Differentialtopologie

Stefan Haller

Inhaltsverzeichnis

Dies ist die Version vom 30. Januar 2006. Die aktuelle Version findet sich auf meiner Homepage `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/teach.html`.

1. Topologische Mannigfaltigkeiten

1.1. Lokal Euklidische Räume. Ein topologischer Raum heißt *lokal Euklidisch* wenn jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt die homöomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ ist, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Äquivalent dazu ist die Forderung, dass der Raum lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist. Dieses n kann natürlich von Punkt zu Punkt variieren, wie man am Beispiel der disjunkten Vereinigung $\mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^m$ beobachten kann. Ist allerdings U eine offene Umgebung von x die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, und ist V eine offene Umgebung von demselben Punkt x die homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist, dann muss $n = m$ gelten. Dies folgt sofort aus dem folgenden Satz über die *Invarianz der Domäne.* Ein Beweis dieses nicht trivialen Satzes findet sich zum Beispiel in [**SZ88**, Satz 1.1.16] oder [**H02**, Theorem 2B.3].

Satz 1.1.1 (Brouwer). *Sind U und V zwei homöomorphe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und ist U offen, dann ist auch V offen.*

In einem lokal Euklidischen Raum X kann man daher jedem Punkt $x \in X$ eine Zahl $\dim_x(X) \in \mathbb{N}$ zuordnen, indem man eine offene Umgebung U von x wählt die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, und $\dim_x(X) := n$ setzt. Wegen Satz 1.1.1 ist dies wohldefiniert und heißt die *Dimension* von X bei x. Die Abbildung $\dim(X) : X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_x(X)$ ist lokal konstant, also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X. Wir werden uns bald auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten einschränken, und für diese ist die Definition der Dimension elementar, siehe Abschnitt 2.1.

Ein lokal Euklidischer Raum ist *lokal wegzusammenhängend,* d.h. jeder Punkt besitzt eine Basis aus wegzusammenhängenden Umgebungen. Die Wegzusammenhangskomponenten sind daher stets offen und abgeschlossen, und stimmen mit den *Zusammenhangskomponenten* überein. Der Raum ist homöomorph zur disjunkten Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.

Ein lokal Euklidischer Raum erfüllt das *Trennungsaxiom* T_1, d.h. sind $x \neq y$ zwei Punkte dann gibt es eine Umgebung U von x mit $y \notin U$. Äquivalent, die einpunktigen Teilmengen sind abgeschlossen. Ein lokal Euklidischer Raum ist im Allgemeinen aber nicht *Hausdorff,* wie das folgende Beispiel zeigt. Sei $Z = \{+, -\}$ eine zwei elementige Menge mit der diskreten Topologie. Betrachte $\tilde{X} := \mathbb{R} \times Z$ mit folgender Äquivalenzrelation: $(x, +) \sim (y, -)$ genau dann wenn $x = y \neq 0$. Bezeichne mit X den Raum der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie. Man sieht leicht, dass X lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Allerdings ist X nicht Hausdorff, da jede Umgebung von $(0, +)$ nicht-leeren Durchschnitt mit jeder Umgebung von $(0, -)$ hat.

Ein lokal Euklidischer Hausdorff Raum X genügt dem Trennungsaxiom $T_{3\frac{1}{2}}$ und ist daher *vollständig regulär.* Wir erinnern uns, dass ein Raum das Trennungsaxiom $T_{3\frac{1}{2}}$ erfüllt falls für jede abgeschlossene Menge A und jeden Punkt $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existiert, sodass $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für alle $y \in A$ gilt. Um soeine Funktion zu konstruieren wählt man eine offene Umgebung U von x und einen Homöomorphismus $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap A = \emptyset$ und $\varphi(x) = 0$. Wegen der Hausdorff Eigenschaft ist die kompakte Teilmenge $K := \varphi^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\})$ auch abgeschlossen, also $V := X \setminus K$ offen in X, und daher die Funktion

$$f : X \to [0, 1], \quad f(y) := \begin{cases} \max\{0, 1 - |\varphi(y)|\} & \text{falls } y \in U \\ 0 & \text{falls } y \in V \end{cases}$$

stetig. Klarerweise erfüllt sie auch alle anderen geforderten Eigenschaften. Eine wesentliche Eigenschaft vollständig regulärer Räume ist, dass ihre Topolgie durch die Menge der stetigen Funktionen $C(X, [0, 1])$ bestimmt ist. Genauer, die offenen Mengen $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, $f \in C(X, [0, 1])$, bilden eine Basis der Topologie, also stimmt die Topologie von X mit der gröbsten Topologie für die alle diese Funktionen stetig sind überein. Wir werden dies im Beweis von Satz 1.1.2 unten verwenden.

Ein lokal Euklidischer Raum ist lokal kompakt, d.h. jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung und damit auch eine Basis aus kompakten Umgebungen.

Ein lokal Euklidischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom,* d.h. jeder Punkt besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis. Im Allgemeinen wird ein lokal Euklidischer Raum aber nicht das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* erfüllen. Jede überabzählbare disjunkte Vereinigung lokal Euklidischer Räume ist wieder lokal Euklidisch, erfüllt aber trivialerweise nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Die *lange Linie* ist ein subtileres Beispiel eines *zusammenhängenden* lokal Euklidischen Hausdorff Raums der nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sie kann wie folgt konstruiert werden, siehe [**SS78**, Beispiel 46].

Sei A eine überabzählbare Menge und $\leq$ eine Wohlordnung auf A, d.h. die Relation $\leq$ ist reflexsiv, antisymmetrisch und transitiv, es gilt stets $\alpha \leq \beta$ oder $\beta \leq \alpha$, und jede nichtleere Teilmenge besitzt ein kleinstes Element. Nach einem Satz von Zermelo läßt sich jede Menge wohlordnen, siehe zum Beispiel [**J94**, Letztes Kapitel]. Auch dürfen wir annehmen, dass A ein größtes Element besitzt, da man ja einfach ein größtes Element hinzufügen kann, ohne die Wohlordnung zu stören. Bezeichne mit $\mathfrak{o}$ das kleinste Element von A. Bezeichne mit ω_1 das kleinste Element von A für das das Intervall $[\mathfrak{o}, \omega_1) := \{\alpha \in A \mid \mathfrak{o} \leq \alpha < \omega_1\}$ überabzählbar ist. Auf $R := [\mathfrak{o}, \omega_1) \times [0, 1)$ definieren wir eine lexikographische Ordnung durch $(\alpha, s) \leq (\beta, t)$ genau dann wenn $\alpha \leq \beta$ und falls $\alpha = \beta$ zusätzlich $s \leq t$. Wir versehen R mit der Ordnungstopologie, d.h. die Intervalle $(x, y) := \{z \in R \mid x < z < y\}$ bilden eine Basis der Topologie. Der Raum R heißt der *lange Strahl* und kann als Aneinanderfügung von überabzählbar vielen Intervallen $[0, 1)$ verstanden werden, ähnlich wie die Halbgerade $[0, \infty)$, die ja durch Aneinanderfügung abzählbar vieler solcher Intervalle entsteht. Die *lange Linie* ist nun der Raum $L := R \setminus \{(\mathfrak{o}, 0)\}$. Klarerweise ist R, und damit auch L, Hausdorff. Wir werden gleich sehen, dass für jedes $\alpha \in [\mathfrak{o}, \omega_1)$ das Intervall $[(\mathfrak{o}, 0), (\alpha, 1)) \subseteq R$ homöomorph zum halboffenem Einheitsintervall $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist. Es folgt dann, dass L lokal Euklidisch und zusammenhängend ist. Da $[\mathfrak{o}, \omega_1)$ überabzählbar ist, erfüllt L nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Auch ist L weder parakompakt noch metrisierbar, siehe Satz 1.1.2 unten.

Um einen Homöomorphismus $[(\mathfrak{o}, 0), (\alpha, 1)) \cong [0, 1)$ zu konstruieren, bemerken wir zuerst, dass für jedes $\alpha \in [\mathfrak{o}, \omega_1)$ das Intervall $[\mathfrak{o}, \alpha+1]$ höchstens abzählbar viele Elemente enthählt. Hier bezeichnet $\alpha + 1$ den *Nachfolger* von α, d.h. das kleineste aller Elemente von $[\mathfrak{o}, \omega_1)$ das größer als α ist. Wähle eine Bijektion $\mathbb{N} \to [\mathfrak{o}, \alpha + 1]$, $n \mapsto \beta_n$, mit $\beta_0 = \mathfrak{o}$, $\beta_1 = \alpha + 1$. Hat $[\mathfrak{o}, \alpha + 1]$ nur endlich viele Elemente ersetzte man $\mathbb{N}$ durch $\{0, 1, \dots, N\}$ für geeignetes $N \in \mathbb{N}$. Definiere induktiv eine Abbildung $\varphi : [\mathfrak{o}, \alpha + 1] \to [0, 1]$ mit $\varphi(\beta_0) = 0$, $\varphi(\beta_1) = 1$ und

$$\varphi(\beta_n) = \tfrac{1}{2}\Big(\varphi\big(\max\{\beta_i \mid i < n, \beta_i < \beta_n\}\big) + \varphi\big(\min\{\beta_i \mid i < n, \beta_i > \beta_n\}\big)\Big) \qquad (1)$$

für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Dann ist φ strikt ordnungerhaltend. Man sagt ein Element hat *keinen Vorgänger* falls es nicht von der Form $\gamma + 1$ ist. Für die eben konstruierte

Abbildung φ gilt auch

$$\text{hat } \gamma \in (\mathfrak{o}, \alpha+1] \text{ keinen Vorgänger dann ist } \sup\{\varphi(\rho) \mid \rho < \gamma\} = \varphi(\gamma). \tag{2}$$

Letzteres folgt leicht aus (1) und der Tatsache, dass für γ ohne Vorgänger und $\rho < \gamma$ das Intervall $[\rho, \gamma)$ stets unendlich viele Elemente enthält, andernfalls existierte ein maximales Element in $[\rho, \gamma)$ das dann der Vorgänger von γ sein müßte. Definiere

$$\tilde{\varphi} : [(\mathfrak{o}, 0), (\alpha, 1)) \to [0, 1), \quad \tilde{\varphi}((\rho, t)) := (1-t)\varphi(\rho) + t\varphi(\rho+1). \tag{3}$$

Dann ist (3) strikt ordnungserhaltend, insbesondere injektiv. Es ist aber auch surjektiv, denn $\tilde{\varphi}((\mathfrak{o}, 0)) = 0$, und ist $x \in (0, 1)$ und ρ das kleinste Element mit $x < \varphi(\rho)$ dann existiert wegen (2) ρ' mit $\rho' + 1 = \rho$, daher $\varphi(\rho') \leq x < \varphi(\rho'+1)$ und damit $x \in \tilde{\varphi}(\{\rho'\} \times [0, 1))$. Also ist (3) eine ordnungserhaltende Bijektion, und damit ein Homöomorphismus.

Satz 1.1.2. *Für einen lokal Euklidischen Hausdorff Raum sind äquivalent:*

(i) *Jede Zusammenhangskomponente besitzt eine kompakte Ausschöpfung, d.h. es existiert eine Überdeckung mit kompakten Teilmengen $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sodass $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Jede Zusammenhangskomponente ist σ-kompakt, d.h. ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.*

(iii) *Jede Zusammenhangskomponente ist Lindelöf, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.*

(iv) *Jede Zusammenhangskomponente genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, d.h. besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.*

(v) *Der Raum ist vollständig metrisierbar, d.h. es gibt eine Metrik die die Topologie induziert und deren Cauchy Folgen alle konvergieren.*

(vi) *Der Raum ist metrisierbar, d.h. es gibt eine Metrik die die Topologie induziert.*

(vii) *Der Raum ist parakompakt, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung.*

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii) Dies ist trivial.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Jeder σ-kompakte Raum ist Lindelöf. Ist nämlich $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung, und $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung mit kompakten Mengen, dann wird jedes K_n schon von endlich vielen $U_n^1, \dots, U_n^{k_n} \in \mathcal{U}$ überdeckt, und $\{U_n^i \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n\}$ bildet eine abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Jeder Lindelöf Raum der lokal das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt genügt selbst dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. Dies erlaubt nämlich eine abzählbare offene Überdeckung $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu wählen, sodass jedes U_n das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Ist jetzt $\{V_n^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie von U_n, dann ist $\{V_n^k\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie des ganzen Raumes.

(iv)$\Rightarrow$(vi) Da die disjunkte Vereinigung metrisierbarer Räume wieder metrisierbar ist genügt es jede Zusammenhangskomponente zu metrisieren. Sei also X ein zusammenhängender lokal Euklidischer Hausdorff Raum mit abzählbarer Basis. Wir werden X in das abzählbare Produkt von Einheitsintervallen $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ einbetten. Da letzteres metrisierbar ist, ist dann auch X als Teilraum eines metrischen Raumes metrisierbar. Eine Metrik auf $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$ die die Produkttopologie erzeugt ist durch

$$d\big((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)\big) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|y_n - x_n|$$

gegeben.

Um die gewünschte Einbettung zu konstruieren, erinnern wir uns, dass die offenen Mengen $U_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, $f \in C(X, [0,1])$, eine Basis der Topologie von X bilden. Sei $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Für jedes Paar $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ für das $f \in C(X, [0,1])$ mit $V_k \subseteq U_f \subseteq V_l$ existiert wähle eine solche Funktion. Wir erhalten so abzählbar viele Funktionen $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Es ist $\{U_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie, denn ist $U \subseteq X$ offen und $x \in U$, dann existiert $l \in \mathbb{N}$ mit $x \in V_l \subseteq U$, $f \in C(X, [0,1])$ mit $x \in U_f \subseteq V_l$, und $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in V_k \subseteq U_f$, also existiert auch $n \in \mathbb{N}$ mit $V_k \subseteq U_{f_n} \subseteq V_l$ und daher $x \in U_{f_n} \subseteq U$.

Definiere nun eine Abbildung

$$\iota : X \to \textstyle\prod_{\mathbb{N}} [0,1], \quad \iota(x) := \big(f_0(x), f_1(x), \dots\big). \tag{4}$$

Da jede Komponente stetig ist, ist auch (4) stetig. Da X dem Trennungsaxiom T_1 genügt und $\{U_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie bildet ist (4) injektiv. Die Menge $W_n := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \neq 0\}$ ist offen in $\prod_{\mathbb{N}}[0,1]$, daher ist auch $\iota(U_{f_n}) = \iota(X) \cap W_n$ offen in $\iota(X)$. Also bildet (4) die offenen Mengen U_{f_n} auf offene Mengen in $\iota(X)$ ab. Da $\{U_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie ist, gilt dies für beliebige offene Mengen. Damit ist (4) ein Homöomorphismus auf sein Bild, also eine Einbettung.

(vi)⇒(vii) Nach einem Satz von A.H. Stone ist jeder metrische Raum parakompakt. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [**S69**, Kapitel I.8.7]. Wir folgen dem kürzeren Beweis in [**O69**]. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offen Überdeckung des metrischen Raums (X, d). Wähle eine Wohlordnung $\leq$ auf A. Bezeichne mit $B_x(r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ den offenen Ball um x mit Radius r. Für $\alpha \in A$ und $x \in U_\alpha$ sei $n_\alpha^x \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, sodass $B_x(2^{-n_\alpha^x}) \subseteq U_\alpha$. Sei S_α die Menge der $x \in U_\alpha$ für die $\beta < \alpha$ mit $B_x(2^{-n_\alpha^x}) \subseteq U_\beta$ existiert. Setze

$$V_\alpha := U_\alpha \setminus \overline{\bigcup_{x \in S_\alpha} B_x(2^{-(n_\alpha^x + 1)})}.$$

Dann ist V_α offen und in U_α enthalten. Auch bildet $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von X. Sei dazu $x \in X$ und $\alpha \in A$ das kleinste Element mit $x \in U_\alpha$. Dann gilt:

$$B_x(2^{-(n_\alpha^x+2)}) \cap B_y(2^{-(n_\alpha^y+1)}) \neq \emptyset \Rightarrow 2^{-(n_\alpha^x+2)} \leq 2^{-(n_\alpha^y+1)}. \tag{5}$$

Um dies einzusehen unterscheiden wir zwei Fälle. Für $y \notin B_x(2^{-(n_\alpha^x+1)})$ gilt offensichtlich $2^{-(n_\alpha^x+2)} \leq 2^{-(n_\alpha^y+1)}$, denn sonst wäre $B_x(2^{-(n_\alpha^x+2)}) \cap B_y(2^{-(n_\alpha^y+1)}) = \emptyset$. Im anderen Fall, $y \in B_x(2^{-(n_\alpha^x+1)})$, gilt $B_y(2^{-(n_\alpha^x+1)}) \subseteq B_x(2^{-n_\alpha^x}) \subseteq U_\alpha$, und daher $n_\alpha^y \leq n_\alpha^x + 1$ wegen der Minimalität von n_α^y. Aus (5) folgt sofort

$$B_x(2^{-(n_\alpha^x+2)}) \cap B_y(2^{-(n_\alpha^y+1)}) \neq \emptyset \Rightarrow x \in B_y(2^{-n_\alpha^y}). \tag{6}$$

Aus (6) und der Minimalität von α schließen wir

$$\forall y \in S_\alpha : B_x(2^{-(n_\alpha^x+2)}) \cap B_y(2^{-(n_\alpha^y+1)}) = \emptyset. \tag{7}$$

Aus (7) folgt $x \notin \overline{\bigcup_{y \in S_\alpha} B_y(2^{-(n_\alpha^y+1)})}$ und daher $x \in V_\alpha$. Also ist $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Verfeinerung von $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Die Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist zwar nicht notwendigerweise lokal endlich, aber jeder Punkt $x \in X$ ist in höchstens endlich vielen V_α enthalten. Sei dazu $n_0 \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl sodass $\alpha \in A$ existiert mit $B_x(2^{-n_0}) \subseteq U_\alpha$. Für $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_n \in A$ das kleinste Element, sodass $B_x(2^{-n}) \subseteq U_{\alpha_n}$. Offensichtlich gilt für $n_0 \leq n \leq m$ auch $\alpha_m \leq \alpha_n$. Da die Menge $\{\alpha_n \mid n \geq n_0\} \subseteq A$ ein kleinstes Element besitzt muss sie also endlich sein. Wir behaupten jetzt, dass jedes $\alpha \in A$ für das $x \in V_\alpha$ gilt von der Form $\alpha = \alpha_n$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ ist. Es folgt dann, dass nur endlich viel V_α den Punkt x enthalten. Sei also $x \in V_\alpha$. Dann gilt klarerweise $B_x(2^{-n^x_\alpha}) \subseteq U_\alpha$. Für $\beta < \alpha$ muss aber $B_x(2^{-n^x_\alpha}) \nsubseteq U_\beta$ gelten, denn sonst wäre ja $x \in S_\alpha$ und damit $x \notin V_\alpha$. Also ist α das kleinste Element von A für das $B_x(2^{-n^x_\alpha}) \subseteq U_\alpha$ gilt. Es folgt $\alpha = \alpha_n$ mit $n = n^x_\alpha$.

Wir konstruieren eine lokal endliche Verfeinerung von $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ wie folgt. Für $x \in X$ sei

$$r_x := \tfrac{1}{2}\sup\bigl\{r \geq 0 \bigm| \exists \alpha \in A \text{ mit } B_x(r) \subseteq V_\alpha\bigr\}.$$

Für $\alpha \in A$ sei $T_\alpha \subseteq X$ die Menge aller $x \in X$ für die $B_x(r_x) \subseteq V_\alpha$ gilt, und α das kleinste Element von A mit dieser Eigenschaft ist. Setzte

$$W_\alpha := \bigcup_{x\in T_\alpha} B_x(r_x/2).$$

Dann ist jedes W_α offen und in V_α enthalten. Auch bildet $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung von X, denn ist $x \in X$ dann existiert $r > r_x$ und $\alpha \in A$ mit $B_x(r) \subseteq V_\alpha$. Insbesondere existiert ein kleinstes $\alpha \in A$ mit $B_x(r_x) \subseteq V_\alpha$, und es folgt $x \in T_\alpha \subseteq W_\alpha$. Auch ist $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lokal endlich. Da jeder Punkt $x \in X$ nur in endlich vielen V_α enthalten ist genügt es zu zeigen

$$W_\alpha \cap B_x(r_x/8) \neq \emptyset \Rightarrow x \in V_\alpha.$$

Sei also $y \in T_\alpha$ mit $B_y(r_y/2) \cap B_x(r_x/8) \neq \emptyset$. Wir behaupten $x \in B_y(r_y)$ und damit auch $x \in V_\alpha$. Indirekt angenommen $x \notin B_y(r_y)$. Wegen $B_y(r_y/2) \cap B_x(r_x/8) \neq \emptyset$ muss $r_x/8 \geq r_y/2$ und $y \in B_x(r_x/4)$ gelten. Es folgt dann $B_y(5r_y/2) \subseteq B_x(r_x)$ und daher $B_y(5r_y/2) \subseteq V_\beta$ für ein $\beta \in A$. Dies widerspricht aber der Definition von r_y. Also ist $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine lokal endliche Verfeinerung von $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ und damit auch eine lokal endliche Verfeinerung von $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

(vii)$\Rightarrow$(i) Jeder zusammenhängende parakompakte und lokal kompakte Raum besitzt eine kompakte Ausschöpfung. Wähle eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sodass jedes $\bar U_\alpha$ kompakt und nichtleer ist. Wähle $\alpha_0 \in A$ und setze $A_0 := \{\alpha_0\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere rekursiv Teilmengen $A_k \subseteq A$ durch

$$A_{k+1} := \bigl\{\alpha \in A \bigm| \exists \beta \in A_k : U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\bigr\}.$$

Da $\bar U_\beta$ kompakt und die Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lokal endlich ist, können nur endlich viele U_α nichtleeren Durchschnitt mit U_β haben. Daher sind alle A_k endlich. Bemerke, dass $A_k \subseteq A_{k+1}$. Betrachte jetzt $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in A_k} U_\alpha$. Als Vereinigung offener Mengen ist U offen. Ist $x \notin U$ dann finden wir $\alpha \in A$ sodass $x \in U_\alpha$, und es gilt $U_\alpha \cap U = \emptyset$, andernfalls fänden wir nämlich $k \in \mathbb{N}$ und $\beta \in A_k$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, also $\alpha \in A_{k+1}$ und $x \in U$. Also ist U auch abgeschlossen und stimmt daher mit dem ganzen Raum überein. Daher bilden $K_n := \bigcup_{\alpha\in A_n} \bar U_\alpha$ eine kompakte Überdeckung. Es gilt tatsächlich $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$, denn ist $x \in K_n$ dann existiert $\alpha \in A$ sodass $x \in U_\alpha$, und $\beta \in A_n$ mit $x \in \bar U_\beta$, also $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, daher $\alpha \in A_{n+1}$ und $x \in \bigcup_{\alpha\in A_{n+1}} U_\alpha \subseteq \mathring{K}_{n+1}$.

(v)$\Rightarrow$(vi) Dies ist trivial.

(vi)$\Rightarrow$(v) Sei X ein lokal Euklidischer Hausdorff Raum mit Metrik d. Da die disjunkte Vereinigung von vollständig metrischen Räumen wieder vollständig metrisch ist dürfen wir X zusammenhängend annehmen. Betrachte den Raum $X \times \mathbb{R}$ mit Metrik $d'((x,s),(y,t)) := \max\{d(x,y), |t-s|\}$. Wir werden unten eine propere Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konstruieren, d.h. für kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}$ ist auch $f^{-1}(K)$

kompakt. Da $\iota : X \to X \times \mathbb{R}$, $\iota(x) := (x, f(x))$, eine Einbettung ist, induziert die Metrik $d''(x,y) := d'(\iota(x), \iota(y))$ die Topologie von X. Sie ist auch vollständig, denn ist x_n eine Cauchy Folge bezüglich d'' dann ist $f(x_n)$ beschränkt, wegen der Properheit von f liegt die Folge x_n daher in einer kompakten Teilmenge von X, muss also konvergieren.

Um eine propere Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ zu konstruieren, wählen wir eine kompakte Aussschöpfung $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, siehe (i). Für $n \in \mathbb{N}$ sind K_n und $X \setminus \mathring{K}_{n+1}$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Da metrische Räume normal sind, ist das Lemma von Uryson, siehe etwa [**S69**, Satz 1 in Kapitel I.8.4] oder [**J94**, Kapitel 8.1], anwendbar, und wir finden stetige Funktionen $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n|_{K_n} = 0$ und $f_n|_{X\setminus\mathring{K}_{n+1}} = 1$. Dann ist $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ eine lokal endliche Summe und daher $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sie ist proper, da $f^{-1}([n,n]) \subseteq K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Definition 1.1.3 (Topologische Mannigfaltigkeiten). Eine *topologische Mannigfaltigkeit*, ist ein lokal Euklidischer parakompakter Hausdorff Raum.

Nach Satz 1.1.2 kann eine topologische Mannigfaltigkeit äquivalent als metrisierbarer lokal Euklidischer Raum definiert werden.

Ist M eine topologische Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen, dann ist U eine topologische Mannigfaltgkeit. Ist $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Familie von topologischen Mannigfaltigkeiten, dann ist auch ihre disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{\alpha\in A} M_\alpha$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Das Produkt zweier topologischer Mannigfaltigkeiten ist wieder eine topologische Mannigfaltigkeit. Jede Überlagerung einer topologischen Mannigfaltigkeit ist wieder eine topologische Mannigfaltgkeit. Die Parakompaktheit der Überlagerung kann wie folgt eingesehen werden. Sei $\pi : \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung einer topologischen Mannigfaltigkeit, und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $\tilde{M}$. Wegen der Überlagerungseigenschaft und weil M parakompakt ist gibt es eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von M sodass für alle $V \in \mathcal{V}$ die offene Teilmenge $\pi^{-1}(V) \subseteq \tilde{M}$ homöomorph zu $V \times \Lambda_V$ mit diskretem Λ_V ist. Mit V ist daher auch $\pi^{-1}(V)$ parakompakt. Also existiert eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{U}_V$ der offenen Überdeckung $\{U \cap \pi^{-1}(V) \mid U \in \mathcal{U}\}$ von $\pi^{-1}(V)$. Dann ist $= \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \mathcal{U}_V$ eine offene Überdeckung von $\tilde{M}$ die $\mathcal{U}$ verfeinert, und es ist leicht einzusehen, dass sie auch lokal endlich ist. Also ist $\tilde{M}$ parakompakt.

Jeder Raum der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt ist *separabel,* d.h. besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge. Ist nämlich $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie und $x_n \in U_n$, dann ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht. Nach Satz 1.1.2(iv) ist also jede Zusammenhangskomponente einer topologischen Mannigfaltigkeit separabel. Eine topologische Mannigfaltigkeit ist genau dann separabel wenn sie höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt, und dies ist genau dann der Fall wenn sie dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt. In der Literatur [**BJ73, J94, D76**] wird von topologische Mannigfaltigkeiten manchmal auch Separabilität gefordert, man beschränkt sich dann also auf höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Verlangt man zusätzlich noch, dass die Dimension beschränkt ist, erhält man genau jene Mannigfaltigkeiten die sich in einen $\mathbb{R}^N$ einbetten lassen, vgl. Satz 1.3.2. Schließlich sei hier noch erwähnt, dass Separabilität alleine nicht ausreicht. In [**R90**] findet sich ein Beispiel eines 2-dimensionalen zusammenhängenden separablen lokal Euklidischen Hausdorff Raumes, der nicht dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt und daher keine topologische Mannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.1.3 darstellt.

Die Bedeutung der Parakompaktheit in Definition 1.1.3 besteht darin, dass sie es erlaubt gewisse globale Aussagen auf lokale zurückzuführen. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei sind *Zerlegungen der Eins.* Eine Familie von stetigen Funktion $\{\lambda_\alpha : M \to [0,1]\}_{\alpha\in A}$ heißt Zerlegung der Eins falls die *Träger*

$$\operatorname{supp}\lambda_\alpha := \overline{\{x \in M \mid \lambda_\alpha(x) \neq 0\}}$$

eine lokal endliche Familie $\{\operatorname{supp}\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ bilden, und für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(x) = 1.$$

Sie heißt einer gegebenen Überdeckung $\mathcal{U}$ *untergeordnet* falls für jedes $\alpha \in A$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert sodass $\operatorname{supp}\lambda_\alpha \subseteq U$. Ein Beweis des folgenden elementaren Resultats aus der mengentheoretischen Topologie findet sich zum Beispiel in [**J94**, Kapitel VIII §5] oder [**S69**, Kapitel I.8.6].

Satz 1.1.4. *Ein Hausdorff Raum ist genau dann parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins besitzt.*

Man bemerke, dass die eine Richtung von Satz 1.1.4 trivial ist. Ist nämlich $\mathcal{U}$ eine offen Überdeckung und $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine untergeorndete Zerlegung der Eins, dann ist $\{\lambda_\alpha \neq 0\}_{\alpha\in A}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Für topologische Mannigfaltigkeiten werden wir die Existenz untergeordneter Zerlegungen der Eins in Abschnitt 2.4 zeigen, siehe Satz 2.4.1.

1.2. Beispiele topologischer Mannigfaltigkeiten. Als erstes Beispiel einer topologischen Mannigfaltigkeit ist natürlich $\mathbb{R}^n$ zu nennen. Aber auch alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind topologische Mannigfaltigkeiten. Zum Beispiel kann

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) := \big\{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \bigm| \det A \neq 0\big\}$$

als offene Menge in $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefaßt werden indem man lineare Abbildungen mit Matrizen identifiziert. Also ist $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine n^2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Sie hat zwei Zusammenhangskomponenten, $\mathrm{GL}^+(\mathbb{R}^n) := \{A \mid \det A > 0\}$ und $\mathrm{GL}^-(\mathbb{R}^n) := \{A \mid \det A < 0\}$. Genauso ist

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) := \big\{A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \bigm| \det A \neq 0\big\}$$

eine $4n^2$-dimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit.

Die *Sphäre* mit der Spurtopologie

$$S^n := \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| \|x\| = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

ist eine kompakte zusammenhängende n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die *stereographischen Projektionen* liefern lokale Homöomorphismen mit $\mathbb{R}^n$. Genauer, ist $N := (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ der *Nordpol* dann ist

$$S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \dots, x_n)$$

ein Homöomorphismus. Genauso ist

$$S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \dots, x_n)$$

ein Homöomorphismus, wo $S := (-1, 0, \dots, 0) \in S^n$ den *Südpol* bezeichnet.

Der *reelle projektive Raum* mit der Quotiententopologie

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)/\sim$$

ist eine zusammenhängende kompakte n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Für $0 \leq i \leq n$ ist nämlich

$$U_i := \big\{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \bigm| x_i \neq 0\big\} \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$$

offen und

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_i\big([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]\big) := \big(\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}\big)$$

ein Homöomorphismus. Beispielsweise ist $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ homöomorph zu S^1.

Der *komplexe projektive Raum* mit der Quotiententopologie

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0)/\!\sim$$

ist eine kompakte, zusammenhängende $2n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Für $0 \leq i \leq n$ ist nämlich

$$U_i := \big\{[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \bigm| z_i \neq 0\big\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$$

offen und

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_i\big([z_0 : z_1 : \cdots : z_n]\big) := \big(\tfrac{z_0}{z_i}, \dots, \tfrac{z_{i-1}}{z_i}, \tfrac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \tfrac{z_n}{z_i}\big)$$

ein Homöomorphismus. Beispielsweise ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ homöomorph zu S^2.

1.3. Einbettungen in $\mathbb{R}^N$. Wir wollen hier noch folgendes elementare Einbettungsresultat beweisen.

Satz 1.3.1. *Jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit läßt sich in $\mathbb{R}^N$ für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ einbetten.*

Beweis. Sei M eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit. O.B.d.A. sei $n := \dim(M)$. Für jeden Punkt $x \in M$ wähle eine offene Umgebung U_x von x und einen Homöomorphismus $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$. Da M kompakt ist, finden wir endlich viel $x_1, \dots, x_m \in M$, sodass die offenen Mengen $V_i := \varphi_{x_i}^{-1}(B^n)$, $1 \leq i \leq m$, schon M überdecken. Hier bezeichnet $B^n := \big\{z \in \mathbb{R}^n \bigm| \|z\| < 1\big\}$ den offenen Einheitsball in $\mathbb{R}^n$. Betrachte die stetige Funktion $\lambda : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $\lambda(z) := \max\{0, 1 - \|z\|\}$. Für $1 \leq i \leq m$ ist dann

$$f_i : M \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad f_i(x) := \begin{cases} \big(\varphi_i(x)\lambda(\varphi_i(x)), \lambda(\varphi_i(x))\big) & \text{falls } x \in U_{x_i} \\ 0 & \text{falls } x \notin U_{x_i} \end{cases}$$

stetig. Weiters ist $f_i|_{V_i} : V_i \to \mathbb{R}^{n+1}$ injektiv, und es gilt $f_i(x) \neq 0$ genau dann wenn $x \in V_i$. Daher ist $F := (f_1, \dots, f_m) : M \to \mathbb{R}^{m(n+1)}$ stetig und injektiv. Da M kompakt ist, muss F ein Homöomorphismus auf sein Bild sein. Damit ist M in $\mathbb{R}^N$ mit $N := m(n+1)$ eingebettet. $\square$

Allgemeiner gilt der folgender Satz, den wir hier aber nicht beweisen wollen. Ein analoges Resultat für differenzierbare Mannigfaltigkeiten werden wir ausführlich in Kapitel 4 behandeln.

Satz 1.3.2. *Jede n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten läßt sich abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten.*

1.4. Topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand. Bezeichne mit
$$H^n := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_1 \geq 0\big\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
den abgeschlossenen *Halbraum.* Wir können $\mathbb{R}^{n-1}$ als abgeschlossene Teilmenge $\big\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = 0\big\}$ von H^n auffassen. Wir bemerken noch, dass $H^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Ein expliziter Homöomorphismus ist zum Beipiel durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\ln(x_1), x_2, \dots, x_n)$ gegeben.

Definition 1.4.1 (Topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand). Eine *topologische Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein parakompakter Hausdorff Raum der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ oder H^n ist.

Äquivalent kann eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand auch als parakompakter Hausdorff Raum der lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge von H^n ist definiert werden. D.h. für jeden Punkt x gibt es eine Umgebung U von x und einen Homöomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq H^n$ sodass $\varphi(U) \subseteq H^n$ offen ist.

Definition 1.4.2 (Geschlossene Mannigfaltigkeiten). Eine topologische Mannigfaltigkeit heißt *geschlossen* falls sie kompakt und randlos ist.

Satz 1.1.2 bleibt für Hausdorff Räume die lokal zu $\mathbb{R}^n$ oder H^n homöomorph sind richtig. Jede offene Teilmenge einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand ist wieder eine topologische Mannigfaltigkeit mir Rand. Ist $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Mannigfaltigkeiten mit Rand, dann ist auch ihre disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Auch das Produkt zweier topologischer Mannigfaltigkeiten mit Rand ist wieder eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dies folgt aus der Tatsache, dass $H^n \times H^m$ homöomorph zu H^{n+m} ist. Ein expliziter Homöomorphismus ist durch
$$H^n \times H^m \to H^{n+m}$$
$$\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)\big) \mapsto (x_1 y_1, x_2, \dots, x_n, y_1 - x_1, y_2, \dots, y_m)$$
gegeben. Jede Überlagerung einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand ist wieder eine solche.

Der *Rand* ∂M einer topologischen Mannigfaltigkeit M mit Rand ist die Menge aller Punkte, die keine Umgebung besitzten die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Proposition 1.4.3. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ∂M eine topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand und eine abgeschlossene Teilmenge von M. Hat M Dimension n dann hat ∂M Dimension $n-1$.*

Beweis. Klarerweise ist ∂M eine abgeschlossene Teilmenge von M, insbesondere wieder parakompakt. Ist $U \subseteq M$ offen und $\varphi : U \to H^n$ ein Homöomorphismus dann muss $\varphi(\partial M \cap U) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ gelten. Aus Satz 1.1.1 folgt aber sogar $\varphi(\partial M \cap U) = \mathbb{R}^{n-1}$. Also ist $\varphi|_{\partial M \cap U} : \partial M \cap U \to \mathbb{R}^{n-1}$ ein Homöomorphismus und damit ∂M lokal Euklidisch. □

Wir werden uns bald auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten beschränken, für die werden wir Satz 1.1.1 nicht benötigen und bei der Behandlung des Randes mit dem Impliziten Funktionensatz das Auslangen finden.

