

Optische Nachrichtentechnik

P. Meißner

SS 2003

Inhaltsverzeichnis

I	Passive Elemente der optischen Nachrichtentechnik	I
1	Einführung	1.1
2	Systemgrundlagen	2.1
2.1	Dämpfung, Pulsdauer und Bandbreite	2.3
3	Die Maxwell-Gleichungen	3.1
3.1	Die Maxwell-Gleichungen für ein lineares Dielektrikum	3.4
3.1.1	Die Ausbreitungsgleichung für ein Dielektrikum	3.9
3.1.2	Die Wellengleichung für inhomogene Dielektrika	3.10
3.1.3	Die Wellengleichung für konstante ε	3.10
3.1.4	Lösung der Wellengleichung (Ebene Welle)	3.11
3.1.4.1	Jones Vektoren	3.12
3.1.4.2	Poincaré Kugel	3.13
3.2	Die Maxwellgleichungen für ein nichtlineares Dielektrikum	3.15
4	Dielektrische Grenzflächen	4.1
4.1	Randbedingungen für dielektrische Grenzschichten	4.3
4.2	Wellen an dielektrischen Grenzschichten	4.6
4.2.1	Snelliussches Gesetz	4.6
4.3	Die Fresnellschen Gleichungen	4.6
4.3.1	Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle steht senkrecht zur Einfallsebene	4.6
4.3.2	Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle liegt in der Einfallsebene	4.9
4.3.3	Diskussion der Reflexionsfaktoren	4.12
4.4	Wellenbild der totalen Reflexion	4.14
5	Reflexionen an dielektrischen Mehrfachschichten	5.1
6	Fabry-Pérot Interferometer	6.1

7	Filmwellenleiter	7.1
7.1	Ableitung der Wellengleichung	7.1
7.2	Der Ausbreitungsvektor β	7.4
7.3	Die Eigenwerte für den Filmwellenleiter	7.6
7.4	Der symmetrische Film-Wellenleiter	7.13
7.5	Optische Modenführung	7.14
7.5.1	Intuitives Bild eines Modes	7.17
7.6	Eigenschaften von Moden	7.19
7.7	Die Anzahl der geführten Moden im Wellenleiter	7.20
8	Wellenleitermaterialien	8.1
8.1	Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex	8.1
8.2	Dämpfung von Wellenleitern	8.4
8.2.1	Absorption	8.4
8.2.2	Streuung in dielektrischen Materialien	8.6
9	Übertragung von Pulsen in Dispersiven Medien	9.1
9.1	Das monochromatische Feld	9.2
9.2	Ein schmalbandiges Signal	9.2
9.3	Ein breitbandigeres Basisbandsignal	9.3
9.4	Breitbandige Gaußpulse	9.6
9.5	Puls mit eingebauten Prechirp	9.9
10	Dispersion eines dielektrischen Wellenleiters	10.1
10.1	Materialdispersion	10.1
10.2	Strahl- bzw. Modendispersion	10.2
10.3	Wellenleiterdispersion	10.6
10.4	Die normierten Ausbreitungsparameter	10.8
11	Strahlenoptische Behandlung eines Gradienten-Wellenleiters	11.1
11.1	Ableitung der Eikonalgleichung	11.3
11.2	Ableitung der Ausbreitungsgleichung für den Gradienten Filmwellenleiter	11.4
11.2.1	Lösung der Ausbreitungsgleichung für α -Profile	11.7
11.2.1.1	Lösung der Ausbreitungsgleichung für $\alpha = 2$	11.8
11.2.1.2	Bestimmung des Umkehrpunkts für beliebiges α -Profil	11.9
11.2.1.3	Bestimmung der optischen Weglänge bis zum Umkehrpunkt	11.10
11.2.1.4	Berechnung des optimalen Profils des Brechungsindex	11.10
12	Wellentheoretische Behandlung dielektrischer Wellenleiter	12.1
12.1	Näherungsweise Beschreibung der Wellenausbreitung in Stufenindex-Fasern	12.2
12.1.1	Ermittlung der Randbedingungen	12.3

12.1.2	Lösung der Wellengleichung	12.5
12.1.2.1	Lösung der charakteristischen Gleichung	12.9
12.1.2.2	Ermittlung des Gruppenindex	12.11
12.1.2.3	Anzahl der ausbreitungsfähigen Moden	12.17
12.1.3	Ermittlung der Dispersion	12.18
13	Dämpfung einer Monomodefaser	13.1
14	Monomodale Fasern	14.1
15	Der Gauß'sche Strahl	15.1
15.1	Spezialfall: Homogenes Dielektrikum	15.6
15.2	ABCD-Gesetz	15.7
15.2.1	ABCD-Matrix einer Freistrahlausbreitung	15.9
15.2.2	ABCD-Matrix einer dünnen Linse	15.9
15.3	Ankopplung einer Faser an einen Laser	15.11
16	Polarisationsmodendispersion (PMD)	16.1
16.1	Das „Principal-States-Model“	16.2
II	Aktive Bauelemente und Systeme der optischen Nachrichtentechnik	16.6
18	Halbleiterkristalle[1, 2, 3, 4]	18.1
18.1	Periodizität eines Kristalls	18.1
18.2	Fundamentale Gitterarten	18.4
18.2.1	Die Diamantstruktur und die Zinkblende Struktur	18.6
18.2.2	Die Miller-Indizes	18.7
18.3	Übergitter und Quantentöpfe	18.9
18.4	Gitterfehlstellen in Halbleitern	18.10
19	Halbleitereigenschaften[1, 2, 3, 4, 5]	19.1
19.1	Elektronen im Halbleiter	19.3
19.1.1	Einführung	19.3
19.1.2	Welle Teilchen Dualismus	19.3
19.1.3	Die Beschreibung der Bewegung eines Elektrons im Feld	19.4
19.1.4	Das freie Elektron [1]	19.6
19.1.4.1	Charakteristische Zeitkonstanten und Längen für Elektronen im Halbleiter	19.7
19.1.4.1.1	Die De Broglie Wellenlänge	19.7
19.1.4.1.2	Die freie Weglänge	19.8

19.1.4.2	Zustandsdichte des freien Elektrons für dreidimensionale Systeme[1, 2, 3, 4]	19.9
19.1.4.3	Ein eindimensionales Kastenpotential	19.9
19.1.4.4	Das eindimensionale Kristallgitter[1, 6]	19.13
19.2	Dreidimensionale Kristalle	19.17
19.2.1	Bandstruktur von GaAs	19.17
19.2.2	Bandstruktur von InP	19.19
19.3	Zustandsdichten für ein parabolisches Band	19.20
19.4	Mischkristalle	19.21
19.4.1	Mischkristalle	19.21
19.4.2	Heterostrukturen	19.22
19.5	Zustände für Fremdatome	19.23
19.6	Besetzungswahrscheinlichkeiten	19.24
19.6.1	Besetzung im thermodynamischen Gleichgewicht für intrinsische Halbleiter	19.24
19.6.2	Besetzungsdichten bei dotierten Halbleitern	19.27
19.7	Ermittlung des Fermi-niveaus	19.28
19.7.1	Eigenhalbleiter	19.28
19.7.2	Störstellenhalbleiter	19.30
19.7.3	Temperaturverhalten von Halbleiter	19.34
19.8	Zusammenhang zwischen Ladungsträgerdichte und elektrostatischem Potential ¹	19.35
19.9	Die Poisson Gleichung	19.37
19.10	Absorption	19.40
19.11	Rekombination	19.40
19.12	Ladungsträgertransport	19.44
19.12.1	Driftstrom	19.44
19.12.2	Diffusionsstrom	19.45
19.12.3	Die Kontinuitätsgleichung	19.46
19.12.4	Beispiel: Photowiderstand	19.48
19.12.5	Gleichmäßige Beleuchtung	19.49
19.13	Quasi-Fermi-niveaus	19.52
19.14	Halbleiterübergänge ²	19.53
19.14.1	pn-Übergang ohne anliegende Spannung[7]	19.53
19.14.1.1	Stromdichten	19.55
19.14.1.2	Ermittlung des Potentialverlaufs	19.57

¹Vorsicht! Das elektrostatische Potential ist nicht mit dem mikroskopischen periodischen Potential zu verwechseln. Man spricht hier auch vom Makropotential im Vergleich zu dem Mikropotential, das durch das Kristallgitter erzeugt wird.

² Seine Eigenschaften können auch leicht aus dem Grenzwert für Heteroübergänge abgeleitet werden.

19.14.1.3 pn-Übergang mit anliegender Spannung	19.60
19.14.2 p-N Übergang ohne anliegende Spannung	19.63
19.14.2.1 Stromdichten	19.65
19.14.2.2 Ermittlung des Potentialverlaufs	19.66
19.14.3 pN-Übergang mit angelegter Spannung	19.68
19.14.4 Doppelheterostrukturen	19.70
19.14.5 Isotrope Übergänge	19.71
20 Lumineszenz Dioden (LED)	20.1
20.1 Kennlinie	20.1
20.2 Modulationsverhalten	20.4
20.3 Bauformen	20.6
21 Fabry-Pérot-Laser	21.1
21.1 Spontane Emission, stimulierte Emission und Absorption	21.1
21.1.1 Spontane Emission	21.1
21.2 Der Absorptionskoeffizient	21.3
21.2.1 Verstärkung	21.5
21.3 Der optische Resonator	21.6
21.4 Die Bilanzgleichungen	21.8
21.5 Die Näherung des Füllfaktors	21.9
21.6 Stationäre Kennlinie	21.9
21.7 Schwellstromdichte	21.10
21.8 Ausgangsleistung	21.11
21.9 Axialer Intensitätsverlauf	21.13
21.10 Laserstrukturen	21.13
21.10.1 Indexgeführte Laserstrukturen	21.14
21.10.2 Gewinngeführter Laser	21.16
21.11 Optisches Spektrum	21.16
21.12 Modulationsverhalten	21.20
21.13 Frequenzmodulation	21.24
22 Monomodale Laser	22.1
22.1 Bragg Reflektoren	22.5
22.2 Ein Bragg Gitter mit 90° Verschiebung	22.6
22.3 DFB-Laser	22.7
23 Ratengleichung mit Langevin-Kräften	23.1

24 pin-Photodioden[8]	24.1
24.1 Absorption	24.1
24.2 Photoströme	24.3
24.3 Pin Photodiode	24.4
25 Erbium dotierter Faserverstärker	25.1
25.1 Absorption und Emission	25.3
25.2 Einfaches Modell Der Übergänge eines Er dotierten Verstärkers	25.5
25.2.1 Ermittlung der stationären Anzahl der Ladungsträger auf den einzelnen Niveaus	25.6
25.3 Verstärkung der einzelnen Signale	25.7
25.4 Verstärkte spontane Emission	25.9
25.5 Zusammenfassung der Ausbreitungsgleichungen	25.10
A Formelsammlung	A.1
A.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen	A.1
A.2 Besselfunktionen	A.2
A.3 Vektorbeziehungen, Integraltheoreme	A.3
A.4 Zusammenhang der einzelnen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke für eine Welle	A.6
B Anhang zur Berechnung der Eigenschaften eines Gradientenwellenleiters	B.1
B.1 Bestimmung des Umkehrpunkts für beliebiges α -Profil	B.1
B.2 Bestimmung der optischen Weglänge bis zum Umkehrpunkt	B.2
C Wellentheoretische Behandlung dielektrischer Wellenleiter	C.1
C.1 Versuch einer exakten Ableitung der Wellenausbreitung in Stufenindex-Fasern	C.1
C.1.1 Schwach führende Fasern	C.13
D Ableitung der Gleichung für die effektive Fläche einer Monomodefaser	D.1
E Ausbreitung eines idealen NRZ-Pulses über eine Faser	E.1
F Störungsrechnung [9]	F.1
I Komponentenschreibweise der Tensorgleichung	I.1
J Messung der Leitfähigkeit	J.4

K Zustandsdichte des freien Elektrons für dreidimensionale Systeme[1, 2, 3, 4]	K.1
L Lösung der Schrödingergleichung für das eindimensionale Kristallgitter[1, 6]	L.1
M Lösung des Problems für den eindimensionalen Potentialtopf	M.1
M.1 Der Potentialtopf endlicher Höhe	M.1
M.2 Der Potentialtopf unendlicher Höhe	M.3
N Matrixmethode zur Berechnung von MQWs	N.1
O Die Fermiverteilung	O.1
O.1 Ableitung der Fermiverteilung [10]	O.1
O.1.1 Ermittlung der Anzahl der Möglichkeiten, N Elektronen auf n Energieniveaus anzuordnen	O.2
O.1.2 Ermittlung der Verteilung mit Hilfe der Lagrangschen Multiplikatoren	O.3
O.1.2.1 Fermiverteilung für freie Elektronen	O.5
O.1.2.2 Die Fermiverteilung für Donatoren	O.5
O.1.2.3 Die Fermiverteilung für Akzeptoren	O.5
O.2 Lösung des Fermi-Integrals	O.6
O.2.1 Lösung für $a = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_F > 0$	O.6
O.2.2 Approximation für die Lösung des Fermiintegrals nach [6]	O.7
P Die Boltzmann Transport Gleichung	P.8
Q Daten von Halbleitern[6]	Q.10
R Formelsammlung zu ONT II	R.1

Teil I

Passive Elemente der optischen Nachrichtentechnik

Kapitel 1

Einführung

Die optische Nachrichtentechnik beschäftigt sich mit der Informationsübertragung mit der Hilfe von Licht. Licht ist eine elektromagnetische Welle. Der Spektralbereich der elektromagnetischen Wellen ist in Bild 1.1 dargestellt.

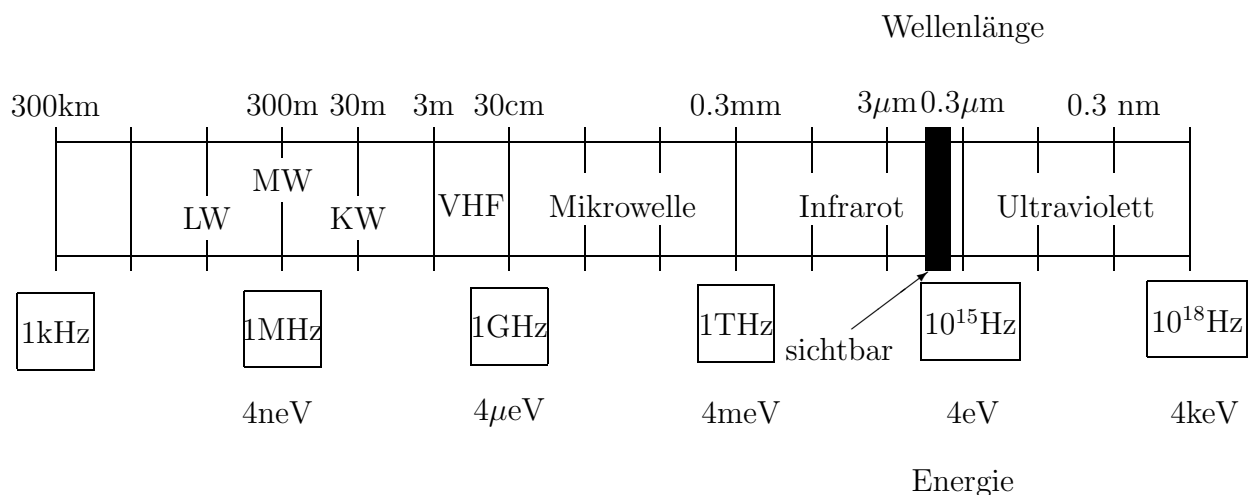


Abbildung 1.1: Der spektrale Bereich elektromagnetischer Wellen

Der sichtbare Spektralbereich der elektromagnetischen Wellen liegt zwischen $\lambda = 0,4 \mu m \dots 0,8 \mu m$, dies entspricht einer Frequenz von $\nu = 750 THz \dots 355 THz$. ($1 THz = 10^{12} Hz$). Die optische Nachrichtentechnik umfasst sowohl die fasergebundene als auch die Übertragung über den freien Raum. In dieser Vorlesung befassen wir uns nur mit der fasergebundenen Übertragung, da sie der technisch interessantere Bereich ist.

Motivation für die optische Nachrichtentechnik

- Die Faser hat eine sehr geringe Dämpfung (siehe Bild 1.2). In dem Bild ist die

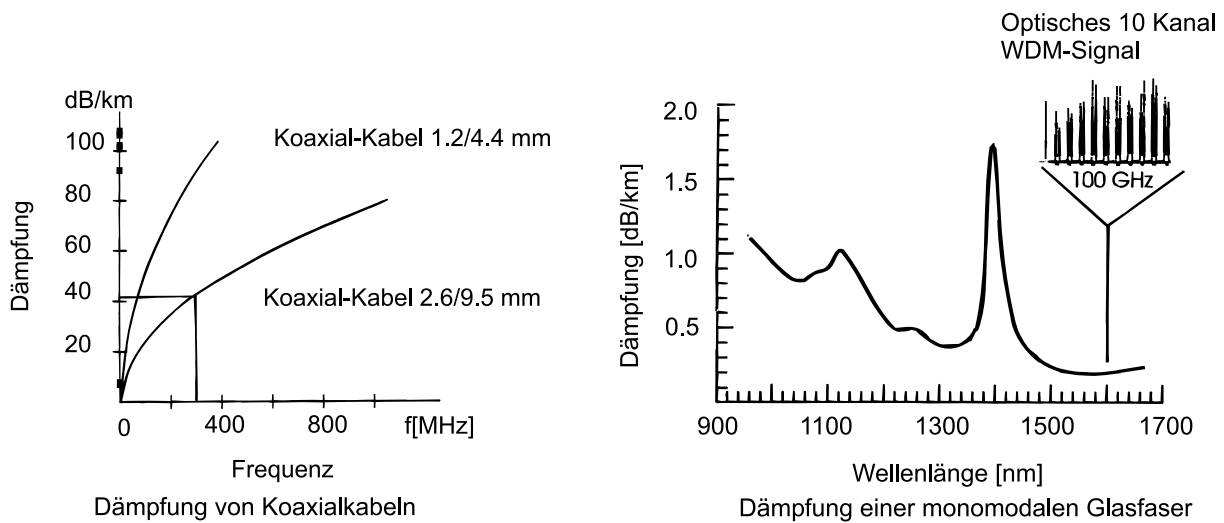


Abbildung 1.2: Dämpfung von Koaxialkabel und Standard-Monomode-Faser

Dämpfung in dB/km als Funktion der Modulationsfrequenz für Standard-Koaxialkabel und als Funktion der Wellenlänge für Lichtleitfasern aufgetragen. Als Inlet ist als Beispiel ein gemessenes optisches Signal-Spektrum mit 10 Trägern angegeben. Jeder Träger ist mit einer Modulationsrate von 280 Mbit/s moduliert.

- Die Bandbreite der Faser ist sehr hoch, d.h. es kann ein großer Frequenzbereich zur Signalübertragung ausgenutzt werden ($\gg 1000$ GHz). Wie groß der Bereich ist, ist immer noch Stand der Forschung.
- Lichtleitfasern sind unempfindlich gegenüber elektromagnetischen Störungen.
- Der Querschnitt der Faser ist klein und ihr Gewicht ist gering, d.h. es ist eine hohe Packungsdichte erreichbar (siehe Bild 1.3).
- Hohe Abhörsicherheit

Nachteile der optischen Nachrichtentechnik

- Sehr geringe mechanische Toleranzen, es ist schwer in den Kern einer Monomodefaser einzukoppeln (Durchmesser des Kerns $10\ \mu\text{m}$).
- Heute noch relativ teure elektro-optische und opto-elektronische Wandler sind notwendig

Es sind unterschiedliche Fasertypen kommerziell erhältlich. Die interessantesten Fasertypen sind

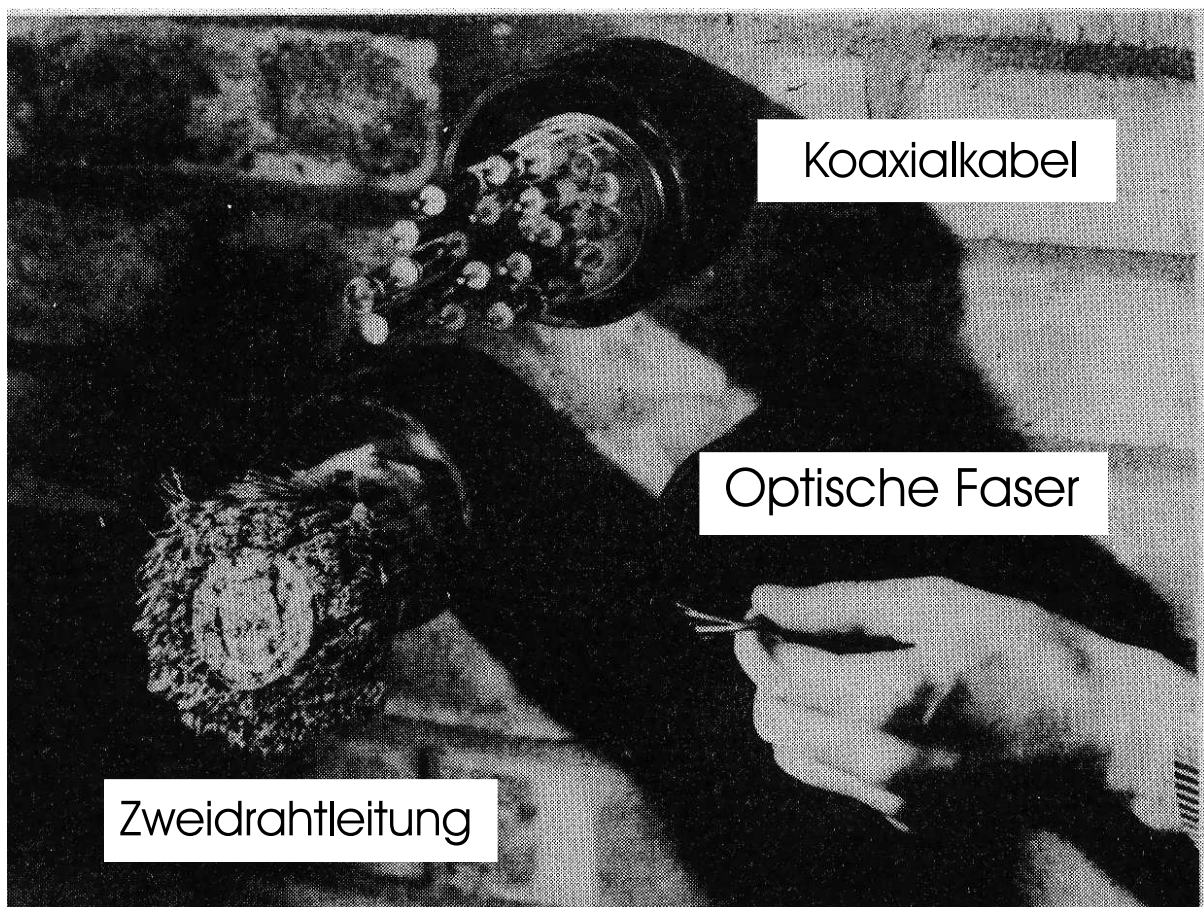


Abbildung 1.3: 320 Doppeladern, bzw. 20 Koaxial-Kabel bzw. 5 Fasern [11]

- Fasern auf SiO_2 Basis. Diese Faser weist sehr geringe Dämpfungen auf (siehe Bild 1.2), und es können mit ihrer Hilfe sehr weite Übertragungsstrecken überbrückt werden. Die verwendeten optischen Wellenlängen liegen im Bereich von 800 μm bis 1.6 μm (siehe Kapitel 14).
- Plastik-Fasern (POF, plastic optical fiber) z.B. aus PMMA (Polymethylmethacrylat). Diese Fasern werden insbesondere für Übertragungen über kurze Entfernungen verwendet (z.B. niedriggradige Datenübertragungen in Wohnungen und Gebäuden, Automobilen, Zügen, zwischen Navigationssystemen,...). Besonders interessant ist hier die Anwendungen im Kfz, wo sie schon serienmäßig für den Kommunikationsbus (Radio, CD, ...) eingesetzt wird. Diskutiert werden hier auch Anwendungen für das Motormanagement und zur Verbindung der sicherheitsrelevanten Sensoren (z.B. Airbagsteuerung). Die Vorteile der Plastikfaser liegen in ihrem großen Kerndurchmesser (siehe Bild 1.4), der eine einfache, billige und stabile Ein- und Auskopplung ermöglicht (siehe Kapitel 11, 12, 14). Im Bild 1.4 sind die Dimensionen der gebräuchlichsten Fasern angegeben. Die Dämpfung unterschiedlicher Plastikfasern ist in Bild 1.5 dargestellt.

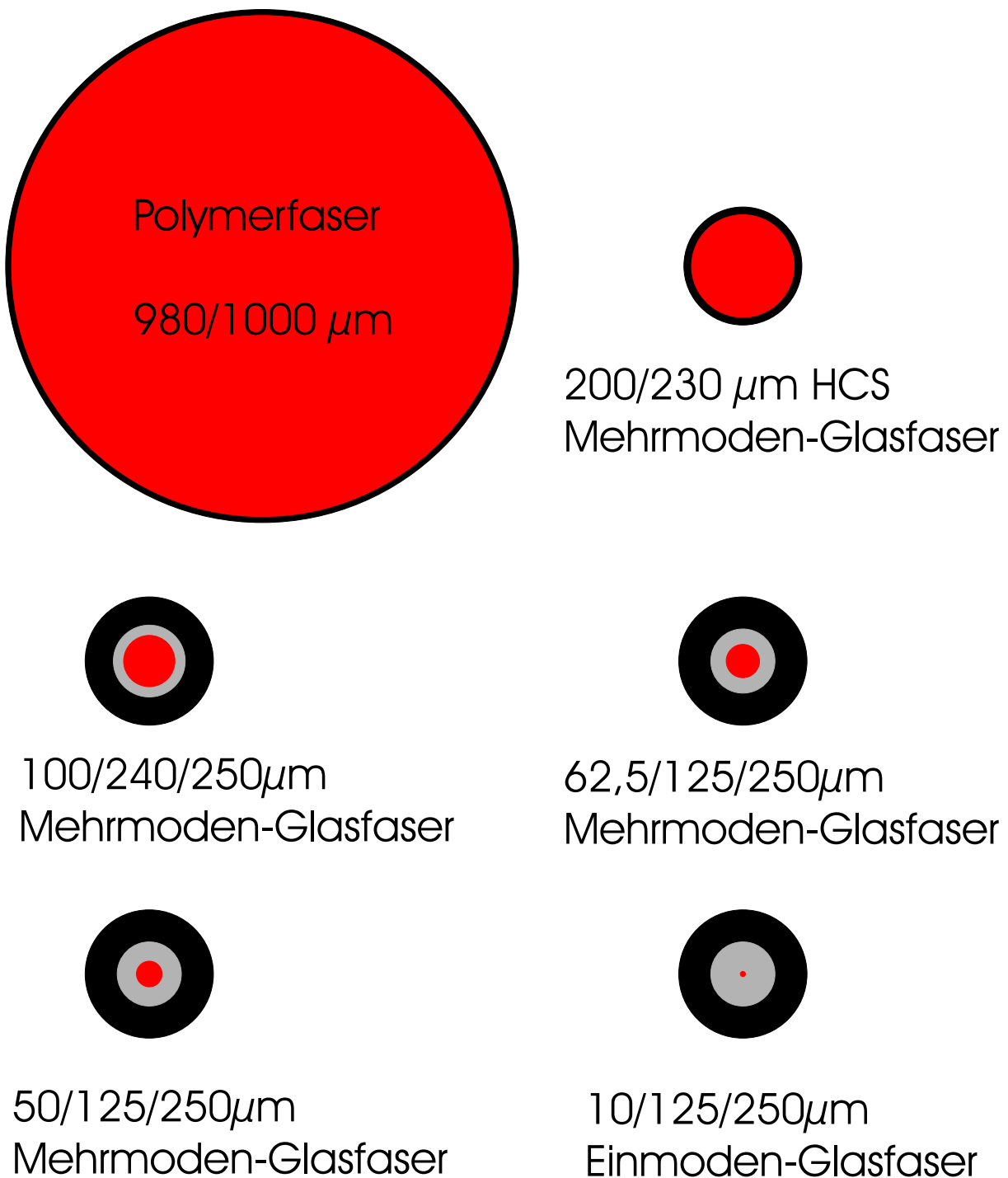


Abbildung 1.4: Dimensionen einiger Fasertypen

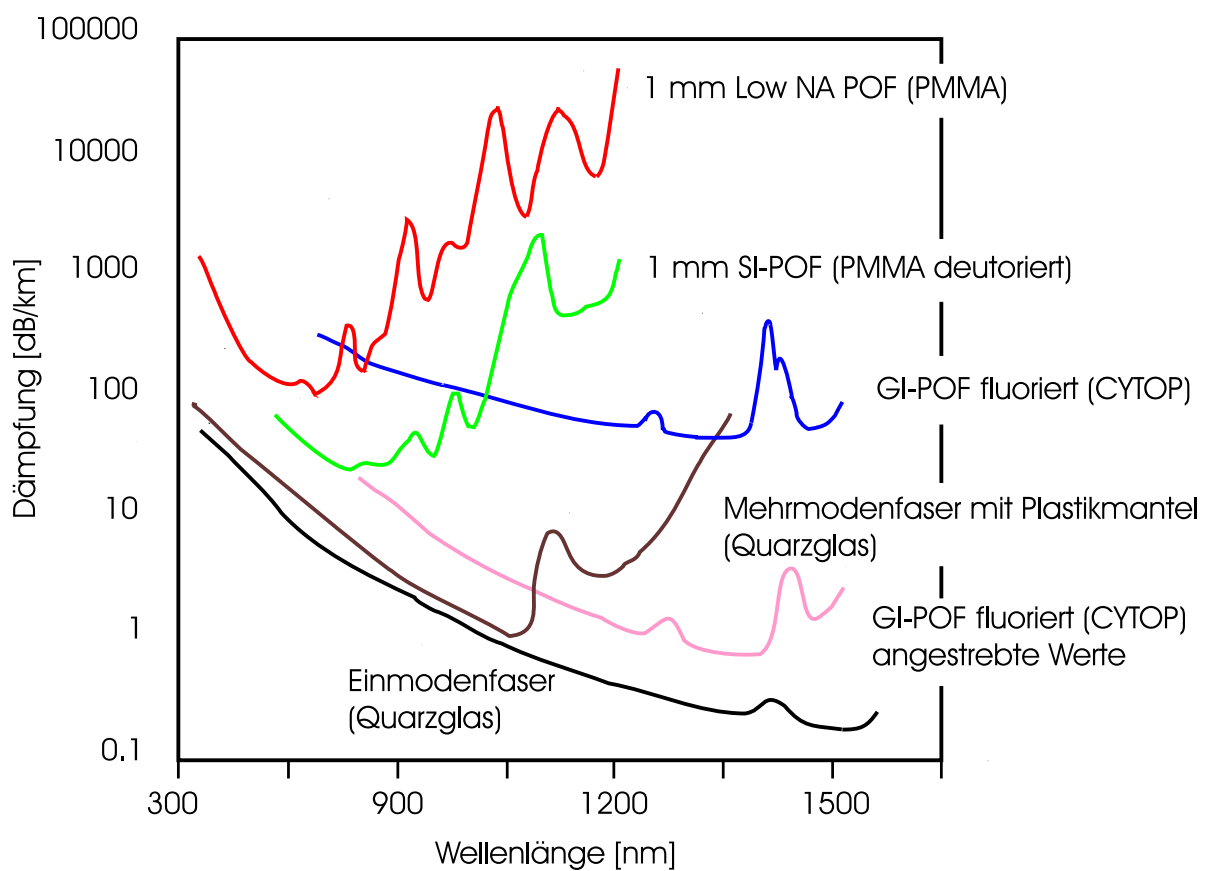


Abbildung 1.5: Dämpfung von Plastikfasern im Vergleich zu Quarzfasern[12]

Kapitel 2

Systemgrundlagen

Motivation In diesem Kapitel betrachten wir einfache Modelle für eine optische Übertragungsstrecke. Die Erklärung von grundlegenden Begriffen wie Dämpfung, Bandbreite und Pulsbreiten ist notwendig, um später die Übertragungseigenschaften von optischen Strecken zu verstehen.

Wir beschäftigen uns in der optischen Nachrichtentechnik mit der Übertragung von Signalen mit der Hilfe von Licht. Wir können folgende Systeme unterscheiden:

- Freiraumübertragung
- Übertragung über Lichtwellenleiter (Fasern)

Für spezielle Anwendungen ist die Freiraumübertragungstechnik interessant, z. B. Infrarot-Fernsteuerung, kurze Verbindung zwischen Gebäuden (z.B. Lichtwiese und Hans-Busch Institut), Kommunikation zwischen Satelliten. Der wichtigste Anwendungsbereich liegt aber in der fasergebundenen Übertragung, mit deren Hilfe schon heute Informationen in den höheren Netzhierarchien der Kommunikationsnetze übertragen werden. Aus diesem Grund werden wir uns in dieser Vorlesung schwerpunktmäßig mit der Wellenleitergebundenen Übertragung beschäftigen.

Die wesentlichen Komponenten eines optischen Übertragungssystems sind (siehe Bild 2.1):

- a) die optische Quelle (z. B. LED, Laser);
- b) der Modulator, der das Licht mit der Information beaufschlagt. Es wird oft die Quelle direkt moduliert;
- c) das Übertragungsmedium, z. B. Luft oder Faser;

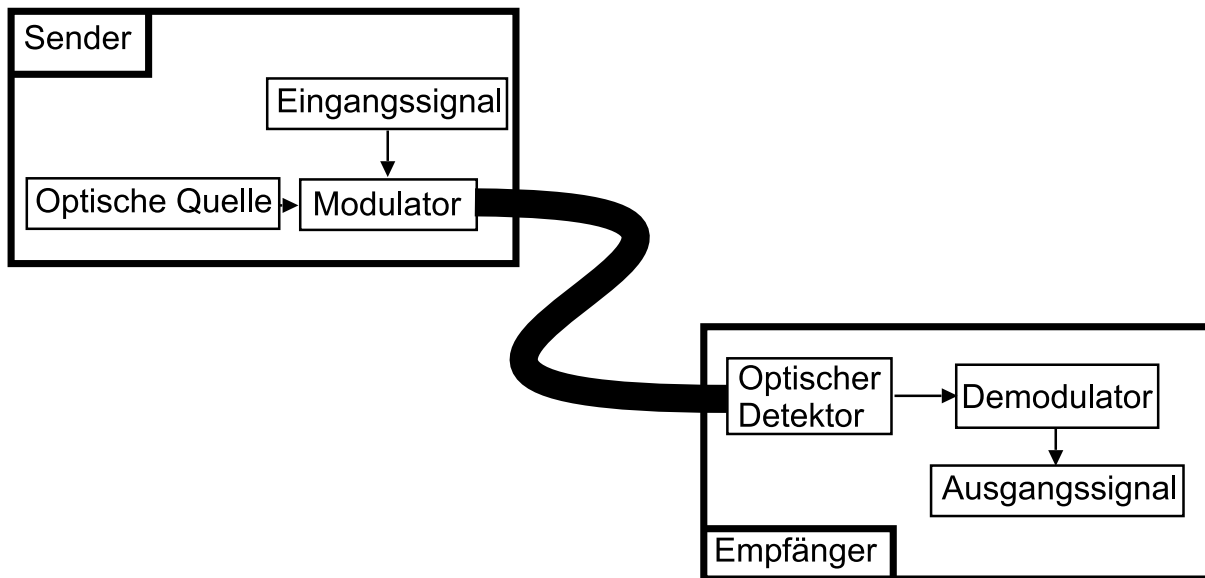


Abbildung 2.1: Komponenten eines optischen Übertragungssystems

- d) der optoelektronische Wandler (z. B. pin-Diode, Lawinenphotodiode,...), der das optische Signal in ein elektrisches wandelt;
- e) elektronische Signalverarbeitung zur Demodulation und Aufbereitung der Signale.

Wesentliche Parameter des Übertragungssystems sind

1. die Kapazität (Bandbreite bzw. höchste übertragbare Bitrate),
2. der Regeneratorabstand, der bei vorgegebener geforderter Signalqualität (Signal /Rauschverhältnis oder Fehlerrate) überbrückt werden kann

Diese beiden Parameter sind nicht unabhängig voneinander. Die Bandbreite kann begrenzt werden von

1. der Geschwindigkeit, mit der die optische Quelle moduliert werden kann (z. B. LED bis typ. 100 MHz, Laser bis typ. 1-10 GHz)
2. der maximalen Geschwindigkeit des eventuell vorhandenen zusätzlichen ("externen") Modulators (typ. 10-30 GHz),
3. Übertragungsmedium (Bandbreite: Entfernung typ. 10 MHz*km ... 100 GHz*km, je nach Faser)
4. Bandbreite des Optoelektronischen Wandlers (typ. 1 GHz ... 50 GHz)

Die Rauscheigenschaften optischer Übertragungssysteme unterscheiden sich wesentlich von denen elektronischer Übertragungssysteme dadurch, daß die Quantenstruktur des Lichts nicht vernachlässigt werden darf (Schrot-Rauschen). Diese Eigenschaft führt zu einem signalabhängigen Rauschen.

In analogen Systemen bestimmt das Signal-Rauschverhältnis als ein wesentlicher Parameter die Übertragungsgüte, in digitalen Systemen wird sie durch die Fehlerrate (Anzahl der Fehler bei der Übertragung binärer Signale pro gesendete Bits) festgelegt.

System	Leistung am Senderausgang [dBm]	benötigte Leistung an Photodiode [dBm]	System-reserve [dB]	Überbrückbare Dämpfung [dB]	überbrückbare Länge [km]
optisch	0	-45	10	35	(0,5 dB/km) 70
elektronisch	30	-75	5	100	(20 dB/km) 5

Tabelle 2.1: Vergleich zwischen elektronischer und optischer Übertragung (100 Mb/s), (Typische Werte)

Aus der Tabelle 2.1 sieht man, daß die überbrückbare Leistung in optischen Systemen zwar viel geringer ist als in elektrischen Übertragungssystemen, daß dies aber durch die geringe Dämpfung der Faser bei weitem wieder aufgehoben wird. Wesentlich ist zusätzlich, daß die maximale Übertragungsrate bei den elektrischen Übertragungssystemen in der Größenordnung von 560 Mb/s liegt, bei der optischen Übertragung aber Bitraten von bis zu 40 Gb/s erreicht werden. Aus diesem Grund wird sie insbesondere bei Systemen eingesetzt, bei denen hohe Übertragungsraten benötigt werden.

2.1 Dämpfung, Pulsdauer und Bandbreite

In optischen Übertragungssystemen wird häufig, aber nicht notwendigerweise, die Information dem Licht in Form einer Leistungsmodulation aufgeprägt. Die Signalform kann der optischen Leistung durch einen Modulationsstrom bei der direkten Modulation des Lasers oder durch Anlegen einer Spannung an einen externen Modulator aufgeprägt werden. Auf der Empfängerseite ist der Empfängerstrom direkt proportional zur optischen Leistung. Der daraus folgende quadratische Zusammenhang zwischen elektrischer und optischer Leistung hat Auswirkungen auf die Definitionen von "dB's" und Bandbreiten. Bild 2.2 zeigt die optische Leistung $P(t)$ eines Pulses, der am Punkt P vorbeiläuft. Die Gesamtenergie des Pulses ist

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt \quad (2.1)$$

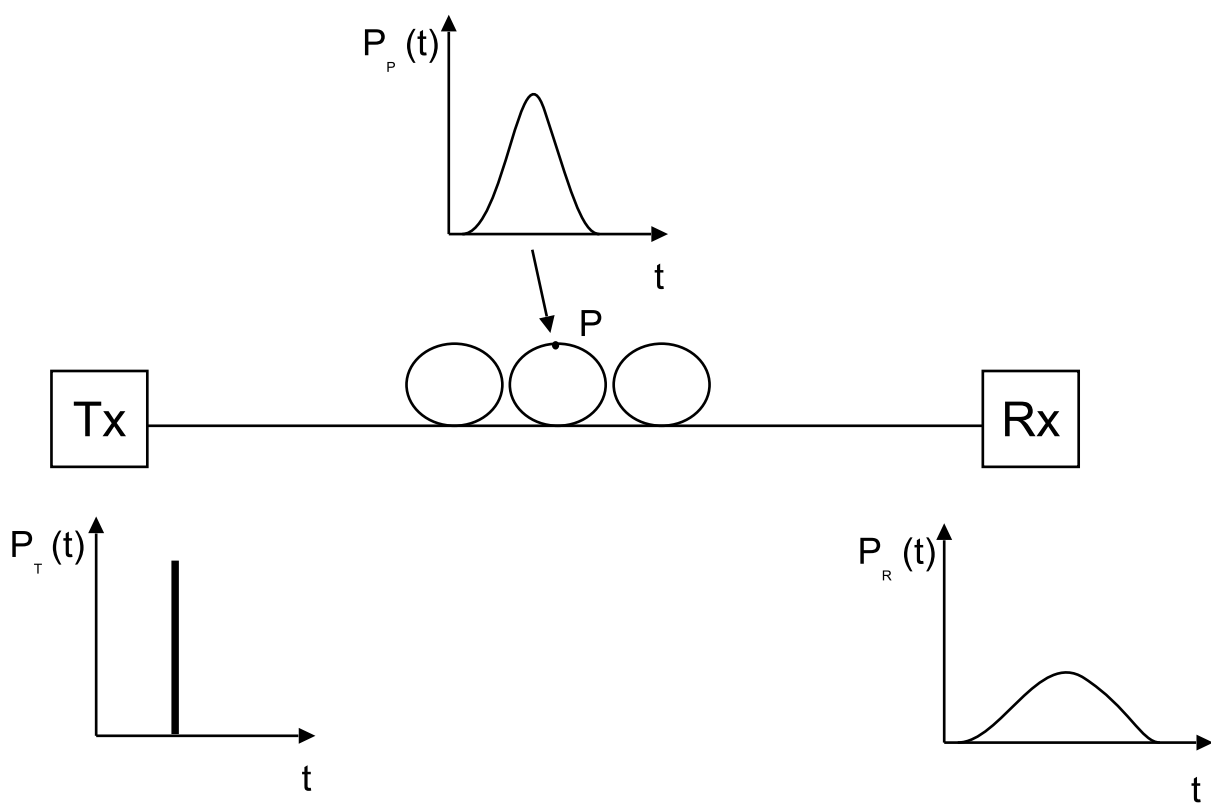


Abbildung 2.2: Leistung eines optischen Pulses

Die Dämpfung ist folgendermaßen definiert:

$$\frac{\text{Dämpfung}}{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{\mathcal{E}_T}{\mathcal{E}_R}\right) \quad (2.2)$$

mit \mathcal{E}_T : gesendete Energie, \mathcal{E}_R : empfangene Energie.

Wenn man sich vorstellt, daß ein Diracimpuls (siehe Bild 2.2) am Eingang der Faser vorliegt und ein Puls $P_R(t)$ am Empfänger gemessen wird, dann kann man folgendermaßen die Impulsantwort für das Stück Faser definieren:

$$h(t) = \frac{P_R(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_R(t) dt} \quad (2.3)$$

Eine solche Pulsform kann man auf viele Arten charakterisieren, wir wollen hier die root mean square (r.m.s.) Pulsbreite verwenden. Der mittlere Eintreffzeitpunkt des Pulses ist

$$\bar{t} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t P(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt} \quad (2.4)$$

und für die r.m.s. Pulsbreite σ gilt

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 P(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt} \quad (2.5)$$

Ist $P(t)$ ein Puls in Form einer Gaußverteilung, dann ist die Pulsform vollständig durch diese beiden Parameter beschrieben. Man kann jetzt die Übertragungsfunktion der Faser als Fouriertransformierte der Impulsantwort definieren.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.6)$$

Die Bandbreite ist normalerweise definiert als

$$H(\Delta f_{el}) = \frac{H(0)}{\sqrt{2}} \quad (2.7)$$

Man bezeichnet dies als die elektrische Bandbreite der Faser. Wenn man fordert, daß die optische Leistung um den Faktor 2 abgesunken ist, spricht man von der optischen Bandbreite:

$$H(\Delta f_{opt}) = \frac{H(0)}{2} \quad (2.8)$$

die Beziehung zwischen den Größen ist in Bild 2.3 angegeben.

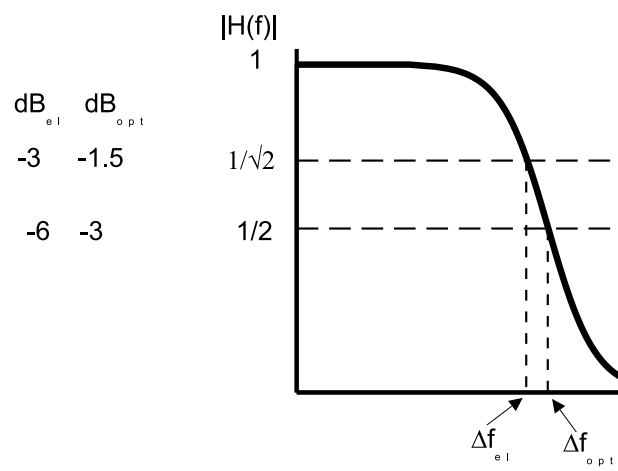


Abbildung 2.3: Zusammenhang zwischen elektrischer und optischer Bandbreite

Zusammenfassung Wir haben die Komponenten eines optischen Übertragungssystems kennengelernt. Die Dämpfung ist folgendermaßen definiert:

$$\frac{\text{Dämpfung}}{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{\mathcal{E}_T}{\mathcal{E}_R}\right)$$

mit \mathcal{E}_T : gesendete Energie, \mathcal{E}_R : empfangene Energie.

Die Impulsantwort eines optischen Signals:

$$h(t) = \frac{P_R(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_R(t) dt} \quad (2.9)$$

Die Beschreibung eines Pulses:

Der mittlere Eintreffzeitpunkt:

$$\bar{t} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t P(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt}$$

Die r.m.s. Pulsbreite:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{t})^2 P(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt}}$$

Elektrische und optische Bandbreiten:

$$H(\Delta f_{el}) = \frac{H(0)}{\sqrt{2}}$$

$$H(\Delta f_{opt}) = \frac{H(0)}{2}$$

Kapitel 3

Die Maxwell-Gleichungen

Motivation

In der optischen Nachrichtentechnik spielt die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen z.B. bei der Informationsübermittlung (optische Faser) oder bei der Erzeugung kohärenter Laserstrahlung eine wesentliche Rolle. Die Maxwell-Gleichungen bilden die Grundlage zur Beschreibung der Ausbreitung.

Zur Beschreibung der Ausbreitung eines optischen Signal können verschiedene Techniken herangezogen werden. Wir wollen sie an Hand einer einfachen Linse verdeutlichen (siehe Bild 3.1). Zuerst projizieren wir das Bild eines Baums auf eine Leinwand (siehe Bild 3.1a). Mit Hilfe der Strahlenoptik können wir das Bild auf der Leinwand beschreiben. Dazu benötigen wir solche Begriffe wie Brennweite, Hauptachse u.s.w, wie wir sie aus der geometrischen Optik kennen. Wenn wir uns das Bild des Baums genauer ansehen (Bild 3.1b), fällt uns auf, daß unterschiedliche Farben unterschiedliche Bilder an unterschiedlichen Orten erzeugen. Hier spielen Materialeigenschaften wie die Dispersion der Linse eine Rolle ^{3.1}. Wenn Bild und Linse so klein werden, daß sie in der Größenordnung der Wellenlänge liegen, beginnt das Bild zu verschwimmen (Bild 3.1c). Bei diesen Dimensionen wird die Annahme, daß das Licht sich auf geraden Wegen ausbreitet, ungenau. Wir müssen jetzt den Wellencharakter des Lichts berücksichtigen. Die physikalische Optik mit den Maxwell-Gleichungen beschreibt diesen Phänomene. Verringern wir die Intensität des Lichts immer mehr, erreichen wir einen Bereich, in dem die Quantennatur des Lichts zu Tage tritt. Die physikalische Optik hilft uns jetzt nicht mehr weiter, wir müssen jetzt quantenoptische Modelle verwenden. Wir werden in der Vorlesung an verschiedenen Stellen jede der Beschreibungsarten verwenden. Die geometrische Optik eignet sich hervorragend zur Beschreibung von Linsen und multimodalen Glasfasern, der Einfluß der Dispersion wird uns insbesondere bei der Beschreibung kurzer optischer Pulse

^{3.1}Dispersion bedeutet, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium von der Wellenlänge abhängt.

beschäftigen. Die Maxwellgleichungen werden wir u.a. bei der Untersuchung der Ausbreitung von Wellen in monomodalen Glasfasern verwenden und quantenmechanische Modelle muß man bei der Detektion von optischen Signalen berücksichtigen.

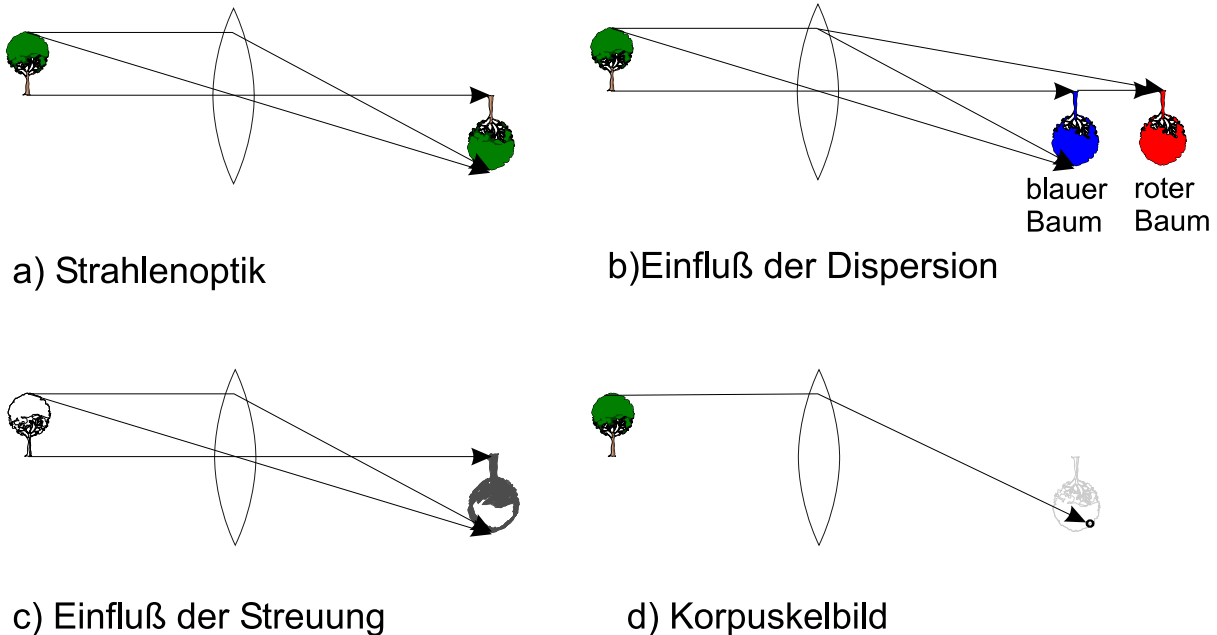
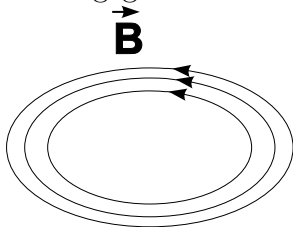


Abbildung 3.1: Vier von vielen verschiedenen Möglichkeiten, die Ausbreitung des Lichts zu beschreiben

In diesem Kapitel werden wir die Maxwell'schen Gleichungen kurz wiederholen. Wir werden mit ihrer Hilfe die Ausbreitung des Lichts in optischen Wellenleitern, wie optischen Fasern, Lasern und integriert optischen Bauteilen behandeln.

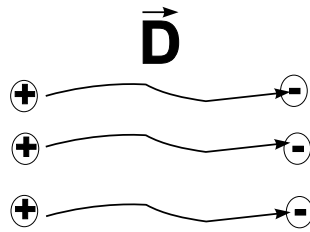
Die Ausbreitung der elektromagnetischen Welle, d.h. auch der optischen Welle wird durch die Maxwell-Gleichungen in ihrer makroskopischen Form beschrieben [13, Seite 19 ff],[14]. Die Gleichungen können sowohl in ihrer integralen Form als auch in der differentiellen Form angegeben werden:



Magnetische Flußlinien sind immer geschlossen

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.1)$$

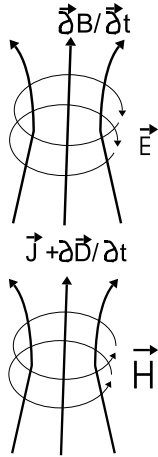
$$\oint_F \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.2)$$

**Gauß'sches Gesetz**

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

$$\oiint_F \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (3.4)$$

ρ ist die Raumladungsdichte.

**Induktionsgesetz oder Faraday'sches Gesetz**

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3.5)$$

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\int \int_A \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (3.6)$$

Durchflutungsgesetz oder Ampère'sches Gesetz

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) \quad (3.7)$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int \int_A (\vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}) \cdot d\vec{A} \quad (3.8)$$

Hier ist

\vec{D} : Dielektrische Verschiebungsstrom [As/m^2]

ρ : Ladungsträgerdichte (nur freie Ladungsträger) [As/m^3]

\vec{E} : Elektrische Feldstärke [V/m]

\vec{B} : Magnetische Induktion [Vs/m^2]

\vec{H} : Magnetische Feldstärke [A/m]

\vec{J} : Stromdichte [A/m^2]

Die folgenden Verknüpfungsgleichungen beschreiben die Materialeigenschaften:

$$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}] \quad (3.9)$$

$$\vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}] \quad (3.10)$$

$$\vec{J} = \vec{J}[\vec{E}, \vec{B}] \quad (3.11)$$

Die eckigen Klammern sollen dabei andeuten, daß die Zusammenhänge sehr kompliziert sein können, insbesondere können die Materialien ein Gedächtnis aufweisen (z.B. Hysterese), die Eigenschaften können anisotrop und nichtlinear sei.

Für das Vakuum gilt:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} \\ \vec{J} &= 0\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}c &= 2.9979458 \cdot 10^8 \text{ [m/s] Lichtgeschwindigkeit} \\ \varepsilon_0 &= \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.859 \cdot 10^{-12} \text{ [As/Vm] Dielektrizitätskonstante} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [Vs/Am] Permeabilität}\end{aligned}$$

3.1 Die Maxwell-Gleichungen für ein lineares Dielektrikum

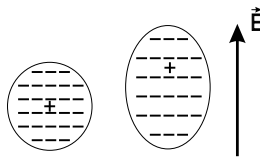


Abbildung 3.2: Polarisiertes Dielektrikum

Eine elektromagnetische Welle, die ein Dielektrikum durchläuft, erfährt als Verlustmechanismen, Streuung und Absorption. Die Streuung werden wir im Kapitel 8 behandeln. Absorption tritt auf, wenn die elektromagnetische Welle mit dem Material in Wechselwirkung tritt. Das Feld regt permanente Dipole, Ionen, Valenzelektronen und Elektronen der inneren Schalen an (siehe Bild 3.2). Die unterschiedlichen Wechselwirkungen finden bei unterschiedlichen Frequenzen statt und sie können durch gedämpfte Schwingungen beschrieben werden (siehe Bild 3.3). Oberhalb der entsprechenden Resonanzfrequenz, kann das spezielle atomare bzw. elektronische System dem Feld nicht mehr folgen und diese Art der Polarisation trägt nicht mehr zur gesamten Polarisation bei.

Bei einem Dielektrikum kann man für Gleichung 3.9 schreiben:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.12)$$

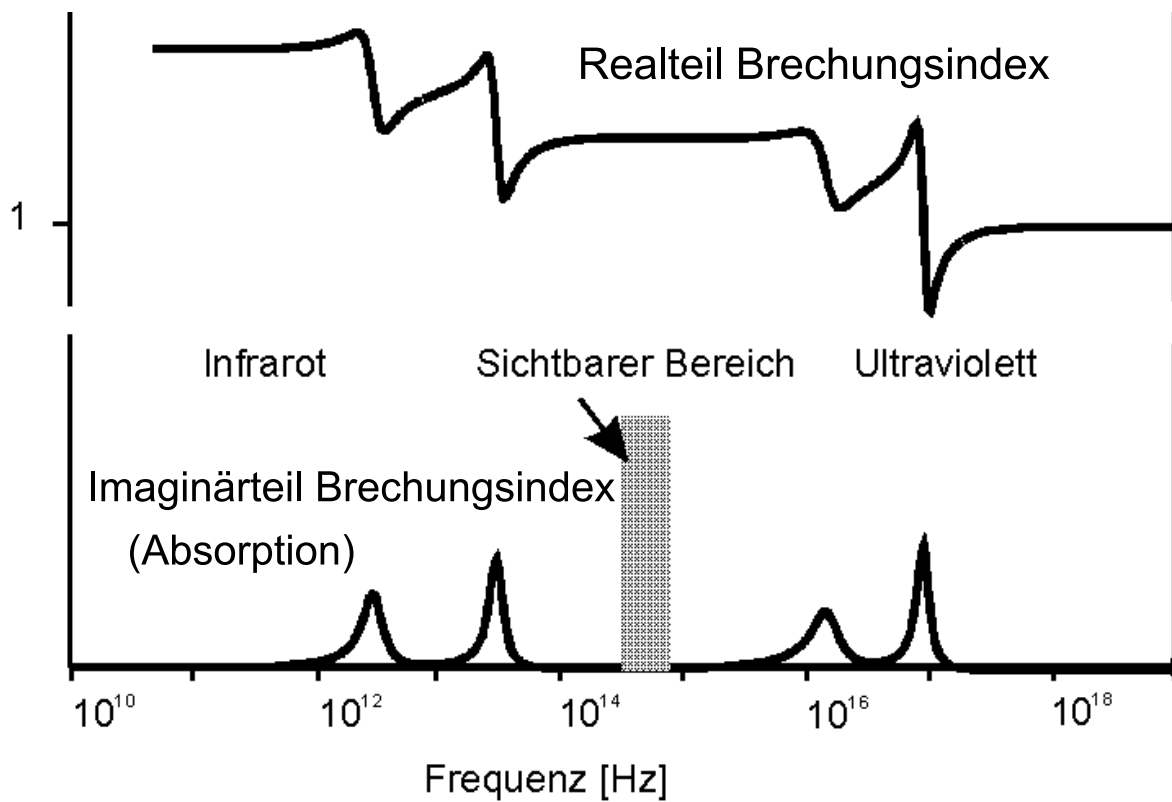


Abbildung 3.3: Qualitativer Verlauf des Real- und Imaginärteils der relativen Dielektrizitätskonstante

Der Polarisationsvektor \vec{P} folgt dem angelegten elektrischen Feld \vec{E} gemäß ($\chi(t)$: reell, kausal),^{3.2}

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau \quad (3.13)$$

d.h. die Polarisation baut sich leicht verzögert gemäß der Impulsantwort $\chi(t)$ auf, d.h. sie antwortet wie ein lineares Übertragungssystem auf die elektrische Feldstärke. Im Frequenzbereich folgt dann nach Fouriertransformation:

$$\underline{\vec{P}}(f) = \epsilon_0 \underline{\chi}(f) \underline{\vec{E}}(f) \quad (3.14)$$

Die Fouriertransformierte von $\chi(t)$ heißt Suszeptibilität:

$$\underline{\chi}(f) = \int_0^{\infty} \chi(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Das Material kann isotrop sein, z.B. Glas, dann kann $\chi(t)$ durch ein Skalar ausgedrückt werden. Es kann aber auch anisotrop (z.B. Kristalle), dann muß χ durch einen Tensor beschrieben werden. Haben die in dem Material vorliegenden Felder eine sehr hohe Leistungsdichte, z.B. bei der Übertragung von verstärkten Lichtimpulsen in einer Glasfaser, dann muß die Beziehung zwischen Polarisation und elektrischer Feldstärke durch eine nichtlineare Gleichung beschrieben werden. Im Bild 3.4 sind die Strukturen zweier Kristalle angegeben. GaAs ist symmetrisch, und wenn man ihn um 90 Grad dreht, erhält man exakt das selbe Bild. Der Tensor der Suszeptibilität für das isotrope GaAs ist:

$$\chi = \begin{pmatrix} 10.56 & 0 & 0 \\ 0 & 10.56 & 0 \\ 0 & 0 & 10.56 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Als Beispiel ist noch der Tensor der Suszeptibilität eines typischen doppelbrechenden Kristalls (Kalkspat) angegeben. Entsprechend des nicht symmetrischen Aufbaus dieses Kristalls ist die Suszeptibilität in einer Richtung unterschiedlich:

$$\chi = \begin{pmatrix} 1.75 & 0 & 0 \\ 0 & 1.75 & 0 \\ 0 & 0 & 1.21 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Linear polarisiertes Licht, das sich in z-Richtung ausbreitet, kann in x- oder y-Richtung oder in einer Mischung aus beiden Polarisationen polarisiert sein. Die Suszeptibilität ist für diese beiden Richtungen identisch. Ist dagegen eine Komponente des Lichts in z-Richtung polarisiert, so erfährt diese Komponente eine andere Suszeptibilität. Dies kann beispielsweise zur Trennung der Polarisationsrichtungen ausgenutzt werden.

^{3.2} χ ist im allgemeinen Fall ein Tensor 1. Ordnung

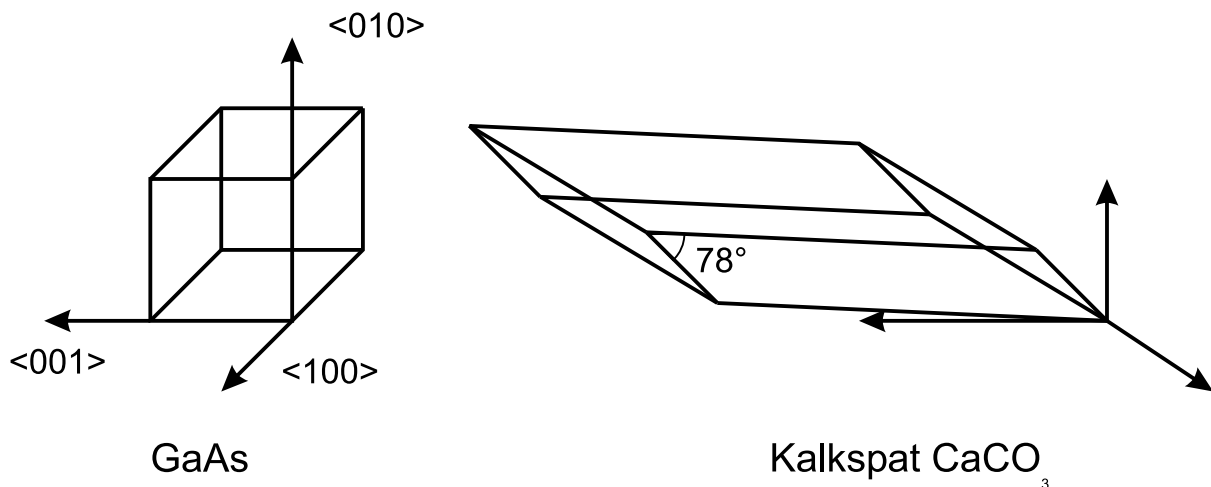


Abbildung 3.4: Unterschiedliche Kristallstrukturen für GaAs und Kalkspat. Zur Definition der Kristallachsen siehe[15]

Für ein isotropes lineares Dielektrikum kann die Frequenzabhängigkeit folgendermaßen modelliert werden:

$$\underline{\varepsilon}_r(f) = 1 + K \sum_k \frac{g_k}{f_k^2 - f^2 - j \frac{\gamma_k f}{2\pi}} \quad (3.17)$$

Hier sind f_k , γ_k , g_k die Resonanzfrequenz, der Dämpfungsfaktor und die Stärke der jeweiligen Resonanzstelle. Wir werden später diese Beziehung für ein typisches Glasfasermaterial diskutieren.

Hier wurde ein linearer Zusammenhang zwischen Polarisierung und elektrischer Feldstärke angenommen. Dies ist eine Näherung, die für hohe zu übertragende Leistungen nicht unbedingt erfüllt ist. Insbesondere beim Einsatz optischer Verstärker in der optischen Nachrichtenübertragung müssen nichtlineare Effekte mit berücksichtigt werden. Im allgemeinen, z.B. in kristallinen Medien muß zusätzlich eine Richtungsabhängigkeit des Übertragungsmediums angenommen werden. Dann ist die Suszeptibilität ein Tensor höherer Ordnung. Die Suszeptibilität und damit auch die relative Dielektrizitätskonstante ist im allgemeinen komplex. Da $\underline{\chi}$ die Fouriertransformierten einer kausalen Funktion ist, hängen Real- und Imaginärteil von $\underline{\chi}$ über die Hilberttransformation zusammen [16]^{3.3}. Zwischen Suszeptibilität und relativer Dielektrizitätskonstante $\underline{\varepsilon}_r$ besteht folgender Zusammenhang:

$$\underline{\chi}(f) = \underline{\varepsilon}_r(f) - 1$$

^{3.3}Die Hilberttransformation wird in Physik-Büchern oft auch Kramers-Kronig-Beziehung genannt

Wenn im Frequenzbereich der interessierenden Lösungen der Maxwell-Gleichungen die Suszeptibilität nicht oder kaum von der Frequenz abhängt, dann kann die Polarisation folgendermaßen geschrieben werden:^{3,4}

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \varepsilon_0 \underline{\chi} \vec{E} \\
 &= \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon}_r - 1) \vec{E} \\
 &= \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \\
 &= \underline{\varepsilon} \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \\
 &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}
 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen $\underline{\chi}$, $\underline{\varepsilon}$ und dem Brechungsindex n ist im Folgenden dargestellt.

$$\begin{aligned}
 \underline{\chi} &= \chi'(f) - j\chi''(f) = \varepsilon'(f) - 1 - j\varepsilon''(f) \\
 \underline{\varepsilon}_r &= \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r \\
 \underline{n}(f) &= n'(f) - jn''(f) \\
 \underline{\varepsilon}_r &= \underline{n}^2 \\
 \varepsilon'_r &= n'^2 - n''^2 \\
 \varepsilon''_r &= 2n'n'' \\
 n'^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon'_r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon''_r{}^2}{\varepsilon_r'^2}} \right) \\
 n'' &= \frac{\varepsilon''_r}{2n'}
 \end{aligned}$$

Hier ist $\underline{\varepsilon}_r$ die relative komplexe Dielektrizitätskonstante und \underline{n} der komplexe Brechungsindex. Häufig ist $|\varepsilon''_r| \ll |\varepsilon'_r|$, dann gilt:

$$n' = \sqrt{\varepsilon'_r} \quad (3.18)$$

$$n'' = \frac{\varepsilon''_r}{2\sqrt{\varepsilon'_r}} \quad (3.19)$$

Ein positiver Imaginärteil von \underline{n} beschreibt ein verstärkendes, ein negativer Imaginärteil ein dämpfendes Medium.

Für die Beschreibung der Wellenausbreitung in einem Dielektrikum machen wir die folgenden Annahmen:

- Stationäre Ausbreitung; Übertragungseigenschaften sind nicht zeitabhängig.
 $\varepsilon \neq \text{Funktion}(\text{Zeit})$.

^{3,4}d.h. hier wurde χ als frequenzunabhängig angenommen und die folgenden Gleichungen gelten auch im Zeitbereich.

- Es existieren keine freien Ladungsträger bzw. Ströme im Medium. $\rho = 0, J = 0$.
- Das Medium sei isotrop
- Es liege kein magnetisches Material vor
- Es darf ein linearer Zusammenhang zwischen Polarisierung und elektrischer Feldstärke angenommen werden. Die Suszeptibilität wird außerdem in dem interessierenden Frequenzbereich als frequenzunabhängig angenommen.

Für die Maxwell-Gleichungen folgt dann:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (3.20)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.21)$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (3.22)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (3.23)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (3.24)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.25)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (3.26)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.27)$$

3.1.1 Die Ausbreitungsgleichung für ein Dielektrikum

Durch Rotationsbildung der Gleichung 3.5 folgt:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \quad (3.28)$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} \quad (3.29)$$

Mit dem Durchflutungsgesetz 3.7 folgt unter Ausnutzung der Ladungs- und Stromfreiheit:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} \quad (3.30)$$

Setzen wir die Polarisierung nach Gleichung 3.21 ein, so ergibt sich:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (3.31)$$

Für ein lineares isotropes Medium gilt dann unter Ausnutzung von der Beziehung 3.13:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [1 + \chi(t)*] \vec{E} \quad (3.32)$$

Mit der allgemeinen Vektorbeziehung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ \text{wobei } \Delta \vec{E} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} \end{aligned} \quad (3.33)$$

erhält man die folgende Differentialgleichung für \vec{E} im Frequenzbereich:

$$\Delta \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) \vec{E} = 0 \quad (3.34)$$

3.1.2 Die Wellengleichung für inhomogene Dielektrika

Aus $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ folgt zusätzlich mit $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0(1 + \underline{\chi})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\varepsilon} \vec{E} &= 0 \\ \vec{E} \bullet \operatorname{grad} \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= -\frac{\operatorname{grad} \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon}} \bullet \vec{E} \end{aligned}$$

Als gesuchte Differentialgleichung folgt dann durch Einsetzen:

$$\Delta \vec{E} + \operatorname{grad} \left(\frac{\operatorname{grad} \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon}} \bullet \vec{E} \right) + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \vec{E} = 0 \quad (3.35)$$

Entsprechend folgt für die magnetische Feldstärke:

$$\Delta \vec{H} + \frac{\operatorname{grad} \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon}} \times \operatorname{rot} \vec{H} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \vec{H} = 0 \quad (3.36)$$

3.1.3 Die Wellengleichung für konstante ε

Ist die Dielektrizitätskonstante im betrachteten Gebiet bzw. Wellenlängenbereich konstant oder sind die Änderungen von $\frac{\delta \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon}}$ klein in einer Umgebung der Medium-Wellenlänge $\frac{\lambda}{n'}$ so kann man den zweiten Term der Gleichungen vernachlässigen und man erhält:

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \vec{E} = 0 \quad (3.37)$$

Entsprechend folgt für die magnetische Feldstärke:

$$\Delta \vec{H} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \vec{H} = 0 \quad (3.38)$$

3.1.4 Lösung der Wellengleichung (Ebene Welle)

Wir wollen in diesem Kapitel einen Spezialfall der Lösung der Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \vec{E} = 0 \quad (3.39)$$

die ebene Welle betrachten:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \bullet \vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-j(\underline{k}_x x + \underline{k}_y y + \underline{k}_z z)} \quad (3.40)$$

Diese Darstellung beschreibt eine Ausbreitung der Welle in Richtung des Wellenvektors \vec{k} . Gleichung 3.40 in Gleichung 3.39 eingesetzt, ergibt:

$$\underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2 + \underline{k}_z^2 = \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \quad (3.41)$$

$$= \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \quad (3.42)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \underline{n}^2 \quad (3.43)$$

Gleichung 3.40 beschreibt eine ebene Welle, da die Flächen konstanter Phase $\varphi = \vec{k} \bullet \vec{r}$ Ebenen darstellen. Diese Phasenflächen stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Gleichung 3.40 eingesetzt in das Induktionsgesetz ergibt:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \mu_0}} \quad (3.44)$$

Analog folgt aus dem Durchflutungsgesetz (siehe Bild 3.5)

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\vec{k} \times \vec{H}}{\omega \underline{\varepsilon}}} \quad (3.45)$$

Aus den Gleichungen (3.44, 3.45) folgt, daß die elektrische und magnetische Feldstärke bei ebenen Wellen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, wenn ein isotropes Material vorliegt, d.h. wenn $\underline{\varepsilon}$ und μ skalare Größen sind. Betrachten wir den Spezialfall der Ausbreitung einer ebenen Welle in z-Richtung.

$$j\vec{k} = \underline{\gamma} \vec{e}_z \quad (3.46)$$

Hier ist \vec{e}_z der Einheitsvektor in z-Richtung. Es folgt:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\underline{\gamma} z} \quad (3.47)$$

mit $\underline{\gamma} = j\beta = \sqrt{-\omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon}}$. Ist $\underline{\varepsilon}$ reell, so liegt eine ungedämpfte Schwingung vor. Da \vec{E} und \vec{H} bei den hier betrachteten ebenen Wellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, liegen sie in der (x,y)-Ebene und sie stehen senkrecht aufeinander.

