Allgemeine Topologie

Prof. Dr. Klaus Keimel

Sommersemester 2002

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume und topologische Räume

Wir beginnen mit einer Axiomatisierung des Abstandsbegriffes. Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und mit $\mathbb{R}_+$ die Menge der reellen Zahlen $\lambda \geq 0$.

1.1 Metrische Räume. Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Funktion

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+ \,,$$

die für alle $x, y, z \in X$ den folgenden Anforderungen genügt:

(D1) $\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(D2) $\quad d(x,y) = d(y,x)$ $\quad$ (Symmetrie)

(D3) $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\quad$ (Dreiecksungleichung)

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d), bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Ersetzen wir (D3) durch die stärkere Bedingung

(D4) $$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\},$$

so sprechen wir von einer *Ultrametrik* beziehungsweise von einem *ultrametrischen Raum*.

1.2 Kugeln in metrischen Räumen. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $a \in X$ sowie $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Dann nennt man $B_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}$ die *offene Kugel* um a mit dem Radius ε und $\overline{B_\varepsilon}(a) := \{x \in X \mid d(a,x) \leq \varepsilon\}$ die *abgeschlossene Kugel* um a mit Radius ε.

Wenn wir verschiedene Metriken gleichzeitig betrachten, dann wählen wir die Bezeichnung $B_\varepsilon^d(a)$, um zu sagen, daß wir die ε-Kugel bezüglich der Metrik d betrachten.

1.3 Beschränkte Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) wird *beschränkt* genannt, wenn es eine reelle Zahl M so gibt, daß $d(a,b) \leq M$ für alle $a, b \in A$. Bezeichnet man

$$\delta(A) := \sup\{d(a,b) \mid a, b \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

als *Durchmesser* von A, so kann man auch sagen, daß A beschränkt ist, wenn A einen endlichen Durchmesser hat.

Bemerkung. Die Vereinigung zweier beschränkter Mengen ist beschränkt (Beweis?).

1.4 Beispiele für Metriken.

1. *Diskrete Metrik*: Auf einer beliebigen Menge X können wir definieren

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

   Dies ist eine Metrik (sogar eine Ultrametrik), genannt die diskrete Metrik auf X.

2. Ist d eine Metrik auf X, so ist die Einschränkung von d auf eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eine Metrik auf Y.

3. *Normierte Vektorräume*: Sei V ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder über dem Körper der komplexen Zahlen. Unter einer *Norm* versteht man eine Abbildung

$$x \mapsto ||x|| : V \to \mathbb{R}_+$$

welche für alle $x, y \in V$ folgenden Bedingungen genügt:

(N1)	$\|\|x\|\| = 0 \iff x = 0$	
(N2)	$\|\|\lambda x\|\| = \|\lambda\| \cdot \|\|x\|\|$	für alle Skalare λ
(N3)	$\|\|x + y\|\| \leq \|\|x\|\| + \|\|y\|\|$	(Dreiecksungleichung)

Dabei steht $|\lambda|$ für den Absolutbetrag der reellen oder komplexen Zahl λ. Insbesondere ist der Absolutbetrag eine Norm auf dem eindimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$.

Eine Norm geht immer mit einer Metrik einher. Wenn wir nämlich definieren

$$d(x, y) := ||x - y|| \text{ for all } x, y \in V ,$$

dann ist d eine Metrik auf V, welche wir die zur Norm gehörige Metrik nennen. (In der Tat ist d eine Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}_+$. Es gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $||x - y|| = 0$, und letzteres ist nach N1 genau dann der Fall, wenn $x - y = 0$, d.h. $x = y$, und wir haben D1. Die Symmetrie von d ergibt sich aus $d(x, y) = ||x-y|| = ||(-1)(y-x)|| = |-1|\cdot||y-x|| = ||y-x|| = d(y, x)$ nach N2. Für die Dreiecksungleichung für d benutzen wir die Dreiecksungleichung für die Norm: $d(x, z) = ||x - z|| = ||(x - y) + (y - z)|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| = d(x, y) + d(y, z)$.)

4. Auf $\mathbb{R}^n$ kennt man verschiedene Normen, z.B. kann man für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren:
   - $||x||_2 := \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$ (euklidische Norm)
   - $||x||_\infty := \max\{|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ (Maximumsnorm)
   - $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (Summennorm)

   Diese führen zu den Abstandsbegriffen:
   - $d_2(x, y) := \big(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\big)^{\frac{1}{2}}$ (euklidische Metrik)
   - $d_\infty(x, y) := \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}$
   - $d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

   Es ist instruktiv, wenn man sich im $\mathbb{R}^2$ die Einheitskugeln, d.h. die Kugeln um 0 mit Radius 1, für die verschiedenen Metriken aufzeichnet.

5. Auf dem reellen Vektorraum $\mathcal{C}\big([0, 1]\big)$ aller stetigen Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ haben wir ebenfalls verschiedene Normen:
   - $||f||_2 = \big(\int_0^1 f(x)^2\, dx\big)^{\frac{1}{2}}$ (L_2-Norm)
   - $||f||_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ (Supremumsnorm)
   - $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ (L_1-Norm, Integralnorm)

Man mache sich klar, daß diese Normen zu sinnvollen Abstandsbegriffen zwischen zwei Funktionen führen (Differenz der Funktionswerte im quadratischen Mittel, maximale Differenz der Funktionswerte, mittlere Differenz der Funktionswerte):

- $d_2(f,g) = \left(\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$
- $d_\infty(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$
- $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$

6. *Bewertete Ringe und Körper*: Gegeben sei ein nullteilerfreier kommutativer Ring A mit 1, der auch ein Körper sein kann. Unter einer *Bewertung von A* versteht man eine Funktion $v\colon A \to \mathbb{R}_+$, welche für alle $x, y \in A$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

   (V1) $\quad v(x) = 0 \iff x = 0$

   (V2) $\quad v(xy) = v(x)v(y)$

   (V3) $\quad v(x+y) \leq v(x) + v(y) \qquad$ (Dreiecksungleichung)

   Ähnlich wie bei Normen zeige man, daß jede Bewertung zu einem Abstandsbegriff führt, wenn man definiert
   $$d(x,y) := v(x-y) \text{ für alle } x, y \in A\,.$$
   Auf den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ der rationalen, reellen und komplexen Zahlen ist der übliche Absolutbetrag $|x|$ eine Bewertung, wie man sofort sieht.

7. Auf dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen definieren wir andere Bewertungen mit dazugehörigen Metriken folgendermaßen:

   Wir wählen eine Primzahl p. Für eine rationale Zahl x definieren wir die *p-adische Bewertung*$|x|_p$ folgendermaßen: Wir stellen x in der Form $x = p^n \cdot \frac{r}{s}$ dar, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und wobei r und s ganze Zahlen sind, die nicht durch p teilbar sind. Dann setzen wir $|x|_p := p^{-n}$. Dann haben wir eine Bewertung. Die zugehörige Metrik $d(x,y) := |x-y|_p$ ist eine Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$ (Beweis: Übung).

8. Auf dem Körper $\mathbb{K}(x)$ aller rationalen Funktionen $f(x)$ mit Koeffizienten in einem Körper K definieren wir $v(f)$ folgendermaßen: Wir stellen $f(x)$ in der Form $f(x) = x^n \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$ dar, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, die keine Nullstelle im Punkt $x = 0$ haben. Definiert man dann $v(f) = 2^{-n}$ so hat man eine Bewertung; die zugehörige Metrik $d(f,g) := v(f-g)$ ist eine Ultrametrik (Beweis: Übung).

9. Sei (X,d) ein metrischer Raum und T eine beliebige Menge. Eine Funktion $f\colon T \to X$ wird *beschränkt* genannt, wenn ihr Bild in X beschränkt ist (siehe 1.3).

   Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(T,X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f\colon T \to X$ und erklären auf $\mathcal{B}(T,X)$ eine Metrik durch
   $$d(f,g) := \sup_{t \in T} d(f(t), g(t))$$
   Übung: Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Metrik ist! Wir werden sie die *Supremumsmetrik* nennen.

10. Es sei Σ ein „Alphabet“ (also eine beliebige Menge, deren Elemente wir als „Buchstaben“ bezeichnen wollen).

Wir bezeichnen mit Σ^* die Menge aller endlichen Folgen $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ (einschließlich der leeren Folge e) und mit Σ^ω die Menge aller unendlichen Folgen $w = a_1 a_2 a_3 \cdots$ mit $a_i \in \Sigma$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die *Länge* eines solchen Wortes ist n bzw $+\infty$.

Auf $\Sigma^\infty := \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ definieren wir eine Ultrametrik folgendermaßen: $d(v, w) := 2^{-\ell}$ wobei ℓ die Länge des längsten gemeinsamen Anfangsstücks von v und w ist, sofern $v \neq w$; falls $v = w$ setzen wir natürlich $d(v, w) = 0$.

(Übung: Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Ultrametrik ist.)

1.5 Konvergenz in metrischen Räumen. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man sagt, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in X *konvergiert gegen* $a \in X$, falls die Folge $d(a, a_n)$ von reellen Zahlen gegen 0 konvergiert, d.h. wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, daß $d(a, a_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Man kann diese Bedingung auch so formulieren: Die Folge (a_n) konvergiert gegen a, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, daß $a_n \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann auch $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ or simply $a_n \to a$.

1.6 Stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen. Es seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. Eine Funktion $f\colon X \to X'$ wird *stetig in dem Punkt* $a \in X$ genannt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, daß $d(a, x) < \delta \implies d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$, d.h. $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$.

Die Funktion f wird *stetig* genannt, falls f in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Der Begriff der Stetigkeit läßt sich auf den Begriff der Konvergenz zurückführen:

1.7 Satz. Eine Funktion $f\colon X \to X'$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die gegen ein $a \in X$ konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Beweis. Es sei zunächst f stetig in a und a_n sei eine Folge mit $a_n \to a$. Wir wollen zeigen daß $f(a_n) \to f(a)$. Sei also $\varepsilon > 0$. Es gibt nach Voraussetzung für alle x ein $\delta > 0$ so, daß $d(a, x) < \delta \implies d(f(a), f(x)) < \varepsilon$. Da $a_n \to a$, gibt es ein N so, daß $d(a, a_n) < \delta$ für alle $n \geq N$. Es folgt $d(f(a), f(a_n)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, was zu beweisen war.

Die Rückrichtung beweisen wir durch Kontraposition. Sei f nicht stetig in a. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ so, daß für jedes δ ein $x_\delta \in X$ so existiert, daß $d(a, x_\delta) < \delta$ und $d'(f(a), f(x_\delta)) > \varepsilon$. Wählt man $\delta = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, so hat man auf diese Weise eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, die gegen a konvergiert, deren Bildfolge $f(a_n)$ aber nicht gegen $f(a)$ konvergiert. □

1.8 Äquivalenz von Metriken. Hat man auf einer Menge zwei Metriken, so kann es vorkommen, daß eine Folge bezüglich der einen Metrik konvergiert, nicht aber bezüglich der anderen. Betrachten wir Beispiel 1.4(5) und dort die Metrik d_∞. Eine Funktionenfolge konvergiert bezüglich dieser Metrik genau dann, wenn sie gleichmäßig konvergiert. Auf dem Einheitsintervall ist die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ nicht gleichmäßig konvergent, also nicht konvergent bezüglich d_∞. Dagegen konvergiert f_n bezüglich der Metrik d_1 gegen die konstante Funktion mit dem Wert 0, denn

$$d_1(0, f_n) = \int_0^1 x^n \, dx = \tfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Dagegen ist im $\mathbb{R}^n$ Konvergenz bezüglich der Metriken in 1.4(4) immer dasselbe. Mit anderen Worten: Sehr verschiedene Metriken auf einer Menge können zu demselben Konvergenzbegriff führen. Da sich nach 1.7 der Begriff der Stetigkeit von Funktionen auf den Konvergenzbegriff zurückführen läßt, können verschiedene Metriken zu denselben stetigen Funktionen führen.

Es seien nun d und d' zwei Metriken auf X. Wir fragen, wann für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X gilt: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d gegen a konvergiert, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich d' gegen a. Nach 1.7 ist dies gleichwertig damit, daß die identische Abbildung $\mathrm{id}\colon (X,d) \to (X,d')$ stetig ist. Nach 1.6 bedeutet dies: Jede ε-Kugel um a bezüglich d' enthält eine gewisse δ-Kugel um a bezüglich d.

Diese Aussage mit ihrer Umkehrung ergibt:

Satz. Zwei Metriken d und d' auf X führen zu demselben Konvergenzbegriff,

> d.h. eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X konvergiert gegen a bezüglich d genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d' gegen a konvergiert,

genau dann, wenn die Metriken d und d' äquivalent sind.

Dabei werden zwei Metriken d und d' auf X *äquivalent* genannt, falls für jedes $a \in X$ jede offene ε-Kugel um a bezüglich der Metrik d eine gewisse offene δ-Kugel um a bezüglich der Metrik d' enthält, und umgekehrt.

Da man nach 1.7 die Stetigkeit einer Funktion zwischen metrischen Räumen mit Hilfe der Konvergenz von Folgen ausdrücken kann, können wir folgern:

1.9 Folgerung. Ersetzt man auf X bzw. Y gegebene Metriken durch äquivalente, so hat man dieselben stetigen Funktionen $f\colon X \to Y$ wie vorher.

1.10 Übung. Wir definieren auf $\mathbb{R}$ eine Funktion $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$. Zeigen Sie, daß d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, die zu der üblichen Metrik äquivalent ist.

Man bemerke, daß $\mathbb{R}$ bezüglich der Metrik d beschränkt ist.

1.11 Übung. Es sei (X,d) ein beliebiger metrischer Raum. Definiert man auf X eine Funktion $d'\colon X\times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

so ist d' eine zu d äquivalente Metrik. Wie oben ist X beschränkt bezüglich der Metrik d'.

Es müßte in einem metrischen Raum etwas geben, was die Beschreibung von Konvergenz und Stetigkeit erlaubt, ohne von der speziellen Metrik abhängig zu sein. Das Bemühen, dieses „Etwas“ zu finden, führt zu dem Begriff der Topologie.

1.12 Offene Mengen in metrischen Räumen. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird *offen* genannt, falls man zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ so finden kann, so daß die ε-Kugel $B_\varepsilon(a)$ in U enthalten ist.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X.

Beispiel. Die offenen Kugeln $B_\varepsilon(a)$ sind offene Mengen gemäß dieser Definition.

Sei nämlich $a' \in B_\varepsilon(a)$. Dann gilt $d(a, a') < \varepsilon$. Sei $\varepsilon' := \varepsilon - d(a, a')$. Wir behaupten $B_{\varepsilon'}(a') \subseteq B_\varepsilon(a)$. In der Tat: Ist $d(a', x) < \varepsilon'$, so folgt $d(a, x) \leq d(a, a') + d(a', x) < \varepsilon$.

Bemerkung. Wenn zwei Metriken d und d' auf X äquivalent sind, so definieren sie dasselbe System offener Mengen. (Dies folgt direkt aus der Definition). Die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls. Aber warum?

Bemerkung. Es seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f\colon X \to X'$ eine Funktion. Dann gilt

1. f ist stetig in $a \iff$ zu jeder offenen Menge U' in X' mit $f(a) \in U'$, gibt es eine offene Menge U in X mit $a \in U$ und $f(U) \subseteq U'$.
2. f ist stetig $\iff$ Das Urbild $f^{-1}(U')$ einer jeden offenen Menge U' in X' ist offen in X.

Bemerkung. Für ein Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn es für jede offene Menge U in X, die a enthält, ein N so gibt, daß $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Das System $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen nennen wir auch die *Topologie* des metrischen Raumes X. Wie wir oben gesehen haben, ändert sich die Topologie beim Übergang zu einer äquivalenten Metrik nicht, und Konvergenz und Stetigkeit lassen sich durch die Topologie alleine kennzeichnen. Der Begriff der „Topologie“ ist fundamentaler als der des metrischen Raums. Im folgenden soll nun dieser Begriff axiomatisiert werden.

Man stellt fest, daß in einem metrischen Raum der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist, ebenso eine Vereinigung beliebig vieler offener Mengen. Genauer (Beweis: Übung):

(O1) $$\varnothing \in \mathcal{O}, \quad X \in \mathcal{O}$$

(O2) $$U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$$

(O3) $$U_i \in \mathcal{O} \text{ für } i \in I \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$$

Es stellt sich heraus, daß diese einfachen Axiome ausreichen:

1.13 Topologien und topologische Räume. Ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen einer Menge X nennen wir eine *Topologie* auf X, wenn es die Axiome (O1), (O2), (O3) erfüllt. Als *topologischen Raum* bezeichnen wir jedes Paar $(X, \mathcal{O})$, bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X. Die Mengen $U \in \mathcal{O}$ nennen wir auch die *offenen Mengen* des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Häufig schreiben wir einfach X statt $(X, \mathcal{O})$ für einen topologischen Raum, insbesondere dann, wenn wir nur eine Topolgie auf X betrachten.

Wie wir gesehen haben, hat jeder metrische Raum eine Topologie, die wir künftig die *metrische Topologie* nennen wollen. Jedoch ist der Begriff des topologischen Raumes viel weiter als der des metrischen Raumes. Es gibt viele Topologien, die nicht von Metriken herrühren können.

1.14 Beispiel.

1. Die metrische Topologie zur diskreten Metrik auf X heißt die *diskrete Topologie* auf X. Es gilt $\mathcal{O} = \mathfrak{P}(X) :=$ Potenzmenge von X, d.h. jede Teilmenge von X ist offen.
2. Die metrische Topologie zur euklidischen (oder jeder anderen äquivalenten) Metrik heißt die *natürliche Topologie* des $\mathbb{R}^n$.
3. Ist $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$, so nennt man $\mathcal{O}$ die *indiskrete Topologie*.
4. Die *obere Topologie* auf $\mathbb{R}$ besteht aus allen nach unten unbeschränkten offenen Intervallen: $\mathcal{O} = \{]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\}$. Dual dazu besteht die *untere Topologie* auf $\mathbb{R}$ aus allen nach oben unbeschränkten offenen Intervallen.
5. Für jede Menge X ist $\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$ eine Topologie auf X, sie wird *koendliche Topologie* auf X genannt.
6. Es sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subseteq P$ heißt *Anfangsstück*, wenn für alle $x, y \in P$ aus $x \leq y$ und $y \in A$ schon $x \in A$ folgt. Die Mengen aller Anfangsstücke von P ist eine Topologie; sie wird die *Alexandroff-Topologie* genannt.

1.15 Bemerkung. Die Topologien 1.14(3) bis 1.14(5) sind im allgemeinen nicht metrisch. Man finde Gründe, warum es sich nicht um metrische Topologien handelt.

In Übereinstimmung mit dem von metrischen Räumen Bekannten definieren wir:

1.16 Stetige Funktionen, Homöomorphismen. Es seien $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ topologische Räume. Eine Funktion $f\colon X \to X'$ wird *stetig* genannt, falls das Urbild $f^{-1}(U')$ einer jeden offenen Menge $U' \subseteq X'$ offen ist in X.

Ist $f\colon X \to X'$ eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, daß sowohl f als auch f^{-1} stetig sind, dann nennt man f einen *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume X und X' werden *homöomorph* genannt, falls es einen Homöomorphismus $f\colon X \to X'$ gibt.

1.17 Übung. Seien X, Y und Z topologische Räume. Dann gilt:

1. $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig, ja sogar ein Homöomorphismus.
2. Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig (bzw. Homöomorphismen), dann ist auch $g \circ f\colon X \to Z$ stetig (bzw. ein Homöomorphismus).
3. Ist $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus, dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$.

Vom Standpunkt der Topologie betrachtet man homöomorphe Räume X, X' als gleich: Ist $f\colon X \to X'$ ein Homöomorphismus, so ist $U \subseteq X$ genau dann offen, wenn $f(U) \subseteq X'$ offen in X' ist, d.h. unter der Bijektion f entsprechen sich die offenen Mengen von X und X' in eineindeutiger Weise. Auch ist die Eigenschaft von Räumen, homöomorph zu sein, eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller topologischen Räume. Dies folgt aus den drei Eigenschaften für Homöomorphismen in 1.17.

Als „topologische Eigenschaft" wird man jede Eigenschaft bezeichnen, die sich allein mithilfe der offen Mengen erklären läßt. Homöomorphe Räume werden dann dieselben topologischen Eigenschaften haben. Da obiges keine Definition des Begriffes „topologische Eigenschaft" im strengen Sinn ist, wählen wir die folgende Definition:

1.18 Definition. Eine *topologische Eigenschaft* ist eine Eigenschaft von Räumen, die sich auf homöomorphe Bilder überträgt.

1.19 Beispiel. 1. *Beschränktheit einer Menge in einem metrischen Raum ist keine topologische Eigenschaft.* Denn $\mathbb{R}$ ist in der üblichen Metrik unbeschränkt, in der dazu äquivalenten Metrik aus 1.10 beschränkt.

2. *Die Fixpunkteigenschaft ist eine topologische Eigenschaft.* Dabei sagen wir, ein topologischer Raum X habe die *Fixpunkteigenschaft*, falls jede stetige Abbildung $f\colon X \to X$ mindestens einen *Fixpunkt* besitzt, d.h. falls es ein $x_0 \in X$ mit $x_0 = f(x_0)$ gibt.

   Beweis. X habe die Fixpunkteigenschaft, $h\colon X \to X'$ sei ein Homöomorphismus. Sei $f'\colon X' \to X'$ stetig. Dann ist $f := h^{-1} \circ f' \circ h\colon X \to X$ stetig. Also gibt es ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$, und folglich $f'(h(x_0)) = h(x_0)$, d.h. $x_0' := h(x_0)$ ist ein Fixpunkt von f'.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] & X' \arrow[d, "h^{-1}"] \\ X \arrow[u, "h"] \arrow[r, dashed, "h^{-1}\circ f'\circ h"'] & X \end{tikzcd}$$

□

2. Abgeschlossene Mengen und Umgebungen

Wie man bei der kofiniten Topologie gesehen hat, sind manchmal die Komplemente offener Mengen leichter zu handhaben als die offenen Mengen. Sie sollen deshalb auch einen vernünftigen Namen bekommen:

2.1 Abgeschlossene Mengen. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement offen ist, d. h. falls $X \setminus A \in \mathcal{O}$.

Aus den Axiomen für offene Mengen (O1)–(O3) erhalten wir durch Übergang zum Komplement:

(A1) $\qquad \varnothing$ und X sind abgeschlossen

(A2) $\qquad A, B$ abgeschlossen $\implies A \cup B$ abgeschlossen

(A3) $$A_i \text{ für } i \in I \text{ abgeschlossen } \implies \bigcap_{i\in I} A_i \text{ abgeschlossen}$$

Beispiel.

1. In der diskreten Topologie auf einer Menge ist jede Menge offen, damit aber auch ihr Komplement, d.h. jede Menge ist auch abgeschlossen. Für die indiskrete Topologie sind dagegen nur die leere und die ganze Menge abgeschlossen.
2. Für die kofinite Topologie auf einer Menge sind genau die endlichen Teilmengen abgeschlossen.
3. In einem metrischen Raum sind die abgeschlossenen Kugeln auch abgeschlossene Mengen (warum?). Insbesondere sind in $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie die abeschlossenen Intervalle auch abgeschlossene Mengen.
4. Für die obere Topologie auf $\mathbb{R}$ (siehe 4 sind genau die Intervalle $[a, +\infty[$ abgeschlossen, wobei $a = \pm\infty$ zugelassen ist.

Nimmt man umgekehrt (A1)–(A3) als Axiome für abgeschlossene Mengen, so erfüllen die Komplemente abgeschlossener Mengen die Bedingungen (O1)–(O3), d.h. man könnte topologische Räume auch über das System der abgeschlossenen Mengen axiomatisieren.

Als Indiz für die Gleichwertigkeit der Zugänge über offene und abgeschlossenen Mengen halten wir fest:

2.2 Übung. Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

2.3 Abgeschlossene Hülle. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Für jede Teilmenge $B \subseteq X$ bezeichne

$$\overline{B} := \bigcap\{A \subseteq X \mid A \text{ abgeschlossen und } B \subseteq A\}$$

den Durchschnitt über alle abgeschlossenen Mengen A, die B enthalten. Dieser Schnitt ist nach (A3) abgeschlossen und folglich die kleinste abgeschlossene Menge, die B enthält. Sie wird *Abschluß* oder *abgeschlossene Hülle* von B genannt.

Bemerkung. *Ein Element a liegt genau dann in der abgeschlossenen Hülle $\overline{B}$, wenn jede das Element a enthaltende offenen Menge U die Menge B trifft.* Denn genau dann liegt a nicht in $\overline{B}$, wenn es eine B umfassende abgeschlossene Menge A gibt, a nicht enthält, d.h. wenn die a enthaltende offene Menge $U = X \setminus A$ die Menge B nicht trifft.

2.4 Beispiel.

1. In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist der Abschluß eines offenen Intervalls $]a, b[$ gerade das abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Entsprechendes gilt für die offenen und abgeschlossenen Kugeln für eine beliebige der früher betrachteten Metriken auf $\mathbb{R}^n$.
2. In $\mathbb{R}$ mit der oberen Topologie (siehe 4) ist $\overline{]a, b[} = [a, \infty[$.

3. Sei $f\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Dann ist Graph $f = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in\ ]0,\infty[\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, dessen Abschluß in der natürlichen Topologie die Menge
$$\big\{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \mid x \in\ ]0,\infty[\ \big\} \cup \big\{(0,y) \mid y \in [-1,1]\big\}$$
ist.
4. Der Abschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist $\mathbb{R}$, es gibt also keine nichtleere offene Teilmenge, die $\mathbb{Q}$ nicht schneidet. Obwohl $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und damit im Vergleich zu $\mathbb{R}$ mengentheoretisch keine Rolle spielt, kommt man an $\mathbb{Q}$ topologisch nicht vorbei.

2.5 Bemerkung. In metrischen Räumen lassen sich abgeschlossene Mengen sowie die abgschlossenen Hülle einer Teilmenge mit Hilfe des Konvergenzbegriffs für Folgen charakterisieren: Sei (X,d) ein metrischer Raum und B eine Teilmenge von X. Dann gilt

1. $a \in \overline{B}$ genau dann, wenn es eine Folge von Punkten $b_n \in B$ gibt, die gegen a konvergiert.
2. $\overline{B}$ ist die Menge aller $a \in X$, die Grenzwerte von Folgen (b_n) in B sind.
3. Genau dann ist B abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elemente in B ebenfalls zu B gehört.

Beweis. 1) In einem beliebigen topologischen Raum gilt $a \in \overline{B}$ genau dann, wenn jede offene Menge U, die a enthält, die Menge B trifft. In einem metrischen Raum bedeutet dies, daß $B_{1/n}(a) \cap B \neq \emptyset$ for every n. Deshalb gibt es für jedes n ein Element $b_n \in B$, so daß $d(a,b_n) < \frac{1}{n}$ gilt, und wir haben eine Folge von Elementen $b_n \in B$ gefunden, die gegen a konvergiert. Wenn wir umgekehrt eine Folge von Punkten $b_n \in B$ haben, die gegen a konvergiert, dann liegen nach Definition in jeder offenen Menge U um a unendlich viele dieser Folgenglieder, woraus folgt, daß U die Menge B trifft. Die Behauptungen 2) und 3) folgen sofort aus 1).