Das einfachste Beispiel einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand ist wohl der Halbraum mit $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$. Ein anderes Beispiel liefert der abgeschlossene Einheitsball $\bar{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ mit $\partial \bar{B}^n = S^{n-1}$. Ist M eine topologische

Mannigfaltigkeit ohne Rand dann ist $M \times [0,1]$ eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, und $\partial(M \times [0,1]) = M \times \{0,1\}$. Ist M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, $U \subseteq M$ offen, und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphimus, dann ist $N := M \setminus \varphi^{-1}(B^n)$ eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, und $\partial N = \partial M \sqcup S^{n-1}$. Sie entsteht aus M durch *Herausbohren* eines offenen Balls.

Ist M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, dann heißt $\mathrm{Int}(M) := M \setminus \partial M$ das *Innere* von M.

Proposition 1.4.4. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist* $\mathrm{Int}(M)$ *eine topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Hat M Dimension n dann auch* $\mathrm{Int}(M)$*. Ist M zusammenhängend, dann auch* $\mathrm{Int}(M)$.

Beweis. Alles außer der letzten Behauptung ist offensichtlich. Um den Zusammenhang einzusehen sei $A \subseteq \mathrm{Int}(M)$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Zu zeigen ist $A = \mathrm{Int}(M)$. Betrachte den Abschluss $\bar{A} \subseteq M$. Dann gilt

$$A = \bar{A} \cap \mathrm{Int}(M) \quad \text{und daher auch} \quad \bar{A} \setminus A = \bar{A} \cap \partial M. \tag{8}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\bar{A} \subseteq M$ offen ist, denn dann folgt $\bar{A} = M$ und wegen (8) auch $A = \mathrm{Int}(M)$. Es genügt also zu zeigen, dass jeder Punkt von $\bar{A}$ innerer Punkt von $\bar{A} \subseteq M$ ist. Für die Punkte in A ist dies offensichtlich. Sei also $x \in \bar{A} \setminus A$. Wegen (8) finden wir eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von x die homöomorph zu H^n ist. Dann ist $U \cap \mathrm{Int}(M)$ homöomorph zu $H^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. Da letzteres zusammenhängend ist folgt $U \cap \mathrm{Int}(M) \subseteq A$. Da der Abschluss von $H^n \setminus \mathbb{R}^{n-1} \subseteq H^n$ mit H^n übereinstimmt folgt $U \subseteq \bar{A}$. Also ist auch x innerer Punkt von $\bar{A} \subseteq M$. □

Wie M in einer Umgebung von ∂M aussieht wird durch folgenden Satz geklärt. Ein elementarer Beweis findet sich etwa in [**B62**].

Satz 1.4.5. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Dann existiert eine offene Umgebung U von ∂M und ein Homöomorphismus $\varphi : \partial M \times [0,1) \to U$, sodass $\varphi(x,0) = x$ für alle $x \in \partial M$ gilt.*

Zuletzt sei hier noch eine Konstruktion erwähnt die es manchmal gestattet gewisse Eigenschaften topologischer Mannigfaltigkeiten mit Rand aus analogen Eigenschaften von topologischen Mannigfaltigkeiten ohne Rand zu folgern. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $Z := \{+,-\}$ eine zweielementige Menge mit der diskreten Topologie. Definiere eine Äquivalenzrelation auf $M \times Z$ durch $(x,+) \sim (y,-)$ falls $x = y \in \partial M$. Der Quotientenraum $DM := (M \times Z)/{\sim}$ heißt die *Verdoppelung* von M. Beispielsweise ist $D(H^n) \cong \mathbb{R}^n$, $D(\bar{B}^n) \cong S^n$, und für eine randlose Mannigfaltigkeit M gilt $D(M \times [0,\infty)) \cong M \times \mathbb{R}$.

Proposition 1.4.6. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist DM eine topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Es gibt zwei abgeschlossene Einbettungen $\iota_+, \iota_- : M \to DM$ die auf ∂M übereinstimmen und $\iota_+(M) \cup \iota_-(M) = DM$ erfüllen.*

Beweis. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Es ist leicht zu sehen, dass DM wieder Hausdorff und parakompakt ist. Wir haben stetige Abbildungen $\iota_+ : M \to DM$, $\iota_+(x) := [(x,+)]$ und $\iota_- : M \to DM$, $\iota_-(x) := [(x,-)]$ und $\iota := \iota_+|_{\partial M} = \iota_-|_{\partial M} : \partial M \to DM$. Alle drei sind Homöomorphismen auf ihr Bild, denn die Projektion $\pi : M \times Z \to M$ faktorisiert zu einer stetigen Abbildung $\bar{\pi} : DM \to M$ und es gilt $\bar{\pi} \circ \iota_+ = \bar{\pi} \circ \iota_- = \mathrm{id}_M$. Ihre Bilder sind abgeschlossene Teilmengen von DM und es gilt $\iota_+(M) \cap \iota_-(M) = \iota(\partial M)$.

Offensichtlich ist $DM \setminus \iota(\partial M) \cong \operatorname{Int}(M) \times Z$ lokal Euklidisch. Für $\iota(x) \in \iota(\partial M)$ kann man wie folgt vorgehen. Wähle eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von x und einen Homöomorphismus $\varphi : U \to H^n$. Definiere

$$\tilde{\varphi} : \iota_+(U) \cup \iota_-(U) \to \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{\varphi}(y) := \begin{cases} \varphi(\iota_+^{-1}(y)) & \text{falls } y \in \iota_+(M) \\ \tau(\varphi(\iota_-^{-1}(y))) & \text{falls } y \in \iota_-(M) \end{cases} \tag{9}$$

wobei $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau(x_1, \dots, x_n) := (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Beachte, dass dies wohl definiert und bijektiv ist, und $\iota_+(U) \cup \iota_-(U)$ eine offene Umgebung von $\iota(x) \in DM$ bildet. Da $\iota_+(U)$ und $\iota_-(U)$ abgeschlossen in $\iota_+(U) \cup \iota_-(U)$ sind, ist eine Menge $A \subseteq \iota_+(U) \cup \iota_-(U)$ genau dann abgeschlossen wenn $A \cap \iota_+(U) \subseteq \iota_+(U)$ und $A \cap \iota_-(U) \subseteq \iota_-(U)$ abgeschlossen sind. Gleiches gilt in $\mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen wenn $B \cap H^n \subseteq H^n$ und $B \cap \tau(H^n) \subseteq \tau(H^n)$ abgeschlossen sind. Da $\tilde{\varphi}|_{\iota_+(U)} = \varphi \circ \iota_+^{-1} : \iota_+(U) \to H^n$ und $\tilde{\varphi}|_{\iota_-(U)} = \tau \circ \varphi \circ \iota_-^{-1} : \iota_-(U) \to \tau(H^n)$ Homöomorphismen sind, folgt nun dass $A \subseteq \iota_+(U) \cup \iota_-(U)$ genau dann abgeschlossen ist wenn $\tilde{\varphi}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist. Daher ist (9) ein Homöomorphismus, und DM also eine topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. □

Will man Mannigfaltigkeiten mit Rand in $\mathbb{R}^N$ einbetten, kann man ähnlich vorgehen wie im Beweis von Satz 1.3.1. Alternativ, können wir aber auch die Verdoppelungskonstruktion nützen um folgendes Korollar aus Satz 1.3.1 zu erhalten.

Korollar 1.4.7. *Jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit mit Rand läßt sich in $\mathbb{R}^N$ für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ einbetten.*

Beweis. Sei M eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit und DM ihre Verdoppelung. Nach Proposition 1.4.6 ist DM eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, und M kann in DM eingebettet werden. Nach Satz 1.3.1 kann DM in $\mathbb{R}^N$ für geeignetes $N \in \mathbb{N}$ eingebettet werden. Die Komposition dieser beiden Einbettungen liefert die gewünschte Einbettung von M. □

Genauso erhält man aus Satz 1.3.2

Korollar 1.4.8. *Jede n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand die höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt läßt sich abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2n+1}$ einbetten.*

1.5. 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Die 0-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind genau die diskreten Räume. Insbesondere ist eine zusammenhängende 0-dimensionale Mannigfaltigkeit homöomorph zum einpunktigen Raum $\{*\}$.

Auch die 1-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten können leicht klassifiziert werden. Zwei elementare Tatsachen werden dabei wesentlich sein. Erstens, die zusammenhängenden offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die offenen Intervalle. Zweitens, ist $\varphi : (a, b) \to (c, d)$ ein Homöomorphismus zwischen offenen Intervallen dann gilt entweder $\lim_{t \to b-} \varphi(t) = c$ oder $\lim_{t \to b-} \varphi(t) = d$. Beides folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Satz 1.5.1. *Sei M eine zusammenhängende 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ist M kompakt, dann ist sie homöomorph zu S^1. Ist M nicht kompakt, dann ist sie homöomorph zu $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir folgen der Anleitung in [**D76**, Kapitel 16.2, Aufgabe 6].

LEMMA 1.5.2. *Sei $U_1 \subseteq M$ offen und $\varphi_1 : U_1 \to (a_1, b_1)$ ein Homöomorphismus, $a_1 < b_1 \in \mathbb{R}$. Sei $U_2 \subseteq M$ offen und $\varphi_2 : U_2 \to (a_2, b_2)$ ein Homöomorphismus, $a_2 < b_2 \in \mathbb{R}$. Gilt weder $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ noch $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:*

(i) $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a_1, c_1)$ *für ein* $a_1 < c_1 < b_1$.
(ii) $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (d_1, b_1)$ *für ein* $a_1 < d_1 < b_1$.
(iii) $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a_1, c_1) \cup (d_1, b_1)$ *für bestimmte* $a_1 < c_1 < d_1 < b_1$.

BEWEIS VON LEMMA 1.5.2. Es ist nämlich $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \subseteq (a_1, b_1)$ offen, also disjunkte Vereinigung offener Teilintervalle. Da $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ muss es mindestens ein solches Teilintervall geben. Keines dieser Teilintervalle ist von der Form (e, f) mit $a_1 < e < f < b_1$. Andernfalls wäre $\varphi_1^{-1}([e, f]) \subseteq M$ kompakt und, weil M Hausdorff ist, daher abgeschlossen. Wegen $\varphi_1^{-1}((e, f)) = \varphi_1^{-1}([e, f]) \cap U_2$ wäre dann auch $\varphi_1^{-1}((e, f)) \subseteq U_2$ abgeschlossen. Es ist aber $\varphi_1^{-1}((e, f)) \subseteq U_2$ auch offen, und da U_2 zusammenhängend ist würde $\varphi_1^{-1}((e, f)) = U_2$ folgen. Dies widerspräche $U_2 \not\subseteq U_1$. Lemma 1.5.2 folgt sofort. □

LEMMA 1.5.3. *Tritt in Lemma 1.5.2 der Fall (i) oder (ii) ein dann kann φ_1 zu einem Homöomorphismus $\tilde{\varphi}_1 : U_1 \cup U_2 \to (a_1, b_1 + 1)$ oder einem Homöomorphismus $\tilde{\varphi}_1 : U_1 \cup U_2 \to (a_1 - 1, b_1)$ ausgedehnt werden.*

BEWEIS VON LEMMA 1.5.3. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass (ii) gilt, der andere Fall kann analog behandelt werden. Vertauschen wir in Lemma 1.5.2 die Rollen von φ_1 und φ_2, dann sehen wir, dass entweder $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (a_2, c_2)$ für ein $a_2 < c_2 < b_2$, oder $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (d_2, b_2)$ für ein $a_2 < d_2 < b_2$ gilt. Der dritte Fall kann nicht eintreten da ja $U_1 \cap U_2$ nur eine Zusammenhangskomponente besitzt. Wieder dürfen wir o.B.d.A. annhemen, dass $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (a_2, c_2)$ für ein $a_2 < c_2 < b_2$ eintritt, der andere Fall kann analog behandelt werden. Betrachte den affinen Homöomorphismus

$$\psi : [c_2, b_2) \to [b_1, b_1 + 1), \qquad \psi(t) := \frac{t - c_2 + b_1(b_2 - c_2)}{b_2 - c_2}.$$

Definiere nun:

$$\tilde{\varphi}_1 : U_1 \cup U_2 \to (a_1, b_1 + 1), \qquad \tilde{\varphi}_1(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{falls } x \in U_1 \\ \psi(\varphi_2(x)) & \text{falls } x \in U_2 \setminus U_1 \end{cases}$$

Dies ist klarerweise eine Ausdehnung von φ_1 und bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}_1$ ein lokaler Homöomorphismus ist. Da $\tilde{\varphi}_1|_{U_1} = \varphi_1 : U_1 \to (a_1, b_1)$ ein Homöomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}_1|_{U_2} : U_2 \to (d_1, b_1 + 1)$ ein Homöomorphismus ist. Da $\varphi_2 : U_2 \to (a_2, b_2)$ ein Homöomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass die Komposition

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1} : (a_2, b_2) \to (d_1, b_1 + 1), \quad \tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_2^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) & \text{falls } t \in (a_2, c_2) \\ \psi(t) & \text{falls } t \in [c_2, b_2) \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist. Wir wissen, dass $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}|_{(a_2, c_2)} : (a_2, c_2) \to (d_1, b_1)$ ein Homöomorphismus ist. Es bleibt also noch zu zeigen

$$\lim_{t \to c_2-} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) = b_1.$$

Die einizige andere Möglichkeit wäre $\lim_{t \to c_2-} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) = d_1$, dies ist aber ausgeschlossen da ja sonst jede Umgebung von $\varphi_2^{-1}(c_2)$ nicht leeren Durchschnitt mit jeder Umgebung von $\varphi_1^{-1}(d_1)$ hätte, was wegen $\varphi_1^{-1}(d_1) \neq \varphi_2^{-1}(c_2)$ der Hausdorff Eigenschaft von M widerspräche. □

LEMMA 1.5.4. *Tritt in Lemma 1.5.2 der Fall (iii) ein, dann ist $U_1 \cup U_2 = M$ und M homöomorph zu S^1.*

BEWEIS VON LEMMA 1.5.4. Sei also $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a_1, c_1) \cup (d_1, b_1)$ mit $a_1 < c_1 < d_1 < b_1$. Vertauschen wir in Lemma 1.5.2 die Rollen von φ_1 und φ_2 dann muss auch $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (a_2, c_2) \cup (d_2, b_2)$ für gewisse $a_2 < c_2 < d_2 < b_2$ gelten, da ja $U_1 \cap U_2$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Die Komposition

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : (a_2, c_2) \cup (d_2, b_2) \to (a_1, c_1) \cup (d_1, b_1)$$

ist ein Homöomorphismus also gilt entweder

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}((a_2, c_2)) = (a_1, c_1) \quad \text{und} \quad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}((d_2, b_2)) = (d_1, b_1)$$

oder

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}((a_2, c_2)) = (d_1, b_1) \quad \text{und} \quad \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}((d_2, b_2)) = (a_1, c_1) \tag{10}$$

O.B.d.A. dürfen wir (10) annehemen, der andere Fall kann analog behandelt werden. Wie im Beweis von Lemma 1.5.3 zeigt man

$$\lim_{t \to c_2-} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) = b_1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to d_2+} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) = a_1 \tag{11}$$

und daher auch

$$\lim_{t \to a_2+} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) = d_1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to b_2-} \varphi_1(\varphi_2^{-1}(t)) = c_1.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt

$$\varphi_1(\varphi_2^{-1}(a_2 + \varepsilon)) \leq b_1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \varphi_1(\varphi_2^{-1}(b_2 - \varepsilon)) \geq a_1 + \varepsilon$$

und daher

$$\varphi_1^{-1}\big([a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon]\big) \cup \varphi_2^{-1}\big([a_2 + \varepsilon, b_2 - \varepsilon]\big) = U_1 \cup U_2.$$

Also ist $U_1 \cup U_2$ Vereinigung zweier kompakter Teilmengen. Da M Hausdorff ist folgt, dass $U_1 \cup U_2 \subseteq M$ abgeschlossen ist. Andererseits ist $U_1 \cup U_2 \subseteq M$ auch offen, und der Zusammenhang von M impliziert daher $U_1 \cup U_2 = M$. Wähle Homöomorphismen

$$\psi_1 : (a_1, b_1) \to \big\{z \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \;\big|\; \mathrm{Im}(z) > -\tfrac{1}{2}\big\}$$

und

$$\psi_2 : (a_2, b_2) \to \big\{z \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \;\big|\; \mathrm{Im}(z) < \tfrac{1}{2}\big\}$$

sodass

$$\psi_1([c_1, d_1]) = \big\{z \in S^1 \;\big|\; \mathrm{Im}(z) \geq \tfrac{1}{2}\big\}$$

und

$$\psi_2([c_2, d_2]) = \big\{z \in S^1 \;\big|\; \mathrm{Im}(z) \leq -\tfrac{1}{2}\big\}$$

sowie

$$\lim_{t \to b_1-} \psi_1(t) = \psi_2(c_2) \quad \text{und} \quad \lim_{t \to a_1+} \psi_1(t) = \psi_2(d_2).$$

Definiere nun:

$$\Phi : U_1 \cup U_2 = M \to S^1, \qquad \Phi(x) = \begin{cases} \psi_1(\varphi_1(x)) & \text{falls } x \in U_1 \\ \psi_2(\varphi_2(x)) & \text{falls } x \in U_2 \setminus U_1 \end{cases}$$

Dies ist klarerweise bijektiv. Wie im Beweis von Lemma 1.5.3 zeigt man unter Zuhilfenahme von (11) das

$$\Phi \circ \varphi_2^{-1} : (a_2, b_2) \to \big\{ z \in S^1 \,\big|\, \mathrm{Im}(z) < \tfrac{1}{2} \big\}$$

ein Homöomorphismus ist. Dann ist $\Phi|_{U_2} : U_2 \to \big\{ z \in S^1 \,\big|\, \mathrm{Im}(z) < \tfrac{1}{2} \big\}$ ein Homöomorphismus, daher Φ ein lokaler Homöomorphismus und also Φ ein Homöomorphismus. $\square$

LEMMA 1.5.5. *Es existiert eine höchstens abzählbare Familie offener Teilmengen $\{V_k\}_{k=1,2,\dots}$ von M mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Jedes V_k ist homöomorph zum Einheitsintervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$.*
(ii) *Für alle $k \geq 1$ gilt $V_1 \cup \cdots \cup V_k \not\subseteq V_{k+1}$.*
(iii) *Für alle $k \geq 1$ gilt $V_{k+1} \not\subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_k$.*
(iv) *Für alle $k \geq 1$ gilt $V_{k+1} \cap (V_1 \cup \cdots \cup V_k) \neq \emptyset$.*
(v) *$\bigcup_k V_k = M$.*

BEWEIS VON LEMMA 1.5.5. Wir werden die V_k ähnlich wie im Beweis von Satz 1.1.2(vii)⇒(i) konstruieren. Da M parakompakt ist existiert eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U}$ von M, sodass jedes $U \in \mathcal{U}$ homöomorph zum Einheitsintervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist, und sodass $\bar{U}$ kompakt ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ lokal endlich ist finden wir $U_1 \in \mathcal{U}$, sodass für alle $U_1 \neq U \in \mathcal{U}$ gilt $U_1 \not\subseteq U$. Setze $\mathcal{U}_1 := \{U_1\}$. Definiere induktiv

$$\mathcal{U}_{n+1} := \big\{ U \in \mathcal{U} \,\big|\, \exists V \in \mathcal{U}_n,\ V \cap U \neq \emptyset \big\}.$$

Dann gilt $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+1}$, für alle $n \geq 1$. Alle $\mathcal{U}_n$ sind endlich, da $\mathcal{U}$ lokal endlich und jedes $\bar{U}$ kompakt ist. Da $\bigcup_n \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U \subseteq M$ offen und abgeschlossen ist, folgt aus dem Zusammenhang von M, dass $\bigcup_n \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U = M$ gilt. Wir definieren jetzt $\{V_k\}$ indem wir zuerst die Elemente von $\mathcal{U}_1$ nummerieren, dann die Elemente von $\mathcal{U}_2$, u.s.w. Insbesondere $\bigcup_n \mathcal{U}_n = \{V_k\}_k$. Offensichtlich erfüllt die Familie $\{V_k\}_k$ alle gewünschten Eigenschaften, außer möglicherweise (iii). Durch Auslassen geeigneter V_k erhält man dann eine Familie die (i)–(v) erfüllt. $\square$

Der Beweis von Satz 1.5.1 kann nun leicht wie folgt geführt werden. Wir nehmen an M ist nicht homöomorph zu S^1. Dann ist zu zeigen, dass M homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Wähle eine Folge offener Teilmengen $\{V_k\}_{k=1,2,\dots}$ wie in Lemma 1.5.5. Für $k \geq 1$ setzte $U_k := V_1 \cup \cdots \cup V_k$. Dann gilt $U_k \cap V_{k+1} \neq \emptyset$, $U_k \not\subseteq V_{k+1}$, $V_{k+1} \not\subseteq U_k$. Wir definieren nun induktiv offene beschränkte Intervalle $I_k \subseteq \mathbb{R}$ und Homöomorphismen $\varphi_k : U_k \to I_k$ sodass $\varphi_{k+1}|_{U_k} = \varphi_k$. Für $k = 1$ ist dies trivial. Angenommen φ_i sind für $i \leq k$ schon konstruiert. Wir bemerken, dass U_k und V_{k+1} die Voraussetzungen von Lemma 1.5.2 erfüllen. Der Fall (iii) in Lemma 1.5.2 kann nicht eintreten da ja sonst, wegen Lemma 1.5.4, M homöomorph zu S^1 wäre. Nach Lemma 1.5.3 kann $\varphi_k : U_k \to I_k$ also zu einem Homöomorphismus $\varphi_{k+1} : U_{k+1} = U_k \cup V_{k+1} \to I_{k+1}$ ausgedehnt werden, wobei $I_{k+1} \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein beschränktes offenes Intervall ist. Die $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots}$ definieren eine Abbildung

$$\Phi : \textstyle\bigcup_k U_k = M \to I := \bigcup_k I_k, \qquad \Phi(x) := \varphi_k(x) \text{ falls } x \in U_k. \tag{12}$$

Wir bemerken, dass $I \subseteq \mathbb{R}$ ein, möglicherweise nicht beschränktes, offenes Intervall ist, jedenfalls aber I homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Es genügt also zu zeigen, dass (12) ein Homöomorphismus ist. Offenbar ist (12) bijektiv und ein lokaler Homöomorphismus. Es folgt, dass (12) ein Homöomorphismus ist. Damit ist der Beweis von Satz 1.5.1 schließlich beendet. $\square$

Korollar 1.5.6. *Eine 1-dimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist zu genau einem der folgenden Räume homöomorph:* $\mathbb{R}$, S^1, $[0,\infty)$, $[0,1]$.

Beweis. Sei M eine 1-dimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist $\partial M=\emptyset$ dann muss, wegen Satz 1.5.1, M homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder S^1 sein. Sei also $\partial M\neq\emptyset$. Nach Proposition 1.4.4 ist $\mathrm{Int}(M)$ eine zusammenhängende, nicht kompakte, 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Nach Satz 1.5.1, ist $\mathrm{Int}(M)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Der Rand $\partial M\subseteq M$ ist diskret. Man konstruiert leicht eine offene Umgebung U von ∂M und einen Homöomorphismus $\varphi:\partial M\times[0,1)\to U$, sodass $\varphi(x,0)=x$ für alle $x\in\partial M$, vgl. Satz 1.4.5. Betrachte den Homöomorphismus

$$\psi:[0,1)\to[\tfrac14,1),\qquad \psi(t):=\begin{cases}\frac{2t+1}{4} & \text{falls } t\leq\frac12\\ t & \text{falls } t\geq\frac12\end{cases}$$

und definiere einen Homöomorphismus

$$\Psi:M\to M\setminus\varphi\big(\partial M\times[0,\tfrac14)\big),\quad \Psi(x):=\begin{cases}\varphi((\mathrm{id}_{\partial M}\times\psi)(\varphi^{-1}(x))) & \text{falls } x\in U\\ x & \text{falls } x\notin U\end{cases}$$

Wir schließen, dass M homöomorph zu einer abgeschlossenen echten Teilmenge von $\mathrm{Int}(M)\cong\mathbb{R}$ ist und nicht-leeres Inneres hat. Da M zusammenhängend ist muss es zu einem abgeschlossenen echten Intervall, also $[0,\infty)$ oder $[0,1]$, homöomorph sein. □

In Dimensionen 2 ist das Klassifikationsproblem für Mannigfaltigkeiten klassisch aber schwieriger, siehe etwa [**H94**, Chapter 9]. Selbst die einfach zusammenhängenden geschlossenen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bereiten große Schwierigkeiten. Die folgende Vermutung ist eines der *Millennium Prize Problems* auf dessen Lösung das *Clay Mathematics Institute* einen \$1,000,000 Preis ausgesetzt hat.

Poincaré Vermutung. *Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^3.*

Jüngst hat G. Perelman einige Arbeiten veröffentlicht in denen er mit Hilfe des von R. Hamilton zu diesem Zweck eingeführten *Ricci flow* die sogenannte *Thurston's Geometrization Conjecture* beweist. Falls sie einer Überprüfung standhalten, würde dies als Spezialfall auch die Poincaré Vermutung beweisen.

Ironischer Weise ist die höherdimensionale Version der Poincaré Vermutung schon länger etabliert. Für $n\geq5$ wurde dies von S. Smale gelöst, dem dafür 1966 eine Fields Medaille verliehen wurde. Der Fall $n=4$ wurde schließlich von M. Freedman bewiesen, auch er erhielt 1986 eine Fields Medaille für seine Arbeit.

Satz 1.5.7 (Smale, Freedman). *Jede geschlossene n-dimensionale, $n\geq4$, topologische Mannigfaltigkeit die homotopieäquivalent zu S^n ist, ist auch homöomorph zu S^n.*

Eine Klassifikation der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, $n\geq4$, ist nicht möglich. Dies rürt daher, dass jede endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe einer kompakten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit auftritt, es aber keinen

Algorithmus gibt der entscheidet ob zwei Präsentationen dieselbe Gruppe beschreiben. Allerdings gibt es Klassifikationen für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten.

2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

2.1. C^r-Mannigfaltigkeiten. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine Paar (U, φ), wo $U \subseteq M$ offen, $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus und $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, heißt *Karte* von M. Eine Menge von Karten $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt *Atlas* von M falls $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$. Sind (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) zwei Karten, dann ist

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Homöomorphismus zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ und wird als *Kartenwechselabbildung* bezeichnet.

Sei $1 \leq r \leq \infty$. Ein Atlas $\mathcal{A}$ einer topologischen Mannigfaltigkeit M heißt *C^r-Atlas* falls alle Kartenwechselabbildungen C^r sind. Da $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ invers zu $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ist folgt, dass alle Kartenwechselabbildungen C^r-Diffeomorphismen sind. Eine Karte (U, φ) heißt *kompatibel* oder *verträglich* mit dem C^r-Atlas $\mathcal{A}$ falls $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ wieder ein C^r-Atlas ist. Ein C^r-Atlas $\mathcal{A}$ heißt *maximal* falls er nicht durch hinzufügen neuer Karten vergrößert werden kann, d.h. ist eine Karte (U, φ) kompatibel mit $\mathcal{A}$, dann ist sie bereits in $\mathcal{A}$ enthalten, $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Ein maximaler C^r-Atlas für M wird als *C^r-Struktur* auf M bezeichnet.

Definition 2.1.1 (C^r-Mannigfaltigkeiten). Sei $1 \leq r \leq \infty$. Eine *C^r-Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit die mit einer C^r-Struktur ausgestattet ist. Genauer, eine C^r-Mannigfaltigkeit is ein Paar $(M, \mathcal{D})$ wo M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{D}$ eine C^r-Struktur auf M ist. Die Elemente der C^r-Struktur werden als Karten der C^r-Mannigfaltigkeit bezeichnet. Eine topologische Mannigfaltigkeit wird oft auch als *C^0-Mannigfaltigkeit* bezeichnet. Unter einer *glatten Mannigfaltigkeit* versteht man eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$. Sind $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ zwei Karten und $x \in U \cap V$ dann gilt $n = m$, da die Kartenwechselabbildung $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ ein C^r-Diffeomorphismus ist und daher das Differential $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein linearer Isomorphismus sein muss. Wir können also die *Dimension bei $x \in M$* definieren indem wir eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ wählen und $\dim_x(M) := n$ setzten. Wir erhalten eine lokal konstante Funktion $\dim(M) : M \to \mathbb{N}$. Für differenzierbare Mannigfaltigkeiten ist die Definition der Dimension also wesentlich einfacher als für topologische Mannigfaltigkeiten, für die wir ja den nicht trivialen Satz 1.1.1 benötigt haben.

Jeder C^r-Atlas bestimmt einen maximalen C^r-Atlas, man nehme einfach alle Karten die mit ihm verträglich sind und verifiziere, dass dies tatsächlich einen C^r-Atlas bildet der offensichtlich maximal ist. Daher bestimmt ein C^r-Atlas auf einer topologischen Mannigfaltigkeit in eindeutiger Weise eine C^r-Struktur und macht sie damit zu einer C^r-Mannigfaltigkeit. Für $0 \leq s \leq r \leq \infty$ ist daher jede C^r-Mannigfaltigkeit in natürlicher Weise auch eine C^s-Mannigfaltigkeit.

Ist M eine C^r-Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen dann erbt U die Struktur einer C^r-Mannigfaltigkeit indem man alle Karten auf U einschränkt. Ist $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von C^r-Mannigfaltigkeiten, dann erbt die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ die Struktur einer C^r-Mannigfaltigkeit. Sind M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\mathcal{A}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A_M}$ und $\mathcal{A}_N = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in A_N}$ dann bildet $\big\{U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi_\beta\big\}_{(\alpha,\beta)\in A_M \times A_N}$ einen C^r-Atlas für $M \times N$, also erbt auch $M \times N$ die Struktur einer C^r-Mannigfaltigkeit. Jede Überlagerung einer C^r-Mannigfaltigkeit erbt die Struktur einer C^r-Mannigfaltigkeit.

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein C^∞-Atlas für $\mathbb{R}^n$ und macht $\mathbb{R}^n$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit. Insbesondere sind alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auch glatte Mannigfaltigkeiten.

Die beiden Karten für S^n in Kapitel 1.2 bilden einen C^∞-Atlas da die Kartenwechselabbildung

$$\mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}^n \setminus 0, \qquad y \mapsto y/\|y\|^2$$

glatt ist. Die resultierende glatte Struktur heißt die *Standardstruktur* auf S^n.

Die Karten für $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ in Kapitel 1.2 bilden einen C^∞-Atlas, da für $0 \le i < j \le n$ die Kartenwechselabbildung

$$\begin{aligned}\big\{(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n \bigm| y_j \neq 0\big\} &\xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \big\{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^n \bigm| z_{i+1} \neq 0\big\} \\ (y_1,\dots,y_n) &\mapsto \big(\tfrac{y_1}{y_j},\dots,\tfrac{y_i}{y_j},\tfrac{1}{y_j},\tfrac{y_{i+1}}{y_j},\dots,\tfrac{y_{j-1}}{y_j},\tfrac{y_{j+1}}{y_j},\dots,\tfrac{y_n}{y_j}\big)\end{aligned}$$

glatt ist. Die resultierende glatte Struktur heißt die *Standardstruktur* auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Genauso bilden die Karten für $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ in Kapitel 1.2 einen C^∞-Atlas. Die resultierende glatte Struktur heißt die *Standardstruktur* auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

2.2. C^r-Abbildungen. Ist M eine C^r-Mannigfaltgkeit dann kann man von C^r-Funktionen auf M und C^r-Kurven in M sprechen. Allgemeiner hat man das Konzept der C^r-Abbildungen zwischen zwei C^r-Mannigfaltigkeiten.

Definition 2.2.1 (C^r-Abbildungen). Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \le r \le \infty$. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt C^r-Abbildung, falls für jede Karte (U, φ) von M und jede Karte (V, ψ) von N die Komposition

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to \psi(V)$$

eine C^r-Abbildung ist. Die Menge aller C^r-Abbildungen von M nach N wird mit $C^r(M, N)$ bezeichnet. Eine C^∞-Abbildung wird auch als *galtte Abbildung* bezeichnet.

Bemerke, dass die Menge $\varphi(f^{-1}(V) \cap U)$ in Definition 2.2.1 offen in $\mathbb{R}^m$ ist, da wir Stetigkeit von f voraussetzen. Wir forden daher die C^r-Eigenschaft für eine Funktion die auf einer *offenen* Menge eines $\mathbb{R}^m$ definiert ist und Werte in einem $\mathbb{R}^n$ hat, siehe Analysisvorlesung.

Sind M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, und ist $f : M \to N$ stetig und so, dass für jedes $x \in M$ eine Karte (U, φ) von M mit $x \in U$ und eine Karte (V, ψ) von N mit $f(x) \in V$ existieren für die

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to \psi(V)$$

C^r ist, dann folgt $f \in C^r(M, N)$. Man muss die C^r-Eigenschaft also nicht für *alle* Karten eines *maximalen* Atlasses verifizieren.

Ist M eine C^r-Mannigfaltigkeit, dann ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ eine C^r-Abbildung. Sind $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei C^r-Abbildungen, dann auch ihre Komposition $g \circ f : M \to P$. Die C^r-Mannigfaltigkeiten und C^r-Abbildungen bilden daher eine Kategorie.

Ist M eine C^r-Mannighfaltigkeit, dann bildet $C^r(M,\mathbb{R})$ mit punktweiser Addition und Multiplikation eine kommutative Algebra mit Eins.

Definition 2.2.2 (Diffeomorphismen). Sei $0 \leq r \leq \infty$. Eine C^r-Abbildung $f : M \to N$ zwischen C^r-Mannigfaltigkeiten heißt *C^r-Diffeomorphismus* falls es eine C^r-Abbildung $f^{-1} : N \to M$ gibt, sodass $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$. Die Menge der C^r-Diffeomorphismen wird mit $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ bezeichnet. Zwei C^r-Mannigfaltigkeiten heißen *C^r-diffeomorph,* falls ein C^r-Diffeomorphismus $f : M \to N$ existiert.

Die C^r-Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, ist ein Homöomorphismus, aber kein C^r-Diffeomorphismus, $1 \leq r \leq \infty$. Die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung muss also extra gefordert werden.

Ist M eine C^r-Mannigfaltigkeit und $f : N \to M$ ein Homöomorphismus, dann gibt es auf N eine eindeutige C^r-Struktur, sodas f ein C^r-Diffeomorphismus wird. Ist nämlich $\mathcal{A}_M$ ein maximaler C^r-Atlas für M, dann bildet $\mathcal{A}_N := \{(f^{-1}(U), \varphi \circ f) \mid (U,\varphi) \in \mathcal{A}_M\}$ einen maximalen C^r-Atlas für N der f zu einem C^r-Diffeomorphismus macht.

2.3. Teilmannigfaltigkeiten. Die Teilmengen einer Mannigfaltigkeit die lokal wie $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n$ aussehen heissen Teilmannigfaltigkeiten. Genauer haben wir

Definition 2.3.1 (Teilmannigfaltigkeiten). Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $0 \leq r \leq \infty$. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt *C^r-Teilmannigfaltigkei*t von M falls für jeden Punkt $x \in S$ eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ existiert, sodass $x \in U$ und

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

für ein $0 \leq k \leq n$. Jede solche Karte heißt *C^r-Teilmannigfaltigkeitskarte* für S bei x.

Ist M eine C^r-Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit, dann erbt S die Struktur einer C^r-Mannigfaltigkeit. Genauer, die Einschränkung jeder Teilmannigfaltigkeitskarte (U,φ) für S liefert eine Karte

$$\varphi|_{U\cap S} : U \cap S \to \varphi(U \cap S) \subseteq \mathbb{R}^k$$

für S. Diese bilden einen C^r-Atlas für S, und das macht S zu einer C^r-Mannigfaltigkeit. Die Inklusion $\iota : S \to M$ ist dann eine C^r-Abbildung.

Trivialerweise ist jede offene Teilmenge einer C^r-Mannigfaltigkeit eine C^r-Teilmannigfaltigkeit.

Eine wichtige Möglichkeit Teilmannigfaltigkeiten zu bestimmen, ist durch Angabe von hinreiched regulären Gleichungen. Dazu erinnern wir uns an folgendes zentrale Resultat aus der Analysis.

Satz 2.3.2 (Impliziter Funktionensatz, surjektive Form). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Abbildung, $1 \leq r \leq \infty$. Sei weiters $x \in U$ und das Differential $Df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ surjektiv. Dann existiert eine offene Menge $W \subseteq U$ mit $x \in W$, eine offene Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^m$ und ein C^r-Diffeomorphismus $g : W' \to W$, sodass*

$$(f \circ g)(y_1, \ldots, y_m) = (y_1, \ldots, y_n)$$

für alle $(y_1, \ldots, y_m) \in W'$.

