Martingaltheorie
Vorlesungsmitschrift

Professor Uwe Rösler

11. Februar 2005

Table of Contents

1 Zeitdiskrete Martingale

Wir führen die Begriffe Martingal, Supermartingal und Submartingal ein. Weiterhin betrachten wir Raumtransformationen durch konvexe Funktionen.

1.1 Martingaleigenschaft

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ stets der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum.

Ein **stochastischer Prozess** ist eine Familie $X_t : \Omega \to E,\ t \in T$ von Zgn mit Werten in einem meẞbarem Raum $(E, \sigma(E))$ versehen mit einer σ-Algebra. Die Indexmenge T heiẞt Parameterraum oder auch Zeitparamterraum. Wir benutzen die Notation $X = (X_t)_{t\in T}$ bzw. $(X_t)_t$ bzw. (X_t) für die Familie.

In den meisten Fällen spielt T die Rolle einer Zeit. T ist üblicherweise total geordnet. Wir benutzen nur diskrete Zeit und sogar T stets als Teilmenge der ganzen Zahlen, eventuell einschließlich dem Punkt unendlich, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{N} \cup \{-\infty, \infty\}$. Endliche Zeitparametermengen T identifizieren wir mit $\{1, 2, \ldots, n\}$. Der Standardfall wird T die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sein, evnetuell $\mathbb{N}_0$ einschlieẞlich der Null.

Eine Folge $X_t,\ t \in T$, heißt zu einer Folge $\mathcal{A}_t,\ t \in T$, von σ-Algebren **adaptiert**, falls für alle $t \in T$ die Zg $X_t : \Omega \mapsto E$ meßbar ist bezüglich $\mathcal{A}_t - \sigma(E)$.

Eine **Filtration** zu einer geordneten Menge T ist eine isotone Familie $\mathcal{A}_t, t \in T$ von σ-Algebren aus $\mathcal{A}$. In Formeln, $s \leq t \in T \Rightarrow \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$. Für die natürlichen Zahlen $T = \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \ldots \subset \mathcal{A}.$$

Wir benutzen die Notationen $(\mathcal{A}_n)_{n\in T}$ oder $(\mathcal{A}_n)$. Ein **filtrierter W-Raum** ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in T}, P)$ wie oben. Die **kanonische Filtration** oder **natürliche Filtration** eines Prozesses (X_n) ist die Filtration $(\mathcal{F}_n)$, Wobei $\mathcal{F}_n := \sigma(X_m,\ m \leq n)$, gegeben wurd durch die kleinste σ-Algebra erzeugt von allen $X_m, m \leq n$. Dies ist die kleinste Filtration bzgl. der der Prozeß adaptiert ist.

Ein **Martingal**, **Supermartingal**, **Submartingal** ist eine Folge $X_t,\ t \in T$, von integrierbaren Zgn adaptiert zu einer Filtration $(\mathcal{A}_t)$ mit

$$X_s = E(X_t \mid \mathcal{A}_s) \qquad \text{Martingal} \tag{1.1}$$

$$X_s \leq E(X_t \mid \mathcal{A}_s) \qquad \text{Submartingal} \tag{1.2}$$

$$X_s \geq E(X_t \mid \mathcal{A}_s) \qquad \text{Supermartingal} \tag{1.3}$$

f.s. für alle $s \leq t \in T$. Die Angabe der Filtration wird häufig weggelassen. Wenn die Angabe nicht aus dem Kontext hervorgeht, so ist die natürliche (=kanonische) Filtration $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ gemeint.

Die Martingaleigenschaft (1.1) bzw. die Submartingal- bzw. Supermartingaleigenschaft ist im Falle der natürlichen Zahlen äquivalent zu

$$X_n = E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \tag{1.4}$$

bzw. $\leq, \geq$ für alle $n \geq 1$. Verwende zum Beweis die Projektionseigenschaft

$$E(X_{n+2} \mid \mathcal{A}_n) = E(E(X_{n+2} \mid \mathcal{A}_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) = E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = X_n.$$

$(X_n)_n$ ist Supermartingal genau dann, wenn $(-X_n)_n$ ein Submartingal ist. $(X_n)_n$ ist ein Martingal genau dann, wenn $(X_n)_n$ gleichzeitig ein Sub- und ein Supermartingal ist.

1.1.1 Meine Martingalfavoriten.

Beispiele 1 (<u>Das</u> Martingal) In einem Kasino spielt ein Spieler die Verdoppelungsstrategie, in Spielerkreisen auch als Martingal bekannt. Der Spieler setzt auf einfache Chance (rot-schwarz) eine Einheit. Verliert er, so verdoppelt er seinen vorherigen Einsatz im nächsten Spiel. Gewinnt er irgendwann einmal, so hört er auf. Sei X_n sein Gewinn/Verlust im $n-$ten Spiel. Hat er bereits einmal gewonnen, sei $X_n \equiv 0$ und anderenfalls mit W 1/2 werden die Werte 2^{n-1} bei Gewinn bzw. -2^{n-1} bei Verlust angenommen. Sei S_n die $n-$te Partialsumme $\sum_{i=1}^n X_i$. Falls er zum $n-$ten Zeitpunkt gewinnt, ist sein Gesamtgewinn $= S_n$

$$-1 - 2 - 4 - 8 - \ldots - 2^{n-2} + 2^{n-1} = 1.$$

Der Spieler hat insgesamt eine Einheit gewonnen. Da er fast sicher irgendwann einmal gewinnt, erscheint dies als eine sichere Strategie. Sie heißt in Spielerkreisen Martingalstrategie.

Beispiele 2 (Irrfahrt) Seien $X_n, n \in I\!N$, unabhängig, identisch verteilte, integrierbare Zufallsgrößen, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die n-te Partialsumme. Dann ist

$$M_n := S_n - nEX_1$$

ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration $\mathcal{A}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = M_n + E(X_{n+1} - EX_1 \mid \mathcal{A}_n) = M_n.$$

Beispiele 3 (Exponentielle Martingale) Seien $X_n, n \in I\!N$, unabhängig, identisch verteilte Zufallsgrößen mit S_n die n-te Partialsumme. Definiere

$$M_n(\lambda) := \exp(\lambda S_n - n\Phi(\lambda))$$

mit $\Phi(\lambda) := Ee^{\lambda X_1}, \lambda \in I\!R$. Die Folge $M_n(\lambda), n \in I\!N$, ist ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}(S_1, \ldots, S_n) = \mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)$. (Nachrechnen.)

Beispiele 4 (Likelihoodquotient für Münzwurf) Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v.Zg. mit diskreter Verteilung $P = (p(x))_{x \in E}$. Sei $Q = (q(x))_{x \in E}$ ein anderes W-maß. Dann ist

$$M_n := \prod_{i=1}^n \frac{q(X_i)}{p(X_i)},$$

$p(x) > 0$ vorausgesetzt, ein Martingal bezüglich dem W-maß P und der natürlichen Filtration

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = M_n E(\frac{q(X_{n+1})}{p(X_{n+1})} \mid \mathcal{A}_n) = M_n.$$

Dieses Beispiel hat Anwendung in der Statistik. Wir wollen entscheiden, ob die Zgn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Verteilung P oder Q haben. Dazu betrachten wir die Teststatistik $M_n : I\!R^n \mapsto I\!R$ wie oben. $\ln T_n$ ist eine Summe von uiv Zgn. Nach dem starken Gesetz der Großen Zahl, anwendbar falls $E|\ln \frac{q(X_i)}{p(X_i)}| < \infty$ gilt, konvergiert $\frac{1}{n} \ln T_n$ gegen $E_P(\ln \frac{q(X_i)}{p(X_i)}) = \sum_x \ln \frac{q(x)}{p(x)} p(x)$ unter P bzw. gegen $E_Q(\ln \frac{q(X_i)}{p(X_i)}) = \sum_x \ln \frac{q(x)}{p(x)} q(x)$ unter Q. Sind diese Grenzwerte verschieden, so können wir P und Q unterscheiden. Die Grenzwerte sind verschieden für $P \neq Q$, da nach Jensen gilt

$$E_P \ln \frac{q(X_i)}{p(X_i)} < \ln E_P \frac{q(X_i)}{p(X_i)} = 0$$

$$E_Q \ln \frac{q(X_i)}{p(X_i)} = E_Q(-\ln \frac{p(X_i)}{q(X_i)}) > -\ln E_Q \frac{p(X_i)}{q(X_i)} = 0.$$

Beispiele 5 (Radon-Nikodym Ableitung) Seien Q, P zwei W-Maße. Eine Partition ϕ von Ω ist eine disjunkte Zerlegung von Ω in Mengen. ($\phi \subset \P(\Omega)$ $\biguplus_{A\in\Phi} A = \Omega$.) Wir betrachten nur Zerlegungen in meßbare Mengen. Ein Partition ϕ_1 ist feiner als ϕ_2, geschrieben $\phi_1 \preceq \phi_2$, falls jedes $A \in \phi_1$ in einem $B \in \phi_2$ enthalten ist.

Sei $\phi_1 \succeq \phi_2 \succeq \phi_3$... eine Folge von verfeinerten, meßbaren Partitionen. Definiere

$$M_n := \sum_{A\in\phi_n} \frac{Q(A)}{P(A)} 1_B$$

$n \in I\!N$. Der Einfachheit nehmen wir stets $P(B) > 0$ an. Dann ist M_n ein Martingal bezüglich P und der Filtration $\mathcal{A}_n$ erzeugt von der Partition ϕ_n.

$$\begin{aligned}
E_P(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) &= \sum_{A\in\phi_{n+1}} \frac{Q(A)}{P(A)} E_P(1_A \mid \mathcal{A}^n) \\
&= \sum_{B\in\phi_n} \sum_{B\supset A\in\phi_{n+1}} \frac{Q(A)}{P(A)} E_P(1_A \mid \mathcal{A}^n) \\
&= \sum_{B\in\phi_n} sum_{B\supset A\in\phi_{n+1}} \frac{Q(A)}{P(A)} 1\!\!1_B P(A \mid B) \\
&= \sum_{B\in\phi_n} sum_{B\supset A\in\phi_{n+1}} \frac{Q(A)}{P(B)} 1\!\!1_B \\
&= \sum_{B\in\phi_n} \frac{Q(B)}{P(B)} 1\!\!1_B = M_n
\end{aligned}$$

Beispiele 6 (Reguläre Martingale) Sei $\mathcal{A}_n$ eine Filtration, X eine integrierbare Zufallsvariable. Dann ist $M_n := E(X \mid \mathcal{A}_n)$ ein Martingal.

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(E(X \mid \mathcal{A}_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) = E(X \mid \mathcal{A}_n).$$

Später werden wir sehen, daß genau die L_1-konvergenten Martingale so darstellbar sind.

Beispiele 7 (Polya Urnen Modell) Gegeben sei eine Urne mit S schwarzen und W weißen Bällen. Es wird zufällig mit Gleichverteilung ein Ball gezogen. Dann werden insgesamt $c \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$ Bälle dieser gezogenen Farbe zurückgelegt. Kein Ball wird zurückgelegt entspricht $c = -1$, der gezogene Ball wird zurückgelegt entspricht $c = 0$ usw..

Sei $S_n, W_n, n \in I\!N$, die Anzahl der schwarzen bzw. weißen Kugeln nach der n-ten Ziehung einschließlich eventuellem Zurücklegen. Dann ist

$$M_n = \frac{S_n}{W_n + S_n}$$

ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration. (Für $c = -1$ müssen wir nach $W + S$ Ziehungen stoppen, da kein Ball mehr in der Urne ist.) M_n ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß bei der nächsten ($= n + 1$-ten) Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird, bedingt auf der Kenntnis der bisher gezogenen Kugeln.

Mathematisches Model: Sei X_n die Farbe, kodiert als 1 für 'schwarz' und 0 für 'weiß', der gezogenen Kugel in der n-ten Ziehung. Die Filtration ist $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Die Zg M_n schreibt sich als, $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$,

$$M_n = P(X_{n+1} = 1 \mid \mathcal{A}_n) = \frac{S + cZ_n}{W + S + nc}.$$

M_n ist ein Martingal, da

$$\begin{aligned} E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) &= \frac{S + cZ_n + cE(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)}{W + S + (n+1)c} \\ &= \frac{S + cZ_n + c\frac{S+cZ_n}{W+S+nc}}{W + S + (n+1)c} = \ldots = M_n. \end{aligned}$$

Das Polya Urnen Modell läßt sich auch für $c \in [-1, \infty)$ spielen. Es werden

stets $\lfloor c \rfloor$ Bälle der gezogenen Farbe zurückgelegt und, abhängig von einem unabhängigen Bernoullizufallsexperiment zum Parameter $c - \lfloor c \rfloor$, eine weitere der Farbe.

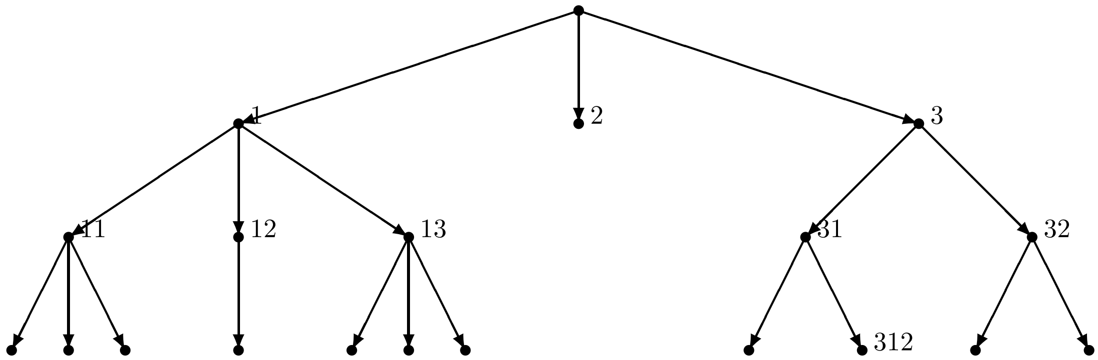
Beispiele 8 (Verzweigungsprozesse) Historischer Ausgangspunkt für die Verzweigungsprozesse war die Genealogie, insbesondere die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Familiennamens. Als Nachkommen (Kinder) zählen wir hier nur die männlichen Nachkommen, die den Familiennamen tragen und weitergeben können. Die Anzahl dieser Nachkommen sei unabhängig mit stets gleicher Verteilung. Uns interessiert die Größe der n-ten Generation.

Mathematisches Modell: Seien $X_{i,j},\ i,j \in \mathbb{N}$, uiv Zgn mit Werten in $\mathbb{Z}^+$, $0 < E(X_\bullet) =: m < \infty$. Sei $Z_0 = 1$,

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{n,j}.$$

Dann ist $\frac{Z_n}{m^n}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}(X_{i,j},\ i < n,\ j \in \mathbb{N},)$ (oder auch der natürlichen Filtration).

Die Größe $X_{n,j}$ gibt die Anzahl der Nachkommen des j-ten Individuums der n-ten Generation an. Z_n entspricht der Anzahl der Namensvertreter in der n-ten Generation. Ein 'typischer' Stammbaum sieht etwa folgendermaßen aus:



Beispiele 9 (Gewichteter Verzweigungsprozess) Jedes Individuum eines Verzweigungsprozesses trägt zusätzlich ein zufälliges Gewicht. Dies ist das Gewicht der Mutter multipliziert mit einer Zufallsgröße.

Mathematisches Modell: Wir betrachten einen gerichteten Graphen (V, E). Die Knotenmenge ist

$$V := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n, \qquad \mathbb{N}^0 := \{\emptyset\}.$$

Wir benutzen für $v = (v_1, ..., v_n) \in I$ die Notation $vi = (v_1, ..., v_n, i)$, $|v| = n$, $|\emptyset| = 0$, $v_{|m} = (v_1, \ldots, v_m)$. (Die Kanten $e \in E$ sind die Tupel $e = (v, vi)$.)

Seien $T(v) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in V$, uiv Zgn. Beachte für festes v können die Koordinaten $T_1(v), T_2(v), \ldots$ voneinander abhängig sein. Definiere rekursiv $L(v) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ durch $L(\emptyset) = 1$ und

$$L(v, i) = L(v)T_i(v).$$

Hieraus ergibt sich die Produktdarstellung

$$L(v) = \prod_{i=1}^{n} T_{v_i}(v_{|i-1}) = T_{v_1}(\emptyset)T_{v_2}(v_1)...T_{v_n}(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Sei $Z_n = \sum_{\{v||v|=n\}} L(v)$. Dann ist für $m \neq 0$

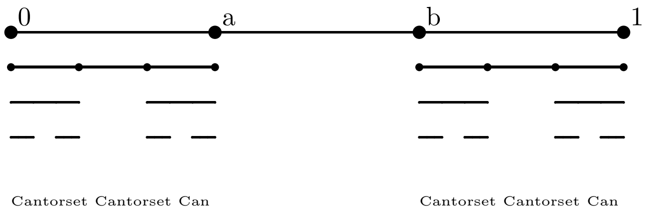
$$W_n := \frac{Z_n}{m^n},$$

$0 \neq m := E \sum_i T_i(.)$ wohldefiniert, ein Martingal.

V gibt eine natürliche Indizierung des Baumes mit unendlich vielen Ästen. Die Größen $L(v)$ geben das Gewicht des Individuums v an. Der Verzweigungsprozess ist ein Spezialfall mit $L(v) = 1$ oder $L(v) = 0$. In der Zeichnung haben wir Individuen mit Gewicht Null weggelassen.

Beispiele 10 (Zufällige Cantormengen) Als spezielles Beispiel für einen gewichteten Verzweigungsprozeß betrachten wir die Hausdorffdimension von zufälligen Cantormengen.

Eine (die) Cantormenge wird folgendermaßen konstruiert: Aus dem Einheitsintervall entferne das mittlere Drittel. Aus den verbliebenen Intervallen entferne ebenfalls das mittlere Drittel usw.



Es bleibt eine Menge C übrig, genannt die Cantormenge.

Wir wollen diese Konstruktion nun zufällig machen. Anstelle von $1/3,\ 2/3$ wählen wir zufällig, aber zu gegebener Verteilung, zwei (oder auch mehrere) Punkte aus und entfernen das mittlere (einige) Intervall. Für jedes verbleibende Intervall wiederholen wir diese Prozedur auf kleinerer Skala unabhängig, aber mit derselben Verteilung. Die übrigbleibende Menge $C = C(\omega)$ ist eine zufällige Cantormenge.

Wir denken uns die Prozedur als Baum dargestellt wie oben mit der natürlichen Indizierung durch V. Sei $L(v)$ die Länge des Intervalls v. Die Faktoren $T_1(v), T_2(v), ..$ geben die jeweilige relative Länge der verbleibenden Intervalle bei Aufspaltung des Intervalls v. Für die deterministische Cantormenge gilt $T_1(.) \equiv 1/3 = T_2(.),\ T_3 = 0 = T_4 = ...$

Als nächstes klären wir den Zusammenhang zur Hausdorffdimension und Hausdorffmaß.

Sei A eine beliebige Menge in $I\!R$ (metrischer Raum). Eine offene δ- Überdeckung von A ist eine Familie $U_n, n \in I\!N$, von offenen Mengen mit Durchmesser $\mathrm{diam}(U_n) < \delta$, die A überdeckt ($A \subset \bigcup_n U_n$). Für $\alpha > 0, \delta > 0$, sei $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \inf\{\sum_n \mathrm{diam}^\alpha(U_n)\}$, das Infimum über alle δ-Überdeckungen genommen. Das

α-Hausdorffmaß von A ist: $\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$. Das α-Hausdorffmaß $\mathcal{H}^\alpha$ kann den Wert unendlich annehmen. Die Hausdorffdimension ist das kleinste α mit endlicher α-Hausdorffdimension,

$$\mathcal{H}(A) = \inf\{\alpha | \mathcal{H}^\alpha(A) < \infty\}.$$

Für unsere zufälligen Cantormengen bietet sich als Überdeckung die n-te Generation an (modifiziert zur offenen δ-Überdeckung!). Der Wert

$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{|v|=n} L^\alpha(v)$$

ist eine erste Annäherung (im Grenzwert exakt) an das α-Hausdorfmaß.

Eine besondere Rolle spielt der Wert $\overline{\alpha}$ mit $E(T_1^{\overline{\alpha}} + T_2^{\overline{\alpha}}) = 2$. Für $\alpha <_{(=,>)} \overline{\alpha}$ ist $S_n^{(\alpha)}$ ein Submartingal (Martingal, Supermartingal). Der Wert $\overline{\alpha}$ ist (f.s.) die Hausdorffdimension einer zufälligen Cantormengen C, falls C nicht die Nullmenge ist. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n^{(\overline{\alpha})}$ ist das $\overline{\alpha}$-Hausdorff-Maß der zufälligen Cantormenge.

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf die Cantormenge selbst anwenden. Die Zven $T_.$ sind deterministisch $(1/3, 2/3)$. Die Hausdorff-Dimension $\overline{\alpha} = \ln 2/\ln 3$ erhält man durch Lösen der Gleichung $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha = 1$ nach α.

Beispiele 11 (Aktien) Der Aktienkurs X_n wird gerne als Martingal modelliert. Ein Händler kauft am n-ten Tag C_n Aktien. Am folgenden Tag hat er den Wert $C_n(X_{n+1} - X_n)$ dazugewonnen. Der Prozess

$$M_n := \sum_{i=1}^{n-1} C_i(X_{i+1} - X_i)$$

ist ein Martingal, vorausgesetzt die Kaufentscheidung C_n ist $\mathcal{A}_n$-meßbar. (Dies ist die mathematische Formulierung für keine Insiderinformation.)

Beispiele 12 (Spielhäuser) Ein Spieler geht in ein Kasino mit mehrfachem Spielangebot wie z.B. Roulette und Black Jack. Zur Einfachheit sei die Zeit getaktet. Zu Beginn jeden Zeittaktes kann der Spieler frei ein Spiel auswählen und es einmal zu erlaubtem Einsatz spielen. Dieser Vorgang einschießlich Auszahlung wird in einem Zeittakt abgeschlossen. Sei K_n das Spielerkapital zum n-ten Zeitpunkt.

Der Spieler möchte seinen Gewinn K_N nach genau N Zeittakten maximieren, z.B im Sinne vom Erwartungswert, oder der Wahrscheinlichkeit mindestens einen bestimmten Betrag zu haben. Welche Strategie, d.h. Auswahl der Teilspiele, ist die beste? Dieses Problem, behandelt in Dubins-Savage, How to gamble if you must, führt auf die Konstruktion spezieller Martingale. In der Sektion über optimales Stoppen behandeln wir den Spezialfall mit nur zwei Optionen, weiterspielen oder stoppen.

1.2 Transformationen

Aus Submartingalen erhalten wir durch die Zeittranformation, Raumtransformation, Zerlegungen und Stoppen neue Submartingale.

Unser Zeitparameterraum T ist durchweg die natürlichen Zahlen mit oder ohne 0 oder eventuell die erweiterten natürlichen Zahlen einschlieślich $\{\infty\}$.

1.2.1 Zeit 0

Der Einfachheit halber nehmen wir zum Zeitparameterraum bei Bedarf die 0 hinzu. Dies können wir stets machen durch $X_0 := EX_1$ und $\mathcal{A}_0$ die triviale σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$. Jedes Sub-, Super-, Martingal erhält die Struktur auf den um 0 vergröserten Zeitraum.

1.2.2 Filtrationwechsel

Für einen Wechsel in eine Subfiltration gilt:

Proposition 13 *Sei $(X_n, \mathcal{A}_n)$ ein Martingal, (Super-, Sub-) $(\mathcal{B}_n)$ eine Filtration, $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$ und $(X_n)_n$ adaptiert zu $(\mathcal{B}_n)_n$. Dann ist $(X_n, \mathcal{B}_n)$ ein Martingal (Super-, Sub-).*

Einfach.

1.2.3 Raumtransformationen

Eine lineare Raumtransformation beläst ein Martingal ein Martingal und ein Submartingal wird, je nach Vorzeichen, zum Sub- oder Supermartingal. Bei konvexen Funktionen hilft der Satz von Jensen.

Eine Funktion $\varphi : I \mapsto I\!R$, I ein Intervall, heißt **konvex (konkav)**, falls für alle $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$ gilt

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq_{(\geq)} t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Bemerkung i) Eine Funktion φ ist konvex genau dann wenn $-\phi$ konkav ist.

ii) Eine konvexe Funktion $\varphi : I\!R \mapsto I\!R$ ist stetig im Inneren des Defitionsbereiches.

iii) Wir verwenden hier stets $\varphi : I\!R \mapsto I\!R$ der Einfachheit halber.

Satz 14 (Jensen Ungleichung) *Sei X eine integrierbare Zg, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ eine Unter σ-Algebra, $\varphi : I\!R \mapsto I\!R$ eine konvexe Funktion und $\varphi(X)$ integrierbar. Dann gilt*

$$\varphi(E(X \mid \mathcal{A}_0)) \leq E(\varphi(X) \mid \mathcal{A}_0)$$

Als Merkregel: Falscher Effe $E\varphi \geq \varphi E$.

Lemma 15 *Sei* $(X_n, \mathcal{A}_n)$ *ein Martingal und* φ *eine konvexe Funktion mit* $\varphi(X_n)$ *integrierbar für jedes* n. *Dann ist* $\varphi(X_n)$ *ein Submartingal bezüglich* $\mathcal{A}_n$.

Sei $(X_n, \mathcal{A}_n)$ *ein Submartingal. Sei* φ *eine aufsteigende konvexe Funktion und* $\varphi(X_n)$ *integrierbar für jedes* n. *Dann ist* $\varphi(X_n)$ *ein Submartingal bezüglich* $\mathcal{A}_n$.

Beweis: Sowohl für das Martingal als das Submartingal gilt

$$E(\varphi(X_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) \geq \varphi(E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)) \geq \varphi(X_n).$$

q.e.d.

Einige Variationen dieses Lemmas ergeben sich aus

$$\varphi \text{ konvex } \Leftrightarrow -\varphi \text{ konkav}$$

$$(X_n)_n \text{ Submartingal} \Leftrightarrow (-X_n)_n \text{ Supermartingal.}$$

Corollar: $(X_n, \mathcal{A}_n)$ Martingal (Supermartingal) φ (fallend) konkav, $\varphi(X_n)$ integrierbar $\Rightarrow \varphi(X_n)$ Supermartingal bezüglich $\mathcal{A}_n$.

Beachte: φ konvex $\Leftrightarrow -\varphi$ konkav und X Submartingal $\Leftrightarrow -X$ Supermartingal. Dieses erklärt die obige „Symmetrie“.

Beispiele i) Sei M_n ein Martingal. Dann sind für $\varphi(x) = x \vee 0,\ \varphi(x) = x^2,\ \varphi(x) = e^x$ die Prozesse $M_n^+,\ M_n^2,\ e^{M_n}$ Submartingale.

ii) Ist X_n ein Submartingal, so sind e^{X_n} und X_n^+ Submartingale. X_n^- ist ein Supermartingal. Analog: Ist X_n ein Supermartingal, so ist X_n^+ ein Supermartingal und X_n^- ein Submartingal.

Notation: $f = f^+ - f^-$, $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$. f^+ heißt Positivteil, f^- Negativteil. Beachte $f^- \geq 0$.

1.2.4 Raum der Martingale

Durch Addition, Supremumsbildung, Infimumsbildung und Anwendung konvexer Funktionen lassen sich weitere (Super–, Sub–) Martingale erzeugen.

Lemma 16 *i) Der Raum der Martingale ist ein reeller Vektorraum.*
ii) Der Raum der Submartingale ist abgeschlossen bezüglich Addition, Multiplikation mit positiver Konstanten und dem Supremum.
iii) Der Raum der Supermartingale ist abgeschlossen bezüglich Addition, Multiplikation mit positiver Konstanten und Infimum.

Beweis: Leicht nachzurechnen. □

1.2.5 Doob Zerlegung

Im folgenden benutzen wir $\mathcal{A}_0$ konventionell als die triviale σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$.

Ein *vorhersehbarer* Prozeß zu der Filtration $(\mathcal{A}_n)$ ist ein Prozeß $(X_n)_n$ adaptiert zu $(\mathcal{A}_{n-1})_n$, d.h. X_n ist $\mathcal{A}_{n-1}$ meßbar für alle $n \in I\!N$.

Lemma 17 (Doob Zerlegung) *Sei $(X_n, \mathcal{A}_n)$ ein Submartingal. Dann existiert genau ein Martingal (M_n) und genau ein vorhersehbarer, monoton aufsteigender Prozeß (A_n) mit $A_1 \equiv 0$ und*

$$X_n = M_n + A_n.$$

Der Prozess (A_n) wird rekursiv gegeben durch

$$A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) - X_n.$$

Beweis: • A_n tut's.

A_n definiert wie oben ist wohldefiniert, monoton steigend und vorhersehbar.

Eine Rechnung zeigt die Martingaleigenschaft von $M_n := X_n - A_n$,

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(X_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) - A_{n+1} - X_n + X_n = A_n + X_n = M_n.$$

• Eindeutigkeit.

Sei $X_n = \overline{M}_n + \overline{A}_n$ eine zweite Zerlegung mit den obigen Eigenschaften. Wir zeigen durch Induktion nach n $\overline{M}_n = M_n$ und $\overline{A}_n = A_n$. Der Induktionsanfang ist leicht. Wir zeigen den Schritt $n \to n+1$.

• $A_{n+1} = \overline{A}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= E(A_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(X_{n+1} + M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \\ &= E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) + M_n = E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) + \overline{M}_n \\ &= E(X_{n+1} + \overline{M}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(\overline{A}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \overline{A}_{n+1} \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $M_{n+1} = \overline{M}_{n+1}$. q.e.d.

1.3 Martingaltransformierte

Wir erweitern, falls notwendig, konventionell den Zeitbereich via $\mathcal{A}_0$ der trivialen σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$ und $X_0 := E(X_1 \mid \mathcal{A}_0) = EX_1$.

Eine **(Super-, Sub-) Martingaldifferenzfolge** eines Super-, Sub-, Martingals X_n ist die Folge $D_n = X_n - X_{n-1},\ n \in I\!N$. Diese Folge ist adaptiert und alle D_n sind integrierbar mit $E(D_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) =_{\leq,\geq} 0$. Es gilt

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} D_i + X_0.$$

Umgekehrt, jede Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von adaptierten und integrierbaren Zgn mit $E(D_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) =_{\leq,\geq} 0,\ n \geq 1$ liefert via $X_n = \sum_{i=0}^n D_i + X_0$ ein Martingal, (Super-, Sub-).

Satz 18 *Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen (Super-, Sub-) Martingaldifferenzfolgen $D_n, n \in \mathbb{N}_0$ und (Super-, Sub-) Martingalen $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X_0 = 0$. Diese kann gegeben werden durch*

$$X_n = \sum_{i=1}^n D_i.$$

Beweis: Leicht. q.e.d.

Die **Martingaltransformierte** eines (Super-, Sub-) Martingals (X_n) zu einem vorhersehbaren Prozeß $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Prozess

$$X_n^C := \sum_{i=1}^n C_i D_i + X_0.$$

Hierbei ist $D_n := X_n - X_{n-1}$ die zugehörige Martingaldifferenzfolge.

Lemma 19 *Sei (X_n) ein Martingal und (C_n) vorhersehbar. Falls jedes $C_i D_i,\ i \in \mathbb{N}$ integrierbar ist, so ist die Martingaltransformierte X^C*

$$X_n^C := \sum_{i=1}^n C_i D_i + X_0$$

ein Martingal.

Sei (X_n) ein Submartingal (Super-) und C_n zusätzlich positiv. Dann ist die Martingaltransformierte X^C

$$X_n^C = \sum_{i=1}^n C_i D_i + X_0$$

ein Submartingal (Supermartingal).

Beweis: Die Martingaltransformierte X^C ist adaptiert zur Filtration und integrierbar, da die einzelnen Terme $C_i D_i$ $\mathcal{A}_i$ meßbar und integrierbar sind.

Die Martingaleigenschaft wird nachgerechnet

$$E(X_{n+1}^C \mid \mathcal{A}_n) = \sum_{i=1}^{n+1} E(C_i D_i + X_0 \mid \mathcal{A}_n) = X_n^C + C_{n+1} E(D_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = X_n^C.$$

Eine analoge Argumentation hält für Sub- und Supermartingale. q.e.d.

Satz 20 (Optional Sampling Theorem) *Sei $(X_n)_{n=1}^N$ ein Martingal und (C_n) ein vorhersehbarer Prozess mit $C_i D_i$ integrierbar für alle $1 \leq i \leq N$. Dann gilt*

$$X_0 = EX_N^C.$$

Sei $(X_n)_{n=1}^N$ ein Submartingal und (C_n) wie oben. Dann gilt

$$X_0 \leq EX_N^C.$$

Sei $(X_n)_{n=1}^N$ ein Supermartingal und (C_n) wie oben. Dann gilt

$$X_0 \geq EX_N^C.$$

Beweis: Wir zeigen nur den Martingalfall. Die anderen beiden Aussagen folgen analog.

$$EX_N^C = E\sum_{i=1}^N C_i D_i + X_0 = \sum_i E(E(C_i D_i \mid \mathcal{A}_{i-1})) + X_0 = \sum_i E(C_i E(D_i \mid \mathcal{A}_{i-1})) + X_0 = X_0.$$

q.e.d.

Die punktweise Ordnung auf dem Raum der Prozesse ist die Ordnung

$$(X_t)_{t\in T} \preceq (Y_t)_{t\in T} \Leftrightarrow X_t(\omega) \leq Y_t(\omega)$$

für alle $t \in T,\ \omega \in \Omega$.

Lemma 21 (Optional Sampling Theorem) *Sei $(X_n)_{n=1}^N$ ein Submartingal und $(A_n) \preceq (B_n)$ zwei vorhersehbare Prozesse. Sei $0 \leq A_n$ und alle $A_i D_i, B_i D_i$ integrierbar für $1 \leq i \leq N$. Dann gilt*

$$EX_N^A \leq EX_N^B.$$

Analog für Supermartingale $(X_n)_{n=1}^N$ gilt

$$EX_N^A \geq EX_N^B.$$

Beweis: Einfach.

