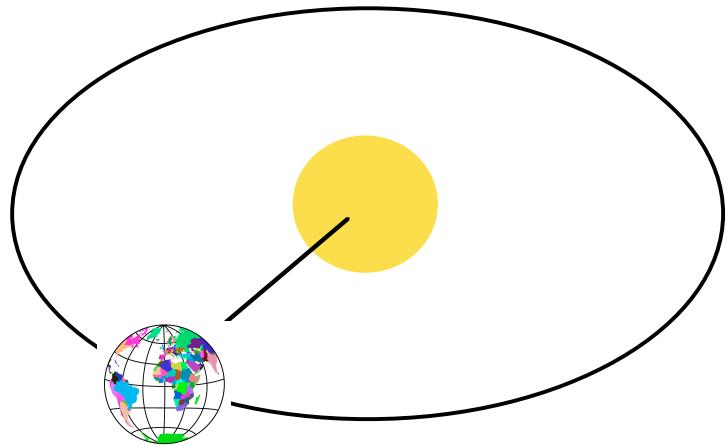


Klassische Mechanik



Mit einer Einführung in die Elastizitätstheorie

Reinhard Hentschke

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen der Mechanik	1
1.1	Koordinaten [†]	1
1.2	Vektoren [†]	3
1.3	Differenzieren und Integrieren [†]	5
1.4	Komplexe Zahlen [†]	14
2	Die Gesetze der Mechanik	17
2.1	Eine Übersicht [†]	17
2.2	Zwei Beispiele zur newtonischen Mechanik [†]	22
3	Prinzip der kleinsten Wirkung für eine Koordinate	27
3.1	Lagrangesche Gleichung für eine Koordinate [†]	27
3.2	Zwei einfache Beispiele [†]	29
3.3	Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung [†]	30
4	Prinzip der kleinsten Wirkung	33
4.1	Lagrange Funktion eines Systems von Massenpunkten	33
4.2	Erhaltungsgrößen	39
4.3	Lagrange Funktion im beschleunigten System	42
4.4	Wirkungsintegral freier relativistischer Teilchen	45
4.5	Eine Anwendung aus der Chemie	49
5	Integration der Bewegungsgleichungen	51
5.1	Eindimensionale Bewegung [†]	51
5.2	Bewegung im Zentralfeld [†]	52
5.3	Streuung [‡]	55
6	Kleine Schwingungen	63
6.1	Eindimensionale Bewegung [†]	63
6.2	Normalmodenanalyse	71
7	Bewegung starrer Körper	77
7.1	Trägheitstensor und Drehimpuls [†]	77
7.2	Bewegungsgleichungen des starren Körpers	82
7.3	Starre Körper in statischem Kontakt [†]	86
8	Kanonische Mechanik	89
8.1	Die hamiltonschen Gleichungen	89
8.2	Hamilton-Jacobi Theorie	91

9	Vielteilchenmechanik	95
9.1	Numerische Integration der Bewegungsgleichungen [†]	95
9.2	Grundlagen der Statistischen Mechanik [‡]	97
9.3	Klassifikation dynamischer Systeme	104
9.4	Wege ins Chaos	106
10	Grundgleichungen der Elastizitätstheorie[♡]	111
10.1	Verzerrungs- und Spannungstensor	111
10.2	Freie Energie	114
10.3	Gleichgewichtsbedingungen für isotrope feste Körper	120
10.4	Beispiele	121
10.5	Elastische Wellen im isotropen unendlichen Medium	127
A	Formeln und Einheiten	129
B	Übungsaufgaben	131

Vorbemerkungen

Diese Vorlesung über Klassische Mechanik richtet sich hauptsächlich an Studenten der Physik im Rahmen der üblichen Vorlesungsabfolge im Grundstudium – Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik, Statistische Mechanik.

Das erste Kapitel (*Mathematische Grundlagen der Mechanik*) fasst einige wichtige mathematische Hilfsmittel zusammen. Das zweite Kapitel (*Die Gesetze der Mechanik*) ist eine Übersicht der Klassischen Mechanik gedacht als Orientierungshilfe für Anfänger. Das dritte Kapitel (*Prinzip der kleinsten Wirkung für eine Koordinate*) bricht mit der Tradition, im ersten Semester die so genannte lagrangesche Mechanik nicht zu erwähnen. Erfahrungsgemäß jedoch beklagen die meisten Physikstudenten den für sie nicht ersichtlichen Zusammenhang der einzelnen Gebiete der Physik in den ersten vier bis sechs Semestern. Das Prinzip der kleinsten Wirkung erscheint mir ein wirklicher Ariadnefaden in diesem Labyrinth zu sein, so dass ich dieser Versuchung nicht widerstehen konnte. Diese ersten drei Kapitel bilden zusammen den Einführungsteil.

In den folgenden vier Kapiteln wird die Klassische Mechanik bezogen auf die Standardprobleme (Ein- und Zweiteilchenprobleme, Schwingungen, starrer Körper) behandelt. Das achte Kapitel (*Kanonische Mechanik*) behandelt die Hamilton und Hamilton-Jacobi Theorie. Es bereitet die mechanische Grundlage für die Quantenmechanik und insbesondere die Statistische Mechanik. Zusammen bilden die genannten fünf Kapitel den Kern dieser Vorlesung. Dieser orientiert sich stark am Mechanik Band des Landau/Lifschitz [1]. Die Notwendigkeit des Übergangs von der Mechanik zur Statistischen Mechanik und die dabei auftauchenden Probleme werden im neunten Kapitel (*Vielteilchenmechanik*) behandelt.

Das zehnte Kapitel (*Grundgleichungen der Elastizitätstheorie*) ist dadurch motiviert, dass im gegenwärtigen Studienplan für Physiker das wichtige und interessante Gebiet der Mechanik elastischer Körper nicht auftaucht. In seiner momentanen Form, die dem Band *Elastizitätstheorie* des Landau/Lifschitz [2] folgt, dient es als kurze Einführung, die je nach Möglichkeit den Stoff ergänzen sollte. Das Kapitel soll Studenten in die Lage versetzen, selbstständig in Referenz [2] oder in anderen ein-

schlägigen Lehrbüchern¹ ihr Wissen zu vertiefen.

Den Abschnitten dieser Vorlesung habe ich eine Gewichtung zugeordnet, die durch die hochgestellten Symbole † und ‡ bzw. durch kein Symbol sowie durch ♦ angezeigt wird:

- †: Dieser eingeschränkte Stoff ist für Anfänger besonders wichtig. Ich denke dabei an eine integrierte Vorlesung für Erstsemester, in der Experimentatoren und Theoretiker gemeinsam lehren.
- ‡: Diese Inhalte sollten nach Bedarf berücksichtigt werden. Beispielsweise kombinieren integrierte Erstsemestervorlesungen in der Regel Mechanik und Wärme, so dass ein gewisser Ausblick in die Vielteilchenmechanik notwendig wird.
- *kein Symbol*: Diese Abschnitte sind für Fortgeschrittene wichtig. Dabei denke ich wiederum an integrierte Vorlesungen für (in der Regel) Drittsemester.
- ♦: Die Einführung in die Elastizitätstheorie sollte nach Möglichkeit und Neigung für Fortgeschrittene ab dem dritten Semester berücksichtigt werden.

In diesem Sinne sind auch die im Anhang B zusammengestellten Übungsaufgaben zu sehen.

Zusätzlich zu den genannten Referenzen [1] und [2] habe ich gelegentlich weitere Referenzen verwendet. Diese sind im Text genannt².

Schließlich möchte ich an dieser Stelle meinen Dank an Frau Susanne Christ für das *TEXen* meiner Notizen aussprechen.

Reinhard Hentschke

Bergische Universität
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Gauß-Str. 20
42097 Wuppertal
e-mail: hentschk@uni-wuppertal.de
<http://constanze.materials.uni-wuppertal.de>

¹z.B.: S.P. Timoshenko, J.M. Gere *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill

²Erwähnen möchte ich schon hier H. Goldstein *Classical Mechanics*, Addison-Wesley sowie W. Greiner *Theoretische Physik - Mechanik*, Harri-Deutsch

Die vorliegende Version vom April 2006 ist
eine Überarbeitung des ursprünglichen Skripts
vom Februar 2002

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen der Mechanik

Dies ist eine kompakte Darstellung mathematischer Grundlagen speziell für die theoretische Mechanik in der folgenden Vorlesung. Die Ausgangsbasis bilden Kenntnisse, wie sie in den Grundkursen der gymnasialen Oberstufe vermittelt werden. Auf mathematische Strenge wurde zugunsten eines transparenten und selbstkonsistenten Aufbaus verzichtet. Ebenfalls verzichtet wurde auf die Diskussion von Differenzialgleichungen. Teilweise werden Beispiele später im Text behandelt und teilweise reichen einfache Näherungslösungen aus, um die physikalische Bedeutung einer Gleichung herauszuarbeiten. Folgende Texte seien zur Vertiefung empfohlen:

K. Weltner (Herg.) *Mathematik für Physiker*, Vieweg

S. Großmann *Mathematischer Einführungskurs in die Physik*, Teubner Studienbücher

1.1 Koordinaten[†]

Ein Punkt auf einer Geraden wird durch eine Zahl festgelegt, die seine Position bezüglich eines willkürlich gewählten Ursprungs angibt (vgl. Abbildung 1.1). Ein Punkt auf einer Fläche benötigt zwei Zahlen. Ein Punkt im dreidimensionalen Raum erfordert drei Zahlen usw. Dabei ist die Anordnung der Achsen des Koordinatensystems zu beachten. Wir arbeiten ausschließlich mit Systemen, bei denen der Daumen in die x -Richtung, der Zeigefinger in die y -Richtung und der Mittelfinger der rechten

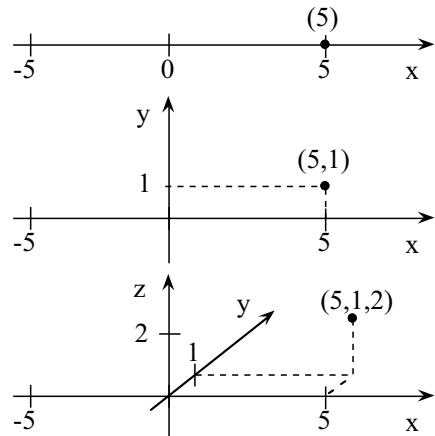


Abbildung 1.1: Kartesische Koordinaten

Hand in die z -Richtung zeigt. Man spricht auch von einem Rechtssystem.

In der Physik ist es häufig zweckmäßig, die kartesischen Koordinaten in der obigen Skizze durch andere, der Symmetrie des betrachteten Systems angepaßte, Koordinaten auszudrücken. Die beiden wichtigsten Alternativen sind Polarkoordinaten in zwei Dimensionen bzw. Zylinder- und Kugelkoordinaten in drei Dimensionen. Polarkoordinaten (siehe Abbildung 1.2) sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi\end{aligned}\tag{1.1}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) definiert. Die Größe r ist der Abstand des Punktes vom Ursprung, während ϕ den

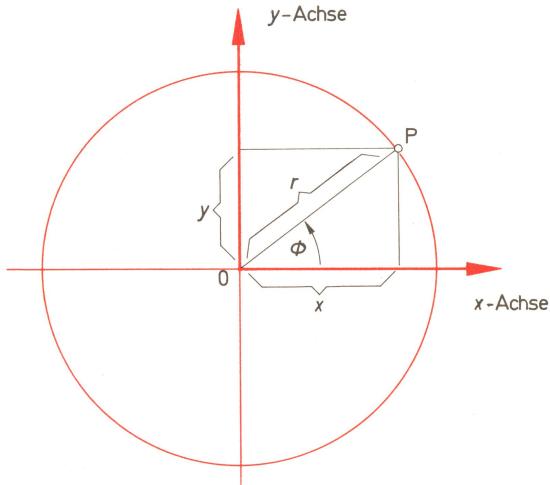


Abbildung 1.2: Polarkoordinaten

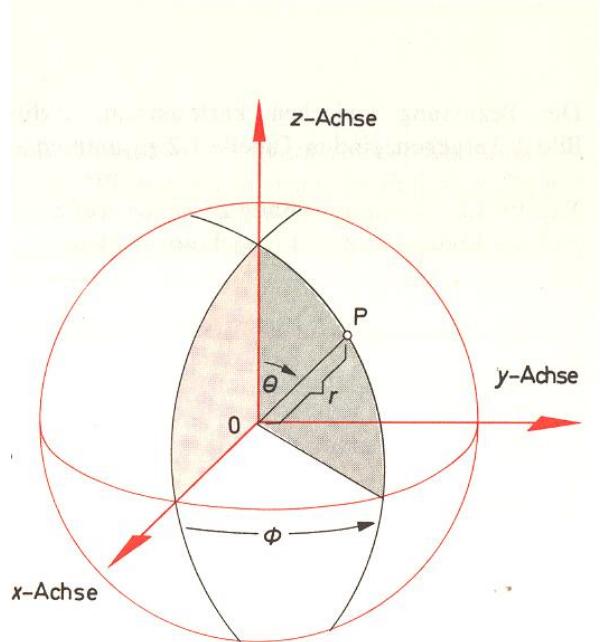


Abbildung 1.4: Kugelkoordinaten

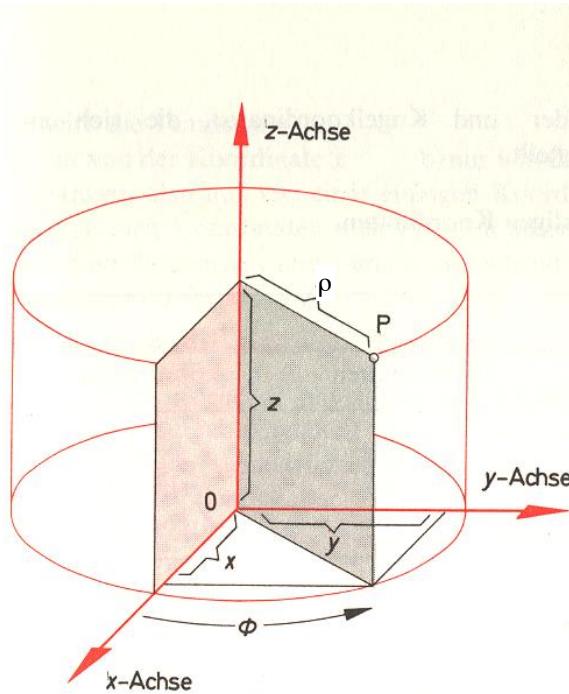


Abbildung 1.3: Zylinderkoordinaten

Winkel zwischen der durch r markierten Strecke und der x -Achse bezeichnet. Zylinder- (siehe Abbildung 1.3) und Kugelkoordinaten (siehe Abbildung 1.4) sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.2)$$

bzw.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

definiert. Die Größe ρ ist der radiale Abstand des Punktes von der Zylinder- bzw. z-Achse. Im Fall der Kugelkoordinaten ist r wieder der Abstand des Punktes vom Ursprung. Diesmal jedoch ist ϕ der Winkel zwischen der Projektion von r auf die x - y -Ebene und der x -Achse. Der Winkel θ ist der Winkel zwischen r und der z -Achse.

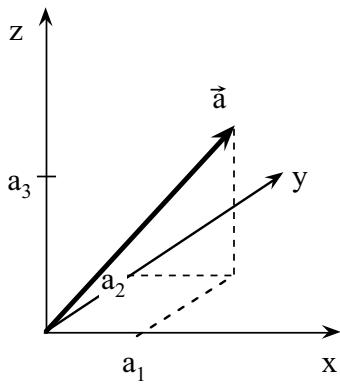


Abbildung 1.5: Der Vektor \vec{a} in drei Dimensionen vom Ursprung aus gezeichnet.

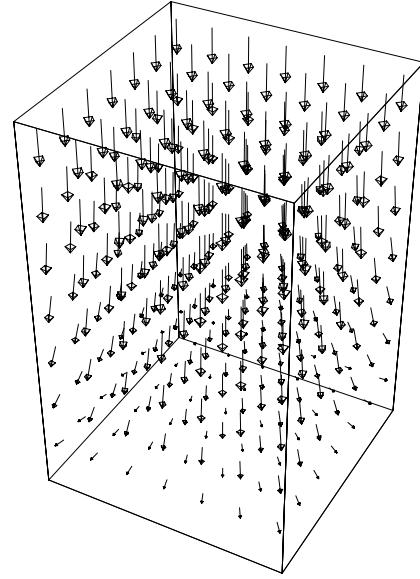


Abbildung 1.6: Deformation einer Säule mit quadratischem Querschnitt im Schwerefeld. Die Pfeile illustrieren die Richtung sowie durch ihre Länge den Betrag der Verschiebung, den ein Punkt in der Säule aufgrund des Schwerefeldes erfährt.

1.2 Vektoren[†]

Vektoren beschreiben physikalische Größen, die neben skalarer Information (Betrag des Vektors) auch eine Richtung im Raum haben. Beispiele sind Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft. Grafisch werden Vektoren durch Pfeile dargestellt. Numerisch erfolgt die Darstellung in Komponenten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Hier ist d die Raumdimension (für gewöhnlich $d = 3$; vgl. Abbildung 1.5). Man schreibt dann auch

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

wobei x , y und z die Komponenten des Vektors in einem rechtshändigen, rechtwinkligen Koordinatensystem sind. Vektoren treten an diskreten Punkten im Raum auf, z. B. die Kräfte auf die Lager einer Brücke. Es gibt aber auch kontinuierliche Vektorfelder, beispielsweise das Verschiebungsfeld innerhalb einer quadratischen Säule im Schwerefeld der Erde wie in Abbildung 10.8 gezeigt.

Rechnen mit Vektoren[†]:

Einige einfache Rechenregeln für den Umgang mit Vektoren lauten wie folgt:

- Multiplikation mit Skalaren (Zahlen) c :

$$c\vec{a} = c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_d \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

- Addition und Subtraktion (vgl. Abbildung 1.7):

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_d + b_d \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_d - b_d \end{pmatrix}.$$

- Betrag eines Vektors: Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors \vec{a} ist dessen Länge und ergibt sich einfach aus

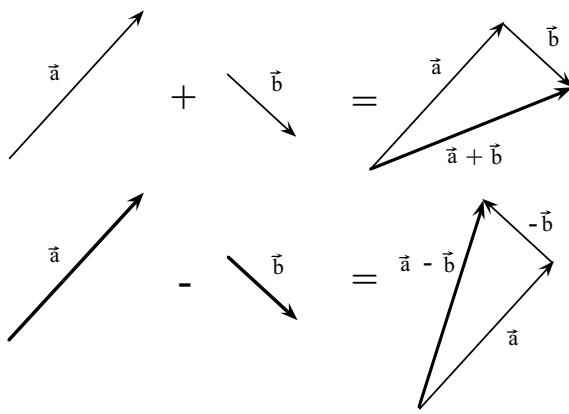


Abbildung 1.7: Grafische Addition und Subtraktion von Vektoren.

dem Phythagoras:

$$|\vec{a}| \equiv a \equiv \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2}. \quad (1.7)$$

- Skalarprodukt: Das Skalarprodukt liefert, wie der Name sagt, ein Skalar und ist wie folgt definiert:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^d a_i b_i. \quad (1.8)$$

In drei Dimensionen gilt insbesondere

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \gamma, \quad (1.9)$$

wobei γ der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ist. Der „Beweis“ basiert auf dem Kosinussatz:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Durch Vergleich mit

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 \\ &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= \underbrace{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}_{=a^2} + \underbrace{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}_{=b^2} \\ &\quad - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

- Vektor- oder Kreuzprodukt: Hier beschränken wir uns auf $d = 3$, d. h. für das Kreuzprodukt gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

(insbesondere gilt $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$). Aber welche Bedeutung hat diese Definition? Wir bilden die Größe $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ und finden

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= a_2 b_3 a_1 + a_3 b_1 a_2 + a_1 b_2 a_3 \\ &\quad - a_3 b_2 a_1 - a_1 b_3 a_2 - a_2 b_1 a_3 = 0 \end{aligned}$$

Das gleiche gilt für $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$. D. h. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu \vec{a} und \vec{b} . Da sich die relative Orientierung von Vektoren unter Drehungen im Raum nicht ändert, genügt es, den Spezialfall

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab_2 \end{pmatrix}$$

zu betrachten. D. h. \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein rechthändiges Dreibein. Mit $ab_2 = ab \sin \gamma$ folgt außerdem

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab |\sin \gamma|. \quad (1.11)$$

D. h. der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Flächeninhalt, der durch \vec{a} und \vec{b} festgelegten Raute (vgl. Abbildung 1.8). Simple Fortsetzung dieses Gedankens ergibt, dass der Betrag der Größe

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad (1.12)$$

genannt Spatprodukt, der Rauminhalt des durch \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannten schiefwinkligen Quaders ist (vgl. Abbildung 1.8)). Insbesondere folgt z. B. durch explizites Ausmultiplizieren

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (1.13)$$

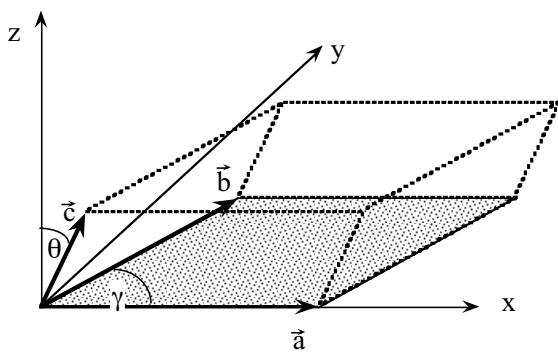


Abbildung 1.8: Grafische Darstellung der von zwei Vektoren aufgespannten Fläche (schraffiert) sowie des Spatprodukts.

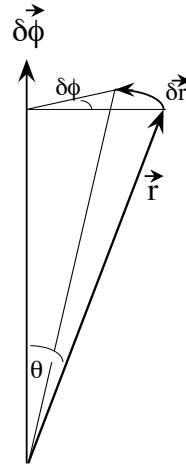


Abbildung 1.9: Infinitesimale Drehung

(zyklische Vertauschbarkeit). Man beachte, dass das Spatprodukt kein echter Skalar ist. Beispielsweise ändert die Spiegelung aller Achsen am Ursprung das Vorzeichen.

Das Kreuzprodukt eignet sich zur Beschreibung der Drehung von Vektoren! Um dies zu sehen, betrachten wir die Abbildung 1.9. Wir wählen irgend eine Achse durch den ebenfalls beliebig gewählten Ursprung. Dann führen wir eine (infinitesimale) Drehung um diese Achse aus. Durch diese Drehung wird aus \vec{r} der neue Vektor $\vec{r}' + \delta\vec{r}$. Für $\delta\vec{r}$ schreiben wir

$$\delta\vec{r} = r \sin \theta \delta\phi \vec{e}_{\delta\vec{r}} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}.$$

Hier ist $\vec{e}_{\delta\vec{r}}$ ein Einheitsvektor (Vektor vom Betrag Eins) in Richtung von $\delta\vec{r}$ und $\delta\vec{\phi}$ ist ein Vektor in Achsenrichtung vom Betrag $\delta\phi$. Wenn wir jetzt diese Gleichung formal durch δt teilen, dann folgt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\phi}} \times \vec{r}$$

bei konstantem r . Die Größe $\dot{\vec{\phi}}$ nennt man Winkelgeschwindigkeit. Sie wird meist mit dem griechischen Buchstaben ω als $\vec{\omega}$ bezeichnet.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Gleichung

$$\delta\vec{a} = \delta\vec{\phi} \times \vec{a} \quad (1.14)$$

allgemein für jeden Vektor \vec{a} gilt, auch wenn sein Ursprung nicht auf der Drehachse liegt. Letzteres

beweisen wir wie folgt: Es sei $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$, wobei der Ursprung von \vec{c} auf der Drehachse liegen soll. Somit liegt auch der Ursprung von \vec{b} auf der Drehachse. Daher gilt $\delta\vec{a} = \delta\vec{b} - \delta\vec{c} = \delta\vec{\phi} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \delta\vec{\phi} \times \vec{a}$.

1.3 Differenzieren und Integrieren[†]

Differenzieren[†]:

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^\nu. \quad (1.15)$$

Hier soll ν zunächst ganzzahlig sein. Die Steigung der Funktion an der Stelle x ist näherungsweise

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}, \quad (1.16)$$

wobei δx klein sein soll. Im Grenzfall $\delta x \rightarrow 0$ nennt man

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta x} \quad (1.17)$$

die Ableitung (Steigung) von f an der Stelle x ¹. Im Fall der Gl. (1.15) folgt

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{(x + \delta x)^\nu - x^\nu}{\delta x} = \frac{x^\nu \left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)^\nu - x^\nu}{\delta x}.$$

Da für δx näherungsweise

$$\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)^\nu \approx 1 + \nu \frac{\delta x}{x} \quad (1.18)$$

gilt², folgt unmittelbar durch Einsetzen

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1}. \quad (1.19)$$

Es ist naheliegend, dass die Gl. (1.19) ihre Gültigkeit behält, auch wenn ν keine ganze Zahl mehr ist. Da sich außerdem die Funktionen der Physik (zumindest lokal) durch Summen der Form

$$\sum_\nu c_\nu x^\nu$$

beschreiben lassen, genügt uns die Regel (1.19), die offensichtlich Term für Term angewandt werden kann.

Die Formel (1.16) können wir einsetzen, um zwei wichtige Differenzierungsregeln zu beweisen. Die erste Regel ist die Produktregel:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} g(x) f(x) \\ & \approx \frac{g(x + \delta x) f(x + \delta x) - g(x) f(x)}{\delta x} \\ & \approx \frac{1}{\delta x} \left\{ [g'(x) \delta x + g(x)] [f'(x) \delta x + f(x)] \right. \\ & \quad \left. - g(x) f(x) \right\} \\ & \approx \frac{1}{\delta x} \left\{ g' f \delta x + g f' \delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) \right\} \\ & = g'(x) f(x) + g(x) f'(x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

¹Die Schreibweise $f'(x)$ für die Ableitung nach x wird oft auf so genannte höhere Ableitungen wie $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f(x)) \equiv \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ ausgedehnt. D. h. $\frac{d^2}{dx^2}f(x) \equiv f''(x)$.

²Diese Formel erhalten wir durch Ausmultiplizieren des ν -fachen Produkts, wobei alle höheren Terme, d. h. Terme die höhere Potenzen der kleinen Größe δx enthalten, vernachlässigt werden.

für $\delta x \rightarrow 0$. Die Schreibweise $\mathcal{O}(\delta x^2)$ deutet an, dass es Terme proportional zu δx^2 gibt sowie in diesem Fall Terme mit höheren Potenzen von δx . Die zweite Regel ist die Kettenregel:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} f(g(x)) \\ & \approx \frac{f(g(x + \delta x)) - f(g(x))}{\delta x} \\ & \approx \frac{1}{\delta x} \left\{ f\left(g(x) + \frac{dg}{dx} \delta x\right) - f(g(x)) \right\} \\ & \approx \frac{1}{\delta x} \left\{ f(g(x)) + \frac{df}{dg} \delta g - f(g(x)) \right\} \\ & = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \end{aligned} \quad (1.21)$$

für $\delta x \rightarrow 0$.

Eine wichtige Funktion in der Physik ist die e -Funktion

$$f(x) = e^x (\equiv \exp[x]) \quad (1.22)$$

($e = 2.718\dots$). Aufgrund der Rechenregel für Exponenten

$$e^{-x} = (e^x)^{-1} = \frac{1}{e^x}$$

ist e^x positiv für $-\infty < x < \infty$.

Die Ableitung der e -Funktion ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^x &= \lim_{\delta x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+\delta x} - e^x}{\delta x} \\ &= e^x \lim_{\delta x \rightarrow \infty} \frac{e^{\delta x} - 1}{\delta x}. \end{aligned}$$

Wir werten den Ausdruck unter dem Limes als Funktion von δx mithilfe eines Taschenrechners aus und erhalten die folgende Tabelle:

δx	$(e^{\delta x} - 1)/\delta x$
0.1	1.052
0.01	1.005
0.001	1.001
↓	↓
0	1

Folglich sollte gelten:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x . \quad (1.23)$$

Bemerkung: Hätten wir die Zahl e nicht auf dem Tastenfeld unseres Taschenrechners gefunden, dann hätten wir die Gl. (1.23) als Definition (mit e unbekannt) auffassen können, um auf der Basis dieser Definition den Wert von e zu berechnen (vgl. unten).

Die Umkehrung der e -Funktion ist die Logarithmus-Funktion \ln :

$$\ln(e^x) = x \quad \text{bzw.} \quad e^{\ln x} = x . \quad (1.24)$$

Damit gilt

$$\ln x^n \stackrel{x=e^y}{=} \ln e^{ny} = ny \ln(e) = n \ln x . \quad (1.25)$$

Die Ableitung der \ln -Funktion folgt gemäß

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} e^{\ln x} \stackrel{(1.21)}{=} e^{\ln x} \frac{d \ln x}{dx} ,$$

d. h.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} . \quad (1.26)$$

Die Bedeutung der e -Funktion in der Physik basiert, wie Sie noch feststellen werden, auf der Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x . \quad (1.27)$$

Die Gültigkeit zeigen wir gemäß

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &\stackrel{x/n \ll 1}{\approx} \left\{ \underbrace{\ln 1}_{=0} + \underbrace{\frac{d \ln x}{dx}}_{=1} \Big|_{x=1} \frac{x}{n} \right\} \\ &= x \end{aligned}$$

(zur besseren Erklärung siehe die Diskussion zur Gl. (1.33))³. Aus Gl. (1.27) folgt für $x = 1$ numerisch der oben angegebene Wert $e = 2.718\dots$ ⁴.

Die Ableitungsregeln für Winkelfunktionen wie $\sin x$ oder $\cos x$ folgen aus deren Darstellung mittels der eulerschen Formeln⁵⁶

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x , \quad (1.28)$$

d. h.

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad (1.29)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) . \quad (1.30)$$

Hier ist $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$) und insbesondere folgt $i^{-1} = -i$. Wir finden die Ableitungen

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x . \quad (1.32)$$

Eine im Folgenden immer wieder wichtige Anwendung der Gln. (1.16) und (1.17) ist die Formel

³Die Schreibweise $df(x)/dx|_{x=x_0}$ bzw. verkürzt $df(x)/dx|_{x_0}$ bedeutet: Bilde die Ableitung von $f(x)$ nach x und setze x danach durch x_0 .

⁴Nützlich sind hier die Ungleichungen $(1 + \frac{x}{n+1})^n < (1 + \frac{x}{n})^n < (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}$, da Fehlergrenzen angegeben werden können.

⁵weiter unten werden wir diese Formel rechtfertigen.

⁶Euler, Leonhard, schweizerischer Mathematiker, *Basel 15.4. 1707, † Sankt Petersburg 18.9. 1783. Seine wissenschaftliche Tätigkeit umfasst sämtliche Zweige der reinen und angewandten Mathematik, Physik und Astronomie. Er stellte u.a. die nach ihm benannten Gleichungen für die Flüssigkeitsströmung und für die Kreiselbewegung auf, führte den Begriff des Trägheitsmoments und der freien Drehachse ein und bediente sich bereits der Vektorrechnung. Er vertrat (1746) eine Wellentheorie des Lichts. Zu den Anwendungen der Mathematik gehören die Musiktheorie (1739), die Theorie der Planetenbewegung (1744), die Grundsätze der Artillerie (Ballistik, 1745), die Theorie des Schiffbaues (1749) und die Dioptrica (1769-71). Euler entwickelte aus Ansätzen bei Jakob und Johann Bernoulli die Variationsrechnung und gab 1744 dem Prinzip der kleinsten Wirkung eine schärfere mathematische Form. Er schuf die moderne Zahlentheorie und die kombinatorische Topologie sowie zahlreiche Beiträge zur Geometrie, zur Reihenlehre, zur Theorie der Differenzialgleichungen und -geometrie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + \delta x f'(x). \quad (1.33)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Funktionswert am Ort $x + \delta x$ näherungsweise durch die Gleichung auf der rechten Seite gegeben ist. Diese Formel wird mit kleiner werdendem δx genauer, wobei wir von einer genügend glatten Funktion $f(x)$ ausgehen. Insbesondere können wir mittels Gl. (1.33) Nullstellen von $f(x)$ numerisch bestimmen. Angenommen $x_o \equiv x + \delta x$ sei eine Nullstelle, dann gilt $0 \approx f(x) + \delta x f'(x)$ bzw.

$$x_o \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (1.34)$$

Diese Formel wiederum liefert in ihrer iterativen Variante (dem so genannten Newton Verfahren)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.35)$$

eine Folge x_1, x_2, \dots , die (in der Regel) gegen die Nullstelle x_o konvergiert.⁷

Aber das ist nicht alles. Gl. (1.33) kann erweitert werden. Um dies zu sehen, betrachten wir die (zunächst) angenommene Identität

$$f(x + \delta x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\delta x}{n} \frac{d}{dx}\right)^n f(x). \quad (1.36)$$

Wir können diesen Ausdruck nach und nach auswerten:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta x}{n} \frac{d}{dx}\right)^n f(x) \\ &= \left(1 + \frac{\delta x}{n} \frac{d}{dx}\right)^{n-1} \underbrace{\left(f(x) + \frac{\delta x}{n} \frac{df}{dx} \Big|_x\right)}_{=f(x+\frac{\delta x}{n})+\mathcal{O}((\delta x/n)^2)}. \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung durch $\mathcal{O}((\delta x/n)^2)$ ist konsistent mit dem oben angenommenen Ausdruck (1.36). Wir setzen dies fort und erhalten

⁷Beispiel: Die Nullstelle von $f(x) = \ln x - 1$ ist offensichtlich die Zahl e . Die Folge $x_{n+1} = x_n - x_n(\ln x_n - 1)$ liefert ausgehend von dem Startpunkt $x_1 = 0.5$ die Werte 1.34657, 2.29246, 2.68304, 2.71805, 2.71828, 2.71828,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta x}{n} \frac{d}{dx}\right)^n f(x) \\ &= \left(1 + \frac{\delta x}{n} \frac{d}{dx}\right)^{n-2} \underbrace{\left(f(x + \frac{\delta x}{n}) + \frac{\delta x}{n} \frac{df}{dx} \Big|_{x+\frac{\delta x}{n}}\right)}_{=f(x+\frac{2\delta x}{n})+\mathcal{O}(2(\delta x/n)^2)} \\ &\vdots \\ &= f(x + \delta x) + \mathcal{O}(n(\delta x/n)^2). \end{aligned}$$

Da aber $\mathcal{O}(\delta x^2/n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt die Beziehung (1.36)! Nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \\ &\dots + \binom{n}{n} a^0 b^n \end{aligned} \quad (1.37)$$

und mit

$$\binom{n}{i} \equiv \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (1.38)$$

($0! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$) folgt also zum Einen aus Gl. (1.27) die Reihendarstellung der e-Funktion

$$\begin{aligned} e^x &= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} \frac{x}{n} \\ &+ \underbrace{\binom{n}{2}}_{=\frac{n(n-1)}{2!}} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \dots \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.39)$$

⁸ sowie aus Gl. (1.36) die so genannte Taylorentwicklung von $f(x)$ an der Stelle x :

$$\begin{aligned} f(x + \delta x) &= f(x) + \delta x \frac{d}{dx} f(x) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\delta x \frac{d}{dx}\right)^2 f(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

Betrachten wir jetzt Funktionen mehrerer Variablen wie z. B. $f(x, y, z)$. Die Größe

⁸die übrigens konform mit der Ableitungsregel (1.23) ist

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz \quad (1.41)$$

heißt totales Differenzial von $f(x, y, z)$, wobei $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ und $\partial/\partial z$ partielle Ableitungen sind. Dies bedeutet, dass unabhängig nach den explizit auftretenden Variablen x , y und z differenziert wird. Der Ausdruck (1.41) kann auch als Skalarprodukt geschrieben werden:

$$df(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot d\vec{r}. \quad (1.42)$$

Der Operator $\vec{\nabla}$ heißt Nabla- bzw. Gradientenoperator, d. h. $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ ist der Gradient von $f(x, y, z)$. Es gilt

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Häufig sind die Größen x , y und z selbst von einem Parameter abhängig. D. h. statt $f(x, y, z)$ betrachten wir jetzt $f(x(t), y(t), z(t), t)$ und bilden die totale Ableitung nach t :

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.44)$$

Den Unterschied zwischen der totalen Ableitung df/dt und der partiellen Ableitung $\partial f/\partial t$ erläutern wir an folgendem Beispiel. Es sei $\vec{r}(t)$ der Ortsvektor eines Wasserläufers auf einem fließenden Bach bezogen auf ein Koordinatensystem, das am Ufer „fest montiert“ ist. Die Fließgeschwindigkeit des Baches sei überall durch den konstanten Vektor \vec{w} gegeben. Der Ort des Wasserläufers bezogen auf ein im Bach treibendes Koordinatensystem ist folglich

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{w}t, \quad (1.45)$$

wobei t die Zeit ist. Die totale Ableitung dieser Vektorfunktion nach der Zeit t ist

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \vec{r}'(t)}_{\equiv \vec{r}'(t)} = \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{r}(t)}_{\equiv \vec{r}(t)} - \vec{w}.$$

Die Ableitung versteht sich komponentenweise. D. h. die Geschwindigkeit des Wasserläufers bezogen auf das treibende Koordinatensystem ist

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{w}$$

($\vec{v}' \equiv \dot{\vec{r}}'$, $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$). Bilden wir nur die partielle Zeitableitung von Gl. (1.45), dann folgt

$$\frac{\partial \vec{r}'(t)}{\partial t} = -\vec{w}.$$

Dies ist offensichtlich die Geschwindigkeit des Bachwassers an einem (bzw. an allen) festen Punkt(en) \vec{r} .

Kommen wir nochmals auf Gl. (1.42) zurück. Es sei $f(x, y)$ die Beschreibung von Höhenwerten auf einer xy -Landkarte. Entlang der Linien konstanter Höhe, den Höhenlinien, gilt $df(x, y) = 0$ und daher

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt, dass die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Der Vektor $d\vec{r} = (dx, dy)$ liegt aber entlang der besagten Höhenlinie, denn sonst wäre df nicht Null. Folglich zeigt der Gradient in die Richtung der stärksten Änderung von $f(x, y)$!

Bemerkung: An dieser Stelle ist es nicht so schwierig, sich die Verallgemeinerung der Taylorentwicklung (1.40) auf Funktionen mehrerer Variablen zu überlegen. Z.B. gilt

$$f(\vec{r} + \delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 f(\vec{r}) + \dots \quad (1.46)$$

Umrechnung von Flächenelementen von kartesischen in Polarkoordinaten: Als erstes Anwendungsbeispiel der bisher gelernten Regeln betrachten wir Flächenelemente ausgedrückt in verschiedenen Koordinaten. Die Punkte 1 bis 4 in der

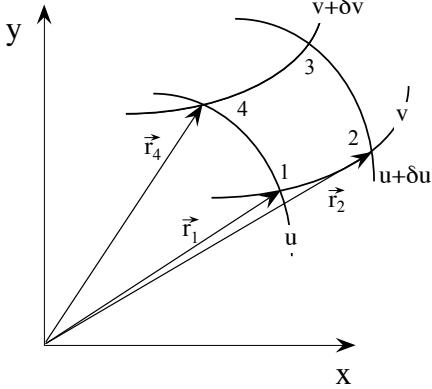


Abbildung 1.10: Flächenelement im x - y - und u - v -System.

Abbildung 1.10 markieren die Ecken eines Flächenelements

$$\vec{e}_z \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_4 - \vec{r}_1))$$

in der x - y -Ebene mit

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren \vec{r}_i ($i = 1, 2, \dots$) lassen sich dabei auch durch die alternativen Koordinaten u und v ausdrücken.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_2 &= \begin{pmatrix} x(u + \delta u, v) \\ y(u + \delta u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \delta u \\ y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \delta u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_4 &= \begin{pmatrix} x(u, v + \delta v) \\ y(u, v + \delta v) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\approx \begin{pmatrix} x(u, v) + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \delta v \\ y(u, v) + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \delta v \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daher folgt

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \delta u \\ \frac{\partial y}{\partial u} \delta u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_4 - \vec{r}_1 \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \\ \frac{\partial y}{\partial v} \delta v \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten für das Flächenelement

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_4 - \vec{r}_1)) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \delta u \delta v \\ &\equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \delta u \delta v . \end{aligned}$$

Die Größe $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ heißt Funktionaldeterminante. Insbesondere können wir unsere Vektoren \vec{r}_1 bis \vec{r}_4 so wählen, dass Punkt 1 im Ursprung liegt, während 2 auf der x -Achse und 4 auf der y -Achse liegt. Wir erhalten dann explizit

$$\delta x \delta y = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \delta u \delta v \quad (1.47)$$

mit

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} . \quad (1.48)$$

Die Betragsstriche stellen explizit sicher, dass das Flächenelement positiv bleibt. Diese wichtige Formel lässt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern:

$$\delta x \delta y \delta z = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \delta u \delta v \delta w . \quad (1.49)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} \\ &\quad - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} . \end{aligned} \quad (1.50)$$

Herleitung der eulerschen Formeln: Als zweites Anwendungsbeispiel leiten wir die eulerschen Formeln her. Wir definieren dazu den (Einheits-)ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

und die Funktion

$$z(\vec{r}) = x + iy = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Hier ist i wieder $\sqrt{-1}$! Wir untersuchen die Änderung von $z(\vec{r})$ bei einer kleinen Veränderung des Winkels ϕ in der x - y -Ebene. Gemäß den Gln. (1.42), (1.14) und (1.13) gilt für diese Änderung

$$\begin{aligned} \delta z(\vec{r}) &\stackrel{(1.42)}{=} \vec{\nabla}z \cdot \delta \vec{r} \\ &\stackrel{(1.14)}{=} \vec{\nabla}z \cdot (\delta \phi \times \vec{r}) \\ &\stackrel{(1.13)}{=} \delta \vec{\phi} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}z). \end{aligned}$$

Der Vektor $\delta \vec{\phi}$ hat wieder den Betrag $\delta \phi$ und zeigt in Richtung der z -Achse (hat jetzt nichts mit der Funktion z zu tun). Mit

$$\vec{\nabla}z = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\vec{r} \times \vec{\nabla}z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ix - y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

D. h.

$$\delta z(\vec{r}) = i \delta \phi z(\vec{r})$$

bzw.

$$z(\vec{r}) + \delta z(\vec{r}) = (1 + i \delta \phi) z(\vec{r}).$$

Wir stellen uns vor, dass z ursprünglich auf der x -Achse liegt. D. h. $z_0 = 1$ ist das ursprüngliche z . Anschließend werden n kleine Drehungen $\delta \phi = \frac{\phi}{n}$ hintereinander ausgeführt. Das Endresultat ist $z(\vec{r})$. Mathematisch ausgedrückt werden diese Drehungen mittels

$$\begin{aligned} z(\vec{r}) &= \underbrace{\left(1 + i \frac{\phi}{n}\right) \left(1 + i \frac{\phi}{n}\right) \dots \left(1 + i \frac{\phi}{n}\right)}_{n \text{ mal}} \underbrace{z_0}_{=1} \\ &= \left(1 + i \frac{\phi}{n}\right)^n \stackrel{(1.27)}{\approx} e^{i\phi} \end{aligned} \quad (1.52)$$

beschrieben. Setzen wir alles zusammen, so ergibt sich $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$, was zu zeigen war. Die Formel

$$\cos \phi - i \sin \phi = e^{-i\phi}$$

folgt analog, wenn wir in die entgegengesetzte Richtung drehen.

Integration[†]:

Integration ist der Grenzfall der Summation, bei dem die Zahl der Terme gegen unendlich und gleichzeitig deren Differenz gegen Null geht:

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \delta x_i f'(x_i) \\ &\equiv \int_{x_A}^{x_B} dx f'(x) \\ &\stackrel{*}{=} f(x_B) - f(x_A) \end{aligned} \quad (1.53)$$

(hier $f' = df/dx$). Offensichtlich beschreibt das Integral die Fläche unter der Kurve, die durch $f'(x)$ beschrieben wird, denn $\delta x_i f'(x_i)$ ist ein schmales Flächensegment an der Stelle x_i . Nicht so offensichtlich ist das Gleichheitszeichen (*). Besser zu sehen ist dessen Gültigkeit aus

$$\begin{aligned} &\underbrace{f(x_A) + \delta x f'(x_A + \delta x) + \delta x f'(x_A + 2\delta x) + \dots}_{=f(x_A + \delta x)} \\ &\quad \underbrace{\dots + \delta x f'(x_B - \delta x)}_{=f(x_A + 2\delta x)} = f(x_B), \end{aligned}$$

wobei Gl. (1.53) mit $\delta x_i = \delta x \forall i$ umgeschrieben wurde.

Betrachten wir einige Eigenschaften von Integralen der Form

$$F(A) - F(B) = \int_{x_A}^{x_B} dx f(x) . \quad (1.54)$$

Es gilt natürlich wieder

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) .$$

Die Größe $F(x)$ heißt auch Stammfunktion von $f(x)$. Beispielsweise ist die Stammfunktion von $f(x) = x$ gegeben durch $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Die Stammfunktion von $f(x) = e^{-x}$ ist einfach $F(x) = -e^{-x}$.

Das Auffinden von Stammfunktionen ist manchmal gar nicht so einfach. Ein Trick in diesem Zusammenhang ist die partielle Integration, die sich direkt aus der Produktregel für das Differenzieren ergibt. Integriert lautet Gl. (1.20) nämlich

$$\begin{aligned} & \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} g(x) f(x) dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} g'(x) f(x) dx + \int_{x_A}^{x_B} g(x) f'(x) x . \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$g(x_B) f(x_B) - g(x_A) f(x_A) \equiv \left|_{x_A}^{x_B} g(x) f(x) \right|$$

folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \left|_{x_A}^{x_B} g(x) f(x) \right| &= \int_{x_A}^{x_B} g'(x) f(x) dx \\ &+ \int_{x_A}^{x_B} g(x) f'(x) dx \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} g(x) f'(x) dx &= \left|_{x_A}^{x_B} g(x) f(x) \right| \quad (1.55) \\ &- \int_{x_A}^{x_B} g'(x) f(x) dx . \end{aligned}$$

Als Beispiel integrieren wir

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx . \quad (1.56)$$

D. h.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x} &= \underbrace{\left[0^\infty x (-e^{-x}) \right]}_{=0} - \int_0^\infty (-e^{-x}) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x} dx \\ &= -\left|_0^\infty e^{-x} \right| = 1 . \end{aligned}$$

Ein weiterer wichtiger Trick ist mit folgender Integralfomel verbunden

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{x_A}^{x_B} f(x, \lambda) dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{d\lambda} f(x, \lambda) dx , \quad (1.57)$$

worin λ ein von der Integrationsvariablen unabhängiger Parameter ist. Als Beispiel betrachten wir wieder (1.56), aber dieses Mal in der Form

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x} dx &= \int_0^\infty x e^{-\lambda x} \Big|_{\lambda=1} \\ &= -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \Big|_{\lambda=1} \\ &= -\frac{d}{d\lambda} \Big|_0^\infty \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{\lambda=1} \\ &= -\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\lambda} \Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{\lambda^2} \Big|_{\lambda=1} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Ein dritter wichtiger Trick ist die Einführung neuer Koordinaten. Wir illustrieren dies an dem wichtigen Beispiel des Gauß-Integrals⁹

⁹Gauß, Carl Friedrich, Mathematiker und Astronom, *Braunschweig 30.4. 1777, †Göttingen 23.2. 1855; seit 1807 Direktor der Sternwarte in Göttingen, Professor für Mathematik und Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften, einer der bedeutendsten Mathematiker. Gauß begründete mit den 1801 erschienenen *Disquisitiones arithmeticæ* die moderne Zahlentheorie. In seiner 1809 veröffentlichten Theorie der Bewegungen der Himmelskörper behandelte er die Probleme der Himmelsmechanik. Seine Arbeiten über die Methode der kleinsten Quadrate (Ausgleichsrechnung) haben die Entwicklung der Himmelsmechanik, die Theorie der unendlichen Reihen und die numerischen Me-

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx .$$

Wir schreiben

$$= \sqrt{-\frac{\pi}{4}} \Big|_0^\infty e^{-r^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Aus Symmetriegründen gilt natürlich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \sqrt{\int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy} \\ &= \sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy} . \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Das eben gerechnete Beispiel können wir leicht auf Integrale des Typs

$$\int_0^\infty e^{-ax^2 \pm bx} dx$$

ausdehnen ($a, b > 0$). Hier verwandelt die Substitution $z = \sqrt{ax} \mp \sqrt{c}$ mit $c = \frac{1}{a}(b/2)^2$ und $dz = \sqrt{a}dx$ den Integranden in die Gauß-Form, die wir eben behandelt haben. Dieser Trick nennt sich quadratische Ergänzung¹⁰.

Die Gl. (1.54) lässt sich auf Vektoren ausdehnen

$$dxdy = rdrd\phi .$$

Die Integration, die für kartesische Koordinaten den positiven Quadranten umfasst, erfolgt in Polarkoordinaten in den Grenzen $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq r < \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \sqrt{\int_0^\infty dr r e^{-r^2} \int_0^{\pi/2} d\phi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr} \end{aligned}$$

$$\vec{F}(x_B) - \vec{F}(x_A) = \int_{x_A}^{x_B} dx \vec{f}(x) , \quad (1.58)$$

wobei die Integration komponentenweise erfolgt.

Wir können auch noch weiter verallgemeinern, indem wir das Wegintegral

$$\int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

einführen. Wie ist diese Formel zu verstehen? An (unendlich) vielen Punkten entlang eines bestimmten Weges, der A und B verbindet, wird das Skalarprodukt $d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ berechnet. Die Summe aller Ergebnisse ist das Wegintegral. Dabei ist $d\vec{r}$ der infinitesimale Verbindungsvektor zwischen zwei benachbarten Punkten entlang des Weges. Ein Beispiel aus der Mechanik ist die Arbeit W , die von einer Kraft \vec{f} entlang eines Weges geleistet wird:

$$W = \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) .$$

¹⁰Achtung! Es gilt immer $\sqrt{b^2} = |b|$, denn sonst kann man leicht Unsinn, wie etwa $1 = -1$, erhalten.

thoden der angewandten Mathematik sehr gefördert. 1816 wurde ihm die Vermessung des Königreichs Hannover übertragen, an der er 25 Jahre arbeitete und dabei zu bahnbrechenden Untersuchungen zur Geodäsie und zur Differenzialgeometrie angeregt wurde. Von großer Bedeutung sind auch seine Abhandlungen zur Physik, zur Potenzialtheorie und zur Optik sowie die Erfindung des Magnetometers. Zusammen mit dem Physiker Wilhelm Weber untersuchte er den Erdmagnetismus und stellte dabei sein absolutes physikalisches Maßsystem (1832) auf. Große Teile seines mathematischen Schaffens, so die Theorie der elliptischen Funktionen und die Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie, wurden erst durch die Veröffentlichung seines Nachlasses bekannt. Literatur: Bühler, W. K.: Gauß. Eine biographische Studie. Aus dem Englischen. Berlin u.a. 1987. Wußing, H.: C. F. Gauß. Leipzig 1989. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Als Beispiel betrachten wir Sysiphus, der einen Stein eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hoch schiebt. Die von Sysiphus zu überwindende Kraft \vec{F}_g , das wissen wir schon, zeigt senkrecht nach unten und ist konstant. Das gerichtete Wegelement zeigt aufwärts parallel zur Ebene. Daraus folgt $d\vec{r} \cdot \vec{F} = -dr F_g \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = dr F_g \sin \alpha$. Auf einer schiefen Ebene (Schräge) der Länge s leistet Sysiphus daher die Arbeit

$$W(s) = \int_{\text{Schräge}} dr F_g \sin \alpha = s F_g \sin \alpha.$$

Alternativ hätte Sysiphus den Stein auf dem flachen Boden bis an das hohe Ende der schiefen Ebene schieben können, um ihn dann senkrecht hoch zu heben. Die entsprechende Arbeit ist

$$\begin{aligned} W &= \underbrace{\int_{\text{flacher Boden}} dr \cdot \vec{F}}_{=0 \text{ da } d\vec{r} \perp d\vec{F}} + \int_{\text{senkrecht}} dr \cdot \vec{F} \\ &= - \int_{\text{senkrecht}} dr \cdot \vec{F}_g = s F_g \sin \alpha. \end{aligned}$$

Die Arbeit ist also in diesem Beispiel vom Weg unabhängig. Mathematisch wird dies durch

$$\oint dr \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad (1.59)$$

angezeigt, wobei der Kreis im Integrationssymbol einen geschlossenen Weg beschreibt. In diesem Fall führt der Weg entlang der ebenen Basis der Schräge, anschließend nach oben und dann die Schräge hinunter zurück zum Ausgangspunkt. Die Richtung des Weges ist dabei gegen den Uhrzeigersinn gewählt. Dies ist die positive Wegrichtung. Die umgekehrte Wegrichtung produziert ein Minuszeichen. Da das Integral insgesamt Null ergibt, ist das Vorzeichen hier allerdings nicht wichtig.

1.4 Komplexe Zahlen[†]

Komplexe Zahlen besitzen die Darstellung

$$z = a + ib. \quad (1.60)$$

Hier ist

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{bzw.} \quad i^2 = -1$$

und a, b sind reelle Zahlen. Die komplexe Zahl z lässt sich mit einem Vektor in der x - y -Ebene vergleichen. Hierbei wird der Realteil a von z (geschrieben $\text{Re } z$) entlang der x -Achse aufgetragen und der imaginäre Teil b von z (geschrieben $\text{Im } z$) entlang der y -Achse. Dabei entsprechen die Einteilungen 1, 2, 3... auf der x -Achse den Einteilungen $i, 2i, 3i, \dots$ auf der y -Achse (vgl. Abbildung 1.11).

Ähnlich wie bei Vektoren macht die Ungleichung $z_1 > z_2$ keinen Sinn. Sinn jedoch macht $|z_1| > |z_2|$ bzw. $|z_1| < |z_2|$, wobei $|z|$ die Länge der Strecke ist, die durch die Koordinaten $(0, 0)$ und (a, b) begrenzt ist. D. h.

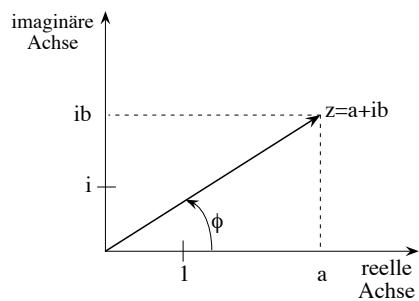


Abbildung 1.11: Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

\bar{z} wird als konjugiert komplex zu z bezeichnet. Statt \bar{z} wird häufig auch die Notation z^* verwendet. Insbesondere ist die Summe $z + \bar{z}$ stets reell und die Differenz $z - \bar{z}$ ist immer rein komplex.

Einige Rechenregeln:

- Addition:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- Subtraktion:

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

- Division:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Wenn wir mittels

$$\sin \phi = \frac{a}{|z|} \quad \text{bzw.} \quad \cos \phi = \frac{b}{|z|}$$

den Winkel ϕ einführen, dann folgt

$$z = |z|(\sin \phi + i \cos \phi) = |z| e^{i\phi}. \quad (1.61)$$

Damit gilt beispielsweise

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

oder

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}.$$

Kapitel 2

Die Gesetze der Mechanik

2.1 Eine Übersicht[†]

Das newtonsche Gravitationsgesetz¹,

$$m\ddot{\vec{r}} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.1)$$

¹Newton, Sir (seit 1705) Isaac, englischer Physiker, Mathematiker und Astronom, *Woolsthorpe (bei Grantham, County Lincolnshire) 4.1. 1643, †Kensington (heute zu London) 31.3. 1727; war 1669-1701 Professor in Cambridge, wurde 1699 königlicher Münzmeister in London, 1703 Präsident der Royal Society in London. Sein Ruhm als Begründer der klassischen theoretischen Physik geht v.a. auf sein 1687 erschienenes Hauptwerk *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Mathematische Prinzipien der Naturlehre) zurück, in dem er die drei Bewegungsgesetze der Mechanik (newtonsche Axiome) und sein bereits 1666 gefundenes Gravitationsgesetz (Gravitation) formulierte. Newton erklärte damit die Bewegung der Planeten um die Sonne, die Erscheinungen von Ebbe und Flut und berechnete die Massen des Mondes und der Planeten. Er entwickelte gleichzeitig, unabhängig von Leibniz, die von ihm als Fluxionsrechnung bezeichnete Differenzial- und Integralrechnung. Newton wies die Zusammensetzung des weißen Lichtes aus den Spektralfarben nach und stellte die Emissionstheorie des Lichtes mit einem Korpuskelmodell auf; er untersuchte Farberscheinungen dünner Blättchen (newtonsche Interferenzringe), begründete die Akustik und bestimmte Frequenzen von Schwingungsvorgängen. Erst durch die Relativitätstheorie wurden die von Newton aufgestellten Axiome über Raum und Zeit durch neue Formulierungen erweitert. Literatur: Schneider, I. *Isaac Newton*. München 1988. Wickert, J. *Isaac Newton*. Reinbek 1995. Fritsch, H. *Eine Formel verändert die Welt. Newton, Einstein und die Relativitätstheorie*. Taschenbuchausgabe. München u.a. 1996. Westfall, R. S. *Isaac Newton. Eine Biographie. Aus dem Englischen*. Heidelberg u.a. 1996. Quellentext: Im Vorwort zu den *Principia* (1687) erläuterte Newton seine Methode, das Wechselspiel von Induktion und Deduktion und das Kriterium für Wahrheit: Alle Schwierigkeit der Physik besteht nämlich dem Anschein nach darin, aus den Erscheinungen der Bewegung die Kräfte zu erforschen und hierauf durch diese Kräfte die Erscheinungen zu erklären. Hierzu dienen die allgemeinen Sätze, welche im ersten und zweiten Buche behandelt werden. Im dritten Buche haben wir, zur Anwendung derselben, das Weltsystem erklärt. Dort wird nämlich aus den Erscheinungen am Himmel, vermittelst der in den ersten Büchern mathematisch bewiesenen Sätze, die Kraft

steht für ein völlig neues Weltbild. Es beschreibt die Bewegung der Planeten basierend auf einer universellen, anziehenden Kraft, ohne grundsätzliche Besonderheit der Erde oder eines anderen Himmelskörpers. Hier sind m und M die Massen zweier Himmelskörper und r ist ihr Abstand. Die Größe

$$G = (6.673 \pm 0.01) 10^{-11} N m^2 kg^{-2} \quad (2.2)$$

ist die Gravitationskonstante.

Der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ verbindet die Massen m und M , wobei er die Position von M anzeigt, wenn m im Ursprung liegt. Mit

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{r^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.3)$$

folgt, dass \vec{r}/r , ein Vektor der Länge Eins (Einheitsvektor), parallel zu \vec{r} ist. Die Größe

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

der Schweren abgeleitet, vermöge welcher die Körper sich bestreben, der Sonne und den einzelnen Planeten sich zu nähern. Aus derselben Kraft werden dann, gleichfalls vermittelst mathematischer Sätze, die Bewegungen der Planeten, Kometen, des Mondes und des Meeres abgeleitet. Induktion: die wissenschaftliche Methode, vom Einzelfall auf das Allgemeine, Gesetzmäßige zu schließen; Deduktion: die Ableitung des Besonderen und Einzelnen vom Allgemeinen, die Erkenntnis des Einzelfalls durch ein allgemeines Gesetz.] <http://www.newtonia.freeserve.co.uk/> ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

ist die Beschleunigung von m , bzw. die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

von m aufgrund der gegenseitigen Gravitationsanziehung zwischen m und M .

Die Gravitationsanziehung ist eine von vier fundamentalen Wechselwirkungen, die momentan bekannt sind. Während sich die anderen drei Wechselwirkungen im Rahmen des so genannten Standardmodells vereinigen lassen, nimmt die Gravitation eine Sonderrolle ein. Die Bestrebungen zur Vereinheitlichung der Gravitation mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen gehören zu den interessantesten Themen der modernen Physik.

Das Gravitationsgesetz (2.1) ist ein spezieller Fall der Gleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (2.6)$$

Die Gleichung (2.6) besagt, dass die Kraft \vec{F} die Masse m beschleunigt. Die Richtung von $\ddot{\vec{r}}$ ist durch die Richtung von \vec{F} festgelegt. Die Ursache der Kraft \vec{F} ist dabei beliebig. D. h. \vec{F} kann beispielsweise die Kraft auf eine Ladung aufgrund eines elektrischen Feldes sein oder aber die elastische Kraft zwischen den Enden eines Gummibandes.

Aus (2.6) lässt sich die Position der Masse für alle Zeit bestimmen. Betrachten wir nämlich die Taylorentwicklung der x -Komponente von $\vec{r}(t + \delta t)$ um den Zeitpunkt t , so gilt

$$\begin{aligned} x(t + \delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\delta t \\ &\quad + \frac{1}{2}\ddot{x}(t)\delta t^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Hier ist δt eine „kurze“ positive Zeitspanne. Insbesondere gilt also näherungsweise

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + \dot{x}(t)\delta t + \frac{1}{2}\frac{F_x(t)}{m}\delta t^2, \quad (2.8)$$

wobei wir (2.6) für ausreichend kleine δt ausgenutzt haben. Entsprechende Gleichungen gelten natürlich für $y(t + \delta t)$ und $z(t + \delta t)$. Ist also $\vec{r}(t)$ und $\dot{\vec{r}}(t)$

bekannt, man spricht von Anfangsbedingungen, so kann $\vec{r}(t + \delta t)$ für jede Kraft $\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$ berechnet werden. Ist $\vec{r}(t + \delta t)$ bekannt, dann kann mittels

$$\dot{\vec{r}}(t + \delta t) \approx \frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t},$$

wobei diese Gleichung komponentenweise zu verstehen ist, die zukünftige Geschwindigkeit erhalten werden. Anschließend wird das Ganze für $t + 2\delta t$ wiederholt u.s.w.

Kehren wir zum Gravitationsgesetz zurück. Wenn m unsere Erde ist und M die Sonne, wo bleibt dann der Einfluss vom Mond, den übrigen Planeten sowie Himmelskörpern auf die Erde? Die mathematische Antwort lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = Gm \sum_j \frac{M_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|}. \quad (2.9)$$

Hier ist \vec{r} der Ortsvektor der Erde, wobei die Position der Sonne den Ursprung unseres Koordinatensystems markiert. Der Vektor $\vec{r}_j - \vec{r}$ verbindet die Erde mit dem Himmelskörper j , der die Masse M hat.

