# Topologie

`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS05/Topologie/`

— Vorlesungsskript, ohne Garantie —

— Ich freue mich über Rückmeldung, Korrekturen, Verbesserungsvorschläge, etc. —

Prof. Günter M. Ziegler

Institut für Mathematik, MA 6-2
TU Berlin, 10623 Berlin
Tel. 030 314-25730
`ziegler@math.tu-berlin.de`
`http://www.math.tu-berlin.de/~ziegler`

TU Berlin, Wintersemester 2005/2006

# Vorbemerkungen

Die Topologie ist eine wichtige, klassische Disziplin der Mathematik, die sich mit interessanten Objekten beschäftigt (die Kleinsche Flasche, Bings Haus, Mannigfaltigkeiten, Linsenräume, Knoten . . . ). Ihr Studium en detail ist aufwändig (ein riesiges Gebiet mit vielen subtilen Teil-Theorien und Methoden); hier soll es hingegen „nur“ um eine Übersicht und Einführung „für Anwender“ gehen.

Für einen sehr theoretischen Teil der Mathematik wie die Topologie mag es merkwürdig klingen, wenn von *Anwendungen* der Rede ist. In der Tat ist aber die Topologie nicht nur eine der theoretischsten und hochentwickeltsten Gebiete der sog. „Reinen Mathematik“, mit bemerkenswerten Erfolgen und Problemlösungen *in* diesem Fach. Sie hat im Laufe des zwanzigsten Jahrhunderts auch

1. Begriffe und Konzepte bereitgestellt, die für die gesamte Mathematik wichtig sind, etwa den Begriff der „Kompaktheit“,
2. eine große Vielfalt von wichtigen *Methoden und Hilfsmitteln* zur Lösung mathematischer Probleme in anderen Gebieten beigesteuert — etwa eine große Vielfalt von „Fixpunktsätzen“, die man zum Beispiel zum Beweis der Existenz von periodischen Lösungen für Systeme von partiellen Differentialgleichungen einsetzen kann, und
3. wächst auch langsam die Einsicht, dass topologische Methoden auch direkt für Anwendungen außerhalb der Mathematik *anwendbar* sein können — ich verweise etwa auf den neuen Band „Topology for Computing“ [Zam05].

Dies ist also eine Grundlagen-Vorlesung – primär für Mathematiker – die sich an alle richtet, die wohl nicht in Topologie diplomieren wollen, aber topologische Begriffe, Resultate, Methoden und Konzepte verstehen wollen und eventuell als „Handwerkszeug“ brauchen werden.

Dementsprechend werden in der Vorlesung Grundlagen der (mengentheoretischen) Topologie wie auch wesentliche Punkte der Algebraischen Topologie dargestellt. Das soll präzise und konkret genug geschehen, um ein sicheres Formulieren von topologischen Fakten zu ermöglichen, um solche sicher anwenden zu können. Ich will aber auch die Beweisideen vermitteln, aus denen man lernt, warum das alles funktioniert – aber ohne Durchführung der komplizierteren/längeren Beweise, die jeder Hauptfach-Topologe natürlich irgendwann durcharbeiten sollte.

Einteilung (der Topologie, wie auch der Vorlesung):

– Die *mengentheoretische Topologie* liefert wichtige Definitionen, Begriffe und Grundlagen. Als Studiengebiet war sie jahrzehntelang ein wichtiges Forschungsgebiet, inzwischen sind „die Grundlagen geklärt“. Wir werden uns nur kurz damit aufhalten, aber in diesem Bereich zentrale Konzepte wie Stetigkeit, Kompaktheit, Trennungsaxiome usw. kennenlernen.
– Die *niedrigdimensionale Topologie* befasst sich mit der Topologie von Flächen ( = $2$-dimensionale Mannigfaltigkeiten) und mit den Analoga der Dimension $3$ und $4$, sowie damit zusammenhängenden Fragen (z. B. Knotentheorie). Das ist brennend aktuell, unter anderem wegen der aktuellen Fortschritte von G. Perelmann (St. Petersburg) in Bezug auf die Poincaré-Vermutung und Thurstons Geometrisierungsvermutung ($d = 3$). Wir wollen hier nicht sehr tief eindringen, aber zumindest Übersicht geben, die grundlegenden Begriffe (Mannigfaltigkeiten!) verstehen, die Hauptresultate für Dimension $2$ beschreiben und für $d = 3, 4$ die wesentlichen Ergebnisse und Fragen formulieren.
– Die *algebraische Topologie* liefert algebraische Hilfsmittel und Kriterien für die Unterscheidung von Räumen, die (Nicht-)Existenz von Abbildungen etc. Diese Hilfsmittel sind allemal wichtig auch für die niedrig-dimensionale Topologie, aber auch weit über die Topologie heraus. Man unterscheidet als Teilgebiete dabei unter anderen *Homotopietheorie* (Fundamentalgruppe!), *Homologietheorie* (die sog.

Homologiegruppen), *Differentialtopologie* (die insbesondere den Fall von glatten Mannigfaltigkeiten behandelt).

Dieses Skript zur Vorlesung ist absichtlich sehr knapp gehalten. Es soll eine verlässliche Grundlage bilden, die einem ggf. das Mitschreiben der gesamten Vorlesung erspart — aber nicht die Vorlesung selbst. Für detailliertere Motivation, Erklärungen, Illustrationen verweise ich erstens auf Vorlesung und Übungen, zweitens aber auch auf die angegebene Literatur: Schauen Sie doch mal auf jeden Fall in die Bücher von Jänich [Jän80] und Ossa [Oss92] (auf deutsch) sowie von Stillwell [Sti93] und Munkres [Mun00, Mun84] rein!

Ansonsten — fragen Sie mich, sprechen Sie mit mir! Melden Sie sich zum Beispiel auch, wenn Dinge (im Skript) unklar sind, unpräzise wirken, oder nicht plausibel klingen. Ich bin auch an Tipp-, Druck- und Denkfehlern interessiert und arbeite entsprechend in die Online-Version des Skipts kontinuierlich Korrekturen ein.

# 1 Topologische Räume

In diesem Abschnitt versammeln wir grundlegende Definitionen, Begriffe und Konzepte sowie wichtige Resultate der sog. *mengentheoretischen Topologie*. Meine wichtigsten Quelle sind dabei Munkres [Mun00] und Jänich [Jän80]. Genauigkeit im Umgang mit solchen Grundlagen ist auch deshalb nötig, weil wir es in der Topologie nicht nur mit „schönen, anschaulichen" topologischen Räumen zu tun bekommen, sondern unausweichlich etwa mit „unendlichdimensionalen" Objekten wie Funktionenräumen; und wir müssen uns eben auch absichern gegen die Pathologien der mengentheoretischen Topologie (siehe etwa [SS70]).

**Definition 1.1** (Topologischer Raum, offene Mengen)**.** Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, bestehend aus einer Menge $X$ und einer Familie $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ von Teilmengen, die die *offenen Mengen* des topologischen Raums heißen, und deren Komplemente die *abgeschlossenen Mengen* des Raums heißen, so dass

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$: die leere Menge und die Grundmenge sind offene Mengen
(T2) jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen,
(T3) jede Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

Es folgt: endliche Vereinigungen, und beliebige Schnittmengen, von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen. Ein Durchschnitt von beliebig vielen offenen Mengen, und eine Vereinigung von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen, sind im Allgemeinen nicht offen bzw. abgeschlossen.

Konvention: $\mathcal{O}$ wird nicht explizit genannt, der topologische Raum wird mit $X$ bezeichnet.

**Definition 1.2** (Umgebung, Basis)**.** Eine offene Teilmenge $U \subseteq X$, die $x$ enthält, heißt *(offene) Umgebung* von $x$. Die offenen Umgebungen bestimmen die Topologie (das heißt, die Familie $\mathcal{O}$ der offenen Mengen): eine Menge ist offen, wenn sie zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung enthält.

Eine *Umgebungsbasis* $\mathcal{U}_x$ für $x \in X$ ist eine Menge von offenen Umgebungen so dass jede offene Umgebung von $x$ eine Umgebung aus $\mathcal{U}$ enthält. Eine Menge von offenen Mengen $\mathcal{B}$ heißt *Basis* der Topologie, wenn sie zu jedem Punkt eine Umgebungsbasis enthält.

Jede Basis $\mathcal{B}$ bestimmt eindeutig die Topologie: $\mathcal{O}$ ist die Menge aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$. (Dabei wird $\emptyset$ als Vereinigung einer "leeren Menge von offenen Teilmengen" interpretiert.)

*Beispiele.*

1. Der $\mathbb{R}^n$ ist ein topologischer Raum, mit der Topologie
$$\mathcal{O} := \{U \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ für jedes } x \in U \text{ enthält } U \text{ eine } \varepsilon\text{-Umgebung } B_\varepsilon(x) \text{ von } x\}$$
2. Ist $X$ eine Menge, so ist $(X, 2^X)$ ein topologischer Raum. $2^X$ heißt die *diskrete Topologie* auf $X$.
3. Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, so ist
$$\mathcal{O}_d := \big\{U \subseteq X : \text{ für jedes } x \in U \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } \{x \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq U\big\}$$
eine Topologie; die *$\varepsilon$-Umgebungen* $U_\varepsilon(x) := \{x \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$, für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, bilden eine Basis.
4. Eine interessante Topologie auf $\mathbb{Z}$ erhält man mit
$$\mathcal{P} := \{A \subseteq \mathbb{Z} : \text{ für jedes } x \in A \text{ enthält } A \text{ eine arithmetische Folge } a + \mathbb{Z}b, \text{ für ein } b \neq 0\}.$$
In dieser Topologie ist jede nicht-leere offene Menge unendlich. Jede Folge $a + \mathbb{Z}b$ ist aber auch abgeschlossen. Folgt daraus, dass $\mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} (0 + p\mathbb{Z})$ abgeschlossen ist?

*Beispiel* ($p$-adische Zahlen). Für jede Primzahl definiert die Festlegung $|a|_p = p^{-\nu}$ für $a = \frac{b}{c}p^\nu$ mit $(p, bc) = 1$, und $|0|_p = 0$ eine Norm auf den rationalen Zahlen, die *$p$-adische Norm*. Dies definiert eine

Metrik und damit eine Topologie auf $\mathbb{Q}$, in der Zahlen nah beeinander liegen, wenn sie sich „nur um hohe Potenzen von $p$ unterscheiden“. Siehe Ebbinghaus et al. [EHH$^+$92, Kap. 6].

*Übungsaufgabe.* Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ von Teilmengen von $X$ ist Basis einer Topologie wenn gilt:

(1) jedes $x \in X$ liegt in einer Menge $B \in \mathcal{B}$, und
(2) wenn $x$ im Schnitt zweier $B', B'' \in \mathcal{B}$ liegt, so gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq B' \cap B''$.

*Übungsaufgabe.* Die übliche Euklidische Metrik, die $\ell_1$-Metrik, die Taximetrik $\ell_\infty$, und die allgemeineren $\ell_p$-Metriken bestimmen alle dieselbe, die "übliche" Topologie auf dem $\mathbb{R}^n$.

**Definition 1.3** (Quadertopologie/Produkttopologie)**.** Auf einem Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ von topologischen Räumen bilden

- die Produkte $\prod_{i\in I} U_i$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq X_i$ die Basis der *Quadertopologie* auf $X$, und
- die Produkte $\prod_{i\in I} U_i$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq X_i$, wobei $U_i \subset X_i$ nur endlich oft gelten darf, die Basis der *Produkttopologie* auf $X$.

Ist $I$ endlich, so stimmen Quadertopologie und Produkttopologie überein. Insbesondere ist die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$ auch die Produkttopologie auf $\prod_{i\in\{1,\dots,n\}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.

**Definition 1.4** (Unterraum)**.** Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$, so wird dadurch $Y$ zu einem *Unterraum*, mit der *induzierten* Topologie, deren offene Mengen als $U \cap Y$ für $U \in \mathcal{O}$ gegeben sind.

*Beispiele.* Die „übliche“ Topologie auf $\mathbb{R}^n$ induziert Topologien auf allen Teilmengen. Insbesondere sind damit Topologien definiert auf dem *$n$-dimensionalen Ball* $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, den *Einheitswürfel* $I^n$ für $I := [0,1]$, der *Einheitssphäre* $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, etc.

**Definition 1.5** (Stetige Abbildung, Homöomorphismus, Einbettung)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist *stetig* wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subseteq Y$ offen (in $X$) ist.

Eine Bijektion $f : X \to Y$ heißt *Homöomorphismus* wenn $f$ und $f^{-1}$ beide stetig sind. $X$ und $Y$ heißen dann *homöomorph*; wir notieren dies mit $X \cong Y$.

Eine *Einbettung* ist eine injektive stetige Abbildung $f : X \to Y$, die einen Homöomorphismus zwischen $X$ und dem Unterraum $f(X) \subseteq Y$ ergibt.

*Übungsaufgabe.* Zeige, dass die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ (mit der induzierten Topologie) homöomorph ist zu $\mathbb{R}^{n-1}$ (mit der Produkttopologie).

Zeige, dass der offene Einheitsball $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ (mit der induzierten Topologie) homöomorph ist zu $\mathbb{R}^n$ (mit der üblichen Topologie).

*Übungsaufgabe.* Man zeige: Die Produkttopologie ist die „gröbste“ Topologie auf der Produktmenge $\prod_i X_i$ (also die Topologie mit der minimalen Familie offener Mengen), für die die Projektionen $\pi_j : \prod_i X_i \to X_j$ stetig sind.

Unter *Abbildungen* verstehen wir im Folgenden immer *stetige* Abbildungen, wenn nicht explizit etwas Gegenteiliges gesagt wird.

Es ist nicht a priori klar, wie man die „Dimension“ eines (gutartigen) topologischen Raums definieren sollte. Zu zeigen ist dann, dass $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ für $m > n$ nicht homöomorph sind, und es dann auch keine Einbettung $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gibt. Dies ist nicht einfach; zu diesem Zwecke ist im Rahmen der mengentheoretischen Topologie umfangreiche „Dimensionstheorie“ entwickelt worden (siehe etwa Menger [Men28]). Die „Invarianz der Dimension“ (zuerst 1911 von Luitzen Brouwer[1] [Bro11] bewiesen) zeigt man am besten mit Hilfsmitteln der *Homologietheorie*, insbesondere mit Hilfe lokaler Homologiegruppen.

[1] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881–1966, Topologe, „Intuitionist“,
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Brouwer.html`

*Beispiel* ([Mun00, §44]). Die *Peano-Kurve* ist eine stetige, surjektive Abbildung $P : [0,1] \to [0,1]^2$.

**Definition 1.6** (Zusammenhängend/wegzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum $X$ ist *zusammenhängend* wenn er nicht als disjunkte Vereinigung $X = A' \cup A''$ von zwei nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen geschrieben werden kann.

Er ist *wegzusammenhängend*, wenn es für jede $x', x'' \in X$ eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to X$ gibt mit $f(0) = x'$ und $f(1) = x''$, einen *Weg von* $x'$ *nach* $x''$.

**Lemma 1.7.** *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

*Beispiele.* Die Räume $\mathbb{R}^n$, die Bälle $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, die Einheitswürfel $I^n$ für $I := [0,1]$ sind wegzusammenhängend für $n \geq 0$.

Die Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ist wegzusammenhängend für $n > 1$. Aber: $S^0$ ist unzusammenhängend (zwei Punkte); $S^{-1} = \emptyset$ ist zusammenhängend.

*Übungsaufgabe.* Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.

*Beispiel.* Die "topologist's sine curve" $S := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

**Definition 1.8** (Trennungsaxiome [Mun00, Chap. 4])**.** Ein topologischer Raum $X$ heißt

($T_1$) $T_1$-*Raum* wenn jeder Punkt abgeschlossen ist, d. h. wenn es zu $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$ eine offene Menge $U''$ gibt mit $x' \notin U''$ und $x'' \in U''$;

($T_2$) $T_2$-*Raum*, oder *hausdorffsch*[2], wenn es zu $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$ disjunkte offene $U', U''$ gibt mit $x' \in U'$ und $x'' \in U''$;

($T_3$) $T_3$-*Raum*, oder *regulär*, wenn jeder Punkt abgeschlossen ist ($T_1$) und es zu jedem abgeschlossenen $A'' \subseteq X$ und $x' \notin A''$, disjunkte offene $U', U''$ gibt mit $x' \in U'$ und $A'' \subseteq U''$;

($T_4$) $T_4$-*Raum*, oder *normal*, wenn jeder Punkt abgeschlossen ist ($T_1$) und es zu disjunkten abgeschlossenen Mengen $A', A'' \subseteq X$ disjunkte offene $U', U''$ gibt mit $A' \subseteq U'$ und $A'' \subseteq U''$.

Offenbar gilt

$$\text{„normal } (T_4) \Longrightarrow \text{ regulär } (T_3) \Longrightarrow \text{ hausdorffsch } (T_2) \Longrightarrow T_1\text{“.}$$

*Beispiel.* Die "reelle Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt" erfüllt ($T_1$), ist aber nicht hausdorffsch.

**Satz 1.9** (Urysohn-Lemma[3] [Mun00, Thm. 33.1])**.** *Wenn $X$ normal ist und $A, B \subset X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen sind, dann kann man zwischen $A$ und $B$ stetig interpolieren, d. h. es gibt eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$ für alle $a \in A, b \in B$.*

**Satz 1.10** (Urysohns Metrisierungssatz [Mun00, Thm. 34.1])**.** *Jeder reguläre topologische Raum mit einer abzählbaren Basis ist metrisierbar, d. h. es gibt dann eine Metrik $d$ auf $X$, die die vorgegebene Topologie erzeugt.*

**Definition 1.11** (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum $X$ heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung von $X$ durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung hat.

Eine Teilmenge $C \subseteq X$ ist *kompakt*, wenn jede Überdeckung durch offene Teilmengen von $X$ eine endliche Teilüberdeckung hat; äquivalent dazu: der topologische Raum $C$ (mit der induzierten Topologie als Unterraum betrachtet) ist kompakt.

[2] Felix Hausdorff, 1868–1942, Topologe und Lyriker, von den Nazis in den Selbstmord getrieben, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hausdorff.html`

[3] Pavel Samuilovich Urysohn, 1898–1924, russischer Topologe, mit 26 beim Schwimmen in Frankreich ertrunken, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Urysohn.html`

**Proposition 1.12** (Über Kompaktheit)**.**

1. *Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge (d. h., jeder abgeschlossene Teilraum eines kompakten Raums) ist kompakt.*
2. *Jede kompakte Teilmenge eines hausdorffschen Raums ist abgeschlossen.*
3. *Jedes Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*
4. *Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt auf jeder nicht-leeren kompakten Teilmenge $C \subseteq X$ Maximum und Minimum an.*
5. *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

**Satz 1.13** ([Mun00, Thm. 26.6])**.** *Wenn $X$ kompakt und $Y$ hausdorffsch ist, dann ist jede bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus.*

**Satz 1.14** (Satz von Tychonoff[4] [Mun00, Thm. 37.3])**.** *Jedes Produkt von kompakten Räumen (mit Produkt-Topologie) ist kompakt.*

*Beispiel.* Damit ist $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ein kompakter topologischer Raum.

*Übungsaufgabe.* Der Einheitsball in $\ell^2(\mathbb{N})$ ist *nicht* kompakt.

*Übungsaufgabe.* Das Produkt $[0,1] \times [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{3}] \times \cdots$ mit der *Produkttopologie* ist kompakt, nach dem Satz von Tychonoff. Dieselbe Menge ist auch ein Unterraum des Raums $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{i\geq 1} x_i^2 < \infty$ der quadratsummierbaren Folgen, auf dem die Topologie durch die $\ell^2$-Metrik definiert ist — und dieser Unterraum ist auch kompakt. Ist das derselbe topologische Raum?

**Definition 1.15** (Kompakt-offene Topologie, für Funktionenräume)**.** Seien $X$ und $Y$ topologische Räume. Dann macht man die Menge $\mathcal{C}(X,Y)$ aller stetigen Abbildungen mit der *kompakt-offenen Topologie* zu einem topologischen Raum: ihre offenen Mengen sind die Vereinigungen von endlichen Schnitten der Mengen vom Typ

$$S(C,U) \quad := \quad \{f \in \mathcal{C}(X,Y) : f(C) \subseteq U\}$$

für kompakte $C \subseteq X$ und offene $U \subseteq Y$.

Die Mengen $\mathcal{C}(X,Y)$ bilden eine „Subbasis“ der Topologie.

*Beispiel.* Wenn $X = \{x\}$ ein Punkt ist, dann ist $\mathcal{C}(X,Y)$ homöomorph zu $Y$.

*Übungsaufgabe.* Sei $X$ ein topologischer Raum, $I$ eine Menge. Dann ist die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X$ (wobei alle Faktoren gleich $X$ sind) genau die kompakt-offene Topologie auf dem Raum $X^I$ aller stetigen Abbildungen $f : I \to X$, wenn man $I$ mit der diskreten Topologie ausstattet.

[4] Andrei Nikolaevich Tikhonov, 1906–1993, russischer Topologe, bewies dies als Zwanzigjähriger, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tikhonov.html`

## 2 Simplizialkomplexe

Manche topologische Räume (und viele interessante) kann man „triangulieren“ – und damit hat man dann ein einfaches, kombinatorisches Modell für den Raum, einen „Simplizialkomplex“. Meine Skizze basiert auf Munkres [Mun84] und Matoušek [Mat03], wobei ich in Notation und Terminologie eher [Mat03] folge.

**Definition 2.1.** Ist $F = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von $k+1$ affin unabhängige Punkten, so ist

$$\sigma = \operatorname{conv}\{v_0, \dots, v_k\} = \{\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_k v_k \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \sum\nolimits_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}$$

ein *$k$-dimensionaler Simplex* oder kurz *$k$-Simplex*. Die Simplexe $\tau = \operatorname{conv}(G)$ für $G \subseteq F$ heißen die *Seitenflächen* bzw. *Seiten* von $\sigma$. (Damit sind $\sigma$ und $\emptyset$ Seiten von $\sigma$. Alle anderen Seiten von $\sigma$ heißen dann *nicht-trivial*.)

Je zwei $k$-dimensionale Simplexe sind affin isomorph, also insbesondere homöomorph (bezüglich der vom jeweiligen $\mathbb{R}^n$ induzierten Unterraumtopologie). Ein $k$-dimensionaler Simplex ist für $k = 0$ ein Punkt („Ecke“), für $k = 1$ eine Strecke („Kante“), für $k = 2$ ein Dreieck („2-Seite“), für $k = 3$ ein Tetraeder, usw. Wir schreiben $V(\sigma)$ für die Menge der Ecken von $\sigma$. Achtung: jeder $k$-dimensionale Simplex hat $k+1$ Ecken. Er ist homömomorph zu $B^k$. Man fasst oft die leere Menge als Simplex der Dimension $-1$ auf (mit $0$ Ecken).

**Definition 2.2.** Ein *(geometrischer) Simplizialkomplex* $\Delta$ ist eine Menge von Simplexen im $\mathbb{R}^N$ (für ein $N \geq 0$) die folgende Eigenschaften erfüllt:

(K1) $\emptyset \in \Delta$
(K2) Für $\sigma \in \Delta$ liegen auch alle Seiten $\tau \subset \sigma$ in $\Delta$
(K3) Für $\sigma, \sigma' \in \Delta$ ist $\sigma \cap \sigma'$ eine Seitenfläche von $\sigma$ und von $\sigma'$.

Die *Eckenmenge* $V(\Delta)$ von $\Delta$ ist die Menge aller $v \in \mathbb{R}^N$ so dass $\{v\}$ eine Ecke von $\Delta$ ist.

Die *Dimension* von $\Delta$, notiert $\dim \Delta$, ist die maximale Dimension eines Simplexes in $\Delta$.

Ein *Unterkomplex* ist eine nicht-leere Teilmenge von $\Delta$ die wieder ein Komplex ist, also (K2) erfüllt. Das *$k$-Skelett* von $\Delta$ ist der Unterkomplex $\Delta^{(k)}$, der aus allen Simplexen der Dimension höchstens $k$ besteht.

*Beispiele.* Ist $\sigma$ ein Simplex, so ist die Menge aller Seiten von $\sigma$ ein Komplex (den wir üblicherweise wieder mit $\sigma$ bezeichnen).

Die Menge aller echten Seitenflächen $\operatorname{conv}(G)$, $G \subset F$, von $\sigma = \operatorname{conv}(F)$ heißt der *Rand* $\partial\sigma$ von $\sigma$. Der Rand eines $k$-Simplex ist für $k = 0$ leer, für $k = 1$ besteht er aus zwei Punkten, für $k = 2$ ist er ein Dreiecksrand, etc. Er ist homöomorph zu $S^{k-1}$.

