

Plasmaphysik  
- Skriptum zur Vorlesung im WS 2006/2007 -

Prof. Dr. Hans-Jörg Kull

Fraunhofer Institut für Lasertechnik  
und  
Lehr- und Forschungsgebiet Laserphysik  
Institut für Theoretische Physik A  
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule  
Aachen

8. Februar 2007

# Vorbemerkungen

## Literaturhinweise:

1. R. Goldston, P. Rutherford: Plasmaphysik  
(Vieweg, 1998)
2. N.A. Krall, A.W. Trivelpiece: Principles of Plasma Physics  
(McGraw-Hill, New York, 1973)
3. G. Schmidt: Physics of High Temperature Plasmas  
(Academic Press, New York, 1966)
4. F.F. Chen: Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion  
(Plenum Publishing Corporation, 1984)
5. K. Miyamoto: Plasma Physics for Nuclear Fusion  
(MIT Press, Cambridge-Massachusetts, 1989)
6. W.L. Kruer: The Physics of Laser Plasma Interactions  
(Addison-Wesley, New-York, 1988)

## Maßsysteme:

Diesem Skriptum liegt die folgende Konvention zugrunde. Zur numerischen Berechnung physikalischer Größen (z.B. elektrische Feldstärke) wird das internationale SI-System (Système International d'Unités) mit den Einheiten m, kg, sec, A verwendet. Einige häufig vorkommende physikalische Konstanten sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Formale Beziehungen (z.B. Maxwell-Gleichungen) werden jedoch im Gaußschen System mit den Einheiten cm, g, sec dargestellt. Die Umrechnung ins SI-System erfolgt, indem man für die Ladungen und die Felder, bzw. die Potentiale, die Substitutionen

$$e \longrightarrow 1/\sqrt{4\pi\epsilon_0} e$$

$$\mathbf{E} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}$$

$$\Phi \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} \Phi$$

Tabelle 1: Physikalische Konstanten

---

Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.997(9) \times 10^8 \text{ m/sec}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 10^7 / (4\pi c^2) = 8.854(1) \times 10^{-12} \text{ Asec/(Vm)}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1 / (\epsilon_0 c^2) = 4\pi \times 10^{-7} = 1.256(6) \times 10^{-6} \text{ Vsec/(Am)}$
Elektrische Elementarladung	$e = 1.602(1) \times 10^{-19} \text{ As}$
Elektronenruhemasse	$m_e = 9.109(5) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380(6) \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5.670(5) \times 10^{-8} \text{ W/(K}^4\text{m}^2)$
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6.626(1) \times 10^{-34} = 2\pi \cdot 1.054(5) \times 10^{-34} \text{ Jsec}$
Bohrscher Radius	$a_0 = 0.529(1) \times 10^{-10} \text{ m}$

---

Tabelle 2: Zehnerpotenzen

---

$10^{-3}$	Milli (m)	$10^3$	Kilo (k)
$10^{-6}$	Mikro ( $\mu$ )	$10^6$	Mega (M)
$10^{-9}$	Nano (n)	$10^9$	Giga (G)
$10^{-12}$	Piko (p)	$10^{12}$	Tera (T)
$10^{-15}$	Femto (f)	$10^{15}$	Peta (P)

---

$$\mathbf{B} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} c\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} c\mathbf{A}$$

vornimmt.

Für die Temperatur werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$T_{\circ K}$  : Temperatur in Grad Kelvin

$T = k_B T_{\circ K}$  : Temperatur in Joule

$T_{eV} = T/1eV$  : Temperatur in eV

$$1eV = 1.602 \times 10^{-19} J = 1.16 \times 10^4 \text{ }^0K$$

**Übung 0.1** Schreiben Sie i) die Maxwell'schen Gleichungen, ii) das Coulombsche Gesetz vom Gaußschen System ins SI-System um. Berechnen sie den Wert des atomaren elektrischen Feldes im Wasserstoff auf der ersten Bohrschen Bahn.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1 Eigenschaften und Vorkommen von Plasmen . . . . .	2
1.2 Charakteristische Längen . . . . .	3
1.2.1 Klassischer Elektronenradius . . . . .	3
1.2.2 Landau-Länge: . . . . .	3
1.2.3 De Broglie-Wellenlänge: . . . . .	4
1.2.4 Debye-Länge . . . . .	4
1.2.5 Gyurationsradius . . . . .	6
1.2.6 Freie Weglänge . . . . .	6
1.3 Charakteristische Zeiten . . . . .	7
1.3.1 Plasmafrequenz . . . . .	7
1.3.2 Gyurationsfrequenz . . . . .	9
1.3.3 Freie Flugzeit . . . . .	9
1.4 Ionisationsgleichgewicht . . . . .	9
<b>2 Einzelteilchenbewegung</b>	<b>14</b>
2.1 Konstante Felder . . . . .	15
2.1.1 Konstantes B-Feld . . . . .	15
2.1.2 Konstantes B-Feld, konstante Kraft K . . . . .	15
2.2 Langsam veränderliche Felder . . . . .	16
2.2.1 Driftnäherung . . . . .	16
2.2.2 Störungsrechnung . . . . .	17
2.2.3 Räumlich langsam veränderliche Magnetfelder . . . . .	20
2.3 Adiabatische Invarianten . . . . .	22
2.3.1 Hamiltonsche Systeme: . . . . .	22

2.3.2	Kanonische Transformationen	23
2.3.3	Adiabatische Invarianz der Wirkung	24
2.4	Schnell oszillierendes E-Feld	27
2.4.1	Elektrostatische Welle mit konstanter Amplitude	27
2.4.2	Elektromagnetische Welle mit konstanter Amplitude	27
2.4.3	Ponderomotorisches Potential	28
2.4.4	Ponderomotorische Kraftdichte	30
2.4.5	Ponderomotorischer Druck	31
<b>3</b>	<b>Grundgleichungen der Plasmatheorie</b>	<b>34</b>
3.1	Statistische Beschreibung	34
3.1.1	Hamiltonsche Beschreibung	34
3.1.2	Liouville-Gleichung	34
3.1.3	Reduzierte Verteilungsfunktionen	35
3.1.4	BBGKY-Hierarchie	37
3.2	Kinetische Beschreibung	40
3.2.1	Vlasov-Gleichung	41
3.2.2	Boltzmann-Gleichung	41
3.2.3	Landau-Gleichung	45
3.2.4	Fokker-Planck-Gleichung	48
3.3	Flüssigkeitsbeschreibung	56
3.3.1	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	56
3.3.2	Momentengleichungen	60
3.3.3	Zweiflüssigkeitsmodell	63
3.3.4	Einflüssigkeitsmodell	66
3.3.5	MHD-Gleichungen	68
<b>4</b>	<b>Vlasov-Maxwell-Theorie</b>	<b>72</b>
4.1	Grundgleichungen	72
4.1.1	Näherung des mittleren Feldes	72
4.1.2	Maxwell-Gleichungen	73
4.1.3	Newton'sche Bewegungsgleichungen	73
4.1.4	Relativistische Bewegungsgleichungen	74

<b>INHALTSVERZEICHNIS</b>	<b>1</b>
4.1.5    Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	76
<b>4.2    Elektrostatische Wellen . . . . .</b>	<b>78</b>
4.2.1    Lineare Vlasov-Gleichung . . . . .	78
4.2.2    Plasmashwingungen im kalten Plasma . . . . .	82
4.2.3    Plasmawellen im thermischen Plasma . . . . .	85
4.2.4    Zweistrominstabilität . . . . .	88
<b>5    Wellenausbreitung im Plasma</b>	<b>91</b>
5.1    Wellenausbreitung im homogenen Medium . . . . .	91
5.1.1    Wellengleichung . . . . .	91
5.1.2    Wellenenergie . . . . .	93
5.2    Wellen im kalten stoßfreien Plasma . . . . .	95
5.2.1    Dielektrizitätstensor . . . . .	95
5.2.2    Magnetfeldfreies Plasma . . . . .	97
5.2.3    Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld . . . . .	98
5.2.4    Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld . . . . .	101

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Eigenschaften und Vorkommen von Plasmen

*Charakterisierung:*

- **Phänomenologisch:** Feuer, Sonne, Nordlicht

- **Aggregatzustand:**

Gas aus vorwiegend geladenen Teilchen (Ionen, Elektronen)

W. Crookes (1879): 4. Materiezustand (Festkörper, Flüssigkeiten, Gase, Plasmen)

- **Wechselwirkung:**

Individuelle Teilchenwechselwirkung durch langreichweitige Coulombkräfte (Thermisches Gleichgewicht)

Kollektive Wechselwirkung durch gemittelte Ladungs- und Stromdichten (Nichtgleichgewichtsvorgänge, Metastabile Gleichgewichte)

Tonks und Langmuir (1929): Plasmaschwingungen

- **Quasineutralität:**

Bei zeitlich und räumlich langsam veränderlichen Vorgängen gilt die Quasineutralitätsbedingung:

$$Zn_e \approx n_i$$

( $Z$ : Mittlere Ladungszahl,  $n_e$ : Elektronendichte,  $n_i$ : Ionendichte)

Abweichungen von der Neutralität müssen u.U. in der Poissons-Gleichung berücksichtigt werden, daher nur Quasineutralität.

*Vorkommen:*

- Sichtbares Universums besteht überwiegend aus Plasma (99.9 %)
- Pulsarmagnetosphären, Interstellares Gas
- Sonnenkorona
- Ionosphäre (Reflektion von langwelligen Radiowellen)
- Gasentladungsplasmen
- Lasererzeugte Plasmen
- Fusionsplasmen (Trägheitseinschluß, magnetischer Einschluß)

## 1.2 Charakteristische Längen

In diesem Abschnitt werden nur Größenordnungen abgeschätzt. Zahlenfaktoren von der Größenordnung 1 werden dabei vernachlässigt.

### 1.2.1 Klassischer Elektronenradius

In einem Fusionsplasma müssen sich die Ionen so nahe kommen, daß die anziehende Wirkung der Kernkraft die abstoßende Wirkung der Coulombkraft überwiegt. Ein Maß dafür ist der klassische Elektronenradius  $r_c$ :

$$e^2/r_c = m_e c^2 \quad \rightarrow \quad r_c = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (1.1)$$

Quantenmechanisch gibt es schon eine merkliche Tunnelwahrscheinlichkeit im Abstand  $10 r_c$ , so daß zur Überwindung der Coulombbarriere nur etwa die Energie  $m_e c^2/10 \approx 50 \text{ keV}$  erforderlich ist. In einem Plasma mit  $10 \text{ keV}$  Temperatur besitzt etwa  $1/10$  der Teilchen eine Energie von mehr als  $50 \text{ keV}$ .

### 1.2.2 Landau-Länge:

Die Landau-Länge  $\lambda_L$  bezeichnet die kürzeste Entfernung zweier Ladungen ( $q$ ) bei einem klassischen zentralen Stoß. Innerhalb der Landaulänge dominiert die individuelle Stoßwechselwirkung.

$$\frac{q^2}{\lambda_L} = T, \quad \lambda_L = \frac{q^2}{T} = \frac{1.44 \times 10^{-9}}{T_{eV}} \text{ [m]} \quad (1.2)$$

### 1.2.3 De Broglie-Wellenlänge:

Der kürzeste Abstand zwischen 2 klassischen Teilchen wird durch die Unschärferelation bestimmt und entspricht der de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{dB}$  des Teilchens.

$$\begin{aligned} r_{min}p &\approx \hbar, \quad p = mv, \quad v \approx \sqrt{T/m_e} \\ r_{min} &= \lambda_{dB} = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{\sqrt{mT}} = \frac{2.7 \times 10^{-10}}{\sqrt{T_{eV}}} \text{ [m]} \end{aligned} \quad (1.3)$$

#### Vergleich mit dem mittleren Teilchenabstand:

Mittlerer Teilchenabstand:  $\bar{d} = n_e^{-1/3}$

Klassisches Plasma:  $\bar{d} \gg \lambda_{dB}$

Entartetes Elektronengas:  $\bar{d} \ll \lambda_{dB}$

#### Vergleich mit der Landaulänge:

$$\left(\frac{\lambda_L}{\lambda_{dB}}\right)^2 = \left(\frac{q^2}{\lambda_{dB}T}\right)^2 = \frac{E_{Ion}}{T}, \quad E_{Ion} = \frac{q^4 m_e}{\hbar^2} \approx 27 \text{ eV}$$

Heißes, vollionisiertes Plasma:  $T \gg E_{Ion}$

Kaltes, partiell ionisiertes Plasma:  $T \ll E_{Ion}$

Minimaler Stoßparameter:  $b_{min} = \max\{\lambda_{dB}, \lambda_L\}$

### 1.2.4 Debye-Länge

Bringt man eine ruhende Testladung in ein Plasma, so wird dieses in der Umgebung der Ladung polarisiert. Dies führt zu einer Abschirmung der Ladung. Im Abstand einer Debye-Länge ist das Potential der Ladung auf den e-ten Teil des Coulombpotentials abgefallen.

**Poisson-Gleichung:** Testladung  $q$  und Ladungen  $q_i$  mit Ladungsdichten  $n_i$

$$\Delta\Phi = -4\pi q\delta(\mathbf{x}) - 4\pi \sum_i q_i n_i(\mathbf{x})$$

**Gleichgewichtsverteilung:** Boltzmannverteilung im Potential  $\Phi$

$$n_i(\mathbf{x}) = n_i(\infty) e^{-q_i \Phi(\mathbf{x})/T}$$

**Neutralitätsbedingung:** Im Plasmavolumen, außerhalb der Debye-Kugel

$$\sum_i q_i n_i(\infty) = 0, \quad \Phi(\infty) = 0$$

**Entwicklung für  $T \gg E_{Ion}$ :** Minimaler Teilchenabstand:  $\lambda_{dB} \gg \lambda_L$

$$\begin{aligned} n_i(\mathbf{x}) &\approx n_i(\infty) \left(1 - \frac{q_i \Phi}{T}\right) \\ \Delta\Phi &= \frac{1}{r} \partial_r^2 r \Phi = -4\pi q \delta(\mathbf{x}) + 4\pi \sum_i \frac{q_i^2 n_i(\infty)}{T} \Phi \end{aligned}$$

**Debye-Potential:**

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{r} \exp -r/\lambda_D = \Phi_T + \Phi_P & (1.4) \\ \lambda_D &= \sqrt{\frac{T}{4\pi \sum_i q_i^2 n_i(\infty)}} \\ \Phi_T &= \frac{q}{r}, \quad \Phi_P = \frac{q}{r} (\exp -r/\lambda_D - 1) \end{aligned}$$

Debye-Länge:  $\lambda_D$ , Potential der Testladung:  $\Phi_T$ , Potential der Polarisationsladung:  $\Phi_P$

Debye-Länge eines Wasserstoffplasmas:  $n_e = n_i$ ,  $q_e^2 = q_i^2$

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi q_e^2 n_e}} = 4.9 \sqrt{\frac{T_{0K}}{n \text{ [cm}^{-3}]}} \text{ [cm]} = 5.3 \sqrt{\frac{T_{eV}}{n \text{ [cm}^{-3}]}} \text{ [m]} \quad (1.5)$$

**Polarisationsladung:**

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 \sum_i n_i q_i &= 4\pi r^2 \sum_i q_i n_i(\infty) e^{-q_i \Phi/T} = -4\pi r^2 \sum_i q_i^2 n_i(\infty) \frac{1}{T} \Phi \\ &= -\frac{r^2}{\lambda_D^2} \frac{q}{r} e^{-r/\lambda_D} = -\frac{q}{\lambda_D} \frac{r}{\lambda_D} e^{-r/\lambda_D} \\ \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \sum_i n_i q_i &= -q \int_0^\infty dx x e^{-x} \\ &= -q \left[ (-x e^{-x}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx (-e^{-x}) \right] = -q \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Vergleich mit der Landau-Länge:** (Wasserstoffplasma)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_D}{\lambda_L} &= \sqrt{\frac{T}{8\pi q_e^2 n_e}} \frac{T}{q_e^2} \frac{8\pi n_e}{8\pi n_e} = 8\pi n_e \lambda_D^3 = 3N_D \\ N_D &= \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 (n_e + n_i), \quad \text{Zahl der Teilchen im Debye-Volumen} \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Plasmanäherung:**

- $q\Phi_P(r \rightarrow 0) = \frac{q^2}{\lambda_D} \ll T$
- $\frac{\lambda_L}{\lambda_D} \ll 1$
- $g = \frac{1}{n_e \lambda_D^3} \ll 1$ ,  $g$ : Plasmaparameter

### 1.2.5 Gyrationradius

**Definition:** Zentrifugalkraft = Lorentzkraft

$$\begin{aligned} m \frac{v_\perp^2}{r_g} &= \frac{q}{c} v_\perp B, \quad v_\perp = \sqrt{\frac{T}{m}} \\ r_g &= \frac{mcv_\perp}{qB} = \frac{c\sqrt{mT}}{qB} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Vergleich mit der Debye-Länge

$$\begin{aligned} \frac{r_g}{\lambda_D} &= \frac{c\sqrt{mT}}{qB} \sqrt{\frac{8\pi q^2 n_e}{T}} = \sqrt{\frac{8\pi n_e m c^2}{B^2}} = \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{mc^2}{2T}} \\ \beta &= \frac{(n_e + n_i)T}{B^2/8\pi} \end{aligned}$$

#### Beispiel 1.1 (Gyrationradius)

$$\beta = 0.1, \quad mc^2 = 511 \text{ keV}, \quad T = 25 \text{ keV}: \quad r_g/\lambda_D \approx 1$$

### 1.2.6 Freie Weglänge

Impulsänderung pro Stoß mit Stoßparameter  $\lambda_D$ :

$$\delta(mv)_i \approx \frac{q^2}{\lambda_D^2} \frac{\lambda_D}{v} = \frac{q^2}{\lambda_D v}$$

Anzahl der Stöße auf einer Wegstrecke  $s$ :

$$N \approx N_D \frac{s}{\lambda_D}$$

Mittleres Impulsschwankungsquadrat bei zufälliger Richtungsänderung:

$$\delta(mv)^2 = N (\delta(mv)_i)^2 = N_D \frac{s}{\lambda_D} \frac{q^4}{\lambda_D^2 v^2} = s \frac{q^4 N_D}{v^2 \lambda_D^3} \quad (1.9)$$

Mittlere freie Weglänge  $\lambda_f$ :

$$\delta(mv)^2 = (mv)^2 \quad \rightarrow \quad s = \lambda_f = \frac{\lambda_D}{N_D} \left( \frac{\lambda_D}{\lambda_L} \right)^2 \approx \lambda_D N_D \quad (1.10)$$

**Beispiel 1.2 (Charakteristische Längen)** Die folgenden Parameter geben typische Größenordnungen an und beziehen sich von oben nach unten gelesen auf ein Tokamak-, ein Hochleistungslaser- und ein Materialbearbeitungsplasma.

$T$ [eV]	$n$ [ $\text{cm}^{-3}$ ]	$\lambda_L$ [m]	$\lambda_{dB}$ [m]	$\lambda_D$ [m]	$g^{-1}$	$g^{-1}\lambda_D \approx \lambda_f$ [m]
$10^4$	$10^{14}$	$1.4 \times 10^{-13}$	$2.7 \times 10^{-12}$	$5.3 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^7$	$8 \times 10^2$
$10^3$	$10^{21}$	$1.4 \times 10^{-12}$	$8.7 \times 10^{-12}$	$5.3 \times 10^{-9}$	$1.5 \times 10^2$	$8 \times 10^{-7}$
10	$10^{18}$	$1.4 \times 10^{-10}$	$2.7 \times 10^{-11}$	$1.7 \times 10^{-8}$	5	$8 \times 10^{-8}$

## 1.3 Charakteristische Zeiten

### 1.3.1 Plasmafrequenz

In einem Plasma sind elektrostatische Schwingungen der Elektronen gegenüber den Ionen möglich. Ihre Frequenz wird als Plasmafrequenz  $\omega_P$  bezeichnet. Sie ist proportional zur Wurzel aus der Elektronendichte.

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} = 5.6 \times 10^4 \sqrt{n_e [\text{cm}^{-3}]} \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (1.11)$$

Elektromagnetische Wellen können sich in einem Plasma nur ausbreiten, wenn ihre Frequenz  $\omega$  größer ist als  $\omega_P$ , d.h. sie können nur bis zu der *kritischen Dichte*  $n_c$  eindringen:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_P^2 \quad \rightarrow \quad n_c = \frac{m_e \omega^2}{4\pi q^2} = 1.1 \times 10^{21} \frac{1}{\lambda^2 [\mu\text{m}]} \text{ cm}^{-3} \\ \lambda &: \quad \text{Lichtwellenlänge} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ein thermisches Teilchen bewegt sich in einer Periode der Plasmaschwingung über eine Debye-Länge:

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n_e}} \quad \rightarrow \quad \lambda_{De} \omega_P = \sqrt{T/m_e} = v. \quad (1.13)$$

### Beispiel 1.3 (Plasmafrequenz)

Elektronendichte [ $\text{cm}^{-3}$ ]	Plasmafrequenz [ $\text{s}^{-1}$ ]	$\lambda = 2\pi c/\omega_P$
$10^{14}$	$5.6 \times 10^{11}$	$3.4 \text{ mm}$
$10^{19}$	$1.8 \times 10^{14}$	$10 \mu\text{m}$
$10^{21}$	$1.8 \times 10^{15}$	$1 \mu\text{m}$

## Elektrostatisches Modell der Plasmaschwingungen

### Ladungserhaltung

$$\partial_t \tau + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \tau : \text{Ladungsdichte}, \mathbf{j} : \text{Stromdichte}$$

### Potential

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad \Delta \phi = -4\pi \tau, \quad \phi : \text{Potential}, \mathbf{E} : \text{Elektrisches Feld}$$

### Bewegungsgleichung

$$m_e \dot{\mathbf{v}}_e = q_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{v}_e : \text{mittlere Geschwindigkeit der Elektronen}$$

### Gleichgewicht (Index 0)

$$\tau_0 = 0, \quad \mathbf{j}_0 = 0, \quad v_{e,0} = 0, \quad \phi_0 = 0, \quad \mathbf{E}_0 = 0$$

### Störungen (Index 1)

$$\mathbf{j} \approx q_e n_{e,0} \mathbf{v}_{e,1}, \quad \dot{\mathbf{v}}_e \approx \partial_t \mathbf{v}_{e,1} .$$

### Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \tau + \nabla \cdot \partial_t \mathbf{j} \\ &= \partial_t^2 \tau + \nabla \cdot (q_e n_{e,0} \partial_t \mathbf{v}_{e,1}) \\ &= \partial_t^2 \tau + \nabla \cdot (q_e n_{e,0} \frac{-q_e}{m_e} \nabla \phi) \\ &= \partial_t^2 \tau + \frac{4\pi q_e^2 n_{e,0}}{m_e} \tau = 0 . \end{aligned} \tag{1.14}$$

### Plasmaschwingung

$$\tau(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos(\omega_p t + \varphi(\mathbf{r})), \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi q_e^2 n_{e,0}}{m_e} .$$

### 1.3.2 Gyrationsfrequenz

Im Magnetfeld bewegt sich eine Ladung auf einer Kreisbahn um eine Magnetfeldlinie. Die Umlauffrequenz bezeichnet man als *Gyration*- oder *Larmorfrequenz*:

$$\omega_g = \frac{v}{r_g} = \frac{qB}{mc}, \quad \omega_{ge} = 1.76 \times 10^{11} B [T], \quad 1 T = 10 kG. \quad (1.15)$$

### 1.3.3 Freie Flugzeit

Die freie Flugzeit  $\tau_f$  ist die Zeit zwischen 2 aufeinanderfolgenden Stößen:

$$\tau_f = \frac{\lambda_f}{v} = \frac{\lambda_D N_D}{v} = \frac{N_D}{\omega_P} \quad (1.16)$$

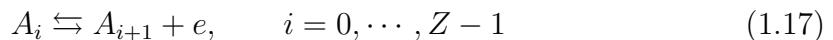
Sie ist groß gegenüber der Periode der Plasmaschwingungen.

## 1.4 Ionisationsgleichgewicht

Mit zunehmender Temperatur durchlaufen die meisten Substanzen die Aggregatzustände fest, flüssig, gasförmig. Molekulare Gase dissoziieren bei Temperaturen von einigen  $1000^\circ$  in neutrale atomare Gase. Bei Temperaturen oberhalb von etwa  $10000^\circ$ , bzw. Energien von einigen Elektronenvolt, setzt Ionisation ein und es bildet sich ein Plasma. Im thermischen Gleichgewicht wird der Ionisationsgrad eines Plasmas als Funktion von Temperatur und Druck durch die Saha-Gleichung bestimmt. Bei der folgenden Herleitung der Saha-Gleichung werden Grundkenntnisse der statistischen Physik vorausgesetzt.

### Reaktionsgleichung

Wir betrachten ein Plasma aus  $N_i$  Ionen  $A_i$  im Ladungszustand  $i$  und aus  $N_e$  Elektronen  $e$ . Der Ladungszustand  $i = 0$  entspreche dem neutralen Atom,  $i = Z$  dem vollionisierten Ion. Ionisation und Rekombination werden durch die  $Z$  Reaktionsgleichungen



dargestellt.

### Freie Energie

Die freie Energie  $F = F(T, V, N_\nu)$  ist eine Funktion der Temperatur  $T$ , des Volumens  $V$  und der Teilchenzahlen  $N_\nu$  aller Teilchensorten (Ionen:  $\nu = i$  und Elektronen:

$\nu = e$ ). Sie ergibt sich aus der inneren Energie  $U$  und der Entropie  $S$  durch die Transformation:

$$F = U - TS \quad (1.18)$$

$$dU = TdS - pdV + \sum_{\nu} \mu_{\nu} dN_{\nu} \quad (1.19)$$

$$dF = -SdT - pdV + \sum_{\nu} \mu_{\nu} dN_{\nu} \quad (1.20)$$

Hierbei bezeichnet  $p$  den Druck und  $\mu$  das chemische Potential.

## Thermisches Gleichgewicht bei Teilchenaustausch

Bei fester Temperatur und festem Volumen ändern sich die Teilchenzahlen so lange, bis die freie Energie ein Minimum annimt:

$$dF \Big|_{T,V} = \sum_{\nu} \mu_{\nu} dN_{\nu} = 0 . \quad (1.21)$$

Wendet man diese Bedingung auf die  $i$ -te Reaktionsgleichung aus (1.17) an, so gilt  $dN_{i+1} = dN_e = -dN_i$  und damit

$$\mu_i = \mu_{i+1} + \mu_e, \quad i = 0, \dots, Z-1 ; \quad \mu_{\nu} = \frac{\partial F}{\partial N_{\nu}} . \quad (1.22)$$

Dies sind  $Z$  Gleichungen für  $Z+2$  Teilchenzahlen ( $N_0, \dots, N_Z, N_e$ ). Man benötigt daher noch zwei weitere Gleichungen. Dies sind die Gleichungen für die Erhaltung der Gesamtteilchenzahl  $N$  und der Gesamtladung 0,

$$N = \sum_i N_i, \quad N_e - \sum_i iN_i = 0 . \quad (1.23)$$

## Freie Energie für ideale Gase

Falls jede Teilchensorte als ideales Gas vorliegt, gilt

$$F = \sum_{\nu} F_{\nu}, \quad F_{\nu} = -T \ln Z_{N_{\nu}}, \quad Z_{N_{\nu}} = \frac{1}{N_{\nu}!} Z_{\nu}^{N_{\nu}} . \quad (1.24)$$

Hierbei bezeichnet  $F_\nu$  die freie Energie der Teilchensorte  $\nu$ ,  $Z_{N_\nu}$  die Zustandssumme für  $N_\nu$  Teilchen und  $Z_\nu$  die Einteilchenzustandssumme. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel  $N! \approx (N/e)^N$  gilt für große Teilchenzahlen in guter Näherung

$$\begin{aligned} Z_{N_\nu} &= \left( \frac{Z_\nu e}{N_\nu} \right)^{N_\nu}, \\ F_\nu &= -TN_\nu [\ln(Z_\nu) + 1 - \ln(N_\nu)] \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial N_\nu} &= -T [\ln(Z_\nu) + 1 - \ln(N_\nu)] + T = -T \ln \left( \frac{Z_\nu}{N_\nu} \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Mit dem letzten Ausdruck lauten die Gleichgewichtsbedingungen (1.22)

$$\ln \left( \frac{Z_i}{N_i} \right) = \ln \left( \frac{Z_{i+1}}{N_{i+1}} \right) + \ln \left( \frac{Z_e}{N_e} \right) \quad (1.26)$$

und man erhält

$$\frac{N_i}{N_{i+1}N_e} = \frac{Z_i}{Z_{i+1}Z_e}$$

(1.27)

Die rechte Seite hängt nur noch vom Volumen und von der Temperatur ab. Damit können die Teilchenzahlen im Prinzip als Funktion von  $V$  und  $T$  berechnet werden.

## Einteilchenzustandssumme

Die Einteilchenzustandssumme ist definiert durch

$$Z_\nu = \frac{V}{h^3} \int d^3p \sum_k e^{-\left(\frac{p^2}{2m_\nu} + \epsilon_{\nu,k}\right)/T}. \quad (1.28)$$

Hierbei bezeichnet  $\epsilon_{\nu,k}$  das  $k$ -te Energieniveau der inneren Energie des Teilchens  $\nu$ . Nach Integration über den Impulsraum folgt

$$\frac{Z_\nu}{N} = \frac{1}{n\lambda_\nu^3} u_\nu e^{-\epsilon_{\nu,0}/T} \quad (1.29)$$

mit

$$n = N/V, \quad \lambda_\nu = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m_\nu T}}, \quad u_\nu = \sum_k e^{-(\epsilon_{\nu,k} - \epsilon_{\nu,0})/T}.$$

Hierbei bezeichnet  $n$  die Teilchendichte,  $\lambda_\nu$  die thermische deBroglie-Wellenlänge,  $\epsilon_{\nu,0}$  die Grundzustandsenergie und  $u_\nu$  eine Zustandssumme über Anregungsenergien.

