

Einführung in die Plasmaphysik

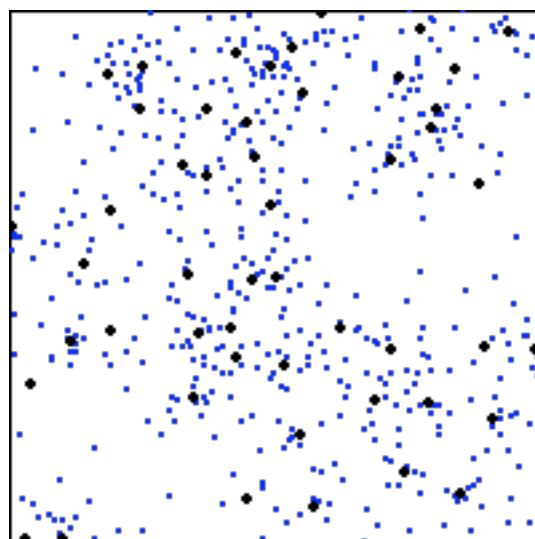
Gerd Fußmann



Vorlesung
an der

Humboldt Universität zu Berlin

Winter-Semester 2005/2006



Titelbild: Monte-Carlo-Rechnung zur Veranschaulichung der Teilchenkorrelation im stark nicht-idealen Plasma. Jedes der zehnfach geladenen Ionen (dicke Punkte) ist von einer abschirmenden Elektronenwolke umgeben.

1. PLASMA: MATERIE IM VIERTEN AGGREGATZUSTAND	6
1.1. Definition	6
1.2. Vorkommen	7
1.2.1. Kosmische und atmosphärische Plasmen	7
1.2.2. Technische Plasmen und Labor-Plasmen	8
1.3. Industrielle Anwendungen	10
1.3.1. Entladungslampen	10
1.3.2. Schaltertechnik	10
1.3.3. Schweißen, Schneiden, Schmelzen	10
1.3.4. Plasma-Prozeßtechnik	10
1.4. Fusionsforschung	11
1.5. Ideale und nicht-ideale Plasmen	12
1.6. Geschichtliches in Stichworten	14
2. THERMODYNAMISCHE GLEICHGEWICHTE UND NICHT-GLEICHGEWICHTE	15
2.1. Vollständiges thermodynamisches Gleichgewicht	15
2.2. Lokales thermodynamisches Gleichgewicht (LTE)	17
2.3. Strahlungstransport in Plasmen	18
2.4. Nicht-LTE-Gleichgewichte	20
2.5. Das Saha-Ionisationsgleichgewicht	22
2.6. Saha-Boltzmann-Gleichgewichte	28
3. PLASMACHARAKTERISTIKA	30
3.1. Quasineutralität und Debye-Abschirmung	30
3.1.1. Plasmaexpansion	31
3.1.2. Ambipolarität	31
3.1.3. Abschirmung der Ladungsträger	32
3.2. Plasmafrequenz	34
3.3. Plasma- und Floating-Potential – Grenzschichten	35
3.3.1. Messungen mit Langmuirsonden	35
3.3.2. Sondentheorie	37
3.3.3. Kennlinienverlauf und Bestimmung der Plasmaparameter	39
3.3.4. Das Child-Langmuir-Gesetz	41
4. STOßPROZESSE IM PLASMA	44
4.1. Coulomb-Stoßprozesse	44
4.1.1. Elementare Berechnung der Reibungskraft	44
4.1.2. Klassische und quantenmechanische Berechnungen	46
4.2. Abbremsung eines Teststrahls im Plasma	49

4.3.	Runaway-Elektronen	54
4.4.	Relaxationszeiten	55
4.5.	Plasmaleitfähigkeit	56
5.	TEILCHENBAHNEN IM MAGNETFELD	58
5.1.	Teilchenbewegung im statisch homogenen Magnetfeld	58
5.2.	Teilchendriften	59
5.2.1.	Driften im inhomogenen E-Feld	63
5.3.	Exakte und adiabatische Invarianten der Bewegung	66
5.3.1.	Hamiltonsche Gleichungen und exakte Invarianten	66
5.3.2.	Magnetische Flächen und Driftflächen im Torus	67
5.3.3.	Adiabatische Invarianten	69
5.3.4.	Adiabatische Invarianten im magnetischen Spiegel	71
6.	DIE GLEICHUNGEN DER PLASMAPHYSIK	74
6.1.	Liouville-Gleichung und BBGKY-Hierarchie	76
6.2.	Kinetische Theorie: Gleichungen im Phasenraum	77
6.2.1.	Die Vlasov-Gleichung	79
6.2.2.	Die Boltzmann-Gleichung	82
6.2.3.	Die Fokker-Planck-Gleichung	83
6.3.	Makroskopische Gleichungen	85
6.3.1.	Definitionen	85
6.3.2.	Mehrflüssigkeitsgleichungen	88
6.3.3.	MHD: Einflüssigkeitsgleichungen	92
6.3.4.	Die idealen MHD-Gleichungen	101
6.4.	Innere Kräfte im Plasma	103
6.4.1.	Reibungskräfte	104
6.4.2.	Viskositätskräfte	106
6.4.3.	Verunreinigungsakkumulation	113
6.4.4.	Allgemeine Eigenschaften des Teilchentransportes	115
6.4.5.	Diffusionskoeffizienten	116
6.5.	Energieflüsse und Onsager-Relationen	117
6.5.1.	Parallele Wärmeflüsse und Ströme	117
6.5.2.	Senkrechte Wärmeleitung	119
7.	WELLEN IM PLASMA	121
7.1.	Die linearisierten Wellengleichungen	122
7.2.	Allgemeine Dispersionsbeziehungen	125
7.3.	Wellen ohne äußeres Magnetfeld	129
7.3.1.	Transversalwellen	129
7.3.2.	Longitudinale Wellen	131
7.4.	Wellen im magnetisierten Plasma	133
7.4.1.	Wellenausbreitung in Richtung des Magnetfelds	133
7.4.2.	Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld	138

7.5. Abschließende Bemerkungen zu den Plasmawellen

141

8. LITERATUR

143

1. PLASMA: MATERIE IM VIERTEN AGGREGATZUSTAND

1.1. Definition

Der physikalische Laie verbindet mit dem Wort **Plasma** zunächst die aus Biologie und Medizin her bekannten Begriffe Protoplasma (der lebende Kern einer Zelle) und Blutplasma (der flüssige Anteil des Blutes). Wie wir noch im einzelnen sehen werden, versteht man in der Physik unter einem Plasma aber etwas völlig anderes. Der Begriff wurde erstmals 1929 von [Langmuir](#) und [Tonks](#) für das von ihnen untersuchte ionisierte Gas in einer elektrischen Entladung eingeführt. Die Bezeichnung leitet sich aus dem griechischen Wort $\pi\lambda\alpha\sigma\mu\alpha$: das G e b i l d e , das Geformte ab. Es ist daher nicht verwunderlich, daß das Wort für recht unterschiedliche Dinge (unter anderem auch für den Halbedelstein [Calcedon](#)) Verwendung gefunden hat.

In der Physik spricht man außer vom Plasma selbst auch vom **Plasmazustand** und meint damit einen besonderen Aggregatzustand der Materie, der sich bei sehr hohen Temperaturen einstellt. Neben den sonst bekannten Zuständen fest, flüssig und gasförmig tritt der Plasmazustand damit an die vierte Stelle. Diese Zustandsformen durchläuft in der Regel jede Materie als Funktion der Temperatur. Wie in der Tabelle 1-1 veranschaulicht, ist eine beliebige Materialprobe bei hinreichend tiefer Temperatur fest und kann durch Aufheizen zunächst in den flüssigen, danach in den gasförmigen und schließlich bei Temperaturen oberhalb von typischerweise etwa 3000 K in den Plasmazustand überführt werden.

Die vier Aggregatzustände der Materie ⇒ Temperaturerhöhung ⇒			
Festkörper	Flüssigkeit	Gas	Plasma
Atome und Ionen sind fest an ihre Gitterplätze gebunden.	Moleküle, Atome oder Ionen sind frei beweglich, aber noch in starker Wechselwirkung.	Im Vergleich zur Flüssigkeit ist die Dichte stark verringert. Die Wechselwirkung der neutralen Teilchen ist gering.	Die neutralen Atome sind in Elektronen und positive Ionen zerfallen. Das ionisierte Gas ist elektrisch leitfähig.

Tabelle 1-1

Im Vergleich zu einem gewöhnlichen Gas, dessen Atome oder Moleküle elektrisch neutral sind, ist beim Plasma das Gas infolge der Stöße teilweise oder vollständig ionisiert. Das vollständig ionisierte Plasma besteht dann nur noch aus Elektronen und positiven Ionen, die aber in unterschiedlichen Ionisationsstufen (z.B. O^{+1} bis O^{+8}) vorkommen können. Man kann daher als vorläufige Definition ein Plasma als ein ionisiertes Gas bezeichnen. Damit die typischen Plasmaeigenschaften, wie gute elektrische Leitfähigkeit und die damit verbundene starke Beeinflussbarkeit durch Magnetfelder, zutage treten, darf der Ionisationsgrad aber nicht zu klein sein. Gewöhnlich reicht es, wenn einige Prozent der Atome ionisiert sind, um diese Eigenschaften deutlich hervortreten zu lassen. In diesem Fall ist die Wechselwirkung der geladenen Teilchen untereinander wesentlich stärker als diejenige der geladenen Elektronen und Ionen mit den neutralen Atomen oder der neutralen Atome untereinander. Die Ursache hierfür liegt in der großen Reichweite der Coulombkräfte, die nur quadratisch mit dem Abstand der Teilchen abfällt, während die entsprechenden Van-der-Waals-Kräfte der neutralen Atome mit der siebten Potenz abnehmen. Die Coulombkräfte sind auch die Ursache für zahlreiche [kollektive Effekte](#), die im Plasma bedeutsam sein können. Durch das gleichgerichtete Zusammenwirken vieler Teilchen können beispielsweise makroskopische E-Felder oder Ströme (und damit auch Magnetfelder) entstehen.

Ein weiteres Charakteristikum eines Plasmas ist seine *Quasineutralität*, die besagt, daß in einem kleinen Teilvolumen des gesamten Plasmas die negative Elektronenladung in sehr guter Näherung (Unterschiede $< 0,1\%$) durch die positiven Ionen kompensiert wird. Das Plasma erscheint also global als neutral. Abweichungen von der Neutralität lassen sich erst innerhalb eines sehr kleinen Volumenelementes (Kugel vom *Debye-Radius*, d.h. häufig erst auf der mikroskopischen Skala) feststellen. Darin liegt beispielsweise ein wesentlicher Unterschied zu einem Elektronenstrahl, der natürlich auch die zuvor genannten Eigenschaften der guten Leitfähigkeit und kollektive Effekte aufweisen kann, aber auch nach außen hin als negativ geladen erscheint.

1.2. Vorkommen

Von einem kosmischen Standpunkt aus betrachtet, kommt man zu dem Schluß, daß mehr als 99% der gesamten sichtbaren Materie im **Plasmazustand** ist. Es sind nämlich sämtliche Fixsterne und auch ein Großteil der intergalaktischen Materie Wasserstoffplasmen mit kleinen Zusätzen an anderen Elementen (insbesondere Helium). Auf der Erde dagegen ist das Plasma die Ausnahme. Abgesehen von der äußeren Schicht der Atmosphäre, der Ionosphäre, sind die meisten Plasmen technisch erzeugt. Im folgenden geben wir einen Überblick über die wichtigsten Plasmaquellen.

1.2.1. KOSMISCHE UND ATMOSPHÄRISCHE PLASMEN

Bis etwa 1950 konnte man sehr heiße, vollionisierte und stationäre Plasmen mit Temperaturen oberhalb von 10^5 K nur in den Sternen beobachten¹. Es ist daher nicht verwunderlich, daß die Astrophysik bei der Entwicklung der Plasmaphysik Pate gestanden hat. Insbesondere haben die spektroskopischen Untersuchungsmethoden ihren Ursprung in dem Bemühen, die Physik der Sternatmosphären aus den Sternspektren zu deuten. In diesen Sternatmosphären hat man es mit Plasmen sehr geringer Teilchenzahl zu tun (typisch $n_e < 10^{23} \text{ m}^{-3}$)². In der Abb. 1-1 sind unter anderem die Plasmaparameter der Sonne eingetragen. Den optischen Rand der Sonne bildet die Photosphäre mit einer Temperatur von $T = 5700$ K, in der das kontinuierliche Spektrum mit einer maximalen Emission im grünen Licht und die *Fraunhofer-Absorptionslinien* entstehen. In der Umgebung der Photosphäre sind die Gradienten der Dichte besonders hoch. Nach außen schließt sich die Chromosphäre an, in der zunächst in einer schmalen Zone die Temperatur auf 4000 K abfällt, um danach wieder anzusteigen. In dieser Zone beobachtet man bei Sonnenfinsternis die Fraunhoferlinien in Emission. Bei diesen niedrigen Temperaturen re kombiniert das Wasserstoffplasma, und es bilden sich H-Atome und teilweise auch H_2 -Moleküle. Schließlich steigt in der sich anschließenden Sonnenkorona, die sich bis zu etwa drei Sonnenradien ($R_{\text{Sonne}} = 696\,000 \text{ km}$) erstreckt, die Temperatur innerhalb einer schmalen Zone von nur 15 000 km auf bis zu etwa $T = 2 \cdot 10^6$ K ≈ 200 eV wieder an. Die Dichte dagegen fällt rasch ab und erreicht beim Dreifachen des Sonneradius sehr niedrige Werte um $3 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$. Der Temperaturanstieg ergibt sich insbesondere aus der Beobachtung der Linienstrahlung von sehr hoch ionisierten Elementen, wie Fe^{+13} oder Ca^{+14} . Man erklärt sich diesen Anstieg durch Schockwellen, die von der Sonnenoberfläche auslaufen und das Koronaplasma aufheizen. Bei den auffälligen Erscheinungen wie Sonnenflecke und Protuberanzen ist in diesen Gebieten auch das Magnetfeld von Bedeutung, das lokal beachtliche Werte um bis zu 4 T annimmt, während das globale Magnetfeld der Sonne sehr klein ist und höchstens 10^{-4} T beträgt. Das Koronaplasma geht kontinuierlich in das **interplanetare Plasma** über, das sich als **Sonnenwind** bemerkbar macht und als solcher beispielsweise die Schweife der Kometen entgegen der Sonnenrichtung ablenkt.

Im interstellaren Raum der Milchstraße sind Dichte und Temperatur des Plasmas mit Werten um 10^5 m^{-3} und $T = 100$ K noch erheblich niedriger als im interplanetaren Bereich unseres Sonnensystems, und schließlich rechnet man mit minimalen Dichten von etwa 10^{-1} m^{-3} im intergalaktischen Raum.

Ein ebenfalls sehr dünnes Plasma finden wir in der irdischen **Ionosphäre**. In dieser etwa 100 bis 1000 km über der Erdoberfläche befindlichen Zone entstehen die Nordlichter. Unter anderem ist

¹ Da in der Plasmaphysik sehr hohe Temperaturen die Regel sind, ist es üblich, die Temperaturen nicht in K, sondern direkt in Energieeinheiten, also in eV (bzw. keV) anzugeben. Es gilt die Relation $1 \text{ eV} \hat{=} 11600 \text{ K}$. In den entsprechenden Formeln entfällt dann die Boltzmann-Konstante $k_B = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

² Im Vergleich zu einer Moleküldichte von $n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ unter Normalbedingungen.

die Ionosphäre für die Reflexion der langwelligen Radiowellen von Bedeutung. Eine andere atmosphärische Erscheinung sind die **Blitze**, die als elektrische Entladungen zwischen den Wolken untereinander und zwischen Wolken und Erdboden in Erscheinung treten. In den dünnen Blitzkanälen bildet sich kurzzeitig (einige 10 μ s) ein Plasma, das hinsichtlich Temperatur und Dichte der Sonnenrandschicht nahekommt. Der abgeleitete elektrische Strom bildet dabei die Heizquelle und führt zu einer explosionsartigen Druckerhöhung, die sich als Schockwelle (Donner) in der Atmosphäre ausbreitet.

Gänzlich andere Verhältnisse ergeben sich für das Innere der Sterne. Bei den normalen Sternen, wie unserer **Sonne**, liegen die zentralen Temperaturen bei 10^7 K = 1000 eV (Sonne: 15 000 000 K) und die Teilchendichten bei 10^{32} m⁻³. Die Dichte ist damit mehr als hundertmal größer als in einem Festkörper. Der Druck erreicht den ungeheuren Wert von $2.5 \cdot 10^{16}$ Pa $\approx 10^{11}$ atm. Unter diesen extremen Bedingungen laufen die **Kernfusionsprozesse** ab, aus denen die Fixsterne ihre schier unerschöpfliche Energie beziehen. Diesen Mechanismus der Energieproduktion hat *Rutherford* 1923 als erster erkannt. Die Nutzung dieses Prozesses für die Energieerzeugung auf der Erde erschien ihm jedoch wegen der extremen Bedingungen aussichtslos. Gerade an der Verwirklichung dieses Konzepts arbeitet die Fusionsforschung.

Nochmals wesentlich höhere Dichten (bis zu 10^{37} m⁻³) trifft man in den als “**weiße Zwerge**” bezeichneten kleinen Sternen an, die im wesentlichen ein vollständig ionisiertes Heliumplasma darstellen. Diese Sterne weisen ein relativ starkes Magnetfeld in der Größenordnung von 10 T auf. Wie wir später sehen werden, handelt es sich hierbei um ein quantenmechanisch entartetes Plasma.

Nochmals entscheidend höhere Dichten (10^{42} m⁻³) und Magnetfelder (bis zu 10⁸ T) werden in den **Neutronensternen** beobachtet, die nur eine Ausdehnung von etwa 10 - 20 km Radius haben. Diese stellen natürlich kein Plasma mehr dar, da unter diesen exorbitanten Bedingungen nahezu alle Elektronen und Protonen zu Neutronen verschmolzen sind (inverser β -Zerfall). Gelegentlich wird dieser Zustand, bei dem bereits die Atomkerne zerfallen, als **fünfter Aggregatzustand** bezeichnet. Treten Neutronensterne in Doppelsternsystemen auf, so beobachtet man häufig ein Abfließen der Materie des Begleitersterns hin zum Neutronenstern. Bei dieser materiellen Akkretion bildet sich in der Außenzone des Neutronensterns ein dünnes Plasma von enorm hoher Temperatur. Aufgrund ihrer kleinen Ausdehnung können Neutronensterne rasch rotieren, was in Verbindung mit dem starken Magnetfeld zu einer pulsierenden Lichtemission führt (Leuchtfeuereffekt). Die Frequenz dieser **Pulsare** kann einige Hz und mehr betragen. Die Lichtemission stammt aus der dünnen, aber extrem heißen **Magnetosphäre** dieses Sterns.

Das gesamte Gebiet der kosmischen Plasmen erstreckt sich damit über ein riesiges Gebiet, das in der Dichte mehr als 30 und in der Temperatur acht Zehnerpotenzen umfaßt. Es handelt sich damit wohl um den größten Variationsbereich der Physik.

1.2.2. TECHNISCHE PLASMEN UND LABOR-PLASMEN

Im Diagramm Abb. 1-1 sind auch die von Menschenhand erzeugten Plasmen eingetragen. Der Parameterbereich ist hier kleiner als bei den kosmischen Plasmen, aber dennoch sehr groß. Mit Ausnahme des eingezeichneten Reaktorkreises sind die übrigen Werte in Experimenten bereits realisiert worden.

Gasentladungen

Zwischen zwei Elektroden kann auf sehr unterschiedliche Weise ein Strom fließen und im Zwischenbereich ein Plasma entstehen lassen. Je nach Druckbereich, Gasart, Elektrodenmaterial und Stromdichte bilden sich die verschiedenen Entladungsformen aus.

Bei der **Glimmentladung** liegt der Druck im Bereich von einigen mb (100 Pa). Strom und Spannung betragen typischerweise einige mA bzw. 100 V. Die Elektroden bleiben kalt und emittieren somit keine Elektronen. Die Elektronen werden vornehmlich durch Stoßprozesse im Gas erzeugt. Die zu Beleuchtungszwecken weit verbreiteten **Leuchtstoffröhren** sind physikalisch auch hier einzuordnen.

Bei höheren Strömen von ca. 100 A entstehen die Elektronen durch Thermoemission an der Kathode. Die Spannung sinkt auf etwa 10 V und wir haben es mit dem **elektrischen Lichtbogen** zu

tun. Der erste zwischen zwei Kohleelektroden brennende Lichtbogen dieser Art (Kohlebogen) wurde schon 1812 erprobt. Die Temperaturen liegen bei 10 000 K bis maximal etwa 30 000 K.

Steigert man den Gasdruck, so bildet sich eine Entladung erst bei hohen Spannungen aus. Es entsteht eine Funkenentladung mit einem stark eingeengten, leitenden Kanal. Die Entladung kann sehr kurzzeitig sein, wie beim Blitz, aber auch permanent aufrecht erhalten werden. Der zumeist gewundene Kanal steht gewöhnlich nicht still, sondern wandert räumlich irreproduzierbar umher.

Flammen

Die **Flamme** einer Kerze ($T < 1000$ K = 0,1 eV) ist nur sehr schwach ionisiert, sie kann aber einen Kondensator kurzschließen. Höhere Temperaturen werden in Schweißflammen erreicht. Bei der Verbrennung eines Acetylen-Sauerstoff-Gemischs ergeben sich mit etwa 3000 K die höchsten Temperaturen. Die Temperatur ist bei diesen Prozessen durch die niedrige chemische Bindungsenergie (einige eV) bedingt.

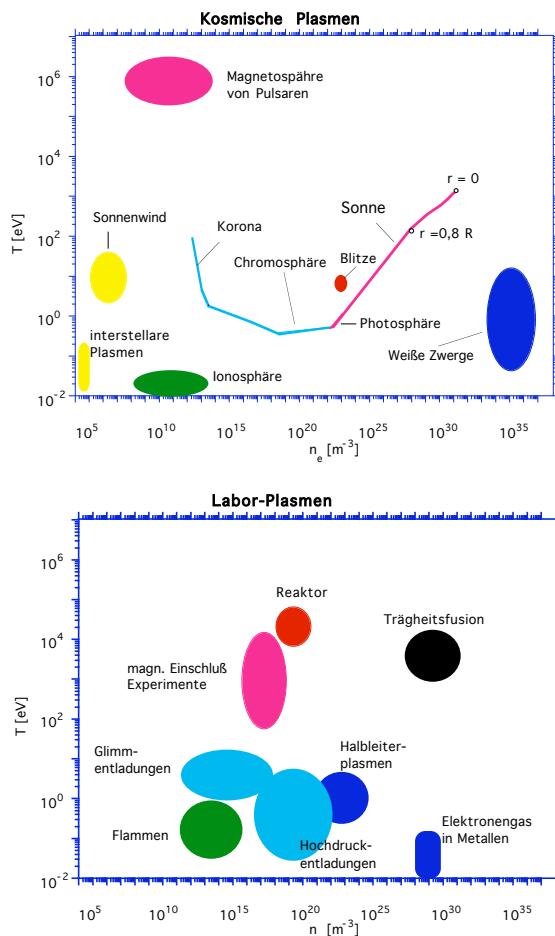


Abb. 1-1: Temperatur-Dichte-Diagramme für kosmische und technische Plasmen

Festkörperplasmen

Die freibeweglichen Elektronen in Metallen und anderen Leitern und Halbleitern zeigen eine physikalische Ähnlichkeit zu den Plasmen ohne Magnetfeld. Insbesondere können hier auch elektrostatische Wellen (**Plasmonen**) nachgewiesen werden. Wegen der hohen Teilchendichte und der geringen Temperatur handelt es sich allerdings um "entartete Plasmen", die nicht mit der Boltzmannstatistik beschrieben werden können.

Fusionsplasmen

Sehr hohe Temperaturen werden in Forschungsapparaturen erreicht, die im Zusammenhang mit der kontrollierten Kernfusion entwickelt wurden. Bei den *magnetisch eingeschlossenen Plasmen* wurden bereits für Zeiten von mehreren Sekunden bei einer Teilchendichte von 10^{19} m^{-3}

Temperaturen von $400\ 000\ 000\text{ K} \approx 40\text{ keV}$ erreicht³. Das Plasma wird hierbei durch Hochfrequenz oder Atomstrahlen auf diese Temperaturen aufgeheizt.

Nicht ganz so hohe Temperaturen (1 keV), aber dafür bei wesentlich höheren Dichten (10^{23}), werden bei der [Trägheitsfusion](#) erhalten. Hier fokussiert man meist mehrere Laser auf ein kleines Wasserstoffpellet (etwa 1 mm Durchmesser), das dann innerhalb von wenigen 10^{-9} s zur Explosion gebracht wird.

1.3. Industrielle Anwendungen

1.3.1. ENTLADUNGSLAMPEN

Bei den meisten Atomen liegen die Anregungsniveaus sehr hoch, nahe bei der Ionisationsenergie⁴. Aus diesem Grund sind bei der Lichtproduktion auch Ionisationsprozesse und damit Plasmaerscheinungen von Bedeutung. Plasmen spielen daher eine bedeutsame Rolle bei normalen Lampen, aber auch bei Lasern.

In normalen Leuchtstoff-[Lampen](#) wird die intensivere UV-Strahlung ausgenutzt und in fluoreszierenden Schichten umgesetzt. Ohne Beschichtung würden Neon-Röhren rot und CO_2 -Lampen weiß leuchten. In Hochdrucklampen (Drucke um 1 bar) wird eine Plasmaentladung *optisch dick*, und die Plasmabedingungen nähern sich dem *lokalen thermodynamischen Gleichgewicht* an (s. Kap. 2). Die Plasmatemperatur ist typisch um 4000 K. Eine solche Lampe emittiert ein breites kontinuierliches Spektrum. Derartige Entladungen sind technisch in kleinen Quarzröhren realisiert mit Leistungen in der Gegend von 500 W.

1.3.2. SCHALTERTECHNIK

Hier geht es nicht um die Erzeugung eines Plasmas, sondern um seine Auslöschung. Wenn man einen Hochstrom-Kreis unterbrechen will, muß man in irgend einer Form zwei Elektroden trennen. Dabei bildet sich sehr leicht ein elektrischer Bogen. Kernstück des Problems ist daher das Plasma eines Lichtbogens. Eine Möglichkeit, den Bogen zu unterbrechen, ist, ihn mit Öl oder Gasen “auszublasen”. Geeignet dafür ist insbesondere SF_6 -Gas (Schwefel-Hexafluorid) wegen seiner elektronenbindenden Eigenschaft.

1.3.3. SCHWEIßEN, SCHNEIDEN, SCHMELZEN

In solchen Prozessen wird der Plasmabogen ausschließlich als intensive Wärmequelle verwendet. 20 % der Weltstahlproduktion aus Schrott erfolgt im Lichtbogen. Auch beim Elektroschweißen spielen Plasmaeffekte eine Rolle. Der divergierende Strom im Plasmabogen und das magnetische Eigenfeld beschleunigen das Plasma zur Anode und verbessern auf diesem Wege die Wärmeeinkopplung in das Werkstück.

1.3.4. PLASMA-PROZEßTECHNIK

Oberflächentechnologien

Mit Plasmen kann man Material abtragen, wobei durch entsprechende Masken Muster gebildet werden können. Materialabtragung hat eine physikalische und eine chemische Komponente. Bei der physikalischen Erosion wird Material durch den Stoß mit energetischen Plasmateilchen entfernt. In der chemischen Erosion wird die chemische Reaktivität von Plasmateilchen ausgenutzt. Die Effizienz ist in diesem Falle höher. Daneben kann auch Material aufgebracht werden. Abtragung und Beschichtung können sogar parallel erfolgen. Daraus entwickelten sich die Oberflächen- und Dünnschicht-technologien, die u.a. bei der Chip-Herstellung von entscheidender Bedeutung sind (bei der Herstellung eines Computerchips werden etwa 150 Plasmabehandlungen vorgenommen).

³ Am JET Tokamak-Experiment in Culham, England

⁴ Eine Ausnahme bilden insbesondere die Alkaliatome mit einer sehr niedrigen Anregungsenergie für den Übergang ns - np.

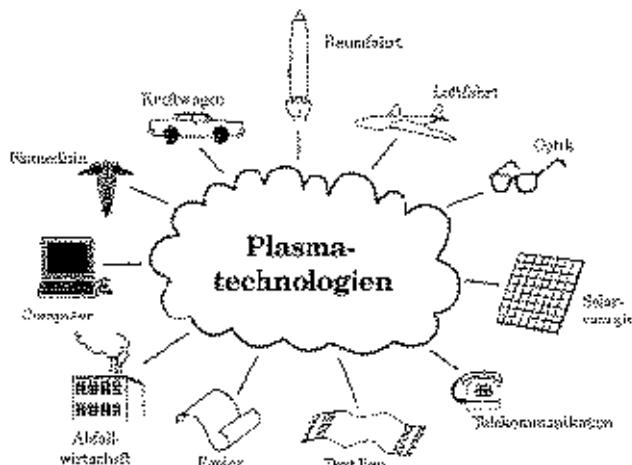


Abb. 1-2: Bereiche, in denen Plasmatechnologie-Verfahren zur Anwendung kommen.

Eine andere Anwendung ist die Plasma-Oberflächenreinigung (z.B. bei antiken Masken) und die Oberflächenprofilgebung durch Zerstäubung und Ätzen. Auch andere Oberfächeneigenschaften (wasser- oder fettabweisende Schichten bzw. farbaufnehmende Kunststoffoberflächen) lassen sich mit Plasmatechniken erzielen. Von großer

technischer Bedeutung ist auch die Oberflächenhärtung von Werkzeugen in Stickstoffplasmen. Die Palette der unterschiedlichen Anwendungsbereiche ist in der Abb. 1-2 zusammengestellt.

Plasmaspritzen

Das Ziel ist hierbei die Herstellung von korrosionsfesten oder verschleißfesten Schichten. Von Vorteil ist dabei die Materialaufbringung mit hoher kinetischer Energie infolge der Strömung des Plasmas. Man kann beispielsweise Materialien für Katalysatoren aufbringen oder alte Dokumente mit einer dünnen Schicht überziehen und somit schützen.

Plasmachemie

Eine Reihe von chemischen Produkten lassen sich besonders günstig durch Plasma-Synthese herstellen. Hierbei spielen ionische Molekülradikale oft eine wichtige Zwischenstufe. Klassisch ist die Herstellung von Acethylen im Lichtbogen. Aber auch Stickoxid und Ozon können so optimal hergestellt werden.

Plasmapyrolyse

Das Gegenstück zur Plasma-Synthese ist die Zerlegung von Molekülen im heißen Plasmazustand. Die Plasmapyrolyse dient so zur Beseitigung von giftigen Abfallprodukten, wie PCB, Dioxin und DDT. Vorteilhaft erweist sich hierbei das Nebeneinander von hohen Plasmatemperaturen (zum Cracken) und kalten Flächen (zum Ausfrieren) in speziellen Plasmageneratoren.

1.4. Fusionsforschung

Grundsätzlich kann Kernenergie sowohl durch Verschmelzung leichter Atomkerne (Fusion) als auch durch Spaltung schwerer Kerne (Fission) gewonnen werden. Der Grund liegt in der unterschiedlichen Bindungsenergie der Atomkerne. Die Nukleonen (Neutronen und Protonen) sind nämlich bei leichten und schweren Kernen weniger fest gebunden als bei mittelschweren (Eisen). Das geht deutlich aus der Abb. 1-3 hervor, die die Bindungsenergie pro Nukleon wiedergibt.

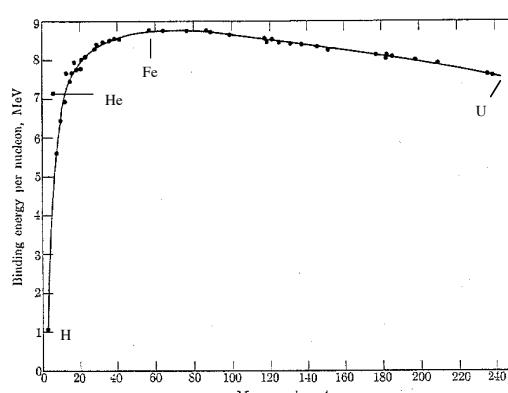
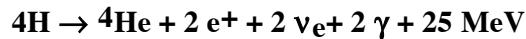
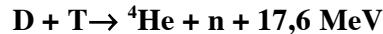


Abb. 1-3: Die Bindungsenergie pro Nukleon für die Elemente als Funktion der Massenzahl

Zur technischen Energieerzeugung wird derzeit ausschließlich der Spaltungsprozeß benutzt. In den heutigen Kernkraftwerken wird vornehmlich das Uranisotop ^{235}U in zwei mittelschwere Kerne (z.B. Ba und Kr) zerlegt. In den Sternen dagegen kommen nur Fusionsprozesse vor. In der Sonne läuft in einem komplizierten Zyklus die Nettoreaktion



ab. Dieser Prozeß ist sehr langsam und für die Energieerzeugung auf der Erde nicht geeignet. Statt dessen konzentriert man sich auf den Fusionsprozeß mit dem größten Wirkungsquerschnitt



bei dem Deuterium und Tritium zu Helium verschmolzen werden. Damit die Fusionsprozesse wirksam werden können, müssen sich in jedem Fall die Atomkerne sehr nahe kommen. Dem wirkt aber die Coulombabstoßung entgegen. Man muß daher den Teilchen genügend hohe Energie geben, damit sie sich ausreichend nähern können. Bei den Stößen werden sie jedoch in der Mehrzahl der Fälle nur gestreut, ohne daß eine Verschmelzung stattfindet. Zwei sich durchdringende hochenergetische Atomstrahlen sind daher keine mögliche Lösung, da in diesem Fall die Strahlen im wesentlichen nur aufgeweitet werden. In einem Plasma hoher Temperatur kann jedoch der Fusionsprozeß zu einer positiven Energiebilanz führen, wenn es gelingt, die Teilchen hinreichend gut einzuschließen. Dies wird in den Sternen durch das Gravitationsfeld gewährleistet. Wegen der sehr schwachen Gravitationskraft ist dies aber keine Einschlußmöglichkeit auf der Erde. Man kann statt dessen Magnetfelder oder die Trägheit der Teilchen für den notwendigen Einschluß ausnutzen. Beide Möglichkeiten werden zur Zeit in der Forschung verfolgt.

1.5. Ideale und nicht-ideale Plasmen

Bei Gasen spricht man von idealen Gasen, wenn sie den idealen Gasgleichungen

$$p = k_B \sum_a n_a T_a \quad (1.1)$$

und

$$\varepsilon = \frac{3}{2} k_B \sum_a n_a T_a = \frac{3}{2} p \quad (1.2)$$

genügen. Der Gesamtdruck p ergibt sich damit als Summe der Partialdrucke $p_a = k_B n_a T_a$ der einzelnen Teilchensorten⁵, und die Energiedichte ε ist proportional zum Druck. Gase, die der Gl. (1.2) entsprechen, so daß die Energiedichte durch die rein thermische Energiedichte gegeben ist, bezeichnet man auch als "kalorisch ideal". Gase, die der Gl. (1.1) genügen, nennt man dagegen „thermisch ideal“.

Die thermische Energie pro Teilchen beträgt $E_{th} = 3/2 k_B T_a$. Diese Gesetze gelten, wenn die mittlere Wechselwirkungsenergie der Moleküle (Van-der-Waals-Wechselwirkung) klein ist im Vergleich zu ihrer kinetischen Energie. Das ist bei hinreichend hoher Temperatur und großem Abstand der Moleküle (d.h. kleine Dichte) immer gegeben.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei einem Plasma, nur daß hier anstelle der Van-der-Waals-Wechselwirkung die Coulomb-Wechselwirkung

$$\Phi_{ab} = \frac{e_a e_b}{4\pi \varepsilon_0 r_{ab}} \quad (1.3)$$

tritt. Φ_{ab} ist die potentielle Energie für zwei beliebige Teilchen a und b mit den Ladungen e_a und e_b im Abstand $r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$. Betrachten wir ein Wasserstoffplasma mit $T_e = T_i = T$ und $n_e = n_i = n$ (Quasineutralität). Die Protonen mit der *Elementarladung* = e haben einen mittleren Abstand $\langle r \rangle$

⁵ Allgemeine Teilchensorten erhalten die Indizes a, b, c.... Ionen und Elektronen werden oft speziell durch (i) und (e) gekennzeichnet.

$\approx n^{-1/3}$. Ein *ideales Plasma* liegt vor, wenn die Bedingung $\langle \Phi_{ei} \rangle \ll E_{th}$ erfüllt ist⁶. Dies führt uns auf⁷

$$\frac{3}{2} k_B T \gg \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} n^{1/3} \Rightarrow T \gg 0,97 \cdot 10^{-19} n^{1/3} \quad (1.4)$$

Bei sehr hoher Dichte muß man nicht nur die elektrostatische Wechselwirkung berücksichtigen, sondern u.U. auch quantenmechanische Effekte beachten. Aufgrund des *Pauli-Prinzips* müssen die Elektronen in höhere Quantenzustände übergehen, so daß die Gleichung (1.2) ungültig wird.

Diese Effekte treten auf, wenn die thermische Energie $3/2 k_B T$ kleiner als die von der Dichte abhängige *Fermi-Energie* E_F wird. Das Plasma wird demzufolge quantenmechanisch entartet sein, falls die Bedingung

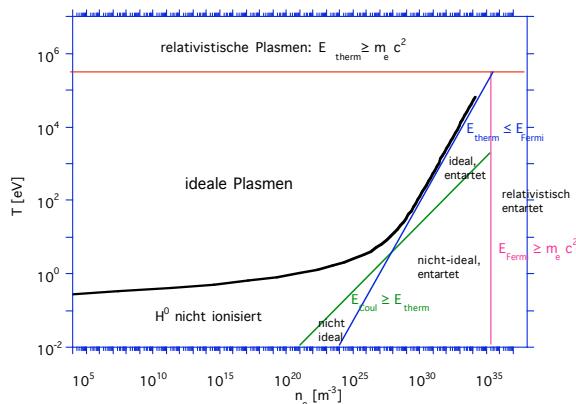


Abb. 1-4: Die Grenzen des idealen Plasmas im n - T -Diagramm

$$\frac{3}{2} k_B T \leq E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi n_e)^{2/3} \Rightarrow T \leq 2,42 \cdot 10^{-19} n_e^{2/3} \quad (1.5)$$

erfüllt ist. Die beiden Grenzen nach Gl. (1.4) und (1.5) schneiden sich im Dichtepunkt $n_e = 6,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, was etwa der tausendfachen Normaldichte entspricht.

Schließlich bricht die nichtrelativistische Behandlung zusammen, wenn die thermische Energie eines Elektrons oder auch die Fermi-Energie in die Größenordnung der Elektronenruhmasse $E_0 = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ gelangt. Damit ergeben sich zwei neue *relativistische Grenzen* für die Temperatur und die Dichte

$$\frac{3}{2} k_B T \leq m_e c^2 \Rightarrow T \leq 341 \text{ keV} \quad (1.6)$$

und

$$E_F \leq m_e c^2 \Rightarrow n_e \leq 1,68 \cdot 10^{36} \text{ m}^{-3} \quad (1.7)$$

Die entsprechenden Grenzen sind in der Abb. 1-4 eingetragen. Man sieht, daß die *ideale Plasmen* einen sehr großen Bereich abdecken und damit die bei weitem wichtigste Errscheinungsform des Plasmas darstellen. Als weitere Grenze ist in Abb. 1-4 noch die Ionisationsgrenze für H-Atome eingezeichnet. Um einen Ionisationsgrad von > 50% zu erhalten, benötigt man danach in einem weiten Dichtebereich eine Temperatur von etwa 1 eV =

⁶ Man charakterisiert das Plasma auch durch die Idealitätsparameter $\Gamma_e = e^2 / (4\pi\epsilon_0 < r_e > k_B T_e)$ und

$\Gamma_i = (Ze)^2 / (4\pi\epsilon_0 < r_i > k_B T_i)$. Man beachte, daß wegen $\Gamma_i = Z^{5/3} \Gamma_e$ die beiden Ausdrücke nur für einfach geladene Ionen gleich sind.

⁷ Hier und in allen folgenden numerischen Formeln sind Temperaturen in eV und Dichten in m^{-3} gemeint.

11 600 K oder mehr. Bei einer Dichte oberhalb von 10^{25} m^{-3} tritt eine erhebliche Erniedrigung der Ionisationsenergie ein, die auch bei wesentlich kleineren Temperaturen zu einem vollständig ionisierten Plasma führen kann.

Der Grund hierfür liegt in den hohen elektrischen Feldstärken, den sogenannten *Mikrofeldern*, die im Nahfeld der Ionen auftreten. Aufgrund dieser Felder kann es sogar zur *Autoionisation* der Atome kommen.

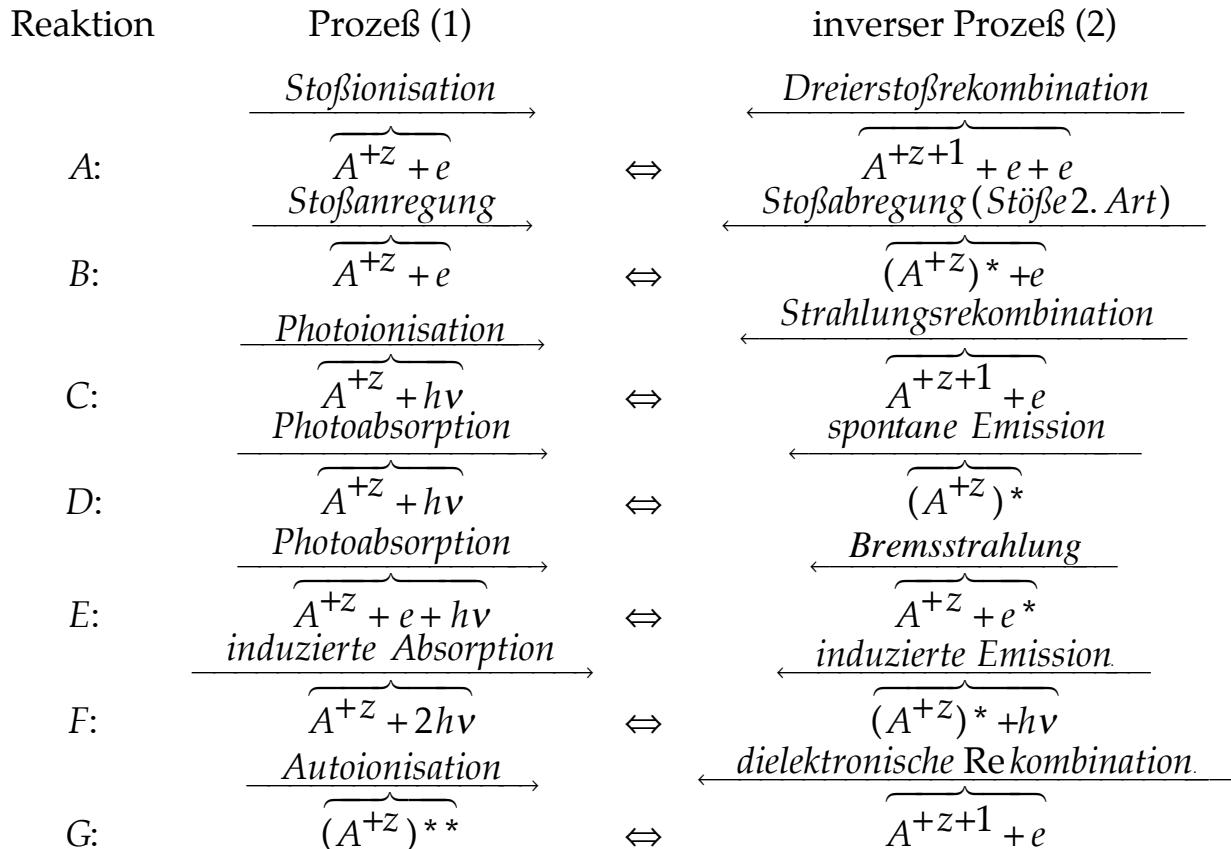
1.6. Geschichtliches in Stichworten

- 1920 Saha leitet eine Gleichung für das Ionisationsgleichgewicht von Gasen ab.
- 1923 Debye-Hückel-Theorie der Elektrolyte
- 1923 Rutherford: Sonne bezieht Energie aus Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium
- 1928 Gamov: Quantenmechanischer Tunneleffekt erleichtert Fusion
- 1929 Atkinson und Houtermans: Theorie der Fusion
- 1929 Langmuir beschreibt Plasmaschwingungen und führt den Namen *Plasma* ein
- 1934 Oliphant, Harteck, Rutherford: Fusion durch Protonenbeschuß experimentell bewiesen
- 1940 Alfvén beschreibt die nach ihm benannten Wellen
- 1951 Geheime Fusionsforschungsprojekte in Los Alamos und Livermore (Sherwood-Projekt) sowie in Princeton (Projekt Matterhorn)
- 1952 Zündung der H-Bombe
- 1955 Erste theoretische Überlegungen in Göttingen (Max-Planck-Institut für Astrophysik) zum Einschluß von Plasmen mit Magnetfeldern
- 1957 Erste Experimente in Göttingen
- 1958 Genfer Konferenz: USA, UdSSR und Großbritannien decken ihre Geheimforschung auf
- 1960 Gründung des Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik in Garching
- 1966 *Q-Pinch* erreicht Temperaturen von 60 Millionen Grad (kurzzeitig für etwa 20 ms)
- 1968 *Tokamak*-Experimente in der UdSSR zeigen erfolgreichen magnetischen Einschluß
- 1969 Nachweis des klassischen Einschlusses am Garchinger *Stellarator*-Experiment
- 1972 Teller schlägt Laser-Fusion vor
- 1977 EG beschließt Bau des JET-Tokamak in Culham (England)
- 1981 Stellarator Wendelstein (Garching) erreicht mit Tokamak vergleichbare Einschlußwerte
- 1982 Entdeckung der High-Confinement -Mode (H-mode) an ASDEX in Garching
- 1983 JET geht in Betrieb
- 1983 In JET und TFTR (Princeton) werden Temperaturen von bis zu 300 Millionen Grad für mehrere Sekunden erzeugt.
- 1990 Erste Experimente mit D-T-Plasmen in JET. Es werden 2 MW Fusionsleistung produziert.
- 1992 Beginn der Konstruktionsphase des ITER-Projekts, ein gemeinschaftliches Unternehmen von USA, Europa (Euratom), Japan und Russland. ITER soll der Vorläufer eines Demonstrationsreaktors sein. In ITER soll aber bereits Nettofusionsenergie erzeugt und zahlreiche technische Probleme untersucht werden
- 1996 JET-Tokamak werden 12MW Fusionsleistungen für 2 s im DT-Betrieb realisiert.
- 2005 Die 6 Parteien Europa, Japan, USA, China, Südkorea und Russland beschließen ITER im französischen Cadarache zu bauen.

2. THERMODYNAMISCHE GLEICHGEWICHTE UND NICHT-GLEICHGEWICHTE

2.1. Vollständiges thermodynamisches Gleichgewicht

In einem Plasma laufen ständig zahlreiche Prozesse ab, von denen die folgenden die wichtigsten sind:



In diesem Kapitel werden wir uns auf die Reaktionen A bis E beschränken. Die Reaktion F spielt bekanntlich bei der Schwarz-Körperstrahlung und bei Lasern eine wichtige Rolle. Die Reaktion G muß zur Beschreibung des Ionisationsgleichgewichtes von Hochtemperatur-plasmen berücksichtigt werden. Bei den Reaktionen A und B sind nur Elektronen involviert; bei den Prozessen C, D und E sind Photonen beteiligt. Liegt vollständiges *thermodynamisches Gleichgewicht* vor, so ist in jeder Reaktion der links stehende Prozeß mit seinem rechts stehenden inversen Prozeß im Gleichgewicht. Man spricht daher auch von einer *detaillierten Bilanz*, die z.B. im Fall B besagt, daß für je zwei Energieniveaus des Atoms die Zahl der anregenden Stöße ($i \rightarrow j$) pro Sekunde gleich ist der Zahl der abregenden Stöße ($j \rightarrow i$). Die Prozesse C2, D2 und E2 sind mit der Emission von Photonen verbunden. Im Falle C und E⁸ ergibt sich dabei ein kontinuierliches Spektrum, während bei der spontanen Emission D2 scharfe Spektrallinien ausgesandt werden. Im letzten Fall handelt es sich um Übergänge zwischen zwei gebundenen Zuständen mit $E_k, E_j < 0$ (*bound-bound-transitions*), während die *Strahlungsrekombination* ein Übergang zwischen einem freien Elektronenzustand (mit $E > 0$) zu einem gebundenen (*bound-free*) und schließlich die *Bremsstrahlung* ein Übergang zwischen zwei freien Zuständen (*free-free*) darstellt.

Im Falle der Gültigkeit des (vollständigen) thermodynamischen Gleichgewichts läßt sich das Plasma durch nur wenige Größen, den fünf *thermodynamischen Variablen* T, V, p, S (Entropie), U (innere Energie) und den chemischen Potentialen μ_a , vollständig beschreiben. Von besonderer Bedeutung ist

⁸ Mit * bzw. ** wird ein angeregter oder zweifach angeregter Zustand charakterisiert. Im Prozeß E bedeutet e^* ein höherenergetisches Elektron.

Thermodynamische Gleichgewichte und Nicht-Gleichgewichte

die Temperatur. Sie allein bestimmt in Verbindung mit den atomaren Anregungsniveaus (E_k) und den Ionisationsenergien der einzelnen Ionen (χ_z) schon:

I. Das Verhältnis der **Besetzungsdichten** der Energieniveaus innerhalb eines Atoms oder Ions entsprechend der *Boltzmann-Verteilung*

$$\frac{n_k}{n_i} = \frac{g_k}{g_i} e^{\frac{-(E_k - E_i)}{k_B T_e}} \quad (2.1)$$

mit den statistischen Gewichten g_k und g_i .

II. Das Verhältnis der **Ionendichten** in den Grundzuständen (zweiter Index 1) der verschiedenen Ionisationsstufen (*Saha-Eggert -Gleichung*)

$$\frac{n_{z+1,1} n_e}{n_{z,1}} = \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} \frac{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}} \quad (2.2)$$

III. Die **Geschwindigkeitsverteilung** der verschiedenen Teilchenarten (*Maxwell-Verteilung*)

$$f_a(\vec{r}, \vec{v}) = n_a(\vec{r}) \left(\frac{m_a}{2\pi k_B T_a} \right)^{3/2} e^{\frac{-m_a v^2}{2k_B T_a}} \quad (2.3)$$

die in ausführlicher Schreibweise

$$f_a(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z dx dy dz = n_a(x, y, z) dx dy dz e^{\frac{-(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{v_a^2}} \frac{dv_x dv_y dv_z}{\pi^{3/2} V_a^3} \quad (2.4)$$

lautet, wobei wir mit $v_a = (2 k_B T_a / m_a)^{1/2}$ die *thermische Geschwindigkeit*⁹ der a-Teilchen definiert haben.

IV. Die **Intensität der Strahlung** (*Kirchhoff-Planck-Funktion*):

$$I_v = B_v(T) := \frac{2hv^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1} \quad \text{bzw.} \quad I_\lambda = B_\lambda(T) := \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1} \quad (2.5)$$

V. Die **abgestrahlte Leistung** (*Stefan-Boltzmann-Gesetz*)

$$F = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (B_v \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta dv = \sigma T^4 \quad (2.6)$$

mit der Konstanten $\sigma = 2 \pi^5 k_B^4 / (15 c^2 h^3) = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

In Gl. (2.3) ist $f_a(\vec{r}, \vec{v})$ die *Verteilungsfunktion* oder *Phasenraumdichte*. $f_a(\vec{r}, \vec{v}) (dv_x dv_y dv_z) (dx dy dz)$ ist die Zahl der Teilchen im 6-dimensionalen Phasenraumelement $dv_x dv_y dv_z dx dy dz$ in der Umgebung des Ortsvektors \vec{r} und des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} . Man beachte, daß die Maxwell-Verteilung nur eine Funktion des Betragsquadrates der Geschwindigkeit $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ist. Der Grund hierfür liegt in der angenommenen Isotropie und der Unkorreliertheit der Geschwindigkeiten. Zunächst besagt die Isotropie folgendes: Ist $(W_x(u) du)$ die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in x-Richtung mit der Geschwindigkeitskomponente im Intervall $v_x = [u, u + du]$ anzutreffen, so sind die

⁹ Diese Definition entspricht insbesondere den Verhältnissen bei zwei Freiheitsgraden. Pro Freiheitsgrad hat man $\langle v_i^2 \rangle = k_B T / m$ mit $i = 1, 2, 3$.

entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ($W_y(u) du$) und ($W_z(u) du$) für die y- und z-Richtungen gleich groß. Es muß also $W_x = W_y = W_z = W$ gelten. Die Unkorreliertheit zum anderen bedeutet beispielsweise: Wenn bereits v_x bei einem Teilchen gemessen wurde, weiß man damit noch nichts über seine beiden übrigen Geschwindigkeitskomponenten. Die Gesamtwahrscheinlichkeit $P(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ ein Teilchen mit den Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z – in den entsprechenden Intervallbreiten dv_x, dv_y, dv_z – anzutreffen, ist sodann durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten gegeben: $P(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = W_x(v_x) \cdot W(v_y) \cdot W(v_z) dv_x dv_y dv_z$. Andererseits darf aber $P(v_x, v_y, v_z)$ nur vom Betrag v der Geschwindigkeit bzw. von $v^2 = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ abhängen. Man hat also die Forderung $W(v_x) \cdot W(v_y) \cdot W(v_z) = P(v)$. Wie Maxwell genauer zeigen konnte, ist das nur erfüllbar, wenn man für W eine Exponentialfunktion vom Typ $W(u) = \alpha \exp(-\beta u^2)$ ansetzt. β ist hier zunächst noch eine freie Konstante. α ist dann über die Normierung der Wahrscheinlichkeit ($\int_0^\infty P(v) 4\pi v^2 dv = 1$) festgelegt, was auf $\alpha = (\beta/\pi)^{1/2}$ hinausläuft. Wir erhalten auf diese Weise $P(v) = (\beta/\pi)^{3/2} \exp[-\beta(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]$. Der Vergleich mit Gl. (2.3) zeigt, daß die Größe β mit der Temperatur und der Teilchenmasse entsprechend $\beta = m/2k_B T$ zusammenhängt. Insgesamt ist die Maxwell-Verteilung nichts anderes als die Boltzmann-Verteilung ($f \sim \exp[-E/kT]$) für ungebundene Teilchen mit der Energie $E = E_{\text{kin}} = m v^2/2$.

Die in Gl. (2.5) angegebene *Intensität* $B_v(T)$ ist die senkrecht zur Oberfläche pro m^2 und Steradian im Frequenzintervall $v \dots v + dv$ abgestrahlte elektromagnetische Leistung (in W) eines *schwarzen Körpers*. Ist θ der Winkel zur Flächennormalen, so ist die unter diesem Winkel abgestrahlte Leistung um den Faktor $\cos\theta$ kleiner. Die pro m^2 Oberfläche insgesamt abgestrahlte Leistung F ist in Gl. (2.6) angegeben; sie ergibt sich aus Gl. (2.5) durch Integration über alle Frequenzen und den Halbraum $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

2.2. Lokales thermodynamisches Gleichgewicht (LTE)

Leider sind die Voraussetzungen für das vollständige thermodynamische Gleichgewicht nur selten erfüllt. Es setzt nämlich räumliche Homogenität voraus, was bei den Plasmen eigentlich nie vorkommt. Relativ günstige Verhältnisse finden sich im Innern der Sonne, aber auch hier gibt es Temperatur- und Dichtegradienten, so daß natürlich die Sonne insgesamt nicht durch eine einheitliche Temperatur und Dichte zu beschreiben ist. Andererseits kann man relativ große Zonen in der Sonne betrachten, die sich in guter Näherung durch eine konstante Temperatur und Dichte beschreiben lassen. Wendet man die Thermodynamik auf diese Teilgebiete an, so spricht man vom *lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (LTE = local thermodynamic equilibrium)*. Diese Aufteilung läßt sich nicht in jedem Fall in der gewünschten Weise durchführen. Der Grund liegt darin, daß die Teilvolumina einerseits wegen des Temperaturgradienten nicht beliebig groß werden dürfen, andererseits aber auch die Abmessungen der freien Weglänge nicht unterschreiten dürfen, da sonst ja Teilchen aus einem Gebiet mit unterschiedlicher Temperatur in das betrachtete Volumenelement eindringen. Es muß also gelten $\lambda_{\text{frei}} \ll T/|\nabla T|$. Besonders kritisch sind die Prozesse C und D, da die Photonen in der Regel eine große freie Weglänge aufweisen, bevor sie absorbiert (Photoionisation) oder gestreut (Absorption und Reemission) werden. Für das Sonneninnere, für deren Berechnung das LTE-Konzept insbesondere entwickelt wurde, treffen die obigen Annahmen wegen der hohen Dichte und den großen Gradientenlängen ($T/|\nabla T| \approx 10^6 \text{ m}$) trotzdem in guter Näherung zu. Bei den meisten Plasmen, namentlich bei den dünnen Laborplasmen, ist die freie Weglänge der Photonen jedoch größer als deren Ausdehnung. Als Folge sind weitere Einschränkungen bei der thermodynamischen Beschreibung der Plasmen hinzunehmen. Wir werden aber zeigen, daß auch bei entweichender Strahlung die Gleichungen (2.1) bis (2.3) ihre Gültigkeit behalten, sofern die Stoßrate der Teilchen hinreichend hoch ist, während die Strahlungsgleichungen (2.5) im allgemeinen und (2.6) generell unbrauchbar werden. Es hat sich eingebürgert, auch diese eingeschränkten Verhältnisse unter dem Begriff des lokalen thermischen Gleichgewichts zu subsummieren. Das LTE ist also durch die folgenden drei Bedingungen gekennzeichnet:

- Besetzung der Energieniveaus in Atomen und Ionen → Boltzmann-Relation
- Ionisationsgleichgewichte → Saha-Gleichung
- Verteilungsfunktionen → Maxwell-Verteilung (mit gleicher Temperatur für alle Teilchen)

2.3. Strahlungstransport in Plasmen

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch etwas genauer ansehen, wie sich die Abnahme der Photonenabsorption in den Spektren bemerkbar macht. Dazu müssen wir den Transport der Photonen in Abhängigkeit von ihrer Frequenz betrachten. Das entsprechende allgemeine Strahlungstransportproblem ist im dreidimensionalen Fall mathematisch sehr anspruchsvoll und soll hier nicht behandelt werden. Wichtige Schlußfolgerungen lassen sich aber bereits aus dem im folgenden betrachteten eindimensionalen Spezialfall ableiten.

Die optischen Eigenschaften des Plasmas lassen sich durch die beiden Koeffizienten für *Strahlungsabsorption* κ_v und *Emission* ϵ_v angeben. Hierbei soll der Index v andeuten, daß beide Größen Funktionen der Frequenz sind. Der Absorptionskoeffizient κ_v hat die physikalische Dimension m^{-1} ; er beschreibt die Schwächung der *Intensität* I_v eines gebündelten Strahles pro Längeneinheit: $dI_v = -\kappa_v I_v dx$. Die Intensität selbst ist dabei definiert als Strahlungsleistung pro Fläche, Raumwinkel und Frequenzintervall (also $[I_v] = \text{Watt m}^{-2} \text{ster}^{-1} \text{s}^{-1}$). Die Funktion κ_v enthält im allgemeinen sowohl die echte Absorption (Umwandlung von Photonen in andere Energieformen wie z.B. bei der Photoionisation), wie auch Streuanteile (Resonanz-Fluoreszenz: Ausstrahlung bei der gleichen Frequenz in den Raumwinkel 4π ; bzw. nicht-resonante Streuung: Ausstrahlung bei einer anderen Frequenz in den Raumwinkel 4π). Der Emissionskoeffizient ϵ_v beschreibt die Strahlungsproduktion im Volumenelement bezogen auf den Einheitsraumwinkel und pro Einheitsfrequenzintervall ($[\epsilon_v] = \text{Watt m}^{-3} \text{ster}^{-1} \text{s}^{-1}$). Betrachten wir nun ein in z - und y -Richtung unendlich ausgedehntes Plasma, das in x -Richtung eine endliche Schichtdicke L aufweist. Am linken Ende $x = 0$ ist bei fehlender Einstrahlung der in positive Richtung weisende Strahlungsfluß null. Ein solcher baut sich jedoch nach rechts hin infolge der Photonenproduktion im Plasma auf. Gleichzeitig wird die Intensität aber auch durch die Absorption wieder geschwächt, so daß wir folgenden Zusammenhang für die Änderung der Intensität haben

$$dI_v = \epsilon_v dx - \kappa_v I_v dx. \quad (2.7)$$

Dividieren wir diese Gleichung durch den Absorptionskoeffizienten und setzen $\kappa_v dx = d\tau_v$, wobei die dimensionslose Größe $\tau_v = \int \kappa_v dx$ als *optische Dicke* bezeichnet wird, so ergibt sich die eindimensionale *Strahlungstransportgleichung*

$$\frac{dI_v}{d\tau_v} + I_v = S_v. \quad (2.8)$$

Die hier auf der rechten Seite auftretende *Quellfunktion* ist durch $S_v := \epsilon_v / \kappa_v$ definiert. Im Falle thermodynamischen Gleichgewichts ist die Intensität I_v isotrop und homogen (d.h. $dI_v/d\tau_v = 0$) und wird durch die Planck-Funktion B_v nach Gl. (2.5) gegeben. Wir erhalten also in diesem Fall

$$S_v := \frac{\epsilon_v}{\kappa_v} = B_v(T). \quad (2.9)$$

Dieses sogenannte *Kirchhoffsche Gesetz* ist letztlich eine Folge der Boltzmann-Besetzung der Energieniveaus. Betrachten wir zur Illustration die Verhältnisse bei Linienstrahlung, die durch den Übergang zwischen den atomaren Niveaus 1 und 2 entsteht ($h\nu = E_2 - E_1$). Hier haben wir allgemein die Beziehungen

$$\epsilon_v = \frac{h\nu}{4\pi} A_{21} n_2 P(v); \quad \kappa_v = \frac{h\nu}{4\pi} (B_{12} n_1 - B_{21} n_2) P(v) \quad (2.10)$$

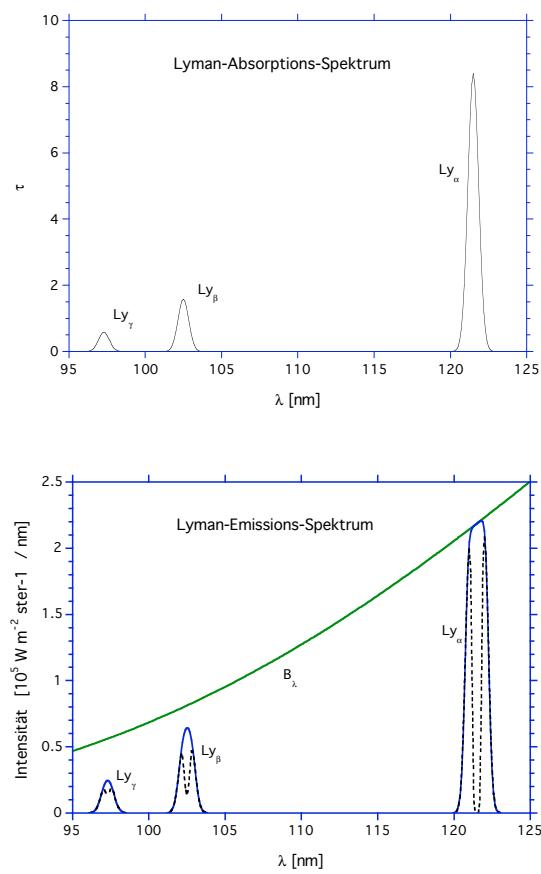
mit der normierten Linienprofilfunktion $P(v)$ (d.h. $\int P(v) dv = 1$), die sich aufgrund verschiedener Effekte (Strahlungsdämpfung, Dopplerverbreiterung, Druckverbreiterung etc.) einstellt. Die *Einstein-Koeffizienten* für spontane Emission A_{21} sowie für stimulierte Absorption B_{12} und Emission B_{21} sind wie folgt miteinander verknüpft: $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ und $A_{21} = 2h v^3 c^{-2} B_{21}$. Setzen wir dies in Gl.(2.10) ein und berechnen die Quellfunktion, so ergibt sich

$$S_v = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\frac{g_1 n_2}{g_2 n_1}}{1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1}} \quad (2.11)$$

Haben wir eine Boltzmann-Besetzung entsprechend Gl. (2.1), so geht dies in die Gl. (2.5) über. Sind also die Elektronenstoßraten in den Reaktionen A und B hinreichend hoch, so wird $S_v = B_v$ auch dann noch gelten, wenn sich die Strahlung selbst nicht mehr durch die Planck-Funktion beschreiben lässt. Die Gleichung (2.9) ist somit die wichtige LTE-Beziehung für die Strahlung. Die Intensität gewinnt man mit ihrer Hilfe durch Lösung der Strahlungstransportgleichung (2.8). Diese Differentialgleichung lässt sich für eine Schicht mit konstanter Temperatur sofort lösen und führt mit der Anfangsbedingung $I_v(x=0) = 0$ auf

$$I_v(x) = B_v(1 - e^{-\tau_v}) = \begin{cases} \tau_v B_v = \epsilon_v x & \text{falls } \tau_v \ll 1 \text{ (optisch dünn)} \\ B_v & \text{falls } \tau_v \gg 1 \text{ (optisch dick)} \end{cases} \quad (2.12)$$

Damit wächst die Intensität zunächst proportional zur Emissivität und der Schichtdicke an. Bei großer optischer Dicke aber tritt Sättigung ein, und die Intensität nähert sich asymptotisch der Strahlungsleistung des schwarzen Körpers.



In der Nähe der Resonanzlinien ist κ_v sehr groß, so daß dort in vielen Fällen $I_v = B_v$ erreicht wird. Anders dagegen im kontinuierlichen Bereich des Spektrums, das von Frei-Frei- und den Frei-Gebunden-Übergängen gebildet wird. Hier ist der Absorptionskoeffizient sehr klein, und die Strahlungsintensität ist damit auch viel geringer als bei einem schwarzen Körper. Diese Verhältnisse sind in der Abb. 2.1 veranschaulicht.

Abb. 2-1: Berechnetes Spektrum der Lyman-Serie des Wasserstoffs. Oben: die optische Tiefe $\tau_\lambda = \int \kappa_\lambda dx$ als Funktion der Wellenlänge. Die drei Linien Ly_α , Ly_β , Ly_γ sind durch den Dopplereffekt verbreitert (aus Gründen der Darstellung übertrieben stark, $\Delta\lambda_D = 0,5 \text{ nm}$). Unten: Das Emissionsspektrum nach Gl. (2.12). Ly_α schmiegt sich im Linienzentrum bereits an die Kirchhoff-Planck-Funktion B_λ ($T_e = 1 \text{ eV}$) an. Bei vorgelagerter kalter Schicht (gleiche Dicke mit $T_e = 0,5 \text{ eV}$, $\Delta\lambda_D = 0,1 \text{ nm}$) kommt es zur Selbstumkehr der Linien (gepunktet).

außen hin durch eine kältere Zone begrenzt. In dieser vorgelagerten Zone ist die Verbreiterung der Linien (Druck- und Dopplerverbreiterung) gewöhnlich geringer. Es kommt daher zu einer weiteren Absorption im Linienzentrum, die sich als scharfe Einsattelung bemerkbar macht. Man spricht in solchen Fällen von einer *Selbstumkehr* der Linien. Wir können diesen Effekt leicht demonstrieren, indem wir die Gl. (2.8) für zwei homogene Schichten mit den Temperaturen $T_1 > T_2$ und Linienbreiten $\Delta\nu_1 > \Delta\nu_2$ lösen. Das Ergebnis lautet in diesem Fall

$$I_v = B_{\nu_2}(1 - e^{-\tau_{\nu_2}}) + I_{\nu_1} e^{-\tau_{\nu_2}} = B_{\nu_2}(1 - e^{-\tau_{\nu_2}}) + B_{\nu_1}(1 - e^{-\tau_{\nu_1}})e^{-\tau_{\nu_2}}. \quad (2.13)$$

Ein berechnetes Beispiel für diese Selbstumkehr ist in der Abb. 2.1 dargestellt (gepunktet). Stellt die Hintergrundintensität I_{vi} bereits ein Kontinuum dar, so kommt es zu dunklen Absorptionslinien auf hellem Grund. Dies ist auch die Erklärung für die bekannten *Fraunhofer-Linien* im Sonnenspektrum: Die in den tieferen Zonen der Sonne produzierte Strahlung wird im Bereich der kühleren Chromosphäre von den Atomen absorbiert und in den Raumwinkel 4π reemittiert; die Intensität in radialer Ausstrahlungsrichtung nimmt damit in der spektralen Umgebung der Resonanzlinien ab.

Eine experimentelle Beobachtung zeigt die Abb. 2.2 für die im VUV-Bereich liegende Linie $\text{Ly}\alpha$. Diese Linie ist so stark, daß gewöhnlich die natürlichen Verunreinigungen der Gase an Wasserstoff ausreichen, um sie optisch dick in Erscheinung treten zu lassen. Bei Elektronendichten oberhalb von etwa 10^{20} m^{-3} überwiegt – wie in der Abb. 2-1 – häufig die Druckverbreiterung auf Grund des Stark-Effekts (Ursache ist das von den Plasmateilchen hervorgerufene, zeitlich schwankende, elektrische Mikrofeld am Aufpunkt des Atoms) gegenüber der Dopplerverbreiterung der Linien.

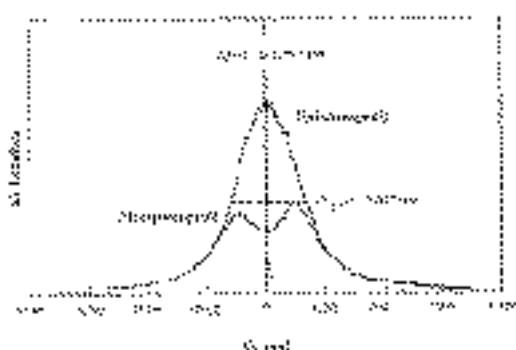


Abb. 2-2: Messung des Profils der Wasserstofflinie $\text{Ly}\alpha$ in einer Argon-Bogenentladung mit sehr geringem H-Zusatz ($n_e = 7,2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $T = 12\,200 \text{ K}$). Bei H-Zusatz in vorgelagerter kalter Randzone brennt sich ein Absorptionsprofil in das ursprüngliche Emissionsprofil (optisch dünn) ein.

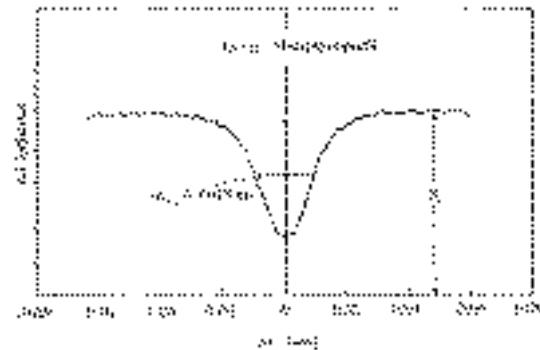


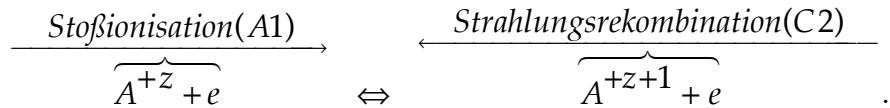
Abb. 2-3: Wie unter Abb. 2-2, aber mit erhöhtem H-Zusatz (optisch dick). Es bildet sich ein Schwarzkörper-Plateau mit einem Absorptionsprofil aus. (n. G. Fussmann, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 15, 791-809, (1974)).