Achtung. Der Begriff der Folgenkonvergenz ist für allgemeine topologische Räume zu speziell. So gibt es topologische Räume, in denen 2.5.1 und damit 2.5.2 und 2.5.3 nicht für jedes B richtig sind. Auch Satz 1.7 ist nicht in jedem topologischen Raum gültig. Später werden wir sehen, wie man in topologischen Räumen einen Konvergenzbegriff einführen kann, der erlaubt die Aussagen 1.7 und 2.5.1 und damit 2.5.2 und 2.5.3 von metrischen auf beliebige topologische Räume zu übertragen.

2.6 Dichte Teilmengen, separable Räume. Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *dicht* in X, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist, d. h. wenn $\overline{D} = X$.

Der Raum X wird *separabel* genannt, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält.

In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen dicht. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist $\mathbb{R}$ ein separabler Raum. Ebenso ist im $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie die Menge $\mathbb{Q}^n$ der Punkte mit rationalen Koordinaten dicht.

Dagegen ist eine überabzählbare Menge mit der diskreten Topologie nicht separabel, da ein solcher Raum keine echte Teilmenge besitzt, die dicht wäre.

2.7 Satz. Seien X und Y metrische Räume und $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Stimmen f und g auf einer dichten Teilmenge überein, so stimmen sie auf ganz X überein.

Beweis. Sei $D = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ und $x \in X$ beliebig. Nach Voraussetzung ist D dicht, also $x \in \overline{D}$. Nach Bemerkung 2.5 gibt es daher eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert und die ganz in D verläuft. Mit Satz 1.7 haben wir daher:

$$f(x) = f(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) \underset{x_i \in D}{=} \lim_{i\to\infty} g(x_i) = g(x)$$

□

Bemerkung. Wie wir bald sehen werden, bleibt Satz 2.7 auch unter viel schwächeren Bedingungen gültig: Sei X ein beliebiger topologischer Raum und Y habe (in einem noch zu präzisierenden Sinne) genügend viele offene Mengen. (Y metrisch reicht allemal.)

Von offenen Mengen gelangten wir durch Komplementbildung zu den abgeschlossenen Mengen, aus denen sich abgeschlossene Hüllen ergaben. Erneute Komplementbildung führt zu

2.8 Inneres. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Für $B \subseteq X$ bezeichne

$$B^\circ := \bigcup\{U \in \mathcal{O} \mid U \subseteq B\}$$

die Vereinigung aller offenen Mengen, die ganz in B enthalten sind. Diese Menge ist nach (O3) ebenfalls offen und damit die größte in B enthaltene offene Menge. Die Menge B° heißt der *offene Kern* oder das *Innere* von B; die Elemente von B° werden *innere Punkte* von B genannt.

Ein Punkt a is genau dann innerer Punkt von B, wenn es eine offene Menge gibt, die a enthält und ganz in B enthalten ist. Eine Menge ist demnach genau dann offen, wenn sie nur innere Punkte besitzt.

2.9 Rand einer Menge. Für jede Teilmenge B eines topologischen Raumes sei

$$\partial B := \overline{B} \setminus B^\circ.$$

Diese Menge heißt der *Rand* von B. Wegen $\overline{B} \setminus B^\circ = \overline{B} \cap (X \setminus B^\circ)$ ist der Rand als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Ein Punkt x ist genau dann ein *Randpunkt* von B, d.h. $x \in \partial B$, wenn jede offenen Menge, die x enthält, sowohl die Menge B als auch deren Komplement $X \setminus B$ trifft.

Genau dann ist B abgeschlossen, wenn B seinen Rand enthält: $B \supseteq \partial B$, und B ist genau dann offen, falls B keinen Randpunkt enthält: $\partial B \cap B = \varnothing$. (Beweis: Übung)

2.10 Umgebungen. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ wird *Umgebung* des Punktes x genannt, falls x im Inneren von V liegt: $x \in V^\circ$. Äquivalent dazu ist, daß es eine offene Menge U mit $x \in U \subseteq V$ gibt.

In einem metrischen Raum ist V eine Umgebung von x, wenn V mindestens eine offene ε-Kugel um x enthält.

Das System aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$. Dieses hat die folgenden Eigenschaften:

(U1) $$x \in U \text{ für alle } U \in \mathcal{U}(x), \text{ und } X \in \mathcal{U}(x)$$

(U2) $$U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$$

(U3) $$U \in \mathcal{U}(x),\ W \supseteq U \implies W \in \mathcal{U}(x)$$

(U4) $$\forall U \in \mathcal{U}(x).\ \exists W \in \mathcal{U}(x).\ W \subseteq U \text{ und } \forall y \in W.\ W \in \mathcal{U}(y)$$

Dabei sind (U1)–(U3) direkte Folgerungen aus der Definition. Eine Menge W ist genau dann offen, wenn $W = W^\circ$, was genau besagt, daß W Umgebung jedes Punktes aus W ist. Daher bedeutet (U4) gerade, daß jede Umgebung V von x eine offene Menge W mit $x \in W$ enthält, wie wir es gefordert hatten.

Es folgt, daß man die offenen Mengen (also die Topologie) aus den Umgebungen rekonstruieren kann: Eine Menge U ist genau dann offen, wenn sie Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist. Ferner gilt $a \in \overline{B}$ genau dann, wenn jede Umgebung von a die Menge B trifft, und $a \in \partial B$ genau dann, wenn jede Umgebung von a sowohl B als auch das Komplement von B trifft. Man kann daher den Begriff des topologischen Raums auch auf dem Umgebungsbegriff aufbauen, indem man jedem $x \in X$ ein System $\mathcal{U}(x)$ von Teilmengen zuordnet, derart daß die Axiome (U1)–(U4) erfüllt sind. Auch die Begriffe der Stetigkeit und der Folgenkonvergenz lassen sich mit Hilfe von Umgebungen definieren. Hausdorff, der als erster im Jahr 1914 den Begriff des topologischen Raumes einführte, baute auf dem Umgebungsbegriff auf. Allerdings fügte er zu den obigen Axiomen noch ein Trennungsaxiom hinzu, das wir als das Trennungsaxiom T_2 später kennenlernen werden.

2.11 Definition. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen wird *stetig im Punkt* $x \in X$ genannt, wenn es für jede Umgebung W von $f(x)$ eine Umgebung V von x mit $f(V) \subseteq W$ gibt. (Man vergleiche dies mit der Definiton der Stitigkeit von funktionen zwischen metrischen Räumen in 1.6). Eine gleichwertige Forderung ist, daß das Urbild $f^{-1}(W)$ einer jeden Umgebung W von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.

2.12 Übung. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

2.13 Definition. [Folgenkonvergenz] Wir sagen, eine Folge (a_n) von Punkten eines topologischen Raums konvergiere gegen einen Punkt a, wenn es für jeden Umgebung V von a ein N so gibt, daß $a_n \in V$ für alle $n \geq N$. Für metrische Räumen stimmt diese Definition mit der gewohnten überein. Wie schon gesagt, ist jedoch der Begriff der Folgenkonvergenz für topologische Räume im allgemeinen noch zu schwach.

3. Erzeugung von Topologien

3.1 Basis einer Topologie. Es sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Ein System $\mathcal{B}$ offener Mengen wird *Basis* für die Topologie $\mathcal{O}$ genannt, falls sich jede offene Menge $U \in \mathcal{O}$ als Vereinigung einer Famile von Mengen $B_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$ darstellen läßt. Diese eigenschaft ist gleichwertig damit, daß sich für jedes Element x einer offenen Menge U ein $B \in \mathcal{B}$ mit$x \in B \in U$ finden läßt.

Beispiel. In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Kugeln $B_{1/n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in X$ eine Basis für die metrische Topologie. In $\mathbb{R}$ bilden die offenen Intervalle $]r, s[$ mit rationalen Endpunkten r, s eine Basis für die natürliche Topologie.

Bemerkung. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X, dann gelten:

(B1) $$X = \bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

(B2) $$B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ x \in B_1 \cap B_2 \implies \exists B_3 \in \mathcal{B}.\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Die Eigenschaft (B2) ist insbesondere dann erfüllt, wenn gilt:

(B3) $$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$$

(denn dann kann man $B_3 := B_1 \cap B_2$ wählen.)

Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen von X, das (B1) und (B2) erfüllt. Sei $\mathcal{O}$ das System aller Teilmengen U von X, die sich als Vereinigung von Mengen $B_i \in \mathcal{B}$ $(i \in I)$ darstellen lassen. Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie und $\mathcal{B}$ eine Basis dieser Topologie.

Beweis. Wegen (B1) erfüllt $\mathcal{O}$ das Axiom (O1). Aus der Definition von $\mathcal{O}$ folgt, daß auch (O3) gilt. Für (O2) seien $U, V \in \mathcal{O}$. Es gibt $B_i \in \mathcal{B}$ mit $i \in I$ und $B_j \in \mathcal{B}$ mit $j \in J$, so daß

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{j \in J} B_j\,.$$

Es folgt $U \cap V = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j)$. Wegen (B2) ist jeder der Durchschnitte $B_i \cap B_j$ als Vereinigung gewisser $B_k \in \mathcal{B}$ mit $k \in K$ darstellbar, also auch $U \cap V$. □

Wir nennen $\mathcal{O}$ *die von der Basis* $\mathcal{B}$ *erzeugte Topologie*.

3.2 Subbasis einer Topologie. Es sei $\mathcal{S}$ ein System offener Mengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Wir sagen, $\mathcal{S}$ sei eine *Subbasis* der Topologie $\mathcal{O}$, wenn das System $\mathcal{B}$ aller endlichen Durchschnitte

$$S_1 \cap \cdots \cap S_n \quad \text{mit } S_i \in \mathcal{S}$$

eine Basis von $\mathcal{O}$ ist.

Beispiel. Auf $\mathbb{R}$ bilden die offenen unbeschränkten Intervalle

$$]-\infty, s[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid x < s\} \qquad]r, +\infty[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid r < x\}$$

mit $r, s \in \mathbb{Q}$ eine Subbasis der natürlichen Topologie, denn die Schnitte

$$]-\infty, s[\ \cap\ ]r, +\infty[\ =\ ]r, s[$$

bilden eine Basis.

Sei umgekehrt $\mathcal{S}$ ein BELIEBIGES System von Teilmengen von X. Wir bilden das System $\mathcal{B}$ aller endlichen Schnitte

$$B := S_1 \cap \cdots \cap S_n \quad \text{mit } S_i \in \mathcal{S}.$$

Dann erfüllt $\mathcal{B}$ die Eigenschaft (B3). Wir betrachten auch X als zu $\mathcal{B}$ gehörig (als Schnitt über ein leeres System), so daß auch (B1) erfüllt ist. Also ist $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$, deren offene Mengen wie in 3.1 diejenigen Teilmengen von X sind, die sich als Vereinigung von $B_i \in \mathcal{B}$ darstellen lassen. Wir nennen $\mathcal{O}$ *die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie*.

Will man eine Topologie auf einer Menge einführen, ist es häufig sehr viel einfacher, eine Subbasis oder eine Basis für die Topologie anzugeben als das System aller offenen Teilmengen. Dies sei am Beispiel der Ordnungstopologie illustriert.

Beispiel: Ordnungstopologie. Es sei M eine linear geordnete Menge und $\mathcal{S}$ die Menge aller „offenen Intervalle" der Form

$$]-\infty, b[:= \{x \in M \mid x < b\} \qquad]a, +\infty[:= \{x \in M \mid a < x\}$$

mit $a, b \in M$. Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie nennen wir die *Ordnungstopologie* von M. Die offenen Intervalle der Form $]a, b[= \{x \in M \mid a < x < b\}$ bilden eine Basis dieser Topolgoie. Auf $\mathbb{R}$ stimmt die Ordnungstopologie mit der natürlichen Topologie überein.

Viele topologische Begriffe lassen sich mithilfe einer Subbasis oder einer Basis der Topologie formulieren. Das ist von Vorteil, wenn man eine einfache Subbasis für die Topologie kennt.

3.3 Hilfssatz. Es seien X und Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ sei eine Funktion. Um zu zeigen, daß f stetig ist, genügt es zu zeigen, daß das Urbild $f^{-1}(U)$ für alle U aus einer Subbasis (oder einer Basis) $\mathcal{S}$ der Topologie von Y offen ist.

Beweis. Ist $B = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ mit $S_i \in \mathcal{S}$, so ist $f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_n)$ offen nach Voraussetzung. Ist U eine beliebige offene Menge, so ist $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, wobei jedes B_i Schnitt von endlich vielen $S \in \mathcal{S}$ ist. Es folgt $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(UB_i)$, und diese Menge ist nach dem Vorhergehenden offen. □

Beispiel. Um zu zeigen, daß $f\colon X \to \mathbb{R}$ bezüglich der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ stetig ist, braucht man nur zu zeigen, daß $f^{-1}(]r, +\infty[)$ und $f^{-1}(]-\infty, s[)$ für alle ratioanlen Zahlen r, s offen sind, d.h. daß die Mengen $\{x \in X \mid f(x) > r\}$ und $\{x \in X \mid f(x) < s\}$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ offen in X sind.

Durch Übergang zum Komplement kann man Basen und Subbasen für die abgeschlossenen Mengen so definieren:

3.4 Basen und Subbasen für die abgeschlossenen Mengen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{C}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X wird *Basis für die abgeschlossenen Mengen* genannt, falls sich jede abgeschlossene Menge als Schnitt einer Familie von Mengen $C_i \in \mathcal{C}$ $(i \in I)$ darstellen läßt. Eine Familie $\mathcal{T}$ von abgeschlossene Mengen wird *Subbasis für die abgeschlossenen Mengen* genannt, falls die endlichen Vereinigungen

$$C = T_1 \cup \cdots \cup T_n \quad \text{mit } T_i \in \mathcal{T}$$

eine Basis für die abgeschlossenen Mengen bilden.

Beispiel. Auf $\mathbb{R}$ (allgemeiner auf jeder linear geordneten Menge M) bilden die abgeschlossenen Intervalle $[a, +\infty[$ und $]-\infty, b]$ mit a, b beliebig, eine Subbasis für die abgeschlossenen Mengen (der Ordnungstopologie), ebenso die abgeschlossenen Intervalle der Form $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ mit a, b beliebig. Daher spricht man oft von der *Intervalltopologie* statt von der Ordnungstopologie.

Geht man umgekehrt von einer beliebigen Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X aus, so gibt es genau eine Topologie auf X derart, daß $\mathcal{T}$ eine Subbasis für die abgeschlossenen Mengen wird. Die abgeschlossenen Mengen dieser Topologie kann man so erzeugen: Man bildet zunächst alle möglichen endlichen Vereinigungen $C = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ mit $T_i \in \mathcal{T}$ und anschließend beliebige Durchschnitte dieser Mengen.

3.5 Übung. Seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Um zu zeigen, daß f stetig ist, genügt es zu zeigen, daß $f^{-1}(T)$ abgeschlossen in X ist für alle T einer Subbasis für die abgeschlossenen Mengen in Y.

3.6 Umgebungsbasen. Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B}(x)$ von Umgebungen des Punktes $x \in X$ wird *Umgebungsbasis von* x genannt, falls es zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung $V \in \mathcal{B}(x)$ mit $V \subseteq U$ gibt.

Salopp ausgedrückt bedeutet dies, daß $\mathcal{B}(x)$ beliebig kleine Umgebungen von x enthält.

Beispiel. 1. In einem beliebigen topologischen Raum bilden die offenen Umgebungen eine Umgebungsbasis von x. (Denn nach Definition enthält jede Umgebung eine offene Umgebung.)

2. In einem metrischen Raum bilden die Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis von x, ebenso die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B_{\frac{1}{n}}(a)}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

3.7 Übung. Seien X und Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $x\, inX$. Um zu zeigen, daß f stetig in x ist, genügt es zu zeigen, daß das Urbild $f^{-1}(U)$ für jedes U einer Umgebungbasis von $f(x)$ eine Umgebung von x ist

3.8 Abzählbarkeitsaxiome. Sei X ein topologischer Raum. Wir sagen:

- X erfüllt das *1. Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt in X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
- X erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*, falls X eine abzählbare Basis (für die offenen Mengen) besitzt.

Übung. Wenn X das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann erfüllt X auch das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Außerdem ist dann X separabel, d.h. X besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge.

Beispiel.

1. Jeder metrische Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, siehe Beispiel 3.6(2).
2. $\mathbb{R}$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, denn die offenen Intervalle $]r, s[$ mit rationalen Endpunkten $r, s \in \mathbb{Q}$ bilden eine Basis für die offenen Mengen.
3. Eine überabzählbare Menge X mit der diskreten Topologie erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, aber nicht das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

4. Konstruktion von topologischen Räumen

In diesem Paragraphen wollen wir einige Verfahren angeben, wie man aus bekannten topologischen Räumen neue topologische Räume konstruieren kann.

4.1 Teilräume. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann wird durch $\mathcal{O}|_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf Y definiert. Sie heißt *Spurtopologie* oder die von $(X, \mathcal{O})$ *induzierte Topologie*, und $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ wird *Teilraum* von $(X, \mathcal{O})$ genannt.

Beispiel. Häufig betrachtet man Teilräume von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie, wie zum Beispiel Intervalle in $\mathbb{R}$, die n-dimensionalen abgeschlossenen *Einheitskugeln*

$$\mathbb{B}^n := \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\},$$

die $(n-1)$-dimensionalen *Sphären*

$$\mathbb{S}^{n-1} = \overline{B_1(0)} \setminus B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

Wir statten diese Räume stets mit der von der natürlichen Topologie des $\mathbb{R}^n$ induzierten Spurtopologie aus.

4.2 Quotientenräume. Wir gehen von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$, einer Menge Y, die zunächst noch keine Topologie tragen soll, und einer surjektiven Abbildung $\pi \colon X \to Y$ aus.

Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{O}'$ aller Teilmengen V von Y, deren Urbild $\pi^{-1}(V)$ in X offen ist:

$$\mathcal{O}' = \{V \subseteq Y \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$$

Man weist leicht nach, daß $\mathcal{O}'$ eine Topologie auf Y ist. Wir nennen diese Topologie die durch die Surjektion π induzierte *Quotiententopologie* auf Y. Jeder topologische Raum, dessen Topologie mit der durch eine Surjektion von X induzierten Quotiententopologie übereinstimmt, wird *Quotientenraum* von X genannt.

Häufig tritt die Quotiententopologie in der folgenden Gestalt auf: Es sei ϱ eine Äquivalenzrelation auf dem topologischen Raum X. Wir betrachten die Quotientenmenge X/ϱ aller ϱ-Äquivalenzklassen und die kanonische Abbildung $\pi \colon X \to X/\varrho$, die jedem Punkt $x \in X$ seine ϱ-Äquivalenzklasse $[x]_\varrho$ zuordnet. Auf X/ϱ betrachten wir nun die Quotiententopologie bzgl. π. Die Menge X/ϱ mit dieser Quotiententopologie nennt man auch den Quotientenraum von X modulo ϱ.

Beispiel: Projektive Räume. In der Geometrie betrachtet man neben affinen auch projektiven Räume. Geometrisch kann man die *reelle projektive Ebene* $\mathbb{RP}^2$ so definieren:

- Die *Punkte* der reellen projektiven Ebene sind die eindimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$, also die Geraden im Raum durch den Ursprung.
- Die *Geraden* der reellen projektiven Ebene sind die zweidimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$, also die Ebenen im Raum durch den Ursprung.

Nun möchte man die Punktmenge der projektiven Ebene auch als topologischen Raum betrachten. Zu diesem Zweck betrachten wir die Sphäre $\mathbb{S}^2$ im $\mathbb{R}^3$. Jede Gerade durch 0 scheidet die $\mathbb{S}^2$ in zwei gegenüberliegenden (= antipodalen) Punkten. Identifizieren wir je zwei antipodale Punkte, d.h. betrachten wir die Quotientenmenge $\mathbb{S}^2/\alpha$, wobei α die Äquivalenzrelation ist, deren Klassen aus jeweils zwei antipodalen Punkten bestehen, so haben wir eine natürliche Bijektion zwischen der reellen projektiven Ebene und dieser Quotientenmenge. Topologisch identifizieren wir nun die reelle projektive Ebene mit dem Quotientenraum $\mathbb{S}^2/\alpha$. Es ist nicht leicht, sich die projektive Ebene als topologischen Raum vorzustellen, da sie nicht in den $\mathbb{R}^3$ überschneidungsfrei einbettbar ist. Erst im $\mathbb{R}^4$ kann man die projektive Ebene als Teilraum wiederfinden.

Den *n-dimensionalen reellen projektiven Raum* $\mathbb{RP}^n$ erhält man geometrisch aus dem $\mathbb{R}^{n+1}$ durch Betrachtung der eindimensionalen Untervektorräume als Punkte. Topologisch wird $\mathbb{RP}^n$ als Quotientenraum $\mathbb{S}^n/\alpha$ definiert, wobei wieder α die Äquivalenzrelation ist, die jeweils antipodale Punkte der $\mathbb{S}^n$ identifiziert.

4.3 Produkttopologie, Produkträume. Gegeben seien zwei topologische Räume $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$. Wir betrachten die Produktmenge

$$X_1 \times X_2 := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

sowie die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ gegeben durch $(x_1, x_2) \mapsto x_i$ für $i = 1, 2$. Auf der Produktmenge wollen wir eine Topologie einführen. Diese soll so gewählt werden, daß die beiden kanonischen Projektionen stetig werden. Damit dies der Fall ist, müssen die Urbilder offener Mengen

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2 \quad (U_1 \in \mathcal{O}_1) \qquad\qquad \mathrm{pr}_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2 \quad (U_2 \in \mathcal{O}_2)$$

offen werden. Auf $X_1 \times X_2$ betrachten wir nun die Topologie, die von von den eben genannten Mengen als Subbasis erzeugt wird. Diese Topologie nennen wir die *Produkttopologie* $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Die Menge $X_1 \times X_2$ zusammen mit der Produkttopologie bezeichnen wir als den *Produktraum*.

Die Produkttopologie ist die schwächste Topologie auf $X_1 \times X_2$, die die beiden kanonischen Projektionen stetig macht. Die oben angegebene Subbasis ist keine Basis der Produkttopologie. Wir erhalten eine Basis der Produkttopologie, indem wir die Mengen der Form

$$U_1 \times U_2 \quad \text{mit } U_1 \in \mathcal{O}_1 \text{ und } U_2 \in \mathcal{O}_2$$

betrachten.

4.4 Lemma. In einem metrischen Raum (X, d) ist die Abstandsfunktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis. Sei $(a, b) \in X \times X$ und $\varepsilon > 0$. Seien nun $a' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ und $b' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, a') + d(a', b') + d(b, b') \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + d(a', b') + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= d(a', b') + \varepsilon \end{aligned}$$

Ebenso folgt $d(a', b') \leq d(a, b) + \varepsilon$, also $|d(a, b) - d(a', b')| < \varepsilon$. □

Folgerung. Gelten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, so folgt in einem metrischen Raum $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(a, b)$.

Was wir hier mit zwei Räumen gemacht haben, kann man analog für endlich viele Räume $X_1, X_2, \dots, X_n$ durchführen.

Bemerkung. Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ ist gerade die natürliche metrische Topologie des $\mathbb{R}^n$.

Übung. Die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$ sind offen, d.h. das Bild einer jeden offenen Menge des Produktraumsunter einer kanonischen Projektion ist auch offen. Sind die kanonischen Projektionen pr_i auch abgeschlossen, d.h. ist das Bild einer abgeschlossenen Teilmenge des Produktraums unter einer kanonischen Projektion wieder abgeschlossen?

Wir wollen nun die ganze Konstruktion für eine beliebige Familie $(X_i)_{i\in I}$ von topologischen Räumen durchführen. Zuerst wollen wir uns rein mengentheoretische den Begriff der Produktmenge ansehen.

4.5 Produktmengen. Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Unter der *Produktmenge* $\prod_{i\in I} X_i$ versteht man die Menge aller Auswahlfunktionen $x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $x(i) \in X_i$ für alle $i \in I$. In Anlehnung an endliche Produkte schreibt man auch $x = (x_i)_{i\in I}$ für diese Auswahlfunktionen. Also

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x = (x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i\}.$$

Das *Auswahlaxiom* der Mengenlehre besagt nichts anderes als die Existenz mindestens einer Auswahlfunktion, sofern nur alle $X_i, i \in I$, nicht leer sind. Deshalb ist die Produktmenge genau dann nicht leer, wenn $X_i \neq \varnothing$ für alle $i \in I$.

Für jedes $k \in I$ haben wir eine *kanonische Projektion*:

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_k\colon \prod_{i\in I} X_i &\to X_k \\ x = (x_i)_{i\in I} &\mapsto x_k \end{aligned}$$

Spezialfall. Sind alle $X_i = X$, so ist $\prod_{i\in I} X$ die Menge aller Funktionen $f\colon I \to X$. Man schreibt dann auch X^I für die Produktmenge. Z.B. ist $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4.6 Produkträume. Nun sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *Produkttopologie* auf $\prod_{i\in I} X_i$ sei die schwächste Topologie, die alle kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ stetig macht. Wenn wir $\prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie ausstatten, reden wir von dem *Produktraum*.

Eine *Subbasis der Produkttopologie* wird gebildet durch die Mengen $\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$, $i \in I$, U_i offen in X_i. Dabei genügt es, die U_i aus einer Subbasis der Topologie von X_i zu wählen. Eine *Basis der Produkttopologie* erhält man durch die endlichen Schnitte

$$\mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) = \Big\{x \in \prod_{i\in I} X_i \;\Big|\; x_{i_1} \in U_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in U_{i_n}\Big\}$$

mit $i_1, \ldots, i_n \in I$ und U_{i_j} offen in X_{i_j}. Auch hierbei genügt es, die U_{i_j} aus einer Basis der Topologie von X_{i_j} zu wählen.

Produkträume liefern haufenweise Beipiele von topologischen Räumen, die keines der Abzählbarkeitsaxiome erfüllen:

4.7 Übung. Wir betrachten das reelle Intervall $[o, 1]$ mit seiner natürlichen Topologie in eine beliebige Menge I. Zeigen Sie, daß der Produktraum $[0,1]^I$ genau dann das 1. Abzählbarkeitsaxiom erüllt, wenn I abzählbar ist. Insbesondere erfüllt $[0,1]^{\mathbb{R}}$ nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

4.8 Abbildungen in ein Produkt. Sei zunächst Y ein Menge und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Hat man für jedes $i \in I$ eine Funktion $f_i\colon Y \to X_i$ gegeben, dann erhält man durch $f(y) := (f_i(y))_{i\in I}$ für alle $y \in Y$ eine Funktion $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ mit der Eigenschaft, daß $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ für alle $i \in I$. Wir schreiben auch $f = (f_i)_{i\in I}$. Ist umgekehrt $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ vorgegeben, dann erhält man für jedes $i \in I$ eine Funktion $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f\colon Y \to X_i$ und es gilt $f = (f_i)_{i\in I}$. Sind Y und die X_i topologische Räume, dann gilt:

Satz. Eine Funktion $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann stetig, wenn ihre Komponenten $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f\colon Y \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.

Beweis. Ist f stetig, dann ist (da die pr_i stetig sind) auch $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f$ stetig. Seien umgekehrt die f_i alle stetig. Um die Stetigkeit von f zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für jede offene Menge $U \subseteq X_i$ die Menge $f^{-1}(\mathrm{pr}_i^{-1}(U))$ offen in Y ist, da die Mengen $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$, U offen in X_i, eine Subbasis der Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ bilden. Nun ist aber $f^{-1}(\mathrm{pr}_i^{-1}(U)) = (\mathrm{pr}_i^{-1} \circ f)^{-1}(U) = f_i^{-1}(U)$, und letztere Menge ist wegen der Stetigkeit der f_i offen. □

4.9 Übung. $(Y_i)_{i\in I}$ und $(X_i)_{i\in I}$ seien Familien topologischer Räume. Für jedes $i \in I$ sei $f_i\colon Y_i \to X_i$ eine Abbildung. Wir definieren $F := \prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} Y_i \to \prod_{i\in I} X_i$ durch $F((y_i)_{i\in I}) := (f_i(y_i))_{i\in I}$. Zeigen sie, daß $\prod_{i\in I} f_i$ genau dann stetig ist, wenn alle f_i stetig sind.

