Topologie I

Vorlesungsskript von
Carsten Schultz

Fachbereich Mathematik
FU Berlin

Berlin, Sommersemester 2000

Inhaltsverzeichnis

Lieferung 1

Metrische Räume und Homöomorphie

Metrische Räume

Eine ebenso richtige wie nichtssagende Antwort auf die Frage, was denn Topologie sei, wäre „das Studium stetiger Abbildungen.“ Stetigkeit kennen wir bisher als Eigenschaft von Funktionen zwischen Teilmengen des euklidischen Raums oder allgemeiner zwischen metrischen Räumen.

1.1 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, so dass

(i) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$ und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$ *(Symmetrie)*,

(iii) $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$ für alle $x,y,z \in X$ *(Dreiecksungleichung)*.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf ihr.

Wir werden den metrischen Raum (X,d) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

1.2 Beispiele und Definitionen.

- ▷ Der *euklidische Raum* $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(x,y) = \left(\sum_k (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist wohl der metrische Raum, den wir am besten kennen. Wenn wir von dem $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum reden, ohne näher die Metrik zu bestimmen, werden wir immer diese meinen.

- ▷ Ist (X,d) ein metrischen Raum und $Y \subset X$, so ist auch $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer Raum. Insbesondere können wir also jede Teilmenge eines euklidischen Raumes als metrischen Raum auffassen.

▷ Eine beliebige Menge X wird durch die *diskrete Metrik*

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

zu einem (nicht sehr spannenden, aber durchaus wichtigen) metrischen Raum.

1.3 Definition (Stetigkeit). Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Ist $x \in X$, so heißt f *stetig in* x, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ exisitiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt, dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

Für ein paar wichtige Teilmengen von euklidischen Räumen legen wir Bezeichnungen fest.

1.4 Notation. Es sei

$$I := \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leq x \leq 1\}$$

das Einheitsintervall und für $n \in \mathbb{N}$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$$

die n-dimensionale Scheibe (auch Ball oder Kugel genannt) und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}$$

die n-dimensionale Sphäre, wobei $\|\bullet\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Homöomorphie

In der Topologie betrachtet man Räume meist nur bis auf Homöomorphie, eine Äquivalenzrelation, die wir jetzt definieren.

1.5 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Etwas direkter ausgedrückt ist ein Homöomorphismus also eine stetige Bijektion, deren Umkehrfunktion auch stetig ist.

1.6 Beispiel. Man betrachte $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_k \in I \text{ für alle } k\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} &I^n \to D^n \\ &x \mapsto \begin{cases} 2\frac{x-(1/2,1/2,\dots,1/2)}{\|x-(1/2,1/2,\dots,1/2)\|} \max_k |x_k - 1/2|, & x \neq (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \\ 0, & x = (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus mit inverser Abbildung

$$\begin{aligned} &D^n \to I^n \\ &x \mapsto (1/2, 1/2, \dots, 1/2) + \begin{cases} \frac{x}{2\max_k |x_k|} \|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wie man durch Nachrechnen feststellt.

1.7 Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 2\pi) &\to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \\ x &\mapsto (\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, aber *kein* Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung ist bei $(0, 1) \in S^1$ unstetig. In der Tat sind $[0, 2\pi)$ und S^1 nicht homöomorph; um das zu zeigen, könnte man die Kompaktheit von S^1 ausnutzen, oder dass $[0, 2\pi)$ einen Randpunkt hat, S^1 aber nicht, oder dass S^1 nie in zwei Teile zerfällt, wenn man einen Punkt herausnimmt, oder ... Zu alledem später mehr.

1.8 Beispiel. Man betrachte einen Doughnut[1] und eine Kaffeetasse als Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Diese sind homöomorph, wie wir jetzt andeuten wollen. Zunächst schlagen wir von der Tasse den Henkel ab, markieren aber auf beiden Teilen die Bruchstelle. Ebenso schneiden wir den Doughnut so in zwei Teile, dass jeder von ihnen wie ein Henkel aussieht. Nun gibt es schon einmal einen Homöomorphismus von dem Tassenhenkel zu der einen Doughnuthälfte, der Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Die zweite Doughnuthälfte ist ein (gebogener) Zylinder, also, da wir ja bereits in Beispiel 1.6 gesehen haben, dass Kanten nichts ausmachen, ein Ball. Von dem von der Tasse übriggebliebenen Becher bemerken wir, dass er auch bis auf Homöomorphie nichts anderes ist als ein Ball, auch wenn er recht platt ist und gebogen im $\mathbb{R}^3$ liegt. Nun gibt es zwischen diesen beiden Stücken also wieder einen Homöomorphismus, und zwar sogar einen, der wieder Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Das ganze lässt sich so einrichten, dass die beiden Homöomorphismen an der Bruch- beziehungsweise Schnittstelle zusammenpassen und so einen Homöomorphismus von der Tasse zum Doughnut liefern.

[1] Man verzeihe die Amerikanisierung. Natürlich gibt es auch deutsches Gebäck gleicher Form, und das schmeckt sicher auch zu Kaffee.

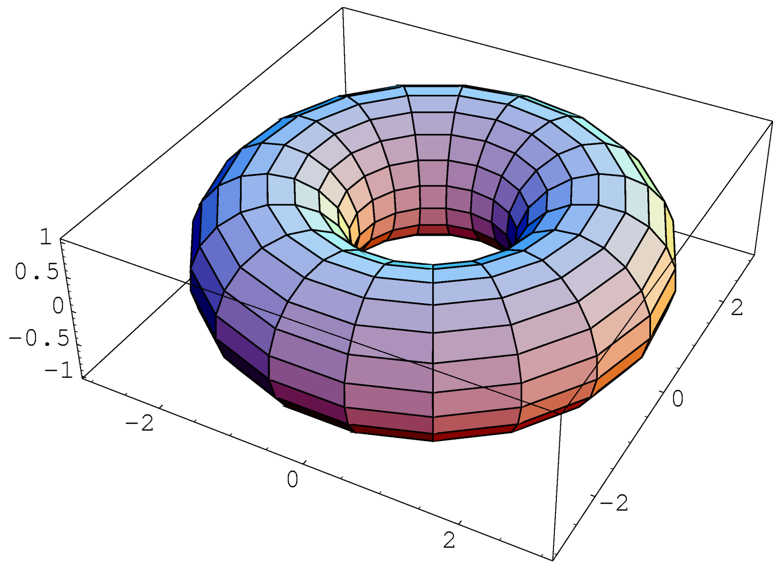

Abbildung 1.1: Torus in Mathematica

1.9 Beispiel. Den Doughnut aus dem letzten Beispiel nennen wir üblicherweise den Volltorus, seinen Rand den Torus. Als Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$ erhält man sie zum Beispiel als

$$\{(x\sin\phi, x\cos\phi, y) \colon (x,y,\phi)\in\mathbb{R}^3, (x-2)^2+y^2\le 1\}$$

für den Volltorus und

$$\{(x\sin\phi, x\cos\phi, y) \colon (x,y,\phi)\in\mathbb{R}^3, (x-2)^2+y^2 = 1\}$$

für den Torus, man vergleiche mit Abbildung 1.1, die die Mathematica–Ausgabe für

```
ParametricPlot3D[
      {Sin[phi](Sin[rho] + 2), Cos[phi](Sin[rho] + 2), Cos[rho]},
                                         {phi, 0, 2Pi}, {rho, 0, 2Pi}]
```

zeigt. Hier wurde also auch noch $\{(x,y)\colon (x-2)^2+y^2=1\}$ durch $(\sin\rho + 2, \cos\rho)$ parametrisiert.

Natürlicher jedoch erhält man diese Räume als Teilmengen des $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, nämlich den Volltorus als $S^1\times D^2$ und den Torus als $S^1\times S^1$. Ein Homöomorphismus ist in beiden Fällen die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3\\ (x_1,x_2,x_3,x_4) &\mapsto ((x_3+2)x_1, (x_3+2)x_2, x_4)\end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung die Einschränkung von

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2, x_3 \right)\end{aligned}$$

Das Nachrechnen ist lästig, aber elementar.

1.10 Beispiel. Ist X eine Menge, auf der zwei Metriken d und d' definiert sind, und gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $d'(x, y) \leq Cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} i \colon (X, d) &\to (X, d') \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

stetig (setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$); gibt es außerdem ein $C' > 0$, so dass $d(x, y) \leq C'd'(x, y)$, so ist i ein Homöomorphismus. Dies lässt sich auf die Metriken $d_p(x, y) := (\sum_k |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$ und $d_\infty(x, y) := \max_k |x_k - y_k|$ auf $\mathbb{R}^n$ anwenden, die also alle homöomorphe Räume liefern, denn es ist ja

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y).$$

1.11 Beispiel. Die Abbildung $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, denn sie ist stetig und hat die stetige Umkehrabbildung arctan.

Das letzte Beispiel zeigt, dass Vollständigkeit keine Eigenschaft ist, die von einem Homöomorphismus erhalten bleibt: $\mathbb{R}$ ist vollständig, aber das offene beschränkte Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Das liegt daran, dass stetige Abbildungen im allgemeinen Cauchy-Folgen nicht auf Cauchy-Folgen werfen, das ist nur für gleichmäßig stetige Funktionen der Fall.

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass eine Metrik viel mehr Information trägt, als man wirklich braucht, wenn man nur an Eigenschaften interessiert ist, die unter Homöomorphie erhalten bleiben. Eine wesentlichere Rolle als die Metrik selbst werden die offenen Mengen spielen, die von ihr bestimmt werden.

Offene Mengen

1.12 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ ist die *ε-Umgebung* eines Punktes $x \in X$ die Menge $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X : d(x, x') < \varepsilon\}$. Eine beliebige Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden der Punkte ist, die sie enthält.

1.13 Bemerkungen.

- ▷ Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist.
- ▷ Wir haben den Begriff der offenen Menge mit Hilfe des Begriffes der Umgebung definiert. Andersherum gilt: Eine Menge U ist Umgebung von x, wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Beachte, dass wir, im Gegensatz zu einigen Autoren, nicht fordern, dass U selbst offen ist.

1.14 Beispiel. Ist X mit der diskreten Metrik versehen, so gilt für jedes $x \in X$, dass $B_{1/2}(x) = \{x\}$ ist, also ist $\{x\}$ eine Umgebung von x und *jede* Teilmenge von X offen.

Um stetige Abbildungen zu beschreiben, genügt es völlig, die offenen Mengen der beteiligten Räume zu kennen.

1.15 Proposition. *Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}[U]$ offen.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig und $U \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}[U]$, also $f(x) \in U$. Da U offen ist, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nun ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Das heißt, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[U]$; also ist, da x beliebig gewählt war, $f^{-1}[U]$ offen.

„$\Leftarrow$“: Sei f nicht stetig. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x' \in B_\delta(x)$ gibt, so dass $f(x') \notin B_\varepsilon(f(x))$. Es gibt also kein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ wäre. $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ ist also keine Umgebung von x und damit nicht offen, obwohl $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist. □

1.16 Korollar. *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Mengen $M \subset X$ gilt, dass $f[M]$ genau dann offen ist, wenn M offen ist.* □

Die offenen Mengen sind also tatsächlich, worauf es ankommt, wenn man Räume bis auf Homöomorphie betrachtet. Die folgenden Eigenschaften der Familie der offenen Mengen eines metrischen Raumes sind so fundamental, dass wir sie bald zu Definitionen erheben werden.

1.17 Proposition. *In einem metrischen Raum X gilt:*

(i) Der Schnitt einer endlichen Menge von offenen Mengen ist offen.

(ii) Die Vereinigung einer beliebigen Menge von offenen Mengen ist offen.

(iii) Sind $x, y \in X$ und ist $x \neq y$, so existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Zu (i): Seien $U_1, \ldots, U_r$ offen, $r \in \mathbb{N}$, und sei $x \in \bigcap_k U_k$. Dann gibt es $\varepsilon_k > 0$, so dass $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_k\}$ ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_k U_k$.

Zu (ii): Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, und U offen für alle $U \in \mathcal{U}$. Sei nun $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$, und damit ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \in U \subset \bigcup \mathcal{U}$.

Zu (iii): Ist $x \neq y$, so ist $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$. Sei nun $z \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $z \notin B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. $\square$

Lieferung 2

Topologische Räume

Die Kategorie topologischer Räume

Wir haben gesehen, dass es, wenn man Räume — das waren bisher metrische Räume — bis auf Homöomorphie betrachtet nur auf die offenen Mengen ankommt und haben angekündigt, die Eigenschaften aus Proposition 1.17 zu Axiomen zu machen. Das geschieht nun.

2.1 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge von X, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ ist $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.

(ii) Sind $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{k=1}^{n} O_k \in \mathcal{T}$.

Eine Teilmenge von X heißt *offen*, wenn sie in $\mathcal{T}$ enthalten ist. Ein *topologischer Raum* ist eine Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf ihr.

2.2 Bemerkung. Häufig fordert man auch noch $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, aber das ist in obigem bereits enthalten: Es ist $\emptyset \subset \mathcal{T}$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$, außerdem $0 \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=1}^{0} O_k = \bigcap \emptyset = X$.

Wie auch schon bei metrischen Räumen werden wir den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

Eine der Eigenschaften, die wir in Proposition 1.17 festgestellt haben, fehlt noch.

2.3 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *hausdorffsch* und damit ein *Hausdorff-Raum* oder auch *T_2-Raum*, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, Mengen $O_0, O_1 \in \mathcal{T}$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ existieren.

Das T in T_2 kommt daher, dass es sich um eine Trennungseigenschaft handelt: Je zwei verschiedene Punkte können durch offene Mengen getrennt werden. Die 2 in T_2 verspricht, dass es derer noch mehr gibt.

Die nächste Definition ist durch Proposition 1.15 motiviert.

2.4 Definition. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine *stetige Abbildung* $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist eine Funktion $f\colon X \to Y$, so dass $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_Y$.

Trivial, aber so wichtig, dass wir es notieren:

2.5 Proposition. *Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität id_X eine stetige Abbildung. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung.*

Beweis. Es ist $\mathrm{id}^{-1}[O] = O$ und $(g \circ f)^{-1}[O] = f^{-1}\left[g^{-1}[O]\right]$. $\square$

Und schließlich wiederholen wir in diesem neuen Kontext die Definition der Homöomorphie.

2.6 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Homöomorphie war bei metrischen Räumen nur eine von mehreren sinnvollen Äquivalenzrelationen, und eine recht schwache noch dazu, das heißt eine, die einiges an Information ignorierte. Bei topologischen Räumen hingegen ist Homöomorphie eine sehr natürliche Äquivalenzrelation, in gewisser Weise die stärkstmögliche sinnvolle Äquivalenzrelation. Insbesondere ist, wenn $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf derselben Menge X sind, die Funktion

$$\begin{aligned} i\colon (X, \mathcal{T}_1) &\to (X, \mathcal{T}_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Nun ist es aber Zeit für ein paar Beispiele. Eigentlich jedoch war der letzte Teil schon voll von ihnen:

2.7 Beispiel und Definition. Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X, so bilden die bezüglich d offen Teilmengen von X eine Topologie auf X, die *von der Metrik d induzierte Topologie*. Diese Topologie ist hausdorffsch. Ist Y ein weiterer metrischer Raum, so ist eine Funktion $f\colon X \to Y$ genau dann stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen, wenn sie es als Abbildung zwischen den induzierten topologischen Räumen ist.

2.8 Beispiele und Definitionen. Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst eine Topologie, die *diskrete Topologie*. Wir haben bereits in Beispiel 1.14 gesehen, dass sie von der diskreten Metrik induziert wird.

$\{\emptyset, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie auf X, sie wird manchmal die *indiskrete Topologie* oder auch anschaulicher die *Klumpentopologie* genannt. Hat X mindestens zwei Elemente, so ist sie nicht hausdorffsch, also gibt es keine Metrik, die diese Topologie induzieren würde.

Wir werden später auch Hausdorff-Räume kennenlernen, die von keiner Metrik induziert werden. Überhaupt kann man sich fragen, wie die topologischen Räume charakterisiert werden können, die von einer Metrik induziert werden, die also, wie man sagt, *metrisierbar* sind. Vielleicht werden wir uns dieser Frage später genauer zuwenden. In jedem Fall werden wir noch notwendige Kriterien finden.

2.9 Beispiel. Ist X eine beliebige Menge, so bilden all die Teilmengen von X, deren Komplemente endlich sind zusammen mit der leeren Menge eine Topologie auf X (Nachrechnen!), die *kofinite Topologie.*

Ist X unendlich, so ist auch die kofinite Topologie auf X nicht hausdorffsch. Nun scheint das wieder eine sehr „komische", nur zum Konstruieren von Gegenbeispielen geeignete Topologie zu sein. Das täuscht aber, denn in der Tat geben algebraische Geometer gerne der eindimensionalen Linie diese Topologie.[1] Wir tun also gut daran, nicht nur Hausdorff-Räume zu betrachten.

Mehr Mengen

Wir definieren nun für Teilmengen topologischer Räume ein paar Eigenschaften und Operationen, die zumindest für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ schon aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt sein sollten.

2.10 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge von X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Da Schnitte von Komplementen Komplemente von Vereinigungen und umgekehrt sind, folgt sofort aus der Definition einen topologischen Raumes.

2.11 Proposition. *Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:*

(i) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Ist X eine Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, und ist die Menge $\{A \subset X : X - A \in \mathcal{T}\}$ abgeschlossen gegenüber beliebigen Schnitten und endlichen Vereinigungen, so ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. □

[1] Dies ist ein sehr spezieller Fall der Zariski-Topologie.

Eine Topologie kann also genau so gut wie durch Angabe der offenen Mengen durch Angabe der abgeschlossenen Mengen definiert werden.

2.12 Beispiel. In einem mit der kofiniten Topologie versehenen Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie endlich oder gleich dem ganzen Raum ist. Dass dies eine Topologie ist, liegt also im wesentlichen daran, dass Schnitte endlicher Mengen eindlich sind und ebenso endliche Vereinigungen endlicher Mengen.

Was wir in Bemerkung 1.13 für Umgebungen in metrischen Räumen festgestellt haben, machen wir wieder zur Definition.

2.13 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$.

2.14 Definitionen und Propositionen. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

$$\operatorname{int} A := \bigcup \{U \subset A \colon U \text{ offen}\}$$

ist die größte in A enthaltene offene Menge und heißt das *Innere* von A.

$$\overline{A} := \bigcap \{C \subset X \colon A \subset C, C \text{ abgeschlossen}\}$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält und heißt der *Abschluss* von A.

$$\mathfrak{d}A := \overline{A} - \operatorname{int} A$$

heißt der *Rand* von A.

Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A, wenn $x \in \operatorname{int} A$, *Berührpunkt* von A, wenn $x \in \overline{A}$ und *Randpunkt* von A, wenn $x \in \mathfrak{d}A$.

An dieser Stelle sei es den StudentInnen ans Herz gelegt, die verschiedenen ihnen bereits bekannten Charakterisierungen und Eigenschaften dieser Begriffe aus diesen Definitionen herzuleiten.

2.15 Definitionen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = X$, *nirgends dicht*, wenn $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Mehr Stetigkeit

Wir haben Stetigkeit bisher nur global definiert. Von metrischen Räumen her kennen wir auch den lokalen Begriff der Stetigkeit in einem Punkt.

2.16 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. f heißt *stetig in x*, wenn für jede Umgebung U von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x ist.

Wir bemerken:

2.17 Proposition. *Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.* □

Eine einfache Umformulierung der Definition ist

2.18 Proposition. *Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist in $x \in X$ genau dann stetig, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so dass $f[U] \subset V$.*

Beweis. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Ist f in x stetig, so ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x, und es ist $f\left[f^{-1}[V]\right] \subset V$. Existiert andererseits eine Umgebung U von x mit $f[U] \subset V$, so ist $U \subset f^{-1}[V]$ und auch $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x. □

Für metrische Räume stimmen diese Definitionen mit denen überein, die wir bereits hatten.

2.19 Proposition. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien außerdem $\mathcal{T}_{d_X}$ und $\mathcal{T}_{d_Y}$ die von den Metriken induzierten Topologien. Dann sind äquivalent:*

(i) $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ ist stetig in x.

(ii) $f\colon (X, \mathcal{T}_{d_X}) \to (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ ist stetig in x.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Nun existiert ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x, so dass $f[U] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Nun gibt es wiederum ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$, also $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. □

Wir schauen uns den Beweis noch einmal an: Die ε-δ-Definition der Stetigkeit ist fast genau die Beschreibung in Proposition 2.18, nur dass sie nur ε-Umgebungen anstelle beliebiger zulässt. Da es aber genügend viele ε-Umgebungen gibt, macht das keinen Unterschied. Wir formalisieren nun dieses „genügend viele“.

2.20 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine *Umgebungsbasis von x* ist eine Menge $\mathcal{B}$ von Umgebungen von x, so dass es zu jeder Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $V \subset U$.

Was wir also soeben die folgende Tatsache benutzt.

2.21 Proposition. *Ist X ein metrischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge $\{B_\varepsilon(x)\colon \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von x.* □

Und eigentlich haben wir das folgende gezeigt.

2.22 Proposition. *Es seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Sei außerdem $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x, $\mathcal{B}'$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$. Dann ist f in x genau dann stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{B}'$ ein $U \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $f[U] \subset V$.* □

Das ist typisch: Anstatt eine Eigenschaft für alle Umgebungen eines Punktes nachzuprüfen, genügt es häufig, dies nur für alle Elemente einer Umgebungsbasis zu tun.

Man lasse sich nicht von dem Wort Umgebungs*basis* verwirren. Vergleicht man die Situation mit Vektorräumen, so entspricht das eher einem Erzeugendensystem. Zum Beispiel ist ja immer die Menge aller Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis.

Unterräume und das Produkt zweier Räume

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes wird auf natürliche Art selbst zu einem topologischen Raum.

2.23 Definition und Proposition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $\{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y, die *Unterraumtopologie*. Y versehen mit der Unterraumtopologie heißt ein *Unterraum* von X.

Die Unterraumtopologie ist gerade so gemacht, dass die Inklusionsabbildung stetig wird. Um das besser formulieren zu können, führen wir zwei Begriffe ein.

2.24 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X. $\mathcal{T}_1$ heißt *gröber* als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

2.25 Proposition. *Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Unterraumtopologie die gröbste Topologie auf Y, so dass die Inklusionsabbildung $i\colon Y \to X$ stetig ist.* □

Wir notieren noch eine weitere einfache aber wichtige Eigenschaft.

2.26 Proposition. *Seien X, Z topologische Räume, $Y \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen und $i\colon Y \to X$ die Inklusion. Eine Funktion $f\colon Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f$ stetig ist.*

Beweis. Ist f stetig, so auch $i \circ f$, da i stetig ist. Sei nun $i \circ f$ stetig und $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $O \subset X$ mit $U = O \cap Y$, also $U = i^{-1}[O]$. Es folgt, dass $f^{-1}[U] = f^{-1}[i^{-1}[O]] = (i \circ f)^{-1}[O]$ offen ist. □

Eine weitere wichtige Konstruktion ist das Produkt von Räumen. Wir werden Produkte —auch unendlich vieler Räume— später noch genauer behandeln, daher begnügen wir uns hier mit dem Produkt zweier Räume.

Mengen der Form $U \times V$ sollten für offene U, V offen sein; diese bilden allerdings noch keine Topologie, da die Vereinigung zweier Mengen dieser Form nicht wieder von dieser Form zu sein braucht. Wir müssen also Vereinigungen auch noch hinzunehmen. Wir machen dies nun systematisch.

2.27 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist, so dass also $\mathcal{T} = \{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ gilt.

Da eine Basis offenbar die Topologie bestimmt, kann man die Topologie beschreiben, indem man eine Basis angibt. Dabei ist es hilfreich, zu wissen, wann eine gegebene Familie von Teilmengen Basis einer Topologie ist.

2.28 Proposition. *Sei X eine Menge, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten, so ist $\{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ eine Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$.* □

2.29 Bemerkung. Die Voraussetzung in dieser Proposition kann noch abgeschwächt werden, wir brauchen das aber im Moment nicht.

Wir sind nun bereit, das Produkt zweier topologischer Räume zu definieren.

2.30 Definition. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die Topologie mit der Basis

$$\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

$X \times Y$ versehen mit dieser Topologie heißt das *Produkt* der Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir immer davon ausgehen, dass $X \times Y$ die Produkttopologie trägt. Bevor wir wichtige Eigenschaften von Produkten betrachten, noch ein weiterer Begriff.

2.31 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Subbasis* der Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von $\mathcal{S}$ ist, so dass also $\{\bigcap_{k=1}^n O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

Wir bemerken kurz:

2.32 Proposition. *Ist X eine Menge, so ist jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ eine Subbasis einer Topologie auf X.*

Doch nun weiter:

Beweis. $\{\bigcap_{k=1}^n O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen und daher nach Proposition 2.28 die Basis einer Topologie. □

2.33 Proposition. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist die Menge*

$$\{O \times Y : O \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{T}_Y\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $X \times Y$. □

2.34 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume und*

$$\begin{aligned} p_1 \colon X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} p_2 \colon X \times Y &\to Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

die kanonischen Projektionen. Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $X \times Y$, so dass p_1 und p_2 stetig sind.

Beweis. p_1 ist genau dann stetig, wenn $p_1^{-1}[O] = O \times Y$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist. Ebenso ist p_2 genau dann stetig, wenn alle $X \times O$, $O \subset Y$ offen, offen sind. Nun ist eine Topologie offenbar genau dann die gröbste, in der diese Mengen offen sind, wenn diese Mengen eine Subbasis von ihr bilden. □

Um Stetigkeit nachzuprüfen, genügt es eine Subbasis zu betrachten:

2.35 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y. Eine Funktion $f \colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}[O]$ für alle $O \in \mathcal{S}$ offen ist.*

Beweis. „⇒“ ist klar, denn alle $O \in \mathcal{S}$ sind offen. “⇐„: Sei $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine Indexmenge I, $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ und O_{ik} für alle $i \in I, 1 \leq k \leq n_i$, so dass $U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}$. Nun ist $f^{-1}[O_{ik}]$ für alle i, k offen. Damit ist auch

$$f^{-1}[U] = f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}\right] = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}[O_{ik}]$$

offen. □

2.36 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Produkttopologie die feinste Topologie auf $X \times Y$, so dass für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f \colon Z \to X$ und $g \colon Z \to Y$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} (f, g) \colon Z &\to X \times Y \\ z &\mapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

stetig ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie diese Eigenschaft hat. Dazu genügt es nach Proposition 2.35, Urbilder von Elementen einer Subbasis zu betrachten. Sei daher U ein beliebiges Element der Subbasis aus Proposition 2.33, etwa $O \times Y$ mit $O \subset X$ offen. Nun ist $(f,g)^{-1}[U] = (f,g)^{-1}[O \times Y] = f^{-1}[O]$ offen, da f stetig ist.

Bezeichnen wir nun die Produkttopologie mit $\mathcal{T}$ und nehmen wir an, $\mathcal{T}'$ sei eine weitere Topologie auf $X \times Y$ der Eigenschaft aus der Proposition. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon (X \times Y, \mathcal{T}) &\to (X \times Y, \mathcal{T}') \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Es ist $i = (p_1, p_2)$ und nach Proposition 2.34 sind p_1 und p_2 stetig. Nach der Vorraussetzung an $\mathcal{T}'$ ist also i stetig. Das heißt aber gerade, dass $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

Die Propositionen 2.34 und 2.36 ergeben zusammen eine wichtige Charakterisierung der Produkttopologie.

2.37 Korollar. *Seien X, Y Räume. Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $X \times Y$, die die folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:*

(i) Die kanonischen Projektionen auf die Faktoren sind stetig.

(ii) Für einen beliebigen Raum Z und stetige Abbildungen $f\colon Z \to X$ und $g\colon Z \to Y$ ist die Abbildung $(f,g)\colon Z \to X \times Y$ stetig.

□

Lieferung 3

Zusammenhang

Zusammenhang

3.1 Definition. Ein Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn er außer X und $\emptyset$ keine Teilmengen hat, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Ein Raum X ist also genau dann nicht zusammenhängend, wenn er sich als disjunkte Vereinigung $A \cup B$ nicht-leerer offener (oder abgeschlossener) Mengen schreiben lässt. Man beachte, dass die Topologie auf X in diesem Fall vollständig von den Unterraumtopologien auf A und B bestimmt wird, denn $U \subset X$ ist dann genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $U \cap B$ offen sind. Man kann in dieser Situation tatsächlich oft A und B einzeln betrachten.

3.2 Beispiele.

- ▷ Ein diskreter Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nur einen Punkt hat.
- ▷ $\mathbb{R} - \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, wie die Zerlegung $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ zeigt.

Ein nicht-triviales Beispiel eines zusammenhängenden Raumes liefert die folgende Charakterisierung.

3.3 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X *ist zusammenhängend.*

(ii) *Ist* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und sind* $y, y', m \in \mathbb{R}$ *mit* $y, y' \in \operatorname{Im} f$, $y < m < y'$, *dann ist auch* $m \in \operatorname{Im} f$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Seien f, y, y', m wie in der Proposition. Dann sind die Mengen $f^{-1}[(-\infty, m)]$ und $f^{-1}[(m, \infty)]$ disjunkte offene und nicht-leere Teilmengen von X. Da X zusammenhängend ist, kann die Vereinigung dieser beiden Mengen nicht ganz X sein, also ist $m \in \operatorname{Im} f$.

„$\Leftarrow$" Sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen. Dann ist die Funktion

$$f\colon X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

stetig. Da $0 \notin \operatorname{Im} f$, können 1 und -1 nicht beide im Bild von f liegen. Also ist A oder B leer. □

Einen zusammenhängenden Raum kennen wir also aus Analysis I.

3.4 Proposition (Zwischenwertsatz). *Das Einheitsintervall I ist zusammenhängend.* □

Auf eine Wiedergabe des aus dem ersten Semester bekannten Beweises verzichten wir, bemerken aber, dass die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich war.

Im Beweis von Proposition 3.3 haben wir nebenbei schon fast gezeigt, dass stetige Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend sind.

3.5 Proposition. *Seien X, Y Räume, X zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig und surjektiv. Dann ist Y zusammenhängend.*

Beweis. Sei $Y = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Teilmengen. Dann ist $X = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ und $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = f^{-1}[A \cap B] = \emptyset$, und da f stetig ist, sind $f^{-1}[A]$ und $f^{-1}[B]$ offen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}[A] = \emptyset$ oder $f^{-1}[B] = \emptyset$. Aus der Surjektivität von f folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. □

Nun noch zwei Propositionen, die später nützlich sein werden.

3.6 Proposition. *Ist X ein Raum und $D \subset X$ dicht und zusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen und nicht-leer. Da A offen und nicht-leer und D dicht ist, ist $A \cap D \neq \emptyset$. Da D zusammenhängend und $A \cap D$ offen-abgeschlossen in D ist, ist nun $A \cap D = D$, also $D \subset A$. Damit ist auch A dicht in X. Da A abgeschlossen ist, ist $A = X$. □

3.7 Proposition. *Sei X ein Raum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Sind alle $M \in \mathcal{M}$ zusammenhängend und ist $X = \bigcup \mathcal{M}$, $M \cap M' \neq \emptyset$ für alle $M, M' \in \mathcal{M}$, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen. Dann ist $A \cap M$ offen-abgeschlossen in M für alle $M \in \mathcal{M}$. Sei nun $A \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{M}$ mit $A \cap M \neq \emptyset$. Da M zusammenhängend ist, ist $A \cap M = M$. Für beliebiges $M' \in \mathcal{M}$ ist nun $\emptyset \neq M \cap M' \subset A \cap M'$, also, da M' zusammenhängend ist, $A \cap M' = M'$. Damit ist $A = X$. □

Komponenten

Wir wollen nun einen gegebenen Raum X als disjunkte Vereinigung zusammenhängender Unterräume darstellen. Man könnte nun hoffen, dass dies immer so möglich sei, dass jeder dieser Unterräume zugleich offen und abgeschlossen ist. Dies wird aber im allgemeinen nicht möglich sein, wie schon das Beispiel $X = \{1/n\colon n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ zeigt: Jeder Unterraum mit mehr als einem Punkt ist nicht zusammenhängend, denn das größte Element kann von dem Rest durch eine offen-abgeschlossene Menge getrennt werden. Andererseits ist aber $\{0\}$ nicht offen in X.

Um dennoch jeden Raum als disjunkte Vereinigung möglichst großer zusammenhängender Teilräume darzustellen, betrachten wir die folgende Äquivalenzrelation.

3.8 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren auf X eine Relation $\sim_{\mathrm{z}}$ durch

$$p \sim_{\mathrm{z}} q :\Longleftrightarrow$$
$$\text{Es gibt einen zusammenhängenden Unterraum } Z \subset X \text{ mit } p, q \in Z.$$

3.9 Proposition. *$\sim_{\mathrm{z}}$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Zur Reflexivität bemerke, dass einelementige Unterräume zusammenhängend sind. Symmetrie ist klar. Die Transitivität folgt aus Proposition 3.7. □

3.10 Definition. Die Äquivalenzklassen der Relation $\sim_{\mathrm{z}}$ heißen die *Zusammenhangskomponenten* oder kurz *Komponenten* des Raumes.

3.11 Proposition. *Sei X ein Raum.*

(i) Die Komponenten von X sind nicht-leer, und X ist disjunkte Vereinigung seiner Komponenten.

(ii) Jede zusammenhängende Teilmenge von X ist in einer Komponente enthalten.

(iii) Die Komponenten sind abgeschlossen und zusammenhängend.

Die Komponenten sind also maximal zusammenhängende Teilmengen.

