Materialphysik II

Ferdinand Haider
Institut für Physik
Universität Augsburg

11. November 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Der zweite Teil der Vorlesung beginnt mit einem Abschnitt über Elastizitätstheorie , dann werden die Träger der Plastiziät, die Versetzungen mit ihren Reaktionen eingeführt. Daran wird sich ein Teil über mechanische Härtung anschließen, danach das Versagen bei Überbeanspruchung, Bruch und Ermüdung, und schließlich werden Erholung und Rekristallisation, also die Wiederherstellung stark verformter Gefüge behandelt. Am Ende wird schließlich ein Abschnitt über nichtmetallische Werkstoffe stehen, wobei neben einer allgemeinen Übersicht auch auf spezifische Probleme (Sprödigkeit bei Keramiken, Plastizität von Polymeren) eingegangen wird.

Kapitel 2

Steilkurs Elastizitätstheorie

Eine wichtige Grundlage für die Vorgänge bei plastischer Verformung ist das Verhalten von Festkörpern bei elastischer Verformung. Dies erscheint vielleicht zunächst paradox, aber wir werden sehen, daß die starke Störung des Kristalls bei plastischer Verformung sehr stark in der sogenannten Versetzungslinie lokalisiert ist, dafür aber in einem weiten Bereich eine schwache elastische Verzerrung des Gitters gefunden wird. Diese bedingt die Wechselwirkung der Versetzungen untereinander und mit anderen Defekten.

Wichtigste Grundgleichung der Elastizitätstheorie ist das Hookesche Gesetz, daß in seiner eindimensionalen Form

$$F = m \cdot a \tag{2.1}$$

den linearen Zusammenhang zwischen Dehnung a einer Feder und einer angelegten Kraft F beschreibt. Dies wird in der Elastizitätstheorie auf allgemeine Dehnungs- und Spannungszustände übertragen. ierfür muß zunächst der Begriff des Dehnungs- und des Spannungstensors eingeführt werden, anschließend ihr Zusammenhang über den Tensor der elastischen Konstanten. Dieses vielkomponentige Gebilde wird dann mit verschiedenen Symmtrieargumenten auf einfache Form gebracht.

2.1 Mathematische Grundlagen

Zunächst werden einige mathematische Grundbegriffe aus den ersten Semestern gebraucht:

Ein **Vektorfeld** $\underline{u}(\underline{x})$ ist eine vektorwertige Funktion über dem R^3, für unsere Zwecke ein Pfeilchen an jedem Punkt des Orts. Beispiele sind Kräfte, Geschwindigkeiten usw.

Ein **Tensor** $\underline{\underline{\tau}}$ (genauer: Tensor zweiter Stufe) ist eine lineare Abbildung eines Vektors auf einen anderen. Für unsere Zwecke eine $(3x3)$-Matrix. Beispiele werden wir unten kennenlernen.

Ein **Tensorfeld** $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x})$ ist analog ein Tensor, der an jedem Punkt des Raums einen anderen Wert hat.

Wichtig ist das Verhalten bei Basistransformationen: Ein Vektor $\underline{x}$ transformiert sich bei einer Basistransformation $\underline{\underline{U}}$ wie

$$\underline{x}' = \underline{\underline{U}}^t \cdot \underline{x} \tag{2.2}$$

ein Tensor wie

$$\underline{\underline{\tau}}' = \underline{\underline{U}}^t \underline{\underline{\tau U}} \tag{2.3}$$

Wichtige Tensoren sind symmetrische Tensoren, für die gilt

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}, \tag{2.4}$$

die nur sechs statt neun unabhängiger Komponenten haben, und antisymmetrische Tensoren, für die gilt

$$\tau_{ik} = -\tau_{ki}. \tag{2.5}$$

Diese haben, da die Diagonalelemente natürlich null sind, nur drei freie Komponenten. Sie entsprechen also Vektoren, aber wegen ihres Verhaltens bei Basistransformationen axialen Vektoren (z.B. Drehimpuls).

Symmetrische Tensoren lassen sich durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalform bringen. Hier stehen dann die drei Eigenwerte λ_i in der Diagonalen. Weiter besitzen sie drei wichtige Invarianten unter Basistransformationen, nämlich

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\tau}} = \sum_i \tau_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \tau_{11}\tau_{22}\tau_{22}\tau_{33}\tau_{33}\tau_{11} - (\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2) \\ &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ I_3 &= \det\underline{\underline{\tau}} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Jeder Tensor läßt sich in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen:

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}^t) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}}^t) \tag{2.7}$$

Eine wichtige Art von Tensoren sind die Dyaden (das dyadische Produkt): zwei Vektoren $\underline{x}$, $\underline{y}$ bilden die Dyade $\underline{\underline{d}}$ durch

$$\underline{\underline{d}} := \underline{x} \otimes \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Schließlich wird gleich noch die Taylorentwicklung eines Skalarfeldes $f(\underline{x})$ benötigt:

$$f(\underline{x}+\underline{\varepsilon}) \approx f(\underline{x}) + \underline{\varepsilon} \cdot \nabla f \tag{2.9}$$

Hieraus erhält man die Entwicklung eines Vektorfeldes komponentenweise zu

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}+\underline{\varepsilon}) &\approx \underline{u}(\underline{x}) + (\underline{\varepsilon} \cdot \nabla)\underline{u} \\ &= \underline{u}(\underline{x}) + \underline{\varepsilon} \cdot (\nabla \otimes \underline{u}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2 Der Dehnungstensor

Durch eine Abbildung $\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x})$ gehe jeder Ortspunkt in einen neuen über. Die Differenz zwischen neuem und altem bezeichnen wir als **Verschiebungsfeld**

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{x}' - \underline{x} \tag{2.11}$$

Hieraus ergibt sich das **Verzerrungsfeld**, wenn man die Änderung des Abstands benachbarter Punkte $\underline{x}$, $\underline{y} = \underline{x} + \Delta\underline{x}$ betrachtet

$$\underline{u}(\underline{y}) \approx \underline{u}(\underline{x}) + \Delta\underline{x} \cdot (\nabla \otimes \underline{u})\,, \tag{2.12}$$

in Komponenten

$$u_i(\underline{y}) \approx u_i(\underline{x}) + \sum_j (\Delta x)_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,. \tag{2.13}$$

Nach der Abbildung werden $\underline{x} \to \underline{x}'$, $\underline{y} \to \underline{y}'$. Ihre Differenz wird

$$\begin{aligned} \Delta\underline{x}' &= \underline{y}' - \underline{x}' \\ &= \underline{y} + \underline{u}(\underline{y}) - \underline{x} - \underline{u}(\underline{x}) \\ &\approx \Delta\underline{x} + \Delta\underline{x}(\nabla \otimes \underline{u}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dies wieder in Komponenten lautet

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + \sum_j \Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,. \tag{2.15}$$

Das Betragsquadrat dieser Vektoren ist

$$\begin{aligned} |\Delta\underline{x}'|^2 &= |\Delta\underline{x}|^2 + 2\sum_{i,j} \Delta x_i \Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k} \Delta x_j \Delta x_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ &= |\Delta\underline{x}|^2 + \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta x_j \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ist $\underline{u}$ eine langsam veränderliche Funktion des Ortes, kann der letzte Term in der Klammer vernachlässigt werden. Mit der Definition des **Dehnungstensors** $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\tag{2.17}$$

dem symmetrischen Anteil des Verzerrungstensors, wird

$$|\Delta \underline{x}'|^2 = |\Delta \underline{x}|^2 + 2\Delta \underline{x} \underline{\underline{\varepsilon}} \Delta \underline{x}\,. \tag{2.18}$$

2.2.1 Eigenschaften des Dehnungstensors

Die Diagonalelemente ε_{ii} sind die Dehnungen in Richtung der Koordinatenachsen. Z.B. sei $\Delta \underline{x} = \delta \cdot \underline{e}_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\Delta \underline{x}'|^2 &= \delta^2 + 2\sum_{i,j} \Delta x_i \Delta x_j \varepsilon_{i,j} \\ &= \delta^2(1 + 2\varepsilon_{ii} \\ |\Delta \underline{x}'| &\approx \delta(1 + \varepsilon_{11})\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Nichtdiagonalelemente ε_{ij} sind Scherungen auf der j-Ebene in i-Richtung Ist z.B. $\Delta \underline{x} = \delta_1 \underline{e}_1$, $\Delta \underline{y} = \delta_2 \underline{e}_2$, dann berechnet sich der Winkel zwischen ihren Bildern ähnlich wie oben aus

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}' \cdot \Delta \underline{y}' &= \Delta \underline{x} \cdot \Delta \underline{y} + \sum_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \Delta \underline{x} \cdot \Delta \underline{y} + 2\sum_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j \varepsilon_{ij} \\ &= 2\delta_1 \delta_2 \varepsilon_{12}\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\cos(\Delta \underline{x}', \Delta \underline{y}') = \frac{\Delta \underline{x}' \cdot \Delta \underline{y}'}{|\Delta \underline{x}'|\,|\Delta \underline{y}'|} = 2\varepsilon_{12}\,. \tag{2.20}$$

Schließlich gibt die Spur des Dehnungstensors

$$\mathrm{Sp}\,\varepsilon = \sum_i \varepsilon_{ii} \tag{2.21}$$

die relative Volumenänderung eines infinitesimalen Volumenelements V an: Sind $\Delta \underline{x} = \delta_1 \underline{e}_1$, $\Delta \underline{y} = \delta_2 \underline{e}_2$, $\Delta \underline{z} = \delta_3 \underline{e}_3$, dann sind ihre Bilder

$$\Delta \underline{x}' = \delta_1 \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\underline{y}' &= \delta_2 \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ 1+\varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{32} \end{pmatrix} \\
\Delta\underline{z}' &= \delta_3 \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ 1+\varepsilon_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Das Volumen ist

$$
\begin{aligned}
V' &= \det(\Delta\underline{x}', \Delta\underline{y}', \Delta\underline{z}') \\
&= \delta_1\delta_2\delta_3 \det \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1+\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \\
&\approx V \cdot (1 + \sum_i \varepsilon_{ii}) \,. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\frac{V' - V}{V} = \mathrm{Sp}\, \varepsilon \qquad (2.23)
$$

2.2.2 Die Kompatibilitätsbedingungen

Aus den Definitionen des Dehnungstensors folgt durch zweimaliges Differenzieren etwa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial y} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \,,
\end{aligned}
$$

also

$$
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon_{yy}) \,. \qquad (2.24)
$$

Allgemein

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\varepsilon_{kl} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\varepsilon_{jl} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l}\varepsilon_{ik} \qquad (2.25)
$$

Diese Bedingung, die ja darauf beruht, daß sich der Dehnungstensor aus dem Verschiebungsfeld ableitet, gewährleistet, daß sich zu einem gegebenen Dehnungstensor ein eindeutiges Verschiebungsfeld durch Integration berechnen läßt. Sie ist eng verwandt zu den aus der Mathematik bekannten Integrabilitätsbedingungen; ist sie verletzt, liegen also Inkompatibilitäten vor, dann, weil im Verschiebungsfeld

Singularitäten (z.B: Löcher) sind. Führt man die Integration um solche Singularitäten, kann das Ergebnis davon abhängen, wie oft man die Singularitäten einschließt. Ein Beispiel (auf das aber nicht weiter eingegangen wird) sind genau die Versetzungen. Wie wir später sehen werden, ergibt der Burgersumlauf um eine Versetzung gerade eine Inkompatibilität.

2.3 Der Spannungstensor

Im allgemeinen werden die oben behandelten Deformationen eines Körpers durch äußere oder innere Kräfte bewirkt. Bezieht man die Kräfte auf die Flächenelemente, auf die sie wirken, erhält man **Spannungen**. Die Kräfte auf die Flächen eines Volumenelements müssen nicht unbedingt nur Zug- oder Druckspannungen sein, sondern können auch seitlich angreifen, also scherend wirken. Daher führt man den **Spannungstensor**$\underline{\underline{\sigma}}$ ein, dessen Diagonalelemente die Zug- oder Druckspannungen sind und dessen Nichtdiagonalelemente Scherspannungen sind. Allgemein bezeichnet σ_{ij} die Spannung, die durch eine an die x_j-Ebene angreifende Kraft in x_i-Richtung hervorgerufen wird, $\sigma_{ij} dx_i dx_k$ also die Kraft in x_i-Richtung auf das Flächenelement $dx_i dx_k$ der x_j-Ebene.

Damit das Volumenelement insgesamt nicht rotiert, muß der Spannungstensor ebenfalls symmetrisch sein,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \,. \tag{2.26}$$

Falls alle Kräfte lokal sind (d.h. nicht durch äußere Felder, die im Innern angreifen, wie etwa die Schwerkraft, hervorgerufen werden) , müssen sich die an den unterschiedlichen Flächen des Volumenelements angreifenden Kräfte kompensieren. Damit erhält man die wichtige **Gleichgewichtsbedingung**.

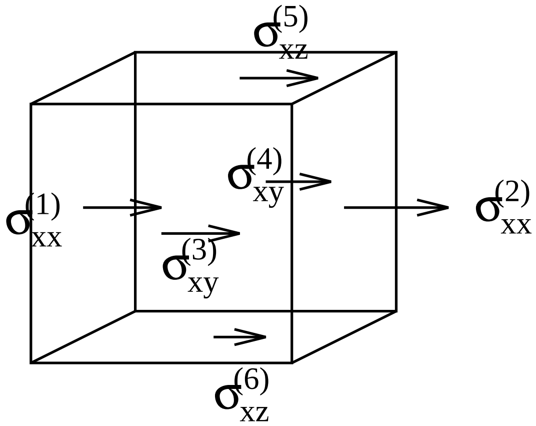


Abbildung 2.1: Die an den Flächen eines Volumenelements angreifenden Spannungen

In x-Richtung etwa muß gelten (siehe Abbildung 2.3):

$$(\sigma_{xx}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(2)}) dydz + (\sigma_{xy}^{(3)} - \sigma_{xy}^{(4)}) dxdz + (\sigma_{xz}^{(5)} - \sigma_{xz}^{(62)}) dxdy = 0 \,, \tag{2.27}$$

entsprechend für die anderen Koordinatenrichtungen. Differentiell geschrieben lautet die Gleichgewichtsbedingung damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} &= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Greift eine Volumenkraft $\underline{f}dV$ an, muss entsprechend diese von den resultierenden Spannungen kompensiert werden, also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} &= -f_x \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} &= -f_y \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} &= -f_z
\end{aligned} \tag{2.29}$$

An der Oberfläche des Körpers müssen die Spannungen selbst (nicht nur ihre Ableitungen) verschwinden oder kompensiert werden. Scherspannungen in der Oberfläche heben sich gegenseitig auf, so daß nur die Normalspannungen kompensiert werden müssen. Die Randbedingungen lauten also

$$\sum_j \sigma_{ij}(\underline{x}) \cdot n_j(\underline{x}) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -G_i(\underline{x}) \end{array} \right. , \tag{2.30}$$

wenn $\underline{n}(\underline{x})$ der Normalenvektor der Oberfläche am Ort $\underline{x}$ und $\underline{G}$ die dort wirkende äußere Kraft ist.

2.4 Das Hookesche Gesetz

In Verallgemeinerung des aus der Anfängervorlesung bekannten Hookeschen Gesetzes für den linearen Zusammenhang zwischen der Kraft auf eine Feder und ihrer Dehnung kann für kleine elastische Verformungen eines Festkörpers ebenfalls ein linearer Zusammenhang erwartet werden:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \qquad oder \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} . \tag{2.31}$$

In Komponenten geschrieben, lautet das Hookesche Gesetz

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} c_{ijkl}\varepsilon_{kl} . \tag{2.32}$$

Der Tensor der elastischen Konstanten, $\underline{\underline{\underline{c}}}$ und sein Inverses, der der elastischen Moduln, $\underline{\underline{\underline{s}}}$, sind Tensoren vierter Stufe, haben also $3^4 = 81$ Elemente. Da $\underline{\underline{\sigma}}$ und $\underline{\underline{\varepsilon}}$ jedoch symmetrische Tensoren sind, also jeweils nur 6 unabhängige Elemente besitzen, hat $\underline{\underline{\underline{c}}}$ im allgemeinsten Fall nur 36 unabhängige ELemente. Dies wird häufig in der Voigtschen Notation ausgenutzt, die aus $\underline{\underline{\sigma}}$ und $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sechskomponentige Vektoren macht entsprechend folgendem Schema:

$$
\begin{aligned}
xx &\rightarrow 1\\
yy &\rightarrow 2\\
zz &\rightarrow 3\\
yz &\rightarrow 4\\
xz &\rightarrow 5\\
xy &\rightarrow 6
\end{aligned}
$$

also

$$ij \rightarrow \begin{cases} i & \text{für} \quad i = j \\ 9 - i - j & \text{für} \quad i \neq j\,. \end{cases} \tag{2.33}$$

Dann wird $\underline{\underline{\underline{c}}}$ zu einer $6x6$-Matrix [1]. Diese ist ebenfalls symmetrisch und besitzt daher nur 21 unabhängige Elemente. Dies folgt etwa aus dem später eingeführten Ausdruck für die Energiedichte eines elastisch verzerrten Körpers:

$$dE = \sum_{ij} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}\,, \tag{2.35}$$

aus dem folgt, daß

$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{2.36}$$

ist. Andererseits ist

$$d\sigma_{ij} = \sum_{kl} c_{ijkl} d\varepsilon_{kl}\,, \tag{2.37}$$

also

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = c_{ijkl} = \frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = c_{klij}\,. \tag{2.38}$$

Diese Identitäten beruhen darauf, daß die Energie ein vollständiges Differential, also wegunabhängig ist.

[1] Da manche Indexkombinationen in der Vierenotation häufiger auftauchen als in der Voigtschen Schreibweise, ist $\underline{\underline{\underline{s}}}$ nicht mehr einfach die inverse Matrix zu $\underline{\underline{\underline{c}}}$. Stattdessen ist

$$s_{ijkl} \rightarrow \begin{cases} s_{ij} & \text{für} \quad i = j\,, k = l \\ \frac{1}{2} s_{i,9-k-l} & \text{für} \quad i = j, k \neq l\,, \\ \frac{1}{4} s_{9-i-j,9-k-l} & \text{für} \quad i \neq j\,, k \neq l \end{cases} \tag{2.34}$$

2.4.1 Kristallsymmetrie

Eine weitere Reduktion der Anzahl der elastischen Konstanten ergibt sich, wenn man die Symmetrie des Kristallgitters (oder sonstigen Materials) berücksichtigt, aus dem der elastisch verzerrte Körper besteht. Der wichtigste Fall ist der eines kubischen Kristalls, in dem die drei Achsrichtungen äquivalent sind, so daß Vertauschungen $x \to y$ etc. nichts ausmachen. Daraus folgt

$$c_{xxxx} = c_{yyyy} = c_{zzzz} \tag{2.39}$$

$$c_{xxyy} = c_{yyzz} = c_{zzxx} \tag{2.40}$$

$$c_{yzyz} = c_{xzxz} = c_{xyxy} \tag{2.41}$$

in Voigtscher Notation

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} := \lambda + 2\mu + \mu' \tag{2.42}$$

$$c_{12} = c_{23} = c_{31} := \lambda \tag{2.43}$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} := \mu \tag{2.44}$$

Die Größen λ, μ, μ' heißen Lam'ekonstanten.

Weiter besitzen kubische Kristalle Spiegelsymmetrien, etwa $x \to -x$. Daraus folgt z.B.

$$c_{14} = c_{xxyz} = c_{xx(-y)z} = -c_{xxyz} = 0 \tag{2.45}$$

also allgemein

$$c_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i > 3, j > 3, i \neq j \,. \tag{2.46}$$

$\underline{\underline{c}}$ hat damit die Form

$$\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + \mu' & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu + \mu' & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu + \mu' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Der Tensor der elastischen Moduln ergibt sich hieraus

$$\underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\mu+\frac{\mu'}{2}}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & -\frac{\lambda}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & -\frac{\lambda}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & \frac{\lambda+\mu+\frac{\mu'}{2}}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & -\frac{\lambda}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & -\frac{\lambda}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & \frac{\lambda+\mu+\frac{\mu'}{2}}{(\mu+\frac{\mu'}{2})(3\lambda+2\mu+\mu')} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Noch einfacher sind die Verhältnisse im isotropen Festkörper, in dem alle Richtungen gleichwertig sind. Hier muß gelten

$$\mu' = 0\,, \tag{2.49}$$

was

$$c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \tag{2.50}$$

äquivalent ist. Diese Bedingung kann man etwa herleiten, wenn man die Richtungsabhängigkeit etwa des E-Moduls (s.u.) bestimmt. Eine einfache Rechnung liefert für eine einachsige Dehnung in einer beliebigen Kristallrichtung *vecn*

$$\hat{\varepsilon}_{11} = \hat{\sigma}_{11}\left(\frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} + 2(\frac{1}{2c_{44}} - \frac{1}{c_{11}-c_{12}})(n_x^2 n_y^2 + n_y^2 n_z^2 + n_z^2 n_x^2))\right)\,, \tag{2.51}$$

wobei $\hat{\varepsilon}$ der Dehnungstensor im Koordinatensystem des Körpers ist. Fordert man nun Richungsunabhängigkeit, ergibt sich sofort obige Bedingung. Isotrope Festkörper sind etwa untexturierte Polykristalle oder viele amorphe Materialien.

2.4.2 Übliche Bezeichnungen

Die üblichen Größen der Elastizitätstheorie, Elastizitätsmodul (E-Modul) E, Schermodul G, Querkontraktionszahl ν, Kompressibilität κ hängen mit den hier eingeführten Größen für isotrope Medien direkt zusammen, wie man leicht zeigt:

$$
\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{1}{E} && (2.52)\\
s_{12} &= -\frac{\nu}{E} && (2.53)\\
s_{44} &= \frac{1}{G} && (2.54)\\
c_{11} &= -E\frac{1-\nu}{(1+\nu)(2\nu-1)} && (2.55)\\
c_{12} &= -E\frac{\nu}{(1+\nu)(2\nu-1)} && (2.56)\\
c_{44} &= G && (2.57)\\
& && (2.58)\\
E &= \frac{(c_{11}+2c_{12})(c_{11}-c_{12})}{c_{11}+c_{12}} && (2.59)\\
\nu &= \frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}} && (2.60)\\
\kappa &= 3(s_{11}+2s_{12} && (2.61)\\
& && (2.62)
\end{aligned}
$$

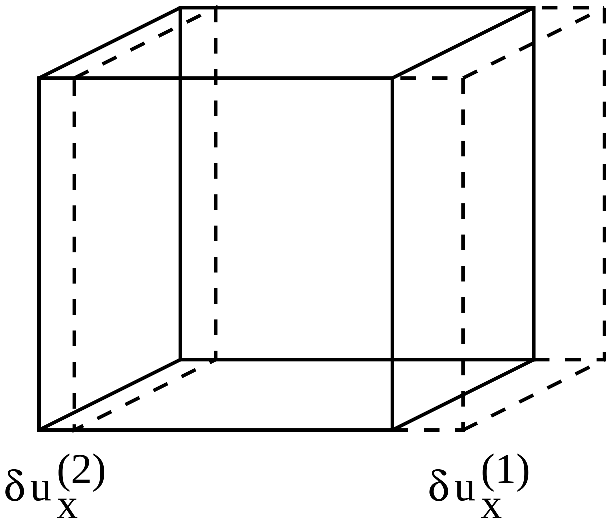


Abbildung 2.2: Zur Berechnung der elastischen Energie wird die Verschiebung der Seitenflächen (hier δu_x auf den zwei Seitenflächen) eines Volumenelements gegen die äußere Spannung betrachtet.