Die Gl. (2.9) ist ein spezieller Fall der Gleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \dots \equiv \sum_j \vec{F}_{ij}, \quad (2.10)$$

wobei \vec{F}_{ii} , die Kraft der Masse m_i auf sich selbst, von der Summe ausgenommen ist. In Summenschreibweise wird diese Bedingung durch

$$\sum_{j(\neq i)}$$

dargestellt.

Gl. (2.10) bedeutet, dass sich die Masse m_i unter dem Einfluss der Vektorsumme aller auf sie wirkenden Kräfte bewegt. Mit der Definition

$$\vec{p}_i \equiv m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (2.11)$$

des Impulses kann Gl. (2.10) auch als

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j(\neq i)} \vec{F}_{ij} \quad (2.12)$$

ausgedrückt werden.

An dieser Stelle sollten wir uns über die Bedeutung von m_i Gedanken machen. Bisher hatten wir nur über Planeten bzw. Himmelskörper gesprochen, die im Sinne von Massenpunkten miteinander wechselwirken². Prinzipiell aber muss jede räumlich ausgedehnte Masse, man spricht von einer Massenverteilung, in (infinitesimal) kleine Massenelemente m_i zerlegt werden. Es sind dann die Kräfte auf diese Massenelemente m_i , die mit \vec{F}_i bezeichnet werden. Wie aber ist eine Zerlegung der Materie in (infinitesimal) kleine Massenelemente m_i mit der uns bekannten Existenz von Atomen bzw. subatomaren Teilchen in Einklang zu bringen? Die Zerlegung der Materie in (infinitesimal) kleine Massenelemente ist eine mathematische Konstruktion, die keine Rücksicht auf eine möglicherweise diskrete Struktur der Materie nimmt. Eine in diesem Sinne verallgemeinerte Form der Gl. (2.10) lautet

$$\rho(\vec{r})\ddot{\vec{r}}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) . \quad (2.13)$$

Hier ist $\rho(\vec{r})$ die Massedichte $m_i/\delta V$ in dem Volumenelement δV am Ort \vec{r} (bzw. \vec{r}_i) und $\vec{f}(\vec{r})$ ist eine entsprechende Kraftdichte $\vec{F}_i/\delta V$. \vec{F}_i bzw. $\vec{F}(\vec{r})$ ist die Gesamtkraft auf das Massenelement im Sinne der rechten Seite der Gl. (2.10). Erfahrungsgemäß liefern die Gl. (2.6) bzw. (2.13) eine fantastisch genaue Beschreibung der Bewegung von Massenelementen auf den von uns unmittelbar übersehbaren Längen- bzw. Größenskalen (10^{-6}m (Mikroskop) bis 10^{11}m (Himmelsfernrohr)). Selbst jenseits dieses Bereichs stellt sich die newtonscche Mechanik weiterhin als brauchbar heraus. Irgendwann jedoch, im Bereich der Moleküle und darunter, werden Abweichungen sichtbar, die schließlich eine völlig neue Beschreibung der Dynamik der Materie notwendig macht. Diese neue Beschreibung ist die Quantentheorie³. Und was ist mit der anderen Richtung - zu unendlichen Längen (und Zeiten) hin? Die newtonischen Bewegungsgleichungen beinhalten instantane Fernwirkung. D. h. eine Veränderung der Kraft, verursacht beispielsweise durch die Bewegung eines

²Massenpunkte sind Körper, deren Form und Ausdehnung bei der Beschreibung ihrer Bewegung in guter Näherung vernachlässigt werden können.

³Dies bedeutet nicht, dass die Quantentheorie sich nicht makroskopisch bemerkbar macht. Z.B. die Emission und Absorption von Licht ist klassisch nicht beschreibbar.

Himmelskörpers, teilt sich unmittelbar jeder anderen Masse in beliebig großer Entfernung mit. Die unmittelbare Fernwirkung führt zu Problemen, die in der allgemeinen Relativitätstheorie erfasst und behoben werden. Aber die Relativitätstheorie löst nicht alle Probleme. Insbesondere kann die Relativitätstheorie die Entstehung des Universums nicht beschreiben. Dort verbindet sie sich zwangsläufig auf eine nicht geklärte Art und Weise mit der Quantentheorie bzw. beide Theorien entstehen als unterschiedliche Grenzfälle einer grundlegenden Theorie, für die es zwar immer wieder Kandidaten gibt, die aber bislang noch nicht feststeht.

Die Gl. (2.12) kann weiter verallgemeinert werden, indem wir auch noch über i summieren:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i,j(i \neq i)} \vec{F}_{ij} \equiv \vec{F} . \quad (2.14)$$

Hier umfasst \vec{F} die Vektorsumme aller Kräfte. Die Größe auf der linken Seite ist die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad (2.15)$$

aller Massenelemente. Zusammengefasst folgt

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} . \quad (2.16)$$

Für ein System im statischen Gleichgewicht, wie z. B. ein Gebäude, gilt $\vec{p}_i = 0 \forall i$ und damit $\dot{\vec{P}} = 0$ (es sei denn, es schwingt im Wind) und daher

$$\vec{F} = 0 . \quad (2.17)$$

Diese Gleichung wird bei der Berechnung der Statik eines Gebäudes oder anderer mechanischer Systeme verwendet.

Betrachten wir Gl. (2.16) genauer. Nach dem newtonischen Axiom *actio gleich reactio* gilt

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} . \quad (2.18)$$

Aus Gl. (2.14) folgt daher grundsätzlich $\vec{F} = 0$, es sei denn, zusätzlich zu all den Kräften \vec{F}_{ij} zwischen den Massenelementen kommen weitere Kräfte

$$\vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} + \dots = \vec{F}_{ext}$$

von externen Quellen, die nicht in den betrachteten Massenelementen liegen. In diesem Fall gilt für die Gesamtkraft

$$\vec{F} = \sum_{i,j(j \neq i)} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ext}. \quad (2.19)$$

Systeme für die $\vec{F}_{ext} = 0$ ist, werden als geschlossen bzw. isoliert bezeichnet. In solchen Systemen ist aufgrund von $\sum_{i,j(j \neq i)} \vec{F}_{ij} = 0$ der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße, d. h.

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{P} = \text{konstant}. \quad (2.20)$$

Jede Ansammlung von Massenelementen hat einen speziellen Referenzpunkt. Dieser so genannte Schwerpunkt ist durch

$$\vec{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2.21)$$

definiert⁴. Augedrückt mithilfe der massendichte $\rho(\vec{r})$ lautet diese Definition

$$\vec{R} \equiv \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV}, \quad (2.22)$$

wobei das Integrationsvolumen den gesamten Körper bzw. alle Massenelemente ein schließt. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist folglich

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad (2.23)$$

wobei m die Gesamtmasse ist. In einem abgeschlossenen System besitzt der Schwerpunkt also eine konstante Geschwindigkeit, d. h. $\dot{\vec{R}} = \text{konstant}$. Dies ist die Verallgemeinerung bzw. die Präzisierung des newtonischen Trägheitsgesetzes für einen Massenpunkt. Wir bemerken noch, dass Gl. (2.16) umgeschrieben werden kann in die Form

⁴Der Schwerpunkt ist gerade der Mittelwert über all \vec{r}_i gewichtet mit den dazu gehörigen Massen m_i .

$$m \ddot{\vec{R}} = \vec{F}. \quad (2.24)$$

Im allgemeinen Fall reichen die drei Gleichungen, die in (2.24) in Vektorschreibweise zusammengefasst sind, nicht aus, um die Bewegung oder die Statik eines mechanischen Systems zu beschreiben. Warum? Natürlich, wir betrachten nur noch die Bewegung des Schwerpunktes und nicht mehr die der einzelnen Massenelemente m_i .

Allerdings gibt es einen wichtigen Sonderfall, den so genannten starren Körper, dessen Bewegung durch Angabe des Schwerpunktes und der Schwerpunktgeschwindigkeit schon zu einem guten Teil beschrieben wird. Ein starrer Körper ist eine Ansammlung von Massenelementen m_i , die für alle Zeiten ihre jeweiligen Abstände nicht verändert ($|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{konstant} \forall i, j$). Was Gl. (2.24) nicht beschreibt, ist die Rotation des starren Körpers. Denken Sie beispielsweise an einen Würfel, den Sie in die Luft werfen. Um die Bewegung des Würfels vollständig zu beschreiben, müssen Sie dessen Position (3 Koordinaten) und seine Orientierung (weitere 3 Winkel) relativ zu Ihrem festen Koordinatensystem kennen. D. h. Sie benötigen weitere drei Gleichungen für die Würfelbewegung. Wie sehen diese zusätzlichen drei Gleichungen für die Rotationsbewegung eines starren Körpers aus?

Jetzt kommt physikalische Intuition ins Spiel! Es geht um Rotation - warum versuchen wir es nicht mit einer kleinen Drehung der Gleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \equiv \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ext,i} \quad (2.25)$$

um eine feste Achse⁵. Die Masse m_i verändert sich natürlich nicht. Aber aus $\ddot{\vec{r}}_i$ wird $\ddot{\vec{r}}_i + \delta \ddot{\vec{r}}_i$ und aus \vec{F}_i wird $\vec{F}_i + \delta \vec{F}_i$. D. h. aus (2.25) wird

$$m_i (\ddot{\vec{r}}_i + \delta \ddot{\vec{r}}_i) = \vec{F}_i + \delta \vec{F}_i.$$

Ziehen wir von dieser Gleichung die Gl. (2.25) ab, so erhalten wir

$$m_i \delta \ddot{\vec{r}}_i = \delta \vec{F}_i.$$

⁵Achtung! Wir sind zwar durch den starren Körper motiviert. Die folgende Rechnung gilt jedoch allgemein.

Im Abschnitt *Mathematische Grundlagen* hatten wir diskutiert, wie wir $\ddot{\vec{r}}_i$ und $\delta\vec{F}_i$ durch den Drehwinkelvektor $\delta\vec{\phi}$ ausdrücken können. Es gilt nämlich

$$m_i \delta\vec{\phi} \times \ddot{\vec{r}}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{F}_i .$$

Störend in dieser neuen Vektorgleichung ist der kleine aber sonst beliebige Drehwinkelvektor $\delta\vec{\phi}$, den wir los werden wollen. Eine Möglichkeit ist die Multiplikation der Vektorgleichung mit \vec{r}_i , d. h.

$$m_i (\delta\vec{\phi} \times \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \vec{r}_i = (\delta\vec{\phi} \times \vec{F}_i) \cdot \vec{r}_i ,$$

denn jetzt folgt durch zyklische Vertauschung in den Spatprodukten

$$m_i (\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{\phi} = (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{\phi} .$$

Wenn wir jetzt $\delta\vec{\phi}$ auf beiden Seiten weglassen und noch $\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{r}_i)$ ausnutzen, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i .$$

Wir sehen sofort, dass diese Gleichung auch als

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N} , \quad (2.26)$$

mit

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (2.27)$$

und

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (2.28)$$

geschrieben werden kann. Die Größe \vec{L} heißt Gesamtdrehimpuls, wobei $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ die Einzeldrehimpulse der Massenelemente m_i bezogen auf den Ursprung von \vec{r}_i sind, und \vec{N} heißt Drehmoment, wobei $\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ die Einzeldrehmomente ebenfalls bezogen auf den Ursprung von \vec{r}_i sind.

In einem statischen System gilt wiederum

$$\vec{N} = 0 . \quad (2.29)$$

Zusammen mit Gl., (2.17) bestimmt diese Gleichung vollständig die Statik von Gebäuden (also ohne Schwingungen) bzw. von statischen mechanischen Systemen.

Für den starren Körper folgern wir, dass die (sechs) Gln. (2.16) und (2.26) vollständig seine Bewegung beschreiben.

Wir wollen nochmals das abgeschlossene System untersuchen. Für ein abgeschlossenes System gilt wieder $\vec{F}_{ext} = 0$ und wir können Gl. (2.28) für das Gesamtdrehmoment umschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i & (2.30) \\ &= \sum_{i,j(j \neq i)} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j(j \neq i)} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i,j(j \neq i)} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j(j \neq i)} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i,j(j \neq i)} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j(j \neq i)} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt, da der Verbindungsvektor $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ parallel bzw. antiparallel zur Kraft \vec{F}_{ij} (für Zentralkräfte) ist. D. h. in abgeschlossenen Systemen ist der Gesamtdrehimpuls erhalten:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{L} = \text{konstant} . \quad (2.31)$$

Eine weitere Erhaltungsgröße in abgeschlossenen Systemen folgt aus einer einfachen Umformung der newtonschen Bewegungsgleichung $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}$. Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}_i$ liefert

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt} U . \quad (2.32)$$

D. h. für die Größe

$$E = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i + U, \quad (2.33)$$

genannt die Gesamtenergie, die Summe aus der kinetischen Energie der Masse m_i (erster Term) und der potenziellen Energie U , gilt also

$$\frac{d}{dt} E = 0 \quad \text{oder} \quad E = \text{konstant}. \quad (2.34)$$

Man beachte, dass wir angenommen haben, dass sich die Kraft auf m_i als (negativer) Gradient einer Funktion U aller Koordinaten, eben der potenziellen Energie von m_i , schreiben lässt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U. \quad (2.35)$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Gesamtenergie eine grundsätzlich erhaltene Größe ist, die von den hier gemachten Voraussetzungen nicht abhängt. Die Energieerhaltung ist eine Erfahrungstatsache, die bisher noch nirgends widerlegt wurde.

Eigentlich besteht eine Vorlesung zur Klassischen Mechanik fast vollständig aus Anwendungen der newtonischen Bewegungsgleichungen für Massenpunkte (Ein- und Zweimassenpunktprobleme sowie der Sonderfall gekoppelter periodischer Bewegungen vieler Massenpunkte) sowie der beiden Vektorgleichungen (2.16) und (2.26) auf starre ausgedehnte Körper. Die Differenzialgleichungen, die dabei gelöst werden, vereinfachen sich häufig aufgrund der drei wichtigen Erhaltungssätze, die wir diskutiert haben. D. h. für abgeschlossene Systeme, also ohne äußere Einflüsse, ist die Gesamtenergie E , der Gesamtimpuls \vec{P} und der Gesamtdrehimpuls \vec{L} konstant:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 0 \\ \dot{\vec{P}} &= 0 \\ \dot{\vec{L}} &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (2.36)$$

Die obigen Herleitungen dieser Erhaltungsgrößen setzen verschiedene Annahmen voraus und sind wesentlich weniger allgemein als die resultierenden Erhaltungssätze (2.36) selbst. Es kann gezeigt werden, und wir werden dies tun, dass diese Erhaltungssätze jeweils aus fundamentalen Symmetrien gefolgt werden können. Erhaltung der Energie ist mit der Invarianz der Naturgesetze gegen

Zeitverschiebung verknüpft. Erhaltung des Gesamtimpulses und des Gesamtdrehimpulses ergibt sich jeweils aus der entsprechenden Invarianz gegenüber räumlicher Verschiebung (Homogenität des Raumes) bzw. Rotation (Isotropie des Raumes).

Worüber Sie in dieser Vorlesung nichts lernen werden, ist die Ursache bzw. die Natur der Kräfte \vec{F}_i . Woher kommt z. B. die Gravitationskraft und warum hat sie die in Gl. (2.1) angegebene Form? Haben alle Kräfte die in Gl. (2.9) ausgenutzte Eigenschaft der paarweisen Additivität? Warum ist die Gravitationskraft eine der vier bekannten fundamentalen Kräfte, wohingegen die Kraft zwischen den Enden eines gespannten Gummibandes nicht fundamental ist. Genau genommen wird sogar die Form der Gl. (2.6) als empirisch⁶ vorausgesetzt, denn was ist eigentlich Masse und warum hat sie die Eigenschaft, die wir als Trägheit kennen?

Bevor wir dieses einführende Kapitel abschließen, wollen wir die Anwendung der Gleichungen (2.16) und (2.26) an zwei einfachen Beispielen illustrieren.

2.2 Zwei Beispiele zur newtonschen Mechanik[†]

Mathematisches Pendel: Das Mathematische Pendel besteht aus einer Punktmasse m , die an einem masselosen Faden der Länge l im Schwerefeld aufgehängt ist (vgl. Abbildung 2.1). Gemäß der Gl. (2.16) schreiben wir

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g + \vec{T}. \quad (2.37)$$

Auf die Pendelmasse wirkt die Gravitationskraft \vec{F}_g und die Fadenspannung \vec{T} . Für die linke Seite verwenden wir Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= l \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= l\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{r}} &= -l\ddot{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{e}_{\perp}} - l\dot{\phi}^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{e}_{\parallel}} \end{aligned}$$

⁶(vom Experiment her)

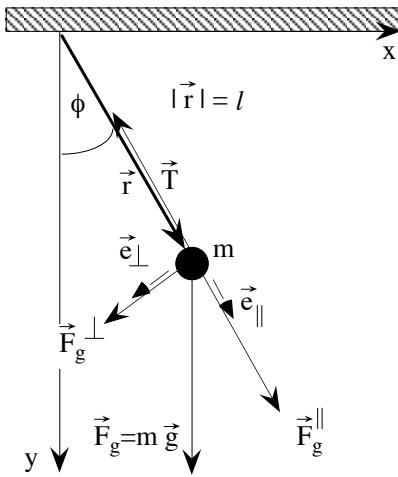


Abbildung 2.1: Ebenes mathematisches Pendel der konstanten Länge l mit Zerlegung der Kräfte.

($l = \text{konstant}$). Es ist zweckmäßig, $\ddot{\vec{r}}$ durch die Einheitsvektoren \vec{e}_\perp und \vec{e}_\parallel auszudrücken. Die gleiche Zerlegung funktioniert auch für \vec{F}_g . D. h.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_g^\perp + \vec{F}_g^\parallel = F_g^\perp \vec{e}_\perp + F_g^\parallel \vec{e}_\parallel .$$

Daraus ergibt sich direkt

$$-ml\ddot{\phi}\vec{e}_\perp - ml\dot{\phi}^2\vec{e}_\parallel = F_g^\perp \vec{e}_\perp + F_g^\parallel \vec{e}_\parallel - T\vec{e}_\parallel .$$

Da die Einheitsvektoren senkrecht zueinander stehen, folgen die unabhängigen Gleichungen

$$-ml\ddot{\phi} = mg \sin \phi \quad (2.38)$$

und

$$-ml\dot{\phi}^2 = mg \cos \phi - T . \quad (2.39)$$

D. h. gemäß Gl. (2.38) erhalten wir die endgültige Bewegungsgleichung für die Pendelmasse

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \phi(t) . \quad (2.40)$$

Dies ist eine Differenzialgleichung 2. Ordnung [4]. Erheblich vereinfacht wird die Lösung dieser Dgl.

durch die Annahme, dass die Auslenkung und damit $\phi(t)$ klein ist. D. h.

$$\phi(t) = \delta\phi(t) .$$

Wir entwickeln $\sin \delta\phi(t)$ daher gemäß Gl. (1.33)

$$\begin{aligned} \sin \delta\phi(t) &\approx \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \delta\phi(t) \\ f(\delta x) &\approx f(0) + f'(0) \delta x . \end{aligned}$$

Damit folgt aus (2.40)

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta\phi(t) \approx -\frac{g}{l} \delta\phi(t) . \quad (2.41)$$

Der Ansatz für die allgemeine Lösung dieser linearen homogenen Dgl. lautet

$$\delta\phi(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t .$$

Die Größen c_1 und c_2 sind noch zu bestimmende Konstanten. Einsetzen in (2.41) liefert

$$\begin{aligned} -c_1 \omega^2 \sin \omega t - c_2 \omega^2 \cos \omega t \\ = -\frac{g}{l} (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t) \end{aligned}$$

und damit

$$\omega = \sqrt{g/l} .$$

Die Konstanten c_1 und c_2 folgen aus den Anfangsbedingungen. Z. B. wählen wir $\delta\phi(t=0) = \delta\phi_0$ und $\dot{\delta\phi}(t=0) = \omega_0$. Wir erhalten $c_1 = \frac{\omega_0}{\omega}$ und $c_2 = \delta\phi_0$:

$$\delta\phi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t + \delta\phi_0 \cos \omega t . \quad (2.42)$$

Bemerkung: Alternativ hätten wir den Ansatz $\delta\phi(t) = \tilde{\delta\phi}_0 \sin(\omega t + \Delta)$ verwenden können. Mit $\sin(\omega t + \Delta) = \sin \omega t \cos \Delta + \cos \omega t \sin \Delta$ folgt nämlich

$$\delta\phi(t) = (\tilde{\delta\phi}_0 \cos \Delta) \sin \omega t + (\tilde{\delta\phi}_0 \sin \Delta) \cos \omega t .$$

Durch Vergleich mit (2.42) ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\phi}_0 &= \sqrt{\delta\phi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \\ \tan \Delta &= \delta\phi_0 \frac{\omega}{\omega_0}.\end{aligned}$$

Wählen wir z. B. $\omega_0 = 0$ (Anfangswinkelgeschwindigkeit ist Null) so folgt

$$\Delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \delta\tilde{\phi}_0 = \delta\phi_0.$$

Die Lösung lautet jetzt

$$\delta\phi(t) = \delta\phi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \delta\phi_0 \cos \omega t.$$

Bemerkung: In Aufgabe 10 (Federpendel) erhalten wir die Gleichung

$$\ddot{\delta\phi} + \frac{k}{m} \delta\phi = g.$$

Dies ist eine inhomogene Dgl., da $g \neq 0$ gilt. Die allgemeine Lösung dieser Dgl. ist gleich der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl. (mit $g = 0$), die eben diskutiert wurde, plus einer (speziellen) Lösung der inhomogenen Dgl. D. h.

$$\delta\phi(t) = \underbrace{\delta\phi_{hom}(t)}_{\text{wie eben}} + \delta\phi_{inh}(t). \quad (2.43)$$

Wir erkennen, dass $\delta\phi_{inh}(t) = \text{Konstante}$ eine Lösung der inhomogenen Dgl. ist und zwar mit Konstante $= mg/k$.

Die physikalische Bedeutung der Gl. (2.39),

$$T = mg \cos \phi + ml\dot{\phi}^2, \quad (2.44)$$

erlaubt die Berechnung der Fadenspannung aus der Gewichtskraft der Masse (1. Term) und aus der Zentrifugalkraft aufgrund der Kreisbewegung der Masse (2. Term).

Bemerkung. In dieses Beispiel ist ein nichttrivialer Punkt eingegangen. Es wurde die Gleichheit von schwerer und träger Masse angenommen! Schon Newton hatte Pendelversuche angestellt, um diese Gleichheit zu prüfen. Sie ist Grundlage zu

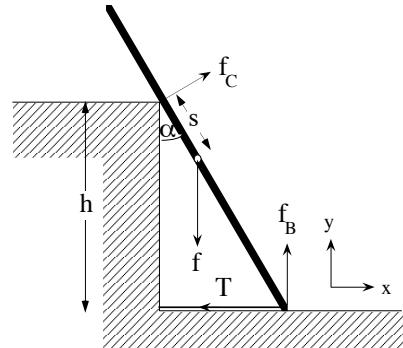


Abbildung 2.2: Eine Leiter der Länge l lehnt an einer Garage.

Einstins Gravitationstheorie. Siehe z.B. H. Melcher *Relativitätstheorie in elementarer Darstellung*. Aulis Verlag Deubner & CoKg (Abschnitt 10.2) oder S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*. Wiley.

Leiterstatik: Im zweiten Beispiel betrachten wir eine an einer Garage der Höhe h lehnende Leiter der Länge l und Masse m (vgl. Skizze). Um die Leiter gegen Wegrutschen zu sichern, ist ihr unteres Ende mit einem Faden an der Wand befestigt. Der Winkel zwischen der Wand der Garage und der Leiter sei α . Gesucht sind die unbekannten Kräfte f_B und F_C sowie die Fadenspannung T .

Dies ist ein Problem der Statik, d. h. wir verwenden die Gln. (2.16) und (2.26) in der Form (2.17) und (2.29). Wir schreiben

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = 0 \quad (2.45)$$

und

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = 0. \quad (2.46)$$

Zunächst überzeugen wir uns, dass die Gewichtskraft effektiv nur an einem Punkt entlang der Leiter angreift, denn es gilt

$$\sum_j m_j \vec{g} = m \vec{g} = \vec{f}.$$

wobei m_j Massensegmente entlang der Leiter sind⁷. Gl. (2.45) ist dann

$$\vec{f} + \vec{f}_B + \vec{f}_C + \vec{T} = 0$$

bzw. nach Komponenten zerlegt

$$f_C \cos \alpha - T = 0$$

$$-f + f_B + f_C \sin \alpha = 0$$

Offensichtlich beinhalten diese zwei Gleichungen drei unbekannte Kräfte. Daher kommt Gl. (2.46) ins Spiel. Zunächst wählen wir einen Ursprung. Dieser ist beliebig, denn es gilt für $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{a}$, wobei \vec{a} ein konstanter Vektor ist,

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i &= \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{a}) \times \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{f}_i + \vec{a} \times \underbrace{\sum_i \vec{f}_i}_{\stackrel{(2.45)}{=} 0} . \end{aligned}$$

Eine zweckmäßige Wahl ist der Schwerpunkt der Leiter, d. h.

$$\vec{R} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j} .$$

Es gilt nämlich für den Drehmomentbeitrag der Gravitationskräfte $m_j \vec{g}$

$$\sum_j (\vec{r}_j \times m_j \vec{g}) = \left(\sum_j m_j \vec{r}_j \right) \times \vec{g} = \vec{R} \times \vec{g} .$$

Ist \vec{R} der Ursprung, $\vec{R} = 0$, dann ist dieser Beitrag Null. Es folgt

$$\vec{r}_B \times \vec{f}_B + \vec{r}_C \times \vec{f}_C + \vec{r}_T \times \vec{T} = 0 .$$

Dabei sind \vec{r}_B , \vec{r}_C und \vec{r}_T die Angriffspunkte der jeweiligen Kräfte bezogen auf den Schwerpunkt

⁷Hier wissen wir noch nicht, in welchem Punkt \vec{f} angreift. Dies klärt sich, wenn wir die Bilanz der Drehmomente aufstellen.

als Ursprung. Die letzte Gleichung lässt sich auch durch die Beträge ausdrücken (da alle Vektoren in einer Ebene liegen):

$$\underbrace{|\vec{r}_B \times \vec{f}_B|}_{=\frac{1}{2}l f_B \sin \alpha} - \underbrace{|\vec{r}_C \times \vec{f}_C|}_{=s f_C} - \underbrace{|\vec{r}_T \times \vec{T}|}_{=\frac{1}{2}l T \cos \alpha} = 0 .$$

Die Länge s folgt gemäß Pythagoras aus

$$\left(s + \frac{1}{2}l \right)^2 = h^2 + \left(s + \frac{1}{2}l \right)^2 \sin^2 \alpha ,$$

d. h.

$$s = \frac{h}{\cos \alpha} - \frac{l}{2} .$$

Die gesuchte dritte Gleichung lautet daher

$$\frac{1}{2}l f_B \sin \alpha - \left(\frac{h}{\cos \alpha} - \frac{l}{2} \right) f_C - \frac{1}{2}l T \cos \alpha = 0 .$$

Zusammen mit den beiden anderen Gleichungen lassen sich die unbekannten Kräfte bestimmen:

$$f_B = f - f_C \sin \alpha$$

$$f_C = f - \frac{l \sin(2\alpha)}{4h} .$$

$$T = f_C \cos \alpha$$

Die hier berechneten Kräfte f_B und f_C heißen auch Reaktionskräfte. In den sich berührenden Körpern sind diese entgegengesetzt gleich.

Kapitel 3

Prinzip der kleinsten Wirkung für eine Koordinate

3.1 Lagrangesche Gleichung für eine Koordinate[†]

Die Bahn eines Massenpunktes soll sich durch eine Koordinate $q(t)$ als Funktion der Zeit t beschreiben lassen. Hierbei muss $q(t)$ keine kartesische Koordinate sein. Beispielsweise könnte $q(t) = \phi(t)$ gelten, wobei $\phi(t)$ der Winkel bezüglich der x-Achse ist, der die Position eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn zur Zeit t festlegt. Daher wird q als verallgemeinerte Koordinate bezeichnet. Die Erfahrung zeigt, dass zur vollständigen Beschreibung der Bewegung des Massenpunktes auch die Angabe der (verallgemeinerten) Geschwindigkeit

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

notwendig ist. Sind also $q(t_0)$ und $\dot{q}(t_0)$ bekannt, so können diese Größen für andere Zeiten t berechnet werden¹. Da in diesem Abschnitt eine verallgemeinerte Koordinate das System (aus einem Massenpunkt) vollständig charakterisiert, sagt man, dass es einen Freiheitsgrad² gibt.

Es existiert ein sehr allgemeines Prinzip, das die Vorhersage der zeitlichen Entwicklung eines Systems basierend auf seinen Symmetrieeigenschaften

¹Wir hatten im Abschnitt 2.2 das Mathematische Pendel diskutiert. Die Differentialgleichung für den Auslenkwinkel ist dort 2. Ordnung und es wurden zwei Anfangsbedingungen benötigt, um die Bewegung vollständig zu beschreiben.

²Es sei schon jetzt darauf hingewiesen, dass der Begriff Freiheitsgrad später in der statistischen Mechanik abweichend definiert ist

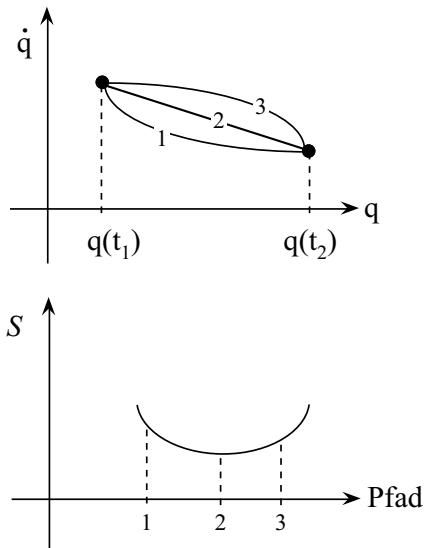


Abbildung 3.1: Drei alternative Pfade.

erlaubt. Im vorliegenden Fall ist damit eine alternative „Herleitung“ der newtonischen Bewegungsgesetze für unseren Massenpunkt gemeint. Allerdings ist dieses so genannte Prinzip der kleinsten Wirkung wesentlich allgemeiner und durchzieht die gesamte theoretische Physik. Das ist auch der Grund, weshalb es zu diesem frühen Zeitpunkt - in vereinfachter Form - eingeführt werden soll.

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung gibt es ein so genanntes Wirkungsintegral S , das für die tatsächlich erfolgende Bewegung des Massenpunktes ein Minimum besitzt, und dessen Variation daher verschwindet, d. h.

$$\delta S = 0 .$$

Das Wirkungsintegral hat die Form

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt . \quad (3.1)$$

Die unbekannte Funktion $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$ heißt Lagrange Funktion³ und $t_1 < t_2$ sind zwei Zeitpunkte. Variation von S bedeutet, dass der Massenpunkt neben seiner optimalen Bahn $q(t)$ auch leicht abweichende Alternativen $q(t) + \delta q(t)$ angeboten bekommt, die jedoch $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ erfüllen sollen (vgl. Abbildung 3.1). Die Variation von S ist die Differenz

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt ,$$

wobei die Argumente der Größen q , \dot{q} , δq und $\delta \dot{q}$ weggelassen sind. Die Taylorentwicklung des ersten Integranden liefert

$$\mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) \approx \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

und Einsetzen ergibt

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt .$$

Die Größe $\delta \dot{q}$ ist definiert durch

$$\delta \dot{q} \equiv \frac{d}{dt} \delta q .$$

Es ist geschickt, an dieser Stelle partiell zu integrieren, d. h.

³Lagrange, Joseph Louis de, französischer Mathematiker, *Turin 25.1. 1736, † Paris 10.4. 1813; herausragender Lehrer des 18.Jahrhunderts; Professor in Turin, Berlin und Paris, entwickelte die Variationsrechnung und wurde durch seine Zusammenfassung der Prinzipien der Mechanik zu den nach ihm benannten Gleichungssystemen der Begründer der analytischen Mechanik; Beiträge zur Theorie der analytischen Funktionen, zur Himmelsmechanik und Hydrodynamik. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt .$$

Der erste Term verschwindet, da $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ sein soll. Ansonsten ist aber δq beliebig wählbar. Daher folgt aus der Forderung $\delta S = 0$ die Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 , \quad (3.2)$$

da der Integrand des zweiten Terms verschwinden muss. Diese letzte Gleichung heißt lagrangesche Gleichung. Man spricht auch häufig von Euler-Lagrange Gleichung. Augenscheinlich handelt es sich um eine Differenzialgleichung, die uns $q(t)$ liefert - vorausgesetzt wir kennen $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$.

Um die Frage zu klären, wie \mathcal{L} beschaffen ist, betrachten wir einen freien Massenpunkt. Frei bedeutet, dass keine Kräfte auf den Massenpunkt einwirken. Die Position q sollte daher in \mathcal{L} nicht auftreten und gemäß Gl. (3.2) folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 . \quad (3.3)$$

Außerdem sollte \mathcal{L} nicht vom Vorzeichen von \dot{q} bzw. von der Bewegungsrichtung abhängen, d. h.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}^2) .$$

Die einfachste Funktion, die dieser Betrachtung genügt, ist

$$\mathcal{L}(\dot{q}^2) = m_q \dot{q}^2 , \quad (3.4)$$

wobei m_q eine Konstante ist. Damit folgt aus Gl. (3.3)

$$\dot{q} = \text{konstant} .$$

Dies ist das newtonscbe Trägheitsgesetz. Wenn wir jetzt Kräfte zulassen, dergestalt dass zu \mathcal{L} eine Funktion U von q addiert wird, dann haben wir

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_q \dot{q}^2 - U(q) . \quad (3.5)$$

Der Grund für das Minuszeichen ist zunächst einmal Konvention, denn Einsetzen dieser Gleichung in Gl. (3.2) liefert

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -mgl \sin \phi$$

$$m_q \ddot{q} = -\frac{\partial U(q)}{\partial q}, \quad (3.6)$$

und

$$\frac{d}{dt} p_\phi \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} ml^2 \dot{\phi} = ml^2 \ddot{\phi}. \quad (3.7)$$

die newtonische Bewegungsgleichung. Im Fall dass q eine kartesische Koordinate ist, ist m_q die Masse m des Massenpunktes. Die rechte Seite, die negative Ableitung der potenziellen Energie $U(q)$, ist die Kraft (vgl. Gl. (2.35)).

Dies liefert die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$ in (2.38), die wir schon kennen. Noch eine Bemerkung. In Gl. (3.7) ist die Größe p_ϕ definiert - der verallgemeinerte Impuls. Im Fall der kartesischen Koordinate x liefert die Ableitung $\partial \mathcal{L}/\partial v = mv$, den „normalen“ Impuls. Man beachte, dass das Einsetzen von $v = l\dot{\phi}$ in diese Gleichung nicht den verallgemeinerten Impuls p_ϕ liefert. Analog dazu wird die Ableitung $\partial \mathcal{L}/\partial \phi$ als verallgemeinerte Kraft bezeichnet.

3.2 Zwei einfache Beispiele[†]

Mathematisches Pendel: Als erstes von zwei Beispielen betrachten wir wieder das mathematische Pendel aus Abbildung 2.1. Wir schreiben

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\phi).$$

Die Geschwindigkeit \vec{v} ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors, d. h.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} l \sin \phi \\ l \cos \phi \end{pmatrix} = l\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}$$

bzw.

$$v = |\vec{v}| = l\dot{\phi}.$$

Die potenzielle Energie ist

$$U(\phi) = mgh = mgl(1 - \cos \phi)$$

(vgl. das Beispiel von Sysiphus am Ende des Abschnitts 1.3 (mit $h = s \sin \alpha$)). Wir bemerken, dass die Bewegungsgleichung sich nicht ändert, wenn wir eine Konstante zu \mathcal{L} addieren. Daher ist $U(\phi) = -mgl \cos \phi$ auch möglich. Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi.$$

Einsetzen in Gl. (3.2) liefert

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} mx^2 - U(x),$$

wobei wir die kartesische Koordinate x verwenden, um die Auslenkung des Oszillators zu kennzeichnen. Die potenzielle Energie $U(x)$ setzt sich additiv aus der Lageenergie mgx und der Federenergie $\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ zusammen. Hier ist k die Federkonstante und x_0 die Position der Oszillatormasse m , bei der die Auslenkung der Feder Null ist (entspannte Feder). D. h.

$$U(x) = mgx + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

Wie wir leicht nachrechnen können, ist

$$\ddot{x} = -g - \frac{k}{m}(x - x_0)$$

die Bewegungsgleichung für die Oszillatormasse.

3.3 Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung[†]

Der Lagrange-Formalismus ist besonders geeignet, Symmetrien und dazugehörige Erhaltungsgrößen miteinander zu verbinden. Beispielsweise sollen die Bewegungsgesetze heute die gleichen sein wie morgen. Mathematisch heißt dies, die Lagrange Funktion hängt nicht explizit von der Zeit ab ($\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$). In diesem Fall gilt für die totale Zeitableitung

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \frac{dq}{dt} .$$

Mit Gl. (3.2) folgt dann

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \ddot{q} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \right) = 0 .$$

Die Größe

$$E = \dot{q} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \quad (3.8)$$

ist also konstant. D. h. E ist invariant unter Verschiebung der Zeit.

Und welche Bedeutung hat E ? Setzen wir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_q \dot{q}^2 - U(q)$ in Gl. (3.8) ein, dann folgt

$$E = \frac{1}{2}m_q \dot{q}^2 + U(q) .$$

E ist also die Summe aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m_q \dot{q}^2$ und der potenziellen Energie $U(q)$. Die Gesamtenergie ist konstant.

Um einen wirklichen Eindruck von den Möglichkeiten des Lagrange-Formalismus zu bekommen, machen wir einen Abstecher in die spezielle Relativitätstheorie.

Die Gesetze der Klassischen Mechanik erfüllen lediglich Galilei-Invarianz. Wie bisher in einer Dimension bedeutet dies, dass sich die newtonschen Bewegungsgleichungen, aufgeschrieben für x und t , nicht ändern, wenn x und t gemäß

$$\begin{aligned} x' &= x - wt \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3.9)$$

durch x' und t' ersetzt werden. Hier ist w eine konstante Relativgeschwindigkeit zwischen dem x - und x' -Koordinatensystem.

Diese so genannte Galilei Transformation behandelt die Koordinate x und die Zeit t recht ungleich. Zeit ist absolut! In der speziellen Relativitätstheorie ist die Zeit t eine mit x gleichberechtigte Koordinate. Der Abstand zweier nahe beieinander liegender Punkte in diesem xt -Koordinatensystem ist ds , d. h.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 . \quad (3.10)$$

Die Größe c ist zunächst einfach eine Konstante, die dafür sorgt, dass cdt die gleichen Einheiten hat wie dx . Die einzige Merkwürdigkeit ist das Minuszeichen. Nach unserer „Euklidischen Erfahrung“ hätten wir $c^2 dt^2 + dx^2$ geschrieben. Wir könnten dies tun, es würde das folgende Argument nicht beeinflussen. Allerdings erhalten wir nur mit dem Minuszeichen physikalisch sinnvolle Ergebnisse und dann würden wir das Minuszeichen nachträglich einführen.

Bevor wir zur relativistischen Lagrange Funktion kommen, wollen wir die Transformationen (3.9) verallgemeinern. Alternativ untersuchen wir die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - wt) \\ t' &= \alpha(t - \beta x) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ort und Zeit werden fast symmetrisch behandelt sind. Die Größen γ , α und β sind zunächst unbekannt. Wir bestimmen sie aus der Bedingung, dass der Raum-Zeit-Abstand ds invariant sein soll. D. h. es soll gelten

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = ds^2 . \quad (3.12)$$

Gemäß (3.11) schreiben wir

$$\begin{aligned} -dx'^2 &= \gamma^2 (-dx^2 + 2wdxdt - w^2 dt^2) \\ c^2 dt'^2 &= c^2 \alpha^2 (dt^2 - 2\beta dtdx + \beta^2 dx^2) . \end{aligned}$$

Damit (3.12) erfüllt ist, muss also gelten

$$\begin{aligned} c^2 &= c^2\alpha^2 - \gamma^2 w^2 \\ 0 &= -2c^2\alpha^2\beta + 2\gamma^2 w \\ -1 &= c^2\alpha^2\beta^2 - \gamma^2 . \end{aligned}$$

Die elementare Lösung dieses Gleichungssystems lautet

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ \alpha &= \gamma \\ \beta &= \frac{w}{c^2} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Damit ergeben sich aus (3.11) die so genannten Lorentz Transformationen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - wt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{w}{c^2}x\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

der speziellen Relativitätstheorie.

Nun zurück zur Lagrange Funktion für ein relativistisches freies Teilchen. Wir machen einen ganz einfachen gedanklichen Ansatz und schreiben für die Wirkung

$$\delta S \propto \delta \int_1^2 ds = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt , \quad (3.15)$$

wobei 1 und 2 zwei Punkte in der x - t -Raumzeit sein sollen. Im Wesentlichen suchen wir die kürzeste Verbindung der Punkte in der Raumzeit. Durch den Vergleich von (3.15) mit unserer ursprünglichen Gleichung für die Wirkung (3.1) schließen wir

$$\mathcal{L} \propto \frac{ds}{dt} \stackrel{(3.12)}{=} c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

mit $v = dx/dt$.

Für kleine Geschwindigkeiten, $v \ll c$, sollte das relativistische \mathcal{L} in die klassische Form übergehen. Wir schreiben also

$$\mathcal{L} \propto \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) .$$

Damit wir $\frac{1}{2}mv^2$ erhalten, muss die Proportionalitätskonstante $-mc^2$ sein. D. h.

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (3.16)$$

Der relativistische Impuls des Massenpunktes ist jetzt

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = m\gamma v . \quad (3.17)$$

Der Faktor $m\gamma$ ist die relativistische Masse. Sie strebt gegen unendlich für $v \rightarrow c$! Die nächste interessierende Größe ist die Energie des Massenpunktes, d. h.

$$\begin{aligned} E &= v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L} \\ &= m\gamma v^2 + m\gamma^{-1}c^2 \\ &= m\gamma c^2 . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Insbesondere erhalten wir für $v \rightarrow 0$ die berühmte Formel für die Ruheenergie

$$E_0 = mc^2 . \quad (3.19)$$

Wir bemerken, dass c ursprünglich als eine konstante Geschwindigkeit eingeführt wurde, die dafür sorgt, dass ct und x die gleichen Einheiten haben. Jetzt ist daraus eine physikalische Grenzgeschwindigkeit geworden, die von keiner Masse überschritten werden kann! Man sieht dies einmal dadurch, dass der Faktor γ für $v > c$ komplex wird, bzw. bei $v = c$ wird $m\gamma$ unendlich, oder durch das Geschwindigkeitsadditionstheorem. Gemäß (3.14) gilt nämlich

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - wdt}{dt - \frac{w}{c^2}dx} .$$

Mit $v' = dx'/dt'$ und $v = dx/dt$ erhalten wir durch Faktorisieren von dt

$$v' = \frac{v - w}{1 - \frac{wv}{c^2}} \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{v' + w}{1 + \frac{wv'}{c^2}} . \quad (3.20)$$

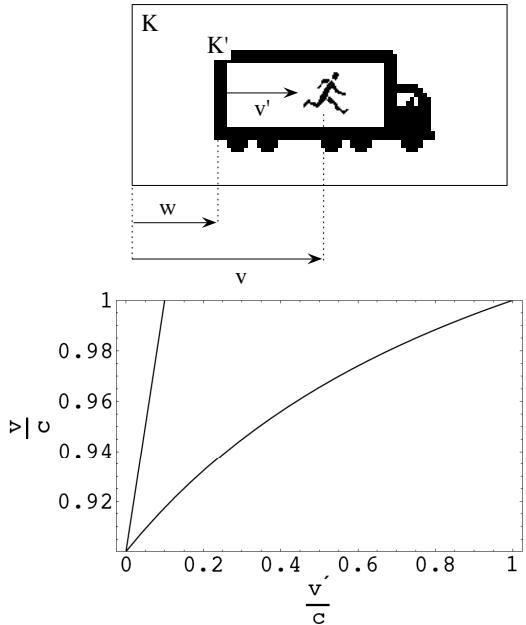


Abbildung 3.2: Oben: System K' bewegt sich relativ zu System K mit der Geschwindigkeit w . In K' wiederum bewegt sich der Läufer mit der Geschwindigkeit v' in die gleiche Richtung. Im System K ist seine Geschwindigkeit v . Unten: Auftragung von v gegen v' gemäß Gl. (3.20) für $w = 0.9$. Die gerade Linie zeigt die simple Addition $v = v' + w$, wie sie unserer Alltagserfahrung entspricht. Die Abweichung vom relativistischen Resultat ist umso größer, je näher w an der Grenzgeschwindigkeit liegt.

Wenn wir dann noch $v = c$ setzen, folgt aus (3.20) ebenfalls

$$v' = c, \quad (3.21)$$

obwohl $w \neq 0$ ist (vgl Abbildung 3.2). D. h. auch die „addierten“ Geschwindigkeiten v und w liefern lediglich c ! Es sei betont, dass c eine hier noch unbekannte Grenzgeschwindigkeit ist. Die Verbindung mit der Lichtgeschwindigkeit liefert erst die maxwellsche Theorie in der Elektrodynamik.

Kapitel 4

Prinzip der kleinsten Wirkung

4.1 Lagrange Funktion eines Systems von Massenpunkten

Unser Ziel ist die Herleitung der Bewegungsgesetze von miteinander wechselwirkenden Massenpunkten. Genauer gesagt wollen wir das im vorangegangenen Kapitel eingeführte Prinzip der kleinsten Wirkung verallgemeinern.

Die Position eines Massenpunktes i wird durch seinen Ortsvektor $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ beschrieben. x_i , y_i und z_i sind die kartesischen Koordinaten. Manchmal ist es günstig bzw. bequem andere Koordinaten einzuführen, die der Symmetrie des Systems angepasst sind. Beispiele sind Polar- oder Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten. Man spricht von verallgemeinerten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_s , wenn diese das System vollständig beschreiben¹. Die Größe s nennt man auch Freiheitsgrade des Systems². Im einfachsten Fall gilt $s = 3N$, wobei N die Zahl der Massenpunkte ist. Die Angabe der Koordinaten q_j ($j = 1, \dots, s$) zum Zeitpunkt t , also $q_j(t)$, erlaubt allerdings noch nicht die Berechnung der Koordinaten zu einem zukünftigen Zeitpunkt $t + \Delta t$. Dazu ist, wie die Erfahrung zeigt, die zusätzliche Angabe der Geschwindigkeiten $\dot{q}_j \equiv \frac{dq_j}{dt}$ ($j = 1, \dots, s$) notwendig. Erst aus $\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}_{j=1,\dots,s}$ lassen sich die Bewegungsgleichungen der Massenpunkte i berechnen.

Lagrangesche Gleichungen:

Die Verallgemeinerung des Wirkungsintegrals (3.1) auf den Fall von s Koordinaten und s Geschwindigkeiten lautet

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_s(t), t) dt. \quad (4.1)$$

Die weitere Vorgehensweise ist genau die gleiche wie im vorherigen Abschnitt. Die Variation von S , also δS , ist diesmal

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1 + \delta q_1, \dots, q_s + \delta q_s, \\ & \quad \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s + \delta \dot{q}_s, t) dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) dt. \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung des ersten Integranden liefert jetzt³

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(q_1 + \delta q_1, \dots, q_s + \delta q_s, \\ & \quad \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s + \delta \dot{q}_s, t) \\ & \approx \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \\ & + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right). \end{aligned}$$

Wir wiederholen nun die Rechenschritte, insbesondere die partielle Integration, genau wie im Fall von nur einer Koordinate für jeden Term in der Summe. Das Resultat besteht aus den folgenden lagrangeschen Gleichungen,

¹Kartesischer Fall: $q_1 \equiv x_1$, $q_2 \equiv y_1$, $q_3 \equiv z_1$, $q_4 \equiv x_2, \dots$

²vgl. Abschnitt 3.1.

³vgl. Formel (1.41)

die Zahl der holonomen Zwangsbedingungen ist.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (4.2)$$

in vollständiger Analogie zu Gl. (3.2). Dies liegt natürlich daran, dass jedes δq_j für sich frei wählbar ist. In der Variationsrechnung heißen die Gln. (4.2) eulersche Gleichungen. Gl. (4.2) wird uns als allgemeiner Ausgangspunkt für die Aufstellung von Bewegungsgleichungen dienen.

Bemerkung: Die Forderung $\delta S = 0$ bestimmt \mathcal{L} nicht eindeutig. Ersetzt man $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ durch $\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$ (hier der Einfachheit halber wieder für nur eine Koordinate), so gilt

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt}_{\text{Konstante}} \end{aligned}$$

und daher $\delta S' = \delta S = 0$, d. h. \mathcal{L}' und \mathcal{L} erfüllen beide Gl. (4.2). Außerdem kann man \mathcal{L} mit einer Konstante multiplizieren, ohne dass dies Auswirkungen auf Gl. (4.2) hat.

Terminologie der Zwangsbedingungen:

Manchmal ist es notwendig Neben- oder Zwangsbedingungen zu berücksichtigen, die die Bewegung der Massenpunkte beschränken. Man unterscheidet:

holonome Zwangsbedingungen – Diese haben die Form

$$f(q_1, q_2, \dots, t) = 0. \quad (4.3)$$

Ein einfaches Beispiel wäre ein fester Körper in dem alle Abstände $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ zwischen den Massenpunkten fest sind, d. h. $r_{ij}^2 - c_{ij} = 0$. Auch wenn ein Teilchen durch eine feste Unterlage, wie beispielweise eine Ebene, in seiner Bewegung auf diese Ebene beschränkt ist, unterliegt es diesen Zwangsbedingungen. Jede holonome Zwangsbedingung reduziert die Zahl der unabhängigen Koordinaten um eins, d. h. $s = 3N - Z$, wobei Z

nicht-holonome Zwangsbedingungen – Diese haben nicht die Form der Gl. (4.3). Wenn z. B. ein Massenpunkt auf einer Kugeloberfläche abgleitet und schließlich fällt, gilt $r^2 - a^2 \geq 0$, wobei der Kugelmittelpunkt im Ursprung liegt und a der Kugelradius ist.

Zusätzlich bezeichnet man explizit zeitabhängige Zwangsbedingungen als rheonom bzw. andernfalls als skleronom.

Lagrange Gleichungen mit Nebenbedingungen:

Wir betrachten wieder einen einzelnen Massenpunkt und nehmen an, er soll der nicht-holonomen Bedingungsgleichung

$$G(q, \dot{q}, t) = c. \quad (4.4)$$

gehorchen. Diese kann mittels der Methode der lagrangeschen Multiplikatoren⁴ in den obigen Formalismus integriert werden. Dazu variieren wir statt Gl. (4.1) das Funktional

$$\int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \lambda(G(q, \dot{q}, t) - c)] dt$$

und erhalten offensichtlich

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) [\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \lambda G(q, \dot{q}, t)] = 0. \quad (4.5)$$

Der unbestimmte lagrangesche Multiplikator λ wird mit Hilfe der zusätzlichen Gl. (4.4) berechnet.

Zur Verdeutlichung betrachten wir das einfache Beispiel einer Funktion $f(x, y)$, deren Minimum unter der zusätzlichen Bedingung $\phi(x, y) = 0$ gesucht wird. Zunächst soll gelten $0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$. Andererseits gilt $0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$. Die Kombination liefert $0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}$ mit $\lambda = -\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial \phi}{\partial y}$. Wiederum aus $\lambda = -\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial \phi}{\partial y}$ folgt $0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}$. D. h. $\delta(f + \lambda \phi) = 0$.

Haben wir statt einer Bedingungsgleichung n Bedingungsgleichungen, so wird jede mit einem eigenen Multiplikator versehen. D. h., es folgt

⁴ siehe z.B. M.R. Spiegel (1971) *Advanced Mathematics, Schaum's outline series in mathematics*, McGraw-Hill

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) [\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} G_{\nu}(q, \dot{q}, t)] = 0 . \quad (4.6)$$

Natürlich ist die Verallgemeinerung auf Systeme von Massenpunkten klar.

Mathematisches Pendel: Als Beispiel untersuchen wir das mathematische Pendel in kartesischen Koordinaten. Wir beziehen uns auf Abbildung 2.1 und schreiben für die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(l - y) .$$

Dies ist eine kartesische Variante der Lagrange Funktion aus Abschnitt 3.2. Die allgemeine Form von \mathcal{L} werden wir im Anschluss genauer untersuchen. Die skleronom holome Bedingungsgleichung lautet

$$G(\vec{r}) \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = l . \quad (4.7)$$

Die Anwendung von Gl. (4.6) mit λ ersetzt durch $-\lambda$ liefert

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda \frac{x}{l} \\ m\ddot{y} &= -\lambda \frac{y}{l} + mg . \end{aligned}$$

Zusammen mit der Bedingungsgleichung sind dies drei Gleichungen (bzw. Differenzialgleichungen) für $x(t), y(t)$ und λ .

Es sollen die folgenden Anfangsbedingungen gelten

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0 & \dot{x}(t=0) &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ y(t=0) &= l & \dot{y}(t=0) &= 0 , \end{aligned}$$

wobei E die Gesamtenergie des Pendels ist⁵. Die Lösungen lauten

⁵Am Scheitelpunkt gilt $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin(\omega t + \Delta_x) \\ y(t) &= y_0 \sin(\omega t + \Delta_y) + \frac{mgl}{\lambda} , \end{aligned}$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{ml}}$ gilt. Hier ist $\frac{mgl}{\lambda}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (vgl. Abschnitt 2.2). Die Anfangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned} \Delta_x &= 0 & \omega x_0 &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ y_0 + \frac{mgl}{\lambda} &= l & \Delta_y &= \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

D. h.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2El}{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}t\right) \\ y(t) &= \frac{mgl}{\lambda} + \left(l - \frac{mgl}{\lambda}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}t\right) . \end{aligned}$$

Der Lagrange Parameter λ kann im Prinzip durch Einsetzen dieser Gleichungen in die Bedingung (4.7) erhalten werden. Jedoch ist diese Gleichung kompliziert und wir betrachten wieder den einfachen Grenzfall kleiner Auslenkung $\delta\phi(t)$. In diesem Fall gilt nämlich $y(t) \approx l$ und daher $\lambda \approx mg$. Wir erhalten somit aus $x(t) \approx l\delta\phi(t)$ die Gleichung

$$\delta\phi(t) \approx \sqrt{\frac{2E}{mgl}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) .$$

Dieses Resultat ist identisch mit unserer Lösung des mathematischen Pendels ausgedrückt in Gl. (2.42) für die hier gewählten Anfangsbedingungen ($\delta\phi_o = 0$ und $\omega_o = \sqrt{2E/(ml^2)}$).

Trägheitsgesetz:

Jetzt wenden wir uns der expliziten Form von \mathcal{L} zu. Dabei gehen wir davon aus, dass der leere Raum isotrop und homogen ist. D. h., keine Richtung ist ausgezeichnet, und alle Orte sind äquivalent. In einem solchen Raum hängt der Bewegungszustand eines Massenpunktes weder vom Ort \vec{r} noch von

der Zeit t ab. Insbesondere sollte \mathcal{L} wegen der Isotropie nur vom Betrag der Geschwindigkeit bzw. von \vec{v}^2 abhängen, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2)$. Damit folgt aus Gl. (4.2)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (4.8)$$

⁶ bzw. $\partial \mathcal{L} / \partial \vec{v} = \text{konstant}$. Zwanglos lässt sich dies nur mit

$$\vec{v} = \text{konstant}$$

erreichen ⁷. D. h. jede freie Bewegung verläuft mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit und konstanter Richtung. Dies ist das Trägheitsgesetz. Es wird auch als 1. newtonsches Gesetz bezeichnet.

\mathcal{L} für freien Massenpunkt:

Wir betrachten zwei (kartesische) Koordinatensysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{w} in dem eben beschriebenen Raum gegeneinander bewegen (z.B. einen Zug der mit \vec{w} vom Bahnsteig aus gesehen durch einen Bahnhof fährt). Man nennt diese Koordinatensysteme Inertialsysteme. Unsere Erfahrung sagt, wenn \vec{v} die Geschwindigkeit eines Massenpunktes im ersten System (Bahnsteig) ist, dann ist $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{w}$ seine Geschwindigkeit vom zweiten System (Zug) aus gesehen. Wir schreiben daher

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L}(v'^2) = \mathcal{L}(v^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + w^2) \\ &\approx \mathcal{L}(v^2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} 2\vec{v} \cdot \vec{w}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei wir von $w \ll v$ ausgehen.

Die Bewegungsgesetze in den beiden Inertialsystemen sollen der Form nach die gleichen sein. Dies bedeutet, dass $\mathcal{L}(v'^2)$ und $\mathcal{L}(v^2)$ äquivalent sein müssen. Um dies zu gewährleisten, dürfen sie sich lediglich um die totale Zeitableitung einer Funktion der Koordinaten und der Zeit unterscheiden (vgl. oben). D. h. es muss $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{d}{dt} f(\vec{r}, t)$ gelten. Mit

⁶ $\partial / \partial \vec{v}$ ist immer als $(\partial / \partial v_x, \partial / \partial v_y, \partial / \partial v_z)$ gemeint. Ebenso ist unten $\partial / \partial \vec{r}$ gleichbedeutend mit dem Gradienten $\vec{\nabla} = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$.

⁷Gleich wird dies noch klarer gezeigt.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} = \text{konstant}$ folgt tatsächlich $f(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} \vec{r} \cdot \vec{w}$. Wäre jedoch $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2}$ immer noch eine Funktion von v , dann funktioniert dies nicht!

Gemäß dieser Argumentation gilt also

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \vec{v}^2, \quad (4.10)$$

wobei $m/2$ eine positive Konstante ⁸ ist. Die Größe m wird als die Masse des Massenpunkts bezeichnet!

Bemerkung: Aus Gl. (4.10) folgt insbesondere für beliebiges \vec{w}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{m}{2} v'^2 \\ &= \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{w})^2 \\ &= \frac{m}{2} v^2 - m\vec{v} \cdot \vec{w} + \frac{m}{2} w^2 \\ &= \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \left(-m\vec{r} \cdot \vec{w} + \frac{m}{2} w^2 t \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Zwei solche Lagrange Funktionen sind aber wieder im Sinne des Prinzips der kleinsten Wirkung äquivalent. Man sagt auch, sie sind bzgl. des Wechsels zwischen den Bezugssystemen invariant.

Bemerkung: Wie Albert Einstein ⁹ in seiner speziellen Relativitätstheorie gezeigt hat, ist die oben

⁸Wäre m negativ, so könnte S durch Erhöhung der Geschwindigkeit beliebig klein gemacht werden.

⁹Einstein, Albert, Physiker, *Ulm 14.3. 1879, † Princeton (New Jersey) 18.4. 1955, Professor in Zürich und Prag, 1914-33 Leiter des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik in Berlin, seitdem Professor in Princeton. Einstein entwickelte um 1905 die spezielle, 1915 die allgemeine Relativitätstheorie, die die moderne Physik auf neue Grundlagen stellten; 1905 formulierte er eine Theorie der brownischen Bewegung, 1907 eine Theorie der spezifischen Wärme fester Körper. Seine Erklärung des äußeren Photoeffekts (1905, 1921 Nobelpreis für Physik) mithilfe der Lichtquantenhypothese trug zur Anerkennung der Quantentheorie bei, obwohl Einstein die statistische Interpretation der Quantenmechanik nie akzeptierte. Die Arbeiten Einsteins nach dem Ersten Weltkrieg galten der allgemeinen Relativitätstheorie, insbesondere einer Theorie der Gravitation und einer einheitlichen Feldtheorie. Mit einem Brief an Präsident Roosevelt (1939) gab Einstein, ein überzeugter Pazifist, aus Furcht vor einer deutschen Aggression zusammen mit anderen den Anstoß zum Bau der Atombombe; nach 1945 setzte er sich nachhaltig für den Abbau von Kernwaffen ein. Werke: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (1916); Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie (1917); Mein Weltbild (1934); Die Evolution in der Physik (1950, mit L. Infeld); Lebenserinnerungen (1952). Literatur: Pais, A. *Raffiniert ist der Herrgott A. Einstein. Aus dem Englischen*. Braunschweig u.a. 1986. Kanitscheider, B. *Das Welt-*

verwendete Geschwindigkeitsaddition, $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{w}$, nur im Grenzfall $v, w \ll$ Lichtgeschwindigkeit asymptotisch korrekt. Insbesondere muss die dieser Geschwindigkeitsaddition zugrunde liegende Galilei Transformation¹⁰

bild A. Einsteins. München 1988. Highfield,R. und Carter, P. *Die geheimen Leben des A.Einstein. Eine Biographie. Aus dem Englischen.* Berlin 1994. Fölsing,A. *A.Einstein. Eine Biographie.* Taschenbuchausgabe. Frankfurt am Main 1995. Hermann,A. *Einstein. Der Weltweise und sein Jahrhundert.* München 21995. Wickert,J. *A.Einstein.* Reinbek 106.108.Tausend 1995. <http://www.westegg.com/einstein/> ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

¹⁰Galilei, Galileo, italienischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, *Pisa 15.2. 1564, † Arcetri (heute zu Florenz) 8.1. 1642; wurde 1589 Professor in Pisa, 1592 in Padua, 1610 Hofmathematiker und Hofphilosoph des Großherzogs von Florenz; wurde durch die Einführung des systematischen Experiments und der induktiven Methode zum Begründer der neueren Naturwissenschaft. Mit seinen Untersuchungen zur Fall- und Wurfbewegung begründete Galilei die moderne Kinematik. Er baute 1610 das 1609 in Holland erfundene Fernrohr nach und beobachtete damit u.a. die Phasen der Venus, die Mondgebirge, die vier größten Jupitermonde (Galileische Monde), den Ring des Saturn sowie die Zusammensetzung der Milchstraße aus vielen Sternen. Galilei trat seit 1610 öffentlich für das heliozentrische Weltsystem des N.Kopernikus ein. 1613 entwickelte er seine Vorstellungen über das Verhältnis der Bibel zur Naturerkennnis und v.a. zum heliozentrischen System, die eine Neuinterpretation der Heiligen Schrift erforderten. Dies führte zu einer ersten Auseinandersetzung mit der römischen Kirche, die 1616 mit dem Verbot dieser Lehre durch den Papst antwortete. Seine Schrift *Dialogo* (1632) führte zum Prozess gegen Galilei; am 22.6. 1633 musste er seinem Irrtum abschwören und wurde zu Hausarrest in seinem Landhaus in Arcetri verurteilt. In der Haft verfasste er trotz seiner Erblindung die *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (Leiden 1638), in denen er physikalische Probleme wie die Fallgesetze behandelte; als einer der Ersten in Italien bediente sich Galilei bei seinen Schriften der Muttersprache. 1992 wurde Galilei von der römisch-katholischen Kirche rehabilitiert. Galileis Konflikt mit der Kirche wurde wiederholt in der Literatur behandelt, so von B.Brecht (3.Fassung 1955), M.Brod (1948) und Gertrud von Le Fort (1954). Literatur: Brandmüller, W. *Galilei und die Kirche. Ein Fall und seine Lösung.* Aachen 1994. Hemleben, J. *Galileo Galilei mit Selbstzeugnissen und Bilddokumenten.* Reinbek 58.60.Tausend 1994. Fölsing, A. *Galileo Galilei Prozeß ohne Ende. Eine Biographie.* Reinbek 1996. Quellentext: Galileis Gespräche (1638) sind in Dialogform geschrieben und auf dreimal zwei Tage aufgeteilt. Behandelt werden zwei neue Wissenschaften, die Statistik und das Bewegungsproblem. Am Beginn des 3./4. Tages stellt Galilei voller Selbstbewusstsein fest: Über einen sehr alten Gegenstand bringen wir eine ganz neue Wissenschaft. Nichts ist älter in der Natur als die Bewegung, und über dieselbe gibt es weder wenig noch geringe Schriften der Philosophen. Dennoch habe ich deren Eigentümlichkeiten in großer Menge und darunter sehr wissenswerte, aber noch nicht erkannte und noch nicht bewiesene in Erfahrung gebracht. <http://www.imss.fi.it/emostr.html> ©2000 Bibli-

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{w}t \quad (4.12)$$

$$t' = t \quad (4.13)$$

durch die Lorentz Transformation

$$\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(w) (\vec{r}_{\parallel} - \vec{w}t) \quad (4.14)$$

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \quad (4.15)$$

$$t' = \gamma(w) \left(t - \frac{\vec{w} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2} \right) \quad (4.16)$$

ersetzt werden (vgl. Abschnitt 3.3). Hier beziehen sich \parallel und \perp auf die Richtung von \vec{w} . Außerdem ist c die Lichtgeschwindigkeit¹¹ und $\gamma(w) = \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. Wir werden noch einmal in Abschnitt 4.4 auf die spezielle Relativitätstheorie zurückkommen. Ansonsten arbeiten wir mit Geschwindigkeiten, die ausreichend klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit sein sollen.