2.4. Nicht-LTE-Gleichgewichte

Mit abnehmender Stoßrate (d.h. abnehmender Dichte oder zunehmender Temperatur) wird zunächst die Kopplung zwischen den leichten Elektronen und den schweren Ionen geringer und es kommt gewöhnlich zu einem Auseinanderlaufen der Elektronen- und Ionentemperatur. Dies geschieht insbesondere dadurch, daß die Energieeinkopplung (z.B. durch die im Plasma fließenden Ströme: *ohmsche Heizung*) oder auch Verluste (Strahlung oder Transport) i.a. nicht symmetrisch für den Elektronen- und Ionenkanal ist. Innerhalb des Elektronengases wie auch des Ionengases ist jedoch die Stoßrate um den Faktor $m_z/m_e > 1836$ bzw. $(m_z/m_e)^{1/2} > 43$ höher als die Energieübertragungsrate zwischen Elektronen und Ionen, so daß der Temperaturbegriff seine – wengleich eingeschränkte – Sinnhaftigkeit behält. Um den unterschiedlichen Temperaturen Rechnung zu tragen, haben wir in den Gleichungen (2.1) und (2.2) sogleich die hierfür relevante Elektronentemperatur T_e eingetragen. Bei der Maxwell-Verteilung dagegen kommen beide Werte T_e und T_i und möglicherweise sogar unterschiedliche Temperaturen für Ionen mit stark verschiedenen Massen in Betracht.

Mit weiter abnehmender Stoßrate der Elektronen brechen die detaillierten Bilanzen der Reaktionen A und B zusammen und zusätzlich zu den Gleichungen IV. und V. verlieren die Gleichungen I. und II. ihre Gültigkeit. Wir erhalten ein *nicht-thermisches Plasma*. Der kritische Prozeß ist hierbei die *Dreier-Stoßrekombination* (A2), bei der zwei Elektronen und ein Ion involviert sind. Da hierbei immer drei Teilchen sehr nahe zusammenkommen müssen, wird dieser Prozeß mit abnehmender Dichte immer unwahrscheinlicher. Grundsätzlich ist jede Prozeßrate proportional zum Produkt der

beteiligten Dichten. Die Dreier-Stoßrekombination ist damit proportional zu $n_e^2 n_{z+1}$. Auch in der Reaktion C2. steht auf der rechten Seite ein Rekombinationsprozeß, die zur Photoionisation inverse *Strahlungsrekombination*. Hier ist die Rekombinationsrate nur proportional zu $n_e n_{z+1}$. Es liegt auf der Hand, daß mit abnehmender Elektronendichte dieser Prozeß an Bedeutung gewinnt. Umgekehrt verliert die *Photoionisation* (C1) mit abnehmender Dichte sehr schnell an Bedeutung im Vergleich zur (Zweier-*Stoßionisation* (A1), da die Photonendichte wegen der entweichenden Photonen (keine Wände bzw. schlechte Reflexion im VUV¹⁰ und Röntgengebiet) rasch abnimmt. Bei sehr kleiner Dichte stellt sich daher ein Gleichgewicht zwischen der Stoßionisation und der Strahlungsrekombination ein. Da es zunächst für die Beschreibung der Verhältnisse in der Sonnenkorona entwickelt wurde, nennt man dieses Gleichgewicht das **Corona-Ionisationsgleichgewicht**



Es spielt sowohl in den Sternatmosphären als auch bei den dünnen heißen Plasmen der Kernfusionsexperimente eine entscheidende Rolle. Sind $S_z(T_e) = \langle \sigma_{z,\text{ion}} v_e \rangle$ und $\alpha_z(T_e) = \langle \sigma_{z,\text{rek}} v_e \rangle$ die entsprechenden *Ratenkoeffizienten* für Ionisation und Rekombination der Z-fach geladenen Ionen, so hat man folgende *Ratengleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{dn_0}{dt} &= -S_0 n_e n_0 + \alpha_1 n_e n_1, \quad (\text{neutrale Atome: } Z = 0) \\ \frac{dn_z}{dt} &= -S_z n_e n_z - \alpha_z n_e n_z + \alpha_{z+1} n_e n_{z+1} + S_{z-1} n_e n_{z-1}, \quad (\text{Ionen: } 0 < Z < Z_{\text{Kern}}) \\ \frac{dn_{z_{\text{Kern}}}}{dt} &= -\alpha_{z_{\text{Kern}}} n_e n_{z_{\text{Kern}}} + S_{z_{\text{Kern}}-1} n_e n_{z_{\text{Kern}}-1}, \quad (\text{voll ionisierte Atome: } Z = Z_{\text{Kern}}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Im Gleichgewichtsfall, wenn alle zeitlichen Ableitungen verschwinden, hat man für $0 \leq Z \leq Z_{\text{Kern}}$ die allgemeine Lösung (Beweis durch Induktion)

$$\frac{n_{z+1}}{n_z} = \frac{S_z}{\alpha_{z+1}}. \quad (2.15)$$

Da alle Prozesse proportional zur Elektronendichte sind, ist die Gleichgewichtsverteilung hiervon unabhängig und nur noch eine Funktion der Elektronentemperatur. Allerdings müssen zur Berechnung dieses Gleichgewichtes alle Ratenkoeffizienten S_z und α_z für das betrachtete Element bekannt sein. Es ist eine Aufgabe der Atomphysik, diese zu bestimmen. Zumeist geht man von den berechneten Wirkungsquerschnitten $\sigma_{z,\text{ion}}(v_e)$ und $\sigma_{z,\text{rek}}(v_e)$ aus, die Funktionen der Elektronengeschwindigkeit sind (die Ionengeschwindigkeit ist demgegenüber vernachlässigbar). Die Ratenkoeffizienten ergeben sich hieraus durch Mittelung über die Maxwell-Verteilung der Elektronen. Für die Ionisation sind im wesentlichen die schnellen Elektronen aus dem Schwanz der Verteilungsfunktion wichtig, während zur Strahlungsrekombination insbesondere die langsamen Elektronen beitragen.

Mit der Gl. (2.15) haben wir eine wichtige analytische Lösung des Ionisationsgleichgewichtes gefunden, die für geringe Elektronendichten Gültigkeit erlangt. Auch für den Fall sehr hoher Dichten existiert mit der im folgenden zu betrachtenden Saha-Gleichung eine derartige analytische Lösung, die allerdings einen ganz anderen Typus hat. Für alle mittleren Dichten ist man dagegen auf numerische Lösungen der zugrundeliegenden Ratengleichungen angewiesen.

¹⁰ Der normale (in Luft transparente) ultraviolette Bereich (UV) hat nur eine geringe Breite 200 nm < λ < 400 nm. Dagegen ist der ausgedehnte Vakuum-UV-Bereich (VUV) 10 nm < λ < 200 nm im allgemeinen von wesentlich größerer Bedeutung.

2.5. Das Saha-Ionisationsgleichgewicht

Wir wollen nun die im Abschnitt 2.1 bereits angegebene Saha-Gleichgewichtsformel ableiten. Analog zu den im vorgehenden Abschnitt betrachteten Ratengleichungen ist zunächst klar, daß das detaillierte Gleichgewicht der Reaktion A durch eine Ratengleichung der Art

$$S_z n_e n_z = \beta_{z+1} n_e^2 n_{z+1} \quad (2.16)$$

beschrieben werden kann, wobei die Ratenkoeffizienten für Ionisation S_z und Dreier-Stoßrekombination β_z wiederum nur Funktionen der Elektronentemperatur sind. Wir können daher die Gleichung (2.16) auch in die Form

$$\frac{n_e n_{z+1}}{n_z} = \frac{S_z}{\beta_z} = K(T_e) \quad (2.17)$$

bringen, die auf der linken Seite bereits die Struktur der Gl. (2.2) hat. Diese Gleichung kann man auch als das aus der Chemie bekannte *Massenwirkungsgesetz* für die Reaktion A auffassen. Die auf der rechten Seite auftretende Reaktionskonstante K wird aber für verschiedene Temperaturen unterschiedlich sein; sie ist mithin eine Temperaturfunktion, die sich prinzipiell aus den Ratenkoeffizienten für Ionisation und Rekombination berechnen läßt. Gewöhnlich geht man jedoch umgekehrt vor, indem man $K(T_e)$ mit Hilfe der Thermodynamik oder der statistischen Mechanik berechnet. Hat man auf diese Weise die Funktion $K(T_e)$ bestimmt, so kann man das detaillierte Gleichgewicht dazu benutzen, einen unbekannten Ratenkoeffizienten aus dem bekannten Koeffizienten für den inversen Prozeß zu berechnen. Im vorliegenden Fall kann man beispielsweise $S_z(T_e)$ als Reaktion zwischen zwei Teilchen mit Hilfe der Quantenmechanik berechnen. Dagegen ist der Ratenkoeffizient $\beta_z(T_e)$ für den wesentlich komplizierteren Prozeß der Dreier-Stoßrekombination direkt nur sehr schwierig zu berechnen. Er läßt sich aber über die detaillierte Bilanz sehr einfach aus $\beta_z(T_e) = S_z(T_e)/K(T_e)$ gewinnen.

Wie kommt man nun dahin, daß die Temperaturfunktion $K(T_e)$ die in Gl. (2.2) angegebene Form hat? Dazu müssen wir zunächst auf die Boltzmann-Beziehung Gl. (2.1) zurückgehen. Ihre grundlegende Aussage besteht darin, daß ein Elektronengas mit der Temperatur T_e bei Wechselwirkung mit einem Atom schließlich zu einer Gleichgewichtsbesetzung der atomaren Energieniveaus E_k führt, so daß die Besetzungswahrscheinlichkeit proportional zu $\exp(-E_k/k_B T_e)$ ist. Im Normalfall sind jedoch die atomaren Energieniveaus E_k nicht alle getrennt, sondern es fallen jeweils g_k zusammen¹¹. Diese Erscheinung wird als *energetische Entartung* bezeichnet. Die *statistischen Gewichte* g_k entsprechen demnach dem *Entartungsgrad* der Niveaus. Seien nun $n_{z,1}$ und $n_{z+1,1}$ die Dichten der Ionen in den Grundzuständen (zweiter Index 1) mit den statistischen Gewichten $g_{z,1}$ und $g_{z+1,1}$. Diese Niveaus unterscheiden sich energetisch um die Ionisationsenergie $\chi_z = E_{z+1,1} - E_{z,1}$. Ferner seien $dN_e(E)$ und $g_e(E)$ die entsprechenden Teilchenzahlen und das statistische Gewicht der freien Elektronen im Energieintervall $E \dots E + dE$. Die Wahrscheinlichkeiten, diese Teilchen vorzufinden, sind dann der Reihe nach proportional zu $g_{z,1}$, $g_{z+1,1} \exp(-\chi_z/k_B T_e)$ sowie $g_e(E) \exp(-E/k_B T_e) dE$. Für den Quotienten der linken Seite in Gl. (2.14) erhalten wir somit

$$\frac{n_{z+1,1}}{n_{z,1}} dN_e(E) = \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}} g_e(E) e^{-\frac{E}{k_B T_e}} dE. \quad (2.18)$$

Um die Gesamtdichte der Elektronen n_e zu erhalten, müssen wir diese Gleichung über alle Energien $E = 0 \rightarrow \infty$ integrieren. Dazu benötigen wir aber die *Entartungsdichte* $g_e(E)$ für ein freies Elektron.

¹¹ Allgemein hat ein Term vom Typ $^{2S+1}L_J$ den Entartungsgrad $2J + 1$. Häufig ist die Feinstrukturaufspaltung sehr klein im Vergleich zu $k_B T_e$. In diesen Fällen kann man das gesamte Multiplett als energetisch entartet betrachten. Der Entartungsgrad beträgt dann $g = \Sigma(2J+1) = (2S+1)(2L+1)$. Beispiele: He^0 (Grundzustand 1S_0) $\rightarrow g = 1$; He^+ (Grundzustand 2S_0) $\rightarrow g = 2$; Fe^0 (Grundzustandsterm 5D) $\rightarrow g = 5 \cdot 5 = 25$; Fe^+ (Grundzustandsterm 6D) $\rightarrow g = 6 \cdot 5 = 30$. Beim Wasserstoffatom ($S = 1/2$) sind auch die Terme mit gleichem Bahndrehimpuls entartet: jeder ist $2(2L+1)$ -fach. Damit hat man $g_n = \Sigma_0^{n-1} 2(2L+1) = 2n^2$.

Da diese Größe auch in anderen Bereichen der Physik von grundsätzlicher Bedeutung ist, gehen wir auf die Ableitung genauer ein.

Die energetische Entartungsdichte $g_e(E)$ bestimmt sich unter Beachtung der *de Broglie-Relation* $p = h/\lambda$ (bzw. $\vec{p} = \hbar\vec{k}$). Jedes Elektron mit dem Impuls \mathbf{p} verhält sich wie eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda_{\text{Brogli}} = h/p$ bzw. dem Wellenvektor $\vec{k} = \vec{p}/\hbar = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$. Steht also ein Volumen ein Würfel mit der Kantenlänge L zur Verfügung, so kann die de Broglie-Wellenlänge nicht beliebig sein, sondern darf nur ganz bestimmte Werte annehmen, so daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons an den Begrenzungsflächen zu Null wird. Für ein Elektron, das sich beispielsweise in x -Richtung bewegt, muß L ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda_{\text{Brogli}}/2$ sein, damit an den Grenzen $x = 0$ und $x = L$ immer ein Knoten der Wellenfunktion vorliegt. Im dreidimensionalen Fall ergeben sich die drei Bedingungen $k_x L = n_x \pi$, $k_y L = n_y \pi$, $k_z L = n_z \pi$, wobei n_x, n_y, n_z ganze, positive Zahlen¹² sein müssen. Das Quartett (n_x, n_y, n_z, m_s) bildet einen Satz von *Quantenzahlen*, der nach dem *Pauli-Prinzip* für jedes Elektron verschieden sein muß. Die *Spinquantenzahl* m_s kann aber nur die zwei Werte $+1/2$ und $-1/2$ annehmen, so daß auf jedes unterschiedliche Triplet (n_x, n_y, n_z) genau zwei Elektronen kommen können. Mit Hilfe der de Broglie-Beziehung $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ können wir auch die kinetische Energie durch diese Quantenzahlen ausdrücken

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_e} = \frac{(\hbar\pi/L)^2}{2m_e} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\hbar^2}{8m_e L^2} n^2. \quad (2.19)$$

In den Fällen, in denen die Summe der Quadrate $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ den gleichen Wert liefert, ergibt sich die gleiche Energie – es liegt also Entartung vor. Der niedrigste Energiezustand mit $(n_x, n_y, n_z) = (1,1,1)$ ist demnach $E_1 = 3 \hbar^2/(8m_e L^2)$; er ist einfach. Der zweitniedrigste $E_2 = 2 E_1$ hat die Quantensätze $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ und $(2,1,1)$ und ist folglich dreifach. Insgesamt sind die Verhältnisse für niedrige Quantenzahlen ziemlich unsystematisch, wie aus der Tabelle 2-1 hervorgeht.

Energie	Quantensätze	Entartungsgrad (ohne Spin)
E_1	$(1,1,1)$	1
$2 E_1$	$(2,1,1) (1,2,1) (1,1,2)$	3
$3 E_1$	$(2,2,1) (2,1,2) (1,2,2)$	3
$11/3 E_1$	$(3,1,1) (1,3,1) (1,1,3)$	3
$4 E_1$	$(2,2,2)$	1
$14/3 E_1$	$(1,2,3) (3,2,1) (2,1,3)$ $(1,3,2) (3,1,2) (2,3,1)$	6

Tabelle 2-1: Die unteren Energiebesetzungen und Entartungsgrade für ein Würfenvolumen

Da aber die Gesamtzahl der Elektronen, mit denen man es zu tun hat, immer sehr groß ist (10^{10} und mehr), ist auch die überwiegende Menge der Quantenzahlen sehr groß. Hierdurch wird die Berechnung des Entartungsgrades sehr erleichtert. Geben wir uns ein Energieintervall $E \dots E + dE$ vor, so liegen nach Gleichung (2.19) die entsprechenden Quantenzahlen innerhalb einer Kugelschale mit den Radien $n \dots n + dn$. Genauer liegen sie in einer Schale eines Kugeloktanten, da alle drei Quantenzahlen n_x, n_y, n_z positiv sind. Das Volumen einer solchen Oktandenschale beträgt $4\pi n^2 dn/8$. Dieses dimensionslose Volumen ist gleichzeitig die Entartungszahl $g_n dn$, da ja in diesem Quantenraum jeder Zustand das Volumen 1 einnimmt¹³. Unter Berücksichtigung des Faktors 2 für den Spin ergibt sich dann für den Entartungsgrad $g(E) dE = 2 g_n dn = \pi n^2 dn$, was mit Gl. (2.19) und $V = L^3$ auf die wichtige Beziehung

¹² In einem solchen idealen "Potentialtopf" werden die Teilchen an den Begrenzungsflächen reflektiert, so daß sich stehende Wellen ausbilden. Zu jedem Wert n_x existiert damit automatisch auch der Wert $-n_x$. Beim Abzählen der Zahl der Zustände muß man daher diese negativen Quantenzahlen weglassen.

¹³ Dem Zustand (n_{x0}, n_{y0}, n_{z0}) entspricht im Quantenraum mit den Koordinaten n_x, n_y, n_z ein Würfel $(n_{x0} - 1/2 < n_x < n_{x0} + 1/2; n_{y0} - 1/2 < n_y < n_{y0} + 1/2; n_{z0} - 1/2 < n_z < n_{z0} + 1/2)$ mit dem Volumen 1.

$$g(E)dE = \frac{8\pi V(2m_e^3)^{1/2}}{h^3} \sqrt{E} dE \quad (2.20)$$

führt, die wir auch als Entartungsdichte im Impulsraum ausdrücken können¹⁴

$$g(p) = g(E) \frac{dE}{dp} = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 \quad (2.21)$$

Der letzte Ausdruck ist in manchen Betrachtungen von Vorteil. Man kann ihn z.B. unmittelbar auf Photonen übertragen und erhält dann aufgrund der Beziehung $p_{\text{Ph}} = h v / c$ sofort die bedeutsame Relation $g(v) dv = 8\pi V c^3 v^2 dv$ für die Dichte im Frequenzraum.

Die Größe $g(E)/V = dn_e/dE$ gibt die mit dem Pauli-Prinzip verträgliche maximale Zahl der Teilchen pro Volumen- und Energieeinheit an. Integrieren wir sie über die Energie, so erhalten

$$\begin{aligned} n_e &= \int_0^{E_F} \frac{8\pi(2m_e^3)^{1/2}}{h^3} \sqrt{E} dE = \frac{16\pi(2m_e^3)^{1/2}}{3h^3} E_F^{3/2} \text{ bzw.} \\ E_F &= \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (2.22)$$

wir eine Grenzenergie E_F die uns bereits im Kapitel 1 als *Fermi-Energie* begegnet ist. Der Verlauf der Energiedichte dn_e/dE als Funktion der Energie E ist in der Abb. 2-4 (oben) wiedergegeben. In den Festkörpern mit guter elektrischer Leitfähigkeit beträgt die Fermi-Energie typisch einige eV und ist damit immer sehr hoch im Vergleich zur thermischen Energie $3/2 k_B T$. Dies hat zur Folge, daß auch bei endlicher Temperatur die Energie der meisten Elektronen bereits durch das Pauli-Prinzip festgelegt ist. Wie man der Abb. 2-4 (oben) entnimmt, gibt es nur in der Nähe der *Fermi-Kante* $E = E_F$ eine Abweichung von der Relation (2.20), die streng für $T = 0$ gilt. Eine genauere Ableitung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, führt auf die in der Festkörperphysik und für manche Sterne ("Weiße Zwerge") so bedeutsame *Fermi-Verteilung* ¹⁵

$$\frac{dn_e}{dE} = \frac{g(E) / V}{F(E)} = \frac{8\pi(2m_e^3)^{1/2} h^{-3} \sqrt{E}}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) + 1}, \quad (2.23)$$

wobei μ , das chemische Potential, durch die Bedingung $n_e = \int_0^{\infty} (dn_e/dE) dE$ festgelegt wird. Für $k_B T_e \ll E_F$ ergibt sich $\mu \approx E_F$. Man beachte, daß dann der Nenner in Gl. (2.23) bei $E = E_F$ von 1 nach ∞ springt. In den Plasmen dagegen ist in der Regel die Dichte wesentlich geringer und die Temperatur drastisch höher als im Festkörper, so daß $E_F \ll k_B T_e$. Das chemische Potential wird dann negativ und ergibt sich zu

$$\mu = -kT \ln\left(\frac{2n_Q}{n_e}\right); \quad \text{mit } n_Q = \left(\frac{2\pi m_e k_B T_e}{h^2}\right)^{3/2}. \quad (2.24)$$

Die Größe n_Q wird als Quantenkonzentration bezeichnet. Die Gleichung (2.23) geht unter diesen Bedingungen in die Verteilung

¹⁴ Dies kann man auch so ausdrücken: Ein Elektron nimmt im Phasenraum das Volumen $\Delta\tau = (\Delta x \Delta y \Delta z) (\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z) = h^3/2$ ein. Man hat allgemein $g(p) dp = g_s 4\pi V p^2 / h^3$ mit $g_s = 2$ für Elektronen, Protonen und Neutronen (Spin $1/2$), und ebenso für Photonen (Spin 1, zwei Polarisationsrichtungen bzw. Helizitäten) aber $g_s = 1$ für Neutrinos (Spin $1/2$, eine Helizität).

¹⁵ Bei der Bose-Verteilung tauscht sich im Nenner lediglich +1 gegen -1 aus.

$$f(E) dE = n_e \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi} (k_B T_e)^{3/2}} e^{-\frac{E}{k_B T_e}} dE \quad (2.25)$$

über, was nichts anderes als die Boltzmann-Verteilung ist. Diese Energieverteilung des idealen Plasmas, die umgerechnet auf Geschwindigkeiten als *Maxwell-Verteilung* bezeichnet wird, ist in der Abb. 2-4 (unten) dargestellt. Die nach dem Fermi-Prinzip mögliche Besetzungsichte $g(E)$ wird hierbei nur im Bereich subthermischer Energien $E \ll k_B T_e$ erreicht, ansonsten jedoch weit unterschritten.

Nach diesen Gültigkeitsbetrachtungen kehren wir nun zur Gl. (2.18) zurück, setzen hierin den Ausdruck (2.20) ein und integrieren über die Energie

$$\frac{n_{z+1,1}}{n_{z,1}} \frac{N_e}{V} = \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}} \frac{8\pi(2m_e^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^\infty \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T_e}} dE \quad (2.26)$$

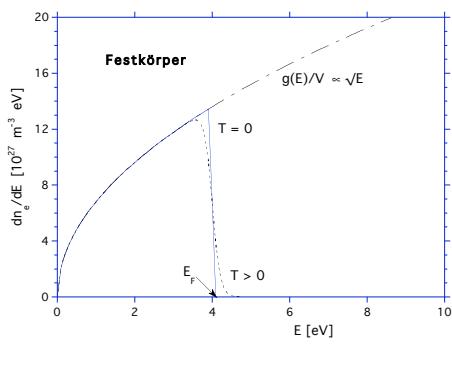
Das Integral auf der rechten Seite ergibt $1/2 \pi^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}$, so daß wir schließlich die *Saha-Gleichung* erhalten

$$\frac{n_{z+1,1} n_e}{n_{z,1}} = \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} \frac{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}}. \quad (2.27)$$

Die Größe $(2\pi m_e T_e)^{3/2} h^3$ entspricht dem Volumen eines Würfels in den Abmessungen der de Broglie-Wellenlänge eines thermischen Elektrons. Drücken wir die Temperatur in eV aus, so ergibt sich

$$\frac{n_{z+1,1} n_e}{n_{z,1}} = \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} T_e^{3/2} e^{-\frac{\chi_z}{T_e}} 6,04 \cdot 10^{27} m^{-3}. \quad (2.28)$$

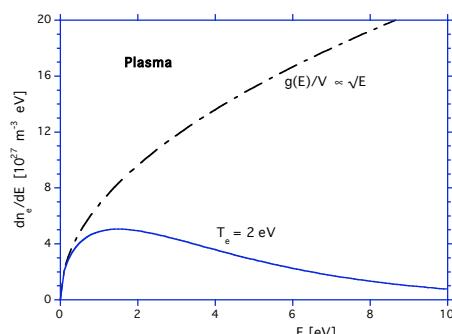
Häufig findet man die Saha-Gleichung in etwas anderer Form dargestellt, indem anstelle der Grundzustandsdichten die Gesamtionendichten angeben werden. Dies erfordert eine Summation über alle diskreten Besetzungszustände



$$n_z = \sum_k n_{z,k} = \frac{n_{z,1}}{g_{z,1}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} g_{z,k} e^{-\frac{E_{z,k} - E_{z,1}}{k_B T_e}}. \quad (2.29)$$

Abb. 2-4: Elektronenverteilungsfunktionen als Funktion der Energie.

Oben : Fermi-Verteilung im Festkörper mit $E_F = 4 \text{ eV}$. Die Verteilung ist weitgehend durch die Entartungsdichte $g(E) / V$ festgelegt.



Unten : Maxwell-Verteilung für ein ideales Plasma mit $k_B T_e = 2 \text{ eV}$. Nur für $E \ll k_B T_e$ schmiegt sich die Verteilung an die Entartungsdichte an.

Hier taucht mit

$$Q_z(T_e) := \sum_{k=1}^{k_{\max}} g_{z,k} e^{-\frac{E_{z,k} - E_{z,1}}{k_B T_e}} \quad (2.30)$$

die in der statistischen Mechanik so wichtige *Zustandssumme* auf. Mit ihrer Hilfe ergibt sich dann anstelle von Gl. (2.28) die Beziehung

$$\frac{n_{z+1} n_e}{n_z} = \frac{Q_{z+1}}{Q_z} \frac{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}}. \quad (2.31)$$

In vielen Fällen ist aber kein großer Unterschied zwischen dieser Gleichung und Gl. (2.27), da oft die Grundzustandsdichte in guter Näherung mit der Gesamtdichte zusammenfällt. Dies ist insbesondere bei Wasserstoff und Helium der Fall, da hier die angeregten Niveaus sehr hoch über dem Grundzustand liegen und nur schwach besetzt sind. Anders sind die Verhältnisse bei den Alkali- und Erdalkali-Elementen sowie bei Si, Ti, V, Cr, Fe, Ni ...u.a., die nahe zum Grundzustand angeregte Niveaus besitzen. Diese sind typischerweise bis zu 30 % besetzt, so daß die Zustandssumme wichtig wird.

Mit Hilfe der Saha-Gleichung allein lassen sich die Teilchendichten bzw. der Ionisationsgrad eines Plasmas noch nicht berechnen, da auf der linken Seite der Gl. (2.31) drei Dichten auftreten. Man benötigt daher immer noch zusätzliche Informationen. Betrachten wir beispielsweise den einfachen Fall der Ionisation eines H-Plasmas. Die Gleichung (2.27) lautet in diesem Fall

$$\frac{n_i n_e}{n_0} = \frac{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_H}{k_B T_e}} \quad (2.32)$$

mit $\chi_H = 13,6$ eV. Aufgrund der Quasineutralität haben wir zunächst $n_e = n_i$. Darüber hinaus brauchen wir aber noch eine weitere Gleichung. Sind beispielsweise das Volumen und die Gesamtzahl der Teilchen, also die Gesamtdichte $n_g = n_0 + n_e$ festgelegt, so ergibt sich für den *Ionisationsgrad*¹⁶ $X := n_e / (n_0 + n_e)$ die Gleichung

$$\frac{X^2}{1-X} = \frac{Q_{z+1}}{Q_z} \frac{2(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_H}{k_B T_e}} \frac{(k_B T_e)^{3/2}}{n_g} = R_1 \quad (2.33)$$

Der Ionisationsgrad ist also hier nicht nur eine Funktion der Temperatur, sondern hängt zusätzlich noch von der Gesamtdichte ab. X erhält man somit aus der Lösung einer quadratischen Gleichung mit dem Parameter R_1 .

Etwas anders sind die Verhältnisse in den Sternatmosphären. Hier ist Wasserstoff das dominierende Element und liefert praktisch alle Elektronen. Die Elektronendichte lässt sich aus der Druckverbreiterung von Spektrallinien (insbesondere der Balmer-Linien H_α und H_β) bestimmen; die Elektronentemperatur kann man beispielsweise aus den Intensitätsverhältnissen der Linien eines geeigneten Elements (u.U. Atom zu Ionenlinien) ermitteln. Somit ist der Elektronendruck bekannt, und wir können die Gl. (2.31) in die Form

$$\frac{X}{1-X} \approx \frac{n_{z+1}}{n_z} = \frac{Q_{z+1}}{Q_z} \frac{2(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}} \frac{(k_B T_e)^{5/2}}{p_e} = R_2 \quad (2.34)$$

¹⁶ Zum Unterschied wird der Quotient $Y = n_e / n_0$ als *Ionisationsverhältnis* bezeichnet. Man beachte, daß X immer im Bereich $[0,1]$ liegt, während Y beliebig groß werden kann.

bringen. Das Verhältnis der Dichten zweier aufeinander folgender Ionisationsstufen eines Elementes ist damit eine Funktion der zwei Variablen T_e und p_e . Kann man Mehrfach-Ionisation vernachlässigen, so ist dieser Quotient mit dem Ionisationsgrad durch $R_2 = X/(1-X)$ bzw. $X = R_2/(1+R_2)$ verknüpft.

Mit Hilfe dieser Beziehung konnte Saha erstmals einige Beobachtungen in den Sternspektren deuten. So erklärt sich das relativ starke Auftreten der Linien der einfach ionisierten Ionen, relativ zu dem der Neutralen bei den "roten Riesensternen", im Vergleich zu den Sternen der sogenannten "Hauptreihe" aus dem niedrigen Elektronendruck dieser Sterne.

Schließlich ist bei Laborplasmen mit hoher Dichte häufig der Gesamtdruck $p = k_B \sum T_a n_a$ bekannt und alle Temperaturen gleich ($T_e = T_i = T_0$). Dies ist insbesondere bei an Luft betriebenen Bögen mit $p = p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$ der Fall. Sind außerdem zwei- und mehrfache Ionisation vernachlässigbar, so erhält man aus den Beziehungen $(n_e + n_i + n_0) = p/(k_B T)$, $n_e = n_i$, $X = n_e/(n_0 + n_e)$ die Relationen $n_e = p/(k_B T) X/(1+X)$ und $n_0 = p/(k_B T) (1-X)/(1+X)$. Die Saha-Gleichung lautet in diesem wichtigen Fall

$$\frac{X^2}{1-X^2} = \frac{Q_{z+1}}{Q_z} \frac{2(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_z}{k_B T_e}} \frac{(k_B T)^{5/2}}{p} = R_3 \quad (2.35)$$

woraus sich der Ionisationsgrad zu

$$X = \sqrt{\frac{R_3}{1+R_3}} \quad (2.36)$$

ergibt.

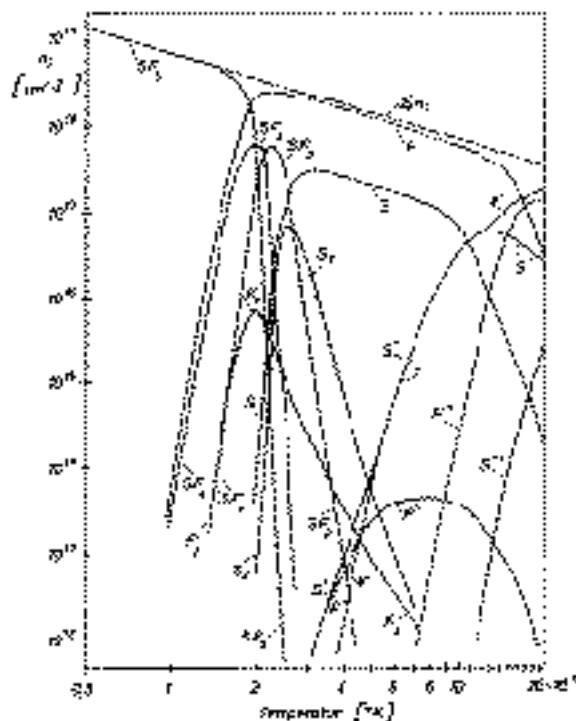


Abb. 2-5: Dissoziations- und Ionisations-gleichgewichte des SF_6 . (n. W. Frie, Z. f. Physik 210, 269-294 (1967)).

Liegen mehrere Elemente oder Ionensorten gleichzeitig vor, wie das bei der Ionisation von komplizierten Molekülen immer der Fall ist, so ergibt sich ein nicht-lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Dichten i.a. nur numerisch berechnen lassen. Treten n Ionensorten auf, so haben wir auch n Gleichungen vom Typ (2.31). Insgesamt haben wir jedoch mit den Elektronen und den Neutralen $n+2$ Teilchensorten. Wir brauchen also noch zwei zusätzliche Gleichungen, von denen eine die Quasineutralität und die andere gewöhnlich die Druckgleichung ist. Beispielsweise haben wir bei zweifacher Ionisation die vier Gleichungen $n_1 n_e = n_0 K_0(T)$, $n_2 n_e = n_1 K_1(T)$ und $n_e = n_1 + 2 n_2$, $p/kT = n_0 + n_e + n_1 + n_2$, aus denen die vier Dichten n_0 , n_1 , n_2 , n_e berechnet werden können. Ein bereits sehr kompliziertes Beispiel für ein

derartiges Gleichgewicht ist in der Abb. 2-5 für das in der Technik häufig benutzte Gas SF_6 (Schwefel-Hexafluorid) dargestellt. Hier kommt es zunächst bei Temperaturen von 1000 - 2000 K zur Dissoziation der Moleküle, die in Atome und andere Moleküle zerfallen. Aber erst bei Temperaturen oberhalb von 20000 K hat man ein vollständig ionisiertes Plasma, in dem nur noch Ionen und Elektronen vorkommen.

2.6. Saha-Boltzmann-Gleichgewichte

Wie bereits erwähnt, verliert mit abnehmender Stoßrate die Boltzmann-Relation für die Niveaubesetzung und als Folge hiervon auch die Saha-Gleichung ihre Gültigkeit. Die Stoßrate ist jedoch für die einzelnen Niveaus sehr unterschiedlich. Grundsätzlich hat man zwischen eng benachbarten Niveaus eine relativ hohe Stoßrate, während sie für große Energieabstände sehr klein werden kann. Alle Atome und Ionen sind jedoch für hohe Anregungszustände wasserstoffähnlich. Es gelten dann näherungsweise die folgenden Abhängigkeiten von der Hauptquantenzahl n und der Ladungszahl Z :

$$\begin{aligned} \text{Spontane Emission: } A_n &\sim Z^4 n^{-5} \\ \text{Ionisationsrate: } S_n &\sim Z^{-2} n^2 \\ \text{Stoßrate: } v_{n,n+1} &\sim Z^{-3} n^{4.5} \end{aligned} \quad (2.37)$$

In der Nähe der Seriengrenze ($n \rightarrow \infty$) werden die Lebensdauern der Niveaus sehr groß und rücken außerdem mit $\Delta E = E_{n+1} - E_n \sim n^{-3}$ zusammen. Es gibt also in der Nähe der Ionisationsenergie immer eine Verdichtung der Niveaus, so daß oberhalb einer gewissen Hauptquantenzahl – der *Stoßgrenze* n_{krit} – die Stoßraten dominant werden. In diesem Gebiet hoher Quantenzahlen wird die Boltzmann-Beziehung wieder gültig, und man spricht vom *partiellen lokalen thermodynamischen Gleichgewicht* (PLTE). Im Unterschied zum gewöhnlichen Boltzmann-Gleichgewicht sind nun aber die gebundenen Zustände nicht an die Grundzustandsdichte des Atoms (Ions), sondern an die Grundzustandsdichte des (nächst höheren) Ions gekoppelt. Diese Kopplung an die Ionen ergibt sich aufgrund eines Diffusionsprozesses im Quantenraum der hoch-gebunden und freien Zustände, dem die Elektronen infolge der Stöße unterliegen. Oberhalb der Stoßgrenze erhalten wir demnach die zu Gl. (2.27) analoge Beziehung

$$\frac{n_{z+1,1} n_e}{n_{z,k}} = \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,k}} \frac{2(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{E_{z+1,1} - E_{z,k}}{k_B T_e}}; \text{ für } k > n_{krit}, \quad (2.38)$$

die als *Saha-Boltzmann-Gleichung* bezeichnet wird. Im Exponenten auf der rechten Seite steht hier die Ionisationsenergie für den angeregten Zustand $k > n_{krit}$. Diese Beziehung spielt sowohl in der Theorie als auch in der Praxis eine wichtige Rolle. So erlaubt sie bei numerischen Rechnungen zum Ratengleichgewicht die Reduktion auf einen endlichen Satz von Gleichungen, indem oberhalb der Stoßgrenze die Ergebnisse in die Saha-Boltzmann-Besetzung einmünden müssen.

In der praktischen Anwendung bei dünnen Plasmen benutzt man die Saha-Boltzmann-Gleichung zumeist in Kombination mit der Koronagleichung. Beobachtet man z.B. zwei Spektrallinien aus benachbarten Ionisationstufen, wobei in beiden Fällen das Anregungsniveau oberhalb der Stoßgrenze liegt, so erhält man (Gl. (2.38) wie geschrieben für Z, k sowie für $Z \rightarrow (Z - 1), k \rightarrow l$ und dann die erste Gleichung durch die zweite dividiert) für das Verhältnis der Besetzungsdichten den von der Elektronendichte unabhängigen Ausdruck

$$\frac{n_{z-1,l}}{n_{z,k}} = \frac{n_{z,1}}{n_{z+1,1}} \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} \frac{g_{z-1,l}}{g_{z,k}} e^{-\frac{\chi_{z,k} - \chi_{z-1,l}}{k_B T_e}}. \quad (2.39)$$

Der Exponentialfaktor auf der rechten Seite ist nahe bei 1, da die Differenz der Ionisationsenergien aus den angeregten Zuständen klein gegenüber $k_B T_e$ ist. Die wesentliche T_e -Abhängigkeit steckt in dem Verhältnis der Grundzustandsdichten, das nach der Koronagleichung (2.15) durch $n_{z,1}/n_{z+1,1} = \alpha_{z+1}(T_e)/S_z(T_e) = F(T_e)$ gegeben ist und als bekannt vorausgesetzt werden kann.

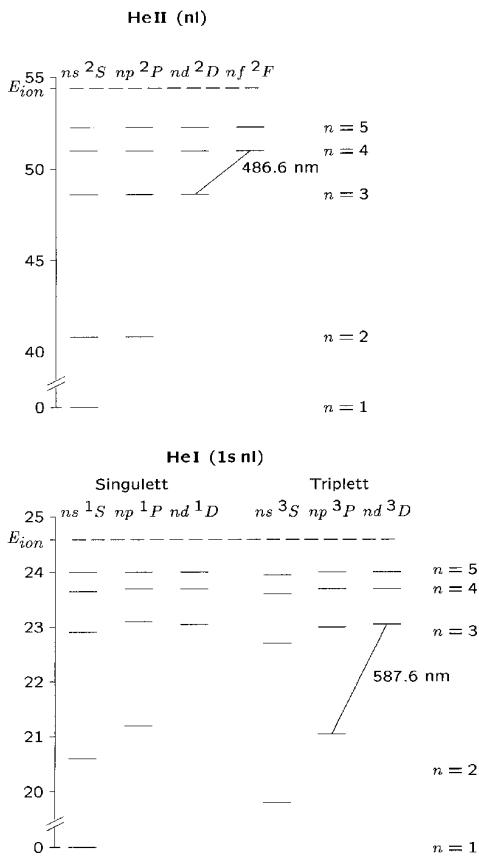


Abb. 2-6: Termschemata des neutralen (HeI) und des einfach ionisierten (HeII) Heliums. Eingezeichnet sind die Übergänge, die zur Temperaturmessung verwendet werden können.

Andererseits ist das Verhältnis der angeregten Zustandsdichten direkt proportional zum Verhältnis der Intensitäten. Die Intensität einer über die Strecke L integrierten Spektrallinie (in $\text{W m}^{-2} \text{ ster}^{-1}$) zum Übergang $l \rightarrow l'$ ist nämlich durch

$$I_{ll'} = \frac{E_{ll'}}{4\pi} A_{ll'} n_l L \quad (2.40)$$

gegeben, wobei $A_{ll'}$ die Übergangswahrscheinlichkeit für spontane Emission ist. Es ergibt sich damit die Beziehung

$$\frac{I_{z-1,ll'}}{I_{z,kk'}} = \frac{A_{ll'} v_{ll'}}{A_{kk'} v_{kk'}} \frac{g_{z+1,1}}{g_{z,1}} \frac{g_{z-1,l}}{g_{z,k}} e^{-\frac{\chi_{z,k} - \chi_{z-1,l}}{k_B T_e}} F(T_e), \quad (2.41)$$

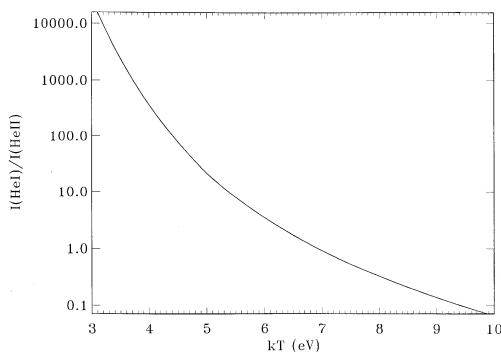


Abb. 2-7 : Das berechnete Intensitätsverhältnis der in Abb. 2.6 eingezeichneten Übergänge als Funktion der Elektronentemperatur.

die auf sehr einfache Weise eine Temperaturbestimmung aus einem gemessenen Intensitätsverhältnis ermöglicht. Die Frequenzen $v_{ll'} = E_{ll'}/h$ und $v_{kk'} = E_{kk'}/h$ der beiden Linien können dabei durchaus dicht beieinander liegen, so daß sogar eine Intensitätseichung des Spektrometers u.U. nicht erforderlich ist. Derartige Verhältnisse liegen beispielsweise in Näherung bei den Linien des neutralen Heliums HeI ($\lambda = 587,6 \text{ nm}$, $1s3d \ ^3D \rightarrow 1s2p \ ^3P$) und des einfach ionisierten He II ($\lambda = 468,6 \text{ nm}$; $n = 4 \rightarrow 3$) vor.

3. PLASMACHARAKTERISTIKA

3.1. Quasineutralität und Debye-Abschirmung

In einem Plasma herrscht weitgehend Gleichheit von positiven und negativen Ladungen. Negative Ladungen sind die Elektronen und in sehr seltenen Fällen negativ geladene Ionen¹⁷. Im allgemeinen sind jedoch alle Ionen positiv geladen mit ganzzahligen Vielfachen (Z_i) der Protonenladung (e). Bei *strenger Neutralität* würde also gelten:

$$n_e = \sum_i Z_i n_i \quad (3.1)$$

Diese Gleichung gilt im Plasma zwar selten exakt, doch sehr häufig in sehr guter Näherung, so daß

$$\frac{|n_e - \sum_i Z_i n_i|}{n_e} = \varepsilon \ll 1. \quad (3.2)$$

Ist diese letztere Beziehung für eine hinreichend kleine Zahl von ε (etwa $< 10^{-2}$) erfüllt, so sprechen wir von *Quasineutralität*. Typische Größen sind $\varepsilon = 10^{-6}$. Da die meisten Berechnungen und Messungen diesen Genauigkeitsgrad nicht erreichen, kann man in vielen Fällen die Gl. (3.1) als gültig ansehen. Ursache für die Erhaltung der Quasineutralität sind die elektrostatischen Kräfte, die praktisch keine statischen Ladunganhäufungen zulassen. Es sei dies zunächst an einem Beispiel demonstriert:

Wir betrachten eine in z- und y-Richtung weit ausgedehnte Plasmaschicht der Dicke D in x-Richtung. Zunächst liege überall Quasineutralität mit $n_e = n_i$ vor. Jetzt verschieben wir die Elektronen um den kleinen Abstand $\delta \ll D$ in x-Richtung (Abb. 3-1). Es ergeben sich elektrische Felder, die vom *Plattenkondensator* her bekannt sind. An den linken und rechten Grenzflächen (Flächeninhalt A) bilden sich die Ladungen $Q_+ = e n_e A \delta$ und $Q_- = -e n_e A \delta$. Sie erzeugen eine Spannung $U = Q_+ / C$, wobei die Kapazität durch $C = A \varepsilon_0 / D$ gegeben ist. Im Zwischenraum entsteht ein homogenes elektrisches Feld vom Betrage $E = U / D = Q_+ / (A \varepsilon_0)$, was auf

$$E_x = \frac{en_e \delta}{\varepsilon_0} \quad (3.3)$$

führt.

In einem Wasserstoffplasma der Dichte $n_e = 1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ sei nun die Neutralität in einer Randzone der Breite $\delta = 1 \text{ mm}$ um 1 % verletzt, so daß $|n_e - n_i| / n_e = 1 \%$. Es bildet sich ein elektrisches Feld von $E = (8.85 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1})^{-1} \times 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \times 0.01 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \times 10^{-3} \text{ m} = 1.8 \cdot 10^7 \text{ V/m}$ aus. Felder dieser Größenordnung sind nicht real. Abweichungen von der Quasineutralität treten daher in Plasmen nur bei zeitlich stark variiierenden Vorgängen oder in kleinen Volumina auf (gelegentlich auch in starken Strömungen). Im Normalfall sorgen die starken elektrischen Felder für eine enge Korrelation zwischen Elektronen- und Ionenflüssigkeit und sind der Grund dafür, daß viele Plasmaphänomene im sog. Einflüssigkeitsmodell beschrieben werden können.

In diesem Einflüssigkeitsmodell, das uns später noch beschäftigen wird, wird das makroskopische Verhalten des Plasmas durch die Maxwell-Gleichungen und durch die Bewegungsgleichung bestimmt. Das E-Feld wird dann durch das Ohmsche Gesetz ermittelt und an Stelle der Poisson-Gleichung tritt die Quasineutralitätsbeziehung in der Form Gl. (3.1). Bei dieser als *Plasmanäherung* bezeichneten Vorgehensweise kann man dann die Poisson-Gleichung benutzen, um nachträglich die

¹⁷ Negative Ionen entstehen durch Elektronen-Anlagerung bei niedrigen Temperaturen.

elektrische Ladungsträgerdichte $\rho_{el} = \sum e_a n_a = e (-n_e + \sum_i Z_i n_i)$ auszurechnen, doch ist deren Kenntnis nicht grundsätzlich erforderlich.

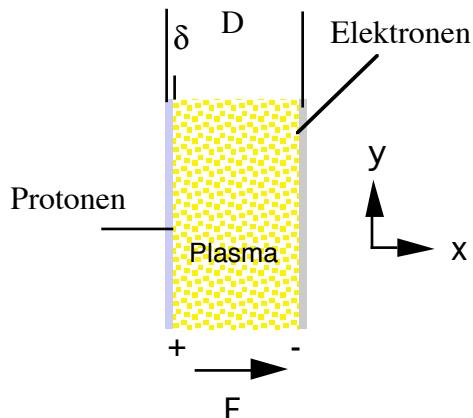


Abb. 3-1: Der Plasmakondensator. Durch Verschiebung der Elektronen ergibt sich ein elektrisches Feld entsprechend Gl. (3.3).

3.1.1. PLASMAEXPANSION

Betrachten wir als weiteres qualitatives Beispiel die Expansion eines heißen neutralen Plasmas ins Vakuum, bedingt durch den Druck der Ionen und der Elektronen (Abb. 3-2). Wie groß ist die Expansionsgeschwindigkeit? Die Elektronen laufen schnell weg, die Ionen langsam. Es bildet sich eine Raumladung aus, die die schnellen Elektronen zurückhält und die langsamsten Ionen beschleunigt. Die Expansion der Plasmawolke erfolgt mit der *Ionenschallgeschwindigkeit* (s. Kap. 7)

$$c_s = \sqrt{k_B \frac{T_e + 3T_i}{m_i}}, \quad (3.4)$$

die höher als die thermische Geschwindigkeit der Ionen ist. Das E-Feld beschleunigt die Ionen. Die Elektronen verrichten Arbeit an den Ionen und übertragen über das Feld Impuls auf die Ionen. Wir werden diesen Mechanismen wieder begegnen, wenn wir den Ionenschall behandeln. Die weitere Expansion der Plasmawolke in Abb. 3.2 erfolgt stromlos (*ambipolar*). Nach dem Aufbau des elektrischen Feldes - man nennt es das *ambipolare E-Feld* - sind die Teilchenflüsse der Elektronen und der Protonen gleich.

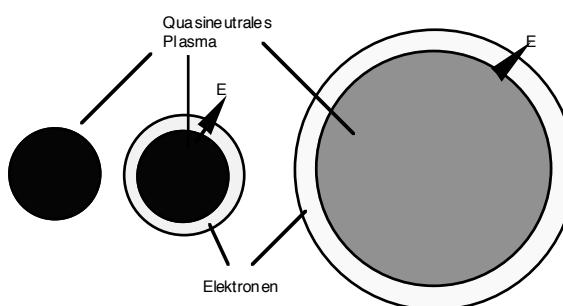


Abb. 3-2: Expansion einer sphärischen Plasmawolke (Plasmoid) ins Vakuum.
Links: Ausgangsplasma.
Mitte: Unmittelbar nach Freisetzung laufen die Elektronen voraus und bauen ein elektrisches Feld auf, das die positiven Ionen beschleunigt.
Rechts: Die weitere Expansion erfolgt ambipolar mit einer Ausströmgeschwindigkeit größer als die thermische Geschwindigkeit der Ionen.

3.1.2. AMBIPOLARITÄT

Wenn in einem Plasma Quasineutralität für lange Zeiten herrschen soll, so darf es nicht aufgeladen werden. Die im Plasma fließenden Ströme müssen daher divergenzfrei sein ($\operatorname{div} j = 0$), und insbesondere dürfen keine elektrischen Ströme in ein abgeschlossenes Volumen hinein- oder herausfließen. Für die senkrecht zur Plasmaoberfläche fließenden Ströme muß daher gelten $I_n = 0$. Bei Kugel- oder Torussymmetrie – oder auch aufgrund von anderen physikalischen Überlegungen – überträgt sich diese globale Forderung auf die Stromdichte $j = \sum e_a n_a \mathbf{u}_a = 0$, also im einfachen Elektronen-Ionen-Fall $j = -e n_e u_e + e n_i u_i = 0$, wobei u_a die Strömungsgeschwindigkeiten sind. Bezeichnen wir mit $\Gamma_a = n_a u_a$ die Teilchenflußdichte, so lautet unsere Forderung

$$\sum_a e_a \Gamma_{na} = 0 \quad (3.5)$$

Man nennt diese Beziehung die *Ambipolarität* der Ströme. Es müssen also bei einem Zweikomponenten-Plasma pro Zeiteinheit genau so viele einfach geladene Ionen wie Elektronen abfließen.

3.1.3. ABSCHIRMUNG DER LADUNGSTRÄGER

Betrachten wir das Plasma aus einer mikroskopischen Sicht, so muß es natürlich innerhalb eines hinreichend kleinen Volumens Abweichungen von der Quasineutralität geben. Um die Größe dieses charakteristischen Volumens zu ermitteln, gehen wir auf die Poisson-Gleichung $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_{\text{el}}$ zurück. Wir betrachten die Umgebung einer Testladung q in Kugelsymmetrie. Mit $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ lautet diese Gleichung

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[q\delta(r) - en_e + \sum_i eZ_i n_i \right] \quad (3.6)$$

Im Mittel über ein großes Volumen haben die Dichten die Werte $\langle n_e \rangle$ und $\langle n_i \rangle$. Hier interessieren uns die Abweichungen zu diesen mittleren Dichten, die durch Boltzmann-Faktoren¹⁸ entsprechend $n_e = \langle n_e \rangle \exp(e\phi / k_B T_e)$ und $n_i = \langle n_i \rangle \exp(-eZ_i \phi / k_B T_i)$ gegeben sind. Im Argument der e-Funktionen steht jeweils das Verhältnis der potentiellen Energie zur thermischen Energie der Teilchen. Wir werden uns nachträglich davon überzeugen, daß diese Verhältnisse in der Regel sehr klein sind, so daß man linearisieren kann: $n_e = \langle n_e \rangle \exp(e\phi / k_B T_e) \approx \langle n_e \rangle (1 + e\phi / k_B T_e)$ und $n_i = \langle n_i \rangle \exp(-eZ_i \phi / k_B T_i) \approx \langle n_i \rangle (1 - eZ_i \phi / k_B T_i)$. Wegen der Quasineutralität im Großen $\langle n_e \rangle = \sum_i Z_i \langle n_i \rangle$ geht dann die Gl. (3.6) für $r > 0$ und $T_e = T_i = T$ über in

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{e^2 \langle n_e \rangle (1 + Z_{\text{eff}})}{\epsilon_0 k_B T} \phi, \quad (3.7)$$

wobei wir zur Abkürzung die *effektive Ladung*

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{\sum_i Z_i n_i} = \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{n_e} \quad (3.8)$$

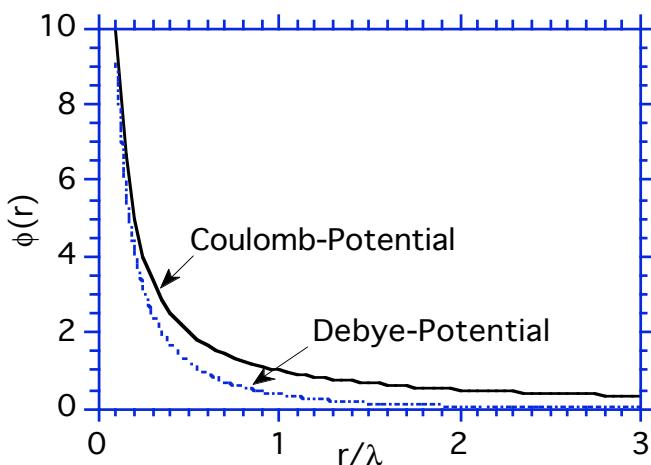
eingeführt und aus Gründen der Vereinfachung in (3.8) wieder n_e und n_i anstelle von $\langle n_e \rangle$ und $\langle n_i \rangle$ geschrieben haben. Gl. (3.7) hat die allgemeine Lösung $\phi = [C_- \exp(-r/\lambda) + C_+ \exp(+r/\lambda)]/r$, wobei λ die gesuchte *Abschirmlänge* ist. Sie ist von gleicher Größenordnung wie die **Debye-Länge** λ_D .

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_D / \sqrt{1 + Z_{\text{eff}}} \\ \lambda_D &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}} = 7437 \sqrt{\frac{T_e [\text{eV}]}{n_e [\text{m}^{-3}]}} \quad [\text{m}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Von der allgemeinen Lösung müssen wir sofort die anwachsende eliminieren ($C_+ = 0$), da sie nicht physikalisch sinnvoll ist. Die zweite Konstante C_- bestimmt sich, indem diese Lösung für $r \rightarrow 0$ in das Coulomb-Potential der Testladung übergehen muß. Wir erhalten somit

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \quad (3.10)$$

¹⁸ Die Boltzmannfaktoren werden an dieser Stelle ohne nähere Begründung eingeführt. Im später zu behandelnden Flüssigkeitskeitsbild ergeben sich entsprechende Ausdrücke aus der Lösung der Kraftgleichung.



Das Potential der Testladung verschwindet damit grob im Abstand λ , wie auch aus der Abb. 3.3 ersichtlich ist. Ursächlich hierfür ist eine Ladungswolke mit entgegengesetzter Polarität, die sie umgibt. Die abschirmende Ladung können wir wieder anhand der Poisson-Gleichung $\rho_{\text{el}} = -\nabla^2\phi = -q \exp(-r/\lambda) / (4\pi \lambda^2 r)$ berechnen. Sie ist proportional zu ϕ und fällt für $r > \lambda_D$ näherungsweise exponentiell ab.

Abb. 3-3: Coulomb- und Debye-Potential einer Testladung

Damit die Abschirmung in dieser Weise erfolgen kann, müssen sich natürlich im Mittel viele Teilchen innerhalb einer *Debye-Kugel* aufhalten, so daß der Punktcharakter der einzelnen Ladungen unerheblich wird und man mit einer verschmierten Ladungsdichte rechnen kann. Die **A b s c h i r m u n g** kommt somit durch ein **k o l l e k t i v e s** Verhalten vieler Teilchen zustande. Definieren wir durch

$$\frac{4\pi}{3} r_0^3 \equiv \frac{1}{n_e} \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{n_e}} \quad (3.11)$$

einen *mittleren Teilchenabstand*, so muß $\lambda_D \gg r_0$ gelten. Die Beziehung $\lambda_D > r_0$ führt nach Einsetzen auf $T[\text{eV}] > 7 \cdot 10^{-9} n_e [\text{m}^{-3}]^{1/3}$. Abgesehen von einem unbedeutenden größeren Zahlenfaktor ist dies aber identisch mit der Definitions-Relation (1.4) für ein ideales Plasma. Die **Z a h l d e r T e i l c h e n i n d e r D e b y e - K u g e l** N_D bezeichnet man auch als **Plasmaparameter**. Hierfür ergibt sich

$$N_D = \left(\frac{\lambda_D}{r_0} \right)^3 \quad (3.12)$$

Für ein **i d e a l e s P l a s m a** ist daher immer $N_D \gg 1$. Gleichzeitig ist die potentielle Energie am Rand der Debye-Kugel $e\Phi(\lambda_D)$ beim idealen Plasma immer sehr viel kleiner als $k_B T$, da für ein ideales Plasma ja selbst noch beim kleineren mittleren Abstand $e\phi(r_0) < k_B T$ gilt. Die Linearisierung der e -Funktion bei der Ableitung der Gl. (3.6) ist damit für ein ideales Plasma gerechtfertigt.

Betrachten wir nun als **Z a h l e n b e i s p i e l** ein Fusionsplasma mit $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ und $T = 10^4 \text{ eV}$. Es ergibt sich $r_0 = 1,34 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,13 \mu\text{m}$ und $\lambda_D = 7,43 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,24 \text{ mm}$, so daß an der Abschirmung einer Ladung die riesige Zahl von $N_D = 1,7 \cdot 10^8$ Teilchen beteiligt sind. Der Grund hierfür liegt weitgehend in der hohen thermischen Energie der Teilchen. Diese Teilchen werden nur durch starke E-Felder beeinflußt, die wiederum nur durch viele kollektiv operierende Teilchen erzeugt werden können.

Wir kommentieren unsere Befunde noch wie folgt:

Im Plasma ist der Abstand zwischen gleichartigen Ladungen immer etwas größer als zwischen Teilchen unterschiedlicher Polarität (s. hierzu auch Titelbild auf der Frontseite). Damit wird jede Ladung durch benachbarte Teilchen in kollektiver Weise abgeschirmt. **I n n e r h a l b e i n e r D e b y e - K u g e l** treten Abweichungen von der Quasineutralität auf, da hier die potentiellen Energien wesentlich größer als die thermischen Energien sein können. Auf einer langsamen Zeitskala sind sowohl Elektronen wie Ionen an der Abschirmung beteiligt. Bei sehr schnellen Vorgängen ($\omega \approx \omega_p$) sind die Ionen jedoch zu träge. In solchen Fällen wird die

Abschirmung allein von den Elektronen bewirkt, und die Abschirmlänge λ fällt exakt mit λ_D zusammen.

3.2. Plasmafrequenz

Aus den im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Verhältnissen beim Plasmakondensator können wir noch eine weitere wichtige Eigenschaft des Plasmas ableiten: seine Schwingungsfrequenz. Wir hatten dort bereits das elektrische Feld angegeben, das sich bei Verschiebung des Elektronengases gegenüber einem ausgeschmierten positiven Hintergrund ergibt. In der Tat können wir die Ionen wegen ihrer wesentlich größeren Trägheit in diesem Zusammenhang als ruhend betrachten. Das sich ergebende E-Feld hat aber auch auf die Elektronen eine rücktreibende Wirkung und würde bei masselosen Elektronen erst gar keine Abweichung von der Neutralität zulassen. Aufgrund der endlichen Masse der Elektronen kommt es aber nach einer kurzen Auslenkung zu einer raschen Oszillation des Elektronengases, bei der sich Trägheitskräfte und elektrische Kräfte das Gleichgewicht halten. Diese Kräftebilanz lautet

$$m_e N_e \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -e N_e E \quad (3.13)$$

wobei $N_e = n_e A D$ die Gesamtzahl der Elektronen darstellt. Mit Gl. (3.3) erhalten wir hieraus

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \left(\frac{e^2 n_e}{m_e \epsilon_0} \right) \delta = 0 \quad (3.14)$$

Diese homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung hat bekanntlich die Schwingungslösung $\delta(t) = C_1 \sin(\omega_p t) + C_2 \cos(\omega_p t)$. Hierbei ist

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}} \quad (3.15)$$

$$\omega_p [s^{-1}] = 56,5 \sqrt{n_e [m^{-3}]}$$

die **Plasma-Kreisfrequenz**. Für die gewöhnliche *Plasmafrequenz* ergibt sich daraus $f_p = \omega_p / 2\pi = 8,89 \sqrt{n_e}$, wenn n_e in m^{-3} und f_p in Hz gemessen werden.

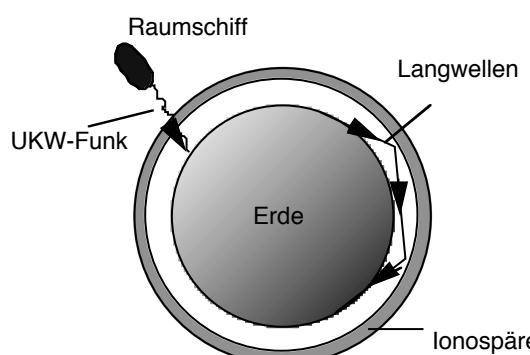


Abb. 3-4: Reflexion von Langwellen und Trans-mission von Ultra-Kurz-Wellen an der Ionosphäre

Diese *Plasma-* oder *Langmuir-Schwingungen* genannten Oszillationen sind von großer Bedeutung für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Plasma. Bei $\omega = \omega_p$ liegt ein sogenannter *cut-off* vor, bei dem der Brechungsindex des Plasmas zu Null wird. Wellenausbreitung kann nur oberhalb der Plasmafrequenz erfolgen. Für $\omega < \omega_p$ kommt es zu einer Reflexion an der Plasmagrenzschicht, da das Plasma das E-Feld der Welle noch abzuschirmen vermag. Dieser Effekt ist von großer Bedeutung für die Ionosphäre. Die Elektronendichte ist hier in 100 km Höhe etwa $n_e = 10^{10} m^{-3}$. Damit liegt die Plasmafrequenz bei $f_p = 0,9$ MHz, was im Bereich der Radio-Mittelwellen (0,6 - 1,6 MHz) ist. Für den Funkverkehr mit einem Raumschiff außerhalb der Erde muß man daher höhere Frequenzen (UKW im Bereich 20-100 MHz) benutzen. Umgekehrt wurde die Reflexionseigenschaft der Langwellen früher für die interkontinentale Kommunikation ausgenutzt (s. Abb. 3-4)

34 G. Fussmann, Vorlesung Plasmaphysik I 12.12.2005

3.3. Plasma- und Floating-Potential – Grenzschichten

3.3.1. MESSUNGEN MIT LANGMUIRSONDEN

In der Abb. 3-5 betrachten wir ein in einer Glasküvette erzeugtes Plasma (Glimmentladung), das durch einen von der Kathode zur Anode fließenden Elektronenstrom geheizt wird. An einem Aufpunkt \mathbf{r} innerhalb des Plasmas herrsche mit Bezug auf die geerdete Anode das Potential $\phi_{\text{Plasma}}(\mathbf{r})$; es ist das *Plasmapotential* an diesem Punkt. Dieses Plasmapotential wird für extrem niedrige Dichten mit dem Vakuumpotential zusammenfallen, im allgemeinen jedoch durch die sich ausbildenden Raumladungen stark hiervon abweichen.

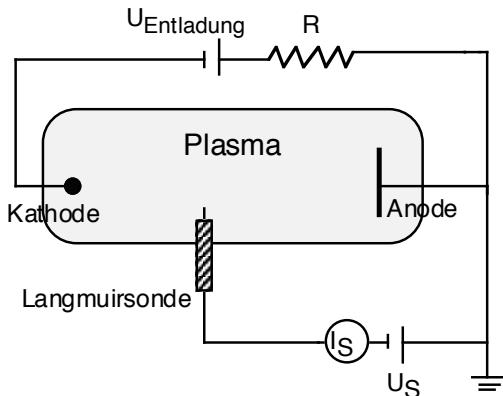


Abb. 3-5: Messung der Plasmaparameter in einer Glimmentladung mit Hilfe einer elektrostatischen Langmuirsonde.

Wie können wir dieses sich stationär einstellende Plasmapotential messen? Bei der skizzierten Glimmentladung und ähnlichen Laborplasmen mit Dichten und Temperaturen im Bereich $n_e < 10^{19} \text{ m}^{-3}$ und $T_e < 10 \text{ eV}$ kann man noch eine materielle Sonde ins Plasma einführen. Typisch sind kleine Zylindersonden aus Wolfram oder Molybdän, die mit einer Keramikisolation umgeben sind. Den eigentlichen Meßkopf bildet dabei eine zylindrische Drahtspitze von etwa 1 mm Durchmesser und 2 mm Länge. Das Potential dieser Sonde (bezogen auf Erdpotential) bezeichnen wir im folgenden mit U . Steckt man eine solche Sonde ins Plasma, so stellt sie sich jedoch keineswegs auf das lokale Plasmapotential ein (d.h. $U \neq \phi_{\text{Plasma}}$). Wie Langmuir erkannte, ist die Sonde nämlich in jedem Fall ein lokaler Störkörper für das Plasma, indem sie die auftreffenden Elektronen und Ionen aufsammelt. Bei annähernd gleicher Temperatur sind die Elektronen im Plasma jedoch wesentlich schneller als die Ionen, so daß zunächst viel mehr Elektronen auftreffen als Ionen. Die Sonde lädt sich deshalb elektrisch negativ auf, wodurch die langsamen Elektronen zurückgedrängt, die positiven Ionen jedoch angezogen werden. Schließlich stellt sich beim sogenannten *Floatingpotential* (to float = schweben) ein gleich großer Elektronen- wie Ionenstrom ein, so daß der Gesamtstrom zu Null wird (Ambipolarität). Das *Floatingpotential* ($U = U_{\text{float}}$) ist demnach das Potential, das ein isolierter Körper im Plasma annimmt. Wie wir noch sehen werden, steht es mit dem Plasmapotential in einem direkten Zusammenhang und kann wie dieses eine Funktion des Ortes sein.

Im Jahre 1923 gab Langmuir eine Methode an, wie man mit einer elektrostatischen Sonde einige wichtige Parameter des Plasmas messen kann. Seitdem hat die Theorie zahlreiche Verbesserungen erfahren, ist aber bis heute Gegenstand der Forschung geblieben. Grundsätzlich ist die Sondentheorie mittlerweile zwar gut entwickelt, doch können besondere Umstände (starke Magnetfelder, schwach ionisierte Plasmen, verschiedene Ionenarten, große Sonden usw.) vorliegen, auf die die Standardtheorie nicht anwendbar ist. Schwierigkeiten sind auch zu erwarten, wenn Genauigkeiten besser als etwa 30 % gefordert werden.

Bringt man die ins Plasma eingeführte Sonde durch eine zusätzliche Spannungsquelle auf ein variables Potential U , so kann man eine sogenannte *Strom-Spannungs-Kennlinie* aufnehmen, wie sie in der Abb. 3-6 idealisiert wiedergegeben ist. Vereinbarungsgemäß wird dabei der aus der Sonde ins Plasma fließende Strom positiv gezählt.

Bei sehr starker negativer Spannung ($U \ll U_{\text{float}}$) werden sämtliche Elektronen zurückgedrängt, während alle Ionen die Sonde erreichen; es stellt sich dann der von U unabhängige *Ionensättigungsstrom* $I_{\text{sat},i}$ ein. Ebenso ergibt sich für stark positive Spannungen ($U > U_{\text{Plasma}}$) der *Elektronensättigungsstrom* $I_{\text{sat},e}$, bei dem alle über den Sondenquerschnitt einfallenden Elektronen aufgesammelt, aber alle Ionen reflektiert werden. Im Unterschied zu den Ionen fliegen die Elektronen jedoch mit der wesentlich größeren thermischen Geschwindigkeit zur Sonde, so daß dieser Strom etwa um den Faktor $(m_i/m_e)^{1/2}$ größer als der Ionensättigungsstrom ist. Dazwischen befindet sich der sogenannte *Übergangsbereich* mit einem näherungsweise exponentiellen Anstieg. Formelmäßig haben wir die folgenden Verhältnisse

$$I = I_i + I_e \quad (3.16)$$

$$I_i = -I_{sat,i} \begin{cases} 1 & U \leq \phi_{Pl} \\ \exp\left(-\frac{U - \phi_{Pl}}{k_B T_e}\right) & U > \phi_{Pl} \end{cases} ; \quad I_e = I_{sat,e} \begin{cases} \exp\left(\frac{U - \phi_{Pl}}{k_B T_e}\right) & U \leq \phi_{Pl} \\ 1 & U > \phi_{Pl} \end{cases}$$

wobei $I_{sat,e}/|I_{sat,i}|$ von der Größenordnung $(m_i/m_e)^{1/2}$ sein wird. Die Beziehung (3.16) ist in der Abb. 3-6 dargestellt. Das Plasmapotential erkennt man danach an einem Knick in der Kurve bei $U = \phi_{Pl}$. Bei dieser Spannung stört die Sonde das Plasma nicht durch das von ihr aufgebaute elektrische Feld, weil die aufgesammelten positiven und negativen Ladungen durch den Sondenstrom abtransportiert werden, ohne daß es zu einer Aufladung kommt. Alle Elektronen und Ionen erreichen nun ungehindert die Sondenoberfläche, da diese dann eine ideale Senke für die geladenen Teilchen darstellt. Allerdings wird für jedes aufgesammelte Ion ein neutrales Atom emittiert – das i.a. in einer gewissen Entfernung wieder ionisiert wird – so daß die Sonde auch in diesem Fall eine Störung für das Plasma darstellt.

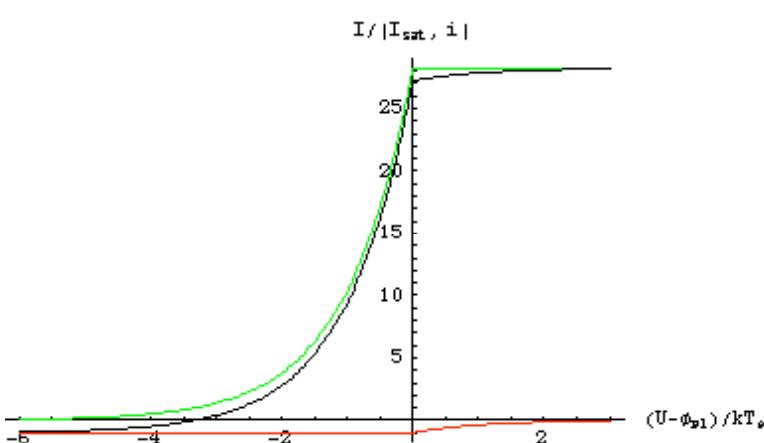


Abb. 3-6: Schema der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Langmuirsonde. Der Gesamtstrom (schwarz) ergibt sich aus der Summe von Elektronen- (grün) und Ionenstrom (rot). Das Verhältnis der Sättigungsströme $I_{sat,e}/|I_{sat,i}|$ beträgt bei einem Wasserstoffplasma $(1836e/2\pi)^{1/2} \approx 28$. Bei $I = 0$ liegt die Sonde auf Floatingpotential.

