Kosmologische Modelle

Gerhard Soff

Institut für Theoretische Physik
Johann Wolfgang Goethe - Universität
Frankfurt am Main

Vorlesung im Sommersemester 1989

Vorbemerkungen

Die Vorlesung “Kosmologische Modelle” ist als direkte Fortsetzung der Vorlesung “Allgemeine Relativitätstheorie” gedacht. Wir wollen auf den bereits diskutierten mathematischen Relationen und physikalischen Implikationen aufbauen. So werden wir beispielsweise von der Kenntnis der Einsteinschen Gleichung und der unterschiedlichen, bereits abgeleiteten Lösungen ausgehen. Für das ergänzende Literaturstudium gelten die gleichen Vorschläge wir für die Vorlesung “Allgemeine Relativitätstheorie”.

Wir werden zunächst weitere Konsequenzen aus der Robertson-Walker Metrik studieren. Dann soll die Schwarzschild-Lösung für das Innere eines Sterns abgeleitet werden. Dies erlaubt es schließlich, den möglichen Kollaps eines Sterns theoretisch zu verfolgen, bis hin zur eventuellen Formation von Schwarzen Löchern. Weiterhin wollen wir uns dem Phänomen der Gravitationswellen zuwenden sowie weitere Lösungen der Einstein-Gleichungen untersuchen.

Wiederholung einiger Resultate zur Robertson - Walker Metrik

Wir sind von der einschränkenden Annahme eines homogenen und isotropen Universums ausgegangen. Durch Lösung der Einstein - Gleichung hatten wir bereits die Robertson - Walker Metrik abgeleitet,

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - e^{g(x^0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2} d\sigma^2 \tag{1}$$

mit k = -1, 0 oder +1. Wir hatten neu definiert

$$R^2(t) = r_0^2 \, e^{g(x^0)} \; . \tag{2}$$

Durch Verwendung neuer Koordinaten konnten wir für das Quadrat des Längenelementes schließlich die Form erzielen

$$ds^2 = c^2 \, dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{du^2 + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)}{\left[1 + \frac{k}{4}u^2\right]^2} \right\} \tag{3}$$

mit $u = r/r_0$. Mit $T^0_{\ 0} = \rho$ und $T^m_{\ n} = 0$ für alle $m, \; n \neq 0$ fanden wir die Beziehungen

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho = \frac{3k}{R^2(t)} + \frac{3}{c^2} \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} \tag{4}$$

und

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2} \rho = -\frac{3}{c^2} \frac{R''(t)}{R(t)} \; , \tag{5}$$

die Ausgangspunkt für das Studium des Standardmodells der Kosmologie waren.

Die de Sitter - Lösung

Die erste nichtstatische Lösung der Einstein-Gleichung wurde von de Sitter im Jahr 1917 angegeben. Es wurde von de Sitter postuliert, daß die näherungsweise gefundene Relation

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{1}{T} , \tag{6}$$

wobei T die Hubble-Konstante bezeichnet, exakt gelten soll. Die elementare Integration von (6) liefert sofort

$$R = R_0 \, e^{t/T} , \tag{7}$$

wobei R_0 eine Konstante ist. Dieses Modell weist keine Singularität auf, d.h. $R(t)$ wird niemals null oder unendlich in einer endlichen Zeit. Es gibt keinen Urknall und keinen Kollaps. Dieses Modell hat somit sehr ästhetische Charakterzüge, bewirkt jedoch recht drastische Konsequenzen für die Massendichte ρ. Damit bekommen wir

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\,\rho = \Lambda - \frac{3\,R''(t)}{c^2\,R(t)} = \Lambda - \frac{3}{c^2\,T^2} , \tag{8}$$

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\,\rho = \frac{k}{R^2(t)} + \frac{R'^2(t) - R(t)\,R''(t)}{c^2\,R^2(t)} = \frac{k\,e^{-2t/T}}{R_0^2} . \tag{9}$$

Gleichung (8) impliziert $\rho = \text{const.}$ Aus (9) folgert man $\rho \to 0$ für $t \to \infty$. Für positive Werte von ρ bleibt als Schlußfolgerung $\rho = 0$ für alle t und ebenso $k = 0$. Die de Sitter - Lösung repräsentiert daher ein leeres Universum mit einer zeitabhängigen Metrik. Die Raumdimensionen sind Euklidisch, es gibt aber eine expandierende Skala.

Das gegenwärtige Universum kann daher im Rahmen dieses Modells nur als lokale Störung der de Sitter - Geometrie verstanden werden, die im Großen gilt. Die de Sitter - Geometrie wird dem Universum von außen aufgepfropft.

Der Betrag der kosmologischen Konstante folgt aus (8)

$$\Lambda = \frac{3}{c^2\,T^2} = \frac{1}{(1.3 \cdot 10^{10})^2}\,\frac{1}{(\text{Lichtjahre})^2} . \tag{10}$$

Dies stimmt in der Größenordnung mit der Entfernung der weitesten Sterne überein.

Das Modell eines “gleichbleibenden Zustandes” für das Universum

Im Jahr 1948 haben Bondi und Gold ein kosmologisches Modell vorgeschlagen, das *nicht* auf den Einsteinschen Gleichungen beruht. Es wird kein spezieller Zusammenhang zwischen Materie und Geometrie postuliert. Es wird aber postuliert, daß die Massendichte ρ konstant ist und daß ferner an jedem Raum-Zeit-Punkt das gleiche Hubblesche Gestz gilt. Alle Raum-Zeit-Punkte sollen äquivalent sein. Daher heißt dieses Postulat auch das *perfekte kosmologische Postulat*. Diese Postulate verletzen offensichtlich die Energieerhaltung, denn die beobachtete Expansion des Universums und Forderung ρ = const sind nur miteinander verträglich, wenn ständig mit einer konstanten Rate Materie erzeugt wird.