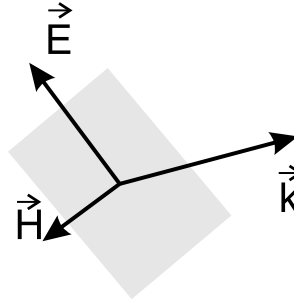


Abbildung 3.5: Ebene Welle

3.1.4.1 Jones Vektoren

Für eine ebene Welle kann man \vec{E} und \vec{H} folgendermaßen ausdrücken.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix} \underline{E}_0 e^{-\gamma z} \quad (3.48)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -\underline{a}_y \\ \underline{a}_x \end{pmatrix} \underline{H}_0 e^{-\gamma z} \quad (3.49)$$

mit

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_F} \quad (3.50)$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\underline{\varepsilon}}} \quad (3.51)$$

Hier ist Z_F der Feldwiderstand.

Für das Vakuum gilt:

$$\underline{Z}_F = Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \quad (3.52)$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix}$ heißt Jones Vektor, er ist ein Einheitsvektor $|\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2 = 1$ und beschreibt den Polarisationszustand. Im Folgenden berücksichtigen wir auch die vorausgesetzte sinusförmige Feldabhängigkeit und erhalten als reelle Feldstärke:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} \Re\{\underline{a}_x e^{-j\beta z + j\omega t}\} \\ \Re\{\underline{a}_y e^{-j\beta z + j\omega t}\} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Wir diskutieren zwei Beispiele für eine ungedämpfte Welle.

- **Lineare Polarisation**

a_x, a_y reell, $a_x = \cos(\varphi)$, $a_y = \sin(\varphi)$.

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.54)$$

(Siehe Bild 3.6).

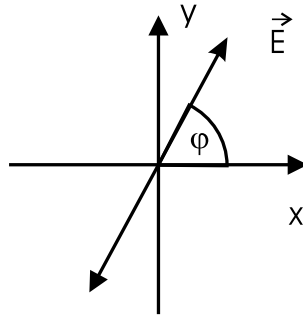


Abbildung 3.6: Lineare Polarisation

- **Zirkulare Polarisation**

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_y = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es ergibt sich als Welle:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mp \sin(\omega t - \beta z) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Dies ergibt eine zirkulare Bewegung des Vektors; (siehe Bild 3.7). Man unterscheidet rechtszirkular drehend (+ Zeichen) und linkszirkular drehend (- Zeichen). Sind die Koeffizienten des Jones-Vektors betragsmäßig ungleich, dann spricht man von einer elliptischen Polarisation.

3.1.4.2 Poincaré Kugel

Die Jonesvektoren beschreiben das Feld. Die optische Feldstärke ist eine sehr schwer meßbare Größe. Man möchte aber die Polarisation mit Hilfe leichter meßbarer Größen beschreiben. Hierzu werden die Stokesvektoren verwendet. Sie sind folgendermaßen definiert:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |e_x|^2 + |e_y|^2 \\ |e_x|^2 - |e_y|^2 \\ 2|e_x||e_y| \cos \Delta \\ 2|e_x||e_y| \sin \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x e_x^* + e_y e_y^* \\ e_x e_x^* - e_y e_y^* \\ e_x e_y^* + e_y e_x^* \\ j(-e_x e_y^* + e_y e_x^*) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

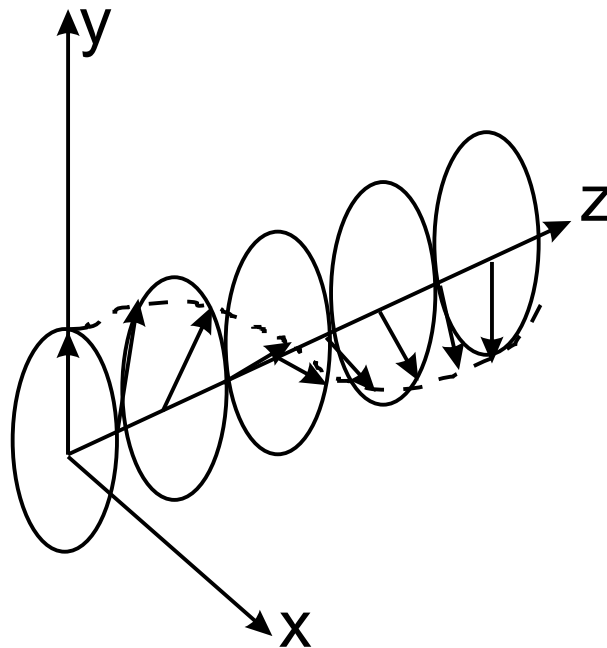


Abbildung 3.7: Rechtszirkular polarisierte Welle

Dabei sind e_x , e_y die Komponenten der Jones-Matrizen, Δ ist die Phasendifferenz der beiden Komponenten e_x und e_y des Jones-Vektors: $\Delta = \phi_y - \phi_x$. Da für jeden Jones-Vektor $|e_x|^2 + |e_y|^2 = 1$ ist, gilt: $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = 1$. Das heißt bei der Darstellung der drei letzten Komponenten des Stokes-Vektors als Punkt im \mathbb{R}^3 liegt dieser immer auf einer Kugel um den Ursprung mit dem Radius 1 (siehe Bild 3.8). Die Polarisationszustände lassen sich folgendermaßen auf der Poincaré-Kugel darstellen:

1. Orthogonale Polarisationsrichtungen liegen sich diametral gegenüber.
2. Auf dem „Äquator“, dem Schnitt von Kugel und x/y-Ebene, liegen die linearen Polarisationsrichtungen: horizontal bei $S_1 = 1$ und vertikal bei $S_1 = -1$.
3. Auf der „Nordhalbkugel“ ($S_3 > 0$) liegen die links-elliptischen und auf der „Südhalbkugel“ ($S_3 < 0$) die rechts-elliptischen Polarisierungen.
4. Auf den „Polen“ ($|S_3| = 1$) liegen die zirkularen Polarisierungen.

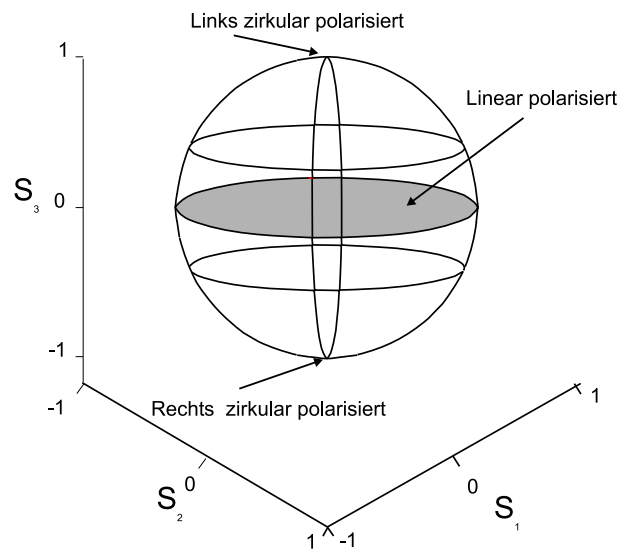


Abbildung 3.8: Poincaré-Kugel

3.2 Die Maxwellgleichungen für ein nichtlineares Dielektrikum

Wir waren im Kapitel 3 davon ausgegangen, daß die Polarisierung linear von der elektrischen Feldstärke abhängt. Bei der Übertragung von Signalen über die Monomodefaser und dem gleichzeitigen Einsatz von optischen Verstärkern ist insbesondere wegen des kleinen Faserkerndurchmessers die Leistungsdichte im Faserkern so hoch, daß die Nichtlinearität des Materials relevant wird. Der Zusammenhang zwischen Polarisierung und elektrischer Feldstärke kann in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil aufgespalten werden.

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = P_L(\vec{r}, t) + P_{NL}(\vec{r}, t) \quad (3.57)$$

Für den linearen Anteil gilt wieder die Gleichung 3.13 ^{3.5}

$$\vec{P}_L(t, \vec{r}) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau \quad (3.58)$$

^{3.5}Wir bezeichnen im Folgenden χ mit $\chi^{(1)}$, um es von den nichtlinearen Anteilen zu unterscheiden.

Der nichtlineare Anteil kann folgendermaßen modelliert werden:^{3,6}

$$\begin{aligned} \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = & \varepsilon_0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(t - t_1, t - t_2) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) dt_1 dt_2 \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \cdots \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

Die lineare Suszeptibilität $\chi^{(1)}$ stellt den dominanten Term dar. Sie beinhaltet Brechungsindex und Dämpfung, wie wir schon im Kapitel 3 gesehen haben. Der Term mit $\chi^{(2)}$ bewirkt nichtlineare Effekte, wie Frequenzverdopplung und die Generation der Summenfrequenz. In Materialien, die eine symmetrische molekulare Struktur aufweisen, wie beispielsweise Glas, verschwindet dieser Anteil und der dominante nichtlineare Term ist der Term mit der Suszeptibilität 3. Ordnung $\chi^{(3)}$ [17, S.14]. Da bei diesen Systemen optische Verstärker verwendet werden, spielt die Nichtlinearität der Faser eine entscheidende Rolle.

^{3,6} $\chi^{(i)}$ ist im allgemeinen Fall ein Tensor der Ordnung i . Die Gleichung entspricht einer Taylorentwicklung für den allgemeinen Vektorfall

Zusammenfassung

Maxwellgleichungen für ein lineares Dielektrikum :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \\
 \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\
 \vec{P} &= \varepsilon_0 \chi \vec{E} \\
 \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \\
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\
 \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\
 \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0
 \end{aligned}$$

Für sinusförmige Vorgänge lauten die die Ausbreitung beschreibenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} - \omega^2 \underline{\varepsilon} \mu_0 \underline{\vec{E}} &= 0 \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\vec{H}} - \omega^2 \underline{\varepsilon} \mu_0 \underline{\vec{H}} &= 0
 \end{aligned}$$

Für kleine räumliche Änderungen der Dielektrizitätskonstante gilt:

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{\vec{E}} + \operatorname{grad} \left(\frac{\operatorname{grad} \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon}} \bullet \underline{\vec{E}} \right) + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \underline{\vec{E}} &= 0 \\
 \Delta \underline{\vec{H}} + \frac{\operatorname{grad} \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon}} \times \operatorname{rot} \underline{\vec{H}} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \underline{\vec{H}} &= 0
 \end{aligned}$$

Für eine konstante Dielektrizitätskonstante folgt:

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \underline{\vec{E}} = 0 \quad \Delta \underline{\vec{H}} + \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \underline{\vec{H}} = 0$$

Eine ebene Welle kann beschrieben werden durch:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-j \underline{\vec{k}} \bullet \underline{\vec{r}}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-j(\underline{k}_x x + \underline{k}_y y + \underline{k}_z z)}$$

Für sie gilt:

$$\underline{\vec{H}} = \frac{\underline{\vec{k}} \times \underline{\vec{E}}}{\omega \mu_0} \quad \underline{\vec{E}} = -\frac{\underline{\vec{k}} \times \underline{\vec{H}}}{\omega \underline{\varepsilon}}$$

Der Jones-Vektor beschreibt ihren Polarisationszustand:

Kapitel 4

Dielektrische Grenzflächen

Motivation

Das Verhalten elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Grenzschichten bestimmt die Eigenschaften vieler in der optischen Nachrichtentechnik eingesetzter Komponenten. Hiermit kann die Wellenführung des Lichts im Halbleiterlaser oder in der Faser erklärt werden.

Dielektrische Wellenleiter dienen in der optischen Nachrichtentechnik zur Führung der optischen Wellen. Sie treten sowohl in optischen Komponenten, z.B. Laser als auch im optischen Lichtwellenleiter (z.B. Faser) auf (siehe Bild 4.1 und 4.2). Der Kern der Faser hat einen höheren Brechungsindex als der ihn umhüllende Mantel. Die dunkel schraffierten Flächen in Bild 4.1 kennzeichnen unterschiedliche Materialien, mit deren Hilfe eine künstliche Asymmetrie erzeugt werden kann (siehe Kapitel 14). In diesem Kapitel wollen

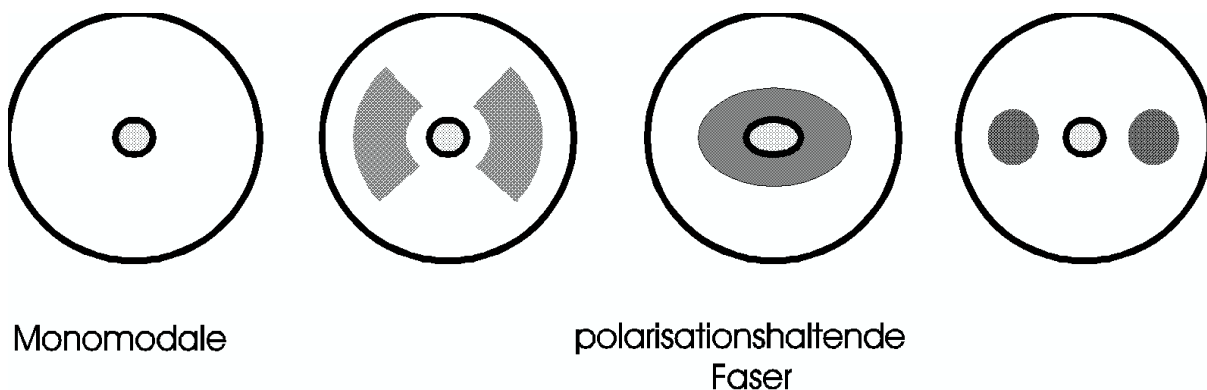


Abbildung 4.1: Dielektrische Fasern

wir die physikalischen Eigenschaften dielektrischer Wellenleiter untersuchen.

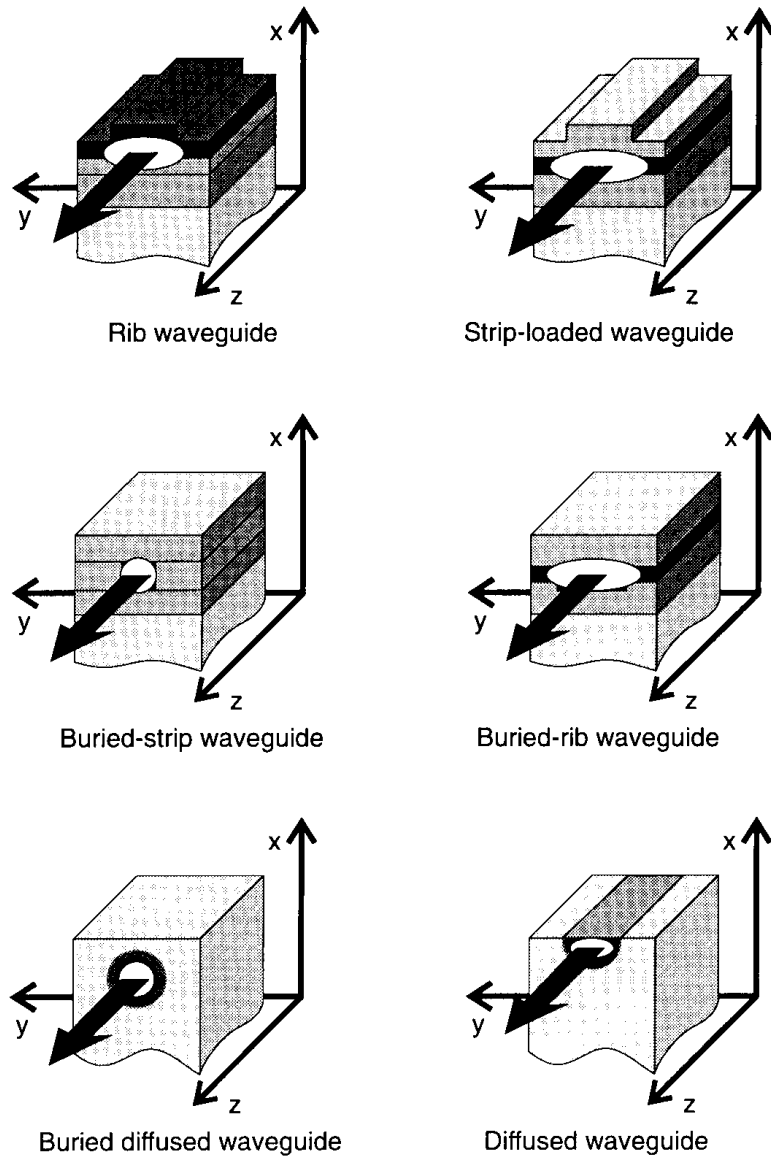


Abbildung 4.2: Dielektrische Wellenleiter

4.1 Randbedingungen für dielektrische Grenzschichten

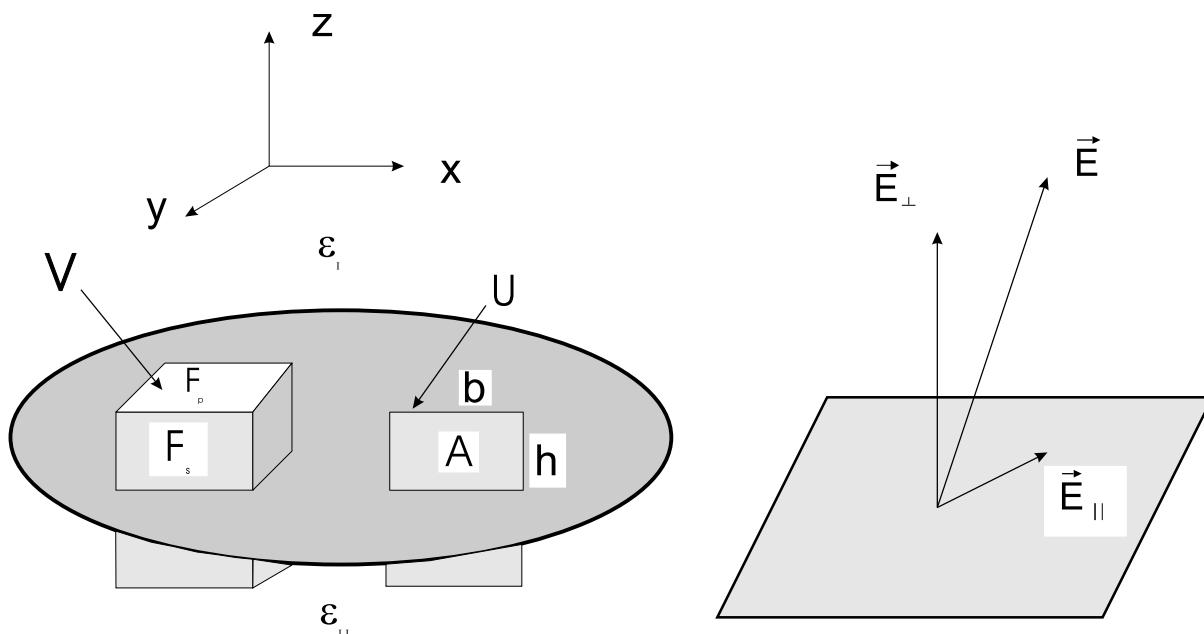


Abbildung 4.3: Randbedingungen an dielektrischer Schicht und Aufteilung des Feldes in $\vec{E}_{||}$ und \vec{E}_{\perp}

Wir betrachten die in Bild 4.3 dargestellte Geometrie. Zwei Halbräume mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ stoßen aneinander. Das Quader mit dem Volumen V reicht in beide Halbräume. Da die Dielektrika raumladungsfrei sein sollen, folgt:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{\varepsilon} \vec{E} = 0 \quad (4.1)$$

Nach dem Satz von Gauß (siehe A.77) folgt:

$$\oint \underline{\varepsilon} \vec{E} \bullet \vec{e}_z dF = 0 \quad (4.2)$$

Hier erstreckt sich das Integral über die Oberfläche O des Quaders. Läßt man die Höhe des Quaders gegen Null gehen folgt:

$$\int_{F_p} (\varepsilon_{II} \vec{E}_{II} - \varepsilon_I \vec{E}_I) \bullet \vec{e}_z dF = 0 \quad (4.3)$$

Dieses Integral muß für eine beliebige Größe der Quader gelten, also muß der Integrant verschwinden:

$$\underline{\varepsilon}_I \vec{E}_{I,\perp} = \underline{\varepsilon}_{II} \vec{E}_{II,\perp} \quad (4.4)$$

Hier ist $\vec{E}_{I,\perp}$ bzw. $\vec{E}_{II,\perp}$ die vektorielle Komponente der elektrischen Feldstärke senkrecht zur Grenzfläche. Man erkennt, daß die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke an der Grenzfläche nicht stetig ist.

Aus $\text{div } \vec{B} = 0$ folgt nach ähnlicher Rechnung die Stetigkeit der Normalkomponente der magnetischen Feldstärke.

$$\vec{H}_{I,\perp} = \vec{H}_{II,\perp} \quad (4.5)$$

Zur Berechnung der Randbedingungen für die tangentialen Komponenten untersuchen wir das Integral über die Fläche A in Bild 4.3:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (4.6)$$

$$\int_A \text{rot } \vec{E} \bullet d\vec{A} = \int_A -j\omega\mu_0 \vec{H} \bullet d\vec{A} \quad (4.7)$$

Nach dem Satz von Stokes (siehe A.78) folgt:

$$\oint_U \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_A -j\omega\mu_0 \vec{H} \bullet d\vec{A} \quad (4.8)$$

mit U dem Rand der Fläche A.

Mit $E_{||}$ als Komponente parallel zur Grenzfläche folgt für $\lim_{h \rightarrow 0}$ (siehe Bild 4.3):

$$\int_b (\vec{E}_{II,||} - \vec{E}_{I,||}) \bullet d\vec{r} = 0 \quad (4.9)$$

Da der Integrationspfad beliebig gewählt werden kann gilt:

$$\vec{E}_{II,||} = \vec{E}_{I,||} \quad (4.10)$$

Aus einer entsprechenden Rechnung folgt aus $\text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{E}$:

$$\vec{H}_{II,||} = \vec{H}_{I,||} \quad (4.11)$$

Zusammenfassung der Randbedingungen für ein Dielektrikum

Die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} sind stetig. Die Normalkomponente von \vec{H} ist stetig. Die Normalkomponente von \vec{E} ist nicht stetig

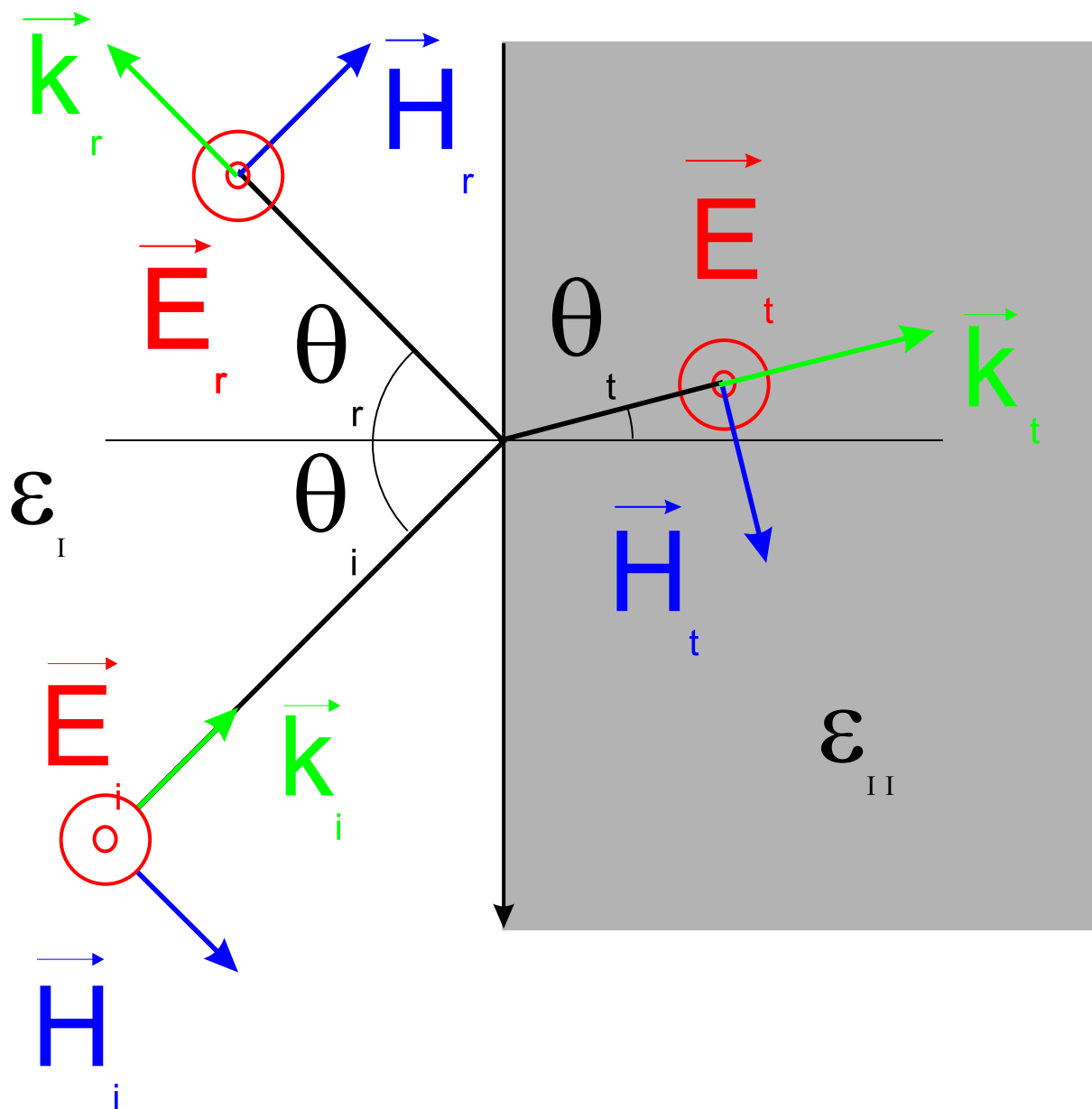


Abbildung 4.4: Ebene Welle auf Grenzfläche

4.2 Wellen an dielektrischen Grenzschichten

4.2.1 Snelliussches Gesetz

Wir betrachten eine ebene Welle, die auf eine Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika fällt und untersuchen wie sie transmittiert und reflektiert wird (siehe Bild 4.4). Beide Dielektrika seien verlustlos.

Es gelten die Snellius'sche Gesetze:

$$\Theta_i = \Theta_r \quad (4.12)$$

$$\frac{\sin(\Theta_i)}{\sin(\Theta_t)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I}} \quad (4.13)$$

4.1

Ist $\varepsilon_{II} < \varepsilon_I$, kann der Fall eintreten, daß $\sin(\Theta_t) = \sin(\Theta_i) \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}}}$ größer 1 wird. Dann tritt der Fall der Totalreflexion ein. Der Grenzwinkel, ab dem Totalreflexion auftritt, ist

$$\sin(\Theta_g) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I}} \quad (4.14)$$

4.3 Die Fresnellschen Gleichungen

In diesem Abschnitt werden die Leistungsverhältnisse der transmittierten und reflektierten Wellen behandelt. Wir setzen wieder verlustlose Materialien voraus.^{4.2}

Jede auftretende Welle kann in zwei Komponenten aufgeteilt werden, eine Komponente liegt in der Einfallsebene und eine Komponente liegt senkrecht dazu. Wir machen eine entsprechende Fallunterscheidung und betrachten nur ungedämpfte Wellen:

4.3.1 Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle steht senkrecht zur Einfallsebene

Dieser Fall ist in Abbildung 4.5 angegeben. Für die einfallende ebene Welle gilt mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$.^{4.3}

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \vec{e}_z \quad (4.15)$$

^{4.1}Wir werden diese Gesetze in einer Übung ableiten

^{4.2}Die Gesetze können auch für verlustbehaftete Wellen abgeleitet werden, es treten dann aber komplexe Winkel auf, und die physikalische Interpretation ist schwierig

^{4.3}Die Amplitude kann als reell angesetzt werden, da, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, die Phasen aller drei Wellen gleich sind.

Einfallsebene

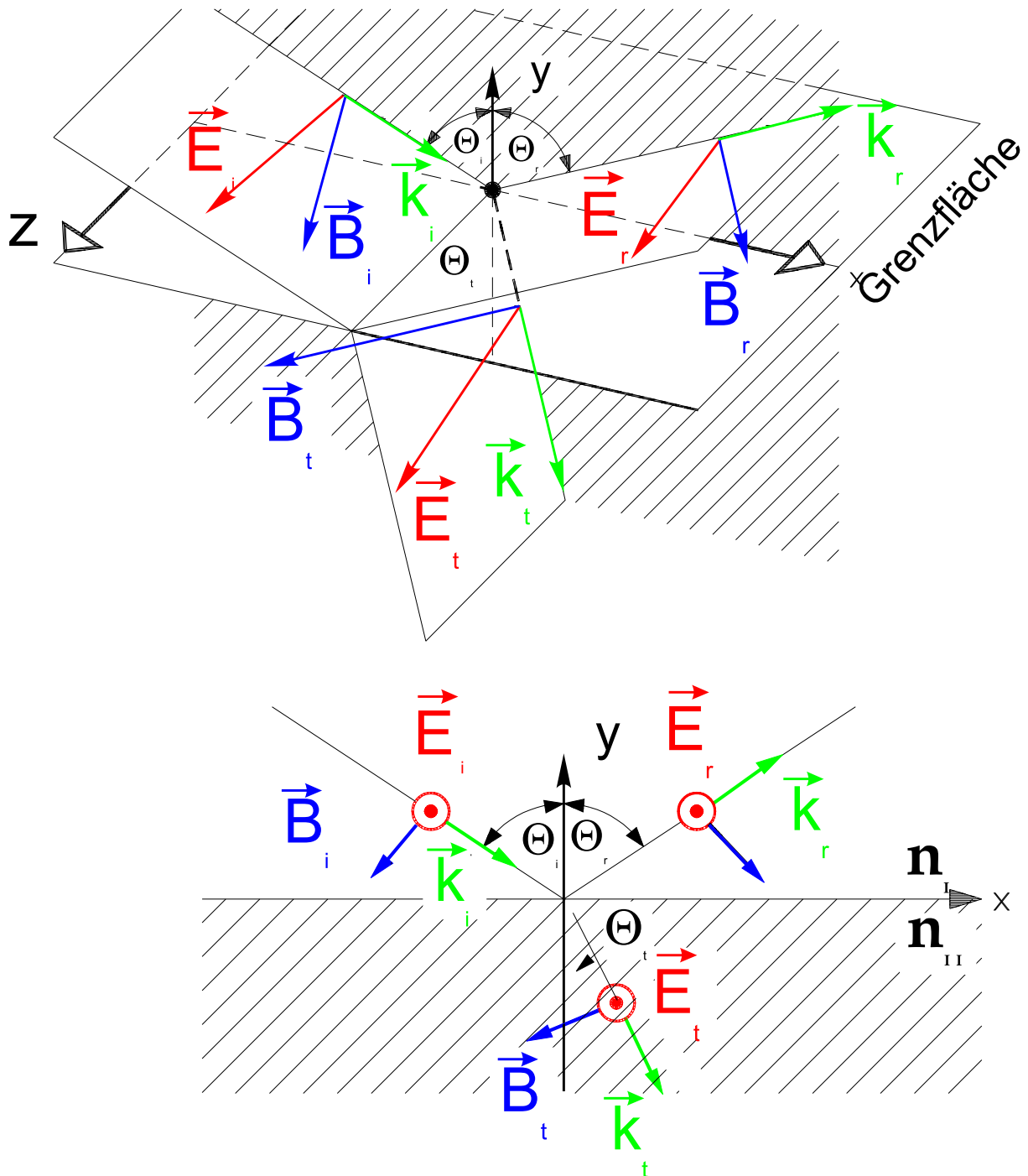


Abbildung 4.5: Ankommende Welle, deren E-Feld senkrecht zur Einfallsebene steht

d.h. die x- bzw y-Komponente der elektrischen Feldstärke verschwindet. Für die magnetische Feldstärke folgt aus $-j\omega\mu\vec{H} = \text{rot } \vec{E}$:

$$\vec{H}_i = \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \vec{E}_i \quad (4.16)$$

$$= \frac{jE_{i0}}{\omega\mu} [jk_0 n_I \cos(\Theta_i) \vec{e}_x + jk_0 n_I \sin(\Theta_i) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \quad (4.17)$$

Entsprechend folgt für die reflektierte ebene Welle:

$$\vec{E}_r = E_{r0} e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_r) + y \cos(\Theta_r))} \vec{e}_z \quad (4.18)$$

$$\vec{H}_r = \frac{jE_{r0}}{\omega\mu} [-jk_0 n_I \cos(\Theta_r) \vec{e}_x + jk_0 n_I \sin(\Theta_r) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_r) + y \cos(\Theta_r))} \quad (4.19)$$

und für die transmittierte ebene Welle:

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_0 n_{II} (x \sin(\Theta_t) - y \cos(\Theta_t))} \vec{e}_z \quad (4.20)$$

$$\vec{H}_t = \frac{jE_{t0}}{\omega\mu} [jk_0 n_{II} \cos(\Theta_t) \vec{e}_x + jk_0 n_{II} \sin(\Theta_t) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_{II} (x \sin(\Theta_t) - y \cos(\Theta_t))} \quad (4.21)$$

Da die elektrische Feldstärke in Richtung der Tangentialebene zeigt, ist sie auf der Grenzfläche stetig. Es folgt wieder $\Theta_i = \Theta_r$. Außerdem gilt wegen der Stetigkeit des Arguments der e-Funktion das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$n_I \sin(\Theta_i) = n_{II} \sin(\Theta_t) \quad (4.22)$$

$$(4.23)$$

Weiterhin gilt wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke:

$$\vec{E}_i + \vec{E}_r|_{y=0} = \vec{E}_t|_{y=0} \quad (4.24)$$

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (4.25)$$

Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke ist ebenfalls stetig:

$$-n_I \cos(\Theta_i)(E_{i0} - E_{r0}) = -n_{II} \cos(\Theta_t) E_{t0} \quad (4.26)$$

Mit 4.25 ergibt sich:

$$n_I \cos(\Theta_i)(E_{i0} - E_{r0}) = n_{II} \cos(\Theta_t)(E_{i0} + E_{r0}) \quad (4.27)$$

$$n_I \cos(\Theta_i) \left(1 - \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) = n_{II} \cos(\Theta_t) \left(1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) \quad (4.28)$$

$r_{TE} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}$ ist der Reflexionsfaktor für Amplituden und $t_{TE} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}$ ist der Transmissionsfaktor für Amplituden. Das Zeichen TE heißt, daß hier der elektrische Feldvektor senkrecht zur Einfallsebene steht:

$$r_{TE} = \frac{n_I \cos(\Theta_i) - n_{II} \cos(\Theta_t)}{n_I \cos(\Theta_i) + n_{II} \cos(\Theta_t)} \quad (4.29)$$

$$t_{TE} = 1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \quad (4.30)$$

$$= \frac{2n_I \cos(\Theta_i)}{n_I \cos(\Theta_i) + n_{II} \cos(\Theta_t)} \quad (4.31)$$

Der Reflexionsfaktor und der Transmissionsfaktor kann mit Hilfe der Snellius'sches Gesetze umgeschrieben werden:

$$r_{TE} = \frac{-\sin(\Theta_i - \Theta_t)}{\sin(\Theta_i + \Theta_t)} \quad (4.32)$$

$$t_{TE} = 1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \quad (4.33)$$

$$= \frac{2 \sin(\Theta_t) \cos(\Theta_i)}{\sin(\Theta_i + \Theta_t)} \quad (4.34)$$

Man kann den Reflexionsfaktor auch als Funktion der y-Komponente der Ausbreitungsvektoren \vec{k} angeben: ($k_{iy} = -k_0 n_I \cos(\Theta_i)$, $k_{ty} = -k_0 n_{II} \cos(\Theta_t)$).

$$r_{TE} = \frac{k_{iy} - k_{ty}}{k_{iy} + k_{ty}} \quad (4.35)$$

4.3.2 Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle liegt in der Einfallsebene

Dieser Fall ist in Bild 4.6 angegeben. Für die einfallende ebene Welle gilt jetzt, daß die magnetische Feldstärke nur eine z-Komponente aufweist und die elektrische Feldstärke eine x und y Komponente: Für die einfallende ebene Welle gilt mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$.^{4.4}

$$\underline{\vec{H}}_i = H_{i0} e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \vec{e}_z \quad (4.36)$$

$$(4.37)$$

^{4.4}Die Amplitude kann als reell angesetzt werden, da wie im vorigen Abschnitt gezeigt, die Phasen aller drei Wellen gleich sind.

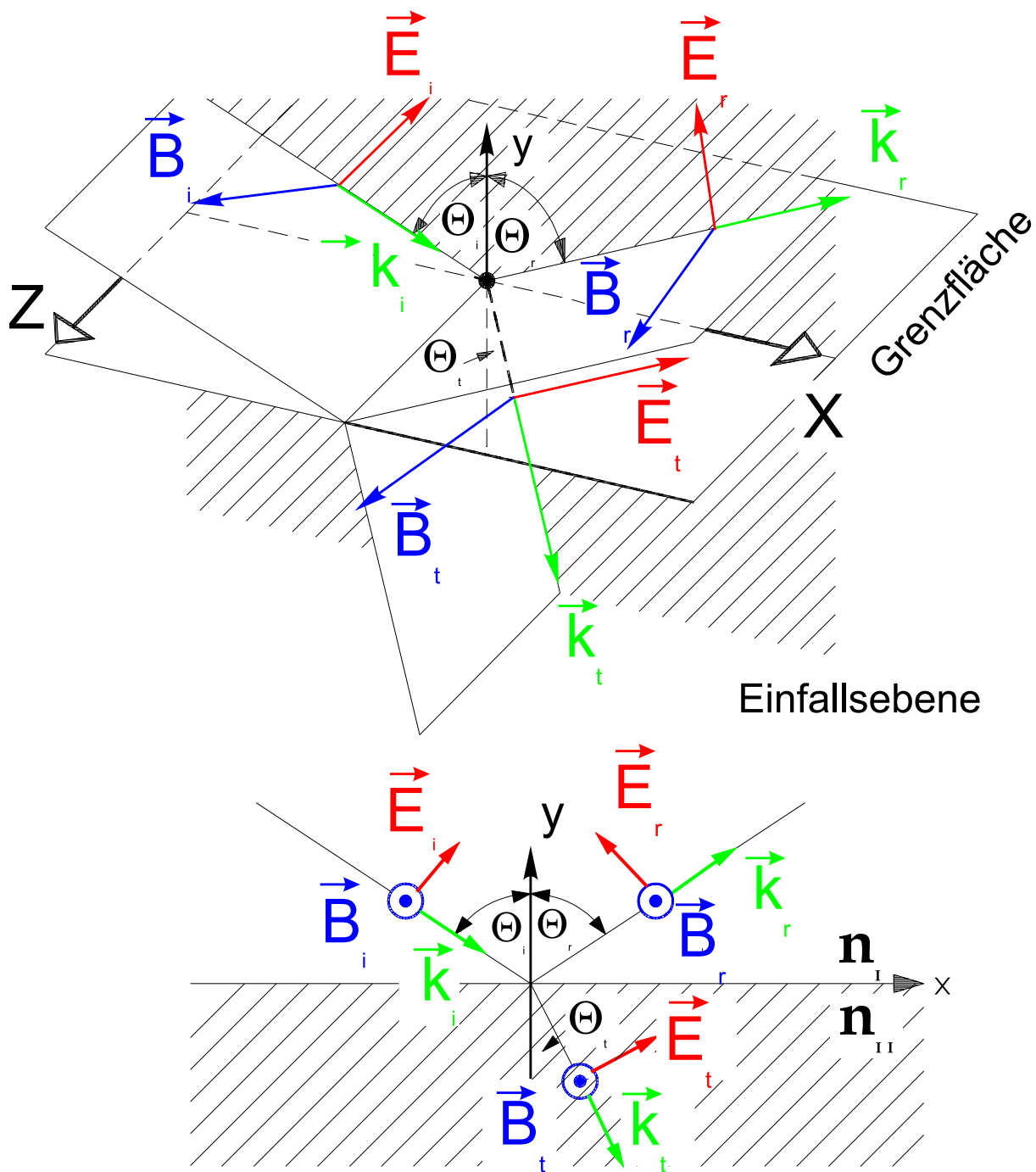


Abbildung 4.6: Ankommende Welle, deren E-Feld parallel zur Einfallsebene liegt

d.h. die x- bzw y-Komponente der magnetischen Feldstärke verschwindet. Mit dem Feldwiderstand 3.51 folgt:

$$\vec{H}_i = E_{i0} \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\mu}} e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \vec{e}_z \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

Für die elektrische Feldstärke folgt aus dem Durchflutungsgesetz: $j\omega\varepsilon\vec{E} = \text{rot } \vec{H}$:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{j\omega\varepsilon_I} \text{rot } \vec{H}_i \quad (4.40)$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\mu}} \frac{E_{i0}}{j\omega\varepsilon_I} [jk_0 n_I \cos(\Theta_i) \vec{e}_x + jk_0 n_I \sin(\Theta_i) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \quad (4.41)$$

$$= E_{i0} [\cos(\Theta_i) \vec{e}_x + \sin(\Theta_i) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \quad (4.42)$$

Entsprechend folgt für die reflektierte und transmittierte ebene Welle:

$$\vec{H}_r = E_{r0} \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\mu}} e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_r) + y \cos(\Theta_r))} \vec{e}_z \quad (4.43)$$

$$\vec{E}_r = E_{r0} [-\cos(\Theta_r) \vec{e}_x + \sin(\Theta_r) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_r) + y \cos(\Theta_r))} \quad (4.44)$$

$$\vec{H}_t = E_{t0} \sqrt{\frac{\varepsilon_{II}}{\mu}} e^{-jk_0 n_{II} (x \sin(\Theta_t) - y \cos(\Theta_t))} \vec{e}_z \quad (4.45)$$

$$\vec{E}_t = E_{t0} [\cos(\Theta_t) \vec{e}_x + \sin(\Theta_t) \vec{e}_y] e^{-jk_0 n_{II} (x \sin(\Theta_t) - y \cos(\Theta_t))} \quad (4.46)$$

$$(4.47)$$

Da die magnetische Feldstärke in Richtung der Tangentialebene zeigt, ist sie auf der Grenzfläche stetig. Es folgt wieder $\Theta_i = \Theta_r$. Außerdem gilt wegen der Stetigkeit des Arguments der e-Funktion das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$n_I \sin(\Theta_i) = n_{II} \sin(\Theta_t) \quad (4.48)$$

$$(4.49)$$

Weiterhin gilt wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke:

$$\vec{H}_i + \vec{H}_r|_{y=0} = \vec{H}_t|_{y=0} \quad (4.50)$$

$$n_I E_{i0} + n_I E_{r0} = n_{II} E_{t0} \quad (4.51)$$

und der elektrischen Feldstärke

$$\cos(\Theta_i)(E_{i0} - E_{r0}) = \cos(\Theta_t) E_{t0} \quad (4.52)$$

Mit 4.51 ergibt sich:

$$\cos(\Theta_i)(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{n_I}{n_{II}} \cos(\Theta_t)(E_{i0} + E_{r0}) \quad (4.53)$$

$$n_{II} \cos(\Theta_i) \left(1 - \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) = n_I \cos(\Theta_t) \left(1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) \quad (4.54)$$

$r_{TM} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}$ ist der Reflexionsfaktor für Amplituden und $t_{TM} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}$ ist der Transmissionsfaktor für Amplituden. Das Zeichen TM heißt, daß hier der magnetische Feldvektor senkrecht zur Einfallsebene steht:^{4,5}

$$r_{TM} = \frac{n_{II} \cos(\Theta_i) - n_I \cos(\Theta_t)}{n_{II} \cos(\Theta_i) + n_I \cos(\Theta_t)} \quad (4.55)$$

$$t_{TM} = \left(1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) \frac{n_I}{n_{II}} \quad (4.56)$$

$$= \frac{2n_I \cos(\Theta_i)}{n_{II} \cos(\Theta_i) + n_I \cos(\Theta_t)} \quad (4.57)$$

Wieder können die Faktoren eleganter geschrieben werden:

$$r_{TM} = \frac{\tan(\Theta_i - \Theta_t)}{\tan(\Theta_i + \Theta_t)} \quad (4.58)$$

$$t_{TM} = \frac{2 \sin(\Theta_t) \cos(\Theta_i)}{\sin(\Theta_i + \Theta_t) \cos(\Theta_i - \Theta_t)} \quad (4.59)$$

Auch hier kann man den Reflexionsfaktor mit Hilfe der y-Komponenten der Ausbreitungsvektoren beschreiben.

$$r_{TM} = \frac{n_{II}^2 k_{iy} - n_I^2 k_{ty}}{n_{II}^2 k_{iy} + n_I^2 k_{ty}} \quad (4.60)$$

4.3.3 Diskussion der Reflexionsfaktoren

Uns interessiert vor allem der Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium ($n_I > n_{II}$).

^{4,5}Das Vorzeichen findet man in der Literatur verschieden vom hier abgeleiteten Fall, das liegt an der willkürlichen Annahme der Richtung der Feldstärken für das transmittierte bzw. reflektierte Feld

Zuerst untersuchen wir den Fall der senkrecht zur Einfallsebene ausgerichteten elektrischen Feldstärke:

$\sin(\Theta_t)$ kann durch das Verhältnis der Brechungsindizes mit Hilfe des Snelliusschen Gesetzes ausgedrückt und in die Formel für den Reflexionsfaktor eingesetzt werden.

$$\sin \Theta_t = \frac{n_{II}}{n_I} \sin(\Theta_i) \quad (4.61)$$

$$\cos \Theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_{II}}{n_I} \sin(\Theta_i)\right)^2} \quad (4.62)$$

$$r_{TE} = \frac{n_I \cos(\Theta_i) - \sqrt{n_{II}^2 - n_I^2 \sin^2(\Theta_i)}}{n_I \cos(\Theta_i) + \sqrt{n_{II}^2 - n_I^2 \sin^2(\Theta_i)}} \quad (4.63)$$

Die Ortskurve des Reflexionsfaktors als Funktion des Einfallswinkel ist in Bild 4.7 beispielhaft für $n_I = 1.5$, $n_{II} = 1.0$ angegeben. Für $\Theta_i = 0$ folgt $\Theta_r = \Theta_t = 0$ und $r_{TE} = 0.2$. Für wachsendes Θ_i wächst r_{TE} und bleibt reell bis zum Winkel $\sin \Theta_c = \frac{n_{II}}{n_I}$, dem Grenzwinkel der Totalreflexion. Hier erreicht der Reflexionsfaktors den Wert 1. Für weiter wachsendes Θ_i bleibt der Betrag des Reflexionsfaktors 1, das Argument der Wurzel wird negativ und somit die y-Komponente des Ausbreitungsvektors im Medium II imaginär (siehe Formel 4.35).^{4.6}

$$r_{TE} = \frac{n_I \cos(\Theta_i) + j \sqrt{n_I^2 \sin^2(\Theta_i) - n_{II}^2}}{n_I \cos(\Theta_i) - j \sqrt{n_I^2 \sin^2(\Theta_i) - n_{II}^2}} \quad (4.64)$$

$$= \frac{k_{iy} + j\alpha_t}{k_{iy} - j\alpha_t} \quad (4.65)$$

Hier ist α_t die Eindringtiefe in das Medium II. Für $\Theta_i = 90^\circ$ erreicht der Reflexionsfaktor den Wert -1. Wir erkennen, dass für diesen Fall immer eine Reflexion auftritt, das heißt der Reflexionsfaktor ist nie Null. Den Betrag und die Phase des Reflexionsfaktors findet man in Bild 4.8.

Der Fall der parallel zur Einfallsebene ausgerichteten elektrischen Feldstärke
Für den Reflexionsfaktor folgt nach ähnlicher Rechnung:

^{4.6}Man beachte das Vorzeichen, der Wurzel, es muß sich eine gedämpfte Welle im Medium II ergeben

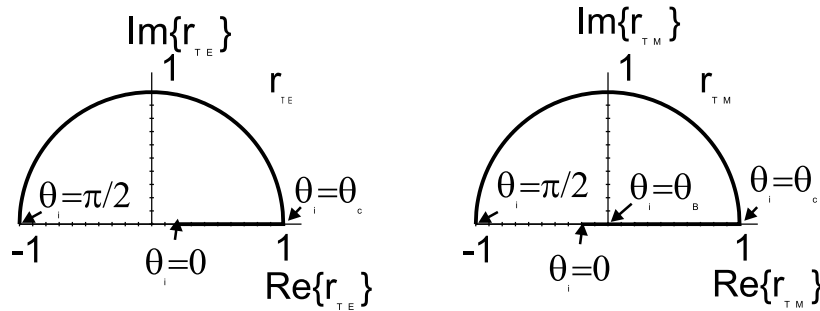


Abbildung 4.7: Ortskurve der komplexen Reflexionsfaktoren für beide Polarisationsrichtungen als Funktion des Einfallswinkels, $n_I = 1.5, n_{II} = 1.0$

$$r_{TM} = \frac{n_{II} \cos(\Theta_i) - n_I \sqrt{1 - \left(\frac{n_I}{n_{II}} \sin(\Theta_i)\right)^2}}{n_{II} \cos(\Theta_i) + n_I \sqrt{1 - \left(\frac{n_I}{n_{II}} \sin(\Theta_i)\right)^2}} \quad (4.66)$$

$$= \frac{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} \cos(\Theta_i) - \sqrt{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} - \sin^2(\Theta_i)}}{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} \cos(\Theta_i) + \sqrt{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} - \sin^2(\Theta_i)}} \quad (4.67)$$

$$= \frac{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} \cos(\Theta_i) - j n_I \sqrt{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} \sin^2(\Theta_i) - \frac{n_{II}^2}{n_I^2}}}{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} \cos(\Theta_i) + j n_I \sqrt{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} \sin^2(\Theta_i) - \frac{n_{II}^2}{n_I^2}}} \quad (4.68)$$

$$= \frac{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} k_{iy} - j n_I^2 \alpha_t}{\frac{n_{II}^2}{n_I^2} k_{iy} + j n_I^2 \alpha_t} \quad (4.69)$$

Die Ortskurve des Reflexionsfaktors ist in Bild 4.7 angegeben. Beim senkrechten Einfall ist der Reflexionsfaktor negativ, er wächst mit wachsendem Einfallswinkel und erreicht beim **Brewsterwinkel** $\Theta_B = \arctan\left(\frac{n_{II}}{n_I}\right)$ den Wert Null. Hier wird die Feldstärke dieser Polarisationsrichtung überhaupt nicht reflektiert. An Hand der Gleichung 4.58 erkennt man ($\tan(\Theta_B + \Theta_t) = \infty \rightarrow r = 0$), daß der Brewsterwinkel und der zugehörige Transmissionswinkel Θ_t genau 90° ergibt. Für wachsende Winkel ist der Reflexionsfaktor reell. Erst beim Winkel der Totalreflexion, der für beide Polarisationsrichtungen gleich ist, wird der Reflexionsfaktor betragsmäßig gleich 1 und komplex. Er bleibt betragsmäßig 1 und erreicht bei einem Einfallswinkel von 90° den Wert -1.

Den Betrag und die Phase der Reflexionsfaktoren findet man in Bild 4.8

4.4 Wellenbild der totalen Reflexion

Der Fall der totalen Reflexion ist von großer Bedeutung von optischen Bauelementen. Er wird insbesondere zur Führung optischer Wellen ausgenutzt. Wir wollen aus diesem

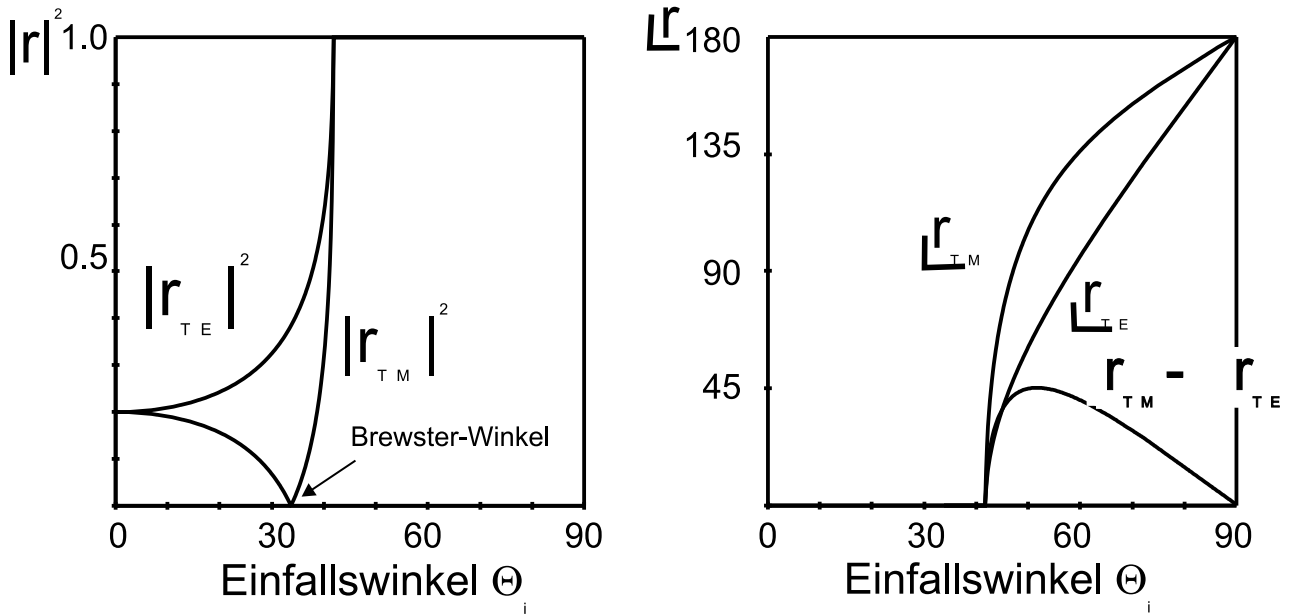


Abbildung 4.8: Betrag und Phase der komplexen Reflexionsfaktoren als Funktion des Einfallswinkels, $n_I = 1.5$, $n_{II} = 1.0$

Grund eine anschauliche Deutung der Totalreflexion geben. Dazu betrachten wir den Fall einer ebenen TE-Welle, die von einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres Medium übergeht ($n_I > n_{II}$). Der Einfallswinkel sei kleiner als der kritische Winkel. Die Welle wird vom Einfallswinkel nach dem Snellius'schem Gesetz gebrochen (siehe Bild 4.9).

Die elektrische Feldstärke kann in beiden Medien durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden (siehe Gleichung 4.15 und 4.20).

$$\vec{E}_i = E_{i0} e^{-jk_0 n_I (x \sin(\Theta_i) - y \cos(\Theta_i))} \vec{e}_z \quad (4.70)$$

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_0 n_{II} (x \sin(\Theta_t) - y \cos(\Theta_t))} \vec{e}_z \quad (4.71)$$

Mit dem Snellius'schen Gesetzen folgt:

$$\sin(\Theta_t) = \frac{n_I}{n_{II}} * \sin(\Theta_i) \quad (4.72)$$

$$\cos(\Theta_t) = \sqrt{1 - \frac{n_I^2}{n_{II}^2} \sin^2(\Theta_i)} \quad (4.73)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die vorherige Gleichung erhält man:

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_0 n_{II} (x \frac{n_I}{n_{II}} * \sin(\Theta_i) - y \sqrt{1 - \frac{n_I^2}{n_{II}^2} \sin^2(\Theta_i)})} \vec{e}_z \quad (4.74)$$

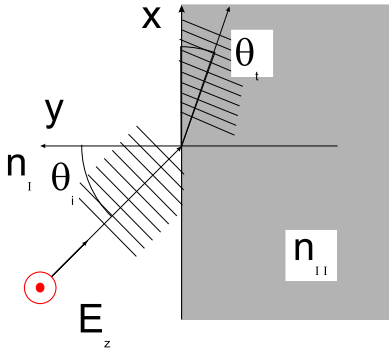


Abbildung 4.9: Eine ebene TE-Welle geht von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium über

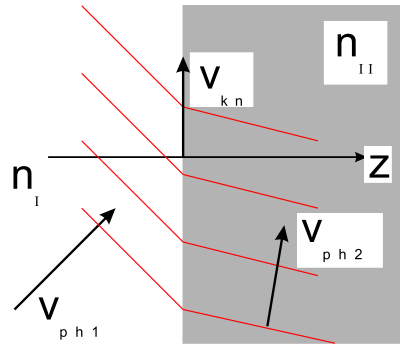


Abbildung 4.10: Beide Wellenfronten treffen an der Trennfläche zusammen. Der Knoten an denen beide zusammentreffen, bewegt sich mit einer Phasengeschwindigkeit, die vom Einfallswinkel abhängt

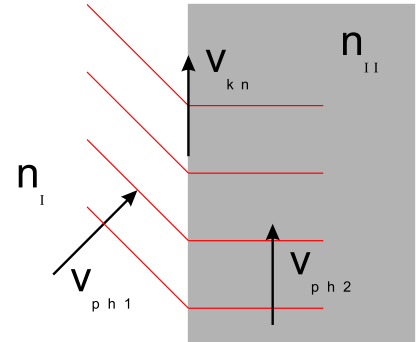


Abbildung 4.11: Ist der Einfallswinkel gleich dem kritischen Winkel ergibt sich im zweiten Medium eine ebene Welle, die parallel zur Trennfläche läuft

Wir deuten den Übergang zwischen den Medien durch Betrachtung der Phasengeschwindigkeit direkt auf der Grenzfläche: Die eintreffende Welle wird teilweise reflektiert und teilweise transmittiert. Solange der Eintrittswinkel kleiner als die kritische Wellenlänge ist, muß die Wellenfront stetig in das zweite Medium übergehen. Der Knoten, bei dem beide Wellenfronten zusammenstoßen bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v_{kn} (siehe Bild 4.10). Diese Geschwindigkeit muß gleich der Phasengeschwindigkeit der einfallenden und der transmittierten Welle in x Richtung sein. Die Knotengeschwindigkeit ist somit:

$$v_{kn} = \frac{c}{n_I \sin(\Theta_i)} \quad (4.75)$$

$$v_{kn} = \frac{c}{n_{II} \sin(\Theta_{II})} \quad (4.76)$$

Hieraus folgt wiederum das Snellius'sche Gesetz. Ist der Einfallswinkel gleich dem kritischen Winkel verschwindet die y-Komponente der Phasengeschwindigkeit und wir erhalten für dieses Medium (siehe Bild 4.11):

$$\vec{E}_t = E_{t0} e^{-jk_0 n_{II} z} \vec{e}_z \quad (4.77)$$

Es folgt eine ebene Welle, die sich im Medium 2 längs der Grenzfläche ausbreitet. Wird der Einfallswinkel größer als der kritische Winkel, so tritt eine Dämpfung in y-Richtung

auf und wir erhalten:

$$\underline{\vec{E}}_t = E_{t0} e^{-jk_0 n_{II} \left(x \frac{n_I}{n_{II}} \sin(\Theta_i) - jy \sqrt{\frac{n_I^2}{n_{II}^2} \sin^2(\Theta_i) - 1} \right)} \vec{e}_z \quad (4.78)$$

Hier tritt wieder die Eindringtiefe $\alpha_t = \sqrt{\frac{n_I^2}{n_{II}^2} \sin^2(\Theta_i) - 1}$ aus Formel 4.65 auf.

Zusammenfassung

Die Randbedingungen an dielektrischen Grenzschichten:

Die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} sind stetig. Die Normalkomponente von \vec{H} ist stetig. Die Normalkomponente von \vec{E} ist nicht stetig

Das Snellius'sche Gesetz lautet:

$$\begin{aligned}\Theta_i &= \Theta_r \\ \frac{\sin(\Theta_i)}{\sin(\Theta_t)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I}}\end{aligned}$$

$$\sin(\Theta_g) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I}}$$

Die Fresnel'schen Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}r_{TE} &= \frac{n_I \cos(\Theta_i) - n_{II} \cos(\Theta_t)}{n_I \cos(\Theta_i) + n_{II} \cos(\Theta_t)} \\ t_{TE} &= 1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \\ &= \frac{2n_I \cos(\Theta_i)}{n_I \cos(\Theta_i) + n_{II} \cos(\Theta_t)} \\ r_{TM} &= \frac{n_{II} \cos(\Theta_i) - n_I \cos(\Theta_t)}{n_{II} \cos(\Theta_i) + n_I \cos(\Theta_t)} \\ t_{TM} &= \left(1 + \frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right) \frac{n_I}{n_{II}} \\ &= \frac{2n_I \cos(\Theta_i)}{n_{II} \cos(\Theta_i) + n_I \cos(\Theta_t)}\end{aligned}$$

Beim Brewsterwinkel wird die TM-Polarisation überhaupt nicht Reflektiert, hier addieren sich Einfallswinkel und Transmissionswinkel zu 90° .

Kapitel 5

Reflexionen an dielektrischen Mehrfachschichten

Motivation

Dielektrische Mehrfachschichten treten bei vielen Komponenten der optischen Nachrichtentechnik auf. Sie werden bei der Herstellung von Ver- und Entspiegelungsschichten verwendet. Insbesondere spielen sie eine entscheidende Rolle bei der Funktionsweise von Vertical Cavity Lasern (VC-Laser). Diese Laser, die heute noch für die interessierenden Wellenlängen bei $1.5\mu\text{m}$ im Entwicklungsstadium sind, könnten eine besonders attraktive optische Quelle in zukünftigen optischen Netzen sein.

Die Anordnung ist in Abbildung 5.1 angegeben. Eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierte ebene Welle trifft eine dielektrische Schicht der Dicke d_1 . Die zugehörigen Brechungsindizes sind in Abbildung 5.1 angegeben. Alle Schichten seien verlustfrei.^{5.1} Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der oberen Grenzschicht folgt (vergleiche Gl. 4.25):^{5.2}

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_{i0} + \underline{E}_{r0} = \underline{E}_{t1} + \underline{E}'_{r1} \quad (5.1)$$

Hier ist \underline{E}_{i0} die Amplitude der elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle, \underline{E}_{r0} , die der reflektierten Welle, \underline{E}_{t1} die der transmittierten Welle und \underline{E}'_{r1} die der an dem Übergang $1 \rightarrow s$ reflektierten Welle (siehe Bild 5.1).

^{5.1}Der verlustbehaftete Fall kann analog abgeleitet werden, nur ergeben sich dabei komplexe Winkel, Wellenwiderstände und Ausbreitungskonstanten. Die gesamte Ableitung ist sehr verwandt mit dem aus der Hochfrequenztechnik bekannten Ableitung der Leitungsgleichungen. Auch die Techniken der Leitungsgleichungen (z.B. Smith-Diagramm) können hier verwendet werden.

^{5.2}Man beachte, daß jetzt die Amplituden komplex sind.

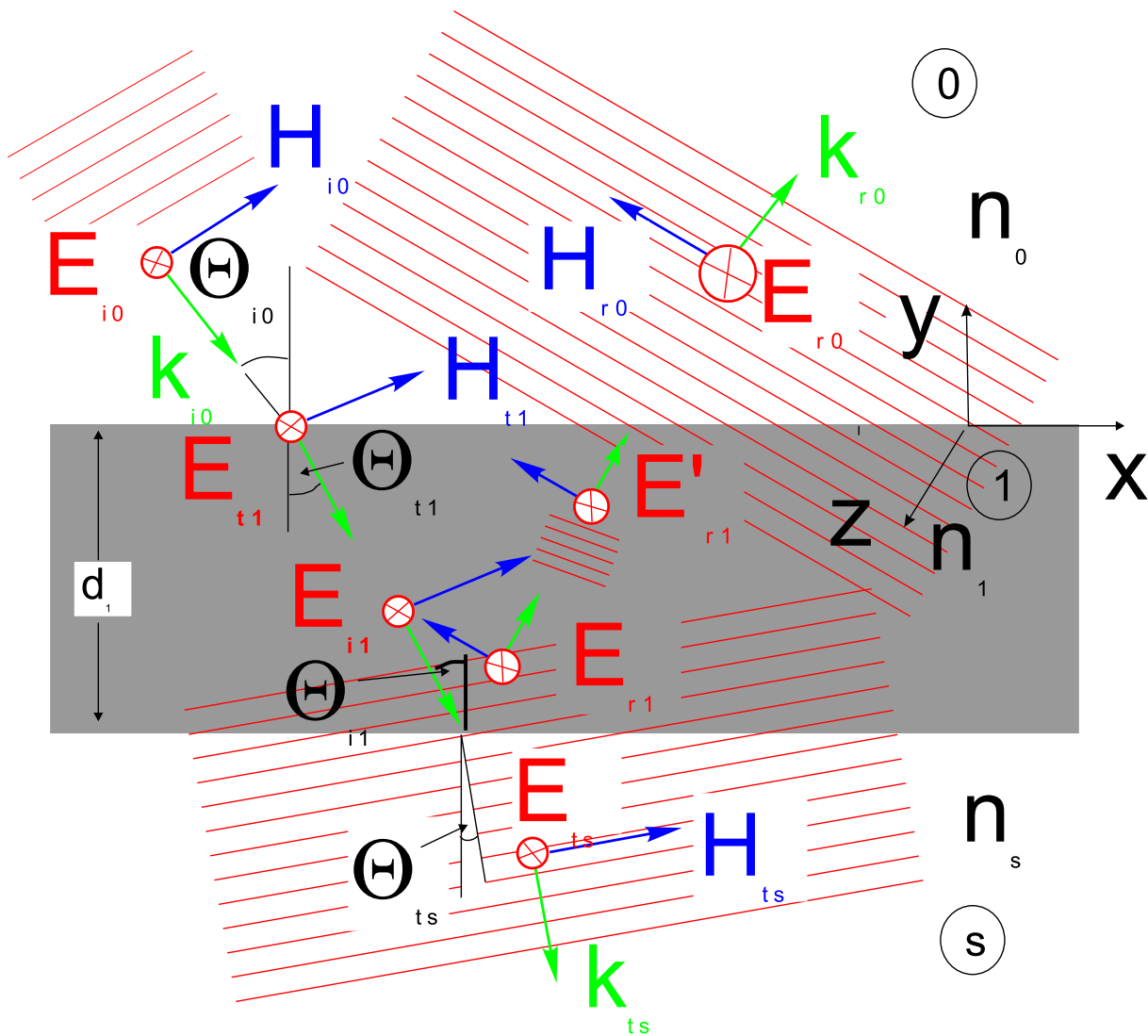


Abbildung 5.1: Reflexion einer ebenen Welle an einer Mehrschicht; die elektrische Feldstärke ist senkrecht zur Einfallsebene polarisiert

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke folgt (siehe Gl. 4.26):

$$\underline{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(\underline{E}_{i0} - \underline{E}_{r0})n_0 \cos(\Theta_{i0}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos(\Theta_{i1})(\underline{E}_{t1} - \underline{E}'_{r1}) \quad (5.2)$$

An der zweiten Grenzfläche folgt entsprechend:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{i1} + \underline{E}_{r1} = \underline{E}_{ts} \quad (5.3)$$

$$\underline{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(\underline{E}_{i1} - \underline{E}_{r1})n_1 \cos(\Theta_{i1}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}n_s \cos(\Theta_{ts})\underline{E}_{ts} \quad (5.4)$$

Hier wurde ausgenutzt, daß der Einfallswinkel auf die zweite Trennfläche $\Theta_{i1} = \Theta_{t1}$ ist. Mit der Definition des Widerstandes $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n_1 \cos(\Theta_{i1})}$ folgt für die Feldstärken an der ersten ($\underline{E}_0, \underline{H}_0$) und an der zweiten Trennfläche ($\underline{E}_1, \underline{H}_1$):

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_{t1} + \underline{E}'_{r1} \quad (5.5)$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{Z_1}(\underline{E}_{t1} - \underline{E}'_{r1}) \quad (5.6)$$

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{i1} + \underline{E}_{r1} \quad (5.7)$$

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{Z_1}(\underline{E}_{i1} - \underline{E}_{r1}) \quad (5.8)$$

Wir formen jetzt die Gleichungen so um, daß $\underline{E}_1, \underline{H}_1$ durch $\underline{E}_0, \underline{H}_0$ ausgedrückt wird (Kettenmatrix).^{5.3} Hierdurch kann dann einfach eine Kaskadierung von Spiegelflächen beschrieben werden. Die zur Trennfläche $1 \rightarrow s$ transmittierte Wellenfront erleidet an einem festen Punkt x eine Phasenverschiebung von $e^{-jk_y d} = e^{-jk_0 d n_1 \cos(\Theta_{i1})}$.

Hieraus folgt mit $h_1 = n_1 d_1 \cos(\Theta_{i1})$:

$$\underline{E}_{i1} = \underline{E}_{t1} e^{-jk_0 h_1} \quad (5.9)$$

$$\underline{E}'_{r1} = \underline{E}_{r1} e^{-jk_0 h_1} \quad (5.10)$$

Eingesetzt in Gl. (5.7,5.8) ergibt sich:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{t1} e^{-jk_0 h_1} + \underline{E}'_{r1} e^{jk_0 h_1} \quad (5.11)$$

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{Z_1}(\underline{E}_{t1} e^{-jk_0 h_1} - \underline{E}'_{r1} e^{jk_0 h_1}) \quad (5.12)$$

Aufgelöst nach $\underline{E}_{t1}, \underline{E}'_{r1}$

$$\underline{E}'_{r1} = \frac{1}{2}(\underline{E}_1 - Z_1 \underline{H}_1) e^{-jk_0 h_1} \quad (5.13)$$

$$\underline{E}_{t1} = \frac{1}{2}(\underline{E}_1 + Z_1 \underline{H}_1) e^{jk_0 h_1} \quad (5.14)$$

^{5.3}Die folgenden Gleichungen sind zu vergleichen mit den Leitungsgleichungen der Hochfrequenztechnik. Es besteht folgende Analogie: ($U \Leftrightarrow E, I \Leftrightarrow H$)

und eingesetzt in Gl.(5.5,5.6) ergibt:

$$\underline{E}_0 = \frac{1}{2}(\underline{E}_1 + Z_1 \underline{H}_1) e^{jk_0 h_1} + \frac{1}{2}(\underline{E}_1 - Z_1 \underline{H}_1) e^{-jk_0 h_1} \quad (5.15)$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{E}_1}{Z_1} + \underline{H}_1\right) e^{jk_0 h_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{E}_1}{Z_1} - \underline{H}_1\right) e^{-jk_0 h_1} \quad (5.16)$$

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_1 \cos(k_0 h_1) + j \underline{H}_1 Z_1 \sin(k_0 h_1) \quad (5.17)$$

$$\underline{H}_0 = j \frac{\underline{E}_1}{Z_1} \sin(k_0 h_1) + \underline{H}_1 \cos(k_0 h_1) \quad (5.18)$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_0 \\ \underline{H}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 h_1) & j Z_1 \sin(k_0 h_1) \\ j \frac{1}{Z_1} \sin(k_0 h_1) & \cos(k_0 h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{H}_1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_0 \\ \underline{H}_0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{M}}_1 \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{H}_1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

In dieser Schreibweise (Kettenmatrix) kann die Hintereinanderschaltung mehrerer Schichten einfach durch Multiplikation der charakteristischen Matrizen der Einzelschichten beschrieben werden: ^{5.4}

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{M}}_1 \underline{\mathbf{M}}_2 \cdots \underline{\mathbf{M}}_n = \prod_i^n \underline{\mathbf{M}}_i \quad (5.21)$$

Für den Fall einer einfallenden Welle, bei der die elektrische Feldstärke in der Einfallsebene liegt, ergeben sich die identischen Formeln, nur muß der Widerstand Z_1 durch

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\cos(\Theta_{i1})}{n_1} \quad (5.22)$$

ersetzt werden.