2.4.3 Weitere Kristallsysteme

Mit ähnlichen Argumenten wie oben kann man auch für die anderen Symmetrieklassen die Anzahl der unabhängigen elastischen Konstanten reduzieren. Man findet folgendes Ergebnis

Kristallsystem	Anzahl Konstanten
triklin	18
monoklin	12
rhombisch	9
tetragonal	6
rhomboedrisch	6
hexagonal	5
kubisch	3
istrop	2

2.5 Die Energiedichte eines elastisch verzerrten Körpers

Diese ergibt sich wie üblich aus der Beziehung

$$dE = \underline{F} \cdot d\underline{s} \tag{2.63}$$

für ein infinitesimales Volumen: die Arbeit, die bei Änderung der Verschiebung δu_x etwa in x-Richtung gegen die Kraft $\sigma_{ij} dx_k dx_l$ geleistet wird, ist

$$\delta E_x \quad = \quad \sigma_{xx}(\delta u_x^{(1)} - \delta u_x^{(2)}) dydz$$

$$
\begin{aligned}
&+\sigma_{xy}(\delta u_x^{(3)} - \delta u_x^{(4)})dxdz \\
&+\sigma_{xz}(\delta u_x^{(5)} - \delta u_x^{(6)})dxdy \\
= \quad &\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}
\end{aligned}
$$

und entsprechend für die y- und z-Richtung. Damit wird die gesamte Arbeit

$$\delta E = \sum_{i,j} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{2.64}$$

Da die Arbeit wegunabhängig sein muß, ist dies ein vollständiges Differential. Setzt man noch das Hookesche Gesetz ein, ergibt sich nach Integration

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\,. \tag{2.65}$$

Für einen isotropen Körper ergibt sich die besonders einfache Beziehung

$$E = \frac{1}{2}(\lambda(\mathrm{S}p\,\varepsilon)^2 + \mu \sum_{i,k} \varepsilon_{ik}^2) \tag{2.66}$$

Kapitel 3

Versetzungen

Wie im letzten Kapitel gezeigt, reagiert ein Material auf eine äußere oder innere Spannung zunächst mit einer elastischen, reversiblen Formänderung. Erhöht man die Spannung jedoch über einen kritischen Wert σ_c, wird irgendwann die Formänderung nach Entlastung nicht mehr vollständig verschwinden, das Material hat sich **plastisch** verformt.

Dies kann man scheinbar leicht verstehen, wenn man berücksichtigt, daß die meisten Materialien einen kristallinen Aufbau haben: Dies bewirkt, daß das Kristallpotential periodisch ist. Eine Dehnung über eine halbe Gitterkonstante hinaus führt in das nächste Potentialminimum, wie man leicht an dem Federmodell in Abb. 3.1 sieht.

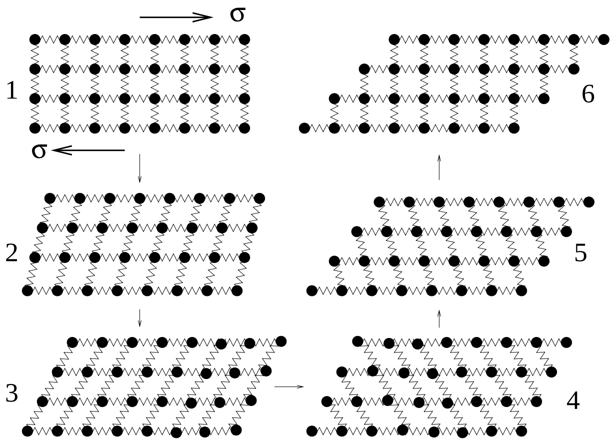


Abbildung 3.1: Federmodell für die plastische Verformung: in den ersten drei Schritten werden Federn gedehnt, der vierte entspricht dem dritten mit geänderter Nachbarschaft, danach gehen die Federn wieder zusammen.

Berechnet man jedoch in diesem Modell die hierfür nötige Spannung, erhält man den riesigen Wert von

$$\sigma_c \approx \frac{G}{\sqrt{5}} . \tag{3.1}$$

Selbst eine Verfeinerung dieses Modell reduziert diesen Wert nur unwesentlich auf etwa $\frac{G}{10}$. Hiernach würde ein Kupferdraht von 1mm^2 Querschnitt (G=40GPa) eine

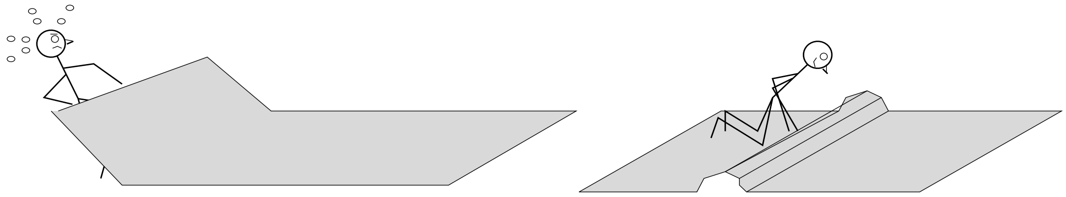


Abbildung 3.2: Teppichmodell für die Verformung durch Versetzungsbewegung: es ist leichter, eine Falte durch den Teppich zu schieben als ihn als ganzes zu verschieben.

Last von 4kN (entsprechend einem Gewicht von 400kG) tragen. Das Experiment zeigt jedoch, daß er schon bei etwa 0.2kN (entsprechend 20kG) beginnt, sich plastisch zu verformen.

Dieser scheinbare Widerspruch konnte erst in den dreissiger Jahren mit der Einführung des Konzeptes der **Versetzung** geklärt werden. Die Grundidee ist, daß sich nicht der ganze Kristall homogen verformt, sondern daß eine lokale, stark verzerrte Region den Kristall durchläuft. Dies ist analog zur Bewegung eines Teppichs: es ist viel leichter ihn zu verschieben, wenn man eine kleine Falte hineinbringt und diese durchschiebt, als ihn als ganzes über den Boden zu schieben (Abb.3.2).

3.1 Stufenversetzung, Schraubenversetzung, allgemeine Versetzung

Im Kristall sind diese Falten natürlich an die Gitterperiodizität gebunden. Der einfachste Fall ist die **Stufenversetzung**, die in Abbildung 3.3 zu sehen ist:

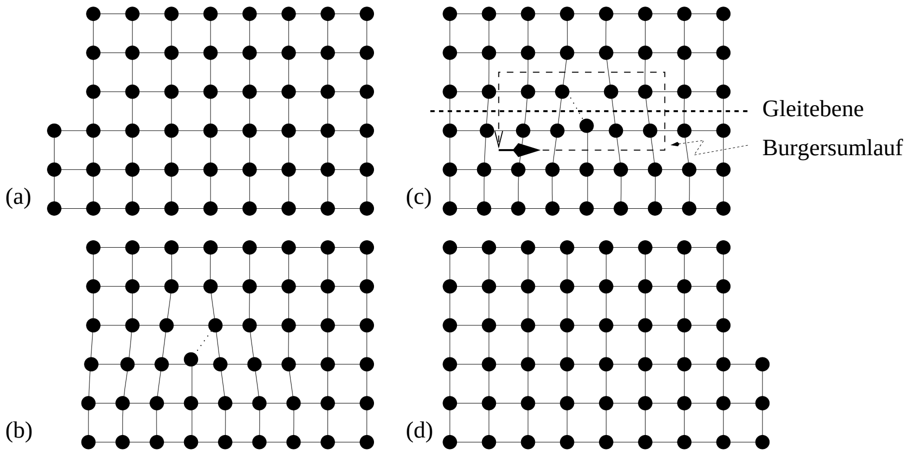


Abbildung 3.3: Schema einer Stufenversetzung, die (a) in den Kristall hineinläuft, (b), (c) sich im Kristall befindet und (d) ihn auf der anderen Seite verläßt

eine Kristallstufe läuft in den Kristall hinein, so daß im Inneren eine Extrahalbebene vorhanden ist. Durchläuft sie den Kristall komplett und tritt an der anderen Seite wieder aus, ist der Kristall um einen Gittervektor abgeglitten. An diesem Beispiel erkennt man schon eine Reihe wichtiger Charakteristika einer Versetzung:

- Eine Versetzung ist ein linienhafter Defekt. Nur das Ende der eingeschobenen Halbebene ist ein wirklicher Defekt, darum herum liegen nur elastische Verzerrungen vor. Das Innere wird als **Versetzungskern** bezeichnet, hier versagt die Elastizitätstheorie, während der Außenbereich gut linear-elastisch beschrieben werden kann.

- Eine Versetzung ist ein topologischer Defekt, der im Kristallinneren nicht erzeugt oder vernichtet werden kann.

- Eine Versetzung wird durch einen **Burgersvektor** charakterisiert. Dieser ergibt sich, wenn man um die Versetzung herum einen Weg legt, der im ungestörten Material geschlossen wäre. Umschließt er eine Versetzung, bleibt ein Schließungfehler, eben der Burgersvektor übrig (Abb. 3.3).

- Der Burgersvektor einer Stufenversetzung steht senkrecht auf der Versetzungslinie.

- Eine Stufenversetzung bewegt sich auf einer wohldefinierten Gleitebene, die die Versetzunglinie überstreicht, wenn sie durch den Kristall wandert. Diese Gleitebene wird von Burgersvektor und Versetzunglinie aufgespannt. Die Versetzungsbewegung bedeutet allerdings keine echte Atombewegung, sondern nur eine Änderung der Koordination (Abb. 3.3 (b),(c)).

Der Burgersvektor ist eine wichtige Erhaltungsgröße für eine Versetzung; weder die Form noch die Lage des Burgersumlaufs ändert ihn. Ebenso kann der Burgersumlauf an jeder Stelle der Versetzungslinie gemacht werden - hieraus folgt, daß die Versetzung im Kristall nicht enden kann. Bei Versetzungsreaktionen muß der gesamte Burgersvektor erhalten bleiben. Ein Beispiel ist die Annihilation von Versetzungen mit entgegengesetzten Burgersvektoren, die in Abb. 3.4 gezeigt ist.

Der zweite einfache Fall einer Versetzung ist die sogenannte **Schraubenversetzung**. Hier wird der Kristall (in Gedanken) aufgeschnitten, die Schnittufer werden parallel zur Schnittlinie verschoben und der Kristall wird anschließend wieder zusammengefügt.

Der Burgersvektor einer Schraubenversetzung liegt parallel zur Versetzungslinie. Auch hier erhält man einen Kristall, der um einen Burgersvektor abgeschert ist, wenn die Versetzung den ganzen Kristall durchläuft.

Die meisten Charakteristika einer Stufenversetzung gelten auch für eine Schraubenversetzung, mit AUsnahme der festgelegten Gleitebene: da die Schnittebene

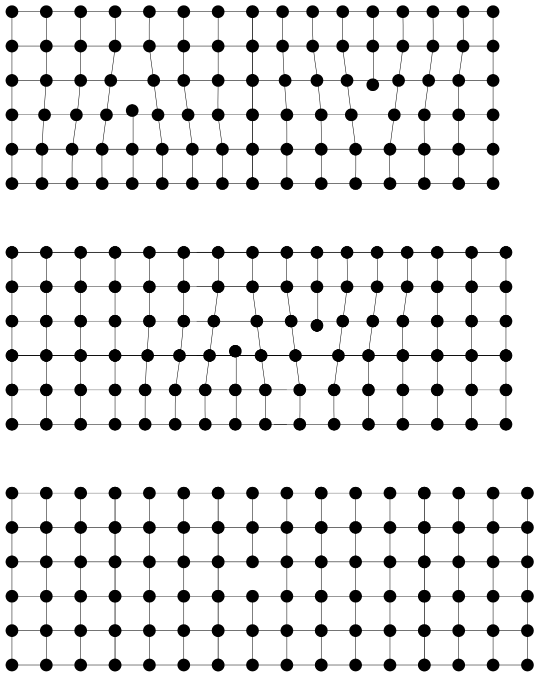


Abbildung 3.4: Annihilation zweier Stufenversetzungen mit entgegengesetzten Burgersvektoren: laufen sie auf der gleichen Gleitebene aufeinander zu, können die zwei Halbebenen sich zu einer kompletten Ebene vereinen.

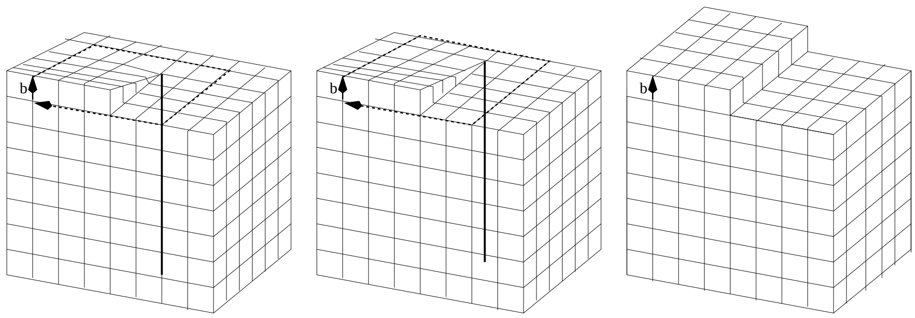


Abbildung 3.5: Eine Schraubenversetzung in einem Kristall mit zugehörigem Burgersumlauf.

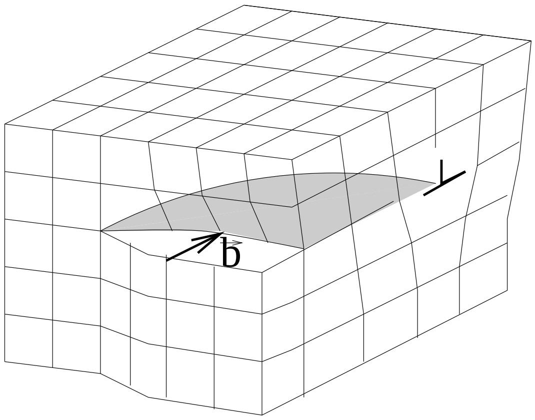


Abbildung 3.6: Ein gekrümmtes Versetzungselement, das vorne als Schraubenversetzung in den Kristall eintritt und als Stufe an der Seite austritt. Der (überall gleiche) Burgersvektor ist $\underline{b}$

nicht wirklich existiert (bzw. in jeder Orientierung senkrecht zum Burgersvektor angebracht werden kann), besitzt die Schraube zunächst keine wohldefinierte Gleitebene. Später wird allerdings gezeigt, daß sie aufgrund ihrer inneren Struktur doch eine Vorzugsebene besitzt.

Im allgemeinen Fall können Versetzungslinie und Burgersvektor jeden Winkel einschließen; man bezeichnet eine solche Versetzung als gemischte Versetzung mit Stufen- und Schraubenanteil. Auch ist die Richtung der Versetzungslinie anders als der Burgersvektor keine Erhaltungsgröße, eine Versetzung ändert im allgemeinen etwa unter einer äußeren Spannung ihre Linienrichtung.

Eine Versetzungslinie, die in sich geschlossen ist, wird als Versetzungsring oder -loop bezeichnet. Hier gibt es zwei wichtige Grenzfälle:

- den Fall eines Rings mit einem Burgersvektor in der Ringebene, der bei der Versetzungsmultiplikation (s.u.) eine wichtige Rolle spielt. Er setzt sich aus Teilen wie in Abb. 3.6 zusammen, hat also Schrauben- und Stufenanteile.

- den prismatischen Versetzungsring, bei dem der Burgersvektor senkrecht auf der Ringfläche steht. Prismatische loops entstehen, wenn Punktdefekte (Leerstellen, Zwischengitteratome) sich zu einem herausgenommenen/eingeschobenen Ebenenstück zusammenfinden. Sie bestehen ausschließlich aus Stufensegmenten.

Natürlich ist auch hier eine Kombination aus beiden denkbar.

3.2 Spannungs- und Verzerrungsfeld einer Versetzung, Linienenergie

Für eine Schraube ergibt sich Verzerrungs- und Spannungstensor sofort aus dem einleuchtenden Ausdruck für das Verschiebungsfeld. Die Verschiebungen um eine

Schraube in z-Richtung sind ausschließlich in z-Richtung und verteilen sich dort radialsymmetrisch um die Versetzungslinie. Bei einem kompletten Umlauf um die Linie müssen sie sich zu einem Burgersvektor aufsummieren:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

(„Wendeltreppe“).

Daraus folgt als Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{b}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 & 0 & \frac{b}{4\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{b}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{b}{4\pi}\frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

und als Spannungstensor (für ein isotropes Medium)

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \frac{Gb}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{b}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 & 0 & \frac{b}{4\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{b}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{b}{4\pi}\frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

Im Ursprung (d.h. im Versetzungskern) divergiert das Spannungs- und das Verzerrungsfeld - hier ist die lineare Elastizitätstheorie nicht mehr gültig. Am Verzerrungstensor erkennt man, daß die Schraubenversetzung keine Volumenaufweitung bewirkt, denn $\mathrm{S}p\,\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$. Der Spannungstensor enthält wie zu erwarten nur Scherspannungen in z-Richtung.

Die Energiedichte um die Schruabenversetzung ergibt sich hieraus zu

$$E_v = \frac{1}{2}\sum_{ij} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{Gb^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} . \tag{3.5}$$

Integriert man dies über die (x,y)-Ebene, erhält man die Energie pro Linienelement der Versetzung, ihre sogenannte **Linienenergie**:

$$\begin{aligned} \int E_v dxdy &= 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \frac{Gb^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{R^2} R dR \\ &= \frac{Gb^2}{4\pi} \ln \frac{R_1}{R_0} , \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei die Integration innen bei R_0 und außen bie R_1 abgeschnitten wird, da innen die lineare Elastizitätstheorie nicht mehr gilt, während außen die Verzerrungsfelder irgendwo durch die anderer Versetzungen (oder im Extremfall durch die Probendimensionen) abgeschirmt werden. Üblicherweise setzt man für den inneren Abschneideradius den Burgersvektor und für den äußeren den mittleren Versetzungsabstand, also den Kehrwert der Wurzel aus der Versetzugnsdichte

$$\begin{aligned} R_0 &\approx b \\ R_1 &\approx \rho^{-1/2}\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Für eine Stufenversetzung sind die Verhältnisse komplizierter, da sie keine Zylindersymmetrie aufweist. Das Verschiebungsfeld für eine Stufenversetzung mit Burgersvektor $\underline{b}||\underline{x}$ und Linienrichtung $\underline{l}||\underline{z}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{b}{2\pi}(\arctan\frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{xy}{x^2+y^2}) \\ u_y &= \frac{b}{2\pi}(-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\log\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{y^2}{x^2+y^2}) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Hieraus folgt der Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ &= \frac{b\,y\,\left((3-2\,\nu)\,x^2+(1-2\,\nu)\,y^2\right)}{4\,(-1+\nu)\,\pi\,{(x^2+y^2)}^2} \\ &= \frac{b\,r\,\sin\phi\,\left(3\,r^2\cos^2\phi-2\,\nu\,r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi-2\,\nu\,r^2\sin^2\phi\right)}{4\,(-1+\nu)\,\pi\,{\left(r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi\right)}^2} \\ &= \frac{b\,(2-2\,\nu+\cos(2\,\phi))\,\sin\phi}{-4\,\pi\,r+4\,\nu\,\pi\,r} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ &= \frac{-\left(b\,y\,\left((1+2\,\nu)\,x^2+(-1+2\,\nu)\,y^2\right)\right)}{4\,(-1+\nu)\,\pi\,{(x^2+y^2)}^2} \\ &= \frac{b\,r\,\sin\phi\,\left(r^2\cos^2\phi+2\,\nu\,r^2\cos^2\phi-r^2\sin^2\phi+2\,\nu\,r^2\sin^2\phi\right)}{4\,(1-\nu)\,\pi\,{\left(r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi\right)}^2} \\ &= \frac{b\,(2\,\nu+\cos(2\,\phi))\,\sin\phi}{4\,\pi\,r-4\,\nu\,\pi\,r} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}) \\ &= \frac{b\,x\,(-x^2+y^2)}{4\,(-1+\nu)\,\pi\,{(x^2+y^2)}^2} \\ &= \frac{b\,r\,\cos\phi\,\left(-\left(r^2\cos^2\phi\right)+r^2\sin^2\phi\right)}{4\,(-1+\nu)\,\pi\,{\left(r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi\right)}^2} \end{aligned}$$

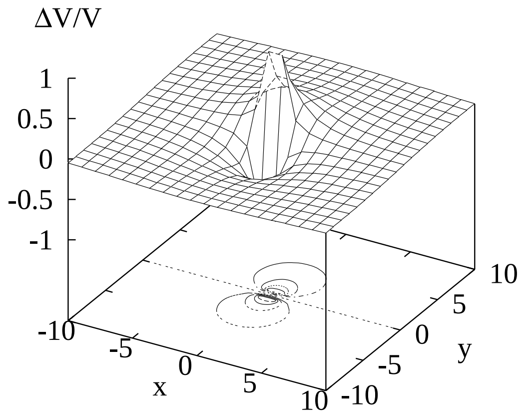


Abbildung 3.7: Volumenänderung um eine Stufenversetzung

$$= \frac{-\left(b \cos \phi \cos(2\,\phi)\right)}{4\,(-1+\nu)\;\pi\, r} \tag{3.9}$$

wobei auf Polarkoordinaten $x = r\cos\Phi$, $y = r\sin\Phi$ übergegangen wurde.

Um eine Stufe herum findet man als Volumenänderung (Spur des Verzerrungstensors):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{b\;(1-2\,\nu)\;y}{2\;(-1+\nu)\;\pi\;(x^2+y^2)} \\ &= -\frac{b(1-2\,\nu)}{2\pi(1-\nu)}\frac{\sin\Phi}{r}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Auf der x-Achse ($\phi = 0$) hat man keine Volumenaufweitung, oberhalb eine Kompression, unterhalb eine Dilatation.

