T}$ gilt. Äquivalent zur definierenden Gleichung schreibt man formal auch*

$$\begin{cases} dX_t = & u(t)dt + v(t)dB_t \\ X_t|_{t=0} = & X_0 \end{cases}$$

Bemerkung 10.2. (i) Itô-Prozesse haben P-f.s. stetige Pfade.
(ii) Itô-Prozesse sind i.a. ***keine*** Martingale.
(iii) Itô-Prozesse sind $\mathbb{F}^B$-adaptiert (vgl. Anfang des Beweises von Theorem 9.8(a)).

Lemma 10.3. *Seien $u, v \in V_2$ und der zugehörige Itô-Prozess*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) dB_s$$

ein P-Martingal. Dann ist $u = 0$ f.ü. in $J \times \Omega$.

Beweis: O.B.d.A. seien P-f.s. $X_0 = 0$ und $v \equiv 0$, da $\{X_0 + \int_0^t v(s) dB_s\}$ ein P-Martingal ist. Wir wählen eine Zerlegung t_i von J mit der Feinheit δ. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \mathbb{E}_P((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_P(X_{t_i}^2) - 2\mathbb{E}_P(X_{t_i} X_{t_{i-1}}) + \mathbb{E}_P(X_{t_{i-1}}^2) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_P(X_{t_i}^2) - 2\mathbb{E}_P(X_{t_{i-1}} \underbrace{\mathbb{E}_P(X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_{i-1}})}_{=X_{t_{i-1}}}) + \mathbb{E}_P(X_{t_{i-1}}^2) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_P(X_{t_i}^2) - \mathbb{E}_P(X_{t_{i-1}}^2) \\
&= \mathbb{E}_P(X_T^2) - \mathbb{E}_P(X_0^2) = \mathbb{E}_P(X_T^2).
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2) &= \mathbb{E}_P\left(\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} u(s)ds\right)^2\right) \\ &\leq (t_i - t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbb{E}_P(|u(s)|^2)ds.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\mathbb{E}_P(X_T^2) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}_P((X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2) \leq \delta \int_{J\times\Omega} |u(s)|^2 ds\, dP \to_{\delta\to 0} 0.$$

Es folgt $0 = X_t = \mathbb{E}_P(X_T|\mathcal{F}_t)$ für alle t und damit $\int_s^t u(\tau,\omega)d\tau = 0$ für fast alle $t \geq s$ und fast alle $\omega \in \Omega$. Daraus folgt $u = 0$ f.ü. in $J \times \Omega$. □

Satz 10.4. *Die Koeffizienten $u, v \in V_2$ eines Itô-Prozesses sind f.s. (also f.ü. in $J \times \Omega$) eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei

$$X_t := \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)dB_s = \int_0^t \bar{u}(s)ds + \int_0^t \bar{v}(s)dB_s =: \bar{X}_t,$$

dann ist $\{X_t - \bar{X}_t\}$ ein Martingal, so dass nach Lemma 10.3 f.s. $u = \bar{u}$ gilt. Die Gleichheit von v und $\bar{v}$ folgt dann aus der Itô-Isometrie. □

Theorem 10.5 (Itô-Formel). *Sei $\mathbb{X}$ ein Itô-Prozess und*

$$g \in BC^{1-}(J \times \mathbb{R};\mathbb{R}) \cap C(J; BC^{2-}(\mathbb{R}))$$

eine beschränkte stetige Funktion mit im Wesentlichen beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_t g$, $\partial_x g$ und $\partial_x^2 g$. Definieren wir $Y_t := g(t, X_t)$ für jedes $t \in J$, dann ist $\mathbb{Y}$ ebenfalls ein Itô-Prozess, und es gilt

$$\begin{cases} dY_t = & \partial_t g(t,X_t)dt + \partial_x g(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(t,X_t)(dX_t)^2 \\ Y|_{t=0} = & g(0,X_0) \end{cases}$$

mit der Konvention $(dt)^2 = dt \cdot dB_t = 0$ und $(dB_t)^2 = dt$.

Bemerkung 10.6. (i) Ausformuliert lautet die Itô-Formel:

$$dY_t = \left[\partial_t g(t,X_t) + \partial_x g(t,X_t)u(t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(t,X_t)v^2(t)\right] dt + \partial_x g(t,X_t)v(t)dB_t.$$

(ii) In Integralform lautet die Itô-Formel:

$$\begin{aligned}Y_t = g(0,X_0) &+ \int_0^t \left[\partial_t g(s,X_s) + \partial_x g(s,X_s)u(s) + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(s,X_s)v^2(s)\right] ds \\ &+ \int_0^t \partial_x g(s,X_s)v(s)dB_s.\end{aligned}$$

Beispiele:
(i) Wir setzen $\mathbb{X} = \mathbb{B}$, also $u \equiv 0$ und $v \equiv 1$, sowie $g(t,x) = x^2/2$. Dann folgt mit der Itô-Formel
$$d\left(\frac{B_t^2}{2}\right) = \frac{dt}{2} + B_t dB_t,$$
also das Itô-Integral
$$B_t^2/2 = t/2 + \int_0^t B_s dB_s$$
in derselben Form, wie schon in Kapitel 9 zu Fuß gezeigt.
(ii) Dieses Beispiel zeigt die Regel der *partiellen Integration* für Itô-Integrale. Sei dafür $f \in C^1(J)$. Wir wählen dann $g(t,x) = f(t) \cdot x$ und wieder $\mathbb{X} = \mathbb{B}$. Dann ist mit der Itô-Formel
$$d(f(t)B_t) = f'(t)B_t dt + f(t)dB_t$$
oder in integrierter Form
$$f(t)B_t = \int_0^t f'(s)B_s ds + \int_0^t f(s)dB_s.$$
Somit folgt die Regel der partiellen Integration der Form
$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds.$$
Da nun $\mathbb{B}$ stetige Pfade besitzt, lässt sich diese Formel verallgemeinern zu
$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df(s)$$
für $f \in BV(J)$.

10.2 Beweis der Itô-Formel

Zur Erinnerung wiederholen wir an dieser Stelle noch einmal das Theorem 10.5 zur Itô-Formel:
Sei $\mathbb{X}$ ein Itô-Prozess und
$$g \in BC^{1-}(J \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap C(J; BC^{2-}(\mathbb{R}))$$
eine beschränkte stetige Funktion mit im Wesentlichen beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_t g$, $\partial_x g$ und $\partial_x^2 g$. Definieren wir $Y_t := g(t, X_t)$ für jedes $t \in J$, dann ist $\mathbb{Y}$ ebenfalls ein Itô-Prozess, und es gilt
$$\begin{cases} dY_t = & \partial_t g(t,X_t)dt + \partial_x g(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(t,X_t)(dX_t)^2 \\ Y|_{t=0} = & g(0,X_0) \end{cases}$$
mit der Konvention $(dt)^2 = dt \cdot dB_t = 0$ und $(dB_t)^2 = dt$.

Beweis des Theorems 10.5: Schritt 1: Sei zunächst $g \in BC^3(J \times \mathbb{R})$ und $u, v \in V_\infty$. Dann wählen wir gleichmäßig beschränkte einfache Funktionen $u^n, v^n \in V_\infty$ mit
$$u^n \to_{n\to\infty} u \quad \text{und } v^n \to_{n\to\infty} v \quad \text{in } V_2.$$
Weiterhin sei $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{N_n}^n = T$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine gemeinsame Zerlegung des Zeitintervalls $J = [0,T]$ zu u und v, $\mathbb{X}^n$ der zu u^n und v^n gehörige Itô-Prozess,
$$\Delta t_j^n := t_{j+1}^n - t_j^n, \quad \Delta X_j^n := X_{t_{j+1}^n}^n - X_{t_j^n}^n,$$

$$\Delta B_j^n := B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n} \quad \text{und } \Delta g_j^n := g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}^n) - g(t_j^n, X_{t_j^n}^n)$$

jeweils für $j = 0, ..., N_n - 1$. Es gilt damit $X_t^n \to_{n\to\infty} X_t$ in $L_2(P)$ gleichmäßig in $t \in J$.
Für $t \in [t_l^n, t_{l+1}^n)$ ist nun

$$g(t, X_t^n) = g(0, X_0^n) + \sum_{j=0}^{l-1} \Delta g_j^n + g(t, X_t^n) - g(t_l^n, X_{t_l^n}^n),$$

mit der Taylor-Formel und $g_j^n := g(t_j^n, X_{t_j^n}^n)$ also

$$\begin{aligned} g(t, X_t^n) = g_0^n &+ \sum_{j=0}^{l-1} \left(\partial_t g_j^n \Delta t_j^n + \partial_x g_j^n \Delta X_j^n\right) \\ &+ \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{1}{2}\partial_t^2 g_j^n (\Delta t_j^n)^2 + \partial_t\partial_x g_j^n \Delta t_j^n \Delta X_j^n + \frac{1}{2}\partial_x^2 g_j^n (\Delta X_j^n)^2\right) + \sum_{j=0}^{l-1} R_j^n, \end{aligned}$$

wobei die Restglieder $R_j^n = O((\Delta t_j^n)^3 + |\Delta X_j^n|^3)$ sind, da $g \in BC^3(J;\mathbb{R})$. Dabei haben wir o.B.d.A. $t = t_l^n$ gesetzt. Nun sind die partiellen Ableitungen von g bis zur Ordnung 2 sowie g selbst gleichmäßig beschränkt und global lipschitz. Also gilt mit $t_j^n = t_{j_n}^n \to_{n\to\infty} t$:

$$\partial_t^\alpha \partial_x^\beta g_j^n = \partial_t^\alpha \partial_x^\beta g(t_j^n, X_{t_j^n}^n) \to_{n\to\infty} \partial_t^\alpha \partial_x^\beta g(t, X_t)$$

in $L_2(P)$, gleichmäßig in $t \in J$, für $0 \le \alpha, \beta \le 2$ und $\alpha + \beta \le 2$. Damit folgen die Konvergenzen (i)-(vi):