Beweis. (i) folgt daraus, dass $\sim_{\mathrm{z}}$ eine Äquivalenzrelation ist, (ii) direkt aus der Definition von $\sim_{\mathrm{z}}$. Sei nun K eine Komponente und $x \in K$. K ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten. Nach Proposition 3.7 ist K zusammenhängend. Da nach Proposition 3.6 der Abschluss von K ebenfalls zusammenhängend ist, muss nach dem bisher gezeigten K selbst abgeschlossen sein. Damit ist auch (iii) gezeigt. □

3.12 Beispiel. Die Komponenten von $\mathbb{R} - \{0\}$ sind $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

3.13 Beispiel. Obiger Diskussion ist zu entnehmen, dass jede einelementige Teilmenge von $\{1/n\colon n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ eine Komponente ist. Dieser Raum enthält also mit $\{0\}$ eine Komponente, die nicht offen ist.

Das Verständnis der Komponenten vereinfacht den Beweis des folgenden Satzes.

3.14 Proposition. *Sind X und Y zusammenhängende Räume, so ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien (x, y) und (x', y') beliebige Punkte von $X \times Y$. Da $\{x\} \times Y \approx Y$ zusammenhängend ist, liegen (x, y) und (x, y') in der selben Komponente von $X \times Y$. Da $X \times \{y'\}$ zusammenhängend ist, liegen (x, y') und (x', y') in der selben Komponente. Damit liegen (x, y) und (x', y') in der selben Komponente, und da sie beliebig gewählt waren, hat $X \times Y$ nicht mehr als eine Komponente. $\square$

Eine Situation, in der die Zerlegung in Komponenten besonders angenehm ist, ist die folgende.

3.15 Definition. Ein Raum heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Umgebungen besitzt.

3.16 Proposition. *Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen.*

Beweis. Sei K eine Komponente und $x \in K$. Dass K abgeschlossen ist, haben wir bereits gezeigt. Nun besitzt x eine zusammenhängende Umgebung. Diese muss in K enthalten sein, also ist K selbst Umgebung von x. Da x beliebig gewählt war, ist K offen. $\square$

Wegzusammenhang

Ein anderer wichtiger Zusammenhangsbegriff ist der des Wegzusammenhangs. Wir gehen nun etwas schneller vor und definieren gleich die entsprechende Äquivalenzrelation.

3.17 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren eine Relation $\sim_{\mathrm{w}}$ durch

$$p \sim_{\mathrm{w}} q :\Longleftrightarrow$$
$$\text{Es existiert eine stetige Abbildung } w\colon I \to X \text{ mit } w(0) = p,\ w(1) = q.$$

Eine solche Abbildung w heißt ein *Weg von p nach q*.

3.18 Proposition. *$\sim_{\mathrm{w}}$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien $p, q, r \in X$. Der konstante Weg

$$\begin{aligned} c_p \colon I &\to X \\ t &\mapsto p \end{aligned}$$

zeigt $p \sim_{\mathrm{w}} p$ und damit die Reflexivität. Sei nun $p \sim_{\mathrm{w}} q$ und w ein Weg von p nach q. Dann ist

$$\begin{aligned} w^- \colon I &\to X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

ein Weg von q nach p, was $q \sim_{\mathrm{w}} p$ und die Symmetrie zeigt. Sei schließlich zusätzlich $q \sim_{\mathrm{w}} r$ und w' ein Weg von q nach r. dann ist

$$\begin{aligned} w * w' \colon I &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ein Weg von p nach r, was $p \sim_{\mathrm{w}} r$ und die Transitivität zeigt. □

3.19 Definition. Sei X ein Raum. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_{\mathrm{w}}$ heißen die *Wegzusammenhangskomponenten* oder *Wegkomponente* von X. Ein Raum heißt *wegzusammenhängend*, wenn er nicht mehr als eine Wegzusammenhangskomponente besitzt.

3.20 Proposition. *Sei X ein Raum. Ist X wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.*

Beweis. Seien $p, q \in X$ beliebig. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $w \colon I \to X$ von p nach q. Da nach Proposition 3.4 I zusammenhängend ist, ist nach Proposition 3.5 auch $w[I]$ zusammenhängend, also liegen p und q in der gleichen Komponente. Damit hat X nicht mehr als eine Zusammenhangskomponente. □

Dass die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt, macht man sich als Übung an dem Beispiel $\{0\} \times [-1, 1] \cup \big\{(x, \sin \frac{1}{x}) \colon x > 0\big\} \subset \mathbb{R}^2$ klar.

3.21 Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn ein $v \in X$ existiert, so dass für alle $p \in X$ und $s \in I$ auch $sv + (1-s)p \in X$.

3.22 Proposition. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist X wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $v \in X$ wie in Definition 3.21 und $p \in X$ beliebig. Dann ist $p \sim_{\mathrm{w}} v$. □

3.23 Korollar. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X wegzusammenhängend.* □

3.24 Definition. Ein Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Umgebungen besitzt.

3.25 Proposition. *Die Wegzusammenhangskomponenten eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein.*

Beweis. Sei K eine Wegzusammenhangskomponente und $x \in K$. Nun existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von x. Da $x' \sim_{\mathrm{w}} x$ für alle $x' \in U$, ist $U \subset K$. Damit ist K offen. Da das Komplement von K aber die Vereinigung aller anderen Wegzusammenhangskompenten ist, ist das Komplement von K auch offen. Damit ist K offen-abgeschlossen.

Nun ist, da die Wegzusammenhangskomponenten zusammenhängend sind, jede Zusammenhangskomponente disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten. Da die Zusammenhangskomponenten selbst zusammenhängend und die Wegzusammenhangskomponenten offen-abgeschlossen sind, kann keine Zusammenhangskomponenten disjunkte Vereinigung von mehr als einer Wegzusammenhangskomponente sein. $\square$

Lieferung 4

Kompaktheit

Kompaktheit

Den Begriff der Kompaktheit muss man wohl für jemanden, der eine Analysisvorlesung gehört hat, nicht weiter motivieren. Für uns ist es nur wichtig, aus den verschiedenen Charakterisierungen, die dort kennengelernt wurden und die für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, die richtige als Definition herauszupicken.

4.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* (von X), wenn $\bigcup \mathcal{C} = X$, *offene Überdeckung*, wenn zusätzlich $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Eine Teilmenge einer Überdeckung, die selbst Überdeckung ist, heißt *Teilüberdeckung*.

4.2 Definition. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Der Raum X heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.

Häufig werden quasikompakte Räume schon kompakt genannt, man lasse also beim Literaturstudium Vorsicht walten.

Da schon bekannt sein sollte, wann Unterräume von euklidischen Räumen kompakt sind, heben wir uns diese noch ein wenig auf und begnügen uns mit einem Beispiel, das zeigt, dass Kompaktheit als Verallgemeinerung von Endlichkeit angesehen werden kann.

4.3 Beispiel. Jeder endliche Raum (in der Tat jeder Raum mit nur endlich vielen offenen Mengen) ist quasikompakt. Ein diskreter Raum X ist genau dann quasikompakt (und damit kompakt), wenn er endlich ist (betrachte die Überdeckung $\{\{x\} : x \in X\}$).

Nun wieder ein wenig Prüfungsvorbereitung für die, die die Analysisprüfung noch nicht hinter sich haben.

4.4 Proposition. *Ein abgeschlossener Unterraum A eines quasikompakten Raumes X ist quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ eine offene Überdeckung von A. Betrachte nun $\mathcal{C}' := \{U \subset X : U \text{ offen}, U \cap A \in \mathcal{C}\}$. Nach der Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem $V \in \mathcal{C}$ ein $U \in \mathcal{C}'$ mit $U \cap A = V$. Daher ist $\mathcal{C}' \cup \{X - A\}$ eine offene Überdeckung von X und hat eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{C}''$. $\{U \cap A : U \in \mathcal{C}''\}$ ist nun eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$. □

4.5 Proposition. *Eine quasikompakte Teilmenge K eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in X - K$. Es ist zu zeigen, dass $X - K$ Umgebung von x ist. Setze $\mathcal{C} := \{X - \overline{U} : U \text{ Umgebung von } x\}$. Da X hausdorffsch ist, ist $\bigcup \mathcal{C} = X - \{x\}$, also $\mathcal{C}' := \{U \cap K : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von K. Nun existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}'$, also auch eine endliche Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von X, so dass $\bigcup \{X - \overline{U} : U \in \mathcal{U}\} \supset K$, also $\bigcap \mathcal{U} \subset X - K$. Nun ist $\bigcap \mathcal{U}$ eine Umgebung von x, also ist auch $X - K$ eine Umgebung von x. □

Stetige Bilder quasikompakter Räume sind quasikompakt.

4.6 Proposition. *Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und X quasikompakt. Dann ist auch Y quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt daher eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, so dass $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}'\}$ eine Überdeckung von X ist. Aus der Surjektivität von f folgt, dass $\mathcal{C}'$ eine Überdeckung von Y ist: Sei $y \in Y$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nun existiert $U \in \mathcal{C}'$ mit $x \in f^{-1}[U]$, also $y = f(x) \in U$. □

Kompaktheit kann sehr nützlich bei der Konstruktion stetiger Abbildungen sein.

4.7 Proposition. *Seien X, Y Räume, X quasikompakt, Y hausdorffsch und sei $p : X \to Y$ eine stetige Surjektion. Dann ist für jeden Raum Z und jede Funktion $f : Y \to Z$, so dass $f \circ p$ stetig ist, bereits f stetig.*

4.8 Bemerkung. Man kann das auch wie folgt ausdrücken: Sind X, Y, Z und p wie eben beschrieben und ist $g : X \to Z$ eine stetige Abbildung, so dass $g(x) = g(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $p(x) = p(x')$, so existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, dotted, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Sei $A \subset Z$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}[A]$ abgeschlossen ist. Da $f \circ p$ stetig ist, ist $p^{-1}[f^{-1}[A]]$ abgeschlossen, also nach Proposition 4.4 quasikompakt. Nach Proposition 4.6 ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]]$ quasikompakt und nach Proposition 4.5 abgeschlossen. Da p surjektiv ist, ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]] = f^{-1}[A]$. □

4.9 Beispiel. Ist Z ein beliebiger Raum und $g\colon I \to Z$ eine stetige Funktion mit $g(0) = g(1)$, so gibt es eine stetige Funktion $f\colon S^1 \to Z$ mit $f(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) = g(t)$ für $t \in I$. Natürlich hätte man das auch noch leicht per Hand nachrechnen können.

4.10 Korollar. *Ist $h\colon X \to Y$ eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum, so ist h ein Homöomorphismus.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $h^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist, und nach dem eben gezeigten ist das der Fall, da $h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_X$ stetig ist. □

Produkte

Eine typische Anwendung von Kompaktheit ist auch die folgende Proposition. Man benutzt sie zum Beispiel, um zu zeigen, dass ein lokaler Fluss auf einer kompakten Mannigfaltigkeit (oder ein lokaler Fluss auf $\mathbb{R}^n$, der außerhalb eines Kompaktums konstant ist) zu einem globalen Fluss erweitert werden kann.

4.11 Proposition. *Seien X, Y Räume. Ist Y quasikompakt, $x \in X$ und $O \subset X \times Y$ offen mit $\{x\} \times Y \subset O$, so existiert eine Umgebung U von x, so dass $U \times Y \subset O$.*

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\{V \times W\colon V \subset X \text{ offen}, W \subset Y \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie ist. Daher gilt, wenn wir

$$\mathcal{C} := \{V \times W\colon V \text{ Umgebung von } x, W \subset Y \text{ offen}, V \times W \subset O\}$$

setzen, $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mathcal{C}$. Nun ist $\{W \subset Y\colon \text{Es ex. } V \subset X \text{ mit } V \times W \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von Y. Aus der Quasikompaktheit von Y folgt nun die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Umgebungen $V_k \subset X$ von x und offenen Mengen $W_k \subset Y$, so dass $V_k \times W_k \subset O$ und $\bigcup_{k=1}^n W_k = Y$. Nun ist $U := \bigcap_{k=1}^n V_k$ eine Umgebung von x und

$$U \times Y = U \times \bigcup_{k=1}^n W_k \subset \bigcup_{k=1}^n (V_k \times W_k) \subset O,$$

wie gefordert. □

Dies ist auch ein Schritt im Beweis der folgenden Proposition, den wir trotz ihrer Wichtigkeit als Übung stellen, da sie später noch in größerer Allgemeinheit bewiesen werden wird.[1]

4.12 Proposition. *Das Produkt zweier quasikompakter Räume ist quasikompakt.*

Skizze. Nimm eine beliebige offene Überdeckung von $X \times Y$. Für beliebiges $x \in X$ zeige, dass es eine endliche Teilüberdeckung von $\{x\} \times Y$ gibt. Wende dann Proposition 4.11 an und schließlich noch die Kompaktheit von X. □

Da wir das bisher versäumt haben, notieren wir auch noch:

4.13 Proposition. *Das Produkt zweier Hausdorffräume ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien X, Y Hausdorffräume, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$, oBdA $x \neq x'$. Seien U, U' disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise x'. Dann sind $U \times Y$ und $U' \times Y$ disjunkte Umgebungen von (x, y) beziehungsweise (x', y'). □

Metrische Räume

Wenn wir uns nicht zu sehr auf das in der Analysis gezeigte beziehen wollen, sollten wir nun noch zeigen, dass eine Teilmenge eines euklidischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund des bisher gezeigten, würde es genügen, zu zeigen, dass das Einheitsintervall kompakt ist; man überlege sich das. Das ginge auch schnell, wäre aber nicht sonderlich spannend. In [Mun75, Chap. 3, Thm. 6.1] findet man eine Verallgemeinerung auf gewisse geordnete Räume. Wir werden eine Verallgemeinerung auf metrische Räume behandeln, wie sie zum Beispiel in [Bre93, I.9] dargestellt ist. Dazu müssen wir allerdings für metrische Räume gewisse Begriffe wie Cauchy-Folgen als bekannt voraussetzen.

4.14 Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

4.15 Definition. Ein metrischer Raum heißt *total beschränkt*, wenn er für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung durch endlich viele ε-Kugeln besitzt.

4.16 Proposition. *In einem metrischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X ist kompakt.

(ii) X ist vollständig und total beschränkt.

[1] Der spätere Beweis wird allerdings das Auswahlaxiom benötigen, was hier nicht der Fall ist.

Der Beweis ist im wesentlichen der, mit dem in Analysis II häufig gezeigt wird, dass I^n kompakt ist. Insofern ist die Formulierung der Proposition vielleicht interessanter als der Beweis, da hier in gewisser Weise die richtige Verallgemeinerung gefunden wurde.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei X nicht vollständig und (a_n) eine nicht konvergente Cauchy-Folge. Zu beliebigem $x \in X$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $B_\varepsilon(x)$ liegen. Da (a_n) Cauchy-Folge ist, folgt daraus, dass es ein ε_x gibt, so dass nur endlich viele Folgenglieder in $B_{\varepsilon_x}(x)$ liegen. Nun ist $\{B_{\varepsilon_x}(x) \colon x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da in jedem Element dieser Überdeckung nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann sie keine endliche Teilüberdeckung haben. Damit ist X nicht kompakt.

Sei nun X kompakt und $\varepsilon > 0$. Die Menge aller ε-Bälle überdeckt X und aufgrund der Kompaktheit genügen tatsächlich endlich viele. Damit ist X total beschränkt.

„$\Leftarrow$“ Sei X vollständig und total beschränkt und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Wir werden die Annahme, dass $\mathcal{C}$ keine endliche Teilüberdeckung habe, zum Widerspruch führen. Setze zunächst $A_{-1} := X$. Angenommen $A_{n-1} \subset X$ sei definiert und werde von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Dann können wir X mit endlich vielen $\frac{1}{2^n}$-Kugeln überdecken, und eine von denen, die A_{n-1} treffen wird wiederum von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Sei A_n eine solche Kugel und x_n ihr Mittelpunkt. Nun ist (x_n) eine Cauchy-Folge und $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ wird von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen einen Punkt, den wir y nennen wollen. Nun gibt es ein $O \in \mathcal{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset O$. Nun gibt es aber ein n, so dass $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y)$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, was zu einem Widerspruch führt. □

4.17 Korollar. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und in der euklidischen Norm beschränkt ist.*

Beweis. Der Unterraum X des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Wir zeigen nun noch, dass er genau dann beschränkt ist, wenn er total beschränkt ist. Es ist leicht zu sehen, dass ein unbeschränktes X nicht total beschränkt sein kann. Sei nun X beschränkt und $\varepsilon > 0$. Wiederum ist leicht zu sehen, dass es möglich ist, X mit endlich vielen $\frac{\varepsilon}{2}$ Kugeln *in* $\mathbb{R}^n$ zu überdecken. Lasse nun jede Kugel einer solchen Überdeckung weg, falls ihr Schnitt mit X leer ist und ersetze sie ansonsten durch die ε-Kugel um einen Punkt in diesem Schnitt. Dies ergibt eine Überdeckung von X mit endlich vielen ε-Kugeln. □

Lieferung 5

Produkte und mehr

Initial- und Finaltopologien

Wir beginnen mit zwei Definitionen. Diese sind recht abstrakt, aber wir werden sogleich sehen, dass sie uns bereits Bekanntes verallgemeinern.

5.1 Definition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j \colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Wir nennen eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X *Finaltopologie bezüglich der* f_j, wenn folgendes gilt:

(i) Die $f_j \colon Y_j \to (X, \mathcal{T})$ sind stetig.

(ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g \colon X \to Z$ gilt: Sind alle $g \circ f_j \colon Y_j \to Z$ stetig, so ist $g \colon (X, \mathcal{T}) \to Z$ stetig.

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[drr, "g\circ f_j"] & & \\ & (X,\mathcal{T}) \arrow[r, dotted, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

5.2 Definition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j \colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Wir nennen eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X *Initialtopologie bezüglich der* f_j, wenn folgendes gilt:

(i) Die Abbildungen $f_j \colon (X, \mathcal{T}) \to Y_j$ sind stetig.

(ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g \colon Z \to X$ gilt: Sind alle $f_j \circ g \colon Z \to Y_j$ stetig, so ist $g \colon Z \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[drr, "f_j\circ g"'] & (X,\mathcal{T}) \arrow[dr, "f_j"] & \\ & & Y_j \end{tikzcd}$$

Auch wenn wir die Diagramme noch gespiegelt haben, sieht man: Die beiden Definitionen gehen durch *Umkehren aller Pfeile* ineinander über. Bei der *Initial*topologie steht der Raum X *vorne* an den zu f_j gehörigen Pfeilen, bei der *Final*topologie steht er *hinten*.

5.3 Beispiel. Ist Y ein Raum und $X \subset Y$, so ist die Unterraumtopologie auf X Initialtopologie bezüglich der Inklusion $i\colon X \to Y$. Das haben wir in Proposition 2.26 gesehen.

5.4 Beispiel. Sind X, Y Räume, Y quasikompakt und X hausdorffsch und $p\colon Y \to X$ eine stetige Surjektion, so ist die Topologie von X Finaltopologie bezüglich p. Das haben wir in Proposition 4.7 gezeigt.

5.5 Beispiel. Sind X, Y Räume, so ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen $p_1\colon X \times Y \to X$ und $p_2\colon X \times Y \to Y$. Das haben wir in Korollar 2.37 gezeigt.

Das letzte Beispiel ist für uns im Moment insofern das wichtigste, als wir für das Produkt zweier Räume eigentlich schon alles gezeigt haben, was es für Initialtopologien zu zeigen gibt.

Wir werden nun Existenz und Eindeutigkeit von Initial- und Finaltopologien zeigen. Der Beweis der Eindeutigkeit ist so formal, dass es genügt, ihn für Initial- oder Finaltopologien durchzuführen. Der andere Beweis folgt dann durch Umkehren aller Pfeile.

5.6 Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Es seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so dass $\mathcal{T}_1$ Eigenschaft* (i) *aus der Definition der Finaltopologie hat und $\mathcal{T}_2$ Eigenschaft* (ii). *Dann ist $\mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_2$.*

Beweis. Sei $i\colon (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ die Funktion, die auf X die Identität ist. Es ist die Stetigkeit von i zu zeigen. Da $\mathcal{T}_2$ Eigenschaft (ii) hat, genügt dazu die Stetigkeit aller $i \circ f_j$, und das ist gerade die Eigenschaft (i) für $\mathcal{T}_1$. □

5.7 Korollar. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Existiert die Finaltopologie bezüglich der f_j, so ist sie eindeutig bestimmt.* □

5.8 Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Es seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so dass $\mathcal{T}_1$ Eigenschaft* (i) *aus der Definition der Initialtopologie hat und $\mathcal{T}_2$ Eigenschaft* (ii). *Dann ist $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$.*

Beweis. Wie Proposition 5.6, nur mit umgekehrten Pfeilen. □

5.9 Korollar. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Existiert die Initialtopologie bezüglich der f_j, so ist sie eindeutig bestimmt.* □

Wir müssen also nur noch die Frage der Existenz klären. Die eben gezeigten Propositionen zeigen schon, wie Final- und Initialtopologien aussehen müssen, wenn sie existieren: Die Initialtopologie muss die gröbste sein, so dass die f_j stetig sind, die Finaltopologie die feinste.

5.10 Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Dann ist*

$$\mathcal{T} := \Big\{ O \subset X\colon f_j^{-1}[O] \text{ offen in } Y_j \text{ für alle } j \in J \Big\}$$

die Finaltopologie auf X bezüglich der f_j.

Beweis. Zunächst ist zu bemerken, dass $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie ist, da f^{-1} mit Vereinigungen und Schnitten vertauscht. Dass die $f_j\colon Y_j \to (X, \mathcal{T})$ stetig sind, ist offensichtlich. Sei nun Z ein Raum und $g\colon X \to Z$ eine Funktion, so dass $g \circ f_j$ für alle $j \in J$ stetig ist. Für offenes $U \subset Z$ ist dann für alle $j \in J$ die Menge $(g \circ f_j)^{-1}[U] = f_j^{-1}[g^{-1}[U]]$ offen, also $g^{-1}[U] \in \mathcal{T}$. Damit ist $g\colon (X, \mathcal{T}) \to Z$ stetig. □

5.11 Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Dann ist die durch die Subbasis*

$$\mathcal{S} := \bigcup_{j \in J} \Big\{ f_j^{-1}[O]\colon O \subset Y_j \text{ offen} \Big\}$$

definierte Topologie auf X die Initialtopologie bezüglich der f_j.

Beweis. Wie für das Produkt zweier Räume in Proposition 2.34 und Proposition 2.36. □

Spezialfälle

Wir stellen nun die für uns wichtigsten Fälle zusammen, in denen Mengen mit der Initial- oder Finaltopologie versehen werden: Unterräume, Produkte, Quotienten und Summen. Über Unterräume haben wir bereits geredet. Endliche Produkte sind uns schon bekannt, über beliebige Produkte wird es sogleich noch einiges zu sagen geben. Quotienten betrachten wir danach, und über Summen gibt es nicht viel zu sagen.

Unterräume

5.12 Definition. Seien X, Y Räume. Eine Funktion $i\colon X \to Y$ heißt *Einbettung*, wenn sie injektiv ist und X die Initialtopologie bezüglich i trägt.

Die Funktion i ist also gerade dann eine Einbettung, wenn sie ein Homöomorphismus zwischen X und dem mit der Unterraumtopologie versehenen Bild $i[X]$ ist.

Produkte

Bevor wir beliebige Produkte topologischer Räume definieren, erinnern wir an das kartesische Produkt von Mengen und legen dafür Notation fest.

5.13 Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *kartesische Produkt* der M_j ist

$$\prod_{j \in J} M_j := \left\{ x\colon J \to \bigcup_{j \in J} M_j \;\middle|\; x(j) \in M_j \text{ für alle } j \in J \right\}.$$

Anstelle von $x(j)$ schreiben wir meist x_j und dementsprechend auch $(x_j)_{j \in J}$ anstelle von x. Die *kanonischen Projektionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} p_k\colon \prod_{j \in J} M_j &\to M_k, \qquad k \in J, \\ x &\mapsto x_k. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für Mengen M und N

$$M^N := \{x\colon N \to M\}$$

gerade der Spezialfall $M^N = \prod_{j \in N} M$ ist.

5.14 Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Das *Produkt* $\prod_{j \in J} X_j$ der Räume X_j ist das kartesische Produkt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen, die wir die *Produkttopologie* nennen.

5.15 Notation. Wir schreiben auch $X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$ für $\prod_{j \in \{0,\dots,n-1\}} X_j$.

Nun zu den dualen Konzepten.

Quotienten

5.16 Definition. Seien X, Y Räume. Eine Abbildung $q\colon X \to Y$ heißt *Quotientenabbildung*, wenn q surjektiv ist und Y die Finaltopologie bezüglich q ist. Diese Topologie auf Y nennen wir die Quotiententopologie bezüglich q.

Summen

5.17 Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *Koprodukt* der M_j ist

$$\coprod_{j \in J} M_j := \bigcup_{j \in J} (M_j \times \{j\}).$$

Die *kanonischen Inklusionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} i_k \colon M_k &\to \coprod_{j\in J} M_j, \qquad k \in J,\\ x &\mapsto (x,k). \end{aligned}$$

Die Idee hinter der Konstruktion $M_j \times \{j\}$ ist nur, dass so ganz sicher für $j \neq j'$ die Mengen $M_j \times \{j\}$ und $M_{j'} \times \{j'\}$ disjunkt sind. Sind M_j und $M_{j'}$ für alle $j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ ohnehin disjunkt, können wir auch einfach $\coprod_{j\in J} M_j = \bigcup_{j\in J} M_j$ und $i_k(x) = x$ setzen.

5.18 Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Die *topologische Summe* $\coprod_{j\in J} X_j$ ist das Koprodukt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Inklusionen.

5.19 Notation. Wir schreiben auch $X_0 + \cdots + X_{n-1}$ für $\coprod_{j\in\{0,\dots,n-1\}} X_j$.

Zwischenspiel: Abzählbares

Bevor wir uns näher mit Produkten beschäftigen, wollen wir noch ein paar Begriffe einführen.

5.20 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

5.21 Definition. Man sagt, ein topologischer Raum erfülle das *erste Abzählbarkeitsaxiom*,[1] wenn jeder seiner Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

5.22 Proposition. *Sei X ein topologischer Raum. Ist X metrisierbar, so erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei d eine Metrik, die die Topologie von X induziert und $x \in X$. Dann ist $\{B_{1/n}(x) \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von X. □

Die $\frac{1}{n}$-Umgebungen haben noch die angenehme Eigenschaft, ineinander zu liegen. Das kann man auch allgemein bei einem das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllenden Raum erreichen:

5.23 Lemma. *Sei X ein Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfülle, und $x \in X$. Dann hat x eine Umgebungsbasis der Form $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ mit $U_n \subset U_m$ für alle n, m mit $n \geq m$.*

[1] Diese Eigenschaft ein Axiom zu nennen, ist eigentlich etwas unglücklich. Vor allem ist es unpraktisch, kein Adjektiv für diese Eigenschaft zu haben. Im englischen Sprachraum hingegen sagt man auch einfach “X is first countable”, was zwar vielleicht sprachlich fragwürdig, aber sehr angenehm ist.

Beweis. Zunächst hat x überhaupt eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}$, also eine der Form $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Sollte $\mathcal{B}$ tatsächlich endlich sein, so wiederhole man ein Element einfach unendlich oft.) Setze nun $U_n := \bigcap_{k \le n} V_k$. Dann gilt für $m \ge n$, dass $U_m \subset U_n$, und die U_n sind Umgebungen von x, da endliche Schnitte offener Mengen offen sind. Ist nun O eine beliebige Umgebung von x, so gibt es, da $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x ist, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n \subset O$. Da $U_n \subset V_n$, ist auch $U_n \subset O$ und damit $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x. □

5.24 Definition. Man sagt, ein topologischer Raum erfülle das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

5.25 Proposition. *Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind X_i, $1 \le i \le n$ Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, so erfüllt auch $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}_i$ eine Basis der Topologie von X_i, so ist

$$\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \mathcal{B}_i\}$$

abzählbar und eine Basis der Topologie des Produkts, was (für $n = 2$) bereits in Aufgabe **??** nachgerechnet wurde. □

5.26 Proposition. $\mathbb{R}^n$ *erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Es genügt, $\mathbb{R}$ zu betrachten, und in Aufgabe **??** wurde auch gezeigt, dass die abzählbare Menge $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Topologie von $\mathbb{R}$ ist. □

Produkte

Da Produkte so wichtig sind, wollen wir die in Proposition 5.11 für eine Initialtopologie angegebene Subbasis für ein Produkt explizit hinschreiben.

5.27 Proposition. *Seien J eine beliebige Menge und $(X_j, \mathcal{T}_j)$ für $j \in J$ Räume. Dann ist*

$$\left\{ \prod_{j \in J} O_j : O_j \in \mathcal{T}_j \text{ f. a. } j \in J, \text{ es ex. } k \in J, \text{ s. d. } O_j = X_j \text{ f. a. } j \ne k \right\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $\prod_{j \in J} X_j$.

Beweis. Ist p_k die kanonische Projektion und $U \in \mathcal{T}_k$, so ist

$$p_k^{-1}[U] = \prod_{j \in J} O_j \qquad \text{mit } O_j = \begin{cases} U, & j = k, \\ X_j, & j \ne k, \end{cases}$$

und diese Mengen bilden nach Konstruktion der Initialtopologie eine Subbasis. □

5.28 Proposition. *Seien J eine beliebige Menge und $(X_j, \mathcal{T}_j)$ für $j \in J$ Räume. Dann ist*

$$\left\{ \prod_{j \in J} O_j \colon O_j \in \mathcal{T}_j \text{ f. a. } j \in J,\, O_j = X_j \text{ für fast alle } j \right\},$$

wobei ‚fast alle' alle bis auf endlich viele bedeute, eine Basis der Produkttopologie auf $\prod_{j \in J} X_j$.

Beweis. Dies sind gerade die endlichen Schnitte von Elementen der Subbasis aus der vorhergehenden Proposition. □

Man beachte, dass beliebige Mengen der Form $\prod_{j \in J} O_j$ mit $O_j \in \mathcal{T}_j$ im allgemeinen in der Produkttopologie *nicht* offen sind. Dadurch werden die Umgebungsbasen in großen Produkten schnell groß.

5.29 Proposition. *Sei J überabzählbar und seien X_j Räume für $j \in J$. Ist $x \in \prod_{j \in J} X_j$ und gibt es für jedes $j \in J$ eine von X_j verschiedene Umgebung von x_j, so hat x keine abzählbare Umgebungsbasis.*

Beweis. Sei $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge von Umgebungen von x. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$F_n := \{j \in J \colon p_j[U_n] \neq X_j\}$$

endlich. Daher ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ abzählbar und damit ungleich J. Sei nun $j \in J$ mit $j \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ und $V \neq X_j$ eine Umgebung von x_j. Dann enthält die Umgebung $p_j^{-1}[V]$ von x_j kein U_n, denn es ist $p_j[p_j^{-1}[V]] = V \neq X_j$, aber aufgrund der Wahl von j ist $p_j[U_n] = X_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\{U_n\}$ keine Umgebungsbasis von x. □

Man könnte nun hoffen, dass es, wenn schon keine abzählbaren, so doch wenigstens immer ähnlich Lemma 5.23 geordnete Umgebungsbasen gibt. Auch das ist nicht der Fall.

5.30 Proposition. *Sei J überabzählbar und seien X_j Räume für $j \in J$. Ist $x \in \prod_{j \in J} X_j$ und gibt es für jedes $j \in J$ eine von X_j verschiedene Umgebung von x_j, so besitzt x keine Umgebungsbasis, die durch Inklusion total geordnet ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x. Man wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene $j_n \in J$. Da J überabzählbar ist, ist das möglich. Man wähle zu jedem n eine von X_{j_n} verschiedene Umgebung U_n von x_{j_n}. Da $V_n := \bigcap_{k=0}^{n} p_{j_k}^{-1}[U_k]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebung von x ist, ist es möglich zu jedem n ein $B_n \in \mathcal{B}$ mit $B_n \subset V_n$ zu wählen. Da wir bereits gezeigt haben, dass x keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, ist insbesondere $\{B_n\}$ keine Umgebungsbasis von x, und es gibt eine Umgebung W von x mit $B_n \not\subset W$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt aber eine Umgebung $C \in \mathcal{B}$ mit

$C \subset W$. Damit ist $B_n \not\subset C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wäre nun $\mathcal{B}$ durch Inklusion total geordnet, so wäre $C \subset B_n$ für alle n und damit $C \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Also wäre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} p_{j_k}^{-1}[U_k]$ eine Umgebung von x. Dies ist aber nicht der Fall, denn da alle j_k verschieden sind und $U_k \neq X_{j_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, enthält $\bigcap_{k=0}^{\infty} p_{j_k}^{-1}[U_k]$ kein nicht-leeres Element der in Proposition 5.28 angegebenen Basis der Produkttopologie. $\square$

Lieferung 6

Quotienten: Identifizieren und Verkleben

Äquivalenzrelationen

Quotiententopologien formalisieren das anschauliche Konzept des Verklebens von Räumen an Punkten. Um das besser zu verstehen, beschäftigen wir uns kurz mit surjektiven Abbildungen und ihrem Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen.

