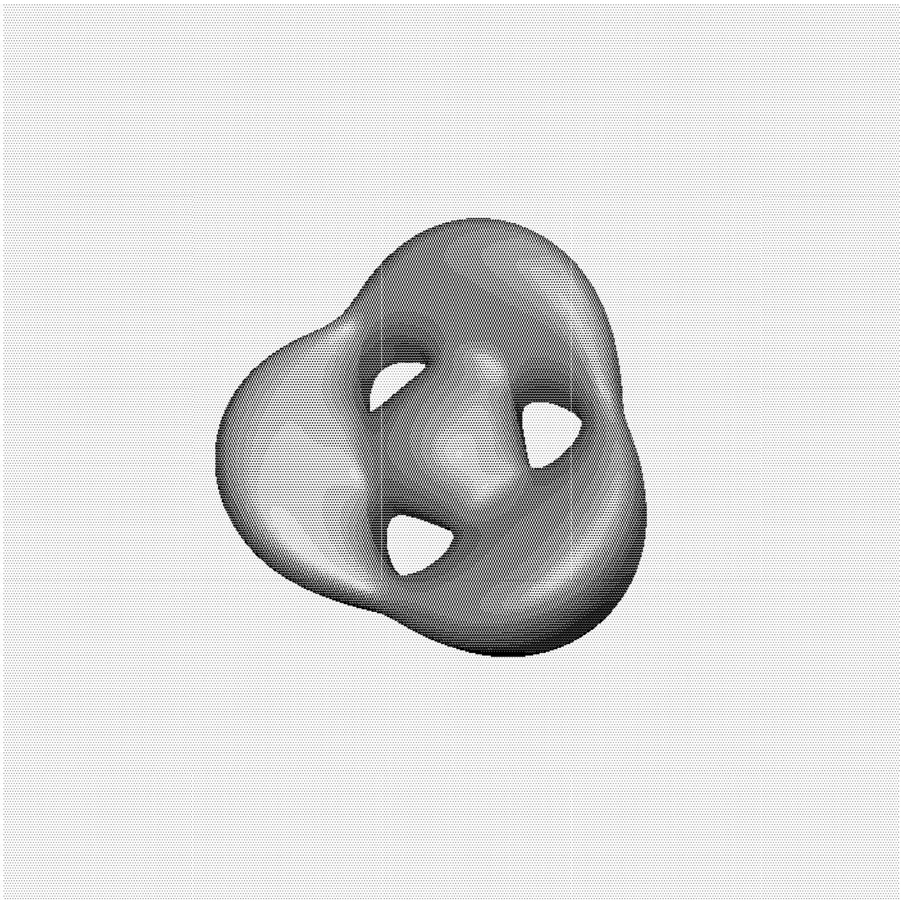
Topologie I

Gert-Martin Greuel



Vorlesung am Fachbereich Mathematik
der Universität Kaiserslautern
Wintersemester 1994/1995
Zeichnungen: H. Holzberger
Ausarbeitung: N. Göb
Korrektur: C. Lossen

Inhaltsverzeichnis

Notationen . . . iii

0 Einführung **1**

0.1 Anschauungsmaterial . . . 1

0.1.1 Beispiele . . . 1

0.1.2 Fragestellungen der Topologie . . . 5

0.1.3 Methoden der Topologie . . . 5

0.1.4 Weitere Probleme . . . 6

0.2 Die Eulersche Polyederformel . . . 7

0.3 Zur Geschichte der Topologie . . . 11

1 Mengentheoretische und kombinatorische Topologie **15**

1.1 Topologische Räume, Unterräume, Produkte . . . 15

1.2 Unterräume, Produkte, disjunkte Vereinigungen . . . 18

1.2.1 Teilraumtopologie . . . 18

1.2.2 Topologische Summe . . . 19

1.2.3 Topologisches Produkt . . . 20

1.3 Stetige Abbildungen und Quotienten . . . 21

1.3.1 Stetige Abbildungen . . . 21

1.3.2 Quotienten (Konstruktion topologischer Räume durch Verkleben) . . . 24

1.4 Zusammenhang und Trennungsaxiome . . . 31

1.4.1 Zusammenhang . . . 31

1.4.2 Trennungsaxiome . . . 32

1.5 Kompaktheit . . . 34

1.5.1 Kompaktheit ist eine „Endlichkeitsbedingung“ . . . 34

1.5.2 Eine häufige Methode zum Nachweis der Kompaktheit . . . 34

1.6 Bemerkungen zum Metrisierbarkeitsproblem . . . 36

1.7 Simpliziale Komplexe und Polyeder . . . 36

1.8 Simpliziale Approximation . . . 42

1.8.1 Baryzentrische Unterteilung oder Normalunterteilung eines simplizialen Komplexes . . . 43

1.8.2 Existenz einer simplizialen Approximation . . . 45

1.9 Homotopie von Abbildungen und Freimachen durch Homotopie . . . 47

1.10 CW-Komplexe . . . 53
1.10.1 Definition und grundlegende Eigenschaften . . . 53
1.10.2 Anheften von Zellen . . . 57

2 Algebraische Topologie **61**
2.1 Kategorien und Funktoren . . . 61
2.2 Die Fundamentalgruppe . . . 65
2.3 Die Fundamentalgruppen von S^1 und dem Torus . . . 67
2.3.1 Berechnung von $\pi_1(S^1)$ und $\pi_1(T^n)$ . . . 67
2.3.2 Anwendungen von $\pi_1(S^1)$ . . . 70
2.3.3 Die Zerlegungsmethode . . . 71
2.4 Überlagerungen . . . 73
2.5 Die universelle Überlagerung . . . 82
2.6 Klassifikation von Überlagerungen . . . 85
2.7 Simpliziale Homologiegruppen . . . 86
2.8 Funktorielle Eigenschaft der simplizialen Homologie . . . 97
2.9 Relative Homologiegruppen . . . 99

Literaturverzeichnis **I**

Index **III**

Notationen:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$			$=$	Menge der natürlichen $\{0, 1, 2, \ldots\}$, ganzen, rationalen, reellen, komplexen Zahlen.
$\mathbb{R}_+$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	$=$	Menge der nicht negativen, reellen Zahlen.
$\mathbb{Z}_n$	$=$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$=$	Restklassenring modulo n.
I	$:=$	$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$	$=$	Einheitsintervall.
id_X	$:$	$X \to X$	$=$	identische Abbildung auf der Menge X.
pr_X	$:$	$Y \to X$	$=$	Projektionsabbildung auf X ($X \subseteq Y$, $Y = X \times Z$ o.ä.).
c_{y_0}	$:$	$X \to Y$	$=$	konstante Abbildung $x \mapsto y_0$, $y_0 \in Y$ fest.
$\mathcal{P}(M)$	$:=$	$\{T \mid T \subseteq M\}$	$=$	Potenzmenge einer Menge M.
$\#M$			$=$	Anzahl oder Mächtigkeit einer Menge M.
$\lVert \cdot \rVert$	$=$	$\lVert \cdot \rVert_2$	$=$	Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.
D^n	$:=$	$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \lVert x \rVert \leq 1\}$	$=$	n-Scheibe, (abgeschlossene) n-Kugel oder (abgeschlossener) n-Ball .
D^0	$:=$	$\{0\}$		.
$(D^n)^\circ$	$=$	$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \lVert x \rVert < 1\}$	$=$	offene n-Kugel.
S^n	$:=$	$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \lVert x \rVert = 1\}$	$=$	n-Sphäre ($S^n = \partial D^{n+1}$).
$B_\varepsilon(x)$	$:=$	$\{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \lVert x - y \rVert < \varepsilon\}$	$=$	offene ε-Kugel (offener ε-Ball) um x.
e^n	$\cong$	$(D^n)^\circ$	$=$	n-Zelle.
$\dot{e}^n$	$:=$	$\overline{e^n} \setminus e^n$	$=$	Rand der n-Zelle im CW-Komplex (nicht notwendig homöomorph zu S^{n-1}).
$\mathbb{RP}^n$	$:=$	$\mathbb{R}^{n+1} /_{(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)}$	$=$	reell-projektiver Raum.
$\mathbb{CP}^n$	$:=$	$\mathbb{C}^{n+1} /_{(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)}$	$=$	komplex-projektiver Raum.
0			$=$	neutrales Element einer additiven Gruppe.
1			$=$	neutrales Element einer multiplikativen Gruppe.
0	$:=$	$\{0\}$	$=$	triviale additive Gruppe.
1	$:=$	$\{1\}$	$=$	triviale multiplikative Gruppe.
0	$:=$	$\{0\}$	$=$	trivialer A-Modul .
$\mathrm{Ker}(\delta)$	$:=$	$\{a \in A \mid \delta(a) = 0\}$	$=$	Kern eines Homomorphismus $\delta : A \to B$.
$\mathrm{Im}(\delta)$	$:=$	$\{\delta(a) \mid a \in A\}$	$=$	Bild eines Homomorphismus $\delta : A \to B$.
$\mathrm{Coker}(\delta)$	$:=$	$B/\mathrm{Im}(\delta)$	$=$	Kokern eines Homomorphismus $\delta : A \to B$.
$\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$	$:=$	$\{(x_i) \in \prod\limits_{i \in I} M_i \mid \#\{i \mid x_i \neq 0\} < \infty\}$	$=$	direkte Summe der Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A-Moduln, versehen mit komponentenweisen Operationen.

Kapitel 0

Einführung

0.1 Anschauungsmaterial

Die Topologie handelt von solchen Eigenschaften geometrischer Figuren, die sich bei **topologischen Abbildungen (= Homöomorphismen)**, d.h. bei stetigen, umkehrbar eindeutigen Abbildungen, deren Umkehrabbildung wieder stetig ist, nicht verändern. Mit einem Schlagwort kann man sagen:

Topologie = Stetigkeitsgeometrie.

Längenverhältnisse, Winkel usw. spielen bei topologischen Eigenschaften keine Rolle. Ja, man kann (und tut es) Topologie sogar in Räumen betreiben, in denen Begriffe wie Gerade oder Ebene gar keinen Sinn haben. Das einzige, das in einem „topologischen Raum" erklärt sein muß, ist der Begriff der **stetigen Funktion**, bzw. (äquivalent) der Begriff der **Umgebung** für jeden Punkt.

Abstrakte „Definitionen" erklären das Wesen der Topologie jedoch nicht. In diesem Kapitel wird versucht, anhand von Beispielen und Bildern zu vermitteln, wovon Topologie handelt. Das Anliegen ist, Sie diesen **geometrischen Ursprung der Topologie** unter all den späteren, algebraischen bzw. abstrakten Begriffsbildungen (die nötig sind) nicht vergessen zu lassen.

Nebenbei gesagt ist Topologie eine elementare, wichtige Vorlesung, die Anwendung in fast allen anderen mathematischen Richtungen findet (z.B. algebraische Geometrie, komplexe und reelle Analysis, Funktionalanalysis, Differentialgleichungen, Differentialgeometrie, Liegruppen, ...). Außerdem gehören Kenntnisse in Topologie zur mathematischen Allgemeinbildung.

0.1.1 Beispiele

„Topologisch gleiche" (oder topologisch äquivalente, homöomorphe) Figuren in verschiedenen Formen:

(a) Verschiedene Formen der **Kreisscheibe** (D^2):

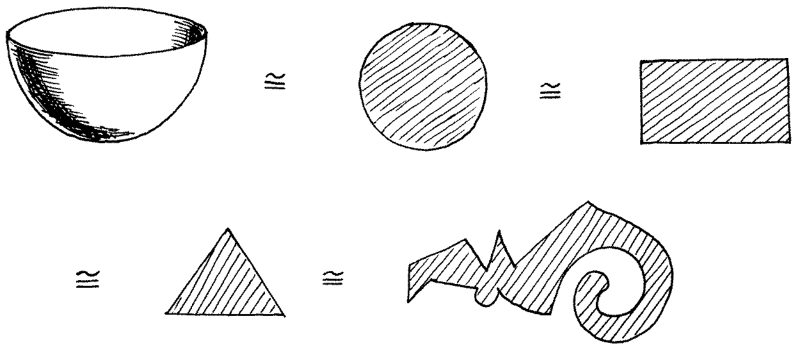


Abbildung 0.1

(b) Verschiedene Formen der **Kugeloberfläche** (2-Sphäre, S^2):

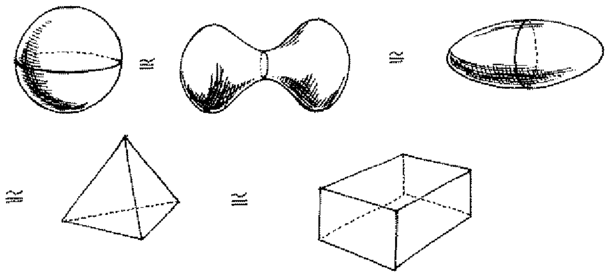


Abbildung 0.2

(c) Verschiedene Formen des **Torus** (Oberfläche des Rettungsringes, T^2):

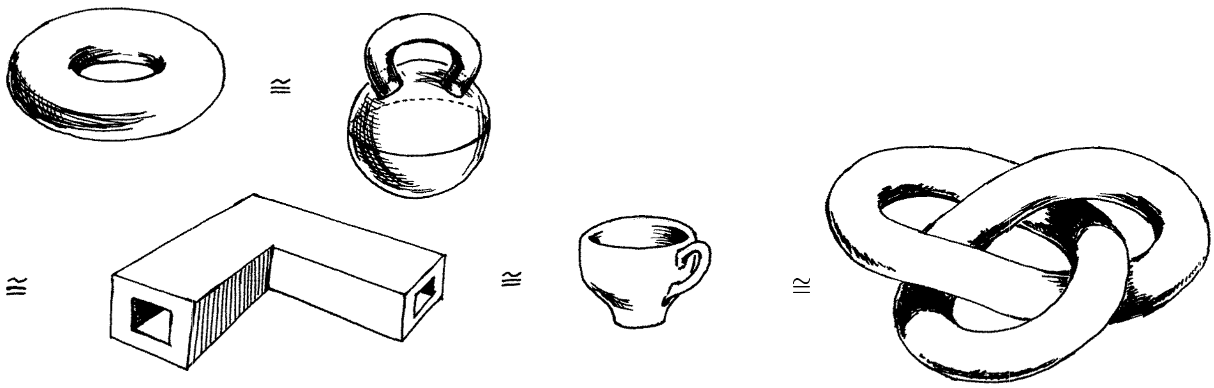


Abbildung 0.3

(d) Verschiedene Formen der **Kreislinie** (1-Sphäre, S^1):

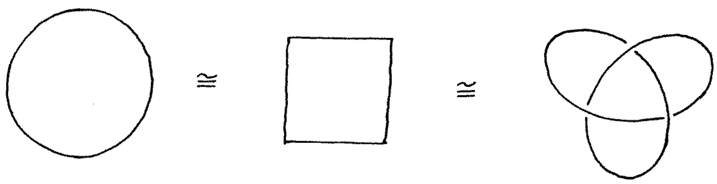


Abbildung 0.4

Bemerkung:
Die dritte Figur in Abbildung 0.4 heißt **Kleeblattschlinge** (K).

Die Figuren aus jeder der Klassen (a), (b), (c) oder (d) sind untereinander homöomorph, aber Figuren aus verschiedenen Klassen sind nicht homöomorph.

Definition:
Zwei Teilmengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen genau dann **homöomorph** (**topologisch gleich**, **topologisch äquivalent in** $\mathbb{R}^n$), wenn es eine bijektive und stetige Abbildung $f : X \to Y$ gibt, so daß deren Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

f heißt dann **topologische Abbildung** bzw. **Homöomorphismus**. X und Y heißen homöomorph (in Zeichen $X \cong Y$). $\diamond$

Figuren, die durch „Dehnen", „Strecken", „Stauchen" oder „Kneten" auseinander hervorgehen, sind homöomorph; „Zerreißen", „Zerschneiden" usw. ist nicht erlaubt.

(e) Das gewöhnliche Band ist nicht homöomorph zum **Möbiusband** (einmal verdrillt) aber homöomorph zum zweimal verdrillten Band:

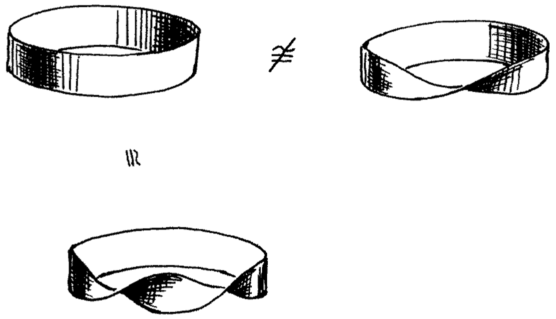


Abbildung 0.5

Die Homöomorphie der ersten drei Figuren in Abbildung 0.1 macht man sich leicht an Abbildung 0.6 klar. Durch Projektion f der Halbkugel in die Ebene erhält man die Kreisscheibe. Diese kann man dehnen, um daraus ein Rechteck zu erhalten.

Abbildung 0.6

$\square$

Beweis der Homöomorphie der Kreislinie zur Kleeblattschlinge (vgl. Abbildung 0.4). Wir beschreiben die Kreislinie S^1 als $I/\{0,1\}$, $I := [0,1]$, d.h. wir identifizieren die Endpunkte von I:

Abbildung 0.7

„Beschreiben" bedeutet, daß wir einen Homöomorphismus angeben, z.B.:

$$f : I/\{0,1\} \to S^1,\ f(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

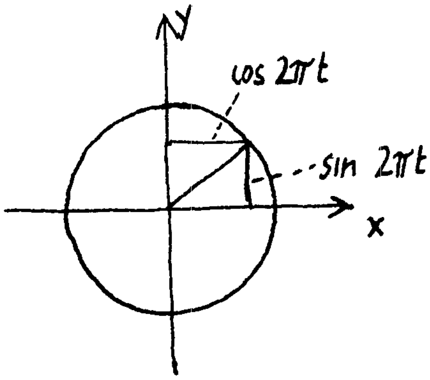


Abbildung 0.8

Um die Kleeblattschlinge zu definieren, beschreiben wir zuerst den Torus T^2 durch

$$T := T^2 := \underbrace{S^1 \times S^1}_{\subseteq \mathbb{R}^4} \cong (I \times I)/\sim,$$

wobei $\sim$ die durch

$$(x,0) \sim (x,1) \text{ und } (0,x) \sim (1,x)$$

erzeugte Äquivalenzrelation sei:

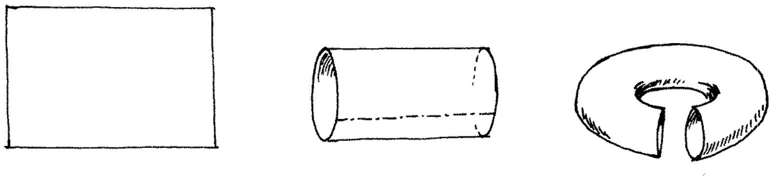


Abbildung 0.9

Die Kleeblattschlinge $K_{3,2}$ läßt sich als Teilmenge von T^2 beschreiben:

$$K_{3,2} = \{(e^{2\pi it\cdot 3}, e^{2\pi it\cdot 2}) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

$K_{3,2}$ heißt auch „Torusknoten vom Typ (3,2)“.

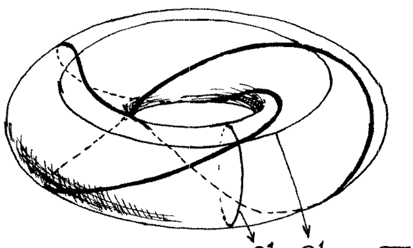


Abbildung 0.10

Ein Homöomorphismus $f : S^1 \cong I/\{0,1\} \xrightarrow{\cong} K_{3,2}$ wird gegeben durch:

$$[0,1] \ni t \mapsto (e^{2\pi i3t}, e^{2\pi i2t}).$$

□

Definition:
Allgemein bezeichnet man für teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ die Menge $K_{p,q} := \{(e^{2\pi ipt}, e^{2\pi iqt}) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ als **Torusknoten vom Typ** $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. (Man kann sich $K_{p,q}$ als eine Schnur vorstellen, die sich p-mal um den Torus in Richtung der einen S^1 und q-mal in Richtung der anderen S^1 wickelt). ◇

Achtung: Es gibt keinen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(S^1) = K_{3,2}$. Man sagt, daß S^1 und $K_{3,2}$ **topologisch verschieden** in $\mathbb{R}^3$ **eingebettet** (oder **eingelagert**) sind.
Kurz: Die Paare $(\mathbb{R}^3, S^1)$ und $(\mathbb{R}^3, K_{3,2})$ sind nicht homöomorph.

0.1.2 Fragestellungen der Topologie

Man unterscheidet zwei Richtungen in der Topologie:

1. „**Topologie der Gestalt**“
   (a) Hauptproblem: Wann sind zwei gegebene Figuren homöomorph?
   (b) Klassifikation von Figuren (z.B. geschlossene Flächen) nach ihrem Homöomorphietyp.
2. „**Topologie der Lage**“
   (a) Hauptproblem: Wann sind zwei gegebene Figuren (z.B. im $\mathbb{R}^n$) topologisch gleich eingebettet?
   (b) Klassifikation aller Einbettungen einer gegebenen Figur.

Zur Topologie der Lage gehört die **Knotentheorie** (Einbettungen von S^1 in $\mathbb{R}^3$). Weder 2.(a) noch 2.(b) sind heute in voller Allgemeinheit gelöst, wir werden in der Vorlesung darauf nicht eingehen.

0.1.3 Methoden der Topologie

Die Hauptprobleme werden (im Prinzip) wie folgt in Angriff genommen:

Für ein geometrisches Objekt werden **Invarianten** definiert — das sind in der Regel algebraische Objekte, wie z.B. Zahlen, Gruppen, Ringe, Moduln usw., die „invariant“ unter topologischen Abbildungen sind, d.h. homöomorphe Objekte haben dieselben (oder isomorphe) Invarianten.

Sind für zwei geometrische Objekte die Invarianten verschieden, so können diese Objekte nicht homöomorph sein.

Methode der algebraischen Topologie: Auffinden von Invarianten und Methoden zu ihrer Berechnung.

Beispiel Wegzusammenhang:

Definition:
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt genau dann **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt (d.h. eine stetige Abbildung $\varphi : I = [0,1] \to X$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$). ◇

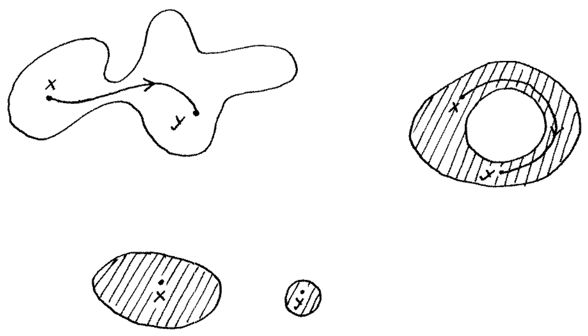


Abbildung 0.12

Es gilt: Ist $X \cong Y$ und X wegzusammenhängend, so ist auch Y wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus und seien $a, b \in Y$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\varphi : I \to X$, $\varphi(0) = f^{-1}(a)$, $\varphi(1) = f^{-1}(b)$. Also ist $f \circ \varphi$ ein Weg von a nach b in Y. □

„Wegzusammenhängend sein" ist also eine topologische Invariante.

Allgemein gilt sogar: Die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten ist eine topologische Invariante.

Sei a die Zahl der Wegzusammenhangskomponenten von X, dann ist die nullte singuläre Homologiegruppe $H_0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^a$. Für $i \geq 0$ werden wir in Abschnitt **??** die i-te Homologiegruppe $H_i(X;\mathbb{Z})$ definieren. Diese Gruppen sind topologische Invarianten. Sie sind eines der Hauptthemen dieser Vorlesung.

Anwendung: Seien $B :=$ gewöhnliches Band, $M :=$ Möbiusband. Behauptung $B \ncong M$.

„$\frac{1}{2}$ *Beweis*". Wir zeigen, daß es keinen Homöomorphismus $B \to M$ gibt, der den Mittelkreis auf den Mittelkreis abbildet. Gäbe es so etwas, dann wären nach Zerschneiden längs der Mittelkreise K die Reste auch homöomorph, d.h. $B \setminus K \cong M \setminus K$, also $H_0(B \setminus K;\mathbb{Z}) \cong H_0(M \setminus K;\mathbb{Z})$. Aber: M ist nach Zerschneiden wegzusammenhängend (bitte ausprobieren), B zerfällt nach Zerschneiden in zwei Wegzusammenhangskomponenten, d.h. $H_0(B \setminus K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_0(M \setminus K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Da diese Gruppen nicht isomorph sind, kann es den gesuchten Homöomorphismus nicht geben. □

Ein anderes Beispiel Intervall $\ncong$ Kreuz:

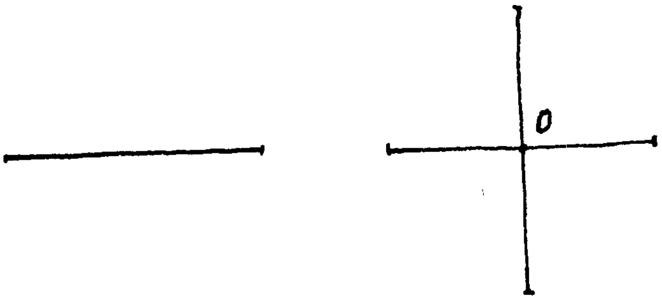
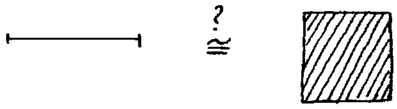


Abbildung 0.13

Beweis. Gäbe es einen Homöomorphismus F vom Kreuz auf das Intervall, so wären die Reste nach Herausnehmen von 0 und $F(0)$ auch homöomorph. Das Herausnehmen von $F(0)$ bzw. 0 führt aber zu verschiedenen Anzahlen an Wegzusammenhangskomponenten. □

0.1.4 Weitere Probleme

1. **Invarianz der Dimension**
   Können $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ homöomorph sein? (Die Antwort ist nein, vgl. Korollar **??** auf Seite **??**).



Daß dies ein Problem ist, zeigt das Beispiel der Peano-Kurve: Es gibt eine surjektive, stetige, nicht bijektive Abbildung $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.

(Nach Cantor (1845–1918) gibt es eine bijektive (aber unstetige) Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, was aber nur bedeutet, daß die Mengen gleichmächtig sind.)

Abbildung 0.14 zeigt den Beginn der Iteration zur Konstruktion der Peano-Kurve:

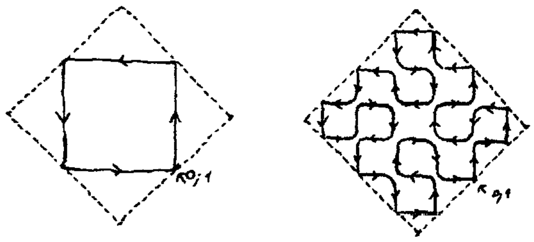


Abbildung 0.14

2. **Jordanscher Kurvensatz** (Problem von Camille Jordan (1838–1919) 1892, gelöst von O. Veblen 1905)

   Satz 0.1.1 (Jordanscher Kurvensatz). *Für jede einfach geschlossene Kurve (= Jordankurve) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ (d.h. C ist homöomorph zu S^1) besteht $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, die beide C als Rand haben. Genau eine der Komponenten (die innere) ist beschränkt.*

   Beweis. Vgl. Satz **??** auf Seite **??**. □

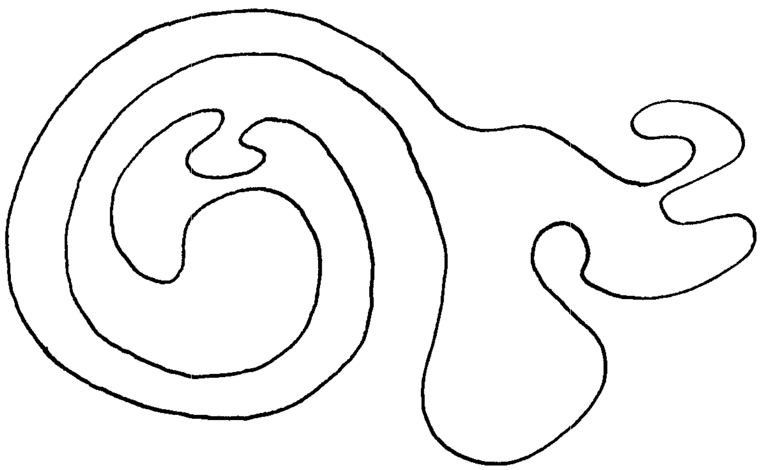


Abbildung 0.15

   Entsprechend gilt: Sei $C \subseteq S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Jordankurve, so besteht $S^2 \setminus C$ aus zwei Wegzusammenhangskomponenten, die beide C als Rand haben.

Probleme 1. und 2. werden wir mit Hilfe der Homologietheorie lösen.

0.2 Die Eulersche Polyederformel

Ein **Polygon** ist eine zur abgeschlossenen Kreisfläche homöomorphe Fläche in $\mathbb{R}^2$, die von endlich vielen (sich nicht schneidenden) Strecken (Kanten) berandet ist:

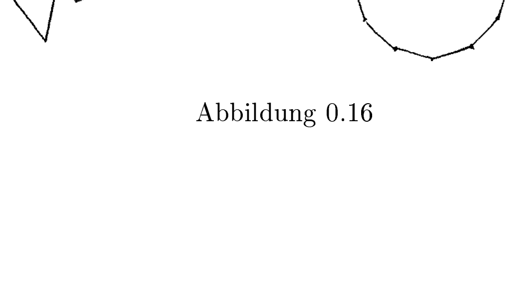
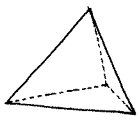
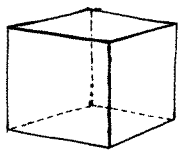
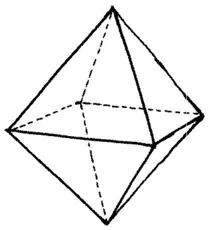


Abbildung 0.16

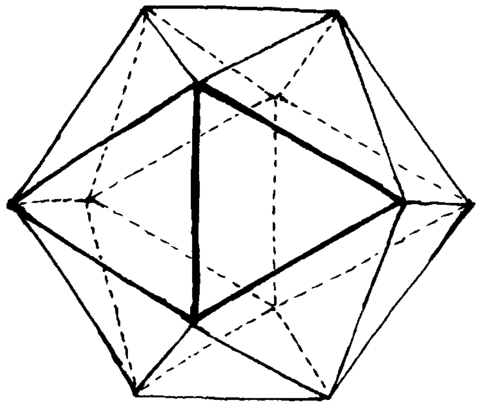
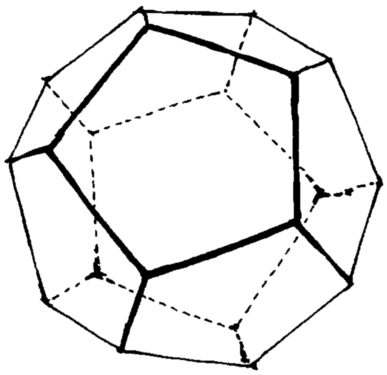
Ein dreidimensionales **Polyeder** ist ein Körper in $\mathbb{R}^3$, der so von endlich, vielen ebenen Polygonen berandet wird, daß sich je zwei dieser Polygone in einer gemeinsamen Kante, einer gemeinsamen Ecke oder gar nicht treffen. Außerdem soll jede Kante die Kante von genau zwei Polygonen sein.

Ein Polyeder heißt **regulär**, wenn es konvex ist und seine Polygone kongruente, reguläre p-Ecke sind, so daß an jeder Ecke gleich viele (sagen wir q) Kanten zusammenstoßen. Notation: $\{p, q\}$.

Abbildung 0.17 zeigt Skizzen aller regulären Polyeder.

Tetraeder $\{3,3\}$ *Hexaeder (Würfel)* $\{4,3\}$ *Oktaeder* $\{3,4\}$

Ikosaeder $\{3,5\}$ *Dodekaeder* $\{5,3\}$

Abbildung 0.17

Übung: Die Oberfläche eines beliebigen, konvexen Polyeders ist homöomorph zur 2-Sphäre S^2.

Den gesuchten Homöomorphismus zeigt Abbildung 0.18:

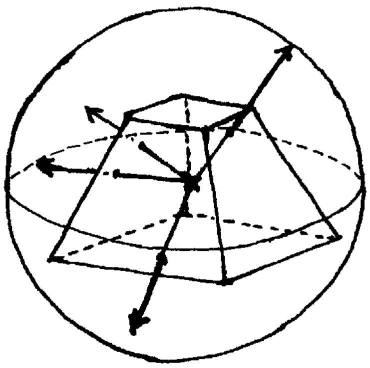


Abbildung 0.18

Satz 0.2.1. *Es gibt genau diese 5 regulären Polyeder, sie heißen auch* **Platonische Körper**.

Beweis. Bekanntlich gilt für die Innenwinkel α im regulären p-Eck $\alpha + \frac{2\pi}{p} = \pi$, d.h.

$$\alpha = \frac{p-2}{p}\pi.$$

Im Einzelnen ergibt sich

p	3	4	5	6
α	$\frac{1}{3}\pi = 60°$	$\frac{1}{2}\pi = 90°$	$\frac{3}{5}\pi = 108°$	$\frac{2}{3}\pi = 120°$

Da sowohl $q \cdot \alpha < 2\pi$ als auch $p, q \geq 3$ notwendige Bedingungen für Platonische Körper sind, sind nur $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,3\}$, $\{5,3\}$ möglich. □

Satz 0.2.2 (Eulersche Polyederformel; Leonhard Euler (1707–1783), 1752). *Sei P ein Polyeder, dessen Oberfläche homöomorph zu S^2 ist (z.B. ein konvexes Polyeder). Weiter sei e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten von P. Dann gilt:*

$$e - k + f = 2.$$

Bemerkung:
$\chi := \chi(P) := e - k + f$ heißt **Euler-Zahl** oder **Euler(-Poincaré)-Charakteristik** von P.

Beispiele dazu:

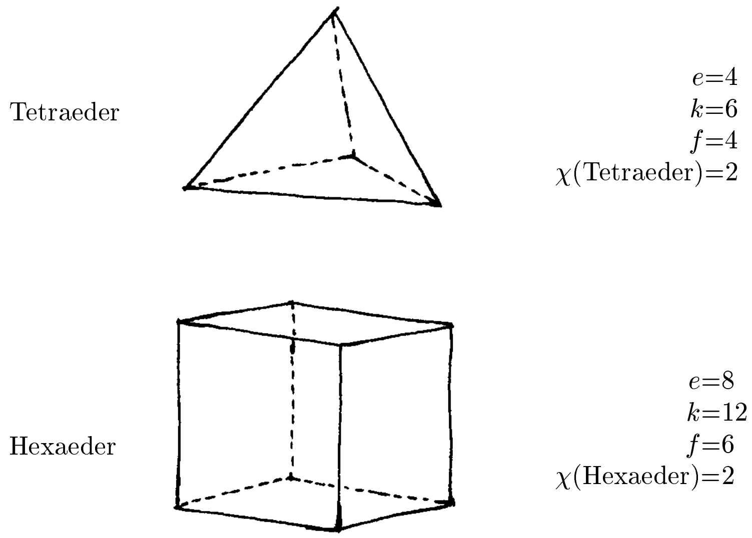


Abbildung 0.19

Übung: Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel für die regulären Polyeder. Zeichnen Sie ein nichtreguläres, konvexes Polyeder und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.

Bemerkung:
Die Euler-Charakteristik χ läßt sich rein topologisch mit Hilfe der Homologiegruppen $H_i(X;\mathbb{Z})$ für jeden topologischen Raum definieren, nicht nur für Polyeder. χ ist eine wichtige topologische Invariante. Beispielsweise sind zwei orientierbare, geschlossene Flächen F_1, F_2 genau dann homöomorph, wenn $\chi(F_1) = \chi(F_2)$ gilt.

Beispiele von Flächen, die nicht homöomorph zu S^2 sind:

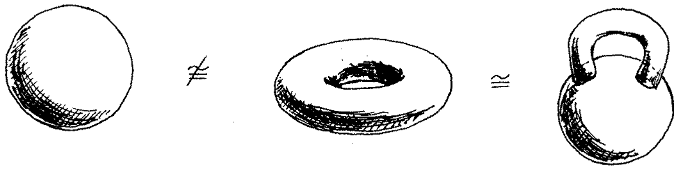


Abbildung 0.20

Beh.: $S^2 \not\cong T^2$.

Beweis. Es gibt eine Einbettung $S^1 \subseteq T^2$, so daß $T^2 \setminus S^1$ wegzusammenhängend ist. Gäbe es einen Homöomorphismus $f : T^2 \overset{\cong}{\to} S^2$, so wäre $S^2 \setminus f(S^1)$ homöomorph zu $T^2 \setminus S^1$, also wegzusammenhängend. Aber $f(S^1)$ ist eine Jordankurve, d.h. $S^2 \setminus f(S^1)$ ist nicht wegzusammenhängend (Jordanscher Kurvensatz 0.1.1 auf Seite 7). □

Definition:
Das **Geschlecht** g einer geschlossenen Fläche ist die maximale Anzahl von nicht homotopen (Definition vgl. Seite 47), sich nicht schneidenden, einfach geschlossenen Kreislinien, die man auf der Fläche zeichnen kann, ohne daß das Komplement dieser Kreislinien in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. ◇

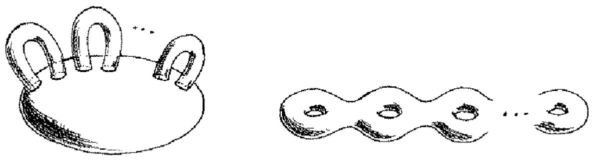


Abbildung 0.21

Sofort einsichtig ist, daß g eine topologische Invariante ist — also können Flächen verschiedenen Geschlechts nicht homöomorph sein. Das Geschlecht der Sphäre S^2 ist 0, das des Torus T^2 ist 1. Die beiden folgenden Sätze werden ohne Beweis angeführt.

Satz: Jede orientierbare, geschlossene (d.h. kompakt, ohne Rand) Fläche ist homöomorph zu einer Fläche vom Geschlecht g (für ein geeignetes $g \geq 0$).

Satz: Sei P ein Polyeder, das homöomorph zu einer Fläche vom Geschlecht g ist. Dann gilt:

$$\chi(P) = 2 - 2g.$$

Beispiel für ein Polyeder, das homöomorph zu einer Fläche vom Geschlecht 2 ist:

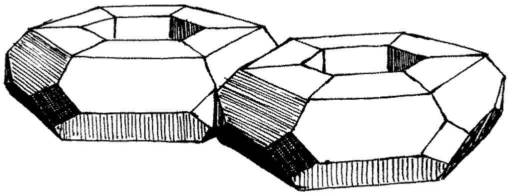


Abbildung 0.22

Übung: Skizzieren Sie ein Polyeder, das homöomorph zum Torus bzw. zur Kleinschen Flasche (vgl. Abbildung 0.23) ist und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel.

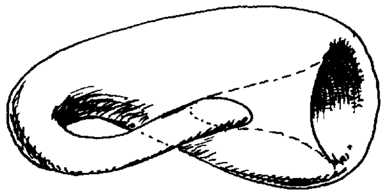


Abbildung 0.23

Zusammenfassung

In diesem Überblick haben wir einen ganz kleinen Einblick in das Gebiet der Topologie bekommen. Es wurde versucht, eine geometrische und anschauliche Darstellung einiger Grundprobleme und Hauptfragestellungen zu geben.

Hauptfragestellung: Wann sind geometrische Figuren (evtl. mit ihrer Einbettung in einen größeren Raum) topologisch äquivalent (homöomorph)?

Methode zur Lösung dieses Problems:

Untersuchung von Invarianten, also von Eigenschaften eines topologischen Raumes (bzw. von Objekten, die einem topologischen Raum zugeordnet werden), die nur von der Topologie abhängen.

Beispiele für Invarianten:

1. Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes,
2. $\chi(P)$ = Eulercharakteristik eines Polyeders,
3. Geschlecht einer orientierbaren, geschlossenen Fläche.

0.3 Zur Geschichte der Topologie

1. Bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts bildete die **Euklidische Geometrie** (= Geometrie der real existierenden Welt — im damaligen Verständnis) das Fundament der geometrischen Wissenschaften.

   Gegenstand der Euklidischen Geometrie waren: Geraden, Punkte, Dreiecke, Polygone, durch Polygone begrenzte Figuren (Polyeder) und Beziehungen zwischen diesen Objekten. Besondere Bedeutung (nicht nur in der Mathematik sondern auch in Kultur, Astronomie (Kepler), usw.) hatten die Platonischen Körper, denen auch mystische Bedeutung beigemessen wurde.

   Wichtigstes topologisches Ergebnis war die **Eulersche Polyederformel**:

   $$\chi(P) := e - k + f = 2,$$

   P = konvexes Polyeder, e = # Ecken, k = # Kanten, f = # Flächen (Euler 1752, Descartes 1640). Dies ist ein „topologisches Ergebnis", da $\chi(P)$ unabhängig von der polyedralen Zerlegung ist. $\chi(P)$ ist dadurch festgelegt, daß die Oberfläche von P homöomorph zu S^2 ist.

2. Die **Weiterentwicklung der Geometrie** wurde durch die Entwicklung von **Analysis und Algebra**, sowie deren Anwendung auf die Geometrie möglich. Die Araber entwickelten die Babylonische Algebra weiter (Handel) und brachten diese nach Europa.

   René du Perron Descartes (1596 – 1650) und **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) führten (cartesische) Koordinaten ein (Beschreibung von Punkten des Raumes durch Zahlentripel).

3. **Geometrie gekrümmter Flächen, Mannigfaltigkeiten, Überwindung der Dimensionsbeschränkung**:

Das folgende Gedicht von Hubert Cremer (zitiert aus H. Cremer: *Carmina Mathematica und andere poetische Jugendsuenden*, Verlag J.A. Mayer, Aachen, 1977) zeigt den Wandel im Verständnis der Geometrie:

Der euklidische Raum

Was mach ich armer Teufel bloß?
Nun bin ich alt und arbeitslos.

Ich diente viele hundert Jahr
ergeben, redlich treu und wahr,
mit Umsicht, Tatkraft und Geschick
im hohen Hause der Physik.
Verdiente meinen guten Lohn.

Doch plötzlich war das alles aus.
Ein neuer Herr bezog das Haus.
Der sprach: „Ich geb Ihnen hiermit zu wissen:
Sie lassen leider ganz vermissen
die unumgängliche Präzision.
Die angenäherte Schlampigkeit,
die geht mir, das muß ich schon sagen, zu weit.
Sie können mir daher nicht weiter dienen,
und kurz und gut, ich kündige Ihnen
hiermit zum Ersten des folgenden Jahres.“

Ich war ganz sprachlos, doch so war es.

Und finden Sie mich morgens mal
erhängt an einem Integral —
ach, reden hat ja keinen Zweck!

So ging der Raum betrübt hinweg.

4. **Stationen der Geometrie**:

   Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855): Entwicklung der Differentialgeometrie (zum Zwecke der Geodäsie = Landvermessung).

   Jean Victor Poncelet (1788 – 1867): Entwicklung der projektiven Geometrie.

   C. F. Gauß, János Bolyai (1802–1860), **Nikolay Ivanovich Lobachevsky** (1792–1856): Nicht-Euklidische Geometrie (das Parallelen-Axiom gilt nicht).

   Diese Entwicklungen deuten die Überwindung der Euklidischen Geometrie als einziger Grundlage der Geometrie an.

   Gauß benutzte Integrale, um die Verschlingungszahl zweier Kurven im Raum zu beschreiben (1833). Zwei Kurven sind „unverschlungen“, wenn sich in die eine Kurve eine Fläche so einspannen läßt, daß die andere Kurve die Fläche nicht trifft (Topologie der Lage). Abbildung 0.24 zeigt Kurven im $\mathbb{R}^3$ mit Verschlingungszahl 1, 2 und 0.

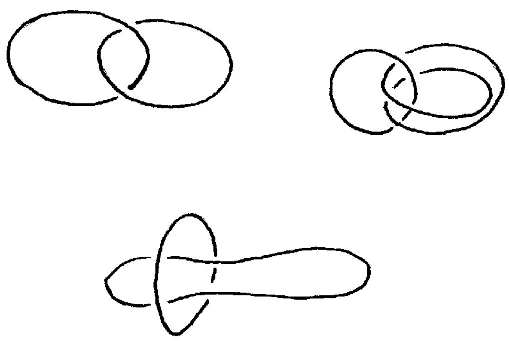


Abbildung 0.24

Durch Anwendung der Analysis war es begrifflich einfach, statt Funktionen von 3 Variablen, auch solche von n Variablen zu betrachten.

Der $\mathbb{R}^n$ — Verallgemeinerung des 3-dimensionalen Euklidischen Raumes — trat in der Mechanik natürlicherweise als Raum für Systeme mit n Freiheitsgraden auf (Joseph Louis Lagrange (1736–1813), 1797).

Mechanische Systeme hängen aber oft von n Variablen ab, die voneinander abhängen (z.B. durch k lineare oder algebraische Gleichungen). So entstand der Begriff der $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (falls die k Gleichungen unabhängig sind).

5. **Entwicklung der Topologie (19. Jahrhundert) als geometrische Topologie**

   1847 tauchte der Name „Topologie" das erste Mal auf (in Johann Benedict Listing (1808–1882), *Vorstudien zur Topologie*).

   Klassifikation der **kompakten Flächen** mittels Eulercharakteristik und Orientierbarkeit durch **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866, „Vater der Topologie"), August Ferdinand Möbius (1790–1868), Camille Jordan (1838–1919), Ludwig Schläfli (1814–1895) und Walther Franz Anton von Dyck (1856–1934).

