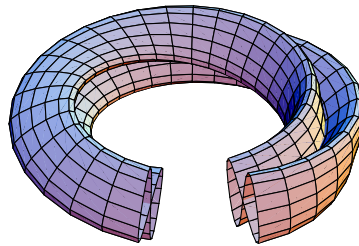


Topologie

Prof. Dr. Dirk Ferus

Wintersemester 2004/5



Version vom 04.02.2005

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische Räume und stetige Abbildungen	7
1.1	Metrische und topologische Räume	7
1.2	Zerlegung der Eins und Erweiterung von Homöomorphismen	16
2	Überlagerungen und die Fundamentalgruppe	22
2.1	Überlagerung, Hochhebung und Homotopie	22
2.2	Die Fundamentalgruppe	32
2.3	Gruppenoperationen und Decktransformationen	40
2.4	Klassifikation von Überlagerungen	46
3	Mannigfaltigkeiten	49
3.1	C^∞ -Mannigfaltigkeiten und -Abbildungen	49
3.2	Tangential- und Normalbündel	55
3.3	C^∞ -Approximation	60
3.4	Der Rang und die Topologie differenzierbarer Abbildungen	62
3.5	Satz von Sard	65
3.6	Mannigfaltigkeiten mit Rand	69
3.7	1-Mannigfaltigkeiten	71
3.8	Der Brouwersche Fixpunktsatz	73
4	Transversalität	74
4.1	Transversale Abbildungen	74
4.2	Schnittzahltheorie mod 2	80
4.3	Abbildungsgrad und Umlaufzahl mod 2	84
5	Schnittzahltheorie: Der orientierte Fall	90
5.1	Orientierte Mannigfaltigkeiten	90
5.2	Schnittzahl und Eulercharakteristik	96
5.3	Index von Vektorfeldern	100
5.4	Abbildungsgrad	104
5.5	Der Gradsatz von Hopf	108
6	De Rham-Kohomologie	113
6.1	Der De Rham-Komplex einer Mannigfaltigkeit	113
6.2	Intermezzo: Kategorien und Funktoren.	117
6.3	Poincaré-Lemmas	118
6.4	Die Mayer-Vietoris-Sequenz	123
6.5	Mayer-Vietoris für kompakten Träger	127
6.6	Poincaré-Dualität	128
6.7	Anwendung der Sphärenkohomologie: Hopfinvariante	132

Literatur

Mengentheoretische Topologie

K. Jänich, Topologie, Springer
B. v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer 1979
J. L. Kelley, General Topology, van Nostrand 1955

Differentialtopologie und algebraische Topologie

W. Fulton, Algebraic Topology, Springer Graduate Texts in Mathematics, 1995
V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology, Prentice Hall, 1974
J. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville 1965
R. Bott, L. W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982
I. M. Singer, J. A. Thorpe, Lectures on Elementary Topology and Geometry, Scott, Forstman and Company 1965
V. A. Vassiliev, Introduction to Topology, AMS 'Student Mathematical Library 2001
M. W. Hirsch, Differential Topology, Springer Graduate Texts in Mathematics 1976
M. Golubitsky, V.W. Guillemin, Stable Mappings and Their Singularities, Springer Graduate Texts 1974

Anschauliche Geometrische Topologie

J. S. Carter, How Surfaces intersect in Space, World Scientific 1995

Gelegentliche Verweise auf die Vorlesung Analysis beziehen sich konkret auf die Skripten des laufenden Kurses, die Sie über meine Homepage im Netz finden können.

1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

1.1 Metrische und topologische Räume

Ziel dieses Abschnittes ist die Erweiterung des Begriffs *metrischer Raum* zu dem des *topologischen Raumes* und die Klärung, welche Begriffe und Aussagen in diesem erweiterten Rahmen ihre Gültigkeit behalten.

In der Analysis haben wir definiert:

Definition 1. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung (der *Metrik*)

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$:

$$d(x, y) \geq 0 \text{ und } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (1)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \quad (2)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (3)$$

In einem metrischen Raum hatten wir dann erklärt, was eine *Umgebung* eines Punktes p ist, nämlich eine Teilmenge, die eine ϵ -Kugel mit hinreichend kleinem Radius $\epsilon > 0$ und Zentrum p enthält. Eine Teilmenge von X heißt *offen*, wenn sie Umgebung für jeden ihrer Punkte ist. Umgekehrt: Eine Menge ist eine Umgebung von p , wenn sie eine offene Menge enthält, in der p liegt. Basierend auf dem Begriff der Umgebung (nicht unbedingt der ϵ -Umgebung!) oder, wegen der letzten Bemerkung, auf dem Begriff der offenen Menge kann man dann die Begriffe *abgeschlossen*, *Inneres*, *Randpunkt*, *abgeschlossene Hülle*, *kompakt*, *zusammenhängend*, *konvergent* und *stetig* definieren. Und in den Beweisen der darüber gezeigten Sätze spielte die Metrik oft ebenfalls keine Rolle.¹

Wichtige Eigenschaften offener Teilmengen eines metrischen Raumes X waren diese:

- Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Teilmengen ist wieder offen. Das gilt insbesondere für die *leere Vereinigung*, die nach Definition die leere Menge ist.
- Der Durchschnitt von *endlich vielen* offenen Teilmengen ist wieder offen. Das gilt insbesondere für den leeren Durchschnitt, der nach Definition der ganze Raum X ist.

Und nur diese Eigenschaften offener Mengen gingen in die in der Fußnote zitierten Sätze ein. Wir benutzen das zur

Definition 2 (Topologischer Raum). Seien X eine Menge und \mathcal{T} eine Menge von Teilmengen von X .

\mathcal{T} heißt eine *Topologie* für X , wenn \mathcal{T} abgeschlossen ist gegenüber beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten. Insbesondere sind dann $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Die Elemente von \mathcal{T} heißen in diesem Fall die *offenen Mengen* der Topologie, ihre Komplemente die *abgeschlossenen Mengen* der Topologie.

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie für X . Man schreibt dafür auch gern (X, \mathcal{T}) .

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine *Umgebung von* $x \in X$, wenn es eine offene Menge $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ mit $x \in \tilde{U} \subset U$ gibt.

¹Konkret gilt das z.B. für die Sätze und Korollare 22, 25, 50, 62, 70, 73, 76, 77 der Analysis II. In den Beweisen verwendete ϵ -Umgebungen kann man problemlos durch allgemeine Umgebungen ersetzen.

Wie in der Analysis II können wir dann für topologische Räume die Begriffe *abgeschlossen*, *Inneres*, *Randpunkt*, *abgeschlossene Hülle*, *kompakt*, *zusammenhängend*, *konvergent* und *stetig* definieren und dafür die zitierten Sätze beweisen. Auf einige Beispiele gehen wir gleich noch ein.

Offenbar ist jeder metrische Raum auf natürliche Weise ein topologischer Raum, aber es gibt durchaus Topologien, die nicht von einer Metrik induziert sind. Das simpelste Beispiel liefert die sogenannte *Klumpentopologie* : \mathcal{T} besteht nur aus den notwendigsten Teilmengen, nämlich aus \emptyset und X . Enthält X wenigstens zwei Punkte, so gibt es keine Metrik, deren offene Mengen genau diese beiden sind. Die Klumpentopologie ist gewissermaßen das Gegenteil der von der diskreten Metrik induzierten *diskreten Topologie*, in der alle Teilmengen offen sind: \mathcal{T} ist die Potenzmenge.

Die Frage der *Metrisierbarkeit* einer Topologie ist eine viel studierte Frage im Rahmen der sogenannten mengentheoretischen Topologie, aber wir gehen darauf nicht ein. In der Funktionalanalysis oder der Algebraischen Geometrie gibt es interessante und wichtige Beispiele für *nicht-metrisierbare* Topologien.

Konvention. Wenn wir in Beispielen den \mathbb{R}^n oder Banachräume oder Teilmengen davon als topologische Räume verwenden, beziehen wir uns immer auf die von der Standardmetrik induzierte Topologie, es sei denn eine andere explizit angegeben.

Definition 3 (Basis, Subbasis). Seien (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine Teilmenge von \mathcal{T} .

- (i) \mathcal{B} heißt *eine Basis von \mathcal{T}* , wenn jede Menge aus \mathcal{T} Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist.
- (ii) \mathcal{B} heißt *eine Subbasis von \mathcal{T}* , wenn jede offene Menge aus \mathcal{T} Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus \mathcal{B} ist.

Beispiel 4. Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X . Bildet man alle endlichen Durchschnitte von Mengen aus \mathcal{B} und alle Vereinigungen von diesen, so erhält man eine Topologie für X mit \mathcal{B} als Subbasis. So kann man also auf jeder Menge Topologien erzeugen.

□

Beispiel 5. Die Menge der offenen ϵ -Kugeln $U_\epsilon(x)$ des \mathbb{R}^n bilden eine Basis der Topologie. Auch wenn man sich auf rationales ϵ und Punkte mit rationalen Koordinaten beschränkt, erhält man noch eine Basis.

□

Definition 6 (Spurtopologie, Relativtopologie). Seien (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Die sämtlichen Durchschnitte offener Mengen von X mit A bilden eine Topologie für A , die von \mathcal{T} induzierte *Relativtopologie* oder *Spurtopologie* \mathcal{T}_A auf A .

Konvergenz, Kompaktheit, Zusammenhang, Stetigkeit.

Konvergenz von Folgen ist ein rein topologischer Begriff:

Definition 7 (Konvergenz). Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im topologischen Raum X heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn jede Umgebung U von x fast alle Folgenglieder enthält:

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\} < \infty.$$

Bemerkung. Der Begriff der *Cauchyfolge* und damit der Begriff der *Vollständigkeit* oder die *gleichmäßige Konvergenz* von Funktionenfolgen sind keine rein topologischen Begriffe, sie erfordern eine Metrik (oder doch eine zusätzliche Struktur).

Bei der eben definierten Konvergenz gibt es ein neues Phänomen:

Beispiel 8. Sei $X = \mathbb{R}$ versehen mit der Klumpentopologie. Dann ist die Folge

$$x_n = (-1)^n$$

konvergent. Gegen welchen Punkt?

□

Der Limes von konvergenten Folgen in allgemeinen topologischen Räumen ist nicht eindeutig. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, braucht man eine zusätzliche Eigenschaft, die im Fall metrischer Räume von selbst erfüllt ist:

Definition 9 (Hausdorff-Eigenschaft). Ein topologischer Raum X heißt ein *Hausdorffraum* oder *Hausdorffsch*, wenn gilt: Zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X gibt es disjunkte offene Mengen U und V mit $x \in U$ und $y \in V$. Man sagt, je zwei Punkte lassen sich durch disjunkte Umgebungen trennen.

In Hausdorffschen topologischen Räumen ist der Limes einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

Man bezeichnet die Hausdorffeigenschaft auch als *Trennungsaxiom* T_2 . Es impliziert, das Trennungsaxiom T_1 : Jede einpunktige Teilmenge ist abgeschlossen. Finden Sie einen topologischen Raum, in dem das nicht gilt!

Definition 10 (Kompakt). Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.² Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn sie in der Spurtopologie kompakt ist.

Beispiel 11 (Bolzano-Weierstraß?). Ein *Häufungspunkt* einer Folge ist ein Punkt, bei dem in jeder Umgebung unendlich viele Glieder der Folge liegen. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem kompakten topologischen Raum besitzt einen Häufungspunkt: Andernfalls gäbe es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x , für die

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_x\} < \infty.$$

Endlich viele davon genügen zur Überdeckung von X im Widerspruch zur Unendlichkeit der Folge.

Ist x ein Häufungspunkt der Folge (x_n) in einem *metrischen* Raum X , so kann man eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ auswählen, für die

$$x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k+1}}(x).$$

Diese Teilfolge konvergiert dann offenbar gegen x . Zusammen mit dem obigen Argument erhält man den Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede Folge in einem kompakten metrischen Raum enthält eine konvergente Teilfolge.

In *topologischen* Räumen ist das nicht unbedingt richtig, weil man keinen Ersatz für die "kontrahierende" Folge von Kugelumgebungen $U_{\frac{1}{k+1}}(x)$ hat. Man braucht wiederum eine zusätzliche Eigenschaft: Hinreichend ist, dass der Raum das *1. Abzählbarkeitsaxiom* erfüllt, dass nämlich jeder Punkt x eine *abzählbare Umgebungsbasis* besitzt: eine Folge $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen, so dass jede Umgebung U von x eines der U_k enthält.

Ist dann x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x , so setzt man $V_k := U_0 \cap \dots \cap U_k$ und wählt eine Teilfolge mit $x_{n_k} \in V_k$. Die konvergiert dann gegen x .

²Manche Autoren nennen das *quasi-kompakt* und nennen X *kompakt*, wenn zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft gilt.

Bemerkung: Das 2. Abzählbarkeitsaxiom fordert die Existenz einer abzählbaren Basis für die Topologie \mathcal{T} . Es impliziert das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

□

Beispiel 12. Zeigen Sie:

- Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen sind kompakt.
- Kompakte Teilmenge eines hausdorffschen(!) topologischen Raumes sind abgeschlossen.

(Beschränktheit ist in allgemeinen topologischen Räumen gar nicht definiert.)

□

Definition 13 (Zusammenhang). Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung zweier offener nicht-leerer Teilmengen ist. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt *zusammenhängend*, wenn sie in der Spurtopologie zusammenhängend ist.

Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn die leere Menge und der ganze Raum die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Bei metrischen Räumen hatten wir gezeigt: Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist zusammenhängend genau dann, wenn es nicht zwei disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset X$ gibt, so dass $Y \subset \tilde{U} \cup \tilde{V}$ und $\tilde{U} \cap Y \neq \emptyset \neq \tilde{V} \cap Y$. Der schwierige Teil des Beweises („ \implies “-Richtung) war die Erweiterung disjunkter relativ offener Teilmengen $U, V \subset Y$ zu *disjunkten* offenen Teilmengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset X$. Dabei benutzte man wesentlich die Metrik. In allgemeinen topologischen Räumen klappt das nicht:

Beispiel 14. Die Menge X enthalte wenigstens drei verschiedene Punkte x, y, z . Wir definieren

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{Y \subset X \mid x \in Y\}.$$

\mathcal{T} ist abgeschlossen gegenüber Durchschnitt und Vereinigung, definiert also eine Topologie auf X . Die Teilmenge $A = \{y, z\}$ enthält die in A offenen disjunkten Teilmengen $U = \{y\} = A \cap \{x, y\}$ und $V = \{z\} = A \cap \{x, z\}$. Aber diese lassen sich nicht zu *disjunkten* in X offenen Teilmengen erweitern, weil jede solche den Punkt x enthält.

□

Definition 15 (Stetigkeit). Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt *stetig in* $x \in X$, wenn gilt: Für jede Umgebung V von $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x .

Sie heißt *stetig auf* X , wenn sie stetig in jedem $x \in X$ ist. Das ist äquivalent dazu, dass die Urbilder aller offenen Mengen von Y offen in X sind oder dass die Urbilder aller abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig (klar). Stetige Abbildungen bilden kompakte bzw. zusammenhängende topologische Räume in kompakte bzw. zusammenhängende Mengen ab. Stetige reellwertige Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum nehmen ihr Maximum und Minimum an. Die Beweise kann man wörtlich aus der Analysis II übernehmen.

Der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit hingegen macht wieder nur in metrischen Räumen Sinn.

Definition 16 (Wegzusammenhang). Eine stetige Abbildung $c : [a, b] \rightarrow X$ eines kompakten Intervalls $[a, b]$ in einen topologischen Raum X heißt ein *Weg* oder eine *Kurve* von $c(a)$ nach $c(b)$.

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte $x, y \in X$ durch einen Weg von x nach y verbinden lassen, wenn es also einen Weg $c : [a, b] \rightarrow X$ mit $c(a) = x$ und $c(b) = y$ gibt.

Zeigen Sie, dass wegzusammenhängende topologische Räume zusammenhängend sind, dass aber die Umkehrung nicht gilt.³ Stetige Abbildungen bilden wegzusammenhängende topologische Räume auf wegzusammenhängende Mengen ab.

Beispiel 17. Die spezielle orthogonale Gruppe

$$\mathbf{SO}(n) := \{A \in \text{End}(\mathbb{R}^n) \mid AA^* = \text{id} \text{ und } \det A = +1\}$$

ist für alle $n \geq 2$ wegzusammenhängend bezüglich der “kanonischen” Topologie: $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ hat als endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum eine ausgezeichnete Topologie, die von einer beliebigen Norm, zum Beispiel von der Operatornorm, induziert wird. Und $\mathbf{SO}(n)$ trägt dann eben die Spurtopologie.

Beweis: Nach linearer Algebra existiert für $A \in \mathbf{SO}(n)$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^n , bezüglich der A eine Darstellungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

besitzt, bei der die Matrizen A_j jeweils von einer der folgenden Formen sind:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi_j & -\sin \phi_j \\ \sin \phi_j & \cos \phi_j \end{pmatrix} \text{ oder } (+1)$$

Beachten Sie, dass der Eigenwert -1 wegen der Determinantenbedingung mit gerader Multiplizität vorkommt, so dass er durch 2×2 -Kästchen mit $\phi = \pi$ erfaßt wird.

Wir ersetzen ϕ_j jeweils durch $t\phi_j$ und bezeichnen mit $A(t)$ den zugehörigen Endomorphismus bezüglich derselben Basis. Dann ist also $A(1) = A$, und $t \mapsto A(1-t)$ liefert eine stetige Abbildung in $\mathbf{SO}(n)$ mit $A(0) = \text{id}$. Also ist $\mathbf{SO}(n)$ wegzusammenhängend.

□

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der geometrischen Konstruktion von stetigen Abbildungen ist das folgende

Lemma 18 (Klebelemma). *Seien $f_0 : A_0 \rightarrow Y$ und $f_1 : A_1 \rightarrow Y$ stetige Abbildung von abgeschlossenen (offenen) Teilmengen A_0, A_1 des topologischen Raumes X und sei*

$$f_0|_{A_0 \cap A_1} = f_1|_{A_0 \cap A_1}.$$

Dann definiert $f(x) := f_i(x)$ für $x \in A_i$ eine stetige Funktion auf $A_0 \cup A_1$.

Beweis. Für abgeschlossenes $Z \subset Y$ sind die $f_i^{-1}(Z)$ abgeschlossen in A_i und, weil diese abgeschlossen sind, auch in X . Damit ist $f^{-1}(Z) = f_0^{-1}(Z) \cup f_1^{-1}(Z)$ abgeschlossen in X also in $A_0 \cup A_1$. Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind also abgeschlossen, und daher ist f stetig. Analog mit offenen Mengen. □

³Ein (Gegen)beispiel findet man mit Hilfe des Graphen von $\sin \frac{1}{x}$.

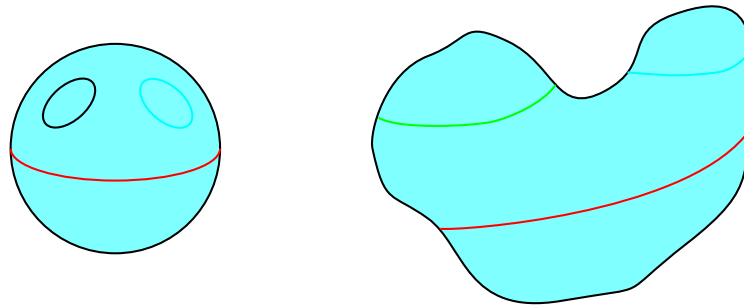
Definition 19 (Homöomorphie). Eine bijektive stetige Abbildung mit stetigem Inversen zwischen topologischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume heißen *homöomorph*, wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus gibt.

Beispiel 20. Die Abbildung $x \mapsto \tan \frac{\pi x}{2}$ liefert einen Homöomorphismus des offenen Intervalls $] -1, 1[$ auf \mathbb{R} . Gibt es einen Homöomorphismus von $] -1, 1[$ auf $[-1, +1]$? Gibt es einen Homöomorphismus zwischen diesen beiden Intervallen, wenn man beide mit der diskreten Topologie versieht?

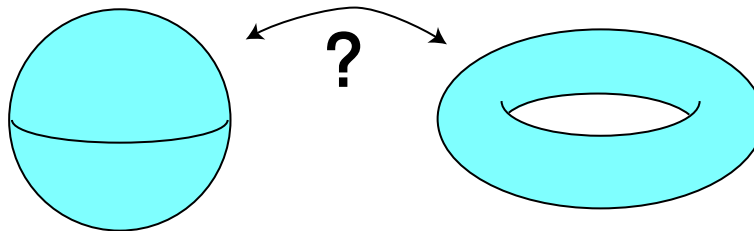
□

Homöomorphismen sind die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume. Zwei homöomorphe topologische Räume sind bezüglich ihrer topologischen Eigenschaften gleich. Eine fundamentale Fragestellung der Topologie ist die „Klassifizierung“ topologischer Räume: Wann sind zwei solche homöomorph?

Zum Beispiel ist es klar, dass Sphären verschiedener Radien im \mathbb{R}^3 (versehen mit der kanonischen Spurstopologie) homöomorph sind, einen Homöomorphismus können Sie leicht explizit hinschreiben. Die Sphäre ist sogar homöomorph zu Ellipsoiden oder zu sehr viel „krummen“ Flächen:



Aber ist die Sphäre auch homöomorph zum Torus?



Methoden, mit denen man diese Frage über das „anschauliche Empfinden“ hinaus präzise entscheiden kann, sind ein Ziel dieser Vorlesung.

Produkte und Quotienten topologischer Räume

Definition 21 (Produkttopologie). Sind X und Y topologische Räume, so bilden die Produkte offener Mengen von X und Y die Subbasis (sogar die Basis) einer Topologie für $X \times Y$, die *Produkttopologie* genannt wird.

Beispiel 22. Die Produkttopologie von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist die Standardtopologie des \mathbb{R}^2 .

□

Es ist klar, wie man die Produkttopologie auf endlichen Produkten $X_1 \times \dots \times X_n$ definiert.

Satz 23. Seien X_1, \dots, X_n topologische Räume und sei

$$\pi_k : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_k$$

die Projektion auf den k -ten Faktor. Dann ist

$$\{\pi_k^{-1}(U_k) \mid 1 \leq k \leq n \text{ und } U_k \subset X_k \text{ offen}\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $\prod_{i=1}^n X_i$.

Beweis. Für $1 \leq k \leq n$ sei U_k eine offene Menge aus X_k . Dann ist

$$U_1 \times \dots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$$

und umgekehrt

$$\pi_k^{-1}(U_k) = X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times U_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n.$$

Daher erzeugen beide Mengensysteme dieselbe Topologie. \square

Offenbar enthält die Produkttopologie gerade alle Mengen, die nötig sind, damit die Abbildungen π_k alle stetig sind, sie ist die *größte* Topologie, d.h. die mit den wenigsten offenen Mengen, die diese Eigenschaft hat.

Auf dem unendlichen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ kann man die sämtlichen Produkte der Form $\prod_{i \in I} U_i$ mit U_i offen in X_i als Subbasis einer Topologie benutzen. Man entscheidet sich aber dafür, als *Produkttopologie* in diesem Fall wieder die größte Topologie zu nehmen, in der alle π_k stetig sind: Eine Subbasis bilden die Mengen

$$\pi_k^{-1}(U_k) = \prod_{i \in I} U_i \quad U_i = X_i \text{ für } i \neq k.$$

Mit dieser Definition kann man den folgenden Satz beweisen, der nach Kelley vielleicht der wichtigste einzelne Satz der (mengentheoretischen) Topologie ist. Lesen Sie dazu auch Kapitel X, §1 im Jänich.

Satz 24 (Tychonoff). Das Produkt (beliebig vieler) kompakter Räume ist kompakt.

Für den Beweis vergleichen Sie irgendein Lehrbuch der mengentheoretischen Topologie. Ich verzichte hier darauf, weil wir an anderen Richtungen der Topologie interessiert sind.

Definition 25 (Quotiententopologie). Sei X ein topologischer Raum und sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Sei X/\sim die Menge der Äquivalenzklassen und

$$\pi : X \rightarrow (X/\sim), \quad x \mapsto \pi(x) = [x]$$

die kanonische Projektion. Die Menge

$$\{U \subset (X/\sim) \mid \pi^{-1}(U) \text{ offen in } X\}$$

ist eine Topologie auf X/\sim , die *Quotiententopologie*. Sie ist die *feinste* Topologie auf X/\sim , d.h. die mit den meisten offenen Mengen, bezüglich der die kanonische Projektion stetig ist.

Man stellt sich gern vor, dass X/\sim aus X hervorgeht, indem man äquivalente Punkte „identifiziert“. Entsprechend heißt die Quotiententopologie auch *Identifizierungstopologie*.

Prüfen Sie die Eigenschaften einer Topologie für die Quotiententopologie nach!

Beispiel 26. Auf \mathbb{R} betrachte man die folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \iff \exists_{\lambda \neq 0} y = \lambda x$$

Beschreiben Sie \mathbb{R}/\sim und die Quotiententopologie darauf.

□

Beispiel 27. Auf \mathbb{R} betrachte man die folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \iff (x = y) \vee |x| = 1 = |y|.$$

Beschreiben Sie \mathbb{R}/\sim und die Quotiententopologie darauf. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Projektion $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ keine offene Abbildung ist, d.h. nicht alle offenen Mengen in offene Mengen abbildet.

□

Beispiel 28 (Der reelle projektive Raum). Der *reelle projektive Raum* P^n ist die Menge aller Geraden durch 0 im \mathbb{R}^{n+1} . Jede solche Gerade trifft die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in einem Antipodenpaar. Deshalb kann man den Projektiven Raum auch verstehen als Quotientenraum der Einheitssphäre nach der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff x = \pm y.$$

Man kann also definieren

$$P^n := S^n / \{x \sim -x\}$$

Die kanonische Projektion von S^n auf P^n ist offenbar 2:1 und surjektiv.

Wir versehen P^n mit der Quotiententopologie. Dann ist π stetig und P^n insbesondere wegzusammenhängend und kompakt.

Für offenes $V \subset S^n$ ist $\pi^{-1}(\pi(V))$ die Vereinigung von V mit dessen Spiegelbild $-V$ am Ursprung, also offen, und daher ist $\pi(V)$ offen, d.h. π ist eine offene Abbildung: die *Bilder* offener Mengen sind offen.

□

Beispiel 29 (Spiegelungsmodell). Die Abbildung $f : P^n \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$ des projektiven Raumes in den Banachraum der Endomorphismen von \mathbb{R}^{n+1} mit

$$f([x])(y) := -y + 2\langle x, y \rangle x \text{ für } x \in S^n$$

definiert einen Homöomorphismus von P^n auf

$$\{S \in \text{End}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid S^* = S \text{ und } S^2 = \text{id und } \text{Rang}(S - \text{id}) = n\}.$$

Die Bijektivität von f auf die Menge der Geradenspiegelungen ist klar, eine Gerade $[x]$ wird mit der Spiegelung $f([x])$ an $[x]$ identifiziert. Zu zeigen ist, dass f und f^{-1} stetig sind. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von f : Für $x, x_0 \in S^n$ und $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist

$$\|(-y + \langle x, y \rangle x) - (-y + \langle x_0, y \rangle x_0)\| = \|\langle x - x_0, y \rangle x - \langle x_0, y \rangle (x - x_0)\| \leq 2\|x - x_0\|\|y\|.$$

Also gilt für die Operatornorm

$$\|f([x]) - f([x_0])\| \leq 2\|x - x_0\|.$$

Daher ist die Abbildung $f \circ \pi : S^n \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$ stetig auf S^n . Folgern sie daraus die Stetigkeit von f .

Die Stetigkeit von f^{-1} ist auf direktem Wege nicht so leicht zu zeigen. Der Kern der Schwierigkeiten besteht darin, dass man f^{-1} nicht so leicht zu einer stetigen Funktion auf einer offenen Teilmenge von $\text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$ erweitern läßt. Aber es gibt eine viel einfachere Lösung des Problems durch den folgenden Satz.

□

Satz 30. *Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv und ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f ein Homöomorphismus, also f^{-1} stetig.*

Beweis. Vergleiche Beispiel 12. Das Urbilder einer abgeschlossenen, also kompakten Menge $A \subset Y$ unter f^{-1} ist $f(A)$, also kompakt, also abgeschlossen. □

Beispiel 31. Auf $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$ definieren wir eine Äquivalenzrelation: Wir nennen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) äquivalent, wenn sie gleich sind, oder wenn $|x_1 - x_2| = 2\pi$ und $y_1 + y_2 = 0$ ist. Der Quotientenraum nach dieser Äquivalenzrelation heißt das *Möbiusband*. Veranschaulichen Sie sich die Äquivalenzrelation am Einheitsquadrat und finden Sie einen Homöomorphismus des Möbiusbandes auf eine Teilmenge im \mathbb{R}^3 .

□

1.2 Zerlegung der Eins und Erweiterung von Homöomorphismen

Wir schieben hier einen relativ technischen Abschnitt ein, weil ein bißchen Technik im Umgang mit topologischen Begriffen geübt werden muss, und weil die *Zerlegung der Eins* eine wichtige Methode mit vielseitigen Anwendungen in der globalen Analysis und Geometrie ist. Wir behandeln den C^∞ -Fall im \mathbb{R}^n , der für den weiteren Gang der Vorlesung, nämlich für die Mannigfaltigkeiten, wichtig ist. Es gibt eine Variante mit stetigen Funktionen in gewissen topologischen Räumen. Darüber mache ich am Ende des Abschnittes noch eine Bemerkung.

Definition 32 (Träger). Der Träger einer Funktion $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem topologischen Raum X ist definiert als die abgeschlossene Hülle der Menge aller x mit $\phi(x) \neq 0$:

$$\text{supp } \phi := \overline{\{x \in X \mid \phi(x) \neq 0\}}.$$

Lemma 33. Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Vollkugel. Dann gibt es eine nicht-negative C^∞ -Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ mit $\text{supp } \phi = B$.

Beweis. Die Funktion

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nach Beispiel 168 der *Analysis I* eine C^∞ -Funktion. Ist $B = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, so leistet deshalb

$$\rho(x) := \psi(r^2 - \|x - x_0\|^2)$$

das Gewünschte. □

Satz 34 (Zerlegung der Eins). Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie offener Mengen im \mathbb{R}^n und

$$U := \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

Dann gibt es eine Folge $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von C^∞ -Funktionen auf U mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\phi_j : U \rightarrow [0, 1]$ für alle j .
- (ii) Jedes $x \in U$ hat eine offene Umgebung, auf der alle bis auf endlich viele der ϕ_j verschwinden.
- (iii) Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit

$$\text{supp } \phi_j \subset U_\alpha.$$

Der Träger $\text{supp } \phi_j$ ist kompakt.

- (iv) Für jedes $x \in U$ ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x) = 1.$$

Beachten Sie, dass wegen (ii) in der Summe nur endlich viele Term $\neq 0$ sind.

Die Folge (ϕ_j) heißt eine zur Überdeckung (U_α) passende Zerlegung der Eins.

Beweis. Wir setzen für $m \geq 0$

$$K_m := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{m+1}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq m+1\}.$$

Das ist der Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer kompakten Menge, also kompakt und offenbar in U enthalten. Weiter gilt

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = U \text{ und } K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}.$$

Wir setzen $K_{-1} = K_2 = \emptyset$. Für alle $m \geq 0$ ist

$$U \setminus K_{m-2} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \setminus K_{m-2}$$

eine offene Menge, die die kompakte Menge $K_m \setminus \overset{\circ}{K}_{m-1}$ enthält. Wir betrachten nun alle offenen Kugeln des \mathbb{R}^n , deren abgeschlossene Hülle in einer der offenen Mengen $U_\alpha \setminus K_{m-2}$ liegen. Sie bilden eine offene Überdeckung von $U \setminus K_{m-2}$ und damit von $K_m \setminus \overset{\circ}{K}_{m-1}$. Also können wir endlich viele dieser Kugeln auswählen, die bereits $K_m \setminus \overset{\circ}{K}_{m-1}$ überdecken. Wir machen das für alle $m \geq 0$ und erhalten nach Numerierung eine Folge $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von offenen Kugeln mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Jedes $\overline{V_j}$ liegt in einem U_α .
- (ii) Jedes K_m trifft nur endlich viele der $\overline{V_j}$. Weil jedes $x \in U$ in einem $\overset{\circ}{K}_m$ liegt, besitzt es eine Umgebung, die nur endlich viele der $\overline{V_j}$ trifft.
- (iii) Es gilt

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m \setminus \overset{\circ}{K}_{m-1} = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m = U.$$

Wegen (i) nennt man die Überdeckung $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von U eine *Verfeinerung* von $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, wegen (ii) nennt man sie *lokal endlich*.

Wählen wir zu jedem $\overline{V_j}$ eine Funktion ρ_j wie im Lemma 33, so erfüllen diese Funktionen die Bedingungen (ii) und (iii) des Satzes. Deshalb ist $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k$ lokal eine endliche Summe, also eine C^∞ -Funktion, die auf U positiv ist. Deshalb definiert

$$\phi_j := \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k}$$

eine Funktionenfolge, die auch (i) und (iv) erfüllt. □

Wichtige Anwendungen der Zerlegung der Eins gibt es in der globalen Analysis beim “Zusammenstückeln” lokaler Informationen. Wir machen das an einem Beispiel deutlich. Wichtige weitere Beispiele bieten die Integration auf Mannigfaltigkeiten und der Satz von Stokes, vgl. *Analysis III*, oder der Whitneysche Einbettungssatz, vgl. *Guillemin/Pollack*.

Beispiel 35. In der Analysis definiert man differenzierbare⁴ Funktionen zunächst nur auf *offenen* Teilmengen. Später möchte man das verallgemeinern (zum Beispiel für differenzierbare Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten). Man nennt dann eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf der beliebigen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn sie sich *lokal* differenzierbar auf eine offene Menge fortsetzen läßt: Wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U_x in \mathbb{R}^n und eine differenzierbare Funktion $f_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, für die

$$f_x|_{M \cap U_x} = f|_{M \cap U_x}$$

gilt.

Gibt es dann sogar eine “globale” differenzierbare Fortsetzung, also eine offene Umgebung U von M und eine differenzierbare Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}|_M = f$?

Wir wenden den Satz über die Zerlegung der Eins an auf die offene Überdeckung (U_x) von $X := \bigcup U_x$. Sei $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine passende Zerlegung der Eins und $\text{supp } \phi_j \subset U_{x_j}$. Wir definieren dann

$$f_j(y) := \begin{cases} f_{x_j}(y) & \text{für } y \in U_{x_j}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist im allgemeinen auf dem Rand von U_{x_j} unstetig. Aber weil ϕ_j auf dem Rand von U_{x_j} “längst verschwunden ist”, ist $\phi_j f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wegen der lokalen Endlichkeit, d.h. der Eigenschaft (ii) des Satzes, ist auch

$$\tilde{f} := \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar, und für $x \in M \subset X$ gilt

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x) f_j(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x) \right) f(x) = f(x).$$

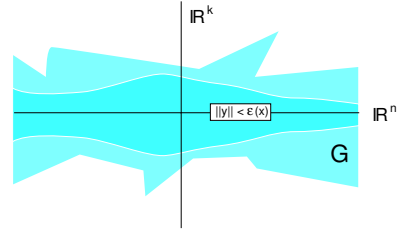
□

Beispiel 36. Wir betrachten im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ eine offene Umgebung G von $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ und wollen zeigen, dass es dazu eine positive C^∞ -Funktion $\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\{(x, y) \mid \|y\| < \epsilon(x)\} \subset G$$

gilt.

Dazu wählen wir zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung U_x in \mathbb{R}^n und ein $\epsilon_x > 0$, so dass $U_x \times U_{\epsilon_x}(0) \subset G$.



Wir wählen nun zur Überdeckung (U_x) von \mathbb{R}^n eine passende Zerlegung (ϕ_j) der Eins, wählen zu jedem j ein x_j mit $\text{supp } \phi_j \subset U_{x_j}$ und setzen

$$\epsilon_j(x) := \begin{cases} \epsilon_{x_j} \phi_j(x) & \text{für } x \in U_{x_j}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weil der Träger von ϕ_j in U_{x_j} liegt, ist ϵ_j auf ganz \mathbb{R}^n eine C^∞ -Funktion. Es ist positiv, wo ϕ_j positiv ist. Weiter hat jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung, auf der alle bis auf endlich viele der ϵ_j verschwinden. Daher definiert

$$\epsilon(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_j(x)$$

eine positive C^∞ -Funktion auf ganz \mathbb{R}^n . Für diese gilt (wegen $\sum \phi_j = 1$)

$$\epsilon(x) = \sum_{\epsilon_j(x) > 0} \epsilon_{x_j} \phi_j(x) \leq \max\{\epsilon_{x_j} \mid x \in U_{x_j}\}.$$

⁴Statt *differenzierbar* kann man hier und im folgenden auch C^∞ setzen.

Also ist $\{x\} \times U_{\epsilon(x)}(0) \subset G$ für alle x .

□

Beispiel 37 (C^∞ -Urysohn-Lemma). Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann gibt es eine C^∞ -Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\phi|_A = 1$ und $\phi|_B = 0$.

Beweis als Übungsaufgabe.

□

Hier will ich noch eine weitere Anwendung des Satzes über die Zerlegung der Eins geben, um ein Lemma zu beweisen, welches einerseits eine interessante Frage der elementaren mengentheoretischen Topologie behandelt, andererseits für uns später sehr wichtig sein wird, vgl. Satz 121. Wir benutzen dabei nur die Tatsache, dass $(\phi_i^{-1}(]0, \infty[))_{i \in \mathbb{N}}$ und die $(\text{supp } \phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene bzw. abgeschlossene lokal endliche Verfeinerungen sind, die Summe der ϕ_i interessiert hier nicht.

Lemma 38 (Erweiterung eines Homöomorphismus). Seien X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ ein lokaler Homöomorphismus auf eine Teilmenge Y des \mathbb{R}^n . Sei $Z \subset X$ eine Teilmenge, die durch f homöomorph auf $f(Z)$ abgebildet wird. Dann gibt es eine offene Umgebung G von Z in X , die durch f homöomorph auf $f(G)$ abgebildet wird.

Beweis. Sei $g := (f|_Z)^{-1}$.

1. Schritt: Wir zeigen zunächst: Es gibt eine Überdeckung $(U_z)_{z \in Z}$ von Z mit in X offenen Mengen U_z , so dass für alle $z \in Z$ gilt:

$$f_z := f|_{U_z} \text{ ist ein Homöomorphismus auf eine offene Menge } V_z \subset Y. \quad (4)$$

$$f_z^{-1}|_{V_z \cap f(Z)} = g|_{V_z \cap f(Z)}. \quad (5)$$

Beweis. Zu $z \in Z$ gibt es eine offene Umgebung U in X , auf der f ein Homöomorphismus ist. Wegen der Stetigkeit von g gibt es eine offene Umgebung V von $f(z)$ in Y , so dass

$$g(V \cap f(Z)) \subset U \cap Z.$$

Setze

$$V_z := V \cap f(U) \quad \text{und} \quad U_z := (f|_U)^{-1}(V_z).$$

Ist $y \in V_z \cap f(Z)$, so ist $g(y) \in U \cap Z$ und $f(g(y)) = y$, also $(f|_U)^{-1}(y) = g(y)$. Daraus folgt Gleichung (5).

2. Schritt: Seien die U_z wie im ersten Schritt. Dann ist $(V_z = f(U_z))_{z \in Z}$ eine offene Überdeckung von $f(Z)$. Wir wähle dazu eine passende Zerlegung $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ der Eins und setzen

$$W_j := \phi_j^{-1}(]0, \infty[).$$

Wir wählen weiter zu jedem j ein $z_j \in Z$ mit

$$\overline{W_j} = \text{supp } \phi_j \subset V_{z_j}$$

und setzen

$$V_j := V_{z_j}, U_j := f^{-1}(V_j), f_j := f|_{U_j}.$$

Dann ist $(\overline{W_j})$ eine lokal endliche Überdeckung von $f(Z)$ und

$$f_j : U_j \rightarrow V_j$$

ein Homöomorphismus mit

$$f_j^{-1}|_{V_j \cap f(Z)} = g|_{V_j \cap f(Z)}.$$

Wir setzen

$$W := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j$$

und

$$\hat{W} := \{y \in W \mid \forall_{i,j} (y \in \overline{W_i} \cap \overline{W_j} \implies f_i^{-1}(y) = f_j^{-1}(y))\}.$$

Offenbar ist $f(Z) \subset \hat{W}$. Wir behaupten, dass \hat{W} sogar eine offene Umgebung von $f(Z)$ enthält.

Beweis. Sei $y \in f(Z)$. Dann gibt es dazu eine Umgebung $H_y \subset W$, für die

$$J := \{j \mid H_y \cap \overline{W_j} \neq \emptyset\}.$$

endlich ist. Wegen der Endlichkeit ist $\bigcup_{j \in J, y \notin \overline{W_j}} \overline{W_j}$ abgeschlossen und das Komplement dieser Menge in H_y eine offene Umgebung von y . Also können wir o.E. annehmen, dass

$$y \in \bigcap_{j \in J} \overline{W_j}.$$

Dann ist (wegen der Endlichkeit von J) $\bigcap_{j \in J} V_j$ eine offene Umgebung von y , und deshalb o.E.

$$H_y \subset \bigcap_{j \in J} V_j.$$

Weil $y \in f(Z)$ ist $f_j^{-1}(y) = g(y) =: x$ für alle $j \in J$ und deshalb $x \in U_j$ für alle $j \in J$. Weil $f|_{U_j}$ injektiv ist, bildet f die offene Umgebung $\bigcap_{j \in J} U_j$ injektiv auf eine offene Umgebung

$$f\left(\bigcap_{j \in J} U_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f(U_j) = \bigcap_{j \in J} V_j$$

von y ab. Ist $\tilde{y} \in H_y \cap f\left(\bigcap_{j \in J} U_j\right)$, so gilt für alle $i, j \in J$

$$f(f_i^{-1}(\tilde{y})) = \tilde{y} = f(f_j^{-1}(\tilde{y})),$$

und daraus folgt $f_i^{-1}(\tilde{y}) = f_j^{-1}(\tilde{y})$. Also ist $H_y \cap f\left(\bigcap_{j \in J} U_j\right)$ eine offene Umgebung von y in \hat{W} .

3. Schritt: Schluss des Beweises.

Sei also $H \subset \hat{W}$ eine offene Umgebung von $f(Z)$. Durch

$$\hat{g}(y) := f_i^{-1}(y) \text{ für } y \in W_i \cap H$$

erhält man Abbildung $\hat{g} : H \rightarrow X$. Nach dem Klebelemma 18 ist \hat{g} stetig und nach Konstruktion ein lokaler Homöomorphismus. Daher ist $G := \hat{g}(H)$ eine offene Umgebung von Z . Schließlich gilt für alle $y \in H$ und $x = \hat{g}(y) \in G$

$$\begin{aligned} f \circ \hat{g}(y) &= f \circ f_i^{-1}(y) = y, \\ \hat{g} \circ f(x) &= \hat{g}(y) = x. \end{aligned}$$

Damit ist \hat{g} ein stetiges Inverses von $f|_G$. □

Bemerkung: Parakompakte Räume. Wir sind mit der Zerlegung der Eins gewissermaßen in eine andere Kategorie gerutscht: Statt über stetige Funktionen auf topologischen

Räumen reden wir über C^∞ -Funktionen auf \mathbb{R}^n . Das ist ein Schritt in Richtung Differentialtopologie, gerechtfertigt durch die Anwendungen, die wir im Auge haben. Aber auch in allgemeineren topologischen Räumen spielt die Zerlegung der Eins mit *stetigen* Funktionen ϕ_j eine wichtige Rolle. Zum Beispiel ist das (stetige) Urysohn-Lemma dort ein wichtiges Ergebnis. Zur Konstruktion einer stetigen Zerlegung der Eins ist es wichtig, zu einer gegebenen offenen Überdeckung, eine lokal endliche Verfeinerung zu haben. Topologische Räume, in denen jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt, nennt man *parakompakt*. Die Parakompaktheit ist tatsächlich äquivalent zur Existenz einer (nicht notwendig abzählbaren) Zerlegung der Eins mit stetigen Funktionen und den Eigenschaften des Satzes.