Der Spannungstensor folgt entsprechend

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{b\,G\,y\;(3\,x^2+y^2)}{2\;(-1+\nu)\;\pi\,(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{b\,G\,r\;\sin\,\phi\;\left(3\,r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi\right)}{2\;(-1+\nu)\;\pi\;\left(r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi\right)^2} \\ &= \frac{b\,G\;(2+\cos(2\,\phi))\;\sin\,\phi}{-2\,\pi\,r+2\,\nu\,\pi\,r} \\ \sigma_{yy} &= \frac{b\,G\,y\;(-x^2+y^2)}{2\;(-1+\nu)\;\pi\,(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b\,G\,r\,\sin\phi\,\left(r^2\cos^2\phi - r^2\sin^2\phi\right)}{2\,(1-\nu)\,\pi\,\left(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi\right)^2} \\
&= \frac{b\,G\,\cos(2\,\phi)\,\sin\phi}{2\,\pi\,r - 2\,\nu\,\pi\,r} \\
\sigma_{zz} &= \frac{b\,G\,\nu\,y}{(-1+\nu)\,\pi\,(x^2+y^2)} \\
&= \frac{b\,G\,\nu\,r\,\sin\phi}{(-1+\nu)\,\pi\,\left(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi\right)} \\
&= \frac{b\,G\,\nu\,\sin\phi}{-(\pi\,r)+\nu\,\pi\,r} \\
\sigma_{xy} &= \frac{b\,G\,x\,(-x^2+y^2)}{2\,(-1+\nu)\,\pi\,(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{b\,G\,r\,\cos\phi\,\left(-(r^2\cos^2\phi) + r^2\sin^2\phi\right)}{2\,(-1+\nu)\,\pi\,\left(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi\right)^2} \\
&= \frac{-(b\,G\,\cos\phi\,\cos(2\,\phi))}{2\,(-1+\nu)\,\pi\,r}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Man findet also zunächst die Druck- und Zugspannungen ober- und unterhalb der Versetzung, dazu aber auch Spannungen in z-Richtung und Scherspannungen.

Durch Multiplikation von Spannungs- und Verzerrungstensor folgt wieder die Energiedichte E_v

$$
\begin{aligned}
E_v &= \frac{b^2\,G\,\left(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi - 2\,\nu\,r^2\sin^2\phi\right)}{8\,(-1+\nu)^2\,\pi^2\,\left(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi\right)^2} \\
&= \frac{b^2\,G\,(1-\nu+\nu\,\cos(2\,\phi))}{8\,(-1+\nu)^2\,\pi^2\,r^2}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

und durch Integration über die Fläche die Linienenergie:

$$
E_L = \frac{G\,b^2}{4\,\pi(1-\nu)} \cdot \ln\frac{R_1}{R_0}\,. \tag{3.13}
$$

Setzt man hier Zahlwerte etwa für Kupfer ein ($G = 40GPa$, $b = .25nm$, $\nu = 1/3$, $R_0 = b$, $R_1 = 10^{-8}m$, erhält man

$$
E_L \approx 1.8 \cdot 10^{-9} J/m = 2.8eV/b\,,
$$

also einen Wert von einigen eV pro Burgersvektor. Dies ist viel zu groß, als das es durch thermische Aktivierung aufgebracht werden könnte — Versetzungen sind typische Nichtgleichgewichtsdefekte.

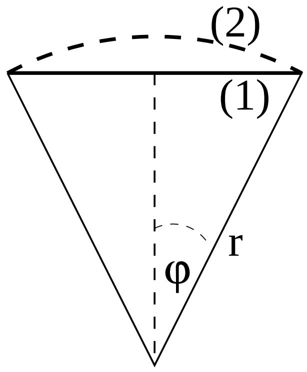


Abbildung 3.8: Herleitung des Ausdrucks für die Linienspannung

Weiter sieht man an der obigen Rechnung, daß die Gesamtenergie einer Versetzung mit ihrer Länge zunimmt. Dies führt auf einen Widerstand gegen Verlängerung, eine Rückstellkraft. Da jede Deformation einer geraden Versetzung eine Vergrößerung ihrer Länge bedeutet, bewirkt dies einen Beitrag zur **Linienspannung**. Ein weiterer Beitrag rührt aus der etwas unterschiedlichen Linienenergie von Stufe und Schraube: deformiert man etwa eine Schraube, so erhält sie einen gewissen Stufencharakter. Da die Linienenergie der Stufe etwas höher ist $1/(1-\nu) \approx 1.5$, bewirkt dies einen weiteren Beitrag zur Linienspannung.

Für eine beliebige Versetzung überlagern sich Spannungs- und Verzerrungsfeld linear aus den Stufen- und Schraubenanteilen. Die Energie ergibt sich damit zu

$$E_L(\beta) = \frac{G\,b^2}{4\pi(1-\nu)}(\sin^2\beta + (1-\nu)\cos^2\beta)\ln\frac{R_1}{R_0}\,, \tag{3.14}$$

wobei β der Winkel zwischen Linienrichtung und Burgersvektor ist.

Für ein gerades Liniensegment, daß kreisförmig mit Krümmungsradius r ausgelenkt werde, so daß es einen Halbwinkel ϕ einschließt (Abb. 3.8), ergibt sich als Anfangslänge (1)

$$l_1 = 2r\sin\phi \approx 2r(\phi - \frac{\phi^3}{6})$$

und als Endlänge (2)

$$l_2 = 2r\phi\,,$$

als Differenz also

$$\frac{\Delta l = r \cdot \phi^3}{3\,.}$$

Die Anfangsenergie ist

$$\begin{aligned} E_1 &= 2r\sin\phi\, E_L(\beta_0) \\ &\approx 2\phi r E_L(\beta_0) - \frac{\phi^3}{3} r E_L(\beta_0)\,. \end{aligned}$$

Die Energie des gekrümmten Segments ist

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{Kreisbogen} E_L(\beta) \\ &= \int_{-phi}^{\phi} r \cdot E_L(\beta_0 + \phi')d\phi' \\ &\approx 2\phi r E_L(\beta_0) + \frac{\phi^3}{3} r \frac{d^2 E_L}{d\beta^2} \,. \end{aligned}$$

Die Differenz ist

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 \\ &= \frac{\phi^3}{3} r (E_L(\beta_0) + \frac{d^2 E_L}{d\beta^2}) \,, \end{aligned}$$

die Energieänderung pro Länge, also die Linienspannung

$$\frac{\Delta E}{\Delta l} = E_L(\beta_0) + \frac{d^2 E_L}{d\beta^2} \,. \tag{3.15}$$

Mit dem allgemeinen Ausdruck für die Linienenergie ergibt sich als Linienspannung

$$\frac{\Delta E}{\Delta l} = \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{R_1}{R_0} (1 - \frac{\nu}{2}(1 - 3\cos 2\beta)) \,. \tag{3.16}$$

Man sieht, daß eine Schraube deutlich steifer ist als eine Stufe.

3.3 Die Wirkung von Spannungsfeldern auf eine Versetzung

Eine äußere Spannung $\underline{\underline{\sigma}}$ leistet an einer Versetzung eine Arbeit

$$dA = \underline{b} \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\underline{a} \,, \tag{3.17}$$

wenn ein Linienelement $d\underline{l}$ um eine Strecke $d\underline{s}$ verschoben wird, die Versetzungslinie also eine Fläche $d\underline{a} = d\underline{l} \times d\underline{s}$ überstreicht. Dies läßt sich (als Spatprodukt) umformen zu

$$\begin{aligned} dA &= \underline{b} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(d\underline{l} \times d\underline{s}) \\ &= (d\underline{l} \times d\underline{s}) \cdot (\underline{\underline{\sigma}}\underline{b}) \\ &= (\underline{\underline{\sigma}}\underline{b} \times d\underline{l}) \cdot d\underline{s} \,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Der letzte Ausdruck hat die Form „Kraft mal Weg“ — bei Verschiebung des Linienelements $d\underline{l}$ um eine Strecke $d\underline{s}$ wird die Arbeit dA gegen eine Kraft

$$d\underline{K}_{pk} := \underline{\underline{\sigma}}\underline{b} \times d\underline{l} \tag{3.19}$$

geleistet. Diese Kraft wird Peach-Köhler-Kraft genannt.

Für eine Stufe ($\underline{b} = (b, 0, 0)$, $d\underline{l} = (0, dl, 0)$) wird dies zu

$$d\underline{K} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xz}\, b\, dl \\ 0 \\ \sigma_{xx}\, b\, dl \end{pmatrix} . \tag{3.20}$$

Die x-Komponente treibt die Versetzung in Richtung des Burgersvektors vorwärts sorgt also für die Abgleitung. Wie zu erwarten, ist sie zur Scherspannung proportional und wird als **Gleitkraft** bezeichnet. Die z-Komponente ergibt sich als Resultat einer Druckspannung auf die x-Fläche, würde also bewirken, daß die eingeschobene Halbebene aus dem Kristall herausgedrückt wird. Eine solche Versetzungsbewegung wird **Klettern** genannt, die zugehörige Kraftkomponente heißt **Kletterkraft**. Sie erfordert aber Atomtransport, nämlich An- oder Wegdiffusion zusätzlicher Atome an die eingeschobene Halbebene, ist demnach eine nichtkonservative Bewegung. Dies ist nur bei hohen Temperaturen möglich, bei denen die Diffusion hinreichend schnell ist.

Für eine Schraube ($\underline{b} = (b, 0, 0)$, $d\underline{l} = (dl, 0, 0)$)findet man

$$d\underline{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{xz}\, b\, dl \\ -\sigma_{yz}\, b\, dl \end{pmatrix} , \tag{3.21}$$

die Kraft wirkt also in y- und z-Richtung in gleicher Weise senkrecht zur Linienrichtung. Es existiert keine ausgezeichnete Gleitrichtung, und eine Schraube kann nicht klettern.

3.4 Die Bewegung von Versetzungen

Wie schon oben gesagt, kann eine Stufenversetzung auf zwei Arten im Kristall bewegt werden, nämlich durch Gleiten, der Bewegung der Versetzung in der von Burgersvektor und Versetzungslinie aufgespannten Ebene und durch Klettern senkrecht hinzu. Allerdings bewegt sich die Versetzung in beiden Fällen nicht als ganze sondern zunächst nur lokal. Es bildet sich eine „Ausstülpung“ in die Nachbarposition, die dann über die ganze Versetzung hinüberläuft. Im Falle des Gleitens wird diese Ausstülpung **Kinke** genannt (bzw. eigentlich Kinkpaar), beim Klettern **Sprung** oder **jog**.

Kinken auf Versetzungen sind im allgemeinen sehr beweglich, während die Erzeugung eines Kinkpaars eine gewisse Zeit erfordern kann. Sprünge hingegen sind relativ unbeweglich; bei Stufen erfordern sie einen Transport von Leerstellen, also Diffusion. Auf Schrauben sind jogs kurze Segmente mit Stufencharakter, denn der Burgersvektor steht hier senkrecht auf der Versetzunglinie. Wenn die Schraube

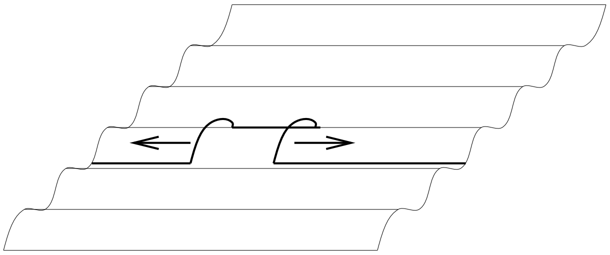


Abbildung 3.9: Bildung eines Kinkpaars auf einer Versetzung. Indem die Kinken auseinanderlaufen bewegt sich die Versetzung in die nächste Position.

weitergleitet, müßten die jogs klettern, was auf der einen Seite eine Leerstellenanlagerung und auf der anderen einen Abtransport erfordert. Insbesondere die Anlagerung ist natürlich schwierig, wenn nicht im Volumen hinreichend Leerstellen vorhanden sind. Dadurch werden Schrauben häufig durch jogs gepinnt, d.h. lokal in ihrer Bewegung behindert. Der andere jog hingegen kann mitgeschleppt werden, wobei er Leerstellen emittiert. Dies ist einer der wichtigen Prozesse, bei denen durch plastische Verformung Überschußleerstellen erzeugt werden können.

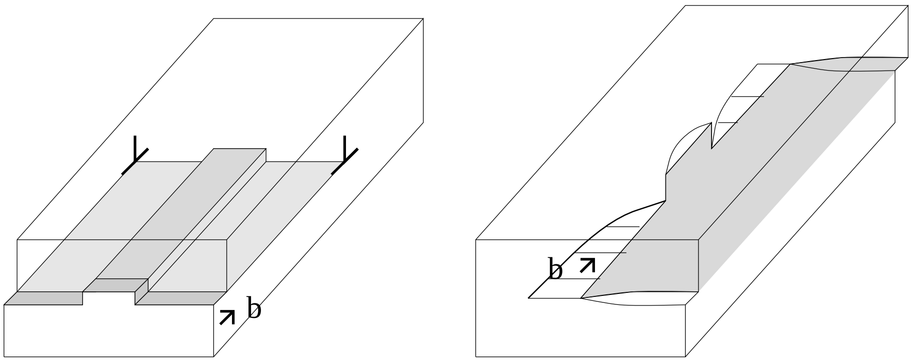


Abbildung 3.10: Bildung eines jogpaars auf einer Stufen- und einer Schraubenversetzung. Jogs auf einer Schraube sind Segmente mit Stufencharakter, die für ein Weitergleiten der Schraube klettern müßten.

3.5 Versetzungsmultiplikationm, Frank-Read-Quelle

Wie oben gezeigt, wächst die Linienspannung einer Versetzung mit ihrer Krümmung. Daruas ergibt sich ein wichtiger Mechanismus der Versetzungsmultiplikation im Kristall: Eine Versetzung werde an zwei Hindernissen (etwa jogs auf einer Schraube) festgehalten. Greift nun eine äußere Spannung an, beult sich die Versetzung zwischen den Haltepunkten kreisbogenförmig aus. Der Widerstand, den die Versetzung der Spannung entgegensetzt, steigt zunächst stetig an, da die Krümmung des Bogens zunimmt. Hat sie Halbkreisgestalt (falls man die Richtungsabhängigkeit vernachlässigt wird), wird sie instabil, da nun die Krümmung wieder ab-

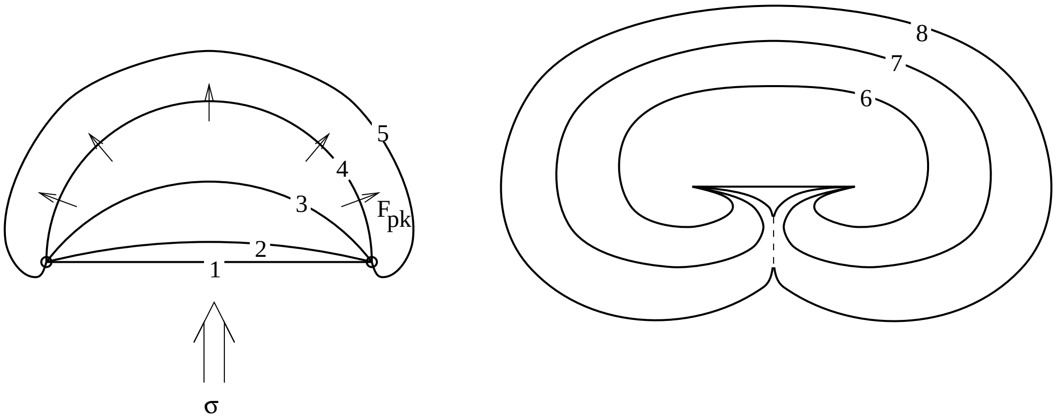


Abbildung 3.11: Versetzungsmultiplikation in einer Frank-Read-Quelle: ein gepinntes Versetzungssegment (1) dehnt sich unter einer Spannung aus (2,3), bis es in einer Halbkreisform instabil wird (4). Danach wandern Teile hinter den Verankerungspunkten herum (5-7), bis sie sich wieder treffen. Dort annihilieren sich die Teile mit entgegengesetzten Linienrichtungen und es bleibt ein geschlossener Ring und das ursprüngliche Segment übrig (8)

nimmt — sie dehnt sich ohne weiter zunehmende Spannung weiter aus. Hierbei wickelt sie sich, da die Peach-Köhler-Kraft immer in Normalenrichtung wirkt, um die Verankerungspunkte herum, die hintenliegenden Segmente laufen aufeinander zu, bis sie sich treffen und hierbei teilweise annihilieren. Übrig wird das urprüngliche Segment wiederhergestellt und es bleibt ein Versetzungsring um das Segment herum, der sich weiter ausdehnt. Anschließend kann der Prozeß von neuem beginnen.

Dieser Mechanismus wird als **Frank-Read-Quelle** bezeichnet. In ähnlicher Weise gibt es auch andere Möglichkeiten, aus einer Versetzung einen geschlossenen Ring abzulösen und so neue Versetzungen im Kristall zu erzeugen.

Die Spannung, bei der die Instabilität einsetzt, wird als Orowanspannung bezeichnet; sie ist gegeben durch

$$\tau_p \approx \alpha \frac{G\, b}{l}\,, \tag{3.22}$$

wobei l der Abstand der Verankerungspunkte ist. α ist ein Zahlfaktor, der vom Charakter der Versetzung und von ihrer Umgebung abhängt.

3.6 Versetzungswechselwirkung

In gewisser Weise hat die Entdeckung der Versetzungen als Vehikel der plastischen Verformung die Diskrepanz zwischen theoretisch erwarteter und experimentell gefundener Schubfestigkeit umgekehrt: es ist jetzt zu erklären, warum die meisten Materialien plastischer Verformung doch einen gewissen Widerstand entgegensetzen. Die erste Ursache hierfür ist die elastische Wechselwirkung paralleler Versetzungen, die später auch für die Erklärung der Verfestigung, d.h. der Zunahme der kritischen Schubspannung mit zunehmender Verformung, benötigt wird.

Wir betrachten zunächst zwei Schrauben mit Burgersvektor in z-Richtung. Die erste liege im Ursprung, das Spannungsfeld der zweiten, die die (x,y)-Ebene bei (x,y) durchstoße, ist

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \frac{G\,b_2}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} .$$

Hierdurch wirkt auf Versetzung 1 eine Kraft

$$\underline{F}_{pk} = \underline{\underline{\sigma}}\underline{b}_1 \times d\underline{l}$$

mit

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} , \quad d\underline{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dl \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt

$$\underline{F}_{pk} = \frac{G\,b_1\,b_2}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\underline{r}}{r}dl \quad \mathrm{m}it \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Haben die Burgersvektoren gleiches Vorzeichen, ist die Kraft abstoßend, sonst anziehend. Da eine Schraube keine ausgezeichnete Gleitebene besitzt, gibt es keine stabile oder metastabile Gleichgewichtsposition.

Für Stufen kann die gleiche Rechung durchgeführt werden. Sie liefert

$$\underline{F}_{pk} = \frac{G\,b_1\,b_2}{2\pi(1-\nu)}\frac{1}{r^4}\begin{pmatrix} x(x^2-y^2) \\ y(3x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.24}$$

Die erste Komponente ist die Gleitkraft, die zweite eine Kletterkraft, die bei hinreichend niedriger Temperatur nicht wirkt. Bei hoher Temperatur bewirkt sie eine Anziehung antiparalleler Stufen, die zum Ausheilen führt.

Die Gleitkraft bewirkt für parallele Stufen eine stabile Anordnung der Versetzungen übereinander, d.h. in Form einer Kleinwinkel-Kippgrenze. Für antiparallele Burgersvektoren ist eine 45^0-Anordnung stabil, d.h. in einem Stufendipol stehen die Versetzungen nicht, wie man vielleicht erwartet, direkt übereinander sondern schräg gegeneinander verschoben.

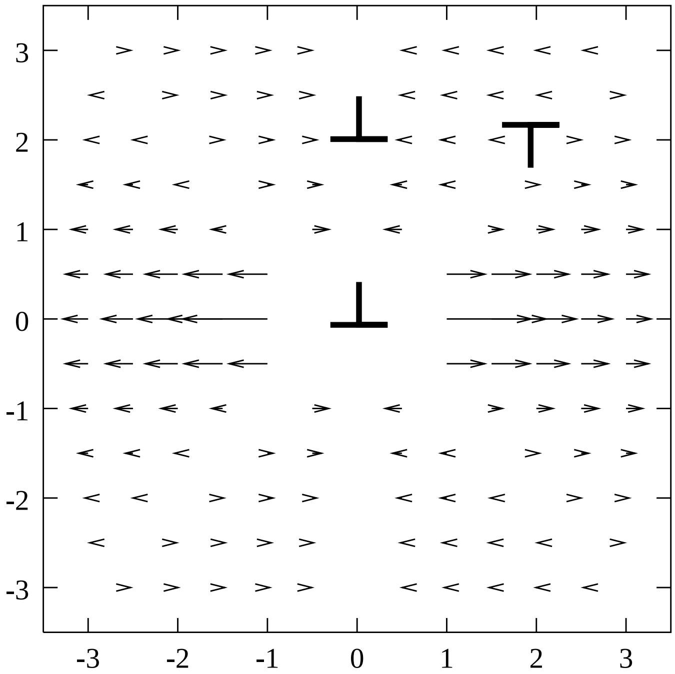


Abbildung 3.12: Gleitkraft zwischen zwei parallelen Stufenversetzungen. Die stabile Konfiguration ist für parallele und antiparallele Burgersvektoren eingezeichnet. (Im zweiten Fall würden die Kraftvektoren umgedreht.)

Wenn zwei parallele Stufen einander passieren, muß ein Kraftmaximum überwunden werden, was durch eine äußere Spannung, die Passierspannung aufzubringen ist. Diese ergibt sich durch Aufsuchen des Kraftmaximums, das bei

$$\begin{aligned} x_m &= (\pm 1 \pm \sqrt{2}) y_0 \\ f(x_m) &= \frac{1}{4y_0} \frac{G\,b^2}{2\pi(1-\nu)} dl \end{aligned}$$

liegt (y_0 Abstand der Gleitebenen). Die Gleitkraft durch eine äußere Scherspannung τ ist $\tau\, b\, dl$, so daß die Passierspannung

$$\tau_p = \frac{G\,b}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{y_0} \tag{3.25}$$

ist. Sie nimmt also mit abnehmendem versetzungsabstand, d.h. mit zunehmender Versetzungsdichte ρ zu mit $\tau_p \propto \sqrt{\rho}$.

Natürlich wechselwirken auch Versetzungen unterschiedlicher Linienrichtung oder unterschiedlichen Burgersvektors miteinander. Die elastische Wechselwirkung läßt sich in analoger Weise wie für die oben behandelten Fälle berechnen. Dazu kommt die viel stärkere lokale Wechselwirkung beim Schneiden zueinander windschiefer Versetzungen. Hierbei kann eine Versetzungsreaktion stattfinden, bei der natürlich der gesamte Burgersvektor erhalten bleiben muß:

$$\underline{b}_1 + \underline{b}_2 = \underline{b}'_1 + \underline{b}'_2\,. \tag{3.26}$$

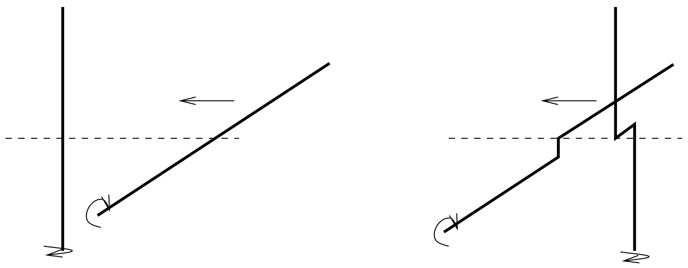


Abbildung 3.13: Schneiden zweier Schrauben hinterläßt auf beiden einen jog

Energetisch begünstigt ist eine solche Reaktion, falls

$$\underline{b}_1^2 + \underline{b}_2^2 > \underline{b}_1'^2 + \underline{b}_2'^2 \tag{3.27}$$

ist. Beim Versetzungsschneiden, dem einfachsten Fall, bleiben die einzelnen Burgersvektoren erhalten, wobei im Schnittpunkt ein Defekt, etwa ein jog entsteht. Dies ist ein wichtiger Härtungsmechanismus, da, wie oben gezeigt, jogs auf Schrauben schwer beweglich sind.