   Riemannsche Mannigfaltigkeiten: Räume, die lokal so aussehen wie der $\mathbb{R}^n$, in denen sich aber die Metrik von Punkt zu Punkt stetig ändern kann. Diese stellten sich später als mathematische Grundlage Albert Einsteins (1879–1955) allgemeiner Relativitätstheorie heraus.

   Schläfli übertrug 1852 den Eulerschen Polyedersatz auf beliebige n-dimensionale konvexe Polyeder.

   Enrico Betti (1823–1892) führte den Begriff der Homologie ein.

6. **Jules Henri Poincaré** (1854–1912), der eigentliche Begründer der **algebraischen** und **kombinatorischen Topologie**:

   - Einführung der Homologiegruppen,
   - Beweis des „Poincaréschen Dualitätssatzes" (zwischen Homologiegruppen),
   - Definition der Fundamentalgruppe (sie heißt daher auch Poincaré-Gruppe).

   Poincaré hob die Topologie durch Zusammenfassung, theoretische Durchdringung und wesentliche Weiterentwicklung auf eine neue Stufe.

   Poincaré-Vermutung (vgl. Seite 50): Eine kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent (Definition vgl. Seite 49) zu S^3 ist, ist homöomorph zu S^3 (vielleicht das wichtigste, auf jeden Fall das populärste Problem der Topologie, bis heute ungelöst).

7. **Weitere Stationen der algebraischen Topologie**:

   Solomon Lefschetz (1884–1972): Lefschetzscher Dualitätssatz, Lefschetzscher Fixpunktsatz, 1920–1930, vgl. Satz **??** auf Seite ??.
   James Waddell Alexander (1888–1971): Alexander Dualitätssatz, 1920–1930
   Heinz Hopf (1894–1971): Verallgemeinerung des Abbildungsgrades, 1920 – 1930
   Eilenberg und Steenrod (1945): Axiome für (Ko-)Homologietheorie, vgl. Abschnitte **??** und **??**
   Smale, Stallings und Zeeman lösten 1960 die verallgemeinerte Poincaré-Vermutung (für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 5).
   Milnor, Kirby und Siebenmann (1961, 1969) widerlegten die **Hauptvermutung**, d.h. sie zeigten:

   (a) Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht triangulierbar sind.
   (b) Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die zwei Triangulierungen zulassen, die keine gemeinsame Unterteilung haben (ab Dimension ≥ 5).

   Kohomologiegruppen wurden um 1940 durch Alexander und Andrey Nikolayevich Kolmogorov (1903–1987) eingeführt, **höhere Homotopiegruppen** durch Witold Hurewicz (1904–1956). John Henry Constantine Whitehead (1904–1960) entwickelte **CW-Komplexe**. Eilenberg, Steenrod, Leray und Serre: Spektralsequenzen, Faserungen, Garbenkohomologie.

8. **Entwicklung der mengentheoretischen Topologie**:

- **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845–1918): Schöpfer der Mengenlehre und grundlegender, topologischer Begriffe wie „offene Mengen“, „Häufungspunkte“ und „abgeschlossene Mengen“ in einem euklidischen Raum.
- **Maurice René Fréchet** (1878–1973): Übertragung dieser topologischen Begriffe auf beliebige Punktmengen, z.B. Riemannsche Flächen, Phasenräume der Mechanik und Funktionenräume (um 1906).
- **Felix Hausdorff** (1869–1942): Entwicklung der abstrakten, mengentheoretischen Topologie in mehr oder weniger der jetzigen Form; Axiomatisierung.

Kapitel 1

Mengentheoretische und kombinatorische Topologie

1.1 Topologische Räume, Unterräume, Produkte

Definition:
Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge von X heißt genau dann **Topologie** auf X, wenn gilt:

1. $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$.
2. Endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{T}$ sind in $\mathcal{T}$.
3. Beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ sind in $\mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **offene Mengen** von X (bezüglich $\mathcal{T}$).

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ nennt man einen **topologischen Raum**. Ist eindeutig erkennbar, welche Topologie gemeint ist, schreibt man X statt $(X, \mathcal{T})$.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt genau dann **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist (d.h. $(X \setminus A) \in \mathcal{T}$). $\diamond$

Definition:
Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt genau dann **Basis der Topologie**, wenn jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. $\diamond$

Beispiel $\mathbb{R}^n$:
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ heiße genau dann offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ eine offene Kugel

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - y\|_2 < \varepsilon\}$$

gibt, mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Dann ist die Menge $\mathcal{T} := \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ offen}\}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Man nennt $\mathcal{T}$ die **Euklidische Topologie** auf $\mathbb{R}^n$.

$n = 1$:	$\cdots (\text{———}) \cdots$	offene Intervalle sind offen bzgl. $\mathcal{T}$
	$\cdots [\text{———}] \cdots$	abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}$
	$\cdots [\text{———}) \cdots$	halboffene Intervalle sind weder offen noch abgeschlossen

Abbildung 1.1

Basen der Topologie $\mathcal{T}$ sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{B_\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \, \varepsilon > 0\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{B_{\frac{1}{\nu}}(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n, \, \nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

Beweis, daß $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$ Basis der Topologie ist. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Nach Definition von $\mathcal{T}$ gibt es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$. Bekanntlich gibt es $q_x \in \mathbb{Q}^n$ und $\nu_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so daß $\|x - q_x\| < \frac{1}{\nu_x} < \frac{\varepsilon_x}{2}$. Dadurch ist $x \in B_{\frac{1}{\nu_x}}(q_x) \subseteq B_{\varepsilon_x}(x)$. Also ist $U = \bigcup_{x \in U} B_{\frac{1}{\nu_x}}(q_x)$ und da U eine beliebige offene Menge war, ist $\mathcal{B}_2$ eine Basis der Euklidischen Topologie. □

Es folgt:

Korollar 1.1.1. *$\mathbb{R}^n$ besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.*

Lemma 1.1.2. *Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt eine Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$.*

2. *Seien $U, V \in \mathcal{B}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$. Weiter sei $x \in U \cap V$ beliebig. Dann gibt es eine Menge $W \in \mathcal{B}$, so daß $x \in W$ und $W \subseteq U \cap V$ ist.*

Wenn dies erfüllt ist, so ist die Topologie $\mathcal{T}$ auf X eindeutig bestimmt:

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}, \text{ so daß } U = \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V\}.$$

Beweis. Übung. □

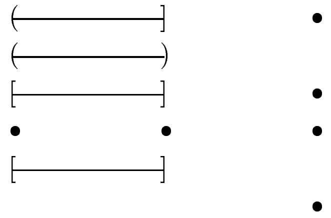
Definition:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $B \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge.

1. Eine Menge $V \subseteq X$ heißt genau dann **Umgebung** von x, wenn es eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt mit $x \in U \subseteq V$.
2. x heißt genau dann **innerer Punkt** von B, wenn B Umgebung von x ist. Die Menge $\boldsymbol{B}^\circ$ aller inneren Punkte heißt **Inneres** oder **offener Kern** von B.
3. x heißt genau dann **Berührungspunkt** von B, wenn jede Umgebung von x nicht-leeren Durchschnitt mit B hat. Die Menge $\bar{\boldsymbol{B}}$ aller Berührungspunkte von B heißt **Abschluß** oder **abgeschlossene Hülle** von B.
4. x heißt genau dann **äußerer Punkt** von B, wenn x innerer Punkt von $X \setminus B$ ist.
5. x heißt genau dann **Randpunkt** von B, wenn x weder innerer noch äußerer Punkt von B ist. Die Menge $\boldsymbol{\partial B}$ aller Randpunkte heißt **Rand** von B.
6. x heißt genau dann **Häufungspunkt** von B, wenn für jede Umgebung V von x gilt $(V \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$.
7. x heißt genau dann **isolierter Punkt** von B, wenn eine Umgebung V von x existiert, so daß $V \cap B = \{x\}$ ist.

◇

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{B} & = & \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{2\} \\
B^\circ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \\
\bar{B} & = & \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{2\} \\
\partial B & = & \{0, 1, 2\} \\
\{\text{Häufungspunkte von } B\} & = & \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \\
\{\text{isol. Punkte}\} & = & \{2\}
\end{array}$$



Definition:
Eine Teilmenge $B \subseteq X$ eines topologischen Raumes heißt genau dann **dicht in X**, wenn $\bar{B} = X$ ist. ◇

Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$:
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$;
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ besteht nur aus isolierten Punkten;
$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Notation:

Seien $A, B, M \subseteq X$. M heißt **disjunkte Vereinigung** von A und B, wenn $M = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Man schreibt dann

$$M = A \uplus B.$$

Lemma 1.1.3. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $B \subseteq X$ ein Teilmenge. Dann gilt:*

1. *B° ist offen und B ist genau dann offen, wenn $B = B^\circ$ ist.*
2. *$\bar{B}$ ist abgeschlossen und B ist genau dann abgeschlossen, wenn $B = \bar{B}$ ist.*
3. *$\bar{B} = B^\circ \uplus \partial B$*
   $\partial B = \bar{B} \setminus B^\circ$.
4. *$X \setminus \bar{B} = (X \setminus B)^\circ$,*
   $\bar{B} = X \setminus (X \setminus B)^\circ$.

Beweis zur 1. Aussage. Behauptung: B° ist offen: Sei $x \in B^\circ$. Dann ist B Umgebung von x, d.h. es gibt $V_x \in \mathcal{T}$ (also V_x offen) mit $x \in V_x \subseteq B$. Es bleibt $B^\circ = \bigcup_{x \in B^\circ} V_x$ zu zeigen. $B^\circ \subseteq \bigcup_{x \in B^\circ} V_x$ ist offensichtlich. Sei $y \in V_x$. Dann ist die offene Menge V_x eine Umgebung von y. Da $V_x \subseteq B$ ist, ist auch B Umgebung von x, d.h. $y \in B^\circ$. Also ist $\bigcup_{x \in B^\circ} V_x \subseteq B^\circ$. Rest Übung. □

Lemma 1.1.4. *Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Dann gilt:*

1. *$\bar{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die B enthält. Mit anderen Worten*

$$\bar{B} = \bigcap_{\substack{M \subseteq X \, abgeschl. \\ B \subseteq M}} M.$$

2. *B° ist die größte offene Teilmenge von X, die in B liegt. Mit anderen Worten*

$$B^\circ = \bigcup_{\substack{U \subseteq X \, offen \\ U \subseteq B}} U.$$

3. *$\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{X} = X$, $\bar{\bar{B}} = \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.*
4. *$\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$, $(B^\circ)^\circ = B^\circ$, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.*

Bemerkung:
Im allgemeinen gilt $\bar{A} \cap \bar{B} \underset{\neq}{\supseteq} \overline{A \cap B}$ und $(A \cup B)^\circ \underset{\neq}{\supseteq} A^\circ \cup B^\circ$.

Beispiel $X = \mathbb{R}$ mit Standardtopologie (=euklidische Topologie):
1. Für $A = (0,1)$, $B = (1,2)$ gilt: $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$ und $\overline{A \cap B} = \emptyset$.
2. Für $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt: $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$, $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

Beispiele extremer Topologien:
Sei X eine Menge.

1. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt **feinste** oder **diskrete Topologie** auf X.
2. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ heißt **gröbste** (oder **Klumpen-**)**Topologie**.

Es gibt wichtige Beispiele von Topologien (z.B. in der algebraischen Geometrie) mit Punkten, die dicht liegen. Solche Punkte heißen **generische Punkte**.

1.2 Unterräume, Produkte, disjunkte Vereinigungen

1.2.1 Teilraumtopologie

Definition:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

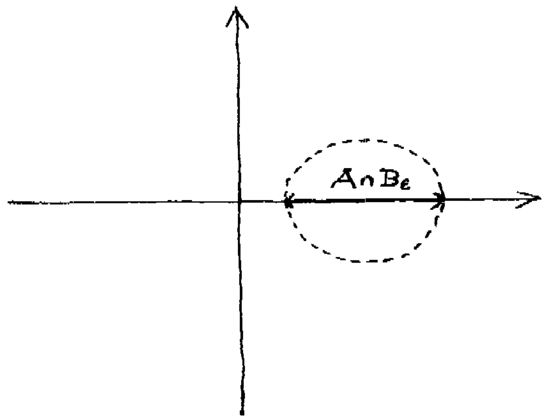
$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

heißt **Teilraumtopologie** auf A (auf A **induzierte Topologie**).

Notation: Wenn wir eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes als **Teilraum** bezeichnen, so ist damit immer der topologische Raum $(A, \mathcal{T}|_A)$ gemeint. Mit anderen Worten: V ist genau dann offen in A (bzgl. der Teilraumtopologie), wenn es eine (bzgl. $\mathcal{T}$) offene Menge $U \subseteq X$ gibt, so daß $U \cap A = V$ ist. ⋄

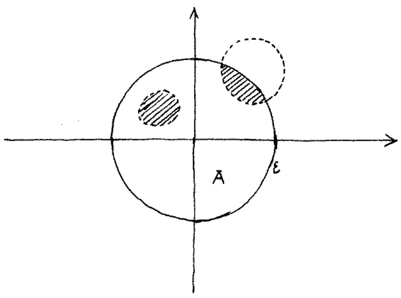
Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$:



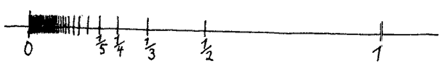
Ein offenes Intervall $J \subseteq A$ erhält man durch $J = A \cap B_\varepsilon$, wobei B_ε eine offene Kugel in $\mathbb{R}^2$ sei. Daß $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht offen ist, spielt hierbei keine Rolle.

2. $X = \mathbb{R}^2$, $A = \overline{B_\varepsilon(0)} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\}$:



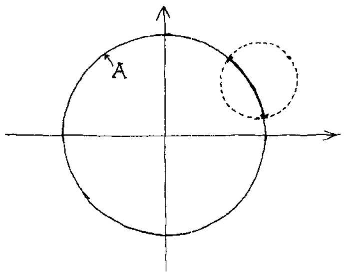
Aus V offen in A folgt nicht notwendig, daß V offen in X ist.

3. $X = \mathbb{R}$, $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$:



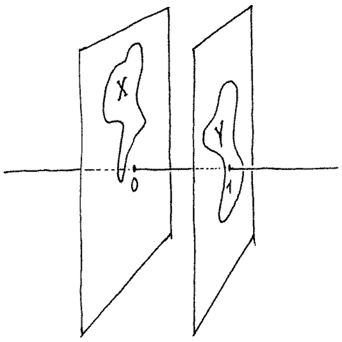
$A \setminus \{0\}$ ist offen in A. Für jedes $n > 0$ ist $\{\frac{1}{n}\}$ offen in A, also ist jede Menge $U \subseteq A \setminus \{0\}$ offen in A. Jede Umgebung der 0 enthält $\{\frac{1}{n} \mid n \geq N\}$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$, also ist $\{0\}$ nicht offen in A.

4. $X = \mathbb{R}^2$, $A = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$:



1.2.2 Topologische Summe

Definition:
Seien X, Y zwei Mengen. Dann heißt $\boldsymbol{X \amalg Y} := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ die **disjunkte Vereinigung (Ko-Produkt)** von X und Y. ◇



Definition:
Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume. Die **topologische disjunkte Vereinigung** oder **topologische Summe** von X und Y ist der Raum $\boldsymbol{X \amalg Y} := (X \amalg Y,\ \mathcal{T} \amalg \mathcal{S})$, wobei

$$\mathcal{T} \amalg \mathcal{S} := \{U \amalg V \mid U \in \mathcal{T},\ V \in \mathcal{S}\}$$

sei. ◇

Allgemeiner: Sei $\{(X_\lambda,\ \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie topologischer Räume, so ist $(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda,\ \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda)$ die topologische disjunkte Vereinigung, wobei

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda := \{ \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda\}$$

sei.

Bemerkung:
Es gibt eine kanonische Abbildung (Einbettung)

$$i_X : X \hookrightarrow X \amalg Y.$$

Bemerkung:

1. $U \subseteq \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist genau dann offen, wenn für alle $\lambda \in \Lambda$ die Menge $U \cap X_\lambda$ offen in $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ ist.
2. Seien X ein topologischer Raum, $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Unterräumen von X, die X disjunkt zerlegt, d.h. $X = \dot{\bigcup}_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ als Mengen. Dann sind die topologischen Räume X und $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ genau dann gleich (kanonisch isomorph), wenn alle $X_\lambda \subseteq X$ offen sind.

Beispiel (vgl. Beispiel 3. auf Seite 18):

$$\Lambda = \mathbb{N},\ X_n := \begin{cases} \{\frac{1}{n}\} & ,n \geq 1 \\ \{0\} & ,n = 0 \end{cases}$$

Hier gilt: $\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n = A$ als Mengen. Jedoch <u>keine</u> Gleichheit topologischer Räume! (Sonst wäre $\{0\} \subseteq A$ offen.)

Definition:
Seien $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist die **topologische Summe** $\boldsymbol{f \amalg g} : X \amalg Y \to Z$ definiert durch

$$(f \amalg g)(x) := \begin{cases} f(x) & ,x \in X \\ g(x) & ,x \in Y. \end{cases}$$

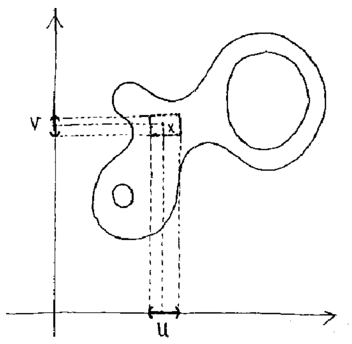
◇

1.2.3 Topologisches Produkt

Definition:
Seien X, Y zwei topologische Räume. $\boldsymbol{X \times Y}$ heißt genau dann **(topologisches) Produkt von $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$**, wenn gilt:

$$W \subseteq X \times Y \text{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, (x,y) \in W \text{ gibt es } U \subseteq X \text{ offen und } V \subseteq Y \text{ offen mit } (x,y) \in U \times V \subseteq W.$$

◇

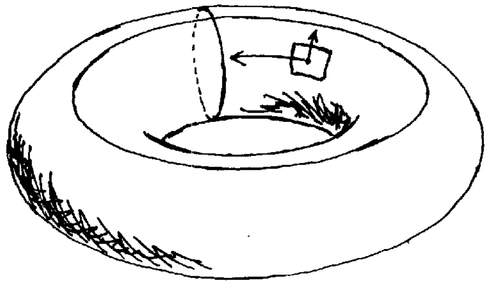


Allgemeiner: Sei $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie topologischer Räume. $\mathcal{T}$ sei die Menge aller Mengen $W \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, für die folgendes gilt: Zu jedem $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in W$ und jedem $\lambda \in \Lambda$ existiert eine Umgebung $U_\lambda \subseteq X_\lambda$ von x_λ, so daß

1. $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subseteq W$ ist und
2. $U_\lambda \subsetneq X_\lambda$ für höchstens endlich viele $\lambda \in \Lambda$.

Dann heißt $(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \mathcal{T})$ **topologisches Produkt** der X_λ.

Beispiel:
1. $X = Y = \mathbb{R}$,
   $X \times Y = \mathbb{R}^2$, Produkttopologie = gewöhnliche Topologie.
2. $X_i = \mathbb{R}$, $i = 1 \ldots n$,
   $\prod_{i=1}^n X_i = \mathbb{R}^n$, Produkttopologie = gewöhnliche Topologie.
3. $X = Y = S^1$,
   $X \times Y = S^1 \times S^1 = T^2$, 2-dimensionaler Torus.



1.3 Stetige Abbildungen und Quotienten

1.3.1 Stetige Abbildungen

Definition:
Seien X, Y topologische Räume.

1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt genau dann **stetig in $x \in X$**, wenn für jede Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(x)$ deren Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ eine Umgebung von x ist.
2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt genau dann **stetig**, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subseteq Y$ offen in X ist.

$\diamond$

Lemma 1.3.1. *Sind X, Y zwei topologische Räume, und ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *f ist stetig.*

(1′) *Für alle Elemente V einer Basis der Topologie von Y ist $f^{-1}(V)$ offen.*

(2) *Für alle abgeschlossenen Teilmengen $B \subseteq Y$ ist auch $f^{-1}(B) \subseteq X$ abgeschlossen.*

(3) *f ist in jedem Punkt $x \in X$ stetig.*

Beweis.

(1) $\Leftrightarrow$ (1′): Bekanntlich gilt für beliebige Abbildungen $f : X \to Y$ und beliebige Familien $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Teilmengen von Y:

$$f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda).$$

Da jede offene Menge $V \subseteq Y$ als Vereinigung $V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ geschrieben werden kann, folgt daraus direkt die Äquivalenz von (1) und (1′).

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Dies folgt daraus, daß für beliebige Abbildungen $f : X \to Y$ und beliebige Teilmengen $B \subseteq Y$ gilt:

$$f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $x \in X$ und $V' \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, d.h. es gebe eine offene Menge $V \subseteq Y$ mit $f(x) \in V \subseteq V'$. Also ist $x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(V')$ und $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen, d.h. $f^{-1}(V')$ ist eine Umgebung von x.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $V \subseteq Y$ offen, d.h. V ist für alle $y \in V$ eine Umgebung. Da f in allen Punkten $x \in f^{-1}(V)$ stetig ist, ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von allen $x \in f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen.

□

Bemerkung:

1. Ist $A \subseteq X$ ein Unterraum, so ist die Inklusion $i_A : A \hookrightarrow X$ stetig.
2. Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zwei stetige Abbildungen, so ist auch deren Komposition $g \circ f : X \to Z$ stetig.
3. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$ ein Unterraum. Dann ist $f|_A : A \to Y$ („Einschränkung von f auf A") stetig, denn $f|_A = f \circ i_A$.
4. Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung, $f(X)$ fassen wir als Teilraum von Y auf. $f' : X \to f(X)$ sei definiert durch $f'(x) := f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist f' genau dann stetig, wenn f stetig ist.

   Beweis. „$\Rightarrow$": $f = i_{f(X)} \circ f'$. „$\Leftarrow$": Sei $V \subseteq f(X)$ offen, d.h. $\exists\, V' \subseteq Y$ offen mit $V = f(X) \cap V'$. Dann ist $(f')^{-1}(V) = f^{-1}(V')$ offen, da f stetig. Also ist auch f' stetig. □

5. Die Inklusion $X \hookrightarrow X \amalg Y$ und die Projektion $X \times Y \to X$ sind kanonische Abbildungen. Sie sind beide stetig (Übungsaufgabe).

Beispiel:

1. $X = \mathbb{R}$.
   $f : X \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nicht stetig.
2. Konstante Abbildungen sind stetig:
   X, Y beliebige topologische Räume, $y \in Y$ und $c_y : X \to Y$ mit $c_y(x) = y \quad \forall\, x \in X$.

Lemma 1.3.2. *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

1. *Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Dann ist f genau dann stetig, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ die Abbildung $f|_{A_i} : A_i \to Y$ stetig ist.*
2. *Seien $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Dann ist f genau dann stetig, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Abbildung $f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ stetig ist.*

Beweis.

1.„$\Rightarrow$": Dies ist klar nach Bemerkung.

„$\Leftarrow$": Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Für alle $i = 1, \dots, n$ ist $(f|_{A_i})^{-1}(B) =: \tilde{A}_i \subseteq A_i$ abgeschlossen in A_i. Da A_i abgeschlossen in X ist, ist auch $\tilde{A}_i$ abgeschlossen in X. Also ist $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^n \tilde{A}_i$ abgeschlossen in X.

2. analog.

□

Lemma 1.3.3. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Beweis. Offensichtlich ist $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, also auch $f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Daher gilt $\overline{f^{-1}(f(A))} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(\overline{f(A)})$ abgeschlossen, d.h. $\bar{A} \subseteq \overline{f^{-1}(f(A))} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)})$. Daraus folgt nun $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) = \overline{f(A)}$. □

Definition:
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt genau dann **offen** (bzw. **abgeschlossen**), wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ (bzw. jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$) die Menge $f(U)$ offen (bzw. $f(A)$ abgeschlossen) in Y ist. ◇

Bemerkung:
Stetige Abbildungen sind i.a. weder offen noch abgeschlossen.

Beispiel:
$X = \mathbb{R}^n$ mit diskreter Topologie, $Y = \mathbb{R}^n$ mit gröbster Topologie. $f = \mathrm{id} : X \to Y$ ist stetig, aber weder offen noch abgeschlossen (z.B.: $\{x\} \subseteq X$ ist offen (und abgeschlossen), $\{f(x)\} \subseteq Y$ ist nicht offen (und nicht abgeschlossen)).

Definition:
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt genau dann **Homöomorphismus** (**topologisch**), wenn f bijektiv und stetig ist, und wenn f^{-1} ebenfalls stetig ist (äquivalent kann man fordern, daß f bijektiv, stetig und offen sein muß). Zwei topologische Räume X, Y heißen genau dann **homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt. Notation: $\boldsymbol{X \cong Y}$

Eine Eigenschaft eines topologischen Raumes X heißt genau dann **topologische Invariante**, wenn sie unter Homöomorphismen erhalten bleibt. ◇

Definition:
Seien X eine Menge und $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologien auf X. $\mathcal{T}$ heißt genau dann **feiner als** $\mathcal{T}'$ ($\mathcal{T}'$ heißt **gröber als** $\mathcal{T}$), wenn $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$, d.h. wenn jede bzgl. $\mathcal{T}'$ offene Menge $U \subseteq X$ auch offen bzgl. $\mathcal{T}$ ist ($\mathcal{T}$ hat mehr offene Mengen als $\mathcal{T}'$). ◇

Beispiel:
Die feinste (diskrete) Topologie auf X ist feiner als jede andere. Die gröbste Topologie (Klumpentopologie) auf X ist gröber als jede andere (Definitionen vgl. Seite 17).

Lemma 1.3.4. *Seien $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ topologische Räume, $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Die Produkttopologie auf X ist die gröbste Topologie, so daß alle Projektionen $p_\lambda : X \to X_\lambda$ stetig sind.*

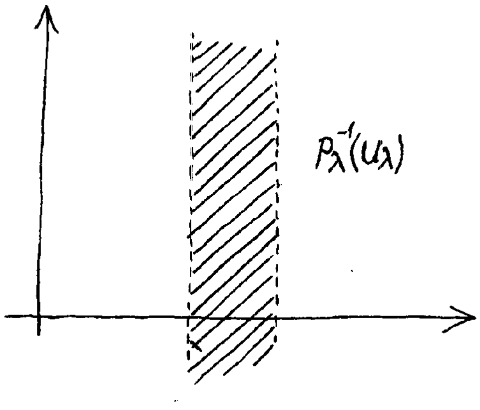
Beweis. Erinnerung: $\{U = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda | U_\lambda$ offen und fast alle $U_\lambda = X_\lambda\}$ bildet eine Basis der Produkttopologie auf X.

Seien $\mathcal{T}_\prod$ die Produkttopologie und $\mathcal{T}_p$ die gröbste Topologie, so daß die Projektionen stetig sind.

„$\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_\prod$“: Offensichtlich ist

$$\{p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0}) \mid U_{\lambda_0} \subseteq X_{\lambda_0} \text{ offen, } \lambda_0 \in \Lambda\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_p$. Wir zeigen, daß alle Elemente dieser Basis offen sind bzgl. der Produkttopologie $\mathcal{T}_\prod$: Seien dazu $\lambda_0 \in \Lambda$ und $U_{\lambda_0} \subseteq X_{\lambda_0}$ offen. Dann ist $p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0}) = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ mit $V_\lambda = X_\lambda \; \forall \; \lambda \neq \lambda_0$ und $V_{\lambda_0} = U_{\lambda_0}$, d.h. $p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$ offen bezüglich Produkt-Topologie (per def.).



„$\mathcal{T}_\prod \subseteq \mathcal{T}_p$“: Die Quader $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, wo fast alle $U_\lambda = X_\lambda$ sind, sind endliche Durchschnitte von Mengen des Typs $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$. Also ist jedes Element der Basis von $\mathcal{T}_\prod$ offen bzgl. $\mathcal{T}_p$.

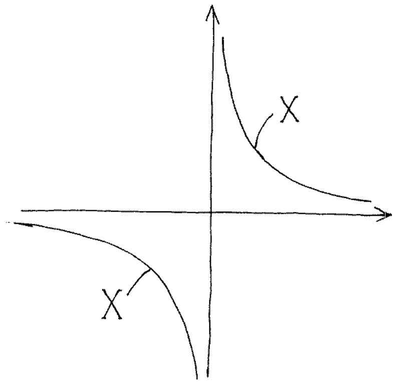
□

Lemma 1.3.5. *Seien $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ topologische Räume, $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Dann ist für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Projektion $p_\lambda : X \to X_\lambda$ offen.*

Beweis. Für jede Abbildung f gilt: $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$. Also genügt es, zu zeigen, daß das Bild eines offenen Quaders unter p_λ offen ist (für alle λ). Diese Quader sind von der Form $Q = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, wobei $U_\lambda = X_\lambda$ für fast alle λ. Also $p_\lambda(Q) = U_\lambda$ offen, wenn Q offen ist. □

Bemerkung:
Projektionen sind im allgemeinen nicht abgeschlossen.

Beispiel: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ sei die Hyperbel mit Teilraumtopologie und $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ die x-Achse. Dann ist $p_Y(X) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = Y \setminus \{0\}$ nicht abgeschlossen in Y (obwohl X abgeschlossen ist).



Lemma 1.3.6. *Seien $X, X_\lambda, Y, Y_\lambda$ für $\lambda \in \Lambda$ topologische Räume. Dann gilt:*

1. *$f : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen $p_\lambda \circ f$ stetig sind.*

2. *$f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Einschränkung $f|_{X_\lambda}$ stetig ist.*

Beweis. „1." folgt aus Lemma 1.3.4 auf der vorherigen Seite und „2." folgt daraus, daß $f|X_\lambda = f \circ i_{X_\lambda}$ ist und f und i_{X_λ} beide stetig sind. □

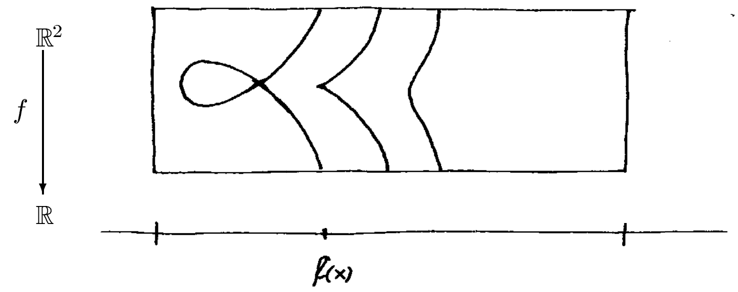
1.3.2 Quotienten (Konstruktion topologischer Räume durch Verkleben)

Definition:
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. $X/_\sim := \{[x] \mid x \in X\}$, wobei

$$y \in [x] \Leftrightarrow x \sim y,$$

die Menge der Äquivalenzklassen von X sei. Die Abbildung $p : X \to X/_\sim$, $x \mapsto [x]$ sei die kanonische Äquivalenzklassenabbildung. Die **Quotiententopologie** auf $X/_\sim$ ist die feinste Topologie auf $X/_\sim$, so daß p stetig ist, d.h. $U \subseteq X/_\sim$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist. Der so erhaltene topologische Raum $\boldsymbol{X/_\sim} := (X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ heißt **Quotient** von X bezüglich $\sim$. ◇

Beispiel:
Sei $f : X \to Y$ stetig, für $x_1, x_2 \in X$ gelte genau dann $x_1 \sim x_2$, wenn $f(x_1) = f(x_2)$.



$X/_\sim$ ist die Menge, die entsteht, wenn in X alle Fasern $f^{-1}(f(x))$ zu einem Punkt „zusammengeschlagen“ werden.

Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X/_\sim & \xrightarrow{\bar f} & f(X) \subseteq Y \\ [x] & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Frage: Ist $\bar f$ ein Homöomorphismus?

$\bar f$ ist stetig, denn $p^{-1}(\bar f^{-1}(V \cap f(X))) = f^{-1}(V)$ ist offen, falls $V \subseteq Y$ offen ist (denn f ist stetig).
$\bar f$ ist im allgemeinen nicht offen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

Beispiel: Sei $X = Y$ als Mengen, $f := \mathrm{id}_X$, d.h. $X = X/_\sim$ als topologische Räume. X trage die feinste, Y die gröbste Topologie. Dann ist $f = \bar f$ stetig, aber nicht offen.

Also ist $\bar f$ im allgemeinen kein Homöomorphismus.

Lemma 1.3.7. *Sei $f : X/_\sim \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig, wenn $\tilde f := f \circ p$ stetig ist.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\tilde f"] & \\ X/_\sim \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

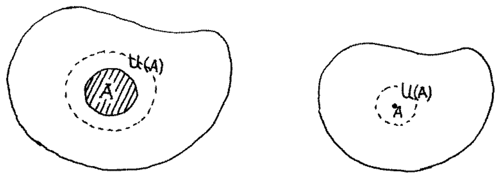
Beweis. Aus Definition der Quotiententopologie. $\square$

Beispiele zur Quotientenbildung:

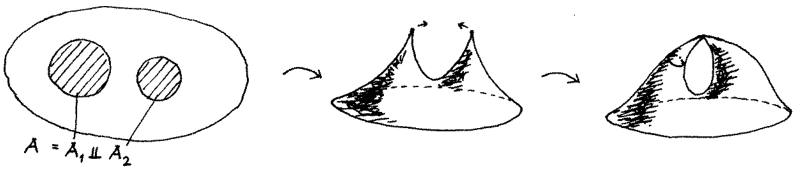
1. **Zusammenschlagen eines Unterraumes zu einem Punkt**:

   Definition:
   Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Unterraum. Dann ist X/A gegeben durch $\boldsymbol{X/A} := X/_\sim$ mit $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x = y$ oder $x, y \in A$. $\diamond$

   Beispiel:

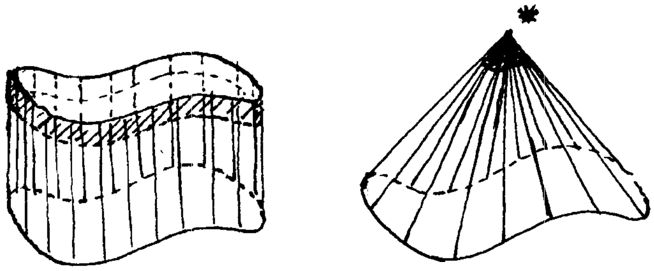


   Ein anderes Beispiel:



2. **Kegel über einem topologischen Raum**:

Definition:
Sei X ein topologischer Raum und $I := [0,1]$. Dann heißt $\boldsymbol{CX} := (X \times I)/(X \times \{1\})$ **Kegel** über X. Dabei trägt $X \times I$ die Produkt- und CX die Quotiententopologie. ◇

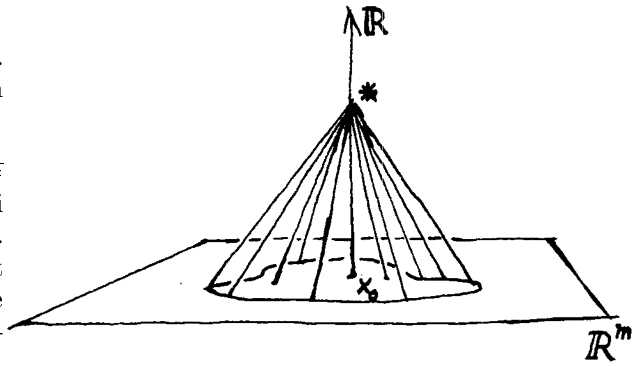


$* = [X \times \{1\}] \in CX$ ist die Kegelspitze.

Beispiel für den Zusammenhang von anschaulich gegebenem und oben definiertem Kegel:

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. (Die Einbettung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^{m+1}$ sei die über die Isomorphie $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \{0\}$ gegebene.) Sei $x_0 \in X$ und $* := (x_0, 1) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}^m$ sei $\overline{x*}$ die Strecke zwischen x und $*$. Der (anschaulich gegebene) Kegel über X ist dann $K := \bigcup_{x \in X} \overline{x*} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

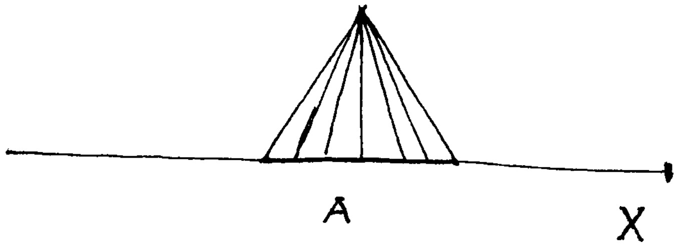
Es ist $CX \cong K$. Für jedes $x \in X$ sei $h_x : [0,1] \to \overline{x*}$ gegeben durch $h_x(t) := ((1-t)x + tx_0, t)$. Weiter sei $H : X \times [0,1] \to K$ durch $(x,t) \mapsto h_x(t)$ gegeben. Dann ist H offenbar stetig und offen. Außerdem ist $H(x,1) = *$ für alle $x \in X$, d.h. H induziert eine stetige, offene Abbildung $h : CX \to K$, die offensichtlich sowohl injektiv als auch surjektiv ist, d.h. h ist der gesuchte Homöomorphismus zwischen CX und K. □



Definition:
Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum eines topologischen Raumes X. Der **Kegel über dem Unterraum** A wird definiert als

$$\boldsymbol{C_A X} := \underbrace{(X \times \{0\} \cup A \times I)}_{\subseteq X \times I} / A \times \{1\},$$

wobei $X \times I$ die Produkttopologie, $X \times \{0\} \cup A \times I$ die Teilraumtopologie und der Kegel $C_A X$ schließlich die Quotiententopologie trägt. ◇



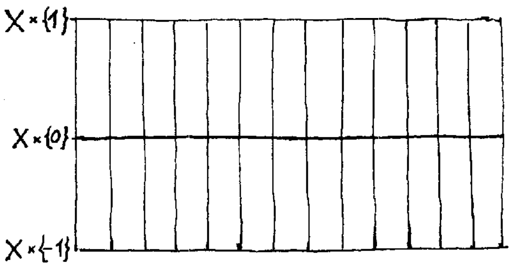
3. **Suspension eines topologischen Raumes**:

   Definition:
   Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt der Quotient

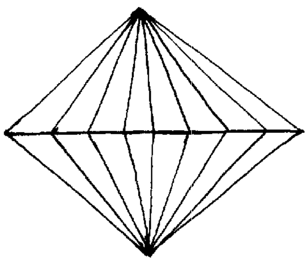
   $$\boldsymbol{SX} := (X \times [-1,1]/X \times \{1\})/X \times \{-1\}$$

   Suspension (**Einhängung**, **Doppelkegel**) von X. ◇

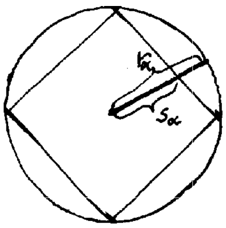
   $X \times [-1,1]$

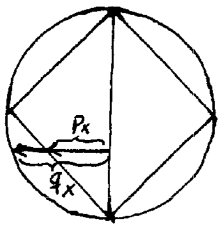
   SX

   Beispiel:
   $SD^n \cong D^{n+1}$. Der Homöomorphismus kann durch Streckung vom Zentrum aus geschehen — wie in (i) dargestellt — oder — wie in (ii) skizziert — durch Streckung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (z,x) \mapsto (\frac{q_x}{p_x}z, x)$ orthogonal zum Durchmesser.

   (i)

   (ii)

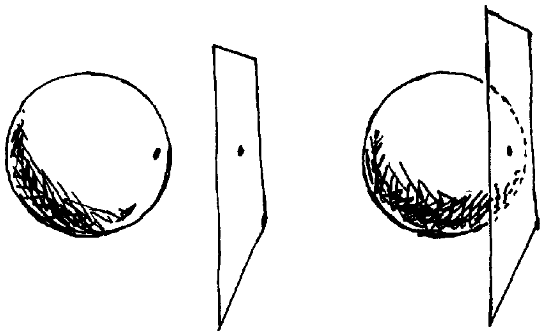
4. **Einpunktvereinigung topologischer Räume**:

   Definition:
   Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Dann ist die **Einpunktvereinigung** von X und Y gegeben durch

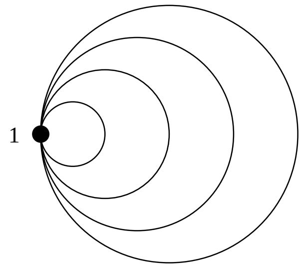
   $$\boldsymbol{(X, x_0) \vee (Y, y_0) := X \vee Y} := X \amalg Y/(\{x_0\} \amalg \{y_0\}).$$

   Viele $\vee$-vereinigte Sphären werden auch **Bouquet** von Sphären genannt. ◇

   Eine Einpunktvereinigung:



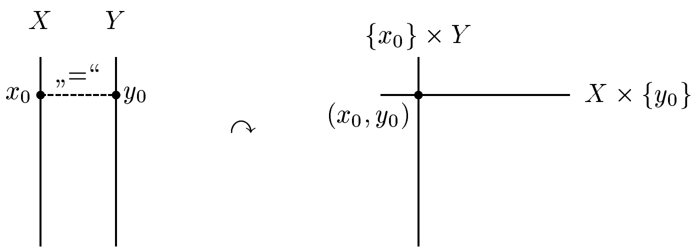
Ein Bouquet:



$$S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1.$$

Man kann $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ auch als Teilmenge von $X \times Y$ auffassen:

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y :$$



5. **Quotient nach einer Gruppenoperation**:

   Definition:
   Sei G eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X **operiert**, d.h. es gebe eine Abbildung $\varphi : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ mit $1 \cdot x = x$, $(g_1 \cdot g_2)x = g_1(g_2 x)$ für alle $g, g_1, g_2 \in G$, $x \in X$. Der **Orbit** von $x \in X$ ist definiert als $\boldsymbol{Gx} := \varphi(G \times \{x\})$. Die Äquivalenzrelation $\sim$ sei definiert durch

   $$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \exists g \in G \text{ mit } g \cdot x = y, \text{ also genau dann, wenn } y \in Gx \text{ ist.}$$

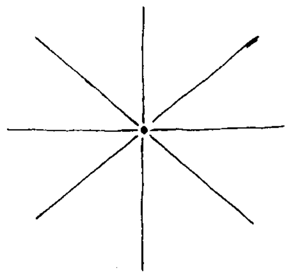
   Dann nennt man $\boldsymbol{X/G} := X/_\sim$ **Orbitraum**. $\pi : X \to X/G$ mit $\pi^{-1}([x]) = Gx$ für alle $x \in X$ ist die kanonische Projektion. $\diamond$

Beispiel:
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $G := \mathbb{K}^* :=$ Gruppe der Einheiten. G operiere auf $\mathbb{K}^n$ durch Skalar-Multiplikation:

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \text{ für } \lambda \in \mathbb{K}^*, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Die Orbiten sind:
(a) $\mathbb{K}^* \cdot \underline{0} = \{\underline{0}\} \subseteq \mathbb{K}^n$.
(b) $\mathbb{K}^* \cdot \underline{x} \cong \mathbb{K}^*$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$.
Die Geraden durch den Nullpunkt, aber ohne diesen, und der Nullpunkt selbst sind die Orbiten.

In $\mathbb{R}^2$:



Wenn man vor der Quotientenbildung den Nullpunkt entfernt, erhält man den „projektiven Raum“:

Definition:
Man nennt $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ den **reellen projektiven Raum**. Analog definiert man den **komplexen projektiven Raum** als $\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. Die Elemente von $\mathbb{RP}^n$ bzw. $\mathbb{CP}^n$ bezeichnet man meist mit $x = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$, wobei $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bzw. $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sind. Die Doppelpunkte zwischen den Komponenten deuten dabei an, daß x bereits durch das Verhältnis der $x_0, \ldots, x_n$ eindeutig bestimmt ist. ◇

$\mathbb{RP}^n$ besteht aus den Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$, die den Nullpunkt schneiden, jedoch ohne diesen. Für $n = 1$ gilt:

$\mathbb{RP}^1 \cong S^1$,
$\mathbb{CP}^1 \cong S^2 =$ „Riemannsche Zahlenkugel“.

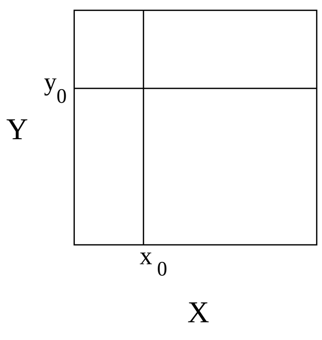
6. **Smash-Produkt topologischer Räume**:

Definition:
Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Dann heißt

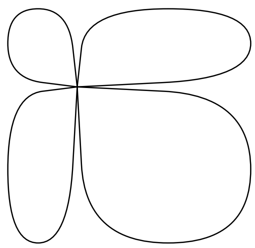
$$\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} := (X \times Y)/(X \vee Y),$$

wobei $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ ist, das **Smash-Produkt** von X und Y. ◇

Beispiel $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ endl. Intervalle:

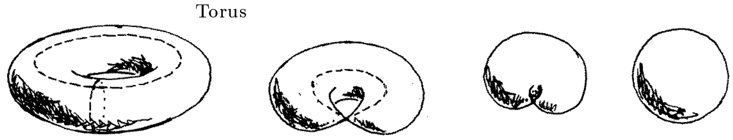


$X \vee Y \subseteq X \times Y$



$X \wedge Y$

Anderes Beispiel $S^1 \wedge S^1 = (\underbrace{S^1 \times S^1}_{\text{Torus}})/(S^1 \vee S^1) \cong S^2$:



7. **Verklebung topologischer Räume**:

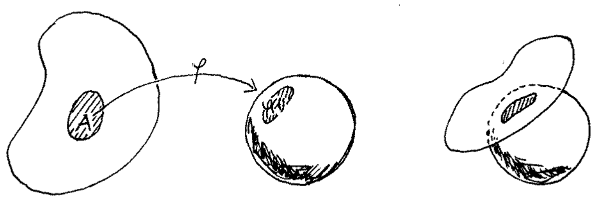
Definition:
Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ und $\varphi : A \to Y$ stetig. Dann ist die **Verklebung** $\boldsymbol{X \cup_\varphi Y}$ von X mit Y längs φ definiert als

$$X \cup_\varphi Y := X \amalg Y/_{\sim_\varphi},$$

wobei

$$x \sim_\varphi y \ :\Leftrightarrow\ y = \varphi(x) \text{ oder } x = \varphi(y)$$

die durch φ induzierte Äquivalenzrelation sei ($x \in X$ wird mit $\varphi(x) \in Y$ verklebt). $\diamond$



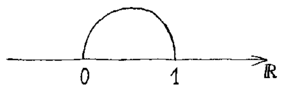
Definition:
Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt genau dann **Einbettung** von X in Y, wenn φ ein Homöomorphismus auf $\varphi(X)$ ist. $\diamond$

Bemerkung:
Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $\varphi : A \to Y$ stetig, dann gibt es Einbettungen $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup_\varphi Y$ und $i_{X \setminus A} : X \setminus A \hookrightarrow X \cup_\varphi Y$, so daß

$$X \cup_\varphi Y = i_{X \setminus A}(X \setminus A) \uplus i_Y(Y)$$

ist. Das Aussehen von $X \cup_\varphi Y$ längs der Grenze, hängt allerdings von φ ab.