Kasinospieler: Ein Spieler spielt eine endliche Folge von (unabhängigen) Spielen mit zufälligem Ausgang $D_1, D_2, , \ldots, D_N$ in einem Spielkasino. Dabei gebe D_i die positive oder negative Auszahlung im $i-$ten Spiel bei Einsatz einer Einheit ab. Der Spieler darf (=muß) den Einsatz C_n für das $n-$te Spiel vor dem n-ten Spiel bestimmen. Üblicherweise einen positiven Einsatz und nicht mehr als er besitzt. Hierbei kennt der Spieler die σ-Algebra der gesamten Vergangenheit bis vor dem n-ten Spiel. In der Regel ist dies die σ-Algebra

$\sigma(D_1, \ldots, D_{n-1}) = \mathcal{A}_{n-1}$ erzeugt von allen Spielergebnisse bis zu diesem Zeitpunkt. Der von ihm gewählte Einsatz C_n ist daher $\mathcal{A}_{n-1}$ meßbar, die Folge (C_n) ist vorhersehbar. Die Folge (C_n) heißt auch Strategie des Spielers.

Sei K_n sein Kapital nach dem n-ten Spiel, $K_0 \in \mathbb{R}^+$ sein Anfangskapital. Nach dem $n-$ten Spiel beträgt sein Kapital

$$K_n^C = \sum_{i=1}^{n} C_i D_i + K_0.$$

Der Spieler möchte möglichst viel gewinnen. Ein Kriterium wäre, den Erwartungswert EK_N^C zu einem festgesetzten Zeitpunkt N zu maximieren. Mathematisch gesehen führt dies auf

$$\sup_C EK_N^C.$$

Faire Spiele: Alle Spiele D_i seien fair, d.h.

$$E(D_i \mid \mathcal{A}_{i-1}) = 0.$$

Dann ist K_n^C eine Martingaltransformierte zur Martingaldifferenz (D_n) und dem vorhersehbaren Prozess (C_n). Der Erwartungswert EK_n^C ist konstant K_0 für jedes n und jede Strategie (C_n), Optional Sampling Theorem,

$$EK_n^C = K_0.$$

Anders formuliert, alle Aktionen des Spielers haben keinen Einfluß auf sein durchschnitlich erspieltes Kapital!

Bei fairen Spielen spielt der Spieler Dummy.

Nachteilhafte Spiele: Alle Spiele seien subfair (nachteilig) im Sinne

$$E(D_i \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq 0$$

aus Sicht des Spielers gesehen. Das Kapital K_n^C unter der gewählten Strategie (C_n) ist jetzt ein Supermartingal und das erwartete Kapital

$$K_0 \geq E(K_N^C)$$

sinkt mit Erhöhung der Einsätze. Im Sinne der Erwartungswertmaximierung sollte der Spieler möglichst wenig spielen, nämlich garnicht. Selbst das Spielen einer einzigen Runde kann schon nachteilig für ihn sein.

Da dies ein Nullsummenspiel ist, was der eine verliert gewinnt der andere, profitiert das Spielkasino und wird infolgedessen versuchen den Spieler zum Spielen zu annimieren.

Vorteilhafte Spiel: Alle Spiele seien superfair (vorteilhaft) im Sinne

$$E(D_i \mid \mathcal{A}_{n-1}) \geq 0$$

aus Sicht des Spielers gesehen. Das Kapital K_n^C unter der gewählten Strategie (C_n) ist jetzt ein Submartingal und das erwartete Kapital

$$K_0 \leq E(K_N^C)$$

steigt mit Erhöhung der Einsätze. Im Sinne der Erwartungswertmaximierung sollte der Spieler möglichst viel spielen, nämlich stets und alles einsetzen.

Für das Spielkasino sind solche Spiele nachteilig, aber trotzdem gibt es solche tatsächlich im Spielkasino [15]. Mehr hierzu in dem Kapitel über Kasinospiele.

Verschiedene Spiele: Und was macht der Spieler, wenn es Spiele D_i gibt, die nachteilig sind und solche die vorteilhaft sind? Er sucht sich die für ihn vorteilhaften aus. Bei diesen setzt er möglichst viel (=alles), bei den anderen nichts. Es reicht ihm, nur bei strikt vorteilhalten $(ED_i > 0)$ alles zu setzen.

1.4 Stoppzeiten

Wir betrachten Stoppzeiten und Zeittransformationen durch eine Folge von Stoppzeiten. Stoppzeit ist ein wesentlicher Begriff für stochastische Prozesse. und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Gegeben sei ein adaptierter stochastischer Prozess $(X_n, \mathcal{A}_n),\ n \in I\!N$. Sei $\overline{I\!N} = I\!N \cup \{\infty\}$ und $I\!N_0 = I\!N \cup \{0\}$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \mapsto I\!N_0$ heißt **Stoppzeit** bzgl. der Filtration $(\mathcal{A}_n)$, falls für alle n gilt:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n. \tag{1.5}$$

Ergibt sich die Filtration aus dem Kontext oder ist die kanonische Filtration gemeint, so entfällt die Angabe der Filtration. Eine **erweiterte Stoppzeit** ist eine Abbildung $\tau : \Omega \mapsto \overline{T} = T \cup \{\infty\}$ mit obiger Eigenschaft (1.5). Eine **endliche Stoppzeit** ist eine Stoppzeit $\tau : \Omega \mapsto \{1, \ldots, N\}$ mit endlichem Zeitparameterraum. Stoppzeiten bezeichnen wir stets mit griechischen Buchstaben wie τ oder σ.

Die konstante Abbildung ist eine Stoppzeit.

Proposition 22 *Äquivalent sind:*
i) *τ ist eine (erweiterte) Stoppzeit.*
ii) $\forall n \in T : \{\tau = n\} \in \mathcal{A}_n$.
iii $\forall n \in T : \{\tau > n\} \in \mathcal{A}_n$.

Beweis: i) $\Leftrightarrow$ ii) Für die Hinrichtung benutze $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \backslash \{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{A}_n$, da $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n$ und $\{\tau \leq n-1\} \in \mathcal{A}_{n-1} \subset \mathcal{A}_n$ gilt. Die Rückrichtung ergibt sich aus $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{i=1}^n \{\tau = n\}$.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Dies ergibt sich aus $\{\tau > n\} = \Omega \backslash \{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n$.

Proposition 23 *Der Raum der Stoppzeiten ist abgeschlossen bezüglich abzählbarem Infimum und endlichem Supremum. Der Raum der erweiterten Stoppzeiten ist abgeschlossen bezüglich abzählbarem Infimum und Supremum.*

Beweis: Sei τ_n eine Folge von Stoppzeiten. Das Infimum bzw. Supremum ist ist eine erweiterte Stoppzeit, da gilt

$$\{\inf_n \tau_n \leq m\} = \bigcup_n \{\tau_n \leq m\} \in \mathcal{A}_m, \qquad \{\sup_n \tau_n \leq m\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq m\} \in \mathcal{A}_m$$

. Es verbleibt nachzuprüfen, unter welchen Bedingungen das Infimum oder Supremum reellwertig ist. q.e.d.

Bemerkung: a) Die Summe von Stoppzeiten ist eine Stoppzeit, jedoch im allgemeinen nicht die Differenz. (Übung)

Das Standardbeispiel einer Stoppzeit sind erste Eintrittszeiten (bzw. Austrittszeiten) aus einer (meßbaren) Menge B

$$\tau_B(\omega) := \inf\{n : X_n(\omega) \in B\}.$$

Wir benutzen die Konvention $\inf \emptyset := \infty$. τ_B ist im allgemeinen nur eine erweiterte Stoppzeit.

Heuristik einer Stoppzeit: Sei $X_n, n \in \mathbb{N}$, ein Prozeß mit Werten in einem endlichen Raum E und $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ die kanonische $\sigma-$Algebra erzeugt von $X_1, \ldots, X_n$. Eine Stoppzeit τ bzgl. der Filtration $(\mathcal{A}_n)$ läßt sich als eine Liste (=Menge) von endlichen Folgen aus $\cup_{n\in\mathbb{N}} E^n$ interpretieren mit folgender rekursiver Auswertungsvorschrift. Taucht die Realisierung $X_1(\omega)$ der ersten Zufallsgröße in der Liste auf, so setze $\tau(\omega) = 1$. Ansonsten betrachte das Tupel $(X_1(\omega), X_2(\omega))$ der Realisierungen der ersten beiden Zufallsgrößen (X_1, X_2). Taucht dies in der Liste auf, setze $\tau(\omega) = 2$, ansonsten fahre fort mit dreier Folgen usw. Falls dies Verfahren nie abbricht, setze $\tau(\omega) = \infty$. Die so definierte Funktion $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$ ist eine erweiterte Stoppzeit. Umgekehrt, gegeben eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathcal{A}_n)$, so läßt sich eine dazu eine passende Liste finden. Diese besteht aus allen Realisierungen der Tupel $(X_1, X_2, \ldots, X_n)\mathbb{1}_{\tau=n}$. (Sofern Nullmengen nicht stören und diese können tatsächlich entsorgt werden.)

Im Falle $P(\tau < \infty) = 1$ haben wir eine Stoppzeit. Die zugehörige Liste erfüllt folgende weitere Eigenschaft, zumindest fast sicher: Fast jede Realisierung

$X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$ aus $E^{I\!N}$ hat ein Anfangsstück verzeichnet in dieser Liste. Dies charakterisiert Stoppzeiten.

Stoppzeiten oder erweiterte Stoppzeiten konstruiert aus einer Liste wie oben beschrieben heißen **deterministische** Stoppzeiten. Daneben gibt es noch die **randomisierten** Stoppzeiten. Diese lassen sich ähnlich durch eine Auswertungsvorschrift beschreiben: Zu jedem Tupel gibt es eine genaue Anweisung, wie eine Entscheidung 'Stoppen oder Weiter' mithilfe der verfügbaren Information ($=\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_n$, n die Länge des Tupels,) gefällt werden soll. Die Entscheidungsvorschrift kann von meinem derzeitigen Gemütszustand abhängen oder von der Attraktivität meiner Nachbarin beim Roulette oder .... Mathematiker geben gerne unspektakulär einen Wert p aus $[0, 1]$ an mit der Vorschrift, ein unabhängiges Zusatzexperiment (z.B. Münzwurf) durchzuführen und, abhängig vom Ergebnis, mit Wahrscheinlichkeit p auf "Stoppen" zu entscheiden und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf "Fortfahren". $p = 1$ entspräche Stoppen. Die Realisierung des Zufallsexperiments muß in der $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_n$ enthalten sein, d.h. die Information ist in der σ-Algebra. Anders betrachtet, anstelle von X_n könnten wir ein Tupel (X_n, Y_n) betrachten, wobei Y_n für die zusätzlich notwendige Information zur Entscheidungsfindung steht.

Standardspielsituation: Wann sollte ein Spieler eine Aktie verkaufen? Dies ist ein Stoppproblem. Abhängig von der Information bis zum Zeitpunkt n, grob gesagt der Historie der Aktenkurse $X_m,\ m \leq n$ bis zu diesem Zeitpunkt, entscheidet sich der Spieler für halten oder abstoßen. Der Verkaufszeitpunkt ist eine Stoppzeit. Dies kann deterministisch oder randomisiert sein. Eine deterministische Verkaufsstrategie entspricht einer Liste, eine randomisierte Verkaufsstrategie ist eine genaue Anweisung, was in jeder Lage zu tun ist. Dieses Tun ist so genau formuliert, daß ein Komputer dies erledigen kann.

1.4.1 Optional Sampling Theorem

Sei $(X_n, \mathcal{A}_n)$ ein adaptierter Prozess und τ eine Stoppzeit bzgl. der gegebenen Filtration. Der Prozeß

$$X_{n\wedge\tau} \tag{1.6}$$

mit $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $(X_{\tau\wedge n})(\omega) := (X_{n\wedge\tau(\omega)})(\omega)$ heißt **gestoppter** Prozeß. Dieser läßt sich als transformierter Prozess X_n^C sehen. Sei der vorhersehbare Prozess (C_n) definiert durch $C_n := 1\!\!1_{n\leq\tau}$. Der C-transformierte Prozeß X^C erfüllt

$$X_n^C = \sum_{i=1}^{n} C_i(X_i - X_{i-1}) + X_0 = \sum_{i=1}^{n\wedge\tau}(X_i - X_{i-1}) + X_0 = X_{\tau\wedge n}.$$

Wir benutzen auch die Notation $X^\tau = X^C$.

Satz 24 (Optional Sampling Theorem 2) *Sei* $(X_n, \mathcal{A}_n)$ *ein Martingal und* $\tau, \sigma : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ *zwei endliche Stoppzeiten mit* $\tau \leq \sigma$*. Dann gilt*

$$X_0 = E(X_{\tau \wedge n}) = E(X_N).$$

Für Submartingale X *gilt*

$$E(X_{\tau \wedge n}) \leq E(X_{\sigma \wedge n}).$$

Ist X *ein Supermartingal, so gilt*

$$E(X_{\tau \wedge n}) \geq E(X_{\sigma \wedge n}).$$

Beweis: $X_{\tau \wedge n}$ ist eine Martingaltransformierte. Die Aussagen folgen aus dem Satz (**??**). q.e.d.

Warnung: Aus $X_0 = E(X_{\tau \wedge n})$ für alle n folgt im allgemeinen nicht $X_0 = E(X_\tau)$. **Das** Martingal ist ein Gegenbeispiel, $X_\tau \equiv 1$ aber $E(X_1) = 0$.

Kartenraten: Gegeben sei ein verdeckter Stapel gemischter Karten mit je 26 roten und 26 schwarzen Karten, normales Bridgeblatt. Der Spieler gewinnt genau dann, wenn er eine rote Karte zieht nach folgender Prozedur:

- Falls er die oberste zugedeckte Karte möchte, bekommt er sie. Ende.
- Falls nicht, wird die oberste Karte gezogen, gezeigt, beiseitegelegt. Neustart.
- Falls der Spieler keine Karte wählt, bekommt er die letzte zugewiesen.

Gefragt wird nach einer Strategie (=Stoppzeit), die seine Gewinnwahrscheinlichkeit optimiert bzw. echt größer als 1/2 macht. (Dies entspricht Polya‘s Urnenschema:

Heuristik: Falls der Spieler keine Entscheidung trifft, bekommt er die letzte Karte. Diese Karte ist rot genau mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Wenn er keine bessere Wahl vorher findet, so kann er stets auf diese letzte Karte zurückgreifen. Was immer auch während der Ziehphase geschieht, die letzte Karte wird während der Auswahlprozedur nicht verändert und behält ihre Wahrscheinlichkeit von 1/2, rot zu sein. Der Spieler kann folglich stets eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/2 garantieren.

In einigen Fällen hat der Spieler aber eine bessere Auswahlmöglichkeit. Falls nach gewisser Zeit, z.B. die erste Karte war schwarz, mehr schwarze Karten als rote gezogen wurden, verbleiben in dem zugedeckten Stapel relativ mehr rote Karten als schwarze. Wenn der Spieler jetzt die oberste Karte wählt, ist die Wahrscheinlichkeit einer roten Karte echt größer als 1/2, genauer dem Quotienten der Anzahl der roten Karten mit der Gesamtanzahl der noch verbliebenen zugedeckten Karten. (Diese Stoppregel könnte nun noch optimiert werden.)

Jedenfalls ist die Wahrscheinlichkeit für den Spieler, eine rote Karte zu ziehen stets größer gleich $1/2$ und in einigen Fällen strikt größer als $1/2$. Damit kann er seinen erwarteten Gewinn unter solch einer Strategie echt größer als $1/2$ gestalten.

Oder gibt es hier ein Lücke in der Argumentation? Wenn ja, welche?

Mathematische Lösung: Seien $X_1, \ldots, X_{52}$ Zgn mit Werten in $\{0, 1\}$. Die Verteilung entspricht dem zufälligen Ziehen aus einer Urne mit 26 schwarzen (=0) und 26 roten (=1) Karten ohne zurücklegen (Polya's Urnenmodell mit $c = -1$). $X_i = 1$ entspricht dem Ziehen einer roten Kugel in der i-ten Ziehung. Sei

$$Y_n := E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n),$$

$\mathcal{A}_n$ die kanonische σ-Algebra zu $X_1, \ldots, X_n$. Y_n ist die Wahrscheinlichkeit, daß die nächste oberste verdeckte Karte rot ist, gegeben die Kenntnis $X_1, \ldots, X_n$ der ersten n Karten. Beachte $Y_n = E(X_i \mid \mathcal{A}_n)$ für $i = n + 1, \ldots, 52$.

Der Spieler wählt eine Stoppzeit (=Auswahlregel) und erhält $Y_\tau = Y^\tau$ ausbezahlt. Sein erwarteter Gewinn ist $E(Y_\tau)$. Der Spieler versucht diesen Wert zu maximieren durch Wahl einer optimalen Stoppregel, falls diese existiert. Er erhält $\sup_\tau E(Y_\tau)$.

Der springende Punkt ist, daß (Y_n) ein Martingal ist.

$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(E(X_{n+2} \mid \mathcal{A}_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) = E(X_{n+2} \mid \mathcal{A}_n) = Y_n.$$

Nach dem Optional Sampling Theorem sind alle Stoppzeiten gleich gut, $E(Y_\tau) = Y_0 = 1/2$. Die erwartete Gewinnwahrscheinlichkeit ist stets $1/2$, unabhängig von den Aktionen des Spielers, lieber Dummy.

1.4.2 σ-Algebra der τ-Vergangenheit

Sei $\mathcal{A}_n$ eine Filtration und τ eine Stoppzeit. Das Mengensystem

$$\mathcal{A}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \mid \forall n \in T: \ A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{A}_n\}$$

heißt die **σ-Algebra der τ-Vergangenheit**. Wie der Name suggeriert, ist dies eine $\sigma-$Algebra.

Proposition 25 *Sei τ eine Stoppzeit.*

(i) *$\mathcal{A}_\tau$ ist eine σ-Algebra.*

(ii) *Für $\tau \equiv n$ ist $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_n$.*

(iii) *Für $\tau \leq \sigma$ gilt $\mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{A}_\sigma$.*

(iv) $A \in \mathcal{A}_\tau \Leftrightarrow \forall n : \ A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{A}_n$

(v) $E(\cdot \mid \mathcal{A}_\tau) = \sum_i \mathbb{1}_{\tau=i} E(\cdot \mid \mathcal{A}_i)$.

(vi) Sei (X_n) *ein (Super-, Sub-) Martignal,* σ *eine Stoppzeit und* X_σ *integrierbar. Es gilt*

$$E(X_\sigma \mid \mathcal{A}_\tau) =_{(\leq,\geq)} X_{\sigma\wedge\tau}.$$

Beweis: i) $\mathcal{A}_\tau$ ist eine σ-Algebra. $\mathcal{A}_\tau$ ist nicht leer und mit $A \in \mathcal{A}_\tau$ gilt auch $A^c \in \mathcal{A}_\tau$ wegen $A^c \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq n\} \backslash (A \cap \{\tau \leq n\}) \in \mathcal{A}_n$. Für $A_i \in \mathcal{A}_\tau, i \in I\!N$, gilt $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}_\tau$ wegen:

$$(\bigcup_i A_i) \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_i (A_i \cap \{\tau \leq n\}) \in \mathcal{A}_n.$$

ii) Die Menge $\{\tau \leq n\}$ ist leer oder ganz Ω.

iii) Für alle ω bis auf eine Nullmenge gilt $\tau(\omega) \leq \sigma(\omega)$ und damit $\{\sigma \leq n\} \subset \{\tau \leq n\}$. Für $A \in \mathcal{A}_tau$ gilt

$$A \cap \{\sigma \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{A}_n} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{A}_n.$$

iv) Leicht.

v) Für jedes $A \in \mathcal{A}_\tau$ gilt

$$\int_A E(X \mid \mathcal{A}_\tau) = \int_A X = \sum_i \int_{A\cap\{\tau=i\}} X = \sum_i \int_{A\cap\{\tau=i\}} E(X \mid \mathcal{A}_i).$$

q.e.d.

vi) $E(X_\sigma \mid \mathcal{A}_\tau) = \sum_i \mathbb{1}_{\tau=i} E(X_\sigma \mid \mathcal{A}_i) =_{(\leq,\geq)} \sum_i \mathbb{1}_{\tau=i} X_{\sigma\wedge i} = X_{\sigma\wedge\tau}$. q.e.d.

Satz 26 *Sei* $(X_n, \mathcal{A}_n)$ *ein (Super-, Sub-) Martingal und* τ *eine beschränkte Stoppzeit. Dann ist* $X_{\tau+n},\ n = 0, 1, 2, \ldots$ *ein (Super-, Sub) Martingal bezüglich* $(\mathcal{A}_{\tau+n})$.

Beweis: Wir geben die Argumentation nur für ein Martingal.

$$E(X_{\tau+n+1} \mid \mathcal{A}_{\tau+n}) = \sum_j \mathbb{1}_{\tau+n=j} E(X_{j+1} \mid \mathcal{A}_j) = \sum_j \mathbb{1}_{\tau+n=j} X_j = X_{\tau+n+1}.$$

Korollar 27 *Sei* $\tau_m : \Omega \to \{1, \ldots, N\},\ m \in I\!N$, *eine aufsteigende Folge von beschränkten Stoppzeiten. Dann ist* $X_{\tau_m},\ m \in I\!N$, *ein (Super-, Sub-) Martingal bezüglich der Filtration* $\mathcal{A}_{\tau_m},\ m \in I\!N$.

Beweis: Wir geben die Argumentation nur für ein Martingal. Da $(X_{\tau_1+n}, \mathcal{A}_{\tau_1+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal. τ_2 ist eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{A}_{\tau_1+n})_n$. Folglich ist durch erneute Anwendung von Satz (26) $X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, X_{\tau_2+1}, \ldots$ ein Martingal bezüglich $\mathcal{A}_{\tau_1}, \mathcal{A}_{\tau_2}, \mathcal{A}_{\tau_2+1}, \ldots$. Mit Induktion (Übung) erhalten wir die Aussage. q.e.d.

Proposition 28 *Äquivalent sind:*

(i) $X_n, n \in \mathbb{N}$, *ist ein (Super-, Sub-) Martingal.*

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *und alle beschränkten Stoppzeiten* $n \leq \tau$ *gilt*

$$X_n =_{(\geq,\leq)} E(X_\tau | \mathcal{A}_n).$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, *alle beschränkten Stoppzeiten* $n \leq \tau$ *und alle* $\mathcal{A}_n$ *meßbaren Mengen* A *gilt:*

$$\int_A X_n dP =_{(\geq,\leq)} \int_A X_\tau dP.$$

Übung

Korollar 29 *Sei* τ *eine Stoppzeit und* $n \leq N$. *i) Für ein Martingal* X *gilt*

$$E(X_1) = E(X_{\tau\wedge n}) = E(X_N)$$

ii) Für ein Supermartingal X *gilt:*

$$E(X_1^-) + E(X_N^+) \leq E(|X_n^\tau|) \leq E(X_1^+) + E(X_N^-) \leq E(X_1) + 2E(X_N^-).$$

iii) Für ein Submartingal X *gilt analog*

$$E(X_1^+) + E(X_N^-) \leq E(|X_n^\tau|) \leq E(X_N^+) + E(X_1^-) \leq E(X_N) + 2E(X_1^-).$$

Beweis: i) Wende obigen Satz auf $\tau_1 \equiv 1, \tau_2 = \tau, \tau_3 \equiv N$ an.

ii) Dies folgt aus der Identität $|X_\tau| = X_\tau^+ + X_\tau^-$. Ist X_i ein Supermartingal so argumentiere X_i^+ ist ein Supermartingal und $E(X_1^+) \geq E(X_\tau^+) \geq E(X_N^+)$ sowie X_i^- ist ein Submartingal und $E(X_1^-) \leq E(X_\tau^-) \leq E(X_N^-)$.

iii) Übung. q.e.d.

2 Fast sichere Konvergenz

Besonders wichtige Martingalkonvergenzarten sind fast sichere Konvergenz (Doobsche Konversatz), die L_1-Konvergenz (Regulärität) und die L_2-Konvergenz (Hilbertraum). Wir betrachten alle in gesonderten Sektionen.

Dreh- und Angelpunkt für die fast sichere Konvergenz ist das Doob Upcrossing Lemma.

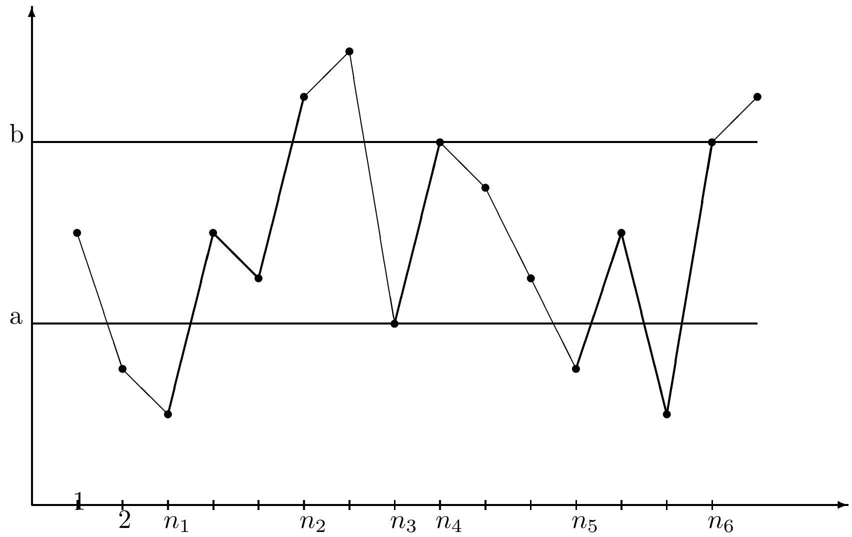
2.1 Doob Upcrossing Lemma

Wir zeigen hier die fundamentale Upcrossing-Ungleichung, auf der mehrere wichtige Konvergenzsätze aufbauen. Die wesentliche Idee ist der Begriff der aufsteigenden Überquerungen.

Definition 30 *Sei $x = (x_n)_{n=1}^N$ eine endliche Folge und $I = [a, b], a < b$ ein Intervall. Die Anzahl $U = U(I, x)$ der aufsteigenden Überquerungen von $I = [a, b]$ durch die Folge x ist die größte natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}_0$, sodaß es Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots < n_{2l-1} < n_{2l}$ gibt mit $x_{n_{2i-1}} \leq a$ und $x_{n_{2i}} \geq b$ für $1 \leq i \leq l$.*

Für eine unendliche Folge x setze $U(I, x) = \lim_{N\to\infty} U(I, (x_n)_{n\leq N}$.

U von der leeren Folge ist Null. Das folgende Bild zeigt die geometrische Bedeutung. In dem Bild sind die Punkte (x_n, n) in der Ebene aufgetragen und durch Geraden verbunden. Die aufsteigenden Überquerungen sind fetter eingezeichnet.



Die Anzahl ist $U([4,8],(6,3,2,6,5,9,10,4,8,7,5,3,6,2,8,9)) = 3$.
Eine äquivalente Beschreibung ist via Stoppzeiten, $n_1 = \inf\{n > 0 \mid x_n \le a\}$

$$n_{2i} := \inf\{n > n_{2i-1} \mid x_n \ge b\}, \qquad n_{2i+1} := \inf\{n > n_{2i} \mid x_n \le a\}.$$

Dann gilt

$$U(I,x) = \sup\{i \mid n_{2i} < \infty\}.$$

Die Bedeutung aufsteigender Überquerungen liegt in folgendem Konvergenzkriterium für Folgen.

• Eine unendliche Folge $x_n,\ n \in \mathbb{N}$ von reellen Zahlen konvergiert gegen ein $x_\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ dann und nur dann, falls für jedes abgeschlossene Intervall $[a,b], a < b \in \mathbb{R}$, mit $x_\infty \notin [a,b]$ die Anzahl der (aufsteigenden) Überquerungen $U(I,(x_n)_n)$ endlich ist.

Die folgenden Eigenschaften für eine endliche Folge $x = (x_n)_n^N$ sind einfach. (Aus schreibtechnischen Gründen verwenden wir $x_\infty = x_N$ für eine endliche Folge.)

• $U([a,b],(x_n)_n) = U([a-c,b-c],(x_n-c)_n)$
• $U([a,b],(x_n)_n) = U([a,b],(x_n \vee a)_n)$
• $U(I,(x_n)_n) = U(I,(x_{n_i})_i)$
• $U(I,(x_{n_i})_i) = \sum_i U(I,(x_{n_{2i-1}},x_{n_{2i}}))$.
• Sei $x_n \ge a$.

$$U(I,(x_{n_{2i-1}},x_{n_{2i}})) \le \begin{cases} \frac{x_{n_{2i}}-x_{n_{2i-1}}}{b-a} & \text{falls} \quad n_{2i} < \infty \\ \frac{x_{n_{2i}}-x_{n_{2i-1}}}{b-a} & \text{falls} \quad n_{2i-1} = \infty \end{cases}$$

Damit

$$U(I,(x_n)_n) \le \sum_{1\le i\le N} \frac{x_{n_{2i}} - x_{n_{2i-1}}}{b-a}.$$

Lemma 31 (Upcrossing Lemma von Doob) *Die durchschnittliche Anzahl der aufsteigenden Überquerungen über ein Intervall $I = [a,b], a < b$, durch ein Submartingal $(X_n)_n^N$ ist beschränkt durch $\frac{E(S_N-a)^+}{b-a}$. In Formeln*

$$EU(I,(S_n)_n^N) \le \frac{E(S_N-a)^+}{b-a}. \tag{2.1}$$

Für einen Zeitparameterbereich $I\!N$ gilt

$$EU(I,(S_n)_{n\in I\!N}) \le \lim_{N\to\infty} \frac{E(S_N-a)^+}{b-a}. \tag{2.2}$$

Beweis: Betrachte das Submartingal $Y_n = X_n \vee a$.

- $U([a,b],(X_n)_n) = U([a,b],(Y_n))$.

Leicht, da dieses pfadweise (für jedes ω) gilt.

Definiere induktiv Stoppzeiten τ_i, wie oben, für (Y_n), $\tau_1 = \inf\{n > 0 \mid Y_n \le a\}$

$$\tau_{2i} := \inf\{n > n_{2i-1} \mid Y_n \ge b\}, \qquad \tau_{2i+1} := \inf\{n > n_{2i} \mid Y_n \le a\}.$$

Es gilt, mit dem Optinal Sampling Theorem,

$$\begin{aligned}
E(U(I,(X_n)_n^N)) &= E(U(I,(Y_n)_n^N)) \le E\sum_i U(I,(Y_{\tau_{2i-1}}, Y_{\tau_{2i}})) \\
&\le E\sum_i \frac{Y_{\tau_{2i}} - Y_{\tau_{2i-1}}}{b-a} = \sum_{i=1}^N \frac{EX_{\tau_{2i}} - EX_{\tau_{2i-1}}}{b-a} \\
&= \frac{-EY_{\tau_1} + EY_{\tau_2} - EY_{\tau_3} + EY_{\tau_4} \ldots + EX_{\tau_{2N}}}{b-a} \\
&\le \frac{-EY_{\tau_1}}{b-a} + E\frac{Y_{\tau_{2N}}}{b-a} \\
&\le E\frac{Y_N - a}{b-a} = E\frac{(X_N-a)^+}{b-a}
\end{aligned}$$

Beachte $EY_{\tau_{2i}} - EY_{\tau_{2i+1}} \le 0$ für das Submartingal. Mit $N\to\infty$ erhalten wir das Resultat. q.e.d.

2.1.1 Fast sichere Konvergenz

Satz 32 (Doob Konvergenzsatz) *Sei $X_n, n\in I\!N$ ein Submartingal bezüglich einer beliebigen Filtration und sei $\sup_{n\in I\!N} E(X_n^+) < \infty$. Dann konvergiert X_n fast sicher gegen eine reellwertige Zufallsvariable $X_\infty : \Omega \to I\!R$.*

Beweis: $A := \{\liminf_n X_n < \limsup_n X_n\}$ und $A_{a,b} := \{\liminf X_n < a < b < \limsup X_n\}$.

• $P(A_{a,b}) = 0$.

Jeder Pfad $n \mapsto S_n(\omega)$ für festes $\omega \in A_{a,b}$ überquert aufsteigend unendlich oft das Intervall $[a, b]$. In Formeln $A_{a,b} \subset \{U([a, b], (X_n)_n) = \infty\}$. Das Doob Upcrossing Lemma liefert

$$E(U([a, b], (X_n)_n)) = \lim_{N\to\infty} E(U([a, b], (X_n)_{n=1}^N)) \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{E(X_N - a)^+}{b - a} < \infty.$$

Dies beides impliziert $P(A_{a,b}) \leq P(U([a, b], (X_n)_n) = \infty) = 0$.

• $A := \{\liminf_n X_n < \limsup_n X_n\}$ ist eine Nullmenge.

Beachte A ist enthalten in der Vereinigung aller $A_{a,b}$ mit rationalen Zahlen $a < b$. Damit ist A eine Nullmenge.

• X_n konvergiert fast sicher gegen eine erweiterte Zg $X_\infty : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$

Dies gilt auf dem Komplement von A.

• X_∞ ist fast sicher endlich.

Aus Tschebycheff erhalten wir für $c > 0$,

$$P(|X_\infty| > c) = \lim_N P(|X_N| > c) \leq \limsup_N \frac{E|X_N|}{c} = \frac{1}{c} \sup_N E|X_N| \to_{c\to\infty} 0.$$

q.e.d.

Korollar 33 *Jedes positive Supermartingal ist fast sicher konvergent.*

Beweis: Einfach.

2.2 Klassische Resultate zur fast sicheren Martingalkonvergenz.

Um einen kleinen Eindruck von der Stärke des Doobschen Konvergenzsatzes zu gewinnen, wollen wir klassiche starke Konvergenzätze für Summen unabhängiger Zgn ableiten. Die Partialsummen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ unabhängiger zentrierter Zgn bilden ein Martingal,

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = S_n + \underbrace{E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)}_{=E(X_{n+1})=0}.$$

Satz 34 (Levy) *Seien $X_n, n \in \mathbb{N}$, unabhängige, zentrierte Zufallsgrößen mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} Var(X_n) < \infty$. Dann konvergiert die $n-$te Partialsumme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher gegen einen endlichen und wohldefinierten Wert $\sum_{i=1}^\infty X_i$.*

Beweis: Wir rechnen das Doob Kriterium aus Satz 32 nach.

$$E^2(S_N^+) \le E^2|S_N| \overset{\text{Jensen}}{\le} E(S_N^2) = \sum_{i=1}^N \mathrm{Var}X_i \le \sum_{i=1}^\infty \mathrm{Var}X_i < \infty.$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von N. q.e.d.

Beispiel: Seien $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit Werten +1 und -1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Seien c_i reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^\infty c_i^2 < \infty$. Dann ist $\sum_{i=1}^\infty c_i X_i$ fast sicher punktweise wohldefiniert. Beachte die Summe $\sum_{i=1}^N c_i X_i$ muß nicht absolut konvergieren, $\sum_{i=1}^\infty |c_i X_i| = \sum_{i=1}^\infty |c_i|$ kann unendlich sein.