5. Topologischer Zusammenhang

5.1 Definition. Ein topologischer Raum X wird *zusammenhängend* genannt, wenn er nicht in zwei offene, nicht leere Mengen zerlegt werden kann, d.h. X ist genau dann zusammenhängend, wenn für offene Mengen O_1 und O_2 gilt: Aus $X = O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ folgt $O_1 = \varnothing$ oder $O_2 = \varnothing$.

Man sieht sofort ein, daß die folgenden Eigenschaften gleichwertig sind:

1. X ist zusammenhängend.
2. Sind A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von X mit $A_1 \cup A_2 = X$ und $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, so folgt $A_1 = \varnothing$ oder $A_2 = \varnothing$.
3. In X gibt es keine nicht leere, echte Teilmenge, die zugleich offen und abgeschlossen ist.

4. X kann nicht stetig und surjektiv auf den diskreten zweielementigen Raum abgebildet werden.

Definition. Eine Teilmenge C eines topologischen Raumes X wird *zusammenhängend* genannt, wenn sie in der Teilraumtopologie zusammenhängend ist, d.h. wenn für beliebige offene Teilmengen O_1 und O_2 in X gilt: Aus $O_1 \cup O_2 \supseteq C$ und $O_1 \cap O_2 \cap C = \varnothing$ folgt $O_1 \cap C = \varnothing$ oder $O_2 \cap C = \varnothing$.

5.2 Beispiel.

1. $\mathbb{Q}$ ist in der Intervalltopologie nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{Q}$ kann man in zwei nichtleere offene disjunkte Teilmengen zerlegen:
$$]-\infty, \sqrt{2}[\, \cup \,]\sqrt{2}, +\infty[\, \supseteq \mathbb{Q}.$$
2. $[-2,-1] \cup [1,2]$ ist in der Intervalltopologie nicht zusammenhängend.
3. In $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie sind die zusammenhängenden Teilmengen genau die Intervalle (siehe Satz 5.9).

5.3 Eigenschaften.

1. Ist C zusammenhängend in X, dann ist auch der Abschluß $\overline{C}$ zusammenhängend.

   Beweis. Seien A_1 und A_2 abgeschlossene Mengen in X mit $A_1 \cup A_2 \supseteq \overline{C}$, $A_1 \cap A_2 \cap \overline{C} = \varnothing$. Dann gilt dasselbe für C. Da C zusammenhängend ist, folgt $C \subseteq A_1$ oder $C \subseteq A_2$, also $\overline{C} \subseteq A_1$ oder $\overline{C} \subseteq A_2$. □

2. Sind C_i mit $i \in I$ zusammenhängende Teilmengen von X und gibt es einen Punkt a, der allen C_i gemeinsam ist, dann ist $C := \bigcup_{i\in I} C_i$ zusammenhängend.

   Beweis. Seien O_1 und O_2 offene Mengen mit $O_1 \cup O_2 \supseteq \bigcup_{i\in I} C_i$ und $O_1 \cap O_2 \cap \bigcup_{i\in I} C_i = \varnothing$. Dann gilt entweder $a \in O_1$ oder $a \in O_2$. Sei z.B. $a \in O_1$. Da für jedes i auch $O_1 \cup O_2 \supseteq C_i$ und $O_1 \cap O_2 \cap C_i = \varnothing$ gilt und die C_i zusammenhängend sind, muß $O_1 \cap C_i = \varnothing$ oder $O_2 \cap C_i = \varnothing$ gelten. Wegen $a \in O_1 \cap C_i$ muß $O_2 \cap C_i = \varnothing$ für alle $i \in I$ gelten, also $O_2 \cap C = O_2 \cap \bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I}(O_2 \cap C_i) = \varnothing$. □

3. Zu jedem $a \in X$ gibt es eine größte zusammenhängende Teilmenge $C(a)$ die a enthält, denn die Vereinigung aller zusammenhängender Teilmengen von X, die a enthalten, ist nach 2 ebenfalls zusammenhängend. Nach 1 muß $C(a)$ abgeschlossen sein. Wir nennen $C(a)$ die *Zusammenhangskomponente* von a.

5.4 Definition. Ein topologischer Raum X heiße *total unzusammenhängend*, wenn er keine zusammenhängenden Teilmengen außer einelementigen besitzt, d.h. wenn die Zusammenhangskomponente eines jeden seiner Punkte nur aus dem Punkt selbst besteht.

Beispiele hierfür sind $\mathbb{Q}$ und die Cantormenge mit der Intervalltopologie:

5.5 Die Cantormenge. Wir definieren eine absteigende Folge abgeschlossener Teilemengen C_n des Einheitsintervalles $[0,1]$ in der üblichen Topologie indem wir im ersten Schritt das (offene) mittlere Drittel enfernen, im zweiten Schritt die (offenen) mittleren Drittel der beiden verbleibenden Restintervalle, usw.:

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= C_0 \setminus \,]1/3, 2/3[\\ C_2 &= C_1 \setminus \big(]1/9, 2/9[\cup]7/9, 8/9[\big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die *Cantormenge* ist dann als der Duchschnitt $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_n$ erklärt. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist die Cantormenge in den reellen Zahlen abgeschlossen.

5.6 Definition. Ein topologischer Raum wird *lokal zusammenhängend* genannt, wenn jeder Punkt des Raumes eine Umgebungsbasis zusammenhängender Mengen besitzt.

Beispiel.

1. $\mathbb{R}$ ist in der üblichen Topologie lokal zusammenhängend, ebenso $\mathbb{R}^n$.
2. $[-2,-1] \cup [1,2]$ ist in der üblichen Topologie lokal zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend.
3. Der folgende Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend:

$$X = \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [0,1]\big) \cup \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y = \tfrac{1}{2^n}\ (n \in \mathbb{N})\}$$

4. Die Gruppe $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ aller reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen kann nicht zusammenhängend sein, da die Determinante eine stetige Abbildung auf die nicht zusammenhängende Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergibt. Man kann zeigen, daß es zwei Zusammenhangskomponenten gibt, nämlich die Teilmengen der invertierbaren Matrizen mit positiver bzw. negativer Determinante.

Bemerkung. In einem lokal zusammenhängenden Raum ist die Zusammenhangskomponente (siehe 5.3(3)) eines beliebigen Punktes a nicht nur abgeschlossen, sondern auch offen. Denn ist $b \in C(a)$, dann hat b wegen des lokalen Zusammenhangs mindestens eine zusammenhängende Umgebung U. Da nach 5.3(2) $C(a) \cup U$ zusammenhängend ist und $C(a)$ die größte, a enthaltende zusammenhängende Menge ist, gilt $U \subseteq C(a)$. Also ist $C(a)$ Umgebung eines jeden $b \in C(a)$ und folglich offen.

5.7 Satz. Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $f\colon X \to Y$ stetig und C zusammenhängend in X. Seien O_1 und O_2 offene Mengen in Y mit $O_1 \cup O_2 \supseteq f(C)$ und $O_1 \cap O_2 \cap f(C) = \varnothing$. Es folgt

$$f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) \supseteq f^{-1}(f(C)) \supseteq C$$

und

$$f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) \cap C \subseteq f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) \cap f^{-1}(f(C)) \subseteq f^{-1}(O_1 \cap O_2 \cap f(C)).$$

Da f stetig ist, sind $f^{-1}(O_1)$ und $f^{-1}(O_2)$ offen. Da C zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(O_1) \cap C = \varnothing$ oder $f^{-1}(O_2) \cap C = \varnothing$, also $O_1 \cap f(C) = \varnothing$ oder $O_2 \cap f(C) = \varnothing$. Also ist $f(C)$ zusammenhängend. □

Den vorhergehenden Satz kann man insbesondere auf homöomorphe Bilder anwenden und man sieht, daß die Eigenschaft des Zusammenhangs unter Homöomorphismen erhalten bleibt. Wir haben also

5.8 Folgerung. Der Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft ebenso wie der lokale Zusammenhang.

Wir kommen noch einmal darauf zurück, warum $\mathbb{R}$ in der üblichen Topologie zusammenhängend ist:

5.9 Satz. $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ist zusammenhängend. Dasselbe gilt für jedes Intervall von $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir führen den Beweis nur für $\mathbb{R}$. Denselben Beweis kann man für Intervalle verwenden.

[1. Beweis (unter Verwendung des Zwischenwertsatzes)] Angenommen, $\mathbb{R}$ sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen U_1 und U_2 mit $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$. Wir definieren $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U_1 \\ -1 & \text{falls } x \in U_2 \end{cases}.$$

Diese Funktion ist stetig, denn für jede offene Menge $U \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } 1 \in U \text{ und } -1 \in U \\ U_1 & \text{falls } 1 \in U \text{ und } -1 \notin U \\ U_2 & \text{falls } 1 \notin U \text{ und } -1 \in U \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

Seien nun $a \in U_1$ und $b \in U_2$. Dann gilt $f(a) = 1$ und $f(b) = -1$. Da f auf dem abgeschlossenen Intervall zwischen a und b stetig ist, hat f nach den Zwischenwertsatz eine Nullstelle zwischen a und b, im Widerspruch zur Definition von f. □

2. Beweis (ohne Verwendung des Zwischenwertsatzes). Angenommen, $\mathbb{R}$ sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere, disjunkte, offene Mengen U_1 und U_2 mit $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$. Da U_1 und U_2 nicht leer sind, kann man Elemente $a \in U_1$ und $b \in U_2$ wählen. Sei o.B.d.A. $a < b$. Weiterhin sei $c = \sup\{x \in U_1 \mid x < b\}$. Das Supremum existiert, da $\{x \in U_1 \mid x < b\}$ eine durch b beschränkte und nichtleere Menge ist.

Da $\mathbb{R} = U_1 \cup U_2$, muß $c \in U_1$ oder $c \in U_2$ gelten.

$c \in U_1$: Da U_1 offen ist, gibt es c_1 und c_2, so daß $c_1 < c < c_2 \leq b$ und $]c_1, c_2[$ ganz in U_1 liegt. Nun kann man ein c_3 mit $c < c_3 < c_2$ wählen. Da $c_3 \in U_1$, folgt $c_3 \leq \sup\{x \in U_1 \mid x < b\} = c$, ein Widerspruch.

$c \in U_2$: Da U_2 offen ist, gibt es c_1 und c_2, so daß $a \leq c_1 < c < c_2$ und $]c_1, c_2[\ \subseteq U_2$. Wähle nun c_3, so daß $c_1 < c_3 < c$. Dann gilt aber $\sup\{x \in U_1 \mid x < b\} \leq c_3 < c$, ein Widerspruch.

In jedem Fall führt die Annahme also zu einem Widerspruch. $\square$

5.10 Übung. Zeigen Sie, daß der Zwischenwertsatz für stetige reellwertige Funktionen äquivalent zum Zusammenhang ist.

5.11 Übung. Es sei M eine linear geordnete Menge mit den folgenden Eigenschaften:

1. M ist bedingt vollständig, d.h. jede nichtleere beschränkte Teilmenge von M hat ein Supremum,
2. M ist dicht in sich, d.h. $a < b \implies \exists c.\ a < c < b$.

Zeigen Sie, daß M in der Ordnungstopologie zusammenhängend ist. (*Hinweis:* Gehen Sie den 2. Beweis von Satz 5.9 durch.)

Beispiel. Die Funktion $]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ ist stetig, ebenso ist $]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sin\frac{1}{x})$ stetig.

Da $]0, +\infty[$ zusammenhängend ist, ist das Bild $C = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ zusammenhängend. Nach 5.3.1 ist auch der Abschluß $\overline{C} = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ zusammenhängend.

5.12 Definition. Ein topologischer Raum X wird *wegzusammenhängend* genannt, wenn sich je zwei Punkte in X durch einen *Weg* verbinden lassen, d.h. wenn es für beliebige $a, b \in X$ eine stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to X$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$ gibt.

Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend. Denn verbinden wir einen festen Punkt $a \in X$ mit jedem anderen Punkt $x \in X$ durch einen Weg C_x, dann ist C_x nach 5.7 zusammenhängend und $X = \bigcup_{x \in X} C_x$ ist nach 5.3(2) zusammenhängend.

Der zusammenhängende Raum $\overline{C}$ aus dem vorhergehenden Beispiel ist aber nicht wegzusammenhängend.

5.13 Der Jordansche Kurvensatz. Nimmt man aus $\mathbb{R}$ einen Punkt heraus, so zerfällt die Restmenge in zwei Zusammenhangskomponenten. Im $\mathbb{R}^2$ gilt:

Im $\mathbb{R}^2$ gilt die folgende Verallgemeinerung, die wir ohne Beweis angeben. Dazu betrachten wir einen geschlossenen doppelpunktfreien Weg in der Ebene, d.h. eine stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(0) = f(1)$ aber $f(a) \neq f(b)$ in allen anderen Fällen. Man kann zeigen, daß das Bild zum Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ homöomorph ist.

Satz. Nimmt man aus dem $\mathbb{R}^2$ einen geschlossenen doppelpunktfreien Weg heraus, so zerfällt die Restmenge in genau zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte (*das Innengebiet*) und eine unbeschränkte (*das Außengebiet*). Das Innengebiet ist mit einer Kreisscheibe homöomorph.

Der Beweis des Jordanschen Kurvensatzes ist langwierig und kann hier nicht gegeben werden, obwohl er so selbstverständlich erscheint.

6. Vollständige metrische Räume

Existenzsätze in der Analysis beruhen häufig auf Vollständigkeits- oder Kompaktheitseigenschaften des Raums, in dem man nach Lösungen für ein Problem sucht. Wir wollen deshalb diese beiden Begriffe hier behandeln und jeweils Beispiele für Existenzsätze angeben. Als erstes behandeln wir den Begriff der Vollständigkeit. Dies ist keine topologische, sondern eine Eigenschaft metrischer Räume. Will man den Begriff der Vollständigkeit über die metrischen Räume hinaus verallgemeinern, muß man zu den sogenannten uniformen Räumen übergehen, wie man Sie in jedem guten Topologiebuch findet.

In diesem Abschnitt sei (X, d) stets ein metrischer Raum.

6.1 Cauchy-Folgen. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in X wird *Cauchy-Folge* genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt, so daß $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Bemerkung. Damit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, genügt es zu fordern, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so gibt, daß $d(a_n, a_N) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Denn daraus folgt $\forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a_N) + d(a_N, a_m) < 2\varepsilon$

Beispiel. Jede konvergente Folge in X ist eine Cauchy-Folge. Denn wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N so, daß $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt für alle $n, m \geq N : d(a_n, a_m) \leq d(a, a_n) + d(a, a_m) < 2\varepsilon$.

Jedoch ist nicht jede Cauchy-Folge konvergent.

Beispiel. In $\mathbb{Q}$ (mit der üblichen Metrik) sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert hat.

Übung. Auf dem Raum $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$ aller stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Metrik $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ (siehe 1.4.5). Finden Sie nicht konvergente Cauchy-Folgen (z.B. $f_n(x) = \big(x + \frac{1}{n}\big)^{-\frac{1}{2}}$).

Nun sind Cauchy-Folgen so, daß sie eigentlich konvergieren „sollten“. Dies führt zum Begriff

6.2 Metrische Vollständigkeit. Ein metrischer Raum (X, d) wird *vollständig* genannt, wenn jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert.

6.3 Beispiel.

1. $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik und $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$ mit der Metrik d_1 sind nicht vollständig (siehe 6.1)
2. $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik ist vollständig.

   Das lernt man schon in der Analysis I. Hier nochmals ein Beweis, in dem die metrische Vollständigkeit auf die bedingte Ordnungsvollständigkeit zurückgeführt wird: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

   Zwischenbehauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ so, daß $|a_n| \leq C$ für alle n.

Beweis. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist gibt es ein N so, daß $|a_N - a_n| \leq 1$ für alle $n \geq N$. Wähle $C = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$. $\square$

Da die a_n nach unten beschränkt sind, kann man für jedes $M \in \mathbb{N}$ die reelle Zahl

$$b_M := \inf_{n\geq M} a_n$$

bilden. Die Folge $(b_M)_{M\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben durch C beschränkt. Also kann man die reelle Zahl

$$a := \sup_{M\in\mathbb{N}} b_M$$

bilden.

Wir behaupten: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a. Sei also $\varepsilon > 0$. Da $a = \sup_{M\in\mathbb{N}} b_M$, gibt es ein M so, daß $a - \varepsilon < b_M$. Da $b_M = \inf_{n\geq M} a_n$, gilt $a - \varepsilon \leq a_n$ für alle $n \geq M$.

Da andererseits $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, kann man ein N so finden, daß $|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Man kann $N \geq M$ wählen. Da $b_N = \inf_{n\geq N} a_n \leq a < a + \frac{\varepsilon}{2}$, gibt es ein $N' \geq N$ so, daß $a_{N'} < a + \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt $a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N'$. Insgesamt haben wir also $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq N'$. $\square$

Bemerkung. Für eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt also nach obigem Beweis

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{M\in N} \inf_{n\geq N} a_n$$

und ebenso

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{M\in N} \sup_{n\geq N} a_n.$$

3. Betrachten wir auf $\mathbb{R}$ die Metrik $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, dann ist $\mathbb{R}$ nicht vollständig, denn die Folge $a_n = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist eine Cauchy-Folge für diese Metrik, konvergiert allerdings nicht. Nach 1.10 ist die Metrik d äquivalent zur üblichen Metrik auf $\mathbb{R}$, d.h. sie induziert die übliche Topologie. Das bedeutet: *Metrische Vollständigkeit ist keine topologische Eigenschaft.* Ebenso ist der Begriff der Cauchy-Folge kein topologischer Begriff. Ob eine Folge eine Cauchy-Folge ist, kann von der speziellen Metrik abhängen.
4. $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie ist vollständig.
5. Es sei T eine Menge, X ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Raum $\mathcal{B}(T, X)$ aller beschränkten Funktionen $f\colon T \to X$ mit der Metrik

$$d(f, g) = \sup_{t\in T} d(f(t), g(t))$$

(siehe 1.49) ebenfalls vollständig.

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(T, X)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein N so, daß für alle $n, m \geq N$

$$d(f_n, f_m) = \sup_{t\in T} d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon.$$

Insbesondere ist dann $d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, d.h. für jedes t ist $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Da X als vollständig vorrausgesetzt wurde, konvergiert die Folge $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ in X für jedes t. Wir setzen $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ für jedes $t \in T$ und haben damit eine Funktion $f\colon T \to X$.

Wir zeigen nun, daß f beschränkt ist und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f (gleichmäßig) konvergiert: Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle N so, daß $d(f_n, f_m) = \sup_{t\in T} d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Es folgt $d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$, also

$$d(f(t), f_m(t)) = d\big(\lim_{n\to\infty} f_n(t), f_m(t)\big) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(t), f_m(t)) \leq \varepsilon$$

für alle $m \geq N$, also $d(f, f_m) = \sup_{t\in T} d(f(t), f_m(t)) \leq \varepsilon$, und dies für alle $m \geq N$. Daraus folgt sie Behauptung. $\square$

Übung. Ein abgeschlossener Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes ist ebenfalls vollständig bzgl. der induzierten Metrik.

Übung. Es sei T ein topologischer Raum und X ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathcal{C}_b(T, X)$ aller stetigen beschränkten Funktionen in $\mathcal{B}(T, X)$ abgeschlossen ist. Folgern Sie, daß $\mathcal{C}_b(T, X)$ bzgl. der Supremumsmetrik ein vollständiger metrischer Raum ist.

Folgerung. $\mathcal{C}\big([0, 1]\big)$ ist vollständig bzgl. der Metrik d_∞.

6.4 Der Banachsche Fixpunktsatz. Es sei X ein *vollständiger* metrischer Raum. Eine Abbildung $f\colon X \to X$ wird *kontrahierend* genannt, wenn es eine reelle Zahl $L < 1$ gibt, so daß

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Die kleinste Zahl L mit dieser Eigenschaft wird auch *Lipschitzkonstante* von f genannt.

Es sei nun $f\colon X \to X$ kontrahierend mit Lipschitzkonstante L. Ferner sei $a \in X$ beliebig. Wir betrachten die Folge $a_0 = a$, $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(a_1) = f^2(a)$, ..., $a_{k+1} = f(a_k) = f^{k+1}(a)$, ...

Es gilt

$$d(a_n, a_{n+1}) = d(f(a_{n-1}), f(a_n)) \leq L \cdot d(a_{n-1}, a_n) \leq L^2 \cdot d(a_{n-2}, a_{n-1}) \leq L^n \cdot d(a_0, a_1)$$

also

$$(1) \qquad d(a_n, a_{n+1}) \leq L^n \cdot M \quad \text{mit } M = d(a, f(a))$$

Für $n \leq m$ gilt nun

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + \cdots + d(a_{m-1}, a_m) \\ &\leq L^n \cdot M + L^{n+1} \cdot M + \cdots + L^{m-1} \cdot M \\ &= L^n \cdot M \cdot (1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-1-n}) \\ &< L^n \cdot M \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} L^i\right) \end{aligned}$$

und damit

$$(2) \qquad d(a_n, a_m) \leq L^n \cdot \frac{M}{1-L} \quad \text{falls } n \leq m$$

Es folgt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle N so, daß $L^N < \varepsilon \cdot \frac{1-L}{M}$. Für alle $n, m \geq N$ folgt dann $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Also hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert, den wir mit a_∞ bezeichnen wollen. (Hier verwenden wir die Vollständigkeit von X.) Nun gilt

$$d(a_n, a_\infty) = d(a_n, \lim_{m\to\infty} a_m) = \lim_{m\to\infty} d(a_n, a_m),$$

also folgt mit (2)

$$d(a_n, a_\infty) \leq L^n \cdot \frac{M}{1-L} \tag{3}$$

Andererseits ist eine kontrahierende Abbildung f auch stetig. Folglich gilt

$$f(a_\infty) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_\infty,$$

d.h. a_∞ ist ein Fixpunkt von f.

Dieser Fixpunkt ist eindeutig bestimmt: Ist b ein weiterer Fixpunkt von f, so gilt

$$d(b, a_\infty) = d(f(b), f(a_\infty)) \leq L \cdot d(b, a_\infty).$$

Da $L < 1$ ist, kann dies nur gelten, wenn $d(b, a_\infty) = 0$, d.h. $a_\infty = b$.

Wir haben gezeigt:

Banachscher Fixpunktsatz. Jede kontrahierende Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes X in sich hat genau einen Fixpunkt.

Dieser Fixpunktsatz ist konstruktiv: Man startet mit einem beliebigen Anfangspunkt a, wendet f wiederholt an $(a_0 = a, a_1 = f(a), \dots, a_{k+1} = f(a_k), \dots)$ und gewinnt den Fixpunkt als Grenzwert dieser Folge.

Die Abschätzung (3) liefert sogar eine Abschätzung der Güte der Approximation des Fixpunktes nach n Schritten.

6.5 Anwendung (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Picard-Lindelöf). Es sei $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die der folgenden *Lipschitz-Bedingung* genügt: Es gibt ein $L > 0$ so, daß $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2|$ für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in [a,b]$.

Wir suchen eine in $[a,b]$ definierte Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad\qquad y(a) = c \tag{A}$$

Ein dazu äquivalentes Problem ist, eine stetige Funktion $y(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ zu finden, die der Gleichung

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y(t))dt \tag{B}$$

genügt.

Wir formulieren dieses Problem in ein Fixpunktproblem um: Es sei $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ der Raum aller stetigen Funktionen $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Wir definieren eine Abbildung

$$F\colon \mathcal{C}\big([a,b]\big) \to \mathcal{C}\big([a,b]\big)$$

indem wir für jedes $g \in \mathcal{C}([a,b])$ die Funktion $F(g)$ durch

$$F(g)(x) := c + \int_a^x f(t, g(t))dt \quad \text{für } x \in [a,b]$$

erklären. Das Problem (B) kann nun so umformuliert werden, einen Fixpunkt von F zu finden, d.h. ein $g \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$ mit

$$\text{(C)} \qquad g = F(g)$$

Aus der Übung am Ende von 6.3 wissen wir, daß $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ mit der Metrik

$$d_\infty(h,g) = \sup_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)|$$

vollständig ist. Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir nur nachzuweisen, daß F kontrahierend ist:

Für beliebige $h, g \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
d_\infty(F(h), F(g)) &= \sup_{x \in [a,b]} |F(h)(x) - F(g)(x)| \\
&= \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x (f(t,h(t)) - f(t,g(t)))dt \right| \\
&\le \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x |f(t,h(t)) - f(t,g(t))|dt \\
&\le \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x L \cdot |h(t) - g(t)|dt \\
&\le \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x L \cdot d_\infty(h,g)dt \\
&= \sup_{x \in [a,b]} L \cdot d_\infty(h,g) \cdot (x-a) \\
&\le L \cdot (b-a) \cdot d_\infty(h,g)
\end{aligned}$$

Wir sehen: Aus $L \cdot (b-a) < 1$ folgt, daß F kontrahierend ist. Wählen wir also das Intervall $[a,b]$ so klein, daß $L(b-a) < 1$, dann hat nach dem Banachschen Fixpunktsatz (C) genau eine Lösung, und diese läßt sich durch sukzessive Approximation gewinnen: Man beginnt mit einer beliebigen Funktion g, z.B. $g(x) \equiv c$ und berechnet sukzessive $g_0 := g, g_1 := F(g), g_2 := F(g_1), \ldots$. Die Funktionenfolge $(g_n)_n$ konvergiert (gleichmäßig auf $[a,b]$) gegen eine Lösung $y = y(x)$ von (C).

6.6 Vervollständigung. Wenn ein metrischer Raum (X,d) nicht vollständig ist, kann man in einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$, seine *Vervollständigung*, einbetten. Dabei geht man so vor, daß man für nichtkonvergente Cauchy-Folgen Punkte zu X hinzufügt, gegen welche die Cauchy-Folgen dann konvergieren. Wir skizzieren das Vorgehen. Der Leser ist aufgefordert, die Details selber einzufügen:

Man betrachtet die Menge Y aller Cauchy-Folgen $\chi = (x_n)_n$ auf X. Für zwei solche Cauchy-Folgen $\chi = (x_n)_n$ und $\eta = (y_n)_n$ ist die Folge der Abstände $d(x_n, y_n)$ eine Cauchy-Folge nichtnegativer reeller Zahlen und daher konvergent. Wir definieren $\tilde{d}(\chi, \eta) := lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$ als Abstand der Cauchy-Folgen. Man weist leicht nach, daß

$\tilde{d}$ symmetisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt. Allerding ist $\tilde{d}$ keine Metrik auf Y, da verschiedene Cauchy-Folgen den Abstand 0 haben können, z. B. dann wenn sie gegen denselben Punkt konvergieren. Wir müssen also Cauchy-Folgen vom Abstand 0 identifizieren. Formal macht man das so, daß man feststellt, daß auf Grund der Symmetrie und der Dreiecksungleichung für $\tilde{d}$ durch

$$\chi \sim \eta \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{d}(\chi, \eta) = 0$$

auf Y eine Äquivalenzrelation definiert wird. Die Äquivalenzklasse $\tilde{\chi}$ einer Cauchy-Folge χ besteht aus den Cauchy-Folgen η, die den Abstand 0 von χ haben. Auf der Quotientenmenge $\tilde{X} := Y/\sim$ aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen definiert nun $\tilde{d}$ eine Metrik, bezüglich welcher $\tilde{X}$ vollständig ist. Den Raum X kann man in $\tilde{X}$ einbetten, indem man jedem $x \in X$ die Äquivalenzklasse $\tilde{x}$ der konstanten Folge $x_n = x$ zuordnet. Eine in X nicht konvergente Cauchyfolge $\chi = (x_n)_n$ konvergiert in $\tilde{X}$ gegen das neue Element $\tilde{\chi}$. Die Einbettung ist isometrisch, d.h. Abstände bleiben erhalten, und, das Bild von X liegt dicht in $\tilde{X}$.