Im Rahmen eines einfachen Modells betrachten wir zunächst einen Beobachter, der sich im Zentrum einer Kugel mit dem Radius r befindet. Wir beschränken uns ferner zunächst auf rein Euklidische Geometrie. Aufgrund der Expansion des Raumes wird Materie aus dieser Kugel mit dem festen Radius r herausfließen. Die Rate für diesen Fluß beträgt $4\,\pi\,r^2\,v\,\rho$, wobei v die radiale Geschwindigkeit der Materie bei r ist. Um die Massendichte konstant zu halten, muß daher innerhalb der Kugel Materie mit einer konstanten Rate $\frac{4\,\pi}{3}\,r^3\,Q$ erzeugt werden. Q bezeichnet hierbei die mittlere Rate für die Erzeugung von Materiedichte. Wir setzen die Ausdrücke für die beiden Raten gleich. Damit folgt

$$4\,\pi\,r^2\,\rho\,v \;=\; \frac{4\,\pi}{3}\,r^3\,Q\;. \tag{11}$$

Wir verwenden nun das Hubblesche Gesetz in der Form

$$v \;=\; r/T\;. \tag{12}$$

Somit bekommen wir

$$Q \;=\; 3\,\rho/T\;. \tag{13}$$

Mit $\rho \;=\; 6\cdot 10^{-6}$ Wasserstoff-Atome/cm^3 erhalten wir als Zahlenwert $Q \;\simeq\; 10^{-(15\,\pm 2)}$ Wasserstoff-Atome/(cm^3 Jahr). Dabei haben wir für die Hubble-Konstante $T \;=\; 1.3\cdot 10^{10}$ Jahre verwendet. Diese kleine Erzeugungsrate ist nicht nachweisbar. Das Modell weist als sehr ästhetische Eigenschaft keine Singularität auf. Es gibt keinen Anfang und kein Ende des Universums. Es ergibt sich aber sofort die Frage, in welcher Form die Materie erzeugt wird.

Wir wollen nun einen mathematischen Rahmen für diese Theorie erstellen. Diese Theorie läßt sich sicherlich nicht in Einklang mit der Einsteinschen bringen, da in dieser ja explizit die Gesamtenergieerhaltung gilt. In der Einsteinschen Theorie gilt der Zusammenhang

$$-\frac{8\,\pi\,\kappa}{c^2}\,T^{ij} \;=\; G^{ij}\;. \tag{14}$$

Die rechte Seite hat eine verschwindende Divergenz. Im Rahmen der neuen Theorie wollen wir eine formale Äquivalenz herstellen. Wir subtrahieren von T^{ij} einen Tensor C^{ij}, der für die Materieerzeugung verantwortlich sein soll.

$$-\frac{8\,\pi\,\kappa}{c^2}\,\left(T^{ij}-C^{ij}\right) \;=\; G^{ij}\;. \tag{15}$$

Da T^{ij} und G^{ij} symmetrisch sind, sollte auch C^{ij} symmetrisch sein. Damit ist aber offensichtlich C^{ij} noch nicht eindeutig bestimmt. Es müssen weitere Forderungen gestellt werden. In dem mitbewegten Gaußschen Koordinatensystem, das wir verwenden, gibt es einen ausgezeichneten Vektor

$$D^i \;=\; (1,\;0,\;0,\;0)\;. \tag{16}$$

Wir wollen nun D^i mit C^{ij} in Beziehung setzen. Der einfachste Ansatz lautet

$$C^{ij} \;=\; \tfrac{1}{2}\,A\,\left(D^{i||j}+D^{j||i}\right) \;\equiv\; \tfrac{1}{2}\,A\,\left(g^{im}\,D^{j}{}_{||m}+g^{jm}\,D^{i}{}_{||m}\right)\;. \tag{17}$$

A ist zunächst ein konstanter Skalar, den wir später festlegen werden. Homogenität und Äquivalenz aller Welt-Punkte, die wir forderten, bestimmen die Metrik vollständig. Da diese Forderungen auch die Robertson - Walker - Metrik fixiert hatten, muß die Metrik in dem nun diskutierten Modell ebenfalls vom Robertson - Walker - Typ sein. Da wir auch eine konstante Expansionsrate gefordert haben, muß weiterhin die de Sitter - Lösung gelten,

$$R(t) \;=\; R_0\,e^{t/T}\;. \tag{18}$$

Als weitere Annahme setzen wir $k = 0$, das heißt, die dreidimensionale Welt ist euklidisch. Wir schreiben nun die Robertson - Walker - Metrik in der Form

$$ds^2 \;=\; dx_0^2 - \frac{R^2(t)}{R_0^2}\,\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\right) \tag{19}$$

mit $x_0 \;=\; c\,t$. Daraus ergibt sich

$$g_{ij} \;=\; \left(1,\;-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2,\;-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2,\;-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right)\;, \tag{20}$$

$$g^{ij} \;=\; \left(1,\;-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,\;-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,\;-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right)\;. \tag{21}$$

Wir wollen nun das mathematische Problem angehen, den Tensor C^{ij} so zu bestimmen, daß die modifizierten Einstein - Gleichungen für ein Universum mit Robertson - Walker - Metrik gelten, in dem ρ = const gilt. Der Ricci-Tensor G^{ij} ist vollständig durch die Metrik bestimmt, der Energie - Impuls Tensor ist durch die Materieverteilung im mitbewegten Koordinatensystem festgelegt. Es gilt

$$T^{ij} \;=\; \rho\, \delta^i{}_0\, \delta^j{}_0 \,. \tag{22}$$

Wir betrachten zuerst den gemischten Tensor $G^i{}_j$ und übernehmen die Ausdrücke für $G^0{}_0$ und $G^n{}_n$ mit n = 1, 2, 3 aus den früheren Rechnungen zur Robertson - Walker Metrik. Für k = 0 gilt

$$\frac{8\,\pi\,\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; -\,G^0{}_0 \;=\; \frac{3\,R'^2(t)}{c^2\,R^2(t)}\,, \tag{23}$$

$$0 \;=\; G^i{}_i \;=\; -\left[\frac{R'^2(t)}{c^2\,R^2(t)} + \frac{2\,R''(t)}{c^2\,R(t)}\right] \,. \tag{24}$$