Die Matrix $\underline{\mathbf{M}}$ habe die Koeffizienten

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \underline{m}_{11} & \underline{m}_{12} \\ \underline{m}_{21} & \underline{m}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Zur Berechnung des Reflexionsfaktors benutzen wir Gleichungen (5.1,5.2):

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_{i0} + \underline{E}_{r0} \\ \frac{1}{Z_0}(\underline{E}_{i0} - \underline{E}_{r0}) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \underline{E}_{ts} \\ \frac{1}{Z_s} \underline{E}_{ts} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

mit

$$Z_k = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\cos(\Theta_k) n_k} \quad (5.25)$$

^{5.4}Es können hier ebenfalls alle aus der HF-Technik bekannten Matrixschreibweisen verwendet werden

Mit der Definition des Reflexionsfaktors und Transmissionsfaktors für Amplituden:

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{r0}}{\underline{E}_{i0}} \quad (5.26)$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{E}_{ts}}{\underline{E}_{i0}} \quad (5.27)$$

folgt:

$$\begin{bmatrix} 1 + \underline{r} \\ \frac{1}{Z_0}(1 - \underline{r}) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \underline{t} \\ \frac{1}{Z_s}\underline{t} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Ausgeschrieben in Koeffizienten ergibt sich:

$$1 + \underline{r} = \underline{m}_{11}\underline{t} + \underline{m}_{12}\frac{1}{Z_s}\underline{t} \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{Z_0}(1 - \underline{r}) = \underline{m}_{21}\underline{t} + \underline{m}_{22}\frac{1}{Z_s}\underline{t} \quad (5.30)$$

Hieraus folgt für \underline{t} und \underline{r} :

$$2 = \underline{t}\left(\underline{m}_{11} + \frac{\underline{m}_{12}}{Z_s} + \underline{m}_{21}Z_0 + \underline{m}_{22}\frac{Z_0}{Z_s}\right) \quad (5.31)$$

$$\underline{t} = \frac{2Z_s}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0} \quad (5.32)$$

$$\underline{r} = \left(\underline{m}_{11} + \frac{\underline{m}_{12}}{Z_s}\right) \frac{2Z_s}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0} - 1 \quad (5.33)$$

$$= \frac{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} - \underline{m}_{21}Z_sZ_0 - \underline{m}_{22}Z_0}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0} \quad (5.34)$$

$$\underline{t} = \frac{2Z_s}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0} \quad (5.35)$$

$$\underline{r} = \frac{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} - \underline{m}_{21}Z_sZ_0 - \underline{m}_{22}Z_0}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0} \quad (5.36)$$

Berechnung der Leistungstransmissions- und Reflexionsfaktoren

Die senkrecht durch eine Fläche transportierte Leistung kann mit Hilfe des Poynting-Vektors beschrieben werden:

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* \quad (5.37)$$

Für eine ebene Welle im homogenen Medium gilt (siehe Gleichung 3.44):

$$\vec{H} = \frac{nk_0}{\omega\mu_0}\vec{e}_k \times \vec{E} \quad (5.38)$$

wobei \vec{e}_k der Einheitsvektor in Richtung der Ausbreitung ist. Hieraus folgt:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} |\vec{E}|^2 \vec{e}_k \quad (5.39)$$

Ferner ist die durchschnittliche Energie pro Zeiteinheit, die eine Flächeneinheit senkrecht

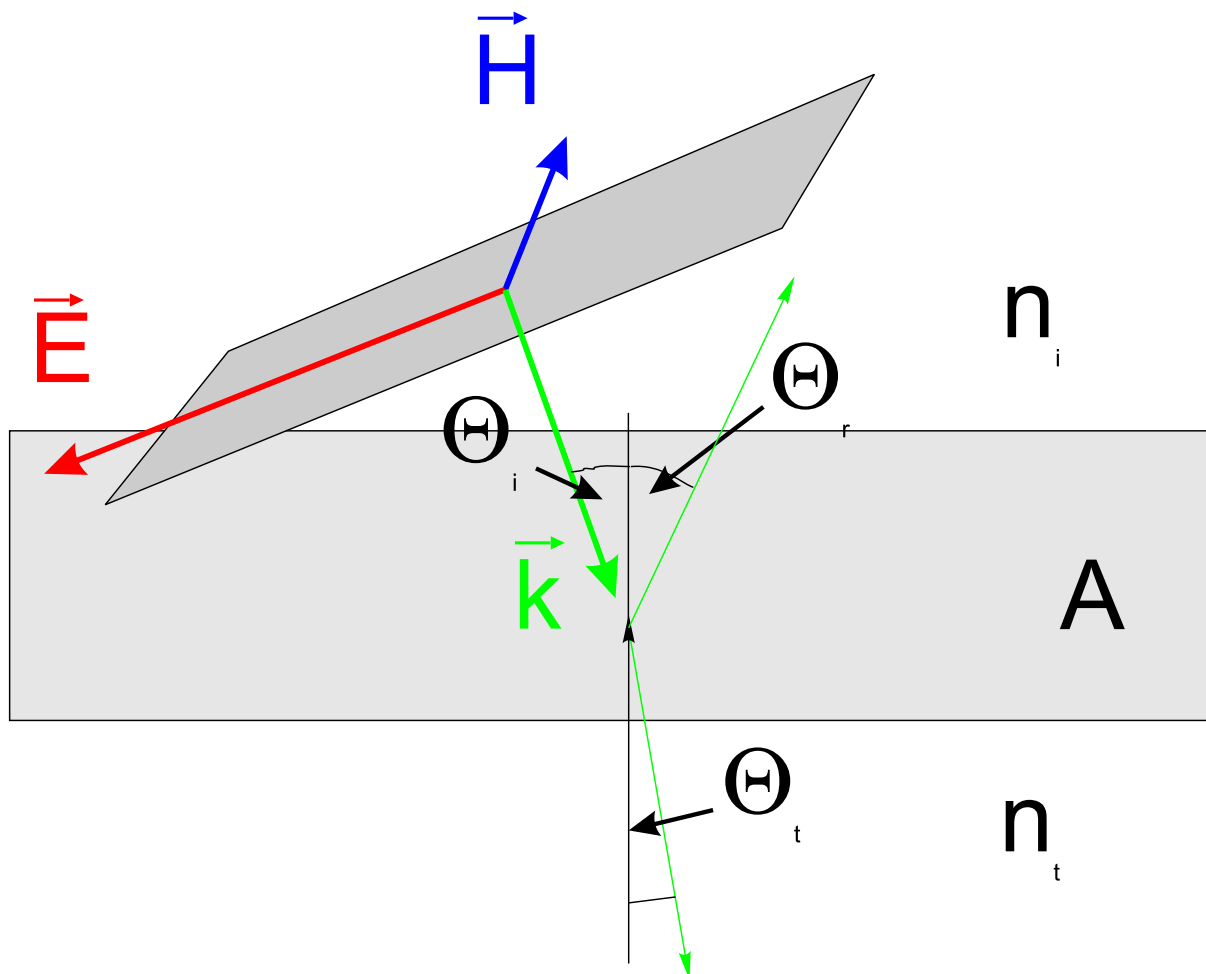


Abbildung 5.2: Ebene Welle fällt auf Grenzfläche A

zu \vec{P} durchquert $I = |\vec{P}|$ (siehe Bild 5.2). Im vorliegenden Fall ist I_i die einfallende, I_r die reflektierte und I_t die transmittierte Leistung pro Querschnittsfläche. Die Querschnittsfläche der einfallenden Welle ist $A \cos(\Theta_i)$, die der reflektierten Welle $A \cos(\Theta_r)$ und die der transmittierten Welle $A \cos(\Theta_t)$. Die einfallende, reflektierte und transmittierte Leistung

ist also:

$$I_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_i \cos(\Theta_i) |E_{0i}|^2 \quad (5.40)$$

$$I_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_i \cos(\Theta_r) |E_{0r}|^2 \quad (5.41)$$

$$I_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_t \cos(\Theta_t) |E_{0t}|^2 \quad (5.42)$$

Es folgt für den Leistungsreflexions- und Transmissionsfaktor

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_{0r}|^2}{|E_{0i}|^2} = |r|^2 \quad (5.43)$$

$$T = \frac{n_t \cos(\Theta_t) |E_{0t}|^2}{n_i \cos(\Theta_i) |E_{0i}|^2} = \frac{n_t \cos(\Theta_t)}{n_i \cos(\Theta_i)} |t|^2 \quad (5.44)$$

Beispiel Entspiegelungsschicht Wir betrachten den Fall einer einfachen Entspiegelungsschicht der Dicke h für senkrechten Einfall. Dann gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n_0} \quad (5.45)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n_1} \quad (5.46)$$

$$Z_s = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n_s} \quad (5.47)$$

$$m_{11} = \cos(hn_1 k_0) \quad (5.48)$$

$$\underline{m}_{12} = jZ_1 \sin(hn_1 k_0) \quad (5.49)$$

$$\underline{m}_{21} = \frac{j}{Z_1} \sin(hn_1 k_0) \quad (5.50)$$

$$m_{22} = \cos(hn_1 k_0) \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{Z_s \cos(hn_1 k_0) + jZ_1 \sin(hn_1 k_0) - \frac{j}{Z_1} Z_s Z_0 \sin(hn_1 k_0) - Z_0 \cos(hn_1 k_0)}{Z_s \cos(hn_1 k_0) + jZ_1 \sin(hn_1 k_0) + \frac{j}{Z_1} Z_s Z_0 \sin(hn_1 k_0) + Z_0 \cos(hn_1 k_0)} \\ &= \frac{n_1 n_0 \cos(hn_1 k_0) + j n_s n_0 \sin(hn_1 k_0) - j n_1^2 \sin(hn_1 k_0) - n_1 n_s \cos(hn_1 k_0)}{n_1 n_0 \cos(hn_1 k_0) + j n_s n_0 \sin(hn_1 k_0) + j n_1^2 \sin(hn_1 k_0) + n_1 n_s \cos(hn_1 k_0)} \\ &= \frac{\cos(k_0 h n_1) (n_0 - n_s) n_1 + j \sin(k_0 h n_1) (n_0 n_s - n_1^2)}{\cos(k_0 h n_1) (n_0 + n_s) n_1 + j \sin(k_0 h n_1) (n_0 n_s + n_1^2)} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Für $k_0 h n_1 = \frac{\pi}{2}$, d.h. $h = \frac{\lambda_0}{4n_1}$ ergibt sich dann für den Leistungsreflexionsfaktor:

$$R = \left| \frac{n_0 n_s - n_1^2}{n_0 n_s + n_1^2} \right|^2 \quad (5.53)$$

Es ergibt sich eine Entspiegelungsschicht, wenn $n_1^2 = n_0 n_s$.

Zusammenfassung

Die Transmissions- und Reflexionseigenschaften einer dielektrischen Mehrfachschicht können mit Hilfe einer Kettenmatrix-Schreibweise modelliert werden. Die i-te Schicht wird beschrieben durch:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_{i-1} \\ \underline{H}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_0 h_i) & j Z_i \sin(k_0 h_i) \\ j \frac{1}{Z_i} \sin(k_0 h_i) & \cos(k_0 h_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_i \\ \underline{H}_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_{i-1} \\ \underline{H}_{i-1} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{M}}_i \begin{bmatrix} \underline{E}_i \\ \underline{H}_i \end{bmatrix}$$

Die Hintereinanderschaltung von N Schichten wird beschrieben durch:

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \underline{m}_{11} & \underline{m}_{12} \\ \underline{m}_{21} & \underline{m}_{22} \end{bmatrix} = \prod_i^n \underline{\mathbf{M}}_i$$

Der Transmissionsfaktor bzw. Reflexionsfaktor für Amplituden lautet:

$$\underline{t} = \frac{2Z_s}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0}$$

$$\underline{r} = \frac{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} - \underline{m}_{21}Z_sZ_0 - \underline{m}_{22}Z_0}{\underline{m}_{11}Z_s + \underline{m}_{12} + \underline{m}_{21}Z_sZ_0 + \underline{m}_{22}Z_0}$$

Derjenige für Leistungen ist:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_{0r}|^2}{|E_{0i}|^2} = |r|^2$$

$$T = \frac{n_t \cos(\Theta_t)}{n_i \cos(\Theta_i)} \frac{|E_{0t}|^2}{|E_{0i}|^2} = \frac{n_t \cos(\Theta_t)}{n_i \cos(\Theta_i)} |t|^2$$

Die Z_i sind für den TE-Fall (E-Feld steht senkrecht zur Einfallsebene)

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{n_i \cos(\Theta_{ii})}$$

Für den TM-Fall (E-Feld liegt in der Einfallsebene) gilt:

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\cos(\Theta_{ii})}{n_i}$$

Kapitel 6

Fabry-Pérot Interferometer

Das Fabry-Pérot-Interferometer kann zur Selektion von Frequenz-Kanälen in OFDM-Systemen verwendet werden. Das Prinzip ist in Bild 6.1 angegeben. Das Licht wird zwischen zwei Spiegeln hin und her reflektiert. An den Spiegeln überlagern sich die einzelnen Strahlen kohärent und dadurch ergibt sich eine Frequenzselektivität des Filters, die wir im folgenden untersuchen wollen. Hier ist E_{in} , E_{out} die elektrische Feldstärke des einfallenden,

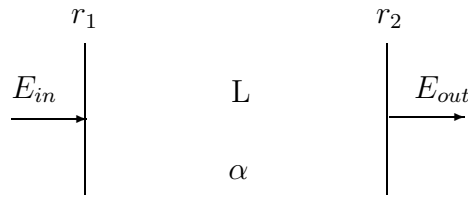


Abbildung 6.1: Prinzip eines Fabry-Pérot Interferometers

bzw. heraustretenden Lichts, dargestellt im Fourierbereich. Die Spiegelschichten werden folgendermaßen simuliert. Sie haben die komplexen Reflexionsfaktoren für die Feldstärke r_1 bzw r_2 ^{6.1}. Zusätzlich erleide die reflektierte Feldstärke eine Dämpfung $e^{-\alpha_i \ell_i}$. Das heißt, wir modellieren die Spiegel mit einer effektiven Eindringtiefe ℓ_i und einem zugehörigen Dämpfungsfaktor. Der gemessene Reflexionsfaktor eines einzelnen Spiegels ist somit:

$$r_{i0} = r_i e^{-\alpha_{ir} \ell_{ir}} \quad (6.1)$$

^{6.1}Wir nehmen hierbei an, daß die Spiegel symmetrisch aufgebaut sind, z.B. durch eine symmetrische Anordnung von dielektrischen Schichten. Dann sind die Reflexionsfaktoren bzw. Transmissionsfaktoren von innen und außen gleich groß. Die Verluste der Reflexionsfaktoren bzw. Transmissionsfaktoren werden nicht mit r und t modelliert sondern sind extra angegeben.

Für die Transmissionsfaktoren gilt entsprechend:

$$t_{i0} = t_i e^{-\alpha_{it} \ell_{it}} \quad (6.2)$$

Das Medium zwischen den Spiegeln kann Verluste $e^{-\alpha L}$ aufweisen. Der Abstand der Spiegel sei L , die zugehörige Verzögerung durch die Ausbreitung sei τ .

Als Ausgangssignal E_{out} ergibt sich als Überlagerung der Einzelwellen:

$$\begin{aligned} E_{out} &= e^{-j\omega\tau} v_0 t_1 t_2 [1 + r_2 r_1 v_1 e^{-2j\omega\tau} + \dots] E_i \\ &= t_1 t_2 v_0 e^{-j\omega\tau} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (r_2 r_1 v_1 e^{-2j\omega\tau})^n \right] E_i \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$= t_1 t_2 e^{-j\omega\tau} v_0 \frac{1}{1 - r_2 r_1 v_1 e^{-2j\omega\tau}} E_i \quad (6.4)$$

mit

$$v_0 = e^{-\alpha L - \alpha_{1t} \ell_{1t} - \alpha_{2t} \ell_{2t}} \quad (6.5)$$

$$v_1 = e^{-2\alpha L - \alpha_{1r} \ell_{1r} - \alpha_{2r} \ell_{2r}} \quad (6.6)$$

Uns interessiert die Übertragungsfunktion für die optische Leistung: Mit $P \sim |E|^2$ folgt:

$$\begin{aligned} P_{out} &= \frac{|t_1|^2 |t_2|^2 v_0^2}{(1 - r_1 r_2 v_1 e^{-j2\omega\tau})(1 - r_1^* r_2^* v_1 e^{j2\omega\tau})} P_{in} \\ &= \frac{|t_1|^2 |t_2|^2 v_0^2}{1 + |r_1|^2 |r_2|^2 v_1^2 - r_1 r_2 v_1 e^{-2j\omega\tau} - r_1^* r_2^* v_1 e^{2j\omega\tau}} P_{in} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Für die idealen verlustfreien Spiegel gilt wegen der Energieerhaltung:

$$|t_1|^2 = 1 - |r_1|^2 \quad (6.8)$$

$$|t_2|^2 = 1 - |r_2|^2 \quad (6.9)$$

Die Reflexionsfaktoren seien nach Betrag und Phase folgendermaßen darstellbar:

$$r_1 = |r_1| e^{j\varphi_1} \quad (6.10)$$

$$r_2 = |r_2| e^{j\varphi_2} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
P_{out} &= \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)v_0^2}{1 + |r_1|^2|r_2|^2v_1^2 - 2|r_1||r_2|v_1 \cos(2\omega\tau - \varphi_1 - \varphi_2)} P_{in} \\
&= \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)v_0^2}{1 + |r_1|^2|r_2|^2v_1^2 - 2|r_1||r_2|v_1 + 2|r_1||r_2|v_1(1 - \cos(2\omega\tau - \varphi_1 - \varphi_2))} P_{in} \\
&= \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)v_0^2}{(1 - |r_1||r_2|v_1)^2 + 2|r_1||r_2|v_1(1 - \cos(2\omega\tau - \varphi_1 - \varphi_2))} P_{in} \\
&= \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)v_0^2}{(1 - |r_1||r_2|v_1)^2 + 4|r_1||r_2|v_1 \sin^2(\omega\tau - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2))} P_{in} \\
&= \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)v_0^2}{(1 - |r_1||r_2|v_1)^2} \frac{1}{1 + 4 \frac{|r_1||r_2|v_1}{(1 - |r_1||r_2|v_1)^2} \sin^2(\omega\tau - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2))} P_{in}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

mit

$$G_0 = \frac{(1 - |r_1|^2)(1 - |r_2|^2)v_0^2}{(1 - |r_1||r_2|v_1)^2} \tag{6.13}$$

$$a = |r_1||r_2|v_1 \tag{6.14}$$

Die Übertragungsfunktion ist in der Frequenz eine periodische Funktion mit der Periode

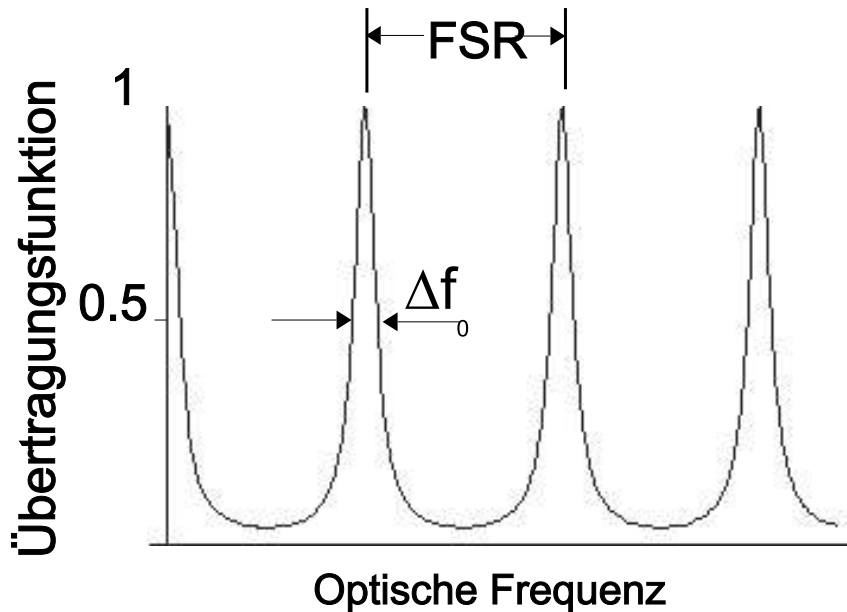


Abbildung 6.2: Übertragungsfunktion eines Fabry-Pérot

$FSR = \frac{1}{2\tau}$ (siehe Bild 6.2). FSR heißt "free spectral range".

Bei den Frequenzen

$$f_N = \frac{N}{1\tau} \left(N + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} \right) \quad (6.15)$$

mit N einer natürlichen Zahl hat das Filter seine minimale Dämpfung G_0 . Wir drücken die Frequenz als Abweichung von der Durchlaßfrequenz aus.

$$f = f_N + \Delta f \quad (6.16)$$

Es folgt für die Ausgangsleistung:

$$P_a = G_0 \frac{1}{1 + 4 \frac{a}{(1-a)^2} \sin^2(2\pi \Delta f \tau)} P_{in} \quad (6.17)$$

Die Bandbreite Δf_0 des Filters ist definiert als derjenige Frequenzbereich um eine Durchlaßfrequenz für die gilt:

$$\frac{P_a}{P_{in}}(f) < \frac{1}{2} \quad (6.18)$$

In der Nähe der Durchlaßfrequenz gilt:

$$P_a = G_0 \frac{1}{1 + 4 \frac{a}{(1-a)^2} (2\pi \Delta f \tau)^2} P_{in} \quad (6.19)$$

Hieraus folgt als Wert für die Bandbreite: ^{6.2}

$$4 \left(2\pi \frac{\Delta f_0}{2} \tau \right)^2 \approx \frac{(1-a)^2}{a} \quad (6.20)$$

$$4\pi \frac{\Delta f_0}{2} \tau \approx \frac{1-a}{\sqrt{a}} \quad (6.21)$$

$$\frac{1}{\Delta f_0 2\tau} \approx \pi \frac{\sqrt{a}}{1-a} \quad (6.22)$$

$$= F \quad (6.23)$$

F heißt Finesse und gibt das Verhältnis zwischen freiem Spektralbereich und Bandbreite an.

$$F = \pi \frac{\sqrt{a}}{1-a} \quad (6.24)$$

Für die Übertragungsfunktion folgt somit

$$P_a = G_0 \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^2} F^2 \sin^2(2\pi \Delta f \tau)} P_{in} \quad (6.25)$$

^{6.2}Man beachte, daß dies nur gilt, wenn der Sinus durch sein Argument angenähert werden kann

Für die Anwendung als selektives Filter in OFDM-Systemen ist die Mittenfrequenz durch den Wellenlängenbereich und die Bandbreite durch die Bitrate vorgegeben. Zusätzlich muß der freie Spektralbereich so groß sein, daß eine ausreichende Anzahl von OFDM-Kanälen selektiert werden kann.

Wir untersuchen den Fall, für den die Näherung $2\pi\Delta f\tau \ll 1$ gilt. Mit Gleichung 6.16 folgt dann für die Finesse:

$$F = \frac{1}{2\Delta f_0\tau} \quad (6.26)$$

$$= \frac{f_N}{\Delta f_0} \frac{1}{N + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi}} \quad (6.27)$$

$$\approx \frac{f_N}{\Delta f_0} \frac{1}{N} \quad (6.28)$$

^{6.3} f_N und Δf_0 sind durch die Anwendung vorgegeben. Die Finesse F hängt von den Verlusten und Reflexionsfaktoren ab. In Bild 6.3 ist die Finesse als Funktion von $1 - a = 1 - |r_1 r_2| v_1$ angegeben. a ist ein Maß für die Verluste des Resonators. Um eine Finesse

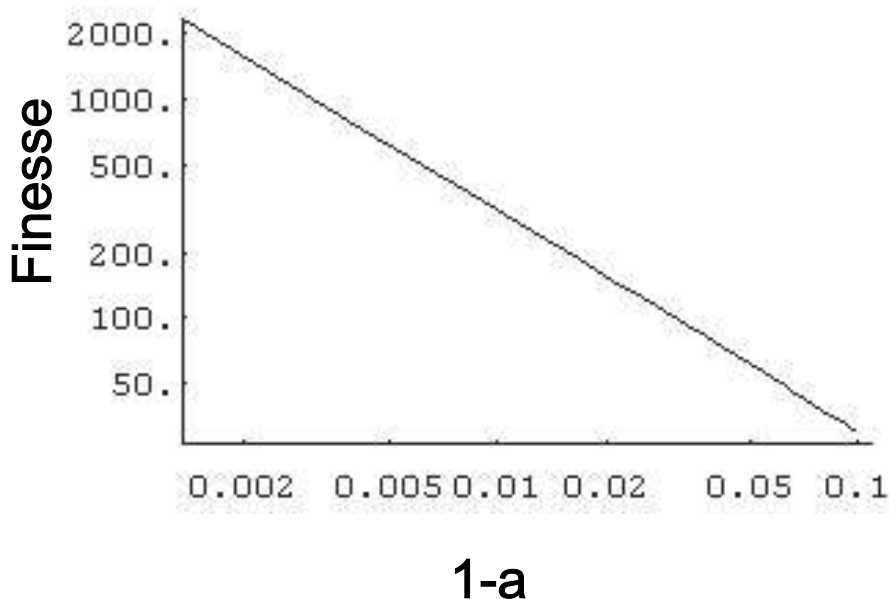


Abbildung 6.3: Die Finesse als Funktion des Verlustfaktors

von 200 zu erreichen muß der Parameter a kleiner als 0.01 sein.

^{6.3} Diese Näherung ist für große N gültig

Wir betrachten als Beispiel ein Filter für die Wellenlänge $\lambda = 1.5\mu m$. Als mögliche Abstände zwischen den Spiegeln ergeben sich für ein Medium mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c :

$$L = c\tau = \frac{c}{2\Delta f_0 F} = \frac{c}{2\Delta f_0} \underbrace{\frac{\Delta f_0 N}{f_N}}_{1/F} = \frac{c}{2} \frac{N}{f_N} = \frac{N}{2} \lambda_N \quad (6.29)$$

Für N folgt:

$$N = \frac{f_N}{F\Delta f_0} = \frac{c}{\lambda_0 \Delta f_0 F} \quad (6.30)$$

$$= \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{1.5 \cdot 10^{-6} m} \frac{1}{100} \frac{1}{10^9 Hz} \frac{1}{100} \quad (6.31)$$

$$= 20 \quad (6.32)$$

An Hand der Gleichung 6.28 erkennt man die Anforderungen an die Finesse und damit an die Verluste bzw. Reflexionsfaktoren des Resonators. Fordert man z.B. eine optische Bandbreite von 100 GHz und kann man einen Resonator mit der Finesse 100 konstruieren so ergibt sich hieraus ein Ordnung N des Filters von 20, d.h. der benötigte Abstand der Spiegel beträgt mindestens $7.5\mu m$.

Kapitel 7

Filmwellenleiter

Motivation In diesem Kapitel wollen wir uns die Wellenführungseigenschaften des einfachsten optischen Wellenleiters ansehen. Hier ist die Mathematik noch sehr einfach, aber die wesentlichen physikalischen Eigenschaften optischer Wellenleiter sind hier schon gut erkennbar.

Die Struktur eines Filmwellenleiters ist in Bild 7.1 dargestellt. Er besteht aus einer unteren Schicht dem Substrat, einer Wellenleitungsschicht und einer Deckschicht (Englisch: cladding). Alle Schichten seien homogen und isotrop. Die Bezeichnung der Brechungsindizes ist im Bild angegeben. Der Wellenleiter sei in y und z-Richtung unendlich ausgedehnt und die Höhe der Wellenleitungsschicht sei h . Der Brechungsindex der Wellenleitungsschicht muß größer als der der umgebenen Schichten sein, um eine Totalreflexion an den Grenzschichten zu ermöglichen. Wenn die Brechungsindizes der oberen und unteren Schichten gleich groß sind, spricht man von einem symmetrischen Wellenleiter, wenn sie unterschiedlich sind von einem unsymmetrischen Wellenleiter. Wir nehmen im Folgenden an, daß sich eine Welle in z-Richtung ausbreite. Dies führt uns automatisch zu dem Begriff der Moden. Wir werden dann formale Konzepte, wie die Orthogonalität, Vollständigkeit und die Entwicklung nach Moden angeben. Wir werden sehen, daß dieser Wellenleiter nur eine diskrete Anzahl von Moden führen kann.

7.1 Ableitung der Wellengleichung

Für ein homogenes, isotropes Dielektrikum gilt die Wellengleichung 3.37:

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (7.1)$$

Wesentlich für die Lösung der Wellengleichung ist die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems. Für die hier vorliegende Geometrie sind kartesische Koordinaten geeignet.

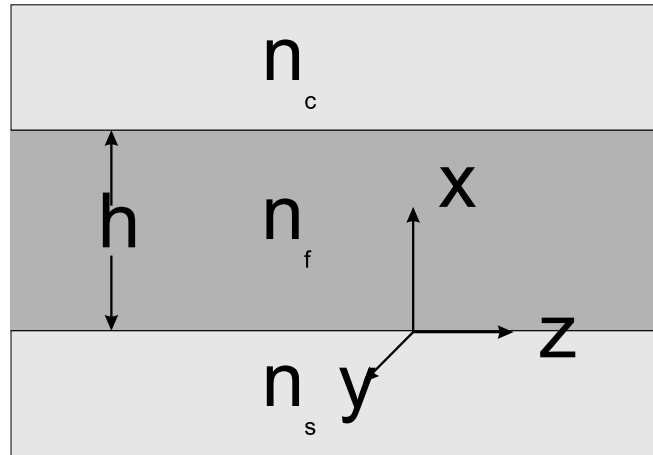


Abbildung 7.1: Struktur eines Filmwellenleiters

Der Grund liegt daran, daß die Randbedingungen sich besonders leicht erfüllen lassen. Die Komponenten der Felder liegen immer normal oder orthogonal zu den Trennflächen. Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems auf der unteren Trennfläche (siehe Bild 7.1). Wir müssen zwei Polarisierungen des elektrischen Feldes unterscheiden, die TE- und die TM-Polarisation. Die Ausbreitungsrichtung ist die z-Richtung. Der k-Vektor der geführten Welle wird in zick-zack Richtung durch den Wellenleiter laufen, wobei er die Trennfläche unter einem kleineren als den kritischen Winkel trifft. Im TE-Fall hat das elektrische Feld keine Komponente in z-Richtung, im TM-Fall das magnetische Feld (siehe Bild 7.2). Wir werden in diesem Kapitel nur den Fall der TE-Welle betrachten, für die TM-Welle ergibt sich ein sehr ähnliches Bild. In diesem Fall ist die elektrische Feldstärke \vec{E}_y in y-Richtung polarisiert. Wir nehmen weiterhin an, daß der Wellenleiter durch ein elektrisches Feld mit der Frequenz ω_0 angeregt wird. Hieraus ergibt sich der Betrag des Wellenvektors im Vakuum $k_0 = |\vec{k}_0| = \frac{\omega_0}{c}$.^{7.1} Da die Struktur in y Richtung unendlich ausgedehnt und homogen ist, hängt die Feldstärke nicht von y ab. Da nur eine Komponente der elektrischen Feldstärke E_y existiert, können wir die Wellengleichung in skalarer Form in kartesischen Koordinaten hinschreiben:

$$\Delta E_y(x, z) + k_0^2 n_i^2 E_y(x, z) = 0 \quad (7.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n_i^2 \right) E_y(x, z) = 0 \quad (7.3)$$

Hier ist n_i zu ersetzen durch den Brechungsindex der Schicht, die uns interessiert. Nach den Überlegungen des Kapitels 3 erwarten wir eine sich in z-Richtung ausbreitende Welle

^{7.1}Häufig findet man die Schreibweise $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Hierbei ist zu beachten, daß λ_0 die Wellenlänge im Vakuum ist

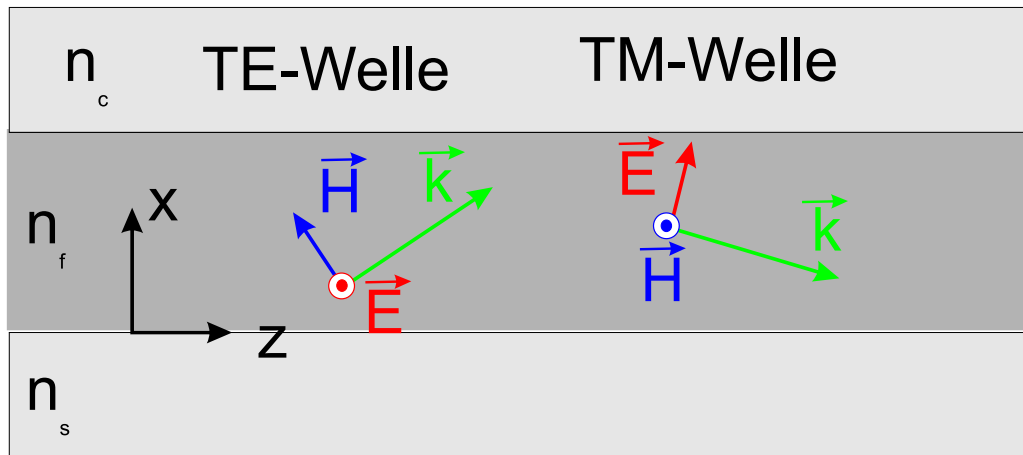


Abbildung 7.2: TE- und TM-Mode

und wir machen aus diesem Grund den folgenden Ansatz:

$$E_y(x, z) = E_y(x)e^{-j\beta z} \quad (7.4)$$

β ist die Ausbreitungskonstante, deren Wert wir noch bestimmen müssen. Durch Einsetzen des Ansatzes erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 + k_0^2 n_i^2 \right) E_y(x, z) = 0 \quad (7.5)$$

Die Lösung dieser Gleichung hängt vom Verhältnis von β zu n_i ab. Wir machen jetzt eine Fallunterscheidung

$$\beta > k_0 n_i$$

Es folgt:

$$E_y(x) = E_0 e^{\pm \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_i^2} x} \quad (7.6)$$

wobei E_0 eine beliebige Konstante ist. Sie wird später bestimmt. Für positive x ist die einzige physikalisch sinnvolle Lösung mit endlicher Leistung die Lösung mit negativem Vorzeichen. Wir können also einen Dämpfungsfaktor α_i definieren mit $\alpha_i = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_i^2}$ und erhalten:

$$E_y(x) = E_0 e^{-\alpha_i x} \quad (7.7)$$

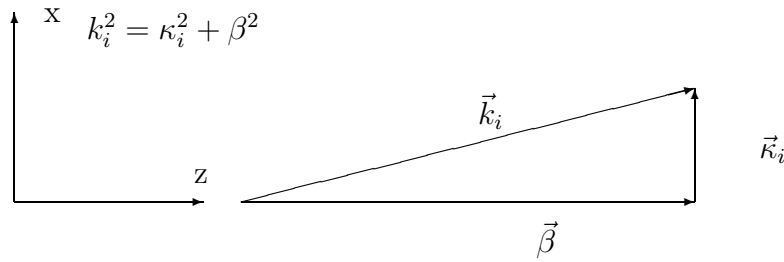


Abbildung 7.3: Zusammenhang zwischen Ausbreitungsvektor, transversalen Wellenvektor und Wellenvektor des Mediums

$$\beta < k_0 n_i$$

In diesem Fall liegt eine oszillierende Form vor:

$$E_y(x) = E_0 e^{\pm j \sqrt{k_0^2 n_i^2 - \beta^2} x} \quad (7.8)$$

In diesem Fall definieren wir uns einen transversalen Wellenvektor mit dem Betrag:

$$\kappa_i = \sqrt{k_0^2 n_i^2 - \beta^2} \quad (7.9)$$

und es gilt

$$E_y(x) = E_0 e^{j \pm \kappa_i z} \quad (7.10)$$

Wir sehen, daß der Betrag des Wellenvektors im Medium ($k_i = k_0 n_i$) und die Ausbreitungskonstante β nach folgender Bezeichnung zusammenhängen:

$$k_i^2 = \kappa_i^2 + \beta^2 \quad (7.11)$$

Diese Größen werden zur Charakterisierung von einer Vielzahl von Wellenleitern verwendet und es besteht die in Bild 7.3 dargestellte Beziehung:

7.2 Der Ausbreitungsvektor β

Der Betrag des Ausbreitungsvektors $\beta = |\vec{\beta}|$ ist der Eigenwert des Modes. In Bild 7.4 ist das strahlenoptische und wellenoptische Bild für verschiedene Werte von β gegenübergestellt. Im oberen Teil der Abbildung ist das strahlenoptische Modell, im unteren das wellenoptische Modell angegeben. In diesem Beispiel sind die Brechungsindizes mit $n_c < n_s < n_f$ gewählt. Für $\beta < k_0 n_c$ liegt für alle Bereiche eine oszillierende Welle vor. Für $\beta \approx 0$ läuft die Welle fast senkrecht zur x-Achse (siehe auch Bild 7.3). Für $k_0 n_c < \beta < k_0 n_s$ läuft die Welle von unten in die Schichten, oszilliert in der mittleren Schicht und wird oben gedämpft. Im strahlenoptischen Bild ergibt sich dabei an der oberen Grenzschicht eine

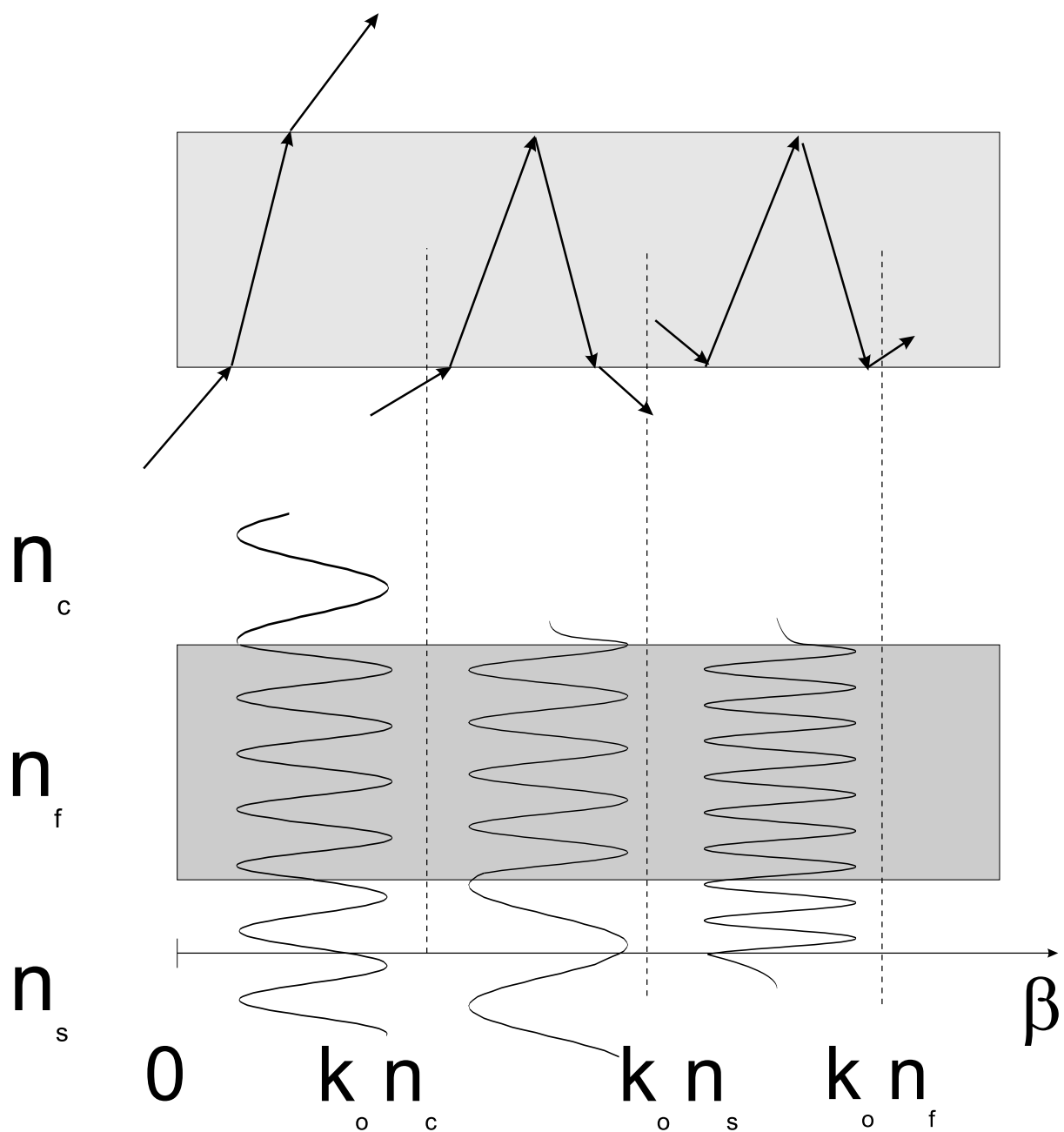


Abbildung 7.4: Elektromagnetische Feld als strahlenoptische und wellenoptische Darstellung als Funktion von β

Totalreflexion. Ist $k_0 n_s < \beta < k_0 n_f$ wird die Welle im Wellenleiter geführt und oszillierende Lösungen liegen in der mittleren Schicht vor. Wäre β noch größer, so lägen in allen drei Bereichen gedämpfte Schwingen vor. Hierfür können aber die Randbedingungen nicht mehr erfüllt werden und dieser Fall ist physikalisch nicht sinnvoll. Wir fassen also für den Fall $n_c \leq n_s$ zusammen:

$$\boxed{k_0 n_s \leq \beta \leq k_0 n_f} \quad (7.12)$$

Dies ist eine universelle Bedingung für Führung von Moden in dielektrischen Wellenleitern.

7.3 Die Eigenwerte für den Filmwellenleiter

Für die drei Schichten folgt als Lösung der Wellengleichung:

$$\underline{E}_y = A e^{-\alpha_c(x-h)} \text{ für } x \geq h \quad (7.13)$$

$$\underline{E}_y = B \cos(\kappa_f x) + C \sin(\kappa_f x) \text{ für } 0 \leq x \leq h \quad (7.14)$$

$$\underline{E}_y = D e^{\alpha_s x} \text{ für } x \leq 0 \quad (7.15)$$

mit

$$\alpha_c = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_c^2} \quad (7.16)$$

$$\kappa_f = \sqrt{k_0^2 n_f^2 - \beta^2} \quad (7.17)$$

$$\alpha_s = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_s^2} \quad (7.18)$$

Die Konstanten A,B,C,D müssen noch aus den Randbedingungen an den Trennflächen und aus der gesamten transportierten Leistung ermittelt werden. Da \underline{E}_y eine Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist, muß sie stetig sein. Zusätzlich muß die Tangentialkomponente von \vec{H} , d.h. die z-Komponente von \vec{H} stetig sein: Aus

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad (7.19)$$

folgt für die z-Komponente von \vec{H} im Fourierbereich:

$$\underline{H}_z(x, z) = \underline{H}_z(x) e^{-j\beta z} = \frac{j}{\omega_\mu} e^{-j\beta z} \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_y(x) \quad (7.20)$$

Wir sehen, daß die partielle Ableitung von \underline{E}_y nach x stetig sein muß. Aus der Stetigkeit von \underline{E}_y bei $x=0$ folgt

$$B = D \quad (7.21)$$

Aus der Stetigkeit der Ableitung bei $x=0$ folgt:

$$C\kappa_f = D\alpha_s \quad (7.22)$$

Aus der Stetigkeit der Feldstärke bei $x=h$ folgt:

$$B\cos(\kappa_f h) + C\sin(\kappa_f h) = A \quad (7.23)$$

Wir drücken alle Komponenten durch D aus:

$$\underline{E}_y = D\left(\cos(\kappa_f h) + \frac{\alpha_s}{\kappa_f} \sin(\kappa_f h)\right)e^{-\alpha_c(x-h)} \text{ für } x \geq h \quad (7.24)$$

$$\underline{E}_y = D\left(\cos(\kappa_f x) + \frac{\alpha_s}{\kappa_f} \sin(\kappa_f x)\right) \text{ für } 0 \leq x \leq h \quad (7.25)$$

$$\underline{E}_y = De^{\alpha_s x} \text{ für } x \leq 0 \quad (7.26)$$

Wir kennen jetzt die Konstanten $\alpha_c, \kappa_f, \alpha_s$ noch nicht. Alle Konstanten hängen von β ab. Um jetzt den Eigenwert β zu ermitteln, nutzen wir die noch nicht verwendete Stetigkeit der Ableitung bei $x=h$ aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_y|_{x=h} &= D(-\kappa_f \sin(\kappa_f h) + \alpha_s \cos(\kappa_f h)) \text{ Wellenleiterschicht} \\ &= -D(\cos(\kappa_f h) + \frac{\alpha_s}{\kappa_f} \sin(\kappa_f h))\alpha_c \text{ Deckschicht} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Hieraus folgt:

$$-\kappa_f \tan(\kappa_f h) + \alpha_s = -\alpha_c - \frac{\alpha_c \alpha_s}{\kappa_f} \tan(\kappa_f h) \quad (7.28)$$

$$\tan(\kappa_f h)\left(\kappa_f - \frac{\alpha_s \alpha_c}{\kappa_f}\right) = \alpha_s + \alpha_c \quad (7.29)$$

$$\tan(\kappa_f h) = \frac{\alpha_s + \alpha_c}{\kappa_f - \frac{\alpha_s \alpha_c}{\kappa_f}} \quad (7.30)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann κ_f und dann mit Hilfe der Gleichung 7.9 der Eigenwert β berechnet werden.

Für den TM-Fall ergibt sich nach ähnlicher Rechnung:

$$\tan(h\kappa_f) = \frac{\kappa_f\left(\frac{n_f^2}{n_s^2}\alpha_s + \frac{n_f^2}{n_c^2}\alpha_c\right)}{\kappa_f^2 - \frac{n_f^4}{n_c^2 n_s^2}\alpha_c \alpha_s} \quad (7.31)$$

Die charakteristischen Gleichungen müssen grafisch oder numerisch gelöst werden. Man beachte hierbei, daß α_s und α_c eine Funktion von β ist und daß β und κ_f über die Gleichung 7.9 zusammenhängen. Zur vollständigen Lösung müssen wir noch die Konstante

An Hand der pro Längeneinheit transportierten Leistungen im jeweiligen Mode ermitteln. Dazu müssen wir die z-Komponente des Poyntingvektors über den Querschnitt des Wellenleiters integrieren.

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{e}_z \quad (7.32)$$

Die mittlere in z-Richtung transportierte Leistung ist somit

$$P_z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}_y \underline{H}_x^* dx = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{E}_y|^2 dx \quad (7.33)$$

Beispiel: Wir betrachten einen Filmwellenleiter mit $n_c = 1.4$, $n_f = 1.5$, $n_s = 1.45$. Die Dicke des Wellenleiters sei $5 \mu m$. Die Wellenlänge der erregenden Welle beträgt $1 \mu m$. Wir skizzieren die grafische Lösung und geben ein MATLAB-Programm für die numerische Lösung an. Hierbei tragen wir die rechte und linke Seite als Funktion von κ_f auf:

$$\alpha_c = \sqrt{\beta^2 - n_c^2 k_0^2} = \sqrt{\beta^2 - 1.4^2 k_0^2} \quad (7.34)$$

$$\alpha_s = \sqrt{\beta^2 - n_s^2 k_0^2} = \sqrt{\beta^2 - 1.45^2 k_0^2} \quad (7.35)$$

$$\beta = \sqrt{n_f^2 k_0^2 - \kappa_f^2} = \sqrt{1.5^2 k_0^2 - \kappa_f^2} \quad (7.36)$$

Gesucht seien die Eigenwerte β für eine TE Welle und die zugehörigen Feldverteilungen. Da β^2 zwischen $k_0^2 n_s^2$ und $k_0^2 n_f^2$ liegen muß, ist der Maximalwert von $\kappa_f = k_0^2 n_f^2 - k_0^2 n_s^2$. Im Bild 7.5 sind die rechte und linke Seite der charakteristischen Gleichung als Funktion von κ_f aufgetragen. Die linke Seite gibt das typische Verhalten eines Tangens wieder, die rechte Seite divergiert bei $\kappa_f = 2 \cdot 10^6 m^{-1}$. In den Punkten, in denen sich die Kurven für den erlaubten Bereich von κ_f schneiden, liegen ungefähr bei $\kappa_f = 0.55 \cdot 10^6, 1.2 \cdot 10^6, 1.65 \cdot 10^6, 2.15 \cdot 10^6 m^{-1}$. Die Bilder wurden mit Hilfe von MATCAD berechnet, und der Code ist im folgenden angegeben. Die genauen Werte können dann mit Hilfe der folgenden Programmzeile genauer ermittelt werden, wobei das Suchintervall an Hand der grafischen Lösung geschätzt wird. Die erlaubten Lösungen für geführte TE-Moden sind in Tabelle 7.1 angegeben.

Man erkennt einige typische Eigenschaften dielektrischer Wellenleiter.

1. Die Wellenleiterschicht braucht nicht sehr dick zu sein, sie liegt meist in der Größenordnung einiger Wellenlängen.
2. Der Brechungsindexunterschied kann ebenfalls sehr gering sein.
3. Wenn die Schicht zu dünn ist, so daß $\kappa_f h$ nie $\pi/2$ erreicht, ist kein Mode ausbreitungsfähig.

Nr.	$\kappa_f [cm^{-1}]$	$\beta [cm^{-1}]$	$\Gamma [\%]$
0	5497,16	94087	99,47
1	10963.2	93608	97.77
2	16351	92819	94,28
3	21545	91752	89,36

Tabelle 7.1: Eigenwerte und Füllfaktor für die ausbreitungsfähigen TE-Moden

```

global HEIGHT CONSTS CONSTC
units_stuff;
i=sqrt(-1);
NC=1.4; % n cladding
NS=1.45; % n substrate
NF=1.5; %n film
lambda=1.0*um; % wavelength
HEIGHT=5*um; % height of film
K0=2*pi/lambda; %absolut value of k-vektor in vacuum
CONSTC=K0^ 2*(NF^ 2-NC^ 2) %constant for evaluation of right side
CONSTS=K0^ 2*(NF^ 2-NS^ 2) %dto
kappamax=sqrt(K0^ 2*(NF^ 2-NS^ 2))*0.999 %maximum allowed value of kappa
kappa=1:kappamax/500:kappamax; %values of kappa for figure
axis([0 1.0e7 -10 10]) %area for drawing does not work at my version
zoom on; % to allow interactive zooming
plot(kappa,right(kappa),kappa, left(kappa));
x1=FZERO('rightleft',[0.4e6 0.8e6],1.0e-6) %evaluate kappa of zero
x2=FZERO('rightleft',[1.0e6 1.3e6],1.0e-6)
x3=FZERO('rightleft',[1.6e6 1.8e6],1.0e-6)
x4=FZERO('rightleft',[2e6 2.18e6],1.0e-6)

```

MATLAB Programm zur Berechnung der Eigenwerte eines unsymmetrischen Filmwellenleiters

```
%program units_stuff
cm=1.0e-2;
mm=1.0e-3;
um=1.0e-6;
nm=1.0e-9;
ms=1.0e-3;
mus=1.0e-6;
ns=1.0e-9;
ps=1.0e-12;
km=1.0e3;
mW=1.0e-3;
Gbit=1.0e9;
Mbit=1.0e6;
Kbit=1.0e3;

% program for right side of equation
function [out1] =right(kappa)
global CONSTS CONSTC
out1=(sqrt(CONSTC-kappa.^ 2)+sqrt(CONSTS-kappa.^ 2))./kappa./(1-sqrt(CONSTS-kappa.^ 2)
.*sqrt(CONSTC-kappa.^ 2))./kappa.^ 2);

%function for left side of equation
function [out1] =left(kappa)
global HEIGHT
out1=tan(HEIGHT*kappa);

% function for zero evaluation
function [out1] =rightleft(kappa)
global CONSTS CONSTC
out1=right(kappa)-left(kappa);
```

Unterprogramme zur Eigenwertbestimmung

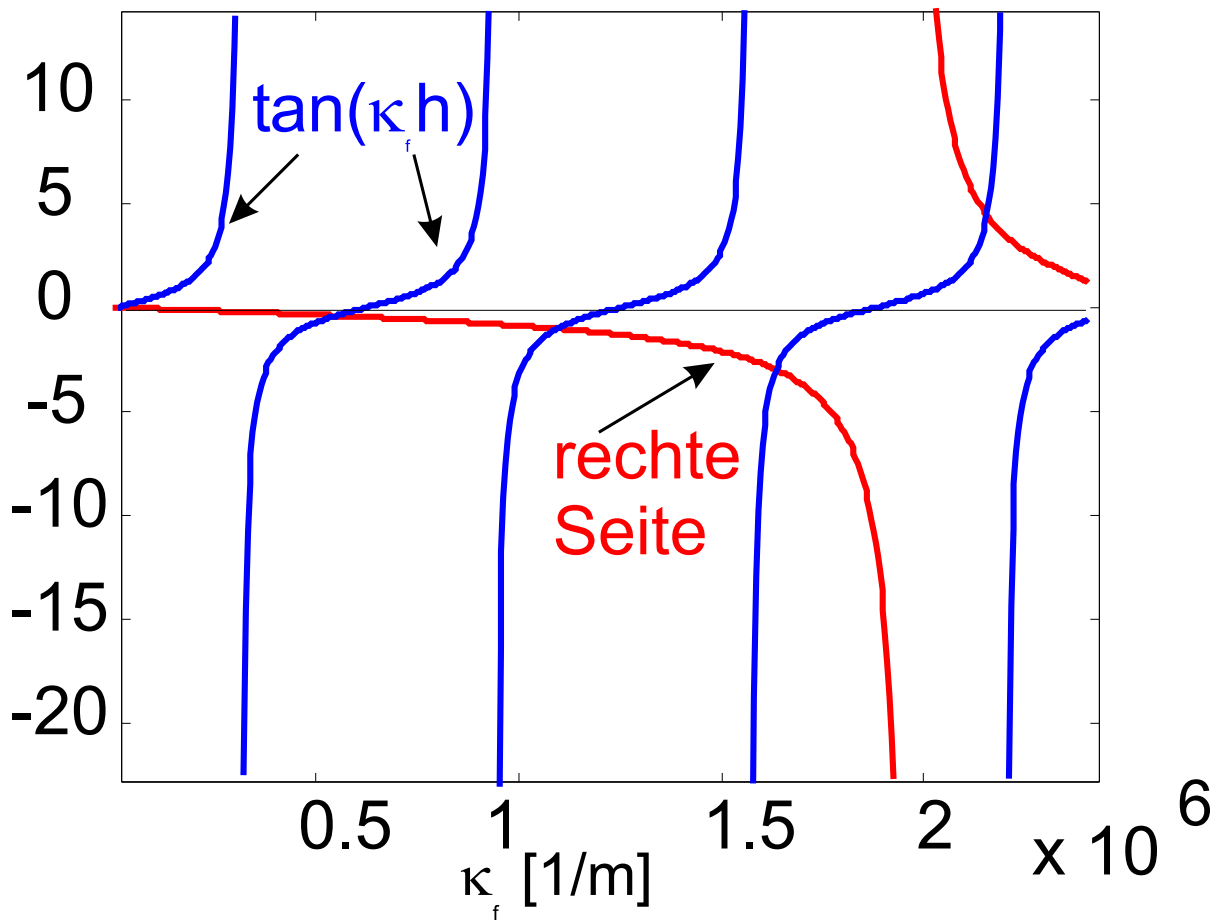


Abbildung 7.5: Grafische Lösung der transzendenten Gleichung für einen nicht symmetrischen Filmwellenleiter

In unserem Beispiel ergeben sich 4 ausbreitungsfähige Moden. Jeder Mode hat die gleiche optische Frequenz bzw. Vakuumwellenlänge. Im strahlenoptischen Bild würden sich 4 Strahlen ergeben, die sich unter einem leicht unterschiedlichen Winkel ausbreiten. Wir erkennen, daß der Mode mit dem kleinsten Wert von κ_f immer ausbreitungsfähig ist. Die Bezeichnung der Moden bestimmt sich aus der Anzahl der Nulldurchgänge des Feldes. Der TE_0 -Mode hat keinen Nulldurchgang, der TE_1 -Mode hat einen Nulldurchgang, usw. An Hand des in Bild 7.6 dargestellten Verlaufs der elektrischen Feldstärke erkennt man, daß die Moden wegen der asymmetrischen Struktur ebenfalls leicht asymmetrisch sind und daß sich fast symmetrische und fast antisymmetrische Moden abwechseln. Für den Fall der TM-Welle, existiert eine vergleichbare Menge von Moden mit ähnlicher Bezeichnung (TM_1, TM_2). Zusätzlich erkennt man, daß sich das Feld, insbesondere bei den höheren Moden mehr in das Material mit dem höheren Brechungsindex erstreckt.

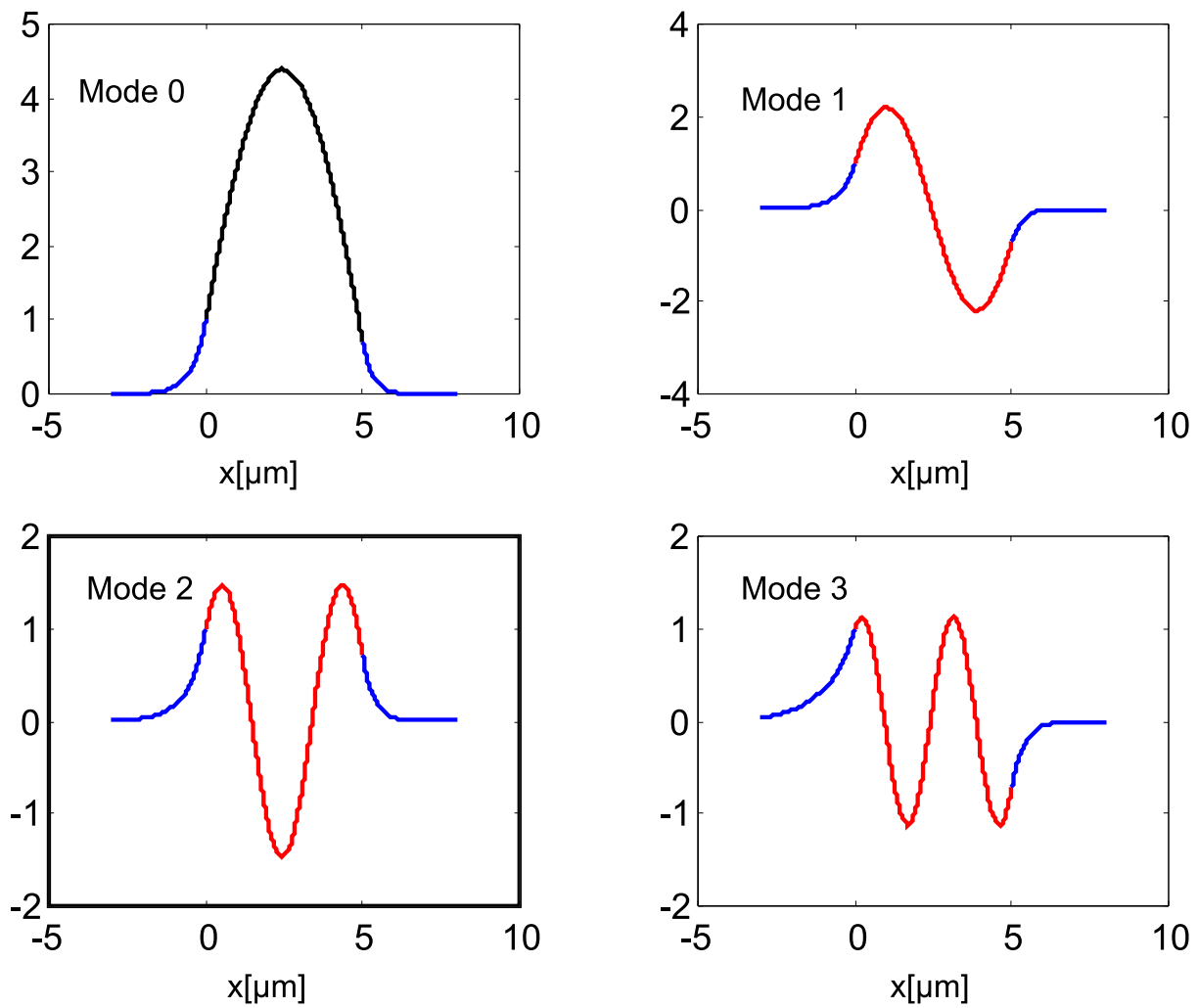


Abbildung 7.6: Die 4 ausbreitungsfähigen Moden des berechneten Wellenleiters

7.4 Der symmetrische Film-Wellenleiter

Beim symmetrischen Film-Wellenleiter sind die Brechungsindizes des Substrats und der Deckschicht gleich. Die Eigenschaften des symmetrischen Film-Wellenleiters können als Grenzübergang aus den Eigenschaften des unsymmetrischen Wellenleiters ermittelt werden. Um aber die physikalischen Eigenschaften besser zu verstehen, werden wir die Eigenwerte und Feldverteilungen für diesen Wellenleiter erneut angeben. Die Struktur des Wellenleiters ist in Bild 7.7 angegeben. Nach den Überlegungen der vorigen Kapitel erge-

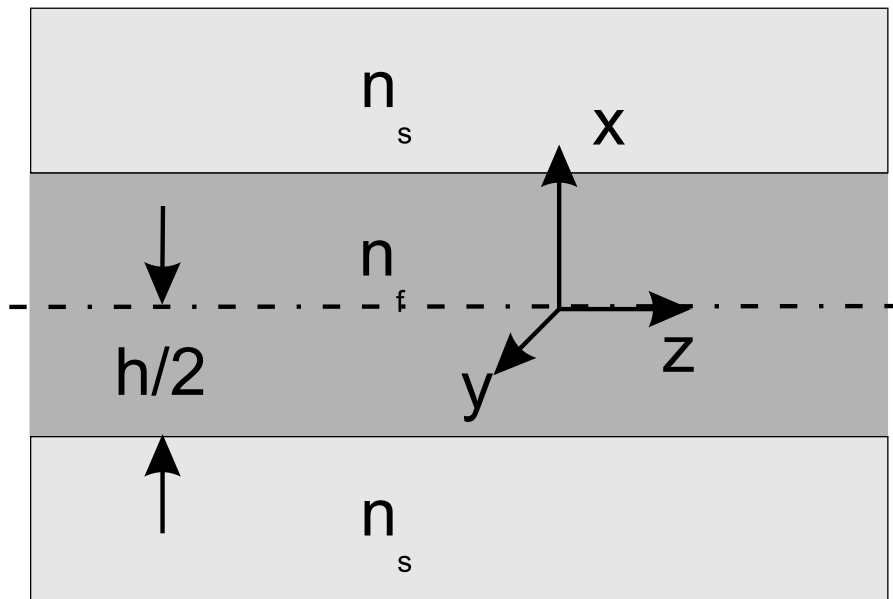


Abbildung 7.7: Struktur des symmetrischen Wellenleiters

ben sich folgende Feldverteilungen

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_y &= A e^{-\alpha(x-h/2)} && \text{für } x \geq h/2 \\
 \underline{E}_y &= A \frac{\cos(\kappa x)}{\cos(\kappa h/2)} && \text{für } -h/2 \leq x \leq h/2 \\
 \underline{E}_y &= A e^{\alpha(x+h/2)} && \text{für } x \leq -h/2
 \end{aligned}
 \quad \text{oder} \quad
 \frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa h/2)} \quad \text{für } -h/2 \leq x \leq h/2 \quad (7.37)$$

Man beachte, daß, um die Symmetrie besser ausnutzen zu können, in diesem Fall das Koordinatensystem ebenfalls symmetrisch gewählt wurde. Zusätzlich kann für die Wellenleiterschicht ein symmetrischer bzw. antisymmetrischer Ansatz (Kosinus bzw. Sinusfunktion) gemacht werden. Wir können alle Randbedingungen unabhängig voneinander erfüllen und erhalten zwei orthogonale Lösungen.

Die charakteristische Gleichung ist für eine TE-Welle:

$$\tan(\kappa h/2) = \frac{\alpha}{\kappa} \text{ für gerade Moden} \quad (7.38)$$

$$\tan(\kappa h/2) = -\frac{\kappa}{\alpha} \text{ für ungerade Moden} \quad (7.39)$$

Für eine TM-Welle ergibt sich

$$\tan(\kappa h/2) = \frac{n_f^2}{n_s^2} \frac{\alpha}{\kappa} \text{ für gerade Moden} \quad (7.40)$$

$$\tan(\kappa h/2) = -\frac{n_s^2}{n_f^2} \frac{\kappa}{\alpha} \text{ für ungerade Moden} \quad (7.41)$$

Wir wollen uns wieder ein Beispiel ansehen:

Es liege ein symmetrischer Filmwellenleiter der Höhe $3 \mu m$ mit dem Kernbrechungsindex $n_f = 1.49$ und dem Mantelbrechungsindex $n_s = 1.485$ vor. Die Wellenlänge des anregenden Lichtes sei $\lambda = 0.8 \mu$. Gesucht sind die Eigenwerte für eine TE Anregung.

Wir lösen wieder die charakteristische Gleichung grafisch indem wir ihre rechte und linke Seite als Funktion von κ aufzeichnen. Es folgt mit

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_s^2} = \sqrt{k_0^2 (n_f^2 - n_s^2) - \kappa^2} \quad (7.42)$$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 n_f^2 - \kappa^2} \quad (7.43)$$

Die linke und rechte Seite der charakteristischen Gleichung sind im Bild 7.8 angegeben. Wir erkennen daß sich die Kurve α/κ immer mit der Kurve $\tan(\kappa h/2)$ schneiden muß, das also immer ein Mode existiert. Dies kann verallgemeinert werden: Ein symmetrischer Wellenleiter führt immer mindestens einen Mode.

Wenn der Wellenleiter dicker gemacht wird, sind mehrere Moden erlaubt. In Bild 7.9 ist der Lösungsgraph für einen etwas dickeren Wellenleiter angegeben: Wir sehen, daß dieser Wellenleiter sowohl gerade als auch ungerade Moden führt. Zusätzlich wechseln sich mit wachsendem κ die geraden und ungeraden Wellenleiter ab.

7.5 Optische Modenführung

Wir haben in den vorherigen Beispielen gesehen, daß sich die unterschiedlichen Moden unterschiedlich weit in die Randbereiche erstrecken. In vielen Anwendungen ist es notwendig zu wissen, wie gut die Wellenführung ist, daß heißt wie viel Prozent der Leistung wird im Wellenleiter geführt und wie viel Prozent in den umliegenden Schichten. Der Anteil der im Wellenleiter geführten Leistung wird durch den Füllfaktor beschrieben (siehe

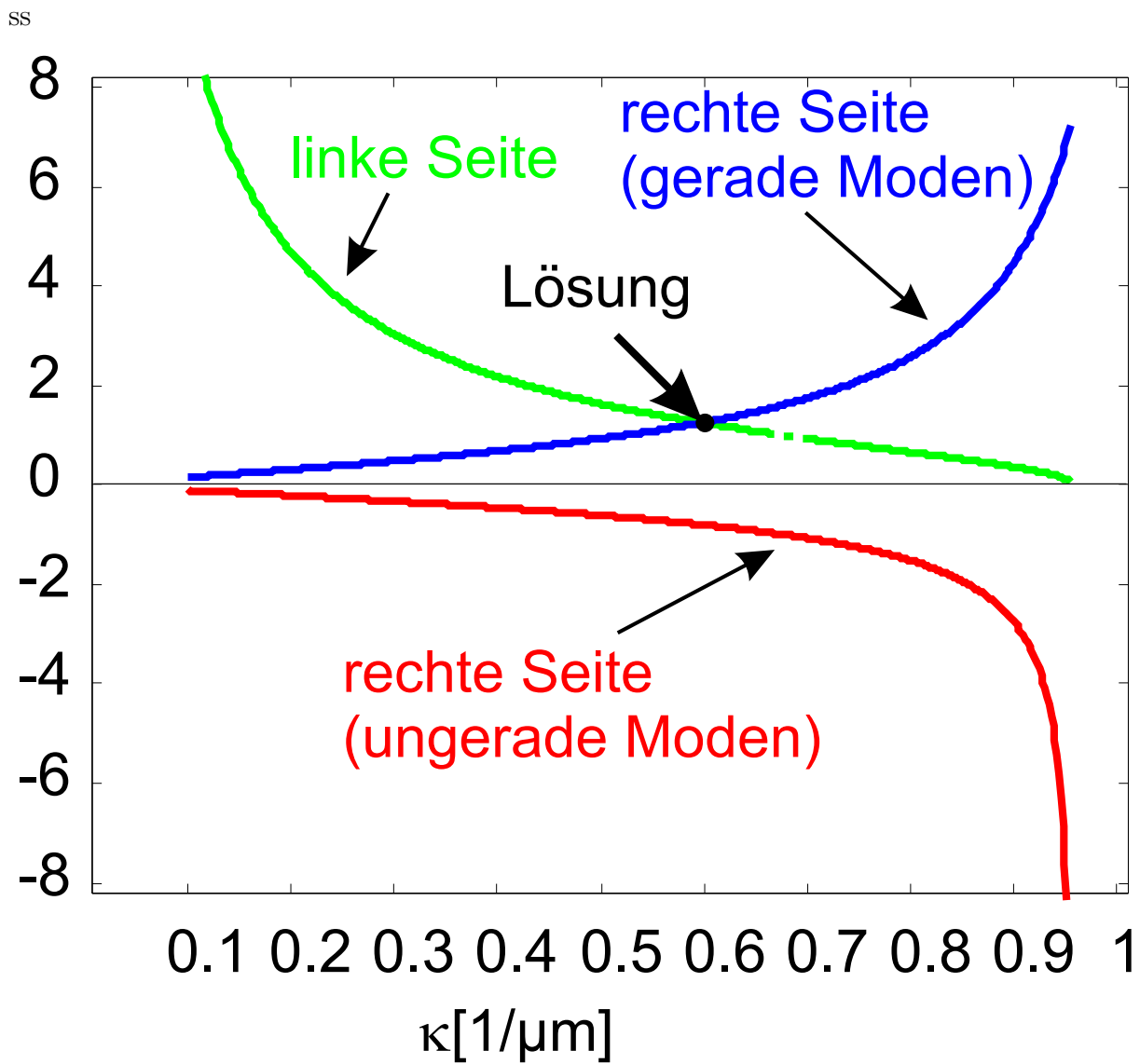


Abbildung 7.8: Rechte und linke Seite der charakteristischen Gleichung eines symmetrischen Filmwellenleiters mit $h = 3\mu\text{m}$ und $\lambda = 0.8\mu\text{m}$

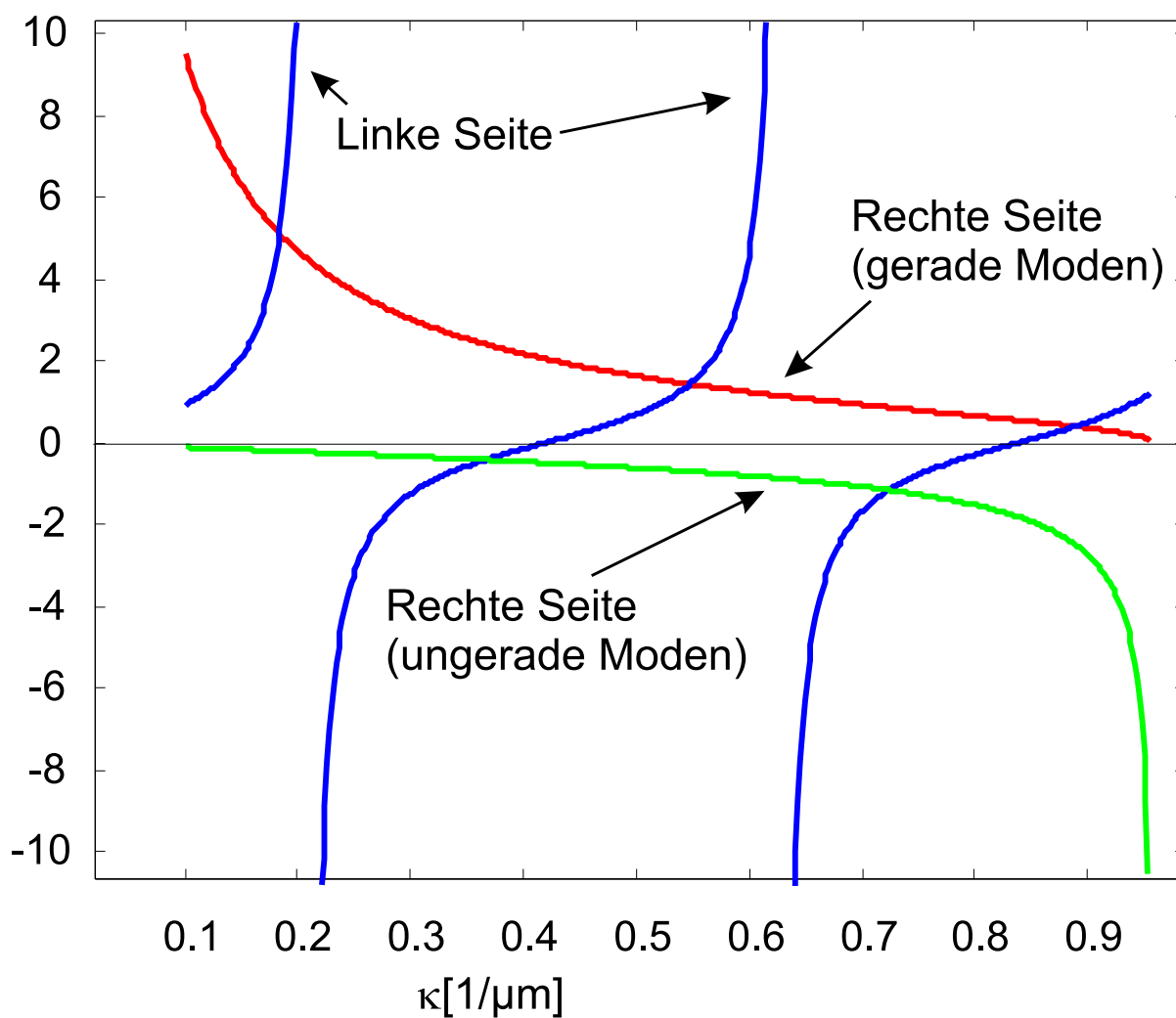


Abbildung 7.9: Rechte und linke Seite der charakteristischen Gleichung eines symmetrischen Filmwellenleiters mit $h = 15\mu\text{m}$ und $\lambda = 0.8\mu\text{m}$

Gleichung 7.33):

$$\Gamma = \frac{\text{Leistung im Kern}}{\text{Gesamte Leistung}} \quad (7.44)$$

$$= \frac{\int_0^h \underline{E}_y(x) \underline{H}_x^* dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}_y(x) \underline{H}_x^* dx} \quad (7.45)$$

$$= \frac{\int_0^h |\underline{E}_y(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\underline{E}_y(x)|^2 dx} \quad (7.46)$$

^{7.2} Der Füllfaktor ist ein wesentlicher Parameter der Wellenleiter, je größer er ist, im so unempfindlicher ist der Wellenleiter gegenüber Biegungen und benachbarten optischen Strukturen. In Tabelle 7.1 sind die Füllfaktoren für unser erstes Beispiel eines unsymmetrischen Wellenleiters angegeben.