Seien zuächst M, N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Funktion. Dann definiert f eine Äquivalenzrelation $\sim_f$ auf M durch $x \sim_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Ist andererseits $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und bezeichnet $M/{\sim}$ die Menge der Äquivalenzklassen, so definiert dies eine surjektive Funktion $q\colon M \to M/{\sim}$ durch $q(x) := [x]_\sim$. Ist nun $\sim$ eine Äquivalenzrelation, q die zugehörige Surjektion auf die Äquivalenzklassen und $\sim_q$ die hierdurch definierte Relation, so ist offenbar $\sim_q = \sim$. Ist andererseits $f\colon M \to N$ surjektiv, so existiert genau eine Bijektion $M/{\sim_f} \to N$, die

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[drr, two heads, "x\mapsto[x]"'] & & N \\
& & M/{\sim_f} \arrow[u, tail, two heads]
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Wenn einen also nicht interessiert, was die Elemente von N sind —und bei Räumen schauen wir uns ja meist nicht an, was ein ‚Punkt' ist—, so wird die Surjektion f vollständig durch die Relation $\sim_f$ beschrieben.

Wir legen entsprechend noch Notation fest.

6.1 Notation. Ist X ein Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so bezeichnet $X/{\sim}$ den Raum, der aus der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Surjektion $X \to X/{\sim}$ besteht.

Als Beispiel betrachten wir auf dem Einheitsintervall I die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x = y \vee (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 0),$$

also die von $0 \sim 1$ erzeugte Äquivalenzrelation. Den entstehenden Raum $I/{\sim}$ kann man sich nun so vorstellen, dass die Punkte 0 und 1 zu einem Punkt *identifiziert* wurden, dass also die beiden Enden des Einheitsintervalls *zusammengeklebt* wurden. Die Anschauung sagt uns nun, dass dabei die Kreislinie herausgekommen sein sollte, und wir werden nun zeigen, dass sie uns nicht täuscht. Betrachten wir zunächst, wie schon mehrfach, die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon I &\to S^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist surjektiv und fast injektiv: Nur 0 und 1 haben den selben Wert. Es ist also p surjektiv und $p(x) = p(y) \iff x \sim y$. Damit haben wir wie oben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & S^1 \\ & I/{\sim} \arrow[u, two heads, "h"'] \end{tikzcd}$$

und müssen uns nur noch um Stetigkeit kümmern. p ist nach Konstruktion stetig. Da $I/{\sim}$ die Quotiententopologie, also die Finaltopologie bezüglich q trägt, ist q stetig. Da $h \circ q = p$ stetig ist, ist auch h stetig, dies ist die zweite Eigenschaft der Finaltopologie und was Quotienten so angenehm macht. Wir wissen also bereits, dass h eine stetige Bijektion ist, und wollen nun zeigen, dass h in der Tat ein Homöomorphismus ist. Normalerweise müssten wir nun anfangen zu rechnen, aber wir haben Glück, dass I quasikompakt (sogar kompakt) und S^1 hausdorffsch ist: Nach Proposition 4.7 ist dadurch nämlich auch p automatisch eine Quotientenabbildung. Um die Stetigkeit von h^{-1} nachzuweisen, genügt daher die Stetigkeit von $h^{-1} \circ p$, aber $h^{-1} \circ p = q$ ist stetig. Weil das so wichtig ist, hier das gleiche Argument noch einmal etwas anders: Da I quasikompakt und q stetig und surjektiv ist, ist nach Proposition 4.6 auch $I/{\sim}$ quasikompakt. (Man beachte, dass wir an dieser Stelle in der Tat ohne etwas nachzurechnen noch nicht wissen können, dass $I/{\sim}$ hausdorffsch ist.) Nun ist h eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum also nach Korollar 4.10 ein Homöomorphismus.

Wir bemerken eine wichtige Tatsache, die wir nebenbei gezeigt haben, und die entsprechend auch für andere Fälle von Final- oder Initialtopologien gilt. Dies ist nur eine andere Art, deren Eindeutigkeit zu formulieren.

6.2 Lemma. *Seien X, Y_0, Y_1 Räume und $q_i\colon X \to Y_i$ Quotientenabbildungen. Ist für alle $x, x' \in X$ genau dann $q_0(x) = q_0(x')$, wenn $q_1(x) = q_1(x')$, so existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung h, so dass*

$$\begin{tikzcd} & Y_0 \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[ur, two heads, "q_0"] \arrow[dr, two heads, "q_1"'] & {} \\ & Y_1 \end{tikzcd}$$

kommutiert, und h ist ein Homöomorphismus. □

Das Zusammenschlagen von Unterräumen

Für Fälle wie den eben betrachteten führen wir eine einfachere Notation ein.

6.3 Notation. Sei X ein Raum und $A \subset X$. Ist $\sim$ die Äquivalenzrelation auf X mit

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A),$$

die A zu einem Punkt identifiziert, so schreiben wir

$$X/A$$

für den Quotientenraum $X/{\sim}$. Sind etwas allgemeiner $A_1, \ldots, A_n \subset X$ paarweise disjunkt und

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A_1) \vee \cdots \vee (x, y \in A_n),$$

so schreiben wir

$$X/(A_1, \ldots, A_n)$$

für $X/{\sim}$.

6.4 Proposition. *Es ist $I/\{0,1\} \approx S^1$, und für $n \in \mathbb{N}$ ist $D^{n+1}/S^n \approx S^{n+1}$.*

Beweis. $I/\{0,1\} \approx S^1$ haben wir bereits gezeigt. Für $n \in \mathbb{N}$ wollen wir eine stetige Abbildung $D^{n+1} \to S^{n+1}$ angeben, die S^n auf den Nordpol wirft und ansonsten injektiv ist. Eine solche Abbildung ist nicht schwer hinzuschreiben, aber unter Umständen muss man für die Stetigkeit arbeiten, und wir wollen sie uns lieber von Quotiententopologien schenken lassen. Betrachte dazu das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & D^{n+1} \arrow[d, two heads, "p"] \\ S^n \times D^1 \arrow[ur, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & {} \\ & S^{n+1} \end{tikzcd}$$

Hierbei seien f und g die stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} f\colon S^n \times D^1 &\to D^{n+1} & g\colon S^n \times D^1 &\to S^{n+1} \\ (x,s) &\mapsto \frac{s+1}{2}x, & (x,s) &\mapsto (\sqrt{1-s^2}\cdot x_1,\dots,\sqrt{1-s^2}\cdot x_{n+1}, s) \end{aligned}$$

Diese sind beide surjektiv, und für $x, y \in S^n \times D^1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff (x = y) \vee (x, y \in S^n \times \{-1\}), \\ g(x) = g(y) &\iff (x = y) \vee (x, y \in S^n \times \{-1\}) \vee (x, y \in S^n \times \{1\}). \end{aligned}$$

Da also aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass $g(x) = g(y)$, existiert eine Abbildung p, die das Diagramm kommutativ macht. Da f als stetige Surjektion von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum eine Quotientenabbildung ist, folgt die Stetigkeit von p aus der Stetigkeit von g. Da g surjektiv ist, ist auch p surjektiv. Mit dem gleichen Argument wie eben ist nun p eine Quotientenabbildung. Bemerken wir nun noch zusätzlich zu obigem, dass

$$f^{-1}[S^n] = S^n \times \{1\}\,,$$

so folgt für $x', y' \in D^{n+1}$

$$p(x') = p(y') \iff (x' = y') \vee (x', y' \in S^n)$$

und daraus mit Hilfe von Lemma 6.2, dass $D^{n+1}/S^n \approx S^{n+1}$. □

Wir führen noch etwas mehr Notation ein.

6.5 Definition. Sei X ein Raum. Dann nennen wir

$$CX := X \times I / X \times \{1\}$$

den *Kegel* über X und

$$\Sigma X := X \times I / (X \times \{0\}\,, X \times \{1\})$$

die *Einhängung* von X.

Im Beweis der letzten Proposition haben wir schon Beispiele kennengelernt:

6.6 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $CS^n \approx D^{n+1}$ und $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.*

Beweis. Die Quotientenabbildungen f und g aus dem letzten Beweis zeigen, wieder mit Hilfe von Lemma 6.2, dass $(S^n \times D^1)/(S^n \times \{-1\}) \approx D^{n+1}$ und $(S^n \times D^1)/(S^n \times \{-1\}\,, S^n \times \{1\}) \approx S^{n+1}$. Ersetzt man D^1 durch das homöomorphe I und entsprechend $\{1, -1\}$ durch $\{0, 1\}$, so erhält man die Behauptung. □

Projektive Räume

Bisher haben wir Quotienten betrachtet, die homöomorph zu Räumen waren, die wir bereits gut kannten. Spannender ist es, mit Hilfe von Quotienten neue Räume zu erschaffen.

6.7 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *n-dimensionale (reell-)projektive Raum*, $\mathbb{R}P^n$, ist definiert durch

$$\mathbb{R}P^n := S^n/\sim,$$

wobei für $x, y \in S^n$

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x = -y).$$

Es werden also Antipoden identifiziert.

Wir sollten kurz zwei Begriffe einführen, auf die wir bisher verzichtet haben.

6.8 Definition. Seien X, Y Räume und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. f heißt *offen*, wenn $f[O]$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist, *abgeschlossen*, wenn $f[A]$ für jede abgeschlossenene Menge $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Man mache sich klar, dass diese beiden Begriffe *nicht* äquivalent sind.

6.9 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Quotientenabbildung, die sich aus der Definition des projektiven Raums ergibt. Dann ist p eine offene Abbildung.*

Beweis. Es bezeichne $a \colon S^n \to S^n$ den Homöomorphismus $x \mapsto -x$. Ist nun $O \subset X$ offen, so ist $p^{-1}[p[O]] = O \cup a[O]$ offen, also $p[O]$ offen. □

6.10 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}P^n$ ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien $y, y' \in \mathbb{R}P^n$. Es seien p und a wie eben. Wir wählen $x, x' \in S^n$ mit $p(x) = y$ und $p(x') = y'$. Seien nun $U_0, {U_0}'$ offene disjunkte Umgebungen von x und x' und ebenso $U_1, {U_1}'$ offene disjunkte Umgebungen von x und $-x'$. Setze nun $V := p[U_0 \cap U_1]$ und $V' := p[U_0' \cap a[U_1']]$. Da p eine offene Abbildung ist, sind V und V' offen, außerdem ist $y \in V$ und $y' \in V'$. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
p^{-1}[V \cap V'] &= \big((U_0 \cap U_1) \cup a[U_0 \cap U_1]\big) \cap \big((U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0'] \cap U_1')\big) \\
&= (U_0 \cap U_1 \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (U_0 \cap U_1 \cap a[U_0'] \cap U_1') \\
&\quad \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap a[U_0'] \cap U_1') \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,
\end{aligned}$$

also $V \cap V' = \emptyset$. □

6.11 Bemerkung. Das wäre sicherlich etwas einfacher gegangen, hätte man die euklidische Metrik auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ benutzt, es sollte aber gezeigt werden, dass es auch ohne sie geht.

Dieser Raum wird uns später noch beschäftigen. Wir zeigen schon einmal, wie man ihn auch auf eine andere Art erhalten kann.

6.12 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\sim$ die Äquivalenzrelation auf D^n mit*

$$x \sim y \iff (x = y) \vee ((x, y \in S^{n-1}) \wedge (x = -y)),$$

so ist $D^n/{\sim} \approx \mathbb{R}P^n$.

Beweis. Sei zunächst h der Homöomorphismus von D^n auf die obere Halbkugel von S^n

$$\begin{aligned} h\colon D^n &\to S^n, \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \big(x_1, \dots, x_n, (1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^{1/2}\big). \end{aligned}$$

Da zu jedem $y \in S^n$ ein $x \in D^n$ mit $h(x) = y$ oder $h(x) = -y$ existiert, ist $p \circ h$ surjektiv. Da D^n kompakt und S^n hausdorffsch ist, ist also $p \circ h$ eine Quotientenabbildung. Nun sieht man, dass für $x, x' \in D^n$ genau dann $(p \circ h)(x) = (p \circ h)(x')$ gilt, wenn $x \sim x'$. Mit Lemma 6.2 folgt die Behauptung. □

Saturierte Mengen

Gegeben eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem Raum X wollen wir uns noch einmal näher den Zusammenhang zwischen X und $X/{\sim}$ anschauen.

6.13 Definition. Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Eine Teilmenge $A \subset M$ nennen wir *saturiert* bezüglich $\sim$, wenn für alle $x \in A$ gilt, dass aus $y \sim x$ folgt, dass $y \in A$. Ist $A \subset M$ beliebig, so nennen wir ihre *Saturierung* die kleinste sie enthaltende saturierte Menge.

Eine Menge ist also genau dann saturiert, wenn sie Vereinigung von Äquivalenzklassen ist, und die Saturierung einer Menge ist die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ihrer Elemente. Da nun Punkte in $X/{\sim}$ Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ sind, entsprechen Teilmengen von $X/{\sim}$ saturierten Teilmengen von X. Ist $q\colon X \to X/{\sim}$ die kanonische Quotientenabbildung, so ist diese Entsprechung gerade durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X/{\sim}) &\to \mathcal{P}(X) \\ A &\mapsto q^{-1}[A] \end{aligned}$$

gegeben. Aus der Konstruktion der Finaltopologie (Proposition 5.10) erkennt man, dass hierbei die offenen (abgeschlossenen) Teilmengen von $X/{\sim}$

genau den offenen (abgeschlossenen) saturierten Teilmengen von X entsprechen.

Wir betrachten dies an einem Beispiel.

6.14 Beispiel. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $X := \mathbb{R} \times \{0,1\}$, die durch

$$(x,n) \sim (y,m) \iff (x = y) \wedge ((x \neq 0) \vee (n = m))$$

gegeben ist. Äquivalenzklassen sind also gerade die Mengen $\{(x,0),(x,1)\}$ für $x \neq 0$ sowie $\{(0,0)\}$ und $\{(0,1)\}$. Wir wollen nun zeigen, dass $X/{\sim}$ nicht hausdorffsch ist. Es lassen sich nämlich $\{(0,0)\}$ und $\{(0,1)\}$ in $X/{\sim}$ nicht durch offene Mengen trennen, oder äquivalent: $\{(0,0)\}$ und $\{(0,1)\}$ lassen sich in X nicht durch offene saturierte Mengen trennen. Das zeigen wir nun: Zu jeder Umgebung U von $(0,0)$ in X gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass $(-\delta_0, \delta_0) \times \{0\} \subset U$. Ist nun die Umgebung U saturiert, so enthält sie die Saturierung von $(-\delta_0,\delta_0) \times \{0\}$, nämlich $((-\delta_0, 0) \times \{0,1\}) \cup \{(0,0)\} \cup ((0,\delta_0) \times \{0,1\})$. Ebenso gibt es zu jeder saturierten Umgebung V von $(0,1)$ ein $\delta_1 > 0$, so dass $((-\delta_1,0) \times \{0,1\}) \cup \{(0,1)\} \cup ((0,\delta_1) \times \{0,1\}) \subset V$. Damit ist $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$ und $\emptyset \neq (-\delta, 0) \times \{0,1\} \subset U \cap V$.

Verkleben

Ein weiteres Konzept, das sich mit Hilfe von Quotientenräumem modellieren lässt, ist das Ankleben eines Raumes an einen anderen. Dazu betrachtet man Räume X, Y, eine Teilmenge $A \subset X$ und eine stetige Abbildung $f\colon A \to Y$. Man betrachtet nun $Y + X$ mit den kanonischen Inklusionen $i_0\colon Y \to Y + X$ und $i_1\colon X \to Y + X$ und auf $Y + X$ die Äquivalenzrelation $\sim_f$, die von $i_0(f(x)) \sim_f i_1(x)$, $x \in A$, erzeugt wird, also

$$\begin{aligned}
i_0(y) \sim_f i_0(y') &\iff y = y' \\
i_0(y) \sim_f i_1(x) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\
i_1(x) \sim_f i_0(y) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\
i_1(x) \sim_f i_1(x') &\iff (x = x') \vee ((x, x' \in A) \wedge (f(x) = f(x'))).
\end{aligned}$$

6.15 Notation. In dieser Situation bezeichnen wir den Quotientenraum $(Y + X)/{\sim_f}$ mit $Y \cup_f X$ und sagen, er entstehe, indem man X vermittels f an Y anklebe. Bezeichnet $q\colon Y + X \to Y \cup_f X$ die Quotientenabbildung, so nennen wir

$$j\colon Y \xrightarrow{i_0} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *kanonische Inklusion* und

$$\chi\colon X \xrightarrow{i_1} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *charakteristische Abbildung.*

Die folgende Aussage ist nicht trivial, da in ihr Quotienten und Einbettungen vorkommen und sich Final- und Initialtopologien nicht immer gut vertragen.

6.16 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f\colon A \to Y$ stetig. Dann ist die kanonische Inklusion $j\colon Y \to Y \cup_f X$ eine Einbettung.*

Beweis. Die Stetigkeit von j ist klar. Die Injektivität folgt daraus, dass $i_0(y) \sim_f i_0(y')$ nur für $y = y'$. Sei nun $V \subset Y$ offen. Es ist zu zeigen, dass es ein offenes $U \subset Y \cup_f X$ gibt, so dass $V = j^{-1}[U]$ ist. Das heißt, dass wir eine offene, bezüglich $\sim_f$ saturierte Menge $\tilde{U} \subset Y + X$ suchen, so dass $V = i_0^{-1}[\tilde{U}]$. Nun ist $i_0[V] \cup i_1[f^{-1}[V]]$ die Saturierung von $i_0[V]$, aber im allgemeinen nicht offen. Da aber $f^{-1}[V]$ offen in A ist, gibt es eine offene Menge $U' \subset X$ mit $U' \cap A = f^{-1}[V]$. Da nun für $x, x' \in X - A$ nur dann $i_1(x) \sim_f i_1(x')$, wenn $x = x'$, ist $\tilde{U} := i_0[V] \cup i_1[U']$ saturiert. Außerdem ist $\tilde{U}$ offen und $i_0^{-1}[\tilde{U}] = V$. $\square$

Wir übersetzen die universelle Eigenschaft (Definition 5.1) der Finaltopologie in unsere Situation.

6.17 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f\colon A \to Y$ stetig. Ist Z ein weiterer Raum und sind $g\colon X \to Z$, $h\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, so dass $g|_A = h \circ f$, so existiert genau eine stetige Abbildung $k\colon Y \cup_f X \to Z$, so dass $k \circ \chi = g$ und $k \circ j = h$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "\chi"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y \cup_f X \arrow[dr, dotted, "!", "k"'] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Beweis. Alles bis auf die Stetigkeit folgt unmittelbar aus der Definition von $\sim_f$. Für die Stetigkeit überlege man sich, dass daraus, dass $Y + X$ die Finaltopologie bezüglich i_0 und i_1 trägt und $Y \cup_f X$ die Finaltopologie bezüglich q, folgt, dass $Y \cup_f X$ die Finaltopologie bezüglich j und χ trägt. $\square$

Lieferung 7

Ordinalzahlen *ad hoc*

Es überrascht nicht, dass man für mengentheoretische Topologie manchmal Mengenlehre braucht. Die Konstruktion einiger Beispiele würden wir gerne mit „Man nehme die kleinste überabzählbare Ordinalzahl“ beginnen, können das aber nicht, da das Wissen um Ordinalzahlen nicht vorausgesetzt werden kann. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, so viel Mengenlehre zur Verfügung zu stellen, um diese Konstruktionen dennoch durchführen zu können, selbst wenn wir hier nicht definieren, was eine Ordinalzahl ist.

Wohlordnungen

7.1 Definition. Sei M eine Menge. Eine totale Ordnung auf M heißt eine *Wohlordnung*, wenn bezüglich ihr jede nicht-leere Teilmenge von M ein kleinstes Element besitzt.

7.2 Beispiele.

- ▷ Jede totale Ordnung auf einer endlichen Menge ist eine Wohlordnung.
- ▷ Die Restriktion einer Wohlordnung auf eine Teilmenge ist eine Wohlordnung.
- ▷ Mit den üblichen Ordnungen ist $\mathbb{Z}$ nicht wohlgeordnet, aber $\mathbb{N}$ wohlgeordnet. Letzteres ist genau das Prinzip der vollständigen Induktion.
- ▷ Sind $(M, \leq_M)$ und $(N, \leq_N)$ disjunkte wohlgeordnete Mengen und ordnet man $M \cup N$ so, dass zuerste alle Elemente von M und dann alle von N kommen, also durch

  $$\begin{aligned} x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad & (x \in M \wedge y \in N) \\ & \vee ((x, y \in M) \wedge (x \leq_M y)) \\ & \vee ((x, y \in N) \wedge (x \leq_N y)), \end{aligned}$$

  so definiert dies eine Wohlordnung auf $M \cup N$: Sei $A \subset M \cup N$. Ist $A \cap M \neq \emptyset$ nicht leer, so besitzt $A \cap M$ ein kleinstes Element bezüglich $\leq_M$ und dieses ist kleinstes Element von A bezüglich $\leq$. Ansonsten besitzt $A = A \cap N$ ein kleinstes Element bezüglich $\leq_N$ also bezüglich $\leq$.

▷ Das letzte Beispiel spezialisierend erhält man aus einer Wohlordnung eine neue Wohlordnung, indem man ein weiteres Element hinzufügt, dass größer als alle ursprünglichen ist.

7.3 Notation. Ist M eine nicht-leere wohlgeordnete Menge, so hat sie ein kleinstes Element. Dieses bezeichnen wir mit 0_M oder auch nur mit 0.

7.4 Notation. Ist $\leq$ eine Ordnung auf einer Menge M, so benutzen wir die Intervallschreibweise, also etwa für $a, b \in M$

$$(a, b] := \{x \in M \colon a < x \leq b\}\,.$$

7.5 Definition und Proposition. Es sei $(M, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und $x \in M$ nicht maximales Element von M. Dann ist $\{y \in M \colon y > x\}$ also nicht leer und hat damit ein kleinstes Element. Dieses schreiben wir $\operatorname{succ} x$ und nennen es den *Nachfolger* von x.

7.6 Lemma. *Sei M eine wohlgeordnete Menge und $x \in M$. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein.*

(i) Es existiert ein $x' \in M$ mit $x = \operatorname{succ} x'$.

(ii) Es ist $[0, x) = \bigcup_{x' < x} [0, x')$.

□

7.7 Definition. Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subset M$ nennen wir ein *Anfangsstück* von A, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \in A$ und $y \leq x$ gilt, dass $y \in A$. Ein Anfangsstück A heißt *echtes Anfangsstück*, wenn $A \neq M$.

7.8 Proposition. *Sei $(M, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und $A \subset M$. A ist genau dann echtes Anfangsstück von M, wenn ein $x \in M$ mit $A = [0_M, x)$ existiert.*

Beweis. Dass Teilmengen der Form $[0, x)$ echte Anfangsstücke sind, ist klar. Sei also A ein echtes Anfangsstück. Da $M \setminus A \neq \emptyset$, hat $M \setminus A$ ein kleinstes Element x. Es ist also $[0, x) \subset A$ und $x \notin A$. Da A Anfangsstück ist, gilt für alle $y \in A$ mit $y \geq x$ auch $y \notin A$. Damit ist $[0, x) = A$. □

7.9 Lemma. *Es seien M, N wohlgeordnete Mengen. Sind $f, g \colon M \to N$ Ordnungsisomorphismen auf Anfangsstücke von N (also injektive monotone Abbildungen, deren Bilder Anfangsstücke sind), so ist $f = g$.*

Beweis. Ist $x \in M$, so ist $f[[0, x)]$ ein echtes Anfangsstück von N, also existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in N$ mit $f[[0_M, x)] = [0_N, y)$. Da auch $f[[0, x]]$ Anfangsstück ist, muss $f(x) = y$ sein. Da selbiges für g gilt, muss entweder $f(x) = g(x)$ sein oder ein $x' < x$ mit $f(x') \neq g(x')$ existieren. Also hat $B = \{x \in M \colon f(x) \neq g(x)\}$ kein kleinstes Element und ist damit leer. □

Eine Wohlordnung ist eine so starke Struktur, dass es in gewisser Weise weniger Wohlordnungen gibt, als man vielleicht zunächst denken würde.

7.10 Proposition. *Es seien M und N wohlgeordnete Mengen. Dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein.*

(i) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in M$ und einen Ordnungsisomorphismus zwischen $[0_M, x)$ und N.

(ii) Es gibt einen Ordnungsisomorphismus zwischen M und N.

(iii) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $y \in N$ und einen Ordnungsisomorphismus zwischen M und $[0_N, y)$.

Beweis. Alle Eindeutigkeitsaussagen folgen aus Lemma 7.9. Zunächst fügen wir, um die Argumentation ein wenig zu vereinfachen, zu M ein darin nicht enthaltenes Element m hinzu und machen $M' := M \cup \{m\}$ zu einer Wohlordnung, indem wir festlegen, dass m größer als alle Elemente von M sei. Es ist also $M = [0_M, m)$. Wir betrachten nun die Menge

$$B := \big\{x \in M' \colon \text{Es gibt keinen Ordnungsisomorphismus} \\ \text{von } [0_M, x) \text{ auf ein Anfangsstück von } N.\big\}$$

Ist B leer, so ist insbesondere $m \notin B$, und es tritt Fall (ii) oder Fall (iii) ein. Ist B nicht leer, so hat B ein kleinstes Element x. Für alle $z < x$ existiert also ein Ordningsisomorphismus f_z von $[0_M, z)$ auf ein Anfangsstück von N. Aus Lemma 7.9 folgt, dass diese eindeutig bestimmt sind, und für $z' < z$, dass $f_z|_{[0,z')} = f_{z'}$. Wäre nun x kein Nachfolger, also nach Lemma 7.6 $[0, x) = \bigcup_{z<x}[0, z)$, so gäbe es daher eine eindeutig bestimmte Funktion $g\colon [0, x) \to N$ mit $g|_{[0,z)} = f_z$ für alle $z < x$. Diese wäre im Widerspruch zu $x \in B$ ein Ordnungsisomorphismus auf ein Anfangsstück von N, also existiert ein $x' \in M$ mit $x = \operatorname{succ} x'$. Nun ist $f_{x'}[[0, x')]$ ein Anfangsstück von N. Wäre es ein echtes Anfangsstück, sagen wir $[0_N, y')$, so würde $g|_{[0,x')]} = f_{x'}$, $g(x') = y'$ einen Ordnungsisomorphismus von $[0_M, x']$ auf $[0_N, y']$ definieren. Da aber $[0, x'] = [0, x)$, ein solcher Ordnungsisomorphismus also wegen $x \in B$ nicht existiert, ist $f_{x'}[[0, x')] = N$ und wir haben Fall (i). □

Wir haben in den letzten Beweisen gesehen, dass man für wohlgeordnete Mengen ganz ähnlich wie für ℕ Induktionsbeweise führen und Objekte rekursiv definieren kann. Man darf nur nicht vergessen, dass nicht jedes Element Nachfolger ist und auch der andere Fall aus Lemma 7.6 zu behandeln ist. In jedem Fall ist es sehr nützlich auf einer Menge eine Wohlordnung zu haben.

Der Wohlordnungssatz

Der folgende ‚Satz' ist eine der bekannten Aussagen, die äquivalent zum Auswahlaxiom sind. Wir werden ihn aus dem Zornschen Lemma folgern, da dies die Form des Auswahlaxioms ist, die auch meist in der Anfängervorlesung über Lineare Algebra benutzt wird.

7.11 Satz (Wohlordungssatz). *Jede Menge lässt sich wohlordnen.*

Beweis. Sei M die Menge, von der wir zeigen wollen, dass es auf ihr eine Wohlordnung gibt. Wir betrachten alle Wohlordnungen von Teilmengen von M:

$$W := \{(A, \leq) \colon A \subset M,\ \leq \text{ Wohlordnung auf } A\}\,.$$

W ist nicht leer, da die leere Menge Teilmenge von M ist und die einzige Ordnung der leeren Menge eine Wohlordnung ist. Wir definieren auf W eine partielle Ordnung $\preceq$ durch

$$(A, \leq) \preceq (A', \leq') \quad :\iff \quad \begin{array}{r} A \text{ ist Anfangsstück von } (A', \leq') \text{ und} \\ \leq \text{ ist Einschränkung von } \leq'. \end{array}$$

Sei nun $C \subset W$ eine Kette. Wir setzen

$$B := \bigcup_{(A,\leq)\in C} A.$$

Für $x, x' \in B$ gibt es nun $(A, \leq) \in C$ mit $x, x' \in A$. Wir setzen nun $x \leq_B x' \iff x \leq x'$. Da für $(A', \leq') \in C$ entweder $\leq'$ Einschränkung von $\leq$ ist oder umgekehrt, ergibt dies eine wohldefinierte Ordnung $\leq_B$ auf B. Dadurch, dass für alle $(A, \leq), (A', \leq') \in C$ gilt, dass A ein Anfangsstück von A' ist oder umgekehrt, folgt, dass für jedes $(A, \leq) \in C$ die Menge A ein Anfangsstück von B ist und damit, dass $\leq_B$ wieder eine Wohlordnung ist. $(B, \leq_B)$ ist also eine obere Schranke von C. Aus dem Zornschen Lemma folgt nun, dass $(W, \preceq)$ ein maximales Element $(N, \leq)$ hat. Nehmen wir nun an, dass $N \neq M$ und wählen wir ein $x \in M \setminus N$. Indem wir wieder x als größtes Element zu M hinzufügen, erhalten wir eine Wohlordnung auf $M \cup \{x\}$, die $\leq$ erweitert und M als echtes Anfangsstück hat. Da dies ein Widerspruch zur Maximalität von $(N, \leq)$ wäre, ist $N = M$ und $\leq$ eine Wohlordnung auf M. □

Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl

Wir sind nun bereit, die Wohlordnung zu ‚konstruieren', die wir für einige Beispiele benutzen werden. Wir beginnen dazu mit einer beliebigen überabzählbaren Menge M, zum Beispiel der Menge der reellen Zahlen. Auf dieser legen wir eine Wohlordnung fest. Nun nehmen wir irgendein Objekt α, das nicht in M ist und erweitern die Wohlordnung auf M zu einer auf $M' := M \cup \{\alpha\}$, in der α größtes Element ist. Wir betrachten nun

$$\left\{x \in M' \colon [0, x) \text{ ist überabzählbar}\right\}.$$

Da $M = [0, \alpha)$, enthält diese Menge α, ist also nicht leer. Damit enthält sie ein kleinstes Element. Dieses nennen wir ab jetzt immer[1] ω_1. Wir halten die (bestürzende?) charakterisierende Eigenschaft von ω_1 fest:

7.12 Proposition. $[0, \omega_1)$ *ist überabzählbar und für jedes* $x \in [0, \omega_1)$ *ist* $[0, x)$ *abzählbar.* □

Dies charaktersiert diese Wohlordnung tatsächlich:

7.13 Proposition. *Ist N eine wohlgeordnete überabzählbare Menge, derer echte Anfangsstücke alle abzählbar sind, so existiert ein Ordnungsisomorphismus zwischen N und $[0, \omega_1)$.*

Beweis. Ist $x \in [0, \omega_1)$, so kann es keinen Ordnungsisomorphismus zwischen $[0, x)$ und N geben, da ersteres abzählbar, letzteres aber überabzählbar ist. Ebenso kann es keinen Ordnungsisomorphismus von $[0, \omega_1)$ auf ein echtes Anfangsstück von N geben. Damit muss die dritte Alternative aus Proposition 7.10 zutreffen, es also einen Ordnungsisomorphismus zwischen N und $[0, \omega_1)$ geben. □

Mit dem gleichen Argument ist die Menge der natürlichen Zahlen versehen mit der üblichen Ordnung isomorph zu einem echten Anfangsstück von $[0, \omega_1)$. Es gibt also ein $\omega_0 \in [0, \omega_1)$ und einen Ordnungsisomorphismus $f \colon \mathbb{N} \to [0, \omega_0)$. Auch die Notation ω_0 wollen wir beibehalten. Weiterhin werden wir uns erlauben, die Elemente von $[0, \omega_0)$ mit den natürlichen Zahlen zu identifizieren. Wir notieren kurz:

7.14 Proposition. $[0, \omega_0)$ *ist unendlich, und für jedes* $x \in [0, \omega_0)$ *ist* $[0, x)$ *endlich.* □

Das nun charakterisiert ω_0.

Endlich wieder Topologie

Versehen mit den entsprechenden Ordnungstopologien (siehe Aufgabe **??**) werden die soeben eingeführten geordneten Mengen zu topologischen Räumen mit interessanten Eigenschaften, die uns auch in Zukunft noch als Beispiele dienen werden. Hier nur ein Vorgeschmack.

[1] Zumindest bis wir genug Mengenlehre können, um es besser zu wissen.

7.15 Proposition. *Wir betrachten den mit der Ordnungstopologie versehenen Raum* $[0,\omega_1]$. ω_1 *liegt im Abschluss von* $[0,\omega_1)$ *aber nicht im Abschluss irgendeiner abzählbaren Teilmenge von* $[0,\omega_1)$.

Wir zeigen zunächst:

7.16 Lemma. *Jede abzählbare Teilmenge von* $[0,\omega_1)$ *ist (nach oben) beschränkt.*

Man vergleiche das mit der einfachen Tatsachen, dass jede endliche Teilmenge von $[0,\omega_0)$ beschränkt ist.

Beweis. Sei $C \subset [0,\omega_1)$ abzählbar. $\bigcup_{a\in C}[0,a)$ ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar, $[0,\omega_1)$ aber überabzählbar. Also existiert ein $b \in [0,\omega_1) \setminus \bigcup_{a\in C}[0,a)$. Dieses ist obere Schranke von C. $\square$

7.17 Lemma. ω_1 *ist kein Nachfolger.*

Beweis. Ist $a \in [0,\omega_1)$, so ist $[0,\operatorname{succ} a) = [0,a] = [0,a) \cup \{a\}$ abzählbar, also $\operatorname{succ} a \neq \omega_1$. $\square$

Beweis von Proposition 7.15. Aufgrund der Definition der Ordnungstopologie ist $\{(a,\omega_1] \colon a \in [0,\omega_1)\}$ eine Umgebungsbasis von ω_1. Ist nun $(a,\omega_1]$ ein beliebiges Element aus der beschriebenen Umgebungsbasis von ω_1, so enthält es $\operatorname{succ} a \in [0,\omega_1)$. Damit liegt ω_1 im Abschluss von $[0,\omega_1)$.