Die Elektronen besitzen keine innere Energie und man setzt daher  $\epsilon_{e,k} = 0$ . Der Index  $k$  läuft hier über zwei entartete Spinzustände, so dass für die Elektronen  $u_e = 2$  gilt. Die Zustandssummen  $u_i$ ,  $i < Z$  werden meist durch den Entartungsgrad des Grundzustandes angenähert,  $u_i = g_i$ . Bei vollständiger Ionisation,  $i = Z$ , liegt kein elektronischer Zustand vor, so dass hier  $u_Z = 1$  zu setzen ist. Mit diesen Näherungen lautet die Gleichgewichtsbedingung (1.27)

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}\alpha_e} = nK_n^{(i+1)}(T), \quad K_n^{(i+1)}(T) = \lambda_e^3 \frac{g_i}{2g_{i+1}} \exp\left(\frac{I_{i+1}}{T}\right) \quad (1.30)$$

mit

$$\alpha_i = \frac{N_i}{N}, \quad \alpha_e = \frac{N_e}{N}, \quad I_{i+1} = \epsilon_{i+1,0} - \epsilon_{i,0}.$$

Man nennt  $\alpha_e$  den Ionisationsgrad und  $I_i$  das  $i$ -te Ionisationspotential. Der Ionisationsgrad variiert zwischen 0 und  $Z$ . Das Ionisationspotential entspricht der Energie, die benötigt wird, um die Ionisationsstufe im Grundzustand ( $k = 0$ ) von  $i - 1$  nach  $i$  zu erhöhen.

## Saha-Gleichung

Ist neben der Temperatur der Druck  $p$  vorgegeben, so erhält man aus der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$pV = \sum_{\nu} N_{\nu} T = (1 + \alpha_e)NT \quad (1.31)$$

die zugehörige Gleichgewichtsdichte,

$$n = \frac{p}{(1 + \alpha_e)T}. \quad (1.32)$$

Damit kann die Gleichgewichtsbedingung als Funktion von Druck und Temperatur angegeben werden,

$$\frac{\alpha_i(1 + \alpha_e)}{\alpha_{i+1}\alpha_e} = pK_p^{(i+1)}(T), \quad K_p^{(i+1)}(T) = \frac{\lambda_e^3}{T} \frac{g_i}{2g_{i+1}} \exp\left(\frac{I_{i+1}}{T}\right). \quad (1.33)$$

Sie wird als Saha-Gleichung (M. Saha, 1921) bezeichnet und stellt das Massenwirkungsgesetz für Ionisationsreaktionen dar.

## Einfach ionisierte Plasmen

Da die höheren Ionisationspotentiale meist viel größer sind als das erste, gibt es einen Temperaturbereich, in dem vorwiegend nur neutrale Atome und einfach ionisierte Ionen vorliegen. Setzt man  $\alpha_i = 0$  für  $i \geq 2$ , so erhält man aus (1.23)

$$\alpha_0 = 1 - \alpha_e, \quad \alpha_1 = \alpha_e$$

und für  $i = 0$  aus (1.33)

$$\frac{1 - \alpha_e}{\alpha_e^2} = n K_n^{(1)}(T).$$

Die Auflösung nach  $\alpha_e$  ergibt den Ionisationsgrad bei vorgegebener Dichte und Temperatur

$$\alpha_e = \frac{1}{2n K_n^{(1)}(T)} \left( \sqrt{1 + 4n K_n^{(1)}(T)} - 1 \right). \quad (1.34)$$

Entsprechend erhält man aus (1.33)

$$\frac{1 - \alpha_e^2}{\alpha_e^2} = p K_p^{(1)}(T)$$

und damit den Ionisationsgrad als Funktion von Druck und Temperatur

$$\alpha_e = \frac{1}{\sqrt{1 + p K_p^{(1)}(T)}}. \quad (1.35)$$

Bei hohen Temperaturen geht die Konstante  $p K_p^{(i+1)}(T)$  wie  $T^{-3/2}$  gegen Null und der Ionisationsgrad gegen eins. Die Konstante ist proportional zur Zahl der Teilchen im de Broglie-Volumen. Da diese Zahl für klassische Systeme sehr klein ist, setzt die Ionisation schon bei Temperaturen unterhalb der Ionisationsenergie ein.

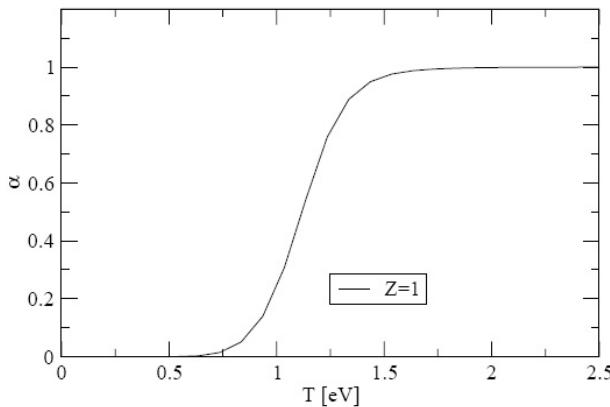


Abbildung 1.1: Ionisationsgrad von Wasserstoff bei einem Druck von 1 bar als Funktion der Temperatur.

# Kapitel 2

## Einzelteilchenbewegung

Die Bewegung einer Masse  $m$  mit der Ladung  $q$  in einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und magnetischen Feld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  wird durch die Coulomb- und Lorentzkraft bestimmt.

**Newton'sche Bewegungsgleichungen:**

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t), \quad (2.1)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.2)$$

**Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:**

$$\dot{q}_i = \partial_{p_i} H, \quad \dot{p}_i = -\partial_{q_i} H \quad (2.3)$$

$$H = \frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + q\Phi, \quad \text{Hamilton-Funktion}$$

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}, \quad \text{kanonischer Impuls}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} - \nabla\Phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \text{Felder} \quad (2.4)$$

**Relativistische Bewegungsgleichungen:**

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} (m\gamma \mathbf{v}(t)) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.6)$$

## 2.1 Konstante Felder

### 2.1.1 Konstantes B-Feld

*Bewegungsgleichung:*

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}(t) &= \frac{q}{c}\mathbf{v}(t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{B} &= (0, 0, B) \\ \dot{v}_x &= \omega_g v_y, & \dot{v}_y &= -\omega_g v_x, & \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

*Bewegung parallel zu B:*  $v_z = v_{\parallel} = \text{const}$

*Bewegung senkrecht zu B:*  $V = v_x + iv_y$

$$\dot{V} = -i\omega_g V, \quad V = v_{\perp} e^{-i\omega_g t + i\phi} \quad (2.8)$$

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega_g t - \phi), \quad v_y = -v_{\perp} \sin(\omega_g t - \phi) \quad (2.9)$$

$$x = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_g} \sin(\omega_g t - \phi), \quad y = y_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_g} \cos(\omega_g t - \phi) \quad (2.10)$$

Blickt man entgegen der Magnetfeldrichtung, so umkreist eine positive (negative) Ladung die Feldlinie im (entgegen dem) Uhrzeigersinn. Gyrbewegung und Parallelbewegung zusammen ergeben eine Spiralbahn entlang der Feldlinie.

**Übung 2.1** Erklären Sie die Umlaufrichtung der Gyrbewegung mit Hilfe der Lorentzkraft

### 2.1.2 Konstantes B-Feld, konstante Kraft K

*Bewegungsgleichung:*

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{q}{c}\mathbf{v}(t)\times\mathbf{B} + \mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{K} = (K_{\perp}, K_{\parallel})$$

*Bewegung parallel zu B:*  $\mathbf{v} = (v_{\perp}, v_{\parallel})$

$$m\dot{v}_{\parallel} = K_{\parallel} \quad \rightarrow \quad v_{\parallel} = v_0 + K_{\parallel}t \quad (2.11)$$

*Bewegung senkrecht zu B:*

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}_{\perp} &= \frac{q}{c}\mathbf{v}_{\perp}\times\mathbf{B} + \mathbf{K}_{\perp} \\ \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{u} + \mathbf{v}_K \\ \mathbf{v}_K &= \frac{c\mathbf{K}\times\mathbf{B}}{B^2} \quad \rightarrow \quad m\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{q}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die allgemeine Lösung besteht aus einer beschleunigten Bewegung entlang der Feldlinie, einer Drift  $\mathbf{v}_K$  senkrecht zu  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{K}$  und einer Gyrbewegung  $\mathbf{u}$ . Die Kraft  $\mathbf{K}_{\perp}$  verschwindet in einem Koordinatensystem, welches sich mit  $\mathbf{v}_K$  bewegt.

**Beispiel 2.1 (  $E \times B$  - Drift)**

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_E = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Die  $E \times B$  - Drift ist unabhängig von der Ladung.

**Beispiel 2.2 (  $g \times B$  - Drift)**

$$\mathbf{K} = m\mathbf{g} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_g = \frac{cm}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Die Drift im Schwerefeld führt zur Ladungstrennung. Liegt  $B$  in horizontaler Richtung, so erfolgt die Drift in der dazu senkrechten horizontalen Richtung. Durch die Ladungstrennung entsteht ein horizontales zu  $B$  senkrecht elektrisches Feld. Die resultierende  $E \times B$  - Drift ist unabhängig vom Vorzeichen der Ladungen vertikal nach unten gerichtet.

**Übung 2.2** Überzeugen Sie sich, daß die resultierende Drift eines Plasmas im Schwerefeld mit einem horizontalen Magnetfeld tatsächlich nach unten gerichtet ist.

## 2.2 Langsam veränderliche Felder

### 2.2.1 Driftnäherung

**Führungszentrum:**

In räumlich und zeitlich langsam veränderlichen Feldern treten zusätzliche Driftbewegungen auf. Lokal kann man ein Koordinatensystem einführen, in dem das Teilchen in der x,y-Ebene eine Gyrationsbewegung um die z-Achse ausführt. Der Ursprung dieses Koordinatensystems wird als Führungszentrum bezeichnet. Bezeichnet man den Ortsvektor zum Führungszentrum mit  $\mathbf{R}$ , die Position des Teilchens vom Führungszentrum aus mit  $\boldsymbol{\rho}$ , so folgt für die Bahn  $\mathbf{r}(t)$  des Teilchens die Darstellung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \quad (2.13)$$

Das Führungszentrum bewegt sich mit den schon bekannten Driften  $\mathbf{v}_E$ ,  $\mathbf{v}_\parallel$ . In inhomogenen Feldern wirken auf das Führungszentrum noch Zusatzkräfte. Die von diesen Zusatzkräften verursachte Drift wird mit  $\mathbf{v}_g$  bezeichnet. Die Driftbewegung des Führungszentrums besitzt also die Anteile

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_E(\mathbf{R}(t), t) + \mathbf{v}_\parallel(\mathbf{R}(t), t) + \mathbf{v}_g(\mathbf{R}(t), t) \quad (2.14)$$

**Annahmen der Driftnäherung:**

- *Schwach veränderliche Felder:*  $T$  sei die Zeit,  $L$  die Länge über die sich die Felder  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  merklich ändern. Diese Änderungen sollen bei einem Umlauf um das Führungszentrum klein sein:

$$\epsilon \sim \frac{r_g}{L} \ll 1, \quad \frac{1}{T} \sim \epsilon \omega_g. \quad (2.15)$$

- *Größenordnung der Driftgeschwindigkeiten:*  $v_g$  wird durch Inhomogenitäten verursacht und ist daher klein gegenüber den typischen Geschwindigkeiten in homogenen Feldern.

$$v_{\parallel} \sim v_{\perp}, \quad v_E \sim v_{\perp}, \quad v_g \sim \epsilon v_{\perp} \quad (2.16)$$

- *Größenordnung von  $E_{\parallel}$ :* Die Geschwindigkeitsänderung der Parallelbewegung soll innerhalb einer Gyrationperiode klein sein:

$$\frac{q}{m} E_{\parallel} \frac{1}{\omega_g} \sim \epsilon v_{\perp} \quad \rightarrow \quad \frac{q}{m} E_{\parallel} \sim \epsilon \omega_g^2 r_g. \quad (2.17)$$

## 2.2.2 Störungsrechnung

**Bewegungsgleichung:** Einsetzen von (2.13) in (2.1) ergibt

$$m(\ddot{\rho} + \ddot{\mathbf{R}}) = q\mathbf{E}_{\parallel} + \frac{q}{c}(\dot{\rho} + \mathbf{v}_g) \times \mathbf{B} \quad (2.18)$$

**Entwicklung von  $\ddot{\mathbf{R}}$  in  $\epsilon$ :**

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} [\mathbf{v}_E(\mathbf{R}(t), t) + \mathbf{v}_{\parallel}(\mathbf{R}(t), t) + \mathbf{v}_g(\mathbf{R}(t), t)] \\ &= \frac{d}{dt} [\mathbf{v}_E(\mathbf{R}(t), t) + \mathbf{v}_{\parallel}(\mathbf{R}(t), t)] + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E + \frac{d}{dt} (v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E + \mathbf{e}_{\parallel} \frac{d}{dt} (v_{\parallel}) + v_{\parallel} \frac{d}{dt} (\mathbf{e}_{\parallel}) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E + \mathbf{e}_{\parallel} \frac{d}{dt} (v_{\parallel}) + v_{\parallel} (\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla + \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel} + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E + \mathbf{e}_{\parallel} \frac{d}{dt} (v_{\parallel}) + v_{\parallel} (\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel} + v_{\parallel}^2 (\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel} + O(\epsilon^2) \\ \frac{d}{dt} &= (\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla + \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Im letzten Term kann die Richtungsableitung entlang der Feldlinie durch die Krümmung ausgedrückt werden:

$$(\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel} = -\frac{1}{R_c} \mathbf{e}_{\perp} \quad (2.20)$$

Hierbei ist  $R_c$  der Krümmungsradius in einem Punkt  $P$  der Feldlinie und  $\mathbf{e}_\perp$  ein Einheitsvektor, der vom Krümmungsmittelpunkt zum Punkt  $P$  gerichtet ist. Die Krümmung der Feldlinie kann auch in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$(\mathbf{e}_\parallel \cdot \nabla) \mathbf{e}_\parallel = \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \left[ \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} \right]_\perp = \left[ \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{B^2} \right]_\perp \quad (2.21)$$

**Entwicklung der Lorentzkraft  $\mathbf{F}_L$  in  $\epsilon$ :**

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + O(\epsilon^2) \\ \mathbf{F}_L(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{c} [\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)] \\ &+ \frac{q}{c} [\mathbf{v}_g \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + \dot{\boldsymbol{\rho}} \times (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

**Bewegungsgleichung in der Ordnung  $O(1)$ :**

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{\rho}} &= \frac{q}{c} [\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)] \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} &= v_\perp (\cos(\psi), -\sin(\psi), 0), \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{v_\perp}{\omega_g(t)} (\sin(\psi), \cos(\psi), 0) + O(\epsilon) \\ \psi &= \int_0^t \omega_g(t') dt', \quad \omega_g(t) = \frac{qB(\mathbf{R}(t), t)}{mc} \end{aligned} \quad (2.23)$$

In dieser Ordnung erhält man die schnelle Gyrationsbewegung des Teilchens um das Führungszentrum. Die Gyrationsfrequenz besitzt eine langsame Zeitabhängigkeit. Das Magnetfeld ist dabei am Ort des Führungszentrums, nicht am Ort der Ladung, auszuwerten.

**Mittelung über  $\psi$ :**

Die Bewegung des Führungszentrums darf nicht von der schnellen Gyrationsbewegung abhängen. Dies kann durch eine Mittelung der Bewegungsgleichung über  $\psi$  erreicht werden. Der einzige schnellveränderliche Term mit einem nichtverschwindenden Mittelwert ist

$$\mathbf{F}_s = \frac{q}{c} \dot{\boldsymbol{\rho}} \times (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t). \quad (2.24)$$

Im Führungszentrum besitzt  $\mathbf{B}$  nur eine z-Komponente, die Ableitungen der  $x$ - und  $y$ -Komponenten sind jedoch i.a. ungleich null. Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (0, 0, B), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0, \\ \nabla B &= \frac{1}{B} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

ergibt die Mittelung von (2.24) über  $\psi$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F}_s \rangle &= \frac{q}{c} \langle \dot{\rho}(\rho \cdot \nabla) \rangle \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{q}{c} \frac{v_\perp^2}{\omega_g} \frac{1}{2} (\partial_y, -\partial_x, 0) \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{q}{c} \frac{v_\perp^2}{\omega_g} \frac{1}{2} (-\partial_x B_z, -\partial_y B_z, \partial_y B_y + \partial_x B_x) \\
 &= \frac{q}{c} \frac{v_\perp^2}{\omega_g} \frac{1}{2} (-\partial_x B_z, -\partial_y B_z, -\partial_z B_z) \\
 &= -\mu \nabla B = -\frac{\mu}{B} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

### Magnetisches Moment:

$\mu$  ist das magnetische Moment des gyrierenden Teilchens:

$$\begin{aligned}
 I &= q \frac{\omega_g}{2\pi}, \quad A = \pi r_g^2, \\
 \mu &= \frac{1}{c} I A = \frac{q}{c} \frac{\omega_g}{2\pi} \pi r_g^2 = \frac{1}{2} \frac{q}{c} \frac{v_\perp^2}{\omega_g} = \frac{mv_\perp^2/2}{B} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Bewegung parallel zu  $B$  in der Ordnung  $O(\epsilon)$ :

$$m \frac{d}{dt} (v_\parallel) = q E_\parallel - \mu \nabla_\parallel B - m \left( \frac{d}{dt} v_E \right)_\parallel \quad (2.28)$$

Bewegung senkrecht zu  $B$  in der Ordnung  $O(\epsilon)$ :

Gemittelte Kraft auf das Führungszentrum:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= - \left\{ \mu \nabla_\perp B + \left( m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E \right)_\perp + mv_\parallel (\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{e}_\parallel + mv_\parallel^2 (\mathbf{e}_\parallel \cdot \nabla) \mathbf{e}_\parallel \right\} \\
 &= - \left\{ \left( m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E \right)_\perp + mv_\parallel (\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{e}_\parallel \right. \\
 &\quad \left. + \frac{mv_\perp^2/2}{B} \mathbf{e}_\parallel \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \left( \frac{mv_\perp^2/2}{B} + \frac{mv_\parallel^2}{B} \right) (\mathbf{e}_\parallel \cdot \nabla \mathbf{B})_\perp \right\} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Drift des Führungszentrums:

$$0 = \frac{q}{c} \mathbf{v}_g \times \mathbf{B} + \mathbf{K}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_g = \frac{c}{q} \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.30)$$

Beiträge zur Drift

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_g &= \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_{\dot{E}} + \mathbf{v}_{\dot{e}_{\parallel}} \\
 \mathbf{v}_{\nabla B} &= \frac{1}{\omega_g} \mathbf{e}_{\parallel} \times \left[ \frac{v_{\perp}^2/2}{B} \mathbf{e}_{\parallel} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2}{B} (\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{B}) \right] \\
 \mathbf{v}_{\dot{E}} &= \frac{1}{\omega_g} \mathbf{e}_{\parallel} \times \frac{d}{dt} \mathbf{v}_E \\
 \mathbf{v}_{\dot{e}_{\parallel}} &= \frac{v_{\parallel}}{\omega_g} \mathbf{e}_{\parallel} \times (\partial_t + \mathbf{v}_E \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Die Driften werden als Gradient-B-Drift ( $\mathbf{v}_{\nabla B}$ ) und als Polarisationsdrift ( $\mathbf{v}_{\dot{E}}$ ) bezeichnet. Die Drift  $\mathbf{v}_{\dot{e}_{\parallel}}$  wird durch zeitliche Richtungsänderungen des Magnetfeldes verursacht.

### 2.2.3 Räumlich langsam veränderliche Magnetfelder

Ein wichtiger Spezialfall ist die Bewegung in räumlich langsam veränderlichen Magnetfeldern. Hierbei wird angenommen, daß  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\partial_t \mathbf{B} = 0$ .

**Longitudinaler Gradient:**  $\nabla_{\parallel} B \neq 0$

- Driftgleichung:

$$m \frac{d}{dt} (v_{\parallel}) = -\mu \nabla_{\parallel} B \tag{2.32}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = m \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) \\
 \rightarrow \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 &= \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B = \text{const.}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Gilt exakt, da das Teilchen im Magnetfeld keine Energie aufnehmen kann.

- Erhaltung des magnetischen Momentes:

$$\mu = \text{const} \tag{2.34}$$

Folgt aus (2.33), (2.32).  $\mu$  ist eine adiabatische Invariante (Abschnitt 2.3).

- Magnetischer Spiegel:

Auf das Teilchen wirkt die Kraft  $-\nabla_{\parallel} B$ , die entgegen dem Gradienten der Feldstärke gerichtet ist. Teilchen, deren Parallelgeschwindigkeit nicht zu groß

ist, werden reflektiert. Für die in einem magnetischen Spiegel gefangenen Teilchen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B &\leq \mu B_{max} \quad \Big| : \mu B_{min} \\ \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2} + 1 &\leq \frac{B_{max}}{B_{min}} = R, \quad \left| \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right| \leq \sqrt{R-1} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Das Gebiet  $v_{\parallel} > \sqrt{R-1} v_{\perp}$  des Geschwindigkeitsraumes wird als Verlustkegel,  $R$  als das Spiegelverhältnis bezeichnet.

**Bemerkung 2.1** Verluste bei Spiegelmaschinen entstehen durch eine instabile Krümmung der Feldlinien (MHD-Instabilitäten) und durch die Streuung von Teilchen (Stöße, Mikroinstabilitäten) in den Verlustkegel.

**Transversaler Gradient:**  $\mathbf{B} = (0, 0, B(y))$ ,  $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$

- Lorentzkraft:

$$\mathbf{K} = -\mu \nabla_{\perp} B$$

- Drift:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{c}{q} \mu \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (2.36)$$

**Übung 2.3** Deuten Sie die Drift kinematisch durch die Änderung des Gyroradius im inhomogenen Magnetfeld.

**Gekrümmtes Magnetfeld:**  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\parallel} \neq 0$

- Lorentzkraft:

$$\mathbf{K}_L = -\mu \nabla_{\perp} B = -\frac{1}{2} v_{\perp}^2 \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\parallel} \quad (2.37)$$

- Zentrifugalkraft:

$$\mathbf{K}_Z = v_{\parallel}^2 \frac{1}{R_c} \mathbf{e}_{\perp} = -v_{\parallel}^2 \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\parallel} \quad (2.38)$$

- Drift:

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{\omega_g} \left( \frac{1}{2} v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 \right) \mathbf{e}_{\parallel} \times (\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{e}_{\parallel}) \quad (2.39)$$

**Bemerkung 2.2** In einem axialsymmetrischen Magnetfeld  $B_\phi = \frac{2I}{cr}$ , das durch einen achsenparallelen Strom  $I$  erzeugt wird, entsteht durch Gradientendrift ein achsenparalleles elektrisches Feld (entgegen der Stromrichtung). Die resultierende  $E \times B$  - Drift ist radial nach außen gerichtet. Der Plasmaeinschluß in toroidalen Magnetfeldern ist daher nur möglich, wenn die Ladungstrennung durch eine Verdrehung der Feldlinien (Rotationstransformation) um den Torus kompensiert wird. Die dafür erforderliche Magnetfeldkomponente senkrecht zum toroidalen Feld heißt poloidales Magnetfeld. Es kann entweder durch äußere Spulenströme (Stellarator) oder durch den Plasmastrom selbst (Tokamak) erzeugt werden.

## 2.3 Adiabatische Invarianten

### 2.3.1 Hamiltonsche Systeme:

Die Bewegungsgleichung einer Ladung in elektrischen und magnetischen Feldern kann nach (2.3) auch als Hamiltonsches System geschrieben werden. Hamiltonsche Systeme, deren Lösungen fast geschlossene Kurven im Phasenraum beschreiben, besitzen adiabatische Invarianten, die sich nur sehr langsam ändern. Ein wichtiges Beispiel bildet die Gyrbewegung einer Ladung in einem langsam veränderlichen Magnetfeld. Die zugehörige adiabatische Invariante ist das magnetische Moment.

**Annahmen:**

- Hamilton-Funktion:  $H = H(p, q, \lambda)$
- 1 Freiheitsgrad
- Parameter  $\lambda$
- $H = \text{const}, \lambda = \text{const} \Rightarrow p(t), q(t)$  geschlossene Kurve

**Langsame Zeitabhängigkeit:**

$$\lambda = \epsilon t, \quad \Delta t = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta H = O(1)$$

**Definition 2.1 (Adiabatische Invariante)**

$I(H, \lambda)$  heißt adiabatische Invariante, wenn gilt:

$$\Delta t = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta I = O(\epsilon) \quad (2.40)$$

Die Änderung der adiabatischen Invarianten ist also klein im Vergleich zur Änderung der Energie. Um zu zeigen, daß es tatsächlich adiabatische Invarianten gibt, wird zunächst die Methode der kanonischen Transformationen eingeführt.

### 2.3.2 Kanonische Transformationen

**Definition 2.2 (Kanonische Transformation)** Eine Transformation  $p' = p'(p, q)$ ,  $q' = q'(p, q)$  heißt kanonisch, wenn die kanonischen Bewegungsgleichungen ihre Form beibehalten, d.h. es gilt

$$\dot{p}' = -\partial_{q'} H', \quad \dot{q}' = \partial_{p'} H'$$

mit einer neuen Hamilton-Funktion  $H' = H'(p', q')$ .

**Erzeugende Funktion  $F(q, q', t)$ :** Bei einer kanonischen Transformation muß das Prinzip der kleinsten Wirkung auch in den neuen Koordinaten gelten. Daher darf sich die neue Lagrangefunktion  $L' = p' \dot{q}' - H'$  von der alten Lagrangefunktion  $L = p \dot{q} - H$  nur durch eine totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $F$  unterscheiden:

$$\frac{d}{dt} F = L - L' = p \dot{q} - p' \dot{q}' - (H - H')$$

Für eine Funktion  $F = F(q, q', t)$  gilt dann

$$p = \partial_q F, \quad p' = -\partial_{q'} F, \quad H' = H + \partial_t F. \quad (2.41)$$

Man nennt  $F = F(q, q', t)$  die *erzeugende Funktion* der kanonischen Transformation. Für eine gegebene erzeugende Funktion sind die Gleichungen (2.41) Transformationsgleichungen für die Koordinaten und für die Hamilton-Funktion.

**Erzeugende Funktion  $S(q, p', t)$ :** Durch eine Legendre-Transformation kann man erzeugende Funktionen einführen, die von einem anderen Paar unabhängiger Variablen abhängen. Im folgenden wird eine erzeugende Funktion  $S(q, p', t) = F + p' q'$  verwendet. Die entsprechenden Transformationsgleichungen erhält man aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S &= \frac{d}{dt} (F + p' q') = p \dot{q} + q' p' \dot{q}' - (H - H'), \\ \rightarrow p &= \partial_q S, \quad q' = \partial_{p'} S, \quad H' = H + \partial_t S. \end{aligned} \quad (2.42)$$

**Erhaltung des Phasenraumvolumens:** Bei der Abbildung eines Gebietes des Phasenraumes durch eine kanonische Transformation bleibt das Phasenraumvolumen des Gebietes erhalten:

$$\begin{aligned} t &= \text{const} \quad \Rightarrow \quad dF = pdq - p' dq' \\ 0 &= \oint dF = \oint (pdq - p' dq') = \oint pdq - \oint p' dq'. \end{aligned} \quad (2.43)$$

**Definition 2.3 (Wirkungs-, Winkelvariablen)** Die Wirkung  $I$  und der Winkel  $\varphi$  werden bei einem festen Wert des Parameters  $\lambda$  in der folgenden Weise definiert:

$$\begin{aligned} H(p, q, \lambda) &= H \quad \rightarrow \quad p = p(H, q, \lambda) \\ I(H, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\lambda=\text{const}} p(H, q, \lambda) dq, \quad \oint d\varphi = 2\pi. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Wirkung ist proportional zur Fläche, die von der Bahn bei festgehaltenem Parameter  $\lambda$  in einem Umlauf umschlossen wird. Der Winkel wächst bei einem Umlauf um  $2\pi$ .

**Erzeugende Funktion für die Abbildung**  $(p, q) \rightarrow (I, \varphi)$ : Die Transformation  $(p, q) \rightarrow (I, \varphi)$  ist kanonisch. Dies folgt aus der Existenz einer erzeugenden Funktion:

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q p(H(I, \lambda), q'', \lambda) dq''$$

Die Wirkungs-, Winkelvariablen (2.44) erfüllen die zugehörigen Transformationsgleichungen (2.42)

$$\begin{aligned} p &= \partial_q S(I, q) = p(H(I, \lambda), q, \lambda) \\ 2\pi &= \partial_I \oint p(H(I, \lambda), q'', \lambda) dq'' \\ H' &= H + \partial_t S = H + \epsilon \partial_\lambda S \end{aligned} \quad (2.45)$$

Für ein zeitabhängiges  $\lambda$  ist die kanonische Transformation zeitabhängig und die Hamilton-Funktion wie angegeben zu transformieren.

**Ungestörtes System:**  $\dot{\lambda} = \epsilon = 0$

$$\begin{aligned} H'(I, \lambda) &= H(I, \lambda), \quad \dot{\varphi} = \omega(I, \lambda), \quad \dot{I} = 0, \\ \omega(I, \lambda) &:= \partial_I H'(I, \lambda) \end{aligned} \quad (2.46)$$

**Gestörtes System:**  $\dot{\lambda} = \epsilon \neq 0$

$$\begin{aligned} H'(I, \varphi, \lambda) &= H(I, \lambda) + \epsilon \partial_\lambda S, \\ \dot{\varphi} &= \omega(I, \lambda) + \epsilon f(I, \varphi, \lambda), \\ \dot{I} &= \epsilon g(I, \varphi, \lambda) \\ f &:= \frac{\partial^2 S}{\partial_I \partial_\lambda}, \quad g := -\frac{\partial^2 S}{\partial_\varphi \partial_\lambda} \end{aligned} \quad (2.47)$$

### 2.3.3 Adiabatische Invarianz der Wirkung

**Beweisidee:**

Verkleinerung von  $\dot{I}$  durch sukzessive Anwendung kanonischer Transformationen.