Beispiel 39. Die Mengen \mathbb{N} hat ein Topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{G \subset \mathbb{N} \mid 0 \in G\}.$$

Prüfen Sie, dass das eine Topologie ist. Jede nicht-leere offene Teilmenge enthält also die 0. Die offene Überdeckung $(U_n = \{0, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht lokal endlich, denn jede Umgebung von 1 trifft alle U_n . Sie besitzt auch keine lokal endliche Verfeinerung, weil sie gar keine echte Verfeinerung besitzt. Also ist $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ nicht parakompakt.

□

2 Überlagerungen und die Fundamentalgruppe

In diesem Abschnitt sollen topologische Räume immer hausdorffsch sein.

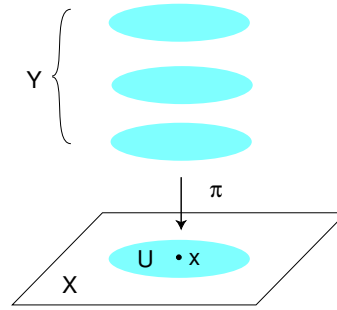
2.1 Überlagerung, Hochhebung und Homotopie

Definition 40 (Überlagerung). Eine stetige Abbildung $\pi : Y \rightarrow X$ von topologischen Räumen heißt eine *Überlagerung*, wenn

jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $\pi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung offener Mengen ist, deren jede durch π homöomorph auf U abgebildet wird. Wir nennen U dann eine *schlicht überdeckte Umgebung* von x .

Kann man $U = X$ wählen, so heißt die Überdeckung *trivial*.

Der Raum X heißt *die Basis* und Y *der Totalraum* der Überlagerung. $\pi^{-1}(\{x\})$ heißt *die Faser über x* . Sie ist eine diskrete Teilmenge von Y und wird auch mit Y_x bezeichnet.

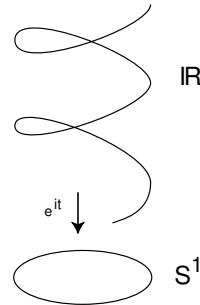


Die Mächtigkeit der Faser $\#Y_x$ heißt die *Blätterzahl* der Überlagerung über x . Sie ist lokal konstant. Ist sie global konstant und endlich vom Wert $k \in \mathbb{N}$, so heißt $\pi : Y \rightarrow X$ eine *k-blättrige Überlagerung*.

Sind $\pi_1 : Y_1 \rightarrow X$ und $\pi_2 : Y_2 \rightarrow X$ Überlagerungen, so heißt $\phi : Y_1 \rightarrow Y_2$ ein *Isomorphismus* der Überlagerungen, wenn ϕ ein Homöomorphismus und $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$ ist.

Beispiele 41. Die folgenden Abbildungen sind Überlagerungen

- (i) $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$.
- (ii) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto e^z$.
- (iii) $\pi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^n$.
- (iv) Die kanonische Projektion $\pi : S^n \rightarrow P^n$, vgl. Beispiel 28.



□

Bemerkung. Eine Überlagerung $\pi : Y \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus: Jeder Punkt $y \in Y$ besitzt eine offene Umgebung, die durch π homöomorph auf eine offene Umgebung von $\pi(y)$ abgebildet wird. Aber ein lokaler Homöomorphismus ist im allgemeinen noch keine Überlagerung. Finden Sie dafür ein Beispiel.

Beispiel 42. Eine \mathbb{R} -bilineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto xy$$

heißt eine *Multiplikation* und \mathbb{R}^n zusammen mit einer solchen Multiplikation eine *n-dimensionale (reelle) Algebra*. Ist $xy = 0$ nur für $x = 0$ oder $y = 0$, so heißt die Algebra eine *Divisionsalgebra*. Beispiele liefern \mathbb{R} und $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit den üblichen Multiplikationen. Der \mathbb{R}^4

besitzt eine Divisionsalgebra-Struktur, die nicht mehr kommutativ, aber noch assoziativ ist, genannt die Algebra \mathbb{H} der *Quaternionen*. Auch auf dem \mathbb{R}^8 kennt man eine Divisionsalgebra-Struktur, die allerdings nicht einmal mehr assoziativ ist (Cayleysche Oktaven). Und das sind tatsächlich *alle* reellen Divisionsalgebren. Bis heute gibt es für diese Tatsache keinen rein algebraischen Beweis, man braucht Methoden aus der algebraischen Topologie!⁵ Vergleichen Sie Beispiel 53.

Wir wollen die Quaternionen kurz einführen, um damit eine Überlagerung $S^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ der Gruppe der speziellen orthogonalen Transformationen des \mathbb{R}^3 zu beschreiben.

Wir bezeichnen die Einheitsvektoren des \mathbb{R}^4 mit $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Die Quaternionenmultiplikation $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ist dann die reell-bilineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1. \end{aligned}$$

Wir definieren eine \mathbb{R} -lineare Konjugation $x \mapsto \bar{x}$ wie im Komplexen durch

$$\bar{1} = 1, \bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}, \bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}, \bar{\mathbf{k}} = -\mathbf{k},$$

Bezeichnet $\|x\| := \sqrt{x\bar{x}}$ die übliche Norm des \mathbb{R}^4 , so ist

$$\|xy\| = \|x\| \|y\|.$$

Für

$$q \in S^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid \|x\| = 1\}$$

ist daher die Abbildung

$$\pi(q) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, x \mapsto qx\bar{q}$$

eine orthogonale Transformation des Euklidischen \mathbb{R}^4 , die den $\mathbb{R}^3 := \text{Spann}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in sich überführt. Also

$$\pi : S^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(q)) = \{q, -q\}$, aber es ist nicht so einfach, direkt nachzuweisen, dass π eine Überlagerung ist. Wir verschieben das auf später, vgl. Beispiel 132.

Die Quaternionenmultiplikation liefert für S^3 eine Gruppenstruktur, und S^3 mit dieser Struktur heißt auch die *Spingruppe* $\mathbf{Spin}(3)$. Die Abbildung π ist ein Gruppenhomomorphismus (Spindarstellung).

Bemerkung. Jedes $q \in S^3$ läßt sich schreiben als

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + v \sin \frac{\alpha}{2}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und einem Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^3 = \text{Spann}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Dann ist $\pi(q)$ die Drehung um den Winkel α mit der Achse v . Damit ist die Quaternionen-Beschreibung der Drehgruppe $\mathbf{SO}(3)$ viel einfacher als die Matrix-Beschreibung!

□

Definition 43 (Hochhebung). Seien $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ heißt eine *Hochhebung* oder ein *Lift* von f , wenn $\pi \circ \tilde{f} = f$ ist.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

⁵Vgl. Kapitel 10 des sehr schönen Buches *Zahlen*, Grundwissen Mathematik 1, Springer-Verlag 1983, ed. H.-D. Ebbinghaus et al.

Lemma 44 (Eindeutigkeitslemma). Seien $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, Z zusammenhängend und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Z \rightarrow Y$ Hochhebungen der stetigen Abbildung $f : Z \rightarrow X$. Gilt $\tilde{f}_1(z_0) = \tilde{f}_2(z_0)$ für ein $z_0 \in Z$, so folgt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Beweis. Weil die \tilde{f}_i stetig sind, ist

$$G := \{z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\} \subset Z$$

abgeschlossen.⁶

Sei $z \in G$ und sei U eine schlicht überdeckte Umgebung von $f(z)$. Dann gibt es also eine Umgebung \tilde{U} von $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$, die durch $\pi_{\tilde{U}} := \pi|_{\tilde{U}}$ homöomorph auf U abgebildet wird. Die Menge $\tilde{f}_1^{-1}(U) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U)$ ist eine offene Umgebung von z , auf der

$$\tilde{f}_1 = \pi_{\tilde{U}}^{-1} \circ \pi_{\tilde{U}} \circ \tilde{f}_1 = \pi_{\tilde{U}}^{-1} \circ f = \tilde{f}_2$$

gilt. Damit ist G auch offen, also $G = Z$. □

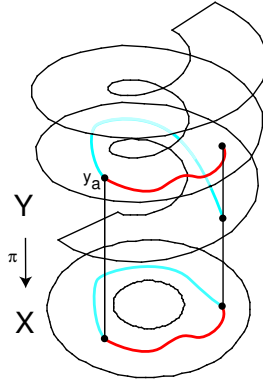
Satz 45 (Hochhebung von Wegen). Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X$$

ein Weg in X . Sei $y_a \in Y$ mit $\pi(y_a) = \gamma(a)$. Dann gibt es genau eine Hochhebung

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow Y$$

von γ mit $\tilde{\gamma}(a) = y_a$.



Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem letzten Lemma.

Ist $U \subset X$ eine schlicht überdeckte offene Menge, $I \subset \gamma^{-1}(U)$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0 \in Y$ mit $\pi(y_0) = \gamma(t_0)$, so gibt es offenbar genau ein stetiges $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ mit $\tilde{\gamma}(t_0) = y_0$.

Nach dem Lemma von Lebesgue gibt es eine endliche Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

⁶An dieser Stelle benutzen wir die Hausdorff-Eigenschaft von Y .

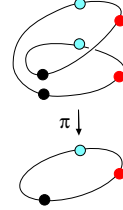
so dass $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ für jedes j in einer schlicht überdeckten offenen Menge $U \subset X$ liegt. Ist $\tilde{\gamma} : [a, t_j] \rightarrow Y$ eine Hochhebung von γ mit $\tilde{\gamma}(a) = y_a$ und $t_j < b$, so sei so sei

$$\tilde{\gamma}' : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow Y$$

die Hochhebung mit $\tilde{\gamma}'(t_j) = \tilde{\gamma}(t_j)$. Das liefert eine stetige Fortsetzung von $\tilde{\gamma}$ auf $[a, t_{j+1}]$. In endlich vielen Schritten erhält man so die gewünschte Hochhebung auf $[a, b]$. \square

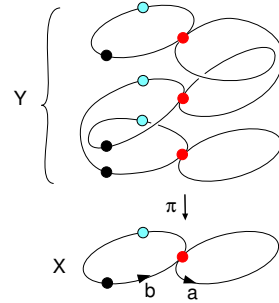
Das nachfolgende Beispiel ist im weiteren Gang der Vorlesung von einiger Wichtigkeit. Zum besseren Verständnis studieren Sie zunächst die nebenstehende Visualisierung der doppelten Überlagerung

$$\pi : S^1 \rightarrow S^1, e^{i\phi} \mapsto e^{2i\phi}.$$



Beispiel 46.

Die Abbildung zeigt eine dreifache Überlagerung der Acht-Figur X . Betrachten Sie in der Acht den im Kreuzungspunkt beginnenden Weg, der nacheinander die rechte und linke Schleife im positiven Sinne und danach die rechte und linke Schleife im negativen Sinne durchläuft.⁷ Heben Sie den Weg beginnend mit dem untersten der drei Faserpunkte über dem Kreuzungspunkt hoch. Wo endet die Hochhebung?



Beispiel 47 (Umlaufzahl). Wir betrachten die Überlagerung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto e^z.$$

Sei

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ein Weg. Wir wählen $\rho_a + i\phi_a \in \mathbb{C}$ mit

$$e^{\rho_a} e^{i\phi_a} = \gamma(a).$$

Das ist möglich. $\rho_a = \ln |\gamma(a)|$ ist eindeutig, ϕ_a eindeutig modulo 2π . Nach dem Satz gibt es genau einen Weg

$$\rho + i\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C},$$

so dass

$$\rho(a) = \rho_a, \quad \phi(a) = \phi_a,$$

und für alle t

$$\gamma(t) = e^{\rho(t) + i\phi(t)} = |\gamma(t)| e^{i\phi(t)}.$$

Man hat also eine Darstellung von γ in Polarkoordinaten mit stetiger(!) Winkelfunktion.

Ist γ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so folgt $e^{i\phi(a)} = e^{i\phi(b)}$, also

$$\phi(b) - \phi(a) = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

⁷Den Weg bezeichnet man suggestiv auch mit $aba^{-1}b^{-1}$.

Die Zahl m ist unabhängig von der Wahl von $\rho_a + i\phi_a$ (warum?) und heißt *die Umlaufzahl von γ um 0*.

Definieren Sie die Umlaufzahl $W(\gamma, z_0)$ eines geschlossenen Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

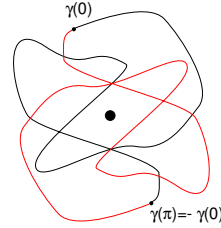
□

Beispiel 48 (Satz von Borsuk/Ulam ($n = 1$)). Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg mit

$$\gamma(\pi + t) = -\gamma(t) \text{ für } 0 \leq t \leq \pi.$$

Die Kurve ist also symmetrisch zum Ursprung.

Sei $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\phi(t)}$ mit stetigem ϕ . Dann ist $t \mapsto \phi(\pi + t) - \phi(\pi)$ auf $[0, \pi]$ ebenfalls stetig,



und wegen der Symmetrievoraussetzung ist $\phi(\pi + t) - \phi(t)$ ein ungerades Vielfaches von π , das wegen der Stetigkeit nicht von t abhängt: Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\phi(\pi + t) - \phi(t) = \pi + 2m\pi \text{ für alle } 0 \leq t \leq \pi.$$

Es folgt

$$\phi(2\pi) - \phi(0) = \phi(2\pi) - \phi(\pi) + \phi(\pi) - \phi(0) = 2\pi + 4m\pi.$$

Daher ist

$$W(\gamma, 0) = 2m + 1 \text{ ungerade.}$$

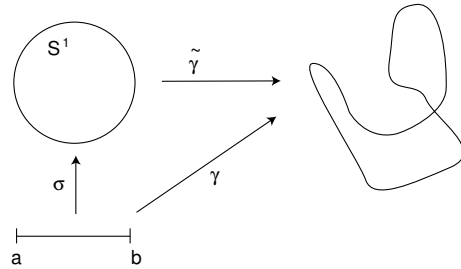
□

Bemerkung: Geschlossene Wege. Sei $\sigma : [a, b] \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i \frac{t-a}{b-a}}$.

Ist $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so ist $\gamma := \tilde{\gamma} \circ \sigma : [a, b] \rightarrow X$ ein geschlossener Weg. Umgekehrt gibt es zu jedem geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$ mit $\tilde{\gamma} \circ \sigma = \gamma$.

Deshalb kann man die Umlaufzahl $W(\gamma, z_0)$ auch für stetige Abbildungen

$$\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$



definieren.

Beispiel 49. Der Satz von Borsuk-Ulam lautet in dieser Version dann so:

Ist $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig mit

$$\gamma(-x) = -\gamma(x) \text{ für alle } x \in S^1,$$

so ist $W(\gamma, 0)$ ungerade.

□

Definition 50 (Homotopie). (i) Eine *Homotopie* zwischen zwei stetigen Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

mit

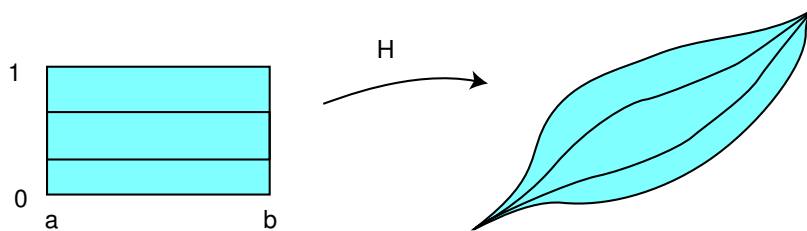
$$H(., 0) = f_0, \quad H(., 1) = f_1.$$

Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, wenn es zwischen ihnen eine Homotopie gibt. Notation:

$$f_0 \sim f_1.$$

- (ii) Zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow Y$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ heißen *homotop mit festen Endpunkten*, wenn es eine Homotopie H wie oben gibt, so dass

$$H(a, \tau) = \gamma_1(a) \text{ und } H(b, \tau) = \gamma_1(b) \text{ für alle } \tau \in [0, 1].$$



- (iii) Häufig haben wir es mit geschlossenen Wegen zu tun, die wir auch *Schleifen* nennen wollen. Ist $\gamma(a) = \gamma(b) = y_0$, so nennen wir γ eine Schleife in y_0 . Für Schleifen betrachten wir eingeschränkere Homotopiebegriffe:

- Zwei Schleifen $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow Y$ heißen *frei homotop*, wenn es zwischen ihnen eine Homotopie H gibt, bei der $H(a, \tau) = H(b, \tau)$ für alle τ gilt, d.h. bei der alle $H(., \tau)$ geschlossene Wege sind. Das ist äquivalent dazu, dass die zugehörigen Abbildungen $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : S^1 \rightarrow Y$ homotop sind.
- Zwei Schleifen γ_0, γ_1 in y_0 heißen *homotop (mit festem Anfangspunkt)*, wenn es zwischen ihnen eine Homotopie H gibt, bei der $H(a, \tau) = H(b, \tau) = y_0$ für alle τ gilt.

Zeigen Sie, dass jeder der oben definierten vier Homotopiebegriffe eine Äquivalenzrelation definiert.

Beispiel 51. Je zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind homotop: Definiere

$$H(x, \tau) := (1 - \tau)f_0(x) + \tau f_1(x).$$

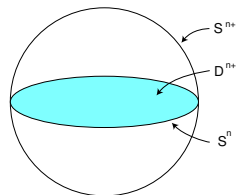
Wenn man aber den \mathbb{R}^n zum Beispiel ersetzt durch $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ändert sich das, weil im Allgemeinen das Bild von H nicht den Nullpunkt ausläßt. Konkret ist die Inklusionsabbildung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Anschaulich ist das klar, aber wie beweist man das?

□

Beispiel 52. Sei $f : S^n \rightarrow X$ stetig. Wir betrachten S^n als Teilmenge der Vollkugel D^{n+1}

oder als "Äquator" der Sphäre S^{n+1} . Besitzt f eine stetige Fortsetzung F auf D^{n+1} oder S^{n+1} , so ist f homotop zu einer konstanten Abbildung. Eine solche Homotopie wird im zweiten Fall gegeben durch

$$H(x, \tau) := F((1 - \tau)x, \sqrt{1 - \|(1 - \tau)x\|^2}).$$



□

Beispiel 53. Sei $v : S^n \rightarrow S^n$ ein tangentiales Einheitsvektorfeld auf der Sphäre S^n , d.h. es gelte $\langle x, v(x) \rangle = 0$ für alle $x \in S^n$. Die Abbildung

$$H(x, \tau) := \cos(\pi\tau)x + \sin(\pi\tau)v(x)$$

definiert dann eine Homotopie $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ zwischen $H(., 0) = \text{id}$ und der Antipodenabbildung $H(., 1) : x \mapsto -x$.

Zwei Beispiele für Einheitstangententialfelder:

- Ist $n = 2m - 1$ ungerade, so hat man $S^n \subset \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$, und die Multiplikation mit der komplexen Einheit i , also die Abbildung

$$x \mapsto ix = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

ist ein Einheitstangententialfeld.

- Hat man auf dem \mathbb{R}^n eine bilineare Multiplikation wie im Beispiel 42, für die wie bei den Quaternionen oder komplexen Zahlen $\|xy\| = \|x\| \|y\|$ gilt und der erste Einheitsvektor e_1 als neutrales Element operiert, so ist die Multiplikation mit einem Einheitsvektor x eine orthogonale Abbildung, und deshalb ist

$$x \mapsto e_2 x$$

ein Einheitstangententialfeld. Man nennt eine Multiplikation mit diesen Eigenschaften auch eine *orthogonale Multiplikation*.

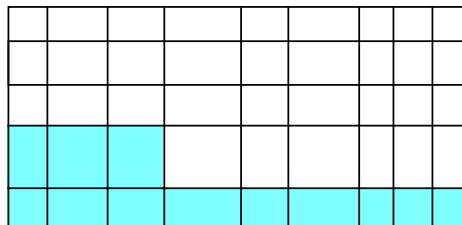
Auf den Einheitssphären in gerad-dimensionalen Räumen und in Räumen mit orthogonaler Multiplikation ist die Identität also homotop zur Antipodenabbildung.

Wir werden später zeigen, dass sie es auf gerad-dimensionalen Sphären nicht ist. Das beweist, dass es auf solchen Sphären also kein stetiges tangentiales Einheitsvektorfeld gibt (Igelsatz) und damit auf dem \mathbb{R}^{2m+1} keine orthogonale Multiplikation.

□

Satz 54 (Hochhebung von Homotopien). Sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen den Wegen $\gamma_0 = H(., 0)$ und $\gamma_1 = H(., 1)$. Sei $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow Y$ eine Hochhebung von γ_0 . Dann gibt es genau eine Hochhebung $\tilde{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow Y$ von H mit $\tilde{H}(., 0) = \tilde{\gamma}$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 45 zeigt man, dass man das Rechteck $[a, b] \times [0, 1]$ achsenparallel in endlich viele kleine abgeschlossene Rechtecke zerlegen kann, deren jedes von H in eine schlicht überdeckte offene Menge abgebildet wird. Dann läßt sich also H auf jedem dieser Rechtecke mit beliebig vorgegebenem Anfangswert eindeutig hochheben. Beginnend mit den durch $\tilde{\gamma}$ gegebenen Anfangswerten hebt man H dann „zeilenweise“ auf einem der kleinen Rechtecke nach dem anderen.



□

Korollar 55 (Monodromielemma). Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ zwei Wege im Basisraum X einer Überlagerung $\pi : Y \rightarrow X$, die zueinander homotop mit festen Endpunkten sind. Dann haben die Hochhebungen von γ_0 und γ_1 mit demselben Anfangspunkt auch denselben Endpunkt.

Ist insbesondere der geschlossene Weg γ homotop zu einem konstanten Weg (nullhomotop nennt man das auch), so ist jede Hochhebung von γ wieder ein (ebenfalls nullhomotoper) geschlossener Weg.

Beweis. Ist $\tilde{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow Y$ die Hochhebung einer Homotopie H von $\gamma_0 = H(., 0)$ zu $\gamma_1 = H(., 1)$, so ist $\tau \mapsto \tilde{H}(b, \tau)$ eine Hochhebung des konstanten Weges $\tau \mapsto H(b, \tau)$, nach dem Eindeutigkeitsatz also konstant. Deshalb ist $\tilde{H}(b, 0) = \tilde{H}(b, 1)$. □

Beispiel 56. Der Weg $aba^{-1}b^{-1}$ aus Beispiel 46 in der Acht X ist nicht nullhomotop.

□

Als Anwendung von Satz 54 zeigen wir, dass die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges in \mathbb{R}^2 eine „Homotopieinvariante“ ist.

Satz 57. (i) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und seien γ_0 und γ_1 in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ geschlossene Wege, die in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ frei homotop sind. Dann haben sie um z_0 dieselbe Umlaufzahl:

$$W(\gamma_0, z_0) = W(\gamma_1, z_0).$$

(ii) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, und liegen z_0 und z_1 in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, so gilt

$$W(\gamma, z_0) = W(\gamma, z_1).$$

Beweis. Wir beweisen beide Teile gleichzeitig, indem wir gleichzeitig den geschlossenen Weg γ_0 und den Punkt z_0 bewegen, wobei die beiden stets disjunkt bleiben. Beachten Sie, dass für offene Mengen im \mathbb{R}^n Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent sind. Sei also

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 und $z(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg von z_0 nach z_1 , so dass für alle t und τ

$$H(t, \tau) \neq z(\tau).$$

Die Homotopie

$$H'(t, \tau) := H(t, \tau) - z(\tau) : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

hat in der Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Hochhebung

$$\tilde{H}'(t, \tau) = |H'(t, \tau)|e^{i\phi(t, \tau)},$$

und

$$W(\gamma_j, z_j) = \frac{1}{2\pi}(\phi(b, j) - \phi(a, j)).$$

Weil ϕ aber stetig und $\phi(b, \tau) = \phi(a, \tau) \mod 2\pi$ für alle $\tau \in [0, 1]$, ist die Differenzfunktion konstant:

$$\phi(b, 0) - \phi(a, 0) = \phi(b, 1) - \phi(a, 1).$$

Wählt man entweder $z(\tau)$ oder $H(., \tau)$ unabhängig von τ , so erhält man (i) bzw. (ii). □

Korollar 58. *Zwei geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind genau dann in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop zueinander, wenn sie dieselbe Umlaufzahl um 0 haben.*

Beweis. Zu (\implies). Nach dem Satz haben homotope Wege dieselbe Umlaufzahl.

Zu (\impliedby). Sei andererseits $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg mit Umlaufzahl $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\phi(t)}$ mit stetigem $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist also $\phi(b) - \phi(a) = 2\pi n$. Setze

$$\psi(t) := \frac{t-a}{b-a} (\phi(b) - \phi(a)) = 2\pi n \frac{t-a}{b-a}$$

und definiere

$$H(t, \tau) := \gamma_\tau(t) := (\tau + (1-\tau)|\gamma(t)|) e^{i((1-\tau)\phi(t) + \tau\psi(t))}$$

Das ist eine Homotopie von $\gamma_0 = \gamma$ durch geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in den Weg

$$\gamma_1(t) := e^{i\psi(t)}.$$

Dieser Weg ist aber unabhängig von γ , nämlich der harmonisch parametrisierte n -fach durchlaufene Einheitskreis. Weil Homotopie eine Äquivalenzrelation ist, folgt daraus die Äquivalenz von je zwei geschlossenen Wegen mit derselben Umlaufzahl. \square

Beispiel 59. Wir benutzen nun die Umlaufzahl zu einem Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle.

Mit Polynomdivision und Induktion findet man dann, dass die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms vom Grade $n > 0$ genau n ist.

Zu zeigen ist also die Existenz einer Nullstelle für das Polynom

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad n > 0, a_0 \neq 0.$$

Offenbar dürfen wir annehmen, dass $a_0 = 1$ ist. Für $z \neq 0$ schreiben wir

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = z^n \left(1 + \underbrace{\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}_{=: q(z)} \right)$$

Für $|z| = R > 1$ ist

$$|q(z)| \leq \frac{n \max |a_j|}{R},$$

und wenn wir R hinreichend groß wählen, ist das < 1 . Dann definiert aber

$$H(t, \tau) := (Re^{it})^n (1 + (1-\tau)q(Re^{it}))$$

eine Homotopie von $H(t, 0) = p(Re^{it})$ nach $H(t, 1) = R^n e^{int}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also gilt

$$W(p(Re^{it}), 0) = n.$$

Hätte p keine Nullstelle, so wäre andererseits

$$H'(t, \tau) := p((1-\tau)Re^{it})$$

eine Homotopie von $p(Re^{it})$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in einen konstanten Weg $p(0)$ und die Umlaufzahl $= 0$. Widerspruch! \square

Beispiel 60. Hat man eine stetige Abbildung $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) \neq f(-x)$ für alle x , so definiert

$$g(x) := f(x) - f(-x)$$

eine Abbildung $g : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Einschränkung auf $S^1 \subset S^2$ eine Abbildung $\gamma : S^2 \supset S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, die nach Beispiel 52 homotop ist zu einer konstanten Abbildung. Daher ist $W(\gamma, 0) = 0$. Andererseits ist

$$\gamma(-x) = -\gamma(x),$$

und nach dem Satz von Borsuk/Ulam ist $W(\gamma, 0)$ ungerade. Also hat jede stetige Abbildung $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ einen Punkt x mit $f(x) = f(-x)$.

“Auf der Erde gibt es immer ein Antipodenpaar mit gleichem Luftdruck und gleicher Temperatur.”

□

2.2 Die Fundamentalgruppe

Definition 61. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege in einem topologischen Raum mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$. Dann definiert man die Hintereinanderschaltung

$$\gamma_1 \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$$

durch

$$\gamma_1 \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Beachten Sie die Notation: Erst kommt γ_1 und dann γ_2 im Gegensatz zur Komposition von Abbildungen.

Im folgenden betrachten wir *punktierte topologische Räume* (X, x_0) , d.h. topologische Räume X mit einem ausgezeichneten Punkt $x_0 \in X$.⁸ Eine stetige Abbildung $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ mit $f(y_0) = x_0$.

Satz 62 (und Definition: Fundamentalgruppe). Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum.

(i) Wir betrachten die Menge der Schleifen in x_0

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0.$$

Wir betrachten zwei Elemente darin als äquivalent, wenn sie homotop mit festem Anfangspunkt sind, vgl. die Definition 50. Die Äquivalenzklasse von γ bezeichnen wir mit $[\gamma]$ und die Menge der Homotopieklassen mit

$$\pi_1(X, x_0).$$

(ii) Durch $[\gamma_1][\gamma_2] := [\gamma_1 \gamma_2]$ wird auf $\pi_1(X, x_0)$ die Struktur einer Gruppe definiert. Sie heißt die Fundamentalgruppe oder erste Homotopiegruppe von (X, x_0) .

Beweis. Zu (ii). Wir müssen zeigen

- Das Produkt ist wohldefiniert: Die Definition von $[\gamma_1][\gamma_2]$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.
- Die Multiplikation ist assoziativ.
- Der konstante Weg vom Wert x_0 ist ein neutrales Element der Multiplikation, das wir auch mit 1 bezeichnen.
- Der rückwärts durchlaufene Weg $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(1 - t)$ repräsentiert ein Inverses von $[\gamma]$.

Wohldefiniertheit. Für $i = 1, 2$ sei

$$H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

eine Homotopie von $\gamma_i = H_i(., 0)$ nach $\tilde{\gamma}_i = H_i(., 1)$ mit $H_i(0, \tau) = x_0 = H_i(1, \tau)$ für alle τ . Wir definieren

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

⁸In anderem Zusammenhang versteht man unter einem *punktierten Raum* einen, aus dem ein Punkt *herausgenommen* ist. Das ist ein anderes Konzept.

durch

$$H(t, \tau) := \begin{cases} H_1(2t, \tau) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H_2(2t - 1, \tau) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Auf der abgeschlossenen Menge $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 1]$ stimmen die beiden Definitionen überein, deshalb ist H nach dem Klebelemma 18 stetig. Und offenbar liefert es eine Homotopie zwischen $\gamma_1\gamma_2$ und $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2$ mit festen Endpunkten.

Assoziativität. Gegeben seien drei Schleifen in x_0 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Dann ist

$$\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(4t - 2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \gamma_3(4t - 3) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

und

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \gamma_2(4t - 1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_3(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung

$$H(t, \tau) := \begin{cases} \gamma_1(2(1 + \tau)t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{\tau}{4}, \\ \gamma_2(4t - (2 - \tau)) & \text{für } \frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} - \frac{\tau}{4}, \\ \gamma_3(\frac{4(t-1)}{1+\tau} + 1) & \text{für } \frac{3}{4} - \frac{\tau}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

liefert eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen diesen.

Die Behauptungen über Einselement und Inverses können Sie selbst beweisen. \square

Bemerkung. Geschlossene Wege kann man sich natürlich auch vorstellen als Abbildungen von S^1 , etwa mit der Bedingung $\gamma(1, 0) = x_0$. Aber die Definition der Verknüpfung wird dann lästiger.

Beispiel 63. Nach Korollar 58 liefert

$$[\gamma] \mapsto W(\gamma, 0)$$

einen Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Mit demselben Argument folgt

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

\square

Beispiel 64. Im Beispiel 46 haben wir in $\pi_1(\text{Acht, Kreuzungspunkt})$ ein Produkt mit $aba^{-1}b^{-1} \neq 1$ gefunden. Also ist $\pi_1(\text{Acht, Kreuzungspunkt})$ nicht abelsch.

\square

Beispiel 65. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{1\}.$$

Offenbar kann man nämlich jede Schleife in x_0 im \mathbb{R}^n mit festem Anfangspunkt in den konstanten Weg mit Wert x_0 homotopieren.

\square

Definition 66 (Einfach zusammenhängend). Ein wegzusammenhängender topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn in ihm jede Schleife homotop zu einem konstanten Weg ist, d.h. wenn $\pi_1(X, x_0)$ für jeden Punkt $x_0 \in X$ trivial ist.⁹

Satz 67 (Unabhängigkeit vom Basispunkt). Sei X wegzusammenhängend und seien $x_0, x_1 \in X$. Sei $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 und $\sigma^{-1}(t) := \sigma(1 - t)$ der rückwärts durchlaufene Weg. Dann definiert die Abbildung

$$\hat{\sigma} : [\gamma] \mapsto [\sigma^{-1}\gamma\sigma]$$

einen Isomorphismus

$$\hat{\sigma} : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_1).$$

Die Fundamentalgruppen eines wegzusammenhängenden Raumes (für andere betrachtet man die Fundamentalgruppe eigentlich nie) bezüglich verschiedener Basispunkte sind isomorph. Man spricht deshalb oft einfach von der Fundamentalgruppe von X .

Beweis. Selbst. □

Satz 68 (und Definition). Sei $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ stetig. Dann induziert

$$\gamma \mapsto f \circ \gamma$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Es gilt $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $\text{id}_* = \text{id}$.

Beweis. Selbst. □

Korollar 69. Homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Genauer induziert ein Homöomorphismus $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ einen Isomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Beispiel 70. \mathbb{C} und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind nicht zueinander homöomorph. □

Beispiel 71. Wir betrachten eine Schleife $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ in S^n mit $n > 1$. Nehmen wir an, dass ihr Bild nicht die gesamte Sphäre überdeckt, dass es also einen Punkt $z \in S^n \setminus \gamma([0, 1])$ gibt, so liefert die stereographische Projektion von diesem Punkt aus einen Homöomorphismus von $S^n \setminus \{z\}$ auf den \mathbb{R}^n . Diesen können wir benutzen, um eine Homotopie von γ mit festem Anfangspunkt in $S^n \setminus \{z\}$, also erst recht in S^n , zu einem konstanten Weg zu konstruieren. Wir behaupten nun:

Jede Schleife in S^n ist homotop mit festem Anfangspunkt zu einer Schleife, die nur aus endlich vielen Großkreisbögen besteht und deshalb die Sphäre nicht ganz ausfüllt.

⁹Die Terminologie ist nicht ganz einheitlich: Bei uns impliziert *einfach zusammenhängend* auch den Wegzusammenhang und damit den Zusammenhang.

Wenn wir das gezeigt haben folgt, dass S^n für $n > 1$ einfach zusammenhängend ist:

$$\boxed{\pi_1(S^n, x_0) = \{1\} \quad \text{für } n > 1.}$$

Wir betrachten also γ als stetige Abbildung in \mathbb{R}^{n+1} . Die Abbildung ist dann gleichmäßig stetig, und deshalb gibt es eine Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$$

mit

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| < 1 \quad \text{für alle } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Das Wegstück $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ liegt also in einer offenen Halbsphäre mit Pol $\gamma(t_{i-1})$. Für t in diesem Intervall definieren wir die Sehne von $\gamma(t_{i-1})$ nach $\gamma(t_i)$ durch

$$\beta(t) := \gamma(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})),$$

und setzen

$$H(t, \tau) := \frac{(1 - \tau)\gamma(t) + \tau\beta(t)}{\|(1 - \tau)\gamma(t) + \tau\beta(t)\|} \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i,$$

Das ist eine Homotopie mit der gewünschten Eigenschaft.

□

Satz 72. Seien $f_0, f_1 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homotop mit einer Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$. Sei $\sigma(t) := H(x_0, t)$. Dann induziert σ einen Isomorphismus $\hat{\sigma} : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, vgl. Satz 67, und es gilt

$$(f_0)_* = \hat{\sigma} \circ (f_1)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Ist insbesondere $H(x_0, \tau) = y_0$ für alle τ , so ist σ konstant und

$$(f_0)_* = (f_1)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Beweis. Sei γ eine Schleife in x_0 . Setze $\sigma_\tau(t) := H(x_0, \tau t)$ und $\tilde{\gamma}_\tau := H(\gamma, \tau)$. Dann ist $\sigma_\tau \tilde{\gamma}_\tau \sigma_\tau^{-1}$ ein Weg von y_0 nach y_0 , und diese Abbildung liefert eine Homotopie von $\sigma_0 \tilde{\gamma}_0 \sigma_0^{-1}$ nach $\sigma_1 \tilde{\gamma}_1 \sigma_1^{-1}$ mit festem Anfangspunkt $H(x_0, 0) = y_0$. Aus

$$[\sigma_0 \tilde{\gamma}_0 \sigma_0^{-1}] = [\tilde{\gamma}_0] = (f_0)_*([\gamma])$$

und

$$[\sigma_1 \tilde{\gamma}_1 \sigma_1^{-1}] = \hat{\sigma} \circ (f_1)_*([\gamma]).$$

folgt daher die Behauptung.

□

Definition 73. (i) Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass

$$g \circ f \sim \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \sim \text{id}_Y.$$

Die Abbildung f heißt dann *eine Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y .

(ii) Ein Teilraum X von Y mit Inklusionsabbildung $i : X \hookrightarrow Y$ heißt ein *Deformationsretrakt* von Y , wenn es eine stetige Abbildung (eine *Deformationsretraktion*) $r : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $i \circ r \sim \text{id}_Y$ und $r \circ i = \text{id}_X$. Eine Deformationsretraktion ist also eine spezielle Homotopieäquivalenz.

Aus Satz 72 folgt

Satz 74. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$, so ist

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus.

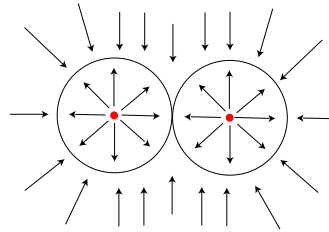
Bemerkung. Mit der Fundamentalgruppe haben wir eine sogenannte algebraische Invariante für den Homöomorphietyp eines wegzusammenhängenden topologischen Raumes gefunden: Zwei Räume mit verschiedener Fundamentalgruppe sind nicht homöomorph. Die Gleichheit der Fundamentalgruppen andererseits besagt natürlich nicht, dass die Räume homöomorph sind, dafür finden Sie leicht Beispiele. Anders wird es, wenn man zusätzliche Voraussetzungen macht: So ist jede einfach zusammenhängende kompakte (unberandete) Fläche homöomorph zur 2-Sphäre S^2 . Dass auch jede kompakte einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit homöomorph zu S^3 ist, ist der Inhalt der sogenannten Poincaré-Vermutung, die zu den sieben Millionen-Dollar-Millenniumsproblemen der Clay-Stiftung gehört und vermutlich gerade gelöst worden ist.

Beispiel 75. Der \mathbb{R}^2 und der \mathbb{R}^3 sind im Sinne der linearen Algebra nicht zueinander isomorph, weil sie verschiedene Dimensionen haben. Sie sind auch nicht zueinander diffeomorph, weil das Differential eines Diffeomorphismus einen Isomorphismus liefern würde. Aber sind sie vielleicht zueinander homöomorph? Wenn es einen Homöomorphismus gäbe, dann auch einen zwischen $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (warum?). Aber diese Räume enthalten S^1 und S^2 als Deformationsretrakte. Eine Deformationsretraktion wird gegeben durch die radiale Projektion auf die Sphäre. Die Sphären S^1 und S^2 haben aber nicht-isomorphe Fundamentalgruppen. Also ist die Antwort “Nein”: \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 sind nicht zueinander homöomorph.

Um diese Frage allgemein für \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n zu untersuchen braucht man Hilfsmittel (zum Beispiel höhere Homotopigruppen), die wir noch nicht haben.

□

Beispiel 76. Die Acht X aus Beispiel 46 betrachten wir als Teilmenge von $Y := \mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$. Die in der Figur skizzierten Abbildung r ist eine Deformationsretraktion.



Die Abbildung $(1 - \tau)i \circ r + \tau \text{id}_Y$ liefert eine Homotopie von $i \circ r$ nach id_Y . Also ist

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}, 0) \cong \underbrace{\pi_1(X, 0)}_{\text{nicht abelsch}} \not\cong \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Insbesondere sind $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$ nicht homöomorph zueinander.

□

Satz 77 (und Definition: Charakteristische Untergruppe). Sei $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist

$$\pi_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv. Das Bild dieser Abbildung

$$H(Y, y_0) := \pi_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

heißt die charakteristische Untergruppe der Überlagerung.

Beweis. Sei $\tilde{\gamma}$ eine Schleife in y_0 . Dann gilt $\pi_*([\tilde{\gamma}]) = 1$ genau dann, wenn $\pi \circ \tilde{\gamma}$ in (X, x_0) homotop zum konstanten Weg ist. Eine solche Homotopie läßt sich aber hochheben, und folglich ist auch $\tilde{\gamma}$ homotop zum konstanten Weg, d.h. $[\tilde{\gamma}] = 1$. \square

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Monodromielemmas 55: Mit festen Endpunkten homotope Wege haben Hochhebungen mit gleichen Endpunkten, aber die Voraussetzung der Homotopie läßt sich abschwächen.

Satz 78. Sei $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege von x_0 nach x_1 und seien $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ Hochhebungen mit

$$\tilde{\gamma}_0(0) = y_0 = \tilde{\gamma}_1(0).$$

Dann gilt

$$\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$$

genau dann, wenn

$$[\gamma_0 \gamma_1^{-1}] \in H(Y, y_0).$$

Beweis. Zu (\Rightarrow) . Ist $\tilde{\gamma}_0(0) = y_0 = \tilde{\gamma}_1(0)$, so ist $\tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1^{-1}$ definiert und es folgt $\pi \circ (\tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1^{-1}) = \gamma_0 \gamma_1^{-1}$, also

$$[\gamma_0 \gamma_1^{-1}] = \pi_*([\tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1^{-1}]) \in H(Y, y_0).$$

Zu (\Leftarrow) . Ist $[\gamma_0 \gamma_1^{-1}] \in H(Y, y_0)$, so gibt es einen in y_0 geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}$ in Y mit

$$\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma_0 \gamma_1^{-1} = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_1^{-1}(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Also ist $\tilde{\gamma}(\frac{t}{2})$ eine Hochhebung von γ_0 mit Anfangspunkt y_0 . Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $\tilde{\gamma}(\frac{t}{2}) = \tilde{\gamma}_0(t)$ und $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}(\frac{1}{2})$.

Ebenso ist $\tilde{\gamma}(1 - \frac{t}{2})$ eine Hochhebung von

$$\pi \circ \tilde{\gamma}(1 - \frac{t}{2}) = \gamma_1(t),$$

mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(1) = y_0$, also $\tilde{\gamma}(1 - \frac{t}{2}) = \tilde{\gamma}_1(t)$, und es folgt $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) = \tilde{\gamma}_0(1)$. \square

Seien $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ stetig. Wenn es eine Hochhebung $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ gibt, ist $f = \pi \circ \tilde{f}$ und daher

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset H(Y, y_0). \quad (6)$$

Wir wollen zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Das gelingt aber nicht ohne gewisse zusätzliche Voraussetzungen. Wege lassen sich hochheben, und wir wollen das benutzen, um “ganz Z ” hochzuheben. Sei $z \in Z$. Wir definieren $\tilde{f}(z)$ wie folgt: Wir wählen einen Weg σ von z_0 nach z , heben $f \circ \sigma$ mit Anfangspunkt y_0 hoch und definieren $\tilde{f}(z)$ als den Endpunkt $\widetilde{f \circ \sigma}(1)$ dieser Hochhebung. Das macht aber nur Sinn, wenn es wirklich einen Weg von z_0 nach z gibt: Wir setzen voraus, dass

Z wegzusammenhängend

ist.

Dann müssen wir zeigen, dass die Definition unabhängig von der Wahl von σ ist. dass also für σ_0 und σ_1 von z_0 nach z gilt $\widetilde{f \circ \sigma_0}(1) = \widetilde{f \circ \sigma_1}(1)$. Nach Satz 78 ist das erfüllt, wenn

$$H(Y, y_0) \ni [(f \circ \sigma_1)(f \circ \sigma_2)^{-1}] = f_*[\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}],$$

und durch die Bedingung (6) wird das gerade garantiert. Damit können wir also eine Hochhebung \tilde{f} konstruieren. Bleibt noch zu zeigen, dass \tilde{f} stetig ist. Dazu wählen wir um z eine Umgebung U , so dass $f(U)$ in einer schlicht überdeckten Umgebung V von $f(z)$ liegt. Sei \tilde{V} eine Umgebung von $\tilde{f}(z)$, die durch π homöomorph auf V abgebildet wird. Verbindet man $z' \in U$ mit z durch einen Weg $\tau : [0, 1] \rightarrow U$ in U , so ist $\sigma\tau$ ein Weg von z_0 nach z' und wir erhalten

$$\tilde{f}(z') = (\pi|_{\tilde{V}})^{-1}(f(z')).$$

Also ist \tilde{f} in z stetig. Dieses Argument setzt voraus, dass es in U eine vielleicht kleinere Umgebung U' von z gibt in der jedes z' mit z durch einen Weg verbindbar ist, d.h. dass

Z lokal wegzusammenhängend

ist. Genau bedeutet das:

Definition 79. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jede Umgebung eines Punktes eine wegzusammenhängende Umgebung des Punktes enthält.