Bevor wir die entsprechenden Formeln zur Beschreibung der Kennlinie angeben, wollen wir uns klar machen, welcher Teilchenstrom

auf eine Fläche trifft, wenn eine Maxwell-Verteilung in der Geschwindigkeit vorliegt. Betrachten wir eine Einheitsfläche von 1 m^2 senkrecht zur x-Achse, so erhalten wir den gesamten von links kommenden Teilchenstrom durch Integration:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xa} &= \iiint v_x f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = \frac{n_a}{\pi^{3/2} v_a^3} \int_0^\infty v_x e^{-\frac{v_x^2}{v_a^2}} dv_x \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v_y^2}{v_a^2}} dv_y \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v_z^2}{v_a^2}} dv_z \\ &= \frac{n_a}{\pi^{1/2} v_a} \int_0^\infty v_x e^{-\frac{v_x^2}{v_a^2}} dv_x = \frac{n_a v_a}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi^2} d\xi = \frac{n_a v_a}{2\pi^{1/2}} = n_a \sqrt{\frac{k_B T_a}{2\pi m_a}} = \frac{n_a \bar{v}_a}{4} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hierin ist $v_a = (2 k_B T_a / m_a)^{1/2}$ die schon bekannte *thermische Geschwindigkeit* und $\bar{v}_a = (8k_B T_a / \pi m_a)^{1/2}$ die *mittlere Geschwindigkeit*¹⁹. Die Sättigungsstromdichten wären hiernach $j_{sat,i} = -e n_i \bar{v}_i / 4$ und $j_{sat,e} = e n_e \bar{v}_e / 4$ mit $n = n_e = n_i$ (nur einfach geladene Ionen). Für die Elektronen ist dieser Wert auch in Näherung brauchbar, für die Ionen jedoch nicht. Wie schon beim Beispiel des sich kugelförmig ausbreitenden Plasmas, ist hier die charakteristische Geschwindigkeit die Ionenschallgeschwindigkeit, in der entsprechend Gl. (3.4) auch die Elektronentemperatur vorkommt. Der Grund liegt in der *Raumladungsschicht*, die sich für $U < \phi_{Pl}$ in der unmittelbaren Umgebung der Sonde aufbaut und deren Potentialgefälle im wesentlichen von den Ionen in der Nahzone der Oberfläche bestimmt wird. Da die schnellen Elektronen die Sonde negativ aufladen, werden die

¹⁹ Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) 4\pi v^2 dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$

langsameren reflektiert und damit die Dichte der Elektronen in diese Zone insgesamt stark verringert. Die Ionen hingegen werden vom elektrischen Feld auf die Sonde zu beschleunigt, wodurch es ebenfalls zu einer Verdünnung kommt. In der Raumladungsschicht haben wir daher, verglichen mit der ungestörten Dichte $n_\infty = n_{i\infty} = n_{e\infty}$ (für $x \rightarrow \infty$), erniedrigte Dichten bei den Ionen, aber noch mehr bei den Elektronen. Nach Abschnitt 3.1 können wir davon ausgehen, daß diese Raumladungszone eine Ausdehnung in der Größenordnung der Debye-Länge nach Gl. (3.9) hat, d.h. in der Regel sehr klein ist.

3.3.2. SONDENTHEORIE

Unter den Voraussetzungen Sondenradius ($a \gg \lambda_{\text{Debye}}$ und freie Weglänge ($\lambda \gg \lambda_{\text{Debye}}$) können wir eine eindimensionale Theorie der Sonde betreiben, ohne Stöße berücksichtigen zu müssen. Auch soll in der kurzen Raumladungszone die Ionisation vernachlässigbar sein (d.h. keine Plasmaquellen). Die maßgebliche Gleichung ist dann wiederum die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = \frac{-e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (3.18)$$

wobei das Plasmapotential aus Gründen der Vereinfachung zu $\phi_{\text{Plasma}} = 0$ definiert wurde. In diese Poisson-Gleichung setzen wir für den uns besonders interessierenden Fall mit negativem Sondenpotential ($U = \phi_{\text{Sonde}} < 0$) wiederum für die Elektronendichte die *Boltzmann-Relation* $n_e = n_\infty \exp(e\phi/k_B T_e)$ ein. n_∞ stellt dabei die Dichte in sehr großer Entfernung von der Sonde dar, wo $\phi = 0$ gilt. Die Beschreibung der Abnahme der Elektronendichte bei Annäherung an die Sonde durch eine Boltzmann-Relation ist in diesem Fall gerechtfertigt, da fast alle Elektronen reflektiert werden und nur sehr wenige schnelle die Sondenoberfläche erreichen. Für die Ionen dagegen, die in diesem Fall von der Sondenfläche angezogen werden, können wir von der Boltzmann-Relation keinen Gebrauch machen, da diese ja ausnahmslos von der Sondenoberfläche absorbiert werden. Wir können stattdessen aber auf die *Kontinuitätsgleichung* (keine Ionisierung) in der Form $I_i = e A n_i v_i = \text{const.}$ zurückgreifen, wobei A , die einsammelnde Querschnittsfläche, sich nur gering (Zylinder und Kugelsonden) oder gar nicht (ebene Sonden) mit dem Abstand ändert. Zusätzlich soll $T_i = 0$ angenommen werden, so daß die Geschwindigkeit der Ionen gemäß $v_i = (-2e\phi/m_i)^{1/2}$ mit Annäherung an die Sonde zunimmt. In Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung ($n_i v_i \approx \text{const.}$) ergibt sich daraus eine *dynamische Verdünnung der Ionendichte*. Damit haben wir anstelle von Gl. (3.18)

$$\nabla^2 \phi = \frac{-e}{\epsilon_0} \left(\frac{I_i}{eA} \sqrt{\frac{m_i}{-2e\phi}} - n_\infty e^{\frac{e\phi}{k_B T_e}} \right), \quad (3.19)$$

die man als die vereinfachte Grundgleichung der Randschichttheorie betrachten kann. Sie beschreibt sowohl das Grenzschichtverhalten von Sonden als auch überhaupt sonstige ausgedehnte Wände (ebene Geometrie), die mit dem Plasma in Berührung stehen.

Für den ebenen Fall kann man die Lösung der Gleichung (3.19) durch Multiplikation mit $d\phi/dx$ auf Quadraturen zurückführen, da die rechte Seite nur eine Funktion von ϕ ist. Das Verfahren ist ganz analog zum Beschleunigungsproblem $d^2x/dt^2 = b(x)$, das bekanntlich nach Multiplikation mit der Geschwindigkeit $v = dx/dt$ auf die Form $t - t_0 = \int_{x_0}^x (v_0^2 + \int_{x_0}^{x'} 2b dx')^{-1/2} dx'$ gebracht werden kann. Für kompliziertere Geometrien ist Gl.(3.19) von verschiedenen Autoren numerisch gelöst worden. Qualitativ hat das Potential den in Abb. 3-7 skizzierten Verlauf.

Wir können schematisch zwei Zonen unterscheiden: Eine Nahzone, die *Raumladungsschicht* (kurz Schicht genannt), und eine wesentlich weiter ausgedehnte Zone, die *Vorschicht*, die schließlich in das ungestörte Plasma übergeht. In der Raumladungsschicht treten sehr starke elektrische Felder auf, die die Ionen beschleunigen und die Elektronen abstoßen. Unmittelbar vor der Oberfläche kann sich die Verarmung an Elektronen auch optisch durch Ausbildung einer *Dunkelzone* bemerkbar machen, da hier keine Anregung durch Elektronenstöße erfolgen kann.

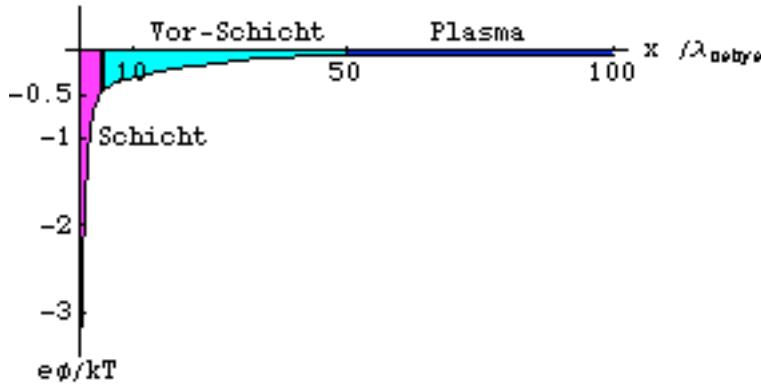


Abb. 3-7: Qualitativer Verlauf des Potentials vor einer absorbierenden Wand

Die Vorschicht ist durch ein wesentlich schwächeres E-Feld gekennzeichnet, so daß hier bereits in guter Näherung die Quasineutralität $n_e = n_i$ benutzt werden kann. Ihre Ausdehnung ist etwa von der Größenordnung der freien Weglänge für Elektronen-Ionenstöße λ_{ei} oder auch der Ionisationslänge λ_{ion} , falls diese

kleiner ist. Während die Debye-Länge typisch nur etwa 0,1 mm beträgt, sind λ_{ei} oder λ_{ion} eher in der Größenordnung von einigen cm und weit darüber. Diese großen Unterschiede rechtfertigen die schematische Unterteilung in zwei Zonen, die in Wirklichkeit natürlich stetig ineinander übergehen. Daß es überhaupt zu einer Vorschicht kommen muß, das Plasma also nicht unmittelbar an die Schicht angrenzen kann, beruht auf der unterschiedlichen Abnahme der Ionen und Elektronendichte. Damit nämlich die Ionendichte aufgrund der dynamischen Verdünnung hinreichend langsam abfällt, so daß $n_i > n_e$ in der gesamten Schicht gilt, dürfen die Ionen in der Umgebung der *Schichtkante* ($x = x_s$) nicht ruhen (s. Abb. 3-8). Sie müssen vielmehr bereits eine Geschwindigkeit in der Nähe der Ionenschallgeschwindigkeit aufweisen. Da wir aber $T_i = 0$ vorausgesetzt haben, müssen sie konsequenterweise durch ein vorgelagertes E-Feld (in der Vorschicht) beschleunigt worden sein. Dieser Sachverhalt findet seine mathematische Bestätigung in dem von *D. Bohm* abgeleiteten Kriterium.

Das Bohm-Kriterium

Bereits 1949 erkannte Bohm, daß die Gleichung (3.19) nicht ohne weiteres zu glatten Verläufen für das Potential führt, sondern daß mathematisch auch oszillierende Lösungen möglich sind. Nehmen wir an, daß in einem Abstand $x = x_s$ vor der Sondenoberfläche Quasineutralität in der Form $n_{is} \approx n_{es} = n_\infty \exp(e\phi_s/k_B T_e)$ gültig sein soll, so können wir die Gl. (3.19) auf diese *Schichtkante* beziehen und erhalten mit $n_i = n_{is} (\phi_s/\phi)^{1/2}$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{-e n_s}{\epsilon_0} \left(\sqrt{\frac{\phi_s}{\phi}} - e^{\frac{e(\phi-\phi_s)}{k_B T_e}} \right). \quad (3.20)$$

Taylorentwicklung der rechten Seite um die Stelle $x = x_s$ führt auf

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{-e n_s}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2\phi_s} - \frac{e}{k_B T_e} \right] (\phi - \phi_s) \quad (3.21)$$

Damit die Gleichung für $x < x_s$ zu nicht-oszillierenden Lösungen führt, muß der in eckigen Klammern stehende Koeffizient der rechten Seite negativ oder null sein. Es ergibt sich somit das *Bohm-Kriterium*²⁰

$$\phi_s \leq -\frac{k_B T_e}{2e} \quad (3.22)$$

²⁰ Eine zwingendere Ableitung findet man in Chens Buch. Wie bereits im Zusammenhang mit der Gl. (3.19) angemerkt, kann man die Poisson-Gl. im 1D-Fall integrieren und erhält so einen Ausdruck für das Quadrat des E-Felds. Die rechte Seite der entsprechenden Gleichung wird aber nur positiv, wenn das Bohm-Kriterium (d.h. Machzahl an der Schichtkante > 1) erfüllt ist.

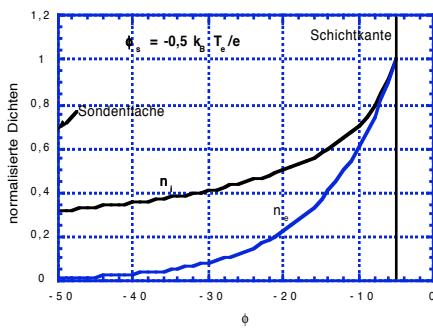


Abb.3-8: Der Verlauf der Elektronen und Protonendichte als Funktion des Potentials bei erfülltem Bohm-Kriterium: $\phi_s = -1/2 k_B T_e / e$ (Es wurde $T_e = 10 \text{ eV}$ und $\phi_{\text{sonde}} = -50 \text{ V}$ angenommen).

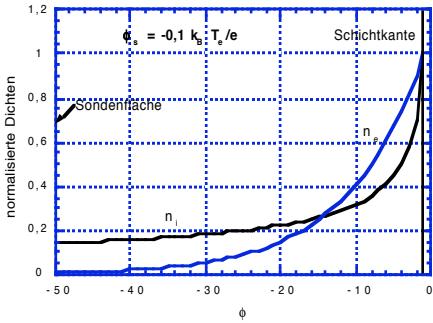


Abb.3-9: Der Verlauf der Elektronen und Protonendichte bei nicht-erfülltem Bohm-Kriterium ($\phi_s = -1/10 k_B T_e / e$). In der Nähe der Schichtkante überwiegt die Elektronendichte im Gegensatz zur Forderung, daß die Elektronen aus dieser Zone verdrängt werden sollen.

Schichtkante die Ionen Schallgeschwindigkeit (oder darüber) besitzen müssen, damit in der Schicht selbst überall $n_e < n_i$ erfüllt ist. Diese Forderung bedingt ein schwaches elektrisches Feld in der Vorschicht (Abfall von $\phi(\lambda_{ei}) = 0$ auf $\phi(x_s) = -1/2 k_B T_e$), das die kalten Ionen entsprechend beschleunigt

3.3.3. KENNLINIENVERLAUF UND BESTIMMUNG DER PLASMAPARAMETER

Mit dem Bohm-Kriterium als Randwertbedingung $\phi_s = -1/2 k_B T_e / e$ bzw. $v_{i,s} = c_s$ lässt sich wegen $I_{\text{sat},i} = I_{i,s} = \text{const.}$ und $n_{i,s} = n_{e,s} = n e^{-1/2}$ der (negative) Ionensättigungsstrom sofort angeben²¹

$$I_{\text{sat},i} = -e A_i n_{is} c_s = -e A_i n \exp\left(-\frac{e\phi_s}{k_B T_e}\right) \sqrt{\frac{-2e\phi_s}{m_i}} = -e A_i \sqrt{\frac{k_B T_e}{e m_i}}. \quad (3.23)$$

Hierbei ist n die quasineutrale Dichte der Elektronen und Ionen in großer Entfernung von der Sonde und A_i die aufsammelnde Fläche. Mit Hilfe der analytischen Quadraturlösung lässt sich auch eine Gleichung für x_s und damit für die Schichtdicke ableiten. Liegt die Sonde auf dem Potential $U \leq \phi_{\text{plasma}} = 0$, so ergibt sich in Näherung

$$x_s \approx \lambda_D \frac{2}{3} (2e)^{1/4} \sqrt{\sqrt{\frac{-eU}{k_B T_e}} - \frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\sqrt{\frac{-eU}{k_B T_e}} + \sqrt{2} \right]. \quad (3.24)$$

Speziell für $U = U_{\text{float}}$ erhält man $x_s \approx 4 \lambda_D$. Gleichung (3.24) wird herangezogen, um die Vergrößerung der Aufsammelfläche bei kugelförmigen und zylindrischen Sonden zu berücksichtigen: $A_{\text{eff}} = A_{\text{Sonde}} (1+x_s/a)^2$ bzw. $A_{\text{eff}} = A_{\text{Sonde}} (1+x_s/a)$. Diese effektive Flächenvergrößerung führt zu einem weiteren Ansteigen der Ströme in den Sättigungsgebieten.

Die Strom-Spannungs-Kennlinie lässt sich schließlich mit Hilfe der Beziehungen (3.16) wie folgt schreiben

²¹ Um hier die Protonenladung (e) von der Eulerzahl ($e = 2.72\dots$) zu unterscheiden, wird letztere fett geschrieben.

$$I(U) = \begin{cases} I_{sat,i} [1 - e^{\mu + \frac{e(U - \phi_{pl})}{k_B T_e}}] & \text{für } U \leq \phi_{pl} \\ I_{sat,e} [1 - e^{-(\mu + \frac{e(U - \phi_{pl})}{k_B T_e})}] & \text{für } U > \phi_{pl} \end{cases}, \quad (3.25)$$

wobei sich das Verhältnis der Sättigungsströme aus Gl. (3.23) und $j_{sat,e} = e n \bar{v}_e / 4$ zu

$$\begin{aligned} \frac{I_{sat,e}}{I_{sat,i}} &= \frac{e n A_e \sqrt{\frac{k_B T_e}{2\pi m_e}}}{e n e^{-1/2} A_i \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}}} = \frac{A_e}{A_i} \sqrt{\frac{e}{2\pi} \frac{m_i}{m_e}} := e^\mu \\ \Rightarrow \mu &= \ln \left(\frac{A_e}{A_i} \sqrt{\frac{e}{2\pi} \frac{m_i}{m_e}} \right) = 3.34 + \ln \left(\frac{A_e}{A_i} \sqrt{\mu_i} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

ergibt. Typische Werte für μ liegen zwischen 3.34 (Wasserstoff: $\mu_i = 1$) und 5.18 (Argon: $\mu_i = 40$). In Gl. (3.26) haben wir noch das Verhältnis der Aufsammelflächen für die Ionen und Elektronen A_i, A_e offen gelassen, was in magnetisierten Plasmen²² durchaus von 1 verschieden sein kann. Der geringfügige Anstieg des Stromes von $I(\phi_{pl}) = I_{plasma}$ auf $I_{sat,e}$ im Bereich $U > \phi_{pl}$ ist durch die Zurückdrängung des Ionenstromes bedingt. Nach Gl. (3.25) ergibt sich im Bereich $U \leq \phi_{pl}$ die Elektronentemperatur durch Differentiation der Meßkurve

$$k_B T_e = \frac{e(I - I_{sat,i})}{dI / dU}. \quad (3.27)$$

Hat man diese bestimmt, so kann man aus dem gemessenen Ionensättigungsstrom mit Hilfe von (3.26) die Plasmadichte n bestimmen.

Wir merken noch an, daß auch das Floating potential grundsätzlich die Möglichkeit bietet, T_e zu bestimmen. Die Bedingung $I = 0$ führt uns nämlich direkt zu

$$\frac{e(\phi_{float} - \phi_{pl})}{k_B T_e} = \frac{1}{2} \left\lceil \ln \left(2\pi \frac{m_e}{m_i} \right) - 1 \right\rceil. \quad (3.28)$$

Das Problem liegt aber darin, daß man das Plasmapotential als Referenzpotential kennen muß. Dieses aus den Meßkurven (Knick in der Kennlinie) zu bestimmen, bereitet jedoch die größten Schwierigkeiten, da in der Nähe des Elektronensättigungsstromes wegen der starken Aufheizung der Sonde die experimentellen Probleme oft nicht zu bewältigen sind. Eine andere Möglichkeit das Plasmapotential zu bestimmen, besteht darin spezielle Sonden durch aktive oder passive Maßnahmen so stark aufzuheizen, daß sie thermisch hinreichend viele Elektronen ($I_{Emiss} \geq I_{plasma}$) emittieren. Ist nämlich die Bedingung $I_{Emiss} = I_{plasma}$ erfüllt, so liegt die Sonde genau auf Plasmapotential $U = \phi_{pl}$. Aber auch, wenn $I_{Emiss} > I_{plasma}$ ändert sich hieran nur wenig, falls – wie gewöhnlich – die Sondentemperatur (typisch 1000 - 2500K) sehr viel kleiner als die Elektronentemperatur ist. In diesem Fall nämlich werden die überschüssig emittierten Elektronen in unmittelbarer Nähe der Sondenoberfläche durch das entstehende E-Feld zur Umkehr gezwungen, so daß der effektive Emissionsstrom wiederum I_{plasma} beträgt; die Sonde nimmt jetzt das Potential $U \approx \phi_{pl} + k_B T_{sonde}/e$ an.

Bisher haben wir der Einfachheit halber $T_i = 0$ gesetzt, da sich der allgemeine Fall $T_i > 0$ nur numerisch behandeln läßt. Bei ausgedehnten Wänden ist jedoch die Annahme kalter Ionen nicht selten dadurch gerechtfertigt, daß an der Wand nahezu 100% Recycling einsetzt, wodurch kalte Atome ins Plasma gelangen, die dort ionisiert werden, und bevor Zeit bleibt sie aufzuheizen, schon wieder zur Wand zurück gedriftet sind. Bei kleinen Sonden ($a < \lambda_{ion}$) trifft dieses Argument jedoch

²² In schwachen Magnetfeldern sind nur die Elektronen an die Feldlinien gebunden. Für Zylindersonden gilt dann $A_i/A_e \approx 2$.

in der Regel nicht zu. Genauere Untersuchungen hierzu zeigen, daß unterschiedliche Ergebnisse erhalten werden, je nachdem, ob es sich um eine ebene Sonde²³ oder eine kleine Zylinder- bzw. Kugelsonden²⁴ handelt. Im ersten Fall erreichen die Ionen die Ionenschallgeschwindigkeit an der Schichtgrenze, so daß T_e durch $(T_e + 3 T_i)$ in allen Beziehungen zu ersetzen ist. Bei sehr kleinen Sonden ist jedoch zu beachten, daß die Ionen nicht in jedem Fall die Sonde treffen, da sie mit

wachsender Temperatur in der Vorschicht einen Drehimpuls erhalten, der – analog zum Umlauf der Kometen um die Sonne – das Auftreffen auf der Sondenoberfläche verhindern kann. Dieser Effekt ist so stark, daß in diesem Fall die Zunahme des Sättigungsstroms infolge der erhöhten Geschwindigkeit weitgehend kompensiert wird, so daß insgesamt die oben angegebenen Beziehungen in Näherung brauchbar sind.

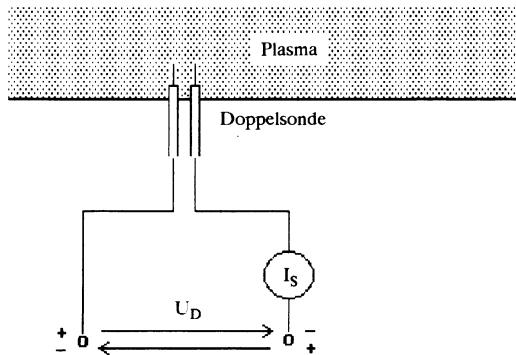


Abb. 3-10: Messungen mit der Doppelsonde.

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Sondentheorie im einzelnen sehr kompliziert. Dazu kommt, daß je nach Problemstellung unterschiedliche Sondentypen eingesetzt werden: Einfach-, Doppel- oder Tripelsonden sowie Flach-, Zylinder- und Kugelsonden. *Doppelsonden*, wie in der Abbildung Abb.3-9 dargestellt, kommen insbesondere dann zum Einsatz, wenn kein relevantes Bezugspotential (Anode oder Kathode) vorliegt, wie dies z.B. bei hochfrequenz erzeugten Plasmen der Fall ist. Die Sondenkenntlinie ist in diesem Fall symmetrisch (Abb. 3-11) und beidseitig durch den Ionen-sättigungsstrom begrenzt.

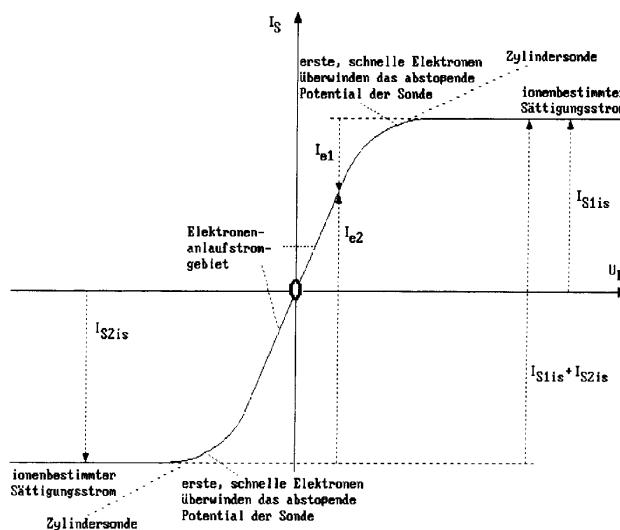


Abb. 3-11: Kennlinienverlauf der Doppelsonde (n. G. Janzen, "Plasmatechnik").

3.3.4. DAS CHILD-LANGMUIR-GESETZ

Dieses Gesetz ist von großer Bedeutung beim Bau von Elektronenröhren und steht auch mit den vorausgehenden Betrachtungen zum Schichtpotential in einem engen Zusammenhang. Bevor wir auf die von diesem Gesetz beschriebenen Begrenzungen der Stromdichte eingehen, wollen wir jedoch kurz die Grundlagen für die Produktion eines thermischen Elektronenstroms betrachten.

²³R. Chodura, in *Physics of Plasma Wall Interactions in Controlled Fusion*, Plenum Publishing Corporation (1986)

²⁴J. Laframboise (1966). In *Rarified Gas Dynamics*, Proc. 4th Int.Symp., Toronto. J.H. deLeeuw, ed., Vol.2, p. 22, New York: Academic.

Thermoemission

Heizt man in einer Elektronenröhre die Kathode auf, so ist sie in der Lage, Elektronen zu emittieren. Diese Thermoemission wird durch die schnellen Elektronen, mit einer Energie oberhalb der Austrittsarbeit W_A , bewerkstelligt. *Richardson* nahm – fälschlicherweise – an, daß auch im Festkörper die Elektronen einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung unterliegen. Er erhielt – in Analogie zu Gl. 3.15 – die Emissionsstromdichte

$$\begin{aligned} j &= e \iiint v_x f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = \frac{en_e}{\pi^{1/2}} \int_{v_e}^{\infty} v_x e^{-\frac{v_x^2}{v_e^2}} dv_x \\ &= \frac{en_e v_e}{\pi^{1/2}} \int_{\sqrt{W_A/k_B T}}^{\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi = \frac{en_e v_e}{2\pi^{1/2}} e^{-\frac{W_A}{k_B T}} = en_e \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m_e}} e^{-\frac{W_A}{k_B T}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

die auch heute noch häufig für Abschätzungen oder prinzipielle Überlegungen benutzt wird.

Bei Berücksichtigung einer *Fermiverteilung* im Festkörper ergibt sich nach *Dushman* die von der Elektronendichte unabhängige Relation

$$j = \frac{4\pi e m_e k_B^2 T^2}{h^3} e^{-\frac{W_A}{k_B T}} = 6.0 \cdot 10^5 T^2 e^{-\frac{W_A}{k_B T}} [A/m^2] \quad (3.30)$$

wenn die Oberflächentemperatur in K gemessen wird. Für Wolfram, das häufig als Emitter benutzt wird, erhält man nach dieser Gleichung mit $W_A/k_B = 52\,230$ K Stromdichten von $j \approx 10^{-3} \text{ A/m}^2$ für $T = 1200^\circ\text{C}$ bzw. $j = 10^{+3} \text{ A/m}^2$ für $T \approx 2400^\circ\text{C}$. Setzt man jedoch einige Prozent Thorium hinzu, so nimmt die Austrittsarbeit deutlich ab und beträgt nur noch $W_A/k_B \approx 29\,050$ K. Allerdings ist empirisch der Vorfaktor ebenfalls zu erniedrigen ($6.02 \cdot 10^5 \rightarrow 2.08 \cdot 10^5$), was darauf hinweist, daß auch die Dushman-Gleichung nicht exakt ist.

Raumladungsbegrenzte Ströme

Der zuvor angegebene Thermostrom kann natürlich nur stationär fließen, wenn eine Anode da ist, die diesen Strom aufnimmt. Andernfalls fließt nur kurzzeitig ein Nettostrom, bis sich die Kathode soweit aufgeladen hat, daß ein gleichgroßer, entgegengesetzter Diffusionsstrom entsteht.

Sei nun L der Abstand zwischen Kathode und Anode. Der Einfachheit halber nehmen wir beide als eben an und vernachlässigen mögliche Randeffekte, die bei kleinen Abständen bedeutsam werden können

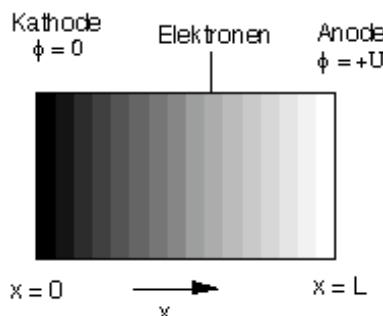


Abb. 3-12: Zur Ableitung des Child-Langmuir-Gesetzes

Es ergibt sich nun die Frage, welcher Strom bei einer angelegten Spannung U tatsächlich fließt. Die Antwort erhalten wir wieder aus der gleichzeitigen Betrachtung der Poisson-Gleichung

$$-\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{-e}{\epsilon_0} n_e, \quad (3.31)$$

der Kontinuitätsgleichung

$$j = -en_e v_x = \text{const.} \quad (3.32)$$

und der Energiegleichung

$$W = \frac{m_e}{2} v_x^2 + (-e)\phi = 0 \quad (3.33)$$

Hier haben wir in Näherung die Gesamtenergie der Elektronen zu null angenommen, da wir ihre kleine kinetische Energie bei Austritt aus der Kathode ($\phi = 0$) vernachlässigen wollen²⁵. Aus der letzten Gleichung können wir die Geschwindigkeit eliminieren und in die Kontinuitätsgleichung einsetzen und sodann mit dem Ergebnis für die Elektronendichte in die Poisson-Gleichung eingehen. Wir erhalten somit die Differentialgleichung

$$\sqrt{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} j \quad (3.34)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung $\phi(x=L) = U$ hat diese die Lösung

$$\phi(x) = U \left(\frac{x}{L} \right)^{4/3} \quad (3.35)$$

Damit können wir auch alle übrigen Größen ausrechnen: $v_x = (2e\phi/m_e)^{1/2} = (2eU/m_e)^{1/2} (x/L)^{2/3}$, $n_e = \epsilon_0/e d^2\phi/dx^2 = 4 \epsilon_0/(9e) U L^{-2} (x/L)^{-2/3}$. Für die Stromdichte ergibt sich das *Child-Langmuir-Gesetz*

$$|j| = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{L^2} \approx 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{U^{3/2}}{L^2} [A/m^2] \quad (3.36)$$

das häufig auch als *U^{3/2}-Gesetz* bezeichnet wird (L in m und U in Volt). Die Gleichung besagt, daß gewöhnlich ein kleinerer Strom als der thermische Emissionsstrom fließen wird. In der Tat haben wir bei der Ableitung der Gl. (3.35) angenommen, daß keine solche Emissionsbegrenzung vorliegt, so daß die Gleichung nur für $j < j_{\text{therm}}$ gültig ist.

Physikalisch beruht die Strombegrenzung nach Gl. (3.35) auf der Abschirmung des elektrischen Feldes in der Nähe der Kathode ($E = -d\phi/dx = -4/3 (U/L) (x/L)^{1/3}$) aufgrund der Raumladung, die dort die Elektronen aufbauen. Die Elektronen behindern somit selbst ihren Abtransport. Man benötigt bei gegebenem Abstand L entsprechend hohe Spannungen, um den maximal möglichen Sättigungsstrom I_{therm} zu erhalten.

Mit der zuvor behandelten Theorie der Grenzschicht ergibt sich ein Zusammenhang für stark negatives Wandpotential. In diesem Fall sind es nicht die Elektronen, sondern die aus der Vorschicht austretenden Ionen, die Raumladungen aufbauen und den Strom begrenzen. Bei vorgegebenem Ionen-Sättigungsstrom muß sich der Abstand L = x_s so einstellen, daß dieser im Einklang mit dem Child-Langmuir-Gesetz ist.

²⁵ Als Folge ergibt sich an der Kathode x → 0 eine Singularität in der Elektronendichte. Die Stromdichte j = e n_e v_x behält jedoch auch hier ihren konstanten Wert.

4. STOßPROZESSE IM PLASMA

4.1. Coulomb-Stoßprozesse

Wir betrachten zunächst den Stoß zweier Teilchen unter der Annahme eines Coulomb-Potentials $\phi(r) = q q^*/(4\pi\epsilon_0 r)$. Wir wollen vorläufig zur Vereinfachung folgende Annahme machen: Die eine Teilchensorte mit der Ladung q^* sei sehr viel schwerer als die andere mit der Ladung q . Die ***-Teilchen** können wir dann als in Ruhe befindliche **Hintergrundteilchen** betrachten; man bezeichnet sie gewöhnlich als *Feldteilchen*. Die leichteren, stoßenden Teilchen dagegen werden als *Testteilchen* betrachtet. Außerdem sei grundsätzlich angenommen, daß die freie Weglänge der leichten Testteilchen wesentlich größer ist als ihr mittlerer Abstand. Wir können dann die klassische *Rutherford-Streuformel* heranziehen. Sie ergibt bekanntlich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{qq^*}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(4E_{kin} \sin^2 \chi / 2)^2} = \frac{s_{90^\circ}^2}{4 \sin^4 \chi / 2}, \quad (4.1)$$

worin $E_{kin} = m v^2/2$ die kinetische Energie der leichten Testteilchen ist. Für den Ablenkungswinkel dieser Teilchen in Abhängigkeit vom *Stoßparameter* s hat man die Beziehung

$$\cot \frac{\chi}{2} = \frac{s}{s_{90^\circ}} ; \text{ mit } s_{90^\circ} = \frac{qq^*}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{qq^*}{8\pi\epsilon_0 E}. \quad (4.2)$$

Hierbei ist s_{90° der Stoßparameter für eine 90° Ablenkung. Für die Elektron-Elektron-Streuung läßt sich dieser Stoßparameter durch den *klassischen Elektronenradius* $r_0 = e^2 / (4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.82 \cdot 10^{-15}$ m und $\beta = v/c$ ausdrücken: $s_{90^\circ} = r_0 / \beta^2$.

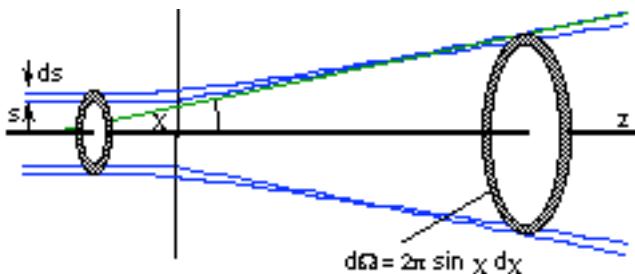


Abb.4.1: Geometrie bei der Coulomb-Streuung

4.1.1. ELEMENTARE BERECHNUNG DER REIBUNGSKRAFT

Wir berechnen nun die Kraft, welche die Testteilchen infolge von Stößen mit den schweren Feldteilchen erfahren. Wegen der großen Masse der letzteren handelt es sich um elastische Stöße, bei denen die Testteilchen zwar abgelenkt werden, aber ihren Geschwindigkeitsbetrag nicht verändern. Aus Symmetriegründen übertragen die Teilchen im Mittel nur Impuls in ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung (\parallel -Richtung). Diese Kraft ergibt sich aus

$$F_{\parallel} = \frac{m}{\Delta t} \sum_i \delta v_{\parallel,i} \quad (4.3)$$

wobei über alle Stöße während des Zeitintervalls Δt zu summieren ist. Wegen $actio = reactio$, d.h. $m \delta v_{\parallel} = - m^* \delta v_{\parallel}^*$, erfahren die Feldteilchen eine entgegengesetzt gleich große Kraft $F_{\parallel}^* = - F_{\parallel}$. Die Änderung der Parallelkomponente der Geschwindigkeit ergibt sich nach Abb. 4.2 zu

$$\delta_{\parallel} = v(1 - \cos \chi) = -2v \sin^2 \left(\frac{\chi}{2} \right), \quad (4.4)$$

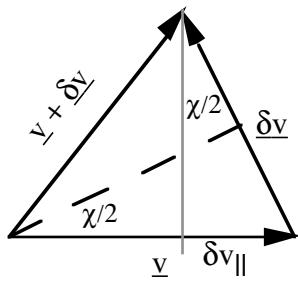


Abb. 4.2: Zur Geometrie bei elastischer Streuung

was man mit Hilfe von $\sin^2 x = 1 / (1 + \cot^2 x)$ sowie Gl. (4.2) auch als Funktion des Stoßparameters ausdrücken kann

$$\delta_{\parallel} = -2v \frac{s_{90^\circ}^2}{s^2 + s_{90^\circ}^2}. \quad (4.5)$$

Durch einen Ring der Breite ds mit dem Radius s um das Feldteilchen strömen pro Zeiteinheit

$$d\phi = nv 2\pi s ds \quad (4.6)$$

Testteilchen. Hiemit erhält man die auf ein Feldteilchen übertragene Kraft zu

$$F_{\parallel}^* = - \int m \delta v_{\parallel} d\phi = 4\pi m s_{90^\circ}^2 nv^2 \int_0^{s_{\max}} \frac{s ds}{s^2 + s_{90^\circ}^2}, \quad (4.7)$$

wobei die Summe über alle Stöße in Gl. (4.3) durch ein Integral über alle Stoßparameter ersetzt wurde. Das Integral auf der rechten Seite ergibt $I = \ln[(s_{\max}^2 + s_{90^\circ}^2)/s_{90^\circ}^2]/2$; es divergiert logarithmisch für $s_{\max} \rightarrow \infty$, so daß es notwendig ist, sich an die Abschirmung der Teilchen zu erinnern.

In Näherung können wir die Debye-Abschirmung durch einen effektiven Abschneideradius bei der Debye-Länge λ_D berücksichtigen. Wir erhalten dann

$$I = \ln \frac{\sqrt{\lambda_D^2 + s_{90^\circ}^2}}{s_{90^\circ}} \approx \ln \frac{\lambda_D}{s_{90^\circ}} \equiv \ln \Lambda_k \quad (4.8)$$

Die hier eingeführte Größe $\ln \Lambda_k$ wird als *klassischer Coulomb-Logarithmus* bezeichnet. Für die obige Kraft ergibt sich damit

$$F_{\parallel}^* = - \int m \delta v_{\parallel} d\phi = 4\pi n s_{90^\circ}^2 m v^2 \int_0^{s_{\max}} \frac{s ds}{s^2 + s_{90^\circ}^2}, \quad (4.9)$$

was nach Einsetzen von Gl. 4.2 das gesuchte Ergebnis

$$F_{\parallel}^* = \frac{(qq^*)^2}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{n}{mv^2} \ln \Lambda_k \quad (4.10)$$

liefert.

4.1.2. KLASISCHE UND QUANTENMECHANISCHE BERECHNUNGEN

Bei der obigen Ableitung haben wir von der Rutherford-Formel selbst keinen Gebrauch gemacht. Wir hätten dies aber tun können und dann die auf die Feldteilchen ausgeübte Kraft direkt aus der Relation

$$\begin{aligned} F_{||}^* &= -nv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} (m \delta v_{||}) d\Omega = -nv \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} (-2mv \sin^2 \frac{\chi}{2}) 2\pi \sin \chi d\chi \\ &= 16\pi nm v^2 \int_{\chi_{\min}/2}^{\pi/2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin^3 \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d(\chi/2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

erhalten. Setzen wir hierin die Gl. (4.1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} F_{||}^* &= 16\pi nm v^2 \frac{s_{90^\circ}^2}{4} \int_{\chi_{\min}/2}^{\pi/2} \cot \frac{\chi}{2} d(\chi/2) = -4\pi s_{90^\circ}^2 mv^2 n \ln(\sin(\chi_{\min}/2)) \\ &= -4\pi s_{90^\circ}^2 mv^2 n \ln \sqrt{\frac{s_{90^\circ}^2}{\lambda_D^2 + s_{90^\circ}^2}} \approx 4\pi s_{90^\circ}^2 mv^2 n \ln \frac{\lambda_D}{s_{90^\circ}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

und damit in der Tat wieder das Ergebnis (4.9).

Es ist naheliegend, die Rechnung für ein Debye-Potential anstelle des Coulomb-Potentials zu wiederholen. Interessanterweise liefert die klassische Mechanik in diesem Fall nicht das gleiche Ergebnis wie die Quantenmechanik, während beide Rechnungen für den Fall eines reinen $1/r$ -Potentials übereinstimmen. Wir geben hier ohne Ableitung für das Debye-Potential

$$\phi = \frac{qq^*}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r} \quad (4.13)$$

den quantenmechanischen Wirkungsquerschnitt in der *Bornschen Näherung* an

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s_{90^\circ}^2 / 4}{\left[\left(\frac{\lambda}{2\lambda_D} \right)^2 + \sin^2 \frac{\chi}{2} \right]}. \quad (4.14)$$

Er geht für das reine Coulombpotential ($\lambda_D \rightarrow \infty$) in den Rutherford'schen Wirkungsquerschnitt über. In Gl. (4.14) ist $\lambda = \lambda_{de Broglie} / 2\pi = k^{-1}$ die inverse Wellenzahl, die bis auf den Faktor $1/2\pi$ mit der *de Broglie-Wellenlänge* $\lambda_{de Broglie} = h/(m v)$ identisch ist. Setzen wir diesen Ausdruck in die Gl. (4.11) ein, so erhalten wir mit $x = \sin \chi / 2$ und $a^2 = \lambda^2 / 4\lambda_D^2 \ll 1$

$$\begin{aligned} F_{||}^* &= 16\pi nm v^2 \frac{s_{90^\circ}^2}{4} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(a^2 + x^2)^2} = -2\pi s_{90^\circ}^2 nm v^2 \left[\frac{1}{1+a^2} + \ln \left(\frac{a^2}{1+a^2} \right) \right] \\ &\approx -4\pi s_{90^\circ}^2 nm v^2 (1/2 + \ln a) = 4\pi s_{90^\circ}^2 nm v^2 \left(\ln \frac{\lambda_D}{\lambda} - \frac{1}{2} - \ln 2 \right) \approx 4\pi s_{90^\circ}^2 nm v^2 \ln \frac{\lambda_D}{\lambda} \end{aligned} \quad (4.15)$$

In diesem Fall konvergiert das sich ergebende Integral, so daß wir $\chi_{\min} = 0$ setzen konnten. Bis auf den veränderten Ausdruck für den Coulomb-Logarithmus wird das klassische Ergebnis Gl. (4.9) bzw. (4.12) reproduziert. In dem hier auftretenden *quantenmechanischen Verhältnis* $\Lambda_q = \lambda_D/\lambda = 2\pi\lambda_D/\lambda_{de Broglie}$ steht anstelle des 90° -Stoßparameters die *de Broglie-Wellenlänge* im Nenner. Diese ist in vielen Fällen – namentlich bei Ionen als Testteilchen – wesentlich kleiner als s_{90° . Unter diesen

Umständen bricht jedoch die Bornsche Näherung zusammen, da hierbei die Ablenkung der Teilchen als klein vorausgesetzt werden muß. Eine genauere Analyse zeigt²⁶, daß die Bornsche Näherung nur gerechtfertigt ist, wenn die Relativgeschwindigkeit hinreichend groß ist, so daß $v/c = \beta \gg \alpha$ mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = 2\pi e^2/(h c) \approx 1/137$. Umgekehrt ist die klassische Behandlung nur für den Fall $\beta \ll \alpha$ gültig. Im Übergangsbereich $\beta \approx \alpha$ wird die Theorie außerordentlich kompliziert. Da aber gewöhnlich nur die Größe $\ln \Lambda$ vorkommt, kann man näherungsweise die klassische Formel bis zur Grenze $v = \alpha c$ ausdehnen. Wir haben also

$$\Lambda = \begin{cases} \Lambda_k = \frac{\lambda_D}{s_{90^\circ}} & ; v \leq c / 137 \\ \Lambda_q = 0,86 \frac{\lambda_D}{\lambda} & ; v > c / 137 \end{cases} . \quad (4.16)$$

Für Elektronen-Ionen-Stöße können wir die Bewegung der Ionen vernachlässigen, so daß $\lambda = \lambda_c / \beta$ mit der Comptonwellenlänge $\lambda_c = \hbar / m_e c = 3,86 \cdot 10^{-13}$ m und, wie bereits im Zusammenhang mit Gl. (4.2) angegeben, $s_{90^\circ} = r_0 / \beta^2 = \beta^{-2} 2,82 \cdot 10^{-15}$ m. Beide Längen werden gleich für $\beta = r_0 / \lambda_c = \alpha = 1/137$. Wir haben also den günstigen Umstand, daß für Geschwindigkeiten $v \geq c/137$ die Bornsche Näherung gültig wird und bei der Grenze selbst $v = c/137$ der klassische und der quantenmechanische Coulomb-Logarithmus zusammenfallen. Für Geschwindigkeiten $v \neq c/137$ haben wir im Stoßparameter-Verhältnis Λ immer die größere der beiden Längen (λ bzw s_{90°) als den unteren Stoßparameter einzusetzen. Wegen $\lambda \sim v^{-1}$ und $s_{90^\circ} \sim v^{-2}$ wird aber mit zunehmender Energie letztlich immer die quantenmechanische Lösung (in der Bornschen Näherung) relevant. Eine dem Grenzwert $\beta = \alpha$ entsprechende thermische Geschwindigkeit $v_{th} = (2T_e/m_e)^{1/2} = c/137$ erreichen die Elektronen bei einer Temperatur von 13,6 eV (Ionisationsenergie des H-Atoms). Berücksichtigt man, daß die mittlere Relativgeschwindigkeit der Elektronen untereinander um den Faktor $2^{1/2}$ erhöht ist ($m_{red} = m_e/2$), so liegt die kritische Temperatur bei Elektron-Elektron-Stößen nur halb so hoch wie bei den Elektron-Ion-Stößen, also bei $T_e = 6,7$ eV. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei den Ionen-Ionen-Stößen. Hier sind die Geschwindigkeiten in der Regel zu niedrig als daß der quantenmechanische Fall relevant wird. So bleibt bei Deuteronen-Deuteronen-Stößen der klassische Coulomb-Logarithmus bis zu 24,5 keV gültig. Ersetzt man die Geschwindigkeiten der Teilchen durch ihren thermischen Mittelwert, so wird $\ln \Lambda$ eine Funktion der Dichte und der Temperatur. Mißt man die Dichte $n_{e,i}$ in m^{-3} und $T_{e,i}$ in eV, so gelten die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_{ee} &= \begin{cases} 30,0 - \frac{1}{2} \ln n_e + \frac{3}{2} \ln T_e & ; T_e \leq 6,7 \text{ eV} \\ 31,0 - \frac{1}{2} \ln n_e + \ln T_e & ; T_e > 6,7 \text{ eV} \end{cases} \\ \ln \Lambda_{ei} &= \begin{cases} 30,0 - \frac{1}{2} \ln n_e + \frac{3}{2} \ln T_e & ; T_e \leq 13,6 \text{ eV} \\ 31,3 - \frac{1}{2} \ln n_e + \ln T_e & ; T_e > 13,6 \text{ eV} \end{cases} \\ \ln \Lambda_{ii} &= \begin{cases} 30,0 - \frac{1}{2} \ln n_i + \frac{3}{2} \ln T_i & ; T_i \leq 24,5 \text{ keV} \\ 35,1 - \frac{1}{2} \ln n_i + \ln T_i & ; T_i \geq 24,5 \text{ keV} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Der Coulomb-Logarithmus $\ln \Lambda$ variiert in idealen Plasmen typisch zwischen 5 (kalte, dichte Plasmen) bis etwa 20 (heisse Fusionsplasmen). Der Quotient Λ ist im übrigen das Neunfache des Plasmaparameters N_D (Zahl der Teilchen in der Debye-Kugel). Für ideale Plasmen ist daher $\Lambda \gg 1$.

²⁶ Siehe D. V. Sivukhin, in *Review of Plasma Physics*, Vol. IV, Consultant Bureau N.Y. (1966)

Schreiben wir die Gleichung (4.9) in der Form $F_{\parallel}^* = 4 \ln \Lambda (\pi s_{90}^2) (m v) (v n)$, so ist die letzte Klammer die Flußdichte der Testteilchen, die vorletzte der bei einem 90° -Stoß übertragene Impuls und die erste der Wirkungsquerschnitt σ_{90° für diese Stöße. Der effektive Wirkungsquerschnitt ist demnach um den Faktor $4 \ln \Lambda \approx 20-80$ größer als σ_{90° . Die Reibungskraft entsteht daher in idealen Plasmen mit $\ln \Lambda > 1$ hauptsächlich durch die Vielzahl der schwachen *Kleinwinkeleffekte*.

4.1.3. DER ALLGEMEINE FALL BELIEBIGER MASSEN

Unsere obige Ableitung bezog sich auf den Fall sehr leichter Testteilchen. Ist diese Annahme nicht gerechtfertigt, so ergeben sich relativ einfache Modifikationen: Anstelle der Masse der leichten Teilchen tritt die *reduzierte Masse* $m_r = (m \cdot m^*)/(m + m^*)$ und anstelle ihrer Geschwindigkeit tritt die *Relativgeschwindigkeit* $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$. Zu diesem Ergebnis kommen wir wie folgt: Die Erhaltung des Impulses besagt

$$m \delta \vec{v} + m^* \delta \vec{v}^* = 0 \quad (4.18)$$

Drücken wir die Geschwindigkeitsänderungen durch die Änderung der Relativgeschwindigkeit aus, so erhalten wir

$$\delta \vec{v} = \frac{m_r}{m} \delta \vec{u} \quad \delta \vec{v}^* = -\frac{m_r}{m^*} \delta \vec{u} \quad (4.19)$$

Die Impulsänderung schreibt sich dann als $\delta \mathbf{p} = -\delta \mathbf{p}^* = m_r \delta \mathbf{u}$. Die Änderung der Energie stellt sich dar als

$$\delta W = \frac{m}{2} (\vec{v} + \delta \vec{v})^2 - \frac{m}{2} \vec{v}^2 = m \vec{v} \cdot \delta \vec{v} + \frac{m}{2} (\delta \vec{v})^2 \quad (4.20)$$

Neben der Relativgeschwindigkeit benötigen wir die *Schwerpunktsgeschwindigkeit* $\mathbf{V} = (m \mathbf{v} + m^* \mathbf{v}^*)/(m + m^*)$. Man beachte, daß wegen Gl. (4.18) diese beim Stoß unverändert bleibt, d.h. $\delta \mathbf{V} = 0$. Die Einzelgeschwindigkeiten lauten ausgedrückt durch Schwerpunkt- und Relativgeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \vec{V} + \frac{m_r}{m} \vec{u} \quad \vec{v}^* = \vec{V} - \frac{m_r}{m^*} \vec{u}. \quad (4.21)$$

Damit geht Gl. (4.20) über in

$$\delta W = m_r \vec{V} \cdot \delta \vec{u} + \frac{m_r^2}{m} \vec{u} \cdot \delta \vec{u} + \frac{1}{2} \frac{m_r^2}{m} (\delta \vec{u})^2 = m_r \vec{V} \cdot \delta \vec{u} + \frac{m_r^2}{2m} \delta (\vec{u}^2). \quad (4.22)$$

Die Gesamtenergie $W_g = m v^2/2 + m^* v^{*2}/2$ können wir auch als Funktion von u und V angeben.

$$W_g = W + W^* = \frac{m + m^*}{2} V^2 + \frac{m_r}{2} u^2 \quad (4.23)$$

Da $\delta W_g = 0$ folgt mit $\delta \mathbf{V} = 0$

$$\delta (\vec{u}^2) = 0. \quad (4.24)$$

Bei einem Stoß bleibt demnach der Betrag der Relativgeschwindigkeit u erhalten, so daß der Vektor \mathbf{u} eine reine Drehung erfährt. Es gelten daher die Verhältnisse der Abb. 4.2, wenn wir \mathbf{v} durch \mathbf{u} ersetzen, so daß

$$\delta\vec{u} = u \sin \chi \vec{e}_\perp - 2\vec{u} \sin^2 \left(\frac{\chi}{2} \right) = u \left[\sin \chi \vec{e}_\perp - 2 \sin^2 \left(\frac{\chi}{2} \right) \vec{e}_z \right], \quad (4.25)$$

wobei wir $\vec{e}_z = \vec{u} / u$ definiert haben und $\vec{e}_\perp = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi$ ein hierzu senkrecht stehender Einheitsvektor ist. Damit erhalten wir für die Impulsänderungen

$$\delta\vec{p} = m_r \delta\vec{u} = m_r u \left(\sin \chi (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi) - 2 \sin^2 \frac{\chi}{2} \vec{e}_z \right). \quad (4.26)$$

Für die Energieänderung lautet das Ergebnis mit (4.24)

$$\delta W = m_r \vec{V} \cdot \delta\vec{u} = m_r u \left((V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi) \sin \chi - 2 V_\parallel \sin^2 \frac{\chi}{2} \right). \quad (4.27)$$

Analog zu Gl. (4.11), können wir die Impuls- und Energieverluste des Testteilchens dann durch Mittelung über alle Ablenkinkel (Stoßparameter) aus den Beziehungen

$$\vec{F} = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle_\chi = n * u \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta\vec{p} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \chi d\chi d\varphi = -4\pi m_r n * u \bar{u} \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin^2 \left(\frac{\chi}{2} \right) \sin \chi d\chi \quad (4.28)$$

und

$$\frac{dW}{dt} = n * u \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta W \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \chi d\chi d\varphi = -4\pi m_r n * u (\bar{u} \cdot \vec{V}) \int_{\chi_{\min}}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin^2 \left(\frac{\chi}{2} \right) \sin \chi d\chi \quad (4.29)$$

berechnen, wobei die Senkrechtterme herausfallen. Wir erhalten so die grundlegenden Gleichungen

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{q^2 q^{*2}}{4\pi \epsilon_0^2} \frac{n * \ln \Lambda}{m_r} \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^3}} \quad (4.30)$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\frac{q^2 q^{*2}}{4\pi \epsilon_0^2} \frac{n * \ln \Lambda}{m_r} \frac{(\vec{V} \cdot \bar{u})}{|\bar{u}|^3}} \quad (4.31)$$

\mathbf{F} ist die bremsende Reibungskraft, die das Testteilchen bei seiner Bewegung durch die Feldteilchen erfährt; sie ist insbesondere reziprok proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit. Wir stellen weiterhin fest, daß der Energieverlust sich darstellen läßt als $dW/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$.

4.2. Abbremsung eines Teststrahls im Plasma

Im letzten Abschnitt haben wir die Reibungskraft eines Testteilchens für den Fall abgeleitet, daß sie mit den Feldteilchen über die Coulomb-Wechselwirkung Impuls austauschen. Dabei hatten wir aber die Relativ- und die Schwerpunktsgeschwindigkeit als für alle Stöße gleich angenommen und den Mittelungsprozeß nur über die verschiedenen Stoßparameter erstreckt. In einem Plasma haben jedoch beide Teilchensorten eine Geschwindigkeitverteilung, die es noch zu berücksichtigen gilt. Wir werden dies in zwei Schritten tun und vorerst nur eine Verteilungsfunktion der Feldteilchen

betrachten. Damit erhalten wir eine Beschreibung der Wechselwirkung eines monoenergetischen Strahls von geladenen Teilchen mit einem Plasma. Anstelle der Ausdrücke Gl. (4.30) und (4.31) treten dann die Gleichungen

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \sum * \int \frac{q^{*2} \ln \Lambda}{m_r} \frac{\vec{u}}{u^3} f^*(\vec{v}^*) dv^* \quad (4.32)$$

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \sum * \int \frac{q^{*2} \ln \Lambda}{m_r} \frac{\vec{V} \cdot \vec{u}}{u^3} f^*(\vec{v}^*) dv^* \quad (4.33)$$

Die Summation ist hierbei über alle Feldteilchensorten zu erstrecken; im einfachsten Fall eines Wasserstoffplasmas ist also über Protonen und Elektronen zu summieren. Da der Coulomb-Logarithmus nur sehr schwach von der Geschwindigkeit abhängt, können wir hierin die thermische Geschwindigkeit einsetzen und die Größe vor das Integral ziehen. Mit dieser (guten) Näherung kann man sich bei der Berechnung obiger Ausdrücke eine Analogie zu Elektrostatik zunutze machen, die einerseits die Rechnungen erleichtert, andererseits den Ausdrücken eine größere anschaulichkeit verleiht.

Betrachten wir nochmals den Ausdruck für die Kraft nach Gl. (4.32), so fällt auf, daß diese formal die gleiche Struktur wie die elektrostatische Kraft einer Punktladung aufweist ($\mathbf{F} \sim \mathbf{r}/r^3$) nur daß hier anstelle des Abstands im Ortsraum die Relativgeschwindigkeit tritt. Man definiert daher das sogenannte *Rosenbluth-Potential*

$$\varphi_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_v(\vec{v}^*)}{u} dv^* \quad (4.34)$$

mit der "Geschwindigkeitsdichte"

$$\rho_v = \frac{q^2 q^{*2}}{\epsilon_0} f^*(\vec{v}^*) \quad (4.35)$$

Wie in der Elektrostatik, ergibt der geschwindigkeitsbezogene Gradient ∇_v hiervon eine „Feldstärke“

$$\vec{E}_v = -\nabla_v \varphi_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{u}}{u^3} \rho_v(\vec{v}^*) d\vec{v}^* \quad (4.36)$$

und es gilt die Poissons-Gleichung

$$-\nabla^2 \varphi_v = \nabla_v \vec{E}_v = \rho_v / \epsilon_0 \quad (4.37)$$

Mit Hilfe dieser Größen schreiben sich die Gleichungen (4.32) und (4.33)

$$\langle \vec{F} \rangle = -\sum * \frac{\ln \Lambda}{m_r} \vec{E}_v \quad (4.38)$$

und

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = - \sum * \ln \Lambda \frac{\vec{V} \cdot \vec{E}_v}{m_r} = - \sum * \ln \Lambda \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}_v}{m_r} - \frac{\varphi_v}{m} \right). \quad (4.39)$$

Wenden wir diese Formeln auf eine isotrope (kugelsymmetrische) Verteilungsfunktion an, so erhalten wir

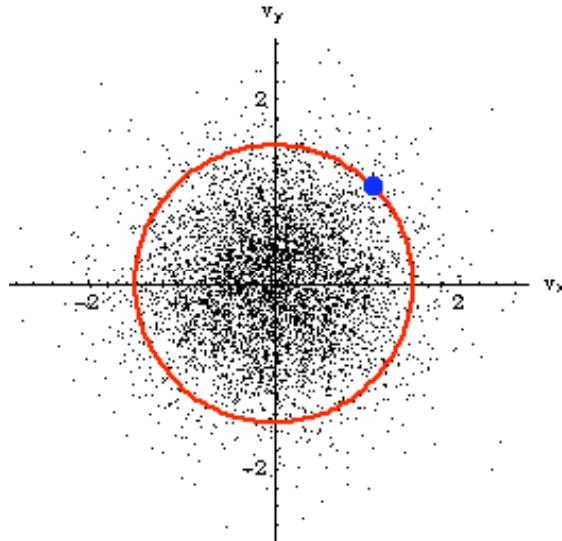


Abb. 4-1: Die Reibungskraft, die ein Testteilchen mit mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} (blauer Punkt) erfährt, ist bei kugelsymmetrischer Verteilung der Feldteilchen (schwarze Punkte) proportional zu Q/v^2 , wobei Q die Anzahl aller Feldteilchen innerhalb der Kugel (roter Kreis) vom Radius v ist.
Analogie zur Elektrostatik: Man darf sich die Ladung Q im Zentrum vereinigt denken, welche die Testladung auf der Kugeloberfläche anzieht.

$$\vec{E}(v) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}}{v^3} \int_0^v \rho_v(v^*) 4\pi v^{*2} dv^* = \frac{Q(v)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}}{v^3}$$

$$\varphi(\vec{v}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{v} \int_0^v \rho_v(v^*) 4\pi v^{*2} dv^* + \int_v^\infty \frac{1}{v^*} \rho_v(v^*) 4\pi v^{*2} dv^* \right]. \quad (4.40)$$

Hierin ist sehr anschaulich $Q(v)$ die "Ladung" innerhalb einer Kugel vom Radius v ²⁷ (s. Abb. 4-1). Speziell für eine Maxwell-Verteilung²⁸

$$f^*(v) = n^* \left(\frac{b^*}{\sqrt{\pi}} \right)^3 e^{-b^{*2} v^2}; b^* = \sqrt{\frac{m^*}{2T^*}} \quad (4.41)$$

ergibt sich

$$\varphi_v = \frac{q^2 q^{*2} n^*}{4\pi\epsilon_0^2 v} \Phi(b^* v) \quad (4.42)$$

$$\vec{E}_v = \frac{q^2 q^{*2} n^*}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{\vec{v}}{v^3} \Phi_1(b^* v) \quad (4.43)$$

wobei

²⁷ In der Elektrostatik erhält man ganz analog durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf die Poisson-Gl. $\operatorname{div} \underline{E} = \rho_{el}/\epsilon_0$ bei kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $E_r(r) = Q(r)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Man kann sich also die gesamte Ladung innerhalb des Aufpunktradius im Ursprung vereinigt denken.

²⁸ In diesem Kapitel sind die Temperaturen immer in Energieeinheiten (keV) zu betrachten.

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (4.44)$$

die Fehlerfunktion darstellt. Die zweite Funktion ergibt sich zu

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \Phi(x) - x \frac{d\Phi(x)}{dx} \quad (4.45)$$

Sie beschreibt die Zahl der Feldteilchen mit einer Geschwindigkeit $v^* \leq x v$. Beide Funktionen streben asymptotisch gegen 1, so daß $\Phi(x) \approx \Phi_1(x) \approx 1$ für $x > 2$ gilt. Für $x \ll 1$ hat man die Näherung $\Phi_1(x) \approx 4x^3/(3\sqrt{\pi})$. Damit haben wir für den Energie- und Impulsverlust des Strahls die Beziehungen

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2 v} \sum^* \ln \Lambda n^* \frac{q^{*2}}{m^*} \left[\Phi(b^* v) - \left(1 + \frac{m^*}{m}\right) \frac{2b^* v}{\sqrt{\pi}} e^{-b^{*2} v^2} \right] \quad (4.46)$$

und

$$\left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle = \left\langle \vec{F} \right\rangle = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum^* \frac{\ln \Lambda}{m_r} q^{*2} n^* \frac{\vec{v}}{v^3} \Phi_1(b^* v) \quad (4.47)$$

Zur weiteren Vereinfachung betrachtet man n o r m i e r t e Geschwindigkeiten $x = b^* v = v/v_{th}^*$, setzt $\beta = m^*/m$ und führt die Funktionen

$$G(x) = \frac{\Phi_1(x)}{x^2} \quad (4.48)$$

und

$$H(x, \beta) = \frac{\Phi(x)}{x} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 + \beta) e^{-x^2} \quad (4.49)$$

ein. Damit schreiben sich die parallele Reibungskraft

$$\left\langle F_{\parallel} \right\rangle = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \sum \ln \Lambda q^{*2} n^* \frac{m^*}{m_r} \frac{1}{2T^*} G\left(\frac{v}{v_{th}^*}\right) \quad (4.50)$$

und die Energieänderung

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \sum \ln \Lambda q^{*2} n^* \frac{1}{\sqrt{2m^* T^*}} H\left(\frac{v}{v_{th}^*}, \frac{m^*}{m}\right). \quad (4.51)$$

mit $v_{th}^* = (2T^* / m^*)^{1/2}$. Die Funktionen $G(x)$ (Chandrasekhar-Funktion) und $H(x, \beta)$ sind in der Abb. 4.3 dargestellt. Interessanterweise ist $H(x, \beta)$ für kleine Strahlgeschwindigkeiten ($x < x_{kr}$) negativ, so daß der Strahl im Plasma Energie gewinnt. Dagegen sind die parallelen Reibungskräfte immer negativ, d.h. bremsend. Die Energieaufnahme für $x < x_{kr}$ beruht demnach auf einer Erhöhung der senkrechten Strahlgeschwindigkeit, die zu einer raschen Verbreiterung führt. Etwas oberhalb von $x = 1$ erreichen die Reibungskraft und der Energieverlust Maximalwerte. Für $x \gg 1$ fallen beide Funktionen wieder ab ($G \sim x^{-2}$, $H \sim x^{-1}$).

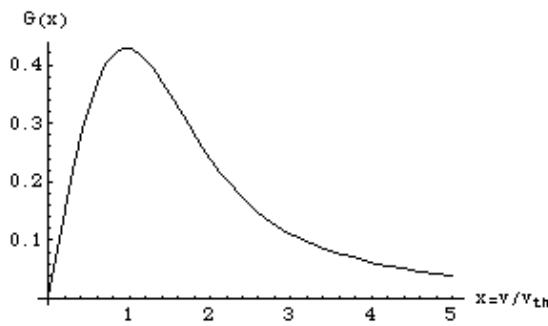


Abb. 4-2: Die parallele Reibungskraft als Funktion der normierten Geschwindigkeit

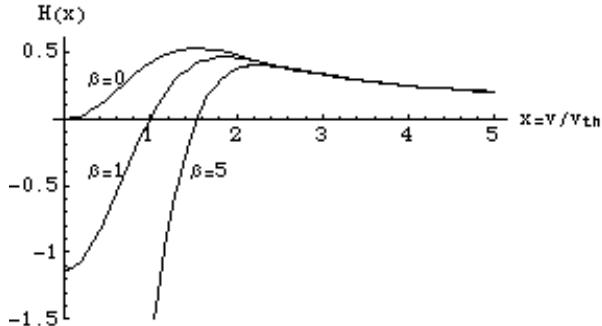


Abb. 4-3: Energieverlust eines Teilchenstrahls in Abhängigkeit von der normierten Strahlgeschwindigkeit mit $\beta = m^*/m_{\text{Strahl}}$ als Parameter.

4.2.4. NEUTRAL-INJEKTIONS-HEIZUNG

Je nach Strahlgeschwindigkeit kann der Energietransfer auf die Plasmaelektronen und Ionen sehr unterschiedlich ausfallen. In der Praxis benutzt man zur Aufheizung des Plasmas in Tokamaks und Stellaratoren häufig hochenergetische H- oder D-Atomstrahlen (NI: Neutralinjektion) mit typischen Teilchenenergien von $W \approx 50 - 150$ keV, die nach einer kurzen Wegstrecke im Plasma ionisiert werden, so daß ein H^+ bzw. D^+ -Ionenstrahl entsteht. Geführt vom toroidalen Magnetfeld läuft dieser hochenergetische Ionenstrahl i.a. viele tausend Male im Torus herum und gibt dabei seine Energie an das Plasma ab. Die Heizungleistung eines Beamteilchens beträgt dabei nach Gl. (4.51)

$$P_{NI} = -\frac{dW}{dt} \approx \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0^2} \left[\sum_i \frac{Z_i^2 n_i \ln \Lambda_{ib}}{\sqrt{2m_i T_i}} H\left(\sqrt{\frac{m_i W}{T_i}}, \frac{m_i}{m_b}\right) + \frac{n_e \ln \Lambda_{eb}}{\sqrt{2m_e T_e}} H\left(\sqrt{\frac{m_e W}{T_e}}, \frac{m_e}{m_b}\right) \right]. \quad (4.52)$$

wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Mittelungsklammer weggelassen haben. Für den Einschuß von Protonen in ein reines Wasserstoffplasma mit annähernd gleichen Coulomb-Logarithmen vereinfacht sich dies zu

$$\frac{dW}{dt} \approx -\frac{e^4 n}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{\ln \Lambda}{\sqrt{2m_i T_i}} \left[H\left(\sqrt{\frac{W}{T_i}}, 1\right) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} H\left(\sqrt{\mu \frac{W}{T_e}}, \mu\right) \right] \quad (4.53)$$

mit dem Massenverhältnis $\mu = m_p/m_e = 1/1836$. Der erste Klammerterm repräsentiert die Heizung der Plasmaionen, der zweite diejenige der Elektronen. Es gelten mit einer Genauigkeit von besser als 10% die Beziehungen $H(\sqrt{y}, 1) \approx y^{-1/2}$ für $y \geq 4$ und $H(\sqrt{\mu y}, \mu) \approx 4\mu(y - 3/2)/3\sqrt{\pi}$ für $0 \leq y \leq 300$ ($\mu^{-1} = 1836$). Für $y = W/T \geq 4$ haben wir somit für gleiche Temperaturen $T_e = T_i = T$ die Näherung

$$\frac{dW}{dt} \approx -\frac{e^4 n}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{\ln \Lambda}{\sqrt{2m_i T}} \left[\frac{1}{\sqrt{W/T}} + \sqrt{\frac{16\mu}{9\pi}} \frac{W}{T} \right]. \quad (4.54)$$

Führen wir nun die Größe $a = (9\pi/16\mu)^{1/3} = 14.8$ sowie die normierte Beamenergie $w = W_b / (a T)$ ein, so ergibt sich hierfür die vereinfachte Gleichung

$$\frac{dw}{dt} = -\tau_s^{-1} (w^{-1/2} + w) \quad (4.55)$$

mit der „Slowing-down Zeit“

$$\tau_s = \left(\frac{e^4 n}{3\pi\epsilon_0^2} \frac{\ln \Lambda}{\sqrt{2\pi T^3 m_i / \mu}} \right)^{-1} = 3.15 \cdot 10^{14} \frac{T[eV]^{3/2}}{n[m^{-3}] \ln \Lambda} \quad [s] \quad (4.56)$$

Falls $w < 1$, d.h. $W < 14.8$ T überwiegt der erste Term (Ionenheizung) und für $W > 14.8$ T der zweite (Elektronenheizung). Anschaulich verstehen wir die Abhängigkeiten der Anteile mit Rückblick auf die Abb. 4-1 wie folgt: Im ersten Fall sind die Plasmaionen viel langsamer als die Beamionen und der Energieübertrag ist proportional zu $n_i/v_b \sim w^{-1/2}$. Umgekehrt sind die Strahlionen aber langsamer als die meisten Elektronen und nur diejenigen mit $v < v_b$ nehmen an der Abbremsung teil. Das ist in Näherung der Bruchteil $Q = n_6 (v_b/v_{e,th})^3$. Der entsprechende Energieübertrag ist proportional zu $Q/v_b \sim v_b^2 \sim w$.

4.2.5. ELEKTRONENSTRAHLABBREMSUNG

Noch einfacher sind die Verhältnisse bei einem Elektronenstrahl mit einer kinetischen Energie entsprechend $W_b \gg T$. Es ergibt sich diesmal

$$\left\langle \frac{dW_b}{dt} \right\rangle \approx -\frac{e^4 n}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{\ln \Lambda}{\sqrt{2Tm_e}} \left[\sqrt{\mu} H\left(\sqrt{\frac{W_b}{\mu T}}, \frac{1}{\mu}\right) + H\left(\sqrt{\frac{W_b}{T}}, 1\right) \right] \approx -\frac{e^4 n}{4\pi\epsilon_0^2 m_e} \frac{\ln \Lambda}{v} \quad (4.57)$$

Diesmal ist nur der zweite Term, d. h. die Wechselwirkung mit den Plasmaelektronen, von Bedeutung (auf die schweren Ionen wird kaum Energie übertragen). Das Ergebnis ergibt sich wiederum aus $H(\sqrt{y}, 1) \approx 1/\sqrt{y}$ für $y \geq 4$. Für die Reibungskraft sind dagegen sowohl die Ionen als auch die Elektronen von Bedeutung. Es ergibt sich hierfür

$$\langle F_{\parallel} \rangle = -\frac{e^4 n \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 2T} \left[\frac{1}{\mu} G\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mu T}}\right) + 2G\left(\sqrt{\frac{E_b}{T}}\right) \right] \approx -\frac{e^4 n \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 2T} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\mu T}{E_b} + \frac{2T}{E_b} \right] = -\frac{3e^4 n \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m_e} \frac{1}{v^2}, \quad (4.58)$$

Ein Ergebnis, das wir auch gleich aus Gl. (4.30) hätten gewinnen können.

4.3. Runaway-Elektronen

Die quadratische Abnahme der Reibungskraft mit zunehmender Geschwindigkeit führt im übrigen zum Auftreten von sogenannten *Runaway-Elektronen* im Tokamak. In diesen toroidalen Plasmaanlagen wird der Strom durch ein induziertes elektrisches Feld getrieben. Die Beschleunigungskraft für die Elektronen ist $F_E = -eE$. Bei hinreichend schnellen Elektronen ist diese Kraft größer als die Reibungskraft nach Gl. (4.58), wie in der Abb. 4-4 veranschaulicht.

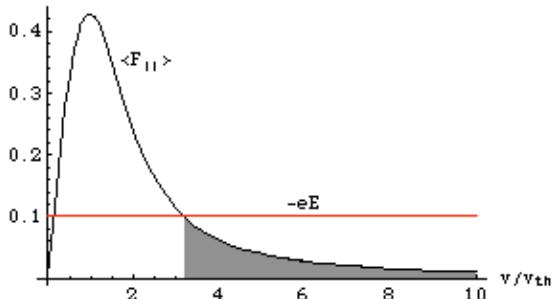


Abb. 4.4: Alle Elektronen im Schwanz der Verteilungsfunktion (grauer Bereich) werden zu Runaways. Der Abstand zwischen Kurve und roter Linie entspricht der Netto-Beschleunigungskraft.

Das E-Feld treibt sie somit zu immer höheren Energien, da sie mit zunehmender Geschwindigkeit immer stoßfrei werden. Im Plasma sind die Elektronen im Schwanz der Verteilungsfunktion hiervon betroffen.