**Ausgangssystem:**

$$H^0 = H^0(p, q, \lambda), \quad \dot{p} = -\partial_q H^0, \quad \dot{q} = \partial_p H^0 \quad (2.48)$$

**1. Transformation:**  $S^1$

$$\begin{aligned} I^1 &= \frac{1}{2\pi} \oint_{H^0=const} p(H^0, q, \lambda) dq \\ H^1 &= H^0 + \epsilon \partial_\lambda S^1 \quad \dot{I}^1 = \epsilon g^1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die erste Transformation reicht nicht aus um die adiabatische Invarianz nachzuweisen:

$$\Delta t = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \Rightarrow \Delta I^1 = O(\epsilon)\Delta t = O(1).$$

**2. Transformation:  $S^2$**

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \oint_{H^1=const} I^1(H^1, \varphi^1, \lambda) d\varphi^1 \\ H^2 &= H^1 + \epsilon \partial_\lambda S^2, \quad I^2 = \epsilon g^2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

$I^2$  unterscheidet sich nur um  $O(\epsilon)$  von  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \oint_{H^0=const} I^1(H^0, \varphi^1, \lambda) d\varphi^1 + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{H^0=const} p(H^0, q, \lambda) dq + O(\epsilon) = I^1 + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die Transformation  $S^2$  unterscheidet sich deshalb von der identischen Abbildung nur in der Ordnung  $O(\epsilon)$ :

$$S^2 = I^2 q^1 + \epsilon \tilde{S}^2 \quad (2.52)$$

Dies reicht aus, um die adiabatische Invarianz der Wirkung nachzuweisen:

$$\begin{aligned} \dot{I}^2 &= \epsilon g^2 = \epsilon^2 \tilde{g}^2, \quad \tilde{g}^2 = -\frac{\partial^2 \tilde{S}^2}{\partial \varphi^2 \partial \lambda} \\ \Delta t &= O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \Rightarrow \\ \Delta I^2 &= O(\epsilon^2) \Delta t = O(\epsilon), \quad \Delta I^1 = \Delta I^2 + O(\epsilon) = O(\epsilon). \end{aligned}$$

### Bemerkung 2.3 (Adiabatische Invarianten)

1.  $I_1$  besitzt Schwankungen von der Ordnung  $\epsilon$  um  $I_2$ .  $I_2$  gibt an wie stark sich der Mittelwert von  $I_1$  ändert.
2. Durch Iteration des Beweisverfahrens lässt sich zeigen:  $\Delta I^n = O(\epsilon^n) \Delta t$ . Dies bedeutet, daß  $\Delta I$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, wie z.B. die Funktion  $\Delta I \sim e^{-const/\epsilon}$ . Die Änderung ist dann kleiner als die einer beliebigen Potenz:

$$\frac{\Delta I}{\Delta I^n} \sim \frac{1}{\epsilon^n} e^{-const/\epsilon} \rightarrow 0.$$

3. Bei mehreren Freiheitsgraden gibt es unter Umständen weitere adiabatische Invarianten. Maximal gibt es für jeden Freiheitsgrad eine Invariante. Dazu müssen für jeden Freiheitsgrad fast geschlossene Bahnen existieren, deren Umlaufperioden sich nach Potenzen von  $1/\epsilon$  ordnen lassen.

### Beispiel 2.3 (Magnetisches Moment)

- Vektorpotential

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \pi r_g^2 B = 2\pi r_g A_\varphi \quad \Rightarrow \quad A_\varphi = \frac{r_g}{2} B$$

- Kanonischer Impuls

$$P_\varphi = mv_\varphi + \frac{q}{c} A_\varphi$$

- Adiabatische Invariante der Gyrbewegung

$$\begin{aligned} \oint P_\varphi ds &= 2\pi r_g (mv_\varphi + \frac{q}{c} A_\varphi) = 2\pi r_g (m\omega_g r_g + \frac{q}{2c} r_g B) \\ &\propto Br_g^2 \propto \mu \end{aligned} \quad (2.53)$$

**Beispiel 2.4 (Longitudinale Invariante)** In einem magnetischen Doppelspiegel ist die Bewegung entlang einer Feldlinie periodisch. Die zugehörige adiabatische Invariante ist

$$I_l = \oint v_\parallel dl = \langle v_\parallel \rangle L \quad (2.54)$$

Nimmt die Länge des Spiegelsystems mit der Zeit ab, dann erhöht sich die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens (Fermibeschleunigung).

**Beispiel 2.5 (Flußinvariante)** Die Driftbewegung senkrecht zum Magnetfeld kann auf einer fast geschlossenen Bahn verlaufen. Die adiabatische Invariante ist der von der Bahn eingeschlossene magnetische Fluß.

### Bemerkung 2.4 (Literatur zum Beweis der adiabatischen Invarianz)

1. C.S. Gardner, *Phys. Rev.* **115**, 791 (1959)
2. V.I. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer, New York, 1978, S. 299)

## 2.4 Schnell oszillierendes E-Feld

### 2.4.1 Elektrostatische Welle mit konstanter Amplitude

Elektrostatische Welle:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x e^{i(kx - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{k} \parallel \mathbf{E}, \quad \omega \approx \omega_p \quad (2.55)$$

Teilchenbewegung in der Welle:

$$m\ddot{x} = qE_0 \sin(kx - \omega t) \quad (2.56)$$

Schwingungen mit kleiner Amplitude:  $|kx| \ll 1$

$$\ddot{x} = -\frac{qE_0}{m} \sin(\omega t), \quad x = v_0 t + \frac{qE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t) \quad (2.57)$$

Die Näherung ist anwendbar, wenn die Schwingungsamplitude klein ist gegenüber der Wellenlänge und die Translationsgeschwindigkeit  $v_0$  klein gegenüber der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/k$  der Welle.

Transformation ins Ruhesystem der Welle:

$$\begin{aligned} v' &= v - v_{ph}, & x' &= x - v_{ph}t, \\ m\ddot{x}' &= qE_0 \sin(kx'), & \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{qE_0}{k} \cos(kx') &= W' \end{aligned} \quad (2.58)$$

Bewegung im periodischen Potential  $V = \frac{qE_0}{k} \cos(kx')$  mit der Energie  $W'$ .

Bedingung für gefangene Teilchen:

$$W' < \frac{qE_0}{k} \quad (2.59)$$

Umlauffrequenz der gefangenen Teilchen:

$$kx' \ll 1 \Rightarrow \omega_B = \sqrt{\frac{qE_0 k}{m}} \quad (2.60)$$

### 2.4.2 Elektromagnetische Welle mit konstanter Amplitude

Elektromagnetische Welle:

$$\begin{aligned} A_y &= -\frac{cE_0}{\omega} \sin \eta, & \eta &= \omega t - kx, & \omega &= kc \\ E_y &= -\frac{1}{c} \partial_t A_y = E_0 \cos \eta, & B_z &= \partial_x A_y = E_0 \cos \eta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

**Nichtrelativistische Bewegung:**

$$m\ddot{y} = qE_y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{qE_0}{m\omega^2} \cos \eta \quad (2.62)$$

**Relativistische Bewegung:**

Die Bewegungsgleichung (2.5) kann exakt gelöst werden (s. Übungen):

$$\begin{aligned} kx &= -\frac{1}{8} \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} \sin 2\eta, & ky &= -\frac{\epsilon}{\alpha} \cos \eta, & kz &= 0, \\ \epsilon &= \frac{qE_0}{mc^2 k}, & \alpha &= \sqrt{1 + \frac{1}{2}\epsilon^2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die Bahnkurve hat die Form einer langgestreckten "8". Die Amplituden in x- und y-Richtung sind auch für hohe Feldstärken ( $\rightarrow$ ) klein gegenüber der Wellenlänge:

$$\begin{aligned} k\delta_x &= -\frac{1}{8} \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} \rightarrow \frac{1}{4} & k\delta_y &= \frac{\epsilon}{\alpha} \rightarrow \sqrt{2} \\ \frac{\delta_x}{\lambda} &\rightarrow 0.04, & \frac{\delta_y}{\lambda} &\rightarrow 0.22, & \frac{\delta_x}{\delta_y} &\rightarrow 0.18 \end{aligned} \quad (2.64)$$

### 2.4.3 Ponderomotorisches Potential

In schnellveränderlichen Feldern mit *ortsabhängiger Amplitude* wirkt auf ein Elektron eine Kraft in Richtung der abnehmenden Feldstärke. Die Kraft kann aus einem Potential, dem *ponderomotorischen Potential*, abgeleitet werden.

**Annahmen:**

- $\mathbf{E}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  periodisch in  $t$ ,  $B < \approx E$
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$ ,  $\boldsymbol{\xi}(t)$  periodisch in  $t$
- $|\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{E}| \ll 1$ ,  $|\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{B}| \ll 1$ ,  $|\dot{\boldsymbol{\xi}}/c| \ll 1$
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}$ , ansonsten beliebig

**Störungsrechnung:**

$$m(\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}}) = q[\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}, t)] + \frac{q}{c} \dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + O(\epsilon^2) \quad (2.65)$$

**Ordnung  $O(\epsilon)$ :**

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{\xi}} &= q\mathbf{E}(\mathbf{R}, t), \\ \mathbf{E} &= \Re\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi} = \Re\left\{-\frac{q}{m\omega^2} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\right\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ordnung  $O(\epsilon^2)$ :

$$m\ddot{\mathbf{R}} = q [(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{B}] \quad (2.67)$$

**Nebenrechnung:**  $\{\dots\}$  begrenzt Wirkungsbereich von  $\nabla$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{E} &= \{\nabla \mathbf{E}\} \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{m}{q} \{\nabla \ddot{\boldsymbol{\xi}}\} \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \times \left( -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \right) \\ &= \partial_t \left[ \frac{m}{q} \{\nabla \dot{\boldsymbol{\xi}}\} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{c} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B} \right] - \nabla \left( \frac{m}{2q} \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \right) - \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.68)$$

**Zeitmittelung:**

$$m \langle \ddot{\mathbf{R}} \rangle = -\nabla \langle \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \rangle \quad (2.69)$$

**Ponderomotorisches Potential:**

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= m \langle \ddot{\mathbf{R}} \rangle = -\nabla U_p, \\ U_p &= \frac{1}{2} m \langle \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \rangle = \frac{q^2}{4m\omega^2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \end{aligned} \quad (2.70)$$

**Bemerkung 2.5 (Ponderomotorisches Potential)**

1. Das ponderomotorische Potential ist gleich der zeitgemittelten kinetischen Energie der Oszillationsbewegung.
2. Das ponderomotorische Potential ist eine potentielle Energie. Ein Teilchen, welches in das Feld eintritt, wird entweder elastisch reflektiert (Endgeschwindigkeit = - Anfangsgeschwindigkeit) oder es durchquert das Feld vollständig ohne Energieaufnahme (Endgeschwindigkeit = Anfangsgeschwindigkeit).
3. Die ponderomotorische Kraft wirkt unabhängig vom Vorzeichen der Ladung in Richtung abnehmender Feldstärke (Feld verdrängt die Ladungen).
4. Für eine elektromagnetische Welle ist  $U_p$  proportional zur Intensität  $I$  und zum Quadrat der Wellenlänge  $\lambda$ :

$$U_p = 9.3 \times 10^{-14} I [W/cm^2] \lambda^2 [\mu m] eV$$

**Übung 2.4 (Kinematische Deutung)** Skizzieren Sie qualitativ die Bewegung einer Ladung in einer elektrostatischen (elektromagnetischen) Welle, wenn sich die Feldstärke in Ausbreitungsrichtung der Welle ändert.

### 2.4.4 Ponderomotorische Kraftdichte

Auf ein Plasma mit der Elektronendichte  $n_e$  wirkt eine ponderomotorische Kraftdichte, die sich einfach aus der Addition der ponderomotorischen Kräfte auf die einzelnen Elektronen eines Volumenelementes ergibt. Hierbei wird eine kollektive Bewegung angenommen, bei der auf alle Elektronen des Volumenelementes dieselbe mittlere Feldstärke wirkt.

**Kraftdichte auf Elektronen:**

$$\mathbf{f}_p = -n_e \nabla U_p = -\frac{q_e^2 n_e}{4m_e \omega^2} \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = -\frac{1}{16\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \quad (2.71)$$

**Bemerkung 2.6 (Ponderomotorische Kraftdichte)**

1.  $\omega_{pe}$  ist i.a. ortsabhängig und kann daher nicht mit  $\nabla$  vertauscht werden.
2. Das Feld ist nicht mehr vorgegeben sondern wird durch die Ladungen selbst erzeugt. Trotzdem gilt die Herleitung, solange die in Abschnitt (2.4.3) gemachten Annahmen für jedes Elektron erfüllt sind.

**Gemittelte Elektronengleichung:**

$$m_e n_e \frac{d}{dt} \mathbf{v}_e = q_e n_e \mathbf{E}_s + \mathbf{f}_p \quad (2.72)$$

Im Zeitmittel wirkt auf die Elektronen die ponderomotorische Kraftdichte des schnellveränderlichen Feldes und ein durch Ladungstrennung erzeugtes quasistatisches Feld  $\mathbf{E}_s$ .

**Ionengleichung:**

$$m_i n_i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i = q_i n_i \mathbf{E}_s \quad (2.73)$$

Wegen der größeren Ionenmasse ist die Oszillationsenergie der Ionen vernachlässigbar.

**Quasineutralität:**

$$q_e n_e + q_i n_i \approx 0 \quad (2.74)$$

**Adiabatische Näherung:**

$$\begin{aligned} q_e n_e \mathbf{E}_s + \mathbf{f}_p &= 0, \\ m_i n_i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_i &= q_i n_i \mathbf{E}_s = -q_e n_e \mathbf{E}_s = \mathbf{f}_p \end{aligned} \quad (2.75)$$

Die Elektronen folgen dem quasistatischen Kräftegleichgewicht trägeitsfrei. Auf die Ionen wirkt damit die ponderomotorische Kraftdichte. Das Plasma wird insgesamt aus den Feldstärkemaxima verdrängt.

### 2.4.5 Ponderomotorischer Druck

Die Kraftwirkung auf ein Volumenelement lässt sich in einer Feldtheorie auch als die Resultierende der an der Oberfläche angreifenden Kräfte darstellen. Entsprechend dieser Auffassung gibt es zur ponderomotorischen Kraftdichte einen ponderomotorischen Drucktensor.

**Drucktensor:**

$$\mathbf{f}_p = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_p, \quad \int_V dV \mathbf{f}_p = - \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{\Pi}_p \quad (2.76)$$

**Impulserhaltung für das Volumen  $V$  zur Zeit  $t = 0$ :**

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \int_{V_{\alpha}(t)} dV m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \int_V \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}) \quad (2.77)$$

$\alpha$  nummeriert die Teilchensorte (Elektronen, Ionen),  $V_{\alpha}(t)$  ist das von der Teilchen der Sorte  $\alpha$  zur Zeit  $t$  eingenommene Volumen, wobei sich zur Zeit  $t = 0$  alle Teilchen im selben Volumen befinden:  $V_{\alpha}(0) = V$

**Umformungen:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{\alpha}(t)} dV m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} &= \int_V dV \partial_t (m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) + \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\ &= \int_V dV \{ \partial_t (m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) + \nabla \cdot (m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{4\pi} \{ \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} \} \\ &= \frac{1}{4\pi} \{ \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \nabla E^2 \} \\ &= \frac{1}{4\pi} \{ \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2) - \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{B} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}) \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{4\pi} (-\frac{1}{2} \nabla B^2 + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot [\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2] - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

**Erhaltungssatz für die Impulsdichte:** Das Volumen  $V$  ist beliebig. Daher muß der Integrand verschwinden:

$$\begin{aligned} \partial_t \left\{ \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right\} + \\ \nabla \cdot \left\{ \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{B}) \right\} = 0 \quad (2.78) \end{aligned}$$

**Zeitmittelung:**

$$\Pi_p = \left\langle m_e n_e \dot{\xi} \dot{\xi} + \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{B}) \right\rangle \quad (2.79)$$

**Bemerkung 2.7**

1. Der Drucktensor besteht i.a. aus dem kinematischen Drucktensor der Elektronen und dem Drucktensor des elektromagnetischen Feldes.
2. Bei der Herleitung des Drucktensors wurden die Maxwellgleichungen für die Strom- und Ladungsdichten verwendet.
3. Die Übereinstimmung des Drucktensors (2.79) mit dem Ausdruck (2.71) für die Kraftdichte zeigen die folgenden beiden Beispiele.

**Beispiel 2.6 (Elektromagnetische Welle)**

- Felder:  $\mathbf{E} = (E(z), 0, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (0, B(z), 0)$ ;  $\propto \exp(-i\omega t)$

- Oszillationsgeschwindigkeit:  $\dot{\xi} = \frac{q}{-i\omega m} \mathbf{E}$

- Stromdichte:

$$\mathbf{j} = qn \dot{\xi} = \frac{q^2 n \mathbf{E}}{-i\omega m} = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{-i\omega} \mathbf{E}$$

- Maxwellgleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}$$

- Magnetfeld:

$$\partial_z B = i \frac{\omega}{c} \epsilon E, \quad B = -i \frac{c}{\omega} \partial_z E$$

$$\partial_z |B|^2 = B^* \partial_z B + c.c. = -\epsilon E \partial_z E^* + c.c. = -\epsilon \partial_z |E|^2$$

- *Druck:*  $\Pi_{zz} = \partial_z \left\langle \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \right\rangle$

- *Kraftdichte:*

$$f_z = \frac{1}{16\pi} \partial_z (|E|^2 + |B|^2) = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \partial_z |E|^2$$

### Beispiel 2.7 (Elektrostatische Welle)

- *Felder:*  $\mathbf{E} = (0, 0, E(z))$ ,  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\omega = \omega_p$
- *Oszillationsgeschwindigkeit:*

$$v = \frac{q}{-i\omega_p m} E, \quad mn|v|^2 = \frac{nq^2}{\omega_p^2 m} |E|^2 = \frac{1}{4\pi} |E|^2$$

- *Druck:*

$$\Pi_{zz} = mn \langle v^2 \rangle + \frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle - \frac{1}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{1}{16\pi} |E|^2$$

- *Kraftdichte:*

$$f_z = \frac{1}{16\pi} \partial_z |E|^2$$

# Kapitel 3

## Grundgleichungen der Plasmatheorie

### 3.1 Statistische Beschreibung

#### 3.1.1 Hamiltonsche Beschreibung

**$6N$ -dimensionaler Phasenraum:** Ein System aus  $N$ -Teilchen kann in der klassischen Mechanik durch **einen** Punkt in einem  $6N$ -dimensionalen Phasenraum repräsentiert werden. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen:  $\mathbf{X}_i = (\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$  für die Phasenraumkoordinaten des  $i$ -ten Teilchens,  $d\Gamma_i = d^3q_i d^3p_i$  für das Volumenelement im Phasenraum des  $i$ -ten Teilchens,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)$  für die Phasenraumkoordinaten des Systems und  $d\Gamma$  für das Volumenelement im Phasenraum des Systems. Der Zeitentwicklung des Systems entspricht eine Bewegung des Punktes  $\mathbf{X}$  gemäß den Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \partial_{\mathbf{p}_i} H, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\partial_{\mathbf{q}_i} H \quad (3.1)$$

#### 3.1.2 Liouville-Gleichung

Ein Ensemble von klassischen Systemen aus  $N$ -Teilchen wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $F_N(\mathbf{X}, t)$  repräsentiert. Sie wird als Liouville-Funktion bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, ein System am Ort  $\mathbf{X}$  im Volumenelement  $d\Gamma$  zur Zeit  $t$  zu finden ist:

$$F_N(\mathbf{X}, t) d\Gamma .$$

**Kontinuitätsgleichung:**

Wegen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t F_N + \sum_{i=1}^N \partial_{\mathbf{q}_i} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_i F_N) + \partial_{\mathbf{p}_i} \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i F_N) = 0. \quad (3.2)$$

**Volumenerhaltung:**

Das Strömungsfeld im Phasenraum ist divergenzfrei:

$$\sum_{i=1}^N \partial_{\mathbf{q}_i} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_i) + \partial_{\mathbf{p}_i} \cdot (\dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_{i=1}^N \partial_{\mathbf{q}_i} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} H - \partial_{\mathbf{p}_i} \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} H = 0. \quad (3.3)$$

Divergenzfreie Strömungen nennt man inkompressibel, da ein mitbewegtes Volumen erhalten bleibt. Die Form des Volumens kann sich dabei aber sehr stark ändern (Tintentropfen in Wasser).

**Liouville-Gleichung:**

Aus (3.2) und (3.3) folgt

$$\frac{d}{dt} F_N = 0, \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} + \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} \quad (3.4)$$

Hieraus folgt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsdichte entlang der Bahn eines Systems:

$$F_N(\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t), \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_N(t), t) = \text{const.}$$

### 3.1.3 Reduzierte Verteilungsfunktionen

**Mittelwerte:** Sei  $b(X)$  eine Funktion des mikroskopischen Zustandes  $X$  eines Systems. Dann ist der Mittelwert dieser Größe im Ensemble

$$\langle b \rangle = \int d\Gamma b(X) F_N(X). \quad (3.5)$$

Beispiele solcher Größen sind der Impuls  $\mathbf{P}$ , die Energie  $E$  oder die Dichte  $n(\mathbf{x})$ ,

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad E = H(q, p), \quad n(\mathbf{x}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i). \quad (3.6)$$

Es gibt aber auch Größen, die nicht als Mittelwert einer Funktion  $b(X)$  definiert werden können und im wesentlichen Eigenschaften des Ensembles darstellen. Hierzu gehören z.B. Entropie und Temperatur.

**$S$ -Teilchen-Größen:** Sei  $b_S(X_{i1}, \dots, X_{iS})$  eine Funktion der Koordinaten von  $S$  identischen Teilchen. Addiert man die Beiträge aller unterscheidbaren Konfigurationen von jeweils  $S$  Teilchen, so erhält man für das Gesamtsystem die  $S$ -Teilchen-Größe

$$B_S = \sum_{i1 < i2 < i3 \dots < iS}^N b_S(X_{i1}, \dots, X_{iS}) \quad (3.7)$$

Für jede Konfiguration von  $S$  Teilchen wird nur der Summand gezählt, bei dem die Indizes aufsteigend geordnet sind. Damit werden Mehrfachzählungen derselben Konfiguration, die sich durch Vertauschungen der Indizes ergeben ausgeschlossen.

Der Impuls  $\mathbf{P}$  ist eine 1-Teilchen-Größe, die Coulombenergie

$$V = \sum_{i < j}^N \frac{q_e^2}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}$$

eine 2-Teilchen-Größe.

Der Mittelwert einer  $S$ -Teilchen-Größe kann mit einer reduzierten  $S$ -Teilchen-Verteilungsfunktion  $f_S$  berechnet werden, die nur noch von den Koordinaten von  $S$  Teilchen abhängt,

$$\langle B_S \rangle = \frac{1}{S!} \int d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_S b_S(X_1, \dots, X_S) f_S(X_1, \dots, X_S) \quad (3.8)$$

$$f_S(X_1, \dots, X_S) = \frac{N!}{(N-S)!} \int d\Gamma_{S+1} \cdots d\Gamma_N F_N(X_1, \dots, X_S, X_{S+1}, \dots, X_N) .$$

**Beweis:** Vertauscht man in einer gegebenen Konfiguration von  $N$  identischen Teilchen zwei Teilchen, so ist die neue Konfiguration von der alten nicht unterscheidbar. Daher müssen beide Konfigurationen dieselbe Wahrscheinlichkeit im Ensemble besitzen. Die Liouville-Funktion ist also symmetrisch gegenüber der Vertauschung der Teilchenkoordinaten,

$$F_N(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_N) = F_N(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_N)$$

Sei  $i \rightarrow \sigma(i)$  eine beliebige Permutation der  $N$  Indizes. Für diese Permutation gilt

$$\begin{aligned} & \int d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_N b_S(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(S)}) F_N(X_1, \dots, X_N) = \\ & \int d\Gamma_{\sigma(1)} \cdots d\Gamma_{\sigma(N)} b_S(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(S)}) F_N(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(N)}) = \\ & \int d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_S b_S(X_1, \dots, X_S) \int d\Gamma_{S+1} \cdots d\Gamma_N F_N(X_1, \dots, X_N) . \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde die Symmetrie der Liouville-Funktion und die des Volumenelements ausgenutzt, im zweiten Schritt wurden die Integrationsvariablen von

$\sigma(i)$  nach  $i$  umbenannt. Bei der Mittelung der  $S$ -Teilchen-Größe (3.7) ergeben alle Summanden denselben Beitrag. Die Anzahl der Möglichkeiten aus  $N$  Teilchen  $S$  auszuwählen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ist

$$\frac{N!}{(N-S)!S!}.$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned}\langle B_S \rangle &= \frac{N!}{(N-S)!S!} \int d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_S b_S(X_1, \dots, X_S) \int d\Gamma_{S+1} \cdots d\Gamma_N F_N \\ &= \frac{1}{S!} \int d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_S b_S(X_1, \dots, X_S) f_S(X_1, \dots, X_S). \quad \square\end{aligned}$$

Die  $S$ -Teilchen-Verteilungsfunktion besitzt die Normierung

$$\int d\Gamma_1 \cdots d\Gamma_S f_S(X_1, \dots, X_S) = \frac{N!}{(N-S)!} \int d\Gamma F_N(X) = \frac{N!}{(N-S)!}.$$

So ist z.B.  $f_1$  auf die Gesamtteilchenzahl  $N$  normiert.

### 3.1.4 BBGKY-Hierarchie

Für die Berechnung des Mittelwertes einer  $S$ -Teilchen-Größe genügt die Kenntnis der reduzierten  $S$ -Teilchen Verteilungsfunktion. Dies vereinfacht die Berechnung jedoch nur scheinbar, denn die zeitliche Änderung der  $S$ -Teilchenfunktion hängt von der  $S+1$ -Teilchenfunktion ab. Das gekoppelte Gleichungssystem für die Zeitentwicklung aller reduzierten Verteilungsfunktionen wird nach **Born**, **Bogoljubov**, **Green**, **Kirkwood** und **Yvon** als BBGKY-Hierarchie bezeichnet. Im folgenden wird diese Hierarchie für ein Einkomponenten-Plasma mit elektrostatischer Wechselwirkung in einem externen Potential hergeleitet.

**Coulomb-System:** Das System bestehe aus  $N$  identischen Teilchen (Ladung:  $q$ , Masse:  $m$ ) mit Coulomb-Wechselwirkung in einem externen Potential  $V_0(\mathbf{x})$ . Das externe Potential kann z.B. durch eine neutralisierende homogene Ladungsdichte erzeugt werden. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \sum_i \left( \frac{p_i^2}{2m} + V_{i0} \right) + \sum_{i < j} V_{ij}, \quad V_{i0} = V_0(\mathbf{q}_i), \quad V_{ij} = \frac{q^2}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}.$$

Wegen  $V_{ij} = V_{ji}$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \sum_{j < k} V_{jk} = \sum_{i < k} \frac{\partial V_{ik}}{\partial \mathbf{q}_i} + \sum_{j < i} \frac{\partial V_{ji}}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{j \neq i} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{q}_i}.$$

Damit erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{v}_i, & \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{F}_{i0} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \\ \mathbf{v}_i &= \frac{1}{m} \mathbf{p}_i, & \mathbf{F}_{i0} &= -\frac{\partial V_{i0}}{\partial \mathbf{q}_i}, & \mathbf{F}_{ij} &= -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{q}_i}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

**Liouville-Gleichung:** Mit (3.9) und (3.4) folgt

$$\partial_t F_N + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} F_N + \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{F}_{i0} + \sum_{(j \neq i)=1}^N \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} F_N = 0. \quad (3.10)$$

**Integration über den Unterraum von  $N - S$  Teilchen:** Zur Herleitung der Bewegungsgleichung für die reduzierte Verteilungsfunktion  $f_S$  integriert man die Liouville-Gleichung über das Volumen  $\int d\Gamma_{S+1} \cdots d\Gamma_N$ . Zur Vereinfachung der Notation sei

$$\int d\Omega f(X) = \frac{N!}{(N-S)!} \int d\Gamma_{S+1} \cdots d\Gamma_N f(X).$$

Dabei treten die folgenden Integrale auf:

$$\int d\Omega \partial_t F_N = \partial_t f_S \quad (3.11)$$

$i \in \{1, \dots, S\}$  :

$$\int d\Omega \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} F_N = \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} f_S \quad (3.12)$$

$i \in \{S+1, \dots, N\}$  :

$$\int d\Omega \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} F_N = \int d\Omega \partial_{\mathbf{q}_i} \cdot (\mathbf{v}_i F_N) = 0 \quad (3.13)$$

$i \in \{S+1, \dots, N\}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  :

$$\int d\Omega \mathbf{F}_{ij} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} F_N = \int d\Omega \partial_{\mathbf{p}_i} \cdot (\mathbf{F}_{ij} F_N) = 0 \quad (3.14)$$

$i \in \{1, \dots, S\}$ ,  $j \in \{1, \dots, S\}$  :

$$\int d\Omega \mathbf{F}_{ij} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} F_N = \mathbf{F}_{ij} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} f_S \quad (3.15)$$

$i \in \{1, \dots, S\}$ ,  $j \in \{S+1, \dots, N\}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=S+1}^N \int d\Omega \mathbf{F}_{ij} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} F_N(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_S, \mathbf{X}_{S+1}, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_N) = \\ (N-S) \int d\Omega \mathbf{F}_{ij} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} F_N(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_S, \mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{S+2}, \dots, \mathbf{X}_{S+1}, \dots, \mathbf{X}_N) = \\ \int d\Gamma_{S+1} \mathbf{F}_{i(S+1)} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} f_{S+1} \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß  $F_N$  am Rand des Phasenraumes verschwindet, symmetrisch ist bezüglich Teilchenvertauschung und daß  $(N-S)N!/(N-S)! = N!/(N-S-1)!$  gilt.

**BBGKY-Hierarchie:** Mit (3.11) - (3.16) folgt aus (3.10):

$$\begin{aligned} \partial_t f_S + \sum_{i=1}^S \mathbf{v}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}_i} f_S + \sum_{i=1}^S \left( \mathbf{F}_{i0} + \sum_{(j \neq i)=1}^S \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} f_S \\ + \sum_{i=1}^S \int d\Gamma_{S+1} \mathbf{F}_{i(S+1)} \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} f_{S+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die S-Teilchenfunktion hängt von der (S+1)-Teilchenfunktion ab, so daß sich eine ganze Hierarchie von Gleichungen ergibt. Im S-dimensionalen Phasenraum beschreibt der dritte Term eine individuelle Teilchenwechselwirkung, der vierte eine kollektive Wechselwirkung mit den restlichen Teilchen.