Als nächstes ein wohlbekannter Hilfssatz für Folgen, das Kronecker-Lemma.

Lemma 35 (Kronecker) *Seien $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Die Folge b_n sei strikt positiv und strikt steigend gegen ∞. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{b_i} \text{ konvergent} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_{n+1}} \sum_{i=1}^n a_i = 0$$

.

Beweis: Allgemein gilt: Sei $s_n := \sum_{i=1}^n a_i/b_i$ und $s := \lim_n s_n$ der Grenzwert der s_n. Sei $c_n, n \in \mathbb{N}$, eine strikt positive Folge und $\sum_{i=1}^n c_i \to_n \infty$. Dann konvergiert die Folge $\frac{c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n}{c_1 + \ldots + c_n}$ ebenfalls gegen s.

Wähle dazu zu vorgegebenem ϵ ein n_0 mit $|s_n - s| < \epsilon$ für alle $n \ge n_0$. Dann gilt

$$\frac{\sum_{i=1}^N c_i s_i}{\sum_{j=1}^N c_j} = s + \frac{\sum_{i=1}^{n_0} c_i(s_i - s)}{\sum_{j=1}^N c_j} + \frac{\sum_{i=n_0+1}^N c_i(s_i - s)}{\sum_{j=1}^N c_j}.$$

Mit $N \to \infty$ and anschließend $\epsilon \to 0$ erhalten wir die Behauptung.

Für die spezielle Folge $c_n := b_{n+1} - b_n, n \ge 1$ sind die Voraussetzungen $c_n > 0$ und $\sum_{i=1}^n c_i = b_n - b_1 \to \infty$ erfüllt. Wir erhalten $\frac{\sum_{i=1}^n c_i s_i}{b_n} \to_n s$. Aus der Identität

$$\sum_{i=1}^n c_i s_i = \ldots = b_{n+1} s_n + \sum_{i=2}^n b_i (s_{i-1} - s_i) - b_1 s_1$$

erhalten wir die

$$\frac{1}{b_{n+1}} \sum_{i=1}^n c_i s_i = s_n + \frac{a_1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Satz 36 (Satz von Kolmogoroff) *Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, zentrierter Zgn mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{VarX_n}{n^{\alpha}} < \infty$ für ein $\alpha > 1$. Dann konvergiert $\frac{S_n}{n^{\alpha/2}}$ fast sicher gegen 0.*

Beweis: Die Zg $M_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i^{\alpha/2}}$ ist eine Partialsumme unabhängiger Zgn. Der Satz von Levy liefert die fast sichere Konvergenz von M_n gegen die endliche Zufallsvariable $M := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^{\alpha/2}}$. Aus Kroneckers Lemma erhalten wir fast sicher $\frac{S_n}{n^{\alpha/2}} \to 0$. q.e.d

Die Standardsituation ist die einer Folge von zentrierten uiv Zgn mit endlicher Varianz, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{f.s.}_n 0$. Dies ist das starke Gesetz der Großen Zahl.

Es gilt die Verschärfung

$$\frac{S_n}{n^{\beta}} \to_{n\to\infty}^{f.s.} 0$$

für jedes $\beta > 1/2$.

Für $\beta = 1/2$ gilt $\sum \mathrm{Var}X_n/n^{2\beta} = \infty$ und der Satz von Kolmogoroff ist nicht anwendbar. Das Starke Gesetz der Großen Zahl gilt nicht mehr. Der Zentrale Grenzwertsatz liefert Verteilungskonvergenz:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d}_n N(0, \mathrm{Var}(X_1)).$$

2.2.1 Kolmogoroff drei Reihen Satz*

Dies ist eine Umkehrung des Satzes von Lévy 34.

Satz 37 *Seien $X_n, n \in \mathbb{N}$, unabhängige, zentrierte und gleichmäßig beschränkte Zufallsvariablen.*

Die Partialsumme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ konvergiert fast sicher gegen eine Zg dann und nur dann, wenn die Summe der Varianzen der Zuwächse $\sum_n VarX_n$ endlich ist.

Im allgemeinen konvergiert S_n punktweise entweder mit Wahrscheinlichkeit 0 oder mit Wahrsch. 1.

Beweis: Die Rückrichtung ist der Satz von Levy 34. Nun zur Hinrichtung. Seien die X_n gleichmäßig beschränkt durch c. Definiere die Stoppzeiten $\tau = \tau_C = \inf\{n \mid |S_n| > C\}$ für eine reelle Zahl C.

- $|S_{\tau\wedge n}| \leq c + C$

  Der Fall $\tau > n$ ist einfach und im Falle $\tau \leq n$ argumentiere

$$|S_{\tau\wedge n}| = |S_{\tau-1} + X_\tau| \leq |S_{\tau-1}| + |X_\tau| \leq c + C.$$

- Es existiert ein C mit $P(\tau = \infty) > 0$.

Da S_n fast sicher konvergiert, folgt $\sup_n |S_n|$ ist beschränkt f.s. und $P(\tau_C = \infty) \nearrow_C 1$.

• $M_n := S_n^2 - A_n$ mit $A_n := \sum_{i=1}^n \mathrm{Var} X_i$, ist ein Martingal.

$$E(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{A}_n) = E(X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}M_n - \mathrm{Var}X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = 0.$$

• $E(A_{\tau\wedge n}) = E(S_{\tau\wedge n}^2) \leq (c+C)^2 < \infty$.

$M_{\tau\wedge n}$ ein Martingal und das Optinal Sampling Theorem liefert $0 = E(M_{\tau\wedge n}) = E(S_{\tau\wedge n}^2) - E(A_{\tau\wedge n})$.

• $A_\infty := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}X_n < \infty$

Für C mit $P(\tau_C = \infty) > 0$ argumentiere

$$A_n E 1\!\!1_{\tau=\infty} \leq E(A_{\tau\wedge n}) \leq (c+C)^2 < \infty$$

und damit A_n ist gleichmäsig beschränkt.

Zur letzten Aussage konvergiere S_n auf einer Menge von strikt positivem Maß. Auf dieser Menge gelten die obigen Behauptungen und analog zum obigen können wir $A_\infty < \infty$ schließen. Dies impliziert seinerseits fast sichere Konvergenz der Partialsummen via dem Satz von Levy. q.e.d.

Beispiel: Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsgrößen mit Werten $+1$ und -1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ und sei $c_n, n \in \mathbb{R}$, eine Folge reeller Zahlen. $\sum_{i=1}^\infty c_i X_i$ ist fast sicher punktweise wohldefiniert dann und nur dann, wenn $\sum_{i=1}^n c_i^2 < \infty$ gilt. Die Reihe $\sum_i c_i X_i$ konvergiert absolut genau dann, wenn $\sum_{i=1}^\infty |c_i| < \infty$ gilt. Im Falle $c_i = 1/i$ konvergiert die Folge $\sum_{i\leq n} c_i X_i$ fast sicher, aber nicht absolut.

Satz 38 (Dreireihensatz von Kolmogoroff) *Sei $X_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge unabhängiger Zgn. Dann konvergiert $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher dann und nur dann, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit*

$$\sum_n P(|X_n| > c) < \infty, \tag{2.3}$$

$$\sum_n E(X_n 1\!\!1_{|X_n|\leq c}) \text{ konvergiert }, \tag{2.4}$$

$$\sum_n \mathit{Var}(X_n 1\!\!1_{|X_n|\leq c}) < \infty. \tag{2.5}$$

Konvergiert S_n auf einer Menge von strikt positivem Maß, so fast sicher überall. Konvergieren die Reihen für eine Konstante $c > 0$, so für alle positiven Konstanten.

Beweis: Wir zeigen die Hinrichtung. Sei $c > 0$ beliebig. Betrachte die abgeschnittenen Zufallsgrößen $X_n^{(c)} := 1\!\!1_{|X_n|\leq c} X_n$. Wir verwenden auch $S_n^{(c)} = \sum_{i\leq n} X_i^{(c)}$.

• Konvergenz der ersten Reihe.
Da S_n fast sicher konvergiert treten die Ereignisse $|X_n| > c$ nur endlich oft ein mit Wahrscheinlichkeit 1. Der Satz von Borel-Cantelli impliziert Konvergenz der ersten Reihe.

• S_n konvergiert f.s. genau dann wenn $S_n^{(c)}$ f.s. konvergiert.
Die Differenz $S_n - S_n^{(c)} = \sum_{i \le n} X_i \mathbb{1}_{|X_i|>c} < \infty$ ist stets endlich, da $|X_n| > c$ nur endlich oft eintritt.

• Die dritte Reihe konvergiert.
Wir benutzen jetzt einen Symmetrisierungtrick von Levy. Wähle weitere unabhängige Zgn $\overline{X_n}, n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{X}_n$ habe dieselbe Verteilung wie X_n und verwende $\overline{S}_n^{(c)}$ analog. Dann konvergiert $S_n^{(c)} - \overline{S}_n^{(c)}$ wegen dem vorherigen fast sicher. Dies ist auch die Partialsumme von unabhängigen zentrierten Zgn $X_n^{(c)} - \overline{X}_n^{(c)}$. Nach der Umkehrung des Satzes von Levy, 37 schließen wir auf $\sum_n \mathrm{Var}(X_n^{(c)} - \overline{X}_n^{(c)}) < \infty$. Mit $\mathrm{Var}(X_n^{(c)} - \overline{X}_n^{(c)}) = 2\mathrm{Var}(X_n^{(c)})$ folgt die Konvergenz der dritten Reihe.

• Die zweite Reihe konvergiert.
Die Konvergenz der dritten Reihen impliziert laut dem Satz von Lévy 34 die Konvergenz von $\sum_{i=1}^n (X_i^{(c)} - EX_n^{(c)}) = S_n^{(c)} - \sum_{i=1}^n EX_n^{(c)}$. Mit der Konvergenz von $S_n^{(c)}$ ergibt sich die Teilbehauptung.

$\Leftarrow$ Die Konvergenz der dritten Reihe liefert nach dem Satz von Lévy 34 die Konvergenz von $\sum_{i=1}^n (X_i^{(c)} - EX_i^{(c)})$. Dies zusammen mit der Konvergenz der zweiten Reihe impliziert die Konvergenz von $S_n^{(c)}$. Dies zusammen mit der Konvergenz der ersten Reihe impliziert nach Borel-Cantelli die fast sichere Konvergenz von S_n.

Konvergiert S_n nur auf einer Menge von strikt positivem Maß, so zeige die Konvergenz der Reihen nur auf dieser Menge. Da die Reihen deterministisch sind, gilt die Konvergenz überall. Damit auch die fast sichere Konvergenz von S_n.

Konvergieren die Reihen für ein $c > 0$, so konvergiert S_n fast sicher und dann konvergieren die Reihen für jedes $c > 0$. q.e.d.

2.2.2 Rückwärtsmartingale

Ein Rückwärtsmartingale *Rückwärtsmartingal* ist ein Martingal $(X_{-n}, \mathcal{A}_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Anders geschrieben, $\dots, X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\dots \subset \mathcal{A}_{-3} \subset \mathcal{A}_{-2} \subset \mathcal{A}_{-1}$,

$$E(X_{-n+1} \mid \mathcal{A}_{-n}) = X_{-n}.$$

Analog definiere Rückwärtssuper- und Rückwärtssubmartingale.

Üblich ist es den zeitumgekehrten Prozeß $Y_n = X_{-n}, n \in I\!N$ und $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_{-n}$ zu betrachten. $\mathcal{B}_n$ ist eine absteigende Folge von Unter-σ-Algebren und (Y_n) erfüllt

$$E(Y_{n-1} \mid \mathcal{B}_n) = Y_n.$$

Die Doobsche Argumentation mit aufsteigenden bzw. absteigenden Überkreuzungen und die Grenzwertbetrachtung hält auch hier. (Wir führen dies nicht formal durch.)

Das Standardbeispiel ist $\frac{S_n}{n}$ mit S_n die Summe von uiv zentrierten Zgn.

Proposition 39 *Seien X_n, $n \in I\!N$, uiv zentrierte Zgn, S_n die n-te Partialsumme. Dann ist $\frac{S_n}{n}, n \in I\!N$ ein Rückwärtsmartingal bzgl. der absteigend gefilterten Folge $(\mathcal{B}_n)_n$, $\mathcal{B}_n := \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$.*

Beweis: • $E(X_i \mid S_n) = E(X_1 \mid S_n)$ für $i \leq n$.

Jede Menge aus $A \in \sigma(S_n)$ läßt sich schreiben als $S \in B$ für eine Borelmenge B. Insbesonders ist jedes Ereignis $S_n \in B$ ist invariant unter der Umnummerierung der ersten n X-Zgn. Weiterhin hat $(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ dieselbe Verteilung wie $(X_i, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$.

$$\int_A E(X_i \mid S_n) = \int X_i 1\!\!1_A = \int X_1 1\!\!1_A = \int_A E(X_1 \mid S_n)$$

• $E(X_i \mid \mathcal{B}_n) = E(X_i \mid S_n, X_n, X_{n+1}, \ldots) = E(X_i \mid S_n)$ für $i \leq n$.
Einfach wegen Unabhängigkeit.
• $\frac{S_n}{n}$ ist ein Rückwärtsmartingal bzgl $\mathcal{B}_n$.

$$E(\frac{S_{n-1}}{n-1} \mid \mathcal{B}_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i \mid \mathcal{B}_n) = E(X_1 \mid \mathcal{B}_n) = E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \mid \mathcal{B}_n) = \frac{S_n}{n}.$$

q.e.d.

Um die Stärke dieses Satzes zu demonstrieren, beweisen wir das starke Gesetz der Großen Zahl.

Satz 40 (Starke Gesetz der Großen Zahl) *Seien X_n, $n \in I\!N$, uiv Zgn und S_n die n-te Partialsumme. Ist X integrierbar ($E|X| < \infty$), so konvergiert $\frac{S_n}{n}$ konvergiert fast sicher gegen EX_1. Ist X_1 nicht integrierbar ($E|X| = \infty$), so gilt* $\limsup_n \frac{|S_n|}{n} = \infty$.

Beweis: Sei X_1 integrierbar und oEdA $EX_1 = 0$. $\frac{S_n}{n}$ ist ein Rückwärtsmartingal bezüglich der σ-Algebren $\sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$. Der Doobsche Konvergenzsatz, dessen Voraussetzungen $\sup_n E|\frac{S_n}{n}| < \infty$ erfüllt sind, liefert $\frac{S_n}{n}$ konvergiert fast sicher gegen eine Zg.

- $\frac{S_n}{n}$ konvergiert in L_1-Norm gegen 0.

Für $c \in I\!R$ betrachte die gestutzten Zgn $X_n^{(c)} := X_n 1\!\!1_{|X_n| \leq c}$ mit der Partialsume $S_n^{(c)}$. Argumentiere

$$E|\frac{S_n}{n} - 0| \leq E|\frac{S_n - S_n^{(c)}}{n}| + E|\frac{S_n^{(c)}}{n} - EX_1^{(c)}| + E|EX_1^{(c)} - 0| = I + II + III.$$

Der erste Term ist klein für c hinreichend groß,

$$I \leq E|X_1 - X_1^{(c)}| = E|X_1 1\!\!1_{|X_1|>c}| \to_{c\to\infty} 0.$$

Der zweite Term ist klein für n hinreichend groß und festes c, Jensen

$$II^2 \leq E|\frac{S_n^{(c)}}{n} - EX_1^{(c)}|^2 = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}S_n^{(c)} \leq \frac{\mathrm{Var}X_n^{(c)}}{n} \to_n 0.$$

Der dritte Term ist klein für c hinreichend groß,

$$III = |E(X_1^{(c)} - X_1)| \leq E|X_1 1\!\!1_{|X_1|>c}| \to_c 0.$$

- $\frac{S_n}{n}$ konvergiert stochastisch gegen 0.

$$P(|\frac{S_n}{n} - 0| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E\frac{|S_n|}{n} \to_n 0.$$

- $\frac{S_n}{n}$ konvergiert fast sicher gegen 0.

Allgemin gilt: Konvergiert eine Folge stochastisch gegen 0 und konvergiert sie fast sicher, so konvergiert sie fast sicher gegen 0.

Sei jetzt X_1 nicht integrierbar. Betrachte die Mengen $A_n := \{|X_n| \geq cn\}$ für eine positive Konstante c. Nach Borel-Cantelli treten fast sicher unendlich viele der Ereignisse A_n ein, da die Mengen unabhängig sind und

$$\begin{aligned}\sum_n P(A_n) &= \sum_n \sum_{i \geq n} P(i \leq \frac{|X_n|}{c} < i+1) = \sum_i \sum_{n \leq i} P(i \leq \frac{|X_n|}{c} < i+1) \\ &= \sum_i iP(i \leq \frac{|X_1|}{c} < i+1) \geq E\frac{|X_1|}{c} = \infty.\end{aligned}$$

- Für $\omega \in A_n$ gilt $|\frac{S_n(\omega)}{n}| \vee |\frac{S_{n-1}(\omega)}{n}| \geq \frac{c}{2}$.

Denn falls $\frac{S_{n-1}(\omega)}{n}| < \frac{c}{2}$ so gilt

$$\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| = \left|\frac{X_n(\omega)}{n} + \frac{S_{n-1}(\omega)}{n}\right| \geq \left|\left|\frac{X_n(\omega)}{n}\right| - \left|\frac{S_{n-1}(\omega)}{n}\right|\right| \geq \left|c - \frac{c}{2}\right| = \frac{c}{2}.$$

Damit folgt $\limsup \frac{|S_n|}{n} \geq \frac{c}{2}$ für jedes vorgegebene $c > 0$. q.e.d.

3 Regulaere Martingale

Wir behandeln die L_1-Konvergenz von Martingalen $M_n \stackrel{L_1}{\to} M_\infty$. Eng verbunden damit ist gleichgradige Intergrierbarkeit der Folge (M_n) und der rechte Zeitparameterabschluß, $(M_n)_{n\in\overline{I\!N}}$ ein Martingal.

Ein L_1-konvergentes Martingal ist nach Doob auch fast sicher konvergent (gegen denselben Grenzwert). Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Multiplikative Irrfahrt: Sei (X_n) eine Folge unabhängiger Zgn mit Bernoulli Verteilung zum Parameter 1/2. Betrachte das positive Martingal

$$K_n := \prod_{i=1}^{n} 2X_i.$$

Dieses konvergiert f.s. gegen Null (Übung). K_n konvergiert nicht in L_1, da 0 der einzig mögliche Grenzwert ist (der L_1-Grenzwert ist gleich dem stochastischen Grenzwert) und $\|K_n - 0\|_1 \equiv 1 \neq 0$ gilt.

Eine verfeinerte Version ist das folgende Beispiel.

Petersburger Spiel: Sei (X_n) eine Folge uiv Zgn mit strikt positiven Werten. Wir wollen $E(X_1) > 1$ und $E(\ln X_1) < 0$ annehmen. Definiere $K_0 = 1$ und

$$K_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

(K_n) ist ein Submartingal. Der Erwartungswert $E(K_n) = (E(X_1))^n$ konvergiert exponentiell schnell gegen unendlich. Andererseits wissen wir nach dem starken Gesetz der Großen Zahl $\frac{\ln K_n}{n}$ konvergiert f.s. gegen $E(\ln X_1) < 0$,

$$\frac{\ln K_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \stackrel{f.s.}{\to}_n E(\ln X_1) < 0.$$

Dies bedeutet K_n konvergiert f.s. gegen Null, aber K_n konvergiert nicht in L_1.

Spielinterpretation: Dieser Effekt hat eine schöne Interpretation. Ein Spieler spiele obiges Spiel, K_n ist sein Kapital nach dem $n-$ten Teilspiel. Zum Zeitpunkt $n+1$ muß er sich entscheiden, das Kapital K_n als endgültigen Gewinn zu akzeptieren oder alles riskierend weiterzuspielen und $K_{n+1} = K_n X_{n+1}$ nach dem $n+1-$ten Spielzug zu erhalten. (Mehr zur kühnen Spielweise siehe die Sektion über Kasinospiele.)

Um seinen erwarteten Gewinn zu maximieren, sollte der Spieler stets weiterspielen. Der erwartete Zugewinn $K_n(E(X_{n+1}\cdot) - 1) > 0$ ist stets strikt positiv.

Andererseits wird der Spieler mit dieser Entscheidungsregel fast sicher bankrott gehen. Dies läßt sich dadurch erklären, daß der Spieler für große n mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit ein sehr großes Kapital ansammeln wird, mit großer Wahrscheinlichkeit jedoch ein sehr kleines Kapital. Der Spieler, der nur auf einen echt positiven Gewinnerwartungswert achtet und stets weiterspielt, geht fast sicher bankrott.

Die Erwartung allein macht nicht glücklich!

3.1 L_1-konvergente Martingale

Im folgenden wird der Begriff gleichgradige Integrierbarkeit, siehe Anhang, vorausgesetzt. $\|.\|$ bezeichnet die L_1-norm.

Satz 41 *Äquivalent für ein Submartingal $X_n, n \in I\!N$, sind:*

(i) (X_n) *ist L_1-konvergent.*

(ii) $\sup_n \|X_n\| < \infty = \|X_\infty\| < \infty$.

(iii) (X_n) *ist gleichgradig integrierbar.*

(iv) $\sup_n E\varphi(X_n) < \infty$ *für eine symmetrische Funktion mit* $\frac{\varphi(x)}{x} \to_{x\to\infty} \infty$.

Beweis: Der Beweis beruht auf den allgemeingültigen Äquivalenzen

$$\begin{aligned} Y_n \xrightarrow{L_1}_n Y \quad &\Leftrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{s}_n Y \text{ und } \|Y_n\| \to_n \|Y\| < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{s}_n Y \text{ und gleichgradige Integrierbarkeit} \end{aligned}$$

Für Submartingale impliziert $\sup_n \|X_n\| < \infty$ nach dem Doob Konvergenzsatz bereits fast sichere Konvergenz gegen eine Zg, genannt X_∞, und damit auch stochastische Konvergenz. Gleichgradige Integrierbarkeit impliziert die Beschränktheit von $\sup_n \|X_n\|$. Dann argumentiere wie oben. q.e.d.

Zeitabschluß: Von Zeitabschluß sprechen wir, wenn wir die Folge $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erweitern können zu einer Folge $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ unter Beibehaltung der Struktur.

Jedes L_1-konvergente Martingal (Submartingal) $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ läßt sich erweitern zu einem Martingal (Submartingal) $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$. Hierbei ist X_∞ der fast sichere Grenzwert von (X_n), der nach dem Doobschen Satz existiert, und $\mathcal{A}_\infty$ die kleinste $\sigma-$Algebra erzeugt von allen $\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$.

Es gibt mehrere Erweiterungen. Die angegebene spielt eine besondere Rolle, da sie die kleinste ist. (Übung, was heißt kleinste hier?) Der Abschluß des Zeitparameterraumes bezüglich der Martingalstruktur (Sub-) entspricht der stetigen Ergänzung der Funktionenfolge in L_1 unter Erhaltung der Martingalstruktur (Sub-).

3.1.1 Zeitabschluss

Wir führen den Zeitabschluß für Martingale durch.

Ein Martingal $(M_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *regulär* , falls es eine integrierbare Zg X gibt mit $E(X \mid \mathcal{A}_n) = M_n$. Dann gibt es auch eine $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{A}_n)$ meßbare Zg Y mit $E(Y \mid \mathcal{F}_n) = M_n$. (Nehme $Y := E(X\mathcal{A}_\infty)$.)

Lemma 42 *Sei $(\mathcal{A}_n)_n$ eine Filtration und $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\mathcal{A}_n.n \in \mathbb{N})$. Ist X eine integrierbare Zg so ist $(M_n)_n$*

$$M_n := E(X \mid \mathcal{A}_n)$$

ein Martingal. Dieses konvergiert fast sicher und in L_1 gegen die Zg genannt $E(X \mid \mathcal{A}_\infty)$.

Beweis: • $\|M_n\|_1 \le \|X\|_1$

$\|M_n\| = E(|E(X \mid \mathcal{A}_n)|) \le E(E(|X| \mid \mathcal{A}_n)) = E(|X|) = \|X\| < \infty$.

• $(M_n)_n$ ist ein Martingal.

M_n ist adaptiert, integrierbar und die Martingaleigenschaft wird mit der Tower-Property nachgerechnet,

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = E(E(X \mid \mathcal{A}_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n) = E(X \mid \mathcal{A}_n) = M_n.$$

• M_n konvergiert in L_1 und fast sicher.

Die L_1 Konvergenz fogt aus $\sup_n \|M_n\|_1 \le \|X\|_1$ und das Doob Lemma impliziert die fast sichere Konvergenz.

• Der L_1 Grenzwert und der fast sichere Grenzwert stimmen überein.

Sei M_∞ der L_1-Grenzwert. Argumentiere mit der Markoff Ungleichung

$$P(|M_n - M_\infty| > \epsilon) \le \frac{\|M_n - M_inf ty\|_1}{\epsilon} \to_n 0.$$

• (M_n) ist gleichgradig integrierbar.
Für Martingale ist L_1 Konvergenz und gleichgradig Integrierbarkeit Äquivalent.
• $M_n = E(M_\infty \mid \mathcal{A}_n)$ fast sicher.

Aus fast sicherer Konvergenz $M_n \to M_\infty$ und gleichgradiger Integrierbarkeit erhalten wir fast sicher

$$E(M_\infty \mid \mathcal{A}_n) = E(\lim_i M_i \mid \mathcal{A}_n) = \lim_i E(M_i \mid \mathcal{A}_n) = M_n.$$

• $M_\infty = E(X \mid \mathcal{A}_\infty)$ f.s.

Aus $E(M_\infty \mathcal{A}_n) = E(X \mid \mathcal{A}_n)$ f.s. erhalten wir $\int_A M_\infty = \int_A X$ für alle $A \in \mathcal{A}_n,\ n \in I\!N$. Damit auch für die von $\mathcal{A}_n, n \in I\!N$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\infty$. Da beide Zgn M_∞ und X $\mathcal{A}_\infty$ meßbar sind, folgt Gleichheit f.s.. q.e.d.

Satz 43 *Sei $(\mathcal{A}_n)_{n\in I\!N}$ eine Filtration und $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{A}_n)$. Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen integrierbaren $\mathcal{A}_\infty$ meßbaren Zgn X und regulären Martingalen $(M_n, \mathcal{A}_n)$. Diese kann gegeben werden durch*

$$M_n = E(X \mid \mathcal{A}_n).$$

M_n konvergiert fast sicher und in L_1 gegen X.

Beweis: Betrachte die Abbildung $X \mapsto (M_n)_n = (E(X \mid \mathcal{A}_n))_n$. Diese Abbildung ist wohldefiniert nach dem Lemma 43. Ferner konvergiert $E(X \mid \mathcal{A}_n)$ in n fast sicher gegen X. Hieraus ergibt sich sofort die Injektivität und auch die Surjektivität der Abbildung. q.e.d.

Korollar 44 *Die regulären Martingale sind genau die L_1-konvergenten Martingale.*
Reguläre Martingale konvergieren fast sicher.

3.1.2 Regulaere Stoppzeiten

Inhalt: was die Überschrift verspricht. Eine der wesentlichen Bedeutungen liegt im Optional Sampling Theorem $EM_\tau = EM_1$ für reguläre Stoppzeiten.

Eine Stoppzeit τ bzgl. der Filtration $(\mathcal{A}_n)$ heißt *regulär* bzgl. dem Martingal $(M_n, A_n)_n$ falls das Martingal $(M_{\tau\wedge n}, \mathcal{A}_{\tau\wedge n})_n$ regulär ist.

Lemma 45 *Sei $M_n, n \in \overline{I\!N}$, ein reguläres Martingal bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_n$. Dann ist jede Stoppzeit τ regulär und M_τ hat die Darstellung*

$$M_{\tau\wedge n} = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_{\tau\wedge n})$$

für $n \in \overline{I\!N}$. Für jede Folge $\tau_m, m \in I\!N$, von aufsteigenden Stoppzeiten ist $(M_{\tau_m}, \mathcal{A}_{\tau_m})_m$ ein reguläres Martingal.

Beweis: Sei τ eine erweiterte Stoppzeit.

$$\begin{aligned} M_{\tau\wedge n} &= \sum_{m=0}^{n} M_m 1\!\!1_{\tau=m} + M_n 1\!\!1_{\tau>n} \\ &= \sum_{m=0}^{n} 1\!\!1_{\tau=m} E(M_\infty \mid \mathcal{A}_m) + 1\!\!1_{\tau>n} E(M_\infty \mid \mathcal{A}_n) = E(M_\infty \mid \mathcal{A}_{\tau\wedge n}). \end{aligned}$$

(Bedingt auf die Menge $\{\tau = m\}$ sind die $\sigma-$Algebren $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{A}_\tau$ gleich.) Hieraus folgt die Regularität von τ, Satz 41. Mit $n \to \infty$ ergibt sich

$$M_\tau = E(M_\infty \mid \mathcal{A}_\tau).$$

Der zweite Teil der Aussage folgt nach dem Satz 43 für die Filtration $(\mathcal{A}_{\tau_m})_m$. q.e.d.

Korollar 46 *Sei M_n ein Martingal und τ eine reguläre Stoppzeit. Dann ist jede kleinere Stoppzeit $\sigma \leq \tau$ regulär und*

$$M_{\sigma\wedge n} = E(M_\tau \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge n}).$$

Wann ist eine Stoppzeit regulär? Das folgende Lemma beantwortet diese Frage.

Lemma 47 *Sei M_n ein Martingal und τ eine Stoppzeit. Äquivalent sind*

(i) *τ ist regulär.*

(ii) $\|M_{\tau\wedge n}\|_1 \to_n \|M_\tau\|_1$.

(iii) *$(M_{\tau\wedge n})$ ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis: Dieses Lemma ist eine Jagd durch die vorhergenhenden Sätze. Wir überlassen es dem Leser als Übungsaufgabe und zur Kontrolle.

Korollar 48 (Optional Sampling Theorem) *Sei τ eine reguläre Stoppzeit bzgl. dem Martingal $(M_n, \mathcal{A}_n)$. Dann gilt*

$$EM_\tau = EM_1.$$

Der nächste Abschnitt 6.1 bringt ein Beispiel.

Wald Identität

Lemma 49 (Waldsche Identität) *Seien $X_n, n \in I\!N$, uivZgn, S_n die $n-$te Partialsumme $\sum_{i=1}^n X_i$ und τ eine integrierbare Stoppzeit. Gilt $E(|X_1|) < \infty$, so ist τ regulär für $S_n - E(S_n)$.*

$$E(S_\tau) = E(\tau)E(X_1) \tag{3.1}$$

Gilt $E(X_1^2) < \infty$ und $E\tau < \infty$ so ist τ regulär für $(S_n - E(S_n))^2 - Var(S_n)$. Ferner gilt

$$E(S_\tau) = E(\tau)E(X_1) \tag{3.2}$$

$$E((S_\tau - \tau E(X_1))^2) = E(\tau)\mathrm{Var}(X_1). \tag{3.3}$$

Beweis: OEdA sei $EX_1 = 0$. (Hier ist ein bißchen zu zeigen.)

Wir beginnen mit der L_1-Konvergenz $S_{\tau\wedge n} \xrightarrow{L_1}_{n\to\infty} S_\tau$.

$$|S_{\tau\wedge n} - S_\tau| = |\sum_{m>n} X_m 1\!\!1_{\tau\geq m}| \leq \sum_{m>n} |X_m| 1\!\!1_{\tau\geq m}.$$

Damit

$$\begin{aligned} \|S_{\tau\wedge n} - S_\tau\|_1 &\leq \sum_{m>n} E(|X_m| 1\!\!1_{\tau\geq m}) = \sum_{m>n} E(1\!\!1_{\tau > m-1} E(|X_m| \mid \mathcal{F}_{m-1})) \\ &= \sum_{m>n} E(|X_1|)E(1\!\!1_{\tau>m-1}) \leq E(|X_1|)E(\tau 1\!\!1_{\tau\geq n}) \to_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Obige bewiesene Eigenschaft zeigt die Regularität von τ und damit $ES_\tau = 0$.

Nun zur zweiten Aussage. Sei $M_n := S_n^2 - n\sigma^2$ mit σ^2 die Varianz von X.

• M_n ist ein Martingal.

Nachrechnen. Der Hauptschritt ist

$$E(S_n^2 \mid \mathcal{A}_{n-1}) = E(S_{n-1}^2 + X_n^2 + 2S_{n-1}X_n \mid \mathcal{A}_n) = S_{n-1}^2 + E(X_n^2)$$

• $\sup_n M_{\tau\wedge n} \leq 2\mathrm{Var}X_1 E(\tau) < \infty$.

Das Optional Sampling Theorem liefert $EM_{\tau\wedge n} = EM_1 = 0$ und damit

$$ES_{\tau\wedge n}^2 = \sigma^2 E(\tau \wedge n)$$

für jedes n. Die rechte Seite konvergiert in n gegen $E\tau$. Die rechte Seite konvergiert gegen ES_τ^2 da die Folge $(S_{\tau\wedge n}^2)_n$ eine Cauchy Folge ist. Für $m \leq n$ gilt

$$E(S_{\tau\wedge n}^2 - S_{\tau\wedge m}^2 = E\sum_{i=m+1}^{\infty} 1\!\!1_{\tau=i}(\sum_{j=m+1}^{i\wedge n} X_j)^2 = E\sum_{i=m+1}^{\infty} 1\!\!1_{\tau=i}\mathrm{Var}(X)(i\wedge n - m - 1) \leq E\tau 1\!\!1_{\tau>m} \to_{m\to\infty} 0.$$

q.e.d.

Bemerkung: Die Waldsche Identität läßt vermuten, daß es ein ähnlich gebautes Martingal gibt mit $S_n^3, S_n^4, \ldots$. Übung

Folgerung 50 *Seien $X_n, n \in \mathbb{N}$, uiv Zgn mit Werten -1 oder $+1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Sei S_n die Partialsumme und $\tau_c := \inf\{n \mid S_n \geq c\}$. Dann gilt $E(\tau_1) = \infty$.*

Beweis: Wäre $E\tau_1 < \infty$ so ergibt die Waldsche Identität $1 = ES_{\tau_1} = E\tau_1 EX_1 = 0$ einen Widerspruch. q.e.d.

Bemerkung: Seien $X_n, n \in \mathbb{N}$, uiv integrierbare Zgn, $c > 0$.
Im Fall $EX_1 > 0$ gilt $P(\tau_c < \infty) = 1$ und $E\tau_c < \infty$.
Im Fall $EX_1 = 0$ gilt $P(\tau_c < \infty) = 1$ und $E\tau_c = \infty$.
Im Fall $EX_1 < 0$ gilt $P(\tau_c < \infty) < 1$ und $E\tau_c = \infty$.
Mit Hilfe der Abschneidetechnik lassen sich einige Resultate für nicht integrierbare $X-$Zgn zeigen, sofern deren Positiv- oder Negativteil integrierbar ist.