7.5.1 Intuitives Bild eines Modes

Man kann die Modenstruktur durch Interferenzen im Wellenleiter erklären. So kann z. B. der symmetrische Grundmode eines symmetrischen Wellenleiters im Kern als Überlagerung zweier ebener Wellen modelliert werden (s. Gleichung 7.37 und Bild 7.10).

$$E_y(x) = A \cos(\kappa x) e^{-j\beta z} \quad (7.47)$$

$$= \frac{A}{2} (e^{j(\kappa x - \beta z)} + e^{-j(\kappa x + \beta z)}) \quad (7.48)$$

Die Richtung der einzelnen Wellen ist durch das Verhältnis von κ und β gegeben. In Bild 7.10 ist die Überlagerung der beiden Moden dargestellt. Da beide Wellen von der gleichen Quelle angeregt wurden, überlagern sie sich kohärent und ergeben ein Interferenzmuster. Mit Hilfe dieses Modells kann auch erklärt werden, warum die Ausbreitungskonstante nur diskrete Werte annehmen kann. Der Winkel, mit denen sich die Welle fortbewegt, ist

$$\tan(\Theta) = \frac{\beta}{\kappa} \quad (7.49)$$

Der Maximalwert von Θ ist 90° , dazu gehört der Maximalwert von $\beta = k_0 n_f$. Der Minimalwert von Θ folgt aus der Bedingung, daß die Welle geführt werden muß, d. h. mit

$$\beta \leq k_0 n_s \quad (7.50)$$

$$(7.51)$$

^{7.2}Wir Beziehen uns hier auf die Geometrie von Bild 7.1.

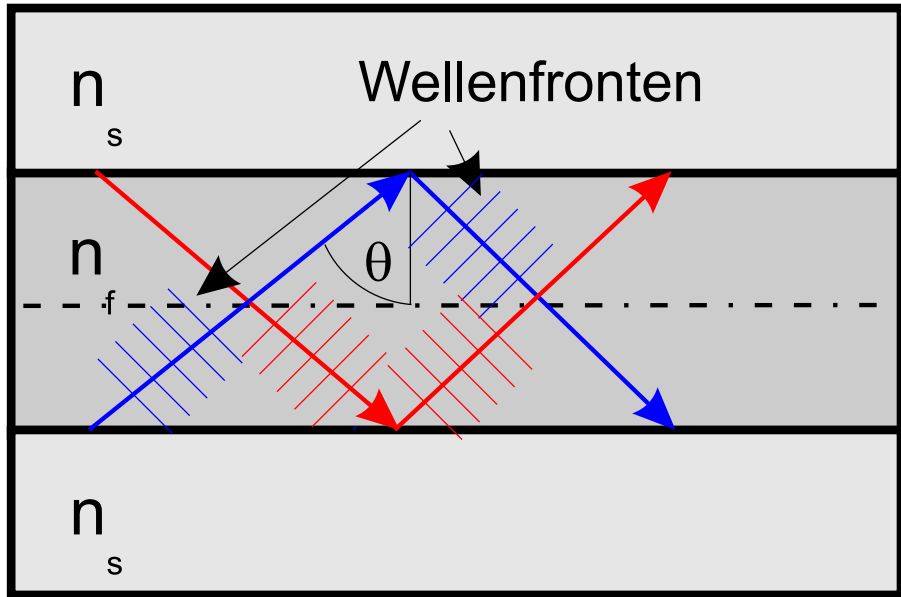


Abbildung 7.10: Ein Mode als Überlagerung zweier ebener Wellen

folgt

$$\tan(\Theta) = \frac{\beta}{\sqrt{k_0^2 n_f^2 - \beta^2}} \leq \frac{k_0 n_s}{\sqrt{k_0^2 (n_f^2 - n_s^2)}} = \frac{n_s}{\sqrt{n_f^2 - n_s^2}} \quad (7.52)$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem kritischen Winkel der Totalreflexion der Strahlenoptik, so folgt, daß die Winkel gleich sind:

$$\tan(\Theta_c) = \frac{\sin(\Theta_c)}{\cos(\Theta_c)} = \frac{n_s/n_f}{\sqrt{1 - n_s^2/n_f^2}} = \frac{n_s}{\sqrt{n_f^2 - n_s^2}} \quad (7.53)$$

In dem Modell der interferierenden Wellen kann auch die Tatsache, daß die geführten Wellen nur diskrete Werte annehmen können, veranschaulicht werden. Damit sich eine geführte Welle ausbilden kann, muß die Phasenverschiebung über die Höhe des Wellenleiters ein vielfaches von π sein. Trifft der Strahl unter einem Winkel von Θ auf das Substrat, so erleidet er zuerst eine Phasenverschiebung $-\Phi_s$, dann durchläuft er den Wellenleiter mit der Phasenverschiebung $h \cos \Theta k_0 n_f$, erleidet eine Phasenverschiebung an der Deckschicht $-\Phi_c$ und durchläuft nochmals den Wellenleiter. Die gesamte Phasenverschiebung muß ein Vielfaches von 2π sein:

$$2k_0 n_f h \cos(\Theta) - \Phi_s - \Phi_c = 2\pi n \quad (7.54)$$

Dies ist eine allgemeine Dispersionsgleichung für Wellenleiter.

7.6 Eigenschaften von Moden

Wenn die Eigenwerte β durch Lösung der charakteristischen Gleichungen ermittelt wurden, kann die Verteilung des Feldes für die einzelnen Moden angegeben werden (siehe z.B. Gleichung 7.37). Wir geben hier allgemeine Eigenschaften von Moden an: Die Beschreibung der elektrischen Feldstärke sei

$$\vec{E}(x, y, z) = \underline{\vec{E}}(x, y)e^{-j\beta z} \quad (7.55)$$

Selbstverständlich existiert eine äquivalente Beschreibung für die magnetische Feldstärke. Der Term $\underline{\vec{E}}(x, y)$ beschreibt den transversalen Mode der Struktur. Die Moden haben folgende Eigenschaften:

1. Jeder Eigenwert β gehört zu einem Mode mit einer eindeutigen Feldverteilung. Die Amplitude des Modes ist durch die Leistung, die dieser Mode transportiert, bestimmt.
2. Die meisten Moden sind nicht geführt. Die meisten β gehören zu ungeführten Moden, den Strahlungsmoden. Das Spektrum der ungeführten Moden ist kontinuierlich, d. h. es kann eine unendliche Anzahl von ungeführten Moden existieren.
3. Es existiert nur eine endliche Anzahl von geführten Moden. Das Spektrum der Eigenwerte der geführten Moden ist diskret.
4. Alle Moden sind orthogonal. Für geführte Moden gilt

$$\int_{\text{Querschnitt}} \underline{\vec{E}}_i \times \underline{\vec{H}}_j \cdot d\vec{A} = \delta_{ij} \frac{\beta}{|\beta|} \quad (7.56)$$

Hier sind die elektrische und magnetische Feldstärke normierte Größen. Für Strahlungsmoden folgt

$$\int_{\text{Querschnitt}} \underline{\vec{E}}(i) \times \underline{\vec{H}}(j) \cdot d\vec{A} = \delta(i - j) \frac{\beta}{|\beta|} P \quad (7.57)$$

Hier ist P die Leistung des Modes.

5. Moden können degeneriert sein. Degenerierte Moden besitzen die gleichen Eigenwert, haben aber unterscheidbare Feldverteilungen. Typisches Beispiel ist die Monomodefaser, bei der Moden existieren, die sich nicht in den Eigenwerten unterscheiden, die auch die gleichen Feldverteilungen aufweisen, die aber orthogonale Polarisationen besitzen.
6. Die Moden bilden ein vollständiges Funktionensystem. Jede beliebige Feldverteilung kann als Überlagerung der einzelnen Moden beschrieben werden.

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_i^{\text{geführt}} a_i \vec{E}_I(x, y, z) + \int_{\text{Strahlungsmoden}} \hat{a}(\beta) \vec{E}(x, y, z, \beta) d\beta \quad (7.58)$$

Dies ist eine wesentliche Eigenschaft, die unter anderem zur Beschreibung von Kopplungen zwischen unterschiedlichen Wellenleitern verwendet wird.

7.7 Die Anzahl der geführten Moden im Wellenleiter

Die Anzahl der geführten Moden bestimmt wesentlich die Übertragungseigenschaften, die Rauscheigenschaften bei der Übertragung und die Koppeleigenschaften eines Wellenleiters. Wir wollen hier versuchen, die Anzahl der geführten Moden eines Wellenleiters abzuschätzen. Wir betrachten dazu unser Beispiel eines symmetrischen Filmwellenleiters. Wir hatten gesehen, daß der dickere Wellenleiter mehr Moden führt. Der Mode mit der geringsten Ordnung hat einen Ausbreitungsvektor $\vec{\beta}$, der fast parallel zur z-Achse liegt.

$$\beta_{\text{geringste Ordnung}} \approx k_0 n_f \quad (7.59)$$

Der Mode mit der höchsten Ordnung trifft auf die Grenzschicht unter dem kritischen Winkel

$$\sin(\Theta_c) = \frac{\beta_c}{k_0 n_f} \quad (7.60)$$

$$\beta_{\text{höchste Ordnung}} = k_0 n_s \quad (7.61)$$

Alle Moden von geführten Wellen haben Eigenwerte, die dazwischen liegen. Anhand von Bild 7.6 erkennen wir, daß jedes mal wenn κ_{max} um π wächst, ein zusätzlicher Mode ausbreitungsfähig ist. In Bild 7.11 sind die rechte und linke Seite der charakteristischen Gleichung 7.30 als Funktion von κ für ein Beispiel aufgetragen. Man beachte, daß der erlaubte Maximalwert von κ bei $\kappa_{f_{max}} = \sqrt{k_0^2(n_f^2 - n_s^2)}$ liegt. Die linke Seite ist eine Funktion mit der Periode π . Die rechte Seite ist negativ, divergiert gegen $-\infty$ und kommt dann von $+\infty$ und bleibt bis $\kappa = \kappa_{f_{max}}$ positiv. Wenn $\kappa_{f_{max}} > \pi/2$ ist, liegt mindestens ein ausbreitungsfähiger TE-Mode vor. Ist $\kappa_{f_{max}} > 3/2\pi$, liegen mindestens 2 TE-Moden vor. Diese Werte von $\kappa_{f_{max}}$ heißen "cut off" des entsprechenden Modes. Man kann aus dieser Konstruktionsvorschrift leicht die Anzahl der ausbreitungsfähigen Moden abschätzen:

$$m = \text{Int}\left(\frac{h\kappa_{f_{max}}}{\pi}\right) = \frac{hk_0\sqrt{n_f^2 - n_s^2}}{\pi} \quad (7.62)$$

Hier ist $\text{Int}(x)$ die nächst kleinere ganze Zahl. Häufig wird zur Charakterisierung die normierte optische Frequenz

$$V = hk_0(n_f^2 - n_s^2) \quad (7.63)$$

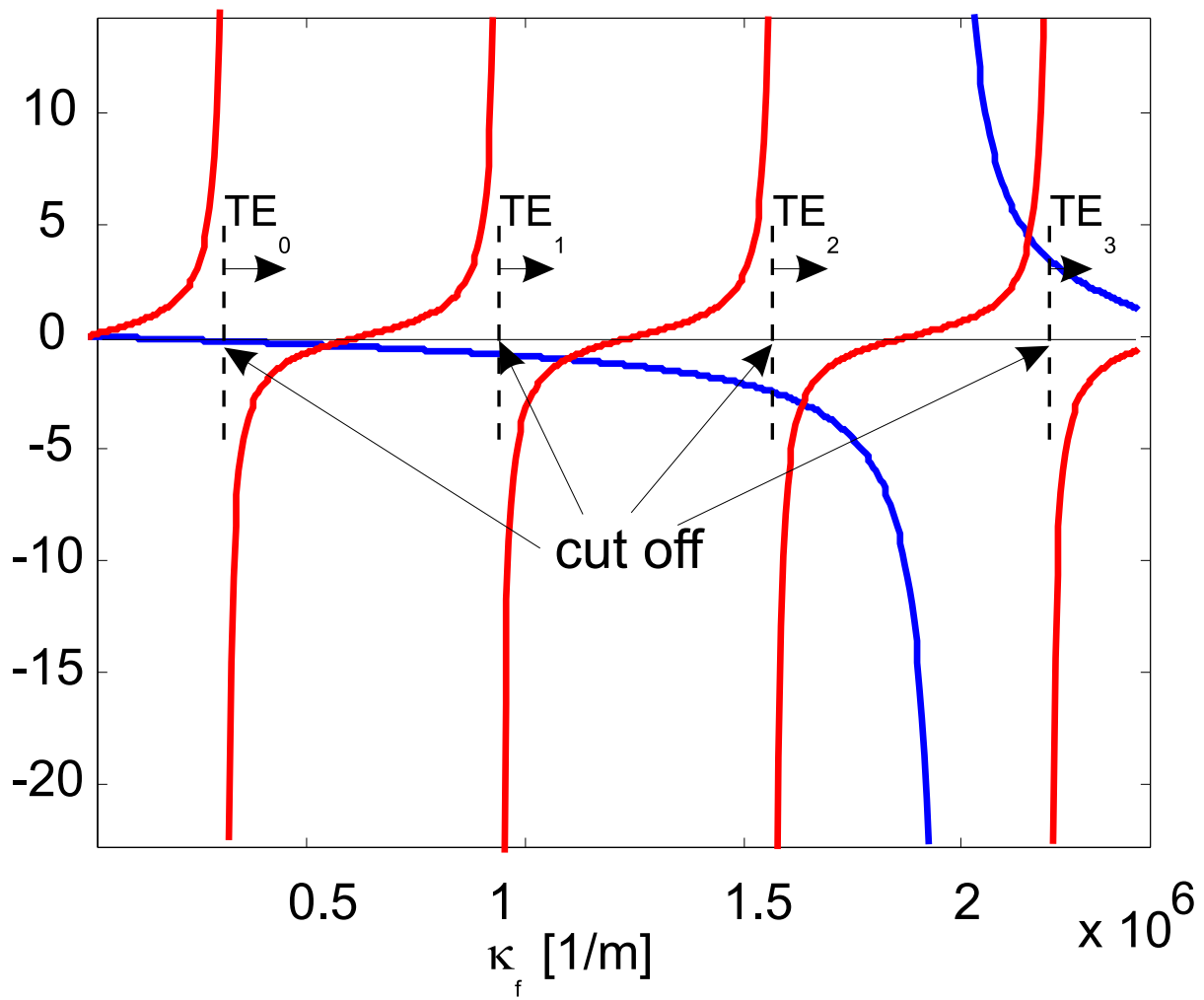


Abbildung 7.11: Cut off der unterschiedlichen TE-Moden eines nicht symmetrischen Wellenleiters

herangezogen. Es gilt dann

$$m = \frac{V}{\pi} \quad (7.64)$$

Man beachte, daß diese Anzahl durch die Wellenlänge, durch die Brechungsindexdifferenz und durch die Schichtdicke beeinflusst werden kann.

Zusammenfassung

Filmwellenleiter sind die mathematisch einfachsten Wellenleiter. Sie bestehen aus einem Kern mit einem höheren Brechungsindex verglichen mit den umgebenden Schichten. In diesem Wellenleiter kann sich nur eine endliche Anzahl von TE- bzw. TM-Moden ausbreiten. Die Ausbreitungskonstante ist eine Funktion der optischen Frequenz. Die Eigenschaften des Filmwellenleiters sind charakteristisch für dielektrische Wellenleiter. Wir werden später für Fasern sehr ähnliche Gleichungen und Grafiken kennenlernen.

Prinzipielles Vorgehen bei der Ermittlung der Eigenschaften von Wellenleiter:

1. Wahl des Koordinatensystems
2. Aufstellen der Wellengleichung für alle Unterräume in dem Koordinatensystem mit allgemeinen Konstanten (n-Amplituden Konstanten und Ausbreitungskonstante)
3. Ermittlung von n-1 Amplituden Konstanten aus den (n-1) Randbedingungen
4. Aufstellen der charakteristischen Gleichung aus der letzten Randbedingung
5. Lösen der charakteristischen Gleichung und Ermittlung der Ausbreitungskonstante
6. Evtl. Ermittlung der letzten Konstanten aus der transportierten Leistung

Kapitel 8

Wellenleitermaterialien

Motivation Der Brechungsindex der Faser bestimmt wesentlich die Wellenleitereigenschaften der Faser. Wir betrachten hier die Modellierung dieser Abhängigkeit. Zusätzlich werden die Abhängigkeiten von Dämpfung und Absorption von der Wellenlänge diskutiert.

8.1 Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex

Wir hatten im Kapitel 3 gesehen, daß sich die relative Dielektrizitätskonstante mit Hilfe der Gleichung 3.17 beschreiben läßt:

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + K \sum_k \frac{g_k}{f_k^2 - f^2 - j \frac{\gamma_k f}{2\pi}} \quad (8.1)$$

Da $\underline{\varepsilon}_r = \underline{n}^2$ ist, folgt für den Real- und Imaginärteil des Brechungsindex

$$\underline{n} = n' - jn'' \quad (8.2)$$

$$\underline{n}^2 = n'^2 - n''^2 - 2jn'n'' \quad (8.3)$$

Zusätzlich ist die Dämpfung in dem interessierenden Frequenzbereich klein und somit $n'' \ll n'$ und es folgt:

$$n'^2 = \varepsilon'_r \quad (8.4)$$

$$n'' = \frac{\varepsilon''_r}{2n'} \quad (8.5)$$

Da uns der Brechungsindexverlauf nur in Bereichen interessiert, in denen keine Resonanzen liegen, kann der Imaginärteil von $\underline{\varepsilon}_r$ vernachlässigt werden und es gilt:

$$n'^2 - 1 = \sum_k \frac{Kg_k}{f_k^2 - f^2} = \sum_k \frac{G_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (8.6)$$

mit $\lambda_k = \frac{c}{f_k}$, $G_k = \frac{K g_k \lambda_k^2}{c^2}$. Dies ist die sogenannte **Sellmeier-Beziehung**, die eine sehr gute Approximation des Realteil des Brechungsindex darstellt. Eine hervorragende Approximation von dielektrischen Wellenleitern erreicht man schon mit 3 Termen, wobei eine Resonanzfrequenz im infraroten und zwei im ultravioletten Bereich liegen.

Wir wollen uns im folgenden einige Materialien anschauen.

Silizium-Oxyd SiO_2

Die Sellmeier-Formel lautet für dieses Material [11]:

$$n^2 - 1 = \frac{0.6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0.0684043^2} + \frac{0.4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1162414^2} + \frac{0.8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 9.896161^2} \quad (8.7)$$

λ ist hier in μm einzusetzen. Der Verlauf ist in Bild 8.1 angegeben.

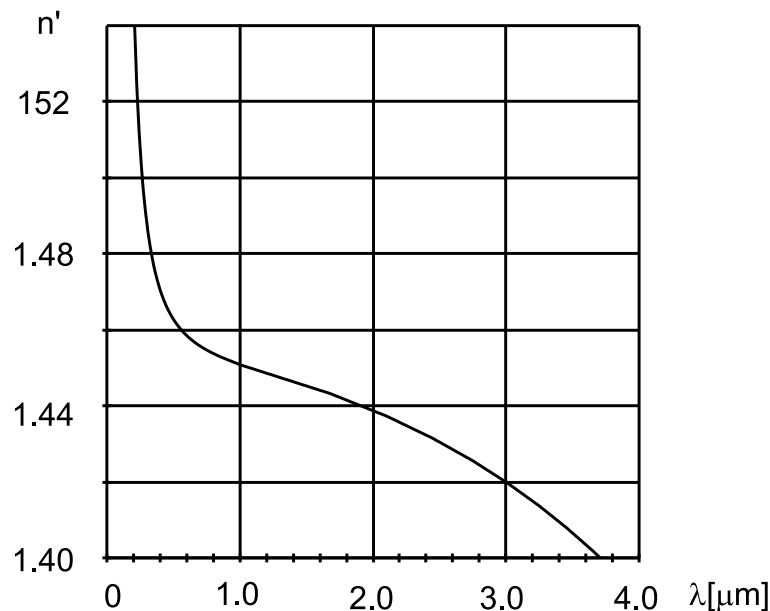


Abbildung 8.1: Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge für SiO_2

Der Brechungsindex liegt für die interessierenden Wellenlängen im Bereich von 1.45. Dieser Wert kann durch Dotierung verändert werden. In Bild 8.2 ist seine Abhängigkeit für verschiedene Dotierungsmaterialien angegeben.

Wir erkennen, daß der Brechungsindex sowohl vermindert (z.B. durch Zugabe von B_2O_3 oder F) als auch vergrößert werden kann (z.B. TiO_2 , CsO_2 , Al_2O_3 , ZrO_2 , GeO_2). Welche Materialien verwendet werden hängt von den verfügbaren Reinheitsgraden und technologischen Randbedingungen ab (siehe [11]). In Bild 8.3 ist die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge für unterschiedliche Materialien aufgezeichnet.

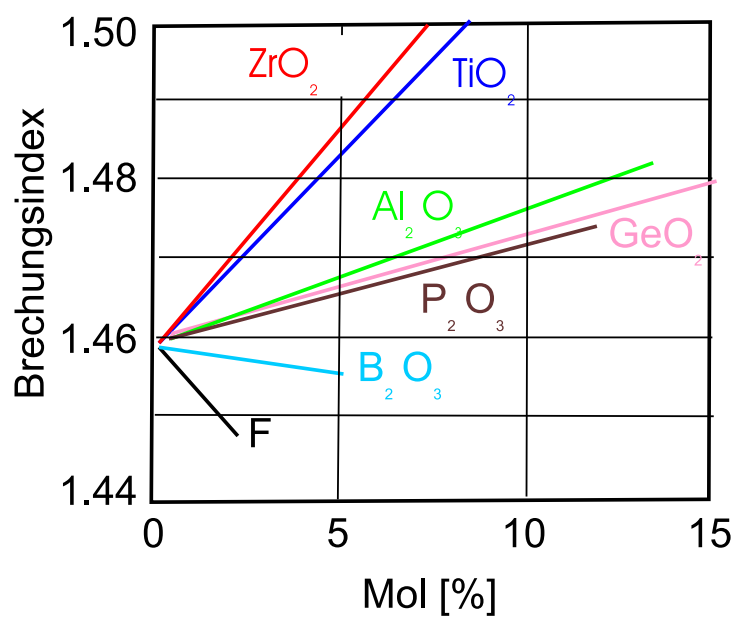


Abbildung 8.2: Variation des Brechungsindex als Funktion der Dotierungskonzentration für unterschiedliche Dotierstoffe auf SiO_2 [11]

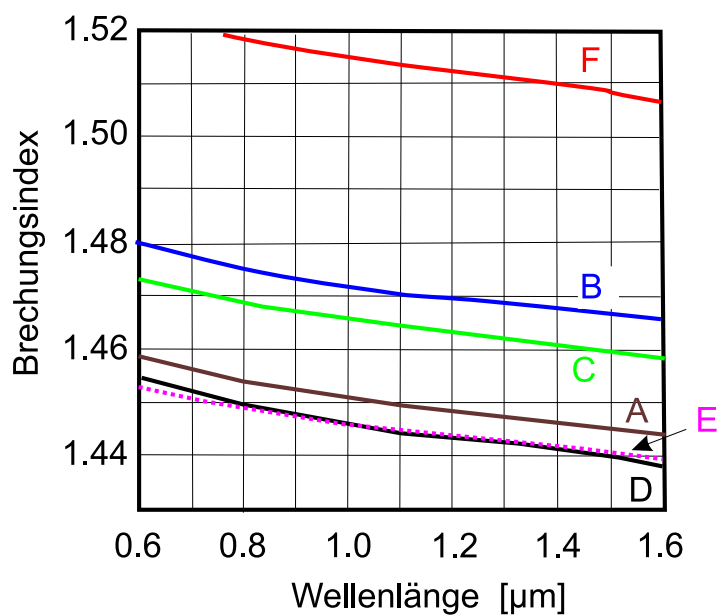


Abbildung 8.3: Variation des Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge für A) SiO_2 , B) 13.5% GeO_2 , 86.5% SiO_2 , C) 9.1% P_2O_5 , 90.9% SiO_2 , D) 13.3% B_2O_3 , 86.7% SiO_2 , E) 1.0% F , 99% SiO_2 , F) 16.9% Na_2O , 32% B_2O_3 , 50.6% SiO_2 [11]

Als besonders günstig stellt sich eine Faser mit einer GeO_2 -Dotierung im Kern und einer F-
Dotierung im Mantel heraus(siehe Tabelle 8.1). Im Bild 8.4 ist die Wellenlängenabhängigkeit
für unterschiedliche GeO_2 -Dotierungen aufgezeichnet.

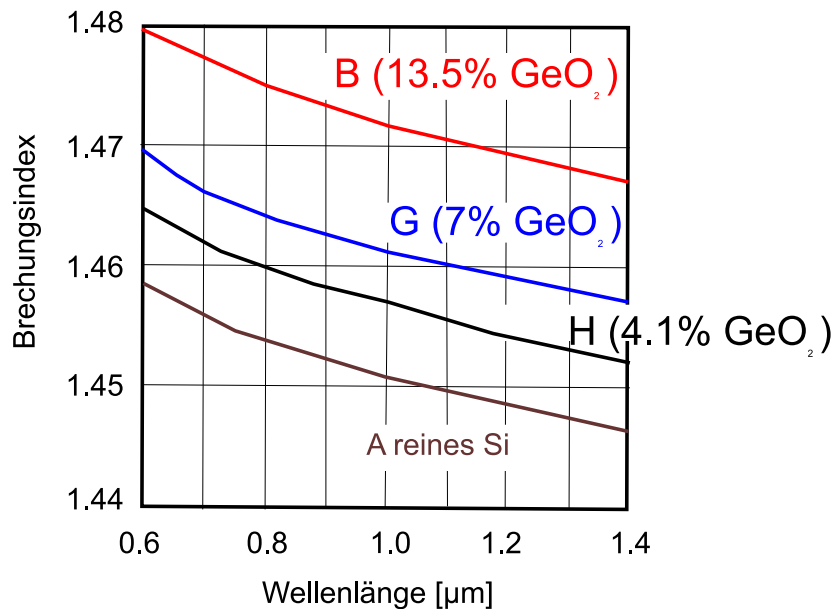


Abbildung 8.4: Variation des Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge für unterschiedliche GeO_2 -Dotierungen [11]

8.2 Dämpfung von Wellenleitern

Zwei physikalische Mechanismen bewirken eine Dämpfung des optischen Signals in Dielektrika.

- Absorption
- Streuung

Da die Welle nicht nur im Kern sondern teilweise auch im Mantel geführt wird, spielen beide Effekte in beiden Bereichen eine Rolle.

8.2.1 Absorption

Den Mechanismus der Absorption hatten wir schon kennengelernt. In Dielektrika werden die gebundenen Elektronen erst bei sehr hohen Energien, d.h. niedrigen Wellenlängen

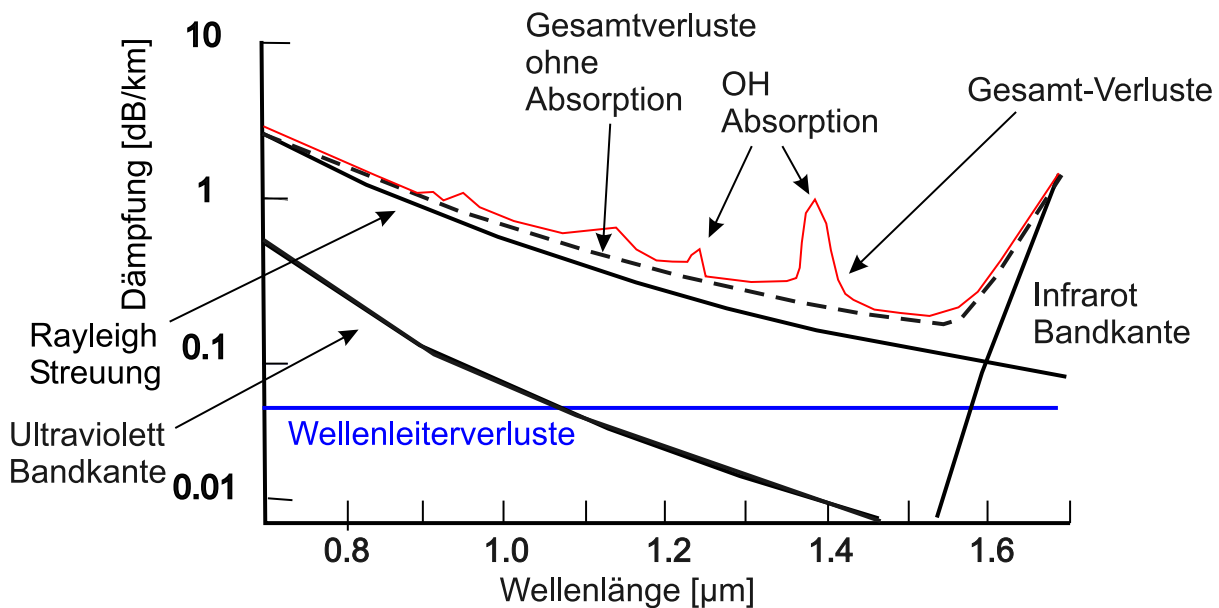


Abbildung 8.5: Dämpfung als Funktion der Wellenlänge für eine typische Monomode-Faser[11]

Si-O	9.0 μm
Ge-O	11.0 μm
P-O	8.0 μm
B-O	7.3 μm

Tabelle 8.1: Molekül-Resonanzstellen einiger Materialien [11]

angeregt und können relaxieren. Mit fallender Wellenlänge erkennt man eine Absorptionskante, unterhalb der die elektronischen Energiezustände so dicht liegen, daß das Licht das Material nicht mehr durchdringt (siehe uv-bandedge in Bild 8.5). Im infraroten Bereich treten Schwingungen der Atome bzw. Moleküle selber auf. Ihre Resonanzstellen sind materialabhängig. In Tabelle 8.1 sind die Resonanzstellen für verschiedene Materialien angegeben. Sie bewirken die rechte Absorptionskante in Bild 8.5. Man erkennt, daß GeO_2 ein besonders günstiges Dotierungsmaterial ist, da seine Resonanzstellen bei relativ hohen Wellenlängen liegt. Zusätzlich können noch Resonanzen auftreten, die durch Verunreinigungen wie OH-Jonen oder Metall-Moleküle verursacht werden. Aus diesem Grund sollte das Material so rein wie möglich sein. Es wird eine Verunreinigungsdichte von kleiner 10^{-9} angestrebt. OH-Jonen haben eine Resonanz bei $2.73\mu m$. Zusätzlich ergeben sich noch ein weitere Resonanzfrequenzen bei der doppelten und dreifachen Resonanzfrequenz

($1.39\mu m, 0.95\mu m$). Bei modernen Fasern sind die Materialien schon so sauber, daß diese Resonanzstellen kaum noch die Dämpfung beeinflussen.

8.2.2 Streuung in dielektrischen Materialien

Optische Wellenleiter bestehen meist aus amorphen Materialien, überwiegend sogar aus Gläsern, d.h. diese Materialien haben eine regellose Materialstruktur. Der Brechungsindex kann für einen kleinen Würfel der Kantenlänge d modelliert werden durch

$$n^2 = \bar{n}^2 + \Delta n^2 \quad (8.8)$$

Δn^2 beschreibt die Abweichungen des Quadrats des Brechungsindex für die einzelnen Würfel vom Mittelwert \bar{n}^2 .

Es ergibt sich dann aus den Maxwellschen Gleichungen

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E} \quad (8.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \bar{n}^2 \vec{E} + \underbrace{j\omega\varepsilon_0 \Delta n^2 \vec{E}}_{\vec{J}_{eff}} \quad (8.10)$$

Der zweite Summand kann als effektive Stromdichte im Würfel d^3 interpretiert werden. Es liegt eine räumlich statistische Verteilung zugrunde und die Schwankungen sind unkorreliert für $d \ll \lambda$. Diese Anordnung kann dann durch einen Elementardipol modelliert werden, wobei die Richtung des Dipols durch das anliegende Feld \vec{E} bestimmt ist. Der Betrag der Feldstärke ist [14, Abschnitt 12.3.1]:

$$|\vec{E}_\theta| = \frac{|\vec{J}_{eff}| * d^3}{2\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \bar{n}^2}} \frac{\sin(\theta)}{r} \quad (8.11)$$

Das Richtdiagramm eines solchen Dipols ist in Bild 8.6 angegeben. Die abgestrahlte Leistung ist

$$\Delta P = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \bar{n}^2}}} r^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} |\vec{E}_\theta|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (8.12)$$

Wir wollen nun untersuchen, wie diese Leistung von der optischen Wellenlänge abhängt.

$$\Delta P \sim \frac{1}{\lambda^2} |\vec{J}_{eff}|^2 \quad (8.13)$$

$$\sim \frac{1}{\lambda^2} \omega^2 \quad (8.14)$$

$$\sim \frac{1}{\lambda^4} \quad (8.15)$$

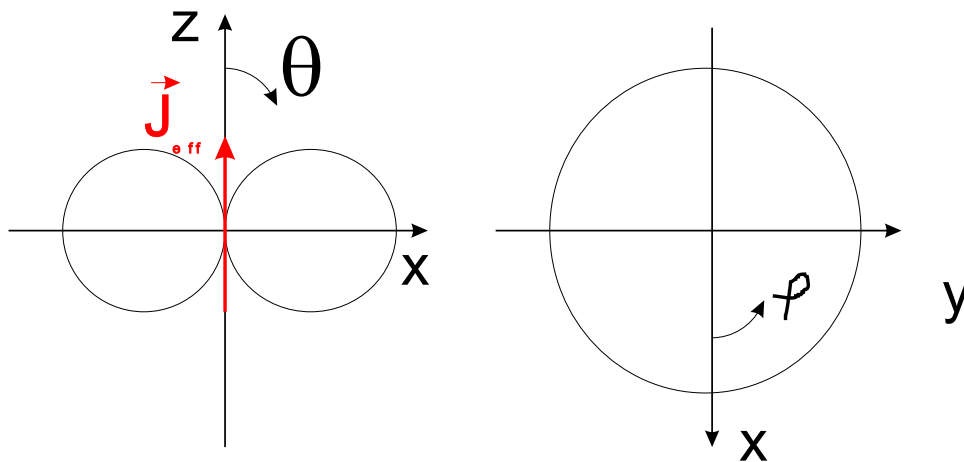


Abbildung 8.6: Richtdiagramm eines Elementardipols

Hieraus folgt, daß in einem infinitesimal kleinen Stück Faser optische Leistung gestreut wird, diese Streuung ist unkorreliert und strahlt in alle Richtungen ab. Die Dämpfung, die die optische Welle in der Faser erleidet liegt in der Größenordnung von $\alpha = 0.8 \cdots 1.2$ dB/km. Die Dämpfung der Faser durch Rayleigh-Streuung liegt in der Größenordnung von $\alpha = 0.8 \cdots 1.2 / \lambda^4$ dB/km, wobei λ in $[\mu m]$ eingesetzt werden muß (siehe Bild 8.5). Teilweise wird das Licht wieder von dem Wellenleiter eingefangen und geführt. Dabei wird ein Teil auch in rückwärtiger Richtung übertragen. Diese Reflexion ist besonders störend in bidirektionalen Übertragungssystemen und kann beim Einsatz optischer Verstärker, wenn diese ohne optische Isolatoren aufgebaut sind, zu großen Störungen führen.

Zusammenfassung Die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex kann mit Hilfe der Sellmeier-Formel beschrieben werden:

$$n'^2 - 1 = \sum_k \frac{K g_k}{f_k^2 - f^2} = \sum_k \frac{G_k \lambda}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (8.16)$$

Durch Dotierung kann der Brechungsindex variiert werden. B_2O_3 und F vergrößern TiO_2 , CsO_2 , Al_2O_3 , ZrO_2 und GeO_2 verkleinern den Brechungsindex. Folgende Verlustmechanismen sind in der Faser vorherrschend: Absorption und Rayleigh-Streuung. Die Absorption begrenzt den Übertragungsbereich bei hohen Bandbreiten. Die Rayleigh-Streuung ist proportional zu $1/\lambda^4$ und begrenzt den Übertragungsbereich zu kleinen Wellenlängen

Kapitel 9

Übertragung von Pulsen in Dispersiven Medien

Motivation Die digitale Übertragungstechnik ist das Haupteinsatzgebiet der optischen Nachrichtentechnik. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie verändern sich Pulse bei der Übertragung über ein dispersives Medium. Dieses Medium kann ein beliebiger dielektrischer Wellenleiter sein, z.B. eine Glasfaser.

Wir betrachten eine amplitudenmodulierte ebene Welle in einem Dielektrikum. Hierbei vernachlässigen wir aus Gründen der einfacheren Schreibweise den Vektorcharakter der Welle. Die elektrische Feldstärke sei:

$$\underline{E}(t) = \underline{a}(t)e^{j\omega_0 t} \quad (9.1)$$

Dann folgt als spektrale Verteilung der Feldstärke :

$$\underline{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{a}(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = \underline{A}(\omega - \omega_0) \quad (9.2)$$

Nach der Übertragung über eine Länge L im Dielektrikum wird das Signal um αL gedämpft und seine Phase um $-\beta(\omega)L$ gedreht. Wir nehmen hierbei an, daß die Dämpfung im betrachteten Frequenzbereich als konstant angenähert werden darf. Dann folgt für das Ausgangssignal:

$$\underline{E}_{out}(\omega) = \underline{A}(\omega - \omega_0)e^{-j[(\beta(\omega)-j\alpha)L]} \quad (9.3)$$

Wir entwickeln die Ausbreitungskonstante β um ω_0 :

$$\underline{E}_{out}(\omega) = e^{-\alpha L} \underline{A}(\omega - \omega_0)e^{-j\{\beta(\omega_0)+\beta'(\omega_0)(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega-\omega_0)^2\cdots\}L} \quad (9.4)$$

Im Zeitbereich folgt:

$$\begin{aligned}\underline{E}_{out}(t) &= e^{-\alpha L} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \underline{\mathbf{A}}(\omega - \omega_0) e^{-j\{\beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 \dots\}L} d\omega \\ &= e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \underline{\mathbf{A}}(\omega) e^{-j\{\beta'(\omega_0)\omega + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 \dots\}L} d\omega\end{aligned}\quad (9.5)$$

Wir betrachten jetzt einige Spezialfälle:

9.1 Das monochromatische Feld

$$a(t) = C = konst \quad (9.6)$$

Hierzu gehört das Signalspektrum:

$$\underline{\mathbf{A}}(\omega) = C 2\pi \delta(\omega) \quad (9.7)$$

Dann ist das Ausgangssignal im Zeitbereich:

$$E_{out}(t) = C 2\pi e^{-\alpha L} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j[\omega t - \beta(\omega)L]} d\omega \quad (9.8)$$

$$= C e^{-\alpha L} e^{j[\omega_0 t - \beta(\omega_0)L]} \quad (9.9)$$

Mit $\beta(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega)$ folgt:

$$E_{out}(t) = C e^{-\alpha L} e^{j[\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}(\omega_0)})]} \quad (9.10)$$

Hier ist $v_{ph} = c/n(\omega)$ die Phasengeschwindigkeit im Medium, daß heißt die Geschwindigkeit mit der sich z.B. ein Nulldurchgang der Schwingung fortpflanzt. Die Welle wird in der Amplitude um $e^{-\alpha L}$ gedämpft und in der Phase um $-\beta(\omega_0)L$ gedreht. Man beachte, daß α der Dämpfungsfaktor für die Amplitude ist.

9.2 Ein schmalbandiges Signal

Das Spektrum des Signal $a(t)$ sei $\underline{\mathbf{A}}(\omega)$. Es sei so schmalbandig, daß innerhalb der Signalbandbreite gilt: $\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 \ll \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)$. Dann folgt für das Ausgangssignal im Zeitbereich:

$$\underline{E}_{out}(t) = e^{j\omega_0 t} e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{A}}(\omega) e^{j\{\omega[t - \beta'(\omega_0)L]\}} d\omega \quad (9.11)$$

$$= e^{j\omega_0 t} e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} a(t - \beta'(\omega_0)L) \quad (9.12)$$

Es ergibt sich jetzt ein unverformter Signalpuls, der um die Zeit $L/v_{gr}(\omega_0) = L\beta'(\omega_0)$ verzögert wird und mit $e^{-\alpha L}$ gedämpft wird. Außerdem ist der Träger wie im ersten Fall entsprechend der Phasengeschwindigkeit verzögert. v_{gr} heißt Gruppengeschwindigkeit und beschreibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Pulses.

9.3 Ein breitbandigeres Basisbandsignal

Wir nehmen diesmal an, daß Terme bis zur zweiten Ableitung von β ausreichen, um die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungskonstante im Spektralbereich des Signals darzustellen. Außerdem sei die Form des Pulses gaußförmig:

$$a^2(t) = e^{-\frac{t^2}{T_0^2}} \quad (9.13)$$

^{9.1} T_0 beschreibt die Pulsbreite des Eingangspulses. Das Spektrum der Amplitude der Feldstärke ist bei der Übertragung dieser Pulse:

$$\underline{\mathbf{A}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2T_0^2} - j\omega t} dt \quad (9.14)$$

Mit dem Integral [18, 3.322]^{9.2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 x^2 \pm qx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right) \quad (9.15)$$

Als Eingangsspektrum ergibt sich also mit $p^2 = \frac{1}{2T_0^2}$, $q = j\omega$:

$$\underline{\mathbf{A}}(\omega) = \sqrt{2\pi} T_0 e^{-\frac{1}{2} T_0^2 \omega^2} \quad (9.16)$$

Für das Ausgangssignal folgt im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} E_{out}(t) &= \sqrt{2\pi} T_0 e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-\frac{1}{2} T_0^2 \omega^2} e^{-j[\beta'(\omega_0)\omega + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2]L} d\omega \\ &= e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} \frac{T_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t - \beta'(\omega_0)L)} e^{-\omega^2[\frac{T_0^2}{2} + j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L]} d\omega \end{aligned} \quad (9.17)$$

^{9.1}Man beachte, daß die Amplitude des Pulses hier reell angenommen wird. Einen solchen Puls nennt man "Bandbreite begrenzt". Später werden wir auch sogenannte gechirpte Pulse betrachten, bei denen eine komplexe Amplitude vorliegt. Wir werden sehen, daß "Bandbreite begrenzte" Pulse durch die Dispersion immer verbreitert werden, während für gechirpte Pulse dies nicht unbedingt der Fall ist.

^{9.2}Daß dieses Integral auch für komplexe p, q mit $\Re(p^2) > 0$ gilt, erkennt man aus dem Vergleich mit dem Integral [3.322] aus der gleichen Quelle

Wir wenden wieder Formel 9.15 mit $p^2 = \frac{T_0^2}{2} + j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L$ und $q = t - \beta'(\omega_0)L$ an .

$$\begin{aligned}
 E_{out}(t) &= e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} \frac{T_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{T_0^2}{2} + j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L}} \exp\left(\frac{-(t - \beta'(\omega_0)L)^2}{4(\frac{T_0^2}{2} + j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L)}\right) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{1 + j\frac{\beta''(\omega_0)L}{T_0^2}}} e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t - \beta'(\omega_0)L)^2}{1 + j\frac{\beta''(\omega_0)L}{T_0^2}}} \quad (9.18)
 \end{aligned}$$

Es ist nun üblich eine etwas andere Nomenklatur einzuführen. Hierzu betrachten wir die Entwicklung der Ausbreitungskonstante β :

$$\beta = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad (9.19)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} n(\lambda) \quad (9.20)$$

Für die erste Ableitung von β nach ω folgt mit $\frac{\partial \beta}{\partial \omega} = \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda}$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} n'(\lambda) - \frac{2\pi}{\lambda^2} n(\lambda)\right) \quad (9.21)$$

$$= \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi c}\right) \frac{2\pi}{\lambda} \left(n'(\lambda) - \frac{1}{\lambda} n(\lambda)\right) \quad (9.22)$$

$$= \frac{1}{c} (n(\lambda) - \lambda n'(\lambda)) \quad (9.23)$$

$$\equiv \frac{1}{c} N_g \equiv \frac{1}{v_g} \quad (9.24)$$

Hier ist N_g der Gruppenindex mit $v_g = c/N_g$ der Gruppengeschwindigkeit. Sie beschreibt die Geschwindigkeit der Ausbreitung von Leistungspulsen.

Für die zweite Ableitung der Ausbreitungskonstante nach der Kreisfrequenz folgt:

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} N_g \quad (9.25)$$

$$= \frac{1}{c} \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi c}\right) \frac{d}{d\lambda} (n(\lambda) - \lambda n'(\lambda)) \quad (9.26)$$

$$= \frac{1}{c} \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi c}\right) (-\lambda n''(\lambda)) \quad (9.27)$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\pi c} \underbrace{\frac{\lambda}{c} \left(\frac{d^2 n}{d\lambda^2}\right)}_D \quad (9.28)$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2\pi c} * D \quad (9.29)$$

D heißt Dispersionskoeffizient, er wird in $ps/nm/km$ angegeben. Wir definieren nun eine Dispersionslänge L_D :

$$L_D = \frac{T_0^2}{\beta''(\omega_0)} \quad (9.30)$$

$$= \frac{2T_0^2 \pi c}{D \lambda_0^2} \quad (9.31)$$

Man beachte, daß die Diffusionslänge L_D unterschiedliche Vorzeichen annehmen kann. Wir verwenden jetzt diese Definitionen zur Beschreibung der Feldstärke in Gleichung 9.18:

$$E_{out}(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + j \frac{L}{L_D}}} e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g)^2}{1 + j \frac{L}{L_D}}} \quad (9.32)$$

Für das Leistungssignal folgt:

$$\begin{aligned} |E_{out}|^2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{L}{L_D})^2}} e^{-2\alpha L} e^{-\frac{(t-L/v_g)^2}{2T_0^2} \left(\frac{1}{1-j \frac{L}{L_D}} + \frac{1}{1+j \frac{L}{L_D}} \right)} \\ &= \frac{e^{-2\alpha L}}{\sqrt{1 + (\frac{L}{L_D})^2}} e^{-\frac{(t-L/v_g)^2}{T_0^2} \frac{1}{1+(\frac{L}{L_D})^2}} \end{aligned} \quad (9.33)$$

Wir erkennen, daß der Leistungspuls neben der Dämpfung noch eine Verbreiterung in der r.m.s. Breite um den Faktor $\sqrt{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}$ erleidet. Die Phase der Feldstärke ist

$$\Phi(t, L) = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{L}{L_D}\right) - \beta(\omega_0)L + \omega_0 t + \frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g)^2 \frac{L}{L_D}}{1 + (\frac{L}{L_D})^2} \quad (9.34)$$

Die Momentanfrequenz berechnet sich zu

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega_0 + \frac{1}{T_0^2} \frac{(t-L/v_g) \frac{L}{L_D}}{1 + (\frac{L}{L_D})^2} \quad (9.35)$$

Für normale Dispersion ($\beta'' > 0 \rightarrow L_D > 0$) folgt für den Anfang des Pulses $t < L/v_g$ eine kleinere Frequenz als die Trägerfrequenz. Die Frequenz wächst linear über den Puls (linearer Chirp) und ist für $t > L/v_g$ größer als die Trägerfrequenz. Für anormale Dispersion ($\beta'' < 0 \rightarrow L_D < 0$) ergibt sich ein entgegengesetztes Verhalten.

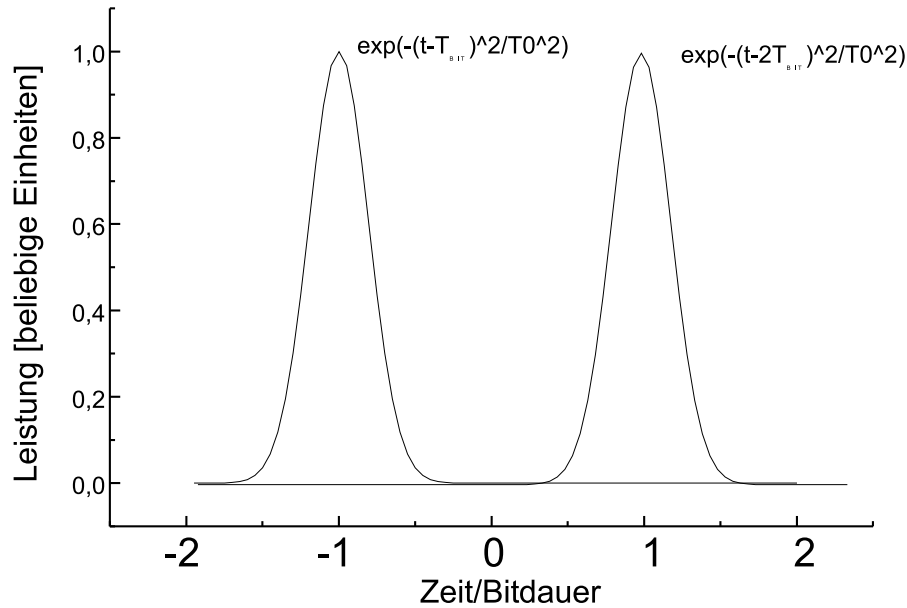


Abbildung 9.1: Zwei aufeinanderfolgende Pulse

9.4 Breitbandige Gaußpulse

Wir wollen untersuchen, wie sich die Dispersion des Dielektrikums auf eine Folge von Pulsen auswirkt. Dazu betrachten wir zwei Gaußpulse (siehe Bild 9.1). Die Feldstärke des Signals am Ausgang ist nach Gleichung 9.32:

$$\begin{aligned}
 E_{out} &= \sqrt{\frac{1}{1+j\frac{L}{L_D}}} e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t+\frac{T_{Bit}}{2}-L/v_{ph})} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g+\frac{T_{Bit}}{2})^2}{1+j\frac{L}{L_D}}} \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{1+j\frac{L}{L_D}}} e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t-\frac{T_{Bit}}{2}-L/v_{ph})} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g-\frac{T_{Bit}}{2})^2}{1+j\frac{L}{L_D}}} \\
 &= e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t-L/v_{ph})} \sqrt{\frac{1}{1+j\frac{L}{L_D}}} \\
 &\quad \left[e^{j\frac{\omega_0 T_{Bit}}{2}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g+\frac{T_{Bit}}{2})^2}{1+j\frac{L}{L_D}}} + e^{-j\frac{\omega_0 T_{Bit}}{2}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g-\frac{T_{Bit}}{2})^2}{1+j\frac{L}{L_D}}} \right]
 \end{aligned}$$

Für $|E_{out}|^2$ folgt:

$$\begin{aligned}
 |E_{out}|^2 = & e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \left[e^{-\frac{1}{T_0^2} \frac{(t-L/v_g + \frac{T_{Bit}}{2})^2}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} + e^{-\frac{1}{T_0^2} \frac{(t-L/v_g - \frac{T_{Bit}}{2})^2}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \right. \\
 & + e^{j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g + \frac{T_{Bit}}{2})^2}{1+j\frac{L}{L_D}}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g - \frac{T_{Bit}}{2})^2}{1-j\frac{L}{L_D}}} \\
 & \left. + e^{-j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g + \frac{T_{Bit}}{2})^2}{1-j\frac{L}{L_D}}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t-L/v_g - \frac{T_{Bit}}{2})^2}{1+j\frac{L}{L_D}}} \right] \quad (9.36)
 \end{aligned}$$

Mit der dem Betragsquadrat der Feldstärke eines Einzelpulses

$$I(t) = e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} e^{-\frac{1}{T_0^2} \frac{t^2}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \quad (9.37)$$

folgt: ^{9.3}

$$\begin{aligned}
|E_{out}|^2 &= I\left(t + \frac{T_{Bit}}{2}\right) + I\left(t - \frac{T_{Bit}}{2}\right) \\
&+ e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \left[e^{j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t + \frac{T_{Bit}}{2})^2 (1-j\frac{L}{L_D}) + (t - \frac{T_{Bit}}{2})^2 (1+j\frac{L}{L_D})}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \right. \\
&+ e^{-j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t + \frac{T_{Bit}}{2})^2 (1+j\frac{L}{L_D}) + (t - \frac{T_{Bit}}{2})^2 (1-j\frac{L}{L_D})}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \left. \right] \\
&= I\left(t - L/v_g + \frac{T_{Bit}}{2}\right) + I\left(t - \frac{T_{Bit}}{2}\right) + e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \\
&\left[e^{j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t + \frac{T_{Bit}}{2})^2 + (t - \frac{T_{Bit}}{2})^2 + j\frac{L}{L_D} [(t - \frac{T_{Bit}}{2})^2 - (t + \frac{T_{Bit}}{2})^2]}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \right. \\
&+ e^{-j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{(t + \frac{T_{Bit}}{2})^2 + (t - \frac{T_{Bit}}{2})^2 - j\frac{L}{L_D} [(t - \frac{T_{Bit}}{2})^2 - (t + \frac{T_{Bit}}{2})^2]}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \left. \right] \\
&= I\left(t + \frac{T_{Bit}}{2}\right) + I\left(t - \frac{T_{Bit}}{2}\right) + e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \\
&\left[e^{j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{t^2 + (\frac{T_{Bit}}{2})^2 - j2\frac{L}{L_D} [t\frac{T_{Bit}}{2}]}{T_0^2(1 + \frac{L^2}{L_D^2})}} + e^{-j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{t^2 + (\frac{T_{Bit}}{2})^2 + j2\frac{L}{L_D} [t\frac{T_{Bit}}{2}]}{T_0^2(1 + \frac{L^2}{L_D^2})}} \right] \\
&= I\left(t + \frac{T_{Bit}}{2}\right) + I\left(t - \frac{T_{Bit}}{2}\right) + e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{L^2}{L_D^2}}} \\
&e^{-\frac{t^2 + (\frac{T_{Bit}}{2})^2}{T_0^2(1 + \frac{L^2}{L_D^2})}} \left\{ e^{j\omega_0 T_{Bit}} e^{\frac{j2\frac{L}{L_D} [t\frac{T_{Bit}}{2}]}{T_0^2(1 + \frac{L^2}{L_D^2})}} + e^{-j\omega_0 T_{Bit}} e^{-\frac{j2\frac{L}{L_D} [t\frac{T_{Bit}}{2}]}{T_0^2(1 + \frac{L^2}{L_D^2})}} \right\} \\
&= I\left(t + \frac{T_{Bit}}{2}\right) + I\left(t - \frac{T_{Bit}}{2}\right) + \sqrt{I\left(t + \frac{T_{Bit}}{2}\right) I\left(t - \frac{T_{Bit}}{2}\right)} \\
&2 \cos \left(\omega_0 T_{Bit} + \frac{2\frac{L}{L_D} [t\frac{T_{Bit}}{2}]}{T_0^2(1 + \frac{L^2}{L_D^2})} \right) \tag{9.38}
\end{aligned}$$

^{9.3}Wir betrachten jetzt, um Schreibarbeit zu sparen, den Ausgangszeitpunkt $t \rightarrow t - L/v_g$, d.h. wir berücksichtigen, daß der Ausgangszeitpunkt sich gemäß der Gruppengeschwindigkeit verschoben hat.

Das Ergebnis kann folgendermaßen interpretiert werden. Als Hüllkurve ergibt sich die Kurve aus dem Quadrat der Summe der Wurzeln der Einzelintensitäten. Diese Hüllkurve ist mit der Differenz der Momentanfrequenzen moduliert. Die Momentanfrequenz ist umgekehrt proportional zur Pulsbreite und proportional zu L/L_D .

Zur Überprüfung der Deutung berechnen wir das Ergebnis aus den Momentanfrequenzen 9.35.

$$\begin{aligned}
 & \cos \left(\left[\omega_0 + \frac{(t + T_{Bit}/2)L/L_D}{T_0^2(1 + L^2/L_D^2)} \right] (t + T_{Bit}/2) \right. \\
 & \quad \left. - \left[\omega_0 + \frac{(t - T_{Bit}/2)L/L_D}{T_0^2(1 + L^2/L_D^2)} \right] (t - T_{Bit}/2) \right) \\
 &= \cos \left(\omega_0 T_{Bit} + L/L_D \frac{(t + T_{Bit}/2)^2 - (t - T_{Bit}/2)^2}{T_0^2(1 + L^2/L_D^2)} \right) \\
 &= \cos \left(\omega_0 T_{Bit} + 2L/L_D \frac{t T_{Bit}}{T_0^2(1 + L^2/L_D^2)} \right) \tag{9.39}
 \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß die Schwebungsfrequenz übereinstimmt. In Bild 9.2 ist die Verbreiterung zweier 10 Gbit/s Gaußpulse mit einer Pulsbreite von $T_0 = 20 \text{ ps}$ bei einer Übertragung über eine Monomodefaser $D=17 \text{ ps/nm/km}$ angegeben. Man erkennt sehr deutlich die Schwebung zwischen den Pulsen.

9.5 Puls mit eingebauten Prechirp

Wir hatten im letzten Kapitel gesehen, daß der Puls am Ende der Faser eine komplexe Amplitude hat. Wir wollen jetzt untersuchen wie sich ein solcher Puls bei der Übertragung über eine dispersive Faser verhält. Dazu machen wir für die Feldstärke folgenden Ansatz: ^{9.4}

$$E(t) = \sqrt{\frac{1}{1+jC}} e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{1}{2T_0^2} \frac{t^2}{1+jC}} \tag{9.40}$$

Als Pulsverlauf ergibt sich:

$$|E(t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} e^{-\frac{t^2}{T_0^2} \frac{1}{1+C^2}} \tag{9.41}$$

Wir sehen, daß die Pulsbreite T_0 sich um den Faktor $\sqrt{1+C^2}$ gegen über dem vorigen Eingangspuls verbreitert hat. Die Rechnung ist sehr ähnlich zur vorhergehenden. Es folgt

^{9.4}Hier entspricht der Chirpfaktor C , der hier aus didaktischen Gründen anders als in [17] definiert wird, L/L_D in Formel 9.32.

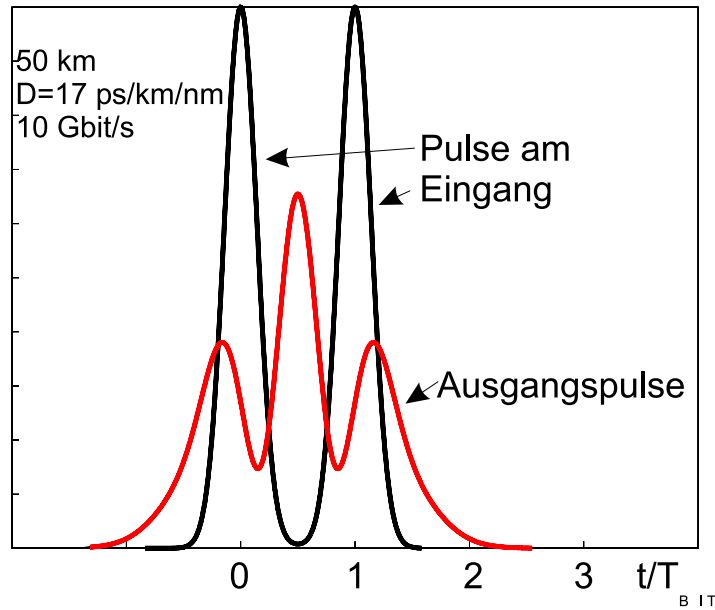


Abbildung 9.2: Übertragung zweier Pulse über eine Standard Monomodefaser. Die Amplitude ist auf 1 normiert. Die Länge der Faser beträgt 50 km.

als Frequenzspektrum für $a(t)$:

$$\underline{\mathbf{A}}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1+jC}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1+jC} \frac{t^2}{2T_0^2}} e^{-j\omega t} dt \quad (9.42)$$

Mit $p^2 = \frac{1}{2(1+jC)T_0^2}$ und $q = j\omega$ folgt aus dem Integral 9.15 :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{1+jC}} \sqrt{2\pi T_0^2(1+jC)} e^{-\frac{T_0^2(1+jC)\omega^2}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\frac{T_0^2(1+jC)\omega^2}{2}} \end{aligned} \quad (9.43)$$

Für die Ausgangsfeldstärke folgt im Frequenzbereich, wenn wir wieder nur die Terme der Taylorentwicklung bis zur zweiten Ableitung verwenden:

$$\underline{\mathbf{E}}(\omega) = \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\alpha L} e^{-\frac{T_0^2(1+jC)(\omega-\omega_0)^2}{2}} e^{-j(\beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)(\omega-\omega_0)^2)L} \quad (9.44)$$

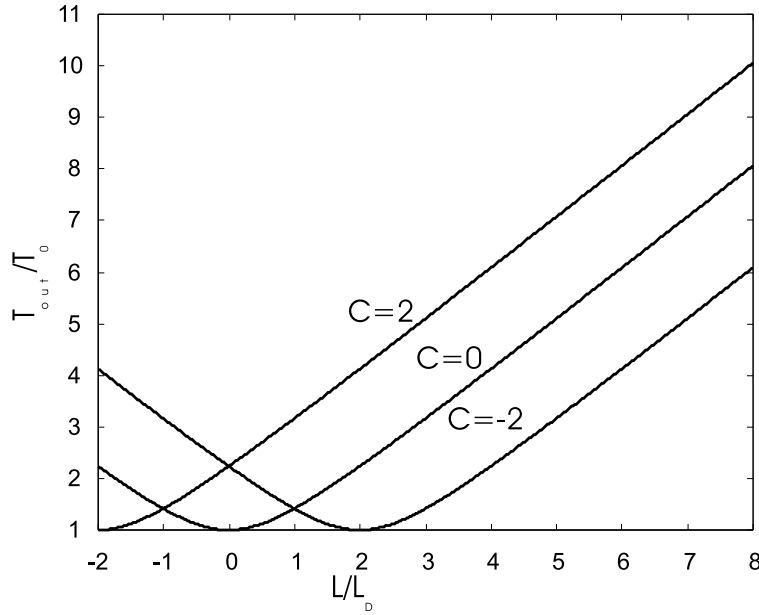


Abbildung 9.3: Pulsverbreiterung als Funktion der Übertragungslänge mit dem Chirparameter C , der den Pre-Chirp beschreibt für $\beta'' > 0$ und $\alpha = 0$

Im Zeitbereich folgt durch inverse Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{out}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi T_0^2} e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t-L/v_{ph})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-L/v_{gr})} e^{-\frac{T_0^2(1+jC)\omega^2}{2}} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} d\omega \\
 &= \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t-L/v_{ph})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-L/v_{gr})} e^{-\frac{T_0^2\omega^2}{2} [1+j(C+\beta''(\omega_0)L/T_0^2)]} d\omega \\
 &= \sqrt{\frac{T_0^2}{2\pi}} e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t-L/v_{ph})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-L/v_{gr})} e^{-\frac{T_0^2\omega^2}{2} [1+j(C+L/L_D)]} d\omega \quad (9.45)
 \end{aligned}$$

Hier haben wir wieder die Definition der Dispersionslänge $L_D = T_0^2/\beta''(\omega_0)$ verwendet. Man beachte hierbei, daß sie auf den ungechirpten Puls bezogen ist. Mit $p^2 = \frac{T_0^2}{2} [1 + j(C + L/L_D)]$, und $q = j(t - L/v_g)$ und dem Integral 9.15 folgt:

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+j(C+L/L_D)}} e^{-\alpha L} e^{j\omega_0(t-L/v_{ph})} e^{-\frac{(t-L/v_g)^2}{2T_0^2(1+jC+jL/L_D)}} \quad (9.46)$$

Für die Pulsleistung folgt:

$$|\underline{E}_{out}|^2 = e^{-2\alpha L} \sqrt{\frac{1}{(1+(C+L/L_D)^2)}} e^{\left(-\frac{(t-L/v_g)^2}{T_0^2(1+(C+L/L_D)^2)}\right)} \quad (9.47)$$

Wir erkennen, daß der Ausgangspuls wieder ein Gaußpuls ist, daß aber das Verhältnis der Pulsbreiten zwischen Ausgang und Eingang T_{out}/T_0

$$\frac{T_{out}}{T_0} = \sqrt{1 + (C + L/L_D)^2} \quad (9.48)$$

ist.

In Bild 9.3 ist die Pulsverbreiterung als Funktion der Länge für unterschiedliche C aufgetragen. Für C=0, also keinen Pre-Chirp, haben wir eine reine Pulsverbreiterung mit der Länge. Wenn C und $\beta''(\omega_0)$ nicht das gleiche Vorzeichen haben, dann wird der Prechirp bei der Übertragung langsam aufgehoben, der Puls wird kleiner bis er ein Minimum erreicht und vergrößert sich dann wieder. Wenn C und $\beta''(\omega_0)$ das gleiche Vorzeichen haben, addieren sich Chirp und Prechirp und der Puls wächst schnell in seiner Breite an. Die Steigung der Kurve für große L/L_D ist gleich 1. Für den Fall des negativen Chirp C=-2, erhalten wir ein Minimum bei $L/L_D = C$. Dieses ist die kleinste erreichbare Pulsbreite, diesen Puls nennt man auch "Bandbreite begrenzten" Puls.

Zusammenfassung Pulse können sich bei der Übertragung über eine Faser sowohl verbreitern als auch verschmälern. Die Pulsveränderung wird durch die Faserparameter (Dispersion) und Pulsparameter (Prechirp) bestimmt.

Phasengeschwindigkeit	:	$v_{ph}(\omega)$	=	$\frac{c}{n(\omega)}$
Gruppengeschwindigkeit	:	$v_g(\omega)$	=	$\frac{1}{\partial\beta/\partial\omega}$
Dispersionskoeffizient	:	$D(\omega)$	= -	$\frac{\lambda}{c} \frac{\partial n^2}{\partial \lambda^2}$

Kapitel 10

Dispersion eines dielektrischen Wellenleiters

Motivation Die Dispersion dielektrischer Wellenleiter, insbesondere die Dispersion optischer Fasern bestimmt vor allem bei hochratigen Systemen wesentlich die erreichbaren Übertragungslängen. In diesem Kapitel behandeln wir die unterschiedlichen physikalischen Ursachen der Dispersion.

Wir hatten im Kapitel 9 gesehen, daß sich die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungskonstante wesentlich auf die Übertragung von Signalen auswirkt. Wir werden jetzt die unterschiedlichen physikalischen Ursachen für diese Frequenzabhängigkeit betrachten.

10.1 Materialdispersion

Da der Brechungsindex in einem dielektrischen Wellenleiter frequenzabhängig ist, erfahren unterschiedliche Frequenzanteile unterschiedliche Verzögerungen bei der Übertragung. In einem homogenen, linearen, verlustlosen Dielektrikum ist die Ausbreitungskonstante (siehe Gleichung 3.18)

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon'_r} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 n'^2} = \frac{\omega}{c} n = k_0 n' \quad (10.1)$$

Da n' eine Funktion der Frequenz, bzw. Wellenlänge ist, kann aus dieser Abhängigkeit die Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit und Dispersion berechnet werden (siehe

Gleichung: 9.10, 9.12, 9.29): ^{10.1}

$$v_{ph}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \quad (10.2)$$

$$v_g(\omega) = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega} = \frac{c}{N_g(\lambda)} \quad (10.3)$$

$$D_M(\omega) = - \frac{\lambda}{c} \frac{\partial n^2}{\partial \lambda^2} \quad (10.4)$$

D_M wird als **Materialdispersion** bezeichnet. In Bild 10.1 ist der mit Hilfe der Sellmeierapproximation berechnete Verlauf von Brechungsindex, Gruppengeschwindigkeit und Wellenleiterdispersion für Siliziumoxyd als Funktion der Wellenlänge angegeben. Man erkennt, daß die Materialdispersion bei c. 1.28 μm das Vorzeichen wechselt, daß also in diesem Wellenlängenbereich die Materialdispersion sehr klein ist.

10.2 Strahl- bzw. Modendispersion

Zusätzlich hatten wir in Kapitel 7 festgestellt, daß nicht entartete, unterschiedliche Moden unterschiedliche Ausbreitungskonstanten besitzen. Wir ein Signal in einem mehrmodigen Wellenleiter übertragen, erreichen die unterschiedlichen Moden das Ende der Faser nach einer unterschiedlichen Zeit. Dadurch wird das empfangene Signal verfälscht. Diesen Effekt nennt man **Modendispersion**. Wir hatten auch gesehen, daß man die unterschiedlichen Moden als unterschiedliche Strahlen interpretieren kann. Deshalb findet man auch häufig die äquivalente Bezeichnung **Strahldispersion**. Wir wollen diesen Sachverhalt an dem Filmwellenleiter nach Bild 10.2 untersuchen. Das Ende des Wellenleiters sei rechtwinklig abgeschnitten (siehe Bild 10.2). Wir nehmen an, daß das Material keine Verluste aufweist. Φ_K ist der Grenzwinkel der Totalreflexion, d. h. alle Strahlen mit $\Phi > \Phi_K$ erleiden eine totale Reflexion, werden also im Kern geführt. Der Strahl A-A beschreibe einen Strahl, der innerhalb des Wellenleiters genau mit dem kritischen Winkel auf die Grenzfläche trifft. Dieser Strahl würde unter den gemachten Voraussetzungen innerhalb des Wellenleiters geführt werden. Es gilt

$$n_f \sin(\Phi_k) = n_s \quad (10.5)$$

Wir untersuchen, wie groß der Einfallswinkel α_K ist, der maximal auftreten darf, damit das Licht noch geführt wird. Es gilt (siehe Bild 10.2):

$$\Theta_K = \frac{\pi}{2} - \Phi_K \quad (10.6)$$

^{10.1}Da wir hier ein verlustfreies Medium voraussetzen, ist $n = n'$.