Für den Fall, dass diese Version des Impliziten Funktionensatzes nicht so geläufig ist, sei hier noch kurz erläutert wie man sie aus dem Inversen Funktionensatz, siehe [**R53**, Theorem 9.22], [**D76**, Section 10.2.5] oder [**H93**, Abschnitt 171], herleiten kann.

Satz 2.3.3 (Inverser Funktionensatz). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Abbildung, $1 \leq r \leq \infty$. Sei weiters $x \in U$ und das Differntial $Df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von f bei x invertierbar. Dann existiert eine offene Menge $W \subseteq U$ mit $x \in W$ und eine offene Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^n$ sodass $f|_W : W \to W'$ ein C^r-Diffeomorphismus ist.*

Herleitung von Satz 2.3.2 aus Satz 2.3.3. Da Df_x surjektiv ist finden wir eine lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$, sodass $(Df_x, \lambda) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ invertierbar ist. Für das Differential der C^r-Abbildung $h := (f, \lambda) : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, bei x gilt $Dh_x = (Df_x, \lambda)$. Also ist Dh_x invertierbar. Nach Satz 2.3.3 finden wir eine offene Menge $W \subseteq U$ mit $x \in W$, eine offene Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$, sodass $h|_W : W \to W'$ ein C^r-Diffeomorphismus ist. Für den C^r-Diffeomorphismus $g := h|_W^{-1} : W' \to W$ gilt dann klarerweise $f(g(y_1, \dots, y_m)) = (y_1, \dots, y_n)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in W'$. □

Definition 2.3.4 (Submersionen). Eine C^1-Abbildung $f : M \to N$ heißt *submersiv bei $x \in M$* falls für eine (und dann jede) Karte (U, φ) von M mit $x \in U$, und eine (und dann jede) Karte (V, ψ) von N mit $f(x) \in V$ das Differential $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ bei $\varphi(x)$ surjektiv ist. Sie heißt *submersiv* oder *Submersion* falls sie submersiv bei jedem $x \in M$ ist. Die Menge der C^r-Submersionen wird mit $\mathrm{Sub}^r(M, N)$ bezeichnet.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 2.3.2 erhalten wir

Proposition 2.3.5. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$, und sei $f \in C^r(M, N)$ submersiv bei $x \in M$. Dann existiert eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in U$, und eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $f(U) \subseteq V$ sodass*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n)$$

für alle $(y_1, \dots, y_m) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt.

Beweis. Wähle eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von N mit $f(x) \in V$. Wähle eine Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in \tilde{U}$ und $f(\tilde{U}) \subseteq V$. Da f bei x submersiv ist, ist $D(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{\tilde{\varphi}(x)}$ surjektiv. Nach Satz 2.3.2 existiert eine offene Menge $W \subseteq \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ mit $\tilde{\varphi}(x) \in W$, eine offene Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^m$, und ein C^r-Diffeomorphismus $g : W' \to W$ mit $(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ g)(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in W'$. Sei $U := \tilde{U} \cap \tilde{\varphi}^{-1}(W)$, und $\varphi := g^{-1} \circ \tilde{\varphi}|_U : U \to W'$. Dann ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von M mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$, und es gilt $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in \varphi(U) = W' \subseteq \mathbb{R}^m$. □

Proposition 2.3.6. *Sei $f : M \to N$ eine Submersion. Dann ist $f(M) \subseteq N$ offen.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 2.3.5, denn für $n \leq m$ ist die Abbildung $(y_1, \dots, y_m) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$ offen, d.h. offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet. □

Definition 2.3.7 (Reguläre Werte). Sei $f : M \to N$ eine C^1-Abbildung. Ein Punkt $y \in N$ heißt *regulärer Wert* von f, falls f submersiv bei jedem $x \in f^{-1}(y)$ ist.

Satz 2.3.8. *Sei $f : M \to N$ eine C^r-Abbildung, $1 \leq r \leq \infty$, und sei $y \in N$ ein regulärer Wert von f. Dann ist $f^{-1}(y) \subseteq M$ eine abgeschlossene C^r-Teilmannigfaltigkeit. Ist $\dim M = m$ und $\dim N = n$ dann hat $f^{-1}(y)$ die Dimension $m - n$.*

Beweis. $S := f^{-1}(y) \subseteq M$ ist abgeschlossen, da f stetig ist. Sei $x \in S$. Nach Proposition 2.3.5 finden wir eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in U$ und eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von N mit $f(U) \subseteq V$, sodass $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Auch dürfen wir annehmen, dass $\psi(f(x)) = 0$. Dann gilt klarerweise $\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$. Also ist (U, φ) eine C^r-Teilmannigfaltigkeitskarte für S bei x. □

Mit Hilfe von Satz 2.3.8 können leicht Beispiele von C^r-Mannigfaltigkeiten konstruiert werden. Wir wollen hier nur drei erwähnen.

Betrachtet man etwa die C^∞-Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|^2 = \sum_i x_i^2$. Dann ist offensichtlich $1 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f. Aus Satz 2.3.8 folgt, dass $S^n = f^{-1}(1)$ eine C^∞-Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Insbesondere erkennen wir S^n als C^∞-Mannigfaltigkeit ohne explizit einen Atlas anzugeben.

Sei M_n der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen, und sei

$$O(n) := \{A \in M_n \mid A^t A = I\}$$

die Teilmenge der orthogonalen Matrizen. Bezeichne mit $S_n := \{A \in M_n \mid A^t = A\}$ den Teilraum der symmetrischen Matrizen. Für die C^∞-Abbildung $f : M_n \to S_n$, $f(A) := A^t A$, gilt offenbar $f^{-1}(I) = O(n)$. Für die Abbleitung von f bei A in Richtung B finden wir

$$Df_A(B) = \tfrac{\partial}{\partial t}|_0 f(A + tB) = A^t B + B^t A = A^t B + (A^t B)^t.$$

Ist $A \in O(n)$ und $S \in S_n$ dann gilt für $B := \frac{1}{2} AS$ offensichtlich $Df_A(B) = S$. Daher ist das Differential von f bei jedem $A \in O(n)$ surjektiv, also ist I ein regulärer Wert von f. Nach Satz 2.3.8 ist daher $O(n) = f^{-1}(I)$ eine C^∞-Teilmannigfaltigkeit des Vektoraumes M_n. Für die Dimension gilt $\dim O(n) = \dim M_n - \dim S_n = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.

Sei $0 \leq g \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\Sigma_g := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \mid z_0^{g+1} + z_1^{g+1} + z_2^{g+1} = 0\}$$

eine 2-dimensionale C^∞-Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. Dazu erinnern wir uns an die Karten $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^2$, $0 \leq i \leq 2$, von $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ aus Abschnitt 1.2. Es reicht zu zeigen, dass $\varphi_i(\Sigma_g \cap U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$ eine C^∞-Teilmannigfaltigkeit ist. Für jedes $0 \leq i \leq 2$ gilt $\varphi_i(\Sigma_g \cap U_i) = \{(y_1, y_2) \mid y_1^{g+1} + y_2^{g+1} = -1\}$. Nach Satz 2.3.8 reicht es zu zeigen, dass $-1 \in \mathbb{C}$ ein regulärer Wert der Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(y_1, y_2) = y_1^{g+1} + y_2^{g+1}$ ist. Für das Differential von f bei (y_1, y_2) gilt $Df_{(y_1,y_2)}(\xi_1, \xi_2) = (g+1)(y_1^g \xi_1 + y_2^g \xi_2)$. Für $y_1^{g+1} + y_2^{g+1} = -1$ ist daher $0 \neq Df_{(y_1,y_2)} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, also $Df_{(y_1,y_2)}$ surjektiv. Damit ist -1 ein regulärer Wert von f und Σ_g eine 2-dimensionale C^∞-Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. Da $\Sigma_g \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ abgeschlossen und $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ kompakt ist, ist auch Σ_g kompakt. Auch sieht man leicht, dass Σ_g zusammenhängend ist.

Eine andere Möglichkeit Teilmannigfaltigkeiten als solche zu erkennen ist durch Angabe einer geeigneten Parametrisierung. Dazu erinnern wir an folgendes Resultat aus der Analysis.

Satz 2.3.9 (Impliziter Funktionensatz, injektive Form). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Abbildung, $1 \leq r \leq \infty$. Sei weiters $x \in U$ und das Differential*

$Df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bei x injektiv. Dann existiert eine offene Menge $V \subseteq U$ mit $x \in V$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f(V) \subseteq W$, eine offene Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^r-Diffeomorphismus $g : W \to W'$ sodass

$$(g \circ f)(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$$

für alle $(y_1, \dots, y_m) \in V$ gilt.

Wir geben auch für diese Version des Impliziten Funktionensatzes eine Herleitung aus dem Inversen Funktionensatz an.

Herleitung von Satz 2.3.9 aus Satz 2.3.3. Da Df_x injektiv ist existiert eine lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, sodass

$$\begin{aligned} Df_x + \lambda : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\to \mathbb{R}^n \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto Df_x(y_1, \dots, y_m) + \lambda(y_{m+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

invertierbar ist. Für das Differential der C^r-Abbildung

$$h := f + \lambda : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$$
$$h(y_1, \dots, y_n) := f(y_1, \dots, y_m) + \lambda(y_{m+1}, \dots, y_n)$$

bei $(x, 0)$ gilt $Dh_{(x,0)} = Df_x + \lambda$. Also ist $Dh_{(x,0)}$ invertierbar. Nach Satz 2.3.3 finden wir eine offene Menge $W' \subseteq U \times \mathbb{R}^{n-m} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(x, 0) \in W'$, und eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ sodass $h|_{W'} : W' \to W$ ein C^r-Diffeomorphismus ist. Betrachte den C^r-Diffeomorphismus $g := h|_{W'}^{-1} : W \to W'$, und die offene Menge $V := W' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subseteq U$. Dann gilt offensichtlich $x \in V$. Für $(y_1, \dots, y_m) \in V$ haben wir $f(y_1, \dots, y_m) = h(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$. Wir schließen $f(V) \subseteq W$ und $g(f(y_1, \dots, y_m)) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in V$. □

Definition 2.3.10 (Immersionen). Ein C^1-Abbildung $f : M \to N$ heißt *immersiv bei $x \in M$* falls für eine (und dann jede) Karte (U, φ) von M mit $x \in U$ und eine (und dann jede) Karte (V, ψ) von N mit $f(x) \in V$ das Differential $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ bei $\varphi(x)$ injektiv ist. Sie heißt *immersiv* oder *Immersion* falls sie immersiv bei jedem $x \in M$ ist. Die Menge der C^r-Immersionen, $1 \leq r \leq \infty$, wird mit $\mathrm{Imm}^r(M, N)$ bezeichnet.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 2.3.9 erhalten wir

Proposition 2.3.11. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$, und sei $f \in C^r(M, N)$ bei $x \in M$ immersiv. Dann existieren eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in U$ und eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von N mit $f(U) \subseteq V$, sodass*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$$

für alle $(y_1, \dots, y_m) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt.

Beweis. Wähle ein Karte $\tilde{\psi} : \tilde{V} \to \mathbb{R}^n$ von N mit $f(x) \in \tilde{V}$. Wähle eine Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in \tilde{U}$ und $f(\tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$. Nach Satz 2.3.9 finden wir eine offene Menge $U' \subseteq \tilde{\varphi}(U)$ mit $\tilde{\varphi}(x) \in U'$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(U') \subseteq W$, eine offene Menge $W' \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^r-Diffeomorphismus $g : W \to W'$, sodass $(g \circ \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0 \dots, 0)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in U'$ gilt. Sei $U := \tilde{U} \cap \tilde{\varphi}^{-1}(U') \subseteq M$ und $\varphi := \tilde{\varphi}|_U : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist (U, φ) eine Karte von M mit $x \in U$. Sei $V := \tilde{V} \cap \tilde{\psi}^{-1}(W) \subseteq N$ und $\psi := g \circ \tilde{\psi}|_V : V \to W' \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist (V, ψ) eine Karte von N und $f(U) \subseteq$

V. Schließlich gilt auch $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$ für alle $(y_1, \dots, y_m) \in \varphi(U) = U'$. □

Definition 2.3.12 (Einbettungen). Sei $1 \leq r \leq \infty$. Unter einer C^r*-Einbettung* versteht man eine immersive C^r-Abbildung $f : M \to N$, sodass $f : M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $f(M) \subseteq N$ die Teilraumtopologie trägt. Die Menge der C^r-Einbettungen wird mit $\mathrm{Emb}^r(M, N)$ bezeichnet.

Man bemerke, dass für kompaktes M jede injektive C^r-Immersion $f : M \to N$ ein Homöomorphismus auf sein Bild und damit eine Einbettung ist.

Satz 2.3.13. *Sei $f : M \to N$ eine C^r-Einbettung, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist $f(M)$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit von N, und $f : M \to f(M)$ ein C^r-Diffeomorphismus.*

Beweis. Sei $S := f(M) \subseteq N$ und $x \in M$. Nach Proposition 2.3.11 finden wir eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in U$ und eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von N mit $f(U) \subseteq V$, sodass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \tag{13}$$

für alle $(y_1, \dots, y_m) \in \varphi(U)$. Da $f : M \to S$ ein Homöomorphismus ist können wir durch Verkleinerung von V erreichen, dasss auch $f(U) = S \cap V$ gilt. Zusammen mit (13) folgt dann $\psi(S \cap V) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Also ist (V, ψ) eine C^r-Teilmannigfaltigkeitskarte für S bei $f(x)$ und daher S eine C^r-Teilmannigfaltigkeit von N. Nach Definition der C^r-Struktur auf Teilmannigfaltigkeiten ist $\rho := \psi|_{S\cap V} : S \cap V \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von S bei $f(x)$. In dieser Karte gilt $(\rho \circ f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m)$. Also ist auch $f^{-1} : S \to M$ eine C^r-Abbildung und damit $f : M \to S$ ein C^r-Diffeomorphismus. □

2.4. Differenzierbare Zerlegungen der Eins. Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $0 \leq r \leq \infty$. Unter einer C^r*-Zerlegung der Eins* auf M versteht man eine Familie von C^r-Funktionen $\{\lambda_\alpha : M \to [0, 1]\}_{\alpha \in A}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Die Träger $\mathrm{supp}(\lambda_\alpha) := \overline{\{x \in M \mid \lambda_\alpha(x) \neq 0\}}$ bilden eine lokale endliche Familie, d.h. jeder Punkt in M besitzt eine Umgebung die nur endlich viele $\mathrm{supp}(\lambda_\alpha)$ schneidet.

(ii) Für alle $x \in M$ gilt $\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(x) = 1$.

Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M und gibt es für jedes $\alpha \in A$ ein $U \in \mathcal{U}$, sodass $\mathrm{supp}(\lambda_\alpha) \subseteq U$, dann heißt die Zerlegung der Eins der Überdeckung $\mathcal{U}$ *untergeordnet.*

Satz 2.4.1. *Jede offene Überdeckung einer C^r-Mannigfaltigkeit besitzt eine ihr untergeordnete C^r-Zerlegung der Eins, $0 \leq r \leq \infty$.*

Für den Beweis von Satz 2.4.1 benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 2.4.2. *Es gibt eine C^∞-Funktion $\phi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, sodass $\phi^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ und $\phi^{-1}(1) = [1, \infty)$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten zuerst die Funktion:

$$\alpha : \mathbb{R} \to [0, 1), \qquad \alpha(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{falls } t > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Da $(\frac{d}{dt})^n e^{-1/t} = P_n(1/t)e^{-1/t}$ für gewisse Polynome P_n gilt, und weil jedes Polynom P auch $\lim_{s\to\infty} P(s)e^{-s} = 0$ erfüllt folgt leicht, dass (14) eine C^∞-Funktion. Die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \to [0,1], \qquad \phi(t) := \frac{\alpha(t)}{\alpha(t) + \alpha(1-t)}$$

erfüllt dann alle gewünschten Eigenschaften. □

Lemma 2.4.3. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine C^∞-Funktion $\beta_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ sodass $\beta_n^{-1}(1) = \bar{B}^n(1)$ und $\beta_n^{-1}(0) = \mathbb{R}^n \setminus B^n(2)$ gilt. Hier bezeichnet $B^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ den offenen Ball in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt 0 und Radius r.*

Beweis. Man setzte einfach $\beta_n(x) := \phi(2 - \|x\|)$, wobei ϕ eine Funktion wie in Lemma 2.4.2 ist. □

Lemma 2.4.4. *Sei $\mathcal{U}$ eine offenen Überdeckung einer C^r-Mannigfaltigkeit M, $0 \leq r \leq \infty$. Dann gibt es einen Atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{n_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist eine lokal endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$.*
(ii) *$\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^{n_\alpha}$ für alle $\alpha \in A$.*
(iii) *$\bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^{-1}(B^{n_\alpha}(1)) = M$.*

Beweis. O.B.d.A. sei M zusammenhängend und $n = \dim(M)$. Wähle eine kompakte Ausschöpfung $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wie in Satz 1.1.2(i). Setzte $K_k = \emptyset$ für $k < 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $K_k \setminus \mathring{K}_{k-1}$ kompakt. Wir finden daher endlich viele Karten $\{\varphi_k^i : U_k^i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in A_k}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Für jedes $i \in A_k$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $U_k^i \subseteq U$.
b) Für alle $i \in A_k$ gilt $U_k^i \subseteq \mathring{K}_{k+1} \setminus K_{k-2}$.
c) Für alle $i \in A_k$ ist $\varphi_k^i : U_k^i \to \mathbb{R}^n$ surjektiv.
d) $\big\{(\varphi_k^i)^{-1}(B^n(1))\big\}_{i\in A_k}$ überdeckt $K_k \setminus \mathring{K}_{k-1}$.

Betrachte die Familie von Karten $\{(U_k^i, \varphi_k^i)\}_{k\in\mathbb{N}, i\in A_k}$. Wegen d) und $\bigcup_k K_k = M$ erfüllt sie (iii). Aus c) folgt (ii). Wegen a) bildet $\{U_k^i\}_{k\in\mathbb{N},i\in A_k}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Auch ist $\{U_k^i\}_{k\in\mathbb{N},i\in A_k}$ lokal endlich, denn ist $x \in M$ dann existiert k mit $x \in K_k \subseteq \mathring{K}_{k+1}$ und $U_l^i \cap \mathring{K}_{k+1} = \emptyset$ für alle $l \geq k+3$. Daher schneiden höchstens endlich viele U_l^i die offene Umgebung $\mathring{K}_{k+1}$ von x. Damit ist auch (i) verifiziert. □

Beweis von Satz 2.4.1. Sei also M eine C^r-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Wähle einen Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ wie in Lemma 2.4.4. Seien $\beta_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ wie in Lemma 2.4.3. Für $\alpha \in A$ definiere eine Funktion

$$\lambda_\alpha : M \to [0,1], \qquad \lambda_\alpha(x) := \begin{cases} \beta_{n_\alpha}(\varphi_\alpha(x)) & \text{falls } x \in U_\alpha \\ 0 & \text{falls } x \notin U_\alpha \end{cases}$$

Wegen Lemma 2.4.4(ii) und weil $\operatorname{supp}(\beta_{n_\alpha}) \subseteq \bar{B}^{n_\alpha}(2)$ sind alle λ_α tatsächlich C^r-Funktionen. Außerdem gilt $\operatorname{supp}(\lambda_\alpha) \subseteq \varphi_\alpha^{-1}(\bar{B}^{n_\alpha}(2)) \subseteq U_\alpha$, also ist $\{\operatorname{supp}(\lambda_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ lokal endlich und $\mathcal{U}$ untergeordnet, siehe Lemma 2.4.4(i). Beachte, dass die Summe $\Lambda(x) := \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(x)$ lokal endlich ist und wegen Lemma 2.4.4(iii) stets $\Lambda(x) > 0$ gilt. Also ist $\Lambda : M \to (0,\infty)$ eine C^r-Funktion, und $\{\lambda_\alpha/\Lambda : M \to [0,1]\}_{\alpha\in A}$ eine C^r-Zerlegung der Eins die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist. □

Als Indexmenge der Partition der Eins kann man die Überdeckung der sie untergeordnet sein soll verwenden. Dies ist oft unkomplizierter anzuwenden als Satz 2.4.1.

Korollar 2.4.5. *Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $0 \leq r \leq \infty$, und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine Partition der Eins $\{\lambda_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ mit* $\operatorname{supp}(\lambda_U) \subseteq U$ *für alle $U \in \mathcal{U}$.*

Beweis. Nach Satz 2.4.1 gibt es eine Partition der Eins $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist. Für jedes $\alpha \in A$ wähle $U_\alpha \in \mathcal{U}$ mit $\operatorname{supp}\mu_\alpha \subseteq U_\alpha$. Für $U \in \mathcal{U}$ sei $A_U := \{\alpha \in A \mid U_\alpha = U\}$ und $\lambda_U := \sum_{\alpha\in A_U} \mu_\alpha$. Dann ist $\{\lambda_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ eine Partition der Eins mit $\operatorname{supp}\lambda_U \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$. □

Ohne Regularitätsvoraussetzung ist Satz 2.3.8 falsch, jede abgeschlossene Teilmenge ist Nullstellenmenge einer C^r-Funktion.

Satz 2.4.6 (Whitney). *Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $0 \leq r \leq \infty$, und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Dann existiert eine C^r-Funktion $f : M \to [0,\infty)$ mit $A = f^{-1}(0)$.*

Der folgende Beweis von Satz 2.4.6 ist eine typische Anwendung von Zerlegungen der Eins. Wir werden zuerst ein lokales Resultat, siehe Lemma 2.4.7, beweisen und dann mit Hilfe einer geeigneten Partition der Eins das globale Resultat erhalten.

Lemma 2.4.7. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann existiert eine C^∞-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, sodass $f^{-1}(0) = A$.*

Beweis von Lemma 2.4.7. Sei $U := \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Da $\mathbb{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt finden wir eine Folge $x_k \in U$ und $r_k > 0$ sodass $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B^n_{x_k}(r_k) = U$, wobei $B^n_x(r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$ den offenen Ball mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$ bezeichnet. Sei $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine C^∞-Funktion wie in Lemma 2.4.2. Seien $C_k > 0$ Konstanten, die wir später noch genauer spezifizieren werden. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$f_k : \mathbb{R}^n \to [0,\infty), \quad f_k(x) := C_k\phi\big(2 - 2\|x - x_k\|/r_k\big)$$

eine C^∞-Funktion, und es gilt:

(i) $f_k(x) \neq 0$ genau dann wenn $x \in B^n_{x_k}(r_k)$.

Wählt man die $C_k > 0$ hinreichend klein, dann gilt zusätzlich noch:

(ii) $|f_k(x)| \leq 2^{-k}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Für alle Partiellen Ableitungen der Ordnung $j \leq k$ gilt $\left|\frac{\partial^j f_k(x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_j}}\right| \leq 2^{-k}$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wegen (ii) konvergiert $f := \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$. Wegen (iii) konvergiert aber auch $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_j}}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$. Daher ist $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ eine C^∞-Funktion. Aus (i) folgt $f(x) \neq 0$ genau dann wenn $x \in \bigcup_k B^n_{x_k}(r_k) = U$. Daher gilt auch $f^{-1}(0) = A$. □

Beweis von Satz 2.4.6. O.B.d.A. sei M zusammenhängend und $\dim(M) = n$. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M, sodass für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine surjektive Karte $\varphi_U : U \to \mathbb{R}^n$ existiert. Nach Lemma 2.4.7 finden wir zu jedem $U \in \mathcal{U}$ eine C^r-Funktion $f_U : U \to [0,\infty)$ sodass $f_U^{-1}(0) = U \cap A$. Sei $\{\lambda_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ eine C^r-Partition der Eins wie in Korollar 2.4.5. Da $\operatorname{supp}\lambda_U \subseteq U$ kann $\lambda_U f_U : U \to [0,\infty)$ durch 0 zu einer C^r-Funktion $\lambda_U f_U : M \to [0,\infty)$ ausgedehnt werden. Da $\{\operatorname{supp}\lambda_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ lokal endlich ist, ist auch die Summe $f := \sum_{U\in\mathcal{U}} \lambda_U f_U$ lokal endlich, also $f : M \to [0,\infty)$ eine C^r-Funktion.

Ist $x \in A$ und $U \in \mathcal{U}$ dann gilt $(\lambda_U f_U)(x) = 0$, denn falls $x \in U$ folgt dies aus $f_U(x) = 0$, und für $x \notin U$ haben wir nach Definition $(\lambda_U f_U)(x) = 0$. Es folgt $A \subseteq f^{-1}(0)$. Ist umgekehrt $f(x) = 0$ dann gilt $(\lambda_U f_U)(x) = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}$, da ja $\lambda_U f_U \geq 0$. Es existiert $U \in \mathcal{U}$ sodass $\lambda_U(x) \neq 0$. Für dieses U folgt $x \in U$ und $f_U(x) = 0$. Daher $x \in U \cap A \subseteq A$, und wir erhalten auch $f^{-1}(0) \subseteq A$. Damit ist $f^{-1}(0) = A$, und der Beweis von Satz 2.4.6 abgeschlossen. □

3. Die Whitney Topologie

Wir werden in diesem Kapitel eine für die Differentialtopologie wichtige Topologie, die *Whitney oder C^r-Topologie*, auf $C^r(M,N)$ einführen, $0 \leq r \leq \infty$. Diese wird zwar im Allgemeinen nicht metrisierbar sein, jedoch hat $C^r(M,N)$, wie wir in Abschnitt 3.4 sehen werden, die Baire Eigenschaft — ein wesentliches Hilfsmittel für Existenzsätze. Viel wichtige Teilmengen von $C^r(M,N)$ sind bezüglich der Whitney Topologie offen, etwa die (abgeschlossenen) Einbettungen, die Immersionen, die Submersionen und die Diffeomorphismen, siehe Abschnitt 3.5 unten. Die Whitney Topologie ist also *fein* genug, sodass diese für uns interessanten Mengen offen sind. Andererseits werden wir in Abschnitt 3.6 sehen, dass $C^r(M,N)$ in $C^s(M,N)$ dicht ist $0 \leq s \leq r \leq \infty$. C^s-Abbildungen lassen sich also durch C^r-Abbildungen approximieren. Die Whitney Topologie ist also in diesem Sinn auch *nicht zu fein.* Die Offenheitsresultate zusammen mit den Dichtheitsresultaten werden dann sehr schnell zu folgendem fundamentalen Ergebnis führen, siehe die Abschnitte 3.6 und 3.7. Jede C^r-Mannigfaltigkeit ist C^r-diffeomorph zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$. Sind zwei C^r-Mannigfaltigkeiten C^s-diffeomorph dann sind sie auch C^r-diffeomorph, $1 \leq s \leq r \leq \infty$. Grob gesprochen besagen diese Ergebnisse, dass man beim Studium der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (d.h. $r \geq 1$) o.B.d.A. die zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten glatt (d.h. $r = \infty$) annehmen darf. Diese Resultate bleiben für $r = 0$ oder $s = 0$ nicht richtig. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten die keine differenzierbare Struktur besitzen, und es gibt topologische Mannigfaltigkeiten die mehrere nicht diffeomorphe differenzierbare Strukturen erlauben. Darauf können wir hier aber leider nicht eingehen.

Wir folgen in diesem Kapitel im Wesentlichen der Darstellung in [**H94**].

3.1. Die Graphentopologie Topologie auf $C(X,Y)$.

Für zwei topologische Räume X und Y werden wir in diesem Abschnitt eine Topologie auf dem Raum der stetigen Abbildungen $C(X,Y)$ definieren und einige grundlegende Eigenschaften besprechen. Wir werden dies später nur für topologische Mannigfaltigkeiten X und vollständige metrische Räume Y verwenden. Meist wird auch Y eine topologische Mannigfaltigkeit sein.

Seien also X und Y zwei topologische Räume. Bezeichne mit $C(X,Y)$ die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Für $f \in C(X,Y)$ sei

$$\Gamma_f := \big\{(x, f(x)) \bigm| x \in X\big\} \subseteq X \times Y$$

der *Graph* von f. Für eine offenen Menge $U \subseteq X \times Y$ definiere

$$\mathcal{O}_U := \big\{f \in C(X,Y) \bigm| \Gamma_f \subseteq U\big\} \subseteq C(X,Y).$$

Beachte, dass $\mathcal{O}_U \cap \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{U\cap V}$ und $\mathcal{O}_{X\times Y} = C(X,Y)$. Daher bilden die Mengen $\mathcal{O}_U$, wo U die offenen Mengen in $X \times Y$ durchläuft, die Basis einer Topologie auf $C(X,Y)$. Diese Topologie wird *starke Topologie* oder auch *Graphentopologie* genannt. Bis auf Weiteres sei $C(X,Y)$ mit dieser Topologie versehen.

PROPOSITION 3.1.1. *Es seien X und Y zwei topologische Räume. Sei weiters $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine lokal endliche Familie abgeschlossener Teilmengen von X, und sei $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ein Familie offener Teilmengen von Y. Dann ist*

$$\big\{f \in C(X,Y) \bigm| \forall\alpha \in A : f(K_\alpha) \subseteq V_\alpha\big\} \tag{15}$$

offen in $C(X,Y)$.

BEWEIS. Es ist $\{K_\alpha \times (N \setminus V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ eine lokal endliche Familie abgeschlossener Teilmengen von $X \times Y$. Daher ist auch $L := \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha \times (Y \setminus V_\alpha)$ abgeschlossen in $X \times Y$, also

$$U := (X \times Y) \setminus L = \bigcap_{\alpha\in A} \big((X \setminus K_\alpha) \times Y\big) \cup (K_\alpha \times V_\alpha)$$

offen in $X \times Y$. Daher ist $\mathcal{O}_U$ eine offene Teilmenge von $C(X,Y)$ die offenbar mit (15) überein stimmt. □

PROPOSITION 3.1.2. *Sind X und Y Hausdorff dann auch $C(X,Y)$.*

BEWEIS. Seien $f_1, f_2 \in C(X,Y)$ und $f_1 \neq f_2$. Dann existiert $x \in X$ mit $f_1(x) \neq f_2(x)$. Da Y Hausdorff ist, finden wir eine offene Umgebung $V_1 \subseteq Y$ von $f_1(x)$ und eine offene Umgebung $V_2 \subseteq Y$ von $f_2(x)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Da X Hausdorff ist, ist die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen in X. Nach Proposition 3.1.1 sind

$$\mathcal{O}_1 := \big\{h \in C(X,Y) \bigm| h(x) \in V_1\big\} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{O}_2 := \big\{h \in C(X,Y) \bigm| h(x) \in V_2\big\}$$

offen in $C(X,Y)$. Wegen $f_i(x) \in V_i$ gilt $f_i \in \mathcal{O}_i$, $i = 1,2$. Da $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Also werden f_1 und f_2 durch die offenen Mengen $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ getrennt. □

PROPOSITION 3.1.3. *Es seinen X, Y und Z drei topologische Räume und $f : Y \to Z$ stetig. Dann ist $f_* : C(X,Y) \to C(X,Z)$, $f_*(g) := f \circ g$, stetig.*

BEWEIS. Sei $U \subseteq X \times Z$ offen. Da $\mathrm{id}_X \times f : X \times Y \to X \times Z$ stetig ist, ist $V := (\mathrm{id}_X \times f)^{-1}(U) \subseteq X \times Y$ offen. Offensichtlich gilt $(f_*)^{-1}(\mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_V$, also ist f_* stetig. □

Sei d eine Metrik auf Y die die Topologie induziert. Für $f \in C(X,Y)$ und $\varepsilon \in C(X,\mathbb{R}^+)$, wobei $\mathbb{R}^+ := (0,\infty)$, ist die Menge

$$U_{f,\varepsilon} := \big\{(x,y) \in X \times Y \bigm| d(f(x),y) < \varepsilon(x)\big\}$$

offen in $X \times Y$, und daher

$$\mathcal{O}_{f,\varepsilon} := \mathcal{O}_{U_{f,\varepsilon}} = \big\{g \in C(X,Y) \bigm| \forall x \in X : d(f(x),g(x)) < \varepsilon(x)\big\}$$

eine offene Umgebung von f in $C(X,Y)$.

PROPOSITION 3.1.4. *Sei X eine parakompakter Hausdorffraum und (Y,d) ein metrischer Raum. Dann bilden die offenen Mengen $\mathcal{O}_{f,\varepsilon}$ eine Umgebungsbasis von f, wobei ε die Menge $C(X,\mathbb{R}^+)$ durchläuft.*

Beweis. Sei $f \in C(X,Y)$ und $U \subseteq X \times Y$ offen, sodass $f \in \mathcal{O}_U$. Es genügt $\varepsilon \in C(X,\mathbb{R}^+)$ zu konstruieren, sodass

$$U_{f,\varepsilon} = \big\{(x,y) \in X \times Y \bigm| d(f(x),y) < \varepsilon(x)\big\} \subseteq U. \tag{16}$$

Dann ist $\mathcal{O}_{f,\varepsilon} \subseteq \mathcal{O}_U$ und die Proposition bewiesen.

Da $U \subseteq X \times Y$ offen, $\Gamma_f \subseteq U$, und f stetig ist, finden wir zu jedem $z \in X$ eine offene Umgebung U_z von z und $\varepsilon_z \in \mathbb{R}^+$ sodass

$$\big\{(x,y) \in U_z \times Y \bigm| d(f(x),y) < \varepsilon_z\big\} \subseteq U. \tag{17}$$

Die Mengen $\{U_z\}_{z\in X}$ bilden eine offene Überdeckung von X. Da X parakompakt ist, finden wir eine Partition der Eins $\{\lambda_z\}_{z\in X}$ die dieser Überdeckung untergeordnet ist, siehe Korollar 2.4.5. Genauer, $\lambda_z \in C(X,[0,1])$, $\operatorname{supp}\lambda_z \subseteq U_z$, die Träger $\{\operatorname{supp}\lambda_z\}_{z\in X}$ bilden eine lokal endliche Familie, und $\sum_{z\in X}\lambda_z = 1$. Wir definieren nun $\varepsilon \in C(X,\mathbb{R}^+)$ durch $\varepsilon := \sum_{z\in X}\lambda_z\varepsilon_z$.

Um (16) einzusehen sei $(x,y) \in X \times Y$ und $d(f(x),y) < \varepsilon(x)$. Es ist zu zeigen $(x,y) \in U$. Wähle $z_0 \in X$, sodass $\lambda_{z_0}(x) \neq 0$ und sodass $\varepsilon_z \leq \varepsilon_{z_0}$ für alle $z \in X$ für die $\lambda_z(x) \neq 0$. Dann gilt

$$d(f(x),y) < \varepsilon(x) = \sum_{z\in X}\lambda_z(x)\varepsilon_z \leq \sum_{z\in X}\lambda_z(x)\varepsilon_{z_0} \leq \varepsilon_{z_0}.$$

Da $x \in \operatorname{supp}\lambda_{z_0} \subseteq U_{z_0}$ folgt nun aus (17), dass $(x,y) \in U$. □

Bemerkung 3.1.5. Ist X ein kompakter Hausdorff Raum und (Y,d) ein metrischer Raum, dann ist $d'(f,g) := \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$ eine Metrik auf $C(X,Y)$ die die Graphentopologie erzeugt. Ist (Y,d) vollständig, dann auch $(C(X,Y),d')$. Dies folgt sofort aus Proposition 3.1.4.

Bemerkung 3.1.6. Ist X nicht kompakt, dann erfüllt $C(X,Y)$ im Allgemeinen nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, und ist daher insbesondere nicht metrisierbar. Unter Zuhilfenahme von Proposition 3.1.4 sieht man zum Beispiel leicht, dass $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Bemerkung 3.1.7. Es sei $X := (-1,1)$, $Y := [-2,2]$ und $Z := \mathbb{R}$ mit den üblichen Topologien. Seien weiters $z_n \in Z$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_\infty$ und $z_n \neq z_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $z \in Z$ bezeichne const_z die konstante Funktion, $\mathrm{const}_z(x) := z$, sowohl in $C(X,Z)$ als auch in $C(Y,Z)$. Da Y kompakt ist, gilt $\lim_{n\to\infty}\mathrm{const}_{z_n} = \mathrm{const}_{z_\infty}$ in $C(Y,Z)$, siehe Bemerkung 3.1.5. Aber in $C(X,Z)$ konvergiert die Folge const_{z_n} nicht, denn für $\varepsilon \in C(X,\mathbb{R}^+)$, $\varepsilon(x) := 1-|x|$, ist $U_{\mathrm{const}_{z_\infty},\varepsilon}$ eine Umgebung von $\mathrm{const}_{z_\infty}$ die kein einziges const_{z_n} enthält. Bezeichnet $f : X \to Y$ die kanonische Einbettung, dann ist also die Abbildung $f^* : C(Y,Z) \to C(X,Z)$, $f^*(g) := g \circ f$, nicht stetig.

