Topologie

Wolfgang Soergel

20. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

Für Korrekturen zu vorläufigen Versionen danke ich vielen Freiburger Studentinnen und Studenten, insbesondere Gregor Fritz, Gerald Höhn, Stephan Wehrheim, Isolde Adler, Olaf Schnürer.

1 Homotopie und Fundamentalgruppe

1.1 Einführung in die Topologie

Ich erinnere an den vertrauten Begriff der Stetigkeit von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. Es bezeichne $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die euklidische Norm, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.1.1. Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$.

1. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **stetig im Punkt** $x \in A$ genau dann, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, daß für $z \in A$ aus $\|x - z\| < \delta$ folgt $\|f(x) - f(z)\| < \varepsilon$.

2. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt $x \in A$.

3. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt ein **Homöomorphismus** genau dann, wenn sie stetig und bijektiv ist und ihre Inverse $f^{-1} : B \to A$ auch stetig ist.

4. A und B heißen **homöomorph** genau dann, wenn es einen Homöomorphismus von A nach B gibt.

Wir schreiben kurz $A \cong B$ für die Aussage "A ist homöomorph zu B". Anschaulich bedeutet das, daß sich A durch "Verbeulen und Verbiegen" aus B erhalten läßt. Zum Beispiel sind je zwei offene Intervalle in $\mathbb{R}$ homöomorph, und "Die Oberfläche einer Kaffeetasse (mit einem Henkel) ist homöomorph zur Oberfläche eines Rettungsrings". Man bezeichnet die Topologie deshalb auch scherzhaft als "Gummigeometrie". Zur Motivation gebe ich nun einige typische Probleme aus der Topologie.

1. Invarianz der Dimension: Man zeige $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$.

2. Es bezeichne stets $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die **n-dimensionale Kugelschale** oder **n-Sphäre**. Es ist also $S^{-1} = \emptyset$, $S^0 = \{+1, -1\}$, S^1 die Kreislinie, S^2 die Kugelschale und so weiter. Man zeige, daß es für $n \geq 0$ keine stetige Injektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ gibt. (Als Übung empfehlen sich die Fälle $n = 0, 1$. Der Fall $n = 2$ wird in 1.7.8 erledigt, der allgemeine Fall ergibt sich als Konsequenz aus 6.3.29.)

3. Man zeige, daß der Rettungsring, auch genannt der (zweidimensionale) **Torus** $S^1 \times S^1$ nicht homöomorph ist zur 2-Sphäre S^2.

4. "Ein Igel läßt sich nicht kämmen ohne Wirbel". In Formeln zeige man: Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S^2 \to S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$.

5. Es bezeichne stets $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ die **n-dimensionale Vollkugel**. Es ist also D^0 ein Punkt, $D^1 = [-1, +1]$ ein kompaktes Intervall, D^2 die abgeschlossene Kreisscheibe und so weiter. Man zeige, daß jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ einen Fixpunkt hat. (Diese Aussage heißt der Brouwer'sche Fixpunktsatz. Als Übung empfehlen sich wieder die Fälle $n = 0, 1$.)

In mathematisch nicht ganz so präziser Formulierung will ich auch noch die Klassifikation zusammenhängender geschlossener Flächen besprechen. Ich gebe zunächst eine Definition, die notwendig etwas unbeholfen ist, da eine effiziente Sprache ja in dieser Vorlesung gerade erst entwickelt werden soll.

Definition 1.1.2. Eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ (für beliebiges n) heißt eine **geschlossene topologische in $\mathbb{R}^n$ eingebettete d-Mannigfaltigkeit** genau dann, wenn F kompakt ist und es für jeden Punkt $p \in F$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $p \in U$ und $U \cap F \cong \mathbb{R}^d$.

Beispiele für geschlossene d-Mannigfaltigkeiten sind die Sphären S^d. Wir werden in **??** zeigen, daß jede geschlossene 1-Mannigfaltigkeit homöomorph ist zu einer endlichen disjunkten Vereinigung von Kopien von S^1. Eine geschlossene 2-Mannigfaltigkeit nennen wir auch eine **geschlossene Fläche**. Beipiele für geschlossene Flächen sind die Kugelschale S^2, der Torus $S^1 \times S^1$, oder auch die Oberfläche einer massiven Acht (die homöomorph ist zur Oberfläche einer dickwandigen Suppentasse mit zwei Henkeln). Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine geschlossene Fläche ist die sogenannte **Klein'sche Flasche**, die man erhält, indem man bei einer Flasche den Flaschenhals langzieht, umbiegt, ihn von aussen unter Durchdringung der Flaschenwand ins Innere der Flasche schiebt, dann ein kreisrundes Loch in den Boden der Flasche schneidet, und schließlich die Flaschenöffnung in das Loch unten am Boden einklebt. Genauer erhält man so in der Anschauung noch keine geschlossene Fläche in unserem Sinne, da sich unsere Fläche selbst überschneidet an der Stelle, an der der Flaschenhals in die Flasche eindringt. In der vierten Dimension jedoch kann man diese Selbstüberschneidung vermeiden. Stellen wir uns dazu die vierte Koordinate als Farbe vor und malen unsere Flasche so changierend an, daß der Flaschenhals und der Flaschenboden rot, der Flaschenkörper aber blau sind, dann ist klar, daß unsere Fläche ohne Selbstüberschneidung im vierdimensionalen Raum liegt, und das ist dann wirklich unsere Klein'sche Flasche. Die Klein'sche Flasche ist nicht homöomorph zu einer Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, wie wir in 11.7.19 beweisen werden. Im folgenden Satz brauchen wir noch das berühmte Möbiusband, das man erhält, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt. Der Rand des Möbiusbandes ist eine einzige geschlossene Kreislinie.

Satz 1.1.3 (Klassifikation der geschlossenen Flächen). *Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu genau einer der im folgenden beschriebenen Flächen:*

- *Man nehme die Kugelschale S^2, schneide in diese $2g$ kreisrunde Löcher hinein und verbinde diese Löcher paarweise durch g hohle Henkel, für $g = 0, 1, 2, \ldots$*
- *Man nehme die Kugelschale S^2, schneide in diese g kreisrunde Löcher hinein und klebe Möbiusbänder in diese Löcher ein, für $g = 1, 2, \ldots$*

Die Flächen der ersten Liste heißen die **orientierbaren Flächen vom Geschlecht** g. Für $g = 0, 1, 2$ erhält man die Kugelschale, den Torus und die Oberfläche einer Kaffeetasse mit zwei Henkeln. Die Flächen der zweiten Liste heißen die **nichtorientierbaren Flächen vom Geschlecht** g. Für $g = 1$ erhält man die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ aus **??**, für $g = 2$ die Klein'sche Flasche. Die nicht orientierbaren Flächen zeichnen sich dadurch aus, daß man bei einem Rundweg als Spaziergänger auf der Fläche unter Umständen auf der anderen Seite der Fläche "mit dem Kopf nach unten" wieder am Ausgangspunkt ankommt. Zum Nachdenken hier noch eine Frage: Welche Fläche unserer Liste erhält man, wenn man an die Klein'sche Flasche einen Henkel anklebt? Jetzt gilt es aber zunächst, einen präzisen und effektiven Begriffsapparat für die Behandlung derartiger Fragestellungen aufzubauen.

1.2 Die Definition der Fundamentalgruppe

Definition 1.2.1. Seien X ein topologischer Raum und $x, y \in X$ Punkte. Die Menge aller Wege von x nach y bezeichnen wir mit

$$\Omega(X, y, x) = \{\alpha : [0, 1] \to X \mid \alpha \text{ ist stetig}, \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\}$$

Für zwei Wege $\beta \in \Omega(X, z, y)$ und $\alpha \in \Omega(X, y, x)$ definieren wir ihre **Verknüpfung** $\beta * \alpha \in \Omega(X, z, x)$ durch

$$(\beta * \alpha)(t) \quad = \quad \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2; \\ \beta(2t - 1) & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig nach **??**, ist also in der Tat ein Weg. Weiter definieren wir für $x \in X$ den **konstanten Weg** ε_x durch $\varepsilon_x(t) = x\ \forall t$ und bilden zu jedem Weg $\alpha \in \Omega(X, y, x)$ den **inversen Weg** $\bar{\alpha} \in \Omega(X, x, y)$ durch die Vorschrift $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$.

Definition 1.2.2. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X. Zwei Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop mit festen Endpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$ genau dann, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \to X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- bzw. Oberkante unseres Quadrats mit α bzw. β übereinstimmt und auf der Vorder- und Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t, 0) = \alpha(t)$ und $h(t, 1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $h(0, \tau) = x$ und $h(1, \tau) = y$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Wir schreiben unter diesen Umständen auch kurz $h : \alpha \simeq \beta$.

Beispiel 1.2.3. Gegeben $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x, y \in X$ sind je zwei Wege $\alpha, \beta \in \Omega(X, y, x)$ homotop vermittels $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

Bemerkung 1.2.4. Bilder homotoper Wege sind homotop. Ist genauer eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$.

Lemma 1.2.5. *Für einen topologischen Raum X und Punkte $x, y \in X$ ist Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\Omega(X, y, x)$ aller Wege von x nach y.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß gilt (1) $\alpha \simeq \alpha$, (2) $\alpha \simeq \beta \Rightarrow \beta \simeq \alpha$, und daß (3) aus $\alpha \simeq \beta$ und $\beta \simeq \gamma$ folgt $\alpha \simeq \gamma$. Wir überlassen dem Leser den Beweis der beiden ersten Aussagen und zeigen nur die letzte Aussage. Sei also $h : \alpha \simeq \beta$ und $g : \beta \simeq \gamma$. Wir definieren $f : [0, 1]^2 \to X$ durch

$$f(t, \tau) = \begin{cases} h(t, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ g(t, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist in der Tat die Abbildung f stetig, denn ihre Restriktionen auf die abgeschlossenen Teilmengen $[0, 1] \times [0, 1/2]$ und $[0, 1] \times [1/2, 1]$ sind es und wir können **??** anwenden. Nach Konstruktion haben wir aber nun $f : \alpha \simeq \gamma$. □

Definition 1.2.6. Die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von einem Punkt x zu einem Punkt y in einem Raum X notieren wir $\pi_1(X, y, x)$, in Formeln setzen wir also $\pi_1(X, y, x) = \Omega(X, y, x)/ \simeq$. Die Homotopieklasse eines Weges α notieren wir $[\alpha]$.

Definition 1.2.7. Ein **punktierter Raum** (X, x) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten **Basispunkt** $x \in X$. Für einen punktierten Raum (X, x) vereinbaren wir die Abkürzungen $\Omega(X, x, x) = \Omega(X, x)$ für die Menge aller Wege mit Anfangs- und Endpunkt x und $\pi_1(X, x, x) = \pi_1(X, x)$ für die Menge aller Homotopieklassen derartiger Wege.

Satz 1.2.8 (über die Fundamentalgruppe). *Gegeben ein punktierter Raum* (X, x) *induziert die Verknüpfung von Wegen eine Verknüpfung auf der Menge* $\pi_1(X, x)$ *aller Homotopieklassen von Wegen mit Anfangs- und Endpunkt* x*, und mit dieser Verknüpfung wird* $\pi_1(X, x)$ *eine Gruppe, die* **Fundamentalgruppe** *des punktierten Raums* (X, x)*.*

Beweis. Die beiden ersten Aussagen des anschließenden Lemmas 1.2.9 sagen uns, daß die Homotopieklasse der Verknüpfung von zwei Wegen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Wege abhängt. Die weiteren Aussagen liefern das neutrale Element, die Inversen und das Assoziativgesetz. □

Lemma 1.2.9. *Wann immer die folgenden Verknüpfungen von Wegen sinnvoll sind, gilt:*

1. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta$
2. $\beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha * \beta'$
3. $\varepsilon * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * \varepsilon$
4. $\alpha * \bar{\alpha} \simeq \varepsilon$, $\bar{\alpha} * \alpha \simeq \varepsilon$
5. $\overline{(\alpha * \beta)} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$
6. $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$

Beweis. Wir zeigen nur beispielhaft die letzte Behauptung. Bezeichnet $v : [0, 1] \to [0, 1]$ die “Reparametrisierungsabbildung”, die stückweise linear läuft zwischen den Eckwerten $v(0) = 0$, $v(1/4) = 1/2$, $v(1/2) = 3/4$ und $v(1) = 1$, so gilt

$$\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ v$$

Mit 1.2.4 reicht es $v \simeq \mathrm{id}$ nachzuweisen. Aber nach 1.2.3 sind zwei Wege in $[0, 1]$ mit denselben Endpunkten stets homotop. □

Beispiel 1.2.10. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge, so ist die Fundamentalgruppe von X für jeden Basispunkt $x \in X$ trivial.

Bemerkung 1.2.11. Versehen wir die Menge $\Omega(X, y, x)$ mit der kompakt-offenen Topologie und setzen $h(t, \tau) = h_\tau(t)$, so ist h nach **??** stetig genau dann, wenn die Abbildung $[0, 1] \to \Omega(X, y, x)$, $\tau \mapsto h_\tau$ stetig ist. Mit dieser Topologie heißt $\Omega(X, y, x)$ der **Wegeraum** und zwei Wege sind homotop genau dann, wenn sie zu derselben Wegzusammenhangskomponente des Wegeraums gehören. Speziell heißt $\Omega(X, x)$ der **Schleifenraum** und

$\pi_1(X,x)$ ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten des Schleifenraums. Notieren wir mit $\pi_0(Y)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums Y, so haben wir demnach in Formeln $\pi_1(X,x) = \pi_0(\Omega(X,x))$ und Lemma 1.2.5 erweist sich als Spezialfall der allgemeinen Erkenntnis **??**, daß auf jedem topologischen Raum die Wegverbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung 1.2.12. Sei $f : (X,x) \to (Y,y)$ ein **Morphismus punktierter Räume**, das heißt eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$. So definiert man einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen

$$\begin{array}{rccc} \pi_1(f) = f_\sharp : & \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(Y,y) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert nach 1.2.4 und ein Gruppenhomomorphismus, da stets gilt $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. Offensichtlich haben wir $\mathrm{id}_\sharp = \mathrm{id}$ und $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$ wann immer $f : (X,x) \to (Y,y)$ und $g : (Y,y) \to (Z,z)$ Morphismen punktierter Räume sind. In der Terminologie, die in 2.2.1 eingeführt wird, ist die Fundamentalgruppe demnach ein "Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen".

Übung 1.2.13. Sei $X = U \cup V$ eine Überdeckung von X durch zwei offene Teilmengen U und V und es liege $x \in U \cap V$ im Schnitt. Ist $U \cap V$ wegzusammenhängend und $\pi_1(U,x) = \pi_1(V,x) = 1$, so folgt $\pi_1(X,x) = 1$. Hinweis: Man erinnere sich an den Überdeckungssatz von Lebesgue **??**.

Übung 1.2.14. Die Fundamentalgruppen der Sphären $\pi_1(S^n, *)$ sind trivial für $n \geq 2$. Hinweis: 1.2.13.

Bemerkung 1.2.15. Die **Poincaré-Vermutung** besagt, daß jede zusammenhängende topologische kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand mit trivialer Fundamentalgruppe homöomorph ist zur S^3. Sie scheint neuerdings mit analytischen Methoden von G. Perelman bewiesen worden zu sein.

Übung 1.2.16. Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die einen Untervektorraum der Kodimension ≥ 3 erzeugt, in Formeln $\dim\langle I\rangle_{\mathbb{R}} \leq n - 3$. So ist die Fundamentalgruppe des Komplements von I trivial, in Formeln $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus I, *) = 1$.

Übung 1.2.17. **Die Fundamentalgruppe einer punktierten kompakten Mannigfaltigkeit ist stets endlich erzeugt.** Hinweis: Bezeichne $B = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$ den 1-Ball um den Ursprung und $\bar{B} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ seinen Abschluß. Für unsere Mannigfaltigkeit X wähle man stetige Karten $\varphi_1, \ldots, \varphi_r : \mathbb{R}^n \to X$ derart, daß die Bilder von B schon X überdecken. Für jedes Paar von Indizes i, j mit $i \neq j$ wähle man eine endliche Überdeckung des Schnitts $\varphi_i(\bar{B}) \cap \varphi_j(\bar{B})$ durch zusammenhängende offene Teilmengen U_{ij}^ν

von $\varphi_i(\mathbb{R}^n) \cap \varphi_j(\mathbb{R}^n)$. Für jedes ν wähle man einen Weg γ_{ij}^ν von $\varphi_j(0)$ nach $\varphi_i(0)$, der erst innerhalb von $\varphi_j(\mathbb{R}^n)$ nach U_{ij}^ν läuft und dann innerhalb von $\varphi_i(\mathbb{R}^n)$ nach $\varphi_i(0)$. Seien β_i Wege von $p = \varphi_1(0)$ nach $\varphi_i(0)$ mit der einzigen Einschränkung, daß β_1 der konstante Weg sein soll. So erzeugen die Verknüpfungen $\bar{\beta}_i * \gamma_{ij}^\nu * \beta_j$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p)$.

Übung 1.2.18. Die Fundamentalgruppe einer punktierten Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie ist stets abzählbar.

1.3 Die Fundamentalgruppe der Kreislinie

Bemerkung 1.3.1. Wir bestimmen nun die Fundamentalgruppe der Kreislinie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Man betrachte dazu die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Exp}: & \mathbb{R} & \to & S^1 \\ & t & \mapsto & \cos(2\pi t) + \mathrm{i}\sin(2\pi t) \end{array}$$

Mit der Euler'schen Formel können wir auch schreiben $\mathrm{Exp}(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} t)$. Das erklärt erstens unsere Notation und zweitens sieht man so leichter, daß Exp ein Gruppenhomomorphismus ist von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen der Länge 1. Anschaulich wickelt Exp die reelle Gerade auf die Kreislinie auf und aufgrund des Faktors 2π haben wir $\mathrm{Exp}^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Satz 1.3.2 (Fundamentalgruppe der Kreislinie). *Die Fundamentalgruppe der Kreislinie ist isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Genauer ist die Abbildung, die jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des Weges $[0,1] \to S^1$, $t \mapsto \mathrm{Exp}(nt)$ zuordnet, ein Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(S^1, 1) \\ n & \mapsto & [t \mapsto \mathrm{Exp}\, nt] \end{array}$$

Bemerkung 1.3.3. Unter der **Umlaufzahl** eines Weges $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ versteht man das Urbild seiner Homotopieklasse $[\gamma]$ unter diesem Isomorphismus. In anderen Worten ist also die Umlaufzahl von γ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die γ homotop ist zum Weg $t \mapsto \mathrm{Exp}\, nt$.

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß die Abbildungsvorschrift aus unserem Satz einen Gruppenhomomorphismus definiert. Gegeben $m, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $(m + n\cdot)$ den Weg $t \mapsto m + nt$ aus $\Omega(\mathbb{R}, m + n, m)$. Da je zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit denselben Endpunkten homotop sind, haben wir

$$(n + m\cdot) * (n\cdot) \simeq ((m + n)\cdot)$$

Diese Homotopie bleibt bestehen, wenn wir beide Seiten mit Exp verknüpfen. Dies Exp dürfen wir dann auf die beiden Faktoren des $*$-Produkts verteilen, und da gilt $\operatorname{Exp}\circ(n+m\cdot) = \operatorname{Exp}\circ(m\cdot)$ erkennen wir, daß unsere Abbildungsvorschrift $n \mapsto [\operatorname{Exp}\circ(n\cdot)]$ in der Tat einen Gruppenhomomorphismus definiert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Der erste Schritt dazu ist die folgende

Definition 1.3.4. Ist Y ein topologischer Raum und $f : Y \to S^1$ eine stetige Abbildung, so heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Exp}\circ\tilde{f} = f$ auch ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f.

Lemma 1.3.5. *Seien Y zusammenhängend, $f : Y \to S^1$ eine stetige Abbildung und $\tilde{f}, \hat{f} : Y \to \mathbb{R}$ zwei Lifts von f. So gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{f}(y) = \tilde{f}(y) + k$ für alle $y \in Y$.*

Beweis. Sicher gilt $\operatorname{Exp}(\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)) = 1$, also $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in Y$. Ist nun Y zusammenhängend, so muß $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)$ konstant sein. □

Lemma 1.3.6. *Jede stetige Abbildung $f : [0,1] \to S^1$ besitzt einen Lift.*

Beweis. Exp liefert Homöomorphismen $\operatorname{Exp}_x : (x, x+1) \xrightarrow{\sim} S^1 \backslash \{\operatorname{Exp}(x)\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe Übung **??**. Ist also f nicht surjektiv, liegt sagen wir $\operatorname{Exp}(x)$ nicht in seinem Bild, so ist $\operatorname{Exp}_x^{-1} \circ f = \tilde{f}$ ein Lift und wir sind fertig. Weil nun f gleichmäßig stetig ist, finden wir $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = 1$ derart, daß f auf allen Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$ nicht surjektiv ist. Wir wählen nun Lifts $\tilde{f}_i$ von $f|[a_{i-1}, a_i]$ für $i = 1, \ldots, k$ und können diese Lifts durch Addition von Elementen von $\mathbb{Z}$ so abändern, daß stets gilt $\tilde{f}_i(a_i) = \tilde{f}_{i+1}(a_i)$. Dann definieren wir $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}|[a_i, a_{i+1}] = \tilde{f}_i$ und sind fertig. □

Lemma 1.3.7. *Jede stetige Abbildung $f : [0,1]^2 \to S^1$ besitzt einen Lift.*

Beweis. Wir zerlegen zunächst unser Quadrat $[0,1]^2$ in so kleine Schachfelder, daß das Bild keines unserer Felder ganz S^1 ist. Die Einschränkung von f auf jedes dieser Felder läßt sich wie im Beweis zuvor leicht liften. Als nächstes konzentrieren wir uns auf eine Zeile und ändern in dieser Zeile unsere Lifts so um Konstanten aus $\mathbb{Z}$ ab, daß sie auf dem Schnitt benachbarter Felder zusammenpassen. So erhalten wir einen Lift auf der ganzen Zeile. Das machen wir für jede Zeile, passen dann diese Lifts wieder aneinander an, und erhalten so schließlich einen Lift auf unserem ganzen Quadrat. □

Bemerkung 1.3.8. Sei $x \in S^1$ ein beliebiger Basispunkt. Für jeden geschlossenen Weg $\alpha \in \Omega(S^1, x)$ definieren wir seine "Lift-Umlaufzahl" $\operatorname{Um}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ dadurch, daß gilt

$$\operatorname{Um}(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$$

für jeden Lift $\tilde{\alpha}$ von α. Am Ende des Beweises werden wir sehen, daß diese Lift-Umlaufzahl mit der in 1.3.3 definierten Umlaufzahl übereinstimmt, aber bis dahin brauchen wir für unser neues Konzept noch eine eigenständige Bezeichnung.

Proposition 1.3.9. *Geschlossene Wege in der Kreislinie sind homotop genau dann, wenn sie dieselbe Lift-Umlaufzahl haben, in Formeln gilt für Wege $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, x)$ also*

$$\alpha \simeq \beta \Leftrightarrow \mathrm{Um}(\alpha) = \mathrm{Um}(\beta)$$

Beweis. $\Rightarrow$.) Zu $h : \alpha \simeq \beta$ finden wir mit Lemma 1.3.7 einen Lift $\tilde{h}$. Sicher ist $\tilde{h}$ auf der Unterkante des Einheitsquadrats ein Lift $\tilde{\alpha}$ von α, auf der Oberkante ein Lift $\tilde{\beta}$ von β, und auf der Vorder- und Hinterkante wie h konstant. Insbesondere haben wir $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ und $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und damit folgt $\mathrm{Um}(\alpha) = \mathrm{Um}(\beta)$.

$\Leftarrow$.) $\mathrm{Um}(\alpha) = \mathrm{Um}(\beta)$ bedeutet, daß je zwei Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ von α und β mit demselben Anfangspunkt auch denselben Enpunkt haben. Nach 1.2.3 sind dann aber $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop, und mit 1.2.4 folgt daraus $\alpha \simeq \beta$. □

Unsere Abbildung $\mathrm{Um} : \Omega(S^1, x) \to \mathbb{Z}$ induziert also eine Injektion

$$\mathrm{Um} : \pi_1(S^1, x) \to \mathbb{Z}$$

und es reicht zu zeigen, daß sie linksinvers ist zur Abbildung aus unserem Satz. In der Tat prüft man ohne Schwierigkeiten $\mathrm{Um}[\mathrm{Exp} \circ (n \cdot)] = n$. □

Übung 1.3.10. Ist $\alpha \in \Omega(X, x)$ ein geschlossener Weg, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\hat{\alpha} : S^1 \to X$ mit $\alpha = \hat{\alpha} \circ \mathrm{Exp}$, und

$$\hat{\alpha}_\sharp : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(X, x)$$

ist unter unserer Identifikation $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ gegeben durch $n \mapsto [\alpha]^n$.

Übung 1.3.11. Die Abbildung $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ induziert auf der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$ die Abbildung $c \mapsto c^n$ in multiplikativer Schreibweise, also $c \mapsto nc$ in additiver Schreibweise.

Übung 1.3.12. Ist Y ein kartesisches Produkt von endlich vielen reellen Intervallen, so besitzt jede stetige Abbildung $Y \to S^1$ einen Lift.

1.4 Anwendungen und Beispiele

Satz 1.4.1. *Es gibt keine stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Kreisscheibe auf ihren Randkreis, deren Einschränkung auf besagten Randkreis die Identität ist.*

Beweis. Bezeichne $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ ihren Randkreis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe solch eine stetige Abbildung $r : D \to S^1$ mit $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Bezeichne $i : S^1 \hookrightarrow D$ die Einbettung. Wir hätten also ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow & \downarrow r \\ & \mathrm{id} & S^1 \end{array}$$

und erhielten mit π_1 ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \longrightarrow & \pi_1(D, x) \\ & \searrow & \downarrow \\ & \mathrm{id} & \pi_1(S^1, x) \end{array}$$

Das ist aber unmöglich, da ja gilt $\pi_1(D, x) \cong 1$ nach 1.2.3 und $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$ nach 1.3.2. □

Satz 1.4.2 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f : D \to D$ unsere stetige Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe D. Wäre $f : D \to D$ stetig mit $f(x) \neq x$ für alle $x \in D$, so könnten wir eine Abbildung $r : D \to S^1$ der Einheitskreisscheibe auf ihren Rand S^1 definieren durch die Vorschrift, daß sie jedem $x \in D$ denjenigen Punkt $r(x) \in S^1$ zuordnet, "in dem der Strahl, der in $f(x)$ beginnt und durch x läuft, die Kreislinie S^1 trifft". Offensichtlich wäre r stetig und $r(z) = z$ für alle $z \in S^1$, im Widerspruch zum vorhergehenden Satz. □

Satz 1.4.3 (vom Igel). *Es gibt keine stetige Selbstabbbildung der Kugelschale $\kappa : S^2 \to S^2$ derart, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2$.*

Bemerkung 1.4.4. Man stelle sich vor, die Abbildung κ ordne jedem Punkt x auf der Haut eines Igels die Richtung $\kappa(x)$ des dort entspringenden Stachels zu. Die Bedingung "$\kappa(x)$ steht senkrecht auf x" bedeutet, daß die Stacheln flach anliegen müssen, und unser Satz sagt, daß sich ein Igel nicht "wirbelfrei kämmen läßt". Man beachte jedoch, daß sich ein "Igel von der Form eines Rettungsrings" durchaus wirbelfrei kämmen läßt.

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch und nehmen also an, es gäbe so eine Kämmung κ. Bezeichne S^2_+ bzw. S^2_- die nördliche bzw. südliche abgeschlossene Hemisphäre und $S^1 = S^2_+ \cap S^2_-$ den Äquator. Für $p \in S^2_+$ bezeichne R^+_p die Rotation mit Rotationsachse in der Äquatorebene, die p auf den Nordpol $(0,0,1)$ dreht. Dann ist $p \mapsto R^+_p(\kappa(p))$ eine stetige Abbildung $\kappa_+ : S^2_+ \to S^1$. Analog definieren wir $\kappa_- : S^2_- \to S^1$. Offensichtlich gilt für alle p auf dem Äquator $p \in S^1$ die Beziehung

$$\kappa_+(p) = s_p(\kappa_-(p)),$$

wo $s_p : S^1 \to S^1$ die Spiegelung an der zu p senkrechten Geraden in der Äquatorebene bezeichnet, die also p auf $-p$ abbildet. Fassen wir $S^1 \subset \mathbb{C}$ auf als die komplexen Zahlen der Länge 1, so wird die Abbildung $s : S^1 \times S^1 \to S^1$, $(p, x) \mapsto s_p(x)$ beschrieben durch die Formel $(p, x) \mapsto -p^2 x^{-1}$. Wir erhalten also

$$-\kappa_+(p)\kappa_-(p) = p^2 \quad \forall p \in S^1$$

Das ist aber unmöglich, denn $p \mapsto p^2$ induziert auf $\pi_1(S^1, 1)$ die Multiplikation mit 2, wohingegen die linke Seite auf $\pi_1(S^1, 1)$ eine konstante Abbildung liefert. In der Tat läßt sich die stetige Abbildung $S^1 \to S^1$, $p \mapsto -\kappa_+(p)\kappa_-(p)$ ja faktorisieren in

$$S^1 \xrightarrow{\Delta} (S^2_+ \times S^2_-) \xrightarrow{\kappa_+ \times \kappa_-} (S^1 \times S^1) \xrightarrow{\text{mult}} S^1 \xrightarrow{(-1)} S^1$$

mit $\Delta(z) = (z, z)$, und die Fundamentalgruppe von $(S^2_+ \times S^2_-)$ ist trivial, da dieser Raum homöomorph ist zur konvexen Teilmenge $D \times D \subset \mathbb{R}^4$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. $\square$

Satz 1.4.5 (Die Fundamentalgruppe von einem Produkt). *Für zwei punktierte Räume (X, x) und (Y, y) induzieren die beiden Projektionen pr_1 und pr_2 von $X \times Y$ auf X und Y einen Isomorphismus*

$$(\pi_1(\mathrm{pr}_1), \pi_1(\mathrm{pr}_2)) : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

Beweis. Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie haben wir schon mal eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X \times Y, (x, y)) & \longrightarrow & \Omega(X, x) \times \Omega(Y, y) \\ \alpha & \mapsto & (\mathrm{pr}_1 \circ \alpha, \mathrm{pr}_2 \circ \alpha), \end{array}$$

und ebenso nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie definiert eine Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X \times Y$ eine Homotopie (mit festen Endpunkten) von Wegen α und β genau dann, wenn $\mathrm{pr}_i \circ H$ eine Homotopie von $\mathrm{pr}_i \circ \alpha$ und $\mathrm{pr}_i \circ \beta$ definiert für $i = 1, 2$. $\square$

Beispiel 1.4.6. Der Rettungsring $S^1 \times S^1$ hat also die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (für jeden Basispunkt). Anschaulich liefert ja auch jeder geschlossene Weg auf dem Rettungsring zwei Umlaufzahlen: "Wie oft der Weg um die Luftkammer läuft" und "Wie oft er um den (imaginären) Matrosen im Ring läuft".

Übung 1.4.7 *(Jeder Mensch hat einen Haarwirbel).* Man zeige: Es gibt keine stetige Abbildung $\kappa : S^2_+ \to S^2$ von der oberen Hemisphäre in die Sphäre, die auf dem Äquator konstant ist und so, daß $\kappa(x)$ senkrecht steht auf x für alle $x \in S^2_+$.

1.5 Homotopie zwischen Abbildungen

Definition 1.5.1. Seien $f, g : Y \to X$ stetige Abbildungen. Eine **Homotopie** von f nach g ist eine stetige Abbildung

$$H : Y \times [0, 1] \to X$$

derart, daß gilt $H(y, 0) = f(y)$ und $H(y, 1) = g(y)$ für alle $y \in Y$. Man sagt, f ist **homotop** zu g und schreibt $f \simeq g$ genau dann, wenn es eine Homotopie von f nach g gibt.

Bemerkung 1.5.2. Dieser Begriff von homotop deckt sich für Wege nicht mit unserem Begriff aus 1.2.2. Zur Unterscheidung nennt man Wege, die homotop sind im Sinne des vorhergehenden Abschnitts, präziser **homotop mit festen Endpunkten**.

Proposition 1.5.3. *Gegeben topologische Räume X, Y ist die Relation $\simeq$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge* $\mathrm{Top}(X, Y)$ *aller stetigen Abbildungen von X nach Y.*

Beweis. Wir zeigen nur die Transitivität

$$f \simeq g \text{ und } g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$$

Seien F, G Homotopien von f nach g bzw. von g nach h. So definiert man eine Homotopie H von f nach h durch

$$H(x, \tau) = \begin{cases} F(x, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ G(x, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases} \qquad \square$$

Definition 1.5.4. Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung f bezeichnen wir mit $[f]$ und nennen sie die **Homotopie-Klasse** von f. Gegeben topologische Räume X, Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Hot}(X, Y)$ die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X nach Y. In der Literatur ist hierfür auch die Notation $[X, Y]$ gebräuchlich.

Bemerkung 1.5.5. Hier ist etwas Vorsicht geboten, denn für Wege α hat nun das Symbol $[\alpha]$ zwei verschiedene Bedeutungen. Im Zweifelsfall ist bei Wegen immer die Homotopieklasse von α unter Homotopie mit festen Endpunkten gemeint.

Beispiel 1.5.6. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und Y ein beliebiger topologischer Raum. So sind je zwei stetige Abbildungen $f, g : Y \to D$ homotop. In der Tat ist $H(y, \tau) = \tau f(y) + (1 - \tau)g(y)$ eine Homotopie.

Proposition 1.5.7. *Seien $f, g : Y \to X$ stetige homotope Abbildungen, in Formeln $f \simeq g$. So gilt auch $h \circ f \simeq h \circ g$ für jede stetige Abbildung $h : X \to Z$ und $f \circ h \simeq g \circ h$ für jede stetige Abbildung $h : Z \to Y$.*

Beweis. Ist $H : Y \times [0, 1] \to X$ eine Homotopie von f nach g, so ist $h \circ H : Y \times [0, 1] \to Z$ eine Homotopie von $h \circ f$ nach $h \circ g$ und $H \circ (h \times \mathrm{id}) : Z \times [0, 1] \to X$ eine Homotopie von $f \circ h$ nach $g \circ h$. $\square$

Bemerkung 1.5.8. Da nach der Proposition die Homotopieklasse einer Verknüpfung von stetigen Abbildungen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Abbildungen abhängt, können wir eine Verknüpfung von Homotopieklassen definieren durch die Vorschrift $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

Definition 1.5.9. Eine Abbildung heißt **nullhomotop** genau dann, wenn sie homotop ist zu einer konstanten Abbildung. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenziehbar** genau dann, wenn er nicht leer ist und die Identität id_X auf X nullhomotop ist.

Bemerkung 1.5.10. Ausgeschrieben bedeutet "zusammenziehbar" also: Es gibt einen Punkt $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \to X$ mit $H(x, 0) = x_0$, $H(x, 1) = x$ für alle $x \in X$. Zum Beispiel ist jede konvexe Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar.

Definition 1.5.11. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt eine Homotopie-Äquivalenz genau dann, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Zwei topologische Räume heißen **homotopieäquivalent** genau dann, wenn es eine Homotopie-Äquivalenz vom einen zum anderen gibt.

Bemerkung 1.5.12. Zum Beispiel ist X zusammenziehbar genau dann, wenn X homotopieäquivalent ist zu einem Punkt.

Übung 1.5.13. Ist Y beliebig und X zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen $f, g : Y \to X$ homotop. Ist zusätzlich Y wegzusammenhängend, so sind auch je zwei Abbildungen $X \to Y$ homotop.

Übung 1.5.14. Ein zusammenziehbarer Raum ist stets wegzusammenhängend.

Übung 1.5.15. Die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \backslash 0$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.

1.6 Homotopie und Fundamentalgruppe

Bemerkung 1.6.1. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe und Homotopie. Zunächst interessieren wir uns dafür, wie die Fundamentalgruppe vom Basispunkt abhängt. Falls es keinen Weg von x nach y gibt, haben $\pi_1(X,x)$ und $\pi_1(X,y)$ nichts miteinander zu tun. Gibt es aber einen Weg, so erhalten wir isomorphe Gruppen. Genauer gilt der folgende

Satz 1.6.2 (Wechsel des Basispunkts). *Seien x, y zwei Punkte eines topologischen Raums X. Jeder stetige Weg γ von x nach y liefert einen Isomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} i_\gamma : & \pi_1(X,x) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X,y) \\ & [\alpha] & \mapsto & [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}] \end{array}$$

Bemerkung 1.6.3. Hier und im folgenden kürzen wir $(\alpha*\beta)*\gamma$ mit $\alpha*\beta*\gamma$ ab, für verknüpfbare Wege α, β und γ. Wo immer wir diese Notation verwenden, wird es eh nicht auf die Klammern ankommen, da wir Wege nur bis auf Homotopie betrachten.

Übung 1.6.4. Homotope Wege liefern denselben Isomorphismus, in Formeln $\gamma \simeq \delta \Rightarrow i_\gamma = i_\delta$. Außerdem gilt $i_{\gamma*\delta} = i_\gamma \circ i_\delta$ für verknüpfbare Wege γ, δ, und für einen konstanten Weg ε ist i_ε die Identität.

Beweis. $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \gamma * \alpha * \gamma^{-1} \simeq \gamma * \alpha' * \gamma^{-1}$ nach Lemma 1.2.9, also ist i_γ wohldefiniert. Man erkennt mühelos, daß $i_{\gamma^{-1}}$ invers ist zu i_γ, insbesondere ist i_γ eine Bijektion. Um zu prüfen, daß i_γ auch ein Gruppenhomomorphismus ist, rechnen wir

$$\begin{array}{rcl} i_\gamma([\alpha]*[\beta]) & = & [\gamma * (\alpha * \beta) * \gamma^{-1}] \\ i_\gamma([\alpha]) * i_\gamma([\beta]) & = & [(\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1})] \end{array}$$

und sehen, das auf der rechten Seite in der oberen und unteren Zeile dieselbe Homotopieklasse steht. □

Satz 1.6.5 (Homotopie und Fundamentalgruppe). *Seien stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ gegeben und sei H eine Homotopie von f nach g. Sei $x \in X$ gewählt und bezeichne γ den Weg $\gamma(t) = H(x,t)$ von $f(x)$ nach $g(x)$. So gilt $g_\sharp = i_\gamma \circ f_\sharp$, d.h. es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \xrightarrow{f_\sharp} & \pi_1(Y,f(x)) \\ \| & & \wr\downarrow i_\gamma \\ \pi_1(X,x) & \xrightarrow{g_\sharp} & \pi_1(Y,g(x)) \end{array}$$

Beweis. Es gilt zu zeigen $\gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq (f \circ \alpha)$ für alle $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Es reicht dazu, eine Homotopie $\gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq \varepsilon * (f \circ \alpha) * \varepsilon$ anzugeben. Für $\tau \in [0,1]$ bezeichne $H_\tau : X \to Y$ die Abbildung $x \mapsto H(x, \tau)$ und $\gamma_\tau \in \Omega(Y, \gamma(\tau), \gamma(0))$ das Anfangsstück $\gamma_\tau(t) = \gamma(t\tau)$ von γ. Die gewünschte Homotopie wird dann geliefert von der Abbildung $\tau \mapsto h_\tau = \gamma_\tau^{-1} * (H_\tau \circ \alpha) * \gamma_\tau$. Unsere Zwischenwege bestehen also darin, daß wir erst γ ein Stück weit gehen, dann das mit der Homotopie deformierte $f \circ \alpha$ herumgehen und anschließend wieder mit γ zurückgehen. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Familie von Zwischenwegen die von einer Homotopie geforderte Stetigkeitseigenschaft hat. □

Korollar 1.6.6. *Jede Homotopie-Äquivalenz induziert einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Jede nullhomotope Abbildung induziert die triviale Abbildung auf den Fundamentalgruppen. Die Fundamentalgruppe eines zusammenziehbaren Raums ist trivial.*

Beweis. Ist u eine Homotopie-Äquivalenz, so gibt es nach Definition eine Abbildung v in die andere Richtung mit $u \circ v \simeq \mathrm{id}$ und $v \circ u \simeq \mathrm{id}$. Aus dem Satz folgt, daß dann $(u \circ v)_\sharp = u_\sharp \circ v_\sharp$ und $(v \circ u)_\sharp = v_\sharp \circ u_\sharp$ Isomorphismen sind. Daraus folgt aber sofort, daß auch $u_\sharp$ und $v_\sharp$ Isomorphismen sein müssen. Die anderen Aussagen des Korollars sind offensichtlich. □

Übung 1.6.7. Man zeige, daß jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten ein Nullstelle hat. (Hinweis: Hat unsere Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ keine Nullstelle, so sind die Abbildungen $P_\tau : S^1 \to \mathbb{C}\backslash 0$, $z \mapsto P(\tau z)$ alle homotop zur konstanten Abbildung P_0.)

1.7 Selbstabbildungen der Kreislinie

Satz 1.7.1 (Selbstabbildungen der Kreislinie bis auf Homotopie). *Man erhält eine Bijektion zwischen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge aller Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie, indem man jeder ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Homotopieklasse des n-fachen Potenzierens $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ zuordnet. In Formeln haben wir also eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hot}(S^1, S^1) \\ n & \mapsto & [z \mapsto z^n] \end{array}$$

Bemerkung 1.7.2. Mit dem **Abbildungsgrad** einer stetigen Selbstabbildung der Kreislinie meint man das Urbild ihrer Homotopieklasse unter dieser Bijektion. In anderen Worten ist also der Abbildungsgrad einer stetigen Selbstabbildung $f : S^1 \to S^1$ diejenige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, für die f homotop ist zu $z \mapsto z^n$.

Beweis. Wir konstruieren explizit eine Inverse zur Zuordnung aus unserem Satz. Dazu erinnern wir an unsere Abbildung $\operatorname{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i}\, t)$. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig. Da wir den Begriff des Abbildungsgrads eben schon vergeben haben, erklären wir (nur für diesen Beweis) den "Liftungsgrad" oder kurz $\operatorname{grad} f \in \mathbb{Z}$ von f durch die Formel $\operatorname{grad} f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$, wo $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein beliebiger Lift von $f \circ \operatorname{Exp} : [0,1] \to S^1$ ist, d.h. eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\operatorname{Exp}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\operatorname{Exp}"] \\
S^1 \arrow[r, "f"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Nach 1.3.6 gibt es stets solch ein $\tilde{f}$, und es ist sogar eindeutig bis auf eine additive Konstante aus $\mathbb{Z}$. Folglich ist $\operatorname{grad} f$ wohldefiniert.

Lemma 1.7.3. *Genau dann sind zwei Selbstabbildungen der Kreislinie homotop, wenn sie denselben Liftungsgrad haben.*

Beweis. Seien $f, g : S^1 \to S^1$ gegeben und sei $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ eine Homotopie von f nach g. Nach 1.3.7 finden wir $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "\operatorname{Exp} \times \mathrm{id}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\operatorname{Exp}"] \\
S^1 \times [0,1] \arrow[r, "H"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Es folgt $\tilde{H}(0,\tau) - \tilde{H}(1,\tau) \in \mathbb{Z} \quad \forall \tau$, mithin ist diese Abbildung konstant und wir erhalten $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g$. Also haben homotope Selbstabbildungen der Kreislinie denselben Liftungsgrad.

Seien umgekehrt $f, g : S^1 \to S^1$ zwei stetige Selbstabbildungen der Kreislinie mit demselben Liftungsgrad. Es gilt zu zeigen, daß sie homotop sind. Seien dazu $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gewählt wie in der Definition des Liftungsgrads. Wir definieren $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{H}(t,\tau) = (1-\tau)\tilde{f}(t) + \tau \tilde{g}(t)$$

Aus $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g$ folgt nun $\tilde{H}(0,\tau) + \operatorname{grad} f = \tilde{H}(1,\tau)$, also $(\operatorname{Exp} \circ \tilde{H})(0,\tau) = (\operatorname{Exp} \circ \tilde{H})(1,\tau)$ für alle τ. Folglich gibt es eine Abbildung von Mengen H wie in der unteren Zeile des Diagramms derart, daß das Diagramm kommutiert. Da $\operatorname{Exp} \times \mathrm{id} : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ nach **??** eine Identifizierung ist, ist dies H sogar stetig. Das ist dann die gesuchte Homotopie von f nach g. □

Nach dem Lemma liefert unser Liftungsgrad eine Injektion

$$\mathrm{grad} : \mathrm{Hot}(S^1, S^1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

und aus den Definitionen folgt mühelos, daß $z \mapsto z^n$ den Liftungsgrad n hat. Der Satz ist bewiesen. □

Übung 1.7.4. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig. Für alle $z \in S^1$ enthält $f^{-1}(z)$ mindestens $|\,\mathrm{grad}\, f|$ Punkte.

Übung 1.7.5. Sei $f : S^1 \to S^1$ stetig, $z \in S^1$. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, z) & \xrightarrow{f_\sharp} & \pi_1(S^1, f(z)) \\ \mathrm{Um} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Um} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\mathrm{grad}\, f)\cdot} & \mathbb{Z} \end{array}$$

wo in der unteren Horizontale die Multiplikation mit $(\mathrm{grad}\, f)$ gemeint ist. (Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $f(z) = z^n$ zurück.)

Proposition 1.7.6. *Jede stetige schiefsymmetrische Abbildung der Kreislinie auf sich selbst hat ungeraden Abbildungsgrad und ist mithin surjektiv.*

Beweis. In Formeln gilt es zu zeigen, daß für $f : S^1 \to S^1$ stetig mit $f(-x) = -f(x) \quad \forall x$ der Abbildungsgrad $\mathrm{grad}\, f$ notwendig ungerade ist. Nach 1.3.6 finden wir stets ein $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \mathrm{Exp} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Aus $f(-x) = -f(x)$ folgt $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) \in \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ für alle t, es gibt also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + k \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten insbesondere

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(1) & = & \tilde{f}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k \\ & = & \tilde{f}(0) + 1 + 2k \end{array}$$

und folglich $\mathrm{grad}\, f = 1 + 2k$. □

Satz 1.7.7 (Borsuk-Ulam). *Jede stetige schiefsymmetrische Abbildung von der Kugelschale in die Ebene hat eine Nullstelle.*

Beweis. Gegeben $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig mit $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^2$ gilt es zu zeigen, daß ein $x \in S^2$ existiert mit $f(x) = 0$. Sonst wäre jedoch $x \mapsto f(x)/||f(x)||$ eine stetige schiefsymmetrische Abbildung $g : S^2 \to S^1$. Die Einschränkung von g auf den Äquator $S^1 \subset S^2$ wäre also nicht nullhomotop nach Proposition 1.7.6, aber sie faktorisiert über die zusammenziehbare nördliche Hemisphäre $S^2_+ \subset S^2$. Widerspruch! □

Korollar 1.7.8. *Für jede stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene gibt es ein Paar von gegenüberliegenden Punkten der Kugelschale, die auf denselben Punkt der Ebene abgebildet werden.*

Beweis. Sei $h : S^2 \to \mathbb{R}^2$ unsere stetige Abbildung. Gäbe es kein $x \in S^2$ mit $h(x) = h(-x)$, So wäre $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = h(x) - h(-x)$ stetig und schiefsymmetrisch ohne Nullstelle, im Widerspruch zum Satz 1.7.7 Borsuk-Ulam. □

Korollar 1.7.9 (Satz vom Butterbrot mit Schinken). *Gegeben drei kompakte Teilmengen des Raums gibt es stets eine Ebene, die alle drei Teilmengen jeweils in zwei volumengleiche Teile teilt.*

Bemerkung 1.7.10. Ist also ein Butterbrot mit Schinken gegeben und betrachtet man die Mengen der Punkte des Raums, an denen sich Schinken bzw. Butter bzw. Brot befindet, so kann man mit einem Schnitt das Brot so teilen, daß zwei Hungrige jeweils gleichviel vom Schinken, von der Butter und vom Brot erhalten.

Beweis. Um dieses Korollar zu beweisen, müssen wir es zunächst umformulieren. Seien $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ unsere drei Kompakta. Zunächst einmal finden wir eine stetige Abbildung $\alpha : S^2 \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle $x \in S^2$ die Ebene durch den Punkt $\alpha(x)x$ mit Normalenvektor x die Menge A halbiert: Hat A nicht Volumen Null, so ordnen wir zum Beispiel jedem x das maximal mögliche $\alpha(x)$ zu, sonst dürfen wir $\alpha(x)$ eh beliebig wählen. Sicher dürfen wir weiter sogar α schiefsymmetrisch annehmen, indem wir sonst α durch $(1/2)(\alpha(-x) - \alpha(x))$ ersetzen. Ebenso finden wir stetige schiefsymmetrische $\beta, \gamma : S^2 \to \mathbb{R}$ für B und C, und es gilt zu zeigen, daß wir $x \in S^2$ finden mit $\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x)$. Nach dem Satz 1.7.7 von Borsuk-Ulam hat aber jede stetige schiefsymmetrische Abbildung von der Kugelschale in die Ebene eine Nullstelle, insbesondere auch die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f: & S^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\alpha(x) - \beta(x), \beta(x) - \gamma(x)) \end{array}$$ □

Korollar 1.7.11 (Lusternik-Schnirelmann). *Gegeben eine Überdeckung der Kugelschale durch drei abgeschlossene Teilmengen enthält mindestens eine unserer drei Mengen ein Paar von gegenüberliegenden Punkten.*

Beweis. Wäre $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ein Gegenbeispiel, so könnten wir stetige schiefsymmetrische Funktionen $f_i : S^2 \to \mathbb{R}$ finden mit $f_i(x) = 1$ für $x \in A_i$, zum Beispiel indem wir mit den Funktionen $d(A_i, \ )$ spielen. Dann könnten wir den Satz von Borsuk-Ulam 1.7.7 anwenden auf $f = (f_1, f_2) : S^2 \to \mathbb{R}^2$ und fänden so $x \in S^2$ mit $\pm x \notin A_1$, $\pm x \notin A_2$, also notwendig $x, -x \in A_3$. $\square$

2 Kategorien und Funktoren

2.1 Kategorien

Bemerkung 2.1.1. Wir nutzen den Homotopie-Begriff als motivierendes Beispiel, um in die Sprache der Kategorien und Funktoren einzuführen. Diese Sprache ist ähnlich ausdrucksstark, grundlegend und elegant wie die Mengenlehre und gehört in den Rucksack jeder Mathematikerin und jedes Mathematikers. Eine ausführlichere Behandlung findet man zum Beispiel in [Mac98].

Definition 2.1.2. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

a. einer Klasse von **Objekten** $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$;

b. einer Menge $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ oder kurz $\mathcal{C}(X, Y)$ von **Morphismen** für je zwei Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$;

c. einer Abbildung $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ für je drei Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, der sogenannten **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, d.h. es gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für Morphismen f, g und h wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;

2. Für jedes Objekt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $\operatorname{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$, die **Identität auf** X, so daß gilt $\operatorname{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \operatorname{id}_X = g$ für Morphismen f, g wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. (Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes X höchstens einen derartigen Morphismus geben kann.)

3. Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt.

Beispiel 2.1.3. Unser erstes Beispiel ist die Kategorie $\mathcal{C} = \operatorname{Ens}$ aller Mengen. Ihre Objekte sind beliebige Mengen. Für zwei Mengen X, Y ist $\operatorname{Ens}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Die Verknüpfung ordnet jedem Paar (f, g) von Abbildungen ihre Komposition $g \circ f$ zu, und $\operatorname{id}_X \in \operatorname{Ens}(X, X)$ ist schlicht die "identische" Abbildung $\operatorname{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$.

Bemerkung 2.1.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien in $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ Objekte von $\mathcal{C}$. Statt $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ sagen wir auch "f ist ein Morphismus von X nach Y" und schreiben kurz $f : X \to Y$. Statt id_X schreiben wir oft nur id. Statt $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir oft kürzer $X \in \mathcal{C}$. Die Morphismen von X zu sich selber nennen wir die **Endomorphismen** von X und kürzen sie ab mit $\mathcal{C}(X, X) = \mathcal{C}(X)$.

Bemerkung 2.1.5. Die Anschauung suggeriert und die Logik zeigt, daß die "Menge aller Mengen" ein logisches Absurdum ist. Um diese Fallen der Logik zu vermeiden, spricht man von der "Klasse aller Mengen" und fordert allgemeiner, daß die Objekte jeder Kategorie eine "Klasse" bilden sollen. Für unsere Bedürfnisse ist dieses oberflächliche Verständnis des Begriffs der Klasse ausreichend. Wer es genauer wissen möchte, möge bei der Logik fragen oder sich in [Bor94] schlau machen. Eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden, heißt eine **kleine Kategorie**.

Bemerkung 2.1.6. Hier kommen einige Beispiele von Kategorien. Als Verknüpfung von Morphismen ist für die Kategorien dieser Liste stets die Komposition von Abbildungen gemeint.

Kategorie	Morphismen	Kürzel
{Mengen}	alle Abbildungen	Ens
{Monoide}	Morphismen von Monoiden	Mon
{Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Grp
{abelsche Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Ab
{topologische Räume}	stetige Abbildungen	Top
{punktierte Mengen}	Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Ens^*
{punktierte Räume}	stetige Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Top^*
{k-Vektorräume}	k-lineare Abbildungen	k-Mod, Mod_k
{Nicht unitäre Ringe}	Rng-Homomorphismen	Rng
{Ringe}	Ring-Homomorphismen	Ring
{Kommutative Ringe}	Ring-Homomorphismen	Kring
{k-Algebren}	k-Algebren-Homomorphismen	Alg_k

Bemerkung 2.1.7. Unter einer **Unterkategorie** einer Kategorie versteht man ein Paar bestehend aus einer Teilklasse von Objekten nebst Teilmengen der Morphismenräume für je zwei Objekte unserer Teilklasse derart, daß die offensichtlichen Bedingungen erfüllt sind. Eine Unterkategorie heißt **voll** genau dann, wenn die fraglichen Teilmengen der Morphismenräume jeweils aus allen Morphismen in der ursprünglichen Kategorie bestehen.

Bemerkung 2.1.8. Die Kategorie der k-Vektorräume notiert man üblicherweise k-mod und ihre Morphismenräume Hom_k. Ich will jedoch erstens nach Möglichkeit Kategorien und ihre Morphismenräume mit denselben Kürzeln bezeichnen und mir zweitens das Symbol "Hom" aufheben für die sogenannten "internen Hom-Räume", die uns später zum Beispiel in 5.4.9 begegnen werden und unter denen man Vorschriften versteht, die zwei Objekten einer Kategorie ein drittes zuordnen. Das Kürzel "Mod" mit etwelchen oberen und unteren Indizes wird stets stehen für abelsche Gruppen mit Zusatzstrukturen, meist Operationen von Ringen oder Gruppen. Gehen diese Zusatzstrukturen aus dem Kontext hervor, so lassen wir die entsprechenden Indizes auch manchmal weg. Für abelsche Gruppen ohne Zusatzstrukturen benutzen wir stets das Kürzel "Ab".

Beispiel 2.1.9. Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine Kategorie ist die sogenannte **Homotopiekategorie** topologischer Räume Hot. Ihre Objekte sind topologische Räume, als Morphismen von einem Raum in einen anderen nehmen wir jedoch die Menge $\mathrm{Hot}(X, Y)$ aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen und erklären ihre Verknüpfung in der offensichtlichen Weise durch $[f] \circ [g] = [f \circ g]$. Für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen zwei Räumen ist auch die Notation $\mathrm{Hot}(X, Y) = [X, Y]$ gebräuchlich.

Beispiel 2.1.10. Ein andersartiges Beispiel ist die **Wegekategorie** $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X$ eines topologischen Raums X. Ihre Objekte sind die Punkte von X, die Morphismenmenge $\mathcal{W}(x, y)$ besteht aus allen Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt x und Endpunkt y, in Formeln

$$\mathcal{W}(x, y) = \pi_1(X, y, x)$$

und die Verknüpfung von Morphismen ist das Hintereinanderhängen von Wegen. Man benutzt Lemma 1.2.9, um die Axiome einer Kategorie zu prüfen.

Beispiel 2.1.11. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ bildet man die **opponierte Kategorie** $\mathcal{C}^\circ$ wie folgt: Man setzt

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \text{ und } \mathcal{C}^\circ(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{C}^\circ$ in der offensichtlichen Weise.

Beispiel 2.1.12. Für Kategorien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bildet man die **Produkt-Kategorie** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ wie folgt: Man setzt $\mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$, erklärt Morphismen in der Produktkategorie als Paare von Morphismen in den Ausgangskategorien und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in der Produktkategorie in der offensichtlichen Weise.

Definition 2.1.13. 1. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso** genau dann, wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

2. Zwei Objekte X und Y einer Kategorie heißen **isomorph** genau dann, wenn es einen Iso $f : X \to Y$ gibt. Man schreibt dann auch kurz $X \cong Y$.

Beispiele 2.1.14. Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Homotopiekategorie Homotopieäquivalenzen. In unserer Wegekategorie sind alle Morphismen Isomorphismen. Kategorien mit dieser Eigenschaft heißen auch **Gruppoide**. Unsere Wegekategorie wird manchmal als das **fundamentale Gruppoid von** X bezeichnet.

Bemerkung 2.1.15. Viele mathematische Fragestellungen lassen sich in der Sprache der Kategorien dahingehend formulieren, daß man einen Überblick über alle Objekte einer Kategorie gewinnen will, wobei man zwischen isomorphen Objekten nicht unterscheidet. Man spricht dann auch von **Isomorphieklassen** von Objekten und Fragestellungen dieser Art heißen **Klassifikationsprobleme**. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k-Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, in der Einleitung hatten wir eine Klassifikation der zusammenhängenden geschlossenen Flächen angegeben, und die Isomorphieklassen der Wegekategorie eines topologischen Raums sind schlicht seine Wegzusammenhangskomponenten.

Bemerkung 2.1.16. Die Isomorphismen von einem Objekt X einer Kategorie auf sich selber heißen die **Automorphismen** von X. Sie bilden stets eine Gruppe, die **Automorphismengruppe** $\mathcal{C}^\times(X)$ von X. Unsere Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ ist genau die Automorphismengruppe des Punktes x in der Wegekategorie, in Formeln $\pi_1(X, x) = \mathcal{W}_X^\times(x)$.

Definition 2.1.17. Ein Objekt F einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **final** genau dann, wenn es für alle $Y \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von Y nach F gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(Y, F)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

Definition 2.1.18. Ein Objekt K einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kofinal** genau dann, wenn es für alle $Y \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus von K nach Y gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(K, Y)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

Bemerkung 2.1.19. Zwischen je zwei finalen (bzw. kofinalen) Objekten gibt es offensichtlich genau einen Isomorphismus. Wir reden deshalb meist etwas lax von *dem* finalen bzw. kofinalen Objekt und bezeichnen "das" finale Objekt gerne mit pt für "Punkt" und Morphismen dahin mit c für "konstant".

Beispiele 2.1.20. In der Kategorie der Mengen sind die einpunktigen Mengen die finalen Objekte und die leere Menge ist das einzige kofinale Objekt.

Übung 2.1.21. Man finde finale und kofinale Objekte in den Kategorien der Gruppen, unitären Ringe, topologischen Räume.

Bemerkung 2.1.22. Gibt es in einer Kategorie eine Menge von Objekten derart, daß jedes Objekt isomorph ist zu einem Objekt aus besagter Menge, so nennt man die Kategorie **svelte**. Insbesondere ist jede kleine Kategorie svelte.

2.2 Funktoren

Definition 2.2.1. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Kategorien. Ein **Funktor** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ besteht aus

a. einer Abbildung $F : \operatorname{Ob}\mathcal{A} \to \operatorname{Ob}\mathcal{B}$, $X \mapsto FX$;

b. einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(FX, FY)$, $f \mapsto Ff$ für je zwei Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$,

derart, daß gilt

1. $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$ für beliebige verknüpfbare Morphismen f und g aus der Kategorie $\mathcal{A}$;

2. $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$.

Bemerkung 2.2.2. Man gibt bei einem Funktor F meist nur die Abbildung $X \mapsto FX$ auf den Objekten an in der Hoffnung, daß dadurch schon klar wird, welche Abbildung $f \mapsto Ff$ auf den Morphismen gemeint ist.

Beispiele 2.2.3. Unsere Fundamentalgruppe ist ein Funktor $\pi_1 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Grp}$ von den punktierten topologischen Räumen in die Gruppen. Das “Vergessen der Gruppenstruktur” definiert einen Funktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ von den Gruppen in die Mengen. natürlich gibt es noch viele andere solche **Vergiss-Funktoren**. Die Zuordnung, die jedem topologischen Raum X die Menge $\pi_0(X)$ seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet, ist ein Funktor $\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$. Indem wir die Komponente des ausgezeichneten Punktes auszeichnen erhalten wir ebenso einen Funktor $\pi_0 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Ens}^*$. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt, so ist die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}(X, \ ) : & \mathcal{C} & \to & \mathrm{Ens} \\ & Y & \mapsto & \mathcal{C}(X, Y) \end{array}$$

stets ein Funktor. Sind $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren, so ist auch $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Und schließlich haben wir für jede Kategorie den **Identitätsfunktor** von besagter Kategorie in sich selber.

Lemma 2.2.4. *Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.*

Beweis. Sei F unser Funktor. Wir schließen:

$$\begin{array}{lll} f \text{ ist Isomorphismus} & \Rightarrow & \text{Es gibt } g \text{ mit } f \circ g = \mathrm{id} \text{ und } g \circ f = \mathrm{id} \\ & \Rightarrow & (Ff) \circ (Fg) = \mathrm{id} \text{ und } (Fg) \circ (Ff) = \mathrm{id} \\ & \Rightarrow & Ff \text{ ist Isomorphismus.} \end{array}$$

□

Definition 2.2.5. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^\circ$ heißt auch ein **kontravarianter Funktor** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Bemerkung 2.2.6. Ausgeschrieben besteht ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ aus einer Abbildung $F : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ sowie für je zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{A}$ einer Abbildung $F : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(FY, FX)$ derart, daß gilt $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ und $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$ für alle verknüpfbaren Morphismen f, g.

Beispiel 2.2.7. Die Zuordnung D, die jedem Vektorraum V über einem Körper k seinen Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ zuordnet, ist ein kontravarianter Funktor $\mathrm{D} : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$, $V \mapsto V^*$. Natürlich hätten wir hier statt $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ ebensogut $\mathrm{Mod}_k(V, k)$ schreiben können, aber die Notation betont hier, daß wir uns besonders für die Vektorraumstruktur auf besagter Menge von Morphismen interessieren.

Beispiel 2.2.8. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist die Zuordnung $\mathcal{C}(\ ,X) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ stets ein kontravarianter Funktor.

Definition 2.2.9.

1. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **treu** genau dann, wenn er Injektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA,\ FA')$ auf den Morphismen induziert, für alle $A, A' \in \mathcal{A}$.
2. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt eine **volltreu** genau dann, wenn er Bijektionen $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA,\ FA')$ auf den Morphismen induziert.
3. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt eine **Äquivalenz von Kategorien** genau dann, wenn er volltreu ist und zusätzlich eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $FA \cong B$.

Beispiel 2.2.10. Sei k ein Körper. Wir betrachten die Kategorie $\mathrm{Mod}_k^{\mathrm{ed}}$ aller endlichdimensionalen k-Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Weiter betrachten wir die Kategorie $\mathcal{M} = \mathcal{M}(k)$ mit Objekten $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M} = \mathbb{N}$ und als Morphismen Matrizen mit Einträgen in k, in Formeln

$$\mathcal{M}(m, n) = M(n \times m,\ k)$$

Die Verknüpfung von Morphismen in $\mathcal{M}$ sei die Matrix-Multiplikation. So ist der offensichtliche Funktor $n \mapsto k^n$ eine Äquivalenz $\mathcal{M}(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k^{\mathrm{ed}}$.

Übung 2.2.11. Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen k-Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, d.h. durch Elemente von $\mathbb{N}$.

Übung 2.2.12. Die Verknüpfung von zwei Äquivalenzen von Kategorien ist wieder eine Äquivalenz von Kategorien.

2.3 Transformationen

Bemerkung 2.3.1. Bis hierher hat sich unsere Theorie in vertrauten Bahnen bewegt: Wir haben nur eine neue Art von Strukturen erklärt, die Kategorien, und strukturerhaltende Abbildungen alias Morphismen dazwischen betrachtet, die Funktoren. Insoweit paßt alles noch in den geistigen Rahmen, den man seit der linaren Algebra vom Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen gewohnt ist. Das Neue bei der Kategorientheorie ist nun, daß es auch "Morphismen zwischen Morphismen" gibt. Sie heißen "Transformationen zwischen Funktoren" und sind das Thema dieses Abschnitts.

Definition 2.3.2. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren. Eine **Transformation** $\tau : F \to G$ ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Morphismus $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$ zuordnet derart, daß für jeden Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ das folgende Diagramm in $\mathcal{B}$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

Sind alle τ_X Isomorphismen, so heißt τ eine **Äquivalenz von Funktoren**. Die Klasse aller Transformationen von F nach G bezeichnen wir mit $\mathrm{Trans}(F, G)$ oder, wenn zusätzliche Information wichtig ist, auch ausführlicher mit $\mathrm{Trans}_{\mathcal{A}}(F, G)$ oder sogar $\mathrm{Trans}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(F, G)$.

Bemerkung 2.3.3. In der Literatur heißen unsere Transformationen meist "natürliche Transformationen". Diese Terminologie schien mir jedoch umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden. Ich möchte zum Beispiel unter der "natürlichen" Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller $\mathbb{R}$-Vektorräume in den Bidualraumfunktor gerne die in 2.3.4 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber wohl schon die "natürlichste".

Beispiel 2.3.4. Sei k ein Körper und $\mathrm{B} : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$ der Funktor, der jedem k-Vektorraum V seinen Bidualraum $\mathrm{B}\,V = V^{**}$ zuordnet. So liefern die Evaluationen $\tau_V : V \to V^{**}$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ eine Transformation $\mathrm{id} \to \mathrm{B}$ sowie eine Äquivalenz zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen k-Vektorräume.

Beispiel 2.3.5. Sei k ein Körper und $\mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k^{\circ}$ der Funktor, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei weiter $\mathcal{M} = \mathcal{M}(k)$ die Matrizenkategorie aus 2.2.10 und $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\circ}$ der Funktor, der Matrizen transponiert. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \to & \mathcal{M}^{\circ} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Mod}_k & \to & \mathrm{Mod}_k^{\circ} \end{array}$$

bis auf Äquivalenz, d.h. die beiden darin als Verknüpfungen enthaltenen Funktoren $\mathcal{M} \to \mathrm{Mod}_k^{\circ}$ sind äquivalent.

Beispiel 2.3.6. Sei k ein Körper. Gegeben zwei k-Vektorräume V, W können wir die Menge $\mathrm{Mod}_k(V, W)$ versehen mit der Struktur eines k-Vektorraums. Wollen wir besonders betonen, daß wir diese Struktur meinen, so schreiben wir $\mathrm{Hom}_k(V, W)$. Mit dieser Notation definieren die natürlichen Abbildungen

$$V^* \otimes_k W \to \mathrm{Hom}_k(V, W)$$

für k-Vektorräume V, W eine Transformation zwischen den durch diese Vorschriften gegebenen Funktoren

$$\mathrm{Mod}_k^{\circ} \times \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$$

und eine Äquivalenz, wenn wir uns im ersten Faktor auf endlichdimensionale Räume beschränken.

Beispiel 2.3.7. Für jeden Funktor gibt es die **identische Transformation** von besagtem Funktor zu sich selber. Sind $\tau : F \to G$ und $\sigma : G \to H$ Transformationen, so ist auch $\sigma \circ \tau : F \to H$ eine Transformation.

Beispiel 2.3.8. Seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Funktoren und $\tau : F \to G$ eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation $H\tau : HF \to HG$. Gegeben ein weiterer Funktor $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation $\tau H : FH \to GH$.

Übung 2.3.9. Gegeben Funktoren $F, F' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G, G' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ und Transformationen $\alpha : F \to F'$ sowie $\beta : G \to G'$ gilt die Gleichheit $\beta F' \circ G\alpha = G'\alpha \circ \beta F$ von Transformationen $GF \to G'F'$.

Bemerkung 2.3.10. Einen Funktor von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf $\mathcal{C}$**. Gegeben eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ bildet die Klasse aller Mengenfunktoren $\mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ mit den Transformationen als Morphismen wieder eine Kategorie. Die zur Kategorie der Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$ opponierte Kategorie $\mathcal{C}^\wedge$ kann man als eine Art "Vervollständigung" von $\mathcal{C}$ interpretieren, da nämlich, wie das gleich anschließende Yoneda-Lemma 2.3.11 zeigt, die Vorschrift $X \mapsto \mathcal{C}(X, \ )$ einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$$

definiert. Diejenigen Mengenfunktoren auf $\mathcal{C}$, die äquivalent sind zu Mengenfunktoren im Bild von $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$, heißen **darstellbare Funktoren**. Ist ein Mengenfunktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ äquivalent zu $\mathcal{C}(X, \ )$ für ein $X \in \mathcal{C}$, so sagen wir, der **Funktor F werde dargestellt durch das Objekt X**. Zum Beispiel wird der Vergißfunktor von den k-Vektorräumen in die Mengen dargestellt durch den eindimensionalen Vektorraum k, der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen durch die Gruppe $\mathbb{Z}$, und der Funktor $\pi_0 : \mathrm{Hot} \to \mathrm{Ens}$, der jedem Raum die Menge seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet, durch den einpunktigen Raum.

Proposition 2.3.11 (Yoneda-Lemma). *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ ein Mengenfunktor auf $\mathcal{C}$. So liefert die Abbildungsvorschrift $\tau \mapsto \tau_X(\mathrm{id}_X)$ eine Bijektion*

$$\mathrm{Trans}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(X, \ ), F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

Beweis. Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges $a \in F(X)$ betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \tau_Y : & \mathcal{C}(X,Y) & \to & F(Y) \\ & f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation $\tau : \mathcal{C}(X, \ ) \to F$ bilden, die wir mit $\tau(a)$ bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung $a \mapsto \tau(a)$ invers ist zu unserer Abbildung $\tau \mapsto a(\tau) = \tau_X(\mathrm{id}_X)$ aus dem Theorem. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt $a = a(\tau(a))$ für alle $a \in F(X)$ und $\tau = \tau(a(\tau))$ für alle Transformationen $\tau : \mathcal{C}(X, \ ) \to F$. Das überlassen wir dem Leser. □

Bemerkung 2.3.12. Dual zu $\mathcal{C}^\wedge$ kann man natürlich für jede kleine Kategorie $\mathcal{C}$ auch die Kategorie $\mathcal{C}^\vee$ aller kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ betrachten und erhält mit $X \mapsto \mathcal{C}(\ , X)$ eine volltreue Einbettung $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\vee$.

Übung 2.3.13. Sei k ein Körper und $\mathrm{id} : \mathrm{Mod}_k \to \mathrm{Mod}_k$ der Identitätsfunktor. Man bestimme alle Transformationen von diesem Funktor zu sich selber.

Übung 2.3.14. Man betrachte die **Homotopiekategorie punktierter Räume** Hot^*, mit punktierten Räumen als Objekten und Homotopieklassen für basispunkterhaltende Homotopie als Morphismen. So wird die Fundamentalgruppe aufgefaßt als Funktor $\pi_1 : \mathrm{Hot}^* \to \mathrm{Ens}$ dargestellt durch die punktierte Kreislinie. Die punktierte Kreislinie kann im Übrigen versehen werden mit der Struktur eines Gruppenobjekts in $(\mathrm{Hot}^*)^\circ$, und das liefert in diesem Kontext die Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x)$.

Übung 2.3.15. Sind zwei Funktoren äquivalent und ist der Eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der Andere.

Bemerkung 2.3.16. Ein Zugang zu der von Grothendieck konstruierten Kategorie der **Schemata** ist es, diese Kategorie zu realisieren als volle Unterkategorie der Kategorie $\mathrm{Kring}^\wedge$, die wir erhalten, wenn wir die Kategorie der kommutativen Ringe mit der nötigen Sorgfalt bei Fragen der Mengenlehre in der oben erklärten Weise vervollständigen. Der affine Raum der Dimension n ist dann zum Beispiel der Funktor, der jedem kommutativen Ring R die Menge R^n zuordnet, und der projektive Raum der Dimension n der Funktor, der jedem kommutativen Ring R die Menge derjenigen direkten Summanden D des R-Moduls R^{n+1} zuordnet, die "vom Rang Eins" sind in dem Sinne, daß bei jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ihre Lokalisierung $D_\mathfrak{p}$ ein freier $R_\mathfrak{p}$-Modul vom Rang Eins ist. Man kann mit Schemata so effizient und geometrisch arbeiten, daß sie zum eigentlichen Arbeitspferd der algebraischen Geometrie geworden sind.

2.4 Produkte in Kategorien

Definition 2.4.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{C}$. Ein **Produkt** der X_i ist ein Datum $(P, (p_i)_{i\in I})$ bestehend aus (1) einem Objekt $P \in \mathcal{C}$ und (2) Morphismen $p_i : P \to X_i$, den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist $Y \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $q_i : Y \to X_i$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $q : Y \to P$ mit $p_i \circ q = q_i \quad \forall i \in I$. Wir notieren diesen Morphismus dann $q = (q_i)_{i\in I}$.

Beispiele 2.4.2. In der Kategorie der Mengen ist $P = \prod_{i\in I} X_i$ mit p_i den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt der X_i. Dasselbe gilt in der Kategorie der topologischen Räume, wenn wir P mit der Produkttopologie versehen.

Bemerkung 2.4.3. Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer $(P, (p_i))$ und $(\tilde{P}, (\tilde{p}_i)$ zwei mögliche Produkte der Objekte X_i, so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von P genau ein $\tilde{p} : \tilde{P} \to P$ mit $p_i \circ \tilde{p} = \tilde{p}_i$ und ebenso genau ein $p : P \to \tilde{P}$ mit $\tilde{p}_i \circ p = p_i$. Weiter gibt es auch genau ein $f : P \to P$ mit $p_i \circ f = p_i$, und da sowohl $f = \mathrm{id}$ als auch $f = \tilde{p} \circ p$ diese Bedingung erfüllen, folgt $\tilde{p} \circ p = \mathrm{id}$. Ebenso erhalten wir $p \circ \tilde{p} = \mathrm{id}$, mithin sind p und $\tilde{p}$ zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von **dem** Produkt und notieren es

$$\left(\prod_{i \in I} X_i, (\mathrm{pr}_i)\right)$$

oder im Fall endlicher Familien $X_1 \times \ldots \times X_n$ und benutzen für die Projektionen manchmal auch die Notation pr_{X_i}. Morphismen in das Produkt schreiben wir im Fall endlicher Familien auch $(q_1, \ldots, q_n)$. Sind schließlich Morphismen $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ gegeben und existieren die Produkte $X \times Y$ und $X' \times Y'$, so benutzen wir die Abkürzung $(f \circ \mathrm{pr}_X, g \circ \mathrm{pr}_Y) = f \times g$ und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$

Beispiele 2.4.4. Das Produkt über eine leere Familie von Mengen erklärt man als "die" einpunktige Menge, damit das Bilden von Produkten "assoziativ" wird in einer Weise, die wir hier nicht näher präzisieren wollen. Das Produkt über eine leere Familie in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ verstehen wir analog als "das" finale Objekt, da dann die offensichtliche Abbildung auch in diesem Fall Bijektionen $\mathcal{C}(Y, \prod_{i \in I} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$ liefert. Wenn wir sagen, eine Kategorie **habe Produkte** oder auch nur endliche Produkte, so fordern wir also insbesondere auch die Existenz eines finalen Objekts.

Übung 2.4.5. Man präzisiere und zeige die "Assoziativität" von Produkten, die die Formel $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$ andeutet.

Bemerkung 2.4.6. Produkte in der opponierten Kategorie heißen "Koprodukte". Im folgenden sprechen wir diese Definition explizit aus.

Definition 2.4.7. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$. Ein **Koprodukt** der X_i ist ein Datum $(K, (e_i)_{i \in I})$ bestehend aus einem Objekt $K \in \mathcal{C}$ und Morphismen $e_i : X_i \to K$ derart, daß gilt: Ist $Z \in \mathcal{C}$ ein Objekt und sind $f_i : X_i \to Z$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $f : K \to Z$ mit $f \circ e_i = f_i \quad \forall i \in I$.

Beispiele 2.4.8. In der Kategorie der Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung $\coprod_{i \in I} X_i$. In der Kategorie der topologischen Räume gilt dasselbe. In der Kategorie der punktierten topologischen Räume ist das Koprodukt die **Einpunktverbindung** $\bigvee_{i \in I} X_i = \coprod X_i / \sim$, wo die Äquivalenzrelation

$\sim$ dadurch erklärt sei, daß alle Basispunkte der verschiedenen X_i unter $\sim$ eine Äquivalenzklasse bilden und die anderen Äquivalenzklassen einelementig sind. In der Kategorie der abelschen Gruppen ist das Koprodukt die direkte Summe.

2.5 Kartesische und kokartesische Diagramme

Definition 2.5.1. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ definieren wir ganz allgemein die Kategorie $\mathcal{C}_X$ der **Objekte von $\mathcal{C}$ über** X wie folgt: Objekte von $\mathcal{C}_X$ sind Paare (Y, p) mit $Y \in \mathcal{C}$ und $p \in \mathcal{C}(Y, X)$, Morphismen in $\mathcal{C}_X$ von einem Objekt (Y, p) in ein weiteres Objekt (Z, q) sind Morphismen $f : Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ mit $q \circ f = p$. Wir nennen sie auch **Morphismen über** X.

Definition 2.5.2. Dual definieren wir die Kategorie $\mathcal{C}^X$ der **Objekte von $\mathcal{C}$ unter** X wie folgt: Objekte von $\mathcal{C}^X$ sind Morphismen $p : X \to Y$ von X zu einem Objekt von $\mathcal{C}$ und Morphismen sind was der Leser sich denkt, so daß wir haben $(\mathcal{C}^\circ)_X = (\mathcal{C}^X)^\circ$.

Beispiele 2.5.3. Zum Beispiel ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume Top* die "Kategorie der topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum", und die Kategorie der Erweiterungen eines Körpers K ist die Kategorie aller Körper unter K.

Bemerkung 2.5.4. Wir werden Kategorien auch für andere Bedeutungen mit oberen und unteren Indizes versehen und können nur hoffen, daß aus dem Kontext klar wird, welche Bedeutung jeweils gemeint ist.

Definition 2.5.5. Ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{c_y} & Y \\ {\scriptstyle c_z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kartesisch** oder ein **pull-back-Diagramm** genau dann, wenn es kommutativ ist und (W, c_y, c_z) ein Produkt ist in der Kategorie $\mathcal{C}_X$ der Objekte von $\mathcal{C}$ über X, wobei wir W vermittels $b \circ c_z = a \circ c_y$ als Objekt von $\mathcal{C}_X$ aufzufassen haben. Ausformuliert bedeutet das: Für jedes weitere kommutative Diagramm in $\mathcal{C}$ der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

gibt es genau einen Morphismus $u : T \to W$ mit $f = c_y \circ u$ und $g = c_z \circ u$.

Bemerkung 2.5.6. Nicht jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

in einer beliebigen Kategorie läßt sich zu einem kartesischen Diagramm vervollständigen, aber wenn es sich vervollständigen läßt, dann ist diese Vervollständigung als ein Produkt in $\mathcal{C}_X$ im wesentlichen eindeutig. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel, schreiben $W = Y \times_X Z$ und nennen dieses Objekt **den pull-back** oder **das Faserprodukt** von Y mit Z über X. Diese Terminologie hat den folgenden Hintergrund: Ist $f : Y \to X$ eine Abbildung und $x \in X$ ein Punkt, so nennt man sein Urbild $Y_x = f^{-1}(x)$ auch die **Faser** von f über x. Den pull-back in der Kategorie der Mengen können wir nun verstehen als ein "faserweises Produkt", in der Kategorie der Mengen gilt nämlich

$$Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid a(y) = b(z)\}$$

und insbesondere haben wir $(Y \times_X Z)_x = Y_x \times Z_x$ für alle $x \in X$. Ähnlich erhalten wir auch das Faserprodukt in der Kategorie der topologischen Räume, hierzu müssen wir nur die Menge $Y \times_X Z$ versehen mit der von der Produkttopologie auf $Y \times Z$ induzierten Topologie.

Übung 2.5.7. Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X' & \to & Y' & \to & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y & \to & Z \end{array}$$

gegeben. Sind die zwei Quadrate kartesisch, so ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch, mit den horizontalen Verknüpfungen als horizontalen Pfeilen.

Übung 2.5.8. Ist $i : Z \hookrightarrow X$ die Einbettung eines Teilraums und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Übung 2.5.9. Seien X, Y, Z Objekte einer Kategorie derart, daß Produkte $Z \times X$ und $Z \times Y$ existieren. Für jeden Morphismus $Y \to X$ ist dann das folgende Diagramm mit den offensichtlichen Morphismen kartesisch:

$$\begin{array}{ccc} Z \times Y & \to & Z \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

Definition 2.5.10. Kartesische Diagramme in der opponierten Kategorie heißen **kokartesische Diagramme** oder auch **push-out-Diagramme**. Ausgeschrieben ist ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_y} \\ Z & \xrightarrow{c_z} & W \end{array}$$

also kokartesisch genau dann, wenn es kommutiert und wenn es für jedes andere kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

genau einen Morphismus $u : W \to G$ gibt mit $f = u \circ c_y$ und $g = u \circ c_z$. Unsere Eindeutigkeitsaussagen 2.5.6 für kartesische Diagramme gelten entsprechend auch für kokartesische Diagramme.