Der metrische Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ wird *Vervollständigung von* (X, d) genannt.

7. Trennungseigenschaften

Es sei X ein topologischer Raum. Ferner sei A eine Teilmenge von X. Eine Teilmenge U von X wird *Umgebung von* A genannt, wenn U eine Umgebung aller $a \in A$ ist, d.h. wenn es eine offene Menge O mit $A \subseteq O \subseteq U$ gibt. Mit $\mathcal{U}(A)$ bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von A.

7.1 Trennungseigenschaften. Wir sagen X sei

ein T_0-Raum: wenn $x \neq y \implies (\exists U \in \mathcal{U}(x).\ y \notin U$ oder $\exists U \in \mathcal{U}(y).\ x \notin U)$

Äquivalent hierzu sind die folgenden Bedingungen:

- $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y) \implies x = y$
- $x \neq y \implies \exists O^{\text{offen}}.\ (x \in O, y \notin O$ oder $y \in O, x \notin O)$
- $x \neq y \implies \exists A^{\text{abgeschlossen}}.\ (x \in A, y \notin A$ oder $y \in A, x \notin A)$
- $x \neq y \implies \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

ein T_1-Raum: wenn $x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{U}(x).\ y \notin U$

Äquivalent hierzu sind:

- $x \neq y \implies \exists O^{\text{offen}}.\ x \in O, y \notin O$
- alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in X$ sind abgeschlossen.

ein T_2-Raum: wenn je zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ in X disjunkte Umgebungen besitzen

Äquivalent dazu sind:

- $x \neq y \implies \exists O_1, O_2^{\text{offen}}.\ x \in O_1, y \in O_2, O_1 \cap O_2 = \varnothing$
- $x \neq y \implies \exists U \in \mathcal{U}(x).\ U$ abgeschlossen, $y \notin U$

Ein Raum mit diesen Eigenschaften wird auch als *Hausdorff-Raum* bezeichnet.

ein T_3-Raum: wenn es für jede abgeschlossene Menge A und jedes $x \notin A$ disjunkte Umgebungen U von A und V von x gibt.

Äquivalente Bedingungen hierzu sind:

- Für jede abgeschlossene Teilmenge A und jedes $x \notin A$ gibt es offene Mengen O_1 und O_2 mit $x \in O_1$, $A \subseteq O_2$, $O_1 \cap O_2 = \varnothing$
- Jedes x in X besitzt eine Umgebungsbasis abgeschlossener Umgebungen.

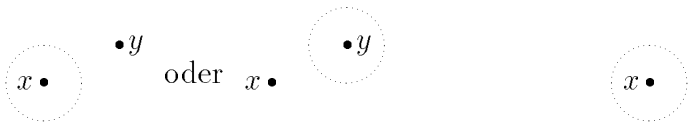
ein T_4-Raum: wenn disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X disjunkte Umgebungen haben.

Äquivalent sind:

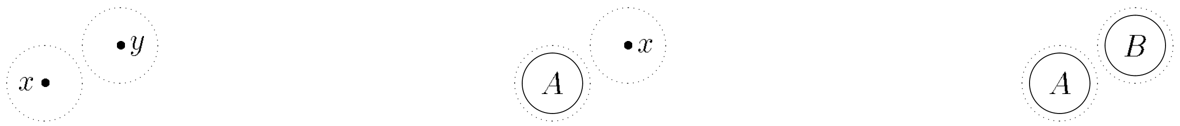
- Für beliebige disjunkte, abgeschlossene Teilmengen A und B gibt es disjunkte, offene Mengen O_1 und O_2 mit $A \subseteq O_1$ und $B \subseteq O_2$.
- Für jede Umgebung U einer abgeschlossenen Teilmenge A gibt es eine offene Menge O mit $A \subseteq O$ und $\overline{O} \subseteq U$, d.h. jede abgeschlossene Menge besitzt eine Basis abgeschlossener Umgebungen.

regulär: wenn X sowohl ein T_0- als auch ein T_3-Raum ist.

normal: falls X sowohl ein T_1- und ein T_4-Raum ist.



(a) T_0 (b) T_1



(c) T_2 (d) T_3 (e) T_4

ABBILDUNG 1. Trennungseigenschaften

Beispiele und Gegenbeispiele.

- zu T_0-Räumen:
  - Eine Menge X mit der indiskreten Topologie ist nicht T_0.
  - Eine linear geordnete Menge X wie zum Beispiel $\mathbb{R}$ mit der unteren Topologie ist ein T_0-Raum, denn $x \neq y \implies \overline{\{x\}} = \downarrow x \neq \downarrow y = \overline{\{y\}}$.
- zu T_1-Räumen:
  - Eine linear geordnete Menge X mit der unteren Topologie ist nicht T_1, denn wenn $x < y$, dann $x \in \downarrow y = \overline{\{y\}}$.
  - Die koendliche Topologie auf einer Menge X ist T_1. Die koendliche Topologie ist sogar in jeder T_1-Topologie enthalten.

- zu T_2-Räumen:
  - Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge ist nicht T_2, denn je zwei nicht leere offene Mengen haben einen nicht leeren Schnitt.
  - Die Intervalltopologie auf einer linear geordneten Menge ist T_2.
  - Jeder metrische Raum ist T_2.
- zu T_3-Räumen:
  - Die indiskrete Topologie ist T_3, also $T_3 \not\Rightarrow T_0, T_1, T_2$.
- zu T_4-Räumen:
  - Die indiskrete Topologie ist T_4, also $T_4 \not\Rightarrow T_0, T_1, T_2$.
- zu normalen Räumen:
  - Jeder metrische Raum ist in seiner metrischen Topologie normal. Denn seien A und B disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann ist für jedes $a \in A$ der Abstand $d(a,B) := \inf_{b\in B} d(a,b) > 0$. Daraus folgt, daß $\bigcup_{a\in A} B_{\frac{1}{2}d(a,B)}(a)$ und $\bigcup_{b\in B} B_{\frac{1}{2}d(b,A)}(b)$ disjunkte Umgebungen von A bzw. B sind.

Bemerkung. Jeder reguläre Raum ist ein Hausdorff-Raum.

Beweis. Sei $x \neq y$. Wegen T_0 gilt $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, also $x \notin \overline{\{y\}}$ oder $y \notin \overline{\{x\}}$. In beiden Fällen kann man nach T_3 disjunkte Umgebungen von x und y finden. □

Bemerkung. Jeder normale Raum ist regulär, insbesondere also eine Hausdorff-Raum.

Beweis. Wegen T_1 sind einpunktige Mengen abgeschlossen, und T_4 ist anwendbar auf eine abgeschlossene Menge A und $B = \{x\}$ mit $x \notin A$. Es folgt T_3. □

Wir haben gezeigt, daß die folgenden Implikationen gelten:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{normal (also } T_4 + T_1) & \Rightarrow & \text{regulär (also } T_3 + T_0) & \Rightarrow & T_2 & \Rightarrow & T_1 & \Rightarrow & T_0 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & & & & & \\ T_4 & & T_3 & & & & & & \end{array}$$

Man kann Gegenbeispiele dafür finden, daß keine anderen als die angegebenen Implikationen gelten. Einige haben wir angegeben. Für die restlichen siehe z.B. das Buch von B.von Querenburg.

7.2 Vererbung der Trennungseigenschaften auf Unterräume. Ist X ein T_0-, T_1-, T_2-, T_3- oder ein regulärer Raum, dann ist jeder Unterraum von X ein T_0-, T_1-, T_2-, T_3- bzw. ein regulärer Raum.

Beweis. Die Beweise sind einfach, z.B. für den Fall T_3: Sei Y ein Unterraum von X, sei A abgeschlossen in Y und $y \in Y \setminus A$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge A' in X mit $A' \cap Y = A$. In X gibt es disjunkte offene Mengen O_1 und O_2 mit $A' \subseteq O_1$ und $y \in O_2$. Dann sind $Y \cap O_1$ und $Y \cap O_2$ disjunkt und offen in Y mit $A \subseteq Y \cap O_1$, $y \in Y \cap O_2$. □

Es gibt Beispiele, daß Unterräume von T_4-Räumen nicht unbedingt wieder T_4-Räume sind (siehe Übungen). Jedoch gilt:

Satz. Jeder abgeschlossene Unterraum eines T_4-Raums ist wieder ein T_4-Raum.

Beweis. Sei nämlich Y abgeschlossen in X. Sind A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen in Y, so sind A und B auch abgeschlossen in X. Ist X normal, so kann man A und B durch disjunkte offene Mengen O_1 und O_2 in X trennen. Dann sind $O_1 \cap Y$ und $O_2 \cap Y$ disjunkt und offen in Y, und sie trennen A und B. □

Das folgende Lemma ist insbesondere auf metrische Räume anwendbar:

7.3 Lemma von Urysohn. Sind A und B disjunkte, abgeschlossene Teilmengen eines T_4-Raums X, dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$. Dabei wird das Einheitsintervall mit der üblichen Topologie ausgestattet.

Beweis. Wir verwenden T_4 in der folgenden Form (siehe 7.1):

(∗) Ist A abgeschlossen, U offen und $A \subseteq U$, dann gibt es eine offene Menge V mit $A \subseteq V$ und $\overline{V} \subseteq U$.

Gegeben seien zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq X$. Für die offene Menge $U_1 := X \setminus B$ gilt $A \subseteq U_1$. Wegen (∗) können wir eine offene Menge U_0 so finden, daß $A \subseteq U_0$, $\overline{U_0} \subseteq U_1$.

Wiederum mit (∗) finden wir eine offene Menge $U_{\frac{1}{2}}$, so daß $\overline{U_0} \subseteq U_{\frac{1}{2}}$, $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_1$.

Wiederum mit (∗) finden wir offene Mengen $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ so daß $\overline{U_0} \subseteq U_{\frac{1}{4}}$, $\overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}}$, $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}}$, $\overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq U_1$.

Indem wir diesen Prozeß widerholen, finden wir für jede dyadische rationale Zahl $r = \frac{m}{2^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq 2^n$ eine offene Menge U_r derart, daß $r < s \implies \overline{U_r} \subseteq U_s$. Nun definieren wir $f\colon X \to [0,1]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \notin U_1, \text{ d.h. falls } x \in B, \\ \inf\{r \mid x \in U_r\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition von f gilt dann $f(x) = 1$, falls $x \in B$, und $f(x) = 0$, falls $x \in A$, denn $A \subseteq U_0$. Ferner ist f stetig, denn

- $f(x) < a \iff \exists r < a.\ x \in U_r$ d.h. $f^{-1}\big([0,a[\big) = \bigcup_{r<a} U_r$ und als Vereinigung offener Mengen ist diese Menge ist offen für jedes $a \in [0,1]$

und

- $f(x) \leq a \iff x \in U_r$ für jedes $r > a \iff x \in \overline{U_r}$ für jedes r mit $r > a$ (denn $x \in \overline{U_r} \implies x \in U_s$ für alle $s > r$), d.h. $f^{-1}\big([0,a]\big) = \bigcap_{r>a} \overline{U_r}$ und als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist diese Menge abgeschlossen für jedes $a \in [0,1]$.

Beides zusammen impliziert die Stetigkeit von f. □

8. Kompakte topologische Räume

Existenzaussagen in der Analysis folgen in der Regel aus Vollständigkeitsvoraussetzungen oder Kompaktheitsbedingungen. Dabei ist Kompaktheit eine topologische Variante von Endlichkeit. In der Folge sei X ein topologischer Raum.

8.1 Überdeckungen. Sei $K \subseteq X$. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X wird *Überdeckung* von K genannt, falls

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \,.$$

Sind alle U_i offen in X, so sprechen wir von einer *offenen Überdeckung*.

8.2 Definition. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ wird *kompakt* genannt, wenn jede offene Überdeckung von X eine *endliche* Teilüberdeckung enthält, d.h. falls für jede Familie offener Mengen$U_i, i \in i$, gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \quad \Longrightarrow \quad \exists i_1, \dots , i_n \in I.\ K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

Ist diese Bedingung für $K = X$ erfüllt, so sagt man, X sei ein *kompakter Raum*.

Bemerkung. In vielen Büchern (z.B. Bourbaki) wird der Begriff *quasikompakt* statt kompakt verwendet. Dort bedeutet dann kompakt: quasikompakt und Hausdorffsch (siehe 7.1).

8.3 Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis wissen Sie: Eine Teilmenge des euklidischen $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. (Dies wird weiter unten nochmals bewiesen.)

8.4 Übung. Zeigen Sie, daß a) eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums stets abgeschlossen und beschränkt sein muß und daß b) in einem Hausdorff-Raum jede kompakte Teilmenge abgeschlossen ist.

Jedoch muß selbst in einem vollständigen metrischen Raum eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge nicht immer kompakt sein:

Übung. Zeigen Sie, daß in $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$ mit der Supremumsnorm $||\cdot||_{+\infty}$ die abgeschlossene Einheitskugel $B_1(0) := \{f \in \mathcal{C}\big([0,1]\big) \mid -1 \le f(x) \le 1\}$ nicht kompakt ist.

Eine notwendige und hinreichende Zusatzbedingung, damit eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$ für die Topologie der gleichmßigen Konvergenz kompakt ist, ist die gleichgradige Stetigkeit (siehe den Satz von Arzela-Ascoli in Abschnitt 10).

Umgekehrt muß aber eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raums nicht abgeschlossen sein.

Übung: Die koendliche Topologie. Auf einer unendlichen Menge X betrachten wir die koendliche Topologie (siehe 5. Die abgeschlossenen Mengen für diese Topologie sind genau die endlichen Teilmengen von X. Zeigen Sie, daß *alle* Teilmengen von X kompakt sind.

Es gilt aber:

8.5 Satz. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist kompakt.

Beweis. Es sei A abgeschlossen in dem kompakten Raum X. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Zusammen mit der offenen Menge $U_0 := X \setminus A$ haben wir dann eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I \cup \{0\}$ so, daß $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Also $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Da U_0 nichts zur Überdeckung von A beitragen kann, wird A schon von endlich vielen der U_i, $i \in I$, überdeckt. $\square$

Kompaktheit ist eine topologische Eigenschaft. Es gilt sogar:

8.6 Satz. Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.

Beweis. Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Sei K eine kompakte Teilmenge von X. Um zu zeigen, daß $f(K)$ kompakt in Y ist, betrachten wir eine beliebige Überdeckung von $f(K)$ durch offene Mengen V_i, $i \in I$, in Y. Die Urbilder $f^{-1}(V_i)$, $i \in I$, sind offene Mengen in X, die K überdecken. Wegen der Kompaktheit von K kann man $i_1, \ldots, i_n \in I$ so finden, daß $K \subseteq f^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_n})$. Es folgt $f(K) \subseteq f\big(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_n})\big) \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$. $\square$

Folgerung. Quotientenräume kompakter Räume sind kompakt.

Folgerung. Sind X und Y homöomorph, dann ist X genau dann kompakt, wenn Y kompakt ist.

Nun wollen wir Kompaktheit statt mit Hilfe offener mit Hilfe abgeschlossene Mengen kennzeichnen.

8.7 Definition. Wir sagen, eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X habe *die endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn jede endliche Teilfamilie $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.

8.8 Kennzeichnung von Kompaktheit. Eine Teilmenge K eines topologischen Raums X ist genau dann kompakt, wenn gilt: Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X derart, daß $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \cap K \neq \varnothing$ für je endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$, so folgt $\bigcap_{i\in I} A_i \cap K \neq \varnothing$.

Beweis. In der Tat gilt $\bigcap_{i\in I} A_i \cap K = \varnothing$ genau dann, wenn die Komplemente $U_i := X \setminus A_i$ mit $i \in I$ eine Überdeckung von K bilden. Somit folgt die Behauptung direkt aus der Definition 8.2 durch Kontraposition. $\square$

Aus dem obigen Satz ergibt sich für $K = X$:

Folgerung. X ist genau dann kompakt, wenn jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft einen nichtleeren Durchschnitt hat.

8.9 Filterbasen. Ein System $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X wird *gefiltert* oder auch *Filterbasis* genannt, falls

1. $\mathcal{B} \neq \varnothing$ und $G \neq \varnothing$ für alle $G \in \mathcal{B}$.
2. Für beliebige $G_1, G_2 \in \mathcal{B}$ gibt es ein $G \in \mathcal{B}$ mit $G \subseteq G_1 \cap G_2$.

Beispielsweise ist das System $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen eines Punktes x in einem topologischen Raum eine Filterbasis. Allgemeiner ist jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ von x gefiltert. Weiterhin ist jede absteigende Folge $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ nichtleerer Mengen A_i gefiltert.

Kennzeichnung von Kompaktheit. Eine Teilmenge K eines topologischen Raums X ist genau dann kompakt, wenn gilt: Für jedes gefilterte System $\mathcal{B}$ von abgeschlossenen Teilmengen mit $A \cap K \neq \varnothing$ für alle $A \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\bigcap_{A\in\mathcal{B}} A \cap K \neq \varnothing$$

Beweis. Dies folgt direkt aus 8.8, wenn man noch beobachtet: Wenn $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \cap K \neq \varnothing$ für je endlich viele $i_1, \ldots, i_n \in I$, dann ist die Menge $\mathcal{G}$ aller endlichen Schnitte $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}$, $i_j \in I$, eine Filterbasis und $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i_1,\ldots,i_n\in I}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \bigcap_{A\in\mathcal{G}} A$. □

Folgerung. Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes gefilterte System abgeschlossener Teilmengen von X einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Insbesondere ist in einem kompakten Raum der Durchschnitt einer absteigenden Folge $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ nichtleerer abgeschlossener Teilmengen nicht leer.

Das folgende Lemma zeigt, daß man die Überdeckungseigenschaft nur für offene Mengen einer Subbasis nachprüfen muß:

8.10 Alexanders Lemma. Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis (für die offenen Mengen) der Topologie auf X. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ist schon dann kompakt, wenn jede Überdeckung von K durch offene Mengen $U_i \in \mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Dieses Lemma wird später in 9.19 bewiesen. Ein zweiter Beweis wird im Anhang gegeben. Wir verwenden das Alexanders Lemma, um folgenden Satz zu zeigen:

8.11 Satz. Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und (ordnungs-) beschränkt ist.

Beweis. Auf Grund der ersten Übung in 8.3 ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ notwendig abgeschlossen und beschränkt. Sei umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt. Wegen der Beschränktheit von K gibt es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, das K enthält. Es genügt zu zeigen, daß $[a, b]$ kompakt ist, denn nach 8.5 sind abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt. Wir verwenden Alexanders Lemma und betrachten eine Überdeckung von $[a, b]$ durch Intervalle der Form $]-\infty, a_i[$ mit $i \in I$ und $]b_j, +\infty[$ mit $j \in J$. Beachte, daß die offenen unbeschränkten Teilmengen eine Subbasis der Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden.

Nimmt man an, es gelte $a_i \leq b_j$ für alle $i \in I$ und $j \in J$. Da dann die Menge der a_i mit $i \in I$ beschränkt ist, kann man ihr Supremum $c := \sup_{i \in I} a_i$ in $\mathbb{R}$ bilden. Da $c \geq a_i$ für alle $i \in I$, kann c in keinem der $]-\infty, a_i[$ mit $i \in I$ liegen. Da $c \leq b_j$ für alle $j \in J$, kann c in keinem der $]b_j, +\infty[$ mit $j \in J$ liegen. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß $a \leq c \leq b$ und daß $[a, b]$ von diesen Intervallen überdeckt wird.

Also muß es ein $i \in I$ und ein $j \in J$ so geben, so daß $b_j < a_i$ gilt. Dann wird aber $[a, b]$ schon von den zwei Intervallen $]-\infty, a_i[$ und $]b_j, +\infty[$ überdeckt. □

Zusatz. Es sei X eine linear geordnete Menge, in der jede beschränkte, nichtleere Teilmenge ein Supremum und ein Infimum besitzt. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ ist genau dann kompakt in der Ordnungstopologie, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

Der Beweis des Zusatzes bleibt als Übung. Für die eine Implikation kann man den Beweis aus 8.11 kopieren. □

Für den euklidischen $\mathbb{R}^n$ besagt der Satz von Weierstraß, däs eine Teilmenge K genau dann kompakt ist, wenn jede Folge von Elementen von K eine in K konvergente Teilfoge besitzt. In topologischen RÄumen gilt das nicht mehr allgemein. (Wir werden im nächsten Abschnitt den Konvergenzbegriff so verallgemeiner, daß die verallgemeinerte Fassung des Satzes von Weierstraß wieder gilt.) Hier stellen wir fest:

8.12 Satz. Ist X ein kompakter topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann hat jede Folge in X eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei

$$A_m := \overline{\{a_n \mid n \geq m\}}$$

Die A_m sind dann abgeschlossen, und es gilt $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$. Wegen der Kompaktheit von X und 8.9 ist $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m \neq \varnothing$. Sei $a \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$. Da X das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, hat a eine abzählbare Umgebungsbasis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir können $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$ annehmen. Wir definieren rekursiv $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \ldots$, so daß $a_{n_k} \in U_k$ für alle k. Da $U_1 \cap \{a_n \mid n \geq 1\} \neq \varnothing$, gibt es $n_1 \geq 1$ so, daß $a_{n_1} \in U_1$. Da $U_2 \cap \{a_n \mid n \geq n_1\} \neq \varnothing$, gibt es $n_2 \geq n_1$ so, daß $a_{n_2} \in U_2$, usw. Nach ihrer Definition konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen a. □

Ohne die Abzählbarkeitsvoraussetzung gilt der obige Satz nicht mehr. Seine Umkehrung gilt auch nicht allgemein. Sie gilt aber, wenn man das zweite Abzählbarkeitsaxiom voraussetzt:

8.13 Satz. Sei X ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist X kompakt.

Beweis. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ ein offene Überdeckung von X und $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis für die offenen Mengen von X. Die Familie $\mathcal{B}'$ aller $U \in \mathcal{B}$, die in mindestens einem der U_i mit

$i \in I$ enthalten sind, ist dann einerseits ebenfalls eine offene Überdeckung von X und andererseits abzählbar. Man kann demnach die zu $\mathcal{B}'$ gehörigen Mengen durchnumerieren: $\mathcal{B}' = \{V_0, V_1, V_2, \dots\}$.

Behauptung: Es gibt ein n so, daß $X = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$.

Wäre die Behauptung falsch, gäbe es für jedes n ein Element $a_n \in X$ so, daß $a_n \notin V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$. Nach Voraussetzung hat die Folge a_n eine Teilfolge a_{n_i}, die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Da $X \subseteq V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots$, gibt es ein n_0 so, daß $a \in V_{n_0}$. Da V_{n_0} offen ist und die Teilfolge (a_{n_i}) gegen a konvergiert, liegen unendlich viele der Folgenglieder a_n in V_{n_0}, im Widerspruch zur Konstruktion der Folge.

Aus der Behauptung folgt der Satz: Jedes der V_j mit $j \in \{0, \dots, n\}$ ist in einem U_{i_j} enthalten und folglich $X \subseteq U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n}$. □

Für metrische Räume können wir den Satz von Weierstraß in seiner vollen Stärke beweisen:

8.14 Satz. Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jede Folge darin eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis. Da jeder metrische Raum das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist die Bedingung nach 8.12 notwendig. Um die Umkehrung zu zeigen, zeigen wir in den Hilfssätzen 8.15 und 8.16, daß ein metrischer Raum, in welchem jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und wir können dann Satz 8.13 anwenden. □

8.15 Hilfssatz. Es sei X ein metrischer Raum, in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Dann ist X separabel, d.h. X hat eine abzählbare dichte Teilmenge.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ können wir eine *endliche* Menge A_n mit der folgenden Eigenschaft finden: Für jedes $x \in X$ gibt es ein $a \in A_n$ mit $d(x, a) < \frac{1}{n}$.

In der Tat, wähle ein $a_0 \in X$ beliebig. Falls $d(x, a_0) < \frac{1}{n}$ für alle $x \in X$, wähle $A_n = \{a_0\}$. Ansonsten wähle ein $a_1 \in X$ mit $d(a_0, a_1) \geq \frac{1}{n}$. Falls $d(x, a_0) < \frac{1}{n}$ oder $d(x, a_1) < \frac{1}{n}$ für alle $x \in X$, wähle $A_n = \{a_0, a_1\}$.Ansonsten wähle a_2 so, daß $d(a_i, a_2) \geq \frac{1}{n}$ für $i = 0, 1$ usw. Dieser Prozeß muß nach endlich vielen Schritten abbrechen, denn sonst hätte man eine unednliche Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ mit der Eigenschaft, daß $d(a_i, a_j) \geq \frac{1}{n}$ immer wenn $i < j$. Solch eine Folge könnte aber keine konvergente Teilfolge besitzen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wählt man nun $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dann ist D dicht in X (nach Konstruktion der A_n) und abzählbar, da jedes A_n endlich ist. □

Jeder Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist separabel. Für metrische Räume gilt auch die Umkehrung:

8.16 Hilfssatz. Jeder separable metrische Raum erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis. Sei X ein metrischer Raum mit einer abzählbaren dichten Teilmenge D. Es sei $\mathcal{B}$ die Menge aller offenen Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a \in D$. Dann ist $\mathcal{B}$ ein abzählbares System offener Mengen. Wir zeigen, daß $\mathcal{B}$ eine Basis der metrischen Topologie ist: Sei also U eine offene Menge und $x \in U$. Es gibt sicher ein $\varepsilon > 0$ so, daß $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Nun wähle n, so daß $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Da D dicht ist, gibt es ein $a \in D$, so daß $d(x,a) < \frac{1}{2n}$. Es gilt dann

$$x \in B_{\frac{1}{2n}}(a) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U,$$

was zu beweisen war. □

8.17 Übung. Zeigen Sei, daß ein kompakter metrischer Raum vollständig ist, d.h. daß jede Cauchy-Folge konvergiert.

8.18 Kompakte Mengen in T_2-Räumen. Es sei X ein Hausdorff-Raum. Dann gilt:

1. Jede kompakte Teilmenge von X ist abgeschlossen.
2. Sind K_1 und K_2 kompakte Teilmengen von X, dann ist auch $K_1 \cap K_2$ kompakt.
3. Es sei $\mathcal{G}$ eine Filterbasis kompakter Teilmengen von X, dann ist $\bigcap_{K \in \mathcal{G}} K \neq \varnothing$ und kompakt.

   Ist weiterhin U offen und $\bigcap_{K \in \mathcal{G}} K \subseteq U$, so folgt $K \subseteq U$ für mindestens ein $K \in \mathcal{G}$.
4. Der Durchschnitt einer beliebigen Familie kompakter Teilmengen von X ist kompakt.

Für einen Beweis der vorhergehenden Eigenschaften sei auf die Übungen verwiesen. □

8.19 Satz. Es sei X ein kompakter Raum und Y ein Hausdorff-Raum. Wenn es eine stetige bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt, dann ist f ein Homöomorphismus. Insbesondere folgt, daß X ebenfalls ein Hausdorff-Raum ist.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. □

8.20 Hilfssatz. Es seien A und B disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raums X. Dann gibt es disjunkte offene Mengen U und V mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.