Spielstrategie: Einfache Chance Ein Spieler am Roulettetisch setzt stets eine Einheit auf einfache Chance, sagen wir stets auf Rot (Gewinnchance $p < 1/2$). Er spielt solange, bis er insgesamt eine Einheit gewonnen hat. Er darf beliebig viel Kredit aufnehmen. Die Wald Identität besagt, daß dieser Spieler eventuell sehr lange spielen muß, der Erwartungswert seiner Spielzeit ist ∞. Mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit muß der Spieler sogar lebenslang spielen. Selbst wenn wir die für den Spieler nachteilige grüne Zahl nicht berücksichtigen ($p = 1/2$), bleibt der Erwartungswert der Spieldauer unendlich. Wird dem Spieler nur begrenzten Kredit gegeben, so spielt er nur endlich oft.

Verdoppelungsstrategie oder Martingalstrategie: Der Spieler spielt wieder Roulette und setzt jeweils auf einfache Chance, sagen wir stets auf Rot. Er darf beliebig viel Kredit aufnehmen. Der Einfachheit wollen wir die grüne Zahl 0 nicht berücksichtigen, die Rot-Schwarz Chance ist fair ($p = 1/2$). Der Spieler spielt jetzt die Martingalstrategie.

- Gewinnt er, so verläßt er mit seinem Gewinn den Spieltisch.
- Hat er in der letzten Spielrunde verloren, so verdoppelt er in der neuen Spielrunde seinen Einsatz.

Mit dieser Strategie kann der Spieler sicher sein, genau eine Einheit zu gewinnen (und dann noch eine und noch eine......). Irgendwann kommt Rot und dieses Ereignis tritt sogar nach endlicher Erwartungszeit ein. Wenn der Spieler zum ersten Mal in der $n-$ten Spielrunde gewinnt, so hat er bis dahin $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$ Einheiten verloren und gewinnt nun 2^{n-1} hinzu. Dies macht einen Gewinn einer Einheit. Wo liegt der Pferdefuß in der Realität?

Mathematisch ist die Argumentation sauber. Das Spielerkapital K_n ist ein Martingal. Dies Martingal ist nicht regulär, aber trotzdem gilt $K_{\tau_1 \wedge n} \to_n K_{\tau_1} = 1$ fast sicher. Die Martingalstrategie ist tatsächlich erfolgreich. Sie müssen nur genügend viel Geld parat haben, um diese Strategie spielen zu können.

4 Rückwärtsmartingale

5 Quadratintegrierbare Martingale

Sei $(M_n)_n$ ein quadratintegrierbares ($EM_n^2 < \infty$) Martingal. M_n hat die Darstellung

$$M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i$$

mit den Differenzen $D_i = M_i - M_{i-1}$. Eine einfache Rechnung ergibt

Proposition 51

$$\mathrm{Var} M_n = \mathrm{Var} M_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var} D_i$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var} M_n &= E(M_0 - EM_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i)^2 \\
&= E(M_0 - EM_0)^2 + E((M_0 - EM_0)\sum_{i=1}^{n} D_i) + E(\sum_{i=1}^{n} D_i^2) + E(\sum_{1 \le i \ne j \le n} D_i D_j) \\
&= \mathrm{Var}(M_0) + \sum_{i=1}^{n} E(E((M_0 - EM_0)D_i \mid \mathcal{A}_{i-1})) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(D_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} E(E(D_i D_j \mid \mathcal{A}_i)) \\
&= \mathrm{Var} M_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var} D_i
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 52 *Sei $(M_n)_n$ ein quadratintegrierbares Martingal. Dann konvergiert M_n in L_2 genau dann, wenn $\lim_n \mathrm{Var} M_n$ endlich ist.*

Im L_2-Konvergenzfall konvergiert M_n auch fast sicher gegen den L_2-Grenzwert M_∞ und es gilt

$$Var M_\infty = \mathrm{Var} M_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Var} D_i.$$

Bew: $' \Rightarrow'$ Das Martingal M_n konvergiere in L_2 gegen einen Grenzwert genannt M_∞. Dann gilt $\|M_n\|_2 \to_n \|M_\infty\|_2 < \infty$ und damit

$$EM_n^2 = EM_0^2 + sum_{i=1}^n \mathrm{Var} D_i \to_{n\to\infty} EM_0^2 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Var} D_i = EM_\infty^2 < \infty.$$

$' \Leftarrow'$ Die Folge M_n ist eine Cauchyfolge, für $m < n$ gilt

$$\|M_n - M_m\|_2 = \| \sum_{i=m+1}^{n} D_i\|_2 = \sum_{i=m+1}^{n} \mathrm{Var} D_i \leq \sum_{i>m} \mathrm{Var} D_i \to_m 0.$$

Die fast sichere Konvergenz folgt aus Doob, $\sup_n E|M_n| \leq \sup_n \|M_n\|_2 < \infty$. Der f.s. Grenzwert und der L_2 Grenzwert sind gleich. q.e.d.

6 Exponentielle Martingale

6.1 Irrfahrt

Seien $X_1, X_2, \ldots$ uivZgn mit $E(X_.) = 0$ und nicht identisch 0. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die n-te Partialsumme. Wir nehmen die natürliche Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

• Falls $|X_1|$ integrierbar ist, so ist S_n ein Martingal.

• Falls X_1^2 integrierbar ist, so ist $S_n^2 - nE(X_1^2)$ ebenfalls ein Martingal.

• Falls $|X_1|^3$ integrierbar ist, so ist $S_n^3 - 3S_n nE(X_1^2) - nE(X_1)^3$ ein Martingal.

Und so weiter... (Bildungsgesetz? siehe hierzu 6.2)

Alle diese Martingale sind nicht regulär. Zeige hierfür: $E|$ Martingal$_n| \longrightarrow_n \infty$.

6.2 Exponentielle Martingale

Seien $X_1, X_2, \ldots$ uivZgn und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die n-te Partialsumme. Der Einfachheit habe X_i Erwartungswert 0 und sei nicht fast sicher eine Konstante. Wir wollen das Martingal

$$M_n(t) := exp(tS_n - n\Phi(t)) = exp(\sum_{i=1}^{n}(tX_i - \Phi(t))) \tag{6.1}$$

mit $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t) := \ln\ E(\exp(tX)) \tag{6.2}$$

betrachten.

Die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wie oben definiert ist der Logarithmus der Laplacetransformierten.

Proposition 53 *Die Funktion Φ ist konvex auf dem Intervall $\{t \mid \Phi(t) < \infty\}$. Φ strikt konvex, falls X keine Konstante ist. Es gilt stets $\Phi(0) = 0$.*

Beweis: Für $u \neq v \in I\!R, t \in (0,1)$, verwende die Höldersche-Ungleichung $p = 1/x, q = 1/(1-x)$:

$$\begin{aligned}\Phi(xu + (1-x)v) &= \ln \| \exp(xuX)\exp((1-x)vX)\|_1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} \ln \| \exp(xuX)\|_p \| \exp((1-x)vX)\|_q \\ & ((E\exp(uX))^x (E\exp(vX))^{1-x}) = x\Phi(u) + (1-x)\Phi(v).\end{aligned}$$

Die Hölderungleichung ist strikt bis auf den Fall X identisch eine Konstante.

Die Konvexität liefert die Intervalleigenschaft. q.e.d.

Bemerkung: Allgemeiner heißt eine erweiterte Funktion $f : I\!R \to \overline{I\!R}$ konvex, falls die Menge $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid y > f(x)\}$ konvex ist. Im Fall $f : I\!R \to I\!R \cup \{\infty\}$ entspricht diese Definition der üblichen Konvexitätsdefinition $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ für alle $x, y \in I\!R$ und $t \in [0,1]$.

Lemma 54 *Sei $\Phi(t)$ endlich. Dann ist $(M_n(t))_n$ ein positives Martingal bezüglich der natürlichen Filtration mit Anfangswert 1. Für $t \neq 0$ konvergiert dieses Martingal fast sicher gegen 0.*

Beweis: Die Zgn $M_n(t)$ sind wohldefiniert, strikt positiv und adaptiert zur Filtration $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(M_1, \ldots, M_n)$. Die Zgn sind integrierbar mit Erwartungswert 1 (Nachrechnen). Nun die Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned}E(M_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) &= E(\exp(t(S_{n-1} + X_n) - n\Phi(t)) \mid \mathcal{A}_{n-1}) \\ &= M_{n-1}E(\exp(tX_n))\exp(-\Phi(t) = M_{n-1}.\end{aligned}$$

- $M_n(t)_n \to 0$.

Für jedes $t \in (0,1]$ ist $\Phi(tt)$ endlich. Das positive Martingal $M_n(tt)$ konvergiert fast sicher gegen einen Wert genannt $M_\infty(tt)$. Nach Quadrierung erhalten wir mit Hilfe der strikten Konvexität von Φ:

$$\begin{aligned}\infty &> M_\infty^2\left(\frac{t}{2}\right) \longleftarrow_n M_n^2\left(\frac{t}{2}\right) = \exp\left(tS_n - 2n\Phi\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= M_n(t)\exp\left(n\Phi(t) - 2n\Phi\left(\frac{t}{2}\right)\right) \longrightarrow_n M_\infty(t)\cdot\infty.\end{aligned}$$

Dies impliziert $M_\infty(t) = 0$ f.s. q.e.d.

Aus $M_n(t)$ lassen sich durch Summierung über t viele neue Martingale konstruieren. Wir geben einige Beispiele.

Proposition 55 *Sei μ ein Maß auf $I\!R$. Dann ist*

$$\int \exp(tS_n - n\Phi(t))\mu(dt) \tag{6.3}$$

ein Martingal, vorausgesetzt die Zg ist integrierbar.

Beweis: Verwende Fubini.

Mit obiger Konstruktion können wir auch eine Folge von Zgn konstruieren, die die Martingaleigenschaft erfüllt, aber nicht integrierbar sind. Als Beispiel nehmen wir normal $N(0,1)$ verteilte, unabhängige Zgn $X_n, n \in I\!N$ an μ sei das Lebesguemaß. Eine Rechnung ergibt $\Phi(t) = \frac{t^2}{2}$ und

$$M_n = \int exp(tS_n - \frac{n}{2}t^2)dt = exp(\frac{S_n^2}{2n}) \int exp(-\frac{n}{2}(t - \frac{S_n}{n})^2)dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \exp\left(\frac{S_n^2}{2n}\right).$$

Diese Folge von positiven Zgn ist nicht integrierbar für jedes $n = 1$ und integrierbar für $n > 1$. Daher ist M_n kein Martingal nach der gegebenen Definition. Die Martingaleigenschaft $E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = M_n$ ist erfüllt für alle $n \geq 1$. Bedingt auf den Anfangswert M_1 ist $(M_n)_n$ ein Martingal. Das bedingte Martingal konvergiert fast sicher fast sicher gegen 0. Damit konvergiert auch M_n fast sicher gegen 0. (Übung: Welches Problem mit Nullmengen tut sich auf und wie läßt es sich umgehen?)

Korollar 56 *Sei* $\Phi : I\!R \to \overline{I\!R}$ *endlich in einer offenen Umgebung* U *der* 0. *Sei*

$$\exp(tx - n\Phi(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} M(k,n,x)$$

die Reihenentwicklung der analytischen Funktion in $t \in U$ *für* $x \in I\!R, n \in I\!N$, *fest. Dann ist für jedes* $k \in I\!N$ *die Folge* $M(k,n,S_n), n \in I\!N$, *ein Martingal. Insbesondere*

$$M(0,n,S_n) \equiv 1$$

$$M(1,n,S_n) = S_n$$

$$M(2,n,S_n) = (S_n)^2 - nE(X_1^2)$$

usw.

Beweis: Formal benutze für $m \leq n$:

$$E(\exp(tS_n - n\Phi(t)) \mid \mathcal{A}_m) = \exp(tS_m - m\Phi(t)).$$

und differenziere k-mal nach t (oder, was dasselbe ist, mache nach Einsetzen einen einen Koeffizientenvergleich). Die Differentiation nach t läßt sich in den Erwartungswert hineinziehen (Übung]. Wir erhalten:

$$E(M(k,n,S_n) \mid \mathcal{A}_m) = M(k,m,S_m). \tag{6.4}$$

Der wohl einfachste korrekte Weg ist: Für beschränkte $X-$Zgn sind die Summen absolut konvergent und wir können einen Koeffizientenvergleich durchführen.

Dies ergibt die Gleichungen (6.4). Der allgemeine Fall unbeschränkter Zgn wird durch die Abschneidetechnik etabliert, direkt in den Gleichungen für M. q.e.d.

Wir müssen nur nachweisen, daß wir Differentiation und Integration vertauschen dürfen. Dies entspricht einer Aussage $\lim E = E \lim$, und dafür haben wir gute Sätze parat. Wir zeigen den Beweisgang exemplarisch für die Ableitung der Funktion $ES_n^k e^{tS_n}$. Der allgemeine Fall folgt daraus leicht, da alle vorkommenden Terme Summen solcher Terme sind.

Wir wollen nun zeigen: $\lim_{\epsilon \searrow 0} EY_\epsilon = 0$ mit

$$Y_\epsilon := E(S_n^k (\exp tS_n)[\frac{\exp \epsilon S_n - 1}{\epsilon} - S_n]).$$

für $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, 0 \neq t \in U$. Dazu zeien wir, die Zgn Y_ϵ konvergieren fast sicher fast sicher gegen 0 und wir können dominierte Konvergenz anwenden. Auf der Menge $\{|\epsilon S_n| < c\}$ für $c > 0$ schätzen wir gleichmäßig in ϵ ab

$$|Y_\epsilon| \leq 1\!\!1_{|\epsilon S_n| \leq c} |S_n^{k+1}| e^{tS_n}| \underbrace{|\frac{e^{\epsilon S_n} - 1}{\epsilon S_n} - 1|}_{\text{Konstante}} \in L_1.$$

Auf $\{|\epsilon S_n| > c\}$ schätzen wir gleichmäßig ab durch:

$$|Y_\epsilon| \leq 1\!\!1_{\{|\epsilon S_n| > c\}} |S_n^{k+1}| etS_n| \frac{e^{\epsilon S_n} - 1}{\epsilon S_n} - 1]| \leq 1\!\!1_{|\epsilon S_n| > c} |S_n^{k+1}| e^{tS_n} (\frac{e^\epsilon S_n + 1}{c} + 1] \in L_1.$$

Reguläre Stoppzeiten Die exponentiellen Martingale $M_n = e^{tS_n - n\Phi(t)}$ sind nicht regulär. Jedoch haben sie interessante reguläre Stoppzeiten.

Satz 57 *Seien die $X-$Zgn gleichmäßig beschränkt. Dann ist für jedes $a < 0 < b$ die Stoppzeit des ersten Verlassens des Intervalls (a, b),*

$$\tau = \inf\{n \in I\!N \mid S_n < a \text{ oder } S_n > b\}$$

eine reguläre Stoppzeit für das Martingal $M_n = \exp(tS_n - n\Phi(t)), n \in I\!N$. Insbesondere:

$$\int_{\{\tau < \infty\}} M_\tau = 1.$$

Beweis: Sei $t \neq 0$. $M_{\tau \wedge n}$ ist ein beschränktes Martingal. $M_{\tau \wedge n}$ konvergiert fast sicher und in L_1 gegen einen Grenzwert. Dieser muß M_τ sein für endliches τ und wird M_τ genannt für $\tau = \infty$. Es folgt $EM_\tau = EM_1 = 1$.

• $\tau < \infty$ fast sicher.

$\ln M_n$ ist eine Summe von uiv Zgn. Nach dem starken Gesetz der Großen Zahl konvergiert $\frac{\ln M_n}{n}$ fast sicher gegen $\Phi(t) \neq 0$. Dies tut's. q.e.d.

7 Konvexe Ordnung von Maßen

Wir betrachten verschiedene Ordnungen von Maßen. Die konvexe Ordnung von Maßen ist äquivalent zur Existenz eines Martingals mit zugeörigen Marginalien.

7.1 Ordnungen von Maßen

Eine beliebte Methode um Ordnungen von Maßen zu defineren ist via Familien von Funktionen. Definiere auf einer Teilklasse von Maßen die Relation

$$\mu_1 \preceq_\Phi \mu_2 \Leftrightarrow \int \varphi d\mu_1 \leq \varphi d\mu_2 \tag{7.1}$$

für alle Funktionen φ aus der Klasse Φ (für die die obigen Integrale wohldefiniert sind). Hier sind einige Beispiel für W-maße:

- Die **stochastische** Ordnung.
  Diese Ordnung $\preceq_s$ auf den W-Maßen $\mathcal{P}$ wird induziert durch die Familie Φ_i aller aufsteigender Funktionen. (i steht für increasing).

- Die **konvex** Ordnung.
  Diese Ordnung $\preceq_c$ auf der Menge $\mathcal{P}_{\prime}$ aller W-maßen μ mit erstem Moment Null $0 = \int |x|\mu(dx)$ wird induziert durch die Familie Φ_c aller konvexen Funktionen. (c steht für konvex oder Choquet.)

- Die **aufsteigend konvexe** Ordnung.
  Diese Ordnung $\preceq_c$ auf der Menge $\mathcal{P}_+$ aller W-maßen μ mit endlichem Integral $\int_0^\infty x\mu(dx)$ wird induziert durch die Familie Φ_{ic} aller aufsteigenden und konvexen Funktionen. (ic steht für increasing convex.)

In allen hier aufgeführten Fällen können wir uns auf die jeweiligen positive Funktionen beschränken. Die Familien $\Phi_i^+, \Phi_c^+, \Phi_{ic}^+$ der positiven Funktionen sind konvexe Kegel. Sei K ein konvexer Kegel. Ein Element $\varphi \in K$ eines konvexen Kegels heißt extremal, falls aus der Darstellung $\varphi = t\varphi_1+(1-t)\varphi_2$ mit

$t \in (0,1),\ \varphi_1, \varphi_2 \in K$ bereits $\varphi_1 = \varphi_2$ folgt. Unter gewissen Voraussetzungen (dies führt zu Choquet theory [3][12]) hat jedes Element φ des konvexen Kegels eine (eindeutige) Integraldarstellung über den extremalen Funktionen,

$$\varphi = \int e d\nu(e).$$

Hierbei ist $\nu = \nu_\varphi$ (im einfachsten Fall) ein Maß auf dem Raum der extremalen Funktionen. Wir erhalten $\mu_1 \preceq_K \mu_2$ dann und nur dann wenn dies für alle extremalen Funktionen gilt. Das Hauptargument ist die Vertauschungsregel von Fubini

$$\int \varphi(t) d\mu_1(t) = \int\int e(t) d\mu_1(t) d\nu(e) = \int\int e(t) d\mu_2(t) d\nu(e) = \int \varphi(t) d\mu_2(t).$$

Stochastische Ordnung: Die positiven aufsteigenden Funktionen bilden einen konvexen Kegel Φ_s^+ mit den extremalen Funktionen $1\!\!1_{[e,\infty)},\ e \in [-\infty, infty)$. Damit ergibt sich die äquivalenten Formulierungen der stochastischen Ordnung

$$\mu_1([e,\infty)) \leq \mu_2([e,\infty))$$

$\forall e \in I\!\!R$.

Wir verwenden die stochastische Ordnung ebenfalls für Zgn $X_1 \preceq_s X_2$, falls die Verteilungen stochastisch geordnet sind, $\forall e \in \overline{I\!\!R}:\ P(X_1 \geq e) \leq P(X_2 \geq e)$. Die punktweise Ordnung $X_1 \leq X_2$ impliziert die stochastische Ordnung $X_1 \preceq_s X_2$. Die Umkehrung gilt nur bezüglich Versionen: Gilt $X_1 \preceq_s X_2$, dann gibt es Versionen $\tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2$ von X_1 und X_2 mit $\tilde{X}_1 \leq \tilde{X}_2$. (Die Zgn $F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)$ mit U gleichmäßig verteilt, tuen es.)

Der Raum der W-maße versehen mit der Ordnung $\preceq_s$ ist ein Verband.

Konvexe Ordnung: Der Raum Φ_c der positiven konvexen Funktionen ist ein konvexer Kegel mit genau den extremalen Funktionen $(\cdot - e)^+$ und $(e - \cdot)^+,\ e \in I\!\!R$ und die konstante Funktion 1. Äquivalent zur konvexen Ordnung $\mu_1 \preceq_c \mu_2$ ist

$$\int (x-e)^+ d\mu_1(x) \leq \int (x-e)^+ d\mu_2(x)$$

für alle $e \in I\!\!R$.

$(\mathcal{P}_1, \preceq_c)$ ist ein Verband [9] mit einem kleinsten Element. Dies ist das Punktmaß auf δ_0. Die Wahl von $\mathcal{P}_\infty$ ist natürlich vorgegeben durch die Forderung, daß für die Identität und das Negative der Identität die Integrale existieren sollen.

Aufsteigende konvexe Ordnung: Die Menge der positiven, aufsteigenden und konvexen Funktionen ist ein konvexer Kegel Φ_{ic}^+ mit den extremalen Funktionen

$(\cdot - e)^+,\ e \in I\!R$ und der konstanten Funktion 1. Äquivalent zur aufsteigenden konvexe Ordnung $\mu_1 \preceq_{ic} \mu_2$ ist die Forderung

$$\int (x-e)^+ d\mu_1(x) \leq \int (x-e)^+ d\mu_2(x)$$

für alle $e \in I\!R$. Eingeschränkt auf $\mathcal{P}_0$ ist die aufsteigende konvexe Ordnung gleich der konvexen Ordnung.

Eine Dilatation ist ein stochastischer Kern K auf $I\!R$ mit $\int yK(x,dy) = x$ für alle $x \in I\!R$. Wir sprechen von Subdilatation falls $\geq$ gilt anstelle von Gelcihheit.

Satz 58 *Äquivalent für zwei Maße $\mu_1, \mu_2 \in \P_0$ sind:*

(i) $\mu_1 \preceq_{ic} \mu_2$

(ii) Es existiert eine Subdilatation K mit $\mu_1 K = \mu_2$.

(iii) Es gibt ein Submartingal X_1, X_2 mit $X_1 \sim \mu_1,\ X_2 \sim \mu_2$.

Diselben Äquivalenzen gelten für die konvexe Ordnung mit der Ersetzung durch Dilation und Martingale.

Beweis: $ii) \Rightarrow iii)$ Seien U, V unabhängig und gleichmäßig verteilt auf dem Intervall $[0,1]$. Sei F_i die Verteilungsfunktion zu μ_i und $K^{-1}(x,.)$ die inverse Funktion zu $K(x,(-infty,.))$. Dann tuen es $X_1 = F_1^{-1}(U)$ und $X_2 = K^{-1}(X_1, V)$. Nachrechnen ergibt für schöne Funktionen f

$$\begin{aligned} E(f(X_0)) &= E(f(K^{-1}(F_1^{-1}(U),V))) = \int\int f(K^{-1}(F_1^{-1}(u),v)dudv \\ &= \int\int f(y)d\mu_1(x)K(x,dy) = \int f(y)d\mu_2(y) \\ E(X_2 \mid X_1) &= \int yK(F^{-1}(U),dy) \geq F^{-1} = X_1. \end{aligned}$$

$iii) \Rightarrow i)$ Aus der Monotonie und der Jensen Ungleichung erhalten wir

$$E(\varphi(X_1)) \leq E(\varphi(E(X_2 \mid X_1))) \leq E(E(\varphi(X_2) \mid X_1)) = E(\varphi(X_2)).$$

$i) \Rightarrow ii)$ Wir geben nur eine konstruktive Skizze, weshalb das Ergebnis gelten sollte. Ein vollständiger Beweis mit anderen ist z.B in [16].

Wir beschränken uns auf diskrete Maße μ_1 und μ_2. Seien $a_1 < \ldots < a_m$ und $b_1 < \ldots < b_n$ der Träger von μ_1 bzw. μ_2. Ohne Einschränkung seien alle $a-$Werte von den $b-$Werten verschieden.

Wir konstruieren jetzt

7.2 Das Maximum eines Martingals

Maximalungleichungen sind Abschätzungen des Maximums eines stochastischen Prozesses. Diese spielen u.a. eine grundlegende Rolle in Konvergenzfragen der Wah rscheinlichkeitstheorie. Grundlage von Maximalabschätzungen in der Martingaltheorie ist die Doob Ungleichung. In den folgenden Abschnitten behandeln wir Konsequenzen bzw. andere Aspekte der Doob Ungleichung, wie fast sichere Konvergenz von Submartingalen, die abstrakte Formulierung via dem Hardy-Littlewood Maß, Propheten-Spieler Ungleichungen und Maximalungleichungen bzgl. Minkowski Normen. Die Basis ist die Doob Ungleichung.

Dem Leser empfehlen wir beim ersten Lesen nur die ersten beiden Abschnitte.

Im folgenden betrachten wir Submartingale $X = (X_n)_{n\in T}$. Mit

$$X_N^* := \sup_{n\le N} X_n \qquad X^* := \sup_{n\in T} X_n$$

bezeichnen wir das Supremum. T heißt **nach rechts abgeschlossen**, falls der Zeitparameterraum T ein größtes Element, genannt $|T|$, besitzt. Die Zg $X_{|T|}$ heißt **terminale Realisation.** Diese bezeichnen wir stets intuitiv mit X_∞, auch wenn $|T|$ endlich ist. Weiterhin benutzen wir die Schreibweise

$$\|X\| := \|(X_n)_n\| := \sup_n \|X_n\|.$$

Derzeit ist $\|.\|$ nur ein Schreibsymbol, später werden wir die Normeigenschaft (für Martingale) zeigen. Sinngemäß benutzen wir $\|X\|_p$ für die L_p- Norm usw.. Für Submartingale ist $\|X_n\|_p,\ p\ge 1$, aufsteigend, gegen $\|X_\infty\|_p$ für abgeschlossenen Zeitparameterraum.

7.2.1 Doob Ungleichung

Lemma 59 (Doob Ungleichung) *Sei X ein Submartingal und T nach rechts abgeschlossen. Für alle rellen Zahlen c gilt:*

$$cP(X^*\ge c) \le \int_{X^*\ge c} X_\infty dP. \tag{7.2}$$

Beweis: Sei zuerst $|T| = N$ endlich. Betrachte die erweiterte Stoppzeit $\tau = \inf\{n \mid X_n \ge c\}$.

$$\begin{aligned} cP(X^*\ge c) &= cP(\tau\le N) \le \int_{\tau\le N} X_\tau dP = \sum_{k=0}^{N}\int_{\tau=k} X_k dP \\ &\le \sum_{k=0}^{N}\int_{\tau=k} X_N dP = \int_{\tau\le N} X_N dP = \int_{X^*\ge c} X_N dP. \end{aligned}$$

Ist T unendlich, so betrachte das Submartingale $X_0, X_1, \ldots, X_N, X_\infty$. Wende hierauf die Doob Ungleichung an und lasse anschließend N gegen unendlich gehen. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert das gewünschte Resultat. q.e.d.

Hier ist eine etwas schwächere, aber handliche Form.

Lemma 60 (Doob Ungleichung II) *Für positive Submartingale X_n und jede Konstante c gilt:*

$$cP(X^* \geq c) \leq \|X\|_1. \tag{7.3}$$

Beweis: Zeige dies zuerst für endlichen Zeitparameterraum und mache dann den Grenzübergang. q.e.d.

Analog lassen sich untere (und obere) Schranken für Supermartingale finden. (Supermartingale sind genau die Submartingale multipliziert mit -1. Der Leser sollte das Lemma zur Übung für Supermartingale formulieren.)

Wir ziehen die Formulierung mit Submartingalen vor, da die Doob Ungleichung gerne auf positive Submartingale angewandt wird. Der Hintergrund ist: Der Absolutbetrag jeden Martingals ist ein positives Submartingal. (Die Umkehrung gilt auch, jedes positive Submartingal ist darstellbar als Absolutbetrag eines Martingals [6].) Beliebt sind auch Anwendungen auf das Submartingal $|M_n|^p, 1 \leq p$, M ein Martingal. Die Gleichung (7.3) schreibt sich dann

$$cP^{1/p}(|M|^* \geq c) \leq \|M\|_p.$$

Hier ein Beispiel.

Korollar 61 (Kolmogoroff Ungleichung) *Seien $X_n, n \in I\!N$, unabhängige Zgn mit Erwartungswert* 0 *und endlicher Varianz. Dann gilt für die Partialsumme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$*

$$P(\sup_{n \leq N} |S_n| \geq c) \leq \frac{Var(S_N)}{c^2}.$$

Beweis: S_n ist ein Martingal und S_n^2 ein positives Submartingal. q.e.d.

7.2.2 Erste Konvergenzresultate

Die Doob Ungleichung (59) ermöglicht fast sichere Konvergenzaussagen für Submartingale.

Eine Funktion $f : I\!N \mapsto I\!R$ konvergiert dann und nur dann wenn $\sup_{m,n \geq N} |f(m) - f(n)|$ mit $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Auf stochastische Prozesse angewandt, ein stochastischer Prozeß $X_n, n \in I\!N$, konvergiert genau dann, wenn $Y_N := \sup_{m,n \geq N} |X_m - X_n|$ fast sicher gegen 0 konvergiert. Die Folge Y_N ist fallend in N. Für eine monotone Folge ist fast sichere Konvergenz äquivalent zur stochastischen Konvergenz. Wir haben damit gezeigt:

Proposition 62 *Ein stochastischer Prozeß X_n, $n \in I\!N$, konvergiert fast sicher genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt*

$$P(\sup_{m,n \geq N} |X_m - X_n| > \epsilon) \rightarrow_{N \to \infty} 0.$$

Satz 63 *Sei M_n ein L_2-beschränktes Martingal. Dann konvergiert M_n fast sicher und in L_2 gegen eine L_2-Zg M_∞,*

$$M_n \to M_\infty.$$

Beweis: Sei $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n d_k$ das Martingal mit den Martingaldifferenzen $d_k := M_k - M_{k-1}$. Die Varianz von M_n schreibt sich als $\mathrm{Var}(M_n) = \mathrm{Var}(M_0) + \sum_{k=1}^n E(d_k^2)$. Wegen der L_2-Beschränktheit des Martingals ist die unendliche Summe $\sum_{k=1}^\infty E(d_k^2)$ endlich. Die Doob Ungleichung liefert für festes N

$$\begin{aligned} P(\sup_{m,n \geq N} |M_m - M_n| > \epsilon) &\leq 2P(\sup_{n \geq N} |M_N - M_n|^2 > \epsilon^2) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^2} \sup_{n \geq N} E(X_N - X_n)^2 = \frac{2}{\epsilon^2} \sum_{k=N+1}^\infty E(d_k^2) \end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0. Daher konvergiert M_n fast sicher.

Die L_2 Konvergenz ist offensichtlich, M_n ist eine Cauchyfolge in L_2. Beide Grenzwerte sind gleich. q.e.d.

Korollar 64 (Lévy) *Seien $X_n, n \in I\!N$, unabhängige Zgn mit $E(X_n) = 0$ und $\sum_n \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Dann konvergiert die Partialsumme S_n fast sicher und in L_2 gegen $S_\infty := \sum_n X_n$.*

Beweis: Die Partialsumme S_n ist ein L_2-beschränktes Martingal. q.e.d.

Bemerkung: In Satz 37 zeigen wir die Umkehrung des Korollars.

7.2.3 L_p-Maximalungleichung

Wir starten mit einem Vergleich der L_p-Norm des Maximums eines Martingals und der Norm des Martingals. Solche Maximalungleichungen sind mathematisch wichtige und interessante Objekte.

Zuvor, quasi als Motivation, eine intuitive Interpretation von Maximalungleichungen als Propheten-Spieler Ungleichungen. Dies sind Ungleichungen, die eine Beziehungen zwischen dem Gewinn des Propheten und dem des Spielers herstellen.

Sei M_n ein Martingal. Wenn der Prophet oder der Spieler das Spiel M zum Zeitpunkt s beenden, bekommen sie jeweils M_s ausbezahlt. Beide wollen den Erwartungswert $E(M_s)$ maximieren. Der Prophet in seiner Allwissenheit kennt die gesamte Zukunft und wartet, bis der Prozess sein absolutes Maximum annimmt. Dies ist sicherlich das beste was er tun kann. Der Prophet erhält den erwarteten Nutzen $E(M^*)$.

Im Gegensatz zum Propheten kennt der Spieler zu jedem Zeitpunkt nur die Gegenwart und die Vergangenheit. Er kann als Stoppregel nur Stoppzeiten τ verwenden. Sein erwarteter Nutzen ist $\sup_\tau E(M_\tau)$, genannt der Spielwert. Das Optional Sampling Theorem für Martingale besagt, daß jede Stoppzeit gleich gut ist. Mit jeder Strategie erhält der Spieler den Spielwert $EM_1 = EM_\infty$ als erwarteten Gewinn. Er kann daher bis zum Ende durchspielen und erhält die terminale Realisation M_∞ als Auszahlung.

Die terminale Auszahlung M_∞ ist stets weniger als die Realisierung M^* der Auszahlung an den Propheten. Dassselbe gilt für den Erwartungswert. Interessanter ist die Umkehrung, wenn die erwartete Auszahlung an den Propheten nicht zu weit weg von der erwarteten Auszahlung an den Spieler ist, z.B. Abschätzungen der Form

$$\|X^*\| \leq c\|X_\infty\|$$

für gewisse Normen $\|.\|$ und endliche Konstanten c. Dies ist das gemeinsame Ziel auch der nächsten Abschnitte (7.2.5) und (7.2.6).

Wir starten mit $u(x) = x^p$ und einem analytischen Hilfslemma. Sei $q = \frac{p}{p-1}$ der duale Exponent.

Lemma 65 *Seien X, Y positive Zgn, die die Doob Ungleichung*

$$cP(Y \geq c) \leq \int_{\{Y \geq c\}} X dP \tag{7.4}$$

für alle c erfüllen. Dann gilt für $p > 1$

$$\|Y\|_p \leq q\|X\|_p. \tag{7.5}$$

Beweis: Als erstes zeigen wir $E(Y^p) \leq qE(XY^{p-1})$.

$$\begin{aligned} E(Y^p) &= E(\int_0^\infty 1\!\!1_{Y^p \geq y^p} dy^p = \int_0^\infty E(1\!\!1_{Y \geq y}) py^{p-1} dy \\ &\leq \int_0^\infty E(1\!\!1_{Y \geq y} X) py^{p-2} dy = pE(X \int_0^Y y^{p-2} dy) \\ &= qE(XY^{p-1}). \end{aligned}$$

Wir verwenden die Hölder Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\|Y\|_p^p = E(Y^p) \leq qE(XY^{p-1}) \leq q\|X\|_p\|Y^{p-1}\|_q = q\|X\|_p\|Y\|_p^{p-1}.$$

q.e.d.