(i)

$$\sum_{j=0}^{l-1} \partial_t g_j^n \Delta t_j^n \to_{n\to\infty} \int_0^t \partial_t g(s, X_s) ds \text{ in } L_2(P), \text{ glm. in } t \in J.$$

(ii) Mit $u_j^n := u^n(t_j^n)$ und $v_j^n := v^n(t_j^n)$ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{l-1} \partial_x g_j^n \Delta X_j^n &= \sum_{j=0}^{l-1} \partial_x g_j^n u_j^n \Delta t_j^n + \sum_{j=0}^{l-1} \partial_x g_j^n v_j^n \Delta B_j^n \\ &\to_{n\to\infty} \int_0^t \partial_x g(s, X(s)) u(s) ds + \int_0^t \partial_x g(s, X(s)) v(s) dB_s \text{ in } L_2(P), \end{aligned}$$

da die Integranden in $L_2(J \times \Omega)$ konvergieren.

(iii)

$$[\mathbb{E}((\sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{2}\partial_t^2 g_j^n (\Delta t_j^n)^2)^2)]^{1/2} \le C \cdot T \cdot \delta_n \to_{n\to\infty} 0, \text{ mit } \delta_n = \sup_j \Delta t_j^n.$$

(iv)

$$\sum_{j=0}^{l-1} \underbrace{\partial_t \partial_x g_j^n}_{=:h_j^n} \Delta t_j^n \Delta X_j^n = \sum_{j=0}^{l-1} h_j^n u_j^n (\Delta t_j^n)^2 + \sum_{j=0}^{l-1} h_j^n v_j^n \Delta t_j^n \Delta B_j^n.$$

Die erste Summe geht wie (iii) gegen 0 in $L_2(P)$. Die zweite Summe behandeln wir mit $a_j^n := h_j^n v_j^n$ und der Hölder-Ungleichung wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\sum_{j=0}^{l-1} a_j^n \Delta t_j^n \Delta B_j^n|^2) &= \sum_{i,j=0}^{l-1} \mathbb{E}(a_i^n a_j^n \Delta B_i^n \Delta B_j^n) \Delta t_i^n \Delta t_j^n \\ &\leq M \sum_{i,j=0}^{l-1} \sqrt{\Delta t_i^n \Delta t_j^n} \Delta t_i^n \Delta t_j^n \\ &\leq M \cdot \delta_n \cdot T^2 \to_{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

(v)

$$\mathbb{E}((\sum_{j=0}^{l-1} R_j^n)^2) \to_{n\to\infty} 0 \text{ in } L_2(P) \text{ wie in (iv).}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{l-1} \underbrace{\partial_x^2 g_j^n}_{=:h_j^n} (\Delta X_j^n)^2 &= \sum_{j=0}^{l-1} h_j^n (u_j^n)^2 (\Delta t_j^n)^2 \\ &\quad + 2\sum_{j=0}^{l-1} h_j^n u_j^n v_j^n \Delta t_j^n \Delta B_j^n + \sum_{j=0}^{l-1} h_j^n (v_j^n)^2 (\Delta B_j^n)^2.\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summen gehen wieder wie in (iii) und (iv) gegen 0 in $L_2(P)$, glm. in $t \in J$. Die letzte Summe behandeln wir mit $a_j^n := h_j^n (v_j^n)^2$ wie folgt: Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\sum_{j=0}^{l-1} a_j^n ((\Delta B_j^n)^2 - \Delta t_j^n))^2) &= \sum_{i,j=0}^{l-1} \mathbb{E}(a_i^n a_j^n ((\Delta B_i^n)^2 - \Delta t_i^n)((\Delta B_j^n)^2 - \Delta t_j^n)) \\ &= 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(a_i^n a_j^n ((\Delta B_i^n)^2 - \Delta t_i^n) \underbrace{\mathbb{E}((\Delta B_j^n)^2 - \Delta t_j^n | \mathcal{F}_{t_j^n}^B)}_{=0}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{l-1} \mathbb{E}((a_j^n)^2 ((\Delta B_j^n)^2 - \Delta t_j^n)^2) \\ &\leq C \sum_{j=0}^{l-1} \mathbb{E}((\Delta B_j^n)^4) + 2\Delta t_j^n \mathbb{E}((\Delta B_j^n)^2) + (\Delta t_j^n)^2 \\ &\leq C \sum_{j=0}^{l-1} (\Delta t_j^n)^2 \\ &\leq C \cdot T \cdot \delta_n \to_{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Damit haben wir also

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{l-1} \partial_x^2 g_j^n (\Delta X_j^n)^2 \to_{n\to\infty} \int_0^t \frac{1}{2} \partial_x^2 g(s, X(s)) v_s^2 ds \text{ in } L_2(P).$$

Insgesamt haben wir somit bisher gezeigt, dass

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left[\partial_t g(s, X_s) + \partial_x g(s, X_s)u_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(s, X_s)v_s^2\right] ds$$
$$+ \int_0^t \partial_x g(s, X_s) v_s dB_s,$$

also

$$dg(t, X_t) = \left[\partial_t g(t, X_t) + \partial_x g(t, X_t)u_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(t, X_t)v_t^2\right] dt + \partial_x g(t, X_t) v_t dB_t,$$

sofern $u, v \in V_\infty$ und $g \in BC^3(J \times \mathbb{R})$ gelten.

Schritt 2: Sind nun $u \in V_1$, $v \in V_2$ beliebig, so approximieren wir u und v punktweise und in V_1 beziehungsweise in V_2 durch $u^n, v^n \in V_\infty$, wobei $|u^n| \le |u|$ und $|v^n| \le |v|$ punktweise gelten. Die Funktionen $\partial_t^\alpha \partial_x^\beta g(t, X_t^n)$ sind punktweise konvergent gegen $\partial_t^\alpha \partial_x^\beta g(t, X_t)$ und gleichmäßig beschränkt. Also liefert der Satz von Lebesgue beziehungsweise der Itô-Isomorphismus die Behauptung für allgemeine $u \in V_1$ und $v \in V_2$, sofern $g \in BC^3(J \times \mathbb{R})$ ist.

Schritt 3: Ist nun $g \in BC^{1-,2-}(J \times \mathbb{R})$, dann approximieren wir g durch Funktionen $g_n \in BC^3(J \times \mathbb{R})$ in $BC^{0,1}(J \times \mathbb{R})$, so dass $\partial_t g_n$ und $\partial_x^2 g_n$ gleichmäßig beschränkt sind, also g_n global lipschitz in t und $\partial_x g_n$ global lipschitz in x ist, gleichmäßig in n. Dies kann zum Beispiel durch Friedrichs-Mollifier geschehen. Der Satz von Lebesgue und der Itô-Isomorphismus ergeben dann auch die Behauptung für

$$g \in BC^{1-,2-}(J \times \mathbb{R}).$$

□

Bemerkung 10.7. Für allgemeine $g \in C^{1-,2-}(J \times \mathbb{R})$ benötigen wir eine Erweiterung des Itô-Integrals (vgl. Karatzas, Shreve [17]). Beschränken wir uns auf das oben eingeführte Itô-Integral im Rahmen der L_2-Theorie, so brauchen wir Wachstumsbedingungen an die Ableitungen von g der Form:

$$(1) \qquad |\partial_t g(t, x)| \le C(1 + |x|),\ |\partial_x g(t, x)| + |\partial_x^2 g(t, x)| \le C.$$

Damit ist also selbst lineares Wachstum von g noch zugelassen. Wenn $g \in C^{1-,2-}(J \times \overline{U})$ für ein offenes Intervall $U \subset \mathbb{R}$ ist, (1) gilt und $X_t \in U$ P-f.s., so gilt ebenfalls die Itô-Formel. Man muss hierfür im Beweis nur Schritt 3 geeignet abändern.