Übung 2.5.11. Der push-out in der Kategorie der Mengen bzw. der topologischen Räume ist genau die Verklebung aus **??**.

Übung 2.5.12. Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem pull-back bzw. in den push-out.

Übung 2.5.13. In der Kategorie der abelschen Gruppen läßt sich jedes entsprechende Diagramm zu einem kartesischen bzw. kokartesischen Diagramm vervollständigen. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen von zwei parallelen Pfeilen einer eine Surjektion, so auch der andere. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen ein Ursprungspfeil eine Injektion, so auch der gegenüberliegende Pfeil in den push-out. (Man argumentiere mit einer expliziten Konstruktion des push-out. Ein allgemeines Argument wird in **??** gegeben.)

Übung 2.5.14. In einem kartesischen Diagramm von Mengen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$ die Gleichheit $a(b^{-1}(A)) = f^{-1}(g(A))$ von Teilmengen von Y.

Übung 2.5.15. Jedes "Produkt" von kartesischen Diagrammen ist wieder ein kartesisches Diagramm.

3 Beschreibung einiger Fundamentalgruppen

3.1 Der Satz von Seifert und van Kampen

Satz 3.1.1 (Seifert-van Kampen). *Sei der topologische Raum X Vereinigung $X = U \cup V$ zweier offener Teilmengen $U, V \Subset X$. Sind U, V und ihr Schnitt $U \cap V$ wegzusammenhängend, so ist für jeden Basispunkt $x \in U \cap V$ das folgende Diagramm von Gruppen kokartesisch:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \to & \pi_1(V, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, x) & \to & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Beweis. Wir überlegen uns zuerst, daß $\pi_1(X, x)$ erzeugt wird von den Bildern von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$. In der Tat kann man für jeden Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ eine Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r = 1$ des Einheitsintervalls finden derart, daß gilt $\gamma[a_{i-1}, a_i] \subset U$ für gerades i und $\gamma[a_{i-1}, a_i] \subset V$ für ungerades i. Für jedes i finden wir dann weiter einen Weg β_i in $U \cap V$ von x nach $\gamma(a_i)$. Wählen wir nun $v_i : [0, 1] \to [a_{i-1}, a_i]$ stetig mit $v_i(0) = a_{i-1}$, $v_i(1) = a_i$ und bezeichnen mit $\gamma_i = \gamma \circ v_i$ das "i-te Stück von γ", so gilt

$$[\gamma] = [\beta_r^{-1} * \gamma_r * \beta_{r-1}] \ldots [\beta_1^{-1} * \gamma_1 * \beta_0]$$

und $\beta_i^{-1} * \gamma_i * \beta_{i-1}$ liegt in $\Omega(U, x)$ bzw. $\Omega(V, x)$ für gerades bzw. ungerades i. Also wird $\pi_1(X, x)$ erzeugt von den Bildern von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$. Für den weiteren Beweis verwenden wir eine andere Schreibweise und setzen $U = U_+$ und $V = U_-$. Sei nun in der Kategorie der Gruppen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_+ \cap U_-, x) & \longrightarrow & \pi_1(U_-, x) \\ \downarrow & & \downarrow f_- \\ \pi_1(U_+, x) & \xrightarrow{f_+} & G \end{array}$$

gegeben. Wir bezeichnen mit π_σ den von der Einbettung induzierten Homomorphismus $\pi_\sigma : \pi_1(U_\sigma, x) \to \pi_1(X, x)$, für $\sigma \in \{+, -\}$. Nach dem, was wir eben bewiesen haben, gibt es höchstens einen Gruppenhomomorphismus $u : \pi_1(X, x) \to G$ mit $f_\sigma = u \circ \pi_\sigma$ für $\sigma \in \{+, -\}$. Es bleibt, die Existenz von u zu zeigen. Wir brauchen dazu sorgfältige Notationen und schreiben $[a]_+$, $[a]_-$, $[a]$ für die Homotopieklasse mit festen Endpunkten x von einem Weg a in U_+, U_- oder X. Nach dem ersten Teil des Beweises läßt sich jedes $c \in \pi_1(X, x)$ darstellen in der Form $c = [a_r] \ldots [a_1]$ mit $a_i \in \Omega(U_{\epsilon_i}, x)$ für geeignetes $\epsilon : \{1, \ldots, r\} \to \{+, -\}$, $i \mapsto \epsilon_i$. Wir würden natürlich gern definieren

$$u(c) = f_{\epsilon_r}([a_r]_{\epsilon_r}) \ldots f_{\epsilon_1}([a_1]_{\epsilon_1})$$

Das einzige Problem besteht darin zu zeigen, daß jede andere Darstellung $c = [b_s] \dots [b_1]$ mit einem möglichen $\eta : \{1, \dots, s\} \to \{+, -\}$ dasselbe $u(c)$ liefern muß. Betrachten wir also die Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen (a_1, ϵ_1), (a_2, ϵ_2), $\dots$,(a_r, ϵ_r) mit $\epsilon_i \in \{+, -\}$ und $a_i \in \Omega(U_{\epsilon_i}, x)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ und beliebigen $r \in \mathbb{N}$ sowie die Abbildung

$$\tilde{u} : \mathcal{F} \to G, ((a_1, \epsilon_1) \dots, (a_r, \epsilon_r)) \mapsto f_{\epsilon_1}(a_1) \dots, f_{\epsilon_r}(a_r)$$

In $\mathcal{F}$ betrachten wir die Teilmenge $\mathcal{F}_c$ aller Folgen mit $c = [a_r] \dots [a_1]$. Wir werden uns überzeugen, daß man von jeder Folge aus $\mathcal{F}_c$ zu jeder anderen übergehen kann in endlich vielen Schritten der folgenden vier Arten:

1. Man ersetzt (a_i, ϵ_i) durch einen anderen Vertreter $(\tilde{a}_i, \epsilon_i)$ seiner Homotopieklasse, $[a_i]_{\epsilon_i} = [\tilde{a}_i]_{\epsilon_i}$.

2. Falls $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ ersetzt man die Folgenglieder (a_i, ϵ_i), $(a_{i+1}, \epsilon_{i+1})$ durch ihre Verknüpfung $(a_{i+1} * a_i, \epsilon_i)$. Dieser Schritt führt also zu einer um eins kürzeren Folge.

3. Man geht Schritt 2 rückwärts.

4. Man ersetzt den Weg (a_i, ϵ_i) durch $(a_i, -\epsilon_i)$, falls das Bild von a_i schon in $U_+ \cap U_-$ liegt.

Haben wir das gezeigt, so folgt, daß $\tilde{u}$ konstant ist auf $\mathcal{F}_c$. Damit ist $u(c)$ wohldefiniert und unser Satz ist bewiesen. Seien also $(a_i, \epsilon_i)_{i=1}^r$ und $(b_j, \eta_j)_{j=1}^s$ zwei Folgen aus $\mathcal{F}_c$. Das bedeutet insbesondere, daß es in X eine Homotopie mit festem Endpunkten gibt

$$h : (\dots ((a_r * \dots a_3) * a_2) * a_1) \xrightarrow{\sim} (\dots ((b_s * \dots b_3) * b_2) * b_1)$$

Unterteilen wir $[0, 1] \times [0, 1]$ in kleine Schachfelder der Seitenlänge $1/N$, so wird nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue **??** für hinreichend großes N jedes abgeschlossene Schachfeld unter $H(t, \tau) = h_\tau(t)$ ganz nach U_+ oder ganz nach U_- abgebildet. Für jeden Punkt p, der eine Ecke mindestens eines Feldes ist, wählen wir einen Weg γ_p von x nach $H(p)$, und zwar so, daß für $H(p)$ in U_+, U_-, $U_+ \cap U_-$ oder $\{x\}$ auch der ganze Weg γ_p in dieser Menge verläuft. Sind p, q benachbarte Ecken eines Schachfeldes, so bezeichnen wir mit $d_{p,q} : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ die affine Abbildung mit $d_{p,q}(0) = q$, $d_{p,q}(1) = p$ und definieren $\langle p, q \rangle \in \Omega(X, x)$ als

$$\langle p, q \rangle = \gamma_p^{-1} * (H \circ d_{p,q}) * \gamma_q$$

Ist p_0, p_1, $\dots$, p_{2N} eine Folge von Ecken, die man bei einer geeigneten Wanderung von $p_0 = (0, 0)$ bis $p_{2N} = (1, 1)$ entlang der Kanten der Felder der

Reihe nach aufsucht, und sind Vorzeichen $\sigma_i \in \{+,-\}$ gegeben derart, daß die ganze Kante $[p_{i-1}, p_i]$ unter H nach U_{σ_i} abgebildet wird, so ist

$$(\langle p_{2N}, p_{2N-1}\rangle, \sigma_{2N}) \dots (\langle p_1, p_0\rangle, \sigma_1)$$

eine Folge aus $\mathcal{F}_c$. Folgen dieser Art nennen wir "Schachbrettfolgen". Es ist nicht schwer einzusehen, daß man zwischen je zwei Schachbrettfolgen in endlich vielen Schritten der vier oben beschriebenen Arten hin- und hergehen kann. Der wesentliche Punkt hierbei ist es, zu prüfen, daß für ein von H ganz nach U_σ abgebildetes Schachfeld mit Ecken

$$\begin{pmatrix} y & z \\ x & w \end{pmatrix}$$

die Wege $\langle z, w\rangle * \langle w, x\rangle$ und $\langle z, y\rangle * \langle y, x\rangle$ in U_σ homotop sind. In der Tat folgt aber aus 1.2.3 sofort $d_{z,w} * d_{w,x} \cong d_{z,y} * d_{y,x}$ in $\Omega(\text{Schachfeld}, z, x)$. Nehmen wir nun zusätzlich $N = 2^K$ an mit $K \geq r, s$ und betrachten die Folge $p^{\lrcorner}_0$, $p^{\lrcorner}_1$, $\dots$, $p^{\lrcorner}_{2N}$ der Ecken, die man bei einer Wanderung längs der unteren und der rechten Kante des ganzen Schachbretts der Reihe nach aufsucht, so ergibt sich mit etwas Nachdenken

$$[a_1]_{\epsilon_1} = [\langle p^{\lrcorner}_{N/2}, p^{\lrcorner}_{N/2-1}\rangle * \dots * \langle p^{\lrcorner}_1, p^{\lrcorner}_0\rangle]_{\epsilon_1}$$

und allgemeiner

$$[a_i]_{\epsilon_i} = [\langle p^{\lrcorner}_{\alpha_i}, p^{\lrcorner}_{\alpha_i - 1}\rangle * \dots * \langle p^{\lrcorner}_{\alpha_{i-1}+1}, p^{\lrcorner}_{\alpha_{i-1}}\rangle]_{\epsilon_i}$$

für geeignete $N = \alpha_r > \dots > \alpha_2 > \alpha_1 = N/2 > \alpha_0 = 0$. Für $i > N$ sind die Wege $\langle p^{\lrcorner}_i, p^{\lrcorner}_{i-1}\rangle$ eh konstant, wir können also in endlich vielen Schritten von unserer Ausgangsfolge $(a_i, \epsilon_i)_{i=1}^r$ zu einer Schachbrettfolge der Gestalt $(\langle p^{\lrcorner}_j, p^{\lrcorner}_{j-1}\rangle, \sigma_j)_{j=1}^{2N}$ gelangen. Ebenso gelangen wir aber auch in endlich vielen Schritten von $(b_j, \eta_j)_{j=1}^s$ zu einer Schachbrettfolge, und wir wissen ja schon, daß wir zwischen je zwei Schachbrettfolgen in endlich vielen Schritten hin- und hergehen können. $\square$

Übung 3.1.2. Sei M eine zusammenhängende d-Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ und $E \subset M$ eine endliche Teilmenge. So induziert die Einbettung $M \backslash E \hookrightarrow M$ einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

3.2 Freie Gruppen

Definition 3.2.1. Gegeben eine Menge X definieren wir eine Gruppe FX, die **freie Gruppe** über X, wie folgt: Für $n = 0, 1, 2, \dots$ betrachten wir zunächst die Menge $\mathcal{F}_n X = \{a : \{1, \ldots, n\} \to X \times \{+1, -1\}\}$. Wir schreiben $a(i) = (a_i, \varepsilon_i)$ und interpretieren die Elemente $a \in \mathcal{F}_n X$ als endliche Wörter $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$. Wir haben also

> $\mathcal{F}_0 X = \{e\}$ besteht nur aus einem Wort, dem "leeren" Wort e;
> $\mathcal{F}_1 X = \{x, x^{-1} \mid x \in X\}$;
> $\mathcal{F}_2 X = \{xy, x^{-1}y, xy^{-1}, x^{-1}y^{-1} \mid x, y \in X\}$
> und so weiter.

Wir betrachten dann die "Menge aller Wörter" $\mathcal{F}X = \coprod_n \mathcal{F}_n X$. Auf dieser Menge erklärt man eine Verknüpfung, das "Hintereinanderschreiben von Wörtern"

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}X \times \mathcal{F}X & \to & \mathcal{F}X \\ (a, b) & \mapsto & ab \end{array}$$

Diese Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ und die Längen von Wörtern addieren sich. Sei nun $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}X$ derart, daß gilt:

1. $xx^{-1} \sim e \sim x^{-1}x \;\; \forall x \in X$;

2. $a \sim b \Rightarrow ca \sim cb$ und $ac \sim bc \;\; \forall a, b, c \in \mathcal{F}X$.

Bezeichne $FX = \mathcal{F}X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Die Klasse von $a \in \mathcal{F}X$ heiße $[a]$. Offensichtlich definiert die Verknüpfung auf $\mathcal{F}X$ eine Verknüpfung auf FX.

Satz 3.2.2. *Mit dieser Verknüpfung ist FX eine Gruppe, die sogenannte* **freie Gruppe** *über der Menge X.*

Beweis. Das Assoziativgesetz gilt schon in $\mathcal{F}X$, also erst recht in FX. Das leere Wort e ist schon neutral in $\mathcal{F}X$, also ist erst recht $[e]$ neutral in FX. Um die Existenz von Inversen nachzuweisen, betrachte man zu $a \in \mathcal{F}_n X$ das Element $b \in \mathcal{F}_n X$ gegeben durch

$$b(i) = (a_{n-i}, -\varepsilon_{n-i})$$

Ist zum Beispiel $a = xyx^{-1}yxx$, so nehmen wir $b = x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}$. Dann gilt offensichtlich $[b][a] = [e]$. $\square$

Lemma 3.2.3 (Universelle Eigenschaft der freien Gruppen). *Sei X eine Menge und bezeichne* $\mathrm{can} : X \to FX$, $x \mapsto [x]$ *die* **kanonische Abbildung** *von X in die freie Gruppe über X. Sei G eine Gruppe und $\varphi : X \to G$*

eine Abbildung. So gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : FX \to G$ mit $\tilde{\varphi} \circ \mathrm{can} = \varphi$, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \to & FX \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G \end{array}$$

Beweis. Man definiere $\hat{\varphi} : \mathcal{F}X \to G$ durch

$$\hat{\varphi}(a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}) = \varphi(a_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi(a_n)^{\varepsilon_n}$$

Betrachten wir auf $\mathcal{F}X$ die Äquivalenz-Relation $a \sim_\varphi b \Leftrightarrow \hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(b)$, so erfüllt $\sim_\varphi$ sicher die Bedingungen 1 und 2 an unsere Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}X$ oben. Also ist $\hat{\varphi}$ konstant auf den Äquivalenzklassen zu $\sim$ und definiert eine Abbildung $\tilde{\varphi} : FX \to G$ mit $\tilde{\varphi}([a]) = \hat{\varphi}(a)$. Damit ist die Existenz von $\tilde{\varphi}$ gezeigt. Die Eindeutigkeit ist klar. □

Beispiel 3.2.4. Ist $X = \{x\}$ eine einelementige Menge, so ist der Gruppenhomomorphismus $FX \to \mathbb{Z}$ mit $[x] \mapsto 1$ ein Isomorphismus.

Übung 3.2.5. Man zeige, daß jedes Element unserer freien Gruppe FX genau einen Repräsentanten kürzester Länge in $\mathcal{F}X$ hat, und daß diese Repräsentanten genau die "unkürzbaren Worte" aus $\mathcal{F}X$ sind. (Hinweis: Man konstruiere eine Operation der Gruppe FX auf der Menge aller unkürzbaren Worte.)

Übung 3.2.6. Jede Abbildung von Mengen $\varphi : X \to Y$ setzt sich auf genau eine Weise fort zu einer Abbildung von Gruppen $F\varphi : FX \to FY$, und unser F ist so in natürlicher Weise ein Funktor von den Mengen in die Gruppen. Man zeige, daß dieser Funktor F kokartesische Diagramme zu kokartesischen Diagrammen macht. Sind insbesondere X und Y zwei Mengen, so ist das folgende Diagramm kokartesisch in der Kategorie der Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} F(X \cap Y) & \to & FX \\ \downarrow & & \downarrow \\ FY & \to & F(X \cup Y) \end{array}$$

Korollar 3.2.7. *Sei $I \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge. So gibt es für jeden Basispunkt $*$ einen (unkanonischen) Isomorphismus zwischen der Fundamentalgruppe des Komplements von I und der freien Gruppe über I, in Formeln*

$$\pi_1(\mathbb{C} - I, *) \cong FI$$

Beweis. Nach 1.6.6 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Wir wenden nun den Satz von Seifert-van Kampen an mit $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < n\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > n - 1\}$ und erhalten den Satz mit vollständiger Induktion aus der vorhergehenden Übung 3.2.6. □

3.3 Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen

Definition 3.3.1. Ist V ein reeller Vektorraum und $M \subset V$ eine Teilmenge, so definiert man die **konvexe Hülle** von M als als den Schnitt aller konvexen Teilmengen von V, die M umfassen.

Bemerkung 3.3.2. Da ein beliebiger Schnitt von konvexen Teilmengen eines reellen Vektorraums wieder konvex ist, kann man die konvexe Hülle auch beschreiben als die kleinste konvexe Teilmenge von V, die M umfaßt. Explizit wird sie gegeben durch die Vorschrift

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i p_i \;\middle|\; n \geq 0, \;\; p_i \in M, \;\; t_i \geq 0, \;\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Definition 3.3.3. Punkte $p_0, \ldots, p_n$ in einem reellen Vektorraum heißen **affin unabhängig** genau dann, wenn es keinen $(n-1)$-dimensionalen affinen Teilraum gibt, der sie alle enthält. Dann bezeichnet man ihre konvexe Hülle auch mit

$$\Delta(p_0, \ldots, p_n)$$

und nennt sie den **vollen Simplex** mit Ecken $p_0, \ldots, p_n$.

Beispiele 3.3.4. Wir vereinbaren $\Delta(\emptyset) = \emptyset$. Es gilt $\Delta(p) = \{p\}$. Zwei Punkte p, q sind affin unabhängig genau dann, wenn sie verschieden sind, und in diesem Fall ist $\Delta(p, q)$ das "abgeschlossene Streckenstück zwischen p und q". Drei Punkte p, q, r sind affin unabhängig genau dann, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, und in diesem Fall ist $\Delta(p, q, r)$ die "abgeschlossene Fläche des Dreiecks mit Ecken p, q und r".

Bemerkung 3.3.5. Die Bezeichnung "Simplex" kann wohl zurückgeführt werden auf denselben Wortstamm wie "simpel". In jedem Fall werden volle Simplizes verwendet als einfachste Grundbausteine bei der Konstruktion komplizierterer Räume. Die Konstruktionsvorschrift ist dabei ein rein kombinatorisches Datum, das wir gleich definieren und einen "Simplizialkomplex" nennen werden. Den zugehörigen topologischen Raum nennen wir dann den zugehörigen "Polyeder".

Definition 3.3.6. Ein **Simplizialkomplex** $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ist eine Menge E mitsamt einem System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$ von endlichen Teilmengen von E derart, daß erstens gilt $\sigma \in \mathcal{K}$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \mathcal{K}$ sowie zweitens $\{e\} \in \mathcal{K}$ für alle $e \in E$. Wir nennen die Elemente von E die **Ecken** und die Elemente von $\mathcal{K}$ die **Simplizes** unseres Simplizialkomplexes. Die Simplizes der Kardinaliät $(n + 1)$ nennen wir **n-Simplizes** und die Menge der n-Simplizes notieren wir $\mathcal{K}_n$. Wir identifizieren oft stillschweigend die Menge E der Ecken mit der Menge $\mathcal{K}_0$ der 0-Simplizes.

Beispiel 3.3.7. Für jede Menge E ist das System aller ihrer endlichen Teilmengen ein Simplizialkomplex.

Definition 3.3.8. Wir ordnen jedem Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$ einen topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ zu, den wir seinen **Polyeder** nennen. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir

$$\Delta(\mathcal{K}) = \left\{ f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt einen Simplex } \sigma \in \mathcal{K} \text{ mit } (\operatorname{supp} f) = \sigma \\ \text{und es gilt } \sum_{e \in E} f(e) = 1 \end{array} \right\}$$

Diese Menge ist enthalten im freien Vektorraum $\mathbb{R}E$ über E aller Abbildungen $E \to \mathbb{R}$ mit endlichem Träger. Ist E endlich, so nehmen wir als Topologie auf $\Delta(\mathcal{K})$ schlicht die Topologie, die induziert wird von der kanonischen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}E$. Im Allgemeinen versehen wir $\Delta(\mathcal{K})$ mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ von Polyedern endlicher Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$.

Bemerkung 3.3.9. In Übung 3.3.17 wird erklärt, warum wir unsere Menge *nicht* mit der Kofinaltopologie zur Familie der Auswertungen an allen Ecken E unseres Komplexes versehen.

Bemerkung 3.3.10. Für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ betrachten wir nun die Teilmenge $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$ aller f mit Träger in σ. Bezeichnen wir für $e \in E$ mit $\tilde{e} \in \mathbb{R}E$ das zugehörige Element der Standardbasis und besteht σ aus den $n+1$ Ecken $e_0, \ldots, e_n \in E$, so ist $\Delta(\sigma)$ gerade die konvexe Hülle der $\tilde{e}_i$, in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \Delta(\tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_n)$$

Unser Polyeder ist die Vereinigung aller dieser vollen Simplizes.

Bemerkung 3.3.11. Wir können den Polyeder $\Delta(\mathcal{K})$ eines Simplizialkomplexes $(E, \mathcal{K})$ oft auch in Vektorräumen V einer Dimension $\dim V < |E|$ realisieren. Ist genauer $E \to V$, $e \mapsto \bar{e}$ irgendeine Abbildung der Ecken in einen reellen Vektorraum V, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\mathbb{R}E \to V$ mit $\tilde{e} \mapsto \bar{e}$. Ist diese Abbildung darüber hinaus injektiv auf $\Delta(\mathcal{K})$ und ist unser Vektorraum endlichdimensional und unser Simplizialkomplex endlich, so induziert sie nach **??** einen Homöomorphismus von unserem Polyeder mit seinem Bild. Notwendig und hinreichend für die Injektivität ist hier, daß (1) für jeden Simplex $\sigma \in \mathcal{K}$ seine Bildmenge $\bar{\sigma} \subset V$ affin unabhängig ist in V und daß (2) für je zwei Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ für die vollen Simplizes $\Delta(\bar{\sigma}) \subset V$ gilt $\Delta(\bar{\sigma}) \cap \Delta(\bar{\tau}) = \Delta(\overline{\sigma \cap \tau})$. Unter diesen Voraussetzungen (1) und (2) liefert unsere Abbildung also einen Homöomorphismus zwischen dem Polyeder $\Delta(\mathcal{K})$ eines endlichen Simplizialkomplexes und der Vereinigung von vollen Simplizes $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\bar{\sigma})$ im endlichdimensionalen Vektorraum V.

Definition 3.3.12. Eine **simpliziale Abbildung** φ von einem Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$ in einen Simplizialkomplex $(E', \mathcal{K}')$ ist eine Abbildung auf den Ecken $\varphi : E \to E'$ derart, daß gilt $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi(\sigma) \in \mathcal{K}'$. So eine simpliziale Abbildung definiert eine stetige Abbildung $\varphi : \Delta(\mathcal{K}) \to \Delta(\mathcal{K}')$ zwischen den zugehörigen topologischen Räumen durch "affine Fortsetzung auf das Innere der Simplizes", in Formeln $f \mapsto \varphi f$ mit

$$(\varphi f)(e') = \sum_{\varphi(e)=e'} f(e) \quad \forall e' \in E'$$

Definition 3.3.13. Eine **kombinatorische Fläche** ist ein endlicher Simplizialkomplex $\mathcal{F}$ derart, daß gilt:

1. Jeder Simplex liegt in einem 2-Simplex.
2. Jeder 1-Simplex liegt in höchstens zwei 2-Simplizes.
3. Alle 2-Simplizes, die einen gegebenen 0-Simplex enthalten, lassen sich so durchnummerieren als $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, daß jeweils σ_i und σ_{i+1} eine Kante gemeinsam haben, in Formeln $|\sigma_i \cap \sigma_{i+1}| = 1$ für $1 \leq i < r$.

Diejenigen 1-Simplizes, die nur zu einem einzigen 2-Simplex gehören, nennen wir die **Randkanten** unserer kombinatorischen Fläche. Gehört jeder 1-Simplex zu genau zwei 2-Simplizes, so nennen wir unseren Simplizialkomplex eine **geschlossene kombinatorische Fläche** oder auch eine **kombinatorische Fläche ohne Rand**.

Bemerkung 3.3.14. Es ist leicht zu sehen aber nicht ganz so leicht zu beweisen (Übung!), daß der zu einer geschlossenen kombinatorischen Fläche $\mathcal{F}$ gehörige Polyeder $\Delta(\mathcal{F})$ eine geschlossene Fläche ist im Sinne unserer Definition 1.1.2, in anderen Worten eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit.

Definition 3.3.15. Sei X eine geschlossene Fläche. Eine **Triangulierung** von X ist ein Paar bestehend aus einer geschlossenen kombinatorischen Fläche $\mathcal{F}$ und einem Homöomorphismus $\Delta(\mathcal{F}) \cong X$.

Bemerkung 3.3.16. Rado [**?**, **?**] hat gezeigt, daß jede geschlossene Fläche eine Triangulierung besitzt. Der Beweis ist nicht ganz einfach. In höheren Dimensionen gibt es übrigens auch durchaus kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind zu Polyedern. Man nennt sie "nicht triangulierbar".

Übung 3.3.17. Der Polyeder $\Delta(\mathcal{K})$ zu einem Simplizialkomplex $(E, \mathcal{K})$ ist stets Hausdorff und jede kompakte Teilmenge $A \subset \Delta(\mathcal{K})$ ist schon enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen Simplizes. (Hinweis: Eine Teilmenge von $\Delta(\mathcal{K})$, die jeden Simplex in höchstens endlich vielen Punkten trifft, ist stets abgeschlossen und diskret.) Besteht unser Simplizialkomplex aus abzählbar vielen Kanten, die in einen zentralen Punkt hereinlaufen, so gilt diese Aussage nicht die von den Auswertungen an allen Ecken induzierte Kofinaltopologie!

Übung 3.3.18. Für eine beliebige Menge E ist die Menge $\mathcal{K}$ aller endlichen Teilmengen von E ein Simplizialkomplex. Den zugehörigen Polyeder schreiben wir $\Delta(E)$ und nennen ihn den **vollen Simplex mit Ecken** E. Man zeige, daß für $E \neq \emptyset$ der volle Simplex $\Delta(E)$ zusammenziehbar ist.

3.4 Klassifikation der geschlossenen Flächen

Bemerkung 3.4.1. Wir werden im folgenden den in 1.1.3 formulierten Satz unter der Zusatzannehme der "Triangulierarkeit" beweisen. In anderen Worten klassifizieren wir die (triangulierbaren) geschlossenen Flächen bis auf Homöomorphie. Dieser Abschnitt nimmt eine Sonderstellung ein insofern, als die Argumentation nicht so weit in die formalen Details getrieben wird wie in den anderen Abschnitten.

Definition 3.4.2. Sei $\mathcal{F}$ eine kombinatorische Fläche. Eine **Zerschneidung** von $\mathcal{F}$ ist eine kombinatorische Fläche $\mathcal{Z}$ mit einer simplizialen Abbildung $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$, die auf den 2-Simplizes eine Bijektion $\varphi : \mathcal{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2$ induziert.

Definition 3.4.3. Eine kombinatorische Fläche $\mathcal{Z}$ heißt ein **Vieleck** genau dann, wenn der zugehörige Polyeder $\Delta(\mathcal{Z})$ homöomorph ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Lemma 3.4.4. *Sei $\mathcal{Z}$ ein Vieleck und $\varphi : D^2 \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{Z})$ ein Homöomorphismus. So ist das Bild der Kreislinie $\varphi(S^1)$ die Vereinigung der Randkanten von $\mathcal{Z}$.*

Beweis. Das Komplement von S^1 kann man im topologischen Raum D^2 charakterisieren als die Menge aller Punkte z, die eine zusammenziehbare Umgebung U besitzen derart, daß $U \setminus z$ eine nichttriviale Fundamentalgruppe hat. Das Komplement der Vereinigung der Randkanten in $\Delta(\mathcal{Z})$ kann man genauso charakterisieren. □

Proposition 3.4.5. *Jede zusammenhängende kombinatorische Fläche besitzt eine Zerschneidung zu einem Vieleck.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ unsere kombinatorische Fläche. Sicher gibt es eine Zerschneidung von $\mathcal{F}$ in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Vielecke. Sei $\mathcal{Z} \to \mathcal{F}$

eine solche Zerschneidung mit der kleinstmöglichen Zahl von Komponenten. Nehmen wir einmal an, es gäbe hier mehr als eine Komponente. Dann könnten wir also 2-Simplizes $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_2$ finden, die von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{Z}$ herkommen. Da $\mathcal{F}$ zusammenhängend ist, könnten wir σ, τ in $\mathcal{F}$ durch eine Kette von 2-Simplizes $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r = \tau$ verbinden derart, daß gilt $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset$. Aufgrund unserer Annahmen an eine kombinatorische Fläche können wir sogar annehmen, daß $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ jeweils ein 1-Simplex ist. Dann finden wir aber notwendig ein i derart, daß σ_i und σ_{i+1} von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{Z}$ herkommen. Verkleben wir nun diese beiden Zusammenhangskomponenten entlang der Randkante $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$, so erhalten wir eine Zerschneidung von $\mathcal{F}$ in weniger Vielecke, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität. □

Bemerkung 3.4.6. Sei nun $\mathcal{F}$ eine geschlossene kombinatorische Fläche und $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$ eine Zerschneidung zu einem Vieleck. Sicher werden unter φ die Randkanten von $\mathcal{Z}$ paarweise identifiziert. Insbesondere ist also die Zahl der Randkanten unseres Vielecks gerade. Die Identifizierungsvorschrift können wir formal so aufschreiben:

Definition 3.4.7. Sei A eine endliche Menge, die wir in diesem Zusammenhang ein "Alphabet" nennen wollen, mit $|A| = r \geq 0$ Elementen, den "Buchstaben". Ein **Flächenwort** im Alphabet A ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, 3, \ldots, 2r\} & \to & A \times \{1, -1\} \\ i & \mapsto & (a(i), \epsilon(i)) \end{array}$$

derart, daß jeder Buchstabe genau zweimal als ein $a(i)$ vorkommt.

Bemerkung 3.4.8. Wir schreiben Flächenworte in der Form $a(1)^{\epsilon(1)} \ldots a(2r)^{\epsilon(2r)}$ und nennen $2r$ die "Länge" so eines Flächenworts. Beispiele für Flächenworte im Alphabet $A = \{a, b\}$ sind die Ausdrücke $aabb^{-1}$ und $aba^{-1}b$.

Definition 3.4.9. Gegeben ein Flächenwort w in $r \geq 2$ Buchstaben konstruieren wir eine geschlossene Fläche $F(w)$ wie folgt: Wir betrachten ein regelmäßiges $2r$-Eck, mit $2r$ der Länge unseres Flächenworts, schreiben die Buchstaben unseres Flächenworts der Reihe nach an seine Kanten, und versehen jede Kante mit einem Pfeil im Gegenuhrzeigersinn bzw. Uhrzeigersinn, je nachdem ob der Exponent ihres Buchstabens 1 bzw. -1 ist. Dann verkleben wir jeweils die Kanten mit den gleichen Buchstaben so, daß die Spitzen der Pfeile jeweils identifiziert werden. Im Fall $r = 1$ erlauben wir dem 2-Eck krumme Kanten und erhalten so zum Beispiel $F(aa) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ und $F(aa^{-1}) \cong S^1$. Im Fall $r = 0$ definieren wir $F(\ ) = S^1$.

Lemma 3.4.10. *Der auf diese Weise zu einem Flächenwort w konstruierte topologische Raum $F(w)$ ist stets eine geschlossene Fläche.*

Beweis. Die größte Schwierigkeit scheint mir hierbei der Nachweis, daß auch die Bilder der Ecken unseres Vielecks im verklebten Raum $F(w)$ eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe offene Umgebung besitzen. Um das zu sehen, muß man sich überlegen, daß lokal um das Bild einer Ecke schlicht "mehrere Winkelsegmente zu einer Kreisscheibe verklebt werden". Wir überlassen die Details dem Leser. □

Satz 3.4.11 (Klassifikation der geschlossenen Flächen). *Jede zusammenhängende (triangulierbare) Fläche ist homöomorph zur Fläche $F(w)$ für genau ein Flächenwort w aus der folgenden Liste:*

1. $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ *mit* $g \geq 0$.
2. $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$ *mit* $g \geq 1$.

Bemerkung 3.4.12. Dieser Satz präzisiert die in der Einleitung besprochene Klassifikation der geschlossenen Flächen 1.1.3.

Beweis. Zunächst einmal listen wir einige fundamentale Operationen auf der Menge aller Flächenwörter auf, die offensichtlich den Homöomorphietyp der zugehörigen Fläche nicht ändern. In den folgenden Formeln bedeuten a, b, c, d mit und ohne Hut stets Buchstaben unseres Alphabets A, dahingegen bedeuten u, v, w, z beliebige Abschnitte von Flächenwörtern.

1. "Zyklisches Vertauschen" und "von hinten nach vorne Lesen", in Formeln $F(vw) \cong F(wv)$ und $F(w) \cong F(w^{-1})$.
2. "Substituieren" von a^{-1} für a, in Formeln $F(va^{\epsilon}wa^{\eta}z) \cong F(va^{-\epsilon}wa^{-\eta}z)$;
3. "Aufschneiden des Vielecks längs der Gerade zwischen zwei Ecken und Zusammenkleben längs einer äußeren Kante", in Formeln

$$\begin{array}{lcl} F(uavza^{-1}w) & \cong & F(uwb^{-1}zvb) \\ F(uavzaw) & \cong & F(uz^{-1}bw^{-1}vb) \end{array}$$

Zu jedem Flächenwort w definieren wir seine **Eckenzahl** als die Zahl der Punkte in der zugehörigen Fläche $F(w)$, die Bilder von Ecken unseres Vielecks sind. Kombinatorisch betrachtet man auf der Menge der Ecken die kleinste Äquivalenzrelation, unter der je zwei Ecken mit einer Ausgangskante zum selben Buchstaben oder einer Eingangskante zum selben Buchstaben äquivalent sind, und kann dann die Eckenzahl verstehen als die Kardinalität der Äquivalenzklassen. Mit dieser Terminologie haben wir eine letzte fundamentale Operation:

4. “Kürzen”, in Formeln $F(uava^{-1}) \cong F(uv)$ unter der Annahme, daß die Enden der a-Kanten verschiedene Bilder in der verklebten Fläche haben. Sind hier u oder v leer, so haben die Enden der a-Kanten automatisch verschiedene Bilder und die Formel scheint mir offensichtlich. Sind u und v nicht leer, so betrachten wir in unserem Vieleck das Viereck mit den beiden a-Kanten als gegenüberliegenden Seiten. Sein Bild in der verklebten Fläche ist ein Zylinder, den wir zu einer Kreislinie identifizieren können, ohne den Homöomorphietyp der verklebten Fläche zu ändern.

Lemma 3.4.13 (Eckenreduktion). *Für jedes vorgegebene Flächenwort w ist entweder $F(w)$ eine Sphäre, oder es gibt ein Flächenwort v mit Eckenzahl 1 und $F(w) \cong F(v)$.*

Beweis. Sei w ein Flächenwort mit Eckenzahl ≥ 2 und mehr als einem Buchstaben. Wir wählen einen Punkt P in $F(w)$, der Bild einer Ecke unseres Vielecks ist, und nennen diejenigen Ecken unseres Vielecks “gut”, die nach P gehen. Die übrigen Ecken nennen wir “schlecht” und geben im Verfahren an, das entweder die Zahl der Ecken überhaupt oder die Zahl der schlechten Ecken unseres Eckenworts verringert ohne die zugehörige Fläche zu ändern. Sei in der Tat a eine Kante von einer guten Ecke zu einer schlechten Ecke. Drei Fälle sind möglich:

1. Die beiden a-Kanten unseres Vielecks erscheinen mit demselben Exponenten. In diesem Fall können sich nach unserer Annahme die a-Kanten nicht berühren. Wir schneiden dann zwischen den Anfangspunkten der a-Kanten auf und verkleben längs der a-Kanten. So verringert sich die Zahl der schlechten Ecken um 1.

2. Die beiden a-Kanten unseres Vielecks erscheinen mit verschiedenen Exponenten. In diesem Fall können wir sie kürzen. □

Jede (triangulierbare) Fläche ist also homöomorph zur Sphäre oder zu einer Fläche $F(w)$ für ein Flächenwort w mit Eckenzahl 1. Wir bemerken für das folgende, daß sich die Eckenzahl beim Aufschneiden und Verkleben nicht ändert. Wir können und werden uns in der Folge auf Worte der Eckenzahl 1 beschränken. Man beachte nun als Spezialfälle des Aufschneidens und Verklebens die beiden folgenden Regeln:

Kreuzhaubennormierung: $F(ubvbw) \cong F(u\hat{b}\hat{b}v^{-1}w)$, durch Aufschneiden zwischen den Enden von b und Verkleben längs b.

Henkelnormierung: $F(ubvdwb^{-1}zd^{-1}x) \cong F(uzw\hat{b}\hat{d}\hat{\hat{b}}^{-1}\hat{d}^{-1}vx)$, durch Aufschneiden zwischen den Enden von b und Verkleben längs d kommt man zu $ub\hat{d}b^{-1}zw\hat{d}^{-1}vx$, mit erneutem Aufschneiden zwischen den Enden von $\hat{d}$ und Verkleben längs b ergibt sich dann das gewünschte Resultat.

Unter Verwendung der ersten Regel normieren wir zunächst Kreuzhauben, bis wir ein Wort erreicht haben, bei dem jeder Buchstabe entweder als normierte Kreuzhaube aa bzw. $a^{-1}a^{-1}$ oder in der Form $\ldots a \ldots a^{-1} \ldots$ vorkommt. Im letzteren Fall finden wir ein b derart, daß unser Wort feiner sogar die Form $\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1} \ldots$ hat, denn sonst müßten alle Buchstaben entweder doppelt oder gar nicht zwischen a und a^{-1} vorkommen, und dann hätten Anfangs- und Endpunkt der a-Kanten verschiedene Bilder in der Fläche, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß die Eckenzahl 1 ist. Mit sukzessiven Henkelnormierungen landen wir also bei einem Wort, das eine Verkettung ist von Kreuzhauben cc und Henkeln $aba^{-1}b^{-1}$. Unsere Regel zur Kreuzhaubennormierung liefert aber durch mehrfaches Anwenden auch die sogenannte **Henkelelimination**, in Formeln

$$\begin{array}{rcl} F(uccab^{-1}a^{-1}bv) & \cong & F(u\hat{c}ba^{-1}\hat{c}a^{-1}bv) \\ & \cong & F(u\hat{c}a\hat{c}^{-1}a\hat{b}\hat{b}v) \\ & \cong & F(u\hat{c}\hat{c}\hat{a}\hat{a}\hat{\hat{b}}\hat{\hat{b}}v) \end{array}$$

so daß also jede Verkettung von Kreuzhauben und Henkeln, in der mindestens eine Kreuzhaube auftritt, dieselbe Fläche liefert wie ein reines Produkt von Kreuzhauben. Damit ist gezeigt, daß jede triangulierbare Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche, die durch ein Flächenwort aus unserer Liste beschrieben wird. Wir zeigen in 3.6, daß diese Flächen paarweise nichtisomorphe Fundamentalgruppen haben. Daraus folgt, daß sie paarweise nicht homöomorph sind, und das beendet dann den Beweis des Klassifikationssatzes. □

3.5 Gruppen durch Erzeugende und Relationen

Bemerkung 3.5.1. Ist G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge, so hatten wir in **??** den Schnitt über alle Untergruppen von G, die T umfassen, die von T erzeugte Untergruppe genannt und mit $\langle T \rangle$ bezeichnet.

Definition 3.5.2. Sei G eine Gruppe und $T \subset G$ eine Teilmenge. Der Schnitt über alle Normalteiler von G, die T umfassen, heißt der **von T erzeugte Normalteiler** $\langle\langle T \rangle\rangle$. Er kann auch beschrieben werden als die Untergruppe $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in T \rangle$.

Lemma 3.5.3. *Sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $T \subset G$ eine Teilmenge mit $\varphi(T) = \{e\}$. So gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : G/\langle\langle T\rangle\rangle \to G'$ mit $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, im Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G/\langle\langle T\rangle\rangle \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G' \end{array}$$

Beweis. Nach Annahme gilt $T \subset \ker\varphi$. Da $\ker\varphi$ stets ein Normalteiler ist, folgt $\langle\langle T\rangle\rangle \subset \ker\varphi$. Jetzt folgt die Aussage mit Lemma **??**. □

Definition 3.5.4. Sei X eine Menge und $R \subset FX$ eine Teilmenge der freien Gruppe über X. Der Quotient $FX/\langle\langle R\rangle\rangle$ der freien Gruppe über X nach dem von R erzeugten Normalteiler heißt die **von der Menge X mit den Relationen R erzeugte Gruppe**. Meist werden die Relationen in der Form $a_i = b_i$ mit $a_i, b_i \in \mathcal{F}X$ angegeben. Gemeint ist dann $R = \{[a_i][b_i]^{-1}\}$.

Beispiel 3.5.5. Zum Beispiel ist die von zwei Elementen x und y mit der Relation $xy = yx$ erzeugte Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Bemerkung 3.5.6. Die Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen ist nicht "effektiv": Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der bestimmt, ob so eine Gruppe endlich oder gar trivial ist.

Übung 3.5.7. Sei eine Menge X die Vereinigung zweier Teilmengen $X = X_1 \cup X_2$ mit Schnitt $X_0 = X_1 \cap X_2$. Seien $R_i \subset FX_i$ Relationen ($i = 0, 1, 2$). Gilt zusätzlich $R_0 \subset \langle\langle R_i\rangle\rangle$ für $i = 1, 2$, so ist das folgende Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} FX_0/\langle\langle R_0\rangle\rangle & \to & FX_1/\langle\langle R_1\rangle\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ FX_2/\langle\langle R_2\rangle\rangle & \to & FX/\langle\langle R_1 \cup R_2\rangle\rangle \end{array}$$

3.6 Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Satz 3.6.1 (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen). *Gegeben ein Flächenwort w im Alphabet A mit Eckenzahl 1 wird die Fundamentalgruppe der zugehörigen Fläche erzeugt von der Menge A mit dem Flächenwort w als einziger Relation. Nehmen wir als Basispunkt $*$ das Bild der Ecken unseres Vielecks, so haben wir sogar kanonisch*

$$\pi_1(F(w), *) = FA/\langle\langle w\rangle\rangle$$

Beweis. Sei $p : Z \to F$ die Projektion unseres Vielecks $Z \subset \mathbb{R}^2$ auf unsere Fläche $F = F(w)$. Das Bild $p(\partial Z)$ vom Rand unseres Vielecks in der Fläche

$F(w)$ besteht aus $|A|$ Kreislinien, die alle in einem Punkt zusammengeklebt sind. So einen Raum nennt man auch ein **Bouquet von Kreislinien**. Jetzt wählen wir für unser Vieleck Z die offene Überdeckung $Z = (Z\backslash 0) \cup Z^\circ$ und wenden den Satz von Seifert und van Kampen 3.1.1 an auf die offene Überdeckung

$$F = p(Z\backslash 0) \cup p(Z^\circ)$$

unserer Fläche durch die Bilder dieser Mengen. Hier liefert p einen Homöomorphismus von Z° auf sein Bild in F und die Einbettung unseres Bouquets von Kreislinien in $p(Z\backslash 0)$ ist eine Homotopieäquivalenz. So ergibt sich ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ FA & \to & \pi_1(F(w), *) \end{array}$$

wobei die Abbildung $\mathbb{Z} \to FA$ die $1 \in \mathbb{Z}$ auf das Flächenwort w unserer Fläche in FA abbildet. Es folgt $\pi_1(F(w), *) = FA/\langle\langle w \rangle\rangle$. □

Definition 3.6.2. Ist G eine Gruppe, so definiert man ihren **maximalen kommutativen Quotienten**, auch genannt ihre **Abelianisierung**, als den Quotienten $G^{\mathrm{ab}} = G/(G, G)$ nach dem Normalteiler $(G, G) \subset G$, der von allen **Kommutatoren** $ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g, h \in G$ erzeugt wird. Die Untergruppe (G, G) heißt im übrigen die **derivierte Gruppe** oder der **Kommutator** von G.

Lemma 3.6.3. *Sei G eine Gruppe. So ist G^{ab} ist eine abelsche Gruppe, und jeder Morphismus von G in eine abelsche Gruppe faktorisiert über G^{ab}.*

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Nun wird offensichtlich ein push-out-Diagramm in der Kategorie der Gruppen unter der Abelianisierung ein push-out-Diagramm in der Kategorie der abelschen Gruppen, und die Abelianisierung einer freien Gruppe FA ist die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}A$ aller endlichen formalen Linearkombinationen von Elementen von A mit ganzzahligen Koeffizienten. Für den maximalen kommutativen Quotienten π_1^{ab} erhalten wir damit $\pi_1^{\mathrm{ab}}(F(w), *) = \mathbb{Z}A \cong \mathbb{Z}^{2g}$ im Fall von g Henkeln und

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(F(w), *) = \mathbb{Z}A/2\mathbb{Z}(c_1 + \ldots + c_g) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$$

im Fall von g Kreuzhauben. Da diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind, sind auch die zugehörigen Flächen paarweise nicht homöomorph. Das beendet den Beweis des Klassifikationssatzes.

Übung 3.6.4. Die Abelianisierung der freien Gruppe über einer Menge ist kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über besagter Menge.

Übung 3.6.5. Ist X eine zusammenhängende geschlossene Fläche vom Geschlecht g und $E \subset X$ eine endliche nichtleere Teilmenge, so ist $\pi_1(X \setminus E)$ frei in $2g + |E| - 1$ Erzeugern.

3.7 Push-out-Diagramme von Gruppen

Schon beim Satz von Seifert und van Kampen wird sich der Leser gefragt haben, ob eigentlich jedes entsprechende Diagramm von Gruppen sich zu einem kokartesischen Diagramm vervollständigen läßt. Das ist in der Tat der Fall und soll nun bewiesen werden. Wir beginnen mit

Satz 3.7.1. *Es gibt Koprodukte in der Kategorie der Gruppen.*

Beweis. Wir zeigen nur, wie man ein Koprodukt von zwei Gruppen G_1 und G_2 konstruieren kann. Es heißt das **freie Produkt** der Gruppen G_1 und G_2 und wird $G_1 * G_2$ notiert.

Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe FG über der Menge G haben wir ja für jede Gruppe G genau einen Gruppenhomomorphismus $FG \twoheadrightarrow G$, dessen Verknüpfung mit $\mathrm{can} : G \to FG$ die Identität auf G ist. Den Kern $RG \subset FG$ von diesem Gruppenhomomorphismus nennen wir die "Relationen von G". Wir definieren nun die Gruppe $G_1 * G_2$ als

$$G_1 * G_2 = F(G_1 \amalg G_2)/\langle\langle RG_1 \cup RG_2 \rangle\rangle,$$

wo wir der Einfachheit halber das Bild von RG_i unter der von der Inklusion induzierten Abbildung $FG_i \to F(G_1 \amalg G_2)$ auch mit RG_i bezeichnet haben. Wir behaupten nun, daß diese Gruppe $G_1 * G_2$ mit den offensichtlichen Abbildungen $\mathrm{can}_i : G_i \to G_1 * G_2$ ein Koprodukt ist. In der Tat, ist irgendeine Gruppe H gegeben mitsamt Abbildungen $f_1 : G_1 \to H$ und $f_2 : G_2 \to H$, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $f : F(G_1 \amalg G_2) \to H$. Ist zusätzlich f_i ein Gruppenhomomorphismus, so liegt RG_i im Kern von f. Sind f_1, f_2 Gruppenhomomorphismen, so definiert f mithin einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G_1 * G_2 \to H$. □

Bemerkung 3.7.2. Man kann zeigen, daß sich jedes Element von $G_1 * G_2$ in eindeutiger Weise schreiben läßt als ein Produkt $g_1 g_2 \ldots g_n$ mit $n \geq 0$ und $g_k \in G_{\epsilon(k)}$ nicht das neutrale Element und $\epsilon(k) \neq \epsilon(k+1)$ für $1 \leq k < n$. Wie üblich soll hier das leere Produkt mit $n = 0$ das neutrale Element von $G_1 * G_2$ darstellen.

Korollar 3.7.3. *Jedes Diagramm von Gruppen*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \\ G_1 & & \end{array}$$

läßt sich zu einem push-out-Diagramm vervollständigen.

Beweis. Man nennt so einen push-out auch ein **amalgamiertes Produkt** und bezeichnet ihn mit $G_1 *_G G_2$. Wir konstruieren unseren Pushout als den Quotienten

$$G_1 * G_2 / \langle\langle \varphi_1(x)^{-1}\varphi_2(x) \mid x \in G \rangle\rangle$$

und überlassen es dem Leser, die universelle Eigenschaft zu prüfen. □

4 Überlagerungstheorie

4.1 Überlagerungen

Definition 4.1.1. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{U} \to U$ heißt eine **triviale Überlagerung** genau dann, wenn es eine Zerlegung von $\tilde{U}$ in paarweise disjunkte offene Teilmengen gibt, die von p jeweils homöomorph nach U abgebildet werden. Eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ heißt eine **Überlagerung** genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß die induzierte Abbildung $p : p^{-1}(U) \to U$ eine triviale Überlagerung ist. Wir nennen U dann eine **trivial überlagerte Umgebung von** x. Der Definitionsbereich $\tilde{X}$ von p heißt der **Totalraum** unserer Überlagerung.

Bemerkung 4.1.2. Unter einer **Trivialisierung** einer Überlagerung $p : \tilde{U} \to U$ verstehen wir die Vorgabe von einem diskreten Raum F mitsamt einem Homöomorphismus $\varphi : F \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$ derart, daß gilt $p \circ \varphi = \mathrm{pr}_U : F \times U \to U$. Eine Überlagerung ist trivial genau dann, wenn sie eine Trivialisierung besitzt.

Bemerkung 4.1.3. Wir fordern von einer Überlagerung *nicht*, daß sie surjektiv sein soll. Insbesondere ist für uns $\emptyset \to X$ stets eine Überlagerung. Wir fordern auch *nicht*, daß die Fasern konstante Kardinalität haben sollen. Eine Überlagerung mit dieser Eigenschaft nennt man eine **Faserung mit diskreter Faser**. In der Funktionentheorie arbeitet man manchmal mit einem etwas allgemeineren Überlagerungsbegriff, die Überlagerungen im Sinne der obigen Definition würde man in dieser Terminologie **unverzweigte Überlagerungen** nennen.

Beispiele 4.1.4. Die Abbildungen $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ und $S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ sind Überlagerungen. Ebenso ist für jeden diskreten Raum F die Projektion $\mathrm{pr}_2 : F \times X \to X$ eine Überlagerung. Als weiteres Beispiel betrachte man $\mathrm{Exp} \times \mathrm{Exp} : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$. Sind allgemeiner $f : \tilde{X} \to X$ und $g : \tilde{Y} \to Y$ Überlagerungen, so auch $f \times g : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$.

Bemerkung 4.1.5. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so ist die Kardinalität der Fasern $p^{-1}(x)$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X. In der Tat sind für jede Menge E die Mengen $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |E|\}$ bzw. $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |E|\}$ aller Punkte $x \in X$, deren Fasern $p^{-1}(x)$ dieselbe bzw. nicht dieselbe Kardinalität wie E haben, offen in X, da sie mit jedem Punkt auch jede trivial überlagerte Umgebung des besagten Punktes umfassen. Ist X zusammenhängend, so nennt man die Zahl der Elemente einer (gleichbedeutend jeder) Faser auch die **Zahl der Blätter** der Überlagerung.

Definition 4.1.6. Eine stetige Abbildung $p : E \to X$ heißt **étale** (französisch für "ausgebreitet") genau dann, wenn jeder Punkt $e \in E$ eine offene Umgebung $U \Subset E$ besitzt, die von p homöomorph auf eine offene Teilmenge $p(U) \Subset X$ abgebildet wird.

Beispiele 4.1.7. Die Identität auf einem topologischen Raum ist stets étale. Jede Überlagerungsabbildung ist étale. Die Projektion unserer Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt $\mathbb{R} \amalg \{\tilde{0}\}$ aus **??** auf die Gerade $\mathbb{R}$ ist étale. Jede Einbettung einer offenen Teilmenge ist étale. Jede Verknüpfung étaler Abbildungen ist étale.

Übung 4.1.8. Jede étale Abbildung ist offen. Sind f und g verknüpfbare stetige Abbildungen und sind f und fg étale, so ist auch g étale. Jede surjektive étale Abbildung ist eine Identifikation.

Übung 4.1.9. Man gebe eine étale Abbildung an, die keine Überlagerung ist.

Übung 4.1.10. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so ist auch $p : p^{-1}(Y) \to Y$ eine Überlagerung.

Übung 4.1.11. Sind $p : X \to Y$ und $q : Y \to Z$ Überlagerungen und sind die Fasern von q endlich, so ist auch $q \circ p$ eine Überlagerung.

Übung 4.1.12. Ist ein Raum lokal zusammenhängend, so ist jede Zusammenhangskomponente einer Überlagerung dieses Raums auch selbst eine Überlagerung besagten Raums.

4.2 Kategorien von Mengen mit Gruppenwirkung

Bemerkung 4.2.1. Wir gehen nun davon aus, daß der Leser mit den grundlegenden Begriffsbildungen zu Gruppenwirkungen vertraut ist, wie sie zum Beispiel in **??** entwickelt werden.

Definition 4.2.2. Sei G eine Gruppe. Eine Abbildung $\phi : X \to Y$ von einer G-Menge X in eine weitere G-Menge Y heißt ein G**-Morphismus** oder auch G**-äquivariant** genau dann, wenn gilt $\phi(gx) = g\phi(x)\ \forall g \in G, x \in X$. Mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden die G-Mengen eine Kategorie, die wir bezeichnen mit $G\text{-Ens}$ oder Ens^G.

Definition 4.2.3. Sei G eine Gruppe. Eine G-Menge X heißt **frei** genau dann, wenn alle Standgruppen trivial sind, wenn also in Formeln gilt $(gx = x \text{ für ein } x \in X) \Rightarrow (g = e)$. Eine Menge X mit einer freien transitiven Operation einer Gruppe G heißt ein **prinzipaler homogener Raum** für die Gruppe G oder auch kürzer ein G**-Torsor**.

Beispiel 4.2.4. Ist k ein Körper, $k^\times$ seine multiplikative Gruppe und V ein eindimensionaler k-Vektorraum, so ist $V \setminus 0$ ein $k^\times$-Torsor.

Übung 4.2.5. Jede Gruppe operiert auf der Menge aller ihrer Untergruppen durch Konjugation. Die Bahnen dieser Operation nennt man **Konjugationsklassen von Untergruppen**. Man erkläre, in welcher Weise die transitiven G-Mengen "klassifiziert werden durch die Konjugationsklassen von Untergruppen von G".

Definition 4.2.6. Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Eine **Rechtsoperation** von G auf X ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \to & X \\ (x,g) & \mapsto & xg \end{array}$$

derart, daß $x(gh) = (xg)h$ für alle $g,h \in G$, $x \in X$, und daß gilt $xe = x$ für das neutrale Element $e \in G$ und alle $x \in X$. Eine Menge mit einer Rechtsoperation einer Gruppe G nennt man auch eine G-**Rechtsmenge**. Ist Y eine andere G-Rechtsmenge und $\phi : X \to Y$ eine Abbildung, so heißt ϕ ein G-**Morphismus** oder auch G-**äquivariant** genau dann, wenn gilt $\phi(xg) = \phi(x)g\ \forall g \in G, x \in X$.

Bemerkung 4.2.7. Jede G-Rechtsmenge X wird zu einer G-Menge durch die Operation $gx = xg^{-1}$, die Begriffsbildung einer G-Rechtsmenge ist also in gewisser Weise obsolet. Sie dient im wesentlichen dem Zweck, in manchen Situationen suggestivere Notationen zu ermöglichen.

Bemerkung 4.2.8. Die G-Rechtsmengen für eine Gruppe G bilden auch eine Kategorie, die wir bezeichnen mit Ens-G oder Ens^G wenn wir vom Leser erwarten, daß er aus dem Kontext erschließt, ob Linksoperationen oder Rechtsoperationen gemeint sind.

Übung 4.2.9. Man zeige, daß die Linksoperation von G auf sich selber einen Isomorphismus induziert zwischen der Gruppe G und der Automorphismengruppe der G-Rechtsmenge G, in Formeln $G \xrightarrow{\sim} (\text{Ens-}G)^\times(G)$, $g \mapsto (g\cdot)$. Ebenso haben wir $G \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})^\times(G)$, $g \mapsto (\cdot g^{-1})$.

Übung 4.2.10. Der **Normalisator** einer Untergruppe H in einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von G. Man zeige, daß die Multiplikation von rechts mit g^{-1} einen Isomorphismus $N_G(H)/H \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})^\times(G/H)$ induziert zwischen der Quotientengruppe $N_G(H)/H$ und der Automorphismengruppe der G-Menge G/H.

Übung 4.2.11. Gegeben Gruppen H, G bezeichne H-Ens-G die Kategorie aller Mengen X mit einer Linksoperation von H und einer Rechtsoperation von G derart, daß gilt $(hx)g = h(xg)$ für alle $h \in H$, $x \in X$ und $g \in G$. Man erkläre, in welcher Weise die Objekte dieser Kategorie mit freier transitiver Rechtsoperation von G klassifiziert werden durch G-Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $H \to G$.

Übung 4.2.12. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G = \mathcal{C}^\times(A)$ seine Automorphismengruppe, so haben wir stets einen Funktor $\mathcal{C}(A, \ ) : \mathcal{C} \to$ Ens-G indem wir setzen $fg = f \circ g$ für $B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$, und $g \in \mathcal{C}^\times(A)$.

4.3 Quotientenabbildungen als Überlagerungen

Bemerkung 4.3.1. Unter einer **Operation einer Gruppe auf einem Objekt einer Kategorie** versteht man einen Homomorphismus von besagter Gruppe in die Automorphismengruppe von besagtem Objekt. Reden wir zum Beispiel von einer Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X, so fordern wir implizit, für alle $g \in G$ die Abbildung $X \to X$, $x \mapsto gx$ stetig sein soll.

Definition 4.3.2. Eine Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **topologisch frei** genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, für die die Operation eine Injektion $G \times U \hookrightarrow X$ liefert.

Beispiele 4.3.3. Die Gruppe $\mathbb{Z}^n$ operiert topologisch frei durch Addition auf $\mathbb{R}^n$. Die Gruppe $\{+1, -1\}$ operiert topologisch frei durch Multiplikation auf S^n und $\mathbb{R}^n \backslash 0$. Für festes k operiert die Gruppe der k-ten Einheitswurzeln $\{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\}$ topologisch frei auf $\mathbb{C}^n \backslash 0$.

Übung 4.3.4. Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorff-Raum ist topologisch frei.

Bemerkung 4.3.5. Ist X ein topologischer Raum mit einer Operation einer Gruppe G, so geben wir dem Bahnenraum X/G die Quotiententopologie bezüglich der Surjektion $X \twoheadrightarrow X/G$. Man beachte, daß diese Surjektion sogar offen ist. Nach **??** ist dann auch $Y \times X \twoheadrightarrow Y \times (X/G)$ eine Identifikation für einen beliebigen weiteren Raum Y, anders ausgedrückt liefert die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times (X/G)$.

Satz 4.3.6 (Quotientenabbildungen als Überlagerungen). *Sei X ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe G. So ist die Surjektion auf den Bahnenraum $p : X \twoheadrightarrow X/G$, $x \mapsto Gx$ eine Überlagerung.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x mit $G \times U \hookrightarrow X$ sind sowohl $p : U \to p(U)$ als auch $G \times U \to p^{-1}(p(U))$ Homöomorphismen, da diese Abbildungen beide bijektiv, offen und stetig sind. Folglich ist $p(U)$ eine trivial überlagerte Umgebung von Gx. □

Übung 4.3.7. Ist in der Situation des Satzes $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist auch $X/H \twoheadrightarrow X/G$ eine Überlagerung.

4.4 Lifts und Decktransformationen

Definition 4.4.1. Seien $p : \tilde{X} \to X$ und $f : Y \to X$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ heißt ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von f. In der Kategorientheorie hatten wir so einen Lift einen "Morphismus über X" genannt. Der Begriff Lift ist insbesondere gebräuchlich, wenn $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Man veranschaulicht sich so einen Lift durch das folgende kommutative Diagramm, das gleichzeitig auch die Terminologie erklärt:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \stackrel{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Satz 4.4.2 (Eindeutigkeit von Lifts). *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ stetig. Seien $\tilde{f}$, $\hat{f}$ zwei Lifts von f. Ist Y zusammenhängend und gibt es $z \in Y$ mit $\tilde{f}(z) = \hat{f}(z)$, so gilt $\tilde{f} = \hat{f}$.*

Beweis. Wir zeigen: Die Mengen $Y_g = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)\}$ und $Y_u = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) \neq \hat{f}(y)\}$ sind beide offen. Aus $z \in Y_g$ und Y zusammenhängend folgt dann $Y_u = \emptyset$. Sei also $y \in Y$ ein Punkt. Man wähle eine trivial überlagerte Umgebung U von $f(y)$ und eine Trivialisierung $p^{-1}(U) \simeq F \times U$ von p auf U. Gegeben $i \in F$ kürzen wir $\{i\} \times U$ als $i \times U$ ab. Seien nun $\tilde{\imath}$, $\hat{\imath} \in F$ gegeben durch $\tilde{f}(y) \in \tilde{\imath} \times U$ und $\hat{f}(y) \in \hat{\imath} \times U$. Dann ist

$$W = \tilde{f}^{-1}(\tilde{\imath} \times U) \cap \hat{f}^{-1}(\hat{\imath} \times U)$$

eine Umgebung von y, und es gilt $W \subset Y_g$ falls $y \in Y_g$ und $W \subset Y_u$ falls $y \in Y_u$. Mithin sind Y_g und Y_u beide offen. □

Definition 4.4.3. Seien $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \hat{X} \to X$ Überlagerungen von X. Ein Lift von p, als da heißt eine stetige Abbildung $d : \tilde{X} \to \hat{X}$ mit $q \circ d = p$, heißt auch eine **Decktransformation** zwischen unseren Überlagerungen. Wir erhalten so die Kategorie

$$\text{Üb}_X$$

aller Überlagerungen von X, mit Überlagerungen als Objekten und Decktransformationen als Morphismen. Wir bezeichnen die Menge aller Decktransformationen zwischen zwei Überlagerungen $\tilde{X}$ und $\hat{X}$ eines Raums X nach unseren Konventionen mit $\text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})$. Die Automorphismen einer

Überlagerung heißen auch ihre **Deckbewegungen**. Wir schreiben nach unseren Konventionen $\mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X})$ für die Gruppe der Deckbewegungen von $\tilde{X}$ über X.

Beispiele 4.4.4. Die Deckbewegungen unserer Überlagerung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ sind genau die Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Ist allgemeiner X zusammenhängend und operiert die Gruppe G topologisch frei auf X, so sind die Abbildungen $x \mapsto gx$ für $g \in G$ genau die Deckbewegungen der Überlagerung $X \to G\backslash X$. Das folgt aus dem Satz 4.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts.

Bemerkung 4.4.5. Eine Decktransformation von einer Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein, vergleiche 4.8.6 für ein Gegenbeispiel.

Lemma 4.4.6. *Jede Decktransformation ist offen. Jede bijektive Decktransformation ist ein Isomorphismus von Überlagerungen.*

Bemerkung 4.4.7. Mir ist nicht klar, ob jede Decktransformation bereits selbst eine Überlagerung sein muß. Das gilt jedoch für lokal zusammenhängende Räume.

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der Ersten, die Erste aus 4.1.8 mit der Erkenntnis, daß jede Überlagerungsabbildung étale ist. □

Übung 4.4.8. Sei $\tilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum $\tilde{X}$, und bezeichne $G = \mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X})$ ihre Deckbewegungsgruppe. Man zeige, daß G topologisch frei auf $\tilde{X}$ operiert und daß $(G\backslash\tilde{X}) \to X$ eine Überlagerung ist.

Definition 4.4.9. Eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ derart, daß die Gruppe der Deckbewegungen transitiv auf der Faser $p^{-1}(x)$ über jedem Punkt $x \in X$ operiert, nennt man auch **normal** oder **Galois** oder **regulär**.

Beispiel 4.4.10. Wir geben eine zusammenhängende dreiblättrige Überlagerung an, deren einzige Deckbewegung die Identität ist. Diese Überlagerung ist also nicht normal. Man nehme dazu für X eine "Acht" in der Ebene. Die Ausgänge des Mittelkreuzes unserer Acht numerieren wir mit 1 bis 4 derart, daß die Ausgänge 1 und 2 sowie 3 und 4 in der Acht verbunden sind. Über dem Mittelkreuz unserer Acht liegen in $\tilde{X}$ drei Kopien dieses Mittelkreuzes mit Ausgängen $1_i, \ldots, 4_i$ für $i = 1, 2, 3$. Diese Ausgänge sollen nun in unserer Überlagerung verbunden sein nach dem Schema 1_1 mit 2_2, 1_2 mit 2_3, 1_3 mit 2_1 sowie 3_1 mit 4_2, 3_2 mit 4_1 und 3_3 mit 4_3. Wenn man in der Überlagerung auf dem Ast 1 aus einer Kreuzung herausfährt kommt man also in der Etage drüber auf Ast 2 an, außer man startet schon in der obersten Etage: Dann landet man ganz unten. Fährt man aber auf dem Ast 3 aus der Kreuzung in der obersten Etage, so kommt man in derselben Etage auf Ast 4 wieder an, und startet man in einer der unteren Etagen wechselt man die Etage. Der Leser möge sich selbst überlegen, daß diese Überlagerung keine nichttrivialen Deckbewegungen zuläßt.

4.5 Universelle Überlagerungen

Definition 4.5.1. Eine Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eines punktierten Raums (X, x) heißt **universell** genau dann, wenn es für jede weitere Überlagerung $(\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ des besagten punktierten Raums genau eine basispunkterhaltende Decktransformation $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (\hat{X}, \hat{x})$ gibt.

Bemerkung 4.5.2. In kategorientheoretischer Terminologie ist eine universelle Überlagerung punktierter Räume also ein kofinales Objekt in der Kategorie aller punktierten Überlagerungen eines gegebenen punktierten Raums. Insbesondere ist eine universelle Überlagerung punktierter Räume eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Die universellen Überlagerungen in der basispunktfreien Situation, wie wir sie gleich im Anschluß definieren werden, haben recht eigentlich gar keine universelle Eigenschaft und sind auch nur eindeutig bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus.

Definition 4.5.3. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines topologischen Raums X heißt **universell** genau dann, wenn sie (1) surjektiv ist, wenn (2) beide Räume nicht leer sind und wenn (3) für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Überlagerung von punktierten Räumen $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, p(\tilde{x}))$ universell ist im Sinne der vorhergehenden Definition.

Beispiel 4.5.4. Die Überlagerung $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$ ist universell, wie wir in Kürze zeigen werden.

Bemerkung 4.5.5. In der Literatur wird eine universelle Überlagerung meist definiert als eine surjektive Überlagerung durch einen wegzusammenhängenden Raum mit trivialer Fundamentalgruppe. Diese Definition ist nach 4.8.1 für lokal zusammenziehbare Räume äquivalent zu unserer Definition.

Definition 4.5.6. Ein topologischer Raum heißt **einfach zusammenhängend** genau dann, wenn er nicht leer ist und jede Überlagerung unseres Raums trivial ist.

Übung 4.5.7. Man zeige, daß ein einfach zusammenhängender Raum notwendig zusammenhängend ist.

Definition 4.5.8. Ein topologischer Raum heißt **wegweise einfach zusammenhängend** genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und seine Fundamentalgruppe zu einem und gleichbedeutend jedem Basispunkt trivial ist.

Bemerkung 4.5.9. Wir werden in 4.8.2 zeigen, daß ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer Raum einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn er wegweise einfach zusammenhängend ist. In der Literatur versteht man unter “einfach zusammenhängend” meist, was in unserer Terminologie wegweise einfach zusammenhängend heißt. Ich will jedoch die Fundamentalgruppe erst einmal außen vor lassen und die Überlagerungstheorie in voller Allgemeinheit entwickeln.

Lemma 4.5.10. *Ein Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn die Identität auf unserem Raum eine universelle Überlagerung ist.*

Beweis. Daß die Identität auf jedem einfach zusammenhängenden Raum eine universelle Überlagerung ist, scheint mir im Lichte von 4.5.7 und 4.4.2 offensichtlich. Ist umgekehrt die Identität auf einem Raum Y eine universelle Überlagerung, so ist Y nicht leer. Ist dann $p : \hat{Y} \to Y$ eine weitere Überlagerung und wählen wir $y \in Y$, so können wir unter unseren Annahmen eine Abbildung

$$p^{-1}(y) \times Y \to \hat{Y}$$

definieren, indem wir jedem Paar $(\hat{y}, z)$ das Bild von z unter dem eindeutig bestimmten Lift $(Y, y) \to (\hat{Y}, \hat{y})$ der Identität zuordnen. Sicher ist unsere Abbildung stetig und offen. Wenden wir die Annahme des Lemmas auch auf die anderen Punkte von Y an, so erkennen wir, daß unsere Abbildung zusätzlich bijektiv ist und damit unsere Überlagerung $\hat{Y} \to Y$ trivial. □

Lemma 4.5.11. *Nichtleere reelle Intervalle sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Wir zeigen das nur für kompakte Intervalle, der allgemeine Fall bleibt dem Leser zur Übung. Wir benutzen das Kriterium aus 4.5.10. Sei also $p : U \to [a, b]$ eine Überlagerung. Aus Kompaktheitsgründen finden wir eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b$ derart, daß jedes der Teilintervalle $[a_{i-1}, a_i]$ trivial überlagert ist. Gegeben ein Punkt $u \in U$ finden wir zunächst ein i mit $p(u) \in [a_{i-1}, a_i]$, dann einen Lift $[a_{i-1}, a_i] \to U$ der Einbettung $[a_{i-1}, a_i] \hookrightarrow [a, b]$, deren Bild unseren Punkt u enthält, und diesen Lift können wir schließlich induktiv auf ganz $[a, b]$ erweitern. □

Übung 4.5.12. Das Quadrat $[0, 1]^2$ und allgemeiner alle Hyperkuben $[0, 1]^n$ sind einfach zusammenhängend.

Lemma 4.5.13 (pull-back von Überlagerungen). *Jeder pull-back einer Überlagerung ist selbst wieder eine Überlagerung.*

Beweis. Sei ein kartesisches Diagramm gegeben der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{g} & \tilde{X} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Es gilt zu zeigen, daß mit p auch q eine Überlagerung ist. Sei dazu $y \in Y$ ein Punkt. Nach Annahme gibt es eine trivial überlagerte Umgebung U von $f(y)$ in X. Es reicht zu zeigen, daß $V = f^{-1}(U)$ dann auch trivial überlagert ist. Das folgt aber leicht aus 2.5.7. □

Satz 4.5.14 (Liften bei einfachem Zusammenhang). *Sei $f : (Y, y) \to (X, x)$ eine stetige Abbildung und $(\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ eine Überlagerung. Ist Y einfach zusammenhängend, so besitzt f genau einen Lift $\hat{f} : (Y, y) \to (\hat{X}, \hat{x})$.*

Beweis. Wir betrachten das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \hat{X} & \to & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

Da Y einfach zusammenhängend ist, muß die linke Vertikale eine triviale Überlagerung sein. Wir finden also eine stetige Abbildung $Y \to Y \times_X \hat{X}$ mit $y \mapsto (y, \hat{x})$. Verknüpfen wir diese stetige Abbildung mit der oberen Horizontale, ergibt sich der gesuchte Lift. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz 4.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts, da ja Y zusammenhängend ist nach Übung 4.5.7. □

Korollar 4.5.15. *Jede surjektive Überlagerung durch einen einfach zusammenhängenden Raum ist universell.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz. □

Bemerkung 4.5.16. Ich weiß nicht, ob umgekehrt jede universelle Überlagerung durch einen einfach zusammenhängenden Raum geschehen muß.

Übung 4.5.17. Sei $u : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und $G = \mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X})$ ihre Deckbewegungsgruppe. Man zeige, daß G topologisch frei operiert und daß u einen Homöomorphismus $G\backslash\tilde{X} \xrightarrow{\sim} X$ induziert.

Übung 4.5.18. Für $n \geq 1$ betrachten wir den Kreis $K_n \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $1/n$, der rechts von der y-Achse liegt und diese im Ursprung berührt. Man zeige, daß der Raum $X = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ keine universelle Überlagerung besitzt. Dieser sogenannte **Kreisraum** dient oft als Gegenbeispiel.

4.6 Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern

Definition 4.6.1. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, seien $x, y \in X$ zwei Punkte, und sei $\gamma \in \Omega(X, y, x)$ ein Weg von x nach y. So definieren wir eine Abbildung von der Faser bei x in die Faser bei y

$$\langle \gamma \rangle : p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$$

wie folgt: Da nach 4.5.11 das Intervall $[0,1]$ einfach zusammenhängend ist, gibt es nach 4.5.14 für jeden Punkt $z \in p^{-1}(x)$ genau einen Lift $\tilde{\gamma}_z$ von γ mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}_z(0) = z$. Wir definieren $\langle \gamma \rangle(z)$ als seinen Endpunkt, in Formeln $\langle \gamma \rangle(z) = \tilde{\gamma}_z(1)$.

Lemma 4.6.2. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung.*

1. *Sind $x, y \in X$ zwei Punkte und $\gamma \simeq \beta$ homotope Wege vom einen zum anderen, so liefern sie dieselbe Abbildung $\langle \gamma \rangle = \langle \beta \rangle$ zwischen den Fasern.*

2. *Der konstante Weg ε bei $x \in X$ definiert auf der Faser $p^{-1}(x)$ die identische Abbildung $\langle \varepsilon \rangle = \mathrm{id}$.*

3. *Sind β und γ verknüpfbare Wege in X, so gilt $\langle \beta \rangle \circ \langle \gamma \rangle = \langle \beta * \gamma \rangle$.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die beiden anderen sind klar nach den Definitionen. Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie (mit festen Endpunkten) zwischen unseren Wegen, auf der vorderen bzw. hinteren Kante unseres Quadrats haben wir also $H(0,t) = \gamma(t)$ bzw. $H(1,t) = \beta(t)$, und H ist konstant auf der oberen und der unteren Kante. Da unser Quadrat nach 4.5.12 einfach zusammenhängend ist, gibt es für alle $z \in p^{-1}(x)$ einen Lift $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ von H mit $\tilde{H}(0,0) = z$. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts ist dieser Lift konstant z auf der unteren Kante, folglich ist er auf der vorderen bzw. hinteren Kante der Lift mit Anfangspunkt z von γ bzw. β. Da aber unser Lift auch konstant sein muß auf der oberen Kante, folgt $\langle \gamma \rangle(z) = \langle \beta \rangle(z)$. □

Bemerkung 4.6.3. Insbesondere ist auch für eine Homotopieklasse γ von Wegen die Abbildung $\langle \gamma \rangle$ wohldefiniert.

Satz 4.6.4 (Faserfunktor). *1. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x \in X$ ein Punkt, so definiert die Zuordnung $\gamma \mapsto \langle \gamma \rangle$ eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ auf der Faser $p^{-1}(x)$ über dem Basispunkt alias einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x) \to \mathrm{Ens}^\times(p^{-1}(x))$.*

2. *Ist $q : \hat{X} \to X$ eine zweite Überlagerung und $d : \tilde{X} \to \hat{X}$ eine Decktransformation, so ist die Einschränkung $d : p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$ auf die Fasern über x eine $\pi_1(X, x)$-äquivariante Abbildung.*

Bemerkung 4.6.5. Für einen punktierten topologischen Raum (X, x) erhalten wir also einen Funktor von seinen Überlagerungen in die Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe, indem wir jeder Überlagerung von X ihre Faser bei x zuordnen. Dieser sogenannte **Faserfunktor** $F = F_x$ wird in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} F = F_x : \mathrm{Üb}_X & \to & \pi_1(X,x)\text{-Ens} \\ p & \mapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

Beweis. Teil 1 folgt sofort aus dem vorhergehenden Lemma. Für Teil 2 müssen wir prüfen, daß gilt $d \circ \langle\gamma\rangle = \langle\gamma\rangle \circ d$ für alle $\gamma \in \pi_1(X, x)$. Aber für $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ und $z \in p^{-1}(x)$ ist ja $\langle\gamma\rangle(z) = \tilde{\gamma}_z(1)$ für den Lift $\tilde{\gamma}_z$ von γ in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt z, und offensichtlich ist $d \circ \tilde{\gamma}_z$ genau der Lift $\hat{\gamma}_{d(z)}$ von γ in $\hat{X}$ mit Anfangspunkt $d(z)$. Wir erhalten also $d\langle\gamma\rangle(z) = d(\tilde{\gamma}_z(1)) = \hat{\gamma}_{d(z)}(1) = \langle\gamma\rangle d(z)$. □

Definition 4.6.6. Eine Sequenz $(X, x) \to (Y, y) \to (Z, z)$ von punktierten Mengen heißt **exakt** genau dann, wenn das Urbild in Y des ausgezeichneten Punktes $z \in Z$ genau das Bild von $X \to Y$ ist. Eine längere Sequenz von punktierten Mengen heißt exakt genau dann, wenn sie an jeder Stelle exakt ist. Eine Gruppe fassen wir in diesem Kontext stets auf als eine punktierte Menge mit dem neutralen Element als ausgezeichnetem Punkt. Eine Sequenz von punktierten Mengen $(X, x) \to (Y, y) \to (Z, z)$ heißt eine **kurze exakte Sequenz** genau dann, wenn sie exakt ist in der Mitte im Sinne von 4.6.6 und wenn außerdem f injektiv ist und g surjektiv. Wir notieren kurze exakte Sequenzen meist $(X, x) \hookrightarrow (Y, y) \twoheadrightarrow (Z, z)$.

Bemerkung 4.6.7. Wir erinnern an den Funktor $\pi_0 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Ens}^*$, der jedem punktierten topologischen Raum (X, x) die punktierte Menge $\pi_0(X, x)$ seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet. Für eine diskrete Menge F mit ausgezeichnetem Punkt $\tilde{x} \in F$ haben wir also kanonisch $\pi_0(F, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} (F, \tilde{x})$.

Satz 4.6.8 (Fundamentalgruppe von Überlagerungen). *Bezeichne $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eine Überlagerung punktierter Räume und $F = p^{-1}(x)$ die Faser über dem ausgezeichneten Punkt x von X. So erhalten wir mit $\gamma \mapsto \langle\gamma\rangle(\tilde{x})$ als mittlerer Abbildung eine exakte Seqenz*

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \hookrightarrow \pi_1(X, x) \to \pi_0(F, \tilde{x}) \to \pi_0(\tilde{X}, \tilde{x})$$

Bemerkung 4.6.9. Statt die Injetivität des ersten Pfeils durch $\hookrightarrow$ anzudeuten, hätten wir die Sequenz auch links durch die triviale Gruppe $\pi_1(F, \tilde{x})$ erweitern können. Hat unsere Überlagerung zusätzlich konstante Blätterzahl, so können wir unsere Sequenz darüber hinaus durch eine Surjektion auf $\pi_0(X, x)$ nach rechts erweitern. Sie ist dann das Schlußstück der sogenannten "langen exakten Homotopiesequenz" zu einer sehr speziellen "Faserung".

Bemerkung 4.6.10. Insbesondere sagt uns der Satz, daß im Fall einer wegzusammenhängenden Überlagerung die Fundamentalgruppe der Basis $\pi_1(X, x)$ transitiv operiert auf der Faser $F = p^{-1}(x)$ über x, und daß wir auch im allgemeinen Fall die Isotropiegruppe eines Punktes $\tilde{x}$ aus der Faser unter dieser Operation in kanonischer Weise identifizieren können mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ der Überlagerung.