Proposition 3.1.8. *Sei X ein parakompakter Hausdorff Raum und seien (Y_i,d_i), $i = 1,2$, zwei metrische Räume. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$C(X,Y_1 \times Y_2) \to C(X,Y_1) \times C(X,Y_2) \tag{18}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Metrik $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}$ erzeugt die Produkttopologie auf $Y_1 \times Y_2$. Für $(f_1,f_2) \in C(X,Y_1 \times Y_2) = C(X,Y_1) \times C(X,Y_2)$, und $\varepsilon \in C(X,\mathbb{R}^+)$ gilt offensichtlich $\mathcal{O}^d_{(f_1,f_2),\varepsilon} = \mathcal{O}^{d_1}_{f_1,\varepsilon} \times \mathcal{O}^{d_2}_{f_2,\varepsilon}$. Daher ist (18) ein Homöomorphismus, siehe Proposition 3.1.4. □

Sei wieder X ein parakompakter Hausdorff Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Wir sagen eine Folge $f_n \in C(X, Y)$ konvergiert *bezüglich d gleichmäßig* gegen f falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in X$. Wir nennen eine Teilmenge $Q \subseteq C(X, Y)$ *gleichmäßig abgeschlossen* falls der Limes jeder gleichmäßig konvergenten Folge in Q wieder in Q liegt. Schließlich erinnern wir uns noch daran, dass ein topologischer Raum *Baire Raum* heißt falls jeder Durchschitt abzählbar vieler offener und dichter Mengen wieder dicht ist. Ein berühmter Satz von Baire [**S69**, Kapitel II.3.9] besagt, dass jeder vollständige metrische Raum die Baire Eigenschaft besitzt. Ist X ein kompakter Hausdorff Raum und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum, dann ist daher $C(X, Y)$ ein Baire Raum, siehe Bemerkung 3.1.5. Wir werden dies nicht verwenden und folgendes allgemeinere Resultat zeigen.

Satz 3.1.9. *Sei X ein parakompakter Hausdorff Raum und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist jede nicht leere bezüglich d gleichmäßig abgeschlossene Menge $Q \subseteq C(X, Y)$ ein Baire Raum bezüglich der starken Topologie.*

Beweis. Sei $A_n \subseteq Q$ eine Folge offener und dichter Teilmengen bezüglich der starken Topologie. Sei $U \subseteq Q$ offen und nicht leer. Es ist zu zeigen $U \cap \bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

Da A_0 offen und dicht ist, ist $A_0 \cap U \subseteq Q$ offen und nicht leer. Nach Proposition 3.1.4 finden wir daher $f_0 \in A_0 \cap U \subseteq Q$ und $\varepsilon_0 \in C(X, \mathbb{R}^+)$ sodass

$$Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_0,\varepsilon_0} \subseteq A_0 \cap U,$$

wobei $\bar{\mathcal{O}}_{f,\varepsilon} := \big\{ g \in C(X, Y) \,\big|\, \forall x \in X : d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon(x) \big\}$. Wir dürfen $\varepsilon_0 \leq 1$ annehmen.

Es ist $Q \cap \mathcal{O}_{f_0,\varepsilon_0} \subseteq Q$ offen und nicht leer. Da $A_1 \subseteq Q$ offen und dicht ist, ist auch $A_1 \cap \mathcal{O}_{f_0,\varepsilon_0} \subseteq Q$ offen und nicht leer. Wir finden daher $f_1 \in A_1 \cap \mathcal{O}_{f_0,\varepsilon_0} \subseteq Q$ und $\varepsilon_1 \in C(X, \mathbb{R}^+)$, sodass

$$Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_1,\varepsilon_1} \subseteq A_1 \cap \mathcal{O}_{f_0,\varepsilon_0} \subseteq Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_0,\varepsilon_0}$$

und wir dürfen $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0/2$ annehmen.

Rekursiv finden wir $f_{n+1} \in A_{n+1} \cap \mathcal{O}_{f_n,\varepsilon_n} \subseteq Q$ und $\varepsilon_{n+1} \in C(X, \mathbb{R}^+)$ sodass

$$Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_{n+1},\varepsilon_{n+1}} \subseteq A_{n+1} \cap \mathcal{O}_{f_n,\varepsilon_n} \subseteq Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_n,\varepsilon_n}$$

und wir dürfen $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n/2$ annehmen.

Da $f_{n+1} \in \mathcal{O}_{f_n,\varepsilon_n}$, $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n/2$ und $\varepsilon_0 \leq 1$ folgt

$$d(f_{n+1}(x), f_n(x)) < \varepsilon_n(x) \leq 2^{-n}$$

für alle n und alle $x \in X$. Da N vollständig metrisch ist konvergiert die Folge f_n gleichmäßig gegen ein $f \in C(X, Y)$. Da Q gleichmäßig abgeschlossen ist folgt $f \in Q$. Auch gilt $f_{n+k} \in Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_{n+k},\varepsilon_{n+k}} \subseteq Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_n,\varepsilon_n}$ für alle $k \geq 0$. Daher $f \in Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_n,\varepsilon_n}$ für alle $n \geq 0$. Insbesondere ist $f \in Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_0,\varepsilon_0} \subseteq U$, und $f \in Q \cap \bar{\mathcal{O}}_{f_n,\varepsilon_n} \subseteq A_n$ für alle $n \geq 0$. Also $f \in U \cap \bigcap_n A_n$ und letzteres ist daher nicht leer. □

Aus Satz 1.1.2 und Satz 3.1.9 erhalten wir sofort

Korollar 3.1.10. *Sind M und N zwei topologische Mannigfaltigkeiten, dann ist $C(M, N)$ ein Baire Raum.*

Wir erinnern uns, dass eine stetige Abbildung (zwischen lokal kompakten Räumen) *proper* oder *eigentlich* heißt falls die Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind. Die Menge der properen Abbildungen $X \to Y$ wird mit $\mathrm{Prop}(X, Y)$ bezeichnet.

Proposition 3.1.11. *Für zwei topologische Mannigfaltigkeiten M und N ist die Menge der properen Abbildungen* $\mathrm{Prop}(M,N)$ *offen in* $C(M,N)$.

Beweis. Wähle eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von N sodass $\bar{V}$ kompakt ist für alle $V \in \mathcal{V}$. Sei $f \in C(M,N)$ proper. Betrachte die offene Menge

$$U := \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}(V) \times V \subseteq M \times N.$$

Dann gilt $f \in \mathcal{O}_U$. Es gilt aber auch $\mathcal{O}_U \subseteq \mathrm{Prop}(M,N)$. Denn ist $g \in \mathcal{O}_U$ und $K \subseteq N$ kompakt dann trifft K nur endlich viele $V_1,\dots,V_k \in \mathcal{V}$. Es folgt

$$g^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq k} f^{-1}(V_i) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq k} f^{-1}(\bar{V}_i) \tag{19}$$

denn ist $x \in g^{-1}(K)$ und $(x,g(x)) \in U$ dann $(x,g(x)) \in \bigcup_{1\leq i\leq k} f^{-1}(V_i) \times V_i$ und daher auch $x \in \bigcup_{1\leq i\leq k} f^{-1}(V_i)$. Da f proper ist, ist $\bigcup_{1\leq i\leq k} f^{-1}(\bar{V}_i)$ kompakt. Da $g^{-1}(K)$ abgeschlossen ist folgt aus (19) dass auch $g^{-1}(K)$ kompakt ist. Also ist g proper und damit $f \in \mathcal{O}_U \subseteq \mathrm{Prop}(M,N)$. $\square$

3.2. Jets. Wir werden in Abschnitt 3.4 eine Topologie auf $C^r(M,N)$ definieren die es gestattet auch die Ableitungen von Funktionen zu kontrollieren. Um die Idee zu skizieren betrachten wir die Abbildung $C^r(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{r+1})$, $f \mapsto \tilde{f}$, $\tilde{f}(x) := (f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x))$. Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv, wir können daher $C^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$ als Teilmenge von $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{r+1})$ auffassen und mit der Teilraumtopologie versehen. Diese Topologie heißt die C^r-Topologie auf $C^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Will man dies auf $C^r(M,N)$ verallgemeinern ist aufs Erste nicht ganz klar welcher Raum die Rolle von $\mathbb{R}^{r+1}$ übernehmen soll. In diesem Abschnitt konstruieren wir für $0 \leq r < \infty$ eine topologische Mannigfaltigkeit $J^r(M,N)$ und eine injektive Abbbildung $j^r : C^r(M,N) \to C(M, J^r(M,N))$. Die Whitney oder C^r-Topologie auf $C^r(M,N)$ wird dann definiert als die Teilraumtopologie die $C^r(M,N)$ von der Graphentopologie auf $C(M,J^r(M,N))$ erbt, siehe Abschnitt 3.4. Der Konstruktion von $J^r(M,N)$, $0 \leq r < \infty$, und einiger seiner elementaren Eigenschaften ist dieser Abschnitt gewidmet. Den Fall $r = \infty$ werden wir dann in Abschnitt 3.3 behandeln.

Wir erinnern uns zuerst an die Kettenregel. Sind $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $f : U \to V$ und $g : V \to \mathbb{R}^p$ hinreichend differenzierbar, dann gilt für die Abbleitungen

$$D(g \circ f) = (Dg \circ f) \cdot Df$$

Wenden wir nochmals die Kettenregel an erhalten wir

$$D^2(g \circ f) = (Dg \circ f) \cdot D^2 f + (D^2 g \circ f) \cdot (Df \times Df)$$

Mittels Induktion sieht man, dass universelle (d.h. unabhängig von f und g) Konstanten $\Lambda^r_{l_1,\dots,l_k} \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$D^r(g \circ f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{1\leq l_i\leq r\\ l_1+\cdots+l_k=r}} \Lambda^r_{l_1,\dots,l_k} (D^k g \circ f) \cdot (D^{l_1} f \times \cdots \times D^{l_k} f) \tag{20}$$

Dies ist unter dem Namen *Faà di Bruno Formel* bekannt. Die tatsächlichen Werte der Konstanten sind für uns hier nicht wichtig.

Sei $f \in C^r(M,N)$ und $x \in M$. Ist (U,φ) eine Karte von M mit $x \in U$ und sind (V_i,ψ_i), $i=1,2$, zwei Karten von N mit $f(x) \in V_i$ dann gilt wegen (20)

$$(D^r\bar f_2)_{\bar x} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{1\leq l_i\leq r\\ l_1+\cdots+l_k=r}} \Lambda^r_{l_1,\dots,l_k}(D^k\bar\psi)_{\bar y}\cdot\big((D^{l_1}\bar f_1)_{\bar x}\times\cdots\times(D^{l_k}\bar f_1)_{\bar x}\big) \tag{21}$$

wobei $\bar\psi := \psi_2\circ\psi^{-1}$, $\bar f_i := \psi_i\circ f\circ\varphi^{-1}$, $\bar x := \varphi(x)$, $\bar y := \psi_1(f(x))$, also auch $\bar f_2 = \bar\psi\circ\bar f_1$ und $\bar f_1(\bar x) = \bar y_1$. Sind (U_i,φ_i) zwei Karten von M mit $x \in U_i$ und ist (V,ψ) eine Karte von N mit $f(x)\in V$, dann gilt

$$(D^r\tilde f_2)_{\bar x_2} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{1\leq l_i\leq r\\ l_1+\cdots+l_k=r}} \Lambda^r_{l_1,\dots,l_k}(D^k\tilde f_1)_{\bar x_1}\cdot\big((D^{l_1}\bar\varphi)_{\bar x_1}\times\cdots\times(D^{l_k}\bar\varphi)_{\bar x_1}\big) \tag{22}$$

wobei $\bar\varphi := \varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$, $\tilde f_i := \psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}$, $\bar x_i := \varphi_i(x)$, also auch $\tilde f_2 = \tilde f_1\circ\bar\varphi$ und $\bar\varphi(\bar x_2) = \bar x_1$. Aus der Struktur der Formeln (21) und (22) folgt, dass die Taylor Entwicklung der Ordnung r von $\psi_2\circ f\circ\varphi_1$ bei $\varphi_2(x)$

$$D(\psi_2\circ f\circ\varphi_2)_{\varphi_2(x)}, D^2(\psi_2\circ f\circ\varphi_2)_{\varphi_2(x)}\dots, D^r(\psi_2\circ f\circ\varphi_2)_{\varphi_2(x)}$$

die Taylorentwicklung der Ordnung r von $\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}$ bei $\varphi_1(x)$

$$D(\psi_1\circ f\circ\varphi_1)_{\varphi_1(x)}, D^2(\psi_1\circ f\circ\varphi_1)_{\varphi_1(x)}\dots, D^r(\psi_1\circ f\circ\varphi_1)_{\varphi_1(x)}$$

bestimmt. Insbesondere sehen wir, dass wenn für zwei Funktionen $f_i : M \to N$, $i=1,2$, mit $f_1(x) = f_2(x)$, die Taylor Entwicklungen der Ordnung r bezüglich zweier Karten (U,φ) und (V,ψ) mit $x\in U$ und $f_1(x) = f_2(x) \in V$, bei $\varphi(x)$ übereinstimmen, d.h.

$$D^k(\psi\circ f_1\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)} = D^k(\psi\circ f_2\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)} \quad 1\leq k\leq r,$$

dann gilt dies auch für jedes andere solche Paar von Karten (U,φ) und (V,ψ).

Seien M und N zwei C^r–Mannigfaltigkeiten, $0\leq r<\infty$. Betrachte Trippel (x,f,W), wo $W\subseteq M$ offen, $x\in W$ und $f : W\to N$ eine C^r–Abbildung ist. Zwei solche Paare (x_1,f_1,W_1) und (x_2,f_2,W_2) heißen äquivalent falls $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$ und falls für eine (und dann jede) Karte (U,φ) mit $x_1\in U$ und eine (und dann jede) Karte (V,ψ) mit $f(x_1)\in V$ die die Taylorentwicklungen von $\psi\circ f_1\circ\varphi^{-1}$ und $\psi\circ f_2\circ\varphi^{-1}$ bei $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ bis zur Ordnung r übereinstimmen, also $D^k(\psi\circ f_1\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x_1)} = D^k(\psi\circ f_2\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x_2)}$ für alle $1\leq k\leq r$. Wir bezeichnen mit $J^r(M,N)$ die Menge der Äquivalenzklassen und mit $[x,f,W]_r$ die Klasse zu (x,f,W). Die Elemente von $J^r(M,N)$ heißen *r-Jets* und können als kartenunabhängige Taylorentwicklung der Ordnung r verstanden werden. Wir haben wohldefinierte *source* und *target* Abbildungen

$$\sigma^r : J^r(M,N)\to M, \quad \sigma^r([x,f,W]_r) := x \tag{23}$$

und

$$\tau^r : J^r(M,N)\to N, \quad \tau^r([x,f,W]_r) := f(x) \tag{24}$$

Für $0\leq s\leq r<\infty$ haben wir außerdem eine kanonische Abbildung

$$\iota^{s,r} : J^r(M,N)\to J^s(M,N), \quad \iota^{s,r}([x,f,W]_r) := [x,f,W]_s, \tag{25}$$

uns es gilt $\iota^{t,s}\circ\iota^{s,r} = \iota^{t,r}$, $\sigma^s\circ\iota^{s,r} = \sigma^r$, $\tau^s\circ\iota^{s,r} = \tau^r$ für alle $0\leq t\leq s\leq r<\infty$.

Wir werden nun $J^r(M,N)$ zu einer topologischen Mannigfaltigkeit machen. Sei dazu $\varphi : U\to\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^m$ eine Karte von M und $\psi : V\to\psi(V)\subseteq\mathbb{R}^n$ eine Karte von N. Bezeichne mit $L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ den Vektorraum der symmetrischen k-linearen Abbildungen $(\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R}^n$. Betrachte die Abbildung:

$$\theta^r_{\psi,\varphi} : J^r(U,V) \to \varphi(U) \times \psi(V) \times \prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \tag{26}$$

$$\theta^r_{\psi,\varphi}([x,f,W]_r) := \Big(\varphi(x), \psi(f(x)), D^1(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}, \dots, D^r(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}\Big)$$

Sie ist offensichtlich bijektiv, und die rechte Seite von (26) ist eine offene Menge in einem $\mathbb{R}^N$. Wir können $J^r(U,V)$ als Teilmenge von $J^r(M,N)$ auffassen. Sei $\mathcal{A}_M$ ein Atlas von M und $\mathcal{A}_N$ ein Atlas von N. Wir versehen $J^r(M,N)$ mit der feinsten Topologie, sodass die Abbildungen

$$(\theta^r_{\psi,\varphi})^{-1} : \varphi(U)\times\psi(V)\times\prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \to J^r(U,V) \subseteq J^r(M,N)$$

stetig sind für alle $(U,\varphi)\in\mathcal{A}_M$ und alle $(V,\psi)\in\mathcal{A}_N$. Eine Teilmenge $S\subseteq J^r(M,N)$ ist also offen genau dann wenn $(\theta^r_{\psi,\varphi})(S\cap J^r(U,V))$ offen ist für alle $(U,\varphi)\in\mathcal{A}_M$ und alle $(V,\psi)\in\mathcal{A}_N$.

Proposition 3.2.1. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0\leq r<\infty$. Die Topologie auf $J^r(M,N)$ hängt nicht von der Wahl der Atlanten auf M und N ab. $J^r(M,N)$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit, die Abbildungen* (26) *sind Karten für $J^r(M,N)$. Weiters sind* (23), (24) *und* (25) *stetig. Im Fall $r=0$ ist $(\sigma^0,\tau^0) : J^0(M,N)\to M\times N$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $\varphi : U\to\mathbb{R}^n$ eine Karte von M und seien $\psi_i : V_i\to\mathbb{R}^m$ zwei Karten von N. Dann gilt $J^r(U,V_1)\cap J^r(U,V_2) = J^r(U,V_1\cap V_2)$ und $\theta^r_{\psi_2,\varphi}\circ(\theta^r_{\psi_1,\varphi})^{-1}$

$$\varphi(U)\times\psi_1(V_1\cap V_2)\times\prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \to \varphi(U)\times\psi_2(V_1\cap V_2)\times\prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

ist gegeben durch

$$(x,y,\lambda^1,\dots,\lambda^r)\mapsto \left(x, \bar\psi(y), (D\bar\psi)_y\cdot\lambda^1, \dots, \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{1\leq l_i\leq r\\ l_1+\cdots+l_k=r}} \Lambda^r_{l_1,\dots,l_k}(D^k\bar\psi)_y\cdot\big(\lambda^{l_1}\times\cdots\times\lambda^{l_k}\big)\right)$$

wobei $\bar\psi := \psi_2\circ\psi_1^{-1}$, siehe (21). Also ist $\theta^r_{\psi_2,\varphi}\circ(\theta^r_{\psi_1,\varphi})^{-1}$ stetig. Genauso folgt aus (22), dass $\theta^r_{\psi,\varphi_2}\circ(\theta^r_{\psi,\varphi_1})^{-1}$ stetig ist für Karten φ_i von M und eine Karte ψ von N. Also ist auch $\theta^r_{\psi_2,\varphi_2}\circ(\theta^r_{\psi_1,\varphi_1})^{-1} = \big(\theta^r_{\psi_2,\varphi_2}\circ(\theta^r_{\psi_1,\varphi_2})^{-1}\big)\circ\big(\theta^r_{\psi_1,\varphi_2}\circ(\theta^r_{\psi_1,\varphi_1})^{-1}\big)$ stetig. Es folgt, dass die Topologie auf $J^r(M,N)$ nicht von der Wahl der Atlanten abhängt. Auch schließen wir daraus, dass $J^r(U,V)$ offen und (26) ein Homöomorphismus ist. Also ist $J^r(M,N)$ lokal Euklidisch.

Bezüglich Karten $\varphi : U\to\mathbb{R}^m$ und $\psi : V\to\mathbb{R}^n$ ist

$$\varphi\circ\sigma^r\circ(\theta^r_{\psi,\varphi})^{-1} : \varphi(U)\times\psi(V)\times\prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\to\varphi(U)$$

die offensichtliche Projektion, also stetig. Es folgt, dass $\sigma^r : J^r(M,N)\to M$ stetig ist. Genauso stimmt

$$\psi\circ\tau^r\circ(\theta^r_{\psi,\varphi})^{-1} : \varphi(U)\times\psi(V)\times\prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\to\psi(V)$$

mit der kanonischen Projektion überein, also ist auch $\tau : J^r(M,N) \to N$ stetig.

Auch die Stetigkeit von $\iota^{s,r} : J^r(M,N) \to J^s(M,N)$, $0 \le s \le r$, ist offensichtlich, da wir ja C^r-Atlanten von M und N verwenden können um die Topologie auf $J^s(M,N)$ zu beschreiben, und bezüglich C^r-Karten (U,φ) und (V,ψ) wie oben ist die Komposition $\theta^s_{\psi,\varphi} \circ \iota^{s,r} \circ (\theta^r_{\psi,\varphi})^{-1}$

$$\varphi(U) \times \psi(V) \times \prod_{1\le k\le r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \to \varphi(U) \times \psi(V) \times \prod_{1\le k\le s} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

die offensichtliche Projektion, also stetig.

Die Abbildung $(\sigma^0,\tau^0) : J^0(M,N) \to M \times N$ ist stetig und offensichtlich bijektiv. Sie ist aber auch ein lokaler Homöomorphismus, da für Karten (U,φ) und (V,ψ)

$$(\sigma^0 \times \tau^0)|_{J^0(U,V)} = (\varphi^{-1} \times \psi^{-1}) \circ \theta^0_{\psi,\varphi} : J^0(U,V) \to U \times V$$

ein Homöomorphismus ist.

Sind zwei Punkte in $J^r(M,N)$ in einem Kartengebiet $J^r(U,V)$ enthalten können sie leicht durch disjunkte offene Mengen getrennt werden, da ja $\mathbb{R}^N$ Hausdorff ist. Liegen sie nicht beide in einem Kartengebiet, dann müssen sie unter σ oder τ unterschiedliche Werte in M oder N haben. Da M und N Hausdorff sind können sie also auch in diesem Fall leicht durch offene disjunkte Mengen getrennt werden. Daher ist $J^r(M,N)$ Hausdorff.

Nun zur Parakompaktheit.[1] Sei M_0 eine Zusammenhangskomponente von M und N_0 eine Zusammenhangskomponenten von N. Da σ und τ stetig sind ist $J^r(M_0,N_0) = (\sigma,\tau)^{-1}(M_0 \times N_0)$ offen und abgeschlossen in $J^r(M,N)$. $J^r(M_0,N_0)$ ist sogar eine Zusammenhangskomponente von $J^r(M,N)$, wir werden dies aber nicht verwenden. Nach Satz 1.1.2 genügt es zu zeigen, dass $J^r(M_0,N_0)$ dem zweite Abzählbarkeitsaxiom genügt. Sei $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein abzählbarer Atlas von M_0 und $\{(V_j,\psi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein abzählbarer Atlas von N_0. Diese existieren, da jeder lokal endliche Atlas einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit abzählbar sein muss, da ja eine kompakte Ausschöpfung existiert, siehe Satz 1.1.2. Dann ist $\{J^r(U_i,V_j)\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ eine abzählbare offene Überdeckung von $J^r(M_0,N_0)$. Jedes einzelne $J^r(U_i,V_i)$ ist homöomorph zu einer offenen Menge in einem $\mathbb{R}^N$ erfüllt also das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Damit genügt auch $J^r(M_0,N_0)$ dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom. $\square$

Für $f \in C^r(M,N)$ erhalten wir eine Abbildung

$$j^r f : M \to J^r(M,N), \quad (j^r f)(x) := [x,f,M]_r$$

die die *r-Jet Verlängerung von f* heißt. Es gilt $\tau^r \circ j^r f = f$ und $\sigma^r \circ j^r f = \mathrm{id}_M$.

Proposition 3.2.2. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \le r < \infty$. Dann ist für $f \in C^r(M,N)$ die Abbildung $j^r f : M \to J^r(M,N)$ stetig.*

Beweis. Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von M und sei $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von N sodass $f(U) \subseteq V$. Es genügt zu zeigen, dass die Komposition

$$\theta^r_{\psi,\varphi} \circ j^r f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(U) \times \psi(U) \times \prod_{1\le k\le r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

[1] Das Argument das ich in der Vorlesung präsentiert habe war falsch!

stetig ist. Offenbar gilt für $y \in \varphi(U)$

$$(\theta^r_{\psi,\varphi} \circ j^r f \circ \varphi^{-1})(y) = \Big(y, (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(y)}, \dots, D^r(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(y)}\Big)$$

und dies hängt stetig von y ab, da f eine C^r-Abbildung ist. □

Für $g \in C^r(N, P)$, $0 \le r < \infty$, ist wegen (20)

$$g^r_* : J^r(M, N) \to J^r(M, P), \quad g^r_*([x, f, W]_r) := [x, g \circ f, W]_r \tag{27}$$

eine wohldefinierte Abbildung, die $\sigma^r \circ g^r_* = \sigma^r$ und $\tau^r \circ g^r_* = g \circ \tau^r$ erfüllt. Für $0 \le s \le r < \infty$ gilt außerdem $\iota^{s,r} \circ g^r_* = g^s_* \circ \iota^{s,r}$.

Proposition 3.2.3. *Sind M, N und P drei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \le r < \infty$, und $g \in C^r(N, P)$ dann ist die Abbildung $g^r_* : J^r(M, N) \to J^r(M, P)$ stetig.*

Beweis. Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von M, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von N und $\rho : W \to \mathbb{R}^p$ eine Karte von P sodass $g(V) \subseteq W$. Dann gilt $g^r_*(J^r(U, V)) \subseteq J^r(U, W)$. In den Karten $\theta^r_{\psi,\varphi}$ und $\theta^r_{\rho,\psi}$ ist $\theta^r_{\rho,\psi} \circ g^r_* \circ (\theta^r_{\psi,\varphi})^{-1}$

$$\varphi(U) \times \psi(V) \times \prod_{1 \le k \le r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \to \varphi(U) \times \rho(W) \times \prod_{1 \le k \le r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p)$$

gegeben durch, siehe (20),

$$(x, y, \lambda^1, \dots, \lambda^r) \mapsto \left(x, g(y), (Dg)_y \cdot \lambda^1, \dots, \sum_{1 \le k \le r} \sum_{\substack{1 \le l_i \le r \\ l_1 + \dots + l_k = r}} \Lambda^r_{l_1, \dots, l_k} (D^k g)_y \cdot (\lambda^{l_1} \times \dots \times \lambda^{l_k})\right)$$

also stetig. □

Wenden wir Proposition 3.2.3 auf die kanonischen Projektionen $\pi_1 : N_1 \times N_2 \to N_1$ und $\pi_2 : N_1 \times N_2 \to N_2$ an erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big) : J^r(M, N_1 \times N_2) \to J^r(M, N_1) \times J^r(M, N_2). \tag{28}$$

Proposition 3.2.4. *Sind M, N_1 und N_2 drei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \le r < \infty$, dann ist (28) ein Homöomorphismus auf*

$$J^r(M, N_1) \times_M J^r(M, N_2) := \big\{(a, b) \in J^r(M, N_1) \times J^r(M, N_2) \bigm| \sigma^r(a) = \sigma^r(b)\big\}.$$

Beweis. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} J^r(M, N_1) \times_M J^r(M, N_2) &\to J^r(M, N_1 \times N_2) \\ \big([x, f_1, W_1]_r, [x, f_2, W_2]_r\big) &\mapsto [x, (f_1, f_2), W_1 \cap W_2]_r \end{aligned}$$

invers zu (28). Die Stetigkeit dieser Umkehrabbildung verifiziert man leicht in Karten. □

3.3. ∞-Jets. Wir werden nun die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 auf den Fall $r = \infty$ übertragen. $J^\infty(M,N)$ wird als eine Art Limes der Räume $J^r(M,N)$ konstruiert. Fast alle der elementaren Eigenschaften für $J^r(M,N)$ die wir in Abschnitt 3.2 besprochen haben werden sich mühelos auf diesen Limes übertragen lassen. Allerdings wird $J^\infty(M,N)$ keine Mannigfaltigkeit, aber immerhin noch vollständig metrisierbar sein, siehe Proposition 3.3.7 unten.

Für zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten M und N definieren wir die Menge der ∞-*Jets* durch

$$J^\infty(M,N) := \Big\{ (x_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \prod_{r=0}^\infty J^r(M,N) \,\Big|\, \forall 0 \le s \le r < \infty : \iota^{s,r}(x_r) = x_s \Big\}$$

und versehen $J^\infty(M,N)$ mit der Teilraum Topologie von $\prod_{r=0}^\infty J^r(M,N)$. Der Raum $J^\infty(M,N)$ wird oft auch als *inverser Limes* des Systems

$$J^0(M,N) \xleftarrow{\iota^{0,1}} J^1(M,N) \leftarrow \cdots \leftarrow J^s(M,N) \xleftarrow{\iota^{s,r}} J^r(M,N) \leftarrow \cdots$$

bezeichnet und als $J^\infty(M,N) = \lim_{\leftarrow} J^r(M,N)$ geschrieben.

Für $0 \le r < \infty$ haben wir stetige Abbildungen

$$\iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to J^r(M,N), \quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto x_r$$

und diese erfüllen $\iota^{s,r} \circ \iota^{r,\infty} = \iota^{s,\infty}$ für alle $0 \le s \le r < \infty$.

Proposition 3.3.1 (Universelle Eigenschaft). *Sei X ein topologischer Raum und seien $f_r : X \to J^r(M,N)$ stetige Abbildungen sodass $\iota^{s,r} \circ f_r = f_s$ für alle $0 \le s \le r < \infty$ gilt. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $f_\infty : X \to J^\infty(M,N)$ mit $\iota^{r,\infty} \circ f_\infty = f_r$ für alle $0 \le r < \infty$.*

Beweis. Die Abbildungen $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ definieren eine stetige Abbildung $f_\infty : X \to \prod_{r=0}^\infty J^r(M,N)$. Wegen der Kompatibilitätsbedingungen $\iota^{s,r} \circ f_r = f_s$ nimmt f_∞ nur Werte in dem Teilraum $J^\infty(M,N)$ an. Also ist $f_\infty : X \to J^\infty(M,N)$ stetig, und es gilt $\iota^{r,\infty} \circ f_\infty = f_r$ nach Konstruktion. Die Eindeutigkeit einer solchen Abbildung ist offensichtlich, da ja die Bedingungen $\iota^{r,\infty} \circ f_\infty = f_r$ alle Komponenten von f_∞ festlegen. $\square$

Bemerkung 3.3.2. Die universelle Eigenschaft in Proposition 3.3.1 bestimmt $J^\infty(M,N)$ und die Abbildungen $\iota^{r,\infty}$ bis auf Homöomorphie. Genauer, sei $\tilde{J}(M,N)$ ein topologischer Raum und $\tilde{\iota}^r : \tilde{J}(M,N) \to J^r(M,N)$ stetige Abbildungen, $0 \le r < \infty$, sodass folgende universelle Eigenschaft gilt: Für jeden topologischen Raum X und stetige Abbildungen $f_r : X \to J^r(M,N)$ mit $f_s = \iota^{s,r} \circ f_r$, $0 \le s \le r < \infty$, existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{f} : X \to \tilde{J}(M,N)$ sodass $\tilde{\iota}^r \circ \tilde{f} = f_r$ für alle $0 \le r < \infty$. Die universelle Eigenschaft von $J^\infty(M,N)$ gibt uns eine eindeutige stetige Abbildung $g : \tilde{J}(M,N) \to J^\infty(M,N)$ mit $\iota^{r,\infty} \circ g = \tilde{\iota}^r$, $0 \le r < \infty$. Die universelle Eigenschaft von $\tilde{J}(M,N)$ garantiert die Existenz einer eindeutigen stetigen Abbildung $h : J^\infty(M,N) \to \tilde{J}(M,N)$ mit $\tilde{\iota}^r \circ h = \iota^{r,\infty}$. Die Komposition $g \circ h : J^\infty(M,N) \to J^\infty(M,N)$ erfüllt also $\iota^{r,\infty} \circ (g \circ h) = \iota^{r,\infty}$, $0 \le r < \infty$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von $J^\infty(M,N)$ folgt $g \circ h = \mathrm{id}_{J^\infty(M,N)}$. Genauso gilt für die Komposition $h \circ g : \tilde{J}(M,N) \to \tilde{J}(M,N)$ auch $\tilde{\iota}^r \circ (h \circ g) = \tilde{\iota}^r$, $0 \le r < \infty$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von $\tilde{J}(M,N)$ folgt nun $h \circ g = \mathrm{id}_{\tilde{J}(M,N)}$. Also sind $J^\infty(M,N)$ und

$\tilde{J}(M,N)$ homöomorph, dieser Homöomorphismus vertauscht $\tilde{\iota}^r$ mit $\iota^{r,\infty}$ und ist eindeutig mit dieser Eigenschaft. In diesem Sinn bestimmt also die universelle Eigenschaft den Raum $J^\infty(M,N)$ zusammen mit den Abbildungen $\iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to J^r(M,N)$. Alle topologischen Eigenschaften von $J^\infty(M,N)$ können also aus der universellen Eigenschaft in Proposition 3.3.1 hergeleitet werden, und wir werden dies auch tun. Die explizite Konstruktion als Teilraum von $\prod_{r=0}^\infty J^r(M,N)$ ist nicht wesentlich, sie sichert aber die Existenz des Raumes $J^\infty(M,N)$ und der Abbildungen $j^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to J^r(M,N)$.

LEMMA 3.3.3. *Die Topologie auf $J^\infty(M,N)$ ist die gröbste, sodass die Abbildungen $\iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to J^r(M,N)$ alle stetig sind, $0 \leq r < \infty$. Ist X ein topologischer Raum, dann ist $f : X \to J^\infty(M,N)$ genau dann stetig wenn alle $\iota^{r,\infty} \circ f : X \to J^r(M,N)$ stetig sind, $0 \leq r < \infty$.*

BEWEIS. Es bezeichne $\tilde{J}^\infty(M,N)$ die Menge $J^\infty(M,N)$ versehen mit der gröbsten Topologie, sodass die Abbildungen $\iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to J^r(M,N)$ alle stetig sind. Dann ist die identische Abbildung $i : J^\infty(M,N) \to \tilde{J}^\infty(M,N)$ stetig. Da die Abbildungen $\iota^{r,\infty} : \tilde{J}^\infty(M,N) \to J^r(M,N)$ stetig sind existiert nach Proposition 3.3.1 eine stetige Abbildung $g : \tilde{J}^\infty(M,N) \to J^\infty(M,N)$ mit $\iota^{r,\infty} \circ g = \iota^{r,\infty}$, $0 \leq r < \infty$. Die stetige Komposition $g \circ i : J^\infty(M,N) \to J^\infty(M,N)$ erfüllt $\iota^{r,\infty} \circ (g \circ i) = \iota^{r,\infty} \circ \mathrm{id}_{J^\infty(M,N)}$, $0 \leq r < \infty$. Nach der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.3.1 folgt $g \circ i = \mathrm{id}_{J^\infty(M,N)}$. Da i bijektiv muss $i \circ g : \tilde{J}^\infty(M,N) \to \tilde{J}^\infty(M,N)$ auch die identische Abbildung sein. Also ist $i : J^\infty(M,N) \to \tilde{J}^\infty(M,N)$ ein Homöomorphismus, die Topologien auf $J^\infty(M,N)$ und $\tilde{J}^\infty(M,N)$ stimmen daher überein. Die zweite Aussage des Lemmas folgt sofort aus der ersten. □

LEMMA 3.3.4. *Sind $x, y \in J^\infty(M,N)$ und gilt $\iota^{r,\infty}(x) = \iota^{r,\infty}(y)$ für alle $0 \leq r < \infty$ dann ist $x = y$.*

BEWEIS. Betrachte die zweielementige diskrete Menge $Z := \{a, b\}$ und die stetige Abbildung $\varphi : Z \to J^\infty(M,N)$ mit $\varphi(a) := x$ und $\varphi(b) := y$. Sei weiters $\mathrm{const}_x : Z \to J^\infty(M,N)$ die konstante stetige Abbildung, $\mathrm{const}_x(a) = \mathrm{const}_x(b) = x$. Nach Voraussetzung gilt $\iota^{r,\infty} \circ \varphi = \iota^{r,\infty} \circ \mathrm{const}_x$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.3.1 folgt $\varphi = \mathrm{const}_x$, also $y = \varphi(b) = \mathrm{const}_x(b) = x$. □

LEMMA 3.3.5. *Ist x_n eine Folge in $J^\infty(M,N)$ und konvergiert jede der Folgen $\iota^{r,\infty}(x)$ in $J^r(M,N)$, $0 \leq r < \infty$, dann konvergiert auch x_n.*

BEWEIS. Betrachte den Raum $N := \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Teilraum topologie. Für $0 \leq r < \infty$ definiere Abbildungen $\varphi_r : N \to J^\infty(M,N)$ durch

$$\varphi_r(1/n) := \iota^{r,\infty}(x_n) \quad \text{und} \quad \varphi_r(0) := \lim_{n\to\infty} \iota^{k,\infty}(x_n).$$

Da $\iota^{r,\infty}(x_n)$ konvergiert sind alle φ_r stetig. Ausserdem gilt $\iota^{s,r} \circ \varphi_r = \varphi_s$, $0 \leq s \leq r < \infty$. Ist nämlich $1/n \in N$ dann gilt $\varphi_s(1/n) = \iota^{s,\infty}(x_n) = \iota^{s,r}(\iota^{r,\infty}(x_n)) = \iota^{s,r}(\varphi_r(1/n))$. Und bei $0 \in N$ gilt wegen der Stetigkeit von $\iota^{s,r}$ auch $\varphi_s(0) = \lim_{n\to\infty} \iota^{s,\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \iota^{s,r}(\iota^{r,\infty}(x_n)) = \iota^{s,r}\big(\lim_{n\to\infty} \iota^{r,\infty}(x_n)\big) = \iota^{s,r}(\varphi_r(0))$. Nach Proposition 3.3.1 existiert also eine stetige Abbildung $\varphi_\infty : N \to J^\infty(M,N)$ mit $\iota^{r,\infty} \circ \varphi_\infty = \varphi_r$. Wegen $\iota^{r,\infty}(\varphi_\infty(1/n)) = \varphi_r(1/n) = \iota^{r,\infty}(x_n)$ folgt $\varphi_\infty(1/n) = x_n$, siehe Lemma 3.3.4. Da φ_∞ stetig ist folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_\infty(1/n) = \varphi_\infty(0)$. Also konvergiert x_n gegen $\varphi_\infty(0)$.