Ohne Beweis notieren wir noch die mehrdimensionale Version der Itô-Formel:

Korollar 10.8 (mehrdimensionale Itô-Formel). *Sei $\mathbb{X}$ ein d-dimensionaler Itô-Prozess, also*

$$X_k(t) = X_k(t) + \int_0^t u_k(s) ds + \sum_{l=1}^m \int_0^t v_{kl}(s) dB_s^l$$

für jedes $k = 1, ..., d$ mit m unabhängigen BBs $\mathbb{B}^1, ..., \mathbb{B}^m$. Dabei sind $u_k \in V_1$ und $v_{kl} \in V_2$ für jedes $k \in \{1, ..., d\}$ und jedes $l \in \{1, ..., m\}$. Sei weiter

$$g \in BC^{1-}(J \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n) \cap C(J; BC^{2-}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)).$$

Dann ist der durch $Y_t = g(t, X_t)$ definierte Prozess $\mathbb{Y}$ ein n-dimensionaler Itô-Prozess, und es gilt für $k = 1, ..., n$:

$$d(Y_k)_t = \partial_t g_k(t, X_t) dt + \partial_x g_k(t, X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 g_k(t, X_t) : (dX_t dX_t^T)$$

mit den Konventionen $(dt)^2 = dtdB_t^l = dB_t^l dt = 0$ *für jedes* $l \in \{1, ..., m\}$ *sowie* $(dB_t dB_t^T) = Idt$. *Genauer gilt also für* $k = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned} Y_k(t) = g_k(0, X_0) + \int_0^t \partial_t g_k(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \partial_j g_k(s, X_s) u_j(s) ds \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{l=1}^m \int_0^t \partial_i \partial_j g_k(s, X_s) v_{il}(s) v_{jl}(s) ds \\ + \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^m \int_0^t \partial_j g_k(s, X_s) v_{jl}(s) dB_s^l. \end{aligned}$$

Beispiel 10.9. In diesem Beispiel wollen wir das stochastische Differential vom *Produkt* zweier Prozesse betrachten. Dazu seien $v, z \in L_\infty(J \times \Omega)$ und $u, w \in L_2(J \times \Omega)$ $\mathbb{F}^B$-adaptiert. Die Prozesse $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ seien beschrieben durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} dX_t = & u_t dt + v_t dB_t \\ dY_t = & w_t dt + z_t dB_t. \end{cases}$$

Ferner seien $v_t Y_t, z_t X_t \in L_2(P)$. Für die Funktion g wählen wir nun $g(t, x, y) = xy$. Mit der Itô-Formel ($m = 1$, $d = 2$) folgt dann

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= \partial_t g dt + \partial_x g dX_t + \partial_y g dY_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 g (dX_t)^2 + \partial_{xy}^2 g dX_t \cdot dY_t + \frac{1}{2} \partial_y^2 g (dY_t)^2 \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t \cdot dY_t. \end{aligned}$$

Die intgerierte Form liefert also

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t (Y_s u_s + X_s w_s + v_s z_s) ds + \int_0^t (Y_s v_s + X_s z_s) dB_s.$$

Die Anwendung der Itô-Formel lässt sich rechtfertigen, indem man in Beweisschritt 3 die folgende Approximation verwendet:

$$g_n(x, y) = \varphi_n(x) \psi_n(y)$$

mit $\varphi_n(x) = x$ für $|x| \leq n$, $|\varphi_(x)| \leq |x|$ und $||\varphi_n'||_\infty, ||\varphi_n||_\infty \leq c$ sowie entsprechendes für ψ_n.

Bemerkung 10.10. Wie auch vorher ist ein lineares Wachstum von g und $\partial_t g$ in x zugelassen. Lassen wir die Beschränktheitsbedingungen an g fallen, so gilt auch diese Itô-Formel nur für den erweiterten Begriff des Itô-Integrals.

Kapitel 11

Stochastische Differentialgleichungen

11.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten in diesem Kapitel die stochastische Differentialgleichung

$$(1) \qquad dS_t = b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dB_t$$

für $t \in J = [\tau, T] \subset \mathbb{T}$ mit Anfangswert $S_t|_{t=\tau} = S_\tau$. Dabei sind

(i) $\mathbb{B}$ eine m-dimensionale BB mit (vervollständigter) kanonischer Filtration $\mathbb{F}^B$,

(ii) $b : J \times \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ messbar und $\{b(t, \cdot, x)\}_{t \in J}$ $\mathbb{F}^B$-adaptiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$,

(iii) $\sigma : J \times \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times m}$ messbar und $\{\sigma(t, \cdot, x)\}_{t \in J}$ $\mathbb{F}^B$-adaptiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$.

In diesem Abschnitt interessiert uns nun die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieser Differentialgleichung. Was wir dabei unter einer Lösung verstehen, erklärt uns die folgende Definition:

Definition 11.1. *Ein stochastischer Prozess $\mathbb{S} = \{S_t\}_{t \in J}$ heißt* ***Lösung*** *von (1), falls $\mathbb{S} \in L_2(J \times \Omega)$ $\mathbb{F}^B$-adaptiert ist ($\mathbb{S} \in V_2$), P-f.s. stetige Pfade besitzt und*

$$(2) \qquad S_t = S_\tau + \int_\tau^t b(s, S_s)ds + \int_\tau^t \sigma(s, S_s)dB_s$$

für jedes $t \in J$ erfüllt ist.

Um Lösungen von (1) im Sinne der Definition 11.1 zu erhalten, sind weitere Annahmen erforderlich:

(H1) Lipschitz-Bedingungen in x:

$$\begin{aligned} |b(t, \omega, x) - b(t, \omega, \bar{x})| &\leq \beta(t, \omega)|x - \bar{x}|, \quad P\text{-f.s. } \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d, t \in J \\ |\sigma(t, \omega, x) - \sigma(t, \omega, \bar{x})| &\leq \gamma(t, \omega)|x - \bar{x}|, \quad P\text{-f.s. } \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d, t \in J. \end{aligned}$$

(H2)

$$\begin{aligned} b(\cdot, \cdot, 0) &\in L_1(J; L_2(P)) \\ \sigma(\cdot, \cdot, 0) &\in L_2(J \times \Omega). \end{aligned}$$

Damit gilt nun der folgende Satz:

Satz 11.2. *Seien (i), (ii), (iii) sowie (H1) und (H2) erfüllt. Seien weiter der Anfangswert $S_\tau \in L_2(P)$ $\mathcal{F}_\tau^B$-messbar, $\beta \in L_\infty(\Omega; L_2(J))$ und $\gamma \in L_\infty(J \times \Omega)$. Dann besitzt (1) genau eine Lösung $\mathbb{S}$ im Sinne von Definition 11.1.*

Beweis: Die Idee dieses Beweises ist das Kontraktionsprinzip, also der Fixpunktsatz von Banach. Dazu versehen wir V_2 mit der Norm

$$||\mathbb{X}||^2 := \int_\tau^T e^{-2\alpha s}\mathbb{E}(X_s^2)ds,$$

wobei $\alpha \geq 0$ später gewählt wird. Es sei $\mathbb{X} \in V_2$, und wir setzen $Y_s := b(s, X_s)$ sowie $Z_s := \sigma(s, X_s)$ für $s \in J$. Nach unseren Voraussetzungen sind die so definierten Prozesse $\mathbb{Y}$ und $\mathbb{Z}$ auf $J \times \Omega$ messbar und $\mathbb{F}^B$-adaptiert. Außerdem zeigen (H1) und (H2), dass $\mathbb{Y} \in L_1(J; L_2(\Omega))$ und $\mathbb{Z} \in L_2(J \times \Omega)$ gelten. Somit können wir $(\Phi\mathbb{X})_t$ durch die rechte Seite von (2) definieren, also

$$(\Phi\mathbb{X})_t := S_\tau + \int_\tau^t b(s, X_s)ds + \int_\tau^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

für $t \in J$ und $\mathbb{X} \in V_2$. Gemäß Kapitel 9 ist der Prozess $\Phi\mathbb{X}$ in (t, ω) messbar, $\mathbb{F}^B$-adaptiert und besitzt P-f.s. stetige Pfade. Ferner gehört der Prozess

$$\{(\Phi 0)_t\} = \{S_\tau + \int_\tau^t b(s, 0)ds + \int_\tau^t \sigma(s, 0)dB_s\}$$

zu V_2, aufgrund von (H2) und der Itô-Isometrie. Nun ist

$$(\Phi\mathbb{X})_t = (\Phi 0)_t + \int_\tau^t (b(s, X_s) - b(s, 0))ds + \int_\tau^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, 0))dB_s.$$