Beweis. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ beliebig und $x, y \in X$ ihre Bilder. So liefert nach unseren Definitionen p eine Bijektion

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \Omega(X, y, x) \mid \langle\gamma\rangle(\tilde{x}) = \tilde{y}\},$$

und diese Bijektion induziert eine Bijektion auf Homotopieklassen. Setzen wir $\tilde{y} = \tilde{x}$, so ergibt sich die Injektivität der ersten Abbildung und die Exaktheit unserer Sequenz an der Stelle $\pi_1(X, x)$. Läßt sich ein Punkt $\tilde{y}$ aus der Faser F in $\tilde{X}$ durch einen Weg α mit $\tilde{x}$ verbinden, so liegt $\gamma = p \circ \alpha$ in $\pi_1(X, x)$ und wir haben $\tilde{y} = \langle\gamma\rangle(\tilde{x})$. Haben wir umgekehrt $\tilde{y} = \langle\gamma\rangle(\tilde{x})$ für ein $\gamma \in \pi_1(X, x)$, so verbindet der entsprechende Lift von γ auch unsere beiden Punkte in $\tilde{X}$. Das zeigt die Exaktheit unserer Sequenz an der Stelle $\pi_0(F, \tilde{x})$. □

Korollar 4.6.11 (Fundamentalgruppe eines Quotienten). *Operiert eine Gruppe topologisch frei auf einem wegweise einfach zusammenhängenden Raum, so hat der Bahnenraum besagte Gruppe als Fundamentalgruppe.*

Beweis. Sei X unser Raum und G unsere Gruppe. Bezeichne $p : X \to X/G$ die Überlagerungsabbildung. Sei $x \in X$ ein Punkt und $p(x) = \bar{x}$ sein Bild im Quotientenraum. Per definitionem operiert G frei und transitiv auf der Faser $p^{-1}(\bar{x})$. Nach 4.6.8 operiert auch $\pi_1(X/G, \bar{x})$ frei und transitiv auf der Faser, und nach 4.6.4 kommutieren diese beiden Operationen. Das anschließende algebraische Lemma beendet den Beweis. □

Lemma 4.6.12. *Operieren zwei Gruppen G und H frei und transitiv auf derselben Menge F und kommutieren diese Operationen, in Formeln $g(hp) = h(gp)\ \forall g \in G,\ h \in H,\ p \in F$, so sind die Gruppen G und H isomorph.*

Bemerkung 4.6.13. Genauer liefert jedes Element $x \in F$ einen Gruppenisomorphismus $c = c_c : H \to G$ vermittels der Vorschrift $hx = c(h)^{-1}x$, und besagter Isomorphismus ist unabhängig von x genau dann, wenn die Gruppen G und H abelsch sind.

Beweis. Wir überlassen die formale Rechnung dem Leser und versuchen stattdessen eher informell, die Aussage transparent zu machen. Da H frei und transitiv operiert, ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H & \to & F \\ h & \mapsto & hx \end{array}$$

eine H-äquivariante Bijektion. Wir dürfen also $F = H$ annehmen. Die H-äquivarianten Abbildungen $\phi : H \to H$, also die Abbildungen ϕ mit $\phi(hf) = h\phi(f) \ \ \forall h, f \in H$, sind aber genau die Rechtsmultiplikationen mit Elementen von H. Das ist der strukturelle Grund für unser Lemma. □

Beispiele 4.6.14. Aus dem Korollar folgt insbesondere $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$ für $n \geq 2$ und $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Bemerkung 4.6.15. Ist ganz allgemein K irgendein algebraischer Abschluß von $\mathbb{R}$, so setzen wir $\mathbb{Z}_K(1) = \ker(\exp : K \to K^\times)$ und finden kanonische Isomorphismen $\pi_1(K^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_K(1)$. Für unseren üblichen Abschluß $K = \mathbb{C}$ schreiben wir $2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{Z}(1)$ und unser allgemeiner Isomorphismus spezialisiert zu einem kanonischen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(1)$, der insofern "kanonischer" ist als die schlichte Identifikation besagter Fundamentalgruppe mit $\mathbb{Z}$, als er zum Ausdruck bringt, daß die komplexe Konjugation auf der Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^\times$ die Multiplikation mit -1 induziert.

Übung 4.6.16. Fordern wir im Korollar 4.6.11 nur X wegzusammenhängend, so erhalten wir für jedes $x \in X$ eine Surjektion $\pi_1(X/G, \bar{x}) \twoheadrightarrow G$ mit Kern $\pi_1(X, x)$.

4.7 Klassifikation von Überlagerungen

Satz 4.7.1 (Klassifikation von Überlagerungen). *Sei (X, x) ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer punktierter Raum.*

1. *Wir erhalten eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender* punktierter *Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ von (X, x) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x)$ vermittels der Zuordnung*

$$p \mapsto \operatorname{im}\{p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, x)\}$$

2. *Wir erhalten so auch eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X und den Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$.*

Bemerkung 4.7.2. In der Literatur wird dieser Satz oft allgemeiner für "semilokal einfach zusammenhängende" Räume bewiesen. Der hier gegebene Beweis funktioniert ohne Änderungen auch in diesem allgemeineren Kontext. Ich habe es dennoch vorgezogen, mich auf lokal zusammenziehbare Räume zu beschränken, da mir diese Bedingung weniger technisch scheint und da sie alle mir bekannten Anwendungen abdeckt. In Wirklichkeit verstehe ich diesen Satz als ein Korollar zum Satz über den Faserfunktor 4.8.4.

Beweis. Wir zeigen nur den ersten Teil, der Zweite folgt dann mit **??** und 4.6.8. Wir müssen zeigen, daß unsere Zuordnung sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Wir beginnen mit der Injektivität und unterbrechen an dieser Stelle den Beweis, um einige Ingredienzen bereitzustellen. □

Satz 4.7.3 (Liftbarkeitskriterium). *Sei* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ *eine Überlagerung,* (Y, y) *ein zusammenhängender lokal wegzusammenhängender punktierter Raum und* $f : (Y, y) \to (X, x)$ *stetig. Genau dann existiert ein Lift* $\tilde{f}$ *von* f*, wenn in der Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$ *die Inklusion* $\operatorname{im} f_\sharp \subset \operatorname{im} p_\sharp$ *gilt.*

Beweis. Wir veranschaulichen uns die Situation mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

Existiert ein Lift $\tilde{f}$, so folgt $p_\sharp \circ \tilde{f}_\sharp = f_\sharp$ und damit $\operatorname{im} f_\sharp \subset \operatorname{im} p_\sharp$. Um die andere Richtung zu zeigen, bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{Y}, \tilde{y}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

und behaupten, daß unter unseren Annahmen $q_\sharp : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \to \pi_1(Y, y)$ surjektiv ist. Sonst gäbe es nämlich einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(Y, y)$ mit $\langle\gamma\rangle(\tilde{y}) \neq \tilde{y}$, also $\langle f \circ \gamma\rangle(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$ da ja die obere Horizontale in unserem Quadrat eine Bijektion $q^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$ induziert, also $[f \circ \gamma] \notin \operatorname{im} p_\sharp$ im Widerspruch zur Annahme. Aus unseren Voraussetzungen an die Topologie von Y folgt aber mit 4.1.12, daß die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{Y}$ selbst schon Überlagerungen von Y sind und daß sie wegzusammenhängend sind. Nach 4.6.8 bildet dann die Zusammenhangskomponente von $\tilde{y}$ in $\tilde{Y}$ eine einblättrige Überlagerung von Y, und die schenkt uns den gesuchten Lift. □

Beweis der Injektivität im Klassifikationssatz. Sind $(\tilde{X}, \tilde{x})$ und $(\hat{X}, \hat{x})$ zusammenhängende punktierte Überlagerungen derart, daß die Bilder ihrer Fundamentalgruppen in $\pi_1(X, x)$ zusammenfallen, so liefert uns das Liftbarkeitskriterium 4.7.3 Decktransformationen hin und zurück, deren Komposition aufgrund der Eindeutigkeit von Lifts jeweils die Identität sein muß. Das zeigt die Injektivität im Klassifikationssatz. Die Surjektivität wird nach einigen Vorbereitungen im nächsten Abschnitt bewiesen. □

4.8 Existenz universeller Überlagerungen

Satz 4.8.1 (Existenz universeller Überlagerungen). *Jeder zusammenhängende und lokal zusammenziehbare Raum besitzt bis auf Isomorphismus genau eine wegweise einfach zusammenhängende Überlagerung, und diese ist auch universell.*

Beweis. Wir zeigen in diesem Beweis zunächst einmal nur, daß unser Raum eine wegweise einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt. Dazu wählen wir $x \in X$ fest und betrachten die Menge $\tilde{X}$ aller Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt x,

$$\tilde{X} = \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma \text{ ist stetig, } \gamma(0) = x\}/ \simeq$$

wobei $\simeq$ Homotopie mit festen Endpunkten meint. Die Homotopieklasse von γ heiße wieder $[\gamma]$. Insbesondere haben wir also eine Abbildung $u : \tilde{X} \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, die jeder Homotopieklasse von Wegen ihren gemeinsamen Endpunkt zuordnet. Wir erklären nun auf $\tilde{X}$ eine Topologie. Für jeden stetigen Weg γ mit Anfangspunkt x und jede offene Umgebung V seines Endpunktes $\gamma(1)$ setzen wir dazu

$$U(\gamma, V) = \{[\beta * \gamma] \mid \beta : [0,1] \to V \text{ ist stetig mit } \beta(0) = \gamma(1)\}$$

und betrachten auf $\tilde{X}$ die von allen $U(\gamma, V)$ erzeugte Topologie. Offensichtlich ist $u : \tilde{X} \to X$ stetig, das Urbild von V ist ja gerade die Vereinigung der $U(\gamma, V)$ über alle Wege γ mit Endpunkt in V. Wir müssen zeigen, daß u eine Überlagerung ist. Für $z \in X$ wählen wir dazu eine offene wegzusammenhängende Umgebung V von z, die ganz in einer zusammenziehbaren Umgebung enthalten ist. Betrachten wir nun die Abbildung

$$\Phi : p^{-1}(z) \times V \to \tilde{X}, \quad ([\gamma], v) \mapsto [\beta * \gamma],$$

wo $\beta : [0,1] \to V$ irgendein stetiger Weg von z nach v ist, der ganz in V verläuft. Aufgrund unserer Voraussetzungen an V ist Φ wohldefiniert und eine Injektion mit Bild $u^{-1}(V)$. Wir zeigen, daß Φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

1. Φ ist stetig. In der Tat, liegt $\Phi([\gamma], v)$ in $U(\alpha, W)$, so auch $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1)$ für jede offene wegzusammenhängende Umgebung V_1 von v in $V \cap W$.

2. Φ ist offen. In der Tat, für wegzusammenhängendes offenes $V_1 \subset V$ gilt $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1) = U(\beta * \gamma, V_1)$ für jeden Weg $\beta : [0,1] \to V$ mit $\beta(0) = z$, $\beta(1) \in V_1$.

Also ist $u : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und wir müssen nur noch zeigen, daß die Fundamentalgruppe von $\tilde{X}$ trivial ist. Bezeichne $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Klasse des konstanten Weges x. Jeder Weg $\omega : ([0,1], 0) \to (X, x)$ mit Anfangspunkt x hat als Lift den Weg $\tilde{\omega} : ([0,1], 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ gegeben durch $\tilde{\omega}(s) = [\omega_s]$ mit $\omega_s(t) = \omega(st)$. Die Wege $\omega_s : [0,1] \to X$ sind also Anfangsstücke von ω, die so langsam durchlaufen werden, daß gilt $\omega_s(1) = \omega(s)$. Offensichtlich hat $\tilde{\omega}$ den Endpunkt $[\omega]$. Mit X ist also auch $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Ist weiter $\gamma \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{z}, \tilde{x})$ ein Weg mit Anfangspunkt $\tilde{x}$, so ist natürlich γ der Lift mit Anfangspunkt $\tilde{x}$ von $u \circ \gamma \in \Omega(X, p(\tilde{z}), x)$, insbesondere ist der Endpunkt $\tilde{z} = \gamma(1)$ von γ genau $\gamma(1) = [u \circ \gamma] \in \tilde{X}$. Daß γ geschlossen ist bedeutet also genau $[u \circ \gamma] = [\varepsilon]$. Diese Homotopie läßt sich nun liften und zeigt, daß γ homotop ist zum konstanten Weg $\varepsilon \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x})$. Mithin ist die Fundamentalgruppe von $\tilde{X}$ trivial. Daß die hier konstruierte Überlagerung bereits universell ist, zeigt das folgende Korollar, in dessen Beweis nur der bereits bewiesene Teil des Satzes eingeht. □

Korollar 4.8.2. *Ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn er wegweise einfach zusammenhängend ist.*

Beweis. Ist unser Raum einfach zusammenhängend, so muß die im Beweis von 4.8.1 konstruierte wegweise einfach zusammenhängende Überlagerung schon die Identität sein. Ist umgekehrt X unser Raum und ist die Fundamentalgruppe von X trivial, so besitzt für jede punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ die Identität $f = \mathrm{id}$ auf X einen Lift nach dem Liftbarkeitskriterium 4.7.3. Mit 4.5.10 ist dann X einfach zusammenhängend. □

Satz 4.8.3 (Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung).

Die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden lokal zusammenziehbaren Raums ist isomorph zur Deckbewegungsgruppe seiner universellen Überlagerung.

Beweis. Nach 4.5.17 operiert die Deckbewegungsgruppe auf dem Totalraum jeder universellen Überlagerung topologisch frei mit dem ursprünglichem

Raum als Quotienten. Nach 4.8.2 ist unter unseren Voraussetzungen die universelle Überlagerung wegweise einfach zusammenhängend. Der Satz folgt nun aus Korollar 4.6.11 über die Fundamentalgruppe von Quotienten von wegweise einfach zusammenhängenden Räumen nach topologisch freien Gruppenoperationen. □

Beweis der Surjektivität im Klassifikationssatz. Genauer als im vorhergehenden Satz 4.8.3 formuliert liefert jeder Punkt $\tilde{x}$ aus der Faser über x in einer universellen Überlagerung $\tilde{X}$ von X einen Isomorphismus

$$c = c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$$

zwischen der Fundamentalgruppe von X und der Deckbewegungsgruppe G unserer universellen Überlagerung vermittels der Regel $c(\gamma)(\tilde{x}) = \langle\gamma\rangle^{-1}(\tilde{x})$. Ist eine Untergruppe $H \subset \pi_1(X, x)$ gegeben, so bezeichnen wir ihr Bild $c(H) \subset G$ der Einfachkeit halber auch mit H und betrachten den Quotienten $H\backslash\tilde{X}$ sowie die offensichtliche Abbildung

$$q : (H\backslash\tilde{X}, H\tilde{x}) \to (X, x)$$

Der Leser mag selbst nachprüfen, daß das die gesuchte zusammenhängende punktierte Überlagerung ist mit $\operatorname{im} q_\sharp = H$. □

Satz 4.8.4 (über den Faserfunktor). *Sei X ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. So ist der Faserfunktor $p \mapsto p^{-1}(x)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der $\pi_1(X, x)$-Mengen*

$$\text{Üb}_X \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$

Bemerkung 4.8.5. Unter diesem Funktor entsprechen die zusammenhängenden Überlagerungen von X nach 4.6.8 genau den transitiven $\pi_1(X, x)$-Mengen. Unser Klassifikationssatz 4.7.1 ergibt sich also mithilfe von 4.2.5 auch als ein Korollar zum vorhergehenden Satz.

Beweis. Wir werden im übernächsten Abschnitt sogar eine noch allgemeinere Aussage beweisen. Zunächst müssen wir jedoch weitere Hilfsmittel aus der Kategorientheorie bereitstellen. □

Bemerkung 4.8.6. Eine Decktransformation einer zusammenhängenden Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein. Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, sucht man zunächst Gruppen $G \supset H$ derart, daß die G-Menge G/H nicht-bijektive G-äquivariante Selbstabbildungen besitzt, d.h. daß es $a \in G$ gibt mit $H \subsetneqq aHa^{-1}$. Hier kann man zum Beispiel in

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q})$ die Untergruppe H aller oberen Dreiecksmatrizen betrachten mit Einsen auf der Diagonale und einem ganzzahligen Eintrag in der oberen rechten Ecke, und als a eine geeignete Diagonalmatrix nehmen. Nun kann man zu jeder Gruppe einen lokal zusammenziehbaren Raum konstruieren, der besagte Gruppe als Fundamentalgruppe hat. Der vorhergehende Satz liefert dann das gesuchte Gegenbeispiel.

4.9 Adjungierte Funktoren

Bemerkung 4.9.1. Das Konzept adjungierter Funktoren gehört zu den Grundbegriffen der Kategorientheorie. Ich habe seine Behandlung dennoch bis hierher hinausgezögert, da im folgenden Abschnitt 4.10 die ersten gehaltvollen Anwendungen kommen.

Definition 4.9.2. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien und $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Eine **Adjunktion** α **von** L **mit** R oder in Kurzschreibweise $\alpha : (L, R)$ ist eine natürliche Äquivalenz

$$\alpha : \mathcal{B}(L\ ,\ ) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\ , R\ )$$

von Funktoren $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathrm{Ens}$, d.h. eine Sammlung von "natürlichen" Isomorphismen $\alpha_{X,Y} : \mathcal{B}(LX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(X, RY)$ für $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$.

Bemerkung 4.9.3. Gegeben L und R kann es durchaus verschiedene Adjunktionen α von L mit R geben. Gegeben zwei Tripel (α, L, R) und (α', L, R') wie oben mit demselben L gibt es jedoch nach dem Yoneda-Lemma stets genau eine Äquivalenz $R \xrightarrow{\sim} R'$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(LX, Y) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}(X, RY) \\ \| & & \downarrow \\ \mathcal{B}(LX, Y) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{A}(X, R'Y) \end{array}$$

mit der durch diese Äquivalenz induzierten rechten Vertikale kommutiert. In der Tat, fassen wir für festes Y unser Diagramm auf als Diagramm von Funktoren in X, so sagt uns das Yoneda-Lemma gerade, daß die a priori durch die Kommutativität des Diagramms erklärte natürliche Transformation in der rechten Vertikale bereits von einem eindeutig bestimmten Morphismus $RY \xrightarrow{\sim} R'Y$ herkommen muß, und daß diese eindeutig bestimmten Morphismen eine Äquivalenz $R \xrightarrow{\sim} R'$ liefern, ist dann nicht mehr schwer zu sehen. Das Paar (α, R) ist also, wenn es denn existiert, durch den Funktor L im wesentlichen eindeutig bestimmt. Man benutzt deshalb meist den bestimmten Artikel und nennt R **den rechtsadjungierten Funktor** zu L, wobei eigentlich nicht nur der Funktor R gemeint ist, sondern das Paar (α, R). Ebenso wird auch das Paar (α, L) durch R im wesentlichen eindeutig festgelegt und man nennt L **den linksadjungierten Funktor** zu R. Spricht man von einem **adjungierten Paar** (L, R), so ist der Leser gefordert, die vom Autor gemeinte Adjunktion α von L und R aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiel 4.9.4. Der Vergißfunktor von den k-Vektorräumen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge X den **freien k-Vektorraum** über der Menge X zuordnet, d.h. den Vektorraum aller Abbildungen $X \to k$, die nur an endlich vielen Stellen $x \in X$ verschieden sind von Null. Der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet. Ist allgemein $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Funktor in die Kategorie der Mengen und besitzt dieser Funktor einen Linksadjungierten, so nennen wir den Wert des Linksadjungierten auf einer Menge X das **freie Objekt von $\mathcal{C}$ über** X und notieren dies freie Objekt manchmal $\mathcal{C}\langle X\rangle$. In dieser Notation wäre $\mathrm{Grp}\langle X\rangle = FX$ die freie Gruppe über einer Menge X und $\mathrm{Kring}^k\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ wäre der Polynomring in n Variablen über einem kommutativen Ring k, den man gewöhnlich $k[T_1, \ldots, T_n]$ notiert, wohingegen $\mathrm{Ring}^k\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ den "Polynomring in nichtkommutierenden Variablen" bezeichnen würde, den man gewöhnlich $k\{T_1, \ldots, T_n\}$ notiert.

Beispiel 4.9.5. Der Funktor $\mathrm{Spek} : \mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}^{\circ} \to \mathrm{Top}$ ist rechtsadjungiert zum Funktor $\mathcal{C} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{C}}^{\circ}$. Diese Aussage ist der Kern der Argumentation in **??**, wie wir gleich näher ausführen werden.

Beispiel 4.9.6. Gegeben ein Körper k und ein k-Vektorraum E ist der Funktor $E \otimes_k : \mathrm{Lin}_k \to \mathrm{Lin}_k$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}_k(E, \ ) : \mathrm{Lin}_k \to \mathrm{Lin}_k$ und der Funktor $\mathrm{Hom}_k(E, \ ) : \mathrm{Lin}_k \to \mathrm{Lin}_k^{\circ}$ hat als Linksadjungierten den Funktor $\mathrm{Hom}_k(E, \ ) : \mathrm{Lin}_k^{\circ} \to \mathrm{Lin}_k$.

Bemerkung 4.9.7. Gegeben eine Adjunktion α von Funktoren (L, R) erhalten wir eine Transformation $\hat{\alpha} : \mathrm{id} \to RL$ durch die Vorschrift $\hat{\alpha}_X = \alpha_{X,LX}(\mathrm{id}_{LX})$, d.h. $\hat{\alpha}_X : X \to RLX$ ist das Bild der Identität unter dem Adjunktionsisomorphismus $\mathcal{B}(LX, LX) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(X, RLX)$. In derselben Weise erhalten wir auch eine Transformation $\check{\alpha} : LR \to \mathrm{id}$.

Übung 4.9.8. Gegeben eine Adjunktion α von Funktoren (L, R) ist die Verknüpfung $(\check{\alpha}L) \circ (L\hat{\alpha})$ die identische Transformation vom Funktor L zu sich selber. Ebenso ist $(R\check{\alpha}) \circ (\hat{\alpha}R)$ die Identität auf R. Sind umgekehrt Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ gegeben und Transformationen $\epsilon : \mathrm{id} \to RL$ und $\eta : LR \to \mathrm{id}$ mit der Eigenschaft $(R\eta) \circ (\epsilon R) = \mathrm{id}$ und $(\eta L) \circ (L\epsilon) = \mathrm{id}$, so gibt es genau eine Adjunktion α von Funktoren (L, R) mit $\hat{\alpha} = \epsilon$ und $\check{\alpha} = \eta$.

Lemma 4.9.9. *Seien gegeben Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und eine Adjunktion α von L mit R.*

1. *Genau dann ist $\hat{\alpha} : \mathrm{id} \to RL$ eine Äquivalenz von Funktoren, wenn L volltreu ist.*

2. *Genau dann ist $\check{\alpha} : LR \to \mathrm{id}$ eine Äquivalenz von Funktoren, wenn R volltreu ist.*

3. *Sind $\hat{\alpha}$ und $\check{\alpha}$ Äquivalenzen von Funktoren, so sind L und R Äquivalenzen von Kategorien. Man nennt L und R dann zueinander* **inverse Funktoren**.

Beweis. Gegeben $A, A' \in \mathcal{A}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(A, A') & \to & \mathcal{B}(LA, LA') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(A, RLA') & = & \mathcal{A}(A, RLA') \end{array}$$

wobei die obere Horizontale von L induziert ist, die linke Vertikale die Verknüpfung ist mit $\hat{\alpha}_{A'}$ und die rechte die Adjunktion α. Das zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage zeigt man genauso. Für die dritte Aussage bemerkt man, daß unter der Annahme $LRB \cong B$ jedes $B \in \mathcal{B}$ isomorph ist zu einem Objekt der Gestalt LA. □

Bemerkung 4.9.10. Satz **??** zeigt also insbesondere, daß der Funktor $\mathcal{C}$ von den kompakten topologischen Räumen in die $\mathbb{C}$-Algebren volltreu ist.

Übung 4.9.11. Sei $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. So besitzt der offensichtliche Funktor G-Ens $\to$ H-Ens einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einer H-Menge X die G-Menge $G \times_H X$ aller H-Bahnen in $G \times X$ unter der Operation $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$ zuordnet. Ebenso besitzt er einen Rechtsadjungierten $\mathrm{ind}_H^G : X \mapsto \mathrm{Ens}^H(G, X)$.

Bemerkung 4.9.12. In der Literatur heißt $G \times_H X$ meist die "von X induzierte G-Menge". Wir werden jedoch von der **von X koinduzierten G-Menge** reden, um mit anderen Begriffsbildungen kompatibel zu bleiben. Ein Ausdruck der Gestalt $G \times_H X$ kann auch ein Faserprodukt bedeuten. Der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung jeweils gemeint ist.

Übung 4.9.13. Ist G eine Gruppe mit Untergruppen H, K und bezeichnet $L = H \cap K$ ihren Schnitt, so induziert die Multiplikation eine Bijektion $H \times_L K \xrightarrow{\sim} HK$.

Übung 4.9.14. Sei $\varphi : H \to G$ ein Homomorphismus topologischer Gruppen. Bezeichnet Top^G die Kategorie der topologischen Räume mit einer stetigen G-Operation, so besitzt der offensichtliche Funktor $\mathrm{Top}^G \to \mathrm{Top}^H$ einen Linksadjungierten, den wir prod_H^G notieren und der einem H-Raum X den G-Raum $G \times_H X$ mit seiner Quotiententopologie zuordnet. Die Stetigkeit der Operation von G folgt hier zum Beispiel mit 4.3.5.

Bemerkung 4.9.15. Bezeichne $[g, x] \in G \times_H X$ die Bahn von (g, x). Ist $H \subset G$ eine Untergruppe und kommt X schon von einer G-Menge her, so definiert die Abbildung $[g, x] \mapsto (gH, gx)$ eine G-äquivariante Bijektion

$$G \times_H X \xrightarrow{\sim} G/H \times X$$

Übung 4.9.16. Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten, als da heißt: Gegeben Funktoren $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ mit Linksadjungierten L und L' ist auch $(L \circ L', R' \circ R)$ ein adjungiertes Paar in kanonischer Weise.

4.10 Der abstrakte Faserfunktor

Bemerkung 4.10.1. Wir wollen nun unsere Überlagerungstheorie unter einem noch abstrakteren Blickwinkel verstehen, einerseits als Modellfall und Anwendungsbeispiel für kategorientheoretische Methoden, andererseits um die Verwandschaft zur Galoistheorie herauszuarbeiten. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $A \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $G = \mathcal{C}^\times(A)$ seine Automorphismengruppe, so haben wir stets einen Funktor in die G-Rechtsmengen

$$\mathcal{C}(A, \ ) : \mathcal{C} \ \to \ \text{Ens-}G$$

indem wir setzen $fg = f \circ g$ für $B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ und $g \in \mathcal{C}^\times(A)$. Unser Satz 4.8.4 über den Faserfunktor läßt sich nun verallgemeinern wie folgt:

Satz 4.10.2 (über den abstrakten Faserfunktor). *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und $G = \mathrm{Top}_X^\times(\tilde{X})$ ihre Deckbewegungsgruppe. So liefert der Funktor $\mathrm{Top}_X(\tilde{X}, \ )$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von X und der Kategorie der G-Rechtsmengen*

$$T = \mathrm{Top}_X(\tilde{X}, \ ) : \text{Üb}_X \ \xrightarrow{\sim} \ \text{Ens-}G$$

Bemerkung 4.10.3. Unser bisheriger Faserfunktor $F = F_x : \text{Üb}_X \to \text{Ens}$ ist äquivalent zu T gefolgt vom vergeßlichen Funktor, genauer liefert jeder Punkt $\tilde{x}$ aus der Faser über x eine solche Äquivalenz $\tau = \tau_{\hat{X}} : T\hat{X} \to F\hat{X}$, $d \mapsto d(\tilde{x})$. Aufgrund dieser Äquivalenzen nennen wir T auch den **abstrakten Faserfunktor**. Ist X zusammenhängend und lokal zusammenziehbar, so liefert 4.8.3 zusammen mit 4.6.12 einen Isomorphismus $c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$. Fassen wir dann T als Funktor nach Ens-G auf und F als Funktor nach $\pi_1(X, x)$-Ens und betrachten darüber hinaus den Funktor C, der die G-Rechtsoperation durch Inversenbildung in eine Linksoperation verwandelt und diese G-Linksoperation dann mithilfe von $c_{\tilde{x}}$ in eine Linksoperation von $\pi_1(X,x)$, so liefert τ sogar eine Äquivalenz $C \circ T \xrightarrow{\sim} F$ von Funktoren $\text{Üb}_X \to \pi_1(X,x)\text{-Ens}$. In Formeln ausgedrückt haben wir also unter diesen Umständen ein Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \text{Üb}_X & \xrightarrow{T} & \text{Ens-}G \\ \| & & \downarrow C \\ \text{Üb}_X & \xrightarrow{F} & \pi_1(X,x)\text{-Ens} \end{array}$$

das "kommutiert bis auf Äquivalenz von Funktoren". Da C offensichtlich eine Äquivalenz von Kategorien ist, ist hier T eine Äquivalenz von Kategorien genau dann, wenn dasselbe gilt für F. Mithin folgt der Satz 4.8.4 über den Faserfunktor aus dem Satz über den abstrakten Faserfunktor.

Beweis von 4.10.2. Wir konstruieren zunächst einen Funktor in die Rückrichtung. Ist F eine Menge mit einer Rechtsoperation von G, so bilden wir eine Überlagerung

$$F \times_G \tilde{X} \to X$$

von X wie folgt: Wir betrachten auf $F \times \tilde{X}$ die Operation von G gegeben durch $g(m,\tilde{x}) = (mg^{-1}, g\tilde{x})$ und bezeichnen mit $F \times_G \tilde{X}$ den Bahnenraum $F \times_G \tilde{X} = G \backslash (F \times \tilde{X})$. Bezeichne $[m,\tilde{x}] \in F \times_G \tilde{X}$ die Bahn von $(m,\tilde{x})$. Da G topologisch frei operiert auf $\tilde{X}$ nach 4.5.17, ist $F \times_G \tilde{X} \to X$, $[m,\tilde{x}] \mapsto u(\tilde{x})$ nach 4.3.6 eine Überlagerungsabildung. Den in dieser Weise konstruierten Funktor in die Rückrichtung bezeichnen wir mit A, in Formeln

$$A = \times_G \tilde{X} : \text{Ens-}G \to \text{Üb}_X$$

Als nächstes erklären wir eine Adjunktion (A,T). Gegeben eine G-Rechtsmenge F und eine Überlagerung $\hat{p} : \hat{X} \to X$ gilt es, eine natürliche Bijektion

$$\text{Ens}^{-G}(F, \text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}_X(F \times_G \tilde{X}, \hat{X})$$

anzugeben. Man erhält sie durch Einschränken der offensichtlichen Bijektion

$$\text{Ens}(F, \text{Top}(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(F \times \tilde{X}, \hat{X})$$

auf die Fixpunkte einer geeigneten G-Operation auf beiden Seiten. Jetzt müssen wir nach 4.9.9 nur noch zeigen, daß die durch unsere Adjunktion definierten Transformationen $\text{id} \to TA$ und $AT \to \text{id}$ Äquivalenzen sind. Das überlassen wir dem Leser. □

Bemerkung 4.10.4. Die vorstehende Theorie ist strukturell eng verwandt mit der Galoistheorie. Um Technikalitäten zu vermeiden erkläre ich diese Verwandschaft nur im Fall einer endlichen Galoiserweiterung $\tilde{K}/K$ mit $\tilde{K}$ algebraisch abgeschlossen. In diesem Fall kann man den Hauptsatz der Galoistheorie dahingehend interpretieren, daß der Funktor $\text{Kring}^K(\ ,\tilde{K})$ der

K-linearen Körperhomomorphismen nach $\tilde{K}$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{\text{endliche Körpererweiterungen von } K\} \xrightarrow{\sim} \{\text{transitive } \operatorname{Gal}(\tilde{K}/K)\text{-Mengen}\}$$

definiert, für $\operatorname{Gal}(\tilde{K}/K) = (\mathrm{Kring}^K)^\times(\tilde{K})$ die Galoisgruppe. Die Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen kann in diesem Licht aufgefaßt werden als ein geometrisches Analogon zur opponierten Kategorie der Kategorie der Körpererweiterungen und die universelle Überlagerung ist ein geometrisches Analogon für den algebraischen Abschluß.

Übung 4.10.5. Sei X zusammenhängend und lokal zusammenziehbar und sei $(\hat{X}, \hat{x}) \to (X, x)$ eine zusammenhängende Überlagerung. So ist die Gruppe der Deckbewegungen $\mathrm{Top}_X^\times(\hat{X})$ isomorph zu $N/\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ mit $N \subset \pi_1(X, x)$ dem Normalisator von $\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$. Hinweis: 4.2.10.

4.11 Die Zopfgruppe

Definition 4.11.1. Sei X_n die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit genau n Elementen. Wir geben X_n eine Topologie vermittels der Identifikation

$$X_n \cong \mathcal{S}_n \backslash (\mathbb{C}^n - \Delta)$$

für $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ die **große Diagonale**, d.h. die Menge aller n-Tupel komplexer Zahlen, in denen mindestens eine Zahl doppelt vorkommt. Die Fundamentalgruppe von X_n heißt die **Zopfgruppe in n Strängen**, englisch **braid group**, französisch **groupe de tresses**. Als Basispunkt nehmen wir meist $* = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bemerkung 4.11.2. Die Elemente der Zopfgruppe kann man durch Bilder darstellen wie etwa

für ein Element $\gamma \in \pi_1(X_3)$. Das Bild stellt im Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ die Menge $\{(z, t) \mid z \in \gamma(t)\}$ dar, mit t als senkrechter Koordinate und mit der Konvention, daß Punkte mit größerem Imaginärteil weiter hinten liegen mögen. Die Verknüpfung in unserer Zopfgruppe bedeutet in dieser Anschauung schlicht das "Aneinanderhängen" solcher "Zöpfe".

Notation 4.11.3. Bezeichne $s_i \in \pi_1(X_n, *)$ für $1 \leq i \leq n-1$ die Klasse des Weges, unter dem der Punkt i durch die untere Halbebene nach $i+1$ wandert und gleichzeitig der Punkt $i+1$ durch die obere Halbebene nach i. Alle anderen Punkte sollen unter s_i auf ihren Plätzen bleiben. In Formeln setzen wir also

$$s_i(t) = \{1, \ldots, i-1,\ (i + 1/2 - \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}/2),\ (i + 1/2 + \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t}/2),\ i+2, \ldots, n\}$$

Satz 4.11.4 (Erzeuger und Relationen der Zopfgruppe). *Die Zopfgruppe in n Strängen wird dargestellt durch die Erzeuger $s_1, \ldots, s_{n-1}$ mit den sogenannten* **Zopf-Relationen**

$$\begin{array}{rl} s_i s_j = s_j s_i & \text{falls } |i-j| > 1; \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{falls } |i-j| = 1. \end{array}$$

Bemerkung 4.11.5. In der Anschauung überzeugt man sich leicht, daß die s_i die Zopfgruppe erzeugen die Zopfrelationen erfüllen. Hier verstellt das formale Argument nur den Blick. Das eigentliche Problem ist, zu zeigen, daß nicht noch weitere Relationen benötigt werden.

Bemerkung 4.11.6. Wir schicken dem Beweis einige allgemeine Überlegungen zu Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten voraus.

Definition 4.11.7. Eine Teilmenge N einer d-Mannigfaltigkeit M heißt eine **n-dimensionale Untermannigfaltigkeit** genau dann, wenn es für jeden Punkt $y \in N$ eine offene Umgebung $U \Subset M$ gibt und einen Homöomorphismus $U \cong \mathbb{R}^d$ mit $U \cap N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times 0$. Ein derartige offene Menge U nennen wir auch eine **plättbare Umgebung** von $y \in N$. Die Differenz $d - n$ heißt auch die **Kodimension** der Untermannigfaltigkeit N in M.

Proposition 4.11.8. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $N \underset{\mathrm{A}}{\subset} M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ≥ 3. So induziert für beliebiges $p \in M \backslash N$ die Einbettung einen Isomorphismus*

$$\pi_1(M \backslash N, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, p)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir M zusammenhängend annehmen. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Sei $B \subset N$ eine abgeschlossene Teilmenge, $U \Subset M$ eine plättbare Umgebung eines Punktes von N, und $p \in U \backslash B$. So haben wir nach Seifert-van-Kampen ein kokartesisches Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \backslash B, p) & \to & \pi_1(U, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M \backslash B, p) & \to & \pi_1((M \backslash B) \cup U, p) \end{array}$$

und da nach 1.2.16 die obere Horizontale ein Isomorphismus ist, muss dasselbe nach 2.5.12 auch für die untere Horizontale gelten. Jetzt zeigen wir die Surjektivität von $\pi_1(M\backslash N, p) \to \pi_1(M, p)$ im allgemeinen. Ist in der Tat $\gamma \in \Omega(M, p)$ ein Weg, so wird $\gamma[0, 1] \cap N$ überdeckt von endlich vielen plättbaren Umgebungen $U_1, \ldots, U_r$. Nach unserer Vorüberlegung haben wir jedoch einen Isomorphismus

$$\pi_1(M\backslash N, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1((M\backslash N) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_r, p)$$

und $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$ liegt sicher im Bild der rechten Seite. Also liegt $[\gamma]$ auch im Bild von $\pi_1(M\backslash N, p)$ unter dem von der Einbettung induzierten Homomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Ähnlich zeigen wir die Injektivität: Ist $\gamma \in \Omega(M\backslash N, p)$ nullhomotop in M, sagen wir vermittels $h : [0, 1] \times [0, 1] \to M$, so läßt sich eine Homotopie mit dem konstanten Weg sicher in einem geeigneten $(M\backslash N) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_r$ realisieren, mit plättbaren U_i, und dann nach unserer Vorüberlegung sogar in $M\backslash N$. $\square$

Übung 4.11.9. Für $N \subset_{\!\mathsf{A}} M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 ist die von der Einbettung $M \setminus N \hookrightarrow M$ auf den Fundamentalgruppen induzierte Abbildung immer noch surjektiv.

Übung 4.11.10. Allgemeiner induziert unter den Voraussetzungen der Proposition sogar für jede Teilmenge $A \subset N$ die Einbettung $M \setminus A \hookrightarrow M$ einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

Beweis des Satzes. Wir beginnen mit dem Fall $n = 3$ und berechnen zunächst die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$ einer Überlagerung von X_3. Wir interpretieren Elemente von $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$ als die Angabe von drei paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene $\mathbb{C}$, wobei wir jedoch im Unterschied zu X_3 noch wissen, welcher Punkt hier der Erste bzw. der Zweite bzw. der Dritte ist. Wir ändern die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^3\backslash\Delta$ nicht, wenn wir den zweiten Punkt festhalten, formal ist also die Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \{(x, y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid x \neq y\} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^3\backslash\Delta \\ (x, y) & \mapsto & (x, 0, y) \end{array}$$

eine Homotopieäquivalenz. Wir geben der linken Seite den Namen M und betrachten die Überdeckung $M = M_+ \cup M_-$ durch die offenen Teilmengen

$$\begin{array}{rcl} M_+ & = & M\backslash\{(x, \lambda x) \mid 0 < \lambda < 1\} \\ M_- & = & M\backslash\{(\lambda y, y) \mid 0 < \lambda < 1\} \end{array}$$

mit Schnitt $M_+ \cap M_- = \{(x, y) \in M \mid \mathbb{R}_{>0}x \neq \mathbb{R}_{>0}y\}$. Stellen wir uns den festen Punkt als die Sonne vor und x bzw. y als die Erde bzw. den Mond, die sich jedoch völlig unabhängig voneinander bewegen dürfen, so ist M_+ die Menge aller Konstellationen "ohne Sonnenfinsternis" und M_- die Menge aller Konstellationen "ohne Mondfinsternis". Jetzt haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \times S^1 & \to & M_+, & (z,w) & \mapsto & (z, 2w) \\ S^1 \times S^1 & \to & M_-, & (z,w) & \mapsto & (2z, w) \\ S^1 & \to & M_+ \cap M_-, & z & \mapsto & (-z, z) \end{array}$$

und wenn wir Basispunkte $1 \in S^1$, $(1,1) \in S^1 \times S^1$ und $(-1,1) \in M$ wählen, erhalten wir mit etwas komplizierteren Ausdrücken auch basispunkterhaltende Homotopieäquivalenzen, indem "wir unsere beiden Komponenten um geeignete Punkte p auf der reellen Achse kreisen lassen", in Formeln

$$\begin{array}{cccccc} S^1 \times S^1 & \to & M_+, & (z,w) & \mapsto & (-p - z(1-p), \quad -p + w(1+p)) \\ S^1 \times S^1 & \to & M_-, & (z,w) & \mapsto & (\ p - z(1+p), \quad p + w(1-p)) \end{array}$$

für beliebig fest gewähltes p mit $0 < p < 1/2$. Unsere dritte Homotopieäquivalenz $S^1 \to M_+ \cap M_-$ von oben erhält schon die Basispunkte. Wie man anschaulich schnell einsieht und unschwer formalisiert, kommutieren mit unserer Wahl von Basispunkten nun die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S^1) & & \stackrel{\sim}{\to} & & \pi_1(M_+ \cap M_-) \\ {\scriptstyle \mathrm{diag}} \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & \pi_1(S^1 \times S^1) & \stackrel{\sim}{\to} & \pi_1(M_\pm) \end{array}$$

und wir erhalten isomorphe pushout-Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_+ \cap M_-) & \to & \pi_1(M_+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M_-) & \to & \pi_1(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \stackrel{\mathrm{diag}}{\to} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle \mathrm{diag}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \to & \pi_1(\mathbb{C}^3 \backslash \Delta) \end{array}$$

Man sieht so, daß $\pi_1(\mathbb{C}^3 \backslash \Delta)$ erzeugt wird von den Klassen g, u_+, u_- der drei Wege

$$\begin{array}{llcccc} \tilde{g}: & t \mapsto & (& -e^{2\pi \mathrm{it}} & , 0, & e^{2\pi \mathrm{it}} &) \\ \tilde{u}_+: & t \mapsto & (& -1 & , 0, & p + (1-p)e^{2\pi \mathrm{it}} &) \\ \tilde{u}_-: & t \mapsto & (& -p - (1-p)e^{2\pi \mathrm{it}} & , 0, & 1 &) \end{array}$$

für beliebiges festes p mit $0 < p < 1/2$, wo wir nur die beiden Relationen $gu_+ = u_+g$ und $gu_- = u_-g$ fordern müssen. Wir behaupten, daß die Bilder unserer drei Wege in der Zopfgruppe $\pi_1(X_3)$ gegeben werden durch

$$\begin{array}{lcl} u_+ & \mapsto & s_1^2 \\ u_- & \mapsto & s_2^2 \\ g & \mapsto & (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_1)^3 \end{array}$$

Das scheint mir anschaulich evident. Formal kann man zum Beispiel in $\mathbb{C}^3\backslash\Delta$ den Weg $\tilde{g}_{1/2}$ von $(-1,0,1)$ nach $(1,0,-1)$ betrachten mit $\tilde{g}_{1/2}(t) = \tilde{g}(2t)$ sowie die Wege $\tilde{s}_1$ und $\tilde{s}_2$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcccccccc} \tilde{s}_1: & t & \mapsto & (& -1/2 - \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,t}/2 & , & -1/2 + \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,t}/2 & , & 1 &) \\ \tilde{s}_2: & t & \mapsto & (& -1 & , & 1/2 - \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,t}/2 & , & 1/2 + \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,t}/2 &) \end{array}$$

und linear interpolieren zwischen den Wegen $\tilde{g}_{1/2}$ und $(\tau \circ \tilde{s}_1) * (\sigma \circ \tilde{s}_2) * \tilde{s}_1$ für Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_3$ der drei Koordinaten derart, daß die Wege verknüpfbar sind. Dasselbe gilt symmetrisch, wenn wir die Indizes 1 und 2 vertauschen. Drücken wir diese linearen Homotopien dann herunter auf X_3 und verknüpfen, so ergibt sich die dritte (und komplizierteste) der obigen Behauptungen, d.h. $g \mapsto (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_1)^3$. Jetzt betrachten wir formal die Gruppe B_3, die erzeugt wird von zwei Elementen s und t mit den Relationen $sts = tst$. (Es tut mir leid, den Buchstaben t erst als Parameter eines Weges und nun gleich darauf in dieser völlig anderen Bedeutung zu verwenden. Beide Notationen sind jedoch derart gebräuchlich, daß diese Kollision mir ein kleineres Übel scheint, als es eine gänzlich unübliche Wahl der Bezeichnungen wäre.) Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \rightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \\ \| & & \downarrow & & \| \\ \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \hookrightarrow & \pi_1(X_3) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \end{array}$$

mit $s \mapsto s_1$ und $t \mapsto s_2$ in der mittleren Vertikale und hoffentlich sonst offensichtlichen Morphismen. Als erstes folgt, daß die Horizontale oben links eine Injektion ist. Weiter ist klar, daß die Verknüpfung in der oberen Horizontale trivial ist. Als nächstes überlegt man sich explizit, daß ihr Bild genau der Kern von $B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$ ist. Der wesentliche Punkt hierbei ist, zunächst die Normalität dieses Bildes nachzuweisen. Nun findet man aber in B_3 in der Tat die Identität

$$ts^2t^{-1} = (st)^3 s^{-2} t^{-2},$$

und mit dieser Identität folgt die Normalität ohne weitere Schwierigkeiten. Jetzt beachten wir, daß für einen Normalteiler N einer Gruppe G und $a, b \in G$, $x \in N$ gilt

$$ab \in N \Leftrightarrow axb = axa^{-1}ab \in N$$

Um zu erkennen, ob die Klasse eines Gruppenworts in $\ker(B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3)$ liegt, müssen wir nur alle Potenzen s^m für $m \in \mathbb{Z}$ reduzieren zu s bzw. e falls $m \in 2\mathbb{Z}$ bzw. $m \notin 2\mathbb{Z}$ und analog für t, bis wir bei einem Wort ankommen, bei dem keine negativen Potenzen auftreten und bei dem die Buchstaben s und t alternieren. Unser ursprüngliches Wort war im Kern genau dann, wenn dieses alternierende Wort eine durch 6 teilbare Länge hat. Diese Beschreibung des Kerns zeigt nun, da eben das Bild von $\pi_1(\mathbb{C}^3 \backslash \Delta)$ in B_3 normal ist, mit unserer allgemeinen gruppentheoretischen Überlegung wie behauptet die schwierige Inklusion $\supset$ und damit die Gleichheit

$$\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) = \ker(B_3 \to \mathcal{S}_3)$$

und damit folgt durch Diagrammjagd in der Tat $B_3 \stackrel{\sim}{\to} \pi_1(X_3)$. Der Fall $n = 3$ ist erledigt. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Dazu halten wir n fest, schreiben kurz $X_n = X$, und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} k: & X & \to & \mathbb{N} \\ & E & \mapsto & n - |\operatorname{Re}(E)| \end{array}$$

für $|\operatorname{Re}(E)|$ die Kardinalität der Projektion von E auf die reelle Achse. In X betrachten wir die Teilmengen $Z_\nu = k^{-1}(\nu)$ sowie $Z_{\leq \nu} = k^{-1}(\{0, 1, \ldots, \nu\})$. Zum Beispiel besteht Z_0 aus allen n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{C}$ derart, daß die Realteile ihrer Elemente paarweise verschieden sind, und Z_1 besteht aus allen n-elementigen Teilmengen, in denen es genau zwei Punkte gibt mit demselben Realteil. Offensichtlich ist Z_0 zusammenziehbar, alle $Z_{\leq \nu}$ sind offen, und Z_ν ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ν in $Z_{\leq \nu}$. Proposition 4.11.8 und Übung 4.11.9 liefern uns damit für einen beliebigen Basispunkt in Z_0 eine Surjektion und viele Isomorphismen

$$\pi_1(Z_{\leq 1}) \twoheadrightarrow \pi_1(Z_{\leq 2}) \stackrel{\sim}{\to} \ldots \stackrel{\sim}{\to} \pi_1(Z_{\leq n-1}) = \pi_1(X)$$

Wir untersuchen nun zunächst $\pi_1(Z_{\leq 1})$. Sicher zerfällt Z_1 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_1 = Z_1^1 \cup Z_1^2 \cup \ldots \cup Z_1^{n-1}$$

wo Z_1^i aus allen n-elementigen Teilmengen $E \in Z_1$ besteht derart, daß bei einer Aufzählung $x_1, \ldots, x_n$ von E mit wachsenden Realteilen gilt $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$. Bezeichnen wir ganz allgemein mit $X_n^{[a,b]}$ den Raum aller n-elementigen Teilmengen von $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$, so haben wir offensichtlich Homotopieäquivalenzen

$$\begin{array}{ccccl} X_2 & \hookleftarrow & X_2^{[i,i+1]} & \hookrightarrow & Z_0 \cup Z_1^i \\ & & \{x, y\} & \mapsto & \{1, \ldots, i-1, x, y, i+2, \ldots, n\} \end{array}$$

folglich ist $\pi_1(Z_0 \cup Z_1^i)$ frei erzeugt von s_i. Mit Induktion und dem Satz von Seifert-van-Kampen folgt, daß für jede Teilmenge $T \subset \{1, \ldots, n-1\}$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(Z_0 \cup \bigcup_{i \in T} Z_1^i)$ frei erzeugt ist von den s_i mit $i \in T$. Insbesondere erzeugen die s_i schon mal unsere Zopfgruppe, und wir müssen uns nur noch um die Relationen kümmern. Sicher zerfällt auch Z_2 in Zusammenhangskomponenten

$$Z_2 = \coprod_{1 \leq i < j < n} Z_2^{i,j}$$

wo $Z_2^{i,j}$ aus den n-elementigen Teilmengen $E \in Z_2$ besteht derart, daß bei einer Aufzählung $x_1, \ldots, x_n$ von E mit wachsenden Realteilen gilt $\mathrm{Re}(x_i) = \mathrm{Re}(x_{i+1})$ und $\mathrm{Re}(x_j) = \mathrm{Re}(x_{j+1})$. Wir setzen $Z_{\leq 2}^{i,j} = Z_0 \cup Z_1^i \cup Z_1^j \cup Z_2^{i,j}$ und bemerken, daß diese Menge offen ist in X_n. Im Fall $i < j - 1$ haben wir eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} X_2^{[i,i+1]} \times X_2^{[j,j+1]} & \hookrightarrow & Z_{\leq 2}^{i,j} \\ (\{x,y\}, \{z,w\}) & \mapsto & \{1, 2, \ldots, i-1, x, y, \ldots, j-1, z, w, \ldots, n\} \end{array}$$

die zeigt, daß $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,j})$ erzeugt wird von s_i und s_j mit der einzigen Relation $s_i s_j = s_j s_i$. Im Fall $i = j - 1$ haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{array}{ccccc} X_3 & \hookleftarrow & X_3^{[i,i+2]} & \hookrightarrow & Z_{\leq 2}^{i,i+1} \\ & & \{x,y,z\} & \mapsto & \{1, \ldots, i-1, x, y, z, i+3, \ldots, n\} \end{array}$$

die mit dem bereits behandelten Fall $n = 3$ zeigen, daß $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,i+1})$ erzeugt wird von s_i und s_{i+1} mit der einzigen Relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$. Sei nun $R \subset \{(i,j) \mid 1 \leq i < j < n\}$ eine beliebige Teilmenge. Wir behaupten, daß $\pi_1(Z_{\leq 1} \cup \bigcup_{(i,j) \in R} Z_2^{i,j})$ erzeugt ist von $s_1, \ldots, s_{n-1}$ mit den Zopfrelationen für alle $(i,j) \in R$. In der Tat folgt das nun mit Seifert-van-Kampen und vollständiger Induktion über $|R|$. Der Satz ergibt sich, wenn wir R maximal möglich wählen. $\square$

5 Singuläre Homologie

5.1 Simpliziale Homologie

Definition 5.1.1. Für jede Menge Λ betrachten wir die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\Lambda$ aller Abbildungen $f : \Lambda \to \mathbb{Z}$, die nur auf endlich vielen Elementen von Λ Werte ungleich Null annehmen. $\mathbb{Z}\Lambda$ ist in kategorientheoretischer Sprache die **freie abelsche Gruppe** $\mathbb{Z}\Lambda = \mathrm{Ab}\langle\Lambda\rangle$ über Λ. Die Elemente von $\mathbb{Z}\Lambda$ fassen wir auf als (endliche) formale Linearkombinationen von Elementen von Λ und schreiben sie $f = \sum a_\lambda \lambda$ mit $a_\lambda = f(\lambda) \in \mathbb{Z}$ und $\lambda \in \Lambda$. Wir haben eine offensichtliche Abbildung $\Lambda \to \mathbb{Z}\Lambda$, und jede Abbildung $\varphi : \Lambda \to G$ von der Menge Λ in eine abelsche Gruppe G läßt sich auf genau eine Weise zu einem Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}\Lambda \to G$ ausdehnen, den wir die **lineare Fortsetzung** von φ nennen.

Definition 5.1.2. Sei $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$ ein Simplizialkomplex im Sinne von 3.3.6. Wir betrachten für $q \geq 0$ die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q$ über der Menge der q-Simplizes von $\mathcal{K}$. Wählen wir eine Anordnung $\leq$ auf der Menge E der Ecken von $\mathcal{K}$, so können wir für $q \geq 1$ Gruppenhomomorphismen

$$\partial = \partial_{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_q \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}$$

erklären als die linearen Fortsetzungen der Abbildungen $\mathcal{K}_q \to \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}$, die auf einem q-Simplex gegeben werden, indem wir seine Ecken der Größe nach durchnummerieren als $e_0 < e_1 < \ldots < e_q$ und dann setzen

$$\{e_0, \ldots, e_q\} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \{e_0, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_q\}$$

Wie üblich bedeutet hier die "Tarnkappe" über e_i, daß diese Ecke aus dem Simplex wegzulassen ist. Die Gruppenhomomorphismen ∂ heißen die **Randoperatoren**. Wir erhalten damit für jede Anordnung $\leq$ der Menge E der Ecken eine Sequenz von Gruppen

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\mathcal{K}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0$$

und man prüft leicht $\partial \circ \partial = 0$ an jeder Stelle. Um zu zeigen, daß unsere Sequenz von der gewählten Anordnung von E "im wesentlichen" gar nicht abhängt, bilden wir die Menge

$$\tilde{\mathcal{K}}_q = \{\sigma : \{0, \ldots, q\} \hookrightarrow E \mid \{\sigma(0), \ldots, \sigma(q)\} \in \mathcal{K}_q\}$$

aller "q-Simplizes mit Anordnung" und den Quotienten

$$S_q\mathcal{K} = \mathbb{Z}\tilde{\mathcal{K}}_q / \langle \sigma \circ \pi - (\operatorname{sgn} \pi)\sigma \mid \sigma \in \tilde{\mathcal{K}}_q, \pi \in \mathcal{S}_{q+1} \rangle$$

in dem zwei q-Simplizes mit Anordnung, die sich nur in ihrer Anordnung und da um eine Permutation π unterscheiden, bis auf das Vorzeichen dieser Permutation miteinander identifiziert werden. Diesen Quotienten $S_q\mathcal{K}$ nennen wir die **Gruppe der simplizialen q-Ketten** von $\mathcal{K}$. Dieselbe Formel wie eben induziert auch Randoperatoren $\tilde{\mathcal{K}}_q \to \tilde{\mathcal{K}}_{q-1}$ und man prüft, daß diese Randoperatoren Gruppenhomomorphismen $\partial = \partial_q : S_q\mathcal{K} \to S_{q-1}\mathcal{K}$ induzieren. Auf diese Weise erhalten wir eine Sequenz von abelschen Gruppen

$$\ldots \xrightarrow{\partial} S_2\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_1\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_0\mathcal{K},$$

den **Komplex der simplizialen Ketten**, die kanonisch isomorph ist zur zuvor konstruierten Sequenz und die nicht mehr von der Wahl einer Anordnung auf den Ecken unseres Simplizialkomplexes abhängt. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, setzen wir unsere Sequenz ins Negative fort durch Null und vereinbaren also $S_q\mathcal{K} = 0$ für $q < 0$.

Bemerkung 5.1.3. Anschaulich mag man sich eine 0-Kette vorstellen als eine endliche formale Linearkombination von Ecken mit ganzzahligen Koeffizienten; eine 1-Kette als eine endliche formale Linearkombination von orientierten Kanten, wobei eine Kante mit umgekehrter Orientierung als das Negative der ursprünglichen Kante aufzufassen ist; den Rand einer orientierten Kante als Anfangspunkt minus Endpunkt; eine 2-Kette als eine endliche formale Linearkombination von orientierten Dreiecksflächen, wobei eine Fläche mit umgekehrter Orientierung als das Negative der ursprünglichen Fläche aufzufassen ist; und den Rand einer orientierten Fläche als die Summe ihrer drei Kanten versehen mit der Orientierung, für die sie einen Rundweg um die Fläche in einer durch die Oientierung der Fläche gegebenen Laufrichtung bilden.

Bemerkung 5.1.4. Jeder Simplizialkomplex hat genau einen (-1)-Simplex, nämlich die leere Menge, und es mag natürlich erscheinen, als $S_{-1}\mathcal{K} \cong \mathbb{Z}$ die freie abelsche Gruppe über der Menge der (-1)-Simplizes zu nehmen. Diese Variante unserer bisherigen Definitionen werden wir später noch ausführlich diskutieren, sie führt zur sogenannten reduzierten Homologie.

Definition 5.1.5. Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Wir definieren

$Z_q\mathcal{K} = \ker \partial_q$ die Gruppe der **simplizialen q-Zykel**;

$B_q\mathcal{K} = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ die Gruppe der **simplizialen q-Ränder** (engl. boundaries);

$H_q\mathcal{K} = Z_q\mathcal{K}/B_q\mathcal{K}$ die **q-te simpliziale Homologiegruppe** von $\mathcal{K}$.

Bemerkung 5.1.6. Anschaulich “zählen die verschiedenen Homologiegruppen verschiedene Arten von Löchern im Polyeder $\Delta(\mathcal{K})$”. Zum Beispiel ist $H_0\mathcal{K}$ nach 5.2.11 die freie abelsche Gruppe über der Menge der Zusammenhangskomponenten von $\Delta(\mathcal{K})$, die ja durch eine gewisse Art von Löchern voneinander getrennt werden; $H_1\mathcal{K}$ ist nach 5.5.2 der maximale abelsche Quotient der Fundamentalgruppe und beschreibt so eine andere Art von Löchern; $H_2\mathcal{K}$ schließlich ist nach 11.7.16 für einen endlichen Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^3$ die freie abelsche Gruppe über der Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements, d.h. die freie abelsche Gruppe über den “Kavitäten” unseres Polyeders. Die höheren Homologiegruppen beschreiben ähnliche Phänomene in höheren Dimensionen, für die ich leider keine räumliche Anschauung mehr anbieten kann.

Bemerkung 5.1.7. Unser Ziel ist zu zeigen, daß unsere simplizialen Homologiegruppen nur vom topologischen Raum $\Delta(\mathcal{K})$ abhängen und nicht von der gewählten Triangulierung. Dazu erklären wir ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum seine “singulären Homologiegruppen” und zeigen ganz am Schluß dieses Abschnitts in 5.9.2, daß sie in der Tat für den Polyeder $\Delta(\mathcal{K})$ eines endlichen Simplizialkomplexes $\mathcal{K}$ mit den simplizialen Homologiegruppen von $\mathcal{K}$ übereinstimmen.

5.2 Definition der singulären Homologie

Definition 5.2.1. Sei $q \geq 0$. Der topologische Raum

$$\Delta_q = \left\{(x_0, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; 0 \leq x_i \leq 1,\ \sum x_i = 1\right\}$$

heißt der **q-te Standardsimplex**. Es ist also Δ_0 ein Punkt, Δ_1 ein Geradensegment, Δ_2 eine Dreiecksfläche, Δ_3 ein massiver Tetraeder und so weiter.

Definition 5.2.2. Eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \to X$ von Δ_q in einen topologischen Raum X heißt ein **singulärer q-Simplex** von X.

Bemerkung 5.2.3. Das Adjektiv singulär ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß wir außer der Stetigkeit keine Forderungen an σ stellen. Wir erlauben also auch nicht-injektive, ja sogar konstante σ als Simplizes, so daß das Adjektiv singulär zumindest auf einem großen Teil unserer singulären Simplizes recht gut paßt.

Definition 5.2.4. Wir bezeichnen mit

$$S_qX = \mathbb{Z}\,\mathrm{Top}(\Delta_q, X)$$

die riesige freie abelsche Gruppe über der Menge aller q-Simplizes von X und nennen ihre Elemente **singuläre q-Ketten.** Zum Beispiel ist die Gruppe der singulären Null-Ketten kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über X, in Formeln $S_0 X \cong \mathbb{Z}X$. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir darüber hinaus $S_q X = 0$ für $q < 0$.

Definition 5.2.5. Für $q \geq 1$ und $0 \leq i \leq q$ betrachten wir die **i-te Kantenabbildung**

$$k^i = k^i_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$$

die an der i-ten Stelle die Koordinate Null einfügt. Dann erklären wir für alle q einen Gruppenhomomorphismus $\partial = \partial_q : S_q X \to S_{q-1} X$, den sogenannten **Randoperator**: Für $q \leq 0$ setzen wir schlicht $\partial_q = 0$ und für $q \geq 1$ erklären wir ∂_q durch die Vorschrift, daß für jeden singulären q-Simplex σ gelten soll

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ k^i$$

Natürlich sind die Elemente von $S_q X$ eigentlich formale $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von q-Simplizes und die Definition sagt uns, daß wir unser auf den Simplizes definiertes ∂ linear auf alle Ketten auszudehnen haben.

Lemma 5.2.6. *Es gilt* $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Beweis. Wir müssen nur für jeden q-Simplex σ mit $q \geq 2$ prüfen, daß gilt $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$. Nun prüft man sofort, daß gilt $k^i_q \circ k^j_{q-1} = k^j_q \circ k^{i-1}_{q-1}$ falls $i > j$. Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) &= \partial_{q-1} \textstyle\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ k^i \\ &= \textstyle\sum_{0 \leq i \leq q,\, 0 \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ k^i \circ k^j \end{aligned}$$

und wir sehen, daß sich in dieser Doppelsumme die Terme mit $i > j$ und die Terme mit $i \leq j$ gegenseitig aufheben. □

Definition 5.2.7. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren

$Z_q X = \ker \partial_q$ die Gruppe der **singulären q-Zykel**;

$B_q X = \operatorname{im} \partial_{q+1}$ die Gruppe der **singulären q-Ränder** (engl. boundaries);

$H_q X = Z_q X / B_q X$ die **q-te singuläre Homologiegruppe** von X.

Die Nebenklasse in $H_q X$ eines Zykels $c \in Z_q X$ heißt seine **Homologieklasse** und wird mit $[c] \in H_q X$ bezeichnet.

Bemerkung 5.2.8. Die Zykel und Ränder sind natürlich Untergruppen in der Gruppe aller Ketten, nach 5.2.6 gilt genauer $B_qX \subset Z_qX \subset S_qX$. Deshalb ist es auch überhaupt nur möglich, die Quotientengruppe $H_qX = Z_qX/B_qX$ zu bilden.

Bemerkung 5.2.9. Später werden wir noch andere Homologietheorien kennenlernen. Die hier vorgestellte Theorie heißt genauer die **singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten**. Wollen wir besonders betonen, daß wir die singuläre Homologie meinen, schreiben wir statt H_qX genauer $H_q^{\mathrm{sing}}X$.

Bemerkung 5.2.10. Auf den ersten Blick sehen unsere Homologiegruppen sehr unhandlich aus: Es sind Quotienten einer riesigen abelschen Gruppe durch eine fast ebenso riesige Untergruppe. Wir werden aber sehen, daß unsere H_q so schöne Eigenschaften haben, daß man sie dennoch für viele interessante Räume berechnen kann.

Beispiel 5.2.11 (**Homologie eines Punktes**). Für den einpunktigen Raum $X = \mathrm{pt}$ gilt $H_0(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(\mathrm{pt}) = 0$ für $q \neq 0$. In der Tat gibt es für jedes $q \geq 0$ genau einen q-Simplex in pt, also gilt $S_q(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ für alle $q \geq 0$ und die Randabbildung ∂_q verschwindet für q ungerade und $q \leq 0$, ist aber ein Isomorphismus für $q \geq 2$ gerade.

Beispiel 5.2.12. Sei $X = \coprod X_w$ die Zerlegung von X in seine Wegzusammenhangskomponenten. So haben wir kanonisch

$$H_qX = \bigoplus H_qX_w$$

In der Tat gilt $S_qX = \bigoplus S_qX_w$, und der Randoperator ∂_q ist mit dieser Zerlegung verträglich.

Beispiel 5.2.13. Die **nullte Homologie** H_0X eines topologischen Raums X ist die freie abelsche Gruppe über der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten von X, in Formeln

$$H_0X = \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

In der Tat reicht es nach dem vorhergehenden Beispiel zu prüfen, daß gilt $H_0X = \mathbb{Z}$ für nichtleeres wegzusammenhängendes X. Wir haben eine natürliche Abbildung, die sogenannte **Augmentation**

$$\epsilon : S_0X \to \mathbb{Z}, \ \ \sum a_x x \mapsto \sum a_x,$$

und es reicht, für wegzusammenhängendes X die Formel $\ker \epsilon = \operatorname{im} \partial_1$ zu zeigen. Nun wird aber $\operatorname{im} \partial_1$ erzeugt von allen formalen Summen $x - y$ mit $x, y \in X$, denn je zwei Punkte lassen sich durch einen Weg verbinden. Daraus folgt dann sofort $\ker \epsilon = \operatorname{im} \partial_1$.

Lemma 5.2.14 (Homologie konvexer Mengen). *Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge, so gilt $H_q K = 0$ für $q > 0$.*

Beweis. Ist K leer, so ist eh nichts zu zeigen. Sonst zeichnen wir einen beliebigen Punkt $p \in K$ aus und definieren für $q \geq 0$ den **Prismen-Operator**

$$P = P_q : S_q K \to S_{q+1} K$$

der "jeden q-Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt p zu einem $(q+1)$-Simplex erweitert." Formal definieren wir P auf Simplizes $\sigma : \Delta_q \to K$ dadurch, daß $P\sigma$ der Simplex $P\sigma : \Delta_{q+1} \to K$ sein soll mit $(P\sigma)(1-\tau, \tau x_0, \ldots, \tau x_q) = (1-\tau)p + \tau\sigma(x_0, \ldots, x_q)$ für alle $\tau \in [0,1]$. Hier ist $P\sigma$ stetig, da $[0,1] \times \Delta_q \to \Delta_{q+1}$, $(\tau, x_0, \ldots, x_q) \mapsto (1-\tau, \tau x_0, \ldots, \tau x_q)$ nach **??** eine Identifizierung ist. Nun setzen wir P linear auf Ketten fort und prüfen die Relation $\partial P + P\partial = \mathrm{id} : S_q K \to S_q K$ für $q > 0$. In der Tat gilt ja

$$\begin{array}{rcl} \partial(P\sigma) & = & \sum_{0 \leq j \leq q+1} (-1)^j (P\sigma) \circ k_{q+1}^j \\ P(\partial\sigma) & = & \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^j P(\sigma \circ k_q^j) \end{array}$$

und prüft leicht die Formeln $(P\sigma) \circ k_{q+1}^0 = \sigma$ und $(P\sigma) \circ k_{q+1}^j = P(\sigma \circ k_q^{j-1})$ für $1 \leq j \leq q+1$. Also haben wir in der Tat $\partial P + P\partial = \mathrm{id}$ auf q-Ketten mit $q > 0$, damit gilt im Fall $q > 0$ für jeden Zykel $z \in Z_q K$ schon $\partial P z = z$ und z ist ein Rand. □

5.3 Funktorialität der Homologie

Bemerkung 5.3.1. Wir erklären in diesem Abschnitt für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ Gruppenhomomorphismen $H_q(f) = f_* : H_q X \to H_q Y$ derart, daß die H_q Funktoren werden von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Definition 5.3.2. Gegeben eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ definieren wir Gruppenhomomorphismen $S_q f : S_q X \to S_q Y$, indem wir jedem Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$ den Simplex $f \circ \sigma : \Delta_q \to Y$ zuordnen und dann auf $S_q X$ linear fortsetzen.

Lemma 5.3.3. *Gegeben $f : X \to Y$ stetig und $q \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt $\partial_q \circ S_q f = S_{q-1} f \circ \partial_q$, d.h. es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{S_q f} & S_q Y \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{S_{q-1} f} & S_{q-1} Y \end{array}$$

Beweis. Wir müssen das nur auf jedem q-Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$ prüfen. Es gilt aber in der Tat

$$\begin{array}{rcl} (\partial_q \circ S_q f)(\sigma) & = & \partial_q(f \circ \sigma) \\ & = & \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ k_q^i \\ & = & (S_{q-1} f \circ \partial_q)(\sigma) \end{array}$$

□

Bemerkung 5.3.4. Das Lemma zeigt, daß $S_q f$ Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder abbildet. Für einen q-Zykel z in X hängt also die Homologieklasse seines Bildes $(S_q f)(z)$ in Y nur von der Homologieklasse von z ab. Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} H_q f : & H_q X & \to & H_q Y \\ & [z] & \mapsto & [(S_q f)(z)] \end{array}$$

Man sieht leicht, daß gilt $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$ und $H_q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, also erhalten wir für alle $q \in \mathbb{Z}$ einen Funktor $H_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$.

Übung 5.3.5. Sei $X = \coprod X_w$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte offene Teilmengen und $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung. So definieren die $H_q(i_w) : H_q(X_w) \to H_q(X)$ einen Isomorphismus $\bigoplus H_q(X_w) \xrightarrow{\sim} H_q(X)$.

Bemerkung 5.3.6. Wir wiederholen die vorhergehenden Argumente noch einmal in einer ausgefeilten Sprache und führen dazu die Kategorie der "Kettenkomplexe" ein.

Definition 5.3.7. Ein **Kettenkomplex** oder **Komplex von abelschen Gruppen** ist ein Paar $C = (C, \partial)$, wo C eine Familie $(C_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen ist und ∂ eine Familie von Gruppenhomomorphismen $\partial_q = \partial_q^C : C_q \to C_{q-1}$ für $q \in \mathbb{Z}$ derart, daß gilt

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0 \quad \text{für alle } q.$$

Ein Morphismus $s : C \to D$ von Kettenkomplexen, auch **Kettenabbildung** genannt, ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen $s_q : C_q \to D_q$ derart, daß gilt $\partial_q^D \circ s_q = s_{q-1} \circ \partial_q^C$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ oder, etwas salopp geschrieben, $\partial \circ s = s \circ \partial$. Wir erhalten so die **Kategorie** $\mathrm{Ket} = \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$ **aller Komplexe von abelschen Gruppen**. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring R die Kategorie $\mathrm{Ket}(R\text{-Mod}) = \mathrm{Ket}_R$ aller Komplexe von R-Moduln.

Bemerkung 5.3.8. Für dieselbe Struktur ist auch noch eine andere Terminologie üblich. Ganz allgemein nennt man eine abelsche Gruppe C mit einer Zerlegung $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ eine **graduierte abelsche Gruppe** und ist zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus $\partial : C \to C$ gegeben mit $\partial(C_q) \subset C_{q-1}$ und $\partial^2 = 0$, so nennt man das Paar (C, ∂) eine **differentielle graduierte abelsche Gruppe** oder kurz eine **dg-Gruppe** mit **Differential** ∂.

Beispiel 5.3.9. Zum Beispiel ist für jeden topologischen Raum X der Komplex der singulären Ketten (SX, ∂) ein Kettenkomplex. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ bilden nach Lemma 5.2.6 die $S_q(f)$ eine Kettenabbildung $Sf : SX \to SY$ und da gilt $S(f \circ g) = S(f) \circ S(g)$ sowie $S(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ erhalten wir so einen Funktor

$$S : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$$

Definition 5.3.10. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir einen Funktor, die **q-te Homologiegruppe eines Kettenkomplexes**

$$\begin{array}{rccl} H_q : & \mathrm{Ket} & \to & \mathrm{Ab} \\ & C & \mapsto & H_q(C) = \ker \partial_q / \operatorname{im} \partial_{q+1} \end{array}$$

Auf den Objekten ist das schon mal in Ordnung und wir müssen nur noch erklären, wie ein Morphismus von Kettenkomplexen $s : C \to D$ Morphismen auf der Homologie $H_q(s) : H_q(C) \to H_q(D)$ definiert. Aus $\partial^D \circ s = s \circ \partial^C$ folgt aber $s(\operatorname{im} \partial^C) \subset \operatorname{im} \partial^D$, $s(\ker \partial^C) \subset \ker \partial^D$ und damit induziert s Morphismen $H_q(s) : H_q(C) \to H_q(D)$. Wieder sieht man leicht, daß gilt $H_q(s \circ t) = H_q(s) \circ H_q(t)$ und $H_q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, unser H_q ist also ein Funktor für alle $q \in \mathbb{Z}$. Manchmal betrachten wir auch den Funktor

$$H : \mathrm{Ket} \to \mathrm{Ket}$$

der einem Komplex die Gesamtheit seiner Homologiegruppen zuordnet, aufgefaßt als Komplex mit Differential Null.

Bemerkung 5.3.11. Wir erhalten mit diesen Begriffsbildungen und Notationen unsere Funktoren der singulären Homologiegruppen $H_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ als die Verknüpfungen $H_q = H_q \circ S$ von Funktoren

$$\mathrm{Top} \xrightarrow{S} \mathrm{Ket} \xrightarrow{H_q} \mathrm{Ab}$$

und können nur hoffen, daß die doppelte Bedeutung des Symbols H_q den Leser nicht verwirrt. Man überträgt die Begriffsbildungen **Zykel**, **Rand**, **Homologieklasse** auf beliebige Kettenkomplexe C und schreibt $\ker \partial_q = Z_q C$ für die Zykel, $\operatorname{im} \partial_{q+1} = B_q C$ für die Ränder und $[c] \in H_q C$ für die Homologieklasse eines Zykels $c \in Z_q C$.

5.4 Homotopie-Invarianz

Bemerkung 5.4.1. Der nächste Satz ist schon ein sehr starkes Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologiegruppen H_q. Er impliziert zum Beispiel, daß ein zusammenziehbarer Raum dieselbe Homologie hat wie ein Punkt. Die Homologie konvexer Mengen 5.2.14 können wir dennoch nicht als Korollar ableiten, da ihre Kenntnis in den hier gegebenen Beweis eingeht.

Satz 5.4.2 (Homotopie-Invarianz). *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselben Abbildungen auf der Homologie.*

Bemerkung 5.4.3. Wir werden das im Folgenden durchgeführte Beweisverfahren später formalisieren zum “Satz über azyklische Modelle 8.1.10” und damit auch eine Verallgemeinerung dieses Satzes zeigen, die sogenannte “Künneth-Formel” über die Homologie von Produkten.

Beweis. Bezeichnet $f, g : X \to Y$ unsere homotopen stetigen Abbildungen, so behauptet der Satz für alle q die Gleichheit $H_q(f) = H_q(g)$ von Abbildungen $H_qX \to H_qY$. Es gilt also zu zeigen, daß für jeden Zykel $z \in Z^qX$ die Differenz $(S_qf)(z) - (S_qg)(z)$ ein Rand in Y ist. Anschaulich ist das recht klar: Unsere Differenz ist eben “der Rand des Gebiets, das von besagtem Zykel während der Homotopie von f nach g überstrichen wird”. Etwas formaler sei $h : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Bezeichnen wir die Inklusionen $X \to X \times [0,1]$, $x \mapsto (x,t)$ mit i_t, so gilt $f = h \circ i_0$ und $g = h \circ i_1$. Es reicht nun, $H_q(i_0) = H_q(i_1)$ zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie schon

$$H_q(f) = H_q(h) \circ H_q(i_0) = H_q(h) \circ H_q(i_1) = H_q(g)$$

Die Formel $H_q(i_0) = H_q(i_1)$ bedeutet, daß für jeden Zykel $z \in Z^qX$ die Differenz seiner Bilder $(S_qi_0)(z) - (S_qi_1)(z)$ ein Rand ist. Um das nachzuweisen reicht es, eine Familie von Morphismen

$$\delta = \delta_q = \delta_q^X : S_qX \to S_{q+1}(X \times [0,1])$$

für $q \in \mathbb{Z}$ zu konstruieren derart, daß gilt $\partial\delta + \delta\partial = S_qi_1 - S_qi_0$, denn dann ist $(S_qi_1)(z) - (S_qi_0)(z) = \partial\delta z$ ein Rand für jeden Zykel $z \in Z_qX$. Es ist bequem, solch eine Familie zu konstruieren als Transformation, wo wir beide Seiten auffassen als Funktoren in X von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen. Dann können wir uns nämlich stützen auf eine Variante des Yoneda-Lemmas. Bezeichne dazu $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$ den **tautologischen q-Simplex** $\mathrm{id} : \Delta_q \to \Delta_q$.

Lemma 5.4.4. *Sei $G : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ ein Funktor. So liefert das Auswerten auf dem tautologischen q-Simplex eine Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Transformationen von S_q nach G und der Menge $G(\Delta_q)$, in Formeln*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Trans}(S_q, G) & \xrightarrow{\sim} & G(\Delta_q) \\ \delta & \mapsto & \delta_{\Delta_q}(\tau_q) \end{array}$$

Beweis. Das gilt auch viel allgemeiner: Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\Delta \in \mathcal{C}$ ein Objekt, so können wir den Funktor $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \ ) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ bilden, und ist $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ ein anderer Funktor, so liefert die Abbildungsvorschrift $\delta \mapsto \delta_\Delta(\mathrm{id}_\Delta)$ eine Bijektion $\mathrm{Trans}(\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \ ), G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta)$. Wir überlassen die Details dem Leser zur Übung. □

Wir hatten gesehen, daß wir nur für alle topologischen Räume X und alle $q \in \mathbb{Z}$ Morphismen $\delta = \delta_q : S_q X \to S_{q+1}(X \times [0,1])$ konstruieren müssen derart, daß gilt

$$\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial = S_q i_1 - S_q i_0 \qquad (*)_q$$

Wir konstruieren die δ_q als Transformationen $\delta_q : S_q \to F_{q+1}$, mit $F_{q+1} : X \mapsto S_{q+1}(X \times [0,1])$ wie oben. Sie werden dann nach 5.4.4 schon durch die Angabe jeweils eines Elements $\delta_q(\tau_q) = V_q \in S_{q+1}(\Delta_q \times [0,1])$ eindeutig festgelegt und wir müssen nur unsere V_q so wählen, daß die obigen Gleichungen $(*)_q$ erfüllt sind. Da $(*)_q$ aber eine Gleichung von Transformationen $S_q \to F_q$ ist, gilt sie wieder nach dem Lemma immer, wenn sie nach Auswerten auf dem tautologischen Simplex $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$ gilt, also genau dann, wenn gilt

$$(\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = (S_q i_1 - S_q i_0)(\tau_q)$$

in $S_q(\Delta_q \times [0,1])$. Für $V_q = \delta_q(\tau_q)$ bedeutet das genau

$$\partial V_q = (S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q)$$

Man beachte, daß hier die rechte Seite von δ_{q-1}, also von V_{q-1} abhängt. Wir wählen nun mögliche V_q induktiv und nehmen an, daß die V_i für $i \leq q-1$ schon konstruiert sind und die Gleichungen $(*)_i$ für $i \leq q-1$ gelten. Als Basis der Induktion dürfen wir $V_i = 0$ für $i < 0$ nehmen und als V_0 irgendeinen singulären Simplex $\Delta_1 \to \Delta_0 \times [0,1]$, der die Endpunkte des Geradensegments Δ_1 "in der richtigen Reihenfolge" auf die Endpunkte des Geradensegments $\Delta_0 \times [0,1]$ abbildet. Da nun nach Lemma 5.2.14 für $q > 0$ gilt $H_q(\Delta_q \times [0,1]) = 0$, können wir eine q-Kette in $\Delta_q \times [0,1]$ für $q > 0$ als Rand schreiben genau dann, wenn sie ein Zykel ist. Wir finden für $q > 0$ also unser V_q wie gewünscht genau dann, wenn gilt

$$\partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = 0$$

Das zeigen wir induktiv, indem wir unter Verwendung von $(*)_{q-1}$ rechnen

$$\begin{aligned} \partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial) &= (S_{q-1} i_1 - S_{q-1} i_0 - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.4.5. Der vorhergehende Beweis motiviert die folgende allgemeine Definition.

Definition 5.4.6. Zwei Kettenabbildungen $f, g : A \to B$ von Kettenkomplexen heißen **kettenhomotop** oder kurz **homotop** genau dann, wenn es eine Familie $\delta_q : A_q \to B_{q+1}$ von Gruppenhomomorphismen gibt mit $f_q - g_q = \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q$ für alle q.

Bemerkung 5.4.7. Eine Kettenabbildung heißt **nullhomotop** genau dann, wenn sie homotop ist zur Nullabbildung. Per definitionem sind zwei Kettenabbildungen kettenhomotop genau dann, wenn ihre Differenz nullhomotop ist. Ist weiter $g \circ h$ eine Verknüpfung von Kettenabbildungen und ist eine der beiden kettenhomotop ist zur Nullabbildung, so auch die Verknüpfung. Wir können deshalb die **Homotopiekategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen** definieren, mit Kettenkomplexen von abelschen Gruppen als Objekten und Homotopieklassen von Kettenabbildungen als Morphismen. Wir notieren sie $\mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$ oder $\mathrm{Hot}_{\mathrm{Ab}}$ oder auch einfach nur Hot, wenn aus dem Kontext klar sei sollte, daß nicht die Homotopiekategorie topologischer Räume gemeint ist. Isomorphismen in einer Homotopiekategorie von Komplexen nennen wir auch **Homotopieäquivalenzen**.