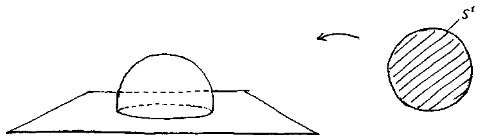
Beispiel 1: $X = [0, 1]$, $A = \{0, 1\}$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.



$X \cup_\varphi \mathbb{R}$

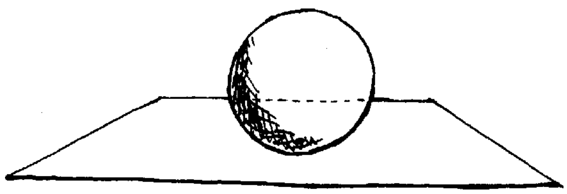
Beispiel 2: $A \subseteq X$, $\varphi : A \to \{y_0\} = Y \Rightarrow X \cup_\varphi Y \cong X/A$.

Beispiel 3: Seien $X = D^2 \supseteq S^1$, Y ein topologischer Raum, $\varphi : S^1 \to Y$ stetig. Das Verkleben von Y mit D^2 längs φ nennt man **Anheften einer 2-Zelle** an Y:



$Y \cup_\varphi D^2$

Im Spezialfall $\varphi(S^1) = \{p\} \subseteq Y$ gilt $Y \cup_\varphi D^2 = Y \vee S^2$.

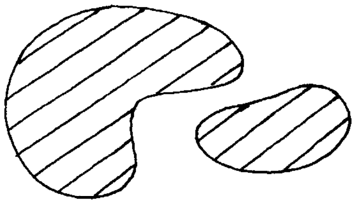


1.4 Zusammenhang und Trennungsaxiome

1.4.1 Zusammenhang

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt genau dann **zusammenhängend**, wenn für je zwei nichtleere, offene Mengen $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ mit $X = A \cup B$ stets $A \cap B \neq \emptyset$ folgt. ◇

Bemerkung:
Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.



nicht zusammenhängend

Übung: Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind: Alle Intervalle $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) mit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

Lemma 1.4.1. *Sei $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq Y$ offen, so daß $f(X) = A \cup B$. Dann ist

$$f^{-1}(A \cup B) = \underbrace{f^{-1}(A)}_{\substack{\text{offen} \\ \neq \emptyset}} \cup \underbrace{f^{-1}(B)}_{\substack{\text{offen} \\ \neq \emptyset}} = X.$$

Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$, d.h. $A \cap B \neq \emptyset$. □

Bemerkung:
Ist $f : X \to Y$ stetig, Y zusammenhängend. Dann ist X im allgemeinen nicht zusammenhängend.

Beispiel: $c_0 : [0, 1] \cup [2, 3] \to \{0\}$.

Korollar 1.4.2.

1. *Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist (d.h. Zusammenhang ist eine topologische Invariante).*
2. *$\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*

Beweis von 2. Verwende, daß $(0, 1)$ zusammenhängend ist, denn $(0, 1) \cong \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ ist Bild der stetigen Funktion $f : (0, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$.) Die Behauptung folgt dann mit Lemma 1.4.1. □

Definition:
Die maximalen zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes X heißen **Zusammenhangskomponenten**. $A \subseteq X$ ist also eine Zusammenhangskomponente, wenn gilt:

1. A ist zusammenhängend.
2. Falls $A \subseteq B$, B zusammenhängend ist, folgt $A = B$.

◇

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt genau dann **wegzusammenhängend**, wenn es zu allen $x, y \in X$ einen **Weg** φ in X gibt, der x und y verbindet, d.h. wenn eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to X$ mit $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$ existiert. ⋄

Lemma 1.4.3. *Wenn ein topologischer Raum X wegzusammenhängend ist, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Seien X wegzusammenhängend, $A, B \subseteq X$ offen und nicht leer mit $X = A \cup B$. Seien $x \in A, y \in B$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $\varphi : [0,1] \to X$ mit $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$. Wegen $X = A \cup B$ ist

$$\varphi([0,1]) = (\varphi([0,1]) \cap A) \cup (\varphi([0,1]) \cap B).$$

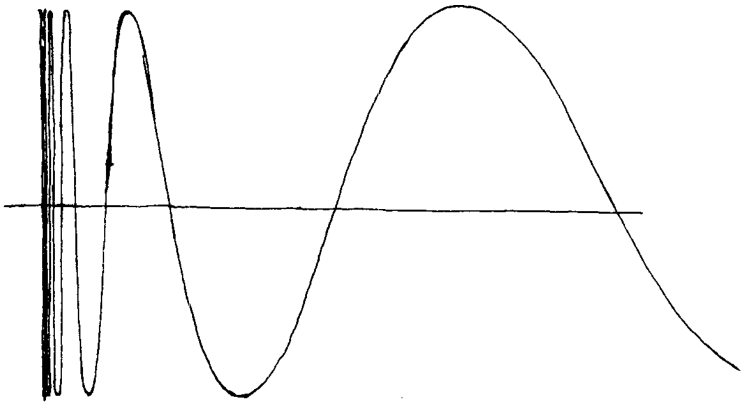
Dabei sind $\varphi([0,1]) \cap A$ und $\varphi([0,1]) \cap B$ offen in $\varphi([0,1])$ bezüglich der Teilraumtopologie. Da φ stetig und $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist auch $\varphi([0,1])$ zusammenhängend und somit

$$(\varphi([0,1]) \cap A) \cap (\varphi([0,1]) \cap B) \neq \emptyset$$

Also ist $A \cap B \neq \emptyset$, d.h. X ist zusammenhängend. □

Bemerkung:
X ist zusammenhängend $\not\Rightarrow$ X ist wegzusammenhängend.

Beispiel: $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin \frac{1}{x}$,



$$X := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\} \cup (\{0\} \times [-1,1]).$$

Behauptung: X ist zusammenhängend und nicht wegzusammenhängend.

Beweis. Übung. □

1.4.2 Trennungsaxiome

Definition:
Sei X ein topologischer Raum.

1. X heißt $\mathbf{T_1}$**-Raum** (**Fréchet-Raum**), falls gilt:

   $$\forall\, x, y \in X,\, x \neq y\, \exists \text{ Umgebungen } x \in U(x),\, y \in V(y) \text{ mit } x \notin V(y) \text{ und } y \notin U(x).$$

2. X heißt $\mathbf{T_2}$**-Raum** (**Hausdorff-Raum**, **separiert**), falls gilt:

   $$\forall x, y \in X,\, x \neq y\, \exists \text{ Umgebungen } x \in U, y \in V \text{ mit } U \cap V = \emptyset.$$

3. X heißt **$\mathbf{T_3}$-Raum**, falls gilt:

$$\forall x \in X, \forall A \subseteq X \text{ abgeschlossen mit } x \notin A \;:\; \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } x \in U,\ A \subseteq V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

4. X heißt **$\mathbf{T_4}$-Raum**, falls gilt:

$$\forall A, B \subseteq X \text{ abgeschlossen mit } A \cap B = \emptyset \;:\; \exists U, V \subseteq X \text{ offen mit } A \subseteq U,\ B \subseteq V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

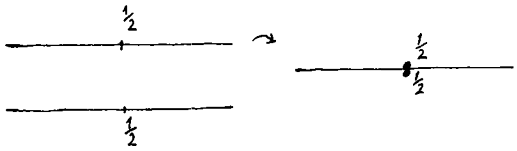
Ein topologischer Raum X heißt **normal**, falls T_1 bis T_4 erfüllt sind. $\diamond$

Beispiele:

1. $\#X \geq 2$, X trage die gröbste Topologie. Dann ist X nicht T_1.
2. $T_2 \Rightarrow T_1$ aber $T_1 \not\Rightarrow T_2$, denn es gibt einen topologischen Raum, der T_1, aber nicht T_2 erfüllt: Definiere dazu

$$\varphi : [0,1] \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \xrightarrow{\text{id}} [0,1] \setminus \{\tfrac{1}{2}\}$$

$$X = [0,1] \cup_\varphi [0,1].$$



Für $x = \{\frac{1}{2}\} \in X$, $y = \{\frac{1}{2}\} \in Y$ sei $U(x) := [0,1] \cup_\varphi ([0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\})$, $V(y) = ([0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}) \cup_\varphi [0,1]$. Dann sind $x \in U(x)$, $y \in V(y)$ Umgebungen mit $y \notin U(x)$ und $x \notin V(y)$. Daher ist X ein T_1-Raum (denn für alle anderen Punkte $x \neq y \in X$ ist T_1 klar, da $[0,1]$ bekanntlich T_1 ist). Aber T_2 gilt nicht, da für jede Wahl der Umgebungen $x \in U(x)$, $y \in V(y)$ gilt: $U \cap V \neq \emptyset$.

Lemma 1.4.4. *X ist genau dann T_1, wenn jeder Punkt von X abgeschlossen ist, d.h. wenn $\{x\} = \overline{\{x\}}$ für alle $x \in X$ gilt. Notation: $x = \bar{x}$.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Sei $y \in X \setminus \{x\}$ beliebig. Dann gibt es wegen T_1 eine Umgebung $V(y) \ni y$ mit $x \notin V(y)$, d.h. $V(y) \subseteq X \setminus \{x\}$. Also ist $X \setminus \{x\}$ offen, d.h. $\{x\}$ ist abgeschlossen.

„$\Leftarrow$“: Seien $x, y \in X$, $x \neq y$. $X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}$ sind offene Umgebungen von x bzw. y, die die Bedingung T_1 erfüllen.

$\square$

Insbesondere sind in Hausdorff-Räumen alle Punkte abgeschlossen.

Definition:

Ein topologischer Raum X heißt genau dann **metrisierbar**, wenn es eine Metrik d auf X gibt, die die Topologie erzeugt, d.h. wenn

$$U \subseteq X \text{ offen } \Leftrightarrow \forall x \in U\, \exists \varepsilon > 0 \;:\; B_\varepsilon(x) \subseteq U,$$

wobei $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ sei. $\diamond$

Bemerkung:

Ist X metrisierbar, so ist X normal, d.h. X erfüllt die Trennungsaxiome T_4, T_3, T_2, T_1.

Definition:

Sei X ein topologischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X. $x \in X$ heißt genau dann **Grenzwert (Limes)** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es für alle Umgebungen U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ stets $x_n \in U$ ist.

Notation: $\boldsymbol{x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x}$ (oder $\boldsymbol{x = \lim_{n\to\infty} x_n}$). $\diamond$

Bemerkung:

Ein Grenzwert ist im allgemeinen nicht eindeutig. Beispielsweise, wenn X die gröbste Topologie trägt.

Lemma 1.4.5. *In separierten Räumen (=Hausdorff-Räumen) hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Seien $a, b \in X$, $a \neq b$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gibt es (wegen T_2) Umgebungen $U(a)$ von a und $V(b)$ von b mit $U(a) \cap V(b) = \emptyset$. Da $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $x_n \in U(a)$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist $x_n \notin V(b)$ für $n \geq n_0$, d.h. $b \neq \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

1.5 Kompaktheit

1.5.1 Kompaktheit ist eine „Endlichkeitsbedingung“

Definition:
Sei X ein topologischer Raum.

1. X heißt genau dann **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt (d.h. für $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i offen $\exists\, i_1, \ldots, i_n$ mit $X = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_{i_\nu}$).
2. X heißt genau dann **kompakt**, wenn X quasikompakt und Hausdorffsch ist.

$\diamond$

Beispiele:
1. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist (Analysis: Satz von Heine-Borel), z.B. ist $I = [0,1]$ kompakt.
2. $(0,1)$, $[0,a)$ mit $a > 0$ sind nicht kompakt.

Lemma 1.5.1. *Sei X quasikompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ quasikompakt. (Ist Y zusätzlich separiert, so ist $f(X)$ kompakt.)*

Beweis. Sei $f(X) = \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i offen. Dann gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$, so daß

$$X = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{offen}} = \bigcup_{\nu=1}^{n} f^{-1}(U_{i_\nu}),$$

da X quasikompakt ist. Also ist $f(X) = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_{i_\nu}$. $\square$

1.5.2 Eine häufige Methode zum Nachweis der Kompaktheit

Um Kompaktheit zu beweisen, bettet man den betreffenden Raum in einen größeren, kompakten Raum ein und zeigt die Abgeschlossenheit des Teilraumes.

Satz 1.5.2. *Sei X quasikompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch A quasikompakt.*

Beweis. Sei $A = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \subseteq A$ offen, d.h $U_i = V_i \cap A$, wo $V_i \subseteq X$ offen (A trägt Teilraumtopologie). Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen. Also gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$, so daß $X = (X \setminus A) \cup (\bigcup_{\nu=1}^{n} V_{i_\nu})$. Daher ist

$$A = X \cap A = \bigcup_{\nu=1}^{n} (V_{i_\nu} \cap A) = \bigcup_{\nu=1}^{n} U_{i_\nu}.$$

$\square$

Lemma 1.5.3. *Sei X Hausdorffsch und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $X \setminus A$ offen ist: Sei $p \in X \setminus A$. Da X Hausdorffsch ist, gibt es zu jedem $x \in A$ offene Mengen U_x, V_x mit $x \in U_x$, $p \in V_x$ und $U_x \cap V_x = \emptyset$. Dann ist $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$. A ist kompakt, also gibt es $x_1, \ldots, x_n \in A$, so daß $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} =: V$ ist Umgebung von p und $V \cap A = \emptyset$, d.h. $V \subseteq X \setminus A$. Das bedeutet, daß $X \setminus A$ offen ist. $\square$

Lemma 1.5.4. *Sei X quasikompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß f^{-1} stetig bzw. f abgeschlossen ist. Sei dazu $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nach Satz 1.5.2 ist A dann quasikompakt. Aus Lemma 1.5.1 ergibt sich, daß auch $f(A)$ quasikompakt ist. Da Y Hausdorffsch ist, ist $f(A) \subseteq Y$ sogar kompakt und daher (nach Lemma 1.5.3) abgeschlossen. $\square$

Beispiel:
Die Abbildung $\varphi : I \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ induziert ein stetige, bijektive Abbildung $\bar{\varphi} : I/_{\{0,1\}} \to S^1$. Da I kompakt ist, ist auch $I/\{0,1\}$ kompakt. S^1 ist Hausdorffsch. Also ist $\bar{\varphi}$ ein Homöomorphismus. Analog: Frühere Beispiele.

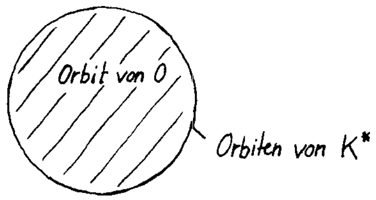
Lemma 1.5.5. *Sei X kompakt, $\sim$ eine Äquivalenz-Relation auf X und $\pi : X \to X/_\sim$ die Projektion. Aus $A \subseteq X$ abgeschlossen folge stets, daß $\pi^{-1}(\pi(A))$ abgeschlossen ist. Dann ist $X/_\sim$ Hausdorffsch (und daher kompakt).*

Beweis. Übung. □

Eine notwendige Bedingung für „$X/_\sim$ ist Hausdorffsch“:
Sei $X/_\sim$ Hausdorffsch. Dann ist für alle $x \in X$ der Punkt $[x] = \pi(x) \in X/_\sim$ abgeschlossen. Da π stetig ist, ist auch $\pi^{-1}(\pi(x)) = \pi^{-1}([x])$ abgeschlossen, d.h. die Fasern aller Punkte $[x] \in X/_\sim$ unter π sind abgeschlossen.

Beispiel (vgl. Seite 28, „Quotient nach einer Gruppenoperation“):
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $G := \mathbb{K}^* :=$ Gruppe der Einheiten. Dann sind die Orbiten von $\mathbb{K}^n/G$ die Geraden in $\mathbb{K}^n$, die den Nullpunkt schneiden, aus denen jedoch der Nullpunkt entfernt wurde und der Nullpunkt selbst. Da eine Gerade in $\mathbb{K}^n$, aus der der Nullpunkt entfernt wurde, nicht abgeschlossen ist, ist nach obiger Bemerkung $\mathbb{K}^n/G$ nicht Hausdorffsch.

Schematisches Bild für $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^*$:



Besser wird es, wenn man den Nullpunkt entfernt, denn $(\mathbb{K}^n \setminus \{0\})/G = \mathbb{KP}^{n-1}$. Da $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ die Teilraumtopologie und $\mathbb{KP}^{n-1}$ die Quotiententopologie trägt, sind hier die Orbiten (=alle Ursprungsgeraden, aus denen der Nullpunkt entfernt wurde) abgeschlossen. Wie man leicht zeigt, ist $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\{\pm 1\}$ und $\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/\{\pm 1\}$, wobei $\{\pm 1\}$ als multiplikative Gruppe aufzufassen ist. Außerdem ist $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ und $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ die Riemannsche Zahlenkugel. Da S^n stets kompakt ist, ist auch $\mathbb{KP}^n$ stets kompakt.

Korollar 1.5.6. *Sei X kompakt und $B \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist X/B genau dann Hausdorffsch, wenn B abgeschlossen ist.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Sei X/B ein T_2-Raum. Dann ist $[B] \in X/B$ abgeschlossen, d.h. $\pi^{-1}([B]) = B$ ist abgeschlossen in X.

„$\Leftarrow$“: Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, daß $\pi^{-1}(\pi(A))$ abgeschlossen ist. (Dann erhält man mit Lemma 1.5.5, daß X/B Hausdorffsch ist.) Wir unterscheiden zwei Fälle:

$A \cap B = \emptyset$: Dann ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, also abgeschlossen.

$A \cap B \neq \emptyset$: Dann ist $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \cup B$, also ebenfalls abgeschlossen.

□

Lemma 1.5.7 (Satz von Tychonoff). *Sei $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Dann ist X genau dann kompakt, wenn alle X_λ kompakt sind.*

Bemerkung:
Der Beweis ist für endliches Λ einfacher als für unendliches Λ. Ein unendliches Produkt setzt den Glauben an das Auswahlaxiom voraus.

1.6 Bemerkungen zum Metrisierbarkeitsproblem

Problem:

Unter welchen topologischen Voraussetzungen besitzt ein topologischer Raum X eine Metrik d, so daß d die Topologie von X induziert? Anders ausgedrückt: Gibt es eine Metrik d, so daß $U \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq U$ ist?

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt **lokal-kompakt**, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. $\diamond$

Satz 1.6.1 (Urysohn, Tychonoff). *Ein topologischer Raum X besitze eine abzählbare Basis der Topologie. Dann sind äquivalent:*

1. *X ist metrisierbar*
2. *X ist normal*
3. *X ist lokal-kompakt und Hausdorffsch.*

Bemerkung:
Jede analytische Menge — allgemeiner jeder komplexe Raum — ist metrisierbar.

Satz 1.6.2 (Nagata, 1950, Lösung des Metrisierbarkeitsproblems). *Ein topologischer Raum X ist genau dann metrisierbar, wenn gilt:*

1. *X erfüllt T_1 bis T_3 und*
2. *X besitzt eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie, die eine abzählbare Vereinigung lokal-endlicher Familien ist, d.h. $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, so daß $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ die Teilfamilie $\{F \mid F \in \mathcal{F}_n,\ x \in F\}$ endlich ist.*

1.7 Simpliziale Komplexe und Polyeder

Definition:
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $q \leq n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein q-dimensionaler Untervektorraum. Weiter sei $\{v_1, \ldots, v_q\}$ eine Basis von V und $x_i := x_0 + v_i$, $i = 1, \ldots, q$. Dann heißt

$$T = T_q := x_0 + V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i(x_i - x_0),\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

ein ***q*-dimensionaler affiner Raum** in $\mathbb{R}^n$. Ebenso kann man T schreiben als

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i, \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1\}.$$

$\diamond$

Definition:
Seien $x_0, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$. Diese Punkte heißen **affin unabhängig**, falls $(x_1 - x_0), \ldots, (x_q - x_0)$ linear unabhängig sind.

Wenn $x_0, \ldots, x_q$ affin unabhängig sind, ist die Darstellung von $x \in T_q$ als

$$x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1$$

eindeutig. Die Koeffizienten $\lambda_0, \ldots, \lambda_q$ heißen **baryzentrische Koordinaten** von x bzgl. $x_0, \ldots, x_q$. $\diamond$

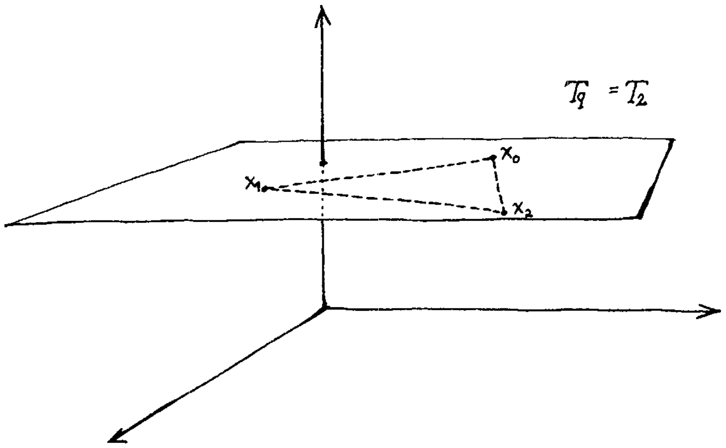
Definition:
Seien $x_0, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$, $q \leq n$ affin unabhängig.

1. Dann heißt
$$\sigma := \boldsymbol{\sigma_q} := \boldsymbol{(x_0, \dots, x_q)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i,\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0\}$$
das **(offene) q-Simplex** mit den **Ecken** $x_0, \dots, x_q$.
2. Weiter heißt
$$\bar{\sigma} := \boldsymbol{\bar{\sigma}_q} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i,\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$$
das **abgeschlossene q-Simplex** mit den Ecken $x_0, \dots, x_q$.
3. Für $q > 0$ heißt $\partial\sigma := \boldsymbol{\dot{\sigma}} := \bar{\sigma} - \sigma$ der **Rand von** σ.

Die Zahl $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\sigma}) := q$ nennen wir **Dimension** des Simplex σ. ◇

Bemerkung:
1. Das offene q-Simplex $\sigma_q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen in $\mathbb{R}^n$, wenn $n = q$ ist.
2. $\sigma_q \subseteq T_q$ ist stets offen, da $T_q \cong \mathbb{R}^q$ ist.

Beispiel in $\mathbb{R}^3$:



$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \{x_0\} = \overline{\sigma_0}.\\
\sigma_1 &= \{x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \mid \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_i > 0\} = \text{ offenes Intervall } (x_0, x_1).\\
\overline{\sigma_1} &= \{x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \mid \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_i \geq 0\} = \text{ abgeschlossenes Intervall } [x_0, x_1].\\
\sigma_2 &= \text{ Dreieck ohne Kanten.}\\
\overline{\sigma_2} &= \text{ Dreieck mit Kanten.}\\
\sigma_3 &= \text{ Tetraeder ohne Oberfläche.}\\
\overline{\sigma_3} &= \text{ Volltetraeder.}\\
\partial\sigma_3 &= \text{ Oberfläche des Tetraeders.}
\end{aligned}$$

Definition:
1. $\boldsymbol{(X, A)}$ heißt **topologisches Paar** (oder **Raumpaar**), falls X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum ist.
2. Seien (X, A), (Y, B) zwei topologische Paare, $f : X \to Y$ stetig. f heißt **Abbildung von Paaren**, wenn $f(A) \subseteq B$ ist.
3. Zwei topologische Paare (X, A), (Y, B) heißen **homöomorph**, falls es einen Homöomorphismus $\varphi : X \to Y$ mit
$$\varphi(A) = B$$

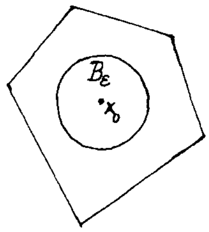
gibt. Dann erhält man auch $A \cong B$.

$\diamond$

Lemma 1.7.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^q$ kompakt und konvex, $X^\circ \neq \emptyset$. Dann gilt: $(X, \partial X) \cong (D^q, S^{q-1})$.*

Beweis. Sei $x_0 \in B_\epsilon(x_0) \subseteq X^\circ$. Definiere $\varphi : \partial X \to S^{q-1}$, $x \mapsto \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$. φ ist wohldefiniert (denn $x_0 \in X^\circ$), stetig und injektiv (2 Geraden treffen sich in höchstens einem Punkt, hier x_0, oder sie sind gleich). φ ist auch surjektiv:

Sei $y \in S^{q-1}$, dann gibt es ein $x' \in \partial\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ mit $\frac{x' - x_0}{\|x' - x_0\|} = y$. Da X kompakt und konvex ist, gibt es genau ein $x \in \partial X$, das auf der Halbgeraden liegt, die von x_0 ausgehend durch x' verläuft, d.h. $\exists \lambda > 0$ mit $x = \lambda(x' - x_0) + x_0$ und



$$\varphi(x) = \frac{\lambda x' - \lambda x_0}{\|\lambda x' - \lambda x_0\|} = \frac{(x' - x_0)}{\|x' - x_0\|} = y.$$

Also ist φ nach Lemma 1.5.4 ein Homöomorphismus. Es bleibt noch zu zeigen, daß es auch einen Homöomorphismus $\tilde{\varphi} : X \to D^q$ mit $\tilde{\varphi}(\partial X) = S^{q-1}$ gibt: Definiere die „radiale Fortsetzung“: $\tilde{\varphi} : X \to D^q$, $t \cdot x + (1-t)x_0 \mapsto t \cdot \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ für $t \in [0,1]$, $x \in \partial X$. $\tilde{\varphi}$ ist wohldefiniert, stetig, offen und bijektiv, d.h. ein Homöomorphismus. $\square$

Korollar 1.7.2. $(\bar{\sigma}_q, \dot{\sigma}_q) \cong (D^q, S^{q-1})$.

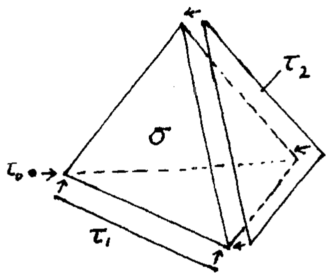
Beweis. Dies folgt aus Lemma 1.7.1. $\square$

Bemerkung:
Die Eckpunkte eines Simplex sind als Extremalpunkte eindeutig bestimmt.

Definition:
Seien $\tau, \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Simplizes.

1. Wir nennen τ genau dann einen **Teilsimplex** ($\boldsymbol{\tau \leq \sigma}$, **Seite**) von σ, wenn die Eckpunkte von τ auch Eckpunkte von σ sind.
2. Wir nennen τ genau dann **eigentliche Seite** ($\boldsymbol{\tau < \sigma}$) von σ, wenn $\tau \leq \sigma$ und $\tau \neq \sigma$ ist.

$\diamond$



Definition:
Ein **simplizialer Komplex** (oder **Simplizialkomplex**) ist eine endliche Menge K von Simplizes im $\mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ist $\sigma \in K$ und $\tau \leq \sigma$, so ist auch $\tau \in K$.
2. Sind $\sigma, \tau \in K$, $\sigma \neq \tau$, so gilt $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Bezeichnungen:

- 0-dimensionale Simplizes in K heißen **Ecken** von K.

- 1-dimensionale Simplizes in K heißen **Kanten** von K.
- Die **Dimension** von K ist die maximale Dimension von Simplizes in K, d.h.

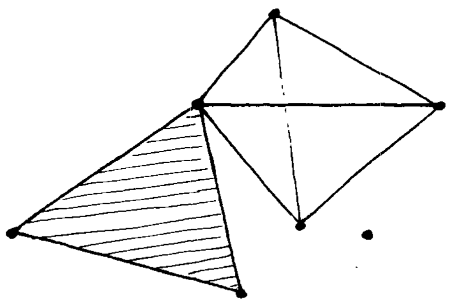
$$\boldsymbol{\dim(K)} := \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}.$$

- 1-dimensionale simpliziale Komplexe heißen **Graphen**.

$\diamond$

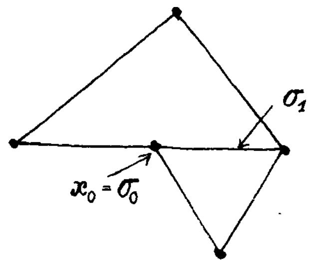
Beispiele:

1.



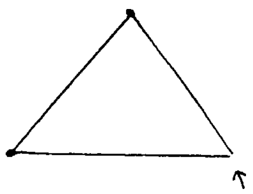
3-dimensionaler simplizialer Komplex.

2.



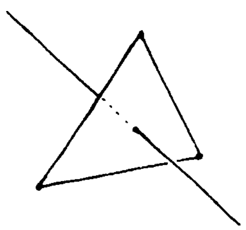
Kein simplizialer Komplex, denn $\sigma_0 \cap \sigma_1 \neq \emptyset$.

3.



Kein simplizialer Komplex, denn Bedingung 1 ist verletzt (der rechte untere Eckpunkt gehört nicht zur Menge).

4.



Kein Komplex, Bedingung 2 ist verletzt.

5. Ein Simplex σ ist im allgemeinen (einzige Ausnahme: σ_0) kein simplizialer Komplex, wohl aber die Menge $K := \{\text{alle Seiten von } \sigma\}$.

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\boldsymbol{|K|} := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$$

mit der Teilraum-Topologie das zu K gehörige **Polyeder** (oder der **Träger** von K).

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt genau dann **triangulierbar** (oder **topologisches Polyeder**), wenn es einen simplizialen Komplex K gibt, so daß $X \cong |K|$ ist. Jeder solche simpliziale Komplex K heißt **Triangulierung** von X. ◇

Bemerkung:

1. $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist eine disjunkte Vereinigung.
2. Es gilt $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \bar{\sigma}$.

   Beweis. Für $\sigma \in K$ und $\tau < \sigma$ folgt $\tau \in K$, d.h. $\dot{\sigma} = \partial\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} \tau \subseteq |K|$. Insbesondere ist $\bar{\sigma} = \sigma \cup \dot{\sigma} \subseteq |K|$. □

3. $|K|$ ist kompakt, denn $|K|$ ist endliche Vereinigung kompakter Mengen.
4. $|K|$ ist eine endliche Vereinigung von Teilmengen $\bar{\sigma}$, die homöomorph zu D^q für geeignete $q \leq \dim(K)$ sind und die entlang ihrer Teilsimplizes mittels der identischen Abbildung verklebt sind.
5. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein topologisches Polyeder, so ist X kompakt, also insbesondere lokal-kompakt, und Hausdorffsch (als Teilraum von $\mathbb{R}^n$). Also ist X nach Satz 1.6.1 metrisierbar.

Definition:
Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Dann heißt X genau dann

1. n-dimensionale, **topologische Mannigfaltigkeit**, wenn es für jedes $x \in X$ eine Umgebung $x \in U \subseteq X$, eine offene Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $f : U \xrightarrow{\cong} B$ gibt. f nennt man auch eine **Karte** von X.
2. n-dimensionale, **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn X eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist und für je zwei Karten φ, ψ die Komposition $\varphi \circ \psi^{-1}$ auf ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar ist.

◇

Die folgenden Sätze werden ohne Beweis angeführt:

Satz 1.7.3 (Cairns, 1935). *Jede kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.*

Satz 1.7.4 (Moise, 1952). *Jede kompakte, 3-dimensionale, topologische Mannigfaltigkeit ist triangulierbar und damit auch jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3.*

Bemerkung:
Für Mannigfaltigkeiten der Dimension > 3 ist diese Frage offen.

Satz 1.7.5 (Brakhage, 1954). *Jede kompakte, semialgebraische Menge ist triangulierbar. (Semialgebraisch bedeutet: durch Gleichungen und Ungleichungen von Polynomen definiert.)*

Satz 1.7.6 (Lojacevicz, 1964). *Jede kompakte, semianalytische Menge ist triangulierbar.*

Man kann die Voraussetzung „kompakt" weglassen, falls man unendliche, lokal endliche Polyeder zuläßt.

Bemerkung:
Sei $x \in |K|$. Dann gibt es genau ein $\sigma \in K$ mit $x \in \sigma$. Dieses σ heißt **Trägersimplex** von x. Notation $\boldsymbol{Tr(x)}$.

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex. Eine Teilmenge $K_0 \subseteq K$ heißt **Teilkomplex**, falls K_0 simplizialer Komplex ist. ◇

Erläuterung: Für alle Simplizes $\sigma \in K_0$, $\tau \in K$ und $\tau < \sigma$ folgt $\tau \in K_0$.

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex, $X \cong |K|$ das zugehörige Polyeder. Eine Teilmenge $X_0 \subseteq X$ heißt **Teilpolyeder** von X, falls es einen Teilkomplex $K_0 \subseteq K$ gibt, so daß $(X, X_0) \cong (|K|, |K_0|)$ ist. ◇

Lemma 1.7.7. *Sei K ein simplizialer Komplex, $X \cong |K|$ dessen Polyeder. Dann sind äquivalent:*

1. *X ist zusammenhängend*
2. *X ist wegzusammenhängend*
3. *je zwei Simplizes $\sigma, \tau \in K$ sind verbindbar, d.h. zu $\sigma, \tau \in K$ gibt es $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in K$, so daß $\bar\sigma \cap \bar\sigma_1 \neq \emptyset$, $\bar\sigma_i \cap \bar\sigma_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, r-1$ und $\bar\sigma_r \cap \bar\tau \neq \emptyset$.*

Beweis. Übung. □

Definition:
Eine Abbildung $\varphi : K \to L$ zwischen simplizialen Komplexen heißt **simpliziale Abbildung**, falls gilt:

1. φ bildet die Ecken von K in Ecken von L ab.
2. Ist $\sigma = (x_0, \ldots, x_q) \in K$ ein Simplex, so ist $\varphi(\sigma) = (\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q)) \in L$ ein Simplex in L.

◇

Bemerkung:
$\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q)$ sind nicht notwendig affin unabhängig. Man definiert daher $\boldsymbol{(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q))} := \{\sum_{i=0}^q \lambda_i \varphi(x_i) \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$.

Lemma 1.7.8. *Seien K, L zwei simpliziale Komplexe und $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung. Dann gilt:*

1. *φ ist eindeutig durch die Bilder der Ecken bestimmt.*
2. *Für Simplizes $\sigma, \tau \in K$ mit $\sigma \leq \tau$ gilt $\varphi(\sigma) \leq \varphi(\tau)$.*
3. *Für $\sigma \in K$ ist $\dim(\sigma) \geq \dim(\varphi(\sigma))$. (Auch „>“ ist möglich.)*

Beweis. Übung. □

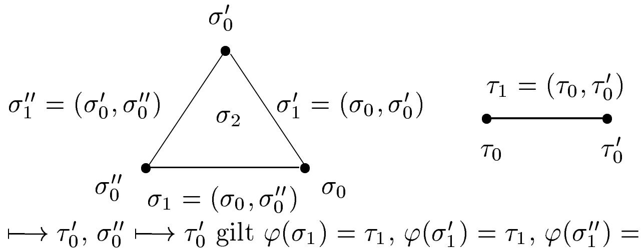
Bemerkung:
Seien K, L zwei simpliziale Komplexe, m die Anzahl der Ecken von K und n die Anzahl der Ecken von L. Dann gibt es höchstens n^m simpliziale Abbildungen $K \to L$. Meistens sind es jedoch weniger.

Definition:
Sei $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung. Dann ist die von φ **induzierte Abbildung der Polyeder** $|\varphi| : |K| \to |L|$ definiert durch

$$|\varphi| \ : \ x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i \mapsto \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \varphi(x_i).$$

$x \in |K|$ sei dabei in der eindeutigen Darstellung mittels baryzentrischer Koordinaten gegeben. ◇

Beispiel:



Mit $\varphi \ : \ \sigma_0 \longmapsto \tau_0$, $\sigma_0' \longmapsto \tau_0'$, $\sigma_0'' \longmapsto \tau_0'$ gilt $\varphi(\sigma_1) = \tau_1$, $\varphi(\sigma_1') = \tau_1$, $\varphi(\sigma_1'') = \tau_0'$ und $\varphi(\sigma_2) = \tau_1$.

Lemma 1.7.9. *Sei $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung. Dann ist $|\varphi|$ eine stetige Abbildung.*

Beweis.

1. $|\varphi|$ ist wohldefiniert: Jedes $x \in |K|$ hat einen eindeutigen Träger $\sigma \in K$. Auf $|\sigma|$ sind die baryzentrischen Koordinaten von x eindeutig bestimmt. Daher ist auch $|\varphi|(x)$ eindeutig durch φ bestimmt.

2. $|\varphi|$ ist stetig: Wir nutzen $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \bar{\sigma}$ aus: Sei $\sigma \in K$ ein Simplex. Dann ist

$$|\varphi|_{|_{\bar{\sigma}}} : \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i \longmapsto \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \varphi(x_i) \in \varphi(\bar{\sigma}) = \overline{\varphi(\sigma)}.$$

Also bildet $|\varphi|_{|_{\bar{\sigma}}}$ das Polyeder $\bar{\sigma}$ affin-linear auf $\overline{\varphi(\sigma)}$ ab, d.h. $|\varphi|_{|_{\bar{\sigma}}}$ ist stetig. Nach Lemma 1.3.2 ist damit auch $|\varphi|$ stetig.

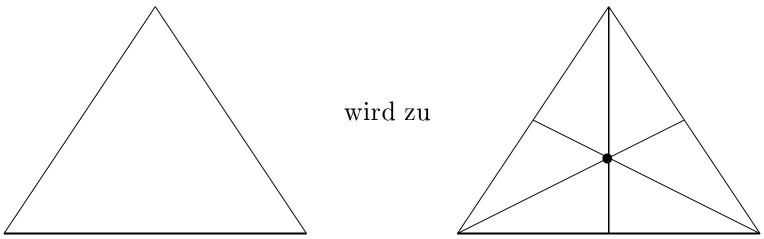
□

Bemerkung:
Ist φ simplizial und bijektiv, dann ist auch φ^{-1} simplizial. Insbesondere ist $|\varphi|$ dann ein Homöomorphismus.

1.8 Simpliziale Approximation

Das Ziel der simplizialen Approximation ist es, eine beliebige, stetige Abbildung zwischen Polyedern durch eine simpliziale Abbildung anzunähern.

Dazu muß man häufig eine simpliziale Zerlegung „verfeinern“:

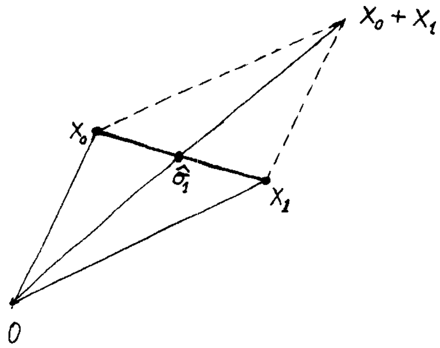


Definition:
Sei $\sigma_q = \sigma = (x_0, \ldots, x_q)$ ein q-dimensionales Simplex. Dann heißt

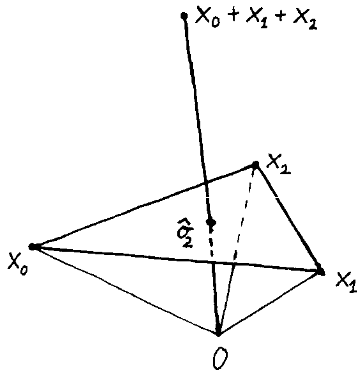
$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{q}} := \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{q+1} x_i = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^{q} x_i$$

der **Schwerpunkt** oder **Mittelpunkt** von σ. ◇

Beispiel:
1. $\hat{\sigma}_0 = x_0$ für $\sigma_0 = \{x_0\}$
2. $\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$



3. $\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2)$



Definition:
Für ein Simplex $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$\boldsymbol{d(\sigma)} := \sup\{\|x - y\| \ : \ x, y \in \sigma\}$$

der **Durchmesser** von σ. ◇

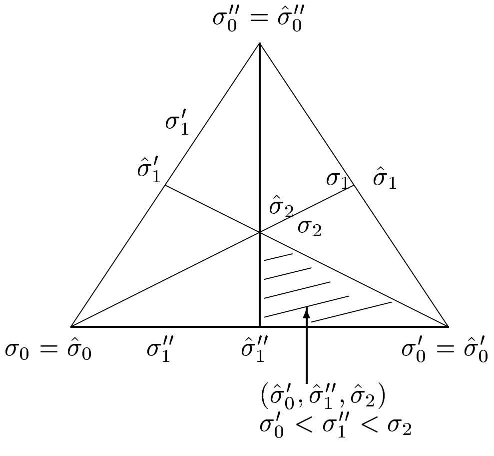
Bemerkung:
$d(\sigma) = \max\{\|x_i - x_j\| \ : \ x_i, x_j$ sind Ecken von $\sigma\}$, da das Simplex σ die konvexe Hülle seiner Ecken ist.

1.8.1 Baryzentrische Unterteilung oder Normalunterteilung eines simplizialen Komplexes

Sei K ein simplizialer Komplex. Dann erhält man dessen baryzentrische Unterteilung folgendermaßen:

1. Man nehme von jedem Simplex in K den Schwerpunkt.
2. Diese Schwerpunkte bilden die Ecken des neuen Komplexes, der durch baryzentrische Unterteilung (siehe unten) entsteht. (Die Ecken des vorherigen Komplexes sind dadurch mit eingeschlossen, denn sie sind die Schwerpunkte der 0-dimensionalen Simplizes).

Beispiel:



Satz 1.8.1 (Baryzentrische Unterteilung). *Zu jedem simplizialen Komplex K gibt es einen simplizialen Komplex K' mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Ecken von K' sind genau die Schwerpunkte $\hat{\sigma}$ der Simplizes σ von K.*
2. *Seien $\sigma_0, \ldots, \sigma_q \in K$ Simplizes, d.h. $\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_q$ sind Ecken von K'. Dann spannen $\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_q$ genau dann ein q-Simplex von K' auf, wenn bei geeigneter Numerierung $\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_q$ gilt.*

3. $|K'| = |K|$ *und* $\dim(K) = \dim(K')$.

4. *Für jedes Simplex* $\sigma' \in K'$ *ist*

$$d(\sigma') \leq \frac{\dim(K)}{\dim(K)+1} \max\{d(\sigma) \mid \sigma \in K\}.$$

Beweis.

1. Schritt: Mit Induktion über q zeigen wir, daß für $\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_q \in K$ stets $\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_q$ affin unabhängig sind: Induktionsanfang: Ist nur ein Simplex σ_0 gegeben, so ist dieser affin unabhängig.

Induktionsschritt: Seien $\sigma_0 < \cdots < \sigma_q$ Simplizes in K. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann $\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{q-1}$ affin unabhängig. Außerdem ist $\hat{\sigma}_q \in \sigma_q \setminus \overline{\sigma_{q-1}}$, d.h. $\hat{\sigma}_q$ ist affin unabhängig von $\{\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{q-1}\} \subseteq \overline{\sigma_{q-1}}$. Hieraus folgt, daß $(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_q)$ ein q-Simplex ist.

2. Schritt: Wir zeigen, daß für jedes $\sigma \in K$ die Menge

$$L_\sigma := \{(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_q) \mid \sigma_0 < \cdots < \sigma_q \leq \sigma;\ q \geq 0\}$$

eine disjunkte Zerlegung von $\bar{\sigma}$ ist: Induktion über $\dim(\sigma)$: Für $\dim(\sigma) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $\sigma \in K$ ein Simplex von mindestens Dimension 1 und $x \in \sigma$, o.B.d.A. $x \neq \hat{\sigma}$. Dann gibt es genau einen Randpunkt $y \in \dot{\sigma}$, so daß x auf der Verbindungsstrecke $\overline{\hat{\sigma}y}$ liegt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es (wegen $\dim(Tr(y)) < \dim(\sigma)$) eindeutig bestimmte Simplizes $\sigma_0 < \cdots < \sigma_r \leq Tr(y)$, so daß $y \in (\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_r)$ ist. Damit ist $(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_r, \hat{\sigma})$ das einzige Simplex in L_σ, das x enthält.

Aus Schritt 1 und Schritt 2 folgt, daß

$$K' := \{(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_q) \mid \sigma_0 < \cdots < \sigma_q,\ \sigma_i \in K \text{ für } i = 0, \ldots, q;\ q \geq 0\}$$

ein simplizialer Komplex ist, sowie daß für K' die Bedingungen 1. bis 3. gelten.