Beweis. Es sei $b \in B$. Wir zeigen zunächst: Es gibt disjunkte offene Mengen U, V mit $A \subseteq U$ und $b \in V$. Da X Hausdorffsch ist, können wir für jedes $a \in A$ disjunkte offene Mengen U_a und V_a finden, so daß $a \in U_a$ und $b \in V_a$. Da $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$, gibt es endlich viele $a_1, \ldots, a_n \in A$, so daß $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ und $V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$. Dann sind U und V offen und disjunkt mit $A \subseteq U$ und $b \in V$.

Nun zeigen wir die Behauptung: Nach dem Vorhergehenden kann man für jedes $b \in B$ disjunkte offene Mengen U_b und V_b finden mit $A \subseteq U_b$ und $b \in V_b$. Wegen $B \subseteq \bigcup_{b \in B} V_b$ gibt es endlich viele $b_1, \ldots, b_m \in B$, so daß $B \subseteq V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_m}$. Wir setzten $U := U_{b_1} \cap \cdots \cap U_{b_m}$, und $V := V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_m}$. Dann sind U und V disjunkte offene Mengen mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. □

8.21 Folgerung. Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.

Beweis. Es sei X kompakt und T_2. Es seien A und B abgeschlossen in X. Nach 8.5 sind A und B kompakt. Nach 8.20 haben dann A und B disjunkte offene Umgebungen, sofern sie disjunkt sind. □

Man kann also in kompakten metrischen Räumen das Urysohnsche Lemma 7.3 verwenden.

8.22 Lokal kompakte Räume. Ein topologischer Raum X wird *lokal kompakt* genannt, falls jeder seiner Punkte eine Umgebungsbasis kompakter Mengen besitzt, d.h. falls es für jedes $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine kompakte Menge Q mit $x \in Q^o$, $Q \subseteq U$ gibt.

Ein kompakter Raum muß nicht lokal kompakt sein (siehe Übungen).

Beispiel. Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind lokal kompakt in der üblichen Topologie. Jede bedingt vollständige, linear geordnete Menge ist lokal kompakt in der Ordnungstopologie.

Übung. Jeder offene bzw. abgeschlossene Teilraum eines lokal kompakten Raums ist lokal kompakt.

8.23 Lokal kompakte Hausdorff-Räume. Ein Hausdorff-Raum ist genau dann lokal kompakt, wenn jeder seiner Punkte (mindestens) eine kompakte Umgebung besitzt.

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und $x_0 \in X$. Sei K eine kompakte Umgebung von x_0. Wir zeigen: Ist U eine beliebige offene Umgebung von x_0, dann gibt es eine kompakte Umgebung Q von x_0 mit $Q \subseteq U$. (Da wir uns in einem Hausdorff-Raum befinden, ist Q auch abgeschlossen.)

Indem wir U durch $U \cap K^\circ$ ersetzen, können wir o.B.d.A. $U \subseteq K$ annehmen. Nun ist X ein Hausdorff-Raum, also sind $\{x_0\}$ und K abgeschlossen. Ferner ist K ein normaler insbesondere also regulärer Raum nach 8.21. Also gibt es eine in K abgeschlossene Umgebung Q von x_0 mit $Q \subseteq U$. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Teilraums K ist Q auch kompakt □

Achtung. Es gibt lokal kompakte Hausdorff-Räume, die nicht normal sind.

8.24 Vollständig reguläre Räume. Ein topologischer Raum X wird *vollständig regulär* genannt, wenn er Hausdorffsch ist und es für jedes $x_0 \in X$ und jede Umgebung U von x_0 eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ so gibt, daß

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{für } x \notin U \end{cases}$$

Übung. Jeder lokal kompakte Hausdorff-Raum ist vollständig regulär. Weiterhin ist jeder normale Raum vollständig regulär und jeder vollständig reguläre Raum ist regulär.

8.25 Relativ kompakte Mengen. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X wird *relativ kompakt* genannt, wenn ihre abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ in X kompakt ist.

9. Konvergenz

9.1 Folgenkonvergenz. In einem metrischen Raum (X, d) sagt man, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in X$ konvergiere gegen einen Punkt $a \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ d(a, x_n) < \varepsilon \quad (\text{d.h. } x_n \in B_\varepsilon(a))$$

Da jede Umgebung U von a eine offene Kugel $B_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon > 0$ enthält, kann man den Begriff der Konvergenz auch mit Umgebungen formulieren: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}_a.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ x_n \in U$$

Diese Formulierung ist in jedem topologischen Raum sinnvoll:

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wir sagen, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in X *konvergiere gegen* $a \in X$, wenn

$$\forall U \in \mathcal{U}_a.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ x_n \in U$$

Wir sagen dann auch, a sei ein *Grenzwert* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir schreiben dann auch $x_n \to a$. Eine Folge wird konvergent genannt, wenn sie einen Grenzwert besitzt.

In metrischen Räumen lassen sich abgeschlossene Mengen (also auch offene Mengen und Umgebungen) und Stetigkeit von Abbildungen mit Hilfe des Konvergenzbegriffs beschreiben:

9.2 Hilfssatz. Ein Element a ist genau dann Berührungspunkt einer Teilmenge A in einem metrischen Raum (X, d) , wenn a Grenzwert einer Folge von Punkten $a_n \in A$ ist.

Insbesondere ist A genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte konvergenter Folgen von Punkten $a_n \in A$ wiederum zu A gehören.

9.3 Hilfssatz. Eine Funktion $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für alle konvergenten Folgen in X gilt:

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$$

In topologischen Räumen ist Folgenkonvergenz unzureichend, denn in diesen sind die Hilfssätze 9.2 und 9.3 nicht immer richtig.

Beispiel. Es sei X eine überabzählbare Menge und $\leq$ eine Wohlordnung auf X.

Da X überabzählbar ist, muß es Elemente $x \in X$ geben, so daß das Anfangsstück $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\}$ überabzählbar ist. Da X durch $\leq$ wohlgeordnet ist, gibt es ein kleinstes Element Ω mit dieser Eigenschaft (Ω wird auch die kleinste überabzählbare Ordinalzahl genannt). Es gilt also: $\downarrow \Omega$ ist überabzählbar, $\downarrow x$ ist abzählbar für $x < \Omega$.

Wir betrachten auf $(X, \leq)$ die Intervalltopologie. Für diese ist das offene Anfangsstück $\mathcal{O} = \{x \in X \mid x < \Omega\}$ nicht abgeschlossen, der Abschluß $\overline{\mathcal{O}}$ ist $\downarrow \Omega = \{x \in X \mid x \leq \Omega\}$. Also ist Ω ein Berührungspunkt von $\mathcal{O}$. Aber es gibt keine Folge in $\mathcal{O}$, die gegen Ω konvergiert. Denn sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in $\mathcal{O}$ und a die kleinste gemeinsame obere Schranke der x_n mit $n \in \mathbb{N}$. (Eine solche existiert, da Ω eine solche ist und X wohlgeordnet ist.) Da alle Anfangsstücke $\downarrow x_n$ abzählbar sind und eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \downarrow x_n$ abzählbar. Nun ist aber

$\downarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \downarrow x_n \cup a$, also auch abzählbar. Es folgt $a < \Omega$, und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in dem abgeschlossenen Intervall $\downarrow A$ enthalten, kann also nicht gegen Ω konvergieren. Also ist 9.2 in $(X, \leq)$ mit der Intervalltopologie nicht erfüllt.

Ebenso ist 9.3 verletzt: Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ falls $x < \Omega$, $f(x) = 1$ für $x \geq \Omega$. Versehen wir X und $\mathbb{R}$ mit der Intervalltopologie, dann ist f nicht stetig, denn $f^{-1}(\{0\}) = \mathcal{O}$ ist nicht abgeschlossen, obwohl $\{0\}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Aber aus dem oben gesagten folgt, daß $x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$ gilt.

Der entscheidende Punkt an dem Gegenbeispiel ist, daß Ω *keine* abzählbare Umgebungsbasis besitzt, daß also das 1. Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Die Hilfsätze (9.2, 9.3) gelten für topologische Räume, die das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Beweis für 9.2. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $A \subseteq X$ und $a \in \overline{A}$. Wir wählen eine abzählbare Umgebungsbasis $U_1, U_2, U_3, \ldots$ von a. Setzen wir $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ für alle n, so haben wir wieder eine Umgebungsbasis $V_1, V_2, V_3, \ldots$ von a mit $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \cdots$. Da $a \in \overline{A}$, ist $A \cap V_n \neq \varnothing$ für alle n. Wähle nun $a_n \in A \cap V_n$ für alle n. Dann ist a_n eine Folge von Punkten in A, die gegen a konvergiert, denn jede Umgebung U von a enthält eine Basisumgebung V_{n_0}, und es gilt $a_n \in V_n \subseteq V_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$. Ist umgekehrt a Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus A, dann enthält jede Umgebung von a die meisten der a_n, also sicher Elemente von A. Folglich ist a ein Berührungspunkt von A. $\square$

9.4 Filter und Filterbasen. Es sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ wird *Filter auf* X genannt, falls

(F0) $$\mathcal{F} \neq \varnothing$$

(F1) $$\forall F \in \mathcal{F}.\ F \neq \varnothing$$

(F2) $$F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

(F3) $$F \in \mathcal{F} \text{ und } F \subseteq G \subseteq X \implies G \in \mathcal{F}$$

Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, so wird ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ eine *Filterbasis von* $\mathcal{F}$ genannt, falls es zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq F$ gibt.

Eine Filterbasis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{F}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(B0) $$\mathcal{B} \neq \varnothing$$

(B1) $$\forall B \in \mathcal{B}.\ B \neq \varnothing$$

(B2) $$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies \exists B_3 \in \mathcal{B}.\ B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Ist umgekehrt $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein nicht leeres Mengensystem, das die Eigenschaften (B0)–(B2) hat, so ist das Mengensystem

$$\langle \mathcal{B} \rangle := \{F \subseteq X \mid \text{es gibt ein } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subseteq F\}$$

ein Filter, wie man leicht nachprüft, und $\mathcal{B}$ ist eine Filterbasis von $\langle \mathcal{B} \rangle$. Darum nennt man jedes nicht leere Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit den Eigenschaften (B0)–(B2) eine Filterbasis auf X und $\langle \mathcal{B} \rangle$ den von $\mathcal{B}$ erzeugten Filter.

Beispiel.

1. Ist x ein Element eines topologischen Raumes X, so ist die Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x ein Filter, der *Umgebungsfilter von* x. Die offenen Umgebungen sind eine Filterbasis hiervon. Allgemeiner: Jede Umgebungsbasis ist eine Filterbasis des Umgebungsfilters.
2. Sei X eine unendliche Menge. Die koendlichen Mengen, d.h. die Teilmengen $F \subseteq X$ mit endlichem Komplement, bilden einen Filter. Im Falle $X = \mathbb{N}$ wird dieser Filter koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ der *Fréchet-Filter* genannt. Eine Filterbasis des Fréchet-Filters wird von den Endstücken
$$\uparrow n_0 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} \quad \text{für } n_0 \in \mathbb{N}$$
gebildet.
3. Sei I eine gerichtete Menge. Die Endstücke $\uparrow i_0 := \{i \in I \mid i \geq i_0\}$ mit $i_0 \in I$ bilden eine Filterbasis. (B1) ist klar. (B2): Für gegebene i_1, $i_2 \in I$ gibt es ein $i_3 \in I$ mit $i_1, i_2 \leq i_3$. Es folgt $\uparrow i_3 \subseteq \uparrow i_1 \cap \uparrow i_2$.

9.5 Konvergenz von Filtern und Filterbasen. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis (oder ein Filter) auf X. Wir sagen, $\mathcal{B}$ *konvergiert gegen* einen Punkt $x \in X$ (oder x ist *Grenzwert* der Filterbasis bzw. des Filters $\mathcal{B}$) und wir schreiben $\mathcal{B} \to x$, falls es zu jeder Umgebung U von x ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq U$ gibt.

Es ist klar, daß ein Filter F genau dann gegen x konvergiert, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ des Filters F gegen x konvergiert.

Beispiel.

1. In einem topologischen Raum X konvergiert der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ eines Punktes x stets gegen x.
2. Der Filter der koendlichen Teilmengen auf $\mathbb{N}$ (Fréchet-Filter) konvergiert nicht für die diskrete Topologie auf $\mathbb{N}$, auch nicht für die obere Topologie auf $\mathbb{N}$. Dagegen konvergiert er für die untere Topologie, und dann sogar gegen jeden Punkt.
3. Ein Filter kann mehrere Grenzpunkte besitzen.

9.6 Vergleich von Filterbasen und Filtern. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Filterbasen auf X. Wir sagen $\mathcal{B}'$ *sei feiner als* $\mathcal{B}$, falls es zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ein $B' \in \mathcal{B}'$ mit $B' \subseteq B$ gibt. Das ist gleichbedeutend damit, daß $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$, d.h. daß der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter in dem von $\mathcal{B}'$ erzeugten Filter enthalten ist. Für Filter F und F' auf X gilt also: F' ist feiner als $F \iff F \subseteq F'$.

Die Konvergenz einer Filterbasis $\mathcal{B}$ gegen einen Punkt x ist gleichwertig damit, daß $\mathcal{B}$ feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x ist.

Bemerkung. Bei zwei Filterbasen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ kann jede feiner sein als die andere, ohne daß sie gleich sind (z.B. $\mathcal{B} = \{]0, \frac{1}{2n}[\mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{B}' = \{]0, \frac{1}{2n+1}[\mid n \in \mathbb{N}\}$). Sie erzeugen dann aber denselben Filter.

Der Begriff der Verfeinerung bei Filterbasen verallgemeinert den Begriff der Teilfolgen bei Folgen. Es gilt beispielsweise: Wenn eine Filterbasis $\mathcal{B}$ gegen einen Punkt x konvergiert, dann konvergiert jede Verfeinerung $\mathcal{B}'$ ebenfalls gegen x. Der nachfolgende Begriff hat jedoch keine Entsprechung bei Folgen:

9.7 Ultrafilter. Ein maximaler Filter $\mathcal{U}$ auf X, d.h. ein Filter $\mathcal{U}$ auf X, der keine echte Verfeinerung besitzt, wird *Ultrafilter* genannt.

Beispiel. Für $x \in X$ ist $\mathcal{U}_x := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ ein Ultrafilter. Denn wäre $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{U}_x \subsetneq \mathcal{F}$, dann gäbe es $B \in \mathcal{F}$ mit $x \notin B$ und es würde folgen: $\{x\} \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, also $\varnothing = \{x\} \cap B \in \mathcal{F}$, ein Widerspruch.

Die Ultrafilter vom Typ $\mathcal{U}_x$ nennt man *fixierte* Ultrafilter. Alle anderen Ultrafilter nennt man *frei*. Die fixierten Ultrafilter sind die einzigen, die man konstruktiv angeben kann. Um die Existenz anderer Ultrafilter zu zeigen, braucht man das Lemma von Zorn, das zum Auswahlaxiom "aquivalent ist, wie im Anhang nachzulesen ist:

9.8 Satz. Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X läßt sich zu einem Ultrafilter verfeinern.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Sei γ die Menge aller Filter $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Bezüglich $\subseteq$ ist γ induktiv: Wegen $\mathcal{F} \in \gamma$ ist γ nicht leer. Sei $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ eine Kette in γ. $\bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$ ist ein Filter:

1. Ist $F \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$, dann gibt es ein i mit $F \in \mathcal{G}_i$. Also $F \neq \varnothing$.
2. Seien F_1 und $F_2 \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$. Dann gibt es ein i_1 und ein i_2, so daß $F_1 \in \mathcal{G}_{i_1}$ und $F_2 \in \mathcal{G}_{i_2}$. Da die $\mathcal{G}_i$ eine Kette bilden, gilt $\mathcal{G}_{i_1} \subseteq \mathcal{G}_{i_2}$ oder $\mathcal{G}_{i_2} \subseteq \mathcal{G}_{i_1}$. Im ersten Fall gilt $F_1, F_2 \in \mathcal{G}_{i_2}$ also $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G}_{i_2} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$. Im zweiten Fall schließt man analog.
3. Sei $F \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$ und $F \subseteq G$. Da $F \in \mathcal{G}_i$ für ein i, folgt auch $G \in \mathcal{G}_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$.

Nach dem Zornschen Lemma gibt es in γ ein maximales Element $\mathcal{U}$. Dieses ist ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält. $\square$

9.9 Charakterisierung von Ultrafiltern. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf eine Menge X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $A \subseteq X$. Falls es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $A \cap F = \varnothing$ gibt, dann folgt $F \subseteq X \setminus A$, also $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Falls $A \cap F \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt, dann ist $\{A \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis. Der von dieser Filterbasis erzeugte Filter $\mathcal{F}'$ ist feiner als $\mathcal{F}$ und enthält A. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter war, muß $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ gelten, also $A \in \mathcal{F}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter mit $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ für alle $A \subseteq X$. Wäre $\mathcal{F}'$ echt feiner als $\mathcal{F}$, so müßte es ein $A \in \mathcal{F}'$ mit $A \notin \mathcal{F}$, dann ist ist aber $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, also $\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{F}'$ ein Widerspruch. $\square$

Folgerung: Ultrafilter sind prim. Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf einer Menge X und sind $C_1, \dots, C_n$ endlich viele Teilmengen von X mit $C_1 \cup \dots \cup C_n \in \mathcal{F}$, dann gilt $C_i \in \mathcal{F}$ für mindestens ein i.

Beweis. Würde nämlich $C_i \notin \mathcal{F}$ für alle i gelten, dann würde nach dem vorhergehenden Satz $X \setminus C_i \in \mathcal{F}$ für alle i gelten, woraus $X \setminus (C_1 \cup \cdots \cup C_n) = (X \setminus C_1) \cap \cdots \cap (X \setminus C_n) \in \mathcal{F}$ folgen würde. Es können aber nicht eine Menge $C_1, \ldots, C_n$ und ihr Komplement zu ein und demselben Filter gehören. □

9.10 Spurfilter. Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf einer Menge X und $A \subseteq X$. Wenn $B \cap A \neq \varnothing$ für alle $B \in \mathcal{B}$, dann ist

$$\mathcal{B} \cap A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Filterbasis auf A. Wir nennen $\mathcal{B} \cap A$ die *Spur* der Filterbasis $\mathcal{B}$ aus A.

Wenn $\mathcal{B}$ sogar ein Filter ist, dann ist $\mathcal{B} \cap A$ ein Filter auf A. Ist $\mathcal{B}$ ein Ultrafilter auf X, dann ist $\mathcal{B} \cap A$ ein Ultrafilter auf A.

Beweis. Zum Beweis verwenden wir das Kriterium aus 9.9: Sei $C \subseteq A$. Dann gilt $C \in \mathcal{B}$ oder $X \setminus C \in \mathcal{B}$, da $\mathcal{B}$ ein Ultrafilter auf X ist. Es folgt $C = C \cap A \in \mathcal{B} \cap A$ oder $A \setminus C = (X \setminus C) \cap A \in \mathcal{B} \cap A$. Also ist $\mathcal{B} \cap A$ ein Ultrafilter auf A. □

Natürlich ist jede Filterbasis auf A auch eine Filterbasis auf der Obermenge X.

9.11 Bildfilter. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X, so ist

$$f(\mathcal{B}) := \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

eine Filterbasis auf Y (Beweis?). Wir nennen sie das *Bild der Filterbasis* $\mathcal{B}$.

Ist $\mathcal{F}$ ein Filter, so ist $f(\mathcal{F})$ zwar eine Filterbasis, braucht aber kein Filter zu sein. Den von $f(\mathcal{F})$ erzeugten Filter $\langle f(\mathcal{F})\rangle$ nennen wir dann auch das *Bild des Filters* $\mathcal{F}$. Ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X, so ist sein Bild $\langle f(\mathcal{U})\rangle$ ein Ultrafilter auf Y.

Beweis. Sei $A \subseteq Y$. Nach 9.9 gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ oder $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, also $f(f^{-1}(A)) \in f(\mathcal{U})$ oder $f(X \setminus f^{-1}(A)) \in f(\mathcal{U})$. Da $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ und $f(X \setminus f^{-1}(A)) \subseteq Y \setminus A$, folgt $A \in \langle f(\mathcal{U})\rangle$ oder $Y \setminus A \in \langle f(\mathcal{U})\rangle$. Also ist $\langle f(\mathcal{U})\rangle$ ein Ultrafilter nach 9.9. □

Bemerkung. Sind X und Y topologische Räume, dann ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann stetig, wenn für jedes $x \in X$ das Bild $f(\mathcal{U}(x))$ des Umgebungsfilters von x feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(f(x))$ von $f(x)$.

Die beiden folgenden Hilfssätze zeigen, daß der Begriff der Filterkonvergenz die Eigenschaften hat, die wir uns von einem Konvergenzbegriff wünschen:

9.12 Hilfssatz. Sei A Teilmenge eines topologischen Raums. Für ein a in X gilt $a \in \overline{A}$ genau dann, wenn es einen Filter $\mathcal{F}$ auf A gibt, der gegen a konvergiert.

Beweis. Sei $a \in \overline{A}$. Für jede Umgebung U von a ist dann $U \cap A \neq \varnothing$. Der Spurfilter $\mathcal{U}(a) \cap A$ ist ein Filter auf A, der gegen a konvergiert.

Sei umgekehrt a der Grenzwert eines Filters $\mathcal{F}$ auf A. Dann gibt es für jede Umgebung U von a ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq U$. Da $\varnothing \neq F \subseteq A$, folgt $U \cap A \neq \varnothing$, d.h. $a \in \overline{A}$. □

Folgerung. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder Grenzwert eines Filters auf A wieder zu A gehört.

9.13 Hilfssatz. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X gilt: $\mathcal{F} \to x \implies f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Beweis. Sei zunächst f stetig und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Dann ist $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$. Dann ist aber auch $f(\mathcal{F})$ feiner als $f(\mathcal{U}(x))$. Wenn f stetig ist, dann ist $f(\mathcal{U}(x))$ feiner als $\mathcal{U}(f(x))$, also ist auch $f(\mathcal{F})$ feiner als $\mathcal{U}(f(x))$, d.h. $f(\mathcal{F})$ konvergiert gegen $f(x)$.

Umgekehrt gilt sicher $\mathcal{U}(x) \to x$. Wenn man daraus $f(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$ folgern kann, so ist $f(\mathcal{U}(x))$ feiner als $\mathcal{U}(f(x))$, d.h. f ist stetig nach der Bemerkung in 9.11. □

Grenzwerte von Filtern (sofern diese existieren) müssen nicht eindeutig sein. Betrachtet man beispielsweise die Menge $\mathbb{N}$ mit der koendlichen Topologie, so konvergiert der Fréchet-Filter $\mathcal{F}$ gegen jedes $n \in \mathbb{N}$: Ist U eine Umgebung von n, dann ist U koendlich und folglich $U \in \mathcal{F}$.

In Hausdorff-Räumen kann dies nicht passieren:

9.14 Satz. In einem Hausdorff-Raum X hat ein Filter $\mathcal{F}$ höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Nehmen wir an, ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiere gegen zwei verschiedene Punkte $a \neq b$. Diese haben disjunkte Umgebungen U und V. Da $\mathcal{F}$ gegen a bzw. b konvergiert, gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq U$ bzw. ein $G \in \mathcal{F}$ mit $G \subseteq V$. Es würde folgen $G \cap F \subseteq V \cap U = \varnothing$, Widerspruch zu $G \cap F \in \mathcal{F}$. □

In metrischen Räumen konnten wir Kompaktheit dadurch kennzeichnen, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Ähnlich kann man nun allgemein Kompaktheit kennzeichnen. Zuvor noch der Begriff des Berührpunktes eines Filters:

9.15 Definition. Es sei $\mathcal{F}$ eine Filterbasis (oder ein Filter) auf einem topologischen Raum X. Die abgeschlossenen Hüllen

$$\overline{F} \quad \text{mit } F \in \mathcal{F}$$

bilden ebenfalls eine Filterbasis auf X. Die Punkte

$$x \in \bigcap \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$$

nennen wir die *Berührpunkte* des Filters $\mathcal{F}$. Solche muß es nicht geben, da der Durchschnitt leer sein kann.

Man sieht leicht, daß x genau dann ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist, wenn $F \cap U \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und alle $U \in \mathcal{U}(x)$.

9.16 Satz. Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

1. X ist kompakt.
2. Jeder Filter auf X hat einen Berührpunkt (in X).
3. Jeder Filter auf X hat eine konvergente Verfeinerung.
4. Jeder Ultrafilter auf X konvergiert (in X).

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Nach der Folgerung in 8.9 ist der Durchschnitt einer Filterbasis abgeschlossener Mengen in einem kompakten Raum nicht leer.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Nach (2) hat $\mathcal{F}$ einen Berührpunkt a. Wie wir festgestellt haben, gilt

$$F \cap U \neq \varnothing \text{ für alle } F \in \mathcal{F} \text{ und alle } U \in \mathcal{U}(a).$$

Also ist

$$\mathcal{G} := \{F \cap U \mid F \in \mathcal{F} \text{ und } U \in \mathcal{U}(a)\}$$

eine Filterbasis. Diese ist feiner als $\mathcal{F}$ und andererseits feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(a)$. Also konvergiert $\mathcal{G}$ gegen a.

(3) $\Rightarrow$ (4): Ist $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter und hat $\mathcal{G}$ wegen (3) eine konvergente Verfeinerung $\mathcal{H}$, so muß $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ sein, d.h. $\mathcal{G}$ konvergiert.

(4) $\Rightarrow$ (1): Es sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis abgeschlossener Mengen auf X. Nach 8.9 genügt es zu zeigen, daß $\bigcap\{B \mid B \in \mathcal{B}\} \neq \varnothing$. Nach 9.8 läßt sich $\mathcal{B}$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ verfeinern. Wegen (4) hat $\mathcal{F}$ einen Grenzwert a. Dieser ist erst recht ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$, d.h. $a \in \overline{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{B}$ ist, gibt es zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq B$. Da B abgeschlossen ist, gilt sogar $\overline{F} \subseteq B$ und folglich $a \in B$, und dies für alle $B \in \mathcal{B}$. Also ist $a \in \bigcap\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$. □

Der folgende Satz besagt, daß ein Filter auf einem Produktraum genau dann konvergiert, wenn er in jedem Punkt der Indexmenge konvergiert. Darum nennt man die Produkttopologie auch die Topologie der punktweisen Konvergenz.

9.17 Konvergenz in der Produkttopologie. Gegeben sei eine Familie nicht leerer topologischer Räume $(X_i)_{i\in I}$ und ein Filter $\mathcal{F}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$. Dann gilt: $\mathcal{F}$ konvergiert auf dem Produktraum $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann (gegen $a = (a_i)_{i\in I}$), wenn für jedes $i \in I$ der Bildfilter $\mathcal{F}_i := \mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$ in X_i (gegen a_i) konvergiert.