Gleichsetzen von $-eE = \langle F_{||} \rangle$ ergibt, daß näherungsweise alle Teilchen mit einer Energie oberhalb von

$$W_{run} = \frac{m_e}{2} v_{run}^2 = \frac{3e^3 n \ln \Lambda}{8\pi \epsilon_0^2} \frac{1}{E} \quad (4.59)$$

zu derartigen Runaways werden. In der Praxis erreichen diese Elektronen relativistische Energien bis zu etwa 80 MeV. Ihrer weiteren Beschleunigung stehen dann Synchrotronstrahlungsverluste entgegen.

4.4. Relaxationszeiten

Wir gehen nun dazu über, auch die Testteilchen mit einer Verteilungsfunktion zu versehen. Der wichtigste Fall ist der, in dem sowohl die Feldteilchen als auch die Testteilchen Maxwell-Verteilungen - allerdings mit unterschiedlichen Temperaturen - besitzen. Wir betrachten den Energieaustausch zwischen zwei verschiedenen oder auch gleichen Teilchenarten mit $T \neq T^*$. Ausgehend von Gl. (4.46) müssen wir eine weitere Integration dieses Ausdrucks mit der Maxwell-Verteilung $f(v)$ entsprechend Gl. (4.41) als Gewichtsfunktion vornehmen. Für diesen so gemittelten Energieübertrag ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \right\rangle &= -\frac{q^2 q^{*2} \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^*} \left[\left\langle \frac{\Phi(b^* v)}{v} \right\rangle - \left(1 + \frac{m^*}{m} \right) \frac{2b^*}{\sqrt{\pi}} \left\langle e^{-b^{*2} v^2} \right\rangle \right] \\ \text{mit } \left\langle \frac{\Phi(b^* v)}{v} \right\rangle &\equiv \frac{4b^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Phi(b^* v) e^{-b^2 v^2} v dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b b^*}{\sqrt{b^2 + b^{*2}}} \\ \text{und } \left\langle e^{-b^{*2} v^2} \right\rangle &\equiv \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_0^\infty e^{-(b^2 + b^{*2}) v^2} 4\pi v^2 dv = \frac{b^3}{(b^2 + b^{*2})^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Das Ergebnis lässt sich schreiben als

$$\left\langle \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{T - T^*}{\tau_w} \quad (4.61)$$

wobei die *Energie-Relaxationszeit* (Energieaustauschzeit) τ_w durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$\tau_w = \frac{3(2\pi)^{3/2} \epsilon_0^2 m m^*}{2q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda} \left(\frac{k_B T}{m} + \frac{k_B T^*}{m^*} \right)^{3/2} = 7.37 \cdot 10^{12} \frac{\mu \mu^*}{Z^2 Z^{*2} n^* \ln \Lambda} \left(\frac{T}{\mu} + \frac{T^*}{\mu^*} \right)^{3/2} [s]. \quad (4.62)$$

mit T in eV und n^* in m^{-3} sowie $Z = q/e$ und $\mu = m/m_{\text{au}}$. Betrachten wir speziell den Energieaustausch zwischen Elektronen und Elektronen (ee) sowie zwischen Ionen und Ionen(ii) und schließlich zwischen Elektronen und Ionen (ei), so ergibt sich, wenn wir Quasineutralität ($n_e = Z n_i$) annehmen

$$\tau_w^{ee} \cdot \tau_w^{ii} \cdot \tau_w^{ei} \approx 1: \frac{1}{Z^3} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} : \frac{1}{2Z^2} \frac{m_i}{m_e}. \quad (4.63)$$

Diese Relation bestätigt insbesondere die schon früher gemachte Aussage, daß Elektronen und Ionen nur sehr langsam ins thermodynamische Gleichgewicht mit $T_e = T_i$ übergehen. Für ein Wasserstoffplasma mit $T_e \approx T_i$ lautet die Relation zahlenmäßig $\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} = 1 : 43 : 645$.

Eine weitere, sehr wichtige Frage betrifft die Reibungskraft zwischen zwei Teilchenarten mit Maxwell'schen Verteilungen, deren Geschwindigkeitszentren $\mathbf{v}_0 = \langle \mathbf{v} \rangle$ und $\mathbf{v}_0^* = \langle \mathbf{v}^* \rangle$ aber eine kleine Differenzgeschwindigkeit $\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^*$ aufweisen ($\delta v \ll v_{\text{th}}, v_{\text{th}}^*$). Die Reibungskraft pro Volumeneinheit der Testteilchen lässt sich dann ausdrücken als

$$\langle\langle \vec{F} \rangle\rangle = -mnv(\vec{v}_0 - \vec{v}_0^*) \quad (4.64)$$

mit der Stoßfrequenz für Impulsaustausch²⁹

$$v = \frac{16\sqrt{\pi}}{3m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^*} \right) \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2 (v_{\text{th}}^2 + v_{\text{th}}^{*2})^{3/2}} \quad (4.65)$$

Mit der Energieaustauschzeit besteht der Zusammenhang $\tau_w = (m + m^*)/(2v m)$. In Gl. (4.65) ist $v_{\text{th}} = (2 T/m)^{1/2}$ und $v_{\text{th}}^* = (2 T^*/m^*)^{1/2}$. Man beachte insbesondere die Asymmetrie $v \neq v^*$. Für die Reibungskräfte ergibt sich aber im Einklang mit *actio = reactio* : $\mathbf{F}^* = m^* n^* v^* \mathbf{u} = -\mathbf{F}$. Diese Stoßfrequenzen (bzw. die hierzu reziproken Stoßzeiten $\tau_p = 1/v_p$, die im übrigen nicht sehr verschieden von τ_w sind) sind besonders für gleiche Temperaturen von Bedeutung

$$v = \frac{4\sqrt{2\pi m_r}}{3m} \frac{q^2 q^{*2} \ln \Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{n^*}{T^{3/2}} \quad (4.66)$$

$$v[\text{s}] = 6,78 \cdot 10^{-14} \sqrt{\frac{AA^*}{A + A^*}} \frac{Z^2 Z^{*2} \ln \Lambda}{A} \frac{n^* [\text{m}^{-3}]}{T[\text{eV}]^{3/2}}$$

worin A und A^* die relativen Atommassen der Teilchen sind. Für die besonders häufig benötigten Stoßfrequenzen für Elektronen und Protonen hat man die Beziehungen

$$v_{ee} = 2.06 \cdot 10^{-12} n_e T_e^{-3/2} \ln \Lambda \quad [\text{s}^{-1}]; \quad v_{ei} = 2.91 \cdot 10^{-12} n_i T_e^{-3/2} \ln \Lambda \quad [\text{s}^{-1}] \quad (4.67)$$

$$v_{ie} = 1.58 \cdot 10^{-15} n_e T_e^{-3/2} \ln \Lambda \quad [\text{s}^{-1}]; \quad v_{ii} = 4.80 \cdot 10^{-14} n_i T_i^{-3/2} \ln \Lambda \quad [\text{s}^{-1}]$$

wobei die Temperaturen in eV und die Dichten in m^{-3} einzusetzen sind. Der erste Index bezieht sich hierbei auf das Testteilchen, der zweite auf die Feldteilchen.

4.5. Plasmaleitfähigkeit

Mit den im vorigen Abschnitt angegebenen Stoßfrequenzen für Impulsaustausch sind wir insbesondere in der Lage, die elektrische Leitfähigkeit eines vollständig ionisierten Plasmas anzugeben. Wir betrachten speziell ein reines Wasserstoffplasma. Ausgangsrelation ist die Gleichung für die Stromdichte

²⁹ Siehe F. L. Hinton, *Handbook of Plasmaphysics*, Vol. 1, North Holland Publishing Company (1983)

$$\vec{j} = e n_e (\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{e0}), \quad (4.68)$$

die wir sogleich in die Relation (4.64) für die Reibungskräfte pro Volumeneinheit, die die Elektronen (Testteilchen) erfahren, einsetzen wollen

$$\langle\langle \vec{F}_e \rangle\rangle = n_e m_e v_{ei} (\vec{v}_{i0} - \vec{v}_{e0}) = m_e v_{ei} \frac{\vec{j}}{e}. \quad (4.69)$$

Hier haben wir der Deutlichkeit halber beide Indizes angegeben, wobei der erste Index sich – wie immer – auf das Testteilchen bezieht. Wir setzen nun diese Reibungskraft der Beschleunigungskraft im elektrischen Feld gleich $\langle\langle \vec{F}_e \rangle\rangle + (-e) n_e \mathbf{E} = 0$ und erhalten $\mathbf{j} = n_e e^2 \mathbf{E} / (m_e v_{ei})$. Andererseits treibt das E-Feld die Stromdichte gemäß dem Ohmschen Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (4.70)$$

mit der *Leitfähigkeit* σ . Für σ ergibt sich durch Vergleich die sogenannte *Drude-Formel*

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_{ei}}. \quad (4.71)$$

Setzen wir hierin die Stoßfrequenz nach Gl. (4.66)

$$v_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{m_e}} \frac{e^4 \ln \Lambda_e}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{n_e}{T_e^{3/2}} = 9,17 \cdot 10^{-17} \ln \Lambda_e \frac{n_e [m^{-3}]}{T_e^{3/2} [keV]} [s^{-1}] \quad (4.72)$$

ein, so erhält man die von der Dichte unabhängige Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2}{\sqrt{2m_e} e^2 \ln \Lambda} T_e^{3/2} \\ \sigma [\Omega^{-1} m^{-1}] = 3,8 \cdot 10^8 \frac{T_e^{3/2} [keV]}{\ln \Lambda}. \quad (4.73)$$

Für ein Plasma mit $T_e = 1 \text{ keV}$ ergibt sich eine Leitfähigkeit von etwa $2 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1}$, was in etwa der Leitfähigkeit von Kupfer mit $\sigma_{\text{Cu}} = 5,9 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1}$ entspricht. Die Unabhängigkeit von der Dichte erklärt sich aus dem Umstand, daß einerseits σ proportional zur Zahl der Ladungsträger zunimmt entsprechend Gl. (4.71), andererseits aber auch die Zahl der Streuzentren und damit die Stoßfrequenz hierzu proportional ist. Die Gleichung (4.73) stimmt im übrigen nur näherungsweise, da die Elektronen unter dem Einfluß des E-Feldes deutliche Abweichungen zur Maxwell-Verteilung ausbilden, so daß die von L. Spitzer und R. Härn (Physical Review 89, 977, (1953)) genau berechnete Leitfähigkeit um etwa 40% größer ist. Die starke Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ist ihr besonderes Merkmal. Daneben tritt noch eine hier nicht betrachtete Abhängigkeit von der *effektiven Ladung* der Ionen. In relativ guter Näherung gilt

$$\sigma [\Omega^{-1} m^{-1}] = 1,92 \cdot 10^4 \left(2 - Z_{\text{eff}}^{-1/3}\right) \frac{T_e^{3/2} [eV]}{Z_{\text{eff}} \ln \Lambda} \quad (4.74)$$

für die sogenannte *Spitzer-Leitfähigkeit* des Plasmas.

5. TEILCHENBAHNEN IM MAGNETFELD

In vielen Anwendungen ist das Plasma durch Magnetfelder mehr oder weniger gut eingeschlossen. Aufgrund der topologischen Eigenschaft von magnetischen Feldern, die auf der Nicht-Existenz von "magnetischen Ladungen" (genauer: keine magn. Monopole $\rightarrow \text{div } \mathbf{B} = 0$) beruhen, ist ein optimaler Einschluß allerdings nicht in einer einfach geschlossenen Geometrie (z.B. Kugel, topologisches Geschlecht = 0), sondern nur in einer toroidalen Anordnung (topologisches Geschlecht = 1) möglich. Allerdings weisen auch andere Konfigurationen, wie beispielsweise lineare magnetische Spiegel, in einem gewissen Sinne Einschlußeigenschaften auf, indem sie die Bewegung des Plasmas in der zu \mathbf{B} senkrechten Richtung stark und in der parallelen Richtung teilweise einschränken. Das Verhalten eines Plasmas in solchen Anordnungen ist im allgemeinen sehr kompliziert und kann am besten im Rahmen der später zu behandelnden makroskopischen Theorie verstanden werden.

Eine genaue Vorstellung von der Bewegung der einzelnen Ladungsträger des Plasmas in solchen magnetischen Konfigurationen ist dennoch sehr hilfreich. Bei starken Magnetfeldern sind die geladenen Teilchen im wesentlichen an die magnetischen Feldlinien gebunden und können nur parallel zu \mathbf{B} große Strecken schnell überwinden. Daneben treten jedoch in der Regel in der zu \mathbf{B} senkrechten Fläche verhältnismäßig langsame Geschwindigkeiten auf, sogenannte *Driften*, die für die positiven und negativen Teilchen entweder in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung weisen können. Im letzteren Fall ist die Teilchenbewegung mit elektrischen Strömen verbunden, die zu Aufladungen und damit zu elektrischen Feldern führen können. Es ist insbesondere die Berechnung dieser E-Felder und ihre Rückwirkung auf die Bewegung der Teilchen, die eine konsistente Beschreibung des Plasmas in diesem **Einzelteilchenbild** so kompliziert gestaltet.

Wir geben im folgenden einen Überblick über die Teilchendriften in magnetischen und elektrischen Feldern. Neben den möglichen exakten Invarianten der Bewegung (Energie und kanonischer Drehimpuls) sind die *adiabatischen Invarianten* für eine näherungsweise Beschreibung der Teilchenbewegung von herausragender Bedeutung.

5.1. Teilchenbewegung im statisch homogenen Magnetfeld

Die Teilchenbewegung wird durch die Gleichung³⁰

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.1)$$

festgelegt. Da die auf der rechten Seite stehende *Lorentzkraft* keine Komponente in Richtung von $\vec{B} = B\vec{e}_z$ aufweist, gilt wie im kraftfreien Fall $v_{||} = v_z = \text{const}$. Multiplizieren wir die Gl. (5.1) skalar mit \vec{v} , so ergibt sich $m\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt = m/2 d\vec{v}^2/dt = q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$. Damit ist die **kinetische Energie** $m v^2/2 = m(v_{||}^2 + v_{\perp}^2)/2$ ebenfalls eine Konstante der Bewegung. Dies gilt auch für den Fall, daß \mathbf{B} nicht homogen ist (nicht jedoch bei zeitlicher Variation von \mathbf{B}), da die Lorentzkraft ja immer senkrecht zur Bewegungsrichtung steht und somit keine Arbeit leistet. Aus der Konstanz von $v_{||}$ und $v_{||}^2 + v_{\perp}^2$ folgt sogleich, daß auch v_{\perp}^2 eine Konstante der Bewegung ist. Man wird aus Symmetriegründen vermuten, daß die Bewegung in der zu \vec{B} senkrechten x-y-Fläche eine Kreisbewegung darstellt, bei der sich Zentrifugal- und Lorentzkraft das Gleichgewicht halten. Dies bestätigen wir leicht mit Hilfe des Ansatzes $\vec{r} = \rho(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) + v_z t \vec{e}_z$, der uns mit $d\varphi/dt = \dot{\varphi} = \text{const}$. auf $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \rho\dot{\varphi}(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y) + v_z \vec{e}_z$ und $d\vec{v}/dt = -\dot{\varphi}^2 \rho(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y) = -\dot{\varphi}^2 \vec{r}$ führt. Einsetzen in Gl. (5.1) ergibt mit $\vec{v} \times \vec{e}_z = \rho\dot{\varphi}(\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\varphi\vec{e}_x) = \dot{\varphi}\vec{r}$ die Beziehung $-m\dot{\varphi}^2 \vec{r} = qB\dot{\varphi}\vec{r}$. Für die stets positive **Zyklotronfrequenz** (Gyrofrequenz) $|d\varphi/dt| = \omega_c$ erhalten wir somit

³⁰ Im relativistischen Fall ist die linke Seite durch $d(m\vec{v})/dt$ mit $m = m_0/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ zu ersetzen.

$$\omega_c = \frac{|q|}{m} B. \quad (5.2)$$

Der *Gyroradius* ergibt sich dann aus der Beziehung

$$\rho \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (5.3)$$

Für ein typisches Fusionsplasma mit $B = 3$ T erhalten wir für Protonen und Elektronen die Zyklotronfrequenzen $\omega_{cp} = 2.87 \cdot 10^8$ s⁻¹ und $\omega_{ce} = 5.28 \cdot 10^{11}$ s⁻¹. Setzen wir für v_{\perp} die thermischen Geschwindigkeiten $v_{th} = (2T/m)^{1/2}$ ein, so erhalten wir auch noch für ein Hochtemperaturplasma mit $T_i = T_e = 3$ keV die recht kleinen Gyroradien $\rho_p = 1,1$ mm und $\rho_e = 25$ μ m.

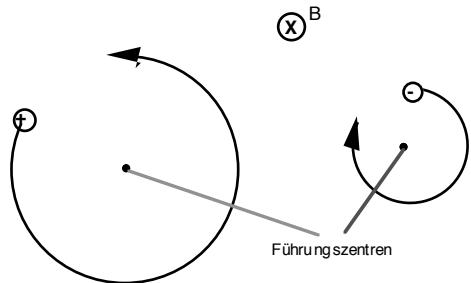


Abb. 5.1: Die Gyrbewegung von Ionen (+) und Elektronen (-) in der zu B senkrechten Ebene.

Die allgemeine Bahn der Teilchen ist eine Schraubenlinie, wobei das sogenannte *Führungszentrum* (guiding center) sich mit der Geschwindigkeit v_{\parallel} parallel zum Magnetfeld bewegt. Blickt man in Richtung von \mathbf{B} , so gyrieren positiv geladene Teilchen entgegen dem Uhrzeigersinn, während negative im Uhrzeigersinn umlaufen (Abb. 5.1). Das durch diese Kreisströme erzeugte Magnetfeld hat damit immer die entgegengesetzte Richtung wie das äußere Feld. Die Teilchenbewegung schwächt somit das äußere Magnetfeld, so daß das Plasma grundsätzlich ein *diamagnetisches* Verhalten zeigt.

5.2. Teilchendriften

Im allgemeinen Fall kommen zu den magnetischen Kräften noch weitere hinzu, die wir durch \mathbf{F} kennzeichnen wollen. Die Bewegungsgleichung lautet dann in Verallgemeinerung von Gl. (5.1)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.4)$$

Betrachten wir den Fall einer zeitlich und räumlich konstanten Kraft, so können wir mit der Transformation $\vec{v} = \vec{v}_D + \vec{v}_g$ in ein Bezugssystem gehen, das sich mit der *Driftgeschwindigkeit*

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2} \quad (5.5)$$

bewegt. Da nach Voraussetzung $d\vec{F}/dt = 0$, wird auch $d\vec{v}_D/dt = 0$, sofern $d\vec{B}/dt = 0$ gilt. Mit der Identität $q\vec{v}_D \times \vec{B} = -\vec{F}$ erhalten wir dann für v_g die der Gl. (5.1) entsprechende Gleichung $m d\vec{v}_g / dt = q\vec{v}_g \times \vec{B}$ für ein konstantes Magnetfeld, deren Lösung wir bereits kennen. Die Gesamtbewegung ist also die Überlagerung einer raschen Gyration (Schraubenbewegung in Richtung von B) mit einer Drift in der zu B und \vec{F} senkrechten Richtung vom Betrage $v_D = F/(qB)$. Die Annahme $d\vec{B}/dt = 0$ bedarf noch einer genaueren Betrachtung. Die Feldstärke \vec{B} ist im allgemeinen eine Funktion des Ortes und der Zeit. In die Gleichung (5.4) haben wir nun diejenige Feldstärke einzusetzen, die das Teilchen während seiner Bewegung an seinem jeweiligen Ort erfährt. Die totale zeitliche Ableitung enthält damit einen expliziten Anteil $(\partial \vec{B}/\partial t)$ und einen impliziten Anteil, der aufgrund der

Bewegung des Teilchens im inhomogenen Magnetfeld entsteht. Für eine skalare Funktion $f(x,y,z,t)$ ergibt sich für die totale zeitliche Ableitung $df/dt = \partial f / \partial t + \partial f / \partial x (dx/dt) + \partial f / \partial y (dy/dt) + \partial f / \partial z (dz/dt) = \partial f / \partial t + \partial f / \partial x v_x + \partial f / \partial y v_y + \partial f / \partial z v_z$. Dies schreibt sich in Vektornotation

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f \quad (5.6)$$

Analog könnte die Änderungsgeschwindigkeit von \vec{B} in Richtung von \vec{v} als $\vec{v} \cdot \nabla \vec{B}$ geschrieben werden. Die Größe $\nabla \vec{B}$ ist dann aber ein Tensor, der nach skalarer Multiplikation von links mit \vec{v} den Vektor der zeitlichen Veränderung liefert. Man bevorzugt aber die Schreibweise

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (5.7)$$

wobei $(\vec{v} \cdot \nabla) = (v_x \partial / \partial x + v_y \partial / \partial y + v_z \partial / \partial z)$ ein *skalarer Differentialoperator* ist, der auf die Komponenten $B_x(x,y,z,t)$, $B_y(x,y,z,t)$, $B_z(x,y,z,t)$ des Vektorfeldes \vec{B} einwirkt. Anschaulich bedeutet $(\vec{e} \cdot \nabla) = \partial / \partial s$ eine Differentiation in Richtung des Einheitsvektors \vec{e} .

Damit also Gl. (5.5) eine gute Näherung ist, müssen wir fordern, daß die im Verlauf einer Gyration auftretenden zeitlichen und räumlichen Änderungen von \vec{B} klein sind. Mit der Periodendauer $\tau_c = 1/v_c = 2\pi/\omega_c$ und dem Gyroradius ρ führt das zu folgenden Bedingungen:

$$\frac{\tau_c}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \ll 1; \quad \tau_c \frac{|(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}|}{B} \ll 1; \quad \rho \frac{\vec{e}_r \cdot \nabla B}{B} \ll 1. \quad (5.8)$$

ExB-Drift

Die im vorigen Abschnitt abgeleitete Formel für die Driftgeschwindigkeit können wir sogleich auf den Fall anwenden, daß die Kraft durch ein elektrisches Feld zustande kommt. Mit $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ erhalten wir

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (5.9)$$

Die sich ergebende Drift ist damit weder von der Ladung, noch von der Masse der Teilchen abhängig. Das Plasma führt daher im E-Feld eine Drift aus, bei der sich alle Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit $v_E = E/B$ senkrecht zu \mathbf{B} und \mathbf{E} bewegen. bleibt.

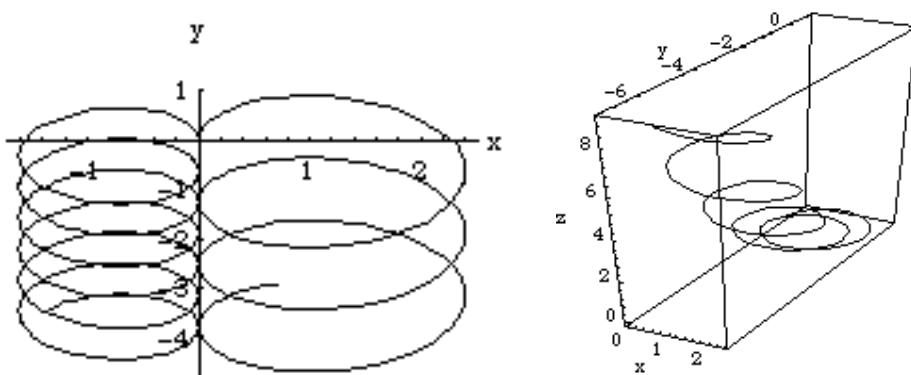


Abb. 5.2a: ExB-Drift für positive (rechts) und negative (links) Teilchen [$q_- = -1$, $q_+ = 1$, $m_- = 1/2$, $m_+ = 1$]. Das Magnetfeld weist in z -Richtung [$B = (0,0,1)$], das E-Feld in x -Richtung [$E = (0.2,0,0)$]. Beide Teilchen starten im Koordinatenursprung mit einer Geschwindigkeit in y -

Richtung $[v_+ = (0,1,0); v_- = (0,\sqrt{2},0)]$ Abb. 5.2b: Teilchenbewegung für ein positives Teilchen wie in Abb. 5.2a bei zusätzlicher kleiner E-Feldkomponente in Richtung des Magnetfelds B ($E_z = E_x/10$).

Infolge dieser Bewegung verschwindet im Plasma (mitbewegtes System) das elektrische Feld gemäß der Transformationseigenschaft der Maxwell-Gleichungen $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. Ein Beispiel für eine derartige Drift ist in der Abb. 5.2a gezeigt. Hat das elektrische Feld eine zusätzliche Komponente in Richtung von B , so kommt es zu einer zusätzlichen Beschleunigung. Es entstehen komplizierte spiralförmige Raumkurven wie in Abb. 5.2b. Man beachte, daß der Gyroradius wegen $W_\perp = \text{const.}$ unverändert

Gravitationsdrift

Im Gravitationsfeld erfahren die Teilchen die Kraft $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$, was zu Driften gemäß

$$\vec{v}_g = \frac{m \vec{g} \times \vec{B}}{q B^2} \quad (5.10)$$

führt. Anders als beim E-Feld weisen nun die Driften für Elektronen und Ionen in unterschiedliche Richtungen und hängen zudem noch von den Massen ab. Unter Beachtung der Quasineutralität ergibt sich somit eine Stromdichte

$$\vec{j} = n_e (m_i / Z_i + m_e) \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (5.11)$$

Wegen der äußerst geringen Stärke der Gravitationskräfte können jedoch auch die hierdurch hervorgerufenen Driften und Ströme fast ausnahmslos vernachlässigt werden.

Driften im inhomogenen Magnetfeld

Das homogene Magnetfeld ist eine Idealisierung, die in der Natur nur näherungsweise erfüllt ist. Die von realen Strömen erzeugten Magnetfelder sind letztlich immer in bestimmten Bereichen inhomogen in dem $\nabla B \neq 0$, wobei mit B der Betrag des Magnetfeldes gemeint ist. Zusätzlich impliziert ein inhomogenes Magnetfeld aber auch immer eine Krümmung der Feldlinien. Das sieht man explizit mit Hilfe der Vektor-Identität

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = B \nabla B - \vec{B} \times \text{rot} \vec{B} \quad (5.12)$$

Da unter stationären Bedingungen nach dem Ampereschen Gesetz $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ die Rotation des B-Feldes im stromfreien Gebiet verschwindet, hat man unter solchen Bedingungen

$$\frac{\nabla B}{B} = \frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{B^2} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial s} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \vec{b} \quad (5.13)$$

Hierin ist $\mathbf{b} = \mathbf{B} / B$ ein Tangenteneinheitsvektor an die Feldlinie und s die Bogenlänge entlang der Feldlinie. Der Vektor

$$\vec{\kappa} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial s} = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} = -\frac{\vec{e}_r}{r} \quad (5.14)$$

ist der lokale Krümmungsvektor. Er steht immer senkrecht auf der Feldlinie. Der Radius r ist der lokale Krümmungsradius der Feldlinien und \mathbf{e}_r ein zu \mathbf{B} senkrechter Einheitsvektor in der Schmiegungsebene.

Folgt das Teilchen den Feldlinien, so treten zweierlei Kräfte auf. Zum einen bedingt die Inhomogenität eine Kraft

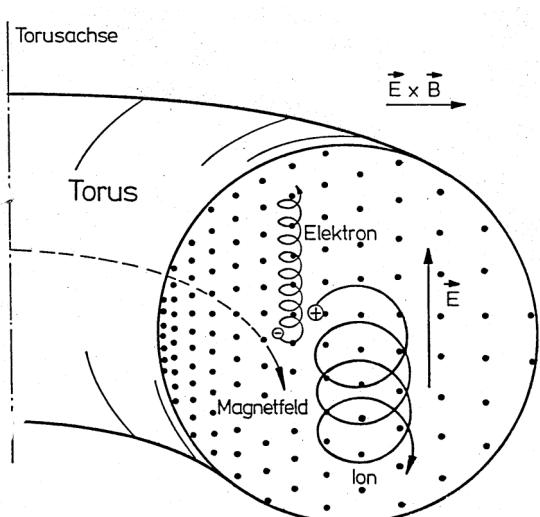
$$F_{grad} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\mu \nabla B \quad (5.15)$$

worin $\mu = IA = W_{\perp}/B = m/2 v_{\perp}^2/B$ das *magnetische Moment* des Teilchens ist, worauf wir später noch zurückkommen werden. Ferner erfährt das Teilchen wegen der Krümmung der Feldlinien eine *Zentrifugalkraft*

$$\vec{F}_{K\ddot{r}i\ddot{m}} = -mv_{\parallel}^2 \vec{k} = mv_{\parallel}^2 \frac{\vec{e}_x}{r} \quad (5.16)$$

Die von beiden Kräften bewirkte Drift ergibt sich zu

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{B} \times \left(mv_{\parallel}^2 (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{b} + \frac{m}{2} v_{\perp}^2 \frac{\nabla B}{B} \right)}{qB^2} \quad (5.17)$$



Im stromfreien Gebiet (oder näherungsweise für Plasmen mit $\beta = p/(B^2/2\mu_0) \ll 1$) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\vec{v}_D = \left(mv_{\parallel}^2 + \frac{m}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{B} \times \nabla B}{qB^3} \quad (5.18)$$

Die Drift ist in grober Näherung (Faktor 2 bei v_{\parallel}^2) proportional zur kinetischen Energie der Teilchen.

Abb. 5.3 : Driften im inhomogenen Magnetfeld eines Torus.

In einem reinen Toroidalfeld (ohne Verschraubung der Feldlinien) ist $\mathbf{B} = B_0 R_0 / R \mathbf{e}_{\phi}$, wobei R_0 der große Torusradius ist und $B_0 = B(R_0)$. Der

Krümmungsradius ist dementsprechend der Abstand zur Torusachse R und für den Gradienten des Betrages ergibt sich $\nabla B = -\vec{e}_R B / R$. Die Gleichung (5.18) ergibt sich zu

$$\vec{v}_D = \left(mv_{\parallel}^2 + \frac{m}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{e}_z}{qBR} = \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\vec{e}_z}{\omega_c R} \quad (5.19)$$

Sie besagt, daß in einem solchen Torus die Teilchen parallel zur Torusachse nach oben oder unten driften, und zwar je nach Vorzeichen der Ladung in entgegengesetzte Richtungen. Wie in Abb. 5.3 veranschaulicht, entsteht als Folge ein vertikales E -Feld, indem nun beide Teilchensorten in die gleiche Richtung, nämlich zur Torusaußenseite, driften. Hierdurch gehen die Teilchen so schnell an der Wand verloren (typisch weniger als 1 ms), daß man nicht mehr von einem Einschluß im Magnetfeld sprechen kann. Wir werden später sehen, daß eine Verschraubung der magnetischen Feldlinien in toroidaler Richtung diesen Teilchenverlust weitgehend aufheben kann.

Auch in der Magnetosphäre der Erde spielt die oben abgeleitete Drift eine Rolle. Das Erdmagnetfeld hat näherungsweise einen Dipolcharakter und ist somit inhomogen. Im Abstand von etwa 3 bis etwa 5 Erdradien befindet sich der *Van-Allen-belt*, eine Zone mit geladenen Teilchen mit Energien im Bereich von einigen eV bis hin zu 100 MeV. Ein Großteil dieser Teilchen oszilliert zwischen dem Nord- und Südbereich dieser Zone, wobei der später zu besprechende Spiegeleffekt die Reflexion in den polnahen Gegenden bewirkt (Abb. 5.4). Daneben verursacht die Inhomogenität noch eine äquatoriale Drift, die wiederum in unterschiedliche Richtungen für die Elektronen und Ionen weist. Hierdurch entsteht ein elektrischer Strom, der in Ost-West-Richtung die Erde umschließt und einen

Beitrag zum Erdmagnetfeld liefert, das in nullter Näherung durch Ströme im Erdinneren erzeugt wird.

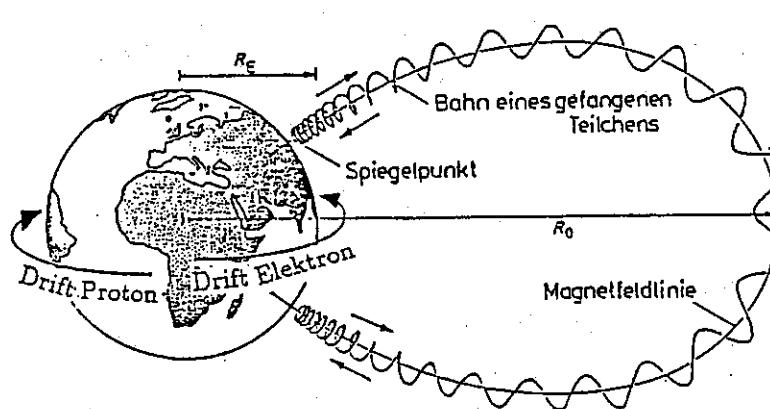


Abb.5.4: Protonen- und Elektronendrift im Erdmagnetfeld.

Da die Auffüllung des Van-Allenbelts mit Teilchen von der Aktivität der Sonne (Sonnenflecken) abhängt, ist auch die Störung des Erdmagnetfelds zeitlichen Schwankungen unterworfen.

5.2.1. DRIFTEN IM INHOMOGENEN E-FELD

Wir betrachten die Kombination eines homogenen B -Feldes mit einem hierzu senkrechten inhomogenen E -Feld. Das E -Feld variiere cosinusförmig und lasse sich durch $\mathbf{E} = E_0 \cos(kx) \mathbf{e}_x$ beschreiben. Die hiermit verbundene sinusförmige Ladungsverteilung mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ können wir uns beispielsweise durch eine elektrostatische Welle im Plasma verursacht denken. Bei kleinem Gyroradius ($k\rho \ll 1$) hat die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E}(x) + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.20)$$

die Lösung

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 \rho^2 \right) \quad (5.21)$$

welche gegenüber dem Fall der gewöhnlichen ExB -Drift im homogenen E -Feld um den Klammerfaktor modifiziert ist. Wichtig an diesem Ergebnis ist, daß, im Gegensatz zum homogenen Magnetfeld, der Ausdruck (5.21) wieder eine – wenngleich schwache – Abhängigkeit von der Ladung aufweist, da die Gyroradien der Elektronen bei annähernd gleicher Temperatur wesentlich kleiner als die der Ionen sind. Man bezeichnet diese Erscheinung als *finite Larmor-Radius Effect*. Der Effekt ist der Abb. 5.5 zu entnehmen, die das Ergebnis numerischer Rechnungen für ein stark inhomogenes E -Feld wiedergibt.

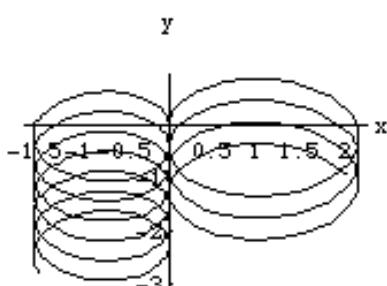


Abb. 5.5: Die Driften von negativen und positiven Teilchen im stark inhomogenen E_x -Feld. Im Gegensatz zur Abb. 5.2a ist $\mathbf{E} = (0.2 \cos x, 0, 0)$ angenommen.

Wir können den obigen Ausdruck noch allgemeiner schreiben, indem wir $i \cdot k$ durch ∇ und damit $-k^2$ durch ∇^2 ersetzen³¹

³¹ Für ebene Wellen vom Typ $\underline{E} = E_0 \exp[i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)]$ ergeben sich die Zusammenhänge $\nabla \cdot \underline{E} = i \underline{k} \cdot \underline{E}$ und $\nabla \times \underline{E} = i k_x \underline{E}$. Ebenso erhält man $\nabla \phi = i \underline{k} \phi$ für eine skalare Funktion $\phi = \phi_0 \exp[i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)]$

$$\vec{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} \rho^2 \nabla^2\right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (5.22)$$

Die durch diese Drift verursachte Ladungstrennung kann die ursprüngliche Ladungsinhomogenität verstärken und führt dann zu den sogenannten *Driftinstabilitäten* (eine spezielle Art aus der Klasse der *Mikroinstabilitäten*). Wie man der Gl. (5.21) entnimmt, ist der Effekt nur für große Werte von k , d.h. kleine Wellenlängen ($\lambda/\rho \approx 1 - 10$), von Bedeutung. Die sich ausbildenden (kleinskaligen) Driftinstabilitäten können insbesondere eine Erhöhung des Teilchen- und Energietransports quer zum Magnetfeld zur Folge haben.

5.2.2. POLARISATIONSDRIFT

Während im vorausgehenden Abschnitt das elektrische Feld eine räumliche Inhomogenität aufwies, soll jetzt eine *zeitliche Variation von E_\perp* betrachtet werden. Die hieraus hervorgehende elektrische Polarisation des Plasmas ist von *größer Bedeutung* und muß bei den verschiedensten Vorgängen wie Plasmawellen, Plasmarotation oder auch turbulenter Transport in Betracht gezogen werden.

Linear ansteigendes E-Feld

Wir betrachten zunächst zwei Lösungen der Bewegungsgleichung (5.4), bei denen sich zum Zeitpunkt $t = 0$ das Teilchen am Koordinatenursprung in Ruhe befindet. Im ersten Fall wachse das zu B senkrechte E -Feld für $t \leq t_0$ linear mit der Zeit an ($E = E_0 t/t_0 \mathbf{e}_y$, $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$). Wir erhalten die Lösung

$$x = \frac{v_d t_0}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + \frac{v_d t_0}{(\omega_c t_0)^2} (\cos \omega_c t - 1); \quad y = \frac{v_d}{\omega_c} \left(\frac{t}{t_0} \right) - \frac{v_d t_0}{(\omega_c t_0)^2} \sin \omega_c t \quad (5.23)$$

mit der schon bekannten ExB-Driftgeschwindigkeit $v_d = E_0/B_z$ und der Zyklotronfrequenz $\omega_c = q B_z/m$. Bei langsamer Zunahme des E -Feldes ist $\omega_c t_0 \gg 1$. Die zu $(\omega_c t_0)^2$ proportionalen Terme können dann vernachlässigt werden. Die Teilchen laufen während der Anstiegsphase des Feldes im wesentlichen auf einer *Parabel* $y = v_d/\omega_c (2x/v_d t_0)^{1/2}$ (s. Abb. 5.6 a). Die *Teilchen folgen also die same dem E-Feld und bewegen sich in dessen Richtung mit der konstanten Polarisations-Driftgeschwindigkeit* $v_y = y/t = (E_0/t_0)/(B \omega_c)$. Ist das E -Feld für $t > t_0$ konstant, so driften sie während dieser späteren Zeit mit einer konstanten Geschwindigkeit v_d parallel zur x -Achse im Abstand $y_0 = v_d/\omega_c = m E_0/q B_z^2$. Positive Ionen haben damit die Strecke y_0 in Richtung des Feldes zurückgelegt und dabei die Energie $W = 1/2 q E_0 y_0 = m/2 v_d^2$ aufgenommen. Elektronen nehmen die gleiche Energie auf, laufen aber in die entgegengesetzte Richtung; ihre y -Versetzung ist jedoch wegen $l y_{0e}/l y_{0i} = m_e/m_i$ vernachlässigbar. Es entsteht somit eine elektrische *Polarisation des Plasmas* $\mathbf{P} = q_i n_i y_0 \mathbf{e}_y = n_i m_i B_z^2 \mathbf{E}$ durch die Bewegung der Ionen senkrecht zu B während der instationären Phase des E -Feldes. Für die dielektrische Verschiebung gilt allgemein $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$. Setzen wir hierin unseren Ausdruck für die Polarisation senkrecht zu B ein, so erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante den Ausdruck

$$\epsilon_\perp = 1 + \frac{\rho}{\epsilon_0 B^2} = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \quad (5.24)$$

worin $\rho \approx n_i m_i$ die Massendichte und $v_A = B (\mu_0 \rho)^{-1/2}$ die *Alfvengeschwindigkeit* sind; letztere wird uns bei den hydromagnetischen Wellen im Plasma wieder begegnen. Da in der Regel $v_A/c \ll 1$ gilt, weist ein *agnetisiertes Plasma eine hohe Polarisierbarkeit auf* und Werte von $\epsilon_\perp > 10^5$ sind durchaus typisch. Hohe Werte von ϵ_\perp ergeben sich insbesondere bei kleinen Magnetfeldern (großer Gyroradius). In diesen Fällen wächst jedoch auch der Einfluß der Stöße mit den neutralen Atomen, und wir werden später sehen, daß die statische, senkrechte elektrische Leitfähigkeit mit dem Verhältnis $R = v_0/\omega_c = \text{Stoßfrequenz}/\text{Gyrofrequenz}$ entsprechend $\sigma_\perp = \sigma_{\parallel} R^2/(1+R^2)$ zunimmt. Ein vollständig ionisiertes Plasma dagegen erlaubt keine statischen elektrischen Ströme senkrecht zu B (nur statische ExB-Driften), sondern nur die hier betrachteten zeitlich variierenden Polarisationsströme.

Sprunghaft ansteigendes E-Feld

Wir zeigen nun noch, daß die gleiche Polarisation auch bei sehr schnellen Veränderungen ($\omega_c t_0 \gg 1$) auftritt. Dazu betrachten wir den Fall, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ das E-Feld instantan auf E_0 springt. Wir brauchen in diesem Fall nur die Gl. 3.1 für zeitlich konstante Felder zu lösen und erhalten

$$x = v_D t - v_D / \omega_c \sin \omega_c t; \quad y = v_D / \omega_c (1 - \cos \omega_c t) \quad (5.25)$$

Es handelt sich um *Zykloiden*: $(x - v_d t)^2 + (y - v_d / \omega_c)^2 = (v_d / \omega_c)^2$. Im zeitlichen Mittel weisen auch hier die Teilchen die gleiche Versetzung in Richtung des E-Felds auf wie oben $\langle y \rangle = v_d / \omega_c = y_0$. In der Abb. 5.6a sind die beiden besprochenen Lösung dargestellt. Zusätzlich zeigen wir in der Abb. 5.6b die Ergebnisse numerischer Rechnungen für ein sich gemäß $E(t) = 0.05 \tanh(t/t_0)$ allmählich einstellendes E-Feld. Fügen wir noch eine Amplitudenmodulation von 5 % mit der Resonanzfrequenz ω_c hinzu, so wächst der Gyroradius mit der Zeit an (*Zyklotron Heizung*); dennoch bleibt auch in diesem resonanten Fall die mittlere Polarisationsverschiebung unverändert

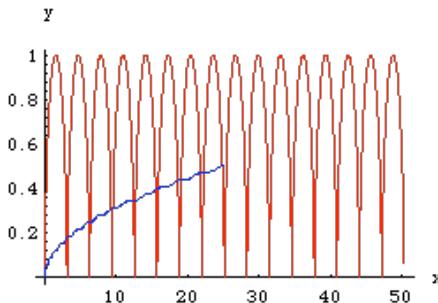


Fig. 5.6a: Polarisationsdriften für – konstantes E_y -Feld (Zykloiden) und – linear ansteigendes E_y -Feld ("Parabel")
($v_d = 0.5, \omega_c = 1, 0 \leq t \leq t_0 = 100$)

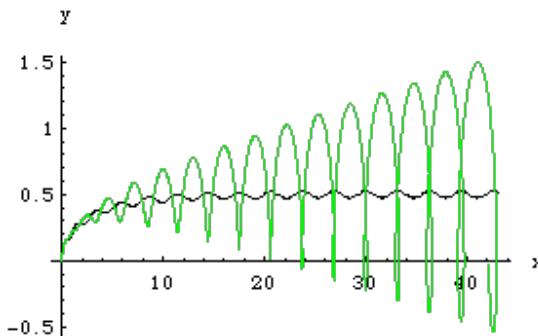


Fig. 5.6b: Wie Abb. 5.6a, aber mit – $E_y(t) = 0.5 \tanh(0.05 t)$ (leicht gewellte Kurve)
– $E_y(t) = 0.5 \tanh(0.05 t) (1 + 0.05 \cos t)$ (Resonanzfall)

Der langsame Fall ($d \ln E / dt \ll \omega_c$) kann auch für ein beliebig variierendes Feld mit Hilfe der Fourieranalyse gelöst werden. Für die Polarisationsdrift ergibt sich in Verallgemeinerung unseres obigen Ergebnisses die Beziehung

$$\vec{v}_p = \text{sig}(q) \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (5.26)$$

Hiermit können wir auch sofort den zeitlich variierenden *Polarisationsstrom* eines Wasserstoffplasmas ausrechnen:

$$\vec{j}_p = n(e\vec{v}_{ip} - e\vec{v}_{ep}) = \frac{n}{B^2} (m_e + m_i) \frac{d\vec{E}}{dt} \approx \frac{\rho}{B^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (5.27)$$

Er wird – im Einklang mit unseren vorausgehenden Betrachtungen – im wesentlichen von den Ionen getragen. Auch hieraus läßt sich wieder die Dielektrizitätskonstante ableiten. Mit $j_p = \partial P / \partial t = \epsilon_0 \partial(\chi E) / \partial t$, erhält man durch Vergleich mit Gl. (5.27) für die elektrische *Suszeptibilität* $\chi = \rho / (\epsilon_0 B^2)$ und daraus mit $\epsilon = 1 + \chi$ die Gl. (5.24).

Ursache für den Polarisationsstrom ist letztlich die Trägheit der Ionen: Im sich ändernden E-Feld nehmen sie nur eine kleine Geschwindigkeit auf, so daß die $v \times B$ -Kraft, die sie aus der Richtung von E ablenkt, nur wenig zum Tragen kommt.

5.3. Exakte und adiabatische Invarianten der Bewegung

5.3.1. HAMILTONSCHE GLEICHUNGEN UND EXAKTE INVARIANTEN

Die Bewegungsgleichung für den Fall beliebiger elektrischer und magnetischer Felder ist, entsprechend Gl. (5.4), durch

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.28)$$

gegeben. Das E-Feld setzt sich im allgemeinen aus zwei Anteilen zusammen

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (5.29)$$

wobei der erste durch Ladungstrennung ($\nabla^2\Phi = -\rho_{el}/\epsilon_0$), der zweite durch Induktion hervorgerufen wird. Schreibt man nämlich mit Hilfe des Vektorpotentials \mathbf{A} das Magnetfeld als $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, wodurch der Bedingung $\text{div } \mathbf{B} = 0$ automatisch Rechnung getragen wird, so führt uns die Maxwellgleichung $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ sofort auf $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$.

Mit Hilfe der Vektor-Identität

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{v} \times \text{rot}\vec{A} \quad (5.30)$$

und der Gl. (5.7) ergibt sich für $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{A}/dt + \partial\mathbf{A}/\partial t$. Nach Einsetzen in Gl. (5.28) führt uns dies auf

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(q\Phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}) - q \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (5.31)$$

Diese Gleichung schreibt sich in verallgemeinerten Koordinaten q_i und Impulsen $p_i = \dot{q}_i$ in der Lagrange-Form als

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5.32)$$

mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\Phi + q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad (5.33)$$

Entsprechend der bekannten Vorschrift

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (5.34)$$

erhält man nach Wahl der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i die *generalisierten Impulse* p_i . Die Gleichungen (5.28) bzw. (5.32) sind äquivalent zu den *Hamiltonschen Gleichungen*

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad (5.35)$$

wobei sich die *Hamiltonfunktion* entsprechend ihrer Definition $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$ zu $H = m/2 v^2 + q \Phi$ ergibt. Ausgedrückt durch q_i und p_i erhalten wir H zu

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (5.36)$$

Ist nun q_1 eine *ignorable Koordinate*, so daß $\partial L / \partial q_1 = 0$, so ist auch $\partial H / \partial q_1 = 0$ und der generalisierte Impuls p_1 nach Gl. (5.34) eine Konstante. Liegt z.B. H o m o g e n i t ä t in z -Richtung vor, so ist $q_1 = z$ und $\dot{q}_1 = \dot{z}$. Der generalisierte Impuls nach Gl. (5.33), (5.34)

$$p_z = m\dot{z} + qA_z \quad (5.37)$$

ist somit eine exakte Konstante (α_1) der Bewegung. Man nennt $p_z = m v_z + q A_z$ in diesem Fall auch den *kanonischen Impuls*. Die zweite Hamiltonsche Gleichung liefert im übrigen für $dz/dt = \partial H / \partial p_z = (\alpha_1 - q A_z)/m = \text{const.}$, was man natürlich auch gleich der Gl. (5.37) entnimmt. Mit Hilfe der Gl. (5.31) können wir sogleich zeigen, daß in der Umgebung eines geraden, stromdurchflossenen Drahtes ein geladenes Teilchen auf einer oszillierenden Bahn mit mittlerem Abstand $r = r_0$ umläuft: Sei $\mathbf{j} = j_z \mathbf{e}_z$ die Stromdichte und I_z der Strom im Draht, so erhalten wir (unter Verwendung der *Coloumb-Eichung* $\text{div } \mathbf{A} = 0$) aus $\text{rot rot } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ für das Vektorpotential $A_z = -I \ln r / (2\pi\mu_0)$ und hieraus $B_\phi = -\partial A_z / \partial r = I / (2\pi\mu_0 r)$. Die Konstanz des kanonischen Impulses ergibt dann $q I / (2\pi\mu_0) \ln(r/r_0) = m \dot{z}$. Da \dot{z} eine periodische Funktion vom Typ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n n \exp(in\omega_n t)$ sein muß mit $a_1 \approx p(r_0)$, ist auch $r(t)$ periodisch mit $r = r_0$ an den Punkten $z = 0$. Nimmt man zur obigen kanonischen Impulsgleichung noch die Energiegleichung $W = m/2(r^2 + \dot{z}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \text{const.}$ und die Gleichung für den Drehimpuls $D = m r^2 \dot{\phi} = \text{const.}$ hinzu, so läßt sich die Bahn vollständig berechnen.

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn eine R o t a t i o n s s y m m e t r i e vorliegt. Sei $q_1 = \phi$ der entsprechende Winkel bezüglich der Symmetriechse (z -Achse). In zylindrischen Koordinaten (ϕ, r, z) hat das Vektorpotential dann nur eine ϕ -Komponente mit $A_\phi = A_\phi(r, z)$. Die Lagrange-Funktion (5.33) lautet jetzt $L = m/2 (r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2) + q r \dot{\phi} A_\phi - q \Phi(r, z)$. Differentiation nach $\dot{\phi}$ liefert den sogenannten *kanonischen Drehimpuls*

$$p_\phi = r(mr\dot{\phi} + qA_\phi) \quad (5.38)$$

der in diesem Fall eine Erhaltungsgröße der Bewegung darstellt. Außerdem ist die E n e r g i e der Teilchen $W = m/2 v^2 + q \Phi$ eine z w e i t e E r h a l t u n g s g r ö ß e . Diese beiden Konstanten vereinfachen die Berechnungen der Teilchenbewegungen ganz erheblich. Man greift hierauf insbesondere bei der Konstruktion von magnetischen Linsen zurück.

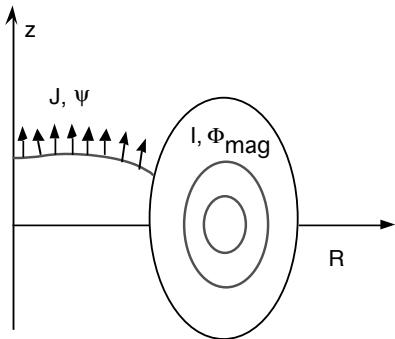
5.3.2. MAGNETISCHE FLÄCHEN UND DRIFTFLÄCHEN IM TORUS

Von der Existenz des kanonischen Drehimpulses kann man auch bei Berechnung der Teilchenbewegung im toroidalsymmetrischen *Tokamak* Gebrauch machen. In diesem Fall benutzt man die Symmetrie auch bei der Beschreibung des Magnetfelds, das wegen $\text{div } \mathbf{B} = 0$ dann die allgemeine Darstellung

$$\vec{B} = B_\phi \vec{e}_\phi + \vec{B}_{pol} = B_\phi \vec{e}_\phi + \frac{\vec{e}_\phi}{R} \times \nabla \psi \quad (5.39)$$

hat. Die Funktion $\psi = R A_\phi$ ist die poloidale³² *magnetische Flußfunktion* $\psi = (2\pi)^{-1} \int \mathbf{B}_{pol} dS$. Der Ausdruck \mathbf{e}_ϕ/R kann auch als $\nabla \psi$ geschrieben werden, so daß für das poloidale Magnetfeld die Darstellung $\mathbf{B}_{pol} = \nabla \psi \times \nabla \psi$ gegeben ist, der man wegen $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ sofort $\nabla \cdot \mathbf{B}_{pol} = 0$ entnimmt. Die Bedingung $\psi(R, z) = \text{const.}$ definiert eine sogenannte toroidale *magnetische Fläche* im dreidimensionalen Raum, auf denen die magnetischen

³² Mit poloidal ist hier immer die zur toroidalen Richtung senkrechte Richtung in der magnetischen Fläche gemeint (Def.: $\mathbf{e}_{pol} = \mathbf{e}_\phi \times \nabla \psi / |\nabla \psi|$).



Feldlinien verlaufen (und auf denen $B_\phi R = \text{const.}$ gilt). In der Tat besagt Gl. (5.39), daß \mathbf{B} immer ein Tangentenvektor an die Flächen $\psi = \text{const.}$ ist. Ebenso wie für das Magnetfeld kann man auch für die Stromdichte \mathbf{j} , für die im statischen Fall ebenfalls $\text{div } \mathbf{j} = 0$ gelten muß, eine poloidale Flächenfunktionen $J(R,z) = (2 \pi)^{-1} \int \mathbf{j}_{\text{pol}} \cdot d\mathbf{S}$ definieren. Im Tokamak fallen wegen der Kraftgleichung $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ die Flächen J und ψ zusammen und sind außerdem die Flächen konstanten Drucks p . Trivialerweise schließen die Flächen $\psi = \text{const.}$ auch bestimmte toroidale magnetischen Flüsse Φ_{mag} und Plasmastrome I ein. Die Verhältnisse sind in der Abb. 5.7 erläutert. Die Einführung der magnetischen Flußflächen ψ hat neben der größeren Anschaulichkeit weitere Vorteile, so daß in Tokamakphysik auf das Vektorpotential völlig verzichtet wird. Der *kanonische Drehimpuls* schreibt sich hiermit zu

Abb. 5.7: Veranschaulichung der poloidalen (J, ψ) und toroidalen (I, Φ_{mag}) Flußgrößen als Flächenkonstanten. Die magnetischen Flächen $\psi = \text{const.}$ sind hier als Toroide mit elliptischen Querschnitt angenommen. Plasmastrom I und toroidaler magnetischer Fluß Φ_{mag} ergeben sich durch Integration über diesen Querschnitt. Für den poloidalen Strom J und magnetischen Fluß ψ ist das Integrationsgebiet eine beliebige zentrale Fläche mit kreisförmiger Projektion in der x - y -Ebene.

$$p_\phi = mRv_\phi - q\psi(R, z) \quad (5.40)$$

Die Bedingung $p_\phi = \text{const.}$ liefert dann für einen gegebenen Anfangspunkt $P_1 = (R_1, z_1)$ bei bekannter Flußfunktion $\psi(R, z)$ die Gleichung

$$\psi(R, z) - \psi(R_1, z_1) = \frac{m}{q}(Rv_\phi - R_1v_{\phi 1}) \quad (5.41)$$

Ist der Punkt P_1 speziell ein Umkehrpunkt der Bahn, so daß $v_{\phi 1} = 0$, so können wir die maximale Exkursion δ des Teilchens von der Flußfläche ψ_1 wie folgt abschätzen: Wir setzen $\psi - \psi_1 = \Delta\psi \approx |\nabla\psi| \delta$ und erhalten wegen $|\nabla\psi| = R B_{\text{pol}}$

$$\delta = \frac{mv_{\phi, \text{max}}}{|q| B_{\text{pol}}} = \rho_{\text{pol}} \quad (5.42)$$

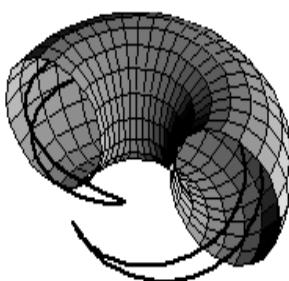


Abb. 5.8a: Ein gefangenes Teilchen auf Bananenbahn im Torus

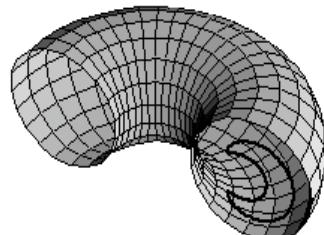


Abb. 5.8b: Projektion der Bananenbahn in eine poloidale Ebene

Hierin ist ρ_{pol} der Gyroradius bezogen auf die poloidale Feldstärke. Das Teilchen läuft dann auf sogenannten *Bananenbahnen*, wie in der Abb. 5.8 dargestellt. In der poloidalen Projektion hat die Bananenbahn die Breite 2δ .

Bei den Teilchen auf Bananenbahnen handelt es sich um solche, die im inhomogenen Magnetfeld des Torus ($B \sim 1/R$) gespiegelt werden, ein Effekt, den wir im nächsten Abschnitt genauer besprechen werden. Teilchen mit hinreichend großer Toroidalgeschwindigkeit (genauer mit einem magnetischen Moment $\mu < (r/R_0)^{1/2}$) weisen keine Umkehrpunkte auf. Man bezeichnet sie deshalb als "freie Teilchen" (*passing particles*). Auch ihre Bahnen verlaufen nicht exakt auf einer magnetischen Fläche. Ähnlich aber wie die Feldlinien an die magnetischen Flächen gebunden sind, bleiben die Teilchen auf den sogenannten *Driftflächen*. Für nicht zu große Toroidalgeschwindigkeiten (d. h. $\delta \ll R_0$) haben diese Driftflächen der freien Teilchen eine ähnliche Kontur wie die magnetischen Flächen, sind aber hierzu je nach Vorzeichen von $q v_\phi$ nach außen ($\Delta R = \delta > 0$) oder innen ($\Delta R < 0$) versetzt.

Für den Fall hochenergetischer Runawayelektronen ist beispielsweise die toroidale Geschwindigkeit $v_\phi \approx v_{\phi 1}$ sehr groß und verändert sich während einiger toroidaler Umläufe nur unwesentlich. Die Gleichung (5.34) lautet in diesem Fall

$$\psi(R, z) - \psi(R_1, z_1) = -\frac{m}{e} v_{\phi 1} (R - R_1) \quad (5.43)$$

Die Lösungen dieser Gleichung $F = F(R, z) = \text{const.}$ beschreiben die Projektion der Runaway-Driftflächen bereits vollständig. Für kreisförmige magnetische Flächen vom Typ $\psi = \psi_0 [(R - R_0)^2 + z^2]/R_0^2$ ergeben sich beispielsweise wiederum exakt kreisförmige Driftflächen der Art $(R - R_0 - \delta)^2 + z^2 = (R_1 - R_0 - \delta)^2 + z_1^2 = (r_{\text{mag}} - \delta)^2 = \text{const.}$, deren Zentren um den Betrag $\Delta R = \delta = \text{Im}_e v_{\phi 1} R_0^2 / 2\psi_0 e$ nach außen verschoben sind und deren Radien um den Betrag δ kleiner als die der magnetischen Flächen sind (Abb. 5.9).

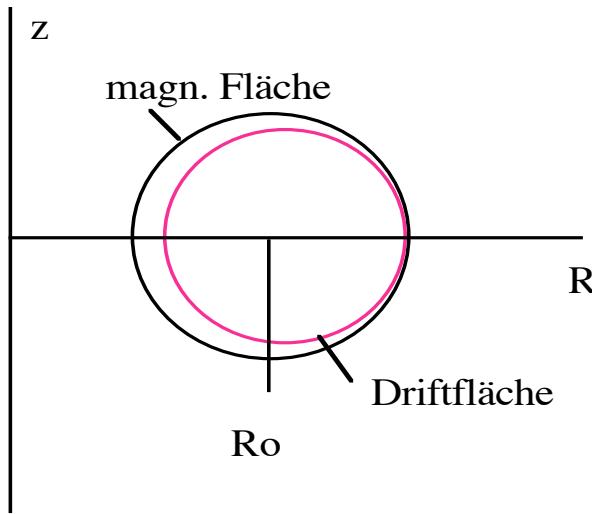


Abb. 5.9: Kreisförmige magnetische Fläche und Runaway-Driftfläche im Torus.

Bei den Runaway-Elektronen ist die Versetzung der Driftflächen immer nach außen gerichtet, da sie durch das gleiche elektrische Feld E_ϕ beschleunigt werden, das auch den toroidalen Strom treibt und damit die Richtung des poloidalen Magnetfeldes festlegt. Für Elektronen mit einem entgegengesetzten toroidalen Umlaufsinn sind die Driftflächen nach innen versetzt. Die Driftflächen der Bananenteilchen, deren Toroidalgeschwindigkeit bei jeder Reflexion das Vorzeichen wechselt, kann man sich dementsprechend näherungsweise aus zwei entgegen-gesetzten verschobenen Kreisflächen zusammengesetzt denken.

5.3.3. ADIABATISCHE INVARIANTEN

Neben den zuvor besprochenen Invarianten der Energie und des kanonischen Drehimpulses gibt es solche, die einer *periódischen Bewegung* zugeordnet werden können. In diesem Fall liegt eine *zyklische Variable* q_i vor. Anders als bei der Homogenität und der Rotations-symmetrie entspricht einer zyklischen Variablen jedoch nicht unmittelbar ein konstanter generalisierter Impuls nach Gl. (5.34). Man kann aber eine *kanonische Transformation* durchführen, die die zyklische Koordinate in eine ignorable überführt. Als Ergebnis erhält man als Konstante den generalisierten Impuls

$$J_i = \oint p_i dq_i \quad (5.44)$$

den man als *Wirkungsvariable* (physik. Dimension: *Energie* \times *Zeit*; wie Plancksche Wirkungskonstante h) bezeichnet. In (5.44) ist die Integration über eine vollständige Periode zu erstrecken³³.

Betrachten wir als Beispiel den **harmonischen Oszillator**. Er wird durch die Gleichung $m \ddot{x} + k x = 0$ beschrieben. Die allgemeine Lösung lautet $x = x_0 \sin(\omega t + \delta)$ mit $\omega = (k/m)^{1/2}$ und einem freien Phasenwinkel δ . Mit $p_x = m \dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t + \delta)$ ergeben sich als Bahnkurven im x - p_x -*Phasenraum* die Ellipsen $(x/x_0)^2 + (p_x/m x_0 \omega)^2 = 1$ (Abb. 5.10a). Die Wirkungsvariable ergibt sich nach Gl. (5.44) als Flächeninhalt der Ellipse zu $J_1 = \pi m x_0^2 \omega$. Mit der Energie $W = m/2 (\dot{x}^2)_{\max} = m \omega^2 x_0^2 / 2$ besteht demnach der Zusammenhang $J_1 = 2\pi W / \omega = W/v$.

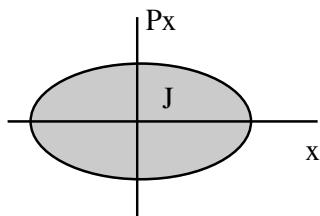


Abb. 5.10a: Im Phasenraum durchläuft ein harmonischer Oszillatator elliptische Bahnkurven gemäß der Gleichung $H(x, p_x) = W = \text{const.}$ Die eingeschlossene Fläche J (Wirkungsvariable) ist ebenfalls eine Konstante der Bewegung.

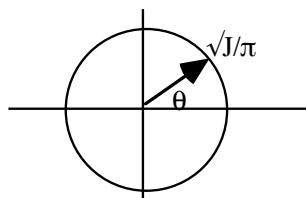


Abb. 5.10b: Eine kanonische Transformation überführt die Ellipse in einen Kreis gleichen Flächeninhalts mit dem Radius $(J/\pi)^{1/2}$. In den Koordinaten θ, J wird die Energiegleichung nur noch eine Funktion von J :
 $W = H(J) = vJ$.

Das obige Ergebnis können wir auch gewinnen, ohne die Differentialgleichung gelöst zu haben. Wir gehen in diesem Fall von der Hamilton-Funktion $H(p_x, x) = (1/2m) p_x^2 + (k/2) x^2$ aus. Setzen wir $H = W$, so erhalten wir wieder die Ellipsengleichung der Abb. 5.10a. Die in Abb. 5.10b veranschaulichte Transformation auf kanonische Variable $Q_1 = \theta$ und $J_1 = \text{const.}$ kann man sich beim harmonischen Oszillatator in drei Schritten vorstellen: Im ersten Schritt wird durch eine gleichzeitige Dehnung und Kontraktion mit dem Verhältnis der Halbachsen $(k m)^{1/4}$ die Ellipse in einen flächengleichen Kreis transformiert: $p_x = (k m)^{1/4} p_1$ und $q_1 = (k m)^{-1/4} x \rightarrow H'(p_1, q_1) = 1/2 (k/m)^{1/2} (p_1^2 + q_1^2)$. Im zweiten Schritt geht man dann von den kartesischen Koordinaten q_1, p_1 auf Polarkoordinaten Q_1, P_1 über. Man hat also die Transformation $q_1 = P_1 \cos Q_1$ und $p_1 = P_1 \sin Q_1$ und $H''(P_1) = 1/2 (k/m)^{1/2} P_1^2$. Für $H'' = W$ erhält man die Kreisfläche $J_1 = \pi P_1^2 = 2\pi W/(k/m)^{1/2}$. Drücken wir schließlich im dritten Schritt die Hamilton-Funktion als Funktion von J_1 aus, so erhält man die lineare Relation $H'''(J_1) = 1/(2\pi) (k/m)^{1/2} J_1$. Die Frequenz ergibt sich dann nach Gl. (5.35) zu $v = dQ_1/dt = \partial H'''/\partial J_1 = 1/(2\pi) (k/m)^{1/2}$.

Die große Bedeutung der Wirkungsvariablen liegt darin, daß sie auch bei einer Störung des Systems noch in guter Näherung konstant bleiben. Die Störung besteht insbesondere darin, daß sich die Frequenz des Systems bestimmender Parameter λ (z.B. die Federkonstante k beim harmonischen Oszillatator) langsam ändert. Die Größe J wird in diesem Fall (mit $d\lambda/dt \ll v \lambda$) zu einer *adiabatischen Konstanten*.³⁴ Man beachte, daß bei einer solchen Störung die Energie keine Erhaltungsgröße mehr ist und sich über lange Zeiträume erheblich verändern kann, während sich die Größe $J = W/v = W \tau$ als das Produkt von Energie und Periodendauer nur sehr wenig ändert.

Betrachten wir hierzu als einfaches Beispiel einen Ball (der Masse 1), der elastisch an zwei gegenüberliegenden Wänden im Abstand L_0 reflektiert wird. Die Variablen sind hier $q = x$ und $p_x =$

³³ Oft wird auch der um den Faktor $1/2\pi$ kleinere Wert als J definiert. Anstelle der gewöhnlichen Frequenz v tritt dann in allen Formeln die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi v$ auf.

³⁴ adiabatos (griech.) = unüberschreitbar. Unter adiabatischen Veränderungen werden in der Mechanik langsame Variationen eines Parameters verstanden. In der Thermodynamik beschreibt der Ausdruck Prozesse unter Energieabschluß. Diese verlaufen zwar häufig langsam (adiabatische Entmagnetisierung), doch müssen viele derartige Prozesse auch relativ schnell ablaufen, um einen Temperaturausgleich mit der Umgebung zu vermeiden.

$m dx/dt = 1 v$, wobei nach der n -ten Reflexion $v = (-1)^n v_0$. Die Wirkungsvariable ergibt sich zu $J_0 = 2 v_0 L_0$. In der Abbildung 5.11 sind die Verhältnisse veranschaulicht. J_0 ist der Flächeninhalt des fett gezeichneten Quadrats. Bewegen sich nun die beiden Wände symmetrisch mit einer Geschwindigkeit $2 w$ aufeinander zu, so wird, wenn der Ball bei $t = 0$ an der linken Seite gestartet wurde, die erste Reflexion nach der Zeit $\Delta t_1 = L_0/(v_0 + w)$ stattfinden. Der Abstand der Wände beträgt dann $L_1 = L_0 - 2 w \Delta t_1$. Nach der Reflexion hat der Ball die Geschwindigkeit $v_1 = - (v_0 + w)$. Bis zur zweiten Reflexion an der linken Platte vergeht die Zeitspanne $\Delta t_2 = L_1/(|v_1| + w)$. Die Wände haben dann den Abstand $L_2 = L_1 - 2 w \Delta t_2$ usw. Allgemein ist die Geschwindigkeit nach dem n -ten Stoß $v_n = (-1)^n (v_0 + n w)$ und man hat die Iterationsgesetze: $L_n = L_{n-1} - 2 w \Delta t_n$ und $\Delta t_n = L_{n-1}/(v_0 + n w)$ sowie für die Reflexionspunkte $x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \Delta t_n$. Aus diesen erhält man mit $r = w/v_0$ die folgenden expliziten Beziehungen: $L_n = L_0 (1 - r)/\{[1 + (n - 1) r] [1 + n r]\}$ und $x_n = 1/2 (-1)^n L_n$ sowie für die Stoßzeitintervalle $\Delta t_n = L_0/v_0 (1 - r)/\{[(1 + n r) [1 + (n - 1) r] [1 + (n - 2) r]]\}$. Für die wie folgt definierte Wirkungsvariable $J_n = [(x_n - x_{n-1}) v_{n-1} + (x_{n+1} - x_n) v_n]$ ergibt sich $J_n = 2 v_0 L_0 (1 - r) (1 + n r)/\{[1 + (n - 1) r] [1 + (n + 1) r]\}$. Nach zahlreichen Stößen mit $r \ll 1$ hat man $|x_n|/x_0 \approx (1 + n r)^{-2}$ und $|J_n|/J_0 \approx (1 + n r)^{-1}$, so daß J_n wesentlich langsamer abnimmt als der Wandabstand. Im übrigen gibt es unendlich viele Stöße in der endlichen Zeit der Wandannäherung $T = L_0/(2 w)$. Das ergibt sich auch aus den Formeln: $T_n = \sum_0^n \Delta t_k = L_0/(2 v_0) n [2 + (n - 1) r]/\{[1 + (n - 1) r][1 + n r]\}$ liefert $T_\infty = L_0/(2 v_0)/r = T$.

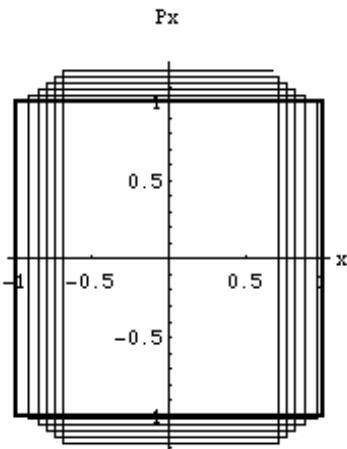


Abb. 5.11: Näherungsweise Konstanz der adiabatischen Invariante J (Fläche unter den Kurven) bei elastischen Reflexionen an sich aufeinander zubewegenden Wänden ($w/v_0 = 0,02$).

Im Plasma treten drei adiabatische Invarianten auf, die im folgenden kurz im Zusammenhang mit ihrer praktischen Bedeutung besprochen werden sollen.

5.3.4. ADIABATISCHE INVARIANTEN IM MAGNETISCHEN SPIEGEL

Die *erste adiabatische Invariante* eines Plasmateilchen ist mit seiner Gyrbewegung verknüpft:

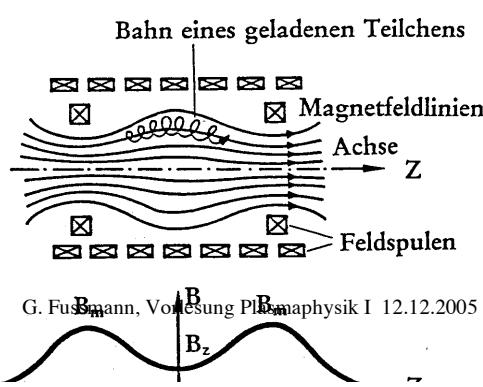
$$\oint pdq = \oint mv_\perp \rho d\varphi = 2\pi mv_\perp \rho = 2\pi \frac{mv_\perp^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu \quad (5.45)$$

Die Größe μ ist uns bereits früher als das *magnetische Moment* begegnet, das sich aus dem Produkt von Strom $I = q \omega_c/2\pi$ und eingeschlossener Fläche $A = \pi \rho^2$ zu

$$\mu = IA = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{W_\perp}{B} \quad (5.46)$$

ergibt. Der Gleichung (5.45) entnehmen wir weiterhin, daß der gewöhnliche Drehimpuls $p_\phi = m v_\perp$ auch als $p_\phi = \mu 2m/|q|$ geschrieben werden kann und somit ebenfalls eine andere Form für die 1. adiabatische Invariante darstellt. Schließlich kann man auch den magnetischen Fluß durch den

Gyrbewegungsweg $\phi_g = \pi \rho^2 B = (2\pi m/q^2) \mu$ als diese Invariante auffassen. Der Flußkonstanz kommt insofern eine besondere Bedeutung zu, als wir hiermit die Vorstellung eines supraleitenden, elastischen Fadens verbinden können, der der Teilchengyrbewegung zugeordnet wird. Da ein solcher Faden keine Umfangsspannung zuläßt, muß ϕ_g konstant bleiben, was bei einer Erhöhung von B durch eine Erniedrigung von



ρ erreicht wird, aber so, daß $\rho^2 B \sim v_{\perp}^2/B$ konstant bleibt. Eine Erhöhung von B erzwingt somit eine Erhöhung der Senkrechtesnergie auf Kosten der Parallelenergie. Das kann dazu führen, daß v_{\parallel} zu null wird.

