Skript zur Vorlesung

Topologie 1

von Prof. Dr. R. Lasser
und Dr. W. zu Castell–Rüdenhausen

im WS 2001/2002 an der TU München

verfügbar im Internet unter
http://www-m12.ma.tum.de/lehre/top1/

9. August 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume: Grundbegriffe

Definition 1.1 *Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X heißt **Topologie auf** X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(T1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$

(T2) Jeder Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$. Äquivalent dazu ist: $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \;\Rightarrow\; O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(T3) Jede Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$. Das heißt: $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

*Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt **topologischer Raum**. (Manchmal schreiben wir nur X statt $(X, \mathcal{O})$, falls klar ist, was $\mathcal{O}$ ist.) Elemente $O \in \mathcal{O}$ heißen **offene Mengen**.*

Beispiele:

(i) X sei eine Menge, $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{O}$ heißt die **indiskrete Topologie** auf X.

(ii) X sei eine Menge, $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X (inklusive $\emptyset$ und X). $\mathcal{O}$ heißt die **diskrete Topologie** auf X.

(iii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Bezeichne

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq X : \; \forall x \in O \;\exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(x) \subseteq O\} \cup \{\emptyset\}$$

$\mathcal{O}$ ist eine Topologie (Übungsaufgabe). $\mathcal{O}$ heißt die von der Metrik d induzierte Topologie.

Ist speziell $X = \mathbb{R}^d$ und $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^2}$, $x = (x_1, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$, so heißt die von d induzierte Topologie die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}^d$. (Vergleiche Analysis: Normen auf $\mathbb{R}^d$ induzieren gleiche Topologie!)

Ist $X \subseteq \mathbb{R}^d$, so ist X mit der obigen Metrik (eingeschränkt auf X) ein metrischer Raum. Die induzierte Topologie auf X heißt natürliche Topologie auf X.

Man beachte, daß die diskrete Topologie durch die diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

induziert wird (Übungsaufgabe).

(iv) Sei X eine Menge, $\mathcal{P}$ eine disjunkte Partition von X. ($\mathcal{P}$ ist ein System von paarweise disjunkten Teilmengen von X, deren Vereinigung ganz X ergibt: $\mathcal{P} = \{P_i : \; i \in I\}$ mit $P_i \cap P_j = \emptyset$, $i \neq j$, $X = \bigcup_{i \in I} P_i$.)

$$\mathcal{O} := \Big\{ O \subset X : \; O = \bigcup_{i \in J, P_i \in \mathcal{P}} P_i, \; J \subseteq I \Big\} \cup \emptyset$$

ist eine Topologie auf X und heißt Partitionstopologie.

Als konkretes Beispiel sei $X = \mathbb{N}$ und $\mathcal{P} = \{\{2k-1, 2k\} : \; k \in \mathbb{N}\}$. Offen in dieser Topologie sind alle Teilmengen O von $\mathbb{N}$, die folgende Bedingung erfüllen: $2k \in \mathcal{O}$, $k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2k-1 \in \mathcal{O}$.

(v) $X = [-1, 1]$.

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq X : \{0\} \cap O = \emptyset \quad \text{oder} \quad (-1, 1) \subseteq O\} \cup \{\emptyset\}$$

$\mathcal{O}$ ist eine Topologie („Entweder–Oder–Topologie").

(vi) Sei X eine linear geordnete Menge mit Ordnung $<$. Bezeichne für $y, z \in X$ die „offenen Intervalle" $(y, z) := \{x \in X : y < x < z\}$

$$\mathcal{O} := \Big\{O \subseteq X : O = \bigcup_{y,z \in X} (y, z)\Big\}$$

$\mathcal{O}$ ist Topologie und wird Ordnungstopologie genannt.

(vii) Sei X eine nichtendliche Menge.

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq X : X \setminus O \text{ ist endlich }\} \cup \{\emptyset\}$$

$\mathcal{O}$ ist Topologie und wird kofinite Topologie oder Topologie endlicher Komplemente genannt.

Definition 1.2 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist. Sei*

$$\mathscr{A} := \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{O}\} = \{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen }\}.$$

Proposition 1.3 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann gelten:*

(A1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen ($\emptyset, X \in \mathscr{A}$)

(A2) Jede Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Äquivalent dazu ist: $A_1, A_2 \in \mathscr{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}$.

(A3) Jeder Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Das heißt: $A_i \in \mathscr{A}$, $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$.

Beweis. Folgt direkt aus den Rechenregeln der Komplementbildung. □

Diese Rechenregeln besagen mehr noch, daß (A1), (A2), (A3) gleichwertig zu (T1), (T2), (T3) sind. Man hat somit:

Satz 1.4 *Sei X eine Menge. Ein System $\mathscr{A}$ von Teilmengen erfülle (A1), (A2), (A3). Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}$, für die das System der abgeschlossenen Mengen gleich $\mathscr{A}$ ist.*

Definition 1.5 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn ein $O \in \mathcal{O}$ existiert mit $x \in O \subseteq U$. $\mathscr{U}(x) := \{U \subseteq X : U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt **Umgebungssystem** von x.*

Ist $B \subseteq X$, so heißt U Umgebung von B, falls $O \in \mathcal{O}$ existiert mit $B \subseteq O \subseteq U$.

Proposition 1.6 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn sie Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist.*

Beweis. Ist $B \in \mathcal{O}$, so ist B Umgebung von x für alle $x \in B$. Sei umgekehrt B Umgebung eines jeden $x \in B$. Das heißt: Zu jedem $x \in B$ existiert $O_x \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x \subseteq B$. Folglich gilt $B = \bigcup_{x \in B} O_x \in \mathcal{O}$ wegen (T3). $\square$

Proposition 1.7 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Für jedes $x \in X$ bezeichne $\mathscr{U}(x) = \{U \subseteq X : \ U$ Umgebung von $x\}$ das Umgebungssystem von x. Dann gelten:*

(U1) $\mathscr{U}(x) \neq \emptyset$, $x \in U$ *für jedes* $U \in \mathscr{U}(x)$.

(U2) $U \in \mathscr{U}(x)$, $U \subseteq V \ \Rightarrow \ V \in \mathscr{U}(x)$ *(d.h. $\mathscr{U}(x)$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Obermengen).*

(U3) $U, V \in \mathscr{U}(x) \ \Rightarrow \ U \cap V \in \mathscr{U}(x)$ *(d.h. $\mathscr{U}(x)$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung endlicher Durchschnitte).*

(U4) Zu $U \in \mathscr{U}(x)$ $\exists V \in \mathscr{U}(x) : \ U \in \mathscr{U}(y) \ \forall y \in V$.

Beweis. $\mathscr{U}(x) \neq \emptyset$, da $X \in \mathscr{U}(x)$. Die weiteren Aussagen von (U1) und (U2) sind offensichtlich.

zu (U3): Es existieren $O_x^1, O_x^2 \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x^1 \subseteq U$, $x \in O_x^2 \subseteq V$. Damit gilt $x \in O_x^1 \cap O_x^2 \subseteq U \cap V$, d.h. $U \cap V \in \mathscr{U}(x)$.

zu (U4): Es gibt $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq U$. Setze $V := O$. Da V offen ist, ist V Umgebung aller seiner Punkte, also auch die Obermenge U. $\square$

Satz 1.8 *Sei X eine Menge. Erfüllt die Abbildung $x \to \mathscr{U}(x)$, $X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ die Bedingungen (U1), (U2), (U3), (U4), so existiert genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X, so daß für jedes $x \in X$ das Umgebungssystem $\mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x)$ (das durch $\mathcal{O}$ bestimmt wird) gleich dem Funktionswert $\mathscr{U}(x)$ ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz einer passenden Topologie $\mathcal{O}$.

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X : \ U \in \mathscr{U}(x) \text{ für alle } x \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

$\mathcal{O}$ ist tatsächlich eine Topologie. (T1) ist erfüllt, da $X \in \mathscr{U}(x)$ für alle $x \in X$ wegen (U2). Für (T2) betrachte $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$. Ist $x \in U_1 \cap U_2$, so ist $x \in U_1$ und $x \in U_2$. Nach Definition von $\mathcal{O}$ ist $U_1 \in \mathscr{U}(x)$ und $U_2 \in \mathscr{U}(x)$. Mit (U3) ist $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}(x)$. Somit gilt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$. Für (T3) seien $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$. Ist $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so ist $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$, also $U_{i_0} \in \mathscr{U}(x)$. Mit (U2) ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathscr{U}(x)$, und somit $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Bezeichne nun $\mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x)$ das Umgebungssystem von x, das durch $\mathcal{O}$ bestimmt wird. Wir haben zu zeigen: $\mathscr{U}(x) = \mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x)$ für alle $x \in X$. Sei $U \in \mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x)$, d.h. $\exists V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subseteq U$. Mit $V \in \mathcal{O}$ ist insbesondere $V \in \mathscr{U}(x)$ und mit (U2) $U \in \mathscr{U}(x)$. Damit wissen wir $\mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x) \subseteq \mathscr{U}(x)$. Sei nun $U \in \mathscr{U}(x)$. Um $U \in \mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x)$ zu zeigen, müssen wir ein $W \in \mathcal{O}$ finden mit $x \in W \subseteq U$. Setze $W := \{y \in X : \ U \in \mathscr{U}(y)\}$. Wir haben $x \in W \subseteq U$, wobei die Inklusion mit (U1) folgt. Es gilt auch $W \in \mathcal{O}$, d.h. $W \in \mathscr{U}(y)$ für alle $y \in W$. Tatsächlich gilt für $y \in W$, daß $U \in \mathscr{U}(y)$ ist. Mit

(U4) existiert ein $V \in \mathscr{U}(y)$ mit $U \in \mathscr{U}(z)$ für alle $z \in V$. Nach Definition von W ist $V \subseteq W$, und mit (U2) ist dann auch $W \in \mathscr{U}(y)$.

Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien mit $\mathscr{U}_{\mathcal{O}_1}(x) = \mathscr{U}(x) = \mathscr{U}_{\mathcal{O}_2}(x)$ für alle $x \in X$. Mit Proposition 1.6 werden aber die offenen Mengen durch die Umgebungssysteme festgelegt. □

Bemerkung: Wir können festhalten, daß Topologien über die Begriffe „offen", „abgeschlossen" oder „Umgebung" äquivalent charakterisiert werden können.

Als nächstes untersuchen wir, wie man ausgehend von Mengensystemen Topologien bzw. Umgebungssysteme generieren kann.

Definition 1.9 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Ein Subsystem $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt **Basis** von $\mathcal{O}$, falls jedes $O \in \mathcal{O}$ $(O \neq \emptyset)$ Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$ ist.*

*Ein Subsystem $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{O}$ heißt **Subbasis** von $\mathcal{O}$, falls alle endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathscr{S}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ bilden. (Eine Subbasis von $\mathcal{O}$ wird auch **Erzeugendensystem** genannt.)*

Basen von Topologien lassen sich folgendermaßen charakterisieren.

Satz 1.10 *(1) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{O}$. $\mathscr{B}$ ist Basis von $\mathcal{O}$ genau dann, wenn zu jedem $x \in X$ und $U \in \mathscr{U}(x)$ ein $B \in \mathscr{B}$ existiert mit $x \in B \subseteq U$.*

(2) Sei $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Gilt $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$, so ist $\mathscr{B}$ eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ genau dann, wenn zu $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ ein $B_3 \in \mathscr{B}$ existiert mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Beweis.

(1) Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$. Ist $U \in \mathscr{U}(x)$, so existiert $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subseteq U$. Da $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist, gilt $x \in V = \bigcup_{B \in \mathscr{B}, B \subseteq V} B$. Somit existiert $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq V \subseteq U$. Umgekehrt sei $O \in \mathcal{O}$. Wir haben zu zeigen: $O = \bigcup_{B \in \mathscr{B}, B \subseteq O} B$. Da die Inklusion „$\supseteq$" offensichtlich ist, betrachte $x \in O$. Mit der Voraussetzung gibt es $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq O$, also gilt $x \in \bigcup_{B \in \mathscr{B}, B \subseteq O} B$.

(2) Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$, $B_1, B_2 \in \mathscr{B} \subseteq \mathcal{O}$ $(B_1 \cap B_2 \neq \emptyset)$. Da $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}$ gilt $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathscr{B}, B \subseteq B_1 \cap B_2} B$. Somit existiert zu $x \in B_1 \cap B_2$ ein $B_3 \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Für die umgekehrte Implikation zeigen wir, daß

$$\mathcal{O} := \Big\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathscr{B} \Big\} \cup \{\emptyset\}$$

eine Topologie auf X ist, und $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist (letzteres ist klar). Wir haben $\emptyset, X \in \mathcal{O}$, also (T1). Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$. Dann gilt

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_1} B \cap \bigcup_{B \in \mathscr{B}_2} B = \bigcup_{B_1 \in \mathscr{B}_1, B_2 \in \mathscr{B}_2} B_1 \cap B_2.$$

Für $x \in O_1 \cap O_2$ existieren also $B_1 \in \mathscr{B}_1$, $B_2 \in \mathscr{B}_2$ mit $x \in B_1 \cap B_2$. Nach Voraussetzung gibt es $B_x \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$, und wir haben $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{x \in O_1 \cap O_2} B_x$, d.h. $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$, also (T2). Seien $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$. Dann sind $O_i = \bigcup_{B \in \mathscr{B}_i} B$, $i \in I$, und folglich $\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{B \in \bigcup_{i \in I} \mathscr{B}_i} B \in \mathcal{O}$, also (T3).

□

Beispiel: Sei $X = \{0, 1, 2\}$, $\mathscr{S} = \{X, \emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$. $\mathscr{S}$ ist keine Basis, denn $\{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \notin \mathscr{S}$. $\mathscr{S}$ ist Subbasis der Topologie $\mathcal{O} = \mathscr{S} \cup \{\{1\}\} = \{X, \emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$.

Allgemein haben wir als Folgerung von Satz 1.10(2):

Korollar 1.11 *Sei X eine Menge, $\mathscr{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $(\emptyset, X \in \mathscr{S})$. Dann ist $\mathscr{S}$ Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X.*

Beweis. Bezeichne

$$\mathscr{B} = \Big\{ \bigcap_{B \in \mathscr{S}'} B : \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S} \text{ endlich} \Big\}.$$

$\mathscr{B}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ wegen Satz 1.10(2). □

Übungsbeispiel: Sei $\mathbb{R}^d$ mit der natürlichen Topologie $\mathcal{O}$ versehen. Dann ist $\mathscr{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(y) : n \in \mathbb{N}, y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{Q}^d\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$. (Benutze Satz 1.10(1))

Zum Ende dieses ersten Paragraphen geben wir noch einige Bezeichnungsweisen an und ein kleines Resultat.

Definition 1.12 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein System $\mathfrak{S}(x) \subseteq \mathscr{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis von** x, falls zu $U \in \mathscr{U}(x)$ ein $V \in \mathfrak{S}(x)$ existiert mit $x \in V \subseteq U$.*

Definition 1.13 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Man sagt:*

(1) X erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, falls jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

(2) X erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, falls X eine abzählbare Basis besitzt.

Beispiele:

(1) Jeder metrische Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom. ($\{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ bilden Umgebungsbasis von x.)

(2) Jeder topologische Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, erfüllt auch das erste. (Dies folgt aus dem nächsten Satz.) Ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, muß nicht das zweite erfüllen (Betrachte $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis von x, also gilt das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Jede Basis $\mathscr{B}$ für $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muß Mengen der Form $\{x\}$ enthalten. Also ist $\mathscr{B}$ überabzählbar.)

Satz 1.14 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Ein Mengensystem* $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{O}$ *ist Basis von* $\mathcal{O}$ *genau dann, wenn für jedes* $x \in X$ *das Mengensystem* $\mathscr{B}(x) = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$ *eine Umgebungsbasis von* x *ist.*

Beweis. Sei $\mathscr{B}$ Basis von $\mathcal{O}$. Ist $x \in X$, $U \in \mathscr{U}(x)$, so gibt es ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq U$. Da $O = \bigcup_{B \in \mathscr{B}, B \subseteq O} B$, existiert ein $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq O \subseteq U$. Somit ist $B \in \mathscr{B}(x)$ und $B \subseteq U$, d.h. $\mathscr{B}(x)$ Umgebungsbasis von x.

Ist umgekehrt $B(x)$ Umgebungsbasis von x und $O \in \mathcal{O}$, so ist O Umgebung von x für alle $x \in X$. Also existieren $B_x \in \mathscr{B}(x)$ mit $x \in B_x \subseteq O$, d.h. $O = \bigcup_{x \in O} B_x$. $\mathscr{B}$ ist also Basis von $\mathcal{O}$. $\square$

2 Kern– und Abschlußbildung

Wir kennen die Begriffe Abschluß (oder Hülle) bzw. Kern (oder Inneres) einer Menge $M \subseteq X$, falls (X, d) ein metrischer Raum ist. Für topologische Räume führt man analog ein:

Definition 2.1 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen*

$$\mathring{M} := \{x \in M : M \in \mathscr{U}(x)\}$$

den (offenen) ***Kern*** *von M (oder* ***Inneres*** *von M). Ein Punkt $x \in \mathring{M}$ heißt* ***innerer Punkt*** *von M.*

Man beachte: $\mathring{M} \subseteq M$, wobei $\mathring{M}$ durchaus leer sein kann (zum Beispiel $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, falls man $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie versieht).

Proposition 2.2 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$. Dann gilt: $\mathring{M}$ ist die größte offene Teilmenge in M (bezüglich der Ordnung in $\mathcal{P}(X)$ durch „$\subseteq$“).*

Beweis. Sei $x \in \mathring{M}$. Dann existiert $V_x \in \mathcal{O}$ mit $x \in V_x \subseteq M$ (da $M \in \mathscr{U}(x)$). Somit ist $\mathring{M} \subseteq \bigcup_{x \in \mathring{M}} V_x \subseteq M$ einerseits. Andererseits liegt jede offene Teilmenge von M in $\mathring{M}$. Dies sieht man so ein: Ist $U \subseteq M$ offen und $x \in U$, so gilt $M \in \mathscr{U}(x)$. Folglich ist $x \in \mathring{M}$, also $U \subseteq \mathring{M}$. Zusammen hat man $\mathring{M} = \bigcup_{x \in \mathring{M}} V_x$. Insbesondere ist $\mathring{M}$ offen, und (wie gezeigt) gilt $U \subseteq \mathring{M}$, falls $U \in \mathcal{O}$, $U \subseteq M$. □

Korollar 2.3 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $M \subseteq X$. Es ist $M \in \mathcal{O} \iff M = \mathring{M}$, und es gelten für alle $A, B \subseteq X$*

(K1) $\mathring{X} = X$,

(K2) $\mathring{A} \subseteq A$,

(K3) $(\mathring{A})^\circ = \mathring{A}$,

(K4) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Ferner gelten: $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ und $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Beweis. Die erste Aussage und (K1), (K2), (K3) folgen direkt aus Proposition 2.2, ebenso die letzte Aussage. Die vorletzte Behauptung folgt mit der Definition des Inneren. Bleibt (K4) zu zeigen. Mit Proposition 2.2 ist $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq (A \cap B)^\circ$. Mit der vorletzten Aussage gilt $(A \cap B)^\circ \subseteq \mathring{A}$, $(A \cap B)^\circ \subseteq \mathring{B}$. Zusammen hat man $\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^\circ$. □

Dual zur offenen Kernbildung ist die Hüllenbildung.

Definition 2.4 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum,* $M \subseteq X$. *Ein Punkt* $x \in X$ *heißt* ***Berührungspunkt*** *von* M, *falls für jede offene Umgebung* $U \in \mathscr{U}(x)$ *gilt:* $U \cap M \neq \emptyset$. *Wir bezeichnen*

$$\begin{aligned} \overline{M} &:= \{x \in X : x \textit{ ist Berührungspunkt von } M\} \\ &= \{x \in X : M \cap U \neq \emptyset \textit{ für alle } U \in \mathscr{U}(x)\} \end{aligned}$$

die (abgeschlossene) ***Hülle*** *von* M *(oder* ***Abschluß*** *von* M*).*

Man beachte: $M \subseteq \overline{M}$.

Proposition 2.5 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum,* $M \subseteq X$. *Dann gilt:* $\overline{M}$ *ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von* X, *die* M *enthält.*

Beweis. Sei $x \in X \setminus \overline{M}$. Dann existiert $U_x \in \mathcal{O}$ mit $U_x \cap M = \emptyset$, d.h. $U_x \subseteq X \setminus M$. Somit gilt $\bigcup_{x \in X \setminus \overline{M}} U_x \subseteq X \setminus M$. Da offensichtlich $X \setminus \overline{M} \subseteq \bigcup_{x \in X \setminus \overline{M}} U_x$, haben wir

$$M \subseteq X \setminus \bigcup_{x \in X \setminus \overline{M}} U_x \subseteq \overline{M}$$

einerseits. Andererseits umfaßt jede abgeschlossene Obermenge von M die Menge $\overline{M}$. Dies folgt so: Sei $M \subseteq A$, A abgeschlossen. Ist $x \in X \setminus A$, so gilt wegen $M \cap X \setminus A = \emptyset$ und $X \setminus A$ offen, daß $x \notin \overline{M}$. D.h. $X \setminus A \subseteq X \setminus \overline{M}$ oder $\overline{M} \subseteq A$. Zusammen hat man

$$\overline{M} = X \setminus \bigcup_{x \in X \setminus \overline{M}} U_x.$$

Insbesondere ist $\overline{M}$ abgeschlossen, und (wie gezeigt) gilt $\overline{M} \subseteq A$, falls $M \subseteq A$, A abgeschlossen. □

Korollar 2.6 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *topologischer Raum,* $M \subseteq X$. *Dann gilt:* M *ist abgeschlossen* $\iff M = \overline{M}$. *Es gelten ferner für alle* $A, B \subseteq X$:

(H1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(H2) $A \subseteq \overline{A}$,

(H3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(H4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Es gelten auch: $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ *und* $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Beweis. Mit Proposition 2.5 folgen sofort die erste Behauptung, (H1), (H2), (H3) und die beiden letzten Behauptungen.

Zu (H4): Mit eben ist $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$, $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, also $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Andererseits ist $\overline{A} \cup \overline{B}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die $A \cup B$ umfaßt. Folglich $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

□

Proposition 2.7 *Sei* $(X,\mathcal{O})$ *ein topologischer Raum,* $M \subseteq X$. *Dann gelten*

$$X \setminus \mathring{M} = \overline{X \setminus M}, \qquad X \setminus \overline{M} = (X \setminus M)^\circ.$$

Beweis. Man verwende Proposition 2.2 und Proposition 2.5. □

Satz 2.8 *Sei* X *eine Menge.*

(1) Sei $k : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *eine Abbildung, die die Axiome*

(K1) $k(X) = X$,

(K2) $k(A) \subseteq A$,

(K3) $k(k(A)) = k(A)$,

(K4) $k(A \cap B) = k(A) \cap k(B)$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *erfüllt (vergleiche 2.3, man sagt:* k *ist ein Kern–Operator). Dann existiert genau eine Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* X*, so daß* $\mathring{A} = k(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{P}(X)$ *gilt, wobei* $^\circ$ *die offene Kernbildung bezüglich* $\mathcal{O}$ *ist.*

(2) Sei $h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *eine Abbildung, die die Axiome*

(H1) $h(\emptyset) = \emptyset$,

(H2) $h(A) \supseteq A$,

(H3) $h(h(A)) = h(A)$,

(H4) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$

für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *erfüllt (vergleiche 2.6, man sagt:* h *ist ein Hüllen–Operator). Dann existiert genau eine Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* X*, so daß* $\overline{A} = h(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{P}(X)$ *gilt, wobei* $\overline{}$ *die abgeschlossene Hüllenbildung bezüglich* $\mathcal{O}$ *ist.*

Beweis. Wir zeigen nur (1). (Nachweis von (2) sei als Übungsaufgabe empfohlen.)

Existenz: Setze $\mathcal{O} := \{U \subseteq X : \ k(U) = U\}$. $\mathcal{O}$ ist ein Topologie auf X. Mit (K1) gilt $X \in \mathcal{O}$, und wegen (K2) gilt $\emptyset \in \mathcal{O}$. Somit ist (T1) erfüllt. Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, d.h. $k(U_1) = U_1$, $k(U_2) = U_2$. Folglich gilt mit (K4) $k(U_1 \cap U_2) = k(U_1) \cap k(U_2) = U_1 \cap U_2$, d.h. $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$. Also gilt (T2). Für den Nachweis von (T3) zeigen wir eine Folgerung von (K4):

$$\text{Ist } A \subseteq B, \text{ so gilt } k(A) \subseteq k(B). \qquad (*)$$

Mit $A \subseteq B$ gilt $A \cap B = A$, folglich $k(A) \cap k(B) \overset{(K4)}{=} k(A \cap B) = k(A)$ und somit $k(A) \subseteq k(B)$.

Mit $(*)$ zeigt man (T3) folgendermaßen: Seien $U_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, also $k(U_i) = U_i$. Mit $(*)$ ist $k(U_i) \subseteq k\big(\bigcup_{i \in I} U_i\big)$ für alle $i \in I$, somit $\bigcup_{i\in I} k(U_i) \subseteq k\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big)$. Mit (K2) folgt andererseits $k\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} k(U_i)$. Somit ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$. (Man beachte: (K3) wurde bisher nicht benutzt).

Nun zeigen wir: $k(A) = \mathring{A}$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$. Mit (K3) ist $k(A) \in \mathcal{O}$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$. Da $\mathring{A}$ die größte offene Teilmenge von A ist, gilt $k(A) \subseteq \mathring{A} \subseteq A$. Wendet man $(*)$ darauf an, so folgt $\mathrm{k}(A) \overset{(K3)}{=} \mathrm{k}(\mathrm{k}(A)) \subseteq \mathrm{k}(\mathring{A}) = \mathrm{k}(A)$. Da $\mathring{A} \in \mathcal{O}$, gilt $\mathrm{k}(\mathring{A}) = \mathring{A}$, und es folgt $\mathrm{k}(A) = \mathring{A}$.

Mit der Charakterisierung aus Korollar 2.3 „A offen $\iff A = \mathring{A}$" folgt die Eindeutigkeit der Topologie. $\square$

Bemerkung: Topologien können also über folgende Konzepte bestimmt werden: „offen" oder „abgeschlossen" oder „Umgebungen" oder „Kern" oder „Hülle". Die beiden letzten Zugänge gehen auf K. Kuratowski (1896–1980, Warschau) zurück.

3 Stetige Abbildungen

Der folgende Paragraph beschäftigt sich mit der Stetigkeit, dem Begriff, der Abbildungen beschreibt, welche die Struktur topologischer Räume erhalten.

Definition 3.1 *Seien* $(X, \mathcal{O})$ *und* $(X', \mathcal{O}')$ *zwei topologische Räume. Eine Abbildung* $f : X \to X'$ *heißt*

(a) ***stetig im Punkt*** $x \in X$, *falls gilt:*

$$\forall U' \in \mathscr{U}(f(x)) \quad \exists U \in \mathscr{U}(x) : \quad f(U) \subseteq U'.$$

(b) ***stetig****, wenn* f *in jedem Punkt* $x \in X$ *stetig ist.*

Satz 3.2 (Charakterisierung lokaler Stetigkeit)
Seien $(X, \mathcal{O})$ *und* $(X', \mathcal{O}')$ *topologische Räume. Sei* $f : X \to X'$ *eine Abbildung. Für* $x \in X$ *sind dann äquivalent*

(i) f *ist stetig in* x.