Mit $R \;=\; R_0\,\exp\{t/T\}$ ergibt sich sofort

$$G^i{}_j \;=\; -\,\frac{3}{c^2\,T^2}\,\delta^i{}_j \,. \tag{25}$$

Unter Verwendung von $T^i{}_j \;=\; \rho\,\delta^i{}_0\,\delta^0{}_j$ können wir die modifizierten Einstein - Gleichungen nach $C^i{}_j$ auflösen.

$$\begin{aligned} C^i{}_j &= T^i{}_j + \frac{c^2}{8\,\pi\kappa}\,G^i{}_j \\ &= \left(\rho - \frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2},\; -\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2},\; -\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2},\; -\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2}\right) \,. \end{aligned} \tag{26}$$

Mit Hilfe von g^{ij} ziehen wir den zweiten Index hoch und erhalten mit $B \;=\; 3/(8\pi\kappa T^2)$

$$C^{ij} \;=\; \left(\rho - B,\, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B,\; \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B,\; \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B\right) \,. \tag{27}$$

Bisher haben wir noch nicht von der Bedingung (17) Gebrauch gemacht. Per Definition gilt

$$D^i{}_{||j} \;=\; D^i{}_{|j} + \Gamma^i_{mj}\,D^m \,. \tag{28}$$

Um den Tensor $D^i{}_{||j}$ ermitteln zu können, müssen wir zunächst die nichtverschwindenden Christoffel - Symbole berechnen. Dazu führen wir eine Nebenrechnung durch.

Mit Hilfe der Geodätengleichung wollen wir die Christoffel - Symbole bestimmen. Wir starten vom Variationsprinzip

$$\delta \int \left[\dot{x}_0^2 - \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) \right] ds \quad = \quad 0 \; . \tag{29}$$

Mit $x_0 \; = \; ct$ folgt $d/dx_0 \; = \; \frac{1}{c}\, d/dt$. Als Euler-Lagrange-Gleichung für x_0 folgt

$$2\, \ddot{x}_0 + \frac{2\, R(t)\, R'(t)}{c\, R_0^2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) \quad = \quad 0 \; . \tag{30}$$

Dies führt auf $(i, j \; = \; 1, 2, 3)$

$$\Gamma^0_{ij} \quad = \quad \frac{R(t)\, R'(t)}{c\, R_0^2}\, \delta_{ij} \quad = \quad \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \frac{1}{cT}\, \delta_{ij} \; . \tag{31}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für x_1 lautet

$$-2\, \frac{d}{ds} \left(\frac{R^2(t)}{R_0^2}\, \dot{x}_1 \right) \quad = \quad -2\, \frac{2\, R\, R'}{c\, R_0^2}\, \dot{x}_0\, \dot{x}_1 - 2\, \frac{R^2}{R_0^2}\, \ddot{x}_1 \;\; = \;\; 0 \; . \tag{32}$$

Dies führt sofort auf $(i, j \; = \; 1, 2, 3)$

$$\Gamma^i_{0j} \quad = \quad \frac{R'}{R\, c}\, \delta_{ij} \quad = \quad \frac{1}{c\, T}\, \delta_{ij} \; . \tag{33}$$

Damit folgt

$$D^i{}_{||j} \quad = \quad \left(0,\; \frac{1}{c\, T},\; \frac{1}{c\, T},\; \frac{1}{c\, T} \right) \; . \tag{34}$$

Da $D^i{}_{||j}$ und $D^{i||j}$ beide symmetrisch sind folgt

$$C^i{}_j \quad = \quad A\, D^i{}_{||j} \; . \tag{35}$$

Durch Vergleich erhalten wir schließlich

$$\rho \quad = \quad \frac{3}{8 \pi \kappa T^2} \; , \tag{36}$$

$$A \quad = \quad - \frac{3c}{8 \pi \kappa T} \; . \tag{37}$$

Somit ist die Hubblesche Konstante die einzig wesentliche Größe, die in dieser Theorie erscheint.

Schließlich betrachten wir noch die Divergenz von $T^{ij} \; = \; \rho\, \delta^i{}_0\, \delta^j{}_0$. Dies muß gleich der Divergenz von C^{ij} sein, da G^{ij} divergenzfrei ist. Es gilt

$$T^{ij}{}_{||j} \quad = \quad T^{ij}{}_{|j} + \Gamma^i_{mj}\, T^{jm} + \Gamma^j_{mj}\, T^{mi} \; . \tag{38}$$

Wir verwenden die bereits berechneten Christoffel-Symbole. Es ist $T^{00} = \rho$ und $T^{ij} = 0$ für $i \neq 0,\ j \neq 0$. Somit folgt $T^{ij}{}_{|j} = 0$. Da das Christoffel-Symbol Γ^0_{m0} verschwindet, trägt nur der letzte Term zur Divergenz bei. Es folgt

$$T^{ij}{}_{||j} = \frac{3\,\rho}{c\,T}\,(1,0,0,0)\ . \tag{39}$$

Ebenso gilt

$$C^{ij}{}_{||j} = C^{ij}{}_{|j} + \Gamma^i_{mj}\,C^{jm} + \Gamma^j_{mj}\,C^{im}\ . \tag{40}$$