**Definition 2.3.** Ist $\Delta$ ein Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^n$, so ist das *Polyeder* von $\Delta$ der topologische Raum $\|\Delta\|$, der auf der Grundmenge $\bigcup \Delta$ (dem *Träger* von $\Delta$) durch die folgende Topologie gegeben ist: eine Teilmenge $A \subseteq \bigcup \Delta$ ist abgeschlossen bzw. offen genau dann, wenn $A \cap \sigma$ für jeden Simplex $\sigma \in \Delta$ abgeschlossen bzw. offen ist.

Wenn $\Delta$ endlich ist, dann ist die Topologie auf $\|\Delta\|$ die von $\mathbb{R}^n$ auf $\bigcup \Delta$ induzierte Unterraumtopologie.

*Beispiel.* $\Delta := \{\emptyset, \{0\}\} \cup \{\{\frac{1}{n}\} : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein 0-dimensionaler Simplizialkomplex, und hat damit die diskrete Topologie. Dagegen ist in der Unterraumtopologie auf $\bigcup \Delta \subset \mathbb{R}$ die Teilmenge $(\bigcup \Delta) \backslash \{0\}$ nicht abgeschlossen.

*Bemerkung* 2.4. Die Topologie auf $\|\Delta\|$ kann als *Quotiententopologie* bzgl. der surjektiven Abbildung $\sum_{\sigma\in\Delta}\sigma \to \bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma = \|\Delta\|$ von der Summe (disjunkten Vereinigung) beschrieben werden: als die „feinste" Topologie auf $\|\Delta\|$, bezüglich der die Abbildung $\pi$ stetig ist. (Siehe [Mun84, §20].)

Wenn wir im Folgenden von topologischen Eigenschaften (wie hausdorffsch, kompakt, zusammenhängend) eines Komplexes reden, dann ist immer das Polyeder des Komplexes gemeint.

**Lemma 2.5.** *Jeder Simplizialkomplex ist hausdorffsch* $(T_2)$.

*Ein Simplizialkomplex ist dann und nur dann kompakt, wenn er endlich ist (d. h., aus endlich vielen Simplexen besteht).*

*Ein Simplizialkomplex ist genau dann zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist.*

**Definition 2.6.** Ein topologischer Raum $X$ heißt *triangulierbar*, wenn er zu einem Simplizialkomplex $\Delta$ homöomorph ist, $X \cong \|\Delta\|$.

*Beispiele.* Die Bälle $B^n$ sind triangulierbar (durch den Komplex eines $n$-dimensionalen Simplexes).

Die Sphären $S^{n-1}$ sind triangulierbar (durch den Randkomplex eines $n$-Simplexes).

*Beispiel.* Die *Standard-Triangulierung* des $\mathbb{R}^n$ hat Eckenmenge $\mathbb{Z}^n$ und die Mengen $\{v^0,\dots,v^k\} \subset \mathbb{Z}^n$ als Simplexe, für die alle Komponenten von $v^j - v^i$ (für $j > i$) entweder $0$ oder $1$ sind.

*Beispiele.* Die „reelle Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt" ist nicht triangulierbar (weil sie nicht hausdorffsch ist).

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist (mit der üblichen Topologie) nicht triangulierbar (weil sie abzählbar ist, müsste der zugehörige Komplex $0$-dimensional sein, hat dann aber die diskrete Topologie).

*Beispiele* (Schönflies-Theorem/Alexanders gehörnte Sphäre). Wenn $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ eine Einbettung ist, dann gibt es eine Triangulierung von $\mathbb{R}^2$, in der $f(S^1)$ das Bild eines Unterkomplexes ist.

Wenn $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung ist, dann gibt es nicht unbedingt eine Triangulierung von $\mathbb{R}^3$, in der $f(S^2)$ das Bild eines Unterkomplexes ist.

**Definition 2.7** (Simpliziale Abbildungen)**.** Eine *simpliziale Abbildung* $f : \Delta \to \Delta'$ ist eine Funktion $f : V(\Delta) \to V(\Delta')$ mit der Eigenschaft, dass für jeden Simplex $\sigma \in \Delta$ das Bild der Eckenmenge $V(\sigma)$ die Eckenmenge eines Simplexes in $\Delta'$ ist, der dann mit $f(\sigma)$ notiert wird.

Für $\sigma \in \Delta$ und $f : \Delta \to \Delta'$ gilt automatisch immer $\dim f(\sigma) \le \dim \sigma$.

**Lemma 2.8.** *Jede simpliziale Abbildung* $f : \Delta \to \Delta'$ *induziert eine stetige Abbildung* $\|f\| : \|\Delta\| \to \|\Delta'\|$ *der zugehörigen Polyeder, durch „lineare Fortsetzung auf die Simplexe":*

$$\|f\| : \lambda_0 v^0 + \cdots + \lambda_k v^k \;\longmapsto\; \lambda_0 f(v^0) + \cdots + \lambda_k f(v^k).$$

**Definition 2.9** (Abstrakter Simplizialkomplex)**.** Ein *abstrakter Simplizialkomplex* $K$ ist ein nicht-leeres System $K \subseteq 2^V$ von endlichen Teilmengen einer Menge $V$, das unter Teilmengenbildung abgeschlossen ist, d. h., so dass mit jeder Menge $S \in K$ auch jede Teilmenge von $S$ in $K$ liegt.

Die Vereinigungsmenge $V(K) := \bigcup K$ ist die *Eckenmenge* von $K$. Die Mengen $S \in K$ heißen die *Seiten* von $K$. Ihre *Dimension* ist durch $\dim(S) := |S| - 1$ gegeben.

**Definition 2.10** (Simpliziale Abbildungen; isomorph)**.** Eine *simpliziale Abbildung* $f : K \to K'$ zwischen Simplizialkomplexen $K$ und $K'$ ist eine Funktion $f : V(K) \to V(K')$, die Seiten von $K$ auf Seiten von $K'$ abbildet, d. h., so dass $f(S) \in K'$ für alle $S \in K$ gilt.

Eine simpliziale Abbildung $f : K \to K'$ ist ein *Isomorphismus* wenn $f : V(K) \to V(K')$ bijektiv ist und eine Bijektion zwischen den Seiten von $K$ und von $K'$ induziert, d. h., wenn $K' = \{f(S) : S \in K\}$.

**Definition 2.11.** Für jeden geometrischen Simplizialkomplex $\Delta$ ist die Menge $K_\Delta := \{V(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ der Eckenmengen der Simplexe in $\Delta$ ein abstrakter Simplizialkomplex, das *Eckenschema* von $\Delta$.

Wenn ein abstrakter Simplizialkomplex $K$ zu einem Komplex $K_\Delta$ isomorph ist, dann heißt $\Delta$ eine *Realisierung* von $K$.

**Lemma 2.12.** *Wenn $\Delta, \Delta'$ zwei Realisierungen von isomorphen Komplexen $K, K'$ sind, dann sind $\|\Delta\|$ und $\|\Delta'\|$ homöomorph.*

*Übungsaufgabe.* Jedes endliche Mengensystem definiert einen Simplizialkomplex, wenn man es um alle Teilmengen erweitert. So ist etwa

$$\Delta \ := \ \{\{1,2,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{4,5\}, \text{ und alle Teilmengen davon}$$

ein Simplizialkomplex. Man zeichne eine Realisierung!

*Beispiele.* In der kombinatorischen Optimierung studiert man abstrakte Simplizialkomplexe, die Graphen zugeordnet werden, darunter der *Unabhängigkeitskomplex* $I(G) \subseteq 2^V$ und den *Matchingkomplex* $M(G) \subseteq 2^E$ eines endlichen Graphen $G(V, E)$.

Den *Schachbrettkomplex* $\Delta_{m,n}$ kann man als den Matchingkomplex eines vollständigen bipartiten Graphen definieren, $\Delta_{m,n} := M(K_{m,n})$.

*Beispiele.* Man kann topologische Räume definieren/konstruieren, indem man kombinatorisch eine Triangulierung angibt. So beschreiben wir Triangulierungen von Kreisband (Zylinder), Möbiusband, Torus und der Kleinschen Flasche durch „Identifikationen am Rand“ eines triangulierten Rechtecks.

**Proposition 2.13.** *Für jeden abstrakten Simplizialkomplex $K$ erhält man eine kanonische Realisierung wie folgt: Sei $V = V(K)$ die Eckenmenge von $K$, und sei $\mathcal{F}_c(V, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger. Sei $\mathcal{F}_c[K] \subset \mathcal{F}$ die Teilmenge derjenigen Funktionen $f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R})$, für die*

1. *der Träger $\{v \in V : f(v) \neq 0\}$ ein Simplex aus $K$ ist,*
2. *alle Funktionswerte $f(v)$ nicht-negativ sind, und*
3. *die Summe aller Funktionswerte gleich $1$ ist.*

*Dann ist $\mathcal{F}[K]$ das Polyeder eines Simplizialkomplexes, der $K$ realisiert.*

*Übungsaufgabe.* Für eine simpliziale Abbildung $f : \Delta \to \Delta'$ von geometrischen Simplizialkomplexen ist $\|f\|$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn die zugehörige simpliziale Abbildung von abstrakten Simplizialkomplexen $K_\Delta \to K_{\Delta'}$ ein Isomorphismus ist.

Jeder Simplizialkomplex auf $n < \infty$ Ecken ist ein Unterkomplex eines $(n-1)$-dimensionalen Simplex, kann also im $\mathbb{R}^{n-1}$ realisiert werden.

*Übungsaufgabe.* Jeder endliche Simplizialkomplex der Dimension $k < \infty$ kann geometrisch im $\mathbb{R}^{2k+1}$ realisiert werden.

Die „Toblerone-Triangulierung“ des Torus mit $9$ Ecken, und die Triangulierung mit $7$ Ecken (der Császar-Torus — siehe [Lut02]) sind im $\mathbb{R}^3$ realisierbar. Es ist aber nicht klar, ob jeder triangulierte Torus im $\mathbb{R}^3$ geradlinig dargestellt werden kann — das ist ein altes Problem, das auf Grünbaum [Grü03, p. 253] zurückgeht. Realisierungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$ sind ein aktuelles Forschungsthema — siehe die Forschergruppe *Polyedrische Flächen* an der TU Berlin,

`http://www.math.tu-berlin.de/geometrie/ps/`.

**Satz 2.14** (Satz von Steinitz 1922 [Zie95, Lect. 3])**.** *Jede Triangulierung von $S^2$ kann im $\mathbb{R}^3$ realisiert werden (sogar als Randkomplex eines simplizialen konvexen Polytops).*

**Definition 2.15** (Mannigfaltigkeit)**.** Eine *$n$-dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein nicht-leerer hausdorffscher Raum $M$ in dem jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung hat, die zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

Eine kompakte Mannigfaltigkeit (ohne Rand, wie hier definiert) heißt auch *geschlossen*.

*Beispiele.* Genannt seien hier: 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten; die 2-Sphäre mit $g \geq 0$ Henkeln; die Sphären $S^{n-1}$, die projektive Räumen $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$; der $n$-dimensionale Torus $T^n := (S^1)^n$, die Gruppen $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, sowie als nicht-kompakte Beispiele $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{SL}(n)$, $\mathrm{GL}(n)$, $\ldots$

**Satz 2.16** (Rado 1924/Moise 1952 [Moi77])**.** *Alle kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \leq 3$ sind triangulierbar.*

Durch Kombination von Resultaten von Casson und von Freedman (siehe [AM90, S. xvi]) erhält man Beispiele von $4$-Mannigfaltigkeiten die nicht triangulierbar sind. Ob es auch Mannigfaltigkeiten der Dimension $n > 4$ gibt, die nicht triangulierbar sind, ist aber noch nicht geklärt.

Minimale Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten sind ein aktuelles Forschungsthema – siehe etwa Björner & Lutz [BL00]. So ist etwa nicht geklärt, vieviele Ecken eine Triangulierung von $S^m \times S^n$ wirklich haben muss.

*Beispiele.* Die *reelle projektive Ebene* $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ hat eine Triangulierung mit $6$ Ecken (aus dem Ikosaeder konstruiert). Allgemeiner erhält man aus jedem zentralsymmetrischen simplizialen Polytop der Dimension $n$, in dem gegenüberliegende Ecken keine gemeinsamen Nachbarn haben, eine Triangulierung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, zusammen mit einer simplizialen Abbildung $S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

**Definition 2.17.** *Semialgebraische Mengen* sind die Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die man als Lösungsmengen von polynomialen Gleichungen und (strikten oder nicht strikten) polynomialen Ungleichungen erhält.

**Satz 2.18** (Referenz?)**.** *Jede semialgebraische Menge ist triangulierbar.*

# 3 Homotopiegruppen

Die Homotopiegruppen eines topologischen Raums sind *algebraische* Invarianten, mit denen man im Prinzip Räume unterscheiden kann, die nicht nur nicht homöomorph, sondern nicht einmal homotopieäquivalent sind. Obwohl sie im allgemeinen (etwa für Komplexe) notorisch schwer zu berechnen sind, sind sie dennoch fundamental … Wir beginnen mit dem Konzept der „Homotopie“.

**Definition 3.1.** Seien $X, Y$ topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind *homotop*, notiert $f \sim g$, wenn die eine in die andere deformiert werden kann, d. h., wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ gibt (eine *Homotopie*), die zwischen $f$ und $g$ interpoliert, mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

**Lemma 3.2.** *Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der (stetigen) Abbildungen von $X$ nach $Y$. Die Menge der Homotopieklassen wird mit $[X, Y]$ bezeichnet.*

*Beispiel.* Die Homotopieklassen in $[\{x\}, Y]$ entsprechen den Wegzusammenhangskomponenten von $Y$.

**Definition 3.3.** Zwei topologische Räume $X, Y$ sind dann *homotopieäquivalent*, notiert $X \simeq Y$, wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f$ zur Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ auf $X$ homotop ist, und $f \circ g$ zu $\mathrm{id}_Y$ homotop ist, so dass also $f \circ g \sim \mathrm{id}_X$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_Y$ gilt.

*Beispiele.* $\mathbb{R}^n \simeq B^n \simeq \{0\}$; $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \simeq S^{n-1}$.

In dieser Definition müssen $f$ und $g$ weder injektiv noch surjektiv sein. Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (wie der Name sagt). Die Äquivalenzklassen dazu heißen *Homotopietypen*.

**Definition 3.4.** Ein topologischer Raum $X$ ist *kontrahierbar*, wenn er den Homotopietyp eines Punktes hat, das heißt, wenn es für einen (äquivalent: jeden) Punkt $y_0 \in X$ eine Homotopie gibt zwischen der konstanten Abbildung $c : X \to X$, $x \to y_0$, und der Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$.

Begriffe in diesem Umfeld: Retraktion, Deformationsretraktion, starke Deformationsretraktion. Es gibt aus Perspektive der mengentheoretischen Topologie ganze Bücher dazu, siehe [Bor67], [Hu65].

**Definition 3.5.** Ein Simplizialkomplex $K$ ist *kollabierbar*, wenn er durch *elementare Kollapse* auf eine einzelne Ecke reduziert werden kann: dabei entfernt man jeweils eine nicht-maximale Seitenfläche, die in nur einer maximalen Seitenfläche enthalten ist, zusammen mit allen sie enthaltenden Seiten.

Der Versuch, Homotopieäquivalenz durch Äquivalenz bzgl. elementaren Kollabierungs- und Antikollabierungsschritten und Antikollabierungs-Schritten zu ersetzen, ist ausführlich studiert und in Bücher gegossen worden („simple homotopy type“; vgl. [Coh73]).

*Beispiel.* Ein 1-dimensionaler endlicher Simplizialkomplex (endlicher Graph) ist kollabierbar, wenn er ein *Baum* ist, also zusammenhängend ist und keine Zykel enthält. In jedem elementaren Kollaps wird ein *Blatt* entfernt [Terminologie aus der Graphentheorie].

*Beispiel* (Bings Haus). „Bings Haus“ mit zwei Zimmern (siehe etwa Hatcher [Hat02, p. 4]) ist kontrahierbar, aber nicht kollabierbar. Borsuks Version davon ist eine Art Kleinsche Flasche. Alternativ dazu der “dunce hat” („Narrenkappe“).

**Definition 3.6.** Für $k \geq -1$ heißt ein topologischer Raum $X$ *$k$-fach zusammenhängend* (kurz *$k$-zusammenhängend*), wenn er nicht-leer ist, und jede stetige Abbildung $f : S^\ell \to X$ mit $0 \leq \ell \leq k$ zu einer konstanten Abbildung homotop ist; äquivalent dazu: für jedes $\ell$ mit $-1 \leq \ell \leq k$ kann jedes $f : S^\ell \to X$ zu einer Abbildung $F : B^{\ell+1} \to X$ fortgesetzt werden.

Für $\ell = -1$ bedeutet die Bedingung, dass $X$ nicht-leer sein muss. Für $\ell = 0$ fordert sie Wegzusammenhang. Ein 1-zusammenhängender Raum heißt auch *einfach zusammenhängend*. Er ist dann also nicht-leer, wegzusammenhängend, und jede Schleife in dem Raum lässt sich in dem Raum zusammenziehen.

**Lemma 3.7.** *$k$-Zusammenhang ist eine Invariante des Homotopietyps: Wenn $X$ $k$-zusammenhängend ist, dann auch jeder zu $X$ homotopieäquivalente Raum.*

**Satz 3.8.** *$S^n$ ist $(n-1)$-zusammenhängend, aber nicht $n$-zusammenhängend $n \geq -1$.*

*Beweis.* Jede stetige Abbildung $f : S^k \to S^n$ lässt sich unter Ausnutzung von Kompaktheit in eine „gutartige" (also etwa: stückweise sphärisch-lineare) Abbildung deformieren. Diese ist für $k < n$ nicht surjektiv, und damit leicht in eine konstante Abbildung deformierbar.

Für den zweiten Teil verwendet man algebraische Hilfsmittel, etwa den Abbildungsgrad: Dieser zählt „mit Vorzeichen", wie oft ein „generischer" Punkt im Bild von der Abbildung überdeckt wird. Diese Größe ist für alle generischen Punkte $y \in S^n$ gleich, und sie ändert sich unter Deformation nicht. Für die Identität ist sie 1, für jede konstante Abbildung ist sie 0. □

Dass die Identität $\mathrm{id} : S^n \to S^n$ *wesentlich* ist, also nicht homotop zu einer konstanten Abbildung (*nullhomotop*), ist eine nichttriviale Aussage. Wir notieren sie wie folgt.

**Korollar 3.9.** *$S^n$ ist nicht kontrahierbar.*

Es ist leicht zu sehen, dass dieses Korollar zum *Brouwerschen Fixpunktsatz* äquivalent ist:

**Satz 3.10** (Brouwers Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Abbildung $B^{n+1} \to B^{n+1}$ hat einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Wenn $\mathrm{id} : S^n \to S^n$ nullhomotop ist, dann auch $-\mathrm{id}$. Die Nullhomotopie liefert eine stetige Abbildung $\mathrm{Id} : B^{n+1} \to S^n \subset B^{n+1}$, die fixpunktfrei ist — Widerspruch!
Umgekehrt sei $f : B^{n+1} \to B^{n+1}$ fixpunktfrei, und sei $h(x)$ der Schnittpunkt von $S^n$ mit dem Strahl, der von $f(x)$ ausgehend durch $x$ geht. Dann ist $h : B^{n+1} \to B^{n+1}$ stetig, und auf dem Rand die Identität, liefert also eine Nullhomotopie für $\mathrm{id}$. □

Ohne Beweis geben wir das folgende, tiefliegendere Resultat an:

**Satz 3.11** (siehe Spanier [Spa66, p. 405])**.** *Sei $X$ ein triangulierbarer Raum. Wenn $X$ für alle $k \geq 0$ $k$-zusammenhängend ist, dann ist $X$ kontrahierbar.*

Mit dem Begriff des einfachen Zusammenhangs können wir eines der wichtigsten Probleme der Mathematik überhaupt *formulieren* (ein Clay-Problem, und vielleicht gerade von Perelman [Per03] gelöst worden …):

**Vermutung 3.12** (Die Poincaré-Vermutung)**.** *Jede einfach-zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu $S^3$.*

*Übungsaufgabe.* Die Menge (Gruppe) $\mathrm{SU}(2) \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist eine einfach-zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Zeige: sie ist homöomorph zu $S^3$.

Statt topologischer Räume betrachtet man in der Topologie oft besser/einfacher Raumpaare.

**Definition 3.13.** *Raumpaare* sind Paare $(X, A)$, wobei $X$ ein topologischer Raum ist, und $A \subseteq X$ ein Unterraum. Dabei kann man $X$ mit $(X, \emptyset)$ identifizieren. Ein Paar $(X, \{x_0\})$ heißt *punktierter Raum*; der Punkt $x_0 \in X$ heißt dann der *Basispunkt*. *Stetige Abbildungen* $f : (X, A) \to (Y, B)$ sind stetige Abbildungen $X \to Y$, die zusätzlich $f(A) \subseteq B$ erfüllen müssen. Abbildungen zwischen Raumpaaren $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sind *homotop*, wenn es $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ gibt mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Homöomorphie und Homotopieäquivalenz für Raumpaare definiert man ebenfalls analog zu den Definitionen für topologische Räume.

**Definition 3.14.** Bezeichne wieder $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall, und $\partial I = \{0, 1\}$ seine Endpunkte. Für einen topologischen Raum $X$ mit Basispunkt $x_0 \in X$ ist jede stetige Abbildung $\gamma : (I, \partial I) \to (X, \{x_0\})$ ein *geschlossener Weg* (eine *Schleife*) in $X$.
Die Menge $\pi_1(X; x_0) := [(I, \partial I), (X, \{x_0\})]$ von Homotopieklassen von geschlossenen Wegen heißt die *Fundamentalgruppe* (oder *erste Homotopiegruppe*) von $X$ (zum Basispunkt $x_0$). Auf ihr wird eine Verknüpfung definiert durch $[\gamma] \circ [\gamma'] := [\gamma * \gamma']$, mit

$$\gamma * \gamma'(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

*Übungsaufgabe.* Beweise, dass $\pi_1(X; x_0)$ mit dieser Verknüpfung in der Tat eine Gruppe ist.

*Bemerkung* 3.15. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X; x_0)$ „sieht“ nur die Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes.

*Übungsaufgabe.* Wenn $X$ wegzusammenhängend ist, dann hängt die Gruppenstruktur von $\pi_1(X; x_0)$ nicht vom Basispunkt ab (d. h. für verschiedene Basispunkte erhält man isomorphe Gruppen).

Daher schreibt man oft $\pi_1(X)$ für die Fundamentalgruppe eines (wegzusammenhängenden) Raums $X$.

*Beispiele.* $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \{c_0\}$; genauso für jeden kontrahierbaren Raum. $\pi_1(S^n) \cong \{c_0\}$ für $n > 1$.