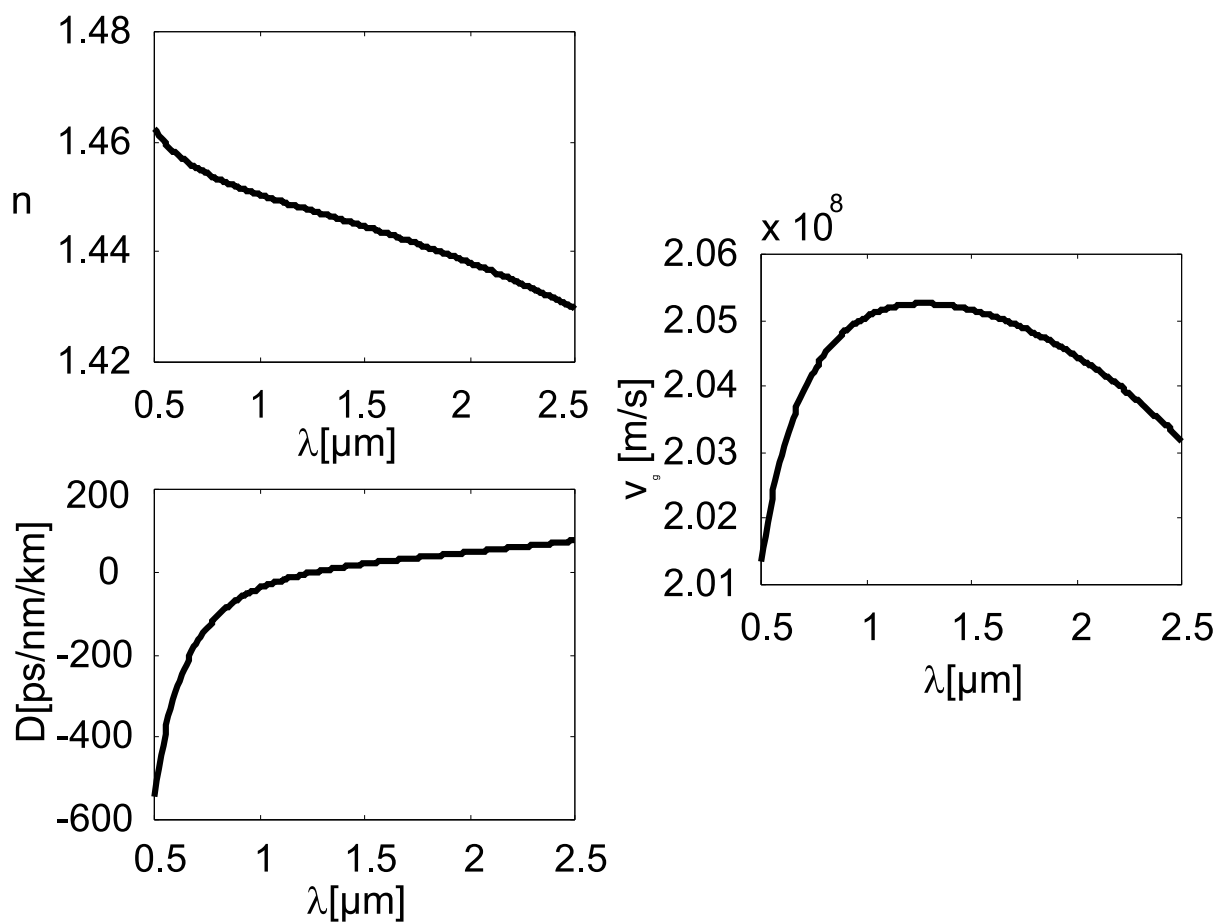


Abbildung 10.1: Brechungsindex, Gruppenlaufzeit und Dispersion von SiO_2 als Funktion der Wellenlänge

Weiter folgt aus dem Snelliusschen Gesetz für die Brechung an dielektrischen Grenzschichten (siehe Gleichung 4.13):

$$\begin{aligned} n_a \sin(\alpha_K) &= n_f \sin(\Theta_K) \\ &= n_f \cos(\Phi_K) \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} &= n_f \sqrt{1 - \frac{n_s^2}{n_f^2}} \\ &= \sqrt{n_f^2 - n_s^2} \end{aligned} \quad (10.8)$$

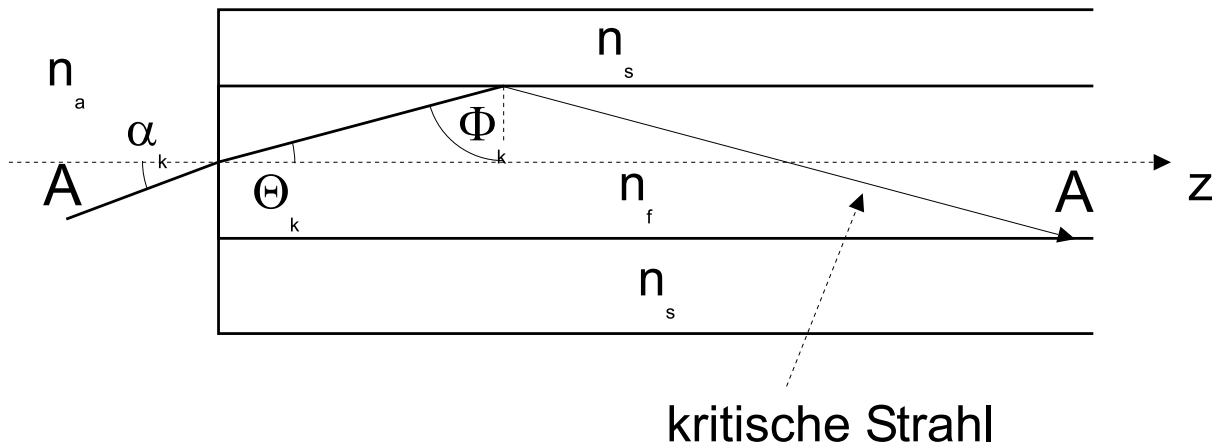


Abbildung 10.2: Strahlführung in einem Filmwellenleiter

Mit

$$\Delta n = n_f - n_s \quad (10.9)$$

$$n = \frac{1}{2}(n_f + n_s) \quad (10.10)$$

folgt ^{10.2}

$$NA \equiv n_a \sin(\alpha_k) = \sqrt{n_f^2 - n_s^2} = \sqrt{2n\Delta n} \quad (10.11)$$

NA heißt numerische Apertur.

Die numerische Apertur ist ein Maß für die in die Faser einkoppelbare Leistung. Man möchte natürlich eine große NA erreichen, um eine möglichst effiziente, einfache und stabile Einkopplung zu erhalten, d. h. n und Δn sollten möglichst groß sein. Das würde bedeuten:

$$n_s = n_a = 1 \quad (10.12)$$

d. h. wir haben die Lichtführung in einer homogenen Glasplatte.

Es treten hierbei folgende Probleme auf:

1. Es treten evaneszente Wellen auf, die in die Umgebung der Platte hereinreichen, kleine Störungen (z. B. Krümmungen, Schmutz) in der Umgebung können dann ein Abstrahlen dieser Wellen und somit Verluste bewirken.

^{10.2}Später werden wir die Definition $\Delta = \frac{n_f^2 - n_s^2}{2n_f} = \frac{(n_f - n_s)(n_f + n_s)}{2n_f}$ verwenden. Für kleine Brechungsindexunterschiede gilt dann auch $\Delta \approx (n_f - n_s)$

2. Der Weg, den die Strahlen in der Platte zurücklegen, ist unterschiedlich lang: Ein Achsenstrahl benötigt folgende Zeit $T_a = \frac{n_f}{c}\ell$ für einen Zylinder der Länge ℓ . Der kritische Strahl (er erleidet gerade noch Totalreflexion) benötigt (siehe Bild 10.3):

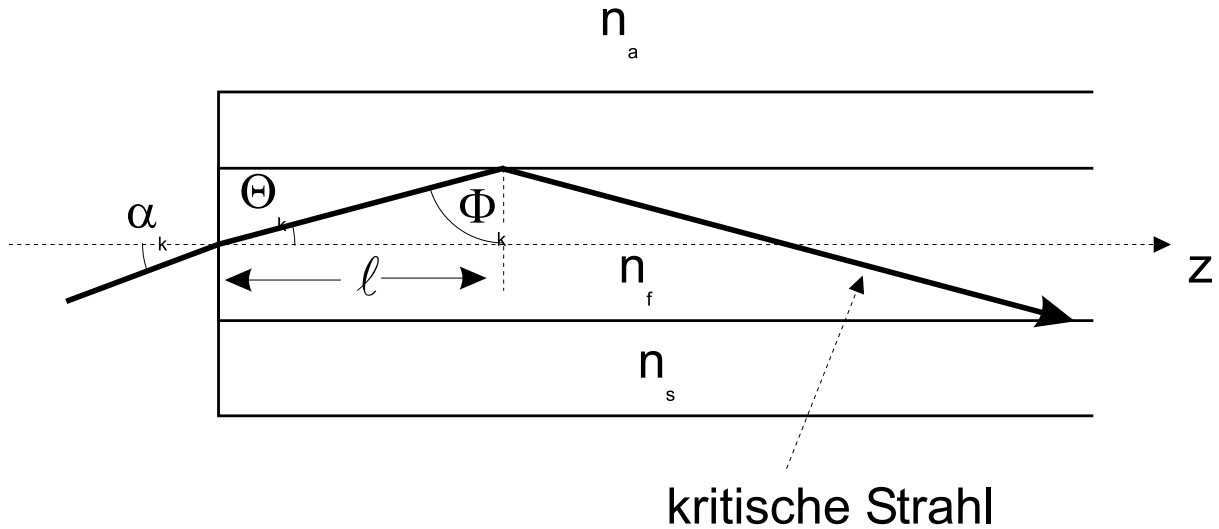


Abbildung 10.3: Strahlführung eines Filmwellenleiters

$$\begin{aligned}
 T_k &= \frac{n_f \ell}{c \cos(\Theta_k)} \\
 &= \frac{n_f \ell}{c \sin(\Phi_k)} \\
 &= \frac{n_f^2 \ell}{n_s c}
 \end{aligned}$$

Die Zeitdifferenz ist

$$\Delta T = T_k - T_a \quad (10.13)$$

$$= \frac{\ell}{c} n_f \left(\frac{n_f}{n_s} - 1 \right) \quad (10.14)$$

$$= \frac{\ell}{c} \frac{n_f}{n_s} \Delta n \quad (10.15)$$

$$\frac{\Delta T}{\ell} = \frac{n_f}{n_s} \frac{\Delta n}{c} \quad (10.16)$$

Dies ist die Dispersion durch Mehrstrahlausbreitung oder auch Modendispersion.^{10.3}

^{10.3}Man kann einen Strahlverlauf auch als Mode auffassen. So wie die verschiedenen Strahlen unterschiedliche Zeiten benötigen, um die Faser zu durchqueren, benötigen auch unterschiedliche Moden unterschiedliche Zeiten (siehe Kapitel 12)

Δn	NA	$(NA)^2$	$\Delta T/L$ ns/km	Bitrate*Länge Mbit/s*km
0.05	0.38	0.1435	173	6
0.02	0.24	0.0580	68	15
0.01	0.17	0.0291	34	30
0.005	0.12	0.0146	17	60
0.002	0.076	0.0058	7	150

Tabelle 10.1: Bitraten-Bandbreiten-Produkte für unterschiedliche Wellenleiter

Beispiel: (Eine unbeschichteter Filmwellenleiter)

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (10.17)$$

$$n_f = 1.5 \quad (10.18)$$

$$n_s = 1.0 \quad (10.19)$$

$$n_a = 1.0 \quad (10.20)$$

$$\frac{\delta T}{\ell} = 2.5 \mu\text{s/km} \quad (10.21)$$

d.h. in einem unbeschichteten Wellenleiter tritt schon nach 1 km eine Zeitdifferenz von $2.5 \mu\text{s}$ auf. Dies schränkt die übertragbare Bitrate wesentlich ein.

Wenn wir einen Mantel mit einem leicht kleineren Brechungsindex verwenden, folgt:

1. Wenn der Mantel homogen und dick genug ist und keine Verluste aufweist, wird die Dämpfung geringer, da keine Störungen im Mantel auftreten können.
2. Die Strahl-Dispersion wird geringer.
3. Der Einkopplungswirkungsgrad wird geringer

Typische Werte sind in Tabelle 10.1 angegeben. In dieser Tabelle sind zusätzlich erreichbare Bitratenlängenprodukte für unterschiedliche Wellenleiter angegeben [11].^{10.4}

Die Dispersion im Wellenleiter ist ein wesentliches Problem. Zwei Möglichkeiten, sie mit Hilfe von Wellenleiterstrukturen zu bekämpfen, sind in Bild 10.4 angegeben: die Gradientenwellenleiter und die Monomodewellenleiter.

10.3 Wellenleiterdispersion

Diese Dispersion wird durch die Feldverteilung zwischen dem Kern und dem Mantel des Wellenleiters hervorgerufen. Sie ist also durch die Geometrie begründet. So ist bei kleineren Wellenlängen, ein größerer Anteil des Feld im Kern konzentriert, folglich sieht die

^{10.4}Die Abschätzungen sind relativ pessimistisch

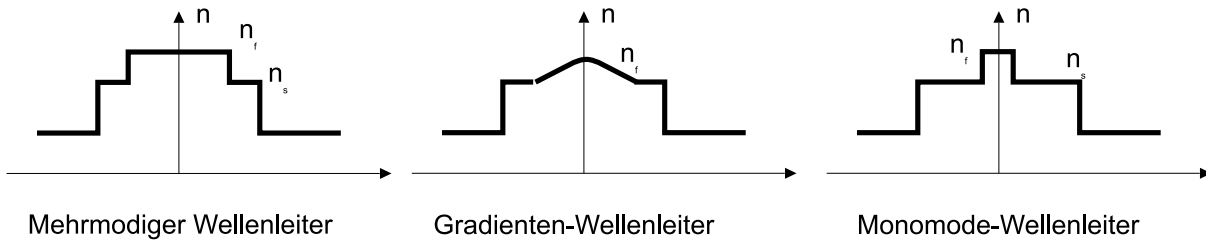


Abbildung 10.4: Unterschiedliche Wellenleitertypen

optische Welle insbesondere den Brechungsindex des Kerns, läuft also relativ langsam ($\beta \approx k_0 n_f$). Ist die Wellenlänge so groß, daß der größte Anteil des Feldes in den Mantelgebieten verläuft ($\beta \approx k_0 n_s$), ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit wesentlich größer. Wenn ein Signal beide Wellenlängen, bzw. optische Frequenzen umfasst, kommt es dann zur Wellenleiterdispersion. Im Kapitel 7 hatten wir diese Abhängigkeit der Ausbreitungskonstante von den Brechungsindizes und der Geometrie für einen Filmwellenleiter als Funktion der Wellenlänge bzw. Frequenz berechnet. So mußte man für einen unsymmetrischen Filmwellenleiter die transzendente Gleichung 7.30

$$\tan(\kappa_f h) = \frac{\alpha_s + \alpha_c}{\kappa_f - \frac{\alpha_s \alpha_c}{\kappa_f}} \quad (10.22)$$

mit

$$\kappa_f = \sqrt{k_0^2 n_f^2 - \beta^2} \quad (10.23)$$

$$\alpha_{c,s} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_{c,s}^2} \quad (10.24)$$

lösen. Das heißt, wir können β als Funktion von ω numerisch berechnen. Hieraus kann man dann die durch den Wellenleiter hervorgerufene Gruppengeschwindigkeit und die Wellenleiterdispersion berechnen. Sehr häufig trägt man die Ausbreitungskonstante nicht als Funktion von der Frequenz, sondern äquivalent als Funktion von k_0 auf. Wir betrachten hierzu einen symmetrischen Wellenleiter mit den Parametern $n_f = 1.5$, $n_s = 1.48$, $h = 2 \mu m$. Der numerisch berechnete Eigenwert β , die zugehörige Gruppenlaufzeit und die Wellenleiterdispersion ist in Bild 10.5 angegeben. Man erkennt aus dem Bild für die Gruppengeschwindigkeit, daß für kleine Wellenlängen der Brechungsindex des Films, für große Wellenlängen der Brechungsindex des Substrats maßgebend ist. Dazwischen ergibt sich ein stetiger Übergang. Wir werden diesen Sachverhalt im Kapitel 14 bei der Behandlung der Monomodefaser noch einmal ausführlich diskutieren.

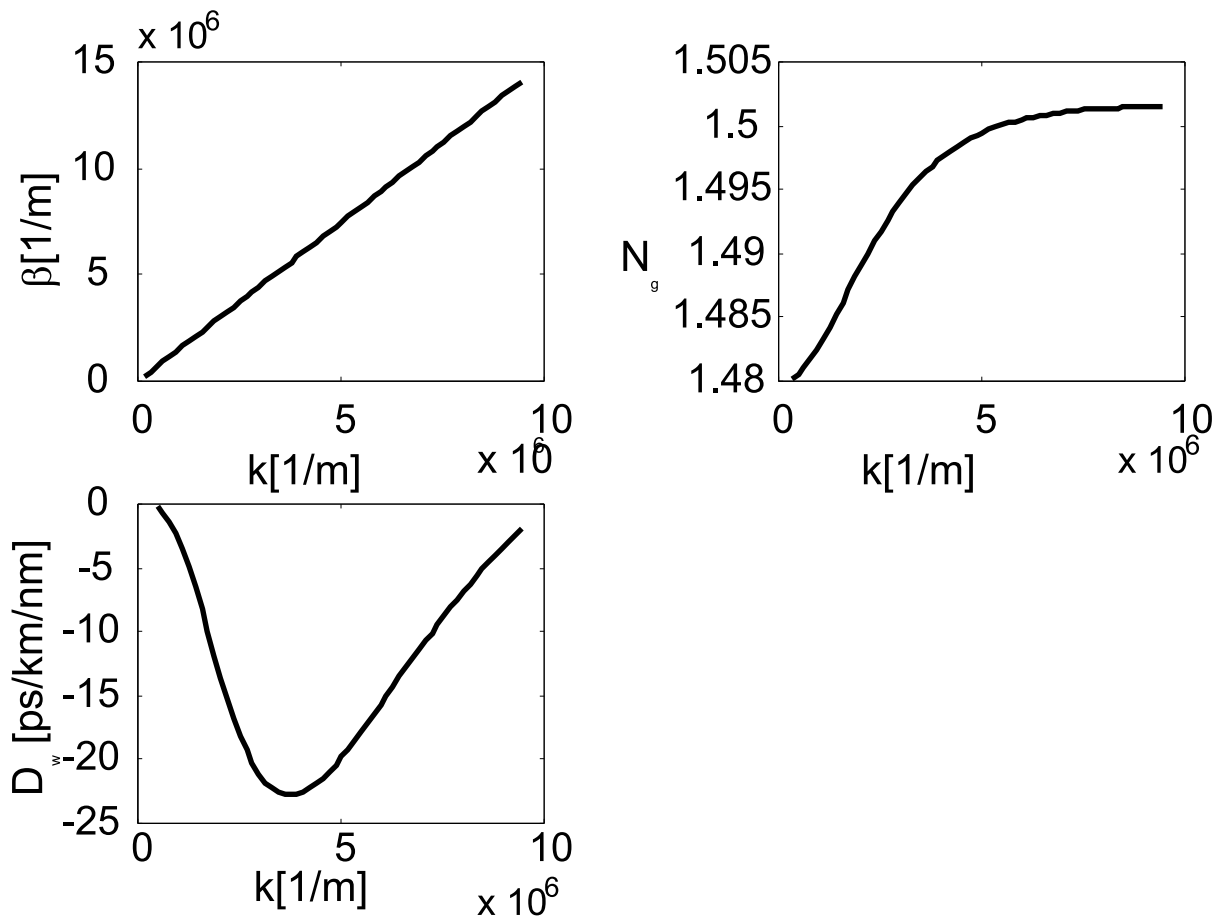


Abbildung 10.5: Ausbreitungskonstante, Gruppenlaufzeit und Wellenleiterdispersion als Funktion von k

10.4 Die normierten Ausbreitungsparameter

Insbesondere bei der Behandlung von optischen Fasern hat man eine Normierung der Ausbreitungskonstanten eingeführt. Dies erlaubt auch einen einfachen Vergleich unterschiedlicher Wellenleiterstrukturen. 5 unabhängige Parameter bestimmen die Eigenschaften des Wellenleiters

1. n_f Der Brechungsindex des Filmwellenleiters
2. n_s Der Brechungsindex des Substrats
3. n_c Der Brechungsindex der Deckschicht
4. h Die Dicke des Wellenleiters

5. k_0 Der Wellenvektor bzw. die Frequenz des anregenden Lichts

Hieraus definieren wir 3 Parameter, die die Eigenschaften des Wellenleiters bestimmen.

1. Die Normierte Frequenz V

$$V = k_0 h \sqrt{n_f^2 - n_s^2} \quad (10.25)$$

2. Den Asymmetrieparameter a

$$a = (n_s^2 - n_c^2)/(n_f^2 - n_s^2) \quad (10.26)$$

3. Den genormten effektiven Index b

$$b = \underbrace{(\beta^2/k_0^2 - n_s^2)}_{n_{eff}^2} / (n_f^2 - n_s^2) \quad (10.27)$$

Aus $n_s k_0 < \beta < n_f k_0$ folgt $n_s < n_{eff} < n_f$. Hieraus folgt, daß beim "cut off" $b = 0$ ist und daß sein Maximalwert 1 ist. Der Asymmetrieparameter a kann zwischen 0 und Unendlich liegen. Aus der allgemeinen Dispersionsbeziehung 7.54 folgt mit diesen Definitionen:

$$2k_0 n_f h \cos(\Theta) - \Phi_s - \Phi_c = 2\pi n \quad (10.28)$$

$$2 \frac{V}{\sqrt{n_f^2 - n_s^2}} n_f \cos(\Theta) - \Phi_s - \Phi_c = 2\pi n \quad (10.29)$$

Mit den Beziehungen für den Einfallswinkel Θ und den Phasenverschiebungen bei der Reflexion einer TE-Welle Φ_s, Φ_c

$$\cos(\Theta) = \frac{\kappa_f}{k_0 n_f} = \frac{\sqrt{k_0^2 n_f^2 - \beta^2}}{k_0 n_f} = \frac{\sqrt{k_0^2 (n_f^2 - n_{eff}^2)}}{k_0 n_f} = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_{eff}^2}}{n_f} \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} \tan(\Phi_s) &= 2 \frac{\sqrt{n_f^2 \sin^2(\Theta) - n_s^2}}{n_f \cos(\Theta)} = 2 \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_s^2}}{\sqrt{n_f^2 - n_{eff}^2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{(n_{eff}^2 - n_s^2)(n_f^2 - n_s^2)}{(n_f^2 - n_s^2)(n_f^2 - n_{eff}^2)}} = 2 \sqrt{\frac{b}{1-b}} \end{aligned} \quad (10.31)$$

$$\tan(\Phi_c) = 2 \frac{\sqrt{n_f^2 \sin^2(\Theta) - n_c^2}}{n_f \cos(\Theta)} = 2 \frac{\sqrt{n_{eff}^2 - n_c^2}}{\sqrt{n_f^2 - n_{eff}^2}} = 2 \sqrt{\frac{b+a}{1-b}} \quad (10.32)$$

(siehe Bild 7.3, Gleichung 7.9, 4.64) folgt für die Dispersionsbeziehung

$$\frac{V}{\sqrt{n_f^2 - n_s^2}} \sqrt{n_f^2 - n_{eff}^2} - \arctan \sqrt{\frac{b}{1-b}} - \arctan \sqrt{\frac{b+a}{1-b}} = n\pi \quad (10.33)$$

$$V\sqrt{1-b} - \arctan \sqrt{\frac{b}{1-b}} - \arctan \sqrt{\frac{b+a}{1-b}} = n\pi \quad (10.34)$$

Dies ist eine allgemein gültige Beziehung für dielektrische Wellenleiter. In Bild 7.6 ist die Lösung dieser Gleichung für die ersten 3 Moden als Funktion von V für die Parameter $a = 0,10,9999$ aufgetragen. Wir werden in einer Übungsaufgabe dieses Diagramm verwenden um die Ausbreitungskonstante für den folgenden Filmwellenleiter zu berechnen:

$n_f = 1,5$; $n_s = 1,45$; $n_c = 1,4$; $h = 5\mu m$, $\lambda = 1\mu m$

Zusätzlich können wir die "cut off" Frequenz ermitteln indem wir $n_{eff} = n_s$ setzen, d. h. $b = 0$.

$$V_{cutoff} = \arctan \sqrt{a} + n\pi \quad (10.35)$$

Wir erkennen wieder die Tatsache, daß ein symmetrischer Wellenleiter ($a=0$) immer den Grundmode führt.

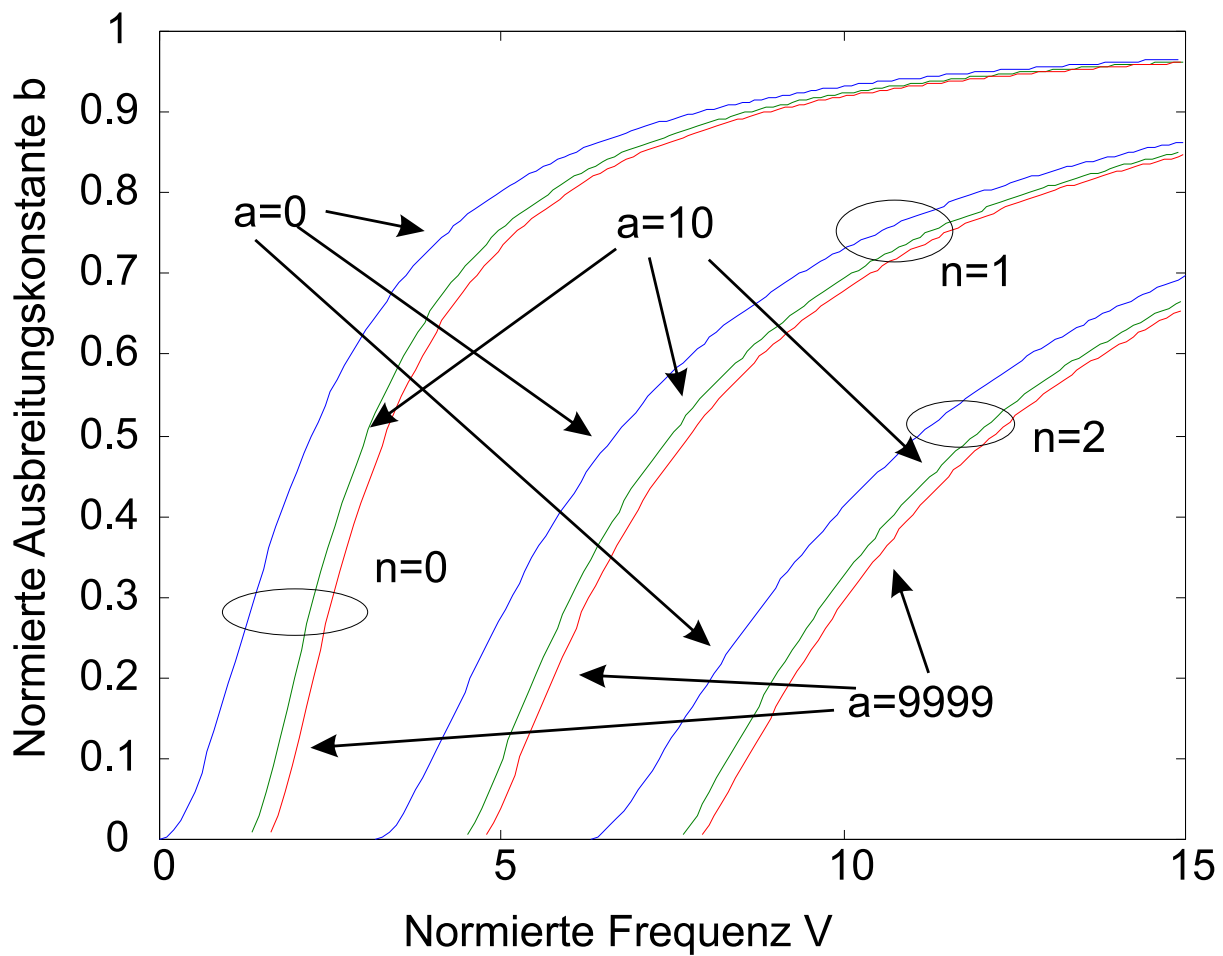


Abbildung 10.6: Die normierte Ausbreitungskonstante als Funktion der normierten Frequenz für unterschiedliche Asymmetriefaktoren und die ersten 3 Moden.

Zusammenfassung Die wesentlichen Dispersionsarten sind:

Materialdispersion Sie wird durch die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex hervorgerufen

Strahl- bzw. Modendispersion Unterschiedliche Moden bzw. strahlen durchlaufen den Wellenleiter mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Dies führt zur Pulsverbreiterung durch Modendispersion

Wellenleiterdispersion Die Welle wird nicht nur im Kern des Wellenleiters geführt, sondern auch in den umgebenden Schichten (Mantel). Der Brechungsindex und seine Frequenzabhängigkeit kann unterschiedlich in den einzelnen Schichten sein. Dies hat zur Folge, daß sich eine effektive Gruppengeschwindigkeit einstellt, die zwischen den Gruppengeschwindigkeiten von Kern und Mantel liegt. Durch geeignetes Design des Wellenleiters, kann somit die effektive Gruppenlaufzeit gezielt beeinflusst werden. Dies ist insbesondere für den Entwurf von monomodalen Fasern interessant (siehe Kapitel 14).

Kapitel 11

Strahlenoptische Behandlung eines Gradienten-Wellenleiters

Motivation Strahlenoptische Modelle haben den Vorteil, relativ anschaulich zu sein. Sie beschreiben die physikalischen Zusammenhänge korrekt, solange die betrachteten Abmessungen groß gegenüber der Wellenlänge sind. Wir werden in diesem Kapitel, eine Profilverteilung des Brechungsindex $n(y)$ berechnen, die eine minimale Laufzeitdifferenz ergibt. Gradienten-Wellenleiter zeichnen sich durch relativ einfache Einkopplungen bei einer noch oft akzeptablen Bandbreite aus. Die strahlenoptische Betrachtungsweise erlaubt einen einfachen Einstieg in das physikalische Verständnis dieser Wellenleiter.

Wir betrachten einen planaren Gradienten-Wellenleiter. Seine Geometrie ist in Bild 11.1 angegeben. Die Idee des Gradienten-Wellenleiters erkennt man im gleichen Bild. Strahlen, die in der Kernmitte verlaufen, haben einen kürzeren Weg zurückzulegen im Vergleich mit Strahlen, die vom Mantel reflektiert werden. Wenn die Geschwindigkeit in der Mitte des Wellenleiters aber kleiner ist als am Rand, kann man eventuell erreichen, daß alle Strahlen die gleiche mittlere Geschwindigkeit aufweisen und somit keine Strahldispersion auftritt. Deshalb ist der Brechungsindex in der Mitte am größten. Wir nehmen zur Untersuchung dieses Falls an, daß die Brechzahländerung $n(r)$ klein ist, d. h.

$$|\text{grad } n| = |\nabla n| \ll nk_0 = n\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad (11.1)$$

Diese Näherung bedeutet auch, daß wir annehmen, daß die Wellenlänge klein gegenüber allen geometrischen Abmessungen ist. Zusätzlich werden wir fordern, daß sich die Feldamplitude nur wenig ändert, wenn wir eine Wellenlänge in Ausbreitungsrichtung weitergehen. Dies ist die Näherung der **geometrischen Optik**, mit deren Hilfe auch sich nicht geradlinig ausbreitende lokal ebene Wellen beschrieben werden können.

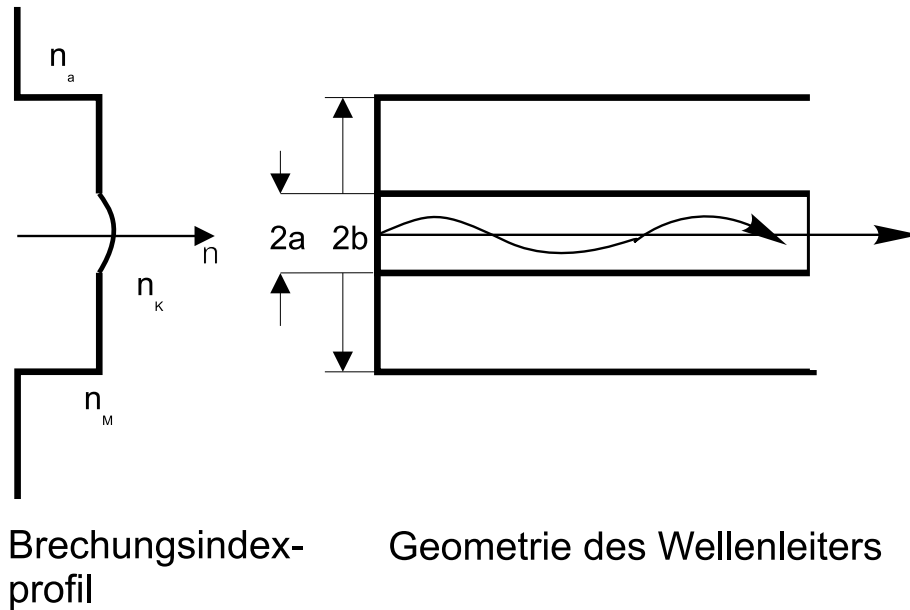


Abbildung 11.1: Prinzip eines Gradienten-Wellenleiters

Dann kann der 2. Summand in Gleichung 3.35 und 3.36 vernachlässigt werden und es gilt:

$$\Delta \vec{H} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2(y) \vec{H} = 0 \quad (11.2)$$

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2(y) \vec{E} = 0 \quad (11.3)$$

Für eine Reihe von Problemen ist der Vektorcharakter der Felder nicht relevant, z.B. ist die Brechung und Reflexion an Grenzflächen mit geringem Brechzahlunterschied für TE- und TM-Wellen ungefähr gleich (vergleiche Bild 4.8 für große Reflexionswerte). Dies gilt ebenso für die Beugung an Objekten solange man sich nicht für die Felder in geringen Entfernungen von den Objekten interessiert. Das heißt wir können eine skalare Wellengleichung für die elektrische Feldstärke annehmen:

$$\Delta E + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2(y) E = 0 \quad (11.4)$$

$$\Delta E + k^2 n^2(y) E = 0 \quad (11.5)$$

mit $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \omega^2 / c^2 = \lambda_0^2 / (4\pi)^2$.^{11.1}

Unter den gemachten Voraussetzungen kann man die Welle als lokal eben betrachten. Wir machen den folgenden Lösungsansatz:

$$E(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{j(\omega t - k_0 S(\vec{r}))} \quad (11.6)$$

\vec{r} ist hier der dreidimensionale Ortsvektor. $S(\vec{r})$ heißt Bildfunktion oder Eikonal. Flächen für die $S(\vec{r})$ konstant ist, sind die Flächen konstanter Phase, bzw. die Wellenfronten.

^{11.1} λ_0 bezeichnet die Wellenlänge im Vakuum

11.1 Ableitung der Eikonalgleichung

Die Eikonalgleichung beschreibt die Ausbreitung des Strahls in unserem inhomogenen Medium. Zur Ermittlung dieser Gleichung berechnen wir ΔE und machen dann die Näherung $\lambda \rightarrow 0$ bzw. $k \rightarrow \infty$ und setzen dies in die Wellengleichung ein:

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \operatorname{div} \operatorname{grad} A e^{-jkS} \\
 &= \operatorname{div} [e^{-jkS} \operatorname{grad} A - jke^{-jkS} A \operatorname{grad} S] \\
 &= \operatorname{div} [e^{-jkS} (\operatorname{grad} A - jkA \operatorname{grad} S)] \\
 &= -jke^{-jkS} \operatorname{grad} S (\operatorname{grad} A - jkA \operatorname{grad} S) \\
 &\quad + e^{-jkS} (\Delta A - jk \operatorname{grad} A \operatorname{grad} S - jkA \Delta S) \\
 &= e^{-jkS} [-2jk \operatorname{grad} S \operatorname{grad} A - k^2 A |\operatorname{grad} S|^2 + \Delta A - jkA \Delta S]
 \end{aligned}$$

Wir nutzen jetzt den $\lim_{k \rightarrow \infty}$ aus und berücksichtigen nur den Term mit k^2 :

$$\Delta E = -e^{-jkS} k^2 A |\operatorname{grad} S|^2 \quad (11.7)$$

Setzen wir diese Größe in die Wellengleichung 11.5 ein, so erhalten wir:

$$-e^{-jkS} k^2 A |\operatorname{grad} S|^2 + k^2 n^2 A e^{-jkS} = 0 \quad (11.8)$$

$$|\operatorname{grad} S|^2 = n^2 \quad (11.9)$$

Die Richtung der Welle ist gleich der Richtung der Phasenfront ^{11.2}:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\operatorname{grad} S}{|\operatorname{grad} S|} = \frac{\operatorname{grad} S}{n} \quad (11.10)$$

$$n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} = \operatorname{grad} S \quad (11.11)$$

Durch Differentiation der Gleichung 11.9 nach der Bogenlänge s erhalten wir:

$$n(\vec{r}) \frac{d\vec{n}}{ds} = \operatorname{grad} S \frac{d \operatorname{grad} S}{ds} \quad (11.12)$$

$$n(\vec{r}) \operatorname{grad} n \frac{d\vec{r}}{ds} = \operatorname{grad} S \frac{d \operatorname{grad} S}{ds} \quad (11.13)$$

Setzen wir $\operatorname{grad} S$ nach Gleichung 11.11 ein, so ergibt sich:

$$n(\vec{r}) \operatorname{grad} n \frac{d\vec{r}}{ds} = n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds})}{ds} \quad (11.14)$$

$$\operatorname{grad} n \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds})}{ds} \quad (11.15)$$

^{11.2}Dies ist direkt auch an Hand des Ansatzes für das Eikonal 11.6 zu sehen

Da $\text{grad } n$, $\text{grad } S$ und $\frac{d\vec{r}}{ds}$ in die gleiche Richtung zeigen, folgt als Eikonalgleichung:

$$\text{grad } n(\vec{r}) = \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (11.16)$$

11.2 Ableitung der Ausbreitungsgleichung für den Gradienten Filmwellenleiter

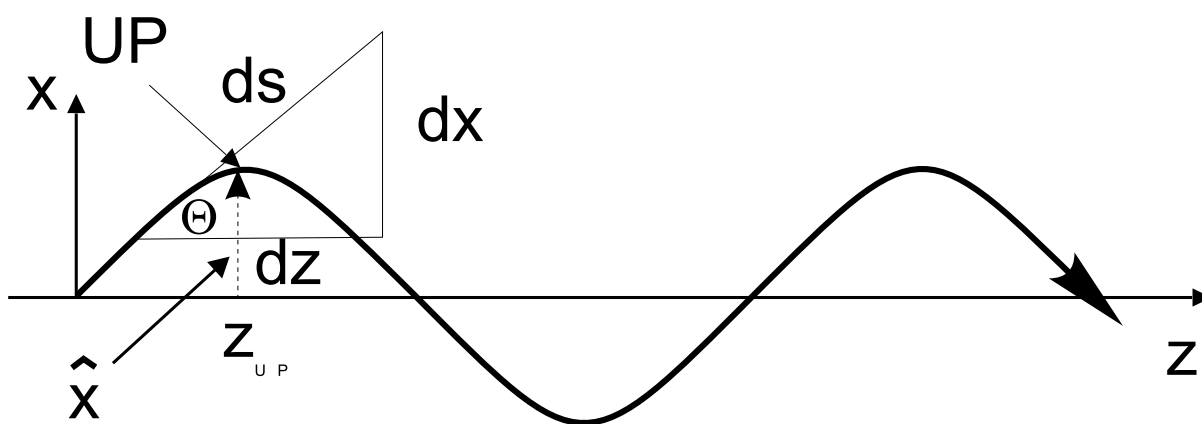


Abbildung 11.2: Strahlverlauf in Gradientenprofil

Es gilt für diese Geometrie (siehe Bild 11.2):

$$\text{grad } n(x) = \frac{dn}{dx} \vec{e}_x \quad (11.17)$$

$$d\vec{s} = dz \vec{e}_z + dx \vec{e}_x \quad (11.18)$$

$$ds^2 = dz^2 + dx^2 \quad (11.19)$$

$$\cos(\Theta(x)) = \frac{dz}{ds} \quad (11.20)$$

$$\sin(\Theta(x)) = \frac{dx}{ds} \quad (11.21)$$

Hieraus folgt für die Komponenten der Ausbreitungsgleichung 11.16

$$\vec{e}_x : \frac{dn}{dx} = \frac{d}{ds} \left(n(x) \frac{dx}{ds} \right) \quad (11.22)$$

$$\vec{e}_z : 0 = \frac{d}{ds} \left(n(x) \frac{dz}{ds} \right) \quad (11.23)$$

Integration von Gleichung 11.23 ergibt:

$$n(x) \frac{dz}{ds} = \bar{n} = \text{const} \quad (11.24)$$

$$n(x) \cos(\Theta(x)) = \bar{n} \quad (11.25)$$

Da dies für beliebige x gilt, gilt es auch für $x = 0$.

$$n(0) \cos(\Theta(0)) = \bar{n} \quad (11.26)$$

\bar{n} ist eine Strahlinvariante, also konstant längst des Strahls. Die Gleichung kann als verallgemeinertes Brechungsgesetz aufgefasst werden:

$$n(x) \frac{dz}{ds} = n(x) \cos(\Theta(x)) = \bar{n} = \text{const} \quad (11.27)$$

Dieses Gesetz kann auch leicht an Hand des Bildes 11.3 anschaulich gemacht werden. Aus dem Brechungsgesetz für dielektrische Schichten folgt:

$$n_0 \cos(\Theta_0) = n_1 \cos(\theta_1) = \dots n_n \cos(\Theta_n) = \text{const} \quad (11.28)$$

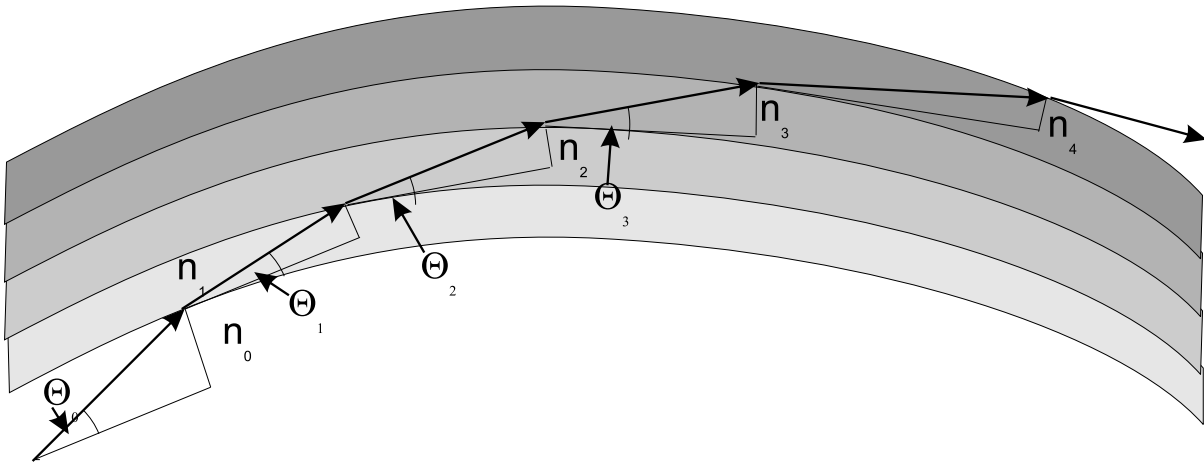


Abbildung 11.3: Anschauliche Ableitung des verallgemeinerten Brechungsgesetz

Am Umkehrpunkt ist $\Theta(\hat{x}) = 0$ und somit gilt für ihn:

$$\bar{n} = n(\hat{x}) \quad (11.29)$$

Es gilt nach dem verallgemeinerten Brechungsgesetz:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\bar{n}}{n(x)} \quad (11.30)$$

Eingesetzt in die Gleichung 11.22 folgt:

$$\frac{dn}{dx} = \frac{dz}{ds} \frac{d}{dz} \left(n(x) \frac{dz}{ds} \frac{dx}{dz} \right) \quad (11.31)$$

$$= \frac{\bar{n}}{n(x)} \frac{d}{dz} \left(\bar{n} \frac{dx}{dz} \right) \quad (11.32)$$

$$(11.33)$$

Es folgt als Differentialgleichung, die die Ausbreitung beschreibt:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{n(x)}{\bar{n}^2} \frac{dn}{dx} \quad (11.34)$$

Für die Ausbreitungs-Dgl 11.34 folgt:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{2\bar{n}^2} \frac{dn^2}{dx} \quad (11.35)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= \left(\frac{dx}{dz} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dz} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \end{aligned} \quad (11.36)$$

folgt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{1}{\bar{n}^2} \frac{dn^2}{dx} \quad (11.37)$$

Nach Integration folgt:

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{n(x)^2}{\bar{n}^2} + C \quad (11.38)$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus dem Umkehrpunkt. Für $x = \hat{x}$ gilt $\frac{dx}{dz} = 0$:

$$0 = \frac{1}{\bar{n}^2} \underbrace{n^2(\hat{x})}_{=\bar{n}^2} + C \quad (11.39)$$

$$C = -1 \quad (11.40)$$

Es folgt somit

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{n(x)^2}{\bar{n}^2} - 1 \quad (11.41)$$

$$\frac{dx}{dz} = \pm \sqrt{\frac{n(x)^2}{\bar{n}^2} - 1} \quad (11.42)$$

Die Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen berechnet werden. Es ist dabei das Vorzeichen der Wurzel zu beachten. Wir wollen den Strahl zwischen dem Ursprung ($x = 0, z = 0$) und dem oberen Umkehrpunkt UP betrachten (siehe Bild 11.2). Dort ist die Steigung positiv und somit auch das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{\frac{n^2(x)}{\bar{n}^2} - 1}} \quad (11.43)$$

Für die z-Komponente des Umkehrpunkts folgt:

$$z_{up} = \bar{n} \int_0^{\hat{x}} \frac{dx}{\sqrt{n(x)^2 - \bar{n}^2}} \quad (11.44)$$

11.2.1 Lösung der Ausbreitungsgleichung für α -Profile

Wir betrachten jetzt eine Klasse von Brechungsindex-Profilen, die sogenannte α -Profile (siehe Bild 11.4).

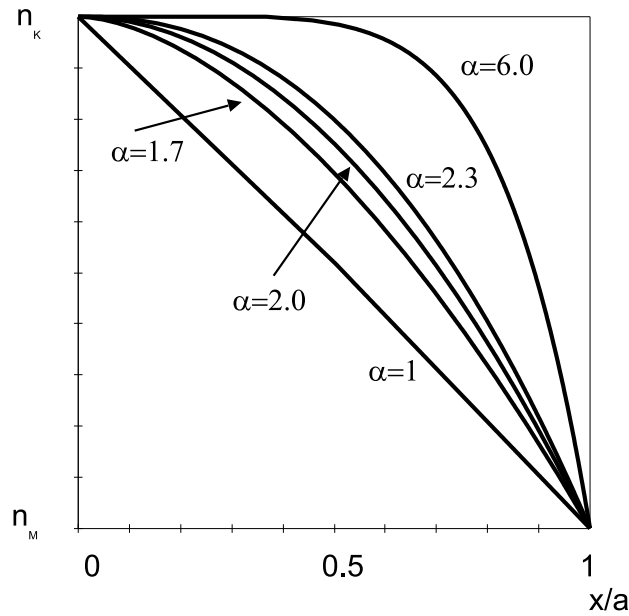
$$n^2(x) = n_K^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \quad (11.45)$$

$$\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} \quad (11.46)$$

Die Aufgabe wird es sein, das Profil, d.h. den Parameter α so zu optimieren, daß wir eine minimale Modendispersion erhalten. Wir gehen dabei in mehreren Schritten vor

1. Wir diskutieren als einfaches und explizit lösbares Beispiel, den Fall der quadratischen Brechungsindexabhängigkeit $\alpha = 2$.
2. Wir bestimmen analytisch die z-Komponente des Scheitelpunktes des Strahlverlaufs, das heißt den sogenannten Umkehrpunkt.
3. Wir ermitteln die optische Länge bis zum Scheitelpunkt
4. Wir optimieren das Brechungsindexprofil durch Bestimmung des Wertes von α , der die minimale Modendispersion ergibt

Wir wollen nur Strahlen betrachten, die nicht in den Mantel laufen oder an ihm gebrochen werden. Als erstes versuchen wir den Strahlenpfad zu ermitteln: Für $0 \leq x \leq \hat{x}$ gilt mit $\bar{n}^2 = n_K^2 (1 - 2 * \Delta (\frac{\hat{x}}{a})^\alpha)$ aus Gleichung 11.43:

Abbildung 11.4: α -Brechungsindex-Profile

$$\begin{aligned}
 z &= \bar{n} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{n(x')^2 - \bar{n}^2}} \\
 &= \bar{n} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{n_K^2 (1 - 2\Delta(\frac{x}{a})^\alpha) - \bar{n}^2 (1 - 2\Delta(\frac{\hat{x}}{a})^\alpha)}} \\
 &= \frac{\bar{n}}{n_K \sqrt{2\Delta}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(\frac{\hat{x}}{a})^\alpha - (\frac{x'}{a})^\alpha}}
 \end{aligned} \tag{11.47}$$

Mit $\xi = (\frac{x'}{\hat{x}})^{\frac{\alpha}{2}}$, $x' = \hat{x} \xi^{\frac{2}{\alpha}}$, $dx' = \frac{2\hat{x}}{\alpha} \xi^{\frac{2}{\alpha}-1} d\xi$ folgt:

$$z = \frac{2\hat{x}}{\alpha} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \int_0^{\left(\frac{x}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\xi^{\frac{2}{\alpha}-1}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \tag{11.48}$$

11.2.1.1 Lösung der Ausbreitungsgleichung für $\alpha = 2$

Wir können dieses Integral nur für den Spezialfall $\alpha = 2$ (Quadratisches Profil) lösen:

$$z = \hat{x} \frac{\bar{n}}{n_K} \frac{a}{\hat{x}} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \int_0^{\frac{x}{\hat{x}}} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \tag{11.49}$$

Mit dem Integral [19] folgt:

$$z = a \frac{\bar{n}}{n_K} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \arcsin\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \quad (11.50)$$

$$x = \hat{x} \sin\left(\frac{z}{a} \frac{n_K}{\bar{n}} \sqrt{2\Delta}\right) \quad (11.51)$$

$$(11.52)$$

$$x = \hat{x} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{z_{UP}}\right) \quad (11.53)$$

mit $z_{UP} = \frac{\pi}{2} a \frac{\bar{n}}{n_K} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}}$. Wir erkennen, daß die Periode von $\bar{n} = n_{(UP)}$ abhängt, und somit die Perioden unterschiedlicher Strahlen unterschiedlich lang sind (siehe Bild 11.5).

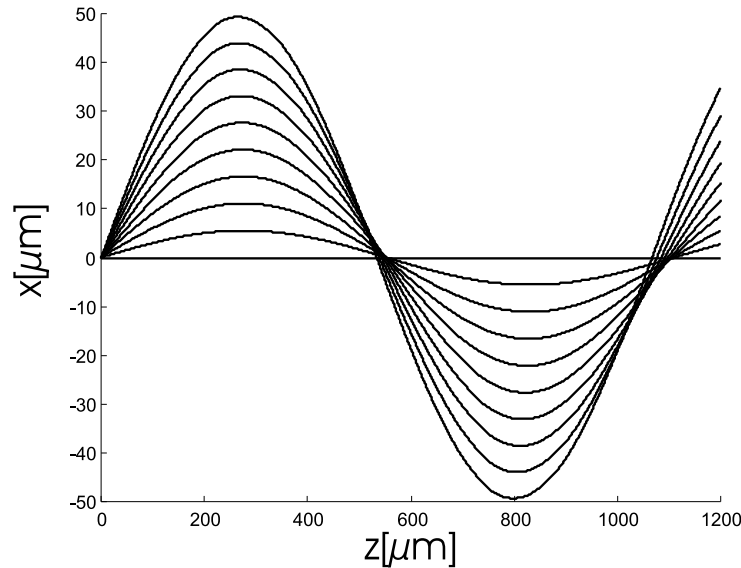


Abbildung 11.5: Strahlverlauf im Gradientenwellenleiter

11.2.1.2 Bestimmung des Umkehrpunkts für beliebiges α -Profil

Die Rechnung ist im Anhang B.1 aufgeführt und es folgt für die z-Koordinate des Umkehrpunkts.

$$z_{UP} = \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\Delta}} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})} \quad (11.54)$$

11.2.1.3 Bestimmung der optischen Weglänge bis zum Umkehrpunkt

Die ausführliche Rechnung ist im Anhang B.2 aufgeführt. Die optische Länge ist:

$$L_o = \int_0^{UP} n(x) ds \quad (11.55)$$

Nach längerer Rechnung (siehe B.2) folgt:

$$L_o = z_{UP} \frac{1}{2 + \alpha} \left[2\bar{n} + \alpha \frac{n_K^2}{\bar{n}} \right] \quad (11.56)$$

Die optische Länge gibt ein Maß an, für die Zeit, die der Strahl benötigt, um bis zum Umkehrpunkt zu gelangen.

11.2.1.4 Berechnung des optimalen Profils des Brechungsindex

Wir wollen jetzt untersuchen, ob ein Profil existiert, daß minimale Laufzeitunterschiede zur Folge hat.

Der Strahl der längst der Kernachse verläuft benötigt die folgende Laufzeit für die Strecke L:

$$T_K = \frac{L}{c} n_K \quad (11.57)$$

Ein beliebiger Strahl benötigt ^{11.3}

$$\begin{aligned} T &= \frac{L_o}{c} * M \\ &= \frac{L_o}{c} \frac{L}{z_{UP}} \\ &= \frac{L}{c} \frac{1}{2 + \alpha} \left[2\bar{n} + \alpha \frac{n_K^2}{\bar{n}} \right] \end{aligned} \quad (11.58)$$

Wir untersuchen jetzt, ob es einen Strahl mit \bar{n}_{opt} gibt, der eine minimale Laufzeit für ein festes α aufweist.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\bar{n}} \Big|_{\bar{n}=\bar{n}_{opt}} &= 0 \\ 2 - \alpha \frac{n_K^2}{\bar{n}_{opt}^2} &= 0 \\ \bar{n}_{opt} &= n_K \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (11.59)$$

^{11.3}Die Länge sei so gewählt, daß eine ganze Anzahl von viertel Perioden ($M = L/z_{UP}$) der betrachteten Wellen hineinpasst

Die minimale Laufzeit ist:

$$\begin{aligned}
 T_{opt} &= \frac{L}{c} \frac{1}{2+\alpha} \left[2n_K \sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \alpha \frac{n_K^2}{n_K \sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \right] \\
 &= \frac{L}{c} \frac{n_K}{2+\alpha} \left[2\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \alpha \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \right] \\
 &= \frac{L}{c} \frac{n_K}{2+\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} 4
 \end{aligned} \tag{11.60}$$

$$T_{opt} = \frac{L}{c} \frac{n_K}{2+\alpha} \sqrt{8\alpha} \tag{11.61}$$

Wir wollen jetzt eine heuristische Ermittlung der optimalen Profile durchführen. Wir suchen dasjenige Profil, das die geringsten Laufzeitunterschiede zur Folge hat.

Aus dem Ausdruck für das optimale \bar{n} 11.59 folgt:

$$n_{opt} \leq n_K \rightarrow \alpha \leq 2 \tag{11.62}$$

$$n_{opt} \geq n_M \rightarrow \alpha \geq 2 \frac{n_M^2}{n_K^2} = 2(1 - 2\Delta) \tag{11.63}$$

^{11.4} Liegt α außerhalb der genannten Grenzen, so wird das Minimum nicht im erlaubten Bereich zwischen $n_K \geq \bar{n} \geq n_M$ liegen (siehe Bild 11.6). Hieraus folgt daß gilt:

$$2 \geq \alpha_{opt} \geq 2 \frac{n_M^2}{n_K^2} \tag{11.64}$$

Das Minimum wird erreicht, wenn der Strahl in der Mitte die gleiche Verzögerung (T_K) erleidet, wie der Strahl der den Mantel berührt (T_M), d.h. für diesen Strahl gilt $\bar{n} = n_M$ (siehe Gl. 11.58):

$$T_K = T_M \tag{11.65}$$

$$\frac{Ln_K}{c} = \frac{L}{c} \frac{1}{\alpha_{opt} + 2} \left(\frac{\alpha_{opt} n_K^2}{n_M} + 2n_M \right) \tag{11.66}$$

$$(\alpha_{opt} + 2)n_K = \alpha_{opt} \frac{n_K^2}{n_M} + 2n_M \tag{11.67}$$

$$\alpha_{opt} \left(n_K - \frac{n_K^2}{n_M} \right) = 2(n_M - n_K) \tag{11.68}$$

Das optimale Profil ist

^{11.4} Hier wurde die Definition von $\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2}$ verwendet.

$$\alpha_{opt} = 2 \frac{n_M}{n_K} = 2\sqrt{1-2\Delta} \quad (11.69)$$

$$\approx 2(1-\Delta) \quad (11.70)$$

Laufzeit

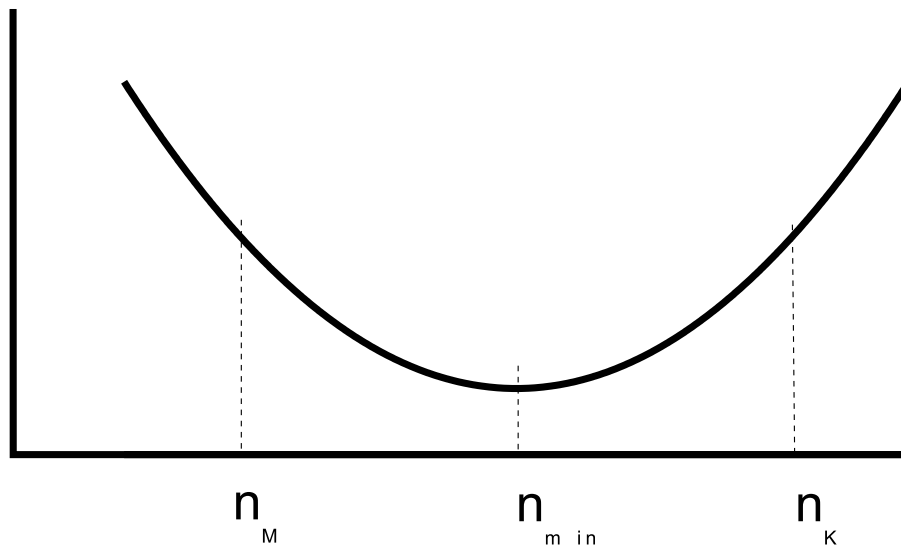


Abbildung 11.6: Laufzeit als Funktion des minimal erreichten Brechungsindex

Der Laufzeitunterschied zwischen dem langsamsten und schnellsten Strahl ist dann:

$$\Delta T = T(n_K) - T(n_{opt}) \quad (11.71)$$

Mit Gleichung 11.61 folgt:

$$\Delta T = \frac{L}{c} n_K - \frac{L n_K}{c} \frac{1}{2 + \alpha_{opt}} \sqrt{8\alpha_{opt}} \quad (11.72)$$

Verwenden wir das optimale Profil 11.69 folgt:

$$\begin{aligned}
 \Delta T &= \frac{L}{c} n_K \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{16n_M}{n_K}}}{2 + 2\frac{n_M}{n_K}} \right) \\
 &= \frac{L}{c} n_K \left(1 - \frac{2\sqrt{\frac{n_M}{n_K}}}{1 + \frac{n_M}{n_K}} \right) \\
 &= \frac{L}{c} n_K \frac{n_K + n_M - 2\sqrt{n_K n_M}}{n_K + n_M} \\
 &= \frac{L}{c} n_K \frac{(\sqrt{n_K} - \sqrt{n_M})^2}{n_K + n_M}
 \end{aligned} \tag{11.73}$$

Ausgedrückt durch Δ ergibt sich:

$$\Delta T = \frac{L}{c} n_K \frac{(1 - \sqrt[4]{1 - 2\Delta})^2}{1 + \sqrt{1 - 2\Delta}} \tag{11.74}$$

$$\approx \frac{L}{c} n_K \frac{\Delta^2}{8} \tag{11.75}$$

Beispiel für einen Gradientenwellenleiter:

$n_K = 1.47, n_M = 1.45$ Hieraus folgt: $\Delta = 0.0135, \alpha = 1.973, \Delta T/L = 110 \text{ ps/km}$
 Dies ergibt eine fast um drei Zehnerpotenzen bessere Strahldispersion verglichen mit der Stufenindex-Wellenleiter (siehe Tafel 10.1) ^{11.5}

^{11.5}Man beachte, daß in der Tabelle $\Delta n = n_K - n_M$ ist.

Zusammenfassung

Prinzip des Gradienten-Wellenleiters: Strahlen können im inhomogenen Medium mit Hilfe der Eikonalgleichung beschrieben werden:

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) e^{j(\omega t - k_0 S(\vec{r}))} \quad (11.76)$$

Die Ausbreitungsgleichung lautet dann:

$$\text{grad } n(\vec{r}) = \frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (11.77)$$

Das verallgemeinerte Brechungsgesetz lautet:

$$n(x) \frac{dz}{ds} = n(x) \cos(\Theta(x)) = \bar{n} = \text{const} \quad (11.78)$$

Die DGl. für die Ausbreitung ist:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{n(x)}{\bar{n}^2} \frac{dn}{dx} \quad (11.79)$$

Die Lösung der DGl. für den Umkehrpunkt ist:

$$z_{up} = \bar{n} \int_0^{\hat{x}} \frac{dx}{\sqrt{n(x)^2 - \bar{n}^2}} \quad (11.80)$$

Definition des α -Profils:

$$n^2(x) = n_k^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \quad (11.81)$$

$$\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} \quad (11.82)$$

Die Lösung für den Spezialfall $\alpha = 2$ (Quadratisches Profil).

$$x = \hat{x} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{z_{UP}}\right) \quad (11.83)$$

Für das allgemeine α -Profil kann man den Umkehrpunkt ermitteln:

$$z_{UP} = \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\Delta}} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})} \quad (11.84)$$

Die optische Länge bis zum Umkehrpunkt beträgt:

$$L_o = z_{UP} \frac{1}{2 + \alpha} \left[2\bar{n} + \alpha \frac{n_K^2}{\bar{n}} \right] \quad (11.85)$$

Das optimale Profil ist:

$$\alpha_{opt} = 2 \frac{n_M}{n_K} = 2\sqrt{1 - 2\Delta} \quad (11.86)$$

$$\approx 2(1 - \Delta) \quad (11.87)$$

Es ergibt eine Strahldispersion von:

$$\Delta T = \frac{L}{c} n_K \frac{(1 - \sqrt[4]{1 - 2\Delta})^2}{1 + \sqrt{1 - 2\Delta}} \quad (11.88)$$

$$\approx \frac{L}{c} n_K \frac{\Delta^2}{8} \quad (11.89)$$

Der Laufzeitunterschied zwischen dem langsamsten und schnellsten Strahl ist:

$$\Delta T = \frac{L}{c} n_K \frac{(1 - \sqrt[4]{1 - 2\Delta})^2}{1 + \sqrt{1 - 2\Delta}} \quad (11.90)$$

$$\approx \frac{L}{c} n_K \frac{\Delta^2}{8} \quad (11.91)$$

Kapitel 12

Wellentheoretische Behandlung dielektrischer Wellenleiter

Motivation Die Übertragungseigenschaften monomodaler Wellenleiter können nur mit Hilfe wellentheoretischer Ansätze beschrieben werden. In diesem Kapitel werden die Eigenschaften monomodaler Lichtwellenleiter näherungsweise abgeleitet. Eine exakte Rechnung, die in ihrer mathematischen Vorgehensweise mit der Technik übereinstimmt, die wir bei der Behandlung der Filmwellenleiter verwendet haben, würde den Umfang der Vorlesung sprengen. Im Anhang C ist diese exakte Theorie kurz skizziert. In diesem Kapitel beschränken wir uns auf Fasern, die einen kleinen Brechzahlunterschied zwischen Kern und Mantel aufweisen, sogenannte schwach führende Fasern. Wie im Anhang C gezeigt wird, überlagern sich unter dieser Voraussetzung Moden mit leicht unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten, also fast entartete Moden, zu einem linear polarisierten gemeinsamen Mode und man erhält die aus der Literatur bekannten LP (linear polarisierten) Moden.

Im einfachsten Fall haben dielektrische Wellenleiter einen lichtführenden Kern mit einem Brechungsindex n_K umgeben von einem Mantel mit einem Brechungsindex n_M (siehe Bild 4.1, 4.2), wobei $n_K > n_M$ ist.

12.1 Näherungsweise Beschreibung der Wellenausbreitung in Stufenindex-Fasern

Wir betrachten jetzt Fasern, deren Kern und Mantel jeweils einen konstanten Brechungsindex haben, sogenannte Stufenindexfasern. Die Geometrie ist in Bild 12.1 angegeben. Wir nehmen hierbei an, daß der äußere Radius b so groß ist, daß das Feld nicht mehr an

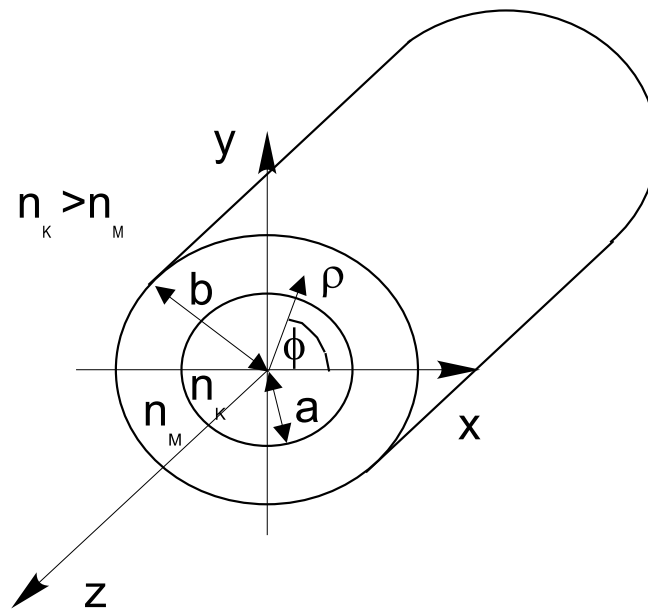


Abbildung 12.1: Stufenindexfaser

den Rand des Mantels reicht. Außerdem gehen wir von folgenden Voraussetzungen aus:

- Der Brechungsindexunterschied zwischen Kern und Mantel ist gering
- Die Welle ist linear polarisiert (d.h. es liegen sogenannte LP (linear polarized) Wellen vor). Die elektrische Feldstärke sei beispielsweise in y-Richtung ausgerichtet.

Die erste Voraussetzung ist bei real vorliegenden Fasern meist gerechtfertigt. Die zweite Voraussetzung kann aus der ersten näherungsweise abgeleitet werden (siehe Anhang C). Wir verwenden die zweite Voraussetzung, und nehmen an daß die Welle eine in y-gerichtete elektrische Feldstärke aufweist. Außerdem pflanze sie sich in z-Richtung fort. Für die y Komponente der elektrischen Feldstärke \underline{E}_y gilt die Wellengleichung:

$$\Delta \underline{E}_y + k_0^2 n_K^2 \underline{E}_y = 0 \text{ für } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \quad (12.1)$$

$$\Delta \underline{E}_y + k_0^2 n_M^2 \underline{E}_y = 0 \text{ für } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > a \quad (12.2)$$

Da wir eine sich in z-Richtung fortpflanzende Welle betrachten, folgt mit dem Ansatz:

$$\underline{E}_y = \Psi(\rho, \phi) e^{-j\beta z} \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2 \quad (12.4)$$

$$\Delta = \Delta_t - \beta^2 \quad (12.5)$$

β ist die Ausbreitungskonstante der Welle, die bestimmt werden soll. Der Laplace-Operator für ebene Probleme Δ_t in kartesischen Koordinaten ist:

$$\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (12.6)$$

Es folgt aus der Wellengleichung:

$$\Delta_t \underline{E}_y + (k_0^2 n_K^2 - \beta^2) \underline{E}_y = 0 \text{ für } \rho < a \quad (12.7)$$

$$\Delta_t \underline{E}_y + (k_0^2 n_M^2 - \beta^2) \underline{E}_y = 0 \text{ für } \rho > a \quad (12.8)$$

12.1.1 Ermittlung der Randbedingungen

Die Ausbreitungskonstante im Mantelmaterial ist $k_0 n_M$, die im Kernmaterial ist $k_0 n_K$. Das Feld erstreckt sich über den Kern und teilweise über den Mantel, folglich gilt für die Ausbreitungskonstante der Welle:

$$k_0 n_K > \beta > k_0 n_M \quad (12.9)$$

Wegen der ersten Voraussetzung $(n_K - n_M)/n_M \ll 1$ folgt:

$$|k_0^2 n_K^2 - \beta^2| \ll \beta^2 \quad (12.10)$$

$$|k_0^2 n_M^2 - \beta^2| \ll \beta^2 \quad (12.11)$$

An der Trennfläche zwischen Kern und Mantel müssen die Randbedingungen erfüllt werden (siehe Bild 12.2), d.h. die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke müssen stetig sein:

$$\underline{E}_z, \underline{H}_z, \underline{E}_\phi, \underline{H}_\phi \text{ stetig für } \rho = a \quad (12.12)$$

Wir wollen diese Randbedingungen unter Ausnutzung der vorher gemachten Voraussetzungen so umformen, daß sie in dem vorliegenden zylindrischen Problem einfach angewendet werden können:

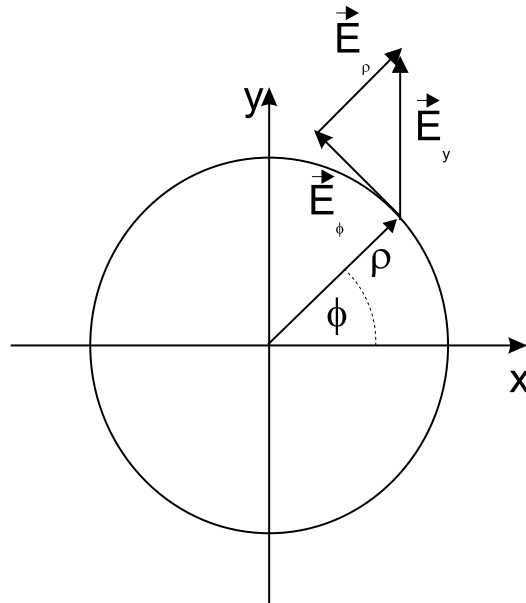


Abbildung 12.2: Elektrische Feldstärke in einer schwach führenden Stufenindexfaser

Stetigkeit der ϕ Komponenten

$$\underline{E}_\phi(a, \phi) = \underline{E}_y(a, \phi) \cos(\phi) \quad (12.13)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß \underline{E}_y für $\rho = a$ stetig sein muß. Da dies für alle ϕ gilt, muß auch $\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \phi}$ stetig sein.

Stetigkeit der z-Komponenten

Als nächstes nutzen wir die Stetigkeit der z-Komponente aus: Aus der Maxwellgleichung $-\text{rot} \underline{\vec{E}} = j\omega\mu \underline{\vec{H}}$ folgt für die z-Komponente der magnetischen Feldstärke:

$$\underline{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_y \quad (12.14)$$

Hieraus ist ersichtlich daß die x-Ableitung von \underline{E}_y stetig ist. Diese Ableitung können wir umschreiben: Mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan(y/x)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (12.15)$$

$$= \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin(\phi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (12.16)$$

folgt für \underline{H}_z :

$$\underline{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\cos(\phi) \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \rho} - \frac{\sin(\phi)}{\rho} \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \phi} \right] \quad (12.17)$$

Da $\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \phi}$ ohnehin stetig ist, ist auch $\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial \rho}$ stetig für $\rho = a$.