Beweis. Da alle Projektionen pr_i stetig sind, folgt aus der Konvergenz von $\mathcal{F}$ die Konvergenz der Bildfilter $\mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$. Nehmen wir umgekehrt an, daß der Bildfilter $\mathcal{F}_i = \mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$ gegen ein $a_i \in X_i$ konvergiert. Wir setzen $a := (a_i)_{i\in I}$ und behaupten, daß $\mathcal{F}$ gegen a konvergiert. Sei U eine Umgebung von a. Nach der Definition der Produkttopologie gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$ und offene Mengen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ in $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$ derart, daß $a \in \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \mathrm{pr}_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subseteq U$. Da $a_{i_j} = \mathrm{pr}_{i_j}(a) \in U_{i_j}$ und $\mathrm{pr}_{i_j}(\mathcal{F})$ nach Voraussetzung gegen a_{i_j} konvergiert, gibt es für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $F_j \in \mathcal{F}$, so daß $\mathrm{pr}_{i_j}(F_j) \subseteq U_{i_j}$. Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$. Für dieses gilt $\mathrm{pr}_{i_j}(F) \subseteq U_{i_j}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ und folglich $F \subseteq \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \mathrm{pr}_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subseteq U$. Wir haben hiermit gezeigt, daß $\mathcal{F}$ gegen a konvergiert. □

Achtung. In diesem Beweis wurde das Auswahlaxiom verwendet, es sei denn, alle X_i sind Hausdorff-Räume. Wo?

Der folgende Satz, der besagt, daß ein Produkt kompakter Räume kompakt ist, ist von großer Bedeutung für die Analysis.

9.18 Satz von Tychonoff. Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht leerer topologischer Räume. Dann gilt: $\prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn alle X_i $(i \in I)$ kompakt sind.

Beweis. Setzen wir zunächst voraus, alle X_i mit $i \in I$ seien kompakt. Um zu zeigen, daß $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist, betrachten wir einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$. Nach 9.11 sind die Bildfilter $\mathcal{F}_i := \mathrm{pr}_i(\mathcal{F})$ ebenfalls Ultrafilter. Nach 9.16 sind die $\mathcal{F}_i$ konvergent für alle i. Nach 9.17 ist dann auch $\mathcal{F}$ konvergent. Aus 9.16 folgt wieder, daß $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist. Da alle X_i nicht leer sind, sind die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ surjektiv. Da die pr_i stetig sind, folgt die Kompaktheit der X_i nach 8.6. □

An dieser Stelle sei ein Beweis des Alexanderschen Subbasis Lemmas eingeschoben:

9.19 Einschub: Beweis von Alexanders Subbasis Lemma 8.10. Es sei $\mathcal{S}$ Subbasis für die offenen Mengen einer Topologie auf X mit der Eigenschaft, daß jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Die Menge $\mathcal{T}$ aller Komplementmengen $C = X \setminus U, U \in \mathcal{S}$ hat dann die folgende Eigenschaft:

(K) Jede Teilfamilie $(T_j)_j$ von $\mathcal{T}$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft (siehe 8.7) hat einen nichtleeren Durchschnitt.

Wir zeigen:

- Die Menge $\mathcal{T}'$ aller endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ hat ebenfalls die Eigenschaft (K).
  (In der Tat, sei $T'_j = T_{j1} \cap \dots \cap T_{jn_j}$ mit $T_{jn_i} \in \mathcal{T}$ eine Familie in $\mathcal{T}'$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Dann gibt es nach 9.8einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $T'_j \in \mathcal{F}$ für alle j. Wegen der Folgerung 9 gehört für jedes j schon eine der Mengen T_{ji_j} zu dem Ultrafilter $\mathcal{F}$. Also hat auch die Familie dieser T_{ji_j} die endliche Durchschnittseigenschaft und damit einen nichtleeren Durchschnitt, da $\mathcal{T}$ die Eigenschaft (K) besitzt. Erst recht haben dann die Mengen T'_j einen nichtleeren Durchschnitt.)
- Die Menge $\mathcal{T}''$ von Durchschnitten beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{T}'$ hat ebenfalls die Eigenschaft (K).
  (Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden.)

$\mathcal{T}''$ ist das System der abgeschlossenen Teilmengen einer Toplogie, die auf Grund des eben gezeigten nach der Folgerung in 8.9 kompakt ist. Die offenen Mengen dieser Topologie sind gerade die offenen Mengen der von $\mathcal{S}$ erzeugten Topologie.

9.20 Verallgemeinerte Folgen: Netze.

Definition. Unter einer *gerichteten Menge* verstehen wir eine nicht leere geordnete Menge I mit der Eigenschaft, daß je zwei Elemente i, j aus I eine gemeinsame obere Schranke $k \geq i, j$ in I haben.

Beispiel.

1. $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung $\leq$.
2. Jede nicht leere linear geordnete Menge ist gerichtet.
3. Sei $X \neq \emptyset$. Die Menge $\mathfrak{P}_f(X)$ aller endlichen Teilmengen ist durch $\subseteq$ gerichtet: Für je zwei endliche Teilmengen $E, F \subseteq X$ ist $E \cup F$ eine gemeinsame obere Schranke.

4. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Die Familie $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x ist gerichtet bzgl. der *umgekehrten* Inklusion $U \preceq V \iff U \supseteq V$. In derselben Weise ist jede Umgebungsbasis $\mathcal{B}(x)$ von x gerichtet.

Definition. Sei X eine Menge. Unter einer *verallgemeinerten Folge* (=*Netz*, =*Moore-Smith-Folge*) in X verstehen wir eine Abbildung $\Phi\colon I \to X$, wobei I eine gerichtete Menge ist. Statt $\Phi(i)$ schreiben wir x_i, und statt Φ schreiben wir $(x_i)_{i\in I}$ für eine verallgemeinerte Folge.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Wir sagen, das Netz $(x_i)_{i\in I}$ *konvergiere gegen* den Punkt $x \in X$ (oder auch: x *ist ein Grenzwert* des Netzes $(x_i)_{i\in I}$), falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(x).\ \exists i_0 \in I.\ \forall i \geq i_0.\ x_i \in U.$$

Wir schreiben dann $x_i \to x$. Für gewöhnliche Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben wir gerade den Konvergenzbegriff aus 9.1.

Beispiel.

1. Wählen wir für jede Umgebung U eines Punktes $x \in X$ ein Element $x_U \in U$ beliebig aus, so haben wir ein Netz $(x_U)_{U\in\mathcal{U}(x)}$, und dieses konvergiert gegen x.
2. Betrachten wir das Gegenbeispiel $(X, \leq)$ aus 9.1. Wählen wir als Indexmenge die Menge $\mathcal{O} = \{x \in X \mid x < \Omega\}$ und ordnen wir jedem $i \in \mathcal{O}$ ein x_i mit $i \leq x_i \leq \Omega$ zu, so haben wir ein Netz auf $\mathcal{O}$, das in der Intervalltopologie gegen Ω konvergiert.

Die folgenden Hilfssätze zeigen, daß durch die Verallgemeinerung des Folgenbegriffs die in 9.2, 9.3 aufgezeigten Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff aufgehoben werden:

Hilfssatz. Sei A eine Teilmenge eines topologischen Raums (X, τ). Dann gilt $a \in \overline{A}$ genau dann, wenn a Grenzwert eines Netzes $(a_i)_{i\in I}$ auf A ist.

Beweis. Sei zunächst $(a_i)_{i\in I}$ ein Netz in A, das gegen ein $a \in X$ konvergiert. Dann enthält jede Umgebung U von a alle a_i für alle i, die größer als ein i_0 sind. Insbesondere enthält U gewisse Elemente von A. Also ist a ein Berührungspunkt von A, d.h. $a \in \overline{A}$. Für jede Umgebung U von a ist dann $A \cap U \neq \varnothing$ und wir können ein $a_U \in A \cap U$ auswählen. Damit haben wir ein Netz $(a_U)_{U\in\mathcal{U}(a)}$ in A, das gegen a konvergiert, wie wir schon in oben gesehen haben. □

Hilfssatz. Seien (X, τ_1) und (Y, τ_2) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X gilt:

$$x_i \to x \implies f(x_i) \to f(x)$$

Beweis. Sei zunächst f stetig und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X mit $x_i \to x$. Wir wollen zeigen: $f(x_i) \to f(x)$. Dazu betrachten wir eine beliebige Umgebung U von $f(x)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung U' von x. Also können wir ein i_0 so finden, daß $x_i \in f^{-1}(U)$ für alle $i \geq i_0$. Es folgt $f(x_i) \in U$ für alle $i \geq i_0$.

Nehmen wir umgekehrt an, f sei nicht stetig. Dann gibt es ein Punkt x, in dem f nicht stetig ist. Wir können also eine Umgebung U von $f(x)$ finden, so daß $f^{-1}(U)$ keine

Umgebung von x ist. Jede Umgebung V von x enthält also ein Element x_V, das nicht zu $f^{-1}(U)$ gehört. Das Netz $(x_V)_{V\in\mathcal{U}(x)}$ konvergiert gegen x, aber $(f(x_V))_{V\in\mathcal{U}(x)}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, da $f(x_V)\notin U$ für alle V. $\square$

9.21 Folgen, Netze und Filter.

1. Auf $\mathbb{N}$ bilden die Endstücke $\uparrow n_0 := \{n\in\mathbb{N}\mid n\geq n_0\}$ mit $n_0\in\mathbb{N}$ eine Filterbasis, und zwar eine Basis des Fréchet-Filters, der aus den Komplementen der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ besteht.

   Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten x_n eines topologischen Raumes X ist nichts anderes als eine Abbildung
   $$n\mapsto x_n\colon \mathbb{N}\to X.$$
   Vergleicht man nun die Definitionen der Konvergenz für Folgen und Filter, so sieht man, daß eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X genau dann gegen einen Punkt x aus X konvergiert, wenn der zu der Folge gehörige Fréchet-Filter gegen x konvergiert. Die Konvergenz von Folgen läßt sich also als Konvergenz von geeigneten Filtern auffassen.

2. Sei nun I eine beliebige gerichtete Menge. Die Endstücke der Form
   $$\uparrow i_0 := \{i\in I\mid i\geq i_0\}\quad \text{mit } i_0\in I$$
   bilden eine Filterbasis. In der Tat ist jedes Endstück $\uparrow i_0\neq\varnothing$, und sind $\uparrow i_1$ und $\uparrow i_2$ zwei solche Endstücke, so kann man, da I gerichtet ist, ein $i_3\in I$ mit $i_3\geq i_1$ und $i_3\geq i_2$ finden, und es gilt dann $\uparrow i_3\subseteq\uparrow i_1\cap\uparrow i_2$.

   Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ von Punkten eines topologischen Raumes X ist nichts anderes als eine Abbildung
   $$i\mapsto x_i\colon I\to X.$$
   Das Bild der obigen Filterbasis ist eine Filterbasis auf X. Sie besteht aus den *Endstücken* des Netzes:
   $$\{x_i\mid i\geq i_0\}\quad \text{mit } i_0\in I$$
   Den davon erzeugten Filter nennen wir den zu dem Netz $(x_i)_{i\in I}$ gehörigen Filter. Vergleicht man die Definitionen der Konvergenz von Netzen und Filtern, so sieht man, daß ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X genau dann gegen einen Punkt x konvergiert, wenn der zugehörige Filter gegen x konvergiert. Die Konvergenz von Netzen läßt sich also als Konvergenz von geeigneten Filtern auffassen.

   Umgekehrt kann man jedem Filter $\mathcal{F}$ (und jeder Filterbasis) Netze zuordnen: Der Filter $\mathcal{F}$ ist nämlich durch Inklusion nach unten gerichtet. Wählen wir für jedes $F\in\mathcal{F}$ ein Element $x_F\in F$, so erhalten wir mithilfe des Auswahlaxioms ein Netz $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$. Wenn der Filter $\mathcal{F}$ gegen ein x konvergiert, dann konvergieren auch all diese Auswahlnetze $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ gegen x.

Alles was sich mit Konvergenz von Netzen ausdrücken läßt, läßt sich also auch mit Konvergenz von Filtern ausdrücken und umgekehrt. Man kann also je nach Lust und Laune mit dem einen oder mit dem anderen Konvergenzbegriff arbeiten. Mit Netzen zu arbeiten hat den Vorteil, daß die Analogie zu den gewohnten Folgen groß ist und hilfreich sein kann zum Auffinden von Beweisen. Mit Filtern zu arbeiten ist jedoch eleganter.

10. Der Satz von Arzela-Ascoli

In diesem Abschnitt sei stets X ein kompakter Hausdorff-Raum und (Y, d) ein beliebiger metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon X \to Y$. Ferner bezeichne $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ eine Menge stetiger Funktionen.

Bemerkung. Jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ist beschränkt. In der Tat, da X kompakt ist, wird das Bild $f(X)$ ebenfalls kompakt und nach 8.4 beschränkt sein in dem metrischen Raum Y.

Auf Grund der vorhergehenden Bemerkung ist die Supremumsmetrik

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

auf $\mathcal{C}(X, Y)$ wohldefiniert (siehe 9). Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_{\mathsf{glm}}(X, Y)$ den topologischen Raum $\mathcal{C}(X, Y)$ mit der durch die Supremumsmetrik d_∞ induzierten Topologie. Diese Topologie nennt man auch die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, denn eine Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann für diese Topologie, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

Der Satz von Arzela und Ascoli gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß eine Menge $\mathcal{H}$ von stetigen Funktionen relativ kompakt in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist, d.h. daß der Abschluß von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}_{\mathsf{glm}}(X, Y)$ kompakt ist (siehe 8.25).

Der Beweis läuft über den Satz von Tychonoff. Wir statten nämlich $\mathcal{C}(X, Y)$ mit einer zweiten Topologie aus, der Topologie der punktweisen Konvergenz und wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_{\mathsf{punktw}}(X, Y)$ den Raum der stetigen Funktionen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, d.h. wir betrachten $\mathcal{C}(X, Y)$ als Teilraum des Raumes Y^X aller Funktionen $f\colon X \to Y$ mit der Produkttopologie.

Wir wenden dieses Kompaktheitskriterium an, um den Existenzssatz von Peano für Lösungen von Differentialgleichungen zu beweisen. Dies soll illustrieren, daß Existenzsätze der Analysis häufig entweder auf der Vollständigkeit von gewissen Funktionenräumen beruhen, wie wir schon früher gesehen hatten, oder auf deren Kompaktheit.

10.1 Lemma. Die Auswertungsabbildung $(f, x) \mapsto f(x)\colon \mathcal{C}_{\mathsf{glm}}(X, Y) \times X \to Y$ ist stetig.

Beweis. Gegeben seien $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung U von x so, daß $f(y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$ für alle $y \in U$. Für alle $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ mit $d_\infty(f, g) < \frac{\varepsilon}{2}$ und alle $y \in U$ gilt dann $g(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. Dies beweist die Stetigkeit der Auswertungsabbildung im Punkt (f, x). $\square$

10.2 Gleichgradige Stetigkeit. Wir sagen, eine Menge $\mathcal{H}$ von Funktionen $f\colon X \to Y$ sei *gleichgradig stetig im Punkt* $x_0 \in X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 so gibt, daß

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in U \quad \text{und alle } f \in \mathcal{H}.$$

Man beachte, daß U nicht von $f \in \mathcal{H}$ abhängt. Ist $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig in allen Punkten $x_0 \in X$, so wird $\mathcal{H}$ *gleichgradig stetig* genannt. Natürlich folgt aus der gleichgradigen Stetigkeit von $\mathcal{H}$ die Stetigkeit aller $f \in \mathcal{H}$.

10.3 Hilfssatz. Ist $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig, so ist der Abschluß $\mathrm{cl}_{\mathsf{punktw}}(\mathcal{H})$ von $\mathcal{H}$ in Y^X (für die Topologie der punktweisen Konvergenz) ebenfalls gleichgradig stetig, und folglich besteht auch $\mathrm{cl}_{\mathsf{punktw}}(\mathcal{H})$ nur aus stetien Funktionen.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$. Ist $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig, gibt es eine Umgebung U von $x_0 \in X$ so, daß

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H} \text{ und alle } x \in U.$$

Nun ist $f \mapsto f(x)\colon Y^X \to Y$ für jedes $x \in X$ stetig. Also ist

$$\big\{f \in Y^X \bigm| d\big(f(x), f(x_0)\big) \le \varepsilon\big\}$$

für jedes x abgeschlossen in Y^X. Es folgt, daß auch

$$\Big\{f \in Y^X \Bigm| d\big(f(x), f(x_0)\big) \le \varepsilon \text{ für alle } x \in U\Big\}$$

als Durchschnitt abgeschossener Mengen abgeschlossen in Y^X ist; diese Menge enthält $\mathcal{H}$ und ist gleichgradig stetig in x_0. □

10.4 Satz. Ist $\mathcal{H}$ eine gleichgradig stetige Menge von Funktionen $f\colon X \to Y$, so stimmen auf $\mathcal{H}$ die Topologien der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz überein.

Beweis. Wir zeigen: Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{H}$ gilt

$$\mathcal{F} \underset{\text{punktw.}}{\longrightarrow} f_0 \iff \mathcal{F} \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f_0.$$

Da $\Leftarrow$ stets richtig ist, brauchen wir nur $\Rightarrow$ zu zeigen. Nehmen wir also an, $\mathcal{F}$ konvergiere gegen f_0 in der Topologie der punktweisen Konvergenz. Wir wollen zeigen: Gegeben $\varepsilon > 0$.

$$\exists F \in \mathcal{F}.\ d_\infty(f, f_0) \le \varepsilon \quad \text{für alle } f \in F$$

d.h.

$$\exists F \in \mathcal{F}.\ d\big(f(x), f_0(x)\big) \le \varepsilon \quad \text{für alle } f \in F \text{ und alle } x \in X.$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $\mathcal{H}$ gibt es für jedes $x_0 \in X$ eine offene Umgebung U_0 von x_0 derart, daß

$$d\big(f(x), f_0(x)\big) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in U_{x_0} \text{ und alle } f \in \mathcal{H}.$$

Da außerdem der Filter $\mathcal{F}$ punktweise gegen f_0 konvergiert, gibt es für jedes x_0 ein $F_0 \in \mathcal{F}$ derart, daß

$$d\big(f(x_0), f_0(x_0)\big) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } f \in F_{x_0}\,.$$

Es folgt für alle $x \in U_{x_0}$ und alle $f \in F_{x_0}$

$$\begin{aligned} d\big(f(x), f_0(x)\big) &\le d\big(f(x), f(x_0)\big) d\big(f(x_0), f_0(x_0)\big) + d\big(f_0(x_0), f_0(x)\big) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Nun bilden die U_{x_0} $x_0 \in X$ eine offene Überdeckung von X, wenn x_0 die Menge X durchläuft. Da X als kompakt vorausgesetzt ist, gibt es endliche viele $x_1, \dots, x_n \in X$ so, daß $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Es sei nun $F = F_{x_1} \cap \dots \cap F_{x_n} \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$d\big(f(x), f_0(x)\big) < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in F \text{ und alle } x \in X.$$

□

10.5 Folgerung. Ist $\mathcal{H}$ gleichgradig stetige Menge von Funktionen $f\colon X \to Y$, dann ist der Abschluß von $\mathcal{H}$ in Y^X für die Topologie der punktweisen Konvergenz gleich dem Abschluß von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(X,Y)$ für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

In der Tat ist nach 10.3 der Abschluß von $\mathcal{H}$ für die Topologie der punktweisen Konvergenz ebenfalls gleichgradig stetig und die Behauptung folgt dann aus 10.4.

10.6 Satz von Arzela-Ascoli. $\mathcal{H}$ ist relativ kompakt in $\mathcal{C}_{\mathsf{glm}}(X,Y)$ genau dann, wenn

1. $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig und
2. $\mathcal{H}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ relativ kompakt ist für alle $x \in X$.

Beweis. $\Leftarrow$: Wegen der gleichgradigen Stetigkeit stimmen nach 10.4 auf $\mathcal{H}$ die Topologien der gleichmäßigen und die der punktweisen Konvergenz überein. Also können wir $\mathcal{H}$ als Teilraum von Y^X (mit der Produkttopologie) auffassen. Wegen 2 ist $\mathcal{H}(x)$ für jedes $x \in X$ in einer kompakten Teilmenge C_x von Y enthalten. Also ist $\mathcal{H}$ sogar ein Teilraum von $\prod_{x\in X} C_x \subseteq Y^X$. Nach 9.18 (Satz von Tychonoff) ist dieser Produktraum kompakt. Also ist der Abschluß von $\mathcal{H}$ in diesem Produktraum ebenfalls kompakt. Nach 10.5 stimmt dieser Abschluß mit dem Abschluß von $\mathcal{H}$ in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz überein. Also ist $\mathcal{H}$ relativ kompakt in $\mathcal{C}(X,Y)$.

$\Rightarrow$: Indem wir $\mathcal{H}$ durch seinen Abschluß in $\mathcal{C}(X,Y)$ ersetzen, können wir annehmen, daß $\mathcal{H}$ kompakt ist. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es dann endlich viele ε-Kugeln in $\mathcal{C}(X,Y)$, die $\mathcal{H}$ überdecken. Es seien $f_1,\dots,f_n$ die Mittelpunkte dieser ε-Kugeln $B_1,\dots,B_n$. Es gilt dann

$$d_\infty(f,f_i) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } f \in B_i$$

d.h.

$$d(f(x),f_i(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } f \in B_i \text{ und alle } x \in X.$$

Es sei nun $x_0 \in X$. Für jedes i gibt es eine Umgebung U_i von x, so daß

$$d(f_i(x),f_i(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in U_i$$

Sei $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann gilt

$$d(f_i(x),f_i(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in U \text{ und alle } i$$

Für jedes $f \in \mathcal{H}$ gibt es nun ein i, so daß $f \in B_i$. Für jedes $x \in U$ gilt dann

$$\begin{aligned} d(f(x),f(x_0)) &\le d(f(x),f_i(x)) + d(f_i(x),f_i(x_0)) + d(f_i(x),f(x_0)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig in x_0. Ferner ist $\mathcal{H}(x)$ kompakt, da $\mathcal{H}$ kompakt ist und $f \mapsto f(x)\colon \mathcal{C}(X,Y) \times Y$ nach 10.1 stetig ist. □

Bemerkung. Ist $\mathcal{H}$ kompakt oder relativ kompakt in $\mathcal{C}(X,Y)$, so gilt nach 10.1 sogar, daß $\{f(x) \mid f \in \mathcal{H},\ x \in X\}$ in Y (relativ) kompakt ist, da wir X als kompakt vorausgesetzt hatten.

Wir spezialisieren die Aussage des Satzes von Arzela-Ascoli auf den Fall $Y = \mathbb{R}$:

10.7 Folgerung. Sei X ein kompakter Raum. Eine Menge $\mathcal{H}$ stetiger reellwertiger Funktionen auf X ist genau dann relativ kompakt für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, wenn $\mathcal{H}$

1. gleichgradig stetig und
2. punktweise beschränkt ist, d.h. wenn es für jedes $x \in X$ ein $M_x \in \mathbb{R}$ so gibt, daß $|f(x)| \leq M_x$ für alle $f \in \mathcal{H}$.

Als Anwendung zeigen wir den Existenzsatz von Peano:

10.8 Anwendung (Existenzsatz für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von Peano). Es sei $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\text{(A)} \qquad y' = f(x,y) \qquad\qquad y(0) = y_0$$

mindestens eine Lösung $y \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Beweis. Eine Lösung des Problems (A) ist äquivalent zu einer Lösung von

$$\text{(B)} \qquad y(x) = y_0 + \int_0^x f\big(t, y(t)\big)dt$$

Für jedes $n \in \{1,2,\dots\}$ definieren wir

$$\text{(C)} \qquad y_n(x) = \begin{cases} y_0 & x \leq 0 \\ y_0 + \int_0^x f\big(t, y_n(t-\frac{1}{n})\big) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(Man definiert $y_n(x)$ zuerst für $x \leq 0$, dann für $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, dann für $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ usw.)

Zwischenbehauptung: $\mathcal{H} = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ *ist gleichgradig stetig.*

Ist nämlich $|f(x,y)| \leq K$ für alle $(x,y) \in [0,1]\times\mathbb{R}$, so folgt $|y_n'(x)| \leq K$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und daraus folgt die gleichgradige Stetigkeit der Folge $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt nun, daß $\mathcal{H}$ relativ kompakt in $\mathcal{C}_{\mathsf{glm}}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ ist. Also hat die Folge der $y_n(x)$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $y_{n_k}(x)$. Sei $y(x)$ der Limes dieser Teilfolge. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Big|y_{n_k}\big(x - \tfrac{1}{n_k}\big) - y(x)\Big| &\leq \Big|y_{n_k}\big(x - \tfrac{1}{n_k}\big) - y_{n_k}(x)\Big| + \Big|y_{n_k}(x) - y(x)\Big| \\ &\leq \tfrac{K}{n} + |y_{n_k}(x) - y(x)| \end{aligned}$$

Also konvergiert auch $y_{n_k}\big(x - \frac{1}{n_k}\big)$ gleichmäßig gegen $y(x)$. Geht man in (C) für die Teilfolge y_{n_k} zum Grenzwert über, so sieht man, daß $y(x)$ eine Lösung von (B) – also von (A) – ist. □

Man bemerke den Unterschied des Satzes von Peano zu dem Satz von Picard-Lindelöf 6. Dort hatten wir durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes unter der Verwendung der metrischen Vollständigkeit konstruktiv eine Lösung des Anfangswertproblems durch sukzessive Approximation gewonnen. Der Existenzsatz von Peano, der nur die Kompaktheit verwendet, liefert eine bloße Existenzaussage ohne einen Hinweis darauf, wie man denn ein Lösung explizit finden könnte.

11. Die Hausdorff-Metrik und Fraktale

In diesem Abschnitt sei (X, d) stets ein metrischer Raum. Wir wollen die Menge der abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von X mit einer Metrik versehen, so daß wir von Konvergenz von Folgen abgeschlossener Mengen sprechen können.

Wir können auf X die metrische Topologie und dann auf $X \times X$ die Produkttopologie betrachten. Eine Basis der Produkttopologie wird durch die Mengen $B_\varepsilon(a) \times B_\varepsilon(b)$, $a, b \in X$, $\varepsilon > 0$ gegeben.

11.1 Lemma. Die Abstandsfunktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Sei $(a, b) \in X \times X$ und $\varepsilon > 0$. Seien nun $a' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ und $b' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, a') + d(a', b') + d(b, b') \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + d(a', b') + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= d(a', b') + \varepsilon \end{aligned}$$

Ebenso folgt $d(a', b') \leq d(a, b) + \varepsilon$, also $|d(a, b) - d(a', b')| < \varepsilon$. □

Folgerung. $a_n \to a,\ b_n \to b \implies d(a_n, b_n) \to d(a, b)$

11.2 Definition. Es sei $A \subseteq X$. Wir definieren die *ε-Umgebung von A* durch

$$B_\varepsilon(A) := \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid \exists a \in A.\ d(a, x) < \varepsilon\}$$

Hilfssatz. Der Abschluß einer Menge $A \subseteq X$ ist $\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(A)$.

Beweis. Sei $x \in \overline{A}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a_\varepsilon \in A$ mit $d(a_\varepsilon, x) < \varepsilon$, d.h. $x \in B_\varepsilon(A)$ für alle $\varepsilon > 0$.

Sei umgekehrt $x \in B_\varepsilon(A)$ für alle $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, gibt es dann ein $a_n \in A$, so daß $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$. Es folgt, daß x der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, d.h. $x \in \overline{A}$. □

11.3 Abstand eines Punktes b von einer Menge $A \subseteq X$.

$$\Delta(b, A) := \inf_{a \in A} d(b, a) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid b \in B_\varepsilon(A)\}$$

Übung. Zeige, daß die zweite Gleichheit gilt.

Hilfssatz. Es gilt $\Delta(b, A) = 0 \iff b \in \overline{A}$

Beweis. $\Delta(b, A) = 0 \iff b \in B_\varepsilon(A)$ für alle $\varepsilon > 0 \iff b \in \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(A) \underset{(11.2)}{=} \overline{A}$ □

Folgerung. Ist A abgeschlossen, so gilt $\Delta(b, A) = 0 \implies b \in A$.