Sei andererseits $C \subset [0,\omega_1)$ abzählbar. Dann besitzt C eine obere Schranke $m \in [0,\omega_1)$ und $(m,\omega_1]$ ist eine Umgebung von ω_1, die C nicht trifft. $\square$

Man beweist ebenso oder folgert daraus:

7.18 Proposition. *In* $[0,\omega_1]$ *besitzt* ω_1 *keine abzählbare Umgebungsbasis.* $\square$

Lieferung 8

Konvergenz I: Folgen und Netze

In metrischen Räumen kann man topologische Begriffe wie Stetigkeit, Abschluss, Kompaktheit auch mit Hilfe von Konvergenz von Folgen charakterisieren. Die Konvergenz einer Folge lässt sich auch in einem topologischen Raum definieren, es stellt sich jedoch heraus, dass im allgemeinen Folgen nicht zur Beschreibung eines topologischen Raumes ausreichen. Es gibt jedoch zwei andere Konvergenztheorien, die für topologische Räume das leisten, was folgen für metrische Räume leisten: die der Netze und die der Filter. Netze sind eine direkte Verallgemeinerung von Folgen, was sie zunächst anschaulicher und vertrauter macht. Auch scheint, dass einige Analytiker eher wissen, was Netze sind, als was Filter sind; und mit denen wollen wir uns ja schließlich unterhalten können. Andererseits mögen Mengentheoretiker Filter mehr, und in gewisser Weise ist die Theorie der Filter die einfachere. Vor allem ergibt sich natürlich das mächtige Konzept des Ultrafilters. Es gibt zwar auch ein entsprechendes Konzept für Netze, aber das ist weniger naheliegend.

Wir werden daher so vorgehen, nach einem kurzen Blick auf Folgen zunächst Netze zu betrachten, dort aber nur soviel beweisen, wie nötig ist, um eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie diese Theorie aufgebaut ist. Danach wenden wir uns der Theorie der Filter zu, die wir zu „unserer“ Konvergenztheorie machen wollen.

Folgen

8.1 Definition. Sei X ein Raum. Eine *Folge* a in X ist eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$.

8.2 Definition. Sei X ein Raum, a eine Folge in X und $x \in X$. Wir sagen *a konvergiere* gegen x und schreiben $a \to x$, wenn für jede Umgebung U von x ein $n \in \mathbb{N}$ extistiert, so dass $a_m \in U$ für alle $m \geq n$.

8.3 Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. Existiert eine Folge a mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \to x$, so ist $x \in \overline{A}$.*

Beweis. Ist U eine beliebige Umgebung von x, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$, also ist $U \cap A \neq \emptyset$. □

8.4 Warnung. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht: Ist nämlich $X = [0, \omega_1]$ (mit der Ordnungstopologie versehen), so ist $\omega_1 \in \overline{[0, \omega_1)}$, aber für eine beliebige Folge a in $[0, \omega_1)$ haben wir in Proposition 7.15 gesehen, dass ω_1 nicht im Abschluss der abzählbaren Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ liegt und damit $a \not\to \omega_1$.

Es gilt aber:

8.5 Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$ ein Punkt, der eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann gibt es eine Folge a in A, die gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x, nach Voraussetzung existiert eine solche. Wie in Lemma 5.23 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U_m \subset U_n$ für alle m, n mit $m \geq n$. Da $x \in \overline{A}$, ist $U_n \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen (!) nun eine Folge a mit $a_n \in U_n \cap A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist nun V eine beliebige Umgebung von x, so existiert, da $\{U_n\}$ Umgenungsbasis ist, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subset V$ und daher $U_m \subset U_n \subset V$ für alle $m \geq n$. Damit konvergiert a gegen x. □

Wir fassen zusammen:

8.6 Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. Existiert eine Folge in A, die gegen x konvergiert, so liegt x im Abschluss von A. Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so gilt die Umkehrung, im allgemeinen aber nicht.* □

Netze

Definitionen

Wir suchen nun einen Ersatz für Folgen, durch den wir auch in beliebigen Räumen topologische Eigenschaften beschreiben können. Wir haben gesehen, dass Folgen nicht ausreichen, da die (abzählbare) Menge der natürlichen Zahlen als Indexmenge zu klein ist. Wir müssen also auch größere Mengen erlauben. Damit man dann wieder den Begriff der Konvergenz definieren kann, muss diese Menge geordnet sein. Dass wir im Beweis von Proposition 8.5 eine total geordnete Umgebungsbasis benutzt haben, wir aber aus Proposition 5.30 wissen, dass solche nicht immer existieren, legt nahe, dass wir von den Indexmengen nicht fordern dürfen, total geordnet zu sein. Es stellt sich heraus, dass der folgende Begriff geeignet ist.

8.7 Definition. Eine *gerichtete Menge* ist eine nicht-leere Menge D zusammen mit einer Halbordnung $\geq$, so für alle $k, l \in D$ ein $m \in D$ mit $m \geq k$ und $m \geq l$ existiert.

8.8 Definition. Sei X ein Raum. Ein *Netz* in X ist eine Abbildung $a\colon D \to X$, wobei D eine gerichtete Menge ist.

8.9 Bemerkung. Folgen sind spezielle Netze. Ein Netz a können wir wieder $(a_j)_{j\in J}$ schreiben, und es wird in der Notation fast wie eine Folge aussehen.

8.10 Definition. Sei X ein Raum, $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in X und $x \in X$. Wir sagen a *konvergiere* gegen x und schreiben $a \to x$, wenn für jede Umgebung U von x ein $k \in D$ extistiert, so dass $a_l \in U$ für alle $l \geq k$.

Erste Eigenschaften

Nun haben wir, was wir wollten:

8.11 Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. x liegt genau dann im Abschluss von A, wenn ein Netz in A existiert, das gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in A, das gegen x konvergiert. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so existiert ein $k \in D$ mit $a_k \in U$, also ist $U \cap A \neq \emptyset$. Damit ist $x \in \overline{A}$.

Sei nun $x \in \overline{A}$. Wir setzen

$$D := \{U \cap A\colon U \text{ Umgebung von } x\}$$

und ordnen D durch umgekehrte Inklusion, setzen also $B \leq C :\Longleftrightarrow C \subset B$. Dies macht D zu einer gerichteten Menge, denn sind U und V Umgebungen von x, so auch $U\cap V$ und es ist $U\cap A \leq (U\cap V)\cap A$, $V\cap A \leq (U\cap V)\cap A$. Nach Voraussetzung ist $M \neq \emptyset$ für alle $M \in D$. Es gibt also eine Auswahlfunktion $a\colon D \to X$ mit $a(M) \in M$ für alle $M \in D$. Dies ist ein Netz in A und $a \to x$, denn ist U eine Umgebung von x, so ist $M := U\cap A \in D$ und für alle $N \in D$ mit $N \geq M$ ist $a(N) \in N \subset M \subset U$. □

Bisher ist vielleicht noch nicht klar geworden, warum wir in der Definition einer gerichteten Menge gefordert haben, dass je zwei Elemente eine gemeinsame obere Schranke haben. Hätten wir das aber nicht getan, sondern beliebige Halbordnungen zugelassen, so könnten wir für einen beliebigen Raum X den Raum selbst durch Gleichheit ordnen und hätten ein „Netz“ $a\colon X \to X$ mit $a_x = x$, so dass $a \to x$ für alle $x \in X$. Das wäre offenbar unerwünscht gewesen. Nun kann man über Eindeutigkeit von Grenzwerten folgendes sagen:

8.12 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist hausdorffsch.

(ii) Jedes Netz in X konvergiert gegen höchstens einen Punkt.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz, $x, y \in X$, $x \neq y$, $a \to x$. Ist X hausdorffsch, so gibt es eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y, so dass $U \cap V = \emptyset$. Nun gibt es ein $k \in D$, so dass $a_{k'} \in U$ für alle $k' \geq k$. Ist nun $l \in D$ beliebig, so gibt es ein $m \in D$ mit $m \geq k$ und $m \geq l$. Es ist dann $a_m \in U$, also $a_m \notin V$. Damit konvergiert a nicht gegen y.

„$\Leftarrow$“ Sei X nicht hausdorffsch. Dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$, die sich nicht durch Umgebungen trennen lassen. Für solche x, y setzen wir

$$D := \{U \cap V : U \text{ Umgebung von } x,\ V \text{ Umgebung von } y\}\,.$$

Wir ordnen D durch umgekehrte Inklusion, das ergibt wieder eine gerichtete Menge. Da $\emptyset \notin D$ gibt es eine Auswahlfunktion $a\colon D \to X$, also ein Netz mit $a(M) \in M$ für alle $M \in D$. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so ist $U = U \cap X \in D$ und $a(M) \in M \subset U$ für alle $M \in D$ mit $M \geq U$. Damit konvergiert a gegen x und ebenso gegen y. □

Häufungspunkte und Teilnetze

8.13 Definition. Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in einem Raum X und $x \in X$. x heißt *Häufungspunkt* von a, wenn für jede Umgebung U von x und jedes $k \in D$ ein $l \in D$, $l \geq k$ mit $a_l \in U$ existiert.

Man denkt nun vielleicht, dass, wenn x ein Häufungspunkt des Netzes a ist, a ein Teilnetz besitzt, das gegen x konvergiert. Das ist auch wahr, nur dass der Begriff des Teilnetzes nicht der ist, den man vielleicht naiv angenommen hätte.

8.14 Definition. Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in X. Ein *Teilnetz* von a ist ein Netz $(b_l)_{l\in E}$ in X zusammen mit einer kofinalen Abbildung $i\colon E \to D$, so dass $b_l = a_{i(l)}$ für alle $l \in E$. Dabei heißt hier i *kofinal*, wenn zu jedem $k \in D$ ein $l \in E$ mit $i(l') \geq k$ für alle $l' \geq l$ existiert.

Man sei hier vorsichtig mit dem Begriff ‚kofinal‘, der leider nicht einheitlich verwandt wird. Es ginge wohl auch, zu fordern, dass i zusätzlich monoton ist, dann ließe sich auch die Bedingung der Kofinalität leichter beschreiben. Man darf aber *nicht* fordern, dass i streng monoton ist, denn dann würde die folgende Proposition falsch.

8.15 Proposition. *Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann ist x genau dann Häufungspunkt von a, wenn es ein Teilnetz von a gibt, das gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $(b_l)_{l\in E}$ mit $b_l = a_{i(l)}$ ein Teilnetz von a, das gegen x konvergiert. Sei nun $k \in D$ und U eine Umgebung von x. Da b gegen X konvergiert, gibt es ein $l \in E$, so dass $b_{l'} \in U$ für alle $l' \geq l$. Da i kofinal ist, gibt es ein $r \in E$ mit $i(r') \geq k$ für alle $r' \geq r$. Nun gibt es eine obere Schranke m von

r und l und $i(m) \geq k$ und $a_{i(m)} = b_m \in U$. Da U und k beliebig waren, ist x Häufungspunkt von a.

Sei nun andererseits x ein Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in D}$. Wir betrachten die folgende Teilmenge von $D \times \mathcal{P}(X)$.

$$E := \{(k, U) \colon U \text{ Umgebung von } x,\, a_k \in U\}\,.$$

Wir ordnen E durch

$$(k, U) \leq (k', U') :\Longleftrightarrow k \leq k' \text{ und } U' \subset U.$$

Sind nun $(k, U), (k', U') \in E$, so gibt es ein $m \in D$ mit $m \geq k$ und $m \geq k'$. Da x Häufungspunkt von a ist, gibt es dann ein $m' \geq m$ mit $a_{m'} \in U \cap U'$. Es ist dann $(m', U \cap U')$ obere Schranke von (k, U) und (k', U'), was zeigt, dass E gerichtet ist. Betrachten wir weiter

$$\begin{aligned} i \colon E &\to D \\ (k, U) &\mapsto k. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist kofinal, denn sogar ordnungserhaltend und surjektiv. Dies gibt uns das Teilnetz $(a_{i(l)})_{l \in E}$ von a. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so gibt es, da x Häufungspunkt von a ist, ein $k \in D$ mit $(k, U) \in E$ für alle $l \geq (k, U)$ ist damit $a_{i(l)} \in U$. Also konvergiert das Teilnetz $(a_{i(l)})_{l \in E}$ gegen x. □

Stetigkeit

Die folgenden Tatsachen über Netze werden wir nicht mehr beweisen. Die entsprechenden Tatsachen für Filter werden aber bewiesen werden.

Wie wir das von Folgen in metrischen Räumen gewohnt sind, kann man Funktionen zwischen topologischen Räumen mit Hilfe von Netzen auf Konvergenz untersuchen.

8.16 Proposition. *Seien X, Y Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig in x.

(ii) Für jedes Netz $(a_k)_{k \in D}$ in X, das gegen x konvergiert, konvergiert das Netz $(f(a_k))_{k \in D}$ gegen $f(x)$.

Beweis. Als Aufgabe **??**. □

Produkte und Kompaktheit

Die folgende Tatsache gibt vielleicht ein besseres Gefühl für die Produkttopologie. Diese ist nämlich die „Topologie der punktweisen Konvergenz“.

8.17 Proposition. *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ Räume. Dann konvergiert ein Netz $(a_k)_{k \in D}$ im Produktraum $\prod_{j \in J} X_j$ genau dann gegen einen Punkt x, wenn für jedes $j \in J$ das Netz $((a_k)_j)_{k \in D}$ in X_j gegen x_j konvergiert.*

Wir verzichten auf den Beweis, der keine Überraschungen birgt.

8.18 Proposition. *Ein Raum ist genau dann quasikompakt, wenn in ihm jedes Netz einen Häufungspunkt besitzt.*

Dass in einem quasikompakten Raum jedes Netz einen Häufungspunkt besitzt zeigt man wie die entsprechende Eigenschaft für Folgen und metrische Räume. Da der Beweis der Umkehrung zwar einfach aber vielleicht nicht offensichtlich ist, werden wir auf ihn noch zurückkommen, wenn wir die entsprechende Eigenschaft für Filter beweisen.

Wir werden später den Satz von Tychonoff beweisen, der besagt, dass beliebige Produkte quasikompakter Räume quasikompakt sind. Wollten wir die soeben vorgestellten Tatsachen zum Beweis nutzen, so hätten wir das Problem, eine Charakterisierung von Quasikompaktheit mit Hilfe von Häufungspunkten zu haben, aber keine ausreichend einfache Beschreibung von Häufungspunkten in einem Produkt. Andererseits haben wir eine gute Beschreibung von Konvergenz in einem Produktraum, aber keine passende Charakterisierung von Quasikompaktheit. Nun kennen wir einen Zusammenhang zwischen Konvergenz und Häufungspunkten, nämlich dass Häufungspunkte gerade die Grenzwerte von Teilnetzen sind, doch dieser Zusammenhang ist hier nicht stark genug. Diese Lücke werden wir füllen.

Lieferung 9

Konvergenz II: Filter

Von Netzen…

Schauen wir uns noch einmal die Beweise an, in denen Netze konstruiert werden mussten, so sehen wir, dass die Netze alle folgende Form hatten: Die gerichtete Menge war eine Menge von nicht-leeren Teilmengen des Raumes, die durch umgekehrte Inklusion geordnet war, und die Abbildung von der gerichteten Menge in den Raum war eine zugehörige Auswahlfunktion. Eine Ausnahme bildete das Netz, das wir konstruiert haben, um zu zeigen, dass jeder Häufungspunkt eines Netzes Grenzwert eines Teilnetzes ist, das lag aber daran, dass dem Netz, von dem wir ein Teilnetz konstruieren wollten bereits eine beliebige gerichtete Menge zugrunde liegen konnte. Es liegt jedenfalls nahe, dass man auch dann eine befriedigende Konvergenztheorie erhält, wenn man nur Netze der eben beschriebenen Art zulässt. Wir wollen das nun näher untersuchen.

9.1 Proposition. *Sei X ein Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ wird genau dann durch umgekehrte Inklusion zu einer gerichteten Menge, wenn*

(B1a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *und*

(B1b) für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ *ein* $B'' \in \mathcal{B}$ *mit* $B'' \subset B \cap B'$ *existiert.*

Ist dies der Fall und außerdem

(B2) $\emptyset \notin B$,

so sind für $x \in X$ *die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) Für jede Auswahlfunktion $a\colon \mathcal{B} \to X$ *konvergiert das Netz* $(a_B)_{B\in\mathcal{B}}$ *gegen* x.

(ii) Zu jeder Umgebung U *von* x *existiert ein* $B \in \mathcal{B}$ *mit* $B \subset U$.

Beweis. (B1a) und (B1b) sind genaue Übersetzungen der Bedingungen an eine gerichtete Menge.

Ist $a\colon \mathcal{B} \to X$ eine Auswahlfunktion, U eine Umgebung von x und $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset U$, ist $a(B') \in B' \subset B \subset U$ für alle $B' \in \mathcal{B}$ mit $B' \supset B$. Deshalb folgt (i) aus (ii).

Ist U eine Umgebung von x, so dass $B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$, so gibt es eine Auswahlfunktion $a\colon \mathcal{B} \to X$ mit $a(B) \notin U$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Da dieses $(a_B)_{B\in\mathcal{B}}$ dann nicht gegen x konvergiert, folgt (ii) aus (i). □

Sieht man sich diese Charakterisierung der Konvergenz genauer an, kommt man auf weitere Ideen. Zunächst können wir die Auswahlfunktionen ganz weglassen; dann lauert auch nicht mehr hinter jeder Proposition das Auswahlaxiom, und das freut die Mengentheoretiker. Außerdem genügt es, um Konvergenz gegen $x \in X$ zu prüfen, alle Obermengen von Elementen von $\mathcal{B}$ zu kennen, denn wir müssen ja nur wissen, ob die Umgebungen von x solche sind. Das führt uns zu den folgenden Feststellungen.

9.2 Proposition. *Sei X ein Raum, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ und*

$$\mathcal{F} := \{A \subset X\colon \textit{Es ex. } B \in \mathcal{B} \textit{ mit } A \supset B\}\,.$$

Dann erfüllt $\mathcal{B}$ genau dann die Bedingungen (B1a), (B1b) und (B2) aus Proposition 9.1, wenn $\mathcal{F}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

(F1a) $X \in \mathcal{F}$.

(F1b) Für alle $A, A' \in \mathcal{F}$ ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$.

(F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Außerdem gilt nach Definition:

(F3) Für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \subset X$ mit $A' \supset A$ ist $A' \in \mathcal{F}$.

Weiterhin erfüllt $\mathcal{B}$ genau dann Eigenschaft (ii) aus Proposition 9.1 für ein $x \in X$, wenn jede Umgebung von x in $\mathcal{F}$ enthalten ist. □

9.3 Bemerkung. Wir können die Bedingungen (F1a) und (F1b) auch wieder gemeinsam wie folgt formulieren.

(F1) $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten.

Dabei benutzen wir wieder $\bigcap \emptyset = X$.

… zu Filtern

Wir leiten nun aus den soeben gemachten Überlegungen einige Definitionen ab.

9.4 Definition. Sei M eine Menge. Ein *Filter* auf M ist eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(M)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(F1a) $M \in \mathcal{F}$.

(F1b) Für alle $A, A' \in \mathcal{F}$ ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$.

(F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F3) Für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \subset X$ mit $A' \supset A$ ist $A' \in \mathcal{F}$.

9.5 Definition. Sei M eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf M. Eine *Filterbasis* von $\mathcal{F}$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$, so dass

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \text{Es ex. } B \in \mathcal{B} \text{ mit } A \supset B\}\,.$$

9.6 Bemerkung. $\mathcal{B}$ ist also genau dann Filterbasis von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, und zu jedem $A \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset A$ existiert.

9.7 Definition und Proposition. Ist X ein Raum und $x \in X$, so ist die Menge aller Umgebungen von x ein Filter auf X. Diesen nennen wir den *Umgebungsfilter* von x und bezeichen ihn mit $\mathcal{U}(x)$. Eine Filterbasis des Umgebungsfilters ist gerade eine Umgebungsbasis von x.

9.8 Proposition. *Sei M eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$. Es gibt genau dann einen Filter auf M, von dem $\mathcal{B}$ eine Filterbasis ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(B1a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B1b) Für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ existiert ein $B'' \in \mathcal{B}$ mit $B'' \subset B \cap B'$.

(B2) $\emptyset \notin B$.

Dieser Filter ist dann eindeutig bestimmt. □

9.9 Definition. Es seien M eine Menge und $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ Filter auf M. $\mathcal{F}'$ heißt eine *Verfeinerung* von $\mathcal{F}$ und *feiner* als $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. $\mathcal{F}'$ heißt eine *echte Verfeinerung* von $\mathcal{F}$, wenn zusätzlich $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$.

9.10 Definition. Es sei X ein Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Wir sagen, $\mathcal{F}$ konvergiere gegen x und schreiben $\mathcal{F} \to x$, wenn $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ von x ist.

Erste Eigenschaften

Wir wollen nun sehen, dass Konvergenz von Filtern tatsächlich zur Beschreibung von topologischen Eigenschaften ausreicht. Wir beginnen mit einer Charakterisierung von Hausdorffräumen.

9.11 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist hausdorffsch.

(ii) Jedes Netz in X konvergiert gegen höchstens einen Punkt.

Beweis. „$\Rightarrow$" Seien $x, y \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter, der gegen x und gegen y konvergiert, also gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ ist. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$, so sind $U, V \in \mathcal{F}$, also $U \cap V \in \mathcal{F}$ und damit $U \cap V \neq \emptyset$. Ist nun X hausdorffsch, so folgt $x = y$.

„$\Leftarrow$" Sei X nicht hausdorffsch. Dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$, so dass für beliebige $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ gilt, dass $U \cap V \neq \emptyset$. Da $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ Filter sind, folgt daraus, dass $\{U \cap V : U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)\}$ eine Filterbasis ist. Da $\mathcal{B} \supset \mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{B} \supset \mathcal{U}(y)$, gibt es damit einen Filter, der gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ ist. □

Wir notieren kurz, was wir nebenbei gezeigt haben:

9.12 Lemma. *Sei M eine Menge und $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ Filter auf M. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ haben genau dann eine gemeinsame Verfeinerung, wenn $A \cap A' \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \in \mathcal{F}'$.* □

Nun wollen wir gerne zeigen, dass es für $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$ einen Filter auf A gibt, der gegen x konvergiert. Leider ergibt das keinen Sinn, da ein Filter auf A kein Filter auf X ist. Das ist ein Spezialfall (nämlich der einer Inklusionsabbildung) des Problems, das Bild eines Filter unter einer Funktion zu definieren.

9.13 Definition und Proposition. *Seien M, N Mengen, $\mathcal{F}$ ein Filter auf M und $f : M \to N$ eine Funktion. Dann ist*

$$\mathcal{B} := \{f[A] : A \in \mathcal{F}\}$$

eine Filterbasis. Den von ihr erzeugten Filter auf N nennen wir den Bildfilter *von $\mathcal{F}$ unter f und bezeichnen ihn mit $f_*(\mathcal{F})$.*

Beweis. Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ist $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Da $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ist $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Sind $A, A' \in \mathcal{F}$, so ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$ und $f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A']$. □

9.14 Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$, $i : A \to X$ die Inklusionsabbildung und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$ auf A, so dass $i_*(\mathcal{F}) \to x$.

Beweis. „$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf A, so dass $i_*(\mathcal{F}) \to x$, und $U \in \mathcal{U}(x)$. Es ist $U \in i_*(\mathcal{F})$, also existiert ein $C \in \mathcal{F}$ mit $C = i[C] \subset U$. Da $C \subset A$ und $C \neq \emptyset$ ist $U \cap A \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \overline{A}$.

„⇒" Sei $x \in \overline{A}$ und

$$\mathcal{F} := \{U \cap A \colon U \in \mathcal{U}(x)\}\,.$$

Da $x \in \overline{A}$ ist $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Da $\mathcal{U}(x)$ ein Filter ist, folgt daraus, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist. Sei nun $U \in \mathcal{U}(x)$. Da $U \supset U \cap A = i[U \cap A]$, ist $U \in i_*(\mathcal{F})$. Also $\mathcal{U}(x) \subset i_*(\mathcal{F})$, das heißt $i_*(\mathcal{F}) \to x$. □

Stetigkeit

9.15 Proposition. *Seien X, Y Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig in x.

(ii) Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X, der gegen x konvergiert, konvergiert der Filter $f_*(\mathcal{F})$ gegen $f(x)$.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der gegen x konvergiert, also $\mathcal{F}$ feiner als $\mathcal{U}(x)$, so ist $f_*(\mathcal{F})$ feiner als $f_*(\mathcal{U}(x))$. (ii) gilt daher genau dann, wenn $f_*(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$.

Sei nun

$$\mathcal{B} = \{f[U] \colon U \in \mathcal{U}(x)\}$$

die definierende Filterbasis von $f_*(U(x))$. Genau dann ist $f_*(\mathcal{U}(x))$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}(f(x))$, wenn zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset V$, also ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f[U] \subset V$ existiert. Das ist aber gerade die Stetigkeit von f in x, um genau zu sein Proposition 2.18. □

Häufungspunkte

9.16 Definition. Sei X ein Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. x heißt *Häufungspunkt* von $\mathcal{F}$, wenn $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $A \in \mathcal{F}$.

9.17 Proposition. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann ist x genau dann Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn es eine Verfeinerung von $\mathcal{F}$ gibt, die gegen x konvergiert.*

Beweis. Dies ist gerade Lemma 9.12 angewandt auf $\mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(x)$. □

Verfeinerungen von Filtern spielen also hier genau die Rolle, die Teilnetze in der Theorie der Netze spielen.

Kompaktheit

9.18 Proposition. *Ein Raum ist genau dann quasikompakt, wenn in ihm jeder Filter einen Häufungspunkt besitzt.*

Wir bemerken zunächst:

9.19 Lemma. *Sei X ein Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X ist quasikompakt.

(ii) Für jede Menge $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset \quad \textit{für alle endlichen } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$$

ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus der Definition der Quasikompaktheit durch Übergang zu Komplementen und Kontraposition. □

Beweis der Proposition. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Wir bemerken zunächst, dass

$$H := \bigcap \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H} := \{\overline{A} \colon A \in \mathcal{F}\}$$

die Menge der Häufungspunkte von $\mathcal{F}$ ist. Nun sind alle endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathcal{H}$ nicht-leer, da ja schon alle endlichen Schnitte von Elementen von $\mathcal{F}$ nicht-leer, da selbst in $\mathcal{F}$, sind. Ist X quasikompakt, so ist also $H \neq \emptyset$.

Sei nun X nicht quasikompakt. Dann existiert eine Menge $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass wir für $\mathcal{B} := \{\bigcap \mathcal{E} \colon \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ endlich}\}$ haben, dass $\emptyset \notin \mathcal{B}$ aber $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Da $\mathcal{B}$ offenbar unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis. Sei nun $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter. Dann ist $\bigcap \{\overline{A} \colon A \in \mathcal{F}\} \subset \bigcap \{\overline{A} \colon A \in \mathcal{A}\} = \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, also $\mathcal{F}$ ohne Häufungspunkte. □

Wählt man zu der im Beweis für einen nicht quasikompakten Raum konstruierten Filterbasis $\mathcal{B}$ eine Auswahlfunktion, so erhält man ein Netz ohne Häufungspunkt. Das löst das nach Proposition 8.18 gegebene Versprechen ein.

Produkte

9.20 Proposition. *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ Räume. Dann konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf dem Produktraum $\prod_{j \in J} X_j$ genau dann gegen einen Punkt x, wenn für jedes $k \in J$ der Filter $(p_k)_*(\mathcal{F})$ auf X_k gegen x_k konvergiert, wobei p_k die kanonische Projektion auf X_k bezeichne.*

Beweis. Sei $x \in \prod_{j\in J} X_j$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\prod_{j\in J} X_j$. Gilt $\mathcal{F} \to x$, so auch $(p_k)_*(\mathcal{F}) \to x_k$ für alle $k \in J$, da die p_k stetig sind. Sei nun andererseits $\mathcal{F}$ derart, dass $(p_k)_*(\mathcal{F}) \to x_k$ für alle $k \in J$. Für $k \in J$ und $U \in \mathcal{U}(x_k)$ ist dann $U \in (p_k)_*(\mathcal{F})$. Damit existiert ein $A \in \mathcal{F}$ mit $p_k[A] \subset U$ also $A \subset p_k^{-1}[U]$. Es folgt $p_k^{-1}[U] \in \mathcal{F}$. Aus der Konstruktion der Initialtopologie, Proposition 5.11, siehe auch Proposition 5.28, folgt aber, dass die Menge

$$\left\{ \bigcap_{r=1}^{n} p_{k_r}^{-1}[U_r] \colon n \in \mathbb{N}, k_r \in J, U_r \in \mathcal{U}(x_{k_r}) \right\}$$

eine Umgebungsbasis von x, also eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$ ist. Da $\mathcal{F}$ unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, enthält $\mathcal{F}$ diese Menge. Damit ist $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$. □

Am Ende des Abschnitts über Netze haben wir uns überlegt, was das Problem wäre, wenn wir den Satz von Tychonoff, der besagt, dass Produkte quasikompakter Räume quasikompakt sind, beweisen wollten. Wir sind nun in genau der selben misslichen Lage. Doch Hilfe naht...

Ultrafilter und der Satz von Tychonoff

9.21 Definition. Ein Filter heißt *Ultrafilter*, wenn er keine echte Verfeinerung besitzt.

Das Praktische an Ultrafiltern ist, dass wir nicht zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten zu unterscheiden brauchen.

9.22 Lemma. *Sei X ein Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann konvergiert $\mathcal{F}$ genau dann gegen x, wenn x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ ist.*

Beweis. Ein Grenzwert ist immer auch Häufungspunkt. Ist andererseits x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, so hat $\mathcal{F}$ nach Proposition 9.17 eine Verfeinerung, die gegen x konvergiert. Da $\mathcal{F}$ aber gar keine echte Verfeinerung besitzt, muss es sich dabei um $\mathcal{F}$ handeln. □

Wenn Ultrafilter so praktisch sind, muss man sich natürlich fragen, wie viele es davon überhaupt gibt. Glücklicherweise liefert sie uns das Zornsche Lemma in ausreichender Anzahl.

9.23 Proposition. *Jeder Filter besitzt eine Verfeinerung, die ein Ultrafilter ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge M. Wir betrachten die Menge aller Verfeinerungen von $\mathcal{F}$ und ordnen sie durch Inklusion. Die Proposition behauptet nun gerade, dass diese Halbordnung ein maximales Element besitzt. Vermöge des Zornschen Lemmas genügt es zum Beweis, zu zeigen, dass jede Kette eine obere Schranke besitzt. Sei also $\mathcal{C}$ eine Kette. Dann ist $\mathcal{G} := \bigcup \mathcal{C}$ ein Filter: Da $\mathcal{C} \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ für alle $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$, ist $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Da $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ für alle $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$, ist $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Sind $A, B \in \mathcal{G}$, so existiert, da $\mathcal{C}$ eine Kette ist, ein $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$ mit $A, B \in \mathcal{F}'$ und es ist $A \cap B \in \mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist also Filter und offenbar obere Schranke von $\mathcal{C}$. □

9.24 Proposition. *Sei X ein Raum. X ist genau dann quasikompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. Ist X quasikompakt, so hat nach Proposition 9.18 jeder Filter auf X einen Häufungspunkt, nach Lemma 9.22 ist dann also jeder Ultrafilter konvergent. Ist X derart, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert, so hat jeder Filter auf X nach Proposition 9.23 eine konvergente Verfeinerung, also einen Häufungspunkt. Damit ist X nach Proposition 9.18 quasikompakt. □

9.25 Proposition. *Seien M, N Mengen, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf M und $f\colon M \to N$ eine Funktion. Dann ist $f_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ eine Verfeinerung von $f_*(\mathcal{F})$ und $B \in \mathcal{G}$. Dann ist $B \cap f[A] \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$, also $A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Damit haben die Filter $\mathcal{F}$ und $\{A' \subset M\colon A' \supset f^{-1}[B]\}$ nach Lemma 9.12 eine gemeinsame Verfeinerung; da aber $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, muss $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ sein. Es ist also $B \supset f[f^{-1}[B]] \in f_*(\mathcal{F})$ und damit $B \in f_*(\mathcal{F})$. Da $B \in \mathcal{G}$ beliebig gewählt war, ist $f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$, und da wiederum $\mathcal{G}$ eine beliebige Verfeinerung war, ist $f_*(\mathcal{F})$ Ultrafilter. □

9.26 Satz (Tychonoff). *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ quasikompakte Räume. Dann ist auch der Produktraum $\prod_{j\in J} X_j$ quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod_j X_j$. Nach Proposition 9.25 sind dann auch alle $(p_j)_*(\mathcal{F})$, p_j hier wieder die kanonischen Projektionen, Ultrafilter. Da die X_j quasikompakt sind, existiert nach Proposition 9.24 zu jedem $j \in J$ ein x_j mit $(p_j)_*(\mathcal{F}) \to x_j$. Für $x = (x_j)_{j\in J}$ gilt nun nach Proposition 9.20 $\mathcal{F} \to x$. Da also jeder Ultrafilter auf $\prod_j X_j$ konvergiert, ist $\prod_j X_j$ nach Proposition 9.24 quasikompakt. □

Da dieser Beweis nun wirklich schön, kurz und konzeptionell war, hier die Bemerkung, die an dieser Stelle immer folgt: Der Satz von Tychonoff ist schwer. Die Eleganz des Beweises, die hoffentlich auch in der vorliegenden Darstellung erkennbar ist, zeugt davon, dass Konvergenz von Filtern eine gute Theorie ist.