Es gelten also unter der Annahme der linearen Polarisation und der kleinen Brechungsindexunterschiede zwischen Kern und Mantel folgende Randbedingungen:

$$\underline{E}_{yK} = \underline{E}_{yM} \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_{yK}}{\partial \phi} = \frac{\partial \underline{E}_{yM}}{\partial \phi} \quad (12.19)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_{yK}}{\partial \rho} = \frac{\partial \underline{E}_{yM}}{\partial \rho} \quad (12.20)$$

12.1.2 Lösung der Wellengleichung

Da sowohl im Kern als auch im Mantel der Brechungsindex konstant ist, gelten für beide Räume die Wellengleichung. Wir nehmen weiterhin eine in y-Richtung polarisierte Welle an:

$$\underline{E}_y = \Psi(\rho, \phi) e^{-j\beta z} \quad (12.21)$$

Dann erfüllt Ψ die folgende Wellengleichung:

$$\Delta_t \Psi_K + (k_0^2 n_K^2 - \beta^2) \Psi_K = 0 \text{ für } \rho \leq a \quad (12.22)$$

$$\Delta_t \Psi_M + (k_0^2 n_M^2 - \beta^2) \Psi_M = 0 \text{ für } \rho > a \quad (12.23)$$

Ψ_K beschreibt die Amplitude der elektrischen Feldstärke im Kern, Ψ_M die im Mantel. Wir normieren die Gleichungen durch Verwendung folgender Parameter:

$$\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} \quad (12.24)$$

$$V = k_0 a \sqrt{n_K^2 - n_M^2} \quad \text{Faser-Parameter oder normierter Frequenzparameter} \quad (12.25)$$

$$= k_0 a N A \quad (12.26)$$

$$B = \frac{\beta^2 - k_0^2 n_M^2}{k_0^2 n_K^2 - k_0^2 n_M^2} \quad (12.27)$$

$$= \frac{v^2}{V^2} \quad (12.28)$$

$$\approx \frac{\frac{\beta}{k_0} - n_M}{n_K - n_M} \quad \text{Normierte Ausbreitungskonstante} \quad (12.29)$$

$$u = a \sqrt{k_0^2 n_K^2 - \beta^2} \quad (12.30)$$

$$= V \sqrt{1 - B} \quad \text{Kernparameter} \quad (12.31)$$

$$v = a \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_M^2} \quad (12.32)$$

$$= V \sqrt{B} \quad \text{Mantelparameter} \quad (12.33)$$

$$r = \rho/a \quad \text{normierter Radius} \quad (12.34)$$

Der Faserparameter V charakterisiert die wesentlichen Eigenschaften der Faser. Es folgt für die Wellengleichungen mit $\Delta_t \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$ im Kern:

$$\frac{\partial^2 \Psi_K^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_K}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial \phi^2} + (k_0^2 n_K^2 - \beta^2) \Psi_K = 0 \quad \text{für } \rho \leq a \quad (12.35)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_K^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_K}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial \phi^2} + a^2 (k_0^2 n_K^2 - \beta^2) \Psi_K = 0 \quad \text{für } r \leq 1 \quad (12.36)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_K^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_K}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial \phi^2} + u^2 \Psi_K = 0 \quad \text{für } r \leq 1 \quad (12.37)$$

Wir setzen den Produktansatz $\Psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ in die Gleichung ein und erhalten:

$$\underbrace{\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + u^2 r^2}_{m^2} + \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}_{-m^2} = 0 \quad (12.38)$$

Es ergeben sich für Φ und R folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (12.39)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (u^2 r^2 - m^2) R = 0 \quad (12.40)$$

Die Differentialgleichung für R_K ist die Besselsche DGL und sie hat als Lösung die Besselfunktionen J_n und Neumann-Funktionen N_n . Graphen der Funktionen sind in Bild 12.3 angegeben [20], [14, S.9.8] Die Neumann-Funktionen der zweiten Art haben einen Pol

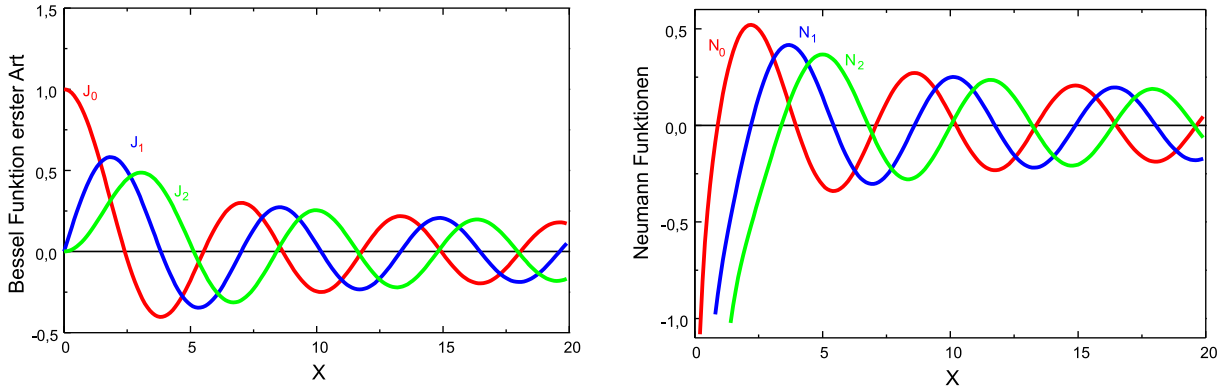


Abbildung 12.3: Besselfunktionen und Neumann-Funktionen

im Ursprung und ergeben somit für den Kern keine physikalisch sinnvolle Lösung. Als Lösungsmenge ergibt sich somit für den Innenraum

$$\Psi_K = \sum_m A_m \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \cos(m\phi) \quad (12.41)$$

für die in ϕ geraden Moden und

$$\Psi_K = \sum_m A_m \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \sin(m\phi) \quad (12.42)$$

für die in ϕ ungeraden Moden.

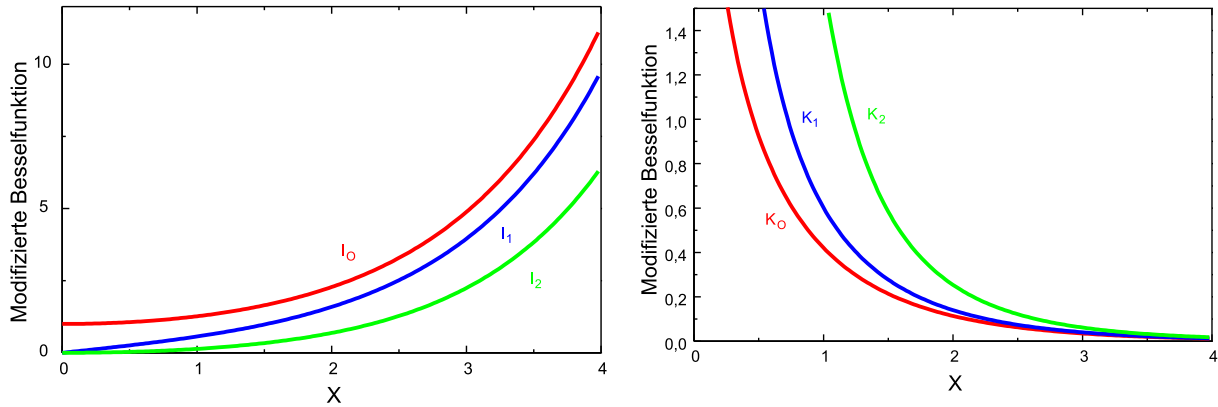
Für den Außenraum kann man an Hand der Singularitäten der Lösungsfunktionen noch keine physikalisch sinnvolle Auswahl treffen, deshalb haben wir den Parameter v leicht unterschiedlich definiert.

Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten für den Mantel:

$$\frac{d^2 \Phi_M}{d\phi^2} + m^2 \Phi_M = 0 \quad (12.43)$$

$$r^2 \frac{d^2 R_M}{dr^2} + r \frac{dR_M}{dr} - (v^2 r^2 + m^2) R_M = 0 \quad (12.44)$$

Diese DGL für R_M ist die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, ihre Lösungen heißen modifizierte Besselfunktionen der ersten I_n und der zweiten Art K_n . Ihr Verlauf ist in Bild 12.4 angegeben. Wir sehen, daß die modifizierten Besselfunktionen $I_n(r)$ für

Abbildung 12.4: Modifizierte Besselfunktionen der ersten I_n und der zweiten Art K_n

$r \rightarrow \infty$ nach ∞ streben und somit als physikalisch sinnvolle Lösungen ausfallen. Es ergibt sich also als Lösungen für den Außenraum für die in ϕ geraden Moden:

$$\Psi_M = \sum_m B_m \frac{K_m(ur)}{K_m(u)} \cos(m\phi) \quad (12.45)$$

und

$$\Psi_M = \sum_m B_m \frac{K_m(ur)}{K_m(u)} \sin(m\phi) \quad (12.46)$$

für die in ϕ ungeraden Moden.

Aus den Randbedingungen 12.18 12.20 folgt:

$$\begin{aligned} \Psi_K(u) &= \Psi_M(v) \rightarrow \frac{A_m}{J_m(u)} = \frac{B_m}{K_m(v)} \\ \frac{\partial \Psi_K}{\partial r}(u) &= \frac{\partial \Psi_M}{\partial r}(v) \rightarrow \frac{J'_m(u)u}{J_m(u)} = \frac{K'_m(v)v}{K_m(v)} \end{aligned} \quad (12.47)$$

Mit den Rekursionsformeln für Besselfunktionen A.39, A.43

$$\frac{dK_m(z)}{dz} = \frac{m}{z} K_m(z) - K_{m+1}(z) \quad (12.48)$$

$$\frac{dJ_m(z)}{dz} = \frac{m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z) \quad (12.49)$$

folgt als charakteristische Gleichung zur Bestimmung der normierten Ausbreitungskonstante B :^{12.1}

^{12.1}Man beachte, daß $v^2 = V^2 - u^2$ ist und daß $B = \frac{V^2 - u^2}{V^2}$ gilt, und somit B berechnet werden kann, wenn u bekannt ist.

$$\frac{J_{m+1}(u)u}{J_m(u)} = \frac{K_{m+1}(v)v}{K_m(v)} \quad (12.50)$$

Die zugehörigen Moden heißen $LP_{m-1,l}$ -Moden (Linear Polarisiert). Sie stellen nur eine Näherungslösung dar. Der erste Index gibt die Ordnung der Φ Abhängigkeit, der zweite den der ρ Abhängigkeit an.

Wie im Anhang C gezeigt wird, liegen im Allgemeinen keine linear polarisierten Wellen vor, sondern hybride Wellen, d.h. Wellen die sowohl ein z-Komponente der elektrischen als auch der magnetischen Feldstärke aufweisen. Diese Wellen heißen EH bzw. HE Wellen. Nur für den Fall $m=0$ ergeben sich transversal elektrische TE und transversal magnetische TM Wellen. Diese Wellen sind gruppenweise fast entartet (für kleine Brechungsindexunterschiede), d.h. sie haben gruppenweise fast die gleiche Ausbreitungskonstante. Deshalb bewegen sie sich ungefähr gleich schnell längs der Faser und ihre Felder können sich zu einem neuen Mode überlagern. Dann ergeben sich in erster Näherung linear polarisierte Wellen, die LP-Moden, deren Ausbreitungskonstanten durch die eben berechnete charakteristische Gleichung gegeben sind. In Bild 12.5 ist als Beispiel die Überlagerung zweier Moden zu einem fast linearem Mode aufgezeigt. Der HE_{21} -Mode und der TM_{01} -Mode überlagern sich dem LP_{11} Mode mit $\cos(\Phi)$ -Abhängigkeit, der HE_{21} -Mode überlagert sich mit dem TE_{01} -Mode zu dem LP_{11} -Mode mit $\sin(\Phi)$ -Abhängigkeit. Man kann folgendes feststellen (siehe Anhang C):

- Jeder LP_{0i} -Mode kann von einer HE_{1i} Welle abgeleitet werden.
- Jeder LP_{1i} -Mode kann von einem TE_{0i} , TM_{0i} und einem HE_{2i} -Mode abgeleitet werden
- Jeder LP_{mi} -Mode kann von einem $HE_{m+1,i}$ und $EH_{m-1,i}$ -Mode abgeleitet werden.

12.1.2.1 Lösung der charakteristischen Gleichung

Zur Bestimmung der Ausbreitungskonstanten kann die charakteristische Gleichung numerisch gelöst werden. Wir wollen aber der Anschaulichkeit halber eine graphische Lösung betrachten. Dazu formen wir die charakteristische Gleichung noch einmal um. Mit (siehe Gleichung: A.37,A.41)

$$J_{m+1}(u)u = 2mJ_m(u) - uJ_{m-1}(u) \quad (12.51)$$

$$K_{m+1}(v)v = 2mK_m(v) + vK_{m-1}(v) \quad (12.52)$$

folgt:

$$-\frac{J_m(u)}{uJ_{m-1}(u)} = \frac{K_m(v)}{vK_{m-1}(v)} \quad (12.53)$$

Dies ist die gleiche Eigenwertgleichung, die wir im Anhang C für den EH-Mode (siehe

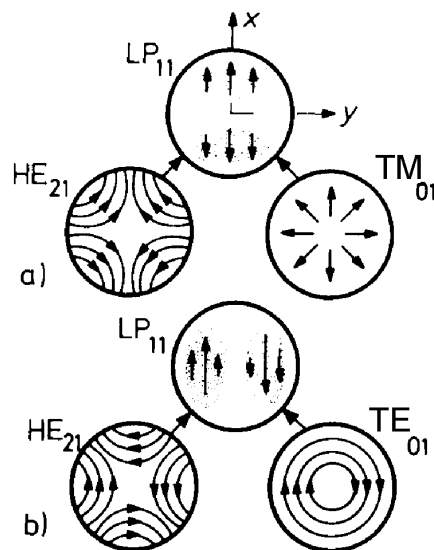


Abbildung 12.5: Transversal elektrische Feld von LP_{11} -Wellen und ihre Überlagerung aus den HE_{21} , TM_{01} bzw. TE_{01} Wellen aus [21]

Gleichung C.102 mit $m \rightarrow m - 1$) bzw. für den HE-Mode (siehe Gleichung C.93 mit $m \rightarrow m + 1$).

Zur Diskussion der grafischen Lösung tragen wir die linke und rechte Seite der Gleichung 12.53 als Funktion von u für $m=1$ und den Faserparameter V auf (siehe Bild 12.6). Die rechte Seite der Gleichung ergibt eine Kurve, die positiv ist und für $U=V$ divergiert. Die linke Seite hat Nullstellen bei $J_1(u) = 0$ (t_{0i}) und divergiert bei t_{1i} .

Wir erkennen, daß auch für beliebig kleine Werte von V der Mode LP_{01} existiert und daß für sehr große Werte von V der Kernparameter u für diesen Mode gegen die erste Nullstelle $u_0 = 2.405$ der Besselfunktion $J_0(u_0) = 0$ geht. Es kann zusätzlich gezeigt werden, daß neben diesem Mode, keine weiteren Lösungen in diesem Bereich existieren (siehe Anhang C). Hier ist die Faser einmodig^{12.2}. Ist V größer als die erste Nullstelle der Besselfunktion können sich noch zusätzliche Moden ausbreiten. Beispielsweise ist der Mode LP_{11} ausbreitungsfähig für $V > 2.405$. Zur Berechnung der zugehörigen Ausbreitungskonstanten muß man die charakteristische Gleichung für beliebiges m lösen, d.h. für den LP_{11} -Mode mit $m=1$. Der Wert von V ab der ein Mode ausbreitungsfähig ist, heißt cut-off. Aus dem zugehörigen Wert $u = a\sqrt{k_0^2 n_K^2 - \beta^2}$ kann dann die zugehörige Ausbreitungskonstante bzw. daraus die zugehörige cut-off Frequenz oder Wellenlänge bestimmt

^{12.2}Der Name ist missverständlich, da genau 2 entartete Moden existieren, die mit einer sinusförmigen und die mit einer cosinusförmigen Abhängigkeit von Φ

werden. Im Bild 12.7 sind die Wertebereiche für die LP_{0i} und LP_{1i} -Moden angegeben.

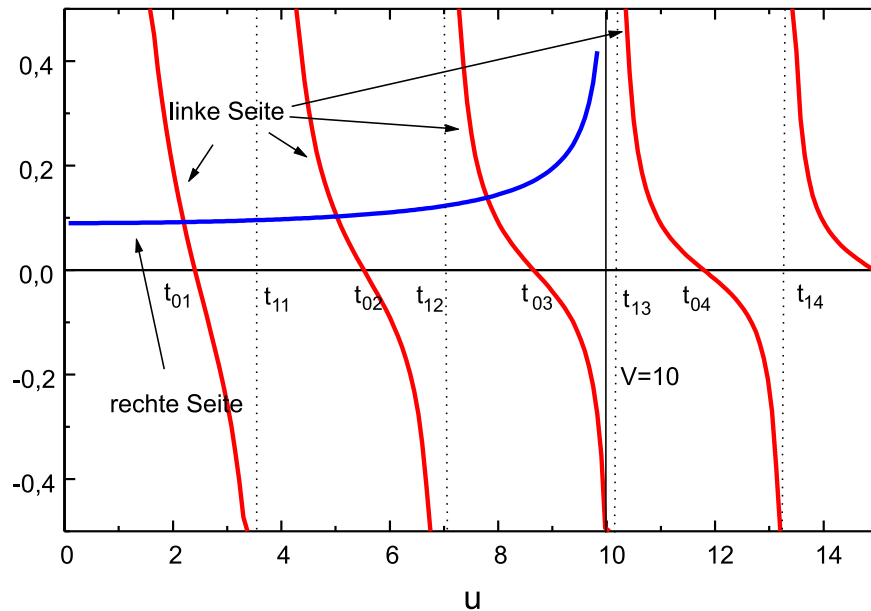


Abbildung 12.6: Grafische Lösung der Eigenwertaufgabe für LP_{0i} -Wellen (Gleichung 12.53 mit $m=0$)

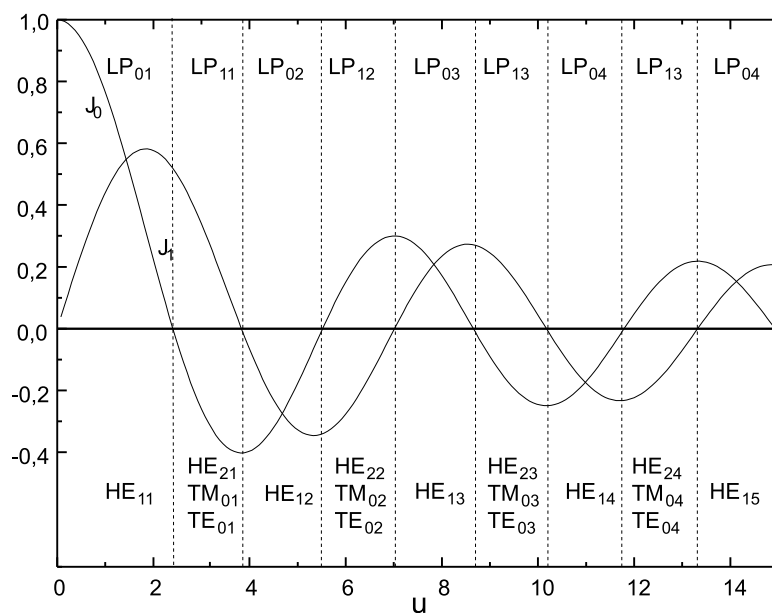
12.1.2.2 Ermittlung des Gruppenindex

Ein wichtiger Parameter für die Übertragung über die Faser ist die Gruppenlaufzeit, bzw. der Gruppenindex. Die Gruppenlaufzeit kann folgendermaßen für einen Mode berechnet werden:

1. Ermittlung der Faserkonstante V als Funktion der Frequenz (Gleichung 12.25).
2. Lösung der charakteristischen Gleichung $\rightarrow u(f)$
3. Berechnung der zugehörigen Ausbreitungskonstante $\rightarrow \beta(f)$ (Gleichung 12.30)
4. Evtl. Berechnung der zugehörigen normierten Ausbreitungskonstante $\rightarrow B(\beta(f))$ (Gleichung 12.29)
5. Berechnung der Gruppenlaufzeit $v_g = \frac{1}{\partial\omega/\partial\beta}$

In Bild 12.8 ist die normierte Ausbreitungskonstante als Funktion von V angegeben. V kann in diesem Bild als normierte Frequenz aufgefasst werden (siehe Gl. 12.25).

Mode	Cut-off	Obere Grenzfrequenz	
HE_{11}	0	2.405	LP_{01}
$HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}$	2.405	3.832	LP_{11}
HE_{31}, EH_{11}	3.832	5.136	LP_{21}
HE_{12}	3.832	5.520	LP_{02}
HE_{41}, EH_{21}	5.136	6.380	LP_{31}
$HE_{22}, TE_{02}, TM_{02}$	5.520	7.016	LP_{12}
$HE_{51}, EH_{31},$	6.380	7.588	LP_{41}
$HE_{32}, EH_{12},$	7.016	8.417	LP_{22}
HE_{13}	7.016	8.654	LP_{03}
HE_{61}, EH_{41}	7.588	8.771	LP_{51}
HE_{42}, EH_{22}	8.417	9.761	LP_{32}
$HE_{23}, TE_{03}, TM_{03}$	8.654	10.173	LP_{13}
HE_{71}, EH_{51}	8.771	9.936	LP_{61}
HE_{52}, EH_{32}	9.761	11.065	LP_{42}
HE_{81}, EH_{61}	9.936	11.086	LP_{71}
HE_{33}, EH_{13}	10.173	11.620	LP_{23}

Tabelle 12.1: Bereich von u für die Wellen mit den niedrigsten AusbreitungskonstantenAbbildung 12.7: Wertebereich für niedrigen LP_{0i}, LP_{0j} -Moden

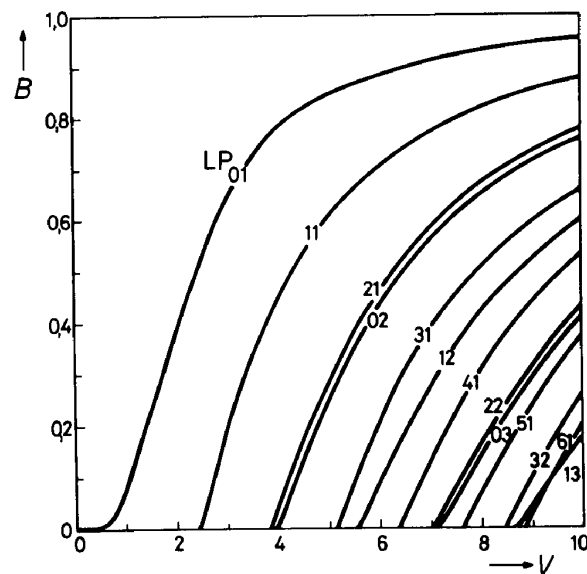


Abbildung 12.8: Normierte Ausbreitungskonstante als Funktion des Faserparameters [21]

Wir sehen, daß die normierte Ausbreitungskonstante B zwischen 0 und 1 liegt, 0 entspricht der Ausbreitung im Mantel, 1 der Ausbreitung im Kern. Wir sehen weiterhin, daß ab $V=2.405$ der zweite Mode ausbreitungsfähig ist. Die Steigung der Kurven ist nicht konstant. Hieraus folgt, daß die Gruppenlaufzeit eine Funktion der Frequenz ist. Dies wird durch die Eigenschaften der Wellenleiter hervorgerufen. Aus diesem Grund nennt man die diese Verzerrungen hervorrufoende Dispersion, die Wellenleiterdispersion. Zusätzlich erkennen wir, daß im mehrmodigen Bereich die unterschiedlichen Moden eine unterschiedliche Steigung haben. Dies hat eine unterschiedliche Gruppenlaufzeit für unterschiedliche Moden bei der gleichen Frequenz zur Folge. Dies nennt man Modendispersion. Wir erinnern uns, daß wir implizit angenommen haben, daß die Brechungsindizes im Kern und Mantel frequenzunabhängig sind. Also muß man bei realen Fasern auch noch zusätzlich zu Wellenleiter- und Modendispersion die Materialdispersion betrachten.^{12.3}

Wir werden jetzt den Gruppenindex bzw. die Gruppenlaufzeit der Faser genauer untersuchen (siehe Gleichung 9.21). Wir machen dazu die folgenden Näherungen

1. Es gelte weiterhin, daß der Brechungsindexunterschied zwischen Kern und Mantel

^{12.3}In realen Fasern kommt noch die Polarisationsdispersion hinzu. Diese Dispersion beschreibt eine durch statistische Asymmetrien auf der Faser hervorgerufene unterschiedliche Ausbreitung der beiden entarteten Polarisierungen der Monomodefaser ($\sin(\phi)$ - und $\cos(\phi)$ -Abhängigkeit). Zusätzlich kann die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex in Kern und Mantel noch unterschiedlich sein. Die hierbei auftretende Dispersion nennt man Profil-Dispersion. Im Gegensatz zu Gradientenfasern kann diese Dispersion im Allgemeinen bei Stufenindexfasern vernachlässigt werden

klein ist. $n_K \approx n_M$.

2. Es gelte zusätzlich, daß sich die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex in Kern und Mantel kaum unterscheiden. $\frac{dn_K}{dk_0} \approx \frac{dn_M}{dk_0}$. Diese Näherung bedeutet, daß wir die Profildispersion vernachlässigen. Diese Näherung ist für Stufenindexfasern zulässig.

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} \quad (12.54)$$

$$= \frac{1}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (12.55)$$

$$= \frac{N_g}{c} \quad (12.56)$$

$$N_g = c \frac{d\beta}{d\omega} \quad (12.57)$$

Dazu drücken wir die Ausbreitungskonstante β durch die normierte Ausbreitungskonstante aus (Gleichung 12.27).

$$\beta^2 = B(\beta_K^2 - \beta_M^2) + \beta_M^2 \quad (12.58)$$

$$= \beta_K^2 - (\beta_K^2 - \beta_M^2)(1 - B) \quad (12.59)$$

$$= \beta_K^2 (1 - 2(1 - B) \frac{\beta_K^2 - \beta_M^2}{2\beta_K^2}) \quad (12.60)$$

Mit der Definition von Δ (Gleichung 12.24) folgt:

$$\beta^2 = \beta_K^2 (1 - 2(1 - B)\Delta) \quad (12.61)$$

$$\beta = \beta_K \sqrt{1 - 2(1 - B)\Delta} \quad (12.62)$$

Berücksichtigen wir, daß in Fasern für Übertragungszwecke die Brechungsindexdifferenz zwischen Kern und Mantel klein ist (1. Näherung), so folgt:

$$\beta \approx \beta_K (1 - (1 - B)\Delta) \quad (12.63)$$

Für einen Mode mit den Indizes (l,m) folgt dann als Gruppenindex

$$N_g = c \frac{d\beta_{l,m}}{d\omega} \approx c \frac{d}{d\omega} \beta_K [1 - (1 - B_{l,m})\Delta] \quad (12.64)$$

$$N_g \approx [1 - (1 - B_{l,m})\Delta] \underbrace{c \frac{d\beta_K}{d\omega}}_{N_{K,g}} + c \beta_K \Delta \frac{dB_{l,m}}{d\omega} \quad (12.65)$$

Hierbei haben wir zusätzlich die 2. Näherung, nämlich daß sich die Frequenzabhängigkeit im Kern und Mantel ähnlich verhält, verwendet. $N_{g,K}$ ist der Gruppenindex des Materials. Wir schreiben die Ableitungen so um, daß die Abhängigkeit $B_{l,m}(V)$ im Vordergrund steht. Es folgt:

$$V = k_0 a n_K \sqrt{2} \sqrt{\frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2}} \quad (12.66)$$

$$= k_0 n_K a \sqrt{2\Delta} \quad (12.67)$$

Hier wurde Gleichung 12.25 verwendet. Wir drücken $\frac{d}{d\omega}$ durch eine Ableitung nach V aus ^{12.4}

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{dV}{d\omega} \frac{d}{dV} \quad (12.68)$$

$$= a \frac{d(k_0 n_K \sqrt{2\Delta})}{d\omega} \frac{d}{dV} \quad (12.69)$$

$$= a \frac{d(k_0 n_K)}{d\omega} \sqrt{2\Delta} \frac{d}{dV} \quad (12.70)$$

$$= \frac{a}{c} \sqrt{2\Delta} c \underbrace{\frac{d(k_0 n_K)}{d\omega}}_{N_{K,g}} \frac{d}{dV} \quad (12.71)$$

$$= \frac{a}{c} \sqrt{2\Delta} N_{K,g} \frac{d}{dV} \quad (12.72)$$

$$= \frac{\overbrace{k_0 n_K a \sqrt{2\Delta}}^V}{c k_0 n_K} N_{K,g} \frac{d}{dV} \quad (12.73)$$

$$= \frac{V N_{K,g}}{\omega n_K} \frac{d}{dV} \quad (12.74)$$

Wir setzen jetzt die Formeln für die Ableitung in Gleichung 12.65 ein:

$$\begin{aligned} N_g = c \frac{d\beta_{l,m}}{d\omega} &\approx [1 - \Delta(1 - B_{l,m})] N_{K,g} + c \beta_k \Delta \frac{V N_{K,g}}{n_K \omega} \frac{dB_{l,m}}{dV} \\ &\approx [1 - (1 - B_{l,m})\Delta] N_{K,g} + V \Delta N_{K,g} \frac{dB_{l,m}}{dV} \\ &\approx N_{K,g}(1 - \Delta) + B_{l,m} \Delta N_{K,g} + \Delta N_{K,g} V \frac{dB_{l,m}}{dV} \\ &\approx N_{K,g} - \Delta N_{K,g} \left[1 - \frac{d(B_{l,m} V)}{dV} \right] \end{aligned} \quad (12.75)$$

Wir sehen 2 Anteile, die zum Gruppenindex beitragen.

^{12.4}Man beachte, daß die Brechungsindizes auch von der Frequenz abhängen und daß die Abhängigkeit in Kern und Mantel als gleich angesetzt wurde.

1. Materialdispersion des Kerns ($N_{K,g}$): Sie beschreibt die Auswirkungen der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex vom Kern.
2. Wellenleiterdispersion ($d(V B_{l,m})/dV$) Sie beschreibt den Anteil, der durch den Entwurf der Faserparameter hervorgerufen wird.

Die unterschiedlichen Laufzeiten der Moden können jetzt leicht abgeschätzt werden. Wir machen dabei die Näherung, daß die Wellenlängenabhängigkeit des Gruppenindex $N_{K,g}$ gegenüber den Laufzeitunterschieden zwischen den einzelnen Moden zu vernachlässigen ist. Der Gruppenindex ist durch Gleichung 12.75 gegeben. Wir bestimmen jetzt die Laufzeiten für den schnellsten und langsamsten Mode. Mit $B_{l,m} = 1 - \frac{u_{l,m}^2}{V^2}$ (Gleichung 12.31) folgt:

$$\frac{d}{dV} V B_{l,m} = \frac{d}{dV} \left(V - \frac{u_{l,m}^2}{V} \right) \quad (12.76)$$

Für große V liegt $u_{l,m}$ für die niedrigen Moden weit weg vom cut-off, und hängt kaum von V ab (siehe Bild 12.6). Dann gilt:

$$\frac{d}{dV} B_{l,m} V \approx 1 + \frac{u_{l,m}^2}{V} \quad (12.77)$$

Die Extremwerte von $u_{l,m}$ sind

$$u_{min} = 2.405 \quad (12.78)$$

$$u_{max} = V \quad (12.79)$$

Für große V folgt dann:

$$\frac{d}{dV} V B_{min} = 1 \quad (12.80)$$

$$\frac{d}{dV} V B_{max} = 2 \quad (12.81)$$

Dann folgt als maximal auftretende Laufzeitdifferenz bei einer Faserlänge L ^{12.5}:

$$T_{max} - T_{min} = \Delta N_{K,g} \frac{L}{c} \quad (12.82)$$

$$= \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} N_{K,g} \frac{L}{c} \quad (12.83)$$

$$\approx \frac{n_K - n_M}{n_K} N_{K,g} \frac{L}{c} \quad (12.84)$$

Diese Gleichung entspricht Gleichung 10.16, wobei zu beachten ist, daß im Rahmen der kleinen Brechzahldifferenzen zwischen Kern und Mantel gilt, daß $n_M \approx n_K$ ist.

^{12.5}Wir berücksichtigen hier nur den 2. Summanden in Gleichung 12.75

12.1.2.3 Anzahl der ausbreitungsfähigen Moden

Wir wollen abschließend abschätzen, wieviel Moden sich in einer typischen Multimode-Stufenindexfaser ausbreiten. Dies kann einfach durch Abzählen der Lösungen der charakteristischen Gleichung geschehen. In Bild 12.9 ist die Anzahl als Funktion des Faserpara-

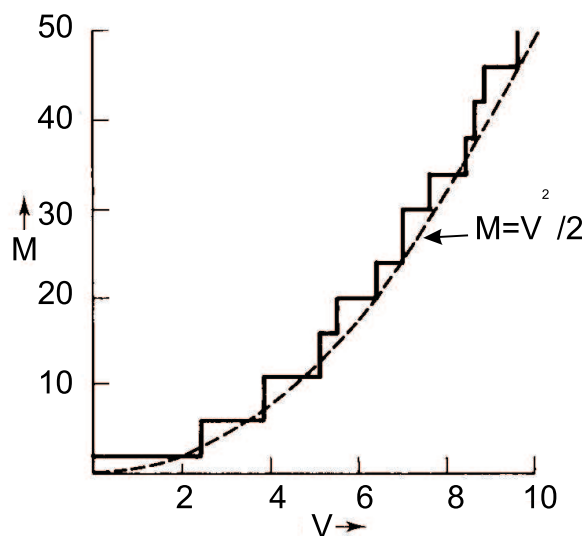


Abbildung 12.9: Anzahl der Moden für Stufenindexfaser als Funktion des Faserparameters V [11]

meters V angegeben. Ein sehr gute Approximation ist für die Anzahl M

$$M = \frac{V^2}{2} \quad (12.85)$$

Beispiel

$$n_K = 1.46 \quad (12.86)$$

$$n_M = 1.42 \quad (12.87)$$

$$2a = 50 \mu m \quad (12.88)$$

$$\lambda = 0.85 \mu m \quad (12.89)$$

$$NA = 0.24 \quad (12.90)$$

$$M = 990 \quad (12.91)$$

12.1.3 Ermittlung der Dispersion

Ein Maß für die Pulsverzerrungen ist die Dispersion der Faser. Der Dispersionskoeffizient D kann aus Gleichung 9.29 berechnet werden:

$$D = \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{d}{d\omega} N_g \quad (12.92)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{d}{d\lambda} N_g \quad (12.93)$$

Mit Gleichung 12.75 folgt:

$$D = -\frac{1}{c} \frac{dN_{K,g}}{d\lambda} \left[1 - \Delta \left[1 - \frac{d(B_{l,m}V)}{dV} \right] \right] - \frac{N_{K,g}\Delta}{c} \frac{dV}{d\lambda} \frac{d^2(B_{l,m}V)}{dV^2} \quad (12.94)$$

Mit $N_{K,g} = (n_K - \lambda \frac{dn_K}{d\lambda})$ (Gleichung 9.23) folgt:

$$D = \underbrace{\frac{\lambda}{c} \left\{ \frac{d^2 n_K}{d\lambda^2} \left[1 - \Delta \left[1 - \frac{d(B_{l,m}V)}{dV} \right] \right] \right\}}_{D_M} - \frac{N_{K,g}\Delta}{c} \frac{dV}{d\lambda} \frac{d^2(B_{l,m}V)}{dV^2} \quad (12.95)$$

Aus Gleichung 12.74 folgt:

$$\frac{d}{d\lambda} = -\frac{\omega}{\lambda} \frac{d}{d\omega} \quad (12.96)$$

$$= -\frac{VN_{K,g}}{\lambda n_K} \frac{d}{dV} \quad (12.97)$$

und es ergibt sich für D :

$$D = D_M + \underbrace{\frac{N_{K,g}\Delta}{c} \frac{d^2(B_{l,m}V)}{dV^2} \frac{VN_{K,g}}{\lambda n_K}}_{D_W} \quad (12.98)$$

$$= D_M + D_W \quad (12.99)$$

Der erste Summand beschreibt die Materialdispersion, der zweite die Wellenleiterdispersion. Die Auswirkungen der unterschiedlichen Summanden werden wir im Kapitel 14 behandeln.

*

Zusammenfassung

Die Wellengleichung für Kern und Mantel lauten:

$$\begin{aligned}\Delta_t \underline{E}_y + (k_0^2 n_K^2 - \beta^2) \underline{E}_y &= 0 \text{ für } \rho < a \\ \Delta_t \underline{E}_y + (k_0^2 n_M^2 - \beta^2) \underline{E}_y &= 0 \text{ für } \rho > a\end{aligned}$$

Unter den gemachten Näherungen kann man folgende Randbedingungen am Übergang vom Kern zum Mantel ableiten:

$$\begin{aligned}\underline{E}_{yK} &= \underline{E}_{yM} \\ \frac{\partial \underline{E}_{yK}}{\partial \phi} &= \frac{\partial \underline{E}_{yM}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \underline{E}_{yK}}{\partial \rho} &= \frac{\partial \underline{E}_{yM}}{\partial \rho}\end{aligned}$$

Die Feldverteilungen im Kern sind:

$$\Psi_K = \sum_m A_m \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases}$$

Die Feldverteilungen im Mantel sind:

$$\Psi_M = \sum_m A_m \frac{K_m(ur)}{K_m(u)} \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases}$$

Die charakteristische Gleichung als Bestimmungsgleichung für β lautet:

$$\frac{J_m(u)}{u J_{m-1}(u)} = \frac{K_m(v)}{v K_{m-1}(v)}$$

mit $u^2 = \sqrt{n_K^2 - \beta^2}$ und $v^2 = \sqrt{\beta^2 - n_M^2}$.

Der Gruppenindex ist näherungsweise:

$$N_g \approx [1 - (1 - B_{l,m}) \Delta] \underbrace{c \frac{d\beta_K}{d\omega}}_{N_{K,g}} + c \beta_K \Delta \frac{dB_{l,m}}{d\omega}$$

Der erste Summand beschreibt den Einfluß der Materialdispersion, der zweite den der Wellenleiterdispersion.

Die Dispersionskonstante ist

$$D = \underbrace{\frac{\lambda}{c} \left\{ \frac{d^2 n_K}{d\lambda^2} \left[1 - \Delta \left[1 - \frac{d(B_{l,m} V)}{dV} \right] \right] \right\}}_{D_M} + \underbrace{\frac{N_{K,g} \Delta}{c} \frac{d^2(B_{l,m} V)}{dV^2} \frac{V N_{K,g}}{\lambda n_K}}_{D_W}$$

Kapitel 13

Dämpfung einer Monomodefaser

Motivation In diesem Kapitel wollen wir die Idee der Ableitung der Ausbreitungskonstanten einer dämpfungsbehafteten Monomodefaser skizzieren

Ausgangsgleichung ist die Wellengleichung 12.7, wobei wir hier die Gleichungen allgemeiner für eine ρ -Abhängigkeit des Brechungsindex formulieren. Zusätzlich nehmen wir an, daß ein verlustbehafteter Brechungsindex $n(\omega) = n'(\omega) - jn''(\omega)$ vorliegt.

$$\Delta_t \underline{E}_y + (k_0^2 \underline{n}(\rho, \omega)^2 - \beta^2) \underline{E}_y = 0 \quad (13.1)$$

Für die Feldstärke setzen wir wieder eine Separationsbedingung an:

$$\begin{aligned} (\Delta_t + (k_0^2 \underline{n}(\rho, \omega)^2 - \beta^2(\omega))) \Psi(\rho, \phi) e^{-j\beta(\omega)z} &= 0 \\ (\Delta_t + k_0^2(n'(\rho, \omega)^2 - 2jn'(\rho, \omega)n''(\rho, \omega) - n''(\rho, \omega)^2) - \beta^2(\omega)) \Psi(\rho, \phi) e^{-j\beta(\omega)z} &= 0 \end{aligned}$$

Hier sind n' und n'' wieder Real- und Imaginärteil des Brechungsindex. Wir können wieder voraussetzen, daß der Imaginärteil des Brechungsindex viel kleiner als der Realteil ist $n'' \ll n'$ (siehe Gleichung 3.18).

$$(\Delta_t + k_0^2(n'(\rho, \omega)^2 - 2jn'(\rho, \omega)n''(\rho, \omega))) \Psi(\rho, \phi) = \beta^2(\omega) \Psi(\rho, \phi) \quad (13.2)$$

Wir führen jetzt eine Störungsrechnung durch, daß heißt wir nutzen aus, daß $2jn'(\rho, \omega)n''(\rho, \omega)$ viel kleiner als $n'(\rho, \omega)^2$ ist und fassen den ersten Term als Störung auf.

Als Lösung ergibt sich als Quadrat der Ausbreitungskonstante (siehe Anhang F):

$$\beta^2(\omega) = k_0^2 \left[\int_{\mathbb{R}_2} \Psi_0(\rho, \phi)^* (n'(\rho, \omega) - j n''(\rho, \omega)) \Psi_0(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \right]^2 \quad (13.3)$$

$$\beta(\omega) = k_0 \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}_2} \Psi_0(\rho, \phi)^* (n'(\rho, \omega) - j n''(\rho, \omega)) \Psi_0(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \right]}_{\underline{n}_{eff}(\omega)} \quad (13.4)$$

Der effektive Brechungsindex ist komplex:

$$\underline{n}_{eff} = n'_{eff} - j n''_{eff} \quad (13.5)$$

Als Lösung für das Feld folgt:

$$\underline{E}_y = \Psi_0(\rho, \phi) e^{j\omega_0 t - j k_0 n'_{eff}(\omega) z - \underbrace{k_0 n''_{eff}}_{\alpha} z} \quad (13.6)$$

Hier ist α die Dämpfung der Amplitude.

Zusammenfassung In erster Näherung wird die Feldverteilung Ψ_0 und der Realteil der Ausbreitungskonstanten β durch die Feldverteilung der ungestörten Ausbreitungsgleichung bestimmt. Die elektrische Feldstärke für eine dämpfungsbehaftete Faser berechnet sich somit zu:

$$\underline{E}_y = \Psi_0(\rho, \phi) e^{j\omega_0 t - j\beta_0(\omega) z - \underbrace{k_0 n''_{eff}}_{\alpha} z}$$

Kapitel 14

Monomodale Fasern

Motivation Monomodale Fasern sind das wichtigste Übertragungsmedium für hochratige Verbindungen. Hier spielt insbesondere der Einfluß der Dispersion eine Rolle.

Wir hatten im Kapitel 12 gesehen, daß die Stufenindexfaser für Wellenparameter $V < 2.405$ einmodig ist. Aus Gleichung 12.25 folgt:

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{n_K^2 - n_M^2} < 2.405 \quad (14.1)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a NA < 2.405 \quad (14.2)$$

$$\lambda > \frac{2\pi a NA}{2.405} \quad (14.3)$$

Beispiel

$$2a = 8.5 \mu m \quad (14.4)$$

$$NA = 0.1 \quad (14.5)$$

$$\lambda_{cut\ off} > 1.11 \mu m \quad (14.6)$$

Wir sehen, daß λ größer als $1.11 \mu m$ sein muß, um einen einmodigen Betrieb der Faser zu gewährleisten.

Innerhalb der Faser ergibt sich eine Abhängigkeit für die Feldverteilung vom Radius gemäß Gleichung 12.41 für den Kern und gemäß Gleichung 12.45 für den Mantel. Die Feldverteilung ist in Bild 14.1 dargestellt. Wir erkennen, daß für den Parameter $V=1.0$ das Feld sehr weit in den Mantel hineinreicht und somit nur eine schwache Führung besteht. Dies heißt, daß leichte Störungen z.B. durch Krümmungen zu einer Abstrahlung und somit zu Verlusten führen können. Aus diesem Grund werden nur Fasern mit $2.405 > V > 1.5$ verwendet.

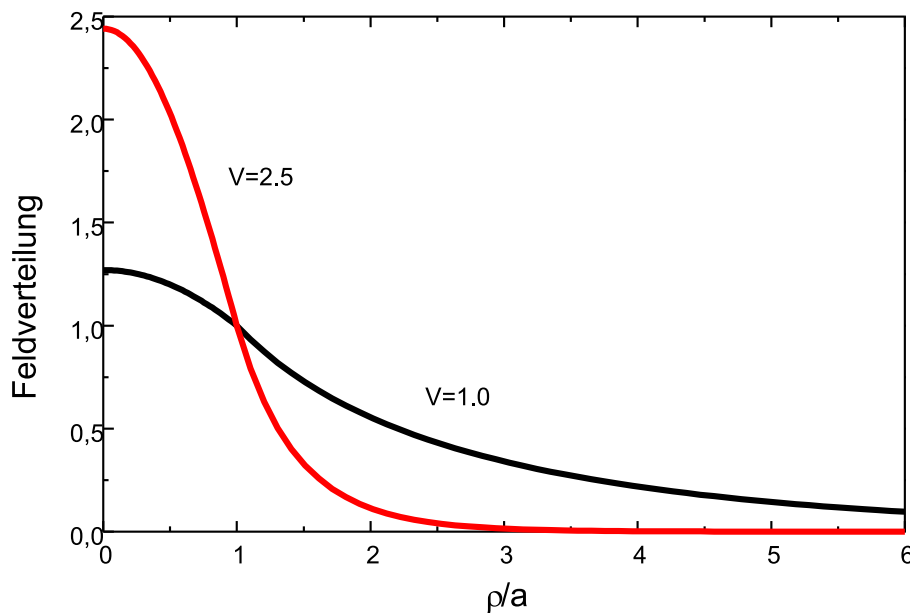


Abbildung 14.1: Feldverteilung innerhalb der Stufenindexfaser

In monomodalen Fasern tragen sowohl Material- als auch Wellenleiterdispersion zur Gesamtdispersion bei. Der Einfluß kann folgendermaßen gedeutet werden. In monomodalen Fasern wird ein wesentlicher Anteil der Welle im Mantel geführt (siehe Bild 14.1). Die Größe dieses Anteils hängt von der Wellenlänge ab. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\lambda \uparrow \Rightarrow k_0 \downarrow \Rightarrow V \downarrow \Rightarrow u \downarrow$$

(vergleiche hierzu Gleichung 12.25 und Bild 12.6) Aus der ρ -Abhängigkeit des Feldes im Kern folgt, daß (Gleichung 12.41) ein kleinerer Anteil des Feldes im Kern verläuft, d. h. ein größerer Anteil des Feldes liegt im Mantel. Hieraus folgt ein effektiv kleinerer Brechungsindex, wobei wir unter dem effektiven Brechungsindex $n_{eff} = \frac{\beta}{k_0}$ verstehen. Insgesamt ergibt sich ein effektiver Brechungsindex, der zwischen dem des Mantels und dem des Kerns liegt. Dieser Sachverhalt ist in Bild 14.2 angedeutet.

Für kleine Wellenlängen ist das Feld fast im Kern konzentriert, und es sieht effektiv den Brechungsindex des Kerns. Wächst die Wellenlänge, so breitet sich das Feld auch mehr in den Mantel aus, und der effektive Brechungsindex sinkt. Für noch größere Wellenlängen wird ein wesentlicher Teil des Feldes im Mantel geführt, und der effektive Brechungsindex nähert sich dem Brechungsindex des Mantels an. Es ergibt sich eine Abhängigkeit des effektiven Brechungsindex als Funktion von λ , der einen Wendepunkt aufweist. Die Bedingung für eine verschwindende Dispersion ist, daß $\beta''(\omega) = 0$ ist, hieraus folgt, daß dort auch $n''_{eff}(\omega) = 0$ und somit die Kurve $n_{eff}(\lambda)$ einen Wendepunkt aufweist. Man beachte

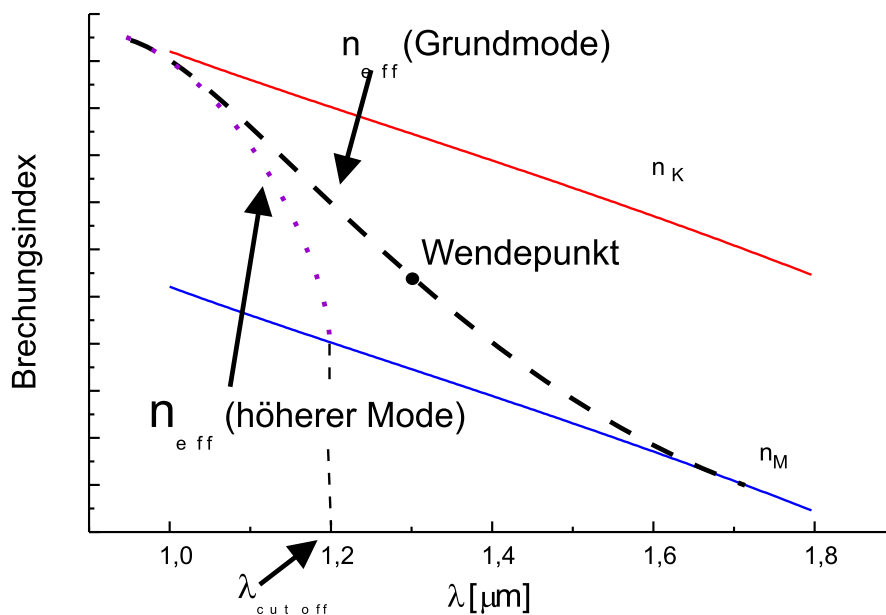


Abbildung 14.2: Qualitativer Verlauf des effektiven Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge für eine normale Monomodefaser

aber, daß für den Monomodebetrieb die Bedingung $k_0 a NA < 2.405$ eingehalten werden muß.

Der gleiche Sachverhalt kann auch durch das Bild 14.3 ausgedrückt werden, in dem der Dispersionskoeffizient D_M des Materials und D_W der Wellenleiterdispersion nach Gleichung 12.100 als Funktion der Wellenlänge aufgezeichnet ist. Wenn die Materialdispersion gleich der negativen Wellenleiterdispersion ist, dann ergibt sich eine verschwindende Gesamtdispersion z.B. bei $\lambda = 1.3\mu\text{m}$. In diesem Bereich können breitbandigere optische Quellen wie LEDs zur Übertragung eingesetzt werden, aber wir haben hier eine höhere Dämpfung.

Möchte man sowohl eine kleine Dispersion als auch eine geringe Dämpfung erreichen, so kann man sogenannte dispersionsverschobene Fasern verwenden. Das Brechungsindexprofil einer solchen Faser ist in Bild 14.4 angegeben. Wir haben hier einen kleineren Kern, aber eine höhere Differenz der Brechungsindizes zwischen Kern und Mantel. In Bild 14.5 ist der Verlauf des effektiven Brechungsindex für diesen Fall qualitativ aufgezeichnet. Wir erkennen, daß der Wendepunkt sich zu höheren Wellenlängen verschoben hat. In Bild 14.6 sind die Dispersionsanteile der Wellenleiter- und Materialdispersion für verschiedene Kerndurchmesser bei konstantem V aufgezeichnet. Wir erkennen, daß man den Punkt verschwindender Dispersion durch das Profil in einem gewissen Rahmen einstellen kann.

Man kann sogar erreichen, daß die Dispersion in einem großen Bereich klein gehalten wird.

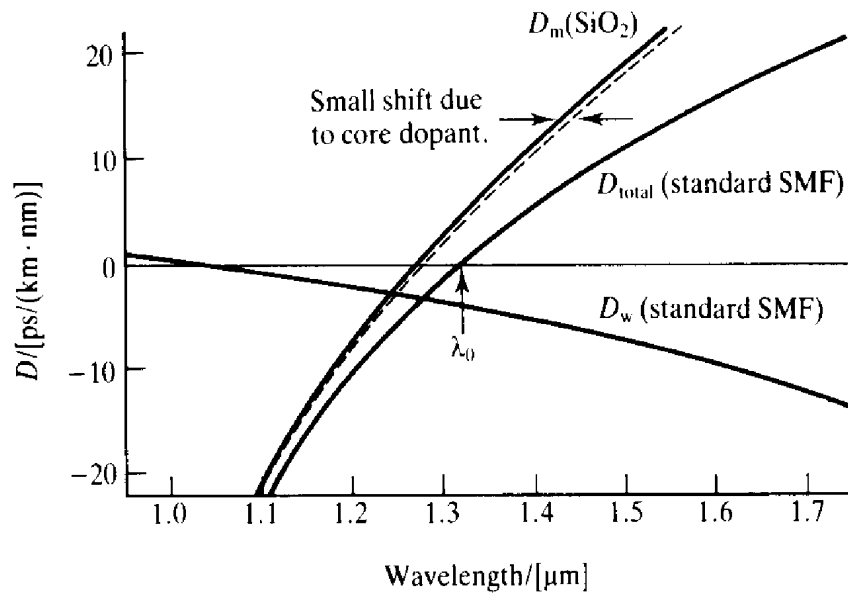


Abbildung 14.3: Wellenleiter- und Materialdispersion für eine normale Monomodefaser [11]

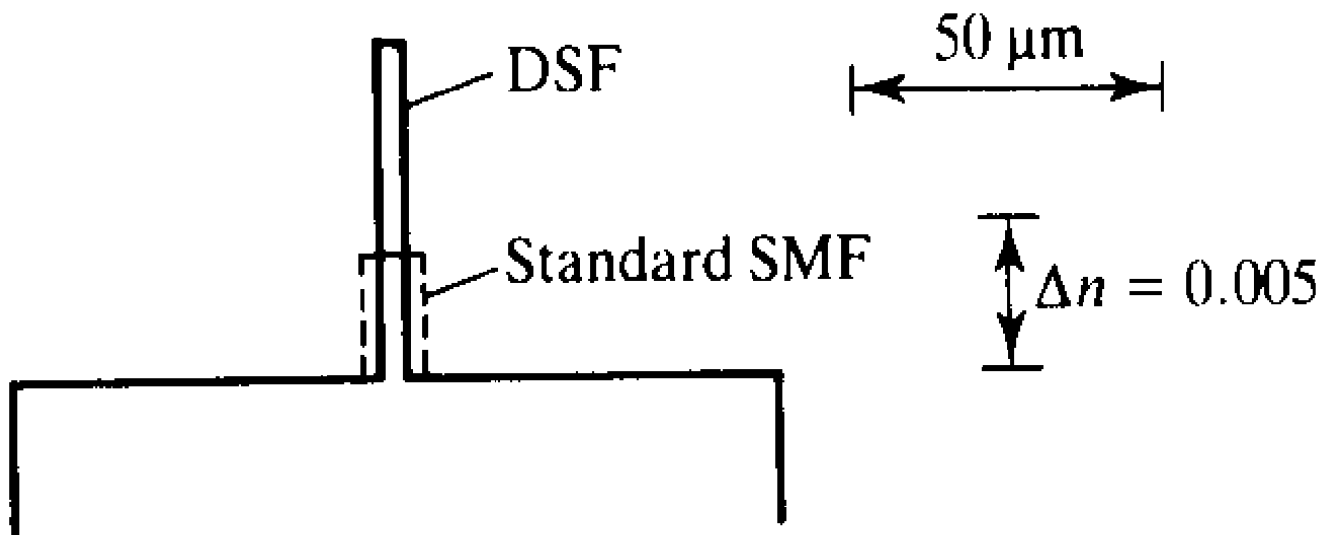


Abbildung 14.4: Brechungsindexprofil für eine dispersionsverschobene Faser [11]

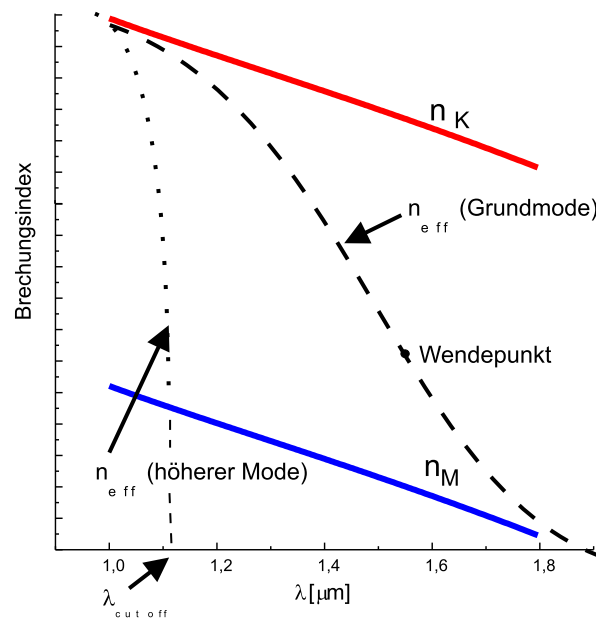


Abbildung 14.5: Qualitativer Verlauf des effektiven Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge für eine dispersionsverschobene Faser

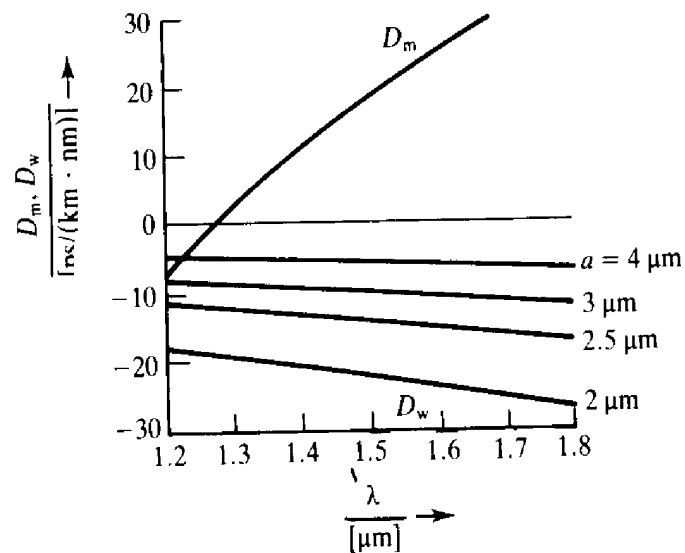


Abbildung 14.6: Wellenleiter- und Materialdispersion für verschiedene dispersionsverschobene Fasern mit unterschiedlichen Kernradien und konstantem V [11]

Dies kann mit Hilfe von Brechungsindexverläufen nach Bild 14.7 bewerkstelligt werden.

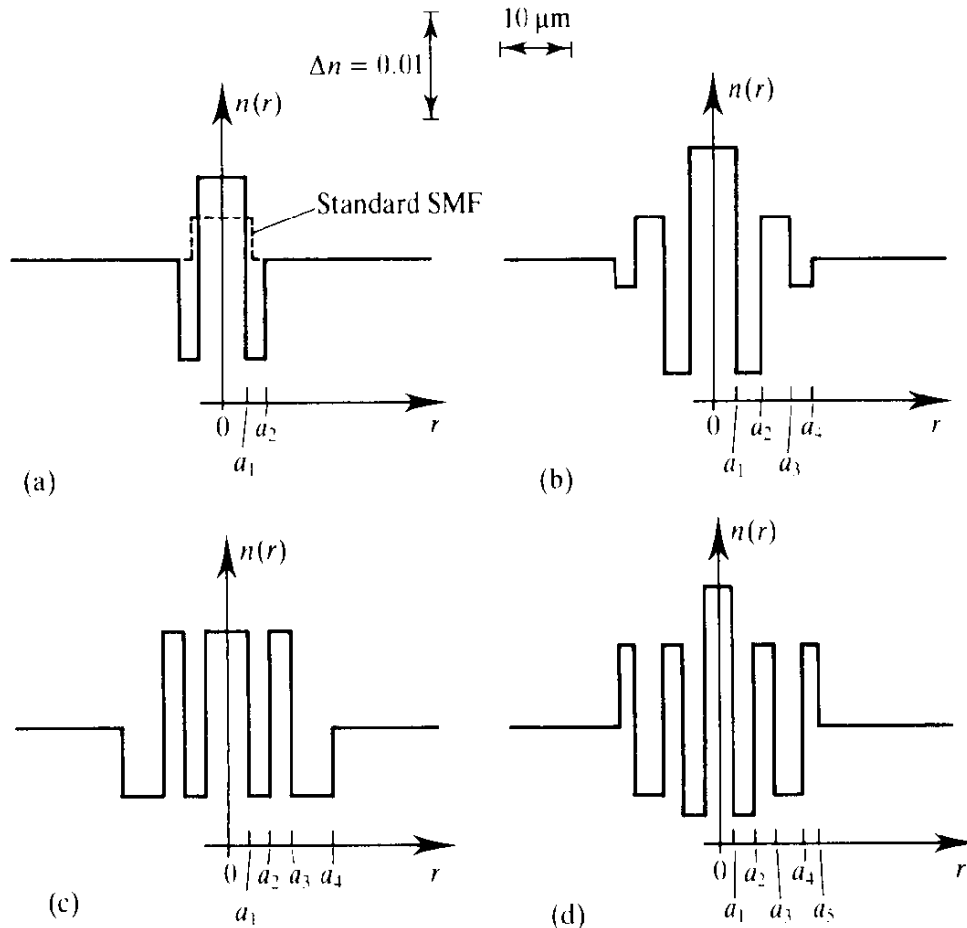


Abbildung 14.7: Brechungsindexverlauf für unterschiedliche "dispersionsflattened" Fasern [11]

In Bild 14.8 ist für den Fall a) der qualitative Verlauf des effektiven Brechungsindex aufgezeichnet. Für kleine λ verläuft das Feld zum größten Anteil im Kern und der effektive Brechungsindex ist ungefähr gleich dem des Kerns. Steigt die Wellenlänge, fällt der effektive Brechungsindex ab, da Anteile des Felds im Bereich des inneren Brechungsindex n_i verlaufen. Bei weiter wachsendem λ verläuft ein Teil des Feldes schon im Mantelbereich, und die Abnahme des Brechungsindex ist geringer. Die Intensität im Kern nimmt jetzt stark ab und der Index fällt wieder stärker ab. Schließlich erreicht er den Wert n_M , und die Welle wird nicht mehr geführt. Der effektive Brechungsindex weist zwei Wendepunkte auf, also existieren bei dieser Faser zwei Wellenlängen mit verschwindender Dispersion.

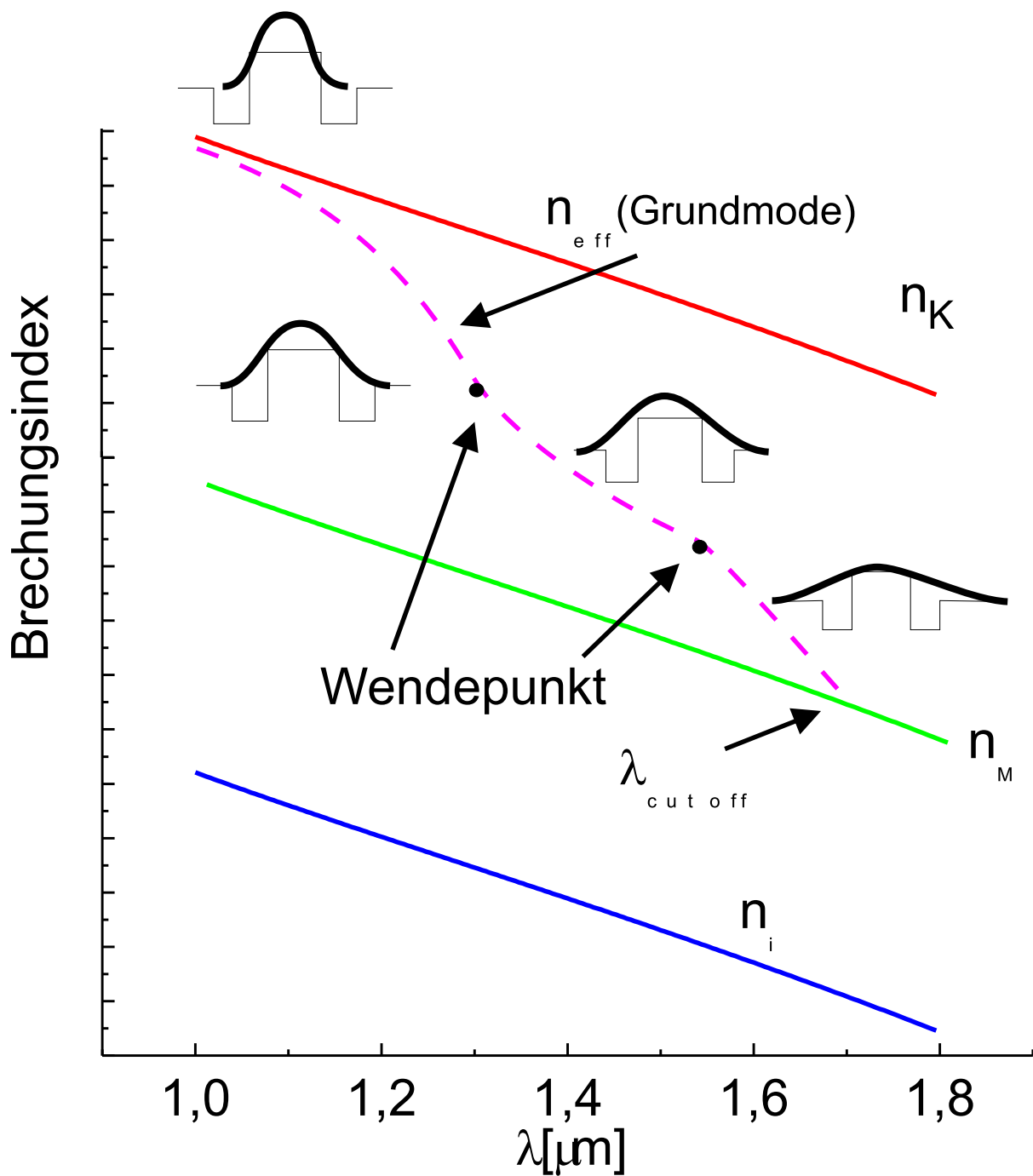


Abbildung 14.8: Qualitativer Verlauf des effektiven Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge für eine "dispersionflattened" Faser

Wir haben aber bei diesem Fasertyp eine cut-off-Wellenlänge für hohe λ , da der effektive Brechungsindex n_M erreichen kann und der Mode somit nicht mehr geführt wird. Dies kann durch die Profile b) bis d) in Bild 14.7 verhindert werden.

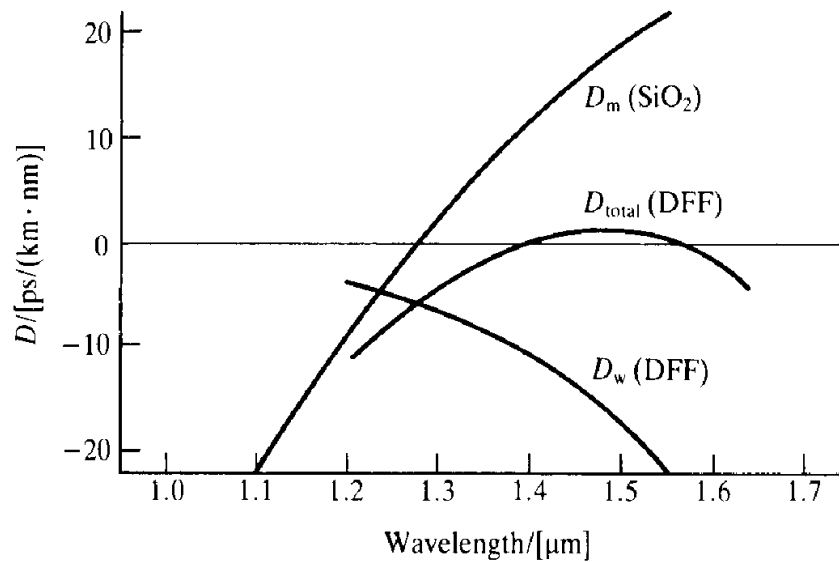


Abbildung 14.9: Wellenleiter- und Materialdispersion für eine "dispersionflattened" Faser [11]

In Bild 14.9 sind die Dispersionsparameter von solchen "dispersionflattened"-Fasern angegeben.

Zusammenfassung Standard-Monomodefaseren weisen einen Wellenlänge mit verschwindender Dispersion bei $\lambda = 1.3\mu m$ auf.

Diese Wellenlänge kann beispielsweise durch Verringerung des Kerndurchmessers bei gleichzeitiger Erhöhung der Brechzahldifferenz zwischen Kern und Mantel verschoben werden, es ergeben sich die sogenannten dispersionsverschobenen Fasern.

Durch kompliziertere Brechzahlprofile kann eine "dispersionflattened" Faser hergestellt werden bei der die Dispersion bei $1.3\mu m$ und $1.55\mu m$ verschwindet, und dabei einen sehr niedrigen Verlauf zwischen diesen beiden Wellenlängen aufweist.

Kapitel 15

Der Gauß'sche Strahl

Motivation Eines der wesentlichen Probleme der optischen Nachrichtentechnik ist die Kopplung zwischen Faser und Fasern und Sende- und Empfangselementen. Hier können wir keine Strahlenoptik verwenden, da hier die räumliche Ausdehnung der entsprechenden Wellenleiter nicht modelliert werden kann. Die vollständige wellentheoretische Lösung ist zu kompliziert. Hier bietet sich das Modell eines räumlich ausgedehnten Strahls an.

Wir gehen von den Wellengleichungen eines Dielektrikums mit quadratischer Abhängigkeit des Brechungsindex aus (siehe Gleichung 11.3):

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n^2(\rho) \vec{E} = 0 \quad (15.1)$$

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_0^2 - 2n_0 \delta n \frac{\rho^2}{a^2}) \vec{E} = 0 \quad (15.2)$$

$$\Delta \vec{E} + (k^2 - k k_2 \rho^2) \vec{E} = 0 \quad (15.3)$$

mit $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_0^2$, $\delta n = n_0 - n_M$ und $k_2 = 2\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \delta n / a^2$. Wir führen wieder den Laplace-Operator für ebene Probleme in Zylinderkoordinaten ein, wobei wir eine Rotationssymmetrie voraussetzen, d.h. es liege keine ϕ -Abhängigkeit vor und die Ausbreitungsrichtung sei die z-Richtung:

$$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (15.4)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (15.5)$$

Wir betrachten eine fast ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\Psi}(\vec{r}) e^{-jkz} \quad (15.6)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung folgt:

$$\Delta_t(\vec{\Psi}(\vec{r})e^{-jkz}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\vec{\Psi}(\vec{r})e^{-jkz}) + (k^2 - kk_2\rho^2)\vec{\Psi}(\vec{r})e^{-jkz} = 0 \quad (15.7)$$

$$\left[\Delta_t\vec{\Psi}(\vec{r}) + \vec{\Psi}(\vec{r})'' - j2k\vec{\Psi}'(\vec{r}) - k^2\vec{\Psi}(\vec{r}) + k^2\vec{\Psi}(\vec{r}) - kk_2\rho^2\vec{\Psi}(\vec{r}) \right] e^{-jkz} = 0 \quad (15.8)$$

$$\left[\Delta_t\vec{\Psi}(\vec{r}) + \vec{\Psi}(\vec{r})'' - j2k\vec{\Psi}'(\vec{r}) - kk_2\rho^2\vec{\Psi}(\vec{r}) \right] e^{-jkz} = 0 \quad (15.9)$$

Hier bedeutet $\vec{\Psi}'$ die Ableitung von $\vec{\Psi}$ nach z . Wir nehmen weiterhin an, daß die Änderung der Amplitude $\vec{\Psi}$ langsam ist gegenüber der optischen Frequenz, d.h. es gelte:

$$\vec{\Psi}'' \ll k^2\vec{\Psi} \quad (15.10)$$

Dann gilt:

$$\left[\Delta_t\vec{\Psi}(\vec{r}) - j2k\vec{\Psi}'(\vec{r}) - kk_2\rho^2\vec{\Psi}(\vec{r}) \right] e^{-jkz} = 0 \quad (15.11)$$

Da im Fall der ebenen Welle das Strahlungsfeld rein transversal ist, kann man bei kleinen Abweichungen vom ebenen Fall, wie sie hier vorliegen, annehmen, daß die dabei auftretenden longitudinalen Feldkomponenten Ψ_z klein sind gegenüber den anderen Komponenten. Entsprechend klein sind die zweiten Ableitungen, so daß die Wellengleichung für Ψ_z keine Beiträge liefert. Dies überprüfen wir durch folgende Überlegungen: Aus der Forderung der Quellenfreiheit $\text{div}\vec{E} = 0$ folgt

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho\Psi_\rho)}{\partial\rho} - jk\vec{\Psi}_z = 0 \quad (15.12)$$

$$\Psi_z = \frac{-j\lambda}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho\Psi_\rho)}{\partial\rho} \quad (15.13)$$

Wenn also die Änderung der Amplitude über Bereiche der Wellenlänge klein ist, kann die longitudinale Komponente des Feldstärkevektors vernachlässigt werden.