Satz 66 *Sei $X = (X_n)_n$ ein Martingal oder ein positives Submartingal. Dann gilt für $p \in (1, \infty]$ und $q = \frac{p}{p-1}$ die L_p-Abschätzung:*

$$\|X^*\|_p \leq q\|X\|_p. \tag{7.6}$$

Beweis: Der Fall $p = \infty$ ist offensichtlich durch Einsetzen der Definitionen. Sei jetzt $p \in (1, \infty)$.

Der Betrag eines Martingals ist ein positives Submartingal. Daher reicht es positive Submartingale zu betrachten. Die Bedingung (7.4) ist nach der Doob Ungleichung Lemma 59 erfüllt für die terminale Realisierung X_N und X^*. Das analytische Lemma 65 ergibt

$$\|X^*\|_p \leq q\|X\|_p.$$

Durch Grenzübergang von $N \to \infty$ erhalten wir mittels monotoner Konvergenz und der Submartingaleigenschaft von $|X_n|^p$ aus obigem

$$\|X^*\|_p \nwarrow_N \|X_N^*\|_p \leq q\|X_N\|_p \nearrow_N q\|X\|_p.$$

q.e.d.

Folgerung 67 *Ein Submartingal mit endlicher L_p−Norm für ein $p > 1$ ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis: Es reicht zu zeigen X^* ist aus L_p, (siehe Appendix). X^* wird nach unten durch X_0 beschränkt und nach oben durch das Supremum des Submartingals X_n^+. Dies ist in L_p und damit auch X^*. q.e.d.

7.2.4 L_1-Abschätzung

Wir zeigen Maximalungleichungen für die L_1−Norm.

Zuerst eine Warnung. Für $p = 1$ gibt es keine universelle endliche Konstante c mit $\|X^*\|_1 \leq c\|X\|_1$. Dazu betrachten wir das Petersburger Spiel, Abschnitt 3.1, ehemaliges Leningrader Spiel. Seien $X_n,\ n \in \mathbb{N}$, uivZgn mit einer Bernoulli Verteilung zum Parameter 1/2. Das Partialprodukt $M_n := \prod_{i=1}^n 2X_i$ ist ein positives Martingal mit Erwartungswert 1. Die L_1−Norm des Supremums des Martingals ist ∞. Weiterhin konvergiert das Martingal fast sicher gegen 0.

Die Funktion $x \to x \ln^+ x$ ist konvex auf $\mathbb{R}^+$. Ist X_n ein positives Martingal, so auch $X_n \ln^+ X_n$. Wir benutzen die Notation $\|X \ln X\|_1 = \sup_n E(X_n \ln^+ X_n) = \lim_n E(X_n \ln^+ X_n)$ für die Norm dieses Submartingals.

Satz 68 *Für jedes positive Submartingal X_n gilt*

$$E(X^*) \leq \frac{e}{e-1}(1 + \|X \ln^+ X\|_1).$$

Beweis: Der Beweis benutzt folgende elementare Ungleichung

$$a \ln^+ b \leq a \ln^+ a + \frac{b}{e}$$

für $a, b > 0$. Benutze hierzu $\ln c \leq c/e,\ c > 0$. Die Funktion $\ln c$ is konkav und stets unterhalb der Tangente im Punkt $c = e$. Die Ungleichung folgt aus

$$a \ln b \leq a \ln a + a \ln \frac{b}{a} \leq a \ln a + a \frac{b}{ae}$$

mit Fallunterscheidung.

Es reicht den obigen Satz für Submartingale $X_0, \ldots, X_N$ mit endlicher Zeit zu beweisen, da beide Seiten monoton in N sind. Mit Hilfe der Doob Ungleichung schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
E(X^*) - 1 &= \int_0^\infty P(X^* \geq c)dc - 1 \leq \int_1^\infty P(X^* \geq c)dc \\
&\leq \int_1^\infty \frac{1}{c} E(X_N 1\!\!1_{\{X^* \geq c\}})dc \overset{\text{Fubini}}{=} E(X_N \int_1^\infty \frac{1}{c} 1\!\!1_{\{X^* \geq c\}} dc) \\
&= E(X_N \ln^+ X^*) \leq E(X_N \ln^+ X_N) + \frac{1}{e} E(X^*).
\end{aligned}$$

Eine Umordnung ergibt die Behauptung. q.e.d.

Umkehrung Eine endliche $L \log L-$Norm des Martingals ist in gewissem Sinne scharf für ein integrierbares Supremum, wie das folgende Lemma aufzeigt.

Lemma 69 *Sei X_n ein positives Supermartingal mit $X_{n+1} \leq C X_n$ für eine Konstante $C > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$E(X^*) < \infty,\ E(X_0 \ln^+ X_0) < \infty \Rightarrow \sup_n E(X_n \ln^+ X_n) < \infty.$$

Beweis: Sei τ die Stoppzeit des ersten Überschreitens des Levels $c > 0$. Dann gilt:

$$\int_{\{1 \leq \tau \leq N\}} X_N dP \leq \int_{\{1 \leq \tau \leq N\}} X_\tau dP \leq CcP(1 \leq \tau \leq N)$$

denn $X_\tau \leq C X_{\tau-1} \leq Cc$ auf $\{1 \leq \tau \leq N\}$. Damit weiter:

$$\int_{X_N^* > c} X_N dP = \int_{\{0 \leq \tau \leq N\}} X_N dP + \int_{\{\tau = 0\}} X_N dP \leq \int_{\{X_0 \geq c\}} X_0 dP + CcP(X_N^* \geq c).$$

Weiter durch Integration mit $1\!\!1_{\{c\geq 1\}}\frac{1}{c}dc$ (Fubini wie vorher):

$$E(X_N \ln^+ X_N^*) \leq E(X_0 \ln^+ X_0) + CE(X_N^*).$$

Mit $E(X_N \ln^+ X_N) \leq E(X_N \ln^+ X_N^*)$ und dem Grenzübergang $N \to \infty$ folgt:

$$\sup_N E(X_N \ln^+ X_N) \leq E(X_0 \ln^+ X_0) + C \sup_N E(X_N^*) < \infty.$$

q.e.d.

Bemerkung zur Bedeutung der Bedingung $X_{n+1} \leq CX_n$. Eine **Verfeinerung** eines (Sup-, Super-)Martingals $X_t,\ t \in T_X$, ist ein (Sub- Super-) Martingal $Y_t, t \in T_Y$, mit $T_X \subset T_Y$ und $X_t = Y_t,\ t \in T_X$. Ferner sind die Infima und Suprema der Zeiträume gleich. (Hierbei ist der Zeitbereich T stetig oder diskret. Der Einfachheit halber betrachten wir nur diskrete Zeitbereiche und indizieren durch eine Teilmenge der natürlichen Zahlen.)

Jedes positive Submartingal X_n läßt sich verfeinern (auf genügend reichhaltigen W-Räumen) durch ein positives Submartingal Y_n mit der Bedingung $Y_{n+1} \leq CY_n$ für jedes $C > 1$ (Die Durchführung ist nicht trivial). Durch die Verfeinerung vergrößert sich das Maximum X^* punktweise, während die Norm $\sup_n E(|X_n| \ln^+ |X_n|)$, die nur von der terminalen Realisierung bestimmt wird, unverändert bleibt. Insofern ist das Lemma 69 eine Aussage über Verfeinerungen des Zeitparameters von Martingalen, etwa von der folgenden Bauart: Sei X_n ein positives Martingal. Falls für alle Verfeinerungen Y_n das Supremum Y^* integrierbar ist, so ist die Norm von $X \ln^+ X$ endlich. Die Bedingung $X_{n+1} \leq CX_n$ könnte als ein 'Gradmesser' dafür dienen, wie fein das Martingal ist.

Zum Abschluß ein Lemma zum Nachweis der Bedingung.

Lemma 70 *Sei X_n ein positives Martingal mit*

$$(X_{n+1} - X_n)^2 \leq CE((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) < \infty$$

fast sicher für ein C und alle n. Dann gilt fast sicher

$$X_{n+1} \leq (1 + 2C)X_n.$$

Beweis: Der Beweis geschieht in mehreren Teilschritten.

- $E((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) \leq CE^2(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n)$

$$\begin{aligned} E((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) &\leq E(\sqrt{CE((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n)}|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n) \\ &\leq \sqrt{CE((X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n)}E(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

- $E(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n) \leq 2X_n$.

X_n ist ein positives Martingal. $E(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n) \leq E(X_{n+1} + X_n \mid \mathcal{F}_n) = 2X_n$.

- $(X_{n+1} - X_n)^2 \leq 4C^2 X_n^2$

Dies folgt aus der Voraussetzung und obigen Aussagen.

- $X_{n+1} \leq \sqrt{4C^2+1}X_n \leq (2C+1)^2 X_n$.

Eine Verwendung von $a^2 - b^2 \leq (a-b)^2$ ergibt $X_{n+1}^2 - X_n^2 \leq (X_{n+1} - X_n)^2$ und

$$X_{n+1}^2 \leq (4C^2+1)X_n^2 \leq (2C+1)^2 X_n^2.$$

q.e.d.

7.2.5 Hardy-Littlewood Maximalmaß

Diese Sektion klärt die Beziehungen zwischen dem Hardy-Littlewood Maximalmaß und der Doob Ungleichung. (Die Originalarbeit von Hardy-Littlewood [7] betrachtet Funktionen und die Maximalfunktion. Die Betrachtung der Verteilung, daher auch Maximalmaß, erscheint treffender.)

Sei μ stets ein W-maß mit endlichem ersten absoluten Moment $\int |x| d\mu(x)$. Wir definieren nun die Hardy-Littlewood Maximalabbildung $\mu \to \mu^*$. Sei $F = F_\mu$ die Verteilungsfunktion zu μ und und F^{-1} die rechtsstetige Umkehrfunktion von F, $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) > u\}$. Definiere eine Funktion $H^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{1-s} \int_s^1 F^{-1}(u) du.$$

Sei H die rechtsstetige Inverse zu H^{-1}. Dies ist eine Verteilungsfunktion. Das zugehörige W-maß ist das **Hardy-Littlewood Maximalmaß** μ^*.

(Für Wohldefiniertheit verbleibt zu zeigen: H^{-1} ist monoton steigend, d.h. $x < y \Rightarrow H^{-1}(x) \leq H^{-1}(y)$. Dies ist äquivalent zur Beziehung $\frac{1}{y-x}\int_x^y F^{-1}(u)du \leq \frac{1}{1-y}\int_y^1 F^{-1}(u)du$, welche erfüllt ist. Ferner H ist eine Verteilungsfunktion.)

Ohne Beweis fügen wir einige analytische Eigenschaften an: Die Funktion H ist stetig. Sie ist monoton steigend und strikt monoton steigend bis auf eventuell das Interval $(a,1)$, $a = 1 - F(F^{-1}(1-)-)$. Weiterhin $H(0+) = \int x dF(x), H(1-) = F^{-1}(1-)$. Für das Verständnis reicht es schöne Funktionen F und H anzunehmen, z.B. strikt steigende und differenzierbare Funktionen.

Die W-theoretische Interpretation bzw. der Gebrauch ergibt sich aus

$$\sup_{P(A) \leq 1-p} E(\mathbb{1}_A X) = \int_p^1 F^{-1}(u)du = (1-p)H^{-1}(p). \tag{7.7}$$

Hierbei ist X eine Zg mit Verteilung μ. (Die Gleichung (7.7) gilt für nicht atomare Wahrscheinlichkeitsräume, ansonsten gilt $\leq$.)

Ein W-maß μ_1 heißt *stochastisch kleiner* als μ_2, geschrieben $\mu_1 \preceq_s \mu_2$, falls für alle positiven aufsteigenden Funktionen φ gilt $\int \varphi d\mu_1 \leq \int \varphi d\mu_2$. Äquivalent ist $\mu_1(x,\infty) \leq \mu_2(x,\infty)$ für alle $x \in I\!R$. Die stochastische Ordnung wird auch für Zgn benutzt, falls die Verteilungen stochastisch geordnet sind. Zu stochastisch geordneten Zgn gibt es stets Versionen, die sogar punktweise geordnet sind. Die Zgn $F_{\mu_1}^{-1}(U) \leq F_{\mu_2}^{-1}(U)$, U $[0,1]-$rechteckverteilt, tun es.

In diesem Abschnitt betrachten wir Submartingale $X_n, n \in \overline{I\!N}$. Hierbei sei X_∞ stets integrierbar. Das Standardbeispiel sind die (regulären) Martingale $M_n = E(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)$. (Es gilt stets $X_n \leq M_n$.) Mit ν bezeichnen wir die Verteilung des Maximums X^* und mit μ die Verteilung von X_∞.

Satz 71 *Für Submartingale $X_n, n \in \overline{N}$, gilt*

$$\mu \preceq_s \nu \preceq_s \mu^*.$$

Beweis. Die erste Ungleichung ist offensichtlich aus $X_\infty \leq X^*$.

Sei $c \in I\!R$ und $p := \nu((-\infty, c])$. Die Doob Ungleichung Lemma 59 liefert

$$c(1-p) = cP(X^* > c) \leq \int_{\{X^*>c\}} X_\infty dP \leq \sup_{P(A)\leq 1-p} \int_A X_\infty dP = (1-p)H^{-1}(p).$$

Hieraus erhalten wir $\mu^*((-\infty, c]) = H(c) \leq p = \nu((-\infty, c])$ und damit stochastische Ordnung. q.e.d.

Verschärfung Der Satz 71 hat eine schöne Umkehrung (für Martingale) und liefert eine Charakterisierung des Hardy-Littlewood Maximalmaßes als kleinste obere Schranke. Allerdings benötigen wir dazu Martingale mit stetiger Zeit (oder auch konvexe Ordnung für Maße). Betrachte Martingale $X_t, t \in T = [0,1]$, mit der Martingaleigenschaft $E(X_t \mid \mathcal{F}_t) = X_s$ für alle $s \leq t$ und die Pfade $X_.(\omega) : T \to I\!R$ sind rechtsstetig und besitzen linksseitige, endliche Limiten für fast alle ω.

Betrachte alle Verteilungen ν von Suprema X^* für Martingale wie oben mit fester Verteilung μ der terminalen Realisation X_1. Diese ν sind charakterisiert durch $\mu \preceq_s \nu \preceq_s \mu^*$,

$$\{\nu \mid \exists (X_t)_{t\in[0,1]} \text{ Martingal } X_1 \sim \mu, X^* \sim \nu\} = \{\nu \mid \mu \preceq_s \nu \preceq_s \mu^*\}.$$

Siehe Kertz-Rösler [9] für dieses und weitere Resultate.

Es gibt ein Martingal $X_t, t \in [0,1]$, mit X_1 hat Verteilung μ und X^* hat die Verteilung μ^*, [5]. Nehme dazu $\Omega = [0,1]$ versehen mit der Borel $\sigma-$Algebra $\mathcal{B}([0,1])$ und dem Lebesguemaß. Die Filtration $\mathcal{F}_t$ wird gegeben durch $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{B}([0,t)), [t,1])$. Sei $X_1 = F_\mu^{-1}(U)$ mit U die Identität. Dann tut es

$$X_t = E(F^{-1}(U) \mid \mathcal{F}_t) = 1\!\!1_{U<t} F^{-1}(U) + 1\!\!1_{U\geq t} H^{-1}(t).$$

Hierbei haben wir $E(1\!\!1_{U\geq t}F^{-1}(U) \mid [t,1]) = 1\!\!1_{U\geq t}H^{-1}(t)$ benutzt. Eine Rechnung ergibt $X^* \sim \mu^*$.

Bemerkung: Die maximale Verteilung (in stochastischer Ordnung) des Supremums eines Martingals ist das Hardy-Littlewood Maximalmaß. Hiermit lassen sich kleinste obere Schranken für Maximalungleichungen konstruieren. Zum Beispiel ist die angegebene Konstante $\frac{e}{e-1}$ in Satz 68 für die L_1-Maximalungleichung scharf.

Prophet-Spieler Interpretation: Ein Prophet spielt gegen einen Spieler. Die Spiele sind Martingale $M_n, n \in \overline{I\!\!N}$, mit Werten in $[0,1]$ und Erwartungswert a. Die durchschnittliche Auszahlung an den Spieler ist genau a unter jeder Stoppregel nach dem Optional Sampling Theorem. Daher spielt der Spieler bis zum Ende durch. Für den Spieler, im Gegensatz zum Propheten, ist die Verteilung der terminale Realisation unerheblich.

Der Prophet erhält $\int x d\mu^*(x)$, μ eine Verteilung auf $[0,1]$. Dieser Wert ist mindestens a. Die günstigste Verteilung μ für den Propheten besitzt nur Masse auf 0 und 1. (Argument?). Bei festem Erwartungswert ergibt dies eindeutig $\mu(1) = a$ und $\mu(0) = 1-a$. Zu diesem W-maß korrespondiert das Hardy-Littlewood Maximalmaß

$$\mu^*(x,\infty) = \begin{cases} 1 & x < a \\ a/x & a \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

und damit

$$\int x d\mu^*(x) = a - a\ln a.$$

Der Prophetengewinn liegt zwischen a und $a - a\ln a$. Alle Werte einschließlich der Grenzen sind erreichbar für gewisse Martingale.

Für weitere Literatur siehe Hill und Kertz [8].

7.2.6 Maximalungleichungen in Minkowski Norm

Ziel dieser Sektion sind Maximalabschätzungen von $E\Phi(X^*)$ für konxexes Φ als eine Funktion der terminalen Verteilung μ von X_∞. Im folgenden ist $X_n, n \in \overline{I\!\!N}$, stets ein positives Submartingal.

Wir hatten bereits die Fälle $\Phi(x) = |x|^p$ behandelt. Es gilt $\|X^*\|_p \leq q\|X_\infty\|_p$ für $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ und $\|X^*\|_1 \leq \frac{e}{e-1}(1 + E(|X_\infty| \ln^+(|X_\infty|)))$. Diese Abschätzungen beruhten auf der Doob Ungleichung. Im Hinblick auf den vorherigen Abschnitt, kann X^* 'maximal' (in stochastischer Ordnung) das Hardy-Littlewood Maximalmaß μ^* als Verteilung haben. Die Doob Ungleichung gilt in der Form

$$P(X^* > c) \le 1 - H(c) \le \frac{1}{c}\int_{H(c)}^1 F^{-1}(u)du.$$

Damit gelten alle Abschätzungen unter Verwendung der Doob Ungleichung auch für das Hardy-Littlewood Maximalmaß. Zum Beispiel gilt (Satz 66)

$$\int |x|^p d\mu^*(x) \le q^p \int |x|^p d\mu(x) \tag{7.8}$$

für $p > 1$ und

$$\int |x| d\mu^*(x) \le \frac{e}{e-1}(1 + \int |x| \ln^+(|x|)d\mu(x))$$

für $p = 1$. Das Beispiel am Anfang des Abschnitts über L_1-Abschätzungen zeigt $\int |x|d\mu^*(x) = \infty$ aber $\int |x|d\mu(x) < \infty$. (Übung, finde weitere Beispiele. Hinweis: μ habe Dichte $x^{-1}\ln^\alpha x$ mit $x \ge e$ und $-2 < \alpha < -1$.)

Eine **Orlicz** Funktion ist eine positive konvexe Funktion $\Phi : I\!R^+ \mapsto I\!R^+$ mit $\Phi(0) = 0$ und nicht identisch 0. Aus Schreibgründen verwenden wir auch $\Phi(x) = 0$ für $x \le 0$. Sei φ die rechtsstetige Ableitung. Die Ableitung existiert und ist monoton steigend. Sei $d\varphi$ bzw. $\varphi(de)$ das zugehörige Maß auf $I\!R$, genauer auf $I\!R^+$, definiert durch $\int_{-\infty}^s d\varphi = \varphi(s)$. Φ hat die Darstellung

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds = \int (t-e)^+ d\varphi(e).$$

Die letzte Darstellung erhält man durch partielle Integration.

Bemerkung: Die zweite Darstellung von Φ ist die Choquetdarstellung als Integral über die extremalen Funktionen $t \mapsto (t-e)^+$.

Aus der obigen Darstellung erhalten wir die Ungleichung

$$\Phi(t) \le t\varphi(t).$$

Dies impliziert

$$p := \inf_t \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}$$

ist aus $[1, \infty)$. (Das Infimum wird über die t mit $\Phi(t) > 0$ genommen.) Sei

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Die Orlicz Funktion Φ heißt **moderat**, falls $1 < p$ gilt. Moderat sind die Orlicz Funktionen $t^\alpha \ln^\beta(1+t),\ \alpha > 1, \beta \ge 0$ mit $p = \alpha$. Nicht moderate sind beispielsweise die Orlicz Funktionen $t \mapsto t$ und $t \mapsto e^t - 1$. Beachte das verschiedene Wachstumsverhalten dieser nicht moderaten Orlicz Funktionen.

Definiere für reellwertige Funktionen f das Normfunktional

$$\|f\|_\Phi := \inf\{c > 0 \mid \int \Phi(\frac{|f|}{c}) \leq 1\}.$$

Dann ist $\|.\|_\Phi$ eine Norm auf dem Raum L_Φ aller Funktionen mit endlichem Normfunktional. Die Bedeutung der Orlicz Funktionen liegt in der numerischen Analysis, ... dies wollen wir hier nicht vertiefen. $(L_\Phi, \|.\|_\Phi)$ ist sogar ein Banachraum. Die hier benutzte Norm $\|.\|_\Phi$ ist die Minkowski Norm, (häufig auch Lucemburg Norm gennt.) Die Orlicz Norm ist äquivalent zur Minkowski Norm.

Bemerkung: Orlicz Funktionen werden manchmal allgemeiner via erweiterter Funktionen $\Phi : |R^= \mapsto \overline{I\!R}$ definiert, u.a. um L_∞ als Orliczraum einzuschließen. Dies ist auch hier möglich, wir überlassen es dem Leser.

Wir beginnen mit einem rein analytischen Lemma.

Lemma 72 *Seien X, Y Zufallsgrößen mit $Y \geq 0$, die der Doob Ungleichung*

$$E(c1\!\!1_{Y \geq c}) \leq E(X 1\!\!1_{Y \geq c})$$

für alle $c \geq 0$ genügen. Dann gilt

$$E\Phi(Y) \leq E\Phi(qX).$$

Beweis: Für nichtmoderate Orliczfunktionen ist der obige Satz eine Leeraussage. Sei $p \in (1, \infty)$. Zur Abkürzung setzen wir $V = qX^+$. Aus der obigen (Choquet) Darstellung erhalten wir

$$E\Phi(V) - E\Phi(Y) = E\int_{V \geq e} (V - e)\varphi(de) - E\int_{Y \geq e} (Y - e)\ d\varphi = I + II$$

mit

$$\begin{aligned} I &= E\left[\int_{V \geq e} (V - e)d\varphi(e) - \int_{Y \geq e} (V - e)d\varphi(e)\right] = E\int (V - e)(1\!\!1_{V \geq e} - 1\!\!1_{Y \geq e})\varphi(de) \\ II &= EV\varphi(Y) - EY\varphi(Y). \end{aligned}$$

Der Integrant in I ist positiv für jedes feste ω, sowohl für $Y(\omega) \leq V(\omega)$ als auch $V(\omega) \leq Y(\omega)$. Damit ist I positiv.

Es reicht jetzt die Positivität von II zu zeigen. Dazu schätzen wir ab

$$EY\varphi(Y) \geq pE\Phi(Y) = pE\int (Y - e)^+\varphi(de) = pEY\varphi(Y) - pE\int_{Y \geq e} e\ \varphi(de).$$

Durch Umordnung und mit der Doob Ungleichung erhalten wir

$$EY\varphi(Y) \leq qE\int_{Y\geq e} e\,\varphi(de) = q\int E1\!\!1_{Y\geq e}e\,\varphi(de) \leq q\int EX1\!\!1_{Y\geq e}\varphi(de) = EV\varphi(Y).$$

q.e.d.

Korollar 73 *Für endliches q und jedes positives Submartingal X_n gilt*

$$E\Phi(X^*) \leq E\Phi(qX_\infty) \qquad \|X^*\|_\Phi \leq q\|X_\infty\|_\Phi.$$

Beweis: Das Korollar ist eine Konsequence der Doob Ungleichung $Ec1\!\!1 X^* \geq c \leq EX_\infty 1\!\!1_{X^*\geq c}$. Für endlichen Zeitbereich ist diese erfüllt. Für nicht endlichen Zeitbereich benutze eine Approximation X_N^* und X_N. Für die linke Seite der Doob Ungleichung gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz $Ec1\!\!1 X_N^* \geq c \rightarrow Ec1\!\!1 X^* \geq c$. Für die rechte Seite zeige $q < \infty$ impliziert $\frac{\Phi(x)}{x} \rightarrow_{x\rightarrow\infty} \infty$ und letzteres impliziert gleichgradige Integrierbarkeit der Familie X_N, N. Dies ergibt $EX_N 1\!\!1_{X_N^*\geq c} \rightarrow EX_\infty 1\!\!1_{X^*\geq c}$. q.e.d.

Korollar 74 *Sei $X_n, n \in \overline{I\!\!N}$, ein positives Submartingal mit $m := EX_\infty \geq 1$. Dann gilt*

$$E\Phi(X^*) \leq E\Phi(q_m X_\infty) \qquad \|X^*\|_\Phi \leq q_m\|X_\infty\|_P hi$$

mit $q_m := \frac{p_m}{1-p_m}$ und $p_m := \inf_{t\geq m} \frac{t\varphi(t)}{\Psi(t)-\Psi(m)}$

$$E\Phi(X^*) \leq E\Phi(qX_\infty) \qquad \|X^*\|_\Phi \leq q\|X_\infty\|_P hi.$$

Beweis: Betrachte das Martingal $M_n := E(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)$. Es gilt $X^* \leq M^*$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $M^* \geq EX_\infty$ annehmen. (Ansonsten betrachte $m, M_0, M_1, \ldots$.) Wir wenden das Lemma an auf $\Phi(t) = 1\!\!1_{t\geq m}(\Psi(t) - \Psi(m))$.

$$E\Psi(M^*)-\Psi(m) = E\Phi(M^*) \leq E(1\!\!1_{qM\geq m}(\Psi(qM)-\Psi(m))) \leq E\Psi(qM)-\Psi(m).$$

q.e.d.

Diese Abschätzugen gelten alle auch für das Hardy-Littlewood Maximalmaß, $(\mu \preceq_s \nu \preceq_s \mu^*)$. Wir benutzen die Notation des Abschnittes über das Hardy-Littlewood Maximalmaß.

Korollar 75 *Sei μ ein W-maß mit endlichem Erwartungswert $m = \int x d\mu(x)$ und μ^* das Hardy-Littlewood Maximalmaß. Dann gilt für moderate $(1 < p)$ Orlicz Funktionen Φ*

$$\|H^{-1}(U)\|_\Phi \leq q\|F^{-1}(U)\|_\Phi.$$

$$\int \Phi(|x|)d\mu^*(x) \leq \int \Phi(|qx|)d\mu(|x|).$$

Beweis: Betrachte den Absolutbetrag $|X|$ einer Zufallsgröße X mit Verteilung μ. Beachte $X^* \leq |X|^*$. Den Rest überlassen wir dem Leser. q.e.d.

Weitere Spielarten überlassen wir ebenfalls dem Leser.

8 Martingale in der Wahrscheinlichkeitstheorie

8.1 Verfeinerungen

Wir betrachten Verfeinerungen von Submartingalen. Verfeinerungen tauchen in der Sektion über L_1 Maximalabschätzungen auf.

Eine **Verfeinerung** eines stochastischen Prozesses $X = (X_t)_{t \in T}$ ist ein stochastischer Prozess $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \in \tilde{T}}$ auf einem eventuell anderen geeigneten W-raum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ und eine Familie von Stoppzeiten $\tau_t, \ t \in T$ dergestalt, daß der Prozeß $\tilde{X}_{\tau_t}$ mit dem Originalprozeß X übereinstimmt. Hat X gewisse Eigenschaften mit Namen E und fordern wir diese auch für den $\tilde{X}$ Prozess, so sprechen wir von einer E-Verfeinerung. Wir betrachten in dieser Sektion nur Verteilungsgleichheit der Prozesse. Andere Gleichheiten, wie fast sichere oder stochastische, sind möglich und werden Kontextabhängig benutzt.

In unserem Setup betrachten wir Submartingale X. Die Verfeinerung ist ein Submartingal $\tilde{X}_t, \ t \in \tilde{T}$, mit abzählbarem Zeitparameterraum $\tilde{T}$ auf einem eventuell größeren W-raum und bezüglich einer anderen Filtration. Ist der Original W-raum reichhaltig genug, so können wir oEdA beide Prozesse auf demselben W-raum annehmen. Ansonsten können wir stets durch Produktraumbildung einen gemeinsamen W-raum konstruieren.

Unter den Zuwächsen eines Submartingales X verstehen wir alle Differenzen $\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t$. (Hierbei ist $t+1$ der dierekte Nachfolger von t.) Ein Submartingal X hat **beschränkte Zuwächse**, falls die absoluten Zuwächse $|\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t|$ beschränkt sind. Analog sprechen wir von gleichmäßig beschränkten Zuwächsen, falls es eine Konstante C gibt mit

$$\sup_{t \in T} |\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t| \leq C.$$

Wesentliches Ziel ist der Verfeinerungssatz.

8.2 Verfeinerungssatz

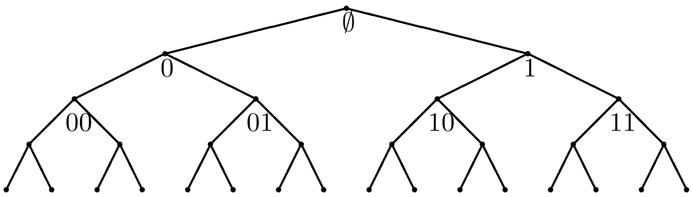
Satz 76 *Jedes Submartingal hat eine Submartingalverfeinerung mit absoluten Zuwächsen beschränkt durch eine vorgebene Konstanten* $C > 0$.

Wir beginnen mit einem einfachen Fall von unabhängigen Interesse.

Proposition 77 ?? *Sei* μ *ein W-maß mit Erwartungswert* 0 *und* C *eine strikt positive Konstante. Dann gibt es ein Martingal mit Anfangswert* 0, *terminaler Verteilung* μ *und mit absoluten Zuwächsen beschränkt durch* C.

Beweis: Die Idee ist folgende rekursive Konstruktion des Martingals. Der Anfangswert ist $M_1 = 0$. M_2 nimmt als Werte nur die beiden Schwerpunkt (=Erwartungswerte für W-maße) der oberen Hälfte $(0,\infty)$ und der unteren $(-\infty,0)]$ bezüglich μ an. Diese Konstruktion setze rekursiv fort.

Formal eignet sich zur Beschreibung ein binärer Baum $V = \cup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$. Konventionell ist $\{0,1\}^0$ die leere Menge $\emptyset$. Ein Element $v = (v_1,\ldots,v_n)$ heißt Knoten oder Ecke, v für vertex im Englischen, $|v| = n$ ist die Länge oder Generation der Ecke. Wir benutzen die Notation $v = v_1 v_2 \ldots v_n$, $v_{|m} = v_1 v_2 \ldots v_m$ $v_{|0} = \emptyset$ und $vw = v_1 v_2 \ldots v_n w_1 w_2 \ldots w_{|w|}$.



Definiere rekursiv eine Abbildung $v \mapsto (s_v, I_v)$ von dem Baum V in ein Tupel einer reellen Zahl mit einem Intervall. Sei $v_\emptyset = 0, I_\emptyset \mathbb{R}$ und definiere rekursiv nach der Generation der Ecke

$$I_{v0} := I_v \cap (-\infty, s_v] \qquad I_{v1} := I_v \cap (s_v, \infty)$$

$$s_{vi} := \frac{\int_{I_{vi}} x\mu(dx)}{\mu(I_v)}.$$

Der Einfachheit halber wollen wir stets $\int_{I_v} x\mu(dx) > 0$ annehmen, (obwohl das Argument ungeändert bestehen bleiben würde). Dann ist die Abbildung wohldefiniert. Die Familie $I_v, |v| = n$, ist eine Partition der reellen Zahlen, die sich mit wachsenden n verfeinert. s_v ist der Schwerpunkt des Intervalls I_v.

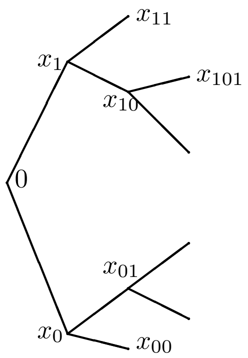
Seien $T(v)$, $v \in V$, unabhängige Zufallsgrößen mit Bernoulli Verteilung $P(T(v) = 1) = \frac{\mu(I_{vi})}{\mu(I_v)}$. Definiere rekursiv die Zufallsgröße W mit Werten in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ durch

$$W_{n+1} = 1\!\!1_{T_{W_{|n}}=1}.$$

Definiere den Prozeß $M_n := s_{W_n}$ und $M_0 := 0$ und die erweiterte Stoppzeit

$$\tau := \inf\{n \mid \sup_{x \in I_{W_{|n}}} d(M_n, x) < C\}.$$

Dann hat das Martingal $M_{1\wedge\tau}, M_{2\wedge\tau}, \ldots, M_\infty$ die geforderten Eigenschaften. Es verbleibt dies nachzuprüfen.



$W(\omega)$ beschreibt den Pfad eines Teilchens, welches von der Wurzel durch den Baum wandert und an jedem Knoten eine zufällige Entscheidung nach rechts oder links trifft. Die Position des Partikels in der $n-$ten Generation ist $W_n(\omega)$. Das zugehörige 'Gewicht' s_{W_n} ist ein Martingal. (Siehe zur Analogie die Sektion über den gewichteten Verzweigungsprozeß.)