Für viele Räume, zum Beispiel für Mannigfaltigkeiten ist das erfüllt, aber nicht für alle:

Beispiel 80. Sei Z die Vereinigung aller Parallelen zur x -Achse des \mathbb{R}^2 mit rationaler y -Komponente versehen mit der von \mathbb{R}^2 induzierten Topologie. Dann ist keine Umgebung eines Punktes von Z zusammenhängend. Vereinigt man Z mit der y -Achse, so erhält man eine zusammenhängenden Raum, der aber ebenfalls nicht lokal-wegzusammenhängend ist.

□

Ist $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, so ist Y natürlich lokal wegzusammenhängend, wenn X diese Eigenschaft hat, weil π ein lokaler Homöomorphismus ist.

Wir haben nun den folgenden Satz bewiesen:

Satz 81 (Hochhebung von Abbildungen). Sei $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, sei (Z, z_0) ein punktierter wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum und sei $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ stetig. Dann gibt es eine Hochhebung

$$\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

genau dann, wenn

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset H(Y, y_0).$$

Korollar 82 (Isomorphiekriterium). Seien $p_i : (Y_i, y_i) \rightarrow (X, x_0)$ für $i = 1, 2$ zwei Überlagerungen. X, Y_1 und Y_2 seien zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann gibt es einen Isomorphismus $\phi : (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$ von Überlagerungen mit Basispunkt genau dann, wenn die charakteristischen Untergruppen gleich sind.

Beweis. Ist $\phi : (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$ ein Isomorphismus, so gilt

$$H(Y_1, y_1) = (p_1)_*(\pi_1(Y_1, y_1)) = (p_2)_*(\underbrace{\phi_*(\pi_1(Y_1, y_1))}_{=\pi_2(Y_2, y_2)}) = H(Y_2, y_2).$$

Sind umgekehrt die charakteristischen Untergruppen gleich, so läßt sich nach dem Hochhebungskriterium die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{p}_1 \\ & & \Longleftrightarrow \\ p_1 : (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x_0) & Y_1 & Y_2 \\ & & \tilde{p}_2 \\ \text{hochheben zu} & & \\ & p_1 \searrow & \swarrow p_2 \\ & & X \end{array}$$

und entsprechend findet man eine Hochhebung \tilde{p}_2 .

Dann ist $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1$ eine Hochhebung von p_1 mit $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1(y_1) = y_1$. Daher ist $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \text{id}_{Y_1}$ und entsprechend für die umgekehrte Komposition: \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 sind zueinander inverse Isomorphismen. \square

Korollar 83. Einfach zusammenhängende lokal wegzusammenhängende Räume haben nur triviale Überlagerungen.

Beweis. Seien $Y \rightarrow X$ eine solche Überlagerung und $x_0 \in X$. Weil $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, gibt es nach dem Hochhebungssatz zu jedem $y \in \pi^{-1}(\{x_0\})$ eine Hochhebung $\phi_y : X \rightarrow Y$ von $\text{id} : X \rightarrow X$ mit $\phi_y(x_0) = y$. Dann ist aber

$$\phi : X \times \pi^{-1}(\{x_0\}) \rightarrow Y, (x, y) \mapsto \phi_y(x)$$

ein Isomorphismus. Weil $\pi^{-1}(\{x_0\})$ die diskrete Topologie trägt, ist ϕ nämlich ein lokaler Homöomorphismus, und wir müssen nur zeigen, dass er injektiv und surjektiv ist.

- Injektivität: Aus $\phi(x_1, y_1) = \phi(x_2, y_2)$ folgt durch Anwenden von π , dass $x_1 = x_2$, also $\phi_{y_1}(x_1) = \phi_{y_2}(x_1)$. Dann sind die beiden Hochhebungen ϕ_{y_1} und ϕ_{y_2} von id_X aber gleich, und insbesondere gilt

$$y_1 = \phi_1(x_0) = \phi_2(x_0) = y_2.$$

- Surjektivität: Sei $\tilde{y} \in Y$, $\tilde{x} = \pi(\tilde{y})$, und $\phi : X \rightarrow Y$ die Hochhebung von id_X mit Anfangswert $\psi(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt dann

$$\psi = \phi_{\psi(x_0)}$$

und daher $\phi_{\psi(x_0)}(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

\square

2.3 Gruppenoperationen und Decktransformationen

Definition 84. Seien Y ein topologischer Raum und G eine Gruppe.

- (i) Eine *Operation*, *Aktion* oder *Wirkung* von G auf Y ist eine Abbildung

$$G \times Y \rightarrow Y, \quad (g, y) \mapsto g \cdot y$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot y) &= (gh) \cdot y \text{ für alle } g, h \in G \text{ und } y \in Y, \\ 1 \cdot y &= y \text{ für das neutrale Element } 1 \in G \text{ und alle } y \in Y, \\ y &\mapsto g \cdot y \text{ ist für jedes } g \in G \text{ ein Homöomorphismus von } Y \text{ auf sich.} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist $g \mapsto g \cdot \dots$ ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen von Y . Man nennt das Paar (Y, G) oder kurz Y , wenn die Operation klar ist, einen *G -Raum*.

- (ii) Ist (Y, G) ein G -Raum, so nennt man

$$Gy := \{g \cdot y \mid g \in G\}$$

den *Orbit* oder die *Bahn* von y unter der Gruppenoperation. „Auf demselben Orbit“ definiert eine Äquivalenzrelation auf Y , und der Restklassenraum $X = Y/G$ heißt der *Orbitraum* der Operation.

Beispiele 85.

G	Y	Operation	Orbitraum
\mathbb{Z}	\mathbb{R}	$(n, x) \mapsto x + n$	S^1
$\mathbf{SO}(n)$	\mathbb{R}^n	$(A, x) \mapsto Ax$	$[0, \infty[$
$\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$	S^n	$(\pm 1, x) \mapsto \pm x$	P^n
W_n	\mathbb{C}	$(w, z) \mapsto wz$	\mathbb{C}
W_n	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$(w, z) \mapsto wz$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$

In den letzten Zeilen bezeichne $W_n := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = 1\}$ die Gruppe der n -ten Einheitswurzeln. Der Orbitraum wird in diesem Fall repräsentiert durch einen Winkelbereich

$$\{re^{i\phi} \mid 0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}\}$$

mit der Identifikation $r \sim re^{i\frac{2\pi}{n}}$, und das ist homöomorph zu \mathbb{C} bzw. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

□

Ein G -Raum hat eine kanonische Projektion auf den Orbitraum $\pi : Y \rightarrow X$. Wir möchten wissen, wann das eine Überlagerung ist. Dazu definieren wir

Definition 86. Eine Gruppenoperation $G \times Y \rightarrow Y$ heißt *schlicht* oder *eigentlich diskontinuierlich*, wenn es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V gibt, so dass gilt

$$g \neq h \implies g \cdot V \cap h \cdot V = \emptyset \text{ für alle } g, h \in G.$$

Die Operationen im Beispiel 85 sind abwechselnd schlicht bzw. nicht schlicht.

Satz 87 (und Definition). Ist $G \times Y \rightarrow Y$ eine schlichte Gruppenoperation, so ist die kanonische Projektion $\pi : Y \rightarrow X = Y/G$ eine Überlagerung. Überlagerungen, die auf diese Weise entstehen, nennt man auch G -Überlagerungen.

Beweis. Für beliebiges offenes $V \subset Y$ ist

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$$

offen in Y . Also ist π eine offene Abbildung. Sei nun $y \in Y$ und $x := \pi(y) = \{g \cdot y \mid g \in G\}$ der Orbit von y . Wir wählen eine offene Umgebung V von y wie in der vorstehenden Definition und setzen $U := \pi(V)$. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ die Vereinigung der offenen Menge $g \cdot V$, und wegen der Schlichtheit sind diese Mengen paarweise disjunkt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\pi|_{g \cdot V} : g \cdot V \rightarrow U$ für jedes $g \in G$ ein Homöomorphismus ist. Nach Definition ist π stetig und nach Wahl von V injektiv: Sind $y_1, y_2 \in g \cdot V$ und $\pi(y_1) = \pi(y_2)$, so gibt es $h \in G$ mit

$$\underbrace{h \cdot y_1}_{\in (hg) \cdot V} = \underbrace{y_2}_{\in g \cdot V}.$$

Also ist $h = 1$. Weil π offen ist, ist schließlich auch $(\pi|_{g \cdot V})^{-1}$ stetig. □

Beispiel 88. Sei G die Gruppe von Homöomorphismen der Ebene, welche erzeugt wird von den beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha : (x, y) &\mapsto (x + 1, y), \\ \beta : (x, y) &\mapsto (-x, y + 1). \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$. Daher ist jedes Element der Gruppe von der Form

$$\alpha^k \beta^l : (x, y) \mapsto ((-1)^l x + k, y + l).$$

Ist

$$\|\alpha^k \beta^l(x, y) - (x, y)\| < 1$$

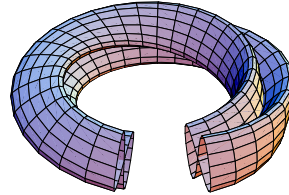
folgt offenbar $l = 0$ und dann $k = 0$, also $\alpha^k \beta^l = \text{id} = 1$. Damit operiert die Gruppe schlicht auf \mathbb{R}^2 . Jeder Orbit enthält ein $(x, y) \in [0, 1]^2$, und in diesem Quadrat liegen nur die Punkte der Form

$$(0, y) \text{ und } (1, y)$$

oder

$$(x, 0) \text{ und } (1 - x, 1)$$

auf demselben Orbit. Der Orbitraum “ist” also das Quadrat mit diesen Identifizierungen. Er heißt die *Kleinsche Flasche*. Ein Modell (mit Selbstdurchdringungen) dafür stammt von Thomas Banchoff.



Beachten Sie: Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow G, (k, l) \mapsto \alpha^k \beta^l$ ist eine Bijektion, aber kein Gruppenhomomorphismus. Insbesondere ist G nicht abelsch! □

Definition 89 (Decktransformationen). Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $\pi : Y \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $\phi : Y \rightarrow Y$ mit $\pi \circ \phi = \pi$, d.h. einer, der die Fasern der Überlagerung erhält. Die Decktransformationen bilden eine Untergruppe $\text{Aut}(Y/X)$ der Gruppe aller Homöomorphismen von Y , die *Decktransformationsgruppe* der Überlagerung. Die Decktransformationsgruppe operiert immer schlicht auf Y (Beweis?).

Beachten Sie: Zwei Decktransformationen einer zusammenhängenden Überlagerung

$$\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

sind nach dem Eindeutigkeitslemma 44 gleich, wenn sie in einem Punkt übereinstimmen. Insbesondere ist also die Abbildung

$$\text{Aut}(Y/X) \rightarrow Y_{x_0}, \quad \phi \mapsto \phi(y_0)$$

injektiv. Die Ordnung der Decktransformationsgruppe ist höchstens so groß wie die Mächtigkeit der Faser.

Satz 90. Eine Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit zusammenhängendem X und Y ist genau dann eine G -Überlagerung, wenn die Abbildung

$$\text{Aut}(Y/X) \rightarrow Y_{x_0}, \quad \phi \mapsto \phi(y_0)$$

surjektiv ist. In diesem Fall ist

$$G = \text{Aut}(Y/X).$$

Beweis. Ist die Überlagerung eine G -Überlagerung, so sind die Abbildungen $y \mapsto g \cdot y$ Decktransformationen und

$$Y_{x_0} = \{g \cdot y_0 \mid g \in G\}.$$

Also ist die Abbildung surjektiv.

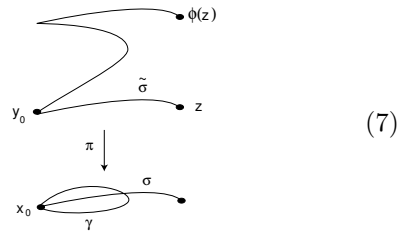
Ist umgekehrt die Abbildung auf die Faser surjektiv, so setzt man $G := \text{Aut}(Y/X)$. Zeigen Sie: Die Abbildung $Y/G \rightarrow X, Gy \mapsto \pi(y)$ ist stetig, bijektiv und offen, also ein Homöomorphismus von Y/G auf X . \square

Durch das Hochheben geschlossener Wege erhält man eine Abbildung der Faser über dem Anfangspunkt in sich, und nach dem Monodromielemma liefern homotope Wege dieselbe Abbildung. Wir wollen das (unter gewissen Voraussetzungen) ausbauen zu einer Operation der Fundamentalgruppe von X auf Y durch Decktransformationen.

Sei also $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung.

Für $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ und $z \in Y$

- wählen wir einen Weg $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow Y$ von y_0 nach z , (also müssen wir Y als wegzusammenhängend voraussetzen)
- setzen $\sigma = \pi \circ \tilde{\sigma}$
- und definieren $\phi(z) := \phi_{[\gamma]}(z)$ als den Endpunkt der Hochhebung von $\gamma\sigma$ mit Anfangspunkt y_0 .



Ist das wohldefiniert? Sei $\tilde{\tau}$ ein anderer Weg von y_0 nach z und $\tau := \pi \circ \tilde{\tau}$. Dann haben die Hochhebungen von $\gamma\sigma$ und $\gamma\tau$ mit Anfangspunkt y_0 nach Satz 78 denselben Endpunkt,

wenn

$$[\gamma\sigma(\gamma\tau)^{-1}] = [\gamma][\sigma\tau^{-1}][\gamma]^{-1} \in H(Y, y_0).$$

Beachten Sie, dass $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1}$ eine Schleife in y_0 und deshalb

$$[\sigma\tau^{-1}] = [\pi \circ (\tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1})] \in H(Y, y_0)$$

ist.

Eine Untergruppe $H \subset G$ einer Gruppe G heißt ein *Normalteiler*, wenn

$$gHg^{-1} = H \quad (8)$$

für alle $g \in G$. Das ist äquivalent zu der Bedingung, dass die Multiplikation in G eine Gruppenstruktur auf der Restklassenmenge

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

induziert.

Ist H eine beliebige Untergruppe, so bildet die Menge N_H aller g , für die (8) gilt, eine Untergruppe von G , den sogenannten *Normalisator* von H . Also ist H genau dann normal, wenn $N_H = G$.

Unsere provisorische Definition von $\phi : Y \rightarrow Y$ funktioniert also, falls $[\gamma]$ im Normalisator der charakteristischen Untergruppe $H(Y, y_0)$ liegt, insbesondere also, wenn $H(Y, y_0)$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Definition 91. Eine Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ heißt *regulär*, falls $H(Y, y_0)$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Wir untersuchen die Abbildung $N_{H(Y, y_0)} \ni [\gamma] \mapsto \phi_{[\gamma]}$ genauer. Zunächst zeigt man wie im Beweis von Satz 81, dass ϕ stetig ist, falls X lokal wegzusammenhängend ist. Weiter kann man zeigen, wir verzichten aber darauf, dass die Abbildung

$$N_{H(Y, y_0)} \rightarrow \text{Aut}(Y/X)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Was sind Kern und Bild dieser Abbildung? Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_{[\gamma]} = \text{id}_Y &\iff \phi_{[\gamma]}(y_0) = y_0 \\ &\iff [\gamma] \in H(Y, y_0). \end{aligned}$$

Der Kern ist also die charakteristische Untergruppe $H(Y, y_0)$. Ist weiter $\phi \in \text{Aut}(Y/X)$ vorgegeben (und Y wegzusammenhängend), so wähle einen Weg $\tilde{\gamma}$ von y_0 nach $\phi(y_0)$. Offenbar ist dann

$$\phi_{[\pi \circ \tilde{\gamma}]} = \phi.$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 92. Sei $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung mit zusammenhängendem Y und lokal wegzusammenhängendem X . Dann induziert die Vorschrift (7) einen kanonischen Gruppenisomorphismus

$$N_{H(Y, y_0)}/H(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(Y/X).$$

Ist die Überlagerung regulär, so hat man also

$$\pi_1(X, x_0)/H(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(Y/X).$$

Ist insbesondere Y einfach zusammenhängend, so ist die Überlagerung regulär und

$$\pi_1(X, x_0) \cong \text{Aut}(Y/X).$$

Noch einmal: Die in (7) beschriebene Konstruktion liefert eine Operation der Fundamentalgruppe als Gruppe von Decktransformationen auf dem Totalraum Y der Überlagerung, *wenn* diese regulär ist. Sonst operieren nur manche Homotopieklassen, nämlich die im Normalisator der charakteristischen Untergruppe. Ist Y einfach zusammenhängend, so ist die Überlagerung (natürlich) regulär und die Fundamentalgruppe von X ist die Decktransformationsgruppe.

Als Anwendung berechnen wir einige Fundamentalgruppen.

Beispiel 93. Die Überlagerung $S^n \rightarrow P^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung und die Decktransformationsgruppe ist $\mathbb{Z}_2 = \{\text{id}, -\text{id}\}$. Für $n > 1$ ist S^n einfach zusammenhängend (und natürlich zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend). Daher ist (für beliebiges $x_0 \in P^n$)

$$\pi_1(P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (n > 1).$$

Geben Sie einen Repräsentanten für die nicht triviale Homotopieklasse an.

□

Beispiel 94. Auf \mathbb{R}^2 operiert \mathbb{Z}^2 schlicht vermöge

$$(m, n), (x, y) \mapsto (x + m, y + n).$$

Der Quotientenraum $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist der zweidimensionale Torus, und \mathbb{Z}^2 ist die Decktransformationsgruppe der zugehörigen Überlagerung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$. Weil \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängend ist, ist für jeden Punkt $x_0 \in T$

$$\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z}^2.$$

□

Beispiel 95. Nach Beispiel 88 ist die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche die Gruppe der Transformationen

$$(x, y) \mapsto ((-1)^l x + k, y + l) \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

des \mathbb{R}^2 , eine Gruppe mit zwei Erzeugenden α, β und der Relation $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$.

□

Reguläre Überlagerungen sind angenehm, weil man dann nicht wissen muss, was ein Normalisator ist. Aber die Definition ist natürlich schwierig. Eine geometrischere Charakterisierung liefert der

Satz 96 (Kriterium für reguläre Überlagerungen). *Eine Überlagerung*

$$\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

mit zusammenhängendem Y und lokal wegzusammenhängendem X ist genau dann regulär, wenn $\text{Aut}(Y/X)$ auf der Faser transitiv operiert, d.h. wenn

$$\{\phi(y_0) \mid \phi \in \text{Aut}(Y/X)\} = Y_{x_0}.$$

Beweis. Selbst.

□

Beispiel 97. Die Überlagerung aus Beispiel 46 ist nicht regulär. Eine Decktransformation, die den unteren Kreuzungspunkt in den mittleren abbildet, müsste die untere rechte Schleife der Überlagerung in eine Schleife aus dem mittleren Kreuzungspunkt abbilden, deren Projektion einfach geschlossen ist. Eine solche gibt es aber nicht.

□

2.4 Klassifikation von Überlagerungen

Wir untersuchen nun die Frage, „wieviele“ Überlagerungen ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum X besitzt. Wir wissen schon (Korollar 82), dass Überlagerungen mit derselben charakteristischen Untergruppe isomorph sind. Also können wir präziser fragen, welche Untergruppen der Fundamentalgruppe von X als charakteristische Untergruppen auftreten. Insbesondere ist es nach dem letzten Satz und den anschließenden Beispielen eine interessante Frage, ob es immer Überlagerungen mit einfach zusammenhängendem Totalraum Y , also mit charakteristischer Untergruppe $\{1\}$ gibt, und wir beginnen mit dieser Frage. Es ist nach dem Isomorphiekriterium klar, dass je zwei solche isomorph sind. Wie steht es mit der Existenz?

Gegeben sei also (X, x_0) mit anständigem X . Wenn es eine Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit einfach zusammenhängendem Y gibt, erhalten wir $y \in Y_x$ als Endpunkt der Hochhebung von $\sigma = \pi \circ \tilde{\sigma}$ mit Anfangspunkt y_0 , wobei $\tilde{\sigma}$ ein Weg von y_0 nach y ist. Zwei Wege σ_0, σ_1 von x_0 zum selben Punkt x liefern mit gleichem Anfangspunkt hochgehoben genau denselben Endpunkt, wenn $[\sigma_0 \sigma_1^{-1}]$ in der charakteristischen Untergruppe liegt, die aber wegen des einfachen Zusammenhangs trivial ist. Also erhält man denselben Endpunkt genau dann, wenn die Schleife $\sigma_0 \sigma_1^{-1}$ mit festem Anfangspunkt homotop zum konstanten Weg x_0 ist.

Wenn man also eine einfach zusammenhängende Überlagerung Y von X konstruieren will, ist es ein vernünftiger Ansatz zu definieren

$$Y := \{[\sigma] \mid \sigma : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(0) = x_0\}$$

$$\pi : Y \rightarrow X, \quad [\sigma] \mapsto \sigma(1)$$

Dabei ist die Äquivalenzrelation $\sigma_0 \sim \sigma_1$ gegeben durch

$$\sigma_0(1) = \sigma_1(1) \text{ und } \sigma_0 \sigma_1^{-1} \text{ mit festem Anfangspunkt homotop zum konstanten Weg.}$$

Wir müssen Y mit einer Topologie versehen, mit der π eine Überlagerung und Y einfach zusammenhängend wird. Die Idee für die Definition liegt auf der Hand: Eine offene Umgebung von $[\sigma]$ sollte gebildet werden durch

$$U_{[\sigma]} := \{[\sigma\tau] \mid \tau : [0, 1] \rightarrow U, \tau(0) = \sigma(1)\},$$

wobei U eine offene Umgebung von $\sigma(1)$ sein soll. Beachten Sie, dass

$$[(\sigma_0\tau)(\sigma_1\tau)^{-1}] = [\sigma_0\tau\tau^{-1}\sigma_1^{-1}] = [\sigma_0\sigma_1^{-1}],$$

und deshalb

$$[\sigma_0] = [\sigma_1] \implies U_{[\sigma_0]} = U_{[\sigma_1]}.$$

Man nennt $V \subset Y$ offen, wenn es zu jedem $[\sigma] \in V$ ein U mit $U_{[\sigma]} \subset V$ gibt und prüft nach, dass das wirklich eine Topologie für Y definiert, in der π stetig ist.

Wir versuchen nun zu zeigen, dass π eine Überlagerung ist. Die Idee ist wieder klar: Wenn man U hinreichend klein wählt, sollte

$$\pi : [\sigma\tau] \mapsto \sigma\tau(1) = \tau(1)$$

die Menge $U_{[\sigma]}$ homöomorph auf U abbilden. Die Projektion ist surjektiv, wenn U wegzusammenhängend ist, und wir verlangen deshalb, dass X lokal wegzusammenhängend ist. Damit $\pi|_{U_{[\sigma]}}$ injektiv ist, muss gelten

$$\tau_0(1) = \tau_1(1) \implies [\sigma\tau_0] = [\sigma\tau_1].$$

Wegen $(\sigma\tau_0)(\sigma\tau_0)^{-1} = \sigma\tau_0\tau_1^{-1}\sigma^{-1}$ genügt es, wenn $\tau_0\tau_1^{-1}$ mit festem Anfangspunkt $\sigma(1)$ homotop zur Konstanten ist. Gibt es um jeden Punkt in X solche Umgebungen? Die meisten Beispiele X , die einem einfallen, sind lokal einfach zusammenhängend: In jeder Umgebung eines Punktes findet man eine einfach zusammenhängende Umgebung dieses Punktes. Die leistet dann das Gewünschte.

Aber einerseits ist das nicht für alle topologischen Räume der Fall, andererseits ist das auch etwas mehr als wir benötigen: die Homotopie muss sich nämlich nicht unbedingt in U abspielen, nur Anfangs- und Endweg sind in U vorausgesetzt. Man nennt einen topologischen Raum X *semi-lokal einfach zusammenhängend*, wenn gilt: Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U , so dass jeder in U enthaltene geschlossene Weg in X nullhomotop mit festem Anfangs- und Endpunkt ist. Das ist genau die Bedingung, die wir benötigen, und eine solche Umgebung U ist dann von π schlicht überdeckt. Dafür ist noch die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu zeigen. Tu das, lieber Leser!

Damit ist dann gezeigt:

Satz 98 (Existenz der universellen Überlagerung). *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semi-lokal einfach zusammenhängende topologische Raum X besitzt eine Überlagerung mit einfach zusammenhängendem Totalraum. Diese ist (durch ihre charakteristische Untergruppe) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte und heißt die universelle Überlagerung von X . Sie wird häufig mit $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$ bezeichnet.*

Beispiele 99.

- Die kanonische Projektion $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ist die universelle Überlagerung von S^1 .
- Die universellen Überlagerungen von P^n und vom Torus T^2 haben wir oben betrachtet.
- Beispiel 42 liefert die universelle Überlagerung $S^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$. Also ist

$$\pi_1(\mathbf{SO}(3), \text{id}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

- Durch ein Induktionsargument kann man daraus folgern, dass $\pi_1(\mathbf{SO}(n), \text{id}) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $n > 2$. Weil die Hochhebung in die universelle Überlagerung aber eine Bijektion $\pi_1(X, x_0) \rightarrow Y_{x_0}$ induziert, folgt umgekehrt, dass die universelle Überlagerung von $\mathbf{SO}(n)$ für alle $n > 2$ zweiblättrig ist. Der Totalraum wird mit $\mathbf{Spin}(n)$ bezeichnet. Die Gruppenstruktur von $\mathbf{SO}(n)$ lässt sich zu einer Gruppenstruktur von $\mathbf{Spin}(n)$ hochheben.

□

Es stellt sich nun heraus, dass wir die zu Eingang dieses Abschnittes gestellte Frage, wieviele Überlagerungen von X es gibt, damit schon erledigt haben: Alle Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ kommen vor. Zu einer Untergruppe $H \subset \pi_1(X, x_0)$ kann man sich nämlich aus der universellen Überlagerung auf folgende Weise eine Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit H als charakteristischer Untergruppe konstruieren:

Mit $\pi_1(X, x_0)$ operiert auch H als Untergruppe von $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ auf \tilde{X} und wir haben eine Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}/H, H\tilde{x}_0) =: (Y, y_0)$. Ein Punkt in Y ist eine Restklasse $H\tilde{x}$, und weil alle Punkte $h \cdot \tilde{x}$ in dieser Restklasse denselben Fußpunkt $\psi(\tilde{x})$ haben, kann man eine Abbildung

$$\pi : Y \rightarrow X, \quad H\tilde{x} \mapsto \psi(\tilde{x})$$

definieren. Dann ist π stetig (Definition der Quotiententopologie) und man zeigt dass jede von ψ schlicht überdeckte offene Menge in X auch von π schlicht überdeckt wird (selbst, vgl.

Tutorium). Also erhält man eine Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$. Was ist ihre charakteristische Untergruppe? Eine Schleife γ in x_0 liegt in einer Homotopieklasse von $H(Y, y_0)$ genau dann, wenn ihre Hochhebung in (Y, y_0) geschlossen ist, d.h. genau dann, wenn der Endpunkt ihrer Hochhebung in (\tilde{X}, \tilde{x}_0) in $H\tilde{x}_0$ liegt, d.h. wenn γ in einer Homotopieklasse von H liegt. Also ist $H(Y, y_0) = H$.

Ist eine Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ vorgegeben und führt man die vorstehende Konstruktion für $H = H(Y, y_0)$ durch, so haben $(\tilde{X}/H, H\tilde{x}_0)$ und (Y, y_0) also dieselbe charakteristische Untergruppe und sind deshalb isomorph. Der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, dass er Hx_0 in y_0 überführt. Identifiziert man $(\tilde{X}/H, H\tilde{x}_0)$ und (Y, y_0) mit diesem Isomorphismus, so erhält man also eine Kette

$$(\tilde{X}/H, H\tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

von Überlagerungen. In diesem Sinne versteht man den

Satz 100 (Universalität der universellen Überlagerung). *Die universelle Überlagerung von (X, x_0) überlagert jede andere zusammenhängende Überlagerung dieses Raumes.*

Dieselben Argumente zeigen: Ist $(Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine weitere Überlagerung und gilt für die charakteristischen Untergruppen $H(Z, z_0) \subset H(Y, y_0)$, so erhält man auf kanonische Weise eine Kette

$$(\tilde{X}/H, H\tilde{x}_0) \rightarrow (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0).$$

Damit erhalten wir:

Satz 101 (Klassifikation von Überlagerungen). *Sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Ordnet man jeder zusammenhängenden Überlagerung $\pi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ ihre charakteristische Untergruppe zu, so induziert das eine Bijektion \mathcal{H} von der Menge der Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von (X, x_0) auf die Menge der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.
 Einer Überlagerung $(Y_2, y_2) \rightarrow (Y_1, y_1)$ entspricht dabei eine Inklusion $H(Y_2, y_2) \subset H(Y_1, y_1)$ der charakteristischen Gruppen. Die Umkehrung \mathcal{H}^{-1} erhält man, indem man eine Untergruppe $H \subset \pi_1(X, x_0)$ als Gruppe von Decktransformationen auf der universellen Überlagerung \tilde{X} wirken lässt und ihr die Isomorphieklasse der „Quotientenüberlagerung“ $\tilde{X}/H \rightarrow X$ zuordnet.
 Reguläre Überlagerungen entsprechen Normalteilern der Fundamentalgruppe.*

Diesen Satz kann man fast wörtlich in den sogenannten Hauptsatz der Galoistheorie über endliche Körpererweiterungen übersetzen. Dem Raum (X, x_0) entspricht eine Körpererweiterung. Den Überlagerungen von X entsprechen die Zwischenkörper dieser Körpererweiterung und die Decktransformationen den Automorphismen der Körpererweiterung. Reguläre Überlagerungen entsprechen sogenannten galoisschen Zwischenkörpern.

Über die Bedeutung der Überlagerungstheorie für die Mathematik lesen Sie Kapitel IX, §8 im Jänich.

3 Mannigfaltigkeiten

Wir wenden uns nun der *Differentialtopologie* zu, der Topologie mit Methoden der Analysis. Dabei schränkt man sich zwangsläufig ein auf Mannigfaltigkeiten statt beliebiger topologischer Räume und auf (beliebig oft) differenzierbare Abbildungen statt stetiger Abbildungen. Diese Einschränkungen sind natürlich sehr stark, aber sie bieten immer noch eine Fülle interessanter Probleme und eröffnen eben völlig neue Methoden. Darüber hinaus lassen sich die Ergebnisse oft durch eine Approximation von differenzierbaren auf stetige Abbildungen verallgemeinern. Methoden dafür bieten der Weierstraßsche Approximationssatz oder Faltungsoperatoren, vgl. Abschnitt 3.3

3.1 C^∞ -Mannigfaltigkeiten und -Abbildungen

Definition 102. Seien V, W endlichdimensionale Banachräume.

- (i) Sei $U \subset V$ offen. Eine Abbildung $f : V \supset U \rightarrow W$ heißt eine C^∞ -Abbildung, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist, d.h. wenn alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und stetig sind.
- (ii) Sei $X \subset V$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $f : V \supset X \rightarrow W$ heißt eine C^∞ -Abbildung, wenn sie sich lokal zu einer C^∞ -Abbildung auf offenen Mengen fortsetzen läßt, d.h. wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung \tilde{U} und eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow W$ gibt, so dass $\tilde{f}|_{\tilde{U} \cap X} = f|_{\tilde{U} \cap X}$.

Bemerkungen: 1. Für zwei lokale C^∞ -Fortsetzungen \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 von f auf einer Umgebung von $x \in V$ ist im allgemeinen $D_x \tilde{f}_1 \neq D_x \tilde{f}_2$, und daher ist das Differential $D_x f$ zunächst nicht definiert.

2. Mittels Zerlegung der Eins haben wir gezeigt, dass sich jede C^∞ -Abbildung $f : V \supset X \rightarrow W$ (global) zu einer C^∞ -Abbildung auf einer offenen Umgebung X fortsetzen läßt.

- (iii) Seien $X \subset V, Y \subset W$ Teilmengen. Eine Abbildung $f : V \supset X \rightarrow Y$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn sie bijektiv ist und f und f^{-1} C^∞ -Abbildungen sind. X und Y heißen *diffeomorph*, wenn es zwischen ihnen einen Diffeomorphismus gibt.

Zeigen Sie, dass *diffeomorph* eine Äquivalenzrelation ist.

Beispiel 103. Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

ist eine C^∞ -Abbildung, vgl. Analysis I, Beispiel 168. Skizzieren Sie die Bildmenge der C^∞ -Abbildung(!)

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\phi(t) - \phi(-t), \phi(t) + \phi(-t)).$$

□

Beispiel 104. Im \mathbb{R}^{m+1} mit dem üblichen Skalarprodukt bezeichne

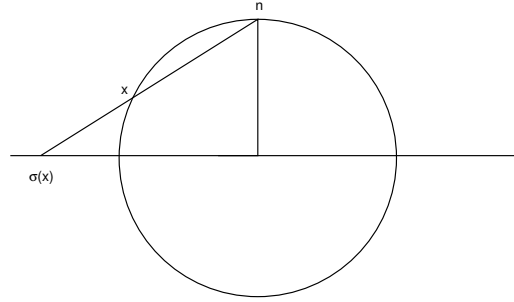
$$S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

die Einheitssphäre und $n \in S^m$ einen Punkt (den „Nordpol“).

Dann ist die *stereographische Projektion*

$$\sigma(x) := n - \frac{1}{\langle x - n, n \rangle} (x - n)$$

ein Diffeomorphismus der Menge $S^m \setminus \{n\}$ auf die Menge $\{y \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle y, n \rangle = 0\}$. Die letztere Menge ist diffeomorph zum \mathbb{R}^m .



□

Definition 105 (Mannigfaltigkeit). Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge X eines endlichdimensionalen Banachraumes V heißt eine *m-dimensionale Mannigfaltigkeit*¹⁰, wenn sie lokal diffeomorph ist zum \mathbb{R}^m , d.h. wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x in X und einen Diffeomorphismus

$$u : X \supset U \rightarrow u(U) \subset \mathbb{R}^m$$

auf eine offene Teilmenge $u(U)$ des \mathbb{R}^m gibt.

Jeder solche Diffeomorphismus heißt eine *Karte* oder ein *(lokales) Koordinatensystem* um x , und sein Inverses $u^{-1} : u(U) \rightarrow X$ heißt eine *(lokale) Parametrisierung* von X um x .

Ist X eine Mannigfaltigkeit, so heisst $Z \subset X$ eine *Untermannigfaltigkeit von X* , wenn es selbst wieder eine Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall heißt $\dim M - \dim Z$ die *Kodimension* der Untermannigfaltigkeit.

Beispiel 106. Eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit in V ist eine diskrete Punktmenge $X \subset V$, d.h. eine Teilmenge, deren induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.

□

Beispiel 107. Nach Beispiel 104 ist die m -Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und für $k < m$ ist $S^k := \{x \in S^m \mid x_{k+2} = \dots = x_{m+1} = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von S^m .

□

Beispiel 108 (Projektive Ebene). Im Beispiel 29 hatten wir die projektive Ebene identifiziert mit der Menge aller Spiegelungen an Geraden durch 0 im \mathbb{R}^3 . Der Vorteil dieses Modells ist, dass es in einen endlichdimensionalen Banachraum, nämlich $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ eingebettet ist. Wir zeigen, dass

$$P^2 = \{S \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid S^* = S \text{ und } S^2 = \text{id} \neq S \text{ und } \det S = +1\}.$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Sei $x_0 \in S^2$ und $H := \{x \in S^2 \mid \langle x_0, x \rangle > 0\}$ die offene Halbsphäre um x_0 . Dann ist $f : H \rightarrow P^2$ mit

$$f(x)(y) := -y + 2\langle x, y \rangle x$$

eine C^∞ -Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $f(H)$ von $[x_0] = \pi(x_0)$ in P^2 . Man rechnet leicht nach, dass die Umkehrung gegeben wird durch

$$S \mapsto \frac{x_0 + Sx_0}{\|x_0 + Sx_0\|}.$$

Sie ist also auch C^∞ . Weil H diffeomorph zu einer offenen Kreisscheibe in \mathbb{R}^2 ist, gilt dasselbe für $f(H)$.

□

¹⁰oder ausführlicher eine *m-dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von V*

Beispiel 109. In Analysis II hatten wir definiert:

Eine Teilmenge $M \subset V$ eines endlichdimensionalen Banachraumes heißt eine m -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von V , wenn sie lokal der Graph einer C^∞ -Funktion über einem m -dimensionalen Untervektorraum von V ist.

Offenbar ist jede Mannigfaltigkeit im Sinne der Ana 2 auch eine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer neuen Definition, weil jeder m -dimensionalen Untervektorraum von V diffeomorph zum \mathbb{R}^m ist. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrung gilt.

□

Ich erinnere nun an den Rangsatz (Satz 167 der Analysis II)

Satz 110 (Rangsatz, Version 1). Sei $f : V \supset G \rightarrow W$ eine C^∞ -Abbildung der offenen Menge G , wobei V und W endlich dimensionale Banachräume mit sind. Der Rang r von $D_x f : V \rightarrow W$ sei unabhängig von $x \in G$.

Dann gibt es zu jedem $x \in G$ offene Umgebungen U von x in G und \tilde{U} von $f(x)$ in W und C^∞ -Diffeomorphismen Φ und $\tilde{\Phi}$ von U bzw. \tilde{U} auf offene Mengen $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ bzw. $\tilde{\Phi}(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$\tilde{\Phi} \circ f \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Lokal sehen C^∞ -Abbildungen $f : V \supset G \rightarrow W$ von konstantem Rang also bis auf Diffeomorphismen so aus wie lineare Abbildungen vom gleichen Rang. Damit sieht das Urbild eines Punktes unter einer solchen Abbildung lokal so aus wie das Urbild eines Punktes unter einer linearen Abbildung, also wie die leere Menge oder wie ein affiner Unterraum. Damit ist das Urbild eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim V - r$.

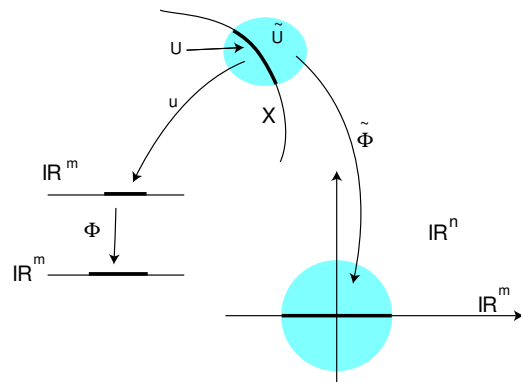
Das gilt insbesondere, wenn das Differential von f überall surjektiv, f also eine sogenannte Submersion ist. Das ist genau der *Satz über gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten* aus der Analysis II. Er liefert viele Beispiele von Mannigfaltigkeiten: Die Sphäre, die orthogonale Gruppe $\mathbf{O}(n)$ oder die spezielle orthogonale Gruppe $\mathbf{SO}(n)$ als $\binom{n}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten im Raum der reellen $n \times n$ -Matrizen usw.

Davon gilt auch eine Umkehrung: Ist $X \subset V$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, ist $x \in X$ und $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um x , so ist $u^{-1} : \mathbb{R}^m \supset u(U) \rightarrow V$ von konstantem Rang m . Also gibt es lokale Diffeomorphismen Φ um $u(x)$ und $\tilde{\Phi}$ um x , so dass

$$\tilde{\Phi} \circ u^{-1} \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\Phi : u(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und dass $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ so gewählt ist, dass $\tilde{U} \cap M = U$. Insbesondere ist $\tilde{\Phi}$ ein Diffeomorphismus einer offenen Umgebung \tilde{U} von x in V auf eine offene Menge des $\tilde{\Phi}(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^n$, ($n = \dim V$), und nach eventueller Verkleinerung von \tilde{U} ist $X \cap \tilde{U}$ gerade $\tilde{\Phi}^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \tilde{\Phi}(\tilde{U}))$. Anders gesagt:

$$X \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid \tilde{\Phi}_{m+1}(x) = \dots = \tilde{\Phi}_n(x) = 0\}.$$



Weil $\tilde{\Phi}$ ein Diffeomorphismus ist, ist

$$(\tilde{\Phi}_{m+1}, \dots, \tilde{\Phi}_n) : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$$

eine Submersion mit $X \cap \tilde{U}$ als Nullstellenmenge. Jede Mannigfaltigkeit ist also lokal “gleichungsdefiniert”.

Wir können \tilde{U} weiter so verkleinern, dass $\tilde{\phi}(\tilde{U})$ eine Kugel mit Zentrum in \mathbb{R}^m ist, so dass die Orthogonalprojektion $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diese Kugel in sich abbildet. Dann ist

$$\pi := \tilde{\Phi}^{-1} \circ \pi_1 \circ \tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow M$$

eine C^∞ -Abbildung mit $\pi|_{M \cap \tilde{U}} = \text{id}$. Das halten wir als Lemma fest:

Lemma 111. *Zu jedem Punkt $x \in X \subset V$ gibt es eine offene Umgebung \tilde{U} in V und eine C^∞ -Abbildung $\pi : \tilde{U} \rightarrow X$ mit $\pi|_{X \cap \tilde{U}} = \text{id}$.*

Als eine Konsequenz beweisen wir:

Lemma 112. *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann eine C^∞ -Abbildung, wenn es um jedes $x \in X$ eine Karte $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ für X gibt, so dass $f \circ u^{-1}$ eine C^∞ -Abbildung ist.*

Beweis. Für eine C^∞ -Abbildung f , ist auch $f \circ u^{-1}$ für jede Karte C^∞ , vgl. Definition 102.

Für die umgekehrte Richtung müssen wir um jedes x eine lokale Erweiterung von f zu einer C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow Y$ auf einer offenen Menge $\tilde{U} \subset V$ finden. Die ist mit π wie oben gegeben durch

$$f \circ \pi = \underbrace{(f \circ u^{-1})}_{\in C^\infty} \circ \underbrace{(u \circ \pi)}_{\in C^\infty}.$$

□

Definition 113 (Tangentialraum). Sei $X \subset V$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Sei $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um x . Definiere den Tangentialraum von X in x als

$$T_x X := \{(x, v) \mid v \in D_{u(x)} u^{-1}(\mathbb{R}^m)\} \subset X \times V.$$

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Karte.

Beweis der Unabhängigkeit. Sei $x \in X$. Lokal um x ist X gleichungsdefiniert: $X \cap \tilde{U} = g^{-1}(\{0\})$, wobei g eine Submersion vom Rang $\dim V - m$ ist. Also ist $\dim \text{Kern } D_x g = m$. Für jede Karte u um x ist aber $g \circ u^{-1} = \{0\}$ und deshalb $Du^{-1}(\mathbb{R}^m) \subset \text{Kern } Dg$. Aus Dimensionsgründen steht hier Gleichheit, und das beweist die Unabhängigkeit der Definition von der gewählten Karte. □

Wichtige Bemerkung. Weil $D_{u(x)} u^{-1}(\mathbb{R}^m)$ ein Untervektorraum von V ist, wird $T_x X$ durch

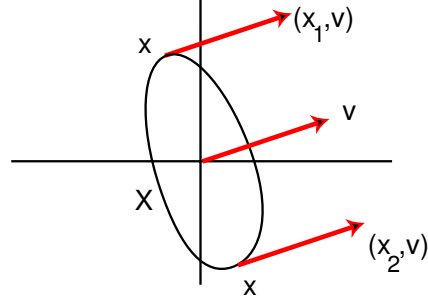
$$(x, v_1) + (x, v_2) := (x, v_1 + v_2), \quad \lambda(x, v) := (x, \lambda v)$$

zu einem m -dimensionalen Vektorraum. Diese Vektorraumstruktur ist fundamental für die Verallgemeinerung der Analysis, nämlich für die Idee der linearen Approximation, von Banachräumen auf Mannigfaltigkeiten. Um dem Rechnung zu tragen (aber auch zur Vereinfachung der Schreibweise) ignoriert man in der Notation meistens die x -Komponente (den “Fußpunkt”). Man schreibt: „Sei $v \in T_x X$ “, wenn man meint “Sei $(x, v) \in T_x X$ ”.