Zu Bedingung 4:

Sei $\sigma' \in K'$. Dann gibt es wegen Schritt 2 ein $\sigma \in K$ mit $\sigma' \subseteq \sigma$. Seien $x, y \in \overline{\sigma'}$, $x \neq y$ Eckpunkte von σ', d.h. $x = \hat{\sigma}_1$, $y = \hat{\sigma}_2$ mit geeigneten Seiten σ_1, σ_2 von σ, wobei wir o.B.d.A. $\sigma_1 < \sigma_2$ annehmen, d.h. $\sigma_1 = (x_0, \ldots, x_r)$, $\sigma_2 = (x_0, \ldots, x_r, \ldots, x_s)$ mit $0 \leq r < s \leq \dim(\sigma)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{r+1}(x_0 + \cdots + x_r), \\ y &= \frac{1}{s+1}(x_0 + \cdots + x_s) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|\frac{1}{r+1}(x_0 + \cdots + x_r) - \frac{1}{r+1}(r+1) \cdot y\| \\ &= \|\frac{1}{r+1}(x_0 - y + x_1 - y + \cdots + x_r - y)\| \\ &\leq \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \|x_i - y\| \\ &\leq \max_{i=0,\ldots,r} \|x_i - y\|, \end{aligned}$$

und für jedes $0 \leq i \leq r$ ist

$$\begin{aligned} \|x_i - y\| &\leq \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^{s} \|x_i - x_j\| \\ &\leq \frac{s}{s+1} \max_{j=0,\ldots,s} \|x_i - x_j\|. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, da für $j = i$ der Summand $\|x_i - x_j\|$ verschwindet. Also ist

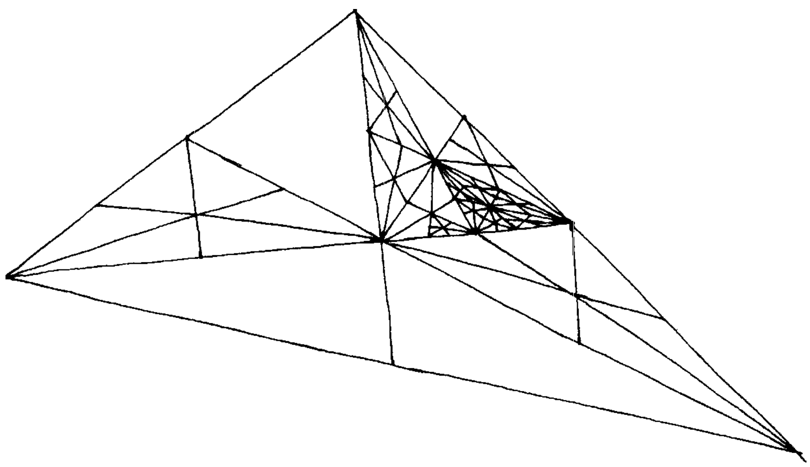
$$\|x - y\| \leq \frac{s}{s+1} \max_{i,j} \|x_i - x_j\| \leq \frac{\dim(K)}{\dim(K)+1} \max\{d(\sigma) \mid \sigma \in K\}.$$

Da x, y beliebig als Ecken von σ' gewählt wurden, folgt Behauptung 4. aus dieser Ungleichung. □

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex.

1. Den nach Satz 1.8.1 existierenden simplizialen Komplex $K^{(1)} := K'$ nennt man **baryzentrische Unterteilung** (**Normalunterteilung** von K).
2. Für $n > 1$ sei $\boldsymbol{K^{(n)}} := (K^{(n-1)})'$ die $\boldsymbol{n}$**-te baryzentrische Unterteilung** von K.

◇



Vierte baryzentrische Unterteilung eines 2-Simplex, nicht vollständig dargestellt, um deren Konstruktion zu verdeutlichen.

Korollar 1.8.2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß jedes Simplex in $K^{(n)}$ einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat.*

1.8.2 Existenz einer simplizialen Approximation

Definition:
Sei $f : |K| \to |L|$ eine stetige Abbildung. Eine simpliziale Abbildung $\varphi : K \to L$ heißt genau dann **simpliziale Approximation** von f, wenn für $x \in |K|$ stets

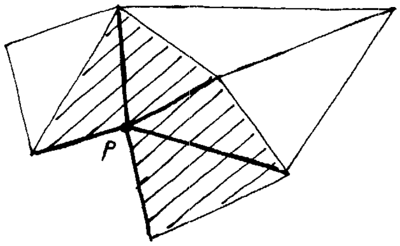
$$|\varphi|(x) \in \overline{Tr(f(x))}$$

gilt, das heißt $|\varphi|(x)$ liegt in $\bar{\sigma}$, falls $f(x) \in \sigma$ liegt. ◇

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex, $p \in K$ eine Ecke. Dann heißt

$$\boldsymbol{St(p)} := \boldsymbol{St_K(p)} := \{x \in |K| \ : \ p \leq Tr_K(x)\} = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ p \text{ Ecke von } \sigma}} \sigma \subseteq |K|$$

Eckenstern von p in K. ◇



Definition:
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann heißt $\boldsymbol{d(A)} := \sup(\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \cup \{0\})$ der **Durchmesser** von A. $\diamond$

Lemma 1.8.3 (Lebesguesches Lemma). *Sei X ein kompakter, metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\lambda > 0$, so daß es für alle $A \subseteq X$ mit $d(A) < \lambda$ ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $A \subseteq U$.*

Ohne Beweis. □

Lemma 1.8.4. *Sei K ein simplizialer Komplex. Dann gilt*

1. *Die Eckensterne von K bilden eine offene Überdeckung von $|K|$.*
2. *Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $|K|$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ die Eckensterne von $K^{(n)}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ sind, d.h. so daß jeder Eckenstern von $K^{(n)}$ vollständig in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Beweis.

1. Sei $p \in |K|$ eine Ecke, $L := \{\sigma \in K \mid p \text{ ist keine Ecke von } \sigma\}$. Dann ist $St(p) = |K| \setminus |L|$ und $L \subseteq K$ ist ein Unterkomplex. Für jeden Unterkomplex $L \subseteq K$ ist $|L| \subseteq |K|$ abgeschlossen, d.h. $St(p)$ ist offen.
2. Nach dem Lebesgueschen Lemma (Lemma 1.8.3) gibt es ein $\lambda > 0$, so daß zu jedem $A \subseteq |K|$ mit $d(A) < \lambda$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $A \subseteq U$. Nach Korollar 1.8.2 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle Simplizes $\sigma \in K^{(n)}$ gilt, daß $d(\sigma) < \frac{\lambda}{2}$ ist. Daraus folgt für jede Ecke p von $K^{(n)}$, daß $d(St(p)) < \lambda$ ist, d.h. $St(p) \subseteq U$ für ein geeignetes $U \in \mathcal{U}$.

□

Lemma 1.8.5. *Sei K ein simplizialer Komplex, $\sigma_q = (x_0, \ldots, x_q) \in K$ ein q-Simplex. Dann ist $\sigma_q = \bigcap_{i=0}^q St(x_i)$.*

Ohne Beweis. □

Satz 1.8.6 (Existenz einer simplizialen Approximation). *Zu jeder stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$ zwischen Polyedern existiert ein n_0 und für jedes $n \geq n_0$ eine simpliziale Approximation $\varphi_n : K^{(n)} \to L$ von f.*

Beweis. $\mathcal{U} := \{f^{-1}(St_L(y)) \mid y \text{ Ecke von } L\}$ ist offene Überdeckung von $|K|$, da $St_L(y)$ offen und f stetig ist. Nach Lemma 1.8.4 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für jedes $n \geq n_0$, $M := K^{(n)}$, die Menge $\{St_M(x) \mid x \text{ ist Ecke von } M\}$ eine offene Überdeckung von $|M| = |K|$ ist, die $\mathcal{U}$ verfeinert. Also gibt es für jede Ecke x von M eine Ecke $\varphi(x)$ von L, so daß $f(St_M(x)) \subseteq St_L(\varphi(x))$.

Behauptung:

(a) Die Zuordnung $x \mapsto \varphi(x)$ definiert eine simpliziale Abbildung $\varphi : M \to L$.

(b) φ ist eine simpliziale Approximation von f.

Zu (a) Sei $\sigma = \sigma_q$ ein Simplex von M mit Ecken $x_0, \ldots, x_q$. Wir wollen zeigen, daß $(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q))$ ein Simplex von L ist: Sei $x \in \sigma_q$, dann ist $f(x) \in f\left(\bigcap_{i=0}^q St_M(x_i)\right)$ (denn $x \in \bigcap_{i=0}^q St_M(x_i)$ nach Lemma 1.8.5), und somit ist $f(x) \in \bigcap_{i=0}^q f(St_M(x_i)) \subseteq \bigcap_{i=0}^q St_L(\varphi(x_i))$. Sei $\sigma' \in L$ das Trägersimplex von $f(x)$, d.h. für alle $0 \leq i \leq q$ ist σ' eines der Simplizes von $St_L(\varphi(x_i))$. Also ist $\varphi(x_i)$ Eckpunkt von σ' für $i \in \{0, \ldots, q\}$. Die $\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q)$ spannen also ein Randsimplex von σ' auf.

Zu (b) Zu zeigen ist: $|\varphi|(x) \in \overline{Tr(f(x))} = \overline{\sigma'}$. Dies folgt aus den vorherigen Überlegungen.

□

1.9 Homotopie von Abbildungen und Freimachen durch Homotopie

Definition:
Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Dann heißt f **homotop** zu g (Notation: $\boldsymbol{f \simeq g}$), falls es eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ gibt mit

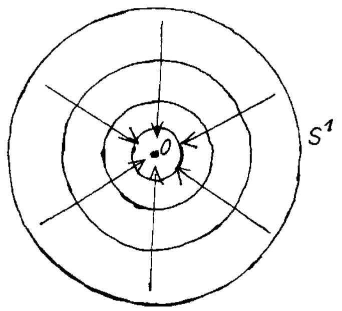
1. $H(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in X$,
2. $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Eine solche Abbildung H heißt **Homotopie** von f und g (Notation: $\boldsymbol{H : f \simeq g}$). Man faßt eine Homotopie meist als Schar stetiger Funktionen auf, daher schreibt man auch $\boldsymbol{h_t(x)} := H(x, t)$. ◇

Beispiele:

1. **Proposition 1.9.1.** *Seien K, L simpliziale Komplexe, $f : |K| \to |L|$ stetig und $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Approximation von f. Dann ist $|\varphi| \simeq f$.*

   Beweis. Wähle die Homotopie: $H : |K| \times I \to |L|$, $(x, t) \mapsto (1-t)f(x) + t|\varphi|(x)$. Dann ist $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = |\varphi|$. □

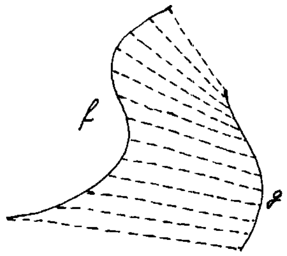


2. $f, g : S^1 \to \mathbb{R}^2$, f sei die Einbettung von S^1 in $\mathbb{R}^2$, $g(x) = 0$ für alle x.

   Dann ist $f \simeq g$. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} H : S^1 \times I &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto (1-t) \cdot x. \end{aligned}$$

   H ist stetig, und für alle $x \in S^1$ gilt $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$. □



3. Seien $f,\ g : X \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann ist $f \simeq g$.

   Beweis. $H(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x)$ ist eine Homotopie von f und g. □

4. $f, g : \mathbb{R}^n \to X$. f beliebig stetig, $g \equiv f(0)$ konstant. Dann ist $f \simeq g$.

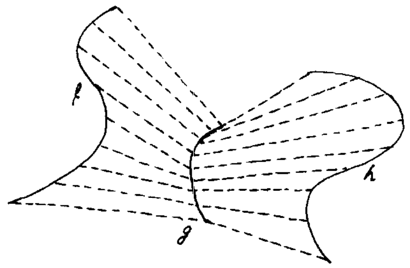
   Beweis. $H(x,t) := f((1-t)x)$ ist eine Homotopie von f und g. □

Lemma 1.9.2. *Seien X, Y topologische Räume. Dann ist „$\simeq$" eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $X \to Y$.*

Beweis.

Symmetrie: Gibt es zwischen f und g eine Homotopie H mit $H(\cdot,0) = f$ und $H(\cdot,1) = g$, so ist $H' : X \times I \to Y$, $H'(x,t) := H(x, 1-t)$ eine Homotopie zwischen $H'(\cdot,0) = g$ und $H'(\cdot,1) = f$.

Reflexivität: Sei $H : X \times I \to Y$, $H(x,t) := f(x)$. Dann ist $H : f \simeq f$.



Transitivität: Seien $H : f \simeq g$, $H' : g \simeq h$ mit $H(\cdot,0) = f$, $H(\cdot,1) = g = H'(\cdot,0)$ und $H'(\cdot,1) = h$. Wir definieren $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ durch

$$\widetilde{H}(x,t) := \begin{cases} H(x,2t) & , t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H'(x,2t-1) & , t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{H} : f \simeq h$ die gesuchte Homotopie, denn nach Lemma 1.3.2 ist $\widetilde{H}$ stetig, und es gilt $\widetilde{H}(\cdot,0) = f$ und $\widetilde{H}(\cdot,1) = h$.

□

Lemma 1.9.3. *Die Äquivalenzrelation $\simeq$ ist mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen verträglich: Seien $X \xrightarrow{f,f'} Y \xrightarrow{g,g'} Z$ stetige Abbildungen mit $H_f : f \simeq f'$ und $H_g : g \simeq g'$. Dann ist $(g \circ f) \simeq (g' \circ f')$.*

Beweis. Wir zeigen $g \circ f \simeq g' \circ f \simeq g' \circ f'$:

i) $H : X \times I \to Z$, $H(x,t) := H_g(f(x),t)$ ist eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $g' \circ f$.

ii) $g' \circ H_f$ ist eine Homotopie zwischen $g' \circ f$ und $g' \circ f'$.

Aus der Transitivität von $\simeq$ folgt nun die Behauptung. □

Definition:
Sei $f : X \to Y$ stetig. $[\boldsymbol{f}]$ bezeichne die **Homotopie-Klasse** von f, d.h.

$$[f] := \{g : X \to Y \mid f \simeq g\}.$$

$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ sei die Menge aller Homotopie-Klassen stetiger Abbildungen $X \to Y$. Auf $[X, Y]$ definieren wir die Komposition von Homotopie-Klassen durch $[f] \circ [g] := [f \circ g]$. (Nach Lemma 1.9.3 ist diese Komposition wohldefiniert.) ⋄

Definition:
Zwei stetige Abbildungen $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ von Paaren heißen **homotop**, falls es eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ gibt mit $H(\cdot, 0) = f$, $H(\cdot, 1) = g$ und $H(A \times I) \subseteq B$.

Auch für Paare $(X, A), (Y, B)$ bezeichne $[\boldsymbol{(X, A), (Y, B)}]$ die Menge der Homotopieklassen, jedoch ist dabei Homotopie von Paaren gemeint, d.h. $[f] \in [(X, A), (Y, B)]$ hat die Form

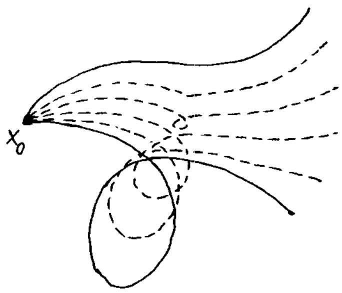
$$[f] = \{g : (X, A) \to (Y, B) \mid \exists\, H : g \simeq f,\, H(A \times I) \subseteq B\}.$$

⋄

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist $[(S^1, 1), (X, x_0)] =: \pi_1(X, x_0)$ die Fundamentalgruppe von (X, x_0) (Vgl. Abschnitt 2.2).

Definition:
Seien $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ stetige Abbildungen topologischer Paare, $X' \subseteq X$ ein Unterraum und für alle $x \in X'$ gelte $f(x) = g(x)$. Dann ist $\boldsymbol{f \simeq g}$ **rel** $\boldsymbol{X'}$, falls es eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ der Paare gibt (d.h. $H(A \times I) \subseteq B$) mit $H(x, t) = f(x) = g(x)$ für alle $x \in X'$ und alle $t \in I$. ⋄

Beispiel: $X' = \{x_0\}, A, B = \emptyset$.



Definition:
1. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt genau dann **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq \mathrm{id}_X, \\ f \circ g &\simeq \mathrm{id}_Y. \end{aligned}$$

2. Zwei topologische Räume X, Y heißen genau dann **homotopieäquivalent**, wenn es eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ gibt. Notation: $\boldsymbol{X \simeq Y}$.
3. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt genau dann **nullhomotop**, wenn es ein $y_0 \in Y$ gibt mit $f \simeq c_{y_0}$, wobei $c_{y_0} : X \to Y$, $c_{y_0}(x) := y_0$ die konstante Abbildung sei.
4. Ein topologischer Raum X heißt genau dann **kontrahierbar** (**zusammenziehbar**), wenn $X \simeq \{x_0\}$ ist.

⋄

Bemerkung:
1. Wenn $X \cong Y$ zwei homöomorphe topologische Räume sind, dann sind $X \simeq Y$ auch homotopieäquivalent.
2. Ein topologischer Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn es $x_0 \in X$ gibt, so daß $\mathrm{id}_X \simeq c_{x_0}$.

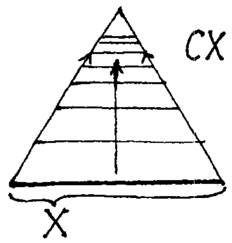
3. Ist $f : X \to Y$ stetig und Y kontrahierbar, so folgt aus Lemma 1.9.3, daß f nullhomotop ist.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar.
2. Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist der Kegel CX kontrahierbar.

   Beweis. Der Kegel ist definiert als $CX := (X \times I)/(X \times \{1\})$ (vgl. Seite 26). Wir definieren zunächst

   $$\begin{aligned} H : ((X \times I) \times I) &\to X \times I, \\ ((x, s), t) &\mapsto (x, (1-t)s + t). \end{aligned}$$

   Dies induziert eine stetige Abbildung. $\widetilde{H} : CX \times I \to CX$ mit $\widetilde{H}(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{CX}$ und $\widetilde{H}(\cdot, 1) = c_{\text{Kegelspitze}}$. Anschaulich wird X durch H zur Kegelspitze hochgezogen und dabei CX verkleinert. □

3. Die n-dimensionale Kreisscheibe D^n ist kontrahierbar.

   Beweis. $D^n \cong CS^{n-1}$. □

4. $CX \setminus \{\text{Kegelspitze}\} \cong X \times [0, 1) \simeq X$.

   Beweis. $CX \setminus \{\text{Spitze}\} \cong X \times [0, 1)$ ist klar. Wir zeigen $X \times [0, 1) \simeq X$: Dazu definieren wir $H : (X \times [0, 1)) \times I \to X \times [0, 1)$, $H((x, s), t) := h_t(x, s) := (x, t \cdot s)$. Dann ist $h_0 = i \circ \mathrm{pr}_X$ und $h_1 = \mathrm{id}_{X \times [0,1)}$, wobei $X \overset{i}{\hookrightarrow} X \times [0, 1)$, $x \mapsto (x, 0)$ die natürliche Inklusion sei. Also ist $H : i \circ \mathrm{pr}_X \simeq \mathrm{id}_{X \times [0,1)}$ und $\mathrm{pr}_X \circ i = \mathrm{id}_X$, d.h. i ist eine Homotopieäquivalenz von X und $X \times [0, 1) \cong CX \setminus$ Kegelspitze. □

Bemerkung:
Aus $X \simeq Y$ folgt nicht $X \cong Y$.

Gegenbeispiel. $\mathbb{R}^n \simeq \{x_0\}$, aber für $n \geq 1$ ist $\mathbb{R}^n \not\cong \{x_0\}$. □

Vermutung 1.9.4 (Poincaré-Vermutung). *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 3 mit $M \simeq S^3$. Dann ist $M \cong S^3$.*

Satz 1.9.5 (Verallgemeinerte Poincaré-Vermutung). *Sei $n > 4$ und M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit $M \simeq S^n$. Dann gilt: $M \cong S^n$*

Die verallgemeinerte Poincaré-Vermutung wurde 1961 von Stallings und Smale bewiesen. Der Beweis der ursprünglichen Poincaré-Vermutung ist noch offen.

Satz 1.9.6. *Sei $r < n$ und $f : S^r \to S^n$ stetig. Dann ist f nullhomotop.*

Beweis.

Schritt 1: Ist f nicht surjektiv, so ist die Behauptung bewiesen, denn dann gibt es ein $p \in S^n$ mit $f(S^r) \subseteq S^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$. Da $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist, ist f dann nullhomotop.

Schritt 2: Ist f surjektiv, so konstruieren wir mit simplizialer Approximation eine zu f homotope Abbildung $|\varphi|$, die nicht surjektiv, also nach Schritt 1 nullhomotop ist: Sei K ein simplizialer Komplex zum Rand eines $(r+1)$-Simplex, d.h. $|K| \cong S^r$, analog sei L eine Triangulierung von $S^n \cong |L|$. Sei $\tilde{f}$ gegeben durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} {|K|} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {|L|} \arrow[d, "\cong"] \\ S^r \arrow[r, "f"'] & S^n \end{tikzcd}$$

Nach dem Satz über simpliziale Approximation (Satz 1.8.6) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine simpliziale Approximation $\varphi : K^{(m)} \to L$ von $\tilde{f}$. Nach Proposition 1.9.1 gilt dann $|\varphi| \simeq \tilde{f}$. Da φ simplizial ist, ist $|\varphi(K)| = |\varphi|(|K|)$ ein Polyeder, das höchstens Dimension $r < n$ besitzt. Daher ist $|\varphi|$ nicht surjektiv.

□

Korollar 1.9.7. *Sei K ein simplizialer Komplex dessen Dimension kleiner als n sei. Weiter sei $f : |K| \to S^n$ stetig. Dann ist f nullhomotop.*

Korollar 1.9.8. *Sei $n > 1$. Dann sind S^1 und S^n sind nicht homotopieäquivalent.*

Beweis-Idee. Angenommen $f : S^1 \to S^n$ wäre eine Homotopieäquivalenz. Mit Satz 1.9.6 folgte $f \simeq c_{x_0}$. Also wäre S^1 kontrahierbar. Wie wir später mit Hilfe der Fundamentalgruppe zeigen werden, ist S^1 jedoch nicht kontrahierbar (vgl. Beispiel auf Seite 67, sowie Satz 2.3.4 auf Seite 69). □

Lemma 1.9.9. *Sei Y ein topologischer Raum und $f : S^n \to Y$ stetig. Dann ist f genau dann nullhomotop, wenn f stetig auf D^{n+1} fortsetzbar ist.*

Beweis.

„$\Leftarrow$“: Sei $\tilde{f} : D^{n+1} \to Y$ eine stetige Fortsetzung von f. Dann ist durch $H : S^n \times I \to Y$, $(x,t) \mapsto \tilde{f}(tx)$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung $c_{\tilde{f}(0)}$ und f gegeben, d.h. f ist nullhomotop.

„$\Rightarrow$“: Sei $H : S^n \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen c_{y_0} und f mit $H(S^n \times \{0\}) = \{y_0\}$. Dann induziert H eine stetige Abbildung $(S^n \times I)/(S^n \times \{0\}) = CS^n \cong D^{n+1} \xrightarrow{\tilde{f}} Y$, d.h. eine stetige Fortsetzung von f auf D^{n+1}.

□

Satz 1.9.10 (Freimachen eines Punktes). *Sei e^n eine n-Zelle ($e^n \cong (D^n)^\circ$) und $z_0 \in e^n$.*

(a) Sei $r < n$ und $f : (D^r, S^{r-1}) \to (e^n, e^n \setminus \{z_0\})$ eine stetige Abbildung der Paare. Dann gibt es eine stetige Abbildung $g : D^r \to e^n$ mit $g \simeq f \operatorname{rel} S^{r-1}$ und $g(D^r) \subseteq e^n \setminus \{z_0\}$.

(b) K sei ein simplizialer Komplex mit $\dim(K) < n$, $L \subseteq K$ Unterkomplex und $f : (|K|, |L|) \to (e^n, e^n \setminus \{z_0\})$ eine stetige Abbildung der Paare. Dann gibt es eine stetige Abbildung $g : |K| \to e^n$ mit $g \simeq f \operatorname{rel} |L|$ und $g(|K|) \subseteq e^n \setminus \{z_0\}$.

Beweis.

„(a)“ Wie man leicht nachvollziehen kann ist $e^n \setminus \{z_0\} \simeq S^{n-1}$. Nach Satz 1.9.6 ist $f|_{S^{r-1}} : S^{r-1} \to e^n \setminus \{z_0\} \simeq S^{n-1}$ nullhomotop. Also gibt es nach Lemma 1.9.9 eine stetige Fortsetzung $g : D^r \to e^n \setminus \{z_0\}$ von $f|_{S^{r-1}}$. Im folgenden zeigen wir, daß $g \simeq f \operatorname{rel} S^{r-1}$ ist: Wir definieren zunächst eine stetige Abbildung

$$\partial(D^r \times I) = (D^r \times \{0,1\}) \cup (S^{r-1} \times I) \xrightarrow{h} e^n$$

auf dem Zylinderrand durch $h(x,0) := f(x)$, $h(x,1) := g(x)$ für $x \in D^r$ und $h(x,t) := f(x) = g(x)$ für $x \in S^{r-1}$, $t \in I$. Da $\partial(D^r \times I) \cong S^r$ ist, kann man h auch als stetige Abbildung $S^r \to e^n$ auffassen. Nachdem e^n kontrahierbar ist, ist h nullhomotop, also gibt es nach Lemma 1.9.9 eine stetige Fortsetzung $H : D^{r+1} \to e^n$. Diese kann man wegen $(D^{r+1}, S^r) \cong (D^r \times I, \partial(D^r \times I))$ als die gesuchte Homotopie von f und g relativ S^{r-1} auffassen.

„(b)“ Wir führen Induktion über $\#(K \setminus L)$.
Induktionsanfang: Wenn $K = L$ ist, ist per def. $f(|K|) \subseteq e^n \setminus \{z_0\}$.
Induktionsschritt: Sei $\sigma \in K \setminus L$ ein Simplex maximaler Dimension. Dann ist $L \subseteq M := K \setminus \{\sigma\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Homotopie $H : |M| \times I \to e^n$ mit $H(\cdot, 0) = f|_{|M|}$, $H(|M| \times \{1\}) \subseteq e^n \setminus \{z_0\}$ und $H(\cdot, t)|_{|L|} = f|_{|L|}$ für alle $t \in I$. Nun wollen wir eine stetige Fortsetzung von H auf $|K| \times I = (|M| \cup \sigma) \times I$ konstruieren, d.h. wir wollen $H|_{(\dot{\sigma} \times I)}$ auf ganz $\bar{\sigma} \times I$ stetig fortsetzen.

Es gilt $(\bar\sigma\times I, \partial(\bar\sigma\times I)) \cong (D^{\dim(\sigma)+1}, S^{\dim(\sigma)})$. Zunächst setzen wir H auf $\partial(\bar\sigma\times I) = (\dot\sigma\times I)\cup(\bar\sigma\times\{0,1\})$ fort, indem wir $H(\cdot,0) := f$ setzen und $H(\cdot,1)|_{\sigma\times\{1\}}$ beliebig so wählen, daß H dadurch stetig bleibt. (Die Existenz einer solchen Fortsetzung folgt aus Lemma 1.9.9.) Nun können wir H als Abbildung von $S^{\dim(\sigma)}$ nach e^n auffassen. Diese ist (da e^n kontrahierbar ist) nullhomotop und daher nach Lemma 1.9.9 fortsetzbar auf ganz $D^{\dim(\sigma)+1} \cong (\bar\sigma\times I)$.

Nach (a) ist $H|_{\bar\sigma\times\{1\}} : (\bar\sigma\times\{1\}, \partial(\bar\sigma\times\{1\})) \to (e^n, e^n\setminus\{z_0\})$ homotop relativ $\partial(\bar\sigma\times\{1\})$ zu einer Abbildung $g' : \bar\sigma\times\{1\} \to e^n\setminus\{z_0\}$, denn $(\bar\sigma\times\{1\}, \dot\sigma\times\{1\}) \cong (D^{\dim(\sigma)}, S^{\dim(\sigma)-1})$. Setzen wir nun $g : (|K|,|L|) \to (e^n, e^n\setminus\{z_0\})$, $g(x) := g'(x,1)$ für $x\in\bar\sigma$ und $g(x) := H(x,1)$ für $x \in |K|\setminus\bar\sigma$, so ist $g \simeq f \text{ rel } |L|$.

□

Bemerkung:
Satz 1.9.10 ist ein Spezialfall eines allgemeineren Transversalitätssatzes, der erst sehr viel später behandelt wird.

Definition:
Sei X ein topologischer Raum, $A\subseteq X$ ein Unterraum und $i : A \hookrightarrow X$ dessen Einbettung. Dann heißt eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit

(a) $i\circ r \simeq \mathrm{id}_X$

(b) $r\circ i = \mathrm{id}_A$

eine **(Deformations-)Retraktion**.

Gilt statt (a) sogar

(a') $i\circ r\simeq \mathrm{id}_X \text{ rel } A$,

so heißt r **starke (Deformations-)Retraktion**.

Falls zu (X,A) eine (starke) Retraktion existiert, heißt A **(starker) Deformationsretrakt** von X. ⋄

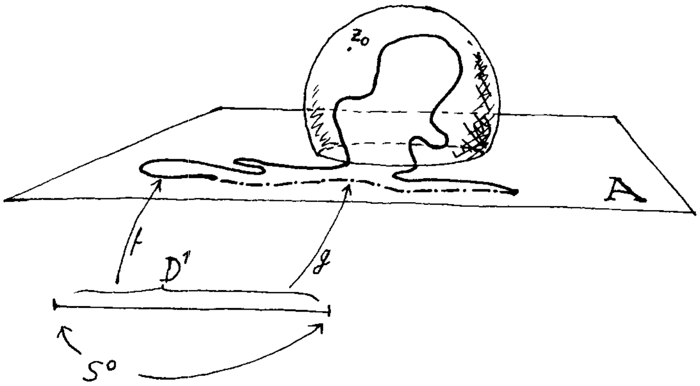
Lemma 1.9.11. *Sei A ein topologischer Raum, X entstehe aus A durch Anheften einer n-Zelle e^n (d.h. es gibt $\varphi : S^{n-1}\to A$ stetig mit $X = D^n\cup_\varphi A$). Weiter sei $z_0\in e^n$. Dann ist A ein starker Deformationsretrakt von $X\setminus\{z_0\}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis für $z_0 = 0$: Wir definieren zunächst

$$\begin{aligned} H : (A \amalg (D^n\setminus\{0\}))\times I &\to A\amalg D^n\setminus\{0\}\\ (x,t) &\mapsto \begin{cases} x & \text{, falls } x\in A,\\ (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}, & \text{falls } x\in D^n\setminus\{0\}.\end{cases}\end{aligned}$$

Da H verträglich mit der Verklebung ist, definiert H eine Homotopie auf $A\cup_\varphi D^n\setminus\{0\}$ und für $r := H(\cdot,1)$ gilt $i\circ r\simeq \mathrm{id}_{X\setminus\{0\}}$ rel A und $r\circ i = \mathrm{id}_A$, wobei $i : A\hookrightarrow X\setminus\{0\}$ sei, d.h. A ist ein starker Deformationsretrakt von $X\setminus\{0\}$. Für $z_0\neq 0$ beweist man dies analog. □

Satz 1.9.12 (Freimachen einer Zelle). *Sei A ein beliebiger, topologischer Raum, X entstehe aus A durch Anheften einer n-Zelle. Sei $r < n$ und $f : (D^r, S^{r-1}) \to (X,A)$ stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung $g : (D^r, S^{r-1})\to (X,A)$ mit $g\simeq f$ rel S^{r-1} und $g(D^r)\subseteq A$.*



Beweis. Nach Definition von X ist $X \setminus A = e^n$ eine n-Zelle. Sei $z_0 \in e^n$. Die offenen Mengen e^n und $X \setminus \{z_0\}$ überdecken X.

Seien $L \subseteq K$ simpliziale Komplexe mit $(|K|, |L|) \cong (D^r, S^{r-1})$, $\dim(K) = r < n$. Fassen wir f als Abbildung $(|K|, |L|) \to (X, A)$ auf, so ist $f^{-1}(e^n) \cup f^{-1}(X \setminus \{z_0\})$ eine offene Überdeckung von $|K|$. Wegen Lemma 1.8.4 bzw. Satz 1.8.6 können wir daher annehmen, daß für $\sigma \in K$ stets $\bar{\sigma} \subseteq f^{-1}(e^n)$ oder $\bar{\sigma} \subseteq f^{-1}(X \setminus \{z_0\})$ gilt. Deshalb sind

$$\begin{aligned} K_0 &:= \{\sigma \in K \mid f(\bar{\sigma}) \subseteq X \setminus \{z_0\}\}, \\ K_1 &:= \{\sigma \in K \mid f(\bar{\sigma}) \subseteq e^n\}. \end{aligned}$$

Unterkomplexe von K mit $K = K_0 \cup K_1$ und $L \subseteq K_0$. Zur Abbildung $f_1 := f|_{|K_1|} : (|K_1|, |K_1 \cap K_0|) \to (e^n, e^n \setminus \{z_0\})$ gibt es nach Satz 1.9.10 eine stetige Abbildung $g_1 \simeq f_1$ rel $|K_1 \cap K_0|$ mit $g(|K_1|) \subseteq e^n \setminus \{z_0\}$. Sei $g_2 : |K| \to X$ definiert durch

$$\begin{aligned} g_2(x) &:= g_1(x), \text{ falls } x \in |K_1|, \\ g_2(x) &:= f(x), \text{ falls } x \in |K_0|. \end{aligned}$$

Dann gilt $g_2 \simeq f$ rel $|L|$ und $g_2(|K|) \subseteq X \setminus \{z_0\}$. Nach Lemma 1.9.11 gibt es eine starke Retraktion $r : X \setminus \{z_0\} \to A$, d.h. für die Inklusion $i : A \hookrightarrow X \setminus \{z_0\}$ gilt $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{X \setminus \{z_0\}}$ rel A und $r \circ i = r|_A = \mathrm{id}_A$. Wir fassen nun f, g_2 wieder als Abbildungen $(D^r, S^{r-1}) \to (X, A)$ auf und definieren $g := i \circ r \circ g_2$. Dann ist $g = (i \circ r) \circ g_2 \simeq \mathrm{id}_{X \setminus \{z_0\}} \circ g_2 = g_2 \simeq f$ rel S^{r-1} und $g(D^r) = i \circ r \circ g_2(D^r) \subseteq i \circ r(X \setminus \{z_0\}) \subseteq A$. □

1.10 CW-Komplexe

CW-Komplexe sind flexibler als Polyeder, teilen aber viele topologische Eigenschaften mit diesen.

1.10.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition:
Ein topologischer Raum e heißt **n-Zelle**, falls $e \cong (D^n)^\circ$ ist, also insbesondere falls $e \cong \mathbb{R}^n$ ist. Die Zahl n nennt man dann auch **Dimension dim(e)** von e. Darüberhinaus bezeichnet man $\dot{\boldsymbol{e}} := \bar{e} \setminus e$ als **Zellenrand**.

Eine **Zellenzerlegung** eines topologischen Raumes X ist eine Menge $\mathcal{E}$ von Teilmengen von X, so daß gilt:

1. $X = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e$,
2. $e \cap e' = \emptyset$ für $e \neq e'$ und
3. jedes $e \in \mathcal{E}$ ist eine n-Zelle für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

$\boldsymbol{X^n} := \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \dim(e) \leq n}} e$ heißt das **n-Gerüst** von X. ◇

Bemerkung:
$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^n \subseteq \ldots \subseteq X$.

Definition:
Sei X ein topologischer Raum. Eine Zellenzerlegung $\mathcal{E}$ von X heißt **CW-Zerlegung** oder **CW-Struktur** („C“ in der Abkürzung „CW“ steht für closure finite (hüllen-endlich), „W“ für weak topology (schwache Topologie)) auf X, falls gilt:

(CW 1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $e \in \mathcal{E}$ mit $\dim(e) = n$ gibt es eine stetige Abbildung $\phi_e : D^n \to X$ mit

1. $\phi_e|_{(D^n)^\circ} : (D^n)^\circ \xrightarrow{\cong} e$ und
2. $\phi_e(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$.

Eine solche Abbildung ϕ_e heißt **charakteristische Abbildung** von e.

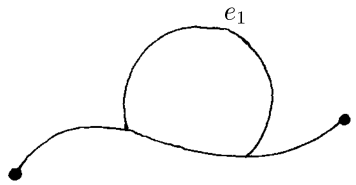
(CW 2) Für jedes $e \in \mathcal{E}$ ist $\bar{e}$ in der Vereinigung von endlich vielen Zellen enthalten. ($\mathcal{E}$ ist **hüllen-endlich** oder **closure finite**)

(CW 3) $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap \bar{e}$ für alle $e \in \mathcal{E}$ abgeschlossen ist. Äquivalent zu dieser Bedingung kann man fordern, daß eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für alle $e \in \mathcal{E}$ die Restriktion $f|_{\bar{e}}$ stetig ist. (Ist Bedingung (CW 3) erfüllt, so nennt man die Topologie auf X die **schwache Topologie** (**weak topology**) bezüglich $\{\bar{e} \mid e \in \mathcal{E}\}$.)

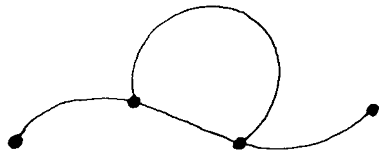
Ein **CW-Komplex** ist ein Paar $(X, \mathcal{E})$, wobei X Hausdorffsch und $\mathcal{E}$ eine CW-Zerlegung von X ist. Ist $\mathcal{E}$ endlich, so heißt $(X, \mathcal{E})$ **endlicher CW-Komplex**.

Die Dimension $\dim(X)$ des CW-Komplexes $(X, \mathcal{E})$ ist definiert durch $\mathbf{dim(X)} := \sup_{e \in \mathcal{E}}\{\dim(e) \mid e \in \mathcal{E}\}$. Damit ist $\dim(X) \leq \infty$. ◇

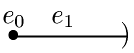
Beispiele von Zellenzerlegungen:

1. 

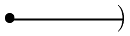
Dies ist keine CW-Zerlegung, da $\phi_{e_1}(S^0) \not\subseteq X^0$ ist.

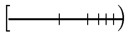


2. Dies ist eine CW-Zerlegung.

3. 

(eine 1-Zelle e_1 und eine 0-Zelle e_0)
Dies ist keine CW-Zerlegung, da $\phi_{e_1} : D^1 \to X$ nicht existiert, denn $\phi_{e_1}(S^0) \subseteq X^0$ ist nicht möglich.

4.  (jeder Punkt ist eine 0-Zelle)
Bei der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist dies keine CW-Zerlegung, da (CW3) nicht erfüllt ist. Mit der diskreten Topologie ist dies jedoch ein CW-Komplex.

5.  (0-Zellen: $\{\{1 - \frac{1}{n}\} \mid n \geq 1\}$, 1-Zellen: $\{(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}) \mid n \geq 1\}$)
Dies ist ein CW-Komplex.

Bemerkung:
Ist X ein endlicher Zellen-Komplex, so sind (CW 2) und (CW 3) stets erfüllt.

Lemma 1.10.1. *Sei ϕ_e eine charakteristische Abbildung für eine n-Zelle e. Dann gilt: $\phi_e(D^n) = \bar{e}$. Insbesondere ist $\bar{e}$ kompakt und $\phi_e(S^{n-1}) = \dot{e}$.*

Beweis.

„$\subseteq$": $\phi_e(D^n) \subseteq \overline{\phi_e((D^n)^\circ)} = \bar{e}$, denn nach Lemma 1.3.3 gilt für jede stetige Abbildung f, daß $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ist.

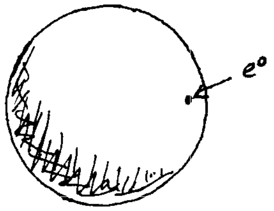
„$\supseteq$": $\phi_e(D^n)$ ist kompakt und damit abgeschlossen in X, da X Hausdorffsch ist. Also ist $\bar{e} \subseteq \phi_e(D^n)$, da $e \subseteq \phi_e(D^n)$ ist.

Insgesamt ergibt sich $\bar{e} = \phi_e(D^n)$. □

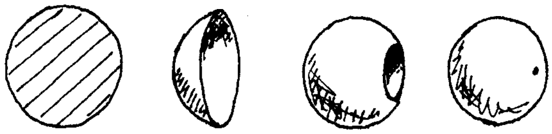
Beispiel 1:
Sei $|K|$ ein Polyeder, also K ein simplizialer Komplex. Dann ist $|K|$ ein endlicher CW-Komplex. Die Zellen von $|K|$ sind die Simplizes von K. Für jedes $\sigma \in K$ ist jeder Homöomorphismus $\phi_\sigma : D^n \to \bar{\sigma}$ eine charakteristische Abbildung. Der Rand $\dot{\sigma}$ einer n-Zelle σ ist hier homöomorph zu S^{n-1}, im allgemeinen jedoch nicht.

Beispiel 2:
Die Oberfläche eines Würfels ist ein CW-Komplex mit acht 0-Zellen (die Ecken), zwölf 1-Zellen (die Kanten) und sechs 2-Zellen (die Seitenflächen). Die Zellen eines CW-Komplexes müssen also keine Simplizes sein. Wir haben auch nicht mehr die affin-lineare Struktur wie bei simplizialen Komplexen.

Beispiel 3:
S^n hat eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle e^0 und einer n-Zelle e^n, $S^n = e^n \cup e^0$.



Charakteristische Abbildungen $\phi_{e^n} : D^n \to S^n$, $\phi_{e^n}(S^{n-1}) = e^0$; $\phi_{e^0} : D^0 = \{0\} \to e^0$:



Beispiel 4:
S^n hat eine CW-Struktur mit jeweils genau zwei k-Zellen für $0 \leq k \leq n$.

Beweis. Wir führen Induktion über n. Für $n = 0$ ist $S^n = S^0 = \{\pm 1\}$. Dies sind (genau) zwei 0-Zellen. Sei nun für $n \geq 1$ bereits bewiesen, daß S^{n-1} eine CW-Struktur besitzt, die für alle $0 \leq k \leq n-1$ stets zwei k-Zellen enthält. Offenbar zerfällt S^n in zwei offene Halbkugeln H_+ (oben) und H_- (unten), sowie den Äquator S^{n-1}, d.h. $S^n = S^{n-1} \uplus H_+ \uplus H_-$. Mit den charakteristischen Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_{e^n_\pm} : (D^n, S^{n-1}) &\to (\overline{H_\pm}, S^{n-1}) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \pm\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \end{aligned}$$

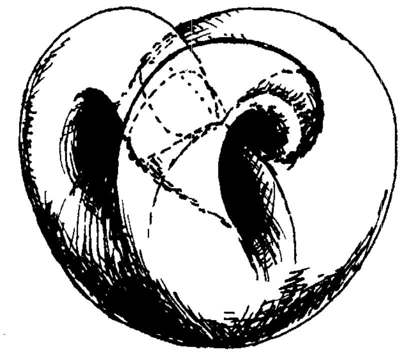
wird D^n einmal auf $\bar{H}_+$ und einmal auf $\bar{H}_-$ abgebildet. Somit hat S^n die gewünschte Struktur. □

Beispiel 5:
Der reelle projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ hat eine CW-Struktur, die für jedes $k = 0, \ldots, n$ genau eine k-Zelle enthält.

Beweis. Da jede Gerade durch 0 in $\mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre S^n in genau zwei Punkten x, y mit $x = -y$ schneidet, kann man $\mathbb{RP}^n$ auch auffassen als $S^n/_{\{\pm 1\}} =: \pi(S^n)$, wobei $\{\pm 1\}$ als (multiplikative) Gruppe zu verstehen ist, die auf S^n operiert (vgl. Abschnitt über Quotienten (1.3.2)). Nach Beispiel 4 hat S^n für jedes $k \leq n$ genau zwei k-Zellen H^k_+, H^k_-, die einander nach Konstruktion gegenüberliegen, d.h. $x \in H^k_+ \Leftrightarrow -x \in H^k_-$. Also ist

$\pi(H_+^k) = \pi(H_-^k)$ eine k-Zelle von $\mathbb{RP}^n$ mit der (von der im Beweis zu Beispiel 4 gegebenen) induzierten charakteristischen Abbildung $\pi \circ \phi_{e_+^k}$. □

Für $n = 3$ läßt sich der reelle projektive Raum durch die Boysche Fläche darstellen. Sie ist singularitätenfrei. Ihr Bild im $\mathbb{R}^3$ hat jedoch Stellen mit Selbstdurchdringung:



Beispiel 6:
Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ hat eine CW-Struktur mit genau einer $2k$-Zelle für jedes $0 \leq k \leq n$.

Beispiel 7:
Der quarternionische projektive Raum $\mathbb{HP}^n$ hat eine CW-Struktur mit genau einer $4k$-Zelle für jedes $0 \leq k \leq n$.

Lemma 1.10.2. *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ sei Teilmenge und $X' := \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e \subseteq X$ ein Unterraum. Dann sind äquivalent:*

(1) $(X', \mathcal{E}')$ ist CW-Komplex.

(2) X' ist abgeschlossen in X.

(3) Für $e \in \mathcal{E}'$ ist stets $\bar{e} \subseteq X'$.

Beweis. Für endliche Komplexe: Übung, sonst: Jänich, Topologie. □

Definition:
Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ eine Teilmenge und $X' := \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e \subseteq X$ ein Unterraum. $(X', \mathcal{E}')$ heißt **(CW-)Unterkomplex** von $(X, \mathcal{E})$, falls eine der Bedingungen von Lemma 1.10.2 erfüllt ist, d.h. falls $(X', \mathcal{E}')$ ein CW-Komplex ist. ⋄

Lemma 1.10.3. *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Beliebige Vereinigungen und beliebige Durchschnitte von Unterkomplexen sind Unterkomplexe.*
2. *$X^n = \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \dim(e) \leq n}} e$ ist ein Unterkomplex für jedes n.*
3. *Sei $M \subseteq \mathcal{E}$ eine Menge von n-Zellen aus $\mathcal{E}$. Dann ist $X^{n-1} \cup \left(\bigcup_{e \in M} e\right)$ ein Unterkomplex von X.*
4. *Jede Zelle liegt in einem endlichen Unterkomplex.*

Beweis.