Bemerkung 5.4.8. Unsere Argumente von eben zeigen, daß die Homologiegruppen ganz allgemein Funktoren $H_q : \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Ab}$ definieren. Weiter haben wir gezeigt, daß homotope Abbildungen f, g kettenhomotope Abbildungen Sf, Sg auf den singulären Ketten liefern. Bezeichnen wir wie bisher mit Hot die Homotopiekategorie topologischer Räume, so erhalten wir mithin ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Top} & \stackrel{S}{\to} & \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab}) & \stackrel{H_q}{\to} & \mathrm{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathrm{Hot} & \stackrel{S}{\to} & \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab}) & \stackrel{H_q}{\to} & \mathrm{Ab} \end{array}$$

Insbesondere induziert eine Homotopieäquivalenz stets Isomorphismen auf der Homologie.

Übung 5.4.9. Seien (C, ∂^C) und (D, ∂^D) Kettenkomplexe. So definieren wir einen Kettenkomplex $\mathrm{Hom}(C, D)$ durch die Vorschrift

$$(\mathrm{Hom}(C, D))_i = \prod_q \mathrm{Hom}(C_q, D_{q+i})$$

mit Differential $\partial(f) = \partial^D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$, wo wir $|f| = i$ schreiben falls gilt $f \in (\mathrm{Hom}(C, D))_i$. Man zeige, daß gilt $\partial(\partial(f)) = 0$, daß die Nullzykel gerade die Kettenabbildungen von C nach D sind, in Formeln $Z_0 \mathrm{Hom}(C, D) =$

$\mathrm{Ket}(C, D)$, und daß die nullte Homologie in natürlicher Weise identifiziert werden kann mit dem Raum der Morphismen von C nach D in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, in Formeln $H_0 \mathrm{Hom}(C, D) = \mathrm{Hot}(C, D)$. In ähnlicher Weise erhalten wir natürliche Abbildungen

$$H \mathrm{Hom}(C, D) = \mathrm{Hom}(HC, HD)$$

Übung 5.4.10. Sei C ein Komplex von Vektorräumen. Man zeige, daß es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von Vektorräumen genau einen Isomorphismus $C \xrightarrow{\sim} HC$ gibt, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation $HC \xrightarrow{\sim} H(HC)$ induziert.

5.5 Erste Homologie und Fundamentalgruppe

Bemerkung 5.5.1. Der Klarheit halber schreiben wir in diesem Abschnitt anders als sonst $[[\gamma]]$ für die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges und wie üblich $[z]$ für die Homologieklasse eines Zykels.

Satz 5.5.2 (Hurewicz-Isomorphismus). *Bezeichne $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ die Projektion auf die zweite Koordinate.*

1. *Für jeden punktierten Raum (X, x) gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus von der Fundamentalgruppe in die erste singuläre Homologiegruppe $\pi_1(X, x) \to H_1(X)$ mit $[[\gamma]] \mapsto [\gamma \circ c]$ für alle $\gamma \in \Omega(X, x)$.*

2. *Für jeden wegzusammenhängenden punktierten Raum induziert dieser Gruppenhomomorphismus einen Isomorphismus zwischen der Abelianisierung der Fundamentalgruppe und der ersten singulären Homologiegruppe, den sogenannten* **Hurewicz-Isomorphismus**

$$\pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1(X)$$

Beweis. 1. Offensichtlich definiert die Vorschrift $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$ eine Abbildung $\mathrm{can} : \Omega(X, x) \to H_1(X)$. Um zu zeigen, daß sie auf Homotopieklassen von Wegen konstant ist, geben wir eine alternative Beschreibung. Bezeichne $\mathrm{Exp} : [0, 1] \to S^1$ unsere übliche Abbildung $t \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i}\, t)$. Da Exp eine Identifikationsabbildung ist, gibt es zu jedem geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(X, x)$ eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \to X$ mit $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \mathrm{Exp}$. Betrachten wir nun in der Kreislinie S^1 den 1-Zykel $z = \mathrm{Exp} \circ c \in Z_1(S^1)$, so können wir unsere Abbildung von $\Omega(X, x)$ nach $H_1(X)$ auch schreiben als

$$\gamma \mapsto [\gamma \circ c] = (H_1 \tilde{\gamma})[z]$$

Sind nun $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$ homotop mit festen Endpunkten, so sind $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\beta}$ homotope Abbildungen von S^1 nach X, da auch $\mathrm{Exp} \times \mathrm{id}$ eine Identifizierung ist. Wir erhalten damit

$$\begin{array}{rcl} [[\gamma]] = [[\beta]] & \Rightarrow & \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\beta} \\ & \Rightarrow & H_1\tilde{\gamma} = H_1\tilde{\beta} \text{ nach Homotopieinvarianz} \\ & \Rightarrow & (H_1\tilde{\gamma})[z] = (H_1\tilde{\beta})[z] \\ & \Rightarrow & [\gamma \circ c] = [\beta \circ c] \end{array}$$

Folglich definiert die Vorschrift $[[\gamma]] \mapsto [\gamma \circ c]$ in der Tat eine wohlbestimmte Abbildung $\pi_1(X, x) \to H_1(X)$. Wir müssen für den ersten Teil nur noch zeigen, daß sie ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir die affine Abbildung $p : \Delta_2 \to [0, 1]$ mit $(1, 0, 0) \mapsto 0$, $(0, 1, 0) \mapsto 1/2$ und $(0, 0, 1) \mapsto 1$. Offensichtlich gilt für beliebige $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$, ja sogar für zwei beliebige verknüpfbare nicht notwendig geschlossene Wege in $S_1(X)$ die Identität

$$\partial((\beta * \gamma) \circ p) = \gamma \circ c - (\beta * \gamma) \circ c + \beta \circ c$$

und daraus folgt in $H_1(X)$ die Gleichung $[(\beta * \gamma) \circ c] = [\gamma \circ c] + [\beta \circ c]$.

2. Da $H_1(X)$ abelsch ist, definiert die Abbildung aus Teil 1 einen Gruppenhomomorphismus

$$\overline{\mathrm{can}} : \pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}} \to H_1(X)$$

Wir nehmen nun X wegzusammenhängend an und wählen für jeden Punkt $y \in X$ einen Weg $\alpha_y \in \Omega(X, y, x)$ von x nach y. Dann definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$S_1(X) \to \pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}}$$

durch die Vorschrift, daß er einen 1-Simplex $\sigma : \Delta_1 \to X$ abbilden möge auf die Klasse des geschlossenen Weges $w(\sigma) = \bar{\alpha}_z * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_y$ für $z = \sigma(0, 1)$ und $y = \sigma(1, 0)$ die Enden unseres 1-Simplex. Wir zeigen nun, daß dieser Gruppenhomomorphismus alle Ränder in $B_1(X)$ auf das neutrale Element von $\pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}}$ wirft. In der Tat, der Rand eines 2-Simplex $\tau : \Delta_2 \to X$ wird unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf $[[\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]]$, wo $u = \tau(0, 0, 1)$ das Bild einer Ecke von Δ_2 ist und $k : [0, 1] \to \Delta_2$ den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von Δ_2 umläuft in einer Richtung, die der Leser sich selber überlegen möge. Da aber schon k selber homotop ist zum konstanten Weg, gilt dasselbe für die obige Verknüpfung. Folglich definiert unsere Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus in der umgekehrten Richtung

$$\overline{w} : H_1X \to \pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}}$$

Es bleibt zu zeigen, daß er invers ist zu dem in Teil 1 konstruierten Homomorphismus $\overline{\mathrm{can}}$. Um $\overline{w} \circ \overline{\mathrm{can}} = \mathrm{id}$ nachzuweisen, wählen wir einen geschlossenen Weg $\gamma \in \Omega(X, x)$ und erkennen, daß unter unserer Verknüpfung seine Klasse abgebildet wird auf die Klasse von $\overline{\alpha}_x * \gamma * \alpha_x$ in $\pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}}$. Das zeigt $\overline{w} \circ \overline{\mathrm{can}} = \mathrm{id}$. Um $\overline{\mathrm{can}} \circ \overline{w} = \mathrm{id}$ nachzuweisen bemerken wir, daß nach dem Schluß des Beweises des ersten Teils gilt

$$\mathrm{can}(w(\sigma)) - \sigma \equiv \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c - \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c \quad \text{modulo } B_1(X).$$

Definieren wir also $\delta : S_0X \to S_1X$ durch $y \mapsto \alpha_y \circ c$, so ist $\mathrm{can}(w(\sigma)) - \sigma$ homolog zu $\delta\partial\sigma$ für jeden 1-Simplex σ und nullhomolog für jeden 1-Zykel $a \in Z_1X$, in Formeln $[\mathrm{can}(w(a))] = [a] \quad \forall a \in Z_1X$. □

5.6 Relative Homologie

Definition 5.6.1. Ist (X, A) ein **Raumpaar**, als da heißt ein topologischer Raum X mit einer Teilmenge A, so definiert die Einbettung $A \hookrightarrow X$ Inklusionen $S_qA \hookrightarrow S_qX$ auf den Gruppen der singulären q-Ketten, für alle $q \in \mathbb{Z}$. Die Quotientengruppe bezeichnen wir mit

$$S_qX/S_qA = S_q(X, A)$$

und nennen ihre Elemente **relative q-Ketten**. Wir geben der Quotientenabbildung $S_qX \twoheadrightarrow S_q(X, A)$ keinen Namen.

Bemerkung 5.6.2. Die Gruppe der relativen q-Ketten $S_q(X, A)$ ist auch in natürlicher Weise isomorph zur freien Gruppe über der Menge aller q-Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$, deren Bild nicht in A enthalten ist. Diese Sichtweise zeigt, daß auch die relativen Ketten eine freie abelsche Gruppe bilden.

Definition 5.6.3. Man überzeugt sich leicht, daß es eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismen $\bar{\partial}_q : S_q(X, A) \to S_{q-1}(X, A)$ gibt derart, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_qA & \hookrightarrow & S_qX & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\ S_{q-1}A & \hookrightarrow & S_{q-1}X & \twoheadrightarrow & S_{q-1}(X, A) \end{array}$$

Es ist klar, daß $S(X, A)$ mit diesem Differential ein Kettenkomplex wird, d.h. es gilt $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ und wir definieren die relativen Homologiegruppen von unserem Raumpaar als die Homologie dieses Kettenkomplexes, in Formeln

$$H_q(X, A) = H_q(S(X, A)) = \ker \bar{\partial}_q / \operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1}$$

Die Elemente von $\ker \bar{\partial}_q$ heißen auch die **relativen q-Zykel**, die Elemente von $\operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1}$ die **relativen q-Ränder** und für einen relativen Zykel c bezeichnet wieder $[c]$ seine Homologieklasse.

Beispiel 5.6.4. Wir haben $H_1([x,y],\{x,y\}) \cong \mathbb{Z}$, für $x < y$ in $\mathbb{R}$. Diese Aussage können Sie sich als Übung hier schon überlegen, wir erhalten sie später auch als einen Spezialfall von 5.8.4. Wir haben nach 5.8.5 auch $H_1(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$. Einen Erzeuger dieser relativen Homologie kann man wie folgt finden: Man schneidet den Kuchen D^2 wie üblich in Stücke und betrachtet jedes der Stücke mit einer geeigneten Orientiering als 2-Simplex. Die formale Summe dieser Simplizes hat dann als Rand nur den Rand des Kuchens selber und bildet folglich einen relativen Zykel, von dem man mithilfe des zweiten Teils von 5.8.4 zeigen kann, daß seine Klasse in der Tat die relative Homologie erzeugt.

Definition 5.6.5. Ein **Morphismus von Raumpaaren** $f : (X, A) \to (Y, B)$ ist per definitionem schlicht eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$. So ein f induziert eine Abbildung $H_q f$ auf der relativen Homologie. Genauer definiert man zunächst $S_q f : S_q(X, A) \to S_q(Y, B)$ durch die Bedingung, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X,A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_q B & \hookrightarrow & S_q Y & \twoheadrightarrow & S_q(Y,B) \end{array}$$

Dann prüft man, daß diese $S_q f$ sogar mit den Differentialen kommutieren und so einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$Sf : S(X, A) \to S(Y, B)$$

definieren. Dieser Morphismus liefert dann schließlich auf der Homologie die gewünschten Morphismen $H_q f : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$.

Bemerkung 5.6.6. Man prüft, daß wir auf diese Weise sogar einen Funktor

$$S : \{\text{Raumpaare}\} \to \{\text{Kettenkomplexe}\}$$

erhalten. Durch Verknüpfung mit den Homologie-Funktoren

$$H_q : \{\text{Kettenkomplexe}\} \to \{\text{Abelsche Gruppen}\}$$

können wir also unsere relativen Homologiegruppen verstehen als Funktoren

$$H_q : \{\text{Raumpaare}\} \to \{\text{Abelsche Gruppen}\}$$

Die Definition der relativen Ketten schenkt uns natürliche Morphismen $SX \to S(X, A)$ und damit $H_q X \to H_q(X, A)$. Es ist klar nach den Definitionen, daß $H_q X \to H_q(X, \emptyset)$ stets ein Isomorphismus ist.

Übung 5.6.7. Die folgenden Funktoren von den Raumpaaren in die abelschen Gruppen sind natürlich äquivalent:

1. $(X, A) \mapsto H_0(X, A)$
2. $(X, A) \mapsto$ {Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller Wegzu--sammenhangskomponenten von X, die A nicht treffen}

Definition 5.6.8. Seien $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ zwei Morphismen zwischen Raumpaaren. Eine **Homotopie von** f **nach** g ist ein Morphismus von Raumpaaren $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ derart, daß gilt $H \circ i_0 = f$ und $H \circ i_1 = g$.

Übung 5.6.9. Man zeige: Sind zwei Morphismen $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so induzieren sie dieselben Abbildungen $H_q f = H_q g : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ auf den relativen Homologiegruppen. (Hinweis: Man wiederholt den alten Beweis.) Man zeige durch ein Beispiel, daß es nicht ausreicht nur vorauszusetzen, daß f und g als Abbildungen $X \to Y$ sowie als Abbildungen $A \to B$ jeweils zueinander homotop sind.

5.7 Die lange exakte Homologiesequenz

Bemerkung 5.7.1. Wir werden im folgenden zu jedem Raumpaar (X, A) Morphismen $\hat{\partial} = \hat{\partial}_q : H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ konstruieren derart, daß die Sequenz

$$\ldots \to H_{q+1}(X, A) \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A) \to \ldots$$

exakt ist, wenn wir als Morphismen diese $\hat{\partial}$ und die von den Einbettungen $(A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ induzierten Abbildungen nehmen. Ist genauer $[c] \in H_q(X, A)$ eine relative Homologieklasse, so repräsentieren wir $[c]$ durch einen relativen q-Zykel $c \in S_q(X, A)$ und diesen durch eine q-Kette $\tilde{c} \in S_q X$. Dann ist $\partial\tilde{c} \in S_{q-1}A$ ein $(q-1)$-Zykel und wir nehmen als $\hat{\partial}[c]$ seine Homologieklasse. Daß wir so eine wohldefinierte Abbildung erhalten und daß mit diesen Abbildungen die oben angegebene Sequenz exakt ist, folgt aus dem anschließenden Satz 5.7.2, angewandt auf die "kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen"

$$SA \hookrightarrow SX \twoheadrightarrow S(X, A)$$

Unsere Sequenz heißt die **lange exakte Homologiesequenz des Raumpaares** (X, A).

Satz 5.7.2. *Sei* $C' \xhookrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C''$ *eine* **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen**, *als da heißt* $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$ *soll für alle* q *eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen sein.*

1. *Es gibt für jedes q genau einen Homomorphismus*

$$\hat{\partial} : H_q C'' \to H_{q-1} C'$$

derart, daß gilt $\hat{\partial}[c''] = [c']$ für Zykel $c'' \in C''_q$, $c' \in C'_{q-1}$ genau dann, wenn es $c \in C_q$ gibt mit $pc = c''$ und $\partial c = ic'$.

2. *Mit diesen Homomorphismen erhalten wir eine exakte Sequenz, die abstrakte* **lange exakte Homologiesequenz**

$$\ldots \to H_{q+1} C'' \to H_q C' \to H_q C \to H_q C'' \to H_{q-1} C' \to \ldots$$

Beweis. Das folgende Diagramm stellt alle im Beweis benötigten Gruppen und Abbildungen dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{q+1} & \twoheadrightarrow & C''_{q+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
C'_q & \hookrightarrow & C_q & \twoheadrightarrow & C''_q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C'_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \twoheadrightarrow & C''_{q-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
C'_{q-2} & \hookrightarrow & C_{q-2} & &
\end{array}$$

Jetzt beginnen wir mit der eigentlichen Argumentation. Ist $c'' \in C''_q$ ein Zykel und $c \in C_q$ ein Urbild, in Formeln $pc = c''$, so folgt $p\partial c = \partial c'' = 0$ und mit Exaktheit bei C_{q-1} gibt es $c' \in C'_{q-1}$ mit $ic' = \partial c$. Dies c' muß sogar ein Zykel sein, denn es gilt $i\partial c' = \partial i c' = \partial^2 c = 0$ und i_{q-2} ist injektiv.

Wir wollen gerne $\hat{\partial}[c''] = [c']$ setzen und müssen zeigen, daß die Homologieklasse $[c']$ weder von der Wahl von c'' noch von der Wahl von c abhängt. Aber sei sonst $b'' \in C''_{q+1}$ gegeben und sei c'' abgeändert zu $c'' + \partial b''$. Wir finden $b \in C_{q+1}$ mit $pb = b''$. Wählen wir $\tilde{c} \in C_q$ mit $p\tilde{c} = c'' + \partial b''$, so folgt $p(\tilde{c} - c - \partial b) = 0$, also $\tilde{c} - c - \partial b = ib'$ für $b' \in C'_q$. Ist nun $\partial \tilde{c} = i\tilde{c}'$ so folgt $i(\tilde{c}' - c') = i\partial b'$ und somit $[\tilde{c}'] = [c']$ wie gewünscht.

Damit ist also $\hat{\partial}$ definiert und wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß dies $\hat{\partial}$ durch die im ersten Teil des Satzes angegebene Eigenschaft charakterisiert wird. Es bleibt nur die Exaktheit unserer Sequenz nachzuweisen. Man folgert mühelos aus den Definitionen daß die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Morphismen verschwindet, also $\ker \supset \mathrm{im}$. Wir müssen noch $\ker \subset \mathrm{im}$ an jeder Stelle zeigen.

Bei $H_q C$ folgt aus $[c] \mapsto 0$ für $c \in Z_q C$ sofort $pc = \partial b''$ und die Surjektivität von $C_{q+1} \to C''_{q+1}$ liefert uns $b \in C_{q+1}$ mit $pb = b''$, also $p(c - \partial b) = 0$. Dann gibt es aber nach der Exaktheit von $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$ ein $c' \in C'_q$ mit

$ic' = c - \partial b$ und notwendig ist c' ein Zykel und $[c'] \mapsto [c - \partial b] = [c]$. Bei $H_q C''$ folgt aus $[c''] \mapsto 0$, daß für jedes Urbild $c \in C_q$ mit $c \mapsto c''$ gilt $\partial c = ic'$ für einen Rand $c' = \partial b'$ in C'_{q-1}. Dann ist aber $c - ib' \in C_q$ ein Zykel und $[c'']$ das Bild von $[c - ib'] \in H_q C$. Bei $H_{q-1} C'$ folgt aus $[c'] \mapsto 0$ ja $ic' = \partial c$ für $c \in C_q$ und dann muß $pc \in C''_q$ ein Zykel sein mit $[pc] \mapsto [c']$. Der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung 5.7.3. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D' & \hookrightarrow & D & \twoheadrightarrow & D'' \end{array}$$

ist auch das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \to & H_q C' & \to & H_q C & \to & H_q C'' & \to H_{q-1} C' & \to & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ \dots & \to & H_q D' & \to & H_q D & \to & H_q D'' & \to H_{q-1} D' & \to & \dots \end{array}$$

Das folgt aus der Funktorialität von H_q für die ersten beiden Quadrate und aus der Konstruktion von $\hat{\partial}$ für das dritte Quadrat. Inbesondere kommutieren für jeden Morphismus $f : (X, A) \to (Y, B)$ von Raumpaaren mit den Randabbildungen der jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \to & H_{q-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_q(Y, B) & \to & H_{q-1}(B) \end{array}$$

Korollar 5.7.4. *Sei $f : (X, A) \to (Y, B)$ ein Morphismus von Raumpaaren. Sind $H_q f : H_q X \to H_q Y$ und $H_q f : H_q A \to H_q B$ Isomorphismen, so haben wir auch auf der relativen Homologie einen Isomorphismus*

$$H_q f : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$$

Beweis. Das folgt aus der langen exakten Homologiesequenz mit dem anschließenden Fünferlemma. □

Lemma 5.7.5 (Fünferlemma). *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

Sind die beiden Horizontalen exakte Sequenzen und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.

Beweis. Diese Diagrammjagd überlassen wir dem Leser. Man bemerke, daß wir sogar bei der Vertikale ganz links nur die Surjektivität verwenden und bei der Vertikale ganz rechts nur die Injektivität. □

Bemerkung 5.7.6. Sind $X \supset Y \supset Z$ topologische Räume, so haben wir eine lange exakte Sequenz

$$\dots H_{q+1}(X,Y) \to H_q(Y,Z) \to H_q(X,Z) \to H_q(X,Y) \to H_{q-1}(Y,Z) \dots$$

die man die **lange exakte Homologiesequenz des Tripels** (X,Y,Z) nennt. Man erhält sie aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$SY/SZ \hookrightarrow SX/SZ \twoheadrightarrow SX/SY,$$

die hinwiederum eine Konsequenz des noetherschen Isomorphiesatzes ist.

Übung 5.7.7. **(Neunerlemma).** Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von (kommutativen) Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} A_3 & \hookrightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & C_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \hookrightarrow & B_2 & \twoheadrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \hookrightarrow & B_1 & \twoheadrightarrow & C_1 \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils Null. Sind zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die Dritte. (Hinweis: Man benutze die lange exakte Homologiesequenz. Im Fall nichtkommutativer Gruppen bleibt allerdings nur die Diagrammjagd.) Man folgere den noetherschen Isomorphiesatz.

Übung 5.7.8. Eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ von abelschen Gruppen heißt **spaltend** genau dann, wenn es einen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} A' \oplus A''$ gibt derart, daß das folgende Diagramm kommutiert, mit $a' \mapsto (a',0)$ und $(a',a'') \mapsto a''$ in der unteren Horizontalen:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \| & & \downarrow \wr & & \| \\ A' & \hookrightarrow & A' \oplus A'' & \twoheadrightarrow & A'' \end{array}$$

Man zeige, daß für eine kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ von abelschen Gruppen gleichbedeutend sind: (1) Die Sequenz spaltet; (2) Die Surjektion $A \twoheadrightarrow A''$ besitzt ein Rechtsinverses; (3) Die Injektion $A' \hookrightarrow A$ besitzt ein Linksinverses.

Bemerkung 5.7.9. Man nennt ganz allgemein eine Surjektion, die ein Rechtsinverses besitzt eine **spaltende Surjektion** und eine Injektion, die ein Linksinverses besitzt, eine **spaltende Injektion**.

Übung 5.7.10. Eine abelsche Gruppe F heißt **frei** genau dann, wenn sie isomorph ist zur freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}M$ über einer geeigneten Menge M. Man zeige, daß jede Surjektion von einer beliebigen abelschen Gruppe auf eine freie abelsche Gruppe spaltet.

Übung 5.7.11. Sei gegeben ein kommutatives 3×3-Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

So kommutiert das Diagramm der Randoperatoren der zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen bis auf ein Vorzeichen, genauer kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q C'' & \stackrel{\partial}{\to} & H_{q-1} C' \\ {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\partial} \\ H_{q-1} A'' & \stackrel{\partial}{\to} & H_{q-2} A' \end{array}$$

5.8 Ausschneidung

Bemerkung 5.8.1. Bevor wir wirklich in großem Stil Homologie ausrechnen können, müssen wir noch den Ausscheidungssatz zeigen.

Satz 5.8.2 (Ausschneidung). *Sei (X, A) ein Raumpaar und $L \subset A$ eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von A liegt, in Formeln $\bar{L} \subset A^\circ$. So liefert die Einbettung $(X - L, A - L) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen, in Formeln*

$$H_q(X - L, A - L) \stackrel{\sim}{\to} H_q(X, A)$$

Bemerkung 5.8.3. Wir stellen den Beweis zurück und geben zunächst einige Anwendungen. Bezeichne $\partial\Delta_n \subset \Delta_n$ den anschaulichen Rand $\partial\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i\}$ des n-ten Standardsimplex.

Satz 5.8.4. *1. Die relativen Homologiegruppen $H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand werden gegeben durch*

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

2. *Die Klasse $[\tau_n]$ des tautologischen Simplex τ_n ist ein Erzeuger der relativen Homologiegruppe $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$.*

Beweis. Für $n = 0$ ist Δ_n ein Punkt und $\partial\Delta_n$ die leere Menge und der Satz ist unsere Aussage 5.2.11 über die Homologie eines Punktes. Den allgemeinen Fall folgern wir durch vollständige Induktion. Dazu betten wir Δ_n ein in Δ_{n+1}, indem wir als letzte Koordinate eine Null anfügen, und betrachten in Δ_{n+1} die Spitze $p = (0, 0, 0, \ldots, 1)$, die der Seitenfläche $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ gegenüberliegt. Weiter betrachten wir die Vereinigung $\Lambda_{n+1} \subset \Delta_{n+1}$ aller Seitenflächen, die p enthalten, und die Isomorphismen

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1} - p, \Lambda_{n+1} - p) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

die von den Einbettungen aufgrund der Homotopieinvarianz und der Ausschneidung von p induziert werden. Die Randabbildung zur langen exakten Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ liefert weiter Isomorphismen

$$H_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

und damit folgt die erste Behauptung durch Induktion. Unter diesen ganzen Isomorphismen geht weiter die Klasse $[\tau_{n+1}] \in H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$ über in $(-1)^{n+1}[\tau_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$, und so ergibt sich auch die zweite Behauptung mit vollständiger Induktion. □

Korollar 5.8.5. *Für $n \geq 0$ wird die Homologie des n-Balls relativ zu seinem Rand gegeben durch die Formeln*

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Das folgt mit **??** aus 5.8.4. □

Korollar 5.8.6. *Die* **Homologiegruppen der Sphären** *S^n werden für $n \geq 1$ gegeben durch*

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ oder } n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Nullsphäre S^0 besteht schlicht aus zwei Punkten, wir haben also $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sowie $H_q(S^0) = 0$ für $q > 0$.

Beweis. Das ergibt sich aus dem vorhergehenden Korollar mit der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars (D^{n+1}, S^n). □

Korollar 5.8.7. *Für $n \geq 0$ und jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ nicht homöomorph.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Die Einbettung $(D^n, S^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ induziert nun aufgrund der Homotopieinvarianz 5.4.2 und 5.7.4 Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen. □

Korollar 5.8.8. *Sei $n \geq -1$. Es gibt keine stetige Abbildung $r : D^{n+1} \to S^n$, deren Einschränkung auf S^n die Identität ist.*

Beweis. Sei $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ die Einbettung. Aus $r \circ i = \mathrm{id}$ folgt, daß die Verknüpfung

$$H_n S^n \to H_n D^{n+1} \to H_n S^n$$

von Hr mit Hi die Identität ist. Die Identität auf $\mathbb{Z}$ kann aber nicht über 0 faktorisieren und das erledigt den Fall $n \geq 1$. Im Fall $n = 0$ argumentiert man analog, daß die Identität auf $\mathbb{Z}^2$ nicht über $\mathbb{Z}$ faktorisieren kann. Der Fall $n = -1$ ist eh klar. □

Satz 5.8.9 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ des abgeschlossenen n-Balls auf sich selber besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Sonst könnte man eine stetige Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$ konstruieren durch die Vorschrift, daß $r(x)$ der Punkt ist, in dem der Strahl, der von $r(x)$ ausgeht und durch x läuft, die Sphäre S^{n-1} trifft. Das stände jedoch im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 5.8.8. □

Bemerkung 5.8.10. Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis des Ausschneidungssatzes. Die zentrale Rolle spielen hier die **Unterteilungsoperatoren** $U_q : S_q X \to S_q X$, die jeden Simplex "baryzentrisch unterteilen". Wir konstruieren sie als natürliche Transformationen $U_q : S_q \to S_q$. Um solche natürlichen Transformationen festzulegen, brauchen wir ja nach Lemma 5.4.4 nur $U_q(\tau_q) \in S_q(\Delta_q)$ anzugeben. Für jede konvexe Teilmenge K eines $\mathbb{R}^n$ und jeden Punkt $p \in K$ erinnern wir dazu an den Prismen-Operator $P = P_p : S_q K \to S_{q+1} K$. Dann setzen wir $U_q = 0$ für $q < 0$ und definieren wir U_q für $q \geq 0$ induktiv vermittels der $U_0(\tau_0) = \tau_0$ und $U_q(\tau_q) = P U_{q-1}(\partial \tau_q)$ falls $q > 0$, wo P den Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts $\frac{1}{q+1}(1, 1, \ldots, 1)$ von Δ_q bezeichnet.

Lemma 5.8.11. *Die Unterteilung $U : SX \to SX$ ist eine Kettenabbildung.*

Beweis. Es gilt zu zeigen $\partial U_q = U_{q-1}\partial$ für alle q. Wir zeigen die Gleichheit durch Induktion über q. Natürlich reicht es, die Gleichheit auf τ_q zu zeigen. Die Fälle $q = 0, 1$ überlassen wir dem Leser. Für $q \geq 2$ haben wir

$$\begin{array}{rcl} \partial U_q(\tau_q) & = & \partial P U_{q-1}\partial(\tau_q) \\ & = & (-P\partial + \mathrm{id})U_{q-1}\partial(\tau_q) \\ & = & U_{q-1}\partial(\tau_q) \end{array}$$

die erste Gleichung nach Definition, die Zweite da $\partial P + P\partial = \mathrm{id}$ auf $S_q\Delta_q$ für $q \geq 1$, die Dritte da $\partial U_{q-1} = U_{q-2}\partial$ nach Induktion. □

Lemma 5.8.12. *Die Unterteilung ist in natürlicher Weise kettenhomotop zur Identität, es gibt in anderen Worten natürliche Transformationen*

$$T_q : S_q \to S_{q+1}$$

mit $\partial T_q + T_{q-1}\partial = U_q - \mathrm{id}$ *für alle* q*. Insbesondere induziert* U *die Identität auf der Homologie.*

Bemerkung 5.8.13. Dies Lemma wird sich später als eine Konsequenz des Satzes über azyklische Modelle 8.1.10 erweisen.

Beweis. Wir versuchen induktiv mögliche natürliche Transformationen T_q zu finden und müssen nur $T_q(\tau_q) \in S_{q+1}(\Delta_q)$ angeben. Wir können mit $T_{-1} = T_0 = 0$ beginnen und müssen dann induktiv die Gleichungen

$$\partial T_q(\tau_q) = -T_{q-1}\partial(\tau_q) + U_q(\tau_q) - \tau_q$$

lösen. Da $H_q(\Delta_q) = 0$ für $q \geq 1$ geht das, wenn die rechte Seite ein Zykel ist. Dazu rechnen wir stur (mit der Induktionsannahme)

$$\begin{aligned} -\partial T_{q-1}(\partial\tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial\tau_q = & \\ &= (T_{q-2}\partial - U_{q-1} + \mathrm{id})(\partial\tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial\tau_q \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Definition 5.8.14. Gegeben eine (nicht notwendig offene) Überdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ eines topologischen Raums X bezeichne $S_q^{\mathcal{V}}X \subset S_qX$ die freie Gruppe über allen denjenigen Simplizes, die ganz in einem der $V \in \mathcal{V}$ liegen. Wir nennen $S_q^{\mathcal{V}}X$ die Gruppe der **$\mathcal{V}$-feinen Ketten**.

Satz 5.8.15 (über feine Ketten). *Sei $\mathcal{V}$ eine Überdeckung eines Raums X derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus $\mathcal{V}$ schon X überdecken, in Formeln $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$. So induziert die Einbettung $S^\mathcal{V} X \hookrightarrow SX$ vom Komplex der $\mathcal{V}$-feinen Ketten in den Komplex aller singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Bemerkung 5.8.16. Mit 9.1.7 wird aus diesem Resultat sogar folgen, daß $S^\mathcal{V} X \to SX$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Beweis. Mit der langen exakten Homologiesequenz müssen wir nur zeigen, daß die Homologie von $SX/S^\mathcal{V} X$ verschwindet. Nun bilden unsere Abbildungen U und T sicher $S^\mathcal{V} X$ auf sich selber ab und induzieren also Operatoren $\bar{U}$, $\bar{T}$ auf dem Quotienten. Offensichtlich ist auch $\bar{U}$ homotop zur Identität vermittels $\bar{T}$ und liefert also die Identität auf den Homologiegruppen von $SX/S^\mathcal{V} X$. Für jedes q und jede Kette $\gamma \in S_q X$ gibt es aber nach dem anschließenden Lemma 5.8.17 ein $n \gg 0$ mit $U^n \gamma \in S_q^\mathcal{V} X$, also $\bar{U}^n \bar{\gamma} = 0$ für $\bar{\gamma} \in S_q X / S_q^\mathcal{V} X$ die Nebenklasse von γ. Wir folgern $H_q(SX/S^\mathcal{V} X) = 0$. □

Lemma 5.8.17. *Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von X. Für jedes q und jede Kette $\gamma \in S_q X$ gibt es $n \gg 0$ mit $U^n \gamma \in S_q^\mathcal{V} X$.*

Beweis. Es reicht sicher, das Lemma für jeden Simplex $\gamma : \Delta_q \to X$ zu zeigen. Nun sieht man, daß der maximale Durchmesser eines Simplex, der mit von Null verschiedenem Koeffizienten in $U^n(\tau_q)$ vorkommt, für $n \to \infty$ beliebig klein wird. Insbesondere ist für $n \gg 0$ nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue jeder solche Simplex ganz in einer der Mengen $\gamma^{-1}(V)$ mit $V \in \mathcal{V}$ enthalten. Das bedeutet aber gerade $U^n \gamma \in S_q^\mathcal{V} X$. □

Satz 5.8.18 (Ausschneidung). *Sei (X, A) ein Raumpaar und $L \subset A$ eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von A liegt, in Formeln $\bar{L} \subset A^\circ$. So liefert die Einbettung $(X - L, A - L) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen, in Formeln*

$$H_q(X - L, A - L) \xrightarrow{\sim} H_q(X, A)$$

Beweis. Wir betrachten die Überdeckung $X = A \cup (X - L)$, geben ihr den Namen $\mathcal{V}$ und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
S(A - L) & \hookrightarrow & SA \oplus S(X - L) & \twoheadrightarrow & S^\mathcal{V} X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S(X - L) & \hookrightarrow & SX \oplus S(X - L) & \twoheadrightarrow & SX \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S(X - L, A - L) & \to & S(X, A) & \to & SX/S^\mathcal{V} X
\end{array}$$

wo die beiden oberen horizontalen Inklusionen die “diagonalen” Einbettungen $z \mapsto (z, z)$ sein sollen und die folgenden Surjektionen die Differenzen $(x, y) \mapsto x - y$. Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt, und da nach 5.8.15 die Homologie von $SX/S^{\mathcal{V}}X$ verschwindet, folgt unser Satz aus der langen exakten Homologiesequenz. □

Bemerkung 5.8.19. Sei $X = X_1 \cup X_2$ ein topologischer Raum mit einer Überdeckung $\mathcal{V}$ durch zwei offene Teilmengen. Wir betrachten die Einbettungen

$$(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\nu} X_\nu \xrightarrow{j_\nu} X$$

und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$S(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow SX_1 \oplus SX_2 \twoheadrightarrow S^{\mathcal{V}}X$$

Hier fassen wir die Elemente der direkten Summe als Spaltenvektoren auf, die erste Abbildung wird gegeben durch die Spaltenmatrix $(Si_1, Si_2)^t$, und die zweite durch die Zeilenmatrix $(Sj_1, -Sj_2)$. Nehmen wir nun die lange exakte Homologiesequenz und verwenden die von der Einbettung $S^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow SX$ induzierten Identifikationen $H_q(S^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} H_qX$, so erhalten wir die sogenannte **Mayer-Vietoris-Sequenz**, eine lange exakte Sequenz der Gestalt

$$\dots H_q(X_1 \cap X_2) \to H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \to H_q(X) \to H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \dots$$

Die ersten beiden Abbildungen dieser Sequenz werden gegeben durch die Spaltenmatrix $(H_qi_1, H_qi_2)^t$ und die Zeilenmatrix $(H_qj_1, -H_qj_2)$, die dritte Abbildung ist nicht ganz so leicht explizit anzugeben.

Übung 5.8.20 *(***Relative Mayer-Vietoris-Sequenz***).* Sei X ein topologischer Raum und seien $U, V \circledcirc X$ zwei offene Teilmengen. So haben wir eine lange exakte Sequenz

$$H_q(X, U \cap V) \to H_q(X, U) \oplus H_q(X, V) \to H_q(X, U \cup V) \to H_{q-1}(X, U \cap V)$$

Übung 5.8.21. Sei (X, A) ein Raumpaar. Bezeichne X/A den Raum mit Quotiententopologie, der entsteht, wenn man A zu einem Punkt identifiziert. Man zeige: Gibt es U mit $A \subset U \subset X$ derart, daß die Einbettungen $A \hookrightarrow U$ und $A/A \hookrightarrow U/A$ Homotopieäquivalenzen sind, so liefert die offensichtliche Abbildung Isomorphismen

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\sim} H_q(X/A, A/A)$$

5.9 Homologie von Simplizialkomplexen

Bemerkung 5.9.1. Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $\Delta(\mathcal{K})$ der zugehörige Polyeder. Wir wählen eine Anordnung $\leq$ der Menge E der Ecken von $\mathcal{K}$. Ist $\sigma \in \mathcal{K}_q$ gegeben als $\sigma = \{e_0, \ldots, e_q\}$ mit $e_0 < e_1 < \ldots < e_q$, so definieren wir in $S_q\Delta(\mathcal{K})$ den singulären q-Simplex

$$\langle\sigma\rangle : \Delta_q \to \Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift $(x_0, \ldots, x_q) \mapsto x_0\tilde{e}_0 + \ldots + x_q\tilde{e}_q$ in den Notationen aus 3.3.10. Insbesondere ist also $\langle\sigma\rangle$ ein Homöomorphismus $\Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(\sigma)$. Die von allen $\langle\sigma\rangle$ mit $\sigma \in \mathcal{K}_q$ erzeugte Untergruppe von $S_q\Delta(\mathcal{K})$ notieren wir $S_q^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$ und nennen sie die Gruppe der **geordnet simplizialen Ketten** von $\mathcal{K}$. Offensichtlich bilden die geordnet simplizialen Ketten einen Unterkomplex $S^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \subset S\Delta(\mathcal{K})$ im Komplex aller singulären Ketten von $\Delta(\mathcal{K})$, und offensichtlich ist dieser Komplex in kanonischer Weise isomorph zum Komplex der simplizialen Ketten aus 5.1.

Satz 5.9.2 (Simpliziale gleich singuläre Homologie). *Sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex. Für jede Anordnung der Ecken von $\mathcal{K}$ induziert die Inklusion von Kettenkomplexen $S^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$ Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

Bemerkung 5.9.3. Aus 9.1.7 wird dann folgen, daß die fragliche Inklusion sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

Beweis. Wir schreiben kurz $\Delta(\mathcal{K}) = X$ und setzen für $k \in \mathbb{Z}$

$$X_k = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}_q,\, q\leq k} \Delta(\sigma)$$

Dieser Raum heißt das k-**Skelett** von $\mathcal{K}$. Nun betrachten wir für alle k das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc}
S^{\mathrm{os}}X_k & \hookrightarrow & S^{\mathrm{os}}X_{k+1} & \twoheadrightarrow & S^{\mathrm{os}}X_{k+1}/S^{\mathrm{os}}X_k \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
SX_k & \hookrightarrow & SX_{k+1} & \twoheadrightarrow & SX_{k+1}/SX_k
\end{array}$$

Das zugehörige Diagramm von langen exakten Homologiesequenzen schreiben wir

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots H_{q+1}^{\mathrm{os}}(X_{k+1}, X_k) & \to & H_q^{\mathrm{os}}X_k & \to & H_q^{\mathrm{os}}X_{k+1} & \to & H_q^{\mathrm{os}}(X_{k+1}, X_k)\ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\ldots H_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \to & H_qX_k & \to & H_qX_{k+1} & \to & H_q(X_{k+1}, X_k)\ldots
\end{array}$$

und werden nun durch Induktion über k zeigen, daß $H_q^{\text{os}} X_k \to H_q X_k$ ein Isomorphismus ist für alle k und q. Für $k < 0$ ist das klar. Im anschließenden Lemma 5.9.4 werden wir zeigen, daß $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \to H_q(X_{k+1}, X_k)$ ein Isomorphismus ist für alle q und alle k. Der Induktionsschritt besteht dann im Anwenden des Fünferlemmas, und unter der Zusatzannahme $X = X_k$ für $k \gg 0$ ist unser Satz damit bereits bewiesen. Im allgemeinen bemerken wir zusätzlich, daß nach 3.3.17 jede singuläre Kette von X schon in einem X_k liegt und überlassen den Rest des Beweises der Leserin bzw. dem Leser zur Übung. □

Lemma 5.9.4. *Die offensichtlichen Abbildungen auf den relativen Ketten liefern Isomorphismen* $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \xrightarrow{\sim} H_q(X_{k+1}, X_k)$.

Beweis. Die linke Seite ist hier die Homologie eines Komplexes, der nur im Grad $k+1$ lebt. Genauer ist $H_{k+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k)$ frei erzeugt von den Klassen $\overline{\langle \sigma \rangle}$ für $\sigma \in \mathcal{K}_{k+1}$, und bei $q \neq k+1$ verschwindet unser Komplex mitsamt seiner Homologie. Wir untersuchen nun die rechte Seite $H_q(X_{k+1}, X_k)$ und betrachten dazu das "verdickte k-Skelett" $U_k \subset X_{k+1}$, das wir erhalten, indem wir aus X_{k+1} die Schwerpunkte aller $(k+1)$-Simplizes entfernen. Die beiden Einbettungen

$$(X_{k+1}, X_k) \hookrightarrow (X_{k+1}, U_k) \hookleftarrow (X_{k+1} - X_k, U_k - X_k)$$

induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie: Die Linke nach 5.7.4 und 5.4.2, da $X_k \hookrightarrow U_k$ eine Homotopieäquivalenz ist; Die Rechte mit Ausschneidung des k-Skeletts X_k. Das Raumpaar ganz rechts ist aber schlicht die disjunkte unzusammenhängende Vereinigung über alle $(k+1)$-Simplizes $\sigma \in \mathcal{K}_{k+1}$ der Raumpaare $(\Delta^\circ(\sigma), \Delta^\circ(\sigma) - b(\sigma))$, wo wir $\Delta^\circ(\sigma)$ für den "offenen" Simplex schreiben und mit $b(\sigma) = \frac{1}{k+1}(p_0 + \ldots + p_k)$ den Schwerpunkt von $\Delta(\sigma)$ bezeichnen. Zusammenfassend induzieren also die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
H_q(X_{k+1}, U_k) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_\sigma H_q(\Delta^\circ(\sigma), \Delta^\circ(\sigma) - b(\sigma)) \\
\| & & \downarrow \wr \\
H_q(X_{k+1}, U_k) & \leftarrow & \bigoplus_\sigma H_q(\Delta(\sigma), \Delta(\sigma) - b(\sigma)) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
H_q(X_{k+1}, X_k) & \leftarrow & \bigoplus_\sigma H_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma))
\end{array}$$

wo die Summen jeweils über alle $(k+1)$-Simplizes $\sigma \in \mathcal{K}_{k+1}$ laufen und wir mit $\partial\Delta(\sigma)$ ähnlich wie in 5.8.4 das k-Skelett von $\Delta(\sigma)$ bezeichnen. Nach 5.8.4 wissen wir aber, daß $H_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma))$ verschwindet für $q \neq k+1$ und daß es für $q = k+1$ frei ist vom Rang 1 und erzeugt wird von der Klasse von $\langle \sigma \rangle$. Das zeigt das Lemma. □

Korollar 5.9.5. *Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex, so benötigt man höchstens $|\mathcal{K}_q|$ Erzeuger für die Gruppe $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$.*

6 Anwendungen der singulären Homologie

6.1 Einbettungen von Sphären in Sphären

Satz 6.1.1 (Jordan-Brouwer). *Seien $n, r \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So haben wir*

$r > n$	*Unmöglich;*
$r = n$	*Impliziert $S^n = s^r$;*
$r = n-1$	*Dann hat $S^n - s^r$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist s^r;*
$r \leq n-2$	*Dann ist $S^n - s^r$ zusammenhängend.*

Bemerkung 6.1.2. Im Rahmen der Garbentheorie werden wir in 11.7.17 einen kürzeren Beweis der zentralen Aussage 6.1.8 geben können. Der elementarere Beweis hier wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen. Als Vorbereitung auf den Beweis beginnen wir mit einer Diskussion der sogenannten “reduzierten Homologie”. Diese Variante der Homologie hilft auch sonst oft, Sonderbetrachtungen im Grad Null zu vermeiden.

Definition 6.1.3. Für jeden Raum X kann man den Komplex SX der singulären Ketten verlängern zu einem Komplex $\tilde{S}X$ mit $\tilde{S}_q X = S_q X$ für $q \neq -1$ und $\tilde{S}_{-1}X = \mathbb{Z}$, wo $\partial_0 : \tilde{S}_0 X \to \tilde{S}_{-1} X$ gegeben wird durch die sogenannte **Augmentation** $\epsilon : \sum n_x x \mapsto \sum n_x$. Offensichtlich erhalten wir so wieder einen Funktor $\tilde{S} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ket}$ und definieren dann die **reduzierten Homologiegruppen** von X durch die Vorschrift

$$\tilde{H}_q(X) = H_q(\tilde{S}X)$$

Bemerkung 6.1.4. Für $X \neq \emptyset$ gilt $\tilde{H}_q(X) = 0$ für $q < 0$, für die leere Menge erhalten wir jedoch $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$. Gegeben eine abelsche Gruppe G bezeichne ganz allgemein $G[q]$ den Komplex mit G im Grad q und Nullen sonst. Speziell meint also $\mathbb{Z}[-1]$ den Kettenkomplex mit $\mathbb{Z}$ im Grad -1 und Nullen sonst. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $\mathbb{Z}[-1] \hookrightarrow \tilde{S}X \twoheadrightarrow SX$. Mit der zugehörigen langen Homologiesequenz erhalten wir $H_q X = \tilde{H}_q X$ für $q > 0$ und im Fall $X \neq \emptyset$ eine kurze exakte Sequenz $\tilde{H}_0 X \hookrightarrow H_0 X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, mithin nach 5.7.10 und 5.7.8 einen (allerdings nicht kanonischen) Isomorphismus $H_0 X \cong \tilde{H}_0 X \oplus \mathbb{Z}$. Es gilt also $\tilde{H}_0 X = 0$ genau dann, wenn X leer oder wegzusammenhängend ist, und die reduzierte Homologie von Sphären wird für alle $n \geq -1$ gegeben durch

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 6.1.5. Für ein Raumpaar (X, A) folgt aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen $\tilde{S}A \hookrightarrow \tilde{S}X \twoheadrightarrow \tilde{S}X/\tilde{S}A$ auch eine lange exakte Sequenz für Raumpaare in der reduzierten Homologie, wobei natürlich gilt $\tilde{S}X/\tilde{S}A = SX/SA$ und folglich $\tilde{H}_q(X, A) = H_q(X, A)$. Homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$ induzieren auch auf der reduzierten Homologie dieselben Abbildungen: Um das zu sehen reicht es, unsere Kettenhomotopie $Sf \simeq Sg$ durch Null auf $\tilde{S}_{-1}X = \mathbb{Z}$ fortzusetzen. Die Mayer-Vietoris-Sequenz und ihr Beweis übertragen sich ebenso ohne Schwierigkeiten in die reduzierte Homologie. Der folgende Beweis ist eine erste Illustration für die Nützlicheit der reduzierten Homologie.

Proposition 6.1.6. *Sei $r \geq 0$ und $\varphi : [0, 1]^r \to S^n$ eine stetige Injektion mit Bild* $\operatorname{im}\varphi = \varphi([0, 1]^r)$. *So gilt $\tilde{H}_q(S^n - \operatorname{im}\varphi) = 0$ für alle q.*

Beweis. Nach **??** ist φ ein Homöomorphismus auf sein Bild. Da S^n nie zusammenziehbar ist, folgt $S^n \neq \operatorname{im}\varphi$. Wir können uns also auf $q \geq 0$ beschränken. Dafür machen wir eine Induktion über r und geben dazu der Aussage der Proposition den Namen $P(r)$. Nach Konvention ist $[0, 1]^0$ ein Punkt und $S^n - x$ ist zusammenziehbar, ja sogar homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für alle $x \in S^n$. Das liefert unsere Induktionsbasis $P(0)$.

Sei nun $P(r - 1)$ bekannt, sei $\varphi : [0, 1]^r \to S^n$ eine stetige Injektion und sei $z \in \tilde{S}_q(S^n - \operatorname{im}\varphi)$ ein (reduzierter) q-Zykel, $q \geq 0$. Es gilt zu zeigen, daß z ein Rand ist. Für $I \subset [0, 1]$ setzen wir

$$U_I = S^n - \varphi(I \times [0, 1]^{r-1})$$

und kürzen $U_{\{t\}} = U_t$ ab. Nach unserer Induktionsannahme $P(r - 1)$ gibt es für alle $t \in [0, 1]$ ein $w_t \in S_{q+1}U_t$ mit $\partial w_t = z$. Mit Kompaktheitsargumenten folgt, daß sogar gilt $w_t \in S_{q+1}U_B$ für eine geeignete Umgebung B von t in $[0, 1]$. Mit zusätzlichen Kompaktheitsargumenten gibt es dann eine Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ derart, daß für alle i ein $w_i \in S_{q+1}U_{[t_{i-1},t_i]}$ existiert mit $\partial w_i = z$. Die Aussage $P(r)$ folgt nun mit Induktion über i, wenn wir noch die anschließende Folgerung aus unserer Induktionsannahme $P(r - 1)$ bemerken. □

Lemma 6.1.7. *Sei $r \geq 1$ und es gelte $P(r - 1)$. Sei $\varphi : [0, 1]^r \to S^n$ eine stetige Injektion. Seien gegeben $0 \leq a < b < c \leq 1$. Gibt es Ketten $u \in S_{q+1}U_{[a,b]}$ und $v \in S_{q+1}U_{[b,c]}$ mit $\partial u = \partial v$, so gibt es auch eine Kette $w \in S_{q+1}U_{[a,c]}$ mit $\partial w = \partial u = \partial v$.*

Beweis. Sicher gilt

$$U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]} = U_b \text{ und } U_{[a,b]} \cap U_{[b,c]} = U_{[a,c]}$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie liefert uns nun

$$\tilde{H}_{q+1}U_b \to \tilde{H}_q U_{[a,c]} \to \tilde{H}_q U_{[a,b]} \oplus \tilde{H}_q U_{[b,c]} \to \tilde{H}_q U_b$$

Da hier das rechte und linke Ende verschwindet nach $P(r-1)$ steht in der Mitte ein Isomorphismus. □

Satz 6.1.8. *Seien $r, n \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So gilt*

$$\tilde{H}_q(S^n - s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir machen wieder eine Induktion über r. Für $r = -1$ ist die Aussage schon bekannt. Ist nun $r \geq 0$, so schreiben wir $s^r = s_+ \cup s_-$ als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Hemisphären mit Schnitt $s_+ \cap s_- = s^{r-1} \cong S^{r-1}$. Wir wenden die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz an auf $X_\pm = S^n - s_\pm$, es ist also $X_+ \cup X_- = S^n - s^{r-1}$ und $X_+ \cap X_- = S^n - s^r$ und wir erhalten mit Proposition 6.1.6 Isomorphismen $\tilde{H}_{q+1}(S^n - s^{r-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n - s^r)$, also induktiv $\tilde{H}_q(S^n - s^r) \cong \tilde{H}_{q+r}(S^n - s^0) \cong \tilde{H}_{q+r+1}(S^n)$. □

Beweis von Jordan-Brouwer. Der Fall $r > n$ ist unmöglich, da $\tilde{H}_q$ stets verschwindet für $q < -1$. Im Fall $r = n$ haben wir $S^n = s^r$, denn $\tilde{H}_{-1}(X) \neq 0$ bedeutet $X = \emptyset$. Im Fall $r \leq n-2$ haben wir $\tilde{H}_0(S^n - s^r) = 0$ aber $S^n - s^r \neq \emptyset$. Es folgt $H_0(S^n - s^r) \cong \mathbb{Z}$, und damit hat $S^n - s^r$ genau eine Wegzusammenhangskomponente, die auch die einzige Zusammenhangskomponente sein muß. Im Fall $r = n - 1$ haben wir $\tilde{H}_0(S^n - s^r) \cong \mathbb{Z}$, also $H_0(S^n - s^r) \cong \mathbb{Z}^2$ und damit hat $S^n - s^r$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da bei einer offenen Teilmenge von S^n jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat, sind das auch die Zusammenhangskomponenten von $S^n - s^r$.

Jetzt müssen wir nur noch im Fall $r = n - 1$ zusätzlich zeigen, daß s^{n-1} im Abschluß jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von $S^n - s^{n-1}$ liegt. Für ein beliebiges $x \in s^{n-1}$ und eine beliebige offene Umgebung U von x in S^n finden wir eine Teilmenge $A \subset s^{n-1}$ mit $x \in A$ derart, daß gilt $\bar{A} \subset U$ und $s^{n-1} - A \cong [0,1]^{n-1}$. Wir setzen $s^{n-1} - A = e$. Nach 6.1.6 ist $S^n - e$ wegzusammenhängend. Verbinden wir nun zwei Punkte aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $S^n - s^{n-1}$ in $S^n - e$ durch einen Weg σ, so muß σ durch A laufen. Ist $\sigma(t)$ bzw. $\sigma(s)$ der erste bzw. letzte Punkt von σ in $\bar{A}$, so liegen für kleines $\epsilon > 0$ notwendig $\sigma(t - \epsilon)$, $\sigma(s + \epsilon)$ in U, aber in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von $S^n - s^{n-1}$. Jede offene Umgebung U von x trifft also beide Komponenten von $S^n - s^{n-1}$. □

Korollar 6.1.9. *Sei $n \geq 2$ und sei $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die homöomorph ist zur $(n-1)$-Sphäre S^{n-1}. So zerfällt ihr Komplement $\mathbb{R}^n - s^{n-1}$ in zwei Zusammenhangskomponenten, deren Rand jeweils s^{n-1} ist.*

Beweis. Man fasse $\mathbb{R}^n$ auf als das Komplement eines Punktes in S^n. □

Bemerkung 6.1.10. Der Spezialfall $n = 2$ des vorhergehenden Korollars heißt der **Jordan'sche Kurvensatz**. Er besagt grob gesprochen, daß jede geschlossene Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt.

Übung 6.1.11 *(***Invarianz von Gebieten***).* Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ zwei Teilmengen, die homöomorph sind als topologische Räume. Ist U offen, so ist auch V offen. (In der Funktionentheorie nennt man offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene auch Gebiete, daher die Terminologie.)

Bemerkung 6.1.12. Sind $S, S' \subset S^n$ disjunkte Teilmengen, die homöomorph sind zu S^p bzw. S^q mit $p+q = n-1$, so kann man ihre **Verschlingungszahl** $v(S, S') \in \mathbb{N}$ definieren als den Betrag des Bildes der Eins unter $\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_p(S) \to \tilde{H}_p(S^n - S') \cong \mathbb{Z}$. Mehr dazu findet man in [**?**].

6.2 Homologie und Orientierung

Satz 6.2.1 (Homologie und Orientierung). *Ist $n \geq 0$ eine natürliche Zahl und $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare reelle Matrix, so induziert die stetige Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf den reduzierten Homologiegruppen $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0)$ die Multiplikation mit dem Vorzeichen der Determinante von g, in Formeln*

$$H_n g = \left(\frac{\det g}{|\det g|}\right) : \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) \to \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0)$$

Bemerkung 6.2.2. Wir verwenden hier die Konvention, nach der die Identität auf dem Nullvektorraum die Determinante 1 hat.

Beweis. Wie man in der linearen Algebra zeigt, bilden für $n \geq 1$ die Elemente von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit positiver bzw. negativer Determinate gerade die beiden Wegzusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Elemente g, h aus derselben Wegzusammenhangskomponente liefern offensichtlich homotope Abbildungen $g, h : (\mathbb{R}^n - 0) \to (\mathbb{R}^n - 0)$. Wenn wir also den Satz für *ein* g mit $\det g < 0$ zeigen, so folgt er in voller Allgemeinheit. Nun betrachten wir den anschaulichen Rand $\partial\Delta_n$ des n-ten Standardsimplex wie in 5.8.3 und die Homotopieäquivalenzen

$$(\mathbb{R}^n - 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}(1, 1, \ldots, 1)) \hookleftarrow \partial\Delta_n,$$

wo die linke Einbettung als letzte Koordinate eine Null anfügt und in der Mitte die Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $(1, 1, \ldots, 1)$ herausgenommen wird. Nehmen wir $n \geq 2$ an, so hält die Vertauschung der ersten beiden Koordinaten unsere beiden Teilräume fest. Der Satz folgt so für $n \geq 2$ mit dem kanonischen Isomorphismus $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta_n)$ aus dem anschließenden Lemma. Die Fälle $n = 0, 1$ überlassen wir dem Leser. □

Lemma 6.2.3. *Sei $n \geq 2$ und sei $g : \Delta_n \to \Delta_n$ die stetige Abbildung, die gegeben wird durch die Vertauschung der beiden ersten Koordinaten. So induziert g auf der relativen Homologie $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ die Multiplikation mit -1, in Formeln*

$$H_n g = (-1) : H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \to H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$$

Beweis. Wir betrachten in Δ_n den singulären $(n+1)$-Simplex

$$\sigma : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$$

der die Ecken von Δ_{n+1} auf die Ecken von Δ_n abbildet wie im Folgenden angegeben (unter einer Ecke von Δ_{n+1} steht jeweils ihr Bild)

$$\begin{array}{l} \mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \ldots, \mathrm{e}_{n+1} \\ \mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_0, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n \end{array}$$

und der auf ganz Δ_{n+1} affin ist. Wir erkennen

$$\partial\sigma \in \tau_n + (S_n g)(\tau_n) + S_n(\partial\Delta_n)$$

und folgern $[\tau_n] + (H_n g)[\tau_n] = 0$ in $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$. □

Korollar 6.2.4 (Vektorfelder auf Sphären). *Genau dann gibt es auf der n-Sphäre S^n ein nirgends verschwindendes stetiges Vektorfeld, wenn ihre Dimension n ungerade ist.*

Beweis. Ein Vektorfeld ist für uns eine stetige Abbildung $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ derart, daß $v(x)$ senkrecht steht auf x für alle x, in Formeln $x \perp v(x)\ \forall x \in S^n$. Ist n ungerade, so können wir ein mögliches v angeben durch

$$v(x_0, \ldots, x_n) = (x_1, -x_0, x_2, -x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

In jedem Fall können wir ein nirgends verschwindendes Vektorfeld v auf Länge eins normieren. Es definiert dann eine Familie von Abbildungen $\varphi_t : S^n \to S^n$, wo $\varphi_t(x)$ der Punkt ist, an dem man landet, wenn man von x in

Richtung $v(x)$ für die Zeit t auf dem entsprechenden Großkreis um die Sphäre läuft, in Formeln $\varphi_t(x) = (\cos t)x + (\sin t)v(x)$. So erhalten wir nun offensichtlich eine Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung $a = \varphi_\pi : S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$. Da aber die Einbettung $S^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} - 0)$ eine Homotopieäquivalenz ist und da folglich gilt $\tilde{H}_n(a) = (-1)^{n+1}$ auf $\tilde{H}_n(\mathbb{R}^{n+1} - 0)$, ist das nur für ungerades n möglich. □

Übung 6.2.5. Seien $A, B \Subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen des Ursprungs und $g : A \xrightarrow{\sim} B$ ein Diffeomorphismus mit $g(0) = 0$. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(A, A-0) & \to & H_n(B, B-0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \to & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante $\det(\mathrm{d}_0\, g)$ als unterer Horizontale. (Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte p nahe am Ursprung gilt $\|g(p) - (\mathrm{d}_0 g)(p)\| < \|(\mathrm{d}_0 g)(p)\|$.)

6.3 Orientierung und Fundamentalzykel

Bemerkung 6.3.1. Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt $x \in M$ ist die relative Homologie $H_n(M, M - x)$ frei vom Rang 1 nach Ausschneidung 5.8.18 und den Resultaten 5.8.7 über die Homologie von Sphären.

Definition 6.3.2. Eine **Orientierung** einer n-Mannigfaltigkeit ist eine Zuordnung ω, die jedem Punkt $x \in M$ einen Erzeuger ω_x von $H_n(M, M - x)$ zuordnet und zwar so, daß gilt: Für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von x und ein Element $\omega_U \in H_n(M, M - U)$ mit $\omega_U \mapsto \omega_y$ für alle $y \in U$ unter der natürlichen Abbildung $H_n(M, M - U) \to H_n(M, M - y)$.

Definition 6.3.3. Eine Mannigfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**. Unter einer **orientierten Mannigfaltigkeit** verstehen wir eine Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Orientierung. Eine Orientierung auf M induziert in offensichtlicher Weise eine Orientierung auf jeder offenen Teilmenge von M.

Lemma 6.3.4. *Stimmen zwei Orientierungen ω, η einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M überein in einem Punkt, so sind sie gleich.*

Beweis. Sei $x \in M$ gegeben mit $\omega_x = \eta_x$. Wir zeigen, daß es eine Umgebung U von x gibt mit $\omega_y = \eta_y \quad \forall y \in U$. Sicher dürfen wir dazu annehmen $M = \mathbb{R}^n$. Per definitionem gibt es einen offenen Ball U um x und Elemente

$\omega_U, \eta_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - U)$ mit $\omega_U \mapsto \omega_y$ und $\eta_U \mapsto \eta_y \quad \forall y \in U$. Da aber für so ein U die Einbettung Isomorphismen

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - U) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - y)$$

induziert für alle $y \in U$ folgt in der Tat $\omega_y = \eta_y \quad \forall y \in U$. Die Mengen $M_\pm$ aller $x \in M$ mit $\omega_x = \pm\eta_x$ sind folglich offen. Damit ist $M = M_+ \amalg M_-$ eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teimengen und da nach Annahme M_+ nicht leer ist und M zusammenhängend folgt $\omega = \eta$. □

Definition 6.3.5. Etwas formaler betrachten wir die Menge

$$\mathrm{or} = \mathrm{or}_M = \coprod_{x \in M} H_n(M, M - x)$$

und versehen sie mit der Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt $\mathcal{O}(U, \omega_U) = \{\omega_x \mid x \in U\}$ für $U \Subset M$ und $\omega_U \in H_n(M, M - U)$. Wir nennen or_M die **Orientierungsgarbe** von M.

Bemerkung 6.3.6. In der Tat ist $\mathrm{or}_M \to M$ eine Überlagerung nach dem anschließenden Lemma und damit der étale Raum einer “Garbe auf M” in der Terminologie, wie wir sie in 10.4 einführen. In dieser Terminologie ist die Orientierungsgarbe übrigends gerade die Garbifizierung der “Prägarbe” $U \mapsto H_n(M, M - U)$.

Lemma 6.3.7. *1. Ist $V \Subset M$ eine offene Teilmenge, so haben wir mit den offensichtlichen Abbildungen ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{or}_V & \to & \mathrm{or}_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \to & M \end{array}$$

2. Die natürliche Projektion $\mathrm{or}_M \to M$ ist eine Überlagerungsabbildung.

Beweis. 1. Zunächst zeigen wir, daß die durch die natürlichen Abbildungen $H_n(V, V - x) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M - x)$ definierte Injektion $\mathrm{can} : \mathrm{or}_V \to \mathrm{or}_M$ stetig ist. Es gilt also zu zeigen, daß die Urbilder aller $\mathcal{O}(U, \omega_U)$ offen sind. In der Tat können wir das Urbild einer solchen Menge aber schreiben als

$$\mathrm{can}^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega_U)) = \bigcup_{W \Subset U \cap V,\, \overline{W} \subset V} \mathcal{O}_V(W, \omega_U|_W)$$

wo wir mit $\omega_U|_W$ das Bild von ω_U unter

$$H_n(M, M - U) \to H_n(M, M - W) \xleftarrow{\sim} H_n(V, V - W)$$

meinen und mit $\mathcal{O}_V(\ ,\ )$ die definitionsgemäßen Erzeuger der Topologie auf or_V bezeichnen. Ähnlich aber einfacher erkennt man, daß unsere Injektion $\mathrm{can} : \mathrm{or}_V \to \mathrm{or}_M$ offen ist. Mithin trägt or_V die von or_M induzierte Topologie, und dann folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß unser Diagramm kartesisch ist.

2. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ der offene Einheitsball und $p : \mathrm{or}_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion. Wir versehen $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$ mit der diskreten Topologie und sind fertig, sobald wir gezeigt haben, daß die offensichtliche Abbildung einen Homöomorphismus

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \times B \xrightarrow{\sim} p^{-1}(B)$$

definiert. Unsere Abbildung ist offensichtlich bijektiv. Sie ist offen, da für $U \Subset B$ und $\omega \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$ das Bild von $\{\omega\} \times U$ genau $\mathcal{O}(U, \omega_U)$ ist, mit ω_U dem Bild von ω unter der offensichtlichen Abbildung. Sie ist stetig, da die Topologie auf $p^{-1}(B)$ auch schon erzeugt wird von den Mengen $\mathcal{O}(U, \omega_U)$ mit $U \Subset B$ ein in B enthaltener offener Ball und $\omega_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - U)$. Dann existiert aber offensichtlich ein $\omega \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$ mit $\omega \mapsto \omega_U$. □

Übung 6.3.8. Die faserweise Addition $\mathrm{or} \times_M \mathrm{or} \to \mathrm{or}$ sowie das faserweise Negative $\mathrm{or} \to \mathrm{or}$ sind stetig, und der **Nullschnitt** $M \to \mathrm{or}$ ist auch stetig.

Bemerkung 6.3.9. Die Teilmenge $\mathrm{or}^\times \subset \mathrm{or}$, die gerade aus allen Erzeugern von $H_n(M, M - x)$ für die verschiedenen $x \in M$ besteht, ist eine zweiblättrige Überlagerung von M und eine Orientierung von M ist nichts anderes als ein Lift $M \to \mathrm{or}^\times$ der Identität auf M. Insbesondere ist M orientierbar genau dann, wenn $\mathrm{or}^\times \to M$ eine triviale Überlagerung ist, und 6.3.4 ist auch eine Konsequenz aus dem Satz 4.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts. Ist M zusammenhängend und $x \in M$ fest gewählt, so liefert diese Überlagerung eine Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(M, x)$ auf einer zweielementigen Menge alias einen Homomorphismus $\pi_1(M, x) \to \{\pm 1\}$ und M ist orientierbar genau dann, wenn diese **Orientierungsdarstellung** konstant ist.

Übung 6.3.10. Eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist stets orientierbar, und sogar allgemeiner jede Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe keinen Normalteiler vom Index zwei besitzt.

Übung 6.3.11. Für jede Mannigfaltigkeit M ist der Raum $\mathrm{or}_M^\times$ eine orientierbare, ja sogar eine in natürlicher Weise orientierte Mannigfaltigkeit.

Satz 6.3.12 (Fundamentalzykel). *Sei M eine kompakte zusammenhängende orientierbare n-Mannigfaltigkeit. So ist die n-te Homologiegruppe H_nM von M frei vom Rang 1, genauer definiert die offensichtliche Abbildung für alle $x \in M$ Isomorphismen*

$$H_nM \xrightarrow{\sim} H_n(M, M - x)$$

Beweis. Um beim Beweis dieses Satzes die nötige Flexibilität zu haben, zeigen wir im folgenden gleich die allgemeinere Aussage 6.3.16. □

Bemerkung 6.3.13. Ist (M, ω) eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach dem Satz genau ein $\omega_M \in H_n M$ mit $\omega_M \mapsto \omega_x \quad \forall x \in M$. Dies ω_M heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit M, obwohl es natürlich eigentlich kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologieklasse.

Bemerkung 6.3.14. Ist eine kompakte orientierbare Manningfaltigkeit M mit einer Triangulierung $M \cong \Delta(\mathcal{K})$ versehen und haben wir eine vollständige Ordnung auf den Ecken $\mathcal{K}_0$ von $\mathcal{K}$ gewählt, so können wir jedem n-Simplex $\sigma \in \mathcal{K}_n$ ein Vorzeichen $\operatorname{sgn}(\sigma)$ zuordnen derart, daß $\sum_{\sigma \in \mathcal{K}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\langle\sigma\rangle$ ein Zykel ist. Ist M auch noch zusammenhängend, so gibt es genau zwei derartige Zykel und ihre Homologieklassen sind genau die beiden Erzeuger von $H_n M$.

Definition 6.3.15. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M und eine Teilmenge $A \subset M$ nennen wir einen Lift $A \to \mathrm{or}_M$ der Einbettung $A \hookrightarrow M$ auch einen (stetigen) **Schnitt über** A der Orientierungsgarbe . Die Gruppe der Schnitte über A notieren wir

$$\Gamma(A; \mathrm{or}) = \Gamma A$$

Der **Träger** eines Schnitts $s \in \Gamma A$ ist die Menge $\operatorname{supp} s \subset A$ aller derjenigen Punkte, an denen er von Null verschieden ist. Dieser Träger ist stets abgeschlossen in A. Wir bezeichnen mit $\Gamma_c A \subset \Gamma A$ die Untergruppe aller Schnitte mit kompaktem Träger.

Satz 6.3.16 (über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten). *Sei M eine n-Mannigfaltigkeit und $A \underset{A}{\subset} M$ eine abgeschlossene Teilmenge. So haben wir $H_q(M, M - A) = 0$ für $q > n$ und für $q = n$ induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus zwischen der n-ten relativen Homologie des Komplements von A und der Gruppe der Schnitte mit kompaktem Träger von A in die Orientierungsgarbe, in Formeln*

$$j = j_A : H_n(M, M - A) \xrightarrow{\sim} \Gamma_c A$$

Beweis. Um Schreibarbeit zu sparen kürzen wir $H_q(M, M - A) = H_q(-A)$ ab und bemerken zunächst:

Lemma 6.3.17. *Sind A_1, A_2 abgeschlossen in M und gilt der Satz für A_1, A_2 und $A_1 \cap A_2$, so gilt er auch für $A_1 \cup A_2$.*

Beweis. Das folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & H_{n+1}(-A_1 \cap A_2) & \to & H_n(-A_1 \cup A_2) & \to & H_n(-A_1) \oplus H_n(-A_2) & \to & H_n(-A_1 \cap A_2) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\ldots & 0 & \to & \Gamma_c(A_1 \cup A_2) & \to & \Gamma_c A_1 \oplus \Gamma_c A_2 & \to & \Gamma_c(A_1 \cap A_2)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo wir oben die relative Mayer-Vietoris-Sequenz 5.8.20 benutzt haben. □

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Ist $M = \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader (dem wir auch Seiten der Länge Null erlauben), so gilt der Satz ganz offensichtlich, da für jeden Punkt $p \in A$ die Einbettung $\mathbb{R}^n - A \hookrightarrow \mathbb{R}^n - p$ eine Homotopieäquivalenz ist.

2. Ist $M = \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gilt der Satz. In der Tat, gegeben $z \in S_q\mathbb{R}^n$ mit $\partial z \in S_q(\mathbb{R}^n - A)$ finden wir $\epsilon > 0$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ endlich mit

$$A \subset A' = \bigcup_{t \in E} t + [0, \epsilon]^n$$

und $\partial z \in S_q(\mathbb{R}^n - A')$. Es folgt, daß $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A)$ das Bild von $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A')$ ist. Nun gilt der Satz für unsere "Würfelmenge" A' nach 1 und dem Lemma. Das zeigt unsere Behauptung im Fall $q > n$. Im Fall $q = n$ zeigen wir zunächst die Injektivität $j_A[z] = 0 \Rightarrow [z] = 0$. Dazu wählen wir unsere Würfelmenge A' zusätzlich so klein, daß jeder Würfel von A' die Menge A trifft. Dann ist die Restriktion $\Gamma A' \to \Gamma A$ injektiv und aus $j_A[z] = 0$ folgt $j_{A'}[z] = 0$ und damit $[z] = 0$ sogar in $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A')$. Das zeigt die Injektivität von j_A. Um die Surjektivität von j_A zu zeigen, argumentieren wir ähnlich: Jeder stetige Schnitt $s \in \Gamma A$ ist lokal konstant und gleichmäßig stetig, läßt sich also stetig auf eine geeignete kompakte Würfelmenge A' ausdehnen und kommt damit sogar von einer Klasse aus $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A')$ her.

3. Ist M beliebig und A kompakt, so können wir A schreiben als eine endliche Vereinigung von Kompakta, die jeweils ganz in einer Karte enthalten sind. Dann sind wir fertig nach 2 und dem Lemma.

4. M läßt sich einbetten als offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß in eine größere n-Mannigfaltigkeit X, in Formeln $M \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} X$ mit $\overline{M}$ kompakt, und $A \mathrel{\subset\!\!\!\!{\scriptstyle A}} M$ ist eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von M. Bezeichnen wir den Rand von M in X mit $\partial M = \overline{M} - M$, betrachten die lange exakte Sequenz des Tripels

$$(X, X - \partial M, X - (\partial M \cup A))$$

und beachten, daß ∂M und $\partial M \cup A$ kompakt sind, so folgt für $q > n$ schon $0 = H_q(X - \partial M, X - (\partial M \cup A))$ und durch Ausschneiden von $X - \overline{M}$ auch $0 = H_q(M, M - A)$. Im Fall $q = n$ erhalten wir mit derselben Ausschneidung ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H_n(M,M-A) & \to & H_n(X,X-(\partial M\cup A)) & \to & H_n(X,X-\partial M) \\ & & \downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ 0 & \to & \Gamma_c A & \to & \Gamma_c(\partial M\cup A) & \to & \Gamma_c(\partial M) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo die zweite horizontale Abbildung der unteren Zeile einen Schnitt mit kompaktem Träger fortsetzt durch Null. Die Behauptung folgt mit dem Fünferlemma.

5. Der allgemeine Fall. Sei zunächst $q > n$ und $z \in S_q M$ ein Repräsentant von $\omega \in H_q(M, M - A)$. So finden wir $U \Subset M$ mit $z \in S_q U$ und $\overline{U}$ kompakt. Nach dem vorhergehenden Punkt verschwindet die Klasse von z schon in $H_q(U, U - A)$, also erst recht in $H_q(M, M - A)$ und es folgt $H_q(M, M - A) = 0$ für $q > n$. Im Fall $q = n$ beachten wir für $U \Subset M$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U - A) & \to & H_n(M, M - A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_c(A \cap U) & \to & \Gamma_c A \end{array}$$

wo die untere Horizontale ausdehnt durch Null. Ist $\overline{U}$ kompakt, so ist die linke Vertikale ein Isomorphismus nach dem vorigen Schritt. Aber jedes $\omega \in H_n(M, M - A)$ wird repräsentiert von einem $z \in S_n M$, wir finden dann $U \Subset M$ mit $\overline{U}$ kompakt und $z \in S_n U$ und so kommt ω schon her von einem $[z] \in H_n(U, U - A)$. Das zeigt die Injektivität von j_A. Die Surjektivität zeigen wir ähnlich: Für jedes $s \in \Gamma_c A$ gibt es $U \Subset M$ mit $\overline{U}$ kompakt und $s \in \Gamma_c(A \cap U)$ und dann kommt s sogar schon her von $H_n(U, U - A)$. □

Korollar 6.3.18. *Ist M eine zusammenhängende aber nicht kompakte oder nicht orientierbare n-Mannigfaltigkeit, so gilt $H_n M = 0$.*

Korollar 6.3.19. *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit k Zusammenhangskomponenten und haben wir $k < \infty$, so gilt $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - A) \cong \mathbb{Z}^k$.*

Beweis. Wir haben $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - A)$ nach der langen exakten Homologiesequenz und der linke Raum ist isomorph zu $\Gamma_c A \cong \mathbb{Z}^k$ nach dem Satz. □

Bemerkung 6.3.20. Dies letzte Korollar ist ein Spezialfall der sogenannten “Alexander-Dualität” 11.7.16.

Definition 6.3.21. Sei $f : M \to N$ eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden n-Mannigfaltigkeiten. Seien $\omega_M \in H_n M$ und $\omega_N \in H_n N$ die Fundamentalzykel. Der **Abbildungsgrad** von f ist die ganze Zahl $\operatorname{grad} f \in \mathbb{Z}$, die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_* \omega_M = (\operatorname{grad} f)\omega_N$$

Bemerkung 6.3.22. Insbesondere ist eine Abbildung wie in der Definition mit von Null verschiedenem Abbildungsgrad stets surjektiv, da nach 6.3.18 gilt $H_n(N - p) = 0 \quad \forall p \in N$ und da jede Abbildung, deren Bild einen Punkt p nicht enthält, faktorisiert als $M \to (N - p) \hookrightarrow N$. Des weiteren haben homotope Abbildungen nach 5.4.2 denselben Abbildungsgrad.

Definition 6.3.23. Sei $f : M \to N$ eine stetige Abbildung von orientierten n-Mannigfaltigkeiten. Ist $q \in M$ ein isolierter Punkt der Faser über $f(q)$, d.h. gibt es eine offene Umgebung $U \Subset M$ von q mit $U \cap f^{-1}(f(q)) = \{q\}$, so definieren wir den **lokalen Grad** von f bei q als die ganze Zahl $\operatorname{grad}_q f \in \mathbb{Z}$, die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_* \omega_q = (\operatorname{grad}_q f)\omega_{f(q)}$$

für $f_* : H_n(U, U - q) \to H_n(N, N - f(q))$, wobei es dem Leser überlassen sei zu prüfen, daß dieser lokale Grad nicht von der Wahl von U abhängt.

Satz 6.3.24 (über den Abbildungsgrad). *Sei $f : M \to N$ eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden n-Mannigfaltigkeiten. Sei $p \in N$ gegeben mit endlichem Urbild. So gilt*

$$\operatorname{grad} f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \operatorname{grad}_q f$$

Beweis. Wir nummerieren die Punkte aus der Faser über p als $q_1, \ldots, q_r$ und wählen für sie paarweise disjunkte offene Umgebungen $U_1, \ldots, U_r$. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n M & \to & H_n(M, M - \{q_1, \ldots, q_r\}) & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i - q_i) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n N & \to & H_n(N, N - p) & = & H_n(N, N - p) \end{array}$$

wobei der letzte Isomorphismus der oberen Horizontalen durch Ausschneidung und eine relative Version von **??** entsteht. □

Übung 6.3.25. Man bestimme die lokalen Abbildungsgrade der nichtkonstanten Polynomfunktionen $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Übung 6.3.26. Ist $f : M \to N$ eine étale Abbildung von n-Mannigfaltigkeiten und $x \in M$ ein Punkt, so gibt es genau einen Isomorphismus $H_n(M, M - x) \xrightarrow{\sim} H_n(N, N - f(x))$, der für alle Umgebungen U von x, die homöomorph auf ihr Bild abgebildet werden, verträglich ist mit den von f induzierten

Isomorphismen $H_n(U, U - x) \xrightarrow{\sim} H_n(f(U), f(U) - f(x))$. Wir erhalten so ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{or}_M & \to & \mathrm{or}_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & N \end{array}$$

Insbesondere läßt sich jede Orientierung von N "zurückziehen" zu einer Orientierung von M.

Übung 6.3.27. Jede Operation einer Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit induziert eine Operation auf der Orientierungsgarbe, die verträglich ist mit der faserweisen Addition. Operiert eine Gruppe D topologisch frei auf einer Mannigfaltigkeit M, so ist auch M/D eine Mannigfaltigkeit und die obere Horizontale aus 6.3.26 induziert einen Homöomorphismus

$$(\mathrm{or}_M)/D \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}_{(M/D)}$$

Übung 6.3.28. Die Kugelschalen S^r sind orientierbar für alle $r \geq 0$. Für $r \geq 1$ sind sie auch zusammenhängend und die Antipodenabbildung $S^r \xrightarrow{\sim} S^r$ bildet einen Fundamentalzykel ab auf sich selber für r ungerade und auf sein Negatives für r gerade. Der reell projektive Raum $\mathbb{P}^r\mathbb{R}$ ist orientierbar für $r = 0$ und $r \geq 1$ ungerade, jedoch nicht für $r \geq 1$ gerade.

Übung 6.3.29. Eine injektive stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension kann nie den Abbildungsgrad Null haben und ist folglich stets surjektiv. Sobald wir mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ arbeiten können, wird sich herausstellen, daß das auch ohne die Voraussetzung der Orientierbarkeit gilt.