**Lemma 3.16.** *Für Polyeder $X = \|\Delta\|$ hängt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X; x_0)$ nur vom $2$-Skelett ab.*

*Beweis.* Regularisierung, wie im Beweis zu Satz 3.8 skizziert: jede Schleife kann in das 1-Skelett gedrückt werden, jede Homotopie in das 2-Skelett. □

**Satz 3.17** (Stillwell [Sti93, Sect. 4.1]). *Die Fundamentalgruppe eines (o.B.d.A. zusammenhängenden) von Simplizialkomplexes kann man wie folgt durch Erzeuger und Relationen darstellen: Sei $T \subseteq \Delta^{(1)}$ ein aufspannender Baum im $1$-Skelett. Für jeden Knoten $x_i$ sei $w_i$ der eindeutige direkte Weg in $T$ von der Basisecke $x_0$ zu $x_i$.*
*Dann bestimmt jede Kante in $e_{ij} = x_i x_j \in \Delta^{(1)} \backslash T$ eine Schleife $w_i e_{ij} w_j^{-1}$, und jedes Dreieck $\sigma = x_i x_j x_k \in \Delta^{(2)}$ ergibt eine Relation $R_\sigma$. Damit ist*

$$\left\langle\, g_{ij} : x_i x_j \in \Delta^{(1)} \backslash T \;\middle|\; R_\sigma : \sigma \in \Delta^{(2)} \,\right\rangle$$

*eine Darstellung von $\pi_1(\Delta)$ durch Erzeuger und Relationen.*

*Beweis.* Jede Schleife mit Ausgangspunkt $x_0$ lässt sich in einen geschlossenen Kantenweg mit Eckenfolge $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N = x_0$ deformieren. Dieser ist homotop zu einer Verkettung von der Form $(w_0 e_{01} w_1^{-1})(w_1 e_{12} w_2^{-1}) \ldots (w_{N-1} e_{N-1,N} w_N^{-1})$, die ein Produkt von entweder trivialen Schleifen (für $e_{i,i+1} \in T$) oder Erzeugern der angegebenen Art ist (mit $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$).
Genauso lässt sich jede Homotopie zwischen Wegen in Einzelschritte zerlegen, die einzelne Dreiecke überstreichen. Jeder Dreiecksumlauf $x_0 x_1 x_2 x_0$ lässt sich in $(w_i e_{ij} w_j^{-1})(w_j e_{jk} w_k^{-1})(w_k e_{ki} w_i^{-1})$ deformieren, und dies ergibt (je nachdem, ob ein, zwei oder drei der involvierten Kanten außerhalb $T$ liegen) eine Relation vom Typ $g_{ij}$, $g_{ij} g_{jk}$ oder $g_{ij} g_{jk} g_{ki}$. □

*Beispiel.* Die Fundamentalgruppen von Graphen (1-dimensionalen Komplexen) sind freie Gruppen. Insbesondere gilt $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

**Proposition 3.18** (Jede endlich-erzeugte Gruppe ist Fundamentalgruppe). *Zu jeder endlichen Gruppenpräsentation $G = \langle g_1, \ldots, g_s \mid R_1, \ldots, R_t \rangle$ gibt es einen endlichen zweidimensionalen Simplizialkomplex $\Delta_G$ mit Fundamentalgruppe $G \cong \pi_1(\Delta_G)$.*

**Satz 3.19** (Seifert–van Kampen [Sti93, p. 125])**.** *Wenn sich ein Raum $X$ als Vereinigung $X = X_1 \cup X_2$ zweier offener Mengen mit wegzusammenhängendem Schnitt darstellen lässt, der gemeinsame Basispunkt $x_0$ im Schnitt $X_1 \cap X_2$ gewählt wird, und die Fundamentalgruppen durch*

$$\pi_1(X_1) = \langle a_1, \ldots, a_m \mid R_1, \ldots, R_n \rangle, \quad \pi_1(X_2) = \langle b_1, \ldots, b_p \mid S_1, \ldots, S_q \rangle$$

*und*

$$\pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle c_1, \ldots, c_x \mid T_1, \ldots, T_y \rangle$$

*gegeben sind, dann erhält man die Fundamentalgruppe von $X = X_1 \cup X_2$ als*

$$\pi_1(X_1 \cup X_2) \;=\; \big\langle\, a_1, \ldots, a_m,\, b_1, \ldots, b_p \;\big|\; R_1, \ldots, R_n,\, S_1, \ldots, S_q,\, U_1 V_1^{-1}, \ldots, U_x V_x^{-1} \,\big\rangle,$$

*wobei $U_i$ bzw. $V_i$ jeweils eine Präsentation von $c_i$ durch die Erzeuger $a_j$ von $\pi_1(X_1)$ bzw. durch die Erzeuger $b_k$ von $\pi_1(X_2)$ sind.*

Man beachte, dass in der Beschreibung von $\pi_1(X_1 \cup X_2)$ die Relationen $T_1, \ldots, T_y$ von $\pi_1(X_1 \cap X_2)$ keine Rolle spielen.

**Korollar 3.20.** *$\pi_1(S^n)$ ist für $n > 1$ trivial.*

*Beweis.* Überdecke $S^n$ durch zwei kontrahierbare offene Teilmengen, etwa durch offene $\varepsilon$-Umgebungen der oberen bzw. unteren Hemisphäre. Die Schnittmenge ist dann homotopieäquivalent zu $S^{n-1}$, also wegzusammenhängend für $n > 1$. $\square$

Weitere Anwendung: Analyse von Knotengruppen durch Dehn (1914) und Schreier (1924); siehe Stillwell [Sti93, Chap. 7]. Insbesondere kann man damit die *Torusknoten* $T_{m,n}$ ($m, n \geq 2$ teilerfremd) klassifizieren, deren *Knotengruppen* (Fundamentalgruppen der Komplemente) durch

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash T_{m,n}) \;\cong\; \langle a, b \mid a^m b^{-n} \rangle$$

gegeben sind: bis auf Reflektion des Raums, und $T_{m,n} \cong T_{n,m}$ sind die Knotengruppen nicht isomorph, also auch die Knoten nicht äquivalent. Siehe Stillwell [Sti93, Sects. 4.2.1, 7.1].

*Bemerkung* 3.21 (Siehe [Sti82, Sti93]). Das *Wortproblem* für Gruppen (also für ein gegebenes Wort bezüglich einer gegebenen Gruppenpräsentation zu entscheiden, ob das Wort das neutrale Element der Gruppe darstellt) ist nach Novikov (1955) nicht entscheidbar. Daraus folgen weitere Nichtentscheidbarkeitsresultate in der Topologie.

Das Homöomorphie-Problem für $2$-dimensionale Komplexe ist effektiv lösbar (d. h., man kennt einen Algorithmus dafür), aber das Homotopietyp-Problem ist nicht entscheidbar: weil man das Wortproblem in Gruppen nicht lösen kann, gibt es keinen endlichen Algorithmus, der zu jedem $2$-dimensionalen endlichen Simplizialkomplex entscheiden kann, ob er kontrahierbar ist.

Das Homöomorphieproblem für die $3$-dimensionale Sphäre ist effektiv lösbar (Rubinstein und Thompson [Rub97]; vgl. King [Kin04]), das Homöomorphieproblem für die $5$-dimensionale Sphäre ist aber unlösbar. Genauso ist das Homöomorphieproblem für $4$-dimensionale Mannigfaltigkeiten unlösbar (Markov 1958).

Schon in der Frühzeit der Topologie wurde bemerkt (von Reidemeister[5]), dass man bei Arbeit mit der Fundamentalgruppe Gefahr läuft, lediglich schwierige topologische Probleme in schwierige algebraische Probleme zu übersetzen.

[5]Kurt Reidemeister, 1893-1971, Pionier der Gruppen- und Knotentheorie, und Dichter;
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Reidemeister.html`

Die höheren Homotopiegruppen der Sphären werden oft als $\pi_n(X,\{x_0\}) := [(S^n,\{e_1\}),(X,\{\{x_0\}\})]$ definiert – da ist aber nicht so leicht zu sehen, wie/warum man da Elemente “addieren” kann. Man kann die Homotopiegruppen auch als Äquivalenzklassen von Abbildungen $(I^n,\partial I^n) \to (X,\{\{x_0\}\})$ auffassen. Dass das dasselbe ergibt, folgt zum Beispiel aus folgendem Satz:

**Lemma 3.22.** *Für jeden Raum mit Basispunkt $(X,\{x_0\})$ gibt es eine kanonische Bijektion zwischen den Mengen von Homotopieklassen von Abbildungen*

$$[(S^n,\{e_1\}),(X,\{x_0\})] \quad\longleftrightarrow\quad [(I^n,\partial I^n),(X,\{x_0\})].$$

*Beweis.* Jede Abbildung $g : (I^n,\partial I^n) \to (X,\{x_0\})$ bildet $\partial I^n$ auf $\{x_0\}$ ab, sie ist also automatisch auf $\partial I^n$ konstant.

Betrachten wir nun den Quotientenraum $(I^n/\partial I^n,*)$, in dem der gesamte Rand des $n$-Würfel zu einem einzigen Punkt $*$ identifiziert wird. Nach Definition der Quotiententopologie induziert jede Abbildung $\bar{g} : (I^n/\partial I^n,*) \to (X,A)$ auch eine Abbildung $g : (I^n,\partial I^n) \to (X,A)$, die auf $\partial I^n$ konstant ist. Umgekehrt induziert aber auch jede Abbildung $g : (I^n,\partial I^n) \to (X,A)$, *die auf $\partial I^n$ konstant ist* eine stetige Abbildung $\bar{g} : (I^n/\partial I^n,*) \to (X,A)$, durch $g(x) := \bar{g}(*)$ für $x \in \partial I^n$, und $g(x) := \bar{g}(x)$ sonst.

Damit erhalten wir eine Bijektion $[(I^n,\partial I^n),(X,\{x_0\})] \quad\longleftrightarrow\quad (I^n/\partial I^n,*),(X,\{x_0\})]$.

Schließlich ist $(I^n/\partial I^n,*)$ homömorph zu $(S^n,\{e_1\})$. □

**Definition 3.23.** Sei $(X,\{x_0\})$ ein Raum mit Basispunkt. Die *höheren Homotopiegruppen* von $X$ sind definiert als

$$\pi_n(X;x_0) \;:=\; [(I^n,\partial I^n),(X,\{x_0\})].$$

Die Verknüpfung kann dann aus dem Nebeneinandersetzen von $n$-Würfeln abgeleitet werden: $[\gamma]\circ[\gamma'] := [\gamma * \gamma']$, mit

$$\gamma * \gamma'\,(t_1,t_2,\ldots,t_n) := \begin{cases} \gamma(2t_1,t_2,\ldots,t_n) & \text{für } t_1 \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t_1-1,t_2,\ldots,t_n) & \text{für } t_1 \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

**Satz 3.24** (Funktor!)**.** *Die Homotopiegruppen sind Invarianten des Homotopietyps: homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Homotopiegruppen.*

*Jede stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen mit Basispunkt $f : (X,\{x_0\}) \to (Y,\{y_0\})$ induziert Gruppenhomomorphismen zwischen den entsprechenden Homotopiegruppen:*

$$f_\# : \pi_k(X;x_0) \to \pi_k(Y;y_0)$$

*wobei* $\mathrm{id} : X \to X$ *die Identität auf* $\pi_k(X;x_0)$ *induziert, und für Abbildungen* $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$ *gilt dass* $(g\circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. *Dabei induzieren homotope Abbildungen denselben Gruppenhomomorphismus. Homotopieäquivalenzen induzieren Gruppenisomorphismen.*

*Bemerkung* 3.25. $\pi_0(X;x_0)$ ist nur eine Menge mit „Basispunkt“, während $\pi_1(X;x_0)$ eine Gruppe ist. Die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X;x_0)$, $n \geq 2$, sind sogar kommutative (abelsche) Gruppen.
Wenn $X$ wegzusammenhängend ist, dann hängt die Gruppe $\pi_n(X;x_0)$ bis auf Isomorphie nicht vom Basispunkt ab, und man schreibt dafür $\pi_n(X)$.
Der Isomorphismus ist aber nur dann kanonisch, wenn $X$ einfach-zusammenhängend ist — anderenfalls riskiert man „Monodromieeffekte“ (Bewegung des Basispunkts entlang geschlossener Wege liefert nichttriviale Automorphismen der Fundamentalgruppe).

Ist $X = \|\Delta\|$ ein Polyeder, dann hängt die $k$-te Homotopiegruppe $\pi_k(X;x_0)$ jeweils nur vom $(k+1)$-Skelett ab.

Homotopiegruppen „vertragen sich“ mit einigen Grundkonstruktionen von topologischen Räumen sehr gut; dazu gehören Produkte, aber auch sog. „Einhängungen“.

**Proposition 3.26** (Homotopiegruppen von Produkten)**.** *Homotopiegruppen von Produkten:*

$$\pi_n(X \times Y; (x_0, y_0)) \;\cong\; \pi_n(X; x_0) \times \pi_n(Y; y_0).$$

**Definition 3.27** (Kegel/Einhängung)**.** Der *Kegel* $\operatorname{cone}(X)$ über einem Raum $X$ ist das Bild des Produkts $X \times [0,1]$ (des *Zylinders* über $X$) unter der Äquivalenzrelation $\sim$, die alle Punkte $(x, 1)$, $x \in X$ identifiziert.

Die *Einhängung* $\operatorname{susp}(X)$ eines Raums $X$ ist das Bild von $X \times [-1,1]$ unter der Äquivalenzrelation $\sim$, die alle Punkte $(x, 1)$, $x \in X$ miteinander identifiziert, und genauso alle Punkte $(y, -1)$, $y \in X$.

In beiden Fällen wählt man die feinste Topologie, unter der die Identifikationsabbildung $p : X \times [0,1] \to (X \times [0,1])/\!\sim\; = \operatorname{cone}(X)$ bzw. $p : X \times [-1,1] \to (X \times [-1,1])/\!\sim\; = \operatorname{susp}(X)$ stetig ist, also die Quotiententopologie.

Der Kegel $\operatorname{cone}(X)$ über einem Raum ist immer kontrahierbar. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann nullhomotop (also homotop zu einer konstanten Abbildung), wenn sie sich zu einer Abbildung $F : \operatorname{cone}(X) \to Y$ erweitern lässt.

Offenbar ist die Einhängung einer Sphäre wieder (homöomorph zu) eine Sphäre: $\operatorname{susp}(S^n) \cong S^{n+1}$. Auch ganz elementar überlegt man sich, dass es für jedes $k$ einen Homomorphismus

$$\sigma_k : \pi_k(X; x_0) \to \pi_{k+1}(\operatorname{susp}(X); x_0)$$

gibt. (Der naheliegende Homomorphismus $i_\# : \pi_k(X; x_0) \to \pi_k(\operatorname{susp}(X); x_0)$ ist aber trivial.)

**Satz 3.28** (Freudenthals Einhängungslemma [Hat02, Cor. 4.23])**.** *Sei $X$ ein $(n-1)$-zusammenhängender, triangulierbarer Raum mit Basispunkt $x_0$ (zum Beispiel $X = S^n$).*
*Dann ist $\sigma_k : \pi_k(X; x_0) \to \pi_{k+1}(\operatorname{susp}(X); x_0)$ ein Isomorphismus für $k < 2n - 1$, und surjektiv für $k = 2n - 1$.*

Das Einhängungslemma von Freudenthal ist Grundlage der Betrachtung von sog. „stabilen Homotopiegruppen", d. h., statt $\pi_n(X; x_0)$ betrachtet man das Verhalten von $\pi_{n+m}(\operatorname{susp}^m X; x_0)$ für große $m$, also die entsprechend höhere Homotopiegruppe nach oftmaligem Einhängen.

**Satz 3.29** (Homotopiegruppen von Sphären I)**.**
$\pi_k(S^n) = \{e\}$ *für* $0 \le k < n$*;*
$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$*, mit* $\mathrm{id}_{S^n}$ *Erzeuger;*
$\pi_n(S^1) = \{e\}$ *für* $n > 1$*;*
$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$*, mit der* Hopf-Abbildung $S^3 \to S^2$, $(z_1, z_2) \mapsto (2z_1\bar{z}_2, z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2)$ *als Erzeuger.*

In diesen Koordinaten ist die Hopf-Abbildung als Abbildung $\mathbb{C}^2 \supset S^3 \to S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ gegeben. Man kann sie aber auch, zum Beispiel, als Abbildung $(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2$, $S^3 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ auffassen.

**Satz 3.30** (Homotopiegruppen von Sphären II: Satz von Serre [Spa66, pp. 515/516])**.**
$\pi_{2n-1}(S^n)$ *ist für alle geraden $n \ge 2$ die direkte Summe von $\mathbb{Z}$ mit einer endlichen Gruppe. Alle anderen Homotopiegruppen von Sphären $\pi_k(S^n)$, $k > n$, sind endlich,*

(Beweis: „Spektralsequenzen" von „Faserungen")

Die Berechnung der Homotopiegruppen der Sphären ist ein zentrales Problem der Topologie, insbesondere der Homotopietheorie, aber auch schwierig, und es gibt auch keine einfache Antwort. Siehe die letzte Übungsaufgabe auf der letzten Seite der klassischen Monographie von Spanier aus dem Jahr 1966:

*Übungsaufgabe* (Spanier [Spa66, p. 520]). Beweise, dass
(a): $\pi_5(S^2) \cong \mathbb{Z}_2$
(b): $\pi_6(S^3)$ ist eine Gruppe mit 12 Elementen
(c): $\pi_7(S^4) \cong \pi_6(S^3) \oplus \mathbb{Z}$
(d): $\pi_{n+3}(S^n)$ ist für $n \ge 5$ eine Gruppe mit $24$ Elementen.

# 4 Homologie

Die Homologiegruppen eines topologischen Raums haben ähnliche „funktorielle“ Eigenschaften wie die Homotopiegruppen, sind aber effektiv berechenbar (siehe das `topaz`-Modul von `polymake` [GJb] [GJa]!), und in verschiedener Hinsicht einfacher handhabbar — auch wenn die „geometrischen Topologen“ das nicht so wahrhaben wollen (vgl. etwa Stillwell [Sti93, p. 171]). Meine Hauptquelle für Homologietheorie ist Munkres [Mun84, §5ff].

Wir entwerfen hier zunächst ganz konkret die Konstruktion von “simplizialer” Homologie von (endlichen) Simplizialkomplexen. Es handelt sich hierbei um eine durchaus elementare und explizite Konstruktion. Im Gegensatz zu vielen anderen Dingen, die man „gegeben ein Simplizialkomplex“ der Reihe nach „hinkonstruieren“ kann, ist das bemerkenswerte hier, dass das Ergebnis *topologisch invariant* ist: verschiedene Triangulierungen desselben Raumes haben evtl. unterschiedlich viele Ecken, Kanten, etc. — aber, wie wir sehen werden, dieselbe Homologie!

Zielvorstellung: $H_k(X) \cong \mathbb{Z}^r$, wenn $X$ „$r$ $k$-dimensionale Löcher hat“.

**Definition 4.1** (Orientierung)**.** Sei $\{v_0, \dots, v_k\}$ die Eckenmenge eines $k$-Simplex $\sigma$. Zwei lineare Anordnungen der Eckenmenge heißen äquivalent, wenn sie sich durch eine gerade Permutation unterscheiden. Die Äquivalenzklassen heißen die *Orientierungen* von $\sigma$. (Also hat für $k > 0$ jeder $k$-Simplex genau zwei Orientierungen.) Wir schreiben $[v_0, \dots, v_k]$ für die durch $v_0 < \cdots < v_k$ gegebene Orientierung, und $-[v_0, \dots, v_k]$ für die umgekehrte Orientierung.

Wenn wir die Eckenmenge von $\Delta$ linear anordnen, dann ergibt dies automatisch für jeden Simplex eine Orientierung.

Für das Folgende fixieren wir eine abelsche Gruppe $G$ als *Koeffizientenbereich*: wir konstruieren die „Homologie eines Simplizialkomplexes mit Koeffizienten in $G$“. Dabei ist primär an $G = \mathbb{Z}$ gedacht; wichtig sind aber auch $G = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$, jeweils als additiv-geschriebene Gruppe interpretiert. In dem Fall, dass $G$ die additive Gruppe eines Körpers ist, werden die Kettengruppen etc., die wir jetzt definieren, alle zu Vektorräumen, und die Gruppenhomomorphismen zu linearen (Vektorraums-)Abbildungen, was beim Rechnen hilft. Wenn nichts anderes gesagt, nehmen wir immer an, dass $G = \mathbb{Z}$ gewählt ist. Insbesondere sind in der Notation immer dann, wenn keine Koeffizientengruppe genannt ist, ganzzahlige Koeffizienten gemeint.

**Definition 4.2** (Ketten)**.** Sei $\Delta$ ein Simplizialkomplex. Eine $k$*-Kette* in $\Delta$ mit Koeffizienten in $G$ ist eine formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \Delta^{(k)}} c_\sigma \sigma$$

von orientierten $k$-Simplexen aus $\Delta$, mit $c_\sigma \in G$, wobei nur endlich viele Koeffizienten nicht-null sein dürfen und jeder Simplex nur mit einer der beiden möglichen Orientierungen auftritt.

Die Menge aller $k$-Ketten in $\Delta$ mit Koeffizienten in $G$ ist die $k$*-te Kettengruppe* $C_k(\Delta; G)$ von $\Delta$. Zwei $k$-Ketten werden addiert, indem wir die Koeffizienten vor denselben orientierten Simplexen (mit derselben Orientierung!) addieren und $c_\sigma \sigma = (-c_\sigma)\sigma'$ setzen, wenn $\sigma'$ die andere Orientierung von $\sigma$ ist.

Für $k < 0$ und für $k > \dim \Delta$ setzen wir $C_k(\Delta; G) := 0$, wobei wir hier und im Folgenden “0” als Kurznotation für die „triviale Gruppe“ $(\{0\}, +)$ mit genau einem Element verwenden.

$C_k(\Delta; \mathbb{Z})$ ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $f_k$, wobei $f_k = f_k(\Delta)$ die Anzahl der $k$-Seiten von $\Delta$ bezeichnet: Wenn wir von jedem $k$-Simplex eine Orientierung auswählen, so bestimmt dies eine Basis.

**Definition 4.3** (Randabbildung)**.** Die $k$-te *Randabbildung* ist der Gruppenhomomorphismus $\partial_k : C_k(\Delta; G) \to C_{k-1}(\Delta; G)$, der durch Werte auf der Basis wie folgt definiert ist:

$$\partial_k : \; [v_0, \ldots, v_k] \;\mapsto\; \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k]$$

Der Rand einer Ecke ist Null, $\partial_0[v_0] = 0$. Der Rand einer Kante ist „End- minus Anfangsecke", $\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$. Der Rand eines Dreiecks ist die Summe (Folge) seiner drei gerichteten Randkanten $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$, usw.

*Übungsaufgabe.* Man überprüfe, dass die Randabbildung wohldefiniert ist (man also nach gerader Permutation der Ecken ein äquivalentes Ergebnis bekommt), und dass $\partial_k \sigma' = -\partial_k \sigma$ gilt, wenn $\sigma, \sigma'$ die beiden Orientierungen eines $k$-Simplex $\Delta$ sind.

**Definition 4.4** (Zykel)**.** Die *$k$-te Zykelgruppe* von $\Delta$ (mit Koeffizienten in $G$) ist die Gruppe

$$Z_k(\Delta; G) \;:=\; \ker(\partial_k) \;=\; \{c \in C_k(\Delta; G) : \partial_k c = 0\}.$$

Die Zykelgruppe $Z_k(\Delta; \mathbb{Z})$ ist eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe, also selbst frei [Mun84, Lemma 11.2]. Im endlich-erzeugten Fall ist der Rang der Zykelgruppe höchstens der Rang der Kettengruppe. Achtung: dies bezieht sich nur auf den Fall $G = \mathbb{Z}$ von ganzzahligen Koeffizienten. Analog lässt sich das handhaben, wenn $G$ die additive Gruppe eines Körpers ist – dann haben wir es mit Vektorräumen zu tun, und die dort betrachteten Untergruppen sind in der Tat Untervektorräume. Für noch allgemeineres $G$, etwa $G = \mathbb{Z}_4$, darf man $C(\Delta; G) \cong G^{f_k}$ zwar immer noch frei nennen, und eine Basis (der Kardinalität $f_k$) davon verwenden, aber eine Untergruppe von $G^{f_k}$ ist dann nicht mehr unbedingt von der Form $G^r$.

Beispiele: wie sehen Zykel aus.
Intuition: man stelle sich das Bild einer Sphärenabbildung vor, und abstrahiere …(vgl. Kreck [Kre])

**Definition 4.5** (Ränder)**.** Die *$k$-te Rändergruppe* von $\Delta$ (mit Koeffizienten in $G$) ist die Gruppe

$$B_k(\Delta; G) \;:=\; \operatorname{im}(\partial_{k+1}) \;=\; \{\partial_{k+1} d : d \in C_{k+1}(\Delta; G)\}.$$

Die Rändergruppe $B_k(\Delta; G)$ ist eine Untergruppe von $C_k(\Delta; G)$, also wieder eine freie abelsche Gruppe.

**Lemma 4.6** ($\boldsymbol{\partial^2 = 0}$)**.** *Es gilt:*
*Ränder von Rändern sind Null;*
*d. h., alle Ränder sind Zykel;*
*d. h., $B_k(\Delta; G) \subseteq Z_k(\Delta; G)$;*
*d. h., $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ für alle $k$.*

*Beweis.* Es genügt, dies auf Basiselementen von $C_k(\Delta; G)$ nachzurechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k[v_0, \ldots, v_k] \;&=\; \partial_{k-1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \;=\; \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial_{k-1} [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \\
&=\; \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \;+\; \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{j=i+1}^{k} (-1)^{j-1} [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k] \\
&=\; \sum_{0 \le j < i \le k} (-1)^{i+j} [v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \;+\; \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j-1} [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_k] \;=\; 0.
\end{aligned}$$

□

**Definition 4.7** (Homologie)**.** Sei $\Delta$ ein Simplizialkomplex. Die *$k$-te Homologiegruppe von $\Delta$ mit Koeffizienten in $G$* ist

$$H_k(\Delta; G) \;:=\; Z_k(\Delta; G) \,/\, B_k(\Delta; G).$$

Die ganzzahligen Homologiegruppen $H_k(\Delta; \mathbb{Z})$ sind Quotientengruppen der Zykelgruppen — sie sind im allgemeinen nicht frei: Wir erhalten ein Ergebnis von der Form

$$H \;=\; \mathbb{Z}^\beta \;\oplus\; \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_r}$$

mit $t_i \geq 2$ und $t_1 \mid t_2 \mid \cdots \mid t_k$. Dabei ist $\operatorname{rank} H := \beta$ der *Rang* der Gruppe $H$: dies ist die maximale Anzahl von Elementen, für die alle Linearkombinationen mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten verschieden sind. Die Gruppe $T(H) := \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_r}$ ist die *Torsionsuntergruppe* aller Elemente endlicher Ordnung in $H$. Es gilt $H/T(H) \cong \mathbb{Z}^\beta$ (Struktursatz für endlich-erzeugte abelsche Gruppen [Mun84, Thm. 4.3]).