(ii) Es gibt eine Umgebungsbasis $\mathscr{V}(x)$ *von* x *und eine Umgebungsbasis* $\mathscr{V}'(f(x))$ *von* $f(x)$ *mit:*

$$\forall V' \in \mathscr{V}'(f(x)) \quad \exists V \in \mathscr{V}(x) : \quad f(V) \subseteq V'.$$

(iii) $\forall U' \in \mathscr{U}(f(x)) : \quad f^{-1}(U') \in \mathscr{U}(x)$.

(iv) Es gibt eine Umgebungsbasis $\mathscr{V}'(f(x))$ *von* $f(x)$ *mit:*

$$\forall V' \in \mathscr{V}'(f(x)) : \quad f^{-1}(V') \in \mathscr{U}(x).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle $\mathscr{V}(x) = \mathscr{U}(x)$ und $\mathscr{V}'(f(x)) = \mathscr{U}(f(x))$. Dann ist (ii) per definitionem erfüllt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $U' \in \mathscr{U}(f(x))$. Dann existiert ein $V' \in \mathscr{V}'(f(x))$ mit $V' \subseteq U'$ (da $\mathscr{V}'(f(x))$ Umgebungsbasis). Nach (ii) existiert dann ein $V \in \mathscr{V}(x)$ mit $f(V) \subseteq V'$, also $V \subseteq f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(U')$. Da $\mathscr{V}(x)$ eine Umgebungsbasis bildet, folgt insbesondere $V \in \mathscr{U}(x)$. Nach Proposition 1.7(U2) ist dann aber auch $f^{-1}(U') \in \mathscr{U}(x)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Wähle $\mathscr{V}'(f(x)) = \mathscr{U}(f(x))$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $U' \in \mathscr{U}(f(x))$. Dann existiert ein $V' \in \mathscr{V}'(f(x))$ mit $V' \subseteq U'$ (da $\mathscr{V}'(f(x))$ Umgebungsbasis). Für $U = f^{-1}(V')$ gilt dann nach (iv): $U \in \mathscr{U}(x)$. Ferner gilt $f(U) \subseteq V' \subseteq U'$, also ist f stetig in x. □

Proposition 3.3 *Seien* $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ *und* $(X'', \mathcal{O}'')$ *topologische Räume. Seien ferner* $f : X \to X'$ *und* $g : X' \to X''$ *Abbildungen. Dann gilt:*

$$f \textit{ stetig in } x \in X \textit{ und } g \textit{ stetig in } f(x) \in X' \;\Rightarrow\; g \circ f \textit{ stetig in } x.$$

Beweis. $\forall U'' \in \mathscr{U}(g \circ f(x)): \quad \exists U' \in \mathscr{U}(f(x)): \quad g(U') \subseteq U''$, da g stetig. Zu U' existiert aber auch $U \in \mathscr{U}(x): \ f(U) \subseteq U'$, da f stetig ist, somit $g \circ f(U) \subseteq g(U') \subseteq U''$.

□

Satz 3.4 (Charakterisierung globaler Stetigkeit)
Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f *ist stetig.*

(ii) $\forall M \subseteq X: \quad f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

(iii) $\forall A' \in \mathscr{A}'$ *gilt:* $f^{-1}(A') \in \mathscr{A}$ *(Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).*

(iv) $\forall O' \in \mathcal{O}'$ *gilt:* $f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$ *(Urbilder offener Mengen sind offen).*

(v) Es gibt eine Subbasis $\mathscr{M}'$ *von* $\mathcal{O}'$*, so daß*

$$\forall M' \in \mathscr{M}': \quad f^{-1}(M') \in \mathcal{O}.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x \in \overline{M}$ und $U' \in \mathscr{U}(f(x))$. Da f stetig ist, also insbesondere stetig in x, existiert $U \in \mathscr{U}(x): \ f(U) \subseteq U'$. Da $x \in \overline{M}$, also x Berührungspunkt von M, gilt $U \cap M \neq \emptyset$. Daher gilt

$$\emptyset \neq f(U \cap M) \subseteq f(U) \cap f(M) \subseteq U' \cap f(M),$$

folglich ist $f(x) \in \overline{f(M)}$ (Berührungspunkt). Die Folgerung gilt für alle $x \in \overline{M}$, also $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $A' \in \mathscr{A}'$. Setze $M := f^{-1}(A')$. Da $f(M) \subseteq A'$ folgt $\overline{f(M)} \subseteq \overline{A'} = A'$. Nach (ii) ist $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} = A'$, somit $\overline{M} \subseteq f^{-1}(A') = M \subseteq \overline{M}$, also $M = \overline{M}$, d.h. $M \in \mathscr{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $O' \in \mathcal{O}'$, also $\complement O' \in \mathscr{A}'$. Nach (iii) folgt

$$X \setminus f^{-1}(O') = \complement\big(f^{-1}(O')\big) = f^{-1}\big(\complement O'\big) \in \mathscr{A},$$

also $f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Wähle $\mathscr{M}' = \mathcal{O}'$. Dann ist (iv) gleich (v).

(v) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in X$ beliebig, $U' \in \mathscr{U}(f(x))$. Zu zeigen: $\exists U \in \mathscr{U}(x): \ f(U) \subseteq U'$. Bezeichne $\mathscr{B}'$ die von $\mathscr{M}'$ durch endliche Schnitte erzeugt Basis. Dann gilt wegen (v):

$$\forall B' \in \mathscr{B}': \quad f^{-1}(B') \in \mathcal{O} \qquad (*)$$

(Jedes $B' \in \mathscr{B}'$ ist endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathscr{M}'$; deren Urbilder sind nach (v) offen, also ist $f^{-1}(B')$ Schnitt endlich vieler offener Mengen, demnach selbst offen.)

Da U' Umgebung $\exists W' \in \mathcal{O}': \ f(x) \in W' \subseteq U'$ und $W' = \bigcup_{B' \in \mathscr{B}', B' \subseteq W'} B'$ (da $\mathscr{B}'$ Basis). Wähle ein B' mit $f(x) \in B' \subseteq W'$, woraus folgt $f^{-1}(B') \in \mathcal{O}$ (wegen

$(*)$). Ferner ist $x \in f^{-1}(B')$, also $f^{-1}(B') \in \mathscr{U}(x)$ und $f \circ f^{-1}(B') \subseteq B' \subseteq U'$. Da x beliebig aus X gewählt war, folgt (i) für alle $x \in X$. □

Beispiele:

(i) $(X, \mathcal{O}) = (X', \mathcal{O}')$. Dann ist $\mathrm{id}_X : X \to X'$, $x \mapsto x$ stetig.

Aber: $X = X' = \{0, 1\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ und $\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{1\}, X'\}$. Dann ist weder id_X noch $\mathrm{id}_{X'}$ stetig!!

(ii) $(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$, $(X', \mathcal{O}')$ beliebig. Dann ist jedes $f : X \to X'$ stetig.

(iii) $(X, \mathcal{O})$ beliebig und $(X', \mathcal{O}'_{\text{indis}})$. Dann ist jedes $f : X \to X'$ stetig.

(iv) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$\begin{aligned} X &:= \mathcal{C}([a,b]) = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig }\} \\ d(f,g) &:= \sup_{x \in [a,b]} \left\{ |f(x) - g(x)| \right\} \end{aligned}$$

Dann ist (X, d) ein metrischer Raum. Die von dieser Metrik erzeugte Topologie heißt **Topologie der gleichmäßigen Konvergenz**.

Übungsaufgabe: Konstruiere eine Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, so daß gilt:

$$f \text{ stetig in } x \iff x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Bemerkung: Das Bild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung muß selbst nicht offen sein!

Beispiel: Die Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist stetig, aber $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$ ist nicht offen!

Analoges gilt für abgeschlossene Mengen (Beispiel: $f(x) = \arctan x$).

Definition 3.5 *(i) Eine Abbildung* $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ *heißt* ***offen****, wenn*

$$\forall O \in \mathcal{O} \text{ gilt: } f(O) \in \mathcal{O}'.$$

(ii) Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ *heißt* ***abgeschlossen****, wenn*

$$\forall A \in \mathscr{A} \text{ gilt: } f(A) \in \mathscr{A}'.$$

Bemerkung: Der folgende Begriff beschreibt eineindeutige Abbildungen zwischen topologischen Räumen.

Definition 3.6 *Eine Abbildung* $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ *heißt* ***Homöomorphismus****, wenn gilt:*

(i) f *bijektiv,*

(ii) $\forall O \in \mathcal{O}$ *gilt:* $f(O) \in \mathcal{O}'$ *(d.h.* f *ist offen),*

(iii) $\forall O' \in \mathcal{O}$ *gibt es* $O \in \mathcal{O}: \quad f(O) = O'$ *(d.h.* f *ist stetig).*

Existiert ein Homöomorphismus zwischen zwei topologischen Räumen, so heißen diese ***homöomorph*** *zueinander bzw.* ***topologisch äquivalent****.*

Notation: Man schreibt dann $(X, \mathcal{O}) \cong (X', \mathcal{O}')$ oder nur kurz $X \cong X'$.

Satz 3.7 (Charakterisierung von Homöomorphismen)
Seien $(X, \mathcal{O})$ *und* $(X', \mathcal{O}')$ *topologische Räume und* $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ *eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist Homöomorphismus.*

(ii) f *ist bijektiv, stetig und abgeschlossen.*

(iii) f *ist bijektiv und sowohl* f *als auch* f^{-1} *sind stetig.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Zu zeigen: f ist abgeschlossen. Sei $A \in \mathscr{A}$, dann ist $O := \complement A \in \mathcal{O}$. Nach (i) existiert $O' := f^{-1}(O) \in \mathcal{O}'$, d.h. $A' := \complement O' \in \mathscr{A}'$. Nun gilt

$$A = \complement O = \complement\big(f^{-1}(f(O))\big) = \complement\big(f^{-1}(O')\big) = f^{-1}\big(\complement O'\big) = f^{-1}(A'),$$

folglich ist $A' = f(A)$, also $f(A) \in \mathscr{A}'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Zu zeigen: f^{-1} ist stetig. Sei $A \in \mathscr{A}$. Dann ist $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \in \mathscr{A}'$, da f abgeschlossen ist. Also ist f^{-1} stetig.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Zu zeigen ist: f offen. Sei $O \in \mathcal{O}$. Dann gilt $f(O) = (f^{-1})^{-1}(O) \in \mathcal{O}'$, da f^{-1} stetig ist. □

Proposition 3.8 *Sind* $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ *und* $(X'', \mathcal{O}'')$ *topologische Räume und* $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ *und* $g : (X', \mathcal{O}') \to (X'', \mathcal{O}'')$ *Homöomorphismen, dann ist auch* $g \circ f$ *ein Homöomorphismus.*

Bemerkungen:

(i) Ist f Homöomorphismus, so auch f^{-1}.

(ii) Die Relation $\cong$ definiert eine Äquivalenzrelation unter topologischen Räumen.

Übungsaufgabe: Man überlege sich Gegenbeispiele, die zeigen, daß in Satz 3.7 wirklich drei Eigenschaften von f notwendig sind, also

(i) f bijektiv, f stetig $\not\Rightarrow$ f^{-1} stetig.

(ii) f bijektiv, f offen $\not\Rightarrow$ f stetig.

4 Vergleich von Topologien

Definition 4.1 *Seien $\mathcal{T}_1 = (X, \mathcal{O}_1)$ und $\mathcal{T}_2 = (X, \mathcal{O}_2)$ zwei Topologien auf X.*

*(i) $\mathcal{T}_1$ heißt **feiner** als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$.*

*(ii) In diesem Fall heißt $\mathcal{T}_2$ dann **gröber** als $\mathcal{T}_1$.*

Notation: $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$ (man denke an „$\subseteq$“).

Satz 4.2 *Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$

(ii) $\forall x \in X: \quad \mathcal{U}_2(x) \subseteq \mathcal{U}_1(x)$

(iii) $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ *ist stetig.*

(iv) $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$

(v) $\forall M \subseteq X: \quad \overline{M}^1 \subseteq \overline{M}^2$

(vi) $\forall M \subseteq X: \quad \overset{\circ 2}{M} \subseteq \overset{\circ 1}{M}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): klar.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): klar wegen Satz 3.2(iii).
(iii) $\Rightarrow$ (iv): klar wegen Satz 3.4(iii).
(iv) $\Rightarrow$ (v): klar wegen Satz 3.4(ii).
(v) $\Rightarrow$ (vi): klar wegen Proposition 2.7.
(vi) $\Rightarrow$ (i): Sei $O \in \mathcal{O}_2$. Dann hat man

$$O = \overset{\circ 2}{O} \overset{(vi)}{=} \overset{\circ 1}{O} \subseteq O \quad \Rightarrow \quad O = \overset{\circ 1}{O} \quad \Rightarrow \quad O \in \mathcal{O}_1$$

$\square$

Bemerkungen:

(i) Statt feiner/gröber liest man auch stärker/schwächer.

(ii) „Feiner“ heißt, es gibt mehr offene Mengen, d.h. es kann mit offenen Mengen feiner unterschieden werden.

Beispiele:

(i) Die diskrete Topologie (d.h. $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$) ist die feinste Topologie auf einem Raum X.

(ii) Die indiskrete Topologie ist die gröbste Topologie auf einem Raum X.

(iii) $X = \mathbb{R}$. $\mathcal{T}_{\text{kof}} \leq \mathcal{T}_{\text{kan}}$.

Im Rest dieses Abschnitts betrachten wir zwei „universelle“ Konstruktionen, um über Aussagen bezüglich des Verhaltens stetiger Abbildungen Topologien in größeren (vgl. Produkttopologie) bzw. kleineren (vgl. Quotientenraumtopologie) Räumen zu bekommen.

Definition 4.3 *Für eine Menge* X *und eine Familie von topologischen Räumen* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *mit einer Familie von Abbildungen* $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ *definiert man die* ***Initialtopologie*** *bezüglich* $(f_i)_{i\in I}$ *als diejenige Topologie, welche die folgende Eigenschaft besitzt:*

(IT) Für einen beliebigen topologischen Raum Y *ist eine Abbildung* $g : Y \to X$ *genau dann stetig, wenn* $f_i \circ g$ $\forall i \in I$ *stetig ist.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i\circ g"'] & (X,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd} \qquad \mathcal{I} \text{ Initialtopologie auf } X \text{ bezüglich } (f_i)_{i\in I}.$$

Satz 4.4 *Auf einer Menge* X *gibt es bezüglich einer Familie* $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ *von Abbildungen in eine Familie von topologischen Räumen* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *genau eine Initialtopologie. Sie ist die gröbste Topologie auf* X*, für die alle Abbildungen* f_i *stetig sind. Die Menge* $\mathscr{S} = \bigcup_{i\in I} \mathscr{M}_i$*, wobei* $\mathscr{M}_i = \left\{f_i^{-1}(O) :\ O \in \mathcal{O}_i\right\}$*, definiert eine Subbasis von* $(X, \mathcal{I})$*.*

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ zwei Topologien auf X, die (IT) erfüllen. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{I}_k) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i"'] & (X,\mathcal{I}_2) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd} \qquad k = 1, 2.$$

Nach (IT) folgt für $k = 2$, daß (da $\mathrm{id} : (X, \mathcal{I}_2) \to (X, \mathcal{I}_2)$ stetig) alle $f_i : (X, \mathcal{I}_2) \to X_i$ stetig sind ($i \in I$).

Nach (IT) folgt aber für $k = 1$ dann auch, daß $\mathrm{id} : (X, \mathcal{I}_1) \to (X, \mathcal{I}_2)$ stetig ist. Folglich ist $\mathcal{I}_1$ feiner als $\mathcal{I}_2$.

Analog folgt aber auch, daß $\mathcal{I}_2$ feiner ist als $\mathcal{I}_1$, also $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$.

Konstruktion: Wenn $\mathcal{I}$ die Initialtopologie auf X ist, so folgt aus (IT), daß $f_i \circ \mathrm{id} = f_i$ stetig ist $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{I}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i\circ \mathrm{id}"'] & (X,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

$\mathcal{I}$ muß also die Mengen aus $\mathscr{S}$ enthalten (beliebige Vereinigung offener Mengen sind offen). Die durch $\mathscr{S}$ erzeugte Topologie ist (nach Definition der Stetigkeit) die gröbste Topologie, bezüglich derer alle f_i stetig sind (mindestens die Mengen aus $\mathscr{S}$ müssen offen sein).

Sei nun $\mathcal{O}$ die durch die Subbasis $\mathscr{S}$ erzeugte Topologie. Dann bleibt zu zeigen: $\mathcal{O}$ erfüllt (IT).

Ist $g : Y \to (X, \mathcal{O})$ stetig, so ist $f_i \circ g$ stetig (da f_i stetig, vgl. Proposition 3.3). Sind umgekehrt alle $f_i \circ g$, $i \in I$, stetig, so genügt es nach Satz 3.4(v) zu zeigen, daß die Urbilder der Mengen aus $\mathscr{S}$ unter g offen sind.

Für $S \in \mathscr{S}$ existiert nach Definition von $\mathscr{S}$ ein $j \in I$ und ein $O \in \mathcal{O}_j$, so daß $S = f_j^{-1}(O)$. Folglich ist

$$g^{-1}(S) = g^{-1}\big(f_j^{-1}(O)\big) = (f_j \circ g)^{-1}(O)$$

offen in Y, da $f_j \circ g$ stetig. □

Beispiele:

(i) $(X', \mathcal{O}')$ beliebiger topologischer Raum, $f : X \to X'$ Abbildung. Dann definiert $\{f^{-1}(O') : \; O' \in \mathcal{O}'\}$ eine Subbasis der Initialtopologie bezüglich f. Diese Topologie heißt auch **inverses Bild** von $\mathcal{O}'$ bezüglich f.

(ii) $X = \mathbb{R}^n$, $(X_i, \mathcal{O}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i–te Projektion. $\mathcal{I}$ hat Subbasis

$$\mathscr{S} = \{p_i^{-1}(O_i) : \; O_i \in \mathcal{O}_{\text{kan}}\} = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times O_i \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \mid O_i \in \mathcal{O}_{\text{kan}}\}$$

Folglich hat man als Basis $\mathscr{B}(\mathscr{S}) = \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathcal{O}_{\text{kan}}\}$.

Es gilt: $\mathcal{O}_{\text{kan}} \subseteq$ von $\mathscr{S}$ erzeugte Topologie $\subseteq \mathcal{O}_{\text{kan}}$, also $(\mathbb{R}^n, \mathcal{I}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, d.h. $\mathcal{O}_{\text{kan}}$ ist gröbste Topologie bezüglich derer alle Projektionen stetig sind.

Allgemeiner: Sei $(X', \mathcal{O}')$ topologischer Raum, $g : X' \to \mathbb{R}^n$ Abbildung mit $g(x') = \big(g_1(x'), \dots, g_n(x')\big)$. Dann ist

$$g \text{ stetig} \iff p_i \circ g \text{ stetig } \forall i = 1, \dots, n \iff g_i \text{ stetig } \forall i = 1, \dots, n,$$

d.h. Stetigkeit von g ist äquivalent zur Stetigkeit aller Koordinatenfunktionen.

Übungsaufgabe: Betrachte den Hilbertraum ℓ^2 der Folgen reeller Zahlen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$ und der Metrik

$$d\big((a_i), (b_i)\big) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i)^2}.$$

Zeige:

(i) Die Projektionsabbildungen $p_j : \ell^2 \to \mathbb{R}$ mit $p_j\big((a_i)_{i \in \mathbb{N}}\big) = a_j$ sind stetig $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) Die Metrik definiert nicht die Initialtopologie bezüglich $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$. *Hinweis:* Betrachte die Konvergenz der Folge $x_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$.

Definition 4.5 *Für eine Menge* X *und eine Familie von topologischen Räumen* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *mit einer Familie von Abbildungen* $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ *definiert man die* ***Finaltopologie*** *bezüglich* $(f_i)_{i\in I}$ *als diejenige Topologie, welche die folgende Eigenschaft besitzt:*

(FT) Für einen beliebigen topologischen Raum Y *ist eine Abbildung* $g : X \to Y$ *genau dann stetig, wenn* $g \circ f_i \ \forall i \in I$ *stetig ist.*

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "g"] & Y \\
X_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "g\circ f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$ Finaltopologie auf X bezüglich $(f_i)_{i\in I}$.

Satz 4.6 *Auf einer Menge* X *gibt es bezüglich einer Familie* $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ *von Abbildungen auf einer Familie topologischer Räume* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *genau eine Finaltopologie. Sie ist die feinste Topologie auf* X*, für die alle Abbildungen* $f_i : X_i \to X$ *stetig sind. Die offenen Mengen von* $\mathcal{F}$ *sind die Mengen* $\bigcap_{i\in I}\left\{O \subset X : \ f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i\right\}$.

Beweis. Der Nachweis ist klar nach Definition der Stetigkeit. Die Eindeutigkeit zeigt man wie in Satz 4.4. □

Beispiele:

(i) $(X', \mathcal{O}')$ beliebiger topologischer Raum, $g : X' \to X$ Abbildung.

$$\mathcal{F} = \left\{M \subseteq X : \ g^{-1}(M) \in \mathcal{O}'\right\}$$

ist Finaltopologie auf X bezüglich g. $\mathcal{F}$ heißt auch **direktes Bild** von $\mathcal{O}'$ unter g.

(ii) Sei I eine **induktiv geordnete** Menge (d.h. jede linear geordnete Teilmenge besitzt eine obere Schranke; **linear geordnet** heißt, es gilt jeweils $a \le b$ oder $b \le a$).

$(X_j, \mathcal{O}_j)_{j\in I}$ Familie topologischer Räume der Art, daß für $j < k$ $(j, k \in I)$ gilt $X_j \subset X_k$ und $\mathcal{O}_j = \mathcal{O}_k|_{X_j}$. (D.h. Topologie auf X_j wird durch Injektion $i_{jk} : X_j \hookrightarrow X_k$ aus der Topologie von X_k erzeugt)

Auf $X = \bigcup_{j\in I} X_j$ heißt die Finaltopologie bezüglich $(i_j : X_j \hookrightarrow X)_{j\in I}$ die **schwache Topologie** auf X.

Beispiel: Limes–Räume $\mathbb{R}^\infty$, S^∞ oder $\mathbb{P}^\infty$
aus den Systemen $(\mathbb{R}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge $\left(\underline{x}_k = (x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert (im Sinne der Finaltopologie) genau dann gegen $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, wenn die Folgen $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_k konvergieren. (Konvergenz im topologischen Sinne folgt in den nächsten Paragraphen).

5 Teilräume, Quotienten– und Produkträume

Der folgende Paragraph beschäftigt sich mit der Frage, wie aus topologischen Räumen weitere konstruiert werden können, die ihre Struktur von den Konstruktionsvorbildern erben. Der sicherlich häufigste Fall ist die Suche nach einer Topologie auf einer Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.

Definition 5.1 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann definiert die kanonische Injektion $i : Y \hookrightarrow X$ eine Initialtopologie auf Y. Diese Topologie heißt **induzierte Topologie** (oder auch: **Spurtopologie, Relativtopologie**) von $\mathcal{O}$ bezüglich Y. **Notation:** $\mathcal{O}_Y$.*

*Das Paar $(Y, \mathcal{O}_Y)$ wird **(topologischer) Unterraum** genannt.*

Proposition 5.2 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O} \cap Y = \{Y \cap O : \ O \in \mathcal{O}\}$.

(ii) $\mathscr{A}_Y = \mathscr{A} \cap Y = \{Y \cap A : \ A \in \mathscr{A}\}$.

Ferner gilt für $Z \subseteq Y$:

$$(\mathcal{O}_Y)_Z = \mathcal{O}_Z.$$

Beweis.

(i) $\mathcal{O}_Y$ ist das inverse Bild von $\mathcal{O}$ bezüglich $i : Y \hookrightarrow X$.

(ii) Sei $A' \in \mathscr{A}_Y$, d.h. $A' = Y \setminus (Y \cap O)$ für ein $O \in \mathcal{O}$. Dann gilt

$$A' = Y \setminus (Y \cap O) = Y \setminus O = Y \cap \complement O = Y \cap A$$

mit $A = \complement O \in \mathscr{A}$. Also ist $\mathscr{A}_Y \subseteq Y \cap \mathscr{A}$.
Umgekehrt gilt für $Y \cap A$ mit $A \in \mathscr{A}$

$$Y \cap A = Y \cap \complement O = Y \setminus O = Y \setminus (Y \cap O) \in \mathscr{A}_Y,$$

also $Y \cap A \subseteq \mathscr{A}_Y$.

Zusatz: Nach (i) ist $(\mathcal{O}_Y)_Z = \mathcal{O}_Y \cap Z = \mathcal{O} \cap Y \cap Z = \mathcal{O} \cap (Y \cap Z) = \mathcal{O} \cap Z = \mathcal{O}_Z$. □

Übungsaufgabe: Für $y \in Y$ gilt $\mathscr{U}_Y(y) = Y \cap \mathscr{U}(y)$. Ebenso lassen sich Basen und Subbasen von $\mathcal{O}$ durch Schnittbildung auf $\mathcal{O}_Y$ übertragen.

Beispiele:

(i) $(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$, $Y \subseteq X \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{\text{dis}}$.

(ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $Y := \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{\text{dis}}$,
aber: Für $Y := \mathbb{Q}$ ist $\mathcal{O}_Y \neq \mathcal{O}_{\text{dis}}$, da zum Beispiel $\{1\} \in \mathbb{Q}$ nicht als Schnitt von $\mathbb{Q}$ mit einer offenen Menge aus $\mathcal{O}_{\text{kan}}$ dargestellt werden kann!

(iii) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $Y := \mathbb{R}^m$ mit $m < n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{\text{kan}}$.

Bemerkung: Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $Y \subseteq X$ Teilmenge und $(X', \mathcal{O}')$ beliebiger topologischer Raum, sowie $f : X' \to Y$ eine Abbildung. Nach (IT) ist f stetig genau dann, falls $i \circ f$ stetig ist. Ist $g : X \to X'$ eine stetige Abbildung, so ist $g|_Y \to X'$ stetig, denn:

$$\left(g|_Y\right)^{-1}(O') = Y \cap g^{-1}(O') \in \mathcal{O}_Y, \qquad O' \in \mathcal{O}'.$$

Übungsaufgabe: Sei $M \subseteq Y$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Unterraum von $(X, \mathcal{O})$. Wie verhalten sich

(1) $\overline{M}^Y$ zu $\overline{M}^X \cap Y$,

(2) $\overset{\circ}{M}{}^Y$ zu $\overset{\circ}{M}{}^X \cap Y$,

(3) $\partial_Y M = \overline{M}^Y \setminus \overset{\circ}{M}{}^Y$ zu $\partial_X M \cap Y$?

Definition 5.3 *Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen $M_i \subseteq X$, wobei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum ist.*

*(i) $(M_i)_{i \in I}$ heißt **Überdeckung** von $Y \subseteq X$, wenn $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$.*
$(M_i)_{i \in I}$ heißt Überdeckung von X, wenn $X = \bigcup_{i \in I} M_i$.