1. Für Vereinigungen: vgl. Lemma 1.10.2 (3), für Durchschnitte: vgl. Lemma 1.10.2 (2).
2. Vgl. Lemma 1.10.2 (3), Lemma 1.10.1 und die Definition der charakteristischen Funktion (Seite 54).
3. Wegen Lemma 1.10.1 ist für jedes $e \in M$ stets $\dot{e} \subseteq X^{n-1}$. Also ist für $e \in M$ auch $\bar{e} \subseteq X^{n-1} \cup \bigcup_{e' \in M} e'$. Ist hingegen $e \in X^{n-1}$, so ist $\bar{e} \subseteq X^{n-1}$, da X^{n-1} Unterkomplex ist. Nach Lemma 1.10.2 folgt die Behauptung.

4. Sei $e \in \mathcal{E}$. Nach Eigenschaft (CW 2) ist $\bar{e}$ dann in einer endlichen Vereinigung von Zellen aus $\mathcal{E}$ enthalten. Da $\dot{e} \subseteq X^{n-1}$ für jede n-Zelle e ist, können wir Induktion über die Dimension der betrachteten Zelle führen: Sei zunächst e eine 0-Zelle. Diese ist (wegen $\bar{e} = e \subseteq e$) ein endlicher Unterkomplex. Angenommen für $n \in \mathbb{N}$ sei bereits bekannt, daß jede $(n-1)$-Zelle in einem endlichen Unterkomplex liegt. Dann sei $e \in \mathcal{E}$ eine n-Zelle. Da $\bar{e} = e \cup \dot{e}$ in einer eindeutig bestimmten, endlichen Vereinigung von Zellen $e, e_0, \ldots, e_k$ liegt und jede der Zellen $e_0, \ldots, e_k$ höchstens von Dimension $n-1$ ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung endliche Unterkomplexe $\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_k$ mit $e_i \in \mathcal{E}_i$. Die Vereinigung $V := \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{E}_i \cup e$ ist daher endlich und da nach Konstruktion $\bar{e} \subseteq V$ gilt und nach Voraussetzung die $\mathcal{E}_i$ Unterkomplexe sind, ist auch V ein endlicher Unterkomplex.

□

Bemerkung:
Wenn $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ ist, dann ist $m = n$. Speziell ist $\dim(e)$ für jede Zelle wohldefiniert.

Beweis. Vgl. Korollar **??** auf Seite **??**. □

Korollar 1.10.4. *Sei X ein CW-Komplex. Dann ist jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ in einem endlichen Unterkomplex enthalten. Insbesondere ist ein CW-Komplex X genau dann kompakt, wenn X ein endlicher CW-Komplex ist.*

Beweis. Nach Lemma 1.10.3 genügt es zu zeigen, daß K nur endlich viele Zellen trifft. Dazu wählen wir zu jeder Zelle e, die K trifft, einen Punkt p_e aus $e \cap K$ aus: $P := \{p_e \mid e \cap K \neq \emptyset\}$. Wir wollen zeigen, daß P endlich ist. Zunächst zeigen wir, daß jede Teilmenge $A \subseteq P$ in X abgeschlossen ist: Für jede Zelle e ist wegen (CW 2) die Menge $A \cap \bar{e}$ endlich, denn $\bar{e}$ schneidet nur endlich viele Zellen und alle $p \in A$ liegen in verschiedenen Zellen. Da X Hausdorffsch ist, ist $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen, woraus nach (CW 3) folgt, daß auch A abgeschlossen ist. Also trägt P die diskrete Topologie. Nun sind wir in der Lage, die Endlichkeit von P zu beweisen: Da $P \subseteq K$, K kompakt und P abgeschlossen ist, ist P zunächst kompakt. Da jeder Punkt $p \in P$ offen ist, ist $P = \bigcup_e \{p_e\}$ eine offene Überdeckung von P. Die einzig mögliche Teilüberdeckung ist wiederum $P = \bigcup_e \{p_e\}$, d.h. P ist endlich. □

1.10.2 Anheften von Zellen

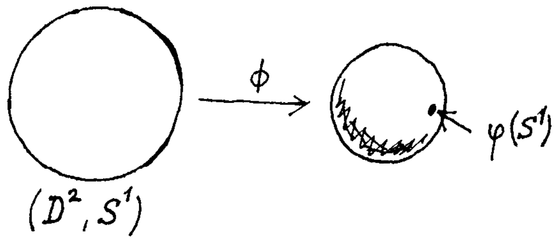
Definition:
Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex. Dann gibt es zu jeder n-Zelle e eine charakteristische Abbildung

$$\phi_e : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\bar{e}, \dot{e}) \subseteq (X^n, X^{n-1}).$$

$\varphi_e := \phi_e|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ heißt **anheftende Abbildung** für e. ⋄

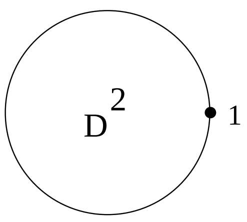
Zwei extreme Beispiele:

1.



$\phi : (D^2, S^1) \to (S^2, \{\text{Punkt}\})$, d.h. hier ist $\phi(S^1) = \{\text{Punkt}\}$.

2.



$X = D^2$, $\mathcal{E} = \{e = (D^2)^\circ, S^1 \setminus \{1\}, \{1\}\}$, $\phi_e := \mathrm{id}_X$. Dann ist $\phi_e|_{S^1}$ ein Homöomorphismus auf das Bild.

Proposition 1.10.5. *Sei $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $M \subseteq \mathcal{E}$ eine Menge von n-Zellen,*

$$\phi_M : \coprod_{e \in M} D^n \longrightarrow X^n$$

die topologische Summe der charakteristischen Abbildungen und

$$\varphi_M : \coprod_{e \in M} S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$$

die topologische Summe der anheftenden Abbildungen.

$$\psi_M : X^{n-1} \cup_{\varphi_M} (\coprod_{e \in M} D^n) \to X^{n-1} \cup \left(\bigcup_{e \in M} e \right),$$

sei durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \amalg \left(\coprod_{e \in M} D^n \right) \arrow[r, "\mathrm{id} \amalg \phi_M"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^{n-1} \cup \left(\bigcup_{e \in M} e \right) \\
X^{n-1} \cup_{\varphi_M} \left(\coprod_{e \in M} D^n \right) \arrow[ur, dashed, "\psi_M"'] &
\end{tikzcd}$$

definiert. Dann ist ψ_M ein Homöomorphismus.

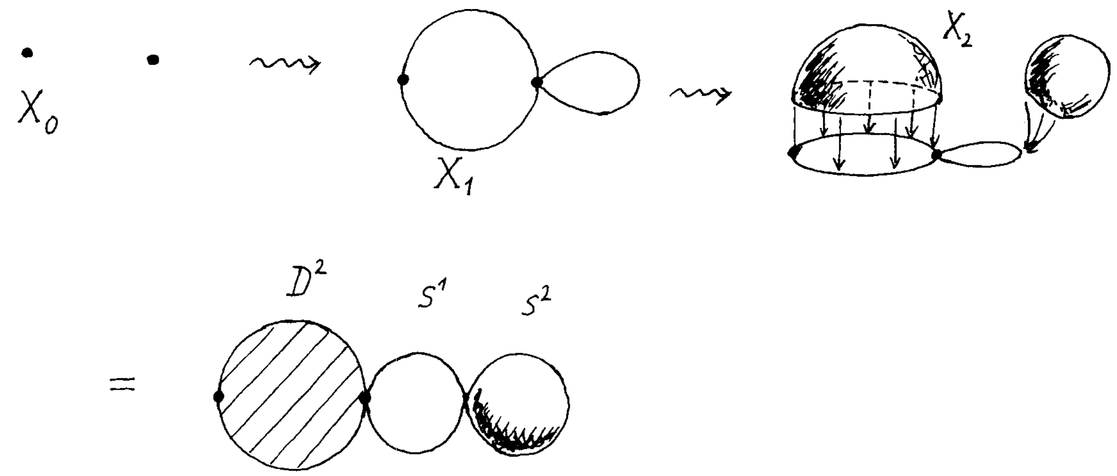
Mit anderen Worten: Die n-Zellen $e \in M$ sind mittels φ_M an X^{n-1} angeheftet.
Speziell: Das n-Gerüst X^n entsteht aus X^{n-1} durch Anheften von n-Zellen.

Beweis. Übung. □

Ein CW-Komplex X ist wie folgt aufgebaut:

- Man startet mit einem 0-Gerüst (diskrete Punktmenge)
- Daraus entsteht X durch sukzessives Anheften von Mengen von Zellen größerer Dimension.

Beispiel:



Proposition 1.10.6. *Sei X ein CW-Komplex, $\{\varphi_\lambda : S^{n-1} \to X^{n-1}\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie stetiger Abbildungen und $\varphi := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda$ deren topologische Summe. Dann ist $X \cup_\varphi \left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} D^n\right)$ in kanonischer Weise ein CW-Komplex, der aus X durch Anheften von n-Zellen entsteht. Die kanonische Abbildung*

$$D^n \hookrightarrow X \amalg D^n \twoheadrightarrow X \cup_{\varphi_\lambda} D^n \hookrightarrow X \cup_\varphi \left(\coprod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} D^n\right)$$

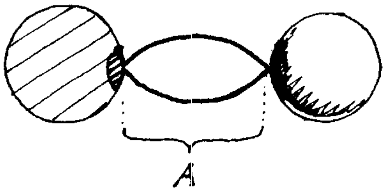
ist charakteristisch für jedes $\lambda \in \Lambda$.

Ohne Beweis. □

Proposition 1.10.7. *Jeder CW-Unterkomplex A eines CW-Komplexes X besitzt eine Umgebung $U(A)$, so daß A ein starker Deformationsretrakt von $U(A)$ ist. Diese Umgebung kann so gewählt werden, daß für zwei Unterkomplexe A, B von X stets*

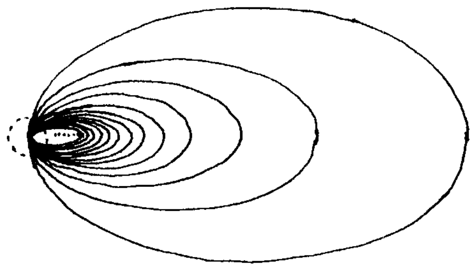
$$U(A) \cap U(B) = U(A \cap B) \text{ gilt.}$$

Mit anderen Worten: A läßt sich so zu $U \subseteq X$ offen verdicken, daß U auf A zusammenziehbar ist. U und A haben denselben Homotopietyp.



Ohne Beweis. □

Beispiel Hawaiischer Ohrring:



$$X := \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = (\tfrac{1}{n})^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Der Hawaiische Ohrring ist kein CW-Komplex.

Beweis. Angenommen, X wäre ein CW-Komplex. Sei $A := \{(\frac{2}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Da die Topologie auf X die schwache Topologie bezüglich der Zellen ist, ist A genau dann abgeschlossen, wenn für jede Zelle e die Menge $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist. Offensichtlich enthält X nur Zellen der Dimensionen 0 und 1. Angenommen es gäbe paarweise verschiedene $x, y, z \in A \cap \bar{e}$ ($\dim(e) = 1$). Da $\bar{e}$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg von x über 0 nach y in $\bar{e}$, d.h. $0 \in e$. Da x, y, z definitionsgemäß in drei verschiedenen Wegkomponenten von $X \setminus \{0\}$ liegen, muß $\bar{e} \setminus \{0\}$ aus drei Wegkomponenten bestehen. Dies kann nicht sein, d.h. $A \cap \bar{e}$ enthält maximal zwei verschiedene Punkte, ist also stets abgeschlossen. Daher muß $A \subseteq X$ abgeschlossen sein. Aber $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^2$ ist nicht abgeschlossen, wie aus der Analysis bekannt ist. Also ist X kein CW-Komplex. □

Der Hawaiische Ohrring ist ein Beispiel dafür, daß die Eigenschaft, CW-Komplex zu sein, eine wesentliche Voraussetzung für Proposition 1.10.7 ist. Zum Nullpunkt $\{0\} \subseteq X$, in dem sich die Kreise treffen, existiert nämlich keine Umgebung $U \subseteq X$, die Deformationsretrakt von $\{0\}$ ist.

Beweis-Skizze. Jede Umgebung U von $\{0\}$ enthält einen Kreis $\{(x,y) \mid (x-\frac{1}{m})^2 + y^2 = (\frac{1}{m})^2\}$. Dieser ist nicht kontrahierbar in X. Daher kann auch U nicht kontrahierbar sein, d.h. U ist kein Deformationsretrakt von $\{0\}$. □

Definition:
Seien X, Y zwei CW-Komplexe.

1. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **zelluläre Abbildung**, wenn für $n \in \mathbb{N}$ stets $f(X^n) \subseteq Y^n$ ist.
2. Eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ heißt **zelluläre Homotopie**, wenn H eine zelluläre Abbildung ist. Schreiben wir $h_t(x) := H(x,t)$ für $x \in X$ und $t \in I$, so bedeutet dies, daß für $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ stets $h_t(X^n) \subseteq Y^{n+1}$ gelten muß.

◇

Satz 1.10.8 (Existenz einer zellulären Approximation). *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen. Dann gibt es eine zelluläre Abbildung $g : X \to Y$, für die gilt:*

1. *$f \simeq g$,*
2. *Ist $A \subseteq X$ ein Unterkomplex und $f|_A$ zellulär, so ist $f|_A = g|_A$ und $f \simeq g$ rel A.*

Beweis. Vgl. [StöZie]. □

Definition:
Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von CW-Komplexen. Die nach Satz 1.10.8 existierende Funktion g heißt **zelluläre Approximation** von f. ◇

Satz 1.10.9. *Seien X, Y zwei CW-Komplexe und $f, g : X \to Y$ zelluläre Abbildungen mit $f \simeq g$. Dann existiert eine zelluläre Homotopie zwischen f und g.*

Beweis. Vgl. [StöZie]. □

Kapitel 2

Algebraische Topologie

Die Idee der algebraischen Topologie ist, geometrische Probleme mit algebraischen Methoden zu lösen, indem man den geometrischen Objekten algebraische Objekte zuordnet und diese vergleicht.

$$\begin{array}{lcl} \text{Geometrie/Topologie:} & & \text{Algebra:} \\ X \text{ topologischer Raum} & & F(X) \text{ algebraisches Objekt} \\ \big\downarrow f \text{ stetig} & \xrightarrow[\text{(Funktor)}]{F} & \big\downarrow F(f) \text{ strukturerhaltende Abbildung} \\ Y \text{ topologischer Raum} & & F(Y) \text{ algebraisches Objekt.} \end{array}$$

Gesucht sind **algebraische Invarianten**.

Übliche Schlußweise:
Falls $F(f)$ gewisse Eigenschaften nicht besitzt, so kann f Eigenschaften, die die entsprechende Eigenschaft von $F(f)$ induzieren, nicht besitzen.

Achtung: F ist keine Abbildung sondern ein Funktor.

2.1 Kategorien und Funktoren

Definition:
Eine **Kategorie $\mathcal{C}$** besteht aus folgenden Daten:

1. Einer Klasse **$\mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$** von **Objekten** (der Begriff „Menge“ wird hier nicht benutzt, da er zu wenig Freiraum läßt); anstatt $X \in \mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$ schreibt man oft auch einfach $\boldsymbol{X \in \mathcal{C}}$.
2. Zu $X, Y \in \mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$ einer Klasse **$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$**, den **Morphismen** zwischen X und Y. Morphismen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ notiert man meist als $\boldsymbol{f : X \to Y}$.
3. Zu $X, Y, Z \in \mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$ einer Abbildung

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

   die man als **Komposition** bezeichnet.
4. Zu jedem $X \in \mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$ einem Morphismus $\mathbf{1}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, den man als **Identität** bezeichnet.

Dabei muß folgendes gelten:

1. **Assoziativität der Komposition**: Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} U$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2. **Identität**: Für beliebige $X, Y, Z \in \mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$ und $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_Y \circ f &= f, \\ g \circ \mathbf{1}_Y &= g. \end{aligned}$$

◇

Bemerkung:
Objekte sind nicht notwendigerweise Mengen, Morphismen nicht immer Abbildungen, aber es ist hilfreich, sich dies dennoch so vorzustellen.

Beispiele:

1. **Sets**: Kategorie der Mengen:
   (a) Die Objekte sind Mengen.
   (b) Die Morphismen sind Abbildungen.
   (c) Die Komposition ist die Komposition von Abbildungen.
   (d) Die Identität ist die identische Abbildung.
2. **Top**: Kategorie der topologischen Räume:
   (a) Die Objekte sind topologische Räume.
   (b) Die Morphismen sind stetige Abbildungen: $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Top})}(X, Y) := \{f : X \to Y \text{ stetig}\}$.
   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.

2'. **Top***: Kategorie der punktierten topologischen Räume:
   (a) Die Objekte sind Paare (X, x), wobei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ist.
   (b) Die zugehörigen Morphismen sind stetige Abbildungen von Paaren:

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Top}^*)}((X, x), (Y, y)) := \{f : X \to Y \text{ stetig } \mid f(x) = y\}.$$

   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.

2". **Top²**: Kategorie der topologischen Paare:
   (a) Objekte: Paare (X, A), wobei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum ist.
   (b) Die Morphismen sind stetige Abbildungen von Paaren:

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Top}^2)}((X, A), (Y, B)) = \{f : X \to Y \text{ stetig } \mid f(A) \subseteq B\}.$$

   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.

3. **Groups**: Kategorie der Gruppen:
   (a) Objekte: Gruppen. (Das neutrale Element einer beliebigen Gruppe notieren wir mit **1**.)
   (b) Die Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.
   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.

3'. Kategorie der **abelschen Gruppen**:
   (a) Die Objekte sind abelsche Gruppen.
   (b) Die Gruppenhomomorphismen sind die Morphismen der Kategorie.
   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.

4. **Vect$_K$**: Kategorie der Vektorräume über einem festen Körper K:
   (a) Die Objekte sind K-Vektorräume.
   (b) Die Morphismen sind K-Vektorraum-Homomorphismen.
   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.

Definition:
Eine **Unterkategorie** $\mathcal{C}'$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, so daß jedes Objekt von $\mathcal{C}'$ auch Objekt von $\mathcal{C}$ ist und für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}'$ gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

$\mathcal{C}'$ heißt **volle Unterkategorie**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{C}'$. ◇

Beispiele:
1. Top ist eine Unterkategorie, aber keine volle Unterkategorie von Sets.
2. Die Kategorie der abelschen Gruppen ist eine volle Unterkategorie von Groups.
3. Die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume ist eine volle Unterkategorie von Vect_K.

Weitere Beispiele von Kategorien:
5. **Diff**: Kategorie der ($\mathcal{C}^\infty$-)differenzierbaren Mannigfaltigkeiten:
   (a) Objekte: $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten.
   (b) Morphismen: $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.
   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.
6. Kategorie der **simplizialen Komplexe**:
   (a) Objekte: Simpliziale Komplexe.
   (b) Morphismen: Simpliziale Abbildungen.
   (c) Komposition und Identität wie bei Sets.
7. **Homtop**: Homotopiekategorie topologischer Räume:
   (a) Objekte: Topologische Räume.
   (b) Morphismen: Homotopieklassen von stetigen Abbildungen:

   $$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Homtop})}(X,Y) = [X,Y] = \{\text{Homotopieklassen von stetigen Abbildungen } X \to Y\}.$$

   Hier sind die Morphismen keine Abbildungen!
   (c) Die Verknüpfung ist wohldefiniert durch $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ (wir hatten in Lemma 1.9.3 gesehen: $f \simeq f', g \simeq g' \Rightarrow f \circ g \simeq f' \circ g'$).
   (d) Die Identität ist $\mathbf{1}_X = [\mathrm{id}_X]$.

Definition:
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein (**kovarianter**) **Funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

1. einer Zuordnung, die jedem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \mathcal{D}$ zuordnet und
2. einer Zuordnung, die jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ zuordnet. Das bedeutet, daß F eine Abbildung von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ nach $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ beinhaltet.

Dabei muß für alle $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und alle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ folgendes erfüllt sein:

1. $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$.
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

◇

Definition:
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein **kontravarianter Funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus

1. einer Zuordnung, die jedem Objekt $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt $F(X) \in \mathcal{D}$ zuordnet und
2. einer Zuordnung, die jedem Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f) : F(Y) \to F(X)$ in $\mathcal{D}$ zuordnet. Das bedeutet, daß F eine Abbildung von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ nach $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ beinhaltet.

Dabei muß für alle $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und alle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ folgendes erfüllt sein:

1. $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$.

2. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

◇

Definition:
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X, Y \in \mathcal{C}$ Objekte und $f : X \to Y$ ein Morphismus. Ein **Inverses** zu f ist ein Element $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, so daß $f \circ g = \mathbf{1}_Y$ und $g \circ f = \mathbf{1}_X$ erfüllt ist. f heißt genau dann **Isomorphismus**, wenn f ein Inverses besitzt. Ein Inverses zu f wird mit f^{-1} bezeichnet. ◇

Bemerkung:
Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X, Y \in \mathcal{C}$ Objekte, $f : X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gilt:

1. $\mathbf{1}_X$ und das Inverse zu f sind eindeutig bestimmt.
2. Ist $g : Y \to X$ das Inverse zu f, so ist $F(g)$ das Inverse zu $F(f)$.

   Beweis.

   $$\underbrace{F(g \circ f)}_{F(\mathbf{1}_X)} = \underbrace{F(g) \circ F(f)}_{\mathbf{1}_{F(X)}}.$$

   □

3. $F(f)$ ist ebenfalls ein Isomorphismus.

Beispiele:

1. $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ **Identitätsfunktor**
   $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$.
   $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$.
2. **Vergißfunktor**
   Z.B.: $F :$ Top $\to$ Sets .
   $F(X)$ ist die dem topologischen Raum zugrundeliegende Menge.
   $F(f)$ ist die Abbildung zwischen Mengen.
3. **Dualitätsfunktor**
   $* :$ $\mathrm{Vect}_K \to \mathrm{Vect}_K$.
   $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$, der Dualraum.
   $f^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung zu $f : V \to W$.

   Der Dualitätsfunktor ist kontravariant.
4. **Diff*** ist die Kategorie der punktierten, differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.
   $T :$ Diff* $\to \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$ ist der **Tangentialraumfunktor**:
   f sei eine differenzierbare Abbildung von M nach N mit $f(p) = q$, $Df(p)$ die Jacobimatrix von f in p bezüglich lokaler Koordinaten. Zweites Axiom: $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ entspricht der Kettenregel $D(g \circ f)(p) = D(g)(f(p)) \circ D(f)(p)$. Ist f Isomorphismus in Diff*, so folgt $T_p(M) \cong T_q(N)$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume, daher gilt $\dim(M, p) = \dim(N, q)$. Also ist die Dimension differenzierbarer Mannigfaltigkeiten eine Diffeomorphie-Invariante.

   $$\begin{tikzcd}
   (M,p) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "f"'] & T_p(M) \arrow[d, "T(f) := Df(p)"] \\
   (N,q) \arrow[r, "T"] & T_q(N)
   \end{tikzcd}$$

Definition:
Sind $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren, so heißt eine Zuordnung

$$T : \mathrm{ob}_{\mathcal{C}} \to \bigcup_{X \in \mathrm{ob}_{\mathcal{C}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$$

eine **natürliche Transformation** zwischen F und G, falls für jedes $X \in \mathcal{C}$ ein Morphismus $T_X := T(X) : F(X) \to G(X)$ gegeben ist, so daß folgendes Diagramm für alle Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ T_X \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow T_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

Falls $T_X : F(X) \to G(X)$ für alle $X \in \mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist, so heißt T eine **natürliche Äquivalenz** zwischen F und G. ◇

2.2 Die Fundamentalgruppe

Definition:
Sei $(X, x_0) \in \text{Top}^*$ ein punktierter, topologischer Raum, $I := [0,1]$. Dann ist

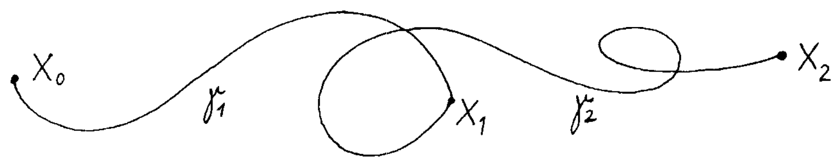
$$\pi_1(X, x_0) := [(I/\{0,1\}, 1), (X, x_0)] = [(S^1, 1), (X, x_0)]$$

die Menge der Homotopieklassen stetiger Wege $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, wobei Homotopie relativ $\{0,1\}$ gemeint ist. $\pi_1(X, x_0)$ heißt **Fundamentalgruppe** (oder **Poincaré-Gruppe**) von (X, x_0). ◇

Definition:
Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1, x_2 \in X$, γ_1 ein stetiger Weg von x_0 nach x_1, γ_2 ein stetiger Weg von x_1 nach x_2. Dann sind γ_1 und γ_2 **verknüpfbar** und $\gamma_1 * \gamma_2$ ist der Weg

$$\gamma_1 * \gamma_2(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s) & , 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2s-1) & , \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

◇



Definition:
Sei X ein topologischer Raum und $x_0, x_1 \in X$. Dann heißt $\gamma_0 : I \to X$, $s \mapsto x_0$, der **konstante Weg**. Für einen beliebigen Weg $\gamma : I \to X$ von x_0 nach x_1 heißt $\gamma^{-1} : I \to X$, $s \mapsto \gamma(1-s)$, der zu γ **inverse Weg**. Er verläuft von x_1 nach x_0. ◇

Satz 2.2.1. *Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe mit*

$$[\gamma_1][\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$$

als Verknüpfung. Der konstante Weg (eigentlich die Homotopie-Klasse des konstanten Weges) $[\gamma_0]$ ist das neutrale Element, $[\gamma^{-1}]$ ist das Inverse von $[\gamma]$.

Beweis. (allgemeiner, für verknüpfbare Wege)

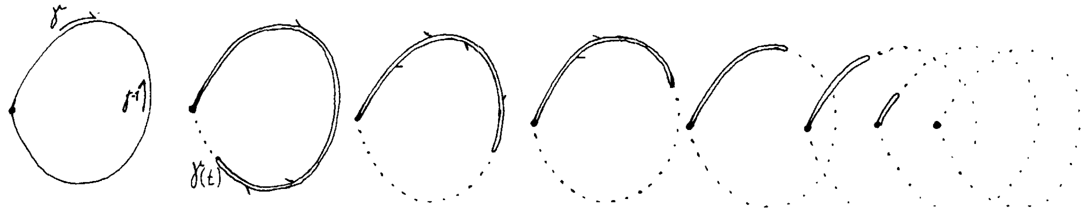
1. Die Multiplikation ist wohldefiniert: Seien dazu $x_0, x_1, x_2 \in X$, $\gamma_1, \gamma_1' : I \to X$ Wege von x_0 nach x_1 und $\gamma_2, \gamma_2' : I \to X$ Wege von x_1 nach x_2. Es gebe die Homotopien $F : \gamma_1 \simeq \gamma_1' \text{ rel } \{0,1\}$ und $G : \gamma_2 \simeq \gamma_2' \text{ rel } \{0,1\}$. Dann ist H, definiert durch $H(\cdot, t) := F(\cdot, t) * G(\cdot, t)$, eine Homotopie $H : \gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma_1' * \gamma_2' \text{ rel } \{0,1\}$.

2. $[\gamma_0]$ ist offensichtlich das neutrale Element.

3. $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$, das heißt $\gamma * \gamma^{-1} \simeq \gamma_0$: Sei $F : I \times I \to X$ definiert durch

$$F(s,t) := \begin{cases} \gamma(2s) & 0 \leq 2s \leq t \\ \gamma(t) & t \leq 2s \leq 2-t \\ \gamma^{-1}(2s-1) & 2-t \leq 2s \leq 2. \end{cases}$$

   Dann läuft $F(\cdot,t)$ zuerst auf γ bis $\gamma(t)$, wartet dort für $2s \in [t,\ 2-t]$ und läuft dann von $\gamma(t)$ aus auf γ^{-1} zurück. F ist daher Homotopie zwischen $\gamma * \gamma^{-1}$ und γ_0 relativ $\{0,1\}$:



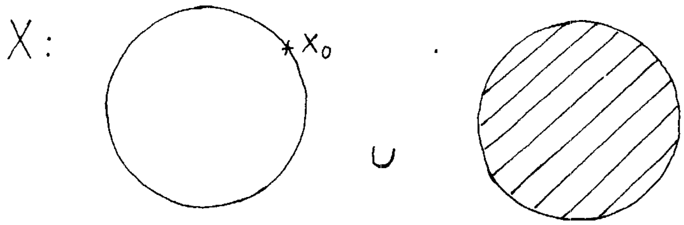
4. Die Assoziativität ist erfüllt, da $*$ bis auf Umparametrisierung assoziativ ist.

□

Bemerkung:
Die bewiesene, allgemeinere Aussage wird uns später (in Proposition 2.2.2) noch nützlich sein.

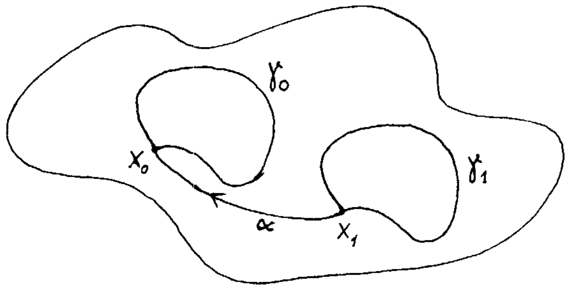
Beispiele zur Wahl der Basispunkte:

1.



   $\pi_1(X,x_0) = \pi_1(S^1,x_0)$. Für jeden topologischen Raum X gilt $\pi_1(X,x_0) = \pi_1(X',x_0)$, wobei $X' \subseteq X$ die Wegzusammenhangskomponente mit $x_0 \in X'$ ist.

2. Sei X wegzusammenhängend:



   Dann ist $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$ für alle $x_0, x_1 \in X$, da die Anfangs- und Endpunkte der Wege γ_0 und γ_1 durch den Weg α verbunden werden können.

Proposition 2.2.2. *Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$ Punkte derselben Wegzusammenhangskomponente und $\alpha : I \to X$ ein Weg von x_1 nach x_0. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \alpha_* : & \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X,x_1) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [\alpha * \gamma * \alpha^{-1}] = [\alpha][\gamma][\alpha]^{-1} \end{array}$$

ein Isomorphismus. Insbesondere gilt: $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$.

Beweis. Übung. □

Korollar 2.2.3. *Ist X wegzusammenhängend, so gilt für alle $x_0, x_1 \in X$*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

Daher ist die Notation $\boldsymbol{\pi_1(X)}$ sinnvoll.

Satz 2.2.4. *π_1 ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie Top* in die Kategorie Groups, wobei für stetiges $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$*

$$\boldsymbol{\pi_1(f) = f_*} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

definiert ist durch

$$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Beweis. Es ist klar, daß $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ ist. Daher genügt es, $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$ zu zeigen: Es gilt $(\pi_1(f) \circ \pi_1(g))([\gamma]) = [f \circ (g \circ \gamma)] = [(f \circ g) \circ \gamma] = \pi_1(f \circ g)([\gamma])$. □

Satz 2.2.5.

1. *Seien $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetige, punktierte Abbildungen mit $f \simeq g \operatorname{rel} \{x_0\}$. Dann ist $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

2. *Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ für jedes $x_0 \in X$ ein Isomorphismus. Daher ist $\pi_1(X, x_0)$ stets eine Homotopieinvariante und damit insbesondere eine topologische Invariante.*

Ohne Beweis. □

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend** (**1-zusammenhängend**), falls X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ ist. Dabei sei 1 das neutrale Element von $\pi_1(X, x_0)$. ⋄

Bemerkung:
Die Fundamentalgruppe ist im allgemeinen nicht abelsch.

Beispiele:

1. $\{x_0\}$ ist einfach zusammenhängend.
2. Ist X zusammenziehbar, so ist X einfach zusammenhängend.

2.3 Die Fundamentalgruppen von S^1 und dem Torus

2.3.1 Berechnung von $\pi_1(S^1)$ und $\pi_1(T^n)$

Um $\pi_1(S^1)$ berechnen zu können, definieren wir zunächst für $n \in \mathbb{Z}$ den Weg $\gamma_n : I \to S^1$, $\gamma_n(s) := e^{2\pi i n s}$. Dann ist $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{z} dz = n$. Das Integral hängt nur von der Homotopieklasse ab. Daher ist $[\gamma_m] \neq [\gamma_n]$ für $m \neq n$.

Definition:
Sei $\gamma : I \to S^1$ ein stetiger Weg. Dann heißt $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$ **Umlaufzahl** von γ. ⋄

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, 1) &\to \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz \end{aligned}$$

ein Homomorphismus ist.

Im folgenden wollen wir beweisen, daß $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$ ist (Satz 2.3.4). Dazu benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (S^1,\cdot) \\ x & \longmapsto & e^{2\pi i x} \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. (S^1 mit der Multiplikation ist bekanntlich eine Gruppe). Die Fasern von ϕ sind $\phi^{-1}(z) = \{x+n \mid n \in \mathbb{Z},\ \phi(x) = z\}$. Außerdem ist $\phi|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ ein Homöomorphismus auf $S^1 \setminus \{-1\}$ mit der inversen Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi : S^1 \setminus \{-1\} & \longrightarrow & (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi i}\log(z). \end{array}$$

Lemma 2.3.1 (Liftungslemma). *Sei $\gamma : I \to S^1$ ein Weg in S^1 mit Anfang in 1, dann existiert genau ein Weg $\gamma' : I \to \mathbb{R}$ mit Anfang in 0, so daß $\phi \circ \gamma' = \gamma$ ist. Hierbei sei $\phi : \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$.*

Lemma 2.3.2 (Homotopieüberlagerungslemma). *Sind $\gamma, \delta : I \to S^1$ zwei Wege in S^1 mit Anfang in 1 und $F : \gamma \simeq \delta \operatorname{rel} \{0,1\}$. Dann existiert zu den Liftungen $\gamma', \delta' : I \to \mathbb{R}$, die nach Lemma 2.3.1 existieren, genau eine Homotopie*

$$F' : \gamma' \simeq \delta' \operatorname{rel} \{0,1\},$$

so daß $\phi \circ F' = F$ ist.

Beweis für 2.3.1 und 2.3.2. Ersetzt man im folgenden Y durch I bzw. $I \times I$ und f durch γ bzw. F, so erhält man einen Beweis von Lemma 2.3.1 bzw. Lemma 2.3.2:

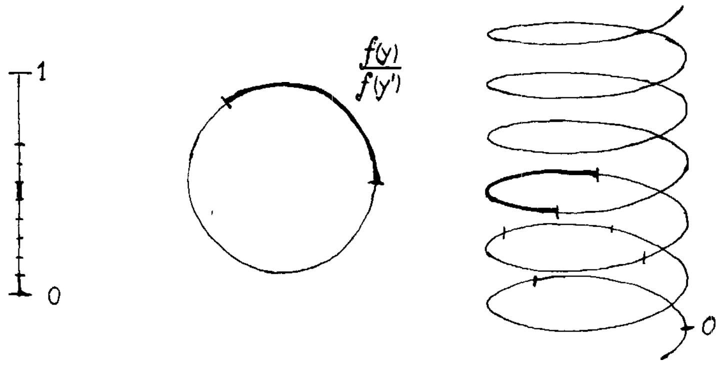
$$\begin{tikzcd}
(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & \subseteq & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"'] & \\
S^1 \setminus \{-1\} \arrow[u, "\psi", "\cong"'] & \subseteq & S^1 & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[ul, dashed, "f'"']
\end{tikzcd}$$

Y ist kompakt und f ist stetig, d.h. f ist gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\|f(y) - f(y')\| < 1$ für alle $\|y - y'\| < \varepsilon$ gilt. Für $\|y - y'\| < \varepsilon$ gilt dann $f(y) \neq -f(y')$, denn sonst lägen $f(y)$ und $f(y')$ einander auf S^1 diametral gegenüber. Daher ist $\frac{f(y)}{f(y')} \neq -1$, d.h. $\psi\left(\frac{f(y)}{f(y')}\right)$ ist für alle $y, y' \in Y$ mit $\|y - y'\| < \varepsilon$ erklärt. Wir wählen N so groß, daß $\|y\| < N\varepsilon$ für alle $y \in Y$.

Nun definieren wir eine Liftung f' durch

$$f'(y) := \psi\left(\frac{f(\frac{1}{1}\cdot y)}{f(\frac{N-1}{N}\cdot y)}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{f(\frac{1}{N}\cdot y)}{f(\frac{0}{N}\cdot y)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \psi\left(\frac{f(\frac{N-i+1}{N}y)}{f(\frac{N-i}{N}y)}\right).$$

f' ist wohldefiniert, stetig und eine **Liftung**, d.h. $\phi \circ f' = f$ mit $f'(0) = 0$.



Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Liftung: Sei $f'' : Y \to \mathbb{R}$ weitere Liftung mit $f''(0) = 0$. Dann ist $\phi((f' - f'')(y)) = \frac{\phi(f'(y))}{\phi(f''(y))} = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$, d.h. $(f' - f'')(y) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{Z}$. $f' - f''$ ist stetig und Y ist zusammenhängend, also ist $(f' - f'')(Y)$ zusammenhängend, d.h. ein Punkt, denn $\mathbb{Z}$ ist diskret. Daher ist $(f' - f'')(Y) = \{0\}$, denn $(f' - f'')(0) = 0 - 0 = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß $F' : I \times I \to \mathbb{R}$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ ist: $F'(\cdot, 0)$ ist eine Liftung von γ, da $F(\cdot, 0) = \gamma$ ist. $F'(\{0\} \times I) \in \mathbb{Z}$, da $F(\{0\} \times I) = \{1\}$ ist. Also ist $F'|_{\{0\}\times I} = c_0$, analog ist auch $F'|_{\{1\}\times I}$ konstant. Also ist $F' : \gamma' \simeq \delta'$ rel $\{0, 1\}$. □

Korollar 2.3.3. *Sei $\gamma : I \to S^1$ ein Weg in S^1 mit Anfangs- und Endpunkt 1, und $\gamma' : I \to \mathbb{R}$ sei eine Liftung von γ mit Anfangspunkt 0, d.h. $\gamma = \phi \circ \gamma'$ mit $\phi : \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Dann hängt der Endpunkt $\gamma'(1) \in \mathbb{Z}$ von γ' nur von der Homotopieklasse von γ ab.*

Satz 2.3.4. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Zunächst definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(S^1, 1) &\to \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \gamma'(1), \end{aligned}$$

die jeder Homotopieklasse von geschlossenen Wegen den Endpunkt ihrer Liftung zugeordnet; der Anfangspunkt dieser Wege sei stets $0 \in \mathbb{R}$. φ ist wegen Korollar 2.3.3 wohldefiniert. Außerdem ist φ ein Gruppen-Homomorphismus, denn

$$\varphi([\gamma][\delta]) = \varphi([\gamma * \delta]) = (\gamma * \delta)'(1) = \gamma'(1) + \delta'(1) = \varphi([\gamma]) + \varphi([\delta]).$$

Nun zeigen wir, daß φ surjektiv ist: Sei $n \in \mathbb{Z}$, so definieren wir $\gamma' : I \to \mathbb{R}$ durch $\gamma'(s) := ns$ und $\gamma : I \to S^1$ durch $\gamma := \phi \circ \gamma'$. Dann ist γ ein geschlossener Weg in S^1, der in 1 beginnt und es gilt $\varphi([\gamma]) = \gamma'(1) = n$.

ϕ ist auch injektiv: Sei $\varphi([\gamma]) = \gamma'(1) = 0$. Dann ist γ' ein geschlossener Weg in $\mathbb{R}$, der bei 0 beginnt. Daher ist γ' homotop zum konstanten Weg γ_0' in $\mathbb{R}$. γ_0' ist aber auch Liftung des konstanten Weges γ_0 in S^1. Deshalb ist $\gamma \simeq \gamma_0$ rel $\{0, 1\}$, d.h. $[\gamma] = [\gamma_0]$. □

Definition:
Sei X ein topologischer Raum. Auf X sei eine zweistellige Operation $\cdot$ gegeben, die die Gruppenaxiome erfüllt. Dann heißt X eine **topologische Gruppe**, wenn

1. die Inversenbildung $x \longmapsto x^{-1}$
2. und die Multiplikation $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ stetig sind.

◇

Satz 2.3.5. *Sei G eine einfach zusammenhängende topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine diskrete Untergruppe. Dann gilt*

$$\pi_1(G/H, 1) \cong H.$$

Bemerkung:
Setzt man in Satz 2.3.5 $G = (\mathbb{R}, +)$ und $H = \mathbb{Z}, (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \cong (S^1, \cdot)$, so erhält man die Aussage von Satz 2.3.4.

Beweis von Satz 2.3.5. Wir bezeichnen die Quotientenabbildung mit $\phi : G \longrightarrow G/H$. Es ist zunächst zu zeigen, daß es eine offene Umgebung $V \subseteq G$ um 1 gibt, so daß ϕ die Umgebung V homöomorph auf eine offene Umgebung V' von 1 in G/H abbildet: H ist diskret. Also gibt es eine Umgebung $U \subseteq G$ von 1 mit $U \cap H = \{1\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2^{-1} \end{aligned}$$

ist stetig. Deshalb gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von 1 mit $g_1 g_2^{-1} \in U$ für alle $g_1, g_2 \in V$. ϕ ist als Quotientenabbildung offen, d.h. $V' := \phi(V) \subseteq G/H$ ist offen. Seien $g_1, g_2 \in V$ so, daß $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ ist. Dann ist $\phi(g_1 \cdot g_2^{-1}) = 1$, da ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist. Es folgt, daß $g_1 g_2^{-1} \in H \cap U = \{1\}$ ist, d.h. $g_1 = g_2$. Daher ist $\phi|_V$ injektiv, d.h. ein Homöomorphismus zwischen V und V'.

Nun beweist man die Analoga zu Lemma 2.3.1, Lemma 2.3.2 und Korollar 2.3.3 und führt den Rest des Beweises analog zu Satz 2.3.4. □

Satz 2.3.6. *Seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ zwei punktierte, topologische Räume. Dann ist $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Übung. □

Korollar 2.3.7. *Sei $T^n := \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ der n-dimensionale Torus. Dann ist $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.*

Beweis. Dies kann man auf zwei verschiedene Weisen zeigen:

1. Aus den Sätzen 2.3.4 und 2.3.6 erhält man $\pi_1(T^n, x) \cong \pi_1(S^1, x_1) \times \cdots \times \pi_1(S^1, x_n) \cong \mathbb{Z}^n$.
2. $T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Mit Satz 2.3.5 folgt nun: $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$.

□

2.3.2 Anwendungen von $\pi_1(S^1)$

Satz 2.3.8. *Die Abbildung $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$ besitzt keine stetige Fortsetzung $\rho : D^2 \to S^1$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine stetige Fortsetzung $\rho : D^2 \to S^1$ von id_{S^1}. Dann wäre $\rho \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$:

$$S^1 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{\rho} S^1.$$

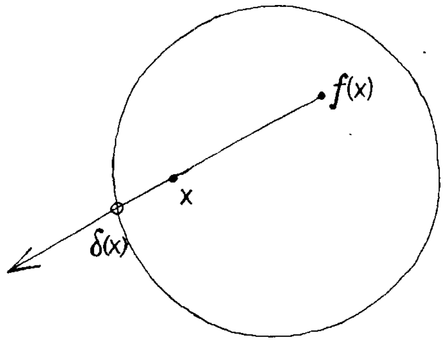
Nach Satz 2.2.4 folgte daraus, daß auch $\rho_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)}$ wäre:

$$\underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(D^2)}_{\cong \{0\}} \xrightarrow{\rho_*} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}}.$$

Dies ist nicht möglich. □

Korollar 2.3.9 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^2 \to D^2$ besitzt mindestens einen Fixpunkt x_0.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine fixpunktfreie, stetige Abbildung $f : D^2 \to D^2$. Dann definieren wir $\delta : D^2 \to S^1$ wie folgt: Wir legen eine Halbgerade von $f(x)$ ausgehend durch $f(x)$ und x, die wie im Bild gerichtet ist. Deren Schnittpunkt mit S^1 sei $\delta(x)$. Da stets $x \neq f(x)$ ist, ist δ damit wohldefiniert. δ ist außerdem stetig, da f stetig ist, und $\delta|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$, im Widerspruch zu Satz 2.3.8. □



2.3.3 Die Zerlegungsmethode

Es gibt zwei wichtige Methoden zur Berechnung von π^1:

1. Die **Überlagerungsmethode** wurde zur Berechnung von $\pi_1(S^1)$ verwendet und wird noch ausführlicher besprochen.

2. Die **Zerlegungsmethode**.

Definition:
Seien G_1 und G_2 disjunkte Gruppen. Ein Wort $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ über (=endl. Folge von Elementen von) $G_1 \cup G_2$, wobei $x_i \in G_1 \cup G_2$ ist für jedes i, heißt **reduziert**, wenn $n = 0$ ist oder für alle i genau dann $x_i \in G_1$ gilt, wenn $x_{i+1} \in G_2$ ist. Zu jedem Wort w über $G_1 \cup G_2$ gibt es ein eindeutig bestimmtes, reduziertes Wort, das wir mit w identifizieren. Dieses erhält man aus w, indem man „benachbarte" Elemente einer Gruppe durch deren Produkt ersetzt und Einsen wegläßt. Die Menge all dieser Äquivalenzklassen von Wörtern bezeichnen wir mit $\boldsymbol{G_1 * G_2}$.