• Der Prozeß $M_n, n \in I\!N$, ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{A}_n$ aufgespannt von allen $T(v)$ bis zur $n-$ten Generation, $|v| \leq n$.

$$\begin{aligned} E(M_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) &= s_{W_{|n}1} P(T(W_{|n}) = 1) + s_{W_{|n}0} P(T(W_{|n}) = 0) \\ &= \frac{\int_{I_{W_{|n}1}} x\mu(dx)}{\mu(I_{W_{|n}1})} \frac{\mu(I_{W_{|n}1})}{\mu(I_{W_{|n}1})} + \frac{\int_{I_{W_{|n}0}} x\mu(dx)}{\mu(I_{W_{|n}0})} \frac{\mu(I_{W_{|n}0})}{\mu(I_{W_{|n}0})} = M_n. \end{aligned}$$

M_n konvergiert in L_1 gegen eine terminale Zg M_∞, Satz 3.1. Es verbleibt zu zeigen, die terminale Zg hat die Verteilung μ. Dazu argumentiere

$$P(M_n < s_v) \leq \mu(-\infty, s_v) \qquad P(M_n > s_v) \leq \mu[s_v, \infty)$$

für alle Knoten v mit $|v| \leq n$ und durch Grenzübergang $P(M_\infty < s_v) \leq \mu(-\infty, s_v]$, $P(M_\infty \leq s_v) \geq \mu(\infty, s_v)$. Sei x ein Stetigkeitspunkt der Verteilungsfunktion von μ ($\mu(\{x\}) = 0$) und sei $s_v < x \leq s_w$. Es gilt

$$\mu(-\infty, s_v) \leq P(M_\infty \leq s_v) \leq P(M_\infty < x) \leq P(M_\infty < s_w) \leq \mu(-\infty, s_w]).$$

Es reicht letztendlich zu zeigen, daß die Schwerpunkte s_v hinreichend dicht liegen, präziser:

• $\mu(a,b) > 0 \to \exists v \in V \ s_v \in (a,b)$.

Sei $s = \int_{(a,b)} x \frac{\mu(dx)}{\mu((a,b))}$ der Schwerpunkt des Intervalls (a,b) bezüglich μ. Für jedes n ist s in einem der Intervalle $I_v, |v| = n$, enthalten. Sei $I_n = (a_n, b_n]$ dieses Intervall sei $x_n := \int_{I_n} x\mu(dx)/\mu(I_n)$ der Schwerpunkt des Intervalls I_n. Sogar das ganze Intervall (a,b) ist echt in I_n enthalten. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall I: $a_n < s_n \leq a < b \leq b_n$. In diesem Fall gilt $I_{n+1} = (s_n, b_n]$ und

$$s_n - a_n = \frac{1}{\mu(I_n)} \int_{(a_n, s_n]} (x - a_n)\mu(dx) + \frac{1}{\mu(I_n)} \int_{(s_n, b_n]} (x - a_n)\mu(dx)$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{\mu(a,b)}{\mu(I_n)} \frac{1}{\mu(a,b)} \int_{(a,b)} (x-a)\mu(dx) \\ &\geq \mu(a,b)(s-a) \end{aligned}$$

Fall II: $a_n \leq a < b \leq s_n \leq b_n$. In diesem Fall gilt $I_{n+1} = (a_n, s_n]$ und

$$\begin{aligned} b_n - s_n &= \frac{1}{\mu(I_n)} \int_{(a_n,s_n]} (b_n - x)\mu(dx) + \frac{1}{\mu(I_n)} \int_{(s_n,b_n]} (b_n - x)\mu(dx) \\ &\geq \frac{\mu(a,b)}{\mu(I_n)} \frac{1}{\mu(a,b)} \int_{(a,b)} (b-x)\mu(dx) \\ &\geq \mu(a,b)(b-s) \end{aligned}$$

In beiden Fällen $b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - a_n - \mu(a,b)c$ mit c eine Konstante ($= (b-s) \wedge (s-a)$). Durch Induktion nach n erhalten wir $b_{n+1} - a_{n+1}$ konvergeirt gegen 0. Dies ist ein Widerspruch. q.e.d.

Bemerkung: Aus den Schwerpunkten $s_v, v \in V$, alleine lassen sich rekursiv die Intervalle I_v angeben. Die Umkehrung gilt auch. Die Zuordnung des W-maßes μ zur Familie $s_v, v \in V$, der Schwerpunkte ist injektiv. Durch die Schwerpunkte ist obiges Martingal M_n eindeutig bestimmt und μ erhalten wir zurück als terminale Verteilung.

Beweis von Satz 76:

- Der Satz gilt für ein Submartingal X_1, X_2 mit X_1 eine Konstante.

Durch Einfügen von endlich vielen Zwischenstellen $1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ mit $X_{t_i} := X_1 - iC/2$ und $X_{t_N} = E(X_2 \mid \mathcal{A}_2)$ können wir das Problem reduzieren auf das Martingal $E(X_2 \mid \mathcal{A}_2), X_2$. Die Proposition **??** liefert das gewünschte Resultat.

- Der Satz gilt für Submartingale X_1, X_2.

Wir konstruieren das Submartingal analog dem obigen. (Nachrechnen.) Die verbleibende Schwierigkeit ist die Meßbarkeit der Konstruktion. Diese ist gewährleistet, da die Konstruktion nur abzählbar viele meßbare Operationen benötigt. (Eine formale Ausführung ersparen wir uns.)

- Der Satz gilt für ein Submartingal $X_1, X_2, \ldots X_N$.

Dies geschieht durch Induktion nach N. Den Induktionsschritt haben wir bereits oben gezeigt.

- Der Satz gilt für jedes Submartingal X.

Dies ist Standard und wir überschlagen die formale Ausführung. q.e.d.

Das folgende Lemma zeigt eine Konsequenz des Verfeinerungssatzes auf.

Lemma 78 *Sei X ein Submartingal. Für fast jedes ω konvergiert entweder die Folge $X_n(\omega)$ gegen einen endlichen Wert oder es gilt* $\limsup_n |X_n(\omega)| = \infty$.

Beweis. Sei zuerst X ein Submartingal mit Zuwächsen gleichmäsig beschränkt durch eine Konstante. Sei K eine weitere Konstante und τ_K die erweiterte Stoppzeit, daß $|X_n|$ erstmalig größer als K wird. Dann ist $X_{n\wedge\tau_K}$ ein Submartingal mit Werten in einem Kompaktum. Wir erhalten fast sichere Konvergenz aus der L_2 Beschränktheit, Satz **??**. Angewandt auf das Submartingal X bedeutet dies fast sichere Konvergenz auf der Menge $\tau_K = \infty$. Mit K gegen ∞ erhalten wir das Resultat. q.e.d.

Für negative Submartingale erhalten wir fast sichere Konvergenz. (Übung mit Doob Ungleichung.)

9 Optimales Stoppen und Kasinospiele

Ein Spieler kann zu jedem Zeitpunkt gewisse Aktionen, abhängig von seiner aktuellen Lebenslage, wählen und ausführen. Er versucht durch gute Entscheidungen seine Ziele zu erreichen. Zu den Zeitpunkten seiner Entscheidungen kennt er die Vergangenheit und die Verteilung, aber nicht die Realisation, der Zukunft. Modelle dieser Art heißen Kasinospiele. Mathematisch wird die Snell Einhüllende, das kleinste dominierende Supermartingal, eine herausragende Rolle spielen.

Ein Spezialfall sind optimale Stoppprobleme, in denen der Spieler solange eine Reihe von vorgegebenen Teilspielen spielt, bis er sich entscheidet aufzuhören. Diesen Zeitpunkt wird er so wählen, daß sein Kapital (=Gewinn) zu dem Zeitpunkt möglichst groß ist.

9.1 Optimales Stoppen

Optimales Stoppproblem: Gegeben sei ein reellwertiger stochastischer Prozeß $(X_n)_n$ adaptiert zur Filtration $(\mathcal{A}_n)$. Die Verteilung des Prozesses ist bekannt. Zum Zeitpunkt n ist die Realisierung $X_1, \ldots, X_n$ bekannt, aber in der Regel nicht mehr. Gesucht ist der **Spielwert** V

$$V = \sup_{\tau} E(X_\tau) \tag{9.1}$$

des optimalen Stoppproblems. Hierbei nehmen wir das Supremum über alle Stoppzeiten τ, für die der Erwartungswert wohldefiniert ist. (Für mindestens eine Stoppzeit sei dies der Fall.) Eine Stoppzeit τ heißt **optimal**, falls $E(X_\tau) = V$ gilt und **ϵ-optimal**, falls $E(X_\tau) \geq V - \epsilon$ gilt.

Eine Lösung eines **Optimales Stoppproblems** besteht in der (expliziten) Angabe einer optimalen oder zumindest einer ϵ-optimalen Stoppzeit einschließlich des Spielwertes. Ziel der nachfolgenden Sektionen ist es zu zeigen, daß viele solcher Probleme durch Rückwärtsinduktion gelöst werden können.

Mathematisch wird die Snell Einhüllende (Envelope), das kleinste, (X_n) dominierende $(X_n \leq V_n)$ Supermartingal $(V_n)_n$ konstruiert. Dann ist, zumindest für endlichen Zeitparameter,

$$\tau = \inf\{n \mid X_n + \epsilon \geq V_n\}$$

eine $\epsilon-$optimale Stoppzeit, $\epsilon \geq 0$.

Beispiel: Eins verliert. Wir betrachten folgendes einfache Würfelspiel.
• Der Spieler darf maximal 30 mal mit einem normalen Würfel würfeln.
• Der Spieler darf jederzeit das Spiel beenden. Sein Gewinn ist dann die Augenzahl aller bisherigen Würfe.
• Würfelt der Spieler eine Eins, so ist das Spiel sofort beendet und der Spieler erhält keinen Gewinn $(= 0)$.
Frage: Wie groß ist der Spielwert und was ist die optimale Stoppzeit?

Das allgemeine Stoppproblem: Ein *allgemeines Stoppproblem* $(U, (\mathcal{A}_n)_{n\in T})$ besteht aus einer Filtration $\mathcal{A}_n, n \in T \subset \mathbb{N}$, und einer meßbaren Auszahlungsfunktion $U : \Omega \times T \mapsto \mathbb{R}$. Die Funktion U heißt *Auszahlungsfunktion* oder *Nutzenfunktion.* Gesucht ist der *Spielwert* V

$$V := V(U) := \sup_{\tau} E(U(.,\tau)). \tag{9.2}$$

(Dieser sei stets wohldefiniert.) Das Supremum wird genommen über alle Stoppzeiten τ bezüglich der Filtration $(\mathcal{A}_n)$, für die der Erwartungswert wohldefiniert ist. Gesucht sind ferner optimale $(E(U(\cdot,\tau)) = V)$ oder ϵ-optimale $(E(U(\cdot,\tau)) \geq V - \epsilon)$ Stoppzeiten τ. Die Snell Einhüllende für das allgemeine Stoppproblem ist das kleinste Supermartingal $(V_n)_n$, welches U punktweise dominiert $(V_n \geq U(.,n)$.

Ein optimales Stoppproblem ist ein allgemeines Stoppproblem via $U(\omega, n) = X_n(\omega)$. Die Umkehrung gilt auch. Sei $(U,(A_n)_n)$ ein allgemeines Stoppproblem. Dann ist $(X_n, \mathcal{A}_n)_n$

$$X_n := E(U(.,n) \mid \mathcal{A}_n)$$

ein klassisches optimales Stoppproblem. Die Gleichheit

$$E(U(.,\tau)) = E(X_\tau)$$

impliziert denselben Spielwert, den Erwartungswert der Snell-Einhüllenden.

Beispiel: Wie finde ich die beste ... Sekretärin. Eine neue Sekretärin soll eingestellt werden. Insgesamt N Sekretärinnen sind im Wartezimmer und wollen sich vorstellen. Direkt nach dem Vorstellungsgespräch wird über die Einstellung entschieden, ein klares ja oder nein. Wird die Sekretärin eingestelt, ist dies das Ende der Veranstaltung. Falls nicht, so geht die Sekretärin nach

Hause und die nächste stellt sich vor. Ein späterer Rückruf ist nicht möglich. Ziel ist es, die beste und nur die beste Sekretärin anzustellen.

Die Reihenfolge der Vorstellungen wollen wir als zufälliges Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen modellieren. Die Leistungsfähigkeit der Sekretärinnen wird durch uiv Zgn $Y_i,\ i \leq N$, beschrieben. Hierbei ist die Verteilung allerdings unbekannt. Um unnötige Schwierigkeiten bei Gleichheit zu vermeiden, nehmen wir eine stetige Verteilungsfunktion an. Nur die Wahl der absolut größten Zg wird honoriert. N ist bekannnt. Dies führt auf folgendes mathematische Modell:

Beispiel: Sekretärinnen. Seien $Y_1, ..., Y_N$ uiv Zgn mit stetiger, wenn auch unbekannter Verteilung. Die Filtration sei die natürliche $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Die Auszahlungsfunktion ist

$$U(., n) = 1\!\!1_{Y_n \geq Y_1 \vee \ldots \vee Y_N}.$$

Aufgabe: Maximiere $E(U(., \tau))$ unter allen Stoppzeiten τ. Dies entspricht der Auswahl der absolut besten Sekretärin.

Beispiel: Letzte Eins. Seien $Z_1, ..., Z_N$ unabhängige Zgn mit Bernoulliverteilung zu den Parametern $p_1, \ldots, p_N$. Die Filtration sei die natürliche. Die Auszahlungsfunktion U sei

$$U(., n) = 1\!\!1_{Z_n > Z_{n+1} \vee \ldots \vee Z_N}.$$

Aufgabe: Maximiere $E(U(., \tau))$ unter allen Stoppzeiten τ. Das Stoppproblem ist das Stoppen genau bei der letzten Eins.

Das Sekretärinnenstoppproblem ist in dem Letzten-Eins-Stoppproblem enthalten via den Rekorden $Z_n := 1\!\!1_{Y_n > Y_1 \vee \ldots \vee Y_{n-1}}$. Die Zgn sind unabhängig und Z_n ist BErnoulli verteilt ist Parameter $p_n = \frac{1}{n}$.

Beachte

$$\begin{aligned}
U_Z(., n) &= 1\!\!1_{Z_n > Z_{n+1} \vee \ldots \vee Z_N} \\
&= 1\!\!1_{Z_n = 1, Z_{n+1} = 0, \ldots, Z_N = 0} \\
&= 1\!\!1_{Y_n > \sup_{i<n} Y_i, Y_{n+1} < \sup_{i<n+1} Y_i, \ldots, Y_N < \sup_{i<N} Y_i} \\
&= 1\!\!1_{Y_n > \sup_{i \neq n} Y_i} = U_Y(., n).
\end{aligned}$$

Die neuen Zgn $Z_n,\ 1 \leq n \leq N$ sind unabhängig mit Bernoulliverteilung zu den Parametern $p_n = \frac{1}{n}$ ([13], Übung).

Interpretation: Wir betrachten die Spielsituation eines 'take and run' Spiels. Zum Zeitpunkt n kann der Spieler diesmal die ihm eventuell noch unbekannte Zg $U(\omega, n)$ als Gewinn akzeptieren (=take) und das Spiel beenden (=run) oder er fährt im Spiel fort. Bei der 'take and run' Entscheidung zum Zeitpunkt n erhält der Spieler den durchschnittlichen Gewinn $X_n = E(U(., n) \mid \mathcal{A}_n)$, gegeben die Situation. Setzt er fort, so erhält er den Spielwert des verbleibenden, zukünftigen Spieles, bedingt auf die bisherige Vergangenheit. Ein rationaler Spieler wird das lokal bessere wählen.

Die Zg $U(\cdot, n)$ ist im Gegensatz zur klassischen Formulierung des Stoppproblems dem Spieler zum Zeitpunkt n eventuell nicht bekannt, siehe obige Beispiele.

9.1.1 Endlicher Horizont

Wir konstruieren die Snell Einhüllende und geben Lösungen an für das allgemeine Optimale Stoppproblem.

Sei $(U, (\mathcal{A}_n)_{n\in T})$ ein allgemeines Stoppproblem. Der Zeitparameterraum T sei endlich, ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $T = \{1, \ldots, N\}$. Ein endlicher Zeitparameteraum wird als *endlicher Horizont* bezeichnet. Der Einfachheit halber seien die nur fast sicher definierten Funktionen

$$X_n := E(U(.,n) \mid \mathcal{A}_n)$$

als Funktion eindeutig festgelegt.

Die *Snell Einhüllende* zu einem Prozeß $(Y_n)_n$ ist das kleinste, $(Y_n)_n$ dominierende $(Y_n \leq S_n)$ Supermartingal $(S_n)_{n\in T}$.

Definiere rückwärtsrekursiv $V_n : \Omega \mapsto \overline{I\!\!R},\ 0 \leq n \leq N$, durch $V_N := X_N$ und

$$V_n := X_n \vee E(V_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \tag{9.3}$$

für $1 \leq n < N$ und $V_0 := E(V_1)$. Definiere die Stoppzeiten $\underline{\sigma}$ und $\overline{\sigma}$ durch

$$\underline{\sigma} = N \wedge \inf\{1 \leq n < N \mid X_n \geq E(V_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)\} \tag{9.4}$$

und

$$\overline{\sigma} = N \wedge \inf\{1 \leq n < N \mid X_n > E(V_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)\} \tag{9.5}$$

Definiere

$$M_n := V_{n\wedge\overline{\sigma}} \qquad Z_n := V_{n\vee\overline{\sigma}} - V_{\overline{\sigma}}.$$

Beachte die allgemeine Identität $V_n = M_n + Z_n$.

Satz 79 (Endlicher Horizont) *Seien alle $U(\cdot,n),\ 1 \leq n \leq N$, integrierbar und sei τ eine Stoppzeit.*

(i) V_n *ist die Snell-Einhüllende von* X_n.

(ii) M_n *ist ein Martingal.*

(iii) Z_n *ist ein Supermartigal.*

(iv) $E(Z_\tau) < 0 \Leftrightarrow P(\tau > \overline{\sigma}) > 0$.

(v) $E(V_\tau) = V_0 \Leftrightarrow \tau \leq \overline{\sigma}$.

Beweis: Alle Größen sind wohldefiniert und endlich.

(i) Aus der Definition (9.3) erhalten wir sofort die Supermartingaleigenschaft und die Dominanz von V_n. Die Minimaleigenschaft zeigen wir durch eine Rückwärtsinduktion nach n.

Sei $(Y_n)_n$ ein anderes $(X_n)_n$ dominierendes Supermartingal. Zu zeigen ist $V_n \leq Y_n$. Die Behauptung ist richtig für $n = N$. Wir zeigen nun den Induktionsschritt von n nach $n-1$.

$$Y_{n-1} \geq E(Y_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \vee X_{n-1} \geq E(V_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \vee X_{n-1} = V_{n-1}.$$

(ii) Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned} E(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{A}_{n-1}) &= E(V_{n\wedge\overline{\sigma}} - V_{(n-1)\wedge\overline{\sigma}} \mid \mathcal{A}_{n-1}) = E(1\!\!1_{\overline{\sigma}\geq n}(V_n - V_{n-1}) \mid \mathcal{A}_{n-1}) \\ &= E(1\!\!1_{\overline{\sigma}\geq n}(E(V_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) - V_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

(iii) $E(Z_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) = E(V_n - M_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq V_{n-1} - M_{n-1} = Z_{n-1}$.

(iv) Im Fall $P(\tau \leq \overline{\sigma}) = 1$ gilt $Z_\tau = V_{\tau\vee\overline{\sigma}} - V_{\overline{\sigma}} = 0$. Im Fall $P(\tau \leq \overline{\sigma}) < 1$ argumentiere

$$\begin{aligned} E(Z_\tau) &= E(V_{\tau\vee\overline{\sigma}} - V_{\overline{\sigma}}) = E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}(V_\tau - V_{\overline{\sigma}})) \\ &= E(E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}V_\tau \mid \mathcal{A}_{\overline{\sigma}+1})) - E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}V_{\overline{\sigma}}) \leq E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}V_{\overline{\sigma}+1}) - E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}V_{\overline{\sigma}}) \\ &= E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}E(V_{\overline{\sigma}+1} \mid \mathcal{A}_{\overline{\sigma}})) - E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}V_{\overline{\sigma}}) \\ &< E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}X_{\overline{\sigma}}) - E(1\!\!1_{\tau>\overline{\sigma}}V_{\overline{\sigma}}) \leq 0. \end{aligned}$$

(v) Beachte $E(V_\tau) - V_0 = E(M_\tau) - M_0 + E(Z_\tau) - Z_0 = EZ_\tau$. Nach der vorhergehenden Aussage ist $E(Z_\tau = 0)$ äquivalent zu $\tau \leq \overline{\sigma}$.

q.e.d.

Korollar 80 *(i)* $E(X_\tau) \leq E(V_\tau) \leq V_0$.

(ii) $E(X_\tau) = V_0 \Rightarrow \underline{\sigma} \leq \tau \leq \overline{\sigma}$.

(iii) $E(X_{\underline{\sigma}}) = V_0 = E(X_{\overline{\sigma}})$.

(iv) *V_0 ist der Spielwert V.*

Beweis: i) Dies folgt aus der Dominiertheit und der Supermartingaleigenschaft.

ii) Aus $X_\tau \le V_\tau$ und $E(X_\tau) = E(V_\tau)$ folgt $X_\tau = V_\tau$. Dies impliziert $\underline{\sigma} \le \tau$. Die Obergrenze von τ ergibt sich aus dem Satz Satz 79 iv).

iii) Aus der Definition der Stoppzeiten $\underline{\sigma}$ und $\overline{\sigma}$ ergibt sich jeweils $X_{\underline{\sigma}} = V_{\underline{\sigma}}$ und $X_{\overline{\sigma}} = V_{\overline{\sigma}}$. Mit Satz 79 iv) folgt die Behauptung.

iv) $V := \sup_\tau E(X_\tau) \le \sup_\tau E(V_\tau) \le V_0 \le E(X_{\overline{\sigma}}) \le V$. q.e.d.

Lösung zu Eins verliert: Seien $Y_1, Y_2, \dots, Y_{30}$, uiv Zgn mit Gleichverteilung auf den Werten $1, 2, \dots, 6$. Sei S_n die $n-$te Partialsumme, $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ die natürliche Filtration.

$$U(., n) = \mathbb{1}_{Y_1 \ne 1, \dots, Y_n \ne 1} S_n.$$

Eine Rechnung zeigt, $X_n = U(., n)$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{1}_{Y_1 \ne 1, \dots, Y_n \ne 1} \left(\frac{5}{6} S_n + \frac{20}{6} \right).$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} S_n \ge 20 \quad &\Rightarrow \quad E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \le X_n \\ S_n < 20 \quad &\Rightarrow \quad E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) > X_n \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} S_n \ge 20 \quad &\Rightarrow \quad V_n \le X_n \\ S_n < 20 \quad &\Rightarrow \quad V_n > X_n \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\underline{\sigma} = \inf\{n \mid S_n \ge 20\} \qquad \overline{\sigma} = \inf\{n \mid S_n > 20\}.$$

Der Wert des Spieles ist $V = E(X_{\underline{\sigma}}) = E(X_{\overline{\sigma}})$.

(Übung: Warum taucht kein N in der Lösung auf?)

Lösung zu Letzte Eins: Seien $Z_1, \dots, Z_N$ unabhängige Zgn mit Bernoulliverteilung zu den bekannten Parametern $p_1, \dots, p_N$. Die Auszahlungsfunktion ist 1 bei genau der letzten Eins der Folge Z_n,

$$U(., n) = \mathbb{1}_{Z_n = 1} \mathbb{1}_{Z_{n+1} = 0} \dots \mathbb{1}_{Z_N = 0}.$$

Die Filtration ist die natürliche. Der Einfachheit halber nehmen wir $q_i = 1 - p_i > 0$ an. Berechne bzw. zeige durch Induktion

$$X_n = \mathbb{1}_{Z_n = 1} \prod_{j=n+1}^{N} q_j,$$

$$V_N = X_N, \qquad V_n = (1_{Z_n=1} \vee a(n+1)) \prod_{j=n+1}^{N}$$

$$a(n) := \sum_{j=n}^{N} p_j/q_j,$$

$$E(V_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) = \begin{cases} a(n) \prod_{j=n}^{N} q_j & \text{if} \quad n > n_0 \\ \\ a(n_0) \prod_{j=n_0}^{N} q_j & \text{if} \quad n \leq n_0 \end{cases},$$

$$n_0 := \inf\{0 \leq n < N,\ N \mid a(n+1) \leq 1\} \qquad \underline{\sigma} := \inf\{N, n \mid Z_n = 1,\ n \geq n_0\},$$

$$n_1 := \inf\{0 \leq n < N, N \mid a(n+1) < 1\} \qquad \overline{\sigma} := \inf\{N, n \mid Z_n = 1,\ n \geq n_1\},$$

$$V = V_0 = a(n_0) \prod_{j=n_0}^{N} q_j.$$

Im allgemeinen gilt $\underline{\sigma} = \overline{\sigma}$, da stets $a(n) \neq 1$ gilt. Jede optimale Stoppzeit liegt im allgemeinen zwischen $\underline{\sigma}$ und $\overline{\sigma}$ und, in diesem Fall, jede dazwischen ist auch optimal.

Die (früheste) optimale Stoppzeit ist

$$\tau = \inf\{n \geq n_0 \mid Z_n = 1\}.$$

Zur Überprüfung

$$\begin{aligned} E(U(.,\tau)) &= \sum_{n=n_0}^{N} E(1\!\!1_{\tau=n} 1\!\!1_{Z_{n+1}=0} \dots 1\!\!1_{Z_N=0}) \\ &= \sum_{n=n_0}^{N} \left(E(1\!\!1_{\tau=n}) \prod_{i=n+1}^{N} q_i \right) = \sum_{n=n_0}^{N} \frac{p_n}{q_n} \prod_{i=n_0}^{N} q_i = V. \end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zu Abschätzungen für den Spielwert. Die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ für $|x| < 1$ entwickelt um 0 ist

$$\ln(1+x) = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Hieraus erhalten wir leicht für positive x, da die Fehlerterme alternieren,

$$t_{2M}(x) \leq \ln(1+x) \leq t_{2M-1}(x)$$

$M \geq 1$ mit den abgebrochenen Taylorreihen $t_j(x) := \sum_{n=1}^{j}(-1)^{n+1}x^n/n$. Wir verwenden diese Abschätzung für $x \in [0, 1/2)$ angewandt auf $\ln(1-x) = -\ln(1+\frac{x}{1-x})$ in der Form

$$-t_{2M-1}(\frac{x}{1-x}) \leq -\ln(1-x) \leq -t_{2M}(\frac{x}{1-x}).$$

Im Falle $M = 1$ erhalten wir die Ungleichung

$$-\frac{x}{1-x} \leq \ln(1-x) \leq -\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{2(1-x)^2}.$$

Diese verwenden wir. Definiere $b_M := \sum_{n=n_0+1}^{N} t_M(\frac{p_n}{q_n})$. Es ergibt sich $b_1 = \sum_{n=n_0}^{N} \frac{p_n}{q_n}$ und $b_2 = b_1 - \frac{1}{2}\sum_{n=n_0}^{N} \frac{p_n^2}{q_n^2}$.

Lemma 81 *Sei $p_n \leq 1/2$ für $n \geq n_0$. Für jedes $M \geq 1$ gilt*

$$a(n_0)e^{-b_{2M-1}} \leq V \leq a(n_0)e^{-b_{2M}}.$$

Speziell

$$b_1 e^{-b_1} \leq V \leq b_1 e^{-b_2}.$$

Übung.

Lösung des Sekretärinnenproblems: Dies Problem ist ein Spezialfall der 'Letzten Eins' mit $Z_n = 1\!\!1_{Y_n > Y_1 \vee \ldots \vee Y_{n-1}}$, $p_n = 1/n$. Nach dem vorhergehenden ist dieses Problem gelöst mit Angabe des Spielwertes und allen optimalen Stoppzeiten. Wir bestimmen einzelne Größen noch genauer. Nach der Definition von n_0 und unter Verwendung von $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx < \frac{1}{n}$ erhalten wir

$$1 < a(n_0) = \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n-1} < \sum_{n=n_0}^{N} \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}dx = \ln\frac{N-1}{n_0-2}$$

$$1 \geq a(n_0+1) = \sum_{n=n_0+1}^{N} \frac{1}{n-1} > \sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}dx = \ln\frac{N}{n_0}$$

und damit

$$\frac{N}{e} < n_0 < \frac{N}{e} + 2 - \frac{1}{e}.$$

Die Abschätzungen ($M = 1$) aus dem Lemma angewandt auf den Spielwert $V = a(n_0)\prod_{j=n_0}^{N}(1-\frac{1}{j})$ ergeben

$$b_1 e^{-b_1} < V < b_1 e^{-b_1} e^{\frac{1}{2n_0-2}},$$

$$e^{-1} \leftarrow_{N\to\infty} e^{-1-\frac{e}{N+e-1}} < V < \frac{N}{N-e} e^{-1-\frac{e}{2N-2e}} \to_{N\to\infty} e^{-1}.$$

Hierbei haben wir benutzt $1 < a(n_0) = b_1 = a(n_0+1) + \frac{1}{n_0-1} \leq 1 + \frac{1}{n_0-1}$, $\sum_{n_0}^{N} \frac{1}{n^2-1} \leq \frac{1}{n_0} a(n_0) < \frac{1}{n_0-1}$, $-b_2 \leq -b_1 + \frac{1}{n_0-1}$. Der Spielwert ist asymptotisch $1/e$. **Interpretation:** Die ersten $\frac{N}{e}$ Sekretärinnen werden nur interviewed, aber nicht genommen. Danach wird die erste genommen, die besser ist als alle vorhergehenden. Mit dieser Auswahlregel findet man mit einer Wahrscheinlichkeit von rund $e^{-1} \sim 0,37...$ die absolut beste Sekretärin.

9.1.2 Unendlicher Horizont

Sei $(U, (\mathcal{A}_n)_{n\in T})$ ein allgemeines Stoppproblem und der Zeitparameterraum $T \subset \overline{I\!N}_0$ sei abzählbar. Man spricht von einem unendlichen Horizont. Wir betrachten zuerst $T = I\!N_0$.

Sei $N \in I\!N$. Wir verwenden die Notation $V^N, X^N, \underline{\sigma}^N, \overline{\sigma}^N, M^N, Z^N$ usw. für das Stoppproblem mit endlichem Horizont $\{1, \dots, N\}$. Die Snell-Einhüllende $V_n^N, 1 \leq n \leq N$, zu der Filtration $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ und der Auszahlung $X_1, \dots, X_N$ ist punktweise monoton aufsteigend gegen einen Grenzwert

$$V_n := \lim_N V_n^N.$$

Sei

$$\underline{\sigma} := \inf\{n \mid X_n \geq E(V_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)\} \qquad \overline{\sigma} := \inf\{n \mid X_n > E(V_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)\}.$$

$$M_n := V_{n\wedge\overline{\sigma}} \qquad Z_n := V_{n\vee\overline{\sigma}} - V_{\overline{\sigma}}.$$

Beachte $V_n = M_n + Z_n$. Viele Resultate aus dem endlichem Fall übertragen sich.

Satz 82 *Sei U beschränkt und τ eine Stoppzeit.*
(i) $(V_n)_n$ ist die Snell Einhüllende von $(X_n)_n$.
(ii) V_n erfüllt $V_n = X_n \vee E(V_{n+1} \mid \mathcal{A}_n)$.
(iii) M_n ist ein Martingal.
(iv) Z_n ist ein Supermartigal mit $E(Z_\tau) < 0 \Leftrightarrow P(\tau > \overline{\sigma}) > 0$.
(v) $E(V_\tau) = E(V_0) \Leftrightarrow \tau \leq \overline{\sigma}$.

Korollar 83 *(i) $E(X_\tau) \leq V_0$.*
(ii) $E(X_\tau) = V_0 \Leftrightarrow X_\tau \geq V_\tau$ fast sicher.
(iii) $E(X_\tau) = V_0 \Rightarrow \underline{\sigma} \leq \tau \leq \overline{\sigma}$.
(iv) Sind $\underline{\sigma}$ oder $\overline{\sigma}$ endliche Stoppzeiten, so gilt $E(X_{\underline{\sigma}}) = E(V_0)$ bzw. $E(X_{\overline{\sigma}}) = E(V_0)$.
(v) V_0 ist er Spielwert der Stoppwert.

Der Beweis ist einfach und leicht.

Bemerkung: i) Im allgemeinen gibt es keine optimale Stoppzeit τ. Nehme z.B. $X_n \equiv 1 - \frac{1}{n}$. Hierzu gibt es keine optimale Stoppzeit, denn der Spielwert ist 1 und keine endliche Stoppzeit kann dies erreichen.

ii) Ist der Spielwert V endlich, so gibt es stets eine $\epsilon-$optimale Stoppzeit. Verwende dazu V_0^N konvergiert aufsteigend gegen den Spielwert.

iii) Zum Abschluß betrachten wir einen unendlichen Horizont $T = \overline{I\!N}$ einschließlich ∞. Die Snell Einhüllende ist

$$V_n := \lim_N V_n^N,$$

wobei V^N die Snell-Einhüllende zu den endlichen Problemen bezüglich dem endlichen Zeitparameterraum $\{1, \ldots, N, \infty\}$ bezeichnet. Wir überlassen dies dem Leser als Übung.

Bemerkung: Die angegebenen Konstruktion optimaler Stoppproblemlösungen ist (in gewissem Sinne) konstruktiv. Sie benutzte nur(!) Eigenschaften der Snell-Einhüllenden für endlichen Horizont und dies wurde ausgedehnt.

Algorithmischer Zugang:

Hier ist ein anderer, algorithmischer Zugang zu der Snell-Einhüllenden. Definiere zu X_n die Folge $(A_n^N)_{n\in T}$ für $N \in I\!N$ durch $A_n^1 := X_n$ und rekursiv

$$A_n^{N+1} := X_n \vee E(A_{n+1}^N \mid \mathcal{A}_n).$$

Die Folge $(A_n^N)_N$ ist monoton steigend in N für jedes feste n. Sei A_n^∞ der Grenzwert. Dieser erfüllt

$$A_n := X_n \vee E(A_{n+1} \mid \mathcal{A}_n).$$

Proposition 84 *Für endlichen Horizont N ist $A_n^N = A_n^\infty$ die Snell-Einhüllende, für unendlichen Horizont ist A_n^∞ die Snell-Einhüllende.*

Beweis: Einfach.

Abstrakter Zugang: Das Prinzip der Snell Einhüllenden ist sehr allgemein. Wir wollen es in einen abstrakten Rahmen setzen.

Proposition 85 ** Sei $(X_n)_n$ ein positiver stochastischer Prozeß adaptiert zu einer Filtration $\mathcal{A}_n$, $n \in T \subset I\!N$. Es gebe ein Supermartingal, welches (X_n) dominiert. Dann existiert die Snell Einhüllende.*

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Supermartingale $Z = (Z_n)_n$, die $(X_n)_n$ dominieren. $\mathcal{M}$ hat folgende Eigenschaften.

- $\mathcal{M}$ ist nicht leer. Klar.
- $Z \equiv 0$ ist eine untere Schranke von $\mathcal{M}$. Klar.
- $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen bezüglich dem punktweisen Infimum zweier Elemente.