Bemerkung: Man beachte

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{ds^2}{dt^2},$$

wobei ds ein Wegelement ist. Es lautet in kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4.17)$$

in Zylinderkoordinaten

graphisches Institut & F. A. Brockhaus AG

¹¹Das daraus folgende relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem lautet:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{w}}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}} \quad \vec{v}_{\perp} = \frac{1}{\gamma(w)} \frac{\vec{v}'_{\perp}}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}}$$

Danach ist c die höchste asymptotisch erreichbare Geschwindigkeit!

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 , \quad (4.18)$$

und in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (4.19)$$

Damit gilt

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.20)$$

bzw.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.21)$$

bzw.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) . \quad (4.22)$$

\mathcal{L} für Systeme von Massenpunkten:

Die Grundlage der Mechanik von Massenpunkten bilden die newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i , \quad (4.23)$$

wobei die Kraft \vec{F}_i auf Punkt i , die durch alle übrigen Massenpunkte ausgeübt wird, durch

$$\vec{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad (4.24)$$

gegeben ist. Hierbei ist U die potenzielle Energie des Systems. Ist der Ort und die Geschwindigkeit des Punktes i zur Zeit $t = 0$ bekannt, so liefert die Integration von Gl. (4.23) die gesamte vergangene und zukünftige Bahn des Massenpunktes! Gl. (4.23) wird auch als 2. newtonsches Gesetz bezeichnet.

Betrachten wir als Beispiel die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \vec{r}_i(t + \Delta t) &\cong \\ &\vec{r}_i(t) + \dot{\vec{r}}_i(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_i(t) \Delta t^2 . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Gemäß Gl. (4.23) gilt für die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(t)$. Ist $\vec{F}_i(t)$ bekannt, so können wir aus Gl. (4.25) in kleinen Zeitschritten Δt die Bahn von i berechnen. Allerdings ist dieser Algorithmus nicht besonders gut, da der Fehler von der Ordnung Δt^3 ist. Einen ebenso einfachen aber besseren Algorithmus der Fehlerordnung Δt^4 erhalten wir, indem wir die Taylorentwicklungen von $\vec{r}_i(t + \Delta t)$ und $\vec{r}_i(t - \Delta t)$ um t addieren.

$$\begin{aligned} \vec{r}_i(t + \Delta t) &\cong \\ &2\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t - \Delta t) + \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(t) \Delta t^2 . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Bei diesem Algorithmus müssen zwei Orte bekannt sein (z. B. $\vec{r}_i(0)$ und $\vec{r}_i(-\Delta t)$). Man beachte, dass der Algorithmus, so wie die Bewegungsgleichungen (4.23), invariant gegenüber Zeitumkehr ist.

Die newtonischen Bewegungsgleichungen erhalten wir auch aus dem Lagrange Formalismus, d. h. aus Gl. (4.2) bzw. aus $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}$, wenn wir von

$$\mathcal{L} = K - U = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - U \quad (4.27)$$

ausgehen, wobei K die kinetische Energie des Systems ist. Dazu müssen wir allerdings U als unabhängig von den Geschwindigkeiten ansehen, d. h.

$$U = U(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t), \dots) . \quad (4.28)$$

Dies hat eine schwerwiegende Konsequenz. Die Wirkung, die i auf j ausübt, erfolgt instantan. D. h. sie steht in Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie. Nur wenn die Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, ist dies vertretbar. Allerdings hatte die newtonische Theorie fast dreihundert Jahre unangefochtenen Bestand und sagt beispielsweise Planetenbewegungen sehr präzise voraus.

Man könnte jetzt fragen, warum wir das Prinzip der kleinsten Wirkung und den Lagrange Formalismus besprochen haben, um dann die Bewegungsgleichungen Gl. (4.23) quasi durch die Hintertür einzuführen. Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist ein sehr tragfähiges Konzept, das über die Mechanik weit hinausgeht. An manchen Stellen jedoch müssen wir gewisse Ansätze für \mathcal{L} machen

(man sagt auch Theorie dazu) und anschließend die Konsequenzen mit der Wirklichkeit bzw. dem Experiment vergleichen. Hier wußten wir vorab, dass die newtonsche Theorie der Wirklichkeit sehr nahe kommt und haben uns davon leiten lassen.

Bemerkung: In den vergangenen beiden Abschnitten haben wir kartesische statt verallgemeinerter Koordinaten verwendet. Die Lagrange Funktion als Funktion der q_i erhalten wir durch

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

bzw.

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k . \quad (4.29)$$

D. h.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{lm}(\{q\}) \dot{q}_l \dot{q}_m - U(\{q\}) . \quad (4.30)$$

Arbeit:

Das Wegintegral

$$W = \int_C d\vec{s} \cdot \vec{F}_i \quad (4.31)$$

wird als die am Massenpunkt i durch die Kraft \vec{F}_i verrichtete Arbeit bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.3). Mit Gl. (4.24) gilt

$$\begin{aligned} W &= - \int_C d\vec{s} \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \\ &= - \int_C dU = U_{\text{Anfang}} - U_{\text{Ende}} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für einen geschlossenen Weg C gilt folglich $W = 0$. Solche Kräfte nennt man konservativ.

4.2 Erhaltungsgrößen

Energieerhaltung:

Es existiert kein vernünftiger Grund, warum \mathcal{L} in einem abgeschlossenen System explizit

zeitabhängig sein sollte¹². Die Bewegungsgesetze, die aus \mathcal{L} folgen, sollen jetzt oder in tausend Jahren die Gleichen sein. Man spricht auch von der Homogenität der Zeit. Daher gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{=0} \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) , \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} \right) = 0 .$$

D. h. die Energie definiert durch

$$E = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} \quad (4.33)$$

ist eine Erhaltungsgröße in geschlossenen Systemen. Da die kinetische Energie quadratisch in den Geschwindigkeitskomponenten ist, folgt insbesondere

$$E = K + U . \quad (4.34)$$

Impulserhaltung:

Die Lagrange Funktion soll auch nicht von der Wahl des Ursprungs in einem geschlossenen System abhängen (vgl. Trägheitsgesetz). Mathematisch ausgedrückt lautet diese Forderung

$$0 = \delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i ,$$

wobei $\delta \vec{r}$ eine beliebige aber für alle i gleiche Ursprungsverschiebung ist. D. h. $\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = 0$. Damit folgt aus $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = 0$, dass der Gesamtimpuls des Systems

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (4.35)$$

¹²Abgeschlossen ist ein System, in dem die Massenpunkte keinen äußeren Einflüssen unterliegen.

eine weitere Erhaltungsgröße ist. Die Größen $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ sind die Impulse der einzelnen Massenpunkte. Verallgemeinerte Impulse sind durch

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.36)$$

definiert.

Bemerkung: Mit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$ folgt aus (4.24)

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 . \quad (4.37)$$

Die Summe aller Kräfte in einem geschlossenen System verschwindet. Im Spezialfall $i = 1, 2$ ist dies das 3. newtonsche Gesetz (*actio=reactio*). Analog zu (4.36) definiert

$$F_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad (4.38)$$

verallgemeinerte Kräfte. Wir können die Lagrange Gleichungen daher auch schreiben als

$$\dot{p}_j = F_j . \quad (4.39)$$

Drehimpulserhaltung:

Wir wählen irgendeine Achse durch den ebenfalls beliebig gewählten Ursprung unseres geschlossenen Systems. Dann führen wir eine (infinitesimale) Drehung um diese Achse aus (vgl. Abbildung 1.9). Auch gegenüber dieser Operation soll die Lagrange Funktion invariant sein (Isotropie des Raumes).

Die entsprechende Variation von \mathcal{L} ist

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta \vec{v}_i \right) \\ &= \sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \delta \vec{v}_i \right) = 0 . \end{aligned}$$

Für $\delta \vec{r}$ schreiben wir

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\phi} \times \vec{r} .$$

Analog gilt für $\delta \vec{v}$

¹³. Die Kombination dieser drei Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i [\dot{\vec{p}}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{v}_i)] \\ &= \delta \vec{\phi} \cdot \sum_i [(\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i) + (\vec{v}_i \times \vec{p}_i)] \\ &= \delta \vec{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \end{aligned}$$

Die Größe

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (4.41)$$

ist der Gesamtdrehimpuls des Systems und es gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 . \quad (4.42)$$

Analog zu \vec{L} definieren wir durch

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i . \quad (4.43)$$

die Drehimpulse der Massenpunkte bzgl. der gewählten Achse.

Man beachte den Zusatz ...bezüglich der gewählten Achse.... Ersetzt man nämlich \vec{r}_i durch $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{a}$, wobei \vec{a} ein beliebiger Translationsvektor ist, dann folgt

$$\vec{L}'_i = \vec{r}'_i \times \vec{p}_i = \vec{L}_i + \vec{a} \times \vec{p}_i \quad (4.44)$$

¹³Allgemein ergibt sich für einen beliebigen Vektor \vec{A} unter einer infinitesimalen Rotation $\delta \vec{\phi}$ die Änderung $\delta \vec{A} = \delta \vec{\phi} \times \vec{A}$. Entsprechend gilt für seine Änderung pro Zeit: $\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta t} \times \vec{A}$ oder $\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{\mathcal{I}} = \vec{\omega} \times \vec{A}$. Der Index \mathcal{I} bedeutet, dass sich die Änderung auf das Inertialsystem bezieht. Hat aber der Vektor \vec{A} zusätzlich eine Ableitung $\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \neq 0$ innerhalb des rotierenden Bezugssystems \mathcal{R} , dann gilt insgesamt die wichtige Formel

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{\mathcal{I}} = \frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (4.40)$$

(vgl. Aufgabe).

bzw.

$$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{P}. \quad (4.45)$$

Ist der Gesamtimpuls des Systems Null, so ist \vec{L} bzgl. der Translation der Drehachse invariant.

Bemerkung: Man kann sich überlegen, dass

$$L_z = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} \quad (4.46)$$

die Projektion des Drehimpulses auf eine z -Achse ist, wobei ϕ_i Drehwinkel bezüglich dieser Achse sind. Begründung: In Zylinderkoordinaten gilt $x_i = \rho_i \cos \phi_i$, $y_i = \rho_i \sin \phi_i$ und daher $L_z = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_i m_i \rho_i^2 \dot{\phi}_i$. Andererseits gilt¹⁴ $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\phi}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U$.

Bemerkung: Aus der obigen Herleitung folgt, dass für ein System in einem äußeren Feld, das eine Symmetriearchse besitzt, die Projektion des Systemdrehimpulses auf diese Achse zeitunabhängig bzw. eine Erhaltungsgröße ist (Warum? ¹⁵).

Bemerkung: Die Beziehung des Systemdrehimpulses, betrachtet in zwei unterschiedlichen Inertialsystemen, lautet

$$\vec{L} = \vec{L}' + m(\vec{R} \times \vec{w}), \quad (4.47)$$

wobei $m = \sum_i m_i$ und $\vec{w} = \vec{v}_i - \vec{v}'_i$. Außerdem ist

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.48)$$

der Schwerpunkt des Systems. Begründung: $\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}'_i) + \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{w})$. Offensichtlich lässt sich Gl. (4.47) auch als

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \times \vec{P} \quad (4.49)$$

schreiben. D. h. der Drehimpuls \vec{L} setzt sich aus dem Eigendrehimpuls \vec{L}' im Ruhystems des Schwerpunkts und dem Schwerpunktdrehimpuls

¹⁴vgl. Gl. (4.21)

¹⁵In diesem Fall ist \mathcal{L} nicht von ϕ_i abhängig und mit (4.2) folgt die Behauptung.

zusammen.

Weitere Erhaltungsgrößen

Die eben diskutierten Erhaltungsgrößen sind von besonderer Bedeutung, da sie mit fundamentalen Symmetrien des Raumes und der Zeit in engem Zusammenhang stehen. Es existieren jedoch weitere Erhaltungsgrößen, deren Bedeutung weit weniger offensichtlich ist.

Die Existenz dieser weiteren Erhaltungsgrößen - statt Erhaltungsgrößen wird in der Literatur häufig von Bewegungsintegralen gesprochen - erklärt sich wie folgt: Wir betrachten die Lösung der Bewegungsgleichungen in einem abgeschlossenen System, das durch $j = 1, 2, \dots, s$ Koordinaten q_j sowie Impulskomponenten p_j charakterisiert ist. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen enthalten $2s$ freie Konstanten (Anfangsbedingungen) C_i . In einem abgeschlossenen System ist der Zeitursprung beliebig wählbar. Eine Konstante ist daher die konstante Zeit t_o . Somit kann die Lösung der Bewegungsgleichungen durch

$$q_j = q_j(t + t_o, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}) \quad (4.50)$$

und

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(t + t_o, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}) \quad (4.51)$$

ausgedrückt werden. D. h. es existieren insgesamt $2s - 1$ Bewegungsintegrale!

Betrachten wir dazu als kurzes Beispiel den eindimensionalen Oszillator (vgl. Abschnitt 3.2; hier ist q die Auslenkung aus der Ruhelage $q = x - x_0$). Es gilt

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad q = -\frac{p}{k} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{q} = -\frac{k}{m}q,$$

wobei m die Masse und k die Kraftkonstante ist. Die allgemeine Lösung lautet

$$q = q_0 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} (t + t_0) \right)$$

(vgl. Abschnitt 2.2; das mathematische Pendel entspricht für kleine Auslenkung genau dem vorliegenden Fall). Hier ist $s = 1$, und daher ist q_0 das einzige Bewegungsintegral korrespondierend zur erhaltenen Gesamtenergie E , d. h. aus $E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$

folgt $q_0 = \sqrt{2\frac{E}{k}}$. Betrachten wir dagegen zwei gekoppelte eindimensionale Oszillatoren (Befestigung-Feder-Masse-Feder-Masse), so lautet die entsprechende Lösung

$$q_i = q_{i,0} \sin(\omega(t + t_{i,0})) ,$$

mit $i = 1, 2$ und $\omega = \sqrt{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})\frac{k}{m}}$. Wenn wir $t_{1,0}$ mit t_0 identifizieren, dann bleiben drei Bewegungsintegrale ($s = 2$). Nur eines kann wiederum über die Bedingung der Erhaltung der Gesamtenergie, $E = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{k}{2}(q_1^2 + (q_1 - q_2)^2)$ = konstant, durch E ersetzt werden.

In Kapitel 9 werden wir auf Vielteilchensysteme zu sprechen kommen und auf die Rolle der Bewegungsintegrale bei der Beschreibung solcher Systeme.

4.3 Lagrange Funktion im beschleunigten System

Wir stellen uns die folgenden drei Koordinatensysteme vor: Ein Inertialsystem K , ein dazu mit der Translationsgeschwindigkeit $\vec{w}(t)$ bewegtes System K' und ein mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ rotierendes System K'_R , dessen Nullpunkt mit dem von K' zusammenfällt. Die Lagrange Funktionen eines Teilchensystems lauten in diesen drei Bezugssystemen \mathcal{L} , \mathcal{L}' und \mathcal{L}'_R .

System K : Wenn \vec{v} die Geschwindigkeit eines Teilchens im K -System ist, dann gilt

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U .$$

System K' : Mit $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{w}(t)$ folgt

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}\vec{v}'^2 + m\vec{v}' \cdot \vec{w} + \frac{m}{2}\vec{w}^2 - U .$$

Den Term $\frac{m}{2}\vec{w}^2$ können wir auch weglassen. Gemäß der Bemerkung im Anschluß an Gl. (4.2) ändert dies die Bewegungsgleichungen nicht, da wir $w(t)^2$ als vollständige Ableitung nach der Zeit einer Funktion $f(t)$ schreiben können. Das gleiche Argument wenden wir auch auf

$$m\vec{v}' \cdot \vec{w} = \frac{d}{dt}(m\vec{r}' \cdot \vec{w}) - m\vec{r}' \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$$

an (d. h. $d/dt(\dots)$ kann weggelassen werden). Damit folgt

$$\mathcal{L}' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - m\vec{r}' \cdot \dot{\vec{w}} - U \quad (4.52)$$

und somit die Bewegungsgleichung

$$m\dot{\vec{v}}' = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\dot{\vec{w}} . \quad (4.53)$$

Der Bezugssystemwechsel von K nach K' entspricht also dem Auftreten eines homogenen Kraftfeldes $-m\dot{\vec{w}}$.

System K'_R : Gemäß Gl. (4.40) gilt

$$\vec{v}' = \vec{v}'_R + \vec{\omega} \times \vec{r}'_R . \quad (4.54)$$

Einsetzen in Gl. (4.52) ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_R &= \frac{m}{2}\vec{v}'_R^2 + m\vec{v}'_R \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_R) \\ &\quad + \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}'_R)^2 - m\dot{\vec{w}} \cdot \vec{r}'_R - U . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Um die Ableitungen $\partial\mathcal{L}'_R/\partial\vec{v}'_R$ bzw. $\partial\mathcal{L}'_R/\partial\vec{r}'_R$ zu erhalten, bilden wir $d\mathcal{L}'_R$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}'_R &= m\vec{v}'_R \cdot d\vec{v}'_R + m(\vec{\omega} \times \vec{r}'_R) \cdot d\vec{v}'_R \\ &\quad + m\vec{v}'_R \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}'_R) \\ &\quad + m(\vec{\omega} \times \vec{r}'_R) \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}'_R) \\ &\quad - m\dot{\vec{w}} \cdot d\vec{r}'_R - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'_R} \cdot d\vec{r}'_R \\ &= m\vec{v}'_R \cdot d\vec{v}'_R + m(\vec{\omega} \times \vec{r}'_R) \cdot d\vec{v}'_R \\ &\quad + m(\vec{v}'_R \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r}'_R \\ &\quad + m((\vec{\omega} \times \vec{r}'_R) \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r}'_R \\ &\quad - m\dot{\vec{w}} \cdot d\vec{r}'_R - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'_R} \cdot d\vec{r}'_R . \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}'_R} = m\vec{v}'_R + m(\vec{\omega} \times \vec{r}'_R)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}'_R} &= m(\vec{v}'_R \times \vec{\omega}) + m((\vec{\omega} \times \vec{r}'_R) \times \vec{\omega}) \\ &\quad - m\dot{\vec{w}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'_R}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Lagrange-Gleichung liefert die Bewegungsgleichung im rotierenden System:

$$\begin{aligned} m\vec{v}'_R &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'_R} - m\dot{\vec{w}} + m(\vec{r}'_R \times \dot{\vec{\omega}}) \quad (4.56) \\ &\quad + 2m(\vec{v}'_R \times \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times (\vec{r}'_R \times \vec{\omega})). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme treten auch bei gleichförmiger Rotation auf und heißen Coriolis-¹⁶ bzw. Zentrifugalkraft.

Foucaultsches Pendel¹⁷: Wir betrachten in diesem Beispiel das mathematische Pendel in einem rotierenden Bezugssystem (wie es z. B. in der Eingangshalle zu unserem Physikgebäude hängt). Die Situation ist in Abbildung 4.1 illustriert.

In der Abbildung 4.1 sei...

- ... \vec{R} der Vektor vom Erdmittelpunkt zum Aufhängepunkt des Pendels.
- ... \vec{P} der Vektor der Länge l vom Aufhängepunkt zur Pendelmasse.
- ... α der Auslenkwinkel relativ zu \vec{R} .
- ... φ der Winkel der Projektion von \vec{P} (Pendelebene) auf die x'_R - y'_R -Ebene (z.B. der Fußboden in der Eingangshalle).
- ... θ der Winkel zwischen Erddrehachse und \vec{R} .

Für die Bewegung eines Massenpunktes im x'_R - y'_R - z'_R -System, wobei wir hier den Ursprung dieses Systems aus grafischen Gründen an die Erdoberfläche

¹⁶Coriolis-Kraft – nach dem französischen Physiker Gaspar Gustave de Coriolis, *1792, †1843

¹⁷Foucault, Leon, französischer Physiker, *Paris 18.9.1819, †ebenda 11.2.1868; bewies mithilfe eines Pendels (foucaultsches Pendel) die Umdrehung der Erde (foucaultscher Pendelversuch), lieferte den Nachweis, dass sich das Licht in Wasser langsamer fortplantiert als in Luft, untersuchte die elektrischen Wirbelströme in Metallen. ©Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim, 2004.

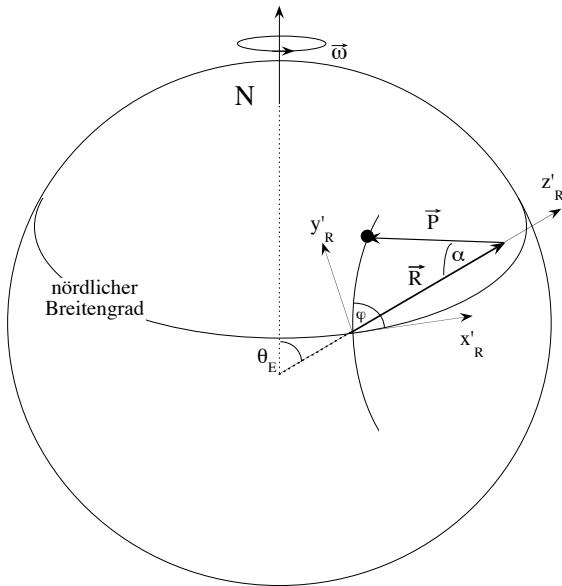


Abbildung 4.1: Illustration des foucaultschen Pendels an der Erdoberfläche.

verlegt haben¹⁸, hatten wir die Gl. (4.56) hergeleitet. Offensichtlich gilt in unserem Fall $\dot{\vec{w}} = \dot{\vec{\omega}} = 0$. D. h.

$$m\vec{v}'_R = \vec{F}_g + \vec{T} + 2m\vec{v}'_R \times \vec{\omega} + m\vec{\omega} \times (\vec{r}'_R \times \vec{\omega}).$$

Hier ist

$$\vec{r}'_R = \vec{R} + \vec{P} = \vec{R} + l\vec{e}_{\parallel}$$

mit

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \alpha \\ \sin \varphi \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

¹⁹Die Geschwindigkeit der Pendelmasse ist

$$\vec{v}'_R = \dot{\vec{r}}'_R = l\dot{\vec{e}}_{\parallel}$$

¹⁸In Wirklichkeit liegt er im Erdmittelpunkt.

¹⁹ \vec{e}_{\parallel} und später \vec{e}_{\perp} haben wieder die gleiche Bedeutung wie im Fall des (einfachen) mathematischen Pendels in Abbildung 2.1.

mit

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_{\parallel} &= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \alpha + \dot{\alpha} \cos \varphi \cos \alpha \\ \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha + \dot{\alpha} \sin \varphi \cos \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \dot{\varphi} \sin \alpha \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \dot{\alpha} \vec{e}_{\perp},\end{aligned}$$

wobei

$$\vec{e}_{\perp} = - \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \alpha \\ \sin \varphi \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

ist. Die Beschleunigung der Pendelmasse ist

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_R = l \ddot{\vec{e}}_{\parallel} &= l \left[(\ddot{\varphi} \sin \alpha + \dot{\varphi} \dot{\alpha} \cos \alpha) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \ddot{\alpha} \vec{e}_{\perp} - \dot{\alpha} \dot{\vec{e}}_{\perp} \right]\end{aligned}$$

mit

$$\dot{\vec{e}}_{\perp} = -\dot{\varphi} \cos \alpha \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\alpha} \vec{e}_{\parallel}.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_{\perp} = l \left[(\ddot{\varphi} \sin \alpha + 2\dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos \alpha) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \ddot{\alpha} \vec{e}_{\perp} - \dot{\alpha}^2 \vec{e}_{\parallel} \right]. \quad (4.57)\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Kräfte, die auf die Pendelmasse einwirken. Zunächst sind dies Gravitation und Fadenspannung:

$$\vec{F}_g + \vec{T} \approx mg \cos \alpha \vec{e}_{\parallel} + mg \sin \alpha \vec{e}_{\perp} - T \vec{e}_{\parallel}. \quad (4.58)$$

Hier vernachlässigen wir eine kleine Inhomogenität²⁰ des Gravitationsfeldes aufgrund der Kugelform der Erde. Der Beitrag der Corioliskraft ist

²⁰bzw. α -Abhängigkeit

$$\begin{aligned}2m\vec{v}'_R \times \vec{\omega} &= 2ml \dot{\vec{e}}_{\parallel} \times \vec{\omega} \\ &= 2ml \dot{\vec{e}}_{\parallel} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_E \\ \cos \theta_E \end{pmatrix} \\ &= 2m\omega l \left[\dot{\varphi} \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta_E \\ \sin \varphi \cos \theta_E \\ -\sin \varphi \sin \theta_E \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha} \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \alpha \cos \theta_E - \sin \alpha \sin \theta_E \\ -\cos \varphi \cos \alpha \cos \theta_E \\ \cos \varphi \cos \alpha \sin \theta_E \end{pmatrix} \right]. \quad (4.59)\end{aligned}$$

Für den Zentrifugalbeitrag erhalten wir

$$\begin{aligned}m\vec{\omega} \times (\vec{r}'_R \times \vec{\omega}) &= m\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_E \\ \cos \theta_E \end{pmatrix} \\ &\times \left[\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + l \vec{e}_{\parallel} \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_E \\ \cos \theta_E \end{pmatrix} \right] \\ &= m\omega^2 l \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \alpha \\ \kappa \cos \theta_E \\ -\kappa \sin \theta_E \end{pmatrix}. \quad (4.60)\end{aligned}$$

mit $\kappa = \sin \varphi \sin \alpha \cos \theta_E - (R/l - \cos \alpha) \sin \theta_E$.

Wir können jetzt die eigentliche Bewegungsgleichung gemäß Gl. (4.57) aufstellen. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Pendelschwingung ausgedrückt durch $\alpha(t)$ schnell ist im Vergleich zur Pendel(ebenen)drehung ausgedrückt durch $\varphi(t)$. D. h.

$$\dot{\alpha} \sim \omega_0 = \sqrt{g/l} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\alpha} \sim \omega_0^2 = g/l$$

im Vergleich zu

$$\dot{\varphi} \sim \omega = 2\pi/(24\text{Std.}) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\varphi} \sim \omega^2.$$

Mit $l = 1\text{m}$ erhalten wir

$$\frac{\omega}{\omega_0} \simeq 2 \cdot 10^{-15}.$$

Außerdem gilt $R \gg l$ bzw. $R \pm l \simeq R$ und

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{R}{l} \simeq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Vergleichen wir also $m\vec{v}'_R$ (Gl. (4.57)) mit den Gln. (4.58), (4.59) und (4.60) so folgt

$$-\ddot{\alpha}\vec{e}_\perp - \dot{\alpha}^2\vec{e}_\parallel \approx \omega_0^2 \cos \alpha \vec{e}_\parallel + \omega_0^2 \sin \alpha \vec{e}_\perp - \frac{T}{ml} \vec{e}_\parallel .$$

Dies ist unsere bekannte Gleichung für das mathematische Pendel (vgl. Abschnitt 2.2). D. h.

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &\approx -\omega_0^2 \sin \alpha \approx -\omega_0^2 \alpha \quad (\alpha \text{ klein}) \\ \dot{\alpha}^2 &\approx -\omega_0^2 \cos \alpha + \frac{T}{ml} \approx -\omega_0^2 + \frac{T}{ml} .\end{aligned}$$

Was $\varphi(t)$ betrifft, so interessiert uns lediglich die x'_R - y'_R -Ebene. Mit $\sin \alpha \approx \alpha$ und $\cos \alpha \approx 1$ (kleine Auslenkung) folgt daher

$$\begin{aligned}(\ddot{\varphi}\alpha + 2\dot{\varphi}\dot{\alpha} + 2\omega\dot{\alpha} \cos \theta_E) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \approx \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha \cos \varphi \\ -R/l \cos \theta_E \sin \theta_E \end{pmatrix} \\ + (\dot{\varphi}^2 \alpha + 2\omega\dot{\varphi}\alpha \cos \theta_E) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ - 2\omega\alpha\dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin \theta_E \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei wir

$$0 \approx \underbrace{\frac{g}{l}\alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} - \frac{g}{l}\alpha \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}}_{=0} - \left(\frac{T}{ml}\alpha + \ddot{\alpha} - \dot{\alpha}^2\alpha \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ausgenutzt haben. Wenn wir die Terme $\mathcal{O}(\omega)$ berücksichtigen (und im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$) folgt

$$(\dot{\varphi} + \omega \cos \theta_E) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \approx 0$$

bzw.

$$\dot{\varphi} \approx -\omega \cos \theta_E ,$$

wobei der $\cos \theta_E$ -Term aus dem Beitrag der Corioliskraft stammt. Für $\dot{\varphi} = \Delta\varphi/\Delta t$ und $\Delta t = 24$ Std. folgt

$$\Delta\varphi_{24 \text{ Std.}} \approx -\cos \theta_E .$$

Das foucaultsche Pendel im Eingangsbereich zur Physik dreht in 24 Stunden um $\Delta\varphi \approx 281^\circ$. D. h.

$$\theta_E \approx \arccos \left(\frac{281}{360} \right) = 38.7^\circ .$$

Der entsprechende (nördliche) Breitengrad ist

$$90 - \theta_E \approx 51.3^\circ .$$

Vergleichen Sie diesen Wert mit der Zahl an unserem Pendel!

4.4 Wirkungsintegral freier relativistischer Teilchen

Lorentz Transformation:

Ziel der folgenden Überlegungen ist eine möglichst allgemeine Form der Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit zwischen Inertialsystemen K und K' auf der Basis des Relativitätsprinzips²¹²². Wir betrachten den in Abbildung 4.2 dargestellten Fall. Die allgemeinste Form der Transformationsgleichungen, die mit R1 verträglich ist, lautet

$$\begin{aligned}i) \quad K \rightarrow K' \quad x' &= \gamma(w)(x - wt) \\ y' &= \alpha(w)y \\ z' &= \alpha(w)z \\ t' &= \mu(w)t + \epsilon(w)x .\end{aligned}$$

²¹Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich (Erfahrungstatsache). D. h. die Gleichungen, durch die die Naturgesetze ausgedrückt werden, sind invariant unter Transformationen der Koordinaten und der Zeit von einem Inertialsystem zum anderen. Insbesondere gilt: (R1) Raum und Zeit sind homogen. Der Koordinatenursprung ist willkürlich wählbar. (R2) Der Raum ist isotrop. Alle Richtungen sind äquivalent. Siehe auch U. E. Schröder (1981) *Spezielle Relativitätstheorie*. Verlag Harri Deutsch

²²Bemerkung zu Erfahrungstatsachen: Mit Erfahrungstatsachen sollte man natürlich vorsichtig umgehen. Gerade die Relativitätstheorie zeigt dies. Man sollte es lieber wie folgt sehen. Ausgehend von gewissen Postulaten wird eine Theorie entwickelt. Diese muss sich dann im Experiment bewähren. Tut sie es nicht, dann müssen die Postulate hinterfragt werden.

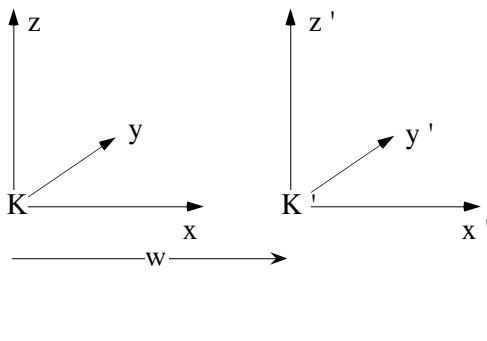


Abbildung 4.2: Inertialsystem K' bewegt sich relativ zu Inertialsystem K mit der Geschwindigkeit w entlang x bzw. x' .

Wegen R2 muss ebenfalls gelten

$$\begin{aligned} ii) \quad K' \rightarrow K \quad x &= \gamma(-w)(x' + wt') \\ y &= \alpha(-w)y' \\ z &= \alpha(-w)z' \\ t &= \mu(-w)t' + \epsilon(-w)x' . \end{aligned}$$

Einen dritten Satz von Gleichungen ergibt die Inversion von w , x , x' (sowie y , y' um Rechtssystem zu erhalten):

$$\begin{aligned} iii) \quad -x' &= -\gamma(-w)(x - wt) \\ -y' &= -\alpha(-w)y \\ z' &= \alpha(-w)z \\ t' &= \mu(-w)t - \epsilon(-w)x . \end{aligned}$$

Der Vergleich von i) und iii) liefert

$$\begin{aligned} iv) \quad \gamma(w) &= \gamma(-w) \\ \alpha(w) &= \alpha(-w) \\ \mu(w) &= \mu(-w) \\ \epsilon(w) &= -\epsilon(-w) . \end{aligned}$$

Einsetzen von ii) in i) zusammen mit iv) ergibt

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(w) [\gamma(-w)(x' + wt') \\ &\quad - w(\mu(-w)t' + \epsilon(-w)x')] \\ &\stackrel{iv)}{=} \underbrace{(\gamma^2(w) + w\gamma(w)\epsilon(w))x'}_{=1} \\ &\quad + w\gamma(w)\underbrace{(\gamma(w) - \mu(w))t'}_{=0} \end{aligned}$$

sowie

$$y' = \alpha(w)\alpha(-w)y' \stackrel{iv)}{=} \underbrace{\alpha^2(w)y'}_{=1}$$

und nichts Neues von den anderen Gleichungen! Aus $\alpha^2(w) = 1$ folgt $\alpha(w) = \pm 1$. Das Vorzeichen ist +, da für $\lim_{w \rightarrow 0} \alpha(w) \rightarrow 1$ gelten muss. In $\gamma^2(w) + w\gamma(w)\epsilon(w) = 1$ führen wir als Definition ein: $\epsilon(w) \equiv -\frac{w\gamma(w)}{\eta^2(w)}$ ²³ und erhalten:

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\eta^2(w)}}} .$$

Damit folgt

$$x' = \gamma(w)(x - wt) \quad (4.61)$$

$$y' = y \quad (4.62)$$

$$z' = z \quad (4.63)$$

$$t' = \gamma(w) \left(t - \frac{wx}{\eta^2(w)} \right) . \quad (4.64)$$

Mehr Info über $\gamma(w)$ erhalten wir daraus, dass $K \xrightarrow{w_1} K' \xrightarrow{w_2} K''$ äquivalent zu $K \xrightarrow{w} K''$ möglich ist. D. h.

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w_2)(x' - w_2t') \\ t'' &= \gamma(w_2) \left(t' - \frac{w_2x'}{\eta^2(w_2)} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w_2) \left(\gamma(w_1)(x - w_1t) \right. \\ &\quad \left. - w_2\gamma(w_1)(t - \frac{w_1x}{\eta^2(w_1)}) \right) \\ t'' &= \dots \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w)(x - wt) \\ t'' &= \dots . \end{aligned}$$

²³Diese Definition erfüllt die Bedingung $\epsilon(w) = -\epsilon(-w)$. Das negative Vorzeichen sorgt außerdem für ein mathematisch sinnvolles Geschwindigkeitsadditionstheorem (s.u.).

Daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\gamma(w) &= \gamma(w_1)\gamma(w_2)\left(1 + \frac{w_1 w_2}{\eta^2(w_1)}\right) \\ -w\gamma(w) &= -\gamma(w_1)\gamma(w_2)(w_1 + w_2)\end{aligned}$$

und somit

$$w = \frac{w_1 + w_2}{1 + \frac{w_1 w_2}{\eta^2(w_1)}}.$$

Dieses spezielle Geschwindigkeitsadditionstheorem macht nur Sinn, wenn $\eta = \text{Konstante}$ (d. h. $\eta = c$, die Lichtgeschwindigkeit²⁴). Insbesondere gilt für $w_1 = w$ und $w_2 = c$

$$w = \frac{w + c}{1 + \frac{wc}{c^2}} = c \frac{w + c}{w + c} = c.$$

D. h. c ist die höchste erreichbare Geschwindigkeit!
Also:

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$
 (4.65)

Offensichtlich folgen die Galilei Transformationen für $w \rightarrow 0$ bzw. $c \rightarrow \infty$ ²⁵. Die speziellen Lorentz Transformationen²⁶ (4.61), (4.62), (4.63), (4.64) ($\eta = c!$) und (4.65) zusammen mit der Existenz einer Grenzgeschwindigkeit sind das Ergebnis dieses Abschnitts. Man beachte auch, dass die Zeit nicht mehr als unabhängige Koordinate auftritt, sondern als Komponente des Raum Zeit-Kontinuums.

Verallgemeinerung auf beliebige Raumrichtungen:

²⁴Im Prinzip wissen wir hier noch nicht, dass c die Lichtgeschwindigkeit ist. Erst in der Elektrodynamik werden wir diesen Zusammenhang herstellen.

²⁵Außer in diesem Abschnitt verwenden wir hier durchweg die Galilei Transformationen.

²⁶Lorentz, Hendrik Antoon, niederländischer Physiker, *Arnhem 18.7. 1853, †Haarlem 4.2. 1928; Professor in Leiden, erklärte 1875 auf der Grundlage der maxwellischen Theorie die Brechung und Reflexion des Lichtes und mithilfe seiner Elektronentheorie (1895) auch den Zeeman Effekt sowie die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im magnetischen Feld; führte 1892 die Lorentz Kontraktion, 1895 die Lorentz Kraft und 1899 die Lorentz Transformation in die Elektrodynamik ein. 1902 erhielt er zusammen mit P. Zeeman den Nobelpreis für Physik. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Der Ortsvektor in K sei $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$ mit $\vec{r}_\perp \perp \vec{w}$ und $\vec{r}_\parallel \parallel \vec{w}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{r}_\parallel &= \gamma(w)(\vec{r}_\parallel - \vec{w}t) \\ \vec{r}_\perp &= \vec{r}_\perp \\ t' &= \gamma(w)\left(t - \frac{\vec{w} \cdot \vec{r}_\parallel}{c^2}\right).\end{aligned}$$

Mit $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w})\vec{w}}{w^2}$ und $\vec{r}_\parallel = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w})\vec{w}}{w^2}$ folgt für $\vec{r}' = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma(w) - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w})\vec{w}}{w^2} - \gamma(w)\vec{w}t \quad (4.66) \\ t' &= \gamma(w)\left(t - \frac{\vec{w} \cdot \vec{r}}{c^2}\right), \quad (4.67)\end{aligned}$$

wobei $\vec{r}_\perp \cdot \vec{w} = 0$ verwendet wurde.

Transformation der Geschwindigkeiten:

Inertialsystem K' bewegt sich mit \vec{w} von K aus gesehen, und es seien $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ sowie $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ die jeweiligen Laborgeschwindigkeiten. Es folgt mittels Gl. (4.66)

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt'} \\ &= \frac{d\vec{r}}{\gamma(w)(dt - \frac{\vec{w} \cdot d\vec{r}}{c^2})} \\ &+ \frac{\gamma(w) - 1}{\gamma(w)} \frac{(d\vec{r} \cdot \vec{w})\vec{w}}{w^2} \frac{1}{dt - \frac{\vec{w} \cdot d\vec{r}}{c^2}} - \frac{\vec{w}dt}{dt - \frac{\vec{w} \cdot d\vec{r}}{c^2}}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left[\frac{\vec{v}}{\gamma(w)} \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{1}{\gamma(w)}\right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{w}}{w^2} - \vec{w} \right].\end{aligned}$$
 (4.68)

Die Umkehrung dieser Gleichung ist durch

$$\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{v}'_\parallel + \vec{w}}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}}$$
 (4.69)

und

$$\vec{v}_\perp = \frac{1}{\gamma(w)} \frac{\vec{v}'_\perp}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}} \quad (4.70) \quad dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = \frac{dt}{\gamma(v)}$$

gegeben, wobei sich \parallel bzw. \perp auf die Richtung von \vec{w} beziehen. Die Gl. (4.69) ist wiederum das schon erwähnte Geschwindigkeitsadditionstheorem.

Wirkungsintegral freier Teilchen:

Das Wirkungsintegral S soll nicht vom Inertialsystem abhängen. D. h. es soll eine Invariante unter Lorentz Transformationen sein. Es muss daher von Skalaren abhängig sein; die einzige Möglichkeit ist αds , wobei α eine Konstante und

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4.71)$$

der infinitesimale Abstand zweier Ereignisse ist²⁷. Somit sollte gelten:

$$S = -\alpha \int_a^b ds. \quad (4.72)$$

Hier gilt $\alpha > 0$, wie wir gleich sehen werden. Aus der speziellen Situation

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$$

folgt

²⁷Im System K geht zum Zeitpunkt t_1 am Ort x_1, y_1, z_1 ein Lichtsignal aus (erstes Ereignis) und wird zur Zeit t_2 am Ort x_2, y_2, z_2 aufgefangen (zweites Ereignis). Es gilt

$$s_{21}^2 \equiv c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0,$$

bzw. im System K'

$$s'_{21}^2 \equiv c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0.$$

D. h. verschwindet der Abstand s_{12} zweier Ereignisse in einem Inertialsystem, dann gilt dies auch für alle anderen. Sind zwei Ereignisse infinitesimal benachbart, so gilt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Wie man leicht zeigen kann (vgl. [3] §2), ist ds und damit s eine Invariante unter Lorentz Transformationen.

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)}.$$

Somit gilt

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha c}{\gamma(v)} dt.$$

Im klassischen Grenzfall erwarten wir

$$\lim_{v \rightarrow 0} S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}^{(kl)} dt$$

mit der klassischen Lagrange Funktion $\mathcal{L}^{(kl)} = mv^2/2$. Daraus folgt $\alpha = mc$. Die relativistische Lagrange Funktion des freien Teilchens ist somit

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma(v)}. \quad (4.73)$$

Aus $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}}$ folgt

$$\vec{p} = m\gamma(v) \vec{v} \quad (4.74)$$

der relativistische Impuls mit der bekannten Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse. Aus der Definition der Energie, $E = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L}$, folgt die berühmte Formel

$$E(v) = m\gamma(v) c^2. \quad (4.75)$$

Aus der Kombination von (4.74) mit (4.75) folgt sofort der relativistische Energie-Impuls-Satz

$$E(v)^2 = p(v)^2 c^2 + E(0)^2. \quad (4.76)$$

Transformation der Kraft:

Die Definition der Kraft \vec{F} beruht auf einer Konvention²⁸. In der newtonischen Mechanik sind die folgenden Formen äquivalent:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Hier ist \vec{a} die Beschleunigung. Für relativistische Geschwindigkeiten gilt aber Gl. (4.74), so dass die obigen vier Formen nicht mehr äquivalent sind.

Wir verwenden hier die Form

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma(v)\vec{a} + m\vec{v}\frac{d}{dt}\gamma(v).$$

D. h.

$$\vec{F} = m\gamma(v)\vec{a} + m\gamma^3(v) \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}}{c^2}. \quad (4.77)$$

Man beachte, dass \vec{F} nicht mehr parallel zu \vec{a} sein muss. Die Transformationsformel für die Kraft lautet

$$\vec{F}' = \frac{\frac{\vec{F}}{\gamma(w)} + \vec{w} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma(w)}\right) \frac{\vec{w} \cdot \vec{F}}{w^2} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{F} - \dot{\vec{v}} \cdot \vec{F}}{v^2} \right]}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}}. \quad (4.78)$$

Hier bewegt sich das gestrichene System relativ zum ungestrichenen wieder mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{w} .

4.5 Eine Anwendung aus der Chemie

Wir haben uns daran gewöhnt, dass die q_j der (nicht-relativistischen) Lagrange Funktion Koordinaten eines mechanischen Systems sind. Aber es geht auch anders. Dazu ein Beispiel. Moleküle, wie wir wissen, sind aus Atomen aufgebaut, die gemäß ihrer Elektronenaffinität eine von Null verschiedene Partialladung e_j tragen können. Diese hängt auch von anderen in der Nähe befindlichen Ladungen e_k ab. In einem einfachen Modell sind diese Ladungen dynamische Variablen, d. h., jedes Atom i hat

²⁸siehe auch H. Melcher *Relativitätstheorie in elementarer Darstellung*. Aulis Verlag Deubner & CoKg

neben seinen (kartesischen) Koordinaten $\vec{r}_i(t)$ eine „Ladungskoordinate“ $e_i(t)$. Das gesamte Molekül soll aus N Atomen bestehen und besitzt die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_e}{2} \dot{e}_i^2 - U(\{e_i\}, \{\vec{r}_i\}). \quad (4.79)$$

Der zweite Term ist eine „kinetische Energie“ der e_i , wobei m_e ein „Massenparameter“ ist. Der Term U soll hier zusätzlich zur „normalen“ potenziellen Energie die Energie der Ladungen beschreiben, wobei diese auch von den Positionen der Atome abhängt. Eine natürliche Zwangsbedingung ergibt sich aus der Neutralität des Moleküls, d. h.

$$\sum_{i=1}^N e_i = 0. \quad (4.80)$$

Im Sinne der Gl. (4.6) erhalten wir somit die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad (4.81)$$

$$m_e \ddot{e}_i = -\frac{\partial U}{\partial e_i} + \lambda \quad (4.82)$$

Der Lagrange Parameter λ ergibt sich durch Summation der Gl. (4.82) über i , d. h.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial e_i} + m_e \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\sum_{i=1}^N e_i}_{=0} \right] \quad (4.83) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial e_i}. \end{aligned}$$

Aber machen diese Bewegungsgleichungen Sinn? Dazu sollten die Ladungen e_i bei festgehaltenen Atompositionen \vec{r}_i um endliche Gleichgewichtswerte \bar{e}_i schwanken. Um dies zu überprüfen, setzen wir $e_i = \bar{e}_i + \delta e_i$ in Gl. (4.82) ein. Mit $\ddot{e}_i = 0$ und der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} U = \bar{U} &+ \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial e_j} \Big|_{\bar{e}_j} \delta e_j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial e_j \partial e_k} \Big|_{\bar{e}_j, \bar{e}_k} \delta e_j \delta e_k + \dots \end{aligned} \quad (4.84)$$

folgt

$$\begin{aligned} m_e \delta \ddot{e}_i &= - \frac{\partial U}{\partial e_i} \Big|_{\bar{e}_i} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial e_i \partial e_j} \Big|_{\bar{e}_i, \bar{e}_j} \delta e_j \quad (4.85) \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial e_i} \Big|_{\bar{e}_i} + \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial e_i \partial e_j} \Big|_{\bar{e}_i, \bar{e}_j} \delta e_j + \dots . \end{aligned}$$

Die Summe des ersten und dritten Terms muss Null sein, da die \bar{e}_i das System (4.85) lösen sollen. Somit folgt in Matrixschreibweise

$$\ddot{\delta \vec{e}} = \mathbf{M} \cdot \delta \vec{e} \quad (4.86)$$

mit

$$\delta \vec{e} = (\delta e_1, \dots, \delta e_N)$$

und

$$M_{ij} = \frac{1}{m_e} \left[- \frac{\partial^2 U}{\partial e_i \partial e_j} \Big|_{\bar{e}_i \bar{e}_j} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial e_i \partial e_j} \Big|_{\bar{e}_i, \bar{e}_j} \right]$$

Die weitere Vorgehensweise besteht darin, eine Matrix \mathbf{S} zu suchen, die die Matrix \mathbf{M} diagonalisiert. D. h. $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$ und $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$, wobei die Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ die Eigenwerte λ_i (nicht mit Lagrange Parametern verwechseln!) von \mathbf{M} enthält. Durch Multiplikation von (4.86) mit \mathbf{S}^{-1} von links bzw. mit \mathbf{S} von rechts erhalten wir

$$\ddot{\delta \vec{e}}' = \mathbf{\Lambda} \cdot \delta \vec{e}'$$

mit $\delta \vec{e}' = \mathbf{S}^{-1} \cdot \delta \vec{e}$. Ein entsprechender Lösungsansatz ist

$$\delta \vec{e}' = \begin{pmatrix} \delta e_1'^{(+)e^{\sqrt{\lambda_1}t}} & + & \delta e_1'^{(-)e^{-\sqrt{\lambda_1}t}} \\ \vdots \\ \delta e_N'^{(+)e^{\sqrt{\lambda_N}t}} & + & \delta e_N'^{(-)e^{-\sqrt{\lambda_N}t}} \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich wird das System instabil, d. h. $\delta \vec{e}'$ wächst grenzenlos, wenn für irgendeine Ladung $Re\{\sqrt{\lambda_i}\} \neq 0$ gilt. Dies soll hier aber nicht weiter untersucht werden, denn dazu brauchen wir ein explizites Modell für U .²⁹ Eine zusätzliche Referenz zu der hier skizzierten Stabilitätsanalyse ist beispielsweise M. Braun (1979) *Differenzialgleichungen und ihre Anwendungen*, Springer.

²⁹Z.B. S.W. Rick et al. (1994) *Dynamical fluctuating charge force fields*, J. Chem. Phys. **101**, 6141-6156

Kapitel 5

Integration der Bewegungsgleichungen

5.1 Eindimensionale Bewegung[†]

Die Lagrange Funktion für eine eindimensionale Bewegung lautet in kartesischen Koordinaten

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) \quad (5.1)$$

¹. Die daraus folgende Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (5.2)$$

Für ein gegebenes $U(x)$ und mit entsprechendem Geschick lässt sich diese Differenzialgleichung entweder analytisch oder numerisch (siehe unten) lösen.

Man kann aber auch von der Energieerhaltung ausgehen:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E \quad (5.3)$$

bzw.

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}. \quad (5.4)$$

Diese Differenzialgleichung 1. Ordnung ist offensichtlich einfacher und liefert nützliche physikalische Einsichten. Ihre Integration ergibt

¹Die potenzielle Energie könnte im Prinzip noch explizit von der Zeit abhängen.

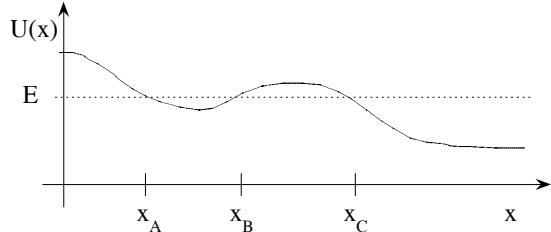


Abbildung 5.1: Energienlandschaft in einer Dimension.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \quad (5.5)$$

bzw.

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const. \quad (5.6)$$

Offensichtlich machen beide Lösungsformen nur dann Sinn, wenn

$$E \geq U(x) \quad (5.7)$$

gilt. In Abbildung 5.1 erfüllen die Intervalle $I_1 = [x_A, x_B]$ und $I_2 = [x_C, \infty]$ diese Bedingung.

Im Intervall I_1 verläuft $x(t)$ periodisch (warum eigentlich periodisch?) zwischen den Umkehrpunkten x_A und x_B . Die Periodendauer ergibt sich aus Gl. (5.6) zu

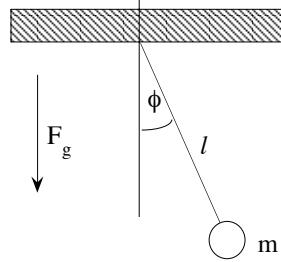
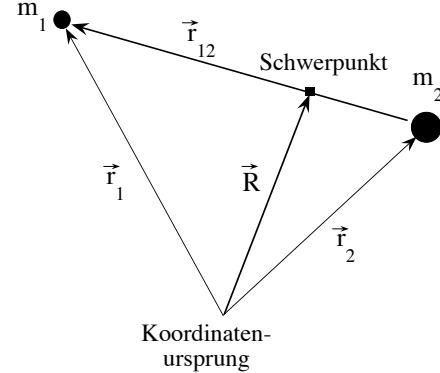


Abbildung 5.2: Ebenes Pendel.

Abbildung 5.3: Illustration des Zweikörperproblems. Hier sind m_1 und m_2 Massenpunkte.

(Periode = Hinweg + Rückweg!). Die Bewegung im Intervall I_2 könnte einer Reflexion bei x_C entsprechen.

Periode des mathematischen Pendels: Die Energie ausgedrückt in Polarkoordinaten lautet

$$E = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + mgl(1 - \cos\phi) . \quad (5.9)$$

Hier ist m die Masse des Pendels, l seine Länge, g die Erdbeschleunigung und ϕ die Pendelauslenkung (vgl. Abbildung 5.2). Gemäß Gl. (5.8) gilt

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{\frac{2}{gl}} \int_0^{\phi_{max}} \frac{l d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_{max}}} \\ &\approx_{\text{klein}} 2\sqrt{\frac{4l}{g}} \int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\sqrt{\phi_{max}^2 - \phi^2}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

mit $E = mgl(1 - \cos\phi_{max})^2$.

5.2 Bewegung im Zentralfeld[†]

Zweikörperprobleme[†]:

$$2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Die Situation ist in der Abbildung (5.3) illustriert. Diese zeigt zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r_{12} . Das Wechselwirkungspotenzial soll durch $U(r_{12})$ gegeben sein. Es ist günstig, von den Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 auf die neuen Vektoren \vec{r}_{12} und \vec{R} , wobei \vec{R} die Lage des Schwerpunkts angibt, zu transformieren (Übergang zu Relativkoordinaten). Aus

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{und} \quad m\vec{r} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 ,$$

wobei $m = m_1 + m_2$ gilt, folgt

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_{12} + \vec{R} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_{12} + \vec{R} .$$

Wir bilden die Quadrate der zeitlichen Ableitungen $\dot{\vec{r}}_1^2$ und $\dot{\vec{r}}_2^2$ und setzen diese in die Lagrange Funktion des Zweikörperproblems,

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - U(r_{12}) , \quad (5.10)$$

ein. Wir erhalten

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}_{12}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2 - U(r_{12}) . \quad (5.11)$$

Hier ist

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.12)$$

die so genannte reduzierte Masse. Mittels der Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} = 0$$

erhalten wir

$$\frac{d}{dt} m \dot{\vec{R}} = 0.$$

D. h. der Schwerpunkt bewegt sich kräftefrei mit konstanter Geschwindigkeit. Insbesondere lässt sich durch Verschiebung des Ursprungs in den Schwerpunkt die Lagrange Funktion auf

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}_{12}^2 - U(r_{12})$$

reduzieren. Somit ist aus dem Zweikörperproblem ein effektives Einkörperproblem geworden.

Bemerkung: Bei einem System aus N Massenpunkten reduziert die Einführung von Schwerpunktkoordinaten (wie oben) die Zahl der unabhängigen Ortsvektoren auf $N - 1$.

Zentralfeldprobleme[†]:

Gl. (5.11) ist die Lagrange Funktion für ein Zentralfeldproblem. Das Zentralfeld übt auf einen Massenpunkt die Zentralkraft

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.13)$$

aus. Hier verwenden wir \vec{r} statt \vec{r}_{12} .

1. Bemerkung: Die Bewegung des Massenpunktes ist auf eine Ebene beschränkt, da aus $\vec{L} = \text{konstant}$ ³ folgt, dass auch die Richtung des Drehimpuls unverändert bleibt. Damit verändert sich aber die durch \vec{r} und \vec{p} aufgespannte Bahnebene nicht.

2. Bemerkung: Aus Bemerkung 1 folgt, dass wir Polarkoordinaten zur Beschreibung verwenden können. D. h.

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - U(r). \quad (5.14)$$

³Vgl. die zweite Bemerkung zur Drehimpulserhaltung.

Und somit

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}},$$

d. h. der verallgemeinerte Impuls

$$p_\phi = \mu r^2 \dot{\phi} = L_z = L = \text{konstant} \quad (5.15)$$

(vgl. Gl. (4.46)).

3. Bemerkung: Gl. (5.15) hat eine einfache geometrische Deutung. Die Größe $\frac{1}{2} r^2 d\phi$ ist die Fläche A , die von \vec{r} im Winkelintervall $d\phi$ überstrichen wird. Nachfolgend Gl. (4.46) hatten wir nämlich gezeigt, dass $L_z = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = \mu r^2 \dot{\phi}$ gilt. Mit $|\vec{r} \times d\vec{r}| = 2dA$ und $L_z = L$ folgt $L = \mu |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = 2\mu A$. Daher gilt

$$L = 2\mu \frac{dA}{dt}, \quad (5.16)$$

d. h. wegen der Drehimpulserhaltung ist die pro Zeiteinheit überstrichene Fläche ebenfalls konstant. Diesen Sachverhalt nennt man Flächensatz oder auch (für das Gravitationsfeld) zweites keplersches Gesetz.

Zurück zur Lösung des Zentralfeldproblems: Wie im Fall der eindimensionalen Bewegung ist es besser von der Energieerhaltung auszugehen, als die Bewegungsgleichungen direkt zu lösen. D. h.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + U(r) \\ (\text{5.15}) &\stackrel{=} \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{eff}(r) \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (5.18)$$

Den ersten Term in (5.18) nennt man auch Zentrifugalpotenzial. Aus Gl. (5.4) erhalten wir

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)] - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}} \quad (5.19)$$

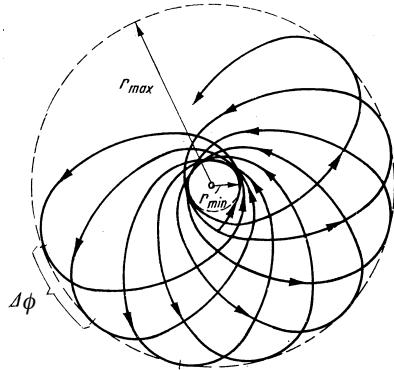


Abbildung 5.4: Rosettenbahn. Hier ist $\Delta\phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \dots$. Eine geschlossene Bahnkurve ergibt sich übrigens nur für $U(r) \propto r^{-1}$ oder $U \propto r^2$.

bzw. nach Trennung der Veränderlichen⁴ und Integration

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)] - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}} + \text{Konstante}. \quad (5.20)$$

Außerdem gilt mithilfe von Gl. (5.15), $d\phi = \frac{L}{\mu r^2} dt$,

$$\phi = \int dr \frac{L}{r^2} \left[2\mu [E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2} \right]^{-1/2} \quad (5.21)$$

Die Gln. (5.20) und (5.21) lösen das Zentralfeldproblem in allgemeiner Form. Die maximalen Grenzen der Integrationen r_{min} und r_{max} sind dabei durch

$$E - U_{eff} = 0 \quad (5.22)$$

gegeben ($\dot{r} = 0$). Wenn diese Gleichung nur eine (endliche) Lösung hat, r_{min} , dann ist die Bahn unendlich. D. h., der Massenpunkt kommt aus dem Unendlichen und verschwindet auch dort. Ansonsten hat die Bahnkurve die in Abbildung 5.4 dargestellte Form einer Rosettenbahn.

1/r-Potenzial[†]:

⁴Siehe z. B. I. N. Bronstein et al. *Taschenbuch der Mathematik* (1999) Abschnitt 9.2.2.3

Wir betrachten

$$U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r} \quad (5.23)$$

als wichtigen Spezialfall des Zentralfeldproblems. Dieses Potenzial beschreibt zwei fundamentale Wechselwirkungen - die Gravitation⁵ und die elektrostatische oder Coulomb Wechselwirkung.

Die Bahngleichung für (5.23) folgt aus Gl. (5.21):

$$\begin{aligned} \phi &= \int dr \frac{L}{r^2} \left[2\mu \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{-1/2} \\ &\quad + \text{Konstante} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Zunächst substituieren wir $x = 1/r$ und erhalten

$$\begin{aligned} \phi &= -L \int \frac{dx}{\sqrt{2\mu(E + \alpha x) - L^2 x^2}} \\ &\quad + \text{Konstante}, \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung unter der Wurzel liefert

$$\begin{aligned} &-L^2 x^2 + 2\mu\alpha x + 2\mu E \\ &= L^2 \left[-\left(x - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2} \right] \\ &= L^2 \left(\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2} \right) [1 - y^2] \end{aligned}$$

mit $y = \left(x - \frac{\mu\alpha}{L^2}\right) \left[\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}\right]^{-1/2}$. Daher

$$\begin{aligned} \phi &= - \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} + \text{Konstante} \\ &= \arccos y + \text{Konstante} \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\frac{d}{dy} \arccos y \stackrel{y=\cos z}{=} \frac{dz}{d\cos z} = -\frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Die endgültige Lösung lautet

$$\phi = \arccos \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}} \right), \quad (5.25)$$

⁵Hier spricht man auch vom Keplerproblem.

wobei wir den Anfangsort der Integration so gewählt haben, dass *Konstante* verschwindet.