□

Nach Proposition 3.2.1 sind

$$\sigma^\infty := \sigma^r \circ \iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to M \quad \text{und} \quad \tau^\infty := \tau^r \circ \iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to N$$

stetig. Dies ist unabhängig von r, da $\sigma^r \circ \iota^{r,\infty} = \sigma^s \circ \iota^{s,r} \circ \iota^{r,\infty} = \sigma^s \circ \iota^{s,\infty}$ und $\tau^r \circ \iota^{r,\infty} = \tau^s \circ \iota^{s,r} \circ \iota^{r,\infty} = \tau^s \circ \iota^{s,\infty}$, für alle $0 \leq s \leq r < \infty$.

Ist $f \in C^\infty(M,N)$ dann sind alle r-Jet Verlängerungen $j^r f : M \to J^r(M,N)$ stetig, siehe Proposition 3.2.2, und es gilt $\iota^{s,r} \circ j^r f = j^s f$, für alle $0 \leq s \leq r < \infty$. Nach Proposition 3.3.1 existiert daher eine eindeutige stetige Abbildung

$$j^\infty f : M \to J^\infty(M,N)$$

mit $\iota^{r,\infty} \circ j^\infty f = j^r f$, für alle $0 \leq r < \infty$. Die Abbildung $j^\infty f : M \to J^\infty(M,N)$ heißt die *∞-Jet Verlängerung von f*. Es gilt $\tau^\infty \circ j^\infty f = f$ und $\sigma^\infty \circ j^\infty f = \mathrm{id}_M$.

Ist $g \in C^\infty(N,P)$ dann sind alle $g^r_* \circ \iota^{r,\infty} : J^\infty(M,N) \to J^r(M,P)$ stetig, siehe Proposition 3.2.3, und es gilt $\iota^{s,r} \circ g^r_* \circ \iota^{r,\infty} = g^s_* \circ \iota^{s,\infty}$, für alle $0 \leq s \leq r < \infty$. Nach Proposition 3.3.1 existiert also eine eindeutige stetige Abbildung

$$g^\infty_* : J^\infty(M,N) \to J^\infty(M,P)$$

die $\iota^{r,\infty} \circ g^\infty_* = g^r_* \circ \iota^{r,\infty}$ für alle $0 \leq r < \infty$ erfüllt. Weiters gilt $\sigma^\infty \circ g^\infty_* = \sigma^\infty$ und $\tau^\infty \circ g^\infty_* = g \circ \tau^\infty_*$.

Wenden wir dies auf die Projektionen $\pi_i : N_1 \times N_2 \to N_i$, $i = 1, 2$, erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\big((\pi_1)^\infty_*, (\pi_2)^\infty_*\big) : J^\infty(M, N_1 \times N_2) \to J^\infty(M, N_1) \times_M J^\infty(M, N_2). \tag{29}$$

Proposition 3.3.6. *Für drei C^∞-Mannigfaltigkeiten M, N_1 und N_2 ist* (29) *ein Homöomorphismus.*

Beweis. Nach Proposition 3.2.4 ist jedes

$$\beta^r := \big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big)^{-1} \circ (\iota^{r,\infty} \times \iota^{r,\infty}) : J^\infty(M,N_1) \times_M J^\infty(M,N_2) \to J^r(M, N_1 \times N_2)$$

stetig und es gilt $\iota^{s,r} \circ \beta^r = \beta^s$, für alle $0 \leq s \leq r < \infty$. Nach Proposition 3.3.1 existiert eine eindeutige stetige Abbildung

$$\beta^\infty : J^\infty(M,N_1) \times_M J^\infty(M,N_2) \to J^\infty(M, N_1 \times N_2) \tag{30}$$

mit $\iota^{r,\infty} \circ \beta^\infty = \beta^r$. Wir werden zeigen, dass (30) invers zu (29) ist. Betrachte dazu

$$\beta^\infty \circ \big((\pi_1)^\infty_*, (\pi_2)^\infty_*\big) : J^\infty(M, N_1 \times N_2) \to J^\infty(M, N_1 \times N_2).$$

Dann gilt für alle $0 \leq r < \infty$

$$\begin{aligned}
\iota^{r,\infty} \circ \beta^\infty \circ \big((\pi_1)^\infty_*, (\pi_2)^\infty_*\big) &= \beta^r \circ \big((\pi_1)^\infty_*, (\pi_2)^\infty_*\big) \\
&= \big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big)^{-1} \circ (\iota^{r,\infty} \times \iota^{r,\infty}) \circ \big((\pi_1)^\infty_*, (\pi_2)^\infty_*\big) \\
&= \big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big)^{-1} \circ \big(\iota^{r,\infty} \circ (\pi_1)^\infty_*, \iota^{r,\infty} \circ (\pi_2)^\infty_*\big) \\
&= \big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big)^{-1} \circ \big((\pi_1)^r_* \circ \iota^{r,\infty}, (\pi_2)^r_* \circ \iota^{r,\infty}\big) \\
&= \big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big)^{-1} \circ \big((\pi_1)^r_*, (\pi_2)^r_*\big) \circ \iota^{r,\infty} \\
&= \iota^{r,\infty}
\end{aligned}$$

und es folgt $\beta^\infty \circ \big((\pi_1)^\infty_*, (\pi_2)^\infty_*\big) = \mathrm{id}$ wegen der Aussage über die Eindeutigkeit in Proposition 3.3.1.

Weiters gilt für $i = 1, 2$ und alle $0 \leq r < \infty$,

$$\iota^{r,\infty} \circ (\pi_i)^\infty_* \circ \beta^\infty = (\pi_i)^r_* \circ \iota^{r,\infty} \circ \beta^\infty = (\pi_i)^r_* \circ \beta^r = p^r_i \circ (\iota^{r,\infty} \times \iota^{r,\infty}) = \iota^{r,\infty} \circ p^\infty_i$$

wobei $p_i^r : J^r(M, N_1) \times_M J^r(M, N_2) \to J^r(M, N_i)$ die kanonische Projektion bezeichnet. Wieder folgt $(\pi_i)_*^\infty \circ \beta^\infty = p_i^\infty$ aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.3.1. Also gilt auch $\big((\pi_1)_*^\infty, (\pi_2)_*^\infty\big) \circ \beta^\infty = (p_1^\infty, p_2^\infty) = \mathrm{id}$, und damit ist (29) ein Homöomorphismus mit inversem β^∞. □

PROPOSITION 3.3.7. *Für zwei C^r-Mannigfaltigkeiten M und N, $0 \leq r \leq \infty$, ist $J^r(M, N)$ vollständig metrisierbar. Es existieren sogar vollständige Metriken d_M auf M, d_N auf N und d^k auf $J^k(M, N)$, $0 \leq k \leq r$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $d_M(x, y) \leq 1$, $d_N(x, y) \leq 1$ *und* $d^k(x, y) \leq 1$, *für* $0 \leq k \leq r$.
(ii) $d_M(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \leq d^k(x, y)$ *sowie* $d_N(\tau^k(x), \tau^k(y)) \leq d^k(x, y)$ *und auch* $d^s(\iota^{s,k}(x), \iota^{s,k}(y)) \leq d^k(x, y)$, *für* $0 \leq s \leq k \leq r$ *und* $k < \infty$.
(iii) $d_M(\sigma^\infty(x), \sigma^\infty(y)) \leq 2d^\infty(x, y)$ *und* $d_N(\tau^\infty(x), \tau^\infty(y)) \leq 2d^\infty(x, y)$ *sowie* $d^k(\iota^{k,\infty}(x), \iota^{k,\infty}(y)) \leq 2^{k+1} d^\infty(x, y)$, *für* $0 \leq k < \infty$, *falls* $r = \infty$.
(iv) $d^\infty(x, y) = \sum_{k=0}^\infty 2^{-(k+1)} d^k\big(\iota^{k,\infty}(x), \iota^{k,\infty}(y)\big)$, *falls* $r = \infty$.
(v) $\forall \varepsilon > 0\ \exists s \in \mathbb{N}$ *mit* $d^\infty(x, y) \leq \varepsilon + d^s(\iota^{s,\infty}(x), \iota^{s,\infty}(y))$, *falls* $r = \infty$.

BEWEIS. Für $0 \leq k \leq r$ und $k < \infty$, existiert nach Proposition 3.2.1 und Satz 1.1.2 eine vollständige Metrik d'_k auf $J^k(M, N)$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass auch $d''_k(x, y) := \frac{d'_k(x,y)}{1+d'_k(x,y)}$ eine Metrik auf $J^k(M, N)$ ist. Klarerweise gilt $d''_k \leq d'_k$, und für $d''_k(x, y) \leq \frac{1}{2}$ gilt auch $d'_k(x, y) \leq 2d''_k(x, y)$. Daher erzeugt d''_k die selbe Topologie wie d'_k, und d''_k hat die selben Cauchyfolgen wie d'_k. Also ist auch d''_k eine vollständige die Topologie erzeugende Metrik auf $J^k(M, N)$ und offensichtlich gilt auch $d''_k \leq 1$. Das selbe Argument zeigt, dass vollständige die Topologie erzeugende Metriken d_M und d_N auf M und N existieren mit $d_M \leq 1$ und $d_N \leq 1$.

Nach Proposition 3.2.1 ist $(\sigma^0, \tau^0) : J^0(M, N) \to M \times N$ ein Homöomorphismus, also ist

$$d^0(x, y) := \max\Big\{d_M\big(\sigma^0(x), \sigma^0(y)\big), d_N\big(\tau^0(x), \tau^0(y)\big)\Big\}$$

eine vollständige die Topologie erzeugende Metrik auf $J^0(M, N)$ die klarerweise auch $d^0 \leq 1$ erfüllt. Definieren wir induktiv

$$d^k(x, y) := \max\Big\{d''_k(x, y), d^{k-1}\big(\iota^{k-1,k}(x), \iota^{k-1,k}(y)\big)\Big\}$$

erhalten wir vollständige die Topologie induzierende Metriken d^k auf $J^k(M, N)$, $0 \leq k \leq r$ und $k < \infty$.

Ist $r = \infty$ definieren wir d^∞ durch (iv). Dann ist d^∞ zumindest eine Semimetrik auf $J^\infty(M, N)$. Ist $d^\infty(x, y) = 0$ dann gilt $d^k(\iota^{k,\infty}(x), \iota^{k,\infty}(y)) = 0$ und da d^k Metriken sind auch $\iota^{k,\infty}(x) = \iota^{k,\infty}(y)$, $0 \leq k < \infty$. Aus Lemma 3.3.4 folgt nun $x = y$. Also ist d^∞ tatsächlich eine Metrik auf $J^\infty(M, N)$. Offensichtlich gilt auch $d^\infty \leq 1$.

Die Eigenschaften (i) bis (iv) sind klarerweise erfüllt. Für (v) wählen wir $s \in \mathbb{N}$ sodass $\sum_{s<k} 2^{-(k+1)} \leq \varepsilon$ und erhalten

$$\begin{aligned} d^\infty(x, y) &= \sum_{s<k} 2^{-(k+1)} d^k\big(\iota^{k,\infty}(x), \iota^{k,\infty}(y)\big) + \sum_{0\leq k\leq s} 2^{-(k+1)} d^k\big(\iota^{k,\infty}(x), \iota^{k,\infty}(y)\big) \\ &\leq \sum_{s<k} 2^{-(k+1)} + \sum_{0\leq k\leq s} 2^{-(k+1)} d^s\big(\iota^{s,\infty}(x), \iota^{s,\infty}(y)\big) \\ &\leq \varepsilon + d^s\big(\iota^{s,\infty}(x), \iota^{s,\infty}(y)\big) \end{aligned}$$

wobei wir für das erste Ungleichheitszeichen (i) und (ii) sowie $\iota^{s,k} \circ \iota^{k,\infty} = \iota^{s,\infty}$ verwendet haben.

Wegen (iii) hat die von d^∞ erzeugte Topologie die Eigenschaft dass alle $\iota^{k,\infty}$ stetig sind. Aus (v) folgt, dass sie die gröbste Topologie ist für die die $\iota^{k,\infty}$ stetig sind. Nach Lemma 3.3.3 stimmt sie daher mit der Topologie auf $J^\infty(M,N)$ überein.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass d^∞ vollständig ist. Sei also x_n eine Cauchyfolge in $J^\infty(M,N)$. Dann ist wegen (iii) auch $\iota^{k,\infty}(x_n)$ eine Cauchyfolge in $J^k(M,N)$, für jedes $0 \leq k < \infty$. Da die d^k vollständig konvergiert $\iota^{k,\infty}(x_n)$ für jedes $0 \leq k < \infty$. Aus Lemma 3.3.5 folgt nun, dass auch x_n konvergiert. □

3.4. Die C^r-Topologie. Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \leq r \leq \infty$. Die r-Jet Verlängerung liefert eine Abbildung

$$j^r : C^r(M,N) \to C(M, J^r(M,N)), \quad f \mapsto j^r f. \tag{31}$$

Wegen $\tau^r \circ (j^r f) = f$ ist (31) injektiv.

Definition 3.4.1 (Whitney Topologie). Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \leq r \leq \infty$. Die gröbste Topologie auf $C^r(M,N)$ für die (31) stetig ist, also die Teilraumtopologie, heißt die *(starke) Whitney Topologie* oder *C^r-Topologie* auf $C^r(M,N)$.

Bemerkung 3.4.2. Nach Proposition 3.1.8 und weil $J^0(M,N) \cong M \times N$ ist

$$C(M, J^0(M,N)) \to C(M,M) \times C(M,N), \quad g \mapsto (\sigma^r \circ g, \tau^r \circ g)$$

ein Homöomorphismus, wobei alle drei Räume mit der Graphentopologie ausgestattet sind. Es folgt sofort, dass die C^0-Topologie auf $C^0(M,N)$ mit der Graphentopologie von Abschnitt 3.1 überein stimmt.

Proposition 3.4.3. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \leq r \leq \infty$. Dann ist $C^r(M,N)$ Hausdorff.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.1.2 und Proposition 3.2.1. □

Proposition 3.4.4. *Seien M und N zwei C^r-Manniggfaltigkeiten und $0 \leq s \leq r \leq \infty$. Dann ist die kanonische Inklusion $C^r(M,N) \to C^s(M,N)$ stetig.*

Beweis. Nach Proposition 3.1.3 folgt dies aus der Stetigkeit der Abbildung $\iota^{s,r} : J^r(M,N) \to J^s(M,N)$, siehe Proposition 3.2.1 und Abschnitt 3.3 für den Fall $r = \infty$. □

Proposition 3.4.5. *Seien M, N und P drei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \leq r \leq \infty$, und $g \in C^r(N,P)$. Dann ist die Abbildung $g_* : C^r(M,N) \to C^r(M,P)$, $g_*(f) := g \circ f$, stetig.*

Beweis. Nach Proposition 3.1.3 folgt dies aus der Stetigkeit der Abbildung $\iota^{s,r} : J^r(M,N) \to J^s(M,N)$, siehe Proposition 3.2.3 und Abschnitt 3.3 für den Fall $r = \infty$. □

Proposition 3.4.6. *Es seien M, N_1 und N_2 drei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \leq r \leq \infty$. Dann ist die kanonische Abbildung $C^r(M, N_1 \times N_2) \to C^r(M,N_1) \times C^r(M,N_2)$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die kanonische Abbildung

$$J^r(M, N_1 \times N_2) \to J^r(M, N_1) \times J^r(M, N_2)$$

ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, siehe Proposition 3.2.4 und Proposition 3.3.6 für den Fall $r = \infty$. Es folgt, dass auch

$$C(M, J^r(M, N_1 \times N_2)) \to C(M, J^r(M, N_1) \times J^r(M, N_2))$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Da $J^r(M, N_i)$ metrisierbar ist, siehe Proposition 3.2.1 und Proposition 3.3.7, ist

$$C(M, J^r(M, N_1) \times J^r(M, N_2)) = C(M, J^r(M, N_1)) \times C(M, J^r(M, N_2))$$

ein Homöomorphismus, siehe Proposition 3.1.8. Zusammenfassend erhalten wir, dass

$$C^r(M, N_1 \times N_2) \to C^r(M, J^r(M, N_1)) \times C(M, J^r(M, N_2))$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Also ist auch die kanonische Identifikation $C^r(M, N_1 \times N_2) = C^r(M, N_1) \times C^r(M, N_2)$ ein Homöomorphismus. □

Korollar 3.4.7. *Es sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $0 \leq r \leq \infty$, und E ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann sind Addition $C^r(M, E) \times C^r(M, E) \to C^r(M, E)$ und Multiplikation $C^r(M, \mathbb{K}) \times C^r(M, E) \to C^r(M, E)$ stetig. Die gleiche Aussage gilt auch für komplexe Vektorräume.*

Beweis. Da die Addition $E \times E \to E$ und die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times E \to E$ glatte Abbildungen sind, folgt dies sofort aus den Propositionen 3.4.5 und 3.4.6. □

Bemerkung 3.4.8. Ist in Korollar 3.4.7 die Mannigfaltigkeit M kompakt, dann ist die Abbildung $\mathbb{K} \to C^r(M; \mathbb{K})$, $c \mapsto \mathrm{const}_c$, stetig, daher ist auch die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times C^r(M, E) \to C^r(M, E)$ stetig, $C^r(M, E)$ also ein topologischer Vektorraum. Ist M nicht kompakt, dann ist $\mathbb{K} \to C^r(M, \mathbb{K})$ nicht stetig und $C^r(M, E)$ kein topologischer Vektorraum, vgl. Bemerkung 3.1.7.

Um gut mit der C^r-Topologie arbeiten zu können, werden wir jetzt Umgebungsbasen von $f \in C^r(M, N)$ mit Hilfe von Karten für M und N beschreiben. Wir erinnern uns zunächst an die folgende Norm auf dem Vektorraum der k-linearen Abbildungen $L^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$,

$$\|\lambda\| := \sup_{0 \neq \xi_i \in \mathbb{R}^m} \frac{\|\lambda(\xi_1, \dots, \xi_k)\|}{\|\xi_1\| \cdots \|\xi_k\|}.$$

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $K \subseteq U$ kompakt und $f \in C^r(U; \mathbb{R}^n)$ dann definieren wir

$$\|f\|_K^r := \max\Big\{\max_{x \in K} \|f(x)\|, \max_{x \in K} \|(D^1 f)_x\|, \dots, \max_{x \in K} \|(D^r f)_x\|\Big\}$$

Wir werden gelegentlich folgendes einfache Lemma verwenden, dessen Aussage etwas stärker ist als die bekannte Tatsache, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind.

Lemma 3.4.9. *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig, $K \subseteq X$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\varepsilon' > 0$ sodass für alle $x \in K$ und $y \in X$ mit $d_X(x, y) < \varepsilon'$ auch $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist existiert für jedes $x \in K$ ein $\delta_x > 0$ sodass

$$y \in X, d_X(x,y) < \delta_x \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2. \tag{32}$$

Da K kompakt ist finden wir endlich viele $x_0, \dots, x_n \in K$ mit $\bigcup_{i=0}^n B_{\delta_{x_i}/2}(x_i) \supseteq K$, wobei $B_r(z) := \{a \in X \mid d_X(a,z) < r\}$. Sei $\delta := \frac{1}{2}\min_{0 \le i \le n} \delta_{x_i}$.

Sei jetzt $x \in K$, $y \in X$ und $d(x,y) < \delta$. Dann existiert $0 \le i \le n$ mit $d(x, x_i) < \delta_{x_i}/$. Nach (32) gilt dann auch $d_Y(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/2$. Da $d(x_i, y) \le d(x_i, x) + d(x,y) \le \delta_{x_i}/2 + \delta \le \delta_{x_i}/2 + \delta_{x_i}/2 \le \delta_{x_i}$. Wieder nach (32) folgt $d(f(x_i), f(y)) \le \varepsilon/2$. Zusammen erhalten wir $d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(y)) \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Proposition 3.4.10. *Es seien M und N zwei C^r–Mannigfaltigkeiten, $0 \le r \le \infty$, und $f \in C^r(M,N)$. Es sei weiters $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ein lokal endlicher Atlas von M, $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ein Menge von Karten von N und $K_\alpha \subseteq U_\alpha$ kompakt, sodass $\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha = M$, und sodass $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Dann bilden die Mengen*

$$\Big\{ g \in C^r(M,N) \,\Big|\, \forall \alpha : g(K_\alpha) \subseteq V_\alpha,\ \|\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1} - \psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}\|^{r_\alpha}_{\varphi_\alpha(K_\alpha)} < \varepsilon_\alpha \Big\} \tag{33}$$

eine Umgebungsbasis von $f \in C^r(M,N)$ wobei $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $r_\alpha \in \mathbb{N}$ mit $r_\alpha \le r$ laufen. Ist $r < \infty$ dann bleibt dies auch für $r_\alpha = r$ richtig.

Beweis. Für $\alpha \in A$ ist

$$W_\alpha \subseteq \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\alpha(V_\alpha) \times \prod_{1 \le k \le r_\alpha} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{m_\alpha}; \mathbb{R}^{n_\alpha})$$

gegeben durch

$$\Big\{ (x, y, \lambda^1, \dots, \lambda^{r_\alpha}) \,\Big|\, \|y - (\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)\| < \varepsilon_\alpha, \\ \max_{1 \le k \le r_\alpha} \|\lambda^k - D^k(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_x\| < \varepsilon_\alpha \Big\}$$

eine offene Teilmenge. Also ist auch

$$W'_\alpha := (\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha, \varphi_\alpha})^{-1}(W_\alpha) \subseteq J^{r_\alpha}(U_\alpha, V_\alpha) \subseteq J^{r_\alpha}(M,N)$$

offen. Wegen der Stetigkeit von $\iota^{r_\alpha, r} : J^r(M,N) \to J^{r_\alpha}(M,N)$ ist daher auch

$$\tilde{W}_\alpha := (\iota^{r_\alpha, r})^{-1}(W'_\alpha) \subseteq J^r(M,N)$$

offen. Nach Proposition 3.1.1 ist also

$$\mathcal{W} := \big\{ h \in C(M, J^r(M,N)) \,\big|\, \forall \alpha \in A : h(K_\alpha) \subseteq \tilde{W}_\alpha \big\}$$

offen in $C(M, J^r(M,N))$. Die Menge (33) stimmt mit $(j^r)^{-1}(\mathcal{W})$ überein, denn:

$$
\begin{aligned}
g \in (j^r)^{-1}(\mathcal{W}) &\Leftrightarrow j^r g \in \mathcal{W} \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A : (j^r g)(K_\alpha) \subseteq \tilde{W}_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A : (j^{r_\alpha} g)(K_\alpha) \subseteq W'_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A\ \forall z \in K_\alpha : (j^{r_\alpha} g)(z) \in W'_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A\ \forall z \in K_\alpha : (j^{r_\alpha} g)(z) \in J^{r_\alpha}(U_\alpha, V_\alpha), \\
&\qquad (\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}(j^{r_\alpha} g)(z)) \in W'_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A\ \forall z \in K_\alpha : g(z) \in V_\alpha,\ (\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}(j^{r_\alpha} g)(z)) \in W'_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A : g(K_\alpha) \subseteq V_\alpha, \forall z \in K_\alpha : (\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}(j^{r_\alpha} g)(z)) \in W'_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A : g(K_\alpha) \subseteq V_\alpha, \forall x \in \varphi_\alpha(K_\alpha) : \\
&\qquad \|(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) - (\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)\| < \varepsilon_\alpha, \\
&\qquad \max_{1 \le k \le r_\alpha} \|D^k(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})_x - D^k(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_x\| < \varepsilon_\alpha \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha \in A : g(K_\alpha) \subseteq V_\alpha, \\
&\qquad \|\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1} - \psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}\|^{r_\alpha}_{\varphi_\alpha(K_\alpha)} < \varepsilon_\alpha, \\
&\Leftrightarrow g \text{ liegt in (33)}
\end{aligned}
$$

Also ist jede der Mengen (33) offen, und da sie offensichtlich alle f enthalten sind sie Umgebungen von $f \in C^r(M,N)$.

Es ist noch zu zeigen, dass jede Umgebung von f eine Menge der Form (33) enthält. Wir wählen Metriken d^k auf $J^k(M,N)$, $0 \le k \le r$ wie in Proposition 3.3.7. Nach Proposition 3.1.4 bilden

$$\big\{ g \in C^r(M,N) \,\big|\, \forall z \in M : d^r(j^r g(z), j^r f(z)) < \varepsilon(z) \big\} \tag{34}$$

eine Umgebungsbasis von $f \in C^r(M,N)$, wobei $\varepsilon \in C(M, \mathbb{R}^+)$ läuft. Für fixes $\varepsilon \in C(M,\mathbb{R}^+)$ müssen wir also $\varepsilon_\alpha > 0$ und $r_\alpha \in \mathbb{N}$ mit $r_\alpha \le r$ konstruieren, sodass (33) in (34) enthalten ist.

Für $\alpha \in A$ sei $\varepsilon'_\alpha := \min_{x \in K_\alpha} \varepsilon(x) > 0$. Ist $r < \infty$ setzte $r_\alpha := r$. Ist $r = \infty$, dann wähle $r_\alpha \in \mathbb{N}$ sodass $d^\infty(a,b) \le \varepsilon'_\alpha/2 + d^{r_\alpha}\big(\iota^{r_\alpha,\infty}(a), \iota^{r_\alpha,\infty}(b)\big)$ gilt, siehe Proposition 3.3.7(v). Setzte $\varepsilon''_\alpha := \varepsilon'_\alpha/2$. Dann gilt

$$d^{r_\alpha}(\iota^{r_\alpha,r}(a), \iota^{r_\alpha,r}(b)) < \varepsilon''_\alpha \quad \Rightarrow \quad d^r(a,b) < \varepsilon'_\alpha. \tag{35}$$

Setzte

$$O_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\alpha(V_\alpha) \times \prod_{1 \le k \le r_\alpha} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{n_\alpha}; \mathbb{R}^{m_\alpha})$$

und betrachte den Homöomorphismus

$$\big(\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}\big)^{-1} : O_\alpha \to J^{r_\alpha}(U_\alpha, V_\alpha)$$

sowie das Kompaktum

$$L_\alpha := \theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}\big((j^{r_\alpha} f)(K_\alpha)\big) \subseteq O_\alpha.$$

Nach Lemma 3.4.9 existiert $\varepsilon_\alpha > 0$ sodass gilt:

$$\begin{aligned}
&(x, y, \lambda^1, \dots, \lambda^{r_\alpha}) \in O_\alpha,\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^{r_\alpha}) \in L_\alpha,\\
&\qquad \|x - \bar{x}\| < \varepsilon_\alpha,\ \|y - \bar{y}\| < \varepsilon_\alpha,\ \max_{1 \le k \le r_\alpha} \|\lambda^k - \bar{\lambda}^k\| < \varepsilon_\alpha\\
&\Rightarrow d^{r_\alpha}\Big((\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha})^{-1}(x, y, \lambda^1, \dots, \lambda^{r_\alpha}), (\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha})^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^{r_\alpha}) \Big) < \varepsilon''_\alpha. \quad (36)
\end{aligned}$$

Sei nun g in der Menge (33) bezüglich den soeben konstruierten r_α und ε_α. Es ist zu zeigen, dass g in (34) liegt. Für $x \in \varphi_\alpha(K_\alpha)$ ist

$$\begin{aligned}
&\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}\big((j^{r_\alpha} g)(\varphi_\alpha^{-1}(x))\big)\\
&\qquad = \Big(x, (\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), D(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})_x, \dots, D^{r_\alpha}(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})_x \Big) \in O_\alpha
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\theta^{r_\alpha}_{\psi_\alpha,\varphi_\alpha}\big((j^{r_\alpha} f)(\varphi_\alpha^{-1}(x))\big)\\
&\qquad = \Big(x, (\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), D(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_x, \dots, D^{r_\alpha}(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_x \Big) \in L_\alpha
\end{aligned}$$

und es gilt

$$\|x - x\| = 0 < \varepsilon_\alpha, \quad \big\|(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) - (\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)\big\| < \varepsilon_\alpha$$

sowie

$$\max_{1 \le k \le r_\alpha} \big\| D^k(\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1})_x - D^k(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_x \big\| < \varepsilon_\alpha.$$

Also folgt aus (36)

$$\forall x \in \varphi_\alpha(K_\alpha) : d^{r_\alpha}\Big((j^{r_\alpha} g)(\varphi_\alpha^{-1}(x)), (j^{r_\alpha} f)(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \Big) < \varepsilon''_\alpha$$

und daher auch

$$\forall z \in K_\alpha : d^{r_\alpha}\big((j^{r_\alpha} g)(z), (j^{r_\alpha} f)(z) \big) < \varepsilon''_\alpha.$$

Wegen (35) gilt dann auch $d^r\big((j^r g)(z), (j^r f)(z)\big) < \varepsilon'_\alpha \le \varepsilon(z)$. Da $\bigcup_\alpha K_\alpha = M$ gilt $d^r\big((j^r g)(z), (j^r f)(z)\big) < \varepsilon(z)$ für alle $z \in M$, also liegt g in (34). □

Bemerkung 3.4.11. Es bezeichne $\tilde{C}^\infty(M, N)$ die Menge $C^\infty(M, N)$ versehen mit der gröbsten Topologie sodass alle Inklusionen $\tilde{C}^\infty(M, N) \to C^r(M, N)$, $0 \le r < \infty$, stetig sind. Dann ist die identische Abbildung $C^\infty(M, N) \to \tilde{C}^\infty(M, N)$ stetig. Ist M kompakt, ist dies sogar ein Homöomorphismus, siehe Proposition 3.4.10. Ist M nicht kompakt, dann ist die Whitney Topologie echt stärker (d.h. größer) als die Topologie auf $\tilde{C}^\infty(M, N)$, siehe Proposition 3.4.10.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis folgender Verallgemeinerung von Korollar 3.1.10 gewidmet.

Satz 3.4.12. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $0 \le r \le \infty$. Dann hat $C^r(M, N)$ die Baire Eigenschaft.*

Für den Beweis von Satz 3.4.12 erinnern wir uns an folgendes Resultat aus der Analysis.

Satz 3.4.13. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f_i \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$, $g : U \to \mathbb{R}^n$ und $\lambda^k : U \to L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq r < \infty$. Weiters gelte für jedes $1 \leq k \leq r$*

$$\|f_i - g\| \to 0 \quad \textit{und} \quad \|D^k f_i - \lambda^k\| \to 0$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U. Dann ist $g \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ und $D^k g = \lambda^k$ für alle $1 \leq k \leq r$.

Beweis von Satz 3.4.12. Wähle vollständige die Topologie erzeugende Metriken d_M auf M, d_N auf N und d^k auf $J^k(M,N)$, $0 \leq k \leq r$, wie in Proposition 3.3.7. Nach Satz 3.1.9 hat jeder nichtleere bezüglich d^r gleichmäßig abgeschlossene Teilraum von $C(M, J^r(M,N))$ die Baire Eigenschaft. Es genügt also zu zeigen, dass das Bild von $j^r : C^r(M,N) \to C(M, J^r(M,N))$ bezüglich d^r gleichmäßig abgeschlossen ist.

Seien also $f_i \in C^r(M,N)$ und $g \in C(M, J^r(M,N))$ sodass für alle $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d^r((j^r f_i)(x), g(x)) < \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$ und alle $x \in M$. Es ist zu zeigen, dass $f := \tau^r \circ g \in C(M,N)$ eine C^r-Abbildung ist und $j^r f = g$ gilt.

Beachte, dass wegen $\lim_{i\to\infty} j^r f_i(x) = g(x)$ die Stetigkeit von $\sigma^r : J^r(M,N) \to M$ sofort $\sigma^r(g(x)) = x$ liefert, also $\sigma^r \circ g = \mathrm{id}_M$. Wegen Proposition 3.3.7(ii) gilt für $x \in M$

$$d_N(f_i(x), f(x)) = d_N\big(\tau^r(j^r f_i(x)), \tau^r(g(x))\big) \leq d^r\big(j^r f_i(x), g(x)\big).$$

Also konvergiert auch $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bezüglich d_N gleichmäßig gegen f.

Betrachte zuerst den Fall $r < \infty$. Sei $z \in M$ fix. Wähle eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $z \in U$ und eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \in V$ sodass $f(U) \subseteq V$ gilt. Da $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert können wir durch Verkleinern von U erreichen, dass für hinreichend große $i \in \mathbb{N}$ auch $f_i(U) \subseteq V$ gilt. O.B.d.A. gelte $f_i(U) \subseteq V$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Setzte $\bar{f}_i := \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ und $\bar{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $x \in \varphi(U)$

$$(\theta^r_{\psi,\varphi} \circ j^r f_i \circ \varphi^{-1})(x) = \big(x, \bar{f}_i(x), (D\bar{f}_i)_x, \dots, (D^r \bar{f}_i)_x\big) \tag{37}$$

und

$$(\theta^r_{\psi,\varphi} \circ g \circ \varphi^{-1})(x) = \big(x, \bar{f}(x), \lambda^1(x), \dots, \lambda^r(x)\big) \tag{38}$$

für gewisse $\lambda^k : \varphi(U) \to L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Da $j^r f_i$ bezüglich d^r gleichmäßig gegen g konvergiert, konvergiert auch $j^r f_i \circ \varphi^{-1}$ bezüglich d^r gleichmäßig gegen $g \circ \varphi^{-1}$. Nach Lemma 3.4.9 konvergiert $\theta^r_{\psi,\varphi} \circ j^r f_i \circ \varphi^{-1}$ bezüglich der Standardnorm auf $\varphi(U) \times \psi(V) \times \prod_{1\leq k\leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen $\theta^r_{\psi,\varphi} \circ j^r g \circ \varphi^{-1}$. Wegen (37) und (38) gilt also

$$\|\bar{f}_i - \bar{f}\| \to 0 \quad \text{und} \quad \|D^k \bar{f}_i - \lambda^k\| \to 0, \quad 0 \leq k \leq r,$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\varphi(U)$. Aus Satz 3.4.13 folgt dass $\bar{f}$ eine C^r-Abbildung ist und $D^k \bar{f} = \lambda^k$ gilt $0 \leq k \leq r$. Also ist $f|_U \in C^r(U,N)$ und $j^r f|_U = g|_U$. Da $z \in M$ beliebig war folgt $f \in C^r(M,N)$ und $j^r f = g$.

Betrachte jetzt den Fall $r = \infty$. Es ist zu zeigen $f \in C^\infty(M,N)$ und $j^r f = g$. Sei $0 \leq k < \infty$. Nach Proposition 3.3.7(iii) konvergiert $j^k f_i = \iota^{k,\infty} \circ j^\infty f_i$ bezüglich d^k gleichmäßig gegen $\iota^{k,\infty} \circ g$. Nach obigem schließen wir, dass $\tau^k \circ (\iota^{k,\infty} \circ g) = f \in C^k(M,N)$ und $j^k f = \iota^{k,\infty} \circ g$ gilt. Da dies für alle $0 \leq k < \infty$ gilt folgt $f \in C^\infty(M,N)$. Trivialerweise gilt $j^k f = \iota^{k,\infty} \circ j^\infty f$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.3.1 folgt daher $j^\infty f = g$. □

3.5. Offene Teilmengen von $C^r(M,N)$. Viele für die Differentialtopologie wichtige Teilmengen von $C^r(M,N)$ sind offen bezüglich der Whitney Topologie. Dies ist ein Grund warum die Whitney Topologie so hilfreich ist. Einen anderen werden wir in Abschnitt 3.6 kennen lernen.