(ii) Eine Überdeckung $(M_i)_{i \in I}$ heißt

- *offen, wenn alle $M_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$,*
- *abgeschlossen, wenn alle $M_i \in \mathscr{A}$, $i \in I$,*
- ***lokal endlich**, wenn $\forall x \in X : \ \exists U \in \mathscr{U}(x) : \ M_i \cap U \neq \emptyset$ für nur endlich viele $i \in I$.*

Satz 5.4 (Heftungslemma)
Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine

(1) offene, oder

(2) lokal endliche, abgeschlossene

Überdeckung eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Für alle $i \in I$ seien stetige Abbildungen (bezüglich $\mathcal{O}_{M_i}$) $f_i : M_i \to (X', \mathcal{O}')$ gegeben mit

$$\forall i, j \in I : \qquad f_i|_{M_i \cap M_j} = f_j|_{M_i \cap M_j}. \qquad (*)$$

Dann existiert genau eine stetige Abbildung $f : X \to X'$ mit $f|_{M_i} = f_i \ \forall i \in I$.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit: Sei $x \in X : \ \exists i \in I : \ x \in M_i$, definiere $f(x) := f_i(x)$. $(*)$ garantiert, daß f wohldefiniert ist. Eindeutigkeit per Konstruktion. Stetigkeit folgt.

Lemma 5.5 *Sei* $(M_i)_{i\in I}$ *eine*

(1) offene, oder

(2) lokal endlich, abgeschlossene

Überdeckung eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$*. Dann gilt* $\forall A, O \subseteq X$*:*

(a) $O \in \mathcal{O} \iff O \cap M_i \in \mathcal{O}_{M_i} \quad \forall i \in I.$

(b) $A \in \mathscr{A} \iff A \cap M_i \in \mathscr{A}_{M_i} \quad \forall i \in I.$

Beweis. Zu (1): Nach Proposition 5.2(i) gibt es für alle $O_i \in \mathcal{O}_{M_i}$ $(i \in I)$ ein $O' \in \mathcal{O}$ mit $O_i = M_i \cap O'$. Da M_i offen ist, folgt $O_i \in \mathcal{O}$. Sei nun $O \subseteq X$ mit $O \cap M_i \in \mathcal{O}_{M_i}$ $\forall i \in I$.

$$O = X \cap O = \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \cap O = \bigcup_{i\in I} (\underbrace{M_i \cap O}_{\in\mathcal{O}}) \in \mathcal{O}.$$

Die Umkehrung ist klar nach Proposition 5.2(i).

Sei weiter $A \subseteq X$ mit $A \cap M_i \in \mathscr{A}_{M_i}$ $\forall i \in I$. Dann gilt:

$$M_i \cap \complement A = M_i \setminus A = M_i \setminus (\underbrace{M_i \cap A}_{\text{abg. in } M_i}) \in \mathcal{O}_{M_i}.$$

$\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $\complement A \in \mathcal{O}$ oder $A \in \mathscr{A}$. Umkehrung ist klar nach Proposition 5.2(ii).

Zu (2): Wir zeigen zuerst (b):

Nach Proposition 5.2(ii) gibt es für alle $A_i \in \mathscr{A}_{M_i}$ $(i \in I)$ ein $A' \in \mathscr{A}$: $A_i = M_i \cap A'$. Da M_i abgeschlossen, folgt $A_i \in \mathscr{A}$. Sei $A \subseteq X$ mit $A \cap M_i \in \mathscr{A}_{M_i}$ $\forall i \in I$. Dann gilt

$$A = A \cap X = \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \cap A = \bigcup_{i\in I} (M_i \cap A). \qquad (*)$$

Sei $x \in \complement A$. Da die Überdeckung lokal endlich ist, gibt es $U \in \mathscr{U}(x)$: $U \cap M_i \neq \emptyset$ für nur endlich viele $i \in I$. Seien diese $i_1, \ldots, i_n$. Ferner existiert $O \in \mathcal{O}$: $x \in O \subseteq U$. Betrachte $\widehat{U} = U \cap \bigcap_{j=1}^n \complement(M_{i_j} \cap A)$. Dann gilt $\widehat{U} \in \mathscr{U}(x)$, denn:

$$x \in \complement A \subseteq \complement M_{i_j} \cup \complement A = \complement(M_{i_j} \cap A) \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Also ist

$$x \in O \cap \bigcap_{j=1}^{n} \underbrace{\complement(M_{i_j} \cap A)}_{\text{offen in } X} \subseteq \widehat{U}.$$

Ferner ist $\widehat{U} \subseteq \complement A$, denn

$$\begin{aligned} \widehat{U} \cap A &\overset{(*)}{=} \widehat{U} \cap \bigcup_{i\in I} (M_i \cap A) = \bigcup_{i\in I} \widehat{U} \cap M_i \cap A \\ &= \bigcup_{i\in I\setminus\{i_1,\ldots,i_n\}} \widehat{U} \cap M_i \cap A \subseteq \bigcup_{i\in I\setminus\{i_1,\ldots,i_n\}} U \cap M_i \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Mit $\widehat{U} \in \mathscr{U}(x)$ und $\widehat{U} \subseteq \complement A$ folgt $\complement A$ offen bzw. $A \in \mathscr{A}$.

Die Umkehrung ist klar nach Proposition 5.2(ii).

Zu (a): Sei $O \subseteq X$ mit $O \cap M_i \in \mathcal{O}_{M_i}$ $\forall i \in I$. Dann ist $M_i \cap \complement O = M_i \setminus (M_i \cap O)$, und damit $\complement O \in \mathscr{A}$, d.h. $O \in \mathcal{O}$.

Die Umkehrung gilt nach Proposition 5.2(i). $\square$

Beweis der Stetigkeit zu Satz 5.4. Sei $O' \in \mathcal{O}'$. Dann ist $M_i \cap f^{-1}(O') = f_i^{-1}(O')$ (nach Konstruktion von f). Nun gilt $f_i^{-1}(O') \in \mathcal{O}_{M_i}$ (wegen Stetigkeit von f_i) ($i \in I$ beliebig). Nach Lemma 5.5(a) folgt aber sowohl für (1) als auch für (2), daß dann $f^{-1}(O') \in \mathcal{O}$, d.h. f ist stetig. $\square$

Bemerkung: Die Voraussetzung „lokal endlich“ im Fall (2) ist wesentlich! Man überlege sich ein Gegenbeispiel (Übungsaufgabe). (Es genügt, sich ein Gegenbeispiel zu Lemma 5.5(2) „$\Leftarrow$“ zu überlegen).

Definition 5.6 *Eine Abbildung $f : X \to X'$ von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ in einen topologischen Raum $(X', \mathcal{O}')$ heißt **Einbettung**, wenn f ein Homöomorphismus von $(X, \mathcal{O})$ auf den Unterraum $(f(X), \mathcal{O}'_{f(X)})$ ist.*

Satz 5.7 *Eine Abbildung $f : X \to X'$ von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ in einen topologischen Raum $(X', \mathcal{O}')$ ist genau dann eine Einbettung, wenn f injektiv und stetig ist, sowie*

$$\forall O \in \mathcal{O} : \quad f(O) \in \mathcal{O}_{f(X)}.$$

Beweis. Klar nach Definition 3.6. $\square$

Beispiele:

(i) $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$:

$$\begin{aligned} i \ : \ (\mathbb{R}^m, \mathcal{O}_{\text{kan}}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\text{kan}}), \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

ist eine Einbettung des $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\sin : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $x \mapsto (x, \sin x)$ definiert eine andere Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$.

(iii) Man kann S^1 in $\mathbb{R}^3$ durch **Kleeblattschlinge** einbetten.

[Bild]

Einbettungen von S^1 in $\mathbb{R}^3$ heißen auch **Knoten**.

(iv) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Sei $0 < \gamma < 1$ irrational.

$$f : \mathbb{Z} \to [0, 1), \qquad n \mapsto n\gamma - [n\gamma]$$

ist injektiv und $f(\mathbb{Z})$ dicht in $[0, 1)$. Mit $(\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\text{dis}})$ ist f stetig, aber **keine** Einbettung (f ist nicht offen!).

Definition 5.8 *Sei* $(X_i, \mathcal{O}_i)$ *eine Familie topologischer Räume und* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *mit den Projektionen* $p_i : X \to X_i$, $i \in I$. *Die* ***Produkttopologie*** $(X, \mathcal{O})$ *auf* X *wird durch die Basis*

$$\mathscr{B} = \Big\{ \bigcap_{k\in K} p_k^{-1}(O_k) : \ O_k \in \mathcal{O}_k, \ K \textit{ endliche Teilmenge von } I \Big\}$$

definiert. $(X, \mathcal{O})$ *heißt* ***Produktraum*** *(oder* ***topologisches Produkt*** *der Räume* X_i*).*

Bemerkungen:

(i) $\mathscr{S} = \{p_i^{-1}(O_i) : \ O_i \in \mathcal{O}_i, \ i \in I\}$ ist eine Subbasis der Produkttopologie.

(ii) Nach Konstruktion sind die Projektionen $p_i : X \to X_i$ $(i \in I)$ stetig und offen. (im Allgemeinen sind die p_i jedoch nicht abgeschlossen! Beispiel: $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \geq 1\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, aber $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$!)

(iii) Die Produkttopologie ist die Initialtopologie auf X bezüglich $(p_i)_{i\in I}$.

(iv) Sind alle X_i A2–Räume und ist I höchstens abzählbar, so ist auch $(X, \mathcal{O})$ A2–Raum. (A2–Raum heißt X erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom)

Für $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ und $\mathscr{V}_i(x_i)$ Umgebungsbasen von $x_i \in X_i$ ist

$$\mathscr{V}(x) := \Big\{ \prod_{i\in I} V_i : \ V_i \in \mathscr{V}_i(x_i) \text{ für höchstens abzählbar viele } i \in I \\ \text{und } V_i = X_i \text{ sonst} \Big\}$$

eine Umgebungsbasis für x (Nachprüfen: Übungsaufgabe).

Somit gilt: Sind alle X_i A1–Räume und ist I höchstens abzählbar, so ist auch $(X, \mathcal{O})$ A1–Raum.

Man kann A1– bzw. A2–Produkträume charakterisieren, indem man fordert, daß höchstens abzählbar viele X_i nicht die indiskrete Topologie tragen.

Beispiele:

(i) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}}) =: X_i \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\text{kan}}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\text{prod}})$.

(ii) $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ Kreislinie, $X_2 = [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, beide mit kanonischer Topologie. $X_1 \times X_2$ ist homöomorph zu einem Kreisring.

(iii) $(X_i, \mathcal{O}_i^{\text{dis}}) \quad \forall i \in I$: $X = \prod_{i\in I} X_i$

- ist $|I| < \infty$: $(X, \mathcal{O}_{\text{prod}}) = (X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$
- ist $|I| = \infty$: $(X, \mathcal{O}_{\text{prod}}) = (X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$, falls $|X_i| \geq 2$ für nur endlich viele $i \in I$, denn
$$\{x\} = \{(x_i)_{i\in I}\} = \prod_{i\in I}\{x_i\} \in \mathscr{B}_{\text{prod}},$$
andernfalls müßte $\{x\} = \prod_{i\in I}\{x_i\}$ eine Menge aus $\mathscr{B}_{\text{prod}}$ enthalten, was unmöglich ist.

(iv) $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ Abbildung von topologischen Räumen. Der Unterraum $G(f) := \{(x, x') \in X \times X' : \ x' = f(x)\}$ von $(X \times X, \mathcal{O}_{\text{prod}})$ heißt **Graph von** f.

Übungsaufgabe: f ist genau dann stetig, wenn $g : x \mapsto (x, f(x))$ eine Einbettung von X in $X \times X'$ ist.

(v) $n \in \mathbb{N}$, $X_n := \{0, 2\}$ mit $\mathcal{O}_{\text{dis}}$. $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ mit $\mathcal{O}_{\text{prod}}$.
$T := \bigcap_{m=1}^{\infty} T_m$ mit $T_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $T_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, T_j $(j \geq 3)$ entsprechend.

[Bild]

T heißt **Cantor'sches Diskontinuum**.

Bemerkungen:

(i) T ist nicht abzählbar.

(ii) T ist abgeschlossen in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$.

(iii) T ist **nirgends dicht** in $[0, 1]$, d.h. $\overset{\circ}{\overline{T}} = \emptyset$ (T enthält keine inneren Punkte, oder $T = \partial T$).

Die Abbildung $f : X \to T$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ definiert einen Homöomorphismus.

Hinweis:

(a) Initialtopologie auf X bezüglich f ist gleich der Produkttopologie (T versehen mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}$).

(b) f ist bijektiv (beachte: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$).

Satz 5.9 *Sei* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ *eine Familie topologischer Räume,* $X = \prod_{i \in I} X_i$ *der Produktraum und* $p_i : X \to X_i$, $i \in I$, *die Projektionen. Dann gilt:*

(i) Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, für die alle Projektionen stetig sind.

(ii) Eine Abbildung $g : Y \to X$, Y *topologischer Raum, ist genau dann stetig, wenn* $g_i := p_i \circ g$ *stetig* $\forall i \in I$ *sind.*

Beweis.

(i) Satz 4.4.

(ii) Definition 4.3. □

Satz 5.10 *Seien* $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ *und* $(Y_i, \mathscr{G}_i)_{i \in I}$ *zwei Familien topologischer Räume und* $(f_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$ *eine Familie von Abbildungen. Die Abbildung*

$$f : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow \prod_{i \in I} Y_i, \qquad (x_i)_{i \in I} \longmapsto (f(x_i))_{i \in I}$$

ist genau dann stetig, wenn f_i $\forall i \in I$ *stetig sind.*

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_j"] \arrow[dr, "f_i \circ p_i"] & \prod\limits_{i\in I} Y_i \arrow[d, "q_j"] \\
X_j \arrow[r, "f_j"] & Y_j
\end{tikzcd}$$

Beweis. Bezeichne $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ $(i \in I)$ und $q_i : \prod_{i\in I} Y_i \to Y_i$ $(i \in I)$ die Projektionen.

Sind alle f_i stetig, so folgt die Stetigkeit von f aus Satz 5.9(ii), da $f_i \circ p_i = q_i \circ f$.

Sei nun f stetig und $(a_i)_{i\in I}$ ein Punkt aus $\prod_{i\in I} X_i$. Für alle $j \in I$ sei

$$s_j : X_j \to \prod_{i\in I} X_i, \qquad x_j \mapsto (z_i)_{i\in I}$$

mit $z_j := \begin{cases} a_i & \text{für } i \neq j \\ x_j & \text{für } i = j. \end{cases}$

Die Abbildungen s_j sind nach Satz 5.9(ii) stetig, denn

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "s_j"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{X_j}"'] & \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[d, "p_j"] \\
& X_j
\end{tikzcd}$$

Dann ist

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, "f"] & \prod\limits_{i\in I} Y_i \arrow[d, "q_j"] \\
X_j \arrow[u, "s_j"] \arrow[r, "f_j"] & Y_j
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagram, folglich $f_j = q_j \circ f \circ s_j$ sind stetig $\forall j \in I$. □

Definition 5.11 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenrelation auf X. Sei ferner $p : X \to X/_\sim$ die kanonische Projektion von X auf die Menge der Äquivalenzklassen. Die Finaltopologie auf $X/_\sim$ bezüglich p heißt **Quotiententopologie** auf $X/_\sim$. Der Raum $(X/_\sim, \mathcal{O}_{quot})$ heißt dann **Quotientenraum** (oder auch **Faktorraum**).*

Satz 5.12 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $p : X \to X/_\sim$ die kanonische Projektion. Dann gilt:*

(i) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, für die p stetig ist (d.h. $M \subseteq X/_\sim$ ist offen $\iff$ $p^{-1}(M)$ offen in X).

(ii) Eine Abbildung $g : X/_\sim \to Y$, Y topologischer Raum, ist genau dann stetig, wenn $g \circ p$ stetig ist.

Beweis.

(i) Satz 4.6.

(ii) Definition 4.5. □

Beispiele:

(i) $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; (x > 0 \wedge y > 0) \;\vee\; (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \;\Rightarrow\; \mathbb{R}/_\sim = \{0,1\}$ mit $\mathcal{O} = \big\{\emptyset, \{1\}, \mathbb{R}/_\sim\big\}$ ist homöomorph zum **Sierpinski–Raum** (d.h. $\big\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\big\}$ als Topologie auf $\{0,1\}$).

Beachte:

(a) Projektion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_\sim$ ist nicht offen, da $p\big((-1,0)\big) = \{0\}$!

(b) $\mathcal{O}$ ist nicht $p(\mathcal{O}_{\text{kan}})$, da $\{0\} \notin \mathcal{O}$, aber $\{0\} = p\big((-1,0)\big) \in p(\mathcal{O}_{\text{kan}})$

(ii) $(\mathrm{R}^n, \mathcal{O}_{\text{kan}})$ und $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}^n \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$.

$\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/_\sim$ heißt n**–dimensionaler Torus**.

$n = 1$: $\quad \mathrm{T}^1 \cong \mathrm{S}^1$

[Bild]

$n = 2$: $\quad \mathrm{T}^2 \cong \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$

[Bild]

(iii) Betrachte $g : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$, $(x,y) \mapsto (x,-y)$ und definiere auf dem Produkt $(\mathrm{S}^1, \mathcal{O}_{\text{kan}}) \times ([0,1], \mathcal{O}_{\text{kan}})$ die Äquivalenzrelation

$$(u,\xi) \sim (v,\eta) \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} v = g(u) & \xi = 0 \;\wedge\; \eta = 1 \\ u = g(v) & \xi = 1 \;\wedge\; \eta = 0 \\ u = v & 0 < \xi = \eta < 1. \end{cases}$$

für $u, v \in \mathrm{S}^1$ und $\xi, \eta \in [0,1]$.

[Bilder]

Dann heißt $\mathrm{F} := \mathrm{S}^1 \times [0,1]/_\sim$ **Kleinsche Flasche**.

Bemerkung: Ist $f : X \to X'$ eine Abbildung, so definiert

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf $X/_\sim =: X/_f$.

f induziert dann eine Abbildung $\tilde{f} : X/_\sim \to X'$, $\tilde{x} \mapsto f(x)$ ($\tilde{x}$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von x).

Dann gilt: $\tilde{f}$ stetig $\iff$ f stetig.

Diese Überlegung führt zur Identifizierungstopologie (siehe später) auf X'.

6 Trennungseigenschaften

Bei allgemeinen topologischen Räumen kann es durchaus passieren, daß sich verschiedene Punkte x, y **nicht** durch noch so kleine Umgebungen trennen lassen (d.h. $U_x \cap U_y = \emptyset$). Wir nehmen im Folgenden immer an, daß X mindestens zwei Elemente besitzt.

Definition 6.1 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum.* X *heißt* T_0*–Raum, falls von je zwei verschiedenen Punkten* $x, y \in X$, $x \neq y$ *wenigstens einer eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält. D.h.* $\exists U_x \in \mathscr{U}(x)$ *mit* $y \notin U_x$ *oder* $\exists U_y \in \mathscr{U}(y)$ *mit* $x \notin U_y$.

Satz 6.2 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *ist genau dann ein* T_0*–Raum, falls für alle* $x, y \in X$, $x \neq y$ *gilt* $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Beweis. Sei $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Dann gilt $x \notin \overline{\{y\}}$ oder $y \notin \overline{\{x\}}$ (denn wäre $x \in \overline{\{y\}}$, so folgt $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ und wäre auch $y \in \overline{\{x\}}$, so folgt $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. Also $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.)

Ist $x \notin \overline{\{y\}}$, so ist $X \setminus \overline{\{y\}}$ eine offene Umgebung von x, die y nicht enthält. Ist $y \notin \overline{\{x\}}$, so ist $X \setminus \overline{\{x\}}$ eine offene Umgebung von y, die x nicht enthält. Also gilt die T_0–Eigenschaft.

Ist umgekehrt X ein T_0–Raum, so existiert (o.E.) eine Umgebung $U_x \in \mathscr{U}(x)$ mit $y \notin U_x$. Dann ist $x \notin \overline{\{y\}}$ (denn $x \in \overline{\{y\}}$ heißt $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathscr{U}(x)$, vergleiche Definition 2.4), folglich $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. □

Eine stärkere Trennungseigenschaft ist, falls in T_0 das „oder“ durch „und“ ersetzt wird.

Definition 6.3 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum.* X *heißt* T_1*–Raum, falls von je zwei verschiedenen Punkten* $x, y \in X$, $x \neq y$ *jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält. D.h.* $\exists U_x \in \mathscr{U}(x)$ *mit* $y \notin U_x$ *und* $\exists U_y \in \mathscr{U}(y)$ *mit* $x \notin U_y$.

Offensichtlich ist jeder T_1–Raum auch ein T_0–Raum. Der Sierpinski–Raum ist T_0–Raum, aber nicht T_1–Raum ($X = \{0, 1\}$ mit $\mathcal{O} = \big\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\big\}$).

Satz 6.4 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *ist genau dann ein* T_1*–Raum, falls für alle* $x \in X$ *gilt:* $\{x\} = \overline{\{x\}}$ *(d.h.* $\{x\}$ *ist abgeschlossen).*

Beweis. Sei X ein T_1–Raum und $x \in X$. Für $y \in X \setminus \{x\}$ (d.h. $y \neq x$) existiert $U_y \in \mathscr{U}(y)$ mit $x \notin U_y$, also $U_y \subseteq X \setminus \{x\}$, d.h. $X \setminus \{x\}$ ist offen, also $\{x\}$ abgeschlossen.

Ist umgekehrt $\{x\}$ abgeschlossen für jedes $x \in X$, und ist $y \in X$, $y \neq x$, so ist $X \setminus \{x\}$ eine offene Umgebung von y, die x nicht enthält. Genauso ist $X \setminus \{y\}$ eine offene Umgebung von x, die y nicht enthält. □

Eine Trennungseigenschaft, die von metrischen Räumen erfüllt wird, ist die T_2–Eigenschaft.

Definition 6.5 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum.* X *heißt* T_2*–Raum (oder Haussdorff–Raum), wenn je zwei verschiedene Punkte* $x, y \in X$, $x \neq y$ *disjunkte Umgebungen besitzen. D.h.* $\exists U_x \in \mathscr{U}(x), U_y \in \mathscr{U}(y)$ *mit* $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Offensichtlich ist jeder T_2–Raum auch ein T_1–Raum. Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Sei X unendlich. $\mathcal{O}$ bezeichne die Topologie der endlichen Komplemente: $\mathcal{O} = \{O \subseteq X : X \setminus O \text{ endlich }\} \cup \{\emptyset\}$. X ist T_1–Raum, da $\{x\} = X \setminus (X \setminus \{x\})$ abgeschlossen ist. X ist nicht Hausdorffsch. Denn wäre $x \in O_x \subseteq X$, $y \in O_y \subseteq X$, O_x, O_y offen und $O_x \cap O_y = \emptyset$, so gilt $X = X \setminus (O_x \cap O_y) = (X \setminus O_x) \cup (X \setminus O_y)$, also wäre X Vereinigung zweier endlicher Mengen, ein Widerspruch.

Jeder metrische Raum (X, d) ist T_2–Raum. Sind $x, y \in X$, $x \neq y$, $d(x, y) =: r > 0$. Dann gilt $U_{\frac{r}{2}}(x) \cap U_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$.

Satz 6.6 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Äquivalent sind*

(i) X *ist ein* T_2*–Raum.*

(ii) Für jedes $x \in X$ *gilt:* $\{x\} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}, A \in \mathscr{U}(x)} A$.

(iii) Die Diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ *ist abgeschlossen in* $X \times X$ *(*$X \times X$ *versehen mit der Produkttopologie).*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Betrachte $x, y \in X$, $y \neq x$. Seien $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x$, $y \in O_y$, $O_x \cap O_y = \emptyset$. Dann ist $A = X \setminus O_y$ abgeschlossen, $x \in O_x \subseteq X \setminus O_y$, d.h. $X \setminus O_y$ ist abgeschlossene Umgebung von x. Ferner ist $y \notin A$. Dies gilt für jedes $y \in X$, $y \neq x$, woraus $\{x\} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}, A \in \mathscr{U}(x)} A$ folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen Δ wäre nicht abgeschlossen, dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$ mit $(x, y) \in \overline{\Delta}$. Mit Voraussetzung (ii) existiert A abgeschlossen, $A \in \mathscr{U}(x)$ mit $y \notin A$. Da A Umgebung von x ist, existiert $O_x \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x \subseteq A$. Bezeichne $O_y = X \setminus A$. Dann gilt $O_x \cap O_y = \emptyset$, $(x, y) \in O_x \times O_y$, und somit $(O_x \times O_y) \cap \Delta = \emptyset$. $O_x \times O_y$ ist aber eine Umgebung von $(x, y) \in X \times X$, und mit $(x, y) \in \overline{\Delta}$ muß $(O_x \times O_y) \cap \Delta \neq \emptyset$ gelten, ein Widerspruch.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $x, y \in X$, $x \neq y$, also $(x, y) \notin \Delta = \overline{\Delta}$. Somit existiert eine Umgebung W von (x, y) in $X \times X$ mit $W \cap \Delta = \emptyset$. Dann existieren (Definition 5.8 und Satz 5.9(i)) $O_x \in \mathcal{O}$, $O_y \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_x$, $y \in O_y$ mit $O_x \times O_y \subseteq W \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Das heißt aber $O_x \cap O_y = \emptyset$. □

Der nächste Schritt erweitert die Trennungseigenschaften von Punkten auf Teilmengen.

Definition 6.7 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum.* X *heißt* T_3*–Raum, wenn jede abgeschlossene Teilmenge* A *von* X *und jeder Punkt* $x \in X \setminus A$ *disjunkte Umgebungen besitzen. D.h.* $\exists U_A$ *Umgebung von* A, $U_x \in \mathscr{U}(x)$ *mit* $U_A \cap U_x = \emptyset$.

Die T_3–Eigenschaft ist keine Verstärkung von T_2,T_1,T_0. Ist X mindestens zweielementig, und $\mathcal{O}$ die indiskrete Topologie, so ist $(X, \mathcal{O})$ nicht T_0–, aber T_3–Raum.

Definition 6.8 *Ein T_3–Raum, der gleichzeitig T_1–Raum ist, heißt* ***regulär****.*

Ein regulärer Raum ist notwendigerweise ein T_2–Raum. Sind nämlich $x, y \in X$, $x \neq y$, so ist $\{y\}$ abgeschlossen wegen T_1. Mit T_3 gibt es $U_{\{y\}} \in \mathscr{U}(y)$, $U_x \in \mathscr{U}(x)$ mit $U_{\{y\}} \cap U_x = \emptyset$.

Es gibt T_2–Räume, die nicht T_3–Eigenschaft haben. Zunächst geben wir eine Charakterisierung von T_3–Räumen an.

Satz 6.9 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein T_3–Raum genau dann, wenn zu jedem $x \in X$ und $U \in \mathscr{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{O}$ existiert mit $x \in V$ und $\overline{V} \subseteq U$. (Mit anderen Worten: X ist genau dann ein T_3–Raum, wenn die abgeschlossenen Umgebungen eines jeden Punktes eine Umgebungsbasis bilden, vergleiche Definition 1.13).*

Beweis. Sei X ein T_3–Raum, $U \in \mathscr{U}(x)$, ohne Einschränkung U offen. Da $A = X \setminus U$ abgeschlossen ist, existieren U_A offene Umgebung von A und $V \in \mathscr{U}(x)$, V offen, mit $U_A \cap V = \emptyset$. Somit ist $V \subseteq X \setminus U_A$. Da $X \setminus U_A$ abgeschlossen ist, gilt $\overline{V} \subseteq X \setminus U_A \subseteq X \setminus A = U$.