Wir können unter den gemachten Voraussetzungen also von einer skalaren Wellengleichung ausgehen, die diese quasi-ebene Welle beschreibt:

$$\left[\Delta_t\Psi(\vec{r}) - j2k\Psi'(\vec{r}) - kk_2\rho^2\Psi(\vec{r}) \right] e^{-jkz} = 0 \quad (15.14)$$

Wir machen den folgenden Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung:

$\Psi(\rho, z) = \frac{\Psi_0}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k}{2q(z)} \rho^2 \right] \quad (15.15)$

Wir werden diesen Ansatz in die Wellengleichung 15.14 einsetzen. Dazu benötigen wir die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \frac{\Psi_0}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k}{2q(z)} \rho^2 \right] \left[-j \frac{k}{q(z)} \rho \right] \quad (15.16)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} = \frac{\Psi_0}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k}{2q(z)} \rho^2 \right] \left[-\frac{k^2}{q^2(z)} \rho^2 - j \frac{k}{q(z)} \right] \quad (15.17)$$

$$\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\Psi_0}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k}{2q(z)} \rho^2 \right] \left[-\frac{s'(z)}{s(z)} - j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{q(z)} \right)' \rho^2 \right] \quad (15.18)$$

Eingesetzt in die Wellengleichung 15.14 ergibt sich:

$$0 = -\frac{k^2}{q^2(z)} \rho^2 - j 2 \frac{k}{q(z)} - 2jk \left[-\frac{s'(z)}{s(z)} - j k \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q(z)} \right)' \rho^2 \right] - k k_2 \rho^2 \quad (15.19)$$

$$0 = \left[-\frac{k^2}{q^2(z)} - k^2 \left(\frac{1}{q(z)} \right)' - k k_2 \right] \rho^2 - j 2 \frac{k}{q(z)} + 2jk \frac{s'(z)}{s(z)} \quad (15.20)$$

Da diese Gleichungen für alle ρ gelten müssen, folgt:

$$\frac{1}{q^2(z)} + \left(\frac{1}{q(z)} \right)' + \frac{k_2}{k} = 0 \quad (15.21)$$

$$-\frac{1}{q(z)} + \frac{s'(z)}{s(z)} = 0 \quad (15.22)$$

Wir differenzieren die zweite Differentialgleichung nach dz und setzen $(\frac{1}{q})'$ in die erste ein:

$$\left(\frac{1}{q(z)} \right)' = \frac{s''(z)}{s(z)} - \frac{s'^2(z)}{s^2(z)} \quad (15.23)$$

$$\frac{s'^2(z)}{s^2(z)} - \frac{s'^2(z)}{s^2(z)} + \frac{s''(z)}{s(z)} + \frac{k_2}{k} = 0 \quad (15.24)$$

$$\frac{s''(z)}{s(z)} + \frac{k_2}{k} = 0 \quad (15.25)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$s(z) = s_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + s_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) \quad (15.26)$$

$$s'(z) = s_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) - s_1 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) \quad (15.27)$$

Somit folgt für $q(z)$ aus Gleichung 15.22:

$$q(z) = \frac{s_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + s_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)}{s_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) - s_1 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)} \quad (15.28)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten wählen wir als Anfangsbedingung:

$$\Psi(z=0) = \Psi_0 \exp\left[-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right] \quad (15.29)$$

und vergleichen diese mit Gleichung 15.15. Die Größe w_0 heißt Strahltaile:

$$\Psi(z=0) = \frac{\Psi_0}{s(0)} \exp\left[-j \frac{k}{2q(0)} \rho^2\right] \quad (15.30)$$

Wir sehen, daß

$$s(0) = 1 \quad (15.31)$$

$$q(0) \equiv q_0 = j \frac{w_0^2 k}{2} \equiv j z_0 \quad (15.32)$$

ist. Hieraus folgt (siehe Gleichung 15.26 und 15.28):

$$s_1 = 1 \quad (15.33)$$

$$s_0 = \frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{k}{k_2}} \quad (15.34)$$

Eingesetzt in die Gleichung für $s(z)$:

$$s(z) = \frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) \quad (15.35)$$

$$q(z) = \frac{\frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)}{\frac{1}{q_0} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) - \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)} \quad (15.36)$$

Es folgt als die endgültige Gleichung für $q(z)$:

$$q_1 \equiv q(z) = \frac{q_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)}{-q_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)} \quad (15.37)$$

Um die Größen geometrisch deuten zu können, definieren wir

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (15.38)$$

Für die Feldstärke folgt somit:

$$\Psi(\rho, z) = \Psi_0 \frac{1}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \frac{k\rho^2 \lambda}{2\pi w^2(z)} \right] \quad (15.39)$$

$$= \Psi_0 \frac{1}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \quad (15.40)$$

$2w(z)$ kann als 1/e Strahldurchmesser gedeutet werden.

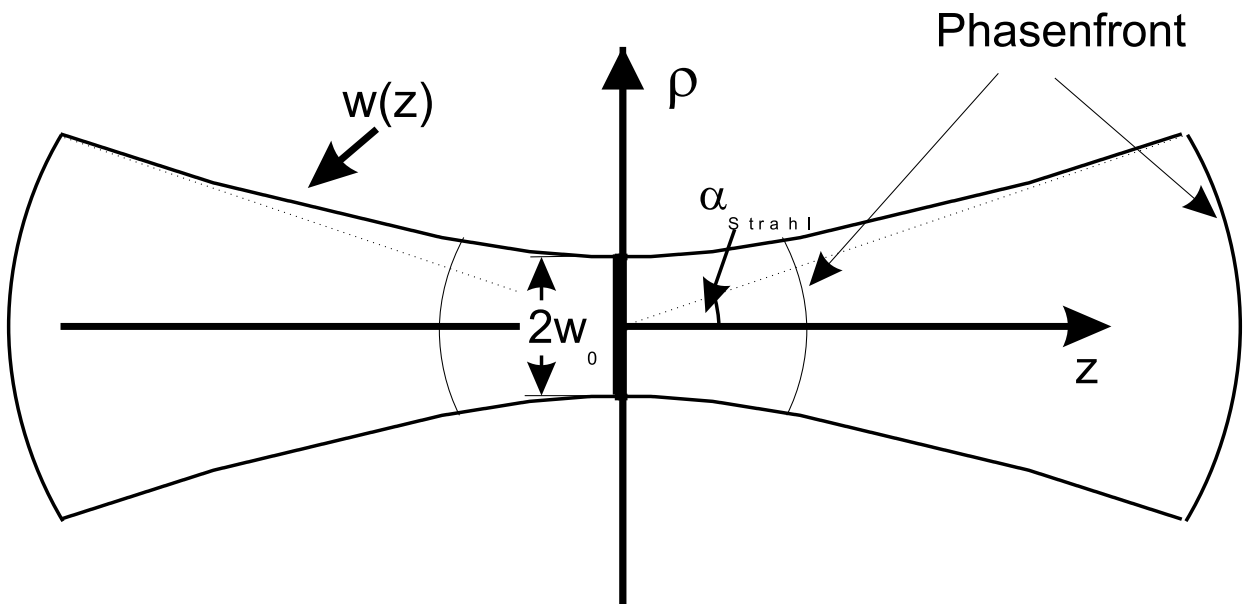


Abbildung 15.1: Feldverteilung beim Gauß'schen Strahl

Zur Deutung von R vergleichen wir das Feld mit dem Feld einem Hertzschen Dipol im Ursprung [14, S.12.10]:

$$E \sim \frac{1}{R} e^{-jk\sqrt{\rho^2+z^2}} \quad (15.41)$$

$$\sim \frac{1}{R} e^{-jkz\sqrt{1+\frac{\rho^2}{z^2}}} \quad (15.42)$$

Für $\rho \ll z$, also für achsennahe Felder folgt :

$$E \approx \frac{1}{R} e^{-jkz(1+\frac{\rho^2}{2z^2})} \quad (15.43)$$

$$\approx \frac{1}{R} e^{-jk(z+\frac{\rho^2}{2z})} \quad (15.44)$$

$$(15.45)$$

Außerdem ist für achsennahe Strahlen $R \approx z$ und es gilt (vergleiche auch Gleichung 15.6):

$$E \approx \frac{1}{R} e^{-jk(z + \frac{\rho^2}{2R})} \quad (15.46)$$

$$(15.47)$$

Wir sehen aus dem Vergleich mit unserem Ergebnis, daß $1/R$ die Krümmung der Phasenfront im Fernfeld auf der z -Achse beschreibt (siehe Bild 15.1), d.h. die Flächen gleicher Phase können für das Fernfeld und nahe der Ausbreitungsachse durch Kugelflächen mit dem Radius R dargestellt werden.

Wir sehen weiterhin, daß der Strahl eine Taille aufweist, bei der der Strahl am schmalsten ist.

15.1 Spezialfall: Homogenes Dielektrikum

Wir betrachten jetzt den Fall $k_2 = 0$. Es ergibt sich aus Gleichung 15.35 und 15.37 für $q(z)$ und $s(z)$:

$$s(z) = 1 + \frac{z}{q_0} \quad (15.48)$$

$$q(z) = q_0 + z \quad (15.49)$$

Mit

$$q_0 = j \frac{k w_0^2}{2} = j z_0 \quad (15.50)$$

folgt:

$$s(z) = 1 + \frac{2z}{j k w_0^2} = 1 - j \frac{z}{z_0} \quad (15.51)$$

$$q(z) = \frac{j k w_0^2}{2} + z = z + j z_0 \quad (15.52)$$

Aus der Definition von $R(z)$ bzw. $w(z)$ (Gl. 15.38). folgt:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (15.53)$$

$$= \frac{1}{z + j z_0} \quad (15.54)$$

$$= \frac{z}{z^2 + z_0^2} - j \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \quad (15.55)$$

$$R(z) = z + \frac{z_0^2}{z} \quad (15.56)$$

$$w^2(z) = \frac{\lambda}{\pi} z_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \quad (15.57)$$

$$= \frac{\lambda}{\pi} k \frac{w_0^2}{2} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \quad (15.58)$$

$$w(z)^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right) \quad (15.59)$$

Ein weiterer wichtiger Parameter ist der Öffnungswinkel α_{Strahl} (siehe Bild 15.1). Für ihn gilt im Fernfeld und für achsennahe Strahlen:

$$\alpha_{Strahl} = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{w(z)}{z}\right) \quad (15.60)$$

$$\approx \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{w(z)}{z}\right) \quad (15.61)$$

$$\approx \lim_{z \rightarrow \infty} w_0 \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_0^2}} \quad (15.62)$$

$$\approx \frac{w_0}{z_0} \quad (15.63)$$

$$\approx \frac{2w_0}{kw_0^2} \quad (15.64)$$

$$\approx \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (15.65)$$

$$w_0 \alpha_{Strahl} \approx \frac{\lambda}{\pi} \quad (15.66)$$

Dies Ergebnis besagt, daß man nicht gleichzeitig eine beliebige Fokussierung auf eine Fläche $\sim w_0^2$ und eine parallele Strahlführung erreichen kann.

15.2 ABCD-Gesetz

Die Ausbreitung von Gauß'schen Strahlen kann einfach mit Hilfe des ABCD-Gesetzes beschrieben werden. Wir gehen hierzu von Gleichung 15.37 aus

$$q_1 \equiv q(z) = \frac{q_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)}{-q_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z\right)} \quad (15.67)$$

und schreiben sie folgendermaßen um:

$$q_1 = \frac{A_0 q_0 + B_0}{C_0 q_0 + D_0} \quad (15.68)$$

Diese Gleichung gibt einen Zusammenhang zwischen den komplexen Wellenradien q_1 und q_0 am Eingang und Ausgang des optischen Elements an. Wenn wir den Gauß'schen Strahl beim Durchlaufen mehrerer hintereinandergeschalteter optischer Komponenten beschreiben wollen, können wir den ABCD-Formalismus verwenden (siehe Bild 15.2)

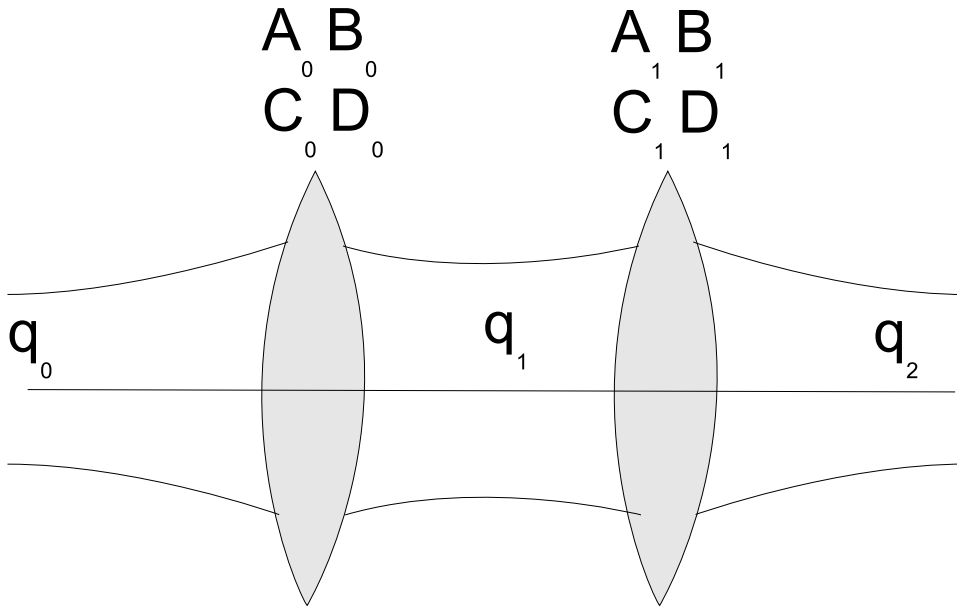


Abbildung 15.2: Hintereinanderschaltung mehrerer optischer Komponenten

Wir gehen davon aus, daß die zweite Komponente durch

$$q_2 = \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} \quad (15.69)$$

beschrieben werden kann. Dann folgt durch Einsetzen:

$$q_2 = \frac{A_1 \frac{A_0 q_0 + B_0}{C_0 q_0 + D_0} + B_1}{C_1 \frac{A_0 q_0 + B_0}{C_0 q_0 + D_0} + D_1} \quad (15.70)$$

$$= \frac{A_1(A_0 q_0 + B_0) + B_1(C_0 q_0 + D_0)}{C_1(A_0 q_0 + B_0) + D_1(C_0 q_0 + D_0)} \quad (15.71)$$

$$= \frac{q_0(A_0 A_1 + B_1 C_0) + A_1 B_0 + B_1 D_0}{q_0(C_1 A_0 + D_1 C_0) + C_1 B_0 + D_1 D_0} \quad (15.72)$$

Durch Vergleich mit der Matrixoperation

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \quad (15.73)$$

erkennt man, daß die Koeffizienten einer neuen ABCD Matrix, durch einfache Matrixmultiplikation berechnet werden können.

15.2.1 ABCD-Matrix einer Freistrahlausbreitung

Diese Matrix kann sehr einfach aus Gleichung 15.49 ermittelt werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.74)$$

15.2.2 ABCD-Matrix einer dünnen Linse

Die Geometrie ist in Bild 15.3 angegeben. Die Linse habe den Brechungsindex n_L , der Au-

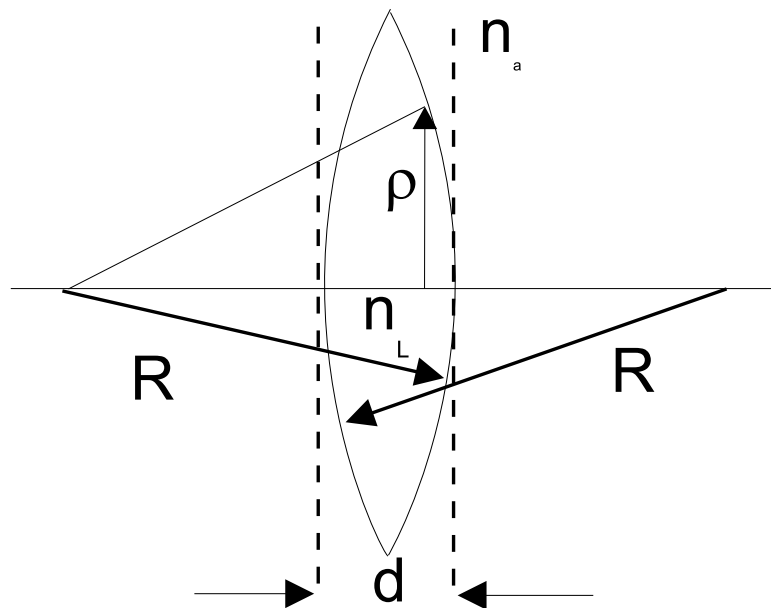


Abbildung 15.3: Geometrie einer dünnen Linse

ßenraum n_a . Die Linse sei so dünn, daß der Strahldurchmesser sich beim Durchlaufen der Linse nicht ändert. Die Dicke der Linse kann als Funktion vom Radius ρ folgendermaßen

bestimmt werden:

$$d_L(\rho) = d - 2(R - \sqrt{R^2 - \rho^2}) \quad (15.75)$$

$$= d - 2(R - R\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}) \quad (15.76)$$

$$\approx d - 2R + 2R(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}) \quad (15.77)$$

$$\approx d - \frac{\rho^2}{R} \quad (15.78)$$

Die optische Weglänge zwischen den gestrichelten Linien für einen achsenparallelen Strahl in der Höhe ρ ist somit

$$d_{opt} = (d - d_L)n_a + d_L n_L \quad (15.79)$$

$$= d n_a + d_L(n_L - n_a) \quad (15.80)$$

Somit ergibt sich ein effektiver Brechungsindex, der quadratisch von ρ abhängt:

$$n_{eff} = \frac{d_{opt}}{d} \quad (15.81)$$

$$= n_a + (n_L - n_a) - (n_L - n_a) \frac{\rho^2}{Rd} \quad (15.82)$$

$$= n_L - (n_L - n_a) \frac{\rho^2}{Rd} \quad (15.83)$$

$$n_{eff}^2 \approx n_L^2 - 2(n_L - n_a)n_L \frac{\rho^2}{Rd} \quad (15.84)$$

Hierfür haben wir schon die ABCD-Matrix bestimmt (Gleichung 15.37 für kleine $z = d$):

$$q_1 = \frac{q_0}{-\frac{k_2}{k} d q_0 + 1} \quad (15.85)$$

Der Vergleich mit Gleichung 15.3 ergibt:

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n_L \quad (15.86)$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} 2 \frac{n_L - n_a}{Rd} \quad (15.87)$$

$$\frac{k_2}{k} = 2 \frac{n_L - n_a}{n_L Rd} \quad (15.88)$$

Es folgt für q_1 :

$$q_1 = \frac{q_0}{-2 \frac{(n_L - n_a)}{R n_L} q_0 + 1} \quad (15.89)$$

Aus der geometrischen Optik folgt [22] als Brennweite einer dünnen Linse:

$$\frac{1}{f} = 2 \frac{(n_L - n_a)}{R n_L} \quad (15.90)$$

und somit lautet unsere ABCD-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (15.91)$$

Weitere ABCD-Übertragungsmatrizen findet man beispielsweise in [23].

15.3 Ankopplung einer Faser an einen Laser

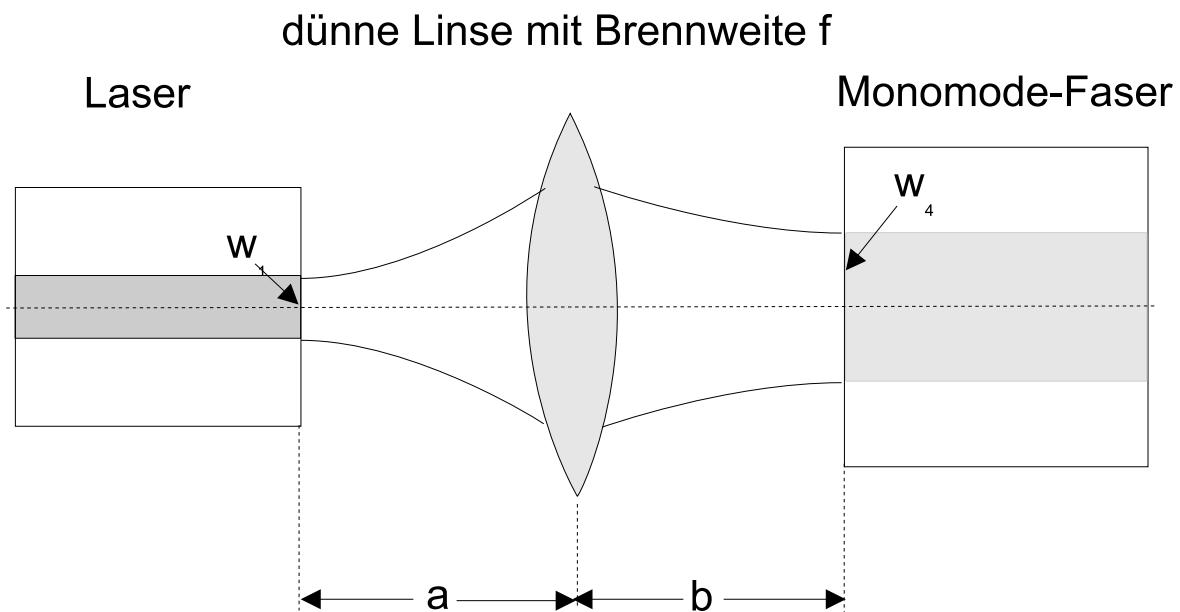


Abbildung 15.4: Ankopplung einer Faser an einen Laser mit Hilfe einer dünnen Linse

Wir wollen die Ankopplung eines Lasers an eine monomodale Faser mit Hilfe einer dünnen Linse betrachten (siehe Bild 15.4). Der Laser habe eine Fleckgröße w_1 und die Faser eine Fleckgröße w_4 . Wir betrachten erst die Ausbreitung vom Laser bis zur linken Seite der Linse. Es ergibt sich aus der ABCD-Matrix 15.74:

$$q_2 = q_1 + a \quad (15.92)$$

Für die Ausbreitung des Strahls von der rechten Seite der Linse bis zur Faser folgt:

$$q_4 = q_3 + b \quad (15.93)$$

$$q_3 = q_4 - b \quad (15.94)$$

Für die dünne Linse gilt nach Gleichung 15.91:

$$q_3 = \frac{q_2}{-\frac{1}{f}q_2 + 1} \quad (15.95)$$

$$\frac{1}{q_2} - \frac{1}{f} = \frac{1}{q_3} \quad (15.96)$$

q_2 und q_3 eingesetzt ergibt:

$$\frac{1}{q_1 + a} - \frac{1}{f} = \frac{1}{q_4 - b} \quad (15.97)$$

$$(q_4 - b)f - (q_4 - b)(q_1 + a) = (q_1 + a)f \quad (15.98)$$

Fordern wir, daß am Laser und an der Faser gerade die Strahltaillen vorliegen, so ergibt sich:

$$q_1 = jz_1 = j\frac{\pi w_1^2}{\lambda} \quad (15.99)$$

$$q_4 = jz_4 = j\frac{\pi w_4^2}{\lambda} \quad (15.100)$$

Eingesetzt folgt:

$$(jz_4 - b)f - (jz_4 - b)(jz_1 + a) = (jz_1 + a)f \quad (15.101)$$

$$jz_4 - bf + z_1z_4 + jbz_1 - jz_4a + ab = jz_1f + af \quad (15.102)$$

$$-bf + z_1z_4 + ab - af + j(fz_4 - fz_1 + bz_1 - az_4) = 0 \quad (15.103)$$

Aus dem Realteil der Gleichung folgt:

$$bf + af = ab + z_1z_4 \quad (15.104)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{z_1z_4}{abf} \quad (15.105)$$

Setzt man z_1 und z_4 ein, so erhält man:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{\pi^2 w_1^2 w_4^2}{\lambda^2 abf} \quad (15.106)$$

Für Abmessungen a,b groß gegenüber den Fleckgrößen geht diese Gleichung in die strahlenoptische Abbildungs-Gleichung für dünne Linsen über:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (15.107)$$

Für den Imaginärteil der Gleichung 15.103 folgt:

$$fz_1 = fz_4 + bz_1 - az_4 \quad (15.108)$$

$$w_1^2(f - b) = w_4^2(f - a) \quad (15.109)$$

Mit Hilfe von Gleichung 15.104 und 15.109 können die optimalen a und b bei vorgegebenen f ausgerechnet werden:

$$a(f - b) = z_1z_4 - bf \quad (15.110)$$

$$a = \frac{z_1z_4 - bf}{f - b} \quad (15.111)$$

$$w_1^2(f - b) = w_4^2\left(f - \frac{z_1z_4 - bf}{f - b}\right) \quad (15.112)$$

$$\frac{w_1^2}{w_4^2}(f - b)^2 = f(f - b) - z_1z_4 + bf \quad (15.113)$$

$$= f^2 - z_1z_4 \quad (15.114)$$

$$b = f \pm \frac{w_4}{w_1} \sqrt{f^2 - z_1z_4} \quad (15.115)$$

Für a folgt entsprechend:

$$b(f - a) = z_1z_4 - af \quad (15.116)$$

$$b = \frac{z_1z_4 - af}{f - a} \quad (15.117)$$

$$w_4^2(f - a) = w_1^2\left(f - \frac{z_1z_4 - af}{f - a}\right) \quad (15.118)$$

$$\frac{w_4^2}{w_1^2}(f - a)^2 = f(f - a) - z_1z_4 + af \quad (15.119)$$

$$\frac{w_4^2}{w_1^2}(f - a)^2 = f^2 - z_1z_4 \quad (15.120)$$

$$a = f \pm \frac{w_1}{w_4} \sqrt{f^2 - z_1z_4} \quad (15.121)$$

Es gilt entweder das (+) oder (-)-Vorzeichen in beiden Gleichungen. Für $a > f$ ergibt sich ein reelles Bild. Wir sehen, daß für den realen Fall endlich ausgedehnter Strahlen, der optimale Abstand der Linsen nicht gleich der Brennweite ist. Nur für den Sonderfall $f = z_1z_4$ ergibt sich der ideale Fall, daß $a=b=f$ ist.

Zusammenfassung

Für den realen Fall endlich ausgedehnter Strahlen, kann man die Feldverteilung mit Hilfe des Gauß'schen Strahl approximieren. Der Ansatz lautet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\Psi}(\vec{r})e^{-jkz}$$

wobei angenommen wird, daß sich die Amplitude Ψ nur wenig im Bereich einer Wellenlänge ändert. Es folgt dann für die Amplitude:

$$\Psi(\rho, z) = \Psi_0 \frac{1}{s(z)} \exp \left[-j \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \quad (15.122)$$

R beschreibt den Krümmungsradius und $w(z)$ die Strahlweite. Gauß'sche Strahlen weisen eine Strahltaile auf.

Die Größe $q(z)$ beschreibt den Strahl:

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

Für Dielektrika mit quadratischem Brechungsindexprofil folgt:

$$q(z) = \frac{q_0 \cos(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z) + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z)}{-q_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z) + \cos(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z)} \quad (15.123)$$

Für den Sonderfall eines homogenen Dielektrikums ergibt sich:

$$\begin{aligned} R(z) &= z + \frac{z_0^2}{z} \\ w(z)^2 &= w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \end{aligned}$$

Hier ist w_0 die Strahltaile und z_0 der Abstand von der Strahltaile, für den sich der Strahl um den Faktor $\sqrt{2}$ verbreitert hat. Der Öffnungswinkel und die Taile sind nicht unabhängig voneinander:

$$w_0 \alpha_{\text{Strahl}} \approx \frac{\lambda}{\pi} \quad (15.124)$$

Die Ausbreitung von Gauß'schen Strahlen kann einfach mit Hilfe des ABCD-Gesetzes beschrieben werden.

$$q_1 = \frac{A_0 q_0 + B_0}{C_0 q_0 + D_0}$$

Die Koeffizienten ABCD beschreiben das Medium. Die Hintereinanderschaltung von optischen Komponenten kann mit Hilfe der Multiplikation der entsprechenden ABCD-Matrizen beschrieben werden. Bei der Abbildung von Gauß'schen Strahlen mit Hilfe dünner Linsen, liegt im allgemeinen Fall der Punkt der Fokussierung nicht mehr im Abstand der Brennweite, sondern er hängt von den Tailenweiten ab.

Kapitel 16

Polarisationsmodendispersion (PMD)

Der Name Monomode-Faser ist streng genommen, falsch. In einer Monomode-Faser können sich zwei Moden ausbreiten, die aber bei exakt runden Abmessungen entartet sind, d.h. beide Moden haben identische Ausbreitungskonstanten (siehe Kapitel 12). In der Realität treten aber Abweichungen von dieser idealen Rotationssymmetrie auf. Diese Unregelmäßigkeiten werden zum Beispiel durch leicht elliptische Faserkerne, durch Unreinheiten im Material, durch äußere Beanspruchungen wie Krümmungen, Torsionen, Quetschungen, Stauchungen und durch verschiedene Umgebungseigenschaften wie Temperatur und Feuchtigkeit erzeugt. Dies führt dann zu Übertragungseigenschaften der Faser, die Abhängig von der Polarisierung des Eingangssignals sind. Zusätzlich führen Schwankungen der Umwelteinflüsse der verlegten Fasern zu einer Zeitabhängigkeit der PMD. Dies hat zur Folge, daß eventuelle Kompensationsverfahren adaptiv während des Betriebs an die sich langsam ändernden Eigenschaften der Übertragungsstrecke angepaßt werden müssen. Die Auswirkungen der PMD kann man sich dann durch folgende heuristische Überlegungen veranschaulichen. Wir stellen uns vor, daß die reale Faser durch eine leicht elliptische ideale Faser modelliert werden kann. Die Ellipse ändere sich langsam mit der Zeit. Dann hat die Faser nicht mehr zwei entartete Moden, sondern zwei Moden, die unterschiedliche Übertragungseigenschaften aufweisen. Beide Ausbreitungskonstanten können zusätzlich noch eine unterschiedliche Frequenzabhängigkeit aufweisen. Insgesamt werden wir eine schnellere und eine langsamere Ausbreitung eines Pulses feststellen, je nach dem in welche Achse der Polarisationsellipse er eingespeist wird.

Ein Puls werde nun am Eingang der Faser eingespeist. Die Eingangspolarisation sei so, daß ein Teil der Eingangsleistung sich in der schnellen Achse und ein Teil in der langsameren Achse ausbreitet. Dies führt am Ende der Faser zu einem früheren bzw. späteren Eintreffen der Teilpulse. Im Extremfall könnten die Pulse sogar nacheinander am Empfänger eintreffen. Dies führt zu Übertragungsfehlern.

Da sich die Übertragungseigenschaften der realen Faser langsam ändern, kann selbst bei

diesem einfachen Modell der PMD nicht gewährleistet werden, daß das Eingangssignal in einer der beiden Hauptachsen der Polarisationsellipse eingekoppelt werden kann.

Im allgemeinen unterscheiden sich die Ausbreitungskonstanten für die Hauptachsen auch in ihrem Frequenzverhalten. Dies bedeutet, daß der Puls in der einen Achse sich unterschiedlich verbreitert verglichen mit dem Puls in der anderen Achse.

Die Änderung der Polarisationszustände am Ausgang der Faser lassen sich als Trajektorie auf der Poincaré-Kugel darstellen (siehe Kapitel ??).

16.1 Das „Principal-States-Model“

Wir betrachten jetzt die Übertragungsfunktion einer Faser, wobei wir annehmen, daß die Dämpfung und die Nichtlinearitäten der Faser vernachlässigt werden dürfen. Unter diesen Voraussetzungen kann das Übertragungsverhalten mit Hilfe einer der Jones-Matrizen dargestellt werden.

$$\vec{e}_{out} = \mathbf{U}(\omega) e^{-j\beta_0(\omega)L} \vec{e}_{in} \quad (16.1)$$

Hier ist $\beta_0(\omega)$ die mittlere Ausbreitungskonstante zwischen den beiden Polarisationsrichtungen. Die Übertragungsmatrix \mathbf{U} ist frequenzabhängig, da die Ausbreitungskonstanten frequenzabhängig sind. Da die Faser keine Verluste aufweisen soll, ist der Betrag des Eingangsvektors gleich dem Betrag des Ausgangsvektors. Hieraus folgt, daß die Übertragungsmatrix unitär ist, daß heißt die Eigenwerte der Matrix sind betragsmäßig gleich eins.

Es kann gezeigt werden, daß die Matrix \mathbf{U} folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1(\omega) & u_2(\omega) \\ -u_2^*(\omega) & u_1^*(\omega) \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

mit

$$|u_1(\omega)|^2 + |u_2(\omega)|^2 = 1 \quad (16.3)$$

Es hat sich bei Messungen von realen Faserstrecken herausgestellt, daß zwei orthogonale Eingangspolarisationsvektoren gibt, bei denen in erster Näherung die Ausgangspolarisationsvektoren frequenzunabhängig erhalten bleiben. Diese Ausgangspolarisationsvektoren heißen „Principal States of Polarization“.

Wir entwickeln die Übertragungsfunktion $\mathbf{U}(\omega) e^{-j\beta(\omega)L}$ nach ω um ω_0 bis zum linearen Term.

$$\mathbf{U}(\omega) e^{-j\beta(\omega)L} = \mathbf{U}(\omega_0) e^{-j\beta(\omega_0)L} + \frac{\partial}{\partial \omega} \mathbf{U}(\omega) e^{-j\beta(\omega)L} \Big|_{\omega_0} \Delta\omega \quad (16.4)$$

$$= \mathbf{U}(\omega_0) e^{-j\beta(\omega_0)L} + (\mathbf{U}'(\omega_0) - \mathbf{j}\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) e^{-j\beta(\omega_0)L} \Delta\omega \quad (16.5)$$

Hier ist die partielle Ableitung nach ω mit ' gekennzeichnet. Das Erhaltenbleiben der Ausgangspolarisation bei kleinen Änderungen der Frequenz bedeutet, daß durch die obige Matrix keine zusätzliche Drehung der Vektoren entstehen darf:

$$(\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) e^{-j\beta(\omega_0)L} = 0 \quad (16.6)$$

$$(\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) = 0 \quad (16.7)$$

$$(\mathbf{U}^{-1}(\omega_0)\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)\mathbf{E}) = 0 \quad (16.8)$$

Hier ist \mathbf{E} die Einheitsmatrix. Wir sehen, daß $-j\beta'(\omega_0)$ den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}'$ entsprechen.

Die Eigenwerte können direkt aus Gleichung 16.7 ermittelt werden. Diese Gleichung hat nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn gilt:

$$\det(\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) = 0 \quad (16.9)$$

$$\det \begin{pmatrix} u'_1 - jku_1 & u'_2 - jku_2 \\ -u'^*_2 + jku_2 & u'^*_1 - jku^*_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (16.10)$$

Hier haben wir die Abkürzung $k = \beta'(\omega_0)L$ eingeführt. Es folgt:

$$(u'_1 - jku_1)(u'^*_1 - jku^*_1) - (u'_2 - jku_2)(-u'^*_2 + jku^*_2) = 0 \quad (16.11)$$

$$|u'_1|^2 + |u'_2|^2 - k^2(|u_1|^2 + |u_2|^2) - jk(u_1u'^*_1 + u'_1u^*_1 + u_2u'^*_2 + u'_2u^*_2) = 0 \quad (16.12)$$

$$|u'_1|^2 + |u'_2|^2 - k^2 \underbrace{(|u_1|^2 + |u_2|^2)}_{=1} - jk \frac{\partial}{\partial \omega} \underbrace{(|u_1|^2 + |u_2|^2)}_{=1} = 0 \quad (16.13)$$

$$|u'_1|^2 + |u'_2|^2 - k^2 = 0 \quad (16.14)$$

Es folgt für k:

$$k_{\pm} = \pm \sqrt{|u'_1|^2 + |u'_2|^2} \quad (16.15)$$

$$\beta'(\omega_0)_{\pm}L = \pm \sqrt{|u'_1|^2 + |u'_2|^2} \quad (16.16)$$

Der Ausgangsvektor berechnet sich aus dem Eingangsvektor nach Gleichung 16.5

$$\begin{aligned} \vec{e}_{out}(\omega) &= [\mathbf{U}(\omega_0)\mathbf{e}^{-j\beta(\omega_0)L} \\ &\quad + (\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) e^{-j\beta(\omega_0)L} \Delta\omega] \vec{e}_{in}(\omega) \end{aligned} \quad (16.17)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{U}(\omega_0)\mathbf{e}^{-j\beta(\omega_0)L}\tilde{\mathbf{e}}_{in}(\omega) + (\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0))\mathbf{e}^{-j\beta(\omega_0)L}\Delta\omega\tilde{\mathbf{e}}_{in}(\omega) \\ \mathbf{U}^{-1}(\omega_0)\tilde{\mathbf{e}}_{out}(\omega) &= e^{-j\beta(\omega_0)L}\vec{e}_{in}(\omega) + e^{-j\beta(\omega_0)L}\Delta\omega \underbrace{(\mathbf{U}^{-1}(\omega_0)\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{E})}_{\neq 0} \vec{e}_{in}(\omega) \end{aligned} \quad (16.18)$$

Die Ausgangspolarisation bleibt für kleine Änderungen von ω erhalten, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} u'_1 - jku_1 & u'_2 - jku_2 \\ -u'^*_2 + jku_2 & u'^*_1 - jku^*_1 \end{pmatrix} \vec{e}_{in} = 0 \quad (16.19)$$

$$\begin{pmatrix} u'_1 - jku_1 & u'_2 - jku_2 \\ -u'^*_2 + jku_2 & u'^*_1 - jku^*_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (16.20)$$

Hier sind e_1, e_2 die Komponenten des Eingangs-Jones-Vektors. Es folgt:

$$(u'_1 - jk_{\pm}u_1)e_1 + (u'_2 - jk_{\pm}u_2)e_2 = 0 \quad (16.21)$$

$$\frac{e_1}{e_2} = -\frac{u'_2 - jk_{\pm}u_2}{u'_1 - jk_{\pm}u_1} \quad (16.22)$$

Für den Jones-Vektor \vec{e}_{in} folgt somit

$$\vec{e}_{in} = \begin{pmatrix} u'_2 - jk_{\pm}u_2 \\ -u'_1 + jk_{\pm}u_1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{|u'_1 - jk_{\pm}u_1|^2 + |u'_2 - jk_{\pm}u_2|^2}} \quad (16.23)$$

Der Betrag des Jones-Vektors berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \sqrt{|u'_1 - jk_{\pm}u_1|^2 + |u'_2 - jk_{\pm}u_2|^2} \\ &= \sqrt{\underbrace{|u'_1|^2 + |u'_2|^2}_{k_{\pm}^2} + \underbrace{k_{\pm}^2(|u_1|^2 + |u_2|^2)}_1 + jk_{\pm}(u_1^*u'_1 + u_2^*u'_2 - u_1u'^*_1 - u_2u'^*_2)} \quad (16.24) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2k_{\pm}^2 + j2k_{\pm}j\Im\{u_1^*u'_1 + u_2^*u'_2\}} \quad (16.25)$$

$$= \sqrt{2k_{\pm}^2 - 2k_{\pm}\Im\{u_1^*u'_1 + u_2^*u'_2\}} \quad (16.26)$$

Diese Jones-Vektoren heißen Principle States of Polarization (PSP). Wenn die Eingangspolarisation mit diesen Vektor übereinstimmt bleibt bei kleinen Änderungen der Frequenz der Zustand des Ausgangsvektors erhalten. Jeder der beiden PSPs weist einen unterschiedliche Gruppengeschwindigkeit auf, da die Eigenwerte gemäß der Gleichung $k_{\pm} = \beta'_{\pm}(\omega_0)L$ mit der Gruppengeschwindigkeit $v_{gr\pm} = 1/\beta'_{\pm}(\omega_0)$ zusammenhängen.

Wir berechnen jetzt die Ausgangsvektoren, wobei wir annehmen, daß die Eingangsvektoren mit den PSP übereinstimmen. Aus Gleichung 16.17 folgt:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{out}(\omega) &= [\mathbf{U}(\omega_0)\mathbf{e}^{-j\beta(\omega_0)L} \\ &+ (\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) e^{-j\beta(\omega_0)L} \Delta\omega] \begin{pmatrix} u'_2 - jk_{\pm}u_2 \\ -u'_1 + jk_{\pm}u_1 \end{pmatrix} \\ &\quad \sqrt{\frac{1}{|u'_1 - jk_{\pm}u_1|^2 + |u'_2 - jk_{\pm}u_2|^2}} \quad (16.27) \\ &= [\mathbf{U}(\omega_0)\mathbf{e}^{-j\beta(\omega_0)L} \\ &+ (\mathbf{U}'(\omega_0) - j\beta'(\omega_0)L\mathbf{U}(\omega_0)) e^{-j\beta(\omega_0)L} \Delta\omega] \begin{pmatrix} u'_2 - jk_{\pm}u_2 \\ -u'_1 + jk_{\pm}u_1 \end{pmatrix} \frac{1}{|\vec{e}_{in}|} \end{aligned}$$

Hier ist $|\vec{e}_{in}|$ der Betrag des Eingangsvektors entsprechend der Wurzel in obiger Gleichung. Ich habe jetzt meine Probleme mit der Interpretation. Die PSP bleiben erhalten, wenn 1. Die Eingangsvektoren richtig eingestellt sind - kein Problem- und 2. $\beta'(\omega_0)L$ gleich einem Eigenwert ist. Dies ist aber eine Doppeldefinition für $\beta'(\omega_0)$. Denn physikalisch ist dies die Ableitung der Ausbreitungskonstante bei der Mittenfrequenz. Ist das ein Widerspruch? Da sich die Übertragungseigenschaften der Faser langsam ändern und somit diese Polarisationszustände unbekannt sind, ist in der Praxis nicht möglich, in einen der beiden Zustände einzukoppeln. Hieraus folgt, daß der Polarisationsvektor des Eingangssignals zufällig auf diese beiden Zustände aufteilt. Ein Maß für das Auseinanderlaufen der Pulse ist die differentielle Gruppenlaufzeit (Differential group delay DGD), die sich folgendermaßen berechnet:

$$\Delta\tau = |k_+ - k_-| = |\beta'_+(\omega_0) - \beta'_-(\omega_0)|L = 2\sqrt{|u'_1|^2 + |u'_2|^2} \quad (16.28)$$

Teil II

Aktive Bauelemente und Systeme der optischen Nachrichtentechnik

Anhang A

Formelsammlung

A.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Trigonometrische Beziehungen

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (\text{A.1}) \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (\text{A.6})$$

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad (\text{A.2}) \qquad 1 + \tan^2(\theta) = 1/\cos^2(\theta) \quad (\text{A.7})$$

$$1 + \cot^2(\theta) = 1/\sin^2(\theta) \quad (\text{A.3}) \qquad \tan(\theta) = 1/\cot(\theta) \quad (\text{A.8})$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \quad (\text{A.4}) \qquad \tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta) \quad (\text{A.9})$$

$$= 1 - 2\sin^2(\theta) \quad (\text{A.5}) \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \quad (\text{A.10})$$

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \pm \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) \quad (\text{A.11})$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \mp \sin(\theta_2)\sin(\theta_1) \quad (\text{A.12})$$

$$\arcsin(\theta) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\theta) \quad (\text{A.13}) \qquad \tan(\arcsin(\theta)) = \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \quad (\text{A.14})$$

Entwicklung für kleine Argumente

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots \quad (\text{A.15}) \qquad \cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \quad (\text{A.17})$$

$$\tan(\theta) = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots \quad (\text{A.16}) \qquad \cot(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} + \dots \quad (\text{A.18})$$

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (\text{A.19}) \qquad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad (\text{A.24})$$

$$\sinh^2(z) - \cosh^2(z) = 1 \quad (\text{A.20}) \qquad 1 - \tanh^2(z) = 1/\cosh^2(z) \quad (\text{A.25})$$

$$\coth^2(z) - 1 = 1/\sinh^2(z) \quad (\text{A.21}) \qquad \tanh(z) = 1/\coth(z) \quad (\text{A.26})$$

$$\cosh(2z) = 2\cosh^2(z) - 1 \quad (\text{A.22}) \qquad \tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z) \quad (\text{A.27})$$

$$\cosh(2z) = 1 + 2\sinh^2(z) \quad (\text{A.23}) \qquad \sinh(2z) = 2\sinh(z)\cosh(z) \quad (\text{A.28})$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) \pm \sinh(z_2)\cosh(z_1) \quad (\text{A.29})$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) \pm \sinh(z_2)\sinh(z_1) \quad (\text{A.30})$$

$$\operatorname{arsinh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad (\text{A.31})$$

$$\operatorname{arcosh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \text{ für } z \geq 0 \quad (\text{A.32})$$

Entwicklung für Argumente nahe 1

$$\operatorname{arcosh}(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + \dots; z \geq 1 \quad (\text{A.33})$$

$$\operatorname{arcosh}(1/z) = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1 - z^2)^{\frac{3}{2}} + \dots; z \leq 1 \quad (\text{A.34})$$

A.2 Besselfunktionen

Die Besselfunktionen der ersten und zweiten Art $J_n(z)$ und $Y_n(z)$ erfüllen die folgende Differentialgleichung:

$$z^2 \frac{d^2 F_m}{dz^2} + z \frac{dF_m}{dz} + (z^2 - m^2)F_m = 0 \quad (\text{A.35})$$

Die modifizierten Besselfunktionen der ersten und zweiten Art $I_n(z)$ und $K_n(z)$ erfüllen die folgende Differentialgleichung:

$$z^2 \frac{d^2 G_m}{dz^2} + z \frac{dG_m}{dz} - (z^2 + m^2)G_m = 0 \quad (\text{A.36})$$

Es gelten folgende Rekursionsgleichungen:

$$J_m(z) = \frac{z}{2m} \{J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z)\} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{dJ_m(z)}{dz} = \frac{1}{2} \{J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)\} \quad (\text{A.38})$$

$$J_{m+1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - \frac{dJ_m(z)}{dz} \quad (\text{A.39})$$

$$J_{m-1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) + \frac{dJ_m(z)}{dz} \quad (\text{A.40})$$

$$K_m(z) = \frac{z}{2m} \{K_{m+1}(z) - K_{m-1}(z)\} \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{dK_m(z)}{dz} = -\frac{1}{2} \{K_{m-1}(z) + K_{m+1}(z)\} \quad (\text{A.42})$$

$$K_{m+1}(z) = \frac{m}{z} K_m(z) - \frac{dK_m(z)}{dz} \quad (\text{A.43})$$

$$K_{m-1}(z) = -\frac{m}{z} K_m(z) - \frac{dK_m(z)}{dz} \quad (\text{A.44})$$

A.3 Vektorbeziehungen, Integraltheoreme

Vektoroperationen

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A})^2 \quad (\text{A.45}) \quad \vec{A} \cdot \vec{A}^* = |\vec{A}|^2 \quad (\text{A.46})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$$= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{A.48})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (\text{A.49})$$

Vektor Operatoren

$$\text{grad } f = \nabla f \quad (\text{A.50})$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{A.51})$$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{A.52})$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} \quad (\text{A.53})$$

Sei Ψ eine skalare Funktion und $\underline{\vec{A}}$ ein Vektor:

$$\nabla(\Psi_1 \Psi_2) = \Psi_1 \nabla \Psi_2 + \Psi_2 \nabla \Psi_1 \quad (\text{A.54})$$

$$\nabla \cdot (\Psi \underline{\vec{A}}) = \Psi \nabla \cdot \underline{\vec{A}} + \underline{\vec{A}} \cdot \nabla \Psi \quad (\text{A.55})$$

$$\nabla \times (\Psi \underline{\vec{A}}) = \Psi \nabla \times \underline{\vec{A}} + \nabla \Psi \times \underline{\vec{A}} \quad (\text{A.56})$$

$$\nabla \cdot (\underline{\vec{A}} \times \underline{\vec{B}}) = \underline{\vec{B}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{A}}) - \underline{\vec{A}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{B}}) \quad (\text{A.57})$$

$$\nabla^2 \Psi = \Delta \Psi = \nabla \cdot (\nabla \Psi) \quad (\text{A.58})$$

$$\nabla^2 \underline{\vec{A}} = \nabla(\nabla \cdot \underline{\vec{A}}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{\vec{A}}) \quad (\text{A.59})$$

Wenn $\underline{\vec{A}}$ in kartesischen Koordinaten vorliegt, gilt:

$$\nabla^2 \underline{\vec{A}} = \Delta \underline{\vec{A}} \quad (\text{A.60})$$

Kartesische Koordinaten

$$\underline{\vec{A}} = (A_x, A_y, A_z) = \underline{A}_x \vec{e}_x + \underline{A}_y \vec{e}_y + \underline{A}_z \vec{e}_z \quad (\text{A.61})$$

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{e}_z \equiv \nabla_t \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.62})$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{A}} = \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z} \vec{e}_z \equiv \nabla_t \underline{\vec{A}}_t + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{A.63})$$

$$\nabla \times \underline{\vec{A}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{A}_x & \underline{A}_y & \underline{A}_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.64})$$

$$\nabla_t \times \underline{\vec{A}}_t = \left(\frac{\partial \underline{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{A}_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (\text{A.65})$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \equiv \nabla_t^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.66})$$

$$\Delta \underline{\vec{A}} = \nabla^2 \underline{\vec{A}} = (\nabla^2 \underline{A}_x) \vec{e}_x + (\nabla^2 \underline{A}_y) \vec{e}_y + (\nabla^2 \underline{A}_z) \vec{e}_z \quad (\text{A.67})$$

$$\nabla^2 \underline{\vec{A}} \equiv \nabla_t^2 \underline{\vec{A}}_t + \frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial z^2} \quad (\text{A.68})$$

Zylinderkoordinaten

$$\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z) = \underline{A}_\rho \vec{e}_\rho + \underline{A}_\phi \vec{e}_\phi + \underline{A}_z \vec{e}_z \quad (\text{A.69})$$

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{e}_z \equiv \nabla_t \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.70})$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \underline{A}_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{A}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z} \equiv \nabla_t \underline{A}_t + \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial z} \quad (\text{A.71})$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{A}_\rho & \rho \underline{A}_\phi & \underline{A}_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.72})$$

$$\nabla_t \times \vec{A}_t = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho \underline{A}_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial \underline{A}_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \quad (\text{A.73})$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \equiv \nabla_t^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.74})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\Delta \underline{A}_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \underline{A}_\phi}{\partial \phi} - \frac{\underline{A}_\rho}{\rho^2} \right) \vec{e}_\rho + \left(\Delta \underline{A}_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \underline{A}_\rho}{\partial \phi} - \frac{\underline{A}_\phi}{\rho^2} \right) \vec{e}_\phi + (\Delta \underline{A}_z) \vec{e}_z \quad (\text{A.75})$$

$$\nabla^2 \vec{A} \equiv \nabla_t^2 \vec{A}_t + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} \quad (\text{A.76})$$

Integral-Theoreme

Gauß'sche Integral-Theorem:

$$\oint_F \vec{V} \bullet d\vec{F} = \int_V \nabla \bullet \vec{V} dv \quad (\text{A.77})$$

Der skalare Fluß des Feldes \vec{V} durch eine geschlossene Fläche F ist gleich dem Integral der Divergenz von \vec{V} , erstreckt über das von F begrenzte Volumen V.

Stokes'sche Integral-Theorem

$$\oint_c \vec{V} \bullet d\vec{r} = \int_F \nabla \times d\vec{F} \quad (\text{A.78})$$

Das Umlaufintegral des Feldes über die Kurve c ist gleich dem Fluß der Rotation durch eine beliebige Fläche F, die von der geschlossenen Kurve c begrenzt wird.

A.4 Zusammenhang der einzelnen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke für eine Welle

Wir setzen hier voraus, daß das betrachtete Gebiet raumladungsfrei ist und keine Ströme aufweist. Die Zeitabhängigkeit sei $e^{j\omega t}$. Zusätzlich sei es in Ausbreitungsrichtung (z) homogen. Dann können wir die elektrische und magnetische Feldstärke in eine Komponente in Ausbreitungsrichtung und eine senkrecht dazu darstellen. Die Koordinaten seien u_1, u_2, z .

$$\underline{\vec{E}} = (\underline{\vec{e}}_t(u_1, u_2) + \vec{e}_z \underline{e}_z(u_1, u_2)) e^{-j\beta z} \quad (\text{A.79})$$

$$\underline{\vec{H}} = (\underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2) + \vec{e}_z \underline{h}_z(u_1, u_2)) e^{-j\beta z} \quad (\text{A.80})$$

Mit $\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}} = -jk_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \underline{\vec{H}}$ (Gl. 3.5) folgt:

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = \nabla \times \underline{\vec{E}} \quad (\text{A.81})$$

$$= \nabla \times [(\underline{\vec{e}}_t(u_1, u_2) + \vec{e}_z \underline{e}_z(u_1, u_2)) e^{-j\beta z}] \quad (\text{A.82})$$

$$= [-j\beta \vec{e}_z \times \underline{\vec{e}}_t(u_1, u_2) + \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \times \vec{e}_z + \nabla_t \times \underline{\vec{e}}_t(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.83})$$

$$= \vec{e}_z \times [-j\beta \underline{\vec{e}}_t(u_1, u_2) - \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} + [\nabla_t \times \underline{\vec{e}}_t(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.84})$$

$$= -jk_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} [\underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2) + \vec{e}_z \underline{h}_z(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.85})$$

Entsprechend folgt mit $\text{rot } \underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}} = jk_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \underline{\vec{E}}$:

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \nabla \times \underline{\vec{H}} \quad (\text{A.86})$$

$$= \nabla \times [(\underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2) + \vec{e}_z \underline{h}_z(u_1, u_2)) e^{-j\beta z}] \quad (\text{A.87})$$

$$= [-j\beta \vec{e}_z \times \underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2) + \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \times \vec{e}_z + \nabla_t \times \underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.88})$$

$$= \vec{e}_z \times [-j\beta \underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2) - \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} + [\nabla_t \times \underline{\vec{h}}_t(u_1, u_2)] e^{-j\beta z} \quad (\text{A.89})$$

$$= jk_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \underline{\vec{e}}_z \underline{\vec{E}} = jk_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \underline{\vec{E}} \quad (\text{A.90})$$

Aus Vergleich der Komponenten in Gl. A.85 und A.90 folgt:

$$\vec{h}_t(u_1, u_2) = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \times (\beta \vec{e}_t(u_1, u_2) - j \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2)) \quad (\text{A.91})$$

$$\vec{e}_t(u_1, u_2) = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times \left(-\beta \vec{h}_t(u_1, u_2) + j \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \right) \quad (\text{A.92})$$

$$\underline{h}_z(u_1, u_2) = j \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \cdot \nabla_t \times \vec{e}_t(u_1, u_2) \quad (\text{A.93})$$

$$\underline{e}_z(u_1, u_2) = -j \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \cdot \nabla_t \times \vec{h}_t(u_1, u_2) \quad (\text{A.94})$$

Gleichung A.91 und Gleichung A.92 nach \vec{h}_t bzw. \vec{e}_t aufgelöst, ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{h}_t(u_1, u_2) &= \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \times \left\{ \beta \left[\frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(-\beta \vec{h}_t(u_1, u_2) + j \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \right) \right] - j \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \right\} \\ &= \frac{-\beta^2}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times \left(\vec{e}_z \times \vec{h}_t(u_1, u_2) \right) \\ &\quad + \frac{j\beta}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2)) - \frac{j}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \\ &= \frac{\beta^2}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{h}_t(u_1, u_2) - \frac{j\beta}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \\ &\quad - \frac{j}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_t(u_1, u_2) &= \frac{j}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2) - \beta^2} \\ &\quad \left\{ -\beta \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} k_0 \underline{n}^2(u_1, u_2) \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{e}_t(u_1, u_2) &= \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times \left\{ -\beta \left[\frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (\beta \vec{e}_t(u_1, u_2) - j \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2)) \right] + j \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \right\} \\
&= \frac{-\beta^2}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_t(u_1, u_2)) \\
&\quad + \frac{j\beta}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2)) + \frac{j}{k_0 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \\
&= \frac{\beta^2}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \vec{e}_t(u_1, u_2) - \frac{j\beta}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \\
&\quad + \frac{j}{k_0 \underline{n}^2(u_1, u_2)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \\
&= \frac{j}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2) - \beta^2} \left(-\beta \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} k_0 \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \right)
\end{aligned}$$

Es können also die transversalen Komponenten aus den Komponenten in Ausbreitungsrichtung berechnet werden, d.h. die gesamte Information steckt schon in den Komponenten in Ausbreitungsrichtung.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_t(u_1, u_2) &= \frac{j}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2) - \beta^2} \\
&\quad \left(-\beta \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} k_0 \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{h}_z(u_1, u_2) \right) \quad (\text{A.95})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{h}_t(u_1, u_2) &= \frac{j}{k_0^2 \underline{n}^2(u_1, u_2) - \beta^2} \\
&\quad \left(-\beta \nabla_t \vec{h}_z(u_1, u_2) - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} k_0 \underline{n}^2(u_1, u_2) \vec{e}_z \times \nabla_t \underline{e}_z(u_1, u_2) \right) \quad (\text{A.96})
\end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_t &= \frac{-j}{k_0^2 \underline{n}^2(\rho, \phi) - \beta^2} \left\{ \left[\beta \frac{\partial \underline{e}_z(\rho, \phi)}{\partial \rho} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{k_0}{\rho} \frac{\partial \underline{h}_z(\rho, \phi)}{\partial \phi} \right] \vec{e}_\rho \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial \underline{e}_z(\rho, \phi)}{\partial \phi} - k_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\partial \underline{h}_z(\rho, \phi)}{\partial \rho} \right] \vec{e}_\phi \right\} \quad (\text{A.97})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{h}_t &= \frac{-j}{k_0^2 \underline{n}^2(\rho, \phi) - \beta^2} \left\{ \left[\beta \frac{\partial \underline{h}_z(\rho, \phi)}{\partial \rho} - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{k_0 \underline{n}^2(\rho, \phi)}{\rho} \frac{\partial \underline{e}_z(\rho, \phi)}{\partial \phi} \right] \vec{e}_\rho \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial \underline{h}_z(\rho, \phi)}{\partial \phi} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} k_0 \underline{n}^2(\rho, \phi) \frac{\partial \underline{e}_z(\rho, \phi)}{\partial \rho} \right] \vec{e}_\phi \right\} \quad (\text{A.98})
\end{aligned}$$

Anhang B

Anhang zur Berechnung der Eigenschaften eines Gradientenwellenleiters

B.1 Bestimmung des Umkehrpunkts für beliebiges α -Profil

Wir können die z-Koordinate des Umkehrpunkts auch für das allgemeine α -Profil bestimmen.

$$z_{UP} = \frac{2\hat{x}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 \frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{B.1})$$

Mit dem Integral [18, Formel:8.380] folgt:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (\text{B.2})$$

$$= 2 \int_0^1 t^{2x-1} (1-t^2)^{y-1} dt \text{ für } \Re(x) > 0, \Re[y] > 0 \quad (\text{B.3})$$

$B(x, y)$ ist die Betafunktion für die gilt [18, Formel:8.384]:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{B.4})$$

Es folgt:

$$z_{UP} = \frac{2\hat{x}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\hat{x}}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\Delta}} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})} \quad (\text{B.6})$$

Mit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ [18, Formel:8.338.2] folgt:

$$z_{UP} = \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\Delta}} \frac{\bar{n}}{n_K} \left(\frac{a}{\hat{x}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})} \quad (\text{B.7})$$

Die z-Koordinate des Umkehrpunktes ist für unterschiedliche Strahlen unterschiedlich.

B.2 Bestimmung der optischen Weglänge bis zum Umkehrpunkt

Uns interessiert aber insbesondere die optische Weglänge, die proportional zur Laufzeit der Welle ist.

$$L_o = \int_0^{UP} n(x) ds \quad (\text{B.8})$$

Mit dem verallgemeinerten Brechungsgesetz folgt:

$$L_o = \int_0^{z_{UP}} \frac{n^2(x)}{\bar{n}} dz \quad (\text{B.9})$$

Mit der Ausbreitungsgleichung 11.43 folgt:

$$\begin{aligned} L_o &= \int_0^{\hat{x}} \frac{n^2(x)}{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}} dx \\ &= \int_0^{\hat{x}} \frac{n_K^2 [1 - 2\Delta (\frac{x}{a})^\alpha]}{n_K \sqrt{2\Delta} \sqrt{(\frac{\hat{x}}{a})^\alpha - (\frac{x}{a})^\alpha}} dx \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \int_0^{\hat{x}} \frac{[1 - 2\Delta (\frac{x}{\hat{x}})^\alpha (\frac{\hat{x}}{a})^\alpha]}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\hat{x}})^\alpha}} dx \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

mit $w = (\frac{x}{\hat{x}})^\alpha$, $x = \hat{x} w^{\frac{1}{\alpha}}$, $dx = \hat{x}^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{1}{\alpha}-1} dw$ folgt:

$$\begin{aligned} L_o &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \int_0^1 \frac{[1 - 2\Delta (\frac{\hat{x}}{a})^\alpha w]}{\sqrt{1-w}} w^{\frac{1}{\alpha}-1} dw \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \left[\int_0^1 \frac{w^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\sqrt{1-w}} dw - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \int_0^1 \frac{w^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{1-w}} dw \right] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Wir verwenden wieder Gleichung B.2 bzw. B.3:

$$\begin{aligned} L_o &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \left[B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right) - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha})} \right] \end{aligned}$$

Mit $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ folgt:

$$\begin{aligned} L_o &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})} \right] \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \left[1 - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \left[1 - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \frac{2}{2 + \alpha} \right] \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \frac{1}{2 + \alpha} \left[2 + \alpha - 4\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \right] \\ &= \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \frac{1}{2 + \alpha} \underbrace{\left[2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^\alpha \right) + \alpha \right]}_{\frac{n^2(\hat{x})}{n_K^2}} \\ &= \frac{2\bar{n}^2}{n_K \sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \frac{1}{2 + \alpha} + \frac{n_K}{\sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \frac{\alpha}{2 + \alpha} \\ &= \frac{\bar{n}}{n_K \sqrt{2\Delta}} \sqrt{\frac{a^\alpha}{\hat{x}^\alpha}} \frac{\hat{x}}{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})} \frac{1}{2 + \alpha} \left[2\bar{n} + \alpha \frac{n_K^2}{\bar{n}} \right] \end{aligned} \tag{B.12}$$

Mit Gleichung B.7 ergibt sich:

$$L_o = z_{UP} \frac{1}{2 + \alpha} \left[2\bar{n} + \alpha \frac{n_K^2}{\bar{n}} \right] \tag{B.13}$$

Die optische Länge gibt ein Maß an, für die Zeit, die der Strahl benötigt, um bis zum Umkehrpunkt zu gelangen.

Anhang C

Wellentheoretische Behandlung dielektrischer Wellenleiter

Im einfachsten Fall haben dielektrische Wellenleiter einen lichtführenden Kern mit einem Brechungsindex n_K umgeben von einem Mantel mit einem Brechungsindex n_M (siehe Bild 4.1, 4.2).

C.1 Versuch einer exakten Ableitung der Wellenausbreitung in Stufenindex-Fasern

Wir betrachten jetzt Fasern, deren Kern und Mantel jeweils einen konstanten Brechungsindex haben, sogenannte Stufenindexfasern. Die Geometrie ist in Bild 12.1 angegeben.

Wir nehmen hierbei an, daß der äußere Radius b so groß ist, daß das Feld nicht mehr an den Rand des Mantels reicht. Da sowohl im Kern als auch im Mantel der Brechungsindex konstant ist, gelten für beide Räume die Wellengleichung. Im dielektrischen Wellenleiter werden im allgemeinen nicht nur transversal elektrische bzw. transversal magnetische Wellen geführt. Es existieren auch Lösungen, die sowohl eine Komponente der elektrischen als auch der magnetischen Feldstärke in Ausbreitungsrichtung aufweisen. Beide z -Komponenten erfüllen die Wellengleichung in den homogenen Räumen (Innen- bzw. Außenraum). Wir können also für die z -Komponenten beider Feldstärken die Wellengleichung getrennt lösen. Aus den Lösungen für die z -Komponenten können nach den Überlegungen des Anhangs (Gl.A.97,A.98) die ρ - und ϕ -Komponenten der elektrischen Feldstärke ermittelt werden.

Die z -Komponente der elektrischen Feldstärke sei E_z , die der magnetischen H_z . Da beide Komponenten die gleiche Wellengleichung erfüllen müssen, lösen wir die Gleichung für eine Funktion $\Psi e^{-j\beta z}$ und setzen anschließend $E_z = e_z e^{-j\beta z} = \Psi_E e^{-j\beta z}$ bzw. $H_z = h_z e^{-j\beta z} = \Psi_H e^{-j\beta z}$. Die unterschiedlichen Lösungen (Ψ_E) und (Ψ_H) ergeben sich dann aus den

Randbedingungen.

$$\Delta\Psi + n^2 k_0^2 \Psi = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\Delta_t \Psi + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \Psi = 0 \quad (\text{C.2})$$

mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ und $\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Für den Brechungsindex n müssen wir dann n_M oder n_K einsetzen, je nachdem ob wir Mantel oder Kern betrachten. Mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (Gleichung A.74) und der Normierung $\rho = a * r$ folgt:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) a^2 \Psi = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) a^2 r^2 \Psi = 0 \quad (\text{C.4})$$

Wir setzen den Produktansatz $\Psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ in die Gleichung ein und erhalten:

$$\underbrace{\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr}}_{m^2} + \underbrace{(n^2 k_0^2 - \beta^2) a^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}_{-m^2} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Es ergeben sich für Φ und R folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + ((n^2 k_0^2 - \beta^2) a^2 r^2 - m^2) R = 0 \quad (\text{C.7})$$

Wir betrachten als erstes den Kern und führen hierfür die folgende Abkürzung ein:

$$u^2 = (n_K^2 k_0^2 - \beta^2) a^2 \quad (\text{C.8})$$

Die Gleichungen lauten somit:

$$\frac{d^2 \Phi_K}{d\phi^2} + m^2 \Phi_K = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$r^2 \frac{d^2 R_K}{dr^2} + r \frac{dR_K}{dr} + (u^2 r^2 - m^2) R_K = 0 \quad (\text{C.10})$$

Die Differentialgleichung für R_K ist die Besselsche DGL und sie hat als Lösung die Besselfunktionen J_n und Neumannfunktionen N_n . Graphen der Funktionen sind in Bild 12.3 angegeben [20], [14, S.9.8].

Die Neumannfunktionen haben einen Pol im Ursprung und ergeben somit für den Kern keine physikalisch sinnvolle Lösung. Als Lösungsmenge ergibt sich somit für den Innenraum

$$\Psi_K = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(ur) \cos(m\phi) \quad (\text{C.11})$$

für die in ϕ geraden Moden und

$$\Psi_K = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(ur) \sin(m\phi) \quad (\text{C.12})$$

für die in ϕ ungeraden Moden.

Für den Außenraum ist hier noch keine sinnvolle Auswahl der Funktionen möglich. Aus diesem Grund führt man für den Außenraum eine etwas unterschiedliche Normierung ein:

$$v^2 = (\beta^2 - n_M^2 k_0^2) a^2 \quad (\text{C.13})$$

Die Gleichungen lauten somit:

$$\frac{d^2 \Phi_M}{d\phi^2} + m^2 \Phi_M = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$r^2 \frac{d^2 R_M}{dr^2} + r \frac{dR_M}{dr} - (v^2 r^2 + m^2) R_M = 0 \quad (\text{C.15})$$

Diese DGl für R_M ist die modifizierte Besselsche Funktion, ihre Lösungen heißen modifizierte Besselfunktionen der ersten I_n und der zweiten Art K_n . Ihr Verlauf ist in Bild 12.4 angegeben.

Wir sehen, daß die modifizierten Besselfunktionen $I_n(r)$ für $r \rightarrow \infty$ nach ∞ streben und somit als physikalisch sinnvolle Lösungen ausfallen. Es ergibt sich also als Lösungen für den Außenraum für die in ϕ geraden Moden:

$$\Psi_M = \sum_{m=0}^{\infty} B_m K_m(ur) \cos(m\phi) \quad (\text{C.16})$$

und

$$\Psi_M = \sum_{m=0}^{\infty} B_m K_m(ur) \sin(m\phi) \quad (\text{C.17})$$

für die in ϕ ungeraden Moden.

Für die z-Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke können für einen transversalen Mode somit die folgenden Ansätze gemacht werden:

$$e_{zK} = A_E \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases} \quad \text{für } 0 \leq r \leq 1 \quad (\text{C.18})$$

$$h_{zK} = A_H \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \begin{cases} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{cases} \quad \text{für } 0 \leq r \leq 1 \quad (\text{C.19})$$

$$e_{zM} = B_E \frac{K_m(vr)}{K_m(v)} \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq r \leq \infty \quad (\text{C.20})$$

$$h_{zM} = B_H \frac{K_m(vr)}{K_m(v)} \begin{cases} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq r \leq \infty \quad (\text{C.21})$$

^{C.1} Aus den angegebenen Komponenten in z-Richtung können nach den Überlegungen des Anhangs die r- und ϕ -Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke ermittelt werden (siehe Gl. A.97 und A.98). Wir benötigen zur Ermittlung der Randbedingungen die Tangentialkomponenten der Feldstärken, also neben der z- noch die ϕ -Komponente der elektrischen und magnetischen Feldstärke. Es folgt mit $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ für den Kern (Gleichung A.97):

$$e_{\Phi K} = \frac{-j}{u^2} \left[\frac{a\beta}{r} \frac{\partial e_{zK}(r, \phi)}{\partial \phi} - k_0 a Z_0 \frac{\partial h_{zK}(r, \phi)}{\partial r} \right] \quad (\text{C.22})$$

Für den Rand $r=1$ folgt:

$$e_{\Phi K}(r=1) = \frac{-j}{u^2} \left[\mp \beta m A_E - k_0 Z_0 u \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} A_H \right] a \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.23})$$

C.2

Für den Mantel folgt (Gleichung A.98):

$$e_{\Phi M}(r=1) = \frac{j}{v^2} \left[\mp \beta m B_E - k_0 Z_0 u \frac{K'_m(v)}{K_m(v)} B_H \right] a \begin{Bmatrix} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

Für die ϕ -Komponente der magnetischen Feldstärke folgt im Kern:

$$h_{\Phi K} = \frac{-j}{u^2} \left[\frac{a\beta}{r} \frac{\partial h_{zK}(r, \phi)}{\partial \phi} + \frac{k_0 n_K^2 a}{Z_0} \frac{\partial e_{zK}(r, \phi)}{\partial r} \right] \quad (\text{C.25})$$

$$h_{\Phi K}(r=1) = \frac{-j}{u^2} \left[\pm m a \beta A_H + A_E \frac{k_0 n_K^2 a u}{Z_0} \frac{J'_m(ur)}{J_m(u)} \right] \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

^{C.1}Die willkürlich erscheinende Art der Wahl der ϕ -Abhängigkeit der Feldstärken erklärt sich später bei der Erfüllung der Randbedingungen.

^{C.2}Das obere Vorzeichen gehört zur oberen Winkelfunktion

Für den Mantel folgt:

$$h_{\Phi M} = \frac{-j}{v^2} \left[\frac{a\beta}{r} \frac{\partial h_{zM}(r, \phi)}{\partial \phi} + \frac{k_0 n_M^2 a}{Z_0} \frac{\partial e_{zM}(r, \phi)}{\partial r} \right] \quad (C.27)$$

$$h_{\Phi K}(r=1) = \frac{j}{v^2} \left[\pm m a \beta B_H + B_E \frac{k_0 n_M^2 a v}{Z_0} \frac{K'_m(vr)}{K_m(v)} \right] \begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \quad (C.28)$$

Wir müssen jetzt die Randbedingungen erfüllen, d.h.

$$e_{zK}(r=1) = e_{zM}(r=1) \quad (C.29)$$

$$h_{\Phi K}(r=1) = h_{\Phi M}(r=1) \quad (C.30)$$

$$e_{\Phi K}(r=1) = e_{\Phi M}(r=1) \quad (C.31)$$

$$h_{zK}(r=1) = h_{zM}(r=1) \quad (C.32)$$

Aus den ersten beiden Randbedingungen folgt:

$$A_E = B_E \quad (C.33)$$

$$A_H = B_H \quad (C.34)$$

Aus der Stetigkeit der ϕ -Komponente der elektrischen Feldstärke folgt mit

$$Y_m = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} \quad (C.35)$$

$$X_m = \frac{K'_m(v)}{v K_m(v)} \quad (C.36)$$

$$\mp \beta m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) A_E - k_0 Z_0 (Y_m + X_m) A_H = 0 \quad (C.37)$$

Aus der Stetigkeit der ϕ -Komponente der magnetischen Feldstärke folgt:

$$\mp \beta m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) A_H - \frac{k_0}{Z_0} (n_K^2 Y_m + n_M^2 X_m) A_E = 0 \quad (C.38)$$

Wir haben hier ein homogenes Gleichungssystem für A_E und A_H vorliegen:

$$\begin{pmatrix} \mp \beta m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) & -k_0 Z_0 (Y_m + X_m) \\ -\frac{k_0}{Z_0} (n_K^2 Y_m + n_M^2 X_m) & \mp \beta m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_E \\ A_H \end{pmatrix} = 0 \quad (C.39)$$

Das System liefert nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} -\beta m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) & -k_0 Z_0 (Y_m + X_m) \\ -\frac{k_0}{Z_0} (n_K^2 Y_m + n_M^2 X_m) & -\beta m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (C.40)$$

Hieraus folgt als charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Ausbreitungskonstante β :

$$\beta^2 m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right)^2 = k_0^2 (Y_m + X_m) (n_K^2 Y_m + n_M^2 X_m) \quad (\text{C.41})$$

Man beachte, daß u, v, Y_m, X_m von β abhängen. Folglich ist diese Gleichung eine Bestimmungsgleichung für die Ausbreitungskonstante β .