Kapitel 4

Versetzungen im Kristall

Bisher wurden die Kristallstrukturen des Materials, in dem sich die Versetzungen bewegen, weitgehend vernachlässigt. Jedoch hat die Kristallstruktur eine Reihe wichtiger Auswirkungen: Der Burgersvektor einer vollständigen Versetzung muß ein Gittervektor sein. (Mit vollständiger Versetzung ist gemeint, daß das umgehende Gitter erhalten bleibt). Da die Energie quadratisch mit dem Burgersvektor wächst, ist zu erwarten, daß dieser möglichst kurz ist.

Im fcc-Gitter ist daher

$$\underline{b} = \frac{a}{2}\langle 110\rangle \,, \tag{4.1}$$

im bcc-Gitter

$$\underline{b} = \frac{a}{2}\langle 111\rangle \,, \tag{4.2}$$

im hcp-Gitter

$$\underline{b} = \frac{a}{3}\langle \overline{2}110\rangle \,. \tag{4.3}$$

Die Gleitebenen hingegen sollten Ebenen mit möglichst großem Abstand, also (wegen konstanter Dichte) möglichst dichter Besetzung sein. Man findet tatsächlich im fcc-Gitter

$$\underline{G} = \{111\} \,, \tag{4.4}$$

im hcp-Gitter

$$\underline{G} = \{0001\} \,, \tag{4.5}$$

jedoch in bcc-Strukturen (die ja keine dicht gepackten Ebenen besitzen)

$$\underline{G} = \{110\} \qquad beitiefenTemperaturen, \underline{G} = \{112\} \qquad sonst \,. \tag{4.6}$$

Die Kombination aus Burgervektor und Gleitebene wird als Gleitsystem bezeichnet. Im fcc-Gitter hat man vier verschiedene $\{111\}$-Ebenen, die jede drei $\langle 110\rangle$-Richtungen enthält, also 12 verschiedene Gleitsysteme. Im bcc-Gitter findet man ebenfalls zwölf Gleitsysteme vom Typ {110},⟨111⟩. Im hcp-Gitter findet man neben dem genannten Gletisystem je nach Abweichung vom idealen c/a-Verhältnis auch andere Gleitsysteme.

4.1 Versetzungsaufspaltung

Die Linienenergie einer Versetzung kann weiter verringert werden, wenn die Burgersvektoren verkürzt werden. Da diese dann jedoch keine Translationsvektoren des Gitters mehr sind, erzeugen sie flächenhafte Defekte im Kristall. Man bezeichnet solche Versetzungen als Partialversetzungen. Eine vollständige Versetzung mit Burgersvektor $\underline{b}_0$ zerfällt in zwei (gelegentlich auch mehr) Partialversetzungen $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$. Die Energiebilanz lautet dann

$$\frac{\alpha}{2}G\underline{b}_0^2 = \frac{\alpha}{2}G(\underline{b}_1^2 + \underline{b}_2^2) + \delta E_F + \alpha G(\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2)\ln\frac{\delta}{R} \tag{4.7}$$

wobei E_F die Flächenenergie des von den zwei Partialversetzungen eingeschlossenen Flächendefekts, δ ihr Abstand und α ein vom Typ der Versetzung abhängiger Faktor ist. Der dritte Summand berücksichtigt die gegenseitige Abstoßung der Partialversetzungen, ihr Abstand δ folgt aus dem Kräftegleichgewicht:

$$\delta = \alpha G(\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2) \cdot \frac{1}{E_F}\,. \tag{4.8}$$

Im fcc-Gitter ist die wichtigste Aufspaltung die in Shockley-Partialversetzungen gemäß

$$\frac{a}{2}[110] \Rightarrow \frac{a}{6}[121] + \frac{a}{6}[21\bar{1}]\,. \tag{4.9}$$

Die Bilanz der Burgervektor-Quadrate ist

$$2 \cdot \frac{a^2}{4} > 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{36} = \frac{a^2}{3}\,.$$

Der hierdurch erzeugte Flächendefekt ist ein Stapelfehler, wie man sofort sieht, wenn man die {111}-Ebene betrachtet (Abb. 4.1):

Die Vektoren $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ verschieben die Netzebene auf eine „Lückenposition“, erzeugen also gerade einen Stapelfehler.

Die Aufspaltungsweite sinkt mit zunehmender Stapelfehlerenegie, für Edelmetalle findet man typische Werte von mehreren Gitterkonstanten, für Aluminium ca. $E_{SF} \approx 200mJ/m^2$, somit $\delta \approx 0.7a$, für Kupfer $E_{SF} \approx 60mJ/m^2$, somit $\delta \approx 3.5a$, und für Silber$E_{SF} \approx 20mJ/m^2$, somit $\delta \approx 8a$.

Eine wichtige Konsequenz der Versetzungaufspaltung ist, daß Schrauben nun eine Vorzugsebene bekommen. Damit eine Schraube quergleiten kann, muß erst

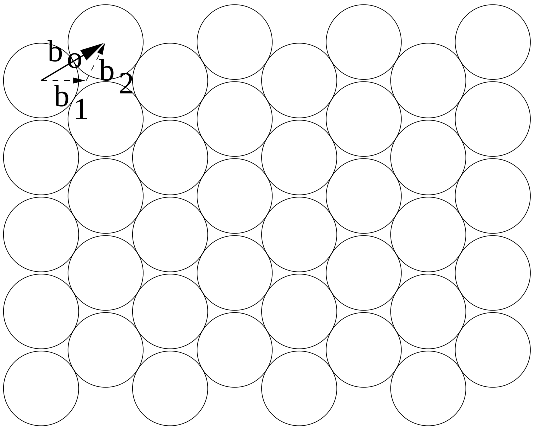


Abbildung 4.1: Burgersvektoren der vollständigen und der aufgespaltenen Versetzung im fcc-Gitter

die Aufspaltung rückgängig gemacht werden und dann in der Quergleitebene wieder aufgebaut werden. Dies ist ein thermisch aktivierter Prozeß, der aber natürlich umso leichter ist, je geringer die Aufspaltungsweite, d.h. je höher die Stapelfehlerenergie ist.

Eine weitere Partialversetzung ist die sogenannte Frank-Partialversetzung: Wie im ersten Teil der Vorlesung behandelt, erhält man in fcc-Kristallen (Stapelfolge der $\{111\}$-Ebenen ABCABC...) einen Stapelfehler, wenn eine $\{111\}$-Ebene eingefügt (extrinsischer SF) oder herausgenommen (intrinsischer SF) wird. Wird nun nur eine Halbebene zugefügt oder herausgenommen, endet diese an einer Partialversetzung mit $\underline{b} = \frac{a}{3}\langle 111\rangle$, der sogenannten Frank- Partialversetzung. Sie entstehen, wenn Überschlußherstellen oder (unter Bestrahlung) Zwischengitteratome auf einer Ebene kondensieren. Zusammen mit einer Shockley- Partialversetzung kann die Frank-Partialversetzung zu einer vollständigen Versetzung rekombinieren:

$$\frac{a}{3}\left[11\overline{1}\right] + \frac{a}{6}\left[112\right] = \frac{a}{2}\left[110\right] . \tag{4.10}$$

Schließlich können bei Begegnung von Versetzungen auf unterschiedlichen Gleitebenen Partialversetzungen miteinander reagieren. Die wichtigste Reaktion ist die Bildung einer Lomer- Cottrell-Versetzung. Sie entsteht, wenn zwei aufgespaltene Versetzungen mit parallelen Linien, aber unterschiedlichen Gleitebenen einander begegnen.

$$\begin{aligned} \mathrm{a}uf(111): \quad \frac{a}{2}\left[\overline{1}10\right] &\rightarrow \frac{a}{6}\left[\overline{1}2\overline{1}\right] + \frac{a}{6}\left[\overline{2}11\right] \\ \mathrm{a}uf(\overline{1}11): \quad \frac{a}{2}\left[101\right] &\rightarrow \frac{a}{6}\left[1\overline{1}2\right] + \frac{a}{6}\left[211\right] \\ &\Rightarrow \frac{a}{6}\left[011\right] + \frac{a}{6}\left[\overline{2}11\right] + \frac{a}{6}\left[211\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Reaktion ist energetisch sehr günstig, jedoch führt sie auf eine unbewegliche Konfiguration, da die entstandene $\frac{a}{6}\left[011\right]$-Versetzung in keiner der ursprünglichen Gleitebenen beweglich ist. (Dies ist ein wichtiger Härtungsmechanismus bei höheren Verformungsgraden.) Die Lomer-Cottrell- Partialversetzung wird auch als stair-rod-(„Teppichstangen“-)Versetzung bezeichnet, da sie wie die Stangen auf einer Treppe die beiden anderen Partialversetzungen fixiert.

In kubisch raumzentrierten Metallen ist die Versetzungsstruktur etwas komplizierter. Hier existiert keine so wohl definierte Stapelfehlerebene. Eine vorgeschlagene Versetzungsaufspaltung ist

$$\frac{a}{2}\langle 111\rangle = 3 \cdot \frac{a}{6}\langle 111\rangle \tag{4.12}$$

auf unterschiedlichen Gleitebenen. Computersimulationen haben allerdings gezeigt, daß dies keine echte Aufspaltung in separate Partialversetzungen ist, sondern eher ein ausgedehnter Versetzungskern. Die dreifache Aufspaltung bedeutet, daß die Versetzung, um auf einer Ebene gleiten zu können, sich zunächst zusammenziehen muß, was für die zwei Richtungen unterschiedlich leicht möglich ist. Dadurch zeigen bcc-Metalle (als Einkristalle!) eine Asymmetrie bei Zug- und Druckverformung.

In komplizierten Kristallstrukturen, etwa geordneten intermetallischen Phasen, wird die Versetzungsstruktur immer komplizierter, die Burgervektoren werden immer länger und die Aufspaltungsreaktionen vielfältiger. Dies erklärt, weshalb intermetallische Legierungen im allgemeinen schwer verformbar, häufig spröde sind. In einfachen geordneten Phasen („Überstrukturen“) findet man eine Anordnung, die als Superversetzung bezeichnet wird: in der $L1_2$-Struktur z.B., einer Überstruktur des fcc-Gitters, werden zwei Versetzungen des fcc-Gitters benötigt, um bei Verformung die Ordnung zu erhalten . Diese zwei Super-Partialversetzungen sind durch eine Antiphasengrenze verbunden. Sie können wiederum in Shockley-Partialversetzungen dissoziieren, die durch Stapelfehler verbunden sind.

Da die APB-Energie stark anisotrop ist, besteht häufig die Tendenz, daß die eine Superpartialversetzung quergleitet und die APB aus der $\{111\}$-Ebene in eine $\{110\}$-Ebene dreht. Dadurch wird die Superversetzung unbeweglich. Dieser Prozeß ist thermisch aktiviert und für die in vielen geordneten Legierungen beobachtete Schubspannungsanomalien verantwortlich.

4.1.1 Das Peierlspotential

Eine weitere Konsequenz der kristallinen Struktur der meisten Festkörper ist, daß eine Versetzung in ihrer Bewegung ein periodisches Potentail speist, das sogenannte Peierlspotential: Eine Versetzung befindet sich im allgemeinen in einem Zustand niedriger Energie, wenn die (für die Stufen) eingeschobene Ebene einer Lücke gegenübersteht. Bewegt sich die Versetzung nun, daß sie aneiner gegenüberliegenden Ebene vorbeigeschoben werden, d.h. es muß eine Position maximaler Energie, ein Sattelpunkt überwunden werden. Diese periodische Energieverteilung wird als Peierlspotential bezeichnet. Insbesondere Halbleiter besitzen sehr

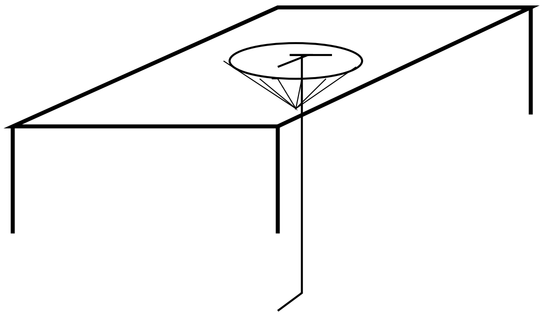


Abbildung 4.2: Schema eines Ätzgrübchens am Durchstoßpunkt einer Stufenversetzung

hohe Peierlspotentiale, so daß die Versetzungen hier meist aus langen geraden Segmenten bestehen.

4.1.2 Versetzungsbeobachtung

Die einfachste Methode Versetzungen nachzuweisen und ihre Dichte zubestimmen, sind die sogenannten *Ätzgrübchen*: da im Spannungsfeld einer Versetzung die Atome schwächer gebunden sind, werden die Durchstoßpunkte an Oberflächen von Ätzmitteln bevorzugt angegriffen und es bilden sich charakteristische Vertiefungen.

Durch mehrfaches Ätzen kann sogar Versetzungsbewegung sichtbar gemacht werden, da ein Ätzgrübchen, falls die Versetzungen weitergelaufen ist, beim zweiten Ätzen abflacht. Allerdings gibt diese Methode keinen Aufschluß über die räumliche Versetzungsanordnung im Kristallinnern. Hier ist die einzig zuverlässige Methode die Transmissionselektronenmikroskopie.

Ätzgrübchen in LiF

Lithiumfluorid besitzt die NaCl-Struktur, d.h. zwei ineinander verschachtelte fcc-Gitter. Hauptgleitsysteme sind $\{110\}, <\bar{1}10>$ (d.h. $\underline{b} = \frac{a}{2} <\bar{1}10>$, $\underline{G} = \{110\}$), von denen es sechs Stück gibt. Außerdem läßt sich LiF leicht auf $\{100\}$-Ebenen spalten, so daß gut orientierte Einkristalle zur Verfügung stehen. Zunächst soll ein unverformter Einkristall nach dem Ätzen [1] beobachtet werden. Man sieht Spaltstufen, eingewachsene Versetzungen und Klein-Winkel-Korngrenzen, eventuell nahe der Spaltebene auch Versetzungen auf Gleitstufen

Anschließend wird ein Vickers-Härteeindruck auf eine der Seitenflächen gemacht und nach nochmaligem Ätzen die Versetzungsstruktur um den Eindruck herum

[1] Für die Ätzgrübchen-Präparation benutzt man eine Lösung aus 40 mg $FeCl_3$ und 40 ml H_2O, (jedes mal frisch ansetzen) Im Härteprüfer wird ein Eindruck mit 1 N Auflagekraft gemacht. Ätzen: Eine Minute Kristall in Lösung schwenken, mit Aceton abspülen, Fönen. Verformen: Kristall (HxBxT) ? ca. 12 x 2,5 x 4 mm^3, $\tau_0 = 10$ MPa, (KWKG schon vor der Verformung sichtbar)

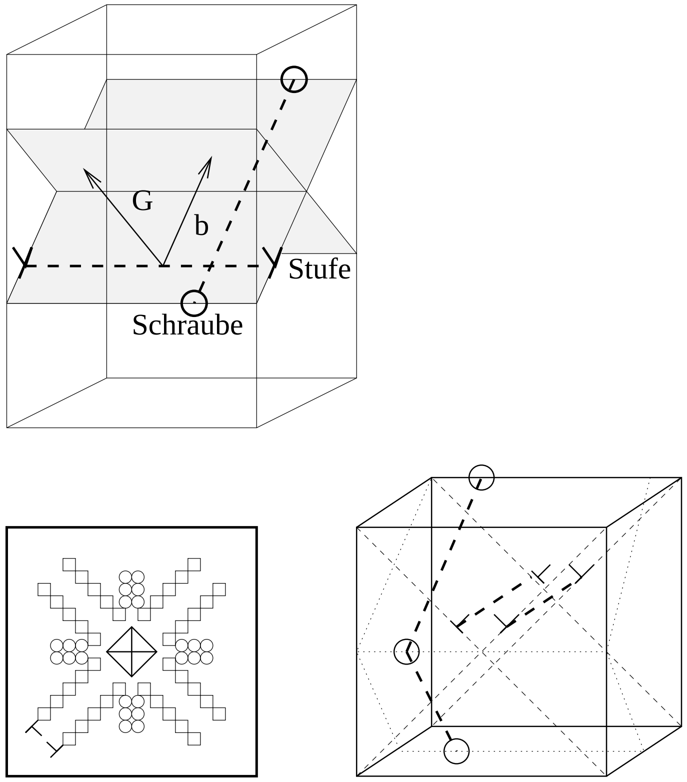


Abbildung 4.3: (a) Gleitebenen und Burgersvektoren in LiF (b) Ätzgrübchen auf der (100)-Oberfläche um einen Härteeindruck herum, (c) Veranschaulichung der Geometrie von Stufen und Schrauben im Kristall

beobachtet. In Richtung der Flächendiagonalen sieht man je zwei Reihen von Stufenversetzungen (mit gegensätzlichem Burgervektoren), in Kantenrichtung je zwei Reihen von Schrauben, wie das Schema zeigt.

Verformen wir den Kristall nun leicht in einer hydraulischen Handpresse, kann man nach dem Ätzen dichte Reihen von Stufen und Schreuben (Gleitstufen) beobachten. Außerdem sieht man mit etwas Glück, daß die Arme der Rosette des Härteeindrucks asymmetrisch geworden sind: jeweils eine Reihe der Stufe läuft aus dem Härteeindruck heraus (da ihr Burgervektor der äußeren Verformung entspricht), die andere bleibt stehen.

Versetzungskontrast im Elektronenmikroskop

Die grundlegende Funktion des TEM wurde in der Vorlesung Materialphysik I behandelt. Entscheidend ist, daß, da die Elektronenwellenlänge sehr klein ist, die Braggwinkel klein sind (typich sind einige Grad). Dadurch kann in einem leicht verbogenen Kristallbereich eine andere Anregungsbedingung herrschen, d.h. die Bragg-Bedingung besser oder schlechter erfüllen sein. Dadurch werden in einem verbogenen Bereich mehr (oder weniger) Elektronen in einen abgebeugten Strahl gestreut, im Hellfeld würde der verbogene Bereich dunkel erscheinen Dies kann man ausnutzen, um das Spannungsfeld von Versetzungen sichtbar zu machen. Es

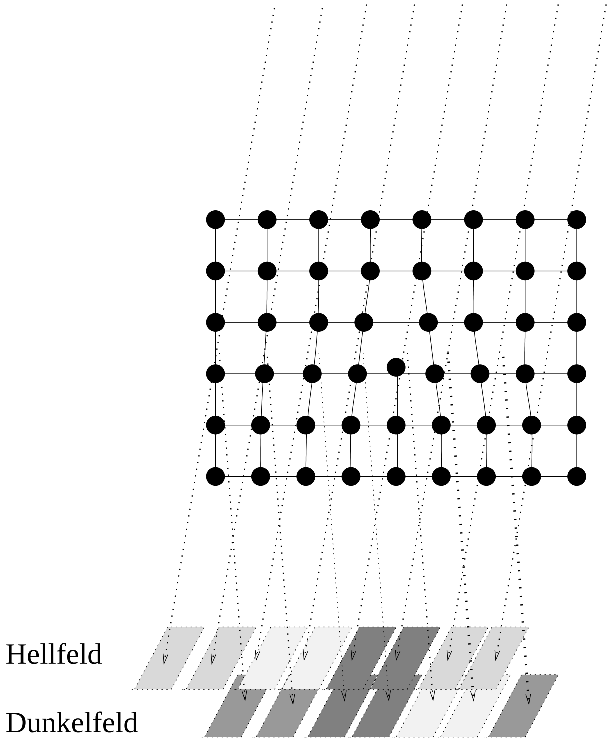


Abbildung 4.4: Hellfeld- und Dunkelfeldkontrast unter einer Stufenversetzung

ist besonders günstig, den Kristall so zu orientieren, daß nur eine Ebenenschar die Braggbedinungen erfüllt, alle anderen möglichst nicht (Zwischenstrahlfall). Die Helligkeitsvariation durch das Verzerrungsfeld ist dann natürlich am größten, wenn gerade diese Ebenenschar stark verbogen ist. Für Versetzungen sind dies die Ebenen, deren Normale $\underline{g}$ parallel zum Burgervektor $\underline{b}$ liegt. Liegt die abbildende Ebenenschar senkrecht zum Burgervektor, wird der Kontrast minimal (für Schraubenversetzungen sogar Null).

Kontrastminimum:

$$\underline{g} \cdot \underline{b} = 0$$

Dies erlaubt, wenn man eine solche Bedingung für unterschiedliche $\underline{g}$ einstellen kann, die Bestimmung des Burgervektors einer Versetzung. Typischerweise erscheint eine Versetzung als relativ breiter ($\approx$ 10 - 50 nm) dunkler Streifen im TEM-Bild, da die Methode auch auf schwache Verbiegungen schon reagiert. Einen schärferen Kontrast (allerdings im allgemeinen sehr intensitätsschwach) liefert die weak-beam-Methode, bei der höher indizierte Reflexe (mit entsprechend größerem Braggwinkel) für die Abbildung benutzt werden. Hier erreicht man Kontrastbreiten von ca. 1 nm und kann damit Versetzungsaufspaltung beobachten.