Das vereinfacht die Notation, bringt aber auch ein Problem, weil

$$x_1 \neq x_2 \implies T_{x_1}X \cap T_{x_2}X = \emptyset,$$

während ein $v \in V$ durchaus in *verschiedenen* Tangentialräumen liegen kann. Um dieses Problem zu beseitigen, führt man den Fußpunkt x von v im Hinterkopf mit.



Damit ist also für eine offene Teilmenge $X \subset V$, insbesondere für $X = V$,

$$T_x X = V.$$

Aus dem obigen Unabhängigkeitsbeweis halten wir fest: Ist X gleichungsdefiniert, also

$$X = g^{-1}(\{0\}),$$

so ist

$$T_x X = D_x g^{-1}(\{0\}),$$

also der Kern von $D_x g$.

Beispiel 114. Die Abbildung $g : \text{End}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n, A \mapsto AA^*$ ist auf der offenen Menge $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ aller invertierbarer Endomorphismen von konstantem Rang $\frac{n(n+1)}{2}$ (Beweis?) und die *orthogonale Gruppe* $\mathbf{O}(n) := g^{-1}(\{E\})$ deshalb eine $\binom{n}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum von $\mathbf{O}(n)$ in E ist der Kern von $D_E g$ also

$$T_E \mathbf{O}(n) = \{B \mid B = -B^*\}.$$

□

Definition 115 (Differential). Seien $X \subset V$ und $Y \subset W$ zwei Mannigfaltigkeiten,

$$f : X \rightarrow Y$$

eine C^∞ -Abbildung und $x \in X$. Dann gibt es eine offene Umgebung \tilde{U} von x in V und eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow W$ mit $\tilde{f}|_{\tilde{U} \cap X} = f|_{\tilde{U} \cap X}$. Definiere eine lineare Abbildung

$$d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$$

durch

$$d_x f(x, v) := (f(x), D_x \tilde{f}(v)).$$

Diese Abbildung heißt die *Ableitung* oder das *Differential* von f an der Stelle x . Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir zweierlei zeigen:

1. $(f(x), D_x \tilde{f}(v)) \in T_{f(x)} Y$
2. $(f(x), D_x \tilde{f}(v))$ ist unabhängig von der gewählten Erweiterung \tilde{f} , vgl. die Bemerkung in der Definition 102.

Beweis. Ist Y lokal bei $f(x)$ gegeben durch die Gleichung $h = 0$ und u eine Karte um x , so ist also

$$h \circ \tilde{f} \circ u^{-1} = h \circ f \circ u^{-1} = 0,$$

und daher landet das Bild von $D_x \tilde{f}(T_x X)$ im Kern von $D_{f(x)} h$, also im Tangentialraum an Y .

Nach der Kettenregel ist

$$D_x \tilde{f} \circ D_{u(x)} u^{-1} = D_{u(x)} (\tilde{f} \circ u^{-1}) = D_{u(x)} (f \circ u^{-1})$$

unabhängig von der Erweiterung. \square

Bemerkungen.

1. Wenn wir von *Abbildungen* oder *differenzierbaren Abbildungen* zwischen Mannigfaltigkeiten sprechen, meinen wir C^∞ -Abbildungen, es sei denn, wir machen explizit andere Voraussetzungen.
2. Lokal sehen Mannigfaltigkeiten und ihre differenzierbaren Abbildungen aus wie endlich-dimensionale Banachräume und ihre differenzierbaren Abbildungen im Sinne der Analysis. Bezüglich lokaler Karten $u : X \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um x und $\tilde{u} : Y \subset \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um $f(x)$ wird eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ beschrieben durch $\tilde{u} \circ f \circ u^{-1}$ und ihr Differential $d_x f$ durch $D_{u(x)} (\tilde{u} \circ f \circ u^{-1})$. Im folgenden Diagramm habe ich die Definitionsbereiche der Karten weggelassen, um es übersichtlicher zu machen. In der oberen Zeile steht die Mannigfaltigkeiten-Theorie, in der unteren die Analysis 2.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ u \uparrow & & \downarrow \tilde{u} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{u} \circ f \circ u^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Für die Ableitungen hat man

$$\begin{array}{ccccc} & & d_x f & & \\ & & \rightarrow & & \\ D_{u(x)} u^{-1} & \begin{array}{c} T_x X \\ \uparrow \\ \mathbb{R}^m \end{array} & & \begin{array}{c} T_{f(x)} Y \\ \uparrow \\ \mathbb{R}^n \end{array} & D_{\tilde{u}(f(x))} \tilde{u}^{-1} \\ & \rightarrow & & & \\ & D_{u(x)} (\tilde{u} \circ f \circ u^{-1}) & & & \end{array}$$

3. Das Differential einer (differenzierbaren) Abbildung $f : V \supset U \rightarrow W$ einer offenen Menge U im Punkt $x \in U$ ist eine lineare Abbildung von $D_x f : V \rightarrow W$. Im Gegensatz dazu hängen Definitionsbereich und Zielbereich vom Differential einer C^∞ -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Mannigfaltigkeiten vom jeweiligen Punkt ab:

$$d_x f : T_x X \rightarrow T_y Y.$$

4. Identifiziert man für offenes $X = U \subset V$ und $f : X \rightarrow W$ den Tangentialraum $T_x X$ auf die kanonische Weise mit V und $T_{f(x)} W$ mit W , so ist

$$d_x f = D_x f : V \rightarrow W,$$

und wir unterscheiden in der Regel nicht zwischen diesen beiden Notationen.

3.2 Tangential- und Normalbündel

In diesem Abschnitt geben wir Beispiele für zwei Mannigfaltigkeiten, die mit einer Mannigfaltigkeit $X \subset V$ “mitgeliefert” werden, und die im weiteren Gang der Ereignisse eine Rolle spielen werden.

Satz 116 (und Definition: Tangentialbündel). Sei X eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit im endlichdimensionalen Banachraum V . Definiere

$$TX := \{(x, v) \mid x \in X, v \in T_x X\} \subset V \times V$$

und

$$\pi : TX \rightarrow X, \quad (x, v) \mapsto x.$$

Dann ist TX eine $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und π eine Submersion. Man nennt $\pi : TX \rightarrow X$ das Tangentialbündel von X und π seine Fußpunktprojektion.

Bemerkung. Für jedes $x \in X$ ist $\pi^{-1}(\{x\}) = T_x X$ also ein Vektorraum. Das Tangentialbündel ist damit der Prototyp eines sogenannten *Vektor(raum)bündels* über X .

Beweis. Ist $\phi : \mathbb{R}^m \supset G \rightarrow X$ eine lokale Parametrisierung für X , so liefert

$$\Phi : G \times \mathbb{R}^m \rightarrow V \times V, \quad (x, y) \mapsto (\phi(x), D_x \phi(y))$$

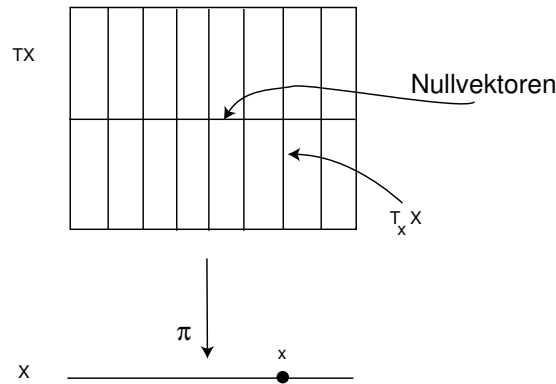
nach Definition des Tangentialraums eine C^∞ -Bijektion von $G \times \mathbb{R}^m$ auf die Menge $\{(x, v) \mid x \in G, v \in T_x X\} \subset V \times V$. Nach Ketten- und Produktregel ist

$$D_{(x,y)} \Phi(a, b) = (D_x \phi(a), D_x^2 \phi(a, y) + D_x \phi(b)).$$

Betrachtet man die Bilder von $(a, 0)$ und $(0, b)$, so sieht man, dass dieses Differential überall Höchstrang $2m$ hat. Also ist Φ eine Immersion und nach dem Rangsatz $\Phi(G \times \mathbb{R}^m)$ eine $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Damit ist auch TX eine solche.

π ist als Einschränkung einer C^∞ -Abbildung eine C^∞ -Abbildung, und weil $\pi \circ \Phi = \phi$ ist, hat das Differential von π überall den Rang m , ist also eine Submersion. \square

Mit dem typischen Bild für ein Vektorraumbündel sieht das Tangentialbündel so aus:



Das reflektiert ganz und gar nicht die Vorstellung vom “tangentialen Tangentialraum”, und überhaupt kann man sich schon aus Dimensionsgründen TX schwer vorstellen. Ein konkretes Beispiel dazu ist das folgende:

Beispiel 117. TX enthält eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $2m-1$, das sogenannte *Einheitstangentialbündel*

$$T^1X := \{(x, v) \in TX \mid \|v\| = 1\}.$$

Das Einheitstangentialbündel von S^2 ist also eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte Paare (x, v) orthogonaler Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 sind. Jedes solche Paar lässt sich durch $x \times v$ eindeutig zu einer ON-Basis des \mathbb{R}^3 , also zu einer Matrix in $\mathbf{SO}(3)$ ergänzen, T^1S^2 ist diffeomorph zu $\mathbf{SO}(3)$ oder, vgl. Beispiel 132, auch zum 3-dimensionalen projektiven Raum P^3 .

□

Definition 118 (Vektorfeld). Eine (C^∞) -Abbildung $v : X \rightarrow TX$ mit $\pi \circ v = \text{id}$, d.h. mit $v(x) \in T_xX$ für alle x , heißt ein *(tangentes C^∞ -)Vektorfeld* auf X .

Beispiele 119. Vektorfelder auf der Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ kann man interpretieren als Abbildungen $v : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ mit $\langle x, v(x) \rangle = 0$ für alle x . Beispiele dafür haben wir bereits betrachtet.

Für festes $A \in \mathbf{O}(n)$ ist die *Linkstranslation*

$$L_A : B \mapsto AB$$

eine C^∞ -Abbildung, und weil diese Abbildung sich zu einer linearen Abbildung auf $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ erweitert, ist $d_B L_A(\tilde{B}) = A\tilde{B} \in T_{AB}\mathbf{O}(n)$. Also ist für festes $B \in T_E\mathbf{O}(n) = \{B \mid B^* = -B\}$ die Abbildung

$$A \mapsto AB$$

ein Vektorfeld auf $\mathbf{O}(n)$, ein sogenanntes *linksinvariantes* Vektorfeld.

□

Wenn man (wie zum Beispiel Bröcker/Jänich) eine abstraktere Mannigfaltigkeitsdefinition ohne Bezug auf einen umgebenden Banachraum wählt, kann man jeder Mannigfaltigkeit immer noch Tangentialräume und ein Tangentialbündel zuordnen. Dagegen nimmt der Begriff des *Normalenbündels* einer Untermannigfaltigkeit expliziten Bezug auf einen umgebenden Raum. Wir beschränken uns hier allerdings auf einen Spezialfall von Untermannigfaltigkeiten eines Euklidischen Raumes.¹¹

Satz 120 (und Definition: Normalenbündel). Sei $X \subset \mathbb{R}^N$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit im Euklidischen Raum \mathbb{R}^N mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir definieren

$$\perp X := \{(x, w) \in X \times \mathbb{R}^N \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } v \text{ mit } (x, v) \in T_xX\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

und

$$\pi : \perp X \rightarrow X, \quad (x, w) \mapsto x.$$

Dann ist $\perp X$ eine N -dimensionale Mannigfaltigkeit und π eine Submersion. Man nennt $\pi : \perp X \rightarrow X$ das Normalenbündel von X in \mathbb{R}^N . Der Normalenraum $\perp_x X := \pi^{-1}(\{x\})$ in $x \in X$ ist gerade das orthogonale Komplement des Tangentialraumes T_xX , wenn man beide als lineare Unterräume von \mathbb{R}^N betrachtet.

Beweis. Wir betrachten X lokal in einer offenen Menge U als gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeit: $X \cap U = g^{-1}(\{0\})$, wobei $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion und $k = N - m$.

¹¹In der Differentialgeometrie betrachtet man auch Normalenbündel von Immersionen in sogenannte Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sogar auf das Skalarprodukt im umgebenden Raum (also die Riemannsche Metrik) kann man verzichten, wenn man Quotientenbündel betrachtet.

Dann ist für $x \in X \cap U$ –unter Vernachlässigung der Fußpunkte–

$$T_x X = \text{Kern } D_x g, \quad \perp_x X = (\text{Kern } D_x g)^\perp.$$

Die Transponierte $D_x g^T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ der linearen Abbildung $D_x g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist mittels der Standard-Skalarprodukte auf \mathbb{R}^N und \mathbb{R}^k gegeben durch

$$\langle D_x g^T(y), v \rangle = \langle y, D_x g(v) \rangle.$$

Insbesondere ist das Bild von $D_x g^T$ gerade das orthogonale Komplement von $\text{Kern } D_x g$. Ist also $\phi : \mathbb{R}^m \supset G \rightarrow U$ eine lokale Parametrisierung für X , so ist

$$\Phi : G \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad (x, y) \mapsto (\phi(x), (D_{\phi(x)} g)^T(y))$$

eine Bijektion auf die Menge der Normalenräume über $\phi(G)$. Die Ableitung ist

$$D_{(x,y)} \Phi(a, b) = \left(D_x \phi(a), (D_{\phi(x)}^2 g(D_x \phi(a), \cdot))^T(y) + (D_{\phi(x)} g)^T(b) \right).$$

Wieder betrachten wir die Bilder von $(a, 0)$ und $(0, b)$ (was uns die Betrachtung der komplizierten 2. Ableitung erspart), und erhalten für Φ konstanten Höchststrang $m + k = N$. Der Rest des Beweises geht wie für das Tangentialbündel. \square

Das Normalenbündel ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Geometrie, aber wir brauchen es vor allem zu Beweis des folgenden

Satz 121 (Tubenumgebungssatz). *Ist $X \subset \mathbb{R}^N$ eine Mannigfaltigkeit, so gibt es eine positive C^∞ -Funktion $\epsilon : X \rightarrow]0, \infty[$, so dass die normale Exponentialabbildung*

$$E : \perp X \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad (x, w) \mapsto x + w$$

die offene Umgebung

$$U_\epsilon := \{(x, w) \in \perp X \mid \|w\| < \epsilon(x)\}$$

des Nullschnitts

$$Z := \{(x, 0) \in \perp X \mid x \in X\}$$

diffeomorph auf eine offene Umgebung von X in \mathbb{R}^N abbildet.

Dieser Satz wird aus folgendem Grunde wichtig für uns. Wenn wir eine differenzierbare Abbildung $f : Y \rightarrow X$ “stören”, zum Beispiel bei der Konstruktion einer Homotopie durch lineare Verbindungen im umgebenden Vektorraum, so geht die gestörte Abbildung gelegentlich nicht mehr in die Mannigfaltigkeit X , sondern landet (hoffentlich nah bei X) im umgebenden Vektorraum. Dann kann man die Retraktionsabbildung $r = \pi \circ (E|_{U_\epsilon})^{-1}$ benutzen, um wieder eine Abbildung nach X zu konstruieren.

Beweis des Tubenumgebungssatzes. Wir wollen die Ableitung von E in Punkten $(x, 0) \in Z$ berechnen. Sei $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um x , $(x, v) \in T_x X$ und $(x, w) \in \perp_x X$. Dann ist

$$c : t \mapsto u^{-1}(u(x) + t d_x u(v))$$

ein Weg in X mit $\dot{c}(0) = v$ und

$$c_1 : t \mapsto (c(t), 0)$$

ist ein Weg in $\perp X$. Für ihn gilt

$$E \circ c_1(t) = c(t)$$

und

$$d_{(x,0)}E(\dot{c}_1(0)) = \dot{c}(0) = v.$$

Ebenso finden wir für den Weg

$$c_2 : t \mapsto (x, tw)$$

die Komposition $E \circ c_2(t) = x + tw$ und die Ableitung

$$d_{(x,0)}E(\dot{c}_2(0)) = w.$$

Weil $T_x X + \perp_x X = \mathbb{R}^N$ ist, ist also $d_{(x,0)}E$ von maximalem Rang N hat. Also gilt:

- Es gibt eine offene Umgebung des Nullschnitts $Z \subset \perp X$, auf der E ein lokaler Diffeomorphismus ist.
- $E|_Z : (x, 0) \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus auf $X \subset \mathbb{R}^N$, die Inverse ist gegeben durch $x \mapsto (x, 0)$.

Nach dem Lemma 38 gibt es daher eine offene Umgebung G von Z in $\perp X$, die durch E homöomorph auf eine offene Umgebung U von X in V abgebildet wird. Weil E ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $E|_G$ sogar ein Diffeomorphismus.

Das Beispiel 36 überträgt sich wörtlich auf Vektorbündel und liefert eine positive C^∞ -Funktion $\epsilon : X \rightarrow]0, \infty[$, so dass

$$U_\epsilon \subset G.$$

Darauf ist E natürlich erst recht ein Diffeomorphismus und $E(U_\epsilon)$ ist eine offene Umgebung von X in $\mathbb{R}^N = V$. \square

Korollar 122. *Zu jeder Untermannigfaltigkeit $X \subset V$ eines endlichdimensionalen Banachraumes gibt es eine offene Umgebung U von X und eine C^∞ -Deformationsretraktion*

$$r : U \rightarrow X.$$

D.h. es gibt eine C^∞ -Abbildung $R : U \times [0, 1] \rightarrow U$ mit

$$\begin{aligned} R(\cdot, 0) &= \text{id}_U, & r &:= R(\cdot, 1) : U \rightarrow X, \\ R(x, t) &= x \text{ für alle } (x, t) \in X \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen des Satzes definiere

$$(E|_{U_\epsilon})^{-1}(z) =: (x(z), w(z)) \in \perp X$$

und

$$R(z, t) := E(x(z), (1-t)w(z)).$$

\square

Korollar 123. *Ist $f : V \supset X \rightarrow W$ eine stetige Abbildung auf einer Mannigfaltigkeit, so hat f eine stetige Fortsetzung auf eine offene Umgebung U von X in V . Wie im Beispiel 35 findet man dann auch eine stetige Fortsetzung auf ganz V . Wenn X kompakt ist, findet man eine solche mit kompaktem Träger.*

Der folgende Satz ist eine andere Variante des Tubenumgebungssatzes:

Satz 124. Sei $X \subset V$ eine Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen Banachraums V und $r : U \rightarrow X$ eine Retraktion wie im Korollar 122. Dann gibt es eine positive C^∞ -Funktion $\epsilon : X \rightarrow]0, \infty[$, so dass gilt

(i) Für alle $(x, v) \in TX$ mit $\|v\| < \epsilon(x)$ ist $x + v \in U$.

(ii) Die nach (i) definierte Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{E} : \tilde{U}_\epsilon &:= \{(x, v) \in TM \mid \|v\| < \epsilon(x)\} \rightarrow X \times X \\ (x, v) &\mapsto (x, r(x + v)) \end{aligned}$$

bildet \tilde{U}_ϵ diffeomorph auf eine offene Umgebung von

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

in $X \times X$ ab.

Der Satz liefert eine Interpretation wenigstens für “kurze” Tangentialvektoren: Das Paar (x, y) von hinreichend benachbarten Punkten in X kann man deuten als Punkt $x \in X$ und einen “Ortsvektor” von x nach y . In der Theorie von Mannigfaltigkeiten ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen übernimmt deshalb eine solche Tubenumgebung von Δ die Rolle des Tangentialbündels.

Beweis. Wir berechnen wieder

$$d_{(x,0)}\tilde{E} : T_{(x,0)}TX \rightarrow T_{(x,x)}X \times X = T_xX \times T_xX. \quad (9)$$

Wie im Beweis des Tubenumgebungssatzes benutzen wir dazu eine Karte u um x und $(x, v) \in T_xX$ und betrachten zwei Wege in TX , nämlich

$$c_1(t) := (u^{-1}(u(x) + td_xu(v)), 0) \text{ und } c_2(t) := (x, tv).$$

Dafür finden wir

$$\frac{d}{dt}(\tilde{E} \circ c_1)(0) = (v, *), \quad \frac{d}{dt}(\tilde{E} \circ c_2)(0) = (0, d_xr(v)) = (0, v).$$

Also ist das Differential injektiv und \tilde{E} auf einer Umgebung des Nullschnitts $\{(x, 0) \mid x \in X\}$ ein lokaler Diffeomorphismus, der den Nullschnitt injektiv abbildet. Damit geht der Beweis wie oben. \square

3.3 C^∞ -Approximation

Satz 125 (Approximationssatz). Seien V und W endlichdimensionale Banachräume, $Y \subset W$ eine Mannigfaltigkeit und $X \subset V$ eine kompakte Teilmenge. $g : X \rightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung, die auf einer abgeschlossenen Teilmenge $C \subset X$ eine C^∞ -Abbildung ist. Dann gibt es eine zu g homotope C^∞ -Abbildung $f : X \rightarrow Y$, die auf C mit g übereinstimmt. Zusatz. Ist $\epsilon > 0$, so kann man überdies erreichen, dass in der Norm von W

$$\|g(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis. Vorbemerkungen.

- Sei ohne Einschränkung $V = \mathbb{R}^N, W = \mathbb{R}^M$.
- Wir setzen ohne Beweis voraus, dass sich g zu einer stetigen Abbildung $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ mit kompaktem Träger fortsetzen läßt, die wir wieder mit g bezeichnen. Für Mannigfaltigkeiten X haben wir das im Korollar 123 gezeigt, und in anderen Fällen, die uns interessieren, kann man eine solche Fortsetzung direkt angeben.

Für beliebige kompakte Mengen $X \subset \mathbb{R}^N$ (auch in allgemeineren topologischen Räumen) gibt es immer eine solche stetige Fortsetzung (Erweiterungssatz von Tietze-Urysohn), aber der Beweis ist schwierig, vgl. *Jänich*.

1. Schritt. Wir approximieren g durch eine C^∞ -Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Das Korollar 122 liefert eine offene Umgebung U von Y in \mathbb{R}^M und eine Retraktion $r : U \rightarrow Y$. Weil X kompakt ist, ist $d(f(X), \mathbb{R}^M \setminus U) > 0$. Wir wählen ein $\eta > 0$ mit

$$\eta < d(f(X), \mathbb{R}^M \setminus U).$$

Weil g stetig mit kompaktem Träger ist, ist es gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$\|x - x'\| < \delta \quad \implies \quad \|g(x) - g(x')\| < \eta.$$

Nun sei $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$ eine C^∞ -Buckelfunktion mit

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \|x\| < \delta/2, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq \delta. \end{cases}$$

und $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(z) dz = 1$. Definiere $f_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ durch

$$f_1(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g(z) \rho(x - z) dz.$$

Nach einem Korollar zum Satz von Lebesgue ist f_1 eine C^∞ -Funktion. Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - g(x)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^N} g(z) \rho(x - z) dz - \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \rho(z - x) dz \right\| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|g(z) - g(x)\| \rho(x - z) dz < \eta. \end{aligned}$$

2. Schritt. Wir modifizieren f_1 zu einem f_2 , das auf C mit g übereinstimmt.

Sei G eine offene Umgebung von C in X , auf der g eine C^∞ -Fortsetzung \tilde{g} besitzt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$\|\tilde{g}(x) - g(x)\| < \eta$$

für alle $x \in G \cap X$. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ eine C^∞ -Funktion mit

$$\begin{aligned}\phi|_C &= 1, \\ \text{supp } \phi &\subset G.\end{aligned}$$

Wir setzen \tilde{g} irgendwie auf $\mathbb{R}^n \setminus G$ fort. Dann ist $\phi\tilde{g}$ C^∞ auf ganz \mathbb{R}^N . Also definiert

$$f_2(x) := \phi(x)\tilde{g}(x) + (1 - \phi(x))f_1(x).$$

eine C^∞ -Abbildung. Für sie gilt

$$f_2 = \tilde{g} = g \text{ auf } C$$

und

$$\begin{aligned}\|f_2(x) - g(x)\| &= \|\phi(x)\tilde{g}(x) + (1 - \phi(x))f_1(x) - g(x)\| \\ &= \|\phi(x)(\tilde{g}(x) - g(x)) + (1 - \phi(x))(f_1(x) - g(x))\| \\ &\leq \begin{cases} \phi(x)\eta + (1 - \phi(x))\eta = \eta & \text{für } x \in X \cap \tilde{U}, \\ (1 - \phi(x))\eta \leq \eta & \text{für } x \in X \setminus \tilde{U}. \end{cases}\end{aligned}$$

Also liegt die Verbindungsstrecke von $g(x)$ und $f_2(x)$ in U , und wir können $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ definieren durch

$$H(x, t) := r(tf_2(x) + (1 - t)g(x)).$$

Das ist eine Homotopie in Y von $g : X \rightarrow Y$ in die C^∞ -Abbildung $f := r \circ f_2$. Offenbar gilt $f|_C = g|_C$.

Zum Zusatz. Wir haben

$$\|f(x) - g(x)\| = \|r \circ f_2(x) - g(x)\| \leq \|r \circ f_2(x) - f_2(x)\| + \|f_2(x) - g(x)\| \leq \|r \circ f_2(x) - f_2(x)\| + \eta.$$

Im Tubenumgebungssatz ist

$$\|E(y, w) - r(E(y, w))\| = \|w\|.$$

Durch Verkleinerung der Tubenumgebung U können wir daher erreichen, dass

$$\|r \circ f_2(x) - f_2(x)\| < \frac{\epsilon}{2},$$

und nach Wahl von $\eta < \frac{\epsilon}{2}$ erhalten wir $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$. □

Korollar 126. *Seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ zwei C^∞ -Abbildungen der kompakten Mannigfaltigkeit X in die Mannigfaltigkeit Y , zwischen denen es eine stetige Homotopie gibt. Dann gibt es zwischen ihnen auch eine C^∞ -Homotopie.*

Beweis. Sei $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine stetige Homotopie von f_0 nach f_1 . Nach dem Satz gibt es eine C^∞ -Abbildung $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$F(., 0) = H(., 0) = f_0, \quad F(., 1) = H(., 1) = f_1.$$

Daraus folgt die Behauptung. (Dass H und F homotop sind, ist hier ohne Belang.) □

Bemerkung. Im Fall des vorstehenden Korollars läßt sich die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow W$ relativ einfach zeigen: Ist $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und $\phi|_{[0,1]} = 1$, und setzt man $H(x, t) := H(x, 0)$ bzw. $= H(x, 1)$ für $t < 0$ bzw. $t > 1$, so ist $\phi(t)H(x, t)$ auf der Mannigfaltigkeit $X \times \mathbb{R} \subset V \times \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und läßt sich wie im Korollar 123 zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger auf $V \times \mathbb{R}$ fortsetzen.

3.4 Der Rang und die Topologie differenzierbarer Abbildungen

Mittels lokaler Karten verallgemeinert man den Rangsatz 110 auf Mannigfaltigkeiten:

Satz 127 (Rangsatz, Version 2). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n . Der Rang r von $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ sei unabhängig von $x \in X$.

Dann gibt es zu jedem $x \in X$ Karten

- $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ für X um x mit $u(x) = 0$ und
- $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ für Y um $f(x)$ mit $\tilde{u}(f(x)) = 0$,

so dass auf $u(U \cap f^{-1}(\tilde{U}))$ gilt:

$$\tilde{u} \circ f \circ u^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Definition 128. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

- (i) $x \in X$ heißt ein *kritischer Punkt* von f , wenn $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ nicht surjektiv ist, andernfalls ein *regulärer Punkt* von f .
- (ii) $y \in Y$ heißt ein *kritischer Wert* von f , wenn $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einen kritischen Punkt von f enthält, andernfalls ein *regulärer Wert* von f .

Definition 129. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

- (i) f heißt eine *Immersion*, wenn das Differential $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ überall injektiv ist.
- (ii) f heißt eine *Submersion*, wenn das Differential $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ überall surjektiv ist.
- (iii) f heißt eine *Einbettung*, wenn $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ ein Diffeomorphismus ist.

Korollar 130. Sei $f : X \rightarrow Y$ wie im Satz.

- (i) Ist f eine Immersion, so ist f lokal injektiv.
- (ii) Ist f eine Submersion, so ist f eine offene Abbildung: es bildet offene Mengen in offenen Mengen ab.
- (iii) (Umkehrsatz) Ist $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ für ein $x \in X$ ein Isomorphismus, so bildet f eine offene Umgebung von x diffeomorph auf eine offene Umgebung von $f(x)$ ab.
- (iv) (Urbildsatz) Ist $y \in Y$ ein regulärer Wert von f , so ist $M := f^{-1}(\{y\})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim X - \dim Y$, eine sogenannte Untermannigfaltigkeit von X . Für $x \in M$ ist

$$T_x M = \text{Kern } d_x f \subset T_x X.$$

Die Beweise folgen unmittelbar aus dem Rangsatz.

Unter einer differenzierbaren Überlagerung verstehen wir eine Überlagerung $\pi : Y \rightarrow X$ von Mannigfaltigkeiten, bei der π ein lokaler Diffeomorphismus ist.

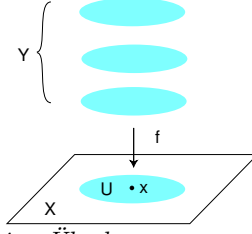
Satz 131 (Plattenwechsler-Satz). Sei $f : Y \rightarrow X$ eine C^∞ -Abbildung zwischen gleich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit kompaktem Y .

Sei X_0 die Menge der regulären Werte von f und $Y_0 := f^{-1}(X_0)$. Dann ist

$$f|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow X_0$$

eine differenzierbare Überlagerung mit endlicher Blätterzahl.

Gibt es insbesondere keine kritischen Punkte, so ist $f : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung.



Beweis. Seien $x \in X$ ein regulärer Wert und $y \in f^{-1}(\{x\})$. Dann wird nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung U_y von y durch f diffeomorph auf eine offene Umgebung $f(U_y) \subset X$ abgebildet. Insbesondere ist y der einzige Urbildpunkt von x in U_y . Wir wählen für jedes y ein solches U_y . Die Menge $Y \setminus f^{-1}(\{x\})$ ist offen und bildet zusammen mit den U_y eine offene Überdeckung von Y . Weil Y kompakt ist, genügen also endlich viele U_{y_1}, \dots, U_{y_k} zur Überdeckung von $f^{-1}(\{x\})$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass die U_{y_i} paarweise disjunkt sind.

Man ist geneigt, nun $U := \bigcap_{i=1}^k f(U_{y_i})$ zu setzen. Dann werden die $U_{y_i} \cap f^{-1}(U)$ diffeomorph auf U abgebildet. Aber möglicherweise ragen noch andere „Zipfel“ von Y in $f^{-1}(U)$ hinein, die $f^{-1}(\{x\})$ nicht treffen und deshalb bei unserer Konstruktion nicht berücksichtigt wurden.

Deshalb müssen wir vorsichtiger sein: Die Menge $Z := Y \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$ ist abgeschlossen, also kompakt, und daher ist $f(Z)$ eine kompakte Teilmenge von $X \setminus \{x\}$. Wir setzen

$$U := \left(\bigcap_{i=1}^k f(U_{y_i}) \right) \setminus f(Z).$$

Dann ist $f^{-1}(U)$ die Vereinigung der disjunkten Mengen $U_{y_i} \cap f^{-1}(U)$, deren jede diffeomorph auf U abgebildet wird. \square

Wir benutzen das zu einem zweiten Beweis für den **Fundamentalsatz der Algebra**. Der entscheidende Schritt dabei ist die Erweiterung der polynomialen Abbildung $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf die sogenannte Riemannsche Zahlenkugel, ein Verfahren, das zum Standardrepertoire der Funktionentheorie gehört.

Bezeichnet $\sigma_+ : \mathbb{R}^3 \supset S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol $N := (0, 0, 1)$, so definiert

$$f(x) = \begin{cases} \sigma_+^{-1}(p(\sigma_+(x))) & \text{für } x \neq N \\ N & \text{für } x = N \end{cases}$$

eine Abbildung $f : S^2 \rightarrow S^2$, die auf $S^2 \setminus \{N\}$ glatt ist. Wir zeigen, dass sie sogar auf ganz S^2 glatt ist. Dazu bezeichnen wir die stereographische Projektion von $-N$ aus mit σ_- . Dann gilt für alle $x \in S^2 \setminus \{N, -N\}$

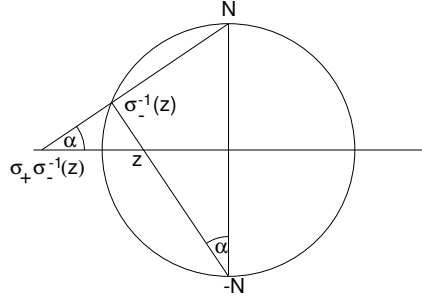
$$\begin{aligned} f(x) &= \sigma_+^{-1} \circ p \circ \sigma_+(x) = \sigma_+^{-1} \circ (\sigma_- \circ \sigma_+^{-1}) \circ p \circ (\sigma_+ \circ \sigma_-^{-1}) \circ \sigma_-(x) \\ &= \sigma_+^{-1} \circ \underbrace{(\sigma_+ \circ \sigma_-^{-1})^{-1} \circ p \circ (\sigma_+ \circ \sigma_-^{-1})}_{=: \tilde{p}} \circ \sigma_-(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Zur Berechnung von \tilde{p} betrachten wir nebenstehende Abbildung. Aus ihr folgt, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|z| = \tan \alpha, \quad |\sigma_+ \circ \sigma_-^{-1}(z)| = \cot \alpha = \frac{1}{|z|}$$

und daher

$$\sigma_+ \circ \sigma_-^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$



Also liefert $p(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ mit $a_0 \neq 0$

$$\tilde{p}(z) = \frac{1}{p(\frac{1}{\bar{z}})} = \frac{z^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \dots + \bar{a}_n z^n}.$$

Das wird durch $\tilde{p}(0) := 0$ zu einer glatten Funktion auf einer Umgebung von 0 und nach (10) ist f glatt in $N = \sigma_-(0)$.

Wenn man vermöge der stereographischen Projektion die komplexe Ebene also mit dem Komplement des Nordpols der Einheitssphäre, der sogenannten Riemannschen Zahlenkugel, identifiziert, läßt sich jedes komplexe Polynom also zu einer differenzierbaren Abbildung der Sphäre in sich fortsetzen.

Die kritischen Punkte einer solchen Fortsetzung entsprechen gerade den Nullstellen von p' (wir wissen schon, dass das nur endlich viele sind) und vielleicht dem Punkt N . Daher ist die Menge der regulären Werte von f zusammenhängend und nach Satz 131 ist $y \mapsto \#f^{-1}(y)$ darauf konstant, alle regulären Werte werden gleich oft angenommen. Daher ist f surjektiv und insbesondere gibt es ein $x_0 = \sigma_+^{-1}(z_0)$ mit $f(x_0) = \sigma_+^{-1}(0)$, d.h. $p(z_0) = 0$.

Als weiteres Beispiel für den Plattenwechsler-Satz zeigen wir noch, dass die Spindarstellung eine Überlagerung ist.

Beispiel 132. Sei $\pi : \mathbb{H} \supset S^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$, $q \mapsto q \cdot \cdot \cdot q^{-1}$. Wir berechnen das Differential der offensichtlichen Fortsetzung von π zu einer Abbildung $\mathbb{H} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^3)$ in $q \in S^3$:

$$D_q \pi(v)(x) = vxq^{-1} - qxq^{-1}vq^{-1} = q(q^{-1}vx - xq^{-1}v)q^{-1}.$$

Der Kern ist gegeben durch die v , für die $q^{-1}v$ mit allen $x \in \text{Spann}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ kommutiert, d.h. für die $q^{-1}v$ reell oder $v \in \mathbb{R}q$ ist. Das ist gerade das orthogonale Komplement zum Tangentialraum von S^3 in q . Also ist $\pi : S^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ eine Immersion. Weil $\dim \mathbf{SO}(3) = \binom{3}{2} = 3 = \dim S^3$ ist, können wir den Plattenwechsler-Satz anwenden und erhalten, dass π eine (2-blättrige) Überlagerung ist. Daraus folgt dass $\mathbf{SO}(3)$ diffeomorph zum 3-dimensionalen projektiven Raum P^3 ist.

□

3.5 Satz von Sard

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes haben gezeigt, dass reguläre Werte einer differenzierbaren Abbildung von besonderer Bedeutung sind. Der Satz von Sard zeigt, dass sie gewissermaßen der “Normalfall” sind.

Das Bild einer linearen Abbildung, deren Rang kleiner als die Dimension des Zielraumes ist, hat eine niedrigere Dimension als der letztere und ist deshalb eine relativ “dünne” Teilmenge, eine sogenannte Nullmenge. Der Satz von Sard verallgemeinert das auf differenzierbare Funktionen.

Definition 133. (i) Ein *Quader* im \mathbb{R}^n ist eine Teilmenge der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Sein Volumen ist

$$\mu_n(Q) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

(ii) Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Quadern gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_n(Q_i) < \epsilon.$$

(iii) Eine Teilmenge $N \subset X$ einer Mannigfaltigkeit heißt eine *Nullmenge*, wenn für jede Karte $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Menge $u(N \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

(iv) Eine Aussage über die Punkte einer Mannigfaltigkeit gilt *für fast alle Punkte*, wenn sie für alle Punkte ausserhalb einer Nullmenge gilt.

Beispiel 134. Zeigen Sie, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Also ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Hyperebenen im \mathbb{R}^n sind Nullmengen.

□

Bemerkung. Man kann zeigen: Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $h : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so ist $h(N)$ eine Nullmenge, vgl. Analysis III. Sind daher $u_1, u_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Karten für eine Mannigfaltigkeit X , ist $N \subset X$ und ist $u_1(N \cap U)$ eine Nullmenge, so ist auch $u_2(N \cap U) = u_2 \circ u_1^{-1}(u_1(N \cap U))$ eine Nullmenge. Daher ist $N \subset X$ eine Nullmenge, wenn es sich durch eine Familie von Karten $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ überdecken läßt, für die $u(N \cap U)$ eine Nullmenge ist.

Satz 135 (Sard). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Dann ist die Menge der kritischen Werte von f eine Nullmenge in Y . Insbesondere ist die Menge der regulären Werte dicht in Y .

Beweis nach Milnor/Pontrjagin. Nach der Bemerkung genügt der Beweis für den Fall von Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit offenem G , und wir beschränken uns darauf. Sei $C \subset G$ die Menge der kritischen Punkte von f . Wir werden benötigen, dass $f(C)$ Lebesgue-messbar ist. Das sieht man so: C

ist abgeschlossen in G , also abzählbare Vereinigung kompakter Mengen. Also ist auch $f(G)$ die abzählbare Vereinigung kompakter Mengen und damit messbar.

Der Beweis benutzt Induktion über n , beginnend mit $n = 0$, für das die Behauptung wegen $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ trivial ist.

Sei die Behauptung also bereits für $n - 1$ bewiesen und sei $\bar{x} \in G$ mit $d_{\bar{x}}f(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^m$. Wir nehmen zunächst an, dass

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0, \quad (11)$$

insbesondere also $m \geq 2$. Wir definieren eine Abbildung

$$h : G \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (f_1(x), x_2, \dots, x_n).$$

Die Funktionalmatrix von h in \bar{x} ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & * & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Also bildet h nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung V von \bar{x} diffeomorph auf eine offene Menge V' ab, und die kritischen Punkte der Abbildung

$$g := f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ist gerade die Menge

$$h(C \cap V).$$

Die Menge der kritischen Werte von g ist daher $f(C \cap V)$. Jeder Punkt von V' ist von der Form $(f_1(x), x_2, \dots, x_n)$ und

$$g : (f_1(x), x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad (12)$$

Die Schnitte der Hyperebenen $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ mit V' werden durch g also in die Hyperebenen $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ abgebildet. Für festes t sei

$$\begin{aligned} g^t : \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (t, y) \in V'\} &\rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \\ y &\mapsto (g_2(t, y), \dots, g_m(t, y)) \end{aligned}$$

Nach (12) ist die Funktionalmatrix von g

$$g'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{pmatrix}.$$

Also ist $(t, y) \in V'$ kritisch für g genau dann, wenn y kritisch für g^t ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind die kritischen Werte von g^t eine Nullmenge. Nach dem Satz von Fubini ist eine messbare Menge eine Nullmenge, wenn alle ihre Durchschnitte mit einer Familie paralleler Hyperebenen Nullmengen sind. Also ist $f(C \cap V)$ eine Nullmenge.

Bemerkenswerter Weise funktioniert dieser Beweis nur, wenn f in \bar{x} nicht “zu kritisch” ist, nämlich wenn wenigstens eine partielle Ableitung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ nicht verschwindet. (Wir hatten aus Gründen einfacherer Notation $i = j = 1$ angenommen.) Das erlaubt die Reduktion der Dimension. Andernfalls, meint man, sollte die Behauptung erst recht gelten, aber der Sachverhalt ist komplizierter. Wir setzen

$$C_i := \{x \in G \mid D_x f = 0, \dots, D_x^i f = 0\}$$

Dann haben wir gezeigt: Stimmt der Satz für $n - 1$, so besitzt jeder Punkt $x \in C \setminus C_1$ eine offene Umgebung V , so dass $f(C \cap V)$ eine Nullmenge ist. Weil sich $C \setminus C_1$ durch abzählbar viele solcher Umgebungen überdecken lässt, ist also $f(C \setminus C_1)$ eine Nullmenge.

Wir zeigen als nächstes:

$$f(C_i \setminus C_{i+1}) \text{ ist eine Nullmenge für alle } i \geq 1. \quad (13)$$

Sei $\bar{x} \in C_i \setminus C_{i+1}$. Dann gibt es eine partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{i+1} f_r}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{i+1}}}(\bar{x}) \neq 0.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber wieder an, dass $j_1 = 1$. Dann gilt, weil $\bar{x} \in C_i$,

$$w(\bar{x}) := \frac{\partial^i f_r}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_{i+1}}}(\bar{x}) = 0,$$

aber

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0.$$

Die Abbildung

$$h : x \mapsto (w(x), x_2, \dots, x_n)$$

bildet eine offene Umgebung V von \bar{x} diffeomorph auf eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^n$ und $C_i \cap V$ in die Hyperebene $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ ab. Wir betrachten

$$g := f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^m$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, y) \in V'\} &\rightarrow \mathbb{R}^m, \\ y &\mapsto g(0, y). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von \tilde{g} eine Nullmenge. Für $x \in C_i \cap V$ ist $h(x) := (0, y)$ und y ein kritischer Punkt von \tilde{g} , weil in $h^{-1}(0, y) = x$ alle Ableitung von f der Ordnung $\leq i$ verschwinden. Also ist

$$\tilde{g}(\{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, y) \in h(C_i \cap V)\}) = f(C_i \cap V)$$

eine Nullmenge. Jeder Punkt $\bar{x} \in C_i \setminus C_{i+1}$ besitzt also eine offene Umgebung V , so dass $f(C_i \cap V)$, erst recht also $f((C_i \setminus C_{i+1}) \cap V)$, eine Nullmenge ist. Abzählbar viele davon überdecken $C_i \setminus C_{i+1}$, und daraus folgt (13).