6.4 Homologie von endlichen Zellkomplexen

Definition 6.4.1. Sei Y ein topologischer Raum, $n \geq 0$ und $f : S^{n-1} \to Y$ eine stetige Abbildung. (Im Fall $n = 0$ verstehen wir $D^n = \{0\}$ und $S^{n-1} = \emptyset$.) Wir betrachten auf der disjunkten Vereinigung $D^n \amalg Y$ die Äquivalenzrelation $\sim$ erzeugt von $r \sim f(r) \quad \forall r \in S^{n-1}$ und bilden den Quotienten

$$X = (D^n \amalg Y)/\sim$$

In dieser Situation sagen wir, der Raum X entstehe aus Y durch **Ankleben einer n-Zelle** vermittels f. (Im Fall $n = 0$ ist X schlicht die disjunkte Vereinigung von Y mit einem Punkt.)

Satz 6.4.2 (Anklebesequenz). *Ist Y Hausdorff und entsteht X aus Y durch Ankleben einer n-Zelle vermittels einer stetigen Abbildung $f : S^{n-1} \to$*

Y, so ist X auch Hausdorff und es gibt in der reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \tilde{H}_q S^{n-1} \to \tilde{H}_q Y \to \tilde{H}_q X \to \tilde{H}_{q-1} S^{n-1} \to \ldots$$

wobei die erste Abbildung von der Verklebung f induziert wird und die zweite von der Einbettung $Y \hookrightarrow X$. Insbesondere gilt $\tilde{H}_q Y \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_q X$ für $q \neq n$, $n-1$.

Beweis. Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen zur mengentheoretischen Topologie von X. Da wir f als stetig annehmen, liefert die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ einen Homöomorphismus auf ihr Bild. Sicher ist dieses Bild auch abgeschlossen. Weiter prüft man leicht, daß auch X Hausdorff ist. Insbesondere ist das Bild von D^n als Kompaktum abgeschlossen in X. Wir betrachten nun den Nullpunkt $0 \in D^n$, bezeichnen sein Bild in X mit $0 \in X$ und behaupten

Lemma 6.4.3. *Die Einbettung $Y \hookrightarrow X - 0$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Wir bezeichnen für $y \in Y$ bzw. $v \in D^n$ mit $[y]$ bzw. $[v]$ sein Bild in X und zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccccll} (X-0) & \times & [0,1] & \to & X-0 & \\ ([y] & , & \tau) & \mapsto & [y] & \forall y \in Y \\ ([v] & , & \tau) & \mapsto & [\tau v/||v|| + (1-\tau)v] & \forall v \in D^n \end{array}$$

wohldefiniert und stetig ist. Nur die Stetigkeit ist hier ein Problem. Nach **??** reicht es, die Stetigkeit auf $Y \times [0,1]$ und auf dem Bild von $(D^n - 0) \times [0,1]$ nachzuweisen. Ersteres ist eh klar, für Letzteres müssen wir nur Stetigkeit auf dem Bild von $R \times [0,1]$ für alle abgeschlossenen Kreisringe $R = \{1 \geq ||v|| \geq \epsilon\}$ mit $\epsilon > 0$ zu zeigen. Diese sind aber kompakt, und da X Hausdorff ist liefert die Einschränkung $R \times [0,1] \to (X-0) \times [0,1]$ eine Quotientenabbildung auf ihr Bild. Die Aussage folgt. □

Jetzt betrachten wir den offenen Ball $B^n \subset D^n$ und die offene Überdeckung $X = (X-0) \cup B^n$. Da die reduzierte Homologie von B^n identisch verschwindet, hat die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie die Gestalt

$$\ldots \to \tilde{H}_q(B^n - 0) \to \tilde{H}_q(X-0) \to \tilde{H}_q(X) \to \tilde{H}_{q-1}(B^n - 0) \to \ldots$$

und es bleibt uns nur, im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B^n - 0 & \to & D^n - 0 & \leftarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X - 0 & \to & X - 0 & \leftarrow & Y \end{array}$$

mit Homotopieäquivalenzen in den Horizontalen zur reduzierten Homologie überzugehen und so in unserer Mayer-Vietoris-Sequenz $\tilde{H}_q(B^n - 0) \to \tilde{H}_q(X - 0)$ durch $\tilde{H}_q S^{n-1} \to \tilde{H}_q Y$ zu ersetzen. □

Korollar 6.4.4 (Homologie von Zellkomplexen). *Entsteht X aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften endlich vieler Zellen und heften wir dabei keine Zellen der Dimension $> d$ an, so gilt $H_q X = 0$ für $q > d$ und $H_q X$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Man benutze für die zweite Aussage, daß bei einer kurzen exakten Sequenz abelscher Gruppen $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ die Mitte endlich erzeugt ist genau dann, wenn die Enden es sind. □

Beispiel 6.4.5 *(***Homologie der komplex projektiven Räume***).* Der $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ ergibt sich aus dem $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ durch Anheften einer $2n$-Zelle. Eine solche Anheftung ist zum Beispiel

$$\begin{array}{rcc} F : D^{2n} & \to & \mathbb{P}^n\mathbb{C} \\ z = (z_0, \ldots, z_{n-1}) & \mapsto & (z_0; \ldots; z_{n-1}; 1 - ||z||) \end{array}$$

Wir erhalten also

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, \ldots, 2n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsteht allgemeiner X aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von Zellen gerader Dimension, so verschwindet $H_q X$ für ungerades q und für gerades q ist $H_q X$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gerade die Anzahl der angehefteten q-Zellen ist.

Übung 6.4.6. Man bestimme die Homologie der quaternionalen projektiven Räume.

7 Koeffizientenwechsel

7.1 Homologie mit Koeffizienten

Definition 7.1.1. Sei G eine abelsche Gruppe. In unseren bisherigen Argumenten können wir stets G statt $\mathbb{Z}$ schreiben und erhalten so allgemeinere Funktoren, die **Homologie** bzw. **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in** G von topologischen Räumen oder Raumpaaren in die abelschen Gruppen. Zum Beispiel definieren wir die q-te Homologie

$$H_q(X; G)$$

eines Raums X mit Koeffizienten in G, indem wir die Homologie des Komplexes $S(X; G)$ der singulären Ketten mit Koeffizienten in G nehmen, wobei $S_q(X; G)$ schlicht die Menge aller endlichen formalen Ausdrücke $\sum n_\sigma \sigma$ bezeichnet mit $n_\sigma \in G$ und $n_\sigma = 0$ für alle bis auf endlich viele Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$. Wir schreiben $\tilde{H}_q(X; G)$ für die reduzierten Homologiegruppen und $H_q(X, A; G)$ für die relativen Homologiegruppen mit Koeffizienten in G.

Bemerkung 7.1.2. Es wird auch andersherum ein Schuh daraus: Halten wir den Raum X fest, so wird $G \mapsto H_q(X; G)$ ein Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in sich selber. Ist insbesondere R ein Ring und G ein R-Modul, so werden die Homologiegruppen mit Koeffizienten in G auch R-Moduln in natürlicher Weise.

Bemerkung 7.1.3. Die meisten der bisher bewiesenen allgemeinen Aussagen, insbesondere Homotopieinvarianz, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz und Anklebesequenz gelten in der Homologie mit Koeffizienten genauso mit demselben oder fast demselben Beweis. Bei den bisherigen speziellen Resultaten zur Homologie und reduzierten Homologie von Punkten und Sphären kann man direkt prüfen, daß alle Argumente ebenso mit Koeffizienten G funktionieren und wir nur im Endresultat jeweils G statt $\mathbb{Z}$ erhalten. Wir werden in 7.6.1 zeigen, daß Ähnliches allgemein gilt, solange die Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ alle frei sind über $\mathbb{Z}$.

Definition 7.1.4. Für einen beliebigen topologischen Raum X setzt man

$$b_q(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H_q(X; \mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$$

und nennt diese Zahl die q-te **Betti-Zahl** von X. Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden sie für $q \gg 0$, so heißt ihre alternierende Summe

$$\chi(X) = \sum (-1)^q b_q(X) \in \mathbb{Z}$$

die **Eulercharakteristik** von X.

Bemerkung 7.1.5. Wir haben $\chi(X) = |X|$ für einen endlichen diskreten Raum mit $|X|$ Punkten. Es ist auch für allgemeinere Räume oft sinnvoll, $\chi(X)$ als eine Verallgemeinerung der "Zahl der Punkte von X" aufzufassen. Wir schreiben bei einem beliebigen Körper

$$\chi(X;k) = \sum (-1)^q \dim_k H_q(X;k)$$

wann immer fast alle Summanden verschwinden, so daß der Ausdruck sinnvoll wird. Natürlich gilt auch $\chi(X;k) - 1 = \sum(-1)^q \dim_k \tilde{H}_q(X;k)$.

Satz 7.1.6 (Eulercharakteristik von Zellkomplexen). *Der Raum X entstehe aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen. Sei c_q die Zahl der verwendeten q-Zellen und sei k ein Körper. So wird die Eulercharakteristik von X gegeben durch die Formel*

$$\chi(X;k) = \sum (-1)^q c_q$$

Beweis. Ist $\ldots \to A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \to \ldots$ eine lange exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen und verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt

$$\begin{aligned} \sum(-1)^i \dim A_i &= \sum(-1)^i (\dim \ker \partial_i + \dim \operatorname{im} \partial_i) \\ &= \sum(-1)^i (\dim \ker \partial_i + \dim \ker \partial_{i-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Schreiben wir unsere Sequenz um zu

$$\ldots \to D_{q+1} \to B_q \to C_q \to D_q \to B_{q-1} \to \ldots$$

so gilt natürlich

$$\sum (-1)^q \dim C_q = \sum (-1)^q \dim B_q + \sum (-1)^q \dim D_q$$

Mit unserer Anklebesequenz folgt $\chi(X;k) - 1 = \chi(Y;k) - 1 + (-1)^n$, wenn X aus Y durch Ankleben einer n-Zelle entsteht. Der Satz ergibt sich nun mit Induktion. □

Korollar 7.1.7 (Eulercharakteristik von Simplizialkomplexen). *Sei $\mathcal{K}$ ein endlicher Simplizialkomplex. So ist seine Euler-Charakteristik für jeden Körper k gegeben durch*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K});k) = \sum (-1)^q |\mathcal{K}_q|.$$

Beweis. Das folgt natürlich aus dem vorhergehenden Satz. Wir geben noch einen alternativen Beweis. Ist zunächst A ein Komplex endlichdimensionaler k-Vektorräume und verschwinden von den A_i alle bis auf endlich viele, so gilt

$$\sum(-1)^i \dim_k A_i = \sum(-1)^i \dim_k H_i A$$

Man nennt die linke Seite hier auch die **Eulercharakteristik** des Kettenkomplexes A und die Gleichung besagt dann, daß ein Kettenkomplex dieselbe Eulercharakteristik hat wie seine Homologie. Das folgt ähnlich wie oben aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \dim A_i &= (\ker \partial_i) + \dim(\operatorname{im} \partial_i) \\ \dim H_i A &= \dim(\ker \partial_i) - \dim(\operatorname{im} \partial_{i+1}) \end{aligned}$$

Diese Erkenntnis wenden wir dann an auf den Komplex $S^{\mathrm{os}}(\Delta(\mathcal{K}); k)$ der geordneten simplizialen Ketten mit Koeffizienten in k, dessen Homologie ja nach 5.9.2 genau die Homologie von $\Delta(\mathcal{K})$ mit Koeffizienten in k ist. □

Korollar 7.1.8 (Euler'scher Polyedersatz). *Sei $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} S^2$ eine Triangulierung der Kugelschale. So gilt $|\mathcal{F}_0| - |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = 2$, in Worten*

$$|\mathit{Ecken}| - |\mathit{Kanten}| + |\mathit{Flächen}| = 2$$

Bemerkung 7.1.9. Dies Resultat von Euler, ein Vorläufer der Homologietheorie, hat der Euler-Charakteristik ihren Namen gegeben.

Übung 7.1.10. Ein Komplex $C \in \mathrm{Ket}_k$ von Vektorräumen über einem Körper k ist stets homotop zu seiner Homologie. Fassen wir genauer die Homologie HC wie immer auf als Komplex mit trivialen Differentialen, so gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von k-Vektorräumen genau einen Isomorphismus $HC \xrightarrow{\sim} C$, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation $H(HC) \xrightarrow{\sim} HC$ induziert.

7.2 Homologie von Mannigfaltigkeiten

Bemerkung 7.2.1. Ganz genauso wie in 6.3 definieren wir für jede n-Mannigfaltigkeit M und jede abelsche Gruppe G die **Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in** G und zeigen für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq M$, daß gilt $H_q(M, M-A; G) = 0$ für $q > n$ und daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$j = j_A : H_n(M, M-A; G) \xrightarrow{\sim} \Gamma_c A$$

induziert, wobei rechts die Schnitte mit kompaktem Träger von A in die Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in G zu verstehen sind. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß die fragliche Orientierungsgarbe gerade die Überlagerung ist, die von der Operation der Fundamentalgruppe auf G vermittels der Orientierungsdarstellung aus 6.3.9 herkommt. Daraus folgt, daß für eine kompakte zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit M und einen beliebigen Punkt $x \in M$ die kanonische Abbildung

$$H_n(M;G) \to H_n(M, M-x;G)$$

ein Isomorphismus ist für M orientierbar und eine Injektion mit Bild die Fixpunkte der Multiplikation mit (-1) für M nicht orientierbar.

Satz 7.2.2. *Gegeben eine abelsche Gruppe G verwenden wir im folgenden die Notation $G_2 = \{a \in G \mid a + a = 0\}$ für die Fixpunkte der Multiplikation mit (-1). Die* **Homologie der reell projektiven Räume** $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ *mit Koeffizienten in G wird dann gegeben durch*

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R};G) \cong \begin{cases} G & q = 0; \\ G/2G & 0 < q < n, \quad q \textit{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q < n, \quad q \textit{ gerade}; \\ G & 0 < q = n, \quad q \textit{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q = n, \quad q \textit{ gerade}; \\ 0 & q > n. \end{cases}$$

Beweis. Wir kürzen für diesen Beweis $H_q(X;G) = H_q X$ und $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{P}^n$ ab. Für $n \geq 0$ geht $\mathbb{P}^{n+1}$ aus $\mathbb{P}^n$ hervor durch Ankleben einer $(n+1)$-Zelle und die verklebende Abbildung ist schlicht die offensichtliche zweifache Überlagerung $S^n \to \mathbb{P}^n$. Wir haben also $\tilde{H}_q\mathbb{P}^{n+1} = \tilde{H}_q\mathbb{P}^n$ für $q \neq n+1, n$ und $\tilde{H}_q\mathbb{P}^{n+1} = 0$ für $q > n+1$ sowie eine exakte Sequenz

$$0 \to \tilde{H}_{n+1}\mathbb{P}^{n+1} \to \tilde{H}_n S^n \to \tilde{H}_n\mathbb{P}^n \to \tilde{H}_n\mathbb{P}^{n+1} \to 0$$

Es reicht zu zeigen, daß hier der mittlere Pfeil die Nullabbildung ist für n gerade bzw. unter geeigneter Identifikation der Enden die Multiplikationsabbildung $(2\cdot) : G \to G$ für $n > 0$ ungerade. Der Fall $n = 0$ ist eh klar. Für $n > 0$ betrachten wir nun das kommutative Diagramm aus dem Beweis von 6.3.24 mit Koeffizienten in G. Genauer betrachten wir um $p \in \mathbb{P}^n$ eine trivial überlagerte offene Umgebung U, die homöomorph ist zu einem offenen Ball. Wir haben dann $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$ und $\pi^{-1}(U) = U_1 \amalg U_2$ für geeignete offene Umgebungen U_i von p_i in S^n. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n S^n & \to & H_n(S^n, S^n - \pi^{-1}(p)) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 - p_1) \oplus H_n(U_2, U_2 - p_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n\mathbb{P}^n & \hookrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n - p) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U, U - p) \end{array}$$

Mit $a : S^n \to S^n$ der Antipoden-Abbildung kommutiert nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n - p_1) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 - p_1) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U - p) \\
\downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & || \\
H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n - p_2) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_2, U_2 - p_2) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U - p)
\end{array}$$

Da aber die Antipodenabbildung auf der n-ten reduzierten Homologie der Sphäre S^n die Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ induziert, ist die Verknüpfung $H_n S^n \to H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n - p)$ das $(1 + (-1)^{n+1})$-fache eines Isomorphismus. □

7.3 Tensorprodukt

Definition 7.3.1. Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul. So definieren wir eine abelsche Gruppe $M \otimes_R N$, das **Tensorprodukt** von M mit N über R, als Quotient der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}(M \times N)$ über dem kartesischen Produkt $M \times N$ durch die von allen Ausdrücken

$$\begin{array}{lcl}
(mr, n) & - & (m, rn) \\
(m + m', n) & - & (m, n) - (m', n) \\
(m, n + n') & - & (m, n) - (m, n')
\end{array}$$

mit $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$ erzeugte Untergruppe. Die Nebenklasse von (m, n) schreiben wir $m \otimes n$.

Bemerkung 7.3.2. Prinzipiell könnten wir auch für zwei R-Linksmoduln M, N in ähnlicher Weise eine abelsche Gruppe $T(M, N)$ definieren als einen Quotienten wie eben mit $(rm, n) - (m, rn)$ anstelle von $(mr, n) - (m, rn)$. Für nichtkommutative Ringe erweist sich eine derartige Konstruktion jedoch als wenig hilfreich, da sie keine guten Eigenschaften hat: Als Illustration mag der Leser prüfen, daß in dem Fall, daß R der Schiefkörper der Quaternionen ist, alle in dieser Weise gebildeten $T(M, N)$ schlicht Null werden.

Definition 7.3.3. Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul, N ein R-Linksmodul, und A eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $b : M \times N \to A$ heißt R**-bilinear** genau dann, wenn für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $r \in R$ gilt:

$$\begin{array}{lcl}
b(mr, n) & = & b(m, rn) \\
b(m + m', n) & = & b(m, n) + b(m', n) \\
b(m, n + n') & = & b(m, n) + b(m, n')
\end{array}$$

Satz 7.3.4 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts). *Sei R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul.*

1. *Die Abbildung $M \times N \to M \otimes_R N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ ist R-bilinear.*

2. *Wann immer $b : M \times N \to A$ eine R-bilineare Abbildung in eine abelsche Gruppe A ist, gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{b} : M \otimes_R N \to A$ derart, daß gilt $\tilde{b}(m \otimes n) = b(m, n)$ für alle $m \in M$, $n \in N$.*

Beweis. Standard. □

Bemerkung 7.3.5. Keineswegs jedes Element eines Tensorprodukts ist von der Form $m \otimes n$, die Elemente dieser Gestalt erzeugen jedoch das Tensorprodukt als abelsche Gruppe. Besitzt weiter ein Element eines Tensorprodukts eine Darstellung in der Gestalt $m \otimes n$, so besitzt es meist sogar viele verschiedene Darstellungen dieser Gestalt. Geben wir eine Abbildung von einem Tensorprodukt in eine abelsche Gruppe A an durch eine Vorschrift der Gestalt $m \otimes n \mapsto b(m, n)$, so ist der Leser implizit gefordert, die Bilinearität der Abbildung $b : M \times N \to A$ zu prüfen, und gemeint ist dann die durch die universelle Eigenschaft definierte Abbildung $\tilde{b} : M \otimes_R N \to A$.

Bemerkung 7.3.6. Aufgrund der universellen Eigenschaft definieren speziell R-lineare Abbildungen $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ einen Gruppenhomomorphismus $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$, $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$ und wir erhalten so einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} (\text{Mod-}R) \times (R\text{-Mod}) & \to & \text{Ab} \\ (M \quad , \quad N) & \mapsto & M \otimes_R N \end{array}$$

Bemerkung 7.3.7. Sind S, R Ringe, so versteht man unter einem S-R-**Bimodul** eine abelsche Gruppe M mit einer Struktur als S-Linksmodul und einer Struktur als R-Rechtsmodul derart, daß gilt

$$(sm)r = s(mr) \quad \forall s \in S, m \in M, r \in R$$

Wir notieren die Kategorie aller S-R-Bimoduln als $S\text{-Mod-}R$. Aufgrund der Funktorialität ist das Tensorprodukt automatisch auch ein Funktor

$$(S\text{-Mod-}R) \times (R\text{-Mod-}T) \to (S\text{-Mod-}T)$$

für beliebige Ringe S, R, T, die Operation von S bzw. T geschieht schlicht durch $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$, $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$. Ist speziell R ein kommutativer Ring, so ist das Tensorprodukt von zwei R-Moduln in natürlicher Weise wieder ein R-Modul. Diesen Fall lernt man oft zuerst kennen.

Bemerkung 7.3.8 (**Tensorieren mit dem Grundring**). Ist R ein Ring und M ein R-Modul, so ist $R \otimes_R M \to M, r \otimes m \mapsto rm$ ein Isomorphismus mit Inversem $m \mapsto 1 \otimes m$. Für diese Eigenschaft ist es wesentlich, daß in unseren Konventionen Ringe stets eine Eins haben und Moduln stets unitär sind.

Lemma 7.3.9. Das Tensorprodukt vertauscht mit direkten Summen. *Genauer definiert die offensichtliche Abbildung für eine beliebige Familie von Moduln (N_i) einen Isomorphismus*

$$M \otimes_R \left(\bigoplus N_i \right) \cong \bigoplus (M \otimes_R N_i)$$

Beweis. In der Tat haben wir sowohl für die linke als auch für die rechte Seite S offensichtliche bilineare Abbildungen $\operatorname{can}_i : M \times N_i \to S$ und diese sind universell: Ist irgendeine abelsche Gruppe A gegeben und eine Familie von bilinearen Abbildungen $b_i : M \times N_i \to A$, so gibt es jeweils genau einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{b} : S \to A$ mit $b_i = \tilde{b} \circ \operatorname{can}_i$. □

Bemerkung 7.3.10. Das Tensorprodukt vertauscht keineswegs mit beliebigen Produkten.

Definition 7.3.11. Eine Sequenz $A' \to A \to A''$ von abelschen Gruppen heißt **rechtsexakt** genau dann, wenn sie exakt ist bei A und wenn zusätzlich $A \to A''$ eine Surjektion ist.

Lemma 7.3.12. Das Tensorprodukt ist rechtsexakt. *Ist genauer R ein Ring, M ein R-Rechtsmodul und $N' \to N \twoheadrightarrow N''$ eine rechtsexakte Sequenz von R-Linksmoduln, so ist $M \otimes_R N' \to M \otimes_R N \twoheadrightarrow M \otimes_R N''$ eine rechtsexakte Sequenz von abelschen Gruppen.*

Beweis. Daß hier die Surjektivität erhalten bleibt, ist offensichtlich. Daß die Verknüpfung auch nach dem Tensorieren verschwindet ebenso. Wir kürzen für diesen Beweis $\otimes_R = \otimes$ ab und haben also eine Surjektion

$$\operatorname{cok}(M \otimes N' \to M \otimes N) \twoheadrightarrow M \otimes N''$$

Wir müssen zeigen, daß sie eine Injektion ist. Nun ist aber $M \times N'' \to \operatorname{cok}$, $(m, \overline{n}) \mapsto \overline{m \otimes n}$ für $n \in N$ eine wohldefinierte R-bilineare Abbildung und induziert folglich eine Abbildung $M \otimes N'' \to \operatorname{cok}$. Man sieht, daß wir so eine inverse Abbildung zu unserer Surjektion $\operatorname{cok} \twoheadrightarrow M \otimes N''$ erhalten haben. □

Bemerkung 7.3.13. Die drei vorstehenden Lemmata gelten analog auch für den anderen Tensorfaktor.

Lemma 7.3.14. *Ist M ein R-Rechtsmodul und $\mathfrak{m} \subset R$ ein Rechtsideal, d.h. ein Untermodul des R-Rechtsmoduls R, und betrachten wir in M den Untermodul $\mathfrak{m}M = \{\sum a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{m}, m_i \in M\}$, so induziert die Multiplikation einen natürlichen Isomorphismus*

$$(R/\mathfrak{m}) \otimes_R M \cong M/\mathfrak{m}M$$

Beweis. Das folgt, indem wir auf $\mathfrak{m} \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ den Funktor $\otimes_R M$ anwenden. □

Beispiel 7.3.15. Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht linksexakt: Wendet man auf die Multiplikation $(2\cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ den Funktor $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an, so erhält man die Nullabbildung $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definition 7.3.16. Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jeder von Null verschiedenen ganzen Zahl auf unserer Gruppe eine Injektion induziert.

Lemma 7.3.17. *Ist M eine torsionsfreie abelsche Gruppe und $N' \hookrightarrow N$ eine Injektion, so ist auch $M \otimes_{\mathbb{Z}} N' \to M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ eine Injektion.*

Beweis. Ist M endlich erzeugt, so ist M frei nach **??** und das Lemma folgt aus 7.3.9. Wir führen nun den allgemeinen Fall darauf zurück. Jedes Element $t \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ ist ja Bild eines $t_1 \in M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe $M_1 \subset M$. Geht t nach Null in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, so auch in $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N$ für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe $M_2 \subset M$ mit $M_1 \subset M_2$. Nach dem bereits behandelten Fall verschwindet damit t_1 schon in $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ und erst recht in $M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$ und es folgt $t = 0$. □

Bemerkung 7.3.18. In einer Sprache, die wir später einführen werden, hört sich dieser Beweis so an: Für endlich erzeugte Gruppen gilt das Lemma, da sie frei sind. Eine beliebige torsionsfreie Gruppe ist der direkte Limes ihrer endlich erzeugten Untergruppen, das Tensorprodukt kommutiert mit direkten Limites, und direkte Limites sind exakt.

Übung 7.3.19. Ist $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ eine spaltende kurze exakte Sequenz von R-Moduln, so bleibt die Sequenz exakt unter $M \otimes_R$. Insbesondere ist also das Tensorieren über einem Körper stets exakt.

Übung 7.3.20. Seien R, S Ringe und $M \in \text{Mod-}S$, $N \in S\text{-Mod-}R$ und $L \in R\text{-Mod}$ Moduln. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus $(M \otimes_S N) \otimes_R L \xrightarrow{\sim} M \otimes_S (N \otimes_R L)$.

Übung 7.3.21. Sei $S \to R$ ein Ringmomomorphismus. Ist M ein S-Modul und $(m_i)_{i \in I}$ eine Basis von M, so bilden die $1 \otimes m_i$ eine Basis des R-Moduls $R \otimes_S M$.

Übung 7.3.22. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus derart, daß S als Ring erzeugt wird vom Bild $\varphi(R)$ von R mitsamt den Inversen der Elemente aus $\varphi(R) \cap S^\times$, so ist für $M \in \text{Mod-}S$ und $N \in S\text{-Mod}$ die kanonische Abbildung eine Bijektion

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_S N$$

Speziell erhalten wir unter den entsprechenden Voraussetzungen $M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{R/\mathfrak{m}} N$ und $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathbb{Q}} N$.

Übung 7.3.23. Sind $M' \to M \twoheadrightarrow M''$ und $N' \to N \twoheadrightarrow N''$ rechtsexakte Sequenzen von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring R, so ist auch die Sequenz $(M' \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \to M \otimes_R N \twoheadrightarrow M'' \otimes_R N''$ rechtsexakt.

Übung 7.3.24. Gegeben Vektorräume V, V', W, W' über einem Körper k liefert das Tensorieren von Abbildungen eine Injektion

$$\operatorname{Hom}(V, V') \otimes_k \operatorname{Hom}(W, W') \hookrightarrow \operatorname{Hom}(V \otimes_k W, V' \otimes_k W')$$

Übung 7.3.25. Gegeben ein Rechtsmodul M über einem Ring R erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ein adjungiertes Paar von Funktoren $(M \otimes_R, \operatorname{Ab}(M,\ ))$ zwischen den Kategorien R-Mod und Ab. (In größerer Allgemeinheit wird das in **??** diskutiert.)

7.4 Erste Anwendungen in der Homologietheorie

Proposition 7.4.1. *Ist $C \in \mathrm{Ket}$ ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen und M eine abelsche Gruppe, so definiert die Vorschrift $[c] \otimes m \mapsto [c \otimes m]$ Homomorphismen*

$$(H_q C) \otimes_{\mathbb{Z}} M \to H_q(C \otimes_{\mathbb{Z}} M)$$

Ist M torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.

Beweis. Die offensichtlichen vertikalen Abbildungen liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(B_q C) \otimes_{\mathbb{Z}} M & \to & (Z_q C) \otimes_{\mathbb{Z}} M & \twoheadrightarrow & (H_q C) \otimes_{\mathbb{Z}} M \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
B_q(C \otimes_{\mathbb{Z}} M) & \hookrightarrow & Z_q(C \otimes_{\mathbb{Z}} M) & \twoheadrightarrow & H_q(C \otimes_{\mathbb{Z}} M)
\end{array}$$

in dem auch die obere Horizontale rechtsexakt ist nach 7.3.12 rechtsexakt ist und das deshalb die behauptete Abbildung auf der Homologie induziert. Ist M torsionsfrei, so ist die obere Horizontale auch exakt und bei Vertikalen sind Isomorphismen und induzieren deshalb einen Isomorphismus auf der Homologie. □

Übung 7.4.2. Für jede abelsche Gruppe M und jeden topologischen Raum X und jedes $m \in M$ und jede q-Kette $c \in S_q X$ erklären wir die q-Kette $mc \in S_q(X; M)$ mit Koeffizienten in M in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Dann liefert die Abbildung $m \otimes c \mapsto mc$ Isomorphismen $M \otimes_{\mathbb{Z}} S_q X \xrightarrow{\sim} S_q(X; M)$ für alle q und sogar einen Isomorphismus von Komplexen $M \otimes_{\mathbb{Z}} SX \xrightarrow{\sim} S(X; M)$.

Korollar 7.4.3. *Ist X ein topologischer Raum und M eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift $m \otimes [c] \mapsto [mc]$ natürliche Homomorphismen*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \to H_q(X; M)$$

Ist M torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.

Beweis. Die vorhergehende Proposition 7.4.1 liefert uns Homomorphismen $M \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \to H_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} SX)$, $m \otimes [c] \mapsto [m \otimes c]$, und Übung 7.4.2 liefert uns weiter Isomorphismen $H_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} SX) \xrightarrow{\sim} H_q(X; M)$, $[m \otimes c] \mapsto [mc]$. □

7.5 Torsionsprodukt von abelschen Gruppen

Definition 7.5.1. Gegeben eine abelsche Gruppe N betrachten wir den freien $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}N$ über der Menge N und die offensichtliche Surjektion $\mathbb{Z}N \twoheadrightarrow N$ mit ihrem Kern KN und bilden die kurze exakte Sequenz

$$KN \hookrightarrow \mathbb{Z}N \twoheadrightarrow N,$$

die sogenannte **Standardauflösung** von N. Gegeben eine weitere abelsche Gruppen M konstruieren wir eine dritte abelsche Gruppe $M *_{\mathbb{Z}} N$, das **Torsionsprodukt** von M und N, indem wir die Standardauflösung von N mit M tensorieren und vorne den Kern der eben nicht notwendig mehr injektiven Abbildung betrachten, in Formeln

$$M *_{\mathbb{Z}} N = \ker(M \otimes_{\mathbb{Z}} KN \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}N)$$

Bemerkung 7.5.2. Unser Torsionsprodukt ist in natürlicher Weise ein Funktor $\mathrm{Ab} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Wir kürzen für den Rest dieses Abschnitts $\otimes_{\mathbb{Z}}$ ab zu $\otimes$ und $*_{\mathbb{Z}}$ zu $*$. Die Bezeichnung "Torsionsprodukt" kommt von einigen der Eigenschaften unserer Konstruktion her, die im folgenden Satz aufgelistet werden.

Proposition 7.5.3 (Eigenschaften des Torsionsprodukts).

1. *Für beliebige abelsche Gruppen M und N gilt $M * N \cong N * M$.*

2. *Sind M oder N torsionsfrei, so gilt $M * N = 0$.*

3. *Für eine beliebige abelsche Gruppe A und jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) * A \cong \{a \in A \mid na = 0\}$.*

4. *Jede kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ von abelschen Gruppen definiert eine lange exakte Sequenz, die sogenannte* **Torsionssequenz**

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' * N & \hookrightarrow & M * N & \to & M'' * N & \to & \\ & \to & M' \otimes N & \to & M \otimes N & \twoheadrightarrow & M'' \otimes N & \to & 0, \end{array}$$

die natürlich ist in der kurzen exakten Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ und in N. Analoges gilt, wenn wir ausgehen von einer kurzen exakten Sequenz im zweiten Faktor.

5. *Das Torsionsprodukt vertauscht mit beliebigen direkten Summen.*

Beweis. Wir beginnen mit der explizit angegebenen Sequenz in 4. Nach 7.3.17 ist

$$\begin{array}{ccccc} M' \otimes KN & \hookrightarrow & M \otimes KN & \twoheadrightarrow & M'' \otimes KN \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M' \otimes \mathbb{Z}N & \hookrightarrow & M \otimes \mathbb{Z}N & \twoheadrightarrow & M'' \otimes \mathbb{Z}N \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz von (vertikalen) Kettenkomplexen und unsere Sequenz wird konstruiert als die zugehörige lange exakte Homologiesequenz: Der Kern der vertikalen Morphismen ist ja jeweils ein Torsionsprodukt, und der Kokern ist wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts kanonisch isomorph zu dem entsprechenden Tensorprodukt. Das definiert die exakte Sequenz in 4. Wir zeigen nun 1 und 2 und die analoge Sequenz in 4 zusammen. Ist M torsionsfrei, so folgt $M * N = 0$ mit 7.3.17 aus der Definition des Torsionsprodukts. Das ist schon mal die erste Hälfte von 2. Wenden wir nun die lange exakte Sequenz aus 4 an auf die Standardauflösung $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ von M, so definiert der Randoperator einen Isomorphismus

$$M * N \xrightarrow{\sim} \ker(KM \otimes_{\mathbb{Z}} N \to \mathbb{Z}M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$$

und wir folgern 1 und die analoge Sequenz in 4 und die andere Hälfte von 2. Nun folgt 3, wenn wir die Sequenz aus 4 betrachten für die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \overset{n\cdot}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, und beachten, daß $\mathbb{Z} * A = 0$ nach 2 bereits bekannt ist. Schließlich folgt 5 aus der entsprechenden Aussage für das Tensorprodukt 7.3.9. □

Übung 7.5.4. Das Torsionsprodukt $M * N$ von zwei abelschen Gruppen besitzt keine Elemente unendlicher Ordnung. (Hinweis: Man zeige $(M * N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$).

Übung 7.5.5. Der Beweis der Proposition liefert uns sogar einen kanonischen Isomorphismus $\tau_{M,N} : M * N \xrightarrow{\sim} N * M$. Man zeige, daß gilt $\tau_{M,N} \circ \tau_{N,M} = \mathrm{id}$. (Hinweis: Es gilt, ein großes kommutatives Diagramm zu malen mit exakten Zeilen und Spalten. Das Problem ist, daß ich mir nicht genau überlegt habe, ob das nicht vielmehr $-\mathrm{id}$ sein sollte. Eigentlich käme mir das vernünftiger vor.) Ich hätte auch gerne ein glattes Argument für $\tau_{M,M} = \mathrm{id}$ (oder $-\mathrm{id}$?.)

7.6 Das universelle Koeffiziententheorem

Satz 7.6.1 (Universelles Koeffiziententheorem der Homologie). *Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. So haben wir für jedes q eine natürliche kurze exakte Sequenz*

$$H_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \hookrightarrow H_q(X; G) \twoheadrightarrow H_{q-1}(X) *_{\mathbb{Z}} G,$$

die (in unnatürlicher Weise) spaltet.

Bemerkung 7.6.2. Dasselbe gilt für relative Homologie und mit Koeffizienten in einem beliebigen Hauptidealring. Die Spaltung kann für festes X natürlich in G gewählt werden, aber nicht bei festem allgemeinen G natürlich in X.

Beweis. Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz $KG \hookrightarrow \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow G$ über $\mathbb{Z}$ mit dem Komplex von freien abelschen Gruppen SX, so erhalten wir mit 7.4.2 eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} KG \hookrightarrow SX \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow S(X; G)$$

Bilden wir die exakte Homologiesequenz und beachten die Isomorphismen $(H_q SX) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} H_q(SX \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G)$ und $(H_q SX) \otimes_{\mathbb{Z}} KG \xrightarrow{\sim} H_q(SX \otimes_{\mathbb{Z}} KG)$ nach 7.4.1, so ergibt sich mit der Abkürzung $H_q(SX) = H_q$ die lange exakte Sequenz

$$H_q \otimes_{\mathbb{Z}} KG \to H_q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \to H_q(X; G) \to H_{q-1} \otimes_{\mathbb{Z}} KG \to H_{q-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$$

und dann mit der Rechtsexaktheit von $\otimes$ und der Definition von $*$ und 7.6.3 wie gewünscht eine kurze exakte Sequenz

$$H_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \hookrightarrow H_q(X; G) \twoheadrightarrow H_{q-1}(X) *_{\mathbb{Z}} G$$

Es bleibt zu zeigen, daß sie spaltet. Aber die kurze exakte Sequenz $Z_q X \hookrightarrow S_q X \twoheadrightarrow B_{q-1} X$ spaltet, da $B_{q-1} X \subset S_{q-1} X$ frei ist nach 7.6.4, wir finden nach 5.7.8 also ein Linksinverses $S_q X \twoheadrightarrow Z_q X$ der Einbettung der Zykel in die Ketten und das induziert die gesuchte Spaltung $H_q(X; G) \to H_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$. □

Bemerkung 7.6.3. Ist $A \to B \to C \to D \to E$ eine exakte Sequenz, so ist $(\operatorname{cok}(A \to B)) \to C \to (\ker(D \to E))$ eine kurze exakte Sequenz.

Satz 7.6.4. *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.*

Bemerkung 7.6.5. Der anschließende Beweis zeigt allgemeiner: Jeder Untermodul eines freien Moduls über einem Hauptidealring ist frei. Die Hauptarbeit besteht darin, auch nicht notwendig endlich erzeugte Gruppen bzw. Moduln zu behandeln.

Beweis. Sei I eine Menge und $U \subset \mathbb{Z}I$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Menge aller Paare (J, B) wo $J \subset I$ eine Teilmenge ist und B eine $\mathbb{Z}$-Basis des Schnitts $U \cap \mathbb{Z}J$. Diese Menge ist nicht leer und ist induktiv geordnet. Sie besitzt also nach Zorns Lemma ein maximales Element (J_m, B_m) und es gilt zu zeigen $J_m = I$. Aber sonst sei $i \in I - J_m$. Das Bild von $U \cap \mathbb{Z}(J_m \cup \{i\})$ in $\mathbb{Z}i$ unter der offensichtlichen Projektion ist von der Form $r\mathbb{Z}i$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Ist $r \neq 0$, so wählen wir ein Urbild u von ri in U und $(J_m \cup \{i\}, B_m \cup \{u\})$ wäre ein größeres Paar. Ist $r = 0$, so wäre schon $(J_m \cup \{i\}, B_m)$ ein größeres Paar. In jedem Fall steht $J_m \neq I$ im Widerspruch zur Maximalität von (J_m, B_m). $\square$

8 Produkte

8.1 Homologie von Produkten

Bemerkung 8.1.1. Gegeben topologische Räume X, Y scheint mir anschaulich klar, daß man natürliche Produktabbildungen

$$(H_p X) \times (H_q Y) \to H_{p+q}(X \times Y)$$

erwarten darf. Suchen wir zum Beispiel das Produkt von zwei Klassen vom Grad 1, und werden diese Klassen repräsentiert durch geschlossene Wege in X bzw. Y, so liefern diese Wege zusammen eine Abbildung des 2-Torus nach $X \times Y$, und jede Triangulierung dieses 2-Torus liefert einen 2-Zykel im Produkt, dessen Klasse wir dann als das Produkt unserer beiden 1-Klassen nehmen wollen. Diese Anschauung werden wir im folgenden zur Definition des "Kreuzprodukts der Homologie" formalisieren und zeigen, wie uns die "Künneth-Formel" erlaubt, die Homologie eines Produkts aus der Homologie seiner Faktoren zu berechnen. Arbeiten wir zur Vereinfachung mit Koeffizienten in einem Körper k, so liefert nach dieser Formel das Kreuzprodukt sogar Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

Wir beginnen nun die formale Arbeit.

Definition 8.1.2 (Tensorprodukt von Komplexen). Sind C, D Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring R, so bildet man einen Komplex von abelschen Gruppen $C \otimes_R D$, ihr **Tensorprodukt**, durch die Vorschrift $(C \otimes_R D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q$ mit dem Differential $\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial d$.

Bemerkung 8.1.3. Wir haben in dieser Situation offensichtliche Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} H_p C \otimes_R H_q D & \to & H_{p+q}(C \otimes_R D) \\ [c] \otimes [d] & \mapsto & [c \otimes d] \end{array}$$

Verschwinden unsere beiden Komplexe in allen Graden, die man von Null aus in Richtung der Pfeile erreicht, so liefert die natürliche Abbildung sogar einen Isomorphismus $H_0 C \otimes_R H_0 D \xrightarrow{\sim} H_0(C \otimes_R D)$ als Konsequenz aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts, vergleiche 7.3.23.

Satz 8.1.4 (Eilenberg-Zilber). *Von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe betrachte man die beiden Funktoren $(X, Y) \mapsto S(X \times Y)$ und $(X, Y) \mapsto SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$.*

1. *Es gibt eine Transformation von Funktoren*

$$\tau_{(X,Y)} : SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \to S(X \times Y),$$

die auf der nullten Homologie dieselbe Abbildung induziert wie der offensichtliche Isomorphismus $S_0X \otimes_{\mathbb{Z}} S_0Y \xrightarrow{\sim} S_0(X \times Y)$.

2. *Für jede solche Transformation sind die Kettenabbildungen* $\tau_{(X,Y)}$ *für alle* X, Y *Homotopieäquivalenzen.*

3. *Je zwei solche Transformationen* τ *und* τ' *bestehen aus homotopieäquivalenten Kettenabbildungen, d.h. gegeben zwei solche Transformationen* τ *und* τ' *haben wir* $\tau_{(X,Y)} \simeq \tau'_{(X,Y)}$ *für alle* X, Y.

Bemerkung 8.1.5. Dieser Satz liefert uns eine wohlbestimmte Äquivalenz zwischen Funktoren von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die *Homotopie*kategorie der Kettenkomplexe, die **Eilenberg-Zilber-Äquivalenz**

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \xrightarrow{\sim} S(X \times Y)$$

Eine Kettenabbildung $\tau_{(X,Y)}$ wie im Satz, die diese Äquivalenz "materialisiert", nennen wir eine **Eilenberg-Zilber-Abbildung**. Will man ihre anschauliche Bedeutung verstehen, so mag das in 8.2.2 gegebene explizite Beispiel für derartige Abbildungen helfen. Wir wollen den Satz mithilfe der Methode der "azyklischen Modelle" beweisen und führen dazu nun die nötige Terminologie ein.

Definition 8.1.6. Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Eine **Basis** eines Funktors

$$F : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$$

ist eine Familie $(M_i, m_i)_{i \in I}$ von Paaren bestehend aus einem Objekt $M_i \in \mathcal{A}$ und einem Element $m_i \in F(M_i)$ ihres Bildes unter unserem Funktor derart, daß für jedes $A \in \mathcal{A}$ die $(Ff)(m_i)$ mit $i \in I$ und $f \in \mathcal{A}(M_i, A)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $F(A)$ bilden.

Beispiel 8.1.7. Für alle $q \geq 0$ ist die einelementige Familie (Δ_q, τ_q) eine Basis des Funktors der q-Ketten $S_q : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$. Das ist genau die Aussage von 5.4.4.

Proposition 8.1.8. *Seien* $F, G : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ *zwei Funktoren und* $(M_i, m_i)_{i \in I}$ *eine Basis von* F. *So haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Trans}(F, G) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i \in I} G(M_i) \\ \tau & \mapsto & (\tau_{M_i}(m_i))_{i \in I} \end{array}$$

Beweis. Diese Verallgemeinerung von 5.4.4 überlassen wir dem Leser. □

Definition 8.1.9. Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie und $\mathcal{M} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ eine Teilmenge. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ heißt **frei mit Modellen in** $\mathcal{M}$ genau dann, wenn er eine Basis $(M_i, m_i)_{i \in I}$ besitzt derart, daß alle M_i zu $\mathcal{M}$ gehören.

Satz 8.1.10 (über azyklische Modelle). *Seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathrm{Ket}$ zwei Funktoren von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in die Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen und bezeichne $F_q, G_q : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ die homogenen Komponenten der jeweiligen Komplexe. Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Objekten von $\mathcal{A}$. Wir nehmen an, daß gilt $F_q = 0$ für $q < 0$ und daß alle F_q frei sind mit Modellen in $\mathcal{M}$. Wir nehmen weiter an, daß für alle $M \in \mathcal{M}$ die Homologie $H_q(GM)$ verschwindet für alle $q > 0$. So gilt*

1. *Für jede Transformation $\tau : H_0F \to H_0G$ gibt es eine Transformation $f : F \to G$ mit $\tau = H_0 f$.*

2. *Sind $f, f' : F \to G$ zwei Transformationen mit $H_0 f = H_0 f'$, so sind f und f' natürlich kettenhomotop. Genauer gibt es dann Transformationen $\delta_q : F_q \to G_{q+1}$ mit $f - f' = \partial\delta + \delta\partial$.*

Bemerkung 8.1.11. Ein Komplex, dessen Homologie identisch verschwindet, heißt **azyklisch**. Die wesentliche Voraussetzung des vorhergehenden Satzes läßt sich dahingehend formulieren, daß "G in echt positiven Graden azyklisch sein soll auf den Modellen von F". Man beachte weiter die enge Verwandschaft zwischen diesem Satz und dem Hauptlemma der homologischen Algebra 9.1.5 in der Aussage ebenso wie im Beweis.

Beweis. 1. Notgedrungen setzen wir $f_q = 0$ für $q < 0$. Um eine Transformation $f_0 : F_0 \to G_0$ anzugeben reicht es, die Bilder $z_i \in G_0(M_i)$ von $m_i \in F_0(M_i)$ anzugeben, für (M_i, m_i) eine Basis von F_0. Diese Bilder können wir sicher als Zykel wählen derart, daß auf der Homologie gilt $\tau : [m_i] \mapsto [z_i]$. Dann kommutiert notwendig das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{f_0} & Z_0 G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_0 F & \xrightarrow{\tau} & H_0 G \end{array}$$

und darüber hinaus gilt $\partial f_q = f_{q-1}\partial$ für alle $q \leq 0$. Jetzt müssen wir nur noch für $q > 0$ Transformationen $f_q : F_q \to G_q$ konstruieren derart, daß gilt $\partial f_q = f_{q-1}\partial$. Das machen wir induktiv. Ist (M_j, m_j) eine Basis von F_q, so reicht es aus, $f_q(m_j) \in G_q(M_j)$ so festzulegen, daß gilt

$$\partial f_q m_j = f_{q-1}\partial m_j \quad \forall j$$

Im Fall $q = 1$ finden wir solche $f_1(m_j)$, da nach Konstruktion von f_0 die Verknüpfung $f_0\partial : F_1 M_j \to G_0 M_j$ faktorisiert über $B_0 G M_j$. Für $q > 1$ folgt aus unserer Annahme $H_{q-1} G M_j$ azyklisch, daß wir solche $f_q(m_j)$ finden wenn nur gilt $\partial f_{q-1} \partial m_j = 0$. Das folgt hinwiederum aus der per Induktion schon bekannten Formel $\partial f_{q-1} = f_{q-2}\partial$.

2. Ähnlich wie im Beweis des ersten Teils konstruieren wir beginnend mit $\delta_q = 0$ für $q < 0$ induktiv Lösungen δ_q der Gleichungen

$$\partial \delta_q = f_q - f'_q - \delta_{q-1}\partial$$

und finden solche Lösungen für $q = 0$, da $f_0 - f'_0$ in den Rändern $B_0 G$ landet und für $q > 0$, da wir induktiv haben

$$\begin{aligned} \partial(f_q - f'_q - \delta_{q-1}\partial) &= (f_{q-1} - f'_{q-1} - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Beweis von Eilenberg-Zilber. Der Funktor $(X, Y) \mapsto S_n(X \times Y)$ ist offensichtlich frei mit Basis $((\Delta_n, \Delta_n), \mathrm{diag})$, wobei $\mathrm{diag} : \Delta_n \to \Delta_n \times \Delta_n$ die diagonale Einbettung $\mathrm{diag} \in S_n(\Delta_n \times \Delta_n)$ ist. Der Funktor $(X, Y) \mapsto (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n$ ist frei mit Basis $((\Delta_p, \Delta_q), \tau_p \otimes \tau_q)_{p+q=n}$. Nach dem Satz über azyklische Modelle in Verbindung mit 8.1.3 reicht es zu zeigen, daß beide Funktoren auf ihren eigenen Modellen und den Modellen des anderen Funktors azyklisch sind, daß also die höheren Homologiegruppen der Komplexe $S(\Delta_p \times \Delta_q)$ und $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q$ verschwinden. Die erste Aussage folgt daraus, daß $\Delta_p \times \Delta_q$ konvex ist. Um die zweite Aussage einzusehen, bilden wir den Kettenkomplex $\mathbb{Z}[0]$, der nur im Grad Null lebt und dort $\mathbb{Z}$ ist. Nun betrachtet man die Folge von Kettenabbildungen $S(\Delta_p) \to S(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}[0]$ und erkennt, daß sie Homotopieäquivalenzen sind (zum Beispiel mit 5.4.8 für die erste Abbildung und expliziter Rechnung für die zweite, oder mit 9.1.7). Es folgt eine Homotopieäquivalenz $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q \to \mathbb{Z}[0] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]$ und so die Azyklizität dieses Komplexes. □

Definition 8.1.12. Ist R ein Ring und sind X, Y topologische Räume, so liefert die Vorschrift $(c \otimes d) \otimes r \mapsto c \otimes rd$ Isomorphismen von R-Bimoduln

$$(SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} S(X; R) \otimes_R S(Y; R)$$

zum Beispiel, da die so definierte Abbildung eine Basis für die Linksoperation von R in eine ebensolche überführt. Damit definiert jede Eilenberg-Zilber-Abbildung bis auf Homotopie wohlbestimmte Kettenabbildungen, ja sogar Homotopieäquivalenzen

$$S(X; R) \otimes_R S(Y; R) \to S(X \times Y; R)$$

Die nach 8.1.3 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{array}{ccc} H_p(X;R) \times H_q(Y;R) & \to & H_{p+q}(X \times Y;R) \\ (c,d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie**.

Lemma 8.1.13. *Sind C, D Kettenkomplexe von Vektorräumen über einem Körper k, so liefern die natürlichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(C) \otimes_k H_q(D) \xrightarrow{\sim} H_n(C \otimes_k D)$$

Beweis. Offensichtlich ist das Tensorprodukt von Kettenkomplexen ein Funktor $\mathrm{Ket}(\mathrm{Lin}\text{-}\,R) \times \mathrm{Ket}(R\text{-}\mathrm{Lin}) \to \mathrm{Ket}(\mathrm{Ab})$. Er geht sogar auf die Homotopie-Kategorien über: Sind $f, g : C \to C'$ Kettenhomomorphismen und ist δ eine Kettenhomotopie zwischen f und g, in Formeln $\delta\partial + \partial\delta = f - g$, so ist $\delta \otimes \mathrm{id}$ eine Kettenhomotopie zwischen $f \otimes \mathrm{id}$ und $g \otimes \mathrm{id}$. Analoges gilt für den zweiten Tensorfaktor und das Tensorprodukt definiert damit in der Tat auch einen Funktor

$$\mathrm{Hot}(\mathrm{Lin}\text{-}\,R) \times \mathrm{Hot}(R\text{-}\mathrm{Lin}) \to \mathrm{Hot}(\mathrm{Ab})$$

Nach 5.4.10 gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von k-Vektorräumen eindeutig bestimmte Isomorphismen $HC \xrightarrow{\sim} C$ und $HD \xrightarrow{\sim} D$, die auf der Homologie die offensichtlichen Identifikationen induzieren. Es folgt eine Homotopieäquivalenz $HC \otimes HD \xrightarrow{\sim} C \otimes D$, die den gewünschten Isomorphismus $HC \otimes HD \xrightarrow{\sim} H(C \otimes D)$ induziert. □

Satz 8.1.14 (Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper). *Für zwei beliebige topologische Räume X, Y und Homologie mit Koeffizienten in einem Körper k definiert das Kreuzprodukt der Homologie Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X;k) \otimes_k H_q(Y;k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y;k)$$

Beweis. Für diesen Beweis vereinbaren wir die Abkürzungen $H(X;k) = HX$ und $S(X;k) = SX$ sowie $\otimes_k = \otimes$. Unser Lemma 8.1.13 und die Homotopieäquivalenz $SX \otimes SY \to S(X \times Y)$ liefern in der Tat auf der Homologie Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} HX \otimes HY & & & & H(X \times Y) \\ \| & & & & \| \\ H(SX) \otimes H(SY) & \xrightarrow{\sim} & H(SX \otimes SY) & \xrightarrow{\sim} & H(S(X \times Y)) \end{array}$$

□

Satz 8.1.15 (Künneth-Formel). *Gegeben topologische Räume X und Y liefert das Kreuzprodukt der Homologie die erste Abbildung einer natürlichen kurzen exakten Sequenz*

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p X \otimes_{\mathbb{Z}} H_q Y) \hookrightarrow H_n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} (H_p X * H_q Y)$$

die in unnatürlicher Weise spaltet.

Bemerkung 8.1.16. Arbeitet man allgemeiner mit Koeffizienten in einem Hauptidealring, so gilt dieselbe Formel mit demselben Beweis. Insbesondere erhalten wir so die Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper als Korollar. Ich habe nur deshalb einen separaten Beweis dieser Formel gegeben, da dieser mir einfacher schien als der Beweis im allgemeinen Fall.

Beweis. Ist C ein Komplex, so bezeichnen wir mit $C[1]$ den "um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex", in Formeln $(C[1])_q = C_{q-1}$ bzw. bei Kokettenkomplexen $(C[1])^q = C^{q+1}$, und ersetzen zusätzlich den Randoperator ∂ durch $-\partial$. Diese Vorzeichenwahl führt dazu, daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(C \otimes D)[1] \xrightarrow{\sim} (C[1]) \otimes D$$

induziert. (Die offensichtliche Abbildung $(C \otimes D)[1] \xrightarrow{\sim} C \otimes (D[1])$ ist jedoch keine Kettenabbildung, statt der offensichtlichen Abbildung muß man in diesem Fall $c \otimes d \mapsto (-1)^{|c|} c \otimes d$ nehmen um eine Kettenabbildung zu erhalten.) Sicher haben wir nun eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \hookrightarrow SX \twoheadrightarrow BX[1]$$

wobei vorne und hinten Komplexe mit Differential Null stehen. Tensorieren wir über $\mathbb{Z}$ mit dem freien Komplex SY, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \otimes SY \hookrightarrow SX \otimes SY \twoheadrightarrow BX[1] \otimes SY$$

Da ZX und BX auch aus freien abelschen Gruppen bestehen und Differential Null haben, hat die zugehörige lange exakte Homologiesequenz die Gestalt

$$\begin{array}{lllllll} & & & & & (BX[1] \otimes HY)_{n+1} & \rightarrow \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_n & \rightarrow & H_n(SX \otimes SY) & \rightarrow & (BX[1] \otimes HY)_n & \rightarrow \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_{n-1} & \rightarrow & & & & \end{array}$$

Man überzeugt sich mühelos, daß die Randabbildungen hier schlicht von den Einbettungen der Ränder in die Zykel induziert werden, so daß sich aufgrund der kurzen exakten Sequenz $BX \hookrightarrow ZX \twoheadrightarrow HX$ und der exakten Tor-Sequenz eine natürliche kurze exakte Sequenz ergibt der Gestalt

$$(HX \otimes HY)_n \hookrightarrow H_n(X \times Y) \twoheadrightarrow (HX * HY)_{n-1}$$

Um eine Spaltung dieser Sequenz anzugeben, wählen wir einfach Linksinverse der Einbettungen $ZX \hookrightarrow SX$, $ZY \hookrightarrow SY$: Solche Linksinverse existieren, da ja die jeweiligen Kokerne BX, BY frei sind als Untergruppen der freien abelschen Gruppen SX, SY. □

Übung 8.1.17. Seien A, B Ringe und $M \in \mathrm{Ket}(\text{Lin-}A), X \in \mathrm{Ket}(A\text{-Lin-}B)$ und $N \in \mathrm{Ket}(\text{Lin-}B)$ Komplexe. So erhalten wir einen Isomorphismus von Komplexen

$$\mathrm{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{-A}(M, \mathrm{Hom}_{-B}(X, N))$$

gegeben durch $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(m)(x) = \varphi(m \otimes x)$, und der induzierte Isomorphismus auf den Nullzykeln liefert ein adjungiertes Paar $(\ \otimes_A X, \mathrm{Hom}_{-B}(X,\ ))$ von Funktoren zwischen Ket_{-A} und Ket_{-B} .

Übung 8.1.18. Sind C, D zwei Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring R, so ist $v : C \otimes_R D \to D \otimes_{R^\circ} C$, $c \otimes d \mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c$ ein Isomorphismus von Kettenkomplexen.

Bemerkung 8.1.19. Arbeiten wir in Übung 8.1.17 statt mit Rechts- mit Linksmoduln $M \in \mathrm{Ket}(A\text{-Lin}), X \in \mathrm{Ket}(B\text{-Lin-}A)$ und $N \in \mathrm{Ket}(B\text{-Lin})$, so haben wir analog

$$\mathrm{Hom}_B(X \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(X, N))$$

vermittels $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(m)(x) = (-1)^{|m||x|} \varphi(x \otimes m)$. Daraus erhalten wir insbesondere ein adjungiertes Paar $(X \otimes_A\ , \mathrm{Hom}_B(X,\ ))$ von Funktoren zwischen Ket_A und Ket_B .

8.2 Eine explizite Eilenberg-Zilber-Abbildung

Bemerkung 8.2.1. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, gebe ich eine mögliche Eilenberg-Zilber-Abbildung auch noch explizit an. Wir werden diese explizite Form nicht benötigen, deshalb führe ich den Beweis nicht aus. Wir betrachten für $n = p + q$ alle affinen injektiven Abbildungen

$$\omega : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q$$

die Ecken auf Paare von Ecken werfen und die "in jeder Komponente monoton wachsen auf den Ecken". So eine Abbildung entspricht eindeutig einer Injektion

$$\omega = (\alpha, \beta) : \{0, \ldots, n\} \hookrightarrow \{0, \ldots, p\} \times \{0, \ldots, q\}$$

mit monoton wachsenden α und β. Man erkennt, daß notwendig gilt $\omega(0) = (0,0)$, $\omega(n) = (p,q)$ und daß beim Übergang von i zu $i+1$ entweder α oder β (aber nicht beide) um 1 wachsen. Man kann sich so ein ω vorstellen als einen Weg von $(0,0)$ nach (p,q), der in jedem von n Zeitschritten entweder eins nach oben oder eins nach rechts gehen darf. Die Fläche unterhalb dieses Weges im Quadrat $[0,p] \times [0,q]$ notieren wir $n(\omega)$, in Formeln

$$n(\omega) = \sum_{0 \leq i < j < p+q} (\beta(i+1) - \beta(i))(\alpha(j+1) - \alpha(j))$$

Unsere $\omega : \Delta_n \to \Delta_p \times \Delta_q$ sind die n-Simplizes einer Triangulierung von $\Delta_p \times \Delta_q$, aber das ist nur für die Anschauung von Belang. Jetzt definieren wir Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} S_p X \otimes_{\mathbb{Z}} S_q Y & \to & S_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau & \mapsto & \sum_\omega (-1)^{n(\omega)} (\sigma \times \tau) \circ \omega \end{array}$$

und erhalten so eine Transformation von Funktoren von der Kategorie aller Paare topologischer Räume in die Kategorie der Gruppen.

Lemma 8.2.2. *Diese Homomorphismen definieren eine mögliche Eilenberg-Zilber-Abbildung*

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \to S(X \times Y)$$

Beweis. Unsere Abbildung tut offensichtlich das Richtige in der nullten Homologie. Wir müssen also nur prüfen, daß sie wirklich für alle X, Y eine Kettenabbildung ist. Das überlassen wir dem Leser. □

Definition 8.2.3. Die Abbildungen

$$\lambda^p_{p+q} = \lambda^p : \Delta_p \to \Delta_{p+q} \text{ und } \rho^q_{p+q} = \rho^q : \Delta_q \to \Delta_{p+q},$$

die hinten q Nullen anhängen bzw. vorne p Nullen davorschieben, heißen die p-**Vorderseite** bzw. die q-**Hinterseite** unseres Standardsimplex. Hier steht λ für "links" und ρ für "rechts".

Lemma 8.2.4. *Schreiben wir einen beliebigen n-Simplex $\Delta_n \to X \times Y$ in der Form (σ, τ) mit $\sigma : \Delta_n \to X$, $\tau : \Delta_n \to Y$ und definieren Abbildungen*

$$\begin{array}{rccc} A : & S_n(X \times Y) & \to & (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n \\ & (\sigma, \tau) & \mapsto & \sum_{p+q=n} \sigma\lambda^p \otimes \tau\rho^q \end{array}$$

so erhalten wir eine natürliche Kettenabbildung $A : S(X \times Y) \to SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$, die **Alexander-Whitney-Abbildung***, und diese Abbildung repräsentiert das Homotopie-Inverse zu einer und jeder Eilenberg-Zilber-Abbildung.*

Beweis. Die im Lemma definierte Abbildung tut offensichtlich das Richtige in der nullten Homologie. Wir müssen also nur prüfen, daß sie wirklich eine Kettenabbildung ist, für alle X, Y. Dazu rechnen wir

$$\partial A(\sigma,\tau) = \sum_{p+q=n} \left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma\lambda^p k^i \otimes \tau\rho^q + (-1)^p \sum_{j=0}^{q} (-1)\sigma\lambda^p \otimes \tau\rho^q k^j \right)$$

wobei wir die a priori undefinierten Ausdrücke $\sigma\lambda^0 k^0$ und $\tau\rho^0 k^0$ als Null zu interpretieren haben. Ebenso finden wir auch

$$A\partial(\sigma,\tau) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_{a+b=n-1} \sigma k^\nu \lambda^a \otimes \tau k^\nu \rho^b$$

Für die entsprechenden Abbildungen mit Werten in Δ_n für $n = a+b+1$ gilt nun

$$\begin{aligned} k^\nu \lambda^a &= \begin{cases} \lambda^{a+1} k^\nu & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a+1; \\ \lambda^a & \text{falls } a+1 \leq \nu \leq n; \end{cases} \\ k^\nu \rho^b &= \begin{cases} \rho^b & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a; \\ \rho^{b+1} k^{\nu-a} & \text{falls } a \leq \nu \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit können wir $A\partial(\sigma,\tau)$ umschreiben zu

$$\sum_{a+b+1=n} \left((-1)^\nu \sum_{\nu=0}^{a} \sigma\lambda^{a+1} k^\nu \otimes \tau\rho^b + (-1)^{a+1+\mu} \sum_{\mu=0}^{b} \sigma\lambda^a \otimes \tau\rho^{b+1} k^{\mu+1} \right)$$

und wenn wir in der ersten Summe $p = a+1$, $q = b$, $i = \nu$ substituieren und in der Zweiten $p = a$, $q = b+1$, $j = \mu+1$ ergibt sich

$$A\partial(\sigma,\tau) = \sum_{p+q=n} \left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sigma\lambda^p k^i \otimes \tau\rho^q + (-1)^p \sum_{j=1}^{q} (-1)^j \sigma\lambda^p \otimes \tau\rho^q k^j \right)$$

wobei wir die erste Summe im Fall $p = 0$ und die Zweite im Fall $q = 0$ als Null zu verstehen haben. Es folgt $\partial A(\sigma,\tau) = A\partial(\sigma,\tau)$. □

8.3 Eigenschaften des Kreuzprodukts

Bemerkung 8.3.1. Sei für diesen Abschnitt R ein beliebiger Koeffizientenring. Der Übersichtlichkeit halber setzen wir $H(X;R) = HX$ und $\otimes_R = \otimes$.

Proposition 8.3.2 (Eigenschaften des Kreuzprodukts).

Natürlichkeit: *Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ gilt für beliebige $c \in H_p X$ und $d \in H_q Y$ in $H_{p+q}(X' \times Y')$ die Formel*

$$(f_* c) \times (g_* d) = (f \times g)_*(c \times d)$$

Einheit: *Bezeichnet $1 \in H_0(\mathrm{pt})$ den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes, so gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den offensichtlichen Identifikationen $\mathrm{pt} \times X \cong X \cong X \times \mathrm{pt}$ auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichungen*

$$1 \times c = c = c \times 1$$

Assoziativität: *Gegeben X, Y, Z topologische Räume und a, b, c zugehörige Homologieklassen gilt unter Unterdrückung der Notation für die von den natürlichen Identifikationen $(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z \cong X \times (Y \times Z)$ auf der Homologie induzierten Isomorphismen in der Homologie von $X \times Y \times Z$ die Gleichung*

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Graduierte Kommutativität: *Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\tau : X \times Y \to Y \times X$ die Vertauschung $(x, y) \mapsto (y, x)$. Für beliebige homogene Homologieklassen $c \in HX$ und $d \in HY$ gilt in $H(Y \times X)$ bei kommutativem Koeffizientenring R die Formel*

$$\tau_*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

Beweis. Natürlichkeit: Das folgt aus dem anschließenden kommutativen Diagramm in der Kategorie der Kettenkomplexe

$$\begin{array}{ccc} SX \otimes SY & \to & S(X \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SX' \otimes SY' & \to & S(X' \times Y') \end{array}$$

mit Eilenberg-Zilber-Abbildungen in den Horizontalen und hoffentlich offensichtlichen Abbildungen in den Vertikalen.

Einheit: Wir zeigen nur die erste Gleichung $1 \times c = c$. Bezeichnet $\mathrm{pr} : \mathrm{pt} \times X \to X$ die Projektion auf die zweite Koordinate, so lautet die präzise Formulierung unserer Behauptung ja $\mathrm{pr}_*(1 \times c) = c$. Um das zu zeigen, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(\mathrm{pt}) \otimes SX & \to & S(\mathrm{pt} \times X) \\ \epsilon \otimes \mathrm{id} \downarrow & & \wr \downarrow \mathrm{pr} \\ R[0] \otimes SX & \stackrel{\mathrm{mult}}{\to} & SX \end{array}$$

und behaupten, daß es kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe für alle X. Dazu hinwiederum fassen wir alle Ecken des Diagramms auf als Funktoren von den topologischen Räumen in die Kettenkomplexe und alle Pfeile als Transformationen und müssen mit dem Satz über azyklische Modelle 8.1.10.2 nur zeigen, daß das induzierte Diagramm in der nullten Homologie kommutiert für alle X. Das ist aber klar.

Assoziativität: Nach 8.3.4 ist für drei Kettenkomplexe A, B, C die offensichtliche Abbildung $(A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ ein Isomorphismus. Wir dürfen deshalb bei solchen Tensorprodukten die Klammern weglassen, ebenso wie bei Produkten topologischer Räume. Dann betrachten wir das durch Eilenberg-Zilber-Abbildungen gegebene Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
 & SX \otimes S(Y \times Z) \arrow[dr] & \\
SX \otimes SY \otimes SZ \arrow[ur] \arrow[dr] & & S(X \times Y \times Z) \\
 & S(X \times Y) \otimes SZ \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Aus dem Satz über azyklische Modelle folgt ähnlich wie im vorhergehenden Punkt, daß unser Diagramm kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Gehen wir nun zur Homologie über, so folgt die behauptete Assoziativität des Kreuzprodukts.

Graduierte Kommutativität: Wir erinnern an unseren Vertauschungsmorphismus $D \otimes C$, $c \otimes d \mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c$ aus 8.1.18 und betrachten wir das folgende Diagramm von Funktoren aus der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe:

$$\begin{array}{ccc}
SX \otimes SY & \to & S(X \times Y) \\
v \downarrow & & \downarrow S\tau \\
SY \otimes SX & \to & S(Y \times X)
\end{array}$$

Hier sind mit X, Y variable topologische Räume gemeint und die Horizontalen sind Eilenberg-Zilber-Abbildungen. Um zu zeigen, daß dies Diagramm für beliebige Räume X, Y kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, müssen wir wie beim ersten Punkt nach dem Satz über azyklische Modelle 8.1.10.2 nur zeigen, daß es kommutiert in der nullten Homologie. Das ist jedoch offensichtlich. Die graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts folgt durch Übergang zur Homologie. □

Übung 8.3.3. Man zeige, daß sich jede Eilenberg-Zilber-Transformation auf genau einen Weise zu einer Transformation

$$S(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} S(Y, B) \to S(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

zwischen Funktoren auf Paaren von Raumpaaren fortsetzen läßt, die eine von allen Wahlen unabhängige Äquivalenz von Funktoren in die Homotopiekategorie liefert. Wir erhalten so das Kreuzprodukt der relativen Homologie

$$H(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} H(Y, B) \to H(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

Bei Koeffizienten in einem Körper ist das Kreuzprodukt auf der relativen Homologie wieder ein Isomorphismus. Man folgere, daß es für ungerades n keinen topologischen Raum X geben kann derart, daß $X \times X$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gibt es salopp gesagt **keine Wurzel aus dem $\mathbb{R}^3$.**

Bemerkung 8.3.4. Man sieht ohne Mühe, daß ganz allgemein die offensichtliche Abbildung $c \otimes (d \otimes e) \mapsto (c \otimes d) \otimes e$ einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $C \otimes_R (D \otimes_S E) \mapsto (C \otimes_R D) \otimes_S E$ liefert, wobei R, S Ringe sind und wir für C einen Komplex in Lin-R, für D einen Komplex in R-Lin-S und für E einen Komplex in S-Lin nehmen.

8.4 Differentielle graduierte Algebra

Bemerkung 8.4.1. Für eine orientierte kompakte n-Mannigfaltigkeit ohne Rand M darf man erwarten, daß sich der anschauliche Schnitt zweier Zykel formalisieren läßt zu einer bilinearen Paarung

$$H_{n-p}M \times H_{n-q}M \to H_{n-(p+q)}M$$

Das ist auch in der Tat der Fall, aber die Konstruktion dieses sogenannten Schnittprodukts ist nicht einfach und wird uns lange beschäftigen. Wir konstruieren in den folgenden Abschnitten den Kohomologiering, den man zwar für einen beliebigen topologischen Raum recht mühelos erhält, für den ich jedoch keine Anschauung anbieten kann. Eine interessante Quelle zur Entwicklung der Theorie ist [Mas99]. Im folgenden Abschnitt treffen wir zunächst einige rein algebraische Vorbereitungen.

Definition 8.4.2. Eine differentielle graduierte abelsche Gruppe mit einer Kettenabbildung $R \otimes_{\mathbb{Z}} R \to R$, die sie zu einem Ring macht, heißt ein **differentieller graduierter Ring** oder kurz **dg-Ring**.

Bemerkung 8.4.3. Einen Ring R mit einer Graduierung der zugrundeliegenden additiven Gruppe derart, daß gilt $R_i R_j \subset R_{i+j} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}$ nennt man einen **graduierten Ring**. Nach unserer Definition ist das dasselbe wie ein dg-Ring mit Differential Null. Ein dg-Ring ist ausgeschrieben ein graduierter Ring R mit einem Differential $d : R \to R$ auf der zugrundeliegenden graduierten abelschen Gruppe derart, daß die graduierte Leibniz-Regel $d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db)$ gilt.

Übung 8.4.4. In einem graduierten Ring gilt stets $1 \in R_0$. In einem dg-Ring gilt stets $d(1) = 0$. (Man multipliziere erst die Eins mit homogenen Elementen und dann die homogenen Komponenten der Eins mit der Eins.)

Bemerkung 8.4.5. Die Struktur eines dg-Rings tritt in der homologischen Algebra sehr häufig auf. Die Homologie eines dg-Ring trägt nach 8.1.3 stets in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rings, genauer bilden die Kozykel einen graduierten Teilring und die Koränder ein graduiertes beidseitiges Ideal im Ring der Kozykel.

Definition 8.4.6. Ein **differentieller graduierter Modul** oder kurz **dg-Modul** über einem dg-Ring A ist eine dg-Gruppe M mitsamt einem Homomorphismus von dg-Ringen $A \to \operatorname{End} M$.

Bemerkung 8.4.7. Homomorphismen von dg-Gruppen $A \to \operatorname{End} M$ können wir nach **??** identifizieren mit Homomorphismen von dg-Gruppen $A \otimes M \to M$, und unser ursprünglicher Homomorphismus ist ein Ringhomomorphismus genau dann, wenn der so gebildete Homomorphismus die Bedingungen erfüllt, die man üblicherweise von der Operation eines Rings auf einem Modul fordert.

Bemerkung 8.4.8. Ist (A, d) ein dg-Ring, so definiert man den **opponierten dg-Ring** A°, indem man dieselbe dg-Gruppe zugrunde legt und nur die Multiplikation abändert, indem man die Abbildung $v : A \otimes A \to A \otimes A$ aus 8.1.18 vor die Multiplikation $A \otimes A \to A$ davorschaltet. Explizit wird demnach die neue Multiplikation gegeben durch die Vorschrift $a * b = (-1)^{|a||b|} ba$. Die analoge Regel $a * m = (-1)^{|a||m|} ma$ identifiziert dann dg-Moduln über A° mit "dg-Rechtsmoduln" über A, deren Definition hoffentlich offensichtlich ist. Ist die Identität auf einem dg-Ring ein Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} A^\circ$, d.h. gilt für alle homogenen $a, b \in A$ die Regel $ab = (-1)^{|a||b|} ba$, so heißt unser dg-Ring **graduiert kommutativ** oder auch **superkommutativ**.

8.5 Der Kohomologiering

Definition 8.5.1. Gegeben ein topologischer Raum X und eine abelsche Gruppe G definieren wir ganz allgemein

$$S^q(X; G) = \operatorname{Hom}(S_q X, G) = \operatorname{Ens}(\operatorname{Top}(\Delta_q, X), G)$$

für $S_q X = S_q(X; \mathbb{Z})$ und nennen die Elemente dieser Gruppe **singuläre Koketten von X mit Koeffizienten in G**.

Bemerkung 8.5.2. Wir können $S^q(X; G)$ also auch interpretieren als die Gruppe aller Abbildungen von der Menge der q-Simplizes nach G. Die Gruppe der singulären Ketten $S_q(X; G)$ mit Koeffizienten in G besteht im Gegensatz dazu nur aus allen *fast überall verschwindenden* solchen Abbildungen.

Bemerkung 8.5.3. Per Definitionem ist $S^q(X; G)$ gerade die homogene Komponente vom Grad $-q$ im Komplex $\mathrm{Hom}(SX, G)$, wie er in 5.4.9 definiert wird. Wir vereinbaren nun die Konvention, nach der obere Indizes bei einem Komplex bedeuten sollen, daß ein Differential in Richtung wachsender Indizes gemeint ist. Im Allgemeinen kann man diese Regel $C^q = C_{-q}$ schreiben, aber in konkreten Situationen wie zum Beispiel hier trägt die Stellung des Index zusätzliche Information.

Definition 8.5.4. Eine Kokette $c \in S^q(X; G)$ nennen wir auch eine **Kokette vom Grad** q und schreiben $|c| = q$. Den Wert einer Kokette $c \in S^q(X; G)$ auf einer Kette $z \in S_q X$ notieren wir $\langle c, z\rangle \in G$. Sprechen wir ohne nähere Spezifizierung von singulären Koketten, so meinen wir meist Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Den Randoperator des Komplexes $S^*(X; G) = \mathrm{Hom}(SX, G)$ nennen wir den **Korandoperator**.

Definition 8.5.5. Gegeben eine abelsche Gruppe G definieren wir ganz allgemein einen Funktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}^\circ$, $A \mapsto \mathrm{Hom}(A, G)$. Das Bild eines Morphismus $f : A \to B$ unter diesem Funktor ist die **transponierte Abbildung** $f^t : \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$, in Worten das "Verknüpfen mit f".

Bemerkung 8.5.6. Explizit wird der Korandoperator gegeben durch die Vorschrift $\delta = -(-1)^q \partial^t : S^q(X; G) \to S^{q+1}(X; G)$ oder noch expliziter durch die Vorschrift $\langle \delta c, z\rangle = -(-1)^{|c|}\langle c, \partial z\rangle$.

Bemerkung 8.5.7. Wir haben nun kontravariante Funktoren konstruiert von den topologischen Räumen in die Komplexe abelscher Gruppen als die Komposition

$$\mathrm{Top} \to \mathrm{Ket} \to \mathrm{Ket}^\circ$$

wo der erste Funktor gegeben ist durch $X \mapsto SX$ und der zweite durch $C \mapsto \mathrm{Hom}(C, G)$. Im Fall $G = \mathbb{Z}$ notieren wir die Komposition S^*, also $X \mapsto S^*X$ auf den Objekten und $f \mapsto S^*f$ auf den Morphismen.

Definition 8.5.8. Im Kontext von Morphismen in Richtung wachsender Indizes bezeichnet man die Ränder, Zykel und Homologiegruppen meist als **Koränder** B^qC, **Kozykel** Z^qC, **Kohomologiegruppen** H^qC.

Definition 8.5.9. Die Kohomologiegruppen unseres Komplexes $S^*(X; G)$ der singulären Koketten von X mit Koeffizienten in G heißen die **singulären Kohomologiegruppen von** X **mit Koeffizienten in** G und werden bezeichnet mit

$$H^q(S^*(X; G)) = H^q_{\mathrm{sing}}(X; G) = H^q(X; G)$$

Offensichtlich erhalten wir so kontravariante Funktoren von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen $H^q(\ ,G) : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}^\circ$. Das Bild einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ unter diesem Funktor notieren wir $H^q f = f^* : H^q Y \to H^q X$ und haben also $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Bemerkung 8.5.10. Wir können auch die Zuordnung $G \mapsto H^q(X; G)$ für festes X auffassen als einen Funktor von den abelschen Gruppen in sich selber. Ist insbesondere G ein Modul über einem Ring R, so erbt $H^q(X; G)$ diese Struktur.

Bemerkung 8.5.11. Wenden wir die natürliche Abbildung $H\,\mathrm{Hom}(C, D) \to \mathrm{Hom}(HC, HD)$ aus 5.4.9 an mit $C = S_* X$ und D dem Komplex, der nur im Grad Null lebt und dort G ist, so erhalten wir eine Abbildung $H^q(X; G) \to \mathrm{Hom}(H_q X, G)$ alias eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung, die **Kronecker-Paarung**

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; G) \times H_q X & \to & G \\ (c\ ,\ z) & \mapsto & \langle c, z \rangle \end{array}$$

Ist G ein Modul über einem Ring k, so erhalten wir analog einen natürlichen Homomorphismus $H^q(X; G) \to \mathrm{Hom}_k(H_q(X; k), G)$ von Linksmoduln über k, wobei die k-Operation auf dem Hom-Raum herkommt von der Rechtsoperation von k auf $H_q(X; k)$. Arbeiten wir mit Koeffizienten in einem Körper k, so ist nach 5.4.10 die Kohomologie schlicht der Dualraum der Homologie, die Kronecker-Paarung definiert genauer Isomorphismen

$$H^q(X; k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_q(X; k), k)$$

Ich kann mir die Kohomologiegruppen nur vorstellen als den Dualraum in diesem Sinne der für mich vergleichsweise noch anschaulichen Homologiegruppen.

Proposition 8.5.12 (Komultiplikation von Ketten). *Für jeden topologischen Raum X ist die Abbildung $\Delta : SX \to SX \otimes_{\mathbb{Z}} SX$, die auf Simplizes gegeben wird durch die Vorschrift*

$$\sigma \mapsto \sum_{p+q=|\sigma|} \sigma\lambda^p \otimes \sigma\rho^q$$

ein Homomorphismus von Kettenkomplexen und erfüllt die Bedingung der **Koassoziativität** $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta : SX \to SX \otimes SX \otimes SX$.

Beweis. Die fragliche Abbildung erhält man als die Verknüpfung $SX \to S(X \times X) \to SX \otimes_{\mathbb{Z}} SX$ des direkten Bildes unter der Diagonale mit der Alexander-Whitney-Abbildung aus 8.2.4. Das ist auch der Grund, aus dem sie Δ notiert wird. Als eine Verknüpfung von Kettenabbildungen sie eine Kettenabbildung. Die Koassoziativität ist offensichtlich. □

Definition 8.5.13. Sei X ein topologischer Raum. Die Verknüpfung

$$S^*X \otimes_{\mathbb{Z}} S^*X \to (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SX)^* \to S^*X$$

unserer kanonischen Abbildung $C^* \otimes D^* \to (C \otimes D)^*$ aus **??** im Spezialfall $C = D = SX$ mit der Transponierten unserer Komultiplikation Δ aus 8.5.12 wird notiert in der Form

$$a \otimes b \mapsto a \cup b$$

und heißt das **cup-Produkt auf den singulären Koketten**. Die Bezeichnung "cup" (Tasse auf Englisch) erinnert an die Form des Symbols. Offensichtlich werden so die singulären Koketten zu einem dg-Ring und ihre Homologie erbt die Struktur eines graduierten Rings. Er heißt der **singuläre Kohomologiering** unseres Raums und wird mit H^*X oder genauer mit $H^*_{\text{sing}}X$ bezeichnet. Die Multiplikation im Kohomologiering notieren wir auch $\cup$ und nennen sie das "cup-Produkt auf der Kohomologie".