Bilden umgekehrt die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis und ist $x \notin A$, A abgeschlossen. Dann gilt $x \in X \setminus A$. Mit der Voraussetzung gibt es ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V$, $\overline{V} \subseteq X \setminus A$. Setzt man $W := X \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}$, so gilt $W = X \setminus \overline{V} \subseteq X \setminus V$, also $V \cap W = \emptyset$ und $W = X \setminus \overline{V} \supseteq A$, d.h. T_3 gilt. □

Natürlich stellt sich wieder die Frage nach der Abgrenzung zwischen regulären topologischen Räumen und Hausdorff–Räumen. Man sieht leicht, daß jeder reguläre Raum ein T_2–Raum ist. Ist nämlich $x, y \in X$, $x \neq y$, so ist wegen der T_1–Eigenschaft $\{x\}$ abgeschlossen. Mit $y \in X \setminus \{x\}$ existieren mit der T_3–Eigenschaft disjunkte Umgebungen von $\{x\}$ und y. Also ist die T_2–Eigenschaft erfüllt.

Wir geben nun ein Beispiel eines Hausdorff–Raumes an, der nicht regulär ist (also T_3 nicht erfüllt).

Sei $X = \mathbb{R}$. Wir definieren ein Umgebungssystem $\mathscr{U}(x)$ auf $\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und setze $U_n(x) := \{x + kn : k \in \mathbb{N}_0\}$ und definiere

$$\mathscr{U}(x) := \{U \subseteq \mathbb{R} : U \supseteq U_n(x) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen, daß (U1),(U2),(U3),(U4) von Proposition 1.7 gelten.

(U1),(U2) sind offensichtlich erfüllt. Sind $U_1, U_2 \in \mathscr{U}(x)$, so gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $U_1 \supseteq U_{n_1}(x)$, $U_2 \supseteq U_{n_2}(x)$. Sei $n = \text{kgV}(n_1, n_2)$. Mit $U_{n_1}(x) \cap U_{n_2}(x) \supseteq U_n(x)$ folgt $U_1 \cap U_2 \supseteq U_n(x)$, d.h. $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}(x)$. Somit ist (U3) erfüllt. Nun zu (U4): Sei $U \supseteq U_n(x)$. Wir setzen $V := U_n(x)$ und zeigen $U \in \mathscr{U}(y)$ für alle $y \in V = U_n(x)$. Da $y = x + kn$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist $U_n(y) = \{(x + kn) + ln : l \in \mathbb{N}_0\} = \{x + (k + l)n : l \in \mathbb{N}_0\} \subseteq U_n(x) \subseteq U$. Das heißt $U \in \mathscr{U}(y)$ für alle $y \in V$. Mit Satz 1.8 bestimmt $\mathscr{U}(x)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathbb{R}$, die $\mathscr{U}(x)$ als Umgebungssystem besitzt.

Wir zeigen: $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ ist T_2–Raum. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. Ist $x_1 - x_2 \notin \mathbb{Z}$, so ist $U_1(x_1) \cap U_1(x_2) = \emptyset$. Wäre nämlich $y \in U_1(x_1) \cap U_1(x_2)$, so gilt $x_1 + k_1 = y = x_2 + k_2$, also $x_1 - x_2 = k_2 - k_1 \in \mathbb{Z}$, ein Widerspruch.

Ist $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$, setze $m = |x_1 - x_2| \in \mathbb{N}$. Dann gilt $U_{2m}(x_1) \cap U_{2m}(x_2) = \emptyset$. Denn wäre $y \in U_{2m}(x_1) \cap U_{2m}(x_2)$, so ist $x_1 + k_1 2m = y = x_2 + k_2 2m$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Folglich $m = |x_1 - x_2| = 2m|k_2 - k_1|$, also $\frac{1}{2} = |k_2 - k_1|$, ein Widerspruch.

Insgesamt haben wir $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ ist Hausdorffsch.

Um zu zeigen, daß $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ nicht T_3–Raum ist, überlegen wir

(a) $x - km \in \overline{U_m(x)}$, wobei $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$.

Dazu hat man $U_n(x - km) \cap U_m(x) \neq \emptyset$ zu zeigen für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies gilt wegen $y := (x - km) + kmn \in U_n(x - km)$ und $y = x + (kn - k)m \in U_m(x)$. (Insbesondere liegen immer negative y in $\overline{U_m(x)}$.)

(b) $A := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ist abgeschlossen.

Dazu zeigen wir, daß $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist. Sei $x > 0$. Da $U_n(x) \subseteq [x, \infty) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, gibt es also eine Umgebung von x, die ganz in $\mathbb{R} \setminus A$ liegt. Folglich ist A abgeschlossen.

Betrachte $x = 1$ und $A \subseteq \mathbb{R}$. Angenommen es gibt $U_1 \in \mathscr{U}(1)$ und U_A offene Umgebung von A mit $U_1 \cap U_A = \emptyset$. Dann ist $U_1 \supseteq U_m(1)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Hiermit gilt $U_m(1) \subseteq \mathbb{R} \setminus U_A$, also $\overline{U_m(1)} \subseteq \mathbb{R} \setminus U_A \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Daraus folgt $A \cap \overline{U_m(1)} = \emptyset$ im Widerspruch zu (a).

Definition 6.10 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X heißt T_4–Raum, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen A und B von X disjunkte Umgebungen besitzen. D.h. $\exists U_A$ Umgebung von A und U_B Umgebung von B mit $U_A \cap U_B = \emptyset$.*

Aus der T_4–Eigenschaft folgt nicht T_3. $X = \{0, 1\}$ mit $\mathcal{O} = \big\{\emptyset, X, \{0\}\big\}$ erfüllt T_4, aber nicht T_3.

Definition 6.11 *Ein T_4–Raum, der gleichzeitig T_1–Raum ist, heißt **normal**.*

Ein normaler Raum ist notwendigerweise ein T_3–Raum. Ist nämlich A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $x \in X \setminus A$, so ist wegen T_1 die Menge $\{x\}$ abgeschlossen, mit T_4 existieren U_A und $U_{\{x\}}$ Umgebungen von A bzw. $\{x\}$ mit leerem Schnitt. Folglich ist X ein T_3–Raum.

Satz 6.12 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist ein T_4–Raum genau dann, wenn zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und jeder Umgebung U_A von A eine (offene) Umgebung V_A von A mit $\overline{V_A} \subseteq U_A$ existiert.*

Beweis. Sei X als T_4–Raum vorausgesetzt. Ist $A \subseteq U_A$ Umgebung (ohne Einschränkung U_A offen) von A, so ist $B := X \setminus U_A$ abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Folglich existieren V_A, V_B offene Umgebungen von A bzw. B mit $V_A \cap V_B = \emptyset$. Insbesondere $\overline{V_A} \subseteq X \setminus V_B \subseteq X \setminus B = U_A$, da $X \setminus V_B$ abgeschlossen ist.

Für den Nachweis der umgekehrten Implikation betrachte $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $U := X \setminus B$ offen und $A \subseteq U$. Mit der Voraussetzung

existiert Umgebung V_A von A mit $\overline{V_A} \subseteq U$. Man setze $U_B := X \setminus \overline{V_A}$. Dann gilt $B = X \setminus U \subseteq X \setminus \overline{V_A} = U_B$, U_B ist offen und $U_B = X \setminus \overline{V_A} \subseteq X \setminus V_A$, also $U_B \cap V_A = \emptyset$.
□

Folgendes Resultat bringt viele Beispiele für normale Räume.

Proposition 6.13 *Jeder metrische Raum* (X, d) *ist ein normaler (topologischer) Raum.*

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Zu $a \in A \subseteq X \setminus B$ existiert $\varepsilon_a > 0$ mit $U_{2\varepsilon_a}(a) \subseteq X \setminus B$, und zu $b \in B \subseteq X \setminus A$ existiert $\varepsilon_b > 0$ mit $U_{2\varepsilon_b}(b) \subseteq X \setminus A$. Setze $U := \bigcup_{a \in A} U_{\varepsilon_a}(a) \in \mathcal{O}$ und $V := \bigcup_{b \in B} U_{\varepsilon_b}(b) \in \mathcal{O}$. Dann gilt $U \cap V = \emptyset$ (und natürlich $A \subseteq U$, $B \subseteq V$). Angenommen $x \in U \cap V$. Dann ist $x \in U_{\varepsilon_a}(a)$ für ein $a \in A$ und $x \in U_{\varepsilon_b}(b)$ für ein $b \in B$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir aber $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon_a + \varepsilon_b \leq 2 \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$. Das bedeutet $a \in U_{2\varepsilon_b}(b) \subseteq X \setminus A$ oder $b \in U_{2\varepsilon_a}(a) \subseteq X \setminus B$, was nicht sein kann. □

Zur Vererbung der Trennungseigenschaften auf Unterräume können wir herleiten:

Satz 6.14 *Jeder Unterraum (mit der induzierten Topologie) eines* T_i*–Raumes ist ein* T_i*–Raum für* $i = 0, 1, 2, 3$. *Jeder abgeschlossene Unterraum eines* T_4*–Raumes ist ein* T_4*–Raum.*

Beweis. Sei $Y \subseteq X$, $\mathcal{O}_Y$ sei die induzierte Topologie auf Y. T_0, T_1, T_2 sind klar. Zu T_3: Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen, $x \in Y$, $x \notin A$. Nun existiert $A' \subseteq X$ abgeschlossen mit $A' \cap Y = A$. Es muß $x \notin A'$ gelten, sonst wäre $x \in A$. Mit der Voraussetzung an $(X, \mathcal{O})$ gibt es $U', V' \in \mathcal{O}$ mit $A' \subseteq U'$, $x \in V'$, $U' \cap V' = \emptyset$. Setze $U = Y \cap U'$, $V = Y \cap V'$, und man hat $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$, $x \in V$, $U, V \in \mathcal{O}_Y$.

Zu T_4: Sei Y abgeschlossen, sowie $A, B \subseteq Y$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Nun existieren $A' \subseteq X$, $B' \subseteq X$ abgeschlossen mit $A = A' \cap Y$, $B = B' \cap Y$. (Die A',B' brauchen nicht disjunkt zu sein!) Da Y abgeschlossen ist, sind auch A und B abgeschlossen in X ($A, B \in \mathscr{A}$). Deshalb existieren $U', V' \in \mathcal{O}$, $A \subseteq U'$, $B \subseteq V'$ mit $U' \cap V' = \emptyset$. Setze $U = U' \cap Y$, $V = V' \cap Y$. Dann gilt $U, V \in \mathcal{O}_Y$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = U' \cap V' \cap Y = \emptyset$. □

Beispiel: Ein Unterraum eines T_4–Raumes muß nicht T_4 sein. Sei $X = \{a, b, c, d\}$. $\mathcal{O} = \big\{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$ ist eine Topologie auf X. X ist damit ein T_4–Raum. Es ist nämlich $\mathscr{A} = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$. Somit ist von je zwei abgeschlossenen disjunkten Mengen stets eine die leere Menge. $(X, \mathcal{O})$ ist also trivialerweise ein T_4–Raum.

Sei $Y = \{b, c, d\}$ mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y = \big\{\emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, Y\big\}$. Die abgeschlossenen Mengen in Y sind $\mathscr{A}_Y = \big\{\emptyset, Y, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\big\}$. $\{b\}$ und $\{c\}$ besitzen aber keine disjunkten Umgebungen, wie man sofort sieht.

7 Trennungseigenschaften und stetige Funktionen

Proposition 7.1 *Sei X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorff–Raum, $f, g : X \to Y$ seien stetig. Dann ist $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.*

Beweis. Setze $\varphi : X \to Y \times Y$, $\varphi(x) = \big(f(x), g(x)\big)$. φ ist stetig, denn $\varphi\big(f^{-1}(U_{f(x)}) \cap g^{-1}(U_{g(x)})\big) \subseteq U_{f(x)} \times U_{g(x)}$, $U_{f(x)}$, $U_{g(x)}$ Umgebungen von $f(x)$, $g(x)$. Nun gilt $\varphi^{-1}(\Delta) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$, Δ die Diagonale in $Y \times Y$. Δ ist abgeschlossen, da Y ein Hausdorff–Raum ist. Also ist $\varphi^{-1}(\Delta)$ abgeschlossen mit Satz 3.4. □

Korollar 7.2 *Sei X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorff–Raum, $f, g : X \to Y$ seien stetig. Gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$, $D \subseteq X$ dicht (d.h. $\overline{D} = X$), so ist $f = g$.*

Beweis. $D \subseteq \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ impliziert $X = \overline{D} \subseteq \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ mit Proposition 7.1. □

Korollar 7.3 *Seien X und Y Hausdorff–Räume, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $G_f := \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. (G_f ist der Graph von f).*

Beweis. Bezeichne $\varphi : X \times Y \to Y$, $\varphi(x, y) = y$ und $\psi : X \times Y \to Y$, $\psi(x, y) = f(x)$. Beide Abbildungen sind stetig. Folglich ist

$$G_f = \big\{(x, y) \in X \times Y : \varphi(x, y) = \psi(x, y)\big\} = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\}$$

abgeschlossen. □

Satz 7.4 (Urysohn) *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X ist ein T_4–Raum genau dann, wenn zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A und B eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existiert mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. (Dabei trägt $[0, 1]$ die natürliche Topologie.)*

Beweis. Sei zuerst die Existenz von f vorausgesetzt. Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$, und $f : X \to [0, 1]$ stetig mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Setze $U := f^{-1}\big((-\infty, \frac{1}{2})\big)$, $V := f^{-1}\big((\frac{1}{2}, \infty)\big)$. Es gilt $A \subseteq U$, U offen, $B \subseteq V$, V offen, und $U \cap V = \emptyset$.

Nun zur Umkehrung: Bezeichne $D := \big\{\frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le m \le 2^n\big\}$. D ist dicht in $[0, 1]$. Denn sind $0 \le a < b \le 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^n} < \frac{b-a}{2}$, sowie $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{m}{2^n} \ge a$, m minimal mit dieser Eigenschaft, so gilt

$$a \le \frac{m}{2^n} \le b. \qquad (*)$$

Wäre nämlich $b \le \frac{m}{2^n}$, so wäre auch $\frac{m-1}{2^n} > b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} \ge a$, im Widerspruch zur Minimalität von m. Mit $(*)$ folgt $\overline{D} = [0, 1]$.

Wir konstruieren im ersten Schritt eine Abbildung $t \mapsto U_t$, $D \to \mathcal{O}$ mit $t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2}$. Dazu zerlege

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, \qquad D_n := \big\{\frac{m}{2^n} : 0 \le m \le 2^n,\ m \in \mathbb{N}_0\big\}.$$

Dazu benutzen wir Rekursion über n mit $\bigcup_{l=0}^{n} D_l$ und starten in der Rekursion mit $D_0 = \{0, 1\}$, $U_1 := X \setminus B \in \mathcal{O}$. Dann ist $A \subseteq X \setminus B = U_1$. Wähle nun $U_0 \in \mathcal{O}$ gemäß Satz 6.12 mit $A \subseteq U_0$, $\overline{U_0} \subseteq U_1$. Seien nun mit Induktionsvoraussetzung U_t konstruiert für $t \in \bigcup_{l=0}^{n} D_l = \left\{\frac{m}{2^l} : \ l = 0, \dots, n;\ 0 \le m \le 2^l\right\}$, $U_t \in \mathcal{O}$, $\overline{U_s} \subseteq U_t$ falls $s < t$; $s, t \in \bigcup_{l=0}^{n} D_l$.

Sei $t \in D_{n+1} \setminus \bigcup_{l=0}^{n} D_l$, $t = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ (Zähler gerade $\Rightarrow$ $t \in D_n$). Für $D_n \ni t_1 = \frac{2k}{2^{n+1}} < t < \frac{2k+2}{2^{n+1}} = t_2 \in D_n$ gilt bereits $\overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2}$. Mit Satz 6.12 existiert $V \in \mathcal{O}$ mit $\overline{U_{t_1}} \subseteq V$, $\overline{V} \subseteq U_{t_2}$.

Setze $U_t = V$. Für den Nachweis der geforderten Eigenschaft haben wir vier Fälle zu unterscheiden:

(i) $s < t$, $t \in D_{n+1} \setminus \bigcup_{l=0}^{n} D_l$, $s \in \bigcup_{l=0}^{n} D_l$. Dann ist $s \le \frac{2k}{2^{n+1}} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} = t$, und mit der Induktionsvoraussetzung und Konstruktion $\overline{U_s} \overset{\text{I.V.}}{\subseteq} \overline{U_{\frac{2k}{2^{n+1}}}} \overset{\text{Konstr.}}{\subseteq} U_t$.

(ii) $s < t$, $s \in D_{n+1} \setminus \bigcup_{l=0}^{n} D_l$, $t \in \bigcup_{l=0}^{n} D_l$. Dann ist $s = \frac{2k+1}{2^{n+1}} < \frac{2k+2}{2^{n+1}} \le t$ und folglich $\overline{U_s} \overset{\text{Konstr.}}{\subseteq} \overline{U_{\frac{2k+2}{2^{n+1}}}} \overset{\text{I.V.}}{\subseteq} U_t$.

(iii) $s < t$, $s, t \in D_{n+1} \setminus \bigcup_{l=0}^{n} D_l$. Es gilt $\frac{2j+1}{2^{n+1}} = s < t = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$, $j < k$. Folglich $s < \frac{2j+2}{2^{n+1}} \le \frac{2k}{2^{n+1}} < t$, also $\overline{U_s} \subseteq U_{\frac{2j+2}{2^{n+1}}}$ mit Konstruktion und ebenso $\overline{U_{\frac{2k}{2^{n+1}}}} \subseteq U_t$. Daraus folgt $\overline{U_s} \subseteq U_t$.

(iv) $s < t$, $s, t \in \bigcup_{l=0}^{n} D_l$. Es gilt $\overline{U_s} \subseteq U_t$ mit der Induktionsvoraussetzung.

Im zweiten Schritt geben wir nun die gesuchte Funktion an und zeigen die geforderte Trennungseigenschaft. Wir definieren

$$f : X \to [0, 1], \qquad f(x) := \inf\{t \in D : \ x \in U_t\} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in U_t \text{ für alle } t \in D \\ \sup\{t \in D : \ x \notin U_t\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $x \in A$, so gilt $x \in A \subseteq U_0 \subseteq U_t$ für alle $t \in D$, also $f(x) = 0$. Ist $x \in B$, so gilt $x \notin X \setminus B = U_1$, also $f(x) = 1$.

Bleibt noch die Stetigkeit von f zu zeigen.

Für $0 \le s < t \le 1$ gilt $f^{-1}\big((s, t)\big) = f^{-1}\big([0, t)\big) \cap f^{-1}\big((s, 1]\big)$, also reicht zu zeigen, daß $f^{-1}\big([0, s)\big)$ und $f^{-1}\big((s, 1]\big)$ für $0 < s < 1$ offen sind. Nun gilt:

(a) $f(x) < s \iff x \in U_t$ für ein $t \in D$, $t < s$

(b) $f(x) > s \iff x \notin \overline{U_t}$ für ein $t \in D$, $t > s$

und folglich $f^{-1}\big([0, s)\big) = \bigcup_{t \in D, t<s} U_t \in \mathcal{O}$ und $f^{-1}\big((s, 1]\big) = \bigcup_{t \in D, t>s} (X \setminus \overline{U_t}) \in \mathcal{O}$. Also sind wir fertig, falls (a) und (b) gezeigt.

Nachweis von (a): Für die Beweisrichtung von rechts nach links beachte, daß aus $x \in U_t$ für $t < s$, $t \in D$ folgt: $x \in U_r$ für alle $r \in D$, $r \ge t$, also $f(x) \le t < s$.

Ist umgekehrt $f(x) < s$, so existieren $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, \dots, 2^n\}$ mit $f(x) < \frac{k}{2^n} < s$. Setze $t = \frac{k}{2^n}$. Wäre $x \notin U_t$, so wäre $f(x) \ge t$, ein Widerspruch. Also ist $x \in U_t$ und (a) ist gezeigt.

Schließlich zeigt man (b) analog: Ist $x \notin \overline{U_t}$ für ein $t \in D$, $t > s$, so ist $x \notin U_r$ für alle $r \in D$, $r \leq t$, also $f(x) \geq t > s$. Umgekehrt folgt aus $f(x) > s$ die Existenz von $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, \dots, 2^n\}$ mit $f(x) > \frac{k}{2^n} > s$. Setze $t = \frac{k}{2^n}$. Wäre $x \in \overline{U_t}$, so gilt $x \in U_r$ für alle $r \in D$, $r > t$. Somit $f(x) \leq t$, ein Widerspruch. Also ist $x \notin \overline{U_t}$ und (b) ist gezeigt. □

Vergleicht man die Trennungseigenschaften „normal“ und „regulär“, drängt sich folgende Frage auf: Ist X regulär, A abgeschlossen, $x \notin A$. Existiert dann $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f(x) = 1$, $f|_A = 0$? Die Antwort ist nein. E. Hewitt (1946) hat gezeigt, daß es reguläre Räume gibt, auf denen jede stetige reellwertige Funktion konstant ist.

Definition 7.5 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *heißt vollständig regulär, falls* X *ein* T_1*–Raum ist und (V) gilt:*

(V) *zu* $x \in X$, $U \subseteq X$ *offen,* $x \in U$ *existiert* $f : X \to [0,1]$ *stetig mit* $f(x) = 1$, $f|_{X \setminus U} = 0$.

Bemerkungen:

(1) Ist $Y \subseteq X$, X vollständig regulär, so ist Y auch vollständig regulär.

Ist nämlich $y \in Y$, $V \subseteq Y$ offen, so existiert $U \subseteq X$ offen mit $V = U \cap Y$. Es existiert $f : X \to [0,1]$ mit $f(y) = 1$, $f|_{X \setminus U} = 0$. Setze $g = f|_Y$. Dann gilt $g(y) = 1$ und $g|_{Y \setminus V} = 0$.

(2) Ist X normal, so ist X vollständig regulär.

Tatsächlich sind mit $x \in U$, U offen, die Mengen $\{x\}$ und $X \setminus U$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Mit dem Satz 7.4 existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f(x) = 1$, $f|_{X \setminus U} = 0$. Insbesondere ist jeder metrische Raum vollständig regulär (vergleiche Proposition 6.13).

(3) Ist X vollständig regulär, so ist X regulär.

Mit Satz 6.9 haben wir zu zeigen: zu $x \in U$ offen existiert V offen mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Nun existiert $f : X \to [0,1]$ stetig mit $f(x) = 1$, $f|_{X \setminus U} = 0$. Setze $V := f^{-1}\big((\frac{1}{2}, \infty)\big)$, $Q := f^{-1}\big([\frac{1}{2}, \infty)\big)$. Dann ist $Q \subseteq U$, Q abgeschlossen, sowie $x \in V \subseteq Q$, V offen. Also $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq Q \subseteq U$.

Die Umkehrungen von (2) und (3) gelten nicht.

Hinsichtlich der Fortsetzung von stetigen Funktionen ist die T_4–Eigenschaft besonders wichtig.

Lemma 7.6 *Sei* X *ein* T_4*–Raum,* $A \subseteq X$ *abgeschlossen.* $f : A \to [-\lambda, \lambda]$, $\lambda \geq 0$, *sei stetig. Dann existiert* $g : X \to \big[-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}\big]$ *stetig mit* $|g(x) - f(x)| \leq \frac{2\lambda}{3}$ *für alle* $x \in A$.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $\lambda > 0$. Setze $B_1 := \big\{x \in A : \ f(x) \leq -\frac{\lambda}{3}\big\}$, $B_2 := \big\{x \in A : \ f(x) \geq \frac{\lambda}{3}\big\}$. Dann gilt $B_1 \cap B_2 = \emptyset$; B_1, B_2 sind abgeschlossen in

A. Da A abgeschlossen ist, sind B_1 und B_2 auch abgeschlossen in X. Mit Satz 7.4 existiert $h : X \to [0,1]$, $h|_{B_1} = 0$ und $h|_{B_2} = 1$.

Wir setzen $g : X \to \left[-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}\right]$, $g(x) = \frac{2\lambda}{3}h(x) - \frac{\lambda}{3}$. Zu zeigen ist, daß $|g(x) - f(x)| \leq \frac{2\lambda}{3}$ für alle $x \in A$. Wir haben dazu drei Fälle zu unterscheiden:

(i) $x \in B_1$: Dann ist $f(x) \leq -\frac{\lambda}{3}$, also $|g(x) - f(x)| = |-\frac{\lambda}{3} - f(x)| = -\frac{\lambda}{3} - f(x) \leq -\frac{\lambda}{3} + \lambda = \frac{2\lambda}{3}$.

(ii) $x \in B_2$: Dann ist $f(x) \geq \frac{\lambda}{3}$, also $|g(x) - f(x)| = |\frac{\lambda}{3} - f(x)| = f(x) - \frac{\lambda}{3} \leq \lambda - \frac{\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3}$.

(iii) $x \in A \setminus (B_1 \cup B_2)$: Dann ist $|f(x)| \leq \frac{\lambda}{3}$ und $|g(x)| \leq \frac{\lambda}{3}$, also $|g(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq \frac{2\lambda}{3}$.

$\square$

Satz 7.7 (Tietze) *X ist ein T_4–Raum genau dann, wenn zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ und jedem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und jedem $f : A \to I$ stetig eine stetige Funktion $g : X \to I$ existiert mit $g|_A = f$.*

Beweis. Sei zuerst die Existenz der Erweiterungen vorausgesetzt. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. $A \cup B$ ist abgeschlossen. Definiere $f : A \cup B \to [0,1]$ durch $f(a) = 0$ für alle $a \in A$, $f(b) = 1$ für alle $b \in B$. Nun ist $A = (A \cup B) \cap X \setminus B$, also ist A offen in $A \cup B$. Ebenso ist mit $B = (A \cup B) \cap X \setminus A$ auch B offen in $A \cup B$. Damit ist klar, daß f stetig ist, denn alle Urbilder von f sind $\emptyset$, $A \cup B$, A oder B.

Mit der Voraussetzung existiert eine stetige Funktion $g : X \to [0,1]$ mit $g|_{A\cup B} = f$. Insbesondere ist $g|_A = 0$, $g|_B = 1$. Mit der „einfacheren" Implikation des Satzes von Urysohn folgt, daß X T_4–Raum ist.

Sei nun X als T_4–Raum vorausgesetzt. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $f : A \to I$ stetig. Wir können $I = [-1,1]$ annehmen. Denn ist $I = [a,b]$, $a < b$ (daß I abgeschlossen ist, können wir offensichtlich durch Vergrößerung des Wertebereichs erreichen), so ist $\varphi : [a,b] \to [-1,1]$, $\varphi(t) = \frac{2}{b-a}t + \left(1 - \frac{2b}{b-a}\right)$. Betrachte dann statt f die Funktion $f' = \varphi \circ f$. Zu f' existiert dann (nachdem wir den Nachweis für $I = [-1,1]$ geführt haben) ein $g' : X \to [-1,1]$ mit $g'|_A = f'$. Setze dann $g = \varphi^{-1} \circ g'$. Die Funktion $g : X \to [a,b]$ ist stetig und $g|_A = \varphi^{-1} \circ g'|_A = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$. Sei also $f : A \to [-1,1]$ stetig. Wir konstruieren $g_n : X \to \mathbb{R}$ und finden die gesuchte Funktion als Grenzwert der g_n. Wir zeigen: Es existieren $g_n, h_n : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $g_{n+1} = g_n + h_n$ und

(1) $g_n : X \to \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

(2) $|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $x \in A$

(3) $h_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ mit $\left|f(x) - \left(g_n(x) + h_n(x)\right)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ für alle $x \in A$.