Wir definieren das Produkt von zwei (Äquivalenzklassen von) Wörtern dadurch, daß man beide Wörter hintereinanderschreibt: $(x_1 x_2 \ldots x_n)(y_1 y_2 \ldots y_m) := (x_1 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_m)$. Dann ist die Menge $G_1 * G_2$ mit dem oben definierten Produkt eine Gruppe, die man als das **freie Produkt** von G_1 und G_2 bezeichnet. Das neutrale Element des freien Produkts ist das leere Wort (also das Wort der Länge 0). Zu einem gegebenen Wort $w = (x_1 \ldots x_n)$ ist das inverse Element $w^{-1} = (x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \ldots x_1^{-1})$. ◇

Bemerkung:
Sind G_1, G_2 nicht disjunkt, so ersetzt man G_2 durch eine isomorphe, zu G_1 disjunkte Gruppe $G_2' \cong G_2$, und bildet daraus $G_1 * G_2 := G_1 * G_2'$.

Beispiele:

1. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \cong G_1 &:= \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbb{Z} \cong G_2 &:= \{b^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Worte in $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$:

$$\underbrace{aaba^2a^2a}_{\text{nicht reduziert}} = \underbrace{a^2b(a^5)}_{\text{reduziert}} = a^iba^j \text{ mit } i = 2, j = 5.$$

$$\underbrace{a_1 a_1^{-1} b_1}_{\text{nicht reduziert}} = 1_{G_1} b_1 = \underbrace{b_1}_{\text{reduziert}} .$$

In $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ gilt $a^i b^j \neq b^j a^i$ für $i, j \neq 0$, d.h. für $a^i \neq 1_{G_1}$, $b^j \neq 1_{G_2}$.

2. $G := \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{=\{1,a\}} * \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{=\{1,b\}}$ wobei $a \cdot a = 1$, $b \cdot b = 1$. Dann ist $G = \{1, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, baba, \ldots\}$.

Die Worte haben endliche Länge, allerdings ist G unendlich und nicht kommutativ. Beispielsweise gilt: $aba \cdot ab = aba^2b = abb = ab^2 = a$ und $ab \cdot aba = ababa$.

Definition:
Sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ eine Untergruppe. N heißt **Normalteiler** von G, wenn für $g \in G$ stets $gN = Ng$ gilt, wobei $gN := \{gn \mid n \in N\}$ und Ng analog definiert sind. ⋄

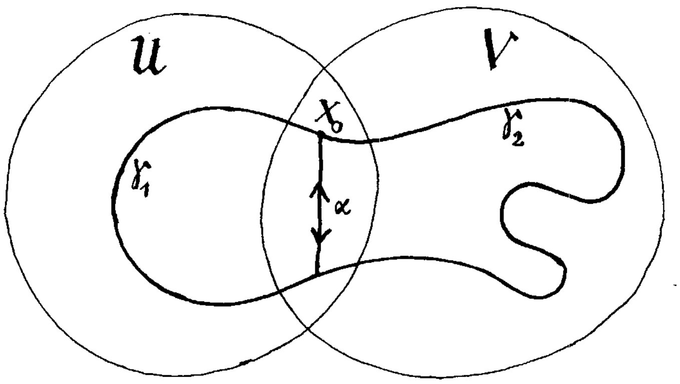
Satz 2.3.10 (Seifert, van Kampen). *Sei $X = U \cup V$ ein topologischer Raum mit U, V offen, $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Weiter seien die auftretenden Inklusionen und zugehörigen Gruppenhomomorphismen folgendermaßen bezeichnet:*

$$\begin{array}{ccc} U & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \\ {\scriptstyle i'}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle j} \\ U\cap V & \underset{j'}{\hookrightarrow} & V \end{array} \quad \xrightarrow{\pi_1} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(U,x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X,x_0) \\ {\scriptstyle i'_*}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle j_*} \\ \pi_1(U\cap V,x_0) & \xrightarrow[j'_*]{} & \pi_1(V,x_0) \end{array}$$

$N \subseteq \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ sei der Normalteiler, der von allen Elementen der Form $i'_*(\alpha) \cdot j'_*(\alpha)^{-1}$ mit $\alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ erzeugt wird. Dann gilt:

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N.$$

Beweisidee. Der Isomorphismus zu $\pi_1(X, x_0)$ wird induziert durch Hintereinanderdurchlaufen der Wege.



□

Korollar 2.3.11. *Sei $X = U \cup V$ mit U, V offen und wegzusammenhängend. Weiter sei $U \cap V$ einfach zusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Dann ist*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

Beweis. $\pi_1(U \cap V, x_0) = \{1\}$. □

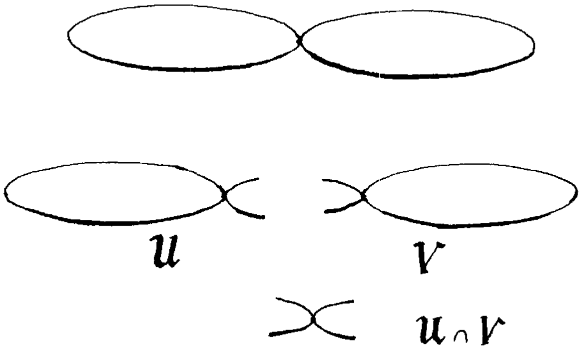
Korollar 2.3.12. *Sei $X = U \cup V$ mit U, V offen, $U, V, U \cap V$ einfach zusammenhängend und $U \cap V \neq \emptyset$. Dann ist X einfach zusammenhängend.*

Beweis. Offensichtlich. □

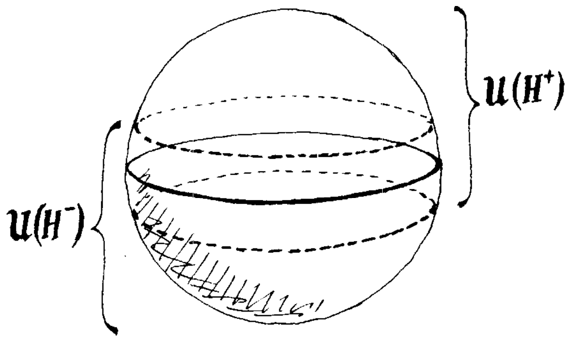
Korollar 2.3.13. *Sei $X = X_1 \vee \cdots \vee X_n$ eine Ein-Punkt-Vereinigung längs x_0, welches eine offene, zusammenziehbare Umgebung in X besitze. Dann gilt:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \cdots * \pi_1(X_n, x_0).$$

Beispiel $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$:



Beispiel $S^n = U(H^+) \cup U(H^-)$:



$U(H^+) \cong D^n \cong U(H^-)$ und $U(H^+) \cap U(H^-) \simeq S^{n-1}$. Daher ist für $n \geq 2$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^n) \cong (\pi_1(U(H^+)) * \pi_1(U(H^-)))\,/N \cong \{1\}$. Für $n = 1$ ist $U(H^+) \cap U(H^-)$ nicht zusammenhängend.

2.4 Überlagerungen

Wir wollen eine der Methoden zur Berechnung von $\pi_1(S^1)$, nämlich die Betrachtung der Überlagerung $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$, auf allgemeine topologische Räume erweitern. Ziel ist die Konstruktion einer „universellen Überlagerung“ $\tilde{p} : \widetilde{X} \to X$ mit $\pi(\widetilde{X}) = \{1\}$. Dabei braucht X keine Gruppenstruktur zu tragen.

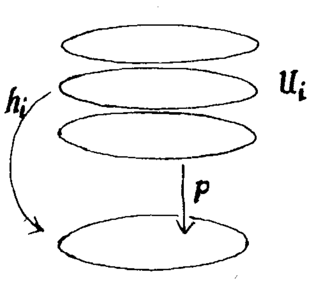
Definition:
Eine stetige Abbildung $p : Y \to X$ heißt genau dann **(topologische) Überlagerung**, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von x, offene Mengen $U_i \subseteq Y$, $i \in I$, sowie Homöomorphismen $h : \amalg U_i \longrightarrow p^{-1}(U)$ und $h_i : U_i \longrightarrow U$ (für $i \in I$) existieren, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} U_i \arrow[r, "\cong", "h"'] \arrow[dr, "\coprod_{i\in I} h_i"'] & p^{-1}(U) \subseteq Y \arrow[d, "p"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
 & U \subseteq X
\end{tikzcd}$$

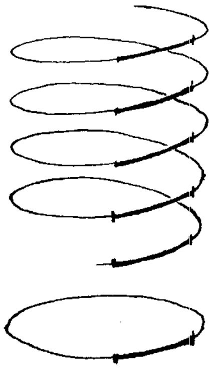
$\coprod_{i\in I} h_i : \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow U$ ist ebenfalls eine Überlagerung (von U), die man als **triviale Überlagerung** bezeichnet. Die offenen Mengen U_i nennt man **Blätter** der trivialen Überlagerung. Jede Überlagerung ist **lokal trivial**, also sind X und Y **lokal homöomorph**, d.h. für jedes $y \in Y$ gibt es eine Umgebung V von y, so daß $p|_V : V \to p(V) \subseteq X$ ein Homöomorphismus ist.

Eine Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ heißt **(weg-)zusammenhängend**, wenn Y (weg-)zusammenhängend ist. ◇

Lokal sieht eine Überlagerung folgendermaßen aus:



Beispiel für eine topologische Überlagerung:



Definition:
Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung punktierter Räume, $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine punktierte, stetige Abbildung. Dann heißt eine punktierte, stetige Abbildung $f' : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit $p \circ f' = f$ eine **Liftung** von f.

$$\begin{tikzcd}
 & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\
(Z, z_0) \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$ ◇

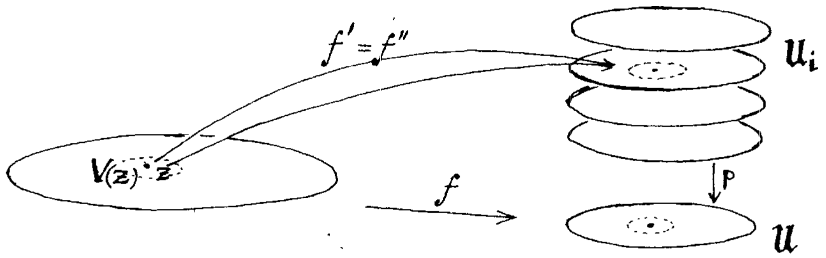
Satz 2.4.1 (Eindeutigkeit der Liftung). *Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung punktierter Räume. Sei $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig und punktiert, (Z, z_0) zusammenhängend. Falls eine Liftung $f' : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ existiert, so ist f' eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei f'' eine zweite Liftung von f. Wir definieren

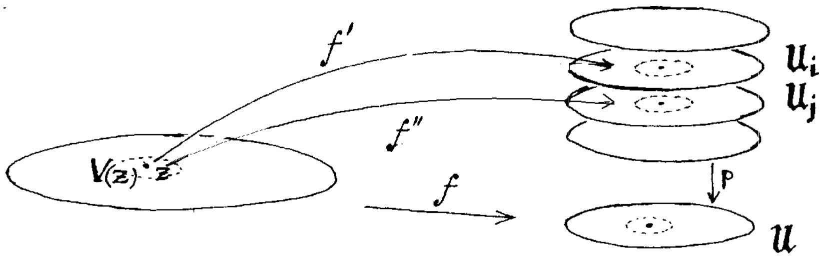
$$A := \{z \in Z \mid f'(z) = f''(z)\}$$
$$B := \{z \in Z \mid f'(z) \neq f''(z)\}.$$

A ist nichtleer, da $z_0 \in A$ ist, und es gilt $Z = A \uplus B$. Wir zeigen im folgenden, daß A, B beide offen sind. Dann muß $B = \emptyset$, d.h. $A = Z$, sein, da Z zusammenhängend ist.

1. „A ist offen“: Sei $z \in A$ und $p : \coprod_{j \in I} U_j \to U$ die triviale Überlagerung einer Umgebung U von $f(z)$. Weiter sei $f'(z) = f''(z) \in U_i \subseteq Y$ und $V := V(z) := (f')^{-1}(U_i) \cap (f'')^{-1}(U_i) \subseteq Z$. Dann ist $f|_V = (p \circ f')|_V = (p \circ f'')|_V$. Da $p|_{f'(V)}$ ein Homöomorphismus ist, folgt daraus $f'|_V = f''|_V$. Da V offen ist, haben wir mit V eine Umgebung von z in A gefunden. Also ist A offen.



2. „B ist offen“: Sei $z \in B$. Dann liegt $f''(z)$ in einem anderen Blatt als $f'(z)$, da $p \circ f''(z) = p \circ f'(z)$ aber $f''(z) \neq f'(z)$ ist. Für die beiden Blätter $f'(z) \in U_i$, $f''(z) \in U_j$ gilt $U_i \cap U_j = \emptyset$. Setzen wir $V := V(z) := (f')^{-1}(U_i) \cap (f'')^{-1}(U_j)$, so ist V offen, nichtleer und für alle $v \in V$ ist $f'(v) \neq f''(v)$, d.h. $V \subseteq B$ offen. Also ist auch B offen.



$\square$

Satz 2.4.2 (Wegliftungseigenschaft). *Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, $\gamma : I \to X$ ein Weg mit Anfang x_0. Dann gibt es genau eine Liftung $\gamma' : I \longrightarrow Y$ von γ mit $\gamma'(0) = y_0$.*

$$\begin{tikzcd}
 & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\
(I, 0) \arrow[ur, dashed, "\exists \gamma'"] \arrow[r, "\gamma"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Beweis.

1. Eindeutigkeit: Folgt aus Satz 2.4.1.
2. Existenz: Da I kompakt ist, existiert eine Unterteilung

   $$I = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, t_n]$$

   mit $t_0 = 0$, $t_n = 1$ und $t_i < t_{i+1}$, so daß p über Umgebungen U_i der Mengen $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ lokal trivial ist, d.h. daß für $i = 0, \ldots, n-1$ gilt

   $$\begin{tikzcd}
   \coprod_j V_{ij} \arrow[r, phantom, "\cong"] & p^{-1}(U_i) \arrow[d, "p"] \\
   I \supseteq [t_i, t_{i+1}] \arrow[u, dashed, "\gamma_i'"] \arrow[r, "\gamma"] & U_i \subseteq X
   \end{tikzcd}$$

   Da $p|_{V_{ij}} : V_{ij} \to U_i$ für jedes $i = 0, \ldots, n$ ein Homöomorphismus ist, läßt sich $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für $i = 0, \ldots, n-1$ liften zu einem Weg $\gamma'|_{[t_i, t_{i+1}]}$, so daß γ' insgesamt ein Weg mit Anfang y_0 ist.

□

Bemerkung:
Achtung: Satz 2.4.1 gilt für beliebige stetige Abbildungen, Satz 2.4.2 nur für Wege.

Satz 2.4.3 (Homotopieliftungseigenschaft). *Sei*

$$\begin{tikzcd} & (Y,y_0) \arrow[d, "p\ \textit{Überlagerung}"] \\ (Z,z_0) \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

gegeben. Dann kann jede Homotopie $F : Z \times I \longrightarrow X$ mit $F(\cdot,0) = f$ zu einer Homotopie $F' : Z \times I \longrightarrow Y$ mit $F'(\cdot,0) = f'$ geliftet werden.

Beweis.

1. Die Aussage gilt offensichtlich für triviale Überlagerungen.

2. I ist kompakt. Daher gibt es für alle $z \in Z$ eine Umgebung $U_z \subseteq Z$ von z und eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ von I, so daß $F(U_z \times [t_i, t_{i+1}])$ eine Umgebung besitzt, die trivial überlagert wird. Dort kann man eindeutig liften und diese lokalen Liftungen kann man zu der gesuchten Liftung F' „zusammenkleben“.

□

Definition:
Sei $(Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, $\gamma : I \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0$. Dann notieren wir die eindeutig bestimmte Liftung von γ mit Anfangspunkt y_0 als $\boldsymbol{\gamma'_{y_0}}$. ◇

Korollar 2.4.4. *Sind γ und δ Wege in X mit Anfang x_0 und $\gamma \simeq \delta$ rel $\{0,1\}$. Dann sind die eindeutig bestimmten Liftungen γ'_{y_0} und δ'_{y_0} mit Anfang y_0 homotop relativ $\{0,1\}$. Insbesondere sind deren Endpunkte $\gamma'_{y_0}(1) = \delta'_{y_0}(1)$ gleich.*

Korollar 2.4.5. *Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist*

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv.

Beweis. Sei γ eine Schleife in (Y, y_0), die $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ repräsentiert, und es gelte $p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma] = 1$. Dann ist $p \circ \gamma \simeq c_{x_0}$ rel $\{0,1\}$, wobei c_{x_0} der konstante Weg ist. Korollar 2.4.4 liefert, daß $\gamma \simeq c_{y_0}$ rel $\{0,1\}$ ist. Daher ist $[\gamma] = 1$. □

Bemerkung:
Der Beweis von 2.4.3 liefert, daß die Homotopie F relativ $\{0,1\}$ zu einer Homotopie F' relativ $\{0,1\}$ geliftet wird.

Bemerkung:
Ist γ eine Schleife in (X, x_0) und γ'_{y_0} die Liftung von γ mit Anfang $y_0 \in Y$. Dann hängt der Endpunkt $\gamma'_{y_0}(1) \in p^{-1}(x_0) \subseteq Y$ nur von $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ab.

Damit haben wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ (y, [\gamma]) & \longmapsto & \gamma'_y(1) =: y \cdot [\gamma]. \end{array}$$

Diese Abbildung erfüllt:

1. $y \cdot 1 = y \qquad (1 := [c_{x_0}])$,

2. $y \cdot ([\gamma_1][\gamma_2]) = (y \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2]$.

Man sagt, die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ operiere auf $p^{-1}(x_0)$. „**Operation der Fundamentalgruppe der Basis auf der Faser**".

Definition:
Sei G eine Gruppe, X eine Menge. Eine **Operation** von G auf X **von rechts** ist eine Abbildung $X \times G \longrightarrow X$, $(x, g) \longmapsto x \cdot g$ mit

1. $x \cdot 1 = x$
2. $x \cdot (g_1 \cdot g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$

(Analog definiert man eine **Gruppenoperation von links**.)

Operiert die Gruppe G von rechts auf X, so definiert man folgendes. (Die analogen Begriffe werden auch für Linksoperationen verwendet.)

1. Der **Stabilisator** (**Isotropiegruppe**, **Standgruppe**) von $x_0 \in X$ ist definiert als

   $$\mathrm{Stab}(x_0) := \{g \in G \mid x_0 \cdot g = x_0\}.$$

   $\mathrm{Stab}(x_0)$ ist eine Untergruppe von G.
2. Der **Orbit** (**Bahn**) von $x_0 \in X$ ist definiert als

   $$x_0 G := \{x_0 g \mid g \in G\} \subseteq X.$$

3. Man sagt, G operiere **transitiv** auf X, falls für $x \in X$ stets $xG = X$ gilt, d.h. wenn für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ existiert mit $xg = y$.
4. Der Gruppenhomomorphismus

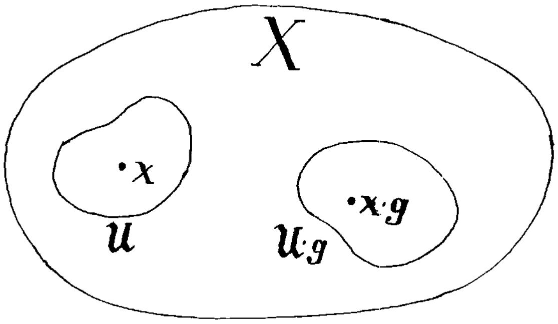
   $$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \mathrm{Sym}(X) := \{\text{bijektive Abbildungen } X \to X\} \\ g &\longmapsto \rho_g, \qquad \rho_g(x) := x \cdot g \ \forall x \in X \end{aligned}$$

   heißt eine **Darstellung** von G in $\mathrm{Sym}(X)$. Falls X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\rho(G) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(X)$ ist, so heißt ρ **lineare Darstellung**.
5. G operiert **treu** (**effektiv**) auf X, falls die Darstellung ρ injektiv ist.

$\diamond$

Bemerkung:
Wir betrachten eine Darstellung von $\pi_1(X, x_0)$ in $\mathrm{Sym}(p^{-1}(x_0))$. Die Menge $p^{-1}(x_0)$ ist diskret.

Definition:
Sei X ein topologischer Raum, auf dem eine Gruppe G durch Homöomorphismen operiert, d.h. $\rho(G) \subseteq$ Homöomorphismen(X). Dann sagt man, G operiere **eigentlich diskontinuierlich** auf X, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so daß für $g \in G \setminus \{1\}$ stets $U \cap U \cdot g = \emptyset$ gilt. Insbesondere gilt dann $xg \neq x$ für alle $x \in X$ und alle $g \in G \setminus \{1\}$, d.h. G operiert (**fixpunkt**-)**frei**.



$\diamond$

Definition:
Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Dann heißt die Abbildung $G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ ein **innerer Automorphismus**. Zwei Untergruppen $H_1, H_2 \subseteq G$ heißen **konjugiert**, wenn sie durch einen inneren Automorphismus aufeinander abgebildet werden, d.h. wenn es ein $g \in G$ gibt mit $gH_1g^{-1} = H_2$. $\diamond$

Proposition 2.4.6. *Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann gilt:*

1. *Für alle* $y \in p^{-1}(x_0)$ *ist* $\mathrm{Stab}(y) = p_*(\pi_1(Y,y)) \subseteq \pi_1(X,x_0)$. *(Erinnerung:* $\pi_1(X,x_0)$ *operiert auf* $p^{-1}(x_0)$ *durch* $\pi_1(X,x_0) \times p^{-1}(x_0) \ni ([\gamma],y) \mapsto \gamma'_y(1) \in p^{-1}(x_0)$*.)*

2. *Ist* Y *wegzusammenhängend, so operiert* $\pi_1(X,x_0)$ *transitiv auf* $p^{-1}(x_0)$*.*

3. *Ist* Y *wegzusammenhängend, so sind die Untergruppen* $p_*(\pi_1(Y,y))$, $y \in p^{-1}(x_0)$ *konjugiert in* $\pi_1(X,x_0)$*.*

4. *Ist* Y *zusammenhängend, so haben alle Fasern* $p^{-1}(x)$, $x \in X$, *die gleiche Mächtigkeit, die man als die* **Blätterzahl** *der Überlagerung* p *bezeichnet.*

Beweis. Übung. □

Proposition 2.4.7. *Sei* $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ *eine wegzusammenhängende Überlagerung,*

$$N := \{[\gamma] \cdot p_*(\pi_1(Y,y_0)) \mid [\gamma] \in \pi_1(X,x_0)\}$$

die Menge der Nebenklassen von $p_*(\pi_1(Y,y_0))$ *in* $\pi_1(X,x_0)$*. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} N & \xrightarrow{\varphi} & p^{-1}(x_0) \\ [\gamma] \cdot p_*(\pi_1(Y,y_0)) & \longmapsto & y_0 \cdot [\gamma] \end{array}$$

bijektiv.

Spezialfälle:

1. *Ist* $p^{-1}(x_0)$ *endlich, so ist* $\#(p^{-1}(x_0)) = [\pi_1(X,x_0) : p_*(\pi_1(Y,y_0))]$ *der Index*[1] *der Untergruppe* $p_*(\pi_1(Y,y_0))$ *in* $\pi_1(X,x_0)$*.*

2. *Ist* $p_*(\pi_1(Y,y_0))$ *Normalteiler in* $\pi_1(X,x_0)$*, so ist* $\#(p^{-1}(x_0)) = \#(\pi_1(X,x_0)/p_*(\pi_1(Y,y_0)))$*.*

Beweis.

1. φ ist wohldefiniert, da sich zwei verschiedene Repräsentanten einer Nebenklassen nur durch Elemente in $p_*(\pi_1(Y,y_0)) = \mathrm{Stab}(y_0)$ unterscheiden, d.h. die Liftungen unterscheiden sich durch einen geschlossenen Weg in (Y,y_0), haben also denselben Endpunkt.

2. φ ist injektiv: Seien $[\gamma_1],[\gamma_2] \in \pi_1(X,x_0)$ mit $y_0 \cdot [\gamma_1] = y_0 \cdot [\gamma_2]$. Dann ist $(\gamma_1\gamma_2^{-1})'$ ein geschlossener Weg in (Y,y_0), d.h. $[\gamma_1\gamma_2^{-1}] \in p_*(\pi_1(Y,y_0))$.

3. φ ist surjektiv, da $\pi_1(X,x_0)$ nach Proposition 2.4.6 transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ operiert.

□

[1] Der **Index** i einer Untergruppe U einer Gruppe G ist die Anzahl der Linksnebenklassen gU, $g \in G$ von U in G, falls dies endlich viele sind. Andernfalls ist $i := \infty$.

Beispiele von Überlagerungen:

1. $$\begin{aligned} p_n : S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto z^n. \end{aligned}$$

   Dann ist $p_n^{-1}(z) = \{z\delta^r \mid r = 0, \ldots, n-1\}$, wobei δ eine n-te primitive Einheitswurzel ist (z.B. $\delta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$). Bezeichnen wir mit $\gamma_r : I \to S^1$ den Weg $t \mapsto e^{2\pi i r t}$, so ist

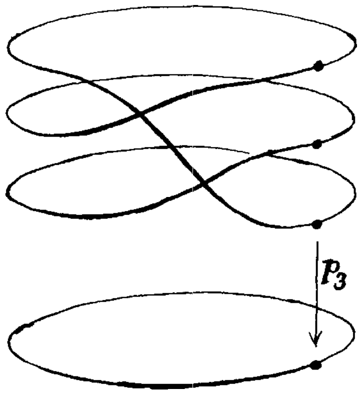
   $$(p_n)_* : \underbrace{\pi_1(S^1,1)}_{\mathbb{Z}\cdot\gamma_1} \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^1,1)}_{\mathbb{Z}\cdot\gamma_n}.$$

   Speziell ist $(p_n)_*([\gamma_1]) = [p_n \circ \gamma_1] = [e^{2\pi i n t}] = [\gamma_n] = \underbrace{\gamma_1 * \cdots * \gamma_1}_{n}$.

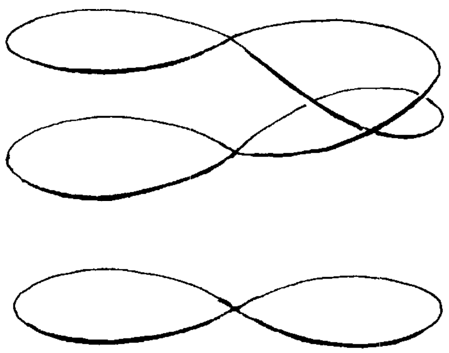
   Da $\mathbb{Z}\cdot\gamma_1 \cong \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}\cdot\gamma_n \cong \mathbb{Z}$, läßt sich die Abbildung auch schreiben als

   $$\begin{aligned} (p_n)_* : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto n \\ a &\mapsto n\cdot a, \end{aligned}$$

   wobei $n = \#(p_n^{-1}(1))$ ist. Die Operation von $\pi_1(S^1,1)$ auf $p_n^{-1}(1)$ ist gegeben durch $[\gamma_m]\cdot 1 = [\gamma_m]\cdot\delta^0 = \delta^m = e^{2\pi i\frac{m}{n}}$.



2. Überlagerung der Acht $S^1 \vee S^1$:



2-blättrige Überlagerung von $S^1 \vee S^1$.

Es gilt $\pi_1(S^1 \vee S^1) = (\mathbb{Z}a) * (\mathbb{Z}b)$.

Definition:
Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, X wegzusammenhängend. Die Menge $D(p)$ aller **fasertreuen** Homöomorphismen $\phi : Y \to Y$, d.h. aller Homöomorphismen, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\phi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, heißt Gruppe der **Decktransformationen** von p. Dies ist eine Gruppe bezüglich der Komposition $\circ$ von Homöomorphismen. $\diamond$

Lemma 2.4.8. *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann operiert die Gruppe $D(p)$ der Decktransformationen eigentlich diskontinuierlich auf Y. Insbesondere ist $\phi \in D(p)$ genau dann die identische Abbildung, wenn ϕ einen Fixpunkt besitzt. Also stimmen zwei Decktransformationen überein, wenn sie in einem Punkt übereinstimmen.*

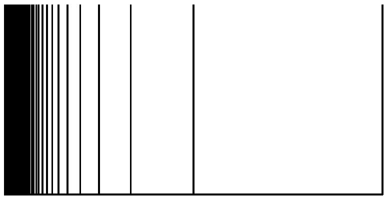
Beweis. Seien $\phi \in D(p) \setminus \{\mathrm{id}_Y\}$, $y \in Y$ und $y \in \coprod_{i \in I} U_i \to V \subseteq X$ eine triviale Überlagerung mit $y \in U_j$. Angenommen es wäre $U_j \cap \phi(U_j) \neq \emptyset$, so gäbe es ein $z \in U_j$ mit $\phi(z) \in U_j$. Wegen $p \circ \phi = p$ (Def. von $D(p)$) wäre dann $p(\phi(z)) = p(z)$, d.h. $\phi(z) = z$, da $p|_{U_j}$ ein lokaler Homöomorphismus ist. Außerdem ist ϕ (wegen $p \circ \phi = p$) eine Liftung von p. Da auch id_Y eine Liftung von p mit $\mathrm{id}_Y(z) = \phi(z)$ ist, gilt wegen der Eindeutigkeit der Liftung (Satz 2.4.1) $\phi = \mathrm{id}_Y$.
Sind $f, g \in D(p)$ mit $f(y) = g(y)$ für ein $y \in Y$. Dann ist $f \circ g^{-1}(y) = y$, also gilt nach obigem $f \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Y$, d.h. $f = g$. □

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt genau dann **lokal wegzusammenhängend**, wenn es zu jeder nichtleeren, offenen Menge $U \subseteq X$ eine nichtleere, offene Teilmenge $V \subseteq U$ gibt, die wegzusammenhängend ist. ◇

Bemerkung:
Ein wegzusammenhängender, topologischer Raum ist nicht notwendig lokal wegzusammenhängend.

Beispiel:



$(I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \cup \bigcup_{n \geq 1} (\{\frac{1}{n}\} \times I) \subseteq \mathbb{R}^2$

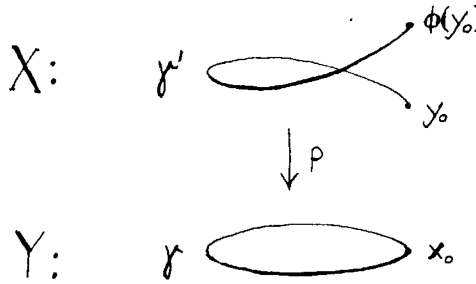
Satz 2.4.9. *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, Y einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist die Gruppe $D(p)$ der Decktransformationen kanonisch isomorph zu $\pi_1(X, x_0)$,*

$$D(p) \cong \pi_1(X, x_0).$$

Beweis.

Konstruktion der Abbildung $\Psi : D(p) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$:
Sei $\phi \in D(p)$. Wir wählen einen Weg $\gamma' : I \to Y$ von y_0 nach $\phi(y_0)$. Ein solcher Weg γ' existiert, da Y einfach zusammenhängend, also insbesondere wegzusammenhängend ist. $p \circ \gamma' =: \gamma$ ist ein geschlossener Weg in X. Nun definieren wir

$$\Psi(\phi) := [\gamma].$$



Ψ ist wohldefiniert: Y ist einfach zusammenhängend. Daher gilt bei Wahl eines Weges γ'' von y_0 nach $\phi(y_0)$ stets $\gamma'' \simeq \gamma'$ rel $\{0, 1\}$. Dann ist $p \circ \gamma'' \simeq p \circ \gamma'$ rel $\{0, 1\}$, da die stetige Abbildung p die Homotopie beibehält. Also ist $[\gamma]$ durch obige Konstruktion eindeutig bestimmt.

Ψ ist ein Gruppenhomomorphismus: Seien $\phi_1, \phi_2 \in D(p)$. Dann gibt es einen Weg $\gamma_1' : I \to Y$ von y_0 nach $\phi_1(y_0)$ und einen Weg $\gamma_2' : I \to Y$ von $\phi_1(y_0)$ nach $\phi_2(\phi_1(y_0))$. Damit ist $\gamma_1' * \gamma_2'$ ein Weg von y_0 nach $\phi_2(\phi_1(y_0))$. Also gilt:

$$\Psi(\phi_2 \circ \phi_1) = [p \circ (\gamma_1' * \gamma_2')] = [p \circ \gamma_1' * p \circ \gamma_2'] = [\gamma_1][\gamma_2] = \Psi(\phi_1)\Psi(\phi_2).$$

Ψ ist injektiv: Sei $\phi \in D(p)$ mit $\Psi(\phi) = 1$. Dann ist $\phi(y_0) = \gamma_{y_0}'(1)$ für einen Weg γ mit $1 = [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, d.h. $\phi(y_0) = y_0 \cdot [\gamma] = y_0 \cdot \Psi(\phi) = y_0$. Nach Lemma 2.4.8 ist ϕ daher die Identität.

Ψ ist surjektiv: Sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Wir konstruieren $\phi_\gamma \in D(p)$ mit $\Psi(\phi_\gamma) = [\gamma]$ wie folgt: Zu einem Punkt $y \in Y$ wählen wir einen Weg $\gamma_y' : I \to Y$ von y_0 nach y und nennen dessen Bild $\gamma_y := p \circ \gamma_y'$. Dann ist

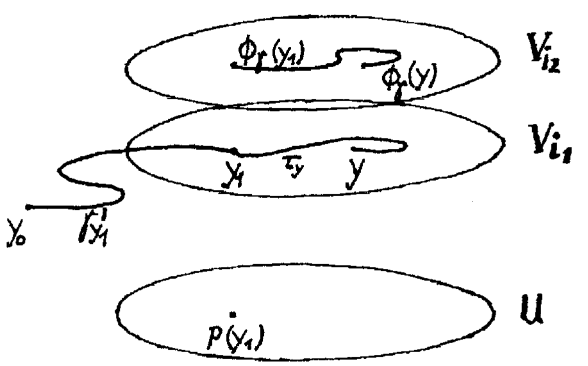
$\sigma_y := \gamma_y^{-1} * \gamma * \gamma_y$ ein Weg in X, der in $p(y)$ beginnt und endet, d.h. $[\sigma_y] \in \pi_1(X, p(y))$. Nun definieren wir $\phi_\gamma(y) := y \cdot [\sigma_y] = \sigma'_y(1)$. Offensichtlich hängt $[\sigma_y]$ nur von $[\gamma]$ ab, d.h. die Abbildung $[\gamma] \mapsto \phi_\gamma$ ist wohldefiniert.

Es bleibt zu zeigen, daß wir damit eine Decktransformation $\phi_\gamma \in D(p)$ definiert haben: Wegen $p \circ \phi_\gamma(y) = p(y)$ ist ϕ_γ fasertreu. ϕ_γ ist bijektiv, denn $\phi_\gamma^{-1}(y) = y \cdot [\sigma_y]^{-1}$. Da für $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ der Weg γ'_{y_0} von y_0 nach $\phi_\gamma(y_0)$ verläuft, ist $\Psi(\phi_\gamma) = [\gamma]$.

Nun ist nur noch zu zeigen, daß ϕ_γ stetig ist (ebenso ist ϕ_γ^{-1} stetig). Sei $y_1 \in Y$ beliebig. Wir zeigen, daß ϕ_γ stetig in y_1 ist: Zunächst wählen wir einen festen Weg γ'_{y_1} von y_0 nach y_1. Sei $W \subseteq Y$ eine Umgebung von $\phi_\gamma(y_1)$. Wir suchen nun eine Umgebung V_{i_1} von y_1 mit $\phi_\gamma(V_{i_1}) \subseteq W$.

Da p eine Überlagerung und Y lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung U von $p(y_1)$, so daß $p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$ und $V_i \xrightarrow[p]{\cong} U$ gilt und $V_{i_2} \subseteq W$ ist für ein $i_2 \in I$. Sei V_{i_1} das Blatt, das y_1 enthält und $y \in V_{i_1}$ beliebig. Dann wählen wir einen Weg τ_y in V_{i_1} von y_1 nach y. Dies ist möglich, da V_{i_1} wegzusammenhängend ist. Dann ist $\gamma'_{y_1} * \tau_y$ ein Weg von y_0 nach y. Nach Konstruktion ist

$$\phi_\gamma(y) = y \cdot [(p \circ ((\gamma'_{y_1} * \tau_y)^{-1})) * \gamma * (p \circ (\gamma'_{y_1} * \tau_y))].$$

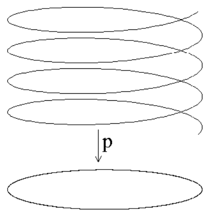


Da jede Liftung von $p \circ \tau_y$ zu einem Weg τ'_y, der von $\phi_\gamma(y_1)$ nach $\tau'_y(1)$ verläuft, ganz in V_{i_2} liegt, folgt, daß der Endpunkt $\tau'_y(1) = \phi_\gamma(y)$ in V_{i_2} liegt. Also ist $\phi_\gamma(V_{i_1}) \subseteq W$, d.h. ϕ_γ ist in y_1 stetig.

□

Beispiele von Decktransformationen:

1. $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$:



Sei ϕ eine Decktransformation, d.h. $\phi(0) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Sei $\phi(0) = n$. Die Abbildung $\phi_n : t \longrightarrow t + n$ ist eine Decktransformation mit $\phi_n(0) = n$. Also ist $\phi_n = \phi$ nach Lemma 2.4.8. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt stets $\phi_n \circ \phi_m(t) = t + n + m$, d.h. $(D(p), \circ) \cong (\mathbb{Z}, +)$, $\phi_n \mapsto n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & \mathbb{R} \arrow[dl] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

2. $p_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ (vgl. Seite 79)

Sei $\phi \in D(p_n)$. Dann ist $p_n(\phi(1)) = p_n(1)$, d.h. $\phi(1)^n = 1^n = 1$. Also ist $\phi(1) = \delta_n^j$, wobei $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ und δ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist, d.h. $\delta_n^n = 1$. Betrachte $\psi_j : z \mapsto \delta_n^j \cdot z$. Es gilt $p_n(\delta_n^j \cdot z) = \delta_n^{nj} z^n = z^n = p_n(z)$. Daher ist diese Abbildung fasertreu und ein Homöomorphismus, also eine Decktransformation. Wegen $\phi(1) = \psi_j(1)$ ist $\phi = \psi_j$, d.h. ϕ ist eine Drehung um den Winkel $\delta_n^j (= e^{\frac{2\pi i j}{n}})$. Insgesamt ergibt sich $(D(p_n), \circ) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Bemerkung:
Beispiel 1 liefert mit Satz 2.4.9 (da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist) einen neuen Beweis für $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

2.5 Die universelle Überlagerung

Satz 2.5.1.

Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, Z wegzusammenhängend und lokal wegzuzsammenhängend, $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ stetig. Dann existiert genau dann eine Liftung $f' : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ von f, wenn

$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq p_*(\pi_1(Y, y_0))$ *ist.*

$$\begin{tikzcd}
 & (Y,y_0) \arrow[d, "p"] \\
(Z,z_0) \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & (X,x_0)
\end{tikzcd}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Sei f' eine Liftung von f. Dann gilt $f_*(\pi_1(Z, z_0)) = (p \circ f')_*(\pi_1(Z, z_0)) = p_*(f'_*(\pi_1(Z, z_0))) \subseteq p_*(\pi_1(Y, y_0))$, da $f'_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(Y, y_0)$ ist.

„$\Leftarrow$“: Es gelte $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Wir definieren f' wie folgt: Sei $z \in Z$. Da Z wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg γ von z_0 nach z in Z. Also ist $f \circ \gamma$ ein Weg in X, der x_0 mit $f(z)$ verbindet. Nun setzen wir $f'(z) := (f \circ \gamma)'_{y_0}(1) = y_0 \cdot [f \circ \gamma]$, d.h. wir definieren $f'(z)$ als Endpunkt der Liftung von $f \circ \gamma$ mit Anfang y_0. Wir müssen noch zeigen, daß f' damit wohldefiniert und stetig ist (Denn dann ist f' nach Konstruktion eine Liftung von f.):

1. f' ist <u>wohldefiniert</u> (d.h. unabhängig von der Wahl von γ): Sei $\tilde{\gamma}$ ein weiterer Weg von z_0 nach z. Dann ist $[\gamma * \tilde{\gamma}^{-1}] \in \pi_1(Z, z_0)$, denn $\gamma * \tilde{\gamma}^{-1}$ ist ein geschlossener Weg. Mit der Voraussetzung folgt daraus, daß $[f \circ \gamma * \tilde{\gamma}^{-1}] = f_*[\gamma * \tilde{\gamma}^{-1}] \in p_*(\pi_1(Y, y_0))$ ist. Also ist die Liftung $(f \circ \gamma * \tilde{\gamma}^{-1})'_{y_0}$ ein geschlossener Weg, d.h. $((f \circ \gamma) * (f \circ \tilde{\gamma}^{-1}))'_{y_0}(1) = y_0$. Daher ist $(f \circ \gamma)'_{y_0}(1) = (f \circ \tilde{\gamma})'_{y_0}(1)$.
2. f' ist <u>stetig</u> in jedem $z \in Z$, wie man analog zur Stetigkeit von ϕ_γ, Beweis von Satz 2.4.9, zeigt.

$\square$

Korollar 2.5.2. *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, (Z, z_0) einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ eine eindeutig bestimmte Liftung.*

Beweis. Da $\pi_1(Z, z_0) = \{1\}$ ist, folgt die Existenz aus Satz 2.5.1. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus Satz 2.4.1. $\square$

Bemerkung:
Hieraus folgen insbesondere die Wegliftungseigenschaft (Satz 2.4.2) und die Homotopieliftungseigenschaft (Satz 2.4.3).

Korollar 2.5.3. *Seien $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ und $p' : (Y', y'_0) \to (X, x_0)$ Überlagerungen, Y und Y' seien einfach zusammenhängend und X sei lokal wegzusammenhängend. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homöomorphismus $h : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y'_0)$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
(Y,y_0) \arrow[rr, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & (Y',y'_0) \arrow[dl, "p'"] \\
 & (X,x_0) &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Dies folgt aus Korollar 2.5.2, da Überlagerungen lokal homöomorph zur **Basis** X, also auch Y und Y' lokal wegzusammenhängend sind. $\square$

Definition:
Eine Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ heißt **universelle Überlagerung**, wenn $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

Ist X lokal wegzusammenhängend, so besagt Korollar 2.5.3, daß zwei universelle Überlagerungen stets kanonisch isomorph sind. Daher spricht man dann meist von <u>der</u> universellen Überlagerung von X. $\diamond$

Bemerkung:
Sei $\widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung, γ ein geschlossener Weg in X. Dann ist eine Liftung γ' von γ in $\widetilde{X}$ entweder nicht geschlossen oder nullhomotop.

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt **semi-lokal einfach zusammenhängend**, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so daß jeder geschlossene Weg in U nullhomotop in X ist.

X heißt **hinreichend zusammenhängend**, wenn X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend ist. ⋄

Bemerkung:
Falls eine universelle Überlagerung $\widetilde{X} \longrightarrow X$ existiert, ist X semi-lokal einfach zusammenhängend.

Beispiel für einen Raum ohne universelle Überlagerung:
Der Hawaiische Ohrring ist nicht semi-lokal einfach zusammenhängend, da jede Umgebung des „Klebepunktes“ $0 \in \mathbb{R}^2$ eine 1-Sphäre enthält. (Vgl. Seite 59.)

Satz 2.5.4 (Existenz der universellen Überlagerung). *Sei X ein hinreichend zusammenhängender, topologischer Raum. Dann besitzt X eine universelle Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$.*

Beweis.

1. Konstruktion von $\widetilde{X}$ als Menge: Sei $x_0 \in X$. Wir setzen

$$\widetilde{X} := \{[\alpha] \mid \alpha \text{ ist Weg in } X \text{ mit Anfang } x_0\},$$

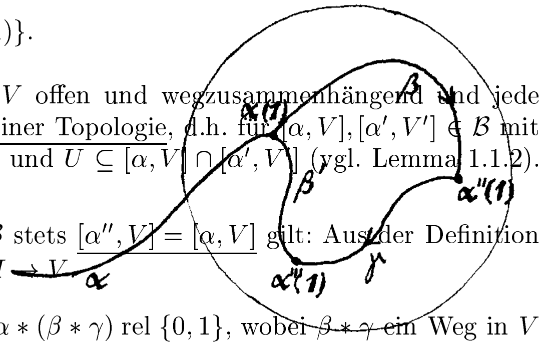
wobei $[\alpha]$ die Homotopieklasse des Weges $\alpha : I \to X$ relativ $\{0,1\}$ bezeichne. Weiter definieren wir $p : \widetilde{X} \to X$ durch $[\alpha] \longmapsto \alpha(1)$.

2. Nun konstruieren wir eine Topologie auf $\widetilde{X}$: Sei $[\alpha] \in \widetilde{X}$ und $V \subseteq X$ eine offene Umgebung von $p([\alpha]) = \alpha(1)$. Die Menge $[\alpha, V] \subseteq \widetilde{X}$ definieren wir durch

$$[\alpha, V] := \{[\alpha * \beta] \mid \beta \text{ ist Weg in } V \text{ mit Anfang } \alpha(1)\}.$$

Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller $[\alpha, V]$ für die $[\alpha] \in \widetilde{X}$, sowie V offen und wegzusammenhängend und jede Schleife in V nullhomotop in X ist. Dann ist $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie, d.h. für $[\alpha, V], [\alpha', V'] \in \mathcal{B}$ mit $[\alpha''] \in [\alpha, V] \cap [\alpha', V'] \neq \emptyset$ gibt es $U \in \mathcal{B}$ mit $[\alpha''] \in U$ und $U \subseteq [\alpha, V] \cap [\alpha', V']$ (vgl. Lemma 1.1.2). Dies werden wir im folgenden zeigen.