Also folgt $\Phi\mathbb{X} \in V_2$, wenn $||\Phi\mathbb{X} - \Phi\mathbb{Y}|| < \infty$ für alle $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in V_2$ gilt. Wir zeigen nun sogar

$$||\Phi\mathbb{X} - \Phi\mathbb{Y}|| \leq k||\mathbb{X} - \mathbb{Y}||$$

für $0 \leq k < 1$ und $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in V_2$. Dies können wir durch geeignete Wahl von α erreichen. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_\tau^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds)^2 &\leq \mathbb{E}((\int_\tau^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|ds)^2) \\
&\leq \mathbb{E}((\int_\tau^t \beta(s)|X_s - Y_s|ds)^2) \\
&\leq \mathbb{E}((\int_\tau^t \beta(s)^2 ds)(\int_\tau^t |X_s - Y_s|^2 ds)) \\
&\leq \sup_{\omega\in\Omega} \int_\tau^t \beta(s)^2 ds \cdot \int_\tau^t \mathbb{E}(|X_s - Y_s|^2)ds \\
&\leq C_1^2 \int_\tau^t \mathbb{E}(|X_s - Y_s|^2)ds,
\end{aligned}$$

wobei $C_1 := \sup_\Omega(\int_\tau^T \beta(s)^2 ds)^{1/2} = |\beta|_{L_\infty(\Omega;L_2(J))}$ ist. Damit folgt aus der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
||\int_\tau^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds||^2 &= \int_\tau^T e^{-2\alpha s}\mathbb{E}((\int_\tau^s (b(\rho,X_\rho) - b(\rho,Y_\rho))d\rho)^2)ds \\
&\leq C_1^2 \int_\tau^T \int_\tau^s e^{-2\alpha(s-\rho)}e^{-2\alpha\rho}\mathbb{E}(|X_\rho - Y_\rho|^2)d\rho\, ds \\
&\leq \frac{C_1^2}{2\alpha}||\mathbb{X} - \mathbb{Y}||^2.
\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir mit der Itô-Isometrie

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\int_\tau^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s|^2) &= \mathbb{E}(\int_\tau^t |\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)|^2 ds) \\
&\leq \mathbb{E}(\int_\tau^t \gamma(s)^2|X_s - Y_s|^2 ds) \\
&= \int_\tau^t \mathbb{E}(\gamma(s)^2|X_s - Y_s|^2)ds \\
&\leq \underbrace{\sup_{J\times\Omega} \gamma(s,\omega)^2}_{=:C_2^2} \cdot \int_\tau^t \mathbb{E}(|X_s - Y_s|^2)ds,
\end{aligned}$$

womit folgt, dass

$$\begin{aligned}
||\int_\tau^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dB_s||^2 &= \int_\tau^T e^{-2\alpha s}\mathbb{E}((\int_\tau^s (\sigma(\rho,X_\rho) - \sigma(\rho,Y_\rho))dB_\rho)^2)ds \\
&\leq C_2^2 \int_\tau^T \int_\tau^s e^{-2\alpha(s-\rho)}e^{-2\alpha\rho}\mathbb{E}(|X_\rho - Y_\rho|^2)d\rho\, ds \\
&\leq \frac{C_2^2}{2\alpha}||\mathbb{X} - \mathbb{Y}||^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$||\Phi\mathbb{X} - \Phi\mathbb{Y}|| \leq \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{2\alpha}}||\mathbb{X} - \mathbb{Y}||$$

für $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in V_2$. Damit ist Φ eine strikte Kontraktion auf V_2, falls zum Beispiel

$$\frac{C_1 + C_2}{\sqrt{2\alpha}} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{also } \sqrt{2}(C_1 + C_2)) \leq \alpha$$

gewählt wird. Das Kontraktionsprinzip ergibt dann die Behauptung. □

11.2 Beispiele

(i) Lineare Gleichung mit additivem Rauschen:
Wir betrachten das eindimensionale Problem

$$(3) \qquad dS_t = A_t S_t dt + \sigma_t dB_t,$$

für $t \in J = [\tau, T]$, $A \in L_\infty(\Omega; L_2(J))$ und $\sigma \in L_\infty(J \times \Omega)$, wobei A und σ adaptiert sind. Nach Satz 11.2 existiert ein eindeutiger Lösungsprozess $\mathbb{S} = \{S_t\}_{t\in J}$ von (3), den wir nun berechnen wollen.

Setzen wir dazu

$$X_t := e^{-\int_\tau^t A_s ds} S_t,$$

so folgt mit der Regel über Produkte der Itô-Formel

$$\begin{aligned} dX_t &= d(e^{-\int_\tau^t A_s ds})S_t + e^{-\int_\tau^t A_s ds} dS_t + d(e^{-\int_\tau^t A_s ds})dS_t \\ &= -A_t e^{-\int_\tau^t A_s ds} S_t dt + e^{-\int_\tau^t A_s ds} dS_t - A_t e^{-\int_\tau^t A_s ds} dt \cdot dS_t \\ &= -A_t e^{-\int_\tau^t A_s ds} S_t dt + A_t e^{-\int_\tau^t A_s ds} S_t dt + e^{-\int_\tau^t A_s ds} \sigma_t dB_t, \end{aligned}$$

also

$$X_t = X_\tau + \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s A_\rho d\rho} \sigma_s dB_s$$

und somit (wegen der Definition von X_t)

$$S_t = e^{\int_\tau^t A_s ds} S_\tau + \int_\tau^t e^{\int_s^t A_\rho d\rho} \sigma_s dB_s.$$

(ii) Lineare Gleichung mit multiplikativem Rauschen:
Wir betrachten hier das eindimensionale Problem

$$(4) \qquad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

für $t \in J = [\tau, T]$, wobei μ und σ positive Konstanten sind und $S_\tau > 0$ gilt. Seien S_t die eindeutige Lösung von (4) und $\epsilon > 0$. Wir nehmen an, dass $S_t \geq 0$ gilt, und setzen

$$Y_t^\epsilon := \log(S_t + \epsilon).$$

Es sei $g_\epsilon(x) = \log(x + \epsilon)$ für $x \geq 0$ und $g_\epsilon|_{\mathbb{R}_-} \in BC^2$. Dann ergibt die Itô-Formel (vgl. Bemerkung 10.7)

$$dY_t^\epsilon = \left(\mu \frac{S_t}{S_t + \epsilon} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{S_t^2}{(S_t + \epsilon)^2} \right) dt + \sigma \frac{S_t}{S_t + \epsilon} dB_t.$$

Nun konvergiert $S_t(S_t + \epsilon)^{-1}$ gegen 1 in $L_2(J \times \Omega)$ für $\epsilon \to 0$. Folglich konvergiert $\{Y_t^\epsilon\}$ gegen den Itô-Prozess $\{Y_t\} := \{\log S_t\}$ mit

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_\tau + (\mu - \sigma^2/2) \int_\tau^t ds + \sigma \int_\tau^t dB_s \\ &= Y_\tau + (\mu - \sigma^2/2)(t - \tau) + \sigma(B_t - B_\tau) \end{aligned}$$

Damit ist

$$S_t = e^{Y_t} = e^{\sigma(B_t - B_\tau)} \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2)(t-\tau) + Y_\tau}.$$

Somit ist

$$S_t = S_\tau e^{\sigma(B_t - B_\tau) + (\mu - \sigma^2/2)(t - \tau)}$$

ein Kandidat für die eindeutige Lösung von (4). Dabei erscheint der Term $e^{-\sigma^2/2(t-\tau)}$ überraschend, da er im deterministischen Fall nicht auftreten würde. Er kommt ausschließlich vom Zusatzterm der Itô-Formel stochastischer Integrale gegenüber deterministischer Integrale. Man sieht wie im Beweis zu Proposition 12.4, dass S_t tatsächlich (4) löst.

11.3 Die Feynman-Kac Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir die stochastische Differentialgleichung

$$(5) \qquad \begin{cases} dZ_t = & b(t,Z_t)dt + \sigma(t,Z_t)dB_t \\ Z_\tau = & x, \end{cases}$$

deren Lösung wir mit $\{Z_t^{x,\tau}\}_{t\in[\tau,T]}$ bezeichnen. Hierbei sind $J := [0,T]$, $\tau, t \in J$ mit $\tau \le t$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$b \in buc^{0,\alpha}(J\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \text{ und } \sigma \in buc^{0,\alpha}(J\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d\times m})$$

mit einem $\alpha \in (0,1)$ sowie $\mathbb{B}$ eine m-dimensionale BB mit kanonischer vervollständigter Filtration $\mathbb{F}^B$. Dabei ist

$$buc^{0,\alpha}(J\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) := \{f \in buc(J\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) : f(t,\cdot) \in buc^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \text{ und } \sup_{t\in J} ||f(t,\cdot)||_{C^\alpha} < \infty\}.$$

Weiter seien b,σ global lipschitz in x, gleichmäßig in t, $\sigma\sigma^T$ gleichmäßig positiv definit und $r \in C(J)$ eine reellwertige Funktion. Dazu betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$(6) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(t,x)\cdot\nabla_x u(t,x) + \frac{1}{2}\sigma(t,x)\sigma^T(t,x) : \nabla_x^2 u(t,x) = & r(t)u(t,x) \\ u(T,x) = & g(x) \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in J$. Sei nun $g \in buc^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Dann besitzt die Gleichung (6) genau eine Lösung

$$u \in C^1([0,T);buc^\alpha(\mathbb{R}^d)) \cap C([0,T);buc^{2+\alpha}(\mathbb{R}^d)) \cap C(J;buc^\alpha(\mathbb{R}^d)),$$

vgl. Buttu [8, Theorem 2.2] und Lunardi [23, Abschnitt 3.1.3] (siehe auch: Lunardi [23, Theorem 5.1.9]).