**Stoßfreie Plasmen:** Bei Vernachlässigung von Teilchenkorrelationen (stoßfreies Plasma) kann die 2-Teilchen Verteilungsfunktion als Produkt von 1-Teilchen Verteilungsfunktionen ( $f_1 = f$ ) dargestellt werden,

$$f_2(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = f(\mathbf{X})f(\mathbf{X}'). \quad (3.17)$$

Mit dieser Näherung erhält man für die 1-Teilchenverteilungsfunktion die Gleichung

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + (\mathbf{F}_0 + \langle \mathbf{F} \rangle) \cdot \partial_{\mathbf{p}} f = 0 \quad (3.18)$$

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int d^3 q' d^3 p' f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \quad (3.19)$$

Die hierbei auftretende gemittelte Kraft erhält man gerade, wenn man in der

Poisson-Gleichung die Ladungsdichte durch die gemittelte Ladungsdichte ersetzt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= -q \nabla \Phi, \quad \langle \mathbf{F} \rangle = -q \nabla \langle \Phi \rangle, \\
 \langle \Phi \rangle &= \int d^3q' d^3p' f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) \Phi(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\
 \triangle \langle \Phi \rangle &= \int d^3q' d^3p' f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) \triangle \Phi(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\
 &= \int d^3q' d^3p' f(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) (-4\pi q) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \\
 &= -4\pi \langle \tau \rangle, \quad \langle \tau \rangle = q \int d^3p f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

## 3.2 Kinetische Beschreibung

In der kinetischen Theorie betrachtet man die Entwicklung der Einteilchenverteilungsfunktion im 6-dimensionalen Phasenraum.

### $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ - Raum:

Im folgenden wird anstelle des kanonischen Impulses (2.3) die Teilchengeschwindigkeit als unabhängige Variable gewählt. Die Liouville-Gleichung gilt hier entsprechend, da die Strömung in diesen Koordinaten ebenfalls divergenzfrei ist:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \\
 \partial_{\mathbf{x}_i} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i) + \partial_{\mathbf{v}_i} \cdot (\dot{\mathbf{v}}_i) &= \partial_{\mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{q}{mc} \mathbf{B} \cdot (\partial_{\mathbf{v}_i} \times \mathbf{v}_i) = 0 \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, da  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{v}$  unabhängige Koordinaten sind. Der zweite Term verschwindet ebenfalls, da der Geschwindigkeitsvektor im Geschwindigkeitsraum keine Rotation besitzt.

### Verteilungsfunktion:

Mittlere Zahl der Teilchen der Sorte  $i$  (Elektronen, Ionen) am Ort  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  im Volumen  $d^3x d^3v$  zur Zeit  $t$ :

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v. \tag{3.22}$$

### Kinetische Gleichungen:

Gleichung (3.18) ist ein Spezialfall einer kinetischen Gleichung, die hier nur unter sehr einschränkenden Bedingungen (1 Teilchensorte, elektrostatische Wechselwirkung, stoßfreies Plasma) hergeleitet wurde. Allgemeiner besitzen die kinetischen Gleichungen eines Plasmas die Form

$$\frac{d}{dt} f_j = \partial_t f_j + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f_j + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_{\mathbf{v}} f_j = C_j \tag{3.23}$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die Änderung der Verteilungsfunktion im mittleren Feld.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind daher durch die Maxwell-Gleichungen mit den gemittelten Ladungs- und Stromdichten

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{x}, t) &= \sum_j q_j \int d^3v f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \sum_j q_j \int d^3v \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\end{aligned}\quad (3.24)$$

zu bestimmen sind. Die rechte Seite ( $C_j$ ) wird als Stoßterm bezeichnet. Der Stoßterm berücksichtigt die Änderungsrate der Verteilungsfunktion durch individuelle Stöße, die bei der kollektiven Bewegung vernachlässigt werden.

### 3.2.1 Vlasov-Gleichung

Für Zeiten, die klein sind gegenüber der freien Flugzeit, kann ein Plasma als stoßfrei betrachtet werden. Die kinetische Gleichung des stoßfreien Plasmas wird als *Vlasov-Gleichung* bezeichnet:

$$\partial_t f_j + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f_j + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \partial_{\mathbf{v}} f_j = 0 \quad (3.25)$$

Die Vlasov-Theorie bildet die Grundlage zur Beschreibung von elektromagnetischen und elektrostatischen Wellen in heißen Plasmen. Dabei spielen Effekte der Teilchen-Welle-Wechselwirkung und der Stabilität von Verteilungsfunktionen eine wichtige Rolle.

### 3.2.2 Boltzmann-Gleichung

Die Boltzmann-Gleichung wurde 1872 von Boltzmann hergeleitet und ist historisch gesehen die älteste kinetische Gleichung. Der Stoßterm wird unter vereinfachenden Annahmen für stark verdünnte Systeme abgeleitet. Hierbei werden nur Zweierstöße berücksichtigt, bei denen jeweils die Gesamtenergie und der Gesamtmoment erhalten bleiben. Die Stoßwahrscheinlichkeit wird mit einem statistischen Ansatz, dem Stoßzahlansatz, beschrieben. Der Stoßzahlansatz führt dazu, daß die Boltzmann-Gleichung, im Gegensatz zu den mikroskopischen Bewegungsgleichungen, irreversibles Verhalten (Entropiezunahme) beschreibt.

#### Stoßannahmen:

- 2-er Stöße (Verdünnte Systeme)
- elastische Stöße (Energie- und Impulserhaltung)

- lokale und instantane Stöße ( $\mathbf{x}, \mathbf{v}, t \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{v}', t$ )

*Bezeichnungen:*

$$\begin{aligned} \text{vor dem Stoß} &: \mathbf{v}_i, \quad f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_i(\mathbf{v}) = f_i \\ \text{nach dem Stoß} &: \mathbf{v}'_i, \quad f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) = f_i(\mathbf{v}') = f'_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

**Stoßgesetze für 2-er Stöße:**

1. Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_j \mathbf{v}_j}{m_i + m_j}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_s + \frac{m_{ij}}{m_i} \mathbf{g}, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_s - \frac{m_{ij}}{m_j} \mathbf{g}, \\ m_{ij} &= \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad d^3 v_i d^3 v_j = d^3 v_s d^3 g \end{aligned} \quad (3.27)$$

2. Impulserhaltung:  $\mathbf{v}'_s = \mathbf{v}_s$ ,
3. Energieerhaltung:  $g' = g$
4. Wirkungsquerschnitt:  $\chi$  Ablenkwinkel,  $b$  Stoßparameter

$$d\sigma = b db d\varphi = \sigma(g, \chi) d\Omega, \quad d\Omega = \sin(\chi) d\chi d\varphi$$

Coulomb-Potential:  $U = q/r$

$$\begin{aligned} \tan(\chi/2) &= \frac{q_i q_j}{m_{ij} g^2 b} \\ \sigma(g, \chi) &= \left( \frac{q_i q_j}{2 m_{ij} g^2 \sin^2(\chi/2)} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Debye-Potential:  $U = (q/r) \exp(-r/\lambda_D)$ , Bornsche-Näherung ( $\lambda_L \ll \lambda_{dB}$ )

$$\sigma(g, \chi) = \left( \frac{2 q_i q_j m_{ij}}{(\hbar/\lambda_D)^2 + 4 m_{ij}^2 g^2 \sin^2(\chi/2)} \right)^2 \quad (3.29)$$

**Übergangswahrscheinlichkeit:**

Für den Übergang  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \rightarrow (\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j)$  wird eine Übergangsrate in der Form

$$W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \quad (d^3 v'_i d^3 v'_j) \quad (f_i d^3 v_i f_j d^3 v_j) \quad (3.30)$$

angenommen. Der erste Faktor bezeichnet eine Übergangswahrscheinlichkeit für einen Stoß mit den Anfangsgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  und den Endgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j$ , der zweite das Volumen der Endzustände. Bei einem Stoß im Schwerpunktssystem entspricht diesen beiden Faktoren der differentielle Streuquerschnitt.

Der dritte Faktor stellt die Zahl der stoßenden Teilchen dar. Diese wird unter Vernachlässigung von Korrelationen durch die Einteilchenverteilungsfunktion ausgedrückt. Diese Annahme wird als *Stoßzahlansatz* bezeichnet. Der Stoßzahlansatz führt zu irreversiblem Verhalten, obwohl den einzelnen Stößen reversible Stoßgesetze zugrunde liegen.

**Verluste:** Summation über alle Stoßpartner und alle Endzustände

$$- d^3 v_i \sum_j \int d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) f_i f_j$$

**Gewinne:** Summation über alle Anfangszustände und alle Stoßpartner

$$+ d^3 v_i \sum_j \int d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j W_{ij}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j | \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) f'_i f'_j$$

**Bilanz:** pro Volumenelement  $d^3 v_i$

$$C_i = \sum_j \int d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j \{ W_{ij}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j | \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) f'_i f'_j - W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) f_i f_j \}$$

**Mikroskopische Reversibilität:**

Invarianz gegenüber einer gleichzeitigen Raum- und Zeitspiegelung:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\rightarrow \mathbf{v}, \quad \text{Anfangszustand} \rightarrow \text{Endzustand}, \\ W_{ij}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j | \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) &= W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \\ C_i &= \sum_j \int d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) (f'_i f'_j - f_i f_j) \end{aligned}$$

**Impulserhaltung:**

$$\begin{aligned} W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) &= W_{ij}(\mathbf{g}, \mathbf{g}') \delta(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s), \quad d^3 v'_i d^3 v'_j = d^3 g' d^3 v'_s \\ C_i &= \sum_j \int d^3 v_j d^3 g' W_{ij}(\mathbf{g}, \mathbf{g}') (f'_i f'_j - f_i f_j) \end{aligned}$$

**Energieerhaltung:**

$$\begin{aligned} W_{ij}(\mathbf{g}, \mathbf{g}') &= \sigma_{ij}(g, \chi) \delta\left(\frac{1}{2}g'^2 - \frac{1}{2}g^2\right), \\ d^3 g' &= g'^2 dg' d\Omega = g' d\left(\frac{1}{2}g'^2\right) d\Omega \\ C_i &= \sum_j \int d^3 v_j d\Omega g \sigma_{ij}(g, \chi) (f'_i f'_j - f_i f_j) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Der Stoßterm (3.31) wird als *Boltzmann-Stoßterm*, die zugehörige kinetische Gleichung als *Boltzmann-Gleichung* bezeichnet. Man beachte, daß die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j$ , die als Argumente von  $f'_i f'_j$  auftreten, nach (3.27) als Funktionen von  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  und dem Ablenkinkel  $\chi$  auszudrücken sind.

**Entropie:** Kinetische Definition,  $S_{0K} = k_B S$

$$S = - \sum_i \int d^3 v_i d^3 x f_i \ln f_i \quad (3.32)$$

**H-Theorem:**

$$f_i \text{ Lösung der Boltzmann-Gleichung} \implies \frac{d}{dt} S \geq 0 \quad (3.33)$$

**Beweis:**  $H = -S$ , z.z.:  $dH/dt \leq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f_i \ln f_i) &= (\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \partial \mathbf{x} + \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \partial \mathbf{v}_i) (f_i \ln f_i) \\ &= \partial_t (f_i \ln f_i) + \partial \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v}_i f_i \ln f_i) + \partial \mathbf{v}_i \cdot (\dot{\mathbf{v}}_i f_i \ln f_i) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{d}{dt} (f_i \ln f_i) = (1 + \ln f_i) \frac{df_i}{dt} = (1 + \ln f_i) C_i \quad (3.35)$$

In der zweiten Gleichung wurde (3.23) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= \sum_i \int d^3 v_i d^3 x \partial_t (f_i \ln f_i) = \sum_i \int d^3 v_i d^3 x \frac{d}{dt} (f_i \ln f_i) \\ &= \sum_i \int d^3 v_i d^3 x (1 + \ln f_i) C_i = \sum_i \int d^3 v_i d^3 x \ln f_i C_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

Das Integral über die Divergenzterme aus (3.34) verschwindet, da  $f_i$  am Rand des Phasenraumes verschwindet. Das Integral von  $C_i$  über  $d^3 v_i$  verschwindet wegen der Teilchenzahlerhaltung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= \sum_{i,j} \int d^3 v_i d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j d^3 x \ln f_i W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) (f'_i f'_j - f_i f_j) \\ &= \sum_{i,j} \int d^3 v_i d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j d^3 x \ln f_j W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) (f'_i f'_j - f_i f_j) \\ &= \sum_{i,j} \int d^3 v_i d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j d^3 x \ln f'_i W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) (-1)(f'_i f'_j - f_i f_j) \\ &= \sum_{i,j} \int d^3 v_i d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j d^3 x \ln f'_j W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) (-1)(f'_i f'_j - f_i f_j) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int d^3 v_i d^3 v_j d^3 v'_i d^3 v'_j d^3 x \ln \left( \frac{f_i f_j}{f'_i f'_j} \right) W_{ij}(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j | \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) (f'_i f'_j - f_i f_j) \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde  $i$  mit  $j$  im zweiten  $i$  mit  $i'$ ,  $j$  mit  $j'$  im dritten  $i$  mit  $j'$ ,  $j$  mit  $i'$  vertauscht. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist invariant gegenüber diesen Vertauschungen. Im vierten Schritt wird die Summe aus vier gleichen Ausdrücken gebildet und durch vier dividiert.

$$W_{ij}, f'_i, f'_j \geq 0, \quad (1-x) \ln(x) \leq 0 \implies \frac{dH}{dt} \leq 0. \quad (3.37)$$

**Bedingung für  $\frac{dS}{dt} = 0$ :**

$$\begin{aligned} \ln f_i + \ln f_j &= \ln f'_i + \ln f'_j \\ \ln f_i &= -\alpha - \beta E_i - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_i \\ f_i &= \text{const} \exp(-\beta E_i - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_i) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$\ln f_i$  ist hier eine Stoßinvariante und muß daher eine Linearkombination der bekannten Stoßinvarianten (Teilchenzahl, Impuls, Energie) sein. Ausgehend von einer beliebigen Anfangsverteilung muß die Entropie zunehmen, bis eine Gleichgewichtsverteilung der Form (3.38) erreicht ist.

**Bemerkung 3.1 (Stoßfreies Plasma)** *Im stoßfreien Plasma bleibt die Entropie nach (3.36) erhalten. Hier gibt es metastabile Gleichgewichte, die weit vom thermischen Gleichgewicht entfernt sein können.*

### 3.2.3 Landau-Gleichung

Der Boltzmann-Stoßterm wird nach kleinen Ablenkwinkeln entwickelt und über den Raumwinkel integriert.

**Stoßannahmen:**

- kleine Ablenkwinkel
- quasistatisches Debye-Potential

**Bezeichnungen:**

$$\begin{aligned} \mu, \nu &: \text{Geschwindigkeitskomponenten} \\ a_\mu b_\mu &= \sum_\mu a_\mu b_\mu, \quad \text{Summenkonvention} \\ \delta g_\mu &= g'_\mu - g_\mu, \quad \partial_{i\mu} = \frac{1}{m_i} \partial_{v_{i\mu}} \end{aligned}$$

**Geschwindigkeitsänderungen:**

$$v'_{i\mu} = v_{i\mu} + \frac{m_{ij}}{m_i} \delta g_\mu, \quad v'_{j\mu} = v_{j\mu} - \frac{m_{ij}}{m_j} \delta g_\mu, \quad (3.39)$$

**Entwicklung von  $f'_i f'_j$  in  $\delta g_\mu$ :**

$$\begin{aligned}
 f'_i &= f_i + m_{ij} \delta g_\mu \partial_{i\mu} f_i + \frac{1}{2} m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu \partial_{i\mu} \partial_{i\nu} f_i \\
 f'_j &= f_j - m_{ij} \delta g_\mu \partial_{j\mu} f_i + \frac{1}{2} m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu \partial_{j\mu} \partial_{j\nu} f_j \\
 f'_i f'_j &= f_i f_j + m_{ij} \delta g_\mu (\partial_{i\mu} f_i) f_j - m_{ij} \delta g_\mu (\partial_{j\mu} f_i) f_i - m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu (\partial_{i\mu} f_i) (\partial_{j\nu} f_j) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu (\partial_{i\mu} \partial_{i\nu} f_i) f_j + \frac{1}{2} m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu (\partial_{j\mu} \partial_{j\nu} f_j) f_i \\
 &= f_i f_j + m_{ij} \delta g_\mu (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) f_i f_j + \frac{1}{2} m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j
 \end{aligned}$$

**Stoßterm (3.31) nach der Entwicklung:**

$$\begin{aligned}
 C_i &= \sum_j \int d^3 v_j d\Omega g \sigma_{ij}(g, \chi) \left( m_{ij} \delta g_\mu (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) f_i f_j \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} m_{ij}^2 \delta g_\mu \delta g_\nu (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \right) \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

**Spezielles Koordinatensystem:**

$$\begin{aligned}
 g_\mu &= (0, 0, 1), & g'_\mu &= g (\sin \chi \cos \varphi, \sin \chi \sin \varphi, \cos \chi) \\
 \delta g_\mu &= g (\sin \chi \cos \varphi, \sin \chi \sin \varphi, \cos \chi - 1) \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

**Integration über  $d\varphi$ :**

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} d\varphi \delta g_\mu &= 2\pi g (0, 0, \cos \chi - 1) \approx -\pi g (0, 0, \chi^2) \\
 \int_0^{2\pi} d\varphi \delta g_\mu \delta g_\nu &= 2\pi g^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin^2 \chi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & (\cos \chi - 1)^2 \end{pmatrix} \\
 &\approx \pi g^2 \begin{pmatrix} \chi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Integration über  $d\chi$ :

$$\begin{aligned}
 B &= \pi \int_0^\pi \sigma_{ij}(g, \chi) \chi^2 \sin \chi d\chi \\
 &\approx \pi \int_0^1 \frac{4q_i^2 q_j^2 m_{ij}^2}{((\hbar/\lambda_D)^2 + m_{ij}^2 g^2 \chi^2)^2} \chi^2 \frac{1}{2} d(\chi^2) \\
 &= \frac{2\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4} \int_0^1 \frac{\chi^2 d\chi}{(\chi^2 + (\lambda_{dB}/\lambda_D)^2)^2}, \quad \lambda_{dB} = \frac{\hbar}{m_{ij} g} \\
 &\approx \frac{2\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4} \int_{(\lambda_{dB}/\lambda_D)^2}^1 \frac{x - (\lambda_{dB}/\lambda_D)^2}{x^2} \\
 &= \frac{2\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4} \left( \ln x + \frac{\lambda_{dB}^2}{\lambda_D^2} \frac{1}{x} \right) \Big|_{(\lambda_{dB}/\lambda_D)^2}^1 \\
 &\approx \frac{4\pi q_i^2 q_j^2}{m_{ij}^2 g^4} \Lambda, \quad \Lambda = \ln \left( \frac{\lambda_D}{\lambda_{dB}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Hierbei wurde der Wirkungsquerschnitt (3.29) verwendet. Der Beitrag der oberen Integrationsgrenze ist wegen  $\lambda_{dB} \ll \lambda_D$  vernachlässigbar. Damit wird die Annahme kleiner Ablenkinkel durch das Ergebnis gerechtfertigt. Mit Hilfe des Stoßintegrals  $B$  lassen sich alle Integrationen über den Raumwinkel ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \int d\Omega \sigma_{ij} \delta g_\mu &= Bg(0, 0, -1) = -Bg_\mu \\
 \int d\Omega \sigma_{ij} \delta g_\mu \delta g_\nu &= Bg^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BG_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} = g^2 \delta_{\mu\nu} - g_\mu g_\nu
 \end{aligned}$$

**Stoßterm (3.40) nach der Raumwinkelintegration:**

$$\begin{aligned}
 C_i &= \sum_j \int d^3 v_j \frac{m_{ij}^2}{2} g B \left\{ -\frac{2}{m_{ij}} g_\nu (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \right. \\
 &\quad \left. + G_{\mu\nu} (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \right\}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

**Hilfssatz:**

$$(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) [F(g) G_{\mu\nu}] = -\frac{2g_\nu}{m_{ij}} F(g) \tag{3.44}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 \partial_{v_{i\mu}} G_{\mu\nu} &= 2g_\mu \delta_{\mu\nu} - 3g_\nu - g_\mu \delta_{\mu\nu} = -2g_\nu \\
 \partial_{v_{j\mu}} G_{\mu\nu} &= -\partial_{v_{i\mu}} G_{\mu\nu} \\
 G_{\mu\nu} \partial_{v_{i\mu}} F(g) &= F'(g) \frac{g_\mu}{g} G_{\mu\nu} = 0
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$(\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu})[F(g)G_{\mu\nu}] = -2g_\nu \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) F(g) = -\frac{2g_\nu}{m_{ij}} F(g) \quad (3.46)$$

**Landau-Stoßterm:** Setzte  $F(g) = Bg$

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_j \int d^3v_j \frac{m_{ij}^2}{2} (\partial_{i\mu} - \partial_{j\mu}) Bg G_{\mu\nu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\ &= \sum_j \int d^3v_j \frac{m_{ij}^2}{2} \partial_{i\mu} Bg G_{\mu\nu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\ &= \sum_j \frac{2\pi q_i^2 q_j^2 \Lambda}{m_i} \partial_{v_{i\mu}} \int d^3v_j \frac{1}{g^3} G_{\mu\nu} \left( \frac{1}{m_i} \partial_{v_{i\nu}} - \frac{1}{m_j} \partial_{v_{j\nu}} \right) f_i f_j \quad (3.47) \end{aligned}$$

Der Landau-Stoßterm besitzt die Form einer Divergenz einer Stromdichte. Die Teilchenzahl in einem Volumen des Geschwindigkeitsraumes ändert sich daher durch den entsprechenden Fluß durch die Oberfläche.

### 3.2.4 Fokker-Planck-Gleichung

Eine andere Begründung kinetischer Gleichungen beruht auf der Theorie von Zufallsprozessen. In einem System mit vielen Freiheitsgraden seien nur einige wenige Freiheitsgrade relevant. Misst man die relevanten Freiheitsgrade im Abstand von endlichen Zeitintervallen, so werden die Meßergebnisse zufälligen Schwankungen unterworfen sein. Ist z.B.  $q$  eine solche Zufallsvariable, so kann ihr Wert  $q(t)$  zur Zeit  $t$  nicht deterministisch vorhergesagt werden. Stattdessen betrachtet man die Wahrscheinlichkeit  $P(q, t) dq$ , daß  $q$  zur Zeit  $t$  einen Wert im Intervall  $[q, q + dq]$  annimmt. Unter bestimmten Annahmen an den Zufallsprozess wird die Zeitentwicklung von  $P(q, t)$  durch eine verallgemeinerte Diffusionsgleichung beschrieben, die als Fokker-Planck-Gleichung bezeichnet wird.

#### Diffusion

Die Diffusion ist ein typisches Beispiel für einen Zufallsprozess. Zunächst wird die gasdynamische Diffusionsgleichung eingeführt, danach das Random Walk Modell der Diffusion.

**Diffusionsgleichung:** Gegeben sei ein Gas mit einer Dichte  $n(x, t)$ . Eine anfänglich inhomogene Dichte geht erfahrungsgemäß in ein homogenes Gleichgewicht über. Dieser Ausgleichsvorgang wird als Diffusion bezeichnet. Wegen der Teilchenzahlerhaltung gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t n(x, t) + \partial_x j(x, t) = 0 . \quad (3.48)$$

Ein einfacher phänomenologischer Ansatz für die Stromdichte  $j(x, t)$  besteht in der Diffusionsnäherung,

$$j_D(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}. \quad (3.49)$$

Die Proportionalitätskonstante  $D$  wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet. Die Stromdichte wird durch einen Dichtegradienten hervorgerufen und ist diesem entgegengesetzt gerichtet. Durch diesen Ansatz wird die Stromdichte lokal durch die Dichte selbst ausgedrückt und man erhält eine Bestimmungsgleichung für  $n(x, t)$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t). \quad (3.50)$$

Sie wird als Diffusionsgleichung bezeichnet und beschreibt den Übergang zu einem homogenen Gleichgewicht. Aus (3.50) folgt z.B., daß eine harmonische Dichtestörung exponentiell gedämpft wird,

$$n(x, t) = n_0 + n_1 e^{-\gamma t} \cos(kx), \quad \gamma = Dk^2.$$

Eine allgemeinere Form der Diffusionsgleichung erhält man für die Diffusion in einem externen Feld. Auf die Teilchen des Gases wirke nun zusätzlich eine Schwerkraft  $G = -mg$  und eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft  $R = -m\nu v$ . Im Kräftegleichgewicht  $R + G = 0$  fallen die Teilchen mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v_G = \mu G = -g\tau_f, \quad \mu = \frac{1}{m\nu}.$$

Man bezeichnet  $\nu$  als die Stoßfrequenz,  $\tau_f$  als die freie Flugzeit und  $\mu$  als die Beweglichkeit der Teilchen. Diese Drift erzeugt eine zusätzliche Stromdichte,

$$j_G = nv_G = n\mu G$$

Setzt man in (3.48)  $j = j_D + j_G$ , so lautet die verallgemeinerte Diffusionsgleichung im externen Feld

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\mu Gn + D \frac{\partial}{\partial x} n(x, t) \right), \quad (3.51)$$

Auf der rechten Seite wird der erste Summand als Reibungsterm, der zweite als Diffusionsterm bezeichnet.

Aufgrund der Drift nimmt die Höhe  $x$  ab bis die potentielle Energie  $U = mgx$  ein Minimum annimmt, wenn sich alle Teilchen am Boden des Behälters befinden. Die Diffusion wirkt dieser Tendenz entgegen. Beide Effekte zusammen führen zu einem inhomogenen Gleichgewicht, das als Sedimentationsgleichgewicht bezeichnet wird. Setzt man  $\partial_t n = 0$  und  $n \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  so erhält man aus (3.51) die Gleichgewichtsbedingung

$$j_G + j_D = 0.$$

Sie bestimmt die DichteVerteilung gemäß,

$$\begin{aligned} D \frac{\partial n}{\partial x} &= \mu G n \\ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\mu G}{D} \\ \ln n(x) &= \ln n(0) + \mu G x / D \\ n(x) &= n(0) \exp(-\mu U / D). \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Lösung mit der Boltzmann-Verteilung im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$ ,

$$n(x) = n(0) \exp(-U/T)$$

so folgt

$$D = \mu T. \quad (3.52)$$

Dieser Zusammenhang zwischen dem Diffusionskoeffizienten und der Beweglichkeit wird als Einstein-Beziehung bezeichnet. Sie ist ein Beispiel des Dissipations-Fluktuations-Theorems, das allgemein Energiedissipation mit thermischen Schwingungen verknüpft.

**Gaskinetische Abschätzung des Diffusionskoeffizienten:** Ein Gasteilchen kann sich nur zwischen zwei Stößen in einer Richtung frei bewegen. Beim Stoß ändert es seine Richtung zufällig. Die mittlere Wegstrecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen ist die freie Weglänge  $\lambda_f$ , das Zeitintervall in dem im Mittel ein Stoß stattfindet ist die freie Flugzeit  $\tau_f$ . Da sich die Teilchen im Mittel mit der thermischen Geschwindigkeit  $v_{th} \approx \sqrt{T/m}$  bewegen gilt  $\lambda_f \approx v_{th} \tau_f$ . Damit lässt sich der Diffusionskoeffizient (3.52) in der folgenden Form angeben

$$D = \mu T = \frac{\tau_f}{m} T \approx v_{th}^2 \tau_f \approx \frac{\lambda_f^2}{\tau_f}.$$

## Random Walk Modell

Ein einfaches Modell zur Herleitung dieser Beziehung ist ein Zufallsprozess bei dem jedes Teilchen innerhalb eines Zeitschritts  $\Delta t$  einen Ortschritt  $\Delta x$  zurücklegt, wobei

der Schritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach rechts oder links erfolgt (Random Walk). Auf die Oberfläche  $x = x_0$  (Abb. 3.1) treffen dann in der Zeit  $\Delta t$  pro Flächen-einheit von links bzw. von rechts die Teilchenzahlen,

$$N^- = \frac{1}{2} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} n(x) dx, \quad N^+ = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} n(x) dx. \quad (3.53)$$

Wenn sich die Dichte  $n(x)$  über die Strecke  $\Delta x$  nur wenig ändert gilt näherungsweise,

$$n(x) = n(x_0) + \frac{\partial n}{\partial x} (x - x_0)$$

und damit

$$N^\pm = \frac{1}{2} \left( n_0 \Delta x \pm \frac{\partial n}{\partial x} \int_0^{\Delta x} du u \right) = \frac{1}{2} \left( n_0 \Delta x \pm \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{2} \right).$$

Der Diffusionsstrom an der Stelle  $x_0$  ergibt sich aus der Differenz der Teilchenströme aus dem linken und rechten Halbraum,

$$j = \frac{1}{\Delta t} (N^- - N^+) = -D \frac{\partial n}{\partial x}, \quad D = \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t}. \quad (3.54)$$

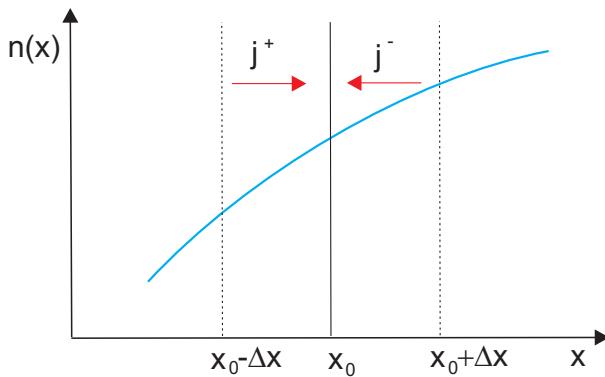


Abbildung 3.1: Bilanz der Teilchenströme, die eine Oberfläche bei  $x = x_0$  von links bzw. von rechts passieren.