Wir führen die Konstruktion der g_n, h_n rekursiv. Für $n = 1$ benutze Lemma 7.6. Damit existiert $g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ stetig mit $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$. Nun betrachte $f - g_1|_A : A \to \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. $f - g_1|_A$ ist stetig. Nochmals mit Lemma 7.6 existiert $h_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right]$ stetig mit $|(f - g_1|_A)(x) - h_1(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ für alle $x \in A$. g_1 und h_1 erfüllen die Eigenschaften (1), (2), (3).

Seien nun $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_n$ bereits passend gefunden. Wie festgehalten ist $g_{n+1} = g_n + h_n$. Dann gelten:

zu (1): $g_{n+1}(x) = g_n(x) + h_n(x) \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ und $g_{n+1}(x) \geq -1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = -1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

zu (2): $|f(x) - g_{n+1}(x)| = \big|f(x) - \big(g_n(x) + h_n(x)\big)\big| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ nach Eigenschaft (3) für n.

zu (3): Betrachte $f - g_{n+1}|_A : A \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$. Mit Lemma 7.6 existiert $h_{n+1} : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ stetig mit $|h_{n+1}(x) - (f - g_{n+1}|_A)(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$.

Damit ist die rekursive Konstruktion von g_n, h_n erledigt.

Die $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g : X \to \mathbb{R}$ bilden eine Cauchy–Folge in dem Banachraum $C^b(X)$ ($C^b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} :$ stetig, beschränkt$\}$) mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Es gilt nämlich für $m > n$

$$\begin{aligned}\|g_n - g_m\|_\infty &= \sup_{x\in X} |g_n(x) - g_m(x)| = \sup_{x\in X} \Big|\sum_{k=n}^{m-1} h_k(x)\Big| \leq \sup_{x\in X} \sum_{k=n}^{m-1} |h_k(x)| \\ &\overset{(3)}{\leq} \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{m-1} \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \leq \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^k \longrightarrow 0 \quad \text{mit } n \to \infty.\end{aligned}$$

Da $C_b(X)$ vollständig ist, existiert $g : X \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt mit $\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_\infty = 0$. Mit (2) gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ und der Satz ist gezeigt, falls $I = [a, b]$.

Bleibt zu überlegen, ob die Wertebereiche von g auch halboffene bzw. offene Intervalle sind, falls dies bei f der Fall war.

Sei $I = [a, b)$. Ohne Einschränkung kann man $a = 0$, $b = 1$ annehmen. Ist $f : A \to [0, 1)$ $(\subseteq [0, 1])$, so existiert nach dem gerade Gezeigten ein $\tilde{g} : X \to [0, 1]$ stetig mit $\tilde{g}|_A = f$. Dann ist $B = \{x \in X : \tilde{g}(x) = 1\}$ abgeschlossen, und außerdem $A \cap B = \emptyset$, da $\tilde{g}(A) = f(A) \subseteq [0, 1)$. Mit dem Lemma von Urysohn (Satz 7.4) gibt es $g' : X \to [0, 1]$ stetig mit $g'|_A = 1$, $g'|_B = 0$. Setze nun $g(x) := \min\{\tilde{g}(x), g'(x)\}$, $g : X \to [0, 1]$. Für g gilt: $g|_B = g'|_B = 0$, und für $x \in X \setminus B$ gilt $g(x) \leq \tilde{g}(x) < 1$. Damit ist $g : X \to [0, 1)$ stetig. Außerdem gilt $g|_A = \tilde{g}|_A = f$.

Für den Fall $I = (a, b]$ ist ohne Einschränkung $a = -1$, $b = 0$. Betrachte $-f$ statt f, und man ist fertig.

Bleibt noch $I = (a, b)$. Ohne Einschränkung ist $a = -1$, $b = 1$. Zu $f : A \to (-1, 1)$ stetig setze $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ und $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Es gilt $f^+ : A \to [0, 1)$ ist stetig und $f^- : A \to [0, 1)$ ist stetig und $f = f^+ - f^-$. Wir wissen inzwischen, daß stetige Funktionen $g^+ : X \to [0, 1)$, $g^- : X \to [0, 1)$ existieren mit $f^+ = g^+|_A$ und $f^- = g^-|_A$. Setze $g = g^+ - g^-$. Dann hat man $g : X \to (-1, 1)$ stetig und $g|_A = f$.

$\square$

Das folgende Beispiel belegt, daß man beim Satz von Tietze nicht auf die Abgeschlossenheit von A verzichten kann.

Sei $X = [0,1]$ (mit der natürlichen Topologie) und $A = (0,1]$. Betrachte $f : (0,1] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. f ist stetig. Es kann kein $g : [0,1] \to [-1,1]$ stetig geben mit $g|_{(0,1]} = f$. Denn egal wie man $g(0) \in [-1,1]$ wählt, es gibt $x > 0$ beliebig klein mit $\left|\sin \frac{1}{x} - g(0)\right| \geq 1$.

Folgende Resultate sollten als Übungsaufgabe bearbeitet werden.

Proposition 7.8 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (abzählbare Basis für $\mathcal{O}$). Dann sind äquivalent:*

(a) X ist vollständig regulär

(b) X ist metrisierbar (d.h. $\mathcal{O}$ wird durch eine Metrik definiert)

(c) X ist normal.

Beweis. Übung.

Beispiel: (Übung)

Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0, \ n \in \mathbb{N}\}\Big)$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten natürlichen Topologie. Betrachte folgende Relation R auf X:

$$(x,y)R(z,w) \quad :\Longleftrightarrow \quad x = z.$$

Man zeige: Der Quotientenraum $X/_R$ ist Hausdorffsch, aber nicht vollständig regulär (nicht einmal regulär). X hingegen ist vollständig regulär.

8 Zusammenhängende Räume

Definition 8.1 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *heißt* ***zusammenhängend****, falls gilt:*

$$X = U_1 \cup U_2,\ \ U_1, U_2 \in \mathcal{O},\ \ U_1 \cap U_2 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad U_1 = \emptyset \quad \textit{oder} \quad U_2 = \emptyset.$$

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ *heißt zusammenhängend in* X*, falls* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *zusammenhängend ist.*

Bemerkung:

(1) $(X, \mathcal{O})$ ist zusammenhängend genau dann, wenn gilt:

$$X = A_1 \cup A_2,\ \ A_1, A_2 \in \mathscr{A},\ \ A_1 \cap A_2 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = \emptyset \quad \text{oder} \quad A_2 = \emptyset.$$

(2) $(X, \mathcal{O})$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $\emptyset$ und X die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X sind.

Beispiele:

(1) $(X, \mathcal{P}(X))$ (diskrete Topologie). $Y \subseteq X$ ist zusammenhängend genau dann, wenn $Y = \{x\}$, $x \in X$.

(2) $(X, \{\emptyset, X\})$ ist zusammenhängend (vergleiche Bemerkung (2)).

(3) $X = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit induzierter Topologie ($\neq$ diskrete Topologie).

$$Y \subseteq \mathbb{Q} \quad \text{ist zusammenhängend} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y = \{x\}.$$

Ist nämlich Y zusammenhängend und $x, y \in Y$, $x < y$ (ohne Einschränkung), so wähle $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$. Dann gilt $Y = \big(Y \cap (-\infty, a)\big) \cup \big(Y \cap (a, \infty)\big)$, $Y \cap (-\infty, a)$ und $Y \cap (a, \infty)$ sind offen und disjunkt und beide nichtleer, da $x \in Y \cap (-\infty, a)$ und $y \in Y \cap (a, \infty)$.

Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ nicht zusammenhängend ($\mathbb{Q}$ ist total unzusammenhängend, siehe später).

Lemma 8.2 *Sei* $Y \subseteq (X, \mathcal{O})$. Y *ist zusammenhängend (in* X*) genau dann, wenn gilt:*

$$U_1, U_2 \in \mathcal{O},\ \ Y \subseteq U_1 \cup U_2,\ \ Y \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad Y \subseteq U_1 \quad \textit{oder} \quad Y \subseteq U_2.$$

Beweis. Y zusammenhängend (in X) ist äquivalent zu: $(U_1 \cap Y) \cup (U_2 \cap Y) = Y$ und $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad U_1 \cap Y = \emptyset$ oder $U_2 \cap Y = \emptyset$. Da $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \emptyset$ äquivalent zu $Y \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $(U_1 \cap Y) \cup (U_2 \cap Y) = Y$ äquivalent zu $Y \subseteq U_1 \cup U_2$, folgt schließlich die Behauptung, da die rechten Seiten unter den Voraussetzungen äquivalent sind. $\square$

Lemma 8.3 *Seien* $Y_i \subseteq X$, $i \in I$*, zusammenhängende Teilmengen (in* X*) mit* $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$*. Dann ist* $\bigcup_{i \in I} Y_i$ *zusammenhängend (in* X*).*

Beweis. Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ mit $\bigcup_{i\in I} Y_i \subseteq U_1 \cup U_2$ und $\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Wir nehmen an, daß $\bigcup_{i\in I} Y_i \not\subseteq U_2$. Dann gibt es $i_0 \in I$ mit $Y_{i_0} \not\subseteq U_2$. Da Y_{i_0} zusammenhängend ist, muß $Y_{i_0} \subseteq U_1$ gelten (Lemma 8.2 angewendet auf Y_{i_0}; $Y_{i_0} \subseteq U_1 \cup U_2$, $Y_{i_0} \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$!).

Daraus folgt: $Y_i \subseteq U_1$ für alle $i \in I$. Tatsächlich ist $\emptyset \neq \bigcap_{i\in I} Y_i \subseteq Y_{i_0} \subseteq U_1$, also $Y_i \cap U_1 \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ und somit $Y_i \subseteq U_1$. Folglich $\bigcup_{i\in I} Y_i \subseteq U_1$. □

Korollar 8.4 *Seien* $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$ *zusammenhängende Teilmengen mit* $Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$ *für* $k = 1, \dots, n-1$. *Dann ist* $\bigcup_{k=1}^n Y_k$ *zusammenhängend.*

Beweis. Induktion über k: $\tilde{Y}_k := Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$ ist zusammenhängend mit Induktionsvoraussetzung. Mit $\tilde{Y}_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$ folgt aus Lemma 8.3, daß $\bigcup_{i=1}^{k+1} Y_i$ zusammenhängend ist. □

Satz 8.5 *Die zusammenhängenden Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *sind genau die Intervalle (d.h.* $[a,b]$ *für* $-\infty < a \leq b < \infty$*;* (a,b) *für* $-\infty \leq a < b \leq \infty$*;* $(a,b]$ *für* $-\infty \leq a < b < \infty$*;* $[a,b)$ *für* $-\infty < a < b \leq \infty$ *und* $\emptyset$*).*

Beweis.

(i) Als erstes zeigen wir, daß $[a,b]$, $a \leq b$ zusammenhängend ist. Angenommen $[a,b] = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathscr{A}$ und $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Da A und B abgeschlossen und beschränkt sind, gilt $x := \sup A \in A$ und $y := \sup B \in B$. Andererseits sind A und B auch offen in $[a,b]$. Insbesondere existiert $\delta > 0$ mit $(x-\delta, x+\delta) \cap [a,b] \subseteq A$. Also ist $x = b$. Die gleiche Argumentation liefert $y = b$, im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.

(ii) Nun zeigen wir die folgende Äquivalenz

$$(*) \qquad M \subseteq \mathbb{R} \quad \text{ist zusammenhängend} \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\text{für alle } x_1, x_2 \in M,\ x_1 \leq x_2 \text{ gilt } [x_1, x_2] \subseteq M.$$

Beweis von $(*)$. „$\Leftarrow$“: Sei $x \in M$ fest, $y \in M$. Betrachte $[x,y]$ falls $y \geq x$ oder $[y,x]$, falls $y < x$. Nach Voraussetzung ist $[x,y] \subseteq M$ bzw. $[y,x] \subseteq M$. Damit gilt

$$M = \bigcup_{y\in M, y\geq x} [x,y] \ \cup \bigcup_{y\in M, y<x} [y,x]$$

($[x,y]$, $[y,x]$ zusammenhängend wegen (i)).

Da $\bigcap_{y\in M, y\geq x}[x,y] \ \cap \ \bigcap_{y\in M, y<x}[y,x] \ni x$, folgt mit Lemma 8.3, daß M zusammenhängend ist.

„$\Rightarrow$“: Sei M zusammenhängend vorausgesetzt. Angenommen es existeren $x, y \in M$, $x < y$ mit $[x,y] \not\subseteq M$, so heißt dies, daß ein $a \in \mathbb{R} \setminus M$ existiert mit $x < a < y$. Dann gilt für $U_1 = (-\infty, a) \cap M$, $U_2 = (a, \infty) \cap M$: $M = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 offen in M, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, aber $x \in U_1$, $y \in U_2$. D.h. M ist nicht zusammenhängend, ein Widerspruch.

(iii) Wir benutzen nun die Charakterisierung von $(*)$. Ist M ein Intervall, so erfüllte M die rechts–stehende Eigenschaft in $(*)$, ist also zusammenhängend.

Erfüllt M umgekehrt diese Eigenschaft (weil M zusammenhängend vorausgesetzt ist), so überlegen wir, daß M ein Intervall ist. Tatsächlich erhält man mit Fallunterscheidung:

1. Fall: M beschränkt. Dann existieren $\inf M$, $\sup M$ in $\mathbb{R}$.

(a) $\inf M, \sup M \in M \quad \overset{(ii)}{\Rightarrow} \quad [\inf M, \sup M] \subseteq M$
$\Rightarrow \quad [\inf M, \sup M] = M$.

(b) $\inf M \in M$, $\sup M \notin M$. seien $x_n \in M$ monoton wachsend mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup M \quad \Rightarrow \quad [\inf M, x_n] \subseteq M$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\inf M, x_n] \subseteq M$. Mit $x_n \to \sup M$ gilt sogar $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\inf M, x_n] = M$. Andererseits ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\inf M, x_n] = [\inf M, \sup M)$.

(c) $\inf M \notin M$, $\sup M \in M$,

(d) $\inf M \notin M$, $\sup M \notin M$,

2. Fall: M nicht nach unten beschränkt und nach oben beschränkt,

3. Fall: M beschränkt nach unten und nicht nach oben beschränkt,

4. Fall: M beidseitig unbeschränkt,

werden analog behandelt. □

Kehren wir zu allgemeinen topologischen Räumen zurück.

Proposition 8.6 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $A \subseteq X$ sei zusammenhängend, und für $B \subseteq X$ gelte $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \subseteq X$. Dann ist auch B zusammenhängend.*

Beweis. Sei $B \subseteq U_1 \cup U_2$, $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, $B \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann ist auch $A \subseteq U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Da A zusammenhängend ist, gilt (ohne Einschränkung) $A \subseteq U_1$ (vergleiche Lemma 8.2). Aus $A \subseteq U_1$, $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ folgt $A \cap U_2 = \emptyset$, also $A \subseteq X \setminus U_2$. Da $X \setminus U_2$ abgeschlossen ist, folgt $B \subseteq \overline{A} \subseteq X \setminus U_2$. $B \subseteq X \setminus U_2$, $B \subseteq U_1 \cup U_2$ impliziert $B \subseteq U_1$. Mit Lemma 8.2 ist B zusammenhängend. □

Bemerkung: Mit Proposition 8.6 hat man insbesondere:

$$A \text{ zusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \text{ zusammenhängend.}$$

Satz 8.7 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ sei zusammenhängend. Dann existiert eine größte zusammenhängende Teilmenge in X, die M enthält.*

Die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die $x \in X$ ($M = \{x\}$) enthält, heißt die ***Zusammenhangskomponente*** *von x. Es gelten:*

(a) Jede zusammenhängende Teilmenge von X liegt in (exakt) einer Zusammenhangskomponente.

(b) Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

(c) Verschiedene Zusammenhangskomponenten sind disjunkt.

Beweis. Sei $\emptyset \neq M$ zusammenhängend. Offensichtlich gilt:

$$M \subseteq \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \text{ zushgd.} \\ M \subseteq Y}} Y \quad \text{und} \quad M \subseteq \bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ zushgd.} \\ M \subseteq Y}} Y.$$

Mit Lemma 8.3 ist $\bigcup_{\substack{Y \subseteq X \text{ zushgd.} \\ M \subseteq Y}} Y$ zusammenhängend (dies ist die größte zusammenhängende Menge, die M enthält). Mit Proposition 8.6 folgt, daß $\overline{\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ zushgd.} \\ M \subseteq Y}} Y}$ auch zusammenhängend ist. Also ist $\bigcap_{\substack{Y \subseteq X \text{ zushgd.} \\ M \subseteq Y}} Y$ abgeschlossen, insbesondere ist (b) gezeigt.

(a) ist klar. Bleibt (c) zu prüfen. Wären K_1, K_2 zwei Zusammenhangskomponenten mit $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Dann wäre $K_1 \cup K_2$ zusammenhängend (Lemma 8.3). Mit der Maximalität folgt $K_1 = K_2$. □

Definition 8.8 *Ein topologischer Raum X heißt* ***total unzusammenhängend****, wenn für jedes $x \in X$ die Zusammenhangskomponente von x gleich $\{x\}$ ist.*

Beispiel: Das Cantorsche Diskontinuum (siehe Seite 24) ist total unzusammenhängend.

In enger Verbindung zum Begriff Zusammenhang steht der Zwischenwertsatz.

Proposition 8.9 *Seien X und Y zwei topologische Räume, X sei zusammenhängend. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Indem wir $f : X \to f(X)$ betrachten, können wir f surjektiv annehmen. Ist $M \subseteq f(X)$ offen und abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(M)$ offen und abgeschlossen in X. Somit ist $f^{-1}(M) = \emptyset$ oder $f^{-1}(M) = X$. $f^{-1}(M) = \emptyset$ impliziert $M = \emptyset$, und $f^{-1}(M) = X$ impliziert $M = Y$. D.h. $Y = f(X)$ ist zusammenhängend. □

Korollar 8.10 *Sei X zusammenhängend, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Sind $s, t \in f(X)$, so nimmt f jeden Wert zwischen s und t an.*

Beweis. Mit Proposition 8.9 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend. Mit dem Beweisschritt (ii) von Satz 8.5 folgt direkt die Behauptung. □

Mit Blick auf den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ ist das folgende Resultat zu kartesischen Produkten wichtig.

Satz 8.11 *Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume. Es gilt: $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist zusammenhängend genau dann, wenn alle X_i, $i \in I$, zusammenhängend sind.*

Beweis. Ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend, so ist mit Proposition 8.9 auch $p_i(X) = X_i$ zusammenhängend ($p_i : X \to X_i$ Projektion).

Die umgekehrte Beweisrichtung wird in drei Schritten bearbeitet.

(1) $I = \{1,2\}$, $X = X_1 \times X_2$, X_1, X_2 zusammenhängend. Zu $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ betrachte die stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} X_2 &\to \{x_1\} \times X_2 & \qquad y &\mapsto (x_1, y) \\ X_1 &\to X_1 \times \{x_2\} & \qquad x &\mapsto (x, x_2) \end{aligned}$$

Mit Proposition 8.9 sind $\{x_1\} \times X_2$ und $X_1 \times \{x_2\}$ zusammenhängend. Mit Lemma 8.3 ist $(\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$ zusammenhängend, da $(x_1, x_2) \in (\{x_1\} \times X_2) \cap (X_1 \times \{x_2\})$. Für festes $x_2 \in X_2$ betrachte

$$\bigcup_{x_2 \in X_2} (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\}).$$

Diese Menge ist zusammenhängend wiederum mit Lemma 8.3, denn für jedes $y \in X_2$ gilt: $(x_1, y) \in \bigcap_{x_2 \in X_2} (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$. Nun ist aber $X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} (\{x_1\} \times X_2) \cup (X_1 \times \{x_2\})$.

(2) I endlich. Mit Induktion folgt: $\prod_{i \in I} X_i$ ist zusammenhängend (Schritt wie in (1)).

(3) I beliebig. Sei $x = (x_i)_{i \in I} \in X = \prod_{i \in I} X_i$. $K = K(x)$ sei die Zusammenhangskomponente von x. Wir zeigen $K = X$. Es genügt zu zeigen, daß K dicht in X liegt, da K abgeschlossen ist. Eine Basis der Topologie von X bilden die Mengen

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}), \qquad U_{i_k} \subseteq X_{i_k} \text{ offen.}$$

Zu zeigen ist $K \cap U \neq \emptyset$ für alle derartigen U. Wähle $y_{i_k} \in U_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$, fest, und setze $y = (y_i)_{i \in I}$ mit

$$y_i := \begin{cases} y_{i_k} & \text{für } i = i_k,\ k = 1, \ldots, n \\ x_i & \text{für } i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}. \end{cases}$$

Damit ist $y \in U$. Wir zeigen nun: Es gibt eine zusammenhängende Teilmenge $S \subseteq K$ mit $x, y \in S$. Dann gilt ja $S \subseteq K = K(x)$, also $y \in K$, d.h. $y \in K \cap U \neq \emptyset$. Setze also

$$S := \big\{ z \in X : \ z_i = x_i \text{ für alle } i \notin \{i_1, \ldots, i_n\} \big\}.$$

Damit ist $x, y \in S$. S ist auch zusammenhängend. Dazu betrachte folgende Abbildung

$$\prod_{k=1}^{n} X_{i_k} \to S, \qquad (z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}) \mapsto z = (z_i)_{i \in I},$$

$$\text{wobei } z_i = \begin{cases} z_{i_k} & \text{für } i = i_k,\ k = 1, \ldots, n \\ x_i & \text{für } i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig. Mit (2) und Proposition 8.9 ist S zusammenhängend. □

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch der Begriff des Wegzusammenhangs erläutert.

Definition 8.12 *Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $w : [0,1] \to X$ heißt* ***Weg*** *(oder Bogen) in X. X heißt* ***wegzusammenhängend,*** *wenn es zu $x, y \in X$ einen Weg w in X gibt mit $w(0) = x$, $w(1) = y$. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, falls $(Y, \mathcal{O}_Y)$ wegzusammenhängend ist.*

Proposition 8.13 *Ein wegzusammenhängender Raum X ist auch zusammenhängend.*

Beweis. Wähle $x \in X$ fest. Zu jedem $y \in X$ existiert $w_y : [0,1] \to X$ stetig mit $w_y(0) = x$, $w_y(1) = y$. $w_y([0,1])$ ist zusammenhängend mit Proposition 8.9. Da $x \in \bigcap_{y \in X} w_y([0,1])$ ist mit Lemma 8.3 auch $X = \bigcup_{y \in X} w_y([0,1])$ zusammenhängend. □

Die Umkehrung von Proposition 8.13 gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

Die Resultate 8.9 und Satz 8.11 gelten sinngemäß auch für wegzusammenhängende Räume (Übungsaufgaben).

Beispiel: Bezeichne $X := \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $Y := \{(x, \sin\frac{\pi}{x}) : 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Man beachte $X \subseteq \overline{Y}$ und Y ist wegzusammenhängend (Nachweis zur Übung).

Es gilt: $X \cup Y$ ist zusammenhängend, aber **nicht** wegzusammenhängend.

Beweis dazu: Y ist wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend. Mit $Y \subseteq X \cup Y \subseteq \overline{Y}$ ist $X \cup Y$ zusammenhängend (siehe Proposition 8.6).

$X \cup Y$ ist nicht wegzusammenhängend. Angenommen es gibt $w : [0,1] \to X \cup Y$ stetig mit $w(0) = (0,0)$ und $w(1) = (1,0)$. Schreibe $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$, w_1, w_2 stetig. Da $X \subseteq X \cup Y$ abgeschlossen, ist auch $w^{-1}(X) \subseteq [0,1]$ abgeschlossen. Mit $w(0) = (0,0)$ gilt $0 \in w^{-1}(X)$. Bezeichne $s = \sup w^{-1}(X)$. Da $w^{-1}(X)$ abgeschlossen ist, haben wir $s \in w^{-1}(X)$, insbesondere gilt $w_1(s) = 0$. Wir zeigen nun, daß w_2 **nicht** stetig in s ist. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß $w_2(s) \leq 0$ ($w_2(s) \geq 0$ behandelt man analog). Es gilt $0 \leq s < 1$ (da $w(1) = (1,0) \notin X$). Für alle $\delta > 0$ mit $s + \delta \leq 1$ gilt dann $w_1(s+\delta) > 0$ (sonst $(w_1(s+\delta), w_2(s+\delta)) \in X$, d.h. $s+\delta \in w^{-1}(X)$, aber $s \in \sup w^{-1}(X)$). Wähle $n \in \mathbb{N}$: $0 = w_1(s) < \frac{2}{4n+1} < w_1(s+\delta)$. Mit dem Zwischenwertsatz existiert $t \in (s, s+\delta)$ mit $w_1(t) = \frac{2}{4n+1}$. Dann ist $w_2(t) = \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} = 1$, also $w_2(t) - w_2(s) \geq 1$, d.h. w_2 ist nicht stetig in s, ein Widerspruch. □

9 Konvergenz und Filter

In metrischen Räumen läßt sich Konvergenz über Folgen definieren. In allgemeinen topologischen Räumen reicht dieser Begriff jedoch nicht aus. Dieser Abschnitt beschreibt die allgemeineren Begriffe, die zu einem Verständnis von Konvergenz in topologischen Räumen führen.

Definition 9.1 (Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ ***konvergiert*** *gegen einen Punkt $x \in X$ (in Zeichen $x_n \to x$), falls für alle $U \in \mathscr{U}(x)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U\ \forall n \geq n_0$. x heißt dann auch* ***Limespunkt****.*

Ein Punkt $x \in X$ heißt ***Häufungspunkt*** *der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für alle $U \in \mathscr{U}(x)$ gilt: $|\{i \in \mathbb{N} : x_i \in U\}| = \infty$ (d.h. in jeder Umgebung von x liegen unendlich viele Folgenglieder).*

Bemerkung: Es genügt, sich auf eine Umgebungsbasis zu beschränken.

In metrischen Räumen lassen sich topologische Begriffe wie Berührpunkt, Randpunkt oder Stetigkeit über Folgen definieren. In beliebigen topologischen Räumen gilt das nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Sei $(X, \mathcal{O}) = \prod_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, also $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Punkte in X werden mit $f = (f(t))_{t\in\mathbb{R}}$ identifiziert. Umgebungsbasis ist das Mengensystem

$$\Big\{\prod_{t\in\mathbb{R}} U_t :\ U_t \in \mathscr{U}(f(t)), t \in \mathbb{R},\ \text{wobei } U_t = \mathbb{R} \text{ für } t \in \mathbb{R}\setminus E,\ E \subseteq \mathbb{R} \text{ endlich}\Big\}$$

o.B.d.A. kann man

$$U_t = B_\varepsilon(f(t)) = \{s \in \mathbb{R} :\ |f(t) - s| < \varepsilon\} \qquad (t \in E)$$

setzen. Damit folgt

$$\prod_{t\in\mathbb{R}} U_t = \big\{g \in X :\ \forall t \in E :\ |f(t) - g(t)| < \varepsilon\big\} \quad =: \quad V(f, E, \varepsilon).$$

Die Umgebungsbasis wird dann durch

$$\mathfrak{V}(f) := \{V(f, E, \varepsilon) :\ E \subseteq \mathbb{R},\ E \text{ endlich},\ \varepsilon > 0\}$$

definiert.

Eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach dieser Topologie gegen $f \in X$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \forall V(f, E, \varepsilon) :\ \exists i_0 \in \mathbb{N} :\ \forall i \geq i_0 :\ f_i \in V(f, E, \varepsilon) \\ \iff\ & \forall E \subseteq \mathbb{R},\ E \text{ endlich} :\ f_i \to f \text{ auf } E \\ \iff\ & \forall t \in \mathbb{R} :\ f_i(t) \to f(t) \\ \iff\ & (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert punktweise gegen } f \end{aligned}$$

Die hier beschriebene Topologie heißt **Topologie der punktweisen Konvergenz** auf $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Wir zeigen nun, daß es für die Menge $M := \{f \in X : f(\mathbb{R}) \subseteq \{0,1\},\ f(t) = 1$ für fast alle $t \in \mathbb{R}\}$ einen Punkt im Abschluß von M gibt, der durch keine Folge in M erreicht werden kann.

Betrachte dazu $f_0(t) \equiv 0$ (Nullfunktion).

Behauptung 1: $f_0 \in \overline{M}$. Zu zeigen: jede Umgebung $V(f_0, E, \varepsilon)$ schneidet M. Betrachte

$$g \in X, \qquad g(t) := \begin{cases} 0 & t \in E \\ 1 & t \in \mathbb{R} \setminus E. \end{cases}$$

Dann gilt $g \in M$ und $g \in V(f_0, E, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$. Also ist $f_0 \in \overline{M}$.

Behauptung 2: Keine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in M konvergiert gegen f_0. Es gibt endliche Mengen $E_i \subseteq \mathbb{R}$ mit $f_i(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus E_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Falls also f_i gegen f_0 konvergiert, so gilt

$$t \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus E_i = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i : \qquad f_0(t) = 1,$$

wobei $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \neq \mathbb{R}$, da $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ höchstens abzählbar. Das wäre aber ein Widerspruch zu $f_0 \equiv 0$.

Bemerkung (ohne Beweis): Im Gegensatz zur Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf einem abgeschlossenen Intervall ist die Topologie der punktweisen Konvergenz nicht metrisierbar. Ein Grund dafür ist das Fehlen des 1. Abzählbarkeitsaxioms.

Proposition 9.2 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

(a) Für $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$ und $x \in X$ gilt:

$$x \in \overline{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq M : \quad x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} x.$$

(b) Für $O \subseteq X$ gilt:

$$O \in \mathcal{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X : \big(x_i \to x \in O \;\Rightarrow\; \exists i_0 \in \mathbb{N} : \ x_i \in O \ \forall i \geq i_0\big)$$

(c) Für $A \subseteq X$ gilt:

$$A \in \mathscr{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A : \big(x_i \to x \;\Rightarrow\; x \in A\big).$$

Beweis.

(a) „$\Rightarrow$“: Sei $x \in \overline{M}$. Da X A1–Raum, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathfrak{V}(x) = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ von x. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V_{i+1} \subseteq V_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (sonst gehe zu $V_1, V_1 \cap V_2, \ldots, V_1 \cap \ldots \cap V_i, \ldots$ über). Da $x \in \overline{M}$ gilt $V_i \cap M \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wähle ein $x_i \in V_i \cap M$ pro $i \in \mathbb{N}$. Dann folgt $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \to x$.

„$\Leftarrow$“: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq M$, $x_i \to x$, d.h. für alle $U \in \mathscr{U}(x)$ gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{i_0} \in U$, also $x_{i_0} \in U \cap M$. Also ist $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathscr{U}(x)$, d.h. $x \in \overline{M}$.

(b) „$\Rightarrow$“: klar, da $O \in \mathscr{U}(x)$.

„$\Leftarrow$“: Sei $A := \complement O$. Wir zeigen: A ist abgeschlossen. Nach (a) existiert zu $x \in \overline{A}$ eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_i \to x$. *Annahme:* $x \notin A$, also $x \in O$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_i \in O = \complement A$ für alle $i \geq i_0$, im Widerspruch zu $x_i \in A$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\overline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

(c) „$\Rightarrow$“: Sei $A \in \mathscr{A}$ und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_i \to x$. *Annahme:* $x \notin A$, also $x \in \complement A \in \mathcal{O}$. Nach (b) existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_i \in O$ für alle $i \geq i_0$, im Widerspruch zu $x_i \in A$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \in \overline{A}$. Nach (a) existiert eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \to x$. Dann sagt die Voraussetzung aber, daß $x_i \to x \in A$, also $\overline{A} = A$. □

Übungsaufgabe: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer A1–Raum. Sei $(X', \mathcal{O}')$ ein topologischer Raum und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Dann gilt für $x \in X$:

$$f \text{ stetig in } x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X \text{ mit } x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow}: \quad f(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Eine dem obigen Beispiel adäquate Konvergenztheorie liefert der Begriff des Filters, die auf H. Cartan 1937 zurückgeht.

Definition 9.3 *(a) Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Filter** auf X, wenn gilt:*

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) $F \in \mathcal{F}$ und $F \subseteq M \;\Rightarrow\; M \subseteq \mathcal{F}$, wobei $M \subseteq X$.

(iii) $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

*(b) Ein Teilsystem $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ heißt **Filterbasis** (oder **Raster**) für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X, wenn gilt*

$$\forall F \in \mathcal{F}\; \exists G \in \mathcal{G} : \; G \subseteq F.$$

Beispiele:

(i) Sei X eine Menge mit $\emptyset \neq A \subseteq X$. Dann ist $\mathcal{F} := \{F \subseteq X : \; A \subseteq F\}$ ein Filter auf X. $\mathscr{B} := \{A\}$ ist eine Basis für $\mathcal{F}$.

(ii) Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. Die Menge $\mathscr{U}(x)$ der Umgebungen eines Punktes $x \in X$ ist ein Filter auf X, der **Umgebungsfilter** von x.

(iii) Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge X. Das System $\mathcal{B}$ der Mengen $B_k := \{x_i : i \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, definiert eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X. $\mathcal{F}$ heißt der **von der Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erzeugte Filter**.

Für eine verallgemeinerte Konvergenztheorie kann man für einen Punkt $x \in X$ sein Umgebungssystem als Indexmenge für „Folgen“ nehmen. Dies ist der Grundgedanke des Filterkonzepts. Bevor wir zur Konvergenz von Filtern gelangen, folgen noch ein paar allgemeinere Begriffe.

Definition 9.4 *(a) Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **frei**, wenn $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$, und **fixiert**, wenn $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$.*

*(b) Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ zwei Filter auf X. $\mathcal{F}_1$ heißt **feiner** als $\mathcal{F}_2$ und entsprechend $\mathcal{F}_2$ **gröber** als $\mathcal{F}_1$, wenn $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$.*

*(c) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt **Ultrafilter**, wenn es keinen Filter auf X gibt, der echt feiner ist als $\mathcal{F}$.*

Beispiele:

(i) $\mathscr{B} := \{(a,\infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$ ist Basis eines Filters $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ heißt **Fréchet–Filter** auf $\mathbb{R}$. Dies ist ein freier Filter.

(ii) Der Umgebungsfilter eines Punktes ist ein fixierter Filter.

Satz 9.5 *Jeder Filter $\mathcal{F}$ ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Sei Φ die Menge aller Filter, die feiner sind als $\mathcal{F}$. Φ ist durch $\subseteq$ eine geordnete Menge. Sei Φ_1 eine linear geordnete Teilmenge von Φ. Dann ist $\bigcup_{\mathcal{F}\in\Phi_1} \mathcal{F}$ eine obere Schranke von Φ_1 (beachte: $\bigcup_{\mathcal{F}\in\Phi_1} \mathcal{F}$ ist wieder ein Filter; (i) ist klar; (ii), (iii) klar, da $\mathcal{F} \in \Phi_1$ alle Filter sind). Φ ist demnach induktiv geordnet. Nach dem Zornschen Lemma besitzt Φ ein maximales Element $\mathcal{G}$. Dies ist der gesuchte Ultrafilter. □

Bemerkung: Dieser Ultrafilter ist i.a. jedoch nicht eindeutig bestimmt.

Satz 9.6 *$\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter auf X, wenn für alle $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ kann es in einem Filter $\mathcal{F}$ keine zwei Mengen F_1 und F_2 geben mit $F_1 \subseteq A$ und $F_2 \subseteq X \setminus A$. Also schneiden alle Elemente aus $\mathcal{F}$ entweder A oder $X \setminus A$. Angenommen $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann ist $\{F \cap A : \ F \in \mathcal{F}\}$ eine Basis für einen Filter $\mathcal{G}$, der feiner ist als $\mathcal{F}$ und A enthält. Da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Der Fall $F \cap \complement A$ für alle $F \in \mathcal{F}$ wird analog geführt.

Sei nun für alle $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $\complement A \in \mathcal{F}$. *Annahme:* $\mathcal{G}$ sei feiner als $\mathcal{F}$, d.h. es gibt $G \in \mathcal{G}$ mit $G \notin \mathcal{F}$, also $X \setminus G \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Da aber G und $\complement G$ nicht zugleich in $\mathcal{G}$ sein können, haben wir einen Widerspruch zu (iii). Also muß $\mathcal{F}$ schon Ultrafilter gewesen sein. □

Korollar 9.7 *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein fixierter Ultrafilter, wenn $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : \ x \in F\}$ für ein $x \in X$.*

Definition 9.8 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*

*(a) Ein Filter $\mathcal{F}$ **konvergiert** gegen $x \in X$ (in Zeichen: $\mathcal{F} \to x$), falls $\mathcal{F} \supseteq \mathscr{U}(x)$. x heißt dann **Limespunkt** von $\mathcal{F}$.*

(b) $x \in X$ *heißt* ***Berührpunkt*** *des Filters* $\mathcal{F}$*, falls* $F \cap U \neq \emptyset$ *für alle* $U \in \mathscr{U}(x)$ *und für alle* $F \in \mathcal{F}$*. Die Menge der Berührpunkte eines Filter ist demnach* $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Beispiele:

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$. $\mathcal{F}$ sei der von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugte Filter auf X. Dann gilt für $x \in X$:

$$x \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff x \text{ ist Berührpunkt von } \mathcal{F}.$$

(ii) Der Fréchet–Filter auf $\mathbb{R}$ besitzt keine Berührpunkte.

(iii) $(X, \mathcal{O})$ sei topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine Menge. $\overline{A}$ ist genau die Menge der Berührpunkte des Filters $\mathcal{F} := \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$.

Satz 9.9 *Sei* X *eine Menge. Ein Punkt* $x \in X$ *ist genau dann Berührpunkt eines Filters* $\mathcal{F}$ *auf* X*, wenn es einen Filter* $\mathcal{G}$ *auf* X *gibt mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathcal{G}$ *ist feiner als* $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{G}$ *konvergiert gegen* x.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei x Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$. Dann definiert $\{U \cap F : U \in \mathscr{U}(x),\ F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{G}$. Klar ist: $\mathcal{G}$ ist feiner als $\mathcal{F}$ und konvergiert per definitionem gegen x.

„$\Leftarrow$“: Da $\mathcal{G} \to x$ gilt für alle $U \in \mathscr{U}(x)$ $U \in \mathcal{G}$. Ebenso gilt für alle $F \in \mathcal{F}$ $F \in \mathcal{G}$, da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Folglich ist $U \cap F \neq \emptyset$ (da $\mathcal{G}$ ein Filter ist), d.h. x ist Berührpunkt von $\mathcal{F}$. □

Der folgende Satz ist das Analogon zu Proposition 9.2.

Satz 9.10 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum.*

(a) Für $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$ *und* $x \in X$ *gilt*

$$x \in \overline{M} \iff \exists \text{ Filter } \mathcal{F} \text{ auf } X: \quad M \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} \to x.$$

(b) Für $O \subseteq X$ *gilt*

$$O \in \mathcal{O} \iff \forall \text{ Filter } \mathcal{F} \text{ auf } X: \quad (\mathcal{F} \to x \in O \quad \Rightarrow \quad O \in \mathcal{F})$$

(c) Für $A \subseteq X$ *gilt*

$$A \in \mathscr{A} \iff \forall \text{ Filter } \mathcal{F} \text{ auf } X \text{ mit } A \in \mathcal{F}: \quad (\mathcal{F} \to x \quad \Rightarrow \quad x \in A)$$

Beweis.

(a) „$\Rightarrow$“: Sei $x \in \overline{M}$. Dann ist $\{U \cap M : U \in \mathscr{U}(x)\}$ Basis eines Filters $\mathcal{G}$. $M \in \mathcal{G}$ und per definitionem $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$, d.h. $\mathcal{G} \to x$.

„$\Leftarrow$“: Wegen $\mathcal{F} \to x$ folgt $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathscr{U}(x)$, falls $M \in \mathcal{F}$, d.h. aber $x \in \overline{M}$.

(b) „$\Rightarrow$“: Sei $O \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \to x \in \mathcal{O}$. Dann existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subseteq O$. Wegen $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ folgt $U \in \mathcal{F}$ und damit $O \in \mathcal{F}$.

„$\Leftarrow$“: Wir zeigen: $A := \complement O \in \mathscr{A}$. Sei $x \in \overline{A}$. Nach (a) existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $A \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$. Annahme: $x \notin A$, d.h. $x \in O$, dann ist nach Voraussetzung $O \in \mathcal{F}$, also $O \cap A \neq \emptyset$, da $O \cap A \in \mathcal{F}$, ein Widerspruch. Also ist $\overline{A} \subseteq A \subseteq A$.

(c) „$\Rightarrow$“: Sei $A \in \mathscr{A}$ und $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \to x$, $A \in \mathcal{F}$. Annahme: $x \notin A$, d.h. $x \in \complement A =: O \in \mathcal{O}$. Nach (b) folgt dann $O \in \mathcal{F}$, was abermals den Widerspruch $A \cap O \neq \emptyset$ erzeugt. Also ist $x \in A$.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \in \overline{A}$. Nach (a) gibt es einen Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $A \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$. Nach Voraussetzung folgt dann aber $x \in A$, d.h. $\overline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$. □

Bemerkung: Der Beweis folgt analog dem Beweis von Proposition 9.2, denn dort liegt bereits das abstraktere Konzept des Filters zugrunde.

Übung: Seien $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Man zeige:

f stetig in $x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall$ Filter $\mathcal{F}$ auf X gilt: $\big(\mathcal{F} \to x \quad \Rightarrow \quad f(\mathcal{F}) \to f(x)\big)$. $f(\mathcal{F})$ ist dabei der von $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter auf X'. Dieser Filter wird auch **Bildfilter** genannt.

Wir zeigen nun noch eine interessante Charakterisierung von Hausdorff–Räumen.

Satz 9.11 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$ *ist genau dann ein Hausdorff–Raum, wenn für alle Filter* $\mathcal{F}$ *auf* X *gilt*

$$(\mathcal{F} \to x \in X \textit{ und } \mathcal{F} \to y \in X) \quad \Rightarrow \quad x = y. \qquad (*)$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$ ein solcher Filter auf X. Dann gilt für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und für alle $V \in \mathcal{U}(y)$: $U \cap V \in \mathcal{F}$, insbesondere $U \cap V \neq \emptyset$. Wäre $x \neq y$, so widerspricht dies der T_2–Eigenschaft, nach der insbesondere zwei offene Umgebungen existieren, die x und y trennen.

„$\Leftarrow$“: X besitze die Eigenschaft $(*)$. Annahme: x sei kein T_2–Raum. Dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$, so daß $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ und $\forall V \in \mathcal{U}(y)$: $U \cap V \neq \emptyset$. Dann definiert $\{U \cap V : \ U \in \mathcal{U}(x),\ V \in \mathcal{U}(y)\}$ die Basis eines Filters $\mathcal{F}$ auf X. Da $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(y) \subseteq \mathcal{F}$ folgt $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$ mit $x \neq y$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. □

Bemerkung: Hausdorff–Räume sind also genau die topologischen Räume, in denen konvergente Filter einen eindeutigen Limes besitzen. Insbesondere gibt es Räume, in welchen der Limes nicht eindeutig ist.

Beispiel: Betrachte $(X, \mathcal{O}_{\text{indis}})$ mit $|X| \geq 2$. Sei $\mathcal{F}$ der von X erzeugte Filter, also $\mathcal{F} = \{X\}$. Dann gilt: $\mathcal{F} \to x$ für alle $x \in X$, denn $\mathcal{U}(x) = \{X\} = \mathcal{F}$.

Der Rest dieses Abschnitts stellt noch eine Verallgemeinerung von Folgen vor, die ab und an einmal auftaucht. In der topologischen Literatur werden jedoch zumeist Filter verwendet.

Definition 9.12 *(a) Eine Menge* I *heißt* ***gerichtet****, wenn auf ihr eine Relation* $\leq$ *mit den folgenden Eigenschaften definiert ist:*

(i) $\forall i \in I: \quad i \leq i.$

(ii) $i_1 \leq i_2,\ i_2 \leq i_3 \quad \Rightarrow \quad i_1 \leq i_3 \quad (i_1, i_2, i_3 \in I).$

(iii) $i_1 \leq i_2$ *und* $i_2 \leq i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_2 \quad (i_1, i_2 \in I).$

(iv) zu $i_1, i_2 \in I$ *gibt es ein* $i_3 \in I$ *mit* $i_1 \leq i_3$ *und* $i_2 \leq i_3$*.*

Mit $i_1 < i_2$ *bezeichnet man Elemente, für die* $i_1 \leq i_2$ *und nicht* $i_2 \leq i_1$ *gilt.*

(b) Ein ***Netz*** *(oder eine* ***Moore–Smith Folge****) in einer Menge* X *ist eine Abbildung* $\Phi : I \to X,\ i \mapsto x_i$ *einer gerichteten Menge* I *in die Menge* X*. Man schreibt auch* $(x_i)_{i\in I}$ *statt* Φ*.*

Beispiele:

(a) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Netz mit Indexmenge $\mathbb{N}$.

(b) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Das Umgebungssystem $\mathscr{U}(x)$ wird bezüglich der Relation „$\subseteq$" zu einer gerichteten Menge. Man definiert: $(x_U)_{U\in\mathscr{U}(x)}$ konvergiert gegen x, wenn für alle $U \in \mathscr{U}(x):\ x_U \in U$.

Allgemein definiert man:

Definition 9.13 *Ein Netz* $(x_i)_{i\in I}$ *in einem topologischen Raum* $(X, \mathcal{O})$ *heißt* ***konvergent*** *gegen* $x \in X$*, falls für alle* $U \in \mathscr{U}(x)$ *gilt:* $\exists i_0 \in I:\ x_i \in U\ \forall i \geq i_0$*.*

Damit ist der folgende Satz ein Analogon zu Proposition 9.2 und die darauf folgende Übung.

Satz 9.14 *Seien zwei topologische Räume* $(X, \mathcal{O})$ *und* $(X', \mathcal{O}')$ *gegeben.*

(a) Für $A \subseteq X$ *gilt:* $\quad x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists$ *Netz* $(x_i)_{i\in I}$ *in* A *mit* $x_i \to x$*.*

(b) Eine Funktion $f : X \to X'$ *ist stetig in* $x \in X$ *genau dann, wenn für alle Netze* $(x_i)_{i\in I}$ *in* X *mit* $x_i \to x$ *gilt:* $\big(f(x_i)\big)_{i\in I} \to f(x)$ *in* X'*.*

Beweis. Analog Proposition 9.2(a) und die folgende Übung. □

10 Kompaktheit

Definition 10.1 *Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. X heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung von X besitzt. D.h. ist $X = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{O}$, so gibt es $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n S_i$.*

$M \subseteq X$ heißt kompakt, falls $(M, \mathcal{O}_M)$ kompakt ist. $M \subseteq X$ heißt relativ kompakt, falls $\overline{M} \subseteq X$ kompakt ist.

Proposition 10.2 *X ist genau dann kompakt, wenn jede Familie $(A_i)_{i \in I}$, $A_i \in \mathscr{A}$ mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ endlich viele $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ mit $\bigcap_{j=1}^n A_{i_j} = \emptyset$ enthält.*

Beweis. Folgt direkt mit Komplementbildung. □

Proposition 10.3 *Ist X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.*

Beweis. Bilde $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{O}_A$ eine Überdeckung von A, d.h. $A = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$. Dann existieren $S' \in \mathcal{O}$ mit $S = S' \cap A$. Betrachte $\mathfrak{S}' = \{S' : S \in \mathfrak{S}\} \cup \{X \setminus A\}$. $\mathfrak{S}'$ ist eine offene Überdeckung von X. Somit existieren $S_1', \ldots, S_n'$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n S_i' \cup (X \setminus A)$ und folglich $A = \bigcup_{i=1}^n S_i' \cap A = \bigcup_{i=1}^n S_i$. □

Proposition 10.4 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff–Raum, $M \subseteq X$. Ist M kompakt, so ist M abgeschlossen.*

Beweis. Man hat $X \setminus M$ offen zu zeigen. Sei $x \in X \setminus M$. Zu jedem $y \in M$ existieren $U_y(x) \in \mathscr{U}(x)$ offen und $U(y) \in \mathscr{U}(y)$ offen mit $U_y(x) \cap U(y) = \emptyset$, da X Hausdorffsch ist. Nun ist $M = \bigcup_{y \in M}(M \cap U(y))$, und da M kompakt ist, existieren $y_1, \ldots, y_n \in M$ mit $M = \bigcup_{i=1}^n (M \cap U(y_i))$. Somit gilt $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(y_i)$. Setze $V(x) := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}(x)$. $V(x)$ ist eine offene Umgebung von x, und wir haben

$$V(x) \cap M \subseteq \Big(\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}(x)\Big) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^n U(y_j)\Big) = \emptyset,$$

denn wäre $z \in \big(\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}(x)\big) \cap \big(\bigcup_{j=1}^n U(y_j)\big)$, so ist $z \in U_{y_i}(x)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $z \in U(y_j)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ im Widerspruch zu $U_{y_j}(x) \cap U(y_j) = \emptyset$. □

Satz 10.5 *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie. Dann ist $[a, b]$ kompakt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{S}$ eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Man bezeichne

$$M := \Big\{x \in (a, b] : \text{ es existieren } S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}\text{: } [a, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i\Big\}.$$

Wir zeigen:

(1) $M \neq \emptyset$,

(2) $b = \sup M$,

(3) $b \in M$.

Zu (1): Sicher existiert ein $S \in \mathfrak{S}$. Für $S' \subseteq \mathbb{R}$ offen gilt dann $S = S' \cap [a, b]$, und somit existieren $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $a \in (\gamma, \delta) \subseteq S'$. Das heißt auch $[a, \delta) \subseteq S$ und dann $\left[a, \frac{a+\delta}{2}\right] \subseteq S$. Insbesondere gilt $\frac{a+\delta}{2} \in M$.

Zu (2): Angenommen es wäre $c := \sup M < b$. Dann ist $c \in (a, b)$ und sicherlich existiert $S \in \mathfrak{S}$ mit $c \in S$. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < c < \beta < b$ und $(\alpha, \beta) \subseteq S$. Da $c = \sup M$ existiert $x \in M$ mit $\alpha < x \leq c$, d.h. $[a, x]$ wird von endlich vielen $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ überdeckt, also wird $[a, \beta)$ von $S_1, \ldots, S_n$ und S überdeckt, und schließlich $\left[a, \frac{c+\beta}{2}\right]$ auch von $S_1, \ldots, S_n$ und S überdeckt. Insbesondere ist $\frac{c+\beta}{2} \in M$, im Widerspruch zu $c = \sup M$.

Zu (3): Mit $b = \sup M$ existiert $S \in \mathfrak{S}$ mit $b \in S$. Dann existiert $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma < b$ und $(\gamma, b] \subseteq S$, und folglich $y \in \mathbb{R}$ mit $\gamma < y \leq b$, $y \in M$. Insbesondere gilt $[a, y] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} S_j$ und somit $[a, b] \subseteq [a, y] \cup (\gamma, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} S_j \cup S$, d.h. $b \in M$.

Mit dem gerade gezeigten Punkt (3) ist bewiesen, daß $[a, b]$ kompakt ist. □

Satz 10.6 (Heine–Borel) *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Ist $C \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, so existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $C \subseteq [a, b]$. Da C abgeschlossen ist und $[a, b]$ kompakt ist, ist auch C kompakt. Ist $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, so ist auch C abgeschlossen, weil $\mathbb{R}$ Hausdorffsch ist. Schließlich gilt $C = \bigcup_{x \in C} \big((x-1, x+1) \cap C\big)$, und somit existieren $x_1, \ldots, x_n \in C$ mit $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - 1, x_i + 1)$, d.h. C ist beschränkt. □

Proposition 10.7 *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis. Sei die Topologie auf Y mit $\mathcal{O}$ bezeichnet. Ist $f(X) = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{O}_{f(X)}$, so ist $S = S' \cap f(X)$ mit $S' \in \mathcal{O}$. Da f stetig ist, sind alle $f^{-1}(S) = f^{-1}(S')$ offen in X, und es gilt $X = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} f^{-1}(S)$. Da X kompakt ist, existieren $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$, woraus $f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(S_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ folgt. □

Korollar 10.8 *Ist X ein kompakter Raum, Y ein Hausdorff–Raum und $f : X \to Y$ stetig, so ist f abgeschlossen ($f(A)$ abgeschlossen für alle $A \subseteq X$ abgeschlossen).*

Beweis. Mit der Abgeschlossenheit von $A \subseteq X$ ist A kompakt, und somit $f(A)$ kompakt, also $f(A)$ abgeschlossen. □

Korollar 10.9 *Ist X kompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zu zeigen ist: $O \subseteq X$ offen impliziert $f(O) \subseteq Y$ offen. Mit Korollar 10.8 ist $f(X \setminus O)$ abegschlossen. Mit der Bijektivität von f gilt: $f(O) = Y \setminus f(X \setminus O)$. Also ist $f(O)$ offen. □

Korollar 10.10 *Ist* $(X, \mathcal{O}_1)$ *ein Hausdorff–Raum,* $\mathcal{O}_2$ *feiner als* $\mathcal{O}_1$ *und* $(X, \mathcal{O}_2)$ *kompakt, so gilt* $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1$.

Beweis. Man verwende Korollar 10.9 mit $f = \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{O}_2) \to (X, \mathcal{O}_1)$. □

Satz 10.11 *Jeder kompakte* T_2*–Raum ist normal (d.h.* T_1 *und* T_4*).*

Beweis. T_1 ist klar, da T_2 auch T_1 impliziert. Bleibt T_4 zu zeigen (d.h. disjunkte abgeschlossene Mengen lassen sich trennen).

Seien also A, B abgeschlossen in X mit $A \cap B = \emptyset$. Folglich gilt für festes $x \in A$: Für alle $y \in B$ existiert $U_y(x)$ und $V_x(y)$ offen mit $U_y(x) \cap V_x(y) = \emptyset$, also $B = \bigcup_{y \in B} \big(V_x(y) \cap B\big)$. Da B abgeschlossen und X kompakt folgt nach Proposition 10.3, daß B kompakt ist, d.h. es es gibt eine endliche Menge $B_x \subseteq B$ mit $B \subseteq \bigcup_{y \in B_x} V_x(y) =: V_x$. Nun ist $W_x := \bigcap_{y \in B_x} U_y(x)$ offen (da B_x endlich) und es gilt $W_x \cap V_x = \emptyset$, denn

$$\begin{aligned} W_x \cap V_x &= \bigcap_{y \in B_x} U_y(x) \cap \Big(\bigcup_{y \in B_x} V_x(y) \Big) \\ &\subseteq \bigcup_{y \in B_x} \left(\bigcap_{z \in B_x} \big(\underbrace{U_z(x) \cap V_x(y)}_{= \emptyset \text{ für } z = y} \big) \right) \end{aligned}$$

Wir haben damit für alle $x \in A$ ein W_x offen, $V_x \supseteq B$ offen mit $W_x \cap V_x = \emptyset$. Da A abgeschlossen und X kompakt folgt abermals nach Proposition 10.3, daß A kompakt. Da $A \subseteq \bigcup_{x \in A} W_x$, existieren also $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} =: W$. W ist ebenfalls offen.