Derartige Verhältnisse treten in sogenannten Spiegelanordnungen auf, wie sie in der Abbildung 5.12 dargestellt sind.

Abb. 5.12: Lineare magnetische Spiegelanordnung

Teilchen, die in der Mitte der Anordnung die Geschwindigkeitskomponenten $v_{\perp 0}$ und $v_{\parallel 0}$ aufweisen, werden bei Annäherung an die Enden aufgrund der Zunahme von B ihre Parallelgeschwindigkeit v_{\parallel} erniedrigen und gleichzeitig v_{\perp} erhöhen, so daß $v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2$. Mit der Definition des *pitch angle* im Geschwindigkeitsraum $\theta = \arcsin(v_{\perp}/v)$ ergibt sich, daß alle diejenigen Teilchen mit $\theta_0 > \theta_m$ in den Zonen mit wachsendem B reflektiert werden (v_{\parallel} ändert Vorzeichen) und somit eingeschlossen sind, während diejenigen mit zu kleiner Senkrechtesgeschwindigkeit, d.h. $\theta_0 < \theta_m$ an den Enden verloren gehen. Dabei ergibt sich der maximale pitch angle unter Beachtung von $\mu = \text{const.}$ zu

$$\sin \theta_m = \sqrt{\frac{B_0}{B_m}} \quad (5.47)$$

Das Verhältnis $B_m/B_0 = R_m$ wird das maximale *Spiegelverhältnis* genannt. Im Geschwindigkeitsraum existiert also ein *Verlustkegel*, wie er in der Abb. 5.13 skizziert ist.

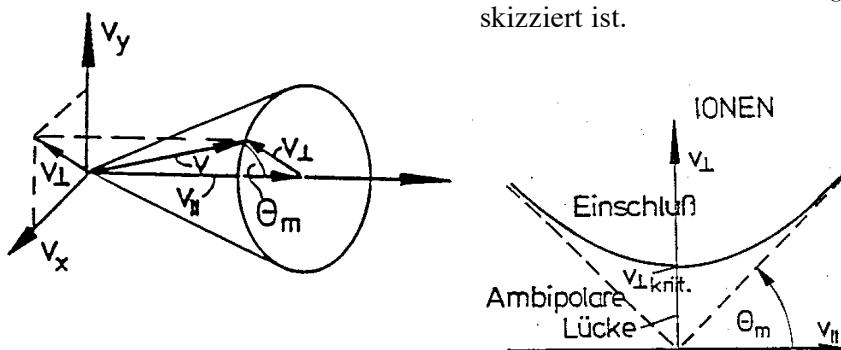


Abb. 5.13: Der Verlustkegel im Geschwindigkeitsraum.

Ohne Stöße würde sich eine anisotrope Verteilungsfunktion mit einem nicht besetzten Verlustkegel einstellen. Die Stöße der Teilchen sind jedoch derartig kurzzeitige Ereignisse, daß hierbei die Konstanz von μ verletzt wird. Dadurch wird wiederum eine Maxwell-Verteilung angestrebt, doch ist hiermit auch ein steter Teilchenverlust verbunden. Wegen der höheren Coulomb-Stoßrate der Elektronen gehen diese schneller verloren, so daß das Plasma sich solange negativ auflädt, bis der Teilchenverlust ambipolar wird. Die sich dann einstellenden Verhältnisse im Geschwindigkeitsraum sind in der Abb. 5.14 wiedergegeben. Ionen mit geringer Geschwindigkeit werden durch das E-Feld herausgeschleudert, so daß die "ambipolare Lücke" entsteht. Umgekehrt werden langsame Elektronen nun besser eingeschlossen.

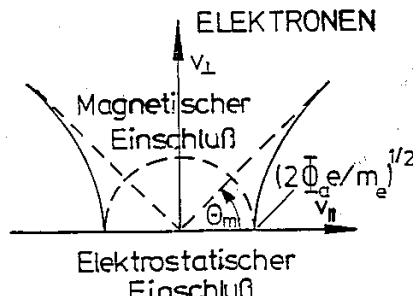


Abb. 5.14: Einschlußbereiche im Geschwindigkeitsraum bei Berücksichtigung des ambipolaren E-Felds. Ohne E-Feld sind im magnetischen Spiegel nur die Bereiche im oberen Konus $\theta > \theta_m$ besetzt.

Das im wesentlichen axiale E -Feld zieht zusätzlich langsame Ionen ab, während es lansame Elektronen einschließt. Daher wird bei den Ionen der obere parabolische Bereich, bei den Elektronen dagegen der innere hyperbolische Bereich mit Teilchen besetzt (n. U. Schumacher, "Fusionsforschung").

Diejenigen Teilchen, die ohne einen Stoß zu erleiden in den Spiegelzonen reflektiert werden, vollführen eine **periódische Pendelbewegung** zwischen den Umkehrpunkten A und B. Mit dieser periodischen Bewegung ist die **zweite adiabatische Invariante**

$$J = \int_A^B v_{\parallel} ds \quad (5.48)$$

verknüpft³⁵. Die Pendelbewegung ist in Wirklichkeit nur näherungsweise gegeben, da die Teilchen wegen der zusätzlichen Drift im inhomogenen Magnetfeld keine geschlossene Bahnen durchlaufen. Aufgrund der Gl. (5.17) vollführen sie gleichzeitig – wie in Abb. 5.15 angedeutet – noch eine Kreisbewegung (poloidale Drift) um die z-Achse.

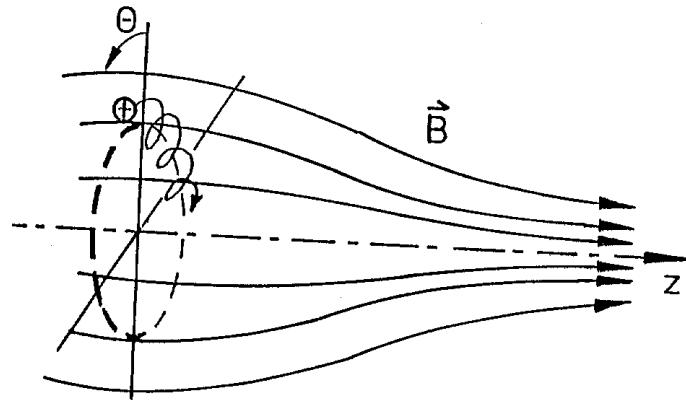


Abb. 5.15: Poloidale Drift aufgrund der Spiegelinhomogenitäten

Die zweite adiabatische Invariante ist insbesondere bei einer Störung der Axialsymmetrie von Bedeutung, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Würde man den magnetische Spiegel kontinuierlich verkürzen, so hätten wir ähnliche Verhältnisse wie bei dem Beispiel des reflektierten Balls zwischen den sich aufeinander zubewegenden Wänden. Die Konstanz von J würde dann eine stetige Erhöhung von v_{\parallel} erfordern. Ein derartiger Mechanismus ist von E. Fermi zur Erklärung der Entstehung der hochenergetischen kosmischen Teilchen vorgeschlagen worden. Heute ist man dagegen eher der Auffassung, daß diese Teilchen in den Supernova-Explosionen entstehen.

Auch die **dritte adiabatische Invariante** kommt in der Spiegelanordnung vor. Sie ist mit der ersten in dem Sinne verwandt, daß sie die **Konstanz des magnetischen Flusses** bei der von der poloidalen Drift eingeschlossenen Fläche fordert.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.49)$$

Da diese periodische Bewegung eine wesentlich kleine Frequenz als die zwei vorhergehenden (Gyrofrequenz und Pendelfrequenz = *bounce-frequency*) aufweist, ist die Brauchbarkeit der dritten adiabatischen Invarianten nur unter sehr stoßfreien Bedingungen gegeben.

³⁵Abweichend von der Definition nach Gl. (5.37), wird hier nur eine Integration über ein halbe Periode vorgenommen.

6. DIE GLEICHUNGEN DER PLASMAPHYSIK

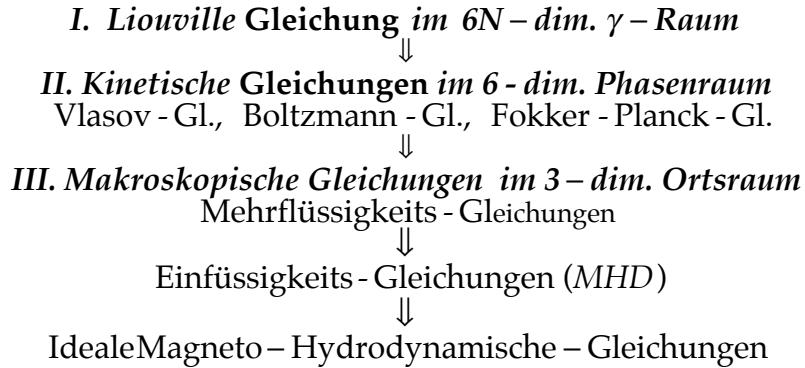
Die in der Plasmaphysik verwendeten Gleichungen lassen sich in drei Ebenen anordnen. In der ersten Ebene haben wir im $6N$ -dimensionalen Raum (der sogenannte Γ -Raum) die exakten Gleichungen der klassischen Mechanik. Da N , die Zahl der Teilchen, mit denen wir es zu tun haben, typischerweise von der Größenordnung 10^{20} ist, handelt es sich um einen extrem hochdimensionalen Raum. Eine exakte Lösung der auftretenden Gleichungen ist gleichbedeutend mit der Lösung des N -Körperproblems, wovon man noch weit entfernt ist. Die zentrale Gleichung auf dieser Ebene des N -Körperproblems ist die *Liouville-Gleichung*. Wir skizzieren im folgenden Abschnitt 6.1 die Aufstellung einer hierarchischen Anordnung von Gleichungen im Γ -Raum, die eine zunehmende Korrelation der Teilchen berücksichtigt.

Selbst wenn es gelänge, das N -Körperproblem exakt zu lösen, wäre man gezwungen, die gewonnene Information auf eine überschaubare Anzahl von Variablen und Größen zu komprimieren, um eine überprüfbare Beschreibung der Realität zu erhalten. Ein gleichbedeutender Schritt in diese Richtung ist der Übergang vom Γ -Raum zum 6-dimensionalen Phasenraum (oft auch μ -Raum genannt), wie er in dem weiter unten angegebenen Schema dargestellt ist. Die Gleichungen dieser Ebene werden gemeinhin als die Gleichungen der *kinetische Theorie* bezeichnet. Aus der Gleichungshierarchie der ersten Ebene lässt sich eine Grundgleichung ableiten, in der die Zwei-Teilchen-Korrelationen berücksichtigt werden. Eine Auswertung dieser Gleichung ist allerdings nicht ohne weitere Vereinfachungen bzw. Annahmen möglich. Hinter diesen Zusatzannahmen verbirgt sich das Problem der Zeitinvarianz dieser Gleichungen. Während nämlich die Gleichungen der ersten Ebene invariant gegenüber Zeitumkehr sind³⁶, genügen die Gleichungen der Ebene II dem *Boltzmannschen H-Theorem*, welches gleichbedeutend mit der Entropiezunahme eines abgeschlossenen Systems ist. Die Beschränkung auf binäre Stöße ist natürlich eine Einschränkung, die nicht immer der Realität gerecht wird. So hatten wir bereits im Kapitel 2.4 die Bedeutung der Dreier-Stöße für die Rekombination eines Plasmas kennengelernt. Je nach der Art, in der die Zweierwechselwirkung der Teilchen behandelt wird, ergeben sich unterschiedliche Gleichungen. Die erste Gleichung dieser Art wurde von Boltzmann um 1900 aufgestellt. In der Plasmaphysik ist bei dünnen Plasmen die *Vlasov-Gleichung* und allgemein die *Fokker-Planck-Gleichung* von größerer Bedeutung.

Für viele Anwendungsfälle sind die Gleichungen der kinetischen Theorie noch zu kompliziert. Auch enthalten sie in der Regel zu viel Information, um einen Vergleich mit den experimentell zugänglichen Größen durchführen zu können. Es besteht daher ein Bedarf an einfacheren Gleichungen, die Aussagen über – zumindest im Prinzip – messbare Größen (*thermodynamische Variable*) im gewöhnlichen Ortsraum machen. Derartige *makroskopische Gleichungen* (auch *Mehrflüssigkeitsgleichungen* genannt) lassen sich aus den kinetischen durch Integration über den Geschwindigkeitsraum ableiten. Als weitere Vereinfachung kann man durch Addition und Subtraktion aus den Mehrflüssigkeitsgleichungen die Einflüssigkeits- oder *Magneto-Hydrodynamischen-Gleichungen* (MHD) gewinnen. Sie enthalten im Gegensatz zu den Mehrflüssigkeitsgleichungen anstelle der Strömungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Teilchen die dem Experimentator meist eher zugängliche elektrische Stromdichte. Auf dieser Stufe wird das Plasma als ein leitendes, kompressibles Gas behandelt. Schließlich kann als letzter Schritt der Vereinfachung oft die elektrische Resistivität vernachlässigt werden. Die sich ergebenden *idealen MHD-Gleichungen* kommen insbesondere bei der Beschreibung von rasch ablaufenden Prozessen (Wellen, Instabilitäten) zur Anwendung.

Die Hierarchie der ableitbaren Gleichungen ist im folgenden Schema nochmals zusammengefaßt.

³⁶ Es sind sowohl die Gleichungen der klassischen Mechanik als auch der Quantenmechanik unter Einschluß der Elektrodynamik invariant gegenüber Zeitumkehr. Beweis: Ersetzt man in $d(m \underline{v})/dt = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ die Zeit t durch $-t$, so ergibt sich die hierzu identische Gleichung $(-1)^2 d(m \underline{v})/dt = q(\underline{E} + (-1) \underline{v} \times (-1) \underline{B})$. B und v wechseln das Vorzeichen wegen $\underline{v} = d\underline{r}/dt$ und $\text{rot } \underline{B} = \mu_0 j + \epsilon_0 \partial \underline{E} / \partial t$ mit $j = e(n_i \underline{v}_i - n_e \underline{v}_e)$



In jedem Falle sind diese Gleichungen durch die *Maxwellschen Gleichungen* zu ergänzen, die sich in der "Vakuum-Notation" wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 M1: \text{Poisson - Gleichung} \quad \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_{el} / \epsilon_0 \\
 M2: \text{Amperesches Gesetz} \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 M3: \text{Faradays Gesetz} \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 M4: \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Bei der Anwendung auf ein Plasma oder sonstiges Medium ist zu beachten, daß zusätzlich zu den externen elektrischen Ladungen und Strömen auch die im Plasma erzeugten mit erfaßt werden, so daß $\rho_{el} = \rho_{el, ex} + \rho_{el, in}$ und $j = j_{ex} + j_{in}$ zu setzen ist. Diese inneren "Quellen" lassen sich durch die *elektrische Polarisierung* $\mathbf{P} = n \boldsymbol{\pi}$ und die *Magnetisierung* $\mathbf{M} = n \boldsymbol{\mu}$ angeben, wobei $\boldsymbol{\pi}$ und $\boldsymbol{\mu}$ die elektrischen und magnetischen Dipolmomente pro Teilchen sind. Es gilt

$$\rho_{el, in} = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{6.2}$$

und

$$\vec{j}_{in} = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{6.3}$$

Gewöhnlich werden diese durch elektrische Polarisation und Magnetisierung entstehenden Quellen durch Einführung der Hilfsgrößen \mathbf{H} (*magnetische Feldstärke*) und \mathbf{D} (*dielektrische Verschiebung*) gemäß

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \\
 \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

beschrieben. Das ist insbesondere in linearen Medien sinnvoll, wo die einfachen Zusammenhänge $\mathbf{P} = \chi_{el} \epsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{M} = \chi_{mag} \mathbf{H}$ mit konstanten elektrischen und magnetischen *Suszeptibilitäten* χ_{el} und χ_{mag} vorliegen. Dann hat man $\mathbf{D} = (1 + \chi_{el}) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = (1 + \chi_{mag}) \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ mit ebenfalls feldstärken-unabhängigen Konstanten ϵ (Dielektrizitätskonstante) und μ (Permeabilität). Es wird sich jedoch in Abschnitt Diamagnetische Ströme herausstellen, daß in einem Plasma $\chi_{mag} \sim 1/B$ ist, und somit die Einführung einer Permeabilitätskonstanten – im Gegensatz zur Dielektrizitätskonstanten – nicht sinnvoll ist.

Sehr häufig kommt es vor, daß man von den als Differentialgleichungen formulierten Maxwell-Gleichungen (6.1) auf Integralgleichungen übergehen möchte. Liegen Symmetrien oder sonstige spezielle Bedingungen vor, so ergeben sich damit oft schon die Felder als Integrale (Quadraturen) oder analytische Formeln. In diesem Zusammenhang sind der *Gaußsche Satz*

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (6.5)$$

und der *Satz von Stokes*

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (6.6)$$

sehr hilfreich. Den Gaußschen Satz wendet man z.B. oft auf die Poisson-Gleichung an, um von Volumenintegralen auf Oberflächenintegrale überzugehen. Ebenso erlaubt einem der Stokes'sche Satz, bei den Gesetzen von Ampere und Faraday Integrale über Oberflächen (S) durch solche über die Randkonturen (C) auszudrücken.

6.1. Liouville-Gleichung und BBGKY-Hierarchie

Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist die Dichte im Γ -Raum:

$$D(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N, t), \quad (6.7)$$

die wie folgt normiert ist

$$\int D(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N, t) d^{6N}V = 1 \quad (6.8)$$

und mit deren Hilfe sich Mittelwerte gemäß

$$\int Q D(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N, t) d^{6N}V = \overline{Q} \quad (6.9)$$

berechnen lassen. Für die zeitliche Änderung der Dichte hat man zunächst ganz allgemein

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial D}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t} w. \quad (6.10)$$

Da es sich um eine Dichte handelt (die nach zu Gl. (6.8) einer Normierung unterliegt), muß gleichzeitig ein Kontinuitätssatz gelten, der die Erhaltung der Teilchenzahl sicherstellt. In Verallgemeinerung der bekannten Relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v}\rho) \quad (6.11)$$

für die Massendichte ρ im gewöhnlichen Ortsraum schreiben wir hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= -\nabla_{q,p} \cdot (\vec{V} D) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} (\dot{\vec{q}}_i D) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} (\dot{\vec{p}}_i D) = \\ &= -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial D}{\partial \vec{q}_i} \cdot \dot{\vec{q}}_i + \frac{\partial D}{\partial \vec{p}_i} \cdot \dot{\vec{p}}_i \right) - \sum_{i=1}^N D \left(\frac{\partial \dot{\vec{q}}_i}{\partial \vec{q}_i} + \frac{\partial \dot{\vec{p}}_i}{\partial \vec{p}_i} \right) . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wegen der Hamiltonschen Gleichungen (5.29) entfällt hier die letzte Summe, so daß sich nach Einsetzen in Gl. (6.9) die *Liouville-Gleichung*

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad (6.13)$$

ergibt. Sie besagt, daß sich ein mechanisches Ensemble im Γ -Raum wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält. Häufig findet man diese Relation auch in anderer Schreibweise, indem man direkt die partielle Zeitableitung

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \{H, D\} \quad (6.14)$$

unter Verwendung der *Poissonklammer*

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (6.15)$$

angibt. Die *Hamiltonfunktion*

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + U(\vec{q}_i) \right] + \sum_{i < k}^N \Phi_{ik} \quad (6.16)$$

enthält mit $U(\vec{q}_i)$ die durch äußere Kraftfelder hervorgerufenen Anteile der potentiellen Energie. Dagegen beschreibt die zweite Summe mit $\Phi_{ik} = e_i e_k / |\vec{q}_i - \vec{q}_k|$ die Wechselwirkung der Teilchen.

Zusätzlich zur Dichte D definiert man nach **Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon** die Verteilungsfunktionen F_1, F_2, \dots, F_N

$$F_s(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{q}_s, \vec{p}_s, t) = V^s \int D \, d^6 v_{s+1} \dots d^6 v_N. \quad (6.17)$$

Sie erlauben eine systematische Anordnung von Gleichungen der Form

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \{H_s, F_s\} + \frac{N-s}{V} \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial \Phi_{i,s+1}}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial F_{s+1}}{\partial \vec{p}_i} d^6 v_{s+1} \quad (6.18)$$

mit zunehmender Korrelation zwischen den Teilchen, wobei die Gleichung für F_N mit der Liouville-Gleichung identisch ist. Den durch (6.18) dargestellten Gleichungssatz nennt man die **B-B-G-K-Y-Hierarchie**. Da die Gleichung für F_1 die Funktion F_2 enthält usw., muß man den Gleichungssatz bei einem Index $s < \infty$ abbrechen. Hierzu benötigt man entweder einen Beweis, daß die restlichen Terme vernachlässigbar sind oder eine physikalisch begründete, möglichst einfache Abschlußrelation (*closure relation*), aus der sich F_s ohne Kenntnis der $F_{s+1} \dots$ angeben lässt.

6.2. Kinetische Theorie: Gleichungen im Phasenraum

Der niedrigste Term der B-B-G-K-Y-Hierarchie liefert die Beziehung

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} - \{H_1, F_1\} = \bar{n} \int \{\Phi_{12}, F_2\} \, d^6 v_2 \quad (6.19)$$

mit $\bar{n} = (N - 1)/V \approx N/V$. Diese 6-dimensionale Gleichung kann mit Hilfe der Liouville-Gleichung umgeformt werden zu

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial F}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{q}} \frac{\partial F}{\partial \vec{p}} = \bar{n} \int \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \Phi_{12} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} F_2 d^6 v \quad (6.20)$$

mit $F = F_1$. Mit der Ummormierung $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = F/V$ ergibt sich die schon bekannte Verteilungsfunktion im 6-dimensionalen Phasenraum. Für Teilchen vom Typ a schreibt sich dann die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{q}} + \vec{K} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} = C_{ab} \quad (6.21)$$

mit der Kraft $\mathbf{K} = -\nabla U$. Die abgekürzte Schreibweise $\partial/\partial\mathbf{q}$ und $\partial/\partial\mathbf{p}$ steht symbolisch für die Gradienten im gewöhnlichen Ortsraum ($\partial/\partial\mathbf{q} = \nabla$) bzw. im Impulsraum. Letzterer wird auch häufig durch den Nabla-Operator im Geschwindigkeitsraum ausgedrückt $\partial/\partial\mathbf{p} = 1/m \nabla_v$. Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Veränderung der Verteilungsfunktion aufgrund von Stößen mit Teilchen vom Typ b. Bei hinreichend dünnen Plasmen können Drei- und Mehr-Teilchenstöße vernachlässigt werden und C_{ab} kann – zumindest prinzipiell – durch das in Gl. (6.20) gegebene Integral berechnet werden. Für die hierin auftretende Zwei-Teilchen-Verteilungsfunktion $F_2 = F_2^{ab}$ der beiden Teilchensorten a und b macht man den Ansatz $F_2^{ab} = F_1^a F_1^b + g^{ab}$. Die Wechselwirkung der Teilchen kommt in der *Zwei-Teilchen-Korrelationsfunktion* $g^{ab}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, t)$ zum Ausdruck. Man beachte, daß auch der Fall $a = b$ (z.B. Elektron-Elektron- oder Proton-Proton Wechselwirkung) vorkommt. Für g^{ab} kann man – unter Vernachlässigung der analogen Drei-Teilchenkorrelation g^{abc} – ein Gleichungssystem angeben (s. K. H. Spatschek, "Theoretische Plasmaphysik"), das aber ohne weitere Vereinfachungen nur numerisch zu lösen ist. Man greift daher häufig auf eine der folgenden Näherungen zurück:

- *Vlasov-Näherung*: Vollständige Vernachlässigung der Korrelation und damit der Stöße ($g^{ab} = 0$).
- *Crooksche Näherung*: Man setzt für den Stoßterm $(\partial f/\partial t)_{\text{Stoß}} = - (f - f_0)/\tau$ mit einer angenommenen Stoßzeit τ . f_0 ist hierin die Maxwellverteilung, die den Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes beschreibt.
- *Lorentz-Gas Näherung*: Das Massenverhältnis m_e/m_i wird zu null angenommen. Dadurch wird der Energieaustausch zwischen Elektronen und Ionen unterdrückt.
- *Landau-Näherung*: Schwache Kopplung der Teilchen ($g^{ab} \ll F_1^a F_1^b$). Hier werden alle Terme, in denen das dritte Teilchen vorkommt, weggelassen. Man kommt so auf anderem Wege zum später zu besprechenden Boltzmannschen Stoßterm.
- *Lenard-Balescu-Näherung*: Eine teilweise Berücksichtigung des dritten Teilchens erlaubt es, die Coulomb-Abschirmungseffekte zu beschreiben. Insbesondere wird die Dynamik der Abschirmung richtig erfaßt. Das Potential einer sich im Plasma mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegenden Testladung (e_T) läßt sich hiernach wie folgt angeben

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e_T}{\epsilon_0 (2\pi)^3} \int \frac{\exp[i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_T - \vec{v}_T t)]}{k^2 \epsilon(\vec{k}, \vec{k} \cdot \vec{v}_T)} d^3 k. \quad (6.22)$$

Hierin ist

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2} \vec{k} \cdot \int \frac{1}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} \frac{\partial g_a}{\partial \vec{v}} d^3 v \quad (6.23)$$

die Dielektrizitätskonstante des Hintergrundplasmas mit den Plasmafrequenzen $\omega_{pa}^2 = e_a^2 n_a / (\epsilon_0 m_a)$ und den normierten Verteilungsfunktionen $g_a = f_a / n_a$. Für sehr kleine Geschwindigkeiten ($v_a \ll v_{th,i}$)

hat man die Näherung $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_T) \approx 1 + 1/(k \lambda_D)^2$ und man kommt zur Debyeabschirmung entsprechend Gl. (3.9). Für sehr schnelle Testteilchen ($v_T \gg v_{th,e}$) ist hingegen $\varepsilon \approx 1$ und es ergibt sich das reine Coulombpotential ohne Abschirmung.

Die Gleichung Gl. (6.21) ist die Grundgleichung der kinetischen Theorie im 6-dimensionalen Phasenraum. Man nennt C_{ab} den Stoßterm oder – da hierin Differentialoperatoren auftreten, die wiederum auf die Verteilungsfunktionen einwirken – auch *Stoßoperator*. Je nachdem, welche Näherungen oder Annahmen hier gemacht werden, unterscheiden sich die kinetischen Gleichungen.

Bei bekannter Verteilungsfunktion ergibt sich die Teilchendichte durch Integration

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \quad (6.24)$$

und allgemein gilt für den Mittelwert der Größe q

$$\langle q(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\int q f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v}{\int f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v} = \frac{1}{n} \int q f(\vec{v}, \vec{r}, t) d^3v \quad (6.25)$$

6.2.1. DIE VLASOV-GLEICHUNG

Unter Vernachlässigung der Stöße ($C_{ab} = 0$) ergibt sich aus Gl. (6.21) bei elektromagnetischen Kräften die *Vlasov-Gleichung*

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{e_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a = 0, \quad (6.26)$$

die insbesondere bei kleiner Elektronendichte zur Anwendung kommt. Die Problematik dieser Gleichung liegt darin, daß die hierin auftretenden **Felder selbstkonsistent** zu berechnen sind, d.h. die Verteilungsfunktion geht in ihre Berechnung wiederum ein. Kritisch sind insbesondere die elektrischen Felder. Zerfällt beispielsweise die Verteilungsfunktion in Gruppen von Elektronen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit, so führt dies im Ortsraum zu Dichteschwankungen und damit zu (kollektiven) E-Feldern, die auf die Verteilungsfunktion rückwirken und entweder den Effekt dämpfen oder verstärken. Letzteres ist z.B. in Mikrowellen- und Hochfrequenzgeneratoren (Klystrons, Gyatrongs) erwünscht.

Im folgenden veranschaulichen wir die Verwendung der Vlasov-Gleichung im Zusammenhang mit dem Phänomen der Landau-Dämpfung von Wellen im Plasma.

Landau-Dämpfung

Wir machen den Störungsansatz $f = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ für die Verteilungsfunktion und setzen dies in die Vlasov-Gleichung mit $B = 0$ für die Elektronen ein. Es ergibt sich unter Beibehaltung der Terme erster Ordnung die linearisierte Gleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m_e} \vec{E}_1 \cdot \nabla_v f_1 = 0. \quad (6.27)$$

Wir betrachten als Lösungen ebene Wellen und machen den Ansatz $f_1 = f_{10} \exp[i(kx - \omega t)]$ sowie $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} \exp[i(kx - \omega t)] \mathbf{e}_x$. Damit geht Gl. (2.28) über in

$$-i\omega f_1 + ikv_x f_1 = \frac{e}{m_e} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x}. \quad (6.28)$$

Auflösung nach f_1 liefert

$$f_1 = \frac{ieE_x}{m_e} \frac{1}{\omega - kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x}. \quad (6.29)$$

Die Poisson-Gleichung (M1 aus Gl. 6.1) liefert in diesem Fall $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = i k \epsilon_0 E_x = e n_1$. Den Störungsanteil der Dichte erhalten wir nach Gl. (6.24) als $n_1 = \int f_1 d^3 v$. In Verbindung mit Gl. (6.29) ergibt sich daraus die Gleichung

$$1 = -\frac{e^2}{km_e \epsilon_0} \iiint \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} d^3 v. \quad (6.30)$$

In dieser Gleichung können wir noch durch $\iint f_0 dv_y dv_z = n_0 g_0$ zu einer eindimensionalen Verteilungsfunktion $g_0(v_x)$ mit der Normierung $\int g_0 dv_x = 1$ übergehen. Das erlaubt uns, im Vorfaktor die Plasmafrequenz ω_p nach Gl. (3.14) einzuführen und das Ergebnis in der Form

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg_0 / dv_x}{v_x - \omega / k} dv_x \quad (6.31)$$

zu schreiben. Diese Gleichung ist eine *Dispersionsrelation*, die wir als die funktionale Verkupfung $\omega = \omega(k)$ zwischen Frequenz und Wellenzahlvektor betrachten können.

Die Gleichung (6.31) ist wegen der Singularität des Integranden an der Stelle $v_x = \omega/k = v_{\text{phase}}$ schwierig auszuwerten. *L. D. Landau* unterzog sie einer eingehenden Untersuchung und erkannte, daß die Gleichung nur dann sinnvoll auszuwerten ist, wenn man der Frequenz auch einen Imaginärteil (d.h. Dämpfung oder Anregung von Wellen) zuordnet. Ursächlich entsteht das Problem durch die ungenügende Beschreibung des Anfangszustandes, der durch unseren Wellenansatz nicht berücksichtigt wird (anstelle einer Fourier-Entwicklung benötigte man eine Laplace-Entwicklung). Gibt man z. B. vor, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits ein E-Feld vom Typ $\mathbf{E}_1(x, t) = E_{10}(t) \exp[i(kx - \omega t)] \mathbf{e}_x$ im Plasma vorhanden, die Verteilungsfunktion aber noch ungestört sei ($f_1(0) = 0$), so kommt es im Laufe der Zeit zu einem Energieaustausch zwischen Teilchen (hier Elektronen) und Welle, bei der, je nach der Steigung von $f_0(v)$ in der Umgebung der Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \omega/k$, die Welle gedämpft oder verstärkt werden kann. Ist insbesonder f_0 eine Maxwellverteilung, so tritt immer Dämpfung auf. Landau hat weiter gezeigt, daß für große Phasengeschwindigkeiten ($\omega/k \gg v_{\text{th},e}$) die Dispersionfunktion (6.31) ausgewertet werden kann, indem man ω einen kleinen negativen Imaginärteil zuweist und dann die Integration in der komplexen Ebene entlang einer Kontur ausführt, die im wesentlichen mit der reellen Achse identisch ist, bei der jedoch der Pol bei $v = \omega/k$ von einem Halbkreis umschlossen wird. Durch diese Festlegung des Integrationsweges erhalten wir

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left(P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_0 / \partial v}{v - \omega / k} dv + i\pi \frac{\partial g_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \right) \quad (6.32)$$

Hierin bedeutet das vorangestellte P , daß der Cauchy-Hauptwert (principal value) des Integrals gemeint ist. Für eine eindimensionale Maxwellverteilung mit $g_0(v) = \pi^{-1/2} v_{\text{th}}^{-1} \exp(-v^2/v_{\text{th}}^2)$ und $g_0'(v) = -2v \pi^{-1/2} v_{\text{th}}^{-3} \exp(-v^2/v_{\text{th}}^2)$ ergibt sich dieser Hauptwert zu $-2v_{\text{th}}^{-2} F_1^1(1, 1/2, -(v_{\text{ph}}/v_{\text{th}})^2)$ wobei $F_1^1(a, b, x)$ die konfluente hypergeometrische Funktion ist. Entwickeln wir diese Funktion für $x \gg 1$ gemäß $-2F_1^1(1, 1/2, -x^2) = x^{-2} (1 + 3/2 x^{-2} + \dots)$, so lautet die Gleichung (6.32)

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left[\left(1 + \frac{3}{2} v_{\text{th}}^2 \frac{k^2}{\omega^2} + \dots \right) + \frac{i\pi}{k^2} \omega^2 \frac{\partial g_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \right]. \quad (6.33)$$

Auf der rechten Seite dürfen wir in dem Korrekturterm noch $\omega \approx \omega_{pe}$ benutzen, so daß sich mit $v_{\text{th}} = (2k_B T_e / m_e)^{1/2}$ aus dem Realteil der Gleichung die Dispersionsbeziehung für *elektrostatische Wellen* zu

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3k_B T_e}{m_e} k^2 \quad (6.34)$$

ergibt. Im Kapitel 7 werden wir auf diese Wellen, bei denen der E-Vektor in Ausbreitungsrichtung schwingt, genauer eingehen. Wir merken hier noch an, daß es sich um eine Verallgemeinerung der in Kapitel 3 behandelten Plasmaschwingungen handelt, und in der Tat geht die Dispersionbeziehung für $T_e = 0$ in diesen Schwingungszustand bei der Elektronenplasmafrequenz über.

Setzen wir nun $\omega \approx \omega_{pe} - i\gamma$ mit $\gamma \ll \omega_{pe}$, so erhalten wir aus dem Imaginärteil der Gl. (6.33) die Dämpfungskonstante der Welle

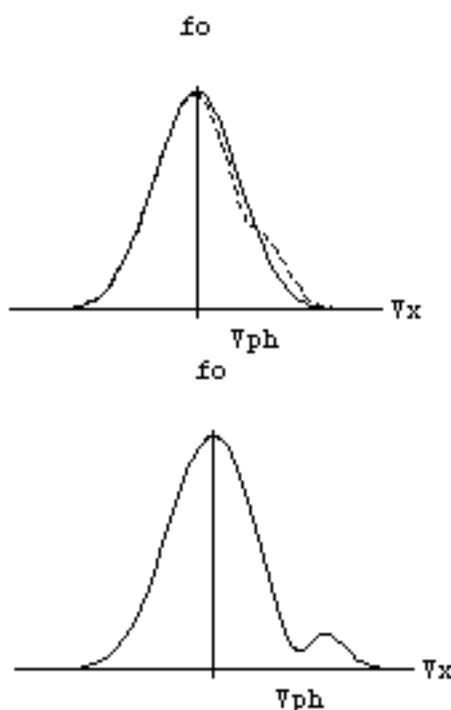
$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2} \left(\frac{\partial g_0}{\partial v_x} \right)_{v=v_{ph}} . \quad (6.35)$$

Für die eindimensionale Maxwellverteilung ergibt sich explizit

$$\gamma / \omega_{pe} = \sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{v_{ph}}{v_{th}^3} e^{-\frac{v_{ph}^2}{v_{th}^2}} = \sqrt{\pi} \omega \frac{\omega_{pe}^2}{k^3 v_{th}^3} e^{-\frac{\omega_{pe}^2 / k^2 + 3/2 v_{th}^2}{v_{th}^2}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2(k\lambda_D)^2} - \frac{3}{2}\right]}{(k\lambda_D)^3} . \quad (6.36)$$

Hier haben wir vermöge $\omega_{pe}/v_{th,e} = 1/(\lambda_D \sqrt{2})$ die Debyelänge eingeführt. Diese Dämpfungsfunktion erreicht bei $k\lambda_D = 0.577$ den Maximalwert $(\gamma/\omega_{pe})_{\max} = 0.16$ und fällt für größere und kleinere Werte rasch ab. Für $k\lambda_D > 1/\sqrt{2}$ also $v_{ph}/v_{th} > 1$ bricht jedoch unsere Näherung zusammen, und in Wirklichkeit bleibt die Dämpfung für Wellenlängen kleiner als die Debyelänge ($\lambda \leq \lambda_D$) groß. Der Abfall der Dämpfung für Wellen mit großer Wellenlänge ($\lambda > \lambda_D$ bzw. $k\lambda_D < 1$) wird dagegen von der Gl. (6.36) richtig beschrieben.

Der Befund der Wellendämpfung ist von grundsätzlicher Bedeutung. Die Besonderheit liegt darin begründet, daß hier eine Dämpfung ohne Teilchenstöße auftritt. Landaus Postulat einer derartigen *dissipationsfreien Dämpfung* im Jahre 1939 war eine wissenschaftliche Sensation. Sie ist inzwischen durch eine Reihe von Experimenten bestätigt worden. Wellenenergie kann hierbei ohne Zunahme der Entropie als kinetische Energie auf die Elektronen übertragen werden.



Die Verhältnisse haben eine deutliche Ähnlichkeit mit dem bekannten Phänomen des Wellenreitens. Der Wellenreiter versucht seine Geschwindigkeit der Phasengeschwindigkeit der Welle anzupassen. Ist seine Geschwindigkeit etwas kleiner als diese, so wird er von der Welle mitgenommen und erfährt dabei anfänglich eine Beschleunigung – seine kinetische Energie nimmt folglich zu. Umgekehrt verliert er etwas Energie, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit geringfügig oberhalb der Phasengeschwindigkeit lag.

Abb. 6-1: Durch Landau-Dämpfung wird die Verteilungsfunktion in der Umgebung der Phasengeschwindigkeit abgeflacht.

Abb. 6-2: Ein Buckel in der Verteilungsfunktion führt zur Anregung von elektrostatischen Wellen im Plasma.

Im Plasma kommt es auf ähnliche Weise zu einer Dämpfung bzw. Verstärkung der Welle, je nachdem, ob die ungestörte Verteilungsfunktion in der Nähe von $v = v_{ph}$ eine positive oder negative Steigung besitzt. Im Falle einer Maxwell-Verteilung ist df_0/dv_x immer negativ, und es kommt zur Dämpfung der Welle, da mehr Teilchen beschleunigt als verzögert werden. In der Folge kommt es zu einer Abflachung der Verteilungsfunktion in der Umgebung der Phasengeschwindigkeit, wie dies in der Abb. 6-1 veranschaulicht ist. Besitzt dagegen f_0 , wie in Abb. 6-2, einen Buckel etwas oberhalb von v_{ph} , so werden Wellen angefacht, da es nun mehr Teilchen gibt, die Energie an die Welle abgeben als solche, die ihr Energie entziehen. Man spricht in diesem Fall auch von *inverser Landau-Dämpfung*. Aufgrund dieses Effektes kann man beispielsweise durch Injektion eines Elektronenstrahls gezielt Wellen im Plasma anregen.

Eine genauere Betrachtung zeigt, daß die Analogie zum Wellenreiten nur näherungsweise gegeben ist. Der Grund liegt in der Linearisierung der Vlasov-Gleichung. Hierdurch werden die im elektrischen Potential der Welle mitgleitenden Teilchen (gefangene Teilchen) nicht erfaßt. Die vollständige Beschreibung führt auf nicht-lineare Dämpfungsphänomene bei der die Phasenmischung der Teilstrahlen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit eine bedeutsame Rolle spielt (*Van Kampen Modes*). Im wesentlichen ist das von uns obenbeschriebene Bild jedoch brauchbar

6.2.2. DIE BOLTZMANN-GLEICHUNG

Unter gewissen Annahmen kann man den Stoßterm in Gl.(6.21) – der ursprünglich nach Gl. (6.20) die Zweierkorrelationsfunktion F_2 enthält – als Funktion von f_a und f_b ausdrücken. L. Boltzmann gelangte auf anderem Wege zu dem folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{Stoß} &= \sum_b C_{ab}(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ &= \sum_b \int_{\Omega} d\Omega \sigma_{ab}(\Omega) \int_{\vec{v}_1} d^3 v_1 [f_a(\vec{r}, \vec{v}_1, t) f_b(\vec{r}, \vec{v}', t) - f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) f_b(\vec{r}, \vec{v}_1, t)] |\vec{v}_1 - \vec{v}| \end{aligned} . \quad (6.37)$$

Schon für den Fall $a = b$ wird damit die entsprechende kinetische Gleichung zu einer Integro-Differentialgleichung, da auf der rechten Seite nun wieder ein Integral über f vorkommt. Man beachte, daß infolge der Stoßkinetik bei elastischen Stößen (Impuls und Energiesatz) mit Angabe des Stoßparameters und den Geschwindigkeiten (\mathbf{v} , \mathbf{v}_1) vor dem Stoß die Geschwindigkeiten nach dem Stoß (\mathbf{v}' , \mathbf{v}'_1) bereits festliegen. Insbesondere wurde bei der Ableitung der obigen Gleichung von der Konstanz des Betrages der Relativgeschwindigkeit $|\vec{v}_1 - \vec{v}| = |\vec{v}'_1 - \vec{v}'|$ Gebrauch gemacht. Im Integranden tauchen zwei Terme auf, die die Auffüllung bzw. Entleerung eines infinitesimalen Volumenelementes im Geschwindigkeitsraum (an der Stelle \mathbf{v}) beschreiben. So ist der Term $-f_a(\mathbf{v}) \cdot f_b(\mathbf{v}_1)$ maßgeblich für die Stoßverlustrate, mit der die Teilchen aus diesem Volumenelement herausgestreut werden. Umgekehrt beschreibt $f_a(\mathbf{v}'_1) \cdot f_b(\mathbf{v}')$ die Rate, mit der Teilchen von außerhalb hineingestreut werden. Es ist über alle Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und über den Raumwinkel Ω bei der Streuung zu integrieren. Im letzteren ist die Integration über den Stoßparameter enthalten. Schließlich ist über alle Stoßteilchensorten (einschließlich $a = b$) zu summieren.

Bei der Ableitung der Boltzmann-Gleichung wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 im Volumenelement anzutreffen, unabhängig davon ist, ob sich in diesem bereits ein Teilchen mit der vorgegebenen Geschwindigkeit \mathbf{v} befindet (daher tauchen die Produkte $f_a(\mathbf{v}'_1) \cdot f_b(\mathbf{v}')$ und $f_a(\mathbf{v}) \cdot f_b(\mathbf{v}_1)$ auf). Diese Annahme, die also eine Korrelation der Teilchen ausschließt, wird als die Annahme vom *Molekularen Chaos* bezeichnet. Natürlich wird ihre Gültigkeit mit zunehmender Dichte der Teilchen abnehmen. Ferner wird ein Stoß immer als so stark angenommen, daß er die Teilchen aus dem betrachteten Phasenvolumenelement entfernt. Das ist für die Stöße zwischen neutralen Atomen oder auch zwischen Atomen und Ionen der Fall (van der Waals Wechselwirkung), nicht jedoch für die Coulombstöße zwischen geladenen Teilchen. Hier haben wir gesehen, daß gerade die vielen schwachen Stöße von Bedeutung sind. Insgesamt kann daher die Boltzmann-Gleichung nur eine Näherung darstellen, die bei stark verdünnten Gasen brauchbar wird.

Eine wichtige Eigenschaft des Boltzmannschen Stoßterms äußert sich im sogenannten *H-Theorem*. Es besagt, daß die zeitliche Ableitung der Größe

$$H(t) = \int f \ln f \, d^3v \quad (6.38)$$

immer negativ oder null ist, wenn die Verteilungsfunktion $f = (\mathbf{v}, t)$ der Gleichung (6.37) genügt

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \quad (6.39)$$

Das Gleichheitzeichen gilt genau dann, wenn f eine Maxwellverteilung ist. Die Funktion H ist mit der Entropie pro Volumeneinheit S/V über die Beziehung $S/V = -k_B H$ verknüpft.

6.2.3. DIE FOKKER-PLANCK-GLEICHUNG

Wie bereits festgestellt, ist der Boltzmannsche Stoßterm für die langreichweiteige Coulombwechselwirkung nicht brauchbar. Man benötigt daher einen Ausdruck, der insbesondere geeignet ist, die vielen schwachen Stoße, die in einem Plasma auftreten, zu behandeln. Hierzu kommt man durch eine Taylorentwicklung des Stoßterms. Wir gehen aus von der Definition des Differentialkoeffizienten

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_a(\vec{r}, \vec{v}, t + \Delta t) - f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\Delta t}. \quad (6.40)$$

Sei nun $W(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich innerhalb der Zeit Δt die Geschwindigkeit eines Teilchens von \mathbf{v} nach $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ infolge von Coulomb-Stoßen ändert, dann gilt unter der Annahme, daß die Einzelwahrscheinlichkeiten (d.h. Stoße) unkorreliert sind

$$f_a(\vec{r}, \vec{v}, t + \Delta t) = \int f_a(\vec{r}, \vec{v} - \Delta\vec{v}, t) \cdot W(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) d^3(\Delta\vec{v}). \quad (6.41)$$

Da wir nur an schwachen Stoßen interessiert sind, entwickeln wir den Integranden in eine Taylor-Reihe bis zu den Termen 2. Ordnung in $\Delta\mathbf{v}$:

$$f_a(\vec{r}, \vec{v} - \Delta\vec{v}, t) W(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) = f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) W(\vec{v}, \Delta\vec{v}) - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f_a W) \Delta v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (f_a W) \Delta v_i \Delta v_j, \quad (6.42)$$

wobei die Indizes $i, j = 1, 2, 3$ sich hier auf die drei Raumkoordinaten beziehen. Mit $\int W(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d^3(\Delta\mathbf{v}) = 1$ und den wie folgt definierten *Fokker-Planck-Koeffizienten*

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \right\rangle &= \frac{1}{\Delta t} \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) W(v_i, \Delta v_i) \Delta v_i d^3(\Delta\vec{v}) \\ \left\langle \frac{\Delta v_i \Delta v_j}{\Delta t} \right\rangle &= \frac{1}{\Delta t} \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) W(v_i, \Delta v_i) d^3(\Delta\vec{v}) \end{aligned} \quad (6.43)$$

ergibt sich für den Stoßterm in dieser Näherung

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_a \left\langle \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f_a \left\langle \frac{\Delta v_i \Delta v_j}{\Delta t} \right\rangle \right). \quad (6.44)$$

Die Änderung der Geschwindigkeit $\Delta\mathbf{v}$ bei einem Coulomb-Stoß haben wir bereits im Kapitel 4 mit Gl. (4.23) abgeleitet. Den ersten Fokker-Planck-Koeffizienten können wir hiermit sofort angeben. Er läßt sich insbesondere durch das in Gl. (4.31) definierte *1. Rosenbluth-Potential* ϕ_v ausdrücken. Wir

werden es im folgenden als $h_b(\vec{v})$ bezeichnen, um durch den Index zum Ausdruck zu bringen, daß es sich hierbei gemäß

$$h_b(\vec{v}) = \int \frac{f_b(\vec{v}')}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d^3 v' \quad (6.45)$$

um ein Integral über die Verteilungsfunktion der zweiten Teilchensorte f_b handelt. Ebenso läßt sich der zweite Fokker-Planck-Koeffizient durch das 2. *Rosenbluthpotential*

$$g_b(\vec{v}) = \int f_b(\vec{v}') |\vec{v} - \vec{v}'| d^3 v' \quad (6.46)$$

ausdrücken. Mit ∇^2_v als Laplace-Operator im Geschwindigkeitsraum genügen die Potentiale den Differentialgleichungen

$$\nabla^2_v h_b = -4\pi f_b \nabla^2_v h_b = -4\pi f_b \quad (6.47)$$

und

$$\nabla^2_v g_b = 2h_b. \quad (6.48)$$

Der Stoßterm läßt sich so schließlich auf die Form

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{coll} = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b) = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left[\vec{A}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{D}_a f_a) \right] \quad (6.49)$$

bringen, womit er sich im Geschwindigkeitsraum als Divergenz eines Strömungsfeldes darstellt. Die als modifizierte Fokker-Planck-Koeffizienten bezeichneten Größen \mathbf{A}_a und \mathbf{D}_a ergeben sich durch Summation über alle Teilchensorten (also auch $b = a$)

$$\vec{A}_a = \sum_b \vec{A}_{ab}; \quad \vec{D}_a = \sum_b \vec{D}_{ab}, \quad (6.50)$$

wobei sich die Zweierkoeffizienten durch die Rosenbluth-Potentiale mit der Konstanten $k_{ab} = 4\pi e_a^2 e_b^2 \ln \Lambda / (4\pi m_{ab} \epsilon_0)^2$ und der reduzierten Masse $m_{ab} = (m_a m_b) / (m_a + m_b)$ wie folgt darstellen lassen

$$\vec{A}_{ab} = m_a^{-1} k_{ab} \frac{\partial h_b}{\partial \vec{v}}; \quad \vec{D}_{ab} = m_a^{-1} k_{ab} \frac{\partial^2 g_b}{\partial \vec{v} \partial \vec{v}}. \quad (6.51)$$

Wie man der eckigen Klammer im Stoßterm nach Gl. (6.49) ansieht, besteht das Strömungsfeld im Geschwindigkeitsraum aus einem konvektiven Anteil, dargestellt durch den Vektor \mathbf{A} und einem diffusiven Anteil, der sich aus der Divergenz eines Tensors ergibt. Im thermodynamischen Gleichgewicht bilanzieren sich diese beiden Terme in der Weise, daß in jedem Punkt des Geschwindigkeitsraumes die vom Vektor \mathbf{A} beschriebene Kontraktion durch die Diffusion aufgehoben wird, wenn sich eine Maxwell-Verteilung eingestellt hat.

Die Teilchenstöße haben die Tendenz, eine einheitliche Temperatur für alle Teilchensorten zu etablieren und Geschwindigkeitsdifferenzen abzubauen. Ohne thermodynamische Kräfte (z.B. Druck- und Temperatur-Gradienten) würden damit alle Verteilungen konzentrische Maxwell-verteilungen gleicher Temperatur werden.

Aus Gründen der Klarheit geben wir nochmals die vollständige *Fokker-Planck-Gleichung* an

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{e_a}{m_a} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v f_a = \sum_b C_{ab} (f_a, f_b) \quad (6.52)$$

Sie spielt bei zahlreichen Problemen der Plasmaphysik eine zentrale Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich beispielsweise die unterschiedlichen Stoßtransportkoeffizienten des Plasmas (elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit, Viskositätskoeffizienten usw.) berechnen. Hinzu kommen Fragen im Zusammenhang mit der Plasmaheizung durch Ionenstrahlen oder Hochfrequenz. Auch die Möglichkeit, einen Strom im Plasma durch eingekoppelte Hochfrequenz treiben zu können, ist mit ihrer Hilfe quantitativ beschreibbar. Leider ist die Fokker-Planck-Gleichung sehr kompliziert und kann fast ausnahmslos nur mit Näherungsverfahren oder numerisch behandelt werden. Man verifiziert jedoch leicht, daß für zwei Maxwell-Verteilungen mit gleicher Temperatur der Stoßterm C_{ab} verschwindet.

6.3. Makroskopische Gleichungen

6.3.1. DEFINITIONEN

Aus den kinetischen Gleichungen lassen sich durch Integration über den Geschwindigkeitsraum einfache Gleichungen im 3-dimensionalen Ortsraum gewinnen. Man erhält auf diese Weise Gleichungen für gemittelte Größen, die u.U. einer Messung direkt zugänglich sind. Neben der bereits angegebenen Gleichung (6.24) für die *Dichte* der Teilchen vom Typ a

$$n_a := \int f_a d^3 v \quad (6.53)$$

interessieren besonders die nachfolgend aufgeführten Größen. Dabei werden wir aus Gründen der besseren Einprägsamkeit den Index a für die betrachtete Teilchenart in der Klammerschreibweise unterdrücken. Da diese Schreibweise jedoch nicht immer eindeutig ist, sind die exakten Integralausdrücke auch angegeben.

Von besonderer Bedeutung ist die *Strömungsgeschwindigkeit* (fluid velocity) als Mittelwert der Einzelgeschwindigkeiten

$$\vec{u}_a := \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n_a} \int \vec{v} f_a d^3 v \quad (6.54)$$

und die hiermit unmittelbar im Zusammenhang stehende *Teilchenflußdichte* (particle flux density)

$$\vec{\Gamma}_a := n_a \vec{u}_a = \int \vec{v} f_a d^3 v. \quad (6.55)$$

Die *Temperatur*, die sich aus dem Integral über das Quadrat der statistischen Geschwindigkeit (*random velocity*) $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{u}$ (mit der Eigenschaft $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$) ergibt

$$T_a := \frac{m_a}{3k_B} \langle w^2 \rangle = \frac{1}{n_a k_B} \int \frac{1}{3} (\vec{v} - \vec{u}_a)^2 f_a d^3 v. \quad (6.56)$$

Zu dieser Beziehung kommt man aufgrund der in der statistischen Mechanik abgeleiteten Beziehung zwischen Temperatur und Energiedichte im thermodynamischen Gleichgewicht. (d.h. f = Maxwell-Verteilung): Pro Freiheitsgrad ist dann die Energiedichte gleich $1/2 k_B T$. Also $1/2 k_B T = m/2 w_x^2 = m/2 w_y^2 = m/2 w_z^2$. Mit $w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2$ folgt dann $k_B T = \langle w^2 \rangle / 3$. Für starke Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht verliert der Temperaturbegriff seine eigentliche Bedeutung: Die verschiedenen Erscheinungen (z.B. Verteilung der Teilchenenergien oder Besetzung der Energiezustände in Atomen) lassen sich dann nämlich nicht mehr durch eine Größe (Temperatur) charakterisieren. Die Definition (6.56) beschreibt dann

lediglich die mittlere Energiedichte gemäß $\varepsilon_a = 3/2 n_a k_B T_a$. Da das Produkt $k_B n_a T_a$ mit dem *skalaren Druck*

$$p_a := \frac{m}{3} \langle w^2 \rangle = \int \frac{m_a}{3} (\vec{v} - \vec{u}_a)^2 f_a d^3 v \quad (6.57)$$

identisch ist, ist die Temperaturdefinition nach (6.56) eigentlich überflüssig – und wird bei den folgenden Ableitungen der Flüssigkeitsgleichungen auch keine Rolle spielen. An ihre Stelle tritt allgemein die Zustandsgleichung $p_a = F(n_a, T_a)$. Die Definition (6.56) entspricht der Annahme einer idealen Gasgleichung $p_a = k_B n_a T_a$.

Viele physikalische Größen lassen sich weder durch einen Skalar noch durch einen Vektor beschreiben, sondern ergeben erst als zweidimensionale Mannigfaltigkeit, *Tensor* (Matrix mit bestimmten Symmetrieeigenschaften, werden durch fette Buchstaben gekennzeichnet), einen Sinn. Von herausragender Bedeutung ist der *Drucktensor* (pressure tensor)

$$\mathbf{p}_a := n m \langle \vec{w} \vec{w} \rangle = m_a \int (\vec{v} - \vec{u}_a) (\vec{v} - \vec{u}_a) f_a d^3 v, \quad (6.58)$$

den man entsprechend

$$\mathbf{p}_a = p_a \mathbf{I} + \mathbf{p}_a \quad (6.59)$$

in den *isotropen Druck* $p_a = k_B n_a T_a = 1/3 (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})_a = 1/3 \text{ Spur}(\mathbf{p}_a)$ und den *anisotropen Drucktensor* $\boldsymbol{\pi}$ zerlegen kann. Letzterer wird auch als *Viskositätstensor* (viscous stress tensor) bezeichnet. In Gl. (6.59) ist \mathbf{I} ist der Einheitstensor, den man auch als Einheitsdyade in der Form $\mathbf{I} = \mathbf{e} \mathbf{e} = (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z)$ schreiben kann. Seine Matrixelemente sind durch das Kroneckersymbol δ_{ik} gegeben. Für den anisotropen Drucktensor haben wir umgekehrt auch die Darstellung

$$\boldsymbol{\pi} = mn \left\langle \vec{w} \vec{w} - \frac{w^2}{3} \mathbf{I} \right\rangle \quad (6.60)$$

Ausdrücke der Form $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{T}$ bezeichnet man als *dydisches Produkt* (kein Punkt oder Kreuz zwischen den Vektoren). Sie sind eine geeignete Darstellung für einen Tensor zweiter Stufe. Dessen Matrixelemente ergeben sich durch skalare Multiplikation von rechts und links mit den Einheitsvektoren. Zum Beispiel ergibt sich das Element p_{xy} des Drucktensors aus $p_{xy} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y = m \langle w_x w_y \rangle$. Ebenso kann man auch andere Projektionen leicht durch entsprechende Skalarprodukte darstellen, wie etwa den Druck in Richtung des Magnetfeldes durch $p_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = m n \langle w_{\parallel}^2 \rangle$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$. Multipliziert man die Dyade nur von links (oder rechts) mit einem anderen Vektor, so erhält man wiederum einen Vektor: z.B. $\mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}$. Anstelle eines normalen Vektors kann dabei auch der Nabla-Operator $\nabla = \partial_x \mathbf{e}_x + \partial_y \mathbf{e}_y + \partial_z \mathbf{e}_z$ treten. Ausdrücke der Form $\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{T}$ bezeichnet man als die *Divergenz des Tensors*; es ergibt sich auch in diesem Falle ein Vektor, dessen i-te Komponente durch $V_i = \partial_x T_{xi} + \partial_y T_{yi} + \partial_z T_{zi}$ gegeben ist. Speziell erhalten wir beispielsweise für die y-Komponente von $\nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{B}) = \partial_x T_{xy} + \partial_y T_{yy} + \partial_z T_{zy} = \partial_x (A_x B_y) + \partial_y (A_y B_y) + \partial_z (A_z B_y)$. Für die Divergenz der Dyade zweier gleicher Vektoren leitet man hieraus sehr leicht die wichtige Beziehung

$$\nabla \cdot (\vec{u} \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{u} \nabla \cdot \vec{u} \quad (6.61)$$

ab.

Der Drucktensor ist aus dem *Impulsflußtensor*

$$\mathbf{P}_a := \langle (n \vec{v}) (m \vec{v}) \rangle = m_a \int (\vec{v} \vec{v}) f_a d^3 v \quad (6.62)$$

hervorgegangen, dessen Element P_{xn} den Impulsdurchsatz pro Zeiteinheit in x-Richtung auf ein Einheitsflächenelement mit der Normalenrichtung n angibt. Man zeigt sofort, daß (wegen $\langle \mathbf{w} \rangle = 0$) zwischen Druck- und Impulsflußtensor die Relation

$$\mathbf{P} = nm\langle \tilde{v}\tilde{v} \rangle = \mathbf{p} + mn\tilde{u}\tilde{u} \quad (6.63)$$

besteht. In der Definitionsgleichung (6.62) ist der erste Term ($n \mathbf{v}$) die Teilchenflußdichte (Teilchen pro m^2 und Sekunde) und der zweite ($m \mathbf{v}$) der Impuls der Einzelteilchen. Die Diagonalelemente P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} sind daher die Impulsflußdichten durch die Flächen mit den Normalenvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Strömen die Teilchen jedoch unter einem Winkel zur x-Achse, so ist die Teilchenflußdichte durch eine zur x-Achse senkrecht stehende Fläche wiederum durch $n v_x$ gegeben, jedoch wird dabei auch Impuls in y- und z-Richtung durch diese Fläche hindurch geführt. Das Nichtdiagonalelement P_{yx} beschreibt daher den mittleren Impulsfluß in y-Richtung durch eine Einheitsfläche mit Normalenvektor \mathbf{e}_x .

Die Kraft auf einen kleinen Quader mit dem Volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ergibt sich durch die Änderung seines Impulses. Fließt etwa durch seine beiden Begrenzungsflächen zur x-Achse pro Zeiteinheit der Nettoimpuls ΔP_{xx} heraus, so bedingt dieser Verlust eine Kraft in negativer x-Richtung: $F_x = - \Delta P_{xx} \Delta y \Delta z$. Dazu kommen noch die Impulsverluste in x-Richtung durch die Begrenzungsfächen in y-Richtung ($-\Delta P_{xy} \Delta x \Delta z$) und in z-Richtung ($-\Delta P_{xz} \Delta x \Delta y$). Die Kraft in x-Richtung ist somit insgesamt: $F_x = - \Delta P_{xx} (\Delta y \Delta z) - \Delta P_{xy} (\Delta x \Delta z) - \Delta P_{xz} (\Delta x \Delta y)$. Für kleine Kantenlängen des Quaders können wir die Differenzen durch Differentiale ersetzen: $\Delta P_{xy} \approx dP_{xy} \approx (\partial P_{xy} / \partial y) \Delta y$ usw. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_x &= - \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} (\Delta x \Delta y \Delta z) - \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} (\Delta x \Delta y \Delta z) - \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} (\Delta x \Delta y \Delta z) \\ &= -\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}\right) \Delta V = -\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right) \Delta V = -(\nabla \cdot \mathbf{P})_x \Delta V \end{aligned} \quad (6.64)$$

wobei wir im vorletzten Schritt von der Symmetrie des Tensors ($P_{xy} = P_{yx}$ usw., ergibt sich aus Definition nach (6.63)) Gebrauch gemacht haben. Insgesamt ergibt sich durch analoge Behandlung der y- und z-Komponenten die Kraft pro Volumeneinheit als die Divergenz des Impulsflußtensors \mathbf{F} : $\mathbf{F} / \Delta V = -\nabla \cdot \mathbf{P}$.

Bei einer strömenden Flüssigkeit interessieren jedoch nicht die Impulsflüsse durch ein ruhendes Volumenelement, sondern diejenigen für ein mitbewegtes Volumenelement. Diese ergeben sich, wenn man anstelle der Flußdichte ($n \mathbf{v}$) die relativen Flußdichten $n (\mathbf{v} - \mathbf{u})$ einsetzt und ebenso bei den Impulsen $m \mathbf{v}$ durch $m (\mathbf{v} - \mathbf{u})$ ersetzt. Wir sehen somit, daß die Kraft auf ein solches mitbewegtes Volumenelement durch die Divergenz des Drucktensors bestimmt ist. Bezogen auf die Volumeneinheit (Einheit: N/m^3) lautet diese

$$\vec{F} / \Delta V = -\nabla \cdot \mathbf{p} = -\nabla p - \nabla \cdot \mathbf{p}. \quad (6.65)$$

Ist die Verteilungsfunktion kugelsymmetrisch, so verschwinden die Nicht-Diagonalelemente des Drucktensors und seine drei Diagonalelemente sind gleich, d.h. es gibt nur den skalaren Druck p . In diesem Fall ist die Kraft einfach durch den Gradienten des Drucks gegeben (Beweis: $\nabla \cdot (\mathbf{I} p) = (\partial_x \mathbf{e}_x + \partial_y \mathbf{e}_y + \partial_z \mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) p = (\partial_x p \mathbf{e}_x + \partial_y p \mathbf{e}_y + \partial_z p \mathbf{e}_z) = \nabla p$). Dieser Fall liegt bei hinreichend hoher Stoßfrequenz der Teilchen vor, da ja die Stöße auf eine Isotropierung der Verteilungsfunktion hinwirken. Besitzt der Drucktensor Nicht-Diagonalelemente, so bewirken diese *Scherkräfte* ($-\nabla \cdot \mathbf{p}$), die ein Volumenelement mit ideal elastischer Hülle verzerrn. Insbesondere wird eine kleine Kugel in ein Ellipsoid umgewandelt. Wie wir später sehen werden, sind diese Kräfte die *Viskositätskräfte* des Plasmas.

Eine andere vektorielle Größe, die im Zusammenhang mit dem Energietransport auftritt, ist der *Wärmefluß* (*random heatflux*)

$$\vec{q}_a := \left\langle \left(\frac{m_a}{2} \vec{v}^2 \right) n \vec{v} \right\rangle = \frac{m_a}{2} \int (\vec{v} - \vec{u}_a)^2 (\vec{v} - \vec{u}_a) f_a d^3 v. \quad (6.66)$$

Im Gegensatz zum Wärmetransport durch Konvektion (Terme vom Typ: $m_a/2 v_a^2 \mathbf{u}_a$) beschreibt Gl. (6.66) das Phänomen der *Wärmeleitung*, die auch einen Energietransport zuläßt, wenn keine Strömung vorhanden ist.

Ferner gibt es Größen, die nicht mit der Verteilungsfunktion selbst, sondern mit dem Stoßterm verknüpft sind. Dazu zählt zunächst der *Quellterm*

$$S_a := \left. \frac{\partial n_a}{\partial t} \right|_{\text{Ion + Rekomb.}} = \int \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}} d^3 v, \quad (6.67)$$

der die Nettoerzeugungsrate von Teilchen aufgrund von Ionisation und Rekombination beschreibt. Eine sehr wichtige Größe ist die *Reibungskraft* (*friction force*)

$$\vec{R}_a := \left\langle m_a \vec{v} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{b-\text{Stöße}} \right\rangle = \sum_b \vec{R}_{ab} = \sum_b \int m_a \vec{v} C_{ab} d^3 v, \quad (6.68)$$

die durch Impulstransfer-Stöße mit allen Teilchensorten b entsteht. Man beachte, daß aufgrund der Impulserhaltung $R_{ab} = -R_{ba}$ gilt, so daß die so definierte Reibungskraft nur durch Stöße mit anderen Teilchen ($b \neq a$) zustande kommt. Die gemeinhin als "innere Reibung" bezeichneten Kräfte einer Teilchensorte mit sich selbst (z.B. in einem Argongas) treten im Rahmen der plasmaphysikalischen Beschreibung als Viskositätskräfte im Drucktensor in Erscheinung.

Ähnlich zur Reibungskraft gibt es einen *Wärmeübertrag* (*heat transfer*) zu den a-Teilchen aufgrund von Stößen mit allen anderen Teilchen

$$Q_a := \left\langle \frac{m_a}{2} \vec{v}^2 \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_{b-\text{Stöße}} \right\rangle = \sum_b Q_{ab} = \sum_b \int \frac{m_a}{2} (\vec{v} - \vec{u}_a)^2 C_{ab} d^3 v. \quad (6.69)$$

Hierbei geht es allerdings nur um den Austausch von Wärme (nicht Gesamtenergie), was sich in der Übertragungsgröße $m/2 w^2$ ausdrückt. Die beiden Größen R_{ab} und Q_{ab} sind bei Coulombstößen nicht unabhängig voneinander, da dann zum Impulssatz $R_{ab} + R_{ba} = 0$ noch der Energiesatz in der Form $(R_{ab}u_a + Q_{ab}) + (R_{ba}u_b + Q_{ba}) = 0$ hinzukommt. Wir erhalten damit die wichtige Beziehung

$$Q_{ab} + Q_{ba} = \vec{R}_{ab} \cdot (\vec{u}_b - \vec{u}_a). \quad (6.70)$$

Schließlich taucht im Zusammenhang mit den Wärmeflüssen noch die sogenannte *Wärmereibung* (*heat friction*) auf

$$\vec{G}_a = \sum_b \int \left(\frac{(\vec{v} - \vec{u}_a)^2}{v_{a,th}^2} - \frac{5}{2} \right) m_a (\vec{v} - \vec{u}_a) C_{ab} d^3 v \quad (6.71)$$

wobei $v_{a,th} = (2 T_a/m_a)^{1/2}$ die thermische Geschwindigkeit der a-Teilchen ist.

6.3.2. MEHRFLÜSSIGKEITSGLEICHUNGEN

Man bezeichnet die zuvor angegebenen makroskopischen Größen n , p , T , usw. auch als *Momente der Verteilungsfunktion*, da sie nach Multiplikation von f mit den Potenzen $g_i = v^i$ durch Integration aus ihr hervorgehen. Multipliziert man die allgemeine Gleichung der kinetischen Theorie (6.21) mit den g_i und integriert die Gleichung über den Geschwindigkeitsraum, so ergeben sich neue Gleichungen,

die nur noch von den Ortskoordinaten abhängen. Hierbei ist es hilfreich festzustellen, daß die kinetische Gleichung sich in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (v_i f) + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{K_i}{m} f \right) \right] = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} \quad (6.72)$$

schreiben läßt, falls für die Kraft gilt: $\partial K_i / \partial v_i = 0$, K_i also keine Funktion von v_i ist. Dies ist insbesondere der Fall, falls die Kraft pro Teilchen durch elektromagnetische und Gravitationskräfte gegeben ist

$$\vec{K}_a = e_a (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + m_a \vec{g}. \quad (6.73)$$

Mit Hilfe von Gl. (6.72) erhalten wir (nach einer partiellen Integration des Kraftterms) für eine beliebige Funktion $g = g(\mathbf{v})$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle) + \nabla \cdot (n \langle g \vec{v} \rangle) - n \left\langle \frac{\vec{K}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} g \right\rangle = \left[\frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle) \right]_{\text{Stoß}}. \quad (6.74)$$

Aus dieser Gleichung können wir im Prinzip eine beliebige Anzahl von makroskopischen Gleichungen herstellen. Insbesondere sind die drei Gleichungen, die sich aus den Momenten 0. bis 2. Grades in \mathbf{v} ergeben von herausragender Bedeutung, da sie die Verknüpfungen der im vorangehenden Abschnitt definierten Variablen darstellen.

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{u}_a) = S_a \quad (6.75)$$

erhalten wir sofort durch Einsetzen von $g = 1$ in die Gl. (6.74). Hierbei haben wir wieder den Index a für die betrachtete Teilchenart eingeführt. Auf der rechten Seite steht die effektive Quellstärke für Ionisation und Rekombination entsprechend der Gl. (6.67), die in einem vollständig ionisierten Plasma natürlich verschwindet.

Mit $g = m \mathbf{v}$ und $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{I}$ erhalten wir aus Gl. (6.74) die **Impulsgleichung**

$$\frac{\partial (m_a n_a \vec{u}_a)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P}_a - n_a \langle \vec{K}_a \rangle = \vec{R}_a, \quad (6.76)$$

die eine Bilanz für die Kräfte pro Volumeneinheit darstellt. Diese Gleichung formen wir mit Hilfe von Gl. (6.63), (6.61) und (6.73) sowie der Kontinuitätsgleichung (6.75) weiter um. Im Ergebnis

$$m_a n_a \left(\frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} + (\vec{u}_a \cdot \nabla) \vec{u}_a \right) = -\nabla \cdot \mathbf{p}_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{u}_a \times \vec{B}) + m_a n_a \vec{g} + \vec{R}_a - m_a \vec{u}_a S_a \quad (6.77)$$

tauchen auf der rechten Seite neben der Divergenz des Drucktensors sowie den elektromagnetischen Kräften und der Schwerkraft die Reibungskraft auf. Die Gravitationskräfte werden gewöhnlich weggelassen, da sie meistens unbedeutend sind. Die Plasmen in Sternen bilden hierbei jedoch eine Ausnahme. Der letzte Term auf der rechten Seite gibt die Zusatzkräfte an, die mit der Produktion neuer Teilchen verbunden sind. Die Reibungskräfte setzen sich aus den Impulsverlusten an alle

übrigen geladenen Teilchen aufgrund der Coulombwechselwirkung und der Stöße mit den neutralen Teilchen zusammen. Sie lassen sich entsprechend Gl.(4.65) – unter Vernachlässigung der später zu besprechenden Thermokräfte – durch die Stoßfrequenzen v_{ab} und die Differenzen der Strömungsgeschwindigkeiten ausdrücken

$$\vec{R}_a = \sum_b \vec{R}_{ab} \approx - \sum_b m_a n_a v_{ab} (\vec{u}_a - \vec{u}_b). \quad (6.78)$$

Neutralteilchenstöße treten wiederum nur in einem unvollständig ionisierten Plasma in Erscheinung. Die entsprechenden Kräfte $\mathbf{R}_{a0} = -m_a n_a v_{a0} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_0)$ können aber, namentlich in schwach ionisierten Gasen mit kleinen Magnetfeldern (d.h. $v_{a0}/\omega_{ca} \geq 1$), sehr bedeutsam werden. Bei den Ionen ist hierbei auch der Ladungsaustauschprozeß mit den Neutralen wichtig. Bei den Elektronen müssen inelastische Anregungsstöße und elastische Stöße mit den Atomen (und auch mit den nicht vollständig ionisierten Ionen) berücksichtigt werden. Gewöhnlich ist die Strömungsgeschwindigkeit der Neutralen \mathbf{u}_0 vernachlässigbar. So erklärt sich auch der letzte Term in Gl. (6.77) der den Impulsverlust an die durch Ionisation neu erzeugten Teilchen beschreibt. Auf der linken Seite der Gleichung (6.77) stehen die Trägheitskräfte. Der Klammerterm stellt die sogenannte konvektive Beschleunigung

$$m_a n_a \left(\frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} + (\vec{u}_a \cdot \nabla) \vec{u}_a \right) = -\nabla \cdot \mathbf{p}_a + e_a n_a (\vec{E} + \vec{u}_a \times \vec{B}) + m_a n_a \vec{g} + \vec{R}_a - m_a \vec{u}_a S_a \quad (6.79)$$

dar. Hierin beschreibt der Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ die Beschleunigung der Teilchen aufgrund der Krümmung der Strömungslinien. Für eine kreisende Strömung (in Zylinderkoordinaten: $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_\theta$ mit $u = u(r, z)$) erhalten wir gemäß $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (u \ 1/r \ \partial_\theta) \mathbf{u} = u^2/r \ \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -u^2/r \ \mathbf{e}_r$, also die bekannte Zentripetalbeschleunigung.