**Diffusion als Zufallsprozess:** Besteht das Gas aus  $N$  Teilchen, so kann man anstelle der Dichte  $n(x, t)$  auch die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x, t) = n(x, t)/N$  betrachten. Hier ist nun  $x$  eine Zufallsvariable und  $P(x, t)dx$  die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Teilchen zur Zeit  $t$  zwischen  $x$  und  $x + dx$  befindet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x, t)$  erfüllt ebenfalls die Diffusionsgleichung (3.50). Dies kann man

direkt aus dem Random Walk Modell ableiten. Damit sich das Teilchen zur Zeit  $t + \Delta t$  am Ort  $x$  befinden kann, muß es zur Zeit  $t$  am Ort  $x - \Delta x$  einen Sprung nach rechts oder am Ort  $x + \Delta x$  einen Sprung nach links ausgeführt haben. Daher erfüllt  $P(x, t)$  die Differenzengleichung

$$P(x, t + \Delta t) = \frac{1}{2}P(x - \Delta x, t) + \frac{1}{2}P(x + \Delta x, t) . \quad (3.55)$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  und  $\Delta x \rightarrow 0$  erhält man daraus näherungsweise

$$P(x, t) + \partial_t P(x, t) \Delta t = P(x, t) + \frac{1}{2} \partial_x^2 P(x, t) \Delta x^2$$

Damit genügt  $P(x, t)$  für kleine Schrittweiten der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P, \quad D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} . \quad (3.56)$$

Von besonderer Bedeutung ist die Übergangswahrscheinlichkeit. Dies ist die Wahrscheinlichkeit  $P(x, t|x_0, t_0)dx$  das Teilchen zur Zeit  $t$  zwischen  $x$  und  $x+dx$  zu finden, wenn es sich zu einer früheren Zeit  $t_0$  am Ort  $x_0$  befunden hat. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist die Lösung der Diffusionsgleichung zu der Anfangsbedingung

$$P(x, t_0|x_0, t_0) = \delta(x - x_0) .$$

Für ein unendlich ausgedehntes System erhält man die Lösung

$$P(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma(t)^2}\right), \quad \sigma(t) = \sqrt{2D(t - t_0)} .$$

### Markov-Prozess

Beobachtet man eine Zufallsvariable  $q$  zu  $n$  verschiedenen Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_n$  so erhält man  $n$  Zufallsvariablen  $q_1, \dots, q_n$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß diese  $n$  Variablen Werte in den Intervallen  $[q_1, q_1 + dq_1], \dots, [q_n, q_n + dq_n]$  annehmen sei

$$P_n(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}; \dots; q_1, t_1) dq_1 \dots dq_n$$

Ein Zufallsprozess ist durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariable für eine beliebige Anzahl von Zeitpunkten definiert. Man kennt dann im Prinzip die Wahrscheinlichkeit der Wege  $x(t)$  durch die zu bestimmten Zeitpunkten vorgegebenen Punkte.

Ein reiner Zufallsprozess ist ein Zufallsprozess, bei dem die Variablen zu verschiedenen Zeitpunkten statistisch unabhängig sind. Hier gilt für alle  $n$

$$P_n(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}; \dots; q_1, t_1) = P(q_n, t_n)P(q_{n-1}, t_{n-1}) \dots P(q_1, t_1)$$

In diesem Fall wird der Zufallsprozess bereits durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $P_1(q, t) = P(q, t)$  vollständig bestimmt.

Ein Markov-Prozess ist ein Zufallsprozess, der durch zwei Wahrscheinlichkeitsdichten,  $P(q, t)$  und  $P_2(q_2, t_2; q_1, t_1)$ , vollständig bestimmt wird. Mit Hilfe von  $P$  und  $P_2$  definiert man die Übergangswahrscheinlichkeit  $P(q_2, t_2|q_1, t_1)$  durch

$$P_2(q_2, t_2; q_1, t_1) = P(q_2, t_2|q_1, t_1)P(q_1, t_1) \quad (3.57)$$

Außerdem gilt

$$P(q_2, t_2) = \int dq_1 P_2(q_2, t_2; q_1, t_1)$$

Damit kann  $P(q, t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt durch Angabe einer Ausgangswahrscheinlichkeit  $P(q_0, t_0)$  und einer Übergangswahrscheinlichkeit  $P(q, t|q_0, t_0)$  bestimmt werden

$$P(q, t) = \int dq_0 P(q, t|q_0, t_0)P(q_0, t_0). \quad (3.58)$$

Die besondere Eigenschaft des Markov-Prozesses ist, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte zur Zeit  $t$  durch die Wahrscheinlichkeitsdichte zu **einem** früheren Zeitpunkt  $t_0$  bereits eindeutig bestimmt ist. Diese hängt also nicht von der Vorgeschichte des Prozesses  $P(q, t_n)$  zu früheren Zeitpunkten  $t_n < t_0$  ab. Man sagt, daß der Prozess kein Gedächtnis besitzt.

Die Übergangswahrscheinlichkeit eines Markov-Prozesses genügt den folgenden Bedingungen:

i) Anfangsbedingung

$$P(q, t_0|q_0, t_0) = \delta(q - q_0) \quad (3.59)$$

Eingesetzt in (3.58) erhält man die richtige Anfangsbedingung  $\lim_{t \rightarrow t_0} P(q, t) = \int dq_0 \delta(q - q_0)P(q_0, t_0) = P(q, t_0)$

ii) Normierungsbedingung

$$\int dq P(q, t|q_0, t_0) = 1 \quad (3.60)$$

Diese Bedingung folgt aus (3.58), wenn man dort die spezielle Anfangsbedingung  $P(q_0, t_0) = \delta(q_0 - q'_0)$  einsetzt und verlangt, daß  $P(q, t)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

iii) Markov-Bedingung

$$P(q, t|q_0, t_0) = \int dq_1 P(q, t|q_1, t_1)P(q_1, t_1|q_0, t_0) \quad (3.61)$$

Die Markov-Bedingung folgt aus (3.58), wenn das Zeitintervall  $[t_0, t]$  in zwei Intervalle  $[t_0, t_1]$  und  $[t_1, t]$  unterteilt wird. Für die drei Intervalle gilt jeweils

$$\begin{aligned} P(q_1, t_1) &= \int dq_0 P(q_1, t_1 | q_0, t_0) P(q_0, t_0) \\ P(q, t) &= \int dq_1 P(q, t | q_1, t_1) P(q_1, t_1) \\ P(q, t) &= \int dq_0 P(q, t | q_0, t_0) P(q_0, t_0) \end{aligned}$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein und vertauscht die Integrierten, so folgt

$$P(q, t) = \int dq_0 \left[ \int dq_1 P(q, t | q_1, t_1) P(q_1, t_1 | q_0, t_0) \right] P(q_0, t_0)$$

Durch Vergleich mit der dritten Gleichung erhält man die Markov-Bedingung.

**Kleine Zeitschritte:** Geht man zum Grenzfall infinitesimal kleiner Zeitschritte über,  $t \rightarrow t + \Delta t$ , so erhält man analog zu (3.56) eine Gleichung für die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte. Für kleine Zeitschritte machen wir für die Übergangswahrscheinlichkeit den Ansatz

$$P(q, t + \Delta t | q_0, t) = [(1 - \gamma(q_0)\Delta t)] \delta(q - q_0) + (q|w|q_0)\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (3.62)$$

Der erste Term beschreibt die Anfangsdichte und deren lokale Änderung an der Stelle  $q = q_0$ . Der zweite Term entspricht nichtlokalen Änderungen, d.h. Änderungen der Dichte im Endzustand  $q$  aufgrund von Übergängen von Anfangszuständen  $q_0 \neq q$ . Durch Normierung der Übergangswahrscheinlichkeit gemäß (3.60) erhält man

$$\gamma(q_0) = \int dq (q|w|q_0) \quad (3.63)$$

Mit (3.62) und (3.58) folgt für  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \partial_t P(q, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(q, t + \Delta t) - P(q, t)}{\Delta t} \\ &= \int dq_0 [ -\gamma(q_0)\delta(q - q_0) + (q|w|q_0) ] P(q_0, t) \\ &= -\gamma(q)P(q, t) + \int dq_0 (q|w|q_0) P(q_0, t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ersetzt man noch  $\gamma(q)$  durch (3.63), so erhält man die Änderungsrate in der Form einer Bilanz der Verluste und Gewinne im Intervall zwischen  $q$  und  $q + dq$ :

$$\partial_t P(q, t) = - \int dq_0 (q_0|w|q) P(q, t) + \int dq_0 (q|w|q_0) P(q_0, t)$$

(3.65)

**Kleine Änderungen der Variablen:** Fordert man nun auch noch, daß sich die Zufallsvariabel  $q$  im Zeitintervall  $\Delta t$  nur wenig ändert, so erhält man für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte des Markov-Prozesses die Fokker-Planck-Gleichung. Sei

$$w(q_0, r) = (q|w|q_0), \quad q = q_0 + r. \quad (3.66)$$

Die Übergangsrate wird hier als Funktion des Anfangswertes  $q_0$  und der Änderung  $r$  der Zufallsvariablen angegeben. Damit folgt aus (3.65)

$$\partial_t P(q, t) = - \int dr w(q, r) P(q, t) + \int dr w(q - r, r) P(q - r, t) \quad (3.67)$$

Entwickelt man den zweiten Summanden in eine Taylorreihe so gilt

$$\partial_t P(q, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial q^n} [\alpha_n(q) P(q, t)]. \quad (3.68)$$

Der erste Term der Reihe hebt sich gegen den ersten Summanden weg. Die Koeffizienten der Reihe sind definiert durch

$$\alpha_n(q) = \int dr r^n w(q, r).$$

Mit Hilfe von (3.62), lassen sich diese Koeffizienten auch als Momente der Übergangswahrscheinlichkeit ausdrücken,

$$\alpha_n(q) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta q^n \rangle}{\Delta t}, \quad \langle \Delta q^n \rangle = \int dr r^n P(q, t + \Delta t | q - r, t).$$

Bricht man die Reihe nach der zweiten Ordnung ab, so erhält man die Fokker-Planck-Gleichung

$$\partial_t P(q, t) = -\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\langle \Delta q \rangle}{\Delta t} P(q, t) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left( \frac{\langle \Delta q^2 \rangle}{\Delta t} P(q, t) \right). \quad (3.69)$$

In Analogie zur Diffusionsgleichung (3.51) bezeichnet man den ersten Summanden als Reibungsterm, den zweiten als Diffusionsterm. Die Herleitung läßt sich auf den Fall mehrerer Variablen  $q_1, \dots, q_m$  verallgemeinern, wenn man die Taylorreihe für Funktionen mehrerer Variablen benutzt. Man erhält dann entsprechend

$$\begin{aligned} \partial_t P(q_1, \dots, q_m, t) = & - \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\langle \Delta q_j \rangle}{\Delta t} P(q_1, \dots, q_m, t) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} \left( \frac{\langle \Delta q_j \Delta q_k \rangle}{\Delta t} P(q_1, \dots, q_m, t) \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

### Landau-Gleichung als Fokker-Planck-Gleichung

Die Landau-Gleichung kann in der Form einer Fokker-Planck-Gleichung geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 C_i &= \sum_j \int d^3 v_j \frac{m_{ij}^2}{2} \partial_{i\mu} B g G_{\mu\nu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) f_i f_j \\
 &= \sum_j \int d^3 v_j \frac{m_{ij}^2}{2} \partial_{i\mu} (\partial_{i\nu} - \partial_{j\nu}) (B g G_{\mu\nu} f_i f_j) + \\
 &\quad \sum_j \int d^3 v_j \frac{m_{ij}^2}{2} \partial_{i\mu} \frac{2B g}{m_{ij}} g_\mu f_i f_j \\
 &= -\frac{\partial}{\partial v_{i\mu}} \left( \frac{\langle \Delta v_{i\mu} \rangle}{\Delta t} f_i \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_{i\mu} \partial v_{i\nu}} \left( \frac{\langle \Delta v_{i\mu} \Delta v_{i\nu} \rangle}{\Delta t} f_i \right) \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

**Reibungsterm:**

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle \Delta v_{i\mu} \rangle}{\Delta t} &= \sum_j \int d^3 v_j \frac{B g}{m_i} m_{ij} (-g_\mu) f_j \\
 &= -\sum_j \frac{4\pi q_i^2 q_j^2 \Lambda}{m_i m_{ij}} \int d^3 v_j \frac{g_\mu}{g^3} f_j \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

**Diffusionsterm:**

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle \Delta v_{i\mu} \Delta v_{i\nu} \rangle}{\Delta t} &= \sum_j \int d^3 v_j m_{ij}^2 B g G_{\mu\nu} f_j \\
 &= \sum_j \frac{4\pi q_i^2 q_j^2 \Lambda}{m_i m_j} \int d^3 v_j \frac{G_{\mu\nu}}{g^3} f_j \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

Im Unterschied zur linearen Fokker-Planck-Gleichung ist die Landau-Gleichung nichtlinear, d.h. die Reibungs- und Diffusionsterme hängen selbst von der gesuchten Verteilungsfunktion ab.

## 3.3 Flüssigkeitsbeschreibung

### 3.3.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Makroskopische Transportvorgänge können vielfach mit den Methoden der Kontinuumsmechanik behandelt werden. Diese sind in der Regel anwendbar, wenn makroskopische Dichten definiert werden können und deren Beobachtungszeiten groß sind gegenüber den inneren Relaxationszeiten. Die Auffaltung eines Gebirges kann

z.B. über sehr lange Zeiträume (im Vergleich zum menschlichen Leben) kontinuumsmechanisch betrachtet werden. Die Ausbreitung von Schall- und Stoßwellen in Festkörpern ist ein kontinuumsmechanischer Vorgang.

Der Übergang von der Newtonschen Teilchenmechanik zur Kontinuumsmechanik wurde durch Bernoulli (Druck), Euler (Bewegungsgleichung) und Cauchy (elastische Verformung) vollzogen. Die Kontinuumsmechanik ist also wesentlich älter als ihre mikroskopische Begründung (im Rahmen der Boltzmann-Gleichung). Vom makroskopischen Standpunkt aus umfaßt sie streng gültige Erhaltungssätze (Teilchenzahl, Impuls, Energie) und empirisch zu begründende konstitutive Gleichungen (Zustandsgleichung, Transportkoeffizienten).

### Kinematik:

Die Bewegung eines Kontinuums kann als eine Abbildung aufgefaßt werden, die jedem Punkt  $\mathbf{a}$  eines Gebietes zu einer Anfangszeit 0 einen Punkt  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  zu einer späteren Zeit  $t$  zuordnet. Diese Abbildung soll ein-eindeutig und hinreichend oft differenzierbar sein. Damit definiert sie Teilchenbahn, -geschwindigkeit, -beschleunigung und Volumenänderung nach den folgenden Beziehungen:

- Teilchenbahn:  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ ,  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$
- Geschwindigkeit:  $\partial_t \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$
- Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) &= \partial_t \mathbf{V}(\mathbf{a}, t) = \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \partial_t \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &= \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

- Volumenelement:  $d^3 x = J(\mathbf{a}, t) d^3 a$ ,  $J = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|$   

$$J(\mathbf{a}, t + \delta t) = J(\mathbf{a}, t) J(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), \delta t)$$

$$J(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), \delta t) = \det \left| \frac{\partial (x_i + v_i \delta t)}{\partial x_j} \right| = 1 + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta t + O(\delta t^2)$$

$$\partial_t J(\mathbf{a}, t) = J(\mathbf{a}, t) (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

### Allgemeine Form der Erhaltungssätze:

Für eine beliebige Kontinuumsgröße sei  $h(\mathbf{x}, t)$  die Dichte,  $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$  die Stromdichte und  $g(\mathbf{x}, t)$  eine Erzeugungsrate pro Volumeneinheit. Dann kann die Erhaltung dieser Größe in der folgenden Form (integral, lokal) ausgedrückt werden:

#### 1. Integrale Form:

Beliebiges mitbewegtes Volumen  $V(t)$  mit Oberfläche  $\partial V(t)$ ; die Normalenrichtung des Oberflächenelementes ist nach außen gerichtet.

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3 x \, h(\mathbf{x}, t) = \int_V d^3 x \, g(\mathbf{x}, t) - \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) \quad (3.74)$$

2. *Lokale Form:*

Umformung der Terme aus (3.74) in Volumenintegrale ergibt mit  $h(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{a}, t)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3x \ h(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \int_{V(0)} d^3a \ J(\mathbf{a}, t) H(\mathbf{a}, t) \\
 &= \int_{V(0)} d^3a \ \partial_t(J(\mathbf{a}, t) H(\mathbf{a}, t)) \\
 &= \int_{V(0)} d^3a \ J(\mathbf{a}, t) (H(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \partial_t H(\mathbf{a}, t)) \\
 &= \int_V d^3x \ \left\{ h(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} h \right\} \\
 &= \int_V d^3x \ \{\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v})\} \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{s} = \int_V d^3x \ \nabla \cdot \mathbf{s}$$

Da  $\mathbf{V}$  beliebig ist gilt:

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v} + \mathbf{s}) = g \tag{3.76}$$

**Massenerhaltung:** Setze  $h = \varrho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{a}, t)$ ,  $\mathbf{s} = 0$ ,  $g = 0$

1. *Integrale Form:*

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \ \varrho = \int_{V(0)} d^3a \ \partial_t(J\delta) = 0 \tag{3.77}$$

2. *Lokale Form:*

$$\partial_t \varrho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 \tag{3.78}$$

**Hilfssatz:**

$$h = \varrho\varphi \implies \partial_t(\varrho\varphi) + \nabla \cdot (\varrho\varphi\mathbf{v}) = \varrho \frac{d}{dt}(\varphi) \tag{3.79}$$

Die lokalen Erhaltungssätze können also immer entweder in der Erhaltungsform (linke Seite) oder als Entwicklungsgleichung für ein Massenelement (rechte Seite) dargestellt werden. Der Beweis beruht auf der Gleichung für die Massenerhaltung.

**Beweis (integrale Form):**  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{a}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3x (\varrho \varphi) &= \frac{d}{dt} \int_{V(0)} d^3a J \delta \Phi = \int_{V(0)} d^3a \partial_t (J \delta \Phi) \\ &= \int_{V(0)} d^3a J \delta \partial_t \Phi = \int_V d^3x \varrho \frac{d}{dt} \varphi \end{aligned} \quad (3.80)$$

**Impulserhaltung:** Setze

- $h = \varrho v_\alpha$  :  $\alpha$ -Komponente der Impulsdichte
- $g = \varrho f_\alpha$  :  $f_\alpha$  bezeichnet die  $\alpha$ -Komponente der Kraft, die auf ein Massenelement pro Masseneinheit wirken (Volumenkraft)
- $\mathbf{s}_\beta = -T_{\alpha\beta}$  :  $\alpha$ -Komponente der Kraft, die auf eine Fläche mit Normalenrichtung  $\beta$  pro Flächeneinheit wirkt (Oberflächenkraft, Spannungstensor)

1. *Integrale Form:*

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \varrho \mathbf{v} = \int_V d^3x \varrho \mathbf{f} + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.81)$$

2. *Lokale Form:*

Cauchy-Gleichung:  $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\partial_t (\varrho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \varrho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \varrho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (3.82)$$

Euler-Gleichung:  $T_{\alpha\beta} = -p \delta_{\alpha\beta}$

$$\varrho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \varrho \mathbf{f} - \nabla p \quad (3.83)$$

Navier-Stokes-Gleichung:  $T_{\alpha\beta} = -p \delta_{\alpha\beta} + \eta (\partial_{x_\alpha} v_\beta + \partial_{x_\beta} v_\alpha)$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

$$\varrho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \varrho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad \eta : \text{Viskosität} \quad (3.84)$$

**Energieerhaltung:** Setze

- $h = \varrho (\frac{1}{2} v^2 + e)$  : Energiedichte mit der inneren Energie  $e$  pro Masseneinheit
- $g = \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Q$  : Arbeitsleistung der Volumenkräfte, Heizleistung  $Q$
- $\mathbf{s} = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}$  : Arbeitsleistung der Oberflächenkräfte, Wärmestrom  $\mathbf{q}$

1. *Integrale Form:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3x \varrho (\frac{1}{2} v^2 + e) &= \int_V d^3x (\varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Q) \\ &+ \int_{\partial V} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.85)$$

2. *Lokale Form:*

Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} \partial_t \{\varrho \left( \frac{1}{2} v^2 + e \right) \} + \nabla \cdot \{ \varrho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + e \right) \} &= \varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + e \right) = \\ \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \partial_{x_\beta} (T_{\alpha\beta} v_\alpha) + Q - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Enthalpie:  $w = e + p/\varrho$ ,  $T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} - \Pi_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \partial_t \{\varrho \left( \frac{1}{2} v^2 + e \right) \} + \nabla \cdot \{ \varrho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \} &= \\ \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \partial_{x_\beta} (\Pi_{\alpha\beta} v_\alpha) + Q - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Kinetische Energie: (folgt aus (3.82))

$$\varrho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + v_\alpha \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta} \quad (3.88)$$

Innere Energie: Differenz von (3.86) und (3.88)

$$\varrho \frac{d}{dt} e = Q - \nabla \cdot \mathbf{q} + T_{\alpha\beta} \partial_{x_\beta} v_\alpha \quad (3.89)$$

Entropie:  $de = Tds - pd(1/\varrho) = Tds + (p/\varrho^2)d\varrho$

$$\begin{aligned} \varrho T \frac{d}{dt} s &= Q - \nabla \cdot \mathbf{q} + T_{\alpha\beta} \partial_{x_\beta} v_\alpha + p \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= Q - \nabla \cdot \mathbf{q} - \Pi_{\alpha\beta} \partial_{x_\beta} v_\alpha \end{aligned} \quad (3.90)$$

Für die Dichteänderung wurde die Kontinuitätsgleichung verwendet. Entropieänderungen ergeben sich durch Wärmeaustausch, Wärmestrom und innere Reibung bei mechanischer Deformation. In idealen Flüssigkeiten bleibt die Entropie entlang der Teilchenbahn konstant.

### 3.3.2 Momentengleichungen

**Kinetische Definitionen:** Für jede Teilchensorte  $i$

Mittlere Teilchendichte	$n_i(\mathbf{x}, t) = \int d^3v f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$
Mittelwerte	$n_i < \chi >_i = \int d^3v \chi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$
Momente	$< v_\alpha v_\beta v_\gamma \dots >_i$
Mittlere Geschwindigkeit	$\mathbf{u}_i = < \mathbf{v} >_i$
Temperatur	$\mathbf{v} = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}', \quad \frac{3}{2}T_i = \frac{m_i}{2} < v'^2 >_i,$ $T_i = \frac{m_i}{3} < v'^2 >_i$
Wärmestrom	$\mathbf{q}_i = \frac{n_i m_i}{2} < v'^2 \mathbf{v}' >_i$
Drucktensor	$\mathbf{P}_i = n_i m_i < \mathbf{v}' \mathbf{v}' >_i = p_i \mathbf{I} + \mathbf{\Pi}_i$ $p_i = \frac{n_i m_i}{3} < v'^2 >_i = n_i T_i,$ $\mathbf{\Pi}_i = n_i m_i < \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \frac{1}{3} v'^2 \mathbf{I} >_i$
Stoßterm	$C_i = \sum_j C_{ij}(f_i, f_j)$ $\int d^3v C_i = 0$ $\int d^3v \mathbf{v}(m_i C_{ij} + m_j C_{ji}) = 0$ $\int d^3v v^2(m_i C_{ij} + m_j C_{ji}) = 0$
Reibungskraft	$\mathbf{R}_i = \sum_j \mathbf{R}_{ij}$ $\mathbf{R}_{ij} = -\mathbf{R}_{ji} = \int d^3v m_i \mathbf{v}' C_{ij}$
Wärmeaustausch	$Q_i = \sum_j Q_{ij}$ $Q_{ij} = \int d^3v \frac{1}{2} m_i v'^2 C_{ij}$ $Q_{ij} + Q_{ji} = -\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{R}_{ij} - \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{R}_{ji} = -(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{R}_{ij}$

**Mittelung der Boltzmanngleichung:** für eine Teilchensorte, ohne Index  $i$

$$\int d^3v \chi(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{v}}) f = \int d^3v \chi C \quad (3.91)$$

Durch partielle Integration folgt für die einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} \int d^3v \chi \partial_t f &= \partial_t (n < \chi >) - n < \partial_t \chi > \\ \int d^3v \chi \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f &= \nabla \cdot (n < \chi \mathbf{v} >) - n < \mathbf{v} \cdot \nabla \chi > \\ \int d^3v \chi \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{v}} f &= -n < \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \chi > \end{aligned} \quad (3.92)$$

Ist  $\chi$  ein Potenzprodukt aus den Geschwindigkeitskomponenten, so erhält man eine Entwicklungsgleichung für das zugehörige Moment der Verteilungsfunktion. Die Änderung dieses Moments hängt jedoch von den nächsthöheren Momenten ab, so daß sich kein abgeschlossenes Gleichungssystem ergibt. Im Prinzip können aber alle Momente durch die Lösung der Boltzmanngleichung berechnet werden.

Von besonderer Bedeutung sind diejenigen Momentengleichungen, die den kontinuumsmechanischen Erhaltungssätzen entsprechen. Diese werden im folgenden abgeleitet.

**Massenerhaltung:**  $\chi = m$

$$\partial_t(nm) + \nabla \cdot (nm\mathbf{u}) = 0 \quad (3.93)$$

Da  $m$  eine Konstante ist verschwinden die Terme in (3.91), die Ableitungen von  $\chi$  enthalten.

**Impulserhaltung:**  $\chi = m\mathbf{v}$

$$\partial_t(nm\mathbf{u}) + \nabla \cdot (nm < \mathbf{v} \mathbf{v} >) - nm\mathbf{a} = \mathbf{R} \quad (3.94)$$

Wegen

$$< \mathbf{v} \mathbf{v} > = < (\mathbf{u} + \mathbf{v}')(\mathbf{u} + \mathbf{v}') > = \mathbf{u} \mathbf{u} + < \mathbf{v}' \mathbf{v}' > = \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{P}/(nm)$$

folgt daraus:

$$\partial_t(nm\mathbf{u}) + \nabla \cdot (nm\mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{P}) = nm\mathbf{a} + \mathbf{R} \quad (3.95)$$

**Energieerhaltung:**  $\chi = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2$

Um direkt einen Erhaltungssatz für die innere Energie zu erhalten, wird hier  $v'^2$  gemittelt. Dabei muß man beachten, daß  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  von  $\mathbf{x}$  und  $t$  abhängig ist:

$$\begin{aligned} \partial_t(nm < \frac{1}{2}v'^2 >) + nm < \mathbf{v}' > \cdot \partial_t \mathbf{u} &= \partial_t(n \frac{3}{2}T) \\ \nabla \cdot (n < \frac{1}{2}mv'^2(\mathbf{u} + \mathbf{v}') >) - nm < v_\alpha \partial_{x_\alpha} \frac{1}{2}v'^2 > &= \\ \nabla \cdot (n \frac{3}{2}T \mathbf{u} + \mathbf{q}) - nm < v_\alpha v'_\beta \partial_{x_\alpha} v'_\beta > &= \\ \nabla \cdot (n \frac{3}{2}T \mathbf{u} + \mathbf{q}) + nm < v'_\alpha v'_\beta > \partial_{x_\alpha} u_\beta &= \\ -n < \mathbf{a} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \frac{1}{2}mv'^2 > &= -n < \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}' > = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt der Energiesatz

$$\partial_t \left( \frac{3}{2} n T \right) + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} n T \mathbf{u} + \mathbf{q} \right) + P_{\alpha\beta} \partial_{x_\alpha} u_\beta = Q \quad (3.96)$$

Mit der inneren Energie pro Masseneinheit  $e = (3/2)(T/m)$  und der Massendichte  $\varrho = mn$ , ergibt sich der Energiesatz (3.89) der Kontinuumsmechanik

$$\varrho \frac{d}{dt} e = Q - \nabla \cdot \mathbf{q} - P_{\alpha\beta} \partial_{x_\beta} v_\alpha. \quad (3.97)$$

### 3.3.3 Zweiflüssigkeitsmodell

Behandelt man die Elektronen als eine Flüssigkeit und die Ionen als eine zweite Flüssigkeit, so spricht man von einem *Zweiflüssigkeitsmodell*. Im Gegensatz zum Einflüssigkeitsmodell können hierbei Raumladungseffekte sowie unterschiedliche Elektronen- und Ionentemperaturen berücksichtigt werden.

#### Freie Flugzeit:

Bei Flüssigkeitsmodellen ist grundsätzlich zwischen stoßfreien und stoßbestimmten Plasmen zu unterscheiden. Unterscheidungsmerkmal ist die freie Flugzeit. Als einfache Abschätzung erhält man

$$\frac{1}{\tau_f} = n < v \sigma > \sim n v_{th} \sigma_{th}(T) \sim n \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{1}{T^2} \rightarrow \tau_f \sim \sqrt{m} \frac{T^{3/2}}{n}$$

Eine genauere Rechnung ergibt für Elektronen und Ionen

$$\tau_e = \frac{3}{4\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{\Lambda q_e^4 Z n_e} = 3.44 \times 10^4 \frac{T_{e,eV}^{3/2}}{(\Lambda/10) Z n_e} \quad (3.98)$$

$$\tau_i = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{\Lambda q_e^4 Z^3 n_e} = 2.95 \times 10^6 \sqrt{\frac{m_i}{2m_p}} \frac{T_{i,eV}^{3/2}}{(\Lambda/10) Z^3 n_e} \quad (3.99)$$

Hierbei bezeichnet  $m_p$  die Masse des Protons und  $Z$  die Ladungszahl des Ions.