Mit $q = \frac{L^2}{\mu\alpha}$ und $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$ erhalten wir –

– für $\alpha > 0$ bzw. $q > 0$ (Anziehung):

$$r = \frac{q}{1 + e \cos \phi}. \quad (5.26)$$

Für Exzentrizitäten $e < 1$ ($E < 0$) liefert diese Gleichung Ellipsenbahnen, während für $e \geq 1$ ($E \geq 0$) Hyperbelbahnen resultieren (vgl. Abbildung 5.5). Man beachte in diesem Zusammenhang die allgemeine Form des effektiven Potenzials $U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$ gezeigt in Abbildung 5.6. Der kleinste Abstand r_{min} ist in jedem Fall durch

$$r_{min} = \frac{q}{1 + e} \quad (5.27)$$

gegeben.

– für $\alpha < 0$ bzw. $q < 0$ (Abstoßung):

$$r = \frac{q}{1 - e \cos \phi}. \quad (5.28)$$

Diese Gleichung liefert ausschließlich Hyperbelbahnen (vgl. wieder Abbildung 5.5), da $e > 1$ gelten muss, damit r positive Werte annehmen kann.

5.3 Streuung[‡]

Streuung im Schwerpunktsystem[‡]:

Streuung entspricht dem Fall, wenn Gl. (5.22) nur eine Lösung hat (vgl. Abbildung 5.6). Den Winkel θ in Abbildung 5.7,

$$\theta = 2\varphi_0 - \pi, \quad (5.29)$$

nennst man Streuwinkel. φ_0 ist gegeben durch

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} dr \frac{L}{r^2} \left[2\mu [E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2} \right]^{-1/2} \quad (5.30)$$

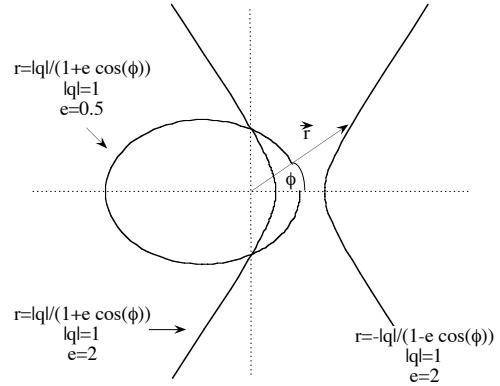


Abbildung 5.5: Beispiele für Bahnkurven. Der Ursprung für \vec{r} liegt im rechten Brennpunkt der Ellipse.

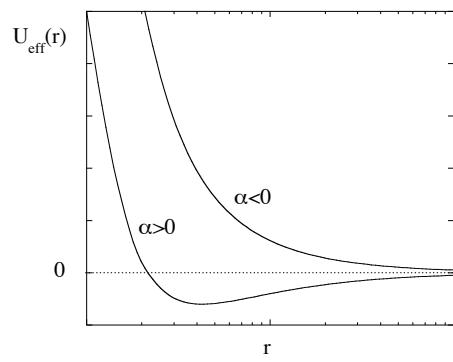


Abbildung 5.6: Effektives Potenzial für $U = -\frac{\alpha}{r}$.

Der Streuwinkel enthält also Informationen über das Wechselwirkungspotenzial $U(r)$.

Was in Streuexperimenten gemessen wird, ist allerdings die Ablenkung vieler Teilchen ausgedrückt durch den Streuquerschnitt

$$d\sigma = \frac{dN}{n} . \quad (5.31)$$

Hier ist dN die Zahl der Teilchen, die im Winkelintervall $(\theta, \theta + d\theta)$ gemessen werden. Und n ist die Flächendichte der einfallenden Teilchen. D. h. wir wollen θ , den Winkel um den die Teilchen aus ihrer Richtung abgelenkt werden, mit dem Streuquerschnitt (5.31) unter Verwendung von (5.30) ausdrücken. Zunächst schreiben wir

$$dN = 2\pi\rho d\rho n ,$$

wobei $2\pi\rho d\rho$ die Fläche einer Kreisscheibe mit Radius ρ und Dicke $d\rho$ ist. Das Zentrum der Kreisscheibe liegt auf der Linie, auf der ein Teilchen ohne Wechselwirkung fliegen müsste, um das Zielteilchen zentral zu treffen. Man nennt ρ den Stoßparameter. Es gilt also $\rho = \rho(\theta)$. Somit gilt

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right| d\theta . \quad (5.32)$$

Statt des Streuwinkels θ wird häufig der Raumwinkel Ω bzw. das Raumwinkelement $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ verwendet. D. h.

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right| d\Omega . \quad (5.33)$$

Rutherfordstreuung[†]:

Wir betrachten nun den konkreten Fall $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, in dem man von rutherfordschen Streuung⁶ spricht. Gemäß Gl. (5.25) gilt

⁶Rutherford, Ernest, Lord Rutherford of Nelson (seit 1931), britischer Physiker, *Brightwater (bei Nelson, Neuseeland) 30.8. 1871, † Cambridge 19.10. 1937; Professor in Montreal, Manchester, ab 1919 in Cambridge und Direktor des dortigen Cavendish Laboratory. Rutherford war einer der bedeutendsten Experimentalphysiker des 20. Jahrhunderts, besonders auf dem Gebiet der Radioaktivität und der Kernphysik. Er untersuchte die beim radioaktiven Zerfall entstehende α -, β - und γ -Strahlung, stellte mit F. Soddy

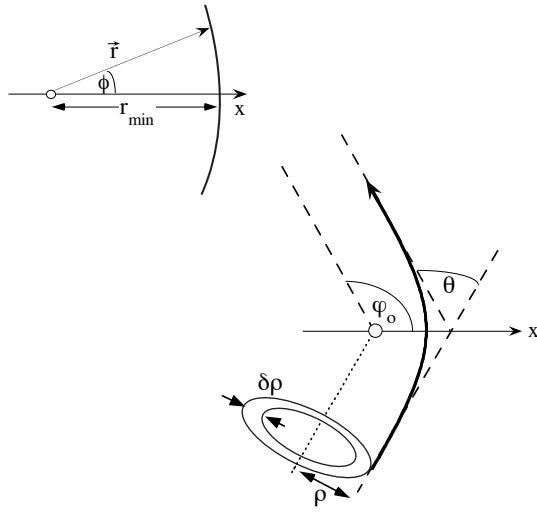


Abbildung 5.7: Beispiel der Streuung zweier Teilchen mit anziehender Wechselwirkung in deren Schwerpunktsystem. Die dicke Linie ist die offene (!) Bahn des Abstandsvektors der Teilchen \vec{r} (siehe auch den Einsatz oben links). Sie ergibt sich aus Gl. (5.26) für den Fall $E \geq 0$ bzw. $e \geq 1$. Hingewiesen sei außerdem auf die Rotationssymmetrie bei Drehungen um die gepunktete Linie.

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \phi(\infty) - \phi(r_{min}) \\ &= \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_\infty^2 \rho}{\alpha}\right)^2}}\right),\end{aligned}\quad (5.34)$$

wobei wir $E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$ sowie $L = \mu v_\infty \rho$ ausgenutzt haben. v_∞ ist offensichtlich die Relativgeschwindigkeit der Teilchen bei unendlicher Entfernung. Aus (5.34) folgt sofort

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \tan^2 \varphi_0 . \quad (5.35)$$

bzw. mit $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned}\rho \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| &= \frac{\alpha^2}{2\mu^2 v_\infty^4} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} \right| \\ &= \frac{\alpha^2}{2\mu^2 v_\infty^4} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} .\end{aligned}\quad (5.36)$$

Mit der Identität $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ folgt schließlich

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 d\Omega}{4\mu^2 v_\infty^4 \sin^4(\theta/2)} . \quad (5.37)$$

Dies ist die rutherford'sche Streuformel. Sie hängt augenscheinlich nicht vom Vorzeichen von α ab! Es sei noch einmal betont, dass diese Gleichung im Schwerpunktssystem der Teilchen gilt. Wie sie in das Laborsystem zu transformieren ist, werden wir gleich sehen.

Elastischer Stoß und Bezugssystemwechsel:

Während sich der Begriff Streuung auf die Ablenkung vieler Teilchen aus ihrer Bahn bezieht, bezieht

1903 eine Theorie des radioaktiven Zerfalls auf und schuf durch das nach ihm benannte Atommodell die Grundlage der heutigen Atomphysik. 1919 gelang ihm die erste künstliche Kernreaktion durch α -Teilchen-Beschuss von Stickstoff, der dabei in Sauerstoff umgewandelt wurde. 1908 erhielt er den Nobelpreis für Chemie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

sich der Begriff Stoß auf die Wechselwirkung zweier bzw. einer begrenzten Zahl von Teilchen, die irgendwann in einem Raumgebiet zusammengekommen sind. Uns interessieren hier nicht die Details der Wechselwirkung, sondern lediglich der Zusammenhang der Teilchenimpulse vor und nach dem Stoß weit entfernt vom Gebiet der Wechselwirkung. D. h. in einer Entfernung, in der sich die Stoßpartner kräftefrei bewegen.

Ein Stoß heißt elastisch, wenn er die innere Energie der Stoßpartner unverändert lässt. D. h. er führt beispielsweise zu keiner dauerhaften Deformation oder zur Abgabe von Wärme an die Umgebung. Im folgenden betrachten wir Zweierstöße, wobei wir mit (S) das Schwerpunktssystem bezeichnen und mit (L) das Laborsystem. Ungestrichene Größen beziehen sich auf die Zeit vor dem Stoß, gestrichene Größen auf die Zeit danach.

Schwerpunktssystem: Hier ruht der Schwerpunkt im Ursprung. Daher gilt wegen (4.48)

$$m_1 \vec{r}_1(S) + m_2 \vec{r}_2(S) = 0 , \quad (5.38)$$

wobei $\vec{r}_1(S)$ und $\vec{r}_2(S)$ die Ortsvektoren der stoßenden Teilchen sind. Mit

$$\vec{r}(S) = \vec{r}_1(S) - \vec{r}_2(S) \quad (5.39)$$

folgt

$$\vec{r}_1(S) = \frac{m_2}{m} \vec{r}(S) \quad \vec{r}_2(S) = -\frac{m_1}{m} \vec{r}(S) \quad (5.40)$$

$(m = m_1 + m_2)$ und somit

$$\vec{v}_1(S) = \frac{m_2}{m} \vec{v} \quad \vec{v}_2(S) = -\frac{m_1}{m} \vec{v} . \quad (5.41)$$

Dies sind die Teilchengeschwindigkeiten vor der Wechselwirkung ausgedrückt durch die Relativgeschwindigkeit \vec{v} . Weder \vec{v} noch \vec{r} benötigt den Zu- satz (S) , da diese Größen die gleichen sind wie im Laborsystem, das sich relativ zum Schwerpunktssystem mit einer gewissen gleichförmigen Geschwin digkeit \vec{w} bewegt.

Für die Beschreibung des Stoßes spielt es keine Rolle, ob er vorwärts oder rückwärts in der Zeit beschrieben wird. Daher folgt aus (5.41) sofort

$$\vec{v}'_1(S) = \frac{m_2}{m} \vec{v}' \quad \vec{v}'_2(S) = -\frac{m_1}{m} \vec{v}' . \quad (5.42)$$

Aus der Erhaltung der kinetischen Energie (elastischer Stoß) folgt $|\vec{v}| = |\vec{v}'|$ bzw.

$$\vec{v}' = v \cdot \vec{n} , \quad (5.43)$$

wobei \vec{n} ein Einheitsvektor ist, der die Richtung von \vec{v}' angibt. Über diese Richtung lassen sich jedoch keine Aussagen machen.

Laborsystem: Die entsprechenden Geschwindigkeiten im Laborsystem lauten

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(L) &= \vec{v}_1(S) + \vec{w} & \vec{v}_2(L) &= \vec{v}_2(S) + \vec{w} \\ \vec{v}'_1(L) &= \vec{v}'_1(S) + \vec{w} & \vec{v}'_2(L) &= \vec{v}'_2(S) + \vec{w} . \end{aligned}$$

Daher gilt gemäß Gln. (5.41) und (5.43)

$$\begin{aligned} \vec{v}'_1(L) &= \frac{m_2}{m} v \vec{n} + \vec{w} & (5.44) \\ \vec{v}'_2(L) &= -\frac{m_1}{m} v \vec{n} + \vec{w} . \end{aligned}$$

Hinschreiben der analogen Gleichungen für $m_1 \vec{v}_1(L)$ und $m_2 \vec{v}_2(L)$, liefert nach Addition dieser Gleichungen

$$\vec{w} = \frac{m_1 \vec{v}_1(L) + m_2 \vec{v}_2(L)}{m} . \quad (5.45)$$

Die Multiplikation von (5.44) mit m_1 bzw. m_2 führt schließlich auf die gewünschte Beziehung zwischen den Impulsen vor und nach dem Stoß:

$$\vec{p}'_1(L) = \mu v \vec{n} + \frac{\mu}{m_2} (\vec{p}_1(L) + \vec{p}_2(L)) \quad (5.46)$$

$$\vec{p}'_2(L) = -\mu v \vec{n} + \frac{\mu}{m_1} (\vec{p}_1(L) + \vec{p}_2(L)) \quad (5.47)$$

Weitergehende Informationen geben jetzt nur Spezialfälle. Wir betrachten den Fall $\vec{p}_2(L) = 0$, d. h. Teilchen 2 ruht vor dem Stoß. Damit gilt gleichzeitig $p_1 = m_1 v$, und wir können die Gln. (5.46) und (5.47) grafisch wie in Abbildung 5.8 darstellen. Aus der Abbildung leiten wir sofort die Beziehungen

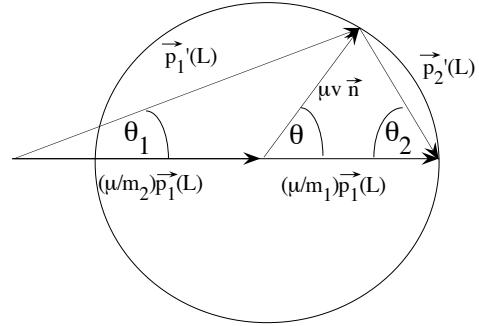


Abbildung 5.8: Stoßgeometrie für den Fall $\vec{p}_2(L) = 0$. θ ist der Streuwinkel im Schwerpunktsystem, da $\vec{p}_1(L)$ entlang der Richtung der Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß liegt. θ_1 und θ_2 beziehen sich dagegen auf das Laborsystem. Man beachte: $|\mu v \vec{n}| = |\frac{\mu}{m_1} \vec{p}_1(L)|$ da $|\vec{v}| = |\vec{v}'| = v$.

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2 \cos \theta} \quad (5.48)$$

⁷ sowie

$$\theta_2 = \frac{\pi - \theta}{2} \quad (5.49)$$

her, die es uns erlauben, Schwerpunktsystem und Laborsystem miteinander zu verknüpfen.

Im Fall der rutherford'schen Formel (5.37) folgt für den Streuquerschnitt der zunächst ruhenden Teilchen (Teilchen 2) mittels Gl. (5.49)

$$\begin{aligned} d\sigma_2 &= \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v_\infty^4} 2\pi \sin(\pi - 2\theta_2) \frac{2d\theta_2}{\sin^4(\frac{\pi}{2} - \theta_2)} \\ &= \frac{\alpha^2}{2\mu^2 v_\infty^4} 2\pi \sin(2\theta_2) \frac{d\theta_2}{\cos^4 \theta_2} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3 \theta_2} . \end{aligned} \quad (5.50)$$

⁷Gl. (5.48) erhält man aus den Komponenten von $\vec{p}_1(L)$ gemäß Gl. (5.46),

$$\begin{aligned} p'_1(L) \cos \theta_1 &= \mu v \cos \theta + \frac{\mu}{m_2} p_1(L) \\ p'_1(L) \sin \theta_1 &= \mu v \sin \theta , \end{aligned}$$

durch eliminieren von $p'_1(L)$ und mittels $p_1(L) = m_1 v$.

⁸. Offensichtlich gilt $v_\infty \equiv v$. Für die sich anfänglich bewegenden Teilchen ist der entsprechende Ausdruck komplizierter (Aufgabe).

Bemerkung: Interessant ist auch die Energieverteilung der Teilchen 2 (wenn diese als anfänglich ruhend angenommen werden). D. h. wir fragen nach $d\sigma_2(\epsilon'_2(L))$ statt $d\sigma_2(\theta_2)$. Es gilt $\epsilon'_2(L) = \frac{1}{2}m_2\vec{v}'_2(L) = \frac{\vec{p}'_2(L)}{2m_2}$. Mithilfe von (5.46) und (5.47) folgt

$$\begin{aligned}\epsilon'_2(L) &= \frac{1}{2m_2} \left(\mu^2 v^2 + \frac{\mu^2}{m_1^2} p_1^2(L) \right. \\ &\quad \left. - 2\mu^2 \frac{v}{m_1} p_1(L) \cos \theta \right) \\ &= \frac{\mu^2 v^2}{m_2} \left(1 - \cos \left(2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \\ &= 2 \frac{\mu^2 v^2}{m_2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right),\end{aligned}\quad (5.51)$$

wobei $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ verwendet wurde. Daraus folgt

$$\begin{aligned}d\epsilon'_2(L) &= 2 \frac{\mu^2 v^2}{m_2} \underbrace{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}_{=\sin \theta} \frac{1}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mu^2 v^2}{m_2} d\Omega.\end{aligned}\quad (5.52)$$

Zusammen mit Gl. (5.37) für die rutherford'schen Streuung erhalten wir

$$d\sigma_2 = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\epsilon'_2(L)}{\epsilon'^2_2(L)}. \quad (5.53)$$

Der *slingshot*-Effekt[‡]:

Eine interessante Raumfahrtanwendung im Rahmen der Streutheorie ist der so genannte *slingshot*-Effekt, den wir stark vereinfacht betrachten wollen.

Am 15. Oktober 1997 schickte die NASA die Raumsonde Cassini⁹ auf eine 6.7jährige Reise zum

Saturn¹⁰. Ein Titan/Centaur Booster beschleunigte das 5700 kg schwere Raumfahrzeug auf eine Geschwindigkeit von 4 km/s relativ zur Erde. Saturn liegt jedoch recht hoch im Schwerkraftpotential der Sonne, und um ihn von der Umlaufbahn der Erde aus zu erreichen, benötigt ein Raumfahrzeug mindestens eine Geschwindigkeit von 10 km/s. Daher beinhaltete Cassinis Flugplan die zusätzliche Aufnahme von Geschwindigkeit in vier planetarischen Treffen - mit Venus, noch einmal Venus, Erde und Jupiter (VVEJ Flugbahn). In jedem dieser Vorbeiflüge wurde Cassini durch eine Gravitations-*slingshot*-Wechselwirkung mit den Planeten beschleunigt, die sich mit Geschwindigkeiten von 13 km/s (Jupiter) bis 35 km/s (Venus) um die Sonne bewegen. Der erste Vorbeiflug an Venus am 26. April 1998 lieferte Cassini eine zusätzliche Geschwindigkeit von ca. 7 km/s; der dritte an der Erde am 17. August 1999 fügte weitere 5.5 km/s hinzu. Der vierte und letzte Vorbeiflug an Jupiter am 30. Dezember 2000 lieferte nochmals 2 km/s und brachte Cassini auf Kurs, um Saturn am 1. Juli 2004 zu erreichen. Die geschätzte Treibstoffersparnis durch die vier Treffen betrug mindestens 75 Tonnen. Inzwischen setzt die NASA routinemäßig solche planetarischen *gravity assists* ein und künftige Marsexpeditionen könnten beispielsweise aus Mondvorbeiflügen Nutzen ziehen.

Eine extreme Form des Manövers zeigt Abbildung 5.9. Die Sonde nähert sich einem Planeten frontal mit der Geschwindigkeit v . Dieser bewegt sich entgegengesetzt mit der Geschwindigkeit V (beide Geschwindigkeiten seien relativ zum Sonnenbezugssystem definiert). Wir stellen uns eine extreme Haarnadelkurve hinter dem Planeten herum in die entgegengesetzte ursprüngliche Bewegungsrichtung der Sonde vor. Das entspricht einem zentralen elastischen Stoß mit dem Planeten. Aus der Sicht des Planeten ergibt dies eine Geschwindigkeit

(Cassini-Teilung, 1675). Nach ihm ist auch die Saturnsonde Cassini der ESA und NASA benannt (Start Ende 1997). Das gemeinsame Projekt von NASA, ESA und der Italienischen Weltraumagentur (ASI) soll u.a. Daten über die Topographie und chemische Zusammensetzung der Oberfläche des Planeten, über seine Atmosphäre, das Magnetfeld, die Monde und über das Ringsystem liefern. Insbesondere soll auf dem Satursatelliten Titan die europäische Sonde *Huygens* (Masse 343kg, Durchmesser 2,7m) abgesetzt werden, von der man Aussagen über dessen Atmosphäre erwartet. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

⁸wieder wurde $\sin \theta_2 = 2 \sin (\theta_2/2) \cos (\theta_2/2)$ verwendet

⁹Cassini, Giovanni Domenico, französischer Astronom, *Perinaldo (bei Nizza) 8.6.1625, †Paris 14.9.1712; wurde 1669 Leiter der Sternwarte in Paris, bestimmte die Rotationszeiten von Jupiter und Mars, entdeckte vier Saturnmonde und die nach ihm benannte Teilung des Saturnrings

¹⁰siehe <http://saturn.jpl.nasa.gov/index.cfm>

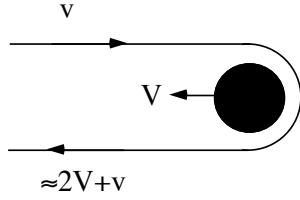


Abbildung 5.9: Extreme Form des *slingshot*-Manövers.

$V + v$ nach dem Stoß. Aber der Planeten bewegt sich noch mit der Geschwindigkeit V relativ zur Sonne, so dass sich die Sonde ebenfalls relativ zur Sonne mit der Geschwindigkeit $2V + v$ bewegen wird.

Betrachten wir dies genauer. Die Erhaltung der kinetischen Energie und des Impulses vor und nach der Wechselwirkung verlangt

$$MV^2 + mv^2 = MV'^2 + mv'^2$$

und

$$-MV + mv = MV' + mv' .$$

Auflösen nach v' liefert

$$v' = -\frac{(1-q)v + 2V}{1+q} , \quad (5.54)$$

wobei $q = m/M$ gilt. Da q fast Null ist (die Raumsonde hat eine verglichen mit dem Planeten zu vernachlässigende Masse), vereinfacht dies Gl. (5.54) zu $v' \approx -(v + 2V)$.

Natürlich sind in der Regel planetarische Vorbeiflüge keine einfachen frontalen Stöße, aber dieselben Gesetze gelten für beliebige Winkel der Wechselwirkung. Lassen Sie uns die Bewegungsrichtung des Planeten als die x-Achse, und die senkrechte Richtung (zur Ebene der Ekliptik) als die y-Achse annehmen. Die Sonde bewegt sich anfangs mit einer Geschwindigkeit v relativ zum Sonnenbezugssystem, in eine Richtung, bei der sie den entgegenkommenden Planeten im Winkel θ trifft. Die Abbildungen 5.10 (oben) und 5.10 (unten) zeigen dies; die erste in Bezug auf das Ruhesystem des Planeten und die zweite in Bezug auf das Sonnenbezugssystem. Wenn wir ein einfaches Parallelogramm der Geschwindigkeiten für die Sonde und

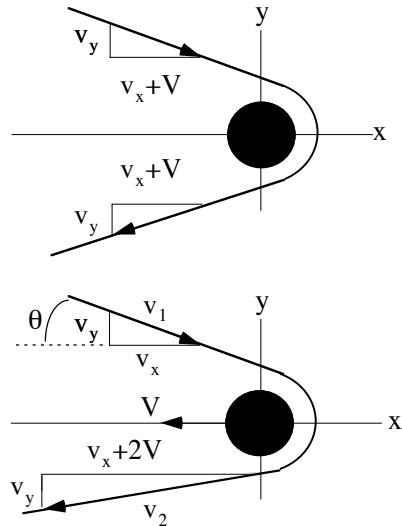


Abbildung 5.10: Oben: Sicht aus dem Ruhesystem des Planeten; unten: Relativ zum System der Sonne.

den Planeten zeichnen, die sich in einem beliebigen Winkel schneiden, und annehmen, dass wir es mit einer hyperbolischen Bahn symmetrisch zur x-Achse (im Bezugssystem des Planeten) zu tun haben, ist der Anfangsgeschwindigkeitsvektor der Sonde in Bezug auf das Bezugssystem der Sonne

$$v_x = v \cos \theta \quad v_y = v \sin \theta$$

und sein Geschwindigkeitsvektor lange nach der Begegnung ist gemäß unserer obigen Überlegung

$$v'_x \approx -(v \cos \theta + 2V) \quad v'_y \approx v \sin \theta .$$

Daraus folgt

$$v' \approx (v + 2V) \sqrt{1 - \frac{4Vv(1 - \cos \theta)}{(v + 2V)^2}} \quad (5.55)$$

für den Betrag der Geschwindigkeit der Sonde nach dem „Stoß“. Angenommen beispielsweise, dass die Anfangsgeschwindigkeit der Sonde und des Planeten exakt dieselbe ist. In diesem Fall reduziert sich die obenstehende Relation (5.55) zu

$$v' \approx v\sqrt{5 + 4 \cos \theta} .$$

Für $\theta = 0$ haben wir $v' \approx 3v$. Dies entspricht dem oben diskutierten Fall des zentralen Stoßes. Auf der anderen Seite folgt für $\theta = \pi$ das Resultat $v' \approx v$. Hier bewegen sich die Sonde und der Planet in dieselbe Richtung mit derselben Geschwindigkeit. In einem realistischeren Fall nähert sich die Sonde fast senkrecht der Bahn des Planeten und lenkt geradewegs hinter ihm ein. In diesem Fall wird die Sonde in Richtung der Planetenbahn in einen Winkel ausgelenkt, der durch die obigen Formeln gegeben ist, und seine Endgeschwindigkeit ist $\sqrt{5}$ multipliziert mit seiner Anfangsgeschwindigkeit.

Wenn Planeten Punktteilchen wären, dann wäre es nach der Klassischen Mechanik für ein Objekt möglich (in einem ziemlich künstlichen Sonnensystem) eine unendliche Geschwindigkeit in endlicher Zeit zu erlangen, indem es wiederholt mit einer Anzahl von Planeten wechselwirken würde. Natürlich wäre in der Praxis das Gravitationsfeld eines Planeten nicht stark genug, um das Raumschiff „zu halten“, sobald es eine bestimmte Geschwindigkeit überschreitet. Die Grenze ist dadurch bestimmt, wie schnell man um einen Planeten kreisen kann, ohne in seine Atmosphäre zu tief einzutauchen (ganz zu schweigen von hineinzustürzen). Einige NASA Missionen haben wiederholt die obere Atmosphäre der Venus und der Erde in ihren Manövern überflogen.

Kapitel 6

Kleine Schwingungen

6.1 Eindimensionale Bewegung[†]

Die potenzielle Energie $U(q)$, wobei q eine verallgemeinerte Koordinate ist, soll bei q_o ein lokales Minimum besitzen. Die Taylorentwicklung um diese Stelle lautet

$$U(q) = U(q_o) + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q} \Big|_{q_o}}_{=0} (q - q_o) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \Big|_{q_o} (q - q_o)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial q^3} \Big|_{q_o} (q - q_o)^3 + \dots . \quad (6.1)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist eine Konstante. Der lineare Term verschwindet am Minimum. Für Bewegungen in einer sehr kleinen Umgebung von q_o reicht der dritte Term daher vollständig aus. Ein solches System bezeichnet man als (klassischen) harmonischen Oszillatoren. Berücksichtigt man Terme höherer Ordnung, so spricht man von Anharmonizität. Allerdings kann es für Energien, die $U(q_o)$ wesentlich überschreiten, zum Entkommen des Systems aus der Potenzialmulde kommen, und das System stellt keinen Oszillatoren mehr dar.

Harmonischer Oszillator[†]:

In diesem Abschnitt betrachten wir eingehend den eindimensionalen harmonischen Oszillatoren gezeigt in der Skizze 6.1. Die Masse sei m und die Federkonstante sei momentan $k = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \Big|_o > 0$ ¹.

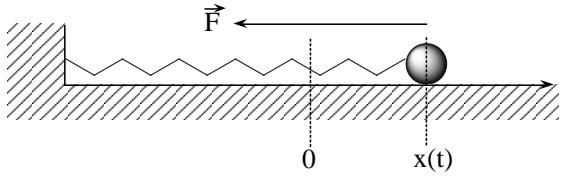


Abbildung 6.1: Harmonischer Oszillatoren bei der Auslenkung $x(t)$ aus seiner Ruhelage.

Damit erhalten wir die newtonische Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) . \quad (6.2)$$

Das gleiche Ergebnis liefert die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 . \quad (6.3)$$

Leicht umgeschrieben lautet Gl. (6.2)

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (\omega_o = \sqrt{k/m}) . \quad (6.4)$$

Die allgemeine Lösung ist (wie beim Pendel)

$$x(t) = c_1 \cos \omega_o t + c_2 \sin \omega_o t \quad (6.5)$$

bzw.

$$x(t) = a \cos(\omega_o t + \alpha) \quad (6.6)$$

¹Wir verwenden hier die kartesische Koordinate $x(t)$.

mit $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ und $\tan \alpha = -c_2/c_1$ (vgl. Abschnitt 2.2). Die Größe a ist die Amplitude und α die Phase der Schwingung (6.6). ω_o heißt Frequenz bzw. auch Kreisfrequenz. Für die Energie der Schwingung erhalten wir

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_o^2 x^2) \quad (6.7) \\ &= \frac{1}{2} m \omega_o^2 a^2. \end{aligned}$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator[†]:

Wir berücksichtigen eine zusätzliche Reibungskraft

$$f_R = -\zeta \dot{x}, \quad (6.8)$$

die der Geschwindigkeit entgegengesetzt proportional ist. ζ ist der Reibungskoeffizient. Aus Gl. (6.4) wird damit

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (2\lambda = \zeta/m). \quad (6.9)$$

Dies hört sich vielleicht ganz gut an, aber verstehen wir auch, was hier passiert? Zunächst einmal ist Gl. (6.8) eine einfache Näherung², die oft sehr gut ist – aber nicht immer. Man spricht von stokescher Reibung³. Dann haben wir die Bewegungsgleichung (6.9) durch einfache Addition der Reibungskraft aus Gl. (6.4) erhalten. Wie aber sieht das Pendant zu Gl. (6.3) aus? Antwort: es existiert nicht. Wir betrachten ja nur ein einzelnes Teilchen, das durch die Reibung Energie an seine Umgebung abgibt. Die Umgebung wird aber nicht berücksichtigt. Das System ist offen. Die Reibungskraft entzieht dem System Energie und diese Energiemenge ist wegabhängig. Man sagt, die Reibungskraft ist

²Der führende Term einer Taylorentwicklung der Reibungskraft in der Geschwindigkeit.

³Stokes, Sir (seit 1889) George Gabriel, britischer Mathematiker und Physiker, *Skreen (County Sligo, Irland) 13.8. 1819, †Cambridge 1.2. 1903; wurde 1849 Professor in Cambridge und war 1885–90 Präsident der Royal Society; bedeutende Beiträge zur Hydrodynamik (stokesches Reibungsgesetz), Optik (stokesche Regel) und Analysis, in der er den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz und den Zusammenhang zwischen Oberflächen- und Kurvenintegralen (stokescher Integralsatz) erarbeitete. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

nicht konservativ. Mathematisch ausgedrückt heißt das: $\oint \vec{f}_R \cdot d\vec{s} \neq 0$. Umgekehrt ist dies gleichbedeutend damit, dass sich die Reibungskraft nicht aus einem Potenzial ableiten lässt⁴. Formal können solche Kräfte \vec{f} in unseren Formalismus integriert werden, indem man sie einfach addiert:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} + \vec{f} = 0. \quad (6.10)$$

Die Lösung der Gl. (6.9) erhalten wir durch den Ansatz $x = e^{rt}$, der auf die charakteristische Gleichung $r^2 + 2\lambda r + \omega_o^2 = 0$ und daher auf $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}$ führt. Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad (6.11)$$

wobei wir die drei Fälle $\lambda < \omega_o$, $\lambda > \omega_o$ und $\lambda = \omega_o$ unterscheiden:

$\lambda < \omega_o$: Dies liefert

$$x(t) = a e^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha), \quad (6.12)$$

die gedämpfte Schwingung.

$\lambda > \omega_o$: Dies liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2})t} \\ &\quad + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2})t}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

die aperiodische Bewegung.

$\lambda = \omega_o$: Dies liefert

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}. \quad (6.14)$$

Hier reicht der Ansatz $x = e^{rt}$ offensichtlich nicht aus!

Lineare Kette[†]:

⁴Es gilt natürlich für $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv -\vec{\nabla} U$, dass das geschlossene Wegintegral verschwindet: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\oint \vec{\nabla} U \cdot d\vec{s} = -\oint dU = 0$.

Wir betrachten eine unendliche, eindimensionale Kette aus harmonisch gekoppelten Massen (siehe Abbildung 6.2). Die Kette besteht aus identischen Gliedern der Länge a . Die schwarzen Punkte sind unterschiedliche Massen M und m , die durch harmonische Federn mit den identischen Kraftkonstanten C verbunden sind. u_s und v_s sind die Auslenkungen der jeweiligen Massen aus ihrer Ruhelage im Kettenglied s .

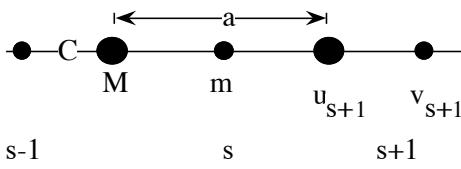


Abbildung 6.2: Kette aus harmonischen Federn und ungleichen Massen.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen für u_s und v_s mithilfe der Lagrange Funktion der Kette erhalten. Diese lautet

$$\mathcal{L} = \sum_s \left(\frac{Mu_s^2}{2} + \frac{mv_s^2}{2} \right) - \sum_s \frac{C}{2} \left([v_{s-1} - u_s]^2 + [u_s - v_s]^2 \right).$$

Die Bewegungsgleichungen folgen gemäß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_s} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_s}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_s &= C(v_{s-1} - u_s) - C(u_s - v_s) \\ m\ddot{v}_s &= C(u_s - v_s) - C(v_s - u_{s+1}) \end{aligned}$$

Für dieses gekoppelte System von Dgln. machen wir den Lösungsansatz

$$\begin{aligned} u_s &= u \exp[i(sak - \omega t)] \\ v_s &= v \exp[i(sak - \omega t)] \end{aligned} \tag{6.15}$$

Hier ist k die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz einer Schwingung.

Aber was genau bedeutet unser Lösungsansatz physikalisch? Unter Verwendung der eulerschen Formeln schreiben wir

$$\exp[i(sak - \omega t)] = \cos(sak - \omega t) + i \sin(\dots).$$

Beschränken wir uns zunächst auf den Realteil und schreiben mit $k = 2\pi/\lambda$ sowie $\omega = 2\pi/T$

$$\cos(sak - \omega t) = \cos\left(2\pi\left[\frac{sa}{\lambda} - \frac{t}{T}\right]\right).$$

Betrachten wir diesen Ausdruck zu einem festen Zeitpunkt $t = 0$ ⁵, d. h.

$$\cos(sak - \omega t) \stackrel{t=0}{=} \cos\left(2\pi\frac{sa}{\lambda}\right).$$

Offensichtlich ist λ die Wellenlänge einer periodischen Auslenkung der Massen entlang der Kette. D. h. Massen im Abstand $sa = n\lambda$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ haben die gleiche Auslenkung bzgl. ihrer jeweiligen Ruhelage. Analog können wir uns einen festen Ort entlang der Kette suchen, z.B. beim Kettenglied $s = 0$, und erhalten dann

$$\cos(sak - \omega t) \stackrel{s=0}{=} \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right).$$

D. h. jeweils nach der Zeit $t = lT$ mit $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ hat eine Masse im Kettenglied s wieder die gleiche Auslenkung. T ist also die Periode der Auslenkung dieser Masse. Schließlich können wir noch mit einer Geschwindigkeit λ/T die Kette entlang laufen (in positive Richtung). Was sehen wir dann? In diesem Fall gilt $sa/\lambda - t/T = 0$. D. h. wir sehen während des Laufens neben uns eine konstante Auslenkung. Insgesamt beschreibt unser Ansatz eine Auslenkungswelle, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit λ/T auf der Kette in positive Richtung ausbreitet! Der Grund, weshalb wir mit einer so genannten komplexen Welle⁶ rechnen anstatt mit $\cos(\dots)$ oder $\sin(\dots)$, liegt in der größeren Rechenbequemlichkeit, die die komplexe Welle mit sich bringt.

⁵Wir betrachten ein zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgenommenes Foto der Kette.

⁶Das eben Gesagte gilt natürlich auch für den Sinus.

Der Ansatz (6.15) hat auf den ersten Blick nicht die erwartete Form. Wir hätten auf der Basis der vorangegangenen Diskussion eher den Ansatz

$$\begin{aligned} u_s &= c_{u,1} \cos(sak \pm \omega t) + c_{u,2} \sin(\dots) \\ &= u \exp[i(sak \pm \omega t)] + \bar{u} \exp[-i(\dots)] \end{aligned}$$

mit

$$u = \frac{c_{u,1} - i c_{u,2}}{2}$$

sowie einen analogen Ausdruck für v_s gewählt. Unser Ansatz berücksichtigt also jeweils nur den ersten Term der allgemeineren Form, die eine Summe aus dem Ansatz (6.15) plus seinem konjugiert Komplexen ist. Zusätzlich betrachten wir nur das positive Vorzeichen von $\pm\omega$, d. h. nur die in positive Richtung laufenden Wellen. Mit dieser Information im Hinterkopf ist (6.15) aber vollständig ausreichend für die folgende Rechnung.

Kehren wir zu unserer Aufgabe zurück und setzen (6.15) in die Bewegungsgleichungen ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -\omega^2 M u &= C v e^{-iak} - 2 C u + C v \\ -\omega^2 m v &= C u - 2 C v + C u e^{iak} \end{aligned} \quad (6.16)$$

oder in Matrix- bzw. Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 M + 2C & -C(1 + e^{-iak}) \\ -C(1 + e^{iak}) & -\omega^2 u + 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Offensichtlich ist $u = v = 0$ eine Lösung. Allerdings ist dies eine sinnlose Lösung, denn dann sind alle Auslenkungen Null. Die physikalisch bedeutsame Lösung folgt aus der Bedingung⁷

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 M + 2C & -C(1 + e^{-iak}) \\ -C(1 + e^{iak}) & -\omega^2 u + 2C \end{pmatrix} = 0.$$

Wir verwenden die Rechenregel zur Bestimmung von Determinanten:

⁷Eine Diskussion dieses Vorgehens im Kontext allgemeiner linearer Gleichungssysteme findet man beispielsweise in Abschnitt 3.2 der Referenz [6] oder im gleichen Kontext in den schon genannten Referenzen [4, 5] (Stichwort: homogene Gleichungssysteme).

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ = \sum_{\text{Perm. von } k, l, \dots, r} \pm a_{1k} a_{2l} \dots a_{nr}. \end{aligned}$$

Hier steht (+) bei geraden Permutationen und (-) bei ungeraden Permutationen. Dabei wird jeweils von der natürlichen Reihenfolge $k = 1, l = 2, \dots, r = n$ gestartet, die selbst als gerade Permutation zählt. Im hier relevanten Fall gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

und wir erhalten die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M + 2C)(-\omega^2 m + 2C) \\ -C^2 (2 + e^{iak} + e^{-iak}) = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (\omega^2)^2 - 2C \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \omega^2 \\ + 2 \frac{C^2}{mM} (1 - \cos(ak)) = 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \sqrt{\frac{C}{m}} \left[\left(1 + \frac{m}{M} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2} + 2 \frac{m}{M} \cos(ak)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Der Index 1 gehört zum positiven Vorzeichen und der Index 2 zum negativen Vorzeichen.

Was aber bedeutet diese Lösung? Die Abbildung 6.3 zeigt die so genannten Dispersionsrelationen aus Gl. (6.17). Der Ursprung bei $ak/\pi = 0$ korrespondiert zum Grenzfall unendlich großer Wellenlänge. Die obere Grenze bei $ak/\pi = 1$ entspricht einer Wellenlänge $\lambda = 2a$. Kleinere Wellenlängen machen keinen Sinn⁸. Die Geschwindigkeit der Welle,

⁸Warum?

$\lambda/T = \omega/k$, ist also eine Funktion von k und damit von der Wellenlänge - wobei es zwei verschiedene ω -Zweige gibt. Wir könnten nun die erhaltenen Lösungen für ω in die Gln. (6.16) einsetzen, um dadurch Information über die (komplexen⁹) Amplituden u und v zu erhalten und damit über die möglichen Schwingungstypen oder Schwingungsmoden der Kette. Hier jedoch betrachten wir lediglich den einfachen Grenzfall $ak/\pi = 0$. In diesem Fall liefert die Addition der Gln. (6.16) die Gleichung

$$\omega^2(Mu + mv) = 0.$$

Es gilt $\omega_2 = 0$ und damit lernen wir nichts über den Zusammenhang von ω_2 und den Amplituden in diesem Grenzfall. Aber es gilt auch $\omega_1 \neq 0$ und somit folgt für den ω_1 -Zweig in diesem Grenzfall die Beziehung;

$$u = -\frac{m}{M}v.$$

Sie bedeutet, daß im Fall sehr langer Wellenlänge im Vergleich zu a die Auslenkungen der Massen entgegengesetzt sind. Man beachte dabei, dass die gleiche Beziehung auch für \bar{u} und \bar{v} gilt (vgl. oben) und damit auch für die reellen Konstanten ($c_{u,i} = -(m/M)c_{v,i}$ mit $i = 1, 2$).

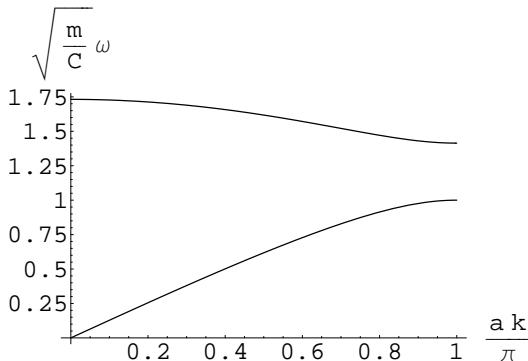


Abbildung 6.3: Die Dispersionsrelationen aus Gl. (6.17) aufgetragen für $m/M = 0.5$. Oben: $\sqrt{m/C}\omega_1$; unten: $\sqrt{m/C}\omega_2$.

Gitterschwingungen und Schallgeschwindigkeit[‡]:

⁹Die Auslenkungen u_s und v_s sind reell!

In diesem Beispiel betrachten wir ein zweidimensionales Netz bzw. Gitter aus Massenpunkten M , die sich senkrecht zur Gitterebene auslenken lassen. Die Auslenkung am Gitterplatz l, m sei u_{lm} . Wir nehmen an, dass benachbarte Auslenkungen harmonisch miteinander koppeln. Die Kopplungskonstante sei C . Die Bewegungsgleichung für den Gitterplatz l, m lautet dann

$$M \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial t^2} = F_{lm}.$$

Hier ist die Kraft F_{lm} die Summe aus vier Beiträgen von den Nachbarplätzen. D. h.

$$F_{lm} = C(u_{l-1,m} - u_{l,m}) + C(u_{l+1,m} - u_{l,m}) \\ + C(u_{l,m+1} - u_{l,m}) + C(u_{l,m-1} - u_{l,m})$$

bzw.

$$F_{lm} = C \left[(u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}) \right. \\ \left. + (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m}) \right].$$

Analog zu Gl. (6.15) machen wir einen Ansatz der Form

$$u_{lm} = u_o \exp [i(lk_l a + mk_m a - \omega t)],$$

worin a der Abstand benachbarter Massenpunkte ist, und erhalten

$$-\omega^2 M u_{lm} = \\ Cu_{lm} (e^{-ik_l a} - 1) + Cu_{lm} (e^{ik_l a} - 1) \\ + Cu_{lm} (e^{ik_m a} - 1) + Cu_{lm} (e^{-ik_m a} - 1).$$

Mit $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$ folgt die Dispersionsrelation

$$\omega^2 M = 2C [2 - \cos(k_l a) - \cos(k_m a)].$$

Insbesondere gilt im Grenzfall großer Wellenlängen, $a \ll \lambda$ d. h. $ka \ll 1$ (mit $k^2 \equiv k_l^2 + k_m^2$),

$$\begin{aligned} \omega^2 M &\approx 2C \left[2 - 1 + \frac{k_l^2 a^2}{2} - 1 + \frac{k_m^2 a^2}{2} \right] \\ &= Ca^2 (k_l^2 + k_m^2) \end{aligned}$$

bzw.

$$\omega = \sqrt{\frac{Ca^2}{M}} k .$$

Unter der Annahme der Übertragbarkeit auf drei Dimensionen sowie isotroper¹⁰ Schallausbreitung können wir jetzt die Geschwindigkeit einer Schallwelle abschätzen. Im vorliegenden Fall ist die Geschwindigkeit der Welle durch

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{Ca^2}{M} \right)^{1/2}$$

gegeben. Wir wollen die Kraftkonstante C mit Hilfe der experimentell gemessenen Kompressibilität abschätzen, d. h. mit Hilfe von

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} .$$

Die Kompressibilität κ_T ist ein Maß für die relative Änderung eines Volumens, $\delta V/V$, unter der Einwirkung einer gleichmäßigen¹¹ Druckänderung δP ¹². Wir schreiben daher

$$\delta P = \frac{F}{A} \approx \frac{-C\delta(V^{1/3})}{V^{2/3}} = -\frac{C}{3} \frac{1}{V^{4/3}} \delta V$$

und erhalten $\kappa_T = \frac{3}{C} V^{1/3}$ bzw. $C = 3\kappa_T^{-1} V^{1/3}$. Mit $V \approx a^3$ folgt

$$v_s \approx \left(\frac{3}{\kappa_T \rho} \right)^{1/2} ,$$

wobei $\rho = M/V$ die Massendichte ist.

Im Fall von Aluminium finden wir aus entsprechenden Tabellen¹³ $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ und $\kappa_T^{-1} = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ und somit

$$v_s \approx 9 \cdot 10^3 \text{ m/s} .$$

¹⁰richtungsunabhängig

¹¹hydrostatischen

¹²Im Kapitel 10 werden wir uns genauer mit der Deformation von elastischen Körpern befassen.

¹³Z.B. H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*.

Der experimentelle Wert von $v_s^{exp} = 5.1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ (bei $20^\circ C$) ist noch erheblich überschätzt, aber die Größenordnung haben wir richtig erhalten.

Gedämpfter Oszillatator mit Anregung[†]:

In diesem Fall wird die Bewegungsgleichung (6.9) um eine periodische Kraft

$$f = b \cos \omega t$$

ergänzt, d. h.

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{b}{m} \cos \omega t . \quad (6.18)$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe aus (6.12) (für $\lambda < \omega_o$) und einer (speziellen) Lösung der inhomogenen Dgl. Auch hier ist es wieder bequem, zu komplexen Zahlen zu wechseln ($z(t) = x(t) + iy(t)$). D. h. statt (6.18) betrachten wir

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_o^2 z = \frac{b}{m} \exp[i\omega t] . \quad (6.19)$$

Haben wir die Lösung $z(t)$ gefunden, dann ist der Realteil automatisch die gesuchte Lösung von (6.18).

Um die gesuchte spezielle Lösung zu finden, gehen wir von der folgenden Überlegung aus. Wenn die externe Kraft stark koppelt und damit die Bewegung des Oszillators bestimmt, erwarten wir intuitiv, dass die gesuchte Lösung das gleiche Zeitverhalten wie die treibende Kraft hat. Dies legt den Ansatz

$$z_{inh}(t) = B e^{i\omega t} \quad (6.20)$$

nahe. Einsetzen des Ansatzes ergibt

$$\begin{aligned} B &= \frac{b}{m(\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)} \\ &= \frac{b}{m([\omega_o^2 - \omega^2]^2 + 4\lambda^2\omega^2)^{1/2}} \\ &\quad \times e^{-i\arctan[2\lambda\omega/(\omega_o^2 - \omega^2)]} . \end{aligned}$$

Die komplette Lösung ist die Summe aus Gl. (6.12) plus dem Realteil von (6.20). Sie lautet

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}t + \alpha) \\ &+ \frac{b}{m([\omega_o^2 - \omega^2]^2 + 4\lambda^2\omega^2)^{1/2}} \\ &\times \cos(\omega t - \arctan[\dots]). \quad (6.21) \end{aligned}$$

Für lange Zeiten verschwindet offensichtlich der erste Term in Gl. (6.21)¹⁴. Betrachtet man den Amplitudenfaktor des zweiten Terms, so hat dieser als Funktion der treibenden Frequenz ω ein Maximum bei $\omega = \omega_o$, der Eigenfrequenz oder Resonanzfrequenz des Oszillators. Dieses Maximum nimmt mit abnehmender Reibung ($\lambda \rightarrow 0$) zu!

Dissipationsfunktion[‡]:

Im eingeschwungenen Zustand bleibt die Energie des eben betrachteten Oszillators unverändert. Allerdings muss er dazu im zeitlichen Mittel eine gewisse Energiemenge I absorbieren. Wir wollen I berechnen.

Dazu führen wir die Dissipationsfunktion

$$Q = \frac{1}{2}\zeta\dot{x}^2 \quad (6.22)$$

ein, für die offensichtlich $f_R = -\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}$ gilt. Mittels Gl. (4.33) folgt also

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}\right) \\ &= \dot{x}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right) \stackrel{(6.10)}{=} -\dot{x}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}} \\ &= 2Q. \quad (6.23) \end{aligned}$$

Damit wiederum gilt

$$I = 2\bar{Q}, \quad (6.24)$$

wobei sich die Mittelung auf eine Schwingungsperiode bezieht.

Es folgt gemäß Gl. (6.21)

$$I(\omega) = \frac{\lambda\omega^2 b^2}{m([\omega_o^2 - \omega^2]^2 + 4\lambda^2\omega^2)}, \quad (6.25)$$

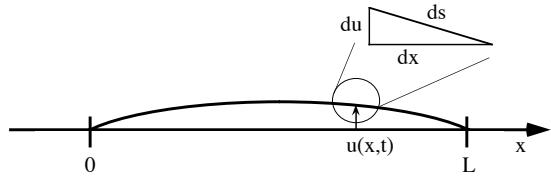


Abbildung 6.4: An den Enden eingespannte Saite.

wobei $\overline{\sin^2(\dots)} = 1/2$ ausgenutzt wurde¹⁵. Die Energieabsorption hängt also von der Frequenz ω ab. Dies bezeichnet man als Dispersion.

Lagrangeformalismus für die schwingende Saite:

Die Abbildung 6.4 zeigt eine an ihren Enden befestigte elastische Saite. Die Größe $u(x, t)$ bezeichnet die Auslenkung der Saite am Ort x zur Zeit t . Zunächst wollen wir die Lagrange Funktion der Saite aufstellen, und zwar ausgedrückt durch $\dot{u}(x, t)$ und $u(x, t)$. Die kinetische Energie der Saite ist gegeben durch

$$K = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \dot{u}^2 dx.$$

Hier ist $\frac{1}{2}\rho dx \dot{u}^2(x, t)$ die kinetische Energie eines Massenelements ρdx , mit der (Längen-)Massendichte ρ , und L ist der Abstand der beiden Befestigungspunkte. Für die potentielle Energie müssen wir die Dehnung der Saite bestimmen. Die lokale Dehnung ist gegeben durch $ds - dx$, wobei ds ein Längenelement entlang der Saite sein soll (vgl. wiederum Abbildung 6.4). Die lokale Dehnung ausgedrückt durch $u(x, t)$ lautet

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + du^2} - dx$$

¹⁵Es gilt $\overline{\sin^2(\dots)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t + c) dt$, wobei c eine von t unabhängige Größe ist. Mit der Substitution $x = \omega t + c$ folgt

$$\begin{aligned} \overline{\sin^2(\dots)} &= \frac{1}{2\pi} \int_c^{2\pi+c} \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_c^{2\pi+c} \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

¹⁴Man spricht von der Einschwingphase.

$$\begin{aligned}
&= dx \left(\sqrt{1 + \frac{du^2}{dx^2}} - 1 \right) \\
&\simeq dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 1 \right) \\
&= dx \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2.
\end{aligned}$$

$$\ddot{u} - c^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

mit $c = \sqrt{T/\rho}$. Dies ist die Schwingungsgleichung der Saite! Die explizite Lösung dieser Gleichung kann durch einen Separationsansatz der Form $u(x, t) = u_x(x)u_t(t)$ erfolgen. Dies ist im Detail in allen Büchern zur mathematischen Physik beschrieben. Uns kommt es hier momentan nur auf die Herleitung der Schwingungsgleichung mithilfe des Lagrangeformalismus an.

$$U = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \quad (6.26)$$

wobei T die Spannung¹⁶ der Saite sein soll. Insgesamt erhalten wir für \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\rho \dot{u}^2(x) - T \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 \right].$$

Die Größe $\frac{1}{2} [\dots]$ ist ein einfaches Beispiel für eine Lagrange Dichte.

Als nächstes wollen wir eine Gleichung für $u(x, t)$ aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ableiten. Das Wirkungsfunktional lautet

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^L dx \left[\rho \dot{u}^2 - T \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right].$$

Die Variation von S bezüglich u ist nun

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^L dx \left[\rho \dot{u} \frac{d}{dt} \delta u - T \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} \delta u \right] \\
&\stackrel{\text{p. I.}}{=} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^L dx \left[\rho \ddot{u} - T \frac{d^2 u}{dx^2} \right] \delta u \\
&\quad + \left|_{t_1}^{t_2} \int_0^L dx \rho \dot{u} \delta u \right. - \left. \int_0^L dt T \frac{du}{dx} \delta u \right|.
\end{aligned}$$

Damit ist die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\rho \dot{u}^2(x) - T \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 + 2\rho g u(x) \right].$$

Aus $\delta_u S = 0$ folgt daher

$$\rho \ddot{u} - T \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g = 0$$

Im statischen Fall gilt also

¹⁷Dies ist sicherlich nur ein Teil des beobachteten Effekts. Das Kabel hängt in der Regel auch ohne die hier diskutierte elastische Dehnung durch. Auch der Einfluß der Temperatur wird hier nicht betrachtet.

¹⁶Hier: Kraft, die die Saite spannt

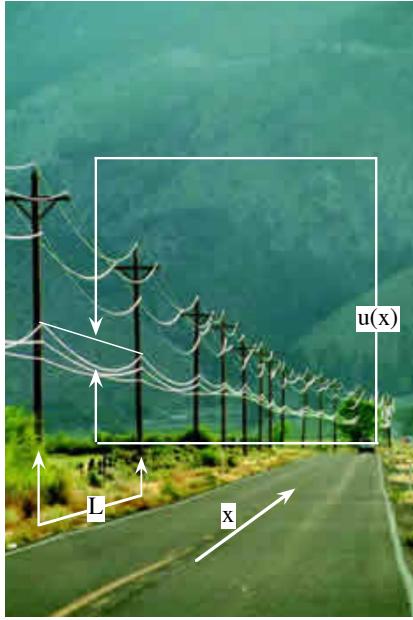


Abbildung 6.5: Durchhängende Stromleitung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \rho g$$

Wir machen den Ansatz $u(x) = C(L - x)x$ und erhalten für C

$$C = -\frac{\rho g}{2T}$$

bzw.

$$u(x) = -\frac{\rho g}{2T}(L - x)x .$$

Wir erhalten T , indem wir die elastische Dehnung ΔL des Kabels insgesamt betrachten. D. h.

$$\frac{T}{A} = \epsilon \frac{\Delta L}{L} .$$

Hier ist A die Querschnittsfläche des als homogen angenommenen Kabels und ϵ ist der E-Modul (man spricht auch vom Youngs Modul) des Kabelmaterials (vgl. Abschnitt 10.2). Für ΔL gilt

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_{Kabel} ds - \int_0^L dx \\ &\approx \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{\rho^2 g^2 L^3}{24 T^2} . \end{aligned}$$

D. h.

$$T = \epsilon A \frac{\rho^2 g^2 L^2}{24 T^2} \quad (6.27)$$

oder

$$T = \left(\frac{\epsilon A \rho^2 g^2 L^2}{24} \right)^{1/3} .$$

6.2 Normalmodenanalyse

Hier betrachten wir Systeme mit vielen Freiheitsgraden. Die Massenpunkte dieses Systems an den Orten \vec{r}_i ($i = 1, \dots, N$)¹⁸ sollen durch eine Potenzialfunktion $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ miteinander wechselwirken. In der Regel wird eine solche Funktion viele lokale Minima besitzen, um die das System kleine Schwingungen ausführen kann. Hier betrachten wir irgendeines dieser Minima gekennzeichnet durch die Koordinaten $\vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}, \dots, \vec{r}_{N0}$. Die der Gl. (6.1) entsprechende Entwicklung ist

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= U(\vec{r}_{10}, \dots, \vec{r}_{N0}) \quad (6.28) \\ &+ \frac{1}{2} \delta \vec{R}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \delta \vec{R} + \dots \end{aligned}$$

mit

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{\vec{r}_{10}, \dots, \vec{r}_{N0}} \quad (6.29)$$

$(\alpha, \beta = 1, \dots, 3N)$ und

$$\begin{aligned} \delta \vec{R}^T &= (x_1 - x_{10}, y_1 - y_{10}, z_1 - z_{10}, \\ &x_2 - x_{20}, \dots, z_N - z_{N0}) . \quad (6.30) \end{aligned}$$

¹⁸Wir verwenden hier der Einfachheit halber kartesische Koordinaten

Der lineare Term verschwindet, und daher fehlt er hier. Ansonsten entspricht diese Entwicklung der Gl. (4.84), außer dass es diesmal um eine Entwicklung in kartesischen Koordinaten geht.

Wir führen jetzt eine Koordinatentransformation durch, d. h. wir definieren

$$\delta\vec{R} = \mathbf{M}^{-1/2} \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{Q}. \quad (6.31)$$

Hierbei ist $\mathbf{M}^{-1/2}$ die Diagonalmatrix der Massen m_i mit den Elementen $M_{\alpha\beta}^{-1/2} = m_i^{-1/2} \delta_{\alpha\beta}$, und \mathbf{L} ist eine Matrix, deren Spaltenvektoren \vec{L}_α der Eigenwertgleichung

$$((\mathbf{M}^{-1/2})^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1/2}) \cdot \vec{L}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{L}_\alpha \quad (6.32)$$

genügen sollen. Durch Einsetzen von (6.31) in die folgenden Gleichungen und mit Hilfe von (6.32) kann leicht gezeigt werden¹⁹, dass die kinetische und die potenzielle Energie des schwingenden Systems als Funktion von \dot{Q}_α^2 und Q_α^2 geschrieben werden können:

$$\delta K = \frac{1}{2} \delta\vec{R}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \delta\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \dot{Q}_\alpha^2 \quad (6.33)$$

$$\delta U = \frac{1}{2} \delta\vec{R}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \delta\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \lambda_\alpha Q_\alpha^2. \quad (6.34)$$

Die Koordinatentransformation (6.31) „zerlegt“ also das System in eine Summe aus $3N$ eindimensionalen, unabhängigen und harmonischen Oszillatoren! Die neuen Koordinaten Q_α nennt man Normalkoordinaten. Für jeden dieser Oszillatoren gilt

$$\ddot{Q}_\alpha + \lambda_\alpha Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 3N) \quad (6.35)$$

(vgl. Gl. (6.5)). Dies folgt auch direkt aus den lagrangeschen Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial \delta K}{\partial \dot{Q}_\alpha} + \frac{\partial \delta U}{\partial Q_\alpha} = 0$. Mit Hilfe des Ansatzes $Q_\alpha(t) \propto \cos(\omega_\alpha t)$ folgt daher direkt

$$\omega_\alpha = \lambda_\alpha^{1/2}. \quad (6.36)$$

¹⁹Außerdem verwenden wir die Identität $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$, wobei \mathbf{A} und \mathbf{B} Matrizen sind, und $\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{I}$, wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist.

D. h. die Eigenwerte aus Gl. (6.32) liefern direkt die Eigenschwingungen der Normalkoordinaten. Man spricht von Normalmoden. Die Normalmoden entsprechen dabei nicht den Bewegungen individueller Teilchen, sondern sie sind die Deformationsschwingungen des gesamten Systems. Um außer den Frequenzen selbst auch die räumliche Form dieser Schwingungen zu erhalten, und zwar in kartesischen Koordinaten, muss die Lösung für $Q_\alpha(t)$ aus (6.35) in Gl. (6.31) eingesetzt werden.

Beispiel zur Normalmodenanalyse:

Bestimmung der Kraftkonstanten K^b und K^ϕ durch Normalmodenanalyse am Beispiel von Wasser²⁰.

Ein einfaches diagonales Valenzkraftfeld für ein isoliertes Wassermolekül hat die Form

$$U = \frac{K^b}{2} (\delta b_1^2 + \delta b_2^2) + \frac{K^\phi}{2} \delta\phi^2. \quad (6.37)$$

Dabei sind δb_1 und δb_2 die Auslenkungen entlang der beiden OH -Bindungen, und $\delta\phi$ ist die Deformation des HOH -Winkels. In diesem Beispiel wollen wir die Kraftkonstanten K^b und K^ϕ aus den spektroskopisch gemessenen Wellenzahlen der Normalschwingungen des Wassermoleküls bestimmen. Zu diesem Zweck berechnen wir die Normalmoden des Wassermoleküls, modelliert durch die Gleichung (6.37), mittels der eben diskutierten Methode.