Bemerkung 8.5.14. Explizit wird für Koketten $a \in S^pX$, $b \in S^qX$ der Wert von $a \cup b$ auf einem Simplex $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ gegeben durch die Formel

$$\langle a \cup b, \sigma \rangle = (-1)^{pq} \langle a, \sigma \circ \lambda^p \rangle \langle b, \sigma \circ \rho^q \rangle$$

Proposition 8.5.15. *Der Kohomologiering eines topologischen Raums ist stets graduiert kommutativ.*

Bemerkung 8.5.16. Das cup-Produkt auf den singulären Koketten ist keineswegs graduiert kommutativ, das gilt erst nach dem Übergang zur Kohomologie. Wir geben den Beweis im nächsten Abschnitt in einem allgemeineren Rahmen.

8.6 Das Kreuzprodukt der Kohomologie

Noch durchstylen! Viel klar mit Tensorkategorie-Formalismus.

Notation 8.6.1. Sei für diesen Abschnitt R ein beliebiger kommutativer Koeffizientenring. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir $H^*(X; R) = H^*X$ und $\otimes_R = \otimes$ ab.

Definition 8.6.2. Gegeben topologische Räume X, Y definieren wir das **Kreuzprodukt der Kohomologie**

$$\begin{array}{ccc} H^pX \otimes H^qY & \to & H^{p+q}(X \times Y) \\ a \otimes b & \mapsto & a \times b \end{array}$$

wie folgt: Zunächst vereinbaren wir der Übersichtlichkeit halber für A einen R-Modul die Abkürzung $\mathrm{Hom}(A, R) = A^*$. Sicher haben wir für R-Moduln A, B stets einen Homomorphismus $A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$ gegeben durch $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$. Sind nun X, Y topologische Räume, so definieren wir unser Kreuzprodukt auf der Kohomologie, indem wir den Effekt der Komposition

$$S^*X \otimes S^*Y \to (SX \otimes SY)^* \to S^*(X \times Y)$$

auf der Kohomologie betrachten, mit einer dualisierten Eilenberg-Zilber-Abbildung als Abbildung rechts und einem Spezialfall der in **??** erklärten Kettenabbildung links, gegeben durch $\langle f \otimes g, x \otimes y \rangle = (-1)^{|g||x|} f(x)g(y)$, und dann noch die Abbildung $H^*X \otimes H^*Y \to H^*(S^*X \otimes S^*Y)$ aus 8.1.3 davorschalten.

Proposition 8.6.3 (Eigenschaften des Kreuzprodukts).

Natürlichkeit: *Gegeben stetige Abbildungen $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ gilt für beliebige $c \in H^pX'$ und $d \in H^qY'$ in $H^{p+q}(X \times Y)$ die Formel*

$$(f^*c) \times (g^*d) = (f \times g)^*(c \times d)$$

Einheit: *Bezeichnet $1 \in H^0(\mathrm{pt})$ den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes, so gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den Identifikationen $\mathrm{pt} \times X \cong X \cong X \times \mathrm{pt}$ auf der Kohomologie induzierten Isomorphismen die Gleichungen*

$$1 \times c = c = c \times 1$$

Assoziativität: *Gegeben X, Y, Z topologische Räume und a, b, c zugehörige Kohomologieklassen gilt unter Unterdrückung der Notation für die von den Identifikationen $(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z \cong X \times (Y \times Z)$ auf der Kohomologie induzierten Isomorphismen in der Kohomologie von $X \times Y \times Z$ die Gleichung*

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Graduierte Kommutativität: *Gegeben topologische Räume X, Y bezeichne $\tau : X \times Y \to Y \times X$ die Vertauschung der Faktoren $(x, y) \mapsto (y, x)$. Für beliebige homogene Kohomologieklassen $c \in H^*X$ und $d \in H^*Y$ gilt in $H^*(Y \times X)$ die Formel*

$$\tau^*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

Beweis. Um das zu zeigen gilt es zunächst, alle Diagramme aus dem entsprechenden Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie zu dualisieren. Dann gilt es jedoch weiter, die Kommutativität einiger Diagramme von abstrakten Kettenkomplexen zu prüfen, die wir im folgenden ohne Beweis angeben.

Natürlichkeit: Gebeben $C \to C_1$, $D \to D_1$ Kettenabbildungen kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^* \otimes D^* \arrow[r] \arrow[d] & (C \otimes D)^* \arrow[d] \\ C_1^* \otimes D_1^* \arrow[r] & (C_1 \otimes D_1)^* \end{tikzcd}$$

Einheit: Hier ist nichts zusätzlich zu prüfen.

Assoziativität: Wir betrachten das Diagramm mit hoffentlich offensichtlichen Morphismen

$$\begin{tikzcd} S^*X \otimes S^*Y \otimes S^*Z \arrow[r] & (SX \otimes SY)^* \otimes S^*Z \arrow[r] \arrow[d] & (SX \otimes SY \otimes SZ)^* \arrow[d] \\ & S^*(X \times Y) \otimes S^*Z \arrow[r] & (S(X \times Y) \otimes SZ)^* \arrow[d] \\ & & S^*(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}$$

Das bereits im Beweis der Natürlichkeit benutzte Diagramm zeigt, daß auch dies Diagramm kommutiert. Setzen wir oben links ein Tensorprodukt $\tilde{x} \otimes \tilde{y} \otimes \tilde{z}$ von Repräsentanten der jeweiligen Kohomologieklassen ein, so kommt unten ein Repräsentant von $(x \times y) \times z$ heraus. Nun ist die rechte Vertikale unseres Diagramms ja gerade einer der beiden möglichen Wege im Diagramm aus dem Beweis der Assoziativität für das Kreuzprodukt der Homologie, dualisiert. Malen wir dasselbe Diagramm für die andere Klammerung, so sind also die rechten Vertikalen in beiden Diagrammen homotopieäquivalent. Um den Beweis zu beenden benötigen wir dann nur noch, daß auch die obere Horizontale unseres Diagramms nicht von der Wahl der Klammerung abhängt, also die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} & (A \otimes B)^* \otimes C^* \arrow[dr] & \\ A^* \otimes B^* \otimes C^* \arrow[ur] \arrow[dr] & & (A \otimes B \otimes C)^* \\ & A^* \otimes (B \otimes C)^* \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Deren Nachweis überlassen wir der Leserin oder dem Leser.

Graduierte Kommutativität: Hierzu benötigen wir zusätzlich nur noch die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} A^* \otimes B^* \arrow[r] \arrow[d] & (A \otimes B)^* \arrow[d] \\ B^* \otimes A^* \arrow[r] & (B \otimes A)^* \end{tikzcd}$$

deren Nachweis wir wieder dem Leser überlassen. □

Satz 8.6.4 (Cup-Produkt durch Kreuzprodukt). *Sei X ein topologischer Raum und $\Delta : X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ die Diagonale. So gilt für beliebige $a, b \in H^* X$ die Formel*

$$a \cup b = \Delta^*(a \times b)$$

Beweis. Das folgt, wenn wir das Kreuzprodukt auf der Kohomologie mithilfe der Alexander-Whitney-Abbildung aus 8.2.4 berechnen. *Sollte besseren Beweis mit azyklischen Modellen geben.* Genauer betrachten wir die Kettenabbildungen

$$S^* X \otimes S^* X \to (SX \otimes SX)^* \to S^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} S^* X$$

mit der Transponierten der in 8.2.4 erklärten Alexander-Whitney-Abbildung an der vorletzten Stelle und prüfen, daß diese Komposition gerade unser $\cup$-Produkt auf den Koketten ist. Die Vorzeichen aus der Definition des $\cup$-Produkts entsprechen hier gerade den Vorzeichen aus der Definition der Kettenabbildung $S^* X \otimes S^* X \to (SX \otimes SX)^*$ nach **??**. □

Korollar 8.6.5 (Graduierte Kommutativität des Cup-Produkts). *Sei X ein topologischer Raum. So gilt für beliebige $a, b \in H^* X$ die Formel*

$$a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$$

Beweis. Das folgt aus der graduierten Kommutativität des Kreuzprodukts. Genauer gilt für $\tau : X \times X \to X \times X$ die Vertauschung der Faktoren die Formel $\tau \circ \Delta = \Delta$ und damit erhalten wir

$$a \cup b = \Delta^*(a \times b) = \Delta^* \tau^*(a \times b) = (-1)^{|a||b|} \Delta^*(b \times a) = (-1)^{|a||b|} b \cup a \quad \square$$

Bemerkung 8.6.6. Schon wenn X und Y unendliche diskrete Mengen sind, ist das Analogon der Künneth-Formel für die Kohomologie falsch, selbst mit Koeffizienten in einem Körper. Nehmen wir jedoch an, alle Homologie-Gruppen des Raums X seien frei oder, noch allgemeiner, projektiv über dem gewählten

Koeffizientenring, so haben wir ja nach 9.1.9 einen kanonischen Isomorphismus $SX \simeq HX$ in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Nehmen wir dann zusätzlich (für den vorletzten Isomorphismus) alle Homologiegruppen als endlich erzeugt an, so folgt

$$S^*(X \times Y) \simeq (SX \otimes SY)^* \simeq (HX \otimes SY)^* \cong (HX)^* \otimes S^*Y \cong (H^*X \otimes S^*Y)$$

und dann auf der Kohomologie $H^*X \otimes H^*Y \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$ vermittels des Kreuzprodukts.

8.7 Die Homologie als Modul über der Kohomologie

Definition 8.7.1. Gegeben ein topologischer Raum X betrachten wir die Verknüpfung von Kettenabbildungen

$$S^*X \otimes SX \to S^*X \otimes SX \otimes SX \to SX$$

wobei der erste Morphismus gegeben wird durch $\mathrm{id} \otimes v\Delta$ mit Δ der Komultiplikation auf den singulären Ketten aus 8.5.12 und v der Vertauschung der Tensorfaktoren aus **??**, der zweite Morphismus dahingegen durch das Auswerten $S^*X \otimes SX \to R$ aus **??**. Diese Verknüpfung notieren wir

$$b \otimes z \mapsto b \cap z$$

und nennen sie das **cap-Produkt**. Wieder erinnert die Bezeichnung "cap" (Mütze auf Englisch) an die Form des Symbols.

Bemerkung 8.7.2. Das cap-Produkt macht SX zu einem dg-Modul über S^*X. Das prüft man zum Beispiel mit Hilfe der **Adjunktionsformel**

$$\langle a, b \cap z \rangle = \langle a \cup b, z \rangle \quad \forall z \in SX,\ a, b \in S^*X,$$

die ihrerseits leicht aus der Definition folgt. Explizit wird das cap-Produkt einer Kokette $b \in S^qX$ mit einem Simplex $z = \sigma : \Delta_{p+q} \to X$ gegeben durch

$$b \cap \sigma = (-1)^{pq} \langle b, \sigma\rho^q \rangle \sigma\lambda^p$$

Definition 8.7.3. Gegeben ein dg-Ring R heißt eine differentielle graduierte Gruppe M mit einer Kettenabbildung $R \otimes_{\mathbb{Z}} M \to M$, die sie zu einem R-Modul macht, ein **differentieller graduierter Modul** oder kurz **dg-Modul** über unserem dg-Ring.

Bemerkung 8.7.4. Ganz allgemein versteht man unter einem **graduierten Modul** über einem graduierten Ring R einen R-Modul M mitsamt einer Graduierung $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ derart, daß gilt $R^i M^j \subset M^{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$. Nach unserer Definition ist das dasselbe wie ein dg-Modul mit Differential Null über R aufgefaßt als dg-Ring mit Differential Null. Ein dg-Modul über einem beliebigen dg-Ring (R, d) ist ausgeschrieben ein graduierter R-Modul M mit Differential d derart, daß gilt $d(am) = (da)m + (-1)^{|a|} a(dm)$ für alle homogenen $a \in R$ und alle $m \in M$.

Bemerkung 8.7.5. Nach 8.1.3 ist die Kohomologie HM eines dg-Moduls M über einem dg-Ring R in natürlicher Weise ein graduierter Modul über der Kohomologie HR von R. Konkret bilden die Zykel $ZM = \ker d$ von M einen Modul über dem Ring ZR der Zykel von R, die Bilder $BM = d(M)$ bilden darin einen Untermodul, und auf dem Quotienten $HM = ZM/BM$ operiert das Ideal der Bilder $BR \subset ZR$ durch Null, so daß die Operation von ZR faktorisiert über die behauptete Operation von HR auf HM.

Bemerkung 8.7.6. Unter unserem cap-Produkt wird SX, aufgefaßt als differentielle graduierte Gruppe vermittels $(S_q X) = (SX)^{-q}$ und Differential ∂, ein dg-Modul über S^*X. Speziell wird also nach 8.7.5 für jeden topologischen Raum X die **totale Homologie** $HX = \bigoplus_q H_q X$ ein Modul über dem Kohomologiering H^*X. Wir notieren diese Operation auch mit $\cap$ und erhalten so das **cap-Produkt** auf der Homologie

$$\cap : H^p X \times H_{p+q} X \to H_q X$$

Übung 8.7.7. Ist $f : X \to Y$ stetig, $b \in H^p Y$ und $z \in H_{p+q} X$, so gilt die Formel $f_*(f^* b \cap z) = b \cap (f_* z)$.

Bemerkung 8.7.8. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist $S^*(X, A)$ als Kern des Ringhomomorphismus $S^*X \to S^*A$ ein unter dem Korandoperator stabiles graduiertes Ideal von S^*X und somit $H^*(X, A)$ ein graduierter nicht notwendig unitärer Ring sowie ein H^*X-Modul von rechts und links. Des weiteren ist $SA \subset SX$ ein dg-Untermodul für die Operation von S^*X und das cap-Produkt definiert somit eine Operation auf dem Kokern $S(X, A)$, in Formeln $\cap : H^p X \times H_{p+q}(X, A) \to H_q(X, A)$. Das Merkwürdigste ist jedoch die Variante

$$\cap : H^p(X, A) \times H_{p+q}(X, A) \to H_q X$$

Um sie zu erhalten gilt es zu bemerken, daß das dg-Ideal $S^*(X, A) \subset S^*X$ den dg-Untermodul $SA \subset SX$ annulliert.

Übung 8.7.9. Gegeben $z \in H_{p+q}(X, A)$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) & \to & H^p X \\ \cap z \downarrow & & \downarrow \cap z \\ H_q X & \to & H_q(X, A) \end{array}$$

Satz 8.7.10 (Poincaré-Dualität). *Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit definiert das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel einen Isomorphismus von ihrer Kohomologie mit ihrer Homologie.*

Bemerkung 8.7.11. Ist also in Formeln M eine kompakte orientierte n-Mannigfaltigkeit und $\omega \in H_n M$ ihr Fundamentalzykel, so liefert das cap-Produkt mit ω für alle p einen Isomorphismus

$$\cap\omega : H^p M \xrightarrow{\sim} H_{n-p} M$$

Bemerkung 8.7.12. Dieser Satz und sein Beweis gelten mit Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring $1 + 1 = 0$, so benötigt man nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit.

Bemerkung 8.7.13. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension $\alpha \in H_p M$ und $\beta \in H_{n-p} M$ einer orientierten n-Mannigfaltigkeit ist hoffentlich anschaulich klar, was ihre **Schnittzahl** $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Z}$ sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln "in generischer Lage" mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Der Isomorphismus aus dem obigen Satz liefert eine Definition solcher Schnittzahlen im kompakten Fall: Wir suchen $a \in H^{n-p} M$, $b \in H^p M$ mit $\alpha = a \cap \omega_M$, $\beta = b \cap \omega_M$ und setzen

$$\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Wir werden unsere geometrische Interpretation der so definierten Schnittzahlen später rechtfertigen. Ebenso wird die graduierte Kommutativität des cup-Produkts zeigen, daß für die Schnittzahlen in einer n-Mannigfaltigkeit gilt $\alpha \cdot \beta = (-1)^{(n-|\alpha|)(n-|\beta|)} \beta \cdot \alpha$. Nach der Adjunktionsformel $\langle a \cup b, \omega_M \rangle = \langle a, b \cap \omega_M \rangle$ und unseren Definitionen entsprechen sich unter den Identifikationen der Poincaré-Dualität für einen beliebigen kommutativen Koeffizientenring die drei Paarungen

$$\begin{array}{rcrlcc} H_p(M;k) & \times & H_{n-p}(M;k) & \to k, & (\alpha,\beta) & \mapsto & \alpha \cdot \beta \\ H^{n-p}(M;k) & \times & H_{n-p}(M;k) & \to k, & (a,\beta) & \mapsto & \langle a, \beta \rangle \\ H^{n-p}(M;k) & \times & H^p(M;k) & \to k, & (a,b) & \mapsto & \langle a \cup b, \omega_M \rangle \end{array}$$

Falls die Paarung in der Mitte eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes induziert, insbesondere für Koeffizienten in einem Körper oder falls $H_{n-p-1}(M;\mathbb{Z})$ eine freie abelsche Gruppe ist, so folgt dasselbe für die beiden anderen Paarungen.

Bemerkung 8.7.14. Der Satz liefert uns auch allgemeiner eine Definition des Schnittprodukts auf der Homologie von M: Man überträgt schlicht das cup-Produkt auf der Kohomologie mithilfe der Isomorphismen aus dem Satz in die Homologie. Allerdings sind wir noch nicht in der Lage, die Brücke von dieser Definition bis zur Anschauung zu schlagen.

Bemerkung 8.7.15. Um einen anschaulichen Beweis der Poincaré-Dualität zu geben, verallgemeinert man zunächst unseren Satz 5.9.2 über den Zusammenhang von singulärer und simplizialer Homologie von endlichen Simplizialkomplexen auf Räume, die statt aus Simplizes in ähnlicher Art aus komplizierten kompakten konvexen Polyedern zusammengesetzt sind, wie zum Beispiel die Oberflächen der platonischen Körper. So kann die Homologie der Sphäre mithilfe einer Dodekaeder-Zerlegung berechnet werden durch einen Komplex der Gestalt $\mathbb{Z}^{12} \to \mathbb{Z}^{30} \to \mathbb{Z}^{20}$ für die 12 Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken. Gehen wir nun über zur "dualen" Zerlegung in kompakte konvexe Polyeder, im Beispiel zur ikosaedralen Zerlegung der Sphäre in 20 Flächen mit 30 Kanten und 12 Ecken, so kann man den Komplex, der ursprünglich die Homologie berechnet, in natürlicher Weise identifizieren mit dem Komplex, der bezüglich dieser dualen Zerlegung die Kohomologie berechnet. Da aber Homologie und Kohomologie von der Zerlegung gänzlich unabhängig sind, ergibt sich $H_i M \cong H^{n-i} M$ für jede orientierte kompakte triangulierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist nicht allzu schwer, diese Skizze zu einem richtigen Beweis auszubauen, siehe zum Beispiel [SZ]. Wir werden jedoch einen anderen Weg gehen, der Triangulierbarkeitsvoraussetzungen vermeidet und auch abgesehen davon zu allgemeineren Resultaten führt. Genauer wollen wir unseren Satz durch eine Art Induktion über alle offenen Teilmengen beweisen und werden dazu eine Version formulieren, die auch nichtkompakte Mannigfaltigkeiten einbezieht. Das benötigt einige algebraische Vorbereitungen.

8.8 Woanders

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} SX \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta_*"'] & & SX \otimes SX \\ & S(X \times X) \arrow[ur, "c"'] & \end{tikzcd}$$

mit unserer Komultiplikation Δ aus 8.5.12, einer Alexander-Whitney-Abbildung c wie in 8.1.4 und dem Bild Δ_* unter der Diagonalen $X \to X \times X$. Alle drei Funktoren in den Kettenkomplexe sind in jedem Grad frei mit Basis $\{(\Delta_n, \tau_n)\}$ bzw. $\{(\Delta_q \amalg \Delta_p, i_1 \otimes i_2)\}_{p+q=n}$ wo i_1, i_2 die Inklusionen von Δ_q bzw. Δ_p in $\Delta_q \amalg \Delta_p$ bezeichnen, bzw. $\{(\Delta_n \amalg \Delta_n, \tau)\}$ mit dem Simplex $\tau = (i_1, i_2) : \Delta_n \to (\Delta_n \amalg \Delta_n) \times (\Delta_n \amalg \Delta_n)$. Nach dem Satz über azyklische

Modelle 8.1.10 kommutiert also unser Diagramm bis auf Homotopie, wenn es kommutiert nach H_0, und das ist klar. Dualisieren wir nun das Diagramm, so folgt $a \cup b = \Delta^*(a \times b)$ wie gewünscht. $\square$

9 Ausbau der Kohomologietheorie

9.1 Ein Kriterium für Homotopieäquivalenzen

Bemerkung 9.1.1. Um bequem unsere bisher bewiesenen Resultate von der Homologie auf die Kohomologie übertragen zu können, entwickeln wir in diesem Abschnitt zunächst noch weitere Methoden der homologischen Algebra. Ist $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring R und ist M ein weiterer R-Modul, so ist die induzierte Sequenz

$$\operatorname{Lin}_R(M, A') \hookrightarrow \operatorname{Lin}_R(M, A) \to \operatorname{Lin}_R(M, A'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein.

Definition 9.1.2. Sei R ein Ring. Ein R-Modul P heißt **projektiv** genau dann, wenn jeder surjektive Homomorphismus $A \twoheadrightarrow A''$ von R-Moduln eine Surjektion $\operatorname{Mod}_R(P, A) \twoheadrightarrow \operatorname{Mod}_R(P, A'')$ induziert.

Beispiele 9.1.3. Gegeben ein Ring R ist jeder freie R-Modul projektiv. Sind P', P'' zwei R-Moduln und ist ihre Summe $P' \oplus P''$ projektiv, so auch die Summanden P' und P''. Über einem Ring der Gestalt $R = R' \times R''$ für zwei Ringe R', R'' ist also $R' \times 0$ ein projektiver Modul, der jedoch nicht frei ist falls R' und R'' verschieden sind von Null.

Lemma 9.1.4. *Sei R ein Ring. Ein R-Modul ist projektiv genau dann, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.*

Beweis. Natürlich ist jeder direkte Summand eines freien Moduls projektiv. Ist umgekehrt P projektiv, so finden wir einen freien Modul F und eine Surjektion $F \twoheadrightarrow P$. Nach Annahme induziert sie eine Surjektion $\operatorname{Mod}_R(P, F) \twoheadrightarrow \operatorname{Mod}_R(P, P)$ und jedes Urbild der Identität auf P ist dann eine Spaltung der Surjektion $F \twoheadrightarrow P$. □

Satz 9.1.5 (Hauptlemma der homologischen Algebra). *Seien gegeben R ein Ring, P ein Komplex projektiver R-Moduln mit $P_q = 0$ für $q < 0$ und C ein Komplex von R-Moduln mit $H_q(C) = 0$ für $q > 0$. So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion zwischen Homotopieklassen von Kettenabbildungen und R-linearen Abbildungen*

$$\operatorname{Hot}_R(P, C) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}_R(H_0 P, H_0 C)$$

Beweis. Als erstes zeigen wir die Surjektivität. Sei $\tau : H_0 P \to H_0 C$ gegeben. Wir beginnen unsere Konstruktion einer Kettenabbildung $f : P \to C$, indem wir notgedrungen setzen $f_q = 0$ für $q < 0$. Wegen der Projektivität von P_0 finden wir $f_0 : P_0 \to Z_0C$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{f_0} & Z_0C \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_0P & \xrightarrow{\tau} & H_0C \end{array}$$

kommutiert. Dann landet die Verknüpfung $f_0\partial : P_1 \to Z_0C$ sogar in B_0C und wegen der Projektivität von P_1 finden wir $f_1 : P_1 \to C_1$ mit $\partial f_1 = f_0\partial : P_1 \to C_0$. Haben wir bis zu einem $q \geq 1$ induktiv f_q bereits gefunden mit $\partial f_q = f_{q-1}\partial$, so gilt $\partial f_q \partial = 0$, wegen $H_qC = 0$ landet also $f_q\partial$ in B_qC und wegen der Projektivität von P_{q+1} finden wir $f_{q+1} : P_{q+1} \to C_{q+1}$ mit $\partial f_{q+1} = f_q\partial$ und die Induktion läuft. Das zeigt die Surjektivität. Um die Injektivität zu zeigen müssen wir prüfen, daß der Kern unserer Surjektion verschwindet, daß also eine Kettenabbildung $f : P \to C$, die auf der nullten Homologie die Nullabbildung induziert, schon nullhomotop ist. Wir suchen also unter dieser Voraussetzung $s_q : P_q \to C_{q+1}$ mit $f_q = s_{q-1}\partial + \partial s_q$ für alle q. Wieder beginnen wir notgedrungen mit $s_q = 0$ für $q < 0$. Da f_0 nach Annahme in B_0C landet finden wir auch sofort s_0 mit $f_0 = \partial s_0$. Haben wir bis zu einem $q \geq 0$ induktiv s_q bereits gefunden mit $f_q = \partial s_q + s_{q-1}\partial$, so folgt $\partial(f_{q+1} - s_q\partial) = (f_q - \partial s_q)\partial = 0$ und $f_{q+1} - s_q\partial$ landet in $B_{q+1}C$ als da heißt, es gibt s_{q+1} mit $f_{q+1} - s_q\partial = \partial s_{q+1}$. Das zeigt die Injetivität. □

Definition 9.1.6. Wir nennen einen Komplex **beschränkt in Richtung der Pfeile** genau dann, wenn wir in Richtung der Pfeile gehend ab einer Stelle nur noch $C_q = 0$ treffen.

Satz 9.1.7 (Kriterium für Homotopieäquivalenzen). *Sei R ein Ring und seien P, Q zwei in Richtung der Pfeile beschränkte Komplexe von projektiven R-Moduln. Induziert eine Kettenabbildung $f : Q \to P$ Isomorphismen auf allen Homologiegruppen, so ist f bereits eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Das folgt durch zweifaches Anwenden der anschließenden technischen Proposition. □

Proposition 9.1.8. *Sei R ein Ring, P ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex von projektiven R-Moduln und C ein beliebiger Komplex von R-Moduln. Induziert eine Kettenabbildung $f : C \to P$ Isomorphismen auf allen Homologiegruppen, so besitzt f ein Rechtsinverses in der Homotopiekategorie, d.h. es gibt $h : P \to C$ mit $fh \simeq \mathrm{id}_P$.*

Beweis. Wir konstruieren für eine beliebige Kettenabbildung $f : C \to P$ einen Komplex $K = K(f)$, den sogenannten **Abbildungskegel** von f wie folgt: Wir setzen $K_n = C_{n-1} \oplus P_n$, fassen die Elemente dieser Summe als Spaltenvektoren auf und definieren den Randoperator $\partial^K : K_n \to K_{n-1}$ durch die Matrix

$$\partial^K = \begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix}$$

Man prüft mühelos $\partial^K \circ \partial^K = 0$. Bezeichnet $C[1]$ den verschobenen Komplex mit $(C[1])_n = C_{n-1}$ und Randoperator $\partial^{C[1]} = -\partial^C$, so ergibt sich mit den offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$P \hookrightarrow K(f) \twoheadrightarrow C[1],$$

und man überzeugt sich, daß der Randoperator der zugehörigen langen exakten Homologiesequenz gerade $Hf : H_n C \to H_n P$ ist. Ist speziell Hf ein Isomorphismus für alle n, so ist der Abbildungskegel $K(f)$ exakt nach der langen exakten Homologiesequenz, und ist zusätzlich P ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex von projektiven R-Moduln, so ist nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra 9.1.5 die Kettenabbildung $P \hookrightarrow K(f)$ nullhomotop. Setzen wir so eine Homotopie an als Spaltenmatrix $(h, \delta)^t$, so ergibt sich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} \partial^P = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_P \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren bedeutet die erste Zeile, daß $h : P \to C$ eine Kettenabbildung ist und die zweite, daß fh homotop ist zur Identität auf P. □

Übung 9.1.9. Hat ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex C von projektiven R-Moduln projektive Homologie, so ist er homotopieäquivalent zu seiner Homologie. Fassen wir genauer die Homologie HC wie immer auf als Komplex mit trivialen Differentialen, so gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe genau einen Isomorphismus $HC \xrightarrow{\sim} C$, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation $H(HC) \xrightarrow{\sim} HC$ induziert.

9.2 Eigenschaften der Kohomologie

Lemma 9.2.1. *Sind alle Homologiegruppen eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einem Ring k freie Linksmoduln über k, so induziert die Kronecker-Paarung mit Koeffizienten für jeden k-Modul G Isomorphismen*

$$H^q(X; G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_k(H_q(X; k), G)$$

Bemerkung 9.2.2. Die Kohomologie eines topologischen Raums X mit Koeffizienten in einem Körper k ist insbesondere schlicht der Dualraum der Homologie, in Formeln $H^q(X;k) = H_q(X;k)^*$. Wenden wir das Lemma an mit $k = \mathbb{Z}$, so erhalten wir Formeln für die Kohomologie eines Punktes, die Kohomologie von Sphären etc. mit beliebigen Koeffizienten.

Beweis. Nach 9.1.9 ist unter unseren Voraussetzungen der Komplex $S(X;k)$ als Komplex von Linksmoduln homotop zu seiner Homologie $H(X;k)$. Also ist auch der Komplex $S^*(X;G) = \mathrm{Hom}_k(S(X;k), G)$ homotop zum Komplex $\mathrm{Hom}_k(H(X;k), G)$. □

Übung 9.2.3. (Beliebige Koeffizienten.) Sei $X = \coprod X_w$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte offene Teilmengen und $i_w : X_w \hookrightarrow X$ die jeweilige Einbettung. So definieren die $H^q(i_w) : H^q(X) \to H^q(X_w)$ einen Isomorphismus $H^q(X) \xrightarrow{\sim} \prod H^q(X_w)$. Dasselbe gilt allgemeiner, wenn wir nur fordern, daß es für $v \neq w$ keinen Weg von einem Punkt aus X_v zu einem Punkt aus X_w gibt.

Bemerkung 9.2.4. Wir definieren weiter die **relative Kohomologie** eines Paares als die Kohomologie des Komplexes $S^q(X, A; G) = \mathrm{Ab}(S_q(X, A), G)$ der **relativen Koketten** und erhalten so einen Funktor

$$H^q : \{\text{Raumpaare}\} \to \{\text{Abelsche Gruppen}\}^\circ$$

Lemma 9.2.1 gilt mit demselben Beweis auch für die relative Kohomologie. Gegeben ein Raumpaar (X, A) liefern die (spaltenden) kurzen exakten Sequenzen $S_qA \hookrightarrow S_qX \twoheadrightarrow S_q(X, A)$ mittels Dualisierung kurze exakte Sequenzen $S^qA \twoheadleftarrow S^qX \hookleftarrow S^q(X, A)$. Die kurze exakte Sequenz der Komplexe der singulären Koketten liefert wiederum die **lange exakte Kohomologiesequenz**

$$0 \to H^0(X, A) \to H^0X \to H^0A \to H^1(X, A) \to \dots$$

mit einem im Raumpaar (X, A) natürlichen Randoperator. Dasselbe gilt auch mit beliebigen Koeffizienten. Wir übertragen beispielhaft noch einige weitere Aussagen auf die Kohomologie.

Satz 9.2.5 (Homotopie-Invarianz). *Sind $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen, so induzieren sie dieselben Abbildungen $H^q(f) = H^q(g)$ auf der Kohomologie.*

Beweis. Sind f und g homotop, $f \simeq g$, so sind nach 5.4.8 die induzierten Abbildungen Sf und Sg kettenhomotop, $Sf \simeq Sg$. Dasselbe gilt dann auch für die transponierten Abbildungen auf den Koketten, $S^*f \simeq S^*g$ und so erhalten wir dann wie gewünscht $H^q(f) = H^q(g)$. □

Satz 9.2.6 (Ausschneidung). *Sei (X, A) ein Raumpaar und $V \subset A$ eine Teilmenge mit $\overline{V} \subset A^\circ$. So liefert die Einbettung $i : (X - V, A - V) \hookrightarrow (X, A)$ von Raumpaaren Isomorphismen auf den relativen Kohomologiegruppen, in Formeln*

$$H^q(X, A) \xrightarrow{\sim} H^q(X - V, A - V)$$

Beweis. Nach dem Ausschneidungssatz induziert $Si : S(X - V, A - V) \to S(X, A)$ Isomorphismen auf der Homologie und ist mithin nach 9.1.7 eine Homotopieäquivalenz. Dann ist auch die transponierte Abbildung $S^*i : S^*(X, A) \to S^*(X - V, A - V)$ eine Homotopieäquivalenz und induziert mithin Isomorphismen auf der Homologie. □

Übung 9.2.7. Man leite in der Kohomologie in Analogie zu 5.8.19 und 5.8.20 eine Mayer-Vietoris-Sequenz und eine relative Mayer-Vietoris-Sequenz her.

Bemerkung 9.2.8. Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex mit einer Anordnung der Menge seiner Ecken, so ist die Einbettung $S^{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$ aus 5.9.2 eine Homotopieäquivalenz nach 9.1.7. Folglich erhalten wir durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(\ ,\mathbb{Z})$ wieder ein Homotopieäquivalenz, die wir $S^*_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \leftarrow S^*\Delta(\mathcal{K})$ notieren und die mithin Isomorphismen von den singulären Kohomologiegruppen von $\Delta(\mathcal{K})$ mit den Kohomologiegruppen des Komplexes $S^*_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$ liefert. Die Elemente von $S^q_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K})$ kann man auffassen als unendliche formale Linearkombinationen von q-Simplizes, formal haben wir eine kanonische Bijektion $S^q_{\mathrm{os}}\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\mathcal{K}_q, \mathbb{Z})$. Der Korandoperator ordnet einem q-Simplex die formale Summe mit geeigneten Vorzeichen aller $(q+1)$-Simplizes zu, die unseren q-Simplex enthalten. Im Gegensatz zur Homologie fällt es mir jedoch schwer, diese "simpliziale Kohomologie" mit Anschauung zu füllen.

9.3 Erweiterungen von abelschen Gruppen

Bemerkung 9.3.1. Um unsere Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen berechnen zu können, brauchen wir **Erweiterungen**. Unter einer Erweiterung einer abelschen Gruppe A durch eine abelsche Gruppe B versteht man zunächst einmal eine kurze exakte Sequenz $B \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$. Eine zweite solche Erweiterung $B \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow A$ heißt **isomorph** zu unserer ersten Erweiterung genau dann, wenn es einen Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & A \\ \| & & \downarrow & & \| \\ B & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & A \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Wir werden uns im folgenden überlegen, daß die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen eine Menge bilden, welche

Eigenschaften besagte Menge hat, und wie wir sie zu gegebenen A und B effektiv berechnen können. Die eigentliche Arbeit beginnen wir mit einem etwas künstlichen aber formal einfacheren Zugang zu besagter Menge und etablieren erst danach den Zusammenhang zwischen beiden Zugängen.

Definition 9.3.2. Gegeben zwei abelsche Gruppen M, N erklären wir eine dritte abelsche Gruppe $\mathrm{Ext}(M, N)$, die Gruppe aller **Erweiterungen von M durch N**, auf englisch und französisch **extensions**, durch die Vorschrift

$$\mathrm{Ext}(M, N) = \mathrm{cok}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}M, N) \to \mathrm{Hom}(KM, N))$$

für $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ die Standardauflösung von M aus 7.5.1.

Bemerkung 9.3.3. Offensichtlich ist Ext ein kovarianter Funktor in der zweiten und ein kontravarianter Funktor in der ersten Variablen. Ist M frei, so spaltet die Sequenz $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$ und wir folgern $\mathrm{Ext}(M, N) = 0$.

Proposition 9.3.4. *Jede kurze exakte Sequenz $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ von abelschen Gruppen definiert eine lange exakte Sequenz, die sogenannte* **Ext-Sequenz im zweiten Eintrag**

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}(M, N') & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, N) & \to & \mathrm{Hom}(M, N'') & \to & \\ & \to & \mathrm{Ext}(M, N') & \to & \mathrm{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Ext}(M, N'') & \to & 0, \end{array}$$

die natürlich ist in der kurzen exakten Sequenz $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$ und in M.

Beweis. Nach 7.6.4 ist auch KM frei. Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz von (vertikalen) Komplexen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(KM, N') & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(KM, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(KM, N'') \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}M, N') & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}M, N'') \end{array}$$

und nehmen die zughörige lange exakte Homologiesequenz. □

Übung 9.3.5. Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Erweiterungen von } A \text{ durch } B, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(A, B)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz $B \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$ das Bild in $\mathrm{Ext}(A, B)$ der Identität auf A unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz im zweiten Eintrag zuordnen. Hinweis: Gegeben ein Element $e \in \mathrm{Ext}(A, B)$ wähle man einen Repräsentanten $\tilde{e} : KA \to B$ und bilde durch pushout in die Mitte ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} KA & \hookrightarrow & \mathbb{Z}A & \twoheadrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ B & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & A \end{array}$$

Bemerkung 9.3.6. Ist $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist M ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(M, A') \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, A) \to \mathrm{Hom}(M, A'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Ist ähnlich $B' \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist N ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(B'', N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(B, N) \to \mathrm{Hom}(B', N)$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß ebensowenig eine Surjektion sein. Unsere Erweiterungsgruppen sind in gewisser Weise Korrekturterme für diese Phänomene. Im ersten Fall ist das die Bedeutung von 9.3.4. Um es zweiten Fall zu zeigen, müssen wir zunächst das Konzept injektiver abelscher Gruppen diskutieren.

Definition 9.3.7. Sei R ein Ring. Ein R-Modul I heißt **injektiv** genau dann, wenn für jede Injektion $B' \hookrightarrow B$ von R-Moduln die induzierte Abbildung $\mathrm{Mod}_R(B, I) \to \mathrm{Mod}_R(B', I)$ surjektiv ist, wenn sich also jeder Homomorphismus $B' \to I$ auf B ausdehnen läßt.

Beispiele 9.3.8. Ist k ein Körper, so ist jeder k-Modul injektiv als k-Modul (aber natürlich nicht notwendig als abelsche Gruppe). Einen injektiven $\mathbb{Z}$-Modul nennen wir eine **injektive abelsche Gruppe**. Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}$ ist injektiv, wie die gleich anschließende Proposition zeigt. Alternativ können wir auch argumentieren, daß gilt $\mathrm{Ab}(M, \mathbb{Q}) = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, \mathbb{Q})$ nach **??** und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in M ist nach 7.3.17.

Definition 9.3.9. Eine abelsche Gruppe heißt **divisibel** genau dann, wenn für jede von Null verschiedene ganze Zahl der durch die Multiplikation mit dieser Zahl gegebene Endomorphismus unserer Gruppe surjektiv ist.

Proposition 9.3.10.

1. *Eine abelsche Gruppe I ist injektiv genau dann, wenn gilt $\mathrm{Ext}(M, I) = 0$ für alle M.*

2. *Eine abelsche Gruppe ist injektiv genau dann, wenn sie divisibel ist.*

3. Jeder Quotient einer injektiven abelschen Gruppe ist injektiv.

4. Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine Injektive einbetten.

Bemerkung 9.3.11. Analoges gilt mit einem analogen Beweis auch für Moduln über beliebigen Hauptidealringen.

Beweis. 1. Für I injektiv folgt $\operatorname{Ext}(M, I) = 0$ aus der Definition. Sei umgekehrt I eine abelsche Gruppe mit $\operatorname{Ext}(M, I) = 0$ für alle M. Gegeben eine Injektion $B' \hookrightarrow B$ gilt es, jeden Morphismus $B' \to I$ zu einem Morphismus $B \to I$ auszudehnen. Dazu bilden wir das pushout-Digramm

$$\begin{array}{ccc} B' & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

mit einer Injektion in der unteren Horizontalen nach 2.5.13. Vervollständigen wir diese untere Horizontale zu einer kurzen exakten Sequenz $I \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow K$ und bilden dazu die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag 9.3.4 mit $M = K$, so folgt, daß die Surjektion $Y \twoheadrightarrow K$ spaltet alias ein Rechtsinverses besitzt. Mit 5.7.8 folgt, daß dann auch die Injektion $I \hookrightarrow Y$ spaltet, und ein Linksinverses $Y \to I$ dazu liefert dann die gewünschte Ausdehnung.

2. Ist I injektiv, so induziert für alle $n \neq 0$ die Injektion $(n\cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ eine Surjektion $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, I) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, I)$ alias $(n\cdot) : I \twoheadrightarrow I$. Jede injektive abelsche Gruppe ist also divisibel. Die Umkehrung zeigen wir mit dem Zornschen Lemma. Sei I divisibel, $A' \subset A$ eine Untergruppe und $\varphi' : A' \to I$ ein Homomorphismus. Es gilt, φ' auf ganz A auszudehnen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare (A_1, φ_1) mit A_1 einer Untergruppe von A oberhalb von A' und φ_1 einer Fortsetzung von φ' auf A_1. Die Menge aller derartigen Paare ist in offensichtlicher Weise induktiv geordnet, wir finden also eine maximale Ausdehnung $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Wäre hier nicht $A_{\max} = A$, so könnten wir ein a im Komplement wählen und das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{\max} \cap \langle a \rangle & \hookrightarrow & \langle a \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\max} & \hookrightarrow & A_{\max} + \langle a \rangle \end{array}$$

bilden. Da I divisibel ist, können wir die Einschränkung von $\varphi_{\max}$ längs der linken Vertikale ausdehnen längs der oberen Horizontale zu sagen wir $\varphi_a : \langle a \rangle \to I$, und $\varphi_{\max}$ und φ_a zusammen liefern dann eine Ausdehung von $\varphi_{\max}$ auf den pushout. Das aber widerspricht der Maximalität unserer Ausdehnung.

3. Das folgt direkt aus 2, oder auch aus 1 mit der Ext-Sequenz 9.3.4.

4. Eine derartige Einbettung liefert nach 3 und 2.5.13 die rechte Vertikale des pushout-Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}M & \twoheadrightarrow & I \end{array}$$

□

Proposition 9.3.12. *1. Seien M und N abelsche Gruppen. Ist M frei oder N injektiv, so gilt* $\operatorname{Ext}(M, N) = 0$.

2. *Für jede abelsche Gruppe A und eine beliebige natürliche Zahl $n > 0$ haben wir* $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong A/nA$.

3. *Gegeben eine kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ von abelschen Guppen und eine weitere abelsche Gruppe N haben wir eine exakte* **Ext-Sequenz im ersten Eintrag**

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \operatorname{Hom}(M'', N) & \hookrightarrow & \operatorname{Hom}(M, N) & \to & \operatorname{Hom}(M', N) & \to & \\ & \to & \operatorname{Ext}(M'', N) & \to & \operatorname{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \operatorname{Ext}(M', N) & \to & 0 \end{array}$$

4. *Gegeben eine abelsche Gruppe M und eine Familie von abelschen Gruppen (N_i) ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus*

$$\operatorname{Ext}\left(M, \prod N_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod \operatorname{Ext}(M, N_i)$$

5. *Gegeben eine Familie von abelschen Gruppen (M_i) und eine abelsche Gruppe N ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus*

$$\operatorname{Ext}\left(\bigoplus M_i, N\right) \xrightarrow{\sim} \prod \operatorname{Ext}(M_i, N)$$

Beweis. 1. Den Fall M frei haben wir schon besprochen, der Fall N injektiv folgt direkt aus den Definitionen.

3. Wir wählen eine Einbettung von N in eine injektive abelsche Gruppe I und vervollständigen zu einer kurzen exakten Sequenz $N \hookrightarrow I \twoheadrightarrow I''$. Nach 9.3.10 ist auch I'' eine injektive abelsche Gruppe, und unsere Ext-Sequenz im zweiten Eintrag liefert eine exakte Sequenz

$$\operatorname{Hom}(M, N) \hookrightarrow \operatorname{Hom}(M, I) \to \operatorname{Hom}(M, I'') \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}(M, N)$$

In anderen Worte ist also $\operatorname{Hom}(M, N)$ der Kern des mittleren Morphismus und $\operatorname{Ext}(M, N)$ sein Kokern. Gegeben eine kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow$

M'' betrachten wir nun die kurze exakte Sequenz von (vertikalen) Komplexen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(M', I'') & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, I'') & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M'', I'') \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}(M', I) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, I) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M'', I) \end{array}$$

und nehmen die zughörige lange exakte Homologiesequenz.

2. Hierzu müssen wir nur unsere lange exakte Sequenz im ersten Eintrag betrachten für die kurze exakte Sequenz $\mathbb{Z} \overset{n}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4 und 5 bleiben dem Leser überlassen. □

Satz 9.3.13 (Universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie). *Sei X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe. So haben wir natürliche kurze exakte Sequenzen*

$$\mathrm{Ext}(H_{q-1}X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(H_q X, G),$$

die in unnatürlicher Weise spalten.

Bemerkung 9.3.14. Will man aus Homologie von X mit Koeffizienten in einem Ring k die Kohomologie von X mit Koeffizienten in einem k-Modul G berechnen, so leistet das im allgemeinen eine “Spektralsequenz mit E_2-Term $\mathrm{Ext}^i(H_j(X; k), G)$”. In unserem speziellen Fall $k = \mathbb{Z}$ verschwinden alle Erweiterungen ab Grad zwei, wir notieren $\mathrm{Ext}^1 = \mathrm{Ext}$ und besagte Spektralsequenz degeneriert zur Aussage des obigen Satzes. Das gilt allgemeiner nach 7.6.4 für k einen Hauptidealring oder ganz allgemein für alle Ringe derart, daß jeder Untermodul eines projektiven Moduls projektiv ist. Derartige Ringe heißen **erbliche Ringe**, da sich bei ihnen “die Eigenschaft der Projektivität von Moduln auf alle Untermoduln vererbt”.

Beweis. Wir wählen eine kurze exakte Sequenz $G \hookrightarrow I \twoheadrightarrow I''$ mit I und damit auch I'' injektiv. Sie führt zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$\mathrm{Hom}(SX, G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(SX, I) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(SX, I'')$$

Da I und I'' injektiv sind, sind die Funktoren $\mathrm{Hom}(\ , I)$ und $\mathrm{Hom}(\ , I'')$ exakt und “kommutieren” folglich mit dem Bilden der Homologie in derselben Weise, wie wir das in 7.4.1 für das Tensorieren mit torsionsfreien Moduln gesehen hatten. Von der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz ist also ein Ausschnitt

$$\begin{array}{cccccccc} & & \to & \mathrm{Hom}(H_{q-1}X, I) & \to & \mathrm{Hom}(H_{q-1}X, I'') & \to \\ \to & H^q(X; G) & \to & \mathrm{Hom}(H_q X, I) & \to & \mathrm{Hom}(H_q X, I'') & \to \end{array}$$

und Proposition 9.3.12 liefert uns wie gewünscht kurze exakte Sequenzen

$$\operatorname{Ext}(H_{q-1}X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(H_q X, G)$$

Es bleibt zu zeigen, daß unsere Sequenzen spalten. So eine Spaltung folgt aber wie zu Ende des Beweises von 7.6.1 aus der Existenz einer Spaltung der Einbettung $Z_q X \hookrightarrow S_q X$. □

Bemerkung 9.3.15. Sei allgemeiner C_* irgendein Komplex von freien abelschen Gruppen und G eine weitere abelsche Gruppe. So liefert dasselbe Argument unkanonisch spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\operatorname{Ext}(H_{q+1}C_*, G) \hookrightarrow H^q \operatorname{Hom}(C_*, G) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(H_q C_*, G)$$

Übung 9.3.16. Gilt $\operatorname{Ext}(P, N) = 0$ für alle N, so ist P frei. Kann im allgemeinen $\operatorname{Ext}(M, N)$ Elemente unendlicher Ordnung enthalten?

Bemerkung 9.3.17. Eine Vermutung von Whitehead dahingehend, daß für eine abelsche Gruppe A gilt

$$\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0 \;\Rightarrow\; A \text{ frei}$$

ist von Shelah [She74] "gelöst" worden: Ob die Vermutung stimmt oder nicht, hängt von den Axiomen der Mengenlehre ab, die man zugrunde legt!

9.4 Direkte Limites

Definition 9.4.1. Eine partiell geordnete Menge $(I, \geq)$ heißt **filtrierend** genau dann, wenn es für je zwei Elemente aus I ein Drittes gibt, daß größer ist als alle beide, in Formeln $\forall\, i, j \in I\ \exists k \in I$ mit $k \geq i$ und $k \geq j$.

Definition 9.4.2. Sei $(I, \geq)$ eine filtrierende partiell geordnete Menge.

1. Ein **induktives System** oder **gerichtetes System** über $(I, \geq)$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Familie $\{M_i\}_{i \in I}$ von Objekten mitsamt Morphismen $\varphi_{ji} : M_i \to M_j$ für alle $j \geq i$ derart, daß gilt $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ wann immer $k \geq j \geq i$ und $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$ für alle i.

2. Ein **direkter Limes** oder **induktiver Limes** eines induktiven Systems ist ein Objekt L mitsamt Morphismen $\mathrm{can}_i : M_i \to L$ derart, daß gilt $\mathrm{can}_j \circ \varphi_{ji} = \mathrm{can}_i$ wann immer $j \geq i$ und daß die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt N mitsamt Morphismen $f_i : M_i \to N$ derart, daß gilt $f_j \circ \varphi_{ji} = f_i$ wann immer $j \geq i$ gibt es genau einen Morphismus $f : L \to N$ mit $f_i = f \circ \mathrm{can}_i$ für alle i.

Wie üblich legt die universelle Eigenschaft das Datum (L, can_i) fest bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir schreiben kurz $L = \varinjlim M_i$ für **den** direkten Limes der M_i.

Bemerkung 9.4.3. Bildet man zur partiell geordneten Menge $(I, \geq)$ eine Kategorie $\mathcal{I}$ mit $\mathrm{Ob}\,\mathcal{I} = I$ und $|\operatorname{Hom}(i,j)| = 1$ falls $j \geq i$, $\operatorname{Hom}(i,j) = \emptyset$ sonst, so ist ein induktives System schlicht ein Funktor $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$.

Beispiel 9.4.4. In der Kategorie der Mengen existieren direkte Limites: Die Menge der Äquivalenzklassen in der disjunkten Vereinigung $\coprod_{i \in I} M_i$ unter der Äquivalenzrelation $\sim$, die definiert wird durch die Vorschrift

$$m_i \sim m_j \Leftrightarrow \exists k \in I \text{ mit } k \geq i \text{ und } k \geq j \text{ so daß } \varphi_{ki}(m_i) = \varphi_{kj}(m_j)$$

löst unser universelles Problem. Wir nennen diese Menge von Äquivalenzklassen ab jetzt *den* direkten Limes $\varinjlim M_i$ der M_i. Sind speziell alle M_i Teilmengen einer Menge M und sind die φ_{ji} die Inklusionen, so liefert die kanonische Abbildung eine Bijektion $\varinjlim M_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in I} M_i \subset M$.

Übung 9.4.5. Gegeben ein gerichtetes System von Gruppen (oder abelschen Gruppen, oder Ringen, oder Moduln) trägt sein direkter Limes als gerichtetes System von Mengen in natürlicher Weise die Struktur einer Gruppe (oder einer abelschen Gruppe, oder eines Rings, oder eines Moduls) und wird mit dieser Struktur ein direkter Limes in der jeweiligen Kategorie.

Bemerkung 9.4.6. In der Kategorie der abelschen Gruppen können wir die Existenz direkter Limites alternativ auch zeigen, indem den Quotienten von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ bilden nach der Untergruppe, die erzeugt wird von allen $m_i - \varphi_{ji}(m_i)$ für $i \in I$, $j \geq i$ und $m_i \in M_i$. In der Tat löst dieser Quotient auch unser universelles Problem.

Definition 9.4.7. Eine Teilmenge $K \subset I$ einer partiell geordneten Menge I heißt **kofinal** genau dann, wenn es für jedes $i \in I$ ein $k \in K$ gibt mit $k \geq i$.

Lemma 9.4.8 (Übergang zu einem kofinalen Teilsystem). *Sei I eine filtrierende partiell geordnete Menge, $K \subset I$ ein kofinales System und M_i ein durch I indiziertes induktives System. Existiert der direkte Limes über I, so existiert auch der direkte Limes über K und der offensichtliche Morphismus ist ein Isomorphismus*

$$\varinjlim_{k \in K} M_k \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} M_i$$

Beweis. Beide Seiten haben dieselbe universelle Eigenschaft. Man überzeuge sich davon zunächst im Spezialfall, daß I ein größtes Element besitzt und daß K nur aus diesem einen Element besteht. □

Definition 9.4.9. Ein **Morphismus von induktiven Systemen**

$$(M_i, \varphi_{ji}) \to (N_i, \psi_{ji})$$

ist eine Familie von Abbildungen $g_i : M_i \to N_i$ so daß gilt $\psi_{ji} \circ g_i = g_j \circ \varphi_{ji}$ wann immer $j \geq i$. Fassen wir induktive Systeme als Funktoren auf, so sind unsere Morphismen gerade die natürlichen Transformationen.

Bemerkung 9.4.10. Aufgrund der universellen Eigenschaften liefert jeder Morphismus von induktiven Systemen einen Morphismus auf den induktiven Limites. Wir nennen eine Sequenz $(M_i') \to (M_i) \to (M_i'')$ von induktiven Systemen abelscher Gruppen **exakt** genau dann, wenn die zugehörige Sequenz abelscher Gruppen $M_i' \to M_i \to M_i''$ exakt ist für alle i.

Satz 9.4.11 (Exaktheit des direkten Limes). *Ist* $(M_i') \to (M_i) \to (M_i'')$ *eine exakte Sequenz von induktiven Systemen abelscher Gruppen, so erhalten wir auch im direkten Limes eine exakte Sequenz*

$$\varinjlim M_i' \to \varinjlim M_i \to \varinjlim M_i''$$

Beweis. Bezeichne f_i, g_i unsere Morphismen und f, g ihre Limites. Sicher ist die Verknüpfung auch im Limes Null. Ist andererseits $\mathrm{can}_i(m_i)$ ein Element der Mitte, das nach Null geht, so folgt $\mathrm{can}_i'' \, g_i(m_i) = 0$, also $\varphi_{ji}'' g_i(m_i) = 0$ für geeignetes $j \geq i$, also $g_j(\varphi_{ji}(m_i)) = 0$ und folglich ist $\varphi_{ji}(m_i) = f_j(m_j')$ und $\mathrm{can}_i(m_i) = f \, \mathrm{can}_j'(m_j')$. □

Übung 9.4.12. Sei der topologische Raum X eine aufsteigende Vereinigung offener Teilmengen, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. So gilt $H_q(X) = \varinjlim H_q(U_i)$ und $\pi_1(X, x) = \varinjlim \pi_1(U_i, x)$, wo der zweite Limes natürlich nur über alle i mit $x \in U_i$ läuft.

Übung 9.4.13. **Der direkte Limes kommutiert mit Tensorprodukten**, in Formeln liefert also die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\varinjlim (M_i \otimes_R N) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim M_i) \otimes_R N$$

(Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis für die Vertauschbarkeit von Tensorprodukt und direkten Summen.)

9.5 Poincaré-Dualität

Bemerkung 9.5.1. Wir wollen nun den Dualitätssatz von Poincaré 8.7.10 durch eine Art Induktion über die offenen Teilmengen beweisen und müssen dazu eine Version dieses Satzes für nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten formulieren. Für einen Hausdorffraum X definieren wir seine **Kohomologie mit kompaktem Träger** als den direkten Limes

$$H_c^q X = \varinjlim H^q(X, X - K)$$

wo der Limes über alle kompakten Teilmengen $K \subset X$ läuft. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ haben wir eine Abbildung $H_c^q U \to H_c^q X$ als Limes der Abbildungen $H^q(U, U - K) \xrightarrow{\sim} H^q(X, X - K) \to H_c^q X$, wo die ersten Abbildungen die Inversen zu den Ausschneidungsisomorphismen sind.

Übung 9.5.2. Ist ein Hausdorffraum X eine aufsteigende Vereinigung offener Teilmengen, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, so induzieren die eben erklärten Abbildungen einen Isomorphismus $\varinjlim H_c^q(U_i) \xrightarrow{\sim} H_c^q(X)$.

Definition 9.5.3. Ein Simplizialkomplex heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplizes gehört.

Übung 9.5.4. Ein Simplizialkomplex ist lokal endlich genau dann, wenn der zugehörige topologische Raum lokal kompakt ist. (Hinweis: 3.3.17.)

Bemerkung 9.5.5. Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ mit einer Anordnung seiner Ecken bilden die endlichen formalen Linearkombinationen im Komplex $S^*_{\text{os}}\Delta(\mathcal{K})$ der geordneten simplizialen Koketten einen Unterkomplex, den wir $S^*_{\text{os,c}}\Delta(\mathcal{K})$ notieren und den "Komplex der simplizialen Koketten mit kompaktem Träger" nennen. Wir zeigen nun, daß dieser Komplex die Kohomologie mit kompaktem Träger $H^*_c\Delta(\mathcal{K})$ berechnet. Nach 9.4.8 können wir ja bei der Definition der Kohomologie mit kompaktem Träger den direkten Limes ebenso gut über alle Teilmengen K mit kompaktem Abschluß laufen lassen. Wieder nach 9.4.8 haben wir in unserem speziellen Fall auch

$$H^*_c\Delta(\mathcal{K}) = \varinjlim_{\mathcal{L}} H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$$

wo $\mathcal{L}$ über alle Unterkomplexe $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ läuft mit $|\mathcal{K}\backslash\mathcal{L}| < \infty$. Nach 9.2.8 in Verbindung mit dem Fünferlemma wird nun aber die relative Kohomologie $H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$ berechnet durch den Komplex $S^*_{\text{os}}(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$ der relativen simplizialen Koketten, den wir erklären als den Kern der offensichtlichen Kettenabbildung

$$S^*_{\text{os}}\Delta(\mathcal{K}) \twoheadrightarrow S^*_{\text{os}}\Delta(\mathcal{L})$$

Bilden wir den direkten Limes dieser Kerne, so erhalten wir gerade unseren Komplex $S^*_{\text{os},c}\Delta(\mathcal{K})$, und wegen der Exaktheit des direkten Limes erhalten wir schließlich kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^q S^*_{\mathrm{os},c}\Delta(\mathcal{K}) &\cong H^q \varinjlim_{\mathcal{L}} S^*_{\mathrm{os}}(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{L}} H^q S^*_{\mathrm{os}}(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{L}} H^q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\ &\cong H^q_c \Delta(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

Proposition 9.5.6 (Mayer-Vietoris-Sequenz für H^*_c). *Ist der Hausdorffraum X Vereinigung von zwei offenen Teilmengen $X = U \cup V$, so haben wir eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to H^q_c(U \cap V) \to H^q_c(U) \oplus H^q_c(V) \to H^q_c(X) \to H^{q+1}_c(U \cap V) \to \ldots$$

Beweis. Sind $K \subset U$ und $L \subset V$ kompakt, so haben wir nach 9.2.7 eine natürliche lange exakte Sequenz

$$H^q(X, X-(K\cap L)) \to H^q(X, X-K) \oplus H^q(X, X-L) \to H^q(X, X-(K\cup L))$$

Die Proposition ergibt sich mit Ausschneidung und Übergang zum direkten Limes über alle K und L. □

Bemerkung 9.5.7. Sei M eine n-Mannigfaltigkeit und ω eine Orientierung auf M. So definiert ω nach 6.3.16 für alle kompakten Teilmengen $K \subset M$ ein Element $\omega_K \in H_n(M, M-K)$, das cap-Produkt mit ω_K definiert Abbildungen

$$\cap\omega_K : H^q(M, M-K) \to H_{n-q}M$$

und durch Übergang zum direkten Limes erhalten wir Abbildungen

$$\cap\omega : H^q_c M \longrightarrow H_{n-q}M$$

die verträglich sind mit dem Übergang zu offenen Teilmengen von M. Mit diesen Abbildungen können wir nun formulieren:

Satz 9.5.8 (Allgemeine Poincaré-Dualität). *Gegeben eine orientierte n-Mannigfaltigkeit M mit Orientierung ω induziert unsere Abbildung $\cap\omega$ aus 9.5.7 für alle q Isomorphismen*

$$\cap\omega : H^q_c M \xrightarrow{\sim} H_{n-q}M$$

Bemerkung 9.5.9. Dieser Satz gilt mit demselben Beweis für Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring $1 + 1 = 0$, so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit.

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 9.5.10. *Sind $U, V \subset M$ offen und gilt der Satz für die n-Mannigfaltigkeiten U, V und $U \cap V$, so gilt er auch für $U \cup V$.*

Beweis. Das folgt sofort mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots\to & H^q_c(U\cap V) & \to & H^q_c U \oplus H^q_c V & \to & H^q_c(U\cup V) & \to & H^{q+1}_c(U\cap V)\to \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\ldots\to & H_{n-q}(U\cap V) & \to & H_{n-q}U\oplus H_{n-q}V & \to & H_{n-q}(U\cup V) & \longrightarrow & H_{n-q-1}(U\cap V)\to
\end{array}$$

sobald wir zeigen können, daß dies Diagramm kommutativ ist. Es reicht, für beliebige kompakte $K \subset U$ und $L \subset V$ die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, das man erhält, wenn man die obere Zeile durch die entsprechende relative Mayer-Vietoris-Sequenz ersetzt. Wir kürzen $U \cup V = X$ ab und bezeichnen die offene Überdeckung $X - (K \cap L) = (X - K) \cup (X - L)$ mit $\mathcal{V}$. Die kurze exakte Sequenz auf den singulären Ketten

$$S(X - K \cup L) \hookrightarrow S(X - K) \oplus S(X - L) \twoheadrightarrow S^{\mathcal{V}}(X - K \cap L)$$

liefert durch Dualisieren die oberste Horizontale im folgenden großen kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
S^*_{\mathcal{V}}(X-K\cap L) & \hookrightarrow & S^*(X-K)\oplus S^*(X-L) & \twoheadrightarrow & S^*(X-K\cup L) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
S^*(X) & \hookrightarrow & S^*X\oplus S^*X & \twoheadrightarrow & S^*X \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
S^*_{\mathcal{V}}(X,X-K\cap L) & \hookrightarrow & S^*(X,X-K)\oplus S^*(X,X-L) & \twoheadrightarrow & S^*(X,X-K\cup L)
\end{array}$$

wo alle Vertikalen kurze exakte Sequenzen sind, die untere linke Ecke durch die Exaktheit der vertikalen Sequenz definiert ist und die untere Zeile exakt ist nach dem Neunerlemma. Die lange exakte Kohomologiesequenz dieser untersten Zeile ist bis auf einige Identifikationen gerade unsere relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie. Wählen wir nun für $\omega_{K\cup L}$ einen Repräsentanten in S_nX, der fein ist bezüglich der offenen Überdeckung $X = (V - K) \cup (U - L) \cup (U \cap V)$, und fassen die Kettenkomplexe der singulären Ketten auf als Kokettenkomplexe, die nur in Indizes ≤ 0 leben, so definiert das Cap-Produkt mit so einem Repräsentanten die vertikalen Morphismen eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
S^*_{\mathcal{V}}(X,X-K\cap L) & \hookrightarrow & S^*(X,X-K)\oplus S^*(X,X-L) & \twoheadrightarrow & S^*(X,X-K\cup L) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S(U\cap V) & \hookrightarrow & SU\oplus SV & \twoheadrightarrow & S^{\mathcal{W}}(U\cup V)
\end{array}$$

für $\mathcal{W}$ die Überdeckung $X = U \cup V$ von X. Das liefert dann das gesuchte kommutative Diagramm von langen exakten Sequenzen. □

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Der Satz gilt für $M = \mathbb{R}^n$. Dann bilden ja die abgeschlossenen Bälle D_r schon ein kofinales System unter allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $\cap\omega : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D_r) \to H_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$ ist schlicht das Auswerten einer Kohomologieklasse auf der Homologieklasse $\omega \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D_r)$, also ein Isomorphismus für $0 < r < \infty$.

2. Der Satz gilt für jede offene konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, denn so eine Teilmenge ist schon homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

3. Der Satz gilt für jede endliche Vereinigung offener konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$. Mit Induktion, 2 und Lemma 9.5.10.

4. Ist M eine aufsteigende Vereinigung von offenen Teilmengen U_i und gilt der Satz für alle U_i, so gilt er auch für M. In der Tat gilt $H_q(M) = \varinjlim H_q(U_i)$ und $H_c^p M = \varinjlim H_c^p(U_i)$ nach Übung 9.4.12 und 9.5.2.

5. Der Satz gilt für jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. In der Tat läßt sie sich als abzählbare Vereinigung offener Bälle schreiben.

6. Der Satz gilt für jede Mannigfaltigkeit. In der Tat finden wir nach 4 und dem Zorn'schen Lemma eine maximale offene Teilmenge, für die der Satz gilt. Wäre sie nicht schon die ganze Mannigfaltigkeit, so könnten wir sie nach dem Lemma und 5 noch durch eine Karte vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität. □

Korollar 9.5.11. *Ist t ein Erzeuger der zweiten Kohomologiegruppe $H^2\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, so liefert der offensichtliche Ringhomomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}[t]/(t^{n+1}) \xrightarrow{\sim} H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß das Produkt eines Erzeugers von H^{2p} mit einem Erzeuger von H^{2q} stets ein Erzeuger von H^{2p+2q} ist. Im Fall $p + q = n$ folgt das aus 8.7.13. Im Fall $p + q > n$ ist eh nichts zu zeigen. Im Fall $p + q = m < n$ verwendet man den nach 6.4.5 und 9.2.1 surjektiven Ringhomomorphismus $H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C} \twoheadrightarrow H^*\mathbb{P}^m\mathbb{C}$. □

Übung 9.5.12. Man definiere für jeden Hausdorffraum ein cup-Produkt auf seiner Kohomologie mit kompaktem Träger. (Für eine Mannigfaltigkeit entspricht es unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität dem anschaulichen Schnittprodukt auf der Homologie.)

9.6 Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten

Satz 9.6.1 (Wilder). *Die Homologiegruppen von kompakten Mannigfaltigkeiten sind stets endlich erzeugt. Ist allgemeiner X eine Mannigfaltigkeit und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge, so ist das Bild von $H_n K \to H_n X$ endlich erzeugt für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Bemerkung 9.6.2. Der Satz gilt mit demselben Beweis auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand und für Homologie mit Koeffizienten in einem noetherschen Ring.

Beweis. Per Induktion über n mithilfe der anschließenden Proposition. □

Proposition 9.6.3. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß gilt:*

1. *Für jedes Paar $M \subset W$ von Teilmengen von X mit M kompakt und W offen in X ist das Bild von $H_{n-1}M \to H_{n-1}W$ endlich erzeugt;*
2. *Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung mit endlich erzeugter n-ter Homologie.*

So ist $\mathrm{im}(H_n K \to H_n X)$ *endlich erzeugt für jedes Kompaktum $K \subset X$.*

Beweis. Wir betrachten in der Potenzmenge von X die Teilmenge

$$\mathcal{K} = \left\{ K \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} K \text{ ist kompakt und besitzt eine offene} \\ \text{Umgebung } U \overset{\circ}{\subset} X \text{ derart, daß das Bild} \\ \text{von } H_n U \to H_n X \text{ endlich erzeugt ist} \end{array} \right\}$$

Nach unseren Annahmen besitzt jeder Punkt von x eine Umgebung aus $\mathcal{K}$. Aus $K \in \mathcal{K}$ und $L \mathrel{\subset\!\!\!\!\!A}\; K$ folgt weiter ohne Schwierigkeiten $L \in \mathcal{K}$. Können wir zeigen, daß mit zwei Kompakta L und K stets auch ihre Vereinigung zu $\mathcal{K}$ gehört, so gehört offensichtlich jede kompakte Teilmenge von X zu $\mathcal{K}$ und wir sind fertig. Seien also $K, L \in \mathcal{K}$ und $U, V \overset{\circ}{\subset} X$ offen mit $K \subset U$ und $L \subset V$ und $\mathrm{im}(H_n U \to H_n X)$ und $\mathrm{im}(H_n V \to H_n X)$ endlich erzeugt. Da X nach Voraussetzung lokal kompakt ist, finden wir sicher auch $U_1 \overset{\circ}{\subset} U$, $V_1 \overset{\circ}{\subset} V$ mit $K \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$ und $L \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$ und $\bar{U}_1, \bar{V}_1$ kompakt. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & H_n(U_1 \cup V_1) & \to & H_{n-1}(U_1 \cap V_1) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n U \oplus H_n V & \to & H_n(U \cup V) & \to & H_{n-1}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_n X \oplus H_n X & \to & H_n X & & \end{array}$$

Das Bild der linken Vertikale ist endlich erzeugt nach Wahl von U und V. Das Bild der rechten Vertikalen ist endlich erzeugt nach Annahme 1, angewandt auf $M = \bar{U}_1 \cap \bar{V}_1$ und $W = U \cap V$. Die mittlere Horizontale ist exakt als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz. Dann muß aber nach dem anschließenden Lemma auch das Bild der Komposition in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt sein und es folgt $L \cup K \in \mathcal{K}$. □

Lemma 9.6.4. *Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \to & B \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & D & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ F & \to & G & & \end{array}$$

Ist das Bild der beiden äußeren Vertikalen CF und BE endlich erzeugt und ist die mittlere Horizontale exakt bei D, so ist auch das Bild der Komposition AG in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt.

Beweis. Dem Leser überlassen. □

10 Garben und ihre Kohomologie

10.1 Die erste Čech-Kohomologie und ihre Bedeutung

Definition 10.1.1. Sei X ein topologischer Raum und $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Eine **n-blättrige Überlagerung von** X ist per definitionem eine stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X derart, daß es für alle $U \in \mathcal{U}$ Homöomorphismen

$$i_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \{1, \ldots, n\}$$

gibt, die verträglich sind mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf U. Solch eine Familie von Homöomorphismen $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ nennen wir eine **Trivialisierung** unserer Überlagerung.

Definition 10.1.2. Wir kürzen $\{1, \ldots, n\} = F$ ab und bezeichnen mit $\mathcal{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von F, versehen mit der diskreten Topologie. Jede Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ unserer Überlagerung über einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ liefert für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ eindeutig bestimmte und nach **??** stetige Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{UV} : & U \cap V & \to & \mathcal{S}_n \\ & x & \mapsto & \varphi^x_{UV} \end{array}$$

derart, daß gilt $(i_U \circ i_V^{-1})(x, f) = (x, \varphi^x_{UV}(f)) \quad \forall x \in U \cap V, f \in F$. Wir nennen diese Abbildungen die **Verklebungsfunktionen** unserer Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$.

Bemerkung 10.1.3. Gegeben $U, V, W \in \mathcal{U}$ haben wir offensichtlich

$$\varphi^x_{UV} \circ \varphi^x_{VW} = \varphi^x_{UW} \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$

Definition 10.1.4. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe, deren Verknüpfung wir mit $\top$ notieren. Die Menge $\check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$ der **Čech-1-Kozykel** bezüglich $\mathcal{U}$ mit Werten in G ist definiert als die Menge aller möglichen Wahlen von stetigen Abbildungen $\varphi_{UV} : U \cap V \to G$ für alle $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ derart, daß für beliebige $U, V, W \in \mathcal{U}$ auf dem Schnitt $U \cap V \cap W$ gilt

$$\varphi_{UV} \top \varphi_{VW} = \varphi_{UW}$$

Lemma 10.1.5. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. So liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X \text{ mit} \\ \text{einer Trivialisierung } (i_U)_{U \in U} \text{ über } \mathcal{U}, \text{ bis auf} \\ \text{trivialisierungsverträglichen Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

Bemerkung 10.1.6. Ist $q : \hat{X} \to X$ eine zweite n-blättrige Überlagerung mit einer Trivialisierung über $\mathcal{U}$ durch gewisse $j_U : q^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$, so verstehen wir unter einem trivialisierungnsverträglichen Isomorphismus eine bijektive Decktransformation $d : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$ derart, daß gilt $j_U \circ d = i_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Mit dieser Präzisierung wird klar, daß die Abbildung in unserem Lemma wohldefiniert ist.

Beweis. Um die Bijektivität zu zeigen, konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Gegeben ein Čech-1-Kozykel $(\varphi_{UV})_{U,V \in \mathcal{U}}$ bilden wir für jedes $U \in \mathcal{U}$ die einpunktige Menge $\{U\}$, betrachten auf dem Raum

$$\coprod_{U \in \mathcal{U}} \{U\} \times U \times F$$

die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von

$$(V, x, f) \sim (U, x, \varphi_{UV}^x(f)) \quad \forall\, U, V \in \mathcal{U},\ x \in U \cap V,\ f \in F$$

und betrachten den Raum $\tilde{X}$ der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie, der Projektion auf die mittlere Koordinate $\tilde{X} \to X$ und der offensichtlichen Trivialisierung über $\mathcal{U}$. Es bleibe dem Leser überlassen zu zeigen, daß diese Konstruktion invers ist zum Bilden der Verklebungsfunktionen. $\square$

Definition 10.1.7. Nun nehmen wir an, wir hätten für dieselbe Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ über derselben offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine zweite Trivialisierung gegeben durch gewisse $\tilde{\imath}_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$. Dann erklären wir stetige Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \psi_U : & U & \to & \mathcal{S}_n \\ & x & \mapsto & \psi_U^x \end{array}$$

durch die Gleichungen $(\tilde{\imath}_U \circ i_U^{-1})(x, f) = (x, \psi_U^x(f)) \quad \forall x \in U, f \in F$. Wir nennen diese ψ_U die **Übergangsfunktionen** zwischen unseren beiden Trivialisierungen (i_U) und $(\tilde{\imath}_U)$.

Bemerkung 10.1.8. Die Verklebungsfunktionen $\tilde{\varphi}_{UV}$ zu unserer zweiten Trivialisierung $(\tilde{\imath}_U)$ lassen sich durch die Verklebungsfunktionen φ_{UV} zu unserer ersten Trivialisierung (i_U) und die Übergangsfunktionen zwischen den beiden Trivialisierungen ausdrücken vermittels der Formel

$$\tilde{\varphi}_{UV}^x = \psi_U^x \circ \varphi_{UV}^x \circ (\psi_V^x)^{-1} \quad \forall x \in U \cap V$$

Definition 10.1.9. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und G eine topologische Gruppe. Zwei Čech-1-Kozykel $\varphi, \tilde{\varphi} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$ heißen **kohomolog** und wir schreiben $\varphi \sim \tilde{\varphi}$ genau dann, wenn es eine Familie $\psi = (\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ von stetigen Funktionen $\psi_U : U \to G$ gibt derart, daß für beliebige $U, V \in \mathcal{U}$ auf dem Schnitt $U \cap V$ gilt

$$\tilde{\varphi}_{UV} = \psi_U \top \varphi_{UV} \top \psi_V^{-1}$$

Diese Relation "kohomolog" ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G) = \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)/\sim$$

und nennen sie die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung** $\mathcal{U}$ **mit Werten in der topologischen Gruppe** G.

Bemerkung 10.1.10. Unser $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$ ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der Klasse des trivialen 1-Kozykels. Ist jedoch die Gruppe G kommutativ, so sind $\check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$ und $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$ auch kommutative Gruppen in natürlicher Weise.

Lemma 10.1.11. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. So liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbare} \\ \text{Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Bemerkung 10.1.12. Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X und $\mathcal{V}$ eine weitere Überdeckung durch weniger offene Mengen, in Formeln $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, so haben wir eine offensichtliche Abbildung $\check{H}^1(\mathcal{U}; G) \to \check{H}^1(\mathcal{V}; G)$, die den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführt.

Definition 10.1.13. Wir nennen eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X **gesättigt** genau dann, wenn sie mit einer Menge auch alle ihre offenen Teilmengen enthält, wenn also aus $U \in \mathcal{U}$ und $V \Subset U$ folgt $V \in \mathcal{U}$.

Definition 10.1.14. Sei X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe. Die **erste Čech-Kohomologie von** X **mit Koeffizienten in der topologischen Gruppe** G ist die punktierte Menge

$$\check{H}^1(X; G) = \varinjlim \check{H}^1(\mathcal{U}; G)$$

die wir erhalten als den direkten Limes über alle gesättigten offenen Überdeckungen unseres Raums. Hierbei bilden wir den direkten Limes in der Kategorie der punktierten Mengen.

Satz 10.1.15 (Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen). *Sei X ein topologischer Raum. So liefert das Bilden von Verklebungsfunktionen für Trivialisierungen bezüglich offener Überdeckungen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{S}_n)$$

Beweis. Das ergibt sich aus den vorhergehenden Definitionen und Lemmata. Die Details bleiben dem Leser überlassen. □

Übung 10.1.16. Jeder Čech-Kozykel bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U}$ läßt sich fortsetzen zu einem Čech-Kozykel bezüglich der Überdeckung $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ durch alle offenen Teilmengen der Mengen aus $\mathcal{U}$. Die Klasse dieser Fortsetzung in der Čech-Kohomologie ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung.

Proposition 10.1.17. *Sei X ein lokal zusammenziehbarer topologischer Raum und G eine diskrete abelsche Gruppe. So haben wir eine natürliche Bijektion zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie*

$$H^1(X; G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; G)$$

Bemerkung 10.1.18. Wir werden später noch sehr viel stärkere Aussagen in dieser Richtung kennenlernen. Der im Anschluß an 10.1.25 gegebene Beweis soll im wesentlichen Anschauung vermitteln. Wir führen die dabei benötigten Definitionen gleich im Kontext topologischer Gruppen ein, obwohl zunächst nur der Fall von abelschen Gruppen mit diskreter Topologie relevant ist.

Definition 10.1.19. Sei G eine topologische Gruppe. Ein G-Raum Y heißt **topologisch frei** genau dann, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene G-stabile Umgebung U besitzt, die isomorph ist zu einem G-Raum der Gestalt $W \times G$ für irgendeinen topologischen Raum W.

Definition 10.1.20. Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Ein G-**Torsor** auf X, auch genannt ein G-**Hauptfaserbündel**, ist ein Paar (E, p) bestehend aus einem topologisch freien G-Rechtsraum E, dem **Totalraum**, mitsamt einer für die triviale G-Wirkung auf X äquivarianten stetigen Abbildung $p : E \to X$, der **Projektion**, derart, daß die Projektion einen Homöomorphismus $E/G \xrightarrow{\sim} X$ induziert. Ein **Morphismus von G-Torsoren auf X** ist eine stetige G-äquivariante Abbildung über X.

Bemerkung 10.1.21. Ist G eine Lie-Gruppe und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition überall das Wort "stetig" durch "differenzierbar" und den Begriff "topologischer Raum" durch "differenzierbare Mannigfaltigkeit", so erhält man die Definition eines **differenzierbaren G-Hauptfaserbündels auf X**.

Übung 10.1.22. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\mathcal{S}_n\text{-Torsoren auf } X\}/_{\cong} \xrightarrow{\sim} \{n\text{-blättrige Überlagerungen von } X\}/_{\cong}$$

durch $E \mapsto E \times_{\mathcal{S}_n} \{1, \ldots, n\}$ bzw. in der umgekehrten Richtung, indem wir einer n-blättrigen Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ zuordnen die Menge $E = \coprod_x E_x$ für $E_x = \mathrm{Ens}^{\times}(\{1, \ldots, n\}, p^{-1}(x))$ mit der offensichtlichen $\mathcal{S}_n$-Operation und Projektion auf X und einer geeigneten Topologie.

Übung 10.1.23. Sei G eine topologische Gruppe. Ordnen wir jedem Element $g \in G$ den G-Torsor auf S^1 zu, der entsteht aus $[0, 1] \times G$ durch die Identifikation $(0, h) \sim (1, gh)$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\pi_0(G) \xrightarrow{\sim} \{G\text{-Torsoren auf } S^1\}/_{\cong}$$

Übung 10.1.24. Jeder Morphismus von Torsoren ist ein Isomorphismus. Die Automorphismen des G-Torsors $X \times G$ über X können identifiziert werden mit den stetigen Abbildungen $X \to G$. Genauer erhalten wir eine Bijektion $\mathrm{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}^G_X(X \times G)$ durch die Vorschrift $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x, g) = (x, f(x)g)$.

Bemerkung 10.1.25 *(***Erste Čech-Kohomologie und Torsoren***).* Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und $p : E \to X$ ein G-Torsor auf X. Wählen wir für E eine trivialisierende gesättigte offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X und über $\mathcal{U}$ eine Trivialisierung $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ von E durch die Wahl gewisser $i_U \in \mathrm{Top}^G_U(p^{-1}(U), U \times G)$ und erklären für $U, V \in \mathcal{U}$ die Verklebungsfunktionen $\varphi_{UV} \in \mathrm{Top}(U \cap V, G)$ durch die Vorschrift $(i_U \circ i_V^{-1})(x, g) = (x, \varphi_{UV}(x)g)$, so bilden die φ_{UV} einen Čech-Kozykel, dessen Kohomologieklasse nur von E abhängt, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} G\text{-Torsoren auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; G)$$

wobei rechts die Čech-Kohomologie mit Werten in der topologischen Gruppe G gemeint ist. Der Beweis läuft vollständig analog zum Beweis von 10.1.15 und bleibt dem Leser überlassen.