Kapitel 5

Plastizität von Einkristallen

Vorbemerkung:

Da in diesem Teil der Vorlesung häufig von kristallographischen Orientierungsbeziehungen Gebrauch gemacht wird, soll zunächst die gebräuchlichste Darstellung, die stereographische Projektion, eingeführt werden: Die kristallographischen Richtungen im dreidimensionalen Raum sind bekanntlich Einheitsvektoren. Ihre Durchstoßpunkte auf der Einheitskugel werden in eine Ebene projiziert, indem der Schnitt der gerade durch oberen Pol und Durchstoßpunkt mit der Ebene bestimmt wird:

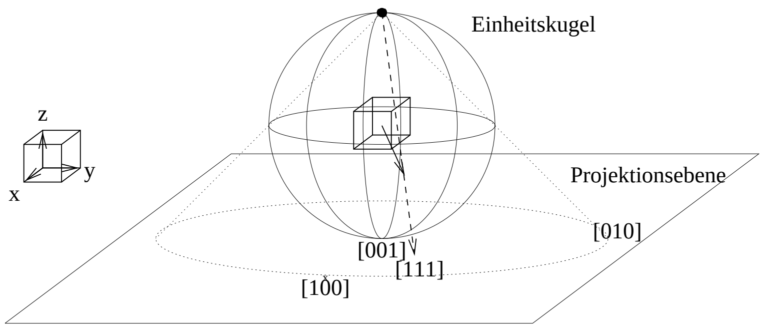
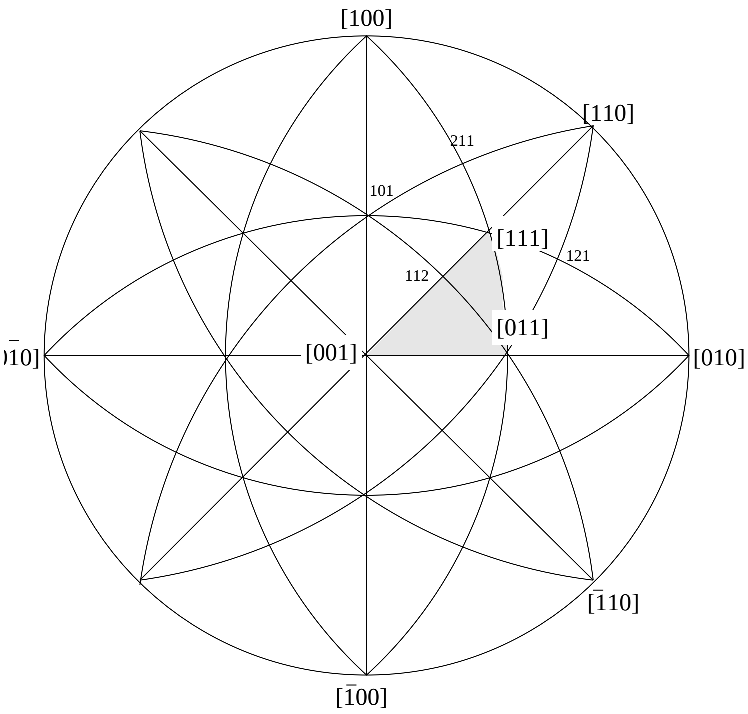


Abbildung 5.1: Die stereographische Projektion der Einheitskugel in die Ebene

Sie hat die Eigenschaften:

- Kreise werden als Kreise (Kreisbögen) abgebildet;
- die Projektion ist winkeltreu, aber nicht flächentreu.

Für Kristalle mit Inversionssymmetrie genügt es, das Innere des Grundkreises (Projektion des Äquators) zu betrachten. Für kubische Kristalle genügt häufig das Standarddreieck.



Standard-(001)-Projektion
des kubischen Gitters
schraffiert: Standard-Dreieck

Abbildung 5.2: Standardprojektion der Einheitskugel in die Ebene

Anmerkung: Die Formel für die Standard(001)-projektion eines Einheitsvektors $\underline{x}$ lautet:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{2x}{1+z} \\ y_p &= \frac{2y}{1+z} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nachdem im vorangegangenen Teil der Vorlesungdie Einzelversetzungen und ihre Wechselwirkungen behandelt wurden, soll nun die makroskopische Plastizität behandelt werden. Wir hatten gesehen, daß die Versetzungsbewegung eine Scherung des Kristalls auf festgelegten Ebenen in festen Richtungen ist. Dies hat zur Folge, daß die Schubspannungen auf den verschiedenen kristallographischen Ebenen eines Einkristalls nicht alle gleich sind, der Umrechnungsfaktor zwischen außen angelegter Zug- und Druckspannung σ und in der Gleitebene wirkender Scherspannung τ wird Schmidfaktor m_s genannt

$$\tau = \sigma \cdot m_s \tag{5.2}$$

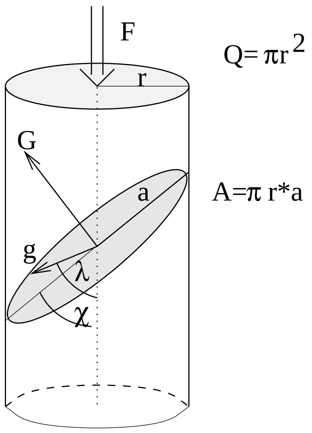


Abbildung 5.3: Die Geometrie zur Bestimmung des Schmidfaktor im Zugversuch

Er ergibt sich, wenn man einen einkristallinen Stab mit Querschnitt Q betrachtet, aus:

(a) Der Komponente der äußeren Kraft $\underline{F}$ in Richtung $\underline{g}$

$$\underline{K} = \underline{F} \cdot \underline{g} = |F| \cos(\underline{F}, \underline{g}) = |F| \cos(\lambda) \tag{5.3}$$

(b) der Fläche A der Gleitebene im Stab

$$\begin{aligned} Q &= \pi r^2 \\ A &= \pi r a \\ &= \pi \frac{r^2}{cos(90 - \chi)} \\ &= \frac{Q}{\sin \chi} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Die in der Gleitebene in Gleitrichtung $\underline{g}$ angreifende Schubspannung ist dann

$$\tau = \frac{K}{A}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{F}{Q}\cos\lambda\sin\chi \\
&= \sigma\cos\lambda\sin\chi \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

der Schmidfaktor also

$$m_s = \cos\chi\sin\lambda \qquad (5.6)$$

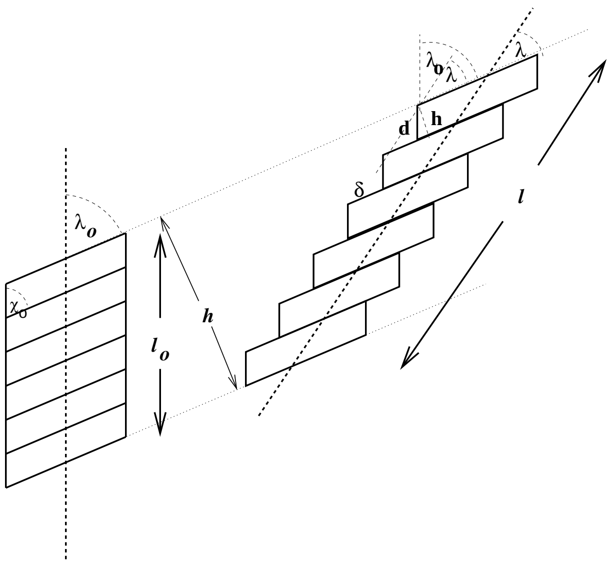


Abbildung 5.4: Mit der Länge ändert sich im Zugversuch die Orientierung eines Einkristalls sowie sein Querschnitt (Holz- oder Wurstscheibenmodell)

Wird der Kristall nun verformt, verschieben sich die Gleitebenen zueinander. Dies bewirkt, daß sich die Stabachse relativ zur kristallographischen Orientierung dreht, die Winkel von λ_0, χ_0 am Anfang zu λ, χ werden. Zugleich wird der Probenquerschnitt, der anfangs rund war, elliptisch. Es gilt, wie man in der Zeichnung 5.4 sieht,

$$\frac{\sin\lambda_0}{\sin\lambda} = \frac{l}{l_0} = 1 + \varepsilon \qquad (5.7)$$

für den Winkel λ zwischen Gleitrichtung und Stabachse ($\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$) und

$$\frac{\sin\chi_0}{\sin\chi} = \frac{l}{l_0} \qquad (5.8)$$

für den Winkel χ zwischen Gleitebenennormale und Stabachse. Als Abgleitung a wird die Verschiebung paralleler Gleitebenen gegeneinander bezeichnet:

$$a = \frac{\delta}{h} \qquad (5.9)$$

Sie ergibt sich aus der Probendehnung ε über die obige Gleichung und die Beziehung

$$a = (\cot\lambda - \cot\lambda_0)\,\frac{\sin\lambda_0}{\sin\chi_0}\,. \qquad (5.10)$$

Der Schmidfaktor bestimmt, welches Gleitsystem als erstes betätigt wird. Er ist (da die Winkel λ und χ nicht unabhängig voneinander sind, denn die Gleitrichung steht senkrecht auf der Gleitebenennormale) im Zugversuch maximal, wenn Stabachse, Gleitebenennormale und Gleitrichtung in einer Ebene liegen und die Winkel λ und χ beide Winkel 45**?** sind.

5.1 Verfestigung

Mit den geometrischen Überlegungen des vorigen Kapitels läßt sich nun eine gemessene Spannungs-Dehnungskurve in eine Schubspannungs-Abgleitungkurve umrechnen. Die Steigung dieser Kurve, d.h. die Zunahme der zur weiteren Verformung nötigen Spannung wird *Verfestigung* genannt.

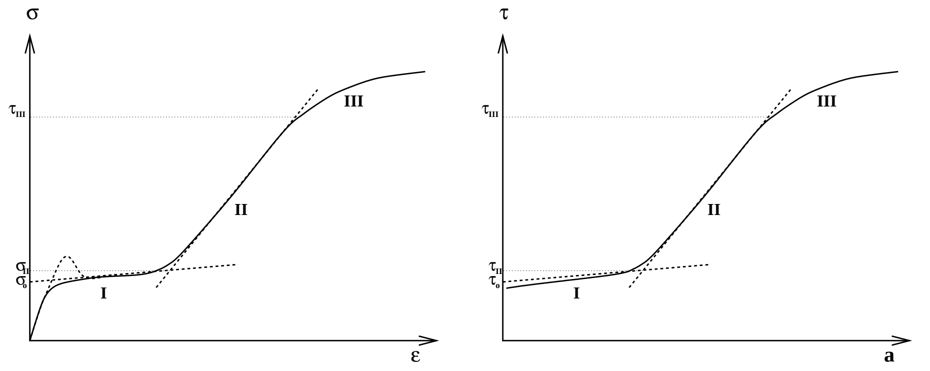


Abbildung 5.5: Schematische Spannungs-Dehnungs- und Schubspannungs-Abgleitungs-Kurve mit den Bereichen I-III

Man erkennt mehrere Bereiche: zunächst den Bereich eleastischer Verformung, der in der Umrechnung auf Abgleitung abgezogen werden muß, dann der als *Bereich I* oder easy-glide-Bereich bezeichnete Teil mit sehr geringer Steigung, dann ein *Bereich II* starker Verfestigung mit linearer (großer) Steigung und schließlich bei starker Verformung einen *Bereich III*, in dem die Kurve zwar weiter ansteigt, die Steigung jedoch deutlich abnimmt.

Liegt die Stabachse irgendwo im Standarddreieck, so ist das mit (H, h) bezeichnete Paar aus Gleitrichtung und -ebene das sogenannte *Hauptgleitsystem* (s. Abb.5.6). Verformt man den Kristall nun in Zugrichtung, so ändert sich die Orientierung der Stabachse und wandert auf h zu. Sobald sie das Standarddreieck verläßt, wird im Prinzip ein zweites Gleitsystem (D, d), das sogenannte *Doppelgleitsystem* aktiv. Allerdings behindern die Versetzungen des primären Gleitsystems die Doppelgleitung, so daß es zu einem gewissen Überschießen kommt. Die Stabachse läuft dann wieder zurück und pendelt um die Symmetrale $[100] - [111]$ hin und her auf den Punkt [112] zu.

Darüberhinaus erkennt man in der stereographischen Projektion die *Quergleitebene*, d.h. die zweite Ebene, die die [101]-Gleitrichung enthält.

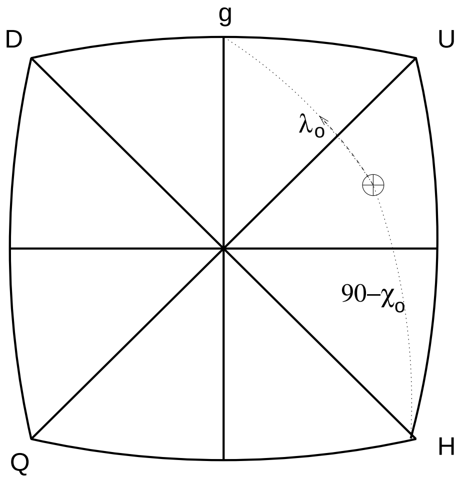


Abbildung 5.6: Stereographische Projektion der Gleitsysteme und des Pfades der Stabachse bei Zugverformung

Die Bereiche der Verformungskurve lassen sich hiermit qualitativ leicht verstehen:

Bereich I: Ein Gleitsystem ist aktiv, auf dem durch Multiplikation viele neue Versetzungen entstehen („Einfachgleitung“)

Bereich II: Setzt das Doppelgleitsystem ein, findet eine starke Behinderung der Versetzungsbewegung durch Schneidprozesse statt, so dass die Versetzungsbewegung stark behindert ist.

Bereich III: Im Bereich III sind die Spannungen so hoch, daß Versetzungen beginnen querzugleiten (und bei hohen Temperaturen zu klettern), so dass sie sich gegenseitig annihilieren oder in energetisch günstige Konfigurationen laufen. Dieser als dynamische Erholung bezeichnete Prozeß führt zu einer abnehmenden Verfestigung. Der Einsatz von Bereich III ist stark temperaturabhängig, da quergleiten und klettern thermisch aktiviert sind. Dagegen ist der Einsatzpunkt von Bereich II nur schwach temperaturabhängig, jedoch stark orientierungsabhängig. Typische Werte für Cu sind

$$\tau_I \approx 1MPa \qquad \Theta_I = \frac{d\tau}{da} \approx \frac{G}{10000} \approx 7MPa$$
$$\tau_{II} \approx 3MPa \qquad \Theta_{II} = \frac{d\tau}{da} \approx \frac{G}{300} \approx 150MPa$$

Dass im Bereich I überhaupt eine Verfestigung stattfindet, liegt an der Wechselwirkung von Versetzung auf parallelen Gleitebenen: Wie wir schon gesehen hatten, hängt die Passierspannung vom Abstand d der Versetzung wie

$$\tau_p = \frac{G\,b}{8\,\pi\,(1-\nu)} \cdot \frac{1}{d} \tag{5.11}$$

ab. Haben wir eine gleichmäßige Versetzungsdichte ρ im Kristall, beträgt der mittlere Abstand

$$d = \rho^{-1/2} \tag{5.12}$$

also

$$\tau_p = \frac{G\,b}{8\,\pi\,(1-\nu)} \cdot \sqrt{\rho} \tag{5.13}$$

Eine Theorie der Verfestigung muß nun erklären, weshalb die Versetzungsdichte im Bereich I stetig zunimmt (im Prinzip könnte die Abgleitung natürlich auch stattfinden, wenn alle Versetzungen den Kristall vollständig durchlaufen). Das einfachste Modell hierzu legt die Orowanbeziehung zwischen Abgleitung da, Dichte der beweglichen Versetzung ρ_m und Laufweg dx zugrunde:

$$da = b \cdot \rho_m \cdot dx \tag{5.14}$$

und es wird die empirische Beziehung

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dx}{L} \tag{5.15}$$

(L ist der mittlere Laufweg einer Versetzung) benutzt, die besagt, dass die Versetzungsdichte linear mit dem zurückgelegten Weg ansteigt. Damit wird (wenn $\rho_m = \rho$ angenommen wird, also alle Versetzungen beweglich sind)

$$\begin{aligned} da &= b \cdot L \cdot d\rho \\ \tau &= \alpha\,G\sqrt{\frac{b}{L}}\,\sqrt{a}\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ein solches parabolisches Gesetz wird leider nicht gefunden (höchstens in Polykristallen). Verbesserte Theorien ergeben

$$\Theta_I = \frac{d\tau}{da} = \frac{8G}{9\pi}\left(\frac{d}{L}\right)^{3/4}\,, \tag{5.17}$$

mit folgenden Bezeichnungen: d Abstand der aktiven Gleitebenen und L mittlere Größe der Versetzungsloops. Diese Gleichung reproduziert etwa die experimentellen Befunde (in Cu ergibt sich mit $d \approx 300\mathring{A}$, $L \approx 600\mu m$, $G = 40GPa$ ein Wert von $\Theta_I = 7.5MPa$). Allerdings gibt es bisher keine definitive Theorie für die Verfestigung im Bereich I!

Im Bereich II findet die Verfestigung im wesentlichen durch das nun aktivierte Doppelgleitsystem statt. Diese sogenannten Waldversetzungen müssen von den Versetzungen des primären Gleitsystems geschnitten werden. Es bilden sich hierbei möglicherweise unbewegliche Anordnungen wie die Lomer-Cottrell-Versetzung.

Halbquantitativ kann die Verfestigung im Bereich II folgendermaßen beschrieben werden: Man nehme die Orowan-Beziehung

$$da = b \cdot L \cdot d\rho \tag{5.18}$$

(L ist der mittlere Laufweg, b der Burgervektor ρ_m die Dichte der mobilen Versetzungen) und die Spannung, die nötig ist, um die Waldversetzungen zu schneiden

$$\sigma = \alpha \cdot \frac{G\,b}{l} \tag{5.19}$$

$alpha \approx 1/4$ ist ein Proportionalitätsfaktor, l der mittlere Abstand der Waldversetzungen, $l = \rho_f^{-1/2}$, wenn ρ_f die Dichte der Waldversetzungen ist. Weiter wird angenommen, dass

$$\rho_f = \beta \rho_m \tag{5.20}$$

ist (mit einem weiteren Proportionalitätsfaktor β). Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha\,G\,b\sqrt{\rho_f} \\ &= \alpha\sqrt{\beta} \cdot G\,b\sqrt{\rho_m} \\ &= \alpha\sqrt{\beta} \cdot G\sqrt{\frac{b}{L}}\sqrt{a} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Des weiteres wird empirisch gefunden, dass der Laufweg L umgekehrt proportional zur Abgleitung a abnimmt

$$L = \frac{\Lambda}{a}\,. \tag{5.22}$$

Damit folgt

$$\sigma = \alpha\sqrt{\beta} \cdot G\sqrt{\frac{b}{\Lambda}}\,a \tag{5.23}$$

$$\Theta_{II} = \alpha\sqrt{\beta} \cdot G\sqrt{\frac{b}{\Lambda}}\,, \tag{5.24}$$

also der lineare Verlauf mit starker Verfestigung.

Setzt man wieder typische Werte für Cu ein: $\alpha = 1/4$, $\beta = 1$, $\Lambda = 10^{-4}cm \approx 10^4 b$, ergibt sich ein Verfestigungskoeffizietn $\Theta_{II} = G/400$.

Der Bereich III der Verfestigungskurve ist bei nicht zu hohen Temperaturen durch das Quergleiten von Schrauben bestimmt. Wie vorne gezeigt, muß sich hierfür thermisch aktiviert eine Einschnürung der Aufspaltung ausbilden. Die Energie hierfür ist umgekehrt proportional zur Stapelfehlerenergie γ_{SF}. Man findet für die Einsatzspannung τ_{III} des Bereiches III

$$\tau_{III} \propto \exp - \frac{\gamma_{SF} \cdot k\,T}{E_Q^2} \tag{5.25}$$

mit einer Konstanten E_Q, die die Aktivierungsenergie für die Quergleitung enthält.

Kapitel 6

Verformung von Vielkristallen

Die Verformung von polykristalliner Materialien unterscheidet sich in dreierlei Hinsicht von der von Einkristallen:

- Die Korngrenzen stellen Hindernisse für die Versetzungsbewegung dar.
- Jeder Kristallit ist anders orientiert, so daß unterschiedliche Gleitsysteme mit unterschiedlichem Schmidfaktor aktiviert werden.
- Durch die Verformung ändert jeder Kristallit seine äußere Form. Andererseits soll der Kristall zusammenhängend bleiben, was weitere Verformung durch „geometrisch notwendige Versetzung" erfordert.

6.1 Die Hall-Petch-Beziehung

Der erste Punkt führt auf eine Versetzungsaufstauung an den Korngrenzen, die sich in einem eindimensionalen Modell angeben läßt

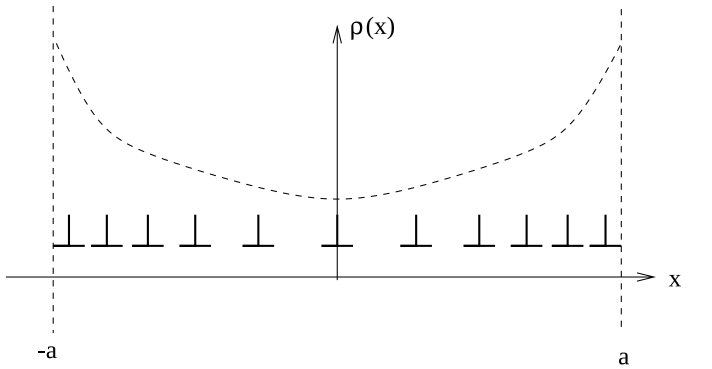


Abbildung 6.1: Eindimensionales Bild der Vesetzungsaufstauung an Korngrenzen bei -a und a und schematischer Verlauf der Versetzungsdichte.

Ist $\rho(x)$ die Versetzungsdichte bei x in einem Intervall $(-a, a)$, an dem sich die Versetzungen an beiden Enden aufstauen, so ist die Gesamtspannung am Ort

$x' < a$ [1]

$$\sigma_{xy}(x') = \alpha \int_{-a}^{a} \frac{\rho(x)}{x - x'} dx \tag{6.1}$$

(Der Parameter α ist eine Konstante von der Größenordnung eines passenden Moduls)

Liegen keine äußeren Spannungen an, müssen sich die inneren Spannungen gerade kompensieren (sonst würden die Versetzungen laufen), d.h.

$$\int_{-a}^{a} \frac{\rho(x)}{x - x'} dx = 0\,, \tag{6.2}$$

was die Lösung

$$\rho(x) = \frac{n \cdot b}{\pi\sqrt{(a-x)(a+x)}} \tag{6.3}$$

besitzt. Hierbei muss als Nebenbedingung natürlich

$$\int \rho(x) dx = n \cdot b \tag{6.4}$$

gelten.

Wirkt eine äußere konstante Spannung τ_a und liegt nur ein Hindernis vor[2], so wird

$$\rho(x) = \frac{n \cdot b}{\pi\, a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,. \tag{6.6}$$

DIe äußere Spannung steckt in der Länge $l = 2a$ des Staus

$$l = 2a = \frac{G\, n\, b}{\pi(1-\nu)\tau_a} \tag{6.7}$$

Abbildung 6.2 zeigt den Verlauf der Versetzungsdichte für beide Fälle. Für die Rechnung wurde $a = 1\mu m$, $b = 0.25nm$, $n = 100$ gesetzt. Als Spannung wurde $\tau_a/\alpha = .01$ angenommen.

Im ersten Fall stauen sich die Versetzungen symmetrisch an beiden Grenzen auf, im zweiten werden sie auf die eine Grenze zugetrieben.