Die dritte Gleichung ist die **Energiegleichung**. Hierfür erhält man zunächst mit $g = m v^2$ und den Definitionen des vorausgehenden Abschnitts

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n_a m_a u_a^2}{2} + \frac{3}{2} p_a \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{n_a m_a u_a^2}{2} + \frac{3}{2} p_a \right) \vec{u}_a + \mathbf{p}_a \cdot \vec{u}_a + \vec{q}_a \right] + Q_a - \frac{m_a u_a^2 S_a}{2} + \vec{R}_a \cdot \vec{u}_a + n_a \left(\vec{K}_a \cdot \vec{v} \right) \quad (6.80)$$

Auf der linken Seite stehen die zeitlichen Änderungen der Strömungsenergie und der inneren Energie $3/2 p_a$. Auf der rechten Seite haben wir zunächst die Divergenz des Energieflusses, der sich aus drei Anteilen zusammensetzt: 1. konvektiver Energietransport (runde Klammer), 2. Änderung der inneren Energie aufgrund der von den Druck- und Viskositätskräften am Plasma geleisteten Arbeit und 3. konduktiver Energietransport aufgrund von Wärmeleitung.

Danach folgen vier Leistungsterme: 1. Der Wärmeübertrag aufgrund von Stößen mit allen anderen Teilchen (Q_a), 2. der Energieverlust bedingt durch die Produktion ruhender Teilchen, die auf die Strömungsgeschwindigkeit beschleunigt werden müssen (der entsprechende negative Beitrag für die Aufheizung dieser Teilchen ist in Q_a enthalten), 3. die von den Reibungskräften geleistete Arbeit und 4. die von den elektromagnetischen und sonstigen Kräften geleistete Arbeit. Setzen wir hier $\mathbf{K}_a = \mathbf{e}_a (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, so entfällt der magnetische Term und es verbleibt die *ohmsche Heizleistung* $L_{\text{Ohm}} = n_a \mathbf{e}_a \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a$. An dieser Stelle kann jedoch auch die von einem Hochfrequenzfeld erzeugte Heizung als zeitlicher Mittelwert in Erscheinung treten $L_{\text{HF}} = n_a \mathbf{e}_a \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_a \rangle_t$. Die Aufheizung durch Injektion von Teilchenstrahlen vom Typ $b \neq a$ tritt dagegen in den Termen $R_{ab} u_a$ und Q_{ab} auf. Man betrachtet die Teilchenstrahlen (z.B. Protonen) am besten als eine gesonderte Beam-Spezies mit eigenen Gleichungen, auch wenn sie schon als Plasmakonstituenten vorhanden sind. Näherungsweise kann man sie in diesem Fall jedoch auch durch die Zusatzterme S_{beam} , $m_a \mathbf{u}_{\text{beam}} S_{\text{beam}}$, $1/2 m_a u_{\text{beam}}^2 S_{\text{beam}}$ auf den rechten Seiten der Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichungen berücksichtigen.

Durch eine Reihe von Manipulationen kann man aus der Energiegleichung (6.80) die Terme der kinetischen Energie entfernen, so daß nur noch eine Gleichung für den Druck übrig bleibt. Zunächst faßt man die Terme mit $m/2 u^2$ zusammen

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n_a m_a}{2} u_a^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{n_a m_a}{2} u_a^2 \right) \right\} = -\nabla \cdot \left[\frac{3}{2} p_a \vec{u}_a + \mathbf{p}_a \cdot \vec{u}_a + \vec{q}_a \right] + Q_a - \frac{m_a u_a^2 S_a}{2} + \vec{R}_a \cdot \vec{u}_a + n_a \langle \vec{K}_a \cdot \vec{v} \rangle. \quad (6.81)$$

Für den Ausdruck in der geschweiften Klammer erhält man die Darstellung

$$\{ \} = \frac{m_a}{2} u_a^2 \left[\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{u}_a) \right] + \vec{u}_a \left[m_a n_a \frac{d\vec{u}}{dt} \right]. \quad (6.82)$$

Hierin können wir nun die beiden eckigen Klammern durch die rechten Seiten der Kontinuitäts- und Impulsgleichung ersetzen. Nach Einsetzen in Gl. (6.81) fallen alle Kraftterme heraus und es ergibt sich

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_a}{\partial t} = \vec{u}_a \cdot \nabla \cdot \mathbf{p}_a - \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} p_a \vec{u}_a + \mathbf{p}_a \cdot \vec{u}_a + \vec{q}_a \right) + Q_a = -(\mathbf{p}_a \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_a - \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} p_a \vec{u}_a + \vec{q}_a \right) + Q_a \quad (6.83)$$

und wenn wir noch den Drucktensor gemäß $\mathbf{p} = p \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}$ zerlegen

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_a}{\partial t} = -\frac{5}{2} p_a \nabla \cdot \vec{u}_a - \frac{3}{2} \vec{u}_a \cdot \nabla p_a - (\boldsymbol{\pi}_a \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_a - \nabla \cdot \vec{q}_a + Q_a. \quad (6.84)$$

An der Änderung der inneren Energie ($3/2 p_a$) sind somit neben konvektivem Wärmetransport und den vom Drucktensor beschriebenen Verformungsarbeiten nur die Wärmeleitung und der Wärmeübertrag zu den anderen Teilchen beteiligt. Man beachte aber, daß wegen der Relation (6.70) in der Gesamtenergiebilanz über alle Teilchensorten die Reibungskräfte und damit die im Plasma dissipierte Leistung (ohmsche Heizung u.a.) wieder in Erscheinung tritt. Wir merken noch an, daß der Viskositätsterm $(\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}_{ik} \partial u_i / \partial x_k = \text{Spur}(\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla \mathbf{u})$ häufig auch als $\boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{u}$ geschrieben wird.

Insgesamt haben wir für die fünf Variablen n_a , u_{xa} , u_{ya} , u_{za} und p_a zwei skalare Gleichungen und eine Vektorgleichung, also auch fünf Gleichungen erhalten. In den Gleichungen selbst tauchen jedoch wesentlich mehr Größen auf, so daß wir für eine konsistente Beschreibung weitere Gleichungen benötigen. So benötigen wir eine Zustandsgleichung, die den Druck mit der Temperatur und Dichte verknüpft. Für ideale Plasmen lautet diese Beziehung wie bereits mehrfach ausgeführt $p_a = k_B n_a T_a$. Hieraus können wir die Temperaturen der verschiedenen Teilchensorten ermitteln, die wir andererseits benötigen, um nach Gl. (4.53 - 54) den Wärmetransfer Q_a ausdrücken zu können. Ebenso brauchen wir die Temperaturen, um die Stoßfrequenzen in den Reibungsgleichungen zu berechnen. Jedoch sind nicht für alle Größen bereits die benötigten Relationen vorhanden. So taucht in der Energiegleichung der Wärmefluß \mathbf{q}_a auf, der nach Gl. (6.66) ein Moment dritten Grades ist. Um für ihn eine Gleichung zu gewinnen, muß man eigentlich die entsprechende Gleichung dritten Grades für $g_3 = m/2 v^2 \mathbf{v}$, die sogenannte *Wärmeflußgleichung*, ableiten. In dieser taucht dann aber mit dem *energiegewichteten Viskositätstensor* $\boldsymbol{\Theta}$ ein Moment vom 4. Grade auf usw. Wie schon bei der BBGKY-Hierarchie muß man diese Momentenentwicklung durch Einführung einer Abschlußrelation an einer geeigneten Stelle abbrechen. Dabei hängt es von der Problemstellung ab, wie weit man die Entwicklung zu treiben hat. Grundsätzlich gilt: je größer die Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht (Störungen der Maxwell-Verteilungen), um so mehr Terme und Gleichungen werden benötigt. Eine häufig gemachte Näherung für den Wärmefluß ist $\mathbf{q}_a = 0$. Bei Verhältnissen mit starken Temperaturgradienten kann dies natürlich keine brauchbare Annahme sein. Hier setzt man in erster Näherung

$$\vec{q}_a = -\kappa_a \nabla T_a \quad (6.85)$$

mit dem Wärmeleitungscoefficienten κ_a . Wir werden auf diese Probleme später zurückkommen.

Für viele Anwendungen reicht eine Beschreibung mit den acht Momenten $n, p, \mathbf{u}, \mathbf{q}$ aus, für andere jedoch nicht. Insbesondere liegen in magnetisierten Plasmen u.U. stark anisotrope Verhältnisse vor, die es erforderlich machen, den oben schon eingeführten anisotropen *Drucktensor* (Viskositätstensor) mit in Betracht zu ziehen. Dieser lässt sich als symmetrische 3x3-Matrix mit verschwindender Summe der Diagonalelemente (Spur) darstellen und führt somit weitere fünf Momente ein, für die Gleichungen benötigt werden. Man erhält so die sogenannte 13-Momenten-Näherung. Schließlich erwies sich bei der Formulierung einer stoßbedingten Transporttheorie für toroidal eingeschlossene Plasmen auch der erwähnte energiegewichtete Viskositätstensor Θ als wichtig, so daß man in diesem Falle eine 18-Momenten-Näherung ($n, T, \mathbf{u}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \Theta$) benötigt.

6.3.3. MHD: EINFLÜSSIGKEITSGLEICHUNGEN

Durch Summation über alle im Plasma vorkommenden Teilchensorten kann man, ausgehend von den makroskopischen Gleichungen des Mehrkomponentenplasmas, die nochmals wesentlich einfacheren Gleichungen im *Einflüssigkeitsbild* erhalten. In dieser Beschreibung kommen die Elektronen und Ionen mit ihren spezifischen Eigenschaften nicht mehr vor. Das Plasma wird also als eine elektrisch leitende, komprimierbare Flüssigkeit behandelt, die durch Magnetfelder sehr stark beeinflußbar ist. Man spricht deshalb auch von der **Magneto-Hydro-Dynamischen Theorie**, kurz MHD. Als neue physikalische Größen treten die *Massendichte* ρ , die elektrische *Stromdichte* \mathbf{j} und die *Schwerpunktsgeschwindigkeit* \mathbf{u} in Erscheinung; sie sind wie folgt definiert:

$$\rho = \sum_a m_a n_a \approx m_i n_i; \quad \vec{j} := \sum_a e_a n_a \vec{u}_a \approx e n (\vec{u}_i - \vec{u}_e); \quad \vec{u} := \frac{1}{\rho} \sum_a m_a n_a \vec{u}_a \approx \vec{u}_i. \quad (6.86)$$

Die angegebenen Näherungen beziehen sich auf den Fall eines Plasmas mit nur einer einfach geladenen Ionensorte. Bei der Schwerpunktsgeschwindigkeit ist die Näherung $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$ mit Vorsicht zu verwenden, da es Fälle mit sehr hoher Elektronengeschwindigkeit geben kann (z. B. bei der Beschleunigung durch ein E-Feld gilt wegen des Impulssatzes $m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e = 0$). Dazu benötigt man noch den Drucktensor des Gesamtplasmas bzw. den isotropen Gesamtdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \sum_a \mathbf{p}_a + \sum_a m_a n_a (\vec{u}_a - \vec{u})(\vec{u}_a - \vec{u}) \approx \mathbf{p}_i + p_e \mathbf{I} \\ p &:= \sum_a p_a + \frac{1}{3} \sum_a m_a n_a (\vec{u}_a - \vec{u})^2 \approx p_i + p_e \end{aligned} \quad (6.87)$$

Letzterer ist in Näherung durch die Summe der Partialdrücke von Elektronen und Ionen gegeben. Wie wir später noch genauer sehen werden, sind wegen der hohen Elektronen-Elektronen Stoßfrequenzen die Viskositätskräfte bei den Elektronen meist vernachlässigbar, so daß nur der Ionendruck als Tensor betrachtet werden muß. Es ergeben sich die folgenden neuen Gleichungen:

Die **Kontinuitätsgleichung** für die Massendichte ergibt sich aus der Gleichung (6.75) durch Multiplikation mit m_a und Summation über alle Teilchen zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (6.88)$$

Hierbei sind die Quellterme heraus gefallen, da durch Stöße die Massendichte nicht geändert werden kann ($\sum m_a S_a = 0$). Wir erhalten eine entsprechende Gleichung für die elektrische Ladungsdichte ρ_{el} , wenn wir die Einzelgleichungen anstelle der Masse mit der Ladung e_a multiplizieren und dann Summieren

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (6.89)$$

Die Quellterme entfallen diesmal, weil auch die Ladungsdichte $\rho_{el} = \sum e_a n_a$ nicht durch Stöße verändert werden kann ($\sum e_a S_a = 0$). Im folgenden werden wir die Ladungsdichte im Sinne der Quasineutralität zu null annehmen. Die Stromdichte muß damit immer divergenzfrei sein: $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Aus der Summe der Impulsgleichungen ergibt sich die **Kraftgleichung**

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}. \quad (6.90)$$

Unter stationären Bedingungen und unter Vernachlässigung des links stehenden Trägheitsterms (meist gültig sofern $|\mathbf{u}| \ll v_{i, \text{therm.}}$) sowie der Viskositäts- und der Schwerkraft nimmt sie die einfache Gestalt

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \quad (6.91)$$

an.

Für ein vollständig ionisiertes Plasma bestehend aus einer einfach geladenen Ionensorte und Elektronen kann man aus der Differenz der beiden Impulsgleichungen das **verallgemeinerte Ohmsche Gesetz**

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \eta \cdot \vec{j} = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{en} - \frac{\nabla p_e}{en} + \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (6.92)$$

ableiten. Die Terme der rechten Seite können gewöhnlich als Korrekturterme betrachtet werden. Von größerer Bedeutung ist jedoch nicht selten der $j \times B$ -Term, der den *Halleffekt* repräsentiert. Er ist von der relativen Größenordnung $B/(e n_e \eta_{||}) j_{||}/j_{\perp} \sim \omega_{ce} \tau_e j_{||}/j_{\perp} \rightarrow 1/(\omega_{ce} \tau_e)$ und verschwindet bei starkem Magnetfeld und kleiner Stoßfrequenz (d.h. großem *Hallparameter* der Elektronen: $H_e = \omega_{ce} \tau_e$). In schwach ionisierten Plasmen mit mäßigem B-Feld, bei denen die Stöße (auch mit den neutralen Atomen) häufig sind, kann er jedoch eine bedeutsame Rolle spielen.

Die elektrische Resistivität η ist im magnetisierten Einflüssigkeits-Plasma ein Tensor, dessen Elemente $\eta_{||}$ und η_{\perp} verschieden groß sind. In ihnen drückt sich aus, daß die Reibungskräfte zwischen Elektronen und Ionen in der Richtung parallel und senkrecht zu B verschieden sind. Allerdings zeigen die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung (Braginskii 1957), daß der Unterschied für ein stark magnetisiertes, vollständig ionisiertes Plasma nicht sehr groß ist ($\eta_{\perp} = 1,96 \eta_{||} \approx 2 \eta_{||}$), so daß man für orientierende Betrachtungen auch einen skalaren Zusammenhang annehmen darf. Man schreibt das **vereinfachte Ohmsche Gesetz** in der Form

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = \eta_{\perp} \vec{j}_{\perp} + \eta_{||} \vec{j}_{||}. \quad (6.93)$$

Die richtige Interpretation dieser Gleichung ist jedoch überaus wichtig. So beschreibt die Senkrechtresistivität in Regel nicht den von einem E_{\perp} -Feld erzeugten Strom, wie man das vom einfachen Ohmschen Gesetz ($\mathbf{E} = \eta \mathbf{j}$) her erwarten würde, sondern die Energiedissipation der druckgetriebenen Ströme. Es ist nämlich zu beachten, daß das Plasma die Möglichkeit hat, ein angelegtes elektrisches Feld durch eine entsprechende Drift zu kompensieren, so daß im bewegten Plasma das Feld $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ verschwindet. In der Tat ist das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz – abgesehen von der Komponente parallel zu B – weniger eine Gleichung für die Bestimmung der Stromdichten als für die Strömungsgeschwindigkeit. Das liegt daran, daß die senkrechte Stromdichte bereits über die Kraftgleichung weitgehend festgelegt ist. Der Gl. (6.91) entnehmen wir, daß im stationären Fall die Senkrechtstromdichte sogar

$$\vec{j}_\perp = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2} \quad (6.94)$$

vollständig durch den Druckgradienten bestimmt ist. Die Parallelkomponente ergibt sich dagegen aus (6.93) zu $E_{\parallel} = \eta_{\parallel} j_{\parallel}$ bzw.

$$\vec{j}_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel} \vec{b} = \sigma_{\parallel} (\vec{E} \cdot \vec{b}) \vec{b} \quad (6.95)$$

mit $\sigma_{\parallel} = 1/\eta_{\parallel}$. Damit ist der Vektor der Stromdichte vollständig bestimmt. Setzen wir nun die Gl. (6.94) in (6.93) ein und bilden das Kreuzprodukt mit \mathbf{B} , so erhalten wir folgende Beziehung für die Senkrechtgeschwindigkeit

$$\vec{u}_{\perp} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla p. \quad (6.96)$$

Für die Parallelkomponente der Strömungsgeschwindigkeit läßt sich keine einfache Gleichung angeben. Bei eindimensionalem Ausstömen des Plasmas in geraden Magnetfeldkonfigurationen sind die Beschleunigungs- und Druckkräfte in Gl. (6.90) wichtig. Sie führen mit der Kontinuitätsgleichung $\partial(\rho u_{\parallel})/\partial s = 0$ zur Gleichung

$$\rho u_{\parallel}^2 + p = \text{const.}, \quad (6.97)$$

die abgesehen von einem Faktor 1/2 im ersten Term mit der Bernoullischen Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten übereinstimmt. Ist das Magnetfeld jedoch stark gekrümmmt, wie beispielsweise in magnetischen Spiegeln, so werden auch die Viskositätskräfte wesentlich und man muß die Druckanisotropie berücksichtigen. In toroidalen Anordnungen ist dagegen meist die Parallelströmung vergleichsweise niedrig und die Trägheitskräfte vernachlässigbar. Hier aber ist die sich aus Gl. (6.96) ergebende Senkrechtgeschwindigkeit nicht divergenzfrei, so daß eine Parallelgeschwindigkeit erforderlich wird, um die Kontinuitätsgleichung (6.88) erfüllen zu können.

Zum Schluß geben wir noch die **Energiegleichung** an. Sie ergibt sich nach einer Reihe von algebraischen Umformungen aus der Addition der Gleichung (6.84) für Elektronen und Ionen:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{3}{2} \vec{u} \cdot \nabla p - \frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{u} - (\boldsymbol{\pi} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} - \nabla \cdot \vec{q} + \vec{j} \cdot \vec{E}' + L_{\text{Zusatz}}. \quad (6.98)$$

In diesem Fall ist der Gesamtwärmefluß durch

$$\vec{q} = \sum_a \vec{q}_a + \sum_a \left[\frac{5}{2} p_a + \frac{m_a n_a}{2} (\vec{u}_a - \vec{u})^2 \right] (\vec{u}_a - \vec{u}) \quad (6.99)$$

gegeben und $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ist wiederum das E-Feld im bewegten Bezugssystem. Der letzte Term in Gl. (6.98) ist damit die ohmsche Heizung. Falls zusätzliche Heizleistungen vorhanden sind, müssen diese der rechten Seite hinzugeführt werden (Term L_{Zusatz}).

Stationäres Gleichgewicht im Screw-pinch

In Annäherung an einen schlanken Torus betrachten wir den magnetischen Einschluß in einem unendlich langen Zylinder mit einem starken axialen Magnetfeld B_z . In Achsenrichtung wird ferner durch ein angelegtes E-Feld ein Strom getrieben (Abb. 6-3). Man nennt eine derartige zylindrische Anordnung, in der das Magnetfeld durch den vom axialen Strom hinzukommenden poloidalen Anteil verschraubt wird, einen *Screw-pinch*. Noch bekannter als der Screw-pinch sind die Theta- und Z-pinche. Beim *Theta-pinch* fließt im Gegensatz zum Screw-pinch ein starker Strom in poloidaler Richtung (Winkel θ), der eine schnelle Schrumpfung der Plasmasäule verursacht (daher der Name: to

pinch = kneifen, quetschen). Beim *Z-pinch* dagegen fließt der Strom wie im Falle des Screw-pinches in z-Richtung, doch ist das äußere Magnetfeld vergleichsweise schwach oder fehlt gänzlich.

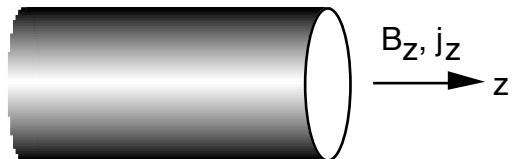


Abb. 6-3: Geometrie beim Screw-pinch. Nur das von außen angelegte B -Feld und die axiale Stromdichte sind symbolisiert.

Die maßgeblichen stationären Gleichungen im Einflüssigkeitsbild sind die Kraftbilanzgleichung (6.91) die aus Gl. (7.16) hervorgehende Radialgeschwindigkeit

$$u_r = -\frac{|E_z B_\theta|}{B^2} - \frac{\eta_\perp}{B^2} \frac{dp}{dr}. \quad (6.100)$$

Der erste Term ist der *klassische Pinch*, der durch das induzierte E_z -Feld hervorgerufen wird. Er ist immer nach innen gerichtet, da das Feld B_θ durch die Richtung von j_z und damit durch E_z festgelegt ist. Der zweite Term ist die *klassische Diffusion*, die vom Druckgradienten bestimmt wird. Man beachte, daß dieser Term proportional ist zu B^{-2} und damit mit zunehmender magnetischer Feldstärke rasch sehr klein wird. Außerdem ist er proportional zur Senkrechtresestivität, so daß man in diesem Zusammenhang vom *resistiven Transport* spricht.

Wir bemerken ferner, daß die Gleichung (6.100) bzw. (6.96) nur hinsichtlich des ExB-Terms mit den Ergebnissen des Einzelteilchenbildes übereinstimmt. Für den zweiten Transportterm, der hier vom Druckgradienten getrieben wird und proportional zur Resistivität ist, gibt es kein Pendant im Einzelteilchenbild. Umgekehrt gibt es im makroskopischen Bild grundsätzlich keinen zu ∇B proportionalen Term. Das deutet darauf hin, daß das Einzelteilchenbild, bei dem die Bewegung des Gyrozentrums im Mittelpunkt steht, i. a. nicht unmittelbar zu den richtigen Ergebnissen führt. Erst nach den richtigen Mittelungen, bei denen auch die sich aus der Ladungstrennung ergebenden E-Felder sowie die Inhomogenitäten der räumlichen Verteilungen der Teilchen und ihre Energien mitberücksichtigt werden, kann man das Einzelteilchenbild mit dem Flüssigkeitsbild in Übereinstimmung bringen. Die Flüssigkeitsgleichungen haben den großen Vorteil, daß diese komplizierten Mittelungen schon – aufgrund der Ableitung aus den kinetischen Gleichungen – in ihnen enthalten sind.

Für den gewöhnlichen Fall $dp/dr < 0$ und $E_z \cdot B_\theta > 0$ ergibt sich prinzipiell die Möglichkeit, eine stationäre DichteVerteilung ohne Teilchenquellen aufrecht zu erhalten. Die in Gl. (6.100) auftretenden Geschwindigkeiten sind jedoch wegen der hohen Leitfähigkeit bei Fusionsplasmen sehr klein (in der Größenordnung 1 cm/s), so daß das entsprechende *Diffusionsgleichgewicht* sich erst nach sehr langer Zeit (ca. 10 - 100 s) einstellen würde. In der Praxis beobachtet man einen weitaus höheren radialen Transport (den man deshalb *anomalous* nennt). Wir werden auf diese Phänomene im toroidalen Plasma später zurückkommen. Obwohl quantitativ überhöht, ist die obige Feststellung dennoch im Grundsatz richtig: diffusive Teilchen- und Temperaturgleichgewichte stellen sich auf langsamem Zeitskalen ein. Im Gegensatz dazu ist die Gleichgewichtsbedingung nach Gl. (6.91) von ganz anderer Natur, so daß Verletzungen der Kraftbilanz wegen der geringen Masse des Plasmas innerhalb von sehr kurzen Zeiten (typisch μ s) zum Verlust der Lagekontrolle und in der Folge zu Instabilitäten führen. Es ist daher oft sinnvoll, *quasistationäre Zustände* zu betrachten, bei denen die schnellen Prozesse im Gleichgewicht sind, während die langsamen Diffusionsprozesse hiervom noch weit entfernt sein können.

Aus didaktischen Gründen verfolgen wir das oben angesprochene Konzept des stationären Einschlusses noch etwas weiter. Haben wir am Plasmarand $r = a$ eine positive Radialgeschwindigkeit ($u_r(a) > 0$), so gehen ständig Teilchen verloren, und wir benötigen im Plasmabereich eine stationäre Teilchenquelle, um konstante DichteVerhältnisse aufrecht zu erhalten. Eine solche Teilchenquelle kann zum Beispiel neutrales Wasserstoffgas darstellen, das am äußeren Plasmarand dissoziiert wird.

Beim Dissoziationsprozeß der H_2 -Moleküle erhalten die entstehenden neutralen Atome eine relativ hohe Geschwindigkeit (Franck-Condon-Teilchen mit einer mittleren Energie von etwa 1,5 eV). Als neutrale Teilchen können diese auch quer zum Magnetfeld u.U. tief ins Plasma eindringen bevor sie ionisiert werden. Ist jedoch $u_r(a) < 0$, so ist die Stationarität gewöhnlich nicht auf diesem Wege zu erreichen, da es die erforderlichen Teilchensenken, die eine Rekombination im Plasma erfordern, bei Elektronentemperaturen oberhalb von einigen eV nicht mehr gibt. In diesem Falle würde die Dichte im Plasma ansteigen. Mit ansteigender Dichte erhöht sich aber auch der Druck und damit der Druckgradient, der den Teilchenausfluß erhöht. Das Plasma steuert somit automatisch einen Gleichgewichtszustand an, bei dem sich die nach innen treibende ExB -Drift mit der nach außen gerichteten Diffusion kompensiert. Wir sprechen hier von einer *Diffusion*, da sich wegen $dp/dr = k_B(T dn/dr + n dT/dr)$ der radiale Teilchenfluß als

$$\Gamma_r = n u_r = - \left(\frac{E_z B_\theta}{B^2} + \frac{\eta_\perp p}{B^2} \frac{d \ln T}{dr} \right) n - \left(\frac{\eta_\perp p}{B^2} \right) \frac{dn}{dr} \quad (6.101)$$

schreiben lässt. Hierin ist der erste Term ein *konvektiver Fluß*, da er proportional zur Dichte ist, während der zweite, wegen der Proportionalität zum Gradienten der Dichte, von diffusiver Art ist.

Die Forderung nach quellenfreier Stationarität lautet $\Gamma_r = 0$ über den gesamten Querschnitt. Das ist nach Gl. (6.100) gleichbedeutend mit

$$\frac{dp}{dr} = -E_z \frac{B_\theta(r)}{\eta_\perp(r)}. \quad (6.102)$$

Ein Vergleich mit der Kraftgleichung (6.91), die in Zylinderkoordinaten³⁷

$$\frac{dp}{dr} = j_\theta B_z - j_z B_\theta \quad (6.103)$$

lautet, zeigt uns, daß für den isotropen Fall mit $\eta_\perp = \eta_{||}$ wegen $j_z = E_z \sigma = E_z / \eta$, die beiden Gleichungen identisch werden, falls $j_\theta = 0$. In diesem Fall wird der Einschluß allein durch die vom Strom herbeigeführte Verdrehung des Magnetfelds (B_θ) bewerkstelligt. Das später zu definierende β_θ nimmt dann den Wert 1 an.

Für den anisotropen Fall $\eta_\perp = 2 \eta_{||}$ führt die Forderung $\Gamma_r = 0$ auf die Beziehung $j_\theta B_z = (1 - \eta_{||} \eta_\perp) j_z B_\theta = 1/2 j_z B_\theta$ und damit zu $dp/dr = -1/2 j_z B_\theta$. Das poloidale B-Feld können wir aus dem Ampereschen Gesetz 6.1) unter Verwendung des Stokes'schen Satzes berechnen

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_z(r)}{r}; \quad (6.104)$$

mit dem Gesamtstrom in z-Richtung

$$I_z(r) = 2\pi \int_0^r j_z(r') r' dr'. \quad (6.105)$$

Damit haben wir eine Beziehung zwischen Druck- und Stromprofil

$$r^2 \frac{dp}{dr} = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{dI_z^2}{dr}. \quad (6.106)$$

³⁷ r, θ, z bilden ein Rechtssystem

Für ein parabolisches Druckprofil $p(r) = p_0 (1 - r^2/a^2)$ ergibt sich beispielsweise $I_z(r) = 2 \pi a (2p_0/\mu_0)^{1/2} r^2/a^2$, was auf eine konstante Stromdichte von $j_z = (8 p_0/\mu_0)^{1/2}/a$ hinausläuft.

Diamagnetische Ströme

Im Kapitel 6.3.3 haben wir die Beziehung

$$\vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \quad (6.107)$$

für die Stromdichte senkrecht zum Magnetfeld abgeleitet. Es stellt sich die Frage, wie dieser für das Gleichgewicht erforderliche poloidale Strom entsteht. Wie bereits erläutert, kann er nicht durch eine elektrische Spannung entlang des kleinen Umfangs induziert werden, denn unabhängig davon, daß es die hierfür erforderliche Flußänderung des axialen Magnetfeldes nicht gibt, würde ein solches elektrisches Feld wiederum nur zu einer radialen Drift führen. Die Auflösung dieses Paradoxons ergibt sich aus der Natur der diamagnetischen Ströme. Physikalisch einsichtig werden diese Ströme im Teilchenbild.

Betrachten wir dazu den in Abb. 6-4 dargestellten Fall gyrierender Teilchen im Magnetfeld. In negativer x-Richtung liege ein Dichtegradient vor, so daß sich links mehr Teilchen als rechts befinden. Der Einfachheit halber seien nur gleichartige Teilchen mit gleicher Senkrechtenergie und damit gleichen Gyroradien betrachtet. Die einen beliebigen Aufpunkt durchsetzenden Teilchen haben dann Gyrozentren, die auf einem Kreis mit dem Gyroradius ρ liegen (Abb. 6-4 Mitte). Aufgrund des Dichtegradienten befinden sich mehr Gyrozentren auf der linken Seite. Denken wir uns im Aufpunkt ein kleines Flächenelement ΔA , dessen Normale in y-Richtung zeigt, so ergibt sich eine Nettoteilchenflußdichte $\langle n v_y \rangle$ durch diese Fläche. Sei α der Winkel, den der Radiusvektor des Gyrozentrums mit der x-Achse bildet, so hat man mit $n \approx n_0 + (dn/dx) x = n_0 + (dn/dx) \rho \cos \alpha$ für den Mittelwert $\langle n v_y \rangle = \langle n v_\perp \cos \alpha \rangle = - v_\perp (dn/dx) \rho \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2 v_\perp (dn/dx) \rho$. Beziehen wir uns auf Teilchen vom Typ a mit $\rho_a = v_{\perp a}/\omega_a = m_a v_{\perp a}/(e_a B)$, so erzeugen diese eine Stromdichte gemäß $j_{\perp a} = \langle e_a n_a v_{ya} \rangle = - m_a v_{\perp a}^2/2 (dn_a/dx) / B$. Wiederholt man die Rechnung unter Berücksichtigung einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung mit ortsabhängiger Temperatur $T_a(x)$, so erhält man einen zusätzlichen Term der Art $(dT_a/dx) \rho_a$.

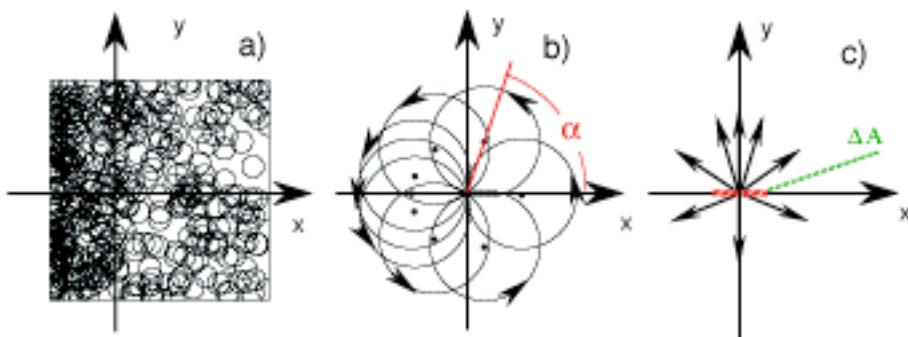


Abb. 6-4: Veranschaulichung des diamagnetischen Stroms.

- a) Geladene Teilchen gyrieren in einem B_z -Feld. Die Teilchen sind stochastisch verteilt, unterliegen aber einem Dichtegradienten in negativer x-Richtung.
- b) Die den Koordinatenursprung durchsetzenden Teilchen häufen sich auf der linken Seite an.
- c) Durch ein kleines Flächenelement ΔA gibt es einen Nettofluß in y-Richtung.

Insgesamt ergibt sich für diese *diamagnetische Stromdichte* der vom Druckgradienten abhängige Ausdruck $j_{\perp a} = - (dp_a/dx)/B$. In verallgemeinerter vektorieller Schreibweise lautet dieses Ergebnis

$$\vec{j}_{a,dia} = \frac{\vec{B} \times \nabla p_a}{B^2} \quad (6.108)$$

Addieren wir die diamagnetischen Ströme der Elektronen und Ionen, so ist die Gesamtstromdichte proportional zum Gradienten des Gesamtdrucks $j_{dia} = \mathbf{B} \times \nabla p / B^2$. Andererseits ist dies genau diejenige Stromdichte, die auch aus der Gleichgewichtsbeziehung Gl. (3.26) hervorgeht. Wir können diesen Sachverhalt wie folgt zusammenfassen: *Werden in einem magnetisierten Plasma Gradienten der Dichte und Temperatur einer Teilchensorte festgestellt, so sind hiermit automatisch solche diamagnetischen Stromdichten verbunden, wie sie zur Erfüllung des makroskopischen Kraftegleichgewichts erforderlich sind.*

Man beachte, daß diese Aussage für jede einzelne Teilchensorte gilt, so daß — im Gegensatz zu einer weitverbreiteten Auffassung — ein radiales elektrisches Feld für den Einschluß grundsätzlich nicht benötigt wird. Das Magnetfeld allein verhindert die senkrechte Bewegung des Plasmas, indem es jedes Teilchen auf eine Kreisbahn zwingt. Senkrechter Transport ergibt sich aus der Störung dieser Gyrationenbewegung. Störungen in diesem Sinne sind die Coulomb-Stöße der Teilchen. Sie bewirken insbesondere einen Impulsaustausch, d.h. Reibungskräfte (und damit eine Senkrechtresestivität), zwischen den verschiedenen Teilchenarten. Aber auch fluktuierte E-Felder (in Richtung E_θ) können nach Ausweis der Gleichung (6.96) zum senkrechten Teilchenfluß beitragen. In diesem Fall ist jedoch eine Phasenkopplung von schwankender Dichte und Geschwindigkeit erforderlich, da sonst der über die Oberfläche gemittelte Teilchenfluß $\langle \tilde{n} \tilde{u}_r \rangle$ verschwindet.

Schließlich können wir diesen diamagnetischen Strom auch noch auf eine andere Weise ableiten, die recht lehrreich ist. Hierbei erinnern wir uns daran, daß die im Plasma gyrierenden Teilchen entsprechend Gl. (5.39) ein magnetisches Moment μ besitzen. Das Plasma hat damit die *Magnetisierungsdichte*

$$\vec{M} = n \vec{\mu} = -n \frac{\frac{m}{2} \mathbf{v}_\perp^2}{B} \vec{b} = -\frac{p_\perp}{B^2} \vec{B}. \quad (6.109)$$

Hier wird sichtbar, was wir im Zusammenhang mit der Gleichung (7.27) schon früher angemerkt haben: Die Magnetisierung eines Plasmas ist nicht wie bei einem linearen Medium proportional zur Feldstärke, sondern proportional zu $1/B$.

Aus der Rotation der Magnetisierung erhalten wir nach Gl. (6.3) unter Annahme $\mathbf{B} = \text{const.}$ sofort die Stromdichte. Es ergibt sich wieder die diamagnetische Stromdichte³⁸.

$$\vec{j}_{dia} = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times \left(-\frac{p_\perp}{B^2} \vec{B} \right) = -\frac{\nabla p_\perp \times \vec{B}}{B^2}. \quad (6.110)$$

Man beachte die Effektivität dieses Verfahrens im Vergleich zu der komplizierten Ableitung über die Teilchenmittelung.

Dia- und paramagnetische Ströme im Screw-pinch : Messung des Plasmadrucks

Aus der Kraftgleichung (6.91) und der Maxwellgleichung

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (6.111)$$

ergibt sich nach Einsetzen und Umformen mit Hilfe der Identität (5.12)

³⁸ Falls \mathbf{B} nicht homogen ist, liefert $\nabla \times \vec{M}$ auch Terme, die von der Krümmung und dem Gradienten von $|\mathbf{B}|$ abhängen. In diesem Fall ist aber auch der Drucktensor wesentlich und ∇p durch $\nabla \cdot \mathbf{P}$ zu ersetzen.

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]. \quad (6.112)$$

Die hier rechts auftretende Größe $W_{\text{mag}} = B^2/2\mu_0$ ist die magnetische Energiedichte, die wir auch als *magnetischen Druck* bezeichnen können. Wir können diesen Term auf die linke Seite bringen und mit dem *Plasmadruck* zusammenfassen

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}. \quad (6.113)$$

Rechts steht nun die sogenannte *magnetische Spannung*, die nach Gl. (5.13) mit der Krümmung des Magnetfelds verbunden ist. Wir können also diese Gleichung so verstehen, daß die nach außen weisenden kinetischen und magnetischen Druckkräfte durch die magnetische Spannung kompensiert werden. An dieser Stelle zeigt sich auch, daß die Volumenkraft $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ nicht immer den Gradienten eines Skalars darstellt, sondern gewöhnlich die Divergenz eines Tensors (Maxwellscher Spannungstensor) repräsentiert. Es muß deshalb im allgemeinen für die Flächen $p = \text{const.}$ eine Geometrie gefunden werden, so daß die Gleichung wieder erfüllbar ist. Im hier betrachteten geraden Zylinder ist diese Bedingung aber schon von alleine erfüllt, und die obige Kraftgleichung lautet

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{r\mu_0}. \quad (6.114)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $2\mu_0 r^2$ und ordnen um

$$r^2 \frac{d}{dr} (2\mu_0 p + B_z^2) = -\frac{d}{dr} (r^2 B_\theta^2). \quad (6.115)$$

Diesen Ausdruck integrieren wir über den Plasmaquerschnitt von $r = 0$ bis zum Rand $r = a$, wo der Druck verschwindet. Dabei führen wir auf der linken Seite eine partielle Integration durch, die für eine Größe F wie folgt aussieht

$$\int_0^a r^2 \frac{dF}{dr} dr = (r^2 F)_0^a - \int_0^a F 2r dr = a^2 F(a) - a^2 \langle F \rangle, \quad (6.116)$$

wobei $\langle F \rangle$ das Flächenmittel ist. Mit dieser Relation erhalten wir

$$B_z^2(a) - \langle 2\mu_0 p + B_z^2 \rangle = -B_\theta^2(a), \quad (6.117)$$

die wir umformen zu

$$\langle B_z^2(a) - B_z^2 \rangle = -B_\theta^2(a) + 2\mu_0 \langle p \rangle. \quad (6.118)$$

Die Größen in der linken Klammer unterscheiden sich nur wenig; wir dürfen daher mit der Abkürzung $B_z(a) = B_0$ schreiben $\langle B_0^2 - B_z^2 \rangle \approx 2 B_0 \langle B_0 - B_z \rangle$ und erhalten

$$\frac{2B_0}{B_\theta^2(a)} \langle B_z - B_0 \rangle = 1 - \frac{\langle p \rangle}{B_\theta^2(a) / 2\mu_0}. \quad (6.119)$$

Der Term $\langle B_z - B_0 \rangle \pi a^2$ ist aber gerade die magnetische Flußänderung $\Delta\Phi_{\text{mag}}$ über den Plasmaquerschnitt. Auf der rechten Seite steht das Verhältnis von mittlerem kinetischen Druck und poloidaler magnetischer Feldenergie. Man bezeichnet dieses Verhältnis als das "poloidale Beta"

$$\beta_\theta := \frac{\langle p \rangle}{B_\theta^2(a) / (2\mu_0)}. \quad (6.120)$$

Wir erhalten also schließlich die wichtige Beziehung

$$\frac{2B_0}{\pi a^2 B_\theta^2(a)} \Delta\Phi_{mag} = 1 - \beta_\theta. \quad (6.121)$$

Diese Gleichung ermöglicht es, den mittleren Plasmadruck (und damit die Energiedichte) mit einer sogenannten *diamagnetischen Spule* zu messen, wie sie in der Abb. 6-5 dargestellt ist. Letztere mißt die mit der Plasmaerzeugung einhergehende Änderung des magnetischen Flusses in z-Richtung über die hiermit verbundene induzierte poloidale Umfangsspannung³⁹. Die in der Gleichung auftauchende poloidale magnetische Feldstärke $B_\theta(a)$ ist mit dem gesamten Plasmastrom I_{Plasma} gemäß Gl. (3.3) verbunden. Dieser wiederum kann mit der in Abb. 6-5 abgebildeten *Rogowski-Spule* gemessen werden.

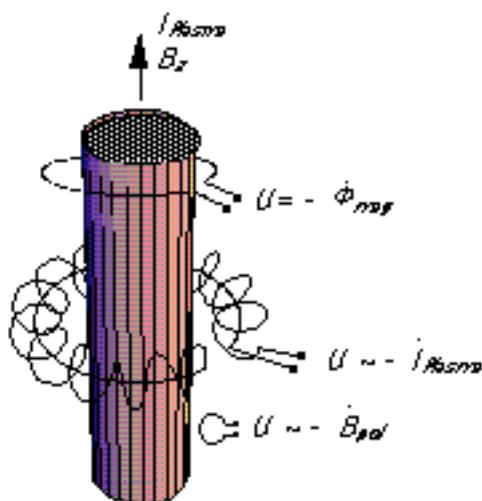


Abb. 6-5: Diamagnetische Schleife (oben), Rogowskispule (Mitte) und magnetische Schleife (unten). Mit ihrer Hilfe können der magnetische Fluß, der Plasmastrom und das lokale poloidale Magnetfeld gemessen werden. Die an den Enden auftretenden Spannungen sind jeweils proportional zur zeitlichen Ableitung der Größen (Integration mit RC-Glied, Integrationsverstärker oder mit soft-ware). Bei der Rogowskispule wird durch den inneren Rückleiter der Beitrag der magnetischen Flußänderung unterdrückt, so daß nur die vom Plasmastrom erzeugte poloidale Magnetfeldänderung gemessen wird. Das Meßsignal ist unabhängig von der genauen Lage der Spule, da im Außenbereich wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = 0$ das Magnetfeld als Gradient eines skalaren (aber mehrdeutigen) Potentials geschrieben werden kann.

Gradient eines skalaren (aber mehrdeutigen) Potentials geschrieben werden kann.

Die soeben beschriebene magnetische Flußänderung ist eine Konsequenz des Kraftgleichgewichts des Plasmas. Das von außen angelegte Feld $B_z = B_0$ (erzeugt durch Poloidalströme $I_\theta > 0$ in entsprechenden Spulen) wird verändert durch poloidale Ströme im Plasma, die fließen müssen, damit entsprechend

$$(\vec{j} \times \vec{B})_r = j_\theta B_z - j_z B_\theta = \frac{dp}{dr} \quad (6.122)$$

die Druckkräfte bilanziert werden. Allerdings hat man bei großen Plasmastromen und kleinen (negativen) Druckgradienten noch keinen diamagnetischen Effekt, der sich ja in einer Verringerung des von außen angelegten Magnetfelds B_0 (d.h. $j_\theta < 0$) bemerkbar machen müßte. Der Grund liegt in der bereits vom Plasmastrom hervorgerufenen Kraft $j_z B_\theta$, die unter schlechten Energieeinschlußbedingungen, d.h. kleinem Plasmadruck, bereits zu groß sein kann. Im Plasma muß unter solchen Bedingungen ein Poloidalstrom fließen, der das äußere Magnetfeld verstärkt (d.h. $j_\omega > 0$); wir haben es also mit einem paramagnetischen Verhalten zu tun. Erst bei hinreichend großem negativem Druckgradienten wird auch ein negativer Poloidalstrom im Plasma benötigt und das Plasma wird diamagnetsich. Der Gl. (6.121) entnehmen wir, daß der Übergang vom paramagnetischen zum diamagnetischen Fall bei $\beta_\theta = 1$

³⁹ Wir verwenden hier die Bezeichnungen poloidal und azimutal als äquivalent. Streng genommen kann man von einer poloidalen Richtung nur im Torus sprechen (kleiner Umfang), während azimutal die Winkelrichtung in Zylindergeometrie angibt.

liegt. Man beachte, daß wir bei der Ableitung dieser Gleichung keinen Gebrauch vom Ohmschen Gesetz gemacht haben. Entsprechend ist der resistive Transport, d.h. die Güte des magnetischen Einschlusses, jetzt nicht von vornherein festgelegt, so daß sich beliebige Werte von β_θ einstellen können.

Wir können unsere Betrachtungen auch auf den Fall $j_z = 0$ ausdehnen, wie dies z.B. in magnetischen Flaschen und anderen Experimenten die Regel ist. Unter diesen Umständen verhält sich das Plasma immer rein diamagnetisch, und wir können die Flußänderung auch sofort aus der Änderung der Magnetisierungsdichte M ableiten. Für das Magnetfeld ergibt sich mit Gl. (7.7)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \left(1 - \mu_0 \frac{p_\perp}{B_0^2}\right) \vec{B}_0. \quad (6.123)$$

Daraus erhalten wir die Beziehung für die magnetische Flußänderung in Richtung des äußeren Feldes

$$\Delta\Phi_{mag} = -\frac{\mu_0}{B_0} \int p_\perp dA \quad (6.124)$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch aus Gl. (1.4) nach Bildung des Grenzübergangs $B_\theta(a) \rightarrow 0$. Wir betrachten hierzu noch ein *Beispiel*:

Durch Hochfrequenz oder Mikrowellen werde in einer langen Quarzröhre innerhalb von $\Delta t = 1$ ms ein Plasma mit den Parametern $n_e = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $T_e = 1 \text{ eV}$, $T_i \approx 0$ aufgebaut. Das axiale Magnetfeld B beträgt 1 T, und der Querschnitt A sei $0,01 \text{ m}^2$. Welche Spannung wird in einer einspuligen diamagnetischen Schleife induziert?

Rechnung: $\Delta M = p/B = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ AVs} \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3} / (1 \text{ Vs m}^{-2}) = 0,16 \text{ A/m}$. Flußänderung $\Delta\phi_{mag} = \mu_0 A \Delta M = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 0,01 \text{ m}^2 \cdot 0,16 \text{ A/m} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Vs}$. Der Spannungspuls hat eine Höhe von $U = -d\phi_{mag}/dt \approx -\Delta\phi_{mag}/\Delta t = -2 \mu\text{V}$ (sehr klein!).

6.3.4. DIE IDEALEN MHD-GLEICHUNGEN

Diese gehen aus den Einflüssigkeitsgleichungen unter der Annahme einer unendlich guten elektrischen Leitfähigkeit ($\eta = 0$) hervor. Das Ohmsche Gesetz lautet dann einfach

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0 \quad (6.125)$$

und besagt, daß im mitbewegten System das E-Feld verschwinden muß. Als eine wichtige Konsequenz hieraus ergibt sich die *Einfrierung des magnetischen Fluxes* (im englischen auch als *line tying* bezeichnet) im mitbewegten System. Wir beweisen diesen Satz von der Erhaltung des Fluxes unter Bezugnahme auf die Abb. 6-6 wie folgt:

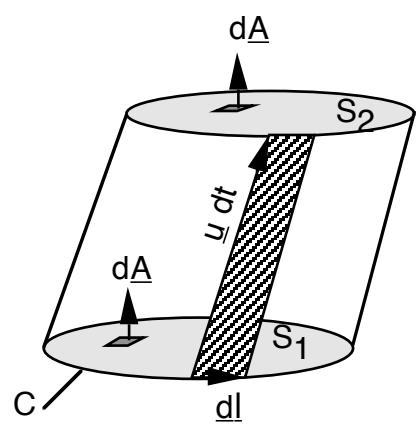


Abb. 6-6: Zur Ableitung der magnetischen Flußerhaltung.

Man beachte, daß bei Anwendung des Gaußschen Satzes positive Flächenvektoren nach außen zeigen. Beim Stokes'schen Satz ist die Kontur so zu umlaufen, daß dem Umlauf ein positiver Flächenvektor im Sinne einer Rechts-schraube zugeordnet ist.

Eine elastische, geschlossene Schleife mit der Kontur C bewege sich mit dem Plasma mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} . Wir berechnen die Änderung des magnetischen Fluxes $d\phi_{mag}/dt$ durch die

umschlossene Fläche S. Zunächst schreiben wir formal

$$\frac{d\phi_{mag}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.126)$$

und besinnen uns auf die Definition des Differentialquotienten

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_S (\vec{B}_{t+\Delta t} \cdot d\vec{A} - \vec{B}_t \cdot d\vec{A}). \quad (6.127)$$

Entwickeln wir hierin \mathbf{B} nach Taylor $\mathbf{B}_{t+\Delta t} = \mathbf{B}_t + \partial \mathbf{B} / \partial t \Delta t + \dots$, so ergibt sich zunächst

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{A} - \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right\}, \quad (6.128)$$

wobei wir den Zeitindex t wieder weggelassen haben. Der Gaußsche Satz, angewandt auf ein Volumen, das sich durch die Endflächen $S_1 = S(t)$ und $S_2 = S(t + \Delta t)$ und der sich infolge der Bewegung ergebenden Mantelfläche ergibt, lautet

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = - \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{A} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{A} + \oint \vec{B} \cdot (\vec{u} dt \times d\vec{l}). \quad (6.129)$$

Damit erhalten wir ganz allgemein die Relation

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \oint (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} + \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV / dt, \quad (6.130)$$

welche sich wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ vereinfacht zu

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \oint (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} \quad (6.131)$$

Hierin formen wir den ersten Term um unter Verwendung der Maxwellgleichung $\partial \mathbf{B} / \partial t = - \operatorname{rot} \mathbf{E}$. Den zweiten Term verwandeln wir mit Hilfe des Stokes'schen Satzes in ein Oberflächenintegral und erhalten so den behaupteten Sachverhalt

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \int_S \operatorname{rot} (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6.132)$$

Das Ergebnis können wir wie folgt zusammenfassen: Unter ideal leitfähigen Bedingungen kann bei festgehaltenem Magnetfeld das Plasma überall nur parallel zum Magnetfeld strömen. Wird andererseits eine Plasmastromung aufgeprägt, so wird das Magnetfeld in gleicher Weise wie das Plasma verformt.

Dieser Flußerhaltungssatz erklärt uns beispielsweise das Auftreten der riesigen Magnetfelder in den Pulsaren. Bei diesen Sternen ist eine rasche Schrumpfung von Radien im Bereich des Sonnenradius ($R_1 = 7 \cdot 10^5$ km) auf solche der Neutronensterne von nur noch $R_2 = 10$ km erfolgt. Das Magnetfeld wird dann derat komprimiert, daß der Fluß durch die verkleinerte Oberfläche der gleiche bleibt. B wird also im Verhältnis $(R_1/R_2)^2 = (7 \cdot 10^4)^2 = 5 \cdot 10^9$ zunehmen. Selbst bei bescheidenen Ausgangsfeldern von 10^{-3} T ergeben sich damit riesige Magnetfelder in der Größenordnung von 10^6 -

10^7 T .

Für den Fall endlicher Leitfähigkeit kann man durch Modifizierung der Formel (6.132) leicht die charakteristische Zeit für die Änderung des Magnetfelds im Plasmavolumen abschätzen. Unter der Annahme homogener Leitfähigkeit ergibt sich mit $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$ und $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{\eta}{\mu_0} \int_S (\text{rot } \text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{A} = -\frac{\eta}{\mu_0} \int_S \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.133)$$

Man hat näherungsweise $\nabla^2 \mathbf{B} \approx \partial^2 B_z / \partial z^2 \mathbf{e}_z \approx \mathbf{B} / L^2$, wobei L eine charakteristische Länge (Ausdehnung des Objekts in Richtung von \mathbf{B}) ist. Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx -\frac{\eta}{\mu_0 L^2} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.134)$$

woraus man sofort die *charakteristische Diffusionszeit* für das Magnetfeld

$$\tau_{\text{diff}} \approx \mu_0 \sigma L^2 \quad (6.135)$$

entnehmen kann.

Angewandt auf die Sonne, ergeben sich Zeiten von $\tau_{\text{diff}} \approx 2 \cdot 10^{10}$ Jahre, was etwa das Vierfache ihres Alters ist. Für Fusionsplasmen sind die entsprechenden Zeiten in der Größenordnung von 1 ms bis zu etwa 1000 s.

6.4. Innere Kräfte im Plasma

In diesem Kapitel sollen einige zusätzliche Informationen zu den im Plasma vorkommenden Kräften gegeben werden, die sich aufgrund der Wechselwirkung der Teilchen ergeben. Wenn wir die Verteilungsfunktion der Teilchen kennen würden, könnten wir diese Kräfte anhand der im Abschnitt 6.3.1 gegebenen Definitionen berechnen. Diese weitgehende Information ist aber in den seltesten Fällen gegeben. Statt dessen weiß man häufig mehr über die räumlichen Verteilungen der Dichten, der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit. Insbesondere die Gradienten dieser Größen sind unweigerlich mit Abweichungen von der Maxwellverteilung (f_0) verbunden. Machen wir den Ansatz $f = f_0 + f_1$, so ist der Störanteil f_1 in erster Näherung eine lineare Funktion der Größen ∇n , ∇T , $\nabla \phi$ und $\nabla \mathbf{u}$, die sich häufig durch einfache Ableitungen finden lässt, sonst aber über die Fokker-Planck Gleichung berechnet werden kann. Mit Hilfe des Störanteils f_1 lassen sich sodann die gewünschten Größen Reibung (R), Drucktensor (π), Wärmefluß (q) und andere berechnen. Sie werden somit selbst lineare Funktionen der Gradienten, die man deshalb auch als verallgemeinerte thermodynamische Kräfte bezeichnet.

Ist ein Magnetfeld im Spiel, muß man grundsätzlich zwischen den parallelen und senkrechten Komponenten unterscheiden. Senkrecht zu \mathbf{B} gibt es aber zwei Richtungen: eine liegt in Richtung von $\nabla \chi \times \mathbf{B}$ (mit $\chi = p, n, T \dots$), die zweite wiederum senkrecht zu dieser und \mathbf{B} . Bei Zylindersymmetrie zeigt die erste in azimutaler, die zweite in radialer Richtung. Allgemein entspricht der radialen Komponente die Richtung senkrecht zur magnetischen Fläche (also $\nabla \psi$) und die azimutale Komponente liegt in der magnetischen Fläche ($\mathbf{B} \times \nabla \psi$). Wir haben es also letztlich doch mit drei Richtungen zu tun.

Bei den Kräften unterscheiden wir grundsätzlich zwischen Reibungskräften und Viskositätskräften⁴⁰. Die Reibungskräfte entstehen durch Impuls austausch zwischen den unterschiedlichen Teilchenarten in einem Plasma. Sie können damit auch bei homogener oder sogar verschwindender Strömungsgeschwindigkeit auftreten. Im Gegensatz dazu ergeben sich die Viskositätskräfte als Folge einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit und treten daher als Kräfte innerhalb einer

⁴⁰ Alle derartigen Kräfte sind wie die Gradientenkräfte und alle übrigen stets als Kräfte pro Volumeneinheit zu verstehen.

Teilchensorte auf. Genauer betrachtet sind die Viskositätskräfte ein Folge der gestörten Kugelsymmetrie der Verteilungsfunktion. Diese kann aber auch durch Stöße zwischen Teilchen der gleichen Art wieder hergestellt werden. Die Reibungskräfte dagegen basieren auf einer Verlagerung des Schwerpunktes der Verteilungsfunktion, die nur durch Stöße mit einer anderen Teilchenart beseitigt werden kann.

Im allgemeinen sind die Reibungskräfte die wichtigeren, da sie unmittelbar zu Teilchentransporterscheinungen Anlaß geben, während die Viskositätskräfte in erster Linie das Strömungsverhalten des Plasmas beeinflussen. Analog zu der hier zunächst angesprochenen gewöhnlichen Reibung, bedingt die später zu besprechende Wärmereibung einen Energietransport. Auf das entsprechende Pendant bei der Viskosität, die sogenannte Wärmeviskosität, soll jedoch nicht eingegangen werden. Die im folgenden abgeleiteten bzw. angegebenen Beziehungen ergänzen insbesondere die in den Kapiteln 6.3.2 und 6.3.3 aufgeführten Impuls- und Energiegleichungen.

6.4.1. REIBUNGSKRÄFTE

Schlupfkräfte und Thermokräfte

Wie der Gl. (6.68) zu entnehmen ist, sind die Reibungskräfte Ausdruck des Impulsaustausches zwischen den verschiedenen Teilchensorten. Man unterscheidet zwei Arten von Reibungskräften. Die erste Art, die wir bereits im Kapitel 4.3 abgeleitet und in Kap. 6.3.2 angeführt haben, ergibt sich aufgrund von unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten. Man bezeichnet derartige Kräfte daher als *Schlupfkräfte (slipping forces)*. In unserer jetzigen Notation lauten diese

$$\vec{R}_a^S = \sum_b -m_a n_a v_{ab} (\vec{u}_a - \vec{u}_b) \quad (6.136)$$

mit der Stoßfrequenz Δ_{ab} für Impulsaustausch nach Gl. (4.58). Neben diesen Schlupfkräften treten zusätzlich die Thermokräfte R_a^T in Erscheinung, so daß die gesamten Reibungskräfte die Summe aus Thermo- und Schlupfkräften sind

$$\vec{R}_a = \vec{R}_a^S + \vec{R}_a^T \quad (6.137)$$

Ursache für diese Kräfte ist die Temperaturabhängigkeit der Stoßfrequenz. Die Thermokräfte lassen sich mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung berechnen, doch soll uns hier eine vereinfachte physikalische Betrachtung genügen.

Bei Anwesenheit von Magnetfeldern ist fernerhin zwischen der parallelen und senkrechten Komponente der Reibungskräfte zu unterscheiden. Gewöhnlich sind die Parallelkomponenten schwieriger zu behandeln, da in diesem Fall größere Abweichungen von der Maxwell-Verteilung auftreten können. Dies ist insbesondere bei den leichten Elektronen der Fall, die Runaway-tendenzen zeigen können (s. Kap. 4.2), so daß man für korrekte Ergebnisse auf numerische Rechnungen angewiesen ist.

Parallele Thermokräfte

In der Abb. 6-7 haben wir die Verhältnisse skizziert, wie sie bei Vorliegen eines Temperaturgradienten in Richtung des Magnetfelds (z-Richtung) oder bei $B = 0$ vorliegen. a-Teilchen von links und rechts im Abstand einer freien Weglänge λ treten in das kleine Stoßvolumen ein und übertragen Impulse mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die b-Teilchen, welche wir uns der Einfachheit halber in Ruhe vorstellen. Die a - Teilchen sind somit die leichten der beiden Teilchensorten.

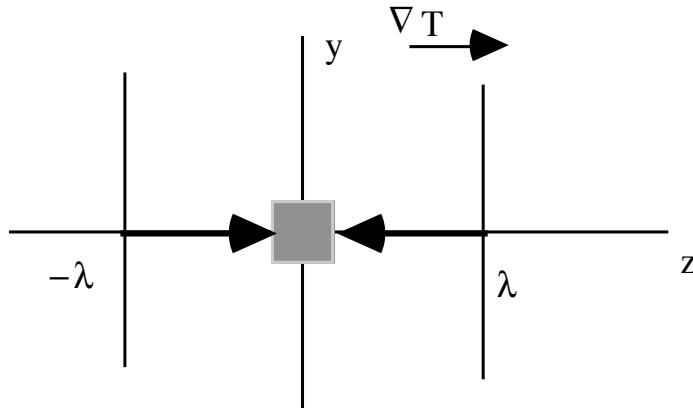


Abb. 6-7: Zur Ableitung der Thermokraft: Teilchen im Abstand der freien Weglänge λ treten von links und rechts in das Volumen-element ein. Aufgrund des Temperatur-gradienten in z -Richtung sind die von rechts kommenden Teilchen "stoßfreier". Es kommt so auch bei verschwindendem Nettofluß der Teilchen zu einem Impulsübertrag in $-z$ -Richtung

Nettoimpulsübertrag

pro Zeiteinheit

auf die b -Teilchen:

$R_a = (m_a n_a v_a v_{ab})_{-\lambda} - (m_a n_a v_a v_{ab})_{+\lambda} \approx \lambda d(m_a n_a v_a v_{ab})/dz$, wobei hier $v_a^2 = \langle v^2 \rangle = k_B T_a / m_a$ die Schallgeschwindigkeit ist. Die Verhältnisse seien nun so, daß bei $z = 0$ kein Nettofluß vorliege, so daß $\Gamma_a = n_a u_a = (n_a v_a)_{-\lambda} - (n_a v_a)_{+\lambda} \approx \lambda d(n_a v_a)/dz = 0$. Unter dieser Voraussetzung entfallen die Schlupfkräfte und wir erhalten

$$R_a^T = m_a n_a v_a \lambda \frac{dv_{ab}}{dz} \quad (6.138)$$

und mit $\lambda = v_a/v_{ab}$ wird hieraus $R_a^T = m_a n_a v_a^2 v_{ab}^{-1} dv_{ab}/dz = n_a k_B T_a v_{ab}^{-1} dv_{ab}/dz$. Die Stoßfrequenz ist nach Gl. (4.57-58) proportional zu $T_a^{-3/2}$. Das führt auf $R_a^T = -3/2 n_a k_B dT_a/dz$. Allgemein haben wir also parallel zu B

$$\vec{R}_{\parallel a}^T = -\frac{3}{2} n_a k_B \nabla_{\parallel a} T_a \quad (6.139)$$

Eine numerische Auswertung der Fokker-Planck-Gleichung ergibt für die Elektronen

$$\vec{R}_{\parallel e}^T = -0,71 n_e k_B \nabla_{\parallel e} T_e \quad (6.140)$$

Wegen $Aktio = Reaktio$, also $m_e n_e R_e + m_i n_i R_i = 0$, ist die entsprechende Thermokraft für die Protonen um das Massenverhältnis kleiner $R_i = -m_e/m_i R_e$. Wichtig sind die parallelen Thermokräfte im Zusammenhang mit den Verunreinigungen in den Plasmarandzonen (scrape-off layer). Während die Protonen nach Gl. (2.5) in die kühleren Gebiete getrieben werden, erfahren die schwereren Ionen eine entgegengesetzte Kraft in Richtung des Temperaturgradienten, d.h. in Richtung des heißen Plasmas.

Senkrechte Thermokräfte

Hier betrachten wir einen Temperaturgradienten senkrecht zum magnetischen Feld. Die Situation ist ähnlich wie im vorherigen Fall, indem wiederum Teilchen mit unterschiedlicher Stoßfrequenz von links und rechts ins betrachtete Volumenelement eindringen. Der Abstand ist nun allerdings nicht mehr die freie Weglänge, sondern der Gyroradius. Ersetzen wir λ durch ρ_a in Gleichung (6.138), so ergibt sich

$$\begin{aligned} R_a^T &= m_a n_a v_{a\perp} \rho_a \frac{dv_{ab}}{dz} = m_a n_a v_{a\perp} \rho_a v_{ab} \frac{d \ln v_{ab}}{dz} \\ &= -\frac{3}{2} m_a n_a v_{a\perp}^2 \frac{v_{ab}}{\omega_{ca} T_a} \frac{dT_a}{dz} = -\frac{3}{2} k_B n_a \frac{v_{ab}}{\omega_{ca}} \frac{dT_a}{dz}, \end{aligned} \quad (6.141)$$

wobei wir diesmal entsprechend den zwei Freiheitsgraden $m_a v_{a\perp}^2 = k_B T_a$ gesetzt und die Zyklotronfrequenz $\omega_{ca} = e_a B / m_a$ eingeführt haben. Die Reibungskraft in Gl. (6.141) ist sowohl senkrecht zu B als auch zum Temperaturgradienten. Wir schreiben daher zunächst

$$\vec{R}_{\perp a}^T = -\frac{3}{2} k_B n_a \frac{v_{ab}}{\omega_{ca}} \frac{\nabla T_a \times \vec{B}}{B}. \quad (6.142)$$

Der aus einer exakten Analyse der Fokker-Planckgleichung hervorgehende Ausdruck für die Senkrechtreibung bei gleicher Temperatur der Teilchen lautet

$$\vec{R}_{\perp a}^T = -\frac{3}{2} k_B n_a m_a v_{ab} \left(\frac{m_{ab}}{e_a m_a} - \frac{m_{ab}}{e_b m_b} \right) \frac{\nabla T \times \vec{B}}{B}. \quad (6.143)$$

mit $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$. Falls $m_a \ll m_b$ geht dies in die Gl. (1.2) über, so daß diese insbesondere für die Elektronen gültig ist. Für etwa gleich schwere Teilchen ergibt sich jedoch eine Massenabhängigkeit in der Senkrechtreibung, die insbesondere bei vielen Teilchensorten (Verunreinigungen) den senkrechten Transport der Teilchen sehr kompliziert gestalten kann.

6.4.2. VISKOSITÄTSKRÄFTE

Strömt ein gewöhnliches Gas mit einer räumlich veränderlichen Strömungsgeschwindigkeit, so können durch Stöße Kräfte zwischen benachbarten Volumina ausgetauscht werden. Betrachten wir beispielsweise den in der Abb. 6-8 dargestellten Fall einer Strömung in z -Richtung, wobei die Strömungsgeschwindigkeit u_z in x -Richtung variiert. Die in x -Richtung diffundierenden Teilchen transportieren dann ständig Impuls in z -Richtung durch die z - y -Ebene (die einen Normalenvektor in x -Richtung hat). Wir wollen nun das entsprechende Element des Drucktensors $p_{zx} = m n \langle v_y v_x \rangle$ berechnen. Ist λ die freie Weglänge und τ die Stoßzeit, so hat man zunächst $v_x = \lambda / \tau$. Den Mittelwert erhalten wir nun aus $p_{zx} = m n \lambda / \tau (u_z|_{-\lambda} - u_z|_{+\lambda}) \approx -m n \lambda / \tau \partial u_z / \partial x \lambda$, also schließlich zu

$$p_{zx} = -\frac{\lambda^2}{\tau} m n \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\eta \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (6.144)$$

Für den so erhaltenen Viskositätskoeffizienten η ergibt sich noch durch Vergleich der einfache Zusammenhang

$$\eta = m n \frac{\lambda^2}{\tau} = m n D \quad (6.145)$$

mit dem später zu besprechenden Diffusionskoeffizienten.

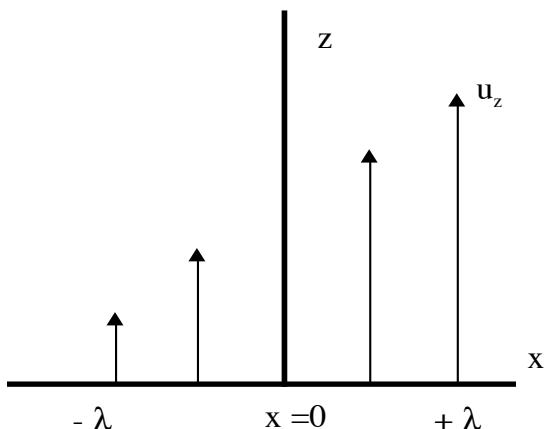


Abb. 6-8: Inhomogenes Strömungsfeld

Damit haben wir für einen einfachen Fall den Zusammenhang zwischen der Ableitung der Strömungsgeschwindigkeit und dem Drucktensor gefunden. Allgemein wird man nun eine lineare Beziehung zwischen dem Geschwindigkeitsgradienten ∇u und dem Drucktensor \mathbf{p} bzw. seinem spurlosen Anteil, dem Viskositätstensor $\boldsymbol{\pi}$, vermuten. Dieser Zusammenhang existiert auch, doch ist er komplizierter als man zunächst vermuten würde. Zur Veranschaulichung betrachten wir in der Flüssigkeit (bzw. Gas oder Plasma) ein kleines kugelförmiges Volumenelement, das eine ideal

elastische Oberfläche besitzen möge. Ist die Strömungsgeschwindigkeit überall gleich, so bewegt sich die Kugel mit der Strömung, ohne eine Verformung zu erfahren. Was passiert aber, wenn die Strömungsgeschwindigkeit einen Gradienten besitzt? Betrachten wir zunächst den Tensor

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (6.146)$$

Er ist im allgemeinen weder symmetrisch noch antisymmetrisch. Wir können ihn aber - wie jede Matrix - durch eine identische Umformung so zerlegen

$$\nabla \vec{u} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}^T) \quad (6.147)$$

wobei $\nabla \vec{u}^T$ die transponierte Matrix ist. Hierin ist nun die erste Summenmatrix symmetrisch, die zweite Differenzmatrix dagegen rein schiefsymmetrisch. Jede schiefsymmetrische Matrix stellt aber eine Rotation dar (inifitesimale Drehungen können auch durch ein Kreuzprodukt beschrieben werden). Natürlich sind mit einer starren Drehung keine Verscherungen verbunden und damit auch keine Viskositätskräfte. Schließlich müssen wir noch beachten, daß die mit einer reinen Kompression bzw. Dilatation verbundenen Kräfte bereits durch den Druckgradienten berücksichtigt sind und daher im Viskositätsensor nicht mehr auftreten dürfen. Die Verformung des Volumenelements darf daher nur unter Erhaltung des Volumens erfolgen. Die zeitliche Änderung des Volumens wird aber durch $\nabla \cdot \vec{u}$ erfaßt. Durch Multiplikation von $\nabla \cdot \vec{u} / 3$ mit der Einheitsdyade \mathbf{I} können wir hieraus wieder einen Tensor machen, dessen Spur gerade $\nabla \cdot \vec{u}$ beträgt. Betrachten wir nun die Identität

$$\nabla \vec{u} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \cdot \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}^T) + \frac{1}{3} \mathbf{I} \cdot \nabla \cdot \vec{u}, \quad (6.148)$$

so stellt hierin der erste Term eine Verformung unter Beibehaltung des Volumens dar. Nur mit diesem speziellen Tensor stehen die Viskositätskräfte in Beziehung. Es ist üblich, den Faktor 1/2 wegzulassen und

$$\mathbf{W} = \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \cdot \nabla \cdot \vec{u} \quad (6.149)$$

als den *Tensor der zeitlichen Verformung* (rate of strain tensor) zu bezeichnen. Seine Matrixelemente lauten

$$W_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right). \quad (6.150)$$

Hat man ein Plasma mit \mathbf{B} in z -Richtung, so lassen sich drei Klassen der Verformung unterscheiden:

I	$W_{zz} = -(W_{xx} + W_{yy})$	Kompression (Dilatation) $\parallel \mathbf{B}$ und isotrope Dilatation (Kompression) $\perp \mathbf{B}$.
II	$W_{xy}, (W_{xx} - W_{yy})/2$	reine Verformung senkrecht zu \mathbf{B}
III	W_{xz}, W_{yz}	reine Verformung in einer zu \mathbf{B} parallelen Ebene

Tabelle 6-1

Als symmetrischer Tensor mit verschwindener Spur besitzt W_{ik} fünf unabhängige Elemente. Demzufolge kann es in einem anisotropen Medium auch fünf verschiedene Viskositätskoeffizienten η_k geben, die die Elemente des Viskositätstensors mit denen des zeitlichen Verformungstensors verknüpfen. Für ein stark magnetisiertes Plasma ist dies tatsächlich der Fall. Die entsprechenden Relationen für $B = B_z$ lauten:

$$\begin{aligned}\pi_{zz} &= -\eta_0 W_{zz}; \quad \pi_{xx} = -\eta_0 \frac{1}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \eta_1 \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy} \\ \pi_{yy} &= -\eta_0 \frac{1}{2} (W_{xx} + W_{yy}) + \eta_1 \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) + \eta_3 W_{xy} \\ \pi_{xy} &= \pi_{yx} = -\eta_1 \frac{1}{2} W_{xy} + \eta_3 \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) \\ \pi_{xz} &= \pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 \frac{1}{2} W_{yz}; \quad \pi_{yz} = \pi_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 \frac{1}{2} W_{xz}\end{aligned}\tag{6.151}$$

Nach Braginskii (Review of Plasma Physics, Vol. I, Consultant Bureau N.Y 1966) gelten für die Ionen-Viskositätskoeffizienten die folgenden Relationen

$$\eta_0^i = 0.96 n_i k_B T_i \tau_i; \quad \eta_1^i = \frac{3}{10} \frac{n_i k_B T_i \tau_i}{(\omega_{ci} \tau_i)^2}; \quad \eta_2^i = 4 \eta_1^i; \quad \eta_3^i = \frac{1}{2} \frac{n_i k_B T_i \tau_i}{\omega_{ci} \tau_i}; \quad \eta_4^i = 2 \eta_3^i.\tag{6.152}$$

Für die Elektronen ergeben sich ähnliche Ausdrücke mit etwas anderen Koeffizienten, doch sind die Viskositätskräfte der Elektronen meist vernachlässigbar, da $\tau_e \ll \tau_i$. Wir erkennen, daß die Koeffizienten hinsichtlich ihrer Größenordnung in drei verschiedene Klassen zerfallen. Bei starker Magnetisierung gilt nämlich für den *Hall-Parameter*: $H := \omega_c \tau \gg 1$ und es ist $\eta_{3,4} \approx \eta_0 / H$ und $\eta_{1,2} \approx \eta_0 / H^2$. Wir haben also: $\eta_{1,2} \ll \eta_{3,4} \ll \eta_0$.