Satz 11.3 (Feynman-Kac Formel). *Die Lösung von (6) hat die Darstellung*

$$u(t,x) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^T r(s)ds} g(Z_T^{x,t})),$$

für $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in J$.

Beweis: Sei $u(t,x)$ die Lösung von (6). Für $t = T$ ist die Behauptung klar. Für $t \in [0,T)$ ergibt die Itô-Formel

$$\begin{aligned} d(e^{\int_t^T r(s)ds}u(t,Z_t^{x,\tau})) &= -r(t)e^{\int_t^T r(s)ds}u(t,Z_t^{x,\tau})dt \\ &\quad + e^{\int_t^T r(s)ds}[\partial_t u(t,Z_t^{x,\tau})dt + \nabla_x u(t,Z_t^{x,\tau})\cdot dZ_t + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u(t,Z_t^{x,\tau})(dZ_t)^2] \\ &= e^{\int_t^T r(s)ds}[-r(t)u(t,Z_t^{x,\tau}) + \partial_t u(t,Z_t^{x,\tau}) + b(t,Z_t^{x,\tau})\cdot\nabla_x u(t,Z_t^{x,\tau}) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sigma(t,Z_t^{x,\tau})\sigma^T(t,Z_t^{x,\tau}) : \nabla_x^2 u(t,Z_t^{x,\tau})]dt \\ &\quad + e^{\int_t^T r(s)ds}\nabla_x u(t,Z_t^{x,\tau})\cdot\sigma(t,Z_t^{x,\tau})dB_t. \end{aligned}$$

Da u nun aber (6) löst, verbleibt

$$d(e^{\int_t^T r(s)ds}u(t,Z_t^{x,\tau})) = e^{\int_t^T r(s)ds}\nabla_x u(t,Z_t^{x,\tau})\cdot\sigma(t,Z_t^{x,\tau})dB_t.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}e^{\int_{T-\epsilon}^{T} r(s)ds} u(T-\epsilon, Z_{T-\epsilon}^{x,\tau}) = e^{\int_{\tau}^{T} r(s)ds} u(\tau, Z_{\tau}^{x,\tau}) + \\ + \int_{\tau}^{T} e^{\int_{t}^{T} r(s)ds} \nabla_x u(t, Z_t^{x,\tau}) \sigma(t, Z_t^{x,\tau}) dB_t,\end{aligned}$$

für den Erwartungswert also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\int_{T-\epsilon}^{T} r(s)ds} u(T-\epsilon, Z_{T-\epsilon}^{x,\tau})) &= \mathbb{E}(e^{\int_{\tau}^{T} r(s)ds} u(\tau, x)) + 0 \\ &= e^{\int_{\tau}^{T} r(s)ds} u(\tau, x)\end{aligned}$$

wegen $Z_{\tau}^{x,\tau} = x$. Wir haben somit im Grenzwert für $\epsilon \to 0$

$$u(\tau, x) = e^{-\int_{\tau}^{T} r(s)ds} \mathbb{E}(g(Z_T^{x,\tau})),$$

also die Behauptung. $\square$

Kapitel 12

Ergänzende Resultate über stochastische Prozesse

Auch in diesem Kapitel bezeichnen wir wie gehabt die zugrunde liegende stetige Zeitmenge mit $J := [0,T] = \mathbb{T}$, $\mathbb{B} := \{B_t\}_{t\in J}$ als eine m-dimensionale BB und mit $\mathbb{F}^B := \{\mathcal{F}_t^B\}_{t\in J}$ die durch die BB induzierte vervollständigte Filtration.

12.1 Ein Darstellungssatz für Martingale

Theorem 12.1 (Martingal-Darstellungssatz). *(a) Sei $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$. Dann gibt es einen $\mathbb{F}^B$-adaptierten Prozess $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in J} \in L_2(J\times\Omega;\mathbb{R}^m)$ mit*

$$Y = \mathbb{E}(Y) + \int_0^T X_t \cdot dB_t.$$

(b) Sei $\mathbb{Y} = \{Y_t\}_{t\in J}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}^B$ mit $Y_t \in L_2(P)$ für alle $t \in J$. Dann gibt es einen $\mathbb{F}^B$-adaptierten Prozess $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in J} \in L_2(J\times\Omega;\mathbb{R}^m)$ mit

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_0) + \int_0^t X_s \cdot dB_s.$$

Beweis: Wir führen den Beweis für $m = 1$, der allgemeine Fall kann analog bewiesen werden. Dazu zeigen wir zunächst, dass aus der Aussage (a) schon (b) folgt. Verwenden wir für Y in (a) die Zufallsgröße des Endzeitpunktes, also Y_T aus (b), dann erhalten wir die Existenz eines Prozesses $\mathbb{X}$, so dass

$$Y_T = \mathbb{E}(Y_T) + \int_0^T X_s dB_s$$

gilt. Da $\mathbb{Y}$ ein Martingal ist folgt demnach mit diesem $\mathbb{X}$

$$\begin{aligned} Y_t = \mathbb{E}(Y_T|\mathcal{F}_t^B) &= \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(Y_T)}_{=Y_0}|\mathcal{F}_t^B) + \mathbb{E}(\int_0^T X_s dB_s|\mathcal{F}_t^B) \\ &= \mathbb{E}(Y_0) + \int_0^t X_s dB_s + \underbrace{\mathbb{E}(\int_t^T X_s dB_s|\mathcal{F}_t^B)}_{=0}, \end{aligned}$$

also (b). Den Beweis von (a) vollziehen wir in 3 Schritten und betrachten dabei die Menge

$$H := \left\{ f = e^{\int_0^T h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)ds} : \, h \in L_\infty(J) \text{ einfach} \right\}.$$

Schritt 1: Das h, das ein $f \in H$ definiert, lässt sich mit einer geeigneten Zerlegung $(t_k)_{k=1}^N$ des Intervalls J schreiben als

$$h(t) = \sum_k h_k \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

Damit und mit den Vereinbarungen $\Delta B_k := B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ und $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$ erhalten wir

$$\mathbb{E}(e^{p \int_0^T h(s) dB_s}) = \mathbb{E}(\prod_k e^{p h_k \Delta B_k}), \quad p \geq 1.$$

Die Unabhängigkeit der ΔB_k untereinander und deren Verteilungen liefern uns also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{p \int_0^T h(s) dB_s}) &= \prod_k \mathbb{E}(e^{p h_k \Delta B_k}) \\
&= \prod_k \int_{\mathbb{R}} e^{p h_k x} \frac{e^{-x^2/2\Delta t_k}}{\sqrt{2\pi \Delta t_k}} dx = \prod_k \int_{\mathbb{R}} e^{p h_k y \sqrt{\Delta t_k}} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= \prod_k e^{p^2 h_k^2 \Delta t_k / 2} = e^{\frac{p^2}{2} \int_0^T h^2(s) ds} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit gilt $H \subset L_p(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ für jedes $p \geq 1$, insbesondere also

$$H \subset L_2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P).$$

Schritt 2: Sei nun $g \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ eine Zufallsvariable mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}(fg) = 0$$

für jedes $f \in H$, dann folgt

$$0 = \mathbb{E}(g e^{\sum_k h_k \Delta B_k - \frac{1}{2} \sum_k h_k^2}) = \mathbb{E}(g e^{\sum_k h_k \Delta B_k}) e^{-\frac{1}{2} \sum_k h_k^2},$$

also

$$\mathbb{E}(g e^{\sum_k \lambda_k B_{t_k}}) = 0$$

für alle $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Mit der analytischen Fortsetzung erhalten wir

$$\mathbb{E}(g e^{\imath \sum_k \lambda_k B_{t_k}}) = 0$$

für alle $\lambda_k \in \mathbb{C}$, also auch

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(g | B_{t_1}, ..., B_{t_N}) e^{\imath \sum_k \lambda_k B_{t_k}}) = 0,$$

und mit $g_N := \mathbb{E}(g | B_{t_1}, ..., B_{t_N})$, $dP^N := g_N dP$ folgt

$$0 = \mathbb{E}_{P^N}(e^{\imath \sum_k \lambda_k B_{t_k}}) = \varphi_{B_{t_1}, ..., B_{t_N}}^{P^N}(\lambda),$$

wobei φ die charakteristische Funktion, also die Fourier-Transformierte, bezeichnet. Die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation liefert nun

$$P_{B_{t_1}, ..., B_{t_N}}^N = 0,$$

folglich ist

$$P^N(\{B_{t_1}, ..., B_{t_N}\} \in \mathcal{O}) = 0$$

für alle $\mathcal{O} \in \mathcal{B}^N$, also auch $P^N(A) = 0$ für jedes $A \in \sigma(B_{t_1}, ..., B_{t_N})$. Daher ist für jedes solche A

$$\int_A \mathbb{E}(g|B_{t_1}, ..., B_{t_N})dP = \int_A gdP = 0.$$

Da diese Eigenschaft für jedes $f \in H$ gilt, ist also auch die Wahl der Zerlegung (t_k) von J beliebig dafür, und es folgt

$$\int_A gdP = 0$$

für alle $A \in \mathcal{F}_T^B$. Also ist $g = 0$ P-f.s. und somit H schon dicht in $L_2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$.