Zuerst müssen wir die \mathbf{F} -Matrix der zweiten Ableitungen von U nach den kartesischen Koordinaten des Wassermoleküls aufstellen. Dazu werden vorab die Auslenkungen der OH -Bindungen sowie des HOH -Winkels durch kartesische Koordinaten ausgedrückt. Die Abbildung 6.6 zeigt das Wassermolekül in einem entsprechenden Koordinatensystem. Wir können uns auf ein zweidimensionales System beschränken, da das Molekül nur in der Ebene seiner Bindungen schwingt. Die $\delta\vec{R}_i$ ($i = 1, 2, 3$) sind die Auslenkungen der drei Atome aus ihren Gleichgewichtslagen, die wiederum als klein angenommen werden. Um δb_1 und δb_2 zu berechnen, benötigen wir die Projektionen bzw. Komponenten der $\delta\vec{R}_i$ entlang der Bindungen (δR_i^{\parallel}) bzw. senkrecht dazu (δR_i^{\perp}). Wir können dann schreiben

²⁰vgl. auch Aufgabe 2 im Kapitel V des Mechanik-Bandes, Landau/Lifschitz.

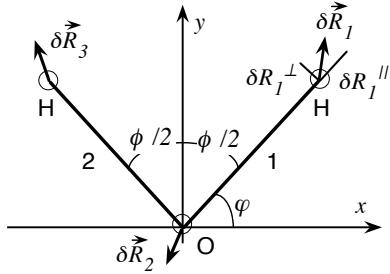


Abbildung 6.6: Skizze des Wassermoleküls.

$$\delta b_1 = \delta R_1^{\parallel} - \delta R_2^{\parallel}|_1 \quad (6.38)$$

$$\delta b_2 = \delta R_3^{\parallel} - \delta R_2^{\parallel}|_2 \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{1}{b} (\delta R_1^{\perp} - \delta R_2^{\perp})|_1 \\ &\quad + \frac{1}{b} (\delta R_3^{\perp} - \delta R_2^{\perp})|_2. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Dabei bedeutet $\dots|_1$ bzw. $\dots|_2$, dass es sich um Projektionen bezogen auf die Bindungen 1 bzw. 2 handelt. Die Größe b ist die Bindungslänge des undeforinierten Moleküls. Zur Umrechnung der Projektionen in die kartesischen Koordinaten der Abbildung 6.6 bedienen wir uns einer Koordinatentransformation $\vec{x}' = \mathbf{D} \cdot \vec{x}$ mittels der Drehmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist \vec{x}' der Vektor \vec{x} ausgedrückt in den Koordinaten eines um φ gedrehten Koordinatensystems, wobei die Drehung dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt ist. Wenn also die x -Achse unseres ungedrehten Systems die Bindung 1 ist, dann gilt in diesem System $\delta \vec{R}_i = (\delta R_i^{\parallel}, \delta R_i^{\perp})$ für $(i = 1, 2)$. Eine Drehung um $\varphi = -(\pi/2 - \phi/2)$ überführt die Bindung 1 auf die x -Achse des x - y -Systems in Abbildung 6.6, so dass die x - und y -Komponenten von $\delta \vec{R}_i$ in diesem gedrehten System durch $(\delta x_i, \delta y_i) = \mathbf{D} \cdot \delta \vec{R}_i = \mathbf{D} \cdot (\delta R_i^{\parallel}, \delta R_i^{\perp})$ gegeben sind. D. h. die gesuchte Beziehung lautet $(\delta R_i^{\parallel}, \delta R_i^{\perp}) = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\delta x_i, \delta y_i)$ mit

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin [\phi/2] & \cos [\phi/2] \\ -\cos [\phi/2] & \sin [\phi/2] \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \delta R_i^{\parallel} &= \delta x_i \sin [\phi/2] + \delta y_i \cos [\phi/2] \quad (6.41) \\ \delta R_i^{\perp} &= -\delta x_i \cos [\phi/2] + \delta y_i \sin [\phi/2] \end{aligned}$$

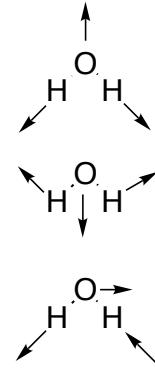
für die Projektionen von $\delta \vec{R}_1$ und $\delta \vec{R}_2$ auf die Bindung 1. Die Projektionen von $\delta \vec{R}_3$ und $\delta \vec{R}_2$ auf Bindung 2 erhalten wir durch eine Spiegelung der Gleichungen (6.41) an der y -Achse, d. h. indem wir δx_1 durch $-\delta x_1$ ersetzen. Für (6.38) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \delta b_1 &= (\delta x_1 - \delta x_2) \sin [\phi/2] \\ &\quad + (\delta y_1 - \delta y_2) \cos [\phi/2] \\ \delta b_2 &= -(\delta x_3 - \delta x_2) \sin [\phi/2] \\ &\quad + (\delta y_3 - \delta y_2) \cos [\phi/2] \\ \delta\phi &= \frac{1}{b} \{(-\delta x_1 + \delta x_2) \cos [\phi/2] \\ &\quad + (\delta y_1 - \delta y_2) \sin [\phi/2]\} \\ &\quad + \frac{1}{b} \{(\delta x_3 + \delta x_2) \cos [\phi/2] \\ &\quad + (\delta y_3 - \delta y_2) \sin [\phi/2]\}. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir soweit und können die \mathbf{F} -Matrix konstruieren, indem wir diese Gleichungen in (6.37) einsetzen und die Matrixelemente $F_{\alpha\beta} = \partial^2 U / \partial \delta x_{\alpha} \partial \delta x_{\beta}$ ausrechnen. Hierbei gilt $\delta x_{\alpha} = \delta x_i$ mit $\alpha = i$ und $\delta x_{\alpha} = dy_i$ mit $\alpha = i + 3$, so dass wir insgesamt eine 6×6 Matrix erhalten. Diese Matrix müssen wir von beiden Seiten mit der Matrix $\mathbf{M}^{-1/2}$ multiplizieren, die nur in der Diagonale die von Null verschiedenen Werte ($m_H^{-1/2}, m_O^{-1/2}, m_H^{-1/2}, m_H^{-1/2}, m_O^{-1/2}, m_H^{-1/2}$) hat. Dabei steht m_H für die Wasserstoffmasse und m_O für die Sauerstoffmassen. Die gesuchten Frequenzen ν_{α} der Normalschwingungen erhalten wir aus der Gleichung $\nu_{\alpha} = \sqrt{\lambda_{\alpha}} / (2\pi)$, wobei λ_{α} die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{M}^{1/2} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1/2}$ sind. Wir erwarten, dass 3 der 6 Eigenwerte gleich Null sind, entsprechend der gleichförmigen Translation des Moleküls in der x - y -Ebene sowie der gleichförmigen Rotation um seinen Schwerpunkt in dieser Ebene. Die restlichen drei Eigenwerte sollten Wellenzahlen $\tilde{\nu}_{\alpha} = \sqrt{\lambda_{\alpha}} / (2\pi c)$ ergeben, die mit den experimentellen Werten übereinstimmen - in Abhängigkeit von den Kraftkonstanten K^b und K^{ϕ} . Die gesamte Rechnung ist in dem Mathematica-Programm in Abbildung 6.7 durchgeführt. Als Resultat erhalten wir für die nichtverwindenden Eigenwerte:

```
Potenzielle Energie für Wasser - Valenzkraftfeld
(es gilt  $x_{[i]} = \delta x_i$  für  $i=1,2,3$  und  $x_{[i]} = \delta y_i$  für  $i=4,5,6$ )
u=kb/2 (db1^2 + db2^2) + kw/2 dw^2;
db1:= (x[[1]]-x[[2]]) Sin[w/2] + (x[[4]]-x[[5]]) Cos[w/2];
db2:=- (x[[3]]-x[[2]]) Sin[w/2] + (x[[6]]-x[[5]]) Cos[w/2];
dw := 1/b ((-x[[1]]+x[[2]]) Cos[w/2] + (x[[4]]-x[[5]]) Sin[w/2] )
+ 1/b ((x[[3]]-x[[2]]) Cos[w/2] + (x[[6]]-x[[5]]) Sin[w/2] );
Berechnung der F-Matrix
F=Table[D[u,x[[alpha]],x[[beta]]],{alpha,6},{beta,6}];
Berechnung der  $M^{-1/2}$ -Matrix
M=Inverse[DiagonalMatrix[{mH^(1/2),mO^(1/2),mH^(1/2),
mH^(1/2),mO^(1/2),mH^(1/2)}]];
Lösung des Eigenwertproblems (wobei Eigenfrequenz=Sqrt(ev)/2π)
ev=Simplify[Eigenvalues[M.F.M]]
```

Abbildung 6.7: Mathematica-Programm.



$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= \frac{\zeta \pm [\zeta^2 - 8m_O(2m_H + m_O)b^2 K^b K^\phi]^{1/2}}{2b^2 m_H m_O} \\ \zeta &= (m_H + m_O)(b^2 K^b + 2K^\phi) \\ &\quad + m_H(b^2 K^b - 2K^\phi) \cos \phi \\ \lambda_3 &= K^b \frac{m_H(1 - \cos \phi) + m_O}{m_H m_O}.\end{aligned}$$

Die hier angegebene Reihenfolge der Eigenwerte entspricht der Reihenfolge der Normalschwingungen in Abbildung 6.8. Die entsprechende Rechnung reproduzieren wir hier nicht. Dazu müssten wir zusätzlich zu den Eigenwerten die Eigenvektoren bestimmen (z.B. mit dem *Mathematica*-Befehl *Eigenvectors* anstelle von *Eigenvalues*). Anschließend könnten wir die kartesischen Verschiebungen berechnen (man beachte, dass der Verschiebungsvektor $\delta \vec{R}$ aus den insgesamt sechs Komponenten der drei $\delta \vec{R}_i$ besteht).

Zur Bestimmung von K^b und K^ϕ lösen wir simultan zwei der drei Gleichungen $\tilde{\nu}_\alpha^e = \sqrt{\lambda_\alpha / (2\pi c)}$ mit Hilfe des *FindRoot*-Befehls in *Mathematica*. Hier steht $\tilde{\nu}_\alpha^e$ für die experimentellen Werte, und die λ_α sind durch die obigen Gleichungen gegeben. Anhand der zusätzlichen dritten Gleichung können wir die Konsistenz der Lösung überprüfen. Die Startwerte für K^b und K^ϕ sowie die anderen Parameter entnehmen wir hier den AMBER-Parametertabellen (AMBER ist ein häufig verwendetes Modellierungspaket insbesondere für Biomoleküle). Diese Werte sind $K^b = 768.7 \text{ J m}^{-2}$, $b^{-2} K^\phi = 70.9 \text{ J rad}^{-2} \text{ m}^{-2}$, $b = 0.96 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ und $\phi = \pi(104.5/180) \text{ rad}$ für den Gleichgewichtswinkel. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Für die mit den AMBER-Parametern ausgerechneten Eigenfrequenzen ergeben sich

Abbildung 6.8: Normalschwingungen des Wassermoleküls.

Abweichungen zwischen 6 und 31 Wellenzahlen. Passt man von den AMBER-Parametern ausgehend K^b und ϕ weiter an, dann erhält man exakte Übereinstimmung für die angepassten Eigenfrequenzen. Aber die dritte Eigenfrequenz weicht um ca. 50 Wellenzahlen ab. Man könnte sich daher überlegen, den *HOH*-Winkel ϕ als dritte anpassbare Größe anzusehen. In diesem Fall ergeben $K^b = 766.4 \text{ J m}^{-2}$, $b^{-2} K^\phi = 69.3 \text{ J rad}^{-2} \text{ m}^{-2}$ und $\phi = 118.6^\circ$ exakte Übereinstimmung mit den experimentellen Wellenzahlen. Offensichtlich jedoch weicht ϕ stark vom Literaturwert 104.5° ab²¹. Um dies zu vermeiden, könnten wir unser Kraftfeld (6.37) erweitern und $b - b$ -Kreuzterme berücksichtigen²². Hier bedeutet dies eine zusätzliche Kraftkonstante K^{bb} , mit der wir die drei experimentellen Wellenzahlen exakt anpassen können - unter Beibehaltung der Werte für b und ϕ .

Im allgemeinen ist es nur für kleine Moleküle möglich, analytische Ausdrücke für die λ_α auszurechnen. Für große Moleküle muss die hier vorgeführte Berechnung der **F**-Matrix sowie die Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{M}^{-1/2}$ numerisch durchgeführt werden. Numerisch kann man die Elemente der **F**-Matrix beispielsweise gemäß

$$F_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{\delta R_\beta} \left[\nabla_\alpha \left(\vec{R}^{(k)} + \delta \vec{R}_\beta \right) - \nabla_\alpha U \left(\vec{R}^{(k)} \right) \right]$$

²¹Man findet auch Wassermodelle mit $\phi = 109.5^\circ$, wobei von der tetraedrischen Anordnung der vier sp^3 -Orbitale des Sauerstoffs ausgegangen wird

²²z.B.: $\frac{K^{bb}}{2} \delta b_1 \delta b_2$.

	$\tilde{\nu}^e$	$\Delta\tilde{\nu}_A^e$	$\Delta\tilde{\nu}_{A_1}^e$	$\Delta\tilde{\nu}_{A_2}^e$	$\Delta\tilde{\nu}_{A_b}^e$
	3652	-31	0	-50	0
	1595	-6	0	0	0
	3756	19	51	0	0
$K^b / \frac{J}{m^2}$	-	768.7	755.8	776.6	766.2
$\frac{K^\phi}{b^2} / \frac{J}{rad^2 m^2}$	-	70.9	70.3	70.3	70.3
$K^{bb} / \frac{J}{m^2}$	-	-	-	-	-20.9

Tabelle 6.1: Experimentelle Wellenzahlen $\tilde{\nu}^e$ (in cm^{-1}) sowie die entsprechenden Abweichungen $\Delta\tilde{\nu}$ der theoretischen Werte. A : AMBER-Werte; A_1 : weitere Parameteranpassungen an λ_1 und λ_2 ausgehend von den AMBER-Werten; A_2 : weitere Anpassung an λ_2 und λ_3 ausgehend von den AMBER-Werten; A_b : Anpassung an alle drei Eigenwerte ausgehend von den A_1 -Parametern, wobei (6.37) um einen Bindungs-Kreuzterm ergänzt wurde. Die resultierenden Parameterwerte sind im unteren Teil der Tabelle eingetragen.

ermitteln. Dabei ist $\nabla_\alpha U(\vec{R}^{(k)})$ die α te Komponente des Gradienten der potenziellen Energie. Die Positionen der Atome am k ten Minimum sind in dem Vektor $\vec{R}^{(k)}$ zusammengefasst. Der Verschiebungsvektor $\delta\vec{R}_\beta$ schließlich enthält nur eine von Null verschiedene Komponente $\delta\vec{R}_\beta$ in β -Richtung. Sie sollte einerseits möglichst klein gewählt werden, andererseits aber sollte sie deutlich über der Maschinen genauigkeit liegen.

Kapitel 7

Bewegung starrer Körper

7.1 Trägheitstensor und Drehimpuls[†]

Der starre Körper besteht aus vielen Massenpunkten m_i , deren Abstände $r_{ij} = \text{konst}$ erfüllen. Für reale Materialien (Festkörper) gilt dies natürlich nur näherungsweise. Der Übergang zum kontinuierlichen Material erfolgt durch die Definition einer Massendichte ρ als Masse pro Volumenelement. Die Position und die räumliche Orientierung des starren Körpers werden durch drei Koordinaten und drei Winkel festgelegt.

Winkelgeschwindigkeit[†]:

Die Abbildung 7.1 zeigt einen starren Körper zusammen mit einem äußeren xyz -Bezugssystem (Inertialsystem) und einem körperfesten $x'y'z'$ -Bezugssystem. Es gilt $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ bzw. $d\vec{r} = d\vec{R} + d\vec{\phi} \times \vec{r}'$ und daher

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (7.1)$$

mit $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ und $\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$. D. h. die Geschwindigkeit von P von außen betrachtet, ist die Geschwindigkeit \vec{V} plus ein Betrag von der Rotation des Körpers.

Hier kann \vec{R} der Schwerpunkt sein aber auch irgendein anderer Referenzpunkt. Dieser muss dabei nicht auf der Drehachse liegen! Beweis: Betrachten wir die Detailskizze in Abbildung 7.1. Dort endet der Vektor \vec{R} auf der Drehachse, während dies für den Vektor \vec{R}_s nicht der Fall ist. Wir können schreiben

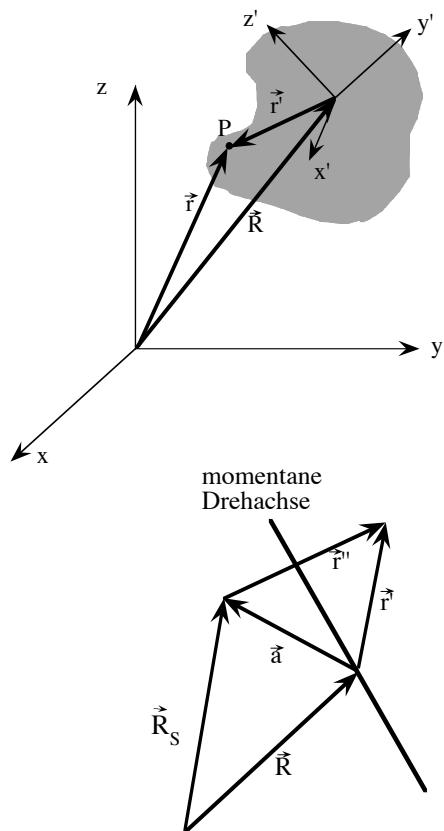


Abbildung 7.1: Oben: Ruhendes Bezugssystem (unbegrenzt) sowie mit dem starren Körper verbundenes System (gestrichelt). Unten: Detailskizze.

und

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R} + \vec{r}' && \text{bzw.} & \vec{v} &= \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ \vec{R}_s &= \vec{R} + \vec{a} && \text{bzw.} & \vec{V}_s &= \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a}.\end{aligned}$$

Mit $\vec{r}' = \vec{a} + \vec{r}''$ folgt aus der ersten Gleichung $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r}''$. Einsetzen von \vec{V} aus der zweiten Gleichung ergibt $\vec{v} = \vec{V}_s - \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r}''$ und somit $\vec{v} = \vec{V}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}''$.

Trägheitstensor[†]:

Wir betrachten die kinetische Energie des starren Körpers, gegeben als

$$\begin{aligned}K &= \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \\ &\stackrel{(7.1)}{=} \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)^2\end{aligned}$$

Hier und in unserer weiteren Rechnung bezieht sich \vec{r}_i auf ein körperfestes Koordinatensystem, dessen Ursprung der Schwerpunkt des Körpers ist. D. h. wir verzichten auf den Index i . \vec{V} ist daher die Geschwindigkeit des Schwerpunkts in unserem ruhenden bzw. äußeren Bezugssystem. Damit gilt

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} m \vec{V}^2 + \vec{V} \times \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{=0(*)} \\ &\quad + \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \vec{V}^2 + K_{rot} \quad (7.2)\end{aligned}$$

(*: da Ursprung im Schwerpunkt!), wobei der Beitrag der Rotation bezogen auf den Schwerpunkt K_{rot} gegeben ist durch

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega_\alpha \omega_\beta \mathcal{I}_{\alpha \beta} \quad (7.3)$$

mit

$$\mathcal{I}_{\alpha \beta} = \sum_i m_i \left(\underbrace{\sum_\nu x_{\nu, i}^2}_{=\vec{r}_i^2} \delta_{\alpha \beta} - x_{\alpha, i} x_{\beta, i} \right). \quad (7.4)$$

$$\delta_{\alpha \beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hier steht $\alpha = 1$ bzw. $\beta = 1$ für die x -Komponente, $\alpha = 2$ bzw. $\beta = 2$ für die y -Komponente und $\alpha = 3$ bzw. $\beta = 3$ für die z -Komponente. Die Größen $\mathcal{I}_{\alpha \beta}$ sind die Komponenten des Trägheitstensors \mathcal{I} . Man beachte, dass \mathcal{I} symmetrisch ist. Die Kontinuumsversion von \mathcal{I} bzw. der Komponenten lautet

$$\mathcal{I}_{\alpha \beta} = \int \rho \left(\sum_\nu x_\nu^2 \delta_{\alpha \beta} - x_\alpha x_\beta \right) d^3 r. \quad (7.5)$$

$$(d^3 r = dx_1 dx_2 dx_3).$$

Man beachte, dass es üblich ist, in Termen wie $\sum_\nu x_\nu^2$ bzw. $\sum_{\alpha, \beta} \mathcal{I}_{\alpha \beta} \omega_\alpha \omega_\beta$ die Summenzeichen wegzulassen. D. h. x_ν^2 bzw. $\mathcal{I}_{\alpha \beta} \omega_\alpha \omega_\beta$ verstehen sich als Summen über die doppelt vorkommenden Indizes. Dies ist die so genannte Summenkonvention, die wir von jetzt ab verwenden wollen.

Trägheitstensor einer homogenen Kugel: Als erstes Beispiel untersuchen wir die Elemente des Trägheitstensors einer homogenen Kugel. Die homogene Kugel mit Radius R habe die Massendichte ρ . Wir betrachten zunächst das Element \mathcal{I}_{11} oder, was das gleiche ist, das Element \mathcal{I}_{xx} des Trägheitstensors

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{xx} &= \int_{V_{Kugel}} \rho (r^2 - x^2) dV \\ &= \int_{V_{Kugel}} \rho (y^2 + z^2) dV.\end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten gilt $dV = r^2 dr d\phi d\theta \sin \theta$ (vgl. Aufgabe 3 (c)) und

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{xx} &= \rho \int_0^R dr r^4 \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\theta (1 - \cos^2 \phi \sin^2 \theta) \sin \theta.\end{aligned}$$

Das Integral über r kann unabhängig von den Winkelvariablen gelöst werden und liefert

$$\frac{1}{5}R^5.$$

Das ϕ -Integral kann in die Klammer gezogen werden und liefert

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

sowie

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)}_{=1} \\ &= \pi \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Damit folgt das Zwischenergebnis

$$\mathcal{I}_{xx} = \frac{\pi \rho}{5} R^5 \int_0^\pi d\theta (2 - \sin^2 \theta) \sin \theta.$$

Wir machen die Substitution $x = \cos \theta$ bzw. $dx = -\sin \theta d\theta$ und erhalten für das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \dots &= - \int_1^{-1} dx (1 + x^2) \\ &= \int_{-1}^1 dx (1 + x^2) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\mathcal{I}_{xx} = \frac{8\pi}{15} \rho R^5.$$

Mit $\rho = m_{Kugel}/\frac{4\pi}{3} R^3$, wobei m_{Kugel} die Kugelmasse ist, folgt

$$\mathcal{I}_{xx} = \frac{2}{5} m_{Kugel} R^2.$$

Analog ergeben sich $\mathcal{I}_{yy} = \mathcal{I}_{zz} = \mathcal{I}_{xx}$ (bzw. $\mathcal{I}_{22} = \mathcal{I}_{33} = \mathcal{I}_{11}$) und $\mathcal{I}_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \neq \beta$. Insgesamt gilt

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} m_{Kugel} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m_{Kugel} R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m_{Kugel} R^2 \end{pmatrix}.$$

Allgemein sind die Tensorelemente außerhalb der Diagonalen nicht Null. Allerdings ist der Trägheitstensor \mathcal{I} symmetrisch und daher können wir immer ein Koordinatensystem (durch Drehung um den Ursprung, der im Schwerpunkt liegen soll) finden, in dem die Tensorelemente außerhalb der Diagonalen tatsächlich verschwinden. Man spricht von der Diagonalisierung des Trägheitstensors. Die Koordinatenachsen dieses neuen Koordinatensystems sind die Hauptträgheitsachsen. Aus Gl. (7.3) wird in diesem Fall

$$K_{rot} = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_1 \omega_1^2 + \mathcal{I}_2 \omega_2^2 + \mathcal{I}_3 \omega_3^2). \quad (7.6)$$

Hier sind \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 und \mathcal{I}_3 die Eigenwerte von \mathcal{I} , die Trägheitsmomente bzgl. der Hauptachsen des Körpers (Hauptträgheitsmomente) und ω_1 , ω_2 und ω_3 sind die dazugehörigen Winkelgeschwindigkeiten. Man unterscheidet unsymmetrische Kreisel ($\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2 \neq \mathcal{I}_3$), symmetrische Kreisel ($\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \neq \mathcal{I}_3$)¹ sowie Kugelkreisel ($\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3$).

Drehimpuls[†]:

Wir betrachten im folgenden den Eigendrehimpuls, also den Drehimpuls bezogen auf den Schwerpunkt des starren Körpers. Mit $\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$ und $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \sum_i m_i (x_{l,i}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha,i} x_{\beta,i}) \omega_\beta \\ &\stackrel{\text{Gl. (7.4)}}{=} \mathcal{I}_{\alpha\beta} \omega_\beta. \end{aligned} \quad (7.7)$$

¹Für $\mathcal{I}_3 = 0$ spricht man vom Rotator. Er hat nur fünf statt sechs Freiheitsgrade, da eine Rotation um die 3-Achse keinen Sinn macht.

Insbesondere gilt damit für K_{rot} gemäß Gl. (7.3)

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}. \quad (7.8)$$

Trägheitstensor in verschobenen Koordinaten[†]:

Bisher hatten wir den Trägheitstensor immer in Koordinatensystemen berechnet, deren Ursprung mit dem Schwerpunkt des starren Körpers zusammenfällt. Muss dies zwangsläufig so sein? Die Antwort ist nein. Die Gl. (7.1) ist beispielsweise auch dann gültig, wenn $\vec{V} = 0$ ist, d. h. $\vec{R} = \text{konstant}$. Ein Beispiel hierfür ist ein Uhrenpendel, dessen Aufhängepunkt natürlich ruht, da die Uhr an der Zimmerwand (Zimmer ist festes Bezugssystem) fest verschraubt ist. Zusätzlich ist der Schwerpunkt in der Regel auch recht weit von der Aufhängung bzw. der Drehachse entfernt. Wenn wir die auf Gl. (7.1) folgenden Rechnungen mit $\vec{V} = 0$ nochmals durchführen, dann erhalten wir exakt die gleichen Ausdrücke, d. h. Gln. (7.2) (mit $\vec{V} = 0$ natürlich), (7.3)², (7.4), (7.5) sowie (7.8) und weiter unten die Gl. (7.14). Der Trägheitstensor wird nach wie vor in einem am starren Körper fest installierten Koordinatensystem berechnet - aber dessen Ursprung ruht im Bezugssystem und der Ursprung ist nicht notwendig der Schwerpunkt des starren Körpers.

Freier symmetrischer Kreisel: Als Beispiel betrachten wir den freien symmetrischen Kreisel ($\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \neq \mathcal{I}_3$). Im vorliegenden Fall sei der Kreisel ein homogener Konus der Höhe h und Masse $m_{Kreisel}$. Der Radius der Grundfläche ist a . Wie in Abbildung 7.2 gezeigt, steht der Konus schräg auf seiner Spitze und rotiert. Wir wollen diese Rotation berechnen. Der Vektor \vec{L} ist der Gesamtdrehimpuls, der entlang der z-Achse des Labor- bzw. Bezugssystems liegen soll.

Wir wählen ein Koordinatensystem aufgespannt durch die Achsen x_1 , x_2 und x_3 wie in der Abbildung dargestellt (die Achse x_2 ist nicht explizit eingezeichnet). Der Ursprung dieses Systems, das mit dem Kreisel fest verbunden ist, und des Laborsystems seien identisch. Der Schwerpunkt des Kreisels liegt offensichtlich höher irgendwo auf der

² K_{rot} ist jetzt die gesamte kinetische Energie

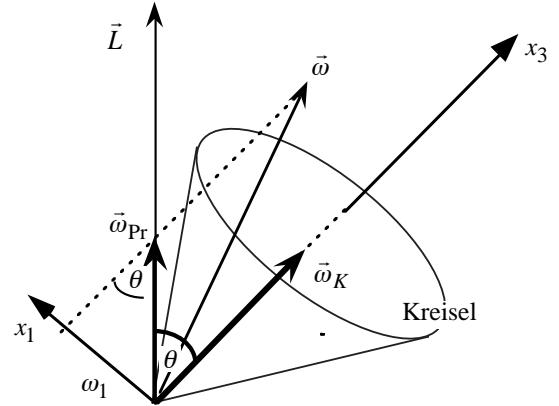


Abbildung 7.2: Skizze zur Präzession des freien symmetrischen Kreisels.

x_3 -Achse. Die Rechnung zeigt, dass der Trägheitstensor in diesem Koordinatensystem diagonal ist. Wir wollen diese Rechnung aus Platzgründen nicht komplett durchführen, sondern lediglich die folgenden drei Tensorkomponenten angeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{zz} &= m_{Kreisel} \frac{\int_0^h dz \int_0^{za/h} ds s \int_0^{2\pi} d\phi (\dots)}{\int_0^h dz \int_0^{za/h} ds s \int_0^{2\pi} d\phi} \\ &\stackrel{(..)=s^2}{=} \frac{3}{10} m_{Kreisel} a^2. \end{aligned}$$

\mathcal{I}_{zz} ist das Trägheitsmoment bezüglich der x_3 -Achse. Hier verwenden wir Zylinderkoordinaten, wobei s der senkrechte Abstand des Volumen- bzw. Massenelements von der x_3 -Achse ist. z ist der x_3 -Achsenabschnitt des Volumen- bzw. Massenelements und ϕ ist der Winkel des Volumen- bzw. Massenelements projiziert auf die x_1 - x_2 -Ebene. Die Massendichte ρ ist durch $m_{Kreisel}/V_{Kreisel}$ ausgedrückt. Das Kreiselvolumen $V_{Kreisel}$ wiederum steht im Nenner des obigen Ausdrucks. Analog folgen

$$\mathcal{I}_{xz} \stackrel{(..)=-zs \cos \phi}{=} 0.$$

oder

$$\mathcal{I}_{xx} \stackrel{(..)=s^2+z^2-s^2 \cos^2 \phi}{=} \frac{3}{10} m_{Kreisel} (a^2 + 4h^2),$$

dass Trägheitsmoment bzgl. der x_1 -Achse. Die Berechnung der hier nicht aufgeschriebenen Tensorelemente verläuft ganz analog und beweist die obige Behauptung.

Für die weitere Betrachtung legen wir \vec{L} z. B. in die momentane $x_1 - x_3$ -Eben. D. h. momentan gilt dann

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I}_{xx}$, $\mathcal{I}_2 \equiv \mathcal{I}_{yy}$ und $\mathcal{I}_3 \equiv \mathcal{I}_{zz}$ ist. Insbesondere folgt $\omega_2 = 0$ aus $L_2 = 0$. $\vec{\omega}$ kann nun zerlegt werden in einen Beitrag $\vec{\omega}_K$ in x_3 -Richtung (Rotation des Kreisels um diese Hauptachse) und einen Beitrag $\vec{\omega}_{Pr}$ in \vec{L} -Richtung (Rotation des Kreisels um Achse parallel zu \vec{L}). Letzterer ist $\omega_{Pr} = \omega_1 / \sin \theta$, wobei θ der Winkel zwischen \vec{L} und der x_3 -Achse ist (vgl. Abbildung 7.2). D. h.

$$\omega_{Pr} = \frac{L_1}{\mathcal{I}_1 \sin \theta} = \frac{L}{\mathcal{I}_1} \quad (7.9)$$

ist der Betrag der Winkelgeschwindigkeit, mit der $\vec{\omega}$ um \vec{L} präzidiert. D. h. wir erhalten eine Rotation der Projektion der x_3 -Achse auf die $x-y$ -Ebene unseres Laborsystems.

Satz von Steiner[†]:

Die Form des Kreisels in dem obigen Beispiel verbunden mit der Wahl des Koordinatenursprungs in der Kreiselspitze macht die Berechnung des Trägheitstensors bzw. seiner Komponenten relativ einfach. Was ist jedoch, wenn der Kreisel in Abbildung 7.2 auf einer dünnen (masselosen) Achse steckt, die mit der x_3 -Achse des Koordinatensystems zusammenfällt. Die Spitze der Achse sei nun im Ursprung und die Spitze des Kreisels liegt um die Strecke d verschoben höher auf der x_3 -Achse (vgl. Abbildung 7.3).

Die Berechnung des Trägheitstensors für diesen Fall erfolgt wieder mittels Gl. (7.5):

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta} = \int_{V_{Kreisel}} \rho (\vec{r}_{neu}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{neu,\alpha} x_{neu,\beta}) d^3 r_{neu},$$

wobei sich nun \vec{r}_{neu} auf das in der Abbildung 7.3 gezeigte Koordinatensystem bezieht. Wenn wir nun \vec{r}_{neu} durch die Beziehung

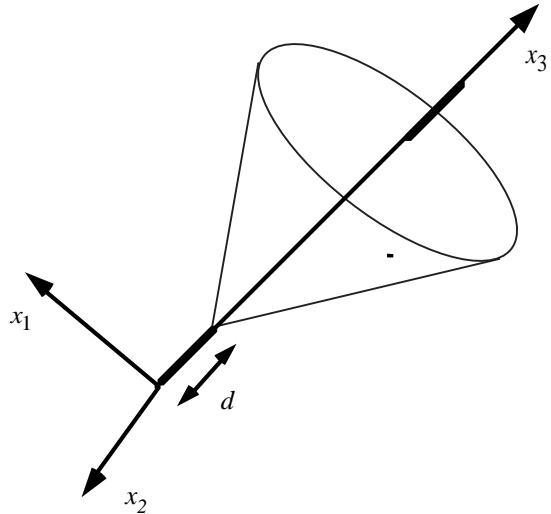


Abbildung 7.3: Freier symmetrischer Kreisel mit zusätzlicher Achse.

$$\vec{r}_{neu} = \vec{r}_{alt} + \vec{d} \quad (7.10)$$

ausdrücken, wobei \vec{r}_{alt} der Ortsvektor in unserem ursprünglichen Beispiel ist und $\vec{d} = (0, 0, d)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\alpha\beta} = \int_{V_{Kreisel}} & \rho ((\vec{r}_{alt} + \vec{d})^2 \delta_{\alpha\beta} \\ & - (x_{alt,\alpha} + d_\alpha)(x_{alt,\beta} + d_\beta)) d^3 r_{alt}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert allerdings keine besondere Rechnerleichterung - mit einer besonderen Ausnahme. Wenn wir statt Gl. (7.10) die Gleichung

$$\vec{r}_{neu} = \vec{r}_s + \vec{d}_s \quad (7.11)$$

verwenden, wobei \vec{d}_s diesmal der Vektor vom Ursprung zum Kreiselsschwerpunkt ist und \vec{r}_s ist der Vektor vom Schwerpunkt zum Volumen- bzw. Massenelement, dann vereinfacht sich häufig die Berechnung des Trägheitstensors. Aufgrund von

$$\int_{V_{sK}} \rho x_{s,\alpha} d^3 r_s = 0$$

$(\alpha = 1, 2, 3)$, folgt

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta} = m_{sK}(d_s^2\delta_{\alpha\beta} - d_{s,\alpha}d_{s,\beta}) + \mathcal{I}_{s,\alpha\beta}. \quad (7.12)$$

Hier stehen V_{sK} und m_{sK} ganz allgemein für das Volumen und die Masse des jeweiligen starren Körpers (dem Kreisel im vorliegenden Fall). Die $\mathcal{I}_{s,\alpha\beta}$ sind die Komponenten des Trägheitstensors berechnet bezogen auf den Ursprung im Schwerpunkt.

Wenden wir diese Formel auf den Kreisel in Abbildung 7.3 an, so folgt

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{s,xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{s,yy} & 0 \\ 0 & 0 & m_{Kreisel}d_s^2 + \mathcal{I}_{s,zz} \end{pmatrix}.$$

Da die x_3 -Achse durch den Schwerpunkt geht, gilt direkt unser altes Ergebnis, d. h. $\mathcal{I}_{s,zz} = \frac{3}{10}m_{Kreisel}a^2$. Die anderen beiden Tensorkomponenten lesen wir aus einer der vielen Tabellen mit den Trägheitsmomenten einfacher geometrischer Körper ab: $\mathcal{I}_{s,xx} = \mathcal{I}_{s,yy} = \frac{3}{80}m_{Kreisel}(4a^2 + h^2)$.

Insbesondere können wir mit Gl. (7.12) nun schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta &= (m_{sK}(d_s^2\delta_{\alpha\beta} - d_{s,\alpha}d_{s,\beta}) + \mathcal{I}_{s,\alpha\beta})\omega_\alpha\omega_\beta \\ &= m_{sK}(\vec{\omega} \times \vec{d}_s)^2 + \mathcal{I}_{s,\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta \\ &= m_{sK}d_{s,\perp}^2\omega^2 + \mathcal{I}_{s,\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta. \end{aligned}$$

Hier ist $d_{s,\perp}$ der senkrechte Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse. Die Gleichung vereinfacht sich nochmals, wenn wir die Drehachse z.B. in Richtung der x_3 -Achse legen ($\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$). Dann gilt

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta = (m_{sK}d_{s,\perp}^2 + \mathcal{I}_{s,zz})\omega^2$$

bzw.

$$K_{Rot} = \frac{1}{2}(m_{sK}d_{s,\perp}^2 + \mathcal{I}_{s,zz})\omega^2.$$

Der in dieser Gleichung ausgedrückte Sachverhalt

$$\mathcal{I} = m_{sK}d_{s,\perp}^2 + \mathcal{I}_{s,zz}. \quad (7.13) \quad \text{bzw.}$$

für das Trägheitsmoment bzgl. einer festen Achse (hier die x_3 -Achse) wird als der Satz von Steiner bezeichnet. Man beachte, dass Gl. (7.13) ein spezieller Fall der Gl. (7.12) ist.

Lagrange Funktion des starren Körpers:

An dieser Stelle sei noch die Lagrange Funktion des starren Körpers angegeben. Aus den Gln. (7.2) und (7.3) folgt

$$\mathcal{L} = \frac{m\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{I}_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta - U \quad (7.14)$$

$$= \frac{m\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\omega} - U. \quad (7.15)$$

Diese Form gilt, dies sei betont, wenn der Ursprung des körperfesten Bezugssystems im Schwerpunkt des Körpers liegt bzw. in verschobenen Koordinaten, wenn $\vec{V} = 0$ gilt!

Wenn speziell unser Koordinatensystem entlang der Hauptträgheitsachse gewählt ist, dann gilt $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ für Kugelkreisel. Dies gilt auch, wenn die Rotationsachse und eine Hauptträgheitsachse zusammen fallen. Im allgemeinen Fall gilt dies jedoch nicht.

7.2 Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Starre Körper besitzen sechs Freiheitsgrade. Daher sollte es ein System von sechs Bewegungsgleichungen geben. Diese beschreiben die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses \vec{P} und des Gesamtdrehimpulses \vec{L} .

\vec{P} : Aus

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

folgt

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{f}_i$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}. \quad (7.16)$$

\vec{F} ist die Summe über alle Kräfte \vec{f}_i auf die Massenpunkte i des starren Körpers einschließlich der inneren Kräfte (z. B. Bindungen). Für die Änderung der potenziellen Energie bei einer gleichförmigen Verschiebung um $\delta\vec{R}$ gilt

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{R} = -\delta \vec{R} \cdot \vec{F}.$$

bzw.

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}}. \quad (7.17)$$

\vec{L} : Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_{=0} + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i \vec{N}_i \end{aligned}$$

bzw.

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}. \quad (7.18)$$

\vec{N} heißt Gesamtdrehmoment, wobei \vec{N}_i die Einzeldrehmomente sind.

Man beachte, dass die Summen über die inneren Kräfte und ihrer Drehmomente jeweils Null ergibt. Dies folgt aus $\dot{\vec{P}} = 0$ sowie $\dot{\vec{L}} = 0$, wenn keine äußeren Kräfte vorhanden sind.

Interessant ist noch der Fall des homogenen Feldes. Dazu betrachten wir beispielsweise das Schwerfeld. Für die Gesamtkraft auf den Körper gilt dann $\vec{F} = \vec{g} \sum_i m_i$, wobei die m_i die Massen der Massenpunkte (oder Volumenelemente) sind, aus denen der Körper besteht. Das Gesamtdrehmoment ist gegeben durch $\vec{N} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$. Mit $\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i$ folgt $\vec{N} = \vec{R} \times \vec{F}$. D. h. die

Gesamtkraft auf einen Körper greift in einem einzigen Punkt \vec{R} , hier ist dies der Schwerpunkt³, an.

Bemerkung: Die Gl. (7.18) kann auch aus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\omega}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\phi}}$$

erhalten werden. Für $\partial \mathcal{L} / \partial \vec{\omega}$ folgt gemäß (7.15)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_\alpha} = \mathcal{I}_{\alpha\beta} \omega_\beta = L_\alpha.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \delta U &= -\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = -\sum_i \vec{f}_i \cdot (\delta \vec{\phi} \times \vec{r}_i) \\ &= -\delta \vec{\phi} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = -\vec{N} \cdot \delta \vec{\phi} \end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{N} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\phi}}. \quad (7.19)$$

Betrachten wir ein Beispiel.

Rollen ohne Gleiten:

Eine homogene Kugel mit der Masse m rollt ohne zu gleiten auf einer Ebene unter dem Einfluss eines Drehmoments \vec{N} sowie einer äußeren Kraft \vec{F} (vgl. Abbildung 7.4). Wie sehen die Bewegungsgleichungen aus? Gemäß Gl. (7.16) gilt

$$\frac{dP}{dt} = \frac{mdV}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \quad (7.20)$$

und aus Gl. (7.18) zusammen mit Gl. (7.15) folgt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{N} + \vec{r} \times \vec{R}. \quad (7.21)$$

Hier ist \vec{R} die Kraft aufgrund der Ebene, die am Berührpunkt angreift. Außerdem ist \mathcal{I} diagonal mit $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3$; daher gilt $\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \mathcal{I}_1 \dot{\vec{\omega}}$.

³Im Fall des elektrischen Feldes wäre es der Ladungsschwerpunkt.

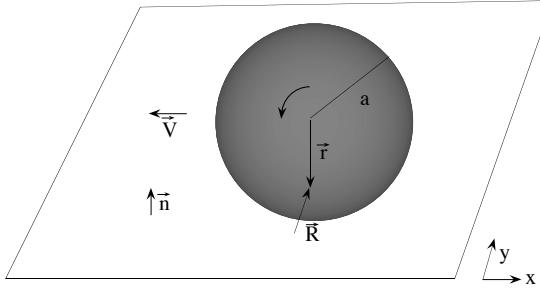


Abbildung 7.4: Rollende Kugel auf einer Ebene.

Rollen ohne Gleiten bedeutet mathematisch

$$\vec{V} - \vec{r} \times \vec{\omega} = 0 , \quad (7.22)$$

wobei \vec{V} die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes ist. Im Fall mit Gleitbewegung würden gelten

$$\vec{V} - \vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{gleit} ,$$

Mit $\vec{r} = -\vec{n}a$ folgt aus Gl. (7.22) $\dot{\vec{V}} - \vec{r} \times \dot{\vec{\omega}} = 0$. Einsetzen in Gl. (7.20) liefert mit Gl. (7.21)

$$\frac{\mathcal{I}_1}{am}(\vec{F} + \vec{R}) = \vec{N} \times \vec{n} - a\vec{R} + a\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{R}) .$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Komponenten von \vec{R} bestimmen und in Gl. (7.20) einsetzen. Dies ergibt sofort die gewünschten Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt, d. h. $dV_x/dt = \dots$ sowie $dV_y/dt = \dots$, wobei die x - y -Ebene als die Rollebene gewählt wurde. Die Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit, $d\vec{\omega}/dt$, folgen aus (7.22), $d\omega_x/dt$ und $d\omega_y/dt$, sowie aus Gl. (7.21), $d\omega_z/dt$.

Die eulerschen Gleichungen:

Wir betrachten nochmals die Gln. (7.16) sowie (7.18), die die zeitliche Änderung von \vec{P} und \vec{L} im Koordinatensystem dieser Vektoren beschreiben. Angenommen wir bilden die jeweiligen Zeitableitungen $\frac{d'}{dt}$ in einem Koordinatensystem, das durch die Hauptträgheitsachsen des Körpers aufgespannt wird. D. h. dieses Koordinatensystem rotiert mit dem Körper. Gemäß Gl. (4.40) gilt

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (7.23)$$

sowie

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} . \quad (7.24)$$

Jetzt schreiben wir diese Gleichungen komponentenweise auf, und zwar die Komponenten bezogen auf das rotierende, körperfeste System:

$$m \left(\frac{dV_1}{dt} + \omega_2 V_3 - \omega_3 V_2 \right) = F_1 \quad (7.25)$$

$$m \left(\frac{dV_2}{dt} + \omega_3 V_1 - \omega_1 V_3 \right) = F_2 \quad (7.26)$$

$$m \left(\frac{dV_3}{dt} + \omega_1 V_2 - \omega_2 V_1 \right) = F_3 . \quad (7.27)$$

m ist die Gesamtmasse ($m\vec{V} = \vec{P}$). Für die obige Wahl des rotierenden Koordinatensystems gilt $L_1 = \mathcal{I}_1 \omega_1$ etc., und wir erhalten aus (7.24)

$$\mathcal{I}_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_2) \omega_2 \omega_3 = N_1 \quad (7.28)$$

$$\mathcal{I}_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3) \omega_3 \omega_1 = N_2 \quad (7.29)$$

$$\mathcal{I}_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1) \omega_1 \omega_2 = N_3 . \quad (7.30)$$

Die Gln. (7.25) bis (7.30) heißen eulersche Gleichungen.

Betrachten wir als Beispielanwendung die Rotation des freien, symmetrischen Kreisels. Mit $\vec{F} = \vec{N} = 0$ und $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ folgt $d\omega_3/dt = 0$ bzw. $\omega_3 = \text{konstant}$. Somit gilt

$$\dot{\omega}_1 = -\omega \omega_2 \quad \dot{\omega}_2 = \omega \omega_1$$

mit

$$\omega = \omega_3 \frac{\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_1} . \quad (7.31)$$

Offensichtlich wird dieses System durch

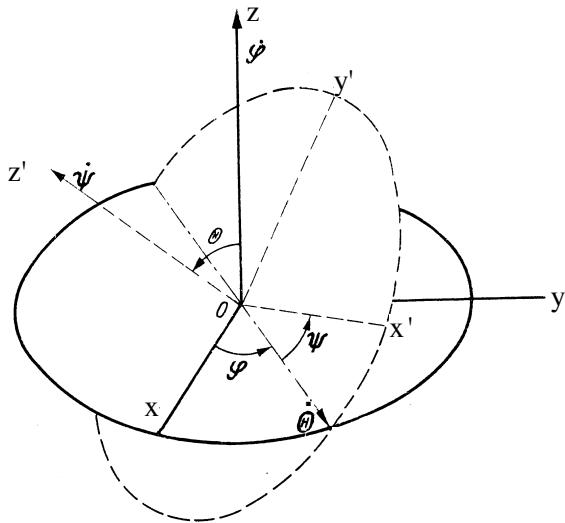


Abbildung 7.5: Eulersche Winkel.

$$\omega_1 = c \cos(\omega t) \quad \omega_2 = c \sin(\omega t)$$

gelöst. Die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf die 1-2-Ebene der Trägheitsachsen rotiert also mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

Eulersche Winkel:

Die Orientierung starrer Körper im Raum wird oft mit Hilfe der so genannten eulerschen Winkel beschrieben. Abbildung 7.5 zeigt zwei Koordinatensysteme gleichen Ursprungs (Wir interessieren uns lediglich für die Orientierung!). Das System (x, y, z) ruht, während das System (x', y', z') rotiert. Die eulerschen Winkel sind φ, Θ und ψ . Die Winkel φ und ψ variieren zwischen 0 und 2π . Der Winkel Θ liegt zwischen 0 und π . Der Übergang vom ungestrichenen zum gestrichenen System geschieht wie folgt. Zuerst dreht man die z -Achse um den Winkel φ . Anschließend wird um die dadurch entstehende, vorläufige x -Achse mit dem Winkel Θ gedreht. Dies ergibt die z' -Achse, um die zuletzt mit dem Winkel ψ gedreht wird.

Als Beispiel betrachten wir die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ bezüglich der bewegten Achsen ausgedrückt durch die Summe aus $\dot{\varphi}, \dot{\Theta}$ und $\dot{\psi}$, deren Richtungen wir aus der Skizze entnehmen:

Für $\dot{\varphi}$ gilt

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{x'} &= \dot{\varphi} \sin \Theta \sin \psi \\ \dot{\varphi}_{y'} &= \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \psi \\ \dot{\varphi}_{z'} &= \dot{\varphi} \cos \Theta.\end{aligned}$$

Für $\dot{\Theta}$ gilt

$$\dot{\Theta}_{x'} = \dot{\Theta} \cos \psi \quad \dot{\Theta}_{y'} = -\dot{\Theta} \sin \psi \quad \dot{\Theta}_{z'} = 0.$$

Für $\dot{\psi}$ gilt

$$\dot{\psi}_{x'} = 0 \quad \dot{\psi}_{y'} = 0 \quad \dot{\psi}_{z'} = \dot{\psi}.$$

Die Addition der Komponenten ergibt

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \Theta \sin \psi + \dot{\Theta} \cos \psi \quad (7.32)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \Theta \cos \psi - \dot{\Theta} \sin \psi \quad (7.33)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \Theta + \dot{\psi}. \quad (7.34)$$

Bemerkung: Wir wollen jetzt die Ergebnisse (7.9) und (7.31), die wir für den freien, symmetrischen Kreisel erhalten haben, mittels der eulerschen Winkel in Beziehung setzen. Dazu wählen wir zunächst $\psi = 0$ und erhalten mit (7.32) bis (7.34)

$$\begin{aligned}L_1 &= \mathcal{I}_1 \omega_1 = \mathcal{I}_1 \dot{\Theta} \\ L_2 &= \mathcal{I}_2 \omega_2 = \mathcal{I}_1 \dot{\varphi} \sin \Theta \\ L_3 &= \mathcal{I}_3 \omega_3 = \mathcal{I}_3 (\dot{\varphi} \cos \Theta + \dot{\psi}).\end{aligned}$$

Die z -Achse des Laborsystems (vgl. Abbildung 7.5) legen wir in die Richtung des konstanten Drehimpulses (vgl. Abbildung 7.2). Damit gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}L_1 &= 0 \\ L_2 &= L \sin \Theta \\ L_3 &= L \cos \Theta.\end{aligned}$$

Wenn wir die rechten Seiten dieser Gleichungssysteme jeweils gleichsetzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= 0 \\ \mathcal{I}_1 \dot{\varphi} &= L \\ \mathcal{I}_3 (\dot{\varphi} \cos \Theta + \dot{\psi}) &= L \cos \Theta.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung gibt an, dass der Neigungswinkel des Kreisels in Abbildung 7.2 konstant ist. Mit $\omega_{Pr} = \dot{\varphi}$ entspricht die zweite Gleichung der Gl. (7.9). Die dritte Gleichung beschreibt die Winkelgeschwindigkeit der Kreiseldrehung um die eigene Achse. Außerdem können wir die dritte Gleichung leicht in

$$-\dot{\psi} = -L \cos \Theta \left(\frac{1}{\mathcal{I}_3} - \frac{1}{\mathcal{I}_1} \right) = \omega_3 \frac{\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_1}; .$$

umschreiben. D. h. mit $\omega = -\dot{\psi}$ erhalten wir auch Gl. (7.31)!

7.3 Starre Körper in statischem Kontakt[†]

Bei der Berührung starrer Körper müssen im Gleichgewicht die Bedingungen

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = 0 \quad (7.35)$$

sowie

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = 0 \quad (7.36)$$

für jeden Körper einzeln erfüllt sein. Hier sind die \vec{f}_i alle Teilkräfte, die an dem jeweiligen Körper angreifen, und \vec{r}_i sind die Ortsvektoren der Kraftangriffspunkte⁴.

Ein ausführliches Anwendungsbeispiel (Leiterstatik) hatte wir schon in Abschnitt 2.2 diskutiert.

d'Alemberts Prinzip[†]:

Die Abbildung 7.6 zeigt ein mechanisches System, bestehend aus zwei Gewichten (Massen) m_1 und m_2 , die an zwei auf einer gemeinsamen Achse

⁴Die Wahl des Ursprungs ist dabei beliebig:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{f}_i + \underbrace{\sum_i \vec{a} \times \vec{f}_i}_{= \vec{a} \times \vec{F} = 0}$$

(mit $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{a}$).

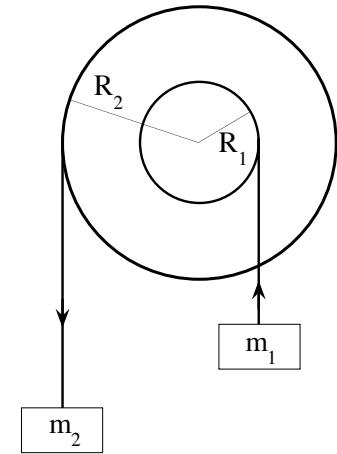


Abbildung 7.6: Hebesystem.

befestigten Seiltrommeln hängen. Wie gezeigt soll sich das System im Gleichgewicht befinden. Insbesondere würde es keine Arbeit kosten, das Gewicht m_1 abzusenken, wobei m_2 gleichzeitig angehoben wird, gäbe es nicht die Reibung. Dies lässt sich auch mathematisch ausdrücken:

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (7.37)$$

D. h.

$$m_1 g \delta r_1 - m_2 g \delta r_2 = 0$$

bzw. mit $\delta r_i = R_i \delta \phi$, wobei $\delta \phi$ der Drehwinkel der Rollen ist, folgt

$$m_1 R_1 = m_2 R_2 .$$

Die Gleichung (7.37) lässt sich allgemein auf Probleme der Statik anwenden. Dabei sind die $\delta \vec{r}_i$ Verschiebungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind⁵. D. h. die \vec{f}_i können in Zwangskräfte $\vec{f}_i^{(Z)}$ und Nicht-Zwangskräfte $\vec{f}_i^{(NZ)}$ zerlegt werden ($\vec{f}_i = \vec{f}_i^{(Z)} + \vec{f}_i^{(NZ)}$). Es gilt dann $\delta \vec{r}_i \perp \vec{f}^{(Z)}$ und somit

$$\sum_i \vec{f}_i^{(NZ)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 . \quad (7.38)$$

⁵Die $\delta \vec{r}_i$ werden in der Literatur als virtuelle Verschiebungen bezeichnet

Dieses Verfahren zur Lösung von statischen Problemen kann auf dynamische Probleme erweitert werden. Es lautet dann

$$\sum_i f_i^{(NZ)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i . \quad (7.39)$$

Gl. (7.39) ist in der Literatur als d'alembertsches Prinzip bekannt⁶.

Das d'alembertsche Prinzip liefert keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse. Die obige Gleichgewichtsbedingung $m_1 R_1 = m_2 R_2$ beispielsweise hätten wir auch aus (7.36) erhalten. Über das Skalarprodukt $\vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ werden allerdings mögliche Zwangsbedingungen von Anfang an integriert.

Bemerkung: Aus dem d'alembertschen Prinzip lassen sich auch die lagrangeschen Gleichungen herleiten.

⁶Alembert, Jean-Baptiste Le Rond d', französischer Mathematiker, Philosoph und Physiker, *Paris 16.11. 1717, †ebenda 29.10. 1783; gab mit Diderot seit 1751 die ersten sieben Bände der *Encyclopédie* (Enzyklopädisten) heraus. Seine Erkenntnistheorie, in der er die Erfahrungswissenschaft zu begründen suchte, wurde grundlegend für den Positivismus. Alembert hat bedeutende Fortschritte in der Zahlentheorie und Analysis erzielt. In seinem wissenschaftlichen Hauptwerk der Mechanik, *Traité de dynamique* (1743), stellte er das d'alembertsche Prinzip auf, eine Beschreibung von beschleunigenden Kräften, die es ermöglicht, dynamische Aufgaben wie statische Gleichgewichtsaufgaben zu lösen (Extremalprinzipien). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Kapitel 8

Kanonische Mechanik

Dieses Kapitel liefert keine neue Mechanik. Vielmehr betrachten wir die lagrangesche Formulierung, die wir entwickelt haben, aus einem anderen Blickwinkel. Verwendet wird diese Betrachtungsweise insbesondere im Zusammenhang mit der Quantentheorie und in der Statistischen Mechanik.

8.1 Die hamiltonschen Gleichungen

Wir betrachten das totale Differenzial der Lagrange Funktion:

$$d\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \quad (4.36)$$

$$= \dot{p}_j dq_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j \quad (4.38)$$

$$= \sum_j \dot{p}_j dq_j + d\left(\sum_j p_j \dot{q}_j\right) - \sum_j q_j dp_j .$$

D. h. die Hamilton Funktion¹

¹Hamilton, Sir (seit 1835) William Rowan, irischer Mathematiker und Physiker, *Dublin 4.8. 1805, †Dunsink (bei Dublin) 2.9. 1865; entwickelte die geometrische Optik aus Extremalprinzipien, übertrug dieses Konzept auf die Klassische Mechanik (Hamiltonprinzip) und führte die Kräftefunktion in die Dynamik ein; führte 1843 die Quaternionen als Verallgemeinerung der komplexen Zahlen ein. ©2000 Biographical Institut & F. A. Brockhaus AG

$$\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \quad (8.1)$$

ist wegen

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= d\left(\sum_j p_j \dot{q}_j\right) - d\mathcal{L} \\ &= \sum_j (-\dot{p}_j) dq_j + \sum_j (+\dot{q}_j) dp_j \end{aligned}$$

eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten q_j und Impulse p_j . Sie entspricht einer zu \mathcal{L} äquivalenten Beschreibung eines mechanischen Systems, wobei die Bewegungsgleichungen, die so genannten Hamiltonschen Gleichungen, durch

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (8.2)$$

und

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \quad (8.3)$$

gegeben sind². Die Gleichung (8.1) bezeichnet man allgemein auch als Legendre Transformation³. Im

²Wegen ihrer Einfachheit werden sie auch als kanonische Gleichungen bezeichnet. Kanonisch bedeutet soviel wie als Vorbild oder Maßstab dienend.

³Legendre, Adrien Marie, französischer Mathematiker, *Paris 18.9.1752, †ebenda 10.1.1833; arbeitete auf dem Gebiet der Zahlentheorie, der Variationsrechnung, der partiellen Differentialgleichungen und der elliptischen Integrale; entdeckte (unabhängig von C.F. Gauß) die Methode der kleinsten Quadrate und führte (u.a. zu deren Anwendung) eine wichtige Klasse von Polynomen (Legendre-Polynome) ein. ©Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim, 2004

vorliegenden Fall vollzieht diese Transformation den Wechsel von \dot{q}_j zu p_j . Der Schlüssel zu diesem Wechsel liegt in der Existenz von $p_j = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$. Ebenfalls mittels dieser Beziehung sehen wir aus Gl. (4.33), dass \mathcal{H} im Prinzip nichts weiter ist als die Energie des Systems ausgerückt in den Größen q_j und p_j . Genau hierin liegt auch der Hauptgrund weshalb \mathcal{H} neben \mathcal{L} verwendet wird.

Beispiele:

(a) Die Hamilton Funktion eines Massenpunktes in kartesischen Koordinaten lautet

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + U(\vec{r}) . \quad (8.4)$$

(b) Die Hamilton Funktion eines Massenpunktes in Kugelkoordinaten lautet

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi) . \quad (8.5)$$

Dies folgt aus Gl. (4.22) mittels $p_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}$, $p_\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta}$ und $p_\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$.

Die totale Zeitableitung von \mathcal{H} ist

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \\ &\stackrel{(8.2),(8.3)}{=} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (8.6)$$

D. h. wenn \mathcal{H} nicht explizit zeitabhängig ist, dann gilt $d\mathcal{H}/dt = 0$ (vgl. Energieerhaltung).

Manchmal sind \mathcal{L} bzw. \mathcal{H} neben q_j und \dot{q}_j bzw. q_j und p_j noch von einem (oder mehreren) Parameter λ abhängig. Es gilt dann

$$d\mathcal{L} = \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} d\lambda$$

bzw.

$$d\mathcal{H} = - \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} d\lambda .$$

Durch Addition folgt mittels (8.1)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} \Big|_{q_j, \dot{q}_j} = - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} \Big|_{q_j, p_j} . \quad (8.7)$$

Poisson Klammern:

Die totale Zeitableitung einer Funktion $f(q_i, p_i, t)$ lässt sich schreiben als

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\} .$$

Die geschweiften Klammern werden als Poisson Klammern⁴ bezeichnet; sie lauten hier

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}, f\} &= \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \quad (8.8) \\ &\stackrel{(8.2),(8.2)}{=} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) . \end{aligned}$$

Für zwei beliebige Funktionen f und g gilt analog

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) . \quad (8.9)$$

Aus dieser Definition folgen die Rechenregeln

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (8.10)$$

$$\{f, c\} = 0 \text{ (mit } c = \text{konstant}) \quad (8.11)$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \quad (8.12)$$

⁴Poisson, Siméon Denis, französischer Mathematiker und Physiker, *Pithiviers (Département Loiret) 21.6. 1781, †Paris 25.4. 1840; trug wesentlich zum Ausbau der Potenzialtheorie bei (Poisson Gleichung), die er zur Lösung elektrostatischer und magnetischer Probleme anwandte. Poisson befasste sich u.a. mit Wärmeleitung und Wahrscheinlichkeitstheorie und gab als Grenzfall der Binomialverteilung die nach ihm benannte Poisson Verteilung an, bei der die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses sehr klein, die Anzahl der unabhängigen Wiederholungen sehr groß ist. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \quad (8.14)$$

Insbesondere gilt

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \quad (8.15)$$

$$\{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (8.16)$$

sowie

$$\{q_i, q_k\} = 0 \quad \{p_i, p_k\} = 0 \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}. \quad (8.17)$$

Ferner gilt die Jacobi Identität⁵

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (8.18)$$

Außerdem gilt das Poisson Theorem

$$\{f, g\} = \text{konstant}, \quad (8.19)$$

wenn f und g Bewegungsintegrale sind (d. h. es gibt $df/dt = 0$ und $dg/dt = 0$).