Es galt

$$C^{ij} = \left\{\rho - \frac{3}{8\pi\kappa T^2}, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{3}{8\pi\kappa T^2}, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{3}{8\pi\kappa T^2}, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{3}{8\pi\kappa T^2}\right\} \tag{41}$$

für $i = j$ und $C^{ij} = 0$ für $i \neq j$. Offensichtlich ist $C^{ij}{}_{|j} = 0$. Damit haben wir

$$C^{ij}{}_{||j} = \Gamma^i_{mj}\,C^{jm} + \Gamma^j_{mj}\,C^{im}\ . \tag{42}$$

Der erste Term trägt bei für $i = 0,\ m = j = 1,\ 2,\ 3$. Er liefert den Beitrag

$$\frac{1}{c\,T}\,\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2}\cdot 3\ .$$

Der zweite Term trägt bei für $m = 0;\ j = 1,\ 2,\ 3; i = 0$ und liefert somit den Beitrag

$$\frac{3}{c\,T}\,\rho - \frac{3}{c\,T}\,\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2}\ .$$

Zusammengefaßt folgt

$$C^{ij}{}_{||j} = \frac{3\,\rho}{c\,T}\,(1,0,0,0)\ . \tag{43}$$

Damit sind die Divergenzen wirklich gleich wie gefordert. Man kann $T^{ij}{}_{||j} = C^{ij}{}_{||j}$ als Quellenvektor des Energie-Impuls Tensors verstehen, in der gleichen Weise, wie man $s^i = F^{ij}{}_{||j}$ als Quelle des Minkowski-Tensors F^{ij} versteht. Die explizite Form von $C^{ij}{}_{||j}$ zeigt, daß im mitbewegten System Materiedichte in Ruhe erzeugt wird mit der Rate $Q = 3\,\rho/T$. Dies ist der gleiche Wert, den wir früher einfacher abgeleitet hatten. Mit $\rho = 3/(8\pi\kappa T^2)$ folgt $Q = 3\,\rho/T = 9/(8\pi\kappa T^2)$. Damit haben wir ein konsistentes mathematisches Weltmodell aufgebaut.

Wiederholung einiger Resultate zur Robertson - Walker Metrik

Wir sind von der einschränkenden Annahme eines homogenen und isotropen Universums ausgegangen. Durch Lösung der Einstein - Gleichung hatten wir bereits die Robertson - Walker Metrik abgeleitet,

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - e^{g(x^0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}\frac{r^2}{r_0^2}\right)^2} d\sigma^2 \tag{44}$$

mit k = -1, 0 oder +1. Wir hatten neu definiert

$$R^2(t) = r_0^2 \, e^{g(x^0)} \; . \tag{45}$$

Durch Verwendung neuer Koordinaten konnten wir für das Quadrat des Längenelementes schließlich die Form erzielen

$$ds^2 = c^2 \, dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{du^2 + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)}{\left[1 + \frac{k}{4}u^2\right]^2} \right\} \tag{46}$$

mit $u = r/r_0$. Mit $T^0_{\ 0} = \rho$ und $T^m_{\ n} = 0$ für alle $m, \ n \neq 0$ fanden wir die Beziehungen

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho = \frac{3k}{R^2(t)} + \frac{3}{c^2} \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} \tag{47}$$

und

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2} \rho = -\frac{3}{c^2} \frac{R''(t)}{R(t)} \; , \tag{48}$$

die Ausgangspunkt für das Studium des Standardmodells der Kosmologie waren.

Die de Sitter - Lösung

Die erste nichtstatische Lösung der Einstein-Gleichung wurde von de Sitter im Jahr 1917 angegeben. Es wurde von de Sitter postuliert, daß die näherungsweise gefundene Relation

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \;=\; \frac{1}{T} \,, \tag{49}$$

wobei T die Hubble-Konstante bezeichnet, exakt gelten soll. Die elementare Integration von (49) liefert sofort

$$R \;=\; R_0\, e^{t/T} \,, \tag{50}$$

wobei R_0 eine Konstante ist. Dieses Modell weist keine Singularität auf, d.h. $R(t)$ wird niemals null oder unendlich in einer endlichen Zeit. Es gibt keinen Urknall und keinen Kollaps. Dieses Modell hat somit sehr ästhetische Charakterzüge, bewirkt jedoch recht drastische Konsequenzen für die Massendichte ρ. Damit bekommen wir

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; \Lambda - \frac{3\,R''(t)}{c^2\,R(t)} \;=\; \Lambda - \frac{3}{c^2\,T^2} \,. \tag{51}$$

Die Addition der beiden folgenden Gleichungen, die wir bereits abgeleitet haben,

$$0 \;=\; \Lambda - \left[\frac{k}{R^2(t)} + \frac{R'^2}{c^2\,R^2} + \frac{2}{c^2}\,\frac{R''(t)}{R(t)}\right] \,, \tag{52}$$

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; -\Lambda + \left[\frac{3k}{R^2(t)} + \frac{3}{c^2}\,\frac{R'^2}{R^2(t)}\right] \,, \tag{53}$$

führt sofort auf

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; \frac{2k}{R^2(t)} + \frac{2}{c^2}\,\frac{R'^2(t)}{R^2(t)} - \frac{2}{c^2}\,\frac{R''(t)}{R(t)} \tag{54}$$

und damit auf

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; \frac{k}{R^2(t)} + \frac{R'^2(t) - R(t)\,R''(t)}{c^2\,R^2(t)} \;=\; \frac{k\,e^{-2t/T}}{R_0^2} \,. \tag{55}$$

Gleichung (51) impliziert $\rho \;=\;$ const. Aus (55) folgert man $\rho \;\to\; 0$ für $t \;\to\; \infty$. Für positive Werte von ρ bleibt als Schlußfolgerung $\rho \;=\; 0$ für alle t und ebenso $k = 0$. Die de Sitter - Lösung repräsentiert daher ein leeres Universum mit einer zeitabhängigen Metrik. Die Raumdimensionen sind Euklidisch, es gibt aber eine expandierende Skala.