Schließlich zeigen wir:

$$f(C_i) \text{ ist eine Nullmenge, wenn } i \geq \frac{n}{m}. \quad (14)$$

Es genügt zu zeigen, dass für jeden Würfel W in G das Bild $f(C_i \cap W)$ eine Nullmenge ist. Nach dem Satz von Taylor gilt für $\bar{x} \in C_i \cap W$ und $x + h \in W$

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + R(h)$$

wobei sich das Restglied in der l^∞ - oder sup-Norm des \mathbb{R}^n abschätzen lässt durch

$$\|R(h)\| \leq \underbrace{\frac{\max_{z \in W} \|D_z^{i+1} f\|}{(i+1)!}}_{=:c} \|h\|^{i+1}.$$

Sei δ die Kantenlänge des Würfels. Wir unterteilen den Würfel in k^n Würfel der Kantenlänge δ/k . Das Bild eines jeden Teilwürfels, der einen Punkt von C_i enthält, liegt dann in einem Würfel der Kantenlänge $2c(\frac{\delta}{k})^{i+1}$, das Bild von C_i also in der Vereinigung von Würfeln vom Gesamtvolumen

$$\text{Vol} \leq k^n 2c \left(\frac{\delta}{k}\right)^{m(i+1)} = 2c\delta^{m(i+1)} k^{n-m(i+1)}.$$

Falls $i+1 > \frac{n}{m}$ geht das für $k \rightarrow \infty$ gegen 0. □

Bemerkung. Für C^∞ -Funktionen ist der Satz damit bewiesen. Wenn man schwächere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen betrachten will, spielen die Dimensionen der beteiligten Räume nicht nur im vorliegenden Beweis eine Rolle, sondern sie sind substantiell: Whitney hat 1935 eine C^1 -Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert, für die die Menge der kritischen Werte ein nicht triviales Intervall enthält, also keine Nullmenge ist. Wie genau die schwächsten Differenzierbarkeitsforderung in Abhängigkeit von m und n aussieht ist (zu mindest mir) nicht klar. Bei $n \leq m$ reicht C^1 , unser Beweis hier braucht bei Dimensionsgleichheit C^2 . In *Sternberg, Lectures on Differential Geometry* findet man einen Beweis für C^r -Abbildungen mit $r > \max(0, m - n)$.

3.6 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir verallgemeinern den Mannigfaltigkeitsbegriff auf „berandete“ Mannigfaltigkeiten wie etwa die Vollkugel $D^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$. An die Stelle des \mathbb{R}^m als fundamentaler Modellraum tritt hier der *obere Halbraum*

$$H^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}.$$

Wir nennen

$$\partial H^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\} \cong \mathbb{R}^{m-1}$$

den *Rand von H^m* .

Definition 136. Eine Teilmenge $X \subset V$ eines endlichdimensionalen Banachraums heißt eine m -dimensionale *berandete Mannigfaltigkeit* oder *Mannigfaltigkeit mit Rand*, wenn sie lokal diffeomorph zu H^m ist, d.h. wenn es um jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U und einen Diffeomorphismus $u : U \rightarrow H^m$ auf eine offene Teilmenge von H^m gibt. u heißt dann wieder eine *Karte* oder ein *Koordinatensystem* für X .

Die Menge ∂X aller Punkte, die unter einer Karte Punkten von ∂H^m entsprechen, heißt *der Rand von X* .

Abhängig vom Zusammenhang nennt man *berandete Mannigfaltigkeiten* auch einfach *Mannigfaltigkeiten*, und solche mit $\partial X = \emptyset$ dann *unberandete Mannigfaltigkeiten* oder *Mannigfaltigkeiten ohne Rand*. Insbesondere bezeichnet man kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand als *geschlossene Mannigfaltigkeiten*.

Lemma 137. (i) Ein Randpunkt $x \in \partial X$ wird von jeder Karte um x in ∂H^m abgebildet.

(ii) ∂X ist eine $(m-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Weiter ist $X \setminus \partial X$ eine m -dimensionale (unberandete) Mannigfaltigkeit. Die Einschränkung einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ auf ∂X bezeichnen wir mit $\partial f := f|_{\partial X}$.

Beweis. Selbst. □

Bemerkung. Ist $\phi : H^m \supset G \rightarrow W$ eine C^∞ -Abbildung von einer in H^m offenen Umgebung von $y \in \partial H^m$ in einen Banachraum W , so liefert $D_y \phi : \mathbb{R}^m \rightarrow W$ für jede C^∞ -Erweiterung Φ von ϕ auf eine offene Umgebung von y in \mathbb{R}^m dieselbe lineare Abbildung, die wir deshalb auch mit $D_y \phi$ bezeichnen können. Deshalb kann man für innere wie für Randpunkte x von X den Tangentialraum $T_x X$ definieren wie in Definition 113. Er ist also immer ein m -dimensionaler Vektorraum. Das Differential $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ ist auch für Abbildungen zwischen berandeten Mannigfaltigkeiten definiert.

Beispiel 138. Seien M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit 0 als regulärem Wert. Dann ist

$$X := \{x \in M \mid f(x) \geq 0\}$$

eine m -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial X = f^{-1}(\{0\})$. Das folgt aus dem Rangsatz, weil f in geeigneten Koordinaten um einen Punkt x mit $f(x) = 0$ die Form

$$\tilde{u} \circ f \circ u^{-1}(x_1, \dots, x_m) = x_1$$

besitzt. Die Karte \tilde{u} für \mathbb{R} um 0 kann man dabei so wählen, dass $t > 0 \implies \tilde{u}(t) > 0$ (Spiegelung an 0). Dann liefert $u|_X$ eine Karte für X um x . Für Punkte x in der offenen Menge $X \setminus \partial X$ liefert natürlich jede Karte für M um x auch eine solche für X . □

Ebenfalls mit dem Rangsatz beweist man

Satz 139 (Verallgemeinerter Urbildsatz). *Seien X eine m -dimensionale berandete und Y eine n -dimensionale unberandete Mannigfaltigkeit. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung, und sei $y \in Y$ ein regulärer Wert von f und von $f|_{\partial X}$. Dann ist $f^{-1}(\{y\})$ eine $(m - n)$ -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial X \cap f^{-1}(\{y\})$.*

Vergleichen Sie dazu auch *Milnor*, p. 13.

3.7 1-Mannigfaltigkeiten

Ein originäres Problem der Differentialtopologie ist die Klassifikation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, was auch immer das konkret bedeuten mag. Einer der wichtigen Sätze in diesem Bereich gibt eine vollständige Liste der zusammenhängenden geschlossenen Flächen bis auf Diffeomorphie. Für Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 4 ist dieses Problem bewiesenermaßen unlösbar. Hier geben wir bescheiden eine Klassifikation der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Satz 140 (Klassifikation der 1-Mannigfaltigkeiten). *Sei X eine zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist X diffeomorph zu S^1 oder einem der Intervalle $]0, 1[$, $[0, 1[$ oder $[0, 1]$.*

Wir folgen dem in *Milnor* gegebenen Beweis praktisch wörtlich.

Wir nehmen an, dass $V = \mathbb{R}^N$ mit der Euklidischen Norm ist, so dass $\|\cdot\| : V \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Abbildung ist.

Eine Parametrisierung $\phi : \mathbb{R} \supset \tilde{U} \rightarrow X$ heißt *eine Parametrisierung nach der Bogenlänge*, wenn $\|\dot{\phi}(t)\| = \|D_t\phi(1)\| = 1$ für alle $t \in \tilde{U}$. Ist $\psi : J \rightarrow X$ eine beliebige Parametrisierung auf einem Intervall J , also insbesondere $\dot{\psi}(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, und ist $t_0 \in J$, so ist die Bogenlängenfunktion $s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\psi}(\tau)\| d\tau$ eine streng monotone Funktion auf J und für

$$\phi : s(J) \rightarrow X, t \mapsto \psi \circ s^{-1}(\tau)$$

gilt

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\psi}(s^{-1}(t)) \frac{1}{\dot{\psi}(s^{-1}(t))} = 1.$$

Also ist ϕ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die auch von ψ parametrisierte Teilmenge von X , und wir können uns o.E. auf Parametrisierungen nach der Bogenlänge beschränken.

Der Kern des Beweises ist das folgende

Lemma 141. *Sind $\phi : I \rightarrow X$ und $\psi : J \rightarrow X$ zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge auf Intervallen I und J , so hat $\phi(I) \cap \psi(J)$ höchstens zwei Komponenten.*

- *Hat es nur eine Komponente, so läßt sich ϕ fortsetzen zu einer Bogenlängenparametrisierung $\tilde{\phi} : \tilde{I} \rightarrow X$ mit $\tilde{\phi}(\tilde{I}) = \phi(I) \cap \psi(J)$.*
- *Hat es zwei Komponenten, so ist X diffeomorph zu S^1 .*

Beweis des Lemmas. Die Menge

$$I' := \phi^{-1}(\psi(J)) = \phi^{-1}(\phi(I) \cap \psi(J))$$

ist eine offene Teilmenge des Intervalls I und der Definitionsbereich der Funktion $\psi^{-1} \circ \phi : I' \rightarrow J$. Die Ableitung dieser Funktion ist ± 1 . Wir betrachten den Graphen Γ von $\psi^{-1} \circ \phi$ als Teilmenge von $I \times J$. Das ist gerade die Menge aller $(s, t) \in I \times J$ mit $\phi(s) = \psi(t)$, und darum eine abgeschlossene Teilmenge von $I \times J$, bestehend aus Geradensegmenten der Steigung ± 1 . Weil $\psi^{-1} \circ \phi : I' \rightarrow J$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, können diese Segmente nur auf dem Rand von $I \times J$ enden. Und weil $\psi^{-1} \circ \phi$ injektiv ist, kann auf jeder der vier

Seiten von $I \times J$ nur ein Segment enden. Daher hat Γ und mit ihm $\phi(I) \cap \psi(J)$ höchstens zwei Komponenten.

1. Fall: Γ zusammenhängend. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Fortsetzung von $\psi^{-1} \circ \phi$ zu einer affinen Funktion der Steigung ± 1 .

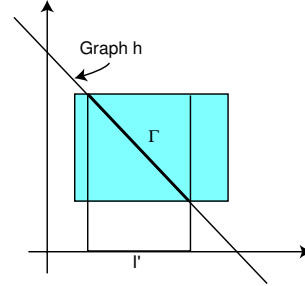
Dann ist

$$I' = \{s \in I \mid \exists t(s, t) \in \Gamma\} = \{t \in I \mid h(t) \in J\} = I \cap h^{-1}(J).$$

Daher ist

$$\tilde{\phi}(t) := \begin{cases} \phi(t) & \text{für } t \in I, \\ \psi \circ h(t) & \text{für } t \in h^{-1}(J). \end{cases}$$

eine auf $I \cup h^{-1}(J)$ wohldefinierte Parametrisierung mit Bildmenge $\phi(I) \cup \psi(J)$.



2. Fall: Γ hat zwei Zusammenhangskomponenten. Dann haben beide Komponenten dieselbe Steigung, und wir nehmen ohne Einschränkung an, dass sie $+1$ ist, vgl. die Abbildung.

Nach eventueller Verschiebung von J ist dann $\gamma = d$ und damit $\delta = d$ und

$$a < b \leq c < d \leq \alpha < \beta.$$

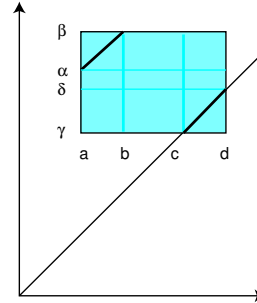
Wir setzen $\theta = \frac{2\pi t}{\alpha - a}$ und

$$h(\cos \theta, \sin \theta) := \begin{cases} \phi(t) & \text{für } a < t < d \\ \psi(t) & \text{für } c < t < \beta \end{cases}$$

Für $a < t_1 < d$ und $c < t_2 < \beta$ gilt $\phi(t_1) = \psi(t_2)$ genau dann, wenn

- $c < t_1 = t_2 < d$, oder
- $a < t_1 < b$ und $t_2 - \alpha = t_1 - a$. Aber dann ist

$$\frac{2\pi t_2}{\alpha - a} = \frac{2\pi((\alpha - a) + t_1)}{\alpha - a} = 2\pi + \frac{2\pi t_1}{\alpha - a}$$



Daher ist h wohldefiniert und injektiv.

Weil ϕ und ψ lokale Diffeomorphismen sind, ist $h(S^1)$ offen in X , und weil S^1 kompakt ist, ist $h(S^1)$ kompakt, also abgeschlossen in X . Daher ist $h(S^1) = X$ und h ein Diffeomorphismus von S^1 auf X . \square

Beweis des Satzes. Jede Parametrisierung von X nach der Bogenlänge lässt sich als eine Parametrisierung nach der Bogenlänge auf ein (nicht unbedingt eindeutiges) maximales Intervall fortsetzen. Wir zeigen nun, dass eine solche maximale Parametrisierung $\phi : J \rightarrow X$ surjektiv auf X ist, wenn X nicht diffeomorph zu S^1 ist. (Im letzteren Fall lässt ϕ einen Punkt von S^1 aus.) Wenn $\phi(J) \neq X$, hat $\phi(J)$ einen Häufungspunkt $x \in X \setminus \phi(J)$. Wir parametrisieren eine Umgebung von x in X nach der Bogenlänge. Anwendung des Lemmas liefert dann eine Fortsetzung von ϕ auf ein größeres Intervall im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes Intervall in \mathbb{R} diffeomorph zu einem der im Satz angegebenen ist. Das ist aber leicht. \square

3.8 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Wir geben nun eine Anwendung der Resultate aus den letzten Abschnitten, indem wir beweisen:

Satz 142 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung der n -dimensionalen Vollkugel $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$ in sich hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein solches g ohne Fixpunkt. Durch

$$g(x) := g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \text{ für } \|x\| > 1$$

setzen wir g stetig auf \mathbb{R}^n fort. Weil D^n kompakt ist, gibt es ein ϵ mit $\|g(x) - x\| \geq \epsilon > 0$ für alle x , und nach dem Approximationssatz 125 gibt es eine C^∞ -Funktion $f : D^n \rightarrow D^n$ mit

$$\|f(x) - x\| \geq \|g(x) - x\| - \|f(x) - g(x)\| \geq \frac{\epsilon}{2}$$

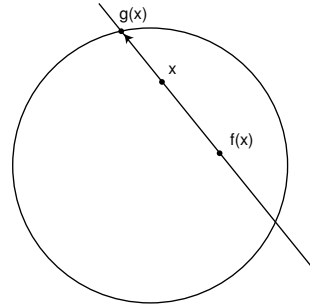
für alle $x \in D^n$. Also hat auch f keinen Fixpunkt.

Für $x \in D^n$ ist dann $\{\lambda f(x) + (1-\lambda)x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade durch x und $f(x)$, und es gibt genau ein $\lambda(x) \geq 0$, so dass

$$h(x) := x + \lambda(x)(x - f(x)) \in S^{n-1}$$

auf der Einheitssphäre liegt. Dann ist h eine C^∞ -Abbildung (Beweis?) mit

$$h|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}. \quad (15)$$



Das widerspricht aber dem folgenden □

Satz 143. *Ist $(X, \partial X)$ eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit, so gibt es keine C^∞ -Abbildung $f : X \rightarrow \partial X$ mit $f|_{\partial X} = \text{id}_{\partial X}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $f : X \rightarrow \partial X$ eine solche Abbildung ist. Nach dem Satz von Sard gibt es dann einen regulären Wert $y \in \partial X$, und weil y natürlich auch regulärer Wert von $\text{id} : \partial X \rightarrow \partial X$ ist, ist nach dem verallgemeinerten Urbildsatz $Y := f^{-1}(\{y\})$ eine kompakte berandete 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X mit

$$\partial Y = f^{-1}(\{y\}) \cap \partial X = \{y\}.$$

Andrerseits ist nach dem Klassifikationssatz die Anzahl der Randpunkte einer kompakten berandeten 1-Mannigfaltigkeit gerade. Widerspruch! □

4 Transversalität

4.1 Transversale Abbildungen

Der Urbildsatz hat eine Verallgemeinerung, die für die Differentialtopologie von zentraler Bedeutung ist: Das Urbild einer Untermannigfaltigkeit ist wieder eine Untermannigfaltigkeit, wenn ...? Ja, wenn was? Dazu müssen wir den Begriff des regulären Wertes einer Abbildung verallgemeinern:

Definition 144 (Transversalität). (i) Zwei Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow Y$, ($i = 1, 2$) heißen *transversal zueinander* (Notation: $f_1 \pitchfork f_2$), wenn für alle $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ gilt:

$$f_1(x_1) = f_2(x_2) \implies d_{x_1}f_1(T_{x_1}X_1) + d_{x_2}f_2(T_{x_2}X_2) = T_{f(x_1)}Y.$$

(ii) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *transversal zur Untermannigfaltigkeit* $Z \subset Y$ (Notation: $f \pitchfork Z$), wenn f und die Inklusion $\iota : Z \hookrightarrow Y$ transversal zueinander sind, d.h. wenn für alle $x \in f^{-1}(Z)$ gilt

$$d_x f(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y. \quad (16)$$

(iii) Zwei Untermannigfaltigkeiten $Z_1, Z_2 \subset Y$ heißen *transversal zueinander* (Notation: $Z_1 \pitchfork Z_2$), wenn ihre Inklusionen transversal zueinander sind, d.h. wenn für jedes $z \in Z_1 \cap Z_2$

$$T_z Z_1 + T_z Z_2 = T_z Y.$$

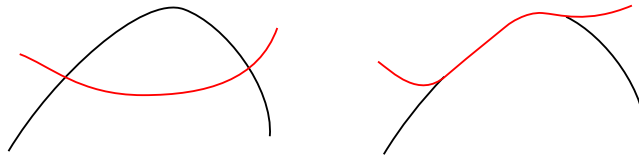
Bemerkungen. 1. Wenn $Z = \{p\}$ nur ein Punkt, also eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, heißt “ f transversal zu Z ” also gerade “ p ist regulärer Wert von f ”.

2. Die Bedingung (16) läßt sich auch so formulieren: Die Komposition von $d_x f$ mit der kanonischen Projektion

$$T_x X \xrightarrow{d_x f} T_{f(x)} Y \xrightarrow{\pi} T_{f(x)} Y / T_{f(x)} Z$$

ist surjektiv. Diese Formulierung hat auch eine lokale Variante: Z läßt sich lokal schreiben als Urbild $g^{-1}(\{0\})$ des regulären Wertes 0 einer Submersion $g : Y \supset V \rightarrow \mathbb{R}^k$, und die Transversalität von f zu Z ist lokal dann äquivalent dazu, dass $g \circ f$ ebenfalls eine Submersion ist.

Im Vergleich mit beliebigen Abbildungen und Untermannigfaltigkeiten repräsentieren die transversalen Objekte relativ “übersichtliche” geometrische Verhältnisse:



Diese Abbildung demonstriert das für den Schnitt 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, aber es ist klar, dass der nicht transversale Durchschnitt höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten beliebig kompliziert werden kann. Deshalb sind wir an Transversalität sehr interessiert.

Lemma 145. Die Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow Y$, ($i = 1, 2$) sind genau dann transversal zueinander, wenn

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y \times Y, \quad (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

transversal zur Diagonale $\Delta := \{(y, y) \mid y \in Y\}$ ist.

Beweis. Die Abbildung $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y \times Y$ ist genau dann transversal zur Diagonalen Δ , wenn für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ mit $f_1(x_1) = f_2(x_2) =: y$ die Komposition

$$T_{(x_1, x_2)}(X_1 \times X_2) \xrightarrow{d_{(x_1, x_2)}(f_1 \times f_2)} T_{(y, y)}(Y \times Y) \rightarrow (T_{(y, y)}(Y \times Y))/T_{(y, y)}\Delta$$

surjektiv ist, d.h. vom Rang $\dim Y$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für ihren Kern

$$N = (d_{(x_1, x_2)}(f_1 \times f_2))^{-1}(T_{(y, y)}\Delta)$$

gilt

$$\dim N = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim Y \quad (17)$$

N ist aber auch der Kern der Abbildung

$$T_{x_1}X_1 \times T_{x_2}X_2 \rightarrow T_y Y, \quad (v_1, v_2) \mapsto d_{x_1}f_1(v_1) - d_{x_2}f_2(v_2), \quad (18)$$

und diese ist genau dann surjektiv, wenn (17) gilt. Schließlich bedeutet die Surjektivität der Abbildung (18), dass

$$d_{x_1}f_1(T_{x_1}X_1) + d_{x_2}f_2(T_{x_2}X_2) = T_y Y.$$

□

Satz 146 (Urbildsatz, allgemeine Version). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung einer berandeten Mannigfaltigkeit X in eine unberandete Mannigfaltigkeit Y und $Z \subset Y$ eine unberandete Untermannigfaltigkeit der Kodimension k . Seien f und $\partial f = f|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$ transversal zu Z . Dann ist $f^{-1}(Z)$ eine berandete Untermannigfaltigkeit von X der Kodimension k mit dem Rand $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$.

Insbesondere ist der Durchschnitt zweier transversaler Untermannigfaltigkeiten wieder eine Untermannigfaltigkeit.

Beweis. Sei $x \in f^{-1}(Z)$ und $z = f(x)$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von z in Y und eine Submersion $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $Z \cap V = g^{-1}(\{0\})$. Sei U eine offene Umgebung von x in X mit $f(U) \subset V$. Wegen der Transversalität ist 0 ein regulärer Wert von $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $\partial(g \circ f) = g \circ \partial f : U \cap \partial X \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nach Satz 139 ist daher $(g \circ f)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(Z)$ ebenfalls eine berandete Untermannigfaltigkeit der Kodimension k . □

Wir wollen nun zeigen, dass

- Transversalität (im kompakten Fall) eine *stabile* Eigenschaft ist: bei kleinen Störungen der Situation bleibt sie erhalten.
- Transversalität eine *generische* Eigenschaft ist: Die “meisten” Abbildungen sind transversal. Eine nicht transversale Abbildung kann man durch beliebig kleine Störungen transversal machen.

Um zu präzisieren, was “kleine Störung” oder “die meisten” bedeuten soll, kann man auf dem Raum der Abbildungen eine Topologie einführen. Das ist möglich und sinnvoll, aber einigermaßen kompliziert, vgl. *Golubitsky/Guillemin*. Wir vermeiden diesen technischen Aufwand durch die Betrachtung differenzierbarer Familien von Abbildungen.

Satz 147. Transversalität ist eine stabile Eigenschaft: Seien X eine kompakte Mannigfaltigkeit, $Z \subset Y$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und $F : \bar{X} \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine C^∞ -Homotopie von $f = F(\cdot, 0)$. Nur X darf nicht-leeren Rand haben. Sind f und ∂f transversal zu Z , so gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $f_s = F(\cdot, s)$ und ∂f_s für alle $s < \epsilon$ transversal zu Z sind.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung U und ein $\epsilon > 0$, so dass $f_s|_U$ und $\partial f_s|_{U \cap \partial X}$ transversal zu Z sind für alle $s < \epsilon$. Das kompakte X kann man dann mit endlich vielen solcher Umgebungen überdecken und das kleinste zugehörige ϵ wählen. Sei also $x \in X$.

Ist $x \notin f^{-1}(Z)$, so gibt es, weil $f^{-1}(Z)$ abgeschlossen ist, eine offenen Umgebung von $(x, 0)$ der Form $U \times [0, \epsilon[$ in $X \times [0, 1]$ deren Bild in $Y \setminus Z$ liegt. Also sind $f_s|_U$ und $\partial f|_{U \cap \partial X}$ für $s < \epsilon$ transversal zu Z .

Ist andererseits $x \in f^{-1}(Z)$, so gibt es wie im Beweis des allgemeinen Urbildsatzes Umgebungen U von x und V von $z = f(x)$ und eine Submersion $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $Z \cap V = g^{-1}(\{0\})$, $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Submersion und $U \cap f^{-1}(Z) = (g \circ f)^{-1}(\{0\})$ ist. Nach eventueller Verkleinerung von U können wir annehmen, dass für ein $\epsilon > 0$ und alle $(\tilde{x}, s) \in U \times [0, \epsilon[$ die Differentiale $d_{\tilde{x}}(g \circ f_s) : T_{\tilde{x}}X \rightarrow \mathbb{R}^k$ bzw. $d_{\tilde{x}}(g \circ f_s) : T_{\tilde{x}}\partial X \rightarrow \mathbb{R}^k$ surjektiv sind.

Ist dann $\tilde{z} := f_s(\tilde{x}) \in g^{-1}(\{0\}) = Z \cap V$, so folgt

$$d_{\tilde{x}}f_s(T_{\tilde{x}}X) + T_{\tilde{z}}Z = T_{\tilde{z}}Y \text{ bzw. } d_{\tilde{x}}f_s(T_{\tilde{x}}\partial X) + T_{\tilde{z}}Z = T_{\tilde{z}}Y.$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass Transversalität eine “generische” Eigenschaft ist: “Die meisten” Abbildungen sind transversal. Das liefern die beiden folgenden Sätze:

Satz 148 (Transversalitätssatz). Sei $F : X \times S \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, wobei nur X nicht-leeren Rand haben darf. Sei $Z \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit. Die Abbildungen F und $\partial F := F|_{(\partial X) \times S}$ seien beide transversal zu Z . Dann sind die Abbildungen $f_s := F(\cdot, s) : X \rightarrow Y$ und $\partial f_s := f_s|_{\partial X} : \partial X \rightarrow Y$ für fast alle s transversal zu Z .

Als Korollar ergibt sich

Satz 149 (Homotopie-Transversalitätssatz). Seien $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung einer (berandeten) Mannigfaltigkeit X in eine (unberandete) Mannigfaltigkeit Y und $Z \subset Y$ eine unberandete Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es eine offene Kugel S in einem endlichdimensionalen Banachraum V und eine C^∞ -Abbildung $F : X \times S \rightarrow Y$ mit $f = F(\cdot, 0)$, so dass die Abbildungen $f_s = F(\cdot, s)$ und $\partial f_s : \partial X \rightarrow Y$ für fast alle $s \in S$ transversal zu Z sind. Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ lässt sich also durch “beliebig kleine homotope Störungen” transversal zu Z machen.

Beweis von Satz 149. Sei $Y \subset W$ für einen endlichdimensionalen Euklidischen Raum W . Nach dem Tubenumgebungssatz 121 gibt es eine offene Umgebung U von Y in W und eine Submersion $r : U \rightarrow Y$ mit $r|_Y = \text{id}$. Konstruieren Sie mit der Zerlegung der Eins eine positive C^∞ -Funktion $\epsilon : Y \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\{w \in W \mid \|w - y\| < \epsilon(y)\} \subset U$ für jedes $y \in Y$.

Sei $S \subset W$ die offene Einheitskugel in W und

$$F : X \times S \rightarrow W, \quad (x, s) \mapsto r(f(x) + \epsilon(x)s).$$

Dann ist $F(\cdot, 0) = f$ und wegen

$$d_{(x,s)}F(0, w) = d_{f(x)+\epsilon(x)s}r(\epsilon(x)w) = \epsilon(x)d_{f(x)+\epsilon(x)s}r(w)$$

sind F und ∂F Submersionen, also transversal zu Z . Aus dem Transversalitätssatz 148 folgt die Behauptung. \square

Beweis von Satz 148. Nach Satz 139 ist $M := F^{-1}(Z)$ eine Untermannigfaltigkeit von $X \times S$ mit Rand $\partial M = \partial(X \times S) \cap M = (\partial X \times S) \cap M$. Wir bezeichnen mit $\pi : X \times S \rightarrow S$ die Projektion auf den zweiten Faktor und zeigen:

- Ist $s \in S$ ein regulärer Wert von $\pi|_M : M \rightarrow S$, so ist $f_s \overline{\cap} Z$, und
- ist $s \in S$ ein regulärer Wert von $\partial\pi : \partial M \rightarrow S$, so ist $\partial f_s \overline{\cap} Z$.

Dann folgt aus dem Satz von Sard die Behauptung.

Es genügt der Beweis für reguläre Werte von π , der “Randfall” geht genauso.

Seien $y = f_s(x) \in Z$ und $\eta \in T_y Y$. Wir müssen zeigen: Es gibt einen Vektor $\xi \in T_x X$, so dass

$$\eta - d_x f_s(\xi) \in T_y Z.$$

Weil $F \overline{\cap} Z$, gibt es $(\xi_0, \sigma_0) \in T_{(x,s)} X \times S$ mit

$$\eta - d_{(x,s)} F(\xi_0, \sigma_0) =: \zeta_0 \in T_y Z.$$

Und weil s ein regulärer Wert von $\pi|_M$ ist, gibt es $(\xi_1, \sigma_1) \in T_{(x,s)} M$ mit

$$d_{(x,s)} \pi(\xi_1, \sigma_1) = \sigma_0$$

Weil π einfach die Projektion auf den 2. Faktor ist, ist $\sigma_1 = \sigma_0$, und weil $F(M) \subset Z$, ist

$$d_{(x,s)} F(\xi_1, \sigma_1) =: \zeta_1 \in T_y Z.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} d_x f_s(\xi_0 - \xi_1) &= d_{(x,s)} F(\xi_0 - \xi_1, 0) = d_{(x,s)} F((\xi_0, \sigma_0) - (\xi_1, \sigma_1)) \\ &= d_{(x,s)} F(\xi_0, \sigma_0) - d_{(x,s)} F(\xi_1, \sigma_1) = \eta - \zeta_0 - \zeta_1. \end{aligned}$$

\square

Bemerkung. Der Kern dieses Beweises ist ein einfaches algebraisches Lemma. Man nennt eine Verkettung von linearen Abbildungen *exakt*, wenn das Bild jeder dieser Abbildungen gleich dem Kern der folgenden ist. Zum Beispiel bedeutet die Exaktheit von

$$V \xrightarrow{f} W \rightarrow 0,$$

dass f surjektiv ist.

Im obigen Beweis hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \\ & & & \nearrow & \\ T_x X & \rightarrow & T_y Y / T_y Z & \rightarrow & 0 \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & T_{(x,s)}(X \times S) & & \\ & \nearrow & \searrow & & \\ T_{(x,s)} F^{-1}(Z) & \rightarrow & T_s S & \rightarrow & 0 \\ & & & \searrow & \\ & & & & 0 \end{array}$$

mit exakten Diagonalen. Zu zeigen ist, dass die obere Zeile exakt ist, falls die untere Zeile exakt ist. Das beweist man durch “diagram chasing”.

Bei der Approximation beliebiger Abbildungen durch homotope transversale Abbildungen ist es oft von Bedeutung, die Abbildungen dort, wo sie bereits “gut”, nämlich transversal sind, nicht zu ändern. Das erfordert eine Verschärfung des Homotopie-Transversalitätssatzes.

Definition 150. Sei $C \subset X$. Dann heißt $f : X \rightarrow Y$ auf C transversal zu $Z \subset Y$, wenn

$$d_x f(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y \quad \text{für alle } x \in C.$$

Satz 151 (Fortsetzungssatz). Seien $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung, Y unberandet und $Z \subset Y$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Sei $C \subset X$ eine abgeschlossene Menge und $f \bar{\cap} Z$ und $\partial f \bar{\cap} Z$ auf C .

Dann gibt es eine zu f homotope Abbildung $g : X \rightarrow Y$, so dass $g \bar{\cap} Z$ und $\partial g \bar{\cap} Z$ auf einer Umgebung von C gilt $g = f$.

Beweis. 1. Schritt. Es gibt eine Umgebung U von C , auf der $f, \partial f \bar{\cap} Z$. Weil $f^{-1}(Z)$ abgeschlossen ist, impliziert $x \in C \setminus f^{-1}(Z)$, dass auch eine Umgebung U_x von x unter f im Komplement von Z landet. Sei andererseits $x \in C$ und $f(x) \in Z$. Wir schreiben Z lokal um $f(x)$ als Nullstellenmenge einer Submersion h . Dann sind $d_x(h \circ f)$ und $d_x(h \circ \partial f)$ surjektiv, und dasselbe gilt dann für alle x' aus einer Umgebung U_x von x . Dann sind aber $f|_{U_x}$ und $\partial f|_{\partial X \cap U_x}$ transversal zu Z . Setze $U := \bigcup U_x$.

2. Schritt Es gibt eine offene Umgebung U_0 von C mit $\overline{U_0} \subset U$ liegt. Wähle dazu zu jedem $x \in C$ eine offene Umgebung, deren abgeschlossene Hülle in U liegt. Endlich viele davon überdecken C und ihre Vereinigung U_0 leistet das Gewünschte.

3. Schritt. Sei (ϕ_j) eine Zerlegung der Eins für die offene Überdeckung $(U, X \setminus \overline{U_0})$ von X . Dann erfüllt die C^∞ -Funktion

$$\phi := \sum_{\text{supp } \phi_j \subset X \setminus \overline{U_0}} \phi_j$$

folgende Bedingungen

$$\phi = 0 \text{ auf der Umgebung } U_0 \text{ von } C \text{ und } \phi|_{X \setminus U} = 1.$$

Wir brauchen weiter

$$\phi(x) = 0 \implies d_x \phi = 0.$$

Dazu können wir ϕ einfach ersetzen durch ϕ^2 .

Sei nun $F : X \times S \rightarrow Y$ wie im Beweis von Satz 149 und $G : X \times S \rightarrow Y$ definiert durch

$$G(x, s) := F(x, \phi(x)s).$$

Dann gilt

$$G(x, s) = F(x, 0) = f(x)$$

falls $\phi(x)s = 0$, insbesondere also für $s = 0$ oder für $x \in U_0$.

Wir zeigen, dass $G, \partial G \bar{\cap} Z$ sind. Wir erinnern daran, dass $d_{(x,s)} F(0, T_s S) = T_{F(x,s)} Y$ war.

- Ist $\phi(x) \neq 0$, so ist deshalb

$$d_{(x,s)} G(0, T_s S) = d_{(x, \phi(x)s)} F(0, \phi(x) T_s S) = T_{G(x,s)} Y.$$

- Ist $\phi(x) = 0$, also $d_x\phi = 0$, so folgt $x \in U$ und

$$d_{(x,s)}G(\xi, 0) = d_{(x,0)}F(\xi, 0) = d_x f(\xi).$$

Aus der Transversalität von f und ∂f auf U folgt die von G und ∂G .

Nach dem Transversalitätssatz 148 gibt es ein s , für das $g := G(., s)$ und ∂g beide transversal zu Z sind. Nach Konstruktion ist g homotop zu f . \square

4.2 Schnitzzahltheorie mod 2

Im folgenden betrachten wir unberandete Mannigfaltigkeiten X, Y, Z mit kompaktem X und abgeschlossenem $Z \subset Y$. Wir setzen voraus, dass

$$\dim X + \dim Z = \dim Y.$$

Ist dann $f : X \rightarrow Y$ transversal zu Z , so ist $f^{-1}(Z)$ eine abgeschlossene 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X , wegen der Kompaktheit von X also eine endliche Punktmenge. Wir definieren die mod-2-Schnitzzahl von f mit Z als

$$I_2(f, Z) := \#f^{-1}(Z) \mod 2.$$

Lemma 152. *Seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ homotop zueinander und transversal zu Z . Dann gilt*

$$I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$$

Beweis. Sei $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 . Beachte, dass $\partial F = F|_{X \times \{0,1\}}$ gerade f_0 bzw. f_1 , also transversal zu Z ist. Daher ist erst recht $F \pitchfork Z$ auf $C = \partial X \times [0, 1]$. Nach dem Fortsetzungssatz 151 können wir deshalb annehmen, dass $F \pitchfork Z$ und $\partial F \pitchfork Z$. Damit ist $F^{-1}(Z)$ eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $X \times [0, 1]$ mit Rand

$$F^{-1}(Z) \cap \{0, 1\} = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Nach der Klassifikation der 1-Mannigfaltigkeiten ist das eine gerade Anzahl von Punkten, und daraus folgt die Behauptung. \square

Definition 153 (mod-2-Schnitzzahl). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung der kompakten Mannigfaltigkeiten X in die Mannigfaltigkeit Y und sei $Z \subset Y$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von Y . Es gelte

$$\dim X + \dim Z = \dim Y.$$

Seien $g : X \rightarrow Y$ homotop zu f und transversal zu Z . Solche Abbildungen gibt es nach dem Homotopie-Transversalitätssatz 149. Dann definieren wir die mod-2-Schnitzzahl von f mit Z als

$$I_2(f, Z) := I_2(g, Z).$$

Nach dem Lemma ist diese Definition unabhängig vom gewählten g .

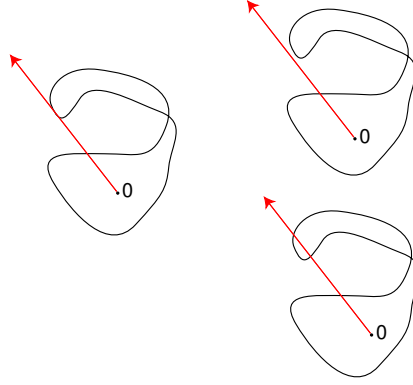
Ebenfalls aus dem obigen Lemma folgt:

Lemma 154. *Homotope Abbildungen haben dieselbe Schnitzzahl.*

Beispiel 155. Seien $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Abbildung, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$Z := \{tv \mid t > 0\}$$

Dann ist Z eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, also $I_2(f, Z)$ definiert. Nach "Störung" von f durch eine Homotopie können wir annehmen, dass $f \pitchfork Z$. Dann ist $I_2(f, Z) = 0$ oder $I_2(f, Z) = 1$, je nachdem, ob f den Strahl Z eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen trifft.



Wir betrachten f als geschlossenen Weg $g(t) := t \mapsto f(e^{it})$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Die im Beweis von Korollar 58 konstruierte Homotopie von g in den Weg $g_1(t) = e^{int}$ mit der Umlaufzahl $n = W(g, 0)$ liefert eine C^∞ -Homotopie von f in $f_1(e^{it}) = e^{int}$. Weil die Schnittzahl eine Homotopieinvariante ist, und f_1 den Strahl Z offenbar genau n -mal transversal schneidet, finden wir

$$I_2(f, Z) = W(g, 0) \mod 2.$$

Das gibt ein einfaches geometrisches Verfahren zur Bestimmung (leider nur der Parität) der Umlaufzahl. Wir werden das später verallgemeinern auf die “vollständige” Umlaufzahl. Und wir werden mit dieser Methode auch eine Umlaufzahl in höheren Dimensionen erklären können.

□

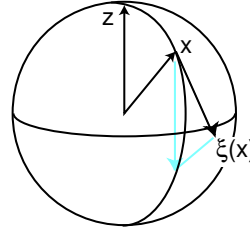
Beispiel 156. Wir wollen auf S^n ein tangentiales Vektorfeld $\xi : S^n \rightarrow TS^n$ angeben und nachrechnen, dass es transversal zum Nullschnitt $Z = \{(x, 0) \mid x \in S^n\} \subset TS^n$ ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass ξ und $\xi_0 : S^n \rightarrow TS^n, x \mapsto (x, 0)$ transversal zueinander sind.

Wir wählen einen festen Vektor $z \in S^n$ und definieren

$$\xi(x) := (x, \langle z, x \rangle x - z).$$

Das Vektorfeld entsteht, indem man den Vektor $-z$ jeweils orthogonal in den Tangentialraum $T_x S^n$ projiziert. Es hat Nullstellen für $x = \pm z$. Also ist $\xi^{-1}(Z) = \{\pm z\}$, und wir müssen prüfen, ob

$$d_{\pm z} \xi(T_{\pm z} S^n) + T_{(\pm z, 0)} Z = T_{(\pm z, 0)}(TS^n).$$



Es gilt

$$d_x \xi(v) = (v, \langle z, v \rangle x + \langle z, x \rangle v).$$

Für $x = \pm z$ erhalten wir wegen $\langle x, v \rangle = 0$

$$d_{\pm z} \xi(v) = (v, \pm v).$$

Ebenso erhalten wir

$$d_{\pm z} \xi(v) = (v, 0).$$

Damit ist

$$\dim(d_{\pm z} \xi(T_{\pm z} S^n) + \dim d_{\pm z} \xi(T_{\pm z} S^n)) = 2n.$$

Also ist ξ transversal zum Nullschnitt, und insbesondere folgt

$$I_2(\xi, Z) = 0.$$

□

Beispiel 157. Wir bezeichnen das Vektorprodukt des \mathbb{R}^3 mit $[\cdot, \cdot]$ und definieren für festes $z \in S^2$ auf S^2 das tangential Vektorfeld

$$\xi(x) := (x, [x, z]).$$

Dieses hat ebenfalls zwei Nullstellen $\pm z$ und ist wegen

$$d_x \xi(v) = (v, [v, z])$$

ebenfalls transversal zum Nullschnitt. Also folgt wieder $I_2(\xi, Z) = 0$. Im Gegensatz zum Vektorfeld aus dem vorigen Beispiel kommutiert dieses mit der Antipodenabbildung $\alpha : S^2 \rightarrow S^2$:

$$d_x \alpha(\xi(x)) = \xi(\alpha(x)).$$

Deshalb induziert ξ ein tangential Vektorfeld $\tilde{\xi}$ auf der reellen projektiven Ebene P^2 welches wegen der lokalen Diffeomorphie von S^2 und P^2 ebenfalls transversal zum Nullschnitt ist und welches genau eine Nullstelle besitzt. Also gilt

$$I_2(\tilde{\xi}, Z) = 1.$$

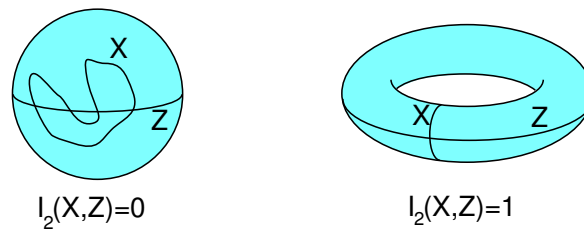
□

Für Untermannigfaltigkeiten $X, Z \subset Y$ komplementärer Dimension, X kompakt und Z abgeschlossen definiert man

$$I_2(X, Z) := I_2(i, Z)$$

wobei $i \hookrightarrow Y$ die Inklusionsabbildung ist: Man deformiert X homotop, so dass es transversal zu Z wird, und zählt dann die (endlich vielen) Schnittpunkte.

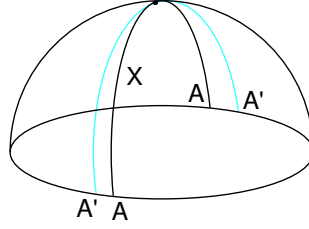
Beispiel 158. Sind $X, Z \subset S^2$ zwei zu S^1 diffeomorphe Untermannigfaltigkeiten in S^2 , so läßt sich $i : X \hookrightarrow S^2$ homotop in einen Punkt in $S^2 \setminus Z$ deformieren und ist dann transversal(!) zu Z . Also ist $I_2(X, Z) = 0$, je zwei "Kreise" in S^2 haben verschwindende mod-2-Schnittzahl. Andererseits haben die in der Abbildung dargestellten Kreise im Torus offenbar Schnittzahl 1. Deshalb ist der Torus nicht diffeomorph zu S^2 .



□

Für eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit X einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit Y ist insbesondere $I_2(X, X)$ definiert und heißt *die mod-2-Selbstschnittzahl* von X .

Beispiel 159. Die Großkreise auf S^n sind doppelte Überlagerungen von Kreisen im projektiven Raum P^n . Letztere haben mod-2-Selbstschnittzahl 1. Folgern Sie daraus, dass diese Kreise nicht nullhomotop sind.



□

Beispiel 160. Wir verwenden die Notationen aus Beispiel 156. Die Abbildung

$$((x, 0), t) \mapsto (x, t(\langle z, x \rangle x - z)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

ist eine Homotopie der Inklusion des Nullschnittes Z von TS^n in eine transversale Position mit 2 transversalen Schnittpunkten. Also ist $I_2(Z, Z) = 0$.

□

Satz 161 (Randsatz). Sei X der Rand einer kompakten Mannigfaltigkeit W , $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung und $Z \subset Y$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit mit

$$\dim X + \dim Z = \dim Y.$$

Läßt sich f zu einer C^∞ -Abbildung $F : W \rightarrow Y$ fortsetzen, so ist

$$I_2(f, Z) = 0.$$

Beweis. Sei $F : W \rightarrow Y$ eine solche Fortsetzung und sei $G : W \rightarrow Y$ homotop zu F mit $G \pitchfork Z$ und $g := \partial G \pitchfork Z$. Dann ist g homotop zu f , also $I_2(f, Z) = I_2(g, Z)$. Nun ist $G^{-1}(Z)$ eine 1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand $g^{-1}(Z)$, der nach dem Klassifikationssatz eine gerade Anzahl von Punkten hat. □

4.3 Abbildungsgrad und Umlaufzahl mod 2

Satz 162 (und Definition: mod-2-Abbildungsgrad). Seien X und Y unberandete Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, X kompakt und Y zusammenhängend. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung.