Beweis von 10.1.17. Da beide der zu vergleichenden Kohomologien in der Proposition einer disjunkten Vereinigung topologischer Räume das Produkt der jeweiligen Kohomologiegruppen zuordnen und da X nach Annahme insbesondere lokal zusammenhängend ist, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X zusammenhängend annehmen. Dann liefert aber unter unseren Annahmen der Faserfunktor zu einem beliebigen Punkt $x \in X$ nach 4.8.4 für unser diskretes G eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{G\text{-Torsoren auf } X\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \pi_1(X, x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } G \end{array} \right\}$$

wobei auf der rechten Seite zu verstehen ist, daß die Rechtsoperation von G mit der Linksoperation von $\pi_1(X,x)$ kommutieren soll. Die Isomorphieklassen auf der rechten Seite entsprechen nun eineindeutig den G-Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $\pi_1(X,x) \to G$, zum Beispiel nach 4.2.11. Im Fall einer kommutativen Gruppe G entsprechen sie insbesondere eineindeutig der Menge $\mathrm{Grp}(\pi_1(X,x),G)$ aller Gruppenhomomorphismen von der Fundamentalgruppe nach G, und diese Menge können wir erst identifizieren mit $\mathrm{Ab}(H_1 X, G)$ nach Hurewicz 5.5.2 und dann mit der singulären Kohomologiegruppe $H^1(X;G)$ nach dem universellen Koeffiziententheorem 9.3.13. □

Übung 10.1.26. Ist der topologische Raum X einfach zusammenhängend, so besteht $\check{H}^1(X;G)$ für jede diskrete Gruppe G nur aus einem Punkt.

10.2 Vektorraumbündel und Čech-Kohomologie

Definition 10.2.1. Sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ und sei X ein topologischer Raum.

1. Ein "Möchtegern-Bündel von $\mathbb{K}$-Vektorräumen" oder kurz ein "Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel" $E = (E,p) = (p : E \to X)$ auf X besteht aus einem topologischen Raum $p : E \to X$ über X, dem **Totalraum** E mit der **Projektion** p, sowie einer $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur auf jeder Faser $E_x = p^{-1}(x)$.

2. Ein **Morphismus** von Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündeln ist eine stetige Abbildung $h : E \to F$ über X derart, daß für alle $x \in X$ die auf den Fasern induzierte Abbildung $h : E_x \to F_x$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.

3. Der Raum $X \times \mathbb{K}^n$ mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel heißt das **konstante n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel auf X**.

4. Ein **n-dimensionales (topologisches) $\mathbb{K}$-Bündel auf X** ist ein n-dimensionales Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel (E,p), bei dem jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt derart, daß das induzierte Möchtegern-$\mathbb{K}$-Bündel $(p : p^{-1}(U) \to U)$ auf U isomorph ist zum konstanten n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Bündel $U \times \mathbb{K}^n$ auf U.

Bemerkung 10.2.2. Die Automorphismengruppe des konstanten $\mathbb{K}$-Bündels $X \times \mathbb{K}^n$ ist kanonisch isomorph zur Gruppe der stetigen Abbildungen von X nach $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Genauer erhalten wir eine Bijektion $\mathrm{Top}(X, \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X \times \mathbb{K}^n)$ vermittels $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x,v) = (x, f(x)v)$. Hier fassen wir $v \in \mathbb{K}^n$ als Spaltenvektor auf und verstehen im Fall der Quaternionen unter einem $\mathbb{H}$-Vektorraum einen $\mathbb{H}$-Rechtsmodul.

Bemerkung 10.2.3. Ganz genauso wie im vorhergehenden Abschnitt erhalten wir auch Bijektionen

$$\{n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\} /_{\cong} \quad \xrightarrow{\sim} \quad \check{H}^1(X; \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$$

Wir können auch direkt jedem $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$-Torsor E das n-dimensionale $\mathbb{K}$-Bündel $E \times_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})} \mathbb{K}^n$ zuordnen und erhalten dann ein kommutatives Dreieck von Bijektionen, an dessen drei Ecken Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln, Isomorphieklassen von Torsoren und $\check{H}^1(X; \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}))$ stehen.

Bemerkung 10.2.4. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition überall das Wort "stetig" durch "differenzierbar" und den Begriff "topologischer Raum" durch "differenzierbare Mannigfaltigkeit", so erhält man die Definition eines **n-dimensionalen differenzierbaren $\mathbb{K}$-Bündels auf X**. Um die Klassifikation differenzierbarer Bündel in derselben Weise behandeln zu können wie die Klassifikation topologischer Bündel, führen wir im folgenden Abschnitt allgemeiner Prägarben und ihre Čech-Kohomologie ein.

Beispiele 10.2.5. Das Tangentialbündel an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist ein n-dimensionales differenzierbares (und damit erst recht ein n-dimensionales topologisches) $\mathbb{R}$-Bündel.

Definition 10.2.6. Seien F und X topologische Räume. Ein **Faserbündel** mit Faser F auf X ist ein topologischer Raum $p : Y \to X$ über X derart, daß jeder Punkt von X eine Umgebung U besitzt, für die $p : p^{-1}(U) \to U$ als topologischer Raum über U isomorph ist zu $\mathrm{pr_U} : U \times F \to U$.

Beispiel 10.2.7. Ein Faserbündel mit diskreter endlicher Faser F der Kardinalität n ist dasselbe wie eine n-blättrige Überlagerung.

Übung 10.2.8. Ist F ein topologischer Raum, auf dem eine topologische Gruppe G wirkt, und ist E ein G-Torsor auf einem Raum X, so ist $E \times_G F$ ein Faserbündel über X mit Faser F. Ist speziell $F = \{1, \ldots, n\}$ und $G = \mathcal{S}_n$, so erhalten wir ein kommutatives Dreieck, an dessen drei Ecken die Menge der Isomorphieklassen von n-blättrigen Überlagerungen, die Menge der Isomorphieklassen von $\mathcal{S}_n$-Torsoren und die Menge $\check{H}^1(X; \mathcal{S}_n)$ stehen.

10.3 Prägarben und höhere Čech-Kohomologie

Definition 10.3.1. Für einen topologischen Raum bilden wir die Kategorie seiner offenen Teilmengen mit allen offenen Teilmengen als Objekten und den Inklusionen als Morphismen. Insbesondere ist in dieser Kategorie also jeder Morphismenraum entweder einelementig oder leer.

Definition 10.3.2. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine **Prägarbe** (englisch **presheaf**, französisch **prefaisceau**) auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist ein Funktor

$$\{\text{offene Teilmengen von } X\}^{\circ} \to \mathcal{C}$$

Ein **Morphismus von Prägarben** ist eine natürliche Transformation von Funktoren. Eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Prägarbe**.

Bemerkung 10.3.3. Manche Autoren betrachten nur Prägarben von Gruppen oder sogar nur von abelschen Gruppen und fordern dann von jeder Prägarbe zusätzlich, daß der entsprechende Funktor der leeren Menge eine einelementige Gruppe zuordnen soll. Diese Zusatzannahme scheint mir im Lichte der obigen allgemeinen Definition jedoch unnatürlich.

Bemerkung 10.3.4. Ausgeschrieben ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von Gruppen auf einem Raum X also eine Zuordnung

$$\mathcal{F}: \quad \begin{array}{ccc} U & & \mathcal{F}(U) \\ \cup & \mapsto & \downarrow \rho_U^V \\ V & & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

die jeder offenen Menge $U \Subset X$ eine Gruppe $\mathcal{F}(U)$ zuordnet und jeder Inklusion $V \subset U$ von offenen Teilmengen von X einen Homomorphismus von Gruppen $\rho_U^V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, die sogenannte **Einschränkungsabbildung**, und man muß von diesen Daten noch fordern, daß gilt $\rho_U^U = \mathrm{id}$ und $\rho_V^W \circ \rho_U^V = \rho_U^W$ falls $W \subset V \subset U$. Ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ heißt ein **Schnitt von $\mathcal{F}$ über** U. Statt $\rho_U^V(s)$ schreiben wir meist $s|_V$ oder auch $s|V$. Ein **Morphismus von Prägarben** $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ derart, daß gilt $\rho_U^V \circ f_U = f_V \circ \rho_U^V$ für alle $V \subset U$, wo wir mit ρ_U^V links die Restriktionsabbildungen der Prägarbe $\mathcal{G}$ und rechts die Restriktionsabbildungen der Prägarbe $\mathcal{F}$ meinen. Im Diagramm also soll kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \to & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Beispiel 10.3.5. Sei X ein topologischer Raum. Die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ den komplexen Vektorraum $\mathcal{C}(U)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf U zuordnet und jeder Inklusion $V \Subset U$ die Restriktion $\mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$, ist eine Prägarbe $\mathcal{C}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X, die **Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen**.

Beispiel 10.3.6. Ist allgemeiner X ein topologischer Raum und G eine topologische Gruppe, so bilden die stetigen Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach G eine Prägarbe $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G,X}$ von Gruppen auf X, die **Prägarbe der stetigen G-wertigen Funktionen**. Wählt man auf G die diskrete Topologie, so notiert man diese Prägarbe oft G_X und spricht von der **Prägarbe der lokal konstanten G-wertigen Funktionen**. Für jeden topologischen Raum X haben wir zum Beispiel Homomorphismen von abelschen Prägarben $\mathbb{Z}_X \to \mathbb{R}_X \to \mathcal{C}_{\mathbb{R},X}$.

Beispiel 10.3.7. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so bilden die komplexwertigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen eine Prägarbe $\mathcal{C}^\infty$ von komplexen Vektorräumen auf X. Wir haben dann einen natürlichen Homomorphismus $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}$ von Prägarben von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X.

Beispiel 10.3.8. Ist allgemeiner X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe, so bilden die differenzierbaren Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach G eine Prägarbe $\mathcal{C}^\infty_G = \mathcal{C}^\infty_{G,X}$ von Gruppen auf X, die **Prägarbe der differenzierbaren G-wertigen Funktionen**.

Beispiel 10.3.9. Gegeben ein topologischer Raum X, ein Punkt $x \in X$ und eine Gruppe A definieren wir eine Prägarbe von Gruppen A_x auf X durch die Vorschrift $A_x(U) = A$ falls $x \in U$ und $A_x(U) = 1$ sonst. Diese Prägarbe heißt der **Wolkenkratzer** bei x mit Faser A.

Übung 10.3.10. In der Kategorie der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Summen und Produkte.

Definition 10.3.11 (der Čech-Kohomologie einer Prägarbe). Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Gegeben eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von X definieren wir den Komplex

$$\ldots \to \check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{C}^{q+1}(\mathcal{U};\mathcal{F}) \to \ldots$$

der **Čech-Koketten für $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** als den Komplex der abelschen Gruppen

$$\check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) = \prod_{(U_0,\ldots,U_q)\in\mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q),$$

wo wir $\check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F}) = 0$ setzen für $q < 0$ und wo die Randoperatoren d wie folgt erklärt werden: Ein $\psi \in \check{C}^q(\mathcal{U};\mathcal{F})$ ist ja ein Tupel gewisser $\psi(U_0,\ldots,U_q) \in \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$. Wir setzen dann

$$(d\psi)(U_0,\ldots,U_{q+1}) = \sum_{0\le i\le q+1} (-1)^i \psi(U_0,\ldots,\hat{U}_i,\ldots,U_{q+1})|(U_0 \cap \ldots \cap U_{q+1})$$

wobei die “Tarnkappe” über U_i wie üblich bedeuten soll, daß man U_i aus dem Schnitt wegzulassen hat. Man prüft die Formel $dd = 0$, unsere Konstruktion liefert also wirklich einen Komplex. Die Kohomologie dieses Komplexes nennen wir die **Čech-Kohomologie von X bezüglich $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** und bezeichnen sie mit

$$H^q \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

Die **Čech-Kohomologie $\check{H}^q(X; \mathcal{F})$ von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$** ist definiert als der direkte Limes über alle gesättigten offenen Überdeckungen $\mathcal{U}$ von X der Čech-Kohomologien für diese Überdeckungen, in Formeln

$$\check{H}^q(X; \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

Bemerkung 10.3.12. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so erhalten wir genau wie in **??** Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \{\text{differenzierbare reelle Geradenbündel auf } X\} / \cong & \xrightarrow{\sim} & \check{H}^1(X; \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^\times}) \\ \{\text{differenzierbare komplexe Geradenbündel auf } X\} / \cong & \xrightarrow{\sim} & \check{H}^1(X; \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}^\times}) \end{array}$$

Verallgemeinert man die Definition der punktierten Menge $\check{H}^1(X; G)$ für eine topologische Gruppe G in der offensichtlichen Weise zur Definition einer punktierten Menge $\check{H}^1(X; \mathcal{G})$ für eine beliebige Prägarbe $\mathcal{G}$ von Gruppen auf X, so erhalten wir allgemeiner Bijektionen

$$\{\text{differenzierbare } n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\} / \cong \ \xrightarrow{\sim} \ \check{H}^1(X; \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})})$$

Allerdings kann man in dieser Allgemeinheit keine höheren Kohomologiegruppen mehr definieren.

Übung 10.3.13. Die Čech-Kohomologie bezüglich einer Überdeckung $\mathcal{U}$ kommutiert mit beliebigen Produkten von abelschen Prägarben. (Für die Čech-Kohomologie selbst ist das im allgemeinen vermutlich falsch.)

Lemma 10.3.14 (Die Čech-Kohomologie von Wolkenkratzern). *Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und A_x der Wolkenkratzer am Punkt $x \in X$ mit einer abelschen Gruppe A als Faser, so gilt*

$$\check{H}^q(\mathcal{U}; A_x) = 0 \text{ für } q > 0.$$

Beweis. Wir wählen $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und definieren für $q \geq 0$ die Abbildung $\delta = \delta_U : \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; A_x) \to \check{C}^q(\mathcal{U}; A_x)$ durch die Vorschrift

$$(\delta\psi)(U_0, \ldots, U_q) = \psi(U, U_0, \ldots, U_q)$$

Eine kurze Rechnung zeigt $d\delta + \delta d = \mathrm{id}$ auf $\check{C}^q(\mathcal{U}; A_x)$ für $q > 0$, folglich ist für $q > 0$ jeder q-Zykel ein Rand. □

Bemerkung 10.3.15. Im Fall einer diskreten abelschen Gruppe G fallen die im vorherigen Abschnitt definierten Gruppen $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$ bzw. $\check{H}^1(X; G)$ mit den hier definierten Gruppen $\check{H}^1(\mathcal{U}; G_X)$ bzw. $\check{H}^1(X; G_X)$ zusammen. Im Fall einer allgemeinen topologischen abelschen Gruppe G fallen die im vorherigen Abschnitt definierten Gruppen $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$ bzw. $\check{H}^1(X; G)$ zusammen mit den hier definierten Gruppen $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$ bzw. $\check{H}^1(X; \mathcal{C}_G)$.

Bemerkung 10.3.16. Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Nach **??** definiert die Restriktion für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X Isomorphismen $\mathrm{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathcal{U}; G_X)$, folglich haben wir auch im direkten Limes einen Isomorphismus $\mathrm{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X; G_X)$. Insbesondere erhalten wir für jeden zusammenhängenden Raum X und diskretes G die Formel $\check{H}^0(X; G_X) = G$. Das steht im Gegensatz zur singulären Kohomologie, bei der ja $H^0(X; G) = G$ abgesehen vom Extremfall $G = 0$ nur dann gilt, wenn X *weg*zusammenhängend ist. Für lokal wegzusammenhängende Räume X haben wir jedoch wieder einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{H}^0(X; G_X) \cong H^0(X; G)$$

zwischen der nullten Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe G_X und der nullten singulären Kohomologie mit Koeffizienten in G.

10.4 Garben und ihre étalen Räume

Bemerkung 10.4.1. Alle Prägarben, die bisher von Belang waren, besitzen noch eine zusätzliche Eigenschaft, die es erlaubt, eine geometrische Anschauung zu entwickeln. Diese zusätzlich Eigenschaft, die die "Garben" unter den Prägarben auszeichnet, ist im Folgenden von entscheidender Bedeutung.

Definition 10.4.2. Eine **Garbe** $\mathcal{F}$ (englisch **sheaf**, französisch **faisceau**) von Mengen (bzw. Gruppen, bzw. Ringen) auf einem topologischen Raum X ist eine Prägarbe von Mengen (bzw. Gruppen, bzw. Ringen) derart, daß die folgende **Verklebungsbedingung** erfüllt ist: Gegeben ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X und gegeben für alle $U \in \mathcal{U}$ Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_U|_{U \cap W} = s_W|_{U \cap W} \quad \forall\, U, W \in \mathcal{U}$$

gibt es auf der Vereinigung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(V)$ mit

$$s|_U = s_U \quad \forall\, U \in \mathcal{U}$$

Ein **Homomorphismus von Garben** ist ein Homomorphismus der zugrundeliegenden Prägarben.

Bemerkung 10.4.3. Unsere Verklebungsbedingung mit $\mathcal{U} = \emptyset$ impliziert, daß für eine Garbe $\mathcal{F}$ von Mengen $\mathcal{F}(\emptyset)$ stets aus genau einem Element besteht.

Bemerkung 10.4.4. Wir können allgemeiner Garben erklären mit Werten in jeder Kategorie, die beliebige Produkte zuläßt. Eine Garbe wird dann wieder definiert als eine Prägarbe, die zusätzlich eine "Verklebungsbedingung" erfüllt, daß nämlich für jedes System $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung V im Diagramm

$$\mathcal{F}(V) \to \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \rightrightarrows \prod_{(U,W) \in \mathcal{U}^2} \mathcal{F}(U \cap W)$$

mit hoffentlich offensichtlichen Morphismen der erste Morphismus der **Egalisator** der beiden weiterführenden Morphismen ist. Das hinwiederum soll bedeuten, daß (1) seine Verknüpfung mit den beiden weiterführenden Morphismen denselben Morphismus liefert und daß (2) jeder Morphismus in die Mitte mit dieser Eigenschaft eindeutig über den ersten Morphismus faktorisiert. Die Kategorie der Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ notieren wir $\mathcal{C}/X$ oder $\mathcal{C}_{/X}$. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ mit Werten in $\mathcal{C}$ ist $\mathcal{F}(\emptyset)$ stets ein finales Objekt von $\mathcal{C}$.

Bemerkung 10.4.5. Die Kategorie der Garben von Mengen auf einem topologischen Raum X notieren wir also Ens/X oder $\mathrm{Ens}_{/X}$. Eine Garbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen nennen wir eine **abelsche Garbe**. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum X notieren wir Ab/X oder $\mathrm{Ab}_{/X}$.

Bemerkung 10.4.6. Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X und eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X liefern die für jede abelsche Prägarbe definierten Abbildungen Isomorphismen $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X; \mathcal{F})$. Das gilt sogar für eine beliebige Garbe von Gruppen und in gewisser Weise sogar von Mengen, nur haben wir in diesem Fall die fragliche Kohomologiegruppe bzw. Kohomologiemenge nicht erklärt.

Beispiel 10.4.7. Ist $p : E \to X$ eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine Garbe von Mengen $\mathcal{S} = \mathcal{S}E$ auf X durch die Vorschrift

$$\mathcal{S}(U) = \mathrm{Top}_X(U, E) = \{s : U \to E \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \ \forall x \in U\}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir nennen sie die **Garbe der Schnitte von** p und erhalten so einen Funktor von der Kategorie der Räume über unserem Raum in die Kategorie der Garben von Mengen auf unserem Raum

$$\mathcal{S} : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{Ens}_{/X}$$

Beispiel 10.4.8. Die Prägarben G_X für eine (diskrete) Gruppe G oder allgemeiner $\mathcal{C}_{G,X}$ für eine topologische Gruppe G sind Garben von Gruppen.

Beispiel 10.4.9. Unsere Prägarben von differenzierbaren Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit und unsere Wolkenkratzer sind Garben.

Beispiel 10.4.10. Sei A eine nichttriviale Gruppe. Die Prägarbe, die jeder offenen Teilmenge von X einfach die feste Gruppe A zuordnet, mit der Identität als Restriktion, ist keine Garbe: Der leeren Menge wird nämlich nicht die triviale Gruppe zugeordnet. Selbst wenn wir unser Beispiel so abändern, daß wir der leeren Menge ausnahmsweise die triviale Gruppe zuordnen, ist unsere Prägarbe noch keine Garbe, wenn es nichtleere unzusammenhängende offene Teilmengen in unserem Raum gibt. Denn dann zerlegen wir diese in zwei echte disjunkte offene Teilmengen, wählen dort als Schnitte verschiedene Elemente von A und können diese Vorgabe nicht "zu einem Schnitt auf der ganzen offenen Menge zusammenkleben".

Übung 10.4.11. In der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte, und sie stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der Prägarben. (Für direkte Summen siehe **??**.)

Definition 10.4.12. Ein **étaler Raum** $E = (E, p)$ **über** X ist ein topologischer Raum E mitsamt einer étalen Abbildung $p : E \to X$. Ein **Morphismus von étalen Räumen** über X ist eine stetige Abbildung, die verträglich ist mit den Projektionen auf X.

Übung 10.4.13. Jede étale Abbildung ist offen. Insbesondere ist nach 4.1.8 jeder Morphismus von étalen Räumen offen, speziell also jeder Schnitt einer étalen Abbildung auf einer offenen Menge.

Satz 10.4.14 (Garben und ihre étalen Räume). *Der Funktor $\mathcal{S}$, der jedem Raum über X die Garbe seiner Schnitte zuordnet, definiert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathcal{S} \;:\; \left\{ \begin{array}{c} \textit{étale Räume} \\ \textit{über } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Garben von Mengen} \\ \textit{auf } X \end{array} \right\}$$

Beispiele 10.4.15. Der étale Raum der Garbe G_X ist $G \times X$. Der étale Raum des Wolkenkratzers auf der reellen Gerade mit Faser $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ am Nullpunkt $X = \mathbb{R}$ ist unsere reelle Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes wird den Rest dieses Abschnitts strukturieren. Genauer konstruieren wir in 10.4.17 einen Funktor ét sogar von Prägarben auf X zu topologischen Räumen über X, erhalten aus 10.4.20 eine Adjunktion (ét, $\mathcal{S}$), weisen in 10.4.21 nach, daß ét bereits in den étalen

Räumen über X landet und zeigen schließlich in 10.4.22 und 10.4.24, daß unser adjungiertes Paar, wenn wir es einschränken von beliebigen Räumen über X auf étale Räume und von beliebigen Prägarben auf X auf Garben, das Kriterium 4.9.9 für ein Paar adjungierter Äquivalenzen von Kategorien erfüllt. □

Definition 10.4.16. Gegeben ein Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf einem topologischen Raum X definieren wir ihren **Halm** $\mathcal{F}_x$ an der Stelle $x \in X$ als den Limes

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

wo unser Limes wie angedeutet über alle offenen Umgebungen $U \Subset X$ von x laufen soll. Gegeben $x \in U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ einen Schnitt bezeichnen wir mit $s_x \in \mathcal{F}_x$ sein Bild im Halm.

Definition 10.4.17. Gegeben ein Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf einem topologischen Raum X definieren wir ihren **étalen Raum**, notiert $\mathrm{ét}(\mathcal{F})$ oder kürzer $\bar{\mathcal{F}}$, als die disjunkte Vereinigung der Halme

$$\bar{\mathcal{F}} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mitsamt der natürlichen Projektion $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$. Gegeben $U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ definieren wir einen Schnitt $\tilde{s} : U \to \bar{\mathcal{F}}$ durch $\tilde{s}(x) = s_x$. Wir versehen $\bar{\mathcal{F}}$ mit der Finaltopologie in Bezug auf die Familie aller dieser Abbildungen $\tilde{s}$. Bezeichnet $\mathrm{pEns}_{/X}$ die Kategorie der Prägarben von Mengen auf X, so erhalten wir auf diese Weise einen Funktor

$$\mathrm{ét} : \mathrm{pEns}_{/X} \to \mathrm{Top}_X$$

Bemerkung 10.4.18. Wir werden in 10.4.21 zeigen, daß in der Situation der vorhergehenden Definition die Abbildung $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ stets étale ist, und so die Bezeichnung von $\bar{\mathcal{F}}$ als étalen Raum rechtfertigen.

Bemerkung 10.4.19. Gegeben $E \in \mathrm{Top}_X$ liefert das Auswerten von Schnitten eine stetige Abbildung $\mathrm{ét}(\mathcal{S}E) \to E$ über X. Gegeben $\mathcal{F} \in \mathrm{pEns}_{/X}$ liefert umgekehrt $s \mapsto \tilde{s}$ einen Homomorphismus von Prägarben $\mathcal{F} \to \mathcal{S}(\mathrm{ét}\,\mathcal{F})$.

Proposition 10.4.20. *Gegeben ein topologischer Raum X liefern die Morphismen der vorhergehenden Bemerkung 10.4.19 im Sinne von 4.9.8 eine Adjunktion* $(\mathrm{ét}, \mathcal{S})$ *zwischen den Funktoren* $\mathrm{ét} : \mathrm{pEns}_{/X} \to \mathrm{Top}_X$ *und* $\mathcal{S} : \mathrm{Top}_X \to \mathrm{pEns}_{/X}$.

Beweis. Es gilt nach 4.9.8, für jede Prägarbe $\mathcal{F}$ von Mengen auf X und jeden topologischen Raum E über X zu zeigen, daß im Viereck

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Top}_X(\text{ét}\,\mathcal{F}, E) & \rightarrow & \mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F}), \mathcal{S}E) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathrm{Top}_X(\text{ét}\,\mathcal{F}, \text{ét}(\mathcal{S}E)) & \leftarrow & \mathrm{pEns}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{S}E) \end{array}$$

einmal im Kreis herumgehen die Identität induziert auf der oberen linken und der unteren rechten Ecke. Die restlichen Details dieses Beweises überlassen wir dem Leser. □

Lemma 10.4.21. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem Raum X.*

1. *Die $\tilde{s}(U)$ mit $U \Subset X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ bilden eine Basis für die Topologie des étalen Raums von $\mathcal{F}$.*

2. *Die Projektion $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ist étale.*

3. *Ein Schnitt über $V \Subset X$ in $\bar{\mathcal{F}}$ ist stetig genau dann, wenn jedes $x \in V$ eine offene Umgebung $U \Subset V$ besitzt derart, daß unser Schnitt auf dieser Umgebung U übereinstimmt mit einem $\tilde{s}$ für geeignetes $s \in \mathcal{F}(U)$.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, daß alle $\tilde{s}(U)$ offen sind in $\bar{\mathcal{F}}$. Dazu gilt es nachzuweisen, daß $W = \tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U))$ offen ist in V, für alle $V \Subset X$ und $t \in \mathcal{F}(V)$. Aber wir haben ja

$$\tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U)) = \{x \in U \cap V \mid s_x = t_x\},$$

und da aus $s_x = t_x$ folgt $s|_O = t|_O$ für eine hinreichend kleine offene Umgebung O von x, ist $\tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U))$ in der Tat stets offen in V und damit $\tilde{s}(U)$ offen in $\bar{\mathcal{F}}$. Damit gilt insbesondere $\tilde{t}(W) = \tilde{s}(U) \cap \tilde{t}(V)$ für $W = \tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U)) \Subset X$, folglich bilden unsere $\tilde{s}(U)$ ein System von offenen Mengen, das stabil ist unter endlichen Schnitten. Daß sich schließlich jede offene Menge als Vereinigung von solchen $\tilde{s}(U)$ schreiben läßt, folgt aus der Definition der Finaltopologie.

2. Der zweite Teil des Lemmas folgt sofort aus dem ersten.

3. Für den dritten Teil bemerken wir, daß offensichtlich jeder Schnitt mit besagter Eigenschaft stetig ist. Ist umgekehrt $t : V \to \bar{\mathcal{F}}$ ein Schnitt und ist $x \in V$ gegeben, so hat $t(x) \in \mathcal{F}_x$ die Gestalt $t(x) = s_x$ für geeignetes $s \in \mathcal{F}(W)$ und $W \Subset V$ eine Umgebung von x. Ist t stetig, so folgt $U = t^{-1}(\tilde{s}(W)) \Subset V$, und das ist die gesuchte offene Umgebung von x mit $t|_U = \tilde{s}$ für $s = s|_U$. □

Lemma 10.4.22. *Ist $p : E \to X$ étale, so ist die Adjunktionsabbildung ein Isomorphismus* $\text{ét}(\mathcal{S}E) \xrightarrow{\sim} E$.

Beweis. Nach 10.4.21 ist die linke Seite auch étale über X. Nach 10.4.13 reicht es also zu zeigen, daß unsere Adjunktionsabbildung bijektiv ist, d.h. daß sie Bijektionen auf allen Halmen induziert. Da p étale ist, gibt es für jedes $e \in E$ eine offene Umgebung U von $x = p(e)$ und einen Schnitt $s : U \to E$ mit $s(x) = e$. Also ist unsere Abbildung auf den Halmen surjektiv. Ist $V \Subset X$ eine weitere offene Umgebung von $p(e)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ ein weiterer Schnitt mit $t(x) = e$, so stimmen s und t notwendig überein auf der nach 10.4.13 offenen Umgebung $W = p(s(U) \cap t(V))$ von x in X. Also ist unsere Abbildung auf den Halmen auch injektiv. □

Lemma 10.4.23. 1. *Stimmen zwei Schnitte einer Garbe auf allen Halmen überein, so sind sie gleich.*

2. *Induziert ein Morphismus von Garben Bijektionen auf allen Halmen, so ist er ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Herleitung der ersten Aussage bleibt dem Leser überlassen. Für den Nachweis der zweiten Aussage sei $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ unser Morphismus. Aus 1 folgt, daß für alle $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv ist. Wir müssen zeigen, daß diese Abbildungen auch surjektiv sind. Gegeben $s \in \mathcal{G}(U)$ gibt es jedoch für alle $x \in U$ ein $t_x \in \mathcal{F}_x$ mit $t_x \mapsto s_x$. Dies t_x ist der Halm eines Schnitts $t_{(x)} \in \mathcal{F}(U(x))$ für eine geeignete offene Umgebung $U(x) \Subset U$ von x, und wenn wir $U(x)$ hinreichend klein wählen, dürfen wir annehmen $t_{(x)}|_{U(x)} \mapsto s|_{U(x)}$. Dann aber erfüllen die $t_{(x)}$ aber die Verklebungsbedingung und verkleben zu einem Schnitt $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $t \mapsto s$. □

Lemma 10.4.24. *Für jede Garbe $\mathcal{F}$ liefert die Adjunktion einen Isomorphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})$.*

Beweis. Nach 10.4.23 müssen wir nur zeigen, daß unser Morphismus auf allen Halmen Bijektionen induziert oder gleichbedeutend, daß er unter ét eine Bijektion liefert. Nach unseren allgemeinen Erkenntnissen über adjungierte Funktoren 4.9.8 faktorisiert jedoch die Identität auf $\text{ét}\,\mathcal{F}$ in kanonischer Weise als $\text{ét}\,\mathcal{F} \to \text{ét}(\mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{F})) \to \text{ét}\,\mathcal{F}$, und nach 10.4.22 angewandt auf $E = \text{ét}\,\mathcal{F}$ ist hier die zweite Abbildung ein Isomorphimus. Dasselbe gilt dann auch für die erste Abbildung und das Lemma folgt. □

Übung 10.4.25. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Der Halmfunktor $\text{Ab}_{/X} \to \text{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ hat als Rechtsadjungierten den Wolkenkratzerfunktor $A \mapsto A_x$.

Bemerkung 10.4.26. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe von Funktionen auf X, zum Beispiel die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so nennt man die Elemente der Halme $\mathcal{F}_x$ meist **Funktionskeime**, in unserem Beispielfall also "Keime differenzierbarer Funktionen an der Stelle x".

Bemerkung 10.4.27. Der étale Raum der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist nicht Hausdorff: Die Nullfunktion und die Funktion $x \mapsto \sup\{x, 0\}$ haben verschiedene Keime an der Stelle Null, aber dieselben Keime an allen echt negativen Stellen. Die beiden Keime an der Stelle Null lassen sich also nicht durch offene Umgebungen im étalen Raum trennen.

Bemerkung 10.4.28. Der étale Raum $\text{ét}\,\mathcal{O}$ der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ ist Hausdorff aufgrund der Eindeutigkeit der lokalen analytischen Fortsetzung. Die Zusammenhangskomponente eines holomorphen Funktionskeims $f \in \text{ét}\,\mathcal{O}$ erhält vermittels der lokalen Homöomorphismen mit $\mathbb{C}$ in natürlicher Weise die Struktur einer Riemann'schen Fläche, der **Riemann'sche Fläche des Funktionskeims f**. Zum Beispiel erhalten wir als Riemannsche Fläche der n-ten Wurzel eine zusammenhängende n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{C}^\times$.

Definition 10.4.29. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Mengen auf einem Raum X und $p : \bar{\mathcal{F}} \to X$ ihr étaler Raum. Gegeben eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ definieren wir die Garbe $\mathcal{F}|_A$ auf dem Raum A als die Garbe zum étalen Raum $p^{-1}(A) \to A$ und nennen sie die **Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf** A. Weiter setzen wir

$$\mathcal{F}(A) = \Gamma(A; \mathcal{F}) = \{s : A \to \bar{\mathcal{F}} \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \ \forall x \in A\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **Schnitte von $\mathcal{F}$ über** A. Per definitionem haben wir zum Beispiel $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$ für alle $x \in X$.

Bemerkung 10.4.30. Im Gegensatz zu Prägarben können wir also bei Garben Schnitte über beliebigen (nicht notwendig offenen) Mengen betrachten. Die Schnitte einer Garbe über dem ganzen Raum nennen wir auch die **globalen Schnitte von $\mathcal{F}$** und notieren sie

$$\mathcal{F}(X) = \Gamma(X; \mathcal{F}) = \Gamma\mathcal{F}$$

10.5 Pfeilexakte Kategorien

Definition 10.5.1. Ein Objekt einer Kategorie heißt ein **Nullobjekt** genau dann, wenn es final und kofinal ist. Existiert ein Nullobjekt, so ist es eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphimus. Wir sprechen deshalb meist von **dem** Nullobjekt und notieren es 0. Gegeben zwei Objekte A, B in einer Kategorie mit Nullobjekt nennen wir den Morphismus $A \to B$, der über das Nullobjekt faktorisiert, den **Nullmorphismus** und notieren ihn $0 : A \to B$.

Definition 10.5.2. Sei $f : B \to C$ ein Morphismus in einer Kategorie mit Nullobjekt.

1. Ein **Kern** von f ist ein Morphismus $i : (\ker f) \to B$ mit $fi = 0$ derart, daß jeder Morphismus $g : A \to B$ mit $fg = 0$ eindeutig faktorisiert über i, als da heißt, es gibt genau einen Morphismus $\tilde{g} : A \to (\ker f)$ mit $g = i\tilde{g}$.

2. Ein **Kokern** von f ist dual ein Morphismus $p : C \to (\operatorname{cok} f)$ mit $pf = 0$ derart, daß jeder Morphismus $g : C \to D$ mit $gf = 0$ eindeutig faktorisiert über $p : B \to (\operatorname{cok} f)$.

3. Einen Kokern eines Kerns von f nennen wir auch ein **Bild** von f und notieren es $B \to (\operatorname{im} f)$.

4. Einen Kern eines Kokerns von f nennen wir dual ein **Kobild** von f und notieren es $(\operatorname{coim} f) \to C$.

Bemerkung 10.5.3. Per definitionem sind Kerne und Kokerne und ebenso Bilder und Kobilder eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie existieren. Wir sprechen deshalb meist von *dem* Kern, *dem* Kokern etc.

Definition 10.5.4.

1. Ein Morphismus $g : B \to C$ in einer Kategorie heißt ein **Monomorphismus** oder **Mono** und als Adjektiv **mono** genau dann, wenn für zwei beliebige Morphismen $f, f' : A \to B$ aus $gf = gf'$ schon folgt $f = f'$. Wir notieren Monomorphismen oft $\hookrightarrow$.

2. Ein Morphismus $g : B \to C$ in einer Kategorie heißt ein **Epimorphismus** oder **Epi** und als Adjektiv **epi** genau dann, wenn für zwei beliebige Morphismen $h, h' : C \to D$ aus $hg = h'g$ schon folgt $h = h'$. Wir notieren Epimorphismen oft $\twoheadrightarrow$.

Übung 10.5.5. Die Verknüpfung von zwei Monos ist mono. Ist eine Verknüpfung hg mono, so auch g. Die Verknüpfung von zwei Epis ist epi. Ist eine Verknüpfung gf epi, so auch g.

Übung 10.5.6. In einer Kategorie mit Nullobjekt zeige man die folgenden Aussagen und formuliere ihre Dualen: (1) Der Kern eines Nullmorphismus ist die Identität auf dem Ausgangsobjekt. Ein Morphismus mit Kern 0 induziert einen Isomorphismus auf sein Bild. (2) Besitzt $f : A \to B$ einen Kern und ist $g : B \to C$ ein Mono, so haben wir $\ker f = \ker gf$. (3) Gegeben ein kartesisches Diagramm ist jeder Kern eines Morphismus im Diagramm auch ein Kern des gegenüberliegenden Morphismus.

Bemerkung 10.5.7. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt. Per definitionem sind Kerne stets Monos und Kokerne stets Epis. Für jeden Morphismus $f : B \to C$ mit Kern, Bild, Kokern und Kobild gibt es genau einen Morphismus $f' : \operatorname{im} f \to \operatorname{coim} f$, mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f \\ & & \downarrow & & \downarrow f' \\ \operatorname{cok} f & \twoheadleftarrow & C & \hookleftarrow & \operatorname{coim} f \end{array}$$

Definition 10.5.8. Eine Kategorie heißt **pfeilexakt** genau dann, wenn sie (1) ein Nullobjekt besitzt, wenn (2) jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat und wenn zusätzlich (3) für jeden Morphismus f der induzierte Morphismus $\operatorname{im} f \to \operatorname{coim} f$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 10.5.9. Die opponierte Kategorie einer pfeilexakten Kategorie ist offensichtlich auch eine pfeilexakte Kategorie.

Bemerkung 10.5.10. Iversen [Ive87] nennt unsere pfeilexakten Kategorien kürzer exakt und übernimmt damit in etwa die Terminologie von Buchsbaum [Buc55], der allerdings von seinen exakten Kategorien etwas mehr fordert als Iversen. In der Literatur versteht man unter einer exakten Kategorie inzwischen fast immer abweichend davon eine exakte Kategorie im Sinne von Quillen [Qui73]. Die Terminologie "pfeilexakt" führe ich ein, um diese Inkonsistenzen aufzulösen.

Übung 10.5.11. In einer pfeilexakten Kategorie zeige man die folgenden Aussagen. (1) Für einen Morphismus $f : A \to B$ sind gleichbedeutend: (a) f ist epi, (b) $\operatorname{cok} f = 0$ und (c) $\operatorname{im} f \xrightarrow{\sim} B$. Man formuliere auch die duale Aussage. (2) Genau dann ist ein Morphismus ein Isomorphismus, wenn er mono und epi ist. (3) Ist $A \twoheadrightarrow B \hookrightarrow C$ eine Komposition eines Epi mit einem Mono, so ist B das Bild dieser Verknüpfung.

Definition 10.5.12. Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ in einer pfeilexakten Kategorie heißt **exakt** genau dann, wenn gilt $gf = 0$ und wenn zusätzlich die induzierte Abbildung $\operatorname{im} f \to \ker g$ ein Isomorphismus ist. Sie heißt eine **kurze exakte Sequenz** genau dann, wenn zusätzlich f mono ist und g epi. Eine längere Sequenz heißt exakt genau dann, wenn sie exakt ist an jeder Stelle.

Bemerkung 10.5.13. Eine exakte Sequenz ist offensichtlich auch exakt in der opponierten Kategorie. Wir werden in 12.1 in beliebigen pfeilexakten Kategorien zu jeder kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen die lange exakte Homologiesequenz herleiten.

Übung 10.5.14. Eine Sequenz $\ldots \to A^{q-1} \to A^q \to A^{q+1} \to \ldots$ in einer pfeilexakten Kategorie ist exakt genau dann, wenn für die Faktorisierungen $A^{n-1} \twoheadrightarrow K^q \hookrightarrow A^q$ in einen Epi gefolgt von einem Mono die offensichtlichen Sequenzen $K^q \hookrightarrow A^q \twoheadrightarrow K^{q+1}$ für alle q kurz exakt sind.

Übung 10.5.15. Eine **absteigende Filtrierung** F auf einem Vektorraum V ist eine Folge von Teilräumen

$$\ldots \supset F^{\geq n}V \supset F^{\geq n+1}V \supset \ldots$$

mit $n \in \mathbb{Z}$. Wir machen die filtrierten Vektorräume zu einer Kategorie, indem wir die filtrierungserhaltenden linearen Abbildungen als Morphismen nehmen. Man zeige, daß es in dieser Kategorie Kerne und Kokerne gibt, daß aber die kanonische Abbildung $\operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ kein Isomorphismus sein muß.

Bemerkung 10.5.16. Ist diese Abbildung doch ein Isomorphismus, so heißt f **strikt verträglich mit den Filtrierungen**.

Beispiele 10.5.17. Die Kategorie aller abelschen Gruppen ist pfeilexakt. Die Kategorie aller Gruppen besitzt zwar ein Nullobjekt und zu jedem Morphismus Kern und Kokern, ist jedoch nicht pfeilexakt. Die Kategorie aller Moduln über einem festen Grundring ist pfeilexakt.

Beispiel 10.5.18. Die Kategorie aller Komplexe von abelschen Gruppen ist pfeilexakt und unsere kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen aus 5.7.2 sind genau die kurzen exakten Sequenzen in unserem hier rein kategorientheoretisch definierten Sinne. Ähnliches gilt für die Kategorie aller gerichteten Systeme von abelschen Gruppen über einer vorgegebenen partiell geordneten Indexmenge.

Beispiel 10.5.19. Allgemeiner ist die Kategorie aller Komplexe in einer pfeilexakten Kategorie bzw. die Kategorie aller gerichteten Systeme in einer pfeilexakten Kategorie über einer vorgegebenen partiell geordneten Indexmenge wieder eine pfeilexakte Kategorie. Ganz allgemeinen ist für jede kleine Kategorie I die Kategorie aller Funktoren von I in eine pfeilexakte Kategorie mit natürlichen Transformationen als Morphismen wieder eine pfeilexakte Kategorie.

Beispiel 10.5.20. Insbesondere bilden die abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum eine pfeilexakte Kategorie: Nullobjekt ist Prägarbe, die jeder offenen Menge die triviale Gruppe zuordnet und der Kern bzw. Kokern eines Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ werden gegeben durch

$$\begin{array}{rcll} (\ker f)(U) & = & \ker(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) & \forall \ U \Subset X \\ (\operatorname{cok} f)(U) & = & \operatorname{cok}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)) & \forall \ U \Subset X \end{array}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Restriktionen.

Definition 10.5.21. Ein Funktor zwischen pfeilexakten Kategorien heißt **linksexakt** genau dann, wenn er Kerne zu Kernen macht; **rechtsexakt** genau dann, wenn er Kokerne zu Kokernen macht; und **exakt** genau dann, wenn er linksexakt und rechtsexakt ist.

Übung 10.5.22. Sowohl rechtsexakte als auch linksexakte Funktoren bilden das Nullobjekt stets auf das Nullobjekt ab.

Übung 10.5.23. Besitzt ein Funktor zwischen pfeilexakten Kategorien einen linksadjungierten Funktor, so ist er linksexakt. Besitzt ein Funktor zwischen pfeilexakten Kategorien einen rechtsadjungierten Funktor, so ist er rechtsexakt.

Übung 10.5.24. Besitzt ein exakter treuer Funktor L zwischen pfeilexakten Kategorien einen Rechtsadjungierten R, so sind die Adjunktionsabbildungen $M \to RLM$ stets Monomorphismen.

10.6 Kerne und Kokerne für abelsche Garben

Satz 10.6.1.
1. *Die Kategorie der abelschen Garben auf einem festen topologischen Raum ist eine pfeilexakte Kategorie.*
2. *Eine Sequenz von abelschen Garben ist exakt genau dann, wenn sie auf allen Halmen exakte Sequenzen von abelschen Gruppen induziert.*

Bemerkung 10.6.2. Der étale Raum der Bildgarbe ist also genau das mengentheoretische Bild der auf den étalen Räumen induzierten Abbildung.

Beweis. Sicher besitzt unsere Kategorie ein Nullobjekt. Offensichtlich ist der Prägarbenkern eines Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von abelschen Garben schon selbst eine Garbe und sogar ein Kern von f in der Kategorie der abelschen Garben. Mit der Exaktheit des direkten Limes folgern wir aus dieser Beschreibung, daß für alle $x \in X$ die Sequenz von Halmen

$$0 \to (\ker f)_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

exakt ist. Um Kokerne zu konstruieren, müssen wir mehr arbeiten.

Definition 10.6.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Prägarbe von Mengen auf einem topologischen Raum X. Wir schreiben $\mathcal{S}(\text{ét}\,\mathcal{C}) = \mathcal{C}^+$ für die Garbe der Schnitte in den etalen Raum der Prägarbe $\mathcal{C}$ und nennen $\mathcal{C}^+$ die **Garbifizierung von** $\mathcal{C}$. Die Adjunktion 10.4.20 liefert uns einen kanonischen Morphismus von Prägarben

$$\text{can} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^+$$

der Bijektionen auf allen Halmen induziert und der für jede Garbe $\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.

Lemma 10.6.4. *Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von einer Prägarbe in eine Garbe. So gibt es genau einen Morphismus $\tilde{f} : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ mit $\tilde{f} \circ \mathrm{can} = f$.*

Beweis. Die Existenz folgt aus der Funktorialität der Garbifizierung, wir haben genauer ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\
{\scriptstyle \mathrm{can}}\downarrow & & \wr\downarrow{\scriptstyle \mathrm{can}} \\
\mathcal{F}^+ & \xrightarrow{f^+} & \mathcal{G}^+
\end{array}$$

mit $f^+ = \mathcal{S}(\text{ét}\, f)$. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß ein Garbenhomomorphismus durch seinen Effekt auf den Halmen schon eindeutig festgelegt ist. □

Übung 10.6.5. Ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Prägarbe, so ist die Garbifizierung $\mathcal{F}^+$ in natürlicher Weise eine abelsche Garbe und die kanonische Abbildung ein Morphismus von abelschen Prägarben. Das Lemma gilt auch in dieser Situation mit demselben Beweis.

Wir kehren nun zum Beweis unseres Satzes zurück. Der Kokern in der Kategorie der abelschen Prägarben eines Morphismus von abelschen Garben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist zwar im allgemeinen keine Garbe, aber seine Garbifizierung

$$\operatorname{cok} f = (\text{Prägarbenkokern von } f)^+$$

ist ein Kokern von f in der Kategorie der abelschen Garben aufgrund der universellen Eigenschaft der Garbifizierung 10.6.4, 10.6.5. Da die Garbifizierung die Halme nicht ändert, folgt aus der Exaktheit des direkten Limes wieder, daß für alle $x \in X$ die Sequenz von Halmen

$$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to (\operatorname{cok} f)_x \to 0$$

exakt ist. Wir folgern insbesondere, daß die kanonische Abbildung

$$\operatorname{im} f \to \operatorname{coim} f$$

auf allen Halmen Isomorphismen induziert. Dann ist sie aber nach 10.4.23 schon ein Isomorphismus und der erste Teil des Satzes folgt. Für einen Garbenhomomorphismus wissen wir bereits, daß der Halm des Kerns der Kern der auf den Halmen induzierten Abbildung ist, und desgleichen für den Kokern. Damit folgt, daß eine exakte Sequenz von abelschen Garben auch exakte Sequenzen auf allen Halmen liefert. Ist umgekehrt $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ exakt auf allen Halmen, so ist die Verknüpfung Null nach 10.4.23 und die damit definierte kanonische Abbildung vom Bild des ersten Morphismus in den Kern des zweiten ist ein Isomorphismus nach 10.4.23. □

Übung 10.6.6. Das Bilden der globalen Schnitte ist ein linksexakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben (auf einem gegebenen Raum) in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Übung 10.6.7. Das Bilden des Halms an einem Punkt ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben (auf einem gegebenen Raum) in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Übung 10.6.8. Die Garbifizierung ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Prägarben in die Kategorie der abelschen Garben.

Übung 10.6.9. In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren direkte Limites, und der Halm eines direkten Limes ist der direkte Limes der Halme.

10.7 Definition der Garbenkohomologie

Bemerkung 10.7.1. Die gleich folgende Definition der Garbenkohomologie scheint mir verheerend unanschaulich. Leider kenne ich keine anschauliche Definition dieses Konzeptes. Anstelle von Anschaulichkeit hat die Garbenkohomologie jedoch sehr gute formelle Eigenschaften zu bieten, die es ermöglichen, sie in vielen Anwendungen zu identifizieren mit technisch im allgemeinen weniger gutartigen aber dafür anschaulicheren oder gut berechenbaren Theorien wie der singulären Kohomologietheorie, der Čech-Kohomologie oder der de-Rham-Kohomologie. In typischen Anwendungen kann man die Garbenkohomologie sogar mit mehreren derartigen Theorien identifizieren und so bemerkenswerte Identitäten wie zum Beispiel den "Satz von de Rham" erhalten.

Definition 10.7.2. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem Raum X.

1. Die **Garbe der unstetigen Schnitte von** $\mathcal{F}$ ist die Garbe $\mathcal{GF}$, die gegeben wird durch die Vorschrift
$$(\mathcal{GF})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$
für alle $U \Subset X$, mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir haben eine kanonische Injektion $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{GF}$ gegeben durch $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$ für $s \in \mathcal{F}(U)$.

2. Die **Godement-Auflösung** von $\mathcal{F}$ ist der exakte Komplex von abelschen Garben
$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0\mathcal{F} \to \mathcal{G}^1\mathcal{F} \to \dots$$

den wir nach 10.5.14 erhalten durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}^0\mathcal{F} & = & \mathcal{G}\mathcal{F} \\ \mathcal{G}^1\mathcal{F} & = & \mathcal{G}(\mathrm{cok}(\mathcal{F} \to \mathcal{G}\mathcal{F})) \text{ und dann induktiv} \\ \mathcal{G}^i\mathcal{F} & = & \mathcal{G}(\mathrm{cok}(\mathcal{G}^{i-2}\mathcal{F} \to \mathcal{G}^{i-1}\mathcal{F})) \text{ für } i \geq 2. \end{array}$$

3. Die **q-te Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in** $\mathcal{F}$ ist die abelsche Gruppe $H^q(X;\mathcal{F})$, die wir erhalten als die q-te Kohomologiegruppe des Komplexes $\ldots \to 0 \to \Gamma\mathcal{G}^0\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{G}^1\mathcal{F} \to \ldots$ der globalen Schnitte der Godement-Auflösung von $\mathcal{F}$, in Formeln

$$H^q(X;\mathcal{F}) = H^q(\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F})$$

4. Jeder Morphismus von abelschen Garben $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ liefert in offensichtlicher Weise einen Morphismus $\mathcal{G}\mathcal{F} \to \mathcal{G}\mathcal{F}'$ zwischen den Garben der unstetigen Schnitte, dann induktiv einen Morphismus von Komplexen von Garben $\mathcal{G}^*\mathcal{F} \to \mathcal{G}^*\mathcal{F}'$, dann eine Kettenabbildung $\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F}'$ und so schließlich Abbildungen zwischen den Kohomologiegruppen. Auf diese Weise wird die q-te Kohomologie ein Funktor von den abelschen Garben auf X in die abelschen Gruppen

$$H^q = H^q(X;\ ) : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$$

Bemerkung 10.7.3. Natürlich haben wir $H^q(X;\mathcal{F}) = 0$ für $q < 0$ und die exakte Sequenz $0 \to \Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{G}^0\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{G}^1\mathcal{F}$ nach 10.6.6 liefert einen kanonischen Isomorphismus

$$\Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H^0(X;\mathcal{F})$$

Bemerkung 10.7.4. Wie bereits erwähnt habe ich für die Bedeutung dieser Definition im Fall $q > 0$ keinerlei Anschauung. Wir werden jedoch für einen "parakompakten" und lokal zusammenziehbaren Raum in 11.5.3 natürliche Isomorphismen zwischen der singulären Kohomologie von X mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe G und der Garbenkohomologie von X mit Koeffizienten in der konstanten Garbe G_X herleiten, in Formeln

$$H^q_{\mathrm{sing}}(X;G) \cong H^q(X;G_X)$$

Weiter hoffe ich, Sie davon zu überzeugen, daß unsere Garbenkohomologie im allgemeinen ein sehr viel stärkeres und flexibleres Werkzeug ist als die singuläre Kohomologie.

Übung 10.7.5. Man gebe solche Isomorphismen an im Fall $q = 0$. Hierfür reicht die Annahme, daß X lokal wegzusammenhängend ist.

Bemerkung 10.7.6. Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $A \subset X$ eine Teilmenge, so kürzen wir ab $H^q(A; \mathcal{F}|_A) = H^q(A; \mathcal{F})$.

Proposition 10.7.7. *Ist $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ eine exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X, so sind die auf den Garben der Godement-Auflösungen induzierten Sequenzen sogar exakte Sequenzen in der Kategorie der abelschen Prägarben*

$$\mathcal{G}^i\mathcal{F}' \to \mathcal{G}^i\mathcal{F} \to \mathcal{G}^i\mathcal{F}''$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer kurzen exakten Sequenz $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ ausgehen. Ergänzen wir sie zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}' & \hookrightarrow & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}'' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G}\mathcal{F}' & \to & \mathcal{G}\mathcal{F} & \to & \mathcal{G}\mathcal{F}'' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{K}' & \to & \mathcal{K} & \to & \mathcal{K}''
\end{array}$$

mit exakten Vertikalen, so ist die mittlere Horizontale exakt als Sequenz von Prägarben nach Konstruktion. Dann ist sie erst recht exakt als Sequenz von Garben und das Neunerlemma angewandt auf die Halme zeigt, daß auch die unterste Zeile exakt ist auf den Halmen, also exakt ist als Sequenz von Garben. Die Proposition folgt durch Induktion. □

Definition 10.7.8. Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X. Nach 10.7.7 führt sie zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen von abelschen Gruppen

$$\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F}' \hookrightarrow \Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F}''$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz hat die Gestalt

$$H^0(X; \mathcal{F}') \hookrightarrow H^0(X; \mathcal{F}) \to H^0(X; \mathcal{F}'') \to H^1(X; \mathcal{F}') \to H^1(X; \mathcal{F}) \to \dots$$

und heißt die zur kurzen exakten Sequenz von Garben $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ gehörige **lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie**.

Übung 10.7.9. In der Kategorie der Prägarben über einem gegebenen Raum konstruiert man leicht beliebige Produkte, und dieselbe Konstruktion liefert auch Produkte in der Kategorie der Garben. Diese Produkte vertauschen mit dem Bilden der globalen Schnitte, aber ein Produkt von Epimorphismen von Garben muß nicht notwendig wieder ein Epimorphismus sein. Deshalb vertauscht das Bilden von Produkten von Garben im allgemeinen *nicht* mit dem Bilden der höheren Kohomologiegruppen.

Bemerkung 10.7.10. Die Halme der Garbe der unstetigen Schnitte einer Garbe sind im allgemeinen viel größer als die Halme der ursprünglichen Garbe.

10.8 Welke Garben

Definition 10.8.1. Eine Garbe heißt **welk** (englisch **flabby**, französisch **flasque**) genau dann, wenn sich jeder Schnitt auf einer offenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Definition 10.8.2. Eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt **azyklisch** oder genauer **Γ-azyklisch** genau dann, wenn alle ihre höheren Kohomologiegruppen verschwinden, wenn also in Formeln gilt $H^q(X;\mathcal{F}) = 0$ für $q > 0$.

Satz 10.8.3. *Alle welken abelschen Garben sind azyklisch.*

Bemerkung 10.8.4. Wir zeigen das im Anschluß an das folgende Lemma.

Lemma 10.8.5. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ welk, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten.*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ welk, so ist auch $\mathcal{F}''$ welk.*

Beweis. 1. Sei $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$ ein globaler Schnitt. Wir betrachten die Menge aller Paare (U, s_U) mit $U \circeq X$ und $s_U \in \mathcal{F}(U)$ einem Urbild von $s''|_U$. Diese Menge ist in natürlicher Weise induktiv geordnet und besitzt nach Zorn ein maximales Element. Wäre nun (U, s_U) so ein maximales Element und wäre $U \neq X$, so fänden wir $x \in X \backslash U$ und aufgrund der Surjektivität $\mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \mathcal{F}''_x$ eine offene Umgebung V von x sowie $s_V \in \mathcal{F}(V)$ mit $s_V \mapsto s''|_V$. Es folgte

$$s_V|_{U\cap V} - s_U|_{U\cap V} \in \mathcal{F}'(U \cap V)$$

und setzen wir diese Differenz fort zu einem Schnitt $t_V \in \mathcal{F}'(V)$ über V der welken Garbe $\mathcal{F}'$, so stimmen $(s_V - t_V)$ und s_U überein auf $U \cap V$ und verkleben folglich zu einem Urbild von s'' auf $U \cup V$, das s_U fortsetzt. Das steht jedoch im Widerspruch zur Maximalität von (U, s_U) und es war doch $U = X$. 2 folgt aus 1, da die Restriktionen welker Garben auf offene Teilmengen wieder welk sind. □

Beweis von 10.8.3. Die Garbe $\mathcal{G}\mathcal{F}$ der unstetigen Schnitte in eine Garbe $\mathcal{F}$ ist stets welk. Zerlegen wir die Godement-Auflösung unserer Garbe in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{G}^0\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^1 & & & & & & \\
 & & & & \mathcal{K}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{G}^1\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^2 & & & & \\
 & & & & & & & & \mathcal{K}^2 & \hookrightarrow & \mathcal{G}^2\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^3 \\
 & & & & & & & & & & & & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
\end{array}$$

so erkennen wir mit dem Lemma, daß für welkes $\mathcal{F}$ alle Garben in diesen kurzen exakten Sequenzen welk sind, so daß alle unsere Sequenzen kurz exakt bleiben unter Γ. Das zeigt aber, daß der Komplex $0 \to \Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{G}^0\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{G}^1\mathcal{F} \to \ldots$ exakt ist. □

10.9 Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie

Theorem 10.9.1. *Gegeben eine abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X haben wir einen natürlichen Isomorphismus zwischen ihrer ersten Čech-Kohomologie und ihrer ersten Garbenkohomologie, in Formeln*

$$\check{H}^1(X;\mathcal{F}) \cong H^1(X;\mathcal{F})$$

Bemerkung 10.9.2. Dieses Theorem soll untere anderem dazu beitragen, unsere Anschauung von der durch 10.1.25 bereits mit Anschauung gefüllten Čech-Kohomologie auf die von ihrer Definition her in meinen Augen völlig unanschauliche Garbenkohomologie zu übertragen. In [?] wird gezeigt, daß die Čech-Kohomologie und die Garbenkohomologie auf "parakompakten" Räumen sogar in allen Graden übereinstimmen.

Beweis. Bezeichne $\mathcal{C}$ den *Prä*garbenkokern von $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$ und $\mathcal{C}^+$ seine Garbifizierung. Wir haben also eine kurze exakte Sequenz von *Prä*garben $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$ und eine kurze exakte Sequenz von Garben $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{C}^+$. Wir haben $\check{H}^1(X;\mathcal{G}\mathcal{F}) = 0$, nach 10.3.14 und 10.3.13 verschwinden für ein Produkt von Wolkenkratzergarben sogar alle höheren Čech-Kohomologiegruppen bezüglich jeder offenen Überdeckung. Des weiteren liefert eine kurze exakte Sequenz von *Prä*garben uns eine lange exakte Sequenz in der Čech-Kohomologie, zunächst bezüglich jeder offenen Überdeckung und dann auch im Limes. Das liefert Exaktheit der oberen Horizontale im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & \check{H}^0(X;\mathcal{F}) & \to & \check{H}^0(X;\mathcal{G}\mathcal{F}) & \to & \check{H}^0(X;\mathcal{C}) & \to & \check{H}^1(X;\mathcal{F}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & H^0(X;\mathcal{F}) & \to & H^0(X;\mathcal{G}\mathcal{F}) & \to & H^0(X;\mathcal{C}^+) & \to & H^1(X;\mathcal{F}) & \to & 0 \end{array}$$

Die untere Zeile ist exakt als Teil einer langen exakten Garbenkohomologie-Sequenz, es gilt nämlich $H^1(X;\mathcal{G}\mathcal{F}) = 0$ nach 10.8.3, da eine $\mathcal{G}\mathcal{F}$ stets welk ist. Nach 10.4.6 sind in unserem Diagramm die beiden linken Vertikalen Isomorphismen. Sobald wir das auch für die dritte Vertikale gezeigt haben, sind wir fertig. Das benötigt jedoch einige Vorbereitungen. Unter einer **lokalen Prägarbe** von Mengen auf einem topologischen Raum X verstehen wir eine Prägarbe von Mengen $\mathcal{C}$ derart, daß für jede Familie $\mathcal{U}$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung $V = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ die Restriktionsabbildungen eine

Injektion

$$\mathcal{C}(V) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$$

liefern. Setzen wir $\mathcal{U} = \emptyset$, so erkennen wir insbesondere, daß für eine lokale Prägarbe stets gilt $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$. Das anschließende Lemma zeigt uns nun, daß unser Prägarbenkokern $\mathcal{C}$ von $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{GF}$ eine lokale Prägarbe ist, und das nächste Lemma etabliert dann für abelsche lokale Prägarben $\mathcal{C}$ den gewünschten Isomorphismus $\check{H}^0(X;\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} H^0(X;\mathcal{C}^+)$ und beendet damit den Beweis des Satzes. □

Lemma 10.9.3. *Ist $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$ ein injektiver Homomorphismus von abelschen Garben, so ist sein Prägarbenkokern $\mathcal{C}$ eine lokale Prägarbe.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein System offener Teilmengen und $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ seine Vereinigung. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}(V) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(V) & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}(V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod \mathcal{E}(U) & \hookrightarrow & \prod \mathcal{F}(U) & \twoheadrightarrow & \prod \mathcal{C}(U) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod \mathcal{E}(U \cap U') & \hookrightarrow & \prod \mathcal{F}(U \cap U') & \twoheadrightarrow & \prod \mathcal{C}(U \cap U')
\end{array}$$

als eine kurze exakte Sequenz von (senkrechten) Kettenkomplexen und benutzen die lange exakte Homologiesequenz. □

Lemma 10.9.4. *Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}$ eine lokale abelsche Prägarbe auf X, so liefert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus zwischen der nullten Čech-Kohomologie der Prägarbe $\mathcal{C}$ und den globalen Schnitten ihrer Garbifizierung $\mathcal{C}^+$, in Formeln*

$$\check{H}^0(X;\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \Gamma\mathcal{C}^+$$

Beweis. Zunächst bemerken wir für eine lokale Prägarbe $\mathcal{C}$ und beliebige offene Teilmengen $U \subset X$ die Inklusionen $\mathcal{C}(U) \hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{C}_x$. Wir folgern Inklusionen $\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}) \hookrightarrow \Gamma\mathcal{C}^+$ und durch Übergang zum direkten Limes die Injektivität der kanonischen Abbildung. Um die Surjektivität zu zeigen, müssen wir zu jedem $s \in \Gamma\mathcal{C}^+$ ein Urbild finden. Nach 10.4.21 gibt es aber eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X und für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein $s_U \in \mathcal{C}(U)$ mit $\tilde{s}_U = s|_U$, und da $\mathcal{C}$ lokal ist haben wir $s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V}$ $\forall U, V \in \mathcal{U}$. Folglich liefern die $(s_U)_{U \in \mathcal{U}}$ ein Element in $\check{H}^0(\mathcal{U};\mathcal{C})$. Wir dürfen aber unsere Überdeckung $\mathcal{U}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit gesättigt annehmen und erhalten so in der Tat das gesuchte Urbild von s in $\check{H}^0(X;\mathcal{C})$. □

Beispiel 10.9.5. Sei X ein topologischer Raum. Die lange exakte Sequenz zur von der Exponentialabbildung induzierten kurzen exakten Garbensequenz $2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}$ liefert die obere Horizontale im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) & \to & H^2(X;2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}_X) \\ \| & & \\ \check{H}^1(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) & & \| \\ \| & & \\ \left\{\begin{array}{c}\text{komplexe Geradenbündel auf } X,\\ \text{bis auf Isomorphismus}\end{array}\right\} & & H^2(X;\mathbb{Z}_X) \end{array}$$

wo wir links die Identifikationen aus 10.9.1 und 10.2.2 benutzen und rechts durch $2\pi\,\mathrm{i}$ teilen. Das Bild eines komplexen Geradenbündels $\mathcal{L}$ unter dieser Verknüpfung heißt die **erste Chern'sche Klasse von $\mathcal{L}$** und wird bezeichnet mit

$$c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X;\mathbb{Z}_X)$$

Wir werden in 11.4.4 und 11.4.5 sehen, daß auf "parakompakten" Räumen die Gruppen $H^q(X;\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$ verschwinden für $q > 0$, so daß unser ganzes Diagramm aus Bijektionen besteht. Auf parakompakten Räumen werden demnach komplexe Geradenbündel "klassifiziert durch ihre erste Chern'sche Klasse".

11 Beispiele zur Garbenkohomologie

11.1 Ein Spektralsequenzargument

Definition 11.1.1. Ein **Doppelkomplex** $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ ist eine durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parametrisierte Familie $A^{p,q}$ von abelschen Gruppen mitsamt Gruppenhomomorphismen $\partial = \partial^p : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ und $\delta = \delta^q : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ derart, daß gilt $\partial^2 = 0$, $\delta^2 = 0$ und $\partial\delta = \delta\partial$. Gegeben ein Doppelkomplex A bilden wir einen Komplex (A_{tot}, d), seinen **Totalkomplex** durch die Vorschrift

$$A^n_{\mathrm{tot}} = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$$

mit Differential $da = \partial a + (-1)^p \delta a$ für $a \in A^{p,q}$.

Bemerkung 11.1.2. Wir denken uns p nach rechts und q nach oben aufgetragen und betrachten in unserem Doppelkomplex die **Spaltenkomplexe** $A^{p,*}$ sowie die **Zeilenkomplexe** $A^{*,q}$. Verschwinden alle $A^{p,q}$ mit $p < 0$ oder $q < 0$, so sprechen wir von einem **Doppelkomplex im ersten Quadranten**. Zu einem Doppelkomplex im ersten Quadranten erklären wir den **senkrechten Kernkomplex** $K_\uparrow$ als den Komplex der Kerne “längs der y-Achse”, in Formeln

$$K^*_\uparrow = \ker(\partial : A^{0,*} \to A^{1,*})$$

Wir haben eine offensichtliche injektive Kettenabbildung $K_\uparrow \hookrightarrow A_{\mathrm{tot}}$ vom senkrechten Kernkomplex in den Totalkomplex.

Satz 11.1.3 (Eine entartete Spektralsequenz). *Sei $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$ ein Doppelkomplex im ersten Quadranten. Sind alle seine Zeilen exakt an allen Stellen $A^{p,q}$ mit $p \neq 0$, so induziert die Kettenabbildung $K_\uparrow \hookrightarrow A_{\mathrm{tot}}$ auf der Kohomologie Isomorphismen*

$$H^n K_\uparrow \xrightarrow{\sim} H^n A_{\mathrm{tot}}$$

Beweis. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Lemma 11.1.4. *Sei gegeben ein Doppelkomplex im ersten Quadranten. Sind alle seine Zeilen exakt, so ist auch sein Totalkomplex exakt.*

Beweis. Sind nur endlich viele Zeilen unseres Doppelkomplexes von Null verschieden, so können wir vollständige Induktion anwenden. Dazu betten wir die oberste von Null verschiedene Zeile ein in den Totalkomplex. Der Kokern dieser Einbettung ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes mit exakten

Zeilen aber einer Zeile weniger. Zu der so konstruierten kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen bilden wir dann die lange exakte Homologiesequenz und unsere Induktion läuft. Haben wir einen beliebigen Doppelkomplex im ersten Quadranten vor uns, so stimmt sein Totalkomplex bis zum Grad n überein mit dem Totalkomplex zum Doppelkomplex der untersten n Zeilen, also können wir uns auf den bereits behandelten Fall zurückziehen. □

Jetzt folgern wir den Satz. Der Kokern der Einbettung $K_\uparrow \hookrightarrow A_{\mathrm{tot}}$ ist nämlich der Totalkomplex eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen. Nach der Proposition ist er damit azyklisch und die Behauptung folgt nun aus der langen exakten Homologiesquenz. □

11.2 Kohomologie und azyklische Auflösungen

Definition 11.2.1. Unter einer **Auflösung** einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ verstehen wir einen exakten Komplex $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \mathcal{A}^2 \to \ldots$ von abelschen Garben. Eine Auflösung heißt **azyklisch** genau dann, wenn alle $\mathcal{A}^i$ azyklisch sind.

Definition 11.2.2. Gegeben eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$ einer abelschen Garbe betrachten wir den Doppelkomplex im ersten Quadranten $A^{p,q} = \Gamma\mathcal{G}^q\mathcal{A}^p$ und beachten, daß sein senkrechter Kernkomplex kanonisch isomorph ist zu $\Gamma\mathcal{G}^q\mathcal{F}$ hat sein waagerechter Kernkomplex zu $\Gamma\mathcal{A}^p$. Weiter hat unser Doppelkomplex nach 10.7.7 exakte Zeilen an allen Stellen außer bei $p = 0$. Folglich liefern die Morphismen $K_\to \to A_{\mathrm{tot}} \leftarrow K_\uparrow$ auf der Kohomologie Morphismen, die sogenannten **kanonischen Morphismen**

$$\mathrm{can} : H^n\Gamma\mathcal{A}^* \to H^n\mathcal{F}$$

als die Verknüpfungen $H^n\Gamma\mathcal{A}^* \xrightarrow{\sim} H^nK_\to \to H^nA_{\mathrm{tot}} \xleftarrow{\sim} H^nK_\uparrow \xleftarrow{\sim} H^n\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F}$.

Bemerkung 11.2.3. Ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^0 & \to & \mathcal{A}^1 & \to & \mathcal{A}^2 & \to & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{B}^0 & \to & \mathcal{B}^1 & \to & \mathcal{B}^2 & \to & \ldots \end{array}$$

gegeben mit Auflösungen von abelschen Garben $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{G}$ als Zeilen, so kommutiert mit den offensichtlichen Vertikalen und den eben konstruierten kanonischen Abbildungen als Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q\Gamma\mathcal{A}^* & \to & H^q\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q\Gamma\mathcal{B}^* & \to & H^q\mathcal{G} \end{array}$$

Satz 11.2.4 (Kohomologie und azyklische Auflösungen). *Die Kohomologie einer abelschen Garbe läßt sich berechnen als die Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte einer beliebigen azyklischen Auflösung. Ist genauer $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$ eine azyklische Auflösung, so sind unsere kanonischen Morphismen aus 11.2.2 Isomorphismen*

$$H^q \Gamma \mathcal{A}^* \xrightarrow{\sim} H^q \mathcal{F}$$

Beweis. Sind alle $\mathcal{A}^i$ azyklisch, so sind im Doppelkomplex, der unsere kanonischen Abbildungen definiert, auch alle Spalten exakt außer bei $q = 0$. Mithin induziert auch die Einbettung des waagerechten Kernkomplexes in den Totalkomplex Isomorphismen auf der Kohomologie. □

11.3 Parakompakte Räume

Definition 11.3.1.

1. Ein System von Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eines topologischen Raums X heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die höchstens endlich viele $U \in \mathcal{U}$ trifft.

2. Sei X eine Menge und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Überdeckung von X. Eine Überdeckung $\mathcal{V}$ von X heißt eine **Verfeinerung von $\mathcal{U}$** genau dann, wenn jedes $V \in \mathcal{V}$ in mindestens einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

3. Ein topologischer Raum heißt **parakompakt** genau dann, wenn er Hausdorff'sch ist und sich jede offene Überdeckung unseres Raums zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung verfeinern läßt.

Übung 11.3.2. Die Vereinigung über eine beliebige lokal endliche Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Ist eine Abbildung stetig auf jeder der Teilmengen einer lokal endlichen Überdeckung eines Raums durch abgeschlossene Teilmengen, so ist sie schon selbst stetig.

Proposition 11.3.3 (Kriterium für Parakompaktheit). *Besitzt ein Hausdorffraum eine abzählbare Überdeckung durch offene Teilmengen mit kompaktem Abschluß, so ist er parakompakt.*

Beweis. Indem wir zu geeigneten Vereinigungen übergehen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar annehmen, unser Raum sei überdeckt durch eine aufsteigende Folge $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß. Indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß für alle n gilt $\bar{X}_n \subset X_{n+1}$. Um Sonderbetrachtungen zu vermeiden setzen wir $X_n = \emptyset$ für $n < 0$. Gegeben eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ unseres Raums werden die Kompakta $\bar{X}_{n+1} - X_n$ jeweils schon überdeckt von den U aus einem endlichen Teilsystem $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. Die Schnitte $U \cap (X_{n+2} - \bar{X}_{n-1})$ für $U \in \mathcal{U}_n$ und $n \in \mathbb{Z}$ bilden dann die gesuchte lokal endliche Verfeinerung der Überdeckung $\mathcal{U}$. □

Proposition 11.3.4. *Jeder parakompakte Raum ist normal.*

Beweis. Das folgt mit zweimaligem Anwenden des anschließenden technischen Lemmas, erst im Fall einer einpunktigen Menge B, dann im Allgemeinen. □

Lemma 11.3.5. *Seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in einem parakompakten Raum X. Zu jedem $x \in A$ gebe es disjunkte offene Teilmengen $U_x, V_x \Subset X$ mit $x \in U_x$ und $B \subset V_x$. So gibt es auch disjunkte offene $U, V \Subset X$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$.*

Beweis. Die U_x mitsamt $X \backslash A$ bilden eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{W}$ eine offene lokal endliche Verfeinerung dieser offenen Überdeckung. Setzen wir $\mathcal{W}_A = \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap A \neq \emptyset\}$, so ist jedes $W \in \mathcal{W}_A$ in einem U_x enthalten, die Vereinigung $U = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_A} W$ ist offen, und wir haben $A \subset U$. Andererseits besitzt jedes $y \in B$ eine offene Umgebung C_y, die nur endlich viele Mengen $W_1, \ldots, W_n$ aus $\mathcal{W}_A$ trifft. Wählen wir nun $x(i) \in A$ mit $W_i \subset U_{x(i)}$, so ist $D_y = C_y \cap V_{x(1)} \cap \ldots \cap V_{x(n)}$ offen und trifft überhaupt keine Menge aus $\mathcal{W}_A$. Damit ist $V = \bigcup_{y \in B} D_y$ offen mit $V \cap U = \emptyset$ und $B \subset V$. □

Proposition 11.3.6 (Schrumpfen offener Überdeckungen). *Sei X ein parakompakter Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. So finden wir eine offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von X mit $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$.*

Beweis. Aufgrund der Normalität von X besitzt jedes $x \in X$ eine offene Umgebung W_x, deren Abschluß in einem U_i enthalten ist, sagen wir $\bar{W}_x \subset U_{i(x)}$. Sei $\mathcal{W}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung der offenen Überdeckung von X durch die W_x. So finden wir auch für jedes $W \in \mathcal{W}$ ein $i = i(W)$ mit $\bar{W} \subset U_{i(W)}$. Dann setzen wir $V_j = \bigcup_{i(W)=j} W$ und erhalten $\bar{V}_j \subset U_j$, da die Vereinigung einer lokal endlichen Familie abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. □

11.4 Garben auf parakompakten Räumen

Proposition 11.4.1. *Gegeben eine Garbe von Mengen auf einem parakompakten Raum läßt sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung besagter Teilmenge fortsetzen.*

Beweis. Sei X unser Raum, $A \underset{\mathcal{A}}{\subset} X$ unsere abgeschlossene Teilmenge und $\mathcal{F}$ unsere Garbe. Gegeben $s \in \mathcal{F}(A)$ finden wir sicher eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X und Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s|U_i \cap A = s_i|U_i \cap A \ \forall i$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unsere Überdeckung lokal endlich annehmen. Nach 11.3.6 finden wir auch $V_i \Subset X$ mit $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i$ und $X = \bigcup_{i\in I} V_i$. Jetzt setzen wir

$$W = \{x \in X \mid \text{Alle } s_i \text{ zu Indizes } i \text{ mit } x \in \bar{V}_i \text{ haben denselben Halm bei } x\}$$

Per definitionem gilt $A \subset W$ und W ist offen. Da gilt $s_i|W \cap V_i \cap V_j = s_j|W \cap V_i \cap V_j \quad \forall i, j$ verkleben die Schnitte $s_i|W \cap V_i$ zu einem Schnitt $\tilde{s}$ auf W, der s fortsetzt. □

Definition 11.4.2. Eine Garbe heißt **weich** (englisch **soft**, französisch **mou**) genau dann, wenn sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Beispiele 11.4.3. Jede welke Garbe auf einem parakompakten Raum ist weich nach 11.4.1. Die Garbe der p-Formen auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit ist weich: Um das zu sehen, dehnt man einen Schnitt zunächst mithilfe von 11.4.1 auf eine offene Menge aus und biegt ihn dann in dieser offenen Menge mithilfe einer $\mathcal{C}^\infty$-Partition der Eins herunter nach Null, so daß man ihn weiter durch Null ausdehnen kann zu einem globalen Schnitt.

Übung 11.4.4. Die Garbe $\mathcal{C}_X$ der stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf einem parakompakten Raum ist weich.

Satz 11.4.5. *Auf parakompakten Räumen sind alle weichen abelschen Garben azyklisch.*

Beweis. Das folgt genau wie bei den welken Garben aus dem anschließenden Lemma. □

Lemma 11.4.6. *Sei $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem parakompakten topologischen Raum X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ weich, so induziert der Epimorphismus $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten.*

2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ weich, so ist auch $\mathcal{F}''$ weich.*

Beweis. 1. Sei $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$ gegeben. Es gibt eine lokal endliche offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ unseres Raums und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i \mapsto s''|U_i \ \forall i$. Nach 11.3.6 finden wir eine weitere offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ mit $\bar{V}_i \subset U_i \ \forall i$. Für $J \subset I$ setzen wir $\bar{V}_J = \bigcup_{i\in J} \bar{V}_i$. Nun betrachten wir die Menge aller Paare

(s_J, J) mit $J \subset I$ und s_J einem Schnitt von $\mathcal{F}$ über $\bar{V}_J$, der auf $s''|\bar{V}_J$ geht. Auf dieser Menge erklären wir ein partielle Ordnung durch die Vorschrift $(s_K, K) \leq (s_J, J) \Leftrightarrow (K \subset J$ und $s_K = s_J|\bar{V}_K)$. Nach 11.3.2 ist unsere Menge induktiv geordnet und besitzt folglich ein maximales Element. Sei (s_J, J) solch ein maximales Element. Wäre $J \neq I$, so gäbe es $i \in I - J$. Hier unterscheiden sich s_i und s_J auf $\bar{V}_i \cap \bar{V}_J$ nur um einen Schnitt s'_i in $\mathcal{F}'$, der sich nach Annahme auf ganz $\bar{V}_i$ ausdehnen läßt. Also verkleben $s_i - s'_i$ und s_J auf $\bar{V}_i \cup \bar{V}_J$ zu einem Urbild von s'' im Widerspruch zur Maximalität von (s_J, J). Damit ist in der Tat $\Gamma\mathcal{F} \to \Gamma\mathcal{F}''$ eine Surjektion.

2. Das folgt sofort aus 1, da jede abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raums parakompakt ist und da die Einschränkung einer weichen Garbe auf eine abgeschlossene Teilmenge stets eine weiche Garbe bleibt. □

Bemerkung 11.4.7. Denjenigen Lesern, die bereits mit der Definition der de-Rham-Kohomologie vertraut sind, können wir nun zeigen, wie sie mit der allgemeinen Garbenkohomologie zusammenhängt.

Korollar 11.4.8 (de-Rham-Kohomologie als Garbenkohomologie). *Auf einer parakompakten $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit X stimmt die de-Rham-Kohomologie überein mit der Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$.*

Beweis. Der de-Rham-Komplex ist der Komplex der globalen Schnitte des Komplexes der Garben der Differentialformen. Dieser Garbenkomplex ist eine Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ nach dem Poincaré-Lemma, und die Garben der Differentialformen sind azyklisch nach 11.4.5, da sie nach 11.4.3 weich sind. Also berechnet unser Komplex nach 11.2.4 die Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$. □

Bemerkung 11.4.9. Die Exponentialsequenz aus 10.9.5 liefert eine weiche und mithin azyklische Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf jedem reellen Intervall. Es folgt, daß ein reelles Intervall keine höhere Garbenkohomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten besitzt. Allgemeinere Resultate in dieser Richtung werden wir mit elementareren Methoden in **??** herleiten.