Definition 3.5.1 (Propere Abbildungen). Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt *proper* oder *eigentlich* falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq N$ das Urbild $f^{-1}(K) \subseteq M$ wieder kompakt ist. Die Menge der properen C^r-Abbildungen wird mit $\mathrm{Prop}^r(M,N)$ bezeichnet.

Proposition 3.5.2. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten,* $0 \leq r \leq \infty$. *Dann ist die Menge der properen C^r-Abbildungen* $\mathrm{Prop}^r(M,N)$ *offen in* $C^r(M,N)$.

Beweis. Da die Inklusion $C^r(M,N) \to C^0(M,N)$ stetig ist und

$$\mathrm{Prop}^r(M,N) = \mathrm{Prop}^0(M,N) \cap C^r(M,N)$$

gilt, folgt dies aus Proposition 3.1.11. □

Proposition 3.5.3. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten,* $1 \leq r \leq \infty$. *Dann ist die Menge der C^r-Immersionen* $\mathrm{Imm}^r(M,N)$ *offen in* $C^r(M,N)$.

Beweis. Da die Inklusion $C^r(M,N) \to C^1(M,N)$ stetig ist, und

$$\mathrm{Imm}^r(M,N) = \mathrm{Imm}^1(M,N) \cap C^r(M,N)$$

reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{Imm}^1(M,N) \subseteq C^1(M,N)$ offen ist. Wir erinnern uns, dass die Menge der injektiven linearen Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ offen in $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist. Sei $\mathcal{I} \subseteq J^1(M,N)$ die Menge der 1-Jets $[x,f,W]$ sodass für eine (und dann jede) Karte (U,φ) von M mit $x \in U$ und eine (und dann jede Karte) (V,ψ) von N mit $f(x) \in V$ das Differential $D(\psi \circ f \circ \varphi)_{\varphi(x)}$ injektiv ist. Dies ist eine offene Menge in $J^1(M,N)$. Nach Proposition 3.1.1 ist daher $\mathcal{O} := \{h \in C(M, J^1(M,N)) \mid h(M) \subseteq \mathcal{I}\}$ offen in $C(M, J^1(M,N))$. Also ist auch $\mathrm{Imm}^1(M,N) = (j^1)^{-1}(\mathcal{O})$ offen in $C^1(M,N)$. □

Proposition 3.5.4. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten,* $1 \leq r \leq \infty$. *Dann ist die Menge der C^r-Submersionen* $\mathrm{Sub}^r(M,N)$ *offen in* $C^r(M,N)$.

Beweis. Der Beweis kann genau wie der Beweis von Proposition 3.5.3 geführt werden, nur verwendet man jetzt die Tatsache, dass die Menge der surjektiven lineraren Abbildungen eine offen Teilmenge von $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ bildet. □

Definition 3.5.5 (Abgeschlossene Einbettungen). Eine C^r-Einbettung $f : M \to N$ heißt *abgeschlossen* falls $f(M)$ eine abgeschlossene Menge von N ist. Die Menge aller abgeschlossenen C^r-Einbettungen wird mit $\mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N)$ bezeichnet.

Man bemerke, dass eine abgeschlossene Einbettung auch eine abgeschlossene Abbildung ist, d.h. für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ ist $f(A)$ wieder abgeschlossen in N.

Lemma 3.5.6. *Es gilt* $\mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N) = \mathrm{Emb}^r(M,N) \cap \mathrm{Prop}^r(M,N)$.

Beweis. Eine abgeschlossene Einbettung ist proper. Denn ist $f \in \mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N)$ und $K \subseteq N$ kompakt, dann ist $f(N) \cap K$ als abgeschlossene Menge einer kompakten Menge wieder kompakt, und da f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, ist dann auch $f^{-1}(K) \cong f(N) \cap K$ kompakt.

Umgekehrt ist für jede propere Abbildung $f : M \to N$ das Bild $f(N) \subseteq M$ abgeschlossen. Sei dazu $x_n \in M$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y \in N$. Es ist zu zeigen, dass $y \in f(M)$. Die Menge $K := \{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\} \subseteq N$ ist kompakt. Da f proper ist, ist auch $f^{-1}(K)$ kompakt. Also liegt die Folge x_n in einer kompakten Teilmenge von M. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir also annehmen, dass x_n konvergiert, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Die Stetigkeit von f liefert dann $f(x) = y$, also ist $y \in f(M)$. □

Satz 3.5.7. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist die Menge der C^r-Einbettungen $\operatorname{Emb}^r(M, N)$ offen in $C^r(M, N)$.*

Für den Beweis von Satz 3.5.7 verifizieren wir zuerst folgendes lokale Resultat.

Proposition 3.5.8. *Es seien $U, W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sodass $W \subseteq \bar{W} \subseteq U$ und $\bar{W}$ kompakt ist. Sei $f \in \operatorname{Emb}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft. Ist $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und gilt $\|g - f\|^1_{\bar{W}} < \varepsilon$ dann ist $g|_W \in \operatorname{Emb}^1(W, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Indirekt angenommen die Proposition wäre falsch. Dann existiert eine Folge $g_n \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ sodass

$$\|g_n - f\| \to 0 \quad \text{und} \quad \|Dg_n - Df\| \to 0 \tag{39}$$

gleichmäßig auf $\bar{W}$ und sodass $g_n|_W$ keine Einbettung ist. Da $\bar{W}$ kompakt und f eine Immersion ist folgt aus (39), dass für hinreichend großes n auch g_n auf W immersiv ist, vgl. den Beweis von Proposition 3.5.3. O.B.d.A sei jedes g_n auf W immersiv. Es kann $g_n|_{\bar{W}} : \bar{W} \to \mathbb{R}^n$ nicht injektiv sein, denn sonst wäre $g_n|_{\bar{W}}$ und damit auch $g_n|_W$ ein Homöomorphismus auf sein Bild und daher $g_n|_W$ eine Einbettung.

Da $g_n|_{\bar{W}}$ nicht injektiv ist finden wir $x_n \neq y_n \in \bar{W}$ mit $g_n(x_n) = g_n(y_n)$. Durch Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehemen, dass

$$x_n \to x \in \bar{W}, \quad y_n \to y \in \bar{W} \quad \text{und} \quad \frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} \to v \neq 0 \in S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Aus (39) folgt $\|f(y_n) - f(x_n)\| \to 0$ also $f(x) = f(y)$, und weil f injektiv ist auch $x = y$. Weiters gilt

$$0 = g_n(y_n) - g_n(x_n) = \int_0^1 (Dg_n)_{x_n + t(y_n - x_n)}(y_n - x_n)dt$$

also

$$\begin{aligned} Df_x(y_n - x_n) = \int_0^1 &\big(Df_x - Df_{x_n + t(y_n - x_n)}\big)(y_n - x_n)dt \\ &+ \int_0^1 (Df - Dg_n)_{x_n + t(y_n - x_n)}(y_n - x_n)dt \end{aligned}$$

und daher auch

$$\begin{aligned} \frac{\|Df_x(y_n - x_n)\|}{\|y_n - x_n\|} \leq \int_0^1 &\big\|Df_x - Df_{x_n + t(y_n - x_n)}\big\|dt \\ &+ \int_0^1 \big\|(Df - Dg_n)_{x_n + t(y_n - x_n)}\big\|dt. \end{aligned} \tag{40}$$

Wegen der Stetigkeit von Df und weil $\lim_{n\to\infty} x_n = x = y = \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt

$$\|Df_x - Df_{x_n + t(y_n - x_n)}\| \to 0$$

gleichmäßig für $t \in [0,1]$. Aus (39) schließen wir

$$\|(Df - Dg_n)_{x_n+t(y_n-x_n)}\| \to 0$$

gleichmäßig für $t \in [0,1]$. Damit folgt aus (40)

$$\frac{\|Df_x(y_n - x_n)\|}{\|y_n - x_n\|} \to 0,$$

und daher $Df_x(v) = 0$. Also ist Df_x nicht injektiv und wir erhalten einen Widerspruch zur Immersivität von f. $\square$

Lemma 3.5.9. *Es sei $f \in \mathrm{Emb}^r(M,N)$, $1 \le r \le \infty$. Dann existiert ein lokal endlicher Atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{n_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ von M, eine Familie von Karten $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ von N, sodass gilt:*

(i) *$f(U_\alpha) = V_\alpha \cap f(M)$, für alle $\alpha \in A$.*
(ii) *$\varphi : U_\alpha \to \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ist surjektiv für alle $\alpha \in A$.*
(iii) *$\bigcup_{\alpha\in A} \varphi_\alpha^{-1}(B_1) = M$ wobei $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^{n_\alpha} \mid \|x\| < 1\}$.*
(iv) *Für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung V von $f(x)$ in N die nur endlich viele der V_α trifft.*

Beweis. Da $f(M) \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit ist, siehe Satz 2.3.13, ist $\overline{f(M)} \setminus f(M)$ abgeschlossen in M und damit $N_0 := N \setminus (\overline{f(M)} \setminus f(M))$ offen in N. Es ist $f : M \to N_0$ eine abgeschlossene Einbettung. O.B.d.A. dürfen wir also annehmen, dass $f : M \to N$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

Sei $\mathcal{A}_N$ ein lokal endlicher Atlas von N, sodass $\bar V$ kompakt ist für jedes $(V,\psi) \in \mathcal{A}_N$. Betrachte die offene Überdeckung $\mathcal{U} := \{f^{-1}(V) \mid (V,\psi) \in \mathcal{A}_N\}$ von M. Nach Lemma 2.4.4 existiert ein lokal endlicher Atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ der $\mathcal{U}$ untergeordet ist und der (ii) und (iii) erfüllt. Für jedes $\alpha \in A$ wähle ein $(V_\alpha,\psi_\alpha) \in \mathcal{A}_N$ mit $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$.

Nun zu (iv). Da $\mathcal{A}_N$ lokal endlich ist genügt zu zeigen, dass für jedes $(V,\psi) \in \mathcal{A}_N$ die Menge $\{\alpha \in A \mid V_\alpha = V\}$ endlich ist. Sei also $(V,\psi) \in \mathcal{A}_N$. Dann ist $\bar V$ kompakt. Da f eine abgeschlossene Einbettung ist, ist f auch proper, siehe Lemma 3.5.6, also ist $f^{-1}(\bar V)$ kompakt. Aus der lokalen Endlichkeit von $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ folgt $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset\}$ ist endlich. Also ist auch $\{\alpha \in A \mid f(U_\alpha) \subseteq V\}$ endlich, und damit kann es auch nur endlich viele $\alpha \in A$ mit $V_\alpha = V$ geben. Also ist (iv) erfüllt.

Da $f : M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist, können wir durch Verkleinern der V_α auch erreichen, dass auch (i) gilt. $\square$

Beweis von Satz 3.5.7. Wegen $\mathrm{Emb}^r(M,N) = \mathrm{Emb}^1(M,N) \cap C^r(M,N)$ genügt es wieder den Fall $r = 1$ zu behandeln. Sei $f \in \mathrm{Emb}^1(M,N)$. Wähle $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ und $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ wie in Lemma 3.5.9. Setze $K_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(\bar B_1)$, $W_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(B_2)$ und $U'_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(B_3)$. Dann gilt

$$K_\alpha \subseteq W_\alpha \subseteq \bar W_\alpha \subseteq U'_\alpha \subseteq \bar U'_\alpha \subseteq U_\alpha \quad \text{und} \quad \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha = M.$$

Für $\alpha \in A$ betrachte die Einbettung

$$\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : B_3 \to \mathbb{R}^{m_\alpha}.$$

Nach Proposition 3.5.8 existiert $\varepsilon_\alpha > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $h \in C^1(B_3;\mathbb{R}^{m_\alpha})$ und gilt $\|h - \psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}\|^1_{\bar B_2} < \varepsilon_\alpha$ dann ist $h|_{B_2} : B_2 \to \mathbb{R}^{m_\alpha}$ eine

Einbettug. Nach Proposition 3.4.10 und Proposition 3.1.1 ist

$$\mathcal{N}_1 := \Big\{ g \in C^1(M,N) \;\Big|\; \forall \alpha : g(\bar{U}'_\alpha) \subseteq V_\alpha, \|\psi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1} - \psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}\|^1_{\bar{B}_2} < \varepsilon_\alpha \Big\}$$

eine offene Umgebung von $f \in C^1(M,N)$. Es gilt

$$g \in \mathcal{N}_1 \Rightarrow \forall \alpha \in A : g|_{W_\alpha} \in \mathrm{Emb}^1(W_\alpha, N). \tag{41}$$

Da $f : M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist und weil $f(\varphi_\alpha^{-1}(B_{1\frac{1}{2}})) \subseteq V_\alpha$, finden wir offene Mengen $O_\alpha \subseteq V_\alpha$ mit $f(M) \cap O_\alpha = f(\varphi_\alpha^{-1}(B_{1\frac{1}{2}}))$. Da $f(K_\alpha)$ kompakt ist und $f(K_\alpha) \subseteq O_\alpha$ finden wir offene Mengen $L_\alpha \subseteq N$ mit $f(K_\alpha) \subseteq L_\alpha \subseteq \bar{L}_\alpha \subseteq O_\alpha$. Da f injektiv ist gilt $\bar{L}_\alpha \cap f(M \setminus W_\alpha) \subseteq O_\alpha \cap f(M \setminus \varphi_\alpha^{-1}(B_{1\frac{1}{2}})) = \emptyset$, und wir erhalten

$$f(K_\alpha) \subseteq L_\alpha \subseteq \bar{L}_\alpha \subseteq V_\alpha \quad \text{und} \quad f(M \setminus W_\alpha) \subseteq N \setminus \bar{L}_\alpha.$$

Nach Proposition 3.1.1 ist

$$\mathcal{N}_2 := \big\{ g \in C^1(M,N) \;\big|\; \forall \alpha \in A : g(K_\alpha) \subseteq L_\alpha \big\} \tag{42}$$

eine offene Umgebung von $f \in C^1(M,N)$.

Betrachte die offene Menge

$$\mathcal{U} := M \times N \setminus \overline{\bigcup_{\alpha \in A} (M \setminus W_\alpha) \times \bar{L}_\alpha} \subseteq M \times N.$$

Nach Lemma 3.5.9(iv) exitiert für $x \in M$ eine Umgebung V von $f(x)$ die nur endlich viele der V_α trifft. Also $M \times V$ eine Umgebung von $(x, f(x))$ die nur endlich viele der $(M \setminus W_\alpha) \times \bar{L}_\alpha$ trifft. Da $(x, f(x)) \notin \bigcup_{\alpha \in A} (M \setminus W_\alpha) \times \bar{L}_\alpha$ folgt daher

$$(x, f(x)) \notin \overline{\bigcup_{\alpha \in A} (M \setminus W_\alpha) \times \bar{L}_\alpha}.$$

Daher ist $\Gamma_f \subseteq \mathcal{U}$ und

$$\mathcal{N}_3 := \big\{ g \in C^1(M,N) \;\big|\; \Gamma_g \subseteq \mathcal{U} \big\}$$

eine Umgebung von $f \in C^1(M,N)$. Es gilt

$$g \in \mathcal{N}_3 \Rightarrow \forall \alpha \in A : f(M \setminus W_\alpha) \subseteq N \setminus \bar{L}_\alpha. \tag{43}$$

Also ist $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{N}_3$ eine Umgebung von $f \in C^1(M,N)$ und es genügt zu zeigen, dass sie nur aus Einbettungen besteht. Sei also $g \in \mathcal{N}$. Wegen (41). (42) und (43) gilt für alle $\alpha \in A$:

(i) $g|_{W_\alpha} \in \mathrm{Emb}^1(W_\alpha, N)$,
(ii) $g(K_\alpha) \subseteq L_\alpha$ und
(iii) $g(M \setminus W_\alpha) \subseteq N \setminus \bar{L}_\alpha$.

Aus (i) und $\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha = M$ folgt $g \in \mathrm{Imm}^1(M,N)$. Es muss g aber auch injektiv sein. Sind nämlich $x \neq y \in M$ dann existiert $\alpha \in A$ mit $x \in K_\alpha$. Falls $y \in W_\alpha$ dann folgt aus (i) $g(x) \neq g(y)$. Ist aber $y \notin W_\alpha$ dann wegen (iii) $g(y) \notin L_\alpha$ und daher $g(x) \neq g(y)$ weil ja $g(x) \in L_\alpha$ nach (ii). Es verbleibt zu zeigen, dass $g : M \to g(M)$ ein Homöomorphismus ist. Sei $x \in M$ und sei x_n eine Folge in M sodass $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Es genügt zu zeigen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei dazu $\alpha \in A$ mit $x \in K_\alpha$. Aus (ii) folgt $g(x) \in L_\alpha$, und da L_α offen ist müßen fast alle $g(x_n)$ in L_α liegen. Wegen (iii) liegen dann auch fast alle x_n in W_α. Aus (i) folgt dann $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Damit ist g eine injektive Immersion und ein Homöomorphismus auf sein Bild, also eine Einbettung. $\square$

Aus Lemma 3.5.6, Proposition 3.5.2 und Satz 3.5.7 erhalten wir sofort

SATZ 3.5.10. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist die Menge der abgeschlossenen C^r-Einbettungen $\mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N)$ offen in $C^r(M,N)$.*

LEMMA 3.5.11. *Sind M und N zwei zusammenhängende C^r-Mannigfaltigleiten, dann gilt $\mathrm{Diff}^r(M,N) = \mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N) \cap \mathrm{Sub}^r(M,N)$.*

BEWEIS. Klarerweise ist jeder Diffeomorphismus eine abgeschlossene Einbettung und submersiv. Sei umgekehrt f eine submersive abgeschlossene Einbettung. Dann ist $f(M) \subseteq N$ als Bild einer abgeschlossenen Einbettung abgeschlossen. Andererseits ist $f(M) \subseteq N$ als Bild einer Submersion auch offen, siehe Korollar 2.3.6. Da N zusammenhängend ist folgt $f(M) = N$. Aus Satz 2.3.13 schließen wir, dass $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist. □

SATZ 3.5.12. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist die Menge der C^r-Diffeomorphismen $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ offen in $C^r(M,N)$.*

BEWEIS. Sind M und N zusammenhängend, dann folgt dies sofort aus Lemma 3.5.11, Proposition 3.5.4 und Satz 3.5.10. Der allgemeine Fall kann wie folgt behandelt werden. Sei $f \in \mathrm{Diff}^r(M,N)$. Man bemerke, dass f eine Bijektion zwischen den Zusammenhangskomponenten von M und den Zusammenhangskomponenten von N induziert. Bezeichne mit $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von M. Für $\alpha \in A$ sei N_α die Zusammenhangskomponente von N für die gilt $f(M_\alpha) = N_\alpha$. Dann ist $f_\alpha := f|_{M_\alpha} : M_\alpha \to N_\alpha$ ein C^r-Diffeomorphismus. Da $\mathrm{Diff}^r(M_\alpha, N_\alpha) \subseteq C^r(M_\alpha, N_\alpha)$ offen ist, existieren offene Mengen $U_\alpha \subseteq M_\alpha \times J^r(M_\alpha, N_\alpha)$ mit $f_\alpha \in (j^r)^{-1}(\mathcal{O}_{U_\alpha}) \subseteq \mathrm{Diff}^r(M_\alpha, N_\alpha)$. Betrachte die offene Menge $U := \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq M \times J^r(M,N)$. Dann gilt $f \in (j^r)^{-1}(\mathcal{O}_U) \subseteq \mathrm{Diff}^r(M,N)$. Also ist $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ offen in $C^r(M,N)$. □

Von trivialen Situationen abgesehen gilt Satz 3.5.12 im Fall $r = 0$ nicht. Die Menge der Homöomorphismen ist nicht offen in $C^0(M,N)$. Dies kann schon an den einfachsten Beispielen beobachtet werden, etwa $M = N = S^1$ oder $M = N = \mathbb{R}$.

3.6. Approximation. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass für $0 \leq s \leq r \leq \infty$ die Menge $C^r(M,N)$ dicht in $C^s(M,N)$ ist bezüglich der Whitney Topologie auf $C^s(M,N)$, siehe Satz 3.6.6. Man kann also C^s-Abbildungen durch C^r-Abbildungen *approximieren.* Was genau dabei unter Approximation zu verstehen ist wird durch die Whitney Topologie präzisiert. Dies ist ein anderer Grund dafür warum die Whitney Topologie so hilfreich ist. Zusammen mit der Offenheit von $\mathrm{Diff}^s(M,N)$ in $C^s(M,N)$, siehe Satz 3.5.12, erhalten wir aus dem Approximationssatz folgendes interesante Korollar. Sind zwei C^r-Mannigfaltigkeiten C^s-diffeomeomorh, $1 \leq s \leq r \leq \infty$, dann sind sie auch C^r-diffeomorph, siehe Korollar 3.6.8.

Das wesentliche Hilfsmittel bei der Approximation von Abbildungen durch Abbildungen mit höherer Differenzierbarkeit ist die *Faltung.* Wir wählen eine Funktion $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ wie in Lemma 2.4.3 und definieren für $\sigma \in (0,\infty)$,

$$\rho_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), \quad \rho_\sigma(x) := \frac{\beta(2x/\sigma)}{\int_{\mathbb{R}^n} \rho(2y/\sigma)dy}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{supp}(\rho_\sigma) \subseteq \bar{B}_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \sigma\} \tag{44}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\sigma(y)dy = 1. \tag{45}$$

Ist $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dann definiert man die *Faltung* $\rho_\sigma * f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch

$$(\rho_\sigma * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\sigma(x-y)f(y)dy. \tag{46}$$

Substituieren wir $z = x - y$ erhalten wir auch die Formel

$$(\rho_\sigma * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\sigma(z)f(x-z)dz. \tag{47}$$

Lemma 3.6.1. *Ist $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dann gilt* $\operatorname{supp}(\rho_\sigma * f) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \bar{B}_\sigma$.

Beweis. Ist $(\rho_\sigma * f)(x) \neq 0$ muss es $y \in \operatorname{supp}(f)$ geben sodass auch $x - y \in \operatorname{supp}(\rho_\sigma)$ gilt. Es folgt $x = y + (x-y) \in \operatorname{supp}(f) + \bar{B}_\sigma$. Wir schließen daraus $\operatorname{supp}(\rho_\sigma * f) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(f) + \bar{B}_\sigma} = \operatorname{supp}(f) + \bar{B}_\sigma$, wobei letzte Gleichheit aus der Kompaktheit von $\bar{B}_\sigma$ folgt. □

Lemma 3.6.2. *Ist $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dann gilt $\rho_\sigma * f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Da der Träger von ρ_σ kompakt ist dürfen wir in (46) Differentiation und Integration verstauschen und erhalten induktiv

$$\begin{aligned} D^k(\rho_\sigma * f)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \int_{\mathbb{R}^n} (D^k\rho_\sigma)_{x-y}(\xi_1, \dots, \xi_k)f(y)dy \\ &= (D^k\rho_\sigma)(\xi_1, \dots, \xi_k) * f. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.6.3. *Ist $f \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und $1 \leq k \leq s$, dann gilt $D^k(\rho_\sigma * f) = \rho_\sigma * D^k f$.*

Beweis. Aus (47) erhalten wir induktiv

$$D^k(\rho_\sigma * f)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\sigma(z)(D^k f_{x-z})(\xi_1, \dots, \xi_k)dz = (\rho_\sigma * D^k f)(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

für alle $1 \leq k \leq s$. Also $D^k(\rho_\sigma * f) = \rho_\sigma * D^k f$. □

Proposition 3.6.4. *Es sei $f \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $0 \leq s < \infty$, und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $g \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $g|_{B_1} \in C^\infty(B_1, \mathbb{R}^n)$.
(ii) $g|_{\mathbb{R}^m \setminus B_2} = f|_{\mathbb{R}^m \setminus B_2}$.
(iii) $\|g - f\|^s_{\bar{B}_2} < \varepsilon$.

Ist $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f|_W \in C^r(W, \mathbb{R}^m)$, $0 \leq r \leq \infty$, dann kann g so gewählt werden, dass auch $g|_W \in C^r(W, \mathbb{R}^m)$.

Beweis. Nach Korollar 2.4.5 gibt es $\lambda_0, \lambda_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^+)$ mit $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ und $\operatorname{supp}(\lambda_0) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus B_1$ und $\operatorname{supp}(\lambda_1) \subseteq \bar{B}_{1\frac{1}{2}}$. Wir setzten

$$f_i := \lambda_i f \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2.$$

Dann gilt

$$f = f_0 + f_1, \quad \operatorname{supp}(f_0) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus B_1, \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(f_1) \subseteq \bar{B}_{1\frac{1}{2}}.$$

Wähle $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$ sodass für alle $0 \leq k \leq s$ gilt

$$x, y \in \mathbb{R}^m, \|x - y\| \leq \sigma \quad \Rightarrow \quad \|(D^k f_1)_x - (D^k f_1)_y\| < \varepsilon. \tag{48}$$

Dies ist möglich da $D^k f_1$ als stetige Funktion mit kompakten Träger auch gleichmäßig stetig ist. Definiere

$$g_1 := \rho_\sigma * f_1.$$

Nach Lemma 3.6.2 ist $g_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und wegen Lemma 3.6.1 gilt

$$\operatorname{supp}(g_1) \subseteq \bar{B}_{1\frac{1}{2}} + \bar{B}_\sigma \subseteq \bar{B}_{1\frac{1}{2}} + \bar{B}_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{B}_2.$$

Für $0 \leq k \leq s$ und $x \in \mathbb{R}^m$ folgt aus Lemma 3.6.3 und (45)

$$D^k(g_1 - f_1)_x = (D^k g_1)_x - (D^k f_1)_x = \int_{\mathbb{R}^m} \rho_\sigma(z)\big((D^k f_1)_{x-z} - (D^k f_1)_x\big) dz.$$

Wegen $\rho_\sigma(z) \geq 0$, (48) und (45) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \|D^k(g_1 - f_1)_x\| &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \big\|\rho_\sigma(z)\big((D^k f_1)_{x-z} - (D^k f_1)_x\big)\big\| dz. \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \rho_\sigma(z) \big\|(D^k f_1)_{x-z} - (D^k f_1)_x\big\| dz \\ &< \int_{\mathbb{R}^m} \rho_\sigma(z)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|g_1 - f_1\|^s_{\bar{B}_2} < \varepsilon. \tag{49}$$

Definiere schließlich

$$g := g_1 + f_0 \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Da g_1 eine C^∞-Abbildung ist und f_0 auf B_1 verschwindet, ist $g|_{B_1} \in C^\infty(B_1, \mathbb{R}^n)$. Da g_1 und f_1 auf $\mathbb{R}^m \setminus B_2$ verschwinden folgt $g = f_0 + f_1 = f$ auf $\mathbb{R}^m \setminus B_2$. Aus (49) folgt $\|g - f\|^s_{\bar{B}_2} = \|g_1 - f_1\|^s_{\bar{B}_2} < \varepsilon$. Ist f auf W schon C^r, dann gilt dies auch für $f_0 = \lambda_0 f$ (da λ_0 glatt ist) und damit auch für $g = g_1 + f_0$ (da g_1 glatt ist.) □

Proposition 3.6.5. *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten und $f \in C^s(M, N)$, $0 \leq s \leq r \leq \infty$. Sei weiters $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine surjektive Karte für M und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte für N sodass $f(U) \subseteq V$. In jeder Umgebung $\mathcal{N}$ von $f \in C^s(M, N)$ existiert $g \in \mathcal{N}$ mit folgenden beiden Eigenschaften.*

(i) *g ist C^r auf $\varphi^{-1}(B_1)$.*
(ii) *g und f stimmen auf $M \setminus \varphi^{-1}(B_2)$ überein.*

Ist $W \subseteq M$ offen und f auf W schon C^r dann kann g so gewählt werden, dass auch g auf W wieder C^r ist.

Beweis. O.B.d.A. sei $s < r$ also auch $s < \infty$. Nach Proposition 3.4.10 existiert $\varepsilon > 0$ sodass

$$\Big\{h \in C^s(M, N) \;\Big|\; \|\psi \circ h \circ \varphi^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\|^s_{\bar{B}_2} < \varepsilon,\, h|_{M \setminus \varphi^{-1}(B_2)} = f|_{M \setminus \varphi^{-1}(B_2)}\Big\} \subseteq \mathcal{N}.$$

Wenden wir Proposition 3.6.4 auf $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ an erhalten wir $\bar{g} \in C^s(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sodass gilt

(i) $\bar{g} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf $\mathbb{R}^m \setminus B_2$.
(ii) $\bar{g}$ ist C^∞ auf B_1
(iii) $\|\bar{g} - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\|^s_{\bar{B}_2} < \varepsilon$
(iv) $\bar{g}$ ist C^r auf $\varphi(U \cap W)$.

Definiert man jetzt

$$g \in C^s(M,N), \quad g(x) := \begin{cases} f(x) & x \in M \setminus \bar{B}_2 \\ (\psi^{-1} \circ \bar{g} \circ \varphi)(x) & x \in U \end{cases}$$

dann hat dies alle gewünschten Eigenschaften. □

SATZ 3.6.6. *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, und $0 \leq s \leq r \leq \infty$. Dann ist $C^r(M,N)$ dicht in $C^s(M,N)$.*

BEWEIS. O.B.d.A. sei M zusammenhängend. Sei $f \in C^s(M,N)$ und $\mathcal{U} \subseteq M \times J^r(M,N)$ offen sodass

$$f \in \mathcal{N} := \big\{h \in C^s(M,N) \,\big|\, \forall x \in M : (x, j^r f(x)) \in \mathcal{U}\big\}.$$

Zu zeigen ist $\mathcal{N} \cap C^r(M,N) \neq \emptyset$.

Wähle einen abzählbaren lokal endlichen Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ und eine Familie von Karten $\{(V_i, \psi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, sodass $f(U_i) \subseteq V_i$, $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i^{-1}(B_1) = M$, siehe Lemma 2.4.4. Man bemerke hier auch, dass jeder lokal endliche Atlas auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit schon abzählbar sein muss, da nach Satz 1.1.2 eine kompakte Ausschöpfung existiert. Nach Proposition 3.6.5 können wir induktiv Abbildungen $g_i \in \mathcal{N}$ mit folgenden beiden Eigenschaften konstruieren:

(i) g_i ist C^r auf $\varphi_0^{-1}(B_1) \cup \dots \cup \varphi_i^{-1}(B_1)$, für alle $0 \leq i$.
(ii) g_i stimmt mit g_{i-1} auf $M \setminus \varphi_1^{-1}(B_2)$ überein, für alle $1 \leq i$.

Setzte jetzt $g(x) := \lim_{i\to\infty} g_i(x)$. Da $\{U_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ lokal endlich ist, existiert für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ für die $\{i \in \mathbb{N} | U \cap U_i \neq \emptyset\}$ endlich ist. Also existiert $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$U \subseteq M \setminus U_i \subseteq M \setminus \varphi_i^{-1}(B_2) \quad \text{für alle } i \geq i_0.$$

Es folgt $g|_U = g_{i_0}|_U$, und daher auch $(y, j^s g(y)) \in \mathcal{U}$ für alle $y \in U$. Wir schließen $g \in \mathcal{N}$. Auch folgt aus (i) und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i^{-1}(B_1) = M$, dass g eine C^r-Abbildung ist. Also $g \in \mathcal{N} \cap C^r(M,N)$ und daher $\mathcal{N} \cap C^r(M,N) \neq \emptyset$. □

SATZ 3.6.7. *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, und $1 \leq s \leq r \leq \infty$. Dann ist $\mathrm{Imm}^r(M,N)$ dicht in $\mathrm{Imm}^s(M,N)$, $\mathrm{Sub}^r(M,N)$ dicht in $\mathrm{Sub}^s(M,N)$, $\mathrm{Emb}^r(M,N)$ dicht in $\mathrm{Emb}^s(M,N)$, $\mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N)$ dicht in $\mathrm{Emb}^s_{\mathrm{cl}}(M,N)$ und es ist $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ dicht in $\mathrm{Diff}^s(M,N)$. Für $0 \leq s \leq r \leq \infty$ ist auch $\mathrm{Prop}^r(M,N)$ dicht in $\mathrm{Prop}^s(M,N)$.*

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die Dichtheit von $\mathrm{Imm}^r(M,N) \subseteq \mathrm{Imm}^s(M,N)$. Sei $f \in \mathrm{Imm}^s(M,N)$ und $\mathcal{O} \subseteq C^s(M,N)$ offen mit $f \in \mathcal{O}$. Wir müssen $g \in \mathrm{Imm}^r(M,N) \cap \mathcal{O}$ finden. Nach Proposition 3.5.3 dürfen wir $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{Imm}^s(M,N)$ annehmen. Nach Satz 3.6.6 existiert $g \in C^r(M,N) \cap \mathcal{O}$. Wegen $\mathrm{Imm}^r(M,N) = \mathrm{Imm}^s(M,N) \cap C^r(M,N)$ folgt $g \in \mathrm{Imm}^r(M,N) \cap \mathcal{O}$. Der Beweis für die Dichtheit der Submersionen, der Einbettungen, der abgeschlossenen Einbettungen, der Diffeomorphismen und der properen Abbildungen ist der selbe, nur verwendet man jetzt statt Proposition 3.5.3 die entsprechenden Resultate in Abschnit 3.5. □

KOROLLAR 3.6.8. *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, und $1 \leq s \leq r \leq \infty$. Sind M und N C^s-diffeomorph dann sind sie auch C^r-diffeomorph.*

Beweis. Nach Vorraussetzung ist $\mathrm{Diff}^s(M, N) \neq \emptyset$. Nach Satz 3.6.7 ist die Menge $\mathrm{Diff}^r(M, N)$ dicht in $\mathrm{Diff}^s(M, N)$. Also ist auch $\mathrm{Diff}^r(M, N)$ nicht leer und daher M C^r-diffeomorph zu N. $\square$

Bemerkenswerterweise bleibt Korollar 3.6.8 für und $0 = s < r \leq \infty$ nicht richtig. Es gibt nicht diffeomorphe differenzierbare Mannigfaltigkeiten deren zugrundeliegende topologische Mannigfaltigkeiten homöomorph sind. Etwa existieren auf S^7 endlich viele paarweise nicht diffeomorphe glatte Strukturen. Aber auch auf $\mathbb{R}^4$ existieren *exotische* glatte Strukturen, hier sogar überabzählbar viele paarweise nicht diffeomorphe! Für $n \neq 4$ allerdings, existiert auf $\mathbb{R}^n$, bis auf Diffeomorphismus, nur eine glatte Struktur, die Standardstruktur.

3.7. Kompatible C^∞-Strukturen. Wir werden nun die Resultate aus den vorherigen Abschnitten verwenden um folgendes fundamentale Resultat zu beweisen, siehe Satz 3.7.2 unten. Jede C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$, besitzt eine kompatible C^∞-Struktur. Mit anderen Worten, jede C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$, ist C^r-diffeomorph zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit.

Wir beginnen mit

Proposition 3.7.1. *Es sei $f \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $0 \leq r < \infty$, $\mathcal{N}$ eine Umgebung von f in $C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, und $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann existiert eine Umgebung $\mathcal{N}'$ von $f|_U \in C^r(U, \mathbb{R}^m)$ sodass für jedes $h \in \mathcal{N}'$ die Funktion*

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad g(x) := \begin{cases} h(x) & x \in U \\ f(x) & x \in \mathbb{R}^m \setminus U \end{cases} \tag{50}$$

$g \in \mathcal{N}$ erfüllt.

Beweis. Auf

$$J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \prod_{1 \leq k \leq r} L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

betrachte die folgende, die Topologie erzeugende Metrik,

$$\begin{aligned} d\big((x, y, \lambda^1, \dots, \lambda^r), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^r)\big) \\ := \max\big\{\|x - \bar{x}\|, \|y - \bar{y}\|, \|\lambda^1 - \bar{\lambda}^1\|, \dots, \|\lambda^r - \bar{\lambda}^r\|\big\} \end{aligned}$$

Nach Proposition 3.1.4 existiert $\varepsilon \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^+)$ sodass

$$\Big\{g \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m\,) \,\Big|\, \forall x \in \mathbb{R}^m : d\big(j^r g(x), j^r f(x)\big) < \varepsilon(x)\Big\} \subseteq \mathcal{N}.$$

Nach Proposition 2.4.6 existiert $\mu \in C^1(\mathbb{R}^m, [0, \infty))$ sodass $\mu^{-1}(0) = \mathbb{R}^m \setminus U$. Definiere

$$\mathcal{N}' := \Big\{h \in C^r(U, \mathbb{R}^m) \,\Big|\, \forall x \in U : d\big(j^r h(x), j^r f(x)\big) < \min\{\varepsilon(x), \mu(x)\}\Big\}.$$

Da für $x \in U$ gilt $\min\{\varepsilon(x), \mu(x)\} > 0$, ist dies eine Umgebung von $f|_U \in C^r(U, \mathbb{R}^m)$, siehe Proposition 3.1.4.