Jenseits der Korngrenze bei a bewirkt die Versetzungsaufstauung am Ort x eine Spannung

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_a \cdot \sqrt{\frac{2a}{x-a}} \tag{6.8}$$

[1] Landau, Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik Bd.VII, T. Mura, Micromechanics of Defects in Solids

[2] Bei zwei Hindernissen an beiden Enden ergibt sich als Lösung

$$\rho(x) = \frac{(n \cdot b + \frac{\tau_a}{\alpha} \cdot x)}{\pi\sqrt{(a-x)(a+x)}} \tag{6.5}$$

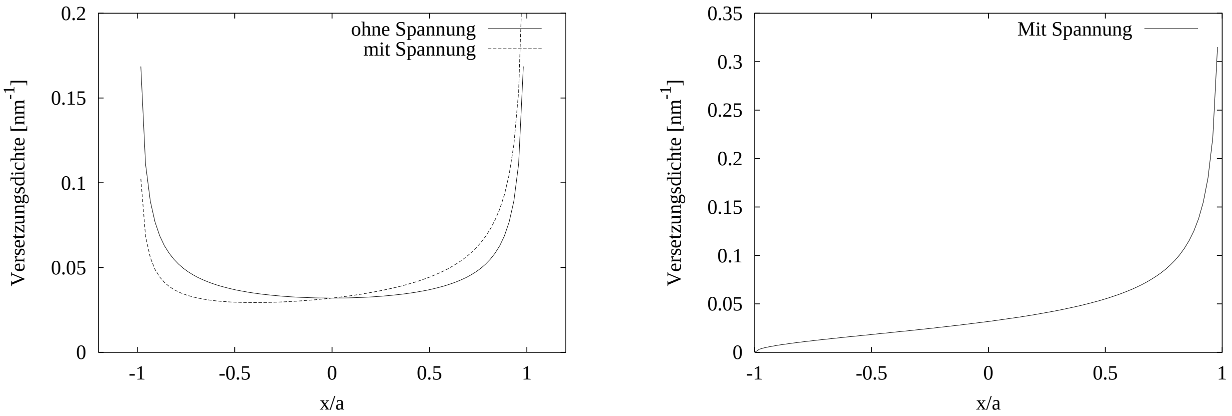


Abbildung 6.2: Versetzungdichte an einer Korngrenze mit und ohne äußere Spannung, links Hindernisse an beiden Enden, rechts nur ein Hindernis.

die im Nachbarkorn durch einen Orientierungsfaktor m_{12} auf eine dort wirkende Schubspannung τ_2 transformiert wird, und dort wieder Versetzungen in Bewegung setzen kann.

Insgesamt transformieren sich die Spannungen in folgender Weise: in Korn 1 wirkt von außen eine Spannung τ_a, die im primären Gleitsystem eine Schubspannung

$$\sigma_1 = m_1 \cdot \tau_a$$

ergeben. Diese Spannung treibt die Versetzungen gegen die Korngrenze und bewirkt im Nachbarkorn eine Spannung

$$\tau_2 = \sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{2a}{x-a}}$$

. Diese muss ins Gleitsystem von Korn 2 transformiert werden:

$$\sigma_2 = m_2 \cdot \tau_2 = m_2 m_1 \cdot \tau_a \cdot \sqrt{\frac{2a}{x-a}} \tag{6.9}$$

.

Die äußere Spannung τ_a, um im Nachbarkorn die Verformung fortzusetzen, wächst also mit abnehmender Korngröße a wie

$$\tau_a \propto a^{-1/2} \tag{6.10}$$

an. Hinzu kommt allerdings noch ein konstanter Beitrag, denn auch im Einkristall ($a \to \infty$) besteht eine endliche kritische Schubspannung. Daraus folgt

$$\tau_a = \tau_0 + K a^{-1/2} \tag{6.11}$$

Diese Gleichung wird als Hall-Petch-Beziehung bezeichnet.

6.2 Der Taylorfaktor

Der zweite Punkt, die unterschiedlichen Kornorientierungen, wird dadurch berücksichtigt, daß der Schmidfaktor m durch den sogenannten Taylorfaktor M zu ersetzen ist, der durch eine geeignete statistische Mitteilung über alle Schmidfaktoren bestimmt werden kann. Hier ist die Definition des Taylorfaktors reziprok zu der des Schmidfaktors: die Schubspannung im Kristall σ ergibt sich aus der äußeren Spannung τ

$$\sigma = M^{-1} \cdot \tau \,, \tag{6.12}$$

andersherum als beim Schmidfaktor $\sigma = m_s \cdot \tau$.

Für statistisch orientierte fcc-Polykristalle ist

$$M \approx 3.06 \,. \tag{6.13}$$

6.3 Geometrisch notwendige Versetzungen

Der dritte Punkt, die Kornformänderung, erfordert i.A., daß mindestens 5 unabhängige Gleitsysteme aktiv sind, da der Dehnungtensor ε 6 unabhängige Komponenten besitzt. von denen eine durch die Volumenkonstanz entfällt. Unabhängig heißen Gleitsysteme dann, wenn die Gestaltsänderung nicht durch eine Kombination von Gleitung auf anderen Systemen erzeugt werden kann. Im fcc-Gitter hat man 12 Gleitsysteme vom Typ $\{111\}, < 110 >$. In jeder $\{111\}$-Ebene sind nur allerdings nur zwei von den drei Richtungen unabhängig [3] :

$$(111) \otimes [\bar{1}10] + (111) \otimes [10\bar{1}] = (111) \otimes [01\bar{1}] \tag{6.16}$$

Weitere drei Bedingungen ergeben sich aus drei Beziehungen der Art

$$(111) \otimes [\bar{1}10] + (11\bar{1}) \otimes [\bar{1}10] - (1\bar{1}1) \otimes [110] - (1\bar{1}\bar{1}) \otimes [110] = 0 \tag{6.17}$$

so daß von den 12 Gleitsystemen nur 5 unabhängig sind, was gerade ausreicht.

Für bcc-Kristalle läßt sich genauso zeigen, daß 5 unabhängige Gleitsysteme existieren, so daß (wie bekannt) bcc- und fcc- Metalle auch als Polykristalle gut

[3] Eine Scherung auf einem Gleitsystem $(\underline{G}, \underline{g})$ läßt sich schreiben als

$$\underline{x}' = \underline{x} + \lambda(\underline{x} \cdot \underline{G}) \cdot \underline{g} = \underline{x} + \lambda(\underline{G} \otimes \underline{g})\, \underline{x} \tag{6.14}$$

Der zugehörige Dehnungstensor lautet dann

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{G} \otimes \underline{g} + (\underline{G} \otimes \underline{g})^t) \,. \tag{6.15}$$

verformbar sind. hdp-Metalle dagegen besitzen bei tiefen Temperaturen nur 2 unabhängige Gleitsysteme (auf der Basisebene), was ihre schlechte Verformbarkeit erklärt.

Welche 5 der 12 möglichen Gleitsysteme betätigt werden, ergibt sich aus dem von Taylor angegebenen Prinzip minimaler Gesamtverformung

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = min. \tag{6.18}$$

was minimaler Verformungsarbeit entspricht. a_i sind die Abgleitungen auf den einzelnen Gleitsystemen.

6.4 Verformungstextur

Da jedes einzelne Korn in Folge der Verformung seine Orientierung so ändert, daß es in eine für die jeweilige Art der Verformung stabile Orientierung läuft, wird aus einer statistischen Anfangsverteilung der Orientierung eine stark ausgerichtete Endverteilung, was als Textur bezeichnet wird. Ein Beispiel, die $< 112 >$-Endlage im Zugversuch bei Doppelgleitung, hatten wir schon kennengelernt. Analog läßt sich für den Druckversuch zeigen, daß (110) eine stabile Endlage ist.

Walzverformung läßt sich etwas vereinfacht als Zugverformung in Walzrichtung und Druckverformung in Blechnormale ansehen, und man findet in der Tat häufig eine $(110) < 112 >$-Walztextur.

Gewöhnlich werden Texturen in einer Polfigur dargestellt. Hierzu werden in einer stereographischen Projektion alle Pole eines bestimmten Typs der verschiedenen Körner eingetragen (z.B. alle $\{111\}$-Pole).

Beim Ziehen von Drähten treten häufig $< 111 >$-Texturen auf, was sich durch die Aktivierung von weiteren Gleitsystemen erklären läßt.

Meist sind die entstehenden Texturen unerwünscht, da sie eine Anisotropie des Materials zur Folge haben, etwa die sogenannte Zipfelbildung beim Tiefziehen gewalzter Bleche. In einigen Fällen jedoch ist diese Anisotropie jedoch erwünscht, etwa bei Transformatorblechen ($Fe_3\%Si$), in denen die Magnetisierungsrichtungen dann günstig liegen.

6.5 Technische Umformprozesse

Die bei technischen Umformungen auftretenden Spannungs- und Dehnungszustände sind natürlich weit komplizierter als die einfache einachsige Zug- oder Druckverformung. Dadurch ist das Fließ- und das Verfestigungsverhalten eine komplizierte

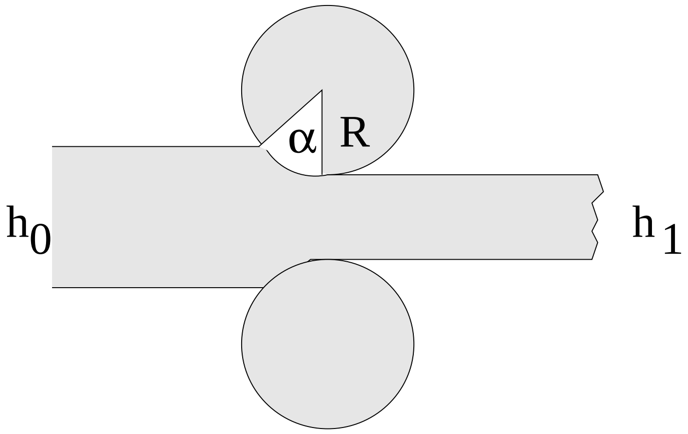


Abbildung 6.3: Schematische Geometrie beim Walzen

Funktion des Ortes und des Verformungsgrades. Dazu kommen noch Reibungskräfte zwischen Material und Werkzeug sowie bei Heißumformung eventuell komplizierte Temperaturverläufe.

Beispielhaft sollen hier einige wichtige Verfahren vorgestellt werden:

6.5.1 Walzen

Warmwalzen oder Kaltwalzen ist im wesentlichen eine 2-dimensionale Verformung, Druck in der Blechnormalen, Zug in der Walzrichtung, während die Blechbreite nur unwesentlich zunimmt. Für den Kontaktwinkel α (s. Abb. 6.3) gilt

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{\Delta h}{R}} \tag{6.19}$$

Damit dieser für die verschiedenen Walzschritte konstant ist, muß der Walzradius entsprechend der Blechdicke abnehmen. Für dünne Bleche müssen die dann recht dünnen Walzen gegen die Durchbiegung mit sehr viel massiveren Stützwalzen angedrückt werden.

Walzen nahtloser Rohre: Walzt man einen duktilen Stab, bildet sich im Zentrum eine Vertiefung aus, da das Außenmaterial stärker verformt wird als das Innere. Dies wird im Mannesmann-Prozeß benutzt, bei dem ein Stab von kegelförmigen Walzen über einen Dorn gewalzt wird.

6.5.2 Schmieden

Dies ist eine fast reine Druckverformung bei hoher Temperatur, wobei heute das Gesenkschmieden üblich ist. Hier wird das Werkstück in mehreren Schritten in eine Form gepreßt, wobei sich das Material stark verfestigt. Geschmiedete Werkstücke haben oft recht gute mechanische Eigenschaften und man findet sie etwa als Motorenteile (Pleuel, Ventile, Kurbelwellen).

6.5.3 Strangpressen

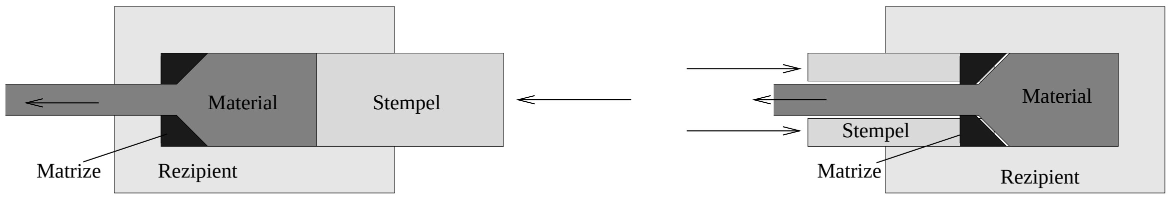


Abbildung 6.4: Schematische Darstellung des Strangpressens. Links Vorwärtsstrangpressen, das Material wird in der gleichen Richtung heraus- wie der Stempel hineingepresst, was mit Reibung zwischen Material und Rezipient verbunden ist. Rechts Rückwärtsstrangpressen, bei dem die Reibung reduziert ist.

Hiebei wird der Werkstoff durch eine geeignet geformte Matrize gepreßt, um Stangen, Rohre oder Profile herzustellen. Die Verformung ist im wesentlichen eine mehrachsige Druckverformung. Die einfachste Variante ist das Vorwärts-Strangpressen, bei dem aber die Reibung zwischen Material und Rezipient sehr groß ist. Günstiger ist das Rückwärts-Strangpressen, bei dem das Material durch den Stempel fließt. Dadurch sind die Stempelkräfte geringer.

6.5.4 Draht- und Rohrziehen

Hier wird das Material durch geeignete Matrizen gezogen, das Verfahren ist daher durch die Zugfestigkeit des Materials begrenzt. Zum Rohrziehen befindet sich im Inneren der Matrize ein Dorn, über den das Rohr gezogen wird.

6.5.5 Tiefziehen

Dies ist eine Umformung von Blechen, die aus einer Kombination von Druck- und Zugbeanspruchung besteht. Hier kommt es auf möglichst isotrope Verformbarkeit und feines Korn an, um gleichmäßige Verformung zu erreichen.

Kapitel 7

Härtung

Im letzten Abschnitt wurde die Festigkeitserhöhung durch plastische Verformung, die sogenannte Verfestigung und durch Kornverfeinerung eingeführt. In diesen Abschnitt sollen nun weitere wichtige Mechanismen zur Verbesserung der mechanischen Eigenschaften von Metallen vorgestellt werden.

Das Grundprinzip jeder Härtung ist, die Versetzungsbewegung zu hemmen. Hier soll nun die Härtung durch Fremdatome, die sogenannte Mischkristallhärtung und durch Ausscheidungen einer zweiten Phase (Ausscheidungshärtung) eingeführt werden. Beispiele für Mischkristallhärtung sind Stahl (FeC), Messing (CuZn), Bronze (CuSn), und viele andere Legierungen. Ausscheidungshärtung findet man häufig in Al-Legierungen (AlCu (Duraluminium) und in Superlegierungen ($Ni+Ni_3Al$).

7.1 Mischkristallhärtung

Die Mischkristallhärtung soll in zwei Schritten behandelt werden: zunächst muß man die Wechselwirkung einer Einzelversetzung mit einem Fremdatom verstehen, anschließend muß eine geeignete statistische Mitteilung über die Verteilung der Fremdatome erfolgen, die außerdem berücksichtigt, daß die Gesamtkrümmung der Versetzung nicht zu groß wird.

7.1.1 Wechselwirkung Versetzung-Fremdatom

Verschiedene Mechanismen tragen hier bei. Am einfachsten zu verstehen ist die Wechselwirkung einer Stufe mit einem Fremdatom, das eine VolumenVerpassung aufweist: Ein zu kleines Atom wird im Dilatationsgebiet abstoßend, im Kompressionsgebiet anziehend auf die Versetzung wirken.

Der hydrostatische Druck um eine Stufenversetzung im Ursprung ist (s. Gleichung

3.11)

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{G\,b}{3\pi}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{y}{x^2+y^2} \tag{7.1}$$

Die Volumenaufweitung ΔV durch ein Fremdatom, das ein um ΔV_0 größeres Volumen als die Matrixatome besitzt, beträgt:

$$\Delta V = 3\,\frac{1-\nu}{1+\nu}\,\Delta V_0 \tag{7.2}$$

Die Verzerrungen im Spannungsfeld der Versetzung ist dann

$$E = p \cdot \Delta V = -\frac{G\,b}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\,\Delta V_0 \tag{7.3}$$

Die Kraft in der Gleitebene zwischen Versetzung und Fremdatom folgt daraus als

$$F = \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{2G\,b}{\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\Delta V_0 \tag{7.4}$$

Setzt man die lineare Fehlpassung δ ein

$$\delta = \frac{\Delta V_0}{3\Omega}\,, \tag{7.5}$$

(Ω Atomvolumen), so ergibt sich als maximale Kraft

$$F_{max} = -\frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\,\Omega\,\delta\,G\,b\,\frac{1}{y^2} \tag{7.6}$$

bei

$$x = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

Das bedeutet, dass die Maximalkraft umso größer wird, je dichter das Fremdatom an der Gleitebene liegt. Allerdings stimmt zumindestens wenn das Fremdatom direkt in der Gleitebene läge, die lineare Elastizitätstheorie nicht mehr. Liegt es (im fcc-Gitter) auf der benachbarten (111)-Ebene, die einen y-Abstand

$$y = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}}$$

hat, so folgt die maximale Wechselwirkungskraft zwischen einr Stufenversetzung und einem fehlpassenden Fremdatom

$$F_{maxmax} \approx 2.63\,G\,b^2\,\delta\,. \tag{7.7}$$

Eine Schraube besitzt keine Volumenverzerrung, wechselwirkt allerdings mit einachsigen (tetragonalen) Verzerrungen um Zwischengitteratome (Kohlenstoff im Stahl), wobei dann

$$F_{max} \approx G\, b^2 \, \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{3} \tag{7.8}$$

ist. Dies kann größer werden als der dreiachsige misfit δ eines substitutionellen Atoms.

Schließlich kann es noch *dielastische* Wechselwirkungen geben, falls das Fremdatom zwar keine Verzerrung bewirkt, aber sich die elastischen Konstanten in seiner Umgebung ändern. Definiert man den sogenannten Moduldefekt, die relative Änderung des Moduls (hier des Schermoduls) mit der Fremdatomkonzentration ν_B als

$$\eta = \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \nu_B}\,, \tag{7.9}$$

ergibt sich die Wechselwirkungsenergie zwischen einer Versetzung und einem Fremdatom im Abstand r davon zu

$$E_{diel} = \frac{G\, b^2 \Omega}{8\pi^2\, r^2}\eta\,. \tag{7.10}$$

Weitere Möglichkeiten der Wechselwirkung hängen mit der atomaren Struktur des Versetzungskerns zusammen: beispielsweise verändert eine Variation der Stapelfehlerenergie durch Fremdatome lokal die Aufspaltungsweite und damit die Versetzungsenergie.

7.1.2 Statistische Mittelung

Im zweiten Schritt muß die Wechselwirkungskraft der statistisch verteilten Fremdatome mit der Versetzung bestimmt werden. Die Spannung, die mindestens nötig ist um die Versetzung vorwärts zu bewegen, also die Hindernisse zu überwinden, ist dann die kritische Schubspannung des Mischkristalls. Hierfür existieren zwei Theorien, von denen zunächst die von Fleischer vorgestellt wird. Er nimmt an, daß die Hindernisse punktförmig mit einer Kraft F_{max} auf die Versetzung wirken, daß also das oben berechnete Kraftprofil sehr eng ist gegen den Abstand der Hindernisse. Der mittlere Abstand der Hindernisse, die die Versetzung berührt, ergibt sich aus der Konstruktion in Abbildung 7.1.

Ein Versetzungssegment baucht sich so weit aus, bis überall ein Kräftegleichgewicht zwischen Linienspannung, äußerer Spannung und Wechselwirkungskraft herrscht. Zwischen zwei Hindernissen wird dabei eine Fläche f überstrichen, die sich ergibt zu

$$f \;=\; \Theta\, r^2 - r^2 \cos\Theta \sin\Theta$$

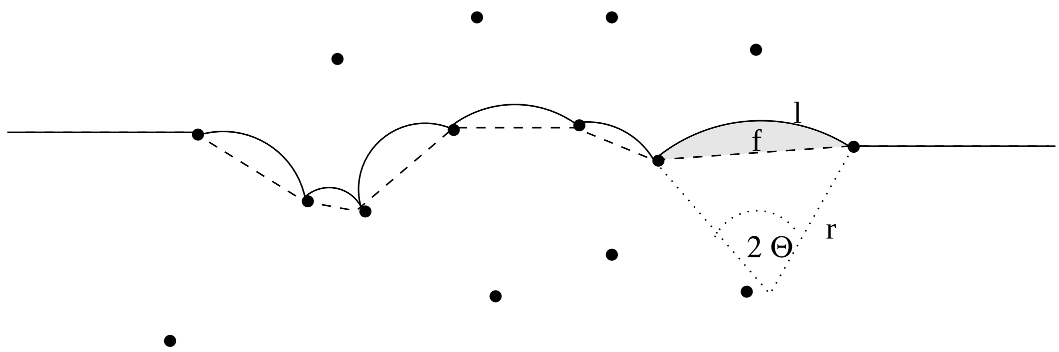


Abbildung 7.1: Eine Versetzung baucht sich unter einer äußeren Spannung zwischen Hindernissen aus und überstreicht hierbei eine Fläche f zwischen zwei Hindernissen.

$$
\begin{aligned}
&= r^2(\Theta - \frac{1}{2}\sin 2\Theta) \\
&\approx \frac{2}{3} r^2 \Theta^3 \\
&= \frac{l^3}{12\, r}\,, \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

wobei für die letzte Zeile benutzt wurde, dass $2\Theta = l/r$ ist.

Unter einer äußeren Spannung τ_a baucht sich eine Versetzung mit Radius

$$
r = \frac{E_L}{\tau_a\, b}\,, \qquad (7.12)
$$

so daß

$$
f = \frac{l^3\, \tau_a\, b}{12\, E_L} \qquad (7.13)
$$

ist. Im Mittel sollte diese Fläche gerade dem Kehrwert der Flächendichte c_F der Hindernisse entsprechen („jedes Hindernis wird zur Hälfte berührt“)

$$
f = \frac{1}{c_F}\,. \qquad (7.14)
$$

Die mittlere Segmentlänge wird damit

$$
l = \sqrt[3]{\frac{6\, E_L}{\tau_a\, b\, c_F}}\,. \qquad (7.15)
$$

Die äußere Spannung τ_a erreicht die kritische Schubspannung τ_c, wenn die Kraft auf die Versetzung die Kraft durch das Hindernis F_{max} überwiegt:

$$
\tau_a\, b\, l = F_{max}\,. \qquad (7.16)
$$

Damit erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \tau_c \cdot b &= F_{max} \sqrt[3]{\frac{\tau_c\, b\, c_F}{6\, E_L}} \\ \tau_c \cdot b &= F_{max}^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{c_F}{6E_L}} \end{aligned} \tag{7.17}$$

Die Fleischersche Theorie sagt also voraus, daß die kritische Schubspannung mit der Fremdatomkonzentration wie $c_F^{1/2}$ ansteigt.

Die zweite Theorie, von R. Labusch, berücksichtigt anders als die von Fleischer die räumliche Ausdehnung der Hindernisse durch eine Verteilungsfunktion der Hindernisstärken. Es geht von der Elementargleichung für die Versetzungslinie $y(x)$ (Spannungsgleichgewicht) aus:

$$E_L \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \sum_i F(x - x_i, y - y_i) + \tau_a\, b = 0 \tag{7.18}$$

und führt eine Verteilungsfunktion $\rho(x, y)$ für die Hindernisstärke am Ort (x, y) ein; $\rho(x, y)dxdy$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Versetzungssegment bei (x_0, y_0) ein Hindernis in der Fläche $df = (x_0 + x, x_0 + x + dx) \times (y_0 + y, y_0 + y + dy)$ sieht.