Dazu beweisen wir zunächst, daß für $[\alpha''] \in [\alpha, V] \in \mathcal{B}$ stets $[\alpha'', V] = [\alpha, V]$ gilt: Aus der Definition von $[\alpha, V]$ folgt $\alpha'' \simeq \alpha * \beta$ rel $\{0,1\}$ für geeignetes $\beta : I \to V$.



„$\subseteq$“: Sei $[\alpha'''] \in [\alpha'', V]$. Dann ist $\alpha''' \simeq (\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$ rel $\{0,1\}$, wobei $\beta * \gamma$ ein Weg in V ist. Also ist $\alpha''' \in [\alpha, V]$.

“$\supseteq$“: Sei $[\alpha'''] \in [\alpha, V]$, d.h. $\alpha''' \simeq \alpha * \beta'$ rel $\{0,1\}$, wobei β' ein Weg in V ist. Da V wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg γ von $\alpha''(1) = \beta(1)$ nach $\alpha'''(1) = \beta'(1)$ in V. Also haben wir einen geschlossenen Weg $(\beta')^{-1} * \beta * \gamma$ in V, der definitionsgemäß nullhomotop ist, d.h. $[(\beta')^{-1} * \beta * \gamma] = 1$. Daraus folgt $[\beta * \gamma] = [\beta']$, also $[\alpha'', V] \ni [(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * \beta'] = [\alpha''']$.

Damit können wir zeigen, daß $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie ist: Sei $[\alpha''] \in [\alpha, V] \cap [\alpha', V']$. Dann ist $[\alpha'', V \cap V'] \in \mathcal{B}$, da mit V, V' auch $V \cap V'$ offen und wegzusammenhängend ist und nur (in X) nullhomotope Schleifen enthält. Offensichtlich ist $[\alpha'', V \cap V'] \subseteq [\alpha'', V] = [\alpha, V]$ und $[\alpha'', V \cap V'] \subseteq [\alpha'', V'] = [\alpha', V']$. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie ist. Wir versehen $\widetilde{X}$ mit dieser Topologie.

3. $p : \widetilde{X} \to X$ ist stetig und offen: Für alle $[\alpha, V] \in \mathcal{B}$ gilt $p([\alpha, V]) = V$, d.h. p bildet die Basis $\mathcal{B}$ der Topologie von $\widetilde{X}$ auf eine Basis der Topologie von X ab.

4. Für alle $[\alpha, V] \in \mathcal{B}$ ist $p|_{[\alpha,V]} : [\alpha, V] \to V$ ein Homöomorphismus: $p([\alpha, V]) = V$ nach Definition, d.h. $p|_{[\alpha,V]} : [\alpha, V] \to V$ ist surjektiv. Es bleibt zu zeigen, daß p auf $[\alpha, V]$ injektiv ist: Seien $[\alpha * \beta], [\alpha * \beta'] \in [\alpha, V]$ mit $p(\alpha * \beta) = p(\alpha * \beta')$, d.h. $\beta(1) = \beta'(1)$. Dann ist $\beta' * \beta^{-1}$ ein geschlossener Weg in V mit Anfangspunkt $\alpha(1)$. Dieser ist (in X) nullhomotop, d.h. $[\alpha * \beta' * \beta^{-1}] = [\alpha]$ oder $[\alpha * \beta] = [\alpha * \beta']$.

5. p ist lokal trivial, denn für hinreichend kleines $V \subseteq X$ ist $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ ein Homöomorphismus. Wie wir bei Konstruktion der Topologie auf $\widetilde{X}$ gesehen haben, folgt aus $[\alpha, V] \cap [\alpha', V] \neq \emptyset$ stets $[\alpha, V] = [\alpha', V]$, also ist $p^{-1}(V) = \bigcup_{p([\alpha]) \in V} [\alpha, V]$ mit $[\alpha, V] \cap [\alpha', V] \in \{\emptyset, [\alpha, V]\}$.

Bisher haben wir gezeigt, daß $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung ist, es fehlt noch, daß $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

6. $\widetilde{X}$ ist wegzusammenhängend: Sei $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}]$, wobei $c_{x_0}(t) := x_0$ der konstante Weg in X sei, und $[\alpha] \in \widetilde{X}$ beliebig, d.h. α ein beliebiger Weg in X mit Anfang x_0. Wir definieren $\alpha_s(t) := \alpha(st)$ für $s, t \in I$. Dann ist $\alpha_0 = c_{x_0}$, $\alpha_1 = \alpha$ und $s \mapsto [\alpha_s]$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $[\alpha]$. Also ist $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend.

7. $\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend: Sei τ eine Schleife in $(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ Dann ist $\alpha := p \circ \tau$ eine Schleife in (X, x_0). Da $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist, ist jeder Weg β in X mit Anfang x_0 eindeutig liftbar zu einem Weg β' in $\widetilde{X}$ mit Anfang $\tilde{x}_0$. Insbesondere ist $\tau = \alpha'$. Da jeder Punkt $[\beta] \in \widetilde{X}$ einem Weg $\beta : I \to X$ mit $\beta(0) = x_0$ entspricht und dieser sich eindeutig zu $\beta' : (s \mapsto [\beta_s])$ liften läßt (β_s sei wie in 6. definiert), ist $[\beta] = \beta'(1)$. Da τ geschlossen ist, ist $[\alpha] = \alpha'(1) = \tau(1) = \tilde{x}_0$, d.h. $\alpha \simeq c_{x_0}$ rel $\{0, 1\}$ in X. Mit Korollar 2.4.4 folgt daraus $\tau \simeq c_{\tilde{x}_0}$ rel $\{0, 1\}$ in $\widetilde{X}$.

□

Korollar 2.5.5. *Sei X ein hinreichend zusammenhängender, topologischer Raum. Dann gilt:*

$$\pi_1(X, x_0) \cong D(p),$$

wobei $p : \widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung von X ist.

Beweis. Dies ergibt sich aus Satz 2.5.4 und Satz 2.4.9. □

Lemma 2.5.6. *Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann gilt:*

1. *Die Untergruppen $p_*\big(\pi_1(Y, y_1)\big) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ mit $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ sind konjugiert.*

2. *Ist $U \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe, die zu $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ konjugiert ist, so existiert ein $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ mit $U = p_*(\pi_1(Y, y_1))$.*

Beweis.

1. Dies ist eine Teilaussage von Lemma 2.4.6.

2. Sei $U = [\gamma] \cdot p_*\pi_1(Y, y_0) \cdot [\gamma]^{-1}$ mit $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ und $\gamma' : I \to Y$ die Liftung von γ mit Ende y_0. Dann ist

$$U = [\gamma] \cdot (p_*(\pi_1(Y, y_0))) \cdot [\gamma]^{-1} = p_*([\gamma'] \cdot \pi_1(Y, y_0) \cdot [\gamma']^{-1}) = p_*(\pi_1(Y, y_1))),$$

wobei y_1 der Anfangspunkt von γ' ist.

□

Definition:
Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann ist $\boldsymbol{\mathcal{C}(Y, p)} := \{p_*(\pi_1(Y, y)) \mid y \in p^{-1}(x_0)\}$ eine Klasse zu $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ konjugierter Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$. Sie heißt **charakterisierende Konjugationsklasse**[2] der Überlagerung p. ◇

[2]Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Dann bezeichnen wir die Menge $\{gUg^{-1} | g \in G\}$ aller konjugierten Untergruppen zu U als **Konjugationsklasse von $\boldsymbol{U}$**.

Satz 2.5.7 (Äquivalenzkriterium). *Sei X lokal wegzusammenhängend und $p : Y \to X$, $p' : Y' \to X$ wegzusammenhängende Überlagerungen. Dann gilt genau dann $\mathcal{C}(Y,p) = \mathcal{C}(Y',p')$, wenn p und p'* **äquivalent** *sind, d.h. wenn es einen Homöomorphismus zwischen Y und Y' gibt, so daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y' \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Klar ist, daß $\mathcal{C}(Y,p) = \mathcal{C}(Y',p')$ für die Äquivalenz notwendig ist. Wir zeigen, daß dies auch hinreichend ist. Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, d.h. $p_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq \pi_1(X,x_0)$. Dann ist $p_*(\pi_1(Y,y_0)) \in \mathcal{C}(Y,p) = \mathcal{C}(Y',p')$, d.h. es gibt ein $y_0' \in (p')^{-1}(x_0)$, so daß $p_*(\pi_1(Y,y_0)) = p'_*(\pi_1(Y',y_0'))$.

$$\begin{tikzcd}
& (Y,y_0) \arrow[d, "p"] \\
(Y',y_0') \arrow[ur, dashed, "\exists! h"] \arrow[r, "p'"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"', shift right=3ex] & (X,x_0)
\end{tikzcd}$$

Nach Satz 2.5.1 existieren Liftungen h, h' von p und p', die wegen der Eindeutigkeit der Liftung (Satz 2.4.1) Homöomorphismen sind. $\square$

2.6 Klassifikation von Überlagerungen

Satz 2.6.1 (Klassifikation von Überlagerungen durch Untergruppen der Fundamentalgruppe). *Sei X hinreichend zusammenhängend. Dann gilt:*

1. *Zu jeder Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X,x_0)$ existiert eine wegzusammenhängende Überlagerung $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ mit $p_*(\pi_1(Y,y_0)) = H$.*

2. *Zwei wegzusammenhängende Überlagerungen $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$, $p' : (Y',y_0') \to (X,x_0)$ sind genau dann äquivalent, wenn $p_*(\pi_1(Y,y_0))$ und $p'_*(\pi_1(Y',y_0'))$ in $\pi_1(X,x_0)$ konjugiert sind.*

   Mit anderen Worten: Sei $x_0 \in X$. Ordnet man jeder wegzusammenhängenden Überlagerung $p : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ ihre charakterisierende Konjugationsklasse $\mathcal{C}(Y,p)$ zu, so erhält man eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen wegzusammenhängender Überlagerungen und der Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X,x_0)$.

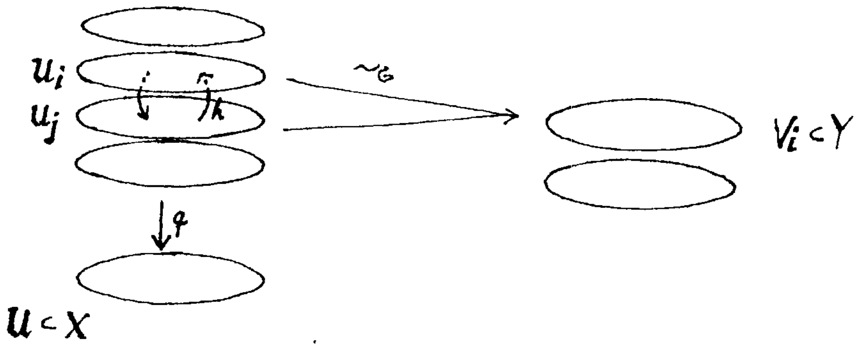
Beweis.

1. Sei $q : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ die universelle Überlagerung, die wegen Satz 2.5.4 existiert. Weiter sei $\Phi : \pi_1(X,x_0) \to D(q)$ der kanonische Gruppenisomorphismus, der nach Satz 2.4.9 existiert und jedem $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ diejenige Decktransformation zuordnet, die durch $\tilde{x}_0 \mapsto \gamma'_{\tilde{x}_0}(1)$ bestimmt ist, wobei $\gamma'_{\tilde{x}_0}$ die Liftung von γ mit Anfang $\tilde{x}_0$ ist.

   Wir setzen $G := \Phi(H) \subseteq D(q)$. Dann operiert G eigentlich diskontinuierlich auf $\widetilde{X}$. Wir setzen $Y := \widetilde{X}/G$ und definieren $p : Y \to X$ durch $p(y) := q(\tilde{x})$ für $\tilde{x} \in \pi^{-1}(y)$. Damit ist p wohldefiniert, da für eine Decktransformation g von q stets $q = q \circ g$ ist, und offensichtlich stetig. Außerdem ist Y wegzusammenhängend.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[dd, "q"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& Y = \widetilde{X}/G \arrow[dl, "p"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß p eine Überlagerung ist: Sei $U \subseteq X$ eine wegzusammenhängende Teilmenge für die $q : q^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i \to U$ eine triviale Überlagerung ist. Dann ist $\pi(q^{-1}(U)) = \left(\coprod_{i \in I} U_i\right)/G$.



Jedes $h \in G$ überführt jedes U_i in ein U_j mit $i, j \in I$. Sei $\{V_i\}_{i \in I'}$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von $(\coprod_{i \in I} U_i)/G \subseteq Y$. Dann ist $\coprod_{i \in I'} V_i = (\coprod_{i \in I} U_i)/G$ und für jedes $i \in I'$ ist $V_i \cong U_j$ für ein $j \in I$. Damit haben wir bewiesen, daß p eine Überlagerung ist.

Es bleibt zu zeigen, daß mit $y_0 := \pi(\tilde{x}_0)$ die gewünschte Eigenschaft $\underline{p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H}$ folgt: Sei $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Dann ist genau dann $[\alpha] \in p_*(\pi_1(Y, y_0))$, wenn $\pi \circ \alpha'_{\tilde{x}_0}$ ein geschlossener Weg in Y ist, d.h. wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß $\alpha'_{\tilde{x}_0}(1) = g(\tilde{x}_0)$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $\Phi([\alpha])(\tilde{x}_0) = \alpha'_{\tilde{x}_0}(1) = g(\tilde{x}_0) = (\Phi(h))(\tilde{x}_0)$, wobei $g = \Phi(h)$ und $h \in H$ ist. Nach Lemma 2.4.8 ist dies äquivalent zu $\Phi([\alpha]) = \Phi(h)$ für ein $h \in H$. Da Φ bijektiv ist, gilt dies genau dann, wenn $[\alpha] = h$ für ein $h \in H$. Also ist $H = p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

2. Dies ist eine andere Formulierung von Satz 2.5.7.

$\square$

Lemma 2.6.2. *Sei X einfach zusammenhängend, G eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf X operiert. Dann ist $p : X \to X/G$ eine Überlagerung und $\pi_1(X/G) \cong G$.*

Beweis. $\pi_1(X/G) \cong G$ ist mit obigem bereits bewiesen. Der Beweis, daß p eine Überlagerung ist, ist dem Leser überlassen. $\square$

Korollar 2.6.3. *Die universelle Überlagerung $\widetilde{X} \xrightarrow{q} X$ überlagert jede wegzusammenhängende Überlagerung $Y \xrightarrow{p} X$.*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\exists"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[dl, "p"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

2.7 Simpliziale Homologiegruppen

Sei $\sigma_q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (offenes) q-Simplex:

$$\sigma_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i, \ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0\}.$$

$x_0, \ldots, x_q$ sind die Ecken von σ_q, es sind affin unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n$. Diese Definition ist unabhängig von der Reihenfolge der Eckpunkte. σ_q heißt daher auch **nicht-orientiertes Simplex**.

Notation: $\sigma_q = (x_0, \ldots, x_q)$.

Wir wollen orientierte Simplizes einführen:

Definition:
Zwei Anordnungen der Ecken $x_0, \ldots, x_q$ eines q-Simplex σ_q heißen äquivalent, falls sie durch eine gerade Permutation auseinander hervorgehen. Eine Äquivalenzklasse einer Anordnung heißt **Orientierung** von σ_q. Ein Simplex, zusammen mit einer Orientierung, heißt **orientiertes Simplex**.

Notation: $\sigma_q = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle$.

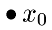
Sei $\sigma = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle$ ein orientiertes Simplex, so ist das **entgegengesetzt orientierte Simplex** definiert als $\sigma^{-1} := \langle x_1, x_0, x_2, \ldots, x_q \rangle$. (Jedes q-Simplex σ hat für $q \geq 1$ genau die beiden Orientierungen σ und σ^{-1}.) $\diamond$

Ein 0-Simplex ist ein Punkt, und hat genau eine Orientierung

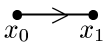
$$\sigma_0 = (x_0) = \langle x_0 \rangle.$$

Beispiele:

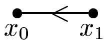
$\sigma_0 = \langle x_0 \rangle$



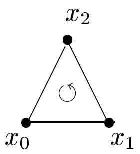
$\sigma_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$



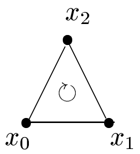
$\sigma_1^{-1} = \langle x_1, x_0 \rangle$



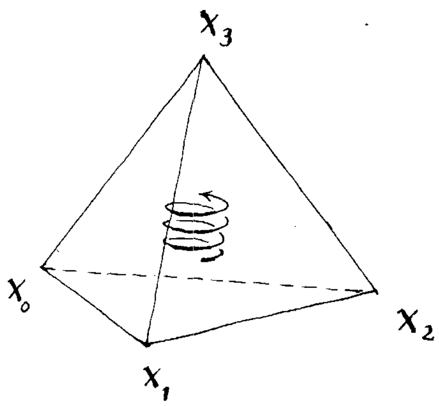
$\sigma_2 = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2, x_0 \rangle =$
$= \langle x_2, x_0, x_1 \rangle$



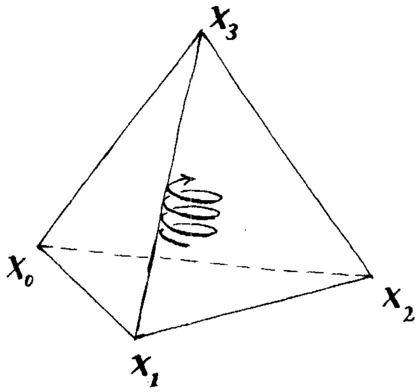
$\sigma_2^{-1} = \langle x_0, x_2, x_1 \rangle = \langle x_1, x_0, x_2 \rangle$
$= \langle x_2, x_1, x_0 \rangle$



$\sigma_3 = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$

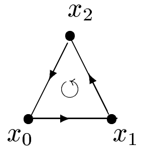


$\sigma_3^{-1} = \langle x_1, x_0, x_2, x_3 \rangle$



Ein zentraler Punkt der Homologietheorie ist, daß jedes Randsimplex eines orientierten Simplex eine natürlich induzierte Orientierung trägt.

Beispiel:
$\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ induziert $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$ und $\langle x_2, x_0 \rangle$:



Definition:
Sei $\sigma_q = (x_0, \ldots, x_q)$ ein q-Simplex. Dann ist

$$\sigma_{q-1}^{(i)} := (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q) := (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_q),$$

das dem i-ten Eckpunkt von σ_q gegenüberliegende Randsimplex. Dieses nennt man auch ***i*-te Seite**. $\diamond$

Definition:
Sei $\sigma_q = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle$ ein orientiertes q-Simplex. Dann trägt die i-te Seite die **induzierte Orientierung**, d.h.

$$\sigma_{q-1}^{(i)} := \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle^{(-1)^i}.$$

$\diamond$

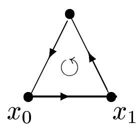
Beispiel:

$$\sigma_{q-1}^{(0)} = \langle x_1, \ldots, x_q \rangle$$
$$\sigma_{q-1}^{(1)} = \langle x_0, x_2, \ldots, x_q \rangle^{-1}.$$

Der „Rand" eines Simplexes besteht aus mehreren Simplizes, ist also kein Simplex, sondern eine „Kette" von Simplizes.

Beispiel:
Den Rand von $\sigma = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ stellt man als formale Linearkombination dar:

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_0 \rangle \\ &= \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_0, x_2 \rangle^{-1} \\ &=: \langle x_0, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_2 \rangle. \end{aligned}$$



Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex. Für $q \in \mathbb{Z}$ sei die ***q*-te Kettengruppe $C_q(K)$** wie folgt definiert:

1. $C_0(K) := \bigoplus_{\sigma_0 \in K} \mathbb{Z} \cdot \sigma_0$ ist die freie, abelsche Gruppe, die von den Ecken von K erzeugt wird[3].

[3] Wie üblich definieren wir die freie, abelsche Gruppe, die von den Elementen einer Menge I erzeugt ist, als $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \cdot i := \{(z_i)_{i \in I} \mid \text{höchstens endlich viele } z_i \text{ sind } \neq 0\}$.

2. Für $0 < q \leq \dim(K)$ sei $\vec{K}_q$ die Menge aller orientierten Simplizes der Dimension q in K, d.h. wenn $\sigma_q \in K$ ein q-dimensionales Simplex von K ist, dann sind die orientierten Simplizes $\sigma_q, \sigma_q^{-1} \in \vec{K}_q$, d.h. $\vec{K}_q = K_q^+ \uplus K_q^-$ mit $\#(K_q) = \#(K_q^+) = \#(K_q^-)$. Damit können wir $C_q(K)$ als die von $\vec{K}_q$ frei erzeugte, abelsche Gruppe modulo der Relationen $\sigma_q + \sigma_q^{-1} = 0$, $\sigma_q \in \vec{K}_q$, definieren:

$$C_q(K) := \bigoplus_{\sigma_q \in \vec{K}_q} \left((\mathbb{Z} \cdot \sigma_q) \,/\, \left(\mathbb{Z} \cdot (\sigma_q + \sigma_q^{-1})\right) \right).$$

   Also ist $C_q(K)$ die Gruppe aller formalen Linearkombinationen von q-Simplizes, wobei das Inverse eines Simplex σ stets $-\sigma = \sigma^{-1}$ ist.

3. $C_q(K) := \{0\}$, für $q < 0$ und $q > \dim(K)$.

Die Elemente von $C_q(K)$ heißen ***q*-dimensionale Ketten** oder ***q*-Ketten** von K.

Wir definieren den **Rang** einer Kettengruppe $C_q(K)$ als $\mathbf{rg}(\boldsymbol{C_q(K)}) := \#(K_q) = \#\{\sigma_q \in K \mid \dim(\sigma) = q\}$.

Notation: Eine Familie von q Simplizes notieren wir mit $\{\sigma_q^i\}_{i \in I}$. ⋄

Lemma 2.7.1. *Sei K ein simplizialer Komplex. Für jedes $\sigma_q \in K$ sei eine Orientierung gewählt, $K_q^+ = \{\sigma_q^1, \ldots, \sigma_q^{\alpha_q}\} \subseteq \vec{K}_q$ sei die Menge dieser orientierten q-Simplizes. Dann gilt:*

$$C_q(K) \cong \bigoplus_{\sigma_q \in K_q^+} \mathbb{Z} \cdot \sigma_q = \mathbb{Z}\sigma_q^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\sigma_q^{\alpha_q}.$$

$C_q(K)$ ist eine freie, abelsche Gruppe vom Rang α_q und jede q-Kette c hat eine eindeutige Darstellung

$$c = n_1\sigma_q^1 + \cdots + n_{\alpha_q}\sigma_q^{\alpha_q},\ n_i \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es gilt $C_q(K) = \bigoplus_{\sigma_q \in K_q^+} \underbrace{\left((\mathbb{Z} \cdot \sigma_q \oplus \mathbb{Z}\sigma_q^{-1})/\mathbb{Z}(\sigma_q + \sigma_q^{-1})\right)}_{\cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}/((1,1)\cdot\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}}$, also ist $C_q(K) \cong \bigoplus_{\sigma_q \in K_q^+} \mathbb{Z}\sigma_q$. □

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex. Der **Randhomomorphismus**

$$\boldsymbol{\partial = \partial_q} : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$$

ist wie folgt definiert:

1. Sei $\sigma_q = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle \in K$ ein orientiertes q-Simplex. Dann ist

$$\partial_q(\sigma_q) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle & \text{für } q > 0 \\ 0 & \text{für } q = 0. \end{cases}$$

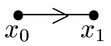
2. Sei $c = \sum_{i=1}^{\alpha_q} n_i \sigma_q^i \in C_q(K)$ eine beliebige Kette, dann ist

$$\partial_q(c) := \sum_{i=1}^{\alpha_q} n_i \partial_q(\sigma_q^i).$$

Damit ist $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ Homomorphismus abelscher Gruppen. ⋄

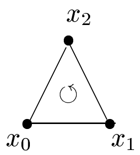
Beispiel:

$\sigma_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$



$\partial_1(\sigma_1) = \langle x_1 \rangle - \langle x_0 \rangle = x_1 - x_0.$

$\sigma_2 = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$



$\partial_2(\sigma_2) = \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle.$

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex. Dann sind die ***q*-te Zykelgruppe** $Z_q(K)$ und die ***q*-te Rändergruppe** $B_q(K)$ definiert durch

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z_q(K)} &:= \operatorname{Ker}(\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)) \subseteq C_q(K),\\ \boldsymbol{B_q(K)} &:= \operatorname{Im}(\partial_{q+1} : C_{q+1}(K) \to C_q(K)) \subseteq C_q(K).\end{aligned}$$

Die Elemente $c \in Z_q(K)$ heißen ***q*-Zykel**, die $c \in B_q(K)$ ***q*-Ränder**. (In der Bezeichnung B_q steht B für „boundary").

$c \in C_q(K)$ ist genau dann ein q-Rand, wenn es ein $c' \in C_{q+1}(K)$ gibt, so daß $c = \partial_{q+1}(c')$ gilt. $c, c' \in C_q(K)$ heißen **homolog**, wenn $c - c' \in B_q(K)$ ist. Die Elemente von $B_q(K)$ heißen daher **nullhomolog**. ◇

Beispiele:
1. $Z_0(K) = C_0(K)$, da $C_{-1}(K) = \{0\}$ ist.
2. Für $\dim(K) = n$ ist $B_n(K) = \{0\}$, da $C_{n+1}(K) = \{0\}$ ist.
3. Ist c eine 1-Kette der Form $c = \langle x_0, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle + \cdots + \langle x_n, x_0\rangle$, so ist $\partial_1(c) = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_0 - x_n = 0$, d.h. c ist ein 1-Zykel.

Bemerkung:
Man kann sich einen 1-Zykel als geschlossenen Kantenzug vorstellen.

Proposition 2.7.2. *Sei K ein simplizialer Komplex. Dann ist $B_q(K) \subseteq Z_q(K)$ für alle q eine Untergruppe.*

Beweis. $\{\sigma_{q+1} \in K \mid \dim(\sigma_{q+1}) = q+1\}$ ist eine Basis von $C_{q+1}(K)$, daher genügt es für einen beliebigen $q+1$-Zykel $\sigma_{q+1} = \langle x_0, \ldots, x_{q+1}\rangle \in K$ zu zeigen, daß $\partial_q(\partial_{q+1}(\sigma_{q+1})) = 0$ ist: Nach Definition des Randhomomorphismus gilt

$$\begin{aligned}\partial_q(\partial_{q+1}(\sigma_{q+1})) &= \partial_q\left(\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}\rangle\right)\\ &= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\partial_q(\langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}\rangle)\\ &= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\langle x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}\rangle\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{j=i+1}^{q+1}(-1)^{j-1}\langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{q+1}\rangle\right)\\ &= \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\langle x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}\rangle\\ &\qquad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}\langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{q+1}\rangle.\end{aligned}$$

Vertauscht man im zweiten Term i und j, so erhält man $\partial_q(\partial_{q+1}(\sigma_{q+1})) = 0$. □

Bemerkung:
Proposition 2.7.2 bedeutet, daß „jeder Rand ein Zykel ist", wie wir im Beweis gesehen haben („$\partial \circ \partial = 0$").

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex, $q \in \mathbb{Z}$. Die Quotientengruppe $\boldsymbol{H_q(K)} := Z_q(K)/B_q(K)$ heißt ***q*-te Homologiegruppe** des simplizialen Komplexes K. Da K nur endlich viele Simplizes enthält, ist $C_q(K)$ eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe, und damit sind auch $Z_q(K)$ und $B_q(K)$ endlich erzeugt. Also ist $H_q(K)$ eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. ◇

Bemerkung:
Sei K ein simplizialer Komplex, $q \in \mathbb{Z}$. Zwei Zykel $c, c' \in Z_q(K)$ sind genau dann homolog, wenn $c - c' \in B_q(K)$ ein Rand ist, d.h. wenn c, c' zur selben Äquivalenzklasse (Homologieklasse) $[c] = [c'] \in H_q(K)$ gehören.

Wiederholung, Algebra:
Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. Dann gibt es Gruppen F, T und Zahlen $p, r \in \mathbb{N}$, $n_1 | n_2, \ldots, n_{r-1} | n_r \in \mathbb{Z}$, so daß

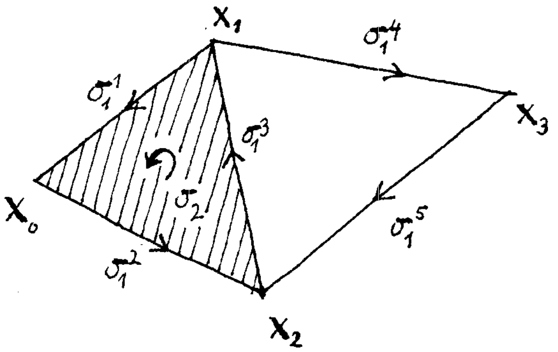
$G \cong F \oplus T$,
$F \cong \mathbb{Z}^p$ (**freie abelsche Gruppe vom Rang** $\boldsymbol{p}$),
$T \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ (T ist eine endliche Gruppe, die man als **Torsionsgruppe** bezeichnet; die n_i heißen **Torsionskoeffizienten**).

Den **Rang** von G definiert man durch $\mathbf{rg}(\boldsymbol{G}) := \mathrm{rg}(F) = p$. Die Zahlen $p, n_1, \ldots, n_r$ sind eindeutig bestimmt und G ist durch sie bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Es gilt:

1. $\mathrm{rg}(G) = 0 \Leftrightarrow G \cong T$, d.h. es ist genau dann $\mathrm{rg}(G) = 0$, wenn G eine endliche Gruppe ist.
2. 0 ist genau dann Torsionskoeffizient, wenn $G \cong F$ ist, d.h. wenn G eine freie Gruppe ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß G torsionsfrei ist. (G ist als endlich erzeugt und abelsch vorausgesetzt.)
3. Ist $\{0\} \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to \{0\}$ eine exakte Sequenz freier, endlich erzeugter, abelscher Gruppen, so gilt:

$$\mathrm{rg}(G_2) = \mathrm{rg}(G_1) + \mathrm{rg}(G_3).$$

Beispiel für Homologiegruppen:
K :



$$C_0(K) = \bigoplus_{i=0}^{3} \mathbb{Z}x_i,$$

$$C_1(K) = \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z}\sigma_1^i,$$

$$C_2(K) = \mathbb{Z} \cdot \sigma_2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} H_0(K) &\cong \mathbb{Z} \\ H_1(K) &\cong \mathbb{Z} \\ H_2(K) &\cong \{0\}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir wollen zunächst $H_2(K) \cong \{0\}$ beweisen. Nach Definition ist

$$H_2(K) = \{m \cdot \sigma_2 \in \mathbb{Z} \cdot \sigma_2 \mid \partial_2(m\sigma_2) = 0\}/\{0\},$$

denn $\mathrm{Im}(\partial_3) = \{0\}$. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann ergibt sich $\partial_2(m\sigma_2) = m\partial_2(\langle x_0, x_2, x_1\rangle) = m(\langle x_2, x_1\rangle - \langle x_0, x_1\rangle + \langle x_0, x_2\rangle) = m(\sigma_1^3 + \sigma_1^1 + \sigma_1^2)$. Da $\sigma_1^3 + \sigma_1^1 + \sigma_1^2 \neq 0$ ist, ist $\partial_2(m\sigma_2) = 0$ gleichbedeutend mit $m = 0$, d.h. $H_2(K) \cong \{0\}$.

Nun wollen wir $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ verifizieren. Dazu bestimmen wir zunächst $Z_1(K)$: Sei $c_1 \in C_1(K)$. Dann gibt es Koeffizienten b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, so daß

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1\sigma_1^1 + b_2\sigma_1^2 + b_3\sigma_1^3 + b_4\sigma_1^4 + b_5\sigma_1^5, \\ \partial_1(c_1) &= b_1\partial_1(\sigma_1^1) + b_2\partial_1(\sigma_1^2) + b_3\partial_1(\sigma_1^3) + b_4\partial_1(\sigma_1^4) + b_5\partial_1(\sigma_1^5) \\ &= b_1(x_0 - x_1) + b_2(x_2 - x_0) + b_3(x_1 - x_2) + b_4(x_3 - x_1) + b_5(x_2 - x_3) \\ &= x_0(b_1 - b_2) + x_1(b_3 - b_1 - b_4) + x_2(b_2 - b_3 + b_5) + x_3(b_4 - b_5) \end{aligned}$$

Daher ist genau dann $\partial_1(c_1) = 0$, wenn $b_1 = b_2$, $b_4 = b_5$ und $b_3 = b_1 + b_4$ ist, d.h. wenn $c_1 = b_1 \underbrace{(\sigma_1^1 + \sigma_1^2 + \sigma_1^3)}_{=:z_1} + b_4 \underbrace{(\sigma_1^3 + \sigma_1^4 + \sigma_1^5)}_{=:z_2}$ ist. z_1 und z_2 sind also die 1-Zykel von K: Wir erhalten somit $Z_1(K) = \mathbb{Z}z_1 \oplus \mathbb{Z}z_2$.

Es gilt $\partial_2(\sigma_2) = z_1$, aber z_2 ist kein Rand. (Es gibt nur ein 2-Simplex und dieses wird von σ_1^1, σ_1^2 und σ_1^3 berandet.) Also ist $B_1(K) = \mathbb{Z}z_1$.

Insgesamt ergibt sich $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = \mathbb{Z}z_2 \cong \mathbb{Z}$.

Nach Proposition 2.7.3 ist $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, da K zusammenhängend ist. □

Bemerkung:
Ein simplizialer Komplex K ist genau dann zusammenhängend, wenn K wegzusammenhängend ist (vgl. Lemma 1.7.7).

Proposition 2.7.3. *Sei K ein simplizialer Komplex der Dimension n und $K_1, \dots, K_r$ die Zusammenhangskomponenten von K. Dann gilt:*

1. *Für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt $H_q(K) \cong \bigoplus_{i=1}^r H_q(K_i)$.*
2. *(a) Für alle $q < 0$ und alle $q > n$ ist $H_q(K) = \{0\}$.*

   (b) $H_n(K)$ ist frei, d.h. $H_n(K)$ hat keine Torsion.
3. *$H_0(K)$ ist frei vom Rang der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von K, d.h. $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$.*

Beweis.

1. Wir betrachten die natürliche Äquivalenz

$$\begin{aligned} C_q(K_1) \oplus \cdots \oplus C_q(K_r) \quad &\underset{\varphi}{\overset{\cong}{\to}} \quad C_q(K), \\ c = (c_1, \dots, c_r) \quad &\longmapsto \quad \sum_{i=1}^r c_i. \end{aligned}$$

   $\varphi(c) \in C_q(K)$ ist genau dann ein Rand bzw. Zykel, wenn c ein Rand bzw. Zykel ist.

2. (a) Dies ist klar, da für $q < 0$ und $q > n$ stets $C_q(K) = \{0\}$ ist.

   (b) Nachdem $B_n(K) = \{0\}$ gilt, ist $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K) = Z_n(K) \subseteq C_n(K)$ eine Untergruppe. Da $C_n(K)$ torsionsfrei ist, ist auch die Untergruppe $H_n(K)$ torsionsfrei. Da $C_n(K)$ und damit auch $H_n(K)$ endlich erzeugt ist, folgt daraus, daß $H_n(K)$ frei ist.

3. Wegen der ersten Teilaussage genügt es, o.B.d.A. anzunehmen, daß K zusammenhängend ist und zu zeigen, daß $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ ist. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} Z_0(K) = C_0(K) \quad &\overset{\varepsilon}{\longrightarrow} \quad \mathbb{Z} \\ c = \sum n_i x_i \quad &\longmapsto \quad \sum n_i. \end{aligned}$$

   Diese ist offensichtlich surjektiv. Wir zeigen, daß $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = B_0(K)$ ist, woraus $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z}$ folgt: Sei also $\sum n_i x_i \in C_0(K)$ mit $\varepsilon(\sum n_i x_i) = \sum n_i = 0$. Dann läßt sich jedes x_i durch einen Kantenweg w_i mit x_1 verbinden, denn K ist zusammenhängend. Also ist $x_i - x_1$ Rand der 1-Kette w_i. Es folgt, daß $\sum n_i x_i - (\sum n_i) x_1$ Rand einer 1-Kette ist. Da $\sum n_i = 0$ ist, ist auch $\sum n_i x_i$ Rand einer 1-Kette. Also ist $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \subseteq B_0(K)$. Da für ein 1-Simplex $\sigma = \langle x_0, x_1 \rangle$ stets $\partial_1(\sigma) = x_1 - x_0$ ist, also $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = 0$, gilt auch $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \supseteq B_0(K)$. Damit ist gezeigt, daß $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = B_0(K)$ ist.

□

Proposition 2.7.4. *Sei K ein zusammenhängender Graph (also ein zusammenhängender, 1-dimensionaler, simplizialer Komplex) mit α_0 Ecken und α_1 Kanten. Dann ist $H_1(K) \cong \mathbb{Z}^{1+\alpha_1-\alpha_0}$.*

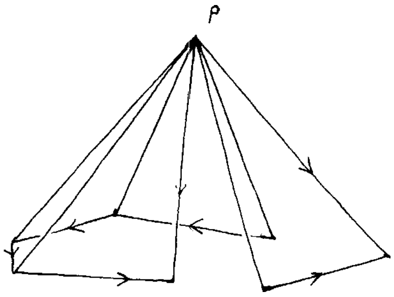
Beweis. Da $C_2(K) = \{0\}$ ist, ist $\partial_2(C_2(K)) = \{0\}$, also $H_1(K) = Z_1(K)$ frei. Wir betrachten folgende exakte Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \hookrightarrow & B_0(K) & \hookrightarrow & \overbrace{C_0(K)}^{=Z_0(K)} & \to & H_0(K) & \to & \{0\}, \\
\{0\} & \hookrightarrow & \underbrace{H_1(K)}_{=Z_1(K)} & \hookrightarrow & C_1(K) & \xrightarrow{\partial_1} & B_0(K) & \to & \{0\}.
\end{array}$$

Die erste Sequenz liefert $\mathrm{rg}(B_0(K)) = \mathrm{rg}(C_0(K)) - \mathrm{rg}(H_0(K)) = \alpha_0 - 1$, aus der zweiten ergibt sich $\mathrm{rg}(H_1(K)) = \mathrm{rg}(C_1(K)) - \mathrm{rg}(B_0(K)) = \alpha_1 - \mathrm{rg}(B_0(K)) = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$. □

Definition:
Sei K ein simplizialer Komplex, $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$. Dann ist der **Kegel $p * K$ über K mit Spitze p** definiert durch

$$\boldsymbol{p * K} \;:=\; K \cup \{\langle p \rangle\} \cup \{\boldsymbol{p * \sigma_q} := \langle p, x_0, \ldots, x_q \rangle, \text{ für die } \sigma_q = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle \in K \text{ ist}\}.$$



◇

Proposition 2.7.5. *Sei K ein simplizialer Komplex, $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ und $p * K$ der Kegel über K mit Spitze p. Dann gilt für $q \in \mathbb{Z}$:*

$$H_q(p * K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0 \\ \{0\} & , q \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Nach Proposition 2.7.3 ist $H_0(p * K) \cong \mathbb{Z}$, denn $p * K$ ist zusammenhängend.

Für eine q-Kette $c_q = \sum n_i \sigma_q^i \in C_q(K)$ sei $p * c_q := \sum n_i (p * \sigma_q^i) \in C_{q+1}(p * K)$. Damit gelten die folgenden Formeln

1. $\partial_{q+1}(p * c_q) = c_q - p * \partial_q(c_q)$ für jedes $q \neq 0$ und jede q-Kette $c_q \in C_q(K)$.
2. $\partial_1(p * c_0) = c_0 - \varepsilon(c_0)p$ für jedes $c_0 \in C_0(K)$. Dabei ist $\varepsilon : C_0(p * K) \to \mathbb{Z}$, $np + \sum n_i x_i \mapsto n + \sum n_i$, die Abbildung, die den Isomorphismus $H_0(p * K) \cong \mathbb{Z}$ induziert.

Zunächst beweisen wir diese beiden Formeln:

1. Sei $q \neq 0$ und $\sigma_q = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle \in K$ ein q-Simplex. Dann gilt $\partial_{q+1}(p * \sigma_q) = \partial_{q+1}(\langle p, x_0, \ldots, x_q \rangle) = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle - \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle p, x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle = \sigma_q - p * \partial_q(\sigma_q)$. Mit der Linearität des Randhomomorphismus folgt $\partial_{q+1}(p * c_q) = c_q - p * \partial_q(c_q)$.
2. Sei $x_0 \in K$ eine Ecke. Dann gilt $\partial_1(p * x_0) = \partial_1(\langle p, x_0 \rangle) = x_0 - p = x_0 - \varepsilon(x_0) \cdot p$, woraus mit der Linearität von ∂_1 die Formel folgt.

Damit sind die beiden obigen Formeln bewiesen. Sei $q \neq 0$. Wir werden nun $H_q(p * K) = \{0\}$ nachweisen: Sei $z_q \in Z_q(p * K)$ ein Zykel. Wir müssen zeigen, daß z_q ein Rand ist. Definitionsgemäß ist z_q eine Linearkombination von Simplizes der Form

$$\langle x_0, \ldots x_q \rangle \text{ bzw. } \langle p, x_0, \ldots, x_{q-1} \rangle.$$

Also ist $z_q = c_q + p * c_{q-1}$ für geeignete $c_q \in C_q(K)$, $c_{q-1} \in C_{q-1}(K)$. Die erste Formel liefert

$$z_q = \partial_{q+1}(p * c_q) + p * \partial_q(c_q) + p * c_{q-1} = \partial_{q+1}(p * c_q) + p * y_{q-1},$$

wobei $y_{q-1} := \partial_q(c_q) + c_{q-1} \in C_{q-1}(K)$ ist. Da z_q und $\partial_{q+1}(p * c_q)$ Zykel sind (ein Rand ist nach Proposition 2.7.2 immer ein Zykel), ist auch $p * y_{q-1}$ ein Zykel, d.h. für $q \neq 1$ ergibt die erste obige Formel $0 = \partial_q(p * y_{q-1}) = y_{q-1} - p * \partial_{q-1}(y_{q-1})$ und somit $p * \partial_{q-1}(y_{q-1}) \in C_{q-1}(K)$, d.h. $y_{q-1} = 0$. Folglich gilt $z_q = \partial_{q+1}(p * c_q) + p * y_{q-1} = \partial_{q+1}(p * c_q) \in B_q(p * K)$.

Für $q = 1$ erhalten wir analog zu obigem für jeden Zykel $z_1 \in Z_1(p*K)$, daß $z_1 = c_1 + p*c_0 = \partial_2(p*c_1) + p*y_0$, wobei $y_0 := \partial_1(c_1) + c_0 \in C_0(K)$. Wiederum folgt $p * y_0 \in Z_1(p * K)$ und mit der zweiten Formel ergibt sich $y_0 = \varepsilon(y_0) \cdot p + \partial_1(p * y_0) = \varepsilon(y_0) \cdot p$, d.h. $y_0 = 0$. □

Korollar 2.7.6. *Sei $K(\sigma_n)$ der Komplex, der aus allen (Rand-)Simplizes eines n-Simplex σ_n besteht. Dann gilt:*

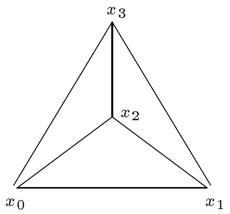
$$H_q(K(\sigma_n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = 0 \\ \{0\} & , q \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Es gilt $\sigma_n = p * \sigma_{n-1}$, wobei σ_{n-1} eine $(n-1)$-Seite ist. □

Proposition 2.7.7. *Sei $n \geq 1$, σ_{n+1} ein $(n+1)$-Simplex mit Ecken $x_0, \ldots, x_{n+1}$ und $K(\dot\sigma_{n+1})$ die Menge aller eigentlichen Seiten von σ_{n+1} (d.h. Seiten der Dimension $\leq n$). Dann gilt:*

1. *$K(\dot\sigma_{n+1})$ ist ein zusammenhängender, n-dimensionaler, simplizialer Komplex mit $|K(\dot\sigma_{n+1})| \cong S^n$.*
2. *$H_0(K(\dot\sigma_{n+1})) = \mathbb{Z}$ und für $q \neq 0, n$ ist $H_q(K(\dot\sigma_{n+1})) = \{0\}$.*
3. *$H_n(K(\dot\sigma_{n+1})) = \mathbb{Z} \cdot z_n$ mit $z_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1} \rangle$.*

Beispiel:



σ_3 = Volltetraeder
$K(\dot\sigma_3)$ ist Oberfläche des Volltetraeders $\cong S^2$.

Beweis von Proposition 2.7.7.

1. Nach Korollar 1.7.2 ist $(\bar\sigma_{n+1}, \dot\sigma_{n+1}) \cong (D^{n+1}, S^n)$.

2. und 3. Sei $L = K(\sigma_{n+1}) = K(\dot\sigma_{n+1}) \cup \sigma_{n+1}$. Wir schreiben $K := K(\dot\sigma_{n+1})$. Dann können wir die Kettengruppen von K und L in folgendem Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C_{n+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(L) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(L) & \xrightarrow{\partial_q} & \cdots \\
 & & \| & \circlearrowleft & \| & & \| & \circlearrowleft & \| & & \\
\{0\} & \longrightarrow & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(K) & \xrightarrow{\partial_q} & \cdots
\end{array}$$

Für $q \neq 0, n$ ist $H_q(K) = H_q(L) = \{0\}$, wie aus Korollar 2.7.6 und obigem Diagramm hervorgeht. $H_0(K) = \mathbb{Z}$ ergibt sich aus Proposition 2.7.3, da K nach 1. zusammenhängend ist. Im Fall $q = n$ ergibt sich aus obigem Diagramm $H_n(K) = \mathrm{Ker}(\partial_n) : C_n(L) \to C_{n-1}(L)) = Z_n(L)$ und $H_n(L) = Z_n(L)/B_n(L) = 0$, d.h. $Z_n(L) = B_n(L) = \partial_{n+1}(\mathbb{Z}\sigma_{n+1}) = \mathbb{Z} \cdot z_n$. Damit ist auch $H_n(K) = \mathbb{Z} \cdot z_n$ bewiesen.