Sei nun $h \in \mathcal{N}'$ und g durch (50) definiert. Es ist zu zeigen $g \in \mathcal{N}$. Wir zeigen zuerst $g \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Dafür genügt zu zeigen $a := g - f \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Sicherlich ist $a|_{U \cup (\mathbb{R}^m \setminus \bar{U})}$ eine C^r-Abbildung. Sei also $x \in \bar{U} \setminus U$. Nach Konstruktion gilt

$$\forall y \in \mathbb{R}^m \ \forall 1 \leq k \leq r : \|a(y)\| \leq \mu(y), \ \|(D^k a)_y\| \leq \mu(y).$$

Da $\mu(x) = 0$ und $a(x) = 0$, gilt $\|a(y) - a(x)\| = \|a(y)\| \leq \mu(y) = |\mu(y) - \mu(x)|$. Also ist a bei x stetig, und wir erhalten

$$\frac{\|a(y) - a(x)\|}{\|y - x\|} \leq \frac{|\mu(y) - \mu(x)|}{\|y - x\|}.$$

Da x ein Minimum von μ ist gilt $D\mu_x = 0$ also $\lim_{y\to x} \frac{|\mu(y)-\mu(x)|}{\|y-x\|} = 0$. Es folgt

$$\lim_{y\to x} \frac{\|a(y) - a(x)\|}{\|y - x\|} = 0,$$

also ist a bei x differenzierbar und $Da_x = 0$. Dies gilt für alle $x \in \bar{U} \setminus U$ also ist a auf $\mathbb{R}^m$ differenzierbar. Wegen $\|Da_y - Da_x\| = \|Da_y\| \leq \mu(y) = |\mu(y) - \mu(x)|$ ist Da bei x stetig und damit $a \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Wir erhalten daraus aber auch

$$\frac{\|Da_y - Da_x\|}{\|y - x\|} \leq \frac{|\mu(y) - \mu(x)|}{\|y - x\|},$$

und da $\lim_{y\to x} \frac{|\mu(y)-\mu(x)|}{\|y-x\|} = 0$ folgt wieder

$$\lim_{y\to x} \frac{\|Da_y - Da_x\|}{\|y - x\|} = 0.$$

Also ist Da bei x differenzierbar, $D^2a_x = 0$. Damit ist a auf $\mathbb{R}^m$ zweimal differenzierbar. Wegen $\|D^2a_y - D^2a_x\| = \|D^2a_y\| \leq \mu(y) = |\mu(y) - \mu(x)|$ folgt sogar $a \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Induktiv fortfahrend zeigt man, dass $a \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und $D^k a = 0$ auf $\bar{U} \setminus U$, $1 \leq k \leq r$.

Damit ist $g = f + a \in C^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und es gilt $D^k g_x = D^k f_x$ für $x \in \bar{U} \setminus U$ und $1 \leq k \leq r$. Also gilt auch $d\big(j^r g(x), j^r f(x)\big) < \varepsilon(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ und damit $g \in \mathcal{N}$. □

Wir erinnern uns, dass eine C^r-Mannigfaltigkeit ein Paar $(M, \mathcal{D}^r)$ ist, wobei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{D}^r$ ein maximaler C^r-Atlas ist. Der maximale C^r-Atlas wird auch C^r-Struktur bezeichnet, siehe Abschnitt 2.1. Ist $s \leq r$ und $\mathcal{D}^s$ eine C^s-Struktur auf M, also $(M, \mathcal{D}^s)$ eine C^s-Mannigfaltigkeit, dann heißen $\mathcal{D}^s$ und $\mathcal{D}^r$ *kompatibel* falls $\mathcal{D}^r \subseteq \mathcal{D}^s$. Äquivalent, jede Karte in $\mathcal{D}^r$ ist auch Karte in $\mathcal{D}^s$. Äquivalent, die von $\mathcal{D}^r$ induzierte C^s-Struktur stimmt mit $\mathcal{D}^s$ überein. Oder wieder äquivalent, die identische Abbildung $\mathrm{id}_M : (M, \mathcal{D}^r) \to (M, \mathcal{D}^s)$ ist ein C^s-Diffeomorphismus.

SATZ 3.7.2. *Jede C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$, besitzt eine kompatible C^∞-Struktur.*

BEWEIS. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit C^r-Struktur $\mathcal{D}^r$. O.B.d.A. sei M zusammenhängend und $r < \infty$. Wähle einen abzählbaren Atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ von M, sodass jede Karte $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist, siehe Lemma 2.4.4. Für $i \in \mathbb{N}$ setzte $W_i := U_0 \cup \cdots \cup U_i$. Dann gilt

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i = M \quad \text{und} \quad W_i \subseteq W_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wir werden nun induktiv C^∞-Strukturen $\mathcal{D}_i^\infty$ auf W_i konstruieren, sodass gilt:

(i) $\mathcal{D}_i^\infty|_{W_{i-1}} = \mathcal{D}_{i-1}^\infty$ für alle $1 \leq i$.
(ii) $\mathcal{D}_i^\infty \subseteq \mathcal{D}^r|_{W_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir definieren die C^∞-Struktur auf W_0 durch den Atlas $\{(U_0,\varphi_0)\}$. Da dieser Atlas nur aus einer Karte besteht sind alle Kartenwechsel glatt also induziert dies eine C^∞-Struktur $\mathcal{D}_0^\infty$ auf W_0. Dann gelten (i) und (ii) trivialerweise für $i=0$.

Angenommen $\mathcal{D}_0^\infty,\dots,\mathcal{D}_{i-1}^\infty$ sind schon konstruiert und erfüllen (i) und (ii). Nach Satz 3.5.12 finden wir eine Umgebung $\mathcal{N}$ von $\varphi_i\in C^r\big((U_i,\mathcal{D}^r|_{U_i}),\mathbb{R}^m\big)$ mit

$$\varphi_i\in\mathcal{N}\subseteq \operatorname{Diff}^r\big((U_i,\mathcal{D}^r|_{U_i}),\mathbb{R}^m\big). \tag{51}$$

Nach Proposition 3.7.1 existiert eine Umgebung $\mathcal{N}'$ von

$$\varphi_i|_{W_{i-1}\cap U_i}\in C^r\big((W_{i-1}\cap U_i,\mathcal{D}^r|_{W_{i-1}\cap U_i}),\mathbb{R}^m\big)$$

sodass für jedes $h\in\mathcal{N}'$ die Funktion

$$g:U_i\to N,\quad g(x):=\begin{cases}\varphi_i(x) & x\in U_i\setminus W_{i-1}\\ h(x) & x\in W_{i-1}\cap U_i\end{cases} \tag{52}$$

$g\in\mathcal{N}$ erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathcal{D}_{i-1}^\infty|_{W_{i-1}\cap U_i}\subseteq\mathcal{D}^r|_{W_{i-1}\cap U_i}$. Also existiert nach Satz 3.6.7 ein $h\in\mathcal{N}'$ mit

$$h\in C^\infty\big((W_{i-1}\cap U_i,\mathcal{D}_{i-1}^\infty|_{W_{i-1}\cap U_i}),\mathbb{R}^m\big).$$

Für die durch (52) definierte Abbildung gilt $g\in\mathcal{N}$. Wegen (51) ist

$$g\in\operatorname{Diff}^r\big((U_i,D^r|_{U_i}),\mathbb{R}^m\big)$$

also ist $g:U_i\to\mathbb{R}^m$ eine Karte von $\mathcal{D}^r|_{U_i}$. Da

$$g|_{W_{i-1}\cap U_i}=h\in C^\infty\big((W_{i-1}\cap U_i,\mathcal{D}_{i-1}^\infty|_{W_{i-1}\cap U_i}),\mathbb{R}^m\big)$$

ist $\mathcal{D}_{i-1}^\infty\cup\{(U_i,g)\}$ ein C^∞-Atlas für W_i. Wir bezeichnen die induzierte C^∞-Struktur auf W_i mit $\mathcal{D}_i^\infty$. Offensichtlich gelten jetzt (i) und (ii) auch für i.

Wir haben also C^∞-Strukturen auf W_i, $i\in\mathbb{N}$, konstruiert die (i) und (ii) erfüllen. Wegen (i) und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}W_i=M$ ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_i^\infty$ ein C^∞-Atlas für M. Bezeichne die induziert C^∞-Struktur auf M mit $\mathcal{D}^\infty$. Wegen (ii) gilt $\mathcal{D}^\infty|_{W_i}=\mathcal{D}_i^\infty\subseteq\mathcal{D}^r|_{W_i}$ für alle $i\in\mathbb{N}$, also auch $\mathcal{D}^\infty\subseteq\mathcal{D}^r$, wieder wegen $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}W_i=M$. Also ist $\mathcal{D}^\infty$ eine mit $\mathcal{D}^r$ kompatible C^∞-Struktur auf M. □

Korollar 3.7.3. *Jede C^r-Mannigfaltigkeit, $1\le r\le\infty$, ist C^r-diffeomorph zu einer C^∞-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Sei $(M,\mathcal{D}^r)$ eine C^r-Mannigfaltigkeit. Nach Satz 3.7.2 existiert eine kompatible C^∞-Struktur $\mathcal{D}^\infty$ auf M. Die Kompatibilität, $\mathcal{D}^\infty\subseteq\mathcal{D}^r$, besagt gerade, dass die identische Abbildung $\mathrm{id}_M:(M,\mathcal{D}^r)\to(M,\mathcal{D}^\infty)$ ein C^r-Diffeomorphismus ist. □

Bemerkung 3.7.4. Satz 3.7.2 bleibt für $r=0$ nicht richtig. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten die keine C^∞-Struktur besitzten. Nach Satz 3.7.2 besitzen diese dann auch keine C^1-Struktur.

4. Transversalität

Wir werden uns in diesem Kapitel teilweise auf glatte Mannigfaltigkeiten und Abbildungen einschränken. Es sei nochmals betont, dass wir glatte Mannigfaltigkeit und glatte Abbildung synonym mit C^∞-Mannigfaltigkeit und C^∞-Abbildungen verwenden, siehe Definition 2.1.1 und Definition 2.2.1.

Wir werden in diesem Kapitel auch gelegentlich auf separable Mannigfaltigkeiten stoßen. Wir erinnern uns, vgl. Ende des Abschnittes 1.1, dass ein topologischer Raum separabel heißt wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Aus Satz 1.1.2 folgt sofort die Äquivalenz folgender Aussagen über eine (topologische) Mannigfaltigkeit M:

(i) M ist separabel.
(ii) M besitzt eine kompakte Ausschöpfung.
(iii) M ist σ-kompakt.
(iv) M ist Lindelöf.
(v) M genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom.
(vi) M hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.

Aus (v) folgt dann, dass Teilmannigfaltigkeiten separabler Mannigfaltigkeiten wieder separabel sind.

4.1. Nullmengen. In diesem Abschnitt werden wir eine Klasse von kleinen Teilmengen in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kennen lernen, die sogenannten *Nullmengen*. Sie sind klein in dem Sinn, dass ihre Komplemente dicht sind. Und sie haben die angenehme Eigenschaft, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, siehe Proposition 4.1.4. Wir werden den Begriff der Nullmenge verwenden um den Satz von Sard zu formulieren, siehe Abschnitt 4.2.

Wir erinnern uns, eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge* falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existieren sodass

$$S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(x_i) \quad \text{und} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(B_{r_i}(x_i)) \leq \varepsilon.$$

Dabei bezeichnet $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x| < r\}$ den Ball mit Radius r und Mittelpunkt x, und $\mathrm{vol}(B_r(x)) = \frac{2\pi^{n/2}r^n}{n\Gamma(n/2)}$ bezeichnet sein Volumen. Äquivalent kann man hier mit abgeschlossenen Bällen oder Würfeln arbeiten und erhält offensichtlich den selben Begriff einer Nullmenge.

Proposition 4.1.1. *Für Teilmengen in $\mathbb{R}^n$ gilt:*

(i) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.*
(ii) *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*
(iii) *Der (abgeschlossene) Einheitsball ist keine Nullmenge.*
(iv) *Das Komplement einer Nullmengen ist dicht.*
(v) *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $S \subseteq U$ eine Nullmenge, dann ist auch $f(S)$ eine Nullmenge.*
(vi) *Jeder echte Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.*

Beweis. (i) ist trivial. Nun zu (ii). Seien $(S^k)_{k\in\mathbb{N}}$ Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ und sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren Folgen $(x_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(r_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ sodass

$$S^k \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i^k}(x_i^k) \quad \text{und} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(B_{r_i^k}(x_i^k)) \leq 2^{-(k+1)}\varepsilon.$$

Es folgt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S^k \subseteq \bigcup_{(k,i)\in\mathbb{N}^2} B_{r_i^k}(x_i^k) \quad \text{und} \quad \sum_{(k,i)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{vol}(B_{r_i^k}(x_i^k)) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-(k+1)}\varepsilon = \varepsilon.$$

Also ist auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S^k$ eine Nullmenge.

Nun zu (iii). Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\chi_X : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ die Indikatorfuntion von X, $\chi(x) = 1$ falls $x \in X$, und $\chi_X(x) = 0$ falls $x \notin X$. Für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\chi_{B_r(x)}$ Riemann integrierbar und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_r(x)} = \operatorname{vol}(B_r(x))$. Überdecken die Bälle $B_{r_i}(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$, den Einheitsball $\bar{B}_1$, dann müssen wegen der Kompaktheit von $\bar{B}_1$ schon endlich viele davon $\bar{B}_1$ überdecken. Also existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $B_1 \subseteq \bar{B}_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x_i)$ und damit $\chi_{B_1} \leq \sum_{i=1}^k \chi_{B_{r_i}(x_i)}$. Folglich

$$\operatorname{vol}(B_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_1} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^k \chi_{B_{r_i}(x_i)} = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_{r_i}(x_i)} = \sum_{i=1}^k \operatorname{vol}(B_{r_i}(x_i)),$$

und daher kann $\bar{B}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ keine Nullmenge sein.

Nun zu (iv). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Indirekt angenommen $\mathbb{R}^n \setminus S$ ist nicht dicht in $\mathbb{R}^n$. Dann existiert $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq S$. Nach (i) ist daher $B_\varepsilon(x)$ eine Nullmenge. Damit wäre jeder Ball mit Radius ε eine Nullmenge. Wegen (ii) ist dann auch der Einheitsball eine Nullmenge, aber dies widerspricht (iii).

Um (v) zu zeigen bemerken wir zuerst, dass wegen (ii) o.B.d.A. $S \subseteq B_R(0) \subseteq \bar{B}_{R'}(0) \subseteq U$ für gewisse $0 < R < R'$. Für $x, x+h \in \bar{B}_{R'}(0)$ gilt

$$|f(x+h) - f(x)| = \Big| \int_0^1 (Df_{x+th})(h) dt \Big| \leq \int_0^1 \|Df_{x+th}\| |h| dt \leq C|h|$$

mit $C := \sup_{y \in \bar{B}_{R'}(0)} \|Df_y\|$. Es folgt $f(B_r(x)) \subseteq B_{Cr}(f(x))$ für jeden Ball $B_r(x) \subseteq \bar{B}_{R'}(0)$. Ist jetzt $\varepsilon > 0$ gegeben, dann finden wir Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$S \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{r_i}(x_i) \quad \text{und} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(B_{r_i}(x_i)) \leq \varepsilon / C^n.$$

Da $S \subseteq B_R(0)$ dürfen wir annehmen, dass $B_{r_i}(x_i) \subseteq \bar{B}_{R'}(0)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es folgt dann $f(S) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(B_{r_i}(x_i)) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{Cr_i}(f(x_i))$ und

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(B_{Cr_i}(f(x_i))) = C^n \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{vol}(B_{r_i}(x_i)) \leq \varepsilon.$$

Damit ist also auch $f(S)$ eine Nullmenge.

Um (vi) zu sehen genügt es wegen (v) und (i) zu zeigen, dass $\mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist. Nach (ii) genügt es zu zeigen, dass der Einheitsball $B^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. Für $k \in \mathbb{N}$ kann man $B^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch k^{n-1} viele $(n-1)$-dimensionalen Bälle mit Radius C/k überdecken, wobei $C > \sqrt{n-1}$ unabhängig von k gewählt werden kann. Also kann auch $B^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ durch k^{n-1} viele n-dimensionalen Bälle mit Radius C/k überdeckt werden. Die Summe der n-dimensionale Volumina all dieser Bälle ist $k^{n-1} \operatorname{vol}(B^n_{C/k}) = C^n k^{-1} \operatorname{vol}(B^n_1)$ und dies konvergiert gegen 0 wenn $k \to \infty$. Folglich ist $B^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. □

Definition 4.1.2 (Nullmengen in Mannigfaltigkeiten). Es sei M eine C^1-Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt *Nullmenge von M* falls für jede Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ die Teilmenge $\varphi(U \cap S) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

Proposition 4.1.3. *Ist $\mathcal{A}$ ein Atlas einer C^1-Mannigfaltigkeit M dann gilt: $S \subseteq M$ ist genau dann Nullmenge wenn $\varphi(U \cap S)$ eine Nullmenge ist für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Angenommen $\varphi(U \cap S)$ ist Nullmenge für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, und sei $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Karte von M. Es ist zu zeigen, dass $\psi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist. Als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist $\psi(V)$ σ-kompakt, d.h. Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen. Daher existieren abzählbar viele $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $V \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Nach Voraussetzung ist jedes $\varphi_i(U_i \cap S)$, also auch $\varphi_i(V \cap U_i \cap S)$, Nullmenge, $i \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 4.1.1(v) ist damit auch jedes $\psi(V \cap U_i \cap S) = (\psi \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(V \cap U_i \cap S))$ Nullmenge, $i \in \mathbb{N}$. Da

$$\psi(V \cap S) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \psi(V \cap U_i \cap S)$$

ist nach Proposition 4.1.1(ii) auch $\psi(V \cap S)$ eine Nullmenge. □

Aus Proposition 4.1.1 und Proposition 4.1.3 erhalten wir sofort

PROPOSITION 4.1.4. *Für Teilmengen einer C^1-Mannigfaltigkeit gilt:*

(i) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.*
(ii) *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*
(iii) *Das Komplement einer Nullmenge ist dicht.*
(iv) *Eine Teilmenge ist genau dann Nullmenge wenn ihr Durchschnitt mit jeder Zusammenhangskomponente Nullmenge in dieser Zusammenhangskomponente ist.*

Zu erwähnen wäre vielleicht noch folgende einfache Version des Satzes von Sard die sich mühelos aus Proposition 4.1.1 herleiten läßt.

PROPOSITION 4.1.5. *Sei M eine separable Mannigfaltigkeit mit* $\dim(M) = m$, *sei N eine Mannigfaltigkeit mit* $\dim(N) = n > m$ *und sei $f \in C^1(M, N)$. Dann ist $f(M)$ Nullmenge in N.*

BEWEIS. Es sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von M und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von N sodass $f(U) \subseteq V$. Da M separabel ist kann M mit abzählbar vielen solchen Karten überdeckt werden und es genügt daher zu zeigen, dass $\psi(f(U) \cap V)$ Nullmenge ist, siehe Proposition 4.1.4(ii). Sei $U' := \varphi(U)$ und setzte $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \to \mathbb{R}^n$. Dann ist also zu zeigen, dass $g(U') \subseteq \mathbb{R}^n$ Nullmenge ist. Es bezeichne $\iota : U' \to U' \times \mathbb{R}^{n-m}$ die Inklusion $\iota(x) := (x, 0)$ und $\pi : U' \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\pi(x, y) := g(x)$. Dann gilt $g = \pi \circ \iota$. Nach Proposition 4.1.1(vi) ist $\iota(U')$ Nullmenge. Nach Proposition 4.1.1(v) ist daher auch $g(U') = \pi(\iota(U'))$ Nullmenge. □

BEMERKUNG 4.1.6. Die Separabilitätsvoraussetzung an M in Proposition 4.1.5 ist wesentlich wie an folgendem Beispiel beobachtet werden kann. Sei N eine glatte Mannigfaltigkeit und $n = \dim(N) > 0$. Sei M die 0-dimensionale Mannigfaltigkeit mit zugrundeliegender Menge N und diskreter Topologie. M hat also überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Die identische Abbildung $M \to N$ ist glatt, aber ihr Bild stimmt mit N überein, ist also keine Nullmenge.

BEMERKUNG 4.1.7. Der Begriff der Nullmenge in topologischen Mannigfaltigkeiten ist nicht sinnvoll. Dies liegt daran, dass es Homöomorphismen gibt die Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ auf nicht-Nullmengen abbilden. Insbesondere bleibt Proposition 4.1.1(v) für stetige f nicht richtig (flächenfüllende Kurven.)

Als erste Anwendung dieser sehr einfachen Version des Satzes von Sard, siehe Proposition 4.1.5, soll folgendes Resultat dienen. In der Sprache der Homotopietheorie besagt es, dass für $m < n$ die m-te Homotopiegruppe von S^n verschwindet, $\pi_m(S^n) = 0$. Insbesondere ist S^n einfach zusammenhängend für $n \geq 2$.

Satz 4.1.8. *Es sei $m < n$ und $f : S^m \to S^n$ stetig. Dann ist f nullhomotop, d.h. es existiert $y_0 \in S^n$ und eine stetige Abbildung $H : S^m \times [0,1] \to S^n$ sodass $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = y_0$ für alle $x \in S^m$.*

Beweis. Nach Satz 3.6.6 existiert $g \in C^\infty(S^m, S^n)$ mit $|g(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in S^m$. Für jedes $x \in S^m$ enthält die Strecke von $f(x)$ nach $g(x)$ nicht den Nullpunkt. Also ist

$$F : S^m \times [0,1] \to S^n, \quad F(x,t) := \frac{tg(x) + (1-t)f(x)}{|tg(x) + (1-t)f(x)|}$$

stetig und es gilt $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in S^m$. Nach Proposition 4.1.5 und Proposition 4.1.4(iii) existiert $y \in S^n \setminus g(S^m)$. Wähle einen Homöomorphismus $\varphi : S^n \setminus \{y\} \to \mathbb{R}^n$, siehe Abschnitt 1.2. Definiere

$$G : S^m \times [0,1] \to S^n, \quad G(x,t) := \varphi^{-1}\big((1-t)\varphi(g(x))\big).$$

Dann gilt $G(x,0) = g(x)$ und $G(x,1) = y_0 := \varphi^{-1}(0)$, für alle $x \in S^m$. Man erhält die gewünschte Abbildung H nun durch Komposition von F und G, genauer

$$H : S^m \times [0,1] \to S^n, \quad H(x,t) := \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}. \qquad \square$$

4.2. Der Satz von Sard. Wir erinnern uns an die Definition der regulären Werte einer differenzierbaren Abbildung $f \in C^1(M,N)$, siehe Definition 2.3.7. Jeder Punkt in N der nicht regulärer Wert ist heißt *kritischer Wert* von f. Der Satz von Sard besagt grob gesprochen, dass fast jeder Wert einer glatten Abbildung regulär ist. Genauer erinnern wir uns an folgenden Satz der Analysis. Ein Beweis findet sich etwa in [**J94**, Kapitel 6], [**H94**, Kapitel 3.1] oder [**M65**, Chapters 2 and 3].

Satz 4.2.1 (Satz von Sard). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ glatt. Dann ist die Menge der kritischen Werte von f eine Nullmenge.*

Bemerkung 4.2.2. Für $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ mit

$$r > \max\{0, m-n\}$$

gilt immer noch, dass die Menge der kritischen Werte eine Nullmenge ist. Ohne die subtile Zusatzvorraussetzung an die Differenzierbarkeit von f wird der Satz falsch!

Satz 4.2.3 (Satz von Sard globale Version). *Sei M eine separable glatte Mannigfaltigkeiten, N eine glatte Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Menge der kritischen Werte von f eine Nullmenge in N.*

Beweis. Wähle einen lokal endlichen Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ von M, und eine Familie von Karten $(V_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ von N sodass $f(U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Da M separabel und der Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokal endlich ist, kann A höchstens abzählbar sein. Nach Proposition 4.1.4(ii) genügt es also zu zeigen, dass die Menge der kritischen Werte von $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to N$ eine Nullmenge bilden, für alle $\alpha \in A$. Äquivalent dazu, genügt es zu zeigen, dass die Menge der kritischen Werte von $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ eine Nullmenge bilden, für alle $\alpha \in A$. Dies folgt aber aus Satz 4.2.1. $\square$

Mittels Proposition 4.1.4(iii) erhalten wir sofort

Korollar 4.2.4 (Brown). *Sei M eine separable glatte Mannigfaltigkeiten, N eine glatte Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Menge der regulären Werte von f dicht in N.*

Bemerkung 4.2.5. Wieder ist die Separabilitätsvorraussetzung an M essentiell, vgl. Bemerkung 4.1.6.

Bemerkung 4.2.6. Ist $\dim(M) = m < n = \dim(N)$ dann stimmt die Menge der kritischen Werte von $f \in C^1(M, N)$ mit $f(M)$ überein. In dieser Situation besagt Satz 4.2.3, dass $f(M)$ eine Nullmenge ist für $f \in C^\infty(M, N)$, vgl. Proposition 4.1.5. Verwendet man die stärkere Version des Satzes von Sard, siehe Bemerkung 4.2.2, erhält man die volle Aussage von Proposition 4.1.5.

Der Satz von Sard, das Approximationsresultat Satz 3.6.6 und die Klassifikation der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand führen zu einem analytischen Beweis des folgenden fundamentalen Resultats. Klassische Beweise mittels Homotopie- oder Homologietheorie findet man in jedem Lehrbuch für algebraische Topologie, siehe etwa [**H02**, Corollary 2.15] oder [**SZ88**, Satz 11.1.1].

Satz 4.2.7. *Es gibt keine stetige Retraktion $\bar{B}^n \to S^{n-1}$. Genauer, es gibt keine stetige Abbildung vom abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitsball auf die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre die die Punkte der Sphäre fixiert.*

Beweis. Indirekt angenommen es gibt eine stetige Abbildung $f : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$. Wähle eine stetige Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to [0, 3]$ mit $\phi(t) = 1/t$ für $t \geq 1/3$, und definiere

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}, \quad \tilde{f}(x) := f(\phi(|x|)x).$$

Dann gilt

$$x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq 1/3 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(x) = x/|x|.$$

Nach Satz 3.6.6 finden wir eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$ mit $|\tilde{f}(x) - g(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Beachte, dass daher für $|x| \geq 1/3$ die Strecke von $g(x)$ nach $\tilde{f}(x) = x/|x|$ nicht $0 \in \mathbb{R}^n$ enthält. Wähle eine glatte Funktion $\lambda : \mathbb{R} \to [0, 1]$ sodass $\lambda(t) = 0$ für alle $t \leq 1/3$ und $\lambda(t) = 1$ für alle $t \geq 2/3$ gilt, siehe Lemma 2.4.2. Damit können wir eine glatte Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}, \quad h(x) := \frac{(1 - \lambda(|x|))g(x) + \lambda(|x|)\frac{x}{|x|}}{\left|(1 - \lambda(|x|))g(x) + \lambda(|x|)\frac{x}{|x|}\right|}$$

definieren die auch

$$x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq 2/3 \quad \Rightarrow \quad h(x) = x/|x| \tag{53}$$

erfüllt. Insbesondere ist h eine Retraktion, $h(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$. Nach dem Satz von Sard, siehe Korollar 4.2.4, existiert ein regulärer Wert $y \in S^{n-1}$ von h. Nach Satz 2.3.8 ist $h^{-1}(y)$ eine abgeschlossene 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Zusammen mit (53) folgt, dass $M := h^{-1}(y) \cap \bar{B}^n$ eine kompakt 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist und $\partial M = \{y\}$ gilt. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass die Anzahl der Randpunkte einer kompakten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit gerade sein muss, siehe Korollar 1.5.6. Also kann es keine stetige Retraktion $\bar{B}^n \to S^{n-1}$ geben. □

Schließlich sei noch eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4.2.7 erwähnt.

Satz 4.2.8 (Browerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $\bar{B}^n \to \bar{B}^n$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Indirekt angenommen es gäbe eine fixpunktfreie stetige Abbildung $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$. Dies erlaubt die Definition einer stetigen Abbildung $g : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ indem $x \in \bar{B}^n$ auf den Durchschnitt des Strahles von $f(x)$ nach x mit S^{n-1} abgebildet wird. Expliziter, $g(x) := x + t(x)(x - f(x))$ mit

$$t(x) := \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - |x|^2)|x - f(x)|^2}}{|x - f(x)|^2}.$$

Da g die Punkte in S^{n-1} fix läßt ist $g : \bar{B}^n \to S^{n-1}$ eine Retraktion. Dies widerspricht aber Satz 4.2.7, also muss f einen Fixpunkt besitzen. □

4.3. Transversalität. Für zwei differenzierbare Teilmannigfaltigkeiten $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ wird deren Durchschnitt $A \cap B$ i.A. keine Teilmannigfaltigkeit von M sein. Betrachte etwa eine C^r-Mannigfaltigkeit M, $1 \leq r \leq \infty$, eine beliebige abgeschlossene Teilmenge $K \subseteq M$ und wähle eine C^r-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ deren Nullstellenmenge mit K übereinstimmt, siehe Satz 2.4.6. Dann sind $A := M \times \{0\}$ und $B := \operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ C^r-Teilmannigfaltigkeiten von $M \times \mathbb{R}$. Aber $A \cap B = \{(x, 0) \mid x \in K\}$ ist i.A. keine Teilmannigfaltigkeit. Der Begriff der Transversalität liefert unter anderem ein brauchbares Kriterium welches garantiert, dass der Durchschnitt zweier Teilmannigfaltigkeiten wieder eine Teilmannigfaltigkeit ist, siehe Korollar 4.3.5.

Definition 4.3.1 (Transversalität). Es seien M, N und P drei C^1-Mannigfaltigkeiten. Zwei Abbildungen $f \in C^1(M, N)$ und $g \in C^1(P, N)$ heißen *transversal* falls für alle $x \in M$ und alle $z \in P$ mit $f(x) = g(z)$ folgendes gilt: Für eine (und dann jede) Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in U$, und eine (und dann jede) Karte $\rho : W \to \mathbb{R}^p$ von P mit $z \in W$, und eine (und dann jede) Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von N mit $y := f(x) = g(z) \in V$, gilt

$$\operatorname{img}\big(D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}\big) + \operatorname{img}\big(D(\psi \circ g \circ \rho^{-1})_{\rho(z)}\big) = \mathbb{R}^n, \tag{54}$$

d.h. die Bilder der Differentiale

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad D(\psi \circ g \circ \rho^{-1})_{\rho(z)} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

spannen zusammen ganz $\mathbb{R}^n$ auf. Ist $A \subseteq N$ eine C^1-Teilmannigfaltigkeit dann heißt f transversal zu A falls die Inklusion $\iota_A : A \to N$ transversal zu f ist. Zwei C^1-Teilmannigfaltigkeiten A und B von N heißen transversal wenn die beiden Inklusionen $\iota_A : A \to N$ und $\iota_B : B \to N$ transversal sind.

Bemerkung 4.3.2. Jede Abbildung $f \in C^1(M, N)$ mit $f(M) \cap A = \emptyset$ ist transversal zu A. Eine submersive Abbildung ist transversal zu jeder Teilmannigfaltigkeit. Auch ist jede Abbildung $f \in C^1(M, N)$ transversal zu N. Ist $y \in N$ dann ist eine Abbildung $f \in C^1(M, N)$ genau dann transversal zu der 0-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $\{y\} \subseteq N$ wenn y ein regulärer Wert von f ist, siehe Abschnitt 2.3. Gilt $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$, $\dim(A) = k$ und $m + k < n$ dann ist eine Abbildung $f \in C^1(M, N)$ genau dann transversal zu A falls $f(M) \cap A = \emptyset$, da ja die Bedingung (54) aus Dimensionsgründen nie erfüllt sein kann.

Der Begriff der Transversalität erlaubt die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.3.8.

Satz 4.3.3. *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $A \subseteq N$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit und $f \in C^r(M, N)$ transversal zu A, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist*

$f^{-1}(A) \subseteq M$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit. Gilt weiters $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$ und $\dim(A) = a$ dann hat $f^{-1}(A)$ die Dimension $m - n + a$.

Beweis. Setze $S := f^{-1}(A) \subseteq M$. Sei $x \in S$. Wähle eine Teilmannigfaltigkeitskarte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \in V$ und $\psi(V \cap A) = \psi(V) \cap \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n$. Betrachte die offene Teilmenge $U := f^{-1}(V) \subseteq M$. Es genügt zu zeigen, dass $S \cap U$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit von U ist. Es bezeichne $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n-k}$ die natürliche Projektion. Dann ist $g := \pi \circ \psi \circ f \in C^r(U, \mathbb{R}^{n-k})$ und es gilt $S \cap U = g^{-1}(0)$. Da f transversal zu A ist, ist 0 ein regulärer Wert von g. Nach Satz 2.3.8 ist daher $S \cap U = g^{-1}(0)$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit von U. □

Korollar 4.3.4. *Ist $f \in \operatorname{Sub}^r(M, N)$ und ist $A \subseteq N$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit, dann ist $f^{-1}(A) \subseteq M$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$. Gilt weiters $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$ und $\dim(A) = a$ dann hat $f^{-1}(A)$ Dimension $m - n + a$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 4.3.3 und der Tatsache, dass f als Submersion transversal zu A ist, siehe Bemerkung 4.3.2. □

Korollar 4.3.5. *Sind A und B zwei transversale C^r-Teilmannigfaltigkeiten von M, $1 \leq r \leq \infty$. Dann ist auch $A \cap B \subseteq M$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit. Ist weiters $\dim(M) = m$, $\dim(A) = a$ und $\dim(B) = b$ dann hat $A \cap B$ Dimension $a + b - m$.*

Beweis. Es bezeichne $\iota_B^M : B \to M$ die Inklusion. Dann ist ι_B^M eine Einbettung und transversal zu A. Nach Satz 4.3.3 ist $A \cap B = (\iota_B^M)^{-1}(A) \subseteq B$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit, d.h. die Inklusion $\iota_{A\cap B}^B : A \cap B \to B$ ist eine Einbettung. Als Komposition von Einbettungen ist $\iota_{A\cap B}^M = \iota_B^M \circ \iota_{A\cap B}^B : A \cap B \to M$ auch eine Einbettung. Nach Satz 2.3.13 ist also $A \cap B \subseteq M$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit. □

Bemerkung 4.3.6. Das Kriterium in Korollar 4.3.5 ist nur hinreichend, nicht notwendig. Ist etwa $A \subseteq M$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit mit $\dim A < \dim M$, dann sind A und $B := A$ sicher nicht transversal, jedoch ist ihr Durchschnitt $A \cap B = A$ wieder eine Teilmannigfaltigkeit.

4.4. Der Transversalitätssatz. Eine Version des Transversalitẗssatzes besagt, dass für eine fixe glatte Teilmannigfaltigkeit $A \subseteq N$ fast alle glatten $f : M \to N$ transversal zu A sind, siehe Satz 4.4.8 unten. Wir werden in diesem Abschnitt das "fast alle" präzisieren und eine stärkere Version des Transversalitätssates beweisen, siehe Satz 4.4.7. Ein wesentliches Hilfsmittel wird der Satz von Sard sein, aber auch die Baire Eigenschaft von $C^\infty(M, N)$ werden wir verwenden, siehe Satz 3.4.12.

Wir sagen zwei Jets $[x, f, U] \in J^1(M, N)$ und $[z, g, W] \in J^1(P, N)$ sind transversal wenn entwender $f(x) \neq g(z)$ oder, falls $y := f(x) = g(z)$, dann gilt bezüglich einem (und dann jedem) Trippel von Karten φ, $\psi : W \to \mathbb{R}^n$, ρ von M, N, P um x, y, z
$$\operatorname{img}\big(D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}\big) + \operatorname{img}\big(D(\psi \circ g \circ \rho^{-1})_{\rho(z)}\big) = \mathbb{R}^n.$$
Zwei Abbildungen $f \in C^1(M, N)$ und $g \in C^1(P, N)$ sind also genau dann transversal wenn $(j^1 f)(x)$ und $(j^1 g)(z)$ transversal sind für alle $x \in M$ und alle $z \in P$, vgl. Definition 4.3.1.