Man beachte auch, dass wir im Beweis an zwei Stellen das Auswahlaxiom benutzt haben: Zunächst in Gestalt des Zornsches Lemmas beim Beweis von Proposition 9.23 und im eigentlichen Beweis, als wir zu jedem der Filter $(p_j)_*(\mathcal{F})$ einen Grenzwert gewählt haben. Will man den Satz von Tychonoff nur für kompakte (also hausdorffsche) Räume beweisen, so ist diese zweite Anwendung natürlich überflüssig. Es ist bekannt, dass der Satz von Tychonoff wie wir ihn formuliert haben, also für quasikompakte Räume, zum Auswahlaxiom äquivalent ist, während Proposition 9.23 und damit die Fassung für kompakte Räume echt schwächer ist, der Satz von Tychonoff aber auch in dieser Fassung nicht in der üblichen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom bewiesen werden kann.

Lieferung 10

Trennungsaxiome

Wir haben gesehen, dass die Eigenschaft ‚hausdorffsch' eine wichtige Rolle spielt. Wir werden nun verwandte Eigenschaften vorstellen, die später Verwendung finden werden.

Definitionen und erste Eigenschaften

10.1 Definition. Sei X ein Raum. Ein Raum heißt ein *T_i-Raum*, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, wenn er die entsprechende der folgenden Eigenschaften erfüllt.

(T_1) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existiert eine offene Menge $O \subset X$ mit $x_0 \in O$, $x_1 \notin O$.

(T_2) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

(T_3) Für alle Punkte $x \in X$ und abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ mit $x \notin A$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x \in O_0$, $A \subset O_1$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

(T_4) Für alle abgeschlossenen Mengen $A_0, A_1 \subset X$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $A_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

Der Raum X heißt *regulär*, wenn er T_3 und T_1 erfüllt, *normal*, wenn er T_4 und T_1 erfüllt.

10.2 Proposition.

- ▷ *T_1-Räume sind genau die Räume, in denen alle einelementigen Mengen abgeschlossen sind.*
- ▷ *T_2-Räume erfüllen T_1.*
- ▷ *Reguläre Räume erfüllen T_2.*
- ▷ *Normale Räume sind regulär.*

□

10.3 Bemerkung. Alle nicht in der Definition oder dieser Proposition notierten Implikationen gelten nicht. Zum Beispiel gibt es T_3-Räume, die nicht T_2 erfüllen, und T_4-Räume, die nicht T_3 erfüllen.

Wir erinnern an eine einfache Umformulierung, die wir bereits als Übung gezeigt haben.

10.4 Proposition. *Ein Raum X ist genau dann ein T_2-Raum, wenn für jeden Punkt $x \in X$*

$$\{x\} = \bigcap \big\{\overline{U} \colon U \in \mathcal{U}(x)\big\}$$

gilt. □

Für T_3 haben wir eine ähnliche Charakterisierung.

10.5 Proposition. *Ein Raum X ist genau dann ein T_3-Raum, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\big\{\overline{U} \colon U \in \mathcal{U}(x)\big\}$ eine Umgebungsbasis von x ist.*

Beweis. Sei $x \in X$.

Sei X ein T_3-Raum und $V \in \mathcal{U}(x)$, also $x \notin \overline{X \setminus V}$. Dann existieren offene disjunkte Mengen U, U' mit $x \in U$ und $\overline{X \setminus V} \subset U'$. Es ist also $U \in \mathcal{U}(x)$ und $\overline{U} \subset X \setminus U' \subset X \setminus \overline{X \setminus V} \subset V$. Damit ist $\big\{\overline{U} \colon U \in \mathcal{U}(x)\big\}$ eine Umgebungsbasis von x.

Sei nun andererseits $\big\{\overline{U} \colon U \in \mathcal{U}(x)\big\}$ eine Umgebungsbasis von x und $A \subset X$ abgeschlossen, $x \notin A$. Dann ist $X \setminus A$ eine Umgebung von x, also existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $\overline{U} \subset X \setminus A$. Es ist also $x \in \operatorname{int} U =: O_0$, $A \subset X \setminus \overline{U} =: O_1$ und O_0, O_1 offen und disjunkt. □

Beispiele

Die folgenden Überlegungen werden zeigen, dass kompakte Räume normal sind. Die Zwischenschritte sind es aber wert, notiert zu werden.

10.6 Proposition. *Sei X ein T_2-Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann ist*

$$K = \bigcap \big\{\overline{O} \colon O \supset K,\ O \text{ offen}\big\}.$$

Beweis. Sei $x \in X \setminus K$. Es ist zu zeigen, dass eine offene Menge O mit $K \subset O$ und $x \notin \overline{O}$ existiert.

Da $\{x\} = \bigcap \big\{\overline{U} \colon U \in \mathcal{U}(x)\big\}$, ist $\big\{K \setminus \overline{U} \colon U \in \mathcal{U}(x)\big\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $U_k \in \mathcal{U}(x)$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus \overline{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k =: O.$$

O ist offen und

$$X \setminus \overline{O} = \operatorname{int} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int} \overline{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^{n} U_k \ni x.$$

□

10.7 Proposition. *Sei X ein T_2-Raum, $K_0, K_1 \subset X$ kompakt und disjunkt. Dann existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $K_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.*

Beweis. Wir wiederholen den vorherigen Beweis mit K_0 an der Stelle von x, K_1 an der Stelle von K und der soeben gezeigten Eigenschaft an der Stelle der Hausdorff-Eigenschaft.

Da $K_0 = \bigcap \big\{\overline{U} \colon U \supset K_0,\ U \text{ offen}\big\}$, ist $\big\{K_1 \setminus \overline{U} \colon U \supset K_0,\ U \text{ offen}\big\}$ eine offene Überdeckung von K_1. Da K_1 kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und offene $U_k \supset K_0$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus \overline{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k =: O_1.$$

O_1 ist offen und mit

$$O_0 := X \setminus \overline{O}_1 = \operatorname{int} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int} \overline{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^{n} U_k \supset K_0.$$

ist auch O_0 offen und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$. □

10.8 Korollar. *Kompakte Räume sind normal.* □

10.9 Proposition. *Metrisierbare Räume sind normal.*

Beweis. Sei X ein Raum, d eine Metrik auf X, die die Topologie induziert und $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Für $i, j \in \{0,1\}$, $i \neq j$, $x \in A_i$ setze $\varepsilon_x := \frac{1}{2} \inf \{d(x,x') \colon x' \in A_j\}$. Da $x \in \operatorname{int}(X \setminus A_j)$, ist $\varepsilon_x > 0$. Mit $O_i := \bigcup_{x \in A_i} B_{\varepsilon_x}(x)$ ist O_i offen und $A_i \subset O_i$. Ist nun $x \in A_0$, $y \in A_1$, so ist $\varepsilon_x \leq \frac{1}{2} d(x,y)$ und $\varepsilon_y \leq \frac{1}{2} d(y,x)$. Für beliebiges $z \in X$ folgt $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y) = \frac{1}{2} d(x,y) + \frac{1}{2} d(y,x) \geq \varepsilon_x + \varepsilon_y$, also $z \notin B_{\varepsilon_x} \cap B_{\varepsilon_y}$. Damit ist $O_0 \cap O_1 = \emptyset$. □

Vererbung

Auf Quotienten vererben sich die Trennungseigenschaften im allgemeinen nicht, das heißt Quotienten eines T_i-Raumes müssen nicht T_i erfüllen. Es soll uns genügen, darauf hinzuweisen, dass wir in Beispiel 6.14 einen Quotienten des normalen Raumes $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ betrachtet haben, der nicht hausdorffsch ist. Zumindest die ersten drei Trennungsaxiome vererben sich aber auf Unterräume und Produkte, wie wir jetzt zeigen werden. Dass dies für T_4 nicht gilt, werden wir zumindest teilweise in einer Übung sehen.

10.10 Proposition. *Erfüllt ein Raum die Eigenschaft T_i, $i \in \{1,2,3\}$, so erfüllen auch alle seine Unterräume diese Eigenschaft.*

Beweis. Wir betrachten nur T_3, die anderen Fälle sind einfacher.

Sei X ein T_3-Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Sei $x \in Y$, $A \subset Y$ abgeschlossen in Y und $x \notin A$. Dann existiert ein abgeschlossenes $A' \subset X$ mit $A' \cap Y = A$. Da $x \notin A'$, existieren in X offene, disjunkte Mengen U, V mit $x \in U$, $A' \subset V$. Nun sind $U \cap Y$ und $V \cap Y$ disjunkt und offen in Y, $x \in U \cap Y$, $A \subset V \cap Y$. □

10.11 Proposition. *Ein Produkt von T_i-Räumen, $i \in \{1,2,3\}$ erfüllt T_i.*

Beweis. Wir betrachten wieder nur T_3.

Seien also J eine Menge und X_j für $j \in J$ Räume, die T_3 erfüllen. Sei nun $x \in \prod_{j \in J} X_j$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass für beliebiges $U \in \mathcal{U}(x)$ ein abgeschlossenes $U' \in \mathcal{U}(x)$ mit $U' \subset U$ existiert. Nun existieren für $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Indizes $j_k \in J$ und $V_k \in \mathcal{U}(x_{j_k})$ mit

$$\bigcap_{k=1}^{n} (p_{j_k})^{-1}[V_k] \subset U.$$

Da die Räume X_j Eigenschaft T_3 erfüllen, existieren abgeschlossene $V'_k \in \mathcal{U}(x_{j_k})$ mit $V'_k \subset V_k$. Nun ist

$$U' := \bigcap_{k=1}^{n} (p_{j_k})^{-1}[V'_k] \subset U$$

und U' eine abgeschlossene Umgebung von x. □

Lieferung 11

Reellwertige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir Räume, die in gewisser Hinsicht viele stetige reellwertige Funktionen zulassen. Zunächst zeigen wir, dass normale Räume zu diesen gehören. Danach betrachten wir vollständig reguläre Räume, eine Klasse von Räumen, die per Definition viele stetige reellwertige Funktionen zulassen. Sehr spezielle reellwertige Funktionen sind Metriken; ein einfacher Metrisationssatz für vollständig reguläre Räume schließt sich an.

Normale Räume

Wir formulieren zunächst die Trennungseigenschaft T_4 analog zu Proposition 10.5 um.

11.1 Proposition. *Ein Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn für jede abgeschlossene Menge A und jede offene Menge O mit $A \subset O$ eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$ existiert.*

Beweis. Sei X ein T_4-Raum und $A \subset O \subset X$, A abgeschlossen, O offen. Da $X \setminus O$ abgeschlossen und disjunkt zu A ist, existieren offene $U, V \subset X$ mit $A \subset U$, $X \setminus O \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. Es ist dann $\overline{U} \subset X \setminus V \subset O$.

Hat andererseits X die Eigenschaft aus der Proposition und sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, so existiert eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$. Für die offene Menge $V := X \setminus \overline{U}$ gilt dann $U \cap V = \emptyset$ und $B \subset V$. Damit ist X ein T_4-Raum. □

11.2 Satz (Urysohnsches Lemma). *Sei X ein T_4-Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f[A] \subset \{0\}$, $f[B] \subset \{1\}$*

Beweis. Sei $D_n := \left\{\frac{m}{2^n} : 0 \leq m \leq 2^n\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Wir zeigen zunächst, dass es offene Mengen U_d, $d \in D$ mit $A \subset U_0$, $U_1 = X \setminus B$ und $\overline{U}_d \subset U_e$ für alle $d, e \in D$ mit $d < e$. Setze dazu $U_1 := X \setminus B$ und wähle mit Hilfe der vohergehenden Proposition U_0, so dass $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ und U_d für alle $d \in D_n$ definiert, so setzen wir die Definition für alle $d \in D_{n+1}$ wie folgt fort. Für alle $d = \frac{m}{2^{n+1}}$ mit geraden m ist U_d bereits definiert. Ist nun m ungerade, so ist $\overline{U}_{\frac{m-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$ und wir können $U_{\frac{m}{2^{n+1}}}$ so wählen, dass $\overline{U}_{\frac{m-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subset \overline{U}_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$.

Für diese U_d definieren wir nun

$$\begin{aligned} f\colon X &\to [0,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} \inf\{d \in D\colon x \in U_d\}, & x \in U_1 \\ 1, & x \notin U_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist offenbar $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$. Seien nun $r, s \in [0,1]$. Es sind $f^{-1}[[0,r)] = \bigcup_{d<r} U_d$ und $f^{-1}[(s,1]] = \bigcup_{d>s}(X \setminus U_d) = \bigcup_{d>s}(X \setminus \overline{U}_d)$ offen, dabei gilt die letzte Gleichheit, da zu jedem $d \in D$ mit $d > s \geq 0$ ein $d' \in D$ mit $d > d' > s$ existiert. Da $\{[0,r)\colon r \in [0,1]\} \cup \{(s,1]\colon s \in [0,1]\}$ eine Subbasis der Topologie von $[0,1]$ ist, zeigt das die Stetigkeit von f. □

11.3 Bemerkung. Das charakterisiert die T_4-Räume, denn ist $f\colon X \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$, so sind $f^{-1}\big[[0,\frac{1}{2})\big]$ und $f^{-1}\big[(\frac{1}{2},1]\big]$ offene Mengen, die A und B trennen.

Bevor wir fortfahren, müssen wir uns vergewissern, dass ein Konzept, das wir aus der Analysis I für den Raum $\mathbb{R}$ kennen, auch allgemeiner sinnvoll ist.

11.4 Definition. Sei M eine Menge und (Y,d) ein metrischer Raum. Wir sagen, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon M \to Y$ *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion $g\colon M \to Y$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|g(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ und $m \geq n$.

11.5 Proposition. *Sei X ein topologischer Raum, (Y,d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g\colon X \to Y$ konvergiert. Dann ist g stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in X$ und eine Umgebung U von x, so dass $f[U] \subset B_{\varepsilon/3}(f(x))$. Damit ist

$$\begin{aligned} |g(x') - g(x)| &\leq |g(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x' \in U$, und g ist in x stetig. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich in T_4-Räumen auf abgeschlossenen Teilmengen definierte stetige reellwertige Funktionen auf den ganzen Raum fortsetzen lassen. Wir beginnen mit einem Teilergebnis.

11.6 Lemma. *Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $b \in \mathbb{R}$ und $f\colon A \to [0,b]$ stetig, so existiert eine stetige Funktion $g\colon X \to [0, \frac{1}{3}b]$ mit $0 \le f(x) - g(x) \le \frac{2}{3}b$ für alle $x \in A$.*

Beweis. Setze $B_0 := f^{-1}\big[[0, \frac{1}{3}b]\big]$ und $B_1 := f^{-1}\big[[\frac{2}{3}b, b]\big]$. Nach dem Urysohnschen Lemma existiert dann eine stetige Funktion $h\colon X \to [0,1]$ mit $h[B_0] \subset \{0\}$, $h[B_1] \subset \{1\}$. Mit $g(x) := \frac{1}{3}b \cdot h(x)$ erhält man eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. □

11.7 Satz (Tietze). *Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f\colon A \to [0,1]$ stetig, so existiert eine stetige Funktion $F\colon X \to [0,1]$ mit $F|_A = f$.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $f_0 := f$. Nun verschaffen wir uns rekursiv für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen $f_n\colon A \to \big[0, \big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ und $g_n\colon X \to \big[0, \frac{1}{3} \cdot \big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ mit $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x)$ für alle $x \in A$. Den Rekursionsschritt liefert dabei Lemma 11.6.

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{1}{3} \cdot \big(\frac{2}{3}\big)^n\big) = 1$, ist die Reihe $\sum g_n$ gleichmäßig konvergent und definiert eine stetige Funktion $F\colon X \to [0,1]$ durch $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$. Für $x \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_n(x) \\ = f_0(x) - (f_0(x) - f_1(x)) - (f_1(x) - f_2(x)) - \cdots - (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \\ = f_{n+1}(x), \end{aligned}$$

und da $f_n\colon A \to \big[0, \big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ und $\big(\frac{2}{3}\big)^n \to 0$ folgt $F|_A = f$. □

Vollständig reguläre Räume

Wir fügen der Liste der Trennungseigenschaften noch eine weitere hinzu.

11.8 Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen, X sei ein *T_{3a}-Raum*, wenn er die folgende Eigenschaft erfüllt.

(T_{3a}) Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f[A] \subset \{1\}$.

Ein Raum heißt *vollständig regulär*, wenn er T_{3a} und T_1 erfüllt.

11.9 Proposition. *T_{3a}-Räume erfüllen T_3.* □

11.10 Proposition. *Normale Räume sind vollständig regulär.*

Beweis. Gegeben eine abgeschlossene Menge A und ein $x \notin A$ wende man das Urysohnschen Lemma auf $\{x\}$ und A an. □

Die folgende Propositition zeigt die Bedeutung der Existenz reellwertiger stetiger Funktionen, wie sie für T_{3a}-Räume gegeben ist.

11.11 Lemma. *Sind X ein Raum, J eine Menge und $f_j\colon X \to [0,1]$ stetige Funktionen, so dass für jeden Punkt $x \in X$ und jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ ein $j \in J$ mit $f_j(x) = 0$ und $f_j[A] \subset \{1\}$ existiert, so trägt X die Initialtopologie bezüglich der f_j.*

Beweis. Da die f_j als stetig vorausgesetzt sind, reicht es nach der Konstruktion der Initialtopologie aus Proposition 5.11, noch zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x ein $j \in J$ und eine offene Menge $V \subset [0,1]$ mit $x \in f^{-1}[V] \subset U$ existieren. Nach Voraussetzung existiert aber ein $j \in J$, so dass $f_j(x) = 0$ und $f_j[X \setminus U] \subset \{1\}$, also $x \in f^{-1}[[0,1)] \subset U$. □

Die Eigenschaft, Initialtopologie bezüglich einer Menge von Funktionen zu sein, wollen wir umformulieren.

11.12 Proposition. *Sei X ein Raum, Y_j für $j \in J$ Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen. Dann trägt der Raum X genau dann die Initialtopologie bezüglich der Funktionen f_j, $j \in J$, wenn er die Initialtopologie bezüglich der Funktion $(f_j)_{j\in J}\colon X \to \prod_{j\in J} Y_j$ trägt.*

Beweis. Aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie folgt:

- ▷ $(f_j)_{j\in J}$ ist genau dann stetig, wenn f_j für alle $j \in J$ stetig ist.
- ▷ Ist Z ein Raum und $g\colon Z \to X$ eine Funktion, so ist $(f_j)_{j\in J} \circ g$ genau dann stetig, wenn $f_j \circ g$ für alle $j \in J$ stetig ist.

Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der Initialtopologie in Definition 5.2. □

11.13 Proposition. *Ist X ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so existiert eine abzählbare Menge C und eine Einbettung $h\colon X \to [0,1]^C$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass X eine abzählbare Menge von Funktionen besitzt, die die Bedingungen aus Lemma 11.11 erfüllt. Sei dazu $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Zu jedem Paar $(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ wählen wir, wenn eine solche existiert, eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f[U] \subset \{0\}$ und $f[X \setminus V] \subset \{1\}$. Dies liefert uns eine abzählbare Menge C von Funktionen.

Ist nun $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$, so existiert ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset X \setminus A$ und, da X ein T_{3a}-Raum ist, eine stetige

Funktion $g\colon X \to [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und $g[X \setminus V] \subset 1$. Betrachten wir nun die stetige Funktion

$$t\colon [0,1] \to [0,1]$$
$$s \mapsto \begin{cases} 0, & s \le \frac{1}{2} \\ 2s-1, & s \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

und setzen wir $g' := t \circ g$, so ist $(g')^{-1}[\{0\}] \supset g^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ eine Umgebung von x, also existiert ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$ und $g'[U] \subset \{0\}$. Da überhaupt eine Funktion, nämlich g', mit diesen Eigenschaften existiert, existiert auch ein $f \in C$ mit $f(x) \in f[U] = \{0\}$ und $f[A] \subset f[X \setminus V] \subset \{1\}$.

Da also C die Voraussetzungen von Lemma 11.11 erfüllt, trägt X die Initialtaltopologie bezüglich der $f \in C$. Mit Proposition 11.12 umformuliert trägt X die Initialtopologie bezüglich der Abbildung

$$\begin{aligned} h\colon X &\to [0,1]^C \\ x &\mapsto h(x) \\ &\qquad h(x)_f := f(x). \end{aligned}$$

Es ist nur noch zu zeigen, dass h injektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn C Punkte trennt, wenn es also zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ immer ein $f \in C$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt. Da aber X ein T_1-Raum ist, ist in dieser Situation $\{y\}$ abgeschlossen und die Argumentation des letzten Absatzes angewandt auf x und $\{y\}$ liefert ein $f \in C$ mit $f(x) = 0 \neq 1 = f(y)$. □

11.14 Proposition. *Abzählbare Produkte metrisierbarer Räume sind metrisierbar.*

Beweis. Als Aufgabe **??**. □

11.15 Satz. *Ist X ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist X metrisierbar.*

Beweis. Nach Proposition 11.13 und Proposition 11.14 ist X homöomorph zu einem Unterraum eines metrisierbaren Raumes. □

Dies ist ein recht schwacher Metrisiationssatz, doch wir wollen uns mit ihm begnügen. Mehr zu diesem Thema findet man in [Que73, Kap. 10]. Dort erfährt man zum Beispiel, dass Regularität an Stelle von vollständiger Regularität ausgereicht hätte.

Lieferung 12

Kompaktifizierungen

Kompaktifizierungen

12.1 Definition. Sei X ein Raum. Eine *Kompaktifizierung* von X ist ein kompakter Raum K zusammen mit einer Einbettung $e\colon X \to K$, so dass $e[X]$ dicht in K ist.

12.2 Bemerkung. Um eine Kompaktifizierung zu besitzen, muss X natürlich hausdorffsch sein. Mehr noch: Da kompakte Räume vollständig regulär sind und sich vollständige Regularität auf Unterräume vererbt (das zeigt man wie für Regularität), muss X vollständig regulär sein. Wir werden bald sehen, dass vollständig reguläre Räume tatsächlich immer eine Kompaktifizierung besitzen.

12.3 Beispiele.

- ▷ In Aufgabe **??** haben wir gesehen, dass die stereographische Projektion eine Einbettung $s\colon \mathbb{R}^n \to S^n$ liefert, so dass $S^n \setminus s[\mathbb{R}^n]$ aus einem einzigen Punkt besteht. Da für $n > 0$ kein Punkt von S^n isoliert ist, ist in diesem Fall $s\colon \mathbb{R}^n \to S^n$ eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. (Zum Fall $n = 0$ beachte, dass $\mathbb{R}^0$ selbst kompakt ist.)

  Genau dann konvergiert für eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ die Folge $(s(a_n))$ gegen diesen zusätzlichen Punkt, wenn die ursprüngliche Folge bestimmt gegen unendlich konvergiert. Man kann sich diese Kompaktifizierung also so vorstellen, dass ein unendlich ferner Punkt zu $\mathbb{R}^n$ hinzugefügt wurde.

- ▷ Die Abbildung

$$\begin{aligned} t\colon \mathbb{R}^n &\to D^n \\ x &\mapsto \frac{\|x\|}{1 + \|x\|^2} \cdot x \end{aligned}$$

  bildet $\mathbb{R}^n$ homöomorph auf das Innere der Scheibe ab und ist daher auch eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. Für den Fall $n = 1$ entspricht das dem Hinzufügen eines Punktes $+\infty$ und eines Punktes $-\infty$ zu $\mathbb{R}$.

▷ Die Inklusion $\mathbb{Q} \cap I \to I$ ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{Q} \cap I$. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Beispielen ist hier $\mathbb{Q} \cap I$ nicht offen in I. Dies liegt daran, dass $\mathbb{Q}$ nicht die Eigenschaft der lokalen Kompaktheit besitzt, eine Eigenschaft, die wir bald definieren werden.

12.4 Definition. Sei X ein Raum. Zwei Kompaktifizierungen $e_1\colon X \to K_1$ und $e_2\colon X \to K_2$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h\colon K_1 \to K_2$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "h", "\approx"'] \\ X \arrow[ur, "e_1"] \arrow[dr, "e_2"'] & \\ & K_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

12.5 Lemma. *Seien X ein Raum und $e_1\colon X \to K_1$ und $e_2\colon X \to K_2$ Kompaktifizierungen. Existieren stetige Abbbildungen f und g, so dass die beiden Diagramme*

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[ur, "e_1"] \arrow[dr, "e_2"'] & \\ & K_2 \end{tikzcd} \qquad \textit{und} \qquad \begin{tikzcd} & K_2 \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[ur, "e_2"] \arrow[dr, "e_1"'] & \\ & K_1 \end{tikzcd}$$

kommutieren, so sind e_1 und e_2 äquivalente Kompaktifizierungen.

Beweis. Durch Zusammensetzen der beiden Diagramme erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "g \circ f", "\approx"'] \\ X \arrow[ur, "e_1"] \arrow[dr, "e_1"'] & \\ & K_1, \end{tikzcd}$$

die stetige Abbildung $g \circ f$ stimmt also auf der dichten Menge $e_1[X]$ mit der stetigen Abbildung id_{K_1} überein. Da K_1 hausdorffsch ist, folgt daraus, dass $g \circ f = \mathrm{id}_{K_1}$. Das haben wir bereits in Aufgabe **??** gezeigt, tun es aber hier in der Hoffnung, dass es instruktiv ist, noch einmal: Sei $y \in K_1$. Da $y \in \overline{e_1[X]}$, existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X, so dass $(e_1)_*(\mathcal{F}) \to y$. Da $g \circ f$ stetig ist, konvergiert $(g \circ f \circ e_1)_*(\mathcal{F}) = (g \circ f)_*((e_1)_*(\mathcal{F}))$ gegen $(g \circ f)(y)$ (für die Gleichheit siehe Aufgabe **??**). Andererseits ist $(g \circ f \circ e_1)_*(\mathcal{F}) = (e_1)_*(\mathcal{F})$, konvergiert also gegen y. Da in dem Hausdorff-Raum K_1 Grenzwerte eindeutig sind, folgt $(g \circ f)(y) = y$.

Ebenso ist $f \circ g = \mathrm{id}_{K_2}$. Damit ist f ein Homöomorphismus. □

Lokale Kompaktheit und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung

12.6 Definition. Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann setzen wir $X^+ := X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ irgendein Punkt sei, der nicht in X ist, und versehen X^+ mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{O \subset X \colon O \text{ offen in } X\} \cup \big\{X^+ \setminus K \colon K \subset X \text{ kompakt}\big\}\,.$$

12.7 Proposition. *Die Menge $\mathcal{T}$ aus der Definition ist tatsächlich eine Topologie auf X^+, und die Inklusion $X \to X^+$ ist eine Einbettung und X offen in X^+.*

Beweis. Wir bezeichnen die erste Menge aus der Definition von $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}_X$, die zweite mit $\mathcal{T}_\infty$, also $\mathcal{T}_X = \{O \in \mathcal{T} \colon \infty \notin O\}$, $\mathcal{T}_\infty = \{O \in \mathcal{T} \colon \infty \in \mathcal{T}\}$.

Dass X offen in X^+ ist, ist klar. Dass die Inklusion eine Einbettung ist, heißt gerade, dass die Topologie, die X als Unterraum von X^+ erhält, die ursprüngliche ist. Da $\mathcal{T}_X$ gerade diese ursprüngliche Topologie von X ist, bleibt nur zu zeigen, dass $O \cap X \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_\infty$. Das gilt aber, da kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes abgeschlossen sind.

Sei nun $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}_X$, so ist, da ja $\mathcal{T}_X$ eine Topologie auf X ist, $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{O} \not\subset \mathcal{T}_X$, so existiert eine kompakte Teilmenge K von X mit $X^+ \setminus K \in \mathcal{O}$, und $\bigcup \mathcal{O} = X^+ \setminus (K \setminus \bigcup \mathcal{O})$. Da aber $X \cap \bigcup \mathcal{O}$ offen in X ist, ist $K \setminus \bigcup \mathcal{O}$ kompakt, also $X^+ \setminus (K \setminus \bigcup \mathcal{O}) \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $O_i \in \mathcal{T}$ für $1 \le i \le n$. Ist $O_i \in \mathcal{T}_\infty$ für alle i, so ist $X^+ \setminus O_i$ für alle i eine kompakte Teilmenge von X, also auch $\bigcup_{i=1}^n (X^+ \setminus O_i)$ und $\bigcap_{i=1}^n O_i = X^+ \setminus \bigcup_{i=1}^n (X^+ \setminus O_i) \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$. Existiert ein i mit $O_i \notin \mathcal{T}_\infty$, so ist $\bigcap_i O_i \subset X$, also, da wir schon gesehen haben, dass $O \cap X \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}$, $\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n (O_i \cap X) \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. $\square$

12.8 Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist X^+ quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X^+. Dann existiert ein $O \in \mathcal{C}$ mit $\infty \in O$. Da $X^+ \setminus O$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge von $\mathcal{C}$, die $X^+ \setminus O$ überdeckt. Zusammen mit O ergibt dies eine endliche Teilmenge von $\mathcal{C}$, die X^+ überdeckt. $\square$

12.9 Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist genau dann X dicht in X^+, wenn X nicht kompakt ist.*

Beweis. Genau dann ist X nicht dicht in X^+, wenn $\{\infty\}$ offen ist, wenn also $X^+ \setminus \{\infty\} = X$ kompakt ist. $\square$

12.10 Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist genau dann X^+ hausdorffsch, wenn jeder Punkt $x \in X$ in X eine kompakte Umgebung besitzt.*

Beweis. Da X hausdorffsch ist, ist X^+ genau dann hausdorffsch, wenn zu jedem $x \in X$ offene Mengen $U, V \subset X^+$ mit $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ und $\infty \in V$ existieren, wenn also zu jedem $x \in X$ eine offene Menge $V \subset X^+$ mit $\infty \in V$ existiert, so dass $X^+ \setminus V$ eine Umgebung von x ist. Betrachtet man das Komplement von V, so ergibt sich die Behauptung. □

12.11 Definition. Sei X ein Raum. X heißt *lokal kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt von x eine kompakte Umgebung besitzt.

Wir fassen zusammen:

12.12 Definition und Proposition. *Ist X ein lokal kompakter, nicht kompakter Raum, so ist X^+ (zusammen mit der Inklusion $X \to X^+$) eine Kompaktifizierung von X. Diese nennen wir die* Ein-Punkt-Kompaktifizierung *von X.* □

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung

Konstruktion

12.13 Notation. Für beliebige Räume Y, Z setzen wir

$$C(Y, Z) := \{f \colon Y \to Z \colon f \text{ stetig}\}.$$

12.14 Definition. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Wir setzen mit $I = [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Phi \colon X &\to I^{C(X,I)} \\ x &\mapsto (\mu(x))_{\mu \in C(X,I)}, \end{aligned}$$

das heißt, wir haben $\Phi(x)(\mu) = \mu(x)$, und

$$\beta X := \overline{\Phi[X]}.$$

Wir nennen $\Phi \colon X \to \beta X$ die *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von X, was wir sogleich rechtfertigen werden.

12.15 Proposition. *Sei X ein vollständig regulärer Raum. $\Phi \colon X \to \beta X$ ist eine Kompaktifizierung von X.*

Beweis. Da X ein T_{3a}-Raum ist, trägt X nach Lemma 11.11 und Proposition 11.12 die Initialtopologie bezüglich der Abbildung Φ. Da X zusätzlich ein T_1-Raum ist, trennt $C(X, I)$ Punkte, und Φ ist injektiv, also eine Einbettung. $\Phi[X]$ ist nach Definition dicht in βX. Da I kompakt ist, ist nach dem Satz von Tychonoff auch $I^{C(X,I)}$ kompakt, also auch die abgeschlossene Teilmenge βX. □

Funktorialität

12.16 Definition und Proposition. Sind X, Y, Z Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion, so induziert f eine Funktion

$$\begin{aligned} f^*\colon C(Y,Z) &\to C(X,Z) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

12.17 Definition und Proposition. *Sind X ein Raum und J_1, J_2 Mengen, so induziert eine Funktion $t\colon J_1 \to J_2$ eine stetige Abbildung*

$$\begin{aligned} t^*\colon X^{J_2} &\to X^{J_1} \\ x &\mapsto x \circ t. \end{aligned}$$

Beweis. Es bezeichne für $i \in \{1, 2\}$, $j \in J_i$, p^i_j die Projektion

$$\begin{aligned} p^i_j\colon X^{J_i} &\to X \\ x &\mapsto x(j). \end{aligned}$$

Für beliebiges $j \in J_1$ und $x \in X^{J_2}$ ist dann $p^1_j(t^*(x)) = (x \circ t)(j) = x(t(j)) = p^2_{t(j)}(x)$, also $p^1_j \circ t^* = p^2_{t(j)}$. Damit ist für alle $j \in J_1$ die Abbildung $p^1_j \circ t^*$ stetig. Es folgt, dass t^* stetig ist. □

12.18 Proposition. *Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist $f^{**}\colon I^{C(X,I)} \to I^{C(Y,I)}$ eine stetige Abbildung und $f^{**} \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ f$. Insbesondere ist $f^{**}\left[\overline{\Phi[X]}\right] \subset \overline{\Phi[Y]}$.*

Beweis. Wir rechnen $f^{**} \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ f$ nach: Für $x \in X$ und $\mu \in C(Y, I)$ ist

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \Phi^X)(x)(\mu) = (\Phi^X(x) \circ f^*)(\mu) = \Phi^X(x)(\mu \circ f) = \\ = (\mu \circ f)(x) = \mu(f(x)) = \Phi^Y(f(x))(\mu). \end{aligned}$$

□

Dies ermöglicht die folgende Definition.