Schritt 3: Sei nun

$$f_t = e^{\int_0^t h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)ds},$$

dann ist $f_T \in H$ und es gilt mit der Itô-Formel (vgl. Beweis von Proposition 12.4)

$$df_t = h(t)f_t dB_t,$$

also wegen $f_0 = 1$

$$f_T = 1 + \int_0^T h(s)f_s dB_s.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}(f_T) = 1 + \mathbb{E}(\int_0^T h(s)f_s dB_s) = 1,$$

wegen der Martingaleigenschaft des Itô-Integrals. Zusammen ergeben die letzten beiden Gleichungen

$$f_T - \mathbb{E}(f_T) = \int_0^T h(s)f_s dB_s,$$

also die Behauptung für $f_T \in H$. Das Bild des Itô-Isomorphismus ist abgeschlossen und mit Schritt 2 dicht in $\{f \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P) : \mathbb{E}(f) = 0\}$, woraus (a) folgt. □

Bemerkung 12.2. Aus Schritt 1 des Beweises folgt, dass $\{Z_t\}_{t\in J}$ mit

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)ds\right)$$

für jedes $h \in L_2(J)$ ein L_2-Martingal ist. Vergleiche hierzu auch mit dem noch folgenden Abschnitt 12.3.

12.2 Levys Theorem

Theorem 12.3 (Levy). *Sei $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein m-dimensionaler stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $X_0 = 0$ und $X_t \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $\mathbb{X}$ genau dann eine BB, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *$\mathbb{X}$ besitzt P-f.s. stetige Pfade,*
(b) *$\mathbb{X}$ ist bezüglich $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit $\mathcal{F}_t := \sigma(\{X_s : s \leq t\}) \cup \mathcal{N}$ ein Martingal, wobei $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}$ bedeutet, sowie*
(c) *$\{X_t X_t^T - tI\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist bezüglich $\mathbb{F}$ ein Martingal.*

Beweis: Dass eine BB die Eigenschaften (a)-(c) besitzt, ist uns seit Kapitel 8 bekannt. Es genügt somit nur die Umkehrung zu zeigen, wobei wir uns wieder auf den Fall $m = 1$ beschränken. Dazu behaupten wir, dass das stochastische Integral

$$\int_a^b f_t dX_t$$

wohldefiniert ist. Schauen wir zurück in Kapitel 9, so sehen wir, dass wir zur Konstruktion des stochastischen Integrals lediglich die zwei Eigenschaften
(i) $\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$ und
(ii) $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$
für alle $s \leq t$ verwendet haben. Offenbar ist (i) äquivalent zu (b), und die Rechnung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(X_t^2 - 2X_tX_s + X_s^2|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}(X_t^2 - t|\mathcal{F}_s) + t - 2X_s\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) + X_s^2\\ &= X_s^2 - s + t - 2X_s^2 + X_s^2 = t - s\end{aligned}$$

zeigt, dass (ii) von den Bedingungen (b) und (c) impliziert wird. Somit ist unsere Behauptung über die Wohldefiniertheit des Integrals gerechtfertigt.
Sei nun $g(x) = e^{\imath\xi x}$ mit einem $\xi \in \mathbb{R}$. Die Itô-Formel (in der Version Karatzas, Shreve [17, Theorem 3.3.3]) ergibt dann

$$dg(X_t) = \imath\xi e^{\imath\xi X_t}dX_t - \frac{1}{2}\xi^2 e^{\imath\xi X_t}dt,$$

also

$$g(X_t) = g(X_s) - \frac{1}{2}\xi^2\int_s^t e^{\imath\xi X_\tau}d\tau + \imath\xi\int_s^t e^{\imath\xi X_\tau}dX_\tau.$$

Folglich haben wir

$$e^{\imath\xi(X_t - X_s)} = 1 - \frac{1}{2}\xi^2\int_s^t e^{\imath\xi(X_\tau - X_s)}d\tau + \imath\xi\int_s^t e^{\imath\xi(X_\tau - X_s)}dX_\tau.$$

Bilden wir nun den Erwartungswert, so erhalten wir

$$\mathbb{E}(e^{\imath\xi(X_t - X_s)}) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2\int_s^t \mathbb{E}(e^{\imath\xi(X_\tau - X_s)})d\tau,$$

da $\mathbb{E}(\int_s^t e^{\imath\xi(X_\tau - X_s)}dX_\tau) = 0$ ist. Wir können nun folgern, dass

$$\mathbb{E}(e^{\imath\xi(X_t - X_s)}) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2(t-s)}$$

ist, also dass die Zuwächse $X_t - X_s$ $\mathcal{N}(0, t-s)$-verteilt sind. Desweiteren definieren wir die Zuwächse $\Delta X_i := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ für eine beliebige Folge von Zeitpunkten $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_N < \infty$. Ferner gilt

$$\mathbb{E}(e^{\imath\xi(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2\int_s^t \mathbb{E}(e^{\imath\xi(X_\tau - X_s)}|\mathcal{F}_s)d\tau,$$

also

$$\mathbb{E}(e^{\imath\xi(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2(t-s)}$$

für $s < t$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\prod_{j=0}^{N-1} e^{\imath\xi_j\Delta X_j}) &= \mathbb{E}(\prod_{j=0}^{N-2} e^{\imath\xi_j\Delta X_j}\mathbb{E}(e^{\imath\xi_{N-1}(X_{t_N} - X_{t_{N-1}})}|\mathcal{F}_{t_{N-1}}))\\ &= e^{-\frac{1}{2}\xi_{N-1}^2(t_N - t_{N-1})}\mathbb{E}(\prod_{j=0}^{N-2} e^{\imath\xi_j\Delta X_j}),\end{aligned}$$

durch Induktion also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\imath\sum_j \xi_j \Delta X_j}) &= \prod_j e^{-\frac{1}{2}\xi_j^2 \Delta t_j}\\ &= \prod_j \mathbb{E}(e^{\imath \xi_j \Delta X_j}) = \prod_j \varphi_{\Delta X_j}(\xi_j).\end{aligned}$$

Mit dem Satz 8.6 folgt damit, dass $\Delta X_0, ..., \Delta X_{N-1}$ unabhängig sind, also besitzt $\mathbb{X}$ unabhängige Zuwächse. Der Satz 8.16 und die Voraussetzung (a) identifizieren $\mathbb{X}$ nun als eine BB. □

12.3 Das Theorem von Girsanov

Proposition 12.4. *Sei $\{h_t\}_{t\in J}$ ein $\mathbb{F}^B$-adaptierter Prozess mit $h \in L_\infty(J\times\Omega;\mathbb{R}^m)$. Dann ist $\mathbb{M} = \{M_t\}_{t\in J}$ mit*

$$M_t := \exp\left(\int_0^t h_s \cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2 ds\right)$$

ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}^B$ mit $M_t \in L_p(P)$ für $p \in [1,\infty)$ und $dM_t = M_t h_t \cdot dB_t$ für alle $t \in J$.

Beweis: (i) Wir zeigen zunächst die Martingaleigenschaft unter der Annahme, dass $\mathbb{M} \in L_2(J \times \Omega)$ ist. Dazu setzen wir

$$g(x) := e^x \quad \text{und} \quad g_n(x) := e^x \chi(x/n)$$

mit einem Abschneider $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, dessen Träger in $B_2(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$ liegt, der identisch 1 auf $\overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ ist und dessen Bild in $[0,1]$ liegt. Weiter definieren wir

$$X_t := \int_0^t h_s \cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2 ds,$$

sowie

$$Z_t := g(X_t) \quad \text{und} \quad Z_t^n := g_n(X_t).$$

Es gelten nun

$$Z_t^n \to_{n\to\infty} Z_t \text{ f.s. und } |Z_t^n| \leq |Z_t|$$

für alle n und t, also

$$Z_t^n \to Z_t \quad \text{in } L_2(J \times \Omega).$$

Mit

$$\begin{aligned}g_n'(x) &= g_n(x) + \frac{1}{n} g(x)\chi'(x/n) \text{ und}\\ g_n''(x) &= g_n(x) + \frac{2}{n} g(x)\chi'(x/n) + \frac{1}{n^2} g(x)\chi''(x/n)\end{aligned}$$

ergibt die Itô-Formel

$$\begin{aligned}
dZ_t^n &= g_n'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}g_n''(X_t)dX_t \cdot dX_t \\
&= g_n'(X_t)h_t \cdot dB_t - \frac{1}{2}g_n'(X_t)|h_t|^2 dt + \frac{1}{2}g_n''(X_t)|h_t|^2 dt \\
&= \left[g_n(X_t) + \frac{1}{n}g(X_t)\chi'(X_t/n)\right] h_t \cdot dB_t \\
&\quad + \frac{1}{2}|h_t|^2 \left[\frac{1}{n}g(X_t)\chi'(X_t/n) + \frac{1}{n^2}g(X_t)\chi''(X_t/n)\right] dt \\
&= \left[Z_t^n + \frac{1}{n}Z_t\chi'(X_t/n)\right] h_t \cdot dB_t \\
&\quad + \frac{1}{2}|h_t|^2 \left[\frac{1}{n}Z_t\chi'(X_t/n) + \frac{1}{n^2}Z_t\chi''(X_t/n)\right] dt,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
Z_t^n = 1 &+ \int_0^t \frac{1}{2}|h_s|^2 \frac{Z_s}{n}(\chi'(X_t/n) + \chi''(X_t/n)/n)ds \\
&+ \int_0^t Z_s(\chi(X_t/n) + \chi'(X_t/n)/n)h_s \cdot dB_s.
\end{aligned}$$