Sie liefert

$$\tau_c\, b = \text{const} \cdot F_{max}^{4/3}\, c_F^{2/3}\, Z^{1/3}\, E_L^{-1/3} \tag{7.19}$$

wobei Z die Ausdehnung der Hindernisse ist.

Die Theorie von Labusch hat den Vorteil, auch für unterschiedliche Hindernisse anwendbar zu sein, die dann durch unterschiedliche Verteilungsfunktionen berücksichtigt werden. Es zeigt sich dann, daß die Wechselwirkung nicht linear, sondern durch ein Gesetz der Gestalt

$$F_{eff} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \tag{7.20}$$

zu überlagern ist.

Weiterhin lassen sich Temperatureffekte zwanglos einbauen - ein Teil der Hinderniskraft wird dann durch thermische Aktivierung überwunden. Macht man eine parabolische Näherung für den obersten Teil des Kraftprofils

$$F_p(x) \approx F_{max}\, (1 - \frac{(x - x_m)^2}{Z}) \tag{7.21}$$

und berechnet die Arbeit, die die Versetzung auf dem Weg von x_1 bis x_2 gegen die Kraft zu leisten hätte (schraffierte Fläche),

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} (F_p(x) - F^*)\, dx \\ &= (F_{max} - F^*)(x_2 - x_1) - F_{max} \frac{(x_2 - x_m)^3 - (x_1 - x_m)^3}{3\, Z^2} \end{aligned} \tag{7.22}$$

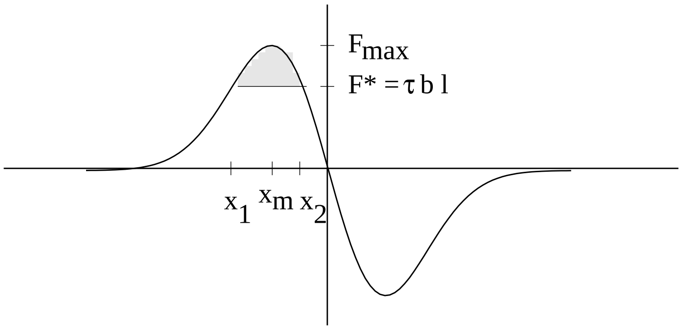


Abbildung 7.2: Verlauf der Kraft auf eine Versetzung an einem Hindernis.

x_1 und x_2 sind gegeben durch die Bedingung, dass dort $F_p(x) = F^*$ sein soll,

$$x_2 - x_m = x_m - x_1 = Z\,(\frac{F_{max} - F^*)}{F_{max}})^{1/2}\,. \tag{7.23}$$

Damit ergibt sich die Arbeit zu

$$E = \frac{4}{3}\,F_{max}\,Z\,(F_{max} - F^*)^{3/2}\,. \tag{7.24}$$

Setzt man diese Energie gleich der thermischen Energie kT und F^* gleich der auf die Versetzung wirkenden Kraft vor dem Hindernis

$$\begin{aligned}
E &= kt \\
F^* &= \tau_c\,b\,l(\tau_c) \\
&= (\tau_c\,b\sqrt{\frac{E_L}{c_F}})^{2/3} \\
F_{max} &= \tau_c^0\,b\,l(\tau_c^0) \\
\Rightarrow kT &= \frac{4}{3}\,Z\,F_{max}\left(1 - (\frac{\tau_c}{\tau_c^0})^{2/3}\right)^{3/2} \\
\Rightarrow \tau_c &= \tau_c^0\left(1 - (\frac{3kT}{4\,Z\,F_{max}})^{2/3}\right)^{3/2}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

erhält man die Absenkung der kritischen Schubspannung mit der Temperatur.

7.2 Streckgrenzen

Die im Kristall gelösten Fremdatome können einen zweiten Effekt bewirken: Falls sie beweglich sind (d.h. die Temperaturen hinreichend hoch sind), werden die Fremdatome auf die Versetzung zu diffundieren. Zu große Atome werden sich im Dilatationsgebiet, zu kleine im Kompressionsgebiet ansammeln. Im Gleichgewicht wird die Verteilung einer Boltzmannverteilung

$$c(r, \phi) = c_0 \exp - \frac{\Delta E(r, \phi)}{kT} \tag{7.26}$$

folgen, wobei $\Delta E(r, \phi)$ die Energie eines Fremdatoms im Abstand r mit Winkel ϕ zur eingeschobenen Halbebene ist. Diese Anreicherung wird als *Cottrell-Wolke* bezeichnet. Sie ist ein Beispiel für Gleichgewichtssegregation, wie sie auch z.B. in Korngrenzen gefunden wird. Wenn sich eine Versetzung nun bewegen soll, muß sie sich erst aus der Cottrellwolke befreien. Es ist daher zunächst eine weit höhere Spannung für den Einsatz plastischer Verformung nötig als die normale Mischkristallhärtung vorhersagt. Dieses Verhalten wird als ausgeprägte Streckgrenze bezeichnet.

Eine zweite Möglichkeit ist die Segregation von Fremdatomen im Stapelfehler aufgespaltener Versetzungen, was *Suzuki-Wolke* genannt wird.

Nicht verwechseln darf man die ausgeprägte Steckgrenze (Pinnen der Versetzung) mit der Versetzungsmangel-Streckgrenze, die in sehr reinen Einkristallen auftritt. Hier existieren zunächst zu wenig Versetzungen für plastische Verformung. Erst wenn durch hinreichend hohe Spannung starke Multiplikation eingesetzt hat, sinkt die Fließspannung wieder ab. Dies findet man vor allem in Halbleitereinkristallen.

7.3 Ausscheidungshärtung

Wie im ersten Teil der Vorlesung gezeigt, entmischt eine Legierung, deren Fremdatomgehalt einen kritischen Wert überschneidet, indem sich feine Partikel der zweiten Phase ausscheiden. Diese Ausscheidungen bilden wiederum starke Hindernisse für die Versetzungsbewegung; man spricht daher von Ausscheidungshärtung. Sind die Ausscheidungen kohärent (oder semikohärent) mit der Matrix, können Versetzungen aus der Matrix in die Ausscheidungen übertreten und sie schneiden. Sind sie jedoch inkohärent, können sie nur durch verschiedene Mechanismen der Versetzungsbewegung umgangen werden.

Im ersten Fall, dem Schneiden kohärenter Ausscheidungen, tragen unterschiedliche Anteile zur Wechselwirkungsenergie mit Versetzungen bei:

- Zunächst gibt es, wie für die Mischkristallhärtung eine par- oder dielastische Wechselwirkung der Verzerrungsfehler einer Ausscheidung mit dem Spannungsfeld einer Versetzung.
- Schneidet eine Versetzung ein Teilchen, vergrößert sich dessen Grenzfläche zur Matrix, was einer Wechselwirkungsenergie entspricht.

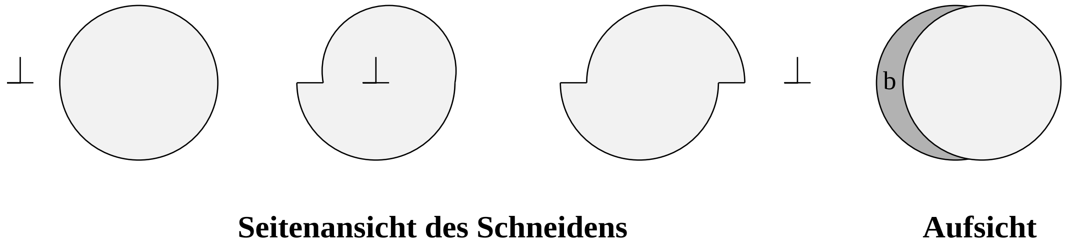


Abbildung 7.3: Zunahme der Grenzfläche Ausscheidung – Matrix beim Schneiden

- In geordneten Ausscheidungen erzeugt eine einzelne Versetzung eine Antiphasengrenze, was wiederum Energie kostet.
- Bei unterschiedlichen Stapelfehlerenergien zwischen Ausscheidung und Matrix ändert sich die Versetzungsaufspaltung in der Ausscheidung, was ein Pinning bewirkt.

7.3.1 Teilchenhärtung durch Oberflächenzunahme

Die Wechselwirkungskraft folgt aus der Änderung der zusätzlichen Oberfläche mit der Bewegung der Versetzung durch die Ausscheidung, also folgender geometrischer Überlegung:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x) - f(x+b) \\ f(x) &= (\phi - \cos\phi \sin\phi)\, r^2 \\ &= (\arccos\frac{x}{r} - \frac{x}{r}\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}\, r^2 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Die zusätzlich erzeugte Grenzflächenenergie ist

$$\Delta E(x) = \tilde{E}_{\alpha\beta} \cdot \Delta f(x) \tag{7.28}$$

Die Versetzung läuft also gegen eine Kraft

$$F(x) = \tilde{E}_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \Delta f(x)}{\partial x} \tag{7.29}$$

an. Sie ist maximal an den Rändern; dort ist

$$F_{max} = 2\tilde{E}_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{b}{r}(2-\frac{b}{r)}}\, r \approx 2\tilde{E}_{\alpha\beta}\sqrt{2\,b\,r} \tag{7.30}$$

Da die Versetzung die Ausscheidung in jeder Höhe h schneiden kann, ist der mittlere Radius

$$< r >= \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-h^2}dh = \frac{\pi}{4}\, r\,. \tag{7.31}$$

Das heißt, daß die Ausscheidung der Versetzung mit einer Kraft

$$F_{schneid} = \pi \tilde{E}_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{b\,r}{2}} \tag{7.32}$$

entgegenwirkt.

7.3.2 Teilchenhärtung durch Ordnung

In geordneten Ausscheidungen (z.B. Ni_3Al in Ni) erzeugt eine Einzelversetzung eine Antiphasengrenze. Die hierfür nötige Energie ist

$$\Delta E = \tilde{E}_{APB} \cdot \pi\, r^2 \tag{7.33}$$

(bzw. nach Mitteilung über die Höhen)

$$\Delta E = \tilde{E}_{APB} \cdot \frac{\pi^3\, r^2}{16} \tag{7.34}$$

Die Wechselwirkungsenergie ist proportional zur abgeglittenen Fläche $f(x)$ aus Gleichung (7.27)

Ihre Ableitung ergibt wieder die Wechselwirkungskraft

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sqrt{r^2 - x^2} \tag{7.35}$$

mit einem Maximum bei $x = 0$:

$$F_{Ordnung} = -2\tilde{E}_{APB}\, r \tag{7.36}$$

Eine auf der gleichen Gleitebene nachfolgende Versetzung spürt allerdings eine anziehende Kraft, da diese die Antiphasengrenze wieder auflöst. Dies erkennt man deutlich in TEM-Aufnahmen, wo bei Versetzungspaaren nur die führende Versetzung gepinnt wird.

7.3.3 Teilchenhärtung durch Stapelfehlerenergie

Schließlich kann ein Unterschied der Stapelfehlerenergie in Matrix und Ausscheidung die Aufspaltungsweite verändern und damit die Versetzungsenergie verändern. Dies führt wieder auf ein ähnliches Kraftgesetz

$$F_{Stapelfehler} = 2\,(\gamma^{SF}_{Matrix} - \gamma^{SF}_{Ausscheid.})\, r \tag{7.37}$$

Die jeweiligen Kraftgesetze für die verschiedenen Härtungsmechanismen können nun in die Fleischer- oder Labuschtheorie eingesetzt werden, wobei beachtet werden muß, daß die Dichte der Ausscheidungen auch zeitabhängig ist. Man erhält für die meisten Fälle einen Anstieg der Fließspannung mit dem Teilchenradius, allerdings mit unterschiedlichen Potenzen.

Als Beispiel betrachten wir geordnete Auscheidungen mit vollständiger Ausscheidung (d.h. Gleichgewichtskonzentration beider Phasen) im Rahmen der Theorie von Fleischer, also mit einem Kraftgesetz der Art

$$F_{max} = \alpha \cdot r \, .$$

Das gesamte Volumen von N Auscheidungen sei

$$V_p = N \cdot \frac{4\pi \, r^3}{3} \, .$$

Die Ausscheidungen, die eine bestimmte Gleitebene in einer Fläche der Kantenlänge A berühren, liegen in einem Volumen

$$V_M = 4 \, r \, A^2 \, .$$

Die Flächendichte c_F ist dann

$$c_F = \frac{N}{A^2} \, ,$$

der ausgeschiedene Volumenteil

$$\nu_P = \frac{V_P}{V_M} = \frac{\pi \, r^2}{3} \, \frac{N}{A^2} = \frac{\pi \, r^2}{3} \, c_F \, .$$

Damit wird die kritische Schubspannung

$$\tau_c \cdot b = \alpha^{3/2} \, r^{1/2} \, \left(\frac{\nu_p}{2\pi \, E_L} \right)^{1/2} \tag{7.38}$$

Setzt man typische Zahlwerte ein

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{APB} &= 50 \, mJ/m^2 \\ \nu_P &= 0.1 \\ r &= 100 \, b \\ E_L &= 1eV/b = 1.6 \cdot 10^{-19} \, J/b \end{aligned}$$

folgt

$$\tau_c \approx 100 \, MPa \, ,$$

also ein durchaus realistischer Wert, der insbesondere zeigt, daß die Ordnungshärtung sehr effektiv ist.

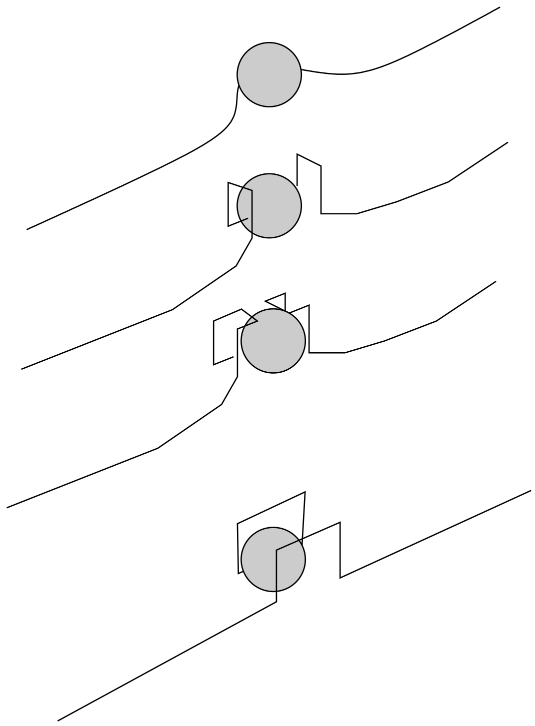


Abbildung 7.4: Alternative zum Orowanprozeß für eine Stufenversetzung: eine Sutfe kann eine Ausscheidung durch Quergleiten von Schraubensegementen umgehen.

7.3.4 Härteabfall, Überalterung

Im Gegensatz zu den Ergebnissen der obigen Analyse findet man allerdings, daß die Fließspannung nur bis zu einem Maximalwert ansteigt,dann jedoch wieder sinkt. Dies liegt daran, daß in dem Maß, in dem die Teilchengröße zunimmt, ihr Abstand ebenfalls wächst. Irgendwann ist der Teilchenabstand dann so groß, daß die Versetzung durch den *Orowanprozeß* zwischen den Hindernissen durchtritt: Die Versetzung baucht sich unter der äußeren Spannung soweit durch, bis die Passierspannung

$$\begin{aligned} \tau_p &= \frac{G\,b}{4\pi\,(1-\nu)} \log\frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{1}{l} \\ &= \frac{2\,E_L}{b\,l} \end{aligned} \tag{7.39}$$

(l mittlerer Teilchenabstand) erreicht ist. Danach wird sie instabil, es bildet sich um das Hindernis ein loopund die Versetzung schließt sich dahinter.

Der Abstand der Hindernisse ist (s.o.)

$$l = \frac{1}{c_F} = \sqrt{\frac{\pi}{3\nu_P}} \cdot r \tag{7.40}$$

und somit

$$\tau_p = \frac{2E_L}{b\,r}\sqrt{\frac{3\nu_P}{\pi}}\,. \tag{7.41}$$

Das Härtemaximum ergibt sich für den Teilchenradius r_m, für den $\tau_p = \tau_c$ ist:

$$\frac{2\,E_L}{b\,r_m}\sqrt{\frac{3\nu_P}{\pi}} = \alpha^{3/2}\sqrt{\frac{\nu_P}{2\pi\,E_L}}r_m^{1/2}\,\frac{1}{b} \tag{7.42}$$

zu

$$r_m = 2\,\sqrt[3]{3}\frac{E_L}{\alpha}\,. \tag{7.43}$$

Setzt man die Zahlen aus dem obigen Beispiel ein, findet man einen Wert von

$$r_m = 23nm\,.$$

Der Orowanprozeß ist nicht die einzige Möglichket, eine Ausscheidung zu umgehen: So kann eine Stufe zunächst Schraubensegmente ausziehen, die dann quergleiten und sich hinter der Ausscheidung zu einem prismatischen loop schließen, auf der Ausscheidung hingegen zwei superjogs hinterlassen.

Kapitel 8

Ermüdung, Bruch und Erholung

8.1 Wechselverformung (Ermüdung)

Wechselverformung ist eine Materialbeanspruchung, die im realen Einsatz beispielsweise bei einem schwingenden Bauteil häufig zu finden ist und auch oft zum Versagen, zum sogenannten Ermüdungsbruch führt. Im Labor wird häufig

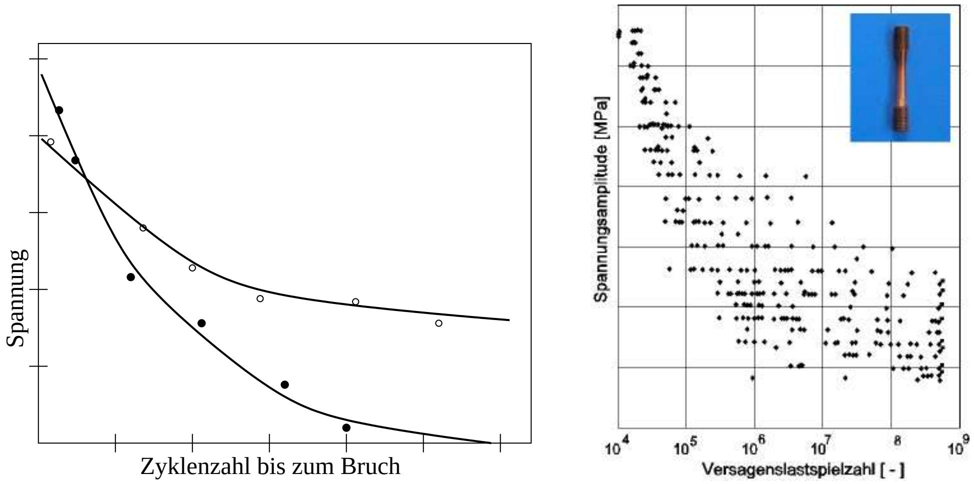


Abbildung 8.1: Modellhafte und experimentell ermittelte Woehlerkurven

der symmetrische Zug-Druck-Versuch als Modell hierfür benutzt: die geeignet eingespannte Probe wird mit konstanter Dehngeschwindigekeit gedehnt und um den gleichen Betrag gestaucht, entweder, wie in der Abbildung, mit konstanter Dehnungs- oder mit konstanter Spannungsamplitude. Trägt man die Spannungsamplitude σ, die für einen Ermüdungsbruch nach N Zyklen nötig ist, gegen N auf, ergibt sich die sogenannte Wöhlerkurve. Häufig weist sie einen Grenzwert σ_c auf, so dass, falls man unter dieser Lastgrenze bleibt, das Bauteil nicht durch

Ermüdungsbruch gefährdet ist (typisch $\sigma_c \approx 0.3 \cdots 0.5$ der Zerreißfestigkeit). Eine Ermüdungsgrenze findet man z.B. in Kohlenstoffstählen, in denen die Versetzungen immer wieder durch die bei Raumtemperatur beweglichen C-Atome gepinnt werden, nicht aber in austenitischen (fcc) Stählen. Bleibt man also unter dem Spannungslimit ist (theoretisch) die Lebensdauer unbegrenzt, bei Werkstoffen ohne eine solche Grenze tritt mit Sicherheit irgendwann ein Versagen auf. Durch entsprechendes Design muss dann dafür gesorgt werden, dass das Versagen nicht während der geplanten Lebensdauer eines Produkts eintritt.

Eine andere Darstellung ist die zyklische Spannungs-Dehnungskurve: hier trägt man die maximalen Spannungswerte gegen die akkumulierte Dehnung auf.

Bei Wechselverformung findet man oft im Gegensatz zu dem Verhalten bei monotoner Verformung ein "strain softening", also ein weicherwerden des Materials ("Entfestigung"). Ursache hierfür ist die Versetzungsbewegung hin und her (die

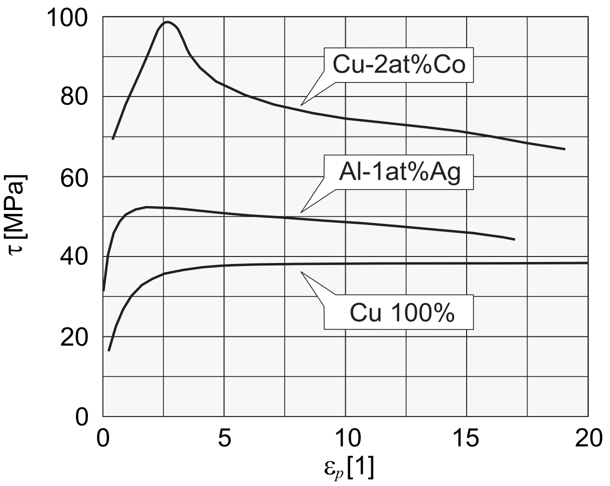


Abbildung 8.2: Verlauf der Spannung mit zunehmender kumulierter Dehnung für unterschiedliche Materialien. Besonders in ausscheidungsgehärtetem Material findet man eine Entfestigung.

schon bei Spannungen unterhalb von τ_c stattfindet!) Dabei werden Versetzungsloops periodisch ausgezogen, die Stufenanteile bilden stabile Dipol-/Multipolkonfigurationen. Die Schraubenanteile laufen weiter und annihilieren möglicherweise. durch Quergleitung. Mikroskopisch weisen wechselverformte Proben meist eine ganz andere Versetzungsanordnung auf als einsinnig verformte. Dies liegt daran, dass eine unter Zug entstandene Versetzungsanordnung nach Spannungsumkehr nicht unbedingt stabil ist, die Verfestigung geht zum Teil wieder verloren, was als Bauschinger-Effekt bezeichnet wird. Nach einer gewissen Zahl von Zyklen bilden sich dann lokal in der Probe Bereiche scharfer Versetzungsanordnungen, sogenannte persistente Gleitbänder (PSB), in denen das Material leichter verformbar ist als die umgebende Matrix. Die Durchtritte solcher PSBs an der Oberfläche

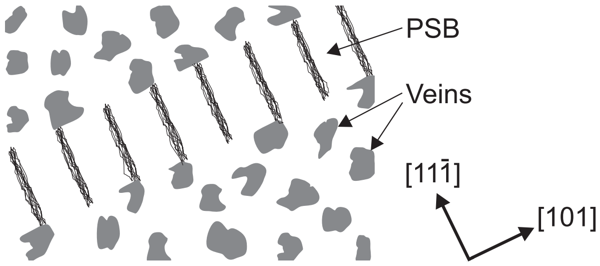


Abbildung 8.3: Schema der Versetzungsanordnung in wechselverformten Proben: Neben dichte Versetzungsbündeln ("veins") bilden sich persistente Gleitbänder (PSBs)

sind häufig Ausgangspunkt für Ermüdungsrisse.