11.4 Hausdorff-Distanz. Seien $A, B \subseteq X$. Wir definieren zunächst:

$$\Delta(B, A) := \sup_{b \in B} \Delta(b, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(b, a)$$

Hilfssatz. Es gilt $\Delta(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B \subseteq B_\varepsilon(A)\}$

Beweis. 1. Sei $B \subseteq B_\varepsilon(A)$. Für jedes $b \in B$ gibt es dann ein $a \in A$ mit $d(b,a) < \varepsilon$, d.h. für jedes $b \in B$ ist $\inf_{a\in A} d(b,a) < \varepsilon$. Es folgt $\Delta(B,A) = \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(b,a) \leq \varepsilon$.

2. Sei $\Delta(B,A) < \varepsilon$. Für jedes $b \in B$ gilt dann $\Delta(b,A) < \varepsilon$, d.h. $b \in B_\varepsilon(A)$. Es folgt $B \subseteq B_\varepsilon(A)$. $\square$

Hilfssatz.

1. $\Delta(B,A) = 0 \implies B \subseteq \overline{A}$
2. $\Delta(C,A) \leq \Delta(C,B) + \Delta(B,A)$

Beweis. 1. Nach dem vorhergehenden Hilfssatz ist $\Delta(B,A) = 0$ genau dann, wenn $B \subseteq B_\varepsilon(A)$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $B \subseteq \overline{A}$.

2. Es sei $\varepsilon > \Delta(C,B) + \Delta(B,A)$ Dann gibt es $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ so, daß $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$ und $\Delta(C,B) < \varepsilon'$, $\Delta(B,A) < \varepsilon''$. Es folgt $C \subseteq B_{\varepsilon'}(B)$ und $B \subseteq B_{\varepsilon''}(A)$ nach dem vorhergehenden Hilfssatz. Es folgt $C \subseteq B_{\varepsilon'}(B_{\varepsilon''}(A)) \subseteq B_{\varepsilon'+\varepsilon''}(A) \subseteq B_\varepsilon(A)$, d.h. $\varepsilon > \Delta(C,A)$. $\square$

Definition. Nun definieren wir die *Hausdorff-Distanz* von A und B durch

$$h(A,B) = \max\{\Delta(A,B), \Delta(B,A)\}$$

Nach dem ersten Hilfssatz gilt:

$$\begin{aligned} h(A,B) < \varepsilon &\iff A \subseteq B_\varepsilon(B) \text{ und } B \subseteq B_\varepsilon(A) \\ &\iff \begin{cases} \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B \text{ mit } d(a,b) < \varepsilon \\ \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A \text{ mit } d(b,a) < \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Damit die Hausdorff-Distanz eine Metrik wird, schränken wir uns ein auf die Menge $\mathcal{H}(X)$ aller *nicht leeren, beschränkten und abgeschlossenen* Teilmengen $A \subseteq X$. Nur wenn A und B nicht leer sind, ist $\Delta(A,B)$ und damit $h(A,B)$ überhaupt wohldefiniert. Nur wenn A und B beschränkt sind, ist man sicher daß $h(A,B) < +\infty$.

- Daß $h(A,B) \geq 0$ ist, folgt direkt aus der Definition.
- $h(A,B) = 0$ gilt nach dem zweiten Hilfssatz genau dann, wenn $A \subseteq \overline{B}$ und $B \subseteq \overline{A}$. Sind A und B abgeschlossen, so bedeutet das $A = B$.
- $h(A,B) = h(B,A)$ folgt direkt aus der Definition.
- $h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$ folgt aus dem zweiten Teil des obigen Hilfssatzes.

Wir haben somit gezeigt:

Satz. Die Hausdorff-Distanz h ist eine Metrik auf der Menge $\mathcal{H}(X)$ aller nicht leeren, beschränkten, abgeschlossenen Teilmengen von X.

11.5 Satz. Ist X ein vollständiger metrischer Raum, dann ist auch der Raum $\mathcal{H}(X)$ aller nicht leeren, beschränkten, abgeschlossenen Teilmengen von X mit der Hausdorff-Metrik vollständig.

Beweis. Der Beweis erfolgt am Ende des Abschnitts. $\square$

In der Folge sei X ein vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{H}(X)$ der Raum aller nicht leeren, beschränkten, abgeschlossenen Teilmengen von X mit der Hausdorff-Metrik h. Es sei angemerkt, daß X durch $a \mapsto \{a\}$ isometrisch in $\mathcal{H}(X)$ eingebettet werden kann. Es gilt nämlich $h(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$. Mit $\mathcal{K}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller kompakten nichtleeren Teilmengen von X.

Jede kontrahierende Abbildung $f\colon X \to X$, läßt sich zu einer Abbildung

$$\overline{f}\colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$$

fortsetzen: Man definiert

$$\overline{f}(A) = \overline{f(A)} \text{ für alle } A \in \mathcal{H}(X)\,.$$

Ist L die Lipschitzkonstante von f, so ist der Durchmesser $\delta\big(\overline{f(A)}\big) = L \cdot \delta(A)$. Insbesondere ist $\overline{f(A)}$ beschränkt, wenn A es war. Für kompakte Teilmengen A is $f(A)$ ebenfalls kompakt und folglich abgeschlossen. Daher vereinfachrt sich die Definition von $\overline{f}$, wenn man sich auf $\mathcal{K}(X)$ einschränkt:

$$\overline{f}(A) = f(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{K}(X)\,.$$

Es gilt nun sogar:

11.6 Hilfssatz. Ist f eine kontrahierende Abbildung, so ist auch $\overline{f}\colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ kontrahierend, und die Lipschitz-Konstante L von f ist auch Lipschitz-Konstante L von $\overline{f}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\Delta(f(B), f(A)) \le L \cdot \Delta(B, A)$:

$$\begin{aligned}
\Delta(f(B), f(A)) &= \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(f(b), f(a)) \\
&\le \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} L \cdot d(b, a) \\
&= L \cdot \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(b, a) \\
&= L \cdot \Delta(B, A).
\end{aligned}$$

□

Übung. Sei $f\colon X \to X$ kontrahierend. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat f einen eindeutig bestimmten Fixpunkt a. Zeigen Sie, daß $\{a\}$ der einzige Fixpunkt von $\overline{f}\colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ ist.

Übung. Zeigen Sie: $\Delta(A, B) = \Delta(\overline{A}, \overline{B})$. Dies wurde im Beweis von 11.6 benutzt. Wo?

11.7 Iterierte Funktionensysteme. Ein endliches System $f_1, \dots, f_N$ von Funktionen $f_i\colon X \to X$ mit $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ nennt man *iteriertes Funktionensystem*, abgekürzt IFS. Sind alle f_i kontrahierend, so spricht man von einem *kontrahierenden* IFS.

Sei nun $f_1, \dots, f_N$ ein kontrahierendes IFS. Wir definieren eine Abbildung

$$F\colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$$

durch $F(A) := \overline{f_1(A)} \cup \cdots \cup \overline{f_N(A)}$ für alle $A \in \mathcal{H}(X)$.

Behauptung. Die Abbildung F ist kontrahierend.

Beweis. Sind $L_1, \ldots, L_N$ die Lipschitz-Konstanten von $f_1, \ldots, f_N$, dann ist $L = \max\{L_1, \ldots, L_N\}$ Lipschitz-Konstante von F ist. Es genügt zu zeigen:

$$\Delta(F(A), F(B)) \leq L \cdot \Delta(A, B) \quad \text{für alle } A, B.$$

Dafür genügt es zu zeigen:

$$\Delta\big(f_1(A) \cup \cdots \cup f_N(A), f_1(B) \cup \cdots \cup f_N(B)\big) \leq L \cdot \Delta(A, B)$$

Hilfsbehauptung. $\Delta(B \cup B', A \cup A') \leq \max\{\Delta(B, A), \Delta(B', A')\}$.

Denn $B \subseteq B_\varepsilon(A)$ und $B' \subseteq B_\varepsilon(A')$ impliziert $B \cup B' \subseteq B_\varepsilon(A) \cup B_\varepsilon(A') = B_\varepsilon(A \cup A')$.

Aus der Hilfsbehauptung folgt:

$$\begin{aligned}
& \Delta(f_1(A) \cup \cdots \cup f_N(A), f_1(B) \cup \cdots \cup f_N(B)) \\
\leq \; & \max\{\Delta(f_1(A), f_1(B)), \ldots, \Delta(f_N(A), f_N(B))\} \\
\underset{(11.6)}{\leq} \; & \max\{L_1 \cdot \Delta(A, B), \ldots, L_N \cdot \Delta(A, B)\} \\
\leq \; & L \cdot \Delta(A, B) \,.
\end{aligned}$$

□

11.8 Attraktor eines IFS. Es sei $f_1, \ldots, f_N$ ein kontrahierendes IFS auf einem vollständigen metrischen Raum X. Wie wir in 11.7 gesehen haben, gewinnen wir daraus eine kontrahierende Abbildung

$$F \colon \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X), \quad F(A) := \overline{f_1(A)} \cup \cdots \cup \overline{f_N(A)}$$

auf dem Raum $\mathcal{H}(X)$ der nicht leeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von X mit der Hausdorff-Metrik. Da letzterer nach 11.5 vollständig ist, können wir den Banachschen Fixpunktsatz 6.4 anwenden:

Satz. Es gibt genau eine nicht leere, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge $A_\infty \subseteq X$ mit $F(A_\infty) = A_\infty$, d.h. $A_\infty = \overline{f_1(A_\infty)} \cup \cdots \cup \overline{f_N(A_\infty)}$

Schränkt man sich ein auf kompakte Mengen, so kann man die Definition von F vereinfachen:

$$F \colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X), \quad F(A) := f_1(A) \cup \cdots \cup f_N(A)\,.$$

Man gewinnt A durch sukzessive Approximation: Man startet mit beliebigem $A_0 \in \mathcal{H}(X)$, bildet $A_{k+1} = F(A_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und erhält

$$A_\infty = \lim_{k \to \infty} A_k$$

wobei der Limes im Sinne der Hausdorff-Metrik gebildet wird. Man nennt A_∞ den *Attraktor* des IFS.

Da die Startmenge A_0 beliebig gewählt werden kann, bieten sich folgende Möglichkeiten an:

1. Wähle eine beschränkte Menge A_0, die durch alle f_i in sich abgebildet wird (falls X selbst beschränkt ist, wähle $A_0 = X$).

   Es gilt dann $A_1 = F(A_0) = \overline{f_1(A_0)} \cup \cdots \cup \overline{f_N(A_0)} \subseteq A_0$ usw, d.h. $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$. Es gilt dann $A_\infty = \lim_k A_k = \bigcap_{k=1}^\infty A_k$, wie wir später sehen werden. In diesem Fall wird der Attraktor *von außen* approximiert.

2. Wähle $A_0 = \{a\}$ einpunktig. Dies ist zweckmäßig für graphische Darstellungen am Bildschirm, da bei den ersten Iterationsschritten nur wenige Bildpunkte berechnet werden müssen. Die Fehlerabschätzung im Banachschen Fixpunktsatz liefert auch ein Abbruchkriterium: Liegt der Fehler unter der Pixelgröße, so liefert weitere Iterationen keine Verbesserung.

   Besonders günstig ist es, für a den Fixpunkt von f_1 zu wählen (den man approximativ schnell durch sukzessive Iteration gewinnen kann). Es gilt dann nämlich $A_0 = \{a\} \subseteq F(A_0) = \{f_1(a), f_2(a), \dots f_N(a)\} = A_1$, $A_1 = F(A_0) \subseteq F(A_1) = A_2$, also $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ und folglich $A_\infty = \lim_k A_k = \overline{\bigcup_{k=0}^\infty A_k}$, d.h. der Attraktor wird *von innen* approximiert, und alle bei der sukzessiven Approximation berechneten Punkte werden weiter verwendet.

11.9 Zusatz. Der Attraktor eines kontrahierenden IFS auf einem vollständigen metrischen Raum ist stets kompakt (Beweis später!)

11.10 Beispiel. Die *Cantor-Menge* C ist der Attraktor des folgenden IFS auf dem Einheitsintervall $[0,1]$:

$$f_0(x) = \tfrac{1}{3}x \qquad\qquad f_1(x) = \tfrac{1}{3}(x+2)$$

Abbildung 2. Die Cantormenge von außen approximiert

Bei jedem Schritt wird das mittlere Drittel in jedem der verbleibenden Intervalle entfernt, siehe Abbildung 2. Bei diesem Verfahren wird die Cantormenge von außen approximiert. Man kann aber auch wie in Abbildung 3 von innen approximieren.

Abbildung 3. Die Cantormenge von innen approximiert

In der Entwicklung zur Basis 3 hat man:

$$\begin{aligned}
F^0(A) &= \{0\}\\
F^1(A) &= \{f_0(0), f_1(0)\} = \{0, 0.2\}\\
F^2(A) &= \{f_0f_0(0), f_1f_0(0), f_0f_1(0), f_1f_1(0)\} = \{0.0, 0.02, 0.2, 0.22\}\\
F^3(A) &= \{0.000, 0.0002, 0.020, 0.022, 0.200, 0.202, 0.220, 0.222\}
\end{aligned}$$

usw. Die Cantormenge C besteht aus allen unendlichen Brüchen zur Basis 3, in denen die Ziffer 1 nicht auftaucht: $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$ mit $\alpha_i \in \{0,2\}$ für alle i.

11.11 Beispiel. Das *Sierpinski-Dreieck* als Attraktor: Wir nehmen für $X = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat und betrachten das IFS:

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}x \qquad f_2(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) \qquad f_3(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$$

In den Abbildungen 4 und 5 ist die Approximation des Sierpinski-Dreiecks mit zwei verschiedenen Startmengen zu sehen.

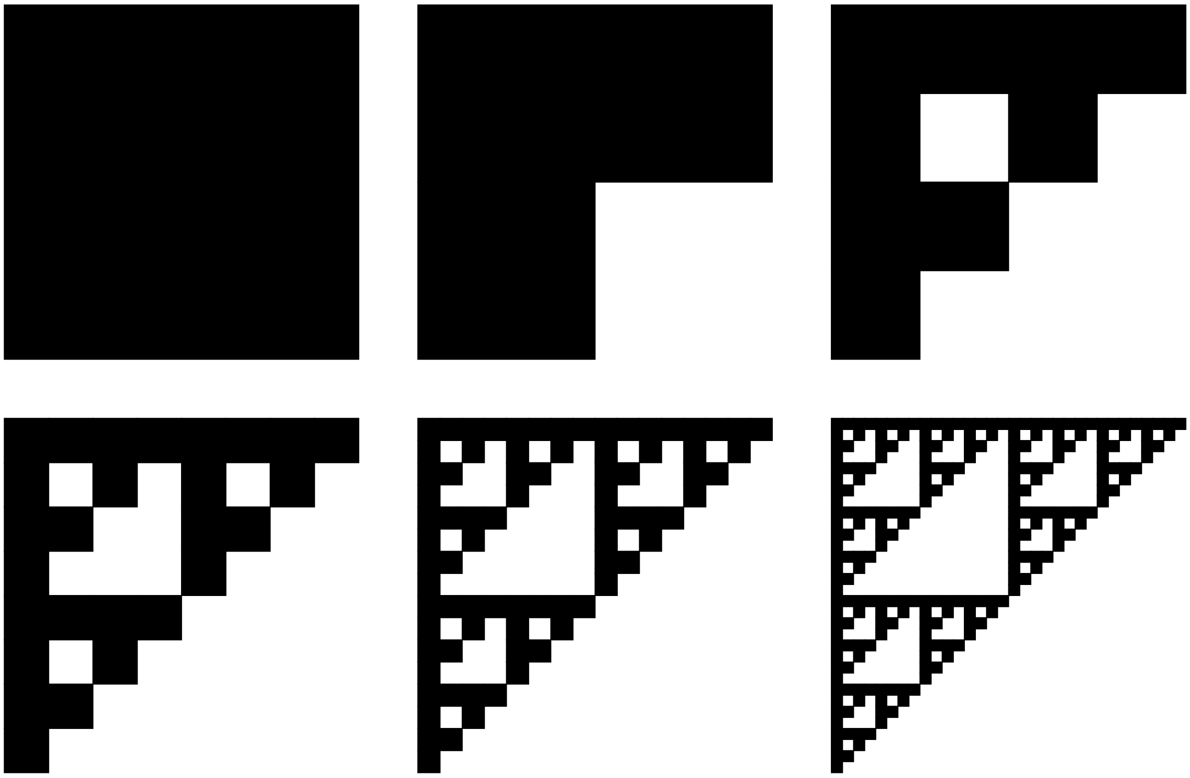


ABBILDUNG 4. Das Sierpinski-Dreieck

Beweis von Satz 11.5. Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{H}(X)$ der Raum aller nicht leeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von X mit der Hausdorff-Metrik h. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}(X)$.

1. Behauptung: Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist beschränkt in X.

Beweis. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $h(A_N, A_n) < 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt $A_n \subseteq B_1(A_N)$ für alle $n \geq N$. Also

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{N-1} \cup B_1(A_N)$$

Eine Vereinigung endlich vieler beschränkter Mengen ist aber beschränkt. □

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir nun $B_n := \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$. Wegen der ersten Behauptung ist $B_n \in \mathcal{H}(X)$. Aus der Definition folgt $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$. Wir setzen $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ und wollen zeigen, daß $A \in \mathcal{H}(X)$ und die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A konvergiert.

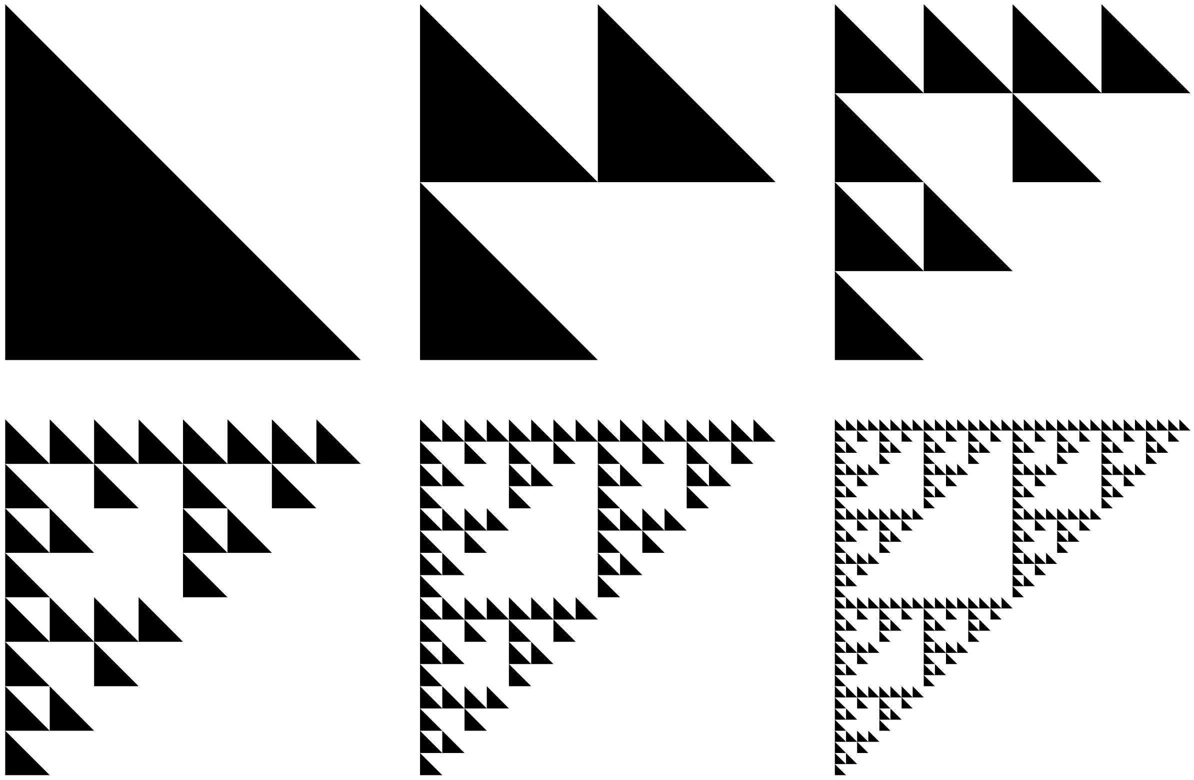


ABBILDUNG 5. Das Sierpinski-Dreieck mit einer anderen Startmenge

2. Behauptung: A ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Als Durchschnitt der abgeschlossenen (und beschränkten) Mengen B_n ist auch A abgeschlossen (und beschränkt). □

Schwieriger ist zu zeigen, daß $A \neq \varnothing$. Dies wird im folgenden mitbewiesen.

Es sei $\varepsilon > 0$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}(X)$ ist, gibt es ein N so, daß $h(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$.

3. Behauptung: $\Delta(A_n, A) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. für $n \geq N$ und jedes $a \in A_n$ gibt es ein $c \in A$ mit $d(a, c) < \varepsilon$. (Insbesondere gilt also $A \neq \varnothing$.)

Beweis. Wir wählen $k_0 = n$ und $k_1, k_2, \ldots$ so, daß $h(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ für alle $n, m \geq k_i$. Dabei können wir o.B.d.A. $k_0 < k_1 < k_2 \cdots$ annehmen. Nun können wir rekursiv eine Folge $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots$ so finden, daß $a_i \in A_{k_i}$ und $d(a_i, a_{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ für alle i.

Es folgt für $i < j$:

$$\begin{aligned} d(a_i, a_j) &\leq d(a_i, a_{i+1}) + d(a_{i+1}, a_{i+2}) + \cdots + d(a_{j-1}, a_j) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^j} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{j-i-1}}\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2^i} \end{aligned}$$

Also ist $a_0 = a$, a_1, $a_2, \dots$ eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, hat diese Folge einen Grenzwert $c \in X$. Da $d(a_0, a_j) < \varepsilon$ nach obiger Ungleichung, folgt $d(a,c) = \lim_{j\in\mathbb{N}} d(a_0, a_j) \leq \varepsilon$. Wir müssen noch $c \in A$ nachweisen. Dazu bemerke, daß für jedes i und jedes $j \geq i$ gilt: $a_j \in A_{k_j} \subseteq B_{k_j} \subseteq B_{k_i}$, also $c = \lim_{j\in\mathbb{N}} a_j \in B_{k_i}$, da B_{k_i} abgeschlossen ist. Da dies für alle i gilt, folgt $c \in \bigcap_i B_{k_i} = \bigcap_n B_n = A$. □

4. Behauptung: $\Delta(A, A_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. für jedes $n > N$ und $c \in A$ gibt es ein $a \in A_n$ mit $d(c,a) < \varepsilon$.

Beweis. $c \in A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Also $c \in B_n = \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$. Es gibt also ein $b \in \bigcup_{m\geq n} A_m$ mit $d(b,c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $h(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq n$, gibt es ein $a \in A_n$ mit $d(a,b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Also $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) < \varepsilon$. □

Aus der dritten und der vierten Behauptung folgt $h(A, A_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein N mit dieser Eigenschaft finden können, konvergiert die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $A \in \mathcal{H}(X)$. □

Bemerkung. $\lim_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} =: \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Dies erinnert daran, daß in $\mathbb{R}$ der Grenzwert einer Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls durch $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m = \limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gegeben wird.

12. Der Brouwersche Fixpunktsatz

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ wird *konvex* genannt, falls mit je zwei Punkten $a_0, a_1 \in K$ auch die ganze Verbindungsstrecke zwischen a_0 und a_1 zu K gehört, d.h.

$$a_0, a_1 \in K \implies \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 \in K \text{ für alle } \lambda_0, \lambda_1 \geq 0 \text{ mit } \lambda_0 + \lambda_1 = 1.$$

Allgemeiner: Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Die Elemente der Form

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \text{ mit } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \text{ und } \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

nennen wir *Konvexkombinationen* der $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Übung. Zeigen Sie, daß $K \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn jede Konvexkombination von Punkten $a_i \in K$ ebenfalls zu K gehört.

12.1 Brouwerscher Fixpunktsatz. Ist K eine kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, dann hat jede stetige Abbildung $f\colon K \to K$ einen Fixpunkt.

Das bedeutet, daß jede kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ die Fixpunkteigenschaft hat. Da die Fixpunkteigenschaft eine topologische Invariante ist, folgt:

12.2 Folgerung. Ist X ein topologischer Raum, der zu einer kompakten konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist, dann hat jede stetige Abbildung $f\colon X \to X$ einen Fixpunkt.

Übung. Warum kann man in dem Brouwerschen Fixpunktsatz weder auf die Voraussetzung *kompakt* noch auf die Voraussetzung *konvex* ganz verzichten?

12.3 Simplizes. Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Punkte des $\mathbb{R}^m$ $(m \geq n)$ in *allgemeiner Lage*, d.h. diese $n+1$ Punkte liegen nicht in einer affinen Hyperebene; anders gesagt, $a_1 - a_0$, $a_2 - a_0$, $\ldots$, $a_n - a_0$ seien linear unabhängig. Es sei $\sigma^n := \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ die Menge aller Konvexkombination der $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Übung. $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ ist konvex und kompakt.

Wir nennen $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ das *n-Simplex* mit den Ecken $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

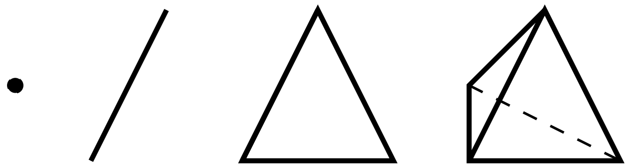


ABBILDUNG 6. Die n-Simplizes für $n = 0, 1, 2, 3$

Für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ nennen wir $\langle a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1} \ldots, a_n \rangle$ eine $(n-1)$-dimensionale Seite von $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$. Wählen wir allgemeiner $q+1$ Indizes $0 \leq i_0 < \cdots < i_q \leq n$, so nennt man $\langle a_{i_0}, \ldots, a_{i_q} \rangle$ eine *q-Seite* von $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$. Die Ecken sind gerade die 0-Seiten.

Nun gilt:

Übung. Je zwei kompakte konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit nicht leeren Inneren sind homöomorph.

Es folgt, daß jede kompakte konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit nicht leerem Inneren zu einem n-Simplex homöomorph ist. Da die Fixpunkteigenschaft eine topologische Invariante ist, genügt es, den Brouwerschen Fixpunktsatz für n-Simplizes zu beweisen.

Der Beweis zerfällt in einen diskreten und einen topologischen Teil.

12.4 Triangulierung. Eine *Triangulierung* eines n-Simplex σ^n besteht aus endlich vielen n-Simplizes $\sigma_0^n, \ldots, \sigma_k^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\sigma^n = \sigma_1^n \cup \cdots \cup \sigma_k^n$
2. $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n = \begin{cases} \text{leer} \\ \text{gemeinsame Seite von } \sigma_i^n \text{ und } \sigma_j^n \end{cases} \quad \text{für } i \neq j$

Beispiel. *Baryzentrische Unterteilung* von $\sigma^n = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$:

Für jede nicht leere Teilmenge $I \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ sei $b_I = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} a_i$. Für jede aufsteigende Kette $\{i_0\} = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots I_n = \{1, \ldots n\}$ betrachte $\langle b_{I_0}, b_{I_1}, \ldots b_{I_n} \rangle$. Dies sind n-Simplizes, deren Gesamtheit eine Triangulierung von σ liefert.