Das gegenwärtige Universum kann daher im Rahmen dieses Modells nur als lokale Störung der de Sitter - Geometrie verstanden werden, die im Großen gilt. Die de Sitter - Geometrie wird dem Universum von außen aufgepfropft.

Der Betrag der kosmologischen Konstante folgt aus (51)

$$\Lambda \;=\; \frac{3}{c^2\,T^2} \;=\; \frac{1}{(1.3\cdot 10^{10})^2}\,\frac{1}{(\text{Lichtjahre})^2}\;. \tag{56}$$

Dies stimmt in der Größenordnung mit der Entfernung der weitesten Sterne überein.

Das Modell eines "gleichbleibenden Zustandes" für das Universum

Im Jahr 1948 haben Bondi und Gold ein kosmologisches Modell vorgeschlagen, das *nicht* auf den Einsteinschen Gleichungen beruht. Es wird kein spezieller Zusammenhang zwischen Materie und Geometrie postuliert. Es wird aber postuliert, daß die Massendichte ρ konstant ist und daß ferner an jedem Raum-Zeit-Punkt das gleiche Hubblesche Gestz gilt. Alle Raum-Zeit-Punkte sollen äquivalent sein. Daher heißt dieses Postulat auch das *perfekte kosmologische Postulat*. Diese Postulate verletzen offensichtlich die Energieerhaltung, denn die beobachtete Expansion des Universums und Forderung ρ = const sind nur miteinander verträglich, wenn ständig mit einer konstanten Rate Materie erzeugt wird.

Im Rahmen eines einfachen Modells betrachten wir zunächst einen Beobachter, der sich im Zentrum einer Kugel mit dem Radius r befindet. Wir beschränken uns ferner zunächst auf rein Euklidische Geometrie. Aufgrund der Expansion des Raumes wird Materie aus dieser Kugel mit dem festen Radius r herausfließen. Die Rate für diesen Fluß beträgt $4\,\pi\,r^2\,v\,\rho$, wobei v die radiale Geschwindigkeit der Materie bei r ist. Um die Massendichte konstant zu halten, muß daher innerhalb der Kugel Materie mit einer konstanten Rate $\frac{4\,\pi}{3}\,r^3\,Q$ erzeugt werden. Q bezeichnet hierbei die mittlere Rate für die Erzeugung von Materiedichte. Wir setzen die Ausdrücke für die beiden Raten gleich. Damit folgt

$$4\,\pi\,r^2\,\rho\,v \;=\; \frac{4\,\pi}{3}\,r^3\,Q\;. \tag{57}$$

Wir verwenden nun das Hubblesche Gesetz in der Form

$$v \;=\; r/T\;. \tag{58}$$

Somit bekommen wir

$$Q \;=\; 3\,\rho/T\;. \tag{59}$$

Mit $\rho \;=\; 6\cdot 10^{-6}$ Wasserstoff-Atome/cm^3 erhalten wir als Zahlenwert $Q \;\simeq\; 10^{-(15\,\pm 2)}$ Wasserstoff-Atome/(cm^3 Jahr). Dabei haben wir für die Hubble-Konstante $T \;=\; 1.3\cdot 10^{10}$ Jahre verwendet. Diese kleine Erzeugungsrate ist nicht nachweisbar. Das Modell weist als sehr ästhetische Eigenschaft keine Singularität auf. Es gibt keinen Anfang und kein Ende des Universums. Es ergibt sich aber sofort die Frage, in welcher Form die Materie erzeugt wird.

Wir wollen nun einen mathematischen Rahmen für diese Theorie erstellen. Diese Theorie läßt sich sicherlich nicht in Einklang mit der Einsteinschen bringen, da in dieser ja explizit die Gesamtenergieerhaltung gilt. In der Einsteinschen Theorie gilt der Zusammenhang

$$-\frac{8\,\pi\,\kappa}{c^2}\,T^{ij} \;=\; G^{ij}\;. \tag{60}$$

Die rechte Seite hat eine verschwindende Divergenz. Im Rahmen der neuen Theorie wollen wir eine formale Äquivalenz herstellen. Wir subtrahieren von T^{ij} einen Tensor C^{ij}, der für die Materieerzeugung verantwortlich sein soll.

$$-\frac{8\,\pi\,\kappa}{c^2}\,\left(T^{ij}-C^{ij}\right) \;=\; G^{ij}\;. \tag{61}$$

Da T^{ij} und G^{ij} symmetrisch sind, sollte auch C^{ij} symmetrisch sein. Damit ist aber offensichtlich C^{ij} noch nicht eindeutig bestimmt. Es müssen weitere Forderungen gestellt werden. In dem mitbewegten Gaußschen Koordinatensystem, das wir verwenden, gibt es einen ausgezeichneten Vektor

$$D^i \;=\; (1,\;0,\;0,\;0)\;. \tag{62}$$

Wir wollen nun D^i mit C^{ij} in Beziehung setzen. Der einfachste Ansatz lautet

$$C^{ij} \;=\; \tfrac{1}{2}\,A\,\left(D^{i||j}+D^{j||i}\right) \;\equiv\; \tfrac{1}{2}\,A\,\left(g^{im}\,D^j{}_{||m}+g^{jm}\,D^i{}_{||m}\right)\;. \tag{63}$$