Das Infimum zweier Supermartingale ist ein Supermartingal.

- $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen bezüglich einer absteigenden Folge von Supermartingalen.

Nehme das Infimum der abzählbaren vielen Supermartingale.

- Für alle n gibt es ein $\overline{Z} \in \mathcal{M}$ mit

$$E(\overline{Z}_n) = \inf_{Z \in \mathcal{M}} E(Z_n).$$

Sei $Z^i \in \mathcal{M}$ eine Folge aus M mit $\inf_i E(Z^i_n) = \inf_{Z \in \mathcal{M}} E(Z_n)$. Dann tut es $Z := \lim_{i \to \infty} \inf_{j \leq i} Z^i$.

- Es gibt ein $\overline{Z} \in \mathcal{M}$ mit

$$E(\overline{Z}_n) = \inf_{Z \in \mathcal{M}} E(Z_n)$$

für alle n.

Wähle für jedes n ein Z^n wie in der Teilbehauptung oben. Dann tut es $Z = \lim_n Z^n$.

- Dies letzte Z ist die Snell Einhüllende.

Den genauen NAchweis der einzelnen Eigenschaften überlassen wir dem Leser als Übung. q.e.d.

9.2 Kasinospiele

Eine geschlossene Theorie für Kasinospiele [11], im Englischen Gambling Houses, oder für Markoffsche Entscheidungstheorie zu entwickeln geht über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus. Es würde uns zu weit weg von Martingalen führen, obwohl diese verkleidet als harmonische Funktionen wieder auftauchen. Wir zeigen die Argumentation mehr exemplarisch an dem wohl bekanntesten Beispiel aus 'How to gamble if you must' [4][11] für Kasinospiele: Ein Spieler will diesen Abend das Kasino mit dem Betrag 10000.- verlassen, alles andere ist zweitrangig. Kredit wird nicht gegeben. Wie soll er spielen?

Modell: Kasinospiele Ein Kasinospiel wird beschrieben durch ein Tripel (E, A, u). Die *Zustandsmenge* E ist eine nichtleere Menge versehen mit einer σ-Algebra $\mathcal{E}$. Die Elemente von E heißen **Zustände.** Die *Aktionsmengenfamilie* $A = (A_e)_{e \in E}$ ist eine Familie von Teilmengen A_e, $e \in E$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathcal{E})$. Ein Element $a \in A_e$ heißt *Aktion* bzw. *verfügbare Aktion des (Spielers im) Zustands* e. Die im Zustand e verfügbare Aktionsmenge A_e

enthält stets die Aktion δ_e und ist konvex. Die *Nutzenfunktion* $u : E \to \overline{I\!R}^+$ ist eine meßbare Abbildung von E in die erweiterten reellen Zahlen.

Eine *Strategie* s ist eine Abbildung von E in die W-maße auf E mit $\sigma(e) \in A_e$. Anders formuliert, s ist ein Schnitt durch die Aktionsmengen. Zu jedem Zustand e wählt s genau eine Aktion $a \in A_e$ aus.

Zu jeder Strategie s und jedem W-maß π auf $(E, \mathcal{E})$ assoziieren wir einen (Markoff) Prozess auf einem nicht näher spezifiziertem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dies ist eine Folge von Zgn

$$X_n := X_n^{\pi,s} : \Omega \mapsto E, \quad n \in I\!N,$$

mit $X_1 \sim \pi$ und mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} \in \cdot \mid X_n = e_n, X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_1 = e_1) = s(e_n)(\cdot),$$

fast sicher. (Für die Potentialpuristen, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ kann als Produktraum $E^{I\!N}$ über E versehen mit der Produkt-σ-Algebra gewählt werden mit den Projektionen X_n. Das W-maß P ist das projektive Maß zu den Übergangskernen

$$E \times \mathcal{E} \ni e \times A \mapsto K(e, A) = \sigma(e)(A).$$

Diese müssen als meßbar vorausgesetzt werden.)

Der Nutzen einer Strategie s bei Start mit der Verteilung π bei $n-1$ Aktionen ist $E(u(X_n^{\pi,s}))$. Der maximal erreichbare Nutzen ist höchstens $\sup_s E(u(X_n^{\pi,s}))$. Der *Spielwert eines Kasinospiels* bei Start in π) ist

$$V(\pi) := \lim_{n\to\infty} \sup_s E(u(X_n^{\pi,s})).$$

Der Limes existiert, da $\sup_s E(u(X_n^{\pi,s}))$ monoton steigend in n ist. (Beachte die Möglichkeit im Zustand zu bleiben.)

Die *Spielwertfunktion eines Kasinospiels* ist die Funktion $V : E \to \overline{I\!R}$

$$V(e) = V(\delta_e).$$

Die mathematische Problemstellung ist es, $V : E \to \overline{I\!R}$ zu finden und eine gute Strategie s dazu. Zu jedem n gibt es eine gute Strategie (für $\sup_s E(u(X_n^{\pi,s}))$ (via Rückwärtsinduktion), aber wir suchen eine Strategie unabhängig von n.

Lösung: Eine Funktion $S : E \to \overline{I\!R}$ heißt die kleinste, die Nutzenfunktion u dominierende harmonische Funktion, falls $u \le S$ gilt, S harmonisch ist,

$$S(e) = \sup_{a \in A_e} \int_E S \, da$$

und sie die kleinste Funktion mit dieser Eigenschaft ist. Wir verwenden im folgenden den Namen Snell-Einhüllende.

Satz 86 (Dubins-Savage) *Unter schwachen Voraussetzungen ist die Spielwertfunktion V die Snell-Einhüllende. Es gilt die Formel*

$$V(\pi) = \int_E V \ d\pi.$$

Dieser Satz charakterisiert die Spielfunktion analytisch durch gewisse Eigenschaften. Damit ist sie rekursiv erreichbar. Definiere $u_0 = u$ und rekursiv

$$u_{n+1}(e) := \sup_{a \in A_e} \int_E u_n \ da.$$

Dann konvergiert u_n punktweise aufsteigend gegen V.

Sollten wir durch einen Geniestreich eine Funktion als Spielfunktion vermuten, so müßten wir nur die analytischen Eigenschaften nachrechnen. Dies ist **wesentlich einfacher** als die Funktion selber zu finden.

Ist die Spielfunktion bekannt, so können wir dazu stets eine gute Stoppzeit konstruieren. Wähle aus der Aktionsmenge A_e die Teilmenge $\overline{A}_e$ derjenigen Aktionen aus, die

$$V(e) = \int_E V \ da$$

erfüllen (oder aus technischen Gründen recht nahe kommen). Sei $\overline{E}$ die Menge der Zustände e mit $u(e) = V(e)$ (oder sehr nahe). Zur Auswahl einer optimalen Stoppzeit reicht es nur Stoppzeiten s zu betrachten, die $s(e) = \delta_e$ für $e \in \overline{E}$ und $s(e) \in \overline{A}$ für alle $e \in E \backslash \overline{E}$ erfüllen. Für diese ist $V(X_n^{\pi,s}$ ein Martingal! Die Strategie ist optimal, falls $\lim_n P(X_n^{\delta_e,s} \in \overline{E}) = 1$ (oder dicht) für alle $e \in \overline{E}$ gilt. Weiterhin, ein Element der konvexen Aktionsmenge A_e heiße extremal oder reine Aktion, falls es sich nicht als Linearkombination anderer Elemente aus A_e darstellen läßt. Falls es eine optimale Strategie gibt, dann gibt es häufig auch eine, die nur reine Aktionen aus $\overline{A}_e$ verwendet. (Siehe die Beispiele Optimales STоppen im Gegensatz zum Beispiel Roulettespiel.)

Optimales Stoppen: Optimale Stoppprobleme sind Spezialfälle von Kasinospielen. Zur Verdeutlichung geben wir eine Darstellung an. Die optimale Strategie für das Kasinospiel liefert in diesen Fällen auch eine optimale Stoppzeit. Die Spielwertfunktion V erkennen wir als Snell-Einhüllende wieder.

Eins verliert als Kasinospiel: Ein Zustand $e = (e_1, \ldots, e_{n-1}),\ 1 \leq n \leq N+1$ wird beschrieben die Folge der Ergebnisse der ersten $n-1$-Teilspiele. Die möglichen reinen Aktionen im Zustand e sind Verbleiben in dem Zustand oder erneutes würfeln. Die Aktionenmenge besteht aus allen konvexen Kombinationen der reinen Aktionen. Die reinen Aktionen sind formal das Punktwahrscheinlichkeitsmaß δ_e und das W-Maß $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\delta_{(e,i)}$ durch hinzufügen der entsprechenden Information des n Teilspielausganges.

Die Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$u(e) = 1\!\!1_{\forall i \quad 2 \le e_i \le 6} \sum_i e_i.$$

Das Startmaß ist das Punktmaß auf $\emptyset$.

Die Kasinofunktion V existiert und wurde bereits explizit berechnet (Übung). Es gibt optimale Strategien dazu. Diese können wir so wählen, daß nur reine Aktionen verwendet werden, das Verbleiben oder das Würfeln. Diese Strategie entspricht der Stoppzeit, die wir bereits konstruiert haben, würfle solange wie die Augenzahl strikt kleiner als 20 ist. Die Spielwerte sind die gleichen.

Alternativ könnten wir den Zustandsraum $I\!N_0$ wählen. Das Ergebnis ist natürlich dasselbe.

Letzte Eins als Kasinospiel: Ein Zustand $e = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ wird beschrieben durch die Realisationen der Zgn $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$. Die reinen Aktionen in e sind das Verbleiben und ein neuer Wurf. Die Aktionsmenge A_e besteht aus allen konvexen Kombinationen dieser.

Die Nutzenfunktion ist gegeben durch

$$u(e) = 1\!\!1_{e_{n-1}=1} b_n$$

mit e_{n-1} das Ergebnis des $n-1$-ten Spiels und $b_n = \prod_{j=n}^{N} q_j$ ist die Wahrsch., das die Bernoulli ZGn $Z_n, \ldots, Z_N$ keine 1 mehr zeigen.

Die Kasinofunktion V existiert (kann und wurde hier ganz explizit berechnet, Übung). Es gibt optimale Strategien dazu. Diese können wir so wählen, daß nur reine Aktionen verwendet werden, das Verbleiben oder Werfen. Diese Strategie entspricht der Stoppzeit, die wir bereits konstruiert haben, werfe bis zu einer berechneten Zahl n_0 und verbleibe bei der nächsten 1.

Alternativ können wir einen Zustand beschreiben durch $\{0, 1\} \times I\!N$. Hierbei spielt $I\!N$ die Rolle der Zeit und $0, 1$ steht für das ERgebnis von Z_{n-1}.

Sekretärinnenproblem: Die beste Sekretärin findet man analog zum Stoppproblem Letzte Eins.

Bemerkungen zur Modellbildung:

i) Die Zustandsmenge E wird abhängig vom Problem frei gewählt. Hierbei gibt es eventuell viele gute Möglichkeiten.

ii) $\delta_e \in A_e \neq \emptyset$. Jeder Zustand erlaubt mindestens eine Aktion, das Verbleiben. Dies Annahme macht die mathematische Argumentation einfacher, aber ist keine echte inhaltliche Einschränkung. (Umformulieren des Modells.)

iii) A_e konvex. Ein Spieler kann aus den möglichen Aktionen bzw. W-maßen eines zufällig auswählen, eventuell auch durch ein Zusatzexperiment. Seien a_0 und a_1 mögliche Aktionen. Dann erlauben wir dem Spieler abhängig von einem

Münzwurf B die Aktion a_B zu wählen. Ist B Bernoulli(p) verteilt, so entsprich dies dem Maß $pa_1 + (1-p)a_0$. Allgemeiner, mit einer Verteilung μ auf A_e kann der Spieler die Aktion $\int_{A_e} a\mu(da)$ wählen. Daher kann A_e oEdA konvex gewählt werden (und üblicherweise schwach* abgeschlossen). Ist A_e abgeschlossen, so ist A_e die konvexe Hülle der extremalen Elemente.

iv) Die Nutzenfunktion u ist in Realität eventuell nur auf einer Teilmenge der Zustände definiert. Dann erweitern wir u geeignet auf ganz E, z.B. durch 0. Auch Nutzenfunktionen mit negativen Werten lassen sich durch Abwandlungen behandeln. Positive Nutzenfunktionen haben den Vorteil, daß die Integrale darüber stets wohldefiniert sind.

v) Zur Konstruktion von Spielkasinos hilft manchmal die Einführung eines Zeitparameters.

vi) Wir setzen stets voraus, daß alle Abbildungen hinreichend meßbar sind und alles wohldefiniert ist. Wir wollen dies hier nicht vertiefen, Dubins-Savage **??**.

9.2.1 How to gamble if you must

Diese Problemstellung stammt aus dem Buch ' How to gamble if you must ' von Dubins und Savage. Es diente als Aufh änger zur Entwicklung der Spielkasinotheorie.

Ein Spieler geht in ein Spielkasino mit einem gewissen Anfangskapital. Sein Ziel ist es, mit mindestens z Geldeinheiten das Kasino zu verlassen, alles andere ist zweitrangig. Kredit wird nicht gegeben. Der Einfachheit halber werden hinreichend viele Spiele gespielt. Kredit wird nicht gegeben. Was ist seine beste (ehrliche) Strategie?

Eine Spielstrategie des Spielers entspricht einer Auswahl der Teilspiele und der jeweiligen Einsätze. Einige Reduktionen sind offensichtlich. Hat der Spieler bereits z oder mehr Kapital angesammelt, so ist es optimal zu stoppen. (Mathematische Spieler sind rational und tun dies.) Es ist für ihn bedeutungslos, mit einem Gewinn echt mehr als z aufzuhören. Es kann im Folgeschluß nur vorteilhaft für ihn sein, seine Strategie so zu modifizieren, daß er nie mit mehr als z enden könnte. Es ist sinnvoll weiterzuspielen, bis entweder das Ziel erreicht ist oder kein Geld mehr da ist. All diese weisheiten sollten aus dem Modell ableitbar sein.

Die Entscheidung über die Höhe des neuen Einsatzes hängt rational (deterministisch oder randomisiert) nur auf dem derzeitigen Kapitalstand ab. Eine zeitliche Komponente lassen wir ausser acht. Wir werden nur das Minimalmodell angeben. Kompliziertere Modelle können auch mehr Aspekte berücksichtigen.

Roulette als Spielkasino: Einen Zustand e des Spielers beschreiben wir ausschließlich durch seinen Kapitalstand. Die reinen Aktionen in einem Zustnd

e sind das Spiel eines angebotenen Teilspiels mit dem gesamten Einsatz oder das Verbleiben. Die Aktionsmenge zu e ist die konvexe Hülle der reinen Aktionen. Die Nutzenfunktion u ist $u(e) = \mathbb{1}_{e \geq z}$.

Hat der Spieler im Zustand e ein Teilspiel mit Ausgang B und seine Einsatzhöhe D gewählt, so gelangt er in den neuen Zustand

$$e \to e + DB.$$

Dies führt auf folgendes allgemeinere Modell: Nur der einfachheit halber nehmen wir an, der Spieler spielt nur ein Spiel, z.B. Roulette auf die ' Rot-Schwarz ' Chance. Diese hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit p für den Spieler.

Roulette als Semimartingal: Seien $B_1, B_2, \ldots,$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen mit Bernoulli Verteilung zum Parameter p. Sei $(\mathcal{A}_n)$ eine Filtration zu $B_1, \ldots, B_n$. Sei (D_n) ein vorhersehbarer ($(\mathcal{A}_{n-1})$ meßbar) Prozeß. Definiere iterativ den Prozess M_n durch $M_0 \in \{0, \ldots, z\}$ und

$$M_{n+1} = M_n + D_n(2B_n - 1).$$

Hierbei bezeichnet D_n den vom Spieler vorgegebenen Wetteinsatz zum $n-$ten Spiel an. Wir fordern stets $0 \leq D_n \leq M_n$.

Was ist die beste Einsatzhöhe (D_n) des Spielers, um $\lim_n E(\mathbb{1}_{M_n \geq z})$ zu maximieren bei vorgegebenm Startpunkt M_0? Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, $p < \frac{1}{2}$ und $p > \frac{1}{2}$. Im letzteren Fall möchten wir recht lange spielen mit kleinen Einsätzen, denn das Gesetz der Großen Zahl arbeitet für uns. Im ersten jedoch arbeitet es gegen uns und wir möchten lieber schnell zum Ziel kommen.

Spiele zaghaft in guten und kühn in schlechten Spielen.

9.2.2 Vorteilhafte Spiele

Wir wollen ein (einfaches) Beispiel im Roulettespiel mit 'Rot-Schwarz' Chance durchrechnen. Der Spieler setzt immer auf Rot und gewinne mit Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ gegen die Bank. Dies Spiel ist vorteilhaft für den Spieler in dem Sinne, daß der Spieler nach dem Gesetz der Großen Zahl ein Vermögen verdienen kann. Dies Spiel ist aus diesem Grunde unrealistisch, zugegeben, aber mit Black-Jack kann der Spieler tatsächlich ein Vermögen verdienen [15]. (Genauer wäre könnte, denn......)

Der Einfachheit wollen wir als Einsatz nur ganze Vielfache einer Einheit zulassen.

Vermutung: Das vorsichtige Spiel ist optimal. Bei vorsichtiger Spielweise wird stets genau eine Einheit gesetzt, der kleinste zulässige Einsatz neben der 0. Weshalb vermuten wir, diese Spielweise ist optimal? Hierzu ein einfaches Beispiel. Sei das Spielziel $z = 4$ und das Anfangskapital $x = 2$. Setzen wir im ersten Spiel 2 Einheiten, so erreichen wir das Ziel 4 bei Gewinn mit W-keit p oder sind pleite bei Verlust. Bei vorsichtiger Strategie setzen wir stets nur eine Einheit. Nach zwei Spielrunden ist unser Kapital entweder 0 oder 2 oder 4 mit Wahrscheinlichkeit q^2 bzw. $2pq$ bzw. p^2. Nur bei 2 spielen wir weiter und landen irgendwann beim Ziel oder sind pleite. Das Verhältnis der W-keiten ins Ziel zu kommen zum Pleitegehen ist p^2 zu q^2. Hieraus erhalten wir W-keit ins Ziel zu kommen ist $\frac{p^2}{p^2+q^2}$ und dies ist strikt größer als p.

Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit: Im ersten Schritt berechnen wir die durchschnittliche Erfolgswahrscheinlichkeit $f(x)$ mit der vorsichtigen Spielstrategie s bei Anfangskapital x und Ziel z. Sei (X_n) der zugehörige Prozess. Die Erfolgswahrscheinlichkeit $f(x) := \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq z)$ erfüllt das Gleichungssystem

$$f(x) = pf(x+1) + qf(x-1) \tag{9.6}$$

$x = 1, \dots, z-1$ mit den Nebenbedingungen $f(0) = 0$ und $f(z) = 1$. Dies ergibt sich aus einmaligem Spiel.

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (9.6) ist

$$a + b\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

mit rellen Zahlen a, b. (Weshalb gibt es keine weiteren Lösungen?) Einsetzen der Randwerte $f(0)$ und $f(z)$ ergibt $a + b = 0$ und $b = \frac{p^z}{q^z - p^z}$.

• $f(x) > pf(x+y) - f(x-y)$ für $1 < y \leq x \wedge (z-x)$.

Eine Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} pf(x+y) - qf(x-y) - f(x) &= b(\frac{q}{p})^x \left[p((\frac{q}{p})^y - 1) + q((\frac{q}{p})^{-y} - 1)\right] \\ &= b(\frac{q}{p})^x (p^y - q^y) p^{1-y} q^{1-y} (p^{y-1} - q^{y-1}) < 0. \end{aligned}$$

• f dominiert die Nutzenfunktion und ist harmonisch.

Nachrechnen.

• f ist die Spielwertfunktion.

Einerseits gilt $V \leq f$ da f dominiert und harmonisch ist. Andererseits ist $f(x)$ durch die angegebene Strategie erreichbar und damit $f \leq V$.

• Die vorsichtige Strategie ist optimal.

Unter der vorsichtigen Strategie s bei Start in x gilt

$$E(u(X_n)) \to_n P(X_\tau = z) = f(x).$$

q.e.d.

9.2.3 Nachteilige Spiele

Der Spieler setzt beim Roulette stets auf Rot und gewinne mit Wahrscheinlichkeit $p < 1/2$ gegen die Bank. Dies Spiel ist nachteilig für den Spieler, da er nach dem Gesetz der Großen Zahl auf lange Sicht verliert.

Vermutung: Die kühne Spielweise,

Setze soviel wie möglich, nicht mehr als nötig.

ist optimal. Weshalb könnte diese Spielweise gut oder sogar optimal sein? Auf lange Sicht gesehen wird der Spieler nach dem Gesetz der Großen Zahl verlieren. Er muß daher sein Ziel schnell erreichen oder garnicht. Dies kann er durch große Einsätze bewirken. Der Extremfall ist die kühne Spielweise.

Hier ein anderer heuristischer Grund. Aus Sicht der Bank ist das vorsichtige Spiel des Spielers optimal. Was für den einen Kontrahenten gut ist, muß für den anderen schlecht sein. Die vorsichtige Spielweise ist die schlechteste Spielstrategie aus der Sicht des Spielers. Folglich muß der Spieler mehr riskieren, möglichst 'weit weg' vom vorsichtigen Spiel sein und dies extrem. Die kühne Spielstrategie bietet sich als ein Extrem an.

Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeit: Im ersten Schritt berechnen wir die durchschnittliche Erfolgswahrscheinlichkeit $f(x)$ mit der kühnen Spielstrategie s bei Anfangskapital x und Ziel z, genauer $f(x) := \lim_n P(X_n \geq z)$. Hierbei ist (X_n) der zugehörige Prozess bei Start in x. Wenn unsere Vermutung richtig ist, sollte f die Spielwertfunktion sein. Wir lassen alle Einsatzhöhen ohne Kredit zu.

Die Funktion $f : [0, z] \to I\!R$ erfüllt die Gleichung

$$f(x) = 1\!\!1_{x \leq z/2} p f(2x) + 1\!\!1_{x < z/2}(p + q f(2x - z)). \tag{9.7}$$

$0 < x < z$ mit den Nebenbedingungen $f(0) = 0$ und $f(z) = 1$. Dies ergibt sich aus einmaligem Spiel mit der kühnen Strategie.

Die Lösung des Gleichungssystems (9.7) ist nicht einfach. Die Lösung kann jedoch explizit gegeben werden: $f(x) =: F(x/z)$ ist eine Lösung mit

$$F(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i p^i \left(\frac{q}{p}\right)^{\sum_{j=1}^{i-1} y_j}$$

wobei $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i 2^{-i}$ die binäre Darstellung von y ist. (Nachrechnen.)

(Wie findet man diese Lösung? Definiere die Zg $W := \sum_{i=1}^{\infty}(1 - B_i)2^{-i}$ mit B_i das Resultat Gewinn (= +1) oder Verlust (= 0) im i-ten Spiel. Die Zg W erfüllt die Verteilungsfixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \frac{1-B}{2} + \frac{W}{2} \tag{9.8}$$

mit B, W unabhängig. Die Verteilungsfunktion $F(x) = P(W \leq x)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$F(y) = \mathbb{1}_{y \leq 1/2} pF(2y) + \mathbb{1}_{y<1/2}(p + qF(2y-1)) \tag{9.9}$$

mit $y \in [0, 1]$ und den Randbedingungen $F(0) = 0, F(1) = 1$. Damit ist $f(x) := F(x/z)$ eine Lösung des Gleichungssystems (9.7).)

Wir nehmen an, die Lösung des Gleichungssystems (9.7) ist eindeutig.

• f dominiert u und ist harmonisch.

Nach Konstruktion gilt $u \leq f$. Die Harmonizität wird nachgerechnet. Dies ist umständlich und langatmig, aber elementar machbar.

• f ist die Spielwertfunktion.

Einerseits gilt $V \leq f$ da f dominiert und harmonisch ist. Andererseits ist der Spielwert $f(x) = \lim_n P(X_n \geq z)$ bei Start in x durch die kühne Strategie erreichbar und damit $f \leq V$.

Die kühne Strategie ist die tatsächlich die optimale Strategie und f die Spielwertfunktion.

10 Verzweigungsprozesse

10.1 Verzweigungsprozesse

Historischer Ausgangspunkt für die Verzweigungsprozesse war die Genealogie, insbesondere die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Familiennamens. Als Nachkommen (=Kinder) zählen wir hier nur die Nachkommen, die den Familiennamen tragen und weitergeben können. Die Anzahl dieser Nachkommen sei unabhängig mit stets gleicher Verteilung. Uns interessiert die Größe der n-ten Generation.

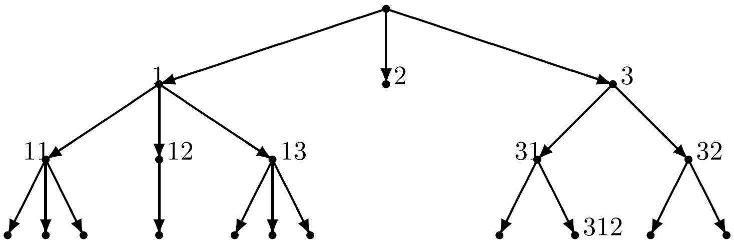
Dies Problem wurde von Francis Galton 1873 gestellt und von Reverend Henry Watson 1874 in einer gemeinsamen Arbeit gelöst. Der Originalprozeß heißt daher auch Galton-Watson Prozeß. Heutzutage gibt es viele Variationen davon, mit Immigration, sexueller Fortpflanzung, Altersabhängigkeit, stetiger Zeit, Zeitabhängigkeit, Gewichten, zufälliger Umgebung, usw.

Mathematisches Modell: Seien $X_{n,i},\ 1 \leq i, n \in \mathbb{N}$, uivZg mit Werten in den positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_+$. Der Galton-Watson Prozess ist der Prozeß

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i},$$

$n \in \mathbb{Z}_+$. Die Anfangsgröße Z_0 ist eine Zg unabhängig von allem und mit Werten in den positiven ganzen Zahlen. Der Einfachheit halber nehmen wir wollen $Z_0 = 1$. Weiterhin seien alle ersten Momente endlich, was gleichbedeutend ist mit $m := E(X_\bullet) < \infty$. Mit σ^2 bezeichnen wir die Varianz von $X_\cdot$, die nicht endlich sein muß. Um triviale Fälle auszuschließen seien die X Zgn nicht identisch 0 oder 1.

Interpretation: Die Größe $X_{n,i}$ gibt die Anzahl der Nachkommen des i-ten Individuums der n-ten Generation an. Z_n entspricht der Anzahl der Namensvertreter in der n-ten Generation. Ein 'typischer' Stammbaum sieht etwa folgendermaßen aus:



Eine besondere Rolle spielt das Martingal

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n}.$$

Proposition 87 *W_n ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_{j,i},\ 1 \leq i \in \mathbb{N}, j \leq n)$ (oder auch der natürlichen Filtration).*

Beweis:

$$\begin{aligned} E(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \frac{1}{m^{n+1}} E(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n+1,i} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_k \mathbb{1}_{Z_n=k} E(\sum_{i=1}^{k} X_{n+1,i} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_k \mathbb{1}_{Z_n=k} mk = \frac{Z_n}{m^n} = W_n. \end{aligned}$$

q.e.d.

Das positive Martingal W_n konvergiert fast sicher gegen einen Grenzwert, genannt W_∞.

Dies war die Vorwärtsblickrichtung, in Richtung der Zeit, mit einem Resultat bezüglich Zgn. Nun zur Rückwärtsrichtung, mit einer Aussage über die Verteilung. Die Verteilung von M_n erfüllt die folgende Gleichung in Verteilung

$$W_{n+1} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{X} \frac{1}{m} W_{n,i}. \tag{10.1}$$

Die Zgn $X, W_{n,i}, i \in \mathbb{N}$ sind unabhängig. X ist verteilt wie die $X_.$ Zgn bisher und $W_{n,i}$ hat die Verteilung wie W_n. Anstelle der Verteilungsgleichheit hätten wir auch punktweise Gleichheit durch Angabe spezieller Versionen der $W_{n,i}$ geben können. Nehme als diese Versionen die Nachfolger des $i-$ten Kindes der ersten Generation und als X nehme Z_1.

Mit $W_n \overset{f.s.}{\to}_n W_\infty$ erhalten wir die Fixpunktgleichung

$$W_\infty \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{X} \frac{1}{m} W_{\infty,i}. \tag{10.2}$$

10.1.1 Aussterbewahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Aussterbewahrscheinlichkeit des Galton-Watson Prozesses betrachten.

Sei

$$q_n := P(Z_n = 0)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß der Prozeß in $n-$ter Generation ausgestorben ist.
Die Aussterbewahrscheinlichkeit q_n ist monoton steigend in n gegen die Aussterbewahrscheinlichkeit $q := P(\exists n: \ Z_n = 0)$ des Galton-Watson Prozesses. Beachte, daß q stets kleiner als

$$q_W := P(W_\infty = 0)$$

ist. Im Falle $m < 1$ gilt Gleichheit, da $E(Z_n) = m^n$ gegen 0 fällt und damit q_n gegen 1 konvergiert.

Sei $p_k := P(X_. = k)$ und sei $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n(s) := E(s^{Z_n})$ die erzeugende Funktion von Z_n. Die Funktion $f = f_1$ ist ebenfalls die erzeugende Funktion von $X \overset{d}{=} Z_1$,

$$f(s) := E(s^X) = \sum_k s^k p_k.$$

Proposition 88 *Die erzeugenden Funktionen erfüllen*

$$f_{n+1} = f \circ f_n = f_n \circ f.$$

Die Aussterbewahrscheinlichkeiten erfüllen die Gleichung

$$q_{n+1} = f(q_n).$$

q ist der kleinste Fixpunkt von f. Die Aussage $q < 1$ ist äquivalent zu $m \leq 1$.

Beweis: Eine Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} f_{n+1}(s) &= E(s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}}) = E(\sum_k 1\!\!1_{Z_n=k} \prod_{i=1}^{k} s^{X_{n,i}}) \\ &= E(\sum_k 1\!\!1_{Z_n=k} f_n^k(s)) = f(f_n(s)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt ebenfalls $f_{n+1} = f_n \circ f$.

Aus der Beobachtung $f_n(0) = q_n$ erhalten wir sofort $q_{n+1} = f(q_n)$.

Die Funktion f ist aufsteigend und konvex. Aus der Konvexität erhalten wir die Stetigkeit von f, zumindest im offenen Intervall $(0, 1)$. Damit ist q ein Fixpunkt von f,

$$f(q) = f(\lim_n q_n) = \lim_n f(q_n) = \lim_n q_{n+1} = q.$$

Ebenfalls wegen der Konvexität von f hat die Funktion $f(s) - s$ in s höchstens zwei Nullstellen. Eine Nullstelle ist $1 = f(1)$. Es gibt genau dann eine weitere Nullstelle in $[0, 1)$ falls die Ableitung

$$f'(1) = \lim_{s\to 1} f'(s) = \sum_k kp_k = m$$

strikt größer als 1 ist. Elementare Überlegungen zeigen, siehe zur Anschauung das folgende Bild, daß die Folge $f(q_n)$ gegen den jeweils kleineren der möglichen Fixpunkte konvergiert.

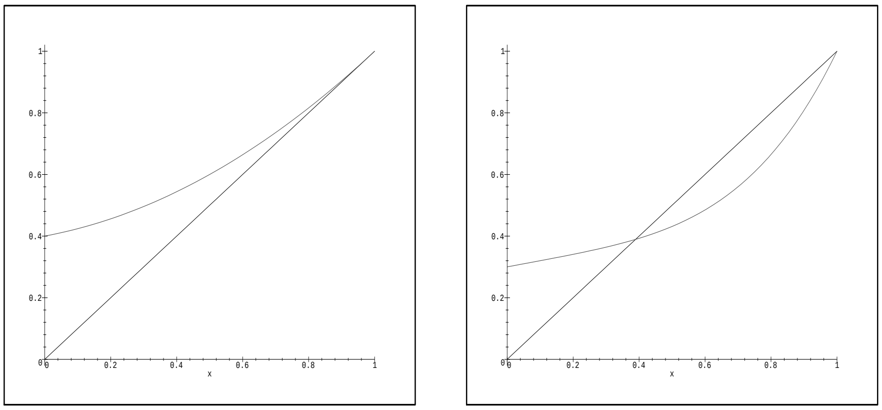


Abbildung 10.1: $m \le 1,\ f(s) = .4s2 + .2s + .4$ und $m > 1,\ f(s) = .5s^4 + .2s + .3$

Lemma 89 *q_W ist ein Fixpunkt von f.*

$$q_W = 1 \Leftrightarrow m \le 1 \text{ oder } E(X \ln^+ X) = \infty.$$

Beweis: Aus der Fixpunktgleichung (10.2) ergibt sich

$$q_W = P(W_\infty = 0) = P(\sum_{i=1}^{X} W_{\infty,i} = 0) = \sum_k P(X = k) q_M^k = f(q_W).$$

Nur im Fall $m > 1$ kann eventuell $q \neq q_W$ gelten. Die Aussage ist eine Konsequenz aus dem Satz von Kesten-Stigum, der jetzt folgt. hfill q.e.d.

10.1.2 $W_\infty \not\equiv 0$

Wann ist W_∞ nicht identisch 0? Die Antwort wird gegeben in einer Arbeit von Kesten-Stigum [1], genau dann wenn $m > 1$ und die die $X \ln X$ Bedingung

$$E(X \ln^+ X) < \infty$$

erfüllt ist.

Wir betrachten zum Warmwerden den L_2-Fall. Der allgemeine Satz wird sich durch Approximation mit Galton-Watson Prozessen mit zeitabhängiger Nachkommensschaftsverteilung ergeben.

Hier eine Liste einfacher Beziehungen, die nachgerechnet werden können.

$$\begin{aligned}
E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= mZ_n \\
E(Z_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \sigma^2 Z_n + m^2 Z_n^2 \\
E((Z_{n+1} - mZ_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \sigma^2 Z_n \\
E(W_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= W_n^2 + \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} W_n \\
E(W_{n+1}^2) &= \frac{\sigma^2}{m^2} \sum_{i=0}^{n} m^{-i} + 1.
\end{aligned}$$

Satz 90 *Sei $m > 1$ und σ^2 endlich. Dann konvergiert W_n in L_2 gegen die Zg W_∞ nicht identisch 0. Das Martingal W_n ist regulär.*

Beweis: Eine einfache Rechnung zeigt $\sup_n EW_n^2 < \infty$. Die anderen Eigenschaften folgen hieraus unter Beachtung von W_n ist ein positives Martingal. q.e.d.