Wenn wir mit $G$ die additive Gruppe eines Koeffizienten*körpers* haben, dann arbeiten wir hier mit Vektorräumen, und bekommen Quotientenvektorräume.

**Lemma 4.8.** *$H_k(\Delta; G) = \{0\}$ für $k > \dim \Delta$ und für $k < 0$.*
*$H_k(\Delta; \mathbb{Z})$ ist eine freie abelsche Gruppe, für $k = \dim \Delta$.*

**Proposition 4.9.** *Die nullte Homologiegruppe ist frei, $H_0(\Delta; G) \cong G^{\beta_0}$.*
*Die nullte Bettizahl $\beta_0$ ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\Delta$.*

*Beweis.* $Z_0(\Delta; G) = C_0(\Delta; G)$ ist frei, mit Basis $\{[v] : v \in \Delta^{(0)}\}$.
$B_0(\Delta; G)$ identifiziert man mit der Untergruppe aller Ketten, für die auf jeder Zusammenhangskomponente die Koeffizientensumme gleich $0$ ist.

Wählt man also aus jeder Zusammenhangskomponente von $\Delta$ eine Ecke $v_0$ aus, dann bilden die entsprechenden (Äquivalenzklassen von) $[v_0]$ eine Basis für $Z_0(\Delta; G)/B_0(\Delta; G) = H_0(\Delta; G)$. ☐

*Bemerkung* 4.10. Homologie von endlichen Simplizialkomplexen ist effektiv berechenbar: mit Hilfe von ganzzahlig-elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen kann man jede ganzzahlige Matrix auf *Smith Normalform (SNF)* bringen. Dies ist theoretisch schnell (in Polynomzeit) zu erledigen, und auch praktisch effektiv (etwa in `topaz` implementiert).

Im Falle von Körperkoeffizienten reichen Rangberechnungen:

$$\begin{aligned} \dim H_k(\Delta_k; F) &= \dim Z_k(\Delta_k; F)/B_k(\Delta_k; F) \\ &= \dim Z_k(\Delta_k; F) - \dim B_k(\Delta_k; F) \\ &= \dim \ker \partial_k - \dim \operatorname{im} \partial_{k+1} \\ &= f_k - \operatorname{rank} \partial_k - \operatorname{rank} \partial_{k+1}. \end{aligned}$$

**Korollar 4.11.** *Für $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ hat die $k$-dimensionale Homologie denselben Rang $\beta_k$:*

$$\operatorname{rank} H_k(\Delta_k; \mathbb{Z}) \;=\; \dim_{\mathbb{Q}} H_k(\Delta_k; \mathbb{Q}) \;=\; \dim_{\mathbb{R}} H_k(\Delta_k; \mathbb{R}) \;=\; f_k - \operatorname{rank} \partial_k - \operatorname{rank} \partial_{k+1}.$$

Allgemeiner: Die „universellen Koeffiziententheoreme“ der Homologietheorie geben Rezepte dafür, wie man $H_k(\Delta_k; G)$ aus den Gruppen $H_k(\Delta; \mathbb{Z})$ und $H_{k-1}(\Delta; \mathbb{Z})$ berechnen kann [Mun84, Thm. 55.1].

In einer Zerlegung

$$H_k(\Delta; \mathbb{Z}) \;=\; \mathbb{Z}^{\beta_k} \;\oplus\; \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_r}$$

heißt $\beta_k = \operatorname{rank} H_k(\Delta; \mathbb{Z})$ die $k$-te *Betti-Zahl* von $\Delta$. Die $t_i$, mit $t_1|t_2|\ldots|t_r$ (wie oben) heißen die *Torsionskoeffizienten* der $k$-ten Homologiegruppe von $\Delta$.

**Definition 4.12** (Reduzierte Homologie)**.** Zur Konstruktion der *reduzierten Homologiegruppen* definiert man den Rand einer Ecke nicht als Null, sondern als $\partial[v_0] := []$, entsprechend der leeren Menge.

Es ergibt sich daraus $\widetilde{C}_{-1}(\Delta; G) \cong G$. Der *Augmentierungshomomorphismus* $\varepsilon = \partial_0 : \widetilde{C}_0(\Delta; G) \to \widetilde{C}_{-1}(\Delta; G)$ ist surjektiv.

Somit gilt immer $H_0(\Delta; G) \cong \widetilde{H}_0(\Delta; G) \oplus G$, und $\widetilde{H}_k(\Delta; G) = H_k(\Delta; G)$ für $k \neq 0$.

**Lemma 4.13** (Homologie eines Kegels)**.** *Jeder Kegel hat verschwindende reduzierte Homologie:*

$$\widetilde{H}_k(\mathrm{cone}(\Delta); \mathbb{Z}) \ = \ 0 \qquad \textit{für alle } k.$$

**Lemma 4.14** (Homologie eines Simplexrandes)**.** *Der Rand des $n$-Simplex hat folgende reduzierte Homologie:*

$$\widetilde{H}_k(\partial\sigma_n; G) \ = \ \begin{cases} G & \textit{für } k = n-1, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Damit hat man auch die Homologie von kontrahierbaren Räumen bzw. der $(n-1)$-Sphäre berechnet, modulo topologischer Invarianz (siehe unten!).

Es ist üblich, $H_*(\Delta; G)$ für die Folge der Homologiegruppen von $\Delta$ zu schreiben, also

$$H_*(\Delta; G) \ := \ (H_0(\Delta; G), H_1(\Delta; G), \ldots, H_d(\Delta; G))$$

für $d = \dim \Delta$.

*Beispiele* (Homologie von einigen Flächen; vgl. [Mun84, §6]).
2-Sphäre: $H_*(S^2; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$.
Torus: $H_*(T; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z})$.
Sphäre mit $g$ Henkeln: $H_*(M_g; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{2g}, \mathbb{Z})$.
projektive Ebene: $H_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, 0)$.
zwei verklebte projektive Ebenen: $H_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, 0)$.
Kleinsche Flasche: $H_*(K; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, 0)$.
projektive Ebene mit Henkel: $H_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \# T; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2, 0)$.

**Lemma 4.15** (Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei $M$ eine zusammenhängende, geschlossene, triangulierte $d$-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

*Dann gilt entweder $H_d(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, dann heißt $M$* orientierbar*; oder es gilt $H_d(M; \mathbb{Z}) \cong 0$, dann heißt $M$* nicht orientierbar. *In beiden Fällen gilt $H_d(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.*

*(Die Orientierbarkeit hängt nicht von der Triangulierung ab.)*

*Beispiel.* Die Schachbrett-Komplexe $\Delta_{m,n}$ sind in letzter Zeit intensiv studiert worden. Ihre Homologie enthält $3$-Torsion: Erst vor kurzem gelang Shareshian und Wachs [SW] der Nachweis, dass sie auch *nur* $3$-Torsion (und evtl. $9$-Torsion) enthalten. Siehe [Wac03].

**Satz 4.16** (topologische Invarianz; Funktor)**.** *Die Homologiegruppen sind Invarianten des Homotopietyps: Sind $\Delta$, $\Delta'$ homotopieäquivalent, so gilt $H_k(\Delta; G) \cong H_k(\Delta'; G)$ für alle $k$.*

*Weiter induziert jede stetige Abbildung $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ Gruppenhomomorphismen $h_* : H_k(\Delta) \to H_k(\Gamma)$, so dass gilt $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Die Identität $\mathrm{id} : \|\Delta\| \to \|\Delta\|$ induziert die Identität $\mathrm{id}_* : H_k(\Delta) \to H_k(\Delta)$ für alle $k$.*

*Beweis/Übersicht:* (1) simpliziale Abbildungen induzieren Homomorphismen $f_\#$ von Kettenkomplexen, und damit Abbildungen $f_*$ in Homologie

(2) kettenhomotope Abbildungen ergeben denselben Homomorphismus in Homologie: $f_\# - g_\# = \partial D + D\partial$, und damit $f_* = g_*$

(3) Unterteilungen, simpliziale Approximation
(4) Unterteilungsoperator
(5) homotope Abbildungen sind nach geeigneter Unterteilung kettenhomotop. □

**Definition 4.17** (Kettenkomplex, Kettenabbildung)**.** Ein *Kettenkomplex* $C_*$ ist eine Folge $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen, mit Homomorphismen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, die $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ erfüllen.

Eine *Kettenabbildung* $f_\# : C_* \to C'_*$ ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen $f_{\#,k} : C_k \to C'_k$, die $\partial'_k f_{\#,k} = f_{\#,k-1}\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(L)$ erfüllt.

**Lemma 4.18** (Simpliziale Abbildungen induzieren Kettenabbildungen)**.**
*Sei $f : K \to L$ simplizial, dann definiert*

$$f_\# : [v_0, \dots, v_k] \ \mapsto \ \begin{cases} [f(v_0), \dots, f(v_k)] & \textit{wenn die } f(v_i) \textit{ alle verschieden sind,} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

*eine* Kettenabbildung $f_\# : C_*(K) \to C_*(L)$.

*Beweis.* Fallunterscheidung: $\partial f_\# = f_\# \partial$ angewandt auf $[v_0, \dots, v_k]$ ergibt

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_k)]$$

wenn alle $f(v_i)$ verschieden sind, und ergibt $0$ sonst. □

**Lemma 4.19** (Kettenabbildungen induzieren Homomorphismen in Homologie [Mun84, Thm. 12.2])**.** *Jede Kettenabbildung $f_\# : C_*(K) \to C_*(L)$ induziert vermöge $f_*[c] := [f_\# c]$ Homomorphismen $f_k : H_k(K) \to H_k(L)$.*

*Dabei induziert die Identität $\mathrm{id} : K \to K$ die Identität $\mathrm{id}_* : H_*(K) \to H_*(K)$, und es gilt immer $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

*Beweis.* Der wesentliche Teil ist, dass $f_*$ wohldefiniert ist, also das Ergebnis nicht vom Repräsentanten der Homologieklasse $[c]$ abhängt. Dazu sei $c + \partial c'$ ein anderer Repräsentant von $[c] = [c + \partial c']$; dafür erhalten wir $f_*[c + \partial c'] = [f_\# c + f_\# \partial c'] = [f_\# c + \partial f_\# c'] = [f_\# c]$. □

**Definition 4.20** (Kettenhomotopien)**.** Eine *Kettenhomotopie* zwischen simplizialen Abbildungen $f, g : K \to L$ ist eine Familie von indexerhöhenden Homomorphismen $D_k : C_k(K) \to C_{k+1}(L)$, die $f_{\#,k} - g_{\#,k} = \partial_{k+1} D_k + D_{k-1}\partial_k : C_k(K) \to C_k(L)$ erfüllt — wofür wir kurz $f_\# - g_\# = \partial D + D\partial$ schreiben.

**Lemma 4.21** ([Mun84, Thm. 14.2])**.** *Kettenhomotope Abbildungen $f, g : K \to L$ induzieren dieselbe Abbildung $f_* = g_* : H_k(K) \to H_k(L)$ in Homologie.*

*Beweis.* Rechnung: Sei $[c]$ eine Homologieklasse (also $c$ ein Zykel, $\partial c = 0$), so ist

$$f_*[c] = [f_\# c] = [(g_\# + D\partial + \partial D)c)] = [g_\# c + \partial D c + D \partial c] = [g_\# c + \partial D c] = [g_\# c] = g_*[c].$$

Hier gelten die erste und letzte Gleichheit nach Definition des Homomorphismus in Homologie, die zweite wegen Kettenhomotopie, die dritte wegen Homomorphismus, die vierte weil $c$ Zykel ist, die vorletzte weil die Homologieklasse „modulo Ränder“ definiert ist. □

**Definition 4.22** (Unterteilung)**.** Eine Unterteilung eines (geometrischen) Simplizialkomplexes $\Delta$ ist ein Komplex $\Delta'$, für den jeder Simplex $\sigma' \in \Delta'$ in einem Simplex $\sigma \in \Delta$ enthalten ist, und so dass umgekehrt jeder Simplex $\sigma \in \Delta$ eine Vereinigung von endlich vielen Simplexen $\sigma' \in \Delta'$ ist.

Wenn $\Delta'$ eine Unterteilung von $\Delta$ ist, so gilt $\bigcup \Delta = \bigcup \Delta'$ (gleicher Träger), und $\|\Delta\| = \|\Delta'\|$.

**Definition 4.23** (Link, offener Stern, geschlossener Stern)**.** Sei $F$ eine nichtleere Seitenfläche in einem (abstrakten) Simplizialkomplex $K$. Der *Stern* von $F$ ist der Unterkomplex $\mathrm{Star}_K F$ aller Seiten $G \in K$, für die $F \cup G \in K$ gilt. Die *Deletion* von $F$ ist der Unterkomplex $\mathrm{del}_K F$ aller Seiten $G \in K$, für die $G \not\supseteq F$ gilt. Der *Link* von $F$ ist der Unterkomplex $\mathrm{link}_K F$ aller Seiten $G \in K$, für die $G \cap F = \emptyset$ und $F \cup G \in K$ gilt. Es ist also $\mathrm{Star}_K F \cap \mathrm{del}_K F = \mathrm{link}_K F * \partial F$. Insbesondere gilt für Ecken $\mathrm{link}_K v = \mathrm{Star}_K v \cap \mathrm{del}_K v$.

In einem geometrischen Simplizialkomplex $\Delta$ sind Link $\mathrm{link}_\Delta \sigma$ und Stern $\mathrm{Star}_\Delta \sigma$ Unterkomplexe, also abgeschlossene Teilmengen. Man betrachtet dort auch den *offenen Stern* $\mathrm{star}_\Delta \sigma := \|\Delta\| \setminus \| \mathrm{del}_\Delta \sigma\|$. Dieser ist eine offene Teilmenge von $\|\Delta\|$. Er lässt sich auch als die Menge aller Punkte beschreiben, die im relativ Inneren eines Simplexes $\tau \in \Delta$ liegen, der $\sigma$ enthält.

Die offenen Sterne der Ecken bilden eine offene Überdeckung des Polyeders $\|\Delta\|$.

*Beispiele.* Die *stellare Unterteilung* des Komplexes $K$ bzgl. einer nicht-leeren Seitenfläche $F$ erhält man, indem man $F$ und alle $F$ enthaltenden Seitenflächen entfernt, und einen neuen Simplex $G \cup \{v_F\}$ für jede Seite einfügt, die mit $F$ in einer Seite enthalten ist (so dass $G \not\supseteq F$ aber $G \cup F \in K$ gilt).
Topologische Beschreibung: der offene Stern von $F$ wird entfernt, und ein Kegel über $\mathrm{Star}_K F \cap \mathrm{del}_K F = \mathrm{link}_K F * \partial F$ wird eingefügt.)

Die *baryzentrische Unterteilung* $\mathrm{sd}\, K$ hat die Baryzentren der nichtleeren Seiten von $K$ als Eckenmenge, wobei die Simplizes von $\mathrm{sd}\, K$ den Ketten von Seitenflächen von $K$ entsprechen.

Für endliche Simplizialkomplexe $K$ kann die baryzentrische Unterteilung $\mathrm{sd}\, K$ als Folge von stellaren Unterteilungen konstruiert werden: man unterteilt alle Seitenflächen in einer geeigneten Reihenfolge, so dass für Seiten $F \subset G$ die Seite $G$ vor der Seite $F$ unterteilt wird.

**Definition 4.24** (Sternbedingung)**.** Eine stetige Abbildung von Polyedern $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ erfüllt die *Sternbedingung*, wenn jeder offene Stern einer Ecke in den offenen Stern einer Ecke abgebildet wird, das heißt, dass es für jede Ecke $v \in \|\Delta\|$ eine Ecke $w \in \Gamma$ gibt mit

$$h(\mathrm{star}_\Delta v) \;\subseteq\; \mathrm{star}_\Gamma w.$$

**Lemma 4.25.** *Erfülle $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ die Sternbedingung. Wähle für jede Ecke $v \in \Delta^{(0)}$ eine beliebige Ecke $f(v) \in \Gamma$ mit $h(\mathrm{star}_\Delta v) \subseteq \mathrm{star}_\Gamma f(v)$. Dies definiert eine simpliziale Abbildung $f : \Delta \to \Gamma$, so dass $f$ und $h$ homotop sind.*

*Verschiedene solche Abbildungen $f$ sind immer kettenhomotop.*

**Definition 4.26** (Simpliziale Approximation)**.** Eine *simpliziale Approximation* von $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ ist eine simpliziale Abbildung $f : \Delta \to \Gamma$, bei der für alle Ecken $v \in \Delta$ die Bedingung $h(\mathrm{star}_\Delta v) \subseteq \mathrm{star}_\Gamma f(v)$ erfüllt ist.

**Satz 4.27** (Simpliziale Approximation [Mun84, §16])**.** *Wenn $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ stetig ist, dann gibt es eine simpliziale Approximation $f : \Delta' \to \Gamma$, für eine Unterteilung $\Delta'$ von $\Delta$.*

*Wenn $\Delta$ endlich ist, dann gibt es sogar eine simpliziale Approximation $f : \mathrm{sd}^N \Delta \to \Gamma$, für ein $N \geq 0$.*

*Beweis.* Im zweiten Fall unterteilt man so oft baryzentrisch, bis die Sternbedingung erfüllt ist. Dies lässt sich deshalb erreichen, weil in jeder baryzentrischen Unterteilung der Durchmesser des größten Simplex um einen konstanten Faktor schrumpft, und man daher nach endlich vielen Schritten die Lebesgue-Zahl der Überdeckung von $\|\Delta\|$ durch die Urbilder $h^{-1}(\mathrm{star}_\Gamma v)$ der offenen Sterne im Bild unterschreitet: Die *Lebesgue-Zahl* einer offenen Überdeckung ist die größte Zahl $\lambda$, so dass jede $\lambda$-Umgebung eines Punktes in einer offenen Menge der Überdeckung enthalten ist. Sie ist für jede Überdeckung eines kompakten (!) metrisierbaren Raumes positiv. $\square$

**Korollar 4.28.** *Jede stetige Abbildung $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ mit $\dim\Delta < \dim\Gamma$ ist homotop zu einer Abbildung, die nicht surjektiv ist.*

**Korollar 4.29.** *Für $m < n$ sind alle stetigen Abbildungen $h : S^m \to S^n$ nullhomotop.*

**Lemma 4.30** (Unterteilungsoperator [Mun84, Thm. 17.2])**.** *Ist $\Delta'$ eine Unterteilung von $\Delta$, so gibt es eine eindeutige Kettenabbildung $\lambda : C_*(\Delta) \to C_*(\Delta')$ mit $|\lambda(\sigma)| \subset |\sigma|$ für alle $\sigma \in \Delta$, die Ecken auf Ecken abbildet, $\lambda : [v] \to [v]$.*

*Weiter existiert eine simpliziale Approximation $g : \Delta' \to \Delta$ der Identität. $g_\#$ und $\lambda$ sind bis auf Kettenhomotopie inverse Kettenabbildungen. Insbesondere sind $g_* : H_*(\Delta') \to H_*(\Delta)$ und $\lambda_* : H_*(\Delta) \to H_*(\Delta')$ inverse Isomorphismen der Homologie von $\Delta$ und $\Delta'$.*

**Definition 4.31** (Konstruktion von $\boldsymbol{h_*}$)**.** Sei $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ stetig, sei $f : \Delta' \to \Gamma$ eine simpliziale Approximation, und sei $\lambda : C_*(\Delta) \to C_*(\Delta')$ der zugehörige Unterteilungsoperator.

Dann ist $h_* := f_* \circ \lambda_* : H_k(\Delta) \to H_k(\Gamma)$ der *von $h$ induzierte Homomorphismus in simplizialer Homologie*, für $k \geq 0$.

**Lemma 4.32** ([Mun84, Thm. 18.1])**.** *Die Abbildungen $h_* : H_k(\Delta) \to H_k(\Gamma)$ sind wohldefiniert, das heißt, bei anderer Wahl der Unterteilung $\Delta'$ und der simplizialen Approximation $f$ erhält man dennoch* dieselben *Gruppenhomomorphismen $h_*$.*

Damit folgt jetzt auch die Homotopie-Invarianz der Homologie, die wir schon als Satz 4.16 behauptet hatten:

**Satz 4.33** (Homotopie-Invarianz der Homologie [Mun84, Thms. 19.2, 19.5])**.** *Homotope Abbildungen $h, \ell : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ induzieren kettenhomotope Abbildungen $h_\#, \ell_\# : C_k(\Delta') \to C_k(\Gamma')$ und damit denselben Homomorphismus $h_* = \ell_* : H_k(\Delta) \to H_k(\Gamma)$ in der Homologie.*

*Jede Homotopie-Äquivalenz $h : \|\Delta\| \to \|\Gamma\|$ induziert Isomorphismen $h_* : H_k(\Delta) \to H_k(\Gamma)$ in Homologie.*

**Korollar 4.34** (Invarianz der Dimension)**.** *Die $n$-Sphären sind für verschiedene $n$ nicht homöomorph, und auch nicht homotopieäquivalent.*

*Die reellen Räume $\mathbb{R}^n$ sind für verschiedene $n$ nicht homöomorph.*

# 5 Euler- und Lefschetz-Zahlen

## 5.1 Abbildungsgrad

Als Anwendung der Homologietheorie erhalten wir jede Menge Invarianten: die elementarsten sind die Euler-Charakteristik eines Raumes und der Grad einer Sphärenabbildung, die stärkste vielleicht die Lefschetz-Zahl.
Dahinter steckt eine starke Verbindung von dem, was sich auf den Simplexen (also auf den Ketten) tut, und den zugehörigen Abbildungen in der Homologie, die „Spurformel" von Hopf.
Die Darstellung hier basiert auf Munkres [Mun84, §§21,22].

**Definition 5.1** (Abbildungsgrad)**.** Jede stetige Abbildung $h : S^n \to S^n$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $h_* : \widetilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \to \widetilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z})$, der jedes Element von $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ auf sein $d$-faches abbildet. Das dadurch definierte $\deg h := d \in \mathbb{Z}$ heißt der *Grad* (oder der *Abbildungsgrad*) von $h$.

Beachte hier: die Gruppe $H_n(S^n;\mathbb{Z})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$, aber der Isomorphismus ist nicht eindeutig: dafür müssen wir einen Fundamentalzyklus $c_n \in Z_n(S^n;\mathbb{Z})$ auswählen, also eine Summe aller $n$-Simplexe in der alle Simplexe konsistent orientiert sind — also eine *Orientierung* der Sphäre. Wenn $c_n$ so ein Fundamentalzyklus ist, dann ist $-c_n$ der andere. Der Erzeuger für $H_n(S^n;\mathbb{Z})$ ist dann $[c_n]$, und dieser wird beim Isomorphismus $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ mit der $1 \in \mathbb{Z}$ identifiziert.

**Lemma 5.2.** *Für stetige $g, h : S^n \to S^n$ gilt:*

(1) *Homotope Abbildungen $g \sim h$ haben denselben Grad* $\deg g = \deg h$.
(2) *Die Identität hat Grad* $1$, *also* $\deg \mathrm{id} = 1$.
(3) *Bei Verkettung multiplizieren sich die Abbildungsgrade,* $\deg(g \circ h) = \deg g \cdot \deg h$.
(4) *Wenn sich $h$ zu $\widehat{h} : B^{n+1} \to S^n$ fortsetzen lässt, so ist* $\deg h = 0$.
(5) *Die Reflektion $r$ in einer Hyperebene,* $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$, *hat Grad* $\deg = -1$.
(6) *Die Antipodenabbildung $a : x \mapsto -x$ hat Grad* $\deg a = (-1)^{n+1}$.

Hier wird nicht bewiesen, dass auch die Umkehrung von Teil (1) gilt: zwei Abbildungen $g, h$ haben denselben Grad $\deg g = \deg h$ *genau dann* wenn sie homotop sind. Dies liegt am Zusammenhang zwischen der $n$-ten Homotopiegruppe $\Pi_n(X; x_0)$ und der $n$-ten Homologiegruppe $H_n(X;\mathbb{Z})$ — der *Hurewicz-Homomorphismus* ist für die $n$-Sphäre ein Isomorphismus.