Lemma 4.4.1. *Es sei M eine C^1-Mannigfaltigkeit, $A \subseteq N$ eine C^1-Teilmannigfaltigkeit und $K \subseteq A$ sodass $K \subseteq N$ abgeschlossen ist. Dann ist*
$$\mathcal{T} := \big\{\gamma \in J^1(M, N) \,\big|\, \forall y \in K : \gamma \text{ transversal zu } (j^1 \iota_A)(y)\big\}$$

offen in $J^1(M,N)$, wobei $\iota_A : A \to N$ die kanonische Einbettung bezeichnet.

Beweis. Es sei $\gamma = [x, f, W] \in \mathcal{T}$. Gilt $f(x) \notin K$ dann hat wegen der Abgeschlossenheit von K eine ganze Umgebung von $\gamma \in J^1(M,N)$ dieselbe Eigenschaft und ist daher in $\mathcal{T}$ enthalten. Sei also $f(x) \in K$. Wähle eine Teilmannigfaltigkeitskarte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(A \cap V) = \psi(V) \cap \mathbb{R}^k$ und $f(x) \in V$. Wähle weiters eine Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ mit $x \in U$. Da $\gamma \in \mathcal{T}$ gilt

$$\operatorname{img}\big(D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}\big) + \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n.$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass der obere $(n-k) \times m$-Block der $n \times m$-Matrix $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ vollen Rang hat. Die Menge dieser Matrizen ist offen da sie durch das Nichtverschwinden gewisser stetiger Funktionen (Minoren) beschrieben werden kann. Ist also $\gamma' = [x', f', W']$ hinreichend nahe bei γ dann gilt wieder

$$\operatorname{img}\big(D(\psi \circ f' \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x')}\big) + \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n,$$

also ist γ' transversal zu $(j^1\iota_A)(f'(x))$ und damit ist $\gamma' \in \mathcal{T}$. □

Proposition 4.4.2. *Es sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \le r \le \infty$, $L \subseteq M$ abgeschlossen, $A \subseteq N$ eine C^r-Teilmannigfaltigkeit und $K \subseteq A$ sodass $K \subseteq N$ abgeschlossen ist. Dann ist*

$$\Big\{ f \in C^r(M,N) \;\Big|\; \forall x \in L \forall y \in K : (j^1 f)(x) \text{ ist transversal zu } (j^1\iota_A)(y) \Big\} \tag{55}$$

offen in $C^r(M,N)$. Insbesondere ist die Menge der $f \in C^r(M,N)$ die transversal zu einer abgeschlossenen Teilmannigfaltigkeit sind offen in $C^r(M,N)$.

Beweis. Da die Inklusion $C^r(M,N) \to C^1(M,N)$ stetig ist dürfen wir o.B.d.A. $r = 1$ annehmen. Nach Lemma 4.4.1 ist

$$\mathcal{T} := \big\{ \gamma \in J^1(M,N) \;\big|\; \forall y \in K : \gamma \text{ ist transversal zu } (j^1\iota_A)(y) \big\}$$

offen in $J^1(M,N)$. Also ist, siehe Proposition 3.1.1

$$\big\{ g \in C^0(M, J^1(M,N)) \;\big|\; g(L) \subseteq \mathcal{T} \big\}$$

offen in $C^0(M, J^1(M,N))$. Daher ist auch

$$\big\{ f \in C^1(M,N) \;\big|\; (j^1 f)(L) \subseteq \mathcal{T} \big\}$$

offen in $C^1(M,N)$. Da diese Menge mit (55) übereinstimmt folgt der erste Teil der Proposition. Ist $A \subseteq N$ eine abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit folgt die zweite Aussage der Proposition aus der ersten mit $K = A$ und $L = M$. □

Bemerkung 4.4.3. Ist A nicht abgeschlossen, dann ist die Menge der zu A transversalen Abbildungen nicht notwendigerweise offen. Betrachte etwa die einpunktige Mannigfaltigkeit $M = \{*\}$, $N := \mathbb{R}^2$, $A := \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$ und die Einbettung $f : M \to N$, $f(*) = (0, 0)$. Da $f(M) \cap A = \emptyset$ ist f transversal zu der Teilmannigfaltigkeit A. Aber für $\varepsilon > 0$ ist die Einbettung $f_\varepsilon : M \to N$, $f_\varepsilon(*) := (\varepsilon, 0)$, nicht transversal zu A. Also existiert in jeder Umgebung von f eine Abbildung die nicht transversal zu A ist. Folglich ist die Menge der zu A transversalen Abbildungen nicht offen.

Definition 4.4.4 (Residuale Teilmengen). Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt *residual* falls sie den Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Teilmengen enthält.

Bemerkung 4.4.5. Offenbar sind abzählbare Durchschnitte residualer Mengen wieder residual. Ist $A \subseteq B$ und ist A residual dann auch B. Hat ein topologischer Raum die Baire Eigenschaft (siehe den Absatz vor Satz 3.1.9) dann ist jede residuale Menge dicht. Aus Satz 3.4.12 erhalten wir, dass residuale Teilmengen von $C^r(M,N)$ dicht sind, $0 \leq r \leq \infty$.

Proposition 4.4.6. *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist $J^r(M,N)$ in natürlicher Weise eine glatte Mannigfaltigkeit, $0 \leq r < \infty$.*

Beweis. Es seien $\mathcal{A}_M$ und $\mathcal{A}_N$ glatte Atlanten von M und N. Wir haben in Proposition 3.2.1 eine Atlas $\{\theta^r_{\psi,\varphi}\}_{(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}_M\times\mathcal{A}_N}$ für $J^r(M,N)$ konstruiert. Offensichtlich sind seine Kartenwechselabbildungen (siehe Beweis von Proposition 3.2.1) glatt, da $\mathcal{A}_M$ und $\mathcal{A}_N$ glatte Atlanten sind. □

Satz 4.4.7 (Transversalität für Jets). *Es seinen M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $0 \leq r < \infty$, und $A \subseteq J^r(M,N)$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Dann ist die Menge der $f \in C^\infty(M,N)$ für die $j^r f : M \to J^r(M,N)$ transversal zu A ist, residual (und daher insbesondere dicht) in $C^\infty(M,N)$.*

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes schreiten seien noch einige Folgerungen und Anwendungen erwähnt.

Satz 4.4.8 (Transversalität). *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $A \subseteq N$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Dann ist die Menge der $f \in C^\infty(M,N)$ die transversal zu A sind, residual (und daher insbesondere dicht) in $C^\infty(M,N)$.*

Beweis. Betrachte die glatte Teilmannigfaltigkeit $\tilde{A} := M \times A \subseteq M \times N = J^0(M,N)$. Offensichtlich ist $f \in C^\infty(M,N)$ transversal zu A genau dann wenn $j^0 f : M \to J^0(M,N)$ transversal zu $\tilde{A}$ ist. Also folgt die Behauptung aus Satz 4.4.7. □

Bemerkung 4.4.9. Obwohl wir oft nur an der Dichtheit einer Menge von Abbildungen interessiert sind, hat die Formulierung mit Hilfe residualer Teilmengen einen Vorteil den wir auch im Beweis von Satz 4.5.3 verwenden werden. Sind etwa A_i endliche viele glatte Teilmannigfaltigkeiten von N dann ist die Menge der $f \in C^\infty(M,N)$ die transversal zu allen A_i sind als Durchschnitt von residualen Teilmengen wieder residual, insbesondere dicht. Wüßten wir bloß, dass die Menge der $f \in C^\infty(M,N)$ die zu einem einzelnen A_i transversal sind dicht in $C^\infty(M,N)$ ist, könnten wir nichts über die $f \in C^\infty(M,N)$ die zu allen A_i transversal sind schließen, da ja schon der Durchschnitt zweier dichter Teilmengen leer sein kann.

Beispiel 4.4.10 (Transversale Teilmannigfaltigkeiten). Es seien A und B zwei glatte Teilmannigfaltigkeiten von M. Es bezeichne $\iota_A \in \mathrm{Emb}^\infty(A,M)$ die kanonische Inklusion. Nach Satz 3.5.7 ist $\mathrm{Emb}^\infty(A,M)$ offen in $C^\infty(A,M)$. Nach Satz 4.4.8 existiert daher in jeder Umgebung von ι_A eine glatte Einbettung $f \in \mathrm{Emb}^\infty(A,M)$ die transversal zu B ist. Nach Satz 2.3.13 ist $A' := f(A) \subseteq M$ eine Teilmannigfaltigkeit und transversal zu B. Grob zusammenfassend: "Beliebig nahe (bzgl. der C^∞-Topologie) an A existiert eine Teilmannigfaltigkeit $A' \subseteq M$ die transversal zu B ist."

Beispiel 4.4.11 (Morse Funktionen). Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ hinreichend differenzierbar. Ein Punkt $x \in M$ heißt *kritischer Punkt* von f falls $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} = 0$ in einer (und dann jeder) Karte $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ von M mit $x \in U$. Ein kritischer Punkt x von f heißt *nicht-degeneriert* falls die

Hessesche $D^2(f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ bezüglich einer (und dann jeder Karte) $\varphi: U\to\mathbb{R}^m$ von M mit $x\in U$, eine nicht-degenerierte (symmetrische) Bilinearform ist. Eine Funktion f heißt *Morse Funktion* falls jeder kritische Punkt nicht-degeneriert ist. Sei $A_0\subseteq J^1(M,N)$ die Menge der 1-Jets $[x,f,W]$ sodass in einer (und dann jeder) Karte φ von M gilt $D(f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(x)}=0$. Es ist leicht zu zeigen, dass $A_0\subseteq J^1(M,\mathbb{R})$ eine abgeschlossene glatte Teilmannigfaltigkeit ist, vgl. das allgemeinere Resultat in Proposition 4.5.2 unten. Offensichtlich ist f eine Morse Funktion genau dann wenn $j^1f: M\to J^1(M,\mathbb{R})$ transversal zu A_0 ist. Nach Satz 4.4.7 ist die Menge der glatten Morse Funktionen dicht in $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Nach Proposition 4.4.2 ist sie auch offen. Insbesondere existiert auf jeder glatten Mannigfaltigkeit eine glatte Morse Funktion. Da die Menge der kritischen Punkte von f mit $(j^1f)^{-1}(A_0)$ übereinstimmt, können wir aus Satz 4.3.3 schließen, dass die Menge der kritischen Punkte einer Morse Funktion eine 0-dimensionale Teilmannigfaltigkeit (also eine Menge isolierter Punkte) von M bilden. Morse Funktionen stellen ein wesentliches Werkzeug bei der Untersuchung der Topologie von Mannigfaltigkeiten dar, siehe etwa [**M63**].

Nun aber zum Beweis von Satz 4.4.7. Aus dem Satz von Sard erhalten wir folgendes erste Resultat zur Existenz transversaler Abbildungen.

Proposition 4.4.12. *Es seien M und P separable glatte Mannigfaltigkeiten, N eine glatte Mannigfaltigkeit und $A\subseteq N$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Weiters sei $F: P\times M\to N$ glatt und transversal zu A. Dann ist die Menge der $z\in P$ für die*

$$F_z: M\to N,\quad F_z(x):=F(z,x)$$

nicht transversal zu A ist eine Nullmenge.

Beweis. Nach Satz 4.3.3 ist $Q:=F^{-1}(A)$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit von $P\times M$. Als Teilmannigfaltigkeit einer separablen Mannigfaltigkeit ist Q wieder separabel. Betrachte die Einschränkung der Projektion $\pi: Q\to P$, $\pi(z,x):=z$. Unter Zuhilfenahme von Karten ist es leicht zu sehen, dass für $(z,x)\in Q$ die Abbildung $F_z: M\to N$ bei x transversal zu A ist genau dann wenn $\pi: Q\to P$ bei $(z,x)\in Q$ submersiv ist. Für fixes $z\in P$ erhalten wir also, dass $F_z: M\to N$ transversal zu A ist genau dann wenn z ein regulärer Wert von $\pi: Q\to P$ ist. Damit stimmt die Menge der $z\in P$ für die F_z transversal zu A ist mit der Menge der regulären Werte von π überein. Äquivalent, die Menge der $z\in P$ für die F_z nicht transversal zu A ist stimmt mit der Menge der kritischen Werte von π überein. Nach Satz 4.2.3 ist die Menge der kritischen Werte von π eine Nullmenge, und der Satz ist bewiesen. □

Proposition 4.4.13. *Es sei $0\leq r<\infty$ und $A\subseteq J^r(B_3,\mathbb{R}^n)$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Ist $f: B_3\to\mathbb{R}^n$ glatt, dann existiert in jeder C^∞-Umgebung von f eine glatte Abbildung g sodass gilt $f(x)=g(x)$ für alle $x\notin B_2$, und sodass $j^r(g|_{B_1}): B_1\to J^r(B_1,\mathbb{R}^n)$ transversal zu $A\cap J^r(B_1,\mathbb{R}^n)$ ist. Dabei bezeichnet $B_R\subseteq\mathbb{R}^m$ den offenen Ball mit Radius R.*

Beweis. Wähle eine glatte Funktion $\mu: B_3\to[0,1]$, sodass $\mu(x)=0$ für $x\notin B_2$, und $\mu(x)=1$ für $x\in B_1$. Setzte

$$P:=\mathbb{R}^n\times\prod_{1\leq k\leq r}L^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$$

und betrachte die Abbildung $F : P \times B_3 \to \mathbb{R}^n$

$$F_{y,\lambda_1,\dots,\lambda_r}(x) := f(x) + \mu(x)\Big(y + \sum_{1\le k\le r} \lambda_k(x,\dots,x)\Big).$$

Dann ist

$$G : P \times B_1 \to J^r(B_1, \mathbb{R}^n), \quad G_p(x) := (j^r(F_p|_{B_1}))(x)$$

submersiv, also transversal zu $A \cap J^r(B_1, \mathbb{R}^n)$. Nach Proposition 4.4.12 ist die Menge der $p \in P$ für die G_p transversal zu A ist dicht in P. Wähle nun $p \in P$ hinreichend nahe bei 0 sodass G_p transversal zu A ist und sodass $g := F_p$ in der vorgegebenen Umgebung von f liegt, vgl. Proposition 3.4.10. Dann ist $j^r(g|_{B_1}) = G_p$ transversal zu $A \cap J^r(B_1, \mathbb{R}^n)$. Klarerweise gilt auch $g(x) = f(x)$ für alle $x \notin B_2$. □

Lemma 4.4.14. *Ist X ein Baire Raum und $U \subseteq X$ offen, dann hat auch U die Baire Eigenschaft.*

Beweis. Seien $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ abzählbar viele offene und dichte Teilmengen von U. Es ist zu zeigen, dass $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ dicht in U ist. Betrachte $B_k := A_k \cup (X \setminus \bar{U})$. Dann ist B_k offen und dicht in X. Da X die Baire Eigenschaft hat ist $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k) \cup (X \setminus \bar{U})$ dicht in X. Also muss auch $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ dicht in U sein. □

Beweis von Satz 4.4.7. O.B.d.A. seien M, N und daher auch $J^r(M,N)$ zusammenhängend. Dann sind M, N und $J^r(M,N)$ separabel. Als Teilmannigfaltigkeit einer separablen Mannigfaltigkeit ist auch A separabel. Es sei $K \subseteq A$ so, dass $K \subseteq J^r(M,N)$ abgeschlossen ist. Da A separabel ist kann es als abzählbare Vereinigung von solchen K geschrieben werden. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\mathcal{T} := \Big\{ f \in C^\infty(M,N) \;\Big|\; \forall x \in M \forall y \in K : (j^1 j^r f)(x) \text{ ist transversal zu } (j^1\iota_A)(y) \Big\}$$

dicht in $C^\infty(M,N)$ ist. Denn nach Proposition 4.4.2 und weil $j^r : C^\infty(M,N) \to C^\infty(M, J^r(M,N))$ stetig ist, ist $\mathcal{T}$ auch offen in $C^\infty(M,N)$. Also wäre die Menge der f für die $j^r f$ transversal zu A ist der Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Teilmengen und daher residual.

Um die Dichtheit von $\mathcal{T}$ zu zeigen sei $g \in C^\infty(M,N)$. Da M separabel ist finden wir einen lokal endlichen höchstenes abzählbaren Atlas surjektiver Karten $\{\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^m\}$ von M mit $\bigcup_k \varphi_k^{-1}(\bar{B}_{1/2}) = M$, und eine Familie von Karten $\psi_k : V_k \to \mathbb{R}^n$ von N sodass $f(U_k) \subseteq V_k$ für alle k. Betrachte

$$\mathcal{U} := \Big\{ f \in C^\infty(M,N) \;\Big|\; \forall k : f(\varphi_k^{-1}(\bar{B}_3)) \subseteq V_k \Big\}.$$

Dies ist eine offene Teilmenge von $C^\infty(M,N)$ und $g \in \mathcal{U}$, siehe Proposition 3.1.1. Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{T} \cap \mathcal{U}$ dicht in $\mathcal{U}$ ist. Betrachte

$$\mathcal{T}_k := \Big\{ f \in \mathcal{U} \;\Big|\; \forall x \in \varphi_k^{-1}(\bar{B}_{1/2}) \forall y \in K : (j^1 j^r f)(x) \text{ ist transversal zu } (j^1\iota_A)(y) \Big\}.$$

Nach Proposition 4.4.2 und weil $j^r : C^\infty(M,N) \to C^\infty(M, J^r(M,N))$ stetig ist, ist $\mathcal{T}_k$ offen in $\mathcal{U}$. Nach Proposition 4.4.13 ist $\mathcal{T}_k$ dicht in $\mathcal{U}$. Ausserdem gilt offensichtlich

$$\bigcap_k \mathcal{T}_k = \mathcal{T} \cap \mathcal{U}.$$

Nach Satz 3.4.12 und Lemma 4.4.14 hat $\mathcal{U}$ die Baire Eigenschaft. Also ist $\mathcal{T} \cap \mathcal{U}$ als abzählbarer Durchschnitt offener und dichter Teilmengen dicht in $\mathcal{U}$. □

4.5. Der Einbettungssatz von Whitney. In diesem Abschnitt werden wir den Immersionssatz von Whitney, siehe Satz 4.5.3, und den Einbettungssatz von Whitney, siehe Satz 4.5.6 herleiten. Ein Korollar davon, siehe Korollar 4.5.10, besagt, dass jede zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2m+1}$ eingebettet werden kann. Im Wesentlichen stimmt also der Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit wie wir ihn in Abschnitt 2.1 eingeführt haben mit dem Begriff der differenzierbaren Teilmannigfaltigkeiten des Euklidischen Raums überein. Der einzige Unterschied liegt in der Anzahl der Zusammenhangskomponenten und einer Schranke an die Dimension, vgl. Korollar 4.5.11 unten.

Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$ bezeichne $B^k_{n,m} \subseteq L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ die Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit Rang k.

Proposition 4.5.1. $B^k_{n,m} \subseteq L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ *ist eine glatte Teilmannigfaltigkeit der Dimension* $(m + n - k)k$.

Beweis. Wir identifizieren $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit dem Vektorraum der reellen $n \times m$-Matrizen $M_{n,m}$. Es bezeichne GL_m die Gruppe der invertierbaren $m \times m$-Matrizen. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ wirkt auf $M_{n,m}$ von links durch

$$\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m \times M_{n,m} \to M_{n,m}, \quad \rho_{g,h}(\varphi) := (g, h) \cdot \varphi := g\varphi h^{-1},$$

wobei $g \in \mathrm{GL}_n$, $h \in \mathrm{GL}_m$, $\varphi \in M_{n,m}$. Für jedes Paar $(g, h) \in \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ ist $\rho_{g,h} \in \mathrm{Diff}^\infty(M_{n,m})$ und es gilt auch $\rho_{g,h}(B^k_{n,m}) = B^k_{n,m}$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass diese Wirkung transitiv auf $B^k_{n,m}$ ist, d.h. für jedes $\varphi \in B^k_{n,m}$ existiert $(g, h) \in \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ mit $\rho_{g,h}(\varphi_0) = \varphi$, wobei $\varphi_0 := \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{n,m}$ und $I_k \in M_{k,k}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Es genügt daher zu zeigen, dass $B^k_{n,m}$ lokal um $\varphi_0 \in M_{n,m}$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit ist.

Betrachte

$$U := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, A \in \mathrm{GL}_k, B \in M_{k,m-k}, C \in M_{n-k,k}, D \in M_{n-k,m-k} \right\} \subseteq M_{n,m}.$$

Dies ist eine offen Umgebung von $\varphi_0 \in M_{n,m}$. Betrachte nun die Untergruppen

$$H_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ B & I_{n-k} \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, A \in \mathrm{GL}_k, B \in M_{n-k,k} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n$$
$$H_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} I_k & C \\ 0 & I_{m-k} \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, C \in M_{k,m-k} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_m$$

Beachte, dass H_1 eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{nk}$ und H_2 eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{(m-k)k}$ ist. Betrachte die glatte Abbildung

$$\Phi : H_1 \times H_2 \times M_{n-k,m-k} \to U, \quad \Phi(g, h, D) := g \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) h^{-1}. \tag{56}$$

Durch explizite Angabe der Umkehrabbildung ist es leicht zu sehen, dass (56) ein Diffeomorphismus ist. Da $H_1 \times H_2 \times M_{n-k,m-k}$ eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{nm}$ ist, ist also $\Phi^{-1} : U \to H_1 \times H_2 \times M_{n-k,m-k}$ eine Karte von $M_{n,m}$. Da $\Phi(g, h, D)$ Rang k hat genau dann wenn $D = 0$ gilt, bildet Φ^{-1} die Menge $U \cap B^k_{n,m}$ auf $H_1 \times H_2 \times \{0\}$ ab. Also ist Φ^{-1} eine Teilmannigfaltigkeitskarte von $B^k_{n,m}$. □

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $A_k \subseteq J^1(M, N)$ die Menge der 1-Jets $[x, f, W] \in J^1(M, N)$ für die das Differential $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}$ in einem (und dann jedem) Paar von Karten (φ, ψ) Rang k hat.

Proposition 4.5.2. *$A_k \subseteq J^1(M,N)$ ist eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Gilt $\dim(M) = m$ und $\dim(N) = n$ dann ist*

$$\dim(A_k) = m + n + (m + n - k)k.$$

Beweis. Es sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte von M und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von N. Betrachte die Karte

$$\theta^1_{\psi,\varphi} : J^1(U,V) \to \varphi(U) \times \psi(V) \times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$
$$\theta^1_{\psi,\varphi}([x,f,W]) = \big(\varphi(x), \psi(f(x)), D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_x\big)$$

von $J^1(M,N)$. Offensichtlich gilt

$$\theta^1_{\psi,\varphi}(J^1(U,V) \cap A_k) = \varphi(U) \times \psi(V) \times B^k_{n,m}.$$

Nach Proposition 4.5.1 ist $\varphi(U) \times \psi(V) \times B^k_{n,m} \subseteq \varphi(U) \times \psi(V) \times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit der Dimension $m + n + (m + n - k)k$. Also ist $A_k \subseteq J^1(M,N)$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit der Dimension $m+n+(m+n-k)k$. □

Satz 4.5.3 (Whitney). *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$, der Dimension m bzw. n. Gilt $2m \leq n$ dann ist $\mathrm{Imm}^r(M,N)$ offen und dicht in $C^r(M,N)$.*

Beweis. Die Offenheit von $\mathrm{Imm}^r(M,N)$ haben wir bereits in Proposition 3.5.3 bewiesen, es ist also nur die Dichtheit zu zeigen. Nach Satz 3.7.2 dürfen wir annehmen, dass M und N glatte Mannigfaltigkeiten sind. Da $C^\infty(M,N) \subseteq C^r(M,N)$ dicht ist, siehe Satz 3.6.6, genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Imm}^\infty(M,N) \subseteq C^\infty(M,N)$ dicht ist.

Eine Abbildung $f \in C^\infty(M,N)$ ist immersiv genau dann wenn das Bild von $j^1 f : M \to J^1(M,N)$ keines der A_k schneidet, $0 \leq k < m$. Nach Proposition 4.5.2 und wegen $m \leq n + 2$ gilt

$$\dim A_k \leq \dim A_{m-1} = mn + 2m - 1 \quad \text{für alle } 0 \leq k < m.$$

Weiters ist $\dim J^1(M,N) = m + n + mn$. Aus $2m \leq n$ schließen wir

$$m + \dim A_k < \dim J^1(M,N) \quad \text{für alle } 0 \leq k < m.$$

Ist also $0 \leq k < m$ und ist $g : M \to J^1(M,N)$ transversal zu A_k dann gilt $g(M) \cap A_k = \emptyset$, siehe Bemerkung 4.3.2. Daher ist jedes $f \in C^\infty(M,N)$ für das $j^1 f : M \to J^1(M,N)$ transversal zu $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ ist automatisch eine Immersion. Nach Satz 4.4.7 und Bemerkung 4.3.2 ist die Menge der $f \in C^\infty(M,N)$ für die $j^1 f : M \to J^1(M,N)$ transversal zu $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ ist, eine residuale Teilmenge und daher dicht in $C^\infty(M,N)$. Folglich ist auch $\mathrm{Imm}^\infty(M,N) \subseteq C^\infty(M,N)$ dicht. □

Bemerkung 4.5.4. Dieser Beweis stammt aus [**H94**, Chapter 3.2]. Ein etwas konstruktiverer Beweis findet sich in [**BJ73**, Kapitel 7].

Korollar 4.5.5. *Jede C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$, der Dimension m erlaubt eine C^r-Immersion nach $\mathbb{R}^{2m}$.*

Satz 4.5.6 (Whitney). *Es seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten, $1 \leq r \leq \infty$, der Dimension m bzw. n. Gilt $2m < n$ dann ist $\mathrm{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N)$ offen und dicht in $\mathrm{Prop}^r(M,N)$.*

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Imm}^r_{\mathrm{inj}}(M,N)$ die Menge der injektiven C^r-Immersionen von M nach N, $1 \leq r \leq \infty$. Wir starten den Beweis mit der folgenden

Proposition 4.5.7. *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, M separabel,* $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$ *und* $2m < n$. *Dann ist* $\operatorname{Imm}^\infty_{\mathrm{inj}}(M,N)$ *dicht in* $C^\infty(M,N)$.

Beweis. Nach Satz 4.5.3 ist $\operatorname{Imm}^\infty(M,N)$ dicht in $C^\infty(M,N)$. Es genügt also zu zeigen, dass $\operatorname{Imm}^\infty_{\mathrm{inj}}(M,N)$ dicht in $\operatorname{Imm}^\infty(M,N)$ ist. Sei also $f \in \operatorname{Imm}^\infty(M,N)$ und $\mathcal{O}$ eine Umgebung von $f \in C^\infty(M,N)$. Nach Proposition 3.5.3 ist $\operatorname{Imm}^\infty(M,N)$ offen in $C^\infty(M,N)$, wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass $\mathcal{O} \subseteq \operatorname{Imm}^\infty(M,N)$. Wähle eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq M \times J^\infty(M,N)$ sodass

$$\big\{f \in C^\infty(M,N) \bigm| \operatorname{graph}(j^\infty f) \subseteq \mathcal{U}\big\} \subseteq \mathcal{O}, \tag{57}$$

siehe die Definitionen in Kapitel 3. Es ist ein injektives $g \in \mathcal{O}$ zu konstruieren.

Nach Proposition 2.3.11 besitzt jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U sodass $f|_U$ eine Einbettung ist. Da M separabel ist finden wir also einen höchstens abzählbare lokal endlichen Atlas von M von surjektiven Karten $\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}^m$ von M und Karten $\psi_k : V_k \to \mathbb{R}^n$ von N sodass $\bigcup_k \varphi_k^{-1}(\bar B_1) = M$ und sodass für alle k gilt $f(U_k) \subseteq V_k$ und $f|_{U_k} \in \operatorname{Emb}^\infty(U_k,N)$. Wir werden nun induktiv eine Folge $g_k \in C^\infty(M,N)$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert eine offene Umgebung W_k von $\bigcup_{i\leq k} \varphi_i^{-1}(\bar B_1)$ sodass $g_k|_{W_k}$ eine Einbettung ist.
(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ stimmt g_{k+1} mit g_k auf $M \setminus U_{k+1}$ überein.
(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M$ gilt $(x, (j^\infty g_k)(x)) \in \mathcal{U}$.

Ist dies gelungen, dann setzten wir $g := \lim_{k\to\infty} g_k$. Wegen (ii) und weil $\{U_k\}_k$ lokal endlich ist, ist dies ein lokal endlicher Limes, also $g \in C^\infty(M,N)$. Aus (iii) und (57) folgt $g \in \mathcal{O}$. Schließlich folgt aus (i) die Injektivität von g.

Nun aber zur Konstruktion der Folge g_k. Zuerst sei $g_0 := f$ welches natürlich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Seien also die g_i für $i \leq k$ schon konstruiert. Wegen (i) ist

$$A := g_k\Big(W_k \setminus \varphi_{k+1}^{-1}(\bar B_3)\Big)$$

eine glatte Teilmannigfaltigkeit von M. Nach Proposition 4.4.13 und wegen der Offenheit der Einbettungen (siehe Satz 3.5.7) finden wir $g_{k+1} \in C^\infty(M,N)$ das (iii) erfüllt und sodass $g_{k+1}|_{\varphi_{k+1}^{-1}(B_{3/2})}$ transversal zu A ist, und sodass g_{k+1} mit g_k auf $M \setminus \varphi_{k+1}^{-1}(\bar B_2)$ übereinstimmt. Klarerweise gilt dann auch (ii). Wegen Satz 3.5.7 dürfen wir weiters annehmen, dass eine offene Umgebung $\tilde W_{k+1}$ von $\bigcup_{i\leq k} \varphi^{-1}(\bar B_1)$ existiert auf der g_{k+1} eine Einbettung ist.

Wegen $2m < n$ folgt aus der Transversalität $g_{k+1}(\varphi_{k+1}^{-1}(B_{3/2})) \cap A = \emptyset$. Damit ist g_{k+1} auf $\tilde W_{k+1} \cup \varphi_{k+1}^{-1}(B_{3/2})$ injektiv. Klarerweise ist g_{k+1} auf dieser Menge auch immersiv. Wähle nun eine offene Umgebung W_{k+1} von $\bigcup_{i\leq k+1} \varphi_i^{-1}(\bar B_1)$ mit kompakten Abschluss der in $\tilde W_{k+1} \cup \varphi_{k+1}^{-1}(B_{3/2})$ enthalten ist. Dann ist $g_{k+1}|_{\bar W_{k+1}}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild und also $g_{k+1}|_{W_{k+1}}$ eine Einbettung. Also ist auch (i) erfüllt und der Beweis vollständig. □

Lemma 4.5.8. $\operatorname{Imm}^r_{\mathrm{inj}}(M,N) \cap \operatorname{Prop}^r(M,N) = \operatorname{Emb}^r_{\mathrm{cl}}(M,N)$, $1 \leq r \leq \infty$.

Beweis. Da jede injektive propere Abbildung ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist gilt

$$\operatorname{Imm}^r_{\mathrm{inj}}(M,N) \cap \operatorname{Prop}^r(M,N) = \operatorname{Emb}^r(M,N) \cap \operatorname{Prop}^r(M,N).$$

Die Aussage des Lemmas folgt daher aus Lemma 3.5.6. □

Beweis von Satz 4.5.6. Die Offenheit der abgeschlossenen Einbettungen wurde bereits in Satz 3.5.7 gezeigt, es ist also nur die Dichtheit zu zeigen. Nach Satz 3.7.2 dürfen wir o.B.d.A. M und N glatt voraussetzen. Nach Satz 3.6.7 ist $\mathrm{Prop}^\infty(M,N)$ dicht in $\mathrm{Prop}^r(M,N)$. Also genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Emb}^\infty_{\mathrm{cl}}(M,N)$ dicht in $\mathrm{Prop}^\infty(M,N)$ ist. Sei dazu $f \in \mathrm{Prop}^\infty(M,N)$. Es bezeichne N_0 eine Zusammenhangskomponente von N und $M_0 := f^{-1}(N_0)$. Da M_0 offen und abgeschlossen in M ist besteht es aus einigen Zusammenhangskomponenten von M, ist also selbst eine Mannigfaltigkeit. Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Emb}^\infty_{\mathrm{cl}}(M_0,N_0)$ dicht in $\mathrm{Prop}^\infty(M_0,N_0)$ ist. Da f proper und N_0 als separable Mannigfaltigkeit σ-kompakt ist, muss auch M_0 σ-kompakt und daher separabel sein. Wegen Proposition 4.5.7 und Proposition 3.5.2 ist $\mathrm{Imm}^\infty_{\mathrm{inj}}(M_0,N_0)\cap\mathrm{Prop}^\infty(M_0,N_0)$ dicht in $\mathrm{Prop}^\infty(M_0,N_0)$. Nach Lemma 4.5.8 ist also $\mathrm{Emb}^\infty_{\mathrm{cl}}(M_0,N_0)$ dicht in $\mathrm{Prop}^\infty(M_0,N_0)$, und der Beweis vollständig. □

Lemma 4.5.9. *Es sei M eine separable C^r-Mannigfaltigkeit, und $N \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine propere C^r-Funktion $M \to \mathbb{R}^N$.*

Beweis. Da M separabel ist hat sie höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten und besitzt daher eine kompakte Ausschöpfung $K_0 \subseteq \mathring{K}_1 \subseteq K_1 \subseteq \mathring{K}_2 \subseteq \cdots$, siehe Satz 1.1.2. Für fixes $i \in \mathbb{N}$ wenden wir Korollar 2.4.5 auf die offene Überdeckung $(M \setminus K_i) \cup \mathring{K}_{i+1} = M$ an, und erhalten $\lambda_i \in C^r(M,[0,1])$ mit $\lambda_i|_{K_i} = 0$ und $\lambda_i|_{M\setminus\mathring{K}_{i+1}} = 1$. Betrachte $f := \sum_{0\leq i} \lambda_i$. Dies ist eine lokal endliche Summe und daher $f \in C^r(M,\mathbb{R})$. Außerdem gilt $f^{-1}([-i,i]) \subseteq K_{i+1}$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Also ist f proper. Damit ist auch $g : M \to \mathbb{R}^N$, $g(x) := (f(x),0)$, eine propere C^r-Funktion. □

Aus Satz 4.5.6 und Lemma 4.5.9 erhalten wir

Korollar 4.5.10. *Jede separable C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$, der Dimension m läßt sich abgeschlossen in $\mathbb{R}^{2m+1}$ einbetten.*

Um den Zusammenhang zwischen ‘abstrakten’ Mannigfaltigkeiten und dem Begriff der Teilmannigfaltigkeit eines Euklidischen Raumes genauer herauszustreichen formulieren wird noch

Korollar 4.5.11. *Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit, $1 \leq r \leq \infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass M diffeomorph zu einer C^r-Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ ist.*
(ii) *M hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, und es existiert $m \in \mathbb{N}$ sodass jede Zusammenhangskomponente von M Dimension höchstens m hat.*

Literatur

[AR67] R. Abraham and J. Robbin *Transversal mappings and flows.* An appendix by A. Kelley, W.A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam 1967.

[B62] M. Brown, *Locally flat imbeddings of topological manifolds,* Ann. of Math. **75**(1962), 331–341.

[BJ73] T. Bröcker und K. Jänich, *Einührung in die Differentialtopologie.* Heidelberger Taschenbücher **143**. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.

[D76] J. Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis.* Band **3**. Logik und Grundlagen der Mathematik, Vieweg, Braunschweig, 1976.

[GS94] R.E. Gompf and A.I. Stipsicz, 4-*manifolds and Kirby calculus.* Graduate Studies in Mathematics **20**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[GP74] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[H02] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.

[H91] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis.* Ninth edition. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[H93] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Achte Auflage. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1993.

[H94] M.W. Hirsch, *Differential topology.* Corrected reprint of the 1976 original. Graduate Texts in Mathematics **33**. Springer-Verlag, New York, 1994.

[J94] K. Jänich, *Topologie.* Vierte Auflage. Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[M02] Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory.* Translated from the 1997 Japanese original by K. Hudson and M. Saito. Translations of Mathematical Monographs **208**. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[M63] J.W. Milnor, *Morse theory.* Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies **51**. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[M65] J.W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint.* Revised reprint of the 1965 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[O69] D. Ornstein, *A new proof of the paracompactness of metric spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **21**(1969), 341–342.

[R90] M.E. Rudin, *Two nonmetrizable manifolds,* Topology Appl. **35**(1990), 137–152.

[R53] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[S42] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps.* Bull. Amer. Math. Soc. **48**(1942), 883–890.

[S69] H. Schubert, *Topologie. Eine Einführung.* Zweite durchgesehene Auflage. Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner, Stuttgart 1969.

[SS78] L.A. Steen and J.A. Seebach, *Counterexamples in topology.* Second edition. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1978.

[SZ88] R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[W44] H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space.* Ann. of Math. **45**(1944), 220–246.