Satz 91 (Kesten-Stigum) *Sei $1 < m < \infty$. Dann sind äquivalent*

(i) $P(W_\infty > 0) > 0$.

(ii) $E(X \ln^+ X) < \infty$.

(iii) $E(W_\infty) = 1$.

(iv) W_n *ist regulär.*

(v) $W_n \to_n W_\infty$ *in* L_1.

(vi) W_n *ist gleichgradig integrierbar.*

(vii) $\sup_n E(W_n) < \infty$.

(viii) $E(\sup_n W_n) < \infty$.

Beweis: Die Kernaussagen sind $i \Rightarrow ii$ und $ii \Rightarrow iii$. Leicht aus Martingaltheorie sind die Beziehungen $iii \Leftrightarrow iv \Leftrightarrow v \Leftrightarrow vi \Leftrightarrow vii$. Leicht ist auch $viii \Rightarrow vii$ und $iii \Rightarrow i$. In dem Abschnitt zu Maximalungleichungen haben wir bereits $ii \Rightarrow viii$ gezeigt. Es verbleibt die Kernausagen $i \Rightarrow ii$ und $ii \Rightarrow iii$ zu zeigen

Wir zeigen die Kernaussagen in mehreren Teilbehauptungen $\bullet$. Die Struktur des Beweis ist eine L_2 und fast sichere Approximation von Z_n durch einen Verzweigungsprozeß $\tilde{Z}_n$ mit zeitabhängiger Vermehrung der Form

$$\tilde{Z}_{n+1} = \sum_{i=1}^{\tilde{Z}_n} \tilde{X}_{n,i},$$

$\tilde{Z}_0 = 1$. Hierbei sind die $\tilde{X}$ Zgn die abgeschnittenen Zgn

$$\tilde{X}_{n,i} := X_{n,i} \mathbb{1}_{X_{n,i} \leq Am^n}$$

mit einer strikt positiven Zahl A.

Sei $m_n = E(\tilde{X}_{n,\cdot})$ und $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(\tilde{X}_{n,\cdot})$. Der Prozeß $\tilde{W}_n = \frac{\tilde{Z}_n}{\prod_{i=0}^{n-1} m_i}$ ist ein Martingal. Es gelten folgende Beziehungen.

$$\begin{aligned}
E(\tilde{Z}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= m_n \tilde{Z}_n && (10.3)\\
E(\tilde{Z}_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \sigma_n^2 \tilde{Z}_n + m_n^2 \tilde{Z}_n^2 && (10.4)\\
E((\tilde{Z}_{n+1} - m_n \tilde{Z}_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \sigma_n^2 \tilde{Z}_n && (10.5)\\
E(\tilde{W}_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \tilde{W}_n^2 + \frac{\sigma_n^2}{m_n^2} \frac{\tilde{W}_n}{\prod_{i=0}^{n-1} m_i} && (10.6)\\
E(\tilde{W}_{n+1}^2) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i^2}{m_i^2} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{m_j} + 1. && (10.7)
\end{aligned}$$

- Für jede positive Zgn Y und jedes $1 < K$ gilt

$$\sum_n E(Y \mathbb{1}_{Y > AK^n}) < \infty \Leftrightarrow E(Y \ln^+ Y) < \infty$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} E(Y \mathbb{1}_{Y > AK^n}) &= \sum_n \sum i \geq n E(Y \mathbb{1}_{AK^i < X \leq AK^{i+1}})\\
&= \sum_i E(iY \mathbb{1}_{AK^i < Y \leq AK^{i+1}})
\end{aligned}$$

Dies schätzen wir nach oben ab, *const* bezeichne (verschiedene) geeignete Konstanten, durch

$$\leq const \sum_i E(Y \ln^+ \frac{Y}{A} 1\!\!1_{AK^i < Y \leq AK^{i+1}}) = const\ E(Y \ln^+ Y) + const$$

und nach unten durch

$$\geq const + const \sum_i E(Y(\ln^+ \frac{Y}{A} 1\!\!1_{AK^i < Y \leq AK^{i+1}}) = const\ E(Y \ln^+ Y) + const.$$

- $ii \Leftrightarrow \lim_n \prod_{i=0}^n \frac{m_i}{m} > 0$.

Nach obiger Teilaussage ist ii äquivalent zu $\sum_i (m - m_i) < \infty$. Beachte $m_n \leq m$ und nach Konstruktion $m_n \nearrow_n m$. OEdA sei $m_n > Bm$ (zumindest ab einem n_0) mit $B > 1/2$. Wir benutzen $-\frac{x}{1-x} \leq \ln(1-x) \leq -x$ für $0 \leq x < 1/2$. Die Hinrichtung ergibt sich aus

$$\ln \prod_i \frac{m_i}{m} = \sum_i \ln(1 - (1 - \frac{m_i}{m})) \geq -\sum_i \frac{1 - \frac{m_i}{m}}{\frac{m_i}{m}} \geq \frac{1}{Bm} \sum_i (m - M_i)$$

und die Rückrichtung aus

$$\ln \prod_i \frac{m_i}{m} \leq -\sum_i (1 - \frac{m_i}{m}) = \frac{1}{m} \sum_i (m - m_i).$$

- $ii \Rightarrow \sup_n E(\tilde{W}_n^2) < \infty$.

Im Hinblick auf Gleichung (10.7) und der letzten Behauptung reicht es die Endlichkeit von $\sum_i \frac{\sigma_i^2}{m^i}$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^\infty \frac{\sigma_i^2}{m^i} &\leq \sum_i E(\frac{X^2}{m^i} 1\!\!1_{X \leq Am^i}) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^i \frac{1}{m^i} E(X^2 1\!\!1_{Am^{j-1} < X \leq Am^j}) \\
&= \sum_{j=1}^\infty E(X^2 1\!\!1_{Am^{j-1} < X \leq Am^j}) \sum_{i=j}^i nfty \frac{1}{m^i} \\
&\leq \frac{A}{m-1} \sum_{j=1}^\infty E(X 1\!\!1_{Am^{j-1} < X \leq Am^j}) = \frac{Am}{m-1} < \infty.
\end{aligned}$$

- $ii \Rightarrow \tilde{W}_n \to \tilde{W}_\infty$ fast sicher und in L_2.

Siehe Satz 90.

- $ii \Rightarrow E(W_\infty) = 1$.

Nach Konstruktion gilt $\tilde{Z}_n \leq \tilde{Z}_n$ punktweise. Damit gilt auch $\tilde{W}_\infty \leq W_\infty c(A)$

mit $c(A) = \prod_n \frac{m^2}{m_n^2} < \infty$. Da wir bereits $1 = E(\tilde{W}_\infty)$ gezeigt haben und $E(W_\infty) \leq 1$ wissen, genügt es $c(A)$ hinreichend dicht an 1 zu bekommen. Wenn wir jetzt A hinreichend groß wählen, so kommt $c(A)$ der 1 beliebig nahe (da die m_i in A aufsteigend sind und gegen m konvergieren).

Dies zusammen beweist $ii \Rightarrow iii$. Wir kommen jetzt zu der zweiten Kernbehauptung $i \Rightarrow ii$. Wir behalten die Notation bei.

- $\lim_{A\to\infty} P(\tilde{Z}_n = Z_n \text{ für alle } n) = 1$.

$$\begin{aligned}
P(\tilde{Z}_n \neq Z_n \text{ für ein n }) &= P(\exists n \exists i \leq Z_n : \ \tilde{X}_{n,i} \neq X_{n,i}) \\
&\leq \sum_n E(Z_n P(X > Am^n)) \\
&\leq \sum_n m^n \sum_{j=n}^{\infty} E(\mathbb{1}_{Am^j < X \leq Am^{j+1}}) \\
&\leq \sum_j E(\mathbb{1}_{Am^j < X \leq Am^{j+1}}) \sum_{n=1}^{j} m^n \\
&\leq \frac{m}{m-1} E(\frac{X}{A}) = \frac{m^2}{A(m-1)} \to_{A\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

- $i \Rightarrow \exists A$ mit $\lim_n E(\frac{\tilde{Z}_n}{m^n}) > 0$.

Für große A gilt $\tilde{Z}_. = Z_.$ mit Wahrscheinlichkeit dicht bei 1. Auf dieser Menge gilt $\frac{\tilde{Z}_n}{m^n} = \frac{Z_n}{m^n} \overset{f.s.}{\to}_n W_\infty$. Dies reicht.

- $i \Rightarrow ii$

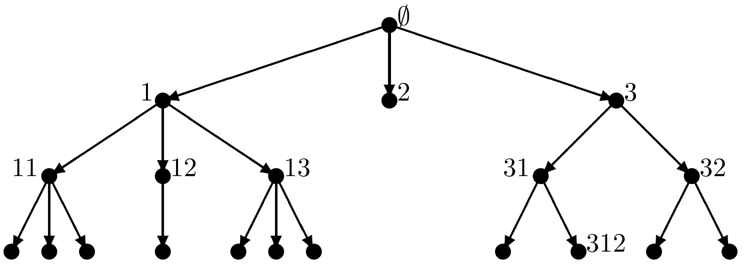
Nehme in der Identität

$$\frac{\tilde{Z}_n}{m^n} = \tilde{M}_n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{m_i}{m}$$

auf beiden Seiten den Erwartungswert und mache den Grenzübergang $n \to \infty$. Die linke Seite ist strikt positiv. Dies impliziert für die rechte Seite $\prod_{i=0}^{\infty} \frac{m_i}{m} > 0$. Das war, wie im ersten Claim gezeigt, äquivalent zu der $X \ln X$ Bedingung. q.e.d.

10.2 Gewichteter Verzweigungsprozess

Jedes Individuum eines Verzweigungsprozesses trägt zusätzlich ein zufälliges Gewicht. Dies ist das Gewicht der Mutter multipliziert mit einer Zufallsgröße. Diesen Prozeß beschreiben wir als ein Prozeß auf einem gerichteten Graphen, speziell einem Baum V mit abzählbar vielen Ästen.



Bäume Die Menge V der Knoten, im Englischen vertwex, sei $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$. Hierbei ist konventionell $\mathbb{N}^0$ die leere Menge $\emptyset$. Der Name eines Knotens $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 v_2 \ldots v_n \in \mathbb{N}^n$ ergibt sich als natürlicher Pfadname von der Wurzel $\emptyset$ zu dem Knoten. (Meine Bäume sind mathematische Bäume, nicht mehr von irdenen Bedürfnisse abhängig.) Die Wurzel $\emptyset$ wird in der Notation weggelassen. Die Pfadlänge von v ist $n = |v|$. Ein Teilpfad wird durch $v_{|m} = v_1 \ldots v_m$ für $m \leq n$ beschrieben. Der obige Baum hat eine natürliche Ordnung, gegeben durch die Pfade, $v \leq (<) w$ falls $|v| \leq |w|$ bzw. $(w_{||v|} = v)$. Die Hintereinanderschaltung vw von Pfaden v und $w = w_1 \ldots w_m \in V$ ist $vw = v_1 \ldots v_n w_1 \ldots w_m$. (Ein Baum ist ein Graph mit Kanten (v, vi).)

Im Kontext von Verzweigungsprozessen sprechen wir von v als **Individuum**, $|v|$ ist die Generation des Individuums v, vi ist das $i-$**te Kind** der **Mutter** v, die **Nachfahren** des Individuums v sind vw und die Vorfahren sind $v_{|m}$ mit $m < |v|$.

Gewichteter Verzweigungsprozess Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, der reichhaltig genug ist, um alle folgenden Zgn darauf zu definieren. Sei $T(v) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in V$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen, $T(v) = (T_1(v), T_2(v), \ldots)$. Wir benutzen $T = (T_1, T_2, \ldots)$ falls der Index v überflüssig ist. Beachte, wir erlauben beliebige Abhängigkeit der $T_j,\ j \in \mathbb{N}$, untereinander.

Die Gewichtsfunktion $l : \Omega \times V \to \mathbb{R}$, l steht für das englische Wort length, wird rekursiv definiert durch

$$l(vj) := l(v) T_j(v) \tag{10.8}$$

$v \in V, j \in \mathbb{N}$. Das Startgewicht $l(\emptyset)$ ist hierbei eine beliebige Zg unabhängig von allem anderen, in der Regel als 1 gewählt. Das Gewicht $l(v)$ des Individuums v hat die Produktdarstellung

$$l(v) = l(\emptyset) T_{v_1}(\emptyset) T_{v_2}(v_1) T_{v_3}(v_1 v_2) \ldots T_{v_n}(v_1 v_2 \ldots v_{n-1}) = l(\emptyset) \prod_{i=1}^{n} T_{v_i}(v_{|(i-1)}) \tag{10.9}$$

In dem obigen Bild sind nur die Individuen mit Gewicht ungleich 0 eingetragen.

Dieser Prozeß heißt gewichteter Verzweigungsprozeß. Wir werden uns auf die Gesamtmasse

$$Z_n := \sum_{|v|=n} l(v) \tag{10.10}$$

in der $n-$ten Generation konzentrieren, und diesen ebenfalls gewichteten Verzweigungsprozeß nennen.

Galton-Watson Prozess Galton-Watson Prozesse sind Spezialfälle von gewichteten Verzweigungsprozessen. Betrachte einen gewichteten Verzweigungsprozesse mit $l_0 \equiv 1$ und zufälligen Faktoren $T.$, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Die Gewichte der Individuen sind ebenfalls nur 0 oder 1, das Indivuum lebt oder nicht. Die Nachkommenzahl des Individuums v ist $\sum_j T_j(v)$. Dieser so gegebene Prozeß der lebenden Individuen ist ein Galton-Watson Prozess. Jeder Galton-Watson Prozess läßt sich als ein gewichteter Verzweigungsprozeß sehen, indem wir die Nachkommensverteilung $\sum_j T_j(v)$ passend wählen. (Eine von vielen Möglichkeit ist es, die Verteilung der T vorzugeben durch $P(X = k) = P(T_1 = 1, \ldots, T_k = 1, T_{k+1} = 0, \ldots)$. Die Verteilung der Z Prozesse ist gleich.)

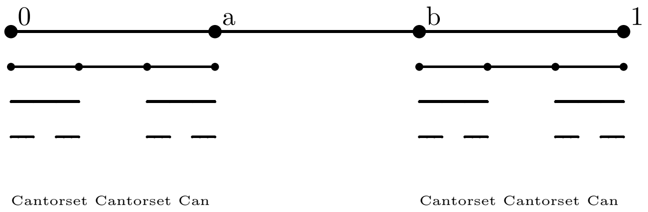
Multiplikative Irrfahrt Seien $Y_n, n \in \mathbb{N}$, uivZgs mit Werten strikt positiven Werten. Eine multiplikative Irrfahrt ist das Produkt

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

auf der multiplikativen Gruppe $(0, \infty)$. Als Startwert nehmen wir $S_0 = 1$. Durch Übergang zu dem Logarithmus $\ln S_n$ erhalten wir eine additive Irrfahrt, (und umgekehrt).

Eine multiplikative Irrfahrt ist ein gewichteter Verzweigungsprozess mit stets genau einem Nachfahren $P(\sum_j \mathbb{1}_{T_j \neq 0} = 1) = 1$. Der Einfachheit halber sei T_1 stets der Nachkomme und $T_1 > 0$. $T_1(v)$ habe dieselbe Verteilung wie $Y.$. Dann haben die Prozesse S_n und Z_n dieselbe Verteilung.

Zufällige Cantormengen Eine zufällige Cantormenge wird iterativ beschrieben. In der ersten Iteration schneiden wir aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$ zufällig einige Intervalle heraus. Etwa, indem wir endlich viele Punkte auswählen, die wir als Intervallgrenzen nehmen und jedes zweite Intervall weglassen. Einige Intervalle überleben diesen Iterationsschritt, in unserem Bild 2. In dem zweiten Iterationsschritt befolgen wir dieselbe Schneidevorschrift für jedes übriggebliebene Intervall, relativ zur neuen Skala gegeben durch die Länge und für alle Intervalle unabhängig voneinander. Wieder überleben einige Intervalle, im Bild 4 in der zweiten Generation. Dies Verfahren wird induktiv fortgesetzt. Die dieses Verfahren überlebenden Punkte bilden eine zufällige Cantormenge.



Diese Struktur können wir als Baum beschreiben, in unserem Bild ein binärer Baum. Die Intervalle bekommen ihren natürlichen Namen v durch ihre Entstehungsgeschichte, das Gewicht des Individuums v ist die Länge des Intervalls. Die Faktoren $T_i(v)$ ergeben sich als die relative Länge des $i-$ten Kindes bezüglich der Mutter v. In unserem Bild wäre $T_1(v) = a(v)$, $T_2 = 1 - b(v)$ und der Rest 0. Die Zgn $(a(v), b(v)), v \in V$, sind uivZgn.

10.2.1 Martingalstruktur

Proposition 92 *Sei $\sum_j |T_j|$ integrierbar und $m := E(\sum_j T_j) \neq 0$. Dann ist*

$$W_n := \frac{Z_n}{m^n}$$

ein Martingal.

Beweis: Jedes Z_n ist integrierbar. Die Martingaleigenschaft ergibt sich aus

$$\begin{aligned} E(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= E(\frac{1}{m^{n+1}} \sum_{|v|=n} l(v) \sum_j T_j(v) \mid \mathcal{F}_n)) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{|v|=n} l(v) E(\sum_i T_i(v) \mid \mathcal{F}_n)) = W_n. \end{aligned}$$

q.e.d.

Die Verteilung von W_n erfüllt die Gleichung

$$W_{n+1} \stackrel{d}{=} \sum_j \frac{T_j}{m} W_{n,j}.$$

Diese Gleichheit gilt in Verteilung. Die Zgn $T, W_{n,j},\ j \in \mathbb{N}$ sind unabhängig. $T = (T_1, T_2, \ldots)$ hat die vorgegebene Verteilung und die Zgn $W_{n,j}$ haben dieselbe Verteilung wie W_n.

Falls das Martingal $W_n \xrightarrow{f.s.}_n W_\infty$ f.s. konvergiert, etwa alle T_j sind positiv und jedes positive Martingal konvergiert f.s., erhalten wir die Fixpunktgleichung

$$W_\infty \stackrel{d}{=} \sum_j \frac{T_j}{m} W_{\infty,j}$$

für Verteilungen.

Hausdorffdimension für zufällige Cantormengen Wir kehren zum Beispiel zufälliger Cantormengen zurück und definieren die Begriffe Hausdorffdimension und Hausdorffmaß.

Sei A eine beliebige Menge in $I\!R$ (oder einem metrischer Raum). Eine offene δ-Überdeckung von A ist eine Familie $U_n, n \in I\!N$, von offenen Kugeln mit Durchmesser $\mathrm{diam}(U_n) < \delta$, die A überdeckt ($A \subset \bigcup_n U_n$). Für $\alpha > 0, \delta > 0$, sei $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \inf\{\sum_n \mathrm{diam}^\alpha(U_n)\}$, das Infimum über alle δ-Überdeckungen genommen. Das α-Hausdorffmaß von A ist: $\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$. Das α-Hausdorffmaß $\mathcal{H}^\alpha$ kann den Wert unendlich annehmen. Die Hausdorffdimension ist das kleinste α mit endlicher α-Hausdorffdimension,

$$\mathcal{H}(A) = \inf\{\alpha | \mathcal{H}^\alpha(A) < \infty\}.$$

Für unsere zufälligen Cantormengen bietet sich als Überdeckung die n-te Generation an. Eventuell müssen wir diese Überdeckung etwas verfeinern, um eine offene δ-Überdeckung zu erhalten. Dies betrifft für große n verschwindend wenige Überdeckungen. Sei $\alpha \in (0,1)$ fest. Wir betrachten den Prozess

$$Z_n^{(\alpha)} := \sum_{|v|=n} l^\alpha(v).$$

Für α mit $E\sum_j T_j^\alpha < 1$ ist Z_n ein positives Supermartingal und konvergiert fast sicher gegen 0. Insbesonders können wir damit schließen, daß α eine obere Schranke für die Hausdorffdimension $\mathcal{H}(C(\omega))$ der zufälligen Cantormenge $C(\omega)$ ist. Für α mit $E\sum_j T_j^\alpha > 1$ ist $Z_n^{(\alpha)}$ ein positives Submartingal. In diesem Fall liegt die Vermutung nahe, daß $Z_n^{(\alpha)}$ fast sicher gegen ∞ konvergiert und dies wäre ein Indiz, kein Beweis, daß α eine untere Schranke der Hausdorffdimension ist. Als Hausdorffdimension werden wir dasjenige α vermuten, welches $Z_n^{(\alpha)}$ zum Martingal macht, bzw.

$$E(\sum_j T_j^\alpha) = 1$$

erfüllt. Diese Vermutung ist richtig fast sicher für nicht-leere zufällige Cantormengen, [10]. Der Grenzwert $Z_\infty^{(\alpha)}$ des Martingals $Z_n^{(\alpha)}$ gibt die Gesamtmasse des zufälligen Cantormaßes an.

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf die Cantormenge selbst anwenden, die durch das iterative Entfernen des jeweiligen mittleren Drittels ($a \equiv 1/3,\ b \equiv 1/3$) entsteht. Die Zgn T sind deterministisch $(1/3, 1/3, 0, 0, \ldots)$. Die Hausdorff-Dimension der Cantormenge erhalten wir aus der Lösung der Gleichung $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha = 1$ als

$$\text{Hausdorffdimension der Cantormenge} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

11 Likelihood

12 Finanzmathematik

13 Versicherungsmathematik

14 Appendix

Diese Sektion enthält das wahrscheinlichkeitstheoretische Setup und führt lediglich bedingte Wahrscheinlichkeiten ausführlicher ein. Wir setzen gute Vorkenntnisse im Umgang wahrscheinlichkeitstheoretischer Sprache voraus

14.0.2 Wahrscheinlichkeitstheoretisches Setup

Sei Ω eine beliebige nicht leere Menge. Die Elemente heißen **Stichprobe** oder **Realisierung**. Eine **σ-Algebra** über Ω ist eine nicht leere Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\{A \subset \Omega\}$, die abgeschlossen ist bzgl. Komplementbildung abzählbarer Vereinigung. Ein Element einer σ-Algebra heiẗ **meßbare Menge** oder auch **Ereignis**. Ein **meßbarer Raum** ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{F})$ wie oben beschrieben.

Ein **Maß** μ ist eine positive, $(\mu \geq 0)$, σ-additive $(\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ für paarweise disjunkte meßbare Mengen $A_n,\ n \in I\!N,)$ Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \mapsto I\!R$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Ein diskretes Maß ist ein Maß μ mit $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\})$. Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist ein Maß P mit Gesamtmasse $P(\Omega) = 1$. Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \Omega'$ von einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ in einem anderen meßbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$ heißt **meßbar**, falls das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist. Eine **Zufallsgröße** (=Zg) oder auch **Zufallsvariable** ist eine meßbare Abbildung $X : \Omega \mapsto \Omega'$ von einem W-Raum auf einen meßbaren Raum. Der Wert $X(\omega)$ heißt Realisierung. Die **Verteilung** Ł(X) einer Zufallsgröße X ist das transportierte W-Maß $P^X := P(X^{-1} \in .)$ auf $(\Omega', \mathcal{F}')$.

Notation Wir benutzen die Notation $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}$ und sinngemäße Spielarten wie $X \in A$. Das ω wird nach Möglichkeit weggelassen.

Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Objekte sind die Wahrscheinlichkeitsräume,die Morphismen sind die Zufallsgrößen.

14.0.3 Konvergenzsätze

Aus der $\sigma-$Additivität der W-Maße ergeben sich Approximationssätze, das grundlegende Hilfsmittel der W-theorie.

Eine **Nullmenge** ist Teilmenge einer meßbaren Menge vom Maß 0. Eine von ω abhängige Aussage gilt **fast sicher** (f.s.), falls die Aussage richtig ist bis auf alle ω in einer Nullmenge. Zum Beispiel bedeutet eine Folge von Zgn X_n **konvergiert fast sicher** gegen eine Zg X (geschrieben $X_n \overset{f.s.}{=} X$), es gibt eine meßbare Menge A mit $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \not\to_n X(\omega)\} \subset A$ und $P(A) = 0$.

Der **Erwartungswert** $E(X)$ $(= EX)$ einer Zg X ist der Wert $\int X(\omega)dP(\omega)$ bzw. $\int XdP$ oder noch kürzer $\int X$. Hierbei wird stets $EX^- < \infty$ oder $EX^+ < \infty$ vorausgesetzt. Eine Zg X mit $E|X| = EX^- + EX^+ < \infty$ heißt **integrierbar**. Der Erwartungswert ist eine ordnungserhaltende ($X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq EY$), lineare, $\sigma-$stetige ($X_n \searrow 0 \Rightarrow EX_n \to_n 0$), einserhaltende ($E1 = 1$) Abbildung auf den integrierbaren Zgn.

Satz 93 (Monotone Konvergenz) *Sei X_1 integrierbar und X_n aufsteigend. Dann gilt*

$$\lim_n E(X_n) = E(\lim_n X_n).$$

Satz 94 (Dominierte Konvergenz) *Sei X_n eine fast sicher konvergente Folge und $|X_n|, n \in I\!N$, f.s. gleichmäßig durch eine integrierbare Zg beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_n E(X_n) = E(\lim_n X_n).$$

Lemma 95 (Lemma von Fatou) *Sei X_n nach unten f.s. durch eine integrierbare Zg beschränkt. Dann gilt*

$$\liminf_n E(X_n) \geq E(\liminf_n X_n).$$

14.0.4 Standardbegriffe und Sätze

Dieser Abschnitt führt weitere Standardbegriffe ein und das wichtige Konzept der Unabhängigkeit.

$\sigma-$Algebren werden häufig durch **Erzeuger** angegeben. Die von einer Teilmenge $\mathcal{E}$ der Potenzmenge erzeugte $\sigma-$Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste $\sigma-$Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Die von Zgn $X_i, i \in I$, erzeugte $\sigma-$Algebra $\sigma(X_i, i \in I)$ ist die kleinste $\sigma-$Algebra, bezüglich der alle Zgn meßbar sind. $\mathcal{E}$ bzw. (X_i) heißen Erzeuger. Die **Borel** $\sigma-$Algebra eines topologischen Raumes wird erzeugt von der Topologie. Die reellen Zahlen sind stets mit der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}$ versehen, (erzeugt von allen offenen Intervallen (a, b).)

W-Maße auf $(R, \mathcal{B})$ werden durch die **Verteilungsfunktion** F, $F(x) := P((-\infty, x])$ eineindeutig beschrieben. Eine Verteilungsfunktion ist eine rechtsstetige aufsteigen Funktion $F : I\!R \mapsto [0,1]$ mit $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$. Falls nicht anders spezifiziert sind Zgn stets reellwertig (und die reellen Zahlen versehen mit der Borel $\sigma-$Algebra). Die Verteilungsfuntion einer Zg X ist $F_X(x) = P(X \le x)$.

Gängige Klassen von Zgn sind die L_p-Räume $L_p := \{X : \Omega \mapsto I\!R \mid \|X\|_p < \infty\}$ mit $\|X\|_p := (E|X|^p)^{1/p}$ für $1 \le p < \infty$ und $\|X\|_\infty := \inf\{c \ge 0 \mid P(|X| \ge c) = 0\}$. Die Abbildungen $\|.\|_p$ heißen L_p-Norm und sind Normen auf L_p, wenn wir Zgn identifizieren, die fast sicher gleich sind. Nach Möglichkeit unterscheiden wir nicht zwischen Zgn und Äquivalenzklassen. L_1 sind die integrierbaren Zgn und auch Äquivalenzklassen von Zgn.

14.0.5 Verschiedene Konvergenzbegriffe

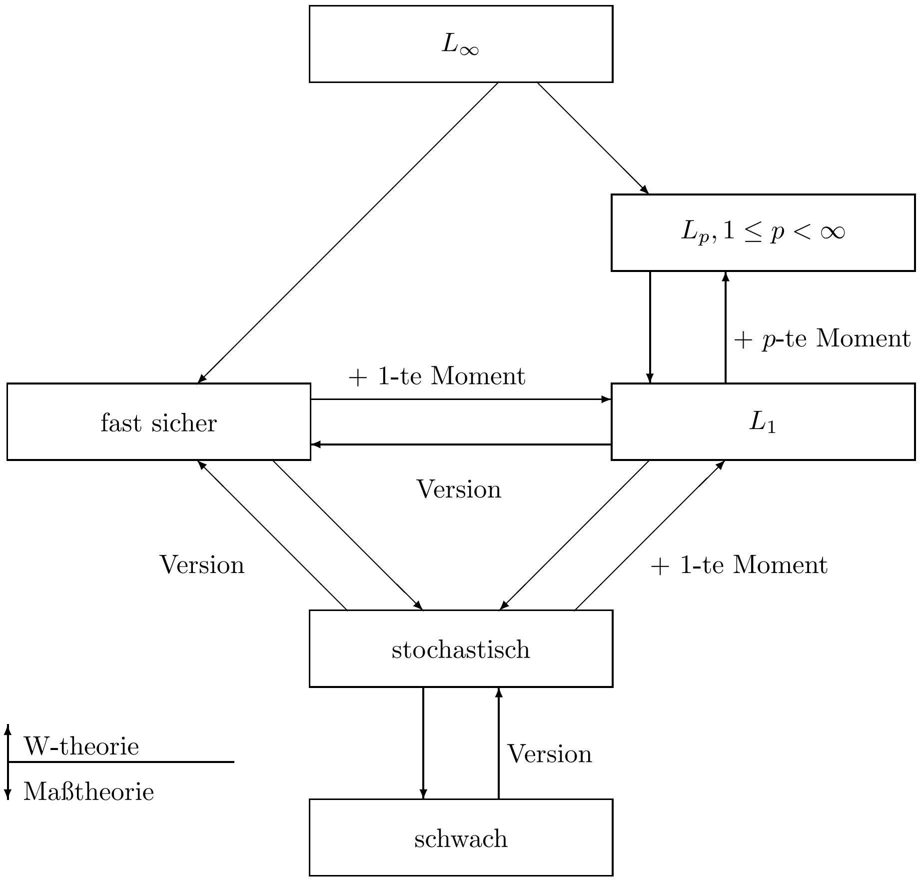
Wir führen häufig benutzte Konvergenzbegriffe ein und zeigen die Verbindung untereinander.

Wir werden die folgenden Konvergenzarten benutzen.

- **Fast sichere Konvergenz**
  $X_n \stackrel{\text{f.s.}}{\to}_n X$ (**fast sicher**) $\Leftrightarrow P(\lim_n X_n \ne X) = 0$.
- L_p **Konvergenz** $1 \le p \le \infty$
  $X_n \stackrel{L_p}{\to}_n X$ (**im** $p-$**ten Mittel**) $\Leftrightarrow \|X_n - X\|_p \to_n 0$
- **Stochastische Konvergenz**
  $X_n \stackrel{\text{s}}{\to}_n X$ (**stochastisch**) $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \ P(|X_n - X| > \epsilon) < \epsilon$.
- **Schwache Konvergenz**
  $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} X$ (**schwach** oder **in Verteilung**)
  $\Leftrightarrow \forall f : \Omega \to I\!R$ stetig beschränkt: $E(f(X_n)) \to_n E(f(X))$.

Bemerkung: Die schwache Konvergenz von Zgn ist die schwache Konvergenz der Verteilungen. Eine Folge von W-Maßen P_n konvergiert schwach gegen ein W-Maß P ($P_n \stackrel{w}{\to}_n P$), falls für alle stetigen und beschränkten Funktionen f gilt $\int f dP_n \to_n \int f dP$.

Das folgende Bild gibt die Zusammenhänge der Konvergenzarten.



Eine Version einer Zg X ist eine Zg Y mit derselben Verteilung. Häufig benutzte Versionen sind $Y = F_X^{-1}(U)$ mit U hat eine $[0,1]-$Rechteckverteilung ($P(U \le x) = x,\ x \in [0,1]$) und F^{-1} ist die rechtsstetige Inverse $F^{-1}(s) = \inf\{x \mid F(x) > s\}$. im obigen Bild tuen es die Versionen $F_{X_n}^{-1}(U)$.

Die Momentenbedingung im obigen Bild entspricht der gleichgradigen Integrierbarkeit. Eine Familie von Zgn $X_i,\ i \in I$, mit der Eigenschaft

$$\sup_{i \in I} \sup_{P(A) < \epsilon} \int_A |X_i| dP \longrightarrow_{\epsilon \to 0} 0. \tag{14.1}$$

heißt gleichgradig integrierbar. Äquivalent zu (14.1 sind jeweils die Bedingungen

(i) $\sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>c\}}|X_i|dP \longrightarrow_{c\to\infty} 0$.

(ii) $\forall\epsilon>0\exists Y\in L_1 \sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>Y\}}|X_i|dP\le\epsilon$

(iii) $\sup_{i\in I}E|X_i|<\infty$ und
$\forall\epsilon>0\ \exists Y\in L_1\forall\delta>0\ \forall A\in\mathcal{F}\ \int_A|Y|dP<\delta\Rightarrow\sup_{i\in I}\int_A|X_i|dP<\epsilon$.

Satz 96 *Seien X_n, $n\in\mathbb{N}$, integrierbare Zgn. Dann sind äquivalent*

(i) X_n konvergiert in L_1.

(ii) X_n konvergiert stochastisch und ist gleichmäßig integrierbar.

(iii) X_n konvergiert stochastisch gegen X und $E|X_n|\to_n E|X|<\infty$.

siehe z.B. [2].

Bemerkung Der letzte Satz hat ein natürliches $L_p, 1\le p<\infty$, Analogon. Betrachte dazu die $p-$te Potenz $|X|^p$ und ohne viel Mehraufwand folgen die Aussagen.

Literaturverzeichnis

[1] S.Asmussen and H. Hering *Branching Processes.* Progress in Probability and Statistics, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

[2] H. Bauer Maßtheorie.

[3] Choquet

[4] L. Dubins *Inequalities for stochastic processes (how to gamble if you must).* Corrected republication of the 1965 edition. Dover Publications, Inc., New York, 1976.

[5] Maximal Martingal

[6] positive Submartingale als Betraege

[7] Originalarbeit

[8] Propheten-Spieler

[9] Propheten Spieler

[10] R.D. Mauldin and S.C. Williams *Random recursive construction: asymptotic geometric and topological properties.* TAMS **295**, (1986) 325-346.

[11] A. Maitra and W. Sudderth *Discrete gambling and stochastic games.* Applications of Mathematics **32**, Springer-Verlag, New York, 1996.

[12]

[13] A. Renyi *Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit einem Anhang über Informationstheorie.* (German) Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 54, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

[14] Sudderth and Maitra Discrete Gambling and Stochastic Games.

[15] Thorp

[16] Winkler