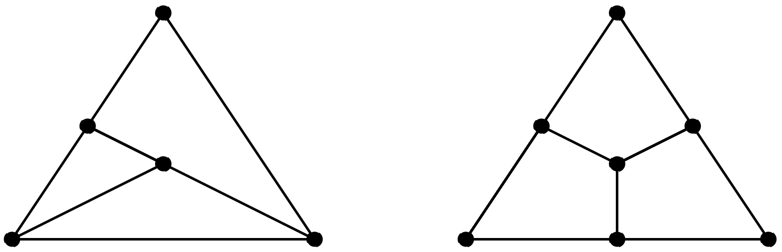


ABBILDUNG 7. Keine Triangulierungen

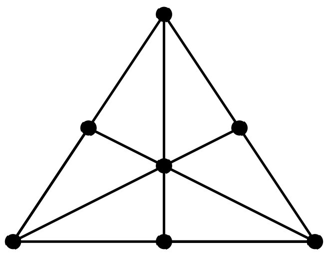


ABBILDUNG 8. Baryzentrische Unterteilung

12.5 Das Spernersche Lemma. Es sei $\sigma^n = \langle a_0, a_1, \dots a_n \rangle$ ein n-Simplex und σ_1^n, ..., σ_k^n eine Triangulierung von σ^n. Es sei E_i die Menge der Ecken des Simplex σ_i^n und $E = E_1 \cup \cdots \cup E_k$ die Menge aller auftretenden Ecken. Jede Abbildung $\nu\colon E \to \{0, 1, \dots, n\}$ nennen wir eine *Numerierung* der Ecken. Eine solche Numerierung wird *zulässig* genannt, falls gilt:

$$e \in \left\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_q} \right\rangle \implies \nu(e) \in \{i_0, i_1, \dots, i_q\}$$

Dies bedeutet:

$q = 0$: Ist $e = a_i$ für ein i, so gilt $\nu(e) = i$.

$q = 1$: Liegt e auf der Kante $\langle a_{i_0}, a_{i_1} \rangle$, so folgt $\nu(e) \in \{i_0, i_1\}$.

usw.

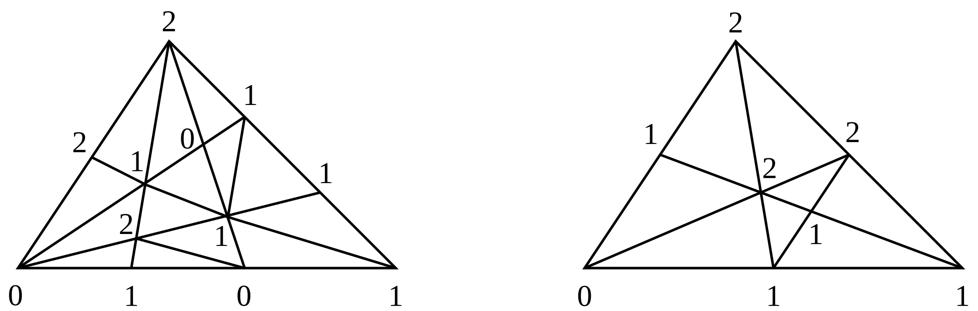


ABBILDUNG 9. Eine zulässige (links) und eine unzulässige Eckennumerierung

Ist ν eine zulässige Numerierung, so wird ein Simplex σ^n der Triangulierung *vollständig* (numeriert) genannt, wenn $\nu(E_i) = \{0, 1, \dots, n\}$, d.h. wenn die $n+1$ Ecken von σ^n mit den $n+1$ verschiedenen Zahlen $0, 1, \dots, n$ durchnumeriert sind.

In dem obigen Beispiel sind die vollständig numerierten Dreiecke schraffiert. Man zählt 7 solcher Dreiecke.

Behauptung (Sperner). Ist ν eine zulässige Numerierung der Ecken in einer Triangulierung des n-Simplex $\sigma^n = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$, dann ist die Anzahl β der vollständig numerierten n-Simplizes ungerade. Insbesondere gibt es mindestens ein vollständig numeriertes n-Simplex.

Beweis. $n = 0$: trivial

$n = 1$: Geht man die *Ecken* der Unterteilung von links nach rechts durch, so findet man eine erste Stelle, an der man von 0 auf 1 springt. Von da an ist die Anzahl der Sprünge von 1 auf 0 gleich der Anzahl der Sprünge von 0 auf 1. Insbesondere ist die Anzahl der Sprünge also ungerade, vgl. Abbildung 10. (Die Sprünge entsprechen hier den vollständigen Simplizes.)

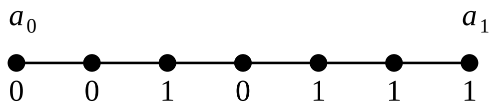
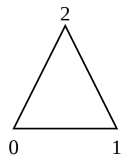


Abbildung 10. a_0 ist mit 0, a_1 ist mit 1 numeriert

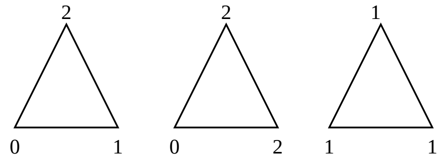
$n = 2$: Sei $\sigma^{(2)} = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ eine Triangulierung von σ^2.

Für jedes Dreieck σ_i der Triangulierung sei α_i die Anzahl der Seiten von σ_i, deren Ecken mit 0 *und* 1 beziffert sind. Genau einer der folgenden Fälle trifft zu:

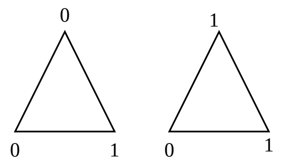
1. σ_i ist vollständig: dann ist $\alpha_i = 1$



2. 0 oder 1 kommen in der Numerierung von σ_i nicht vor: dann gilt $\alpha_i = 0$



3. 0 und 1 kommen beide vor, aber nicht die 2: dann kommt genau eine der Zahlen $0, 1$ doppelt vor und es gilt $\alpha_i = 2$



Ist eine Seite des Dreiecks σ_i mit 0 und 1 beziffert, so kann diese Seite wegen der Zulässigkeit der Numerierung nicht auf den Seiten $\langle a_0, a_2 \rangle$ oder $\langle a_1, a_2 \rangle$ liegen. Also liegt eine solche Seite auf $\langle a_0, a_1 \rangle$ oder im Inneren von $\sigma^{(2)}$. Im letzteren Fall tritt sie aber noch in einem zweiten Dreieck der Triangulierung auf.

Ist nun B die Anzahl der mit 0 und 1 bezifferten Dreiecksseiten, die auf $\langle a_0, a_1 \rangle$ liegen, C die Anzahl der mit 0 und 1 bezifferten Dreiecksseiten im Innern von $\sigma^{(2)} = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, so gilt also

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = |B| + 2|C| \equiv |B| \mod 2$$

Da $|B|$ auf Grund des Falls $n = 1$ ungerade ist, wird auch $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ ungerade. Andererseits ist die Anzahl β der vollständigen Dreiecke σ_i

$$\beta = \big|\{i \mid \alpha_i = 1\}\big| \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mod 2$$

auf Grund der obigen Fallunterscheidung. Also ist auch β ungerade.

Übung. Nehmen Sie an, das Spernersche Lemma sei im Falle $n-1$ bewiesen und zeigen Sie, daß es im Falle n gilt. (Gehen Sie vor wie im Falle $n = 2$: Für jedes Simplex σ_i der Triangulierung von σ^n beachte die Anzahl α_i der $n-1$-Seiten von σ_i, die mit $0, 1, \dots, n-1$ vollständig numeriert sind, usw.)

Dies beendet den Beweis des Spernerschen Lemmas. □

12.6 Das KKM-Theorem (Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz). Es seien $A_0, A_1, \dots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen eines n-Simplex $\sigma^n = \langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle$ derart, daß für jede Seite gilt

$$\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_q}\rangle \subseteq A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_q} \ .$$

Dann folgt $A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \varnothing$.

Beweis. Es sei $\mathcal{K}$ eine Triangulierung von σ^n. Wir definierenen eine Numerierung ν der bei der Triangulierung auftretenden Ecken folgendermaßen: Ist $\langle a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_q}\rangle$ die kleinste Seite von σ^n, welche die Ecke e enthält, dann gibt es nach Voraussetzung ein j so, daß $e \in A_{i_j}$; wir wählen dann $\nu(e) = i_j$. (Wenn e in mehreren A_{i_j} enthalten ist, ist es gleichgültig welchen der möglichen Werte i_j man auswählt.) Man beachte, daß diese Numerierung zulässig ist. Das Spernersche Lemma erlaubt zu schließen, daß es ein vollständig numeriertes n-Simplex $\tau_0 = \langle b_0^0, b_1^0, \dots, b_n^0\rangle$ in $\mathcal{K}$ gibt, wobei wir die b_i^0 so anordnen können, daß $b_i^0 \in A_i$ für $i = 0, 1, \dots, n$. Dasselbe führen wir für die sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen $\mathcal{K}^r$ von $\mathcal{K}$ durch und wir erhalten n-Simplizes

$$\tau_r = \langle b_0^r, b_1^r, \dots, b_n^r\rangle \text{ in } \mathcal{K}^r \text{ mit } b_i^r \in A_i \ (i = 0, 1, \dots, n)$$

Wegen der Kompaktheit von σ^n können wir nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge r_k annehmen, daß für jedes i die Folge $b_i^1, b_i^2, b_i^3, \dots$ gegen einen Grenzwert b_i konvergiert. Da A_i abgeschlossen ist, folgt $b_i \in A_i$. Da andererseits die Kantenlängen der Simplizes τ_r in den sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen gegen 0 streben, folgt $b_i = b_j$ für alle i, j und folglich $b := b_0 = b_1 = \dots = b_n \in A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n$. □

12.7 Beweis des Brouwerschen Fixpunkstzes. Es sei $\sigma^n = \langle a_0, a_1, \dots, a_n\rangle$ ein n-Simplex und $f\colon \sigma^n \to \sigma^n$ eine stetige Abbildung. Jedes $x \in \sigma^n$ hat eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) a_i \ , \ 0 \le \lambda_i(x) \le 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1$$

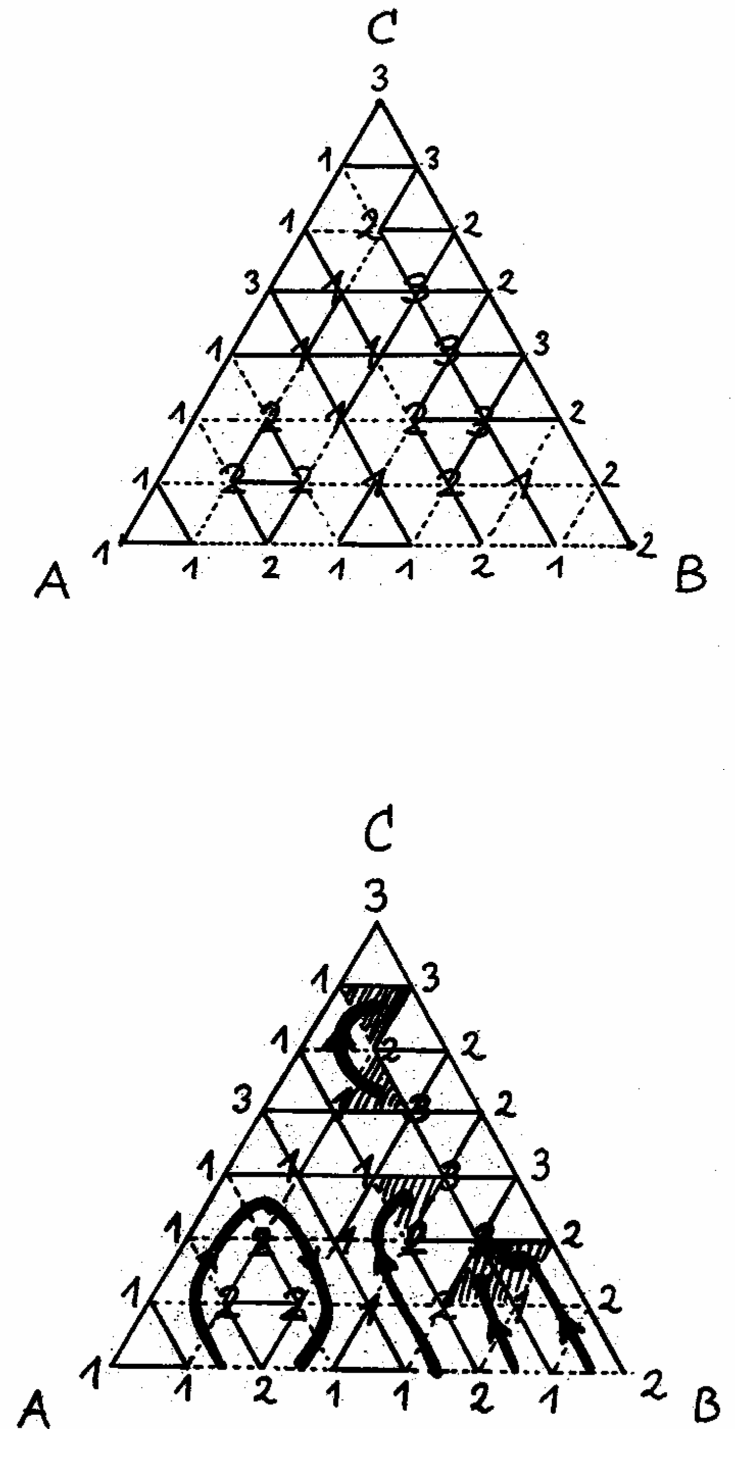


Abbildung 11

Die reellen Zahlen $\lambda_i(x)$ werden die baryzentrischen Koordinaten von x genannt; sie sind eindeutig bestimmt und hängen stetig von x ab. Ebenso kann man $f(x)$ darstellen:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) a_i \ , \ 0 \le \mu_i(x) \le 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) = 1.$$

Da f stetig ist, hängen die $\mu_i(x)$ ebenfalls stetig von x ab. Also ist die Menge

$$A_i := \{x \in \sigma^n \mid \lambda_i(x) \le \mu_i(x)\}$$

abgeschlossen. Die Voraussetzung im KKM-Theorem ist für die so erklärten Mengen A_i erfüllt: In der Tat, sei $x \in \langle a_{i_0}, \dots, a_{i_q}\rangle$. Dann gilt $\lambda_i(x) = 0$ für $i \notin \{i_0, \dots, i_q\}$. Folglich gibt es ein $j \in \{0, \dots, q\}$ mit $\mu_{i_j}(x) \le \lambda_{i_j}(x)$; denn sonst wäre $1 = \sum_{j=0}^q \lambda_{i_j}(x) < \sum_{j=0}^q \mu_i(x)$. Nach dem KKM-Theorem gibt es also ein $x \in A_0 \cap \dots \cap A_n$. Für dieses x gilt dann $\lambda_i(x) \le \mu_i(x)$ für alle i. Wegen $\sum_{i=1}^n \mu_i(x) = 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)$ folgt daraus aber $\lambda_i(x) = \mu_i(x)$ für alle i, d.h. $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)a_i = \sum_{i=1}^n \mu_i(x)a_i = f(x)$. □

Ergänzung: Das Auswahlaxiom und seine Folgerungen

Das *Auswahlaxiom* ist ein Axiom der Mengenlehre, das nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre folgt. Um es zu formulieren, benutzen wir den Bergriff der Auswahlfunktion.

1 Auswahlfunktion. Es sei I eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine durch I indizierte Familie von Mengen. Eine *Auswahlfunktion* ist eine Funktion

$$a\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \text{ mit } a(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I$$

2 Das Auswahlaxiom. Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie *nicht leerer* Mengen, dann gibt es (mindestens) eine Auswahlfunktion.

Äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms sind:

- Jede Äquivalenzrelation ρ auf einer Menge X besitzt ein Repräsentantensystem, d.h. es gibt eine Teilmenge $R \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.
- Für jede Menge X gibt es eine Funktion $\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ mit $\varphi(A) \in A$ für alle $A \in \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$.
- Für jede surjektive Funktion $f\colon X \to Y$ gibt es eine Funktion $g\colon Y \to X$, so daß $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Beweis. Übung. □

Das Auswahlaxiom empfindet man als so natürlich, daß man es oft unbewußt anwendet. Auch in diesem Skript haben wir es schon in Beweisen verwendet.

Preisaufgabe. Suchen Sie einen Beweis in diesem Skript, in dem das Auswahlaxiom verwendet wurde. (Preis: ein halber Punkt)

Andererseits hat das Auswahlaxiom Konsequenzen, die man als paradox empfindet, wie das Banach-Tarski-Paradox: Man kann die Einheitskugel $\overline{B}_1(0)$ im $\mathbb{R}^3$ in endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ derart zerlegen, daß sich $\overline{B}_1(0)$ sowohl aus $A_1, \dots, A_n$ als auch aus $B_1, \dots, B_m$ (nach geeigneten Verschiebungen und Drehungen) zusammensetzten läßt.

Häufig benutzt man ein zum Auswahlaxiom äquivalentes Prinzip: das Zornsche Lemma. Um dieses zu formulieren, führen wir einen Begriff ein:

3 Induktiv geordnete Mengen. Es sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge. Es sei daran erinnert, daß eine Teilmenge $C \subseteq P$ *linear geordnet* oder auch *Kette* genannt wird, wenn je zwei Elemente $a, b \in C$ vergleichbar sind (d.h. es gilt stets $a \leq b$ oder $b \leq a$).

Eine geordnete Menge $(P, \leq)$ wird *induktiv* genannt, falls $P \neq \varnothing$ und jede Kette in P eine obere Schranke besitzt.

4 Das Lemma von Zorn. Jede induktiv geordnete Menge hat mindestens ein maximales Element.

Behauptung. Das Auswahlaxiom und das Lemma von Zorn sind äquivalent.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Es sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nicht leerer Mengen. Wir betrachten die Menge P aller „partiellen Auswahlfunktionen“, d.h. die Menge aller

$$a \colon J \to \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{mit } J \subseteq I \text{ und } a(j) \in A_j \text{ für alle } j \in J$$

Ist $b \colon K \to \bigcup_{i \in I} A_i$ eine weitere partielle Auswahlfunktion, so schreiben wir $a \leq b$, falls b eine Fortsetzung von a ist, d.h. falls $J \subseteq K$ und $a(j) = b(j)$ für alle $j \in J$. Dann ist $\leq$ eine Ordnung auf P.

Mit dieser Ordnung ist P induktiv: $P \neq \varnothing$, denn für $i \in I$ wähle $a_i \in A_i$ und definiere $a \colon \{i\} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ durch $a(i) = a_i$. Es sei nun C eine Kette in P. Um eine obere Schranke b für C zu finden, sei J die Vereinigung der Definitionsbereiche der $a \in C$. Für jedes $j \in J$ gibt es ein $a \in C$, so daß $a(j)$ definiert ist. Setze $b(j) = a(j)$. Die Abbildung b ist wohldefiniert, denn ist a' ein zweites Element von C, so daß $a'(i)$ definiert ist, so gilt $a \subseteq a'$ oder $a' \subseteq a$, d.h. a' ist eine Fortsetzung von a oder umgekehrt. In jedem Fall gilt $a(i) = a'(i)$.

Es folgt, daß $b \geq a$ für alle $a \in C$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es in P ein maximales Element $a \colon J \to \bigcup_{j \in J} A_j$. Wäre $J \neq I$, so gäbe es ein $i \in I \setminus J$. Man könnte ein $a_i \in A_i$ wählen und a auf $J \cup \{i\}$ fortsetzen. Also ist a eine auf I definierte Auswahlfunktion.

„$\Rightarrow$“: Diese Richtung gestaltet sich langwieriger als erwartet. Am besten geht man den Umweg über den Wohlordnungssatz von Zermelo. Siehe z.B. Ebbinghaus: „Einführung in die Mengenlehre“. □

Nunmehr einige Folgerungen aus dem Zornschen Lemma:

5 Induktive Mengensysteme. Es sei X eine Menge und $\mathcal{M} \neq \varnothing$ eine Menge von Teilmengen von X. Wir sagen, $\mathcal{M}$ sei *induktiv*, wenn für jede Kette $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ gilt:

$$\bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\} \in \mathcal{M}$$

Dabei betrachten wir die Enthaltenseinsbeziehung $A \subseteq B$ als Ordnung auf $\mathcal{M}$.

Da ein induktives Mengensystem $\mathcal{M}$ insbesondere eine im Sinne der Definition 3 bzgl. $\subseteq$ induktiv geordnete Menge ist, folgt aus dem Lemma von Zorn unmittelbar:

Satz. Jedes induktive Mengensystem hat ein maximales Element.

6 Hausdorffs Maximalprinzip. Es sei C eine Kette in einer geordneten Menge $(P, \leq)$. Dann gibt es eine Kette D, die die Kette C enthält, und maximal in der Menge aller Ketten ist.

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Ketten $D \subseteq P$, die C enthalten. Es genügt nach Satz 5 zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ ein induktives Mengensystem ist. Es gilt $\mathcal{M} \neq \varnothing$, da $C \in \mathcal{M}$. Sei $\mathcal{C}$ eine Kette in $\mathcal{M}$. Dann ist $\overline{D} := \bigcup\{D \mid D \in \mathcal{C}\}$ eine Kette in P. Denn seien $a, b \in \overline{D}$. Dann gibt es ein $D_0 \in \mathcal{C}$ mit $a \in D_0$ und ein $D_1 \in \mathcal{C}$ mit $b \in D_1$. Da $\mathcal{C}$ eine Kette in $(\mathcal{M}, \subseteq)$ ist, gilt $D_0 \subseteq D_1$ oder $D_1 \subseteq D_0$. Es folgt, daß $a, b \in D_1$ bzw. $a, b \in D_0$. Da D_0 und D_1 Ketten in $(P, \leq)$ sind, folgt $a \leq b$ oder $b \leq a$. Also sind je zwei Elemente $a, b \in \overline{D}$ vergleichbar, d.h. $\overline{D}$ ist eine Kette. □

Ein Spezialfall dieses Prinzip ist, daß es in jeder geordneten Menge eine maximale Kette gibt. Setze in dem vorangehenden Prinzip $C = \varnothing$.

7 Satz. Jeder Vektorraum V über einem Körper K besitzt eine Basis.

Beweis. Eine Teilmenge B von V wird eine *Basis* genannt, falls B linear unabhängig ist (d.h. je endlich viele Elemente von B sind linear unabhängig) und sich jedes $v \in V$ als Linearkombination von endlich vielen Elementen von B darstellen läßt. Zum Beweis der Behauptung betrachten wir die Menge $\mathcal{M}$ aller linear unabhängigen Teilmengen $A \subseteq V$. Man überlegt sich leicht, daß $\mathcal{M}$ induktiv ist. Nach Satz 5 gibt es also in V eine maximale linear unabhängige Menge B in V. Wir behaupten, daß dieses B eine Basis von V ist. Wäre B keine Basis von V, so gäbe es ein $v \in V$, das nicht als Linearkombination von Elementen aus B darstellbar wäre. Dann wäre aber $B \cup \{v\}$ linear unabhängig, im Widerspruch zur Maximalität von B. □

8 Spezialfall. Man kann $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ betrachten. Also gibt es eine Basis $B \subseteq \mathbb{R}$, d.h. jedes $r \in \mathbb{R}$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form

$$r = \sum_{b \in B} q_b \cdot b \quad \text{mit } q_b \in \mathbb{Q},\ q_b \neq 0 \text{ nur für endlich viele } b \in B$$

darstellen. Eine solche Basis nennt man *Hamel-Basis*.

9 Beweis für Alexanders Lemma. Nun können wir auch den Beweis für Alexanders Lemma (vgl. 8.10) nachliefern. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis für seine offenen Mengen. Wir zeigen: Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X mit offenen Mengen ohne endliche Teilüberdeckung, dann gibt es eine Überdeckung $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}$ von S ohne endliche Teilüberdeckung. Mit dieser Behauptung ist dann das Lemma bewiesen.

Um die Behauptung zu beweisen, gehen wir in drei Schritten vor:

1. Das System aller offenen Überdeckungen $\mathfrak{W}$ von X ohne endliche Teilüberdeckung ist induktiv. Also gibt es nach dem Zornschen Lemma eine maximale offene Überdeckung $\mathfrak{W}_0$ von X ohne endliche Teilüberdeckung.

2. Sind $U_1, \ldots, U_n$ offene Mengen mit $U_i \notin \mathfrak{W}_0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt $U_1 \cap \cdots \cap U_n \notin \mathfrak{W}_0$.

   Beweis. Es gilt $U_1 \notin \mathfrak{W}_0 \implies \exists W_1, \ldots, W_m \in \mathfrak{W}_0.\ U_1 \cup W_1 \cup \cdots \cup W_m = X$. Ebenso $U_2 \notin \mathfrak{W}_0 \implies \exists W_1', \ldots, W_m' \in \mathfrak{W}_0.\ U_2 \cup W_1' \cup \cdots \cup W_m' = X$. Es folgt $(U_1 \cap U_2) \cup W_1 \cup \cdots \cup W_m \cup W_1' \cup \cdots \cup W_m' = X$, also $U_1 \cap U_2 \notin \mathfrak{W}_0$. ☐

3. Es gilt $\bigcup\{W \mid W \in \mathfrak{W}_0\} = \bigcup\{W \mid W \in \mathfrak{W}_0 \cap \mathcal{S}\}$.

   Beweis. Sei $x \in \bigcup\{W \mid W \in \mathfrak{W}_0\}$. Es gibt ein $W \in \mathfrak{W}_0$ mit $x \in W$. Da $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}$, so daß $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq W$. Es folgt $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathfrak{W}_0$. Nach Schritt 2 muß dann $U_i \in \mathfrak{W}_0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelten, d.h. $U_i \in \mathfrak{W}_0 \cap \mathcal{S}\}$ und folglich $x \in U_1 \in \bigcup\{W \mid W \in \mathfrak{W}_0 \cap \mathcal{S}\}$. ☐

Nun setzen wir $\mathcal{W} := \bigcup\{W \mid W \in \mathfrak{W}_0 \cap \mathcal{S}\}$. Dann ist $\mathcal{W}$ eine Familie offener Mengen aus $\mathcal{S}$. Da mit $\mathcal{U}$ auch $\mathfrak{W}_0$ eine Überdeckung von X ist, wird nach Schritt 3 der Raum X auch von $\mathcal{W}$ überdeckt. Da $\mathcal{W} \subseteq \mathfrak{W}_0$, hat $\mathcal{W}$ keine endliche Teilüberdeckung von X. ☐

Literatur

1. Bücher über allgemeine Topologie
   - J. L. Kelley General Topology, van Norstrand
   - N. Bourbaki Topologie Générale, Herrmann
   - S. Willard General Topology, Addison Wesley
   - W. Rinow Lehrbuch der Topologie, VEB Berlin
   - L. Führer Allgemeine Topologie, Vieweg
   - B. v. Querenburg Mengentheoretische Topologie, Springer Verlag
   - H. Schubert Topologie, Teubner Verlag
   - K. Jänich Einführung in die Topologie, Springer Verlag
   - F. Hausdorff Mengenlehre, (ca. 1914, von historischem Interesse)
2. Bücher, in denen Fraktale behandelt werden:
   - G. A. Edgar Measure, Topologie, and Fractal Geometrie, Springer Verlag
   - M. F. Barnsley Fractals Everywhere, Academic Press
3. Mengentheoretische Grundlagen:
   - P. R. Halmos Naive Mengenlehre, Vandenhoeck & Ruprecht
   - H. Friedrichsdorf, A. Prestel Mengenlehre für den Mathematiker, Vieweg

Index