Setze nun $V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Dann ist V offen und $B \subseteq V$ (da alle V_x Umgebungen von B sind). Ferner ist

$$W \cap V = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \ \cap \ \bigcap_{j=1}^n V_{x_j} = \bigcup_{i=1}^n \Big(\bigcap_{j=1}^n \underbrace{W_{x_i} \cap V_{x_j}}_{=\emptyset \text{ für } i=j} \Big) = \emptyset.$$

□

Übung: Zeige: Jeder kompakte T_3–Raum ist T_4–Raum.

Der folgende Satz ist von fundamentaler Bedeutung in der Funktionalanalysis.

Satz 10.12 (Tychonoff, 1930) *Sei* $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *mit* $X_\lambda \neq \emptyset$ *und* $\Lambda \neq \emptyset$ *ein Produktraum. Dann gilt:*

$$X \textit{ kompakt} \iff X_\lambda \textit{ kompakt für alle } \lambda \in \Lambda.$$

Der Beweis dieses Satzes wird über Filter geführt. Deshalb zeigen wir zuvor ein Hilfsresultat.

Lemma 10.13 *Sei* X *ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist kompakt.*

(ii) Jeder Filter auf X *besitzt einen Berührpunkt.*

(iii) Jeder Ultrafilter ist konvergent.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Annahme: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der keinen Berührpunkt besitzt. Dann ist $(\overline{F})_{F\in\mathcal{F}}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Durchschnitt. (zur Erinnerung: x ist Berührpunkt von $\mathcal{F}$: $\forall U \in \mathscr{U}(x)\ \exists F \in \mathcal{F}$: $F \cap U \neq \emptyset$, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ ist die Menge aller Berührpunkte.)

Nach Proposition 10.2 existiert ein endliches Teilsystem $\{F_1, \dots, F_k\} \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$\bigcap_{j=1}^{k} \overline{F}_j = \emptyset.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Filtereigenschaft (vergleiche Definition 9.3(i) und (iii)).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nach Voraussetzung hat jeder Ultrafilter einen Berührpunkt. Dieser Punkt muß aber nach Satz 9.9 bereits Limespunkt des Filters sein (Berührpunkt $\Longleftrightarrow$ Limespunkt eines feineren Filters).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Annahme: $((U_i)_{i\in I}$ sei eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann gilt für alle $J \subseteq I$, J endlich: $A_J := X \setminus \big(\bigcup_{i\in J} U_i\big) \neq \emptyset$. Die Mengen dieser Art sind paarweise nicht disjunkt. Diese Mengen bilden damit die Basis eines Filters auf X, der nach Satz 9.5 in einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ enthalten ist. Nach Voraussetzung konvergiert $\mathcal{F}$ gegen ein $x \in X$ (d.h. $U(x) \subseteq \mathcal{F}$). Dann muß gelten: $x \in U_i$ für ein $i \in I$, also $U_i \in \mathcal{F}$ (sonst wäre $\mathcal{F} \cup \{U_i\}$ feiner als $\mathcal{F}$). Nach Konstruktion muß aber auch $X \setminus U_i \in \mathcal{F}$ gelten (da $\{i\}$ auch eine endliche Teilmenge von I ist). Widerspruch zu Satz 9.6. $\square$

Beweis des Satzes von Tychonoff (10.12).

„$\Rightarrow$“: Da X Produktraum sind die Projektionen stetig. Nach Proposition 10.7 sind demnach alle X_λ, $\lambda \in \Lambda$ kompakt.

„$\Leftarrow$“: Seien umgekehrt alle X_λ, $\lambda \in \Lambda$, kompakt. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist der Bildfilter $p_\lambda(\mathcal{F})$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ ebenfalls ein Ultrafilter.

Beweis: Sei $\lambda \in \Lambda$ beliebig aber fest. Sei $M \subseteq p_\lambda(X)$. Nach Satz 9.6 ist entweder $p_\lambda^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ oder $p_\lambda^{-1}(\complement M) \in \mathcal{F}$. Sei nun $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathcal{F}$. Dann existiert ein $B \in \mathscr{B}$ mit $B \in p_\lambda^{-1}(M)$ oder $B \in p_\lambda^{-1}(\complement M)$. Dann folgt $p_\lambda(B) \subseteq p_\lambda\big(p_\lambda^{-1}(M)\big) \subseteq M$ oder $p_\lambda(B) \subseteq p_\lambda\big(p_\lambda^{-1}(\complement M)\big) \subseteq \complement M$, also $M \in p_\lambda(\mathcal{F})$ oder $\complement \in p_\lambda(\mathcal{F})$. Nach Satz 9.6 ist $p_\lambda(\mathcal{F})$ dann ein Ultrafilter.

Da nun X_λ kompakt $\forall \lambda \in \Lambda$, konvergiert jeder Filter $p_\lambda(\mathcal{F})$ gegen ein $x_\lambda \in X_\lambda$ (nach Lemma 10.13(iii)). Die Konvergenz aller Projektionen $p_\lambda(\mathcal{F})$ ist äquivalent zur Konvergenz des Filters $\mathcal{F}$ im Produktraum (Übung!). Nach Lemma 10.13(iii) ist X aber dann auch kompakt. $\square$

Korollar 10.14 (Heine–Borel im Höherdimensionalen)
Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann kompakt, wenn* C *abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Da C beschränkt, existiert $a, b \in \mathbb{R}$ mit $C \subseteq [a, b]^n$. Nach Satz 10.5 ist $[a, b]$ kompakt und nach Satz 10.12 auch $[a, b]^n$. Nun ist $C = C \cap [a, b]^n$ und da C abgeschlossen, folgt nach Proposition 10.3, daß C kompakt ist.

„$\Rightarrow$“: Sei nun C kompakt. Da $\mathbb{R}^n$ ein T_2–Raum ist, folgt mit Proposition 10.4, daß C abgeschlossen ist. Weiter sagt Proposition 10.7 dann, daß $p_i(C)$ kompakt in $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ sind für alle $i = 1, \ldots, n$. Nach Heine–Borel (vergleiche Satz 10.6) sind alle $p_i(C)$ beschränkt. Seien a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ diese Schranken, d.h. $p_i(C) \subseteq [a_i, b_i]$. Setze $a := \min_{i=1,\ldots,n} a_i$ und $b := \max_{i=1,\ldots,n} b_i$. Dann gilt $C \subseteq [a, b]^n$. $\square$

Bemerkung: Die Beschränktheit gilt allgemeiner, d.h.: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann existiert ein $M \geq 0$ mit $d(x, y) \leq M$ für alle $x, y \in X$.

Übung: Zeigen Sie: Sei X ein topologischer Raum. Jede unendliche Teilmenge $M \subseteq X$ hat einen Häufungspunkt.

Bemerkungen:

(i) Es gibt eine Vielzahl von Abwandlungen des Kompaktheitsbegriffes. So fordert etwa Bourbaki zur endlichen Überdeckungseigenschaft noch die T_2–Eigenschaft. Unser Begriff hier heißt dann quasikompakt.

Ein weiterer Begriff ist „folgenkompakt“, d.h. jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge. Dies setzt natürlich dann das 1. Abzählbarkeitsaxiom voraus, damit dieser Begriff mit dem unseren übereinstimmt.

(ii) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **relativ–kompakt**, wenn $\overline{M}$ kompakt ist. Es gilt:

(a) M relativ–kompakt, $A \subseteq M$, dann folgt A relativ–kompakt.
Beweis: $\overline{A} \subseteq \overline{M} \Rightarrow \overline{A}$ kompakt nach Proposition 10.3, da $\overline{A}$ abgeschlossen in $\overline{M}$.

(b) $M_1, \ldots, M_n$ relativ–kompakt, dann folgt $\bigcup_{j=1}^n M_j$ relativ–kompakt.
Beweis: $\bigcup_{j=1}^n \overline{M}_j$ ist kompakt und abgeschlossen (zu zeigen, aber leichte Übung).

$$\overline{\bigcup_{j=1}^n M_j} = \bigcup_{j=1}^n \overline{M}_j \quad \Rightarrow \quad \overline{\bigcup_{j=1}^n M_j} \text{ kompakt.}$$

11 Lokalkompakte Räume

Definition 11.1 *Ein topologischer Raum* X *heißt* ***lokalkompakt****, wenn jeder Punkt* $x \in X$ *eine kompakte Umgebung besitzt, d.h.*

$$\forall x \in X: \ \exists U \text{ offen und } K \text{ kompakt}: \quad x \in U \subseteq K.$$

Bemerkungen:

(i) Klar gilt: X kompakt, dann ist X lokalkompakt.

(ii) Auch hier setzen die meisten Autoren zusätzlich die T_2–Eigenschaft voraus.

Satz 11.2 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein lokalkompakter* T_2*–Raum und* $K \subseteq X$ *eine kompakte Teilmenge.*

(a) Zu jeder offenen Umgebung U *von* K *existiert eine offene Umgebung* V *von* K *mit* $\overline{V} \subseteq U$*,* $\overline{V}$ *kompakt, also* $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*.*

(b) Insbesondere hat jeder Punkt $x \in X$ *eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen.*

Beweis. Zu (b): Sei $x \in X$, U offen, $x \in U$. Da X lokalkompakt, existiert eine kompakte Umgebung $C \in \mathscr{U}(x)$. Dann ist $(U \cap C)^\circ$ eine offene Umgebung von x. Bezeichne $W := (U \cap C)^\circ$. $(C, \mathcal{O}_{\text{rel}})$ ist ein kompakter T_2–Raum, also ist (vergleiche Proposition 10.4) $(C, \mathcal{O}_{\text{rel}})$ normal, also (vergleiche Bemerkung nach Definition 6.11) $(C, \mathcal{O}_{\text{rel}})$ regulär. Nach Satz 6.9 existiert ein $V \in \mathcal{O}_{\text{rel}}$, $V \in \mathscr{U}(x)$, mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, also $V \subseteq W \subseteq U$.

Behauptung: $V \in \mathscr{U}(x)$ bezüglich $\mathcal{O}$, denn: Zu $V \in \mathcal{O}_{\text{rel}}$ existiert $O \in \mathscr{U}_{\mathcal{O}}(x)$ mit $O \cap C = V$. Dann ist $O \cap W \in \mathcal{O}$. Also ist $x \in O \cap W \subseteq (O \cap C) \cap W = V \cap W \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. ($\overline{V}$ kompakt nach Proposition 10.3).

Zu (a): Sei $K \subseteq X$ kompakt und $U \supseteq K$ offen. Zu zeigen: es gibt W offen mit $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$, $\overline{W}$ kompakt.

Nach (b) existiert zu $x \in K$ ein $W(x)$ offen mit $\overline{W(x)}$ kompakt und $\overline{W(x)} \subseteq U$. Da K kompakt folgt, $\bigcup_{x \in K} W(x)$ enthält endliche Teilüberdeckung, also

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} W(x_j) =: W.$$

$\overline{W} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{W(x_j)} \subseteq U$, $\overline{W}$ kompakt, da endliche Vereinigung kompakter Mengen. □

Korollar 11.3 *Jeder lokalkompakte* T_2*–Raum ist regulär.*

Beweis. T_1 ist wegen T_2 klar und T_3 folgt mit Satz 11.2 aus Satz 6.9 (X T_3, wenn abgeschlossene Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden). □

Beispiele:

(i) X kompakt, also ist X lokalkompakt (klar: wähle X als kompakte Umgebung).

(ii) $(X, \mathcal{O}_{\text{dis}})$ ist lokalkompakt, da $\{x\} \in \mathscr{U}(x)$ und kompakt.

(iii) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\text{kan}})$ ist lokalkompakt (wähle abgeschlossenes und beschränktes Intervall um x).

(iv) X kompakter T_2–Raum, $x_0 \in X$. Dann ist $X_0 := X \setminus \{x_0\}$ lokalkompakt.

Beweis: X ist T_1, also gibt es für alle $x \in X_0$ ein $U \in \mathscr{U}(x)$ mit $x_0 \notin U$. Da X lokalkompakt gibt es ein $K \in \mathscr{U}(x)$, K kompakt, mit $K \subseteq U$, folglich $x \in K \subseteq X_0$. Wir werden später zeigen (Stichwort: Kompaktifizierung), daß jeder lokalkompakte Raum auf diese Weise entsteht.

(v) *Vorsicht:* Unterräume lokalkompakter Räume sind im Allgemeinen **nicht** lokalkompakt.

Beispiel: $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{kan}})$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Wäre $\mathbb{Q}$ lokalkompakt, müßten nach Satz 11.4 $O \in \mathcal{O}_{\text{kan}}$ und $A \in \mathscr{A}_{\text{kan}}$ existieren mit $\mathbb{Q} = O \cap A$. Dann wäre aber $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{A} = A$ und folglich $\mathbb{Q} = O$, was im Widerspruch zu $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ steht.

Satz 11.4 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein lokalkompakter* T_2*–Raum und* $Y \subseteq X$. *Dann gilt:*

$$Y \textit{ lokalkompakt} \iff \exists O \in \mathcal{O}\ \exists A \in \mathscr{A}: \quad Y = O \cap A.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wir zeigen: $Y \in \mathcal{O}_{\overline{Y}}$, denn dann gibt es ein $O \in \mathcal{O}$ mit $Y = O \cap \overline{Y}$. Sei $x \in Y$. Da Y lokalkompakt, gibt es $K \in \mathscr{U}_Y(x)$, K kompakt, und ein $U \in \mathscr{U}(x)$ mit $K = U \cap Y$. Da U Umgebung, existiert ein $O' \in \mathcal{O}$ mit $x \in O' \subseteq U$. Also $Y \cap O' \subseteq Y \cap U = K \subseteq Y$, d.h. $V := \overline{Y} \cap O' \in \mathscr{U}_{\overline{Y}}(x)$.

Behauptung: $V \subseteq \overline{Y \cap O'}$.

Beweis: Sei $y \in V$ und $U' \in \mathscr{U}(y)$. Da $O' \in \mathscr{U}(y)$ ist $U' \cap O' \in \mathscr{U}(y)$. Da ferner $y \in \overline{Y}$ ist $(U' \cap O') \cap Y \neq \emptyset$ (wegen Abschluß). Dann ist aber auch $U' \cap (Y \cap O') \neq \emptyset$, d.h. jede Umgebung von y schneidet $Y \cap O'$, also $y \in \overline{Y \cap O'}$.

Damit erhalten wir:

$$V \subseteq \overline{Y \cap O'} \subseteq \overline{K} = K \subseteq Y \quad \text{und} \quad V \in \mathscr{U}_{\overline{Y}}(x) \quad \text{sowie} \quad V \in \mathcal{O}_{\overline{Y}}.$$

Folglich ist V offen in $\overline{Y}$.

„$\Leftarrow$“: (1) Nach Satz 6.14 ist Y auch ein T_2–Raum. Satz 11.2(b) sagt dann, daß jedes $O \in \mathcal{O}$ lokalkompakt ist (wegen kompakter Umgebungsbasis).

(2) Zu $A \in \mathscr{A}$ und $x \in A$ existiert ein $K \in \mathscr{U}(x)$, K kompakt, da X lokalkompakt. Nach Proposition 10.3 ist $A \cap K \in \mathscr{U}_A(x)$ kompakte Umgebung von x in A, also ist auch A lokalkompakt.

Gilt nun $Y = O \cap A$ mit $O \in \mathcal{O}$, $A \in \mathscr{A}$, so ist O nach (1) lokalkompakt und $O \cap A \in \mathscr{A}_O$. Folglich ist $O \cap A = Y$ nach (2) lokalkompakt. □

Wir wollen nun zeigen, wie sich lokalkompakt auf Produkträume überträgt.

Satz 11.5 *Sei* $(X,\mathcal{O}) = \prod_{i\in I}(X_i,\mathcal{O}_i)$ *Produktraum. Dann gilt:*

$$X \text{ lokalkompakt und } T_2 \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & X_i \text{ lokalkompakt und } T_2\ \forall i\in I \\ \text{(ii)} & X_i \text{ kompakt bis auf endlich viele } i \in I \end{array}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“:

(i) Wähle ein $x^0 \in X$ und betrachte für $j \in I$ fest aber beliebig

$$Y_i := \begin{cases} \{x_i^0\} & \text{falls } i \neq j, \\ X_j & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Dann ist $Y := \prod_{i\in I} Y_i \cong X_j$ („Parallele zu X_j“).

Nun ist $Y_i \in \mathscr{A}_i$. Dann ist auch $Y \in \mathscr{A}$ (Projektion und Einbettung sind stetig und damit $A := \prod_{i\in I} A_i \in \mathscr{A} \iff A_i \in \mathscr{A}_i\ \forall i \in I$). Ferner ist $Y = X \cap Y$. Nach Satz 11.4 ist X_j dann lokalkompakt. T_2 folgt aus Satz 6.14.

(ii) Da X lokalkompakt, existiert zu $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K \in \mathscr{U}(x)$. Nach der Definition der Produkttopologie gibt es eine Basis $\mathscr{B} := \{\prod_{i\in I} O_i : O_i \in \mathcal{O}_i \text{ und } O_i = X_i \text{ bis auf endlich viele } i \in I\}$, d.h. es gibt $B \in \mathscr{B}$ mit $x \in B \subseteq K$ und $B = \prod_{i\in I} O_i$, $O_i = \begin{cases} X_i & i \in I\setminus E \\ O_i & i \in E \end{cases}$, wobei $E \subseteq I$ endlich.

Für $i \in I \setminus E$ folgt: $X_i = p_i(B) \subseteq p_i(K) \subseteq X_i$, also nach Proposition 10.7 $X_i = p_i(K)$ kompakt.

„$\Leftarrow$“: Wir zeigen zunächst: X ist T_2–Raum. Seien $x, y \in X$, $x \neq y$, dann gibt es $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$. Da X_j T_2–Raum existiert $U \in \mathscr{U}_j(x_j)$ und $V \in \mathscr{U}_j(y_j)$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Dann sind $\prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i = \begin{cases} X_i & i \neq j \\ U & i = j \end{cases}$ und $\prod_{i\in I} V_i$ mit $V_i = \begin{cases} X_i & i \neq j \\ V & i = j \end{cases}$ die gesuchten Umgebungen in X.

Bleibt zu zeigen: Jedes $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ besitzt eine kompakte Umgebung.

Nach Voraussetzung existiert $E \subseteq I$, E endlich, mit X_i kompakt für alle $i \in I \setminus E$. Da X_i lokalkompakt existiert $K_i \in \mathscr{U}_i(x_i)$, K_i kompakt, für alle $i \in E$. Sei weiter $K_i = X_i$ für alle $\forall i \in I \setminus E$. Setze $K := \prod_{i\in I} K_i$. Dann ist $K \in \mathscr{U}(x)$ und nach Satz 10.12 (Tychonoff) ist K kompakt. □

Bemerkungen:

(i) Man kann in Satz 11.5 auch auf die T_2–Bedingung auf beiden Seiten verzichten.

(ii) Die im Beweis verwendete Aussage über Trennung und Produkträume gilt allgemeiner:

$$\prod_{i\in I} X_i\ T_k\text{–Raum} \quad\iff\quad \forall i \in I: \ X_i \text{ ist } T_k\text{–Raum} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Wir kommen nun zur Umkehrung von Beispiel (iv).

Satz 11.6 (Einpunkt–Kompaktifizierung, Alexandroff)
Sei X ein lokalkompakter T_2–Raum. Dann existiert ein kompakter T_2–Raum $\tilde{X}$, so daß X homöomorph zu einem Teilraum von $\tilde{X}$ ist, dessen Komplement nur aus einem Punkt besteht. $\tilde{X}$ ist selbst bis auf Homöomorphie eindeutig. $\tilde{X}$ heißt die ***Einpunkt–Kompaktifizierung*** *oder* ***Alexandroff–Kompaktifizierung*** *von X. Der neue Punkt wird oft als* ***unendlich ferner Punkt*** *bezeichnet.*

Beweis. Bezeichne ∞ einen Punkt, der nicht zu X gehört. Setze $\tilde{X} := X \cup \{\infty\}$. Auf $\tilde{X}$ definieren wir eine Topologie:

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}} := \mathcal{O} \cup \left\{M \subseteq \tilde{X} : \ M = \tilde{X} \setminus K, \ K \subseteq X \text{ kompakt}\right\}.$$

Dies ist eine Topologie, denn es gilt:

(1) Endliche Vereinigungen kompakter Mengen eines T_2–Raumes sind selbst ein kompakter T_2–Raum (Proposition 10.4: endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen eines T_2–Raumes sind abgeschlossen. Proposition 10.3: abgeschlossene Teilmengen eines kompakten Raumes sind kompakt. Satz 6.14: T_2 vererbt sich auf Teilräume.)

(2) $(\tilde{X} \setminus K) \cap X$ ist offen in X (da nach Proposition 10.4 K abgeschlossen, also $X \setminus K$ offen in X und $(\tilde{X} \setminus K) \cap X = X \setminus K$).

(3) In einem kompakten T_2–Raum sind Durchschnitte kompakter Mengen kompakt (Durchschnitt abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen und Proposition 10.3).

(4) Der Durchschnitt einer kompakten T_2–Menge mit einer abgeschlossenen Menge ist kompakt (nach Proposition 10.3 ist der kompakte T_2–Raum abgeschlossen, demnach der Schnitt wieder abgeschlossen und nach Proposition 10.4 auch kompakt).

Wegen (1) und (2) sind endliche Durchschnitte offener Mengen von $\tilde{X}$ offen. Wegen (3) und (4) sind Vereinigungen offener Mengen von $\tilde{X}$ offen. (O1) klar, da $\emptyset \in \mathcal{O}_X$ und $\tilde{X} = \tilde{X} \setminus \emptyset$ und $\emptyset$ kompakt.

Nach Konstruktion ist $\tilde{X} \setminus \{\infty\} \cong X$.

$\tilde{X}$ ist T_2, da X T_2–Raum und $\{\infty\}$ läßt sich von $y \in X$ trennen, da y eine kompakte Umgebung besitzt (sei diese K) und folglich gibt es $U \in \mathscr{U}(y)$ mit $y \in U \subseteq K$, $V := \tilde{X} \setminus K$ ist Umgebung von ∞ und $U \cap V = \emptyset$.

$\tilde{X}$ ist kompakt, da jede offene Überdeckung eine Menge der Form $\tilde{X} \setminus K$, K kompakt, enthält und K sich durch endlich viele Mengen überdecken lassen muß.

Eindeutigkeit: Sei Y ein weiterer Raum, der die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Sei $X' \subseteq Y$ der zu X homöomorphe Unterraum.

$$\tilde{X} \supseteq \tilde{X} \setminus \{\infty\} = X \cong X' \subseteq Y$$

Sei ∞' der neue Punkt in Y und $f : X \to X'$ der Homöomorphismus. Definiere $F : \tilde{X} \to Y$ durch $F|_X := f$ und $F(\infty) := \infty'$. F ist bijektiv, da f bijektiv ist. $F|_X$ ist stetig wegen der Homöomorphie von f. Sei $O \in \mathcal{O}_Y$ offene Umgebung von ∞'. Dann ist $Y \setminus O$ abgeschlossen und folglich kompakt, da Y kompakter T_2–Raum (Proposition 10.3). Ist $K' \subseteq X'$ kompakt, muß nach Proposition 10.7 auch $f^{-1}(K')$ kompakt sein. Damit ist $f^{-1}(Y \setminus O)$ kompakt und folglich eine offene Umgebung von ∞ in $\tilde{X}$. Demnach ist F auch in ∞ stetig. Analog folgt die Stetigkeit von F^{-1}. F ist also ein Homöomorphismus. □

Definition 11.7 *Ein topologischer Raum X heißt σ–kompakt, falls $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_n$ mit K_n kompakt. Ist X zusätzlich lokalkompakt und ein T_2–Raum, so heißt X* ***abzählbar im Unendlichen****.*

Satz 11.8 *Sei X ein lokalkompakter T_2–Raum. Dann sind äquivalent:*

(a) *X ist abzählbar im Unendlichen.*

(b) *Der Punkt ∞ in der Einpunkt–Kompaktifizierung besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

(c) *Es existiert eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen in X mit*

  (i) *$\overline{U}_n$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$,*

  (ii) *$\overline{U}_n \subseteq U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*

  (iii) *$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.*

Beweis. (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $\tilde{X}$ die Einpunkt–Kompaktifizierung von X. Die offenen Mengen um den Punkt ∞ sind nach Konstruktion von der Art $O = \tilde{X} \setminus K$ mit K kompakt in X. Sei $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die abzählbare Umgebungsbasis von ∞ in $\tilde{X}$. Dann folgt $\tilde{X} \setminus V_n$ ist kompakt in X. Da $\{\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, denn alle abgeschlossenen Umgebungen von ∞ enthalten eine Menge V_n und wegen T_2 (vergleiche Satz 6.6(ii)) $\{\infty\} = \bigcap_{A\in\mathscr{U}(\infty)\cap\mathscr{A}} A$, folgt

$$X = \tilde{X} \setminus \{\infty\} = \tilde{X} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{X} \setminus V_n$$

mit $\tilde{X} \setminus V_n$ kompakt, d.h. X ist σ–kompakt.

(c) $\Rightarrow$ (b): Nach Voraussetzung existiert eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit (i) — (iii). Dann ist $\infty \in \tilde{X} \setminus \overline{U}_n =: V_n$, V_n offen in $\tilde{X}$.

Wir zeigen: zu V offen in $\tilde{X}$, $\infty \in V$, existiert V_n mit $V_n \subseteq V$. $K := \tilde{X} \setminus V \subseteq X$ und K kompakt. Da $X \overset{(iii)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ existieren $n_1, \ldots, n_N$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_{n_i}$. Sei $m := \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Dann gilt $U_{n_i} \in U_m$ für alle $i = 1, \ldots, N$ wegen (ii). Folglich ist $K \subseteq U_m \overset{(ii)}{\subseteq} \overline{U}_m$, also $V \supseteq \tilde{X} \setminus \overline{U}_m = V_m$.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei nun $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kompakt. Dann ist $\tilde{X} \setminus K_n =: V_n$ offene Umgebung von ∞ in $\tilde{X}$. Nach Satz 11.2(a) existiert eine offene Umgebung W_1 von ∞ mit $\overline{W_1} \subseteq V_1$ (beachte: $\{\infty\}$ ist abgeschlossen in $\tilde{X}$ und damit kompakt) mit $\overline{W_1}$ kompakt in $\tilde{X}$. Definiere $U_1 := \tilde{X} \setminus \overline{W_1}$, also U_1 offen in X', also U_1 offen in X, da X offen in X' und $U_1 \subseteq X$. Da $\overline{W_1} \subseteq V_1 = \tilde{X} \setminus K_1$ folgt $K_1 \subseteq U_1$. $\overline{U_1} = \overline{\tilde{X} \setminus \overline{W_1}} = \tilde{X} \setminus \mathring{W_1} = \tilde{X} \setminus W_1$ abgeschlossen in $\tilde{X}$, also kompakt in $\tilde{X}$, also kompakt in X.