Dann ist $I_2(f, \{y\})$ unabhängig von $y \in Y$. Wir nennen diese Zahl den mod-2-Abbildungsgrad von f und bezeichnen sie mit

$$\deg_2(f) := I_2(f, \{y\}) \in \{0, 1\}.$$

Ist y ein regulärer Wert von f , so ist also

$$\deg_2(f) = \#f^{-1}(\{y\}) \mod 2.$$

Beweis. Seien $\iota : \{y\} \hookrightarrow Y$ die Inklusion, $\Delta \subset Y \times Y$ die Diagonale und

$$\tilde{f} = f \times \iota : X \times \{y\} \rightarrow Y \times Y.$$

Dann gilt

$$f \overline{\cap} \{y\} \text{ (d.h. } y \text{ regulärer Wert von } f) \iff \tilde{f} \overline{\cap} \Delta,$$

und weil $f(x) = y \iff f \times \iota(x, y) \in \Delta$, ist

$$I_2(f, \{y\}) = I_2(\tilde{f}, \Delta).$$

Ist $y' \in Y$ ein weiterer Punkt, so gibt es, weil Y wegzusammenhängend ist, eine Kurve $c : [0, 1] \rightarrow Y$ von y nach y' . Dann ist aber

$$\tilde{f}_t(x, y) := (f(x), c(t))$$

eine Homotopie von \tilde{f} und

$$I_2(f, \{y\}) = I_2(\tilde{f}_0, \Delta) = I_2(\tilde{f}_1, \Delta) = I_2(f, \{y'\}).$$

□

Offenbar gilt

Satz 163. Der mod-2-Abbildungsgrad $\deg_2(f : X \rightarrow Y)$ ist eine Homotopieinvariante und $\deg_2(f) = 0$, falls $f = \partial F$ für eine C^∞ -Abbildung $F : W \rightarrow Y$ mit kompakter Mannigfaltigkeit W und $X = \partial W$.

Definition 164 (mod-2-Umlaufzahl). Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ -Abbildung der kompakten $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit X und sei $z \in \mathbb{R}^n \setminus f(X)$. Definiere

$$g := \frac{f - z}{\|f - z\|} : X \rightarrow S^{n-1}.$$

Wir nennen

$$W_2(f, z) := \deg_2(g)$$

die mod-2-Umlaufzahl von f um z .

Für $v \in S^{n-1}$ ist

$$v \text{ regulärer Wert von } f \iff g \bar{\cap} \{v\} \iff f \bar{\cap} Z := \{z + tv \mid t > 0\}.$$

In diesem Fall ist

$$g^{-1}(\{v\}) = f^{-1}(Z) = \#\{t > 0 \mid z + tv \in f(X)\}$$

und deshalb

$$W_2(f, z) = \#\{t > 0 \mid z + tv \in f(X)\} \pmod{2}$$

Falls $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit (eine sogenannte Hyperfläche) ist und $i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion bezeichnet, schreiben wir auch

$$W_2(X, z) := W_2(i, z).$$

Lemma 165. Die Umlaufzahl $W_2(f, z)$ ist stetig in z auf $\mathbb{R}^n \setminus f(X)$ und invariant gegenüber Homotopie von f in $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$.

Beweis. Klar. □

Der Zusammenhang mit der “alten” Umlaufzahl für geschlossene Wege ist im Beispiel 155 geklärt worden.

Satz 166 (Separationssatz von Jordan/Brouwer). Sei X eine kompakte unberandete zusammenhängende $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n , eine sogenannte kompakte Hyperfläche. Dann hat das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich eine beschränkte $\{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \mid W_2(X, z) = 1\}$ und eine unbeschränkte $\{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \mid W_2(X, z) = 0\}$. Die Vereinigung jeder dieser Komponenten mit X ist eine Mannigfaltigkeit mit X als Rand.

Die $n = 2$ -Version dieses Satzes im stetigen (nicht im differenzierbaren) Fall ist der sogenannte *Jordansche Kurvensatz*. Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir ein Lemma über das Normalenbündel von Hyperflächen. Wir erinnern daran, dass Wegzusammenhang und Zusammenhang für Mannigfaltigkeiten dasselbe sind.

Lemma 167. Seien $\perp X$ das Normalenbündel einer zusammenhängenden Hyperfläche im \mathbb{R}^n und $J \subset]0, \infty[$ ein Intervall. Wir setzen

$$\perp^J X := \{(x, w) \in \perp X \mid \|w\| \in J\}.$$

Dann hat $(\perp^J X)$ höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten.

Beweis. Weil $0 \notin J$, ist $\perp^J X$ homotopieäquivalent zum sogenannten Einheitsnormalenbündel

$$\perp^1 X := \perp^{\{1\}} X,$$

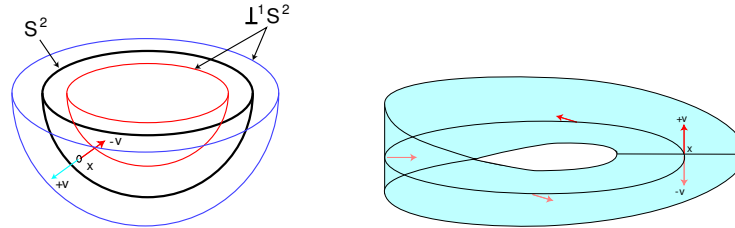
und es genügt der Beweis für diesen Fall.

Die Abbildung $\perp^{[0,\infty]} X \rightarrow \mathbb{R}, (x, w) \mapsto \|w\|$ hat 1 als regulären Wert, und deshalb ist das Einheitsnormalenbündel $\perp^1 X \subset \perp X$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$. Die Abbildung $\pi : \perp^1 X \rightarrow X, (x, w) \mapsto x$ ist eine Überlagerung. (Für den Beweis vgl. den Beweis des Plattenwechslersatzes. Aber weil wir keine Kompaktheit vorausgesetzt haben, muss man etwas anders argumentieren.)

Sind nun $(x_1, w_1), (x, w) \in \perp^1 X$, so wählen wir einen Weg $c : [0, 1] \rightarrow X$ von x nach x_1 und heben diesen mit Anfangswert (x, w) hoch zu einem Weg $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \perp^1 X$. Dann ist $\tilde{c}(1) = (x_1, \pm w_1)$. Daraus folgt, dass man jeden Punkt $(x, w) \in \perp^1 X$ mit einem der beiden Punkte $(x_1, \pm w_1)$ durch einen Weg in $\perp^1 X$ verbinden kann, $\perp^1 X$ hat höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. \square

Beispiele 168. Das Einheitsnormalenbündel von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ kann man sich vorstellen wie zwei weitere konzentrische Sphären, es hat zwei Zusammenhangskomponenten: Einfach zusammenhängende Räume haben nur triviale Überlagerungen. In der folgenden Abbildung ist nur die untere Hälfte dargestellt.

Das Einheitsnormalenbündel vom Moebiusband ist hingegen zusammenhängend. In der Abbildung ist die Hochhebung eines Weges längs der zentralen Linie angedeutet.



\square

Beweis zum Jordan/Brouwer. Die kompakte Untermannigfaltigkeit X hat eine ϵ -Tubenumgebung U , und $U \setminus X$ hat nach dem Lemma höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus X$ trifft die Tubenumgebung U , und weil die Vereinigung zusammenhängender offener Mengen mit nicht leerem Durchschnitt zusammenhängend ist, hat $\mathbb{R}^n \setminus X$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Die Abbildung $z \mapsto W_2(X, z)$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente konstant. Wenn sie also verschiedene Werte annimmt, gibt es genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Sei $Z = x_0 + \mathbb{R}v$, $\|v\| = 1$, eine Gerade transversal zu X . Dann gilt für alle $z_0 = x_0 + t_0v$, die *nicht* in X liegen

$$W_2(X, z_0) = \#\{t > t_0 \mid x_0 + tv \in X\}.$$

Wenn $x_0 \in X$, so ist x_0 wegen der Kompaktheit von X und der Transversalität ein isolierter Punkt von $X \cap Z$. Also gibt es $t_1 > 0$, so dass

$$\{x_0 + tv \mid -t_1 \leq t \leq t_1\} \cap X = \{x_0\}.$$

Dann ist aber

$$W_2(X, x_0 - t_1v) = W_2(X, x_0 + t_1v) + 1$$

und W_2 nicht konstant.

Es bleibt also nur der Existenznachweis für eine Gerade, die

- X trifft und
- X transversal schneidet.

Seien $x_0 \in X$ und $v \in S^{n-1} \cap \perp_{x_0} X$, so dass die Gerade $Z = x_0 + \mathbb{R}v$ also X in x_0 transversal schneidet. Die Abbildung

$$F : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (s, w) \mapsto x_0 + sw$$

hat das Differential

$$d_{(s,w)} F(\tau, \xi) = \tau w + s\xi$$

Der erste Summand spannt $\mathbb{R}w$, der zweite $T_w S^{n-1} = (\mathbb{R}w)^\perp$ auf, weil $s \neq 0$. Die Abbildung F ist also eine Submersion und damit transversal zu X . Nach dem Transversalitätssatz gibt es daher v' beliebig nah bei v , so dass die Gerade $x_0 + \mathbb{R}v'$ die Mannigfaltigkeit X in allen Punkten $\neq x_0$ transversal schneidet. Aber x_0 ist für alle v' ein Schnittpunkt, und für v' nah bei v ist $T_{x_0} X + T_{x_0} Z = T_{x_0} X + \mathbb{R}v' = T_{x_0} \mathbb{R}^n$. Das beweist die Existenz der gesuchten Geraden.

Sei D_1 die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus X$, in der $W_2 = 1$ ist. Weil X kompakt ist, ist $W_2(X, z) = 0$ für hinreichend großes $\|z\|$, also ist D_1 beschränkt.

Die Aussage, dass $D_1 \cup X$ eine berandete Mannigfaltigkeit mit X als Rand ist, folgt schließlich aus dem Tubenumgebungssatz zusammen mit der im folgenden Korollar festgehaltenen Tatsache. \square

Als Konsequenz aus dem Beweis ergibt sich:

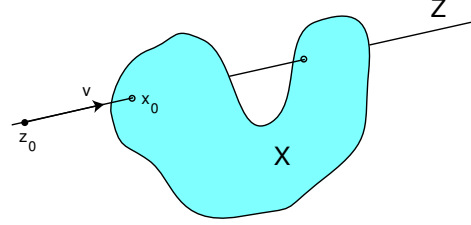
Korollar 169. *Das Einheitsnormalenbündel einer kompakten, zusammenhängenden (unberandeten) Hyperfläche im \mathbb{R}^n hat zwei Zusammenhangskomponenten.*

Satz 170 (Borsuk/Ulam). *Sei $f : S^n \rightarrow S^n$ eine C^∞ -Abbildung mit*

$$f(-x) = -f(x)$$

Dann gilt

$$\deg_2(f) = 1.$$



Beweis. Durch Induktion über n .

$n = 1$. Dieser Fall folgt aus Beispiel 48.

$(n - 1) \rightarrow n$. Sei $S^{n-1} \subset S^n$ der “Äquator” von S^n und S_+ die offene obere Halbsphäre. Nach dem Satz von Sard ist $f(S^{n-1})$ eine Nullmenge, und es gibt einen regulären Wert z von f im Komplement von $f(S^{n-1})$. Wegen der Symmetrie von f ist auch $-z$ ein regulärer Wert, und

$$\deg_2 f = \#f^{-1}(\{z\}) = \frac{1}{2} \#f^{-1}(\{z, -z\}) = \#(f^{-1}(\{z, -z\}) \cap S_+) \pmod{2}.$$

Seien $\{x_1, \dots, x_r\}$ die verschiedenen Urbilder von $\{z, -z\}$ in S_+ , so dass also

$$\deg_2 f = r \pmod{2}. \quad (19)$$

Dann gibt es ein $\epsilon \in]0, 1[$ und disjunkte kompakte Umgebungen B_i der x_i in S_+ , die von f diffeomorph abgebildet werden auf eine der “Kugel”-Umgebungen

$$D_{\pm} = \{z' \in S^n \mid \|z' - (\pm z)\| \leq \epsilon\},$$

Die Menge

$$W := \bar{S}_+ \setminus \bigcup_{i=1}^r \overset{\circ}{B}_i$$

ist eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit, mit

$$\partial W = S^{n-1} \cup \partial B_1 \cup \dots \cup B_r.$$

Wir bezeichnen mit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow (\mathbb{R}z)^\perp$ die Orthogonalprojektion und identifizieren $(\mathbb{R}z)^\perp$ mit \mathbb{R}^n . Dann definieren wir

$$g := \frac{\pi \circ f}{\|\pi \circ f\|} : W \rightarrow S^{n-1}.$$

Für alle i ist $g|_{\partial B_i}$ ein Diffeomorphismus, also $\deg_2(g|_{\partial B_i}) = 1$. Weil für $x \in S^{n-1}$

$$g(-x) = \frac{\pi \circ f(-x)}{\|\pi \circ f(-x)\|} = -g(x),$$

ist nach Induktionsvoraussetzung $\deg_2(g|_{S^{n-1}}) = 1$ und insgesamt

$$\deg_2(g|_{\partial W}) = r + 1 \pmod{2}. \quad (20)$$

Andrerseits ist nach dem Randsatz 161

$$\deg_2(g|_{\partial W}) = 0. \quad (21)$$

Aus (19) bis (21) folgt die Behauptung. \square

Korollar 171. Für jede stetige Abbildung $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es ein $x \in S^n$ mit

$$f(x) = f(-x).$$

Beweis. Annahme: $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(x) \neq f(-x)$ für alle x .

Dann ist $\min \|f(x) - f(-x)\| =: \epsilon > 0$ und es gibt eine C^∞ -Approximation $f_1 : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ von f , so dass

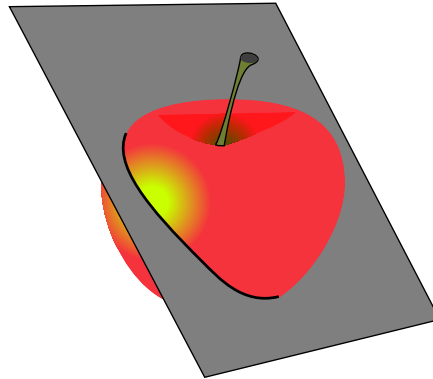
$$\|f_1(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } x \in S^n.$$

Dafür folgt $f_1(x) \neq f_1(-x)$ für alle x . Dann ist aber

$$g(x) := \frac{f_1(x) - f_1(-x)}{\|f_1(x) - f_1(-x)\|}$$

eine wohl-definierte C^∞ -Abbildung von S^n nach $S^{n-1} \subset S^n$ mit $g(-x) = -g(x)$. Als Abbildung nach S^n ist g also nicht surjektiv, und deshalb ist $\deg_2(g) = 0$. Andererseits ist $\deg_2(g) = 1$ nach dem Satz von Borsuk/Ulam. Widerspruch! \square

Korollar 172. *Man kann einen Apfel durch einen ebenen Schnitt so teilen, dass beide Teile dieselbe Menge an Kalorien, Vitaminen und Schadstoffen enthalten.*



Beweis. Wir betrachten den \mathbb{R}^3 als eingebettet in den \mathbb{R}^4 . Seien $k, v, s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Dichteverteilungen der Kalorien, Vitamine bzw. Schadstoffe. Für $x \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$ setzen wir

$$M(x) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle \geq \langle x, e_4 \rangle\} = \{y \mid x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \geq x_4\}.$$

Das ist also ein Halbraum im \mathbb{R}^3 . Wir definieren $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) := \left(\int_{M(x)} k \, d\mu_3, \int_{M(x)} v \, d\mu_3, \int_{M(x)} s \, d\mu_3 \right)$$

und setzen voraus, dass $f \in C^\infty$. Dann gibt es ein x mit $f(x) = f(-x)$, d.h. von allen drei Ingredienzien liegt genauso viel im Halbraum $M(x)$ wie in seinem Komplement. \square

5 Schnitzzahltheorie: Der orientierte Fall

5.1 Orientierte Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt meint “Basis” stets “geordnete Basis”.

Definition 173 (Orientierung von reellen Vektorräumen). Sei $0 < n < \infty$.

- (i) Zwei Basen eines n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraumes heißen *gleichorientiert*, wenn die lineare Transformation, die die eine in die andere überführt, positive Determinante hat, andernfalls heißen sie verschieden orientiert.
- (ii) *Gleichorientiert* ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen eines Vektorraumes, und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Jede Äquivalenzklasse heißt *eine Orientierung* des Vektorraumes.
- (iii) Ein Vektorraum zusammen mit einer Orientierung heißt ein *orientierter Vektorraum*. Basen aus der Orientierung eines orientierten Vektorraumes heißen *positiv orientiert*.
- (iv) Die durch die Standardbasis des \mathbb{R}^n gegebene Orientierung heißt *die Standardorientierung des \mathbb{R}^n* .
- (v) Ein Isomorphismus zwischen orientierten Vektorräumen heißt *orientierungserhaltend* oder *orientierungstreu*, wenn er positiv orientierte Basen in positiv orientierte Basen abbildet.
- (vi) Eine Orientierung für den 0-dimensionalen Vektorraum $\{0\}$ ist eine Zahl in $\{+1, -1\}$.

Eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen war eine Sequenz

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0 \quad (22)$$

von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen, so dass an jeder Stelle U, V, W das Bild der ankommenden Abbildung gleich dem Kern der ausgehenden Abbildung ist. Das bedeutete Injektivität von i , Surjektivität von π und die von π induzierte Isomorphie

$$V/i(U) \xrightarrow{\cong} W.$$

Jede Basis von W ist daher von der Form

$$(\pi(v_1), \dots, \pi(v_{n-m})), \quad (23)$$

mit linear unabhängigen $v_i \in V$, und es gibt dazu eine Basis

$$(u_1, \dots, u_m) \quad (24)$$

von U , so dass

$$(v_1, \dots, v_{n-m}, i(u_1), \dots, i(u_m)) \quad (25)$$

eine Basis von V ist.

Definition 174. Sind U, V, W in einer kurzen exakten Sequenz orientiert, so heißt die Sequenz *kohärent orientiert*, wenn man die Basen in (23), (24) und (25) sämtlich positiv orientiert wählen kann. Beachten Sie die Reihenfolge in (25)!

Lemma 175. Sind zwei der drei (positiv dimensional) Vektorräume in einer kurzen exakten Sequenz orientiert, so gibt es genau eine (induzierte) Orientierung des dritten, so dass die Sequenz kohärent orientiert ist.

Beweis. Leicht. □

Definition 176 (Nullräume). Ist $V = \{0\}$ in der kurzen exakten Sequenz (22), so sind auch U und W der Nullraum. In diesem Fall ist die Sequenz kohärent orientiert, wenn das Produkt der drei Orientierungen $+1$ ist.

Ist nur einer der Räume U oder W der Nullraum und orientiert mit $+1$ bzw. -1 , so ist der Homomorphismus zwischen den beiden anderen ein Isomorphismus und die Sequenz kohärent orientiert, wenn dieser orientierungstreu bzw. -umkehrend ist.

Definition 177. Sind U und V orientierte Vektorräume positiver Dimension, so ist die *Produkt-* oder *Summenorientierung* von $U \times V$ bzw. $U \oplus V$ so definiert, dass die kanonische kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow V \rightarrow U \times V \rightarrow U \rightarrow 0$$

bzw.

$$0 \rightarrow V \rightarrow U \oplus V \rightarrow U \rightarrow 0$$

in dieser Reihenfolge kohärent orientiert ist.

Definition 178 (Orientierung von Mannigfaltigkeiten). Sei X eine n -dimensionale (möglicherweise berandete) Mannigfaltigkeit, $n > 0$.

- (i) Eine *Orientierung* für X ist eine Funktion, die jedem Punkt $x \in X$ eine Orientierung von $T_x M$ zuordnet und in folgenden Sinne stetig vom Punkt abhängt: Um jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine Karte $u : U \rightarrow H^n$, so dass $d_{x'}u : T_{x'}X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardorientierung des \mathbb{R}^n in jedem $x' \in U$ orientierungserhaltend ist. Eine Karte mit dieser Eigenschaft heißt eine *orientierte Karte*.

Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung heißt eine *orientierte Mannigfaltigkeit*.¹²

- (ii) Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn es eine Orientierung für sie gibt, andernfalls heißt sie *nicht orientierbar*.

Eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit X besteht aus isolierten Punkten. Eine *Orientierung* für X ist eine Funktion $O : X \rightarrow \{+1, -1\}$.

Beispiel 179 (Orientierte Hyperflächen). Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Dann hat man für alle $x \in X$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_x X \xrightarrow{i} T_x \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\pi} \perp_x X \rightarrow 0. \quad (26)$$

i ist die Inklusion und π die Orthogonalprojektion. Der Tangentialraum $T_x \mathbb{R}^{n+1}$ ist auf kanonische Weise $\cong \mathbb{R}^{n+1}$ und trägt eine Standardorientierung. In jedem $x \in X$ gibt es genau zwei Einheitsnormalenvektoren, die die zwei Orientierungen des 1-dimensionalen Raumes $\perp_x X$ definieren. Eine stetige Auswahl zwischen diesen, also ein stetiges (und dann automatisch C^∞ -)Einheitsnormalenfeld $x \mapsto \xi(x) : X \rightarrow \perp^1 X$ gibt es genau dann, wenn das Einheitsnormalenbündel von X trivial ist. Ein solches Feld liefert vermöge (26) dann eine Orientierung für X .

Natürlich muss man die stetige Abhängigkeit vom Fußpunkt zeigen, und wir führen das hier einmal beispielhaft vor:

¹²Um jeden inneren Punkt und, falls $n \geq 2$, auch um jeden Randpunkt einer orientierten Mannigfaltigkeit gibt es eine orientierte Karte, nicht aber um jeden Randpunkt einer 1-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit, vergleichen Sie das Bild zu Beispiel 188.

Ist $u = (u_1, \dots, u_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte für X und ist $\phi = u^{-1}$ die zugehörige Parametrisierung, so ist für alle $x \in U$

$$\xi(x), d_{u(x)}\phi(e_1), \dots, d_{u(x)}\phi(e_n)$$

eine Basis des \mathbb{R}^{n+1} , die stetig von x abhängt. Wählt man U zusammenhängend, so ist diese Basis also für alle oder für kein $x \in U$ positiv orientiert. Indem man ggf. u_1 durch $-u_1$ ersetzt, kann man annehmen, dass sie für alle x positiv orientiert ist. Also haben wir wirklich eine stetig vom Punkt abhängige Orientierung für X .

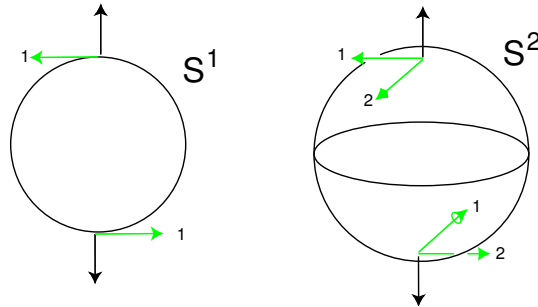
Umgekehrt: Ist X orientiert, also alle $T_x X$ orientiert, so liefert (26) eine Orientierung für $\perp_x X$ und damit eine stetige Auswahl eines Einheitsnormalenfeldes.

□

Satz 180. Eine zusammenhängende Hyperfläche $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$ ist genau dann orientierbar, wenn das Einheitsnormalenbündel von X trivial ist, d.h. zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

Eine kompakte unberandete zusammenhängende Hyperfläche des \mathbb{R}^{n+1} ist orientierbar, vgl. Korollar 169.

Beispiel 181. $x \mapsto (x, x)$ ist ein Einheitsnormalenfeld für die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und dieses definiert eine Orientierung auf S^n , die *Standardorientierung von S^n* .



□

Beispiel 182. Das Möbiusband hat ein zusammenhängendes Einheitsnormalenbündel und ist deshalb nicht orientierbar.

□

Beispiel 183. Eine Orientierung des reellen projektiven Raumes P^n induziert eine Orientierung von S^n , so dass die kanonische Projektion $\pi : S^n \rightarrow P^n$ überall orientierungstreu Differential hat. Die Abbildung $D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$, $x \mapsto -x$ hat das Differential $-\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Sie ist deshalb nur für ungerades n orientierungstreu. Deshalb ist auch die Antipodenabbildung $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ bezüglich der Randorientierung aber natürlich auch bezüglich der entgegengesetzten Orientierung von S^n nur für ungerades n orientierungstreu. Weil andererseits $\pi \circ \alpha = \pi$ ist, gibt es auf P^n höchstens für ungerades n eine Orientierung. Dafür gibt es tatsächlich eine, für die $\pi : S^n \rightarrow P^n$ mit einer vorgegebenen Orientierung von S^n orientierungstreu ist.

Die geraddimensionalen projektiven Räume P^{2m} , insbesondere die projektive Ebene P^2 sind also nicht orientierbar. Aus Satz 180 folgt daher, dass sich diese Mannigfaltigkeiten nicht als Hyperflächen in den Euklidischen \mathbb{R}^{2m+1} einbetten lassen.

□

Beispiel 184. Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, und sei $(x, y) \in TX$. Weil $T_x X$ ein Vektorraum ist, hat man für jedes $(x, y) \in T_x X$ einen kanonischen Isomorphismus $T_x X \cong T_{(x,y)}(TX)$, und weil $T_x X \subset TX$ erhält man einen Monomorphismus

$$i_{(x,y)} : T_x X \rightarrow T_{(x,y)}(TX).$$

Das Bild ist der Tangentialraum an die Faser, und mit der Fußpunktprojektion $\pi : TX \rightarrow X$ erhält man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_x X \xrightarrow{i_{(x,y)}} T_{(x,y)}(TX) \xrightarrow{d_{(x,y)}\pi} T_x X \rightarrow 0.$$

Eine Orientierung für $T_x X$ liefert also eine solche für $T_{(x,y)}(TX)$. Weil aber $T_x X$ in der Sequenz rechts *und* links vorkommt, liefert die entgegengesetzte Orientierung von $T_x X$ dieselbe Orientierung für $T_{(x,y)}(TX)$. Deshalb besitzt TX immer eine ausgezeichnete Orientierung, egal, ob X orientiert, orientierbar oder nicht orientierbar ist.

Vielleicht verstehen Sie das besser, wenn Sie überlegen, wie man $V \times V$ mit einer Orientierung versehen kann.

□

Satz 185. *Eine zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt genau zwei Orientierungen.*

Beweis. Selbst.

□

Definition 186 (Randorientierung). Sei X eine berandete Mannigfaltigkeit. Für $x \in \partial X$ hat man ähnlich wie im Hyperflächenfall eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_x(\partial X) \rightarrow T_x X \rightarrow T_x X / T_x(\partial X) \rightarrow 0. \quad (27)$$

Der Quotientenraum ist eindimensional, und jeder Vektor $v \in T_x X \setminus T_x(\partial X)$ repräsentiert eine Basis darin.

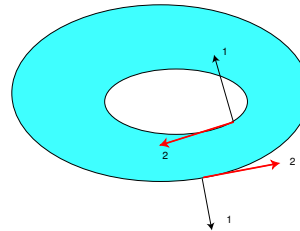
v heißt *nach außen gerichtet*, wenn in einer (und dann in jeder) Karte $u : U \rightarrow H^n$ für X um x

$$-d_x u(v) \in H^n.$$

Andernfalls heißt v *nach innen gerichtet*.

Wir orientieren $T_x X / T_x(\partial X)$ durch die nach außen gerichteten Vektoren. Ist X orientiert, so liefert die exakte Sequenz (27) dann die *Randorientierung* von ∂X .

Eine Basis von $T_x \partial X$ ist also genau dann positiv orientiert, wenn durch Voranstellen eines nach außen weisenden Tangentialvektors in $T_x X$ eine positiv orientierte Basis von $T_x X$ entsteht.



Beispiel 187. Die Standardorientierung von \mathbb{R}^n induziert eine Orientierung auf der abgeschlossenen Vollkugel D^n . Die dadurch induzierte Randorientierung auf S^n ist gerade die in Beispiel 179 gegebene.

□

Beispiel 188. Randorientierung einer zusammenhängenden kompakten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit.



□

Bemerkung. Nach dem Klassifikationssatz sind eindimensionale Mannigfaltigkeiten stets orientierbar und die Summe der Randorientierungen einer kompakten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist 0.

Beispiel 189. Ist X eine orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand und versieht man $X \times [0, 1]$ mit Produktorientierung, so erhält $\partial X \times [0, 1] = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ eine Randorientierung. Bezüglich dieser ist

$$\begin{aligned} X \times \{1\} &\rightarrow \partial X \times [0, 1], x \mapsto (x, 1) && \text{orientierungstreu,} \\ X \times \{0\} &\rightarrow \partial X \times [0, 1], x \mapsto (x, 0) && \text{orientierungsumkehrend.} \end{aligned}$$

□

Definition 190 (Induzierte Orientierung). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung, $Z \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit und höchstens X berandet. Alle drei Mannigfaltigkeiten seien orientiert. Für $y \in Z$ hat man dann eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_y Z \rightarrow T_y Y \rightarrow T_y Y / T_y Z \rightarrow 0.$$

die auf dem Quotientenraum $T_y Y / T_y Z$ eine Orientierung induziert.

Ist $f \pitchfork Z$ und $\partial f \pitchfork Z$, so ist $f^{-1}(Z)$ eine Untermannigfaltigkeit von X , und für $x \in f^{-1}(Z)$ erhalten wir mit $y := f(x)$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_x f^{-1}(Z) \rightarrow T_x X \xrightarrow{\pi \circ d_x f} T_y Y / T_y Z \rightarrow 0$$

Hier sind die beiden rechten Räume orientiert, und wir definieren die *induzierte Orientierung* von $f^{-1}(Z)$ durch die Forderung der Kohärenz.

Entsprechend erhält man eine induzierte Orientierung für $\partial f^{-1}(Z)$.

Bemerkung. Eine Basis (v_{k+1}, \dots, v_m) von $T_x f^{-1}(Z)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn für eine Ergänzung (v_1, \dots, v_m) zu einer positiv orientierten Basis von X gilt:

$$(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_k)) \text{ repräsentiert eine positiv orientierte Basis von } T_{f(x)} Y / T_{f(x)} Z,$$

d.h. $(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_k))$ wird durch Nachstellen einer positiv orientierten Basis von $T_{f(x)} Z$ zu einer positiv orientierten Basis von $T_{f(x)} Y$.

Wir trainieren das an folgendem

Beispiel 191. Unter den Voraussetzungen des Satzes trägt

$$(\partial f)^{-1}(Z) = \partial(f^{-1}(Z))$$

zwei Orientierungen, eine durch $\partial f : \partial X \rightarrow Y$ induzierte und eine als Rand von $f^{-1}(Z)$. Wie hängen diese zusammen?

Sei $x \in \partial f^{-1}(Z)$ und

$$(v_1, \dots, v_m) \text{ eine Basis von } T_x X \quad (28)$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$(v_{k+2}, \dots, v_m) \text{ sei eine Basis von } T_x(\partial f^{-1}(Z)), \quad (29)$$

$$(v_{k+1}, \dots, v_m) \text{ sei eine Basis von } T_x(f^{-1}(Z)) \text{ und } v_{k+1} \text{ weise nach aussen.} \quad (30)$$

Dann ist

$$(\pi \circ d_x f(v_1), \dots, \pi \circ d_x f(v_k)) \text{ eine Basis von } T_{f(x)} Y / T_{f(x)} Z. \quad (31)$$

Wir können die v_i so wählen, dass (31) und (28) positiv orientiert sind. Dann ist (30) eine positiv orientierte Basis von $T_x f^{-1}(Z)$ und damit (29) eine positiv orientierte Basis von $T_x \partial f^{-1}(Z)$ als Rand von $f^{-1}(Z)$.

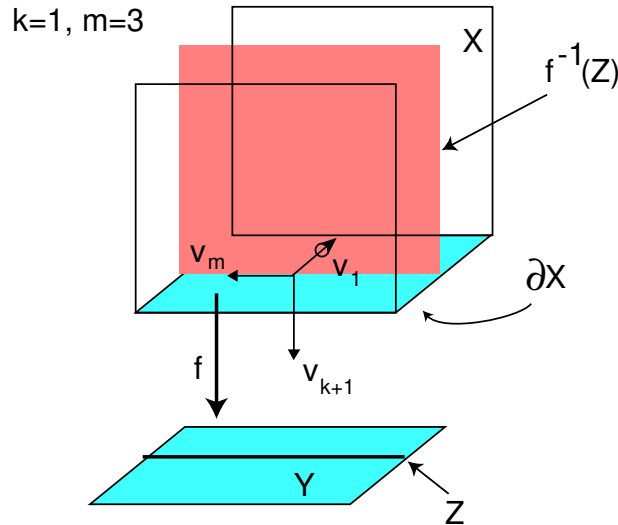
Andrerseits ist auch $(v_{k+1}, v_1, \dots, v_k, (-1)^k v_{k+2}, \dots, v_m)$ eine positiv orientierte Basis von $T_x X$, und daher

$$(v_1, \dots, v_k, (-1)^k v_{k+2}, \dots, v_m) \text{ eine positiv orientierte Basis von } T_x(\partial X).$$

Dann ist aber

$$((-1)^k v_{k+2}, \dots, v_m) \text{ positiv orientiert bezüglich der von } \partial f \text{ induzierten Orientierung.}$$

Also stimmen die beiden Orientierungen für $\partial f^{-1}(Z)$ genau dann überein, wenn die Kodimension von Z in Y , also die von $f^{-1}(Z)$ in X , gerade ist.



□

5.2 Schnitzzahl und Eulercharakteristik

In diesem Abschnitt seien X, Y, Z orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. X sei kompakt und $Z \subset Y$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Es gelte

$$\dim X + \dim Z = \dim Y.$$

Definition 192. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung $f \pitchfork Z$. Dann ist nach der gemachten Dimensionsvoraussetzung $f^{-1}(Z)$ eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X , also eine endliche Punktmenge. Nach den Definitionen 190 und 176 ist die Orientierung in $x \in f^{-1}(Z)$ definiert als $+1$, falls für positiv orientierte Basen (v_1, \dots, v_m) von $T_x X$ und (w_{m+1}, \dots, w_n) von $T_{f(x)} Z$ die Basis

$$(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_m), w_{m+1}, \dots, w_n)$$

von $T_{f(x)} Y$ positiv orientiert ist. Andernfalls ist sie -1 . Wir bezeichnen diese Zahl mit $I(x, f, Z)$. Die *Schnitzzahl von f mit Z* ist dann definiert als

$$I(f, Z) := \sum_{x \in f^{-1}(Z)} I(x, f, Z).$$

Wir wollen diese Definition auf nicht transversale Abbildungen erweitern. Dazu beweisen wir

Lemma 193. Sind $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ homotop und transversal zu Z , so folgt $I(f_0, Z) = I(f_1, Z)$.

Beweis. Nach dem Fortsetzungssatz 151 können wir annehmen, dass es eine Homotopie $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ von f_0 nach f_1 gibt, für die $F \pitchfork Z$. Natürlich ist dann auch $\partial F \pitchfork Z$ und $F^{-1}(Z)$ eine kompakte 1-Mannigfaltigkeit mit Rand

$$F^{-1}(Z) \cap X \times \{0, 1\} = f_0^{-1}(Z) \cup f_1^{-1}(Z)$$

Daher ist, vgl. Beispiel 191,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x \in \partial F^{-1}(Z)} \text{Randorientierung in } x \\ &\stackrel{\text{Beispiel 191}}{=} \sum_{x \in (\partial F)^{-1}(Z)} \text{Induzierte Orientierung in } x \\ &\stackrel{\text{Beispiel 189}}{=} \pm \left(\sum_{x \in f_1^{-1}(Z)} I(x, f_1, Z) - \sum_{x \in f_0^{-1}(Z)} I(x, f_0, Z) \right) \\ &= \pm (I(f_1, Z) - I(f_0, Z)). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen \pm ist dabei egal, es ist aber $(-1)^{\dim Y - \dim Z} = (-1)^{\dim X}$. □

Definition 194. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung. Dann gibt es nach dem Homotopie-Transversalitätssatz eine dazu homotope C^∞ -Abbildung $f_1 : X \rightarrow Y$ mit $f_1 \pitchfork Z$, und wir definieren

$$I(f, Z) := I(f_1, Z).$$

Nach dem Lemma ist das unabhängig von der Wahl von f_1 .

Aus der Transitivität der Homotopie folgt unmittelbar

Satz 195 (Homotopieinvarianz der Schnittzahl). Sind $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ homotop zu einander, so ist $I(f_0, Z) = I(f_1, Z)$.

Wie im mod-2-Fall zeigt man

Satz 196 (Randsatz). Ist W eine kompakte orientierbare berandete Mannigfaltigkeit mit $\dim W = \dim Y + 1$, und $F : W \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung, so gilt

$$I(\partial F, Z) = 0$$

Unser nächstes Ziel ist es, die Unabhängigkeit von $I(f, Z)$ auch von “Homotopien von Z ” zu zeigen. Dazu definieren wir “symmetrisch” $I(f, g)$ für zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Z \rightarrow Y$, so dass $I(f, Z)$ als Spezialfall $g = \iota : Z \hookrightarrow Y$ erscheint.

Definition 197. Seien X, Y, Z orientierte Mannigfaltigkeiten, X und Z kompakt mit

$$\dim X + \dim Z = \dim Y.$$

- (i) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Z \rightarrow Y$ differenzierbar.

Wir versehen $X \times Z$ und $Y \times Y$ mit der Produktorientierung, vgl. Definition 177, und die Diagonale $\Delta \subset Y \times Y$ mit der Orientierung, für die $Y \rightarrow \Delta, y \mapsto (y, y)$ orientierungstreu ist. Schließlich sei $f \times g : X \times Z \rightarrow Y \times Y, (x, z) \mapsto (f(x), g(z))$. Damit definieren wir

$$I(f, g) := (-1)^{\dim Z} I(f \times g, \Delta).$$

- (ii) Seien $X, Z \subset Y$ Untermannigfaltigkeiten von Y . Dann ist die Schnittzahl $I(X, Z)$ definiert als Schnittzahl der entsprechenden Inklusionsabbildungen.

- (iii) Ist $\dim Y = 2 \dim X$, so ist die *Selbstschnittzahl* $I(X, X)$ definiert.

Wir erklären nun den Faktor $(-1)^{\dim Z}$. Sei $f \pitchfork g$ und seien $x \in X, z \in Z$ Punkte mit $f(x) = g(z) =: y$.

Dann ist $f \times g \pitchfork \Delta$, $(f \times g)(x, z) = (y, y)$ und $df(T_x X) \oplus dg(T_z Z) = T_y Y$.

Wir definieren $I(x, z, f, g) = +1$, falls $T_y Y$ die Direkte-Summen-Orientierung trägt, d.h. falls positiv orientierte Basen

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_m) &\text{ eine positiv orientierte Basis von } T_x X, \\ (w_{m+1}, \dots, w_n) &\text{ eine positiv orientierte Basis von } T_z Z. \end{aligned}$$

eine positiv orientierte Basis

$$(df(v_1), \dots, df(v_m), dg(w_{m+1}), \dots, dg(w_n))$$

von $T_y Y$ liefern. Andernfalls setzen wir $I(x, z, f, g) = -1$. Vergleich mit der Definition 192 zeigt $I(x, z, f, g) = I(x, f, Z)$, falls $g : Z \rightarrow Y$ die Inklusion ist.

Lemma 198.

$$I(x, z, f, g) = (-1)^{\dim Z} I((x, z), f \times g, \Delta).$$

Beweis. Seien

$$(v_1, \dots, v_m) \text{ eine positiv orientierte Basis von } T_x X, \\ (w_{m+1}, \dots, w_n) \text{ eine positiv orientierte Basis von } T_z Z.$$

Dann ist wegen der Transversalität

$$(df(v_1), \dots, df(v_m), dg(w_{m+1}), \dots, dg(w_n)) \quad (32)$$

eine Basis von $T_y Y$ und deshalb ist

$$((df(v_1), 0), \dots, (dg(w_n), 0), (0, df(v_1)), \dots, (0, dg(w_n)))$$

eine positiv orientierte(!) Basis von $T_{(y,y)}(Y \times Y) = T_y Y \times T_y Y$. Diese Basis ist aber äquivalent zur Basis

$$((df(v_1), 0), \dots, (dg(w_n), 0), \underbrace{(df(v_1), df(v_1)), \dots, (dg(w_n), dg(w_n))}_{\text{Basis von } T_{(y,y)} \Delta}).$$

Deshalb repräsentiert

$$((df(v_1), 0), \dots, (df(v_m), 0), (dg(w_{m+1}), 0), \dots, (dg(w_n), 0)) \quad (33)$$

genau dann eine positiv orientierte Basis von $T_{(y,y)}(Y \times Y)/T_{(y,y)} \Delta$, wenn

$$((df(v_1), df(v_1)), \dots, (dg(w_n), dg(w_n))) \quad (34)$$

positiv orientiert in $T_{(y,y)} \Delta$ ist, d.h. wenn $(df(v_1), \dots, dg(w_n))$ positiv orientiert in $T_y Y$, d.h. wenn $I(x, z, f, g) = +1$ ist.

Andrerseits ist $I((x, z), f \times g) = +1$ genau dann, wenn die positiv orientierte Basis

$$((v_1, 0), \dots, (v_m, 0), (0, w_{m+1}), \dots, (0, w_n))$$

von $T_{(x,z)}(X \times Z)$ durch das Differential von $f \times g$ abgebildet wird auf die Repräsentanten

$$((df(v_1), 0), \dots, (df(v_m), 0), (0, dg(w_{m+1})), \dots, (0, dg(w_n))). \quad (35)$$

einer positiv orientierten Basis von $T_{(y,y)}(Y \times Y)/T_{(y,y)} \Delta$.

Der Grund für das Vorzeichen $(-1)^{\dim Z} = (-1)^{n-m}$ liegt im Vergleich von (35) mit (33).

Modulo Δ gilt nämlich

$$(0, dg(w_j)) \equiv (0, dg(w_j)) + (-dg(w_j), -dg(w_j)) = (-dg(w_j), 0),$$

und deshalb repräsentiert (35) dieselbe Basis wie

$$((df(v_1), 0), \dots, (df(v_m), 0), (-dg(w_{m+1}), 0), \dots, (-dg(w_n), 0)). \quad (36)$$

Letztere ist gleichorientiert mit (33) genau dann, wenn $\dim Z = n - m$ gerade ist. \square

Das Ziel unserer Verallgemeinerung der Schnittzahl ergibt sich nun direkt aus Satz 195:

Weil Homotopien f_t von f_0 nach f_1 und g_t von g_0 nach g_1 eine Homotopie $f_t \times g_t$ von $f_0 \times g_0$ nach $f_1 \times g_1$ induzieren, erhalten wir

Satz 199 (Homotopieinvarianz). Sind f_0 homotop zu f_1 und g_0 homotop zu g_1 , so gilt

$$I(f_0, g_0) = I(f_1, g_1).$$

Satz 200.

$$I(f, g) = (-1)^{\dim X \dim Z} I(g, f).$$

Definition 201 (Eulercharakteristik). Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit. Die Diagonale

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X.$$

ist eine Untermannigfaltigkeit halber Dimension von $X \times X$.

$X \rightarrow \Delta, x \mapsto (x, x)$ induziert eine Orientierung auf Δ , während $X \times X$ eine kanonische Orientierung trägt. Die *Eulercharakteristik von X* ist definiert als die *Selbstschnittzahl von $\Delta \subset X \times X$* :

$$\chi(X) := I(\Delta, \Delta).$$

Satz 202. Ist X eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit, so ist $\chi(X)$ unabhängig von der gewählten Orientierung.

Beweis. Ein Wechsel der Orientierung von X bewirkt in der obigen Definition einen Wechsel der Orientierung von Δ . Das liefert für $I(\Delta, \Delta)$ einen doppelten Vorzeichenwechsel. \square

Aus Satz 200 ergibt sich

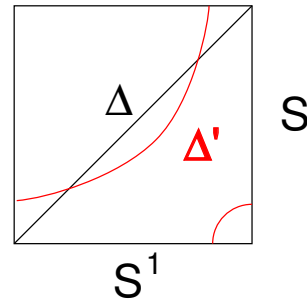
Satz 203. Die Eulercharakteristik ungeraddimensionaler Mannigfaltigkeiten ist 0.