Da nun $\{Z_t\} = \mathbb{M} \in L_2(J \times \Omega)$ nach Annahme sowie $h \in L_\infty(J \times \Omega)^m$ nach Voraussetzung gelten, folgt für $n \to \infty$

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s h_s \cdot dB_s,$$

also

$$dZ_t = Z_t h_t \cdot dB_t.$$

Damit ist $\{Z_t\} = \mathbb{M}$ ein L_2-Martingal.

(ii) Es bleibt uns nun zu zeigen, dass $\mathbb{M} \in L_2(J \times \Omega)$ gilt. Betrachten wir hierzu zunächst den Fall $m = 1$. Dafür wählen wir ein $h \in L_\infty(J \times \Omega)$ einfach, also $h = \sum_k h_k \chi_{[t_k, t_{k+1})}$ für eine Zerlegung (t_k) von J. Es folgt mit den Zuwächsen $\Delta B_k := B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{p\int_0^t h_s dB_s}) &= \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{N-1} e^{ph_k \Delta B_k}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\prod_{k=0}^{N-1} e^{ph_k \Delta B_k} | \mathcal{F}_{t_{N-1}}^B)) \\
&= \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{N-2} e^{ph_k \Delta B_k} \mathbb{E}(e^{ph_{N-1}\Delta B_{N-1}} | \mathcal{F}_{t_{N-1}}^B)),
\end{aligned}$$

da h adaptiert ist.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{ph_{N-1}\Delta B_{N-1}}|\mathcal{F}^B_{t_{N-1}}) &= \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}h^n_{N-1}(\Delta B_{N-1})^n|\mathcal{F}^B_{t_{N-1}})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}h^n_{N-1}\mathbb{E}((\Delta B_{N-1})^n|\mathcal{F}^B_{t_{N-1}})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}h^n_{N-1}\mathbb{E}((\Delta B_{N-1})^n),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\Delta B_{N-1})^n) &= \int_{\mathbb{R}}\frac{x^n}{\sqrt{2\pi\Delta t_{N-1}}}e^{-\frac{x^2}{2\Delta t_{N-1}}}dx = \frac{(\Delta t_{N-1})^{n/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}y^n e^{-y^2/2}dy\\ &= \begin{cases}0, & n \text{ ungerade}\\ (\Delta t_{N-1})^{n/2}\int_{\mathbb{R}}y^n e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, & n \text{ gerade.}\end{cases}\end{aligned}$$

Partielle Integration und Induktion ergibt nun

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}y^{2z}e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} &= (2z-1)\int_{\mathbb{R}}y^{2(z-1)}e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\\ &= (2z-1)(2z-3)\cdot\ldots\cdot 1 = \frac{(2z-1)!}{2^{z-1}(z-1)!},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{ph_{N-1}\Delta B_{N-1}}|\mathcal{F}^B_{t_{N-1}}) &= \sum_{z=0}^{\infty}\frac{p^{2z}}{(2z)!}h^{2z}_{N-1}\cdot\frac{(2z-1)!}{2^{z-1}(z-1)!}(\Delta t_{N-1})^z\\ &= \sum_{z=0}^{\infty}\frac{p^{2z}}{2^z}\cdot\frac{(\Delta t_{N-1})^z}{z!}h^{2z}_{N-1}\\ &\le e^{\frac{p^2}{2}||h||^2_\infty\Delta t_{N-1}}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit durch Induktion

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|e^{\int_0^t h_s dB_s}|^p) &\le e^{\frac{p^2}{2}||h||^2_\infty\Delta t_{N-1}}\mathbb{E}(\prod_{k=0}^{N-2}e^{ph_k\Delta B_k})\\ &\le \prod_{k=0}^{N-1}e^{\frac{p^2}{2}||h||^2_\infty\Delta t_k} = e^{\frac{p^2}{2}||h||^2_\infty T}.\end{aligned}$$

Sei nun $h \in V_\infty$, dann approximieren wir dieses h durch einfache, gleichmäßig beschränkte h^n punktweise und in $L_2(J\times\Omega)$. Damit gilt

$$X^n_t := \int_0^t h^n_s\cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t|h^n_s|^2 ds \to_{n\to\infty} X_t := \int_0^t h_s\cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t|h_s|^2 ds$$

in $L_2(P)$ und punktweise für eine Teilfolge, und folglich auch

$$e^{X^n_t}\to_{n\to\infty}e^{X_t}$$

punktweise P-f.s.. Das Lemma von Fatou und der Satz von Lebesgue liefern damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|e^{X_t}|^p) &= \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty}e^{pX^n_t})\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}(e^{pX^n_t})\\ &\le e^{\frac{p^2}{2}||h||_\infty T}.\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass $e^{X_t} =: M_t$ gleichmäßig in $L_p(P)$ beschränkt ist. Der Fall $m > 1$ folgt schließlich mit Hölder. $\square$

Theorem 12.5 (Girsanov). *Seien $\mathbb{B}$ eine m-dimensionale BB und $\{h_t\}_{t\in J}$ ein m-dimensionaler $\mathbb{F}^B$-adaptierter Prozess mit $h \in L_\infty(J \times \Omega; \mathbb{R}^m)$. Weiter seien ein Prozess $\mathbb{M} := \{M_t\}_{t\in J}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert durch*

$$M_t := \exp\left(\int_0^t h_s \cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2 ds\right)$$

sowie

$$dQ := M_T dP.$$

Dann ist $\mathbb{M}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}^B$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $M_t \in L_2(P)$ für alle $t \in J$, Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ zu P äquivalent und $\mathbb{B}^* := \{B_t^*\}_{t\in J}$ mit

$$B_t^* := B_t - \int_0^t h_s ds$$

eine BB auf $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Beweis: Nach Proposition 12.4 ist $\mathbb{M}$ ein Martingal zu $\mathbb{F}^B$ mit $M_t \in L_2(P)$ für alle $t \in J$, und es gilt

$$M_t = M_0 + \int_0^t M_s h_s \cdot dB_s = 1 + \int_0^t M_s h_s \cdot dB_s,$$

also $M_t > 0$ und $\mathbb{E}(M_t) \equiv \mathbb{E}(M_0) = 1$. Insbesondere ist Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Somit bleibt uns noch zu zeigen, dass $\mathbb{B}^*$ eine BB bezüglich Q ist. Offenbar hat $\mathbb{B}^*$ Q-f.s. stetige Pfade, da Q äquivalent zu P ist, und damit $\mathbb{B}$ solche besitzt. Nun ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(U_t|\mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}_P(M_T U_t|\mathcal{F}_s^B)/\mathbb{E}_P(M_T|\mathcal{F}_s^B) \\
&= \mathbb{E}_P(U_t \mathbb{E}_P(M_T|\mathcal{F}_t^B)|\mathcal{F}_s^B)/M_s \\
&= \mathbb{E}_P(U_t M_t|\mathcal{F}_s^B)/M_s
\end{aligned}$$

für $s \le t \le T$ und für jedes $\mathbb{F}^B$-adaptierte $\{U_t\}$, wegen Lemma 6.7 und der Martingaleigenschaft des $\mathbb{M}$. Wir betrachten nun

(i) $U_t = B_t^*$: Es gilt nach Beispiel 10.9 und Proposition 12.4

$$\begin{aligned}
d(M_t B_t^*) &= M_t dB_t^* + B_t^* dM_t + dM_t dB_t^* \\
&= -M_t h_t dt + M_t dB_t + B_t^* M_t (h_t \cdot dB_t) + (M_t h_t \cdot dB_t)(dB_t - h_t dt) \\
&= -M_t h_t dt + M_t dB_t + B_t^* M_t (h_t \cdot dB_t) + M_t h_t dt \\
&= M_t dB_t + M_t B_t^* (h_t \cdot dB_t),
\end{aligned}$$

also ist $\{M_t B_t^*\}$ ein P-Martingal, da jede Komponente von $\mathbb{B}$ wieder eine BB zu P ist. Damit folgt

$$\mathbb{E}_Q(B_t^*|\mathcal{F}_s^B) = \frac{\mathbb{E}_P(M_t B_t^*|\mathcal{F}_s^B)}{M_s} = \frac{M_s B_s^*}{M_s} = B_s^*.$$