A ist zunächst ein konstanter Skalar, den wir später festlegen werden. Homogenität und Äquivalenz aller Welt-Punkte, die wir forderten, bestimmen die Metrik vollständig. Da diese Forderungen auch die Robertson - Walker - Metrik fixiert hatten, muß die Metrik in dem nun diskutierten Modell ebenfalls vom Robertson - Walker - Typ sein. Da wir auch eine konstante Expansionsrate gefordert haben, muß weiterhin die de Sitter - Lösung gelten,

$$R(t) \;=\; R_0\,e^{t/T}\;. \tag{64}$$

Als weitere Annahme setzen wir $k = 0$, das heißt, die dreidimensionale Welt ist euklidisch. Wir schreiben nun die Robertson - Walker - Metrik in der Form

$$ds^2 \;=\; dx_0^2 - \frac{R^2(t)}{R_0^2}\,\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\right) \tag{65}$$

mit $x_0 \;=\; c\,t$. Daraus ergibt sich

$$g_{ij} \;=\; \left(1,\;-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2,\;-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2,\;-\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right)\;, \tag{66}$$

$$g^{ij} \;=\; \left(1,\;-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,\;-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,\;-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right)\;. \tag{67}$$

Wir wollen nun das mathematische Problem angehen, den Tensor C^{ij} so zu bestimmen, daß die modifizierten Einstein - Gleichungen für ein Universum mit Robertson - Walker - Metrik gelten, in dem ρ = const gilt. Der Ricci-Tensor G^{ij} ist vollständig durch die Metrik bestimmt, der Energie - Impuls Tensor ist durch die Materieverteilung im mitbewegten Koordinatensystem festgelegt. Es gilt

$$T^{ij} \;=\; \rho\, \delta^i{}_0\, \delta^j{}_0 \,. \tag{68}$$

Wir betrachten zuerst den gemischten Tensor $G^i{}_j$ und übernehmen die Ausdrücke für $G^0{}_0$ und $G^n{}_n$ mit n = 1, 2, 3 aus den früheren Rechnungen zur Robertson - Walker Metrik. Für k = 0 gilt

$$\frac{8\,\pi\,\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; -\,G^0{}_0 \;=\; \frac{3\,R'^2(t)}{c^2\,R^2(t)}\,, \tag{69}$$

$$0 \;=\; G^i{}_i \;=\; -\left[\frac{R'^2(t)}{c^2\,R^2(t)} + \frac{2\,R''(t)}{c^2\,R(t)}\right] \,. \tag{70}$$

Mit $R \;=\; R_0\, \exp\{t/T\}$ ergibt sich sofort

$$G^i{}_j \;=\; -\,\frac{3}{c^2\,T^2}\,\delta^i{}_j \,. \tag{71}$$

Unter Verwendung von $T^i{}_j \;=\; \rho\,\delta^i{}_0\,\delta^0{}_j$ können wir die modifizierten Einstein - Gleichungen nach $C^i{}_j$ auflösen.

$$\begin{aligned} C^i{}_j \;&=\; T^i{}_j + \frac{c^2}{8\,\pi\kappa}\,G^i{}_j \\ &=\; \left(\rho - \frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2},\; -\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2},\; -\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2},\; -\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2}\right) \,. \end{aligned} \tag{72}$$

Mit Hilfe von g^{ij} ziehen wir den zweiten Index hoch und erhalten mit $B \;=\; 3/(8\pi\kappa T^2)$

$$C^{ij} \;=\; \left(\rho - B,\, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B,\; \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B,\; \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 B\right) \,. \tag{73}$$

Bisher haben wir noch nicht von der Bedingung (63) Gebrauch gemacht. Per Definition gilt

$$D^i{}_{||j} \;=\; D^i{}_{|j} + \Gamma^i_{mj}\,D^m \,. \tag{74}$$

Um den Tensor $D^i{}_{||j}$ ermitteln zu können, müssen wir zunächst die nichtverschwindenden Christoffel - Symbole berechnen. Dazu führen wir eine Nebenrechnung durch.

Mit Hilfe der Geodätengleichung wollen wir die Christoffel - Symbole bestimmen. Wir starten vom Variationsprinzip

$$\delta \int \left[\dot{x}_0^2 - \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) \right] ds \quad = \quad 0 \; . \tag{75}$$

Mit $x_0 \; = \; ct$ folgt $d/dx_0 \; = \; \frac{1}{c}\, d/dt$. Als Euler-Lagrange-Gleichung für x_0 folgt

$$2\, \ddot{x}_0 + \frac{2\, R(t)\, R'(t)}{c\, R_0^2} \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) \quad = \quad 0 \; . \tag{76}$$

Dies führt auf $(i, j \; = \; 1, 2, 3)$

$$\Gamma^0_{ij} \quad = \quad \frac{R(t)\, R'(t)}{c\, R_0^2}\, \delta_{ij} \quad = \quad \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \frac{1}{cT}\, \delta_{ij} \; . \tag{77}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für x_1 lautet

$$-2\, \frac{d}{ds} \left(\frac{R^2(t)}{R_0^2}\, \dot{x}_1 \right) \quad = \quad -2\, \frac{2\, R\, R'}{c\, R_0^2}\, \dot{x}_0\, \dot{x}_1 - 2\, \frac{R^2}{R_0^2}\, \ddot{x}_1 \; = \; 0 \; . \tag{78}$$

Dies führt sofort auf $(i, j \; = \; 1, 2, 3)$

$$\Gamma^i_{0j} \quad = \quad \frac{R'}{R\, c}\, \delta_{ij} \quad = \quad \frac{1}{c\, T}\, \delta_{ij} \; . \tag{79}$$

Damit folgt

$$D^i{}_{||j} \quad = \quad \left(0, \; \frac{1}{c\, T}, \; \frac{1}{c\, T}, \; \frac{1}{c\, T} \right) \; . \tag{80}$$

Da $D^i{}_{||j}$ und $D^{i||j}$ beide symmetrisch sind folgt

$$C^i{}_j \quad = \quad A\, D^i{}_{||j} \; . \tag{81}$$

Durch Vergleich erhalten wir schließlich

$$\rho \quad = \quad \frac{3}{8\pi\kappa T^2} \; , \tag{82}$$

$$A \quad = \quad - \frac{3c}{8\pi\kappa T} \; . \tag{83}$$

Somit ist die Hubblesche Konstante die einzig wesentliche Größe, die in dieser Theorie erscheint.