Wir führen jetzt einige Abkürzungen ein:

Die Ausbreitungskonstanten in homogenen Medien mit dem Brechungsindex des Kerns und Mantels sind:

$$\beta_K = \frac{n_K \omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_K \quad (\text{C.42})$$

$$\beta_M = \frac{n_M \omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_M \quad (\text{C.43})$$

mit λ_0 der Wellenlänge im Vakuum. Dann folgt für u^2 und v^2 :

$$u^2 = \frac{n_K^2 \omega^2}{c^2} a^2 - \beta^2 a^2 = \left(\frac{2\pi n_K a}{\lambda_0} \right)^2 - \beta^2 a^2 = (\beta_K^2 - \beta^2) a^2 \quad (\text{C.44})$$

$$v^2 = \beta^2 a^2 - \frac{n_M^2 \omega^2}{c^2} a^2 = \beta^2 a^2 - \left(\frac{2\pi n_M a}{\lambda_0} \right)^2 = (\beta^2 - \beta_M^2) a^2 \quad (\text{C.45})$$

Wir normieren die optische Frequenz:

$$V = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_K^2 - n_M^2} a = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_K^2 - n_M^2} \quad (\text{C.46})$$

und die Ausbreitungskonstante:

$$b = \frac{v^2}{V^2} = 1 - \frac{u^2}{V^2} = \frac{\beta^2 - \beta_M^2}{\beta_K^2 - \beta_M^2} \quad (\text{C.47})$$

Es gilt:

$$V^2 = u^2 + v^2 = (\beta_K^2 - \beta_M^2) a^2 = \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right)^2 (n_K^2 - n_M^2) \quad (\text{C.48})$$

Wir formen jetzt die charakteristische Gleichung C.41 um:

$$h^2 = \frac{\beta^2 m^2}{k_0^2 n_K^2} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right)^2 \quad (\text{C.49})$$

$$= m^2 \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 v^2} \right)^2 \frac{\beta^2 a^2}{\beta_K^2 a^2} \quad (\text{C.50})$$

$$= m^2 \left(\frac{V}{uv} \right)^4 \frac{\beta_K^2 a^2 - u^2}{\beta_K^2 a^2} \quad (\text{C.51})$$

$$= m^2 \left(\frac{V}{uv} \right)^4 \left(1 - \frac{u^2}{\beta_K^2 a^2} \right) \quad (\text{C.52})$$

$$= m^2 \left(\frac{V}{uv} \right)^4 \left(1 - \frac{(\beta_K^2 - \beta_M^2) u^2}{(\beta_K^2 - \beta_M^2) \beta_K^2 a^2} \right) \quad (\text{C.53})$$

$$= m^2 \left(\frac{V}{uv} \right)^4 \left(1 - 2\Delta \frac{u^2}{V^2} \right) \quad (\text{C.54})$$

wobei

$$\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} = \frac{\beta_K^2 - \beta_M^2}{2\beta_K^2} \quad (\text{C.55})$$

ein Maß für den Brechungsindexunterschied zwischen Kern und Mantel ist. Es folgt für die charakteristische Gleichung:

$$m^2 h^2 = (Y_m + X_m)(Y_m + (1 - 2\Delta)X_m) \quad (\text{C.56})$$

mit

$$Y_m(u) = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} \quad (\text{C.57})$$

$$X_m(v) = \frac{K'_m(v)}{v K_m(v)} \quad (\text{C.58})$$

$$v = \sqrt{V^2 - u^2} \quad (\text{C.59})$$

Wir untersuchen zuerst den Fall $\mathbf{m=0}$.

In diesem Fall liegt keine Abhängigkeit der Felder von dem Winkel ϕ vor, d.h. es gilt nach Gleichung C.18 bzw. C.20 beispielsweise für die elektrische Feldstärke:

$$e_{zK} = A_E \frac{J_0(ur)}{J_0(u)} \quad (\text{C.60})$$

$$e_{zM} = A_E \frac{K_0(ur)}{K_0(u)} \quad (\text{C.61})$$

Da jetzt in den Maxwellgleichungen C.22 bzw. C.25 keine Kopplung der Transversalkomponenten der Feldstärken zu ihren z-Komponenten besteht, liegt hier der Fall von transversal elektrischen (TE) bzw. transversal magnetischen (TM) Wellen vor. Es existieren zwei Lösungen der Eigenwertgleichung:

$$-Y_0(u) = X_0(v(u)) \quad (\text{C.62})$$

$$-Y_0(u) = (1 - 2\Delta)X_0(v(u)) \quad (\text{C.63})$$

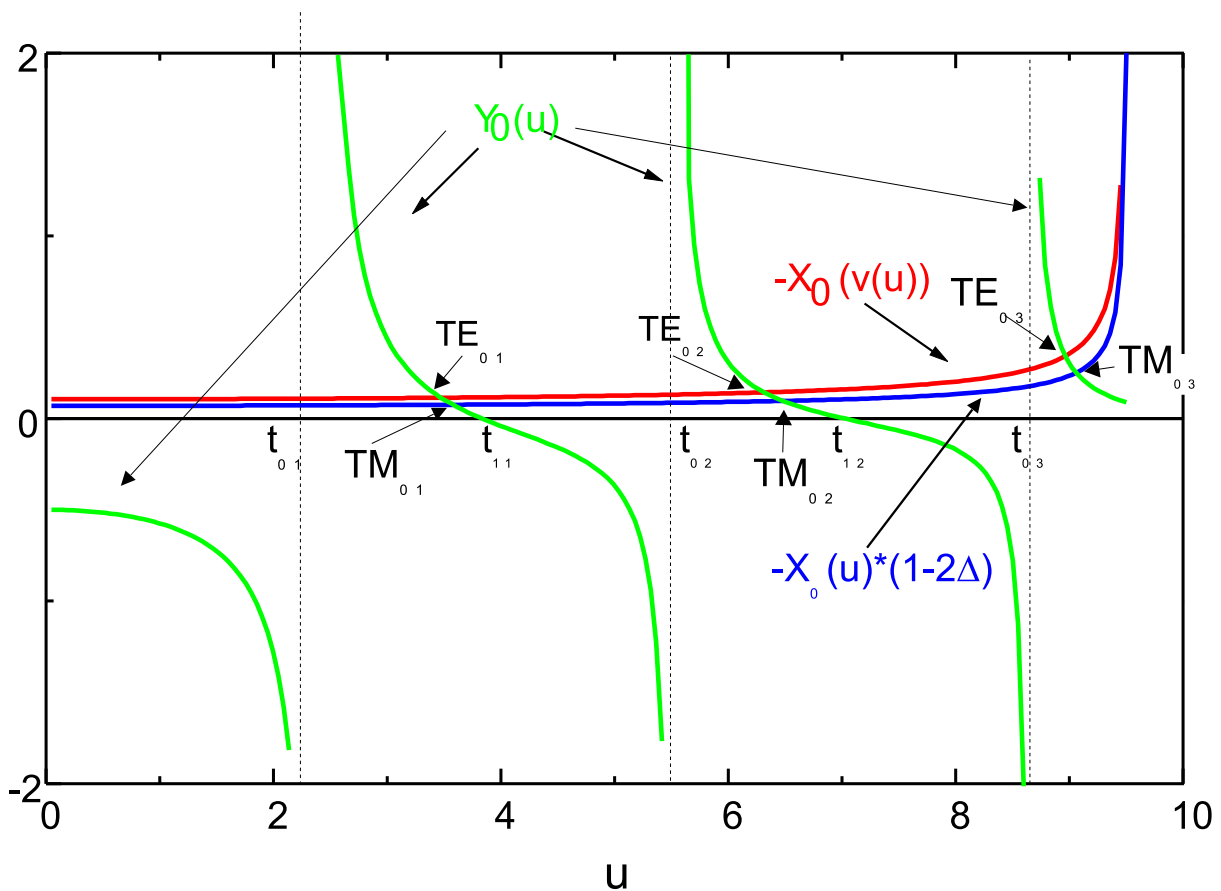


Abbildung C.1: Grafische Lösung der Eigenwertaufgabe für TE- und TM-Wellen

In Bild C.1 sind zur grafischen Lösung der Gleichungen die rechten und linken Seiten beider Gleichungen als Funktion von u aufgetragen. Die Schnittpunkte geben die Lösungen für u . Hieraus können dann mit Hilfe der Gleichung C.44 die Ausbreitungskonstante β bestimmt werden: Man kann mit Hilfe des Bildes folgendes feststellen:

1. Die rechte Seite der Gleichungen (C.62,C.63) ist immer positiv und divergiert für $V=u$.
2. Es existiert keine Lösung mit dem Index $m=0$ für $u < t_{01} = 2.4048$ ^{C.3}
3. Zwischen t_{0i} und $t_{0,i+1}$ existieren zwei Lösungen, solange $t_{0,i+1} < V$ ist.
4. Wenn die normierte Frequenz V gegen eine Lösung t_{0m} geht, folgt für diesen Mode $u \approx V$ und somit wird $v \approx 0$ und damit $\beta \approx \beta_M$. Es existiert dann keine Wellenführung für diesen Mode mehr.
5. Wenn die normierte Frequenz V beliebig groß wird, geht u für den k -ten Mode gegen t_{1k} und somit $v^2 \rightarrow V^2 - t_{1m}^2$. Da V sehr groß ist, gilt $v \rightarrow V$ und damit $\beta \rightarrow n_K$. d.h. $\beta \rightarrow \beta_K$. Das heißt, das alle Moden mit sehr hohen Frequenzen innerhalb des Kerns geführt werden.

Zusammenfassen stellen wir fest: die TM_{0k} Wellen sind keine hybriden Wellen mit E_z - **und** H_z -Komponenten. Sie haben nur ein elektrisches Feld in Ausbreitungsrichtung. Als Beispiel ist die TM_{01} -Welle in Bild C.2 dargestellt. Die magnetischen Feldlinien bilden Kreise

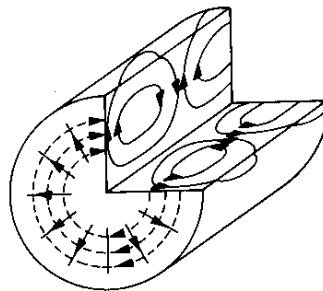


Abbildung C.2: Feld der TM_{01} -Welle, die durchgezogene Linie ist das E-Feld, die gestrichelte das H-Feld [21]

konzentrisch um die Achse, die elektrischen Feldlinien bilden Schleifen in Längsrichtung. An der Kerngrenze haben die elektrischen Feldlinien einen Knick, da die Radialkomponente unstetig ist (der Verschiebungsfluß $\varepsilon E = n^2 E$ ist stetig). In Bild C.3 ist das Feldbild der TE_{01} -Welle aufgezeichnet. Jetzt bilden die elektrischen Feldlinien Kreise um die Achse und die magnetischen Feldlinien Schleifen in Ausbreitungsrichtung.

Wir untersuchen jetzt den Fall $m > 0$.

Für diesen Fall ist sowohl h_z als auch e_z ungleich 0, d.h. es liegen hybride Moden vor. Die charakteristische Gleichung C.56 kann als quadratische Gleichung in Y_m aufgefasst

^{C.3} t_{ji} bezeichnet die i -te Nullstelle von $J_j(u)$

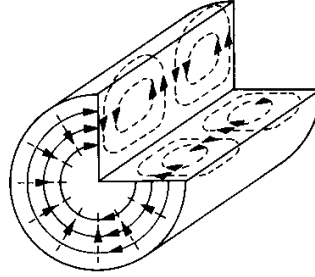


Abbildung C.3: Feld der TE_{01} -Welle, die durchgezogene Linie ist das E-Feld, die gestrichelte das H-Feld [21]

werden:

$$0 = Y_m^2 + 2Y_m X_m(1 - \Delta) + X_m^2(1 - 2\Delta) - m^2 h^2 \quad (C.64)$$

$$Y_m = -(1 - \Delta)X_m \pm \sqrt{(1 - \Delta)^2 X_m^2 - (1 - 2\Delta)X_m^2 + m^2 h^2} \quad (C.65)$$

$$= -(1 - \Delta)X_m \pm \sqrt{\Delta^2 X_m^2 + m^2 h^2} \quad (C.66)$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen der Wurzel gehören zu unterschiedlichen Lösungsklassen. Mit Hilfe der Rekursionsformel für Besselfunktionen A.39

$$J'_m(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z) \quad (C.67)$$

$$(C.68)$$

und

$$Y_m = \frac{J'_m(ur)}{u J_m(r)} \quad (C.69)$$

folgt:

$$\frac{J_{m+1}(u)}{u J_m(u)} = \frac{m}{u^2} + (1 - \Delta)X_m - \sqrt{\Delta^2 X_m^2 + m^2 h^2} \quad (C.70)$$

Hier wurde das positive Vorzeichen der Wurzel gewählt. Die zugehörigen Wellen heißen EH-Moden. Die grafische Lösung für die charakteristische Gleichung dieser Moden ist für den Fall $m=1$ in Bild C.4 angegeben.

1. Die linke Seite der Gleichung divergiert bei Nullstellen von $J_m(u) = t_{mi}$.
2. Die rechte Seite ist immer negativ und divergiert für $u \rightarrow V$
3. Es gibt bei $m=1$ keine Lösung für $V < t_{11} = 3.831$ und es existiert bei höheren Frequenzen genau eine Lösung.

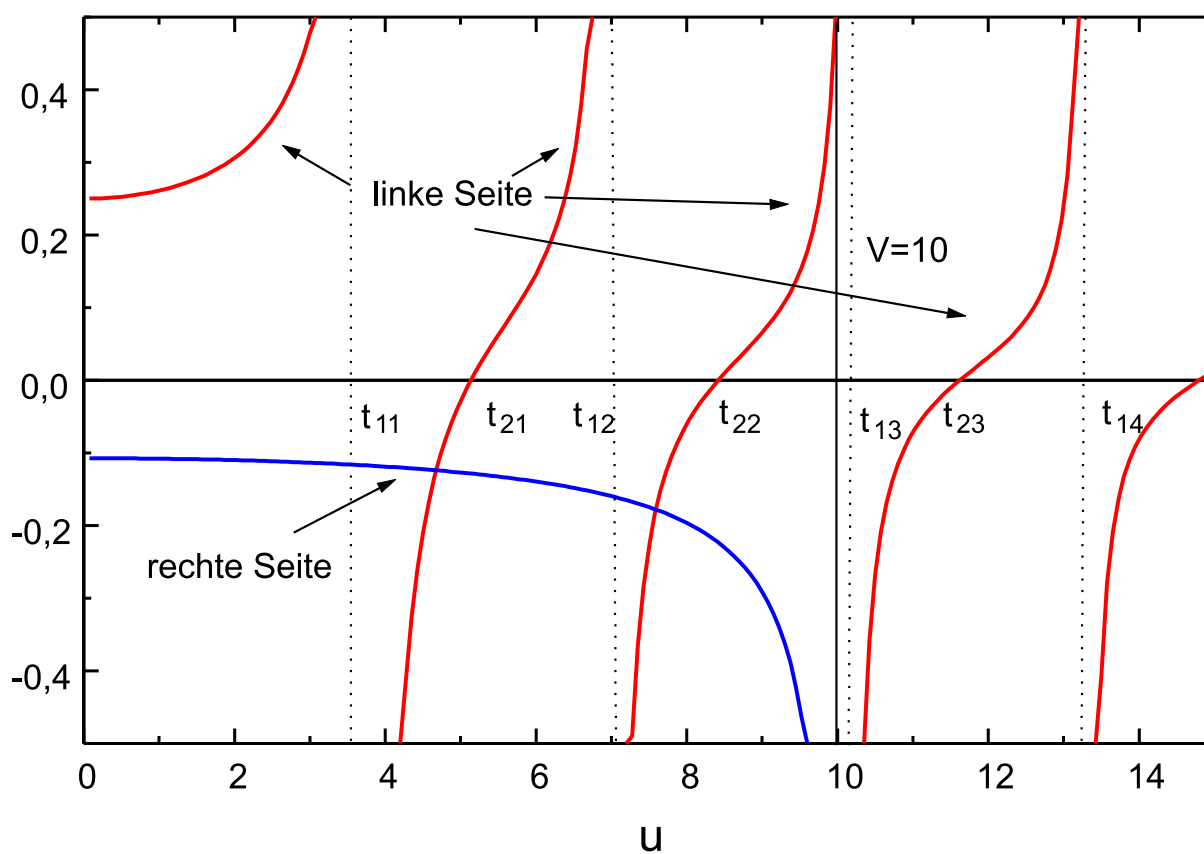


Abbildung C.4: Grafische Lösung der Eigenwertaufgabe für EH_{1k} -Wellen (Gleichung C.70 mit $m=1$)

Die 2. Lösungsmenge, die HE_{mk} -Wellen ergeben sich aus dem negativen Vorzeichen der Wurzel in Gleichung C.66.

$$Y_m(u) = -(1 - \Delta)X_m(v) - \sqrt{\Delta^2 X_m^2(v) + m^2 h^2} \quad (\text{C.71})$$

Mit A.40:

$$Y_m = \frac{J'_m}{uJ_m} = -\frac{m}{u^2} + \frac{J_{m-1}}{uJ_m} \quad (\text{C.72})$$

folgt:

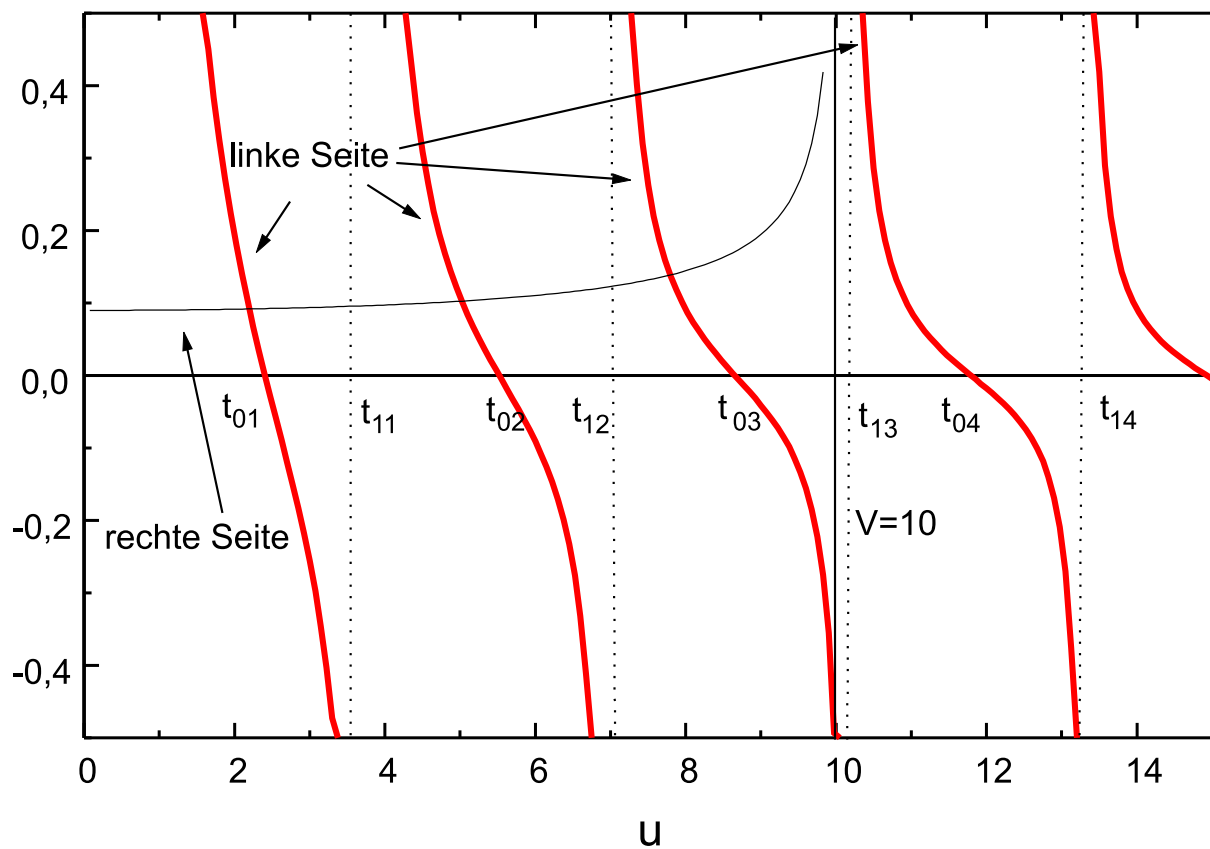


Abbildung C.5: Grafische Lösung der Eigenwertaufgabe für HE_{1k} -Wellen (Gleichung C.73 mit $m=1$)

$$\frac{J_{m-1}(u)}{uJ_m(u)} = \frac{m}{u^2} - (1 - \Delta)X_m(v) - \sqrt{\Delta^2 X_m^2(v) + m^2 h^2} \quad (\text{C.73})$$

Die Lösung dieser Gleichung wird für den Fall der HE_{1k} Welle mit Hilfe des Bildes C.5 diskutiert.

1. Die linke Seite der Gleichung C.73 divergiert bei $u = t_{1i}$
2. Die rechte Seite ist positiv und divergiert bei $u=V$
3. Es existiert genau eine Lösung im Bereich $0 < V < t_{01} = 2.405$. Hierzu gehören zwei Moden, eine mit einer sinusförmigen und einer mit einer cosinusförmigen Abhängigkeit vom Winkel Φ . Wir schließen hieraus, daß eine Faser konstruiert werden kann, die nur zwei entartete Moden mit der gleichen Ausbreitungskonstante führen kann. Diese Faser heißt Monomodefaser.
4. Die Moden sind bis zu einem $u = t_{01}$ ausbreitungsfähig.

Wir betrachten jetzt den in der optischen Nachrichtentechnik relevanten Fall der schwach führenden Fasern. Hier gilt:

$$n_K - n_M \ll n_k \quad (C.74)$$

$$\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} \quad (C.75)$$

$$\approx \frac{n_K - n_M}{n_K} \quad (C.76)$$

Für diesen Fall können die Ausbreitungsbereiche gemäß Bild 12.7 angegeben werden [11]. Man beachte aber, daß hier die Ausbreitungsbereiche für Moden mit dem Index $m > 1$ der Übersichtlichkeit wegen nicht eingezeichnet sind. Numerische Werte für die Wellen mit den niedrigsten u sind in Tabelle 12.1 aufgezeigt.

Das Feld der Grundmode HE_{11} -Welle ist in Bilde C.6 angegeben. Man erkennt den hybriden Charakter der Welle, es existiert sowohl eine Komponente der elektrischen als auch eine Komponente der magnetischen Feldstärke in Ausbreitungsrichtung. Die Krümmung der Feldlinien in einer $z=\text{const.}$ Ebene ist gering. Für kleine Brechzahlunterschiede zwischen Kern und Mantel gehen diese Kurven in Geraden über und wir erhalten eine TEM-Welle [21].

C.1.1 Schwach führende Fasern

In diesem Kapitel untersuchen wir den für die optische Nachrichtentechnik relevanten Fall geringer Brechungsindexunterschiede zwischen Kern und Mantel. Hier gilt:

$$\Delta = \frac{n_K^2 - n_M^2}{2n_K^2} \quad (C.77)$$

$$= \frac{(n_k - n_M)(n_k + n_M)}{2n_K^2} \quad (C.78)$$

$$= \frac{n_K - n_M}{n_K} \quad (C.79)$$

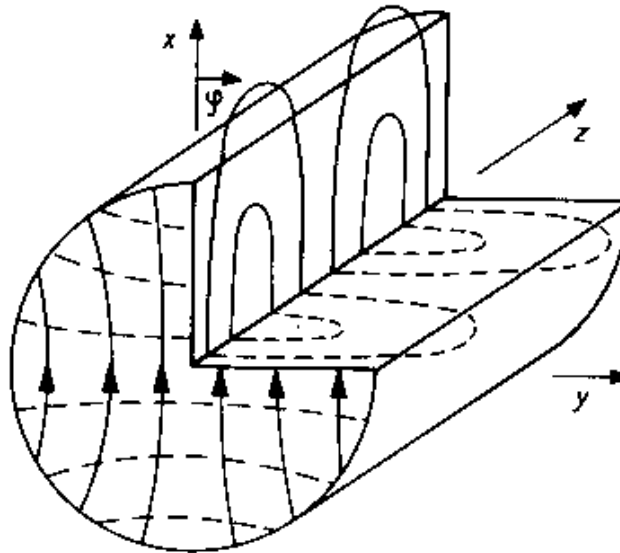


Abbildung C.6: Feld der HE_{11} -Welle, die durchgezogene Linie ist das E-Feld, die gestrichelte das H-Feld [21]

Folgende Gründe sprechen für die Wahl geringer Brechzahlunterschiede:

- Strahlenoptische Deutung für Mehrmodenfasern:

Geringe Brechzahlunterschiede haben einen kleinen Grenzwinkel der Totalreflexion zur Folge, d.h. nur achsennahe Strahlen werden geführt. Dadurch ist der Laufzeitunterschied unterschiedlicher Moden, bzw. Strahlen längst der Faser gering, was eine geringe Dispersion zur Folge hat.

- Einmodige Fasern:

Hier muß gelten: $V = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sqrt{n_K^2 - n_M^2} < 2.405$. Um keinen zu kleinen Kernradius a zu erhalten, muß der Brechungsindexunterschied gering sein.

Für untersuchen jetzt die Moden in diesen Fasern:

Für kleine Δ folgt aus der charakteristischen Gleichung C.56 mit C.54:

$$Y_m(u) + X_m(v) = \mp mh = \mp \frac{\beta m V^2}{u^2 v^2} \quad (\text{C.80})$$

Das Pluszeichen gilt für EH-Wellen, das Minuszeichen für HE-Wellen: Als erstes betrachten wir die HE-Wellen: Mit Gleichung A.40 folgt für

$$Y_m(u) = \frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} \quad (\text{C.81})$$

$$= \frac{J_{m-1}(u) - \frac{m}{u}J_m(u)}{uJ_m(u)} \quad (\text{C.82})$$

$$= \frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)u} - \frac{m}{u^2} \quad (\text{C.83})$$

und mit Gleichung A.44 folgt für

$$X_m(v) = \frac{K'_m(v)}{vK_m(v)} \quad (\text{C.84})$$

$$= \frac{-\frac{m}{v}K_m(v) - K_{m-1}(v)}{vK_m(v)} \quad (\text{C.85})$$

$$= -\frac{K_{m-1}(v)}{vK_m(v)} - \frac{m}{v^2} \quad (\text{C.86})$$

Somit ergibt sich für die charakteristische Gleichung:

$$\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)u} - \frac{m}{u^2} - \frac{K_{m-1}(v)}{vK_m(v)} - \frac{m}{v^2} = -m \frac{V^2}{u^2v^2} \quad (\text{C.87})$$

Berücksichtigen wir Gleichung C.48 ($u^2 + v^2 = V^2$) folgt:

$$\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)u} = \frac{K_{m-1}(v)}{vK_m(v)} \quad (\text{C.88})$$

Dies ist die charakteristische Gleichung für HE-Wellen für kleine Unterschiede der Brechungsindizes. Wir formen diese Gleichung weiter um, um sie mit der Näherungslösung aus Kapitel 12 zu vergleichen.

Aus Gleichung A.37 folgt für den Index m-1:

$$uJ_m(u) = -uJ_{m-2}(u) + 2(m-1)J_{m-1}(u) \quad (\text{C.89})$$

$$\frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)} = -\frac{J_{m-2}(u)u}{J_{m-1}(u)} + 2(m-1) \quad (\text{C.90})$$

Entsprechend folgt aus Gleichung A.41 für den Index m-1:

$$vK_m(v) = vK_{m-2}(v) + 2(m-1)K_{m-1}(v) \quad (\text{C.91})$$

$$\frac{vK_m(v)}{K_{m-1}(v)} = \frac{K_{m-2}(v)v}{K_{m-1}(v)} + 2(m-1) \quad (\text{C.92})$$

Eingesetzt in Gleichung C.88 folgt:

$$-\frac{J_{m-2}(u)u}{J_{m-1}(u)} = \frac{K_{m-2}(v)v}{K_{m-1}(v)} \quad (\text{C.93})$$

Für EH-Wellen folgt:

$$Y_m(u) + X_m(v) = mh = \frac{V^2}{u^2 v^2} m \quad (\text{C.94})$$

Mit Gleichung A.39 folgt

$$Y_m(u) = \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} \quad (\text{C.95})$$

$$= \frac{-J_{m+1}(u) + \frac{m}{u} J_m(u)}{u J_m(u)} \quad (\text{C.96})$$

$$= \frac{-J_{m+1}(u)}{J_m(u)u} + \frac{m}{u^2} \quad (\text{C.97})$$

und mit Gleichung A.43 folgt für

$$X_m(v) = \frac{K'_m(v)}{v K_m(v)} \quad (\text{C.98})$$

$$= \frac{\frac{m}{v} K_m(v) - K_{m+1}(v)}{v K_m(v)} \quad (\text{C.99})$$

$$= -\frac{K_{m+1}(v)}{v K_m(v)} + \frac{m}{v^2} \quad (\text{C.100})$$

Somit ergibt sich für die charakteristische Gleichung:

$$\frac{-J_{m+1}(u)}{J_m(u)u} + \frac{m}{u^2} - \frac{K_{m+1}(v)}{v K_m(v)} + \frac{m}{v^2} = m \frac{V^2}{u^2 v^2} \quad (\text{C.101})$$

Berücksichtigen wir Gleichung C.48 ($u^2 + v^2 = V^2$) folgt:

$$\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)u} = -\frac{K_{m+1}(v)}{v K_m(v)} \quad (\text{C.102})$$

Wir formen diese Gleichung noch weiter um:

$$\frac{u J_m(u)}{J_{m+1}(u)} = -\frac{v K_m(v)}{K_{m+1}(v)} \quad (\text{C.103})$$

Aus Gleichung A.37 folgt für den Index $m+1$:

$$uJ_m(u) = -uJ_{m+2}(u) + 2(m+1)J_{m+1}(u) \quad (\text{C.104})$$

$$\frac{uJ_m(u)}{J_{m+1}(u)} = -\frac{J_{m+2}(u)u}{J_{m+1}(u)} + 2(m+1) \quad (\text{C.105})$$

Entsprechend folgt aus Gleichung A.41 für den Index $m+1$:

$$vK_m(v) = vK_{m+2}(v) - 2(m+1)K_{m+1}(v) \quad (\text{C.106})$$

$$\frac{vK_m(v)}{K_{m+1}(v)} = \frac{K_{m+2}(v)v}{K_{m+1}(v)} - 2(m+1) \quad (\text{C.107})$$

Eingesetzt in Gleichung C.103 folgt:

$$\frac{J_{m+2}(u)u}{J_{m+1}(u)} = \frac{K_{m+2}(v)v}{K_{m+1}(v)} \quad (\text{C.108})$$

Dies ist die charakteristische Gleichung für EH-Wellen. Wir erkennen, daß die beiden charakteristischen Gleichungen für EH (C.108) und HE-Wellen (C.88) sich nur im Index unterscheiden, d.h. die Ausbreitungskonstanten der $HE_{m,k}$ Wellen unterscheiden sich nicht von den Ausbreitungskonstanten für $EH_{m+2,k}$ -Wellen, wenn wir die Näherung kleiner Brechzahlunterschiede machen.

Die Entartung ist nur eine Näherung. In realen schwach führenden Fasern bemerkt man die um $\Delta\beta$ leicht unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten der $HE_{m+2,k}$, $EH_{m,k}$ Wellen als Schwebung, dessen Feldbild mit wachsendem z um die Achse rotiert.

Die Feldverteilungen im Kern und Mantel lassen sich auch für die Näherung kleiner Brechzahlunterschiede angeben: Aus Gleichung C.34 bzw. C.37 folgt allgemein:

$$\frac{A_E}{B_E} = \frac{A_H}{B_H} = 1 \quad (\text{C.109})$$

$$\frac{A_E}{A_H} = \frac{-k_0 Z_0 (Y_m + X_m)}{\beta m \frac{V^2}{u^2 v^2}} \quad (\text{C.110})$$

^{C.4} Weiterhin folgt aus der charakteristischen Gleichung C.80 für die betrachtete Näherung

$$\frac{A_E}{A_H} = \pm \frac{-k_0 Z_0 \frac{\beta m V^2}{k_0 n_K u^2 v^2}}{\beta m \frac{V^2}{u^2 v^2}} \quad (\text{C.111})$$

$$= \mp \frac{Z_0}{n_K} \quad (\text{C.112})$$

^{C.5} Das obere Vorzeichen gilt für die EH- das untere für die HE-Wellen. Wir können jetzt alle Feldverteilungen angeben:

^{C.4}Wir betrachten hier nur die Cosinusabhängigkeit des elektrischen Feldes

^{C.5}Diesen Zusammenhang kennen wir von den ebenen Wellen

Für den Kern folgt:(Gleichung C.18,C.19):

$$e_{zK} = A_E \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \cos(m\phi) \quad (C.113)$$

$$h_{zK} = \mp e_{zk} \tan(m\phi) \frac{n_K}{Z_0} \quad (C.114)$$

Für die Komponente in r-Richtung folgt nach Gleichung A.97:

$$e_{rK} = \frac{-j}{u^2} \left[\beta a \frac{\partial e_z}{\partial \rho} + Z_0 \frac{ak_0}{r} \frac{\partial h_z}{\partial \phi} \right] \quad (C.115)$$

$$= \frac{-jA_E a}{u^2} \left[\beta u \frac{J'_m(ur)}{J_m(u)} \mp m \frac{n_K k_0}{r} \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \right] \cos(m\phi) \quad (C.116)$$

Da $\beta \approx k_0 n_K$ ist, folgt:

$$e_{rK} = \frac{-jA_E \beta a}{u^2} \left[u \frac{J'_m(ur)}{J_m(u)} \mp \frac{m}{r} \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \right] \cos(m\phi) \quad (C.117)$$

Mit Gleichung A.43 folgt:

$$e_{rK} = \frac{-jA_E \beta a}{u^2} \left[\frac{m}{r} \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} - u \frac{J_{m+1}(ur)}{J_m(u)} \mp \frac{m}{r} \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \right] \cos(m\phi) \quad (C.118)$$

Für EH-Wellen (- Zeichen) gilt also:

$$e_{rK} = \frac{jA_E \beta a}{u} \frac{J_{m+1}(ur)}{J_m(u)} \cos(m\phi) \quad (C.119)$$

Für HE-Wellen (+ Zeichen) folgt:

$$e_{rK} = \frac{-jA_E \beta a}{u^2} \left[\frac{2m}{r} \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} - u \frac{J_{m+1}(ur)}{J_m(u)} \right] \cos(m\phi) \quad (C.120)$$

Mit Gleichung A.37 folgt:

$$e_{rK} = \frac{-jA_E \beta a}{u} \frac{J_{m-1}(ur)}{J_m(u)} \cos(m\phi) \quad (C.121)$$

Zusammenfassend gilt nach ähnlicher Rechnung für alle Komponenten des Kerns [21]:

$$e_{rK} = \mp j A_E \frac{\beta a}{u} \frac{J_{m\mp 1}(ur)}{J_m(u)} \cos(m\phi) \quad (\text{C.122})$$

$$h_{rK} = \pm e_{rK} n_K \frac{1}{Z_0} \tan(m\phi) \quad (\text{C.123})$$

$$e_{\phi K} = j A_E \frac{\beta a}{u} \frac{J_{m\mp 1}(ur)}{J_m(u)} \sin(m\phi) \quad (\text{C.124})$$

$$h_{\phi K} = \pm e_{\phi K} n_K \frac{1}{Z_0} \cot(m\phi) \quad (\text{C.125})$$

$$e_{zK} = A_E \frac{J_m(ur)}{J_m(u)} \cos(m\phi) \quad (\text{C.126})$$

$$h_{zK} = \pm e_{zK} n_K \frac{1}{Z_0} \tan(m\phi) \quad (\text{C.127})$$

$$(\text{C.128})$$

bzw. Mantels:

$$e_{rM} = -j B_E \frac{\beta a}{v} \frac{K_{m\mp 1}(vr)}{K_m(v)} \cos(m\phi) \quad (\text{C.129})$$

$$h_{rM} = \pm e_{rM} n_M \frac{1}{Z_0} \tan(m\phi) \quad (\text{C.130})$$

$$e_{\phi M} = \mp j B_E \frac{\beta a}{v K_m(v)} \frac{K_{m\mp 1}(vr)}{K_m(v)} \sin(m\phi) \quad (\text{C.131})$$

$$h_{\phi M} = \pm e_{\phi M} n_M \frac{1}{Z_0} \cot(m\phi) \quad (\text{C.132})$$

$$e_{zM} = B_E \frac{K_m(vr)}{K_m(v)} \cos(m\phi) \quad (\text{C.133})$$

$$h_{zM} = \pm e_{zM} n_M \frac{1}{Z_0} \tan(m\phi) \quad (\text{C.134})$$

In diesen Gleichungen haben alle transversalen Komponenten den Faktor $\frac{\beta a}{u}$ im Kern bzw. $\frac{\beta a}{v}$ im Mantel. Da weiterhin $n_K \approx n_M \approx \beta$ ist und $u^2 = (n_K^2 - \beta^2)a^2$ bzw. $v^2 = (\beta^2 - n_M^2)a^2$ gilt, ist $\frac{\beta a}{u} \gg 1$ und $\frac{\beta a}{v} \gg 1$. Das heißt, die Komponenten in z-Richtung sind sehr viel kleiner als die Komponenten in transversaler Richtung. Hieraus folgt, daß die Wellen durch TEM-Wellen angenähert werden dürfen. Zudem sind sie linear polarisiert, da der Quotient der im allgemeinen komplexen Amplituden der Feldstärken (Gleichung C.112) reell ist.

Ein einfacherer Polarisationszustand ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß die $HE_{m+1,p}$ -Wellen die fast gleichen Ausbreitungskonstanten haben wie die $HE_{m-1,p}$ -Wellen, daß

heißt die Wellen sind fast entartet (vergleiche die charakteristischen Funktionen C.88 und C.108). Um die Feldverteilungen dieser Moden zu ermitteln, zerlegen wir das transversale Feld zunächst in kartesische Koordinaten:

$$E_x = E_r \cos(\phi) - E_\phi \sin(\phi) \quad (\text{C.135})$$

$$E_y = E_r \sin(\phi) + E_\phi \cos(\phi) \quad (\text{C.136})$$

So lautet dann die E_x -Komponente für den Kern

$$E_{xK} = \mp j A_E \frac{\beta a}{u} \frac{J_{m \mp 1}(ur)}{J_m(u)} (\cos(m\phi) \cos(\phi) \mp \sin(m\phi) \sin(\phi)) \quad (\text{C.137})$$

$$E_{xK} = \mp j A_E \frac{\beta a}{u} \frac{J_{m \mp 1}(ur)}{J_m(u)} (\cos((m \mp 1)\phi)) \quad (\text{C.138})$$

Die übrigen Komponenten für Kern und Mantel sind:

$$E_{yK} = \mp E_{xK} \tan((m \mp 1)\phi) \quad (\text{C.139})$$

$$H_{xK} = -j A_E n_K \frac{1}{Z_0} \frac{\beta a}{u} \frac{J_{m \mp 1}(ur)}{J_m(u)} \sin((m \mp 1)\phi) \quad (\text{C.140})$$

$$H_{yK} = \pm H_{xK} \cot((m \mp 1)\phi) \quad (\text{C.141})$$

$$E_{xM} = -j A_E \frac{\beta a}{v} \frac{K_{m \mp 1}(ur)}{K_m(u)} (\cos((m \mp 1)\phi)) \quad (\text{C.142})$$

$$E_{yM} = \mp E_{xM} \tan((m \mp 1)\phi) \quad (\text{C.143})$$

$$H_{xM} = \mp A_E n_M \frac{1}{Z_0} \frac{\beta a}{v} \frac{K_{m \mp 1}(ur)}{K_m(u)} \sin((m \mp 1)\phi) \quad (\text{C.144})$$

$$H_{yM} = \pm H_{xK} \cot((m \mp 1)\phi) \quad (\text{C.145})$$

$$(\text{C.146})$$

Wir berücksichtigen nun, daß die $HE_{m+1,p}$ und die $EH_{m-1,p}$ -Mode fast die gleichen Ausbreitungskonstanten haben, und nehmen an, daß die Ausbreitungskonstanten identisch sind. Dann sind auch alle Linearkombinationen dieser Wellen, wiederum Eigenlösungen und somit Moden. Addieren wir die $HE_{m+1,q}$ Welle mit der Amplitude $J_{m+1}(u)$ und die $EH_{m-1,q}$ -Welle mit der Amplitude $-J_{m-1}(u)$, so heben sich im Kern die E_{yK} bzw. H_{xK} Komponenten gerade auf. Es folgt für die restlichen Komponenten im Kern

$$E_{zK} = \frac{J_{m+1}(ur)}{J_m(u)} \cos((m+1)\phi) \frac{J_{m+1}(ur)}{J_m(u)} \cos((m+1)\phi) \quad (\text{C.147})$$

$$H_{zK} = n_K \frac{1}{Z_0} (J_{l+1}(ur) \cos((m+1)\phi) - J_{l-1}(ur) \cos((l-1)\phi)) \quad (\text{C.148})$$

$$E_{xK} = -2j \frac{\beta}{u} J_m(ur) \cos(m\phi) \quad (\text{C.149})$$

$$H_{yK} = E_{xK} n_K \frac{1}{Z_0} \quad (\text{C.150})$$

Hier sind wieder die z -Komponenten klein gegenüber der transversalen Komponente und können näherungsweise vernachlässigt werden. Es ergibt sich dann eine linear polarisierte TEM-Welle, die $L_{m,p}$ bezeichnet wird. Addieren wir die $HE_{m+1,q}$ Welle mit der Amplitude $J_{m+1}(u)$ und die $EH_{m-1,q}$ -Welle mit der Amplitude $J_{m-1}(u)$ so heben sich im Kern die E_{xK} bzw. H_{yK} Komponenten gerade auf und wir erhalten näherungsweise wiederum eine linear polarisierte Welle. Berücksichtigt man noch, das wir zwei unterschiedliche Winkelabhängigkeiten vorliegen haben können, so ergeben sich insgesamt vier alle näherungsweise entartete L_{mp} -Wellen.

In Bild 12.7 sind die Felder der vier möglichen LP_{11} Wellen dargestellt.

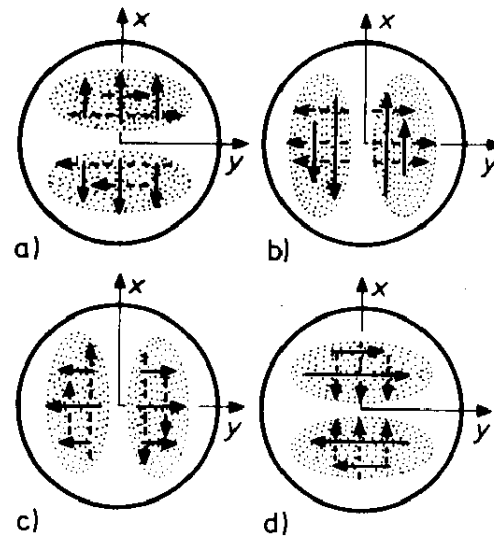


Abbildung C.7: Transversale elektrische (durchgezogen) und transversal magnetische Feldstärke (gestrichelt) und Leistungsflußdichten für die LP_{11} -Welle aus [21]

Man kann folgendes feststellen

- Jeder LP_{0m} -Mode kann von einer HE_{1m} Welle abgeleitet werden.
- Jeder LP_{1m} -Mode kann von einem TE_{0m}, TM_{0M} und einem HE_{2M} -Mode abgeleitet werden
- Jeder LP_{km} -Mode kann von einem $HE_{k+1,m}$ und $EH_{k-1,m}$ -Mode abgeleitet werden.

In Bild 12.5 sind diese Zusammenhänge ebenfalls angedeutet.

Anhang D

Ableitung der Gleichung für die effektive Fläche einer Monomodefaser

Es ist nützlich einen effektiven Feldradius w_λ bzw. eine effektive Fläche F_λ einzuführen mit

$$F_\lambda = \pi w_\lambda^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Psi_\lambda^2(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi \quad (\text{D.1})$$

Setzen wir weiterhin eine rotationssymmetrische Faser voraus, dann folgt:

$$w_\lambda^2 = 2 \int_0^\infty \Psi_\lambda^2(\rho) \rho d\rho \quad (\text{D.2})$$

Wir ermitteln jetzt w_λ für ein vorgegebenes Faserprofil:

Mit den Feldverteilungen nach Gleichung 12.41, 12.45 ergibt sich: ^{D.1}

$$w_\lambda^2 = 2 \int_0^{r_K} J_0^2(u_\lambda \rho / r_K) \rho d\rho + \frac{J_0^2(u_\lambda)}{K_0^2(v_\lambda)} \int_{r_K}^\infty K_0^2(v_\lambda \rho / r_K) \rho d\rho \quad (\text{D.3})$$

Mit dem Integral [18, 5.5.4.2]

$$\int x [Z_p(ax)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \{ [Z_p(ax)]^2 - Z_{p-1}(ax) Z_{p+1}(ax) \} \quad (\text{D.4})$$

^{D.1}Hier wurden die Amplituden so normiert, daß das Feld in der Mitte bei $\rho = 0$ gleich Eins ist.

folgt ^{D.2}:

$$\begin{aligned}
 w_\lambda^2 &= 2 \left[\frac{r^2}{2} J_0^2(u_\lambda \rho / r_K) - \frac{\rho^2}{2} J_{-1}(u_\lambda \rho / r_K) J_1(u_\lambda \rho / r_K) \right]_{\rho=0}^{r_K} \\
 &\quad + 2 \frac{J_0^2(u_\lambda)}{K_0^2(v_\lambda)} \left[\frac{\rho^2}{2} K_0^2(v_\lambda \rho / r_K) - \frac{\rho^2}{2} K_{-1}(v_\lambda \rho / r_K) K_1(v_\lambda \rho / r_K) \right]_{\rho=r_K}^{\infty} \\
 &= r_K^2 J_0^2(u_\lambda) + r_K^2 J_1^2(u_\lambda) - \frac{J_0^2(u_\lambda)}{K_0^2(v_\lambda)} [r_K^2 K_0^2(v_\lambda) - r_K^2 K_1^2(v_\lambda)] \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, daß $J_1(-x) = -J_1(x)$ [18, 8.404.2] bzw. $K_1(-x) = K_1(x)$ ist [18, 8.486.16]. Es folgt weiter:

$$w_\lambda^2 = r_K^2 \frac{J_1^2(u_\lambda) K_0^2(v_\lambda) + J_0^2(u_\lambda) K_1^2(v_\lambda)}{K_0^2(v_\lambda)} \quad (D.6)$$

Setzen wir $(K_0(v_\lambda) J_1(u_\lambda))$ aus Gleichung C.88 ein:

$$w_\lambda^2 = r_K^2 \frac{\frac{v_\lambda^2}{u_\lambda^2} J_0^2(u_\lambda) K_1^2(v_\lambda) + J_0^2(u_\lambda) K_1^2(v_\lambda)}{K_0^2(v_\lambda)} \quad (D.7)$$

$$= r_K^2 \frac{(v_\lambda^2 + u_\lambda^2) J_0^2(u_\lambda) K_1^2(v_\lambda)}{u_\lambda^2 K_0^2(v_\lambda)} \quad (D.8)$$

$$= r_K^2 \frac{V_\lambda^2 J_0^2(u_\lambda) K_1^2(v_\lambda)}{u_\lambda^2 K_0^2(v_\lambda)} \quad (D.9)$$

Entsprechend ergibt sich für die effektive Fläche:

$$F_\lambda = \pi r_K^2 \frac{V_\lambda^2 J_0^2(u_\lambda) K_1^2(v_\lambda)}{u_\lambda^2 K_0^2(v_\lambda)} \quad (D.10)$$

^{D.2}Hier ist Z_p eine beliebige Besselfunktion

Anhang E

Ausbreitung eines idealen NRZ-Pulses über eine Faser

In diesem Abschnitt betrachten wir die Ausbreitung eines idealen rechteckigen Pulses über eine Faser. Es wird hier die gleiche Übertragungsfunktion der Faser angenommen, wie sie im Kapitel 9 verwendet wurde.

Die Pulsform sei

$$\begin{aligned}\underline{E}(t) &= \frac{E_0}{\sqrt{T}} e^{j\omega_0 t} \text{ für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ &= 0 \text{ sonst}\end{aligned}\tag{E.1}$$

Als erstes betrachten wir die Fouriertransformierte des Signals .

$$\begin{aligned}U(t) &= 1 \text{ für } t \geq 0 \\ &= 0 \text{ sonst}\end{aligned}\tag{E.2}$$

Im Folgenden verwenden wir das Symbol \Longleftrightarrow für die Fouriertransformation:

$$x(t) \Longleftrightarrow x(\omega)\tag{E.3}$$

Es folgt

$$U(t) \Longleftrightarrow U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\tag{E.4}$$

(siehe [16, Formel 4.14]).

Nach dem Verschiebungssatz der Fouriertransformation folgt:

$$U(t - \frac{T}{2}) \Longleftrightarrow (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})e^{-j\omega\frac{T}{2}}\tag{E.5}$$

$$U(t + \frac{T}{2}) \Longleftrightarrow (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})e^{j\omega\frac{T}{2}}\tag{E.6}$$

Für die Fouriertransformierte eines Rechteckimpuls $x_i(t)$ der Höhe Eins von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ ergibt sich:

$$x_i(t) \iff (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}) \quad (\text{E.7})$$

$$\equiv 2j(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})\sin(\omega\frac{T}{2}) \quad (\text{E.8})$$

Äquivalent ergibt sich für die Fouriertransformierte der Eingangsfeldstärke:

$$\underline{E}_i(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{T}} 2j(\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)})\sin((\omega - \omega_0)\frac{T}{2}) \quad (\text{E.9})$$

Nach Gleichung 9.3 folgt für das Spektrum des Ausgangssignals:

$$\underline{E}_{out}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{T}} 2j(\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)})\sin((\omega - \omega_0)\frac{T}{2})e^{-j(\beta(\omega) - j\alpha)L} \quad (\text{E.10})$$

Entwickelt man die Ausbreitungskonstante $\beta(\omega)$ um ω_0 bis zum quadratischen Term und berechnet das Ausgangssignal im Zeitbereich, so folgt nach Gleichung 9.5:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{out}(t) &= e^{-\alpha L} e^{-j\beta(\omega_0)L} e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \frac{E_0}{\sqrt{T}} 2j \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\{\beta'(\omega_0)\omega + \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2\}L} (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}) \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Führen wir wieder die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega_0}{\beta(\omega_0)}$ bzw. Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = \frac{1}{\beta'(\omega_0)}$ ein, so folgt:

$$\underline{E}_{out}(t) = j \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}) \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega \quad (\text{E.12})$$

$$= j \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{j\omega} \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega \quad (\text{E.13})$$

$$= j \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \quad (\text{E.14})$$

$$\left[\int_0^{\infty} e^{j\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{j\omega} \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega + \int_{-\infty}^0 e^{j\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{j\omega} \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega \right] \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} &= j \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \\ &\quad \left[\int_0^{\infty} e^{j\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{j\omega} \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega - \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{j\omega} \sin(\omega\frac{T}{2}) d\omega \right] \\ &= \frac{2E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \int_0^{\infty} e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{\omega} \sin(\omega\frac{T}{2}) \cos(\omega(t - \frac{L}{v_{gr}})) d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Mit $\sin(x) * \cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$ folgt

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \int_0^\infty e^{-j\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L} \frac{1}{\omega} \left[-\sin\left(\omega\left(t - \frac{T}{2} - \frac{L}{v_{gr}}\right)\right) + \sin\left(\omega\left(\frac{T}{2} + t - \frac{L}{v_{gr}}\right)\right) \right] d\omega \quad (E.17)$$

$$= \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}})} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L\right) - j \sin\left(\frac{1}{2}\beta''(\omega_0)\omega^2 L\right) \right] \left[-\sin\left(\omega\left(t - \frac{T}{2} - \frac{L}{v_{gr}}\right)\right) + \sin\left(\omega\left(\frac{T}{2} + t - \frac{L}{v_{gr}}\right)\right) \right] d\omega \quad (E.18)$$

Die Integrale

$$F_c(t, a) = \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \cos(a\omega^2) \sin(\omega t) d\omega \quad (E.19)$$

$$F_s(t, a) = \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \sin(a\omega^2) \sin(\omega t) d\omega \quad (E.20)$$

sind lösbar [30, S. 136] ^{E.1}

$$F_c(t, a) = \frac{\pi}{2} \left[C\left(\frac{t^2}{4a}\right) + S\left(\frac{t^2}{4a}\right) \right] \quad (E.21)$$

$$F_s(t, a) = \frac{\pi}{2} \left[C\left(\frac{t^2}{4a}\right) - S\left(\frac{t^2}{4a}\right) \right] \quad (E.22)$$

Hier sind C(x) und S(x) die Fresnelintegrale:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x y^{-\frac{1}{2}} \cos(y) dy \quad (E.23)$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x y^{-\frac{1}{2}} \sin(y) dy \quad (E.24)$$

Diese Integrale sind tabelliert.

Es folgt für das Ausgangssignal für $t < -\frac{T}{2}$: ^{E.2}

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}} + \frac{L}{v_{gr}})} \left[F_c\left(-t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L\right) - F_c\left(-t - \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L\right) \right] \quad (E.25)$$

$$-jF_s\left(-t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L\right) + jF_s\left(-t - \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L\right) \quad (E.26)$$

^{E.1}Es ist zu berücksichtigen, daß die Integrale in der angegebenen Form nur für $t > 0$ gelten.

^{E.2}Um Schreibarbeit zu sparen, betrachten wir außerdem alle Zeitpunkte relativ zur Verschiebung durch die Gruppenlaufzeit: $t \rightarrow t - L/v_{gr}$

Für $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ folgt:

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}} + \frac{L}{v_{gr}})} \left[F_c(-t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) + F_c(t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) \right. \quad (E.27)$$

$$\left. -jF_s(-t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) - jF_s(t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) \right] \quad (E.28)$$

Für $t > \frac{T}{2}$ folgt

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{\pi\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}} + \frac{L}{v_{gr}})} \left[-F_c(t - \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) + F_c(t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) \right. \quad (E.29)$$

$$\left. +jF_s(t - \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) - jF_s(t + \frac{T}{2}, \frac{1}{2}\beta''(\omega_0)L) \right] \quad (E.30)$$

Setzen wir die Integrale E.21 und E.22 ein, so folgt für $t < -\frac{T}{2}$ mit den Abkürzungen:

$$C_a = C \left(\frac{(t + \frac{T}{2})^2}{2\beta''(\omega_0)L} \right) \quad (E.31)$$

$$S_a = S \left(\frac{(t + \frac{T}{2})^2}{2\beta''(\omega_0)L} \right) \quad (E.32)$$

$$C_b = C \left(\frac{(t - \frac{T}{2})^2}{2\beta''(\omega_0)L} \right) \quad (E.33)$$

$$S_b = C \left(\frac{(t + \frac{T}{2})^2}{2\beta''(\omega_0)L} \right) \quad (E.34)$$

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{2\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}} + \frac{L}{v_{gr}})} [C_b + S_b - C_a - S_a - jC_b + jS_b + jC_a - S_a] \quad (E.35)$$

Für $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ folgt:

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{2\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}} + \frac{L}{v_{gr}})} [C_b + S_b + C_a + S_a - jC_b + jS_b - jC_a + jS_a] \quad (E.36)$$

Für $t > \frac{T}{2}$ folgt:

$$\underline{E}_{out}(t) = \frac{E_0}{2\sqrt{T}} e^{-\alpha L + j\omega_0(t - \frac{L}{v_{ph}} + \frac{L}{v_{gr}})} [-C_b - S_b + C_a + S_a + jC_b - jS_b - jC_a + jS_a] \quad (E.37)$$

Häufig findet man auch die folgenden Definitionen für die Fresnelintegrale [20, S.300]

$$C'(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \quad (E.38)$$

$$S'(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \quad (E.39)$$

Es folgt dann für die Abkürzungen C_a, C_b, S_a, S_b

$$C_a = C' \left(\frac{(t + \frac{T}{2})}{\sqrt{\pi\beta''(\omega_0)L}} \right) \quad (E.40)$$

$$S_a = S' \left(\frac{(t + \frac{T}{2})}{\sqrt{\pi\beta''(\omega_0)L}} \right) \quad (E.41)$$

$$C_b = C' \left(\frac{(t - \frac{T}{2})}{\sqrt{\pi\beta''(\omega_0)L}} \right) \quad (E.42)$$

$$S_b = S' \left(\frac{(t - \frac{T}{2})}{\sqrt{\pi\beta''(\omega_0)L}} \right) \quad (E.43)$$

Zusätzlich kann noch der Dispersionskoeffizienten D (entsprechend Gleichung 9.29) in die Gleichungen eingesetzt werden:

$$D = \frac{2\pi c}{\lambda_0^2} \beta''(\omega_0) \quad (E.44)$$

Es folgt dann für die Abkürzungen C_a, C_b, S_a, S_b

$$C_a = C' \left(\frac{(t + \frac{T}{2})}{\lambda_0 \sqrt{LD/2c}} \right) \quad (E.45)$$

$$S_a = S' \left(\frac{(t + \frac{T}{2})}{\lambda_0 \sqrt{LD/2c}} \right) \quad (E.46)$$

$$C_b = C' \left(\frac{(t - \frac{T}{2})}{\lambda_0 \sqrt{LD/2c}} \right) \quad (E.47)$$

$$S_b = S' \left(\frac{(t - \frac{T}{2})}{\lambda_0 \sqrt{LD/2c}} \right) \quad (E.48)$$

In Bild E.1 ist die Entwicklung eines idealen Rechteckimpulses bei der Ausbreitung über eine Monomodefaser mit einer Dispersion von 17 ps/km/nm aufgetragen. Die Dämpfung des Pulses ist vernachlässigt. Die anfängliche Pulsbreite beträgt 100 ps.

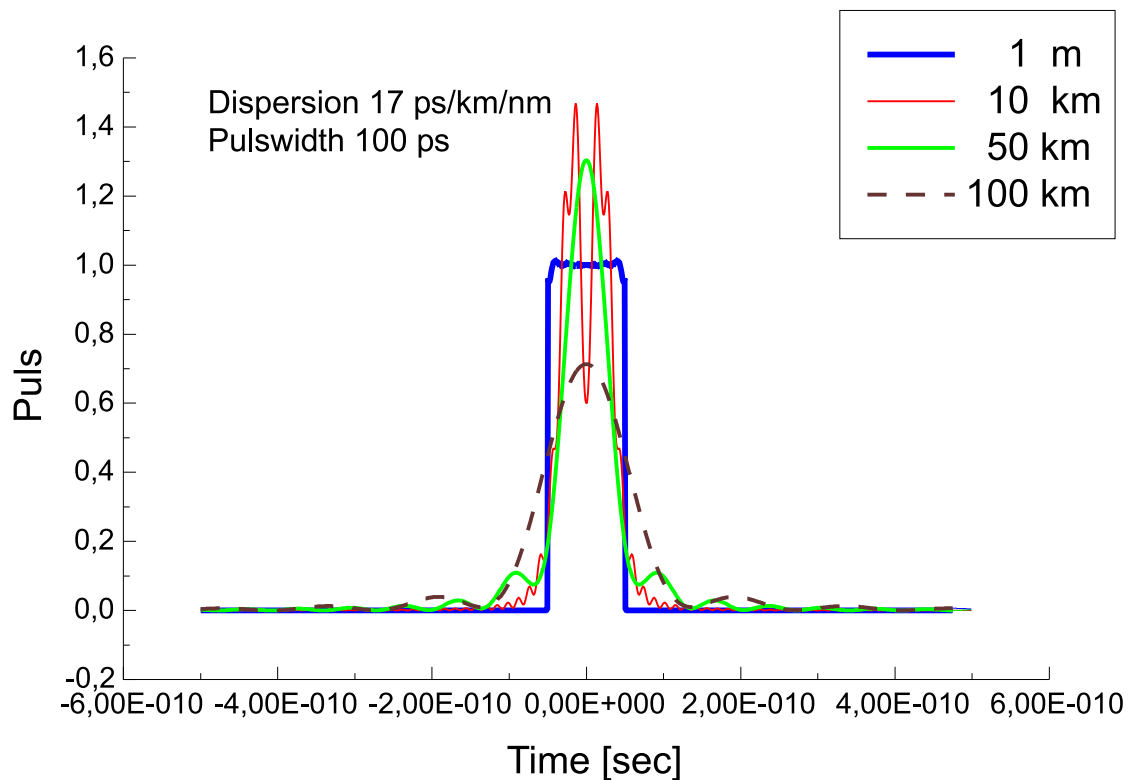


Abbildung E.1: Die Ausbreitung eines Rechteckimpulses über eine Monomodefaser

Anhang F

Störungsrechnung [9]

Wir geben hier eine kurze Einführung in die Störungsrechnung am Beispiel einer Faser. Wir nehmen dazu an, daß die Faser nur kleine Brechungsindex-Variationen aufweist. Ausgangsgleichung ist die Wellengleichung 12.7, wobei wir hier die Gleichungen allgemeiner für eine ρ -Abhängigkeit des Brechungsindex formulieren und die Frequenzabhängigkeit hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden kann.

$$\Delta_t \underline{E}_y + (k_0^2 \underline{n}(\rho)^2 - \beta^2) \underline{E}_y = 0 \quad (\text{F.1})$$

Für die Feldstärke setzen wir wieder eine Separationsbedingung an:

$$\begin{aligned} (\Delta_t + k_0^2 \underline{n}(\rho)^2 - \bar{\beta}_m^2) \bar{\Psi}_m(\rho, \phi) e^{-j\bar{\beta}_m z} &= 0 \\ (\Delta_t + k_0^2 (\underline{n}_0(\rho) + \Delta n(\rho))^2 - \bar{\beta}_m^2) \bar{\Psi}_m(\rho, \phi) e^{-j\bar{\beta}_m z} &= 0 \\ (\Delta_t + k_0^2 (\underline{n}_0(\rho)^2 + 2n_0(\rho)\Delta n(\rho)) - \bar{\beta}_m^2) \bar{\Psi}_m(\rho, \phi) e^{-j\bar{\beta}_m z} &\approx 0 \\ (\Delta_t + k_0^2 \underline{n}_0(\rho)^2 + k_0^2 \delta f(\rho) - \bar{\beta}_m^2) \bar{\Psi}_m(\rho, \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Hier haben wir angenommen, daß das Quadrat des Brechungsindex sich aus einem Term $n_0(\rho)^2$, für den wir die Lösung des Problems kennen und einem kleinen Term zusammensetzt. Die Funktion f beschreibt die Ortsabhängigkeit dieser Störung, δ beschreibt die Größe der Störung. Der Index m bezeichnet den m -ten Mode. Es gilt also:

$$\delta f(\rho) = 2n_0(\rho)\Delta n(\rho) \quad (\text{F.3})$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{F.4})$$

Die bekannte Lösung der ungestörten Gleichung

$$(\Delta_t + k_0^2 n_0(\rho)^2 - \beta_m^2) \Psi_m(\rho, \phi) = 0 \quad (\text{F.5})$$

sei Ψ_m und der zugehörige Eigenwert β_m . Wir setzen jetzt den folgenden Ansatz in die gestörte Gleichung ein:

$$\bar{\Psi}_m = \Psi_m + \delta \Phi_m + \delta^2 \Xi_m + \dots \quad (\text{F.6})$$

$$\bar{\beta}_m^2 = \beta_m^2 + \delta \lambda_m^2 + \delta^2 \nu^2 + \dots \quad (\text{F.7})$$

und sortieren die Terme nach der Potenz von δ

$$\begin{aligned} & (\Delta_t + k_0^2 n_0(\rho)^2 - \beta_m^2) \Psi_m(\rho, \phi) + \\ & \delta [(\Delta_t + k_0^2 n_0(\rho)^2 - \beta_m^2) \Phi_m(\rho, \phi) + (k_0^2 f(\rho) - \lambda_m^2) \Psi_m(\rho, \phi)] + \\ & \dots = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Jede Potenz von δ muß verschwinden, für die nullte Potenz ergibt sich die ungestörte Gleichung, für die erste Potenz von δ folgt:

$$(\Delta_t + k_0^2 n_0(\rho)^2 - \beta_m^2) \Phi_m(\rho, \phi) + (k_0^2 f(\rho) - \lambda_m^2) \Psi_m(\rho, \phi) = 0$$

Wir entwickeln jetzt die Φ_m nach den Moden des ungestörten Problems Ψ_i :

$$\Phi_m = \sum_j a_{mj} \Psi_j \quad (\text{F.9})$$

Die Moden seien normiert auf: $\int_{\mathbb{R}_2} |\Psi_j(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi = 1$, zusätzlich sind sie orthogonal. Wir setzen sie in Gleichung F.9 ein:

$$\sum_i a_{mi} (\Delta_t + k_0^2 n_0(\rho)^2 - \beta_m^2) \Psi_i(\rho, \phi) + (k_0^2 f(\rho) - \lambda_m^2) \Psi_m(\rho, \phi) = 0 \quad (\text{F.10})$$

Der erste Summand kann mit Hilfe der ungestörten Gleichung ausgedrückt werden:

$$\sum_i a_{mi} (\beta_i^2 - \beta_m^2) \Psi_i(\rho, \phi) + (k_0^2 f(\rho) - \lambda_m^2) \Psi_m(\rho, \phi) = 0 \quad (\text{F.11})$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit Ψ_l^* und integrieren über den \mathbb{R}_2

$$\begin{aligned} \sum_i a_{mi} (\beta_i^2 - \beta_m^2) \int_{\mathbb{R}_2} \Psi_l(\rho, \phi)^* \Psi_i(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi + \int_{\mathbb{R}_2} (k_0^2 f(\rho) - \lambda_m^2) \Psi_l(\rho, \phi)^* \Psi_m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi &= 0 \\ \sum_i a_{mi} (\beta_i^2 - \beta_m^2) \delta_{l,i} + \left(k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} f(\rho) \Psi_l(\rho, \phi)^* \Psi_m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi - \lambda_m^2 \delta_{m,l} \right) &= 0 \\ a_{ml} (\beta_l^2 - \beta_m^2) + \left(k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} f(\rho) \Psi_l(\rho, \phi)^* \Psi_m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi - \lambda_m^2 \delta_{m,l} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Hier ist $\delta_{m,l} = 1$ für $m = l$ und 0 sonst. Für $m = l$ folgt:

$$\lambda_m^2 = k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} f(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \quad (\text{F.12})$$

Für $m \neq l$ folgen die Koeffizienten a_{ml} :

$$a_{ml} = \frac{-k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} f(\rho) \Psi_l(\rho, \phi)^* \Psi_m(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi}{(\beta_l^2 - \beta_m^2)} \quad (\text{F.13})$$

Der Eigenwert der gestörten Gleichung kann somit einfach bestimmt werden:

$$\bar{\beta}_m^2 = \beta_m^2 + \delta k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} f(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \quad (\text{F.14})$$

$$= \beta_m^2 + k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} 2n_0(\rho) \Delta n(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \quad (\text{F.15})$$

Kann für das ungestörte Problem, der Brechungsindex durch einen effektiven Brechungsindex n_{0eff} ausgedrückt werden, der unabhängig von den Ortskoordinaten ist, so folgt ^{F.1}:

$$\bar{\beta}_m^2 = k_0^2 n_{0eff,m}^2 + k_0^2 \int_{\mathbb{R}_2} 2n_{0eff,m} \Delta n(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \quad (\text{F.16})$$

$$\approx k_0^2 \left[n_{0eff,m}^2 + \int_{\mathbb{R}_2} 2n_{0eff,m} \Delta n(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi + \left(\int_{\mathbb{R}_2} \Delta n(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \right)^2 \right]$$

$$\approx k_0^2 \left[n_{0eff,m} + \int_{\mathbb{R}_2} \Delta n(\rho) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \right]^2 \quad (\text{F.17})$$

$$\approx k_0^2 \left[\int_{\mathbb{R}_2} (n_0(\rho) + \Delta n(\rho)) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \right]^2 \quad (\text{F.18})$$

$$\bar{\beta}_m \approx k_0 \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}_2} (n_0(\rho) + \Delta n(\rho)) |\Psi_m(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi \right]}_{n_{eff,m}} \quad (\text{F.19})$$

Dies ist die Definition des zugehörigen effektiven Brechungsindex.

^{F.1}Bei einer Monomodefaser hängt dieser Index nicht von m ab, da nur ein Mode existiert

Literaturverzeichnis

- [1] J. Singh. *Semiconductor Devices*. McGraw Hill, 1994.
- [2] R. Paul. *Halbleiterphysik*. Dr A.Hüthig Verlag, 1995.
- [3] H. Strack. Skriptum zu Halbleiter Bauelemente A+B. Technical report, Technische Hochschule Darmstadt, 1997.
- [4] K.J.Ebeling. *Integrierte Optoelektronik*. Springer Verlag, 1992.
- [5] V. V. Mitin, V.A.Kochelab, and M. A. Strosio. *Quantum Heterostructures Microelectronics and Optoelectronics*. Cambridge University Press, 1999.
- [6] S.L.Chuang. *Physics of Optoelectronic Devices*. J. Wiley & Sons, 1995.
- [7] R. Müller. *Grundlagen der Halbleiter-Elektronik*. Springer Verlag, 1995.
- [8] D. Wood. *Optoelectronic Semiconductor Devices*. Prentice Hall, 1994.
- [9] D. Hilbert R. Courant. *Methoden der mathematischen Physik I*. Springer Verlag, 1968.
- [10] J.P.McKelvey. *Solid State and Semiconductor Physics*. Harper & Row, 1966.
- [11] J. Gowa. *Optical Communication Systems*. Prentice Hall International Series in Optoelectronics, 2 edition, 1993.
- [12] O. Ziemann. Grundlagen und Anwendungen optischer Polymerfasern. *Der Fernmelde Ingenieur*, 1996.
- [13] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Oldenbourg Verlag, 1977.
- [14] T. Weiland. Skriptum zur klassischen Feldtheorie. Technical report, Technische Hochschule Darmstadt, WS 1995/96.
- [15] Ch. Weissmantel and C. Hamann. *Einführung in die Festkörperphysik*. Springer Verlag, 1980.

- [16] A. Papoulis. *The Fourier Integral and its Applications*. McGraw-Hill, 1962.
- [17] G. P. Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic Press, 1995.
- [18] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1980.
- [19] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1971.
- [20] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc. New York, 1972.
- [21] H.-G. Unger. *Optische Nachrichtentechnik, Teil I: Optische Wellenleiter*. Hüthig Verlag, 1984.
- [22] E. Hecht. *Optik*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [23] A. Yariv. *Introduction to optical electronics*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [24] Ch. Kittel. *Einführung in die Festkörperphysik*. R. Oldenbourg, 1986.
- [25] W. Harth and H. Grothe. *Send- und Empfangsdioden für die optische Nachrichtentechnik*. B.G. Teubner, 1998.
- [26] G.P. Agrawal and N.K. Dutta. *Semiconductor Lasers*. van Nostrand Reinhold, 1993.
- [27] I. Morita, M. Suzuki, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, and S. Akiba. 20-gb/s single-channel soliton transmission over 9000 km without inline filters. *Photonic Technology Letters*, 8:1573–1574, 1996.
- [28] E. Desurvire. *Erbium Doped Fiber Amplifiers, Principles and Applications*. John Wiley and Sons, 1994.
- [29] L. Kazovsky, S. Benedetto, and A. Willner. *Optical Fiber Communication Systems*. Artech House, 1996.
- [30] Fritz Oberhettinger. *Tabellen zur Fouriertransformation*. Springer Verlag, 1957.
- [31] R. Zurmühl. *Matrizen*. Springer Verlag, 1964.