#### Stoßfreie, kalte Plasmen: $t \ll \tau_f, v_{th} \ll \omega/k; L \gg \lambda_D$

Die kollektiven Bewegungen in einem stoßfreien kalten Plasma können durch Zweiflüssigkeitsgleichungen beschrieben werden. Unter Vernachlässigung von Temperatur und Stößen ergeben sich aus den Momentengleichungen die Gleichungen für zwei ideale Flüssigkeiten ohne Druck. Häufig berücksichtigt man thermische Korrekturen zu diesem Modell, indem man einen isotropen Druck und adiabatische Zustandsänderungen der Flüssigkeitselemente annimmt. Die entsprechenden Grundgleichungen sind:

$$\partial_t n_j + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0 \quad (3.100)$$

$$n_j m_j (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = n_j q_j (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \text{kaltes Plasma} &: p_j = 0, \\ \text{thermisches Plasma} &: (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla) \left( \frac{p_j}{n_j^\gamma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.102)$$

**Stoßbestimmte Plasmen:**  $t \gg \tau_f; L \gg \lambda_f$  ;

Im stoßbestimmten Fall kann man die Vorgänge weiter nach den Relaxationszeiten für die Elektronen ( $\tau_{ee}$ ), die Ionen ( $\tau_{ii}$ ) und das Gesamtsystem ( $\tau_{ei}$ ) unterscheiden. Zuerst relaxieren die Elektronen, danach die Ionen (kleinere thermische Geschwindigkeit der Ionen) und zuletzt das Gesamtsystem aus Elektronen und Ionen (geringerer Energieübertrag zwischen leichten und schweren Teilchen). Nach der Einstellung der Gleichgewichte für die Elektronen und die Ionen kann der Ausgleich der unterschiedlichen Elektronen- und Ionentemperaturen durch das Zweiflüssigkeitsmodell beschrieben werden.

**Relaxationszeiten:** Die Relaxationszeiten stehen in dem Verhältnis

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} = 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e} \quad (3.103)$$

Die Zweiflüssigkeitsgleichungen für stoßbestimmte Plasmen können ausgehend von der Landau-Gleichung abgeleitet werden (S.I.Braginskii, Rev.Plasma Phys. **1**, 215 (1965)). Die Ableitung beruht im wesentlichen auf den folgenden Annahmen:

- Lokales thermodynamisches Gleichgewicht:

$$f \approx n(\mathbf{x}, t) \left( \frac{\beta}{\pi} \right)^{(3/2)} \exp(-\beta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2), \quad \beta = \frac{m}{2T(\mathbf{x}, t)}$$

- Quasineutralität:  $q_e = -e$ ,  $q_i = Ze$ ,  $n_e = Zn_i$
- Kleines Massenverhältnis:  $m_e/m_i \ll 1$

Für nicht magnetisierte Plasmen ( $\omega_g \tau_f \ll 1$ ) lauten die Zweiflüssigkeitsgleichungen:

$$\partial_t n_j + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0 \quad (3.104)$$

$$n_j m_j (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = n_j q_j (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_j - \nabla p_j - \nabla \cdot \Pi_j \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} n_j m_j T_j (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla) s_j &= \frac{3}{2} n_j (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla) T_j + p_j \nabla \cdot \mathbf{v}_j \\ &= Q_j - \nabla \cdot \mathbf{q}_j - \Pi_{j,\alpha\beta} \partial_{x_\alpha} v_{j,\beta} + P_j \end{aligned} \quad (3.106)$$

**Reibungskraft:**

$$\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i = -\alpha_0 \frac{m_e n_e}{\tau_e} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - \beta_0 n_e \nabla T_e,$$

Reibungskräfte treten auf, wenn sich die Elektronen relativ zu den Ionen bewegen und dabei Impuls durch Stöße abgeben. Eine zweite Ursache sind Temperaturgradienten. Wegen  $\tau_f \propto v^3$  geben Teilchen, die eine Grenzfläche in Richtung des Temperaturgradienten passieren im Mittel mehr Impuls ab als die Teilchen, die entgegen dem Temperaturgradienten hindurchtreten. Die Konstanten  $\alpha_0, \beta_0$  hängen noch von  $Z$  ab.

**Viskosität:**

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_j &= -\eta_{0j} \mathbf{W}_j, & W_{\alpha\beta} &= \partial_{x_\alpha} v_\beta + \partial_{x_\beta} v_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \eta_{0e} &= 0.73 n_e T_e \tau_e \ (Z=1), & \eta_{0i} &= 0.96 n_i T_i \tau_i \end{aligned} \quad (3.107)$$

Der Viskositätstensor ist proportional zu den Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten. Für  $T_e \sim T_i$  ist der Elektronenbeitrag zur Viskosität vernachlässigbar.

**Wärmestrom:**

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= \beta_0 n_e T_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - \kappa_e \nabla T_e, & \mathbf{q}_i &= -\kappa_i \nabla T_i \\ \kappa_e &= \gamma_0 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} = 6.05 \times 10^{21} \gamma_0 \frac{T_{e,eV}^{5/2}}{(\Lambda/10)Z}, & \kappa_i &= 3.9 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i} \ll \kappa_e \end{aligned} \quad (3.108)$$

Der Ionenbeitrag zur Wärmeleitung ist gegenüber der elektronischen Wärmeleitung vernachlässigbar.

Tabelle 3.1: Tabelle der Koeffizienten  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$

	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$	$Z = 4$	$Z \rightarrow \infty$
$\alpha_0$	0.5129	0.4408	0.3965	0.3752	0.2949
$\beta_0$	0.7110	0.9052	1.016	1.090	1.521
$\gamma_0$	3.1616	4.890	6.064	6.920	12.471

**Wärmeaustausch:**

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e (T_e - T_i)}{\tau_e} \\ Q_e &= -Q_i - \mathbf{R}_e \cdot (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Für  $T_e > T_i$  beschreibt  $Q_i$  die Heizung der Ionen durch eine entsprechende Kühlung der Elektronen. Eine Heizung der Elektronen ergibt sich aus dem Reibungsterm.

**Energiedepositionsleistungsdichte:** Die Deposition von Energie durch Licht- oder Teilchenstrahlung kann durch einen Quellterm  $P_j$  im Energiesatz berücksichtigt werden.

### 3.3.4 Einflüssigkeitsmodell

Einflüssigkeitsvariablen:

$$\begin{aligned}
 \varrho &= \sum_j m_j n_j = m_e n_e + m_i n_i \approx m_i n_i \\
 \tau &= \sum_j q_j n_j = -e (n_e - Z n_i) \\
 \mathbf{u} &= \frac{1}{\varrho} \sum_j m_j n_j \mathbf{v}_j = \frac{m_e n_e \mathbf{v}_e + m_i n_i \mathbf{v}_i}{m_e n_e + m_i n_i} \approx \mathbf{v}_i \\
 \mathbf{j} &= \sum_j q_j n_j \mathbf{v}_j = -e n_e \mathbf{v}_e + Z e n_i \mathbf{v}_i \approx -e n_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \\
 \mathbf{P} &= \sum_j \int d^3 v m_j f_j (\mathbf{v} - \mathbf{u}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\
 &= \int d^3 v (m_e f_e + m_i f_i) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\
 &\approx \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i, \quad (v_{th,e} \gg \mathbf{u}, \mathbf{v}_e; \mathbf{u} \approx \mathbf{v}_i)
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Massenerhaltung:

$$\sum_j m_j (\partial_t n_j + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j)) = \partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0 \tag{3.111}$$

Ladungserhaltung:

$$\sum_j q_j (\partial_t n_j + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j)) = \partial_t \tau + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{3.112}$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}
 \sum_j \partial_t (m_j n_j \mathbf{v}_j) + \nabla \cdot (m_j n_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j) &= \sum_j n_j q_j (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_j \\
 \partial_t (\varrho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= \varrho \frac{d}{dt} \mathbf{u} = \tau \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P} \tag{3.113}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \sum_j \mathbf{P}_j + m_j n_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j - m_j n_j \mathbf{u} \mathbf{u} \\
 &= \sum_j m_j n_j \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}_j \rangle (\mathbf{v} - \mathbf{v}_j) + m_j n_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j - m_j n_j \mathbf{u} \mathbf{u} \\
 &= \sum_j m_j n_j \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle - m_j n_j \mathbf{u} \mathbf{u} \\
 &= \sum_j m_j n_j \langle \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle (\mathbf{v} - \mathbf{u})
 \end{aligned}$$

**Ohmsches Gesetz:**

Stromdichte für quasineutrales Plasma:

$$\mathbf{j} \approx q_e n_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad q_i n_i \approx -q_e n_e \quad (3.114)$$

Elektronengeschwindigkeit für  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{q_e n_e} \mathbf{j} + \mathbf{u} \quad (3.115)$$

Eliminiere  $\mathbf{v}_e$  aus der Elektronenbewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} n_e m_e \frac{d}{dt} \mathbf{v}_e &= n_e q_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_e - \nabla \cdot \mathbf{P}_e \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{q_e n_e} \mathbf{R}_e - \frac{1}{q_e n_e c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{q_e n_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e + \frac{m_e}{q_e} \frac{d}{dt} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} - \frac{1}{q_e n_e c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{q_e n_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e + \frac{m_e}{q_e} \frac{d}{dt} \mathbf{v}_e \end{aligned}$$

Leitfähigkeit:  $\sigma$

$$-\frac{1}{q_e n_e} \mathbf{R}_e = \frac{1}{q_e n_e} \frac{\alpha_0 m_e n_e}{\tau_e} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \quad \sigma = \frac{q_e^2 n_e \tau_e}{\alpha_0 m_e} \quad (3.116)$$

Wegen (3.98) ist  $\sigma$  unabhängig von der Dichte und proportional zu  $T^{3/2}$ . Mit steigender Temperatur werden die Ohmschen Verluste des Plasmastroms so gering, daß eine Ohmsche Heizung des Plasmas nicht mehr möglich ist.

Vereinfachtes Ohmsches Gesetz:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \sigma \mathbf{E}' \quad (3.117)$$

$\mathbf{E}'$  ist die Feldstärke in einem Inertialsystem, welches sich mit der momentanen und lokalen Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  eines Plasmaelementes bewegt (Feldstärke im Ruhesystem des Plasmas).

Ideale Leitfähigkeit:  $\sigma \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.118)$$

**Ideale Gase:**

$$\begin{aligned}
 p &= p_e + p_i = n_e T_e + n_i T_i \approx (1 + Z) n_i T \approx \varrho T / M; \quad M = \frac{m_i}{1 + Z} \\
 \epsilon &= \varrho e = \frac{f}{2} p = \frac{1}{\gamma - 1} p; \quad \gamma = \frac{f + 2}{f} \\
 e &= c_v T; \quad c_v = \frac{1}{M} \frac{1}{\gamma - 1} \\
 w &= e + p/\varrho = c_p T; \quad c_p = \frac{1}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \\
 \chi &= \frac{\kappa}{\varrho c_p} = 1.0 \times 10^{-3} \gamma_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{A}{Z(1 + Z)} \frac{T_{eV}^{5/2}}{\Lambda \varrho} \frac{cm^2}{sec}
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

### 3.3.5 MHD-Gleichungen

Die Einflüssigkeitsgleichungen können unter den folgenden Annahmen noch weiter vereinfacht werden. Sie beschreiben dann eine leitfähige Flüssigkeit, in der quasistationäre Ströme große Magnetfelder induzieren können. Da die Bewegung der Flüssigkeit wesentlich durch die Magnetfelder mitbestimmt wird, spricht man von der *Magnetohydrodynamik* (MHD).

**Annahmen:**

- **Langsame Änderungen:** Für hinreichend langsame Vorgänge ( $\omega^2 \ll \omega_p^2$ ) kann der Verschiebungsstrom in den Maxwellschen-Gleichungen vernachlässigt werden, d.h. es gelten die Prä-Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 |\partial_t \tau| &\approx \frac{\omega}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \approx \frac{\omega E}{4\pi L}; \quad |\nabla \cdot \mathbf{j}| \approx q n v / L \approx q n \frac{q E}{m \omega L} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega E}{4\pi L} \\
 \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

- **Hohe Leitfähigkeit:** In nichtrelativistischen Plasmen mit hoher Leitfähigkeit ist das elektrische Feld ( $E \sim \frac{v}{c} B$ ) klein gegenüber dem Magnetfeld. Daher kann die Coulomb-Kraft gegenüber der Lorentzkraft vernachlässigt werden:

$$\tau E \sim E^2 / L \sim (v/c)^2 B^2 / L, \quad \frac{1}{c} j B \sim B^2 / L \gg \tau E$$

- **Ideales Gas:**  $f$  Freiheitsgrade, Adiabatenindex  $\gamma = \frac{f+2}{f}$ ,  $s_{o_K} = k_B s$
- $$\begin{aligned}
 e &= (f/2) (T/m); \quad p = \varrho T / m; \\
 de &= T ds - pdv = T ds - (\varrho T / m) d(1/\varrho), \\
 s &= \text{const} + \frac{1}{m} \ln \left( \frac{T^{f/2}}{\varrho} \right) = \text{const} + \frac{f}{2m} \ln \left( \frac{p}{\varrho^\gamma} \right)
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

**Grundgleichungen:**

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.122)$$

$$\varrho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (3.123)$$

$$\frac{d}{dt} s = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (3.124)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.125)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}, \quad \tau = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (3.126)$$

Gleichung (3.124) drückt die Entropieerhaltung eines Flüssigkeitselementes aus. Die Entropie kann aber im allgemeinen in jedem Punkt der Flüssigkeit einen anderen Wert besitzen.

Die drei Gleichungen (3.126) bestimmen in expliziter Form das elektrische Feld, die Stromdichte und die Raumladung. Letztere wird zur Lösung der restlichen Gleichungen jedoch nicht benötigt.

**Magnetischer Druck:**

Mit

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2} B^2 - \mathbf{B} \mathbf{B} \right\} \quad (3.127)$$

lautet der Impulssatz:

$$\varrho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla \cdot \left\{ \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{I} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \mathbf{B} \right\} \quad (3.128)$$

Legt man die z-Achse des Koordinatensystems in Richtung des Magnetfeldes,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  so besitzt der magnetische Drucktensor die Form:

$$\frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{8\pi} \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

Das Magnetfeld übt parallel zu den Feldlinien einen Zug ( $-B^2/8\pi$ ) und senkrecht dazu einen Druck ( $B^2/8\pi$ ) aus.

### Entwicklung des Magnetfeldes:

Mit

$$\begin{aligned} -c\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - c\nabla \times (\mathbf{j}/\sigma) \\ &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right), \end{aligned}$$

folgt für die Zeitentwicklung des Magnetfeldes die Gleichung:

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = -\frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right) \quad (3.130)$$

### Flußerhaltung:

Für ein ideal leitfähiges Plasma bleibt der magnetische Fluß durch eine mitbewegte Fläche  $S(t)$  erhalten:

$$\frac{d}{dt} \int_S d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \int_S d\mathbf{f} \cdot \{\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\} = 0 \quad (3.131)$$

**Beweis der Flußerhaltung:** Wegen (3.130) muß nur die Gleichheit des linken und mittleren Ausdrucks in (3.131) gezeigt werden. Dazu betrachtet man eine allgemeine Variation des Flußintegrals:

$$\delta \int_S d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \int_S d\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{B} + \int_{\delta S_1} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} + \int_{\delta S_2} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} \quad (3.132)$$

Der erste Summand beschreibt die Flußänderung aufgrund der expliziten Änderung des Magnetfeldes. Der zweite Summand beschreibt die Flußänderung infolge einer Verschiebung  $\xi(\mathbf{x}, t)$  im Innern der Fläche bei festgehaltenem Rand. Die ursprüngliche Fläche  $S$  und die verschobene Fläche  $S'$  bilden zusammen eine geschlossene Oberfläche  $O$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\delta S_1} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} &= \int_{S'} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} - \int_S d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} \\ &= \int_O d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \int_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_S \nabla \cdot \mathbf{B} \xi \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (3.133) \end{aligned}$$

Der dritte Summand beschreibt die Flußänderung bei einer Verschiebung des Randes, wobei das Innere der Fläche festgehalten wird:

$$\begin{aligned} \int_{\delta S_2} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} &= \int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot (\xi \times d\mathbf{x}) = \int_{\partial S} (\mathbf{B} \times \xi) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \xi) \cdot d\mathbf{f} \quad (3.134) \end{aligned}$$

Faßt man diese Beiträge zusammen, so ergibt sich mit  $\xi = \mathbf{v}\delta t$  Gleichung (3.131).

### Magnetische Diffusion:

Bei endlicher Leitfähigkeit kann das Magnetfeld in das Plasma diffundieren. Nimmt man ein ruhendes Plasma mit konstanter Leitfähigkeit an, so ergibt (3.130) die Diffusionsgleichung

$$\partial_t \mathbf{B} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (3.135)$$

Die Eindringtiefe eines Magnetfeldes mit Frequenz  $\omega$  ist daher:

$$d = c/\sqrt{4\pi\omega\sigma}. \quad (3.136)$$

Bei langsamem Vorgängen kann die Diffusion auch bei einer hohen Leitfähigkeit eine Rolle spielen. In der Astrophysik kann die magnetische Diffusion trotz einer relativ geringen Leitfähigkeit häufig vernachlässigt werden, da die relevanten Ausdehnungen groß sind im Vergleich zur Eindringtiefe.

# Kapitel 4

## Vlasov-Maxwell-Theorie

Die Vlasov-Gleichung (3.25) ist die Grundgleichung für stoßfreie Plasmen. Jedes Teilchen bewegt sich im mittleren Feld aller anderen Teilchen. Das mittlere Feld wird durch die Maxwell-Gleichungen mit den mittleren Ladungs- und Stromdichten (3.24) bestimmt. Die Vlasov-Gleichung bestimmt die Zeitentwicklung der Einteilchenverteilungsfunktion in diesen Feldern. Als Anwendungsbeispiel werden elektrostatische Wellen im Rahmen der Vlasov-Theorie behandelt.

### 4.1 Grundgleichungen

Ein Plasma besteht aus verschiedenen Teilchensorten, Elektronen und Ionen unterschiedlicher Ladungsstufen. Exemplarisch betrachten wir die Dynamik der Elektronen. Die Dynamik der anderen Teilchensorten kann analog behandelt werden.

#### 4.1.1 Näherung des mittleren Feldes

Die Vlasov-Näherung besteht in einer Mittelung der Teilchendichten und des elektromagnetischen Feldes unter Vernachlässigung von Teilchenkorrelationen. Zur Mittelung der mikroskopisch punktförmigen Teilchendichte wird der Phasenraum  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  in kleine Volumenelemente  $d^3x d^3v$  unterteilt, die jeweils eine mittlere Teilchenzahl

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v \quad (4.1)$$

enthalten. Die mittlere Teilchendichte eines Volumenelementes im Punkt  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  zur Zeit  $t$  wird durch die Einteilchen-Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  angegeben. Bei der Mittelung geht Information über die genaue Anordnung der Ladungen in den Volumenelementen verloren. Ist das Volumenelemente weit vom Beobachtungspunkt

entfernt, d.h. ist der Abstand viel größer als die Ausdehnung des Volumenelements, so ist die genaue Anordnung der Ladungen nicht wichtig, da das Feld, das vom Volumenelement im Beobachtungspunkt erzeugt wird als Monopolfeld approximiert werden kann. Umgekehrt müßten bei kleinen Abständen höhere Multipolmomente der Ladungsverteilung berücksichtigt werden. Im Sinne der Näherung eines stoßfreien Plasmas sind diese Korrekturen aber klein und bleiben hier unberücksichtigt.

### 4.1.2 Maxwell-Gleichungen

Die mittleren elektrischen und magnetischen Felder werden aus den mittleren Ladungs- und Stromdichten durch die Maxwell-Gleichungen bestimmt,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\tau .
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Ladungs- und Stromdichten bestehen jeweils aus einem Ionenanteil (Index i) und dem über die Verteilungsfunktion gemittelten Elektronenanteil,

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau_i + q_e \int d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\
 \mathbf{j} &= \mathbf{j}_i + q_e \int d^3v \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) .
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

### 4.1.3 Newtonsche Bewegungsgleichungen

Die Bewegung der Teilchen im mittleren Feld wird durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen beschrieben

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\
 \dot{\mathbf{v}} &= \frac{q_e}{m_e} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)), & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichungen bestimmt durch jeden Punkt  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  eine Bahnkurve  $(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{v}(\mathbf{v}_0, t))$ .

Bei der Bewegung entlang der Bahn eines Punktes im Phasenraum bleibt das Volumen  $d^3x d^3v$  erhalten. Als Beweis hierzu betrachtet man die Bewegung als eine Abbildung  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \rightarrow (\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{v}(\mathbf{v}_0, t))$ . Das Volumenelement transformiert sich mit der Jacobi-Determinante der Abbildung

$$d^3x d^3v = J d^3x_0 d^3v_0, \quad J = \det \left| \frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)} \right|.$$

Wie in Abschnitt 3.3.1 gezeigt gilt für die zeitliche Änderung der Jacobi-Determinante

$$\partial_t J = J(\partial_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}).$$

Für das Geschwindigkeitsfeld im Phasenraum gilt,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} &= \\ \partial_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \partial_{\mathbf{v}} \cdot \frac{q_e}{m_e} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) &= \\ \frac{q_e}{m_e c} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot (\partial_{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{v}$  unabhängige Koordinaten sind und daß die Rotation eines Zentralfeldes verschwindet. Da das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei ist, bleibt die Jacobi-Determinante zeitlich konstant. Mit der Anfangsbedingung  $J(0) = 1$  gilt  $J(t) = 1$  für  $t > 0$ .

Bei der Bewegung eines beliebigen Volumens bleibt die darin enthaltene Teilchenzahl konstant. Für die Phasenraumdichte gilt dementsprechend die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t f + \partial_{\mathbf{x}} \cdot (\dot{\mathbf{x}} f) + \partial_{\mathbf{v}} \cdot (\dot{\mathbf{v}} f) = 0. \quad (4.6)$$

Unter Verwendung von (4.5) erhält man aus (4.6) die Vlasov-Gleichung

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) = \partial_t f + \dot{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \partial_{\mathbf{v}} f = 0$$

$$. \quad (4.7)$$

wobei  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\dot{\mathbf{v}}$  durch die Bewegungsgleichungen (4.4) bestimmt werden. Im Rahmen der Vlasov-Näherung ist die Verteilungsfunktion entlang der Phasenraumtrajektorien konstant. Hierbei werden Änderungen der Teilchenzahl aufgrund von Stoßprozessen, die nicht im mittleren Feld enthalten sind, vernachlässigt. Die Vlasov-Maxwell-Gleichungen bilden ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Verteilungsfunktion der Ladungen  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  und für das elektromagnetische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ .

#### 4.1.4 Relativistische Bewegungsgleichungen

Für Teilchengeschwindigkeiten im Bereich der Lichtgeschwindigkeit müssen relativistische Bewegungsgleichungen verwendet werden. Die Maxwell-Gleichungen (4.2) bleiben jedoch auch hier gültig.

Die relativistischen Bewegungsgleichungen für die Ladung  $q_e$  im elektromagnetischen Feld lauten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{1}{m_e \gamma} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} &= q_e \left( \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{m_e c \gamma} \mathbf{p} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right) \\ \mathbf{p} &= m_e \gamma \mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{1 + p^2/m_e^2 c^2}\end{aligned}\tag{4.8}$$

Hierbei wurde die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch den relativistischen Impuls  $\mathbf{p}$  ersetzt. Sei

$$dN = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d^3x d^3p$$

die mittlere Teilchenzahl in einem Volumenelement  $d^3x d^3p$ . Im Phasenraum mit den Koordinaten  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  ist das Geschwindigkeitsfeld (4.8) wiederum divergenzfrei,

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} &= \partial_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{p}/m\gamma) = 0 \\ \partial_{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} &= \frac{q_e}{m_e c} \partial_{\mathbf{p}} \cdot \left( \frac{1}{\gamma} \mathbf{p} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{q_e}{m_e c} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \left( \partial_{\mathbf{p}} \times \frac{1}{\gamma} \mathbf{p} \right) = 0.\end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, daß  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{p}$  unabhängige Koordinaten sind und daß die Rotation eines Zentralfeldes verschwindet. Daher kann man analog zum nichtrelativistischen Fall folgern, daß das Phasenraumvolumen  $d^3x d^3p$  und die Phasenraumdichte  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  jeweils entlang der Phasenraumtrajektorien konstant sind. Die relativistische Form der Vlasov-Gleichung lautet daher

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(\mathbf{v}(t)), t) = \partial_t \mathcal{F} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \mathcal{F} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{F} = 0\tag{4.9}$$

mit den Bewegungsgleichungen (4.8).

Im  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ -Raum ist das relativistische Geschwindigkeitsfeld nicht divergenzfrei. Daher ist die Phasenraumdichte  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  nicht konstant entlang der Teilchenbahnen. Man kann jedoch die konstante Dichte  $\mathcal{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t)$  als Funktion der Geschwindigkeit ausdrücken und erhält dann mit Hilfe einer Variablentransformation von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{v}$  aus (4.9)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(\mathbf{v}(t)), t) &= \\ \partial_t \mathcal{F} + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} \mathcal{F} + \frac{q_e}{m_e} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \mathcal{F} &= 0\end{aligned}\tag{4.10}$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{J}$  die Jacobi-Matrix mit den Elementen

$$J_{ij} = \frac{\partial m_e v_j}{\partial p_i} = \frac{1}{\gamma} \left( \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{c^2} \right)$$

Hat man  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{v}), t)$  als Funktion von  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  und  $t$  berechnet, so erhält man die zugehörige Verteilungsfunktion gemäß,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{v}), t) m_e^3 \gamma^5 . \quad (4.11)$$

**Beweis:** Die Zahl der Teilchen im Volumenelement  $d^3 x d^3 v$  erhält man durch die Variablentransformation

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 x d^3 v = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{p}), t) m^{-3} J d^3 x d^3 p = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 x d^3 p, \quad (4.12)$$

mit der Jacobi-Determinante

$$J = \det \left| \frac{\partial m_e v_j}{\partial p_i} \right| = \gamma^{-5} .$$

#### 4.1.5 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Oft ist es zweckmäßig verallgemeinerte Koordinaten  $\mathbf{Q}$  und zugehörige kanonische Impulse  $\mathbf{P}$  zu verwenden. Die Dynamik eines Systems mit der Hamilton-Funktion  $H = H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$  wird durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bestimmt,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \partial_{\mathbf{P}} H, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\partial_{\mathbf{Q}} H . \quad (4.13)$$

Für eine Ladung im elektromagnetischen Feld mit den Potentialen  $\mathbf{A}(\mathbf{Q}, t)$  und  $\phi(\mathbf{Q}, t)$  lautet die Hamilton-Funktion im relativistischen bzw. nichtrelativistischen Fall,

$$H = \begin{cases} \sqrt{m_e^2 c^4 + (\mathbf{P} - \frac{q_e}{c} \mathbf{A})^2 c^2} + q_e \phi, \\ \frac{(\mathbf{P} - \frac{q_e}{c} \mathbf{A})^2}{2m_e} + q_e \phi \end{cases} \quad (4.14)$$

Der kinematische Impuls  $\mathbf{p} = m_e \gamma \mathbf{v}$  und die elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  folgen aus den Definitionsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{P} - \frac{q_e}{c} \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}} \quad (4.15)$$

Aus der Hamiltonschen Mechanik ist bekannt, daß das Volumenelement  $d^3Q d^3P$  invariant ist gegenüber kanonischen Transformationen. Da die Zeitentwicklung des Systems einer kanonischen Transformation entspricht, ist das Volumenelement auch entlang der Phasenraumtrajektorien erhalten. Explizit folgt dies aus der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes im Phasenraum,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = 0.$$

Daher ist die Verteilungsfunktion  $F(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$  der Teilchen entlang der durch (4.13) bestimmten Phasenraumtrajektorien konstant. Die Vlasov-Gleichung für die Verteilungsfunktion  $F(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$  lautet

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} = 0 \quad (4.16)$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (4.13) ergibt sich die kanonische Darstellung

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = \{H, F\}} \quad (4.17)$$

Hierbei bezeichnet die Poisson-Klammer  $\{a, b\}$  den Differentialausdruck

$$\boxed{\{a, b\} = \partial_{\mathbf{q}} a \cdot \partial_{\mathbf{p}} b - \partial_{\mathbf{p}} a \cdot \partial_{\mathbf{q}} b.} \quad (4.18)$$

Sei  $a = a(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t)$  eine Funktion der Phasenraumtrajektorie eines Teilchens und der Zeit. Dann gilt für die zeitliche Änderung dieser Größe

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \partial_t a + \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_{\mathbf{q}} a + \dot{\mathbf{p}} \cdot \partial_{\mathbf{p}} a \\ &= \partial_t a + \partial_{\mathbf{p}} H \cdot \partial_{\mathbf{q}} a - \partial_{\mathbf{q}} H \cdot \partial_{\mathbf{p}} a \\ \frac{da}{dt} &= \frac{\partial a}{\partial t} + \{a, H\}\end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Vlasov-Gleichung für die Verteilungsfunktion  $F$  entspricht hierbei dem Spezialfall, bei dem die linke Seite verschwindet.

**Beispiel: Vlasov-Gleichung in Zylinderkoordinaten.** Gesucht sei die Vlasov-Gleichung für die Bewegung eines Teilchens in einem axialsymmetrischen Potential  $V(\varrho, z)$  in Zylinderkoordinaten.

Mit der Lagrange-funktion des Teilchens

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\varrho, z) ,$$

erhält man die kanonischen Impulse

$$P_\varrho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = m\dot{\varrho}, \quad P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi}, \quad P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} .$$

und die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L = \frac{P_\varrho^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2m\varrho^2} + \frac{P_z^2}{2m} + V(\varrho, z) .$$

Die Vlasov-Gleichung für die Verteilungsfunktion  $F(P_\varrho, P_\varphi, P_z, \varrho, \varphi, z, t)$  lautet

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \dot{\varphi} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \dot{z} \frac{\partial F}{\partial z} + \dot{P}_\varrho \frac{\partial F}{\partial P_\varrho} + \dot{P}_z \frac{\partial F}{\partial P_z} = 0 ,$$

mit den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen,

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} &= \frac{\partial H}{\partial P_\varrho} = \frac{P_\varrho}{m}, & \dot{P}_\varrho &= -\frac{\partial H}{\partial \varrho} = -\frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{P_\varphi^2}{2m\varrho^2} + V \right), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{P_\varphi}{m\varrho^2}, & \dot{P}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m}, & \dot{P}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} . \end{aligned}$$

Der Winkel  $\varphi$  ist eine zyklische Variable und der zugehörige kanonische Impuls  $P_\varphi$  eine Erhaltungsgröße.

## 4.2 Elektrostatische Wellen

### 4.2.1 Lineare Vlasov-Gleichung

Das Vlasov-Poisson-Gleichungssystem ist im allgemeinen nichtlinear, da das mittlere Potential selbst von der Verteilungsfunktion abhängt. Vereinfachte lineare Gleichungen ergeben sich jedoch für hinreichend kleine Störungen einer bekannten Gleichgewichtslösung. Diese Störungen können durch ebene Wellen mit einem reellen Wellenvektor  $\mathbf{k}$  dargestellt werden. Die möglichen Frequenzen  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  dieser Plasmawellen werden durch die Nullstellen einer Plasmadispersionsfunktion  $D(\omega, \mathbf{k})$  bestimmt, deren allgemeine Form im folgenden hergeleitet wird.