Ein besonders einfaches Modell für die Rissentstehung ist das von Neumann: an der Oberfläche entsteht etwa durch ein PSB eine Stufe, die aber im nächsten Schritt wieder durch Verformung auf einer zweiten Gleitebene geschlossen wird. In vielen Schritten wird Material von der Oberfläche in die Tiefe transportiert, was, wenn die Oberfläche verunreinigt war, zum Bruch führt.

8.2 Weitere Verformungsmechnismen – mechanische Zwillingsbildung, Korngrenzenkriechen, Superplastizität

Bei tiefer Temperatur kann anstelle der inhomogenen Verformung durch Versetzungsgleitung eine homogene Deformation, die mechanische Zwillingsbildung stattfinden. Wie im ersten Teil der Vorlesung erklärt, bedeutet Zwillingsbildung im fcc-Gitter eine Spiegelung an einer (111)-Ebene, so dass die Stapelfolge umgekehrt wird:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zwillingsgrenze}}}{ABCABCABCABCABCABC\,ACBACBACBACBACBAC}$$

Zum zweiten hatten wir gesehen, dass eine Shockley-Partialversetzung einen Stapelfehler erzeugt, also z.B. eine A- in eine B-Ebene überführt:

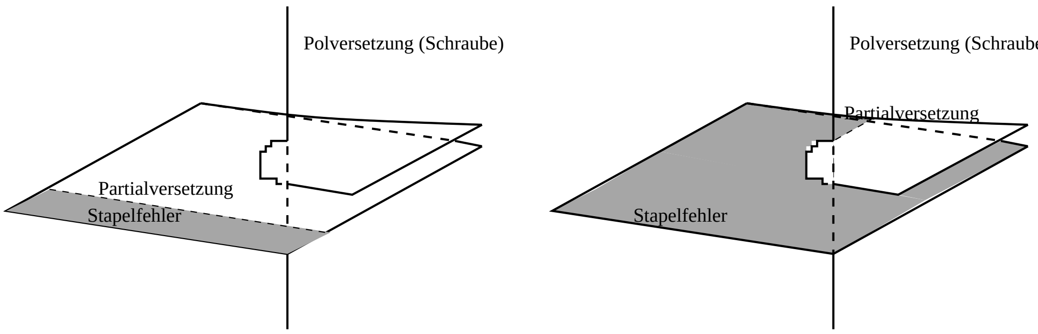


Abbildung 8.4: Der Polmechanismus für die mechanische Zwillingsbildung: eine Partialversetzung läuft um eine Schraube herum und erzeugt bei jedem Umlauf eine Lamelle verzwillingten Bereichs.

$$
\begin{array}{c}
ABCABCABCABCABCABCABCABCABCABCABCABC \\
\uparrow \\
ABCABCABCABCABCABCBCABCABCABCABCABCA \\
\uparrow \\
ABCABCABCABCABCABCBABCABCABCABCABCAB \\
\uparrow \\
ABCABCABCABCABCABCBACABCABCABCABCABC \\
\uparrow
\end{array}
$$

Läuft über jede Ebene ab der Zwillingsebene eine Shockley-Partialversetzung, entsteht also ein Zwilling. Eine solche kollektive Versetzungsbewegung ist allerdings wenig wahrscheinlich. Es wurde daher der sogenannte Pol-Mechanismus vorgeschlagen, bei dem eine Shockley-Partialversetzung auf eine Schraube stößt, eine Hälfte um die Schraube wie auf einer Wendeltreppe hinaufklettert und damit den Zwilling erzeugt. Ein Einwand gegen dieses Modell ist allerdings, dass die zwei Partialversetzungsarme auf atomarem Abstand aneinander vorbeilaufen müssen, was auf extrem hohe Spannungen für den Einsatz von mechanischer Zwillingsbildung führt. Ein Mechanismus, der dieses Problem vermeidet, wurde von Venables vorgeschlagen: ein langer Jog auf einer Schraubenversetzung sei in eine (unbewegliche) Frank- und eine (mobile) Shockley-Partialversetzung aufgespalten:

$$\frac{a}{2}[110] \rightarrow \frac{a}{6}[112] + \frac{a}{3}[11\bar{1}] \tag{8.1}$$

Die Shockley-Partialversetzung baucht sich unter der äußeren Spannung aus und windet sich um die Schraubensegmente herum. Allerdings kann sich der Ring nicht schließen, da die hinteren Segmente auf benachbarten Gleitebenen liegen. Jedoch kann ein Teil sich wieder mit der Frank-Partialversetzung vereinigen und auf die nächste Ebene gleiten. Nun wiederholt sich der Prozeß und das nun erzeugte Segment kann sich mit dem des ersten Rings annihilieren und auf diese Weise eine "einatomige Zwillingsschicht" erzeugen. Fortsetzung dieses Prozesses führt schließlich auf eine ausgedehnte Zwillingslamelle, die von einer spiralförmigen Shockley-Partialversetzung umrandet ist. Hat die Zwillingslamelle eine gewisse Dicke erreicht, kann auch der einfache Polmechanismus einsetzen.

Der mechanischen Zwillingsbildung ähnlich ist die Bildung von spannungsinduziertem Martensit, wobei aber das Gitter nicht invariant bleibt sondern eine (leicht) andere Struktur bekommt.

8.2.1 Kriechen, Korngrenzgleitung, Superplastizität

Bei höherer Temperatur kann unter einer konstanten Last eine stationäre Verformungsrate gefunden werden, die verschiedene Ursachen haben kann:

- bei hohen Spannungen: Versetzungsgleiten ($\sigma \geq 10^{-3}\, G$)
- bei $\sigma \geq 10^{-3}\, G, T\ \geq 0.4\, T_m$:
  Versetzungskriechen = Klettern von Stufen (erfordert Diffusion)
  $$\dot{\epsilon} = \frac{\tilde{D} \cdot G \cdot b}{kT} (\frac{\tau}{G})^n \tag{8.2}$$
- bei noch geringeren Spannungen und $T \geq 0.5\, T_m$:
  Diffusionskriechen (entweder dominiert durch KG-Diffusion oder Volumendiffusion, je nach Temperatur)

Korngrenzgleitung
Bei hoher Temperatur kann in Vielkristallen eine Verschiebung der Körner gegeneinander zu einer plastischen Verformung führen. Dies ist um so einfacher, je feiner das Korn ist - anders als bei tiefen Temperaturen, wo ja (beschrieben durch die Hall-Petch-Beziehung) feines Korn hohe Festigkeit bedeutet. Ein von Ashby vorgeschlagener Prozess erklärt dies in folgender Weise: die äußere Schubspannung erzeugt in den Korngrenzen Normalspannungen. Dadurch findet ein Leerstellenstrom entgegen diesen Spannungen statt, es wird also Materie von der einen zur anderen Korngrenze transportiert.

Man erhält aus diesem Modell für die Korngrenzgeschwindigkeit, das sog. Diffusionskriechen (Nabarro-Herring-Kriechen,falls $D_M \geq D_k G$ ist, Coble-Kriechen, falls $D_M \leq D_k G$ ist)

$$\dot{u} = \frac{8}{\pi} \frac{\tau\omega}{kT} \frac{\lambda}{h^2} D_M (1 + \frac{\pi\delta}{\lambda} \frac{D_k G}{D_M})\,. \tag{8.3}$$

λ ist die "Periode" der Körner (Lateralausdehnung) h ihre Höhe, τ die wirkende Scherspannung.

Ein Material mit kleiner "Welligkeit" der Korngrenzen setzt dem Diffusionskriechen relativ wenig Widerstand entgegen. Wolframdrähte in Glühlampen besitzen aufgrund des Drahtziehens extrem langgestreckte Körner, so dass senkrecht zu den Körnern eine extreme Welligkeit, also eine relativ hohe Stabilität vorliegt. Dies wird technisch noch verstärkt durch Kaliumausscheidungen auf der Korngrenze, die die Welligkeit noch erhöhen.

Superplastizität
Eng verbunden mit der Korngrenzgleitung ist das Phänomen der Superplastizität. Hinreichend feinkörnige Metalle und Keramiken lassen sich bei hohen Temperaturen extrem dehnen, ohne dass es zum Bruch kommt. Entscheidend hierfür ist neben der leichten Verformbarkeit die richtige Spannungsabhängigkeit der Verformungsgeschwindigkeit,

$$m = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \,. \tag{8.4}$$

Bei normaler Plastizität findet man m-Werte von ca. 1/2, während bei Superplastizität $m \approx 1$ sein muss. Dies ergibt sich aus der Bedingung für plastische Stabilität für einen Zugversuch:

$$\frac{\delta \dot{A}}{\delta A} < 0 \,, \tag{8.5}$$

die bedeutet, dass, wenn irgendwo eine Einschnürung auftritt, dort die Verformungsgeschwindigkeit reduziert sein muss.

Die Variation der Kraft soll bei stabiler Verformung verschwinden. Sie kann durch eine Variation der Spannung σ oder durch eine Variation des Querschnitts A verursacht sein:

$$\begin{aligned} \delta F &= 0 \\ &= \sigma \delta A + A \cdot \delta \sigma \end{aligned} \tag{8.6}$$

Da $\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$ ist, gilt

$$\delta \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \delta \epsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \delta \dot{\epsilon} \,. \tag{8.7}$$

Der Verfestigungskoeffizient Θ ist definiert als

$$\Theta = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \,, \tag{8.8}$$

die Geschwindigkeitsempfindlichkeit

$$m = \frac{\dot{\epsilon}}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\dot{\epsilon}}\,. \tag{8.9}$$

Damit wird

$$\delta\sigma = \sigma \cdot \Theta \cdot \delta\epsilon + \frac{\sigma\, m}{\dot{\epsilon}} \cdot \delta\dot{\epsilon} \tag{8.10}$$

Die Dehnung $\epsilon = \delta l / l$ ist wegen deren Volumenkonstanz

$$\epsilon = -\frac{\delta A}{A}\,, \tag{8.11}$$

und damit gilt auch $\delta\epsilon = -\frac{\delta A}{A}$ für die Änderung der lokalen Dehnung in der Einschnürung.

Die Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ ist

$$\dot{\epsilon} = -\frac{\dot{A}}{A}\,, \tag{8.12}$$

also

$$\begin{aligned} \delta\dot{\epsilon} &= -\frac{A\delta\dot{A} - \dot{A}\delta A}{A^2} \\ &= \frac{\dot{A}}{A^2}\delta A - \frac{\delta\dot{A}}{A} \\ \Rightarrow \frac{\delta\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} &= \frac{\delta\dot{A}}{\dot{A}} - \frac{\delta A}{A} \end{aligned} \tag{8.13}$$

In Gleichung 8.10 eingesetzt, wird die Variation der Spannung

$$\delta\sigma = -\sigma \cdot \Theta\frac{\delta A}{A} - \sigma \cdot m\frac{\delta A}{A} + \sigma \cdot m\frac{\delta\dot{A}}{\dot{A}} \tag{8.14}$$

Also ist

$$0 = \sigma \cdot \delta A - (\sigma \cdot \Theta + \sigma \cdot m)\,\delta A + \delta \cdot m\,\frac{A}{\dot{A}}\delta\dot{A}$$

$$(\Theta + m - 1)\delta A = m \cdot \frac{A}{\dot{A}}\,\frac{\delta\dot{A}}{\delta A}$$

Der Faktor $\frac{A}{\dot{A}}$ ist negativ ($\dot{A} < 0$), also muss für plastische Stabilität

$$\Theta + m - 1 > 0 \tag{8.15}$$

sein. Bei hohen Temperaturen ist die Verfestigung sehr gering, plastische Stabilität ist also nur gegeben, falls $m \approx 1$ ist. In superplastischen Legierungen können Dehnungen von mehreren 100% erreicht werden, allerdings nur in sehr feinkörnigen Legierungen bei hohen Temperaturen. Allerdings gibt es Spahnlationen, dass bei extrem geringen Verformungsgeschwindigkeiten auch in grobkörnigerem Material Superplastizität auftreten kann, was für geologische Prozesse von Bedeutung sein könnte.

8.3 Bruch

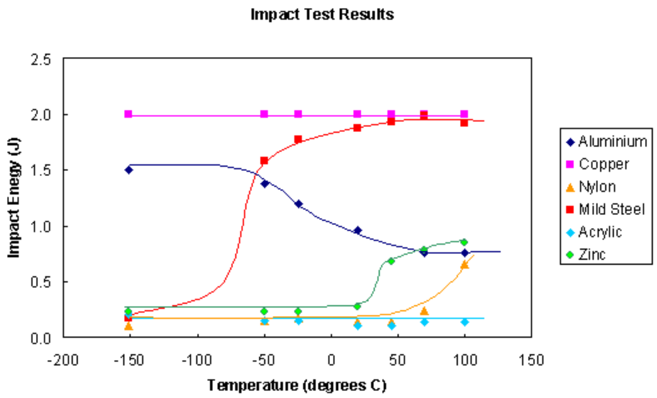


Abbildung 8.5: Der Übergang von sprödem zu duktilem Verhalten für unterschiedliche Materialien (aus http://www.msm.cam.ac.uk/doitpoms/tlplib/BD6/results.php)

Überschneidet man die Grenzen plastischer Stabilität, kommt es im Allgemeinen zum Bruch des Materials. Das Bruchverhalten wird nach verschiedenen Charakteristika unterschieden:

- transkristalliner Bruch: die Bruchfläche durchquert die Körner,
- interkristalliner Bruch: der Riss läuft entlang von Korngrenzen.
- Sprödbruch: mit Sprödbruch bezeichnet man ein Brechen ohne vorangegangene plastische Verformung,
- duktiler Bruch: entsprechend ein Bruch mit vorangehender plastischer Verformung,
- Ermüdungsbruch: mit Ermüdungsbruch wird das Vesagen nach Wechselverformung bezeichnet.

Ob bzw. in welchem Maße ein Sprödbruchverhalten vorliegt, kann im sogenannten *Kerbschlagversuch* untersucht werden. Ein Fallpendel trifft auf eine eingekerbte, einseitig eingespannte Probe und zerbricht diese. Die beim Burchvorgang dissipierte Energie wird im einfachsten Fall bestimmt, indem die anschließende Steighöhe des Fallpendels gemessen wird. Ein Sprödbruch verzehrt nur sehr wenig Energie, während plastische Verformung einen erheblichen Anteil aufnimmt. In vielen Materialien (z.B. in kubisch raumzentrierten Metallen wie Kohlenstoffstählen) findet man bei einer relativ scharfen Übergangstemperatur einen Übergang von sprödem zu duktilem Verhalten. Unter anderem war das Unterschreiten der Sprödbruchtemperatur eine Mitursache für den Untergang der Titanic (der Eisberg natürlich ebenfalls).

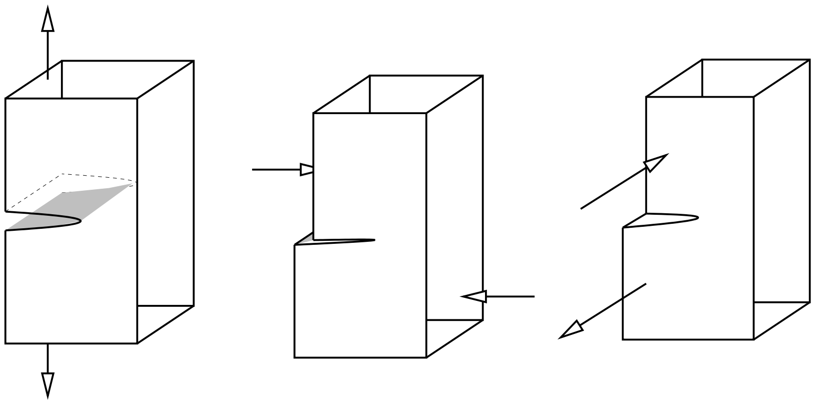


Abbildung 8.6: Schema der drei verschiedenen Bruchmoden. Mode I ist ein Aufziehen des Risses, Mode II ein Verschieben nach hinten, Mode III ein Verdrillen.

Die Bruchmechanik versucht, mit Überlegungen aus der Elastizitätstheorie das Materialverhalten nahe der Bruchspitze zu modellieren. Hier werden drei Beanspruchungsarten ("Moden") unterschieden. Als Mode I bezeichnet man ein einfaches Aufziehen senkrecht zur Bruchfläche, als Mode II eine Stufenverformung in der Bruchfläche und als Mode III eine Torsion auf der Bruchfläche. Das Spannungsfeld um einen Mode I-Bruch im Ursprung lässt sich berechnen

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\, r}}\, f_{ij}(\theta)\,, \tag{8.16}$$

wobei die Funktionen $f(\theta)$ nur noch vom Winkel abhängen:

$$f_{11} = \cos\frac{\theta}{2}(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \tag{8.17}$$

$$f_{22} = \cos\frac{\theta}{2}(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \tag{8.18}$$

$$f_{33} = 2\,\nu\,\cos\frac{\theta}{2} \tag{8.19}$$

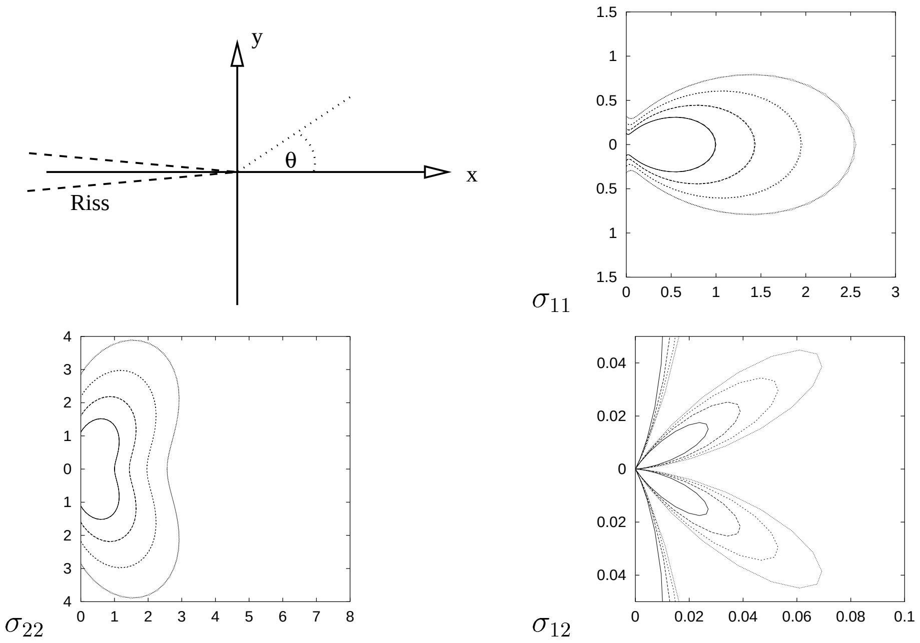


Abbildung 8.7: Geometrie um den Bruch und Winkelabhängigkeit der Komponenten des Spannungstensors.

$$f_{12} = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{8.20}$$
$$\tag{8.21}$$

Abbildung (8.7) zeigt den Spannungsverlauf um einen Riss. Man erkennt, dass die Scherkomponenten schmetterlingsartig in 45^0-Winkeln von der Rissspitze ausgehen. In den Bereichen starker Scherung findet man dementsprechend Versetzungsbewegung.

K_I wird als *Spannungs-Intensitätsfaktor* bezeichnet. Für einen geraden Riss der Länge $2a$ in einem unendlichen Körper unter äußerer Zugspannung σ_A ist

$$K_I = \sqrt{\pi\, a}\, \sigma_A\,. \tag{8.22}$$

Der Riss läuft weiter, wenn K_I einen kritischen Materialwert K_{Ic} , die Bruchzähigkeit, überschreitet.

Eine einfache Überlegung von Griffith führt auf eine Abschätzung von K_{Ic}: um die Bruchfläche einer Strecke x weiterlaufen zu lassen, muss neue Oberfläche A erzeugt werden. Dies kostet Energie, während andererseits Verformungsarbeit geleistet wird:

$$A = 2\, b \cdot x$$
$$E_A = 2\gamma_s \cdot b \cdot x$$

Hier ist b die Rissbreite und γ_s die spezifische Oberflächenenergie des Materials. Die Verformungsarbeit ist

$$E_V = -\frac{\sigma^2}{2\,E}\,b \cdot x^2\,, \tag{8.23}$$

so dass die Energiebilanz zwischen aufzubringender Energie und geleisteter Arbeit

$$\Delta E = E_A + E_V = 2\gamma_s \cdot b \cdot x - \frac{\sigma^2}{2\,E}\,b \cdot x^2 \tag{8.24}$$

ein Maximum bei $x_0 \cdot \sigma^2 = 2\,E\,\gamma_s$ überschreitet. Wenn der Riss diese Länge x_0 erreicht hat, läuft er spontan weiter. Diese kritische Risslänge hängt wie erwartet quadratisch von der Spannung ab, der Spannungs-Intensitätsfaktor ist dann

$$K_{Ic}^2 = \pi\,x_0\,\sigma^2 = 2\pi\,E\,\gamma_s\,. \tag{8.25}$$

Diese Überlegung von Griffith gibt allerdings nur eine untere Abschätzung der Bruchzähigkeit, da ein ideal scharfer Riss angenommen wird. Zahlwerte ergeben etwa mit einer Oberflächenenergie $\gamma_s = 2J/m^2$ und einem Elastizitätsmodul $E = 200GPa$ einen Wert für $K_{Ic} = 0.9MPa\sqrt{m}$, d.h. bei einer Spannung von $100MPa$ würde ein Riss der Länge $a_c = 31\mu m$ weiterlaufen. Die meisten Metalle besitzen jedoch deutlich höhere Bruchzähigkeiten, Stähle etwa $K_{Ic} > 30MPa\sqrt{m}$, da hier die Rissspitze durch Versetzungen abgerundet wird, so dass die Spannungskonzentration verringert wird. Dies führt, da die Versetzungsbewegung temperaturabhängig ist, auf den spröde-duktil-Übergang, der insbesondere in bcc-Legierungen, aber auch in Silizium beobachtet wird. Innerhalb eines kleinen Temperaturintervalls ändert sich das Bruchverhalten drastisch (bei ferritischen Stäbchen nicht weit unter Raumtemperatur!, s. Abb. (8.5)). Dies liegt daran, dass für $T < T_c$ die Versetzungen nicht mehr rasch genug vom Riss weglaufen können (der Riss selber läuft praktisch mit Schallgeschwindigkeit), sie können den Riss nicht mehr hinreichend abschirmen, es findet Sprödbruch statt. Für $T > T_c$ jedoch verrundet die Rissspitze stark, dadurch nimmt die Spannung an der Rissspitze ab. Die Versetzungen sind schnell genug, der Bruch ist duktil.