*Beweis.* (1), (2) und (3) folgen aus den allgemeinen Eigenschaften der durch stetige Abbildungen induzierten Homomorphismen in Homologie. Für (4) betrachte $h = \widehat{h} \circ i : S^n \to B^{n+1} \to S^n$ und die zugehörigen Homomorphismen $h_* = \widehat{h}_* \circ i_* : H_n(S^n) \to H_n(B^{n+1}) = \{0\} \to H_n(S^n)$. Für (5) dürfen wir annehmen, dass $S^n$ die „oktaedrische" Triangulierung trägt, die durch die $n+1$ Koordinatenhyperebenen in $\mathbb{R}^{n+1}$ induziert wird. Der Fundamentalzyklus $c \in C_n(S^n;\mathbb{Z})$ wird dann offenbar auf $r_\# c = -c$ abgebildet. Daraus folgt auch (6), weil $a$ durch Hintereinanderausführung von $n+1$ Spiegelungen entsteht. □

**Korollar 5.3.** *Es gibt keine* Retraktion $B^{n+1} \to S^n$*, d. h. keine stetige Abbildung $B^{n+1} \to S^n$, die alle Punkte $x \in S^n$ auf sich selbst abbildet (*festhält*).*

Dieses Korrollar ist äquivalent zu der Aussage, dass die $S^n$ nicht kontrahierbar ist (Korollar 3.9).

*Beweis.* Die Retraktion wäre eine Fortsetzung der Identität $\mathrm{id} : S^n \to S^n$, müsste also nach Teil (4) des Lemmas Grad $0$ haben, aber nach Teil (2) den Grad $1$. □

Daraus folgt, wie damals besprochen, der Brouwersche Fixpunktsatz 3.10. Aber wir können aus dem Abbildungsgrad noch mehr Fixpunktsätze ableiten.

**Korollar 5.4.** *Jede Abbildung $h : S^n \to S^n$ mit $\deg h \neq (-1)^{n+1}$ hat einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Wenn $h$ keinen Fixpunkt hat, dann können wir eine Homotopie $h \sim a$ konstruieren. □

**Korollar 5.5.** *Jede Abbildung $h : S^n \to S^n$ mit $\deg h \neq 1$ hat bildet einen Punkt $x \in S^n$ auf seinen Antipodenpunkt $-x$ ab.*

*Beweis.* Betrachte $a \circ h$. □

**Korollar 5.6** (Satz vom Igel; „hairy ball theorem“)**.** *Auf der $S^n$ gibt es dann und nur dann ein Tangentialvektorfeld ohne Nullstelle, wenn $n$ ungerade ist.*

*Äquivalent: eine stetige Abbildung $v : S^n \to S^n$ mit $\langle x, v(x)\rangle = 0$ für alle $x \in S^n$ gibt es genau dann, wenn $n$ ungerade ist.*

*Beweis.* Für gerades $n+1$ kann man mit $v(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) := (x_1, -x_0, \dots, x_n, -x_{n-1})$ so ein Vektorfeld definieren.

Ein nullstellenfreies Vektorfeld kann so normiert werden, dass $\|v(x)\| = 1$ gilt. Damit definiert es eine Abbildung $v : S^n \to S^n$, die weder Fixpunkte und noch Antipodenpunkte hat, also nach den letzten beiden Korollaren Grad $\deg v = 1$ und $\deg v = (-1)^{n+1}$ hat. □

Sehr viel tiefliegender ist die Frage, für welche $n$ die $n$-Sphäre *parallelisierbar ist*, also $n$ linear unabhängige nullstellenfreie Vektorfelder zulässt. Die Antwort (genau für $n \in \{0, 1, 3, 7\}$!) hängt eng mit der Existenz von Divisionsalgebren zusammen; die Vektorfelder bekommt man für $n = 1$ aus den komplexen Zahlen ($v(z) := iz$ für $z \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$), für $n = 3$ aus durch Multiplikation mit den Einheiten $i, j, k$ der nicht-kommutativen Hamilton’schen Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$, und für $n = 7$ aus der nicht-kommutativen und nicht-assoziativen acht-dimensionalen Cayley’schen Oktonionenalgebra $\mathbb{O}$, mit $S^7 \subset \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{O}$. Die Nicht-Existenz von reellen Divisionsalgebren einer anderen Dimension als $1, 2, 4, 8$ wird in der Tat mit Methoden der algebraischen Topologie bewiesen — einen anderen Beweis kennt man nicht!

Noch sehr viel tiefliegender ist die Frage, wie viele linear unabhängige Vektorfelder es denn auf der $n$-Sphäre geben kann — diese wurde 1962 von Adams mit Hilfe der (inzwischen so benannten) Adams-Spektralsequenzen und sehr viel „$K$-Theorie“ (einer verallgemeinerten Homotopietheorie) bewiesen.

Ich verweise für eine spannende Diskussion dieser Fragen auf den „Zahlen“-Band von Ebbinghaus et al. [EHH$^+$92, Kap. 11].

## 5.2 Euler-Charakteristik

Sei $K$ ein endlicher Simplizialkomplex. Wir hatten aus der Definition von $H_k(K; G) := \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$ ja schon hergeleitet, dass

$$\operatorname{rank} H_k(K; G) \;=\; \big(\operatorname{rank} C_k(K; G) \;-\; \operatorname{rank} \partial_k\big) \;-\; \operatorname{rank} \partial_{k+1}, \tag{1}$$

und zwar gilt dies sowohl im Fall $G = \mathbb{Z}$, wo „rank“ den Rang der abelschen Gruppe bezeichnet, als auch wenn $G$ die additive Gruppe eines Körpers ist: in dem Fall ist „rank“ die Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraums.

Die Gleichung (1) ist ziemlich aufschlussreich:

- $\operatorname{rank} C_k(K;G) = f_k$ ist die Anzahl der $k$-dimensionalen Seiten von $K$. Diese hängt auch nicht von der Koeffizientengruppe von $G$ ab.
  Die Parameter $f_k$ eines höchstens $n$-dimensionalen Komplexes $K$ fasst man zum $f$*-Vektor*
  $$f_*(K) \ := \ (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$$
  zusammen.
- $\beta_k \ = \ \operatorname{rank} H_k(K;G)$ ist die $k$-te Bettizahl von $K$. Diese hängt im allgemeinen durchaus von der gewählten Koeffizientengruppe ab; genauer/deutlicher wäre also $\beta_k(K;G)$ zu schreiben.
  Der *Betti-Vektor* des Komplexes $K$ ist damit
  $$\beta_*(K;G) \ := \ (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$
- Es liegt nahe, von der Formel (1) alternierende Summen zu bilden, so dass sich die Ränge der Randoperatoren wegheben. Dies führt zur Euler-Poincaré-Gleichung, die wir als nächstes angeben.

*Beispiel.* Bezeichnet $\mathbb{R}\mathrm{P}^2_6$ die minimale Triangulierung der projektiven Ebene auf $6$ Ecken (die man durch Indetifikation gegenüberliegender Ecken des Ikosaeders erhält), so ist $f(\mathbb{R}\mathrm{P}^2_6) \ = \ (6, 15, 10)$, $\beta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2_6, \mathbb{Z}) = (1, 0, 0)$, und $\beta(\mathbb{R}\mathrm{P}^2_6, \mathbb{Z}_2) = (1, 1, 1)$.

**Satz 5.7** (Euler–Poincaré-Formel)**.** *Für jeden endlichen Simplizialkomplex der Dimension $n$ gilt*

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \pm \dots + (-1)^n f_n \ = \ \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \pm \dots + (-1)^n \beta_n \tag{2}$$

Beachte: Die Summanden der linken Seite der Formel sind unabhängig von $G$; das ist für die rechte Seite nicht wahr. Die Summanden der rechten Seite hängen nicht von der gewählten Triangulierung von $\|K\|$ ab, sie sind topologisch invariant, was wiederum für die Komponenten der linken Seite nicht stimmt.

**Definition 5.8** (Euler-Charakteristik)**.** Die *Euler-Charakteristik* eines triangulierbaren topologischen Raums mit Homologiegruppen endlichen Ranges ist die alternierende Summe

$$\chi(X) \ := \ \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \pm \dots \ = \ \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rank} H_i(X;\mathbb{Z}).$$

Die *reduzierte Euler-Charakteristik* $\widetilde{\chi}(X)$ wird entsprechend durch die reduzierten Homologiegruppen gegeben. Es ist also $\widetilde{\chi}(X) = -1 + \chi(X)$.

*Beispiele.* Jeder kontrahierbare Raum hat dieselbe Euler-Charakteristik wie der $\mathbb{R}^n$,

$$\chi(X) \ = \ \chi(\mathbb{R}^n) \ = \ 1,$$

also die reduzierte Euler-Charakteristik $\widetilde{\chi}(X) = \widetilde{\chi}(\mathbb{R}^n) = 0$.
Die Sphären haben Euler-Charakteristik

$$\chi(S^n) \ = \ 1 + (-1)^n$$

also reduzierte Euler-Charakteristik $\widetilde{\chi}(S^n) = (-1)^n$.
Die reellen projektiven Räume $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ haben Eulercharakteristik

$$\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \ = \ \frac{1 + (-1)^n}{2} \ = \ \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

weil sich bei der zweiblättrigen *Überlagerungsabbildung* $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (vgl. Abschnitt 6.2) die Euler-Charakteristik halbiert: Jede Triangulierung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ liefert eine zentralsymmetrische Triangulierung von $S^n$, in der jeder $k$-Simplex in $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ genau zwei $k$-Simplexen von $S^n$ entspricht.

**Korollar 5.9.** *Für jede triangulierte $n$-Sphäre (etwa den Randkomplex eines $(n+1)$-dimensionalen simplizialen Polytops) mit $f_i$ Simplexen der Dimension $i$ gilt*

$$f_0 - f_1 + f_2 \mp \ldots (-1)^n f_n \;=\; 1 + (-1)^n.$$

*Beispiel.* Wir betrachten $\Delta_n^{(k)}$, das $k$-dimensionale Skelett des $n$-dimensionalen Simplex ($1 \leq k \leq n$). Es gilt

$$f_i \;=\; \begin{cases} \binom{n+1}{k+1} & \text{für } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $\chi(\Delta_n^{(k)}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1}{i+1}$. Vergleich mit dem Simplex ergibt, dass $\beta_0 = 1$ und ansonsten $\beta_i = 0$, außer (möglicherweise) $\beta_k$. Aus der Euler–Poincaré-Formel erhält man

$$\beta_k = \sum_{i=-1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n+1}{i+1},$$

und die $k$-te Homologiegruppe eines $k$-dimensionalen Komplexes ist immer frei, also

$$H_i(\Delta_n^{(k)};\mathbb{Z}) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i=0, \\ \mathbb{Z}^{\beta_k} & \text{für } i=k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 5.3 Hopf-Spurformel

Verallgemeinerung von (1): die hier auftretenden Ränge kann man auch als Spur der Identität auffassen — und dann auf Spuren von Kettenabbildungen von simplizialen Selbstabbildungen zu verallgemeinern. Das führt direkt zur Hopf'schen Spurformel.

Spur einer quadratischen Matrix ist durch $\operatorname{trace} A = \sum_i a_{ii}$ gegeben. Wenn wir $A$ als eine Übergangsmatrix betrachten, die Wahrscheinlichkeiten oder Häufigkeiten $a_{ij}$ angibt, mit denen man von $i$ nach $j$ geht, dann misst die Spur, wie oft man „am Ort bleibt". In einer solchen Interpretation (oder algebraisch) ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$ gilt: dies ist $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}$. (Dto. etwa für passende nicht-quadratische Matrizen, $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{Z}^{n\times m}$.) Wenn $B$ invertierbar ist, so folgt daraus $\operatorname{trace}(B^{-1}AB) = \operatorname{trace} A$; so ist die Spur eines Endomorphismus wohldefiniert (basisunabhängig). Dies gilt auch, wenn wir etwa mit ganzzahligen Matrizen $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ hantieren, die Homomorphismen $f_A : Z^n \to \mathbb{Z}^n$ darstellen.

**Satz 5.10** (Hopf-Spurformel)**.** *Sei $K$ ein endlicher Simplizialkomplex, und sei $f : K \to K$ eine simpliziale Abbildung, so induziert dies Endomorphismen $f_\# : C_k(K;\mathbb{Z}) \to C_k(K;\mathbb{Z})$. Für diese gilt*

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \operatorname{trace}(f_\#, C_k(K;\mathbb{Z})) \;=\; \sum_{k\geq 0} (-1)^k \operatorname{trace}(f_*, H_k(K;\mathbb{Z})/T(H_k(K;\mathbb{Z})))$$

*im Fall von ganzzahligen Koeffizienten, wobei $T(H) := \{x \in H : kx = 0$ für ein $k > 0\}$ die* Torsionsuntergruppe *von $H$ bezeichnet, und*

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \operatorname{trace}(f_\#, C_k(K;G)) \;=\; \sum_{k\geq 0} (-1)^k \operatorname{trace}(f_*, H_k(K;G))$$

*im Fall eines Koeffizientenkörpers $G$.*

*Beweis.* Selbst überlegen sollte man sich, dass $f_* : H_k(X;\mathbb{Z}) \to H_k(X;\mathbb{Z})$ eine Abbildung $\bar{f}_* : H_k(X;\mathbb{Z})/T(H_k(X;\mathbb{Z})) \to H_k(X;\mathbb{Z})/T(H_k(X;\mathbb{Z}))$ induziert — weil jeder Gruppenhomomorphismus, wie $f_*$, Torsionselemente auf Torsionselemente abbildet.

Als weiteres Element braucht man ein Analogon der Rangformel — wie am Beginn von Abschnitt 5.2 diskutiert, aber eben mit „Spur statt Rang". Der Rest des Beweises findet sich dann bei [Mun84, Thm. 22.1] für den ganzzahligen Fall; der Körper-Fall ist einfacher, vgl. [Oss92, Satz 5.9.3]. $\square$

Der Spezialfall $f = \mathrm{id}$ ist die Euler–Poincaré-Formel 5.7.

## 5.4 Lefschetz-Zahl und -Fixpunktsatz

Analog zur rechten Seite der Euler–Poincaré-Formel, der Euler-Charakteristik, ist die rechte Seite der Hopf-Spurformel eine wichtige numerische Invariante von topologischen Selbstabbildungen:

**Definition 5.11** (Lefschetz-Zahl)**.** Sei $K$ ein endlicher Komplex, und sei $h : \|K\| \to \|K\|$ eine stetige Abbildung. Dann heißt

$$\Lambda(h) \ := \ \sum_{k\geq 0} (-1)^k \operatorname{trace}(h_*, H_k(K;\mathbb{Z})/T(H_k(K;\mathbb{Z})))$$

die *Lefschetz-Zahl* von $h$.

Die Lefschetz-Zahl ist eine Invariante der Homotopieklasse: homotope Abbildungen induzieren dieselben Homomorphismen in Homologie, und haben deshalb dieselbe Lefschetz-Zahl.

Intuition: die Lefschetz-Zahl ist ein Maß für die Euler-Charakteristik der Fixpunktmenge.

**Satz 5.12** (Lefschetz-Fixpunktsatz [Mun84, Thm. 22.3])**.** *Sei $K$ ein endlicher Komplex, und sei $h : \|K\| \to \|K\|$ eine stetige Abbildung. Wenn $\Lambda(h) \neq 0$ ist, dann hat $h$ einen Fixpunkt.*

*Beweis-Skizze.* Sei $h$ fixpunktfrei. Die Lefschetz-Zahl ist unabhängig von der gewählten Triangulierung, also auch invariant unter Unterteilungen von $K$. Daher dürfen wir zunächst $K$ so fein unterteilen, dass für alle Ecken $v$ die Bedingung $h(\mathrm{Star}_K\, v) \cap \mathrm{Star}_K\, v = \emptyset$ gilt (Kompaktheit!).

Im zweiten Schritt wird $K$ weiter unterteilt, so dass $h$ eine simpliziale Approximation $f : K' \to K$ hat. Diese ist homotop zu $h$, hat also dieselbe Lefschetzzahl $\Lambda(f) = \Lambda(h)$ hat.

Nun sei $\lambda : C_*(K) \to C_*(K')$ der Unterteilungsoperator. Dann ist $\lambda \circ f_\# : C_*(K') \to C_*(K')$ eine Kettenabbildung, die $h_*$ induziert. Und für diese Kettenabbildung sind alle Spuren $0$: Jeder Simplex $\sigma \in K$ ergibt unter $\lambda$ eine Summe von Simplexen von $K'$, deren Bilder unter $f_\#$ wegen der Feinheit der Unterteilung und wegen der Sternbedingung in der simplizialen Approximation alle disjunkt zu $\sigma$ sind. Die Spurformel liefert damit $\Lambda(h) = 0$. $\square$

**Lemma 5.13.** $\operatorname{trace}(f_*, H_0(K;\mathbb{Z}))$ *ist die Anzahl der Komponenten von $K$, die auf sich selbst abgebildet werden. Wenn $K$ zusammenhängend ist, dann ist $f_* = \mathrm{id}_* : H_0(K;\mathbb{Z}) \to H_0(K;\mathbb{Z})$ und damit* $\operatorname{trace}(f_*, H_0(K;\mathbb{Z})) = 1$.

*Beispiele.*
$\Lambda(\mathrm{id}_K) = \chi(K)$.
$\Lambda(\text{const} : K \to K) = 1$.
$\Lambda(f : S^n \to S^n) = 1 + (-1)^n \deg(f)$.

*Beispiel.* Sei $n > 0$. Für $h : S^n \to S^n$ ist $\Lambda(h) = 1 + (-1)^n \deg h$. Damit folgt aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz, dass $\deg a = (-1)^{n+1}$, denn die Antipodenabbildung $a$ ist fixpunktfrei.

Ein topologischer Raum heißt *azyklisch*, wenn alle seine reduzierten Homologiegruppen verschwinden, das heißt, wenn $H_0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und $H_k(X;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ für alle $k \neq 0$ ist. Jeder kontrahierbare Raum ist azyklisch, aber es gibt auch azyklische Räume, die nicht kontrahierbar sind.

**Korollar 5.14.** *Wenn $K$ ein endlicher, azyklischer Komplex ist, dann hat jede stetige Abbildung $h : \|K\| \to \|K\|$ einen Fixpunkt.*

Dieses Korollar ist eine starke Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes!

## 5.5 Der Satz von Borsuk–Ulam

Ein ausgesprochen anwendungsreiches Resultat (siehe [Mat03]!!) bekommen wir mit dem Lefschetz-Fixpunktsatz „fast umsonst".

**Satz 5.15** (Borsuk'scher Antipodensatz; Borsuk–Ulam-Satz; siehe [Mat03])**.** *Wenn eine stetige Abbildung $f : S^n \to S^m$* antipodentreu *ist (also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$), dann gilt $n \leq m$.*

*Beweis.* Sei $f : S^m \to S^n$ stetig und antipodentreu mit $m > n$. Die übliche Einbettung $g : S^n \hookrightarrow S^m$ ist ebenfalls antipodentreu. Damit erhalten wir ein antipodentreues $f \circ g : S^n \to S^n$.

Weiter können wir $S^n$ fein genug und zentralsymmetrisch so unterteilen, dass $f \circ g$ eine simpliziale Approximation hat. Wegen Zentralsymmetrie treten die von $\Lambda(f \circ g)$ laut Spurformel gezählten Simplexe paarweise auf, und daraus folgt $\Lambda(f \circ g) \equiv 0 \mod 2$: die Lefschetz-Zahl ist gerade.

Es ist aber auch $g : S^n \to S^m$ null-homotop für $n < m$, denn die $m$-Sphäre ist ja $(m-1)$-zusammenhängend. Damit ist aber auch $f \circ g$ nullhomotop, d. h. homotop zu einer konstanten Abbildung, hat also Lefschetz-Zahl $1$: Widerspruch! $\square$

**Satz 5.16** (Äquivalente Versionen zum Borsuk–Ulam-Satz)**.**

(BU1) (Borsuk's “Satz I”) *Eine antipodentreue Abbildung $f : S^n \to S^n$ kann nicht nullhomotop sein.*

(BU2) (Borsuk's “Satz II”) *Jede Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ identifiziert Antipoden, d. h. es gibt $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.*

(BU3) *Jede symmetrische Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, $f(-x) = -f(x)$, hat eine Nullstelle.*

(BU4) (Borsuk's “Satz III” / Lyusternik–Schnirelman (1930) / Greene (2002)) *In jeder Überdeckung $F_0, \ldots, F_n$ von $S^n$, in der jede Menge $F_i$ entweder offen oder abgeschlossen ist, enthält eine der Mengen zwei antipodale Punkte.*

*Beweis.* Die Version (BU1) haben wir schon „mitbewiesen": Wir haben ja gezeigt, dass $f$ antipodentreu impliziert dass $\Lambda(f)$ gerade ist, während jedes nullhomotope $f$ die Lefschetz-Zahl $\Lambda(f) = 1$ hat.

Die nächsten Resultate leitet man leicht und direkt aus der Ausgangsversion (BU) von Satz 5.15 ab, etwa in der Reihenfolge (BU)$\Longrightarrow$(BU3)$\Longrightarrow$(BU2).

Die Implikation (BU3)$\Longrightarrow$(BU4) folgt zunächst für den Fall, dass alle $F_i$ *abgeschlossen* sind, durch Betrachtung von $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\operatorname{dist}(x, F_1), \ldots, \operatorname{dist}(x, F_n))$. Nach (BU3) gibt es ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x) = y$. Ist ein $y_i = 0$, so gilt $x, -x \in F_i$. Sind alle $y_i \neq 0$, so gilt $x, -x \in F_0$. Der Fall einer *offenen* Überdeckung folgt nun, indem man zeigt, sich jede offene Überdeckung durch eine abgeschlossene verkleinern lässt: für jeden Punkt $x \in S^n$ betrachte einen kleinen offenen Ball, dessen Abschluss in einem der $F_i$ enthalten ist. Dann verwende Kompaktheit (endliche Teilüberdeckung). Der Fall einer *allgemeinen* Überdeckung folgt nun, weil man jede abgeschlossene antipodenfreie Menge zu einer offenen, antipodenfreien vergrössern kann: unter Verwendung von Kompaktheit existiert

$$\varepsilon \ := \ \tfrac{1}{2} \min\{\max\{\operatorname{dist}(x, F_i), \operatorname{dist}(-x, F_i)\} : x \in S^n\}\} \ > \ 0$$

und man kann $F_i$ durch die offene Menge aller Punkte ersetzen, die von $F_i$ Abstand $< \varepsilon$ haben. $\square$

# 6 Mannigfaltigkeiten

Das Studium und (soweit möglich ...) die Klassifikation der Mannigfaltigkeiten (vgl. Definition 2.15) sind ein Hauptthema und eine (unlösbare, vgl. Bemerkung 3.21) Hauptaufgabe der Topologie.

## 6.1 Klassifikation der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Die 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten heißen auch *Flächen*. Im Folgenden betrachten wir nur zusammenhängende Flächen, ohne Rand, und kompakt. Sie sind triangulierbar (Satz 2.16).

Beispiele sind: die Sphäre $S^2$, der Torus $T^2 = S^1 \times S^1$, die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, die Kleinsche Flasche $K^2$, die Sphäre mit $g$ Henkeln $M_g$ (wobei $M_0 = S^2$, $M_1 = T^2$ ist), die projektive Ebene mit $g$ Henkeln, etc.

Zusätzlich um „Anfügen eines Henkels“ betrachtet man auch das „Aufnähen einer Kreuzhaube“: man schneidet aus der Fläche eine kleine Kreisscheibe heraus, und identifiziert die gegenüberliegenden Randpunkte, die daraus entstehen. Aufnähen einer Kreuzhaube auf $S^2$ erzeugt $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

*Übungsaufgabe.* Das „Anfügen eines Henkels“ reduziert die Eulercharakteristik um $2$. Es erhält Orientierbarkeit.
Das „Aufnähen einer Kreuzhaube“ reduziert die Eulercharakteristik um $1$. Die dabei entstehende Fläche ist nicht orientierbar.

**Definition 6.1** (Orientierbare und nichtorientierbare Flächen vom Geschlecht $\boldsymbol{g}$)**.**
Die Fläche $M_g$, die man durch Anfügen von $g \geq 0$ Henkeln an die 2-Sphäre erhält, heißt *orientierbare Fläche vom Geschlecht* $g$.

Die Fläche $M'_g$, die man durch Aufnähen von $g \geq 1$ Kreuzhauben auf die 2-Sphäre erhält, heißt *nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht* $g$.

Orientierbarkeit einer zusammenhängenden Fläche kann man an $H_2(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ erkennen. Wegen $\chi(M_g) = 2 - 2g$ bzw. $\chi(M'_g) = 2 - g$ lassen sich die Flächen aus Definition 6.1 an ihrer Homologie unterscheiden.

**Satz 6.2** (Klassifikation der 2-Mannigfaltigkeiten; vgl. Ossa [Oss92, Abschnitt 3.8])**.**
*Jede zusammenhängende, geschlossene $2$-Mannigfaltigkeit ist zu einer eindeutigen Fläche vom Typ $M_g$ oder vom Typ $M'_g$ homöomorph.*

Zusammenhängende Flächen, die bezüglich *Orientierbarkeit* und *Euler-Charakteristik* übereinstimmen, sind also homöomorph.