Als Beispiel betrachten wir die PoissonKlammer der Drehimpulskomponenten L_x und L_y eines Teilchens:

$$\begin{aligned} & \{L_x, L_y\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial p_\alpha} (y p_z - z p_y) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (z p_x - x p_z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (y p_z - z p_y) \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (z p_x - x p_z) \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[(y \delta_{z\alpha} - z \delta_{y\alpha}) (\delta_{z\alpha} p_x - \delta_{x\alpha} p_z) \right. \\ &\quad \left. - (\delta_{y\alpha} p_z - \delta_{z\alpha} p_y) (z \delta_{x\alpha} - x \delta_{z\alpha}) \right] \\ &= y p_x - x p_y = -L_z. \end{aligned}$$

⁵Jacobi, Carl Gustav Jacob, Mathematiker, *Potsdam 10.12. 1804, †Berlin 18.2. 1851; entwickelte die Theorie der elliptischen Funktionen, arbeitete über Differenzialgleichungen, Variationsrechnung, analytische Mechanik und Himmelsmechanik; wichtige Beiträge zur Zahlentheorie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Auf analoge Weise erhalten wir $\{L_y, L_z\} = -L_x$ sowie $\{L_z, L_x\} = -L_y$.

Die Poisson Klammern werden uns in der Quantenmechanik wieder begegnen und dort gute Dienste leisten (Stichwort: allgemeine Quantisierungsvorschrift).

Kanonische Transformationen:

Unter kanonischen Transformationen der alten Koordinaten q_i und Impulse p_i zu den neuen Koordinaten und Impulsen $Q_j = Q_j(q_k, p_k, t)$ und Impulsen $P_j = P_j(q_k, p_k, t)$ bleiben die hamiltonschen Gleichungen der Form nach unverändert. D. h.

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j} \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j}. \quad (8.20)$$

Hier bedeutet der Strich an \mathcal{H} , dass es sich um die Hamilton Funktion der Q_j und P_j handelt. Ein Beispiel für eine kanonische Transformation ist die Transformation zu Normalkoordinaten, die wir diskutiert haben.

Bemerkung: Die Transformationen $Q_j = Q_j(q_k, p_k, t)$ sowie $P_j = P_j(q_k, p_k, t)$ verknüpfen sowohl Q_j als auch P_j mit q_k und p_k . Dadurch geht die ursprüngliche Bedeutung als verallgemeinerte Koordinaten und Impulse weitgehend verloren⁶. Man spricht deswegen allgemein von q_k und p_k bzw. Q_j und P_j als kanonisch konjugierten Größen.

8.2 Hamilton-Jacobi Theorie

Nach der Definition der Wirkung ist ihre totale zeitliche Ableitung längs einer Bahn

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} \quad (8.21)$$

bzw. wenn wir S als Funktion der Koordinaten und der Zeit ansehen

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (8.22)$$

Betrachten wir jetzt nochmals die Variation von S :

⁶Dies sieht man sehr deutlich anhand der kanonischen Transformation $Q = p$ und $P = -q$.

$$\delta S = \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt \right]$$

(für einen Freiheitsgrad). Wenn wir auf der statio-nären Bahn nur ihren Endpunkt $q(t_2)$ variieren, dann gilt

$$\delta S = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t=t_2} = p \delta q$$

bzw.

$$\delta S = \sum_j p_j \delta q_j$$

und daher

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j . \quad (8.23)$$

Einsetzen der Gln. (8.21) und (8.23) in (8.22) liefert

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} - \sum_j p_j \dot{q}_j = -\mathcal{H}(q_1, \dots, p_1, \dots, t) . \quad (8.24)$$

Wenn wir in Gl. (8.24) die verallgemeinerten Impulse durch (8.23) ersetzen, dann erhalten wir die so genannte Hamilton-Jacobische Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0 . \quad (8.25)$$

Dies ist eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung, die neben den lagrangeschen und den kanonischen Gleichungen eine dritte allgemeine Methode⁷ zur Aufstellung und Lösung der Bewe-gungsgleichungen darstellt.

Betrachten wir als Beispiel den harmonischen Os-zillator:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 .$$

⁷abgesehen von den newtonschen Bewegungsgleichungen

Die entsprechende Hamilton-Jacobi Differenzial-gleichung lautet

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = 0 .$$

Wir machen den Separationsansatz $S = S_t + S_q$ in einen Zeitteil S_t sowie einem Ortsteil S_q und erhalten

$$-\dot{S}_t = \frac{1}{2m} \left(\frac{dS_q}{dq} \right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = c ,$$

worin c eine Konstante ist. Für S_t folgt

$$S_t = -ct ,$$

und für dS_q/dq gilt

$$\frac{dS_q}{dq} = \sqrt{2mc - mkq^2} .$$

D. h.

$$S = \int \sqrt{2mc - mkq^2} dq - ct . \quad (8.26)$$

Aber wie erhalten wir aus (8.26) die gesuchte Lösung $q(t)$? Um die allgemeine Vorgehensweise zu verstehen, verlassen wir hier kurz unser Beispiel.

Erzeugende einer kanonischen Transformation:

Aus Gl. (8.22) kombiniert mit (8.23) und (8.25) folgt

$$dS = \sum_j p_j dq_j - \mathcal{H} dt$$

bzw.

$$S = \int \left(\sum_j p_j dq_j - \mathcal{H} dt \right) . \quad (8.27)$$

Selbstverständlich gilt Gl. (8.27) auch für die kanonisch transformierten Variablen Q_j und P_j . D. h. aus $\delta S = 0$ folgt

$$\delta \int \left(\sum_j p_j dq_j - \mathcal{H} dt \right) = 0$$

und

$$\delta \int \left(\sum_j P_j dQ_j - \mathcal{H}' dt \right) = 0 .$$

Daraus folgt

$$\sum_j p_j dq_j - \mathcal{H} dt = \sum_j P_j dQ_j - \mathcal{H}' dt + dF ,$$

wobei dF das totale Differenzial einer Funktion der Koordinaten, der Impulse und der Zeit ist. Ergo gilt

$$dF = \sum_j (p_j dq_j - P_j dQ_j) + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}) dt \quad (8.28)$$

und damit

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (8.29)$$

Die Funktion F heißt auch erzeugende Funktion der kanonischen Transformation.

Fahren wir jetzt mit dem Beispiel fort und setzen speziell $F = S$ sowie $c = Q$ und $C = P$. Aus (8.29) folgt $\mathcal{H}' = 0$ (vgl. Gl. (8.25)), $C = -\frac{\partial S}{\partial c}$ und $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ (vgl. Gl. (8.23)). Mit $H' = 0$ folgt weiter $\partial H'/\partial C = \dot{c} = 0$ und $-\partial H'/\partial c = \dot{C} = 0$. D. h. c und C sind Konstanten, und aus Gl. (8.26) erhalten wir

$$-C = \sqrt{m/k} \underbrace{\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2c}{k} - q^2}}}_{= -\arccos\left(\sqrt{\frac{k}{2c}}q\right)} - t$$

bzw.

$$q = \sqrt{\frac{2c}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t + C)\right) .$$

Mit $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}C$ und $a = \sqrt{\frac{2c}{k}}$ ist dies offensichtlich identisch zu Gl. (6.6). Hier entspricht C einer Anfangszeit und $c = E$ (vgl. Gl. (6.7)). D. h. Energie und Zeit sind kanonisch konjugierte Variablen.

Dem Anfänger mag dieser Abschnitt akademisch erscheinen. Seine besondere Bedeutung wird in der Regel erst im Rahmen der Quantenmechanik deutlich. Hier sind die Stichwörter *Sommerfeld-Wilson Quantisierung, quasi-klassische Näherung* aber auch *Pfadintegration*.

Kapitel 9

Vielteilchenmechanik

9.1 Numerische Integration der Bewegungsgleichungen[†]

Im Kapitel 5 hatten wir uns mit Zweikörperproblemen befasst. Aber schon die Wechselwirkung von drei Massenpunkten ist so nicht mehr lösbar¹. Daraus betrachten wir hier einige numerische Aspekte der Lösung von Bewegungsgleichungen in Systemen aus vielen Teilchen. Typischerweise versteht man unter Teilchen sehr große Objekte wie Planeten bzw. Satelliten oder sehr kleine wie Atome bzw. Moleküle. Die Unterscheidung dieser Extremfälle ist primär eine Frage nach den typischen Dimensionen, d. h. nach der Energie-, Längen-, Massen- und Zeitskala².

Es sei ϵ eine typische Energie des betrachteten Problems, σ eine typische Länge, η eine typische Masse und τ eine typische Zeit. Mittels der dimensionslosen Größen $m^* = m/\eta$, $\vec{r}^* = \vec{r}/\sigma$, $t^* = t/\tau$ und $U^* = U/\epsilon$ schreiben wir die newtonischen Bewegungsgleichungen als

$$\frac{\eta\sigma}{\tau^2} m_i^* \frac{d^2\vec{r}_i^*}{dt^{*2}} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial U^*}{\partial \vec{r}_i^*}$$

bzw., wenn wir die typische Zeit durch

$$\tau = \sqrt{\frac{\eta\sigma^2}{\epsilon}} \quad (9.1)$$

festlegen, als

¹Wenn man von Spezialfällen wie der Normalmodenanalyse einmal absieht.

²Es ist bemerkenswert, wie die Klassische Mechanik diese vielen Größenordnungen in der Länge beinhaltet.

In-
der
Bewegungsgleichungen[†]

$$m_i^* \frac{d^2\vec{r}_i^*}{dt^{*2}} = -\frac{\partial U^*}{\partial \vec{r}_i^*}. \quad (9.2)$$

Der Index i bezeichnet hier die einzelnen Teilchen $i = 1, \dots, N$. Die dimensionslose Gl. (9.2) ist jetzt im Prinzip unabhängig vom betrachteten Problem. Wir müssen lediglich darauf achten, dass der Zeitschritt Δt , den wir in dem einfachen Algorithmus (4.26) eingeführt hatten, ausreichend klein gegenüber τ gewählt ist. Dazu müssen wir τ bzw. die Größen η , σ und ϵ kennen. Bei Problemen die durch eine potenzielle Energie der Form wie in Abbildung 5.6 (für $\alpha > 0$) charakterisiert sind, wäre beispielsweise ϵ die Tiefe des Minimums und σ seine Position. Die potenzielle Energie zwischen Paaren von Edelgasatomen bzw. kleinen neutralen Molekülen hat qualitativ eine ähnliche Form, und dort macht man es ebenso. In der Welt der Atome und Moleküle ist τ im Bereich von Picosekunden ($\cong 10^{-12} s$) und Δt im Bereich von Femtosekunden ($\cong 15^{-15} s$)!

Runge-Kutta Integration:

Eine robuste und genaue Standardmethode für die numerische Lösung von Gl. (9.2) im Fall $N = 1$ ist die Runge-Kutta Methode (RK). Im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (9.3)$$

lautet der RK3 Algorithmus

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) \quad (9.4)$$

$$+ f(x_{n+1}, y_n + f_n h) \Big] + \mathcal{O}(h^3)$$

Hier ist h die Schrittweite und $x_n = nh + x_0$, wobei x_0 der Anfangswert ist. Außerdem gilt $y_n = y(x_n)$ sowie $f_n = f(x_n, y_n)$. Den Algorithmus (9.4) erhält man aus der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + y'(x)h \\ &\quad + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y(x) + f(x,y)h \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}f(x,y)h^2 + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $\frac{d}{dx}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f$ gilt

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + \frac{1}{2}f(x,y)h \\ &\quad + \frac{1}{2}h \underbrace{\left[f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}fh \right]}_{=f(x+h,y+fh)+\mathcal{O}(h^2)} \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Die Notation RK3 sagt aus, dass dieses Verfahren die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ berücksichtigt.

Der Algorithmus lässt sich auch auf gewöhnliche Differenzialgleichungen n . Ordnung anwenden, wenn man diese in Systeme 1. Ordnung umschreibt:

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (9.5)$$

Mit $y_0 \equiv y$, $y_1 \equiv y^{(1)}$, $y_2 \equiv y^{(2)}$, ..., $y_n = y^{(n)}$ folgt

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 \\ &\vdots \\ y'_{n-2} &= y_{n-1} \\ y'_{n-1} &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Zum Schluß geben wir noch den geschlossenen RK4 für DGL des Typs $y'' = f(x, y)$ an³:

³siehe M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover; (25.5.22)

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3 \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\{y'_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2)\} \\ &\quad + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}y'_n + \frac{h}{8}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + h, y_n + hy'_n + \frac{h}{2}k_2\right). \end{aligned}$$

Verlet Algorithmen[†]:

Hauptnachteil der RK Methode sind die vielen Funktionsberechnungen pro Integrationsschritt. RK Methoden sind daher für große Systeme mit $N \sim 100$ oder ~ 1000 oder gar $\sim 10^6$ nicht nützlich. Eine mögliche Alternative stellt der Algorithmus (4.26) dar. In der Literatur, die sich mit der Integration der Bewegungsgleichungen molekulärer Systeme wie Gase oder Flüssigkeiten befasst, man spricht von Molekulardynamik⁴ oder Molekulardynamik-Simulationen, findet man (4.26) unter dem Stichwort Verlet Algorithmus. Er hat den Vorteil, dass bei nur einer Funktions- bzw. Kraftberechnung pro Zeitschritt der Fehler von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ ist (warum nicht $\mathcal{O}(\Delta t^3)$?). Ein Nachteil ist, dass ein kleiner Term $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ zur Differenz zweier großer Zahlen addiert wird. Diesen Nachteil beseitigt die leap frog-Variante des Verlet Algorithmus:

$$\vec{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \vec{v}_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (9.9)$$

$$+ \Delta t \vec{a}_i(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

$$\vec{r}_i(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) \quad (9.10)$$

$$+ \Delta t \vec{v}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

Hier ist $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ und $\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}$. Die erste Gleichung ergibt sich durch Subtraktion der Taylorentwicklungen von $\vec{v}_i(t + \Delta t/2)$ und $\vec{v}_i(t - \Delta t/2)$ bis $\mathcal{O}(\Delta t^3)$. Anschließend wird in der Taylorentwicklung von

⁴M.P. Allen, D.J. Tildesley, *Computer Simulation of Simple Liquids*, Oxford

$\vec{r}_i(t + \Delta t)$ bis $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$ durch $\vec{v}_i(t) = \vec{v}_i(t + \Delta t/2) - \frac{\Delta t}{2} \vec{a}_i(t) - \frac{\Delta t^2}{8} \ddot{a}_i(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$ ersetzt. Dies liefert die zweite Gleichung. Der Name *leap frog*-Algorithmus bezieht sich auf die Staffelung von Positions- und Geschwindigkeits-schritten. Diese Variante des Verlet Algorithmus ist in der Praxis der Computersimulation molekularer Systeme sehr beliebt.

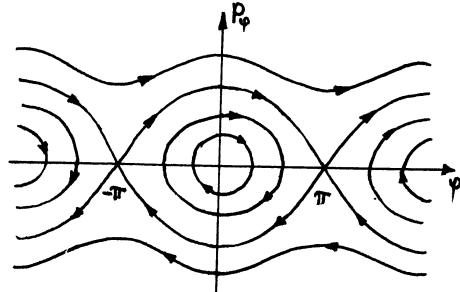


Abbildung 9.1: Phasenraumtrajektorien des ebenen Pendels.

9.2 Grundlagen der Statistischen Mechanik‡

In diesem Abschnitt wollen wir Probleme diskutieren, die bei der Anwendung der Mechanik in Systemen⁵ aus sehr vielen Teilchen, wie beispielsweise Gasen, auftreten. Es erweist sich als notwendig, von der exakten Berechnung der einzelnen Teilchenbahnen abzusehen und stattdessen eine statistische Beschreibung einzuführen. Die resultierende Statistische Mechanik ist Gegenstand einer separaten Vorlesung. Viele Details in diesem Abschnitt werden wir daher im Erzählstil abhandeln. Wichtig ist das prinzipielle Verständnis der auftretenden Probleme, um in der Vorlesung zur Statistischen Mechanik deren Grundlagen besser begreifen zu können!

Phasenraum‡:

In der hamiltonschen Formulierung wird der momentane Zustand eines mechanischen Systems durch einen Punkt im so genannten Phasenraum beschrieben, der die Koordinaten $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N}(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_{3N}(t))$ besitzt. Dieser Punkt wandert als Funktion der Zeit, und sein zurückgelegter Weg heißt Phasenraumtrajektorie. Abbildung 9.1 zeigt Trajektorien des einfachen Pendels aus Abbildung 5.2 für unterschiedliche Anfangskoordinaten und Anfangsimpulse. Man beachte, dass die Trajektorien sich nicht schneiden

können⁶, da die Angabe von Ort und Impuls die Bewegung eindeutig festlegt. Sonderfälle sind die (labilen) Fixpunkte bei ..., $-\pi, \pi, \dots$

Meßgrößen als Zeitmittelwerte‡:

Die wichtige Bedeutung des Phasenraums wird in der Statistischen Mechanik deutlich. Diese stellt die physikalischen Gesetze auf, mit deren Hilfe die Eigenschaften von Vielteilchensystemen beschrieben werden. Das einzelne Teilchen verliert seine Bedeutung. Wichtig sind vielmehr die Eigenschaften des Systems insgesamt - beispielsweise seine Energie oder, wenn wir ein Gas betrachten, sein Druck. Alle diese Größen werden durch Integrationen im Phasenraum berechnet.

Betrachten wir die Größe $A(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N}(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_{3N}(t), t)$. Dabei kann es sich beispielsweise um den Druck in einem Gas zu einem bestimmten Zeitpunkt t handeln. Messen würden wir allerdings den Mittelwert \bar{A} dieser Größe über ein bestimmtes Zeitintervall T hinweg. D. h.

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A(q_1(t), q_2(t), \dots, p_{3N}(t), t). \quad (9.11)$$

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass A keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt. Das System soll isoliert sein und sich im Gleichgewicht befinden. Uns interessiert dann der Grenzfall $T \rightarrow \infty$, und wir definieren den Zeitmittelwert

⁵Hier verstehen wir unter System einen „großen Behälter“, der gleichförmig mit Materie ausgefüllt ist. Groß bedeutet, dass Randeffekte durch die Behälterwände vernachlässigbar sind. Systeme werden häufig danach unterschieden, ob sie isoliert (keinerlei Wechselwirkung mit der Umgebung findet statt), geschlossen (nur Energieaustausch ist möglich) oder offen (Energie und Teilchenaustausch sind möglich) sind.

⁶Sie können natürlich geschlossen sein (periodische Bewegung).

$$\langle A \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt A(q_1(t), \dots, p_{3N}(t)) \quad (9.12)$$

⁷. Die Frage, die sich stellt, ist folgende: „Ist diese Formel nützlich für die Berechnung (makroskopischer) Meßwerte im Gleichgewicht basierend auf den mikroskopischen Koordinaten und Impulsen in dem entsprechenden mechanischen System?“ Wir sehen sofort, dass Gl. (9.12) für reale Systeme mit ihren typischerweise 10^{23} Teilchen, die außerdem nicht einzeln aufgelöst werden können, ungeeignet ist. Lediglich Computersimulationen (vgl. unten), in denen die Trajektorien von einer gewissen Anzahl Teilchen mithilfe des oben diskutierten Verlet-Algorithmus integriert und gespeichert werden, erlauben die Berechnung von \bar{A} . Der Grenzwert $T \rightarrow \infty$ ist auch in diesem Fall natürlich nicht realisierbar ⁸.

Neben der technischen Schwierigkeit der Berechnung des Integrals in Gl. (9.12) existiert noch eine zweite subtile Schwierigkeit. Offensichtlich hängt die Phasenraumtrajektorie des ebenen Pendels in Abbildung 9.1 von den Anfangsbedingungen ab. Damit wäre jedes $\langle A \rangle$ für dieses System ebenfalls eine Funktion der Anfangsbedingungen. Das Gleiche, so würde man folgern, sollte auch in einem Behälter gelten, der ein Teilchengas enthält. Damit wäre beispielsweise der Druck eine Funktion der Anfangsbedingungen. Tatsächlich stellt man experimentell fest, dass lediglich die Erhaltungsgröße Gesamtenergie den Druck beeinflusst ⁹. Die übrigen Bewegungsintegrale, die nicht mit den fundamentalen Symmetrien von Raum und Zeit verbunden sind, scheinen dagegen keinen Einfluss zu haben!

Die technische Schwierigkeit der Berechnung von $\langle A \rangle$ wurde gegen Ende des 19. Jahrhunderts von J. W. Gibbs ¹⁰ überwunden. Obwohl seine

⁷Die Existenz der rechten Seite wird übrigens im so genannten Theorem von Birkhoff behandelt (siehe z. B. A. I. Khinchin (1949) *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*. Dover).

⁸zumindest nicht exakt

⁹Der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls sollen Null sein.

¹⁰Gibbs, Josiah Willard, amerikanischer Mathematiker und Physikochemiker, *New Haven (Connecticut) 11.2. 1839, †ebenda 28.4. 1903; schuf den Begriff der thermodynamischen Phase, stellte die gibbssche Phasenregel auf und führte verschiedene thermodynamische Funktionen ein. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Methode die zweite Schwierigkeit in einer bloßen Annahme beseitigt, war sie derart erfolgreich, dass sie bis heute Bestand hat. Wir werden uns gleich näher mit der Gibbschen Methode beschäftigen. Eine gänzlich andere mechanische Methode, um die oben genannten Schwierigkeiten zu meistern, wurde von L. Boltzmann ¹¹ etwa zur gleichen Zeit entwickelt.

Boltzmanns Bild†:

Boltzmann basiert seine Überlegungen auf verdünnten Gasen und zwar auf der Wahrscheinlichkeit $f(\vec{r}, \vec{v}) d^3 r d^3 v$ am Ort (Volumenelement) \vec{r} ein Gasteilchen mit der Geschwindigkeit \vec{v} vorzufinden. D. h. Boltzmann rückt ab von einer (sinnlosen) Integration der Bewegungsgleichungen aller Teilchen in einem makroskopischen System zugunsten einer Beschreibung mittels statistischer Konzepte. Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\vec{r}, \vec{v})$ bekannt, so lässt sich Gl. (9.12) gemäß

$$\langle A \rangle_B = \frac{\int A'(\vec{r}, \vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}) d^3 r d^3 v}{\int f(\vec{r}, \vec{v}) d^3 r d^3 v} \quad (9.13)$$

ausdrücken. Hier ist $A'(\vec{r}, \vec{v})$ die Größe A ausgedrückt durch ihre Werte am Ort \vec{r} im Ortsraum und am Ort \vec{v} im Geschwindigkeitsraum. Im Gegensatz zum Phasenraum bzw. Γ -Raum spricht man hier vom μ -Raum. Der Index B steht für Boltzmann. D. h. wir wollen unten noch diskutieren, inwieweit $\langle A \rangle_B$ tatsächlich mit dem Zeitmittelwert ausgedrückt in Gl. (9.12) gleichzusetzen ist.

Allgemein folgt $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, man beachte die explizite Zeitabhängigkeit, aus der nach Boltzmann benannten Gleichung

¹¹Boltzmann, Ludwig, österreichischer Physiker, *Wien 20.2. 1844, †(Selbstmord) Duino (heute Duino-Aurisina, bei Triest) 5.9. 1906; Professor in Graz, Wien, München, Leipzig; wandte als Erster die Gesetze der Statistik (Boltzmann Statistik) auf die Moleküle eines Gases an (kinetische Gastheorie), entdeckte u.a. die Beziehung zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit und begründete das Stefan-Boltzmann Gesetz. Werke: *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 3 Bände. (1909). Literatur: Kaizik, J. *Versuch einer Begegnung. Mach gegen Boltzmann*. Wien 1986; Stiller, W. *L. Boltzmann. Altmäister der klassischen Physik, Wegbereiter der Quantenphysik und Evolutionstheorie*. Thun u.a. 1989; Grieser, D. *Köpfe. Portraits der Wissenschaft*. Wien 1991. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \right) f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{Koll} \quad (9.14)$$

Die linke Seite ist offensichtlich die totale zeitliche Änderung von $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, während die rechte Seite die Ursache dieser Änderung, nämlich die Stöße der (Gas)teilchen untereinander, beschreibt. Wir betrachten diesen Term nicht im Detail,¹² sondern beschränken uns auf folgende Bemerkungen:

- Die betrachteten Stöße gehorchen der Energie- und Impulserhaltung.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Teilchen mit den Geschwindigkeiten \vec{v}_1 und \vec{v}_2 im gleichen \vec{r} -Volumenelement liegen, ist das Produkt

$$f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) d^3 r d^3 v_1 f(\vec{r}, \vec{v}_2, t) d^3 r d^3 v_2 . \quad (9.15)$$

Diese Vernachlässigung jeglicher Korrelation, man bezeichnet sie als „molekulares Chaos“, zerstört den Einfluss der Anfangsbedingungen¹³.

Boltzmann konnte basierend darauf die Ungleichung

$$\frac{dH(t)}{dt} \leq 0 \quad (9.16)$$

(im Mittel) herleiten, wobei die H -Funktion durch

$$H(t) = \int d^3 v f(\vec{v}, t) \ln f(\vec{v}, t) \quad (9.17)$$

gegeben ist¹⁴. Gl. (9.16) nennt man auch H -Theorem, wobei $-H(t)$, wie Sie noch lernen werden, im wesentlichen die Entropie des Gases ist. Gl. (9.16) ist der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, ausgedrückt auf der molekularen Ebene! Insbesondere

¹²Siehe z.B. K. Huang (1963) Statistical Mechanics. Kapitel 3

¹³In welchem Sinn diese Annahme mit der uns bisher bekannten deterministischen Mechanik vereinbar ist, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

¹⁴Die irrelevante Ortskoordinate im Argument von f lassen wir weg

entwickelt sich für $f(\vec{v}, t)$ für lange Zeiten in die so genannte maxwellsche Verteilung¹⁵:

$$f(\vec{v}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \beta m v^2 \right] . \quad (9.18)$$

Hier ist m die Teilchenmasse. Außerdem gilt

$$\beta = \frac{1}{k_B T} , \quad (9.19)$$

worin

$$k_B = 1.380658.. J K^{-1} \quad (9.20)$$

die Boltzmann Konstante ist. Die Größe T ist hier die Temperatur, auf die wir unten noch zu sprechen kommen werden.

Ein anschauliches Beispiel zeigt die Abbildung 9.2. Dort wird ein Gas bestehend aus 108 Lennard-Jones Teilchen betrachtet. Ursprünglich haben die Lennard-Jones Teilchen zufällige Positionen sowie Geschwindigkeitskomponenten, die ebenfalls zufällig aus einer Gleichverteilung gezogen werden. Die Bewegungsgleichungen dieser 108 Teilchen werden anschließend ausgehend von diesen Anfangsbedingungen mittels des *leap frog*-Verlet Algorithmus numerisch integriert¹⁶. Die Gasdichte ist dabei konstant. Die Abbildung 9.2 zeigt die zeitliche Entwicklung der H -Funktion. Man erkennt, dass Gl. (9.16) tatsächlich erfüllt ist, wobei dies jedoch lokal nicht der Fall sein muss, sondern, wie schon

¹⁵Maxwell, James Clerk, britischer Physiker, *Edinburgh 13.6. 1831, †Cambridge 5.11. 1879; erneuerte die von T. Young aufgestellte Dreifarbentheorie des Sehens und förderte besonders die kinetische Gastheorie (maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung), schloss aus mathematischen Überlegungen, dass der Saturnring aus festen Teilchen bestehen müsse, erweiterte die Vektor- und Tensoranalysis, zeigte die elektromagnetische Natur der Lichtwellen. Er entwickelte die Theorie des elektromagnetischen Feldes (Elektrizität) durch Mathematisierung des von M. Faraday in die Physik eingeführten Feldbegriffs (maxwellsche Theorie). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

¹⁶Wie man solche Computersimulationen im Detail durchführt, können Sie z.B. in meinem Skript *Molekulares Modellieren mit Kraftfeldern* (<http://constanze.materials.uni-wuppertal.de/Skripten.html>) nachlesen. Sie können genau dieses System auch im Rahmen eines Computerpraktikums selber untersuchen: http://constanze.materials.uni-wuppertal.de/Skripten/Computerlabor/Projektpraktikum_LJ.pdf

gesagt, im Mittel über ein gewisses Zeitintervall! Die Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten, berechnet etwa gegen Ende des Zeitfensters in dem die H -Funktion dargestellt ist, ist ebenfalls in Abbildung 9.2 gezeigt. Aufgrund der geringen Zahl von Teilchen ergeben sich Schwankungen, aber trotzdem ist der Einklang mit der durchgezogenen maxwellsche Verteilung gut zu erkennen. Diese ist übrigens mit der Temperatur des Gases berechnet, die sich, wie wir gleich noch zeigen werden, aus der mittleren kinetischen Teilchenenergie ergibt.

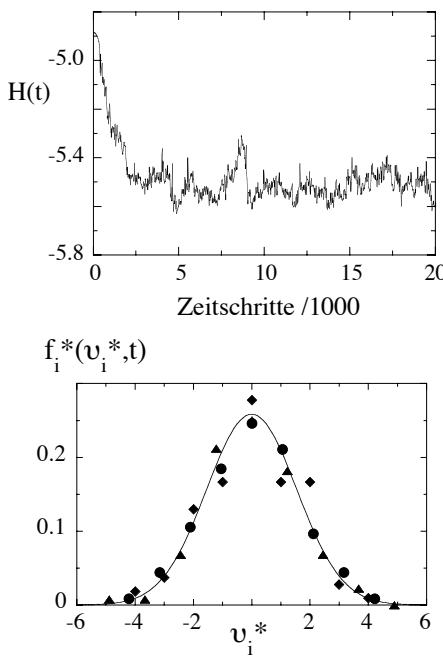


Abbildung 9.2: Computersimulation von 108 Lennard-Jones Teilchen, die ein verdünntes Gas modellieren. Oben: Die zeitliche Entwicklung der H -Funktion; unten: Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitskomponenten v_i ($i = 1, 2, 3$). Die verschiedenen Symbole korrespondieren zu den drei Raumrichtungen. Die durchgezogene Linie ist die theoretische maxwellsche Verteilung berechnet mit der gemessenen Temperatur des simulierten Gases. Gesternte Größen sind in Lennard-Jones Einheiten.

Ein weiteres Beispiel soll die Berechnung makroskopischer Meßgrößen im μ -Raum illustrieren. Und zwar betrachten wir den Druck, den ein ideales Gas auf die Wände seines Behälters ausübt. Der Druck P ist gegeben durch $P = F/A$, wobei F die mittlere

Kraft pro Fläche A sein soll. Ein einzelnes Teilchen der Masse m , das mit der Wand kollidiert, trägt dabei den Anteil

$$f_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t}$$

zur momentanen Kraft $F(t)$ bei. Hier ist f_x die Kraft in x -Richtung, wobei die Behälterwand als senkrecht zur x -Richtung angenommen wird. $\Delta p_x = 2mv_x$ ist der Impulsübertrag während des Stoßes, der im Zeitintervall Δt abläuft. In diesem Zeitintervall durchquert das Gasteilchen eine Schicht der Dicke $\Delta x = \frac{1}{2}\Delta tv_x$ parallel zur Behälterwand. Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$f_x = \frac{mv_x^2}{\Delta x} .$$

Damit folgt für die mittlere Gesamtkraft

$$F = \int n f(v_x) \frac{mv_x^2}{\Delta x} dv_x .$$

Hierin ist n die Gesamtzahl der Teilchen in der eben erwähnten Schicht, und $f(v_x)$ ist die normierte maxwellsche Verteilung für die x -Komponenten der Geschwindigkeiten der Gasteilchen. Mit $\rho = n/(A \cdot \Delta x)$, der Teilchenzahldichte im Gas, sowie Gl. (9.18) folgt

$$\begin{aligned} P &= m\rho \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2} v_x^2 dv_x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2} dv_x} \\ &= -2\rho \frac{d}{d\beta} \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2} dv_x \\ &\stackrel{z=v_x \sqrt{\beta \frac{m}{2}}}{=} \rho \frac{d}{d\beta} \ln \beta = \rho \frac{1}{\beta} . \end{aligned}$$

Dies ist das bekannte ideale Gas-Gesetz,

$$PV = Nk_B T , \quad (9.21)$$

hergeleitet auf der Basis von molekularen Stößen mit den Wänden des Behälters!

Liouville'sches Theorem:

Bevor wir auf die Sichtweise von Gibbs eingehen, wollen wir ein nützliches Theorem betrachten. Wir stellen uns unendlich viele völlig unabhängige aber sonst identische mechanische Systeme vor, von denen jedes einen Punkt im Phasenraum liefert¹⁷. In einem bestimmten Volumenelement des Phasenraums haben diese Punkte zur Zeit t die Anzahldichte $\rho(t)$. Diese Dichte sollte ortsabhängig sein, d. h.

$$\rho = \rho(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, p_1, p_2, \dots, p_{3N}, t) . \quad (9.22)$$

ρ erfüllt das folgende nützliche Theorem:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_j \left(\dot{q}_j \frac{\partial\rho}{\partial q_j} + \dot{p}_j \frac{\partial\rho}{\partial p_j} \right) = 0$$

($j = 1, \dots, 3N$) oder ausgedrückt mittels der Poisson Klammer

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \rho\} = 0 . \quad (9.23)$$

Dies ist das liouvillesche Theorem¹⁸. Das liouvillesche Theorem bestimmt die Phasenraumdichte nicht eindeutig, aber es schränkt die Möglichkeiten ein!

Bemerkung: Man beachte, dass $\frac{d\rho}{dt}$ die Änderung beschreibt bezogen auf einen „Beobachter“, der mit der „Phasenraumflüssigkeit“ reist. Die Ableitung $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ dagegen bezieht sich auf einen festen Ort.

Bemerkung: Es kann manchmal nützlich sein, den Phasenraum zu erweitern. D. h. neben den Koordinaten und Impulsen des mechanischen Systems führt man weitere verallgemeinerte Koordinaten und Impulse ein. Trotzdem behalten die unten genannte Kontinuitätsgleichung und Gl. (9.23)

¹⁷Die Systeme unterscheiden sich lediglich bezüglich ihrer Anfangsbedingungen, die völlig zufällig gewählt sind. Sind die Systeme isoliert, so sollen alle Anfangsbedingungen auf der gleichen Energiehyperfläche liegen.

¹⁸Liouville, Joseph, französischer Mathematiker, *Saint-Omer (Département Pas-de-Calais) 24.3. 1809, †Paris 8.9. 1882; zählt zu den bedeutendsten Mathematikern des 19.Jahrhunderts; entwickelte die Grundlagen der analytischen Zahlentheorie und verfasste über 400 Arbeiten, in denen er außerdem bedeutende Beiträge zur Algebra, Geometrie sowie zur Analysis und ihren Anwendungen in der Physik (u.a. elliptische Funktionen, Differenzialgleichungen) lieferte. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

ihre Gültigkeit. Dies kann man ausnutzen, um die Bewegungsgleichungen der zusätzlich eingeführten Größen zu erhalten¹⁹.

Die folgende Beweisskizze für Gl. (9.23) beschränkt sich der Einfachheit halber auf den Fall $\rho = \rho(q, p, t)$, aber die Verallgemeinerung auf (9.22) ist (fast) offensichtlich. Unser jetzt zweidimensionales Volumenelement am Ort (q, p) soll die Fläche $dqdp$ haben. Die lokale zeitliche Änderung von ρ am Ort (q, p) ist $\partial\rho/\partial t|_{q,p}$. Andererseits ändert sich ρ dadurch, dass Phasenraumpunkte in das Volumenelement hinein bzw. herausströmen. Entlang q ist dieser Nettostrom die Differenz der Ströme durch die Seiten bei $q - \frac{dq}{2}$ und $q + \frac{dq}{2}$. D. h.

$$\left[\rho \dot{q} \Big|_{q-\frac{dq}{2}} - \rho \dot{q} \Big|_{q+\frac{dq}{2}} \right] dp dt$$

ist die Zahl der Phasenraumpunkte, um die sich die Zahl dieser Punkte im Volumenelement pro Zeiteinheit dt durch Bewegung entlang q verändert. Genauer gesagt ist $[...] > 0$, wenn sich die Zahl der Phasenraumpunkte im Volumenelement erhöht. Die entsprechende Änderung, hervorgerufen durch den Nettostrom entlang p , ist

$$\left[\rho \dot{p} \Big|_{p-\frac{dp}{2}} - \rho \dot{p} \Big|_{p+\frac{dp}{2}} \right] dq dt .$$

Die Summe der beiden Strombeiträge ergibt

$$-\frac{d}{dq} (\rho \dot{q}) - \frac{d}{dp} (\rho \dot{p}) .$$

Gleichsetzen dieses Ausdrucks mit $\partial\rho/\partial t$ ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dq} (\rho \dot{q}) + \frac{d}{dp} (\rho \dot{p}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (9.24)$$

bzw.

$$\underbrace{\dot{q} \frac{d\rho}{dq} + \dot{p} \frac{d\rho}{dp} + \frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=d\rho/dt} + \rho \left(\frac{d\dot{q}}{dq} + \frac{d\dot{p}}{dp} \right) = 0 .$$

¹⁹W.G. Hoover, *Computational Statistical Mechanics*, Elsevier.

Mithilfe der hamiltonschen Gleichungen, $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ und $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$, sehen wir aber sofort, dass $(...) = 0$ gilt, und damit sind wir fertig.

Das Liouville Theorem können wir auch noch aus einem zweiten Blickwinkel betrachten – dem Boltzmannschen Blickwinkel. Dabei berechnen wir die zeitliche Änderung des Phasenraumvolumenelements

$$d\Gamma(t) \equiv dq_1(t) dq_2(t) \dots dq_{3N}(t) \times dp_1(t) dp_2(t) \dots dp_{3N}(t), \quad (9.25)$$

das sozusagen mit dem Phasenraumpunkt des Systems reist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns wieder auf $d\Gamma = dqdp$. Allgemein gilt unter einer Koordinatentransformation $Q = Q(q, p)$ bzw. $P = P(q, p)$

$$dQdP = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} dqdp$$

²⁰ Wenn wir speziell

$$\begin{aligned} Q &= q(t + \delta t) \approx q(t) + \dot{q}(t)\delta t \\ P &= p(t + \delta t) \approx p(t) + \dot{p}(t)\delta t \end{aligned}$$

wählen, dann folgt

$$\begin{aligned} & dq(t + \delta t) dp(t + \delta t) \\ &= \left(1 + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \delta t\right) \left(1 + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \delta t\right) dq(t) dp(t) \\ &+ O(\delta t^2) \\ &= \underbrace{\left[1 + \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\right) \delta t\right]}_{=0(*)} dq(t) dp(t) \\ &+ O(\delta t^2) \end{aligned}$$

(*: für hamiltonsche Systeme). Die Beziehung $dq(t + \delta t) dp(t + \delta t) = dq(t) dp(t) + \mathcal{O}(\delta t^2)$ lässt sich iterieren, d. h. $dq(t + 2\delta t) dp(t + 2\delta t) =$

²⁰Siehe Abschnitt 1.3 (Umrechnung von Flächenelementen).

$dq(t) dp(t) + \mathcal{O}(\delta t^2)$ usw. Daraus folgt $dq(t') dp(t') = dq(t) dp(t)$ im Grenzfall $\delta t \rightarrow 0$ ²¹. Somit gilt

$$d\Gamma = \text{konstant}. \quad (9.26)$$

Die Abbildung 9.3 zeigt Phasenraumpunkte im zeitlichen Abstand δt berechnet für ein ebenes Pendel ausgehend von drei Anfangsbedingungen in der Nähe von $\phi = -\pi/2$ und $p_\phi = 0$. Der Zeitschritt ist klein und die Anfangsbedingungen sind ähnlich genug, um für nicht zu große Zeiten die Wanderung und Deformation eines Phasenraumvolumenelementes zu demonstrieren.

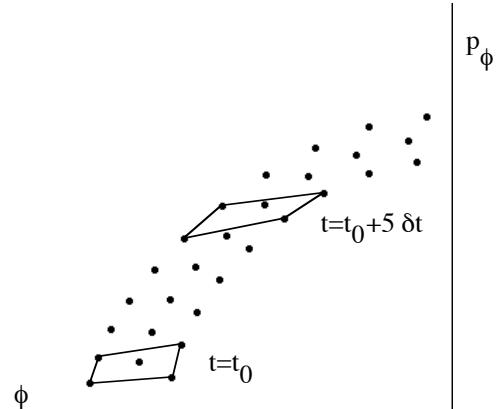


Abbildung 9.3: Volumenelement im 2D Phasenraum des ebenen Pendels.

Gibbssches Bild:

Ein Punkt $(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, p_1, p_2, \dots, p_{3N})$ im Phasenraum zu einer bestimmten Zeit wird als Mikrozustand des Systems bezeichnet. Grundlage für die gibbssche Formulierung der Statistischen Mechanik ist die Annahme, dass bei vollkommen isolierten Systemen jeder Mikrozustand gleich wahrscheinlich ist. Dies ist zumindest plausibel, denn es gibt keinen Grund, warum einer dieser Mikrozustände vor den übrigen ausgezeichnet ist. Um diese Annahme ausnutzen zu können, stellen wir uns wieder sehr viele oder besser unendlich viele identische²², unabhängige mechanische Systeme

²¹Man beachte in diesem Zusammenhang $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + xt/n)^n = e^{xt}$ mit $t = n\delta t$. Daraus sieht man nämlich, dass für das obige Argument die Ordnung $\mathcal{O}(\delta t)$ nicht ausreichend wäre. Sie muss verschwinden!

²²Identisch heißt hier gleiche Zahl von Teilchen unter gleichen Bedingungen im selben Volumen.

vor, von denen jedes einen Punkt im Phasenraum liefert. In der Statistischen Mechanik nennt man diese Gedankenkonstruktion ein Ensemble. Im Fall der kompletten Isolation sind die Energien E aller dieser Systeme gleich und konstant. Die Gleichwahrscheinlichkeit der Mikrozustände, die zu dieser Energie passen, bedeutet, dass die Dichte ρ der Phasenraumpunkte auf einer Hyperfläche $E = \mathcal{H}(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, p_1, p_2, \dots, p_{3N})$ konstant sein muss:

$$\rho = \text{konstant} . \quad (9.27)$$

Man beachte, dass dieses ρ mit dem liouvilleschen Theorem (9.23) konsistent ist! In der Statistischen Mechanik spricht man vom mikrokanonischen Ensemble.

Wenn dagegen die einzelnen Systeme nicht mehr isoliert sind, sondern mit ihrer Umgebung Energie (z.B. Wärme) austauschen können, dann ist ρ nicht länger nur konstant, sondern es lässt sich basierend auf der obigen Annahme zeigen²³:

$$\rho \propto \exp(-\beta\mathcal{H}) . \quad (9.28)$$

Dies ist das so genannte kanonische Ensemble. Wieder erfüllt diese Form der Phasenraumdichte das liouvillesche Theorem (9.23) (zeigen Sie dies).

Die Berechnung makroskopischer Messgrößen im Gleichgewicht basiert im gibbschen Bild auf so genannten Ensemblemittelwerten. Analog zu Gl. (9.13) im μ -Raum schreiben wir nun

$$\langle A \rangle_G = \frac{\int d\Gamma A(q_1, \dots, p_1, \dots) \rho(q_1, \dots, p_1, \dots)}{\int d\Gamma \rho(q_1, \dots, p_1, \dots)} . \quad (9.29)$$

Hier steht der Index G für Gibbs. Wie oben im Fall von $\langle A \rangle_B$ müssen wir überlegen, inwieweit der so genannte Ensemblemittelwert $\langle A \rangle_G$ tatsächlich mit dem Zeitmittelwert in Gl. (9.12) gleichzusetzen ist. Im mikrokanonischen Fall lautet diese Formel konkret

$$\langle A \rangle_{G,mikro} = \frac{\int_{E=\mathcal{H}} d\Gamma A}{\int_{E=\mathcal{H}} d\Gamma} . \quad (9.30)$$

D. h. die Integration verläuft über die Energiehyperefläche $E = \mathcal{H}$. Im kanonischen Fall dagegen schreiben wir

$$\langle A \rangle_{G,kan} = \frac{\int d\Gamma A \exp(-\beta\mathcal{H})}{\int d\Gamma \exp(-\beta\mathcal{H})} . \quad (9.31)$$

Hier umfasst die Integration den gesamten Phasenraum. In der Vorlesung zur Statistischen Mechanik wird gezeigt werden, dass im thermodynamischen Limes (die Teilchenzahl geht gegen unendlich bei gleichbleibender Teilchendichte) gilt:

$$\langle A \rangle_G = \langle A \rangle_{G,mikro} = \langle A \rangle_{G,kan} . \quad (9.32)$$

D. h. die unterschiedlichen Ensembles liefern identische Resultate!

Betrachten wir ein Beispiel. Wir setzen die Größe $q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$ für A in Gl. (9.31) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \langle q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \rangle &= \frac{\int_{\Gamma} d\Gamma q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \exp[-\beta\mathcal{H}]}{\int_{\Gamma} d\Gamma \exp[-\beta\mathcal{H}]} \\ &\stackrel{\text{p. I.}}{=} \left(\int_{\Gamma} d\Gamma \exp[-\beta\mathcal{H}] \right)^{-1} \\ &\times \int_{\Gamma} d\Gamma' \left[\left(-\frac{1}{\beta} q_j \exp[-\beta\mathcal{H}] \right)_{q_j^{\min}}^{q_j^{\max}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} \int \exp[-\beta\mathcal{H}] dq_j \right]. \end{aligned}$$

Hier bedeutet der Index ', dass die Variable q_j ausgenommen ist. Der erste Term in der eckigen Klammer verschwindet, da wir uns ein Gas vorstellen, das in einen Behälter eingesperrt ist, so dass die potentielle Energie bei q_j^{\max} und q_j^{\min} , also auf den Wänden, unendlich ist. Die Abkürzung p.I. steht für partielle Integration. Damit folgt

$$\langle q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \rangle = k_B T$$

oder für N Gasteilchen

$$\left\langle \sum_{j=1}^{3N} q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right\rangle = 3Nk_B T . \quad (9.33)$$

²³siehe beispielsweise R. Hentschke (2004), *Statistische Mechanik - Eine Einführung für Physiker, Chemiker und Materialwissenschaftler*, Wiley-VCH.

Andererseits können wir die linke Seite dieser letzten Gleichung auch durch

$$\left\langle \sum_{j=1}^{3N} q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right\rangle = - \left\langle \sum_{j=1}^{3N} q_j \dot{p}_j \right\rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle \quad (9.34)$$

ausdrücken, wobei \vec{F}_i die Kraft auf Gasteilchen i am Ort \vec{r}_i sein soll. In einem idealen bzw. hinreichend verdünnten Gas verschwindet die Kraft \vec{F}_i fast überall im Behälter mit der Ausnahme der Behälterwände. Wir schreiben daher

$$\begin{aligned} - \left\langle \sum_{j=1}^{3N} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle &\simeq P \int_A dA (\vec{n} \cdot \vec{r}) \\ &\stackrel{\text{S. v. Gauß}}{=} P \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \\ &= 3PV. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Hier ist P der Druck, $d\vec{A} = \vec{n}dA$ ist ein nach außen orientiertes Flächenelement auf der Behälterwand, und V ist das Behälervolumen. Die Kombination von (9.33), (9.34) und (9.35) liefert wieder das bekannte Gesetz des idealen Gases:

$$PV = Nk_B T.$$

Bemerkung: Die gleiche Rechnung können wir wiederholen mit der Größe $p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}$ ersetzt durch $q_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$. Statt Gl. (9.33) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{j=1}^{3N} p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{3N} p_j \dot{q}_j \right\rangle \\ &= 2\langle K \rangle \\ &= 3Nk_B T. \end{aligned}$$

Hier ist $\langle K \rangle$ die mittlere kinetische Energie im System. D. h. die Gleichung

$$\langle K \rangle = \frac{2}{3} Nk_B T \quad (9.36)$$

verbindet die mikroskopischen Teilchengeschwindigkeiten mit der makroskopischen Größe Temperatur!

9.3 Klassifikation dynamischer Systeme

Das zentrale Problem bei der gibbschen Methode ist die angenommene Gleichheit des Ensemblemittelwerts $\langle A \rangle_{G,\text{mikro}}$ mit dem entsprechenden Zeitmittelwert ausgedrückt durch Gl. (9.12). Diese Annahme bezeichnet man auch als Ergodenhypothese. Wo liegt das Problem? Nun, es ist nicht unbedingt sicher, dass die Trajektorie eines mechanischen Systems wirklich alle (wichtigen) Regionen des Phasenraums erreichen kann. Bei der Ensemble-Konstruktion auf der anderen Seite werden per Definition alle Regionen des Phasenraums berücksichtigt. Anders formuliert kann man fragen: Wie führen deterministische Bewegungsgleichungen auf „zufällige“ Phasenraumtrajektorien?

Bevor wir diesen Punkt näher beleuchten, wollen wir eine für unsere Zwecke nützliche Klassifikation dynamischer Systeme vornehmen. Diese ist in Abbildung 9.4 dargestellt. Zunächst unterscheiden sich dynamische Systeme danach, ob sie wiederkehrenden Trajektorien bzw. nicht wiederkehrenden Trajektorien besitzen. Die meisten Kometen fallen in die zweite Rubrik. Eine Ausnahme ist der halleyische Komet, der einer wiederkehrenden Trajektorie folgt. Allgemein gilt nach einem Theorem von Poincaré²⁴ (engl.: *Poincaré's recurrence theorem*), dass ein Phasenraumpunkt, der sich in einem endlichen Phasenraum bewegt, beliebig genau und beliebig häufig jede zugängliche Systemkonfiguration einnimmt. Allerdings ist für Systeme mit schon wenigen Teilchen die für eine Rückkehr notwendige Zeitspanne astronomisch.

Abhängig davon, ob eine Hamilton Funktion die Bewegung bestimmt oder nicht, unterscheidet man hamiltonsche von nichthamiltonschen Systemen. Wir interessieren uns hier für die hamiltonschen Systeme. Beispiele für die zweite Sorte sind dissipati-

²⁴Poincaré, Jules Henri, französischer Physiker und Mathematiker, *Nancy 29.4. 1854, †Paris 17.7. 1912, Professor in Caen und Paris, begründete die moderne Topologie, lieferte Beiträge zur Lösung des Dreikörperproblems und von Differenzialgleichungen. Er arbeitete u.a. zur Himmelsmechanik, Thermodynamik, Elektrizitätstheorie und Optik und gilt als einer der Vorläufer der einsteinschen (speziellen) Relativitätstheorie. Von besonderer Bedeutung waren seine Bücher über die Grundlagen der Wissenschaft (Wissenschaft und Hypothese, 1901; Der Wert der Wissenschaft, 1905). http://un2sg4.unige.ch/athena/html/fran_fr.html

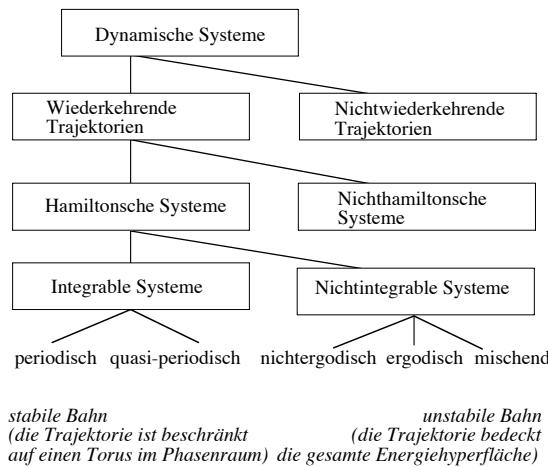


Abbildung 9.4: Klassifikationsschema für dynamische Systeme.

ve Systeme bzw. Systeme, in denen Reibung auftritt. In (geschlossenen) hamiltonschen Systemen gilt $\mathcal{H} = \text{konstant}$. Die hamiltonschen Systeme unterscheiden wir schließlich danach, ob sie integrierbar, d. h. analytisch lösbar, sind oder nicht. In integrierbaren Systemen ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Zahl der unabhängigen Erhaltungsgrößen.

Integrierbare Systeme werden unterteilt in solche mit periodischer Bewegung und solche mit quasiperiodischer Bewegung. Periodisch bedeutet, dass sich die Phasenraumtrajektorie in endlicher Zeit „schneiden“ wird. Quasiperiodische Bewegung dagegen illustrieren wir an einem Beispiel. Ein System besteh aus zwei nicht gekoppelten harmonischen Oszillatoren in einer Dimension. D. h. der Phasenraum ist vierdimensional. Die Konstanz der Energie des ersten Oszillators, E_1 , beschränkt die Systemtrajektorie auf ein Volumen im Phasenraum. Die Konstanz der Energie des zweiten Oszillators, E_2 , beschränkt die Systemtrajektorie weiterhin auf eine geschlossene Fläche im Phasenraum. Man kann ausprobieren, dass ein rationales Verhältnis der Oszillatorfrequenzen auf eine periodische Bewegung führt. Ein irrationales Verhältnis dagegen liefert eine Trajektorie, die sich nicht schneidet, aber auf die oben genannte Fläche beschränkt bleibt, und diese dicht bedeckt. Dies nennt man quasiperiodisch. Man beachte aber, dass die genannte Fläche

nur einen verschwindend geringen Teil des Phasenraumsegments ausmacht, das der Konstanz der Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ entspricht! Daher sind die Trajektorien solcher Systeme, wie das in diesem Beispiel, nicht für Berechnungen von Mittelwerten im Sinne der Statistischen Mechanik geeignet, wo man davon ausgeht, dass jeder Phasenraumpunkt auf der Gesamtenergiehyperfläche beitragen kann.

Die weitere Unterscheidung der nichtintegrierbaren Systeme in Abbildung 9.4 basiert auf der Idee der Stabilität, d. h. wie reagiert eine Phasenraumtrajektorie auf kleine Störungen. Damit ein System aus irgendeinem Nichtgleichgewichtszustand ins Gleichgewicht evolvieren kann, muss seine Phasenraumtrajektorie instabil gegenüber kleinen Störungen sein. Was damit gemeint ist illustriert die Abbildung 9.5. Die ungestörten Trajektorien werden zum Zeitpunkt $t = 0$ leicht gestört. d. h. der entsprechende Phasenraumpunkt wird geringfügig um $\delta(0)$ verschoben. Die Abbildung zeigt unterschiedliche Systemantworten auf diese Störung. Die Differenz der gestörten Trajektorie zur ungestörten Traktorie zur Zeit t ist dabei $\delta(t)$. Dargestellt sind von oben nach unten die Fälle

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta(t) = c\delta(0) & \text{stabil} \\ \delta(t) = ct\delta(0) & \text{quasiperiodisch} \\ \delta(t) = \delta(0)e^{\lambda t} & \text{unstabil} \end{cases} \quad (9.37)$$

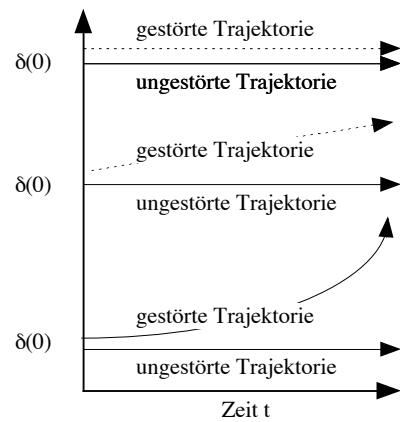


Abbildung 9.5: Die ungestörten Trajektorien werden zum Zeitpunkt $t = 0$ leicht gestört

Damit ein isoliertes System aus dem Nichtgleichgewicht ins Gleichgewicht evolvieren kann, müssen

zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss die gesamte Energiehyperfläche zugänglich sein. Zweitens muss die Bewegung wenigstens mischend sein, damit auch alle beliebig kleinen Segmente der Energiehyperfläche erreicht werden. Mischend bedeutet soviel wie „wenigstens unstabil“. Systeme, die diese beiden Bedingungen nicht erfüllen, heißen nichtmischend. Quasiperiodische Bewegung ist daher nichtmischend. Obwohl die gestörte Trajektorie langsam von der ursprünglichen Trajektorie abweicht, ist die Trajektorie jedoch in jedem Fall auf einen Teil der Energiehyperfläche beschränkt.

Die beiden oben genannten Bedingungen sind auch Grundlage der schon erwähnten Ergodenhypothese. Diese besagt, dass der Zeitmittelwert definiert durch Gl. (9.12) tatsächlich dem Ensemblemittelwert definiert durch Gl. (9.30) gleichzusetzen ist!

9.4 Wege ins Chaos

Kommen wir nun zurück zur ursprünglichen Frage: Wie führen deterministische Bewegungsgleichungen auf „zufällige“ Phasenraumtrajektorien? Wirklich beantworten können wir die Frage an dieser Stelle nicht. Wir können aber zwei Beispiele betrachten, die trotz ihrer Einfachheit den Effekt zeigen.

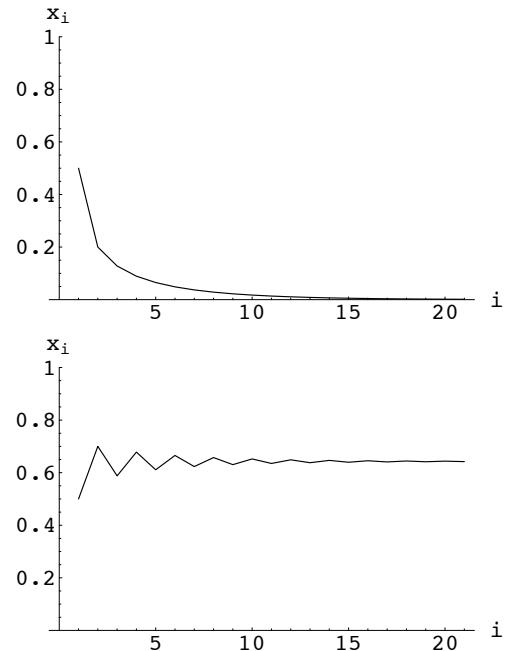
Das erste Beispiel hat nichts mit Mechanik zu tun. Es ist die so genannte *logistic map*,

$$x_{i+1} = 4rx_i(1 - x_i), \quad (9.38)$$

eine einfache nichtlineare Abbildung. Diese erzeugt Zahlenfolgen x_1, x_2, x_3, \dots , ausgehend von $x_1 \in [0, 1]$,²⁵ in Abhängigkeit von r . Für $r < 0.25$ ist 0 ein attraktiver bzw. stabiler Fixpunkt (warum?). D. h. eine Störung des Anfangspunktes wirkt sich langfristig nicht aus (vgl. Abbildung 9.5). Es gilt also $x^* \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$. Bei $r = 0.25$ hört 0 auf, der stabile Fixpunkt zu sein, stattdessen ist dieser jetzt > 0 . Abbildung 9.6 illustriert dies für $r = 0.2$ und $r = 0.7$. Man kann den Einfluss von r systematisch untersuchen und gewinnt dadurch überraschende Einsichten. Wir illustrieren dies hier lediglich anhand einer Auftragung des Exponenten λ in $|\Delta x_i| \sim |\Delta x_1| \exp[(i-1)\lambda]$ ²⁶. Abbildung 9.7 zeigt

²⁵Damit gilt ebenfalls $x_i \in [0, 1] \forall i > 1$.

²⁶Die Größe λ wird auch Lyapunov Exponent genannt.



```
f=4 r # (1-#) &
ListPlot[NestList[f,Nest[f,.5,0],20],PlotRange->{0,1},
PlotJoined->True,AxesLabel->{i,\!\\(x\\_i\\)}]
```

Abbildung 9.6: Graphische Darstellung zweier Zahlenfolgen der Gl. (9.38), ausgehend von $x_1 = 0.5$. Oben links: $r = 0.2$. Oben rechts: $r = 0.7$. Schon eine geringe Zahl von Iterationen führt nahe an den Fixpunkt heran. Unten: *Mathematica*-Programm.

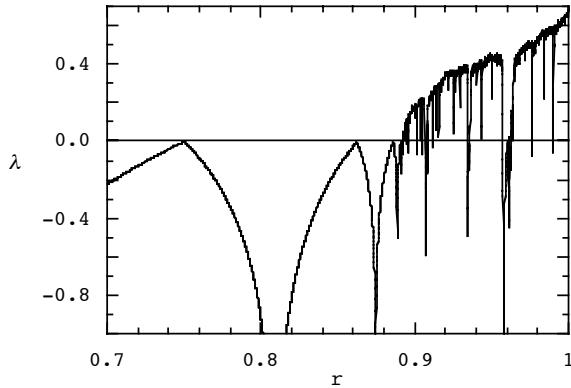
λ als Funktion von r (berechnet mit $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |4r(1-2x_i)|$ ²⁷). Bei $r = 0.2$ und $r = 0.7$ ist λ wie erwartet negativ. Je negativer λ ist, um so größer ist die Stabilität. Aber es gibt auch Bereiche mit positivem λ ! D. h. ein kleiner Unterschied beim Startwert wächst exponentiell an. Abbildung 9.8 illustriert das Verhalten für positive Werte von λ am Beispiel $r = 1$. Es ist keine offensichtliche Regelmäßigkeit feststellbar²⁸.

Betrachten wir jetzt ein einfaches Beispiel aus der Mechanik²⁹. Abbildung 9.9 (a) zeigt ei-

²⁷Können Sie sich denken, wie diese Formel zustande kommt (vgl. H. Gould, J. Tobochnik (1996) *An Introduction to Computer Simulation Methods*. Addison-Wesley).

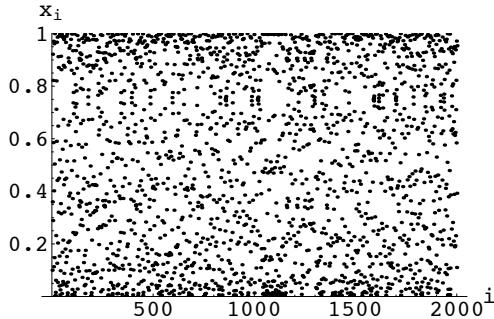
²⁸Allerdings könnte diese Graphik auf einem baugleichen Computer exakt reproduziert werden. Man spricht daher vom deterministischen Chaos.