12.19 Definition. Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \beta f\colon \beta X &\to \beta Y \\ x &\mapsto f^{**}(x). \end{aligned}$$

Ebenfalls gezeigt haben wir:

12.20 Proposition. *Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist βf stetig und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi^X"] \arrow[d, "f"] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ Y \arrow[r, "\Phi^Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. □

Universelle Eigenschaft

12.21 Proposition. *Sei X vollständig regulär, K kompakt und $f\colon X \to K$ stetig. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf βX, also eine stetige Funktion $\tilde{f}$, so dass*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dotted, "!\ \tilde{f}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\Phi[X]$ dicht in βX ist. Zur Existenz betrachte

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi^X"] \arrow[d, "f"] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ K \arrow[r, "\Phi^K"] & \beta K \end{tikzcd}$$

und bemerke, dass, da K kompakt und $\Phi^K[K]$ dicht in βK ist, $\Phi^K[K] = \beta K$ also Φ^K ein Homöomorphismus ist. Setze nun $\tilde{f} := (\Phi^K)^{-1} \circ \beta f$. □

Insbesondere gilt das, wenn f eine Kompaktifizierung ist. Dies charakterisiert die Stone-Čech-Kompaktifizierung.

12.22 Proposition. *Sei X ein vollständig regulärer Raum, $e\colon X \to K$ eine Kompaktifizierung. Genau dann ist $e\colon X \to K$ äquivalent zur Stone-Čech-Kompaktifizierung, wenn für jede Kompaktifizierung $e'\colon X \to K'$ eine stetige Abbildung $g\colon K \to K'$ existiert, so dass*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & K \arrow[d, dotted, "g"] \\ & K' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 12.21 und Lemma 12.5. □

Bemerkungen

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist für den geometrisch Interessierten weniger wichtig als für Mengentheoretiker und gewisse Analytiker. Sie ist im allgemeinen sehr gross und kompliziert. Zum Beispiel ist $|\beta\mathbb{N}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$, und es gibt topologische Eigenschaften von $\beta\mathbb{N}$, die unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre sind.

Andererseits muss die Stone-Čech-Kompaktifizierung nicht gross sein: Für $[0, \omega_1)$ stimmen die Stone-Čech-Kompaktifizierung und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung (bis auf Äquivalenz) überein und sind äquivalent zur Inklusion $[0, \omega_1) \to [0, \omega_1]$. Das liegt im Wesentlichen daran, dass man jede stetige Funktion von $[0, \omega_1)$ in die rellen Zahlen auf $[0, \omega_1]$ fortsetzen kann, was man elementar, aber vielleicht etwas trickreich, zeigen kann. Mit Proposition 12.22 folgt also, dass $[0, \omega_1)$ bis auf Äquivalenz genau eine Kompaktifizierung besitzt.

Lieferung 13

Homotopie

Wir betrachten nun das Deformieren einer Abbildung in eine andere und erhalten dabei auch eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume, die viel schwächer als Homöomorphie ist.

Homotopie

13.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $f_0, f_1\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F\colon X \times I \to Y$, so dass $F(x,0) = f_0(x)$ und $F(x,1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$. Wir nennen f_0 und f_1 zu einander *homotop* und schreiben $f_0 \simeq f_1$, wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert.

Für die Anschauung mag es manchmal sinnvoll sein, sich F als Abbildung vom Zylinder $X \times I$ vorzustellen, und manchmal, F als eine mit der Zeit $t \in I$ variierende Schar von Funktionen

$$\begin{aligned} f_t\colon X &\to Y \\ x &\mapsto F(x,t) \end{aligned}$$

anzusehen.

13.2 Proposition. *Seien X, Y Räume. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y.*

Beweis. Es seien $f, g, h\colon X \to Y$ stetig.

Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

zeigt $f \simeq f$ und damit die Reflexivität von $\simeq$.

Ist $f \simeq g$ und F eine Homotopie zwischen f und g, so ist mit

$$\begin{aligned} r\colon I &\to I \\ t &\mapsto 1-t \end{aligned}$$

$F\circ(\mathrm{id}_X\times r)$ eine Homotopie zwischen g und f, also $g\simeq f$, was die Symmetrie von $\simeq$ zeigt.

Ist $f\simeq g$ und $g\simeq h$ und mit zugehörigen Homotopien F und G, so ist

$$\begin{aligned} &X\times I\to Y\\ &(x,t)\mapsto\begin{cases}F(x,2t), & t\le\frac{1}{2},\\ G(x,2t-1), & t\ge\frac{1}{2},\end{cases}\end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen f und h. Für die wohldefiniert beachte, dass $F(x,1)=g(x)=G(x,0)$ und für die Stetigkeit, dass $X\times[0,\frac{1}{2}]$ und $X\times[\frac{1}{2},1]$ in $X\times I$ abgeschlossen sind. Dies zeigt $f\simeq h$ und die Transitivität von $\simeq$. □

Die Komposition von Abbildungen respektiert die Äquivalenzrelation Homotopie:

13.3 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume und $f,f'\colon X\to Y$, $g,g'\colon Y\to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f\simeq f'$ und $g\simeq g'$, so ist $g\circ f\simeq g'\circ f'$.*

Beweis. Ist F eine Homotopie zwischen f und f', G eine Homotopie zwischen g und g', so ist $G\circ F$ eine Homotopie zwischen $g\circ f$ und $g'\circ f'$. □

Homotopieäquivalenz

13.4 Definition. Seien X, Y Räume. Eine *Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y ist eine stetige Abbildung $f\colon X\to Y$, so dass eine stetige Abbildung $g\colon Y\to X$ mit

$$g\circ f\simeq\mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$$

existiert. In dieser Situation nennen wir g *homotopieinvers* zu f. Wir sagen, X und Y seien *homotopieäquivalent*, und schreiben $X\simeq Y$, wenn zwischen ihnen eine Homotopieäquivalenz existiert.

13.5 Proposition. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien X, Y, Z Räume. $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ zeigt $X\simeq X$ und damit die Reflexivität. Symmetrie ergibt sich sofort aus der Definition. Seien nun $f\colon X\to Y$ und $g\colon Y\to Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen f' und g'. Dann ist

$$(f'\circ g')\circ(g\circ f)=f'\circ(g'\circ g)\circ f\simeq f'\circ\mathrm{id}_Y\circ f=f'\circ f\simeq\mathrm{id}_X$$

und ebenso

$$(g\circ f)\circ(f'\circ g')\simeq\mathrm{id}_Z,$$

also $g\circ f\colon X\to Z$ eine Homotopieäquivalenz. Das zeigt die Transitivität. □

13.6 Beispiel. Wir zeigen für $n \in \mathbb{N}$, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq S^n$. In der Tat sind die Abbildungen

$$i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\,, \qquad x \mapsto x \qquad\qquad r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \qquad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

homotopieinvers zueinander: Es ist $r \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$, also insbesondere $r \circ i \simeq \mathrm{id}_{S^n}$. Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} H\colon (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times I &\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x,t) &\mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x, \end{aligned}$$

so ist $H(x,0) = \frac{x}{\|x\|}$, $H(x,1) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, also $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$.

13.7 Bemerkung. Zu zeigen, dass zwei Räume *nicht* homotopieäquivalent sind, ist keinesfalls einfach. Zum Beispiel legt die Anschauung nahe, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt, dass $S^n \not\simeq S^m$. Während das wahr ist, ist es nur für $n = 0$ mit elementaren Mitteln beweisbar. Den Fall $n = 1$ werden wir immerhin mit Hilfe der Fundamentalgruppe, auf deren Theorie wir den Rest der Vorlesung verwenden werden, lösen können. Der allgemeine Fall entzieht sich den Mitteln, die wir in dieser Vorlesung zur Verfügung haben. In der algebraischen Topologie ist das jedoch eines der ersten Ergebnisse.

13.8 Definition. Ein Raum heißt *zusammenziehbar*, wenn er homotopieäquivalent zu dem einpunktigen Raum ist.

Eine einfache Umformulierung ist:

13.9 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann ist X genau dann zusammenziehbar, wenn id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.* □

13.10 Proposition. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist X zusammenziehbar.*

Beweis. Sei X sternförmig bezüglich $p \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned} H\colon X \times I &\to X \\ (x, \lambda) &\mapsto \lambda p + (1-\lambda)x \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen id_X und der Abbildung, die konstant p ist. □

13.11 Korollar. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X zusammenziehbar.* □

Homotopie relativ zu einem Unterraum

13.12 Definition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Wir sagen, f sei *relativ zu A homotop* zu g, $f \simeq g$ rel A, wenn eine Homotopie $F\colon X \times I \to Y$ zwischen f und g existiert, so dass $F(a,t) = F(a,0)$ für alle $a \in A$, $t \in I$.

Damit $f \simeq g$ rel A gelten kann, muss natürlich $f|_A = g|_A$ erfüllt sein.

13.13 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$. Dann ist Homotopie relativ zu A eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Man wiederhole den Beweis, den wir oben für $A = \emptyset$ gegeben haben. □

Ebenso verallgemeinern wir:

13.14 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume, $A \subset X$ und $f, f'\colon X \to Y$, $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ rel A und $g \simeq g'$ rel $f[A]$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$ rel A.* □

Nützlich ist auch die folgende Tatsache.

13.15 Proposition. *Seien X ein Raum, $A \subset X$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f, g\colon X \to Y$. Ist $f|_A = g|_A$ und Y konvex, so ist $f \simeq g$ rel A.*

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} H\colon X \times I &\to Y \\ (x,\lambda) &\mapsto (1-\lambda)f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Es ist $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem ist $H(a,\lambda) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $\lambda \in I$. □

13.16 Beispiel. Ist X ein Raum und sind $w, w'\colon I \to X$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt, also $w(0) = w'(0)$, so ist $w \simeq w'$ rel $\{0\}$: Ist $c_0\colon I \to I$ die Abbildung, die konstant 0 ist, so ist nämlich, da I konvex ist, $c_0 \simeq \mathrm{id}_I$ rel $\{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} w &= w \circ \mathrm{id}_I \\ &\simeq w \circ c_0 \text{ rel } \{0\} \\ &= w' \circ c_0 \\ &\simeq w' \circ \mathrm{id}_I \text{ rel } \{0\} \\ &= w'. \end{aligned}$$

Andererseits scheint auch offensichtlich, dass für

$$\begin{aligned} w\colon I &\to S^1, & w'\colon I &\to S^1 \\ s &\mapsto (\cos s\pi, \sin s\pi) & s &\mapsto (\cos s\pi, -\sin s\pi), \end{aligned}$$

also zwei Wege in von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ in S^1, wobei einer oben, der andere unten entlang geht, gilt, dass

$$w \not\simeq w' \text{ rel } \{0, 1\}\,,$$

dass es also nicht möglich ist, den einen Weg in den anderen zu überführen, wenn man beide Endpunkte festhält. Das ist auch in der Tat wahr, wir werden aber noch einiges an Vorbereitung benötigen, um das zu zeigen.

Lieferung 14

Die Fundamentalgruppe

Wege

14.1 Definition. Seien X ein Raum und $w, w' \colon I \to X$ Wege in X mit $w(1) = w'(0)$. Wie bei der Diskussion des Wegzusammenhangs bezeichnen wir mit w^- den Weg

$$\begin{aligned} w^- \colon I &\to X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

und mit $w * w'$ den Weg

$$\begin{aligned} w * w' \colon I &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem bezeichnen wir für $x \in X$ mit c_x den konstanten Weg

$$\begin{aligned} c_x \colon I &\to X \\ t &\mapsto x, \end{aligned}$$

der in $\{x\}$ verläuft.

14.2 Proposition. *Seien X, Y Räume, $f \colon X \to Y$ stetig, $w, w' \colon I \to X$ stetig mit $w(1) = w'(0)$. Dann ist $(f \circ w)(1) = (f \circ w')(0)$ und $(f \circ w) * (f \circ w') = f \circ (w * w')$.* □

14.3 Proposition. *Sind $v, v', w, w' \colon I \to X$ stetig mit $v(1) = w(0)$, und ist $v \simeq v'$ rel $\{0,1\}$, $w \simeq w'$ rel $\{0,1\}$, so ist $v * w \simeq v' * w'$ rel $\{0,1\}$.*

Beweis. Sei F die Homotopie zwischen v und v', G die Homotopie zwischen w und w'. Dann ist

$$\begin{aligned} I \times I &\to X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} F(2s,t), & s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen $v * w$ und $v' * w'$, und diese Homotopie hält $\{0,1\}$ (sogar $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$) fest. □

14.4 Proposition. *Sei X ein Raum, $w, w', w''\colon I \to X$ stetig, $w(1) = w'(0)$, $w'(1) = w''(0)$. Dann gilt:*

(i) $(w * w') * w'' \simeq w * (w' * w'') \quad \mathrm{rel}\ \{0,1\}$,

(ii) $c_{w(0)} * w \simeq w \simeq w * c_{w(1)} \quad \mathrm{rel}\ \{0,1\}$,

(iii) $w * w^- \simeq c_{w(0)} \quad \mathrm{rel}\,\{0,1\}$.

Beweis. Zu (i): Man kann die Homotopie direkt angeben, und das sei zur Übung empfohlen. Wir gehen hier etwas anders vor: Wir definieren zunächst

$$\begin{aligned} f\colon [0,3] &\to X \\ s &\mapsto \begin{cases} w(s), & 0 \le s \le 1, \\ w'(s-1), & 1 \le s \le 2, \\ w''(s-2), & 2 \le s \le 3, \end{cases} \end{aligned}$$

f ist stetig, und für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} l_{a,b}\colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto s \cdot b + (1-s) \cdot a. \end{aligned}$$

Dann ist zum Beispiel $w' = f \circ l_{1,2}$, also $(w * w') * w'' = f \circ ((l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3})$ und $w * (w' * w'') = f \circ (l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}))$. Wegen Proposition 13.14 genügt es nun, zu zeigen, dass

$$(l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3} \simeq l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}) \quad \mathrm{rel}\ \{0,1\}\,,$$

beide Seiten aufgefasst als Wege in $[0,3]$. Da beide Wege Anfangspunkt 0 und Endpunkt 3 haben, folgt dies aber mit Proposition 13.15 aus der Konvexität von $[0,3]$.

Zu (ii): Es ist $c_{w(0)} * w = w \circ (c_0 * \mathrm{id}_I)$ und $w = w \circ \mathrm{id}_I$. Nun sind $c_0 * \mathrm{id}_I$ und id_I beides Wege in I mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 und $c_{w(0)} * w \simeq w$ rel $\{0,1\}$ folgt wie eben, und $w \simeq w * c_{w(1)}$ rel $\{0,1\}$ ebenso.

Zu (iii): Wie eben mit $w * w^- = w \circ (l_{0,1} * l_{1,0})$, $c_{w(0)} = w \circ c_0$. □

Die Fundamentalgruppe

Diese Untersuchungen machen die folgende Definition möglich.

14.5 Definition. Sei X ein Raum und $x_0 \in X$. Dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Wegen $w\colon I \to X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ bezüglich Homotopie relativ zu $\{0,1\}$. Einen Weg w mit $w(0) = w(1) = x_0$ nennen wir einen *geschlossenen Weg bei x_0* oder eine *Schleife bei x_0*.

Auf $\pi_1(X, x_0)$ ist durch

$$[w] \cdot [w'] := [w * w']$$

eine Multiplikation erklärt, die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $[c_{x_0}]$ macht. $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *Fundamentalgruppe* von X mit *Basispunkt* x_0.

14.6 Definition. Ein *Raum mit Basispunkt* ist ein Paar (X, x_0), wobei X ein Raum ist und $x_0 \in X$. Sind (X, x_0), (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ *basispunkterhaltend*, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir schreiben hierfür $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Sind $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ basispunkterhaltende Abbildungen, so werden wir unter einer Homotopie zwischen f und g, wenn wir nichts anderes bemerken, immer eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$ verstehen. Wollen wir explizit sagen, dass eine Homotopie nicht relativ zum Basispunkt zu sein braucht, so reden wir von einer *freien Homotopie.*

14.7 Definition und Proposition. *Seien* (X, x_0) *und* (Y, y_0) *Räume mit Basispunkt,* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *stetig. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} \pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w]. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Gruppen. An Stelle von $\pi_1(f)$ *schreiben wir auch* $f_\#$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 13.14, die Verträglichkeit mit der Multiplikation aus Proposition 14.2. □

14.8 Proposition. *Seien* (X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) *Räume mit Basispunkt,* $f, f'\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *stetig. Dann gilt:*

(i) Ist $f \simeq f'$ *(relativ zu* $\{x_0\}$*), so ist* $\pi_1(f) = \pi_1(f')$.

(ii) Es ist $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(iii) Es ist $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Beweis. (i) folgt aus Proposition 13.14, (ii) und (iii) sind klar. □

Die Fundamentalgruppe erlaubt es uns, topologische Situationen in algebraische zu übersetzen, wobei man dann hofft, dass letztere einfacher sind. Zum Beispiel hat man:

14.9 Proposition. *Seien* (X, x_0), (Y, y_0) *Räume mit Basispunkt,* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *stetig. Ist* $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$, *so ist* $f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *ein Isomorphismus.*

Beweis. Aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = (\mathrm{id}_{(X,x_0)})_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ folgt, dass $f_\# \circ g_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Das heißt gerade, dass $f_\#$ ein Isomorphismus und invers zu $g_\#$ ist. □

Da wir hier fordern, dass die Homotopien den Basispunkt erhalten, ist die Voraussetzung der Proposition stärker als die Homotopieäquivalenz von X und Y. Das werden wir jedoch noch beheben. Haben wir das getan, und wissen wir dann von zwei Räumen, dass sie nicht isomorphe Fundamentalgruppen haben, so werden wir also wissen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind. Bisher allerdings wissen wir nicht einmal, dass es einen Raum gibt, dessen Fundamentalgruppe nicht trivial ist, doch wir werden noch Hilfsmittel kennenlernen, um die Fundamentalgruppen in vielen Situationen zu bestimmen.

Der Einfluss des Basispunktes

Da I (der Raum in dem Wege starten) und $I \times I$ (der Raum in dem Homotopien von Wegen starten) wegzusammenhängend sind, ‚sieht' $\pi_1(X, x_0)$ nur die Wegkomponente von X, in der x_0 liegt. Liegen allerdings x_0 und x_1 in der selben Wegkomponente, so werden wir nun sehen, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph sind.

14.10 Definition. Sei X ein Raum und $p\colon I \to X$ stetig, $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} h_p\colon \pi_1(X, x_1) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [w] &\mapsto [p * w * p^-]. \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 14.3 (und Proposition 14.4).

14.11 Proposition. *Sei X ein Raum, $p, p', q\colon I \to X$ stetig, $p(1) = q(0)$, $x_0 \in X$. Dann gilt:*

(i) h_p ist ein Homomorphismus.

(ii) Ist $p \simeq p'$ rel $\{0,1\}$, so ist $h_p = h_{p'}$.

(iii) Es ist $h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(iv) Es ist $h_{p*q} = h_p \circ h_q$.

Beweis. Das sind alles einfache Folgerungen aus Proposition 14.4. □

14.12 Proposition. *Sei X ein Raum, $x_0, x_1 \in X$. Liegen x_0, x_1 in der selben Wegkomponente von X, so ist $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, denn für jeden stetigen Weg $p\colon I \to X$ mit $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$ ist*

$$h_p\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus. Sind p, q zwei solche Wege, so ist $q * p^-$ eine Schleife bei x_0 und mit $\alpha := [q * p^-] \in \pi_1(X, x_0)$ ist

$$h_q(\beta) = \alpha h_p(\beta)\alpha^{-1} \qquad \textit{für alle } \beta \in \pi_1(X, x_0),$$

h_p und h_q unterscheiden sich also um einen inneren Automorphismus von $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Ist p ein stetiger Weg von x_0 nach x_1, so ist $h_p \circ h_{p^-} = h_{p*p^-} = h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und ebenso $h_{p^-} \circ h_p = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$. Damit ist h_p ein Isomorphismus.

Ist q ein weiterer stetiger Weg von x_0 nach x_1 und w eine Schleife in x_1, so ist

$$\begin{aligned} h_q([w]) &= [q * w * q^-] \\ &= [q * p^- * p * w * p^- * p * q^-] \\ &= [q * p^-] \cdot [p * w * p^-] \cdot [p * q^-] \\ &= [q * p^-] \cdot h_p([w]) \cdot [(q * p^-)^-] \\ &= [q * p^-] \cdot h_p([w]) \cdot [q * p^-]^{-1}. \end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichung aus der Proposition. □

Wäre h_p ganz unabhängig von p, so könnten wir für wegzusammenhängende Räume den Basispunkt ganz vergessen; so können wir das nicht immer.

Freie Homotopie

Wir werden nun untersuchen, was man über die von homotopen Abbildungen induzierten Homomorphismen sagen kann, wenn die Homotopien den Basispunkt bewegen dürfen.

14.13 Proposition. *Seien X, Y Räume, $x_0 \in X$, $f, g\colon X \to Y$ stetig und $f \simeq g$. Ist $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen f und g, $H(\bullet, 0) = f$, $H(\bullet, 1) = g$, und $p\colon I \to X$ der Weg $H(x_0, \bullet)$ in Y, $y_0 := p(0)$, $y_1 := p(1)$, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "g_\#"] \arrow[dr, "f_\#"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "h_p", "\cong"'] \\ & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist insbesondere eine der beiden Abbildungen $f_\#$, $g_\#$ ein Isomorphismus, so auch die andere.

Beweis. Sei w eine Schleife bei x_0. Wir betrachten die Wege $l, r, t, b\colon I \to I \times I$,

$$b(s) := (s, 0), \qquad t(s) := (s, 1), \qquad l(s) := (0, s), \qquad r(s) := (1, 1 - s).$$

Da $I \times I$ konvex ist, ist $b \simeq l * t * r \text{ rel } \{0, 1\}$. Nun ist

$$\begin{aligned} f \circ w &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ b, & p &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ l, \\ g \circ w &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ t, & p^- &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ r. \end{aligned}$$

Also ist $f \circ w \simeq p * (g \circ w) * p^- \text{ rel } \{0, 1\}$, das heißt

$$f_\#([w]) = h_p(g_\#([w])).$$

□

14.14 Proposition. *Seien X, Y Räume, $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist für $x_0 \in X$ die Abbildung*

$$f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g\colon Y \to X$ eine Homotopieinverse. Wir betrachten

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_\#} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))),$$

wobei die erste und dritte Abbildung natürlich verschieden sind, obwohl sie gleich bezeichnet sind. Da $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $(\mathrm{id}_X)_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus, nämlich die Identität, ist, ist nach der vorherigen Proposition auch $(g \circ f)_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ ein Isomorphismus. Also ist die Komposition der ersten beiden Abbildungen unseres Diagrammes ein Isomorphismus. Ebenso folgt aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, dass die Komposition der letzten beiden Abbildungen ein Isomorphismus ist. Damit ist die mittlere Abbildung sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus. Daher müssen auch die anderen beiden Abbildungen Isomorphismen sein, insbesondere die erste. □

14.15 Korollar. *Ist X ein zusammenziehbarer Raum und $x_0 \in X$, so ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial.*

Beweis. Da homotopieäquivalente Räume isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, brauchen wir die Behauptung nur für den einelementigen Raum zu zeigen. In diesem gibt es aber überhaupt nur eine einzige Schleife, nämlich die konstante. □

Lieferung 15

Überlagerungen und die Fundamentalgruppe von S^1

Dass Überlagerungen (die Definition folgt weiter unten) in engem Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe stehen, werden wir noch sehen.[1] Zunächst wollen wir uns von einem konkreten Beispiel leiten lassen, die Beweise aber gleich in ausreichender Allgemeinheit führen.

Wenn wir die Theorie der Fundamentalgruppe gewinnbringend anwenden wollen, müssen wir wohl endlich die Fundamentalgruppe eines Raumes bestimmen, für den sie nicht trivial ist. Der grundlegende Fall ist die Kreislinie. Wir betrachten für $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} u_k \colon I &\to S^1 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt). \end{aligned}$$

Das ist eine Schleife bei $(1,0)$. Anschaulich wickelt diese das Einheitsintervall k-mal um die Kreislinie herum. Wir werden im folgenden zeigen, dass $u_k \simeq u_l$ rel $\{0,1\}$ nur für $k = l$ und dass zu jeder Schleife w in S^1 bei $(1,0)$ ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $w \simeq u_k$ rel $\{0,1\}$. Wir werden also zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{Z} &\to \pi_1(S^1, (1,0)) \\ k &\mapsto [u_k] \end{aligned}$$

eine Bijektion (und in der Tat ein Isomorphismus von Gruppen) ist. Dabei wird es sich als hilfreich erweisen, die Abbildung

$$\begin{aligned} p \colon \mathbb{R} &\to S^1 \\ r &\mapsto (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \end{aligned}$$

und die Wege

$$\begin{aligned} v_k \colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto ks \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k zu betrachten. Es ist dann $u_k = p \circ v_k$. Die Abbildung $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ ist ein Beispiel einer Überlagerung.

[1] Auch wenn die noch vorhandene Zeit bestimmen wird, in welcher Ausführlichkeit wir uns mit diesem Thema beschäftigen werden.

15.1 Definition. Eine Abbildung $p\colon X \to Y$ heißt eine *Überlagerung*, wenn X und Y wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorffräume sind, p surjektiv ist und zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung U existiert, so dass für jede Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \to U$ ergibt. Mengen U dieser Art nennen wir *gleichmäßig überdeckt* oder *elementar*, die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ die *Blätter* über U.

15.2 Proposition. *Die oben beschriebene Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Zunächst sind $\mathbb{R}$ und S^1 zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und hausdorffsch. Außerdem ist p surjektiv. Sei nun $x \in S^1$ beliebig, etwa $x = p(r)$. Wir zeigen, dass $U := S^1 \setminus \{x\}$ gleichmäßig überdeckt ist. U ist offen und $p^{-1}[U] = \mathbb{R} \setminus \{r + z\colon z \in \mathbb{Z}\}$. Die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ sind also die offenen Intervalle $(r + z, r + z + 1)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von p

$$\begin{aligned}(r + z, r + z + 1) &\to U\\ z &\mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)\end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Ist nun $y \in S^1$ beliebig, so liegt y in der gleichmäßig überdeckten Menge $S^1 \setminus \{-y\}$. $\square$

Ist Z ein Raum, $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $f\colon Z \to Y$ eine stetige Abbildung, so können wir uns fragen, ob eine stetige *Hochhebung* von f, also eine Abbildung $\tilde{f}\colon Z \to X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, existiert. Das wird im allgemeinen von Z und f abhängen. Für Wege, also für $Z = I$, werden wir nun aber sehen, dass eine stetige Hochhebung immer existiert und zwar für jedes $x \in p^{-1}[\{f(0)\}]$ genau eine mit $\tilde{f}(0) = x$.

Ist der Weg so kurz, dass er ganz in einer gleichmäßig überdeckten Menge verläuft, so ist dies klar. Im allgemeinen werden wir den Weg in so kurze Stücke zerlegen, dass dies für diese gilt. Dies wird das Lebesgue-Lemma leisten, das wahrscheinlich aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt ist. Wir erinnern kurz daran.

15.3 Lemma (Lebesgue). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in X$ ein $O \in \mathcal{C}$ existiert, so dass $B_\delta(x) \in O$.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_x}(x)$ in einem Element von $\mathcal{C}$ liegt. Da $\{B_{\varepsilon_x}(x)\colon x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert aufgrund der Kompaktheit von X ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n$, so dass $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_{\varepsilon_{x_n}}(x_n)$. Setze $\delta := \min\{\varepsilon_{x_n}\colon 1 \le k \le n\}$. Ist nun $y \in X$ beliebig, so existiert ein k mit $y \in B_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$. Nun ist $B_\delta(y) \subset B_{2\varepsilon_{x_k}}$ und liegt damit ganz in einem Element von $\mathcal{C}$. $\square$

15.4 Proposition (Hochheben von Wegen). *Ist $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $w\colon I \to Y$ stetig und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = w(0)$, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{w}\colon I \to X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w} = w$.*

Beweis. Sei $\{U_j : j \in J\}$ die Menge der gleichmäßig überdeckten Teilmengen von X. Dann ist $\{w^{-1}[U_j] : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von I. Nach dem Lebesgue-Lemma gibt es also ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass zu jedem k mit $0 < k \leq N$ ein $j \in J$ mit $w\left[\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]\right] \subset U_j$ existiert. Für solches N werden wir für $0 \leq k \leq N$ induktiv zeigen, dass es genau ein stetiges $\tilde{w}_k\colon \left[0, \frac{k}{N}\right] \to X$ mit $\tilde{w}_k(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w}_k = w|_{[0,\frac{k}{N}]}$ gibt. Der Fall $k = N$ zeigt dann die Behauptung. Wir setzen $I_k := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$.

$\tilde{w}_0(0) = x_0$ erledigt $k = 0$. Sei nun $0 < k \leq N$ und Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{w}_{k-1}$ bereits gezeigt. Dann muss $\tilde{w}_k$, wenn es existiert, auf $\left[0, \frac{k-1}{N}\right]$ mit $\tilde{w}_{k-1}$ übereinstimmen. Es bleibt also zu zeigen, dass es genau ein stetiges $f\colon I_k \to X$ mit $f(\frac{k-1}{N}) = \tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)$ und $p \circ f = w|_{I_k}$ gibt. $\tilde{w}_k$ erhält man dann durch Zusammensetzen von $\tilde{w}_{k-1}$ und f. Nun gibt es ein $j \in J$ mit $w[I_k] \subset U_j$. Es ist $p\left(\tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)\right) = w\left(\frac{k-1}{N}\right) \in U_j$. Sei V die Wegkomponente von $p^{-1}[U_j]$, in der $\tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)$ liegt. Jede stetige Abbildung f mit den geforderten Eigenschaften muss nun, da I_k wegzusammenhängend ist, ihr Bild in V haben. Da die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \to U_j$ liefert, gibt es genau ein solches f, nämlich die Komposition von $w|_{I_k}$ mit dem Inversen dieses Homöomorphismus. □

15.5 Korollar. *Die Abbildung Φ ist surjektiv.*

Beweis. Sei $\alpha \in \pi_1(S^1, (1,0))$, $\alpha = [w]$. Wir betrachten die oben beschriebene Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$. w lässt sich zu einem Weg in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 hochheben, das heißt es gibt einen stetigen Weg $\tilde{w}\colon I \to \mathbb{R}$ mit $w(0) = 0$ und $p \circ \tilde{w} = w$. Aus $p(\tilde{w}(1)) = w(1) = (1,0)$ folgt, dass $w(1) \in \mathbb{Z}$, sagen wir $w(1) = k$. Nun ist aber $\mathbb{R}$ konvex, also ist $\tilde{w} \simeq v_k$ rel $\{0,1\}$. Damit ist $\alpha = [w] = [p \circ \tilde{w}] = [p \circ v_k] = [u_k] = \Phi(k)$. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Hochhebungen homotoper Wege mit gleichem Anfangspunkt homotop sind.

15.6 Proposition (Hochheben von Homotopien). *Sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $F\colon I \times I \to Y$ stetig. Ist $\tilde{f}\colon I \to X$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = F(\bullet, 0)$, so existiert eindeutig eine stetige Abbildung $\tilde{F}\colon I \times I \to X$ mit $\tilde{F}(\bullet, 0) = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{F} = F$.*

Beweis. Existiert ein solches $\tilde{F}$, so ist für jedes $s \in I$ die Einschränkung $\tilde{F}(s, \bullet)$ eine Hochhebung des Weges $F(s, \bullet)$ zu einem Weg mit Anfangspunkt $\tilde{f}(s)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen folgt also schon die Eindeutigkeit von $\tilde{F}$. Außerdem definiert dies $\tilde{F}$ bereits, so dass wir nur noch die Stetigkeit nachzuprüfen haben.

Aus dem Lebesgue-Lemma folgt wieder die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, so dass $F\left[\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right]$ für alle $0 \leq k, l < N$ in einer gleichmäßig überdeckten Menge enthalten ist. Es genügt, zu zeigen, dass für alle $0 \leq k, l < N$ die Einschränkung von $\tilde{F}$ auf $\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ stetig ist, da $I \times I$ die Vereinigung dieser endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist. Wir tun dies für festes l per Induktion über k. Zur Abkürzung setzen wir $B := \left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right]$ und $I_k := \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$.