Schließlich betrachten wir noch die Divergenz von $T^{ij} \; = \; \rho\, \delta^i{}_0\, \delta^j{}_0$. Dies muß gleich der Divergenz von C^{ij} sein, da G^{ij} divergenzfrei ist. Es gilt

$$T^{ij}{}_{||j} \quad = \quad T^{ij}{}_{|j} + \Gamma^i_{mj}\, T^{jm} + \Gamma^j_{mj}\, T^{mi} \; . \tag{84}$$

Wir verwenden die bereits berechneten Christoffel-Symbole. Es ist $T^{00} = \rho$ und $T^{ij} = 0$ für $i \neq 0,\ j \neq 0$. Somit folgt $T^{ij}{}_{|j} = 0$. Da das Christoffel-Symbol Γ^0_{m0} verschwindet, trägt nur der letzte Term zur Divergenz bei. Es folgt

$$T^{ij}{}_{||j} = \frac{3\,\rho}{c\,T}\,(1,0,0,0)\ . \tag{85}$$

Ebenso gilt

$$C^{ij}{}_{||j} = C^{ij}{}_{|j} + \Gamma^i_{mj}\,C^{jm} + \Gamma^j_{mj}\,C^{im}\ . \tag{86}$$

Es galt

$$C^{ij} = \left\{\rho - \frac{3}{8\pi\kappa T^2}, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{3}{8\pi\kappa T^2}, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{3}{8\pi\kappa T^2}, \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{3}{8\pi\kappa T^2}\right\} \tag{87}$$

für $i = j$ und $C^{ij} = 0$ für $i \neq j$. Offensichtlich ist $C^{ij}{}_{|j} = 0$. Damit haben wir

$$C^{ij}{}_{||j} = \Gamma^i_{mj}\,C^{jm} + \Gamma^j_{mj}\,C^{im}\ . \tag{88}$$

Der erste Term trägt bei für $i = 0,\ m = j = 1,\ 2,\ 3$. Er liefert den Beitrag

$$\frac{1}{c\,T}\,\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2} \cdot 3\ .$$

Der zweite Term trägt bei für $m = 0;\ j = 1,\ 2,\ 3; i = 0$ und liefert somit den Beitrag

$$\frac{3}{c\,T}\,\rho - \frac{3}{c\,T}\,\frac{3}{8\,\pi\,\kappa\,T^2}\ .$$

Zusammengefaßt folgt

$$C^{ij}{}_{||j} = \frac{3\,\rho}{c\,T}\,(1,0,0,0)\ . \tag{89}$$

Damit sind die Divergenzen wirklich gleich wie gefordert. Man kann $T^{ij}{}_{||j} = C^{ij}{}_{||j}$ als Quellenvektor des Energie-Impuls Tensors verstehen, in der gleichen Weise, wie man $s^i = F^{ij}{}_{||j}$ als Quelle des Minkowski-Tensors F^{ij} versteht. Die explizite Form von $C^{ij}{}_{||j}$ zeigt, daß im mitbewegten System Materiedichte in Ruhe erzeugt wird mit der Rate $Q = 3\,\rho/T$. Dies ist der gleiche Wert, den wir früher einfacher abgeleitet hatten. Mit $\rho = 3/(8\pi\kappa T^2)$ folgt $Q = 3\,\rho/T = 9/(8\pi\kappa T^2)$. Damit haben wir ein konsistentes mathematisches Weltmodell aufgebaut.

Die Gödel - Metrik

Die Lösung von Gödel der Einstein-Gleichung, die wir nun behandeln wollen, ist *nicht* vom Typ der Robertson - Walker Metrik. Insbesondere wollen wir durch das Studium der Gödelschen Lösung auch den Zusammenhang zwischen dem Machschen Prinzip und der Allgemeinen Relativitätstheorie etwas beleuchten. Im Jahr 1949 hat Gödel eine Lösung der Gravitationsgleichung gefunden, die nicht auf den vereinfachenden Annahmen, wie sie etwa der Robertson-Walker Untersuchung zugrunde liegen, beruht.

Die Behauptung lautet, daß die folgende Metrik konsistent mit der Einstein-Gleichung ist

$$ds^2 \;=\; \left(dx^0 + e^{\alpha x^1}\, dx^2\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \tfrac{1}{2}\, e^{2\alpha x^1} \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \;. \tag{90}$$

Hierbei ist α eine Konstante mit der Dimension einer inversen Länge. Der Gödel-Kosmos ist ein homogener, aber anisotroper Raum. Der Gödel-Kosmos ist zwar kein realistisches Weltmodell, besitzt aber eine Reihe interessanter Eigenschaften. Es ist eines der wenigen Weltmodelle, die rotierende Materie enthalten. Um zu beweisen, daß (90) eine Lösung der Gravitationsgleichung darstellt, müssen wir wieder die Christoffel-Symbole und den Ricci-Tensor ermitteln. Zu diesem Zweck betrachten wir die Geodätengleichung.