Die Eulercharakteristik ist also nur im geraddimensionalen Fall interessant. Trotzdem betrachten wir ein 1-dimensionales Beispiel, weil dabei die anschauliche Vorstellung noch greift:

Beispiel 204. Die Abbildung zeigt die Diagonale Δ in $S^1 \times S^1$ und in Rot eine homotope

Deformation der Inklusion $\Delta \hookrightarrow S^1 \times S^1$ in eine zu Δ transversale Untermannigfaltigkeit. Die beiden Schnittpunkte haben offenbar entgegengesetztes Orientierungsverhalten, und deshalb ist

$$\chi(S^1) = 0.$$



\square

Bemerkung. Man kann die Eulercharakteristik auch für nicht orientierbares kompaktes X definieren. Ist nämlich $f : \Delta \rightarrow X \times X$ eine zu Δ transversale und zur Inklusion $\iota : \Delta \hookrightarrow X \times X$ homotope Immersion nah bei ι , so ist $f^{-1}(\Delta)$ eine endliche Punktmenge. Für x mit $f(x) \in \Delta$ kann man lokal eine Orientierung von X wählen, die dann eine lokale Orientierung von Δ um $f(x) \approx (x, x)$ induziert und die Definition von $I(x, f, \Delta)$ ermöglicht. Weil die dann aber unabhängig von der lokalen Orientierung ist kann man $I(f, \Delta)$ und damit $\chi(X) = I(\Delta, \Delta)$ definieren.

5.3 Index von Vektorfeldern

Vorbemerkungen. Den Nullschnitt im Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit X kann man betrachten als Untermannigfaltigkeit $N = \{(x, 0) \mid x \in X\}$ von TX oder als Abbildung (Vektorfeld) $\nu : X \rightarrow TX, x \mapsto (x, 0)$. Wir verwenden beide Interpretationen. Das Tangentialbündel TX besitzt eine Standardorientierung unabhängig davon ob oder wie X orientiert ist, vgl. Beispiel 184. Eine Orientierung von X induziert eine solche von N , so dass $\nu : X \rightarrow N$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus wird.

Definition 205 (Index eines Vektorfeldes). Seien X eine orientierte kompakte Mannigfaltigkeit und $\xi : X \rightarrow TX$ ein C^∞ -Vektorfeld. Dann heißt

$$I(\xi, N).$$

der *Index des Vektorfeldes* ξ .

Beachten Sie: Die Familie $\xi_t : x \mapsto (1 - t)\xi(x)$ ist eine Homotopie von ξ in den Nullschnitt $\xi_1 = \nu : x \mapsto 0$. Daher ist $I(\xi, N) = I(N, N)$ und der Index in Wahrheit unabhängig von ξ . Er ist vielmehr eine Invariante von X :

Satz 206 (Indexsatz von Poincaré-Hopf). Für jedes Vektorfeld ξ auf einer kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit X ist

$$I(\xi, N) = \chi(X)$$

Beweis. Der Satz 124 liefert einen Diffeomorphismus

$$\tilde{E} : \tilde{U}_\epsilon \rightarrow X \times X$$

von einer offenen Umgebung \tilde{U}_ϵ des Nullschnittes N in TX auf eine offene Umgebung von Δ in $X \times X$ und von N auf Δ . Dabei bleiben die Orientierungen erhalten, und deshalb ist $I(N, N) = I(\Delta, \Delta)$.

Um zu zeigen, dass \tilde{E} die Orientierung erhält, genügt es zu zeigen, dass $d_{(x,0)}\tilde{E}$ die Orientierung erhält. Ist (v_1, \dots, v_n) positiv orientiert in $T_x X$ und definiert man $c_i : \mathbb{R} \rightarrow TX, t \mapsto (x, tv_i)$, so ist

$$(d\nu(v_1), \dots, d\nu(v_n), \dot{c}_1(0), \dots, \dot{c}_n(0)) = ((v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n))$$

eine positiv orientierte Basis von $T_{(x,0)}TX$, vgl. Beispiel 184.

Weil $\tilde{E}(x, v) = (x, r(x + v))$, vgl. Satz 124, ist

$$d_{(x,0)}\tilde{E}(d\nu(v_i)) = d_{(x,0)}(\tilde{E} \circ \nu)(v_i) = (v_i, v_i)$$

und

$$d_{(x,0)}\tilde{E}(\dot{c}_i(0)) = \frac{d}{dt}(x, r(x + tv_i))|_{t=0} = (0, v_i).$$

Die Basis

$$(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (0, v_1), \dots, (0, v_n)$$

ist aber äquivalent zur Basis

$$(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)$$

von $T_{(x,x)}(X \times X) = T_x X \oplus T_x X$ und daher positiv orientiert. Also erhält $\tilde{E}|_{U_\epsilon}$ die Orientierung von TX . Und weil $(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n)$ positiv orientiert in $T_{(x,x)}\Delta$ ist, bildet \tilde{E} auch den Nullschnitt N orientierungstreu auf Δ ab. \square

Der Indexsatz wird erst interessant, wenn man ihn begreift als Werkzeug zur Berechnung der Eulercharakteristik aus den Nullstellen eines zu N transversalen Vektorfeldes ξ . Für ein solches ist ja

$$I(\xi, N) = \sum_{\xi(x)=0} I(x, \xi, N).$$

Der Index des (transversalen) Vektorfeldes ist also die Summe seiner Indizes in den Nullstellen.

Beispiel 207. Vergleiche Beispiel 184. Wir wählen einen Vektor $z \in S^n$ und betrachten folgende Vektorfelder $S^n \rightarrow TS^n$:

$$\xi : x \mapsto (x, \langle z, x \rangle x - z), \quad \nu : x \mapsto (x, 0).$$

Dann gilt $\xi(x) = \nu(x') \iff x = x' = \pm z$.

Wir finden

$$d_x \xi(v) = (\xi(x), v, \langle z, v \rangle x + \langle z, x \rangle v), \quad d_x \nu(v) = (\nu(x), v, 0).$$

Im folgenden lassen wir der Übersicht wegen die Fußpunkte weg. In $x = \pm z$ ist $\langle z, v \rangle = 0$, also

$$d_{\pm z} \xi(v) = (v, \pm v), \quad d_{\pm z} \nu(v) = (v, 0).$$

Die $d\xi$ - und $d\nu$ -Bilder einer positiv orientierten Basis (v_1, \dots, v_n) von $T_{\pm z} S^n$ liefern

$$(v_1, \pm v_1), \dots, (v_n, \pm v_n), (v_1, 0), \dots, (v_n, 0),$$

also eine Basis des Tangentialraums an TS^n . Diese ist gleichorientiert zu

$$(0, \pm v_1), \dots, (0, \pm v_n), (v_1, 0), \dots, (v_n, 0).$$

Für ungerades n sind die beiden Basen abhängig vom Vorzeichen verschieden orientiert, die Orientierungssumme ist 0. Für gerades n sind die beiden Basen gleichorientiert und auch gleichorientiert mit

$$(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n).$$

Damit sind sie positiv orientiert und die Orientierungssumme ist 2. Wir erhalten

$$I(\xi, \nu) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Korollar 208 (Eulercharakteristik der Sphäre). *Es gilt*

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Korollar 209. *Besitzt die kompakte orientierte Mannigfaltigkeit X ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, so gilt*

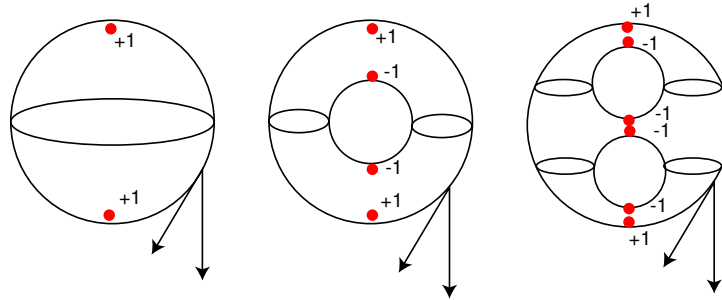
$$\chi(X) = 0.$$

Beispiel 210. Auf $S^1 \subset \mathbb{C}$ ist $x \mapsto (x, ix)$ ein tangentes Vektorfeld ohne Nullstellen. Also ist $\chi(S^1) = 0$. Das wussten wir schon. Auf dem n -dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \subset \mathbb{C}^n$ ist $x \mapsto ix$ ebenfalls ein Vektorfeld ohne Nullstellen und deshalb

$$\chi(T^n) = 0.$$

□

Beispiel 211. Auf einer kompakten Fläche im \mathbb{R}^3 definieren wir ein Vektorfeld durch die tangentielle Orthogonalprojektion des Vektors $-e_3$. Das ist genau das für $z = e_3$ betrachtete Vektorfeld auf der S^2 im Beispiel 207 mit Nullstellenindex $+1$ im Nordpol und Südpol. Vergleich der Abbildung von S^2 und T^2 suggeriert, dass auch auf dem Torus Nord- und Südpol den Index $+1$ liefern, und damit $\chi(T^2) = 0$ wird, ergeben die beiden anderen markierten Nullstellen vermutlich jeweils -1 . Führt man diese Argumentation anschaulich fort, so findet man für die sogenannte Brezelfläche die Eulercharakteristik $\chi = -2$.



□

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Formel für die lokale Berechnung des Nullstellenindex eines transversalen Vektorfeldes. In lokalen Koordinaten ist ein Vektorfeld gegeben durch eine Abbildung

$$Y : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Wir nehmen an, dass $Y(0) = 0$ und Y in 0 regulär ist. Dann ist

$$I(0, Y, N) = +1$$

genau dann, wenn

$$(\mathbf{e}_1, d_0 Y(\mathbf{e}_1)), \dots, (\mathbf{e}_m, d_0 Y(\mathbf{e}_m)), (\mathbf{e}_1, 0), \dots, (\mathbf{e}_m, 0)$$

eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, also gleichorientiert zu

$$(\mathbf{e}_1, 0), \dots, (\mathbf{e}_m, 0), (0, \mathbf{e}_1), \dots, (0, \mathbf{e}_m)$$

ist. Die erste dieser Basen ist gleichorientiert mit

$$(0, d_0 Y(\mathbf{e}_1)), \dots, (0, d_0 Y(\mathbf{e}_m)), (\mathbf{e}_1, 0), \dots, (\mathbf{e}_m, 0),$$

die zweite bis auf einen Faktor $(-1)^m$ gleichorientiert mit

$$(0, \mathbf{e}_1), \dots, (0, \mathbf{e}_m), (\mathbf{e}_1, 0), \dots, (\mathbf{e}_m, 0)$$

Also folgt

Lemma 212.

$$I(0, Y, N) = (-1)^m \operatorname{sign} \det d_0 Y.$$

Beachten Sie: Weil der (globale) Vektorfeldindex nur in geraden Dimensionen interessant ist, ist das Vorzeichen wenig “störend”.

Korollar 213. *Sind X, Y kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten, so gilt*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

Beweis. Sind ξ und η zum Nullschnitt transversale Vektorfelder von X bzw. Y , so ist $\xi \times \eta : X \times Y \rightarrow T(X \times Y) = TX \times TY$ ein Vektorfeld auf $X \times Y$ mit $\xi \times \eta(x, y) = 0 \iff \xi(x) = 0 \wedge \eta(y) = 0$. Sind $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokale Darstellungen von ξ bzw. η um eine Nullstelle, so ist $(U, V) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ eine solche von $\xi \times \eta$ und weil $\det D(U, V) = \det DU \det DV$ ist

$$I((x, y), \xi \times \eta, N_X \times N_Y) = I(x, \xi, N_X)I(y, \eta, N_Y).$$

Daraus folgt die Behauptung durch Summieren. □

5.4 Abbildungsgrad

Definition 214 (Abbildungsgrad). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung der kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X in die orientierte Mannigfaltigkeit Y gleicher Dimension, beide unberandet und Y sei zusammenhängend. Dann ist der Abbildungsgrad von f definiert als

$$\deg(f) := I(f, \{y\})$$

Dabei ist $y \in Y$ beliebig ist und $\{y\}$ mit $+1$ orientiert. Nach Satz 199 ist das unabhängig von der Wahl von y .

Ist $f \bar{\cap} \{y\}$, d.h. ist y ein regulärer Wert von f , so ist also

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(d_x f : T_x X \rightarrow T_y Y).$$

wobei das Signum $+1$ oder -1 ist, je nach dem $d_x f$ die Orientierung erhält oder umkehrt.

Ändert man die Orientierung von X oder Y , so ändert sich das Vorzeichen von $\deg(f)$. Daher ist $\deg(f)$ für Selbstabbildungen $f : X \rightarrow X$ einer orientierbaren Mannigfaltigkeit unabhängig von der Wahl einer Orientierung.

Beispiel 215. Ist $f : X \rightarrow Y$ die Einschränkung einer Abbildung $F : W \rightarrow Y$, wobei W eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial W = X$ ist, so ist nach Satz 196

$$\deg(f) = 0.$$

□

Definition 216 (Umlaufzahl). Ist $f : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^∞ -Abbildung und z ein Punkt im Komplement des Bildes von f , so definiert man die Umlaufzahl von f um z als

$$W(f, z) := \deg \left(\frac{f - z}{\|f - z\|} : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1} \right).$$

Lemma 217. Ist $v \in S^{m-1}$ und Z der von z ausgehende Strahl in Richtung v :

$$Z = \{z + tv \mid t > 0\},$$

mit der von \mathbb{R} induzierten Orientierung, so ist

$$W(f, z) = I(f, Z).$$

Beweis. Selbst.

□

Wie im Beispiel 155 zeigt man, dass die obige Definition im Fall $m = 2$ mit der früher definierten Umlaufzahl übereinstimmt. Das Lemma gibt in diesem Fall ein Verfahren zur Berechnung der Umlaufzahl durch “Vorfahrt Zählen”.

Lemma 218. Abbildungsgrad und Umlaufzahl sind invariant gegenüber Homotopien von f in Y bzw $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$.

Beweis. Klar.

□

Deshalb lassen sich $\deg(f)$ und $W(f, z)$ durch homotope Approximation auch für nur stetiges f definieren.

Wir benutzen nun den Abbildungsgrad zu einer neuen Beschreibung des Nullstellenindex $I(x, \xi, N)$ eines Vektorfeldes. Wie am Schluss des letzten Abschnittes beschränken wir uns zunächst auf den Fall

$$\xi = Y : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $Y(0) = 0$ und regulärem $d_0 Y$, also einer transversalen Nullstelle. Wir bezeichnen mit S_ϵ die $(m-1)$ -Sphäre um 0 vom Radius ϵ .

Lemma 219. *Für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ ist*

$$g_\epsilon : S_\epsilon \rightarrow S_\epsilon, \quad x \mapsto \epsilon \frac{Y(x)}{\|Y(x)\|}$$

definiert und hat Abbildungsgrad

$$\deg(g_\epsilon) = \text{sign det } d_0 Y \underset{\text{Lemma 212}}{=} (-1)^m I(0, Y, N).$$

Beweis. Vorbemerkung. Es gilt

$$d_x g_\epsilon(v) = \frac{\epsilon}{\|Y(x)\|} \left(d_x Y(v) - \langle d_x Y(v), \frac{Y(x)}{\|Y(x)\|} \rangle \frac{Y(x)}{\|Y(x)\|} \right).$$

Bis auf den positiven Vorfaktor ist das also die zu $Y(x)$ oder $g_\epsilon(x)$ orthogonale Komponente von $d_x Y(v)$.

1. Fall: Y linear. Ist (v_2, \dots, v_m) eine positiv orientierte Basis von $T_x S_\epsilon$, so ist also (x, v_2, \dots, v_m) eine positiv orientierte Basis von \mathbb{R}^m . Dann ist $d_x Y(v) = Y(v)$ und

$$(Y(x), Y(v_2), \dots, Y(v_m))$$

eine Basis von \mathbb{R}^m , deren Orientierung das $(\text{sign det } Y)$ -fache der Standardorientierung ist. Nach der Vorbemerkung ist diese Basis aber gleichorientiert mit der Basis

$$(g_\epsilon(x), d_x g_\epsilon(v_2), \dots, d_x g_\epsilon(v_m))$$

Also ist die Orientierung von $(d_x g_\epsilon(v_2), \dots, d_x g_\epsilon(v_m))$ das $(\text{sign det } Y)$ -fache der Standardorientierung von $T_{g_\epsilon(x)} S^{m-1}$ und die Behauptung bewiesen.

2. Fall: Y beliebig. Weil $d_0 Y$ invertierbar ist, gibt es ein $\mu > 0$ mit

$$\|d_0 Y(x)\| \geq \mu \|x\| \quad \text{für alle } x.$$

Sei $\epsilon > 0$, so dass

- $B_\epsilon := \{x \mid \|x\| \leq \epsilon\} \subset U$,
- $Y|_{B_\epsilon}$ invertierbar ist, also g_ϵ definiert ist, und so dass
- $\|Y(x) - d_0 Y(x)\| \leq \frac{\mu}{2} \|x\|$ für alle $x \in B_\epsilon$.

Dann ist für alle $t \in [0, 1]$ und $0 < \|x\| \leq \epsilon$

$$\|(1-t)Y(x) + td_0 Y(x)\| = \|(1-t)(Y(x) - d_0 Y(x)) + d_0 Y(x)\| \geq \frac{\mu}{2} \|x\| > 0.$$

Daher ist

$$H(x, t) := \epsilon \frac{(1-t)Y(x) + td_0Y(x)}{\|(1-t)Y(x) + td_0Y(x)\|}$$

eine Homotopie von g_ϵ nach $\epsilon \frac{d_0Y}{\|d_0Y\|} \Big|_{S_\epsilon}$. Aus dem 1. Fall folgt die Behauptung. \square

In der Nähe einer regulären Nullstelle liefert ein Vektorfeld nach Normierung also eine Selbstabbildung einer kleinen Sphäre um die Nullstelle und das $(-1)^{\dim X}$ -fache von deren Abbildungsgrad ist dann der Nullstellenindex des Vektorfeldes. Ich betone noch einmal, dass diese Überlegungen vor allem im geraddimensionalen Fall interessant sind.

Wir wollen nun zeigen, dass man den globalen Index eines Vektorfeldes auf einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X mit dieser Abbildungsgradformel auch dann ermitteln kann, wenn die Nullstellen degeneriert, aber isoliert sind. Das folgt aus dem

Lemma 220. *Sei $\tilde{Y} : D^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^∞ -Abbildung der Vollkugel mit $0 \notin \tilde{Y}(S^{m-1})$.*

Dann gibt es ein zu \tilde{Y} homotopes $Y : D^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $Y \pitchfork \{0\}$ und $Y = \tilde{Y}$ auf einer Umgebung von S^{m-1} . Dafür gilt

$$\deg \left(\frac{\tilde{Y}}{\|\tilde{Y}\|} \Big|_{S^{m-1}} \right) = \deg \left(\frac{Y}{\|Y\|} \Big|_{S^{m-1}} \right) = \sum_{Y(x)=0} \text{sign det}(d_x Y).$$

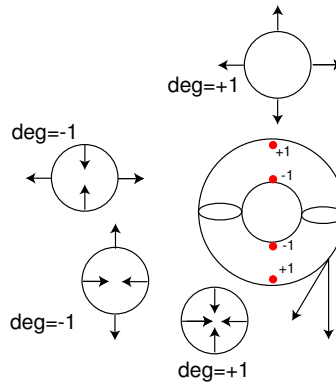
Beweis. Nach dem Fortsetzungssatz 151 gibt es ein Y wie im Lemma behauptet.

Sei $Y^{-1}(\{0\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Wir wählen um jedes x_j eine (kleine) abgeschlossene Kugel D_j , so dass die Kugeln paarweise disjunkt sind. Dann ist $W := D^m \setminus \bigcup \overset{\circ}{D}_j$ eine kompakte berandete Mannigfaltigkeit, und $Y/\|Y\| : \partial W \rightarrow S^{m-1}$ lässt sich auf W fortsetzen. Daher ist nach dem Randsatz

$$\deg(g) = \sum_j \deg \left(\frac{Y}{\|Y\|} \Big|_{\partial D_j} \right).$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Lemma 219. \square

Beispiel 221. Wir betrachten noch einmal den Torus aus Beispiel 211 und skizzieren das Vektorfeld in der Nähe seiner Nullstellen. Der Abbildungsgrad lässt sich direkt ablesen.



\square

Beispiel 222 (Gradientenfelder). Sei X eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Für $x \in X$ ist $d_x f : T_x \rightarrow \mathbb{R}$ linear, und weil

$T_x X$ vom \mathbb{R}^n ein Skalarprodukt erbt, gibt es einen eindeutig bestimmten Tangentialvektor $\text{grad}_x f \in T_x X$ mit

$$\langle \text{grad}_x f, v \rangle = d_x f(v) \quad \text{für alle } v \in T_x X.$$

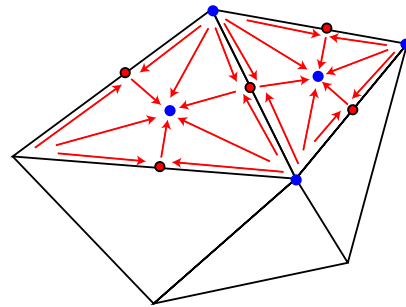
Das definiert ein Vektorfeld $\text{grad } f$ auf X . Die Nullstellen dieses Vektorfeldes sind die Nullstellen von df . Die zweiten Ableitungen von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten sind problematisch, aber mit einer Karte u kann man natürlich die zweite Ableitung von $\tilde{f} = f \circ u^{-1} : \mathbb{R}^n \supset u(U) \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen. Ist $d_x f = 0$, so ist $D_{u(x)}^2 \tilde{f} = \text{Hess}_{u(x)} \tilde{f}$ eine symmetrische Matrix. Setzt man voraus, dass $\det \text{Hess}_{u(x)} \tilde{f} \neq 0$, so ist $\text{grad } f$ an der Stelle x transversal zum Nullschnitt und

$$I(x, \text{grad } f) = (-1)^m \text{sign} \det(\text{Hess}_{u(x)} \tilde{f}).$$

□

Beispiel 223. Wir betrachten eine kompakte Fläche ohne Rand und *triangulieren* diese:

Wir zerlegen sie in (krummlinige) Dreiecke, so dass je zwei abgeschlossene Dreiecke disjunkt sind oder eine ganze Seite gemeinsam haben. Dann benutzen wir diese Triangulierung zur Konstruktion eines Vektorfeldes wie in der Abbildung angedeutet: Das Feld hat Nullstellen in den Ecken, den Kanten “mitten” und Flächen “mitten” der Triangulierung. Dabei haben die Kantenmitten Index -1 , die anderen Nullstellen Index $+1$.



Dann folgt

$$\chi(X) = \# \text{Ecken} - \# \text{Kanten} + \# \text{Flächen}.$$

Das ist die sogenannte *Eulersche Polyederformel*. Man kann diese Formel – und eine höherdimensionale Verallgemeinerung – zur Definition der Eulercharakteristik auch für nicht glatte Räume benutzen, die eine sinnvolle “Triangulierung” zulassen.

□

5.5 Der Gradsatz von Hopf

Satz 224. Ist $f : S^n \rightarrow S^n$ eine C^∞ -Abbildung mit $\deg(f) = 0$, so ist f homotop zu einer konstanten Abbildung.

Beweis. Durch Induktion über n .

$n = 1$. Bereits erledigt, vgl. Beispiel 63.

$(n - 1) \rightarrow n$. Sei $y \in S^n$, so dass y und $-y$ reguläre Werte von f sind. (Warum gibt es das?) Dann sind $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$ mit paarweise verschiedenen x_i und $f^{-1}(\{-y\})$ endliche Punktmengen. Dafür gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Es gibt einen } C^\infty\text{-Diffeomorphismus } g : D^n \rightarrow g(D^n) \subset S^n \setminus f^{-1}(\{-y\}), \\ &\text{so dass die } x_i \text{ im Inneren des Bildes von } g \text{ liegen.} \end{aligned} \quad (37)$$

Wir beweisen das später und betrachten die Abbildung

$$Y := \sigma \circ f \circ g : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wo $\sigma : S^n \setminus \{-y\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion vom Punkt $-y$ aus ist. Dann ist $0 \notin Y(S^{n-1})$ und

$$\deg\left(\frac{Y}{\|Y\|} \Big|_{S^{n-1}}\right) = \sum_{i=1}^k \text{sign} \det(d_{x_i} Y).$$

Bis auf das Vorzeichen, das vom Orientierungsverhalten der stereographischen Projektion abhängt, ist die rechte Seite aber der Abbildungsgrad $\deg(f)$ und damit $= 0$.

Daher ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\frac{Y}{\|Y\|} \Big|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

homotop zu einer konstanten Abbildung.

Wir schieben ein Lemma ein:

Lemma 225. Sei $Y : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ -Abbildung mit $0 \notin Y(S^{n-1})$, für die $\frac{Y}{\|Y\|} \Big|_{S^{n-1}}$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Dann gibt es eine C^∞ -Abbildung $\tilde{Y} : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

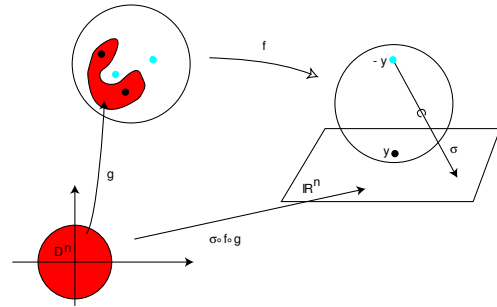
$$0 \notin \tilde{Y}(D^n), \quad \tilde{Y} = Y \text{ auf einer Umgebung von } S^{n-1}.$$

Beweis des Lemmas. Sei $H : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$ eine solche Homotopie und $H_1 = y'$.

Sei weiter $\epsilon \in]0, 1[$, so dass

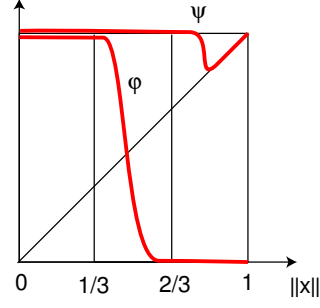
$$\|Y(x)\| > 0 \text{ für } \|x\| \geq \epsilon.$$

Wir wählen zwei C^∞ -Funktion $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit



folgenden Eigenschaften:

- $\phi = 0$ auf einer Umgebung von S^{n-1} ,
- $\phi = 1$ auf einer Umgebung von $\{x \mid \|x\| \leq \frac{1}{3}\}$,
- $\psi(x) = \|x\|$ auf einer Umgebung von S^{n-1} ,
- $\psi = 1$ auf einer Umgebung von $\{x \mid \|x\| \leq \frac{2}{3}\}$,
- $|\psi| \geq \epsilon$.



Damit definieren wir eine Abbildung $\tilde{Y} : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{Y}(x) := \begin{cases} Y\left(\frac{\psi(x)}{\|x\|}x\right) & \text{für } \|x\| \geq \frac{2}{3}, \\ H_{\phi(x)}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \left((1 - \phi(x))\|Y\left(\frac{\psi(x)}{\|x\|}x\right)\| + \phi(x) \right) & \text{für } \frac{1}{3} \leq \|x\| \leq \frac{2}{3}, \\ y' & \text{für } \|x\| \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

- Für $\|x\| \approx 1$ ist $\tilde{Y}(x) = Y(x)$.
- Für $\|x\| \approx \frac{2}{3}$ ist $\tilde{Y}(x) = Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = H_{\phi(x)}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|Y\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\|$.
- Für $\|x\| \approx \frac{1}{3}$ ist $\tilde{Y}(x) = H_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = y'$.

Daher ist \tilde{Y} eine C^∞ -Abbildung. Weil $\left\|\frac{\psi(x)}{\|x\|}x\right\| = \psi(x) \geq \epsilon$ und H_t in die Sphäre abbildet, ist

$$\tilde{Y}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D^n. \quad (38)$$

□

Beweis von Satz 224: Schluss. Mit \tilde{Y} wie im Lemma ist $Y_t(x) := (1 - t)Y(x) + t\tilde{Y}(x)$ eine Homotopie von Y nach \tilde{Y} , die eine Umgebung von S^{n-1} fest läßt. Daher induziert sie eine Homotopie f_t von $f = f_0$ in eine Abbildung $f_1 : S^n \rightarrow S^n$, für die wegen (38)

$$y \notin f_1(S^n).$$

Dann läßt sich f_1 aber entlang der Großkreise durch $-y$ in eine konstante Abbildung mit Wert $-y$ homotopieren. □

Im vorstehenden Beweis ist noch die Aussage (37) offen. Sie ergibt sich aus dem folgenden Satz von allgemeinerer Bedeutung.

Definition 226 (Isotopie). Eine *Isotopie* auf einer Mannigfaltigkeit Y ist eine Homotopie $(h_t : Y \rightarrow Y)_{0 \leq t \leq 1}$, bei der jedes h_t ein Diffeomorphismus ist. Eine Isotopie hat *kompakten Träger*, wenn $h_t(y) = y$ für alle $t \in [0, 1]$ und für alle y außerhalb eines Kompaktums.

Satz 227 (Isotopielemma). Sei Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und seien $y, z \in Y$. Dann gibt es eine Isotopie (h_t) von Y mit kompaktem Träger und

$$h_0 = \text{id}_Y, \quad h_1(y) = z.$$

Beweis. Wir nennen zwei Punkte y, z für die der Satz gilt *isotop*. Das ist offenbar eine Äquivalenzrelation, und wir zeigen, dass die Äquivalenzklassen offen sind. Aus dem Zusammenhang von Y folgt dann, dass es nur eine Äquivalenzklasse, nämlich Y , gibt.

Es genügt, folgendes zu zeigen: Für $Y = \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Umgebung U von $y = 0$ und zu jedem $z \in U$ eine Isotopie h_t des \mathbb{R}^n , so dass

$$h_0 = \text{id}, \quad h_t(x) = x \text{ für } \|x\| \geq \epsilon \quad \text{und} \quad h_1(0) = z. \quad (39)$$

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$. Sei $\epsilon > 0$ und $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion mit Träger in $] -\epsilon, +\epsilon[$ und $\rho(0) = 1$. Wir definieren

$$h_t(x) := x + t\rho(x)z.$$

Dann ist $h'_t(x) = 1 + t\rho'(x)z$, und weil $\rho'(x) = 0$ für $|x| > \epsilon$, ist ρ' beschränkt. Also ist für hinreichend kleines $|z| > 0$ die Ableitung $h'_t > 0$ und h daher ein Diffeomorphismus. Die Eigenschaften (39) sind klar.

Im Fall $n > 1$ wählen wir Koordinaten so, dass $z = (z_1, 0, \dots, 0)$ ist, und betrachten

$$h_t(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 + t\rho(x_1)\rho(\sqrt{x_2^2 + \dots + x_n^2})z_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Wenn $\|z\| = |z_1|$ hinreichend klein ist, ist die Funktionalmatrix davon für alle (t, x) invertierbar. Weiter ist jedes h_t bijektiv und es gilt (39) mit $\sqrt{2}\epsilon$ statt ϵ . \square

Korollar 228. *Sei Y eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension > 1 (so dass das Komplement eines Punktes wieder zusammenhängend ist). Seien (y_1, \dots, y_k) und (z_1, \dots, z_k) zwei k -tupel disjunkter Punkte in Y . Dann gibt es eine Isotopie (h_t) von $h_0 = \text{id}_Y$ mit kompaktem Träger und $h_1(y_j) = z_j$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$.*

Beweis. Induktion über k . Der Fall $k = 1$ ist mit dem Satz erledigt.

$(k-1) \rightarrow k$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung an auf die Mannigfaltigkeit $Y \setminus \{y_k, z_k\}$ und finden eine Isotopie h'_t der Identität mit kompaktem Träger und $h'_1(y_i) = z_i$ für $1 \leq i \leq k-1$. Weil $h_t(x) = x$ für x nah bei y_k oder z_k , kann man h'_t als Identität in diese Punkte und damit zu einer Isotopie von ganz Y fortsetzen.

Ebenso findet man eine Isotopie h''_t von id_Y mit $h''_t(y_i) = y_i, h''_t(z_i) = z_i$ für alle $i \leq k-1$ und $t \in [0, 1]$ und mit $h''_1(y_k) = z_k$.

Dann leistet $h_t = h''_t \circ h'_t$ das Gewünschte. \square

Beweis von (37). Wähle einen Diffeomorphismus $\tilde{g} : D^n \rightarrow \tilde{g}(D^n) \subset S^n \setminus f^{-1}(\{y, -y\})$. Wähle k verschiedene Punkte z_1, \dots, z_k im Innern von $\tilde{g}(D^n)$. Dann gibt es nach dem Korollar einen Diffeomorphismus von $h : S^n \setminus f^{-1}(\{-y\})$ mit kompaktem Träger und $h(x_j) = z_j$. Dann liegt $h^{-1} \circ \tilde{g}(D^n)$ im Komplement von $f^{-1}(\{-y\})$ und enthält die x_j im Inneren. \square

Der Randsatz besagt: Ist W eine kompakte berandete zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$, Y eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $F : W \rightarrow Y$ eine C^∞ -Abbildung, so ist $\deg(F|_{\partial W}) = 0$. Wir zeigen nun für $Y = S^n$ die Umkehrung:

Satz 229 (Fortsetzungssatz). *Sei W eine kompakte berandete zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$ mit $\partial W =: X$ und $f : X \rightarrow S^n$ eine C^∞ -Abbildung mit $\deg(f) = 0$. Dann läßt sich f zu einer C^∞ -Abbildung $F : W \rightarrow S^n$ fortsetzen.*

Beweis. 1. Schritt. die Abbildung $f : X \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt eine C^∞ -Fortsetzung

$$F_0 : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

Das zeigt man mit einer Zerlegung der Eins, vgl. Beispiel 35. Nach Satz 151 können wir überdies annehmen, dass 0 ein regulärer Wert von F_0 ist. Beachten Sie, dass $0 \notin f(X)$.

2. Schritt. Aus dem Korollar zum Isotopielemma folgt die Existenz eines Diffeomorphismus $g : D^{n+1} \rightarrow W \setminus X$, so dass die endlich vielen Punkte von $F_0^{-1}(\{0\})$ im Inneren von $g(D^{n+1})$ liegen. Dann ist $W' := W \setminus g(D^{n+1})$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $g(S^n) \cup X$, die von F_0 in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ abgebildet wird.

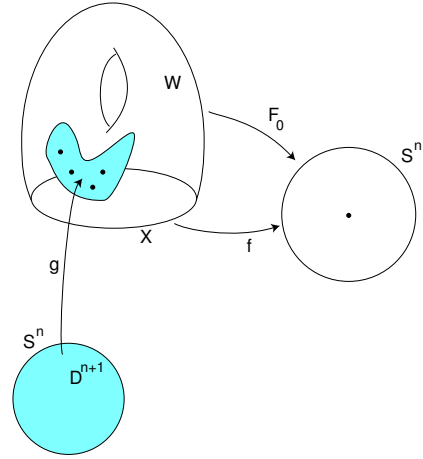
Nach dem Randsatz ist $W(F_0|_{\partial W'}, 0) = 0$, und weil nach Voraussetzung $\deg f = 0$, folgt

$$\deg\left(\frac{F_0 \circ g}{\|F_0 \circ g\|} \Big|_{S^n}\right) = 0.$$

Daher ist $\frac{F_0 \circ g}{\|F_0 \circ g\|} \Big|_{S^n}$ nach Satz 224 homotop zu einer konstanten Abbildung, und nach Lemma 225 gibt es eine C^∞ -Abbildung $G : D^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, die auf einer Umgebung von S^n mit $F_0 \circ g$ übereinstimmt. Dann definiert aber

$$F(x) := \begin{cases} \frac{G \circ g^{-1}(x)}{\|G \circ g^{-1}(x)\|} & \text{für } x \in g(D^{n+1}), \\ \frac{F_0(x)}{\|F_0(x)\|} & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Fortsetzung von f mit Werten in S^n .



□

Satz 230 (Gradsatz von Hopf). Sei X eine kompakte, zusammenhängende orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann sind $f_0, f_1 : X \rightarrow S^n$ genau dann homotop zueinander, wenn $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Beweis. Sei $W := X \times [0, 1]$ und $X_i := X \times \{i\}$. Dann ist $\partial W = X_0 \cup X_1$ und die Randorientierungen auf den X_i liefern entgegengesetzte Orientierungen von X . Daher hat die Abbildung $f : \partial W \rightarrow S^n$ mit $f((x, i)) := f_i(x)$ den Abbildungsgrad 0. Sie gestattet deshalb eine C^∞ -Fortsetzung $F : W \rightarrow S^n$. Das ist dann aber eine Homotopie von f_0 nach f_1 . □

Besitzt eine geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit X ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, so ist $\chi(X) = 0$ nach dem Satz ?? von Poincaré-Hopf. Wir zeigen nun die Umkehrung:

Satz 231. Jede geschlossene orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Eulercharakteristik 0 besitzt ein nirgends verschwindendes Vektorfeld.

Beweis. Seien X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit wie im Satz und $g : D^n \rightarrow g(D^n) \subset X$ ein Diffeomorphismus. Nach der Schnitttheorie gibt es ein Vektorfeld ξ auf X mit nur endlich vielen Nullstellen. Nach dem Isotopielemma können wir annehmen, dass sie alle im Inneren von $g(D^n)$ liegen. Nach dem Indexsatz von Poincaré-Hopf ist

$$0 = \chi(X) = \deg\left(\frac{dg^{-1} \circ \xi}{\|dg^{-1} \circ \xi\|} \circ g \Big|_{S^{n-1}}\right).$$

Also hat

$$dg^{-1} \circ \xi \circ g|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

die Umlaufzahl 0 und besitzt daher eine C^∞ -Fortsetzung $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, die auf einer Umgebung von S^{n-1} mit $dg^{-1} \circ \xi \circ g$ übereinstimmt. Definiert man $\tilde{\xi}$ auf $g(D^n)$ durch

$$\tilde{x}i(g(z)) := d_z g(F(z)),$$

so ergibt sich für $z \in S^{n-1}$

$$\tilde{\xi}(g(z)) = d_z g(dg^{-1} \circ \xi \circ g(z)) = \xi(g(z)).$$

Setzt man also $\tilde{\xi}(x) = \xi(x)$ für $x \notin g(D^n)$, so erhält man ein Vektorfeld ohne Nullstellen auf X . \square

6 De Rham-Kohomologie

6.1 Der De Rham-Komplex einer Mannigfaltigkeit

Wir bezeichnen den Raum der Differentialformen vom Grad k auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega^k(U)$ und setzen

$$\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k(U).$$

Das \wedge -Produkt liefert auf $\Omega^*(U)$ die Struktur einer sogenannten graduierten assoziativen Algebra, mit

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega \quad \text{für } \omega \in \Omega^k(U), \theta \in \Omega^l(U),$$

und die Cartansche Ableitung liefert einen Differentialoperator

$$d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

mit

$$d^2 = 0,$$

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (d\theta) \quad \text{für } \omega \in \Omega^k(U).$$

Man schreibt auch

$$0 \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \xrightarrow{d} 0. \quad (40)$$

Eine solche Sequenz mit $d^2 = 0$ heißt *Differentialkomplex* oder *Kokettenkomplex* (beim *Kettenkomplex* erniedrigt d den Grad). (40) heißt der *De Rham-Komplex*.

Ist $f : V \rightarrow U$ eine C^∞ -Abbildung, so definiert

$$f^* \omega_x(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_k))$$

einen Homomorphismus gradierter Algebren

$$f^* : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(V),$$

der mit d vertauscht.

Definition 232 (Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten). Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Differentialform ω vom Grad k auf X ist eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine alternierende k -Form $\omega_x \in \Lambda^k(T_x X)^*$ zuordnet, so dass für differenzierbare Vektorfelder ξ_1, \dots, ξ_k die Abbildung

$$x \mapsto \omega_x(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x))$$

differenzierbar ist. $\Omega^k(M)$ und $\Omega^*(M)$ werden definiert wie für offenen Mengen des \mathbb{R}^n , und auch das \wedge -Produkt und die Zurückholung f^* werden einfach punktweise definiert und behalten dieselben Rechenregeln wie im \mathbb{R}^n .

Cartansche Ableitung. Nur die Cartansche Ableitung kann man nicht wie im \mathbb{R}^n definieren, weil die Formel

$$d\omega(v_1, \dots, v_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{k+1})$$

die Existenz *konstanter* Vektorfelder v_i voraussetzt, aber das macht auf einer Mannigfaltigkeit im allgemeinen keinen Sinn.

Aber es gibt auch auf Mannigfaltigkeiten einen Satz linearer Abbildungen

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

mit den gewohnten Eigenschaften. Sie sind charakterisiert durch eine der folgenden Gleichungen:

(i) Für alle f gilt

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

(ii) Für alle Koordinatenvektorfelder gilt

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right) := \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right).$$

(iii) Für alle Vektorfelder gilt

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) &:= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \xi_j \cdot \omega(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_{k+1}). \end{aligned}$$

Definition 233 (De Rham-Kohomologie). Sei X eine Mannigfaltigkeit. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiere die k -te De Rham'sche Kohomologiegruppe als den Quotienten der geschlossenen durch die exakten k -Formen:

$$H^k(X) := \{\omega \in \Omega^k(X) \mid d\omega = 0\} / \{d\theta \mid \theta \in \Omega^{k-1}(X)\}.$$

Beispiele 234. Weil eine geschlossene Nullform eine lokal konstante Funktion ist, ist

$$H^0(X) \cong \mathbb{R}^{\text{Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } X}.$$

Beachten Sie: $H^k(U) = 0$ bedeutet, dass jede geschlossene k -Form auf U ein Potential besitzt, also exakt ist. Aus der Analysis ist für offenes $U \subset \mathbb{R}^n$ bekannt:

(i) Für $n \geq 1$ ist

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \neq 0.$$

Zum Beispiel definiert

$$\omega_x(v_1, \dots, v_{n-1}) := \frac{1}{\|x\|^n} \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$$

eine geschlossene Form in $\Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Wäre $\omega = d\theta$, so nach dem Integralsatz von Stokes

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} d\theta = \int_{\partial S^{n-1}} \theta = 0.$$

Aber $\int_{S^{n-1}} \omega$ liefert das Volumen der $(n-1)$ -Sphäre und ist also $\neq 0$.

(ii) Für $n \geq 1$ und zum \mathbb{R}^n diffeomorphes U ist nach dem Poincaré-Lemma

$$H^k(U) = 0 \text{ für alle } k > 0.$$

□

Differentialkomplexe, Kettenabbildungen und Kohomologie. Ein Differentialkomplex oder Kokettenkomplex C ist eine Sequenz (oder auch eine direkte Summe $\bigoplus_{\mathbb{Z}} C^k$) von Vektorräumen und Homomorphismen

$$\dots \xrightarrow{d} C^{k-1} \xrightarrow{d} C^k \xrightarrow{d} C^{k+1} \xrightarrow{d} \dots$$

mit $d^2 = 0$.

Die *Kohomologie von C* ist

$$H(C) = H^*(C) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(C)$$

mit

$$H^k(C) := (\text{Kern } d \cap C^k) / (\text{Bild } d \cap C^k).$$

Eine Kettenabbildung zwischen zwei Differentialkomplexen ist eine Familien von Homomorphismen, die mit den d -Operatoren vertauschen, also ein kommutatives Diagramm liefern:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & C_1^{k-1} & \xrightarrow{d} & C_1^k & \xrightarrow{d} & C_1^{k+1} \xrightarrow{d} \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\ \dots & \xrightarrow{d} & C_2^{k-1} & \xrightarrow{d} & C_2^k & \xrightarrow{d} & C_2^{k+1} \xrightarrow{d} \dots \end{array}$$

Definition 235 (Kohomologie mit kompaktem Träger). Betrachtet man im De Rham-Komplex $\Omega^*(X)$ nur Formen mit *kompaktem Träger*, so erhält man einen neuen Differentialkomplex $\Omega_c^*(X)$, den *De Rham-Komplex mit kompaktem Träger*. Die zugehörigen Kohomologiegruppen heißen die *De Rham'schen Kohomologiegruppen $H_c^k(X)$ mit kompaktem Träger*.