(ii) $U_t = B_t^* B_t^{*T} - tI$ (das heißt $U_t^{k,l} = B_t^{*k} B_t^{*l} - t\delta_{kl}$ für $k, l = 1, ..., m$): Hier gilt mit Beispiel 10.9

$$d(U_t^{k,l}) = B_t^{*k} dB_t^{*l} + B_t^{*l} dB_t^{*k} + dB_t^{*k} dB_t^{*l} - \delta_{kl} dt = B_t^{*k} dB_t^{*l} + B_t^{*l} dB_t^{*k},$$

also

$$\begin{aligned} d(M_t U_t^{k,l}) &= U_t^{k,l} dM_t + M_t dU_t^{k,l} + dM_t dU_t^{k,l} \\ &= M_t U_t^{k,l} h_t \cdot dB_t + M_t (B_t^{*k} dB_t^l - B_t^{*k} h_t^l dt + B_t^{*l} dB_t^k - B_t^{*l} h_t^k dt) \\ &\quad + (M_t h_t \cdot dB_t)(B_t^{*k} dB_t^l - B_t^{*k} h_t^l dt + B_t^{*l} dB_t^k - B_t^{*l} h_t^k dt) \\ &= M_t U_t^{k,l} h_t \cdot dB_t + M_t B_t^{*k} dB_t^l + M_t B_t^{*l} dB_t^k. \end{aligned}$$

Damit sind $\{M_t U_t^{k,l}\}$ P-Martingale für alle $k, l = 1, ..., m$, also auch $\{M_t U_t\} = \{M_t (B_t^* B_t^{*T} - tI)\}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(B_t^* B_t^{*T} - tI | \mathcal{F}_s^B) &= \frac{\mathbb{E}_P(M_t(B_t^* B_t^{*T} - tI) | \mathcal{F}_s^B)}{M_s} \\ &= \frac{M_s(B_s^* B_s^{*T} - sI)}{M_s} = B_s^* B_s^{*T} - sI. \end{aligned}$$

Das Theorem von Levy (vgl. Theorem 12.3) impliziert nun, dass $\mathbb{B}^*$ eine BB bezüglich Q ist. □

Bemerkung 12.6. Im Beweis des Satzes von Girsanov haben wir das Theorem von Levy verwendet, in dessen Beweis wir auf die Itô-Formel für lokale Martingale aus Karatzas, Shreve [17] zurückgegriffen haben. Im Falle des Prozesses $\mathbb{B}^*$ im Satz von Girsanov kann man auf diesen Verweis (auf eine hier nicht gezeigte Aussage) verzichten:
Im Beweis von Levys Theorem benötigen wir die Itô-Formel für $X_t = B_t^*$. Unser Beweis aus Theorem 10.5 kann übertragen werden, wenn man zusätzlich zu (a), (b) und (c) in Levys Theorem (Theorem 12.3) weiß, dass

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\Delta X_t^4) \le c(\Delta t)^2 \qquad \text{und} \\ &\mathbb{E}(\Delta X_t^6) \le c(\Delta t)^3 \end{aligned}$$

gelten. Dies überprüft man leicht für $X_t = B_t - \int_0^t h_s ds$, da h beschränkt ist.

12.4 Die Doob-Meyer Zerlegung

In diesem letzten Abschnitt wollen wir noch das Theorem zur Doob-Meyer Zerlegung ohne Beweis angeben (für den Beweis vgl. Karatzas, Shreve [17, Theoreme 1.4.10 und 1.4.14]). Dazu definieren wir zunächst die Klasse ***DL*** von stochastischen Prozessen. Ein Prozess $\mathbb{X}$ gehört genau dann zur Klasse DL, wenn die Menge $\{X_\tau : \tau \le T \text{ ist Stoppzeit}\}$ ***gleichmäßig integrierbar*** ist für alle $T > 0$. Dabei heißt eine Familie $\{X_i : i \in I\}$ integrierbarer Zufallsvariablen gleichmäßig integrierbar, falls $\int_{\{|X_i| \ge \alpha\}} |X_i| dP$ gleichmäßig in $i \in I$ gegen 0 konvergiert für $\alpha \to \infty$. Desweiteren benötigen wir die Begriffe des ***natürlichen*** Prozesses und des ***regulären*** Submartingals. Ein natürlicher Prozess $\mathbb{X}$ ist ein wachsender Prozess mit $X_0 = 0$ und

$$\mathbb{E}(M_t X_t) = \mathbb{E}(\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s)$$

für alle beschränkten rechtsseitig stetigen Martingale $\{M_t\}$. Ein Submartingal $\{X_t\}$ heißt regulär, wenn für jede wachsende Folge $(\tau_n) < T$ von Stoppzeiten mit der Eigenschaft $\tau_n \rightarrow_{n\to\infty} \tau$ (τ ist ebenfalls Stoppzeit)

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n}) \rightarrow_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_\tau)$$

gilt.

Definition 12.7. *Eine Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ heißt **rechtsstetig**, falls*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t, s\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_s$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Theorem 12.8 (Doob-Meyer Zerlegung). *Sei $\mathbb{X}$ ein rechtsseitig stetiges Submartingal bezüglich der vollständigen rechtsstetigen Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$. $\mathbb{X}$ gehöre der Klasse DL an. Dann gibt es (t,ω)-f.s. genau einen wachsenden, natürlichen und rechtsseitig stetigen Prozess $\{A_t\}$ mit $A_0 = 0$ sowie ein rechtsseitig stetiges Martingal $\{M_t\}$ bezüglich $\mathbb{F}$ mit*

$$\{X_t\} = \{M_t\} + \{A_t\}.$$

$\{A_t\}$ ist genau dann stetig, wenn $\mathbb{X}$ regulär ist.

Bemerkung 12.9. (i) Ist $\mathbb{X}$ ein Supermartingal, so dass $-\mathbb{X}$ die Voraussetzungen des Theorems 12.8 erfüllt, so ist die Zerlegung der Form

$$\{X_t\} = \{M_t\} - \{A_t\}.$$

(ii) Die durch eine BB induzierte vervollständigte Filtration $\mathbb{F}^B$ ist stets rechtsstetig (vgl. Bauer [3, Lemma 50.12]).

Literaturverzeichnis

[1] S. Angenent:
Local existence and regularity for a class of degenerate parabolic equations, Math. Ann., 280: 465-482 (1988)

[2] H. Bauer:
Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter (1992)

[3] H. Bauer:
Wahrscheinlichkeitstheorie, de Gruyter (1991)

[4] A. Bensoussan, J.L. Lious:
Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control, North Holland (1982)

[5] F. Black, M. Scholes:
The relation of option contracts and a test of market efficiency, J. Finance, 27: 399-417 (1972)

[6] F. Black, M. Scholes:
The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Economy, 81: 637-659 (1973)

[7] H. Brezis:
Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland (1973)

[8] A. Buttu:
On the evolution operator for a class of nonautonomous abstract parabolic equations, J. Math. Ann. Appl., 170 (no.1): 115-137 (1992)

[9] P. Clement, G. Simonett:
Maximal regularity in continuous interpolation spaces and quasilinear parabolic equations, J. Evol. Equ., 1: 39-67 (2001)

[10] J.C. Cox, M. Rubinstein:
Option Markets, Prentice Hall (1985)

[11] R.A. Dana, M. Jeanblanc:
Financial Markets in Continious Time, Springer Finance (2003)

[12] G. Da Prato, P. Grisvard:
Équations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 120: 329-396 (1979)

[13] F. Delbaeu, W. Schachermayer:
A general version of the fundamental theme of asset pricing, Math. Ann., 300: 463-520 (1994)

[14] R.J. Elliott:
Stochastic Calculus and Applications, Springer (1982)

[15] R.J. Elliott, P.E. Kopp:
Mathematics of Financial Markets, Springer Finance (1999)

[16] L.C. Evans:
Partial Differential Equations, AMS (2002)

[17] I. Karatzas, S.E. Shreve:
Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition, Springer (1991)

[18] I. Karatzas, S.E. Shreve:
Methods of Mathmatical Finance, Springer (1998)

[19] P.E. Kopp:
Martingales and Stochastic Integrals, Cambridge Univ. Press (1984)

[20] N.V. Krylov:
Introduction to the Theory of Diffusion Processes, AMS (1995)

[21] D. Lamberton, B. Lapayre:
Stocastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall (1996)

[22] K. Lange:
Optimization, Springer (2004)

[23] A. Lunardi:
Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser (1995)

[24] H.P. McKean:
A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in math. economic, Industr. Manage. Rev. 6: 32-39 (1965)

[25] B. Øksendal:
Stochastic Differential Equations, 5th Edition, Springer (2000)

[26] P.E. Protter:
Stochastic Integration and Differential Equations, 2nd Edition, Springer (2004)

[27] G. Stroth:
Lineare Algebra, Heldermann Verlag, Lemgo (1995)

Index