²⁹Die folgenden Abbildungen wurden aus J.M. Haile (1992) *Molecular Dynamics Simulation*. Wiley Interscience

Abbildung 9.7: λ aufgetragen gegen r .

ne kreisrunde Arena mit harten Wänden. Im Innenraum dieser Arena wird ein Kugelteilchen an einem beliebigen Ort angestoßen. Gerade Bahnstücke werden durch die Kollision mit den Wänden gemäß Energie- und Impulserhaltung umgelenkt. Insgesamt ergibt sich ein regelmäßiges Muster. Abbildung 9.9 (b) zeigt die Situation nach einer leichten Störung der Anfangsbedingungen (bei erhaltener Energie). Es resultiert ein sehr ähnlicher Stern. Der gemäß der Gleichung $d(t) = \sqrt{(x_a(t) - x_b(t))^2 + (y_a(t) - y_b(t))^2}$ bestimmte Abstand zwischen ursprünglicher und gestörter Trajektorie wächst linear (vgl. Abbildung 9.9 (c)). Die gleichen drei Paneele zeigt die Abbildung 9.10. Der einzige Unterschied ist die Wand der Arena, die nun aus harten Kugeln besteht. In diesem Fall wächst $d(t)$ exponentiell.

Der Unterschied zwischen beiden Arenen ist nochmals in Abbildung 9.11 illustriert, die die jeweiligen Trajektorien nach 400 Kollisionen mit der Wand zeigt. D. h. im Fall der glattwandigen Arena, wird der Positionsraum nicht wirklich gut durchmustert. Anderer Fall führen „molekulare Wechselwirkungen“ zu einer sehr instabilen Trajektorie, die zumindest optisch eine zufriedenstellendere Durchmusterung liefert. All dies ist natürlich kein Beweis, aber es zeigt, wie selbst die Trajektorie eines einfachen mechanischen Systems „zufällig“ sein kann.

Abbildung 9.8: Graphische Darstellung einer Zahlenfolge der Gl. (9.38), ausgehend von $x_1 = 0.1$ für $r = 1$.

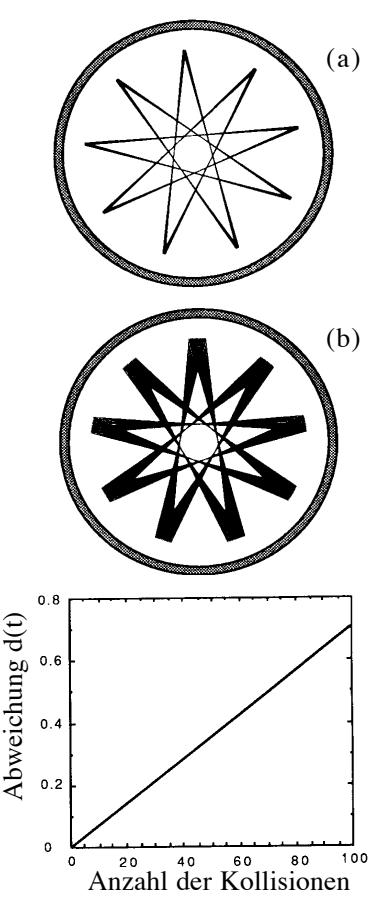


Abbildung 9.9: Teilchen in der glattwandigen Arena [7].

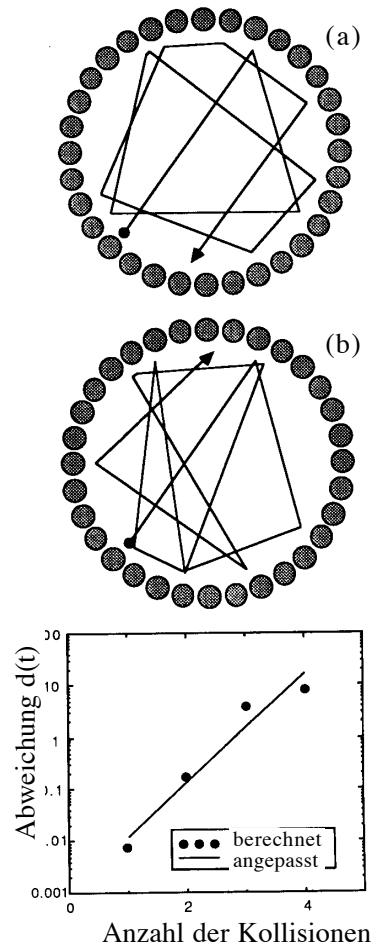


Abbildung 9.10: Teilchen in der Arena mit Wänden aus harten Kugeln [7].

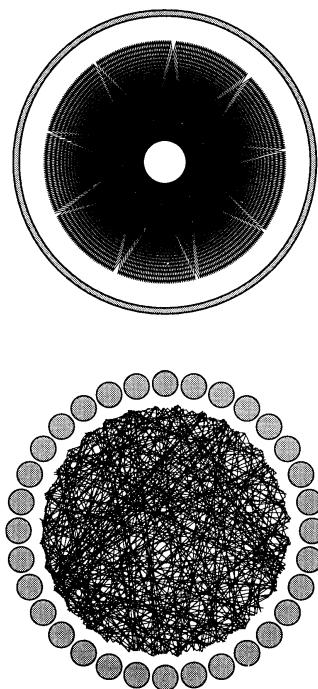


Abbildung 9.11: Vergleich der quasiperiodischen mit der chaotischen Trajektorie. Die Pfade sind Trajektorien im Konfigurationsraum für die beiden im Text beschriebenen Modelle [7].

Kapitel 10

Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Hier betrachten wir die Mechanik von als Kontinua aufgefaßten festen Körpern. Diese werden durch äußere Kräfte elastisch deformiert. Elastische Deformationen sind reversibel. Ist dies nicht vollständig der Fall spricht man dagegen von plastischen Deformationen. In Abbildung 10.1 bezeichnet \vec{r} einen Punkt im nicht deformierten Körper, während \vec{r}' die Lage des Punktes im deformierten Körper bezeichnet. Die Differenz

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \quad (10.1)$$

wird als Verschiebungsvektor bezeichnet. Insbesondere ist $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ in der Regel von Ort zu Ort unterschiedlich.

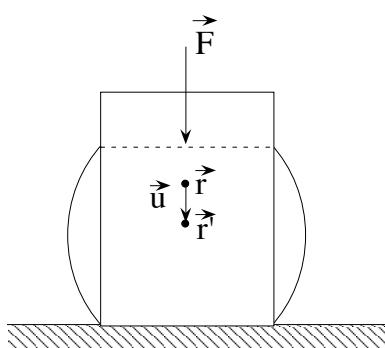


Abbildung 10.1: Illustration des Verschiebungsvektors \vec{u} .

10.1 Verzerrungs- und Spannungstensor

Herleitung des Verzerrungstensors \boldsymbol{u} :

Der Abstand zweier (infinitesimal) benachbarter Punkte im Körper ist vor der Deformation

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

bzw. ausgedrückt mittels der Summenkonvention

$$dl = \sqrt{dx_i^2} .$$

Nach der Deformation dagegen gilt

$$dl' = \sqrt{dx'_1{}^2 + dx'_2{}^2 + dx'_3{}^2}$$

bzw.

$$dl' = \sqrt{dx'_i{}^2} .$$

Daraus folgt mit Gl. (10.1)

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (dx_i + du_i)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right)^2 \\ &= dx_i^2 \\ &\quad + 2 \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k}_{i \longleftrightarrow k} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l}_{i \longleftrightarrow l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= dl^2 \\
&\quad + 2 \left(\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k + \frac{1}{2} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_i dx_k}_{= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k} \right) \\
dl'^2 &= dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k. \tag{10.2}
\end{aligned}$$

Hier ist

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \tag{10.3}$$

der Verzerrungstensor \mathbf{u} in Komponentenschreibweise.

Einige Bemerkungen zu \mathbf{u} :

i) Der Verzerrungstensor ist symmetrisch, d. h. $u_{ik} = u_{ki}$.

ii) Er kann daher (in jedem Punkt!) diagonalisiert werden. D. h.

$$\begin{aligned}
dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k \\
&= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 \\
&\quad + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2.
\end{aligned}$$

Die Indizes 1, 2 und 3 bezeichnen Koordinaten entlang der Hauptachsen. Die $u^{(i)}$ sind die Hauptwerte von u . Es gilt somit

$$dx'_i = \sqrt{(1 + 2u^{(i)})} dx_i. \tag{10.4}$$

Die gesamte lokale Längenänderung ist also eine unabhängige Überlagerung aus Längenänderungen entlang der Hauptachsen.

iii) Die relativen Längenänderungen können i. A. als klein angenommen werden, d. h.

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \ll 1. \tag{10.5}$$

Damit folgt mittels Gl.(10.4)

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)} \ll 1. \tag{10.6}$$

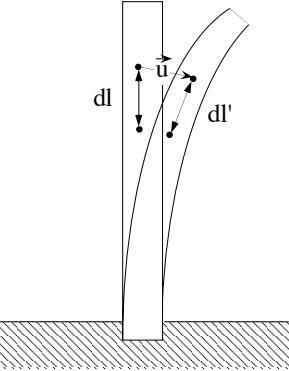


Abbildung 10.2: Illustration des Unterschiedes zwischen Verschiebung $\vec{u}(\vec{r})$ und Verzerrung $dl - dl'$, anhand der Biegung eines an seiner Basis eingespannten elastischen Balkens.

Den Unterschied zwischen Verschiebung und Verzerrung illustriert Abbildung 10.2. Während die Verschiebungsvektoren $\vec{u}(\vec{r})$ betragsmäßig groß sein können, sind die entsprechenden Verzerrungen im Sinne der Ungleichung (10.5) immer noch klein. Wenn ein Körper kleinen Deformationen unterliegt, sind sämtliche Komponenten von \mathbf{u} , die ja die relativen Längenänderungen im Körper charakterisieren, kleine Größen (vgl. (10.6)), was wiederum die Näherung

$$u_{ik} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \tag{10.7}$$

impliziert.

iv) Die relative lokale Volumenänderung aufgrund der Deformation ist gegeben durch $(dV' - dV)/dV$. Hier ist

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

das Volumenelement im deformierten Zustand und

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

bezieht sich auf das gleiche Volumenelement vor der Deformation. Die x_i sollen dabei Hauptachsenkoordinaten sein. Mit Gl. (10.4) folgt

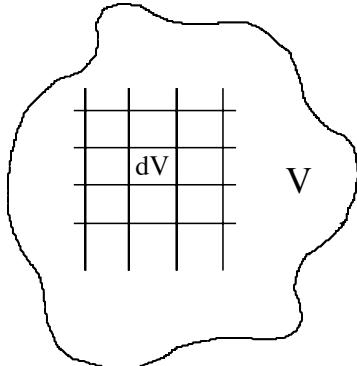


Abbildung 10.3: Skizze zum Spannungstensor.

bzw.

$$\int f_i dV$$

für jede Komponente. Man beachte, dass \vec{f} eine Kraftdichte mit der Einheit Kraft pro Volumen ist. Mit der Definition

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (10.10)$$

führen wir den (inneren) Spannungstensor ein. Analog zum gaußschen Satz aus der Vektoranalysis,

$$\begin{aligned} dV' &= \sqrt{1 + 2u^{(1)}} \sqrt{1 + 2u^{(2)}} \sqrt{1 + 2u^{(3)}} \\ &\approx \left(1 + u^{(1)}\right) \left(1 + u^{(2)}\right) \left(1 + u^{(3)}\right) dV \\ &\approx dV \underbrace{\left(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}\right)}_{=Sp(\mathbf{u})}. \end{aligned}$$

Hier ist $Sp(\mathbf{u})$ die Spur von \mathbf{u} . Da diese Darstellungsunabhängig ist, gilt

$$dV' = dV (1 + u_{ii}) \quad (10.8)$$

bzw. für die relative lokale Volumenänderung

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{ii} = Sp(\mathbf{u}). \quad (10.9)$$

Herleitung des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$:

Die bei der Deformation eines Körpers auftretenden Kräfte in seinem Inneren nennt man innere Spannungen. Diese versuchen den Körper in seinen ursprünglichen Gleichgewichtszustand zurückzuverzusetzen. Die Kräfte, von denen hier die Rede ist, sind auf der Längenskala der Elastizitätstheorie (Kontinuumslimes!) kurzreichweitig (Reichweite ca. einige Moleküldurchmesser).

Wir betrachten ein Teilvolumen V (vgl. Skizze 10.3) und die auf dieses wirkende Nettokraft

$$\int \vec{f} dV$$

Diese Möglichkeit der Umwandlung des Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral begründet auch die Definition (10.10), denn es sollten nur Beiträge von der Oberfläche von V zur Nettokraft auf V beitragen. Die Spannungen an den inneren Grenzflächen, in der Skizze 10.3 sind diese durch die Gitterzellen angedeutet, kompensieren sich im elastischen Gleichgewicht.

Anmerkung: Eigentlich sollten die x'_i verwendet werden, da sich die Rechnung auf den deformierten Körper bezieht. Die Verwendung von x_i ist aber ein Fehler höherer Ordnung.

Die Gleichgewichtsbedingungen für den deformierten Körper lauten

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (10.11)$$

Zusätzlich könnte eine äußere Kraft auf das Volumen insgesamt (Volumenkraft) einwirkt. Ist dies beispielsweise die Gravitation, dann gilt im Gleichgewicht

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 . \quad (10.12)$$

Hier ist \vec{g} die Gravitationsbeschleunigung, und ρ ist die Massendichte des Körpers. Im Gegensatz zur Gravitation als Volumenkraft gehen Oberflächenkräfte durch Randbedingungen ein. Im Falle einer externen Oberflächenkraft \vec{P} gilt

$$P_i dA - \sigma_{ik} dA_k = 0 .$$

Hier ist P_i die Komponente in Richtung i . Und $-\sigma_{ik} dA_k$ ist die entsprechend in negative i -Richtung weisende Komponente der Spannung an der Oberfläche. Diese Gleichung können wir mithilfe des nach außen gerichteten Oberflächeneinheitsvektors \vec{n} als

$$\sigma_{ik} n_k = P_i \quad (10.13)$$

schreiben (auf der gesamten Oberfläche des Körpers).

10.2 Freie Energie

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist die Verbindung zwischen dem Verzerrungstensor und dem Spannungstensor.

Thermodynamik der Deformation:

In einer Kontinuumstheorie des elastischen Körpers muss eine Größe berücksichtigt werden, die uns in der Mechanik bisher nicht begegnet ist¹. Offensichtlich ist die Elastizität eines Materials von seiner Temperatur T abhängig. Dies kommt daher, dass wir uns den Körper aus Volumenelementen aufgebaut denken, von denen jedes eine riesige Anzahl von Atomen bzw. Molekülen enthält, über die wir im Prinzip mitteln. Diese Atome und Moleküle führen thermische Bewegungen aus, die die elastischen Eigenschaften temperaturabhängig machen. Weder die lagrangesche Funktion noch die Hamilton Funktion stellen eine Verbindung zur Temperatur her. Wir benötigen hier eine neue Beschreibung

¹Wir sehen dabei mal von dem Abschnitt 6.2 ab.

der Materie bzw. ihrer mechanischen Eigenschaften. Diese liefert die Thermodynamik. Die Thermodynamik ist eine makroskopische Theorie der Materie. In diesem Sinne ist die Elastizitätstheorie ein Teil der Thermodynamik und weniger eine Fortsetzung der Mechanik².

Die Thermodynamik ist eine phänomenologische Theorie, d. h. sie baut auf gut gesicherten experimentellen Erfahrungen auf. Diese sind in den Hauptsätzen der Thermodynamik formuliert³. Der erste Hauptsatz beschreibt die Konstanz der Energie E eines isolierten Systems:

$$dE = dq + dw . \quad (10.14)$$

dq ist die dem System zugeführte Wärme(menge), und dw ist die am System geleistete Arbeit. Der zweite Hauptsatz besagt, dass die Größe S , die Entropie des Systems, bei einem spontan ablaufenden Prozess zunimmt. Mathematisch beschreibt dies die Clausius Ungleichung⁴

$$dS \geq \frac{dq}{T} . \quad (10.15)$$

Dies kann gleichzeitig als thermodynamische Definition der Temperatur aufgefasst werden⁵. Die Kombination aus (10.14) und (10.15) liefert

$$d\mathcal{F} \equiv dE - TdS \leq 0 . \quad (10.16)$$

Diese Ungleichung setzt voraus, dass T und das Volumen V des Systems konstant sind. Wenn wir

²Diese Uneinheitlichkeit wird erst in der Statistischen Mechanik wieder beseitigt.

³Eine elementare aber gute Einführung gibt P.W. Atkins, *Physikalische Chemie*, VCH; siehe auch R. Hentschke, *Statistische Mechanik - Eine Einführung für Physiker, Chemiker und Materialwissenschaftler*, Vorlesungsskript. Siehe insbesondere das Ergänzungsskript unter dem Link: http://constanze.materials.uni-wuppertal.de/Skripten/Skript_StatMech/Thermodynamics.pdf

⁴Claudius, Rudolf Julius Emanuel, Physiker, *Köslin (heute Koszalin) 2.1.1822, †Bonn 24.8.1888; Mitbegründer der mechanischen Wärmetheorie; formulierte den 2. Hauptsatz der Thermodynamik und führte den Begriff der Entropie ein. ©Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, Mannheim, 2004

⁵Die Thermodynamik kennt keine thermische Bewegung von Molekülen und Atomen, da sie keine Moleküle und Atome kennt!

hier von Volumen reden, dann meinen wir auch die Form. Außerdem wird keine andere Art von Arbeit (Nicht-Volumenarbeit) geleistet. D. h. bei einem unter diesen Bedingungen spontan im System verlaufenden Prozess (z.B. können chemische Reaktionen ablaufen) gilt

$$d\mathcal{F}|_{T,V,\dots} \leq 0 . \quad (10.17)$$

Diese Ungleichung ist das wichtigste Resultat der Thermodynamik, auf der alle ihre Folgerungen aufbauen⁶! Ein spontan ablaufender Prozess verläuft in die Richtung, in der die freie Energie reduziert wird. Erst wenn der spontane Prozess abgeklungen ist, und sich im zeitlichen Mittel kein Vorgang (z.B. chemische Reaktion) mit Vorzugsrichtung mehr ausmachen lässt, gilt das Gleichheitszeichen. Man spricht vom chemischen Gleichgewicht⁷. Es ist diese Situation, die wir hier betrachten. Die Größe

$$\mathcal{F}(T, V) = E - TS , \quad (10.18)$$

deren Definition die Ungl. (10.16) nahelegt, heißt freie Energie. Sie ist die Funktion, die uns erlaubt, u_{ik} mit σ_{ik} zu verbinden.

Im Gleichgewicht verbinden wir (10.14) und (10.15) zur so genannten Fundamentalgleichung der Thermodynamik:

$$dE = TdS + dw . \quad (10.19)$$

Kombiniert mit $d\mathcal{F} = dE - d(TS) = dE - TdS - SdT$ folgt sofort

$$d\mathcal{F} = -SdT + dw . \quad (10.20)$$

Berechnen wir dw ! Die Arbeit, die von den Kräften der inneren Spannungen bei einer kleinen Änderung der Verschiebung um δu_i (reversibler Prozess, d. h. Gleichgewicht) geleistet wird, ist

⁶Vom Prinzip her ähnlich wie im Fall der Wirkung haben wir hier eine Funktion vorliegen, deren Minimum uns neue Naturgesetze liefert. Diese Gesetze bestehen aus Gleichungen zwischen den Größen T , P (Druck), V , E , S , \mathcal{F} , ... bzw. ihren wechselseitigen Ableitungen. Die Vorhersagen der Thermodynamik umfassen u.a. das Massenwirkungsgesetz, die Gefrierpunkterniedrigung, die Siedepunkterhöhung, die Phasenregel, ...

⁷Allerdings treten weiterhin so genannte thermische Schwankungen um das Gleichgewicht herum auf.

$$\begin{aligned} \int f_i \delta u_i dV &= \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV \\ &\stackrel{\text{p. I.}}{=} \underbrace{\oint \sigma_{ik} \delta u_i dA_k}_{=0(*)} - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV \\ &\stackrel{**}{=} -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}}_{\cong 2u_{ik}} \right) dV \\ &= - \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV \end{aligned}$$

(*: wenn die Fläche im Unendlichen nicht deformiert ist. **: siehe ⁸). Daraus folgt

$$-\delta w = -\sigma_{ik} \delta u_{ik} . \quad (10.21)$$

Das Minuszeichen vor δw kommt daher, dass wir mit $+\delta w$ die Arbeit bezeichnet hatten, die am System geleistet wird. Hier ist $-\delta w$ die vom System geleistete Arbeit! Zusammen mit Gl. (10.20) erhalten wir

$$d\mathcal{F} = -SdT + \sigma_{ik} du_{ik} \quad (10.22)$$

⁹ und daher

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \Big|_T . \quad (10.23)$$

Freie Energie isotroper Körper:

⁸Hier verwenden wir die Symmetrie des Spannungstensors ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$). Das Argument hierfür lautet wir folgt. Das Drehmoment auf ein bestimmtes Volumen des Körpers ist

$$\begin{aligned} \int (f_i x_k - f_k x_i) dV &= \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV \\ &= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int (\sigma_{il} \delta_{kl} - \sigma_{kl} \delta_{il}) dV \\ &= \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dA_l - \int (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV . \end{aligned}$$

Das Volumenintegral muss verschwinden, d. h. $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, damit das Drehmoment nur von den Oberflächenkräften herrührt.

⁹Hier sind die Größen F und S pro Volumen gerechnet, d. h. es handelt sich um die freie Energiedichte bzw. Entropiedichte.

Jetzt werden wir versuchen, einen plausiblen Ausdruck für die freie Energie ausgedrückt durch den Verzerrungstensor aufzustellen, um dann mittels Gl. (10.23) die Verbindung zum Spannungstensor herzustellen.

Wir gehen hier davon aus, dass (wie oben diskutiert) die u_{ik} kleine Größen sind. Es liegt dann nahe, die freie Energie \mathcal{F} ausgehend von ihrem Wert $\mathcal{F}_o(T)$ im undeformierten Zustand als eine Entwicklung in Potenzen der u_{ik} darzustellen:

Linearer Term - Gäbe es einen in u_{ik} linearen Term, so dass $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \Big|_T \neq 0$ im Grenzfall $u_{ik} \rightarrow 0$ die Folge wäre, dann gilt im undeformierten Körper $\sigma_{ik} \neq 0$. Dies macht keinen Sinn, und daher müssen lineare Beiträge verschwinden.

Quadratischer Term - \mathcal{F} ist eine skalare Funktion. D. h. die Terme in der Entwicklung müssen ebenfalls Skalare sein. Aus dem symmetrischen Tensor 2ter Stufe u_{ik} lassen sich zwei unabhängige Skalare konstruieren. Dies ist einmal die Spur u_{ii} und außerdem die Summe der Quadrate der Komponenten u_{ik}^2 ¹⁰.

Bis einschließlich dem quadratischen Term gilt daher für isotrope Medien

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o(T) + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2 . \quad (10.24)$$

λ und μ sind die Lamé Koeffizienten¹¹. Neben $\mathcal{F}_o(T)$ sind auch die Lamé Koeffizienten temperaturabhängig. Sie sind außerdem Materialkonstanten, d. h., sie hängen von dem betrachteten Material ab.

Aufgrund von Gl. (10.24) gilt

$$u_{ik} \frac{\partial(\mathcal{F} - \mathcal{F}_o)}{\partial u_{ik}} = 2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_o) ,$$

und mit (10.23) folgt

¹⁰gilt nur für isotrope Körper

¹¹Im allgemeinen Fall lautet diese Gleichung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o(T) + \frac{\lambda_{ijkl}}{2} u_{ij} u_{kl} . \quad (10.25)$$

Die λ_{ijkl} heißen Elastizitätsmoduln oder auch elastische Konstanten. In anisotropen Medien ist die Zahl der verschiedenen Moduln (maximal 21) und der in der freien Energie auftretenden Terme abhängig von der Symmetrie des Mediums. Eine ausführliche Diskussion hierzu wird in §10 der Referenz [2] präsentiert.

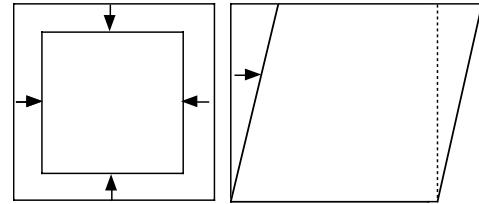


Abbildung 10.4: Links: reine Dilation - Volumenänderung ohne Formänderung; Rechts: reine Scherung - Formänderung ohne Volumenänderung.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} . \quad (10.26)$$

Es ist möglich und sinnvoll die freie Energie in eine Form zu bringen, in der $\frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2$ zerlegt wird in eine Summe, in der der erste Term einer reinen Scherung und der zweiten Term einer reinen Dilatation entspricht. Scherung bedeutet, dass es bei der Deformation keine Volumenänderung gibt, während Dilatation bedeutet, dass das Volumen nicht jedoch die Form des Körpers sich ändert (siehe Abbildung 10.4).

Zu diesem Zweck schreiben wir zunächst

$$u_{ik} = \underbrace{\left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)}_{(*)} + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} . \quad (10.27)$$

Hier ist die Summe der Diagonalelemente des Beitrags (*) ist gleich Null. Er liefert also keinen Beitrag zur Volumenänderung, die durch u_{ii} gegeben ist (vgl. Gl. (10.8)), und entspricht daher einer reinen Scherung. Aus Gl. (10.27) folgt für u_{ik}^2

$$\begin{aligned} u_{ik}^2 &= (\dots)^2 + \frac{1}{9} \underbrace{\delta_{ik} \delta_{ik}}_{=\delta_{ii}=3} u_{ll}^2 \\ &\quad + \underbrace{\frac{2}{3} \underbrace{u_{ik} \delta_{ik}}_{u_{ll}} u_{ll} - \frac{2}{9} \underbrace{\delta_{ik} \delta_{ik}}_3 u_{ll}^2}_{=0} \\ &= (\dots)^2 + \frac{1}{3} u_{ll}^2 . \end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{1}{2} \kappa u_{ll}^2 . \quad (10.28)$$

Den Koeffizienten μ nennt man Schermodul, und

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (10.29)$$

ist der Kompressionsmodul. Damit die Stabilität gewährleistet ist muss $\mu > 0$ und $\kappa > 0$ gelten. Ist dies nicht der Fall, dann treten spontane und unbegrenzte Verzerrungen auf, da diese gemäß Ungl. (10.17) zu einer Erniedrigung der freien Energie führen.

Berechnung von σ_{ik} aus $\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}}|_T$:

Aus Gl. (10.28) folgt

$$d\mathcal{F} = \kappa u_{ll} du_{ll} + 2\mu (\dots) d(\dots) .$$

Mittels $(\dots) \delta_{ik} = 0$ erhalten wir

$$d\mathcal{F} = \left[\kappa u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) \right] du_{ik}$$

und

$$\sigma_{ik} = \kappa u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) . \quad (10.30)$$

Gl. (10.30) erlaubt σ_{ik} aus u_{ik} im Fall isotroper fester Körper zu bestimmen.

Verzerrungstensor u_{ik} als Funktion von σ_{ik} :

Es gilt

$$\sigma_{ll} = 3\kappa u_{ll} \quad \text{bzw.} \quad u_{ll} = \frac{1}{3\kappa} \sigma_{ll} \quad (10.31)$$

und damit

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{9\kappa} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right)$$

bzw.

$$u_{ik} = \frac{\sigma_{ll} \delta_{ik}}{9\kappa} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right) \quad (10.32)$$

D. h. der Verzerrungstensor ist eine lineare Funktion des Spannungstensors bzw. die Deformation ist den angreifenden Kräften proportional (hookesches Gesetz¹²)

Bemerkung: Bei einer hydrostatischen¹³ Kompression wirkt auf ein Flächenelement die Kraft $-\delta P dA_i$. Hier ist δP der (kleine) hydrostatische Druck. Das negative Vorzeichen zeigt an, dass die Kompressionskraft aufgrund von δP entgegengesetzt zur Oberflächennormale wirkt. Diese Kraft ausgedrückt durch den Spannungstensor lautet $\sigma_{ik} dA_k$ bzw. $\sigma_{ik} dA_k = -\delta P dA_i = -\delta P \delta_{ik} dA_k$ und daher

$$\sigma_{ik} = -\delta P \delta_{ik} . \quad (10.33)$$

Es folgt aus (10.31)

$$u_{ii} = -\frac{\delta P}{\kappa} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}|_T = -\frac{1}{\kappa} .$$

Hier ist κ^{-1} die isotherme Kompressibilität.

Elastizitätsmodul und poissonsche Zahl:

Wir betrachten eine einfache Streckung (bzw. Kompression) eines runden Stabes in z -Richtung hervorgerufen durch eine Kraft \vec{P} bzw. $-\vec{P}$ auf die Stabenden, wie sie in Abbildung 10.5 illustriert ist. Die Verzerrung u_{ik} soll innerhalb des Stabes konstant sein. Aus der Gleichgewichtsbedingung (10.13) folgt auf dem Stabmantel

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y &= 0 \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y &= 0 \\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y &= 0 \end{aligned}$$

¹²Hooke, Robert, englischer Naturforscher, *Freshwater (Isle of Wight) 18.7. 1635, †London 3.3. 1703; verbesserte zahlreiche physikalische Geräte (Uhren, Luftpumpe, Mikroskop) und entdeckte 1678 das nach ihm benannte hookesche Gesetz (Elastizität). Hooke führte den Namen Cellula (Zelle) in die Wissenschaft ein. <http://www.ucmp.berkeley.edu/history/hooke.html> ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

¹³überall gleichmäßig

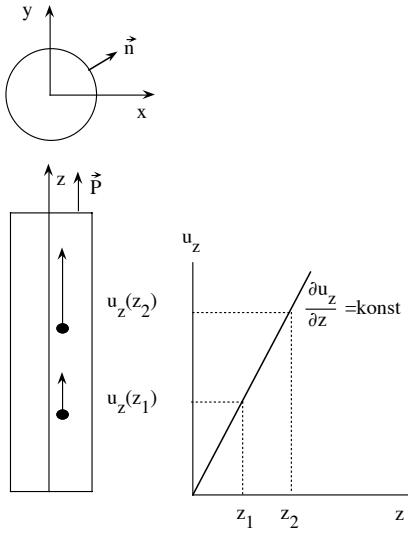


Abbildung 10.5: Einfache Streckung eines runden Stabes. Man beachte: $u_{zz}(z) = \partial u_z(z)/\partial z \approx (u_z(z_2) - u_z(z_1))/(z_2 - z_1)$ mit $z \approx z_1 \approx z_2$.

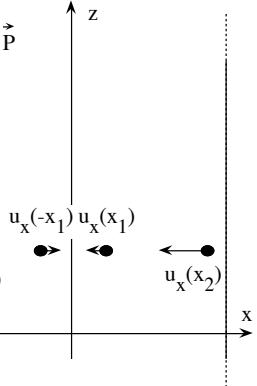


Abbildung 10.6: Querkontraktion des obigen Stabes. Man beachte: $u_{xx}(x) = \partial u_x(x)/\partial x \approx (u_x(x_2) - u_x(x_1))/(x_2 - x_1) < 0$ mit $x \approx x_1 \approx x_2$.

¹⁴. Damit aber sind alle $\sigma_{ik} = 0$ auf dem Mantel.

An den Enden dagegen gilt

$$\sigma_{zz} = P .$$

Aus (10.32) folgt

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3\kappa} \right) P$$

bzw.

$$u_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3\kappa} \right) P .$$

Für $i \neq j$ gilt $u_{ij} = 0$.

Die Beziehung

$$\epsilon = \frac{P}{u_{zz}} \quad (10.34)$$

definiert den so genannten E - bzw. Youngs-Modul. D. h.

¹⁴Zur Notation: σ_{xx} , σ_{xy} , etc. ist äquivalent zu σ_{11} , σ_{12} , etc. Das Gleiche gilt für u_{xx} etc. D. h. $u_{xx} = u_{11}$ usw. Man beachte auch, dass beispielsweise $\delta_{ii} = 3$ aber $\delta_{11} = 1$ ist.

Die Komponenten u_{xx} und u_{yy} bestimmen die relative Querkontraktion. Abbildung 10.6 illustriert die Querkontraktion in der x - z -Ebene des obigen Stabes. Das negative Verhältnis der Querkontraktion zur longitudinalen Dehnung heißt Querkontraktionskoeffizient bzw. poissonsche Zahl:

$$\nu = -\frac{u_{xx}}{u_{zz}} \quad (10.36)$$

mit

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{3\kappa - 2\mu}{3\kappa + \mu} \quad (10.37)$$

¹⁵. Während die Definitionen (10.34) und (10.36) auch für anisotrope Materialien anwendbar sind, gelten die Beziehungen (10.35) und (10.37) nur in isotropen Medien. Aus $\kappa, \mu > 0$ folgt

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (\kappa = 0) \quad (\mu = 0) .$$

¹⁵Tritt bei der Dehnung des Stabes keine Volumenänderung auf, so gilt gemäß Gl. (10.9) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$. Mit $u_{xx} = u_{yy}$ folgt daraus $u_{xx} = -\frac{1}{2}u_{zz}$. D. h. in diesem Fall gilt $\nu = \frac{1}{2}$.

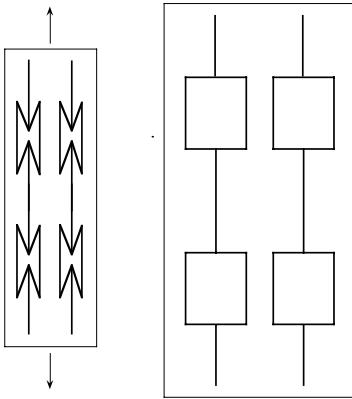


Abbildung 10.7: Prinzipskizze für die innere Struktur eines Stabes, der sich unter Zug verdickt.

Bemerkung: $\nu < 0$ bedeutet, dass sich der Stab bei Zug verdickt! Dies kommt in der Regel nicht vor, ist aber prinzipiell möglich. Wie ein solches Material im Prinzip aufgebaut sein könnte illustriert die Abbildung 10.7.

Es ist üblich, ϵ und ν statt κ und μ zu verwenden. D. h.

$$\mu = \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{\epsilon}{3(1-2\nu)} \quad (10.38)$$

liefert

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \left(u_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll}^2 \right) . \quad (10.39)$$

Die gezeigten Tabellen enthalten Zahlenwerte für den Elastizitätsmodul ϵ (hier: E) und die poissonsche Zahl ν (hier: μ) sowie für den Schub- bzw. Schermodul μ (hier: G) und den Kompressionsmodul κ (hier: K) aus Kuchling, *Taschenbuch der Physik*.

Liste nützlicher Formeln für isotrope Festkörper:

$$\sigma_{ik} = \frac{\epsilon}{1+\nu} \left(u_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll} \delta_{ik} \right) \quad (10.40)$$

$$u_{ik} = \frac{1}{\epsilon} ([1+\nu] \sigma_{ik} - \nu \sigma_{ll} \delta_{ik}) \quad (10.41)$$

Quelle: Kuchling, Taschenbuch der Physik

Tabellenanhang

589

Tabelle 9

Elastizitätsmodul E und Poisson-Zahl μ

	$E / 10^{10} \text{ N/m}^2$	$E / 10^5 \text{ kp/cm}^2$	μ
Aluminium	7,1	7,1	0,34
Blei	1,6	1,6	0,44
Bronze	11	11	
Duraluminium	7,3	7,4	0,34
Eis (-4 °C)	0,96	0,98	0,33
Eisen	21,1	21,5	0,28
Elektron	4,4	4,5	0,30
Glas, technisches	5...10	5...10	0,25
Quarz	7,5	7,6	0,17
Glimmer	16...21	16...21	
Gold	7,8	8	0,42
Grauguß	10,8	11	0,22
Holz	11...12	11...12	
Iridium	52,8	53,8	0,26
Kadmium	5,1	5,2	0,30
Kautschuk	10^-4	10^-4	
Keramik	0,05	0,051	
Klinker	2,7	2,8	
Konstantan	16,3	16,6	0,33
Kupfer	12,3	12,5	0,35
Magnesium	4,4	4,5	0,28
Manganin	12,4	12,6	0,33
Marmor	7,2	7,3	0,30
Messing	10,3	10,5	0,35
Molybdän	33	34	0,30
Neusilber	11,0	11,2	0,37
Stahl (1 C)	21	21	0,28
Nickel	21	21	0,31
Plexiglas	0,32	0,33	0,35
Platin	17,0	17,3	0,39
Polystyrol	0,32	0,33	0,35
Porzellan	5,8	5,9	0,23
Silber	7,9	8,1	0,37
Stahl, Chromnickel-	20	20	
Fedor-	22	22	0,29
V2A	19,1	19,5	
Titan	11	11	0,36

590 Tabellenanhang

Tabelle 9 (Fortsetzung)

Elastizitätsmodul E und Poisson-Zahl μ

	$E / 10^{10} \text{ N/m}^2$	$E / 10^5 \text{ kp/cm}^2$	μ
Vanadium	13	13	0,36
Vulkanfaser	0,49	0,50	
Wolfram	39	40	0,29
Zelloid	0,25	0,25	
Zink	9,8	10	0,25
Zinn	5,5	5,6	0,33
Zirkon	6,9	7,0	0,37

Tabelle 10

Schubmodul G und Kompressionsmodul K

	$G / 10^{10} \text{ N/m}^2$	$G / 10^5 \text{ kp/cm}^2$	$K / 10^{10} \text{ N/m}^2$	$K / 10^5 \text{ kp/cm}^2$
Aluminium	2,6	2,7	7,32	7,46
Blei	0,57	0,58	4,3	4,4
Bronze	4,5	4,6		
Duraluminium	2,7	2,8	7,5	7,7
Eis (-4 °C)	0,36	0,37	0,98	1,0
Eisen	8,2	8,4	17	17
Elektron	1,7	1,7	3,6	3,7
Gold	2,7	2,8	17	17
Grauguß	4,4	4,5	0,65	0,67
Iridium	21	21	36	37
Kadmium	2,0	2,0	4,36	4,44
Konstantan	6,2	6,3	15,8	16,1
Kupfer	4,55	4,64	13,6	13,9
Magnesium	1,72	1,75	3,32	3,39
Manganin	4,6	4,7	12	12
Marmor	2,7	2,8	0,61	0,63
Messing	3,6	3,7	11	11
Molybdän	13	13	28	29
Neusilber	4	4	14	14
Nickel	8	8	19	19

Tabelle 10 (Fortsetzung)

Schubmodul G und Kompressionsmodul K

	$G / 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$G / 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$	$K / 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$K / 10^5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$
Plexiglas	0,120	0,122	0,36	0,37
Platin	6,1	6,2	2,7	2,8
Polystyrol	0,120	0,122	0,36	0,37
Porzellan	2,4	2,4	3,6	3,7
Quarzglas	3,2	3,3	3,8	3,8
Silber	2,8	2,9	10	10
Stahl (1 C)	8,0	8,2	16	16
Feder-	8,5	8,7		
Titan	4	4	13	13
Vanadium	4,7	4,8	1,6	1,6
Wolfram	15,2	15,5	31	31
Zink	4	4	5,48	5,95
Zinn	2,1	2,1	5,27	5,38
Zirkon	2,5	2,6	8,92	9,09

$$u_{zz} = \frac{1}{\epsilon} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (10.50)$$

$$u_{xy} = \frac{1 + \nu}{\epsilon} \sigma_{xy} \quad (10.51)$$

$$u_{xz} = \frac{1 + \nu}{\epsilon} \sigma_{xz} \quad (10.52)$$

$$u_{yz} = \frac{1 + \nu}{\epsilon} \sigma_{yz} \quad (10.53)$$

bzw. explizit

10.3 Gleichgewichtsbedingungen für isotrope feste Körper

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\epsilon}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (10.42) \quad \text{Einsetzen von (10.40) in (10.12) liefert} \\ &([1 - \nu] u_{xx} + \nu (u_{yy} + u_{zz})) \\ &\quad \frac{\epsilon}{1 + \nu} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\epsilon \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \rho g_i = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{yy} = \dots ([1 - \nu] u_{yy} + \nu (u_{xx} + u_{zz})) \quad (10.43) \quad \text{und mit (10.7)}$$

$$\sigma_{zz} = \dots ([1 - \nu] u_{zz} + \nu (u_{xx} + u_{yy})) \quad (10.44)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon}{2(1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\epsilon}{2(1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} \\ &+ \frac{\epsilon \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \rho g_i \\ &= \frac{\epsilon}{2(1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\epsilon - 2\epsilon\nu + 2\epsilon\nu}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \\ &+ \rho g_i = 0. \end{aligned}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\epsilon}{1 + \nu} u_{xy} \quad (10.45)$$

D. h.

$$\sigma_{xz} = \frac{\epsilon}{1 + \nu} u_{xz} \quad (10.46)$$

und

$$\sigma_{yz} = \frac{\epsilon}{1 + \nu} u_{yz} \quad (10.47)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon}{2(1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (10.54) \\ &+ \frac{\epsilon}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \\ &+ \rho g_i = 0 \end{aligned}$$

$$u_{xx} = \frac{1}{\epsilon} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (10.48) \quad \text{bzw.}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{\epsilon} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (10.49)$$

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \underbrace{-\rho \vec{g}}_{(*)} \frac{2(1 + \nu)}{\epsilon} \quad (10.55)$$

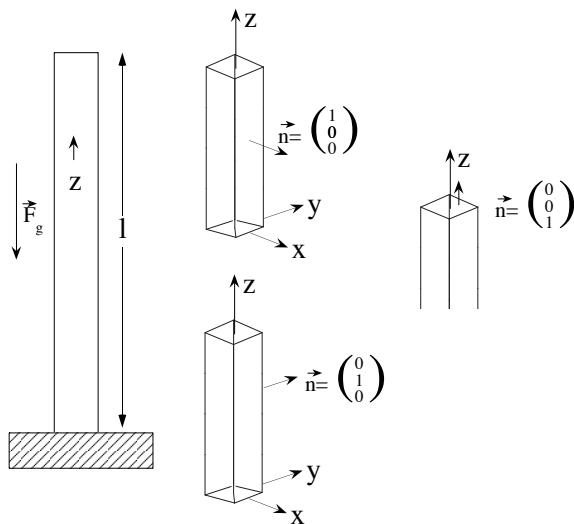


Abbildung 10.8: Deformation eines Stabes im Schwerfeld.

(*: ggf. durch andere Volumenkräfte ersetzen) bei Oberflächenkräften gilt ... = 0, und die Kräfte selbst gehen über die Randbedingungen ein.

Bemerkung: Das Resultat (10.55) wurde auf der Basis der Näherung (10.7) gewonnen. Es ist daher selbst eine Näherung!

und $\sigma_{zy} = 0$. D. h. $\sigma_{ik} = 0 \forall i, k$ außer σ_{zz} ! Für die obere Querschnittsfläche gilt $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$ und $\sigma_{zz} = 0$.

Eine Lösung für diese Randbedingungen ist $\sigma_{zz} = -\rho g(l-z)$. Alle übrigen σ_{ik} verschwinden. Aus (10.48) bis (10.53) folgt

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\nu}{\epsilon} \rho g(l-z) \\ u_{yy} &= \text{dito} \\ u_{zz} &= -\frac{1}{\epsilon} \rho g(l-z) \\ u_{xy} = u_{xz} &= u_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Mit (10.7) folgt (unter Beachtung von $\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\nu}{\epsilon} \rho g(l-z) \\ \leadsto u_x &= \frac{\nu}{\epsilon} \rho g(l-z)x + \underbrace{g_x(y, z)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{\nu}{\epsilon} \rho g(l-z) \\ \leadsto u_y &= \frac{\nu}{\epsilon} \rho g(l-z)y + \underbrace{g_y(x, z)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\epsilon} \rho g(l-z) \\ \leadsto u_z &= \frac{1}{\epsilon} \rho g \left[\frac{1}{2}(l-z)^2 - \frac{1}{2}l^2 \right] + f(x, y) \\ &= -\frac{1}{2\epsilon} \rho g(l^2 - (l-z)^2) + f(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\nu}{\epsilon} \rho g x$$

und

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\nu}{\epsilon} \rho g y$$

$$\frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{yk}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k} = \rho g.$$

Betrachten wir die Seitenflächen (vgl. Abbildung 10.8), so folgen aus $\sigma_{ik}n_k = 0$ die Gleichungen $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yx} = 0$, $\sigma_{zx} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$ folgt letztlich

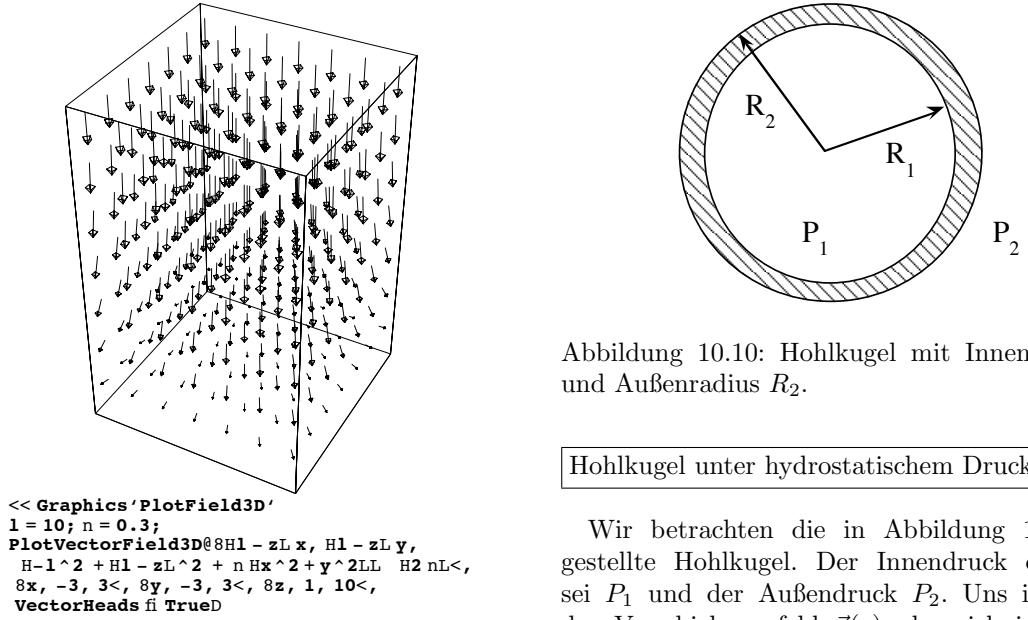


Abbildung 10.9: Oben: Verschiebungsfeld eines elastischen Stabes der senkrecht im Schwerefeld aufgestellt ist. Unten: *Mathematica*-Programm.

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{1}{2\epsilon} \rho g \left(l^2 - (l-z)^2 \right) + \frac{\nu}{2\epsilon} \rho g (x^2 + y^2) \\ &= -\frac{\rho g}{2\epsilon} \{ l^2 - (l-z)^2 - \nu (x^2 + y^2) \}. \end{aligned}$$

Abbildung 10.9 zeigt das errechnete Verschiebungsfeld des Stabes. Aufgetragen sind die reduzierten Komponenten:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\nu \rho g} u_x &= (l-z) x \\ \frac{\epsilon}{\nu \rho g} u_y &= (l-z) y \\ \frac{\epsilon}{\nu \rho g} u_z &= -\frac{1}{2\nu} \{ l^2 - (l-z)^2 - \nu (x^2 + y^2) \}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass diese Lösung in der unmittelbaren Nähe der Bodenplatte nicht gültig ist. Sie genügt auch nur für $x = y = 0$ der Bedingung $u_z(z=0) = 0$. Dies liegt daran, dass wir die nicht-trivialen Randbedingungen an der Bodenplatte gar nicht berücksichtigen¹⁶.

¹⁶Z.B. ob Gleiten möglich ist oder nicht etc.

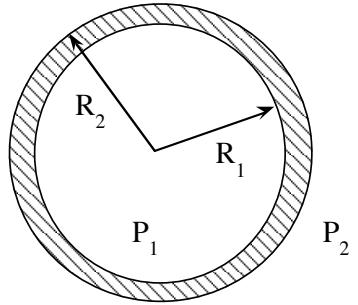


Abbildung 10.10: Hohlkugel mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 .

Hohlkugel unter hydrostatischem Druck:

Wir betrachten die in Abbildung 10.10 dargestellte Hohlkugel. Der Innendruck der Kugel sei P_1 und der Außendruck P_2 . Uns interessiert das Verschiebungsfeld $\vec{u}(r)$, das sich infolge dieses Druckunterschiedes ergibt. Offensichtlich ist \vec{u} radialsymmetrisch und nur von r abhängig. Wir verwenden daher Kugelkoordinaten, wobei der Ursprung im Zentrum der Kugel liegt. Weiterhin benutzen wir Gl. (10.55) in der Form

$$(1-2\nu) \Delta \vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Mit der Vektoridentität $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \equiv \Delta \vec{u}$ folgt

$$(1-2\nu) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + 2(1-\nu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0.$$

Aus Symmetriegründen ist $\vec{u} = u(r)\vec{n}$ (mit $\vec{n} = \vec{r}/r$), und es folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{\nabla} \times u(r)\vec{n} \\ &= u(r) \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{n}}_{=0} - \vec{n} \times \underbrace{\vec{\nabla} u(r)}_{=\frac{du(r)}{dr} \vec{\nabla} r} = 0. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = c \equiv 3a.$$

In Kugelkoordinaten gilt weiter $\vec{\nabla}_r = \vec{e}_r \partial/\partial r + \vec{e}_\phi (r \sin \theta)^{-1} \partial/\partial \phi + \vec{e}_\theta r^{-1} \partial/\partial \theta$, wobei die $\vec{e}_r =$

$|\partial \vec{r}/\partial r|^{-1}(\partial \vec{r}/\partial r), \vec{e}_\phi = \dots$ die jeweiligen orthogonalen Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten sind (vgl. Aufgabe 46). Daher liefert die rechte Gleichung

$$\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\underbrace{\vec{e}_r u_r}_{=0} + \underbrace{\vec{e}_\phi u_\phi}_{=0} + \underbrace{\vec{e}_\theta u_\theta}_{=0} \right) = 3a$$

bzw.

$$3a = \frac{\partial}{\partial r} u_r + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \left(\vec{e}_\phi \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_r}_{= \sin \theta} \right)}_{u_r} \\ = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\sin \theta} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{r} \underbrace{\left(\vec{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r \right)}_{u_r} \\ = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}}_{=1} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Damit haben wir

$$\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{2}{r} u_r = 3a .$$

Diese DGl hat die Lösung $u_r = ar + \frac{b}{r^2}$ (Überprüfung: $a - 2\frac{b}{r^3} + 2a + 2\frac{b}{r^3} = 3a$).

Jetzt fehlen noch die Konstanten. Dazu schreiben wir zunächst die Komponenten des Verzerrungstensors auf. Aus Aufgabe 33 haben wir

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = a - \frac{2b}{r^3} \\ u_{\phi\phi} &= \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3} \\ u_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3} . \end{aligned}$$

¹⁷ Die anderen Komponenten verschwinden. Gemäß (10.40) gilt

¹⁷ Wiederum wurden diese Formeln auf der Basis des genäherten Verzerrungstensors (10.7) berechnet.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\epsilon}{1+\nu} \left(u_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{rr} + 2u_{\theta\theta}) \right) \\ &= \frac{\epsilon}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{rr} + 2\nu u_{\theta\theta}] \\ &= \frac{\epsilon}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \left(a - \frac{2b}{r^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \left(a + \frac{b}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{\epsilon}{(1-2\nu)} a - \frac{2\epsilon}{(1+\nu)} \frac{b}{r^3} . \end{aligned}$$

Die Randbedingungen lauten gemäß Gl. (10.13)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P_1 && \text{bei } r = R_1 \\ \sigma_{rr} &= -P_2 && \text{bei } r = R_2 . \end{aligned} \quad (10.56)$$

Und damit folgt

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_1 R_1^3 - P_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\nu}{\epsilon} && (10.57) \\ b &= \frac{R_1^3 R_2^3 (P_1 - P_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\nu}{2\epsilon} . \end{aligned}$$

Wir betrachten zwei Spezialfälle:

- i) Für den Fall der dünnen Kugelschale der Dicke $h = R_2 - R_1 \ll R$ mit $P_2 = 0$ und $P_1 = P$ erhalten wir

$$u_r = \frac{1-\nu}{\epsilon} \frac{PR^2}{2h} \quad (10.58)$$

sowie

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \frac{PR}{2h} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{P}{2}$$

(der Balken bedeutet die über die Schalendicke gemittelte Radialspannung).

Bemerkung: Interessant ist auch der Fall $P_1 = P_2 = P$. Hierfür gilt $a = -P \frac{1-2\nu}{\epsilon}$ und $b = 0$. Daher folgt $u_r = -P \frac{1-2\nu}{\epsilon} r$. D. h., ist der Innendruck gleich dem Außendruck so schrumpft die Kugel proportional zu P .

ii) Das unbegrenzte Medium unter hydrostatischer Kompression mit einem kugelförmigem Hohlraum wird durch $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $P_1 = 0$ und $P_2 = P$ (hydrostatischer Druck) beschrieben. Dies entspricht einem blasenförmigen Defekt im Medium, so wie ihn Abbildung 10.11 zeigt.

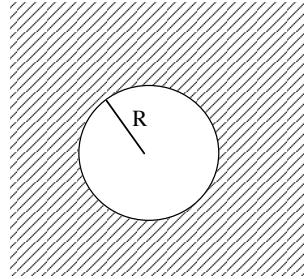


Abbildung 10.11: Kugelförmige Blase mit Radius R im unendlich ausgedehnten Medium.

Hier gilt

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -P \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\phi\phi} = -P \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).\end{aligned}$$

D. h. am Rande des Hohlraums sind die $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -\frac{3}{2}P$ größer als der Druck im Unendlichen. Dort reißt das Medium am ehesten!

Freie Energie einer gebogenen Platte:

Wir betrachten eine dünne, leicht gebogene Platte der Dicke h (siehe Abbildung 10.12). Der Verschiebungsvektor der neutralen Fläche sei

$$\vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta(x, y) \end{pmatrix} \quad (10.59)$$

Wir machen die folgenden vereinfachenden Annahmen:

i) Die inneren Spannungen sind wesentlich größer als die äußeren Kräfte P_i , so dass gemäß Gl. (10.13) mit $P_i = 0$ folgt

$$\sigma_{ik} n_k = 0 .$$

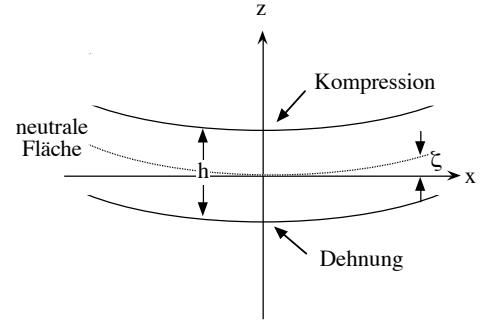


Abbildung 10.12: Leicht gebogene, dünne Platte. Auf der neutralen Fläche gibt es weder Kompression noch Dehnung.

ii) Da außerdem $\hat{z} \parallel \vec{n}$ mit genügender Genauigkeit folgt

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 . \quad (10.60)$$

iii) Aus (10.60) folgt für kleine h , dass (10.60) überall im Inneren der Platte erfüllt ist. Damit folgt mit $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \dots$... aus Gl. (10.46)¹⁸

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} \approx -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \leadsto u_x &\cong -z \frac{\partial \zeta}{\partial x}\end{aligned}$$

... aus Gl. (10.47)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial y} \approx -\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \leadsto u_y &\cong -z \frac{\partial \zeta}{\partial y}\end{aligned}$$

... aus Gl. (10.44)

$$u_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (u_{xx} + u_{yy})$$

$$\leadsto u_z = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) .$$

Für die übrigen Komponenten von u_{ik} folgt

¹⁸Integrationskonstante gleich Null, da bei $z = 0$ gilt $u_x = u_y = 0$ (neutrale Fläche!)

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\
u_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \\
u_{zz} &= z \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\
u_{xy} &= -\frac{z}{2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) = -z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\
u_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \approx 0 \quad \text{s. o.} \\
u_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \approx 0 \quad \text{s. o.}
\end{aligned}$$

Die freie Energie $\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} (u_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll}^2)$ ist damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \mathcal{F}_o + \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} [u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 + 2u_{xy}^2 \\
&\quad + \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 \\
&\quad + 2u_{xx}u_{yy} + 2u_{xx}u_{zz} + 2u_{yy}u_{zz})] \\
&= \mathcal{F}_o + \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) \right. \\
&\quad \left. + 2u_{xy}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} (u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) \right] \\
&= \mathcal{F}_o + \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} z^2 \right. \\
&\quad \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \\
&\quad + 2z^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{2\nu}{1-2\nu} z^2 \\
&\quad \left. \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 \frac{\nu}{1-\nu} \right] \right].
\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung dieses Ausdrucks sowie die Integration über das Plattenvolumen liefert die elastische freie Energie der gesamten Platte:

$$\mathcal{F}_{Pl} = \frac{\epsilon h^3}{24(1-\nu^2)} \int dx dy \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 \right] \quad (10.61)$$

$$+ 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right].$$

Man beachte, dass der zweite Term durch zweifache partielle Integration zum Verschwinden gebracht werden kann, falls die Oberflächenbeiträge verschwinden (z. B. $\zeta = 0$ am Rand der Platte).

Ein spezielles Beispiel - Biegeinstabilität:

Die Abbildung 10.13 zeigt eine dünne Platte, die einer Kraft T ausgesetzt ist. Die Frage lautet: Wie groß ist die kritische Kraft T_{krit} , bei der die Platte einknickt?

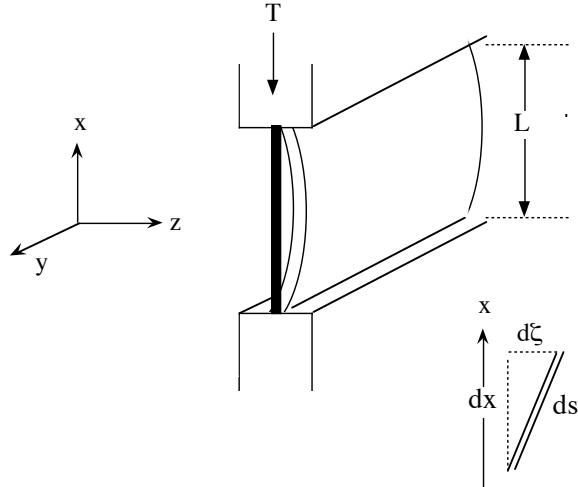


Abbildung 10.13: Links oben: Dünne Platte unter Belastung. Rechts unten: Skizze zur Biegearbeit

Die spezielle Geometrie (inkl. $1-\nu^2 \approx 1$) vereinfacht das Problem. Mit $\zeta = \zeta(x)$ folgt aus (10.61)

$$\mathcal{F}_{Pl} = \frac{\epsilon h^3}{24} \int dx dy \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2.$$

Jetzt berechnen wir die Arbeit w_T , die beim Biegen verrichtet wird (vgl. die Skizze in Abbildung 10.13). Mit

$$\begin{aligned}
ds - dx &= \sqrt{dx^2 + (d\xi(x))^2} - dx \\
&\cong dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta(x)}{\partial x} \right)^2 - 1 \right)
\end{aligned}$$

gilt

$$w_T = \frac{1}{2} T \int dx \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \sigma \int_V dV \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 .$$

Hier ist V das Plattenvolumen, und σ ist die Spannung definiert durch T /Plattenrand.

Gemäß der thermodynamischen Beziehung (10.16), die aus der Kombination der beiden ersten Hauptsätze folgt, ergibt sich im Fall $dw \neq 0$ die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\zeta (\mathcal{F}_{Pl} - w_T) \\ &= \delta_\zeta \int \left[\frac{\epsilon}{2} z^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] dV . \end{aligned}$$

Anmerkung: $\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{12} h^2 \equiv I$. D. h.

$$\delta_\zeta \frac{1}{2} \int \left[\epsilon I \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 - \sigma \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy = 0 \quad (10.62)$$

Die Variation ergibt

$$\int \left[\epsilon I \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta \zeta \right) - \sigma \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \delta \zeta \right) \right] dx dy = 0 .$$

Die partielle Integration mit $\delta \zeta(x) = 0$ bei $\pm L/2$ ergibt

$$\epsilon I \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 .$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz $\zeta(x) = \zeta_0 \sin(qx)$ und erhalten

$$\epsilon I q^4 - \sigma q^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{krit} = \epsilon I q_{min}^2 .$$

Offensichtlich entspricht $q = 0$ der ungebogenen Platte. Für die gebogene Platte dagegen gilt $q > 0$. σ_{krit} ist die kleinste Spannung, die notwendig ist, um eine Biegeinstabilität zu erzeugen. Es sind aber nicht alle Werte für q_{min} möglich, sondern nur jene, die die Randbedingungen erfüllen. Zwei Randbedingungen sind in Abbildung 10.14 illustriert. Im

Fall ($i = 1$) sind die untere und die obere Kante der Platte fest eingeklemmt, während im Fall ($i = 1/2$) dies nicht so ist. Wir schreiben daher $q = 2\pi/\lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Biegeinstabilität ist. Im Fall ($i = 1$) gilt $\lambda = L$. Im Fall ($i = 1/2$) dagegen gilt $\lambda = 2L$. Für beide Fälle zusammen können wir also schreiben: $q_{min} = 2\pi i/L$. Einsetzen in die obigen Gleichung für σ_{krit} liefert

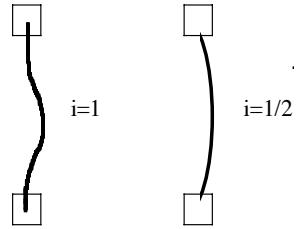


Abbildung 10.14: Randbedingungen für die gebogene Platte: fest eingespannt ($i = 1$) bzw. nicht eingespannt ($i = 1/2$).

$$\sigma_{krit} = \epsilon I \frac{4\pi^2 i^2}{L^2} .$$

Man beachte: $\sigma_{krit} \propto L^{-2}$. D. h. Platten mit großem L knicken sehr viel leichter ein, so wie wir es schon aus Erfahrung wissen. In der englischsprachigen Literatur ist dieser Typ der elastischen Instabilität öfters als *Euler buckling* beschrieben. Interessant ist natürlich auch die elastische Instabilität von Stäben bzw. Säulen. Im Prinzip erhält man dort ein ähnliches Resultat¹⁹.