Beispiel 236. Wir betrachten $X = \mathbb{R}$.

$$H_c^0(\mathbb{R}) = 0,$$

weil eine Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $d\phi = 0$ die 0-Funktion ist.

Für die Berechnung von $H_c^1(\mathbb{R})$ betrachte die Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\int_{-\infty}^{+\infty}} \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

Wir haben gerade bemerkt, dass sie in $\Omega_c^0(\mathbb{R})$ exakt ist, d.h. dass d injektiv ist. Die Formen in $\Omega_c^1(\mathbb{R})$ sind von der Form $\omega = \phi dx$ mit einer Funktion ϕ mit kompaktem Träger. Es ist klar, dass jede reelle Zahl als Integral einer solchen darstellbar ist, d.h. dass die Sequenz in \mathbb{R} exakt ist. Den Kern von \int bilden schließlich die ϕdx , für die ϕ eine Stammfunktion Φ mit kompaktem Träger besitzt, und das ist das Bild von d . Damit ist die Sequenz exakt und

$$H_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R}) / (d\Omega_c^0(\mathbb{R})) \cong \mathbb{R}.$$

□

Integration von Differentialformen. Im weiteren Gang dieser Vorlesung setzen wir voraus, dass für eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit X mit oder ohne Rand und für $\omega \in \Omega_c^n(X)$ das Integral

$$\int_X \omega$$

definiert ist und dass für $\omega \in \Omega_c^{n-1}(X)$ der Stokessche Integralsatz gilt:

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Das ist eine geringfügige Verallgemeinerung der Situation in der Analysis III, wo X kompakt vorausgesetzt wird. Die Methoden für die Definition und den Beweis des Stokes sind dieselben: Zerlegung der Eins.

6.2 Intermezzo: Kategorien und Funktoren.

Eine Kategorie besteht aus einer Klasse von *Objekten*, für alle Paare A und B von Objekten einer Menge $\text{Hom}(A, B)$ von *Morphismen* und für alle Objekte A, B, C einer Komposition

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) &\rightarrow \text{Hom}(A, C). \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Die Komposition soll assoziativ sein, und für alle Objekte A soll es in $\text{Hom}(A, A)$ eine Identität 1_A geben.

Ein Beispiel bietet die Klasse der reellen Vektorräume mit den linearen Abbildungen als Morphismen. Ein anderes Beispiel, bei dem die Morphismen keine Abbildungen sind, ist die Klasse aller topologischen Räume mit den *Homotopieklassen* stetiger Abbildungen als Morphismen. Ein weiteres Beispiel sind die Differentialkomplexe mit den Kettenabbildungen.

Ein *kovarianter Funktor* von der Kategorie \mathcal{K} in die Kategorie \mathcal{L} ist eine Abbildung F , die jedem Objekt A von \mathcal{K} ein Objekt $F(A)$ von \mathcal{L} und jedem Morphismus $f \in \text{Hom}(A, B)$ einen Morphismus $F(f) \in \text{Hom}(F(A), F(B))$ zuordnet, so dass die Komposition und die Identität erhalten bleiben. Ein *kontravarianter Funktor* kehrt die Richtung der Morphismen um: Für $f \in \text{Hom}(A, B)$ ist $F(f) \in \text{Hom}(F(B), F(A))$.

Beispiele 237. Die Zuordnung

$$\begin{aligned} X &\mapsto \Omega^*(X) \\ (f : X \rightarrow Y) &\mapsto f^* : \Omega^*(Y) \rightarrow \Omega^*(X) \end{aligned}$$

ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und differenzierbaren Abbildungen in die Kategorie der Differentialkomplexe.

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist H^k ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und Abbildungen in die Kategorie der \mathbb{R} -Vektorräume und linearen Abbildungen.

□

$\Omega_c^*(\cdot)$ ist kein Funktor auf der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und Abbildungen von solchen, weil $f^*\omega$ für $\omega \in \Omega_c^*(Y)$ nicht notwendig kompakten Träger hat.

Es gibt verschiedene “Reparaturmöglichkeiten”.

- Man kann sich auf kompakte Mannigfaltigkeiten beschränken. Das ist langweilig, weil dann $\Omega_c^*(\cdot) = \Omega^*(\cdot)$.
- Man kann sich auf *eigentliche Abbildungen* beschränken, bei denen das Urbild kompakter Mengen kompakt ist.

6.3 Poincaré-Lemmas

Seien X eine Mannigfaltigkeit und

$$\begin{aligned}\pi : X \times \mathbb{R} &\rightarrow X, & (x, t) &\mapsto x, \\ s : X &\rightarrow X \times \mathbb{R}, & x &\mapsto (x, 0).\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen:

Satz 238 (Allgemeines Poincaré-Lemma). *Diese Abbildungen π und s induzieren inverse Isomorphismen der Kohomologie:*

$$H^*(X) \xrightleftharpoons[s^*]{\pi^*} H^*(X \times \mathbb{R})$$

Beispiel 239 (Poincaré-Lemma). Insbesondere impliziert das nach Induktion über n

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das wissen Sie schon aus der Analysis: Jede geschlossene k -Form ($k > 0$) auf einer sternförmigen offenen Menge, insbesondere auf ganz \mathbb{R}^n , ist exakt. Das ist das sogenannte Poincaré-Lemma, und eine Variante seines Beweises liefert auch die allgemeinere Aussage.

□

Beweis von Satz 238. Offenbar ist $\pi \circ s = \text{id}$. Wir müssen also nur zeigen, dass $s \circ \pi$ in der Kohomologie die Identität induziert. Wir zeigen dazu: Es gibt eine sogenannte *Kettenhomotopie*

$$K : \Omega^k(X \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(X \times \mathbb{R})$$

mit

$$\text{id} - \pi^* \circ s^* = \pm(dK - Kd) \tag{41}$$

Dann gilt für geschlossenes $\omega \in \Omega^k(X)$

$$\pi^* \circ s^* \omega = \omega \mp d(K\omega)$$

und damit $\pi^* \circ s^* = \text{id}$ auf dem Kohomologieniveau.

Konstruktion der Kettenhomotopie. Zunächst liefert

$$T_{(x,t)}(X \times \mathbb{R}) = T_x X \oplus T_t \mathbb{R}$$

eine Zerlegung von $\Omega^*(X \times \mathbb{R})$ als direkte Summe von zwei $C^\infty(X \times \mathbb{R})$ -Moduln, die erzeugt werden von

$$\pi^* \Omega^k(X) \text{ bzw. } \pi^* \Omega^{k-1}(X) \wedge dt.$$

Wir definieren

$$K(\phi(x, t) \pi^* \omega) := 0 \quad \text{für } \omega \in \Omega^k(X)$$

und

$$K(\phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt) := \left(\int_0^t \phi(x, \tau) d\tau \right) \pi^* \theta \quad \text{für } \theta \in \Omega^{k-1}(X).$$

Nachweis von (41). Für $\omega \in \Omega^k(X)$ gilt

$$\begin{aligned}(dK - Kd)(\phi\pi^*\omega) &= d0 - K(d\phi \wedge \pi^*\omega + \phi\pi^*d\omega) \\ &= (-1)^{k-1}K\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\pi^*\omega \wedge dt\right) = (-1)^{k-1}(\phi(x, t) - \phi(x, 0))\pi^*\omega\end{aligned}$$

und andererseits

$$(\text{id} - \pi^* \circ s^*)\phi\pi^*\omega = \phi(x, t)\pi^*\omega - \phi \circ s \circ \pi(x, t)\pi^*\omega = (\phi(x, t) - \phi(x, 0))\pi^*\omega.$$

Für $\theta \in \Omega^{k-1}(X)$ ist mit $d^X\phi := d\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t}dt$

$$\begin{aligned}dK(\phi\pi^*\theta \wedge dt) &= d\left(\int_0^t \phi(x, \tau)d\tau \pi^*\theta\right) \\ &= (-1)^{k-1}\phi(x, t)\pi^*\theta \wedge dt + \int_0^t d^X\phi(x, \tau)d\tau \wedge \pi^*\theta + \int_0^t \phi(x, \tau)d\tau \pi^*d\theta \\ Kd(\phi\pi^*\theta \wedge dt) &= K(d^X\phi \wedge \pi^*\theta \wedge dt + \phi\pi^*d\theta \wedge dt) \\ &= \int_0^t d^X\phi(x, \tau)d\tau \wedge \pi^*\theta + \int_0^t \phi(x, \tau)d\tau \pi^*d\theta\end{aligned}$$

Also ist

$$(dK - Kd)(\phi\pi^*\theta \wedge dt) = (-1)^{k-1}\phi(x, t)\pi^*\theta \wedge dt.$$

Andererseits ist $s^*dt = 0$ und deshalb

$$(1 - \pi^* \circ s^*)\phi\pi^*\theta \wedge dt = \phi(x, t)\pi^*\theta \wedge dt.$$

□

Korollar 240 (Homotopieaxiom für die De Rham-Kohomologie). *Homotope Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung der Kohomologie.*

Beweis. Sei $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie von $f_0 = F(., 0)$ nach $f_1 = F(., 1)$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass sogar $F : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$. Definiere

$$\begin{aligned}s_i : X &\rightarrow X \times \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x, i), \quad i \in \{0, 1\} \\ \pi : X \times \mathbb{R} &\rightarrow X, \quad (x, t) \mapsto x\end{aligned}$$

Offenbar hätte man im Beweis von Satz 238 ebenso gut s_1 statt s_0 verwenden können:

$$\pi^* \circ s_i^* = \text{id}_{H^*(X \times \mathbb{R})}, \quad s_i^* \circ \pi^* = \text{id}_{H^*(X)}.$$

Damit finden wir

$$f_i^* = (F \circ s_i)^* = s_i^* \circ F^* = s_i^* \circ (\pi^* \circ s_0^*) \circ F^* = (s_i^* \circ \pi^*) \circ s_0^* \circ F^* = s_0^* \circ F^*$$

□

Korollar 241. *Homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten haben dieselbe Kohomologie.*

Beispiel 242. Für $n \geq 0$ ist

$$H^*(S^n) \cong H^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}).$$

□

Für die Kohomologie mit kompaktem Träger sieht die Situation anders aus:

Ist $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ wieder die Projektion und $0 \neq \omega \in \Omega_c^*(X)$, so hat $\pi^*\omega$ keinen kompakten Träger mehr. Wie im Beweis von Satz 238 stellen wir fest, dass $\Omega_c^k(X \times \mathbb{R})$ die direkte Summe zweier Unterräume ist, die erzeugt werden von Formen der Gestalt

$$\begin{aligned} \phi(x, t)\pi^*\omega, \quad \omega \in \Omega^k(X) \\ \text{bzw.} \\ \phi(x, t)\pi^*\theta \wedge dt, \quad \theta \in \Omega^{k-1}(X) \end{aligned}$$

mit Koeffizienten ϕ mit kompaktem Träger. Insbesondere ist dann

$$d\phi = \psi(x, t)\pi^*\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt, \quad \eta \in \Omega^1(X). \quad (42)$$

Wir definieren eine Abbildung

$$\pi_* : \Omega_c^k(X \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(X)$$

durch

$$\begin{aligned} \pi_*(\phi(x, t)\pi^*\omega) &:= 0, \\ \pi_*(\phi(x, t)\pi^*\theta \wedge dt) &:= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t)dt \right) \theta. \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass $d\pi_* = \pi_*d$ ist. Daher induziert π_* eine Abbildung

$$\pi_* : H_c^k(X \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{k-1}(X).$$

Wir wollen eine Inverse dazu konstruieren und wählen eine Form $e(t)dt \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)dt = 1$. Damit definieren wir

$$e_* : \Omega_c^k(X) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(X \times \mathbb{R}), \omega \mapsto (\pi^*\omega) \wedge e(t)dt.$$

Auch e_* kommutiert mit d , induziert also eine Abbildung auf der Kohomologie.

Satz 243 (Allgemeines Poincaré-Lemma für kompakten Träger). *Die Abbildungen π_* und e_* induzieren inverse Isomorphismen der Kohomologie:*

$$H_c^k(X \times \mathbb{R}) \xrightleftharpoons[e_*]{\pi_*} H_c^{k-1}(X)$$

Beweis. Offenbar ist $\pi_* \circ e_* = \text{id}$ auf $\Omega_c^*(X)$. Zum Beweis, dass $e_* \circ \pi_* = \text{id}$ auf $H_c^k(X \times \mathbb{R})$ konstruieren wir wieder eine Kettenhomotopie

$$K : \Omega_c^k(X \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{k-1}(X \times \mathbb{R})$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} K(\phi(x, t)\pi^*\omega) &:= 0 \\ K(\phi(x, t)\pi^*\theta \wedge dt) &:= \left(\int_{-\infty}^t \phi(x, t) - \int_{-\infty}^t e(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t)dt \right) \pi^*\theta. \end{aligned}$$

Es genügt nun wieder zu zeigen, dass

$$\text{id} - e_* \pi_* = (-1)^{k-1} (dK - Kd) \quad \text{auf } \Omega_c^k(X \times \mathbb{R}). \quad (43)$$

Beim Beweis benutzen wir die Notation aus (42).

Beweis von (43) für Formen vom ersten Typ. Sei $\omega \in \Omega^k(X)$. Dann gilt

$$(\text{id} - e_* \pi_*) \phi(x, t) \pi^* \omega = \phi(x, t) \pi^* \omega. \quad (44)$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} (dK - Kd) \phi(x, t) \pi^* \omega &= d0 - K(\psi(x, t) \pi^*(\eta \wedge \omega) + (-1)^k \frac{\partial \phi}{\partial t} \pi^* \omega \wedge dt + \phi(x, t) \pi^* d\omega) \\ &= (-1)^{k-1} \left(\phi(x, t) - \int_{-\infty}^t e(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right) \pi^* \omega \\ &= (-1)^{k-1} \phi(x, t) \pi^* \omega, \end{aligned} \quad (45)$$

weil $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 0$. Aus (44) und (45) folgt (43).

Beweis von (43) für Formen vom zweiten Typ. Für $\theta \in \Omega^{k-1}(X)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (\text{id} - e_* \pi_*) \phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt &= \phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt - \pi^* (\pi_* \phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt) \wedge e(t) dt \\ &= \phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt - \pi^* \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) dt \theta \right) \wedge e(t) dt \\ &= \phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) dt \right) \pi^* \theta \wedge e(t) dt. \end{aligned} \quad (46)$$

Die rechte Seite von (43) berechnen wir getrennt:

$$\begin{aligned} (dK)(\phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt) &= d \left(\left(\int_{-\infty}^t \phi(x, t) dt - \int_{-\infty}^t e(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t) dt \right) \pi^* \theta \right) \\ &= \left(\phi(x, t) dt + \left(\int_{-\infty}^t \psi(x, t) dt \right) \pi^* \eta \right) \wedge \pi^* \theta \\ &\quad - \left(e(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) dt + \int_{-\infty}^t e(t) dt \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) dt \right) \pi^* \eta \right) \wedge \pi^* \theta \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^t \phi(x, t) dt - \int_{-\infty}^t e(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t) dt \right) \pi^* d\theta \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (Kd)(\phi(x, t) \pi^* \theta \wedge dt) &= K \left((\psi(x, t) \pi^* \eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt) \wedge \pi^* \theta \wedge dt + \phi(x, t) \pi^* d\theta \wedge dt \right) \\ &= K(\psi(x, t) \pi^*(\eta \wedge \theta) \wedge dt + \phi(x, t) \pi^* d\theta \wedge dt) \\ &= \left(\int_{-\infty}^t \psi(x, t) dt - \int_{-\infty}^t e(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) dt \right) \pi^*(\eta \wedge \theta) \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^t \phi(x, t) dt - \int_{-\infty}^t e(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) dt \right) \pi^*(d\theta) \end{aligned} \quad (48)$$

Aus (46), (47) und (48) folgt (43). \square

Beispiel 244 (Poincaré-Lemma mit kompaktem Träger). Durch vollständige Induktion über n beweist man

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Isomorphismus für die Top-Dimension wird durch die Integration gegeben. Ein Erzeugendes von $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$\rho dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit einer Buckelfunktion $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit kompaktem Träger und $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 1$.

Insbesondere folgt, dass die Kohomologie mit kompaktem Träger für homotopieäquivalente Räume im allgemeinen nicht gleich ist!

Beweis. Für $\omega = \phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\pi_* \omega = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$$

und durch Iteration erhält man

$$(\pi_*)^n \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \in \Omega^0(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{R}.$$

□

6.4 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ von Differentialkomplexen ist eine Familie von Abbildungen $f^k : A^k \rightarrow B^k$. Sie heißt eine *(Ko)kettenabbildung*, wenn

$$f \circ d = d \circ f.$$

Satz 245 (Homologiesequenz). *Eine kurze exakte Sequenz von Kettenabbildungen*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \xrightarrow{d^*} H^k(A) \xrightarrow{f^*} H^k(B) \xrightarrow{g^*} H^k(C) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(A) \rightarrow \dots$$

Dabei sind f^ und g^* die offensichtlichen von f und g induzierten Abbildungen und d^* ist wie folgt charakterisiert:*

Sind

- $b^k \in B^k$ mit $dg b^k = 0$ und
- $a^{k+1} \in A^{k+1}$ mit $da^{k+1} = 0$ und $fa^{k+1} = db^k$,

so ist

$$d^*[a^{k+1}] = [gb^k].$$

Beweis. Diagram chasing in folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & A^{k+1} & \xrightarrow{f} & B^{k+1} & \xrightarrow{g} & C^{k+1} & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\ 0 & \rightarrow & A^k & \xrightarrow{f} & B^k & \xrightarrow{g} & C^k & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

□

Wir beschreiben nun eine Situation, die zu einer solchen langen Kohomologiesequenz führt, was sehr nützlich für die Berechnung von Kohomologiegruppen ist.

Satz 246 (Mayer-Vietoris-Sequenz). Seien $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$. Wir betrachten folgende Inklusionen

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow j_U & & \nwarrow \partial_U & \\ X & & & & U \cap V \\ & \swarrow j_V & & \nwarrow \partial_V & \\ & & V & & \end{array}$$

Diese induzieren eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega^*(X) \xrightarrow{j_U^* \oplus j_V^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\partial_V^* - \partial_U^*} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0,$$

die Mayer-Vietoris-Sequenz. Die davon induzierte lange exakte Sequenz der Kohomologie

$$\dots \xrightarrow{d^*} H^k(X) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(X) \rightarrow \dots$$

nennt man ebenfalls Mayer-Vietoris-Sequenz.

Beweis. Die Exaktheit an den Stellen $\Omega^*(X)$ und $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ ist klar.

Exaktheit an der Stelle $\Omega^*(U \cap V)$. Wir müssen zeigen, dass $\partial_V^* - \partial_U^*$ surjektiv ist. Sei also $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$. Wir wählen eine Zerlegung $\{\rho_U, \rho_V\}$ zur offenen Überdeckung $\{U, V\}$ von X . Dann hat ρ_U seinen Träger in U verschwindet also auf einer Umgebung von $V \setminus U$. Deshalb ist $\rho_U \omega$ differenzierbar auf V und umgekehrt $-\rho_V \omega$ differenzierbar auf U . Dann ist

$$(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) \in \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$$

und

$$(\partial_V^* - \partial_U^*)(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) = \rho_U \omega + \rho_V \omega = \omega.$$

□

Der Homomorphismus

$$d^* : H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(X),$$

der sogenannten Randoperator der Mayer-Vietoris-Sequenz ist nach Konstruktion so gegeben: Ist mit den Bezeichnungen aus dem obigen Beweis

$$\omega = \rho_U \omega + \rho_V \omega \in \Omega^k(U \cap V)$$

eine geschlossene k -Form, so stimmen $-d(\rho_V \omega) \in \Omega^{k+1}(U)$ und $d(\rho_U \omega) \in \Omega^{k+1}(V)$ auf $U \cap V$ überein und definiere daher eine $(k+1)$ -Form $\eta \in \Omega^{k+1}(X)$. Diese ist geschlossen und

$$[\eta] = d^*[\omega].$$

Vergleichen Sie dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \Omega^{k+1}(X) & \rightarrow & \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V) & \rightarrow & \Omega^{k+1}(U \cap V) \rightarrow 0 \\ & & d \uparrow & & d \uparrow & & d \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \Omega^k(X) & \rightarrow & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \rightarrow & \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

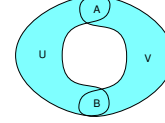
Beispiel 247. Seien U und V zusammenhängend. Dann ist

$$\underbrace{H^0(U) \oplus H^0(V)}_{=\mathbb{R}} \xrightarrow{\partial_V^* - \partial_U^*} H^0(U \cap V)$$

$$(x, y) \mapsto y - x$$

Das Bild der Abbildung wird also repräsentiert durch die *global konstanten* Funktionen auf $U \cap V$. Ist $U \cap V$ zusammenhängend, so ist $\partial_V^* - \partial_U^*$ surjektiv.

Besteht $U \cap V$ aus zwei Zusammenhangskomponenten A und B wie in der Abbildung, so ist das Bild der Abbildung gegeben durch lokal konstanten Funktionen, die auf A und B denselben Wert haben, das Bild ist also die Diagonale



$$\{(y - x, y - x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

□

Beispiel 248.

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k \in \{0, n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Isomorphismus von $H^n(S^n)$ auf \mathbb{R} wird induziert durch

$$\Omega^n(S^n) \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \int_{S^n} \omega \quad (49)$$

□

Beispiel 249 (Kohomologie der reellen projektiven Ebene P^2). Die projektive Ebene als obere Halbsphäre mit Antipodenidentifikation auf dem Äquator kann man darstellen als Vereinigung der offenen oberen Halbsphäre $U \approx \mathbb{R}^2$ und dem Bild V der offenen Menge unterhalb des 5. Breitenkreises. V ist ein Möbiusband und homotopieäquivalent zum Äquator $P^1 \approx S^1$. Die Menge $U \cap V$ ist homotopieäquivalent zu einem Breitenkreis, also zu S^1 und die Inklusion $U \cap V \hookrightarrow V$ entspricht der doppelten Überlagerung $S^1 \rightarrow P^1$. Man erhält

$$\begin{aligned} & \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta_0} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\partial_0} H^1(P^2) \\ & \xrightarrow{\alpha_1} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{\beta_1} H^1(U \cap V) \xrightarrow{\partial_1} H^2(P^2) \\ & \xrightarrow{\alpha_2} H^2(U) \oplus H^2(V) \rightarrow \end{aligned}$$

Einsetzen der bekannten Kohomologiegruppen liefert

$$\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_0} H^1(P^2) \xrightarrow{\alpha_1} 0 \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_1} H^2(P^2) \xrightarrow{\alpha_2} 0 \oplus 0 \rightarrow$$

Wir benutzen nun die Exaktheit dieser Sequenz. Nach Beispiel 247 ist β_0 surjektiv, also $\partial_0 = 0$ und α_1 deshalb injektiv.

Die Abbildung β_1 ist gegeben durch $(0, y) \mapsto 2y$, ist also ein Isomorphismus. Also ist $\text{Kern } \beta_1 = \text{Bild } \alpha_1 = 0$.

Daher ist $H^1(P^2) = 0$.

Weil das Bild $\beta_1 = \mathbb{R}$, ist $\text{Kern } \partial_1 = \mathbb{R}$, also $\partial_1 = 0$ und damit $0 = \text{Bild } \partial_1 = \text{Kern } \alpha_2 = H^2(P^2)$.

Damit haben wir gefunden:

$$H^k(P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein ähnliches Argument liefert

$$H^k(P^3) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \text{ oder } 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und allgemeiner

$$H^k(P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \text{ oder } k = n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

6.5 Mayer-Vietoris für kompakten Träger

Für $\omega \in \Omega_c^*(X)$ und $f : Y \rightarrow X$ hat $f^*\omega \in \Omega^*(Y)$ im allgemeinen keinen kompakten Träger, auch nicht, wenn Y eine offene Teilmenge von X ist. Deshalb kann man die Mayer-Vietoris-Sequenz nicht einfach mit einem unter Index c verzieren. Ist andererseits $U \subset X$ offen und $\omega \in \Omega_c^*(U)$, so kann man ω trivial auf X fortsetzen und erhält so eine Abbildung

$$j_* : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(X).$$

Damit kann man wieder eine Mayer-Vietoris-Sequenz konstruieren.

Satz 250 (Mayer-Vietoris-Sequenz für kompakten Träger). *Seien U, V offene Teilmengen der Mannigfaltigkeit X mit $X = U \cup V$. Die Inklusionen aus Satz 246 induzieren eine exakte Sequenz*

$$0 \leftarrow \Omega_c^*(X) \xrightarrow{j_{U*} + j_{V*}} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{(-\partial_{U*}, \partial_{V*})} \Omega_c^*(U \cap V) \leftarrow 0,$$

die Mayer-Vietoris-Sequenz für Formen mit kompaktem Träger.

Die davon induzierte lange exakte Sequenz der Kohomologie

$$\rightarrow H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(X) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow$$

nennt man ebenfalls Mayer-Vietoris-Sequenz.

Beweis. Leicht. Wir zeigen nur die Exaktheit an der Stelle $\Omega^*(X)$, also die Surjektivität. Sei also $\omega \in \Omega_c^k(X)$ und sei wieder (ρ_U, ρ_V) eine passende Zerlegung der Eins. In diesem Fall ist $\rho_U \omega \in \Omega_c^k(U)$ und entsprechend für V und $\omega = j_{U*} \rho_U \omega + j_{V*} \rho_V \omega$. \square

Beispiel 251. Die Kohomologie der Sphäre mit und ohne kompaktem Träger ist dieselbe. Benutzt man Formen mit kompaktem Träger und die übliche Darstellung der Sphäre als Vereinigung zweier offene Bälle E^n mit Durchschnitt $U \cap V \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, so erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^n(U \cap V) & \xrightarrow{\alpha} & H_c^n(E^n) \oplus H_c^n(E^n) & \xrightarrow{\beta} & H_c^n(S^n) & \rightarrow & H_c^{n+1}(U \cap V) \\ H_c^n(U \cap V) & \rightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \rightarrow & H_c^n(S^n) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Wegen der Exaktheit in $H_c^n(S^n)$ ist β surjektiv, also

$$H_c^n(S^n) \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) / \text{Kern } \beta = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) / \text{Bild } \alpha.$$

Nehmen wir an, wir hätten schon gezeigt, dass $H_c^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$. Dann gilt nach dem Poincaré-Lemma mit kompaktem Träger $H_c^n(U \cap V) \cong \mathbb{R}$, und aus $\alpha(x) = (-x, x)$ folgt $H_c^n(S^n) = H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$. \square

6.6 Poincaré-Dualität

Definition 252. Eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit heißt *gut*, wenn alle nicht leeren Durchschnitte von endlich vielen der U_α diffeomorph zum \mathbb{R}^n sind.

Satz 253. *Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine gute Überdeckung. Jede kompakte Mannigfaltigkeit besitzt eine endliche gute Überdeckung.*

Den Beweis führen wir nicht vor, er benutzt Riemannsche Geometrie: Man wählt auf X eine Riemannsche Metrik und benutzt die Existenz geodätisch konvexer Umgebungen.

Satz 254. *Eine Mannigfaltigkeit mit einer endlichen guten Überdeckung hat endlich-dimensionale Kohomologiegruppen.*

Beweis. Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^k(U \cup V) \xrightarrow{r} H^k(U) \oplus H^k(V)$$

folgt

$$H^k(U \cup V) \cong \text{Bild}(r) \oplus \text{Kern}(r) \cong \text{Bild}(r) \oplus \text{Bild}(d^*).$$

Sind also die Kohomologiegruppen von U, V und $U \cap V$ endlich-dimensional, so auch die von $U \cup V$. Der Beweis erfolgt nun durch vollständige Induktion über die Anzahl p der Mengen in einer endlichen guten Überdeckung der Mannigfaltigkeit X .

$p = 0$. Dann ist X diffeomorph zum \mathbb{R}^n , und dessen Kohomologie ist endlich.

$p \rightarrow p + 1$. Sei U_1, \dots, U_{p+1} eine offene gute Überdeckung von X . Dann hat $(U_1 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$ eine gute Überdeckung mit p Mengen und deshalb nach Induktionsvoraussetzung endliche Kohomologie. Dasselbe gilt für $U_1 \cup \dots \cup U_p$ und U_{p+1} und nach der Vorbemerkung hat auch $X = U_1 \cup \dots \cup U_{p+1}$ endliche Kohomologie. \square

Beispiel 255. Die Formen $\omega_k = \frac{-y}{(x-k)^2+y^2} dx + \frac{x-k}{(x-k)^2+y^2} dy$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sind geschlossen und repräsentieren linear unabhängige Elemente von $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \times \{0\})$. Das liefert also ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit unendlich-dimensionaler Kohomologie. \square

Definition 256. Eine Paarung zweier endlich-dimensionaler Vektorräume U und V ist eine bilineare Abbildung

$$U \otimes V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle.$$

Ein solche heißt *nicht-degeneriert*, wenn die Abbildungen

$$U \rightarrow V^*, \quad u \mapsto \langle u, \cdot \rangle$$

und

$$V \rightarrow U^*, \quad v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$$

injektiv sind.

Offenbar sind dann beide Abbildungen Isomorphismen, und es gilt $U \cong V^* \cong V$.

Wir betrachten nun auf einer unberandeten n -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit Formen $\omega \in \Omega^k(X)$, $\omega' \in \Omega^{k-1}(X)$ und $\theta \in \Omega_c^{n-k}(X)$, $\theta' \in \Omega_c^{k-1}(X)$. Wir nehmen an, dass ω und θ geschlossen sind. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\omega + d\omega') \wedge (\theta + d\theta') &= \omega \wedge \theta + d\omega' \wedge \theta + \omega \wedge d\theta' + d\omega' \wedge d\theta' \\
&= \omega \wedge \theta \\
&\quad + d(\omega' \wedge \theta) - \underbrace{\omega' \wedge d\theta}_{=0} \\
&\quad + d(\omega \wedge \theta') \pm \underbrace{d\omega \wedge \theta'}_{=0} \\
&\quad + d(\omega' \wedge d\theta') \pm \omega' \wedge \underbrace{d^2\theta'}_{=0} \\
&= \omega \wedge \theta + d\eta.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes ist daher

$$\int_X (\omega + d\omega') \wedge (\theta + d\theta') = \int_X \omega \wedge \theta.$$

Die Abbildung

$$\int_X : \Omega^k(X) \otimes \Omega_c^{n-k}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, \theta) \mapsto \int_X \omega \wedge \theta$$

induziert deshalb eine Paarung

$$\int_X : H^k(X) \otimes H_c^{n-k}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\theta]) \mapsto \int_X \omega \wedge \theta.$$

Satz 257 (Poincaréscher Dualitätssatz). *Ist X eine unberandete orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit, die eine endliche gute Überdeckung besitzt, so ist*

$$\int_X : H^k(X) \otimes H_c^{n-k}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [\theta]) \mapsto \int_X \omega \wedge \theta$$

eine nicht-degenerierte Paarung. Also gilt

$$H^k(X) \cong (H_c^{n-k}(X))^* \cong H_c^{n-k}(X). \quad (50)$$

Ist X insbesondere kompakt, so ist also $H^k(X) \cong H^{n-k}(X)$.

Zur Vorbereitung auf den Beweis betrachten wir Mayer-Vietoris-Sequenzen. Die Sequenz mit kompaktem Träger

$$\leftarrow H_c^{n-k}(U \cup V) \leftarrow H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V) \leftarrow H_c^{n-k}(U \cap V) \leftarrow H_c^{n-k-1}(U \cup V) \leftarrow$$

induziert eine exakte Sequenz der Dualräume mit Pfeilen in umgekehrter Richtung:

$$\rightarrow H_c^{n-k}(U \cup V)^* \rightarrow H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* \rightarrow H_c^{n-k}(U \cap V)^* \rightarrow H_c^{n-k-1}(U \cup V)^* \rightarrow$$

Wir haben nun eine Abbildung der Mayer-Vietoris-Sequenz ohne kompakten Träger in diese Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^k(U \cup V) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) & \rightarrow & H^{k+1}(U \cup V) \\
\alpha \downarrow & (1) & \beta \downarrow & (2) & \gamma \downarrow & (3) & \alpha \downarrow \\
H_c^k(U \cup V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k-1}(U \cup V)^*
\end{array} \quad (51)$$

Die vertikalen Abbildungen sind dabei durch das Integral gegeben, z.B. ist

$$\beta(\omega + \theta)(\omega' + \theta') = \int_U \omega \wedge \omega' + \int_V \theta \wedge \theta'.$$

Lemma 258. *Im Diagramm (51) sind die Zellen (1) und (2) kommutativ, die Zelle (3) ist kommutativ bis auf das Vorzeichen.*

Beweis. Wir betrachten nur die Zelle (3), die Kommutativität der beiden anderen ist nicht schwer. Seien $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ und $\theta \in \Omega_c^{n-k-1}(U \cup V)$ beide geschlossen. Wir müssen zeigen, dass dann

$$\int_{U \cup V} d^* \omega \wedge \theta = \pm \int_{U \cap V} \omega \wedge d_* \theta.$$

Dabei sind $d^* : H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(U \cup V)$ bzw. $d_* : H_c^{n-k-1}(U \cup V) \rightarrow H_c^{n-k}(U \cap V)$ die “Randoperatoren” der Mayer-Vietoris-Sequenzen. Ist (ρ_U, ρ_V) eine Zerlegung der Eins zu (U, V) so gilt also:

- $d^* \omega$ wird repräsentiert durch eine Form mit

$$\begin{aligned} d^* \omega|_U &= -d(\rho_V \omega) \underset{d\omega=0}{=} -d\rho_V \wedge \omega \\ d^* \omega|_V &= d(\rho_U \omega) \end{aligned}$$

Insbesondere liegt der Träger von $d^* \omega|_U$ in V , also

$$\text{supp } d^* \omega \subset U \cap V. \quad (52)$$

- $d_* \tau$ wird repräsentiert durch eine Form mit Träger in $U \cap V$ für deren triviale Fortsetzung auf $U \cup V$ gilt:

$$\begin{aligned} d_* \tau|_U &= d(\rho_U \tau) \\ d_* \tau|_V &= d(\rho_V \tau) \underset{d\tau=0}{=} d\rho_V \wedge \tau \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{U \cup V} d^* \omega \wedge \tau \underset{(52)}{=} \int_{U \cap V} d^* \omega \wedge \tau = - \int_{U \cap V} d\rho_V \wedge \omega \wedge \tau.$$

Andrerseits ist

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge d_* \tau = \int_{U \cap V} \omega \wedge d\rho_V \wedge \tau = \pm \int_{U \cap V} d\rho_V \wedge \omega \wedge \tau.$$

□

Lemma 259 (Fünferlemma). *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E & \rightarrow \\ & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow & \\ \rightarrow & \tilde{A} & \rightarrow & \tilde{B} & \rightarrow & \tilde{C} & \rightarrow & \tilde{D} & \rightarrow & \tilde{E} & \rightarrow \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Wenn $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ Isomorphismen sind, dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Natürlich gilt das dann auch, wenn die Zellen nur bis aufs Vorzeichen kommutativ sind.

Beweis. Selbst: Diagram chasing. □

Beweis von Satz 257. Ähnlich wie der Satz 254 folgt die Poincaré-Dualität nun aus dem Diagramm (51) durch vollständige Induktion über die Anzahl p der Mengen einer guten Überdeckung. Wenn die Dualität für U, V und $U \cap V$ gilt, dann nach dem Fünferlemma auch für $U \cup V$.

$p = 1$. Die Kohomologiegruppen $H^k(\mathbb{R}^n)$ und $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ erfüllen (50).

$p \rightarrow p + 1$. Die Dualität gelte für alle Mannigfaltigkeiten, die eine gute Überdeckung mit p Mengen besitzen. X besitze eine solche mit $p + 1$ Mengen U_1, \dots, U_{p+1} . Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung die Dualität für $U_1 \cup \dots \cup U_p$, für $(U_1 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$ und für U_{p+1} und damit auch für X . □

6.7 Anwendung der Sphärenkohomologie: Hopfinvariante

Wir beschreiben ein Anwendung der Sphärenkohomologie auf ein geometrisches Problem: Gibt es Abbildungen einer Sphäre in eine niedriger-dimensionale Sphäre, die nicht homotop zu einer konstanten Abbildung sind? Diese Frage wurde von Heinz Hopf 1931 positiv beantwortet. Wir geben einen Beweis für Abbildungen von S^3 nach S^2 . Die Konstruktion der sogenannten *Hopfinvarianten* läßt sich dabei problemlos auf Abbildungen $S^{2n-1} \rightarrow S^n, n > 1$ erweitern.

Sei also $f : S^3 \rightarrow S^2$ eine differenzierbare Abbildung. Wir wählen ein $\omega \in \Omega^2(S^2)$ mit $\int_{S^2} \omega = 1$. Dann ist

$$df^*\omega = f^*d\omega = 0,$$

weil $\Omega^3(S^2) = 0$. Nach Beispiel 248 ist $H^2(S^3) = 0$, und deshalb gibt es $\eta \in \Omega^1(S^3)$ mit

$$d\eta = f^*\omega.$$

Die Hopfinvariante von f ist nun definiert als

$$H(f) = \int_{S^3} \eta \wedge d\eta.$$

Lemma 260. *Die Hopfinvariante ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von ω bzw η .*

Beweis. Unabhängigkeit von η . Ist $d\tilde{\eta} = f^*\omega$, so ist $d(\tilde{\eta} - \eta) = 0$, also $\tilde{\eta} = \eta + d\theta$ für ein $\theta \in \Omega^0(S^3)$, weil $H^1(S^3) = 0$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{S^3} (\eta + d\theta) \wedge d(\eta + d\theta) &= \int_{S^3} \eta \wedge d\eta + \int_{S^3} d\theta \wedge d\eta \\ &= \int_{S^3} \eta \wedge d\eta + \int_{S^3} d(\theta \wedge d\eta) \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{S^3} \eta \wedge d\eta + 0. \end{aligned}$$

Unabhängigkeit von ω . Ist $\tilde{\omega} \in \Omega^2(S^2)$ mit $\int_{S^2} \tilde{\omega} = 1 = \int_{S^2} \omega$, so folgt $\int_{S^2} (\omega - \tilde{\omega}) = 0$. Weil das Integral einen Isomorphismus von $H^2(S^2)$ auf \mathbb{R} liefert, vgl. Beispiel 248, ist $\omega - \tilde{\omega}$ nullhomolog, d.h. es gibt $\theta \in \Omega^1(S^2)$ mit $\tilde{\omega} = \omega + d\theta$. Dann gilt mit $\tilde{\eta} = \eta + f^*\theta$

$$d\tilde{\eta} = d\eta + f^*d\theta = f^*(\omega + d\theta) = f^*\tilde{\omega}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{S^3} \tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta} &= \int_{S^3} (\eta + f^*\theta) \wedge (d\eta + df^*\theta) \\ &= \int_{S^3} \eta \wedge d\eta + \int_{S^3} \eta \wedge df^*\theta + \int_{S^3} f^*\theta \wedge d\eta + \int_{S^3} \underbrace{f^*(\theta \wedge d\theta)}_{=0} \\ &= \int_{S^3} \eta \wedge d\eta + \int_{S^3} \eta \wedge df^*\theta + \int_{S^3} \underbrace{f^*(\theta \wedge \omega)}_{=0} \\ &= \int_{S^3} \eta \wedge d\eta - \int_{S^3} d(\eta \wedge f^*\theta) + \int_{S^3} d\eta \wedge f^*\theta \\ &= \int_{S^3} \eta \wedge d\eta - \underbrace{\int_{\partial S^3} \eta \wedge f^*\theta}_{=0 \text{ Stokes}} + \int_{S^3} \underbrace{f^*(\omega \wedge \theta)}_{=0} = \int_{S^3} \eta \wedge d\eta. \end{aligned}$$

□

Lemma 261. *Homotope Abbildungen $f_0, f_1 : S^3 \rightarrow S^2$ haben dieselbe Hopfinvariante.*

Beweis. Sei $F : S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^2$ eine Homotopie. Dann ist

$$dF^*\omega = F^*d\omega = 0,$$

und weil $H^2(S^3) \times [0, 1] \cong H^2(S^3) = 0$ gibt es $\tilde{\eta} \in \Omega^1(S^3)$ mit

$$d\tilde{\eta} = F^*\omega.$$

Dafür gilt einerseits

$$\int_{S^3} d(\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}) = \int_{S^3} d\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta} = \int_{S^3} F^*(\underbrace{\omega \wedge \omega}_{=0}) = 0.$$

Andrerseits liefert $\tilde{\eta}$ eingeschränkt auf die berandenden S^3 eine 1-Form wie in der Definition der Hopfinvariante, und deshalb ist nach dem Satz von Stokes

$$\int_{S^3} d(\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}) = \int_{S^3 \times \{1\}} (\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}) - \int_{S^3 \times \{0\}} (\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}) = H(f_1) - H(f_0).$$

□

Offenbar hat eine konstante Abbildung Hopfinvariante 0. Wir zeigen nun im folgenden Beispiel $H(f) \neq 0$ für die dort angegebene Abbildung. Damit ist diese also nicht homotop zur Identität.

Beispiel 262. Wir betrachten den Raum der Quaternionen

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \text{Im } \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4.$$

Wir benutzen das normale Skalarprodukt auf \mathbb{R}^4 und $\mathbb{R}^3 := \text{Im } \mathbb{H}$ und die Identität

$$xy = x \times y - \langle x, y \rangle \quad \text{für } x, y \in \text{Im } \mathbb{H}.$$

Für $x \in S^3$ und $v \in \text{Im } \mathbb{H}$ ist dann $\langle x, xv \rangle = 0$, also $xv \in T_x S^3$. Die Abbildung f , die wir untersuchen wollen, sei die bereits früher betrachtete:

$$f : S^3 \rightarrow S^2, \quad x \mapsto xix^{-1}.$$

Wir wählen $\omega \in \Omega^2(S^2)$ als

$$\omega_x := \det(x, \cdot, \cdot).$$

Dann ist $\int_{S^2} \omega = 4\pi$ und wir erhalten $4\pi H(f)$.

Zur Berechnung von $f^*\omega$ brauchen wir df . Es ist für $v \in \text{Im } \mathbb{H}$

$$d_x f(xv) = xvi x^{-1} - xix^{-1}xvx^{-1} = x(vi - iv)x^{-1} = 2x(v \times i)x^{-1}$$

und daher

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_x(xv, xw) &= 4 \det(xix^{-1}, x(v \times i)x^{-1}, x(w \times i)x^{-1}) \\ &= 4 \det(i, v \times i, w \times i) = 4 \det(i, v, w) \end{aligned}$$

Wir schreiben das noch etwas um: Es gilt

$$\det(i, v, w) = \langle j, v \rangle \langle k, w \rangle - \langle j, w \rangle \langle k, v \rangle = (\langle j, \cdot \rangle \wedge \langle k, \cdot \rangle)(v, w)$$

und daher

$$(f^*\omega)_x(xv, xw) = 4(\langle xj, . \rangle \wedge \langle xk, . \rangle)(xv, xw)$$

oder

$$(f^*\omega)_x = 4\langle xj, . \rangle \wedge \langle xk, . \rangle$$

Jetzt suchen wir eine Form $\eta \in \Omega^1(S^3)$ mit $D\eta = f^*\omega$. Das Einfachste ist probieren. Wir setzen

$$\eta_x := -2\langle xi, . \rangle$$

Dafür finden wir

$$\begin{aligned} (d\eta)_x(xv, xw) &= -2(\partial_{xv}\langle xi, . \rangle(xw) - \partial_{xw}\langle xi, . \rangle(xv)) \\ &= -2(\langle xvi, xw \rangle - \langle xwi, xv \rangle) \\ &= -2(\langle vi, w \rangle - \langle wi, v \rangle) \\ &= -2(\langle v \times i, w \rangle - \langle w \times i, v \rangle) \\ &= 4 \det(i, v, w) \\ &= (f^*\omega)_x(xv, xw). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$4\pi H(f) = -8 \int_{S^3} \langle xi, . \rangle \wedge \langle xj, . \rangle \wedge \langle xk, . \rangle = -8 \int_{S^3} \det(x, ., ., .) = -8 \text{Volumen}(S^3) \neq 0.$$

□

ENDE