□

Satz 2.7.8 (Invarianz der simplizialen Homologie). *Sind K und K' simpliziale Komplexe mit $|K| \cong |K'|$, so gilt für alle $q \in \mathbb{Z}$*

$$H_q(K) \cong H_q(K').$$

Beweis. Dies wird aus Lemma **??** und Satz **??** hervorgehen. □

Allgemein: Für jeden topologischen Raum X kann man die singulären Homologiegruppen $H_q(X)$ definieren (vgl. Abschnitt **??**). Ist K ein simplizialer Komplex mit $|K| \cong X$, so gilt (nach Satz **??**) für alle $q \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{H_q(K)}_{\text{simpl. Homologie}} \cong \underbrace{H_q(X)}_{\text{sing. Homologie}} .$$

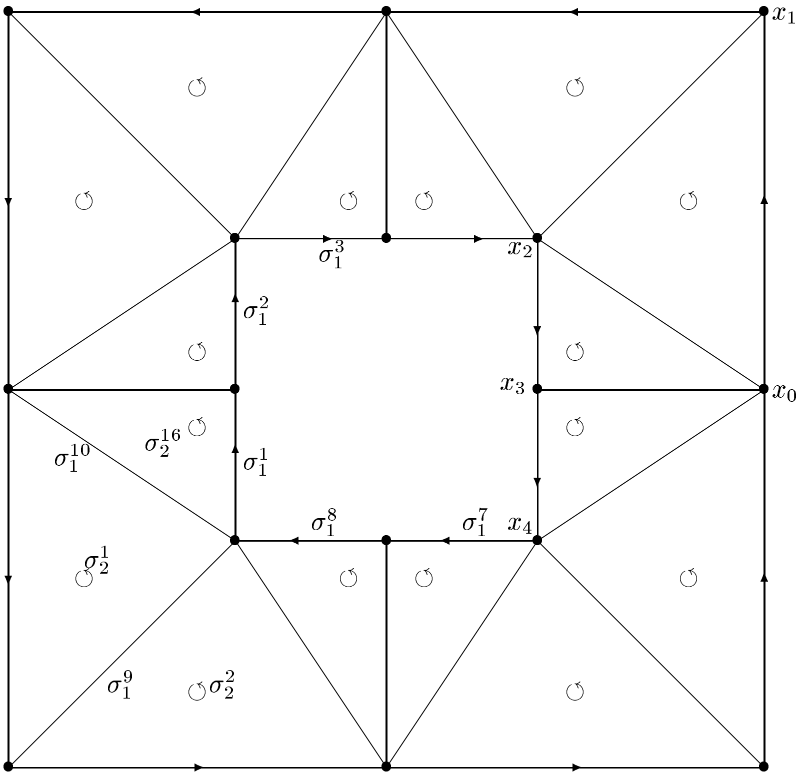
Korollar 2.7.9. *Für alle $n \geq 1$ gilt*

$$H_q(D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q = 0 \\ \{0\} & ,q \neq 0, \end{cases}$$

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q \in \{0, n\} \\ \{0\} & ,q \neq 0, n. \end{cases}$$

Beweis. Wegen $D^n \cong |K(\sigma_n)|$, $S^n \cong |K(\dot{\sigma}_{n+1})|$ folgt dies aus Satz 2.7.8. □

Beispiel Berechnung von $H_q(S^1 \times I)$:
$S^1 \times I \cong$ „eckiger Kreisring“.

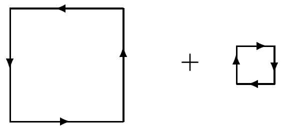


Zur Berechnung der Homologie müssen alle Simplizes orientiert werden. Welche Orientierung gewählt wird, ist dabei beliebig.

1. Kohärenzargument

   Wir orientieren die 2-Simplizes so, daß je 2 Dreiecke mit gemeinsamer Seite entgegensetzte Orientierungen dieser Seite induzieren (**kohärente Orientierung**).

   Sei $c = a_1\sigma_2^1 + \dots + a_{16}\sigma_2^{16}, a_i \in \mathbb{Z}$ ein 2-Zykel, d.h. $0 = \partial_2(c) = a_1\partial_2(\sigma_2^1) + \dots + a_{16}\partial_2(\sigma_2^{16}) = a_1(\sigma_1^9 + \dots) + \dots$. Die Seite σ_1^9 ist gemeinsame Seite von σ_2^1 und σ_2^2 (mit unterschiedlicher Orientierung), und σ_1^9 kommt in keinem weiteren 2-Simplex vor. Da $\partial_2(c) = 0$ ist, folgt $a_2 = a_1$. Argumentiert man mit dem Nachbardreieck von σ_2^2 genauso, so ergibt sich, daß $c = a_1(\sigma_2^1 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_2^{16})$ ist, d.h. $0 = \partial_2(c) = a_1(\partial_2(\sigma_2^1) + \dots + \partial_2(\sigma_2^{16}))$:

   $\partial_2(c) = a_1 \cdot \Bigg($  $\Bigg) = a_1\cdot$ (Summe der 1-Simplizes des inneren und äußeren Kreisringes)

   Da die Summe der 1-Simplizes des inneren und äußeren Kreisringes nicht Null ist, ergibt sich $a_1 = 0$, d.h. $c = 0$. Also ist $Z_2(S^1 \times I) = \{0\}$, d.h. $H_2(S^1 \times I) = \{0\}$.

2. Verschiebungsargument

   Sei $c \in Z_1(S^1 \times I)$ ein 1-Zyklus. Für ein äußeres Randsimplex $\langle x_0, x_1\rangle$ gilt

   $$\langle x_0, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle - \langle x_0, x_2\rangle = \partial\langle x_0, x_1, x_2\rangle.$$

   Also ist $\langle x_0, x_1\rangle$ homolog zu $-\langle x_1, x_2\rangle + \langle x_0, x_2\rangle$. Da wir nur an $H_1(S^1 \times I)$ interessiert sind, können wir $\langle x_0, x_1\rangle$ durch $\langle x_0, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle$ ersetzen. Dies entspricht einer Verschiebung von $\langle x_0, x_1\rangle$ über das Dreieck $\langle x_0, x_1, x_2\rangle$. Durch analoges Verschieben kann man erreichen, daß c kein äußeres Randsimplex mehr enthält. Dann kann aber $\langle x_2, x_1\rangle$ in c nicht auftauchen, da $\partial_1\langle x_2, x_1\rangle = x_1 - x_2$ ist und x_1 nicht mehr kompensiert werden könnte. Wiederum kann man durch Verschieben erreichen, daß $\langle x_2, x_0\rangle$ und $\langle x_4, x_0\rangle$ in c nicht vorkommen. Jetzt kann aber wegen $\partial_1(c) = 0$ das 1-Simplex $\langle x_3, x_0\rangle$ nicht vorkommen...

   Es ergibt sich, daß c homolog zu einem Zyklus ist, der ganz auf dem inneren Kreisring liegt. Wegen kohärenter Orientierung der Simplizes auf dem Kreisring gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$, so daß $c = az_1$ ist, wobei $z_1 = \sigma_1^1 + \dots + \sigma_1^8$ ist (analog zum Kohärenzargument). Wenn $a \neq 0$ ist, so ist c kein Rand, denn:

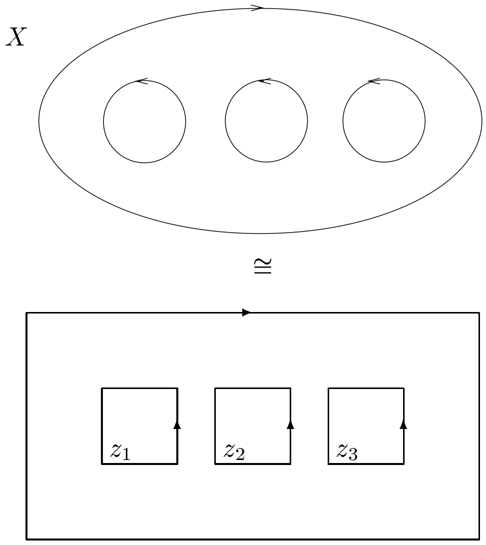
   Sei c_2 eine 2-Kette mit $\partial_2(c_2) = c$. Dann muß c_2 Simplizes mit einer Außenkante enthalten, d.h. $\partial_2(c_2)$ enthält eine Außenkante.

   Insgesamt ergibt sich $H_1(S^1 \times I) \cong \mathbb{Z} \cdot z_1$.

   Zusammenfassung:
   $H_2(S^1 \times I) = \{0\}$
   $H_1(S^1 \times I) \cong \mathbb{Z} \cdot z_1$
   $H_0(S^1 \times I) = \mathbb{Z}$, da $S^1 \times I$ zusammenhängend ist.

Bemerkung:
Kohärenz- und Verschiebungsargument lassen sich analog in höheren Dimensionen anwenden.

Ein weiteres Beispiel ohne Berechnung:



$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,q = 0 \\ \mathbb{Z}z_1 \oplus \mathbb{Z}z_2 \oplus \mathbb{Z}z_3 & ,q = 1 \\ \{0\} & ,q \neq 0, 1. \end{cases}$$

2.8 Funktorielle Eigenschaft der simplizialen Homologie

Definition:
Sei $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung simplizialer Komplexe. (Es gilt also: φ bildet Simplizes auf Simplizes ab. φ kann auch dimensionserniedrigend sein.) Wir definieren dann

$$\boldsymbol{\varphi_\bullet} := \boldsymbol{C_q(\varphi)} : C_q(K) \to C_q(L)$$

durch

1. $C_q(\varphi) \equiv 0$ für $q < 0$ und für $q > \dim(K)$.
2. Sei $0 \leq q \leq \dim(K)$ und $\sigma_q = \langle x_0, \ldots, x_q \rangle \in C_q(K)$. Dann setzen wir
$$C_q(\varphi)(\sigma_q) = \begin{cases} \langle \varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q) \rangle & , \varphi(x_i) \neq \varphi(x_j) \ \forall i \neq j, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$
3. $C_q(\varphi)(\sum_i n_i \sigma_q^i) := \sum_i n_i \varphi_\bullet(\sigma_q^i) = \sum_i n_i C_q(\varphi)(\sigma_q^i)$.

Offensichtlich ist $C_q(\varphi) = \varphi_\bullet$ ein Gruppenhomomorphismus. ⋄

Lemma 2.8.1. *Für alle $q \in \mathbb{Z}$ kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} C_q(K) \arrow[r, "\varphi_\bullet = C_q(\varphi)"] \arrow[d, "\partial = \partial_q"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_q(L) \arrow[d, "\partial = \partial_q"] \\ C_{q-1}(K) \arrow[r, "\varphi_\bullet = C_{q-1}(\varphi)"'] & C_{q-1}(L) \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $C_q(\varphi)(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$ und $C_q(\varphi)(B_q(K)) \subseteq B_q(L)$.

Beweis. Für die Kommutativität des Diagramms genügt es zu zeigen, daß für ein q-Simplex $\sigma_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle \in K$ stets $\partial_q(C_q(\varphi)(\sigma_q)) = C_{q-1}(\varphi)(\partial_q(\sigma_q))$ gilt. Die Aussage für die q-Ketten folgt dann aus der Linearität.

Sei also $\sigma_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle \in K$ ein q-Simplex. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Sind alle Ecken $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q)$ verschieden, so folgt die Behauptung aus der Definition von $\varphi_\bullet$ und ∂.

2. Sind mindestens drei der Ecken $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q)$ gleich, so gilt definitionsgemäß $\varphi_\bullet(\sigma_q) = 0$, d.h. $\partial(\varphi_\bullet(\sigma_q)) = 0$. Die einzelnen Summanden von $\partial(\sigma_q)$ enthalten jeweils mindestens zwei Ecken, deren Bild unter φ gleich ist. Daher ist auch $\varphi_\bullet(\partial\sigma_q) = 0$.

3. Sind genau zwei der Ecken $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q)$ gleich — wir nehmen o.B.d.A. $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$ an —, so gilt $\varphi_\bullet(\sigma_q) = 0$ und damit $\partial(\varphi_\bullet(\sigma_q)) = 0$. Andererseits ist

$$\partial_q(\sigma_q) = \langle x_1, \dots, x_q \rangle - \langle x_0, x_2, \dots, x_q \rangle + \sum_{i=2}^{q} (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle.$$

Da in dieser Darstellung nur die beiden ersten Summanden nicht sowohl x_0 als auch x_1 als Ecken enthalten, werden die übrigen Summanden von $\varphi_\bullet$ auf 0 abgebildet. Da außerdem $\varphi_\bullet(\langle x_1, \dots, x_q \rangle) = \varphi_\bullet(\langle x_0, x_2, \dots, x_q \rangle)$ ist, ergibt sich $\varphi_\bullet(\partial\sigma_q) = 0 = \partial(\varphi_\bullet(\sigma_q))$.

□

Definition:
Sei $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung, $q \in \mathbb{Z}$. Die durch $\varphi_\bullet = C_q(\varphi) : C_q(K) \to C_q(L)$ induzierte Abbildung der Homologie wird mit $\varphi_* = H_q(\varphi)$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{H_q(\varphi) = \varphi_*} : H_q(K) \to H_q(L).$$

◇

Bemerkung:
Sei $\varphi : K \to L$ eine simpliziale Abbildung, $q \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $\varphi_\bullet$, φ_* sind Homomorphismen abelscher Gruppen.
2. Ist $K = L$ und $\varphi = \mathrm{id}_K$, so sind $\varphi_\bullet = \mathrm{id}$ und $\varphi_* = \mathrm{id}$.
3. Sind $\varphi : K \to L$, $\psi : L \to M$ simpliziale Abbildungen, so gilt:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)_\bullet &= \psi_\bullet \circ \varphi_\bullet, \\ (\psi \circ \varphi)_* &= \psi_* \circ \varphi_*. \end{aligned}$$

Also sind $H_q(\cdot)$ und $C_q(\cdot)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ Funktoren von der Kategorie der simplizialen Komplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen. Weiter gilt:

4. Ist $\varphi : K \to L$ ein Isomorphismus, so sind $\varphi_\bullet$ und φ_* Isomorphismen mit $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$ und $(\varphi_\bullet)^{-1} = (\varphi^{-1})_\bullet$.
5. Ist $\varphi : K \to L$ simplizial, K, L zusammenhängend, so ist

$$\varphi_* : H_0(K) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = H_0(L)$$

ein Isomorphismus.
6. Ist $\varphi : K \to L$ konstant, $q \neq 0$, so ist $\varphi_* : H_q(K) \to H_q(L)$ die Nullabbildung.

2.9 Relative Homologiegruppen

Ist $K_0 \subseteq K$ ein Unterkomplex eines simplizialen Komplexes, so besteht ein enger Zusammenhang zwischen $H_q(K_0)$ und $H_q(K)$, der durch die „relativen Homologiegruppen" beschrieben wird.

Definition:
Sei $K_0 \subseteq K$ ein Unterkomplex eines simplizialen Komplexes. Dann ist $C_q(K_0) \subseteq C_q(K)$ eine Untergruppe und wir nennen

$$\boldsymbol{C_q(K, K_0)} := C_q(K)/C_q(K_0)$$

die **relative q-te Kettengruppe**. Ihre Elemente $c_q + C_q(K_0)$ mit $c_q \in C_q(K)$ heißen **q-Ketten auf K relativ K_0**. Der **relative Randhomomorphismus** ist für $q \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\bar{\partial} = \bar{\partial}_q} : C_q(K, K_0) &\to C_{q-1}(K, K_0) \\ c_q + C_q(K_0) &\mapsto \partial_q(c_q) + C_{q-1}(K_0). \end{aligned}$$

Die **relative q-te Zykelgruppe** definieren wir als $\boldsymbol{Z_q(K, K_0)} := \mathrm{Ker}(\bar{\partial}_q)$, die **relative q-te Rändergruppe** durch $\boldsymbol{B_q(K, K_0)} := \mathrm{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$. Damit können wir nun die **relative q-te Homologiegruppe** $H_q(K, K_0)$ definieren als

$$\boldsymbol{H_q(K, K_0)} := Z_q(K, K_0)/B_q(K, K_0).$$

◇

Beispiele:

1. $H_q(K, K) = \{0\}$, da für $q \in \mathbb{Z}$ stets $C_q(K, K) = \{0\}$ gilt.
2. Für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist $H_q(K, \emptyset) = H_q(K)$.
3. Wenn $\dim(K_0) \leq q - 2$ ist, ist $H_q(K, K_0) = H_q(K)$, da für $i \geq q - 1$ stets $C_i(K, K_0) = C_i(K)$ ist.
4. Ist K zusammenhängend, $\emptyset \neq K_0 \subseteq K$ Unterkomplex, so gilt

   $$H_0(K, K_0) = \{0\}.$$

   Beweis. Sei $x \in K$ ein 0-Simplex. Da K zusammenhängend ist, gibt es einen Kantenweg c_1 von $x_0 \in K_0$ nach x. Da c_1 eine 1-Kette ist, gilt $\partial(c_1) = x - x_0$, also $x = \partial(c_1) + x_0 \in B_0(K, K_0)$. □

5. Sei $\sigma_n = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ ein n-Simplex, $K := K(\sigma_n), K_0 := K(\dot{\sigma}_n)$. Dann ist für $q < n$ stets $C_q(K_0) = C_q(K)$, sowie $C_n(K_0) = \{0\}$ und $C_n(K) = \mathbb{Z} \cdot \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Also ist

   $$C_q(K, K_0) = H_q(K, K_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = n \\ \{0\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

   Mit dem Invarianzsatz (Satz 2.7.8) folgt hieraus

   $$H_q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , q = n \\ \{0\} & , q \neq n. \end{cases}$$

Satz 2.9.1 (lange, exakte Homologiesequenz des Paares (K, K_0)). *Sei $K_0 \subseteq K$ ein Unterkomplex eines simplizialen Komplexes, $i : K_0 \hookrightarrow K$, $j : (K, \emptyset) \hookrightarrow (K, K_0)$ die Inklusionen. Dann existieren für jedes $q \in \mathbb{Z}$ Homomorphismen*

$$\begin{aligned} i_* : H_q(K_0) &\to H_q(K), \\ j_* : H_q(K) = H_q(K, \emptyset) &\to H_q(K, K_0), \\ \partial_* : H_q(K, K_0) &\to H_{q-1}(K_0), \end{aligned}$$

so daß die Sequenz

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(K, K_0) \xrightarrow{\partial_*} H_q(K_0) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, K_0) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_0) \xrightarrow{i_*} \dots$$

exakt ist.

Beweis. Daß für jedes q die Abbildungen $i_* := H_q(i)$ und $j_* := H_q(j)$ Homomorphismen sind, folgt aus der Funktoreigenschaft von H_q. Definieren wir nun ∂_*: Für $q \in \mathbb{Z}$, $z \in Z_q(K, K_0)$, d.h. $[z]_{K,K_0} \in H_q(K, K_0)$ setzen wir

$$\partial_*([z]_{K,K_0}) := [\partial(z)]_{K_0}.$$

Da z ein Zykel relativ K_0 ist, gilt $\partial(z) \in C_{q-1}(K_0)$ und $\partial(\partial(z)) = 0$. Daher ist $\partial(z) \in Z_{q-1}(K_0)$. Also ist $[\partial(z)]_{K_0} \in H_{q-1}(K_0)$. Nun wollen wir die <u>Wohldefiniertheit von ∂_*</u> nachweisen:

Sei $z' \in Z_q(K, K_0)$ ein Zykel homolog zu z relativ K_0, d.h. $z - z' \in B_q(K, K_0) = \{\partial(c) + C_q(K_0) \mid c \in C_{q+1}(K)\}$. Dann gibt es eine $(q+1)$-Kette $c \in C_{q+1}(K)$ und eine q-Kette $c_0 \in C_q(K_0)$, so daß $z - z' = \partial(c) + c_0$ ist. Daher ist $\partial(z) - \partial(z') = \partial(c_0) \in B_{q-1}(K_0)$, d.h. $[\partial(z)]_{K_0} = [\partial(z')]_{K_0}$.

Für die <u>Exaktheit in $H_q(K)$</u> müssen wir zeigen, daß $\mathrm{Ker}(j_*) = \mathrm{Im}(i_*)$ ist:

„$\supseteq$“: Die Inklusion $\mathrm{Ker}(j_*) \supseteq \mathrm{Im}(i_*)$ ist äquivalent zur Aussage $j_* \circ i_* = 0$.

Wir betrachten daher das Bild von $z \in Z_q(K_0)$ unter $j \circ i$ als relativen Zykel in $Z_q(K, K_0)$. Da $z \in Z_q(K_0) \subseteq C_q(K_0)$ ist, ist $i(z) = z \in C_q(K_0) \subseteq C_q(K)$. Da $Z_q(K, K_0) \subseteq C_q(K, K_0) = C_q(K)/C_q(K_0)$ ist, ist $j(i(z)) = 0 \in C_q(K, K_0)$, woraus wegen der Funktoreigenschaft von H_q die Behauptung $j_* \circ i_* = 0$ folgt.

„$\subseteq$“ Sei $z \in \mathrm{Ker}(j_*)$, d.h. $z \in Z_q(K)$ und $j_*([z]_K) = [z]_{K,K_0} = [0]_{K,K_0} \in H_q(K, K_0)$. Daraus ergibt sich $z \in B_q(K, K_0) = \{\partial(c) + C_q(K_0) \mid c \in C_{q+1}(K)\}$, d.h. es existieren $c \in C_{q+1}(K)$ und $c_0 \in C_q(K_0)$, so daß $z = \partial(c) + c_0$ ist. Also ist $z - \partial c = c_0$, woraus folgt, daß $[z]_K = [c_0]_K = i_*([c_0]_{K_0})$ ist, d.h. $z \in \mathrm{Im}(i_*)$.

Der Rest des Beweises (Exaktheit in $H_q(K, K_0)$ und $H_q(K_0)$) ist dem Leser als Übung empfohlen. □

Literaturverzeichnis

Literatur zur Vorlesung

[StöZie] Stöcker, R. / Zieschang, H.: Algebraische Topologie. Teubner 1988.
(Das Wichtigste über kombinatorische und algebraische Topologie, viel Anschauungsmaterial, empfehlenswert.)

[Greenb] Greenberg, M.J.: Lectures on Algebraic Topology. Benjamin 1967.
(Das Wichtigste über algebraische Topologie, kurz und bündig, trocken.)

[Schube] Schubert, H.: Topologie. Teubner 1964.
(Zur mengentheoretischen, kombinatorischen und algebraischen Topologie.)

[Jänich] Jänich, K.: Topologie. Springer 1980.
(Das Wichtigste zur mengentheoretischen Topologie, typisch Jänich.)

[Ossa] Ossa, E.: Topologie. Vieweg 1992.

Der Klassiker

[Seifert] Seifert, H. / Threlfall, W.: Lehrbuch der Topologie. Teubner 1934.
(Immer noch lesenswert.)

Unterhaltende und anregende Literatur

[BolEfr] Boltjanskij, V.G. / Efremovič, V.A.: Anschauliche kombinatorische Topologie. Vieweg 1986.

[HiCoVo] Hilbert, D. / Cohn-Vossen, S.: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932.

Weiterführende Literatur

[Dold] Dold, A.: Lectures on Algebraic Topology. Springer 1972.

[Spanier] Spanier, E.H.: Algebraic Topology. McGraw-Hill 1966.

[Switzer] Switzer, R.: Algebraic Topology — Homotopy and Homology. Springer 1975.

[Massey] Massey, W.S.: A Basic Course in Algebraic Topology. Springer 1991.

Literatur zur Differentialtopologie

[BröJän] Bröcker, T. / Jänich, K.: Einführung in die Differentialtopologie. Springer 1973.

[Hirsch] Hirsch, M.W.: Differential Topology. Springer 1976.

[Munkres] Munkres, J.R.: Elementary Differential Topology. Princeton Univ. Press 1966.

Literatur zur (homologischen) Algebra

[HilSta] Hilton, D.J. / Stammbach, U.: A Course in Homological Algebra. Springer 1971.

Literatur zur Geschichte der Topologie

[Scholz] Scholz, E.: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Birkhäuser 1980.

Literatur zu elementaren Grundlagen

[Scheja] Scheja, G. / Storch, U.: Lehrbuch der Algebra. Teubner 1994.

Index

— **Symbole** —

(X,A) (topologisches Paar) 37
$(X,x_0)\vee(Y,y_0)$ (Einpunktvereinigung) 27
$(x_0,\dots,x_q)$ (nicht-orientiertes Simplex) 87
$(x_0,\dots,x_q)$ (offenes q-Simplex) 37
1 (neutrales Element) 62
$B_q(K)$ (simpliziale Rändergruppe) 90
$B_q(K,K_0)$ (relative, simpl. Rändergruppe) 99
CX (Kegel über X) 26
C_AX (Kegel über dem Unterraum X) 26
$C_q(K)$ (q-te simpl. Kettengruppe) 88
$C_q(K,K_0)$ (relative, simpl. Kettengruppe) 99
$C_q(\varphi)=\varphi_\bullet$ (φ simpl. Abbildung) 97
$D(p)$ (Decktransformationen) 79
$G_1 * G_2$ (freies Produkt) 71
Gx (Orbit) 28
$H: f\simeq g$ (Homotopie) 47
$H_q(K)$ (simpliziale Homologiegruppe) 90
$H_q(K,K_0)$ (relative, simpl. Homologiegruppe) 99
$H_q(\varphi)=\varphi_*$ (φ simpl. Abbildung) 98
$K^{(n)}$ (n-te baryzentrische Unterteilung) 45
$K_{p,q}$ (Torusknoten) 5
SX (Suspension) 27
$St(p)$ (Eckenstern) 45
$Tr(x)$ (Trägersimplex) 40
$X\cong Y$ (homöomorphe Räume) 23
X/A (Quotient nach einem Unterraum) 25
X/G (Orbitraum) 28
$X/\sim$ (Quotient) 24
$X \amalg Y$ (Ko-Produkt, disjunkte Vereinigung) 19
$X \amalg Y$ (topologische Summe) 19
$X\cup_\varphi Y$ (Verklebung) 30
$X\simeq Y$ (homotopieäquivalente Räume) 49
$X\times Y$ (topologisches Produkt) 20
$X\wedge Y$ (Smash-Produkt) 29
X^n (n-Gerüst) 53
$Z_q(K)$ (simpliziale Zykelgruppe) 90
$Z_q(K,K_0)$ (relative, simpl. Zykelgruppe) 99
$[(X,A),(Y,B)]$ (Menge der Homotopieklassen) 49
$[X,Y]$ (Homotopie-Klassen) 49
$[f]$ (Homotopie-Klasse) 49
$\mathbb{CP}^n$ (komplexer projektiver Raum) 29
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ (Morphismen) 61
$\mathbb{RP}^n$ (reeller projektiver Raum) 29
$\mathrm{rg}(C_q(K))$ (Rang einer simpl. Kettengruppe) 89
$\bar\sigma_q$ (abgeschlossenes q-Simplex) 37
$\bar B$ (abgeschlossene Hülle) 16
$\bar\partial_q$ (relativer, simpl. Randhomomorphismus) 99
$\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\cdot i$ (freie, abelsche Gruppe) 88
$\dim(K)$ (Dimension eines Simplizialkomplexes) 39
$\dim(X)$ (Dimension eines CW-Komplexes) 54
$\dim(\sigma)$ (Dimension eines Simplex) 37
$\dim(e)$ (Dimension einer Zelle) 53
$\dot\sigma_q$ (Rand des q-Simplex) 37
$\dot e$ (Zellenrand) 53
γ'_{y_0} (Liftung eines Weges) 76
γ^{-1} (inverser Weg) 65
γ_0 (konstanter Weg) 65
$\gamma_1 * \gamma_2$ (Verknüpfung von Wegen) 65
$\hat\sigma_q$ (Schwerpunkt eines Simplex) 42
B° (offener Kern) 16
$\mathcal{C}(Y,p)$ (char. Konjugationsklasse) 84
$\mathcal{T}|_A$ (Teilraumtopologie) 18
$\langle x_0,\dots,x_q\rangle$ (orientiertes Simplex) 87
$\lim_{n\to\infty} x_n$ (Limes) 33
$\mathrm{ob}_{\mathcal{C}}$ (Objekte einer Kategorie) 61
∂B (Rand einer Menge) 16
$\partial\sigma_q$ (Rand des q-Simplex) 37
∂_q (simplizialer Randhomomorphismus) 89
$\pi_1(X)$ (Fundamentalgruppe) 67
$\pi_1(X,x_0)$ (Fundamentalgruppe) 65
$\sigma^{(i)}_{q-1}$ (i-te Seite eines Simplex) 88
σ_q (offenes q-Simplex) 37
σ_q^{-1} (entgegengesetzt orientiertes Simplex) 87
$\tau<\sigma$ (eigentliche Seite) 38
$\tau\le\sigma$ (Seite, Teilsimplex) 38
$\varphi_*=H_q(\varphi)$ (φ simpl. Abbildung) 98
$\varphi_\bullet=C_q(\varphi)$ (φ simpl. Abbildung) 97
φ_e (anheftende Abbildung) 57
$d(A)$ (Durchmesser) 46
$d(\sigma)$ (Durchmesser eines Simplex) 43
$f\simeq g$ rel X' 49
$f\amalg g$ (top. Summe von Abbildungen) 20
$f\simeq g$ (homotope Abbildungen) 47
f^{-1} (inverser Morphismus) 64
$p*K$ (Kegel, simplizialer Komplex) 93
$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ (Limes) 33
$|K|$ (Polyeder, Träger) 39

— A —

Abbildung
- abgeschlossen 22
- anheftend 57
- charakteristische 54
- Einschränkung 22
- offen 22
- simplizial 41
- stetig 21
- topologisch 23
- von Paaren 37
- zellulär 60

Abbildungen
- homotop 47
- von Paaren
  - homotop 49

abgeschlossene Abbildung 22
abgeschlossene Hülle 16
abgeschlossene Menge 15
abgeschlossenes Simplex 37
Abschluß 16
affin unabhängig 36
affiner Raum 36
Alexander 13
Anheften einer 2-Zelle 30
anheftende Abbildung 57
Approximation
- zelluläre 60
- simpliziale 45

Äquivalenz, natürliche 65
Äquivalenzkriterium
- wegzusammenhängende Überlagerungen . 85

äußerer Punkt 16
Automorphismus, innerer 77

— B —

Bahn 77
baryzentrische Koordinaten 36
baryzentrische Unterteilung 43, 45
Basis
- Topologie 15
- Überlagerung 82

Betti 13
Blätter 73
Blätterzahl 78
Bolyai 12
Bouquet 27
Brakhage, Satz von ˜ 40
Brouwer
- Fixpunktsatz 70

— C —

Cairns, Satz von ˜ 40
Cantor 14
charakterisierende Konjugationsklasse 84
charakteristische Abbildung 54
closure finite 54
CW-Komplex 54
- endlicher 54

CW-Struktur 54
CW-Unterkomplex 56
CW-Zerlegung 54

— D —

Darstellung einer Gruppe 77
Decktransformation 79
Deformationsretrakt 52
Descartes 11
dicht 16
differenzierbare Mannigfaltigkeit 40
Dimension
- CW-Komplexes 54
- Simplex 37
- Simplizialkomplexes 39
- Zelle 53

disjunkte Vereinigung 17, 19
- topologische 19

diskontinuierlich, eigentlich 77
diskrete Topologie 17
Doppelkegel 27
Dualitätsfunktor 64
Durchmesser
- eines metrischen Raumes 46
- eines Simplex 43

— E —

Ecken
- eines Simplex 37
- eines Simplizialkomplexes 38

Eckenstern 45
effektive Gruppenoperation 77
eigentlich diskontinuierlich 77
eigentliche Seite eines Simplex 38
Einbettung 30
Eindeutigkeit der Liftung 74
einfach zusammenhängend 67
- semi-lokal 83

Einhängung 27
Einpunktvereinigung 27
Einschränkung einer Abbildung 22

endlicher CW-Komplex 54
entgegengesetzt orientiertes Simplex 87
Euklidische Geometrie 11
Euklidische Topologie 15
Euler 9
Eulerscher Polyedersatz 9
exakte Homologiesequenz
 eines Paares, lange 99
Existenzsatz
 simpliziale Approximation 46
 universelle Überlagerung 83
 zelluläre Approximation 60

— F —

feinere Topologie 23
feinste Topologie 17
Fermat 11
fixpunktfreie Gruppenoperation 77
Fixpunktsatz
 Brouwerscher 70
Fréchet 14
Fréchet-Raum 32
frei
 abelsche Gruppe 88
 Gruppenoperation 77
freies Produkt 71
Freimachen
 einer Zelle 52
 eines Punktes 51
Fundamentalgruppe 65
Funktor
 Dualitätsfunktor 64
 Identitätsfunktor 64
 kontravariant 63
 kovariant 63
 Tangentialraumfunktor 64
 Vergißfunktor 64

— G —

Gauß 12
generischer Punkt 17
Geometrie gekrümmter Flächen 11
geometrischer Ursprung der Topologie 1
Gerüst 53
Geschlecht 10
Graph 39
Grenzwert 33
gröbere Topologie 23
gröbste Topologie 17
Gruppe
 Darstellung 77
 freie, abelsche 88
 topologische 69
Gruppenoperation
 auf einem topologischen Raum 28
 auf einer Menge 77
 effektiv 77
 eigentlich diskontinuierlich 77
 fixpunktfrei 77
 frei 77
 transitiv 77
 treu 77

— H —

Häufungspunkt 16
Hauptvermutung 13
Hausdorff 14
Hausdorff-Raum 32
Hawaiischer Ohrring 59
hinreichend zusammenhängend 83
Homologie
 simpliziale 90
Homologiegruppe
 simpliziale 90
  relative 99
Homologiesequenz . . . . . *siehe* Sequenz
homöomorph 23
 lokal 73
 topologische Paare 37
Homöomorphismus 23
 in $\mathbb{R}^n$ 3
Homotopie 47
 Abbildungen von Paaren 49
 Homotopie-Klasse 49
 Homotopieäquivalenz 49
 Homotopieliftungseigenschaft 76
 Homotopieüberlagerungslemma 68
 relativ eines Unterraumes 49
 zelluläre 60
Hopf 13
Hülle, abgeschlossene ˜ 16
hüllen-endlich 54
Hurewicz 13

— I —

Identität 61
Identitätsfunktor 64
Index einer Untergruppe 78
induziert
 Abbildung von Polyedern 41
 Orientierung einer Simplex-Seite 88
 Topologie, auf Teilraum 18

innerer Automorphismus . . . 77
innerer Punkt . . . 16
Inneres . . . 16
Invariante, topologische . . . 5, 23
Invarianz
  simpliziale Homologie . . . 95
inverser Morphismus . . . 64
inverser Weg . . . 65
isolierter Punkt . . . 16
Isomorphismus . . . 64
Isotropiegruppe . . . 77

— **J** —

Jordan . . . 7, 13
  Jordanscher Kurvensatz . . . 7

— **K** —

Kampen, Satz von Seifert-van ˜ . . . 72
Kanten eines Simplizialkomplexes . . . 39
Karte . . . 40
Kategorie . . . 61
  abelsche Gruppen . . . 62
  Diff . . . 63
  Groups . . . 62
  Homtop . . . 63
  Sets . . . 62
  simpliziale Komplexe . . . 63
  Top . . . 62
  Top^2 . . . 62
  Top* . . . 62
  Unterkategorie . . . 63
  Vect_K . . . 62
Kegel
  über einem simplizialen Komplex . . . 93
  über einem topologischen Raum . . . 26
  über einem Unterraum . . . 26
Kern offener . . . 16
Kette simpliziale . . . 89
Kettengruppe . . . *siehe* Kettenmodul
Kettenmodul
  simplizialer . . . 88
    Rang . . . 89
    relativer . . . 99
Klassifikation von Überlagerungen . . . 85
Kleeblattschlinge . . . 3
Klumpentopologie . . . 17
Knotentheorie . . . 5
Ko-Produkt . . . 19
kohärente Orientierung . . . 96
Kolmogorov . . . 13
kompakt . . . 34
  lokal-˜ . . . 36
Komplex
  CW-˜ . . . 54
  simplizial, Teilkomplex . . . 40
  simplizialer . . . 38
komplexer projektiver Raum . . . 29
Komposition . . . 61
Konjugationsklasse
  charakterisierende . . . 84
  einer Untergruppe . . . 84
konjugierte Untergruppe . . . 77
konstanter Weg . . . 65
kontrahierbar . . . 49
kontravarianter Funktor . . . 63
Koordinaten, baryzentrische . . . 36
kovarianter Funktor . . . 63
Kreislinie . . . 2
Kreisscheibe . . . 1
Kugeloberfläche . . . 2
Kurvensatz, von Jordan . . . 7

— **L** —

Lagrange . . . 13
lange, exakte Homologiesequenz
  eines Paares . . . 99
Lebesgues, Lemma von ˜ . . . 46
Lefschetz . . . 13
Liftung . . . 68, 74
  Eindeutigkeitssatz . . . 74
  Liftungslemma . . . 68
Limes . . . 33
lineare Darstellung . . . 77
Listing . . . 13
Lobachevsky . . . 12
Lojacevicz, Satz von ˜ . . . 40
lokal
  homöomorph . . . 73
  lokal-kompakt . . . 36
  triviale Überlagerung . . . 73
  wegzusammenhängend . . . 80

— **M** —

Mannigfaltigkeit
  differenzierbare . . . 40
  topologische . . . 40
Menge
  abgeschlossen . . . 15
  offen . . . 15
metrisierbar . . . 33
  Metrisierbarkeitsproblem, Lösung . . . 36
Mittelpunkt eines Simplex . . . 42

Möbius 13
Möbiusband 3
Moise, Satz von ˜ 40
Morphismus 61
    inverser 64

— **N** —

Nagata 36
natürliche Äquivalenz 65
natürliche Transformation 65
nicht-orientiertes Simplex 87
normal 33
Normalteiler 72
Normalunterteilung 45
nullhomolog 90
nullhomotop 49

— **O** —

Objekt 61
offen
    Abbildung 22
    Menge 15
    Simplex 37
offener Kern 16
Ohrring, Hawaiischer 59
Operation einer Gruppe *siehe* Gruppenoperation
Orbit 28, 77
Orbitraum 28
Orientierung
    induzierte ˜ einer Simplex-Seite 88
    Simplex 87
        kohärent 96

— **P** —

Paar
    lange, exakte Homologiesequenz 99
    topologisches 37
Peano-Kurve 6
Platonische Körper 8
Poincaré 13
Poincaré-Gruppe 65
Poincaré-Vermutung 50
Polyeder
    in $\mathbb{R}^3$ 8
        reguläres 8
    topologisches 40
    zu einem Simplizialkomplex 40
Polyedersatz
    Eulerscher 9
Polygon 7
Poncelet 12
Produkt
    freies 71
    Smash-˜ 29
    topologisches 20
projektiver Raum
    komplexer 29
    reeller 29
Punkt
    äußerer 16
    generisch 17
    innerer 16
    isolierter 16

— **Q** —

quasikompakt 34
Quotient
    nach einem Unterraum 25
    nach einer Gruppenoperation 28
    topologischer Räume 24
Quotiententopologie 24

— **R** —

Rand
    Menge 16
    Simplex 37
    simpliziale Kette 90
Rändergruppe
    relative, simpliziale 99
    simpliziale 90
Randhomomorphismus
    relativer, simplizialer Kettenkomplex 99
    simplizialer Kettenkomplex 89
Randpunkt 16
Rang
    endlich erzeugte, abelsche Gruppe 91
    freie, abelsche Gruppe 91
    simpliziale Kettengruppe 89
Raum
    affiner 36
    Fréchet-˜ 32
    Hausdorff-˜ 32
    hüllen-endlich 54
    kompakt 34
    kontrahierbar 49
    lokal-kompakt 36
    metrisierbar 33
    normal 33
    nullhomotop 49

projektiver ... 29
quasikompakt ... 34
separiert ... 32
topologischer ... 15
triangulierbar ... 40
wegzusammenhängend ... 32
zusammenhängend ... 31
Zusammenhangskomponenten ... 31
zusammenziehbar ... 49
Räume
Einpunktvereinigung ... 27
homöomorph ... 23
homotopieäquivalent ... 49
lokal homöomorph ... 73
Quotient ... 24
Räume, Verklebung ... 30
Raumpaar ... 37
reduziertes Wort ... 71
reeller projektiver Raum ... 29
reguläres Polyeder in $\mathbb{R}^3$ ... 8
relativ
simpliziale Homologiegruppe ... 99
simpliziale Kettengruppe ... 99
simpliziale Rändergruppe ... 99
simpliziale Zykelgruppe ... 99
simplizialer Randhomomorphismus ... 99
Retraktion ... 52
starke ... 52
Riemann ... 13
Riemannsche Mannigfaltigkeiten ... 13

— S —

Schläfli ... 13
schwache Topologie ... 54
Schwerpunkt eines Simplex ... 42
Seifert, Satz von ˜-van Kampen ... 72
Seite
eigentliche ˜ eines Simplex ... 38
eines Simplex ... 38, 88
semi-lokal einfach zusammenhängend ... 83
separiert ... 32
Sequenz
lange, exakte Homologiesequenz
eines Paares ... 99
Simplex ... 37
abgeschlossenes ... 37
Dimension ... 37
Durchmesser ... 43
eigentliche Seite ... 38
entgegengesetzt orientiertes ... 87
Mittelpunkt ... 42
nicht-orientiertes ... 87
orientiertes ... 87
Schwerpunkt ... 42
Seite ... 38, 88
simplizial
Abbildung ... 41
Approximation ... 45
Existenzsatz ... 46
Homologie, Invarianz ... 95
Kette ... 89
Kettengruppe ... 88
Komplex ... 38
zugehöriges Polyeder ... 40
Teilkomplex ... 40
Smash-Produkt ... 29
Stabilisator ... 77
Standgruppe ... 77
starke Retraktion ... 52
starker Deformationsretrakt ... 52
stetige Abbildung ... 21
Summe
topologische
von Abbildungen ... 20
von Räumen ... 19
Suspension ... 27

— T —

T_1-Raum ... 32
T_2-Raum ... 32
T_3-Raum ... 33
T_4-Raum ... 33
Tangentialraumfunktor ... 64
Teilkomplex, simplizialer ... 40
Teilpolyeder ... 40
Teilraum ... 18
dicht ... 16
Teilraumtopologie ... 18
Teilsimplex ... 38
Topologie ... 15
Basis ... 15
der Gestalt ... 5
der Lage ... 5
diskrete ... 17
Euklidische ... 15
feinere ... 23
feinste ... 17
gröber ... 23
gröbste ... 17
induzierte, auf Teilraum ... 18
schwache ... 54
topologisch
Abbildung ... 23
in $\mathbb{R}^n$ ... 3
äquivalent, in $\mathbb{R}^n$ ... 3
disjunkte Vereinigung ... 19

Gruppe ... 69
Invariante ... 23
Mannigfaltigkeit ... 40
Paar ... 37
lange, exakte Homologiesequenz ... 99
Polyeder ... 40
Produkt ... 20
Raum ... 15
Summe
Abbildungen ... 20
Räume ... 19
Überlagerung ... 73
Torsionsgruppe ... 91
Torsionskoeffizient ... 91
Torus ... 2
Torusknoten ... 5
Träger
Simplizialkomplex ... 40
Trägersimplex ... 40
Transformation, natürliche ... 65
transitive Gruppenoperation ... 77
Trennungsaxiome
T_1 ... 32
T_2 ... 32
T_3 ... 33
T_4 ... 33
treue Gruppenoperation ... 77
Triangulierung ... 40
triviale Überlagerung ... 73
lokal ... 73
Tychonoff ... 36
Satz von ˜ ... 35

— U —

Überlagerung ... 73
Äquivalenz ... 85
Basis ... 82
Blätterzahl ... 78
Klassifikationssatz ... 85
triviale ... 73
universelle ... 82
Existenzsatz ... 83
wegzusammenhängend ... 73
Äquivalenzkriterium ... 85
zusammenhängend ... 73
Umgebung ... 16
Umlaufzahl ... 67
unabhängig, affin ... 36
universelle Überlagerung ... 82
Untergruppe
Index ... 78
konjugiert ... 77
Unterkategorie ... 63
voll ... 63
Unterkomplex
CW-˜ ... 56
Unterraum, Zusammenschlagen ... 25
Unterteilung, baryzentrische ... 43, 45
Ursprung der Topologie, geometrischer ... 1
Urysohn ... 36

— V —

van Kampen, Satz von Seifert-˜ ... 72
verallgemeinerte Poincaré-Vermutung ... 50
Vereinigung, disjunkt ... 17, 19
Vergißfunktor ... 64
Verklebung topologischer Räume ... 30
verknüpfbar ... 65
volle Unterkategorie ... 63
von Dyck ... 13

— W —

weak topology ... 54
Weg ... 32
inverser ... 65
konstanter ... 65
Wege, verknüpfbar ... 65
Wegliftungseigenschaft ... 75
wegzusammenhängend ... 32
in $\mathbb{R}^n$ ... 5
lokal ... 80
Überlagerung ... 73
Äquivalenzkriterium ... 85
Whitehead ... 13

— Z —

Zelle ... 53
Zellenrand ... 53
Zellenzerlegung ... 53
zellulär
Abbildung ... 60
Approximation ... 60
Existenzsatz ... 60
Homotopie ... 60
Zerlegungsmethode ... 71
zusammenhängend ... 31
einfach ... 67
hinreichend ... 83
semi-lokal einfach ... 83
Überlagerung ... 73
Zusammenhangskomponenten ... 31

Zusammenschlagen eines Unterraumes 25
zusammenziehbar 49
Zykel 90
Zykelgruppe
    relative, simpliziale 99
    simpliziale 90