Sei also $0 \leq k < N$ und $\tilde{F}$ für alle $k' < k$ auf $B \times I_{k'}$ stetig. Dann ist $\tilde{F}$ zumindest auf $B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}$ stetig. (Für $k = 0$ folgt das aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$.) Sei U eine gleichmäßig überdeckte Menge, die $F[B \times I_k]$ enthält. Da $B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}$ wegzusammenhängend ist, folgt nun aus der Stetigkeit von $\tilde{F}$ auf dieser Menge, dass $\tilde{F}\left[B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}\right]$ ganz in einer Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ liegt. Da ja die Einschränkung von p einen Homöomorphismus von V auf U ergibt, existiert eine stetige Abbildung $G\colon B \times I_k \to V$ mit $p \circ G = F|_{B \times I_k}$ und $G|_{B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}} = \tilde{F}|_{B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}}$. Für jedes $r \in B$ sind $G|_{\{r\} \times I_k}$ und $\tilde{F}|_{\{r\} \times I_k}$ Hochhebungen von $F|_{\{r\} \times I_k}$ mit $G\left(r, \frac{k}{N}\right) = \tilde{F}\left(r, \frac{k}{N}\right)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen bei vorgegebenem Anfangspunkt folgt, dass $\tilde{F}$ auf $B \times I_k$ mit G übereinstimmt und daher dort stetig ist. □

15.7 Korollar. *Sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $v, w\colon I \to Y$ stetig. Ist $v \simeq w$ rel $\{0,1\}$ und sind $\tilde{v}, \tilde{w}\colon I \to X$ stetige Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt, also $v = p \circ \tilde{v}$, $w = p \circ \tilde{w}$, $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$, so ist $\tilde{v} \simeq \tilde{w}$ rel $\{0,1\}$, also insbesondere $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.*

Beweis. Sei F eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ zwischen v und w. Dann existiert nach dem eben gezeigten eine stetige Abbildung $\tilde{F}\colon I \times I \to X$ mit $\tilde{F}(s,0) = \tilde{v}(0)$ für alle $s \in I$. Da $\tilde{F}(0,\bullet)$ eine stetige Hochhebung des konstanten Weges $F(0,\bullet)$ ist, konstante Wege aber sicher eine konstante Hochhebung besitzen, folgt aus der Eindeutigkeit der Hochhebung eines Weges bei gegebenem Anfangspunkt, dass $F(0,t) = \tilde{v}(0)$ für alle $t \in I$ und ebenso $F(1,t) = \tilde{v}(1)$. Nun sind $\tilde{F}(\bullet,1)$ und $\tilde{w}$ beides stetige Hochhebungen von $F(\bullet,1) = w$ und $F(0,1) = \tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$, also $\tilde{F}(s,1) = \tilde{w}(s)$ für alle $s \in I$. Wir haben gezeigt, dass $\tilde{F}$ eine Homotopie zwischen $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ relativ zu $\{0,1\}$ ist. □

15.8 Korollar. *Die Abbildung Φ ist injektiv.*

Beweis. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$, $\Phi(k) = \Phi(l)$, also $[u_k] = [u_l]$. v_k und v_l sind Hochhebungen von u_k beziehungsweise u_l und $v_k(0) = 0 = v_l(0)$. Aus $[u_k] = [u_l]$ folgt nun $k = v_k(1) = v_l(1) = l$. □

15.9 Korollar. *S^1 ist nicht zusammenziehbar.*

Beweis. Zusammenziehbare Räume haben triviale Fundamentalgruppen, aber $\pi_1(S^1, (1,0))$ ist nicht trivial. □

15.10 Proposition. *Die Abbildung* $\Phi\colon (\mathbb{Z},+) \to \pi_1(S^1,(1,0))$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass Φ eine Bijektion ist, müssen also nur noch zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$. v_k ist eine Hochhebung von u_k mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k. Nun ist

$$\begin{aligned} w\colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto k + ls \end{aligned}$$

eine Hochhebung von u_l mit Anfangspunkt k und Endpunkt $k+l$. Wir können also $v_k * w$ bilden, und da $\mathbb{R}$ konvex und dies ein Weg mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $k+l$ ist, gilt $v_k * w \simeq v_{k+l}$ rel $\{0,1\}$. Es folgt $\Phi(k)\Phi(l) = [u_k][u_l] = [u_k * u_l] = [(p \circ v_l) * (p \circ w)] = [p \circ (v_l * w)] = [p \circ v_{k+l}] = [u_{k+l}] = \Phi(k+l)$. □

Dies ermöglicht nun schon einige Anwendungen, die aus Motivationsgründen hier sofort folgen sollten, die wir aber aus Zeitgründen noch aufschieben wollen. Sorry!

Lieferung 16

Erste Anwendungen der Fundamentalgruppe

Anstatt sich für etwas zu entschuldigen, soll man es lieber besser machen. Hier kommen daher die Anwendungen, deren Aufschiebung wir gerade beklagt haben.

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Bisher haben wir nur die Fundamentalgruppen des Punktes und der Kreislinie und damit auch aller Räume, die zu einem dieser homotopieäquivalent sind, berechnet. Das genügt aber schon für die folgende Proposition.

16.1 Proposition. *Es gibt keine stetige Retraktion von der Kreisscheibe auf die Kreislinie, das heißt keine stetige Abbildung* $r\colon D^2 \to S^1$ *mit* $r|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$.

Beweis. Sei $p \in S^1$ ein Punkt, $i\colon (S^1, p) \to (D^2, p)$ die Inklusion, und $r\colon (D^2, p) \to (S^1, p)$ stetig. Wir betrachten die induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(S^1, p) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(D^2, p) \xrightarrow{r_\#} \pi_1(S^1, p).$$

Da D^2 zusammenziehbar (sogar konvex) ist, ist $\pi_1(D^2, p)$ trivial. Damit ist auch die Komposition $r_\# \circ i_\# = (r \circ i)_\#$ trivial. Da aber $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ nicht trivial ist, ist $\mathrm{id}_{\pi_1(S^1,p)} = (\mathrm{id}_{(S^1,p)})_\#$ nicht trivial. Es ist also $r \circ i \not\simeq \mathrm{id}_{(S^1,p)}$ und insbesondere $r \circ i \neq \mathrm{id}_{(S^1,p)}$. □

Dies ist auch für Abbildungen $D^{m+1} \to S^m$ wahr. Der Fall $m = 0$ ist gerade der Zwischenwertsatz, der Fall $m > 1$ liegt nicht im Bereich der Methoden, die wir im Moment zur Verfügung haben.

Als direkte Folgerung haben wir:

16.2 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 2). *Jede stetige Abbildung* $f\colon D^2 \to D^2$ *hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f\colon D^2 \to D^2$ stetig und fixpunktfrei. Wir zeigen, dass die Existenz einer stetigen Retraktion $r\colon D^2 \to S^1$ folgt, was der vorhergehenden Proposition widerspricht.

Die folgende Konstruktion ist an dieser Stelle die übliche, da man dazu eine gute Zeichnung anfertigen kann. Man tue dies und merke sich diese Konstruktion. Sei $x \in D^2$. Da $f(x) \neq x$ existiert ein eindeutig bestimmter von $f(x)$ ausgehender Strahl, der durch x geht. Man definiere $r(x)$ als den Schnittpunkt dieses Strahls mit S^1. Offenbar ist für $x \in S^1$ dann $r(x) = x$. Leider ist es etwas lästig, die Stetigkeit von r nachzurechnen.

Wir geben daher noch eine weitere Konstruktion an. Dazu definieren wir zunächst

$$\begin{aligned} g\colon D^2 &\to D^2 \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} f(2x), & \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - \|x\|) f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \|x\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

g ist stetig und auch fixpunktfrei: Für $\|x\| \leq \frac{1}{2}$ folgt aus $g(x) = x$, dass $f(2x) = 2x$, und für $\|x\| > \frac{1}{2}$ ist $\|g(x)\| < \frac{1}{2}$. g hat aber die zusätzliche Eigenschaft, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in S^1$. Daher ist die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} r\colon D^2 &\to S^1 \\ x &\mapsto \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|} \end{aligned}$$

eine Retraktion. □

Abbildungsgrad und der Hauptsatz der Algebra

16.3 Definition. Sei $f\colon S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung. Wir definieren den *Grad von* f, $\deg f$, als die ganze Zahl, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, p) \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(S^1, f(p)) \arrow[r, "h_w", "\cong"'] & \pi_1(S^1, p) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\cong", "\Phi"'] \arrow[rr, "\cdot \deg f"] & & \mathbb{Z} \arrow[u, "\cong", "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, wobei $p = (1, 0)$, w ein beliebiger stetiger Weg von p nach $f(p)$, h_w der Isomorphismus aus Definition 14.10 und Φ der Isomorphismus aus Proposition 15.10 ist.

16.4 Proposition. *Der Grad von f ist wohldefiniert, und sind $f, g\colon S^1 \to S^1$ homotope Abbildungen, so ist* $\deg f = \deg g$.

Beweis. Da alle Abbildungen in dem definierenden Diagramm Homomorphismen sind und jeder Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ die Multiplikation mit einer ganzen Zahl ist, existiert eine ganze Zahl $\deg f$, die das Diagramm kommutativ macht und für die Wohldefiniertheit ist nur die Unabhängigkeit von der Wahl des Weges w zu zeigen. Ist w' ein weiterer Weg von p nach $f(p)$, so haben wir in Proposition 14.12 gezeigt, dass sich h_w und $h_{w'}$ nur um einen inneren Isomorphismus von $\pi_1(S^1, p)$ unterscheiden. Da aber $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ abelsch ist, ist dann $h_w = h_{w'}$.

Seien nun $f, g\colon S^1 \to S^1$ homotop und v ein Weg von $f(p)$ nach $g(p)$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1,p) \arrow[r, "g_\#"] \arrow[dr, "f_\#"'] & \pi_1(S^1,g(p)) \arrow[d, "h_v"] \arrow[dr, "h_{w*v}"] & \\ & \pi_1(S^1,f(p)) \arrow[r, "h_w"'] & \pi_1(S^1,p) \end{tikzcd}$$

kommutiert nun das linke Dreieck wegen Proposition 14.13 und das rechte Dreieck wegen Proposition 14.11. Da $w * v$ ein Weg von p nach $g(p)$ ist, folgt $\deg f = \deg g$. □

16.5 Proposition. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ und S^1 aufgefasst als die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag* 1. *Dann ist der Grad der Abbildung*

$$\begin{aligned} S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto z^k \end{aligned}$$

gleich k.

Beweis. Sei f die Abbildung $f(z) = z^k$. Da $f(1) = 1$ ist, können wir den in der Definition von $\deg f$ vorkommenden Weg w konstant wählen, also ist $h_w = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1,1)}$, und wir werden h_w in der Notation unterdrücken.

Sei $l \in \mathbb{Z}$. Der Weg u_l, der in der Definition von Φ vorkam, war gerade durch $u_l(r) = \exp(2\pi i \cdot lr)$ gegeben, auch wenn wir es dort anders formuliert haben. Dann ist $f(u_l(r)) = \exp(2\pi i \cdot lr)^k = \exp(2\pi i \cdot klr) = u_{kl}(r)$, also $f_\#(\Phi(l)) = f_\#([u_l]) = [f \circ u_l] = [u_{kl}] = \Phi(kl)$, also, da l beliebig war, $\deg f = k$. □

16.6 Korollar (Hauptsatz der Algebra). *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad n, also $a_n \neq 0$. Hat p keine Nullstelle, so ist $n = 0$.*

Beweis. Die Idee ist die folgende: Da p keine Nullstelle hat, ist für jede nicht-negative reelle Zahl r die Abbildung

$$\begin{aligned} f_r\colon S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto \frac{p(rz)}{|p(rz)|} \end{aligned}$$

definiert, die das Verhalten von p auf dem Kreis mit Radius r wiedergibt. Nun ist f_0 konstant, aber für $r \to \infty$ geht die Abbildung f_r gegen die Abbildung $z \mapsto z^n$. Das zeigt, dass die Abbildung $z \mapsto z^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung und damit vom Grad 0 ist. Die Sache mit dem Grenzübergang muss man natürlich genauer machen, und das werden wir nun tun.

Zunächst definieren wir

$$\begin{aligned} F\colon S^1 \times I &\to S^1 \\ (z, r) &\mapsto f_r(z). \end{aligned}$$

F ist stetig und damit $f_0 \simeq f_1$. Weiter definieren wir für $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_r\colon S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto \frac{\sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} z^k}{|\sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} z^k|}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G\colon S^1 \times I &\to S^1 \\ (z, r) &\mapsto g_r(z). \end{aligned}$$

Für $r > 0$ ist der Nenner von $g_r(z)$ gleich $r^n|p\left(\frac{z}{r}\right)| \neq 0$. (Also, nach Kürzen, $g_r = f_{1/r}$, was die Verbindung zum einleitenden Absatz schafft.) Es ist $g_0(z) = \frac{a_n z^n}{|a_n z^n|} = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$. Damit ist g_r tatsächlich für alle $r \in \mathbb{R}$ definiert, und da G stetig ist, ist $g_0 \simeq g_1$. Da aber $g_1 = f_1$, folgt $g_0 \simeq f_0$. Nun ist $f_0(z) = \frac{a_0}{|a_0|} = \frac{a_0}{|a_0|} z^0$, $g_0(z) = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$. Es folgt $n = \deg g_0 = \deg f_0 = 0$. Bei der Berechnung des Grades haben wir noch benutzt, dass für $b \in S^1$ die Abbildung $z \mapsto bz$ homotop zur Identität ist. Um das einzusehen betrachtet man einen Weg von b nach 1. $\square$

16.7 Bemerkung. Man kann diesen Beweis auch für reelle Polynome durchführen. Man erhält dann Abbildungen $f_r\colon S^0 \to S^0$ und dass die Abbildung $S^0 \to S^0$, $x \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} x^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Da id_{S_0} nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist (Zwischenwertsatz!), folgt, dass n ungerade ist. Das ist wohl in etwa die komplizierteste Art, zu zeigen, dass ein reelles Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.

Lieferung 17

Der Satz von Seifert und van Kampen

Sind X ein Raum, $U, V \subset X$ und $p \in U \cap V$, so geben uns die verschiedenen Inklusionen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (U \cap V, p) \arrow[r] \arrow[d] & (U, p) \arrow[d] \\ (V, p) \arrow[r] & (X, p). \end{tikzcd}$$

Daraus resultiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, p) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, p) \arrow[d] \\ \pi_1(V, p) \arrow[r] & \pi_1(X, p). \end{tikzcd}$$

Wir werden sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen, darunter $U \cup V = X$, dieses Diagramm eine gewisse Eigenschaft hat, die unter anderem dazu führt, dass es bis auf Isomorphie (wir werden das noch genauer formulieren) bereits von dem Teildiagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, p) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, p) \\ \pi_1(V, p) & \end{tikzcd}$$

bestimmt wird. Wenn wir diese drei Fundamentalgruppen und die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen zwischen ihnen kennen, können wir also $\pi_1(X)$ ‚ausrechnen'. Die Eigenschaft, die hierzu führt, werden wir nun kennenlernen.

Push-Out-Diagramme

17.1 Definition. Es sei

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \\ K \arrow[r, "j"] & L \end{tikzcd}$$

ein Diagramm von Gruppen und Homomorphismen. Dieses Diagramm heißt ein *Push-Out-Diagramm*, wenn es kommutiert und für jede Gruppe L' und alle Homomorphismen $i'\colon H \to L'$, $j'\colon K \to L'$, so dass $i' \circ g = j' \circ h$, genau ein Homomorphismus $k\colon L \to L'$ existiert, so dass $k \circ i = i'$ und $k \circ j = j'$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i'"] & \\
K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j'"'] & L \arrow[dr, dotted, "k", "!"'] & \\
& & L'
\end{tikzcd}$$

Ist das Diagramm ein Push-Out-Diagramm, so nennen wir L, beziehungsweise genauer (L, i, j) das *Push-Out* des aus g und h bestehenden Teildiagramms.

17.2 Proposition (Eindeutigkeit des Push-Outs). *Sind*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \\
K \arrow[r, "j"] & L
\end{tikzcd} \quad \textit{und} \quad \begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i'"] \\
K \arrow[r, "j'"] & L'
\end{tikzcd}$$

Push-Out-Diagramme, so existiert ein Isomorphismus $k\colon L \to L'$, so dass

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i'"] & \\
K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j'"'] & L \arrow[dr, "k", "\cong"'] & \\
& & L'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die Existenz eines Homomorphismus k, so dass das Diagramm kommutiert folgt daraus, dass L ein Push-Out von g, h ist. Ebenso folgt daraus, dass L' ein Push-Out ist, die Existenz eines Homorphismus $k'\colon L' \to L$, so dass das Diagramm mit k' an Stelle von k kommutiert. Es ist nun nur noch zu zeigen, dass k und k' invers zu einander sind. Dazu bemerken wir, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\
K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j"'] & L \arrow[dr, "k' \circ k"] & \\
& & L
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da das Diagramm auch mit id_L an Stelle von $k' \circ k$ kommutiert, folgt aus der Tatsache, dass L ein Push-Out ist, es also nur einen Homomorphismus an dieser Stelle gibt, der das Diagramm kommutativ macht, dass $k' \circ k = \mathrm{id}_L$. Ebenso folgt aus der Tatsache, dass L' ein Push-Out ist, dass $k \circ k' = \mathrm{id}_{L'}$. Damit ist k ein Isomorphismus. □

An dieser Stelle wäre es schön zu wissen, ob Push-Outs (für Gruppen, wie hier definiert) immer existieren—sie tun es—und wie sie konstruiert werden. Da Gruppen keine ganz einfachen Objekte sind, ist dies leider technisch nicht ganz unaufwändig, so dass wir hier darauf, verzichten, da wir diese Tatsache nicht unbedingt brauchen. Es bleibt zu hoffen, dass der Beweis des folgenden Satzes und die nachfolgenden Spezialfälle ein ausreichendes Gefühl für die Struktur von Push-Outs vermitteln.

Der Satz von Seifert und van Kampen

17.3 Satz (Seifert und van Kampen). *Sei X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $x_0 \in U \cap V$. Ist $X = U_0 \cup U_1$ und ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d, "j^1_\#"] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "i^0_\#"] \\
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "i^1_\#"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

ein Push-Out Diagramm. Hierbei seien i^0, i^1, j^0, j^1 die offensichtlichen Inklusionen zwischen den verschiedenen Räumen.

Beweis des Satzes

Die Kommutativtät des Diagramms ist klar. Für den Beweis, dass es ein Push-Out-Diagramm ist, betrachten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d, "j^1_\#"] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "i^0_\#"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_0"] & \\
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "i^1_\#"] \arrow[drr, bend right, "\phi_1"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dotted, "\psi", "!"'] & \\
& & G,
\end{tikzcd}$$

wobei G eine beliebige Gruppe ist und ϕ_0, ϕ_1 beliebige Homomorphismen sind, so dass das Diagramm ohne ψ kommutiert. Wir haben dann zu zeigen, dass es genau einen Homomorphismus ψ gibt, so dass das gesamte Diagramm kommutiert. Dazu gehen wir nach einem beliebten Schema vor: Wir zeigen zunächst, dass der Homomorphismus, wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist. Dabei werden wir sehen, wie der Homomorphismus aussehen muss und werden dies zu seiner Definition nutzen. Der nächste Schritt wird dann darin bestehen, zu zeigen, dass er dadurch wohldefiniert ist.

17.4 Beweisschritt. *Die Bilder von $i^0_\#$ und $i^1_\#$ erzeugen zusammen $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Sei $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch den geschlossenen Weg w. Da $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von X ist, liefert uns das Lebesgue-Lemma ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle k mit $0 \le k < N$ ein r_k mit $w\left[[k/N, (k+1)/N]\right] \subset U_{r_k}$ existiert. Es ist bereits $w(0) = w(1) = x_0$, und wir zeigen nun, dass wir es immer so einrichten können, dass $w(k/N) = x_0$ für alle k mit $0 \le k \le N$. Dazu wählen wir zu jedem k mit $0 < k < N$ einen Weg v_k von $w(k/N)$ nach x_0. Da $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend ist, können wir es so einrichten, dass v_k in $U_{r_{k-1}} \cap U_{r_k}$ verläuft. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir außerdem $v_0 = v_N = c_{x_0}$. Nun ersetzen wir w durch einen Weg w', indem wir für $0 \le k < N$ am Anfang des Stücks $w|_{[k/N,(k+1)/N]}$ den Weg v_k^- und am Ende den Weg v_{k+1} einsetzen. Wir machen das an dieser Stelle exakt und werden uns später mit solchen verbalen Beschreibungen begnügen:

$$
\begin{aligned}
w'\colon I &\to X \\
s &\mapsto \begin{cases} v_k^-\left(3N\left(s - \frac{k}{N}\right)\right), & \frac{k}{N} \le s \le \frac{3k+1}{3N}, \\ w\left(\frac{k}{N} + 3\left(s - \frac{3k+1}{3N}\right)\right), & \frac{3k+1}{3N} \le s \le \frac{3k+2}{3N}, \\ v_{k+1}\left(3N\left(s - \frac{3k+2}{3N}\right)\right), & \frac{3k+2}{3N} \le s \le \frac{k+1}{N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Da wir an den Enden konstante Wege und an den Stellen k/N für $0 < k < N$ die Wege $v_k * v_k^-$, die relativ zu $\{0, 1\}$ homotop zu konstanten Wegen sind, eingefügt haben, ist $[w'] = [w] = \gamma$. Aufgrund der Wahl der v_k ist auch $w'\left[[k/N, (k+1)/N]\right] \subset U_{r_k}$. Da nun $w'(k/N) = x_0$ für alle k, repräsentiert $w|_{[k/N,(k+1)/N]}$ ein $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k})$, $0 \le k < N$. Damit ist $\gamma = i^{r_0}_\#(\alpha_0) i^{r_1}_\#(\alpha_1) \cdots i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})$. □

Damit ist schon die Eindeutigkeit von ψ gezeigt: Ist nämlich $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ beliebig und ist mit den gerade benutzten Bezeichnungen $\gamma = i^{r_0}_\#(\alpha_0) \cdots i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})$, so muss für ein ψ, das das Diagramm kommutativ macht,

$$
\begin{aligned}
\psi(\gamma) &= \psi(i^{r_0}_\#(\alpha_0) \cdots i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})) \\
&= \psi(i^{r_0}_\#(\alpha_0)) \cdots \psi(i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})) \\
&= \phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{N-1}}(\alpha_{N-1})
\end{aligned}
$$

gelten.

17.5 Beweisschritt. *Durch*

$$\begin{aligned} \psi\colon \pi_1(X,x_0) &\to G \\ i_\#^{r_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) &\mapsto \phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

wird ein Homomorphismus definiert, der das Diagramm kommutativ macht.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass sich jedes Element aus $\pi_1(X,x_0)$ auf die angegebene Art darstellen lässt. Auch ist klar, dass ψ so, wenn es denn wohldefiniert ist, zu einem Homomorphismus wird. Es ist also nur noch zu zeigen, dass verschiedene Darstellungen des selben Elementes den gleichen Wert liefern, dass also aus $i_\#^{r_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = i_\#^{r'_0}(\alpha'_0)\cdots i_\#^{r'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1})$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = \phi_{r'_0}(\alpha'_0)\cdots\phi_{r'_{n-1}}(\alpha'_{n-1})$. Da alle beteiligten Abbildungen Homomorphismen sind, genügt es zu zeigen, dass aus $i_\#^{r_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = 1$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = 1$.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ und für $0 \le k < n$ sei $r_k \in \{0,1\}$ und $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k}, x_0)$, so dass $\phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = 1$. Es sei $H\colon I\times I \to X$ eine Homotopie, die diese Gleicheit zeigt, und zwar sei $H(0,\bullet) = H(1,\bullet) = H(\bullet,1) = c_{x_0}$ und $H(\bullet,1)|_{[k/n,(k+1)/n]}$ repräsentiere α_k. Nun wenden wir wieder das Lebesgue-Lemma an, um ein $m \in \mathbb{N}$ zu erhalten, so dass mit $N := mn$ für alle k,l mit $0 \le k,l < N$ ein $s_{k,l}$ mit $w\,[[k/N,(k+1)/N]\times[l/N,(l+1)/N]] \subset U_{s_{k,l}}$ existiert. Wir können diese $s_{k,l}$ so wählen, dass $s_{k,0} = r_{\lfloor k/m\rfloor}$ für alle k.

Zunächst zeigen wir, dass wir es so einrichten können, dass H auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt, dass also $H(k/N,l/N) = x_0$ für alle $0 \le k,l \le N$. Dazu definieren wir für alle $0 < k < N$, $0 \le l < N$ einen Weg $v_{k,l}\colon I \to U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ durch $v_{k,l}(t) := H(k/N,(l+t)/N)$ und einen Weg $w_{k,l}$ von $H(k/N,l/N)$ nach x_0, der in U_0 verläuft, falls $H(k/N,l/N) \in U_0$, in U_1, falls $H(k/N,l/N) \in U_1$ und konstant ist, falls $H(k/N,l/N) = x_0$. Außerdem setzen wir $w_{k,N} = c_{x_0}$ für $0 < k < N$. Dann wählen wir für alle $0 < k < N$, $0 \le l < N$ eine Abbildung $F_{k,l}\colon I\times I \to U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ mit $F_{k,l}(0,\bullet) = F_{k,l}(1,\bullet) = v_{k,l}$ und $F_{k,l}(\bullet,0) = w_{k,l} * w_{k,l}^-$, $F_{k,l}(\bullet,1) = w_{k+1,l} * w_{k+1,l}^-$. Dies ist möglich, da die auf dem Rand vorgegebene Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung ist (siehe Aufgabe **??**). Nun können wir H, indem wir an der Stelle $\{k/N\}\times[l/N,(l+1)/N]$ die Abbildung $F_{k,l}$ einpassen, so abändern, dass die oben bemerkten Eigenschaften von H erhalten bleiben und H zusätzlich auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt. Wir werden diese geänderte Abbildung weiterhin H nennen.

Die alten w und v vergessend definieren wir nun Wege

$$\begin{aligned} w_{k,l}\colon I &\to X, &\quad 0 \le k < N, 0 \le k \le N, \\ t &\mapsto H((k+t)/N, l/N), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{k,l}\colon I &\to X, & 0 \leq k \leq N, 0 \leq k < N,\\ t &\mapsto H(k/N, (l+t)/N). \end{aligned}$$

Für $0 \leq k, l < N$ gibt uns das Klassen $\beta_{k,l}, \gamma_{k,l}, \delta_{k,l}, \epsilon_{k,l} \in \pi_1(U_{s_{k,l}})$ durch

$$\beta_{k,l} := [w_{k,l}], \qquad \gamma_{k,l} := [w_{k,l+1}], \qquad \delta_{k,l} := [v_{k,l}], \qquad \epsilon_{k,l} := [v_{k+1,l}].$$

Nun ist $\alpha_k = \beta_{mk,0}\beta_{mk+1,0}\cdots\beta_{m(k+1)-1,0}$ für $0 \leq k < n$ und $\gamma_{k,N-1} = 1$ für alle $0 \leq k < N$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\phi_{s_{0,0}}(\beta_{0,0})\phi_{s_{1,0}}(\beta_{1,0})\cdots\phi_{s_{N-1,0}}(\beta_{N-1,0}) =\\ &\qquad = \phi_{s_{0,N-1}}(\gamma_{0,N-1})\phi_{s_{1,N-1}}(\gamma_{1,N-1})\cdots\phi_{s_{N-1,N-1}}(\gamma_{N-1,N-1}). \end{aligned}$$

Wir tun dies in zwei Schritten.

Für alle $0 \leq k < N$ und $0 \leq l < N-1$ ist $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$: Nach Definition ist $\gamma_{k,l} = [w_{k,l+1}]$, $\beta_{k,l+1} = [w_{k,l+1}]$. Ist $s_{k,l} = s_{k,l+1}$, so ist $\gamma_{k,l} = \beta_{k,l+1}$ und alles klar. Ist $s_{k,l} \neq s_{k,l+1}$, so leben $\gamma_{k,l}$ und $\beta_{k,l+1}$ in verschiedenen Gruppen. In diesem Fall verläuft aber $w_{k,l+1}$ ganz in $U_0 \cap U_1$, so dass wir ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ durch $\rho := [w_{k,l+1}]$ definieren können. Es ist dann $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = (\phi_{s_{k,l}} \circ j_\#^{s_{k,l}})(\rho) = (\phi_{s_{k,l+1}} \circ j_\#^{s_{k,l+1}})(\rho) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$.

Für alle $0 \leq l < N$ ist

$$\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) = \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}):$$

Zunächst zeigt $H|_{[k/N,(k+1)/N]\times[l/N,(l+1)/N]}$ für $0 \leq k < N$, dass $\beta_{k,l} = \delta_{k,l}\gamma_{k,l}\epsilon_{k,l}^{-1}$. Es ist also

$$\begin{aligned} &\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) =\\ &\qquad = \phi_{s_{0,l}}(\delta_{0,l}\gamma_{0,l}\epsilon_{0,l}^{-1})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l}\gamma_{N-1,l}\epsilon_{N-1,l}^{-1}) =\\ &\qquad\qquad = \phi_{s_{0,l}}(1)\phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l})\phi_{s_{0,l}}(\epsilon_{0,l})^{-1}\cdot\\ &\qquad\qquad\qquad \cdot\phi_{s_{1,l}}(\delta_{1,l})\phi_{s_{1,l}}(\gamma_{1,l})\cdots\\ &\qquad\qquad \cdots\phi_{s_{N-2,l}}(\gamma_{N-2,l})\phi_{s_{N-2,l}}(\epsilon_{N-2,l})^{-1}\cdot\\ &\qquad\qquad\qquad \cdot\phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l})\phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l})\phi_{s_{N-1,l}}(1). \end{aligned}$$

Es genügt also, für $0 \leq k < N-1$ zu zeigen, dass $\phi_{s_{k,l}}(\epsilon_{k,l}) = \phi_{s_{k+1,l}}(\delta_{k+1,l})$. Nun werden $\epsilon_{k,l}$ und $\delta_{k+1,l}$ beide von $v_{k+1,l}$ repräsentiert, so dass sie für $s_{k,l} = s_{k+1,l}$ gleich sind und es ansonsten ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ mit $\epsilon_{k,l} = j_\#^{s_{k,l}}(\rho)$, $\delta_{k+1,l} = j_\#^{s_{k+1,l}}(\rho)$ gibt, so dass dies wieder aus der Kommutativität des Diagramms folgt. □

Damit ist auch der Satz bewiesen. □

Spezialfälle

Wir notieren Spezialfälle, in denen sich das Push-Out leichter beschreiben lässt. Zunächst holen wir kurz eine Definition nach.

17.6 Definition. Ein Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er nicht-leer und wegzusammenhängend ist und für ein $x_0 \in X$ (und damit für alle) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist.

17.7 Korollar. *Seien X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene, einfach zusammenhängende Teilmengen, so dass $X = U_0 \cup U_1$ ist und $U_0 \cap U_1$ nicht-leer und wegzusammenhängend ist. Dann ist X einfach zusammenhängend.*

Beweis. Zunächst ist X nicht-leer und wegzusammenhängend. Sei nun $x_0 \in U_0 \cap U_1$ und die Notation die aus dem Satz. Dass $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist, kann man nun einerseits aus dem Beweis des Satzes entnehmen, denn dort wurde gezeigt, dass diese Gruppe von $\operatorname{Im} i^0_\#$ und $\operatorname{Im} i^1_\#$ erzeugt wird, so dass sie trivial ist, wenn $\pi_1(U_0, x_0)$ und $\pi_1(U_1, x_0)$ trivial sind.

Wir können es aber auch direkt aus dem Satz folgern, denn man überzeugt sich sofort, dass, wenn wir 0 für die triviale Gruppe schreiben,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein Push-Out-Diagramm ist. Aus der Eindeutigkeit des Push-Outs folgt dann $\pi_1(X, x_0) \cong 0$. □

17.8 Korollar. *Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in S^n$ der Nordpol und $y \in S^n$ der Südpol. Wir setzen $U_0 := S^n \setminus \{x\}$, $U_1 := S^n \setminus \{y\}$. Es sind $U_0, U_1 \approx \mathbb{R}^n$, also zusammenziehbar und damit einfach zusammenhängend. Außerdem ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend (hier benutzen wir $n > 1$). Das vorherige Korollar liefert nun die Behauptung. □

17.9 Korollar. *Seien X, U_0, U_1 und die sonstige Notation wie im Satz und U_1 einfach zusammenhängend. Wir betrachten*

$$\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \xrightarrow{j^0_\#} \pi_1(U_0, x_0) \xrightarrow{i^0_\#} \pi_1(X, x_0).$$

Es ist $i^0_\#$ surjektiv, und ist N der kleinste Normalteiler, der $\operatorname{Im} j^0_\#$ enthält, so ist $\operatorname{Ker} i^0_\# = N$. Insbesondere ist also $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_0, x_0)/N$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \pi_1(U_0, x_0)/N \arrow[dr, dotted, "\psi", "!"'] & \\
& & G,
\end{tikzcd}$$

wobei q die kanonische Quotientenabbildung und G eine beliebige Gruppe sei. Das Quadrat kommutiert, da $\operatorname{Im} j^0_\# \subset N = \operatorname{Ker} q$, also $q \circ j^0_\# = 0$. (Man beachte, dass der triviale Homomorphismus, den wir 0 schreiben, tatsächlich konstant 1 ist.) Das Diagramm ohne ψ kommutiert nun genau dann, wenn $\operatorname{Im} j^0_\# \subset \operatorname{Ker} \phi$, also, da $\operatorname{Ker} \phi$ ein Normalteiler ist, genau dann, wenn $N \subset \operatorname{Ker} \phi$. Nun ist aber eine Eigenschaft der Faktorgruppe, dass dann ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\psi\colon \pi_1(U_0, x_0)/N \to G$ mit $\psi \circ q = \phi$ existiert. Da die Bedingung, dass das untere Dreieck kommutiere, leer ist, ist das Diagramm ein Push-Out-Diagramm. Aus dem Satz und der Eindeutigkeit von Push-Outs folgt nun die Existenz eines Isomorphismus $h\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(U_0, x_0)/N$, so dass $h \circ i^0_\# = q$. Die Behauptung folgt danach sofort. $\square$

Lieferung 18

Der Effekt des Anheftens von Zellen auf die Fundamentalgruppe

Das Anheften einer Zelle

Sei X ein Raum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f\colon S^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung. Dann können wir den Raum

$$Y := X \cup_f D^n$$

betrachten. Wir sagen in dieser Situation, Y gehe aus X durch Ankleben einer n-Zelle hervor. Wir wollen nun mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen untersuchen, wie sich die Fundamentalgruppe von Y aus der von X ergibt.