Die mit η_0 verbundenen Verformungen sind damit die wichtigsten. Man nennt $\pi_{zz} = -(\pi_{xx} + \pi_{yy})$ die *Parallelviskosität*. Für die entsprechende z-Komponente der Volumenkraft ergibt sich, falls $\pi_{xz} + \pi_{yz} = 0$

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z} \pi_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \eta_0 W_{zz} = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \eta_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}.\tag{6.153}$$

Sie ist also im wesentlichen durch die zweite Ableitung der Geschwindigkeit gegeben.

Die nächst größeren Viskositätskoeffizienten $\eta_{3,4}$ verknüpfen nach Gl. (6.151) Elemente mit unterschiedlichen Indizes, z.B. π_{xz} mit W_{yz} . Die entsprechenden Viskositätskräfte sind deshalb dissipationsfrei. Sie kommen durch die Gyration der Teilchen zustande, und man spricht deshalb von *Gyro-Viskosität*.

Schließlich sind die kleinsten Koeffizienten $\eta_{1,2}$ mit der sogenannten *Senkrecht-Viskosität* verbunden. Diese beschreibt beispielsweise, wie ein um die z-Achse rotierender Plasmazyylinder mit radial unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeit abgebremst wird.

Viskositätskräfte bei toroidaler Geometrie

Im Torus (großer Radius: $R = R_0$, kleiner Radius: $r = a$, Aspektverhältnis: $A = R_0/a$) sind die Viskositätskräfte aufgrund der magnetfeldbedingten Topologie sehr kompliziert. Da unter typischen Bedingungen in Tokamaks und ähnlichen Anlagen der Ionen-Hallparameter von der Größenordnung $H_i = \omega_{ci} \tau_i \approx 10^3$ bis 10^6 ist, kommt meist nur die Parallelviskosität in Betracht. Derartige Kräfte treten auf, wenn das Plasma von der Torusaußenseite zur Innenseite und wieder zurück zur Außenseite entlang des Feldes strömt. Betrachten wir – wegen der Druck- und Temperaturkonstanz auf den magnetischen Fächen – das Plasma im Hinblick auf die Parallelströmung als inkompressibel, so können wir die Strömungsgeschwindigkeit schreiben als

$$\vec{u} = K \vec{B}\tag{6.154}$$

wobei $K(\psi) = u/B = u_\theta/B_\theta$ eine konstante Größe auf der magnetischen Fläche ist, so daß mit $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ auch $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ erfüllt ist. Da $B \sim 1/R$ nimmt die Parallelgeschwindigkeit zur Torusinnenseite hin zu. Wir haben also Verhältnisse wie bei einer Flüssigkeit, die durch eine sich periodisch verengende und wieder erweiternde Röhre gequetscht wird.

Wenn wir uns im folgenden auf den dominaten Beitrag der parallelen Viskosität beschränken, so können wir im Drucktensor die Nicht-Diagonalelemente zu null setzen, so daß er in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem (z-Richtung parallel zu B) die Gestalt

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix} = p_\perp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (p_\parallel - p_\perp) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.155)$$

annimmt. Da senkrecht zu B die Verteilungsfunktion wegen der schnellen Rotation der Teilchen symmetrisch sein muß, sind die beiden Elemente p_{xx} und p_{yy} gleich groß, so daß der Tensor in diesem Fall nur zwei unabhängige Elemente, den Parallel- und den Senkrechtdruck, aufweist. Unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems können wir ihn in dyadischer Form mit dem Einheitsvektor $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ so ausdrücken

$$\mathbf{p} = p_\perp \mathbf{I} + (p_\parallel - p_\perp) \vec{b} \vec{b}. \quad (6.156)$$

Hierin verschwindet jedoch die Spur des zweiten Tensors nicht, wie wir dies für den Viskositätstensor fordern müssen. Wir bringen daher die rechte Seite in die Form

$$\mathbf{p} = \frac{(2p_\perp + p_\parallel)}{3} \mathbf{I} + (p_\parallel - p_\perp) \left(\vec{b} \vec{b} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right), \quad (6.157)$$

worin nun der zweite Term

$$\boldsymbol{\pi} = (p_\parallel - p_\perp) \left(\vec{b} \vec{b} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \right). \quad (6.158)$$

den Viskositätstensor darstellt. Die hiermit verbundenen Viskositätskräfte ergeben sich aus

$$\vec{F} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = -\nabla \cdot \left(\vec{b} (p_\parallel - p_\perp) \vec{b} \right) + \frac{1}{3} \nabla (p_\parallel - p_\perp). \quad (6.159)$$

Den ersten Term können wir wie folgt umformen

$$\nabla \cdot \left(\vec{b} (p_\parallel - p_\perp) \vec{b} \right) = \frac{\partial (p_\parallel - p_\perp) \vec{b}}{\partial s} = \vec{b} \frac{\partial (p_\parallel - p_\perp)}{\partial s} + (p_\parallel - p_\perp) \frac{\partial \vec{b}}{\partial s} \quad (6.160)$$

wobei s die Bogenlänge der Feldlinie ist. Die Ableitung $\partial \mathbf{b} / \partial s = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \mathbf{k}$ liefert den Krümmungsvektor der Feldlinien. Wegen $\mathbf{b} \cdot \partial \mathbf{b} / \partial s = 1/2 \partial \mathbf{b}^2 / \partial s = 1/2 \partial 1 / \partial s = 0$ steht dieser Vektor senkrecht zu \mathbf{b} und damit senkrecht zur magnetischen Fläche. Die uns vor allem interessierende Parallelkomponente der Viskositätskraft lautet somit

$$F_\parallel = -\vec{b} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = -\frac{\partial (p_\parallel - p_\perp)}{\partial s} + \frac{1}{3} \vec{b} \cdot \nabla (p_\parallel - p_\perp) = -\frac{2}{3} \frac{\partial (p_\parallel - p_\perp)}{\partial s}, \quad (6.161)$$

was wir mit Blick auf Gl. (6.158) auch durch das entsprechende Element des Viskositätstensors $\pi_\parallel = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{b}$ ausdrücken können

$$F_{\parallel} = -\frac{\partial \pi_{\parallel}}{\partial s}. \quad (6.162)$$

Hier können wir nun die Verknüpfung mit dem Tensor der zeitlichen Verformung herstellen: $\pi_{\parallel} = -\eta_0 W_{\parallel}$, wobei sich das entsprechende Element W_{\parallel} mit Hilfe der Relation (6.154) zu

$$W_{\parallel} = \vec{b} \cdot \vec{W} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot (2K \nabla \vec{B}) \cdot \vec{b} = 2K(\vec{b} \cdot \nabla)B = 2K \frac{\partial B}{\partial s} \quad (6.163)$$

ergibt. Die Bogenlänge erhalten wir aus $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$ bzw. $ds = (1 + q^2/\epsilon^2)^{1/2} r d\theta \approx q R d\theta$ mit dem Sicherheitsfaktor $q = r B_{\varphi}/RB_{\theta} > 1$ und dem inversen Aspektverhältnis $\epsilon = r/R_0 \ll 1$. Wie üblich sind hier θ und φ die Winkel in poloidaler und toroidal Richtung. Mit $B = B_0/(1+\epsilon \cos\theta) \approx B_0(1-\epsilon \cos\theta)$ und $KB_0 = \langle u_{\parallel} \rangle$ erhalten wir sodann für Parallelkomponente der Kraft

$$F_{\parallel} = 2K \frac{\partial}{\partial s} \eta_0 \frac{\partial B}{\partial s} \approx \frac{2K\eta_0}{q^2 R_0^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} \approx -\frac{2\langle u_{\parallel} \rangle \epsilon}{q^2 R_0^2} \eta_0 \cos\theta. \quad (6.164)$$

Hierbei haben wir davon Gebrauch gemacht, daß wegen der Konstanz von Dichte und Temperatur auf den magnetischen Flächen auch η_0 auf diesen konstant ist. Das Ergebnis läßt sich anschaulich deuten, wenn wir beachten, daß $\Delta u_{\parallel} = 2\epsilon \langle u_{\parallel} \rangle$ die maximale Änderung der Geschwindigkeit entlang des Weges einer Feldlinie ist, die auf der Länge $\pi q R_0$ den äußeren mit dem inneren Teil des Torus verbindet. Wichtig ist festzustellen, daß auch im Mittel über die gesamte magnetische Fläche diese Viskositätskraft nicht verschwindet

$$\langle F_{\parallel} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{\parallel} (1 + \epsilon \cos\theta) d\theta = -\frac{\langle u_{\parallel} \rangle \eta_0}{q^2 R_0^2} \epsilon^2. \quad (6.165)$$

Damit erfährt jede Parallelströmung eine Dämpfung. Da eine solche Strömung parallel zum verschraubten Magnetfeld auch immer eine Rotation um den kleinen Umfang bedeutet, ist diese poloidale Rotation (der Ionen) ebenfalls gedämpft. Bei der Ableitung des Ergebnisses (6.165) haben wir von den Beziehungen (6.151) zwischen Viskositätstensor und dem Tensor der zeitlichen Verformung Gebrauch gemacht. Dieser Zusammenhang war für jedes kleine Volumenelement als brauchbar angenommen worden. Eine solchermaßen lokale Theorie verliert jedoch bei großer freier Weglänge der Teilchen (d.h. kleine Dichte, hohe Temperatur) ihre Gültigkeit. Andererseits werden die Viskositätskräfte, die ja durch Abweichungen von der Maxwellverteilung zustande kommen, gerade unter solchen stoßarmen Bedingungen sehr bedeutsam. Dieses Problem der nicht-lokalen Viskosität tritt z.B. in den Tokamakexperimenten auf, wo die freie Weglänge der Ionen leicht ein Vielfaches des Torusumfangs betragen kann. In einem solchen Fall hat nur das Flächenmittel der Viskositätskraft eine physikalische Bedeutung; es entsteht vornehmlich durch den Impulsaustausch zwischen gefangenen und freien Teilchen. Die diesbezügliche mathematische Beschreibung wird als neoklassische Theorie bezeichnet. Wir gehen auf diese sehr anspruchsvolle Theorie, bei der die Berechnung der gestörten Verteilungsfunktion im Zentrum steht, nicht weiter ein.

6.4.3. STOßINDUZIERTER TEILCHENTRANSPORT

Teilchendiffusion

Wir berechnen den Teilchenfluß durch die y-z-Ebene, wenn ein Gradient der Dichte in x-Richtung vorliegt und die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\langle v \rangle$ verschwindet (Abb. 6-9). Die Teilchen einer dünnen Schicht der Breite dx werden durch Stöße mit gleicher Wahrscheinlichkeit in die Vorwärts- und Rückwärtsrichtung gestreut. Die charakteristische Stoßzeit τ ist als mittlere Zeit zwischen zwei Stößen durch die reziproke Stoßfrequenz $v = \sum_b n_b \langle v_{\text{rel}} \rangle \sigma$ definiert: $\tau = 1/v$; im allgemeinen Fall ist hierbei über alle Teilchenarten b zu summieren und über die jeweilige Relativgeschwindigkeit zu mitteln. Ist $\lambda = v_{\text{th}} \tau$ die *freie Weglänge*, so tragen alle Schichten innerhalb von $|x| \leq \lambda$ jeweils mit der Hälfte der Teilchen ($n dx/2$) zum Fluß durch die Fläche bei $x = 0$ bei. Wie in der Abb. 6-9

verdeutlicht, ergibt sich der Gesamtfluß durch die Differenz der Teilflüsse von links (Γ_-) und rechts (Γ_+).

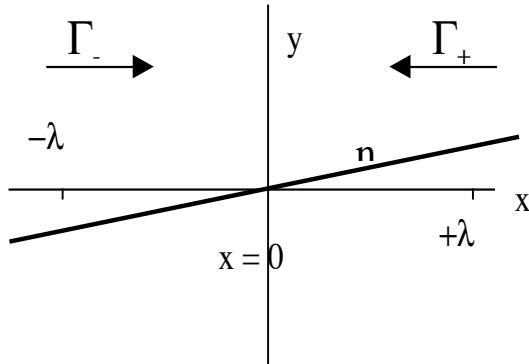


Abb. 6-9: Zur Berechnung der diffusiven Teilchenflüsse

Für den Teilchenfluß in x-Richtung erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \int_{-\lambda}^0 \frac{1}{2} \frac{n}{\tau} dx = \frac{1}{2\tau} \int_{-\lambda}^0 \left(n_0 + \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dx = \frac{1}{2\tau} \left(n_0 \lambda - \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{\lambda^2}{2} \right) \\ \Gamma_- &= \int_0^{\lambda} \frac{1}{2} \frac{n}{\tau} dx = \frac{1}{2\tau} \int_0^{\lambda} \left(n_0 + \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dx = \frac{1}{2\tau} \left(n_0 \lambda + \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{\lambda^2}{2} \right) . \\ \Gamma_x &= \Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{\lambda^2}{2\tau} \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0}\end{aligned}\quad (6.166)$$

Wir haben somit den *Diffusionskoeffizienten* zu $D = \lambda^2/2\tau = v_{th}^2 \tau/2$ bestimmt. Im eindimensionalen Fall hat man für die thermische Geschwindigkeit der Teilchen $v_{th}^2 = v_s^2 = T/m$, so daß man schließlich

$$D = \frac{T}{2m} \tau \quad (6.167)$$

erhält.

Bevor wir auf die komplizierteren Verhältnisse bei Anwesenheit eines Magnetfeldes zu sprechen kommen, soll die Anwendung der Diffusionsrelation im Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung erläutert werden. Ohne Teilchenquellen oder Senken lautet diese

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\Gamma}, \quad (6.168)$$

was im homogenen, eindimensionalen Fall nach Gl. (6.166) auf partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (6.169)$$

hinausläuft. Eine wichtige spezielle Lösung ist durch

$$n(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (6.170)$$

gegeben, die die Diffusion einer Teilchenschicht (d.h. $n(x, 0) = N \delta(x)$) ohne begrenzende Wände beschreibt.

Im allgemeinen erschweren Randbedingungen die Auffindung analytischer Lösungen. So ergibt sich für die Lösung des zylindersymmetrischen, zweidimensionalen Problems

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial n}{\partial r} \quad (6.171)$$

analog zu Gl. (2.27)

$$n(r, t) = \frac{N}{4\pi D t} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}, \quad (6.172)$$

wenn als Anfangsbedingung $n(r, 0) = N \delta(r)/2\pi r$ und keine Randbedingung im endlichen angenommen werden. Verlangen wir jedoch, daß sich nur ein Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ innerhalb einer infinitesimal dünnen Schicht mit Radius r_0 aufhält ($n(r, 0) = \delta(r - r_0)/2\pi r$) und dieses außerdem bei Erreichen des Randes $r = a$ verloren geht (d.h. $n(a, t) = 0$), so ergibt sich als Lösung der komplizierte Ausdruck

$$G(r, t, r_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r_0 / a) J_0(\mu_k r / a)}{\pi [J_1(\mu_k r_0 / a)]^2} e^{-\frac{D\mu_k^2}{a^2} t}, \quad (6.173)$$

worin J_0 und J_1 die Besselfunktionen der Ordnung 0 und 1 und $\mu_1 = 2,4048$; $\mu_2 = 5,55200$; ... die Nullstellen von J_0 sind. Man bezeichnet G als Greensche Funktion. Mit Ihrer Hilfe lassen sich die Lösungen für beliebige Anfangsverteilungen $n(r_0, 0) = \rho(r_0)$ durch Integration (Überlagerung) gewinnen

$$n(r, t) = \int_0^a \rho(r_0) G(r, t, r_0) 2\pi r_0 dr_0. \quad (6.174)$$

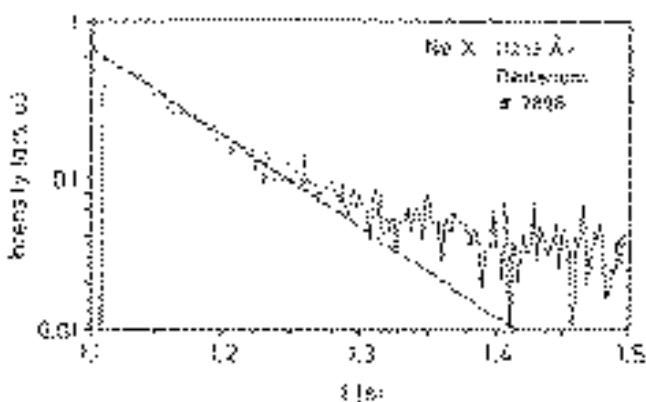
Der Ausdruck (7.34) spielt eine große Rolle bei der experimentellen Bestimmung des Diffusionskoeffizienten in zylindrischer Geometrie. Dazu injiziert man zum Startzeitpunkt $t = 0$ markierte Teilchen (d.h. Teilchen, die sich meßbar von den Hintergrundteilchen unterscheiden) auf irgendeine Weise in das Diffusionsgebiet $r < a$ und mißt deren radiale Verteilung – oder auch nur einen beliebigen Mittelwert $\langle n \rangle$ – als Funktion der Zeit. Wegen des schnellen Anwachses der μ_k , bleibt nach einer relativ kurzen Einstellzeit von der Summe in Gl. (6.173) nur der erste Term mit $k = 1$ übrig, und wir erhalten ein exponentielles Abklingen mit der Zeitkonstanten

$$\tau_1 = \frac{a^2}{D\mu_1^2} = 0.174 \frac{a^2}{D} \quad (6.175)$$

$\tau_1 = a^2/(D \mu_1^2) = 0.174 a^2/D$. Das Radialprofil ist dann – unabhängig von der Anfangsverteilung – immer ein Besselprofil vom Typ $J_0(\mu_1 r/a)$. Abb. 6-10 zeigt ein Beispiel für eine derartige Messung. Dazu wurde in eine Tokamak-Entladung ein gefrorenes Deuterium Pellet eingeschossen, dem 1% Neon beigesetzt war. Beobachtet wurde die Intensität einer Linie des wasserstoffähnlichen NeX-Ions. Innerhalb weniger ms nach Injektion des Pellets ist dieses vollständig im heißen Plasma ($T \approx$

10^7 K) erodiert und ionisiert. Die Neonatome werden ebenfalls sehr rasch in hoch geladene Zustände ionisiert, die meisten vollständig, doch verbleibt ein kleiner Bruchteil im wasserstoffähnlichen Zustand mit einem gebundenen Restelektron, das charakteristische Strahlung im weichen Röntgengebiet aussendet.

Abb. 6-10: Exponentieller Abfall der NeX-Konzentration nach Einschuß eines Pellets in eine Tokamakanlage (ASDEX). Aus der Abklingzeitkonstante läßt sich der Diffusionskoeffizient senkrecht zum



Magnetfeld bestimmen. (G. Fussmann, Nucl. Fus., 26, 8 (1986))

Wie aus der Abbildung zu entnehmen ist, beobachtet man tatsächlich während einer relativ langen Zeitspanne (bevor die Hintergrundstrahlung bedeutsam wird) einen exponentiellen Zerfall mit der Zeitkonstante $\tau_1 = 75$ ms, aus der sich mit $a = 0.5$ m anhand von Gl. (3.9) eine Diffusionskonstante von $D = 0.6 \text{ m}^2/\text{s}$ ermitteln lässt.

Grundsätzlich wird im anisotropen Medium aus der Diffusionskonstanten ein Tensor, dessen drei Diagonalelemente D_x, D_y, D_z alle verschieden sein können. Die Komponenten der Flußdichten ergeben sich dann gemäß $\Gamma_x = -D_x \partial n / \partial x, \Gamma_y = -D_y \partial n / \partial y, \Gamma_z = -D_z \partial n / \partial z$. Dieser Fall spielt im magnetisierten Plasma eine bedeutsame Rolle, da ja in der zu B senkrechten Richtung die Bewegung der Teilchen durch die Gyration stark eingeschränkt ist. Legen wird die z -Achse in Richtung von B , so haben wir $D_{\parallel} = D_z$ und $D_x = D_y = D_{\perp}$, so daß von den drei Elementen des Diffusionstensors nur zwei verschieden sind. Der zuvor betrachtete Fall $D = D_{\parallel} = \lambda^2 v/2$ bezieht sich also auf die freie Diffusion parallel zu B . Senkrecht hierzu ist die charakteristische Länge, die ein Teilchen als Folge eines Stoßes zurücklegt, nicht die freie Weglänge, sondern sein Gyroradius $\rho = m v_{\perp} / q B$. Dementsprechend haben wir die Beziehungen

$$D_{\parallel} = \frac{v}{2} \lambda^2; \quad D_{\perp} = \frac{v}{2} \rho^2. \quad (6.176)$$

Da die frei Weglänge der Elektronen in Fusionsplasmen mit Temperaturen im Bereich von $T = 10 \text{ keV}$ mehrere Kilometer betragen kann, der Gyroradius aber lediglich von der Größenordnung 0.1 mm ist, ergibt sich ein extremes Anisotropieverhältnis von $D_{\parallel}/D_{\perp} = (\lambda/\rho)^2 \approx 10^{14}$.

6.4.4. VERUNREINIGUNGSAKKUMULATION

Wir kommen noch einmal auf die Impulsgleichung (3.18) im Mehrflüssigkeitsbild zurück. Unter stationären Verhältnissen und unter Vernachlässigung des Trägheitsterms sowie der Viskosität und Schwerkraft lautet diese

$$\nabla p_a = e_a n_a (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \vec{R}_a \quad (6.177)$$

Diese Gleichung wollen wir für den Transport einer beliebigen Teilchenart a für den zuvor betrachteten Z-Pinch anwenden. Aus der Radialkomponente dieser Gleichung ergibt sich sofort eine Beziehung für die θ -Komponente der Geschwindigkeit

$$u_{\theta a} = \frac{p_a'}{e_a n_a B_z} - \frac{E_r}{B_z}, \quad (6.178)$$

wobei wir zur Abkürzung $dp/dr = p'$ gesetzt und $R_{ar} \approx 0$ angenommen haben, da in r -Richtung nur sehr kleine Strömungsgeschwindigkeiten auftreten werden. Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich für die b -Teilchen. Gehen wir hiermit in die Gleichung für die Schlupfreibungskräfte (6.136) so erhalten wir eine Reibungskraft in poloidaler Richtung

$$R_{a\theta} = -m_a n_a v_{ab} B_z^{-1} \left(\frac{p_a'}{e_a n_a} - \frac{p_b'}{e_b n_b} \right), \quad (6.179)$$

die durch die unterschiedlichen diamagnetischen Geschwindigkeiten zustande kommt. Nun kehren wir zur vektoriellen Impulsgleichung (6.177) zurück und betrachten ihre θ -Komponente. Sie liefert mit $\partial p / \partial \theta = 0$ den folgenden Ausdruck für die radiale Geschwindigkeit

$$u_{ra} = \frac{E_\theta}{B_z} + \frac{R_{a\theta}}{e_a n_a B_z}. \quad (6.180)$$

Hier taucht wieder im ersten Term die bekannte ExB-Drift auf. Der zweite Term dagegen ist von der Reibung bestimmt. Er ist identisch mit der Drift-Gleichung (5.5), da hier mit R_a die Reibungskraft pro Volumenelement gemeint ist, bei der Teilchenbetrachtung aber F_a die Kraft pro Teilchen darstellte, also $F_a = R_a / n_a$. Unter Weglassen der für alle Teilchensorten gleichen ExB-Drift erhalten wir schließlich für die radiale elektrische Stromdichte der a-Teilchen die Beziehung

$$j_{ra} = e_a n_a u_{ra} = -\frac{m_a n_a v_{ab}}{B_z^2} \left(\frac{p_a'}{e_a n_a} - \frac{p_b'}{e_b n_b} \right) \quad (6.181)$$

Vertauschen der Indizes führt auf $j_{rb} = -j_{ra}$, so daß die Gesamtstromdichte $j = j_a + j_b = 0$ automatisch ambipolar ist. Der obigen Gleichung können wir noch die folgenden wichtigen Beziehungen entnehmen: Sind die Druckgradienten der verschiedenen Teilchensorten alle negativ (spitze Profile), so führt der stoßbedingte Transport zwischen Teilchen mit unterschiedlichem Ladungsvorzeichen immer zu einem radialen Teilchenverlust. Elektronen-Ionenstöße sind von dieser Art, doch ist die hierdurch bedingte Verlustrate wegen der niedrigen Stoßfrequenz für Impulsaustausch klein. Umgekehrt führen die Stöße der unterschiedlichen Ionen untereinander zu keinem Nettoverlust der Teilchen, wohl aber zu einer raschen Umverteilung über den Querschnitt. Dadurch werden die Druckgradienten verändert, so daß sich poloidalen Reibungskräfte vermindern und schließlich mit Erreichen des stationären Gleichgewichtsfalls verschwinden. Dieser Fall stellt sich ein, wenn $j_{ra} = 0$ oder $R_a = R_b = 0$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{p_a'}{e_a n_a} - \frac{p_b'}{e_b n_b} = 0. \quad (6.182)$$

Unter der Annahme $T_a = T_b = T$ wird dies nach Multiplikation der Nenner mit T

$$\frac{p_a'}{e_a p_a} = \frac{p_b'}{e_b p_b}. \quad (6.183)$$

Sind die Ladungen über den Radius unveränderlich (keine Ionisation oder Rekombination), so erhalten wir als Lösung

$$\left(\frac{n_a(r)}{n_a(a)} \right)^{1/e_a} = \left(\frac{n_b(r)}{n_b(a)} \right)^{1/e_b}. \quad (6.184)$$

Für Verunreinigungen der Ladung Z und Protonen speziell

$$\frac{n_z(r)}{n_z(a)} = \left(\frac{n_i(r)}{n_i(a)} \right)^Z. \quad (6.185)$$

Diese Gleichung drückt die für die Kernfusion so bedrohliche *Verunreinigungsakkumulation* aus. Haben wir nämlich für die Protonen z. B ein Mitte-Rand-Verhältnis von etwa 3, so ist dieses Verhältnis für Sauerstoffionen der Ladung Z = 8 bereits $3^8 = 6561$.

Das Zustandekommen der Verunreinigungsakkumulation kann man für einen speziellen Fall besonders leicht einsehen: Es seien die Protonen allein durch ein radiales elektrisches Feld eingeschlossen (also: $u_{\perp i} = 0$). Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann $e n_i E_r = dp_i/dr$. Fügen wir nun wenige Verunreinigungen der Ladung Z hinzu, so erfahren auch diese radiale elektrische Kräfte, die sie zunächst veranlassen, poloidal zu driften. Die mit diesen Driften verbundenen Reibungskräfte treiben die Verunreinigungen langsam radial nach innen, womit ein Ansteigen

der Verunreinigungsdichte und damit des Partialdrucks $k_B T n_z$ verbunden ist. Wie im magnetfeldfreien Fall, stellt sich auch für die Verunreinigungen schließlich ein Gleichgewicht im elektrischen Feld gemäß $e Z n_z E_r = dp_z/dr$ ein. Es sind jetzt beide Ionensorten in Ruhe. Da die Ladung der Verunreinigungen um den Faktor Z höher als die der Protonen ist, hat man für die Verunreinigungionen auch einen Z -fach höheren Druckgradienten bei gleichem Radius. Diese einsichtigen Verhältnisse sind nochmals wegen ihrer grundlegenden Bedeutung in der Abb. 6-11 veranschaulicht. Nach Elimination von E_r aus den beiden Gleichgewichtsbeziehungen ergibt sich mit $T = \text{const.}$ zwischen Protonen- und Verunreinigungsdichte die Beziehung $n_z \sim n_p^Z$.

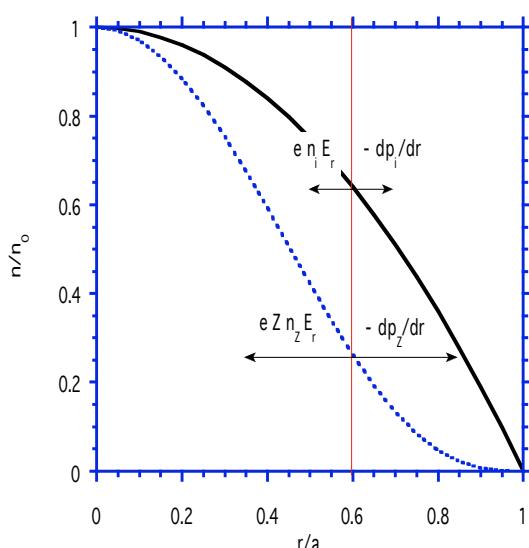


Abb. 6-11: Deutung der Verunreinigungsakkumulation unter Vernachlässigung der Thermokräfte. Ohne Plasmarotation werden Protonen und Verunreinigungssionen durch ein radiales elektrisches Feld eingeschlossen. Da die Verunreinigungssionen Z -fach geladen sind, stellen sich im Gleichgewicht Z -fach höhere Partialdruckgradienten ein. Dichteprofile: Protonen (dick), Verunreinigungen (gepunktet).

Die zuvor gegebene Deutung der Akkumulation könnte dahingehend mißverstanden werden, daß sie nur bei Anwesenheit eines radialen elektrischen Feldes auftritt. Das ist aber nicht so, denn das E -Feld verursacht keine Reibungskräfte und fällt letztlich immer heraus. Dies wird auch einsichtig, wenn man bedenkt, daß die elektrischen Kräfte im bewegten

Bezugssystem $e_a n_a E'_r = e_a n_a (E_r + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B})$ immer die gleichen sein müssen (bestimmt durch Druckgradienten), gleichgültig, ob die betrachteten Teilchen poloidal rotieren oder nicht. Ob das Feld E'_r nun durch Ladungstrennung oder Rotation aufgebaut wird, ist in zylindrischer Geometrie zunächst unbestimmt und hängt von der Experimentführung ab. Unter toroidalen Bedingungen geht diese Freiheit allerdings verloren, da hier die Viskositätskräfte die poloidale Rotation der Protonen stark dämpfen.

Das obige Ergebnis Gl. (6.185) nimmt jedoch eine entscheidend andere Form an, wenn man die senkrechten Thermokräfte nach Gl. (6.143) berücksichtigt. Diese zusätzlichen radialen Teilchenströme, die über die Thermokräfte vom radialen Temperaturgradienten getrieben werden, bezeichnet man als **Nernst-Effekt**. Eine Wiederholung der Rechnung unter Einbeziehung dieser zusätzlichen Kraft liefert anstelle von Gl. (7.3) für $m_z \gg m_i$ das Ergebnis

$$\frac{n_z(r)}{n_z(a)} = \left(\frac{n_i(r)}{n_i(a)} \right)^Z \left(\frac{T_i(r)}{T_i(a)} \right)^{-1/2(Z-1)}, \quad (6.186)$$

so daß der Temperaturgradient der Anhäufung entgegenwirkt und u.U. sogar eine Reinigung des Plasmas bewirken kann.

6.4.5. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DES TEILCHENTRANSPORTES

Der durch Coulomb-Stöße hervorgerufene Teilchentransport quer zum Magnetfeld zeichnet sich durch drei allgemeine Eigenschaften aus, die wir z.B. direkt der Gl. (6.181) entnehmen können:

1. Stöße zwischen verschiedenen *Teilchen* mit *gleichen Ladungsvorzeichen* (Protonen und Verunreinigungssionen) führen zu entgegengesetzten Strömungen. Die Teilchen *tauschen* im wesentlichen ihre *Positionen aus* unter gleichzeitiger Wahrung der Quasineutralität.
2. *Identische Teilchen* vertauschen bei Stößen auch ihre Positionen, aber, bedingt durch ihre Ununterscheidbarkeit, kommt dabei *kein Nettotransport* zustande.

3. *Teilchen unterschiedlicher Polarität* (Elektronen und Ionen) driften als Folge von Stößen in die gleiche Richtung. Aus diesem Grund *allein* diese Stöße zu einer gleichgerichteten radialen Strömung der Teilchen.

Diese fundamentalen Zusammenhänge sind auch unmittelbar aus der Driftbeziehung (5.5) abzuleiten, wenn man beachtet, daß die Summe aller inneren Kräfte (hier die Stöße zwischen a- und b-Teilchen) verschwinden muß

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b = 0 \quad (6.187)$$

Kombiniert man die beiden Gleichungen, so ergibt sich sofort die *Ambipolarität der Teilchenflüsse*

$$e_a n_a \vec{v}_a + e_b n_b \vec{v}_b = 0 \quad (6.188)$$

aus der wegen $n_a, n_b > 0$ die aufgeführten Eigenschaften A, B, und C unmittelbar abzulesen sind.

Diese grundlegenden Eigenschaften des Teilchentransports erklären sich letztlich aus der Verkopplung von senkrechtem Impuls und Gyroradius. Die bekannte Gleichung für den Gyroradius $\rho_a = m_a v_{a\perp} / (e_a B)$ läßt sich nämlich mit dem Impuls $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$ zur Vektorbeziehung

$$\vec{\rho}_a = \frac{\vec{p}_a \times \vec{B}}{e_a B^2} \quad (6.189)$$

verallgemeinern. Betrachten wir nun einen Stoß zwischen den Teilchen a und b, bei dem ein bestimmter Impulsbetrag ausgetauscht wird, so folgt aus der Impulserhaltung $\Delta \mathbf{p}_a = -\Delta \mathbf{p}_b$ eine Versetzung der Gyrozentren gemäß

$$e_a \Delta \vec{\rho}_a + e_b \Delta \vec{\rho}_b = 0. \quad (6.190)$$

Diese Beziehung ist äquivalent zur Gleichung (3.24). Die elementaren Zusammenhänge zwischen der Änderung der senkrechten Impulskomponente und der Versetzung des Gyrozentrums sind in der Abb. 6-12 veranschaulicht.

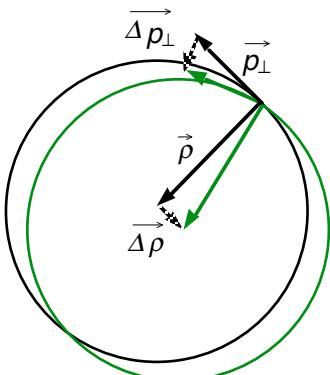


Abb. 6-12: Im Magnetfeld sind die Vektoren des senkrechten Impulses und des Gyrozentrums durch die Gl. (6.189) miteinander verknüpft. Mit einer stoßbedingten Änderung des senkrechten Impulses ist dann eine Versetzung des Gyrozentrums verbunden.

6.4.6. DIFFUSIONSKoeffizienten

Wir gehen nochmals auf die Gleichung (6.181) für die radiale Stromdichte der a-Teilchen ein und wollen nun explizit für den Fall a = Elektronen (e), b = Protonen (i) ihren Diffusionscharakter aufdecken. Zur weiteren Vereinfachung setzen wir $T_i = T_e = \text{const.}$ und erhalten unter Berücksichtigung der Quasineutralität $n_i = n_e$ für die Elektronen-Teilchenstromdichte

$$\Gamma_{re} = -\frac{2m_e v_{ei}}{e^2 B^2} \frac{dp_e}{dr} = -\frac{2m_e k_B T_e v_{ei}}{e^2 B^2} \frac{dn_e}{dr}. \quad (6.191)$$

Hierin formen wir den Vorfaktor gemäß $m_e v_{\text{eth}}^2/2 = k_B T_e$ um und erhalten

$$\Gamma_{re} = -\frac{m_e v_{e,\text{th}}^2 v_{ei}}{e^2 B^2} \frac{dn_e}{dr} = -\rho_e^2 v_{ei} \frac{dn_e}{dr} = -D^{kl} \frac{dn_e}{dr} \quad (6.192)$$

Hier taucht mit

$$D^{kl} = \rho_e^2 v_{ei} = \rho_i^2 v_{ie} \quad (6.193)$$

der sogenannte *klassische Diffusionskoeffizient* für die Senkrechtdiffusion auf. Er ist für Ionen und Elektronen gleich groß und garantiert damit den ambipolaren Transport der Teilchen.

6.5. Energieflüsse und Onsager-Relationen

Die Teilchenstöße bewirken auch einen Energietransport parallel und senkrecht zum Magnetfeld. Dieser stoßbedingte Anteil wird als Wärmeleitung bezeichnet und ist von dem konvektiven Wärmetransport zu unterscheiden. Während letzterer eine Folge der Teilchenflüsse in Zonen unterschiedlicher Temperatur ist, ist die Wärmeleitung – wie in allen Festkörpern – nicht mit derartigen Strömungen verknüpft. Durch die Stöße kann vielmehr bei Anwesenheit eines Temperaturgradienten auch Energie von den wärmeren auf die kälteren Teilchen übertragen werden, ohne daß die Teilchen ihren Ort verändern. Die im Kapitel 6.4.5 aufgeführten grundlegenden Eigenschaften des Teilchentransportes treffen daher auf die Wärmeleitung nicht zu. Insbesondere kann auch ein Energietransport durch Stöße zwischen gleichartigen Teilchen zustande kommen, was beim Teilchentransport nicht möglich ist. Schließlich gibt es bei den Wärmeffüssen auch keinen Zwang zur Ambipolarität, da mit diesen Flüssen keine elektrischen Felder entstehen können. Man kann daher unterschiedliche Wärmeffüssen in den Elektronen und den Ionen haben. Bei Anwesenheit eines starken Magnetfelds muß man wiederum zwischen parallelen und senkrechten Wärmeffüssen unterscheiden. Grundsätzlich gilt, daß bei den senkrechten Wärmeffüssen der Ionenkanal wegen der größeren Gyroradien der bedeutsame ist. Umgekehrt ist der parallele Wärmeffuß von den schnellen Elektronen dominiert.

Wir gehen zunächst auf die Verhältnisse parallel zum Magnetfeld ein und werden hierbei erstmalig auf eine Verkopplung zwischen Teilchen- und Energieffüssen zu sprechen kommen, die uns später bei den senkrechten Flüssen wiederbegegnen wird. Diese Verkopplungen sind mit bekannten thermodynamischen Effekten (Seebeck-, Peltier-, Nernst- und Ettinghausen-Effekt) verbunden, die zum Teil von großer praktischer Bedeutung sind.

6.5.1. PARALLELE WÄRMEFLÜSSE UND STRÖME

Im folgenden beschränken wir uns auf ein reines Wasserstoffplasma und beschreiben die Effekte im Einflüssigkeitsbild. Die uns interessierenden Größen sind der parallele Wärmeffuß und der elektrische Strom der Elektronen. Für die Stromdichte haben wir die wichtigste Beziehung bereits kennengelernt: $j_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel}$ mit der elektrischen Leitfähigkeit σ_{\parallel} nach Gl. (4.62-63). Unter Beachtung des genauen numerischen Faktors ergibt sich

$$\sigma_{\parallel} = 1.97 \frac{n_e e^2}{m_e v_{ei}} \quad (6.194)$$

mit der Elektronen-Protonen-Stoßfrequenz nach Gl. (4.63).

Die *Wärmestromdichte* wird vom Temperaturgradienten getrieben, und in linearer Näherung erwarten wir eine Relation der Art $q_{\parallel} = -\kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e$. Für den *Wärmeleitungscoefficienten* berechnet man numerisch aus der Fokker-Planck-Gleichung

$$\kappa_{e\parallel} = 4,17 \frac{n_e k_B T_e^{5/2}}{m_e v_{ei}}. \quad (6.195)$$

Damit ist der Wärmeleitungscoefficient noch stärker temperaturabhängig ($\kappa_{\parallel} \sim T_e^{5/2}$) als die elektrische Leitfähigkeit ($\sigma_{\parallel} \sim T_e^{3/2}$). Genauer ergibt sich aus numerischen Rechnungen eine zu Gl. (4.65) analoge Beziehung

$$\kappa_{e\parallel} = 4,05 \cdot 10^4 \left(9 - 8 Z_{\text{eff}}^{-1/7} \right) \frac{T_e^{5/2}}{Z_{\text{eff}} \ln \Lambda} \left[\frac{W}{m \text{ eV}} \right] \quad (6.196)$$

in der auch die Ladung der verschiedenen Ionen durch die Größe Z_{eff} berücksichtigt wird (n_e in m^{-3} und T_e in eV). Der Temperaturgradient wird hierin in eV/m angegeben, so daß man den Wärmestrom gemäß $q = -\kappa \nabla T$ in W/m^2 erhält.

Es zeigt sich jedoch, daß auch das elektrische Feld einen Wärmestrom verursacht und umgekehrt ein Temperaturgradient einen elektrischen Strom bedingt. Man erhält somit eine kompliziertere lineare Beziehung, die sich nach Einführen der sogenannten *thermodynamischen Kräfte*

$$A_1 := \frac{\nabla_{\parallel} p_e}{p_e} + e \frac{E_{\parallel}}{k_B T_e}; \quad A_2 := \frac{\nabla_{\parallel} T_e}{T_e} \quad (6.197)$$

wie folgt darstellen läßt

$$\begin{aligned} j_{\parallel} &= e \frac{p_e}{v_{ei}} [1,97 A_1 + 1,39 A_2] \\ q_{e\parallel} &= -k_B T_e \frac{p_e}{v_{ei}} [1,39 A_1 + 4,17 A_2] \end{aligned} \quad (6.198)$$

Die Nicht-Diagonalkoeffizienten $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1,39$ bedingen den *Seebeck-Effekt* (auch Thermoeffekt genannt: E-Feld bzw. "elektromotorische Kraft" aufgrund eines Temperaturgradienten) und den hierzu inversen *Peltier-Effekt* (Wärmestrom aufgrund eines elektrischen Stromes). Aus der Theorie der irreversiblen Thermodynamik folgt ganz allgemein, daß nahe beim thermodynamischen Gleichgewicht bei Wahl der richtigen thermodynamischen Variablen $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ gelten muß. Diese Symmetrie der Koeffizientenmatrix (auch bei mehr als zwei thermodynamischen Variablen) wird als *Onsager-Relation* bezeichnet. Man beachte, daß nach Gl. (6.198) im stromlosen Fall die Druck- und Temperaturgradienten immer ein elektrisches Feld bedingen.

Die Reibungskräfte $R_{\parallel e}$ und die Wärmereibung $G_{\parallel e}$ hängen sehr eng mit den thermodynamischen Kräften über die Beziehungen $R_{\parallel e} = p_e A_1$ und $G_{\parallel e} = 5/2 p_e A_2$ zusammen. Setzen wir diese Relationen in das Gleichungssystem (6.197) ein und lösen es nach den Kräften auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} R_{e\parallel} &= m_e v_{ei} \left[0,66 \frac{j_{\parallel}}{e} + 0,22 \frac{q_{e\parallel}}{k_B T_e} \right] \\ G_{e\parallel} &= \frac{5 m_e v_{ei}}{2} \left[0,22 \frac{j_{\parallel}}{e} + 0,31 \frac{q_{e\parallel}}{k_B T_e} \right] \end{aligned} \quad (6.199)$$

Hieraus können wir auch die von Braginskii⁴¹ angegebene Beziehung

$$R_{e\parallel} = -0,51 n_e m_e v_{ei} (u_{e\parallel} - u_{i\parallel}) - 0,71 n_e \nabla_{\parallel} k_B T_e \quad (6.200)$$

⁴¹ I. Braginskii, *Review of Plasma Physics*, Vol. I, Consultant Bureau, N. Y. (1966)

für die gesamte parallele Reibungskraft ableiten, indem wir die Gleichung für $G_{\parallel e}$ nach $q_{\parallel e}$ auflösen und sodann unter Verwendung von $j_{\parallel} = e n_e (u_i - u_e)$ in die erste einsetzen. Den zweiten Term in dieser Gleichung, die Thermokraft, haben wir bereits in Gl. (2.12) kennengelernt.

6.5.2. SENKRECHTE WÄRMELEITUNG

Ebenso wie aufgrund der Gyration der Teilchen bei Vorliegen eines Druckgradienten die diamagnetischen Teilchenflüsse entstehen, kommt auch ein senkrechter Wärmefluß zustande. Er ergibt sich aus der Definition (7.73) und ist gegenüber dem Teilchenfluß nach Gl. (6.55) mit dem Faktor $(m_a v_a^2 - 5/2 k_B T_a)$ gewichtet⁴². Man erhält anstelle von Gl. (6.108) für diesen *diamagnetischen Wärmefluß*

$$\vec{q}_{a, dia} = \frac{5}{2} k_B p_a \frac{\vec{B} \times \nabla T_a}{e_a B^2}. \quad (6.201)$$

Auch dieser Wärmefluß, der beim Z-Pinch wie die diamagnetischen Teilchenflüsse rein poloidal gerichtet ist, ist mit Teilchenstößen verbunden und produziert eine zur Reibungskraft analoge *Wärmereibungskraft* G_a , wie sie in Gl. (6.71) definiert ist.

Wie die gewöhnliche Reibungskraft einen radialen Teilchenfluß hervorruft, so ist die Wärmereibung die Ursache für einen radialen Energiefluß. Während die poloidalen diamagnetischen Flüsse von erster Ordnung hinsichtlich des Parameters (ρ/L) (Gyroradius zu Gradientenlänge) sind, sind die radialen Flüsse, die eine Folge der poloidalen Flüsse und der Stöße sind, von zweiter Ordnung. Sie sind nochmals um den Faktor (v_a/ω_a) (Stoßfrequenz zu Gyrofrequenz) kleiner und weisen die typische B^2 -Abhängigkeit auf. Für den radialen Wärmestrom erhält man

$$q_{ar} = \frac{k_B T_a G_{a\theta}}{e_a B}, \quad (6.202)$$

wobei für den Fall gleicher Temperaturen nach F. L. Hinton (*Handbook of Plasmaphysics*, Vol. I) für die Wärmereibung in poloidaler Richtung gilt

$$G_{a\theta} = -\frac{2n_a m_a v_{aa}}{e_a B} \frac{dk_B T}{dr} - \sum_{b \neq a} n_a m_{ab} v_{ab} B^{-1} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{p_a'}{e_a n_a} - \frac{p_b'}{e_b n_b} \right) + \frac{dk_B T}{dr} \frac{m_{ab}}{e_a} \left(\frac{15}{2} \frac{m_a}{m_b^2} + \frac{4}{m_b} + \frac{14}{4m_a} - \frac{27}{4} \frac{e_a}{e_b m_b} \right) \right]. \quad (6.203)$$

Zur Abkürzung wurde hier wieder $p' = dp/dr$ gesetzt. Anders als bei den Teilchenflüssen tragen in Gl. (2.1) auch Stöße zwischen gleichen Teilchen zum Transport bei, da die Wärmereibungskräfte nicht antisymmetrisch sind ($G_{ab} \neq -G_{ba}$). Auch bei diesen Kräften kann man wieder zwischen einem Schlupfanteil ($\sim u_{\perp a} - u_{\perp b}$, hier gegeben durch die diamagnetischen Terme in der ersten runden Klammer) und einem Thermoanteil ($\sim \nabla T$) unterscheiden. Der von den Schlupfkräften (Druck- bzw. Dichtegradienten) erzeugte Energietransport wird als *Ettingshausen-Effekt* bezeichnet. Er ist der zum bereits bekannten Nernst-Effekt (Teilchentransport aufgrund der Thermokraft) inverse Effekt.

Für ein reines Wasserstoffplasma ergibt sich anhand von Gl. (2.23) wegen $m_e \ll m_i$ für den besonders wichtigen Ionenwärmefluß in Richtung senkrecht zu B und in Richtung von $-\nabla T_i$ (d.h. radial) in guter Näherung

$$\vec{q}_{i\perp} = -\kappa_{i\perp} \nabla_{\perp} k_B T_i \quad (6.204)$$

⁴² Im Gegensatz zur totalen Energieflußdichte $\mathbf{Q}_E = \mathbf{q} + (3/2 n k_B T + p) \mathbf{u} = \mathbf{q} + 5/2 p \mathbf{u}$ ist \mathbf{q} der reine Wärmefluß (random heat flux).

mit der senkrechten Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa_{i\perp} = \frac{2n_i m_i k_B T_i v_{ii}}{e^2 B^2} = 2n_i \rho_i^2 v_{ii} \quad (6.205)$$

in der die Ionen-Ionenstoßfrequenz nach Gl. (4.58) einzusetzen ist. Numerisch ergibt sich

$$\kappa_{i\perp} = 1.60 \cdot 10^{-40} \ln \Lambda \frac{n_i^2}{B^2 \sqrt{T_i}} \left[\frac{W}{m \text{ eV}} \right] \quad (6.206)$$

wobei n_i in m^{-3} , B in Tesla und T_i in eV einzusetzen ist. Wie schon bei der parallelen Wärmeleitung wird der Temperaturgradient ebenfalls in eV/m angegeben, so daß man den Wärmestrom gemäß $q_{i\perp} = -\kappa_{i\perp} \nabla T_i$ in W/m^2 erhält.

7. WELLEN IM PLASMA

In einem gewöhnlichen Gas gibt es nur longitudinale Schallwellen und transversale elektromagnetische Wellen (Licht). In einem Plasma dagegen können sich eine Vielzahl von unterschiedlichen Wellentypen ausbreiten. Bereits im magnetfeldfreien Plasma gibt es wegen der freien Elektronen sowohl transversale wie auch longitudinale elektromagnetische Wellen. Mit dem Magnetfeld kommen weitere Wellentypen hinzu, wobei die von dem Schweden *Hannes Alfvén* 1940 (Nobelpreis 1970) erstmalig beschriebenen und nach ihm benannten MHD-Wellen für das Plasma besonders typisch sind. Es ist einsichtig, daß die Wellenausbreitung im Plasma anders als im neutralen Gas oder Festkörper ablaufen muß, da hier durch Ladungstrennungen hochfrequente E-Felder entstehen können und außerdem ein äußeres Magnetfeld die Bewegungsmöglichkeiten der Ladungsträger stark einschränken kann.

Einen Überblick über die im **unendlich ausgedehnten** Plasma vorkommenden Wellen gibt die folgende Zusammenstellung:

Plasmawellen		
Ohne äußeres Magnetfeld	Mit äußerem Magnetfeld	
$\vec{k} \perp \vec{E}$ (trans.)	$\vec{k} \parallel \vec{E}$ (long.)	
TEM	Elektronenschall (Plasmonen)	$\vec{k} \parallel \vec{B}$
Ionenschall	Ionenschall	$\vec{E} \perp \vec{B}$
		zirk.-pol. W.
		R: Elektr.-Zykl. W. (Whistlers)
		I: Ion-Zykl. W.
		Torsion Alfvén
		$\vec{E} \parallel \vec{B}$
		extra-ord. W.
		oberer Hybrid W.
		untere Hybrid W.
		$\vec{E} \perp \vec{B}$ (TM)
		Kompression Alfvén (magneto-akust. W.)
		elektrostat. I-Zykl.-W.
		Bernsteinwellen

Man unterscheidet bei der Beschreibung der Wellen nach folgenden Kriterien:

- transversale ($\vec{B} \perp \vec{k}$) und longitudinale ($\vec{E} \parallel \vec{k}$) Wellen⁴³
- linear, zirkular und elliptisch polarisierte Wellen
- transversale elektromagnetische Wellen (TEM): $\vec{B} \perp \vec{k}$ und $\vec{E} \perp \vec{k}$
- transversale magnetische Wellen (TM)⁴⁴: nur $\vec{B} \perp \vec{k}$
- elektrostatische Wellen ($\text{rot} \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E} = 0$) sind identisch mit rein longitudinalen Wellen
- MHD-Wellen (ideale Leitfähigkeit: $\eta = 0$)
- "kalte Wellen": $T = 0$ bzw. "warme Wellen" $T > 0$
- lineare Wellen und nicht-lineare Wellen (Schockwellen, Hochleistungslaser u.a.)
- ebene Wellen und gekrümmte Wellen (z.B. Kugelwellen, Zylinderwellen)

Die Unterscheidung zwischen "kalten und warmen" Wellen ist für manche Wellentypen wichtig, da sie – über den Druckgradienten – ein von der Temperatur stark abhängiges Ausbreitungsverhalten zeigen. So breiten sich zum Beispiel die später zu besprechenden elektrostatischen Wellen bei $T_e = 0$ überhaupt nicht aus. Andere Phänomene, wie die dissipationsfreie Dämpfung der Wellen (*Landau-Dämpfung*) oder das Auftreten von *harmonischen Zyklotronwellen* bei ganzzahligen Vielfachen der Zyklotronfrequenz (Ionen- und Elektronen-*Bernsteinwellen*), lassen sich nicht durch Angabe einer Temperatur vollständig erfassen, sondern können erst im Rahmen einer *kinetischen Theorie*, die die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten berücksichtigt, beschrieben werden. Da hier nur eine Einführung in das ohnehin sehr schwierige Gebiet der Wellenausbreitung gegeben werden soll, wollen wir uns auf die wesentlichen Grundlagen beschränken.

Bei der mathematischen Ableitung kann man grundsätzlich zwei Wege gehen:

1. Alle Ströme und Ladungen im Plasma werden explizit angegeben.

⁴³ Bei Wellen ohne E-Feld, wie seismische Wellen oder Schallwellen in Gasen, bezieht sich die Angabe auf den Geschwindigkeitsvektor \underline{u}_1 .

⁴⁴ Die analogen TE-Wellen kommen in unendlich ausgedehnten Plasmen nicht vor.

2. Man führt einen Dielektrizitätstensor ein.

Wir werden im wesentlichen den ersten Weg beschreiten, da er die physikalischen Zusammenhänge klarer erkennen lässt. Daneben wird jedoch auch der zweite Weg im Abschnitt 7.2 aufgezeigt und es werden die Zusammenhänge mit dem Leitfähigkeits- und Dielektrizitätstensor dargelegt. Die Einführung eines Dielektrizitätstensors ermöglicht eine umfassende, aber sehr formale Behandlung. Sie liefert daher eine bessere Übersicht über die Lösungsvielfalt. Wie üblich, beschränken wir uns auf ebene Wellen hinreichend kleiner Amplitude, so daß eine konsequente Linearisierung durchgeführt werden kann. Jede Größe A wird demzufolge nach Mittelwert und linearem Glied entwickelt:

$$A = \bar{A} + A_1 \quad \text{mit} \quad |A_1| \ll |\bar{A}|. \quad (7.1)$$

Einige physikalische Größen wie elektrische Dichte, Strömungsgeschwindigkeit, Stromdichte und E-Feld

$$\bar{\rho}_{el} = 0; \quad \bar{u}_a = 0; \quad \bar{j} = 0; \quad \bar{\vec{E}} = 0 \quad (7.2)$$

haben jedoch im allgemeinen verschwindende Mittelwerte. Hier sind diese Größen selbst von 1. Ordnung, und ihre Quadrate oder gemischte Produkte können vernachlässigt werden.

7.1. Die linearisierten Wellengleichungen

Wir beschränken uns im folgenden auf ein vollständig ionisiertes Plasma mit nur einer einfach geladenen Ionenart. Demzufolge kennzeichnet der Index a entweder Elektronen (e) oder Ionen (i). Die drei wichtigen Gleichungen für die Erhaltung der Teilchenzahl, Impuls und Energie lauten dann *Kontinuitätsgleichungen* :

$$\frac{\partial n_{a1}}{\partial t} = -\bar{n}_a \nabla \cdot \vec{u}_{a1} \quad (7.3)$$

Impulsgleichungen :

$$\bar{n}_a m_a \frac{\partial \vec{u}_{a1}}{\partial t} = \bar{n}_a e_a (\vec{E}_1 + \vec{u}_{a1} \times \vec{B}) - \nabla p_{a1} \quad (7.4)$$

Adiabatische Prozeßgleichungen :

$$p_a = C n_a^{\gamma_a} \quad (7.5)$$

mit dem *Adiabatenkoeffizient* $\gamma_a = (f_a + 2)/f_a$ (f_a = Zahl der Freiheitsgrade). Diese Gleichungen verwenden wir insbesondere zur Berechnung der raschen Änderung des Drucks bei der Wellenausbreitung. Betrachten wir nun eine geringe Störung der Dichte $n = \bar{n} + n_1$, so führt diese zu einer Störung des Drucks gemäß

$$(\bar{p} + p_1) = C(\bar{n} + n_1)^\gamma \approx C \bar{n}^\gamma (1 + \gamma \frac{n_1}{\bar{n}}) = \bar{p} + \gamma n_1 \frac{\bar{p}}{\bar{n}} \Rightarrow p_1 = \gamma n_1 \frac{\bar{p}}{\bar{n}}. \quad (7.6)$$

Hieraus ergibt sich mit der idealen Zustandsgleichung $\bar{p} / \bar{n} = k_B \bar{T}$ für den ungestörten Zustand der Druckgradient

$$\nabla p_{a1} = \gamma_a k_B \bar{T}_a \nabla n_{a1}. \quad (7.7)$$

Je nach Problemstellung kann γ_a noch unterschiedliche Werte annehmen. Ist beispielsweise die Frequenz der Welle hinreichend niedrig, so daß innerhalb der Periodenzeit $\tau = 2\pi/\omega$ ein Temperaturausgleich innerhalb der Ionen stattfinden kann, so wir haben es nicht mit einem adiabatischen, sondern mit einem isothermen Prozeß ($T_i = \text{const.}$) zu tun, auf den die Gleichung $p_i = k_B n_i T_i$ zutrifft. Formal können wir diesen Umstand durch $\gamma_i = 1$ berücksichtigen (d.h. $f_i \rightarrow \infty$). Die γ_a sind also streng genommen noch Funktionen der Frequenz und der Plasmaparameter. Glücklicherweise ist die Variationsbreite der Adiabatenkoeffizienten wegen $1 \leq \gamma_a \leq \infty$ auf den relativ kleinen Bereich $1 \leq \gamma_a \leq 3$ eingegrenzt⁴⁵, so daß man sich in der Regel mit Näherungen begnügen kann.

Zu den bisher angegebenen Gleichungen kommen noch die (linearen) Maxwellgleichungen (6.1), in denen wir noch mit $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum einführen. Gehen wir in diese mit dem Wellenansatz

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \tilde{\vec{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \quad \vec{B}_1 = \tilde{\vec{B}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \quad n_1 = \tilde{n}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} &= -i\omega \vec{E}_1; \quad \nabla \cdot \vec{E}_1 = i\vec{k} \cdot \vec{E}_1; \quad \nabla \times \vec{E}_1 = i\vec{k} \times \vec{E}_1; \quad \nabla n_1 = i\vec{k} n_1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

hinein, wobei die Amplituden komplexe Größen sind, so erhalten wir die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} M1: \quad i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 &= e(n_{i1} - n_{e1}) / \epsilon_0 \\ M2: \quad i\vec{k} \times \vec{B}_1 &= \mu_0 \bar{n} e(\vec{u}_{i1} - \vec{u}_{e1}) - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}_1, \\ M3: \quad \vec{k} \times \vec{E}_1 &= \omega \vec{B}_1 \\ M4: \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

wobei für die Mittelwerte $\bar{n}_e = \bar{n}_i = \bar{n}$ gesetzt wurde. Der Gleichung M4 entnehmen wir sogleich, daß der \vec{B}_1 -Vektor der Welle immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht. Der \vec{E}_1 -Vektor läßt sich entsprechend $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\text{long}} + \vec{E}_{\text{trans}}$ aufteilen, wobei \vec{E}_{trans} – wie bei den TEM-Wellen – sowohl senkrecht zum \vec{B}_1 -Vektor der Welle als auch zu \vec{k} steht, während \vec{E}_{long} parallel zu \vec{k} ist. Manche Autoren verwenden diese Aufteilungsmöglichkeit explizit, um transversale und longitudinale Wellen zu trennen. Wir werden im folgenden hiervon jedoch keinen Gebrauch machen.

Den Gleichungssatz (7.9) formen wir nun weiter um und verknüpfen ihn zunächst mit den Kontinuitätsgleichungen. Vektorielle Multiplikation von M3 mit \vec{k} und Einsetzen in M2 ergibt

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_1) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_1 = -i\omega \mu_0 \bar{n} e(\vec{u}_{i1} - \vec{u}_{e1}). \quad (7.10)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichungen nach Gl. (7.3) mit (a = i, e)

$$\omega n_{a1} = \bar{n}_a \vec{k} \cdot \vec{u}_{a1} \quad (7.11)$$

können wir die gestörten Dichten n_{i1} , n_{e1} in M1 durch die entsprechenden Geschwindigkeiten ausdrücken. Multiplizieren wir nun M2 skalar mit \vec{k} , so stellen wir fest, daß die Gleichung M1 bereits in M2 enthalten ist. Dies entspricht unserer früheren, allgemeinen Feststellung, daß die Gleichungen M1 und M4 bereits redundant in den beiden übrigen Maxwellgleichungen M2 bzw. M3 enthalten sind: Wir können sie im folgenden also weglassen. Ebenso ist die Gleichung M3 bereits in Gl. (7.10) eingebunden worden, so daß sich die vier Maxwellgleichungen schließlich auf die einzige Vektor-gleichung (7.10) reduzieren. Hinzu kommen die Impulsgleichungen (7.4), die uns auf

⁴⁵ Bei normalen Schallwellen in einatomigen Gasen ist $f = 3$ und somit $\gamma = 5/3$. Diatomare Moleküle können zusätzlich noch zwei Rotationsfreiheitsgrade aufweisen, so daß in diesem Fall $f = 5$ und $\gamma = 7/5$ wird.

$$-i\bar{n}_a m_a \omega \vec{u}_{a1} = \bar{n}_a e_a (\vec{E}_1 + \vec{u}_{a1} \times \vec{B}_0) - i\gamma_a k_B \bar{T}_a n_{a1} \vec{k} \quad (7.12)$$

führen, was mit Gl. (7.11) auf

$$m_a \omega \vec{u}_{a1} = i e_a (\vec{E}_1 + \vec{u}_{a1} \times \vec{B}_0) + \frac{\gamma_a k_B \bar{T}_a}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{u}_{a1}) \vec{k} \quad (7.13)$$

hinausläuft. Hier ist mit \vec{B}_0 ein äußeres statisches Magnetfeld gemeint. Zusammen mit Gl. (7.10) haben wir damit für ein Plasma mit nur einer Ionensorte den Gleichungssatz für die Wellen

$$\begin{aligned} W1: \quad & (\omega^2 - c^2 k^2) \vec{E} + c^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) + i \frac{\omega}{\epsilon_0} e \bar{n} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) = 0 \\ W2: \quad & \omega m_i \vec{u}_i = i e (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}_0) + \gamma_i \frac{k_B \bar{T}_i}{\omega} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{u}_i) \\ W3: \quad & \omega m_e \vec{u}_e = -i e (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}_0) + \gamma_e \frac{k_B \bar{T}_e}{\omega} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{u}_e) \end{aligned} \quad (7.14)$$

wobei der Index 1 von hier ab unterdrückt werden soll. Die Gleichung W1 ist aus Gl.(7.10) durch Entwicklung des doppelten Kreuzprodukts hervorgegangen. Wir haben damit drei lineare Vektorgleichungen, aus denen wir die drei unbekannten Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{u}_i , \mathbf{u}_e berechnen können. Das Magnetfeld der Welle \mathbf{B}_1 kommt nicht mehr vor; wir können es jedoch aus der Lösung für das E-Feld mit Hilfe von M3 in Gl. (7.9) leicht später berechnen.

Nach Einführen der *Elektronenplasmafrequenz* $\omega_{pe}^2 = e^2 \bar{n} / (\epsilon_0 m_r)$ mit der *reduzierten Masse* $m_r = m_e m_i / (m_e + m_i) \approx m_e$ und der *Zyklotronfrequenzen* $\omega_{ci} = |e| B_0 / m_i$ sowie den *adiabatischen Schallgeschwindigkeiten*

$$V_a := \sqrt{\frac{\gamma_a k_B T_a}{m_a}}, \quad (7.15)$$

die näherungsweise die thermischen Geschwindigkeiten wiedergeben und dem Einheitsvektor in Magnetfeldrichtung $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ läßt sich dieser Gleichungssatz noch in die folgende, etwas einfachere Form bringen

$$\begin{aligned} W1: \quad & \left(1 - \frac{c^2}{\omega^2} k^2 \right) \vec{E} + \frac{c^2}{\omega^2} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) + i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{m_r}{e} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) = 0 \\ W2: \quad & \vec{u}_i - i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \vec{u}_i \times \vec{b} - \frac{V_i^2}{\omega^2} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{u}_i) = i \frac{e}{\omega m_i} \vec{E} \\ W3: \quad & \vec{u}_e + i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \vec{u}_e \times \vec{b} - \frac{V_e^2}{\omega^2} \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{u}_e) = -i \frac{e}{\omega m_e} \vec{E} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß unter der Annahme $\mathbf{B} = \mathbf{E} = 0$ die Gleichungen W2 und W3 gewöhnliche Schallwellen für die – nicht wechselwirkenden – Gase der Ionen und Elektronen beschreiben. In diesem Fall handelt es sich um Wellen mit $\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}$, für die wir die Beziehungen $u_a = (V_a^2 / k^2 / \omega^2) u_a = 0$ erhalten. Mit der unten in Gl. (7.18) angegebenen Relation für die Phasengeschwindigkeit ergibt sich dann $v_{ph,i} = V_i = (\gamma_i T_i / m_i)^{1/2}$ und ein analoger Ausdruck $v_{ph,e} = V_e = (\gamma_e T_e / m_e)^{1/2}$ für die Ausbreitung in einem hypothetischen Elektronengas (ungeladene Teilchen der Masse m_e). In Wirklichkeit kommt diesen Schallgeschwindigkeiten in einem Plasma aber keine Bedeutung zu, da Elektronen und Ionen sehr stark durch elektrische Felder aneinander gekoppelt sind, so daß die Gl. W1 immer wesentlich ist.

Aus dem wichtigen Gleichungssatz (7.16) lassen sich *Dispersionsbeziehungen* gewinnen, die eine Verknüpfung zwischen der Kreisfrequenz ω und dem Betrag des Wellenvektors k darstellen

$$\omega = \omega(k) \quad (7.17)$$

Hieraus ergeben sich dann Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit und Brechungsindex N gemäß

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}; \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}; \quad N = \frac{c}{v_{ph}}. \quad (7.18)$$

Der in der Gleichung W1 auftauchende Term $(c k/\omega)^2$ ist damit gleich dem Quadrat des Brechungsindexes.

Besondere Frequenzen sind die sogenannten Cut-offs und Resonanzfrequenzen: die Null- bzw. Unendlichkeitsstellen des Brechungsindexes.

- Cut-off: $N = 0$ ($v_{ph} \rightarrow \infty$) \Rightarrow Welle wird reflektiert
- Resonanz: $N = \infty$ ($v_{ph} = 0$) \Rightarrow Welle wird absorbiert

Ein typischer Verlauf der Dispersionsfunktion mit einer Cut-off- und einer Resonanzstelle ist in der Abb. 7-1 skizziert.

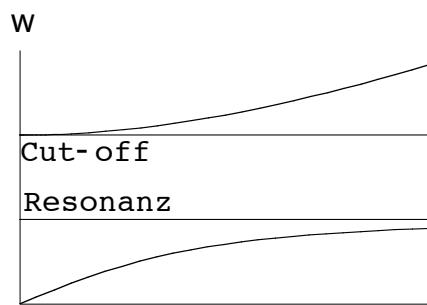


Abb. 7-1: Schematischer Verlauf einer einfachen Dispersionsfunktion im ω - k -Diagramm.

Resonanzstellen treten nur in magnetisierten Plasmen auf. Es sind dies die Zyklotronfrequenzen der Elektronen ω_{ce} , der Ionen ω_{ci} und die sogenannten oberen und unteren Hybridfrequenzen ω_o und ω_u . Insbesondere bei diesen Frequenzen kann das Plasma durch Hochfrequenz Einkopplung geheizt werden. Bei einer für Fusionsexperimente typischen Feldstärke von $B = 1\text{T}$ liegen die Resonanzfrequenzen in folgenden Gebieten: $\omega_{ce} = 28,0\text{ GHz}$ (Infrarot: sehr schwierig zu erzeugen), $\omega_u \approx 1\text{ GHz}$ (Mikrowellen), $\omega_{ci} = 15,2\text{ MHz}$ (UKW).

7.2. Allgemeine Dispersionsbeziehungen

Ausgehend vom Gleichungssatz (7.16) können wir leicht die Verallgemeinerung für ein Vielkomponentenplasma angeben. Wir brauchen nur die in W1 auftauchende Stromdichte $j \approx e \bar{n}(\vec{u}_i - \vec{u}_e)$ durch den allgemeinen Ausdruck

$$\vec{j} = \sum_a e_a n_a \vec{u}_a \approx \sum_a e_a \bar{n}_a \vec{u}_{a1} \quad (7.19)$$

zu ersetzen. Zusammen mit den Impulsgleichungen (7.13), aus denen wir die Geschwindigkeiten berechnen können, ergibt sich wieder ein vollständiger Lösungssatz, vorausgesetzt, die ungestörten Dichten \bar{n}_a sind bekannt. Setzen wir dagegen für die Stromdichte ein Ohmsches Gesetz entsprechend $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ an, so können wir die Gleichung W1 in der Form

$$T \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{mit} \quad T = \left[I + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \boldsymbol{\sigma} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(I - \frac{\vec{k} \vec{k}}{k^2} \right) \right] \quad (7.20)$$

schreiben. Der maßgebliche Tensor \tilde{T} enthält somit neben dem Einheitstensor \mathbf{I} und der Dyade $\vec{k}\vec{k}$ den *Leitfähigkeitstensor* $\boldsymbol{\sigma}$. Daß die Leitfähigkeit im allgemeinen ein Tensor und kein Skalar ist, wird sich im folgenden zeigen.