Das Gleichgewicht werde durch eine räumlich homogene, zeitunabhängige Verteilungsfunktion  $f_0(\mathbf{v})$  und ein konstantes Potential  $\Phi_0 = 0$  beschrieben. Kleine Abweichungen vom Gleichgewicht besitzen daher die Form,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_1(\mathbf{x}, t) \quad (4.20)$$

wobei der Index 1 eine kleine Störung bezeichnet. Vernachlässigt man quadratische Terme in den Störungen, so ergeben sich mit diesem Ansatz aus (4.2) und (4.7) die linearisierten Gleichungen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{q}{m} \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \Delta \Phi_1 &= -4\pi q \int d^3 v \ f_1. \end{aligned}$$

Für ein räumliches Volumen mit periodischen Randbedingungen können die Störungen als Fourierreihen dargestellt werden. Wegen der Linearität der Gleichungen genügt es daher einen Ansatz  $f_1, \Phi_1 \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  zu betrachten. Dafür ergeben sich die Gleichungen,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_1 - \frac{q}{m} i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \Phi_1 = 0, \quad -k^2 \Phi_1 = -4\pi q \int d^3 v \ f_1.$$

Für die Zeitentwicklung kann man im allgemeinen keine periodischen Lösungen voraussetzen, da die Störungen im Laufe der Zeit anwachsen oder abklingen können. Es ist daher zweckmäßig bezüglich der Zeit ein Anfangswertproblem zu betrachten und dieses mit der Methode der Laplace-Transformation zu lösen. Für eine beliebige Funktion  $h(t)$  werden die Laplace-Transformation und ihre Umkehrung durch die Beziehungen

$$\hat{h}(\omega) = \int_0^\infty dt \ h(t) e^{i\omega t}, \quad \Im(\omega) > s, \quad (4.21)$$

$$h(t) = \int_{-\infty+is}^{\infty+is} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{h}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad t > 0, \quad (4.22)$$

definiert. Hierbei wird angenommen, daß  $\hat{h}(\omega)$  in der Halbebene  $\Im(\omega) > s$  konvergent ist. In der Halbebene  $\Im(\omega) < s$  besitzt die Funktion im allgemeinen Singularitäten. Bei der Rücktransformation verläuft der Integrationsweg wie in Abb.4.1 gezeigt in der komplexen  $\omega$ -Ebene oberhalb aller Singularitäten von  $\hat{h}(\omega)$ . Die Laplacetransformierte der ersten Ableitung der Funktion erhält man durch eine partielle Integration in der Form,

$$\int_0^\infty dt \frac{\partial h(t)}{\partial t} e^{i\omega t} = -h(0) - i\omega \hat{h}(\omega). \quad (4.23)$$

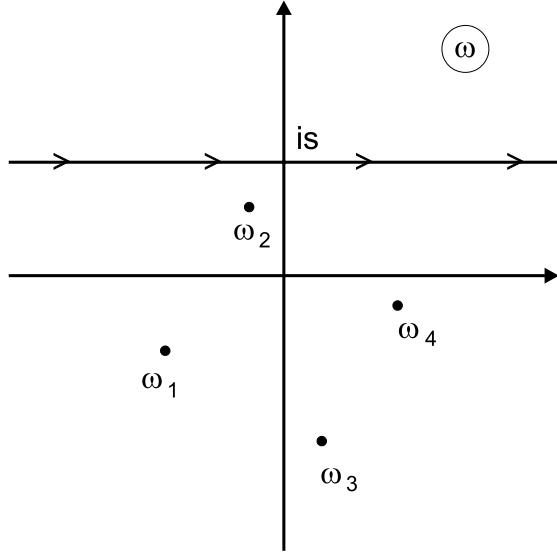


Abbildung 4.1: Integrationsweg der inversen Laplacetransformation in der komplexen  $\omega$ -Ebene. Der Weg verläuft parallel zur reellen  $\omega$ -Achse oberhalb aller Singularitäten (Punkte) der Laplacetransformierten.

Sie hängt vom Anfangswert  $h(0)$  der Funktion ab. Mit einem Anfangswert  $f_1(t = 0) = g$  erhält man für  $\hat{f}_1$  und  $\hat{\Phi}_1$  das Gleichungssystem

$$\hat{f}_1 = \frac{-\frac{q}{m} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \hat{\Phi}_1 + ig}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad -k^2 \hat{\Phi}_1 = -4\pi q \int d^3 v \hat{f}_1.$$

Eliminiert man  $\hat{f}_1$  aus diesen Gleichungen, so folgt für  $\hat{\Phi}_1$  der Ausdruck

$$\hat{\Phi}_1 = i \frac{S(\omega, \mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})} \quad (4.24)$$

mit

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi q}{k^2} \int d^3 v \frac{g}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}},$$

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi q^2}{mk^2} \int_L d^3 v \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}.$$

Hierbei ist  $S(\omega, \mathbf{k})$  eine Quelle der Potentialstörung, deren Form vom Anfangswert abhängt und  $D(\omega, \mathbf{k})$  ist die gesuchte Dispersionsfunktion. Die Integrationskontour  $L$  wird nach Landau so gewählt, daß die Polstelle im Nenner in der unteren Halbebene umgangen wird. Diese Vorschrift ergibt sich hier aus der Forderung, daß im Definitionsgebiet der Laplace-Transformierten,  $\Im(\omega) > s$ , keine Singularität von  $D(\omega, \mathbf{k})$  liegen darf.

Die Rücktransformation der Laplacetransformierten  $\hat{\Phi}_1$  kann mit Hilfe des Residuensatzes durchgeführt werden. Dazu wird der Integrationsweg, wie in Abb. 4.2

gezeigt, in der unteren Halbebene geschlossen. Der Integrand besitzt an den Nullstellen der Dispersionsfunktion Singularitäten. Wir nehmen an, daß alle Nullstellen  $\omega_j$  von  $D(\omega, \mathbf{k})$  einfach sind und innerhalb des Integrationsweges liegen. Außerdem sei  $S(\omega, \mathbf{k})$  regulär. Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi} \hat{\Phi}_1 e^{-i\omega t} = -2\pi i \sum_j \frac{i}{2\pi} \frac{S(\omega_j, \mathbf{k})(\omega - \omega_j)}{D(\omega_j, \mathbf{k})} e^{-i\omega_j t}. \quad (4.25)$$

Die Teilstücke des Integrationsweges parallel zur imaginären Achse bei den reellen

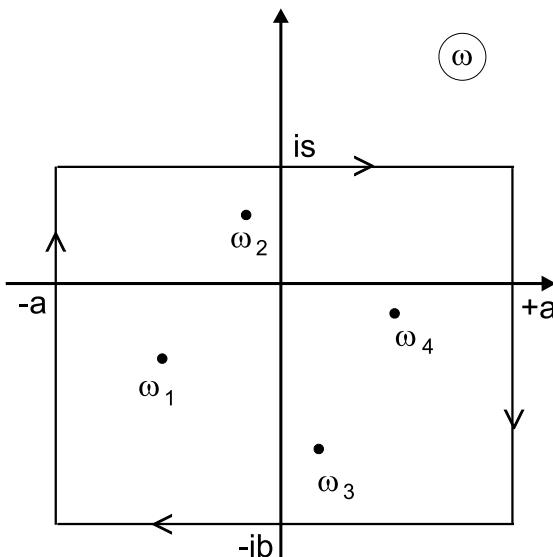


Abbildung 4.2: Ergänzung des Integrationsweges der inversen Laplace-Transformation zu einem geschlossenen Weg in der komplexen  $\omega$ -Ebene. Die Polstellen im Innern des Gebietes werden im mathematisch negativen Sinn umlaufen. Ihre Residuen bestimmen den Wert des Umlaufintegrals nach dem Residuensatz.

Frequenzen  $\pm a$  liefern für  $a \rightarrow \infty$  nur unendlich schnell oszillierende Beiträge. Das Teilstück, das in der unteren Halbebene parallel zur reellen Achse verläuft ist wegen  $\Im(\omega) < 0$  für  $bt \rightarrow \infty$  exponentiell klein. Vernachlässigt man diese Beiträge, so ergibt sich die Lösung,

$$\Phi_1 \sim \sum_j A_j e^{-i\omega_j t}, \quad A_j = \frac{S(\omega_j, \mathbf{k})(\omega - \omega_j)}{D(\omega_j, \mathbf{k})} \quad (4.26)$$

Die Nullstellen der Dispersionsfunktion bestimmen demnach die charakteristischen Frequenzen der Potentialstörung. Im allgemeinen sind diese Frequenzen komplex. Ist  $\Im(\omega_j(\mathbf{k})) \leq 0$  für alle Moden  $j$  und alle Wellenvektoren  $\mathbf{k}$ , so ist das Gleichgewicht gegenüber kleinen Störungen stabil. Gibt es dagegen ein  $\omega_j(\mathbf{k})$  mit einem positiven Imaginärteil,  $\Im(\omega_j(\mathbf{k})) > 0$ , so wächst diese Mode exponentiell an und das Gleichgewicht ist instabil.

### 4.2.2 Plamaschwingungen im kalten Plasma

Ein Plasma mit vernachlässigbarer Temperatur wird als kaltes Plasma bezeichnet. Im Grenzfall verschwindender Temperatur kann eine Maxwellsche Gleichgewichtsverteilung durch eine Deltafunktion

$$f_0 = n_0 \delta(\mathbf{v}), \quad (4.27)$$

ersetzt werden. Die zugehörige Dispersionsfunktion erhält man aus (4.24) und (4.27) mit Hilfe einer partiellen Integration,

$$\begin{aligned} D(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_L d^3v f_0 \mathbf{k} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \left( \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \right) \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi q^2 n_0}{m}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Frequenz  $\omega_p$  wird als Plasmafrequenz bezeichnet. Die Dispersionsfunktion besitzt einfache Nullstellen bei  $\omega = +\omega_p$  und  $\omega = -\omega_p$ . Diese sind reell und unabhängig von  $\mathbf{k}$ . Kleine Störungen schwingen daher ungedämpft mit der Plasmafrequenz ohne sich räumlich auszubreiten. Sie werden als Plamaschwingungen bezeichnet.

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem. Nimmt man an, daß die Elektronen zu Beginn um eine kleine Auslenkung  $\xi_0 \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\xi}_0 \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  verschoben werden, so ändert sich die Teilchenzahl in einem beliebigen Phasenraumvolumen  $\Delta\Gamma$  aufgrund der Teilchenverschiebung durch die Oberfläche,

$$\Delta N = - \int_{\partial\Delta\Gamma} d\mathbf{S} \cdot (\xi_0, \dot{\xi}_0) f_0 = - \int_{\Delta\Gamma} d^3x d^3v \left[ \partial_{\mathbf{x}} \cdot (\xi_0 f_0) + \partial_{\mathbf{v}} \cdot (\dot{\xi}_0 f_0) \right]. \quad (4.29)$$

Da  $\Delta\Gamma$  beliebig ist, entspricht dies einer Anfangsstörung der Verteilungsfunktion

$$f_1(t=0) = g = -i\mathbf{k} \cdot \xi_0 f_0 - \dot{\xi}_0 \cdot \partial_{\mathbf{v}} f_0. \quad (4.30)$$

Für die Funktion  $S(\omega, \mathbf{k})$  erhält man entsprechend aus (4.24) und (4.30),

$$\begin{aligned} S(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{4\pi q}{k^2} \left( \frac{-i\mathbf{k} \cdot \xi_0}{\omega} + \int d^3v f_0 \dot{\xi}_0 \cdot \partial_{\mathbf{v}} \left[ \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \right] \right) \\ &= \mathbf{C} \cdot \left( \frac{\xi_0}{\omega} + \frac{i\dot{\xi}_0}{\omega^2} \right), \quad \mathbf{C} = \frac{4\pi q}{k^2} (-i\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Der Integrand der inversen Laplace-Transformation,

$$\frac{S}{D} = \mathbf{C} \cdot \left( \frac{\omega \xi_0 + i\dot{\xi}_0}{(\omega - \omega_p)(\omega + \omega_p)} \right), \quad (4.32)$$

besitzt einfache Polstellen bei  $\omega = \omega_p$  und  $\omega = -\omega_p$ . Die Potentialstörung (4.26) besitzt daher die Form,

$$\Phi_1 = \frac{4\pi q}{k^2} (-i\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) \quad (4.33)$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t) &= \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_0 + \frac{i}{2\omega_p} \dot{\boldsymbol{\xi}}_0 \right) e^{-i\omega_p t} + \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_0 - \frac{i}{2\omega_p} \dot{\boldsymbol{\xi}}_0 \right) e^{+i\omega_p t} \\ &= \boldsymbol{\xi}_0 \cos(\omega_p t) + \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Funktion  $\boldsymbol{\xi}(t)$  stellt eine zeitabhängige Verschiebung der Elektronen dar. Sie ist die Lösung einer harmonischen Schwingungsgleichung mit der Frequenz  $\omega_p$  zu den Anfangswerten  $\boldsymbol{\xi}_0$  und  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_0$ .

Eine anschauliche Herleitung der Schwingungsgleichung, die auch für nichtlineare Schwingungen gültig ist, erhält man im Rahmen eines einfachen Flüssigkeitsmodells. Im Gleichgewicht sei das Plasma neutral und die Elektronen seien homogen verteilt mit einer Dichte  $n_0$ . Die Bewegung der Elektronendichte kann makroskopisch durch eine Abbildung

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t) \quad (4.35)$$

beschrieben werden, die jedem Punkt  $\mathbf{a}$  des ungestörten Gleichgewichtszustandes einen verschobenen Ort  $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$  zur Zeit  $t$  zuordnet. Die Verschiebung  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t)$  genügt dabei der Bewegungsgleichung der Teilchen des Flüssigkeitselementes,

$$m \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}, t)}{\partial t^2} = q \mathbf{E}(\mathbf{a}, t) \quad (4.36)$$

wobei  $\mathbf{E}(\mathbf{a}, t)$  das elektrische Feld am Ort des Flüssigkeitselementes zur Zeit  $t$  bezeichnet.

Bei einer Verschiebung  $\xi(a, t)$  der Elektronen in  $x$ -Richtung werden die Elektronen einer Schicht der Dicke  $da$  auf eine Schicht der Dicke

$$dx = \frac{\partial x(a, t)}{\partial a} da = \left( 1 + \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} \right) da \quad (4.37)$$

abgebildet (Abb.4.3). Dabei ändert sich die Dichte am Ort  $x$  gemäß,

$$n(x, t) dx = n_0 da . \quad (4.38)$$

Von der verschobenen Elektronendichte wird ein elektrostatisches Feld erzeugt, das eine rücktreibende Kraft auf die Elektronen ausübt. Aus der Poisson-Gleichung folgt mit (4.35) und (4.38),

$$\begin{aligned} dE &= 4\pi q [n(x, t) - n_0] dx \\ &= 4\pi q (n_0 da - n_0 dx) \\ &= -4\pi q n_0 d\xi(a, t). \end{aligned} \quad (4.39)$$

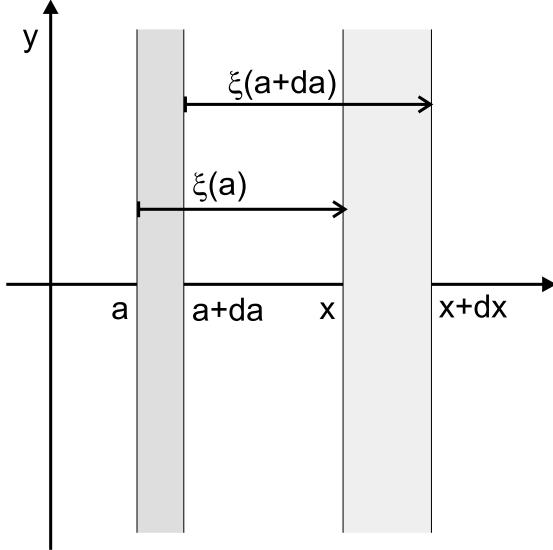


Abbildung 4.3: Verschiebung  $\xi(a)$  einer Schicht der Dicke  $da$ .

Mit der Anfangsbedingung  $E = 0$  für  $\xi = 0$  erhält man für das elektrostatische Feld  $E(a, t)$  am Ort des Volumenelementes  $a$ ,

$$E(a, t) = -4\pi q n_0 \xi(a, t). \quad (4.40)$$

Die Bewegungsgleichung (4.36) besitzt daher die Form einer Schwingungsgleichung,

$$\partial_t^2 \xi(a, t) + \omega_p^2 \xi(a, t) = 0 \quad (4.41)$$

mit der Plasmafrequenz  $\omega_p$ , deren allgemeine Lösung in (4.34) angegeben wurde.

Zur Bestimmung der Teilchendichte und des elektrischen Feldes am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  muß die Umkehrfunktion  $a = a(x, t)$  der Gleichung  $x = x(a, t)$  bestimmt werden. Damit erhält man die Lösungen,

$$\begin{aligned} n(x, t) &= n(a, t) \Big|_{a=a(x, t)}, & n(a, t) &= \frac{n_0}{\frac{\partial x(a, t)}{\partial a}} = \frac{n_0}{1 + \frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a}} \\ E(x, t) &= E(a, t) \Big|_{a=a(x, t)}, & E(a, t) &= -4\pi q n_0 \xi(a, t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Das Modell eines kalten Plasmas ist nur anwendbar solange  $dx/da > 0$  gilt. Unter dieser Voraussetzung kann man in der Umgebung eines Punktes  $x_0 = x_0(a_0)$  eine eindeutige Umkehrfunktion angeben,

$$a - a_0 = \frac{da}{dx} (x - x_0). \quad (4.43)$$

Bei großen Amplituden kann der Fall eintreten, daß zwei benachbarte Punkte  $a$  und  $a + da$  an denselben Ort  $x$  verschoben werden, so daß die Dicke  $dx$  der verschobenen

Schicht verschwindet. Gleichzeitig werden die Dichte  $n_0(da/dx)$  und die Ableitung  $dE/dx = (dE/da)(da/dx)$  des elektrischen Feldes unendlich groß. Man sagt, daß die Welle bricht. Aus (4.37) folgt für das Wellenbrechen das Kriterium,

$$\frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} = -1 . \quad (4.44)$$

Als Beispiel wählen wir die Anfangsbedingungen  $\xi_0(a) = A \cos(ka)$  und  $\dot{\xi}_0(a) = 0$ . Für die entsprechende Lösung der Schwingungsgleichung gilt

$$\frac{\partial \xi(a, t)}{\partial a} = -kA \sin(ka) \cos(\omega_p t) . \quad (4.45)$$

Diese Welle bricht daher für Amplituden  $A \geq 1/k$ .

### 4.2.3 Plasmawellen im thermischen Plasma

Wir untersuchen nun die Dispersionsrelation von Plasmawellen in einem thermischen Plasma mit einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung. Dabei treten zwei neue Effekte in Erscheinung: Die räumliche Ausbreitung der Störungen mit der thermischen Geschwindigkeit und eine nach Landau benannte Dämpfung der Welle durch Teilchen, die sich mit der Phasengeschwindigkeit der Welle mitbewegen.

Sei  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  eine komplexe Nullstelle der komplexwertigen Dispersionsfunktion  $D(\omega, \mathbf{k}) = D_r(\omega, \mathbf{k}) + iD_i(\omega, \mathbf{k})$ . Für schwach gedämpfte Schwingungen sind die Imaginärteile  $\omega_i$  und  $D_i(\omega, \mathbf{k})$  klein. Entwickelt man die Dispersionsfunktion um die reellen Werte bis zur linearen Ordnung, so folgt

$$D(\omega, \mathbf{k}) \approx D(\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial D(\omega_r)}{\partial \omega_r} \approx D_r(\omega_r) + i \left[ D_i(\omega_r) + \omega_i \frac{\partial D_r(\omega_r)}{\partial \omega_r} \right] = 0 . \quad (4.46)$$

Aus dem Real- und dem Imaginärteil dieser Gleichung erhält man als Bestimmungsgleichungen für  $\omega_r$  und  $\omega_i$ ,

$$D_r(\omega_r) = 0, \quad \omega_i = -\frac{D_i(\omega_r)}{\partial_\omega D_r(\omega_r)} . \quad (4.47)$$

Für schwache Dämpfung genügt es daher die Dispersionsfunktion für reelle Frequenzen auszuwerten.

In der Dispersionsfunktion aus (4.24) kann die Verteilungsfunktion  $f_0$  über die beiden Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Wellenvektor integriert werden. Die Verteilungsfunktion der verbleibenden Geschwindigkeitskomponente  $u$  parallel zu  $\mathbf{k}$  sei  $n_0 F(u)$ . Damit gilt,

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_L du \frac{\partial_u F}{(\omega/k) - u} . \quad (4.48)$$

Die Polstelle bei  $u = \omega/k$  wird in der unteren Halbebene umgangen. Hierfür gilt die Beziehung

$$\int dx \frac{f(x)}{x - i0} = \int_C dx \frac{f(x)}{x} + i\pi f(0) \quad (4.49)$$

wobei  $f(x)$  eine beliebige Funktion darstellt und  $C$  den Cauchy-Hauptwert des Integrals bezeichnet. Damit erhält man

$$D_r(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_C du \frac{\partial_u F}{(\omega/k) - u}, \quad (4.50)$$

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\pi\omega_p^2}{k^2} \partial_u F \Big|_{u=\omega/k}. \quad (4.51)$$

Im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur  $T$  besitzt  $F(u)$  die Form einer Maxwellverteilung

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{u^2}{2v_{th}^2}}, \quad (4.52)$$

mit der thermischen Geschwindigkeit  $v_{th} = \sqrt{T/m}$ . Wir betrachten den Grenzfall kleiner thermischer Geschwindigkeiten,  $v_{th} \ll \omega/k$ , und definieren hierfür die dimensionslosen Variablen

$$\epsilon = \frac{ku}{\omega}, \quad \epsilon_{th} = \frac{kv_{th}}{\omega}, \quad F(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon_{th}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\epsilon_{th}^2}}. \quad (4.53)$$

Für  $\epsilon_{th} \ll 1$  kann der Realteil der Dispersionsfunktion nach den Momenten der Verteilungsfunktion

$$\langle \epsilon^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \epsilon^n F(\epsilon)$$

in der folgenden Form entwickelt werden,

$$\begin{aligned} D_r(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_C d\epsilon \frac{\partial_\epsilon F(\epsilon)}{1 - \epsilon} \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \epsilon^n \partial_\epsilon F(\epsilon) \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \langle \epsilon^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Durch die Entwicklung des Nenners entstehen gewöhnliche konvergente Integrale, die wie angegeben partiell integriert werden können. Berücksichtigt man die Momente bis zur zweiten Ordnung,

$$\langle \epsilon^0 \rangle = 1, \quad \langle \epsilon^1 \rangle = 0, \quad \langle \epsilon^2 \rangle = \epsilon_{th}^2,$$

so folgt,

$$D_r(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (1 + 3\epsilon_{th}^2) . \quad (4.55)$$

Die reellen Nullstellen dieses Ausdruckes ergeben nach (4.47) die möglichen Schwingungsfrequenzen. Durch Iteration findet man

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3v_{th}^2 k^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 \lambda_D^2) , \quad (4.56)$$

wobei  $\lambda_D = v_{th}/\omega_p$  als Debye-Länge bezeichnet wird. Die aus dieser Gleichung sich ergebende Beziehung

$$\omega = \omega(k) = \omega_p \sqrt{1 + 3k^2 \lambda_D^2} \quad (4.57)$$

wird als die Bohm-Gross Dispersionsrelation für Plasmawellen bezeichnet. Sie wurde 1949 von D. Bohm und E.P. Gross hergeleitet. Für große Wellenlängen mit  $k\lambda_D \ll 1$  erhält man Schwingungen bei der Plasmafrequenz  $\omega_p$ . Dies entspricht der Näherung des kalten Plasmas. Für kleine Wellenlängen mit  $k\lambda_D \gg 1$  erhält man formal die Dispersionsrelation einer Elektronenschallwelle,  $\omega = sk$ , mit der Schallgeschwindigkeit  $s = \sqrt{3}v_{th}$ . Man muß jedoch beachten, daß die Herleitung für diesen Grenzfall streng genommen ihre Gültigkeit verliert. Die Schallgeschwindigkeit  $s$  entspricht der adiabatischen Schallgeschwindigkeit

$$s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}}, \quad \gamma = \frac{f+2}{f} \quad (4.58)$$

eines idealen Gases ( $p/\varrho = T/m$ ) mit einem Freiheitsgrad ( $f = 1$ ). Aufgrund des Elektronendruckes breitet sich eine lokalisierte Anfangsstörung mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = s \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} \quad (4.59)$$

aus.

Mit

$$\partial_\omega D_r = 2 \frac{\omega_p^2}{\omega^3}, \quad D_i = \frac{\pi \omega_p^2}{k^2} \frac{\omega}{kv_{th}^2} F(\omega/k) \quad (4.60)$$

erhält man aus (4.47) den Imaginärteil

$$\begin{aligned} \frac{\omega_i}{\omega_p} &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega}{\omega_p} \left( \frac{\omega}{kv_{th}} \right)^3 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{kv_{th}} \right)^2} \\ &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{k^3 \lambda_D^3} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} + 3 \right)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Wegen  $\omega_i < 0$  sind die Plasmawellen im thermischen Gleichgewicht immer gedämpft. Für große Wellenlängen ist die Dämpfung exponentiell klein. Für Wellenlängen von der Größenordnung der Debye-Länge tritt jedoch eine starke Dämpfung auf.

Diese Art der Dämpfung wird als Landau-Dämpfung bezeichnet. Im Rahmen der Vlasov-Theorie ist die Entropie eine exakte Erhaltungsgröße, da Stoßprozesse völlig vernachlässigt wurden. Demnach kann die Dämpfung der Wellen nicht mit einer Energiedissipation durch Stöße verbunden sein. Eine physikalische Erklärung der Landau-Dämpfung kann mit Hilfe der allgemeinen Gleichung (4.50) für den Imaginärteil der Dielektrizitätsfunktion gegeben werden. Dieser Ausdruck hängt von der Steigung der Verteilungsfunktion im Punkt  $u = \omega/k$  ab. Teilchen, die sich mit Geschwindigkeiten in der Nähe der Phasengeschwindigkeit der Welle bewegen, sehen ein quasistatisches elektrisches Feld, in dem sie besonders effektiv beschleunigt oder abgebremst werden können. Für  $\partial_u F(\omega/k) < 0$  tritt eine Dämpfung auf. In diesem Fall sind mehr Teilchen mit  $u < \omega/k$  vorhanden als Teilchen mit  $u > \omega/k$ . Daher nehmen die Teilchen im Mittel Energie auf und die Welle wird gedämpft. Ist dagegen  $\partial_u F(\omega/k) > 0$  so geben die Teilchen im Mittel Energie ab und die Welle wächst an. Das Gleichgewicht ist dann instabil. Da es sich bei der Landau-Dämpfung nicht um einen irreversiblen Vorgang handelt, ist es möglich, die gedämpfte Welle wieder aus der Verteilungsfunktion zu rekonstruieren. Dies wurde durch Experimente mit "Plasmaechos" bestätigt.

#### 4.2.4 Zweistrominstabilität

Besitzt die Geschwindigkeitsverteilung  $f_0$  im Bereich der Phasengeschwindigkeit einer Plasmawelle eine positive Steigung, so kann eine Instabilität auftreten. Ein Beispiel dieser Art ist die Zweistrominstabilität, die auftritt, wenn sich ein Elektronenstrahl in einem Hintergrundplasma ausbreitet. Die Strahlelektronen bilden ein zweites Maximum der Verteilungsfunktion, so daß diese nicht mehr monoton abnehmend ist.

Ein einfaches Modell der Zweistrominstabilität erhält man mit der Verteilung

$$F(u) = \frac{n_1}{n_0} \delta(u) + \frac{n_2}{n_0} \delta(u - U), \quad n_0 = n_1 + n_2. \quad (4.62)$$

Hierbei bezeichnet  $n_1$  die Elektronendichte des Hintergrundplasmas,  $n_2$  die Dichte der Strahlelektronen und  $U$  die Strahlgeschwindigkeit. Die thermische Verbreiterung der Geschwindigkeitsverteilungen beider Elektronengruppen wird hierbei vernachlässigt.