Mit der Notation aus 6.15 haben wir eine Einbettung $j\colon X \to Y$ und die charakteristische Abbildung $\chi\colon D^n \to Y$. Wir bemerken:

18.1 Proposition. *$\chi|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ ist eine offene Einbettung. Ist $A \subset D^n \setminus S^{n-1}$ und A abgeschlossen in D^n, so ist $\chi[A]$ abgeschlossen.*

Beweis. Y trägt die Finaltopologie bezüglich j und χ. Nach Konstruktion von Y ist außerdem $\chi|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ injektiv. Ist nun $O \subset D^n \setminus S^{n-1}$, so ist $j^{-1}[\chi[O]] = \emptyset$ und $\chi^{-1}[\chi[O]] = O$. Ist also O offen, so auch $\chi[O]$. Das zeigt, dass $\chi|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ eine offene Einbettung ist.

Ist $A \subset D^n \setminus S^{n-1}$, so ist $j^{-1}[Y \setminus \chi[A]] = X$ und $\chi^{-1}[Y \setminus \chi[A]] = D^n \setminus A$. Ist also A in D^n abgeschlossen, so ist auch $\chi[A]$ abgeschlossen. $\square$

Um den Satz von Seifert und van Kampen anwenden zu können, setzen wir nun

$$U_0 := Y \setminus \{\chi(0)\},$$
$$U_1 := \chi[D^n \setminus S^{n-1}].$$

Wir können U_0 mit $X \cup_f (D^n \setminus \{0\})$ identifizieren. Wenn wir annehmen, dass X wegzusammenhängend ist, erfüllen U_0 und U_1 für $n \geq 2$ die Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen. Das einzige, das hierbei vielleicht nicht sofort ersichtlich ist, ist, dass U_0 wegzusammenhängend ist. Das folgt aber daraus, dass $U_0 \simeq X$:

18.2 Proposition. *Sei $n \geq 1$ und $r\colon U_0 \to X$ die Abbildung, die durch die Kommutativität von*

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\mathit{Inkl.}"] \arrow[d, "f"] & D^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \arrow[ddr, bend left, "x \mapsto f(x/\|x\|)"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}"'] & U_0 \arrow[dr, "r"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

gegeben ist (siehe Proposition 6.17). Dann ist $r \circ j = \mathrm{id}_X$ und $j \circ r \simeq \mathrm{id}_{U_0}$, wobei die Homotopie $H\colon U_0 \times I \to U_0$ durch $H(\bullet, t) = h_t$ und die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\mathit{Inkl.}"] \arrow[d, "f"] & D^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \arrow[dr, "x \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & U_0 \arrow[dr, "h_t"] & D^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \\
 & X \arrow[r, "j"'] & U_0
\end{tikzcd}$$

gegeben ist.

Beweis. Das einzige Problem ist die Stetigkeit von H. Es bezeichne $q\colon X + (D^n \setminus \{0\}) \to U_0$ die Quotientenabbildung. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times I + (D^n \setminus \{0\}) \times I) \arrow[d, "\cong"] \arrow[ddr, bend left, "\tilde{H}"] & \\
(X \times (D^n \setminus \{0\})) \times I \arrow[d, "q \times \mathrm{id}_I"] & \\
U_0 \times I \arrow[r, "H"] & U_0.
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung links oben sei die offensichtliche; dass sie ein Homöomorphismus ist, rechne man zur Übung nach. $\tilde{H}$ sei durch die Kommutativität des Diagramms gegeben und ist stetig, denn die Restriktion auf $X \times I$ ist die Projektion auf X gefolgt von j, und die Restriktion auf $(D^n \setminus \{0\}) \times I$ ist die Komposition

$$(D^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{(x,t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x} (D^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{\chi} U_0.$$

Die Stetigkeit von H folgt also, wenn $q \times \mathrm{id}_I$ eine Quotientenabbildung ist, und das folgende Lemma sagt gerade dies. $\square$

18.3 Lemma. *Sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung und Z ein lokal kompakter Raum. Dann ist die Abbildung $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ eine Quotientenabbildung.*

Beweis. $q \times \mathrm{id}_Z$ ist offenbar stetig und surjektiv. Sei $U \subset Y \times Z$ mit $\tilde{U} := (q \times \mathrm{id}_Z)^{-1}[U]$ offen. Es ist zu zeigen, dass U offen ist.

Sei $(y, z) \in U$. Da q surjektiv ist, existiert $x \in X$ mit $q(x) = y$, also $(x, z) \in \tilde{U}$. Da $\tilde{U}$ offen und Z lokal kompakt ist, existiert $K \in \mathcal{U}(z)$, K kompakt, mit $\{x\} \times K \subset \tilde{U}$, also auch $\{y\} \times K \subset U$. Wir setzen nun $\tilde{V} := \left\{x' \in X\colon \{x'\} \times K \subset \tilde{U}\right\} = \{x' \in X\colon \{q(x')\} \times K \subset U\}$. Sei $x' \in \tilde{V}$. Dann existiert für beliebiges $k \in K$ eine Umgebung V_k von k, so dass $W_k := \left\{x'' \in X\colon \{x''\} \times V_k \subset \tilde{U}\right\}$ Umgebung von x' ist. Aufgrund der Kompaktheit von K existieren nun $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, \ldots, k_n \in K$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n W_{k_i}$ Umgebung von x' und $(\bigcap_{i=1}^n W_{k_i}) \times K \subset \tilde{U}$, also $\bigcap_{i=1}^n W_{k_i} \subset \tilde{V}$. Das zeigt, dass $\tilde{V}$ offen ist. Nun ist mit $V := \{y' \in Y\colon \{y'\} \times K \subset U\}$ gerade $\tilde{V} = q^{-1}[V]$, also ist V offen und $V \times K \subset U$ Umgebung von (y, z). Damit ist U offen. □

Der Effekt auf die Fundamentalgruppe

Da $U_1 \approx D^n \setminus S^{n-1}$ zusammenziehbar, also insbesondere einfach zusammenhängend, ist, folgt aus Korollar 17.9 für $n \geq 2$, dass mit beliebigem Basispunkt in $U_0 \cap U_1$ in der Komposition von von Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(U_0 \cap U_1) \to \pi_1(U_0) \to \pi_1(Y)$$

der zweite Homomorphismus surjektiv und sein Kern der kleinste das Bild des ersten enthaltende Normalteiler ist. Wir können auch die ersten beiden Gruppen identifizieren: Es ist $U_0 \cap U_1 \approx D^n \setminus (S^{n-1} \cup \{0\}) \simeq S^{n-1}$ und wie bereits gezeigt $U_0 \simeq X$, also $\pi_1(U_0 \cap U_1) \cong \pi_1(S^{n-1})$ und $\pi_1(U_0) \cong \pi_1(X)$. Um daraus wirklich $\pi_1(Y)$ bestimmen zu können, müssen wir aber auch die Homomorphismen besser beschreiben.

Dazu legen wir zunächst Basispunkte fest. Wir schreiben $1 = (1, 0, \ldots, 0)$ für den Basispunkt von S^{n-1} und setzen $x_0 := f(1) \in X$, $y_0 := j(x_0) \in Y$. Außerdem wählen wir ein $y_0' \in U_0 \cap U_1$ mit $r(y_0) = x_0$, wobei wir hier die Bezeichnungen aus Proposition 18.2 beibehalten. Außerdem definieren wir eine Abbildung $r'\colon U_0 \cap U_1$ durch Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
D^n \setminus (S^{n-1} \cup \{0\}) \arrow[r, "x \mapsto \chi(x)", "\approx"'] \arrow[d, "x \mapsto \frac{x}{\|x\|}"', "\simeq"] & U_0 \cap U_1 \arrow[dl, "r'"] \\
S^{n-1}. &
\end{tikzcd}$$

r' ist eine Homotopieäquivalenz und $r|_{U_0 \cap U_1} = f \circ r'$. Außerdem haben wir bereits festgestellt, dass H eine Homotopieäquivalenz zwischen der Komposition $U_0 \xrightarrow{r} X \xrightarrow{j} Y$ und der Inklusion $U_0 \to Y$ ist. Wie in Proposition 14.13 sei p der Weg, den y_0' während dieser Homotopie durchläuft; das ist der ‚direkte' Weg von y_0 nach y_0'. All dies liefert uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^{n-1}, 1) \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "j_\#"] & \pi_1(Y, y_0) \\
\pi_1(U_0 \cap U_1, y_0') \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "r'_\#"] & \pi_1(U_0, y_0') \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "r_\#"] & \pi_1(Y, y_0'), \arrow[u, "\cong"', "h_p"]
\end{tikzcd}$$

wobei alle nicht beschrifteten Pfeile von Inklusionen induzierte Abbildungen bezeichnen. Aus dem bereits oben über die untere Reihe gezeigten, der Kommutativität des Diagramms und der Tatsache, dass die vertikalen Pfeile Isomorphismen bezeichnen, erhalten wir nun:

18.4 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 2$, $f\colon (S^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^n$ und $j\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von $f_\#$ enthält.* □

Wir benutzen nun noch, dass wir $\pi_1(S^{n-1})$ kennen.

18.5 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 3$, $f\colon (S^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^n$ und $j\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Isomorphismus.* □

18.6 Proposition. *Sei X ein Raum, $f\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^2$ und $j\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Ist $e \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $f_\#(e)$ enthält.* □

18.7 Bemerkung. Ist $h\colon I/\{0,1\} \to S^1$ ein Homöomorphismus mit $h([\{0,1\}]) = 1$ und $q\colon I \to I/\{0,1\}$ die Quotientenabbildung, so ist $e := [h \circ q]$ ein Erzeuger von $\pi_1(S^1, 1)$. Ist nun (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha = [w]$, so definiert, da $w(0) = w(1)$, $f \circ h \circ q = w$ eine Abbildung $f\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$, und es ist $f_\#(e) = \alpha$. Durch Ankleben einer 2-Zelle an X mit Hilfe von f (also entlang w) kann man also das Element α gezielt ‚abschießen'.

Projektive Räume

In Aufgabe **??** haben wir gesehen, dass man die reell-projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ durch sukzessives Ankleben von Zellen aus dem einpunktigen Raum erhalten kann. Wir wollen nun sehen, wie man daraus mit Hilfe des eben gezeigten die Fundamentalgruppen dieser Räume bestimmen kann.

Sei $p_n\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Projektion, die sich aus der Definition von $\mathbb{R}P^n$ als Quotient von S^n, bei dem gegenüberliegende Punkte identifiziert werden, ergibt. In Aufgabe **??** wurde gezeigt, dass $\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{p_{n-1}} D^n$. Wir bemerken an dieser Stelle, dass man diesen Homöomorphismus so erhält, dass

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[rr, "\text{Inklusion}"] \arrow[d, "p_{n-1}"] & & S^n \arrow[d, "p_n"] \\ \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, "j^{n-1}"] & \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{p_{n-1}} D^n \arrow[r, "\approx"] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei j^{n-1} die kanonische Inklusion bezeichne. Wir nehmen an, dass die Homöomorphismen so gewählt sind und bestimmen Basispunkte $x_n \in \mathbb{R}P^n$ durch $x_{n+1} = j^n(x_n)$.

Es ist $\mathbb{R}P^0$ ein einpunktiger Raum, also $\pi_1(\mathbb{R}P^0, x_0) \cong 0$. Es ist $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$, also $\pi_1(\mathbb{R}P^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}P^1$ und S^1 kann man zum Beispiel zu beschreiben: Die stetige Abbildung $\operatorname{sqr}\colon S^1 \to S^1$, $\operatorname{sqr}(z) := z^2$, ist surjektiv, also eine Quotientenabbildung, da S^1 kompakt ist. Da nun $\operatorname{sqr}(x) = \operatorname{sqr}(y) \iff (x = y) \vee (x = -y)$ gibt es einen Homöomorphismus $h\colon \mathbb{R}P^1 \to S^1$, so dass $h \circ p_n = \operatorname{sqr}$. Da wir uns in Proposition 16.5 bereits überlegt haben, dass die Abbildung sqr vom Grad 2 ist, kann man also Isomorphismen so wählen, dass

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, 1) \arrow[r, "(p_1)_\#"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathbb{R}P^1, x_1) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus Proposition 18.6 angewandt auf $\mathbb{R}P^1 \cup_{p_1} D^2$ ergibt sich also $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_2$. Mit Proposition 18.5 folgt nun induktiv $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_n) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 2$. Zusammenfassend und etwas genauer:

18.8 Proposition. *Es ist*

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2. \end{cases}$$

Die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \to \pi_1(\mathbb{R}P^{n+1})$ ist ein Epimorphismus für $n = 1$ und ein Isomorphismus für $n \geq 2$. □

Lieferung 19

Eine kuriose Eigenschaft von Drehungen im dreidimensionalen Raum

Wir werden ein Gedankenexperiment (das man auch problemlos real durchführen kann) betrachten, das einen vielleicht unerwarteten Effekt zeigt. Wir werden diesen mit der Existenz eines Elements der Ordnung 2 in $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$ in Verbindung bringen und die Gelegenheit nutzen, um etwas über die Topologie von Matrixgruppen zu lernen.

Das Experiment

Wir stellen uns vor, ein Gegenstand befinde sich in einem Raum und sei mit einem dicken Gummiseil an der Decke des Raumes befestigt. Drehen wir den Gegenstand einmal um sich selbst herum, so wird das Gummiseil in sich verdreht sein. Halten wir nun den Gegenstand (und die Zimmerdecke) fest, so wird es nicht möglich sein, das Gummiseil zu entdrehen, auch nicht, wenn wir es dabei um den Gegenstand herumführen dürfen. Diese wenig überraschende Tatsache werden wir beweisen. Dreht man nun den Gegenstand ein weiteres mal in die selbe Richtung um die selbe Achse, so gibt es danach eine Möglichkeit unter Festhalten des Gegenstandes das Gummiseil (es können auch viele Seile sein) zu entdrehen. Warum und wie das möglich ist, werden wir beschreiben.

Modellierung

Wir nehmen an, dass wir auf dem Seil längs drei Linien angebracht haben. Für jede Position des Seils erhalten wir nun durch Betrachten der Position der Linien drei Wege $l_1, l_2, l_3 \colon I \to \mathbb{R}^3$. (Wir haben den Raum mit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ identifiziert.) Dabei seien $l_1(0), l_2(0), l_3(0)$ die Positionen der Linien an dem an der Decke befestigten Seilende. Diese sind also unabhängig von der Seilposition. Wir nehmen an, dass die angebrachten Linien und die

Beschaffenheit des Seils so sind, dass für alle Seilpositionen und alle $s \in I$ die Vektoren $l_2(s) - l_1(s)$ und $l_3(s) - l_1(s)$ linear unabhängig sind. Es gibt dann immer einen eindeutig bestimmten Vektor $v(s)$ der Länge 1, der Senkrecht auf $l_2(s) - l_1(s)$ und $l_3(s) - l_1(s)$ steht, so dass $(l_2(s) - l_1(s), l_3(s) - l_1(s), v(s))$ positiv orientiert ist. Dies wiederum definiert eine Matrix $G(s) \in \mathrm{GL}(3)$ mit $(l_2(s) - l_1(s), l_3(s) - l_1(s), v(s)) = G(s) \cdot (l_2(0) - l_1(0), l_3(0) - l_1(0), v(0))$. Eine Bewegung des Seils, wobei die Zeit durch I parametrisiert sei, definiert nun eine stetige Funktion (auf die Topologie von GL(3) werden wir noch zu sprechen kommen) $H \colon I \times I \to \mathrm{GL}(3)$ durch $H(s,t) = G_{\text{Seilposition zur Zeit } t}(s)$.

Im Inneren des Gegenstandes, an dem das Seil befestigt ist, denken wir uns einen Punkt ausgezeichnet, den wir bei allen Bewegungen des Gegenstandes festhalten. Dann definiert eine Bewegung des Gegenstandes einen Weg $w \colon I \to \mathrm{SO}(3)$ durch

$$\text{Stellung des Gegenstandes zum Zeitpunkt } t = w(t) \cdot \text{Standardstellung}.$$

Die Standardstellung sei die zum Beginn unseres Experiments.

19.1 Proposition. *Führen wir am Anfang des Experiments eine Bewegung des Gegenstandes durch, die durch* $w \colon I \to \mathrm{SO}(3)$ *beschrieben wird, und beschreibt* $G_{EP} \colon I \to \mathrm{GL}(3)$ *die Position des Seil nach der Bewegung, so ist* $w \simeq G_{EP}$ rel $\{0,1\}$ *in* GL(3).

Beweis. Während der Bewegung des Gegenstandes bewegt sich auch das Seil, dessen Bewegung sei wie oben durch $H \colon I \times I \to \mathrm{GL}(3)$ beschrieben. Es ist dann $H(0, \bullet) = c_1$, wobei 1 die Einheitsmatrix bezeichne, da das eine Seilende an der Decke befestigt ist und nicht bewegt wird. Es ist $H(1, \bullet) = w$, da das andere Seilende an dem Gegenstand befestigt ist und mit diesem bewegt wird. Außerdem ist $H(\bullet, 0) = c_1$, da dies die Ausgangslage des Seils beschreibt und $H(\bullet, 1) = G_{EP}$. Es folgt $c_1 * w \simeq c_1 * G_{EP}$ rel $\{0,1\}$ und damit $w \simeq G_{EP}$ rel $\{0,1\}$. □

19.2 Korollar. *Führen wir am Anfang des Experiments eine Bewegung des Gegenstandes durch, die durch* $w \colon I \to \mathrm{SO}(3)$ *beschrieben wird, und ist es danach bei festgehaltenem Gegenstand möglich, das Seil in die Ausgangslage zurückzubringen, so ist* $[w] = 1 \in \pi_1(\mathrm{GL}(3), 1)$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $w(1) = 1$ gelten muss, da nur dann das an dem Gegenstand befestigte Ende des Seils in die Ausgangslage zurückgebracht werden kann. Wir fassen nun die Bewegung des Seils, bei der sich der Gegenstand wie durch w beschrieben bewegt und die anschließende Bewegung des Seils, bei der sich der Gegenstand nicht bewegt als eine Bewegung des Seils auf, bei der sich der Gegenstand wie durch $w * c_1$ beschrieben bewegt. Die Proposition darauf angewandt liefert $[w] = [w * c_1] = [c_1] = 1$. □

Um weitere Fortschritte zu erzielen, müssen wir also $\pi(\mathrm{GL}(3), 1)$ näher untersuchen.

Ein wenig über Matrixgruppen

Es sei $\mathrm{Mat}(n)$ die Gruppe der (reellen) $n \times n$-Matrizen. Via der Einträge identifizieren wir $\mathrm{Mat}(n)$ mit R^{n^2} und geben $\mathrm{Mat}(n)$ dadurch eine Topologie. Wir betrachten weiterhin die Unterräume $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{Mat}(n)$.

Zunächst ein paar einfache Bemerkungen.

19.3 Proposition. $\mathrm{GL}(n)$ *ist in* $\mathrm{Mat}(n)$ *offen.*

Beweis. Die Abbildung $\det\colon \mathrm{Mat}(n) \to \mathbb{R}$ ist stetig, da ein Polynom in den Einträgen, und $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n)\colon \det A \neq 0\}$. □

19.4 Proposition. *Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus* $\pi_1(\mathrm{O}(n), 1) \to \pi_1(\mathrm{GL}(n), 1)$ *ist ein Monomorphismus.*

Beweis. Bezeichnet $i\colon \mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}(n)$ die Inklusion, so liefert das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren eine stetige Abbildung $s\colon \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{O}(n)$ mit $s \circ i = \mathrm{id}$. Es folgt $s_\# \circ i_\# = (s \circ i)_\# = \mathrm{id}_\# = \mathrm{id}$, also ist $i_\#$ ein Monomorphismus. □

19.5 Bemerkung. In der Tat ist auch $i \circ r \simeq \mathrm{id}$, also $i_\#$ ein Isomorphismus.

19.6 Proposition. $\mathrm{SO}(n)$ *enthält die Wegzusammenhangskomponente von* $\mathrm{O}(n)$*, die die Einheitsmatrix enthält.*

Beweis. Es ist $\det\colon \mathrm{O}(n) \to \{-1, 1\}$ stetig und $\det 1 = 1$, also $\det A = 1$ für alle A aus der Wegzusammenhangskomponente, die die 1 enthält. □

19.7 Bemerkung. In der Tat ist $\mathrm{SO}(n)$ wegzusammenhängend also gleich der Wegzusammenhangskomponente von $\mathrm{O}(n)$, die die Einheitsmatrix enthält.

19.8 Korollar. *Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus* $\pi_1(\mathrm{SO}(n), 1) \to \pi_1(\mathrm{O}(n), 1)$ *ist ein Isomorphismus.* □

Wir haben gesehen, dass es, um $\pi_1(\mathrm{GL}(n), 1)$ zu verstehen, genügt, sich $\pi_1(\mathrm{SO}(n), 1)$ anzuschauen. Nun werden wir uns eine genauere Beschreibung des Raumes $\mathrm{SO}(3)$ verschaffen.

Über SO(3)

Mit Mitteln der linearen Algebra erhält man die folgende Klassifizierung von Matrizen aus $\mathrm{SO}(3)$:

19.9 Proposition. *Ist* $M \in \mathrm{SO}(3)$*, so existieren* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *und* $\phi \in [0, \pi]$*, so dass*

$$M = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} A^t.$$

Ist M so durch A und ϕ gegeben und N entsprechend durch B und ψ und haben A und B Spaltendarstellungen $A = (v, v', v'')$, $B = (w, w', w'')$, so gilt:

(i) *Ist $\phi = 0$, so ist $M = N \iff \psi = 0$.*

(ii) *Ist $0 < \phi < \pi$, so ist $M = N \iff (\phi = \psi) \wedge (v = w)$.*

(iii) *Ist $\phi = \pi$, so ist $M = N \iff (\psi = \pi) \wedge ((v = w) \vee (v = -w))$.*

□

Für die Beschreibung von SO(3), auf die wir abzielen, müssen wir uns nur noch um Stetigkeit kümmern.

19.10 Definition und Proposition. *Es gibt eine stetige Abbildung $\Phi\colon S^2 \times [0, \pi] \to \mathrm{SO}(3)$, so dass für alle $v \in S^2$, $\phi \in [0, \pi]$ Vektoren v', v'' existieren, so dass mit $A = (v, v', v'')$ gilt, dass $A \in \mathrm{SO}(3)$ und*

$$\Phi(v, \phi) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} A^t.$$

Beweis. Wegen Proposition 19.9 ist Φ bereits eindeutig definiert, wir müssen nur noch die Stetigkeit nachprüfen. Dies tun wir lokal bei (v, ϕ). Seien $v', v'' \in \mathbb{R}^3$, so dass $(v, v', v'') \in \mathrm{SO}(3)$. Für $u \in \mathbb{R}^3$ setzen wir $A(u) := (u, v', v'')$. Da GL(3) offen in Mat(3) ist, existiert eine Umgebung U von u, so dass $A(u) \in \mathrm{GL}(3)$ für alle $u \in U$. Sei nun $s\colon \mathrm{GL}(3) \to \mathrm{O}(3)$ die Schmidtsche Orthonormalisierungsabbildung. Wählt man U klein genug, so ist $s[A[U]] \subset \mathrm{SO}(3)$ (wieder Stetigkeit der Determinantenfunktion). Es folgt, dass für alle $(u, \psi) \in U \times [0, \pi]$ gilt, dass

$$\Phi(u, \psi) = s(A(u)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} s(A(u))^t.$$

Damit ist Φ in einer Umgebung von (v, ϕ) stetig. □

19.11 Bemerkung. $\Phi(v, \phi)$ ist natürlich gerade eine Drehung um die (gerichtete) Achse v um den Winkel ϕ.

19.12 Proposition. *Identifizieren wir wie in Proposition 6.12 $\mathbb{R}P^3$ mit $D^3/\sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die gegenüberliegende Punkte in S^2 identifiziert, so induziert Φ einen Homöomorphismus*

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\colon \mathbb{R}P^3 &\to \mathrm{SO}(3) \\ [rv] &\mapsto \Phi(v, r\pi), \qquad v \in S^2, r \in I. \end{aligned}$$

Beweis. Ist $q\colon D^3 \to \mathbb{R}P^3$ die Quotientenabbildung, so betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^2 \times [0,\pi] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "(v,\phi)\mapsto v\cdot\frac{\phi}{\pi}"'] & \mathrm{SO}(3) \\
D^3 \arrow[d, "q"'] \arrow[ur, phantom, "\approx"] & \\
\mathbb{R}P^3. \arrow[uur, "\bar{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Existenz einer Abbildung $\bar{\Phi}$, die das Diagramm kommutativ macht, sowie deren Bijektivität folgt aus Proposition 19.9. Aus der Kompaktheit von $S^2 \times [0,\pi]$ und der Tatsache, dass D^3 und SO(3) hausdorffsch sind, folgt, dass sowohl Φ als auch die Komposition der durch die vertikalen Pfeile bezeichneten Abbildungen Quotientenabbildungen sind. Daraus folgt, dass $\bar{\Phi}$ ein Homöomorphismus ist. □

Wir wissen nun also nach Proposition 18.8, dass $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1) \cong \mathbb{Z}_2$. Wir wollen noch das nicht-triviale Element von $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1)$ beschreiben.

19.13 Proposition. *Ist $v \in S^2$, so ist*

$$\begin{aligned} I &\to \mathrm{SO}(3) \\ s &\mapsto \begin{cases} \Phi(v, 2\pi s), & s \le \frac{1}{2}, \\ \Phi(-v, 2\pi(1-s)), & s \ge \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ein stetiger Weg, der das nicht-triviale Element von $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1)$ *repräsentiert. Insbesondere wird dieses Element auch von*

$$\begin{aligned} I &\to \mathrm{SO}(3) \\ s &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi s) & -\sin(2\pi s) \\ 0 & \sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

repräsentiert.

Beweis. Zunächst ist klar, dass die erste Aussage unabhängig von der Wahl von v ist, wir nehmen daher $v = (1,0,0)$ an. Durch Einsetzen in die Definition von Φ erhält man daraus dann sofort die zweite Aussage.

Wir haben nun zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} I &\to D^3/\sim \\ s &\mapsto \begin{cases} [(2s,0,0)], & s \le \frac{1}{2}, \\ [(2(1-s),0,0)], & s \ge \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

das nicht-triviale Element aus $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$ repräsentiert. Identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, so verläuft dieser Weg ganz in $D^1/\{-1,1\} \approx \mathbb{R}P^1 \approx S^1$ und repräsentiert dort offenbar einen Erzeuger der Fundamentalgruppe. Der Rest folgt aus Proposition 18.8. □

Zurück zum Experiment

Wir wissen nun:

19.14 Proposition. *Drehen wir den Gegenstand zu Beginn des Experiments einmal um eine beliebige Achse, so ist es danach nicht möglich, bei festgehaltenem Gegenstand das Seil zu entdrehen.*

Beweis. Das folgt aus Korollar 19.2 und Proposition 19.13. □

Um nun auch noch zu zeigen, dass man nach einer Bewegung des Gegenstands, die durch einen zum konstanten Weg homotopen Weg in $\mathrm{SO}(3)$ beschrieben wird, das Seil entdrehen kann, beschreiben wir zunächst, wie man aus einem Weg in $\mathrm{SO}(3)$ eine Seilposition erhält. Die Postionen, die wir erhalten, werden derart sein, dass jedes Seilstück den gleichen Abstand zu dem Gegenstand hat wie in der Ausgangsposition. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir den Raum so mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert haben, dass sich der Ursprung im Mittelpunkt des Gegenstandes befindet, von dem wir annehmen, dass er eine Kugel mit Radius 1 ist. Außerdem nehmen wir an, dass das nicht an der Kugel befestigte Ende des Seils im Abstand 2 vom Ursprung befestigt ist. Ein Weg $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ definiert einen Homöomorphismus

$$
\begin{aligned}
h\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\
x &\mapsto \begin{cases} w(0)\cdot x, & \|x\| \geq 2, \\ w(2-\|x\|)\cdot x, & 1 \leq \|x\| \leq 2, \\ w(1)\cdot x, & \|x\| \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und damit einen Zustand unseres Systems, in dem der Teil des Gegenstandes oder Seiles, das sich im Anfangszustand am Ort x befindet, am Ort $h(x)$ befindet. Es ist klar, dass sich das problemlos auch auf mehrere Gummiseile verallgemeinert.

19.15 Proposition. *Ist* $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ *ein stetiger geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt* 1 *und ist* $[w] = 1 \in \pi_1(\mathrm{SO}(3), 1)$ *das triviale Element, so ist es möglich, den Gegenstand wie durch w beschrieben zu bewegen, dabei das Seil mitzubewegen und anschließend bei festgehaltenem Gegenstand das Seil zu entdrehen.*

Beweis. Sei $H\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ zwischen w und dem konstanten Weg c_1. Wir betrachten nun die Funktion

$$Z\colon I \times [0,2] \to \mathrm{SO}(3)$$
$$(s,t) \mapsto \begin{cases} 1, & t \leq 1-s, \\ w(t+s-1), & 1-s \leq t \leq 1, \\ H(s,t-1), & t \geq 1. \end{cases}$$

Z ist stetig. Es beschreibe nun $Z(\bullet,t)$ wie vor dieser Proposition ausgeführt den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t. Es ist $Z(\bullet,0) = Z(\bullet,2) = c_1$, so dass am Anfang und am Ende des Vorgangs der Zustand des Systems der selbe ist. Es ist $Z(0,t) = 1$ für alle t, so dass das nicht am Gegenstand befindliche Seilende über den gesamten Zeitraum unbewegt bleibt. Es ist $Z(1,t) = w(t)$ für $t \leq 1$ und $Z(1,t) = 1$ für $t \geq 1$, so dass das Objekt zunächst die durch w vorgeschriebene Bewegung vollführt und danach unbewegt bleibt. $\square$

19.16 Korollar. *Es ist möglich, den Gegenstand zunächst zweimal vollständig um eine beliebige Achse zu drehen und danach bei festgehaltenem Gegenstand das Seil zu entdrehen.*

Beweis. Es sei $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ ein Weg, der einmaliges Drehen um eine Achse beschreibt. w ist eine Schleife bei 1, repräsentiert also ein Element aus $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1)$. Nun beschreibt $w*w$ zweimaliges Drehen um diese Achse, aber $[w*w] = [w]^2 = 1$, denn $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ hat Ordnung 2. $\square$

19.17 Bemerkung. Ist die Achse, um die gedreht wird, die, auf der das Seil liegt, so ist in der Konstruktion aus dem Beweis von Proposition 19.15 die Stellung des Seils nach dem Drehen des Gegenstandes so, wie man sich das vorstellt. Es ist nun empfehlenswert, konkret eine Homotopie herzunehmen, die zeigt, dass zweimaliges Drehen das triviale Element aus $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ repräsentiert, und die dadurch beschriebene Entdrehungsbewegung zu visualisieren.

Literatur

Das Buch zu dem Stoff, der bei uns in Topologie I behandelt wird, zu empfehlen, fällt schwer. Wahrscheinlich gibt es deshalb eine so große Zahl an Skripten zur Topologie I an diesem Fachbereich, denen ich hier zu allem Überfluss auch noch eines hinzufüge. Die, die ich kenne, möchte ich sogleich empfehlen: Das von Koppelberg, mit dem ich gelernt habe, das von Heindorf und die beiden von Unsöld, von denen mir besonders das ältere zusagt.

Meine erste Buchempfehlung sei eine, die hier eigentlich inhaltlich nicht herpasst. Das Buch von Bredon [Bre93] ist eines über algebraische Topologie, aber fast alles von dem, was wir hier tun werden, ist dort in den Kapiteln 1 und 3 enthalten. Sollte jemand so voller Tatendrang sein, dass er sich jetzt schon sicher ist, auch Topologie II und III zu hören, so kann er sich eigentlich auch überlegen, sich dieses Buch gleich zuzulegen.

Drei Bücher, die sich eher an die Hörer dieser Vorlesung richten, sind [Que73], [Jän80] und [Mun75]. Querenburg behandelt auf wenig Raum viel mengentheoretische Topologie, enthält aber im Gegensatz zu den anderen beiden Bänden kein Material über die Fundamentalgruppe. Jänichs Buch enthält auch viele erhellende Passagen mit erzählendem Charakter, es wird sich daher wohl auch schon auf Nachttischen und nicht nur auf Schreibtischen wiedergefunden haben. Über das Buch von Munkres kann ich nicht viel sagen, es scheint aber inhaltlich gut zu unserer Vorlesung zu passen.

Wem das alles zu wenig abstrakt ist, der findet wie immer bei Bourbaki Hilfe. Von [Bou65] werden wir nur Kapitel 1 und 9 benötigen. Ein ‚echtes' Buch über mengentheoretische Topologie ist Engelkings Werk [Eng77], in dem man angeblich alles findet.

Ein Buch einer ganz anderen Art ist das von Steen und Seebach. Sucht man einen Raum mit Eigenschaften α und β aber weder γ noch δ, so hat man gute Chancen, ihn in [SS70] zu finden.

[Bou65] Bourbaki, N. *Topologie Général*, Bd. 3 von *Éléments de mathématique.* Hermann, Paris, 1965.

[Bre93] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Bd. 139 von *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1993.

[Eng77] Engelking, R. *General Topology.* PWN, Warszawa, 1977.

[Jän80] Jänich, K. *Topologie.* Springer-Verlag, 1980.

[Mun75] Munkres, J. R. *Topology: a first course.* Prentice-Hall, 1975.

[Que73] von Querenburg, B. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, 1973.

[SS70] Steen, L. A. und Seebach, J. A., Jr. *Counterexamples in Topology.* Holt, Rinehart and Winston, 1970.