In einer Aufgabe werden wir (näherungsweise) untersuchen, was mit einer Platte passiert, die in ein elastisches Medium eingebettet ist. Wenn das Medium ausreichend steif ist, dann entspricht q_{min} nicht länger dem größten λ (so wie oben), sondern die Biegeinstabilität wird mehreren bzw. vielen Wellenlängen entsprechen (die instabile Platte sieht aus wie Wellblech).

¹⁹Die beste Quelle, um sich über derartige Stabilitätsprobleme zu informieren, ist das Buch von Timoshenko und Gere *Theory of Elastic Stability*.

10.5 Elastische Wellen im isotropen unendlichen Medium

Gemäß Gl. (10.10) gilt

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (10.63)$$

wobei ρ die Masse pro Volumeneinheit (Dichte) ist.

Nach Gl. (10.54) gilt für isotrope Medien

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} &= \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} \\ &+ \frac{\epsilon}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \end{aligned} \quad (10.64)$$

Betrachten wir eine ebene Welle in x -Richtung, d. h. $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\vec{u}} &= \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{u} \\ &+ \frac{\epsilon}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} \partial^2 u_x / \partial x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D. h.

$$\rho \ddot{u}_x = \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \left(1 + \frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$$

mit der longitudinalen Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_l = \sqrt{\frac{\epsilon(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \quad (10.65)$$

In y-Richtung gilt

$$\rho \ddot{u}_y = \frac{\epsilon}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_y$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial u_y}{\partial t^2} = 0$$

mit der transversalen Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_t = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (10.66)$$

Gleiches gilt für u_z . Man beachte $\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}}$ $\rightarrow c_l > c_t \sqrt{\frac{4}{3}}$ mit $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Die Zerlegung einer Welle in zwei unabhängige Wellen mit den Geschwindigkeiten c_t und c_l kann auch im allgemeinen Fall einer beliebigen elastischen Welle im unbegrenzten Medium durchgeführt werden (vgl. Referenz [2] §22).

Anhang A

Formeln und Einheiten

Kartesische Einheitsvektoren: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$; $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ mit $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ und $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$ aber $\delta_{ii} = 3$!

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \vec{e}_i \cdot b_j \vec{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_k \equiv \vec{e}_i \epsilon_{ijk}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ϵ_{ijk} ist in allen Indizes antisymmetrisch.

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_j b_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Nützlich:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

Vektoridentitäten:

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} &= \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) \\ &= \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) \\ &\quad - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a} \\ \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{a}) &= \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \\ \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{a}) &= \vec{\nabla} \varphi \times \vec{a} + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{a} \\ \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \\ &\quad + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \\ &\quad + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ &\quad + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\ &\quad - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \\ &\quad - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \\ &\quad + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \\ &\quad - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \end{aligned}$$

Laplace Operator in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}_o + \delta\vec{r}) &= \varphi(\vec{r}_o) + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_o} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_o} + \dots\end{aligned}$$

Gaußscher Satz:

Integralsatz von Gauß - Es sei ∂V eine geschlossene Fläche, die das Volumen V begrenzt. Dann gilt

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f}.$$

Das gerichtete Flächenelement $d\vec{f}$ zeigt dabei nach außen¹. In der englischsprachigen Literatur wird dieser Satz auch als *divergence theorem* oder *Green's theorem in space* genannt.

Einheiten:

Länge	m
Zeit	s
Masse	kg
Kraft	$N = kgms^{-2}$
Arbeit, Energie	$J = Nm$
Druck	$Pa = Nm^{-2}$
elastische Module	Nm^{-2}

Konstanten (MKS):

Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.99792458 \text{ ms}^{-1}$
atomare Masseneinheit	$m_a = 1.66055 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$
Masse der Erde	$m_E = 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Radius der Erde	$r_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Fallbeschleunigung	$g = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$
Boltzmann Konstante	$k_B = 1.380658 \text{ JK}^{-1}$

¹Beweis siehe z. B. M. R. Spiegel (1971) *Advanced Mathematics*. Schaum's outline series. McGraw-Hill

Anhang B

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Vektoren auf dem Gitter

Die kartesischen Basisvektoren eines zweidimensionalen Gitters seien

$$\vec{a}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei a die so genannte Gitterkonstante ist.

- (a) Berechnen Sie die Fläche der durch die beiden Vektoren aufgespannten Raute.
- (b) Zeichnen Sie das durch die Vektoren aufgespannte Gitter. D. h. zeichnen Sie die Gitterpunkte, die durch die Vektoren $i\vec{a}_1 + j\vec{a}_2$, wobei i und j ganze Zahlen sind, definiert sind.
- (c) Berechnen Sie den Abstand der ersten, zweiten und dritten Nachbarn des durch die Formeln

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{e}_3)} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{e}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{e}_3)}.$$

definierten Gitters in Einheiten von $1/a$. Hier ist \vec{e}_3 ein Einheitsvektor in die Richtung senkrecht zur Ebene, die durch \vec{a}_1 und \vec{a}_2 festgelegt wird.

Aufgabe 2: Produkte von Vektoren

Skalar- und Vektorprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind gegeben durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ bzw. $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

- (a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin(\vec{a}, \vec{b})| \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Drücken Sie dieses Dreifachprodukt durch Vektorkomponenten aus und zeigen Sie, dass man es als Determinante schreiben kann. Was passiert, wenn zwei der Vektoren parallel sind, und was ist die geometrische Bedeutung des Ausdrucks.

Aufgabe 3: Weg-, Flächen- und Volumenelemente

- (a) In kartesischen Koordinaten lautet das Quadrat des Wegelements $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Leiten Sie die entsprechenden Ausdrücke für ds^2 in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten her.

(b) Rechnen Sie das kartesische Flächenelement $dxdy$ mithilfe der in der Vorlesung abgeleiteten Formel in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten um.

- (c) Wiederholen Sie Teil (b) für das Volumenelement $dxdydz$.

Aufgabe 4: Kraft – Zwei Zentren

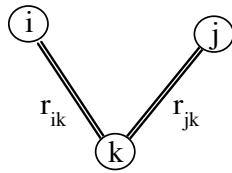
Das so genannte Lennard-Jones Potenzial $u(r_{ij}) = 4\epsilon ((\sigma/r_{ij})^{12} - (\sigma/r_{ij})^6)$ ist ein einfaches Modell der Wechselwirkungsenergie zweier Edelgasatome i und j an den Orten \vec{r}_i bzw. \vec{r}_j . Dabei gilt $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Die Größen ϵ und σ sind positive Konstanten. In dieser Vorlesung werden wir lernen,

dass die Kraft \vec{F}_i , die Atom i durch Atom j erfährt durch $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} u(r_{ij}) = -\left(\frac{d}{dx_i}, \frac{d}{dy_i}, \frac{d}{dz_i}\right) u(r_{ij})$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie \vec{F}_i .

(b) Skizzieren Sie sowohl $u(r_{ij})/\epsilon$ als auch $\sigma\vec{F}_i/\epsilon$ in Richtung von \vec{r}_{ij} als Funktionen von r_{ij}/σ .

Aufgabe 5: Kraft – Drei Zentren



Es seien i , j und k drei Massenpunkte. Die Massenpunkte i und k im Abstand r_{ik} sowie j und k im Abstand r_{jk} seien mit harmonischen Federn (Kraftkonstante k ; Gleichgewichtsfederlänge b_o) verbunden. Stellen Sie zunächst die gesamte potentielle Energie des Systems auf. Berechnen Sie anschließend die Kräfte \vec{F}_i , \vec{F}_j und \vec{F}_k , die auf jeden einzelnen der Massenpunkte einwirken. Nutzen Sie dabei relevante Symmetrien bzw. Erhaltungssätze aus.

Aufgabe 6: Zerreißen kovalenter Bindungen

Ein Modellpotenzial für kovalente Bindungen in Molekülen ist das Morse-Potenzial

$$u_{\text{Morse}}(r) = D_o \left[1 - e^{-a(r-r_o)} \right]^2, \quad (\text{B.1})$$

wobei D_o die Tiefe des Potenzialtopfes ist, r_o ist die Position des Minimums und a ist eine Konstante (Skizzieren Sie das Morse-Potenzial!).

(a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Kraft F_z her, die aufgewandt werden muss, um eine lineare Kette aus n gleichen Bindungen zu zerreißen, wenn das Bindungspotenzial das Morse-Potenzial ist. Die Kraft soll an den Kettenenden angreifen.

(b) Zeigen Sie, dass die Energie (oder Zerreißarbeit) E_z , die nötig ist, um die Kette zu zerreißen,

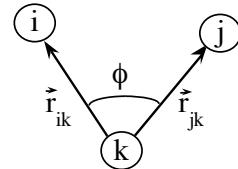
für große n durch $E_z = nD_o/4$ gegeben ist. Vergleichen Sie dies mit der Bindungsenergie der einzelnen Bindung. Hinweis: $E_z = -n \int_{r_o}^{r_z} F(r) dr$, wobei $F(r) = -du_{\text{Morse}}(r)/dr$ ist, und r_z folgt aus $F_z = F(r_z)$.

(c) Benutzen Sie Ihren Ausdruck für F_z aus Teil (a), um die Zerreißkraft eines 1mm^2 starken Kevlarfadens abzuschätzen. Nehmen Sie an, dass die angegebene Querschnittsfläche ca. $5 \cdot 10^{12}$ zu zerreißende C-C Bindungen enthält, für die $D_o \approx 3.6\text{eV}$ und $a \approx 1.95\text{\AA}^{-1}$ sein soll.

Aufgabe 7: Valenzwinkelpotenzial

Drei Massenpunkte i , j und k besitzen das folgende (harmonische) Wechselwirkungspotenzial (vgl. Skizze):

$$u(\phi) = \frac{k^\phi}{2} (\phi - \phi_o)^2$$



(a) Die Längen r_{ik} und r_{jk} sowie die Größen k^ϕ und ϕ_o sind konstant, nur der Winkel ϕ ist variabel. Zeigen Sie, dass die Kraft \vec{F}_i^ϕ auf Massenpunkt i als

$$\vec{F}_i^\phi = -k^\phi (\phi - \phi_o) \frac{\vec{r}_{ik} \times (\vec{r}_{ik} \times \vec{r}_{jk})}{r_{ik}^2 |\vec{r}_{ik} \times \vec{r}_{jk}|}$$

geschrieben werden kann.

(b) Geben Sie auch \vec{F}_j^ϕ sowie \vec{F}_k^ϕ an.

Hinweise: Gehen Sie von $\delta u = k^\phi (\phi - \phi_o) \delta \phi$ aus, und verwenden Sie $\cos \phi = \frac{\vec{r}_{ik} \cdot \vec{r}_{jk}}{r_{ik} r_{jk}}$. Die beiden Regeln $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ sind ebenfalls nützlich.

Aufgabe 8: Galileiinvarianz

Zeigen Sie, dass die newtonische Bewegungsgleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -\frac{d}{dx'} u'(x')$$

mit

$$u'(x') = \frac{k}{2}(x' - x'_o)^2$$

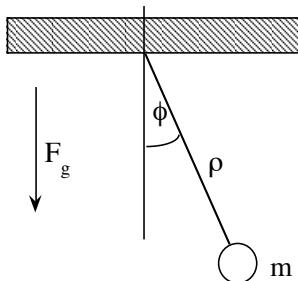
invariant unter Galilei Transformationen ($t' = t$ und $x' = x - wt$) sind, falls $w = \text{konstant}$ gilt.

Aufgabe 9: Schiefer Wurf aus beliebiger Höhe

Eine Kugel (Massenpunkt) wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v unter dem Winkel α zur x-Achse abgestoßen. Die Abstoßhöhe sei h . Unter welchem Winkel α erreicht man die maximale Weite?

Aufgabe 10: Federpendel (Newton)

Wir betrachten das ebene Pendel im Schwerefeld in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) .



Als zusätzliche Besonderheit ist die Pendellänge veränderlich. D. h. die Pendelstange ist eine Feder mit der potenziellen Energie $\frac{1}{2}k(\rho - l)^2$, wobei k die Federkonstante und l die Gleichgewichtslänge ist.

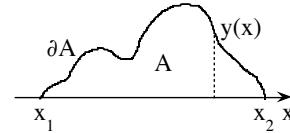
(a) Skizzieren Sie das Federpendel inklusive der auf die Masse wirkenden Kräfte. Ausgehend von der allgemeinen newtonischen Bewegungsgleichung für den Ortsvektor der Masse stellen Sie die beiden Bewegungsgleichungen für ρ und ϕ auf. Hinweis: Folgen Sie unserer Vorgehensweise im Fall des starren Pendels aus der Vorlesung.

(b) Machen Sie die Annahmen $\rho = l + \delta\rho$ und $\phi = \delta\phi$, wobei $\delta\rho$ und $\delta\phi$ kleine Größen sein sollen. Setzen Sie diese Gleichungen in die Bewegungsgleichungen aus Teil (a) ein und vernachlässigen Sie alle Terme, die nicht linear in den kleinen Größen sind. Sie erhalten entkoppelte Bewegungsgleichungen für $\delta\rho$ und $\delta\phi$.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\delta\rho$ und $\delta\phi$.

Aufgabe 11: Variation mit Nebenbedingungen

Welche ebene Kurve $y(x)$ (siehe Skizze)



begrenzt bei gegebener Länge l die größtmögliche Fläche A ? D. h.

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \text{Maximum}$$

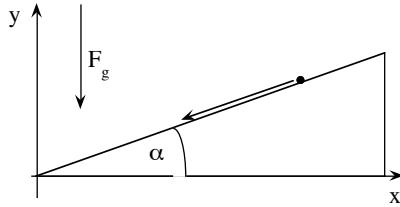
unter der Nebenbedingung, dass die Länge l der Kurve fest ist:

$$\int_{\partial A} ds = l .$$

Stellen Sie die entsprechende eulersche Gleichung mit Nebenbedingung auf. Zeigen Sie, dass die Kreisgleichung $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ diese Differenzialgleichung erfüllt. Welchen Wert hat dabei der Lagrange Parameter?

Aufgabe 12: Schiefe Ebene

Auf einer schiefen Ebene gleitet ein Massenpunkt ab (Skizze). Stellen Sie wieder die Lagrange Funktion auf, und beschreiben Sie die Ebene als Zwangsbedingung in den Koordinaten x und y . Wiederum mit der Methode der lagrangeschen Multiplikatoren berechnen Sie die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes, und geben Sie deren Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ an.

**Aufgabe 13:** Federpendel (Lagrange)

Wir betrachten nochmals das Federpendel aus der Aufgabe 10.

(a) Geben Sie die Ausdrücke für die kinetische und die potenzielle Energie des Pendels an. Beachten Sie, dass sie den Energienullpunkt beliebig wählen können. Schreiben Sie den resultierenden Ausdruck für die Lagrange Funktion \mathcal{L} hin.

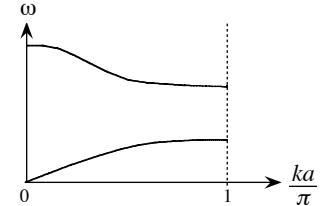
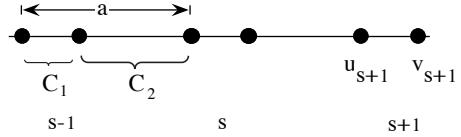
(b) Aus den entsprechenden Lagrange Gleichungen leiten Sie die Bewegungsgleichungen für ρ und ϕ ab. Geben Sie diese Bewegungsgleichungen zusätzlich in dimensionsloser Form an, indem Sie l als die Einheit der Länge und $\tau_l = \sqrt{l/g}$ als Einheit der Zeit einführen ($\tau_m = \sqrt{m/k}$ ist eine zweite typische Zeit!).

(c) Gehen Sie zum starren Pendel über, indem Sie die Zwangsbedingung $\rho = l$ einführen. Mit der Methode der lagrangeschen Multiplikatoren geben Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen an, und schreiben Sie außerdem den Ausdruck für den Lagrange Multiplikator λ hin (Übrigens, λ hat hier die Bedeutung einer Kraft, und zwar ist dies die so genannte Zwangskraft, die das Pendel zum starren Pendel macht!). Lösen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ für kleine Auslenkungen ($\sin \phi \approx \phi$). Warum erhalten Sie kein befriedigendes Ergebnis, wenn Sie in das Ergebnis des Teils b) direkt $\rho = l$ einsetzen?

Aufgabe 14: Lineare Kette (Newton)

Wir betrachten die unendliche, eindimensionale Kette in der Abbildung (oben). Die Kette besteht aus identischen Gliedern der Länge a . Die schwarzen Punkte sind identische Massen M , die durch Federn mit den Kraftkonstanten C_1 und C_2 verbunden sind. u_s und v_s sind die Auslenkungen der jeweiligen Massen aus ihrer Ruhelage im Ketten-

glied s .



Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für u_s und v_s her und setzen Sie den folgenden Ansatz ein:

$$u_s = ue^{i(sak - \omega t)} \quad v_s = ve^{i(sak - \omega t)}.$$

Dies sind komplexe Wellen mit $k = 2\pi/\lambda$ und $\omega = 2\pi\nu$. Dabei ist λ die Wellenlänge der longitudinalen Wellen und ν ist deren Frequenz. u und v sind die jeweiligen Amplituden. Zeigen Sie, dass Sie mit dem obigen Ansatz zwei Lösungen für ω^2 , d. h. $\omega^2 = \omega^2(k)$, erhalten und geben Sie diese so genannten Dispersionsrelationen, die in der Abbildung (unten) skizziert sind, an.

Aufgabe 15: Lineare Kette (Lagrange)

Wir betrachten nochmals die unendliche, eindimensionale Kette aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Stellen Sie die Lagrange Funktion der Kette auf, leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für u_s und v_s her und setzen Sie wieder den Ansatz

$$u_s = ue^{i(sak - \omega t)} \quad v_s = ve^{i(sak - \omega t)}.$$

ein. Zeigen Sie, dass Sie mit dem obigen Ansatz zwei Lösungen für ω^2 , d. h. $\omega^2 = \omega^2(k)$, erhalten und geben Sie diese an.

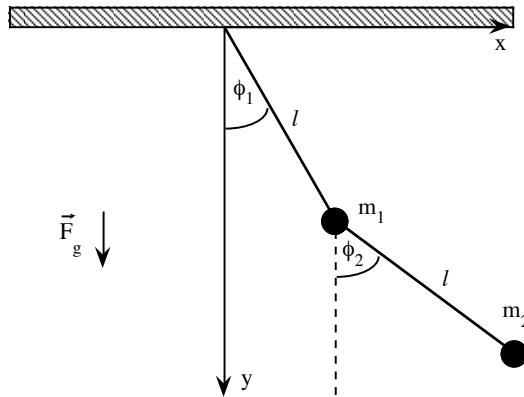
(b) Zeigen Sie, dass Sie die in der Abbildung in Aufgabe 14 gezeigten so genannten Dispersionsrelationen erhalten, wenn Sie $\omega = \omega(k)$ für die beiden Fälle skizzieren. Betrachten Sie dazu das Verhalten der $\omega = \omega(k)$ in den Grenzfällen

großer Wellenlängen ($k \rightarrow 0$) und kleinstmöglicher Wellenlängen ($k = \pi/a$) (warum ist dies die kleinstmögliche Wellenlänge?), und geben Sie die Formeln für ω an, die zu den jeweiligen Graphen bei 0 und 1 gehören.

Anmerkung: Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen durch $c = \nu\lambda = \omega/k$ gegeben ist (Phasengeschwindigkeit), bedeutet Ihr Ergebnis, dass es auf der Kette augenscheinlich zwei Wellentypen gibt, die sich bei gleichem k mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Außerdem gibt es Frequenzen, die sich weder mit dem einen noch mit dem anderen Wellentyp realisieren lassen.

Aufgabe 16: Ebenes Doppelpendel

Die Abbildung zeigt ein ebenes Doppelpendel mit masselosen Stangen konstanter Länge l , Pendelmasse m_1 und m_2 sowie den Auslenkwinkeln ϕ_1 und ϕ_2 relativ zur y-Achse.



(a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, in die Sie alle relevanten Kräfte einzeichnen. Erhalten Sie dann die Bewegungsgleichungen der Winkel mittels der newtonischen Bewegungsgleichungen angewandt auf jede Masse. Hinweis: Erweitern Sie die Vorgehensweise im Fall des mathematischen Pendels aus der Vorlesung. Sie erhalten vier Gleichungen, aus denen Sie die zwei Fadenspannungen eliminieren können. Beachten Sie außerdem $\sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ sowie $\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 = \sin(\phi_1 - \phi_2)$.

(b) Erhalten Sie die gleichen Bewegungsgleichungen der Winkel mittels der Lagrange Funktion des Doppelpendels.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen der Winkel im Grenzfall kleiner Auslenkung. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems sowie die Amplitudenverhältnisse (Verhältnisse der maximalen Auslenkwinkel der beiden Massen). Skizzieren Sie die beiden Schwingungsarten des Doppelpendels. Hinweise: Zunächst entwickeln Sie die in den exakten Bewegungsgleichungen auftretenden Winkelfunktionen und vernachlässigen alle quadratischen bzw. höheren Beiträge. Zusätzlich vernachlässigen Sie Terme der Art $\phi_i \dot{\phi}_j^2$ ($i, j = 1, 2$) (Begründung?). Das resultierende gekoppelte System lösen Sie analog zur Vorgehensweise im Fall der linearen Kette (Aufgaben 14 und 15).

Aufgabe 17: Oszillator

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(x)\delta x$ dafür, den harmonischen, eindimensionalen Oszillator in einem Auslenkungsintervall der Länge δx um die Auslenkung x anzutreffen. Tragen Sie $p(x)$ im Intervall $(-a, a)$ auf, wobei a die Amplitude ist.

(b) Berechnen Sie eine Näherungslösung für den anharmonischen Oszillator gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x + \lambda x^2 = 0 .$$

Betrachten Sie die Größe λ als klein, arbeiten Sie mit dem Ansatz $x(t) = A \cos(\omega_o t + \delta) + \lambda x_1(t)$, und berechnen Sie $x_1(t)$, indem Sie nur Terme linear in λ berücksichtigen. Hinweise: (i) $2 \cos^2(z) = 1 + \cos(2z)$; (ii) Lösungsansatz für inhomogene Differentialgleichung $x_{1,i}(t) = C + D \cos(2\omega_o t + \delta')$.

Aufgabe 18: Normalmodenanalyse

(a) Bei der Umformung der potenziellen Energie eines Systems aus N Massenpunkten auf Normalkoordinaten haben wir einen Schritt noch nicht durchgeführt. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} & \vec{Q}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \left((\mathbf{M}^{-1/2})^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1/2} \right) \cdot \mathbf{L} \cdot \vec{Q} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{3N} \lambda_\alpha Q_\alpha^2 \end{aligned}$$

ausgehend von der Eigenwertgleichung $((\mathbf{M}^{-1/2})^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{-1/2}) \cdot \vec{L}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{L}_\alpha$. Hier ist \vec{L}_α der α -te Spaltenvektor von \mathbf{L} . Außerdem gilt $\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{I}$, wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist.

- (b) Beweisen Sie die Orthogonalität der \vec{L}_α bzw. zeigen Sie $\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{I}$ unter der Annahme $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ für $\alpha \neq \beta$.

Aufgabe 19: Einführung in *Mathematica*

(a) Reproduzieren Sie die *Mathematica* Rechnung des Beispiels zur Normalmodenanalyse (Wasser), und überprüfen Sie die angegebenen Formeln für die λ_i .

(b) In Aufgabe 17 (b) hatten Sie eine Näherungslösung des anharmonischen Oszillators berechnet:

$$\begin{aligned} x(t) \approx & A(1 + \lambda) \cos(\omega_o t + \delta) \\ & - \frac{\lambda}{3} \left(\frac{A}{\omega_o} \right)^2 (1 + \sin^2(\omega_o t + \delta)) . \end{aligned}$$

Lösen Sie die Differenzialgleichung $\ddot{x} + \omega_o^2 x + \lambda x^2 = 0$ jetzt numerisch exakt mit *Mathematica*, und erzeugen Sie einen Graphen, der für $\lambda = 0.3$, $A = \omega_o = 1$ und $\delta = 0$ im Intervall $0 \leq t \leq \pi$ die Näherungslösung, die numerisch exakte Lösung sowie die Lösung des harmonischen Oszillators ($\lambda = 0$) zusammen darstellt. Alle drei Kurven sollten bei $t = 0$ auf Eins normiert sein, und es sollte $\dot{x}(t = 0) = 0$ gelten. Ihr endgültiger Graph sollte außerdem sinnvoll beschriftet sein! Hinweise: Ein möglicher numerischer Algorithmus folgt aus der Addition der beiden Taylorentwicklungen $x(t \pm \delta t) = x(t) \pm \dot{x}(t)\delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t)\delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3)$. D. h.

$$x(t + \delta t) = -x(t - \delta t) + 2x(t) + \ddot{x}(t)\delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^4) .$$

Gehen Sie von $x(-\delta t) = x(0) = 1$ aus und verwenden Sie ein vernünftiges δt . Es dürfen auch andere algebraische Computerprogramme wie *Maple* etc. verwendet werden!

Aufgabe 20: Geschwindigkeitsadditionstheorem

Inertialsystem K' bewegt sich relativ zu Inertialsystem K mit der Geschwindigkeit \vec{w} . Wir hatten

in der Vorlesung die folgende Transformationsgleichung für die Geschwindigkeiten eines Teilchens innerhalb seines jeweiligen Inertialsystems hergeleitet:

$$\vec{v}' = \frac{1}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left[\frac{\vec{v}}{\gamma(w)} + \left(1 - \frac{1}{\gamma(w)} \right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2} - \vec{w} \right] .$$

Zeigen Sie, dass die Umkehrung dieser Transformationsgleichung durch

$$\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{v}'_\parallel + \vec{w}}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}} \quad \text{und} \quad \vec{v}_\perp = \frac{1}{\gamma(w)} \frac{\vec{v}'_\perp}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}}$$

gegeben ist, wobei sich \parallel bzw. \perp auf die Richtung von \vec{w} beziehen.

Aufgabe 21: Invarianz von ds

Zeigen Sie durch explizites Einsetzen der Lorentz Transformation

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma(w) - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2} - \gamma(w) \vec{w} t \\ t' &= \gamma(w) \left(t - \frac{\vec{w} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \end{aligned}$$

die Invarianz von $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$.

Aufgabe 22: Ellipsengleichung

(a) Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstände von den beiden Brennpunkten eine konstante Summe haben. Leiten Sie aus dieser Bedingung die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten ab.

(b) Legen Sie den linken Brennpunkt in den Ursprung und rechnen Sie die oben gewonnene Ellipsengleichung in ebene Polarkoordinaten um.

Aufgabe 23: Kepler-Kreisbahn

Für ein Teilchen der Masse μ auf einer Kepler-Kreisbahn, d. h. $U(\vec{r}) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$ und $r = R$, berechnen Sie die mittlere kinetische Energie, $\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T K dt$, und die mittlere potenzielle Energie, $\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U dt$, wobei T die Periodendauer

ist, jeweils ausgedrückt durch die Gesamtenergie E .

Aufgabe 24: Virialtheorem

Für ein Teilchen der Masse μ auf einer Kepler-Ellipsenbahn berechnen Sie die mittlere kinetische Energie, $\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T K dt$, und die mittlere potentiellen Energie, $\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U dt$, wobei T die Periodendauer ist. Zur Berechnung von \bar{K} gehen Sie von der Mittelung über $\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{p})$ aus. Dies führt auf das so genannte Virialtheorem ($2\bar{K} = -\vec{r} \cdot \vec{F}$).

Aufgabe 25: Bahnkurve für $U = \alpha r^2$

Bestimmen Sie die Gleichung der Bahnkurve $r = r(\phi)$ für das Potenzial $U = \alpha r^2$ ($\alpha > 0$) analog zum Fall des $1/r$ -Potenzials. Berechnen Sie die Umlaufzeit T für den Spezialfall einer Kreisbahn (Hinweis: Flächensatz verwenden!).

Aufgabe 26: Laplace-Runge-Lenz Vektor

Im Kepler Problem, $U(r) = -\alpha/r$, existiert als weiterer erhaltenen Vektor der Laplace-Runge-Lenz Vektor definiert gemäß

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\mu \alpha \vec{r}}{r}.$$

Zeigen Sie $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, und berechnen Sie die Länge von \vec{A} ausgedrückt durch die Exzentrizität e sowie die Richtung von \vec{A} relativ zur Bahnellipse.

Kommentar: Hier bestimmen 3 Ortskomponenten die Lage des Systems im Schwerpunktsystem. Abzüglich eines Zeitursprungs ergibt dies $2s - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ Bewegungsintegrale. Auf der anderen Seite kennen wir die Erhaltungsgrößen \vec{L} , E und jetzt auch \vec{A} , d.h. insgesamt 7 Erhaltungsgrößen. Daher muss es zwei weitere Gleichungen geben, die diese Zahl auf 5 reduzieren. Diese sind die gesuchte Beziehung $A = A(e(E, L))$ sowie die Orientierung von \vec{A} relativ zu \vec{L} .

Aufgabe 27: Periheldrehung

Eine homogene Staubverteilung im Sonnensystem ruft eine zusätzliche Gravitationskraft $\vec{F} = -m_{Erde} C \vec{r}$ auf die Erde in Richtung Sonne

hervor. Hier ist C eine Konstante proportional zur Gravitationskonstante und zur Staubdichte, und \vec{r} ist der Radiusvektor von der Sonne zur Erde. Die Kraft führt zu einer kleinen Veränderung δU des Kepler-Potenzials $U(r) = -\alpha/r$. Die Bahn der Erde ist dadurch keine geschlossene Ellipse mehr, sondern eine Rosettenbahn. Berechnen Sie die Präzessionsfrequenz $\omega = \dot{\phi}$ der Drehung der großen Hauptachse der Erdellipse in niedrigster Näherung in C . Hinweis: Aufgaben zu Kapitel III im Mechanik-Band des Landau/Lifschitz. Bemerkung: Diese Aufgabe ist die doppelte Punktzahl wert. Weitere fünf Sonderpunkte gibt es für eine Erklärung des ersten Satzes dieser Aufgabe.

Aufgabe 28: Unelastischer Stoß

Ein Elektron der Masse m und der Anfangsgeschwindigkeit v_o trifft in einem unelastischen, zentralen Stoß auf ein ruhendes Atom der Masse M , das dabei in ein um W höheres Energieniveau gehoben wird. Welche Anfangsgeschwindigkeit v_o ist dazu mindestens notwendig?

Aufgabe 29: Streuung harter Kugeln

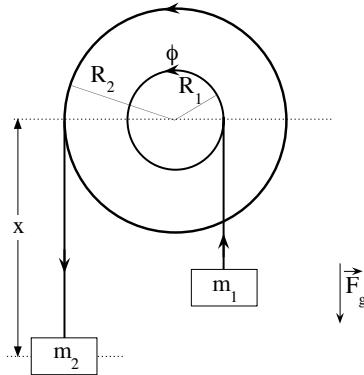
Harte Kugeln der Masse m_1 und mit dem Radius R_1 werden an ruhenden harten Kugeln der Masse m_2 mit Radius R_2 gestreut. Berechnen Sie $d\sigma_2(\theta_2)$, wobei θ_2 der Streuwinkel im Laborsystem ist, sowie den über den gesamten Raumwinkel integrierten Streuquerschnitt σ_2 (interpretieren Sie Ihr Resultat). Berechnen Sie außerdem das Verhältnis der Laborenergien für die Teilchen der Sorte 1, $\epsilon'_1(L)/\epsilon_1(L)$, in führender Ordnung für kleine θ_1 . Hier ist $\epsilon_1(L)$ die Energie vor dem Stoß und $\epsilon'_1(L)$ die Energie danach.

Aufgabe 30: Prinzip von d'Alembert

Mithilfe des d'Alembertschen Prinzips geben Sie die Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ für das in der Skizze gezeigte System (Atwood Maschine) an. Vernachlässigen Sie die Trägheit der Rollen.

Aufgabe 31: Trägheitstensor

Für die folgenden Massenverteilungen berechnen Sie Hauptträgheitsachsen sowie die dazugehörigen Trägheitsmomente:



(a) Ein gleichschenkliges, infinitesimal dünnes Dreieck mit homogener Massendichte ($\rho = \sigma\delta(z)$). Die Länge der Schenkel sei a und der von ihnen eingeschlossene Winkel sei $\alpha = 45^\circ$. Referenzpunkt ist hier der Schwerpunkt.

(b) Drei gleiche Massenpunkte bei $(a, 0, 0)$, $(0, a, 2a)$ und $(0, 2a, a)$. Referenzpunkt ist hier der Ursprung. Führen Sie die notwendige Diagonalsierung manuell und nicht mit dem Computer (*Mathematica* etc.) aus!

Aufgabe 32: Uhrenpendel

Wir betrachten ein Uhrenpendel bestehend aus einer masselosen Stange der Länge l plus dem Pendelgewicht der Masse M . Das eine Ende der Stange ist der Aufhängepunkt. Am anderen Ende ist der Schwerpunkt des Pendelgewichts befestigt. Das Pendelgewicht ist ein homogener, flacher Zylinder mit Radius a , dessen Zylinderachse senkrecht zur Pendelebene orientiert ist.

Stellen sie eine Bewegungsgleichung für kleine Pendelwinkel ϕ mittels einer entsprechenden Lagrange Funktion auf. Berechnen Sie das relevante Hauptträgheitsmoment des Pendelgewichts. Geben Sie die Pendelfrequenz ausgedrückt durch die Größen g , a und l an.

Aufgabe 33: Allgemeines Pendel

Wir betrachten ein beliebig geformtes Pendel. Der Koordinatenursprung soll im Aufhängepunkt

liegen. Der Schwerpunkt des Pendels wiederum liege bei \vec{R} .

(a) Zeigen Sie, ausgehend von $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, dass für den Drehimpuls bezüglich der (momentanen) Pendel- bzw. Drehachse

$$\vec{L} = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega} .$$

gilt. Hierbei ist $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung um die Drehachse und \mathcal{I} ist gegeben durch

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{SP} + \mathcal{I}_S .$$

Der erste Term ist der Trägheitstensor einer Punktmasse M (=Pendelmasse) im Schwerpunkt bezogen auf die Drehachse. Der zweite Term ist der Trägheitstensor des Pendels bezogen auf seinen Schwerpunkt.

(b) Zeigen Sie daraus: Wenn Sie $\vec{\omega}$ in z-Richtung definieren, dann folgt

$$\vec{L} \cdot \vec{\omega} = [MR_{S,\perp}^2 + (\mathcal{I}_S)_{zz}] \omega^2 .$$

$R_{S,\perp}$ ist der senkrechte Abstand des Schwerpunktes zur Pendelachse.

Aufgabe 34: Rollender Kegel auf der Ebene

Ein homogener Kegel der Masse m mit der Höhe h und dem Öffnungswinkel α rollt auf der Seite liegend auf einer horizontalen Ebene. Seine Umlaufzeit in der Ebene sei T .

(a) Berechnen Sie die kinetische Energie K des Kegels als Funktion der oben angegebenen Größen.

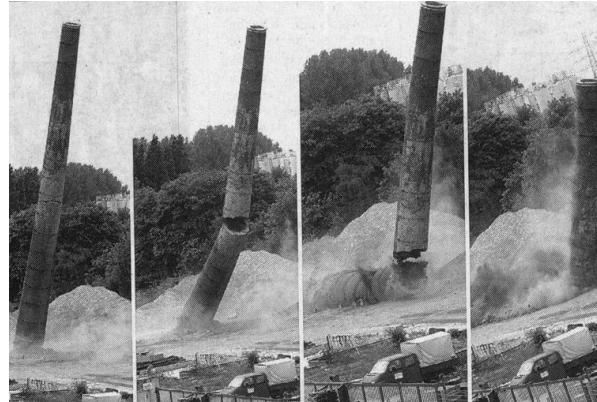
(b) Berechnen Sie ebenso den Gesamtdrehimpuls \vec{L} bezogen auf ein festes Koordinatensystem, dessen Ursprung die Spitze des Kegels ist und dessen $x-y$ -Ebene gleichzeitig die Ebene bildet, auf der der Kegel liegt.

Aufgabe 35: Lineares Moleköl

Für ein lineares Molekül gilt $\vec{N} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{f}_{\nu} = \vec{s} \times \sum_{\nu} d_{\nu} \vec{f}_{\nu} = \vec{s} \times \vec{G}$. Hier ist \vec{s} ein Einheitsvektor entlang der molekularen Achse, und d_{ν} ist der Abstand vom ν ten Wechselwirkungszentrum, wo die Kraft \vec{f}_{ν} angreift, zum Schwerpunkt. Zeigen Sie, dass \vec{s} gegeben ist durch

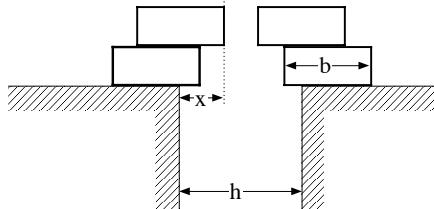
$$\ddot{\vec{s}} = \vec{G}' - \left(\vec{s} \cdot \vec{G}' + \dot{\vec{s}}^2 \right) \vec{s},$$

wobei $\vec{G}' = \vec{G}/\mathcal{I}$ gilt. Hier ist \mathcal{I} eines der beiden identischen, nicht-verschwindenden Hauptträgheitsmomente des Moleküls. Hinweis: Gehen Sie von $\vec{L} = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}$ aus, und verwenden Sie $\ddot{\vec{s}} = \vec{\omega} \times \vec{s}$.



Aufgabe 36: Bogenstatik

Die Skizze zeigt eine Schlucht der Breite h , die mit identischen, homogenen Quadern der Länge b überbrückt werden soll. D. h. die Stirnflächen der jeweils obersten beiden Quadere sollen sich kräftefrei berühren, ohne dass irgendwo Quader kippen. Oder mathematisch ausgedrückt: $2x = h$. Wieviele Quadere muss Ihr Bogen mindestens hoch sein, damit dieser eine Schlucht der Breite $1.7b$ überspannen kann?



Freiwillige Zusatzaufgabe: Welches maximale h können Sie (mit beliebig vielen Quadern) auf die obige Art und Weise überspannen?

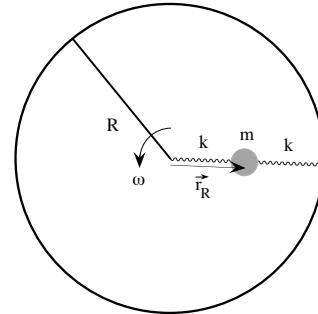
Aufgabe 37: Bruch eines Schornsteins

Wenn alte Fabrikschornsteine gesprengt oder umgelegt werden, dann sieht dies oft aus wie in der gezeigten Abbildungsfolge. Man erkennt, dass der Schornstein im Umfallen auseinanderbricht. Das Zerbrechen ist jedoch nicht direkt durch die Sprengung verursacht, da der Schornstein unterhalb der Bruchstelle noch weitgehend unzerstört ist.

(a) Können Sie mit den Gesetzen der Mechanik starrer Körper eine plausible theoretische Erklärung für dieses Phänomen liefern?

(b) Schätzen Sie ab, in welcher Höhe der Schornstein erstmals bricht, wenn dieser eine gleichmäßige Dicke besitzt und im Vergleich zu seiner Höhe dünn ist.

Aufgabe 38: Rotierende Scheibe



Das Bild zeigt eine rotierende Scheibe. Der Radius der Scheibe sei R und die konstante Winkelgeschwindigkeit sei ω . Im Zentrum der Scheibe ist eine Feder befestigt, deren zweites Ende mit einer reibungsfrei verschiebbaren Masse m verbunden ist. Eine zweite Feder verbindet die Masse mit dem Rand der Scheibe. Die Federkonstanten seien jeweils k . Für $\omega = 0$ ist der radiale Abstand der Masse vom Zentrum der Scheibe $R/2$. Sie sollen allgemein eine Formel für $r_R(\omega)$ angeben. Gehen Sie

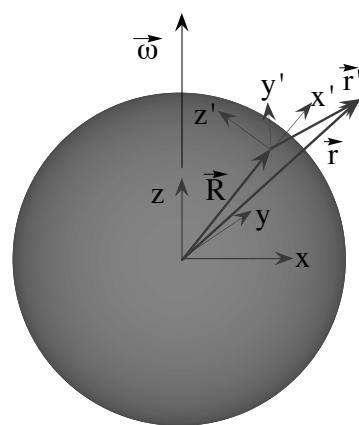
dabei von der Bewegungsgleichung aus, die wir im Abschnitt „Lagrange Funktion im beschleunigten System“ für rotierende Systeme hergeleitet haben:

$$m\dot{\vec{v}}_R = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_R} + m(\vec{r}_R \times \dot{\vec{\omega}}) + 2m(\vec{v}_R \times \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times (\vec{r}_R \times \vec{\omega})).$$

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, welche Terme Null sein müssen!

Aufgabe 39: Rotierendes Bezugssystem

Wir betrachten eine Kugel mit Radius R , deren Mittelpunkt im Ursprung eines Inertialsystems (\mathcal{I}) ruht (vgl. Skizze). Dort ist ein festes Koordinatensystem angebracht. Die Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ um die z -Achse dieses Koordinatensystems. An einem Punkt \vec{R} auf der Kugeloberfläche ist ein zweites Koordinatensystem (\mathcal{R}) mit der Kugel verbunden. Dabei hat die x' -Achse die gleiche Richtung wie \vec{R} , und die y' -Achse hat die gleiche Richtung wie $\dot{\vec{R}}$. Ein Punkt im System \mathcal{I} habe den Ortsvektor \vec{r} . Der gleiche Punkt im System \mathcal{R} hat den Ortsvektor \vec{r}' . D. h. $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$.



- (a) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ als Funktion von R , ϕ , θ im System \mathcal{I} sowie den Komponenten von \vec{r}' im System \mathcal{R} (z.B. x' , y' und

$z')$. Verwenden Sie $\vec{R} = R(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$, wobei $\theta = \text{konstant}$ sowie $R = \text{konstant}$ und $\omega = \phi$ gelten sollen.

- (b) Zeigen Sie, dass dieses Resultat identisch ist mit

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{\mathcal{R}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}' + \vec{R})) + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}' + \vec{R}). \quad (\text{B.2})$$

Der Index \mathcal{R} bedeutet hier, dass diese Zeitableitungen sich nur auf die zeitliche Änderung von \vec{r}' relativ zum System \mathcal{R} beziehen.

1. Bemerkung: Die Gl. (B.2) bedeutet, dass die newtonscche Bewegungsgleichung im System \mathcal{I} , $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, im System \mathcal{R} die Form

$$\ddot{\vec{r}}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{m}\vec{F} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{\mathcal{R}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}' + \vec{R})) - \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}' + \vec{R}) \quad (\text{B.3})$$

hat. Neben der eigentlichen Kraft \vec{F} treten so genannte Scheinkräfte auf. So werden die folgenden Terme der Reihe nach als Coriolisbeschleunigung, Zentripetalbeschleunigung¹ und Linearbeschleunigung bezeichnet.

2. Bemerkung: Die rechte Seite der Gl. (B.2) ergibt sich aus der zweifachen Anwendung des Differentialoperators $\frac{d}{dt}|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \times$ auf $\vec{r}' + \vec{R}$ (mit $|\vec{R}| = \text{const}$), wobei der Index \mathcal{R} wieder die obige Bedeutung hat.

Bei der Herleitung der Drehimpulserhaltung hatten wir gesehen, dass ein beliebiger Vektor \vec{A} unter einer infinitesimalen Rotation $\delta\vec{\phi}$ die Änderung $\delta\vec{A} = \delta\vec{\phi} \times \vec{A}$ erfährt. Entsprechend gilt für eine Änderung pro Zeit: $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta\vec{\phi}}{\delta t} \times \vec{A}$ oder $\frac{d\vec{A}}{dt}|_{\mathcal{I}} = \vec{\omega} \times \vec{A}$.

Hat der Vektor \vec{A} zusätzlich eine Ableitung $\frac{d\vec{A}}{dt}|_{\mathcal{R}} \neq 0$ innerhalb des rotierenden Bezugssystems, dann gilt insgesamt

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_{\mathcal{I}} = \frac{d\vec{A}}{dt}|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega} \times \vec{A}.$$

¹Zur Begriffsklärung: zentripetal [lateinisch], zum Mittelpunkt (Zentrum) hin strebend; Gegensatz: zentrifugal.

(c) Wir betrachten Gl. (B.3) für den Fall einer freien Bewegung eines Massenpunktes m unter dem Einfluss der Gravitationskraft $\vec{F} = -G \frac{M_{Erdem}}{r^3} \vec{r}$. Überlegen Sie zunächst welche zwei Terme auf der rechten Seite von Gl. (B.3) zusätzlich zu \vec{F} mitgenommen werden sollten, und begründen Sie Ihre Überlegung. Fassen Sie anschließend \vec{F} mit $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$ zu $-g\vec{e}_x'$ zusammen. \vec{e}_x' ist ein Einheitsvektor entlang der x' -Achse im \mathcal{R} -System. Geben Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes im \mathcal{R} -System in Komponentenform an:

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= \dots \dot{y}' - \dots \\ \ddot{y}' &= \dots \dot{x}' - \dots \dot{z}' \\ \ddot{z}' &= \dots \dot{y}' .\end{aligned}$$

Was hier als ... ausgelassen ist, sind unterschiedliche Funktionen von g , $\dot{\phi} = |\vec{\omega}|$, und $\sin \theta$ bzw. $\cos \theta$. Hinweis: siehe den Band Mechanik II des Greiner.

(d) Integrieren Sie die oben erhaltenen Bewegungsgleichungen einmal nach der Zeit, und bestimmen Sie die drei resultierenden Konstanten aus den Anfangsbedingungen für einen horizontalen Wurf in z' -Richtung (Richtung Nordpol):

$$\begin{aligned}z'(0) &= 0 & \dot{z}'(0) &= v_z \\ y'(0) &= 0 & \dot{y}'(0) &= 0 \\ x'(0) &= h & \dot{x}'(0) &= 0 .\end{aligned}$$

Das resultierende System aus gekoppelten Gleichungen 1. Ordnung lösen Sie iterativ wie folgt. In der ersten Näherung setzen Sie $\dot{\phi}$ gleich Null (warum ist das nicht schlecht?) und lösen die so entstehenden Gleichungen. Die zweite Näherung erhalten Sie durch Einsetzen dieser ersten Näherungslösung in das ursprüngliche System 1. Ordnung. Geben Sie die so erhaltene zweite Näherungslösung an. Für eine Anfangshöhe von $h = 400m$ und einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_z = 100m/s$ geben Sie die Abweichung vom Aufschlagpunkt aufgrund der Erdrotation an, wenn $\theta = 39^\circ$ ist.

Aufgabe 40: Rotierende Spiralbahn (Newton)

Ein homogener Zylinder mit dem Radius a und der Masse m_{Zyl} kann frei um seine Mittelachse rotieren. Auf dem Mantel des Zylinders ist eine helikale Rinne mit dem Neigungswinkel α befestigt (siehe Skizze), in der ein Massenpunkt m ohne Reibung gleiten kann. Dieser Massenpunkt, der ursprünglich am oberen Rand des Zylinders ruht, soll unter dem Einfluss der Schwerkraft die Rinne hinabgleiten.

(a) Stellen Sie die newtonische Bewegungsgleichung für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes auf. Hinweis: Es treten zunächst unbekannte Kräfte auf, für die Sie in Teil (b) zusätzliche Gleichungen brauchen. Denken Sie an die Drehimpulse im System.

(b) Geben Sie die Lösung (also $\vec{r}(t)$ bzgl. eines raumfesten Koordinatensystems) an für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (a, 0, 0)$ und $\dot{\vec{r}}(0) = (0, 0, 0)$.



Aufgabe 41: Rotierende Spiralbahn (Hamilton)

In dieser Wiederholung der vorherigen Aufgabe verwenden wir die Hamiltonsche Mechanik.

(a) Leiten Sie \mathcal{H} für das gesamte System aus Zylinder und Massenpunkt her.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 42: Hamilton Mechanik für ebenes Pendel am Gummizug

In Aufgabe 10 hatten wir das ebene Pendel am Gummizug betrachtet. Geben Sie die hamilton-

schen Bewegungsgleichungen für dieses System an. Normieren Sie dabei die potenzielle Energie gemäß $U(\phi = 0, \rho_o) = 0$, wobei ρ_o die Lösung von $\partial U / \partial \rho|_{\phi=0} = 0$ ist.

Aufgabe 43: Hamilton/Lagrange und zurück

Eine Hamilton Funktion mit einem Freiheitsgrad hat die Form

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2\alpha} - bqe^{-\alpha t} + \frac{b\alpha}{2}q^2e^{-\alpha t}(\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{kq^2}{2}.$$

α, b und k sind Konstanten.

- (a) Finden Sie eine entsprechende Lagrange Funktion.
- (b) Finden Sie eine äquivalente Lagrange Funktion, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Welches \mathcal{H} entspricht diesem zweiten \mathcal{L} .

Aufgabe 44: Numerische Integratoren

- (a) Ausgehend von dem in der Vorlesung hergeleiteten RK3 für Dgl. des Typs $y' = f(x, y)$,

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + f_n h) \right] + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

geben Sie einen Runge-Kutta Algorithmus ($\mathcal{O}(h^3)$) an, der direkt auf Dgl. des Typs $y'' = f(x, y, y')$ anwendbar ist. D. h. der Algorithmus sollte die Form $y'(x_{n+1}) = \dots + \mathcal{O}(h^3)$ und $y(x_{n+1}) = \dots + \mathcal{O}(h^3)$ haben.

- (b) Zeigen Sie, wie man zur *leap frog* Variante,

$$\begin{aligned} \vec{v}_i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) &= \vec{v}_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ &\quad + \Delta t \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \vec{r}_i(t + \Delta t) &= \vec{r}_i(t) \\ &\quad + \Delta t \vec{v}_i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned}$$

des Verlet Algorithmus,

$$\begin{aligned} \vec{r}_i(t + \Delta t) &= 2\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t - \Delta t) \\ &\quad + \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(t) \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4), \end{aligned}$$

kommen kann.

Aufgabe 45: Trajektorien des Federpendels

- (a) Schreiben Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichungen aus Aufgabe 42 in dimensionsloser Form auf. Die vier gekoppelten Differenzialgleichungen 1. Ordnung enthalten dann nur noch den freien Parameter $K = (\tau_l/\tau_m)^2$ (vgl. Aufgabe 10 (b); $\tau_l = \sqrt{l/g}$ und $\tau_m = \sqrt{m/k}$). Geben Sie auch die Hamilton Funktion selbst in dimensionsloser Form an.

- (b) Im speziellen Fall $K \rightarrow \infty$ (starres Pendel) bleiben nur zwei Gleichungen übrig. Geben Sie diese an, und schreiben Sie ein Computerprogramm, das mithilfe des Algorithmus (B.4) die Größen $\phi(t)$ und $p_\phi(t)$ berechnet. Stellen Sie die Phasenraumtrajektorien für die fünf Anfangsbedingungen $\phi(t=0) = \mp\pi$; $p_\phi(t=0) = \pm 0.001$, $\phi(t=0) = \frac{\pi}{5}$; $p_\phi(t=0) = 0$ und $\phi(t=0) = \mp\pi$; $p_\phi(t=0) = \pm 1$ graphisch im Intervall $(-\pi, \pi)$ dar.

- (c) Erweitern Sie Ihr Computerprogramm so, dass Sie (ebenfalls mit dem Algorithmus (B.4)) auch die Fälle $K < \infty$ integrieren können. Für die Anfangsbedingung $\phi(t=0) = \frac{\pi}{5}$, $p_\phi(t=0) = 0$, $\rho(t=0) = 1$ und $p_\rho(t=0) = 0$ untersuchen Sie die zwei Fälle $K = 10$ (steife Feder) und $K = 1$ (weiche Feder). Tragen Sie in beiden Fällen die (ϕ, p_ϕ) - und (ρ, p_ρ) -Projektionen der Trajektorien auf.

- (d) Für die beiden Fälle unter (c) untersuchen Sie die Energieerhaltung Ihres Algorithmus. Berechnen Sie dazu die Wurzel aus dem mittleren Schwankungsquadrat von \mathcal{H} gegeben durch

$$\delta\mathcal{H} = \sqrt{\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2}.$$

Hier bedeutet $\langle x \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$, und M ist die Zahl der Integrationsschritte. Ihr Resultat sind zwei Tabellen mit $\delta\mathcal{H}$ gegen M für $M = 10, 50, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ (Zeitschritt: $\Delta t = 0.01$).

Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Aufgabe 46: Verzerrungstensor in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Leiten Sie die unten angegebenen Gleichungen für die Komponenten des Verzerrungstensors in (a) Zylinder- und (b) Kugelkoordinaten aus dem §1 im Band *Elastizitätstheorie* des Landau/Lifschitz her:

In Kugelkoordinaten r, θ, φ haben wir

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\ 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten r, φ, z gilt

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\ u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \\ 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Hinweise: (i) Es ist günstig, zunächst die kartesischen Größen $d\vec{r}$, $\vec{\nabla}$ und \vec{u} als Linearkombinationen der jeweiligen krummlinigen Einheitsvektoren hinzuschreiben (siehe z.B. S. Großmann *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*). Gehen Sie dann von $dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx_idx_k$ mit $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ für kleine Deformationen in kartesischen Koordinaten aus. Schreiben Sie

$2u_{ik}dx_idx_k$ in die analoge Form $2u_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta$ in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten um, und geben Sie die $u_{\alpha\beta}$ an. (ii) Die etwas aufwendige Rechenarbeit kann durch den Einsatz algebraischer Rechenprogramme wie *Mathematica* oder *Maple* erleichtert werden.

Aufgabe 47: Euler-Instabilität bei elastischer Unterstützung

Anstelle des Funktionalen in Gl. (10.62) des Skripts betrachten Sie das Funktional

$$\int \left[\frac{\epsilon I}{2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{K}{2} \zeta^2 - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy.$$

Dieser Ansatzbettet die Platte in ein elastisches Medium ein. Dabei ist K ein Maß für dessen Steifigkeit. Berechnen Sie wiederum und analog zur Rechnung in der Vorlesung σ_{krit} . Diskutieren Sie die Fälle K klein bzw. K groß getrennt. Skizzieren Sie die Verformung der Platte unter dieser Kompressionsinstabilität.

Literaturverzeichnis

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifschitz (1979) Mechanik.
Akademie-Verlag
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifschitz (1979) Elastizitätstheorie. Akademie-Verlag
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifschitz (1981) Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag
- [4] K. Weltner (Herg.) (1994) Mathematik für Physiker. Vieweg
- [5] S. Großmann (2005) Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Teubner Studienbücher
- [6] G. E. Joos, E. Richter (1994) Höhere Mathematik. Verlag Harri Deutsch
- [7] Diese Abbildung wurde dem Buch *Molecular Dynamics Simulation* von J. M. Haile entnommen (John Wiley & Sons, 1992)

Index

- H*-Theorem, 99
- Γ -Raum, 98
- μ -Raum, 98
- Amplitude, 64
- Anharmonizität, 63
- aperiodische Bewegung, 64
- Arbeit, 13, 39
- Ausbreitungsgeschwindigkeit
 - longitudinale, 127
 - transversale, 127
- Beschleunigung, 18, 38
- Bewegungs
 - gleichung, 33
 - newtonsche, 19, 21, 29
 - integral, 41
- binomischen Lehrsatz, 8
- Boltzmann
 - Gleichung, 98
 - s Bild, 98
 - Konstante, 99
- Chaos
 - deterministisches, 106
- chemisches Gleichgewicht, 115
- Computersimulation, 98
- Coriolis
 - beschleunigung, 140
 - kraft, 43
- d'alembertsches Prinzip, 87
- Deformation
 - elastische, 111
 - plastische, 111
- Differenzieren
 - Kettenregel, 6
 - partielle vs. totale Ableitung, 9
 - Produktregel, 6
 - totales Differenzial, 9
- Dispersion, 69
- Dissipationsfunktion, 69
- Drehimpuls, 21
- Drehmoment, 21, 83
- e-Funktion, 6
- Eigen
 - drehimpuls, 41
 - frequenz, 69
- Einschwingphase, 69
- Elastizitätsmodul
 - n, 116
- Energie, 22
- Energie-Impuls-Satz
 - relativistischer, 48
- Ensemble, 103
 - mittelwert, 103
 - kanonisches, 103
 - mikrokanonisches, 103
- Entropie, 99, 114
- Ergodenhypothese, 104, 106
- Eulersche
 - Gleichungen, 34
- eulersche
 - Gleichungen, 84
 - Winkel, 85
- Eulersche Formeln, 7, 11
- Fixpunkt, 106
- Flächenelemente umrechnen, 9
- Flächensatz, 53
- freie Energie, 115
- Freiheitsgrade, 33
- Frequenz, 64
- Fundamentalgleichung, 115
- Funktionaldeterminante, 10
- Galilei Transformation, 37
- Gas
 - ideales, 100, 104
- gedämpfte Schwingung, 64
- Geschwindigkeitsadditionstheorem, 31, 48
- Gibbssches Bild, 102

- Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten, 102
- Gravitationsgesetz, 17
- Hamilton
 - Jacobische Differenzialgleichung, 92
 - sche Gleichungen, 89
 - Funktion, 89
- Hauptachsen, 79
- Hauptsatz der Thermodynamik
 - 1., 114
 - 2., 99, 114
- Hookesches Gesetz, 117
- Impuls, 18
 - relativistischer, 31
- Inertialsystem, 36
- Instabilität
 - elastische, 126
- Integration, 11
 - Arbeit als Wegintegral, 13
 - Koordinatentransformation, 12
 - Parameter in Integralen, 12
 - partielle, 12
 - quadratische Ergänzung, 13
 - Stammfunktion, 12
 - Wegintegral, 13
- isotherme Kompressibilität, 117
- Jacobi-Identität, 91
- kanonisch
 - e Gleichungen, 89
 - e Transformation, 91
 - erzeugende Funktion, 93
 - konjugiert, 91
- Kepler
 - problem, 54
 - sches Gesetz
 - zweites, 53
- kinetische Energie, 38
- komplexe Zahl, 14
 - Imaginärteil, 14
 - konjugiert komplex, 14
 - Realteil, 14
- Kompressionsmodul, 117
- Kontinuitätsgleichung, 101
- Kosinussatz, 4
- Kraft, 13, 38
 - konservative, 39
 - nicht konservative, 64
- Kreisel, 79
 - Kugel-, 79
 - symmetrischer, 79
 - unsymmetrischer, 79
- Lagrange
 - sche Gleichungen, 28, 33
 - scher Multiplikator, 34
 - Dichte, 70
- Lamé Koeffizienten, 116
- Legendre Transformation, 89
- Linearbeschleunigung, 140
- Liouvillesches Theorem, 101
- logistic map, 106
- Lorentz Transformationen, 31, 37
- Lyapunov-Exponent, 106
- Massenpunkt, 19
- Mathematica, 106
- maxwellsche Verteilung, 99
- Mikrozustand, 102
- mischend, 106
- Mittelwert
 - Ensemblemittelwert, 103
 - Zeitmittelwert, 97
- Modul
 - Youngs, 71, 118
- Molekularodynamik-Simulationen, 96
- molekulares Chaos, 99
- neutrale Fläche, 124
- Newton
 - sche Bewegungsgleichungen, 38
 - sches Gesetz
 - drittes, 40
 - erstes, 36
 - zweites, 38
 - Newton Verfahren, 8
 - nichtmischend, 106
- Normal
 - koordinaten, 72
 - moden, 72
- Oberflächenkraft, 114
- Ortsvektor, 33
- Oszillator, 41
 - angeregter, 68
 - anharmonischer, 135
 - gedämpfter, 64
 - harmonischer, 63, 92, 133, 135

- im Schwerefeld, 29
- Pendel
 - foucaultsches, 43
 - allgemeines, 138
 - Doppel-, 135
 - Feder-, 133, 134, 141, 142
 - mathematisches, 22, 29, 35, 52, 97
 - Uhren-, 138
- Periheldrehung, 137
- Phase, 64
- Phasenraum, 97
 - trajektorie, 97
- Poincaré's recurrence theorem, 104
- Poisson
 - sche Zahl, 118
 - Klammern, 90
 - Theorem, 91
- potenzielle Energie, 38
- Präzession, 81
- Quantenmechanik, 93
- Raum
 - Γ -, 98
 - μ -, 98
- Reaktionskräfte, 25
- reduzierte Masse, 53
- Reibung, 64
 - skoeffizient, 64
 - stokesche, 64
- Relativitätstheorie
 - spezielle, 36
- Relativkoordinaten, 52
- Resonanzfrequenz, 69
- Ruheenergie, 31
- Runge-Kutta Methode, 95
- rutherfordsche Streuformel, 57
- Saite
 - Schwingungsgleichung, 70
- Scheinkräfte, 140
- Schermodul, 117
- Schwerpunkt, 20, 41
- slingshot-Effekt, 59
- Spannungstensor, 113
- Statistische Mechanik, 97
- Steiner
 - Satz von, 82
- Stoßparameter, 56
- Streu
 - querschnitt, 56
 - winkel, 55
- Summenkonvention, 78
- System
 - geschlossen, 97
 - isoliert, 97
 - offen, 97
- Taylorentwicklung
 - in einer Variablen, 8
 - von Funktionen mehrerer Variablen, 9
- Temperatur, 99, 104, 114
- Thermodynamik, 114
- thermodynamischer Limes, 103
- Trägheits
 - gesetz, 36
 - moment, 79
 - tensor, 78
- Trägheitstensor
 - Hauptträgheitsachsen, 79
- Trajektorie
 - Stabilität, 105
- Umkehrpunkte, 51
- Vektoren
 - Betrag, 3
 - Kreuzprodukt, 4
 - Skalarprodukt, 4
- verallgemeinerte Koordinaten, 27, 33
- Verlet Algorithmus, 96
- Verschiebungsvektor, 111
- Verzerrungstensor, 112
- Virialtheorem, 137
- virtuelle Verschiebungen, 86
- Volumenkraft, 113
- Wellenzahl, 65
- Wirkungsintegral, 27
 - relativistisches freies Teilchen, 31
- Zentralkraft, 53
- Zentrifugal
 - kraft, 24, 43
 - potenzial, 53
- Zentripetalbeschleunigung, 140
- Zwangsbedingung, 34
 - holonom, 34
 - nicht-holonom, 34
 - rheonom, 34

skleronom, 34