Insbesondere impliziert dies Relationen von der Form „drei Kreuzhauben $=$ eine Kreuzhaube und ein Henkel“.

*Beweisskizze.* Verwende, dass jede 2-Mannigfaltigkeit triangulierbar ist.

Zusammenfassung von Dreiecken ergibt eine Darstellung als eine einzige 2-Zelle, mit Identifikation der Kanten am Rand. Damit ist jede 2-Mannigfaltigkeit gegeben durch ein Wort der Form

$$a_1 a_2 a_3 a_1 a_2^{-1} a_4 a_5 a_3 a_4^{-1} a_5 \ldots$$

der Länge $2m$, in der jeder Buchstabe genau zweimal vorkommt, evtl. invertiert.

Umgekehrt stellt jedes solche Wort eine Fläche dar. Beispiele: $aa^{-1}$ entspricht einer $S^2$, $aa$ ergibt $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Die Fläche ist orientierbar genau dann, wenn jeder Buchstabe genau einmal invertiert (und einmal nicht invertiert) vorkommt.

Nun führt man eine „Normalisierungsprozedur“ durch: in einer endlichen Folge von Schritten, die das Flächenwort vereinfachen, den Homöomorphietyp der Fläche aber nicht verändern, wird jedes Wort entweder in die Form $a_1a_1^{-1}$ (die $S^2$) gebracht, oder in

$$a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}\,a_3a_4a_3^{-1}a_4^{-1}\,\ldots\,a_{2g-1}a_{2g}a_{2g-1}^{-1}a_{2g}^{-1}$$

mit $g \geq 1$ transformiert, was $M_g$ darstellt, oder in die Form

$$a_1a_1\,a_2a_2\,\ldots\,a_ga_g$$

mit $g \geq 1$ gebracht, die $M'_g$ ergibt.

Die Einzelschritte der Normalisierungsprozedur sind, kurz gefasst:

1. Triviale Modifikationen: zyklische Vertauschung,
   Umorientierung einer Kante (Ersetzung von $a_i$ durch $a_i^{-1}$),
   Zusammenfassen aufeinanderfolgenden Kanten (Ersetzen von zweimal auftretendem $a_ia_j$ durch $a_i$),
2. Beiziehen einer Kante (Auslassen von $a_ia_i^{-1}$),
3. Ecken-Reduktion (ergibt Schema einer Fläche mit nur einer Ecke),
4. Kreuzhauben-Normierung,
5. Henkel-Normierung (ergibt Schema für $M_g$),
6. Henkel-Elimination (ergibt Schema für $M'_g$)

Für die Details verweise ich auf Ossa [Oss92, Abschnitt 3.8]. □

*Bemerkung* 6.3. Dieser auf Brahana [Bra21] zurückgehende Beweis ist konstruktiv: er kann zur algorithmischen Berechnung des Typs einer Fläche (und z. B. von Homologie-Erzeugern etc.) verwendet werden; vgl. Francis & Weeks [FW99] sowie aktuell Lazarus et al. [LPVV01].

**Korollar 6.4.** *Zusammenhängende geschlossene* 2*-Mannigfaltigkeiten mit derselben Homologie (mit* $\mathbb{Z}$*-Koeffizienten) sind homöomorph.*

*Beweis.* Es ist $H_*(M_g;\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2g, \mathbb{Z})$, sowie $H_*(M'_g;\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2, 0)$. □

**Korollar 6.5.** *Die Fundamentalgruppe der orientierbaren Fläche* $M_g$ *vom Geschlecht* $g$ *(*$g \geq 0$*) hat eine Präsentation der Form*

$$\pi(M_g) \;\cong\; \big\langle\, a_1, a_2, \ldots, a_{2g} : a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}\,a_3a_4a_3^{-1}a_4^{-1}\,\cdots\,a_{2g-1}a_{2g}a_{2g-1}^{-1}a_{2g}^{-1} = 1 \,\big\rangle.$$

*Die Fundamentalgruppe der nichtorientierbaren Fläche* $M'_g$ *(*$g \geq 1$*) vom Geschlecht* $g$ *ist*

$$\pi(M'_g) \;\cong\; \big\langle\, a_1, a_2, \ldots, a_g : a_1a_1\,a_2a_2\,\cdots\,a_ga_g = 1 \,\big\rangle$$

**Proposition 6.6** (Abelianisierung der Fundamentalgruppe [Hat02, Sect. 2.A])**.** *Sei* $X$ *triangulierbar und zusammenhängend. Dann ist die erste Homologiegruppe* $H_1(X;\mathbb{Z})$ *von* $X$ *kanonisch isomorph zur* Abelianisierung $\pi(X)^{\mathrm{ab}} := \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ *der Fundamentalgruppe* $\pi_1(X) = \pi_1(X; x_0)$.

*Beweis.* Jede Schleife repräsentiert eine Homologieklasse, und homotope Schleifen bestimmen dieselbe Homologieklasse. (Beweis entweder durch simpliziale Approximation, oder durch Präsentation der Fundamentalgruppe durch Kanten und Dreiecke bzgl. Spannbaum). Verknüpfte Schleifen entsprechen offenbar einer Summe von Homologieklassen. Also gibt es einen kanonischen Homomorphismus $p : \pi_1(X) \to H_1(X;\mathbb{Z})$.

Die Kommutatoruntergruppe $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ liegt im Kern des Homomorphismus, da $H_1(X;\mathbb{Z})$ abelsch ist. Also gibt es einen kanonischen Homomorphismus $\bar{p} : \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] \to H_1(X;\mathbb{Z})$.
Der Homomorphismus $\bar{p}$ ist surjektiv, weil man zu jedem 1-Zykel eine Schleife konstruieren kann, die ihn induziert (verwende z. B. wieder Spannbaum).
Der Homomorphismus ist injektiv: Siehe Hatcher [Hat02, pp. 167,168], insbesondere die geometrische Erklärung am Ende des Beweises. □

Also kann man die zusammenhängenden Flächen auch an ihren Fundamentalgruppen erkennen/auseinanderhalten, denn $H_1(M_g;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ und $H_1(M'_g;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Der Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Homologie hat auch ein höherdimensionales Analogon: nur wird da alles einfacher, weil die höheren Homotopiegruppen abelsch sind: In der ersten Dimension, in der Homologie- bzw. Homotopiegruppe nicht-trivial sind, sind sie insbesondere isomorph — wenn der Raum einfach-zusammenhängend ist. Dies ist der Satz von Hurewicz [Spa66, p. 398]; er hat weitere Erweiterungen, etwa dass jede Abbildung zwischen einfach-zusammenhängen Räumen, die in jeder Dimension Homologie-Isomorphismen erzeugt, schon eine Homotopieäquivalenz ist (Satz von Whitehead [Hat02, Thm. 4.5]).

## 6.2 Überlagerungen

**Definition 6.7** (Überlagerungen)**.** Eine surjektive Abbildung $p : \widetilde{M} \to M$ heißt *Überlagerung*, wenn es für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U_x$ gibt, so dass das Urbild $p^{-1}(U_x)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen in $\widetilde{M}$ ist, die alle von $p$ homöomorph auf $U_x$ abgebildet werden.

Im Allgemeinen werden wir nur Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten betrachten. Wenn $M$ eine Mannigfaltigkeit ist, dann auch $\widetilde{M}$.

Wenn $p : \widetilde{M} \to M$ Überlagerung einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $M$ ist, so hat das Urbild $p^{-1}(x)$ für jedes $x \in M$ dieselbe Kardinalität. Im Fall von $|p^{-1}(x)| = k < 0$ sprechen wir von einer $k$-*blättrigen* oder $k$-*fachen Überlagerung*.

**Lemma 6.8** (Eulercharakteristik von Überlagerungen)**.** *Wenn $p : \widetilde{M} \to M$ eine $k$-fache Überlagerung ist, so gilt $\chi(\widetilde{M}) = k\chi(M)$.*

*Beispiel.* Fassen wir $S^1$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, so definiert $p : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ eine $k$-blättrige Überlagerung (für $k > 0$).

Wenn es eine nichttriviale endliche Überlagerung $\pi : M \to M$ (also mit $1 < k < \infty$) gibt, wie für $S^1$ und für $T = S^1 \times S^1$, so ist nach der Eulercharakteristik-Gleichung $\chi(M) = 0$.

*Bemerkung* 6.9. Die „Typen von“ zusammenhängenden Überlagerungen einer gegebenen zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $M$ hängen eng mit den Untergruppen der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ zusammen, und können durch diese klassifiziert werden.

Grob gilt dabei: „Je kleiner die Untergruppe, desto größer die entsprechende Überlagerung.“ Insbesondere entspricht (für gutartige Räume, etwa triangulierbare) der trivialen Untergruppe eine eindeutig bestimmte größte Überlagerung, die einfach-zusammenhängend ist, die sogenannte *universelle* Überlagerung, die bis auf „Äquivalenz“ (die man genau definieren muss/kann) eindeutig ist.

All dies soll hier nicht näher behandelt werden; siehe z. B. [Mun00, Chap. 13].

*Beispiel.* Die Flächen kann man in vielen verschiedenen Darstellungen konstruieren, zum Beispiel auch als Überlagerungen. So erhält man z. B. $M'_h$ durch Anfügen von $\frac{h-1}{2}$ Henkeln an $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = M'_1$ (für ungerades $h$) und durch Anfügen von $\frac{h-2}{2}$ Henkeln an $K^2$ (für gerades $h$). Aus dieser Darstellung sieht man leicht, dass $M'_h$ eine zweifache Überlagerung hat, die orientierbar und damit zu einem $M_g$ homöomorph ist (nach Klassifikationssatz).

Die Eulercharakteristik-Rechnung nach Lemma 6.8 ergibt dann $2-2g = \chi(M_g) = 2\chi(M'_h) = 2(2-h)$, also $g = h - 1$.

*Beispiel.* Zweifache Überlagerung $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, also

$$\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \;=\; \tfrac{1}{2}(1+(-1)^n) \;=\; \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade,} \\ 1 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

**Proposition 6.10.** *Jede zusammenhängende nichtorientierbare Mannigfaltigkeit $M$ hat eine kanonische zusammenhängende orientierbare zweifache Überlagerung $p : \widetilde{M} \to M$.*

Beachte aber: $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist für ungerades $n \geq 1$ orientierbar. In diesem Fall ist die antipodale Abbildung $a : S^n \to S^n$ orientierungserhaltend. Jedoch ist $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ für jedes $n > 1$ die universelle (einfach zusammenhängende) Überlagerung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Für $n = 1$ ist diese durch $\mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, $x \mapsto e^{ix}$ gegeben.

**Proposition 6.11.** *Sei $X$ ein topologischer Raum, auf dem eine endliche Gruppe (von "Symmetrien") frei operiert, also so dass*

- *jedem $g \in G$ ein Homömorphismus $\varphi(g) : X \to X$ zugeordnet ist,*
- *$\varphi(1) = \mathrm{id}_X : X \to X$ und $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h) : X \to X$ gilt,*
- *$\varphi(g)(x) \neq x$ gilt für $g \neq 1$*

*Dann ist die Projektion $p : X \to X/G$, $x \mapsto [x] = \{\varphi(g)(x) : g \in G\}$ eine Überlagerungsabbildung.*

*Dasselbe gilt auch im Fall von unendlichen Gruppen $G$, wenn man fordert, dass die Gruppenaktion „eigentlich diskontinuierlich“ ist, also so, dass jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x$ hat, für die die Mengen $g(U_x)$ alle disjunkt sind.*

*Beispiele.* $G = \mathbb{Z}_2$ operiert frei auf $S^n$, mit $\varphi(0) = \mathrm{id}$ und $\varphi(1) = a$ (die „antipodale Wirkung“).

$G = \mathbb{Z}_p$ operiert frei auf $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ durch die Multiplikation mit $p$-ten Einheitswurzeln ($p \geq 2$).

$G = \mathbb{Z}_p$ hat keine freie Operation auf $S^{2n}$, für $p > 2$: das geht nicht wegen Lemma 6.8, denn dann müsste $\chi(S^{2n}/\mathbb{Z}_p) = \frac{2}{p}$ gelten.

**Lemma 6.12** ([Hat02, p. 71])**.** *Wenn $X$ wegzusammenhängend, einfach-zusammenhängend und „lokal-wegzusammenhängend“ ist (diese Bedingung ist für triangulierbares $X$ erfüllt), und die Gruppe $G$ eigentlich diskontinuierlich und frei auf $X$ operiert, dann ist $\pi_1(X/G) \cong G$.*

*Beispiel.* Die Gruppe $G = \mathbb{Z}$ operiert frei auf $X = \mathbb{R}$ mit $\varphi(z)(x) := x + z$. Wir erhalten $X/G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ mit $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Die Gruppe $G = \mathbb{Z}^2$ operiert frei auf $X = \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(z_1, z_2)(x_1, x_2) := (x_1 + z_1, x_2 + z_2)$. Wir erhalten $X/G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$ mit $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

## 6.3 Einige 3-Mannigfaltigkeiten

Während die fundamentalen Fragen über 2-Mannigfaltigkeiten mit Satz 6.2 geklärt sind, stellen uns 3-Mannigfaltigkeiten vor offenbar schwierige Probleme (siehe die Poincaré-Vermutung 3.12). In diesem Abschnitt wollen wir hauptsächlich Beispiele von interessanten (Klassen und Konstruktionsmethoden von) 3-Mannigfaltigkeiten präsentieren.

*Beispiel* (Der Dodekaederraum, eine Poincaré-Homologiesphäre; siehe [BL00]). Den *Dodekaederraum* $\Sigma^3$ erhält man aus dem regulären 3-dimensionalen Dodekaeder durch Verkleben jeder Seitenfläche mit der gegenüberliegenden nach einer Rotation um $\pi/5 = 36°$. Man überzeugt sich, dass der entstehende Raum eine 3-Mannigfaltigkeit ist, die die Homologie der 3-Sphäre hat: $H_*(\Sigma^3; \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z})$. Die

Fundamentalgruppe ist aber nicht-trivial, sie hat 120 Elemente (vgl. Seifert–Threlfall [ST34, §62]). Sie ist die „binäre Ikosaedergruppe“, wie man aus einer Darstellung des Dodekaederraums als Quotient der 3-Sphäre sieht — siehe unten. Elementar kann man sich die Darstellung

$$\pi_1(\Sigma^3) \;\cong\; \langle a, b : a^5 = (ab)^2 = b^3 \rangle$$

herleiten, aus der man auch sieht, dass die Abelianisierung trivial ist. Ich verweise auf die Diskussion/ Rechnung in Seifert & Threlfall [ST34, §62], die Originalreferenz von 1934. Das ganze Kapitel 9 dieses Buches ist für uns interessant und sehr gut zugänglich.

Der 2-dimensionale Raum, den Dodekaederraums, den man durch Identifikation des *Randes* des Dodekaederraums bekommt, ist ein einfaches Beispiel eines Raums der azyklisch ist (alle reduzierten Homologiegruppen verschwinden), aber eine nichttriviale Fundamentalgruppe (nämlich $\widetilde{I}$) hat.

Die folgende Klasse von Mannigfaltigkeiten hat Tietze (1908) eingeführt.

*Beispiele* (Linsenräume). Sei $1 \leq q < p$, mit teilerfremden $p$ und $q$.

Auf dem Ball $B^3$ werden die Punkte $x \in \partial B^3 = S^2$ und $\varphi(x)$ identifiziert, wobei man $\varphi(x)$ aus $x$ durch “Rotation um die Polachse um den Winkel $2\pi q/p$, und dann Reflektion an der Äquatorebene” entsteht.

Der Quotientenraum ist eine 3-dimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit, der *Linsenraum* $L(p, q)$. Zum Beispiel ist $L(2, 1) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Die Konstruktion von $L(p, q)$ involviert eine *freie* Aktion von $\mathbb{Z}_p$ auf dem Rand $\partial B^3 \;\cong\; S^2$, so dass wir $\pi(S^2/\mathbb{Z}_p) \;\cong\; \mathbb{Z}_p$ erhalten. Das Innere des 3-Balles ändert die Fundamentalgruppe nicht, deshalb ist $\pi_1(L(p, q)) \;\cong\; \mathbb{Z}_p$, und damit auch $H_1(L(p, q); \mathbb{Z}) \;\cong\; \mathbb{Z}_p$. Die Homologie der Linsenräume ist $H_*(L(p, q); \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, 0, \mathbb{Z})$. Damit sind Homologie und Fundamentalgruppe unabhängig von $q$!

Alternative Darstellung: Man kann $L(p, q)$ auch als Quotient $S^3/\mathbb{Z}_p$ erhalten, wobei die Aktion durch $(z_1, z_2) \mapsto ((\xi_p)^q z_1, \xi_p z_2) = (e^{2\pi i q/p} z_1, e^{2\pi i/p} z_2)$ gegeben ist (vergleiche [Hat02, Example 2.43]).

**Satz 6.13** (Klassifikation der Linsenräume)**.**
*Klassifikation bezüglich Homöomorphie:* $L(p, q) \cong L(p, q')$ *genau dann, wenn*

$$qq' \equiv \pm 1 \bmod p \qquad \textit{oder} \qquad q' \equiv q \bmod p.$$

*Klassifikation bezüglich Homotopie-Äquivalenz:* $L(p, q) \simeq L(p, q')$ *genau dann, wenn*

$$q' \equiv \pm a^2 q \bmod p \quad \textit{für ein } a \in \mathbb{Z}.$$

Von diesem Satz ist der „dann“-Teil jeweils elementar-geometrisch, das „nur-dann“ ist schwierig (wobei die wesentlichen Teile von Reidemeister bzw. Whitehead geleistet wurden); vgl. Munkres [Mun84, §§40,69].

**Korollar 6.14.** *Die Linsenräume* $L(7, 1), L(7, 2)$ *sind homotopieäquivalent, aber nicht homöomorph!*

Ein weiterer, interessanter Aspekt: $L(3, 1)$ hat keinen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus!

## 6.4 Mehr Beispiele

Weitere Konstruktionsmethoden für 3-Mannigfaltigkeiten (alle wichtig ...) werden hier nur kurz angesprochen. Siehe (klassisch) Seifert & Threlfall [ST34, Kap. 9], und (modern) Stillwell [Sti93, Chap. 8].

**Proposition 6.15** (Heegaard-Zerlegungen (Heegaard 1898))**.**
*Jede orientierbare kompakte* 3*-Mannigfaltigkeit ohne Rand lässt sich durch Verkleben von zwei Henkelkörpern vom Geschlecht* $g$ *(mit Rand homöomorph zu* $M_g$*) erzeugen. Die Zerlegung von* $M$ *in zwei Henkelkörper mit Rand homöomorph zu* $M_g$ *heißt eine* Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht $g$.

*Beweis.* Wir hatten schon referiert, dass $M$ triangulierbar ist. Für eine solche Triangulierung betrachten wir nun eine röhrenförmige $\varepsilon$-Umgebung ("tubular neighborhood") des 1-Skeletts. Der Rand dieser Umgebung ist eine zusammenhängende orientierbare 2-Mannigfaltigkeit, also vom Typ $M_g$ für geeignetes $g \geq 0$.
Man überlegt sich, dass sowohl die Umgebung als auch ihr Komplement in $M$ homöomorph zu einem *Henkelkörper* ist. $\square$

Die 3-Mannigfaltigkeiten von Heegaard-Geschlecht 1, die man also durch Verkleben von zwei Volltori konstruieren kann, sind genau $S^3$, $S^2 \times S^1$, und die Linsenräume.

**Proposition 6.16** (Erzeugung von 3-Mannigfaltigkeiten durch Chirurgie . . . )**.**
*Jede zusammenhängende orientierbare 3-Mannigfaltigkeit kann durch Chirurgie entlang eines Knotens oder einer Verkettung ("link") erzeugt werden: man bohrt also einen oder mehrere Volltori aus der $S^3$ geraus, und setzt die Volltori anders („verdrillt") wieder ein.*

**Proposition 6.17** (. . . und als verzweigte Überlagerungen (Hilden 1974/Montesinos 1976))**.**
*Jede zusammenhängende orientierbare 3-Mannigfaltigkeit kann als Überlagerung mit 3-facher Verzweigung entlang eines Knotens aus der 3-Sphäre erzeugt werden.*

Zum Nachlesen dieser Dinge wird das Knotentheorie-Buch von Rohlfsen [Rol90] empfohlen.

Eine schöne, aktuelle und sehr anschaulich-konkrete Übersicht über (weitere) Konstruktionsmethoden für 3-Mannigfaltigkeiten, wie etwa die *Seifert-Mannigfaltigkeiten* gibt Lutz [Lut03].

## 6.5 Einige Lie-Gruppen

Weitere interessante und wichtige Beispiele liefert die Theorie der Matrixgruppen — Gruppen, die differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, und für die die Gruppenoperationen stetig und differenzierbar sind, heißen *Lie-Gruppen*.

*Beispiele* (Einige Lie-Gruppen).
Die Matrixgruppen $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ (für $n \geq 1$) sind Mannigfaltigkeiten der Dimension $n^2$, $2n^2$, $n^2-1$ bzw. $2n^2-2$.

Dabei sind $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ und $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ Beispiele für *komplexe Mannigfaltigkeiten*, von denen hier nicht weiter die Rede sein wird. (Weitere Beispiele: die „Riemannschen Mannigfaltigkeiten" $M_g$.)

Die Matrixgruppen $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ (für $n \geq 1$) sind sogar kompakte Mannigfaltigkeiten, der Dimension $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2-1}{2}$, $n^2$ bzw. $n^2-1$. Die meisten davon sind zusammenhängend (Gegenbeispiel: $\mathrm{O}(1) \cong S^0$; $\mathrm{O}(n)$ hat zwei Komponenten.)

Weitere Beispiele: symplektische Gruppen, Spin-Gruppen, $O(n,k)$, insbes. $\mathrm{O}(3,1)$.

$\mathrm{SO}(2) \cong \mathrm{U}(1) \cong S^1$.

Die Gruppe $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^3$: Für diese Homöomorphie ordnet man jedem Vektor $v \in B^3$ eine Rotation mit der Achse $\mathbb{R}v$ um den Winkel $\pi|v|$ zu.

Die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ hat die doppelte Überlagerung $p : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, die ein Gruppenhomomorphismus ist. Es ist $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$. Siehe [Knö96, Satz 6.5].

In $\mathrm{SO}(3)$ liegt als Untergruppe die Gruppe der Rotationen (orientierungserhaltenden Symmetrien (Rotationen) des regulären Dodekaeders/Ikosaeder, die *Ikosaedergruppe* $I$, mit $|I| = 60$. Durch Überlagerung erhält man daraus die *binäre Ikosaedergruppe* mit 120 Elementen, deren Abelianisierung trivial ist. Als $\mathrm{SU}(2)/\widetilde{I}$ ergibt sich der Dodekaederraum als Quotient aus einer Überlagerungsabbildung.

# 7 Exakte Sequenzen

**Definition 7.1** (Exakte Sequenzen)**.** Eine (endliche oder unendliche) Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$\ldots \to A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} A_3 \xrightarrow{i_3} A_4 \to \ldots$$

heißt ein *Komplex*, wenn die Hintereinanderausführung $i_k \circ i_{k-1}$ zweier Abbildungen immer die Nullabbildung ergibt, wenn also $\operatorname{im} i_{k-1} \subseteq \ker i_k$ gilt für alle $k$.

Die Folge ist eine *exakte Sequenz*, wenn dabei jeweils $\operatorname{im} i_{k-1} = \ker i_k$ gilt, wenn der Komplex also „keine Homologie hat“.

*Beispiel.* Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} A_3 \to 0$$

Die Exaktheitsbedingungen bedeuten dabei, dass $i_2$ surjektiv ist, mit $\ker i_2 \cong A_2$, oder äquivalent dazu, dass $i_1$ injektiv ist, mit $\operatorname{coker} i_1 \cong A_3$.

Üblicherweise sind von einer kurzen exakten Sequenzen zwei Terme gegeben (evtl. mit Information über eine Abbildung), der dritte Term ist zu rekonstruieren. Dafür muss man aber Abbildungen kennen: Wenn etwa $A_1 = A_2 = \mathbb{Z}$ ist, dann ist $A_3 \cong \mathbb{Z}_n$ wenn $i_1$ eine Multiplikation mit $\pm n$ ist; insbesondere ist $A_3 \cong \{0\}$ im Fall von $n = 1$.

Insbesondere ist die mittlere Gruppe $A_2$ durch $A_1$ und $A_3$ im Allgemeinen nicht bis auf Isomorphie festgelegt: Wenn

$$0 \to \mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

exakt ist, dann könnte $A \cong \mathbb{Z}$ oder $A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ gelten.

*Übungsaufgabe.* In einer kurzen exakten Sequenz ist der Rang der mittleren Gruppe gleich der Summe der Ränge der beiden äußeren Gruppen.