Die Gleichung (7.20) besagt, daß wir die nicht-trivialen Lösungen ($\mathbf{E} \neq 0$) finden müssen. Diese sind durch die Nullstellen der Determinante

$$\det(T) = 0 \quad (7.21)$$

gegeben. Die sich hieraus ergebenden Eigenwerte sind im vorliegenden Fall keine Zahlen, sondern Funktionen $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Dies sind die gesuchten Dispersionsbeziehungen. Im allgemeinen führt die Gleichung (7.21) auf ein Polynom höheren Grades mit mehreren reellen Nullstellen. Dementsprechend weist die Dispersionfunktion gewöhnlich mehrere Äste auf.

Häufig bevorzugt man anstelle der Leitfähigkeit eine Darstellung, in der die relative *Dielektrizitätskonstante* $\boldsymbol{\epsilon}$ vorkommt. Diese ist über den Zusammenhang $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{ex}} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \boldsymbol{\epsilon} \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ definiert. Setzen wir hierin die obigen Relationen ein, so finden wir den Zusammenhang

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{I} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \boldsymbol{\sigma}. \quad (7.22)$$

Sie ist also im allgemeinen ebenso ein Tensor wie die Leitfähigkeit, und die beiden Größen lassen sich leicht ineinander umrechnen. Mit diesem Ausdruck vereinfacht sich der Tensor \mathbf{T} in Gl.(7.20). Unter Verwendung des Brechungsindexes $N = c \mathbf{k} / \omega$ erhalten wir

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\epsilon} - N^2 \left(\mathbf{I} - \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} \right). \quad (7.23)$$

Aus den Impulsgleichungen W2 und W3 in (7.16) wollen wir nun die Geschwindigkeit der a-Teilchen berechnen. Da die Geschwindigkeit hierin nur linear vorkommt, sollte sie sich in der Matrixform

$$\mathbf{M}_a \cdot \vec{u}_a = i \frac{e_a}{\omega m_a} \vec{E} \quad (7.24)$$

schreiben lassen (Unterdrückung des Index 1). In diesem Zusammenhang erweist sich zunächst das Kreuzprodukt als sperrig, da ja auf der linken Seite der Gl. (7.24) nur Skalarprodukte vorkommen. Mit Hilfe des *Levi-Civita-Tensors* können wir jedoch jedes Kreuzprodukt in ein Skalarprodukt umwandeln⁴⁶. Dieser schiefsymmetrische Tensor 3. Stufe hat die Elemente L_{ikl} mit den Eigenschaften: $L_{ikl} = 0$, falls zwei oder drei Indizes gleich sind, $L_{ikl} = 1$ für zyklische Vertauschung der Indizes (1,2,3) und $L_{ikl} = -1$ für antizyklische Vertauschung. Mit dem Kreuzprodukt besteht der Zusammenhang $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{A}$. Das Skalarprodukt $\vec{B} \cdot \mathbf{L}$ ordnet dem Vektor \mathbf{B} einen zweistufigen, schiefsymmetrischen Tensor zu.⁴⁷ Damit erhalten wir

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{I} - i \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} \vec{b} \cdot \mathbf{L} - \frac{V_a^2}{\omega^2} \vec{k} \vec{k}, \quad (7.25)$$

⁴⁶ Gewöhnlich als $\boldsymbol{\epsilon}$ -Tensor bezeichnet. Da hier aber bereits $\boldsymbol{\epsilon}$ für den Dielektrizitätstensor vergeben wurde, bezeichnen wir ihn mit dem Buchstaben \mathbf{L} .

⁴⁷ Es gilt die Assoziativität $(\vec{B} \cdot \mathbf{L}) \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot (\mathbf{L} \cdot \vec{A})$. In kartesischen Koordinaten hat man $\vec{B} \cdot \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$

wobei ϵ_a das Vorzeichen der Ladung e_a angibt. Die Geschwindigkeit ergibt sich dann durch Matrizeninversion

$$\vec{u}_a = i \frac{e_a}{\omega m_a} \mathbf{M}_a^{-1} \cdot \vec{E} = \boldsymbol{\mu}_a \cdot \vec{E}. \quad (7.26)$$

Die inverse Matrix liefert uns also den *Mobilitätstensor* $\boldsymbol{\mu}_a$, der – in Verallgemeinerung zu dem bereits bekannten Skalar μ_a – die lineare Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit und E-Feld angibt. Setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b = \vec{e}_z$; $k = k(\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z)$, so erhalten wir für diesen den umfangreichen Ausdruck

$$\boldsymbol{\mu}_a = \frac{ie_a}{\omega m_a} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{ca}}{\omega}\right)^2 - k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_{ca}}{\omega}\right)^2 \cos^2 \theta\right]} \times \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 - k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \cos^2 \theta & i \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} \left(1 - k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \cos^2 \theta\right) & \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \sin 2\theta \\ -i \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} \left(1 - k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \cos^2 \theta\right) & 1 - k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 & -i \frac{1}{2} \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \sin 2\theta & i \frac{1}{2} \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \sin 2\theta & 1 - \left(\frac{\omega_{ca}}{\omega}\right)^2 - k^2 \left(\frac{V_a}{\omega}\right)^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Setzen wir hierin das Magnetfeld zu null ($\omega_{ca} = 0$), so ergibt sich, nicht wie man zunächst vermuten würde ein Skalar ($\boldsymbol{\mu}_a = \text{const. I}$), sondern nach wie vor ein Tensor. Ein Blick auf Gl. (7.25) zeigt uns, daß dieses erstaunliche Ergebnis seine Ursache in dem vom Druckgradienten herrührenden V_a^2 -Term hat. Diese Kraft ist parallel zum Wellenvektor k und führt gewissermaßen eine wellenbedingte Anisotropie ein, die sich je nach Orientierung des Wellenfeldes ($E \parallel k$ oder $E \perp k$) unterschiedlich bemerkbar macht.

Der Mobilitätstensor vereinfacht sich erheblich für *kalte Plasmen*, d.h. $V_a = 0$.

$$\boldsymbol{\mu}_a = \frac{ie_a}{\omega m_a} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{ca}}{\omega}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 & i \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} & 0 \\ -i \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \left(\frac{\omega_{ca}}{\omega}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Der Gl. (7.27) entnimmt man, daß diese Näherung brauchbar wird, falls $V_a k / \omega = V_a / v_{ph} \ll 1$, wenn also die adiabatische Schallgeschwindigkeit wesentlich kleiner als die Phasen-geschwindigkeit der Welle ist. Dies ist insbesondere bei den transversalen Wellen der Fall. Die "w a r m e P l a s m a b e s c h r e i b u n g" ist daher nur bei den elektro-statischen W e l l e n von wesentlicher Bedeutung. Auch im kalten Plasma weist die Geschwindigkeit der Teilchen im allgemeinen nicht in Richtung des beschleunigenden E-Feldes. Dieser tensorielle Zusammenhang zwischen \vec{u}_a und \vec{E} ist eine Folge der Anisotropie des Plasmas, die durch das statische Magnetfeld hervorgerufen wird. Setzen wir in Gl. (7.28) das Magnetfeld zu null ($\omega_{ca} = 0$), so erhalten wir die skalare, frequenzabhängige Mobilität $\mu_a = i e_a / \omega m_a$, die – wie zu erwarten – auch mit dem Element $\mu_{a\text{zz}}$ übereinstimmt.

Da das Magnetfeld immer bestrebt ist, die Teilchen senkrecht zu \vec{B} abzulenken, kommt es in Überlagerung mit dem E-Feld der Welle zu elliptischen oder auch nicht geschlossenen Teilchenbahnen. Allerdings ist zu beachten, daß das E-Feld im Plasma im allgemeinen nicht mit dem E-Feld der Welle außerhalb übereinstimmt, da es durch die im Plasma fließenden Polarisationsströme abgeändert wird⁴⁸. Das sich im Plasma einstellende Feld ergibt sich als Eigenvektor aus der Gl. (7.20). Wegen der linearen Abhängigkeit dieser Gleichung sind nicht alle einzelnen Komponenten des Feldes festgelegt, sondern nur deren Verhältnisse, etwa E_x/E_y . Die Eigenvektoren liefern uns somit die *Polarisation* der Welle.

⁴⁸ Von außen können natürlich nur elektromagnetische Wellen eingekoppelt werden.

Mit Hilfe des Mobilitätstensors für eine beliebige Teilchensorte – der, wie hier aufgezeigt, die fundamentale physikalische Größe ist – können wir nun auch leicht den Leitfähigkeitstensor angeben. Wir müssen lediglich über alle Teilchensorten summieren

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_a e_a \bar{n}_a \boldsymbol{\mu}_a . \quad (7.29)$$

Beim Übergang zum Dielektrizitätstensor kann man vermöge $\omega_a^2 = e_a^2 \bar{n}_a / (\epsilon_0 m_a)$ die *charakteristischen Plasmaraten* einführen. In der *kalten Plasmanäherung* erhalten wir damit

$$\boldsymbol{\epsilon}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \begin{pmatrix} 1 & i \frac{\epsilon_a \omega_{ac}}{\omega} & 0 \\ -i \frac{\epsilon_a \omega_{ac}}{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Bei sehr hohen Frequenzen sind nur die Elektronen von Bedeutung. In diesem Fall reduziert sich der Dielektrizitätstensor auf

$$\boldsymbol{\epsilon}_e = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} & i \frac{\omega_{ec}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & 0 \\ -i \frac{\omega_{ec}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Für Ausbreitung in Richtung $\vec{k} / k = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ lautet der maßgebliche Tensor in Gl. (7.23)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\epsilon} - N^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} - N^2 \cos^2 \theta & i \frac{\omega_{ec}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & N^2 \sin \theta \cos \theta \\ -i \frac{\omega_{ec}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} - N^2 & 0 \\ N^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - N^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Das Nullsetzen der Determinante führt auf eine quadratische Gleichung für N^2 , die als Lösung die sogenannte *Appleton-Hartree-Formel* liefert

$$N^2 = 1 - \frac{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}{1 - \frac{(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \sin \theta)^2}{2 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)} \pm \sqrt{\frac{(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \sin \theta)^4}{4 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^2} + \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \cos \theta\right)^2}}. \quad (7.33)$$

Diese wichtige Gleichung, die für Frequenzen oberhalb der Ionenzklotronfrequenz gültig ist, beschreibt die Verhältnisse in zahlreichen Experimenten mit TEM-Wellen. Sie enthält insbesondere

die Winkelabhängigkeit zwischen Wellenausbreitung und Magnetfeld. Für niedrigere Frequenzen und bei kleinen Phasengeschwindigkeiten sind die vollständigen Ausdrücke für die Berechnung des Mobilitätstensors und des daraus hervorgehenden Tensors T in Gl. (7.23) zu verwenden. Insbesondere können bei Anwesenheit von mehreren Ionensorten recht verwickelte Verhältnisse mit zahlreichen Dispersionsästen auftreten. Im folgenden werden wir die wesentlichen Spezialfälle für ein vollständig ionisiertes, einfaches Plasma genauer betrachten.

7.3. Wellen ohne äußeres Magnetfeld

7.3.1. TRANSVERSALWELLEN

Hier sind die E - und B -Vektoren der Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} , so daß $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Es handelt sich um gewöhnliche elektromagnetische Wellen (TEM). Eine skalare Multiplikation der drei Gleichungen (7.16) mit \mathbf{k} zeigt uns, daß wegen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ auch $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_a = 0$ gelten muß, da sonst aus W_2 und W_3 die Beziehungen $v_{ph} = V_i$ und $v_{ph} = V_e$ also der Widerspruch $V_i = V_e$ hervorgeht. Der Gleichungssatz lautet somit

$$\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) \vec{E} + i \omega_{pe}^2 \frac{m_r}{e \omega} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) = 0; \quad \vec{u}_i = +ie \frac{\vec{E}}{m_i \omega}; \quad \vec{u}_e = -ie \frac{\vec{E}}{m_e \omega}. \quad (7.34)$$

Für die Differenz der Geschwindigkeiten ergibt sich demnach

$$(\vec{u}_i - \vec{u}_e) = i \frac{e}{\omega} \frac{m_i + m_e}{m_i m_e} \vec{E} = i \frac{e}{\omega m_r} \vec{E} \quad (7.35)$$

Elektronen und Ionen bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. Es entsteht aber trotzdem in diesem Fall $k \cdot e \cdot i \cdot n \cdot a \cdot d \cdot u \cdot g \cdot s \cdot t \cdot r \cdot e \cdot n \cdot n \cdot u \cdot n \cdot g$. Da die ungestörte Dichte homogen ist $n = n_e = n_i$, haben wir nämlich $\text{div } \mathbf{j} = e n \text{ div}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = i e^2 n / \omega m_r \text{ div } \mathbf{E} = i e^2 n / \omega m_r (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0$. Das E -Feld entsteht also allein durch zeitliche Variation von B . Nach Einsetzen von Gl. (7.35) in die erste Gleichung von Gl. (7.34) hat man

$$(1 - \frac{c^2}{\omega^2} k^2) \vec{E} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \vec{E}. \quad (7.36)$$

Typischerweise fällt hier das E -Feld heraus, und wir erhalten die Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 \quad (7.37)$$

die in der Abb. 7-2 dargestellt ist. Aus dieser Gleichung erhält man nach Gl. (7.18) die Beziehungen

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}} > c; \quad v_{gr} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} < c. \quad (7.38)$$

Für den Brechungsindex ergibt sich die wichtige Beziehung

$$N = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (7.39)$$

Er ist stets kleiner 1 oder imaginär. Damit unterscheidet sich ein Plasma (freie Elektronen) ganz erheblich von einem gewöhnlichen Gas (gebundene Elektronen), wo stets $N > 1$ gilt.

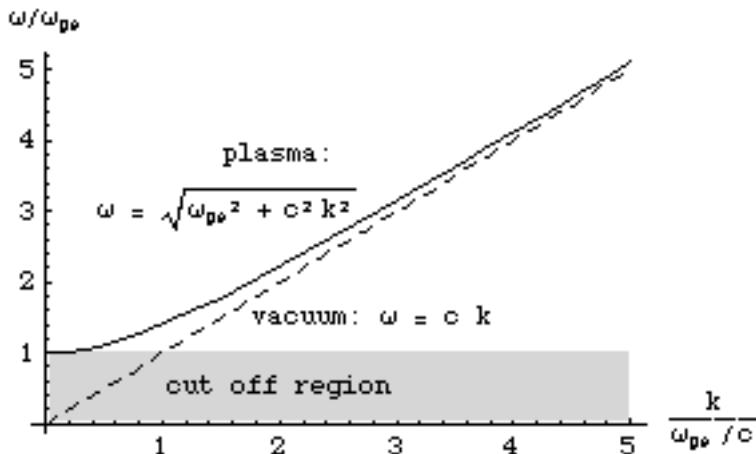


Abb. 7-2: Die Dispersionsbeziehung der elektromagnetischen Transversalwellen im magnetfeldfreien Plasma. Für Frequenzen weit oberhalb der Elektronenplasmafrequenz ω_{pe} geht die Lösung in die Vakuumlösung über. Wellen mit Frequenzen unterhalb von ω_{pe} liegen im Cut-off-Bereich und können sich nicht ausbreiten.

Für hohe Frequenzen ($\omega \gg \omega_{pe}$) geht die Welle in die elektromagnetische Welle des Vakuums über mit $v_{ph} = c$. Bei $\omega = \omega_{pe}$ liegt ein Cut-off vor. Wellen mit $\omega < \omega_{pe}$ werden reflektiert, da dann k imaginär wird (d.h. $\exp(i k z) \rightarrow \exp(-|k| z)$). Sie dringen dabei **dissipationslos** ins Plasma bis in die **Skintiefe**

$$\delta = \frac{1}{\text{Im} k} = \frac{c}{\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}} \quad (7.40)$$

ein. Es tritt eine Totalreflexion am optisch dünneren Medium (Plasma mit $N < 1$) ein, die durch die im Plasma induzierten Polarisationsströme verursacht wird. Die Verhältnisse sind ähnlich zur Totalreflexion der Lichtstrahlen an der Grenzfläche von gewöhnlichen Dielektrika ($N > 1$, Glas, Wasser u.a) und Luft ($N = 1$). Allerdings kann in diesen Fällen keine Totalreflexion bei senkrechtem Einfall auftreten, da das Verhältnis $N_{\text{Die.}}/N_{\text{Luft}} = \sin\theta_{\text{total}}$ endlich bleibt. Im Plasma dagegen mit $N = 0$ beim Cut-off ist dies möglich.

Man beachte, daß wegen $N < 1$ eine konvex geformte "Plasmalinsen" keine sammelnde Wirkung wie eine Glaslinse aufweist, sondern als Zerstreuungslinsen wirkt. Elektromagnetische Wellen, die als Randstrahl ein derartiges Plasmagebiet durchlaufen, erfahren u.U. eine erhebliche Ablenkung nach außen. Plasmen mit hohlen Dichteprofilen können dagegen eine Fokussierung von Laser- oder parallelen Mikrowellenstrahlen bewirken. Derartige Hohlprofile können bei hoher Heizleistung des Lasers durch ihn selbst entstehen (wenn $p = n_e T = \text{const.}$ und T-Profil "spitz"). Äußere Kompression oder starke Rotation führen oft ebenfalls zu hohlen Dichteprofilen.

Messung der Elektronendichte

Wegen $\omega_{pe}^2 = e^2 n_e / m_e \epsilon_0$ kann man aus Phasengeschwindigkeitsmessungen die Elektronendichte bestimmen. Das geschieht z.B. mit dem in Abb. 7-3 skizzierten **Mach-Zender-Interferometer**. Ein Laserstrahl (oder Mikrowelle) wird am ersten halbdurchlässigen Spiegel aufgeteilt.

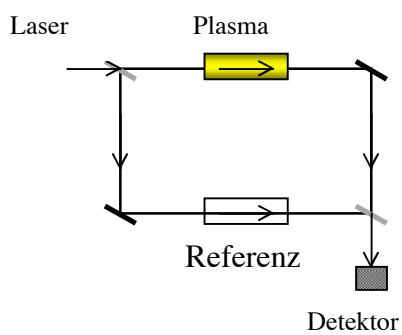


Abb. 7-3: Mach-Zender-Interferometer zur Bestimmung der Elektronendichte.

Der eine Strahl durchläuft das Plasma, der andere, nach Reflexion an einem Vollspiegel, ein Referenzgefäß ohne Plasma. Beide Strahlen vereinigen sich wieder nach durchlaufen eines zweiten halbdurchlässigen Spiegels und treffen auf einen Strahlungsleistungsdetektor (nichtlineare

Kennlinie: Photomultiplier, Diode). Die beiden Strahlen weisen am Detektor die Phasendifferenz

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_0^L k_{\text{Plasma}} dl - L k_{\text{Vakuum}} = \frac{\omega}{c} \int_0^L (N_{\text{Plasma}} - 1) dl \\ &= \frac{\omega}{c} \int_0^L \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} - 1 \right) dl \approx \frac{\omega}{c} \int_0^L \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} dl = \frac{e^2}{2\omega c \epsilon_0 m_e} \int_0^L n_e dl\end{aligned}\quad (7.41)$$

auf. Bei dieser Ableitung haben wir im vorletzten Schritt bei der Entwicklung der Wurzel $\omega \gg \omega_{pe}$ angenommen. Durch Messung der Phasendifferenz erhalten wir somit das Integral der Elektronendichte über die Plasmalänge. Bei einer quadratischen Kennlinie des Detektors zeigt dieser bei zeitlicher Mittelung über die sehr hohe Laserfrequenz ein Signal der Größe

$$S(\phi) = \left\langle [E_1 \cos(\omega t) + E_2 \cos(\omega t + \Delta\phi)]^2 \right\rangle_t = \frac{E_1^2 + E_2^2}{2} \left(1 + \frac{2E_1 E_2}{E_1^2 + E_2^2} \cos(\Delta\phi) \right). \quad (7.42)$$

Den größten Kontrast bekommt man für gleiche Amplituden der Teilstrahlen

$$S(\phi) = E^2 (1 + \cos(\Delta\phi)). \quad (7.43)$$

In diesem Fall geht das Signal bei Werten von $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi\dots$ auf null. Ändert sich nun die Elektronendichte als Funktion der Zeit hinreichend stark – z.B. beim Aufbau des Plasmas –, so werden nacheinander Nullstellen durchlaufen, die man abzählen kann. Aus dieser Zahl (fringe number) läßt sich bei monotonem Anstieg der Dichte sofort ihr Wert angeben. Man beachte aber, daß auch bei Abnahme der Dichte Nulldurchgänge auftreten, so daß die Messung nicht eindeutig ist. Wird während einer Plasmaentladung nur ein Dichtemaximum erreicht, so kann man die Eindeutigkeit aus der Bedingung $n_e(t=0) = n_e(t \rightarrow \infty) = 0$ erhalten. Für die praktische Anwendung sind sogenannte heterodyne Meßverfahren (Referenzstrahl erhält eine geringfügig andere Frequenz als der Meßstrahl) entwickelt worden, die in jedem Falle die Eindeutigkeit gewährleisten.

7.3.2. LONGITUDINALE WELLEN

In diesem Fall ist $E \parallel k$. Da demzufolge (wie bei elektrostatischen Problemen) $\text{rot} \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E} = 0$ und somit $B_1 = 0$ gilt, spricht man auch von [elektrostatischen Wellen](#). Mit dem Ansatz $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z$ ergeben sich aus Gl. (7.16) die Beziehungen

$$E_z + i\omega_{pe}^2 \frac{m_r}{\omega e} (u_{iz} - u_{ez}) = 0; \left(1 - \frac{k^2 V_i^2}{\omega^2} \right) u_{iz} = i \frac{e}{\omega m_i} E_z; \left(1 - \frac{k^2 V_e^2}{\omega^2} \right) u_{iz} = -i \frac{e}{\omega m_e} E_z \quad (7.44)$$

In der ersten Gleichung (aus Maxwellgleichung M2 hervorgegangen) haben sich die verschiebungsströme $-i \omega E_z / c^2$ mit den Polarisationsströmen $(u_{iz} - u_{ez})$ kompensiert, so daß kein Magnetfeld entsteht. Dies ist gleichzeitig eine notwendige Bedingung, um die Poissons-Gleichung M1 (in W1 als Komponentengleichung enthalten) zu erfüllen. Den beiden letzten Gleichungen entnehmen wir $u_{iz} \neq u_{ez}$. In diesem Fall führen diese Teilchenbewegungen zum Aufbau von Raumladungen und damit zu elektrischen Feldern, da E_z in z-Richtung nicht homogen ist. Nach Einsetzen der Geschwindigkeiten in die erste Gleichung ergibt sich mit der [Ionen-Plasmafrequenz](#) $\omega_{pi}^2 = e^2 n_i / \epsilon_0 m_i \approx m_e / m_i \omega_{pe}^2$ die Dispersionsbeziehung zu

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - V_i^2 k^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - V_e^2 k^2} \quad (7.45)$$

die eine Gleichung 4. Grades in ω darstellt mit zwei positiven Wurzeln. Sie ergeben einen hochfrequenten und einen niedrfrequenten Zweig und entsprechen dem akustischen und dem

optischen Zweig der Phononenausbreitung in der Festkörperphysik. In der Plasmaphysik bezeichnet man sie als *Elektronen- und Ionenschall*. Beim hochfrequenten Elektronenschall spricht man auch von *Plasmonen*. Wie die elastischen Wellen im Festkörper, die *Phononen*, haben auch die Plasmonen Energie und Impuls entsprechend den Relationen $E_{\text{plasmon}} = \hbar\omega$ und $\vec{p}_{\text{plasmon}} = \hbar\vec{k}$. Der Quantencharakter der Plasmonen ist jedoch i.a. von untergeordneter Bedeutung, da E_{Plasmon} und p_{Plasmon} klein im Vergleich zu den thermischen Größen der Teilchen sind. Die Näherung für den hochfrequenten Zweig $\omega \gg \omega_{\text{pi}}$ können wir direkt aus Gl. (7.45) erhalten, wenn wir den ersten Term der rechten Seite zu Null setzen. Wir erhalten die sogenannte *Bohm-Grass Dispersion*

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + V_e^2 k^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3k_B T_e}{m_e} k^2. \quad (7.46)$$

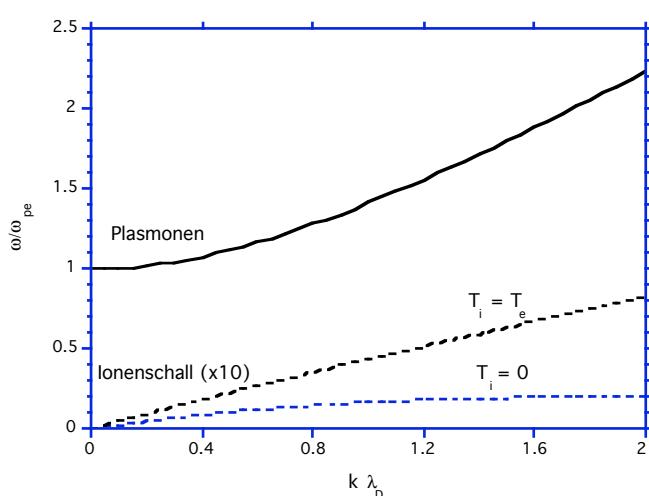
Sie hat eine ganz ähnliche Gestalt wie Dispersionbeziehung (7.37) für die transversalen Wellen, nur ist diesmal an die Stelle der Lichtgeschwindigkeit die wesentlich kleinere, adiabatische Schallgeschwindigkeit der Elektronen getreten. Da diese bei der Schwingung im Feld der Welle nur einen Freiheitsgrad besitzen ist $\gamma_e = 3$ zu setzen. Diese Elektronenschallwellen sind die Verallgemeinerung der Plasmawichungen, die im kalten Plasma ($T_e = 0$) allein übrigbleiben. Der Abb. 7-4 entnehmen wir unmittelbar, daß der Elektronenschall nur eine kleine Gruppengeschwindigkeit (Steigung der oberen Kurve) aufweist; außerdem liegt die Frequenz immer nahe bei der Plasmafrequenz. Wir erinnern ferner daran, daß bei kleiner Wellenlänge ($\lambda < \lambda_D$), d.h. großem k , *Landau-Dämpfung* auftritt (vgl. Kap. 6.2.).

Für den niederfrequenten Zweig erhalten wir aus Gl. (7.45) unter der Annahme $\omega \ll V_e k$

$$\omega^2 = V_i^2 k^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} V_e^2 \frac{k^2}{1 + (V_e^2 / \omega_{pe}^2) k^2}. \quad (7.47)$$

Beachten wir nun, daß $\omega_{pi}^2 / \omega_{pe}^2 = m_e / m_i$ und $\omega_{pe}^2 / V_e^2 = \gamma_e \lambda_D$ mit der Debyelänge $\lambda_D = (\epsilon_0 k_B T_e / n_e e^2)^{1/2}$, so schreibt sich diese Dispersionsbeziehung

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i} \frac{1}{1 + \gamma_e \lambda_D^2 k^2}} k \quad (7.48)$$



die bereits bekannte *Ionenschallgeschwindigkeit*

$$v_{ph} = c_s = \sqrt{\frac{k_B (T_e + 3T_i)}{m_i}} \quad (7.49)$$

Abb. 7-4: Die Dispersionfunktion der elektrostatischen Wellen. Aus darstellungstechnischen Gründen ist der niederfrequente Zweig, der sich für den Fall $T_i = 0$ asymptotisch der Ionenplasmafrequenz ω_{pi} nähert, 10fach vergrößert.

Für kleine k -Werte (d.h. Wellenlängen $> \lambda_D$) handelt es sich um nahezu dispersionslose Wellen ($v_{ph} = v_{Gr}$) mit fast konstanter Phasengeschwindigkeit, die mit $\gamma_e = 1$ (Elektronen: isothermisch) und $\gamma_i = 3$ (Ionen: adiabatisch, ein Freiheitsgrad)

darstellt. Für kleine Wellenlängen ($k \lambda_D \gg 1$) hängt die Phasengeschwindigkeit des niederfrequenten Dispersionszweiges vom Verhältnis T_i/T_e ab. Für $T_i = 0$ verschwindet die Gruppengeschwindigkeit mit $k \rightarrow \infty$, so daß sich *Ionenschwingungen* mit $\omega = \omega_{pi}$ ausbilden können (s. Abb. 7-4 und Gl. (3.4)). In diesem Fall ist der gesamte Bereich $\omega_{pi} < \omega < \omega_{pe}$ für Wellenausbreitung gesperrt.

7.4. Wellen im magnetisierten Plasma

Die hier möglichen Wellentypen hängen von zwei Winkeln ab: θ , dem Winkel zwischen Wellenvektor und äußerem Magnetfeld, und α , dem Winkel, den das E-Feld der Welle mit dem Magnetfeld bildet. Zur Vereinfachung der Diskussion betrachten wir im folgenden nur die vier Kombinationen, in denen diese Winkel 0 bzw. 90° betragen.

7.4.1. WELLENAUSBREITUNG IN RICHTUNG DES MAGNETFELDS

Longitudinalwellen

Wie aus der Übersicht zu Anfang des Kapitels zu ersehen ist, unterteilen sich die Wellentypen mit $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ nochmals in longitudinale und transversale Wellen, je nachdem, ob der E-Feldvektor der Welle parallel oder senkrecht zu \mathbf{B}_0 schwingt. Im ersten Fall ist das statische **Magnetfeld ohne Einfluß** und wir erhalten die gleichen longitudinalen Wellen, wie wir sie im vorangehenden Abschnitt kennengelernt haben.

Transversalwellen

In diesem Falle ist der E-Vektor der Welle senkrecht zu \mathbf{k} und \mathbf{B} und liegt damit in der Gyrationsebene der Teilchen des Plasmas. Wir betrachten nun den Fall, daß eine linear polarisierte Welle in das Plasma einläuft – etwa parallel zur Achse in einer magnetischen Spiegelanordnung. Bekanntlich kann man jede derartige Welle in zwei **entgegengesetzte drehende Zirkularwellen** gleicher Amplitude zerlegen. So ist gemäß

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x \\ = \frac{1}{2} E_0 [\cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y] + \frac{1}{2} E_0 [\cos(kz - \omega t) \vec{e}_x - \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y] \quad (7.50)$$

jede linear polarisierte Welle durch Superposition einer rechts zirkular polarisierten Welle (erste eckige Klammer mit Vorzeichen +) und einer links zirkular polarisierten Welle (zweite eckige Klammer mit Vorzeichen -) darstellbar. Ist $\omega = \omega_{ce}$, so ist die rechts drehende Welle in Resonanz mit den Elektronen, die den gleichen Drehsinn aufweisen. Die Elektronen werden durch die Welle beschleunigt und laufen auf sich erweiternden Spiralbahnen, die schließlich durch Stöße oder die Inhomogenität des Wellenfeldes begrenzt werden. Analoges gilt für die Ionen im Feld der links drehenden Welle bei ihrer Gyrofrequenz $\omega_{ci} = e_i B/m_i$. Anders als bei den zuvor betrachteten Fällen, bei denen lediglich Cut-offs auftraten, kommen jetzt *Resonanzen* hinzu, die das Dispersionsverhalten beeinflussen. Dieses Verhalten ergibt sich auch aus den Lösungen der Gl. (7.16), wenn wir hierin $k \cdot E = 0$ und $V_i = V_e = 0$ setzen. Für hohe Frequenzen ($\omega \gg \omega_{ci}$) braucht man nur die Elektronen zu berücksichtigen. Die Algebra ist dennoch recht umfangreich und kann anhand der allgemeinen Darstellung in Abschnitt 7.2 nachvollzogen werden (Gl. (7.26) und (7.28) für die Geschwindigkeiten). Sie führt uns unmittelbar auf das Appelton-Hartree- Ergebnis für den Spezialfall $\theta = 0$

$$N_{R,L}^2 = \frac{\omega^2 k^2}{c^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 / \omega^2}{1 \mp \frac{\omega_{ce}}{\omega}} . \quad (7.51)$$

Für die Eigenvektoren des E-Feldes findet man die Beziehung

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm i . \quad (7.52)$$

Es handelt sich demnach um **zirkular polarisierte Wellen**. Die Berücksichtigung der Ionen liefert (mit $\omega_{pe}^2/\omega_{pi}^2 = \omega_{ce}/\omega_{ci} = m_i/m_e$) für das Quadrat des Brechungsindexes

$$N_{R,L}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega \pm \omega_{ci})(\omega \mp \omega_{ce})}. \quad (7.53)$$

Für $\omega \gg \omega_{ci}$ fällt dieser Ausdruck mit Gl. (7.51) zusammen. Das obere Vorzeichen im Nenner liefert die **rechts zirkulare Welle (R)**, für die der Brechungsindex bei $\omega = \omega_{ce}$ unendlich wird. Bei den Zyklotronfrequenzen liegt somit **Resonanz** vor. Das untere Vorzeichen ergibt entsprechend die **links zirkulare Welle (L)** mit der Resonanz bei ω_{ci} . Für die **Cut-off-Frequenz** der rechts drehenden Welle erhält man aus $N_R^2 = 0$ die Beziehung

$$\omega_R = \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_{ce} - \omega_{ci})^2}{4} + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}, \quad (7.54)$$

die für sehr kleine Teilchendichten ($\omega_{pe} \ll \omega_{ce}$) in $\omega_R \approx \omega_{ce} + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}$ übergeht, während man im anderen Grenzfall $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$ die Näherung $\omega_R \approx \omega_{pe} + \omega_{ce}/2$ erhält. Die entsprechenden Ausdrücke für die Cut-off-Frequenz der links zirkularen Welle lauten

$$\omega_L = -\frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2} + \sqrt{\frac{(\omega_{ce} - \omega_{ci})^2}{4} + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \quad (7.55)$$

mit den Näherungen $\omega_L \approx \omega_{ci} + \omega_{pi}^2/\omega_{ci}$ für $\omega_{pe} \ll \omega_{ce}$ bzw. $\omega_L \approx \omega_{pe} - \omega_{ce}/2$ für den entgegengesetzten Fall bei sehr hoher Dichte $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$. Der Verlauf des reellen Brechungsindexes für die beiden Wellentypen ist für ein Beispiel mit $\omega_{ce} > \omega_{pe}$ in der Abb. 7-5 dargestellt.

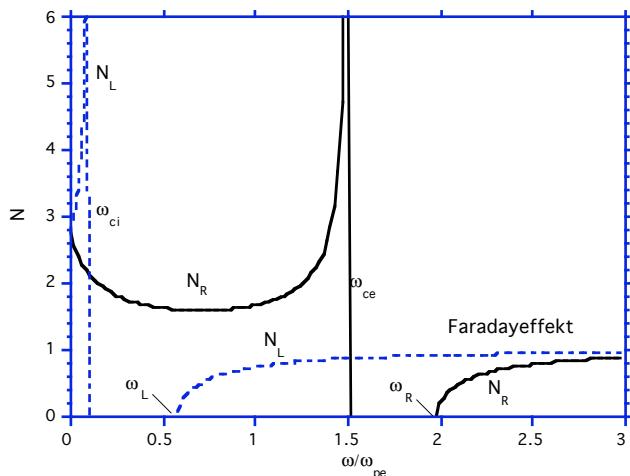


Abb. 7-5: Der Brechungsindex der rechts (R) und links (L) zirkularen Wellen als Funktion der Frequenz bei Ausbreitung $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$. Es wurde $\omega_{ce} = 1,5 \omega_{pe}$ und $\omega_{ci} = 0,2 \omega_{pe}$ angenommen. Man beachte, daß im Intervall $\omega_{ce} < \omega < \omega_R$ keine Ausbreitung von rechts zirkularen Wellen möglich ist. Ebenso gibt es ein "verbotenes Fenster" im Bereich $\omega_{ci} < \omega < \omega_L$ für links zirkulare Wellen.

Die aus dem Brechungsindex $N = c$

k/ω hervorgehende Dispersionsrelation ist in der

Abb. 7-6 (für die gleichen Verhältnisse wie in Abb. 7-5) wiedergegeben.

Eine wichtige Erscheinung ist der auf den unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit für rechts und links polarisierten Wellen beruhende **Faradayeffekt**. Dieser Effekt kann natürlich nur dann auftreten, wenn beide Wellentypen im Plasma propagieren können. Das ist nach Abb. 7-5 insbesondere oberhalb der Cut-off-Frequenz der rechts drehenden Welle der Fall. Der Effekt besteht darin, daß eine linear polarisierte Welle im Plasma eine **Drehung der Polarisationsebene** erfährt. Der Brechungsunterschied der rechts und links drehenden Wellen ergibt sich für $\omega \gg \omega_{pe}$, ω_{ce} aus Gl. (7.53) zu

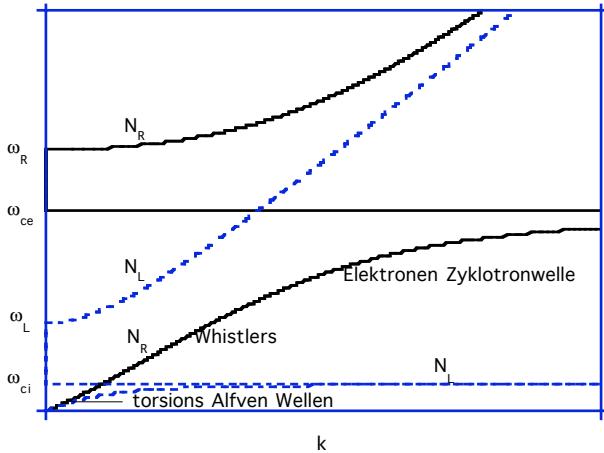


Abb. 7-6: Die Dispersionsrelation bei Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld. Die Zweige der links und rechts polarisierten Wellen haben hoch- und niederfrequente Anteile, für die sich zum Teil spezielle Bezeichnungen eingebürgert haben.

$$N_R - N_L = \Delta N \approx \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega^3} = \frac{e^3}{\epsilon_0 m_e^2} \frac{n_e B}{\omega^3}. \quad (7.56)$$

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, das Produkt $n_e B$ zu messen. Durchläuft eine linear polarisierte Welle mit dem Eintrittsvektor $\vec{E}_{ein} = \vec{e}_x$ ein Plasmagebiet der Länge L , so haben wir beim Austritt den Vektor $\vec{E}_{aus} = \vec{E}_R + \vec{E}_L = \frac{1}{2}(\vec{e}_x \cos \phi_R + \vec{e}_y \sin \phi_R) + \frac{1}{2}(\vec{e}_x \cos \phi_L - \vec{e}_y \sin \phi_L)$. Gegenüber der ursprünglichen x -Richtung hat sich der E-Vektor gedreht um den Winkel $\tan \chi = E_{y,aus}/E_{x,aus} = (\sin \phi_R - \sin \phi_L)/(\cos \phi_R + \cos \phi_L) = \tan[(\phi_R - \phi_L)/2]$. Es gilt also für den Drehwinkel $\chi = (\phi_R - \phi_L)/2$. Die Differenz der Phasenwinkel ergibt sich aus $\phi_R - \phi_L = \int (k_R - k_L) dl = \omega/c \int \Delta N dl$. Für den Drehwinkel χ (in Radian) der Polarisationsebene hat man somit die Relation

$$\chi = \frac{e^3}{2c\epsilon_0 m_e^2 \omega^2} \int_L n_e B dl = 2,62 \cdot 10^{-13} \lambda^2 \int_L n_e B dl, \quad (7.57)$$

wobei L und die Wellenlänge λ in m, die Elektronendichte in m^{-3} und B in Tesla einzusetzen ist. Für ein typisches Fusionsplasma mit $n_e = 0,5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $B = 2 \text{ T}$, $L = 1 \text{ m}$ und einer Laserwellenlänge von $\lambda = 100 \mu\text{m} = 10^{-4} \text{ m}$ ergibt sich ein Drehwinkel von 0,26 rad. Häufig ist die Elektronendichte durch eine zusätzliche Messung (Interferometrie) bekannt, so daß man dann aus der Messung von χ das Magnetfeld ermitteln kann.

Im mittleren Frequenzbereich $\omega_L < \omega < \omega_{ci}$ kann sich nur die rechts zirkulare Welle ausbreiten. Sie ist in diesem Gebiet stark dispersiv, da Phasen- und Gruppengeschwindigkeit proportional zu $\sqrt{\omega}$ sind. Wellen mit hoher Frequenz breiten sich daher schneller aus, als solche mit niedriger. Derartige Wellen wurden insbesondere in der Ionosphäre festgestellt. Sie werden durch Gewitter auf der südlichen (nördlichen) Halbkugel angeregt und laufen dann parallel zum Erdmagnetfeld in die nördliche (südliche) Hemisphäre. Man erkennt sie dort an dem eigentümlichen Pfeifton (daher der Name: [Whistler](#)), den sie aufgrund ihrer Dispersion in Radioempfängern hervorrufen.

Für [sehr kleine Frequenzen](#) ($\omega \rightarrow 0$) geht der allgemeine Ausdruck für den Brechungsindex (7.53) über in

$$N^2 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ci} \omega_{ce}}. \quad (7.58)$$

Die verschiedenen Lösungssäste laufen also zu einem konstanten Wert zusammen, der den Brechungsindex der sogenannten *torsiven Alfvénwellen* beschreibt. Nach Einsetzen der Ausdrücke für die charakteristischen Frequenzen schreibt sich diese Beziehung als

$$N = \sqrt{1 + \frac{m_i n_e}{\epsilon_0 B^2}}. \quad (7.59)$$

Gewöhnlich ist $N \gg 1$, so daß sich für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{c}{N} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_i n_e}} \equiv v_A \quad (7.60)$$

ergibt. Es handelt sich um die sogenannte *Alfvéngeschwindigkeit*. Bei diesen Torsions-Alfvénwellen werden die magnetischen Feldlinien leicht verbogen. Diese Störung pflanzt sich in Richtung des statischen Feldes fort. Da die Frequenzen sehr niedrig sind, handelt es sich um *MHD-Störungen*, bei denen nach Kap. 6.3.3 das Plasma an das Magnetfeld gebunden ist und bei der wechselnden Krümmung der Feldlinien beschleunigt werden muß. In diesem sehr niederfrequenten Bereich spielen die charakteristischen Frequenzen (ω_{ci} , ω_{pe} ...) des Plasmas keine Rolle mehr: Das Plasma wird als eine (unendlich gut) leitende Flüssigkeit mit endlicher Massendichte beschrieben. In der Tat wurden die ersten Experimente zu den Alfvénwellen in Quecksilber durchgeführt. Elektronen und Ionen vollführen dann eine gemeinsame ExB-Driftgeschwindigkeit, die senkrecht zum E-Feld der Welle und zum statischen Magnetfeld ist.

Bei diesen torsiven Alfvénwellen liegt eine Analogie zu der Schwingung einer elastischen Saiten vor. Bei der letzteren ist die Schallgeschwindigkeit gegeben durch $v_s = (S/\rho_1)^{1/2}$, wobei S die Saitenspannung und ρ_1 die Masse pro Längeneinheit ist. Ähnlich kann man sich bei den Alfvénwellen die gekrümmten magnetischen Feldlinien mit Masse der Dichte $\rho = m_i n_e$ beladen denken, die durch die *magnetische Spannung* $S = B^2 / \mu_0$ eine Rückstellkraft erfahren. Wir erhalten so eine anschauliche Ableitung der Alfvéngeschwindigkeit.

Torsions-Alfvén-Wellen im inkompressiblen Medium

Diese Wellen lassen sich leicht aus den Einflüssigkeitsgleichungen ableiten. Unter der Annahme der Inkompressibilität und unendlich guter Leistungsfähigkeit lauten die benötigten Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{Kontinuitätsgl.:} \quad & \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \\ \text{Kraftgl.:} \quad & \rho \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 \\ \text{M2:} \quad & \operatorname{rot} \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_1 \\ \text{M3:} \quad & \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}_1 \\ \text{Ohmsches G.:} \quad & \vec{E}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{B}_0 = 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

Das sind vier Vektorgleichungen und eine skalare. Sie reichen aus, um die vier Störgrößen \mathbf{E}_1 , \mathbf{u}_1 , \mathbf{j}_1 , \mathbf{B}_1 zu berechnen, wenn die Massendichte ρ und das ungestörte Magnetfeld \mathbf{B}_0 vorgegeben werden. Setzen wir das Ohmsche Gesetz in die Maxwellgleichung M3 ein, so können wir das elektrische Feld eliminieren. Ebenso eliminieren wir die Stromdichte, indem wir die Maxwellgleichung M2 in die Kraftgleichung einsetzen. Es ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mu_0 \rho \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} &= -\vec{B}_0 \times \text{rot} \vec{B}_1 \\ \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{u}_1 \times \vec{B}_0) \end{aligned} \quad (7.62)$$

Differenzieren wir nun die erste Gleichung nach der Zeit, so können wir die zweite in diese einsetzen und haben damit auch \vec{B}_1 eliminiert. Es verbleibt die Gleichung

$$\mu_0 \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} = -\vec{B}_0 \times \text{rot} \text{rot}(\vec{u}_1 \times \vec{B}_0). \quad (7.63)$$

Die rechte Seite verwandeln wir mit Hilfe der Identität

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \nabla \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (7.64)$$

und machen die Annahme, daß das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u}_1 wirbelfrei ist, was den ersten Term der rechten Seite verschwinden läßt. Für die Strömungsgeschwindigkeit erhalten wir somit die MHD-Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho} \nabla^2 \vec{u}_1 = 0. \quad (7.65)$$

Gehen wir hier mit den Ansatz $\mathbf{u}_1 = u_x(z, t) \mathbf{e}_x$ hinein, so erhalten wir als allgemeine Lösung für eine ebene Welle:

$$u_x = f(kz - kv_A t) + g(kz + kv_A t), \quad (7.66)$$

wobei f und g beliebige Funktionen sind und v_A die Alfvén -Geschwindigkeit nach Gl. (2.23) ist. Für $f(\phi) = \sin\phi$ bzw. $g(\phi) = \sin\phi$ ergibt sich eine nach rechts bzw. nach links laufende Sinuswelle. Die Größe $\phi = k z \pm k v_A t$ stellt somit die Phase der Welle dar.

Zylinderwellen

Häufig treten die transversalen Alfvén-Wellen als torsive Zylinderwellen in Erscheinung, die sich parallel zum ungestörten Magnetfeld in Achsenrichtung ausbreiten ($k = k_z$, $B_0 = B_z$). Die Strömungsgeschwindigkeit hat dann nur eine azimutale Komponente für die wir den Ansatz $u_1 = u_\theta = A(r) \cos(kz - \omega t)$ mit $\omega = k v_A$ machen. Aus der Gl. (7.65) erhalten wir eine Beziehung für die radiale Abhängigkeit der Amplitude

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} - v_A^2 \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r^2} = 0 \Rightarrow A = c_1 r + \frac{c_2}{r}. \quad (7.67)$$

Lösungen mit $c_2 \neq 0$ divergieren für $r = 0$, so daß $c_2 = 0$ gefordert werden muß. Mit $c_1 = \Omega$ also

$$u_\theta = \Omega r \cos(kz - \omega t)$$

schwingt dann das Plasma in jeder Ebene $z = \text{const.}$ wie ein starrer Körper.

Abb. 7-7: Schwingung des Plasmas bzw. Verbiegung der magnetischen Feldlinien bei einer torsiven Alfvén-Welle auf einer Zylinderfläche. Die Welle breite sich entlang der Zylinderachse mit der Geschwindigkeit $v_A = B_0 (\mu_0 \rho)^{-1/2}$ aus. Die ungestörten Feldlinien sind ebenfalls gezeichnet.



Die Lösung der zweiten Gl. in (7.62) liefert das gestörte Magnetfeld

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = B_0 \operatorname{rot}(u_\theta \vec{e}_r) \Rightarrow \frac{\partial B_\theta}{\partial t} = B_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Rightarrow B_\theta = -B_0 \frac{u_\theta}{v_A}. \quad (7.69)$$

Aus $B_\theta/B_0 = r d\theta/dz$ erhalten wir unter Verwendung von Gl. (7.69) die Gleichung der Feldlinie:

$$\theta(z, t) = -\frac{\Omega}{\omega} \sin(kz - \omega t). \quad (7.70)$$

Ebenso können wir aus $u_\theta = r d\theta/dt$ eine Relation für die Auslenkung der Massenpunkte berechnen; sie ist mit Gl. (7.70) identisch, so daß Magnetfeld und Plasma in Phase miteinander schwingen, wie es die *line-tying* Eigenschaft der allgemeinen MHD-Theorie erwarten läßt (s. Abb. 7-7).

Aus dem Ohmschen Gesetz in Gl. (3.19) erhalten wir auch sofort das elektrische Feld. Es hat nur eine radiale Komponente $E_r = -u_\theta B_0$. Die Strömungsgeschwindigkeit ist demnach eine reine $E \times B$ Drift. Torsive Alve'n-Wellen können daher durch Anlegen eines zeitlich oszillierenden, radialen Feldes an einem Ende des Plasmazylinders angeregt werden.

Schließlich ergibt sich die Stromdichte aus der Maxwellgleichung M2. Sie weist nur eine Komponente in Richtung des ungestörten Feldes auf und ist in jeder Querschnittsebene konstant: $j_z = -2 \mu_0 \Omega B_0 \cos(kz - \omega t)$.

7.4.2. WELLENAUSBREITUNG SENKRECHT ZUM MAGNETFELD

E-Vektor parallel zu B

Hier haben wir wieder die einfachen Verhältnisse wie im unmagnetisierten Plasma. Es können sich transversale elektromagnetische Wellen ausbreiten, wie wir sie im Kap. 7.7.1 erläutert haben. Man bezeichnet diesen Wellentyp häufig auch als *o-Mode* oder *ordentliche Welle*.

E-Vektor senkrecht zu B

In diesem Fall ist im allgemeinen eine Unterscheidung in transversale oder longitudinale Welle nicht mehr möglich, da beide Typen miteinander vermischt sind. Dieser Wellentyp wird als *x-Mode* oder *außerordentliche Welle* bezeichnet. Nach Vereinbarung sei wie bisher $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ und nun $\vec{k} = k \vec{e}_x$. Für das E-Feld und die Geschwindigkeiten müssen wir Komponenten in der x-y Ebene zulassen. Aus den Gleichungen W2 und W3 in Gl. (7.16) erhalten wir analog zur Beziehung (7.27) die Geschwindigkeiten

$$\vec{u}_i = \frac{i e \omega}{m_i (\omega^2 - \omega_{ci}^2 - k^2 V_i^2)} \begin{pmatrix} 1 & i \omega_{ci} / \omega \\ -i \omega_{ci} / \omega & 1 - \frac{k^2 V_i^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_e = \frac{-i e \omega}{m_e (\omega^2 - \omega_{ce}^2 - k^2 V_e^2)} \begin{pmatrix} 1 & -i \omega_{ce} / \omega \\ +i \omega_{ce} / \omega & 1 - \frac{k^2 V_e^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (7.71)$$

Eingesetzt in Gl. (2.23) W1 liefert die Beziehung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} - \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_{ce}^2 / \omega^2 - k^2 V_e^2 / \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & -i \omega_{ce} / \omega \\ i \omega_{ce} / \omega & 1 - k^2 V_e^2 / \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} - \frac{\omega_{pi}^2}{1 - \omega_{ci}^2 / \omega^2 - k^2 V_i^2 / \omega^2} \begin{pmatrix} 1 & i \omega_{ci} / \omega \\ -i \omega_{ci} / \omega & 1 - k^2 V_i^2 / \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (7.72)$$

Für ein Zweikomponentenplasma kann man hierin wegen $\omega_{pi}^2/\omega_{pe}^2 = m_e/m_i Z^2 n_i/n_e = m_e/m_i Z = \omega_{ci}/\omega_{ce}$ (Quasineutralität $n_e = Z n_i$) die Ionenplasmafrequenz eliminieren. Die Eigenwerte der Gleichung (7.72) führen zu einer Gleichung dritten Grades in $N^2 = c^2 k^2/\omega^2$. Hierfür ist die allgemeine Lösung sehr unhandlich. Es ergeben sich *elliptisch polarisierte Wellen* ($E_x/E_y = \text{komplexe Zahl}$). Wegen der algebraischen Probleme beschränkt man sich in der Regel mit der Lösung für das **kalte Plasma** ($V_e = V_i = 0$). Diese Lösungen werden allerdings für kleine Phasengeschwindigkeiten $v_{ph} \leq V_i$ unbrauchbar. Für dieses kalte Plasma lautet die Dispersionsgleichung

$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)}{(\omega^2 - \omega_U^2)(\omega^2 - \omega_O^2)}. \quad (7.73)$$

Es gibt somit die **zwei schon bekannten Cut-off-Frequenzen ω_L und ω_R** und zwei Resonanzfrequenzen ω_U und ω_O , die man als *untere und obere Hybridresonanzen* bezeichnet. Letztere sind durch die Beziehungen

$$\omega_O^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \quad (7.74)$$

und

$$\frac{1}{\omega_U^2} = \frac{1}{\omega_{pi}^2 + \omega_{ci}^2} + \frac{1}{\omega_{ci} \omega_{ce}} \quad (7.75)$$

gegeben. Beide Resonanzfrequenzen sind im allgemeinen noch Funktionen der Dichte und des Magnetfelds. Führt man die Abkürzungen $y = \omega_U/\omega_{ci}$ und $x = \omega_{pi}/\omega_{ci}$ ein, so lautet die Gleichung für die untere Hybridfrequenz bei einfachgeladenen Ionen $1/y^2 = 1/(1+x^2) + 1/(m_i/me)$. Für $x^2 \gg m_i/me \geq 1836$ entfällt damit der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (7.75), und man erhält die Näherung $\omega_U = (\omega_{ci} \omega_{ce})^{1/2}$. Insgesamt lassen sich vier Bereiche unterscheiden

$$\omega_U = \begin{cases} \sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}} & \text{falls } \omega_{pi}^2 / \omega_{ci}^2 \gg \omega_{ce} / \omega_{ci} = Z_i m_i / m_e \\ \frac{\omega_{pi} \omega_{ce}}{\sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}} & \text{falls } 1 \ll \omega_{pi}^2 / \omega_{ci}^2 \ll Z_i m_i / m_e \\ \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{\omega_{pi}^2 + \omega_{ci}^2}} & \text{falls } 1 < \omega_{pi}^2 / \omega_{ci}^2 < \sqrt{Z_i m_i / m_e} \\ \sqrt{\omega_{pi}^2 + \omega_{ci}^2} & \text{falls } \omega_{pi}^2 / \omega_{ci}^2 < 1 \end{cases}. \quad (7.76)$$

Bei den Fusions-Heizexperimenten im unteren Hybridbereich befindet man sich gewöhnlich im zweiten Bereich von oben. Bei der unteren Hybridresonanz kommt es zu **gekoppelten Schwingungen der Elektronen und Ionen** (daher der Name: hybrid (lat.) = gemischt, zwittrhaft). Eine Auswertung der Gl. (7.71) zeigt, daß hier die Elektronen und Ionen auf elliptischen Bahnen in der x-y-Ebene umeinander laufen. Während die Ionenbahn einer kleinen Ellipse entspricht, ist die Ellipse der Elektronen wesentlich größer, wird allerdings auch entsprechend rascher durchlaufen ($v_e/v_i = (m_i/m_e)^{1/2}$). Diese Verhältnisse sind in der Abb. 7-8 veranschaulicht. Die Ionen schwingen wegen der Polarisationsdrift im wesentlichen in Richtung des E-Feldes; die Bewegung Elektronen dagegen ist stark durch die ExB-Drift bestimmt. Es kommt zu einer starken Kopplung zwischen den Elektronen und Ionen bei der Energie zwischen beiden Teilchen ausgetauscht werden kann. Diese starke Kopplung zwischen Ionen und Elektronen ist im Rahmen der Fusionsforschung sehr erwünscht, da hierdurch bei Einkopplung von unteren Hybridwellen auch die Ionen geheizt werden. **In der Nähe der Hybridfrequenzen werden die außerordentlichen Wellen longitudinal** (d.h. $E_y = 0$), während sie im allgemeinen elliptisch polarisiert sind.

In der Abb. 7-9 stellen wir schließlich wieder die Dispersionsbeziehung graphisch dar, wie sie aus der Gl. (1.2) hervorgeht. Hierin ist die Dispersionsbeziehung für die zu Anfang des Kapitels erwähnte ordentliche Welle nicht enthalten.

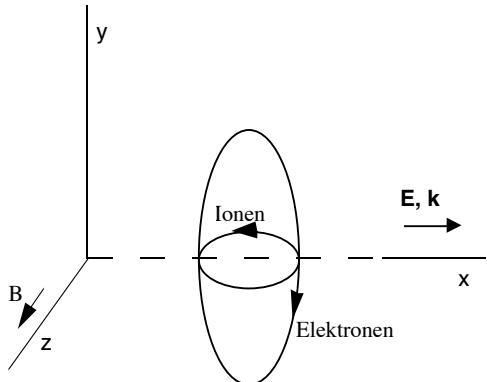


Abb. 7-8: Bewegung der Elektronen und Ionen bei der unteren Hybridresonanz. E -Feld und k -Vektor weisen in x -Richtung. Die Teilchen bewegen sich auf Ellipsen in der x - y -Ebene senkrecht zu B . Die überlagerte schnelle Gyrbewegung der Elektronen ist nicht wiedergegeben.

Grundsätzlich ist bei der Interpretation der Hybrid-Resonanzstellen große Vorsicht geboten, da ja dort, entgegen unseren Annahmen, die Phasengeschwindigkeit gegen null strebt. In der Tat werden die Resonanzen bei der oberen Hybridfrequenz weder durch die "kalte Theorie" noch durch die "warne Theorie" hinreichend gut beschrieben. Eine genauere kinetische Berechnung des Dielektrizitätstensors (d.h. der Leitfähigkeiten unter Verwendung von Maxwell-Verteilungen) zeigt, daß die *wa h r e n h o c h f r e q u e n t e n T e i l c h e n r e s o n a n z e n*, bei denen die Elektronen maximal geheizt werden, nicht, wie abgeleitet, bei der oberen Hybridfrequenz $\omega_0 = (\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$ (Kopplung zwischen den Schwingungen im elektrischen Raumladungsfeld und den Gyrationen im B -Feld), sondern *i m m e r b e i d e r E l e k t r o n e n - Z y k l o t r o n f r e q u e n z ω_{ce} a u f t r e t e n*.

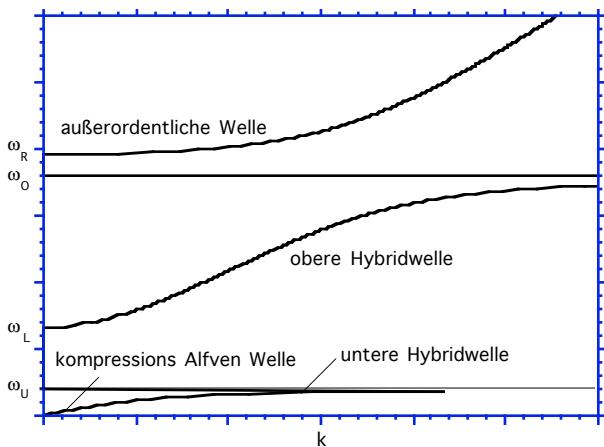


Abb. 7-9: Die Dispersionsbeziehung bei Wellenausbreitung senkrecht zu B und $E \perp B$ für die Verhältnisse wie in Abb. 7-5 und Abb. 7-6

Bei s e h r k l e i n e n F r e q u e n z e n ($\omega \ll \omega_{ci}$) beschreibt die Lösung nach Gl. (7.73) wiederum eine *Alfvénwelle*, die aber diesmal **v o m k o m p r e s s i v e n T y p** ist. Im

Unterschied zu der zuvor behandelten torsiven Alfvénwelle tritt hier keine Verzerrung der Feldlinien auf, sondern eine abwechselnde Verdichtung und Verdünnung der magnetischen Feldstärke. Man bezeichnet diese longitudinale Welle daher auch häufig als *magnetokustische Welle*. Die rücktreibenden Kräfte sind dann durch den magnetischen Druck (anstelle der magnetischen Spannung) bedingt. Auch in diesem Fall ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Alfvéngeschwindigkeit nach Gl. (7.60) gegeben.

Insgesamt sind die Phasengeschwindigkeiten bei Ausbreitung parallel und senkrecht zum Magnetfeld in der Abb. 7-10 zusammengefaßt. Die schraffierten Bereiche geben die Verhältnisse für die Zwischenwinkel $0 < \theta < 90^\circ$ wieder. $V_{sp} = [\gamma k_B(T_e + T_i)]^{1/2}$ ist die sogenannte Plasmaschallgeschwindigkeit:

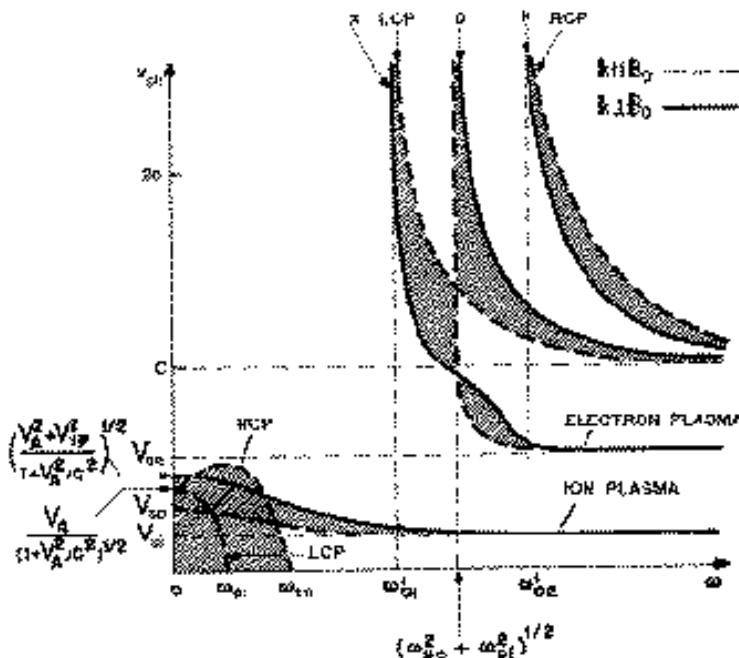


Abb. 7-10: Die Phasengeschwindigkeiten der verschiedenen Wellen bei Ausbreitung \parallel und \perp zum statischen Magnetfeld (n. J. A. Bittencourt, Fundamentals of Plasmaphysik, Pergamon Press).

7.5. Abschließende Bemerkungen zu den Plasmawellen

Die vorausgehende Darstellung der Wellenphänomene in Plasmen ist in vielen Punkten sehr vereinfacht. Auf die folgenden, in der Praxis häufig auftretenden Probleme, sei daher noch kurz hingewiesen:

- **Wellenausbreitung in endlichen Plasmen:** Wellenlänge \geq Plasmaausdehnung. In diesem Fall sind alle Gleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen zu lösen. Es kann dabei u.a. zu Verschiebungen der Resonanz- und Cut-off Bedingungen kommen. So findet man z.B., daß die maximale Reflexion einer seitlich auf ein zylindrisches Plasma einfallenden Welle mit $r < \lambda$ nicht bei der Cut-off-Frequenz ω_{pe} stattfindet, sondern sonder zu $2^{-1/2} \omega_{pe}$ verschoben ist (s. Buch: Krall und Trivelpiece S. 157 -160).
- **Inhomogene Plasmen:** Sofern die Gradientenlängen groß im Vergleich zur Wellenlänge sind, kann man die sogenannte WKB-Methode zur Berechnung der Wellenpropagation heranziehen. Im wesentlichen wird dabei der Phasenterm $k \cdot x$ durch $\int k dx$ ersetzt. Es können insbesondere *Tunneleffekte* auftreten, wobei die Welle verbotene Gebiete (cut-off) überbrücken kann, sofern diese von der Ausdehnung nicht wesentlich größer als die Wellenlänge sind.
- **Mehrere Ionensorten:** In magnetisierten Plasmen können insbesondere zahlreiche Ionen-Ionen-Hybridresonanzen auftreten.
- **Dämpfung:** Neutrale Atome und nicht vollständig ionisierte Ionen können über Anregungs- und Ionisierungsstöße bei den Elektronen zur dissipativen Dämpfung der Wellen führen. Auch die Ionenbewegung wird durch die Reibung mit anderen schweren Teilchen gedämpft. Daneben unterliegen die longitudinalen Wellen bei $\lambda < \lambda_{Debye}$ sehr starker Landau-Dämpfung.
- **Modenkonversion:** Kreuzen sich die Dispersionskurven zweier Wellentypen, so kann sich eine Welle in den anderen Typ umwandeln. Diese Modenkonversion kommt insbesondere in inhomogenen Plasmen vor. So kann beispielsweise eine von der Torusaußenseite in einen Tokamak eingekoppelte HF-Welle (v einige GHz) zunächst weitgehend senkrecht zu B nach innen laufen, bis sie die Zone der unteren Hybridfrequenz erreicht ($\omega = \omega_U$). Dort wird der k -Vektor sehr stark in Richtung des Magnetfelds gedreht, so daß die Welle dann praktisch parallel zu B propagierte. Die Welle kann nun direkt durch Elektronen-Landau-Dämpfung gedämpft werden. Ist jedoch die Temperatur hinreichend niedrig, so wird sie sich zunächst in eine links

zirkular polarisierte Welle verwandeln, die dann über Ionen-Landau-Dämpfung ihre Energie ans Plasma abgibt.

8. LITERATUR

Einführungen in die Plasmaphysik

F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*
Plenum Press, New York 1984

R. J. Goldstone and P.H. Rutherford, *Introduction to Plasmaphysics*
IOP-Publishing Company, Bristol (1995)

R. Dendy (ed.), *Plasma Physics: an Introductory Course*
Cambridge University Press 1993

L. A. Artsimovich, R. Z. Sagdeev: *Plasmaphysik für Physiker*
B. G. Teubner, Stuttgart 1983

L.A. Arzimovich: *Elementary Plasma Physics*
Blaisdell Publ. Comp., London 1965

K. Hübner, *Einführung in die Plasmaphysik*
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1982

R. Kippenhahn, C. Möllenhoff, *Elementare Plasmaphysik*
BI Wissenschaftsverlag, Mannheim 1975

L. Spitzer Jr., *Physics of Fully Ionized Gases*
Interscience Tracts on Physics and Astronomy, No. 3, New York 1962

N. A. Krall, A. W. Trivelpiece: *Principles of Plasmaphysics*
McGraw-Hill Book Company, New York 1974

G. Schmidt: *Physics of High Temperature Plasmas*
2nd Edition, Academic Press, New York 1979

T.J.M. Boyd, J.J. Sanderson: *Plasma Dynamics*
Thomas Nelson Sons Ltd., London 1969

D.J. Rose, M.C. Clark, *Plasmas and Controlled Fusion*
J. Wiley and Sons, New York 1961

D. A. Frank-Kamenetskii, *Plasma the Fourth State of Matter*
Macmillan Press LTD, London 1972

H. W. Bartels et al. , *Lectures on PlasmaPhysics*
Manuskript, Summer University for plasmaphysics
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching 1993

J. Winter et al., *Moderne Probleme der Plasmaphysik*
Manuskript: Ferienkurs 1989 der Kernforschungsanstalt Jülich

F. Cap, *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*
Springer-Verlag, Wien-New York 1994

Plasmadiagnostik und Astrophysik

I.H. Hutchinson, *Principles of Plasma Diagnostics*
Cambridge University Press 1987

R. K. Janev, W. D. Langer, K. Evans, D.E. Post,Jr.,
Elementary Processes in Hydrogen and Helium Plasmas
(Cross-sections and rate coefficients), Springer-Verlag, Berlin 1987

I.I. Sobelman, *Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines*
Springer-Verlag, Berlin 1981

H. Griem: *Plasma Spectroscopy*
McGraw-Hill Book Company 1984

H. Griem: *Spectral Line Broadening by Plasmas*
Academic Press, New York, London 1974

G. Marr, *Plasma Spectroscopy*
Elsevier Publishing Company, Amsterdam,-London-N.Y. 1968

R. H. Huddelstone, S. L. Leonard, *Plasmadiagnostic Techniques*
Academic Press, N. Y., 1965

X-ray plasma spectroscopy and properties of multi-charged ions
Edited by I.I. Sobelman, Nova Science Publishers Vol. 179, 1988

Lochte-Holtgreven, *Plasma Diagnostics*
North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1968

A. Unsöld, *Physik der Sternatmosphären*
Springer-Verlag, Berlin 1968

H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*
Oxford University Press 1963

R.W. Motley, *Machines*
Academic Press, New York-San Francisco-London 1975

Plasmatechnologie und Physik der elektrischen Entladungen

A. Rutscher, H. Deutsch, *Plasmatechnik–Grundlagen und Anwendungen*
Carl Hanser Verlag, München, Wien 1984

K. Wiesemann, *Einführung in die Gaselektronik*
Teubner Studienbücher 1976

R. N. Franklin, *Plasma Phenomena in Gas Discharges*
Clarendon Press, Oxford 1976

M. Venugopalan, *Reactions under plasma conditions*
Vol. I-III, Wiley-Interscience, New York 1971

W. Rieder, *Plasma und Lichtbogen*
Vieweg und Sohn, Braunschweig 1972

G. Janzen, *Plasmatechnik*
Hüthig Buch Verlag Heidelberg (1992)

R. Suryanarayanan, *Plasma Spraying - Theory and Applications*
World Scientific, Singapore-New Jersey-London 1993

Plasmatheorie, Simulationen und Plasmawellen

K.H. Spatschek: *Theoretische Plasmaphysik*
Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart, 1990

R. Balescu: *Transport Processes in Plasmas*
North-Holland, Amsterdam 1988

G. Bateman: *MHD Instabilities*
MIT Press, Cambridge 1978

G. Ecker: *Theory of Fully Ionized Plasmas*
Academic, New York 1972

T. H. Stix: *The Theory of Plasma Waves*
McGraw-Hill, New York 1962

B. Lehnert: *Dynamics of Charged Particles*
North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964

J. Blum, *Numerical simulation and optimal control in plasma physics*
Wiley/Gauthier-Villars Series in modern applied mathematics, Chichester 1989

Y.N. Dnestrovskii, D.P. Kostomarov, *Numerical Simulation of Plasmas*
Springer-Verlag, Berlin 1982

R. Cross, *An introduction into Alfvén Waves*
Adam Hilger Series on Plasma Physics, Bristol 1988

Ebeling/Förster/Fortov et al., *Thermophysical Properties of Hot Dense Plasmas*
Bd.25, Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart-Leipzig 1991

Ebeling/Förster/Radtke, *Physics of Non-Ideal Plasmas*
Bd. 26, Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart-Leipzig 1992

P.A. Sturrock, *Plasma Physics*
Cambridge University Press 1994

S. Ortolani, D.D. Schnack, *Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation*
World Scientific, London 1993

Umfangreichere Lehrbücher und Handbücher
Reviews of Plasma Physics, Edited by Acad. M.A. Leontovich,
Vol. I bis VIII, Consultant Bureau, New York 1966

F.L. Hinton, in: *Handbook of Plasma Physics*
A.A. Galeev and R.N. Sudan Eds., North-Holland, Amsterdam 1984

F. Cap: *Plasmaphysik I bis III*
Vieweg-Verlag, Braunschweig 1970

J.A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*
Pergamon Press, Oxford-Frankfurt 1988

W.K.H. Panofsky u. M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*
Addison-Wesley Publ. Comp., London-Amsterdam 1962

J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*
John Wiley & Sons, New York 1975

R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*
Addison-Wesley Publ. Comp., London 1965

Kernfusion

U. Schumacher, *Fusionsforschung – Eine Einführung*
Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1993

J. Raeder u. a.: *Kontrollierte Kernfusion*
Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart 1981

J. Wesson, *Tokamaks*
Oxford Engineering Science Series 20, Clarendon Press, Oxford 1987

T. J. Dolan: *Fusion Research*
Pergamon Press, New York 1982

K. Miyamoto: *Plasma Physics for Nuclear Fusion*
MIT Press Cambridge 1980

W. M. Stacey Jr., Fusion:
An Introduction to the Physics and Technology of Magnetic Confinement Fusion
J. Wiley and Sons, New York 1984

R. A. Gross: *Fusion Energy*
J. Wiley and Sons, New York 1984

E. Teller: *Fusion, Magnetic Confinement*
Academic Press, New York 1981

T. Kammash, *Fusion reactor physics, principles and technology*
Ann Arbor Science Publisher Inc., Mich. 48106, 1975

K.H. Spatschek und J. Uhlenbusch: *Contributions to High-Temperature Plasma Physics*
Akademie-Verlag Berlin,