Konstruiere nun induktiv $\overline{W_{n+1}} \subseteq (\tilde{X} \setminus K_n) \cap W_n$ analog. Die so konstruierten Mengen erfüllen (i) — (iii):

(i) bereits gezeigt.

(ii) $\overline{U_n} = \tilde{X} \setminus W_n \subseteq \tilde{X} \setminus \overline{W_{n+1}} = U_{n+1}$.

(iii) $K_n \subseteq U_n$ und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, also $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

□

Bemerkungen:

(i) Ein topologischer Raum heißt **Lindelöf–Raum**, falls jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

(ii) Ein topologischer Raum heißt **abzählbar kompakt**, wenn jede abzählbare offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(iii) Ist X T_2–Raum gilt:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{regulär} & \Leftarrow & \text{normal} & & & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & & & \\
\text{lokalkompakt} & \Leftarrow & \text{kompakt} & \Rightarrow & \sigma\text{–kompakt} & \Rightarrow & \text{Lindelöf} \\
 & & \Downarrow \uparrow \text{2. AA} & & & & \\
 & & \text{abz. kompakt} & & & & \\
 & & \Uparrow \downarrow \text{1. AA} & & & & \\
 & & \text{folgenkompakt} & & & &
\end{array}$$

(iv) Ist (X, d) metrischer Raum, dann sind kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.

12 Stone–Čech–Kompaktifizierung

Satz 12.1 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein vollständig regulärer Raum. Dann existiert ein kompakter Hausdorff–Raum* $\beta(X)$ *mit*

(1) X *ist dichter Teilraum von* $\beta(X)$ *(eigentlich:* X *ist homöomorph zu einem dichten Teilraum von* $\beta(X)$*.)*

(2) Jedes $f \in C^b_{\mathbb{R}}(X)$ *läßt sich eindeutig fortsetzen zu einem* $\tilde{f} \in C_{\mathbb{R}}(\beta(X)) = C^b_{\mathbb{R}}(\beta(X))$.

Beweis. Zu $f \in C^b_{\mathbb{R}}(X)$ wähle $I_f \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall mit $f(X) \subseteq I_f$. Mit dem Satz von Tychonoff ist (mit der Produkt–Topologie) $I = \prod_{f \in C^b_{\mathbb{R}}(X)} I_f$ kompakter Hausdorff–Raum (T_2: Übungsaufgabe).

Betrachte folgende Abbildung: $\varphi : X \to I$, $(\varphi(x)_f)_{f \in C^b_{\mathbb{R}}(X)} = f(x)$. varphi ist injektiv. Ist $x \neq y$, so wähle Umgebung U von x mit $y \notin U$. Da X vollständig regulär ist, gibt es $f \in C^b_{\mathbb{R}}(X)$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$. Das heißt $\varphi(x)_f \neq \varphi(y)_f$, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Also ist $\varphi : X \to \varphi(X) \subseteq I$ bijektiv. Setze $\beta(X) := \overline{\varphi(X)} \subseteq I$. Dann ist $\beta(X)$ ein kompakter Hausdorff–Raum.

Zu (1): $\varphi : (X, \mathcal{O}) \to (\varphi(X), \mathrm{prod}_{\varphi(X)})$ ist ein Homöomorphismus. Bezeichne σ diejenige Topologie, die durch $f^{-1}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, auf X erzeugt wird. ($f^1(U)$ bilden Subbasis von σ.) Da $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ gilt $\sigma \subseteq \mathcal{O}$. Es gilt sogar $\sigma = \mathcal{O}$. Denn ist $U \in \mathcal{O}$, $x \in U$, so existiert $f_X : (X, \mathcal{O}) \to [0, 1]$ stetig mit $f_X(x) = 1$, $f|_{X \setminus U} = 0$. Somit haben wir $x \in f_X^{-1}\big((\frac{1}{2}, \infty)\big) \subseteq U$, und folglich $U = \bigcup_{x \in U} f_X^{-1}\big((\frac{1}{2}, \infty)\big) \in \sigma$. Das heißt $\mathcal{O} \subseteq \sigma$.

Die Produktopologie $\mathrm{prod}_{\varphi(X)}$ auf $\varphi(X)$ besitzt als Basis die Mengen

$$U = \prod_{f \in C^b_{\mathbb{R}}(X)} \big(U_f \cap \varphi(X)\big),$$

U_f offen in I_f und $U_f = I_f$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Dies ist aber genau die schwächste Topologie, so daß alle Projektionen $p_f|_{\varphi(X)} \to I_f$ stetig sind (Projektion auf f–te Koordinate).

Zusammengefaßt: $\mathcal{O}$ ist die schwächste Topologie, so daß alle $x \mapsto f(x)$ stetig sind. $\mathrm{prod}_{\varphi(X)}$ ist die schwächste Topologie, so daß $\varphi(x) \overset{p_f}{\mapsto} \varphi(x)_f = f(x)$ stetig ist. Das heißt φ ist ein Homöomorphismus.

Zu (2): Existenz: Zu f setze $\tilde{f} = p_f|_{\beta(X)}$. Man beachte: $p_f \in C^b_{\mathbb{R}}(I)$, also ist $\tilde{f} \in C^b_{\mathbb{R}}(\beta(X))$. Es gilt $\tilde{f}|_{\varphi(X)} = p_f|_{\varphi(X)} = f$ (als Funktion auf $\varphi(x)$).

Eindeutigkeit: Ist $g : \beta(X) \to \mathbb{R}$ stetig mit $g|_{\varphi(X)} = f$, so gilt $g = \tilde{f}$ (siehe Korollar 7.2). $\square$

Bemerkung: Hinsichtlich der Norm auf $C^b_{\mathbb{R}}(X)$ bzw. $C^b_{\mathbb{R}}(\beta(X))$ gilt:

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{z \in \beta(X)} |\tilde{f}(z) - \tilde{g}(z)|.$$

Dies gilt, da $X \subseteq \beta(X)$ dicht und f, g stetig.

Korollar 12.2 *Ein topologischer Raum X ist vollständig regulär genau dann, wenn X homöomorph ist zu einem Teilraum eines kompakten Hausdorff–Raumes.*

Beweis. Die eine Implikation ist exakt Satz 12.1. Ist umgekehrt Y kompakt Hausdorffsch, so ist Y vollständig regulär, denn Y ist normal (Satz 10.11). Folglich ist X vollständig regulär, vergleiche Paragraph 7. □

Bisher haben wir nur $\beta(X)$ definiert. Die nächsten Überlegungen zeigen, daß $\beta(X)$ durch (1) und (2) in Satz 12.1 charakterisiert sind.

Sei X ein topologischer Raum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Der Vektorraum $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ ist mit der Multiplikation eine Algebra über $\mathbb{K}$. Mit der Supremums–Norm ist $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ eine Banach–Algebra. Bezeichne

$$\Delta = \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X)) = \{h : \; C^b_{\mathbb{K}}(X) \to \mathbb{K} : \; h \text{ stetiger } \mathbb{K}\text{–Algebra–Homomorphismus auf } \mathbb{K}\}$$

Δ wird versehen mit der schwächsten Topologie, so daß für jedes $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$ die Abbildung

$$\mathcal{F}_f : \Delta \to \mathbb{K}, \quad \mathcal{F}_f(h) = h(f)$$

stetig ist. Eine Umgebungsbasis von $h_0 \in \Delta$ wird gebildet durch

$$U(h_0; \varepsilon, f_1, \ldots, f_n) = \{h \in \Delta : \; |h(f_i) - h_0(f_i)| < \varepsilon, \; i = 1, \ldots, n\}$$

Δ ist ein Hausdorff–Raum. Denn ist $h_1 \neq h_2$, so existiert $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$ mit $h_1(f) \neq h_2(f)$, und dann gilt mit $\varepsilon = \frac{1}{2}|h_1(f) - h_2(f)|$

$$U(h_1; \varepsilon, f) \cap U(h_2; \varepsilon, f) = \emptyset.$$

$\ker h = \{f \in C^b_{\mathbb{K}}(X) : \; h(f) = 0\}$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $C^b_{\mathbb{K}}(X)$. (Da h stetig ist, ist $\ker h = h^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Da $h(gf) = h(g)h(f)$ ist $\ker h$ Ideal.) Ferner gilt $h(1) = 1$. Die Kodimension von $\ker h$ in $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ ist 1, denn mit dem Isomorphisatz gilt $C^b_{\mathbb{K}}(X)/_{\ker h} \cong \mathbb{K}$.

Sei $x \in X$. Durch $h_x(f) := f(x)$ ist ein $\mathbb{K}$–Algebra–Homomorphismus auf $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ erklärt. h_x ist auch stetig wegen

$$|h_x(f) - h_x(g)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

h_x ist auch surjektiv. Zu $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt es nämlich ein $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$ mit $h_x(f) = f(x) = \lambda$. Folglich ist $h_x \in \Delta$ für alle $x \in X$.

Durch $x \mapsto h_x$, $X \to \Delta$ ist also eine Abbildung definiert.

Satz 12.3 *Sei X ein kompakter Hausdorff–Raum. Dann ist $x \mapsto h_x$, $X \to \Delta$ ein Homöomorphismus von X auf Δ.*

Beweis. X ist als kompakter Hausdorff-Raum vollständig regulär. Für $x \neq y$ existiert also ein $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$ mit $f(x) \neq f(y)$, d.h. $h_x(f) \neq h_y(f)$. Folglich ist $x \mapsto h_x$ injektiv.

$x \mapsto h_x$ ist auch stetig. Ist nämlich $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, $f_1, \dots, f_n \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$, so existiert U_{x_0} Umgebung von x_0 mit $f_i(U_{x_0}) \subseteq U_\varepsilon(f_i(x_0))$ für $i = 1, \dots, n$. Insbesondere gilt $|h_x(f_i) - h_{x_0}(f_i)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_{x_0}$ und $i = 1, \dots, n$.

Wir zeigen nun, daß $x \mapsto h_x$, $X \to \Delta$ surjektiv ist. Da X kompakt ist, folgt dann, daß $x \mapsto h_x$ ein Homöomorphismus ist von X auf Δ mit Korollar 10.9. Der Nachweis der Surjektivität erfolgt in mehreren Schritten.

Sei $h \in \Delta$, und bezeichne $I := \ker h \subseteq C^b_{\mathbb{K}}(X)$. Setze

$$E := \{x \in X : \ f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$$

(Hülle von I). Mit $E = \bigcap_{f \in I}\{x \in X : \ f(x) = 0\}$ ist $E \subseteq X$ abgeschlossen.

Setze für abgeschlossene Teilmengen $F \subseteq X$ ($F = \emptyset$ zugelassen)

$$I_F := \{g \in C^b_{\mathbb{K}}(X) : \ g|_F = 0\}.$$

(I_F ist ein Ideal.) Offensichtlich gilt mit der Definition: $I \subseteq I_E$ (denn für $f \in I$ gilt $f|_E = 0$). Wir zeigen nun:

(1) $I = I_E$.

(2) $E = \{x\}$ für ein $x \in X$.

Falls (a) und (b) gezeigt sind, folgt $h = h_x$. Tatsächlich gilt für jedes $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$ folgendes:

$$\big(f - f(x)1\big)(x) = 0, \quad \text{also } f - f(x)1 \in I_{\{x\}} = I_E = I.$$

Das bedeutet $h(f - f(x)1) = 0$, also $h(f) = f(x)1$, sprich $h(f) = h_x(f)$. Also haben wir (a) und (b) zu zeigen.

Zu (a): Wir führen zu $F \subseteq X$ abgeschlossen ein weiteres Ideal ein.

$$J_F := \{g \in C^b_{\mathbb{K}}(X) : \ \operatorname{supp} g \cap F = \emptyset\},$$

wobei $\operatorname{supp} g := \overline{\{x \in X : \ g(x) \neq 0\}}$.

Offensichtlich gilt $J_E \subseteq I_E$. Wir zeigen nun

(a1) $J_E \subseteq I_E$ liegt dicht.

(a2) $J_E \subseteq I$.

Falls dies gezeigt ist, folgt

$$I_E = \overline{J_E} \subseteq \overline{I} = I \subseteq I_E,$$

also $I = I_E$, d.h. (a) gilt.

Zu (a1): Sei $f \in I_E$, $\varepsilon > 0$. Setze $K = \left\{x \in X : \ |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. K ist abgeschlossen (also K kompakt) und $K \cap E = \emptyset$, da $f|_E = 0$. Mit Satz 11.2 existiert U offene Umgebung von K mit $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus E$. Mit dem Satz von Urysohn existiert $h : X \to [0,1]$ stetig mit $h|_K = 1$, $h|_{X \setminus U} = 0$. Insbesondere gilt $\operatorname{supp} h \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus E$, also $h \in J_E$, und damit $hf \in J_E$. Schließlich ist auch $|hf(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$ (denn:

$(hf - f)|_K = 0$ und $|hf(x) - f(x)| = |h(x) - 1|\,|f(x)| < 2\frac{\varepsilon}{2}$ für $x \notin K$). Somit ist gezeigt, daß J_E dicht in I_E ist.

Zu (a2): Hierzu zeigen wir: Ist $K \subseteq X$ kompakt, $K \cap E = \emptyset$, so existiert ein $h \in I$ und U offen mit $U \supseteq K$ mit $h(x) > 0$ für alle $x \in U$ $\quad(*)$.

Zu $x \in K$ existiert $f_x \in I$ mit $f_x(x) \neq 0$ (da $x \notin E$). Für $g_x = \overline{f_x} \cdot f_x \in I$ gilt dann $g_x(x) > 0$ und $g_x(y) \geq 0$ für alle $y \in X$. Mit der Stetigkeit von g_x existiert eine Umgebung U_x von x mit $g_x(y) > 0$ für alle $y \in U_x$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \dots, x_n$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} =: U$. Setze $h = \sum_{i=1}^n g_{x_i} \in I$. h ist die gesuchte Funktion in $(*)$. (Da $h|_E = 0$ ist $U \cap E = \emptyset$.)

Sei nun $f \in J_E$, $K = \operatorname{supp} f$, also $K \cap E = \emptyset$. Mit $(*)$ existiert $h \in I$ mit $h(x) > 0$ für alle $x \in U$ offen, $K \subseteq U$, $U \cap E = \emptyset$. Setze

$$g(x) := \begin{cases} f(x)/h(x) & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \notin U. \end{cases}$$

Wir haben zu zeigen, daß $g : X \to \mathbb{K}$ stetig ist. Stetigkeit in $x \notin K$ ist klar. Denn $X \setminus K$ ist offen und $g|_{X\setminus K} = 0$. Für $x \in K$ wähle Umgebung $U_x \subseteq U$ mit $h(x) \geq \delta > 0$ für alle $y \in U_x$ ($\delta > 0$ vorgegeben). Dann gilt für $y \in U_x$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(y)}{h(y)} - \frac{f(x)}{h(x)}\right| &\leq \frac{1}{h(y)h(x)}|f(y)h(x) - f(x)h(y)| \\
&\leq \frac{1}{h(y)h(x)}|f(y)h(x) - f(x)h(x)| + \frac{1}{h(y)h(x)}|f(x)h(x) - f(x)h(y)| \\
&= \frac{1}{h(y)}|f(y) - f(x)| + \frac{|f(x)|}{h(y)h(x)}|h(x) - h(y)| \\
&\leq \frac{1}{\delta}|f(y) - f(x)| + \frac{|f(x)|}{\delta^2}|h(x) - h(y)|.
\end{aligned}$$

Nun ist klar, daß g in x stetig ist, da f und h in x stetig sind. Damit gilt $g \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$. Da $f|_{x\setminus K} = 0$ und $g|_{X\setminus K} = 0$ gilt $h \cdot g = f$. Da $h \in I$ ist $f = h \cdot g \in I$. Damit ist auch (a2) gezeigt, und damit (a).

Bleibt (b) nachzuweisen.

E ist nichtleer. Wäre $E = \emptyset$, so ist $I_E = C^b_{\mathbb{K}}(X) = I = \ker h$ (mit (a)). Dann ist $h = 0$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Surjektivität von h.

Wir nehmen nun $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$. Dann existieren $f_1, f_2 \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$ mit $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x_2) = 0$ und $f_2(x_1) = 1$, $f_2(x_2) = 0$. Wir betrachten nun den Quotientenraum $C^b_{\mathbb{K}}(X)/_{\ker h}$, der mit dem Isomorphiesatz Dimension 1 hat, und zeigen, daß $f_1 + \ker h$, $f_2 + \ker h$ linear unabhängig sind, was einen Widerspruch liefert. Gilt $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ker h = \ker h$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, so haben wir $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \ker h = I$. Es gilt $\lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_1) = \lambda_1$ und $\lambda_1 f_1(x_2) + \lambda_2 f_2(x_2) = \lambda_2$ einerseits und $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x_1) = 0$ und $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x_2) = 0$ andererseits mit $x_1, x_2 \in E$. D.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Somit ist $E = \{x\}$ für ein $x \in X$, und der Nachweis ist komplett. □

Proposition 12.4 *Seien* X *und* Y *topologische Räume und* $\varphi : X \to Y$ *ein Homöomorphismus. Dann gilt: Durch* $\Phi f(y) := f(\varphi^{-1}(y))$, $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$, $y \in Y$ *ist ein isometrischer* $\mathbb{K}$*–Algebra–Isomorphismus von* $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ *auf* $C^b_{\mathbb{K}}(Y)$ *gegeben.*

Ist andererseits $\Phi : C^b_{\mathbb{K}}(X) \to C^b_{\mathbb{K}}(Y)$ *ein isometrischer* $\mathbb{K}$*–Algebra–Isomorphismus, so definiert* $\varphi h(g) := h(\Phi^{-1}g)$, $h \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X))$, $g \in C^b_{\mathbb{K}}(Y)$, *einen Homöomorphismus von* $\Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X))$ *auf* $\Delta(C^b_{\mathbb{K}}(Y))$.

Beweis. Bei der ersten Aussage folgt die Isometrie direkt mit

$$\sup_{y\in Y} |\Phi f(y)| = \sup_{y\in Y} |f(\varphi^{-1}(y))| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Der Nachweis, daß Φ ein $\mathbb{K}$–Algebra–Isomorphismus von $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ auf $C^b_{\mathbb{K}}(Y)$ ist, ist einfach zu führen (Übungsaufgabe).

Nun zur zweiten Behauptung. Als erstes hat man zu zeigen, daß $\varphi h \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(Y))$. Die $\mathbb{K}$–Algebra–Homomorphie ist direkt einzusehen. φh ist stetig als Komposition zweier stetiger Abbildungen. φh ist surjektiv, da Φ^{-1} und h surjektiv sind.

Als nächstes zeigen wir, daß $\varphi : \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X)) \to \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(Y))$ bijektiv ist. Gilt $\varphi h_1 = \varphi h_2$, so ist $h_1(\Phi^{-1}g) = h_2(\Phi^{-1}g)$ für alle $g \in C^b_{\mathbb{K}}(Y)$, also $h_1 = h_2$. Ist ferner $\tilde{h} \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(Y))$, so setze $h(f) := \tilde{h}(\Phi(f))$, $f \in C^b_{\mathbb{K}}(X)$. Es gilt: $h \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X))$ und dann $\varphi h = \tilde{h}$, d.h. φ ist surjektiv.

φ ist auch stetig. (Dies reicht aus Symmetriegründen für die Homöomorphie). Sei $h_0 \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X))$, $\tilde{h}_0 := \varphi h_0$. Betrachte

$$U_{\varepsilon,M}(\tilde{h}_0) = \{\tilde{h} \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(Y)) : \ |\tilde{h}(g) - \tilde{h}_0(g)| < \varepsilon \text{ für } g \in M\},$$

$M \subseteq C^b_{\mathbb{K}}(Y)$ endlich, und setze

$$W_{\varepsilon,\Phi^{-1}(M)}(h_0) = \{h \in \Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X)) : \ |h(f) - h_0(f)| < \varepsilon \text{ für } f \in \Phi^{-1}(M)\}.$$

Dann gilt $\varphi(W_{\varepsilon,\Phi^{-1}(M)}(h_0)) \subseteq U_{\varepsilon,M}(\tilde{h}_0)$. □

Verbinden wir Proposition 12.4 und Satz 12.3, so erhält man folgende interessante Aussage.

Korollar 12.5 *Seien* X *und* Y *kompakte Hausdorff–Räume. Dann existiert ein isometrischer* $\mathbb{K}$*–Algebra–Isomorphismus von* $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ *auf* $C^b_{\mathbb{K}}(Y)$ *genau dann, wenn* X *und* Y *homöomorph sind.*

Beweis. Sind X und Y homöomorph, so folgt mit Proposition 12.4, daß $C^b_{\mathbb{K}}(X)$ und $C^b_{\mathbb{K}}(Y)$ isometrisch isomorph sind. Umgekehrt folgt mit der zweiten Aussage von Proposition 12.4, daß $\Delta(C^b_{\mathbb{K}}(X))$ und $\Delta(C^b_{\mathbb{K}}(Y))$ homöomorph sind. Mit Satz 12.3 sind dann X und Y homöomorph. □

Korollar 12.6 *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *vollständig regulär, und seien* $\beta_1(X)$ *und* $\beta_2(X)$ *zwei kompakte Hausdorff–Räume, so daß für beide Räume die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 12.1 gelten. Dann sind* $\beta_1(X)$ *und* $\beta_2(X)$ *homöomorph.*

Beweis. Mit Eigenschaft (2) sind $C^b_{\mathbb{R}}(\beta_1(X))$ und $C^b_{\mathbb{R}}(\beta_2(X))$ isometrisch isomorph zu $C^b_{\mathbb{R}}(X)$. Mit Korollar 12.5 sind also $\beta_1(X)$ und $\beta_2(X)$ homöomorph. □

Definition 12.7 *Ist $(X, \mathcal{O})$ vollständig regulär, so heißt $\beta(X)$ die Stone–Čech–Kompaktifizierung von X. (Nach Korollar 12.6 ist $\beta(X)$ bis auf Homöomorphie eindeutig festgelegt.)*

Definition 12.8 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, Y kompakter Hausdorff–Raum. Y heißt **Kompaktifizierung** von X, falls X homöomorph zu einem dichten Teilraum von Y ist.*

Satz 12.9 *Sei $(X, \mathcal{O})$ vollständig regulär. Jede stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$, Y ein kompakter Hausdorff–Raum, läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung $\hat{\varphi} : \beta(X) \to Y$.*

Beweis technisch aufwendig, wird hier nicht geführt.

Korollar 12.10 *Ist Y eine Kompaktifizierung von X, also $\varphi : X \to \varphi(X) \subseteq Y$ ein Homöomorphismus, $\overline{\varphi(X)} = Y$, so existiert eine stetige Fortsetzung $\hat{\varphi} : \beta(X) \to Y$, die surjektiv ist. (Dies bedeutet: $\beta(X)$ ist feiner als jede andere Kompaktifizierung von X.)*

Beweis. Sei $\hat{\varphi} : \beta(X) \to Y$ die stetige Fortsetzung von $\varphi : X \to Y$. Dann gilt: $\hat{\varphi}(\beta(X))$ ist kompakt, also abgeschlossen. Somit

$$Y = \overline{\varphi(X)} \subseteq \overline{\hat{\varphi}(\beta(X))} = \hat{\varphi}(\beta(X)) \subseteq X,$$

und folglich $\hat{\varphi}(\beta(X)) = Y$. □

Beispiel: $\mathbb{N}$ mit diskreter Topologie. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist abzählbar. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ bijektiv (und stetig, da $\mathbb{N}$ diskret). Mit Satz 12.9 ($[0,1]$ ist kompakt) existiert eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \beta(\mathbb{N}) \to [0,1]$. $\hat{f}(\beta(\mathbb{N})) \subseteq [0,1]$ ist kompakt, also abgeschlossen. Somit gilt:

$$[0,1] = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = \overline{f(\mathbb{N})} \subseteq \overline{\hat{f}(\beta(\mathbb{N}))} = \hat{f}(\beta(\mathbb{N})) \subseteq [0,1],$$

also $\hat{f}(\beta(\mathbb{N})) = [0,1]$. Stone–Čech–Kompaktifizierung bringt „Sprung" in der Mächtigkeit.

Interessant ist natürlich die Frage, unter welchen Bedingungen die Teilmenge X offen in $\beta(X)$ ist. Dazu zeigen wir ein Hilfsresultat.

Lemma 12.11 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff–Raum, $Y \subseteq X$ dicht, Y lokalkompakt. Dann ist Y offen in X.*

Beweis. Wir zeigen: Ist $y \in Y$, so existiert $W \subseteq X$, $W \in \mathcal{O}$ mit $y \in W \subseteq Y$. Dann ist $Y \in \mathcal{O}$.

Sei $U \subseteq Y$ eine kompakte Umgebung von y in Y, und setze $V := \mathring{U}$ = Inneres von U in Y. Dann ist $y \in V$ und $\overline{V}^Y \subseteq U$ (da U abgeschlossen), also $\overline{V}^Y$ kompakt in Y und dann $\overline{V}^Y$ kompakt in X. Da X T_2–Raum ist, ist $\overline{V}^Y$ abgeschlossen in X. Damit gilt $\overline{V}^Y \supseteq \overline{V}^X$. Da V offen in Y ist, existiert $W \in \mathcal{O}$ (offen in X) mit $V = Y \cap W$. Wir zeigen

$W \subseteq Y$, womit unsere obige Aussage nachgewiesen ist. Dazu zeigen wir: $\overline{W}^X \subseteq \overline{V}^X$. Sei dazu $x \in \overline{W}^X$. Ist $O \in \mathcal{O}$ eine Umgebung von x, so gilt $O \cap W \neq \emptyset$. Da $O \cap W \in \mathcal{O}$ und Y in X dicht liegt, folgt $O \cap W \cap Y \neq \emptyset$. Folglich ist $O \cap V = O \cap (Y \cap W) \neq \emptyset$, und somit $x \in \overline{V}^X$. Zusammengefaßt gilt: $\overline{W}^X \subseteq \overline{V}^X \subseteq \overline{V}^Y \subseteq U$, insbesondere $W \subseteq \overline{W}^X \subseteq U \subseteq Y$. □

Satz 12.12 *Sei $(X, \mathcal{O})$ vollständig regulär. Es gilt dann: $X \subseteq \beta(X)$ ist offen in $\beta(X)$ genau dann, wenn X lokal kompakt ist. (Beachte: Ist σ die Stone–Čech–Topologie auf $\beta(X)$, so gilt $\mathcal{O} = \sigma_X$.)*

Beweis. Ist $X \subseteq \big(\beta(X), \sigma\big)$ offen, so ist $(X, \sigma_X) = (X, \mathcal{O})$ lokalkompakt (klar, oder benutze Kapitel 11: X lokalkompakt, $Y = A \cap U$, A abgeschlossen, U offen $\Rightarrow$ Y lokalkompakt). Ist umgekehrt X lokalkompakt, so besagt Lemma 12.11, daß $X \subseteq \beta(X)$ offen ist. □

Korollar 12.13 *Sei X lokalkompakter Hausdorff–Raum. $Y \subseteq X$ ist lokalkompakt genau dann, wenn $Y = A \cap U$, U offen in X, A abgeschlossen in X.*

Beweis. Ist $Y = A \cap U$, so zitiere Kapitel 11. Ist $Y \subseteq X$ lokalkompakt, so gilt: $Y \subseteq \overline{Y} \subseteq X$. Mit Lemma 12.11 ist Y offen in $\overline{Y}$. Das heißt: Es gibt U offen in X mit $Y = U \cap \overline{Y}$. Setze nun $A = \overline{Y}$. □