Dto. entwickelt man die Definitionen für exakte Sequenzen von Vektorräumen (und lineare Abbildungen), und für exakte Sequenzen von Kettenkomplexen (und Kettenabbildungen).

*Beispiel* (Homologie eines Paars). Man fixiere eine Koeffizientengruppe $G$ (etwa $G = \mathbb{Z}$), die im folgenden immer verwendet, aber nicht explizit notiert wird.

Sei $X$ ein Simplizialkomplex, $A \subseteq X$ ein Unterkomplex. Dann ist $C_k(A)$ eine Untergruppe von $C_k(X)$, und die Quotientengruppe $C_k(X, A) := C_k(X)/C_k(A)$ ist wieder frei: die Simplexe von $X$, die nicht in $A$ liegen, induzieren eine Basis. Dabei ist

$$0 \to C_k(A) \to C_k(X) \to C_k(X, A) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz.

Der Randoperator von $C_*(X)$ induziert auch einen Randoperator für $C_*(X, A)$: Für $c \in C_k(X)$ und $a \in C_k(A)$ definiert man $\partial[c] := [\partial c]$, und weil $\partial a$ in $C_{k-1}(A)$ liegt ($A$ ist Unterkomplex!) erhält man $\partial[c + a] = [\partial c + \partial a] = [\partial c]$, so dass der Randoperator $\partial$ auf $C_k(X, A)$ wohldefiniert ist.

Damit erhält man einen Kettenkomplex $C_*(X, A)$, dessen Homologie die *relative Homologie von $X$ modulo $A$* heißt.

*Beispiele* (reduzierte/relative Homologie).
$H_k(X;G) \cong H(X,\emptyset;G)$: gewöhnliche Homologie ist (isomorph zur) Homologie relativ zur leeren Menge.
$\widetilde{H}_k(X;G) \cong H_k(X,\{x_0\};G)$: reduzierte Homologie ist (isomorph zur) Homologie relativ zu einem Basispunkt.

Interpretationen:

(1) Die relative Homologie verwendet Zykel, deren Rand nicht mehr Null sein muss, sondern nur in $A$ landen muss.
(2) Die relative Homologie von $(X,A)$ ist die reduzierte Homologie des Quotientenraums $X/A$, in dem $A$ zu einem „Basispunkt“ kontrahiert wird.

*Beispiel.* Es gilt

$$H_k(B^n, S^{n-1};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen:

$$0 \to C_*(A) \xrightarrow{i} C_*(X) \xrightarrow{p} C_*(X,A) \to 0.$$

Sie bedingt, dass die Homologie von $X$, von $A$, und von $X$ modulo $A$, eng zusammenhängen.

**Proposition 7.2** (Zick-Zack-Lemma, [Mun84, Lemma 24.1]: „Wo die langen exakten Sequenzen herkommen“)**.** *Jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen erzeugt eine lange exakte Sequenz in Homologie.*

**Satz 7.3** (Lange exakte Sequenz eines Paars [Mun84, Thm. 23.3])**.** *Ist $X$ ein Komplex und $A \subseteq X$ ein Unterkomplex, so gibt es eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to H_{k+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{p_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

*wobei die Homomorphismen $i_*$ und $p_*$ durch Inklusionen $i : A \to X$ bzw. $p : (X,\emptyset) \to (X,A)$ induziert sind.*
*Genauso erhält man diese lange exakte Sequenz für reduzierte Homologie.*

Woher kommt der „Randoperator“ $\partial_* : H_k(X,A) \to H_{k-1}(A)$? Jede Homologieklasse in $H_k(X,A)$ wird durch eine Kette $c \in C_k(X)$ dargestellt, deren Rand in $C_{k-1}(A)$ liegt; also wird $\partial_*[c] := [\partial c]$ abgebildet.

**Proposition 7.4** (Ausschneidung (Version für Komplexe) [Mun84, Thm. 9.1])**.** *Sind $X'$ und $A$ Unterkomplexe von $X$ mit $X \setminus X' \subseteq A$ (d. h. $A \cup X' = X$), so gilt*

$$H_k(X', X' \cap A) \cong H_k(X,A).$$

*Das heißt: die relative Homologie „sieht nicht“, was sich in $A$ tut: wir können daher $A$ abkegeln, oder aber Teile von $A$ wegschneiden, ohne die relative Homologie zu verändern.*
*Insbesondere gilt dies für $X' := \overline{X\backslash A}$, den durch $X\backslash A$ erzeugten Komplex:*

$$H_k(\overline{X\backslash A}, \overline{X\backslash A} \cap A) \cong H_k(X,A).$$

**Satz 7.5** (Mayer–Vietoris-Sequenz[6] [Mun84, Thm. 25.1])**.** *Ist $X = A \cup B$ für Unterkomplexe $A, B \subset X$, so hat man eine lange exakte Sequenz*

$$\to\ H_k(A \cap B)\ \to\ H_k(A) \oplus H_k(B)\ \to\ H_k(X)\ \xrightarrow{\partial}\ H_{k-1}(A \cap B; \mathbb{Z})$$

*und genauso für reduzierte Homologie.*

*Beweis.* Es gibt eine ganz naheliegende kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, in die nur ein Minuszeichen eingefügt werden muss:

$$0\ \to\ C_*(A \cap B)\ \xrightarrow{(i' \oplus i'')}\ C_*(A) \oplus C_*(B)\ \xrightarrow{(i''', -i'''')}\ C_*(A \cup B)\ \to\ 0.$$

Diese kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen induziert die Mayer–Vietoris-Sequenz. □

*Beispiele.* Die *disjunkte Vereinigung* von zwei Räumen kann man mit der Mayer–Vietoris-Sequenz behandeln, und erhält mit $A \cap B = \emptyset$, und $H_i(\emptyset; G) = 0$ für alle $i$:

$$H_k(A \uplus B; G)\ \cong\ H_k(A; G)\ \oplus H_k(B; G).$$

Die *Einpunktverheftung* von zwei Räumen kann man mit der Mayer–Vietoris-Sequenz für reduzierte Homologie behandeln, und erhält mit $A \cap B = \{x_0\}$, und $\widetilde{H}_i(\{x_0\}; G) = 0$ für alle $i$:

$$\widetilde{H}_k(A \uplus B; G)\ \cong\ \widetilde{H}_k(A; G)\ \oplus \widetilde{H}_k(B; G).$$

Damit erhält man zum Bespiel für ein Bouquet (Einpunktverheftung) von $n$ $k$-Sphären:

$$\widetilde{H}_i(\bigwedge_n S^k; \mathbb{Z})\ \cong\ \begin{cases} \mathbb{Z}^n & \text{für } i = n \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Die *Einhängung* $\Sigma X = \operatorname{susp} X = X * S^0$ eines Raums $X$ lässt sich auch als Vereinigung von zwei Kegeln schreiben: $\operatorname{susp} X = (X * x_0) \cup (X * x_1)$. Die Mayer–Vietoris-Sequenz dafür ergibt leicht

$$\widetilde{H}_k(\operatorname{susp} X) \cong \widetilde{H}_{k-1}(X).$$

Allgemeiner kann man den Join mit einer Menge von $p \geq 1$ Punkten behandeln, die wir mit $\mathbb{Z}_p = \{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ identifizieren; dabei verwendet man entweder Mayer–Vietoris-Sequenz und Induktion, oder aber relative Homologie, wobei

$$H_k(X * \mathbb{Z}_p, X * x_0)\ \cong\ H_k(X * \{x_0, x_1\}, X * x_0)^{p-1}.$$

Also ergibt sich

$$\widetilde{H}_k(X * \mathbb{Z}_p) \cong \widetilde{H}_{k-1}(X)^{p-1}.$$

Durch Induktion kann man damit die Räume

$$E_n\mathbb{Z}_p\ :=\ \underbrace{\mathbb{Z}_p * \cdots * \mathbb{Z}_p}_{n+1 \text{ Faktoren}}$$

behandeln, die sich dadurch auszeichnen, dass sie $n$-dimensionale, $(n-1)$-zusammenhängende Komplexe mit einer freien $\mathbb{Z}_p$-Aktion sind. Man erhält

$$\widetilde{H}_k(E_n\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z})\ \cong\ \begin{cases} \mathbb{Z}^{(p-1)^{n+1}} & k = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als Spezialfälle enthält dies die Homologie der $n$-dimensionalen Sphäre $S^n \cong E_n\mathbb{Z}_2$, wie des vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3} \cong E_1\mathbb{Z}_3$.

[6]Leopold Vietoris, 1891–2002! Siehe `http://www.ams.org/notices/200210/fea-vietoris.pdf`

Genauso kann man versuchen, allgemein die Homologie eines Joins zu berechnen, indem man $X * Y$ in zwei Teile zerlegt, von denen der eine zu $X$ der andere zu $Y$ homotopieäquivalent ist (eine Retraktion darauf zulässt), und die Schnittmenge zu $X \times Y$ homöomorph ist. Dafür kann man problemlos eine Mayer–Vietoris-Sequenz aufstellen. Das Problem liegt dann zunächst in der Bestimmung der Homologie des Produkts $X \times Y$, für die wir im Folgenden das Künneth-Theorem angeben.

**Satz 7.6** (Künneth-Theorem [Mun84, Thm. 59.3])**.** *Für beliebige topologische Räume $X, Y$ gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=k} H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_k(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=k} H_{p-1}(X) * H_q(Y) \to 0$$

*wobei die Torsionsprodukte „$*$“ dann verschwinden, wenn man entweder Körperkoeffizienten werwendet, oder zumindest einer der Faktoren frei ist. Ansonsten wird auf [Mun84, p. 331] verwiesen.*

Ganz ähnlich zur simplizialen Version erhält man eine Mayer–Vietoris-Sequenz im Fall der Überdeckung $X = U_1 \cup U_2$ durch zwei offene Mengen, aber der Beweisaufwand ist in unserem Rahmen größer, weil wir nicht einfach mit simplizialer Homologie argumentieren können. Siehe Munkres [Mun84, §33].

**Definition 7.7** (Lokale Homologie [Mun84, §35])**.**
Die *lokale Homologie* von $X$ an der Stelle $x_0 \in X$ ist die relative Homologie $H_k(X, X \backslash \{x_0\})$.

Diese Version der Definition funktioniert natürlich nicht in simplizialer Homologie: für diese kann man aber $H_k(X, X \backslash x_0)$ definieren, wobei $X \backslash x_0$ den Komplex bezeichnet, den man durch Löschen aller Simplexe erhält, die $x_0$ enthalten.

Aus lokaler Homologie erhält man sofort die Invarianz der Dimension:

**Korollar 7.8** (Invarianz der Dimension)**.**
*Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Dimension können nicht homöomorph sein: für innere Punkte $x_0$ einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $X$ gilt $H_n(X, X \backslash \{x_0\}) = \mathbb{Z}$, aber $H_k(X, X \backslash \{x_0\}) = 0$ für $k \neq n$.*

*Genauso ist der Rand topologisch invariant: ist $y_0$ ein Randpunkt, so gilt $H_k(X, X \backslash \{y_0\}) = 0$ für* alle $k$.

Der algebraische Zugang zu Homologietheorien über Kettenkomplexe ist auch deshalb wichtig, weil man mit *dem selben formalen Apparat* auch *ganz andere Homologietheorien* definieren kann, in denen dann ganz ähnliche/analoge Resultate gelten.

Als Beispiel sei hier die *singuläre Homologie* genannt und kurz „definiert“:

**Definition 7.9** (Singuläre Homologie [Mun84, §29])**.**
Ein *singulärer $k$-Simplex in $X$* ist eine stetige Abbildung $\Delta_k \to X$.
Eine *singuläre $k$-Kette mit Koeffizienten in $G$* ist eine formale Linearkombination von $k$-Simplexen in $X$.
Die $k$-Simplizes in $X$ liefern die *singuläre Kettengruppe $S_k(X; G)$*.
Nun definiert man den Rand eines Simplexes, und erhält damit einen Randoperator $\partial_k : S_k(X; G) \to S_{k-1}(X; G)$.
Nun definiert man Zyklen und Ränder wie in simplizialer Theorie, und erhält die *singulären Homologiegruppen* von $X$ mit Koeffizienten in $G$.

Die singulären Homologiegruppen werden üblicherweise auch mit $H_k(X; G)$ bezeichnet, weil (Satz, nichttrivial) für Komplexe singuläre und simpliziale Homologiegruppen kanonisch isomorph sind.

Beachte: singuläre Homologiegruppen sind für *jeden* topologischen Raum definiert, und es ist recht einfach zu zeigen, dass sie Homotopie-Invarianten sind. Dafür ist es sehr viel schwieriger, ohne Verwendung von Theorie singuläre Homologiegruppen zu berechnen, weil schon die Kettengruppen keinen endlichen Rang haben, man also keine Basen zur Hand hat.

Als Abschluss des Kapitels über exakte Sequenzen: Algebraischere Formulierung des Satzes von Seifert und van Kampen, eben auch als kurze exakte Sequenz (von nicht-abelschen Gruppen!):

**Satz 7.10** (Seifert–van Kampen [Mun00, p. 431])**.** *Wenn sich ein Raum $X$ als Vereinigung $X = X_1 \cup X_2$ zweier offener Mengen mit wegzusammenhängendem Schnitt und gemeinsamem Basispunkt $x_0 \in X_1 \cap X_2$ darstellen lässt, mit Inklusionen $i_i : X_i \hookrightarrow X$, dann ist*

$$\pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \longrightarrow \pi_1(X_1 \cup X_2) \longrightarrow 1$$

*exakt: $\pi(X)$ ist das Bild der durch $(i_1, i_2)$ induzierten surjektiven Abbildung. Deren Kern ist der Normalisator des Bildes von $\pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$*

# 8 Zellkomplexe

Dass das Arbeiten mit Simplizialkomplexen wegen der großen Anzahl von Simplexen in Triangulierungen mühsam sein kann, haben wir schon gesehen. Hier werden zwei alternative Konzepte eingeführt, „CW-Komplexe“ und „reguläre CW-Komplexe“. CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead in den Fünfziger Jahren eingeführt, und haben sich als Grundstruktur sehr schnell durchgesetzt – siehe [Hat02, Chap. 0]. (Dabei steht die Bezeichnung CW *nicht* für die Initialen des Erfinders, sondern bezeichnet „closure-finite“ und „weak topology“.)

Eine *Zelle* ist ein topologischer Raum, der zu $B^k$ homöomorph ist. Dabei ist $k$ die *Dimension* der Zelle, die wir auch als $k$-*Zelle* bezeichnen. Statt $B_k$ könnten wir auch $[0,1]^k$ oder einen $k$-Simplex als „Modell“ verwenden — die kombinatorische Struktur von Zellen ist nicht festgelegt (das war eben bei Simplizialkomplexen anders).

Eine *offene Zelle* ist ein topologischer Raum, der zu $\operatorname{int} B^k$ homöomorph (also zu $\mathbb{R}^k$).

**Definition 8.1** (CW-Komplexe; reguläre CW-Komplexe [Mun84, §38])**.** Ein *CW-Komplex* ist ein Hausdorff-Raum $X$ mit einer Zerlegung $X = \biguplus e_\alpha$ in offene Zellen so dass

- Für jede Zelle $e_\alpha$ gibt es eine *charakteristische Abbildung*: eine stetige Abbildung $f_\alpha : B^k \to X$, die $\operatorname{int} B$ homöomorph auf $e_\alpha$ abbildet, und den Rand $\partial B^k = S^{k-1}$ stetig in eine endliche Vereinigung Menge von Zellen $e_\beta$, die alle kleinere Dimension als $k$ haben müssen. Das Bild $f_\alpha(B_k)$ wird mit $\bar{e}_\alpha$ bezeichnet.
- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jede Schnittmenge $A \cap \bar{e}_\alpha$ abgeschlossen ist.

Eine alternative (äquivalente) Beschreibung von CW-Komplexen geht wie folgt [Hat02, p. 7]: Jeder CW-Komplex $X$ kann „per Induktion über die Dimension des Skeletts“ aufgebaut werden. Das $0$-Skelett $X^0$ besteht aus einer Menge von Ecken (mit diskreter Topologie). Das $k$-Skelett erhält man durch Anheften von $k$-Zellen in das $(k-1)$-Skelett $X^{k-1}$, wobei die Anheftung von $\bar{e}_\alpha \cong B^k$ durch eine Abbildung $f_\alpha : \partial B^k = S^{k-1} \to X^{k-1}$ definiert wird, die im Bild nur endlich viele Zellen treffen darf.

Endliche CW-Komplexe sind kompakt. Eine Teilmenge eines Komplexes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist, und nur endlich viele Zellen trifft.

*Beispiele.*
$S^n$: CW-Komplex mit einer $0$- und einer $n$-Zelle.
$M_g$: eine Ecke, $2g$ Kanten, eine $2$-Zelle.
$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$: CW-Struktur mit genau einer Zelle in jeder Dimension $k$, für $0 \le k \le n$. Das $k$-Skelett ist ein $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$.
$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$: eine $2k$-Zelle für $0 \le k \le n$, ohne ungerade-dimensionalen Zellen. Das $2k$-Skelett ist ein $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$.

Jeder nicht-leere CW-Komplex hat mindestens eine Ecke. Er ist zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist, und das stimmt genau dann, wenn das 1-Skelett zusammenhängend ist. (Das $1$-Skelett ist ein „(ungerichteter) Graph“’ im Sinne der Graphentheorie, der Mehrfachkanten und Schleifen haben kann.)

**Definition 8.2** (CW-Paar)**.** Ein *CW-Paar* ist ein Paar (X,A), bestehend aus einem CW-Komplex $X$ und einem Unterkomplex $A$.

In jedem CW-Komplex $X$ ist das $k$-Skelett $X^k$ ein Unterkomplex, also ist $(X, X^k)$ ein CW-Paar. Genauso ist $(X^{k+1}, X^k)$ ein CW-Paar.

CW-Komplexe sind für viele Zwecke flexibler, und leichter handhabbarer als Simplizialkomplexe:

**Proposition 8.3** (Konstruktionen [Hat02, pp. 8,9])**.**
*Sind $X$ und $Y$ CW-Komplexe, von denen einer lokal-endlich ist, so ist $X \times Y$ wieder ein CW-Komplex (mit der Produkt-Topologie).*

*Ist $(X, A)$ ein CW-Paar, so ist $X/A$ wieder ein CW-Komplex. Dieser hat eine Ecke als „Basispunkt“, und sonst eine $k$-Zelle für jede $k$-Zelle von $X$, die nicht in $A$ liegt.*

*Ist $X$ ein CW-Komplex, so ist $\operatorname{susp} X$ wieder ein CW-Komplex, mit einer $(k+1)$-Zelle für jede nichtleere $k$-Zelle von $X$, plus zwei zusätzliche Ecken.*

Wir verwenden $f_k = f_k(X)$ für die Anzahl der $k$-dimensionalen Zellen von $X$ (wenn diese endlich ist).

**Definition 8.4.** Ein CW-Komplex ist *regulär* wenn die charakteristischen Abbildungen $f_\alpha : B^n \to \bar{e}_\alpha$ Homöomorphismen sind, und das Bild jeweils eine endliche Vereinigung von Zellen ist.

Jede $k$-Zelle wird also in einen Unterkomplex eingeklebt, der zu $S^{k-1}$ homöomorph ist.

Reguläre CW-Komplexe sind triangulierbar (baryzentrische Unterteilung). Sie sind durch ihre Seitenhalbordnung bis auf Homöomorphie festgelegt, also rein-kombinatorisch beschreibbar (aber typischerweise mit sehr viel weniger Zellen als in einer Triangulierung).

Nicht jeder CW-Komplex ist triangulierbar (Beispiel/Beweis: siehe [Mun84, p. 218]).

*Beispiele.* $S^n$ hat (minimale) Struktur eines regulären CW-Komplexes mit zwei Ecken, zwei Kanten, etc.: baryzentrische Unterteilung liefert die „oktaedrische“ Triangulierung mit $2(n+1)$ Ecken und $2^n$ Facetten ($n$-Simplexen).

Jedes konvexe $n$-dimensionale Polytop hat die Seitenstruktur eines regulären Zellkomplexes (homöomorph zu $B^n$).

**Lemma 8.5.** *Ist $X$ ein CW-Komplex, so ist $H_k(X^k, X^{k-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{f_k}$, und $H_i(X^k, X^{k-1}; \mathbb{Z}) = 0$ sonst.*

**Definition 8.6** (Zelluläre Homologie)**.** Sei $X$ ein CW-Komplex. Wir definieren die *zellulären Kettengruppen* durch

$$D_k(X; \mathbb{Z}) \;:=\; H_k(X^k, X^{k-1}; \mathbb{Z})$$

und den *zellulären Randoperator* $\partial_k : D_k(X; \mathbb{Z}) \to D_{k-1}(X; \mathbb{Z})$ durch die Verkettung

$$\partial_k : H_k(X^k, X^{k-1}; \mathbb{Z}) \;\xrightarrow{\partial_*}\; H_{k-1}(X^{k-1}; \mathbb{Z}) \;\xrightarrow{i_*}\; H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}; \mathbb{Z})$$

wobei $\partial_*$ der Randoperator aus der langen exakten Sequenz des Paars $(X^k, X^{k-1})$ ist, und $i_*$ durch die Inklusion $i : (X_{k-1}, \emptyset) \subset (X^{k-1}, X^{k-2})$ induziert ist, also aus der Paarsequenz des Paars $(X^{k-1}, X^{k-2})$ stammt.

Die Homologie des Kettenkomplexes $(D_k(X; \mathbb{Z}), \partial_k)$ heißt die *zelluläre Homologie* von $X$.

**Lemma 8.7.** *Der zelluläre Randoperator erfüllt $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, definiert also wirklich einen Kettenkomplex.*

*Beweis.* Dafür betrachtet man die Verkettung $\partial_k \circ \partial_{k+1}$:

$$H_k(X^{k+1}, X^k; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*} H_k(X^k; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_k(X^k, X^{k-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X^{k-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}; \mathbb{Z})$$

und bemerkt, dass die beiden mittleren Abbildungen in der langen exakten Sequenz des Paars $(X^k, X^{k-1})$ aufeinanderfolgen, also zusammen eine Nullabbildung ergeben. □

**Satz 8.8.** *Die zelluläre Homologie von $X$ ist kanonisch isomorph zur simplizialen Homologie von $X$ (wenn $X$ triangulierbar ist) und zur singulären Homologie von $X$.*

Genauso definiert man zelluläre Homologie mit Koeffizienten, insbes. mit $\mathbb{Q}$- und $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten. (Letztere ist oft leichter zu berechnen, weil man sich keine Sorgen über Orientierung der Zellen/Vorzeichen machen muss.)

*Beispiele.* Die Homologie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ergibt sich sofort als

$$H_{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

weil der zelluläre Kettenkomplex die Form

$$0 \;\to\; \mathbb{Z} \;\to\; 0 \;\to\; \mathbb{Z} \;\to\; \dots \;\to\; \mathbb{Z} \;\to\; 0 \;\to\; \mathbb{Z} \;\to\; 0$$

hat und somit alle Homomorphismen Nullabbildungen sind.

Für $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ muss man etwas härter arbeiten, erhält

$$H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für ungerades } i,\ 0 < i < n, \\ \mathbb{Z} & \text{für ungerades } i = n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

aber auch

$$H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } 0 \le i \le n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was für viele Anwendungen wichtiger und brauchbarer ist.

Beobachtung: Wenn $X$ eine Zellzerlegung mit $f_k$ $k$-Zellen zulässt, so hat die zelluläre Kettengruppe $D_k(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{f_k}$ den Rang $f_k$. Die Homologiegruppe $H_k(X;\mathbb{Z})$ ist Quotientengruppe einer Untergruppe davon, hat also auch höchstens Rang $f_k$. Es gilt also

$$\beta_k \;\le\; f_k.$$

Dies ist die triviale Form der sogenannten Morse-Ungleichungen, die sich deutlich verschärfen lassen. So gilt nicht nur $\beta_1 \le f_1$, sondern sogar $\beta_1 - \beta_0 \le f_1 - f_0$. Usw.

Ausblick: Was ist Morse-Theorie?
„Höhen-“ oder Distanzfunktionen auf Mannigfaltigkeiten liefern Morse-Funktionen; Morse-Funktionen liefern Zellzerlegungen; der Morse-Komplex liefert Kohomologie, oder zumindest Abschätzungen (eben durch die Morse-Ungleichungen). Die klassische Quelle dazu ist Milnor [Mil69].

# 9 Kohomologie

Wir beginnen mit einer algebraischen Beschreibung.

**Definition 9.1** (Kokettenkomplex)**.** Ein *Kokettenkomplex*

$$\mathcal{C}^* \;=\; (C^k, d^k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

ist eine Folge von abelschen Gruppen $C^k$ (beachte Notation: oberer Index bezeichnet Dimension) und Homomorphismen $d^k : C^k \to C^{k+1}$ (beachte: dimensionserhöhend), mit der Bedingung $d^{k+1} \circ d^k = 0$ für alle $k$.