Die Dispersionsfunktion dieser Verteilung kann wie in Abschnitt (4.2.2) ausgewertet werden. Dies ergibt,

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - kU)^2}, \quad \omega_{p1,2}^2 = \frac{4\pi q^2 n_{1,2}}{m}. \quad (4.63)$$

Definiert man die dimensionslosen Parameter

$$R = \omega_{p2}^2 / \omega_{p1}^2, \quad K = kU / \omega_{p1}, \quad W = \omega / \omega_{p1},$$

so erhält man die Dispersionsrelation,

$$D(W, K) = 1 - \frac{1}{W^2} - \frac{R}{(W - K)^2} = 0. \quad (4.64)$$

Ein Kriterium für das Auftreten komplexer Nullstellen kann aus Abb.?? abgelesen werden. Die Dispersionsfunktion besitzt im Intervall  $0 < W < K$  ein Maximum. Falls dieses Maximum positiv ist, gibt es vier reelle Nullstellen. Ist das Maximum dagegen negativ, so treten zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen auf, die jeweils einer gedämpften und einer instabilen Mode entsprechen. Aus der Bedingung für ein Extremum

$$\frac{\partial D(W, K)}{\partial W} = \frac{2}{W^3} + \frac{2R}{(W - K)^3} = 0 \quad (4.65)$$

folgt für das Maximum

$$W_{max} = \frac{K}{1 + R^{1/3}}, \quad D_{max} = 1 - \frac{(1 + R^{1/3})^3}{K^2} \quad (4.66)$$

Aus der Bedingung  $D_{max} \geq 0$  folgt das Stabilitätskriterium

$$K \geq (1 + R^{1/3})^{3/2} \quad \text{oder} \quad (kU)^{2/3} \geq \omega_{p1}^{2/3} + \omega_{p2}^{2/3}. \quad (4.67)$$

Die Nullstellen der Dispersionsfunktion lassen sich nur näherungsweise angeben, wobei im folgenden vorausgesetzt wird, daß die Dichte der Strahlelektronen sehr viel kleiner sei als die Dichte der Hintergrundelektronen, d.h.  $R \ll 1$ . Für  $W = O(1)$ ,  $(W - K)^2 \gg R$  gibt es zwei reelle Näherungslösungen,

$$1 - \frac{1}{W^2} = 0 \quad \text{oder} \quad W = \pm 1. \quad (4.68)$$

Für  $|W| \ll 1$ ,  $|W - K|^2 \ll R$  gibt es zwei konjugiert komplexe Näherungslösungen,

$$0 = \frac{1}{W^2} + \frac{R}{(W - K)^2} \quad \text{oder} \quad W = K(1 \pm i\sqrt{R}). \quad (4.69)$$

Diese Asymptoten schneiden sich bei  $K = 1$ . Zur Abschätzung der maximalen Anwachsrate setzen wir  $K = 1$  und  $W = 1 + \delta$ , wobei  $\delta \ll 1$  angenommen wird. Mit diesem Ansatz erhält man aus der Dispersionsrelation drei Lösungen

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left(\frac{R}{2}\right)^{1/3} \\ \delta_{2,3} &= \left(\frac{R}{2}\right)^{1/3} e^{\pm 2\pi i/3} = \left(\frac{R}{2}\right)^{1/3} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

Für die Anwachsrate der instabilen Mode gilt

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{R}{2}\right)^{1/3} \omega_{p1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{R}{2}\right)^{1/3} kU. \quad (4.70)$$



# Kapitel 5

## Wellenausbreitung im Plasma

### 5.1 Wellenausbreitung im homogenen Medium

Zunächst sollen einige allgemeine Eigenschaften von Wellen in einem homogenen Medium betrachtet werden. Die Welle wird durch eine Frequenz  $\omega$  und einen Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , das Medium durch einen Dielektrizitätstensor  $\boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})$  beschrieben.

#### 5.1.1 Wellengleichung

*Wellenansatz:*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t), \quad \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (5.1)$$

*Dielektrizitätstensor:*

$$\boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{I} + \frac{4\pi i}{\omega} \boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}. \quad (5.2)$$

*Wellengleichung:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{j} - \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{-i}{4\pi} \left[ \omega \mathbf{E} + 4\pi i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} + \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \right] &= 0, \\ \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c^2}{\omega} (\mathbf{k} \mathbf{k} - k^2 \mathbf{I}) + \omega \boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) = \omega (\mathbf{n} \mathbf{n} - n^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}).$$

*Dispersionsrelation:*

Die Wellengleichung (5.3) ist ein algebraisches Gleichungssystem für den Vektor  $\mathbf{E}$ . Es gibt nur dann nichtverschwindende Lösungen, falls

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = \det |D_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})| = 0. \quad (5.4)$$

Zu einem gegebenen Wellenvektor  $\mathbf{k}$  können sich demnach nur Wellen mit bestimmten Frequenzen  $\omega = \omega_j(\mathbf{k})$  im Medium ausbreiten. Die verschiedenen Lösungszweige werden hier durch den Index  $j$  gekennzeichnet. Ist die Lösbarkeitsbedingung (5.4) z.B. ein Polynom  $n$ -ter Ordnung in  $\omega$ , so gibt es zu jedem  $\mathbf{k}$  genau  $n$  komplexe Lösungen für  $\omega$ .

### Ausbreitung, Dämpfung und Verstärkung von Wellen:

$$\begin{aligned} \Im(\omega) &= 0 & \rightarrow & \text{ungedämpfte Welle} \\ \Im(\omega) &< 0 & \rightarrow & \text{gedämpfte Welle} \\ \Im(\omega) &> 0 & \rightarrow & \text{anwachsende Welle} \end{aligned} \quad (5.5)$$

### Schwache Dämpfung, kleine Anwachsraten:

In manchen Fällen kann es physikalisch sinnvoll sein auch komplexe Wellenvektoren zu betrachten. Sei  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i$ ,  $\Lambda = \Lambda_r + i\Lambda_i$ . Für kleine Imaginärteile lässt sich (5.4) in der folgenden Weise entwickeln,

$$\begin{aligned} \Lambda(\omega, \mathbf{k}) &= \Lambda_r(\omega, \mathbf{k}) + i\Lambda_i(\omega, \mathbf{k}) \\ &= \Lambda_r(\omega_r, \mathbf{k}_r) + i\Lambda_i(\omega_r, \mathbf{k}_r) \\ &\quad + i\omega_i \partial_\omega \Lambda_r(\omega_r, \mathbf{k}_r) + ik_{i\alpha} \partial_{k_\alpha} \Lambda_r(\omega_r, \mathbf{k}_r) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Durch Nullsetzen von Real- und Imaginärteil folgt dann

$$\Lambda_r(\omega_r, \mathbf{k}_r) = 0, \quad \Lambda_i + \omega_i \partial_\omega \Lambda_r + k_{i\alpha} \partial_{k_\alpha} \Lambda_r = 0 \quad (5.7)$$

### Beispiel 5.1 (Zeitlich gedämpfte Welle)

$$\begin{aligned} k_{i\alpha} &= 0, \quad \rightarrow \quad \omega_i = -\frac{\Lambda_i}{\partial_\omega \Lambda_r} \\ |E|^2 &\propto e^{2 \int \omega_i dt} = e^{-2 \int \frac{\Lambda_i}{\partial_\omega \Lambda_r} dt} \end{aligned}$$

### Beispiel 5.2 (Räumlich gedämpfte Welle)

$$\begin{aligned} \omega_i &= 0, \quad k_r = (0, 0, k) \quad \rightarrow \quad k_i = -\frac{\Lambda_i}{\partial_k \Lambda_r} \\ |E|^2 &\propto e^{-2 \int k_i dz} = e^{-2 \int \frac{\Lambda_i}{-\partial_k \Lambda_r} dz} \end{aligned}$$

### 5.1.2 Wellenenergie

Die zeitgemittelte Energiedichte der Welle wird als Wellenenergie bezeichnet. In einem Medium können neben der elektromagnetischen Feldenergie weitere Energieformen auftreten, wie z.B. kinetische Energie oder Kompressionsenergie. Diese Energien können durch die elektrische Feldstärke ausgedrückt werden. Der allgemeine Ausdruck für die Wellenenergie ist dann eine Bilinearform in der elektrischen Feldstärke, die im folgenden hergeleitet wird.

#### *Poynting-Theorem:*

Der Energiesatz des elektromagnetischen Feldes wird durch das Poynting-Theorem beschrieben:

$$\begin{aligned} \partial_t W + \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\mathcal{J} \cdot \mathbf{E} & (5.8) \\ W &= \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}^\epsilon + \mathcal{B}^\epsilon), \quad \mathbf{S} = \frac{\perp}{\Delta\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

$W$  bezeichnet die Energiedichte,  $\mathbf{S}$  die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Der Term  $\mathcal{J} \cdot \mathbf{E}$  beschreibt die vom Medium aufgenommene oder abgegebene Leistungsdichte.

#### *Zeitmittelung über eine Schwingungsperiode:*

Die Zeitmittel bilinearer Ausdrücke können nach den folgenden Regeln durch Produkte von komplexen Amplituden ersetzt werden. Der Imaginärteil der Frequenz wird dabei als klein angenommen.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathcal{B} \rangle &= \langle \frac{\infty}{\epsilon}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) \frac{\infty}{\epsilon}(\mathcal{B} + \mathcal{B}^*) \rangle = \frac{\infty}{\Delta}(\mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{A}^*\mathcal{B}) = \frac{\infty}{\epsilon} \Re\{\mathcal{A}\mathcal{B}^*\} \\ \langle \partial_t \mathcal{A}^\epsilon \rangle &= \langle \epsilon \mathcal{A} \partial_\perp \mathcal{A} \rangle = \frac{\infty}{\epsilon} \Re\{\epsilon \mathcal{A}^* \partial_\perp \mathcal{A}\} = \\ &\quad \frac{1}{2} \Re\{2|\mathcal{A}| \partial_t |\mathcal{A}|\} = \frac{1}{2} \partial_t |\mathcal{A}|^2 = \partial_t \langle \mathcal{A}^\epsilon \rangle \end{aligned}$$

Damit ergibt die Zeitmittelung von (5.8)

$$\partial_t \frac{1}{16\pi} (|E|^2 + |B|^2) + \nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle + \frac{1}{2} \Re\{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*\} = 0 \quad (5.9)$$

#### *Energiesatz für den Wellenoperator $D$ :*

Der zeitgemittelte Energiesatz (5.9) kann mit Hilfe des Wellenoperators (5.3) in der folgenden Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{-i}{4\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right\} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2i} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E}^*) \\ &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \frac{1}{2i} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^+) \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.10)$$

### *Entwicklung für kleine Imaginärteile:*

Für kleine Imaginärteile lässt sich der zeitgemittelte Energiesatz wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^+) &= \mathbf{D}_A + \omega_i \partial_\omega \mathbf{D}_H + k_{i\alpha} \partial_{k_\alpha} \mathbf{D}_H \\ \omega_i \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \partial_\omega \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{E} + k_{i\alpha} \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \partial_{k_\alpha} \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_r + i\omega_i, \quad k = k_r + ik_i, \\ \mathbf{D}_A &= \frac{1}{2i} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^+) \Big|_{\omega=\omega_r, k=k_r}, \quad \mathbf{D}_H = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^+) \Big|_{\omega=\omega_r, k=k_r}. \end{aligned}$$

Wegen  $\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \propto \exp(2\omega_i t - 2\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x})$  erhält man damit den Energiesatz

$$\partial_t \langle W \rangle + \nabla \cdot \langle J \rangle = - \langle P \rangle \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \partial_\omega \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{16\pi} \{ |B|^2 + \mathbf{E}^* \cdot \partial_\omega (\omega \epsilon_H) \cdot \mathbf{E} \} \\ \langle J \rangle_\alpha &= -\frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \partial_{k_\alpha} \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{E} = \langle S \rangle_\alpha - \frac{\omega}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \partial_{k_\alpha} \epsilon_H \cdot \mathbf{E} \\ \langle P \rangle &= \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}_A \cdot \mathbf{E} = \frac{\omega}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \epsilon_A \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke bestimmen die Wellenenergie  $\langle W \rangle$ , die Wellenenergiestromdichte  $\langle \mathbf{J} \rangle$  und die dissipierte Leistung  $\langle P \rangle$ .

### *Energietransportgeschwindigkeit:*

In einem dissipationsfreien Medium ( $\mathbf{D} = \mathbf{D}_H$ ) gilt für die Energiestromdichte der Welle

$$\langle J \rangle_\alpha = v_{gr,\alpha} \langle W \rangle, \quad v_{gr,\alpha} = \frac{d\omega(\mathbf{k})}{dk_\alpha}. \quad (5.13)$$

Die Energie breitet sich also mit der Gruppengeschwindigkeit der Welle aus.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} f(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \frac{df(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})}{dk_\alpha} &= \frac{d\omega(\mathbf{k})}{dk_\alpha} \partial_\omega f(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) + \partial_{k_\alpha} f(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = 0, \\ v_{gr,\alpha} &= \frac{-\partial_{k_\alpha} f}{\partial_\omega f} = \frac{\langle J \rangle_\alpha}{\langle W \rangle}. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.3 (Elektromagnetische Welle)**

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{c^2}{\omega} (\mathbf{kk} - k^2 \mathbf{I}) + \omega \epsilon \mathbf{I}, \quad \epsilon = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \\ k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0. \\ \langle W \rangle &= \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \left\{ -\frac{c^2}{\omega^2} (\mathbf{kk} - k^2 \mathbf{I}) + \partial_\omega (\omega \epsilon) \mathbf{I} \right\} \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \{ \epsilon + \partial_\omega (\omega \epsilon) \mathbf{I} \} \\ &= \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \left\{ 2\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + 2\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right\} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \\ \langle J \rangle &= -\frac{1}{16\pi} \frac{c^2}{\omega} (-k) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = cn \langle W \rangle = v_{gr} \langle W \rangle \end{aligned}$$

## 5.2 Wellen im kalten stoßfreien Plasma

*Näherung:*

- Kaltes Plasma:  $v_{th} \ll \omega/k$
- Stoßfreies Plasma:  $\nu \ll \omega$

### 5.2.1 Dielektrizitätstensor

*Bewegungsgleichung:*

Für ein kaltes stoßfreies Plasma können in der Momentengleichung (3.95) der Drucktensor und die Reibungskraft vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung für die Teilchensorte  $j$  ist damit

$$m_j (\partial_t + \mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j = q_j (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}). \quad (5.14)$$

**Linearisierung:**

Die Welle kann als kleine Störung (1) eines Plasmagleichgewichtes (0) betrachtet werden. Nimmt man an, daß das Plasma im Gleichgewicht ruht und frei von elektrischen Feldern ist, so folgt der Ansatz

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j,1} , \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad (5.15)$$

wobei die Störungen durch ebene Wellen beschrieben werden und  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$  ein statisches homogenes äußeres Magnetfeld in z-Richtung bezeichnet. In linearer Ordnung in den Störungen lautet die Bewegungsgleichung (5.14)

$$-i\omega m_j \mathbf{v}_{j,1} - \frac{q_j}{c} \mathbf{v}_{j,1} \times \mathbf{B}_0 = q_j \mathbf{E}_1 . \quad (5.16)$$

**Stromdichte:**

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{j,1}$  kann man durch eine einfache Matrixinversion erreichen:

$$\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{v}_{j,1} = \frac{q_j}{-i\omega m_j} \mathbf{E}_1 , \quad \mathbf{v}_{j,1} = \frac{q_j}{-i\omega m_j} \mathbf{A}_j^{-1} \cdot \mathbf{E}_1 , \quad (5.17)$$

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i\sigma_j \omega_{gj}}{\omega} & 0 \\ \frac{i\sigma_j \omega_{gj}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{A}_j^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_j} & \frac{i\sigma_j \omega_{gj}}{a_j \omega} & 0 \\ \frac{-i\sigma_j \omega_{gj}}{a_j \omega} & \frac{1}{a_j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hierbei bezeichnet  $\omega_{gj} = |q_j|B_0/(m_j c)$  die Gyrationsfrequenz,  $\sigma_j = \text{sgn}(q_j)$  das Vorzeichen der Ladung, und  $a_j = 1 - \omega_{gj}^2/\omega^2$  die Determinante von  $\mathbf{A}_j$ .

Mit der Geschwindigkeit (5.17) ergibt sich die Stromdichte

$$\mathbf{j}_1 = \sum_j q_j n_j \mathbf{v}_{j,1} = \sum_j \frac{q_j^2 n_j}{-i\omega m_j} \mathbf{A}_j^{-1} \cdot \mathbf{E}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (5.18)$$

**Leitfähigkeitstensor:**

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_j \frac{q_j^2 n_j}{-i\omega m_j} \mathbf{A}_j^{-1} = -\frac{\omega}{4\pi i} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \mathbf{A}_j^{-1} \quad (5.19)$$

**Dielektrizitätstensor:** Mit (5.2) und (5.19) ergibt sich der Dielektrizitätstensor

für das kalte stoßfreie Plasma zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{I} + \frac{4\pi i}{\omega} \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (5.20) \\ \epsilon_{\perp} &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_{gj}^2}, \\ \epsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\sum_j \omega_{pj}^2}{\omega^2}, \\ g &= -\sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \sigma_j \omega_{gj}}{\omega(\omega^2 - \omega_{gj}^2)}.\end{aligned}$$

**Wellengleichung:** Mit (5.20) und (5.3) ergibt sich für das elektrische Feld das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} - n^2 + n_x n_x & ig + n_x n_y & n_x n_z \\ -ig + n_y n_x & \epsilon_{\perp} - n^2 + n_y n_y & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & \epsilon_{\parallel} - n^2 + n_z n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.21)$$

## 5.2.2 Magnetfeldfreies Plasma

Ein einfacher Spezialfall liegt vor, wenn kein statisches Magnetfeld vorhanden ist ( $B_0 = 0$ ), bzw. die Gyrationsfrequenzen hinreichend klein sind ( $\omega_{gj} \ll \omega$ ). Dann gilt

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} = \epsilon = 1 - \frac{\sum_j \omega_{pj}^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad g = 0. \quad (5.22)$$

Wählt man den Ausbreitungsvektor in x-Richtung,  $\mathbf{k} = (k_0 n, 0, 0)$ , so folgt aus der allgemeinen Wellengleichung (5.21)

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.23)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die folgenden Lösungen:

**Longitudinale elektrostatische Wellen:**  $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= (E_{1x}, 0, 0), \quad \mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0 \\ \omega &= \omega_p, \quad v_{ph} = \omega_p/k, \quad v_{gr} = 0.\end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Schwingungsfrequenz der elektrostatischen Wellen ist gleich der Plasmafrequenz. Da die Frequenz unabhängig von der Wellenzahl ist, breiten sich Wellenpakete nicht

aus ( $v_{gr} = 0$ ). Die elektrostatischen Wellen beschreiben somit einfache Raumladungsschwingungen der Elektronen gegenüber dem festen Ionenhintergrund. Dies ist allerdings nur für langwellige Störungen richtig. Für  $k > \approx \omega_p/v_{th}$  führen thermische Effekte zur räumlichen Ausbreitung von Plasmawellen und zu deren Dämpfung.

**Transversale elektromagnetische Wellen:**  $\epsilon = n^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0, E_{1y}, E_{1z}), \quad \mathbf{E}_1 \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1, \\ \omega^2 &= \omega_{pe}^2 + c^2 k^2, \quad 2\omega d\omega = c^2 2k dk \\ v_{ph} &= \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} > c, \quad v_{gr} = c^2 \frac{k}{\omega} = cn < c, \quad v_{gr} v_{ph} = c^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Mit wachsender Elektronendichte nimmt  $\epsilon$  ab und wird schließlich negativ. Die Dichte, bei der  $\epsilon$  verschwindet, bezeichnet man als die *kritische Dichte*. An der kritischen Dichte gilt

$$\epsilon = 0, \quad \omega = \omega_{pe}, \quad n_e = n_c = \frac{\omega^2 m_e}{4\pi q_e^2} \quad (5.26)$$

Für einen Nd-Laser mit  $1,06\mu m$  Wellenlänge ist die kritische Dichte z.B.  $10^{21} cm^{-3}$ . Elektromagnetische Wellen können sich im Plasma nur bis zur kritischen Dichte ausbreiten und werden von dort in das Gebiet unterkritischer Dichte zurückreflektiert.

### 5.2.3 Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld

Wählt man den Ausbreitungsvektor parallel zum Magnetfeld,  $\mathbf{k} = (0, 0, k_0 n)$ , so folgt aus der allgemeinen Wellengleichung (5.21)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} - n^2 & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.27)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die im folgenden diskutierten Lösungen.

**Longitudinale Wellen:**  $\epsilon_{\parallel} = 0$

$$\mathbf{E}_1 = (0, 0, E_{1z}), \quad \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = 0, \quad \omega = \omega_p.$$

Die longitudinalen Wellen, die sich parallel zu  $\mathbf{B}_0$  ausbreiten, verhalten sich also genauso wie im magnetfeldfreien Fall. Wie man an der Bewegungsgleichung (5.16) erkennt, übt das Magnetfeld in diesem Fall keinen Einfluß aus.

**Transversale Wellen:**  $\epsilon_{\perp} - n^2 = \pm g$

$$E_{1y} = \pm i E_{1x}, \quad E_{1z} = 0$$

- Rechtszirkular polarisierte Welle

$$\mathbf{E}_R = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)E_0 e^{ik_R z - \omega t} \quad (5.28)$$

- Linkszirkular polarisierte Welle

$$\mathbf{E}_L = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)E_0 e^{ik_L z - \omega t} \quad (5.29)$$

**Auswertung von  $n_{R,L}$ :**

$$\begin{aligned} n_{R,L}^2 &= \epsilon_{\perp} \mp g \\ &= 1 - \sum_j \frac{\omega \omega_{pj}^2 \mp \omega_{pj}^2 \sigma_j \omega_{gj}}{\omega(\omega^2 - \omega_{gj}^2)} \\ &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 (\omega \mp \sigma_j \omega_{gj})}{\omega(\omega - \sigma_j \omega_{gj})(\omega + \sigma_j \omega_{gj})} \\ &= 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega(\omega \pm \sigma_j \omega_{gj})} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Speziell folgt für ein 2-Komponenten-Plasma aus Elektronen und Ionen:

$$\begin{aligned} n_{R,L}^2 &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ge})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{gi})} \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2 (\omega \pm \omega_{gi}) \omega_{pi}^2 (\omega \mp \omega_{ge})}{\omega(\omega \mp \omega_{ge})(\omega \pm \omega_{gi})} \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega \mp \omega_{ge})(\omega \pm \omega_{gi})}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Im letzten Schritt wurde die Beziehung

$$\omega_{pe}^2 \omega_{gi} = \frac{4\pi q_e^2 n_e q_i B_0}{m_e c m_i} = \frac{4\pi q_i |q_e| n_e |q_e| B_0}{m_i c m_e} = \omega_{pi}^2 \omega_{ge} \quad (5.32)$$

für ein quasineutrales Plasma mit  $|q_e|n_e = q_i n_i$  ausgenutzt.

### Resonanzen

Frequenzen bei denen  $k(\omega) \rightarrow \infty$  bezeichnet man als Resonanzen. Resonanzen sind in der Regel mit Absorption verbunden. Im vorliegenden Fall divergiert  $n_R$  bei der Gyrationfrequenz der Elektronen und  $n_L$  bei der Gyrationfrequenz der Ionen. Blickt man in  $(-z)$ -Richtung auf die  $xy$ -Ebene, so dreht sich  $\mathbf{E}_R$  im mathematisch positiven,  $\mathbf{E}_L$  im mathematisch negativen Sinn. Der Drehsinn von  $\mathbf{E}_R$  ( $\mathbf{E}_L$ ) entspricht somit dem Drehsinn der Elektronengyration (Ionengyration). Die Resonanzen bei  $\omega_{ge,gi}$  werden auch als *Zyklotronresonanzen* bezeichnet.

### Cutoffs

Frequenzen bei denen  $k(\omega) \rightarrow 0$  werden als Cutoff bezeichnet. Ein Cutoff ist mit Reflexion verbunden, da sich die Welle mit positivem  $k$  an dieser Stelle in eine Welle mit negativem  $k$  umwandeln kann. Setzt man  $n_{R,L}^2 = 0$  so folgt aus (5.31):

$$\begin{aligned}
 (\omega \mp \omega_{ge})(\omega \pm \omega_{gi}) - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) &= 0 \\
 \omega^2 \mp (\omega_{ge} - \omega_{gi})\omega - (\omega_{ge}\omega_{gi} + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) &= 0 \\
 \omega_{1,2} &= \pm \frac{\omega_{ge} - \omega_{gi}}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_{ge} + \omega_{gi})^2}{4} + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \\
 \omega_{1,2} &\approx \pm \frac{\omega_{ge}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{ge}^2}{4} + \omega_{pe}^2}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Die Nullstelle von  $n_R$  liegt oberhalb der Elektronenzyklotronresonanz, die Nullstelle von  $n_L$  oberhalb der Ionenzyklotronresonanz. Zwischen dem Cutoff und der zugehörigen Zyklotronresonanz ist keine Wellenausbreitung möglich.

**Übung 5.1 (Dielektrizitätsfunktionen für  $k \parallel B_0$ )** Skizzieren Sie den Verlauf der Dielektrizitätsfunktion  $n^2(\omega)$  als Funktion der Frequenz  $\omega$  für die einzelnen Wellen.

### Grenzfälle:

- Elektromagnetische Wellen:  $\omega \gg \omega_{ge}$

$$n_{R,L}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 \pm \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) \tag{5.34}$$

Eine linear polarisierte Welle kann als Überlagerung einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle dargestellt werden. Da sich die rechts- und linkszirkular polarisierten Wellen mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten entlang dem Magnetfeld ausbreiten, ergibt sich eine Drehung der Polarisationsebene für die linear polarisierte Welle. Diese wird als *Faraday-Drehung* bezeichnet. Messungen der Faraday-Drehung ermöglichen die Bestimmung von Magnetfeldern in Plasmen.

- Whistler oder Helikonwelle:  $\omega_{gi} \ll \omega \ll \omega_{ge}$

$$n_R^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ge}}, \quad k_R^2 = \frac{\omega}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ge}}, \quad \omega = \omega_{ge} \frac{c^2 k_R^2}{\omega_{pe}^2} \tag{5.35}$$

Diese Wellen breiten sich unterhalb der Elektronenzyklotronresonanz aus. Die Gruppengeschwindigkeit  $d\omega/dk = 2\omega/k_R \propto \sqrt{\omega}$  nimmt mit der Frequenz zu. Whistler können sich entlang dem Erdmagnetfeld ausbreiten und im Frequenzbereich von etwa 10 kHz mit Radioempfängern hörbar gemacht werden. Der Name Whistler bezieht sich auf die charakteristischen Pfeiftöne, die dadurch verursacht werden, daß die hohen Frequenzen vor den niedrigen eintreffen.

- Alvén-Wellen:  $\omega \ll \omega_{gi}$

$$n_R^2 = n_L^2 = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{gi}^2} = 1 + \frac{c^2}{u_A^2}, \quad u_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n_i}}$$

$$\omega^2 = \frac{u_A^2 k^2}{1 + u_A^2/c^2}$$

Dies sind magnetohydrodynamische Wellen, die sich mit der Alvén - Geschwindigkeit  $u_A$  ausbreiten. Ähnlich einer eingespannten Saite können die Magnetfeldlinien durch den magnetischen Zug entlang der Feldlinien zu Schwingungen angeregt werden. Die Alvén - Geschwindigkeit ergibt sich auch aus der Energiebilanz  $\frac{1}{2} m n_i u_A^2 = \frac{B_0^2}{8\pi}$ .

#### 5.2.4 Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld

Wählt man den Ausbreitungsvektor senkrecht zum Magnetfeld,  $\mathbf{k} = (k_0 n, 0, 0)$ , so folgt aus der allgemeinen Wellengleichung (5.21)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die im folgenden diskutierten Lösungen.

**Ordentliche Welle:**

$$n^2 = \epsilon_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_1 = (0, 0, E_{1z}) \quad (5.37)$$

Die ordentliche Welle ist eine linear polarisierte elektromagnetische Welle mit den selben Eigenschaften wie im magnetfeldfreien Fall. Wegen  $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0$  verschwindet die Lorentzkraft in der Bewegungsgleichung.

**Außerordentliche Welle:**

$$\epsilon_{\perp}(\epsilon_{\perp} - n^2) - g^2 = 0,$$

$$n^2 = \frac{\epsilon_{\perp}^2 - g^2}{\epsilon_{\perp}} = \frac{(\epsilon_{\perp} - g)(\epsilon_{\perp} + g)}{\epsilon_{\perp}} = \frac{n_R^2 n_L^2}{\epsilon_{\perp}} \quad (5.38)$$

**Polarisation:** Aus der x-Komponente der Wellengleichung folgt

$$\epsilon_{\perp} E_{1x} + ig E_{1y} = 0, \quad E_{1x} = -i \frac{g}{\epsilon_{\perp}} E_{1y}. \quad (5.39)$$

Bei der außerordentlichen Welle besitzt das elektrische Feld im allgemeinen eine longitudinale und eine transversale Komponente. Für  $\epsilon_{\perp} \rightarrow 0$  tritt eine Resonanz auf und die Welle wird rein longitudinal.

**Resonanzen:**

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ge}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{gi}^2} = 0. \quad (5.40)$$

Für hohe Frequenzen kann man den Ionenanteil in (5.40) vernachlässigen und erhält dann

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ge}^2} = 0, \quad \omega_{OH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ge}^2}. \quad (5.41)$$

Die Resonanzfrequenz  $\omega_{OH}$  wird als *obere Hybridfrequenz* bezeichnet. Sie liegt oberhalb der Plasmafrequenz und der Gyrationfrequenz der Elektronen.

Für niedrige Frequenzen, im Bereich der Ionengyrationfrequenz, spielt der Ionenanteil eine Rolle. Hier ist  $\omega \ll \omega_{ge}$  und man erhält mit dieser Näherung

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ge}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{gi}^2} &= 0, \\ (\omega^2 - \omega_{gi}^2)\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{gi}^2) - \omega_{pi}^2\omega_{ge}^2 &= 0, \\ \omega^2(\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2) &= \omega_{gi}^2\omega_{ge}^2 + \omega_{pi}^2\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2\omega_{gi}^2 \end{aligned}$$

Der letzte Term ist um das Massenverhältnis  $m_e/m_i$  kleiner als der vorletzte Term und kann daher vernachlässigt werden. Unter Verwendung der Beziehung (5.32) ergibt sich dann als Resonanzfrequenz die *untere Hybridfrequenz*

$$\omega_{UH} = \sqrt{\frac{\omega_{gi}^2\omega_{ge}^2 + \omega_{pi}^2\omega_{ge}^2}{\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2}} = \sqrt{\omega_{gi}\omega_{ge}} \sqrt{\frac{\omega_{gi}\omega_{ge} + \omega_{pe}^2}{\omega_{ge}^2 + \omega_{pe}^2}} \quad (5.42)$$

Für Plasmen mit niedriger Dichte,  $\omega_{pe} \ll \omega_{ge}$ , liegt die untere Hybridresonanz nahe bei der Ionenzyklotronresonanz. Für Plasmen mit hoher Dichte,  $\omega_{pe} \gg \omega_{ge}$ , ergibt sich der Grenzwert  $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{gi}\omega_{ge}}$ .

### Cutoffs

Die Cutoffs sind die Nullstellen von  $n_R$  und  $n_L$ . Diese wurden bereits bei der Ausbreitung parallel zum Magnetfeld bestimmt.

**Übung 5.2 (Dielektrizitätsfunktionen für  $k \perp B_0$ )** Skizzieren Sie den Verlauf der Dielektrizitätsfunktionen  $n^2(\omega)$  für die ordentliche und die außerordentliche Welle. Im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$  geht die außerordentliche Welle in die sogenannte magnetosonische Welle über mit  $n^2 \rightarrow 1 + c^2/u_A^2$ .