11.5 Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie

Bemerkung 11.5.1. Gegeben ein topologischer Raum X und $q \geq 0$ betrachten wir die **Prägarbe der singulären q-Koketten**, die jeder offenen Menge $U \Subset X$ die Gruppe $S^q(U)$ der singulären q-Koketten auf U zuordnet. Die Garbifizierung dieser Prägarbe bezeichnen wir mit $\mathcal{S}^q_X$ und nennen sie die **Garbe der lokalen singulären q-Koketten**. Die üblichen Korandabbildungen auf den Koketten induzieren Randabbildungen $\mathcal{S}^q_X \to \mathcal{S}^{q+1}_X$, damit wird $\mathcal{S}_X^*$ ein Komplex von Garben und die Kettenabbildung $S^*X \to \Gamma\mathcal{S}_X^*$ liefert eine kanonische Abbildung

$$H^q_{\text{sing}} X \to H^q \Gamma \mathcal{S}_X^*$$

Bemerkung 11.5.2. Ist X lokal zusammenziehbar, so wird der Komplex der lokalen singulären Koketten nach der Augmentierung zu $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$ exakt: Das muß ja nur auf dem Halm an jeder Stelle $x \in X$ gezeigt werden, dort hat unser Komplex die Gestalt $\mathbb{Z} \hookrightarrow \varinjlim_U S^*(U)$, wobei es nach 9.4.8 nicht darauf ankommt, ob wir den direkten Limes über alle offenen Umgebungen von x, über alle Umgebungen, oder über alle zusammenziehbaren Umgebungen bilden, und jetzt folgt die Behauptung aus der Exaktheit von direkten Limites 9.4.11. Wir erhalten so mithilfe von 11.2.2 für jeden lokal zusammenziehbaren Raum kanonische Abbildungen

$$H^q \Gamma \mathcal{S}_X^* \to H^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

Satz 11.5.3 (Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie). *Auf einem parakompakten lokal zusammenziehbaren Raum X stimmt die singuläre Kohomologie überein mit der Garbenkohomologie der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$, genauer liefern die in 11.5.1 und 11.5.2 konstruierten kanonischen Abbildungen Isomorphismen*

$$H^q_{\text{sing}} X \xrightarrow{\sim} H^q \Gamma \mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

Bemerkung 11.5.4. Dieselbe Aussage gilt mit demselben Beweis auch allgemeiner für Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe.

Beweis. Für X parakompakt sind die Garben $\mathcal{S}_X^q$ weich nach dem anschließenden Lemma 11.5.5 und damit azyklisch. Nach 11.2.4 ist folglich die zweite Abbildung in obiger Sequenz ein Isomorphismus. Immer unter der Voraussetzung X parakompakt zeigen wir dann in Lemma 11.5.10, daß auch die erste Abbildung ein Isomorphismus ist. Der Satz folgt. □

Lemma 11.5.5. *Auf einem parakompakten Raum sind die Garben der lokalen singulären Koketten weich.*

Bemerkung 11.5.6. Sind alle offenen Teilmengen unseres Raums parakompakt, so sind die Garben der lokalen singulären Koketten nach 11.5.9 sogar welk.

Beweis. Sei X unser Raum. Einen Schnitt über einer abgeschlossenen Menge $A \underset{\neq}{\subset} X$ können wir zunächst nach 11.4.1 ausdehnen zu einem Schnitt s auf einer offenen Umgebung $U \Subset X$ von A. Da X nach 11.3.4 normal ist, finden wir $V \Subset X$ mit $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Jetzt konstruieren wir einen Endomorphismus der Prägarbe der singulären Koketten auf U, indem wir einem Schnitt, d.h. einer Funktion auf den Simplizes diejenige neue Funktion zuordnen, die dasselbe macht mit allen Simplizes aus V und Null aus allen Simplizes, die nicht ganz in V liegen. Lassen wir den auf der Garbifizierung induzierten Endomorphismus auf unsere Ausdehnung s los, so erhalten wir eine Ausdehnung $\tilde{s}$, die auf $U - \bar{V}$ verschwindet. Damit können wir unsere abgeänderte Ausdehnung $\tilde{s}$ dann aber durch Null fortsetzen auf ganz X. □

Definition 11.5.7. Wir sagen, eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X **erlaubt das Verkleben von Schnitten** genau dann, wenn gegeben ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von offenen Teilmengen von X mit Vereinigung $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ und gegeben für alle $U \in \mathcal{U}$ Schnitte $s_U \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$s_U|_{U \cap W} = s_W|_{U \cap W} \quad \forall\, U, W \in \mathcal{U}$$

es stets einen Schnitt auf der Vereinigung $s \in \mathcal{F}(V)$ gibt mit $s|_U = s_U$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Proposition 11.5.8. *Erlaubt eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem parakompakten Raum das Verkleben von Schnitten und gilt $|\mathcal{F}(\emptyset)| = 1$, so gehen die globalen Schnitte unserer Prägarbe surjektiv auf die globalen Schnitte ihrer Garbifizierung, in Formeln*

$$\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}^+$$

Beweis. Sei $s \in \Gamma\mathcal{F}^+$ ein globaler Schnitt der Garbifizierung. Sicher finden wir eine lokal endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\tilde{s}_i \mapsto s|U_i$ für alle $i \in I$. Sei V_i eine Schrumpfung dieser Überdeckung. Für jedes $x \in X$ finden wir nun eine offene Umgebung $W(x)$ mit $x \in U_i \Rightarrow W(x) \subset U_i$ und $x \notin \bar{V}_i \Rightarrow W(x) \cap V_i = \emptyset$ und so, daß für alle i mit $x \in U_i$ die $\tilde{s}_i$ zu demselben Schnitt $\tilde{s}_{(x)} \in \mathcal{F}(W(x))$ einschränken. Dann folgt aus $W(x) \cap W(y) \neq \emptyset$ bereits, daß es einen Index i gibt mit $W(x), W(y) \subset U_i$, zum Beispiel tut es jeder Index i mit $x \in V_i$, und dann gilt notwendig $y \in \bar{V}_i \subset U_i$. Also verkleben die $\tilde{s}_{(x)}$ zum gesuchten globalen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma\mathcal{F}$ mit $\tilde{s} \mapsto s$. □

Korollar 11.5.9. *Für jeden parakompakten Raum X liefern die kanonischen Abbildungen Surjektionen $S^q X \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{S}^q_X$.*

Beweis. Offensichtlich erlaubt für jedes $q \geq 0$ die Prägarbe $U \mapsto S^q(U)$ das Verkleben von Schnitten. Das Korollar folgt damit aus 11.5.8. □

Lemma 11.5.10. *Für jeden parakompakten Raum X liefern die kanonischen Abbildungen Isomorphismen*

$$H^q_{\text{sing}} X \xrightarrow{\sim} H^q \Gamma \mathcal{S}^*_X$$

Beweis. Wir vervollständigen unsere Surjektionen aus dem vorigen Lemma zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^* \hookrightarrow S^* X \twoheadrightarrow \Gamma \mathcal{S}^*_X$$

Mit der langen exakten Homologiesequenz reicht es zu zeigen, daß K^* azyklisch ist. Aber liegt ein Kozykel $s \in S^* X$ im Kern der Surjektion, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X derart, daß s verschwindet auf den $\mathcal{U}$-feinen Ketten, daß also s schon im Kern $K^*_{\mathcal{U}}$ der Surjektion $S^* X \twoheadrightarrow S^*_{\mathcal{U}} X$ liegt. Diese Surjektion induziert aber Isomorphismen auf der Kohomologie nach 5.8.16, folglich ist ihr Kern azyklisch, folglich gibt es sogar $r \in K^*_{\mathcal{U}}$ mit $\partial r = s$, folglich ist unser Kozykel s ein Korand. □

11.6 Angeordnete Čech-Kohomologie

Bemerkung 11.6.1. Will man Garbenkohomologie explizit berechnen, ist der **angeordnete Čech-Komplex** ein sehr nützliches Hilfsmittel. Man wählt dazu auf einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine totale Ordnung $\leq$ und arbeitet mit den **angeordneten Čech-Koketten**

$$\check{C}^q_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \prod_{U_0 < \ldots < U_q} \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_q)$$

wo das Produkt wie angedeutet über alle streng monoton wachsenden Folgen der Länge $q+1$ in $\mathcal{U}$ läuft. Das Differential wird definiert durch dieselben Formeln wie beim Čech-Komplex aus 10.3.11. Die Kohomologie dieses Komplexes notieren wir $\check{H}^q_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ und nennen sie die **angeordnete Čech-Kohomologie** bezüglich der angeordneten Überdeckung $(\mathcal{U}, \leq)$.

Definition 11.6.2. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Gilt für alle endlichen Schnitte von $\nu + 1 \geq 1$ Mengen aus $\mathcal{U}$ und für alle $q > 0$

$$H^q(U_0 \cap \ldots \cap U_\nu; \mathcal{F}) = 0$$

so sagen wir, die Garbe $\mathcal{F}$ sei **azyklisch für die Überdeckung** $\mathcal{U}$.

Theorem 11.6.3 (Berechnung der Kohomologie nach Čech). *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X und $(\mathcal{U}, \leq)$ eine angeordnete offene Überdeckung von X. Ist die Garbe $\mathcal{F}$ azyklisch für die Überdeckung $\mathcal{U}$, so berechnet der Komplex der angeordneten Čech-Koketten schon ihre Kohomologie, in Formeln*

$$\check{H}^q_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong H^q(X; \mathcal{F})$$

Bemerkung 11.6.4. Der Satz gilt mit einem entsprechend vereinfachten Beweis ganz genauso für unseren Komplex von Čech-Koketten "ohne Anordnung" aus 10.3.11. Wir führen hier den etwas komplizierteren Beweis der angeordneten Version durch, da diese Version expliziten Rechnungen besser zugänglich ist.

Beweis. Wir beginnen mit dem Spezialfall einer Wolkenkratzergarbe.

Lemma 11.6.5. *Die höheren angeordneten Čech-Kohomologiegruppen eines Wolkenkratzers verschwinden, in Formeln*

$$\check{H}^q_{\leq}(\mathcal{U}; M_x) = 0 \text{ für } q > 0$$

Beweis. Zunächst einmal bemerken wir, daß die fragliche Kohomologie nicht von der gewählten Anordnung abhängt. In der Tat, ist eine zweite Anordnung $\preceq$ gegeben, so erhalten wir einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $a : \check{C}^*_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{C}^*_{\preceq}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ durch die Vorschrift

$$(a\psi)(U_0, \ldots, U_q) = \operatorname{sgn}(\sigma)\psi(U_{\sigma(0)}, \ldots, U_{\sigma(q)})$$

wo $\sigma \in \mathcal{S}_q$ die Permutation ist mit $U_{\sigma(0)} < \ldots < U_{\sigma(q)}$. Nun wählen wir $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U das kleinste Element von $\mathcal{U}$ ist. Dann definieren wir

$$\delta : \check{C}^{q+1}_{\leq}(\mathcal{U}; M_x) \to \check{C}^q_{\leq}(\mathcal{U}; M_x)$$

durch die Vorschrift

$$(\delta\psi)(U_0, \ldots, U_q) = \begin{cases} \psi(U, U_0, \ldots, U_q) & U \neq U_0; \\ 0 & U = U_0. \end{cases}$$

Wieder zeigt eine explizite Rechnung $d\delta + \delta d = \mathrm{id}$ auf $\check{C}^q_{\leq}$ für $q > 0$, mithin ist der Komplex azyklisch für $q > 0$. □

Wir konstruieren nun Homomorphismen $\check{H}^q_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \to H^q(X; \mathcal{F})$ wie folgt: Wir betrachten die (waagerecht gedachte) Godement-Auflösung von $\mathcal{F}$ und bilden einen Doppelkomplex von abelschen Gruppen, indem wir an jeder

Stelle "in senkrechter Richtung" den angeordneten Čech-Komplex nehmen. In Kurzschreibweise betrachten wir also den Doppelkomplex

$$\check{C}^q_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{G}^p\mathcal{F})$$

Da die Garben der Godement-Auflösung Produkte von Wolkenkratzern sind, hat nach 11.6.5 unser Doppelkomplex exakte Spalten außerhalb der x-Achse und der waagerechte Kernkomplex ist offensichtlich $\Gamma\mathcal{G}^p\mathcal{F}$. Also ist die Kohomologie des Totalkomplexes dieselbe wie die des waagerechten Kernkomplexes und berechnet mithin die Garbenkohomologie von $\mathcal{F}$. Andererseits ist aber der senkrechte Kernkomplex genau der angeordnete Čech-Komplex von $\mathcal{F}$ und so erhalten wir die gesuchten kanonischen Homomorphismen

$$\check{H}^q_{\leq}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \to H^q(X; \mathcal{F})$$

Ist schließlich $\mathcal{F}$ azyklisch für $\mathcal{U}$, so hat unser Doppelkomplex exakte Zeilen außerhalb der y-Achse und der senkrechte Kernkomplex berechnet auch die Kohomologie des Totalkomplexes. □

11.7 Kohomologie mit kompaktem Träger

Bemerkung 11.7.1. Nach unserer allgemeinen Konvention **??** nennen wir einen Raum **lokal kompakt** genau dann, wenn sich jede Umgebung eines Punktes zu einer kompakten Umgebung desselben Punktes verkleinern läßt. Wir fordern hier im Gegensatz zu den Konventionen bei Bourbaki noch nicht einmal lokal die Hausdorff-Eigenschaft.

Definition 11.7.2. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum X und sei $s \in \mathcal{F}(A)$ ein Schnitt von $\mathcal{F}$ über einer Teilmenge $A \subset X$. So definieren wir den **Träger von** s (englisch und französisch **support**) als die Menge

$$\operatorname{supp} s = \{x \in A \mid s_x \neq 0\}$$

Übung 11.7.3. Der Träger eines globalen Schnitts ist stets abgeschlossen.

Definition 11.7.4. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum X. So definieren wir die Gruppe der **Schnitte von $\mathcal{F}$ mit kompaktem Träger** durch die Vorschrift

$$\Gamma_c\mathcal{F} = \Gamma_c(X; \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma\mathcal{F} \mid \operatorname{supp} s \text{ ist kompakt}\}$$

Definition 11.7.5. Die **q-te Kohomologie mit kompaktem Träger** eines Raums X mit Koeffizienten in einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ ist die q-te Kohomologiegruppe des Komplexes der Schnitte mit kompaktem Träger der Godement-Auflösung, in Formeln

$$H_c^q \mathcal{F} = H_c^q(X; \mathcal{F}) = H^q \Gamma_c \mathcal{G}^* \mathcal{F}$$

Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so kürzen wir $H_c^q(A; \mathcal{F}|_A) = H_c^q(A; \mathcal{F})$ ab.

Definition 11.7.6. Eine Garbe heißt **kompaktweich** (englisch **c-soft**, französisch **c-mou**) genau dann, wenn sich jeder Schnitt über einer kompakten Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

Bemerkung 11.7.7. Gegeben eine kompaktweiche abelsche Garbe auf einem lokal kompakten Hausdorff-Raum X läßt sich jeder Schnitt s über einem Kompaktum K sogar zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger fortsetzen. Um das zu sehen, wählt man eine offene Umgebung U von K mit kompaktem Abschluß, setzt den Schnitt s durch Null fort auf den Rand ∂U von U, dehnt von $K \cup \partial U$ weiter aus auf ganz X, und ändert dann außerhalb von U ab zu Null.

Beispiele 11.7.8. Jede weiche Garbe auf einem Hausdorffraum ist kompaktweich. Jede welke Garbe auf einem lokal kompakten Hausdorff-Raum ist kompaktweich, denn jedes Kompaktum besitzt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluß, auf dem man dann 11.4.1 anwenden kann.

Proposition 11.7.9. *Für eine kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf einem lokal kompakten Hausdorff-Raum X verschwinden die höheren Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger, in Formeln*

$$H_c^q(X; \mathcal{F}) = 0 \text{ für } q > 0$$

Beweis. Analog wie in 10.8.3 folgt das aus dem anschließenden Lemma. □

Lemma 11.7.10. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf X.*

1. *Ist $\mathcal{F}'$ kompaktweich, so induziert die Surjektion $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ eine Surjektion $\Gamma_c \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_c \mathcal{F}''$ auf den globalen Schnitten mit kompaktem Träger.*
2. *Sind $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{F}$ kompaktweich, so ist auch $\mathcal{F}''$ kompaktweich.*

Beweis. 1. Sei s'' ein Schnitt von $\mathcal{F}''$ mit Träger im Kompaktum K. Wir wählen eine offene Umgebung $U \Subset X$ von K mit kompaktem Abschluß $\bar{U}$. Offensichtlich ist $\mathcal{F}'|_{\bar{U}}$ weich, nach 11.4.6 finden wir also ein Urbild $s \in$

$\mathcal{F}(\bar{U})$ von $s''|_{\bar{U}}$. Wählen wir noch eine Ausdehnung $s' \in \mathcal{F}'(\bar{U})$ von der Einschränkung $s|_{\partial U}$ von s auf den Rand von U (im Sinne der mengentheoretischen Topologie) und ersetzen s durch $s - s'$, so dürfen wir $s|_{\partial U} = 0$ annehmen und können s durch Null zu einem globalen Schnitt ausdehnen.

2. Für $K \subset X$ kompakt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \to & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(K) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}''(K) \end{array}$$

Die linke Vertikale ist surjektiv, da $\mathcal{F}$ kompaktweich ist. Die untere Horizontale ist surjektiv nach 1, da mit $\mathcal{F}'$ auch $\mathcal{F}'|_K$ kompaktweich ist. Also ist die rechte Vertikale surjektiv. $\square$

Bemerkung 11.7.11. Jede kurze exakte Sequenz $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$ von abelschen Garben auf einem lokal kompakten Hausdorff-Raum liefert also eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $\Gamma_c \mathcal{G}^* \mathcal{F}' \hookrightarrow \Gamma_c \mathcal{G}^* \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_c \mathcal{G}^* \mathcal{F}''$ und weiter eine **lange exakte Sequenz in der Kohomologie mit kompaktem Träger**

$$\ldots \to H_c^q \mathcal{F}' \to H_c^q \mathcal{F} \to H_c^q \mathcal{F}'' \to H_c^{q+1} \mathcal{F}' \to \ldots$$

Ist $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \ldots$ eine Auflösung, so erhalten wir für alle q analog wie in 11.2.3 natürliche Homomorphismen $H^q \Gamma_c \mathcal{A}^* \to H_c^q \mathcal{F}$. Gilt $H_c^i \mathcal{A}^j = 0$ für $i > 0$ und $j \geq 0$, so sind mit denselben Argumenten wie in 11.2.4 alle diese Homomorphismen Isomorphismen

$$H^q \Gamma_c \mathcal{A}^* \xrightarrow{\sim} H_c^q \mathcal{F}$$

Satz 11.7.12. *Sei X lokal kompakt, Hausdorff und lokal zusammenziehbar. So ist die singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger von X kanonisch isomorph zur Garbenkohomologie mit kompaktem Träger der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ auf X, in Formeln*

$$H_c^q X \xrightarrow{\sim} H_c^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

Bemerkung 11.7.13. Dieselbe Aussage gilt mit demselben Beweis auch allgemeiner mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe.

In diesem Zusammenhang sollte vielleicht die Funktorialität der Garbenkohomologie diskutiert werden, und warum sie mit der singulären zusammenpaßt.

Beweis. Ist zunächst $K \subset_{\mathcal{A}} X$ kompakt und $U \Subset X$ offen mit $\bar{U} \subset K^\circ$, so konstruieren wir ein kommutatives Diagramm von Komplexen abelscher Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} S^*(K, K - U) & \hookrightarrow & S^* K & \twoheadrightarrow & S^*(K - U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ker^*_{K,U} & \hookrightarrow & \Gamma \mathcal{S}^*_K & \to & \Gamma \mathcal{S}^*_{K-U} \end{array}$$

wobei die beiden rechten Vertikalen Surjektionen sind nach 11.5.9, die rechte untere Horizontale durch das Kommutieren des Diagramms definiert wird, und $\ker^*_{K,U}$ eben als ihr Kern erklärt sei. Wir haben dann kurze exakte Sequenzen als Zeilen, und da die beiden rechten Vertikalen nach 11.5.10 Isomorphismen auf der Kohomologie induzieren, trifft das auch für die linke Vertikale zu. Nach dem Ausschneidungssatz induziert nun jedoch die Restriktion $S^*(X, X-U) \to S^*(K, K-U)$ Isomorphismen auf der Kohomologie. Weiter hängt $\ker^*_{K,U}$ gar nicht von K ab, sondern nur von der offenen Menge mit kompaktem Abschluß U, wir können also unsere Notation abkürzen zu $\ker^*_U$. Da in einem lokal kompakten Raum sowohl die kompakten Mengen als auch die offenen Mengen U mit kompaktem Abschluß kofinal sind im System aller Mengen mit kompaktem Abschluß, erhalten wir nun

$$\begin{array}{rcll} H^q_c X & = & \varinjlim_U H^q(X, X-U) & \text{nach der Definition in 9.5.1,} \\ & \cong & \varinjlim_U H^q \ker^*_U & \text{nach unserer Vorüberlegung,} \\ & \cong & H^q \varinjlim_U \ker^*_U & \text{wegen der Exaktheit von } \varinjlim, \\ & \cong & H^q \Gamma_c \mathcal{S}^*_X & \text{nach der Definition von } \Gamma_c, \text{ und} \\ & \cong & H^q_c(X; \mathbb{Z}_X) & \text{wie im Anschluß erklärt wird:} \end{array}$$

Der letzte Schritt gilt, da die Garben $\mathcal{S}^*_X$ eine Auflösung der konstanten Garbe durch kompaktweiche, ja nach 11.5.5 sogar durch weiche Garben bilden. □

Satz 11.7.14. *Ist X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so liefert jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to H^{q-1}_c(A; \mathcal{F}) \to H^q_c(X - A; \mathcal{F}) \to H^q_c(X; \mathcal{F}) \to H^q_c(A; \mathcal{F}) \to \ldots$$

Beweis. Für jede kompaktweiche abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf X haben wir nach 11.7.7 eine kurze exakte Sequenz

$$\Gamma_c(X - A; \mathcal{G}) \hookrightarrow \Gamma_c(X; \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Gamma_c(A; \mathcal{G})$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf die nach 11.7.8 kompaktweiche Godement-Auflösung $\mathcal{G}^*\mathcal{F}$ und beachten, daß auch $\mathcal{G}^*\mathcal{F}|_A$ eine kompaktweiche Auflösung von $\mathcal{F}|_A$ ist, so folgt der Satz aus der langen exakten Homologiesequenz. □

Übung 11.7.15. Ist X lokal kompakt Hausdorff und $U \subseteq X$ offen, so haben wir wie im Beweis des vorhergehenden Satzes für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X natürliche Abbildungen $H^q_c(U; \mathcal{F}) \to H^q_c(X; \mathcal{F})$. Man zeige, daß sie für lokal zusammenziehbares X und $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_X$ unter unserer Identifikation aus 11.7.12 der Abbildung $H^q_c U \to H^q_c X$ aus 9.5.1 entsprechen.

Korollar 11.7.16 (Alexander-Dualität). *Ist $A \underset{\mathrm{A}}{\subset} \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und G eine abelsche Gruppe, so haben wir Isomorphismen*

$$H_c^q(A; G_A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n - A; G)$$

Beweis. Wir wenden die Sequenz aus 11.7.14 an mit $X = \mathbb{R}^n$, verwandeln darin zwei Garbenkohomologiegruppen mit kompaktem Träger mithilfe von 11.7.12 oder genauer 11.7.13 in singuläre Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger, und diese mit Poincaré-Dualität 9.5.8 in gewöhnliche Homologiegruppen. Schließlich gehen wir noch zur reduzierten Homologie über, wobei wir bemerken, daß die obere und die untere Horizontale im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X - A) & \rightarrow & H_q X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{H}_q(X - A) & \rightarrow & \tilde{H}_q X \end{array}$$

für alle q denselben Kern und Kokern haben. □

Korollar 11.7.17. *Seien $r, n \geq -1$ und sei $s^r \subset S^n$ eine Teilmenge der n-Sphäre, die homöomorph ist zur r-Sphäre S^r. So gilt*

$$\tilde{H}_q(S^n - s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir erhalten wie eben mit Poincaré-Dualtität und Übergang zur reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \rightarrow \tilde{H}_{n-q}(S^n - s^r) \rightarrow \tilde{H}_{n-q}(S^n) \rightarrow H_c^q(s^r; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_{n-q-1}(S^n - s^r) \rightarrow \ldots$$

Für das weitere überlassen wir die Fälle $r = -1$ und $r = 0$ dem Leser. Bei $r \geq 1$ ist $H_c^q(s^r; \mathbb{Z})$ nur für $q = 0$ und $q = r$ von Null verschieden und dann isomorph zu $\mathbb{Z}$. Im Fall $q = 0$ haben wir

$$\tilde{H}_n(S^n) \cong H_c^0(S^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_c^0(s^r; \mathbb{Z}),$$

für alle anderen q gilt $\tilde{H}_{n-q}(S^n) = 0$. Das Korollar folgt. □

Korollar 11.7.18. *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n-1)$ mit k Zusammenhangskomponenten, so besteht ihr Komplement $\mathbb{R}^n - A$ aus $(k+1)$ Zusammenhangskomponenten.*

Beweis. Wir finden $H_0(A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^{n-1}(A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(\mathbb{R}^n - A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit Poincaré-Dualität und Alexander-Dualität. Man beachte hierbei, daß Poincaré-Dualität mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auch für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten gilt. □

Korollar 11.7.19. *Eine kompakte aber nicht orientierbare $(n-1)$-Mannigfaltigkeit A kann nicht in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei A zusammenhängend. Ist A nicht orientierbar, so folgt

$$H^{n-1}(A;\mathbb{Z}) = 0 = \tilde{H}_0(\mathbb{R}^n - A;\mathbb{Z})$$

und $\mathbb{R}^n - A$ wäre zusammenhängend im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 11.7.18. □

Korollar 11.7.20. *Eine Homotopieklasse (a, b) in $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kann genau dann durch einen auf $[0, 1)$ injektivem Weg dargestellt werden, wenn a und b teilerfremd sind oder wenn gilt $a = b = 0$.*

Beweis. Wir wenden die lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie mit kompaktem Träger an auf den Fall $X = S^1 \times S^1$ und das Bild eines injektiven Weges $A \cong S^1 \subsetneq\!\!\!\!\!\text{A}\ X$ und folgern eine exakte Sequenz

$$H^1_c X \to H^1_c A \to H^2_c(X - A)$$

Da $H^2_c(X - A) \cong H_0(X - A)$ frei ist über $\mathbb{Z}$, muß $H^1_c X \to H^1_c A$ surjektiv oder Null sein. Diese Abbildung wird jedoch unter geeigneten Identifikationen $H^1_c X \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H^1_c A \cong \mathbb{Z}$ gegeben durch die Zeilenmatrix (a, b). □

11.8 Der Satz von de Rham

In diesem Abschnitt setzen wir eine gewisse Vertrautheit mit Begriffsbildungen und Resultaten der Differentialgeometrie voraus. Gegeben eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit X nennen wir die differenzierbaren Abbildungen $\Delta_q \to X$ auch **differenzierbare q-Simplizes**, bilden die Gruppe der **differenzierbaren q-Ketten** $\mathcal{C}^\infty S_q X$ als die freie abelsche Gruppe über den differenzierbaren q-Simplizes und erhalten einen Unterkomplex $\mathcal{C}^\infty SX \subset SX$ im Komplex der singulären Ketten von X.

Proposition 11.8.1. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. So ist die Einbettung der differenzierbaren Ketten in die singulären Ketten*

$$\mathcal{C}^\infty SX \hookrightarrow SX$$

eine Homotopieäquivalenz und induziert insbesondere Isomorphismen zwischen der singulären Homologie und der $\mathcal{C}^\infty$-singulären Homologie und analog für Kohomologie und beliebige Koeffizienten.

Beweis. Nach 9.1.7 reicht es zu zeigen, daß unsere Einbettungen Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Weiter dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit X parakompakt annehmen, indem wir sonst beide Seiten als direkten Limes über alle offenen parakompakten Teilmengen schreiben und die Exaktheit des direkten Limes verwenden. Jetzt wählen wir irgendeine abelsche Gruppe G, wenden $\operatorname{Hom}(\ ,G)$ an auf die Einbettung in der Proposition und erhalten Komplexe von Koketten $\mathcal{C}^\infty S^*(X;G) \twoheadleftarrow S^*(X;G)$. Diese Komplexe induzieren ihrerseits Komplexe von Prägarben auf X, die wir vergarben zu einer Surjektion von Komplexen von Garben

$$\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*_{X,G} \twoheadleftarrow \mathcal{S}^*_{X,G}$$

Wir behaupten nun, daß im kommutativen Diagramm von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty S^*(X;G) & \twoheadleftarrow & S^*(X;G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*_{X,G} & \leftarrow & \Gamma\mathcal{S}^*_{X,G} \end{array}$$

alle Abbildungen Isomorphismen auf der Kohomologie induzieren. Für die rechte Vertikale folgt das aus 11.5.3, für die linke, indem man die dort gegebenen Argumente wiederholt. Für die untere Horizontale folgt es, da $\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*_{X,G}$ und $\mathcal{S}^*_{X,G}$ beide azyklische Auflösungen der konstanten Garbe G_X sind. Die Aussage für die obere Horizontale ergibt sich als Konsequenz. Betrachten wir nun den Kokern $K_* = \operatorname{cok}(\mathcal{C}^\infty SX \hookrightarrow SX)$, so folgt, daß $\operatorname{Hom}(K_*, G)$ azyklisch ist für alle G. Dann muß aber nach dem universellen Koeffiziententheorem der Komplex K_* von freien abelschen Gruppen schon selbst azyklisch sein. □

Satz 11.8.2 (von de Rham). *Sei X eine parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\Omega^q X$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der differenzierbaren q-Formen auf X. So induziert die nach Stokes durch das Integrieren von q-Formen über differenzierbare q-Ketten definierte Kettenabbildung*

$$\operatorname{int} : \Omega^* X \to \mathcal{C}^\infty S^*(X;\mathbb{R})$$

einen Isomorphismus zwischen der de-Rham-Komologie von X und der $\mathcal{C}^\infty$-singulären Kohomologie von X mit reellen Koeffizienten.

Beweis. Hängen wir noch die Abbildung $\mathcal{C}^\infty S^*(X;\mathbb{R}) \to \Gamma\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*(X;\mathbb{R})$ dahinter, so ist die Verknüpfung der Effekt auf den globalen Schnitten von einem Morphismus zwischen zwei azyklischen Auflösungen der konstanten Garbe $\mathbb{R}_X$ und induziert folglich Isomorphismen auf der Kohomologie. Andererseits induziert auch die zusätzlich angehängte Abbildung Isomorphismen auf der Kohomologie, wie wir bereits im vorhergehenden Beweis erwähnt haben. Der Satz folgt. □

12 Abstrakte homologische Algebra

12.1 Die lange exakte Kohomologiesequenz

Definition 12.1.1. Gegeben ein Komplex $\ldots \to A^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} A^q \xrightarrow{d^q} A^{q+1} \to \ldots$ in einer pfeilexakten Kategorie erklären wir seine **q-te Kohomologie** als

$$H^q A = \operatorname{cok}(A^{q-1} \to \ker d^q)$$

Übung 12.1.2. Wir setzen $\bar{H}^q A = \ker(\operatorname{cok} d^{q-1} \to A^{q+1})$. Man zeige, daß sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^q A & & & & \bar{H}^q A \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \ker d^q & \hookrightarrow & A^q & \twoheadrightarrow & \operatorname{cok} d^{q-1} \end{array}$$

auf genau eine Weise durch einen Morphismus in der oberen Horizontalen kommutativ ergänzen läßt, und daß diese Ergänzung notwendig ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 12.1.3. An dieser Stelle will ich einen technischen Punkt diskutieren, der später recht wichtig werden wird: Wir haben bei einer pfeilexakten Kategorie zwar vorausgesetzt, daß jeder Morphismus einen Kern besitzt, aber keineswegs, daß dieser Kern eindeutig bestimmt sein soll. Um dennoch mit gutem Gewissen von *dem* Kern und *der* Kohomologie und dergleichen reden zu können, treffen wir einige Vereinbarungen.

Definition 12.1.4. Eine **konstante Kategorie** ist eine Kategorie, die äquivalent ist zu einer Kategorie mit einem einzigen Objekt und einem einzigen Morphismus. Ein bis **auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmtes Objekt** einer Kategorie $\mathcal{A}$ ist ein Funktor von einer konstanten Kategorie nach $\mathcal{A}$. Diese bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekte von $\mathcal{A}$ sind die Objekte einer neuen Kategorie $\bar{\mathcal{A}}$, deren Morphismen wir wie folgt erklären: Gegeben $X, Y \in \bar{\mathcal{A}}$, sagen wir als $X : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ und $Y : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$, setzen wir

$$\bar{\mathcal{A}}(X, Y) = \left(\coprod_{(k,j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{J}} \mathcal{A}(X(k), Y(j)) \right) / \sim$$

mit einer Äquivalenzrelation $\sim$, die der Leser ebenso selbst erraten muß wie die Verknüpfung von Morphismen.

Bemerkung 12.1.5. Wir erhalten eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$, indem wir zu jedem Objekt $A \in \mathcal{A}$ die konstante Unterkategorie $\mathcal{K}_A$ von $\mathcal{A}$ mit dem einzigen Objekt A bilden und dem Objekt A den Einbettungsfunktor

$\bar{A} : \mathcal{K}_A \to \mathcal{A}$ zuordnen. Jeder Funktor $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dehnt sich in kanonischer Weise aus zu einem Funktor $\bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathcal{B}}$. Darüber hinaus können wir für die Äquivalenz $\bar{\mathcal{A}} \to \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ einen adjungierten Funktor explizit konstruieren, indem wir ein durch $\mathcal{K}$ induziertes System von durch gewisse $\mathcal{J}_k$ für $k \in \mathcal{K}$ indizierten Systemen von Objekten von $\mathcal{A}$ in hoffentlich offensichtlicher Weise verwandeln in ein durch $\coprod_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{J}_k$ indiziertes System von Objekten von $\mathcal{A}$.

Bemerkung 12.1.6. Reden wir nun zum Beispiel mit bestimmtem Artikel von *dem* Kern eines Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{A}$, so meinen wir das bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmte Objekt $\ker f$ von $\mathcal{A}$, das durch den offensichtlichen Funktor von der konstanten Kategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}_A$ aller Kerne von f in die Kategorie $\mathcal{A}$ definiert wird, oder noch genauer den offensichtlichen Morphismus $\ker f \to \bar{A}$ in $\bar{\mathcal{A}}$.

Bemerkung 12.1.7. In Zukunft werden wir derlei Details meist unterschlagen und die Kategorie $\bar{\mathcal{A}}$ kurzerhand auch mit $\mathcal{A}$ bezeichnen. Ich hoffe, daß die vorhergehenden Bemerkungen den Leser überzeugt haben, daß in dieser Richtung zwar keinerlei echte Schwierigkeiten lauern. Dafür aber lauern dort Elefanten der Notation, vor denen man sich auch in Acht nehmen muß, da sie die Verständlichkeit leicht einmal erdrücken können.

Satz 12.1.8 (Lange exakte Kohomologiesequenz). *Sei $A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in einer pfeilexakten Kategorie.*

1. *Es gibt für jedes q genau einen Morphismus $H^qC \to H^{q+1}A$, der mit den kanonischen Morphismen von $\ker(d_C \circ g) = \ker(g \circ d_B)$ nach H^qC bzw. $H^{q+1}A$ verträglich ist.*

2. *Mit diesen Morphismen erhalten wir eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to H^{q-1}C \to H^qA \to H^qB \to H^qC \to H^{q+1}A \to \ldots$$

Bemerkung 12.1.9. Der Beweis braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts gegeben. Alle Anwendungen, die mir in den Sinn kommen, betreffen Kategorien von Moduln über Ringen oder von abelschen Garben, und diese Fälle führt man leicht auf den bereits bewiesenen Fall der Kategorie aller abelschen Gruppen zurück.

Lemma 12.1.10. *Sei in einer pfeilexakten Kategorie gegeben ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

1. *Die induzierte Kernsequenz* $0 \to \ker a \to \ker b \to \ker c$ *ist exakt.*

2. *Ist* c *ein Monomorphismus, so ist auch* $0 \to \operatorname{cok} a \to \operatorname{cok} b$ *exakt.*

Beweis. 1 bleibt dem Leser überlassen, wir zeigen nur 2. Ist c ein Monomorphismus, so folgt aus 1 die Exaktheit der oberen Zeile im kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker a & \to & \ker b & \to & 0 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & \operatorname{cok} f & \to & 0 \end{array}$$

und die duale Aussage zum ersten Teil liefert dann die Exaktheit (in der Mitte, Exaktheit vorne erkennt man aus dem Diagramm) der oberen Zeile im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \operatorname{im} a & \to & \operatorname{im} b & \to & \operatorname{cok} f & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & & \end{array}$$

Hier ist die rechte Vertikale ein Monomorphismus nach unserer Annahme und wir haben uns so auf den Fall zurückgezogen, daß a, b und c alle drei Monomorphismen sind. Unter dieser Voraussetzung sieht man jedoch explizit, daß a ein Kern ist für $A' \to \operatorname{cok} b$ und daraus folgt, daß $A' \twoheadrightarrow \operatorname{cok} a \hookrightarrow \operatorname{cok} b$ die kanonische Faktorisierung in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus sein muß. □

Lemma 12.1.11 (Schlangenlemma). *Sei in einer pfeilexakten Kategorie gegeben ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & & \end{array}$$

Wir kürzen $\ker(B \to C') = K$ *und* $\operatorname{cok}(A \to B') = K'$ *ab und behaupten: Es gibt genau einen Morphismus* $\ker c \to \operatorname{cok} a$ *derart, daß kommutiert*

$$\begin{array}{ccccc} \ker c & \leftarrow & K & \to & B \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \operatorname{cok} a & \to & K' & \leftarrow & B' \end{array}$$

und mit diesem Morphismus erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\ker a \to \ker b \to \ker c \to \operatorname{cok} a \to \operatorname{cok} b \to \operatorname{cok} c$$

Beweis. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \ker g & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & 0 & \to & C' & = & C' & \to & 0
\end{array}$$

liefert mit dem vorhergehenden Lemma und seinem Dualen die Exaktheit der obersten Zeile in der nun folgenden Erweiterung unseres Diagramms. Die Exaktheit der untersten Zeile erhält man dual, wir haben also ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & A & \to & K & \to & \ker c & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & \operatorname{cok} a & \to & K' & \to & C' & &
\end{array}$$

Diesem Diagramm sieht man die Existenz und Eindeutigkeit unseres Morphismus $\ker c \to \operatorname{cok} a$ nun unschwer an. Die Exaktheit unserer Sequenz bei $\ker b$ erhält man durch Anwenden von Lemma 12.1.10 auf die Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \ker f & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \ker f' & \hookrightarrow & A' & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f' & \to & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \operatorname{im} f & \hookrightarrow & B & \to & C \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \operatorname{im} f' & \hookrightarrow & B' & \to & C
\end{array}$$

Um die Exaktheit bei $\ker c$ zu zeigen reicht es, die Exaktheit von

$$\ker b \to \ker c \to K'$$

nachzuweisen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \to & K & \to & \ker c & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A & \to & B' & \to & K' & \to & 0
\end{array}$$

und wenden ein letztes Mal Lemma 12.1.10 an. Da gilt $\ker(K \to B') = \ker b$ folgt $\ker b \twoheadrightarrow \ker(\ker c \to K')$ und wir haben die Exaktheit bei $\ker c$ nachgewiesen. Der Rest des Lemmas folgt mit Dualität. □

Herleitung der langen exakten Homologiesequenz. Wir erinnern uns ans 12.1.2 und wenden das Schlangenlemma an auf das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \operatorname{cok} d_A^{q-1} & \to & \operatorname{cok} d_B^{d-1} & \to & \operatorname{cok} d_C^{q-1} & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \to & \ker d_A^{q+1} & \to & \ker d_B^{q+1} & \to & \ker d_C^{q+1} &
\end{array}$$

□

Übung 12.1.12. Man zeige in einer beliebigen pfeilexakten Kategorie das Fünferlemma.

12.2 Additive und abelsche Kategorien

Definition 12.2.1. Eine **additive Struktur** auf einer Kategorie ist die Vorgabe der Struktur einer Verknüpfung "Addition" auf allen Morphismenräumen derart, daß alle Morphismenräume abelsche Gruppen werden und alle Verknüpfungen von Morphismen bilineare Abbildungen.

Beispiel 12.2.2. Ein Kategorie mit einer additiven Struktur und einem einzigen Objekt ist "dasselbe" wie ein Ring.

Definition 12.2.3. Eine Kategorie heißt **additiv** genau dann, wenn sie endliche Produkte hat und mit einer additiven Struktur versehen werden kann. Eine Kategorie heißt **abelsch** genau dann, wenn sie additiv und pfeilexakt ist.

Bemerkung 12.2.4. Wir werden im folgenden zeigen, daß es auf Kategorien mit endlichen Produkten höchstens eine additive Struktur geben kann. Bei unserer Forderung nach endlichen Produkten mitgemeint ist die Forderung nach einem finalen Objekt als dem Produkt über die leere Familie.

Bemerkung 12.2.5. Eine andere aber äquivalente Definition und viele weitere Resultate findet man in [Fre66, Bor94, Gab62, HS71].

Lemma 12.2.6 (Kofinale Objekte als finale Objekte). *In einer additiven Kategorie ist jedes finale Objekt bereits ein Nullobjekt.*

Beweis. Wir halten zunächst eine additive Struktur fest und bezeichnen mit 0 die neutralen Elemente der Morphismenräume für diese additive Struktur. Sei nun K unser finales Objekt und A ein beliebiges Objekt. Sicher gibt es dann genau einen Morphismus $0 = \mathrm{id} : K \to K$. Für einen beliebigen Morphismus $f : K \to A$ gilt also $f = f \circ \mathrm{id} = f \circ 0 = 0$. □

Bemerkung 12.2.7. Für jede additive Struktur sind nach dem vorhergehenden Lemma die neutralen Elemente der Morphismenräume genau die Morphismen, die über das finale Objekt faktorisieren. Die Nullmorphismen hängen demnach von der Wahl der additiven Struktur schon einmal nicht ab.

Lemma 12.2.8 (Koprodukte als Produkte). *Für beliebige Objekte* B_1, B_2 *einer additiven Kategorie ist das Tripel* $(B_1 \times B_2, \mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2)$ *mit* $\mathrm{i}_1 = (\mathrm{id}, 0)$ *und* $\mathrm{i}_2 = (0, \mathrm{id})$ *ein Koprodukt von* B_1 *und* B_2.

Beweis. Wir erhalten für jede additive Struktur $\mathrm{i}_1 \circ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{i}_2 \circ \mathrm{pr}_2 = \mathrm{id}$ auf $B_1 \times B_2$, da beide Seiten nach Verknüpfen mit pr_ν wieder pr_ν liefern. Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser. □

Lemma 12.2.9 (Eindeutigkeit der additiven Struktur). *Gegeben eine additive Kategorie gibt es nur eine Möglichkeit, alle Morphismenräume so mit einer Addition zu versehen, daß alle Verknüpfungen bilinear werden.*

Beweis. Man kann die Summe von zwei Morphismen $f, g : A \to B$ beschreiben als die Verknüpfung der Diagonale $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : A \to A \times A$ mit dem durch die Interpretation von $A \times A$ als Koprodukt und f und g festgelegten Morphismus $A \times A \to B$. □

Bemerkung 12.2.10. In additiven Kategorien ist es bequem, Morphismen zwischen endlichen Produkten von Objekten als Matrizen von Morphismen zwischen den einzelnen Objekten zu schreiben. Die Morphismen (f, g) in ein Produkt werden wir in Zukunft bei additiven Kategorien meist als Spaltenmatrizen $(f, g)^t$ schreiben, und eine Zeilenmatrix (f, g) wird abweichend von den bisherigen Konventionen eine Morphismus von einem Produkt alias Koprodukt in das gemeinsame Zielobjekt von f und g meinen. Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß die Verknüpfung von Morphismen zwischen Produkten durch das Produkt ihrer Matrizen dargestellt wird.

Beispiele 12.2.11. Sei R ein Ring. Die Kategorie aller freien R-Moduln von endlichem Rang ist additiv. Die Kategorie aller R-Moduln ist sogar abelsch, ebenso wie die Kategorie der abelschen Prägarben und die Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum. Die opponierte Kategorie einer additiven bzw. abelschen Kategorie ist stets auch additiv bzw. abelsch.

Übung 12.2.12. Genau dann ist ein Objekt einer additiven Kategorie ein Nullobjekt, wenn die Identität auf besagtem Objekt der Nullmorphismus ist.

Definition 12.2.13. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heißt **additiv** genau dann, wenn für alle $A, A' \in \mathcal{A}$ die offensichtliche Abbildung von der Summe ihrer Bilder unter F in das Bild unter F ihrer Summe ein Isomorphismus ist, in Formeln

$$FA \oplus FA' \xrightarrow{\sim} F(A \oplus A')$$

So ein Funktor induziert auf den Morphismenräumen stets Gruppenhomomorphismen $F : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$ und er bildet nach 12.2.12 auch notwendig das Nullobjekt auf das Nullobjekt ab.

Übung 12.2.14. Jeder rechtsexakte und jeder linksexakte Funktor zwischen abelschen Kategorien ist additiv.

12.3 Höhere derivierte Funktoren

Definition 12.3.1. 1. Ein Objekt I einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **injektiv** genau dann, wenn der Funktor der Homomorphismen in unser Objekt $\mathcal{A}(\ ,I) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^\circ$ exakt ist.

2. Eine abelsche Kategorie **hat genug Injektive** genau dann, wenn es von jedem Objekt einen Monomorphismus in ein injektives Objekt gibt.

3. Eine **Auflösung** (genauer: **Rechtsauflösung**) eines Objekts A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist eine exakte Sequenz $A \hookrightarrow C^0 \to C^1 \to \dots$ alias ein Komplex C^*, der in negativen Graden verschwindet, mitsamt einem Morphismus von Komplexen $A[0] \to C^*$, der einen Isomorphismus auf der Homologie induziert.

4. Eine **injektive Auflösung** eines Objekts A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist eine Auflösung von A durch injektive Objekte, d.h. eine Auflösung $A \hookrightarrow I^0 \to I^1 \to \dots$ mit $I^0, I^1, \dots$ injektiv.

Bemerkung 12.3.2. Wir kürzen eine Auflösung oft ab mit $A \hookrightarrow C^*$. Gibt es in $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so besitzt jedes Objekt eine injektive Auflösung.

Lemma 12.3.3. *Die Kategorie aller Moduln über einem gegebenen Ring besitzt genug Injektive, d.h. jeder Modul läßt sich in einen injektiven Modul einbetten.*

Beweis. Sei R unser Ring. Der Vergissfunktor $\mathrm{res}_R^{\mathbb{Z}} : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ besitzt zum Beispiel nach 7.3.25 einen Rechtsadjungierten, nämlich den Funktor $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^R : N \mapsto \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(R, N)$. Wollen wir nun einen R-Modul M in einen injektiven R-Modul einbetten, so beginnen wir mit einer Einbettung $\mathrm{res}_R^{\mathbb{Z}} M \hookrightarrow I$ von M in eine injektive abelsche Gruppe, die es ja nach 9.3.10 geben muß, und bilden dann die Verknüpfung

$$M \to \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^R \mathrm{res}_R^{\mathbb{Z}} M \to \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}}^R I$$

Hier ist das rechte Ende offensichtlich ein injektiver R-Modul und der rechte Pfeil eine Injektion. Der linke Pfeil ist aber auch eine Injektion, entweder nach 10.5.24 oder explizit als die Einbettung $\mathrm{Mod}_R(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(R, M)$. $\square$

Übung 12.3.4. In der Kategorie aller graduierten Moduln über einem graduierten Ring gibt es auch genügend injektive Objekte.

Übung 12.3.5. Ein Produkt über eine beliebige Familie von injektiven Objekten ist wieder injektiv.

Satz 12.3.6 (Hauptlemma der homologischen Algebra). *Seien in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ gegeben ein Komplex C mit $H^qC = 0$ für $q > 0$ und ein Komplex I injektiver Objekte mit $I^q = 0$ für $q < 0$. So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(C, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(H^0C, H^0I)$$

Beweis. In der opponierten Kategorie zur Kategorie Mod_R der Moduln über einem Ring R hatten wir das bereits bewiesen in 9.1.5. Der Beweis im Allgemeinen ist mutatis mutandis derselbe. □

Bemerkung 12.3.7. Gegeben ein Morphismus $f : A \to B$ in einer abelschen Kategorie und Auflösungen $A \hookrightarrow C^*$ und $B \hookrightarrow D^*$ verstehen wir unter einem **Lift von** f einen Morphismus von Komplexen $\tilde{f} : C^* \to D^*$, der in der offensichtlichen Weise mit f verträglich ist. Mit $\tilde{f}$ ist offensichtlich auch jeder dazu homotope Morphismus ein Lift von f. Eine Homotopieklasse von Lifts nennen wir einen **Homotopielift**. Das Hauptlemma der homologischen Algebra sagt insbesondere, daß für eine beliebige Auflösung $A \hookrightarrow C^*$ und eine injektive Auflösung $B \hookrightarrow J^*$ jeder Morphismus $f : A \to B$ genau einen Homotopielift $[\tilde{f}] : C^* \to J^*$ besitzt. Insbesondere bilden die injektiven Auflösungen eines Objekts, wenn es überhaupt welche gibt, mit den Homotopielifts der Identität als Morphismen eine konstante Kategorie Inj_A.

Definition 12.3.8. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. So definiert man zu F für jedes $i \in \mathbb{N}$ seinen ***i*-ten rechtsderivierten Funktor**

$$R^iF : \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{B}}$$

von der Kategorie $\mathcal{A}$ in die Kategorie $\overline{\mathcal{B}}$ der bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekte von $\mathcal{B}$ im Sinne von 12.1.3, indem man jedem Objekt $A \in \mathcal{A}$ den Funktor $\mathrm{Inj}_A \to \mathcal{B}$, $I^* \mapsto H^i(FI^*)$ von der konstanten Kategorie der injektiven Auflösungen von A nach $\mathcal{B}$ zuordnet und jedem Morphismus $f : A \to B$ das mit $(J^*, I^*) \in \mathrm{Inj}_B \times \mathrm{Inj}_A$ indizierte System von Morphismen $H^i([\tilde{f}]_{J^*I^*}) : H^i(FI^*) \to H^i(FJ^*)$.

Bemerkung 12.3.9. Die Linksexaktheit von F liefert Äquivalenzen $F \xrightarrow{\sim} R^0F$. Es ist üblich, in der Notation zu vergessen, daß unser Funktor nur in die Kategorie der bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekte von $\mathcal{B}$ geht und einfach so zu tun, als hätten wir einen Funktor $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definiert.

Beispiel 12.3.10 (**Erweiterungen als derivierte Funktoren**). Die Kategorie der abelschen Gruppen hat genügend Injektive nach 9.3.10. Gegeben eine feste abelsche Gruppe M betrachten wir den linksexakten Funktor $F = \operatorname{Hom}(M, \ ) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Sei N eine weitere abelsche Gruppe. Um $R^i F(N)$ zu bestimmen, können wir nach 9.3.10 eine injektive Auflösung der Gestalt $N \hookrightarrow I^0 \twoheadrightarrow I^1$ wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im zweiten Eintrag die Gestalt

$$\operatorname{Hom}(M, N) \hookrightarrow \operatorname{Hom}(M, I^0) \to \operatorname{Hom}(M, I^1) \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}(M, N)$$

und wir folgern kanonische Isomorphismen

$$R^i F(N) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \operatorname{Hom}(M, N) & i = 0; \\ \operatorname{Ext}(M, N) & i = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 12.3.11 (**Garbenkohomologie als derivierter Funktor**). In der Kategorie der abelschen Garben auf einem Raum X sind nach 10.4.25 alle Wolkenkratzer mit injektivem Halm injektive Objekte. Gegeben eine Garbe $\mathcal{F}$ und eine Einbettung $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$ von jedem Halm in eine injektive abelsche Gruppe konstruieren wir die injektive abelsche Garbe $\mathcal{I} = \prod (I_x)_x$ als Produkt der zu den Gruppen I_x gehörigen Wolkenkratzer bei x, explizit haben wir also

$$\mathcal{I}(U) = \prod_{x \in U} I_x \quad \forall\, U \Subset X$$

Die offensichtliche Einbettung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ zeigt dann, daß die Kategorie der abelschen Garben auf X genug Injektive hat. Weiter sehen wir, daß jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ sogar eine Auflösung $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$ durch *welke* injektive abelsche Garben besitzt. (Wir werden später zeigen, daß jede injektive Garbe welk ist, aber das wollen wir hier noch nicht als bekannt voraussetzen.) Damit erhalten wir für die Rechtsderivierten des linksexakten Funktors $\Gamma : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ der globalen Schnitte aus der Definition und 11.2.4 kanonische Isomorphismen

$$R^i \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i \Gamma \mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} H^i(X; \mathcal{F})$$

und ebenso auf einem lokal kompakten Hausdorff-Raum X für die Rechtsderivierten des linksexakten Funktors der Schnitte mit kompaktem Träger $\Gamma_c : \mathrm{Ab}_{/X} \to \mathrm{Ab}$ kanonische Isomorphismen

$$R^i \Gamma_c(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i \Gamma_c \mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} H^i_c(X; \mathcal{F})$$

Bemerkung 12.3.12. Wir erhalten weitere Beispiele durch Übergang zu den opponierten abelschen Kategorien. In diesem Zusammenhang sind die folgenden eigenständigen Sprechweisen üblich.

Definition 12.3.13. 1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $P \in \mathcal{A}$ heißt **projektiv** genau dann, wenn der Funktor der Homomorphismen von unserem Objekt $\mathcal{A}(P, \ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ exakt ist.

2. Eine abelsche Kategorie **hat genug Projektive** genau dann, wenn es für jedes Objekt A einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow A$ gibt mit P projektiv.

3. Eine **Linksauflösung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ ist ein exakter Komplex
$$\ldots \to C^{-1} \to C^0 \twoheadrightarrow A$$

4. Eine **projektive Auflösung** eines Objekts $A \in \mathcal{A}$ ist eine Linksauflösung $P^* \twoheadrightarrow A$ mit $P^0, P^{-1}, \ldots$ projektiv.

Bemerkung 12.3.14. Gegeben eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ mit genügend Projektiven und ein rechtsexakter Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in eine weitere abelsche Kategorie erklären wir ganz analog zu **??** seine **Linksderivierten**
$$L_iG : \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{B}}$$
und haben insbesondere kanonische Isomorphismen $L_iG(A) \xrightarrow{\sim} H^{-i}GP^*$ für jede projektive Auflösung $P^* \twoheadrightarrow A$ von A.

Beispiel 12.3.15 *(***Nochmal Erweiterungen als derivierte Funktoren***).* Gegeben eine feste abelsche Gruppe N betrachten wir den rechtsexakten Funktor $G = \mathrm{Hom}(\ , N) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}^\circ$. Um $L_iG(M)$ zu bestimmen, können wir nach 7.6.4 eine projektive Auflösung von M der Gestalt $0 \to P^{-1} \to P^0 \twoheadrightarrow M$ wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im ersten Eintrag die Gestalt
$$\mathrm{Hom}(M, N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(P^0, N) \to \mathrm{Hom}(P^{-1}, N) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(M, N)$$
und wir erhalten kanonische Isomorphismen
$$L_iG(M) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathrm{Hom}(M, N) & i = 0; \\ \mathrm{Ext}(M, N) & i = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Ein Vergleich mit 12.3.10 zeigt, daß wir also unsere Ext sogar auf zweierlei Weise als derivierten Funktor erhalten können.

Beispiel 12.3.16 *(***Tor als derivierter Funktor***).* Für eine feste abelsche Gruppe M betrachten wir den rechtsexakten Funktor $G = M \otimes_{\mathbb{Z}} : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ Aus der Definition des Torsionsprodukts erhalten wir sofort kanonische Isomorphismen
$$L_iG(N) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} M \otimes_{\mathbb{Z}} N & i = 0; \\ M * N & i = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 12.3.17 (Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren).

Sei F ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genügend Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Ist $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz in der Ausgangskategorie, so gibt es in der Zielkategorie eine lange exakte Sequenz

$$0 \to FA \to FB \to FC \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \to R^2F(A) \dots$$

Bemerkung 12.3.18. Eigentlich hätten wir im vorhergehenden Satz gerne eine schärfere Aussage: Statt der bloßen Existenz einer langen exakten Sequenz wollen wir in Wirklichkeit auch wissen, daß sie im Wesentlichen nicht von den getroffenen Wahlen abhängt und daß sie funktoriell ist in der Ausgangssequenz. Das kann man alles in unserer jetzigen Sprache prüfen, aber es scheint mir sinnvoller, gleich den derzeit in der homologischen Algebra gebräuchlichen Formalismus einzuführen und die Schwierigkeit in diesem Kontext aufzulösen. Das alles geschieht in Abschnitt 12.4, genauer geben wir auch erst in 12.4.13 unsere endgültige Definition der langen exakten Sequenz der derivierten Funktoren.

Bemerkung 12.3.19. Als Spezialfälle erhalten wir in unseren Beispielen: Die lange exakte Ext-Sequenz im ersten bzw. zweiten Eintrag, die lange exakte Tor-Sequenz im ersten bzw. zweiten Eintrag, die lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie und die lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie mit kompaktem Träger.

Beweis. Gegeben injektive Auflösungen $A \hookrightarrow I^*$ und $C \hookrightarrow J^*$ können wir im folgenden Diagramm in der Mitte induktiv von unten beginnend senkrechte Pfeile ergänzen derart, daß die mittlere Senkrechte auch ein Komplex wird und däs das ganze Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & & & \uparrow \\
I^2 & \hookrightarrow & I^2 \oplus J^2 & \twoheadrightarrow & J^2 \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
I^1 & \hookrightarrow & I^1 \oplus J^1 & \twoheadrightarrow & J^1 \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
I^0 & \hookrightarrow & I^0 \oplus J^0 & \twoheadrightarrow & J^0 \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C
\end{array}$$

Hierbei sollen die höheren Horizontalen die offensichtlichen Morphismen sein, die mittleren Vertikalen sind also zwei-mal-zwei-Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \partial & u \\ 0 & \partial \end{pmatrix}$$

für eine geeignete Kettenabbildung $u : J \to I[1]$. Die lange exakte Homologiesequenz sagt uns nun, daß auch die mittlere Vertikale in unserem Diagramm exakt ist. Wenden wir dann unseren Funktor F an und streichen die unterste Zeile, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Bilden wir dazu die lange exakte Homologiesequenz, so ergibt sich der Satz. $\square$

Definition 12.3.20. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Ein Objekt $J \in \mathcal{A}$ heißt **F-azyklisch** genau dann, wenn gilt

$$R^i F(J) = 0 \text{ für alle } i > 0$$

Beispiele 12.3.21. Ein injektives Objekt ist F-azyklisch für jeden linksexakten Funktor F. Eine Γ-azyklische Garbe hatten wir kürzer eine azyklische Garbe genannt. Kompaktweiche Garben sind Γ_c-azyklisch auf lokal kompakten Hausdorff-Räumen nach 11.7.9.

Bemerkung 12.3.22. Injektive Auflösungen sind der Berechnung meist schwer zugänglich und eher für theoretische Überlegungen von Interesse. Für praktische Anwendung ist es bedeutsam, daß man die Derivierten eines gegebenen Funktors F auch schon über F-azyklische Auflösungen berechnen kann.

Proposition 12.3.23 (Derivieren mit azyklischen Auflösungen). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Sei $A \hookrightarrow J^*$ eine F-azyklische Auflösung eines Objekts $A \in \mathcal{A}$. So haben wir kanonische Isomorphismen*

$$H^i F J^* \xrightarrow{\sim} R^i F(A)$$

Beweis. Sei $A \hookrightarrow I^*$ eine injektive Auflösung von A und $f^* : J^* \to I^*$ die bis auf Homotopie wohldefinierte Fortsetzung der Identität auf A nach 12.3.6. Genauer als in der Proposition formuliert werden wir zeigen, daß die Kettenabbildung

$$Ff^* : FJ^* \to FI^*$$

Isomorphismen auf der Homologie induziert. In der Tat: Da $f^* : J^* \to I^*$ Isomorphismen auf der Homologie induziert, muß die Homologie des Abbildungskegels $K(f^*)$ identisch verschwinden. Dieser Abbildungskegel beginnt im Grad -1 und wir können ihn aufspalten in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^{-1} & \hookrightarrow & K^0 & \twoheadrightarrow & C^0 & & & & \\
 & & C^0 & \hookrightarrow & K^1 & \twoheadrightarrow & C^1 & & \\
 & & & & C^1 & \hookrightarrow & K^2 & \twoheadrightarrow & C^2 \quad \dots
\end{array}$$

Aus der langen exakten Sequenz der derivierten Funktoren 12.3.17 folgt induktiv, daß alle in diesen kurzen exakten Sequenzen auftauchenden Objekte F-azyklisch sind. Damit sehen wir dann, daß $K(f^*)$ exakt bleibt unter F, und da nun $FK(f^*) = K(Ff^*)$ exakt ist, muß Ff^* Isomorphismen auf der Homologie induzieren. $\square$

12.4 Ausgezeichnete Dreiecke

Bemerkung 12.4.1. Wir erinnern daran, daß wir für einen Komplex $X = (X^n, d_X^n)$ mit $d^n : X^n \to X^{n+1}$ den Komplex $X[1]$ definiert hatten, indem wir den Komplex um eins gegen die Richtung der Pfeile verschieben, $X[1]^n = X^{n+1}$, und die Randoperatoren mit Minuszeichen versehen, $d_{X[1]}^n = -d_X^{n+1}$. Jede Kettenabbildung $u : X \to Y$ liefert in offensichtlicher Weise eine Kettenabbildung $u : X[1] \to Y[1]$, hier fügen wir also keine Vorzeichen ein.

Definition 12.4.2. Sei $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie und $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ die Homotopiekategorie der Komplexe in $\mathcal{I}$.

1. Ein **Dreieck in** $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ ist die Vorgabe von Objekten und Morphismen der Gestalt
$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

2. Ein **Morphismus von einem Dreieck in ein anderes Dreieck** ist ein Tripel von Morphismen (f, g, h) derart, daß das folgende Diagramm mit unseren beiden Dreiecken in den Zeilen kommutiert:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

3. Ein Dreieck in $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ heißt ein **ausgezeichnetes Dreieck** (englisch **distinguished triangle**) genau dann, wenn es isomorph ist zu einem Dreieck der Gestalt
$$X \xrightarrow{u} Y \to K(u) \to X[1]$$
mit u einer Kettenabbildung, $K(u)$ dem Abbildungskegel von u und den offensichtlichen Injektionen und Projektionen $Y \to K(u) \to X[1]$ als weiteren Morphismen.

Proposition 12.4.3 (Drehen von Dreiecken). *Sei $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie. Ist $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck in* $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$, *so ist auch $Y \to Z \to X[1] \xrightarrow{-u} Y[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck in* $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat unser erstes Dreieck die Gestalt
$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\alpha} K(u) \xrightarrow{\beta} X[1]$$
mit α, β den kanonischen Abbildungen. Es gilt also, eine Homotopieäquivalenz $\psi : K(\alpha) \xrightarrow{\sim} X[1]$ anzugeben derart, daß kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & K(u) & \to & K(\alpha) & \to & Y[1] \\ \| & & \| & & \psi \downarrow & & \| \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & K(u) & \to & X[1] & \xrightarrow{-u} & Y[1] \end{array}$$

Per definitionem haben wir $K(\alpha)^n = Y^{n+1} \oplus K(u)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$ und der Randoperator wird gegeben durch die Matrix

$$\partial_{K(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 \\ \alpha & \partial_{K(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_X & 0 \\ \mathrm{id} & u & \partial_Y \end{pmatrix}$$

Wir nehmen nun $\psi = (0, \mathrm{id}, 0)$ und erhalten offensichtlich eine Kettenabbildung derart, daß das mittlere Quadrat kommutiert. In die andere Richtung nehmen wir $\phi = (-u, \mathrm{id}, 0)^t : X[1] \to K(\alpha)$ und erkennen, daß ϕ eine Kettenabbildung ist und daß mit ϕ nach oben statt ψ nach unten das rechte Quadrat kommutiert. Offensichtlich gilt $\psi\phi = \mathrm{id}$ auf $X[1]$. Wir haben gewonnen, wenn wir die Homotopie $\phi\psi \simeq \mathrm{id}$ zeigen. Dazu muß man nur prüfen, daß für
$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : K(\alpha)^{n+1} \to K(\alpha)^n$$
die Gleichung $\partial s + s\partial = \mathrm{id} - \phi\psi$ erfüllt ist. □

Proposition 12.4.4 (Morphismen von Dreiecken). *Sei $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm in* $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ *der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & & & f \downarrow \\ \hat{X} & \to & \hat{Y} & \to & \hat{Z} & \to & \hat{X}[1] \end{array}$$

mit ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen gibt es ein $h : Z \to \hat{Z}$ derart, daß (f, g, h) ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken wird.

Bemerkung 12.4.5. Dieses h ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, sondern nur unter Zusatzannahmen, vergleiche 12.4.10.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß beide Dreiecke die Standarddreiecke für u bzw. $\hat{u}$ sind mit $Z = K(u)$ und $\hat{Z} = K(\hat{u})$. Sei $s^n : X^n \to \hat{Y}^{n-1}$ eine Homotopie, die die Kommutativität des ersten Quadrats liefert, also

$$sd + ds = gu - \hat{u}f$$

Wir behaupten, daß

$$h = \begin{pmatrix} f & 0 \\ s & g \end{pmatrix} : K(u) \to K(\hat{u})$$

eine Kettenabbildung ist und daß mit diesem h die beiden anderen Quadrate sogar kommutieren, ohne daß man zu Homotopieklassen übergehen muß. Diese Rechnung überlassen wir dem Leser. □

Bemerkung 12.4.6. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so definiert das Bilden der Kohomologie eines Komplexes Funktoren $H^i : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ und natürlich haben wir $H^0(X[i]) = H^i X$ für beliebiges $X \in \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Lemma 12.4.7 (Homologiesequenz eines ausgezeichneten Dreiecks).

Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $X \to Y \to Z \to X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, so erhalten wir mit den natürlichen Abbildungen eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H^{-1}Z \to H^0X \to H^0Y \to H^0Z \to H^1X \to \ldots$$

Beweis. Da wir nach 12.4.3 Dreiecke drehen können reicht es, die Exaktheit von $H^0Y \to H^0Z \to H^0X[1]$ zu zeigen. Dazu dürfen wir ausgehen von einem Dreieck der Gestalt $X \xrightarrow{u} Y \to K(u) \to X[1]$, und dann haben wir schlicht einen Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen $Y \hookrightarrow K(u) \twoheadrightarrow X[1]$ vor uns. □

Lemma 12.4.8. *Ist $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie und $X \to Y \to Z \to X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$, so bilden für jedes Objekt $W \in \mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ die Homomorphismen nach W eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}(X, W) \leftarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}(Y, W) \leftarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}(Z, W) \leftarrow \mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}(X[1], W) \leftarrow \ldots$$

Bemerkung 12.4.9. Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von W in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.

Beweis. In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition zweier aufeinanderfolgender Morphismen stets null, also ist unsere lange Sequenz schon einmal ein Komplex. Andererseits ist $0 \to W \xrightarrow{\mathrm{id}} W \to 0[1]$ stets ein ausgezeichnetes Dreieck, wir können also nach 12.4.4 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & W & \xrightarrow{\sim} & W & \to & 0 \end{array}$$

stets kommutativ ergänzen, und das zeigt die Exaktheit unseres Komplexes bei $\mathrm{Hot}_{\mathcal{I}}(Y, W)$. Drehen von Dreiecken nach 12.4.3 liefert den Rest. □

Übung 12.4.10. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & X'[1] \end{array}$$

gibt es nach **??** einen Morphismus $Z \to Z'$, der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß unter der Annahme $\mathrm{Hom}(X[1], Z') = 0$ dieser Morphismus $Z \to Z'$ sogar eindeutig bestimmt ist.

Übung 12.4.11. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} X[1]$ ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen $r, s : Z \to X[1]$ und gilt $\mathrm{Hom}(X[1], Z) = 0$, so folgt $r = s$.

Theorem 12.4.12 (Exakte Sequenzen als ausgezeichnete Dreiecke). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ die Kategorie aller injektiven Objekte von $\mathcal{A}$. Bezeichne $\mathrm{Hot}^0(\mathcal{I})$ die Kategorie $\mathrm{Hot}^0(\mathcal{I}) = \{X \in \mathrm{Hot}(\mathcal{I}) \mid X^q = 0$ falls $q < 0$ und $H^q X = 0$ falls $q \neq 0\}$. So gilt:*

1. *Das Bilden der nullten Homologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien $H^0 : \mathrm{Hot}^0(\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$.*

2. *Das Bilden der nullten Homologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{ausgezeichnete Dreiecke} \\ X \to Y \to Z \to X[1] \\ \textit{in } \mathrm{Hot}(\mathcal{I}) \textit{ mit } X, Y, Z \in \mathrm{Hot}^0(\mathcal{I}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{kurze exakte} \\ \textit{Sequenzen in } \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus 12.3.6. Für den Rest des Beweises führen wir eine bequeme Terminologie ein und nennen die im Satz beschriebenen ausgezeichneten Dreiecke von $\mathrm{Hot}(\mathcal{I})$ "speziell". Aus 12.4.7 folgt, daß H^0 aus jedem unserer speziellen ausgezeichneten Dreiecke eine kurze exakte Sequenz macht. Nach 1 liefert also H^0 schon mal einen treuen Funktor von unserer Kategorie von speziellen ausgezeichneten Dreiecken in die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen aus $\mathcal{A}$. Als nächstes zeigen wir, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen von Objekten. Hierzu müssen wir uns daran erinnern, wie wir im Beweis von 12.3.17 zu einer kurzen exakten Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ mit injektiven Auflösungen $A \hookrightarrow I^*$ und $C \hookrightarrow J^*$ eine injektive Auflösung $B \hookrightarrow I^* \oplus J^*$ der Mitte gebildet hatten: Diese Auflösung war nämlich gerade der Abbildungskegel $K(u)$ einer Kettenabbildung $u : J[-1] \to I$, und das ausgezeichnete Dreieck $J[-1] \to I \to K(u) \to J$ liefert mit Drehen ein ausgezeichnetes Dreieck $I \to K(u) \to J \to I[1]$. Jetzt müssen wir noch zeigen, daß unser Funktor volltreu ist. Seien dazu zwei spezielle ausgezeichnete Dreiecke (X, Y, Z) und (X', Y', Z') gegeben. Jeder Morphismus der zugehörigen kurzen exakten Sequenzen liefert ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \to & Y & \to & Z & \to & X[1] \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & f\downarrow \\ X' & \to & Y' & \to & Z' & \to & X'[1] \end{array}$$

bei dem die beiden linken Quadrate kommutieren. Nun beachten wir

$$\mathrm{Hot}(X[1], Z') = 0$$

nach dem Lemma 12.3.6 über injektive Auflösungen und folgern aus 12.4.8 die Injektivität von $\mathrm{Hot}(Z, Z') \to \mathrm{Hot}(Y, Z')$. In anderen Worten ist unser Morphismus $h : Z \to Z'$ der einzige Morphismus von Z nach Z', der das mittlere Quadrat zum Kommutieren bringt. Andererseits gibt es aber nach 12.4.4 einen Morphismus von Z nach Z', der alle drei Quadrate zum Kommutieren bringt. Damit ist klar, daß (f, g, h) schon ein Morphismus von Dreiecken sein muß. □

Definition 12.4.13. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Sei $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$ und seien $A \hookrightarrow I^*$, $B \hookrightarrow J^*$ und $C \hookrightarrow K^*$ die zur Definition der R^iF gewählten injektiven Auflösungen von A, B und C. Bilden wir in $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ das durch diese Daten eindeutig bestimmte ausgezeichnete Dreieck

$$I^* \to J^* \to K^* \to I^*[1]$$

und wenden F an, so erhalten wir ein ausgezeichnetes Dreieck

$$FI^* \to FJ^* \to FK^* \to FI^*[1]$$

in $\mathrm{Hot}(\mathcal{B})$. Die lange exakte Homologiesequenz dieses Dreiecks nennen wir die **lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren** zu unserer kurzen exakten Sequenz $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$. Diese lange exakte Sequenz hat also die Gestalt

$$0 \to FA \to FB \to FC \to R^1FA \to R^1FB \to R^1FC \to R^2FA \dots$$

und sie ist natürlich in dem Sinne, daß jeder Morphismus von kurzen exakten Sequenzen zu einem Morphismus der zugehörigen langen exakten R^iF-Sequenzen führt.

12.5 Abstrakte Interpretation des Kohomologierings

Definition 12.5.1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Morphismus in der Kategorie der Komplexe $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ oder auch in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ heißt ein **Quasiisomorphismus** genau dann, wenn er Isomorphismen auf der Homologie induziert.

Definition 12.5.2. Ein Komplex in einer pfeilexakten Kategorie heißt **beschränkt gegen die Pfeile** genau dann, wenn wir gegen die Richtung der Pfeile gehend irgendwann nur noch das Nullobjekt treffen. Die Homotopiekategorie aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe in einer additiven Kategorie $\mathcal{I}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{I})$.

Lemma 12.5.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ist $A^* \to B^*$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ und $I^* \in \mathrm{Hot}^+(\mathcal{A})$ ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex von injektiven Objekten, so induziert die Verknüpfung mit unserem Quasiisomorphismus eine Bijektion*

$$\mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(B^*, I^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hot}_{\mathcal{A}}(A^*, I^*)$$

Beweis. Vervollständigen wir unseren Quasiisomorphismus durch seinen Abbildungskegel K^* zu einem ausgezeichneten Dreieck, so muß dieser Abbildungskegel K^* exakt sein und wir folgern aus 12.3.6 in der Homotopiekategorie $\mathrm{Hot}(K^*[-1], I^*) = \mathrm{Hot}(K^*, I^*) = 0$. Mit der langen exakten Sequenz 12.4.8 folgt das Lemma. □

Übung 12.5.4. Ein Quasiisomorphismus zwischen zwei injektiven gegen die Pfeile beschränkten Komplexen ist stets eine Homotopieäquivalenz, in anderen Worten ein Isomorphismus in $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Definition 12.5.5. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und ist $M \in \mathcal{A}$ gegeben, so kürzt man die Derivierten des Funktors

$$F = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\ ) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}^{\circ}$$

meist ab mit $R^iF(N) = \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N)$ und bezeichnet sie als **Erweiterungen**. Ich verwende für Erweiterungen in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ die Notation

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, N)$$

Bemerkung 12.5.6. Natürlich haben wir speziell $\mathcal{A}^{[0]}(M, N) = \mathcal{A}(M, N)$. Ganz analog wie im Fall abelscher Gruppen kann man auch allgemein die Elemente von $\mathcal{A}^{[1]}(M, N)$ interpretieren als Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ in $\mathcal{A}$.

Bemerkung 12.5.7. Sind $M \hookrightarrow I^*$ und $N \hookrightarrow J^*$ injektive Auflösungen, so erhalten wir kanonische Isomorphismen

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{A}^{[i]}(M, N) & \stackrel{\sim}{\to} & H^i\mathcal{A}(M, J^*) & \text{nach } 12.3.8, \\ & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(M, J^*[i]) & \text{nach } 5.4.9, \\ & \stackrel{\sim}{\to} & \operatorname{Hot}_{\mathcal{A}}(I^*, J^*[i]) & \text{nach } 12.5.3. \end{array}$$

Definition 12.5.8. Die Interpretation aus 12.5.7 von Erweiterungen in einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven als Morphismen in der Homotopiekategorie zwischen geeignet im Grad verschobenen injektiven Auflösungen liefert in natürlicher Weise die sogenannten **Yoneda-Produkte**

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, N) \times \mathcal{A}^{[j]}(N, L) \to \mathcal{A}^{[i+j]}(M, L)$$

als die Verknüpfung von Morphismen. Insbesondere erhalten wir für jedes Objekt $M \in \mathcal{A}$ den graduierten Ring seiner Selbsterweiterungen

$$\mathcal{A}^{[*]}(M) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}^{[i]}(M, M)$$

Bemerkung 12.5.9. Ist speziell X ein topologischer Raum und bezeichnet $\mathrm{Ab}_{/X}$ wie in 10.4.5 die Kategorie aller abelschen Garben auf X, so haben wir kanonisch $\Gamma\mathcal{F} \cong \mathrm{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathrm{Ab}_{/X}$ und folglich $H^i(X; \mathcal{F}) \cong \mathrm{Ab}^{[i]}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$. Auf diese Weise erhält insbesondere

$$H^*(X; \mathbb{Z}_X) \cong \mathrm{Ab}^{[*]}_{/X}(\mathbb{Z}_X)$$

in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rings, den wir den **garbentheoretischen Kohomologiering** von X nennen, um ihn von unserem singulären Kohomologiering aus 8.5.13 zu unterscheiden. Offensichtlich trägt die Kohomologie jeder abelschen Garbe in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über dem garbentheoretischen Kohomologiering.

Bemerkung 12.5.10. Ist $\mathcal{I}$ eine additive Kategorie und sind $I^*, J^* \in \operatorname{Kom} \mathcal{I}$ Komplexe in $\mathcal{I}$, so bilden wir wie in 5.4.9 den Komplex von abelschen Gruppen $\operatorname{Hom}(I^*, J^*)$. Speziell wird $\operatorname{End}(I^*)$ unter der Verknüpfung von Morphismen ein dg-Ring.

Satz 12.5.11 (Abstrakte Interpretation des cup-Produkts). *Ist X ein parakompakter lokal zusammenziehbarer Raum, so ist die Identifikation aus 11.5.3 ein Ringisomorphismus zwischen dem singulären Kohomologiering und dem garbentheoretischen Kohomologiering*

$$H^*_{\mathrm{sing}} X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}^{[*]}_{/X}(\mathbb{Z}_X)$$

Beweis. Wir beginnen damit, einige Begriffe bereitzustellen.

Definition 12.5.12. Eine **Quasimorphismus** von einem dg-Ring A in einen dg-Ring B ist ein Paar (M, c) bestehend aus einem A-B-dg-Bimodul M nebst einem homogenen Zykel $c \in M$, dessen Homologieklasse $[c]$ eine Basis von HM als HB-Rechtsmodul bildet. Ist zusätzlich $[c]$ auch eine Basis von HM als HA-Linksmodul, so nennen wir (M, c) eine **Quasiäquivalenz**.

Bemerkung 12.5.13. Jeder Quasimorphismus zwischen dg-Ringen liefert einen Homomorphismus zwischen ihren Kohomologieringen, der dadurch charakterisiert werden kann, daß $[a] \mapsto [b]$ gleichbedeutend ist zu $[a][c] = [c][b]$. Ist unser Quasimorphismus eine Quasiäquivalenz, so ist besagter Homomorphismus sogar ein Isomorphismus.

Um nun den Satz zu zeigen, wählen wir eine injektive Auflösung $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^*$ und faktorisieren sie mithilfe von 12.5.3 über die Auflösung durch lokale singuläre Koketten $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}^*_X$ als $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}^*_X \to \mathcal{I}^*$. Nach 12.5.13 reicht es zu zeigen, daß unsere Faktorisierung $\mathcal{S}^*_X \to \mathcal{I}^*$ eine Quasibasis des Komplexes

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{S}^*_X, \mathcal{I}^*)$$

ist, und zwar sowohl für die Linksoperation von $\operatorname{End} \mathcal{I}^*$ als auch für die Rechtsoperation von S^*X, die vom dg-Algebren-Homomorphismus $S^*X \to \operatorname{End} \mathcal{S}^*_X$, $c \mapsto c \cup$ induziert wird. Der erste Teil dieser Behauptung folgt mit 12.5.3 aus dem Quasiisomorphismus $\mathcal{S}^*_X \to \mathcal{I}^*$. Für den zweiten Teil betrachten wir das kommutative Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc} S^*X & = & S^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{S}_X^*) & & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{S}_X^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{I}^*) & \to & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}^*) \end{array}$$

wo die obere linke Vertikale durch $c \mapsto c\,\cup$ definiert ist und die anderen Pfeile sich hoffentlich selbst erklären. Nach 11.5.3 sind die rechten Vertikalen Quasiisomorphismen. Nach 12.5.3 ist auch die unterste Horizontale ein Quasiisomorphismus, folglich ist auch die Verknüfung in der linken Vertikalen ein Quasiisomorphismus. Des weiteren besteht die linke Vertikale aus dg-Rechtsmoduln über S^*X in natürlicher Weise und die Morphismen sind mit dieser Operation verträglich. Das zeigt den zweiten Teil der Behauptung. Auf diese Weise vermittelt also unser dg-Bimodul in der Tat einen Isomorphismus zwischen den beiden fraglichen Kohomologieringen, und es ist nicht schwer zu sehen, daß dieser Isomorphismus übereinstimmt mit dem in 11.5.3 konstruierten Isomorphismus. □

Übung 12.5.14. Ist X eine parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $H^*(\Omega^* X)$ der Kohomologiering der differentiellen graduierten Algebra $\Omega^* X$ der Differentialformen auf X, so hat man einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren $H^*(\Omega^* X) \cong \mathbb{R}\text{-}\mathrm{Mod}_{/X}^{[*]}(\mathbb{R}_X)$.

Literatur

[Bor94] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 1-3*, Encyclopaedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.

[Buc55] D.A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*, Transactions AMS **80** (1955), 1–34.

[Fre66] Peter Freyd, *Abelian categories*, Harper & Row, 1966.

[Gab62] Peter Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[HS71] Peter J. Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts, vol. 4, Springer, 1971.

[Ive87] Iversen, *Cohomology of sheaves*, Springer, 1987.

[Mac98] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, GTM, vol. 5, Springer, 1998.

[Mas99] W. S. Massey, *A history of cohomology theory*, History of Topology (I. M. James, ed.), North-Holland, 1999, pp. 579–603.

[Qui73] Daniel Quillen, *Algebraic K-theory,I: Higher K-theories*, Lecture Notes in Math. 341, Springer, 1973, pp. 85–147.

[She74] S. Shelah, *Infinite abelian groups*, Israel Journal of Mathematics **18** (1974), 243–256.

[SZ] Stöcker and Zieschang.

13 Index

Index