Die Gruppen

$$H^k(\mathcal{C}) \;:= \ker(d^k : C^k \to C^{k+1})/\operatorname{im}(d^{k-1} : C^{k-1} \to C^k)$$

heißen die *Kohomologiegruppen* des Komplexes.

Das „ko-“ in den Bezeichnungen steht dabei für Dualisierung, weswegen insbesondere „die Abbildungen in die umgekehrte Richtung gehen“.

**Lemma 9.2.** *Ist $\mathcal{C}_* = (C_k, \partial_k)$ ein Kettenkomplex und $G$ eine abelsche Gruppe, und setzt man $C^k := \operatorname{Hom}(C_k, G)$ sowie $d^k(f) := f \circ \partial_{k+1}$, so ist $\mathcal{C}^* := (C^k, d^k)$ ein Kokettenkomplex.*

Sind $C$ und $G$ abelsche Gruppen, so ist $\operatorname{Hom}(C, G)$ wieder eine abelsche Gruppe. Ist $f : C \to C'$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $f^* : \operatorname{Hom}(C', G) \to \operatorname{Hom}(C, G)$, $h \mapsto f \circ h$ wiederum ein Gruppenhomomorphismus.

Dabei überlegt man sich für Rechnungen, dass $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^f, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^f$ gilt, und allgemeiner $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^f, G) \cong G^f$. Ist weiter $f : \mathbb{Z}^f \to \mathbb{Z}^{f'}$ ein Homomorphismus, der durch die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{f'\times f}$ dargestellt wird, so wird $f^*$ durch die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{Z}^{f\times f'}$ dargestellt.

**Definition 9.3** (Simpliziale/zellulare/singuläre Kohomologie)**.** Sei $X$ ein topologischer Raum, evtl. gegeben durch einen simplizialen oder CW-Komplex, und sei $G$ eine Koeffizientengruppe. Sei $\mathcal{C}_*(X;\mathbb{Z})$ der zugehörige Kettenkomplex für die (simpliziale, zelluläre, bzw. singuläre) Homologie von $X$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

Die Kohomologie des nach Lemma 9.2 gewonnenen Kokettenkomplexes

$$\mathcal{C}^*(X;G) \;:=\; \big(C^k(X;G) := \operatorname{Hom}(C_k(X;\mathbb{Z}), G),\; d^k : f \mapsto f \circ \partial_{k+1}\big)$$

ist dann die *simpliziale, zelluläre, bzw. singuläre Kohomologie von $X$ mit Koeffizienten in $G$.*

*Beispiel.* Für die reelle projektive Ebene haben wir eine Zellzerlegung mit genau einer Ecke, Kante und 2-Zelle, und damit den zellulären Kettenkomplex

$$0 \;\to\; \mathbb{Z} \;\xrightarrow{2}\; \mathbb{Z} \;\xrightarrow{0}\; \mathbb{Z} \;\to\; 0,$$

und der gibt die Homologiegruppen

$$H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2;\mathbb{Z}) = 0, \qquad H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, \qquad H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Dualisierung liefert den (zellulären) Kokettenkomplex

$$0 \;\leftarrow\; \mathbb{Z} \;\xleftarrow{2}\; \mathbb{Z} \;\xleftarrow{0}\; \mathbb{Z} \;\leftarrow\; 0,$$

und damit die Kohomologie der projektiven Ebene:

$$H^2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, \qquad H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2;\mathbb{Z}) = 0, \qquad H^0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Analog zur geometrischen Beschreibung von Ketten, Zyklen, Rändern, etc. in simplizialer Theorie kann man auch Koketten, Kozyklen, Koränder etc. geometrisch beschreiben.

Eine $k$-dimensionale Kokette ist dabei eine Funktion, die jedem $k$-dimensionalem Simplex $\sigma_k$ einen Wert $f(\sigma_k)$ zuordnet. Den Korand erhält man wie folgt: $df(\tau_{k+1}) = f(\partial\tau_{k+1})$ ist die Summe über alle $f$-Werte von $k$-Simplexen im Rand von $\tau_{k+1}$. Siehe [Mun84, §42].

Die „$k$-dimensionale Kohomologie mit Koeffizienten in $G$" ist ein *kontravarianter Funktor* von der Kategorie der topologischen Räume (und stetigen Abbildungen) in die Kategorie der abelschen Gruppen (und stetigen Abbildungen): die Zuordnung $X \to H^k(X;G)$ ordnet jedem topologischen Raum eine abelsche Gruppe zu, und jeder stetigen Abbildung einen Gruppenhomomorphismus. Allerdings geht der Homomorphismus in die „umgekehrte Richtung": $f : X \to Y$ induziert $H^k(f) : H^k(Y;G) \to H^k(X;G)$. (Im Gegensatz dazu ist „$k$-dimensionale Homologie mit Koeffizienten in $G$" ist ein *(kovarianter) Funktor*, denn $f : X \to Y$ induziert $H_k(f) : H_k(X;G) \to H_k(Y;G)$.)

Kohomologie hängt (wie Homologie) nur vom Homotopietyp ab: homotope Abbildungen entsprechen demselben Homomorphismus in Kohomologie, Homotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen in Kohomologie, und homotopieäquivalente Räume haben daher isomorphe Kohomologie.

Kohomologie kann direkt aus der Homologie berechnet werden; Räume mit isomorpher (endlich-dimensionaler) Homologie haben also isomorphe Kohomologie. Genauer gilt: $H^k(X;\mathbb{Z})$ hat denselben Rang wie $H_k(X;\mathbb{Z})$, aber dieselbe Torsionsuntergruppe wie $H_{k-1}(X;\mathbb{Z})$. Kanonischere Formulierung über eine kurze exakte Sequenz — siehe [Mun84, Cor. 45.6/Thm. 53.1].

Homologie und Kohomologie sind also allemal „ähnlich". Das drückt sich zum Beispiel dadurch aus, dass Homologie und Kohomologie (nicht-kanonisch) isomorph sind, wenn man Körperkoeffizienten verwendet und die Homologie endlich-dimensional ist. Warum interessiert uns Kohomologie trotzdem, wenn sie keine zusätzliche Information enthält? Sie hat zusätzlich eine multiplikative Struktur, bildet also einen Ring, den *Kohomologiering*.

**Definition 9.4** (Cup-Produkt)**.** Sei $R$ ein Koeffizientenring (etwa $\mathbb{Z}$ oder ein Körper). Das *Cup-Produkt* ist der Homomorphismus

$$\cup : H^k(X;R) \otimes H^\ell(X;R) \ \to H^{k+\ell}(X;R),$$

der durch die Diagonalabbildung

$$\Delta : X \to X \times X, \qquad x \mapsto (x,x)$$

und die Produktabbildung

$$\times : H^k(X;R) \otimes H^\ell(Y;R) \to H^{k+\ell}(X \times Y;R)$$

des Künneth-Theorems in Kohomologie [Mun84, Thm. 60.5] induziert wird.

In simplizialer Theorie kann man das Cup-Produkt durch explizite kombinatorische Formeln darstellen. Dazu reicht aber etwa der zelluläre Kettenkomplex nicht aus! Siehe Munkres [Mun84, p. 292].

**Proposition 9.5.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Die Kohomologie $\bigoplus_{k\geq 0} H^k(X;R)$ hat mit dem Cup-Produkt als Multiplikation die Struktur eines assoziativen Ringes mit Eins. Er ist aber nicht kommutativ, sondern erfüllt*

$$\alpha^k \cup \beta^\ell \ = \ (-1)^{k\ell}\beta^\ell \cup \alpha^k.$$

*Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert damit einen Ring-Homomorphismus. Homotope Abbildungen induzieren denselben Ring-Homomorphismus. Damit ist der Kohomologiering eine Homotopie-Invariante.*

*Beispiele.* $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1})$ [Mun84, Thm. 68.3] und $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t^2]/(t^{2n+2})$ sind „abgeschnittene Polynomalgebren“. Daraus kann man ableiten, dass für $m < n$ jede Abbildung $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^m$ die Fundamentalgruppe trivial abbildet; daraus folgt z. B. ein zweiter Beweis des Borsuk–Ulam-Satzes 5.15; siehe [Mun84, p. 405].

Zur „versteckten“ Information in der Produktstruktur der Kohomologie siehe aktuell [Zie93] und [Fei03].

*Bemerkung* 9.6 (de Rham Kohomologie). Auf glatten Mannigfaltigkeiten bilden die Differentialformen einen Kokettenkomplex, mit der äußeren Ableitung als Korandoperator. Die zugehörigen Kohomologiegruppen heißen die *de Rham Kohomologiegruppen*. Sie sind mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten definiert (es gibt keine natürliche Konstruktion mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten). Differentialformen kann man aber multiplizieren — das äußere Produkt von Differentialformen induziert das Cup-Produkt für de Rham Kohomologie.

# 10 Mannigfaltigkeiten II: Poincaré-Dualität

Zunächst stellen wir fest, dass man zu praktisch jeder Folge von abelschen Gruppen $H_0, H_1, H_2, \ldots$ einen CW-Komplex $X$ konstruieren kann, der genau diese Homologiegruppen hat (siehe Munkres [Mun84, p. 231, Problem 4]). Es gibt nur Einschränkungen vom Typ

- $H_0$ ist immer frei,
- wenn $X$ Dimension $n$ hat, dann ist $H_n(X;\mathbb{Z})$ frei, und $H_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ für $i > n$,

Etwas entsprechendes ist für die Homologie von Mannigfaltigkeiten nicht wahr. Für das Folgende betrachten wir $n$-dimensionale Mannigfaltigkeiten die zusammenhängend, geschlossen (kompakt, ohne Rand), und triangulierbar sind. Man kann die Diskussion auf *Homologie-Mannigfaltigkeiten* erweitern, in denen der Link einer Ecke nur die Homologie einer Sphäre haben muss (aber keine Sphäre sein muss).

**Lemma 10.1.** *Sei $M$ eine zusammenhängende geschlossene triangulierbare $n$-Mannigfaltigkeit.*
*Dann ist entweder $H_n(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (wenn $M$ orientierbar ist), oder $H_n(M;\mathbb{Z}) = 0$ (wenn $M$ nicht orientierbar ist).*
*Im ersten Fall gilt $H^n(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, im zweiten Fall gilt $H_n(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.*
*Im nicht-orientierbaren Fall enthält $H_{n-1}(M;\mathbb{Z})$ einen $\mathbb{Z}_2$-Torsionssummanden (und ist sonst frei).*

Offenbar gibt es hier also substantielle Einschänkungen an die möglichen Homologiegruppen. Viel weitreichender ist das folgende Resultat.

**Satz 10.2** (Poincaré-Dualität [Mun84, Thm. 65.1])**.** *Sei $M$ eine zusammenhängende geschlossene triangulierbare $n$-dimensionale (Homologie-)Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$H_k(M;G) \;\cong\; H^{n-k}(M;G) \qquad \text{für alle } k$$

*für beliebige Koeffizientengruppen $G$ wenn $M$ orientierbar ist, und für $G = \mathbb{Z}_2$ auch im nicht-orientierbaren Fall.*

Im Folgenden bezeichne $\beta_k := \operatorname{rank} H_k(M;\mathbb{Z})$ die $k$-te Bettizahl von $M$.

*Übungsaufgabe.* Für jeden endlichen CW-Komplex (der keine Mannigfaltigkeit sein muss) gilt

$$\beta_k \;=\; \operatorname{rank} H_k(M;\mathbb{Z}) \;=\; \dim H_k(M;\mathbb{Q}) \;=\; \operatorname{rank} H^k(M;\mathbb{Z}) \;=\; \dim H^k(M;\mathbb{Q}).$$

(Hinweis: elementare lineare Algebra!)

Man prüfe dies, wie auch die Aussagen der Poincaré-Dualität, an der Homologie und Kohomologie von $M_g$ bzw. $M'_g$, die wir ja schon berechnet haben, die aber auch in zellulärer Homologie direkt hergeleitet werden kann.

**Korollar 10.3.** *Für orientierbare $n$-Mannigfaltigkeiten gilt*

$$\beta_k \;=\; \beta_{n-k};$$

*die Folge der Betti-Zahlen ist also symmetrisch.*
*Für nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten gilt dies auch, falls man $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten betrachtet, also $\beta_k := \dim_{\mathbb{Z}_2} H_k(M;\mathbb{Z}_2)$.*

*Proof (Poincaré-Dualität).* Wir betrachten eine reguläre CW-Zerlegung $X$ von $M$, und die dazu duale Zerlegung $X^*$. Jeder $k$-Zelle $\sigma_k$ von $X$ entspricht eine $(n-k)$-Zelle $\sigma_k^*$ in $X^*$. Wenn $M$ orientiert ist, dann entspricht jeder Orientierung einer $k$-Zelle von $X$ kanonisch eine Orientierung der zugehörigen dualen Zelle. (Beispiel, für $n = 2$, $k = 1$: jeder gerichteten Kante entspricht eine duale Kante, deren Richtung man durch „Rotation im Gegenuhrzeigersinn“ (also unter Verwendung der globalen Orientierung der Fläche) bestimmt.)

Damit ergibt sich zur Berechung der zellulären Homologie von $X$, und der zellulären Kohomologie von $X^*$, Komplexe

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D}_* & 0 \to D_n \to D_{n-1} \to \ \dots \ \to D_1 \to D_0 \to 0 \\ \mathcal{D}^* & 0 \to D^0 \to D^1 \to \ \dots \ \to D^{n-1} \to D^n \to 0 \end{array}$$

mit isomorphen Gruppen $D_k \cong D^{n-k}$ und mit *denselben* Abbildungen/Matrizen. Also ergeben die Komplexe auch isomorphe Homologie, $H_k(X;G) \cong H^{n-k}(X^*;G)$.

Im nicht-orientierbaren Fall funktioniert das Orientieren nicht, das ist bei $\mathbb{Z}_2$-Koeffizienten aber auch nicht nötig. $\square$

Der vorstehende Beweis ist insofern problematisch, als die Konstruktion des „dualen Zellkomplexes“ nur unter Vorsichtsmaßnahmen funktioniert, wie der folgende berühmte Satz zeigt. Im Allgemeinen sind die Zellen des dualen Komplexes keine topologischen Bälle, weil die Ränder, in die man Zellen einkleben müsste, nur Homologie-Sphären sind (und nicht notwendigerweise topologische Sphären).

Die „Vorsichtsmaßnahmen“ sind

- Für $n \leq 3$ gibt es keine Probleme
- Arbeiten in der Kategorie von sog. PL-Mannigfaltigkeiten (vgl. Rourke & Sanderson [RS72]), oder
- Arbeiten mit Homologie-Mannigfaltigkeiten und dem „dualen Block-Komplex“, für den zelluläre Homologie/Kohomologie immer noch funktiert (vgl. Munkres [Mun84, §64]).

**Satz 10.4** (Double Suspension Theorem (Edwards [Edw75], Cannon [Can79]))**.**
*Für jede beliebige Homologie 3-Sphäre $\Sigma^3$ ist die doppelte Einhängung $\operatorname{susp}\operatorname{susp}\Sigma^3$ homöomorph zu $S^5$.*

Wir können problemlos eine Triangulierung der Poincaré-Sphäre konstruieren. Die doppelte Einhängung erhalten wir als Simplizialkomplex mit vier zusätzlichen Ecken. Dies ergibt also eine Triangulierung der $S^5$, in der eine Kante als Link die $\Sigma^3$ hat; der duale Block-Komplex hat dann einen „Block“ $\operatorname{cone}\Sigma^3$, der eben keine Zelle ist.

Mit der Poincaré-Dualität hängen weitere wichtige Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten und ihrer Kohomologie zusammen. Wir geben hier eine Manifestation im Kohomologiering an.

**Satz 10.5** (Duale Paarung)**.** *Sei $M$ eine zusammenhängende triangulierbare geschlossene $n$-Mannigfaltigkeit. Ist $M$ orientierbar, so induziert das Cup-Produkt eine Abbildung*

$$\cup: \ H^k(M;\mathbb{Z})/\mathrm{Torsion} \ \otimes \ H^{n-k}(M;\mathbb{Z})/\mathrm{Torsion} \ \ \to \ \ \mathbb{Z}$$

*die eine* duale Paarung *ist. Genauso ist*

$$\cup: \ H^k(M;K) \ \otimes \ H^{n-k}(M;K) \ \ \to \ \ K$$

*eine nicht-degenerierte Bilinearform für beliebigen Koeffizienten-Körper $K$, bzw. für $K = \mathbb{Z}_2$ im nicht-orientierbaren Fall.*

Daraus ergeben sich zum Bespiel die Behauptungen über den Kohomologie-Ring der reellen bzw. komplexen projektiven Räume, im vorherigen Kapitel!

Besonders interessant ist die Paarung aus Satz 10.5 für den Fall $k = n - k$, also $k = n/2$ (für gerades $n$). Dann definiert $\cup$ eine Bilinearform auf $H^{n/2}(M; \mathbb{Z})/\mathrm{Torsion}$, die für $n \cong 0 \bmod 4$ sogar symmetrisch ist.

Dies kann man sich wieder für 2-Mannigfaltigkeiten elementar überlegen. Für $4$-Mannigfaltigkeiten hängt daran ein spektakuläres Ergebnis der modernen Topologie. In der Formulierung verwenden wir, dass für einfach-zusammenhängendes $M$ die Gruppe $H^k(M; \mathbb{Z})$ keine Torsion hat (denn sonst müsste auch $H_1(M; \mathbb{Z})$ Torsion haben.

**Satz 10.6** (Klassifikation der einfach-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten; Milnor (1958) und Freedman (1986))**.** *Die Zuordnung*

$$\delta : \left\{\begin{array}{l}\textit{Homotopietypen von}\\ \textit{einfach-zusammenhängenden}\\ \textit{orientierbaren triangulierbaren}\\ 4\textit{-Mannigfaltigkeiten}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l}\textit{Äquivalenzklassen von}\\ \textit{nicht-degenerierten}\\ \textit{symmetrischen Bilinearformen}\\ (\mathbb{Z}^N; \langle\cdot,\cdot\rangle)\end{array}\right\},$$

*die jeder $4$-Mannigfaltigkeit die Gruppe $H^2(M; \mathbb{Z})$ und die darauf durch das Cup-Produkt gegebene Bilinearform zuordnet, ist injektiv und surjektiv.*

Damit sind also die Homotopietypen solcher Mannigfaltigkeiten durch rein algebraisch-zahlentheoretische Objekte klassifiziert.

Ich verweise auf Milnor & Husemoller [MH73] für mehr Information in diese Richtung.

## Literatur


[AM90] S. Akbulut and J. D. McCarthy. *Casson's Invariant for Oriented Homology $3$-Spheres. An Exposition*, volume 36 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[BL00] Anders Björner and Frank H. Lutz. Simplicial manifolds, bistellar flips and a $16$-vertex triangulation of the Poincaré homology $3$-sphere. *Experimental Math.*, 9:275–289, 2000.

[Bor67] Karol Borsuk. *Theory of Retracts*. Monografie Matematyczne, Tom 44. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1967.

[Bra21] Henry Roy Brahana. Systems of circuits on $2$-dimensional manifolds. *Annals of Math.*, 23:144–168, 1921.

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[Bro11] Luitzen E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Annalen*, 70:161–165, 1911.

[Can79] J. W. Cannon. Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three. *Annals Math.*, 110:83–112, 1979.

[Coh73] Marshall M. Cohen. *A course in simple-homotopy theory*. Springer-Verlag, New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10.

[Edw75] Robert D. Edwards. The double suspension of a certain homology $3$-sphere is $S^5$. *Notices Amer. Math. Soc.*, 22, 1975. A-334.

[EHH+92] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch, Max Koecher, Klaus Mainzer, Alexander Prestel, and Reinhold Remmert. *Zahlen*. Grundwissen. Springer-Verlag, Heidelberg, third edition, 1992.

[Fei03] Eva Maria Feichtner. Rational versus real cohomology of low-dimensional toric varieties. *Proceedings Amer. Math. Soc.*, 131:1695–1704, 2003.

[Ful95] William Fulton. *Algebraic Topology. A First Course*, volume 153 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[FW99] George K. Francis and Jeffrey R. Weeks. Conway's ZIP proof. *Amer. Math. Monthly*, 106:393–399, 1999.

[GJa] Ewgenij Gawrilow and Michael Joswig. Geometric reasoning with `POLYMAKE`. Preprint, July 2005, 13 pages; `http://www.arxiv.org/math/0507273`.

[GJb] Ewgenij Gawrilow and Michael Joswig. `Polymake`: A software package for analyzing convex polytopes. `http://www.math.tu-berlin.de/diskregeom/polymake/`.

[Grü03] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, New York, 2003. Second edition prepared by V. Kaibel, V. Klee and G. M. Ziegler (original edition: Interscience, London 1967).

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Available online at `http://math.cornell.edu/~hatcher`.

[Hu65] Sze-tsen Hu. *Theory of Retracts*. Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[Jän80] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1980. 7. Auflage 2001.

[Kin04] Simon King. How to make a triangulation of $S^3$ polytopal. *Transactions Amer. Math. Soc.*, 356:4519–4542, 2004. `http://www.arxiv.org/math/0009216`.

[Knö96] Horst Knörrer. *Geometrie*. Vieweg Studium. Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, Wiesbaden, 1996.

[Kre] Matthias Kreck. Differential algebraic topology. Book manuscript, 168 pages, August 2005; `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kreck/stratifolds/DA_22_08.pdf`.

[LPVV01] Francis Lazarus, Michel Pocchiola, Gert Vegter, and Anne Verroust. Computing a canonical polygonal schema of an orientable triangulated surface. In *Proc. 17th Ann. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 80–89, 2001.

[Lut02] Frank H. Lutz. Császár's torus. Electronic Geometry Model No. 2001.02.069, `http://www.eg-models.de/models/Classical_Models/2001.02.069/`, April 2002.

[Lut03] Frank H. Lutz. Triangulated manifolds with few vertices: Geometric 3-manifolds. Preprint, TU Berlin, 48 pages; `http://www.arxiv.org/math/0311116`, 2003.

[Mat03] Jiří Matoušek. *Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[Men28] Karl Menger. *Dimensionstheorie*. B. G. Teubner, Leipzig, 1928.

[MH73] John Milnor and Dale Husemoller. *Symmetric Bilinear Forms*. Springer-Verlag, 1973.

[Mil69] John Milnor. *Morse Theory*, volume 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, 1969. Third corrected printing.

[Moi77] Edwin E. Moise. *Geometric topology in dimensions* 2 *and* 3. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47.

[Mun84] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

[Mun00] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 2000.

[Oss92] Erich Ossa. *Topologie*. Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.

[Per03] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. Preprint, 7 pages; `arXiv:math.DG/0307245`, July 2003.

[Rol90] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.

[RS72] Colin P. Rourke and Brian J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, volume 69 of *Ergebnisse Series*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Revised printing (Springer Study Edition) 1982.

[Rub97] J. Hyam Rubinstein. Polyhedral minimal surfaces, Heegaard splittings and decision problems for 3-dimensional manifolds. In *Geometric topology (Athens, GA, 1993)*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 1–20. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966. Corrected reprint, Springer-Verlag 1981/1996.

[SS70] Lynn A. Steen and J. Arthur Seebach, Jr. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.

[ST34] Herbert Seifert and William Threlfall. *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, 1934. Engl. translation: A Textbook of Topology, (J.S. Birman, J. EIsner, eds.), Academic Press 1980.

[Sti82] John Stillwell. The word problem and the isomorphism problem for groups. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 6(1):33–56, 1982.

[Sti93] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, volume 72 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, second edition, 1993.

[SW] John Shareshian and Michelle Wachs. Torsion in the matching complex and chessboard complex. Preprint, September 2004, 48 pages; Advances in Math., to appear; `http://www.math.miami.edu/~wachs/abstracts/torsion.html`.

[Wac03] Michelle L. Wachs. Topology of matching, chessboard and general bounded degree graph complexes. *Algebra Universalis (Special Issue in Memory of Gian-Carlo Rota)*, 49:345–385, 2003. `http://www.math.miami.edu/~wachs/eprints.html`.

[Zam05] Afra J. Zamorodian. *Topology for Computing*, volume 16 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, 2005.

[Zie93] Günter M. Ziegler. On the difference between real and complex arrangements. *Mathematische Zeitschrift*, 212:1–11, 1993.

[Zie95] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Revised edition, 1998; “Updates, corrections, and more” at `http://www.math.tu-berlin.de/~ziegler`.

## Software

Beispiele — Rechnungen mit “`topaz`” von Michael Joswig und Ewgenij Gawrilow, einem Modul von `polymake`, `http://www.math.tu-berlin.de/polymake/`