Die Euler-Lagrange Gleichungen, die das Variationsproblem

$$\delta \int ds \;=\; 0 \tag{91}$$

befriedigen, lauten

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\, \dot{x}^2\right) \;=\; 0 \;, \tag{92}$$

$$-2\frac{d}{ds}\left(\dot{x}^1\right) \;=\; 2\,\dot{x}^0\, \dot{x}^2\, \alpha\, e^{\alpha x^1} + \left(\dot{x}^2\right)^2 \alpha\, e^{2\alpha x^1} \;, \tag{93}$$

$$\frac{d}{ds}\left[e^{\alpha x^1}\left(\dot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\dot{x}^2\, e^{\alpha x^1}\right)\right] \;=\; 0 \;, \tag{94}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{x}^3\right) \;=\; 0 \;. \tag{95}$$

Wir formen dieses Gleichungssystem um

$$\ddot{x}^0 + \ddot{x}^2\, e^{\alpha x^1} + \alpha\, e^{\alpha x^1}\, \dot{x}^1\, \dot{x}^2 \;=\; 0 \;, \tag{96}$$

$$-2\ddot{x}^1 - 2\dot{x}^0\, \dot{x}^2\, \alpha e^{\alpha x^1} - \left(\dot{x}^2\right)^2 \alpha\, e^{2\alpha x^1} \;=\; 0 \;, \tag{97}$$

$$\alpha\, e^{\alpha x^1}\, \dot{x}^1 \left(\dot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\dot{x}^2\, e^{\alpha x^1}\right) + e^{\alpha x^1}\left(\ddot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\ddot{x}^2\, e^{\alpha x^1} + \tfrac{1}{2}\,\dot{x}^2\, \alpha\, e^{\alpha x^1}\, \dot{x}^1\right) \;=\; 0 \;, \tag{98}$$

$$\ddot{x}^3 \;=\; 0 \;. \tag{99}$$

Dies führt auf

$$\ddot{x}^0 + 2\alpha\dot{x}^0\,\dot{x}^1 + \alpha\, e^{\alpha x^1}\,\dot{x}^1\,\dot{x}^2 \;=\; 0\;, \tag{100}$$

$$\ddot{x}^1 + \alpha e^{\alpha x^1}\,\dot{x}^0\,\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\, e^{2\alpha x^1}\left(\dot{x}^2\right)^2 \;=\; 0\;, \tag{101}$$

$$\ddot{x}^2 - 2\,\alpha\, e^{-\alpha x^1}\,\dot{x}^0\,\dot{x}^1 \;=\; 0\;, \tag{102}$$

$$\ddot{x}^3 \;=\; 0\;. \tag{103}$$

Aus diesem Gleichungssystem ergeben sich alle nichtverschwindenden Christoffel-Symbole

$$\Gamma^0_{01} \;=\; \Gamma^0_{10} \;=\; \alpha\;, \tag{104}$$

$$\Gamma^0_{12} \;=\; \Gamma^0_{21} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha\, e^{\alpha x^1}\;, \tag{105}$$

$$\Gamma^1_{02} \;=\; \Gamma^1_{20} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha\, e^{\alpha x^1}\;, \tag{106}$$

$$\Gamma^1_{22} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha\, e^{2\alpha x^1}\;, \tag{107}$$

$$\Gamma^2_{01} \;=\; \Gamma^2_{10} \;=\; -\,\alpha\, e^{-\alpha x^1}\;. \tag{108}$$

Alle anderen Christoffel-Symbole verschwinden.

Wir verwenden nun die Definition von R_{ij}

$$R_{ij} \;=\; \Gamma^m_{im|j} - \Gamma^m_{ij|m} + \Gamma^m_{in}\Gamma^n_{mj} - \Gamma^n_{mn}\Gamma^m_{ij}\;. \tag{109}$$

Jeder dieser Terme stellt eine 4×4 - Matrix dar. Es gibt nur wenige nichtverschwindende Einzelterme. Wir betrachten zunächst

$$\Gamma^n_{mn} \;=\; \alpha \;\text{ für }\; \kappa \;=\; 1\;, \tag{110}$$

$$\Gamma^n_{mn} \;=\; 0 \;\text{ für }\; \kappa \;\neq\; 1\;. \tag{111}$$

Für die nichtverschwindenden Komponenten ergibt sich

$$\Gamma^m_{02|m} \;=\; \Gamma^m_{20|m} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha^2\, e^{\alpha x^1}\;, \tag{112}$$

$$\Gamma^m_{22|m} \;=\; \alpha^2\, e^{2\alpha x^1}\;, \tag{113}$$

$$\Gamma^m_{0n}\quad\Gamma^n_{0m} \;=\; -\alpha^2\;, \tag{114}$$

$$\Gamma^m_{2n}\quad\Gamma^n_{2m} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha^2\, e^{2\alpha x^1}\;, \tag{115}$$

$$\Gamma^n_{mn}\quad\Gamma^m_{02} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha^2\, e^{\alpha x^1}\;, \tag{116}$$

$$\Gamma^n_{mn}\quad\Gamma^m_{22} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\alpha^2\, e^{2\alpha x^1}\;. \tag{117}$$

Dies liefert sofort den kontrahierten Riemannschen Tensor

$$R_{ij} = -\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{\alpha x^1} & 0 & e^{2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{118}$$

Um den Skalar $R^i{}_i$ berechnen zu können, müssen wir erst noch den metrischen Tensor g_{ij} invertieren. Es ist

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{\alpha x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{\alpha x^1} & 0 & \frac{1}{2}\, e^{2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{119}$$

Daraus folgt

$$\sqrt{-g} = \frac{e^{\alpha x^1}}{\sqrt{2}} \tag{120}$$

und wir erhalten

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\, e^{-\alpha x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2\, e^{-\alpha x^1} & 0 & -2\, e^{-2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{121}$$

Der Beweis erfolgt am einfachsten durch Prüfung der Relation

$$g^{ik}\, g_{jk} = \delta^i{}_j \, . \tag{122}$$

Wir erhöhen nun einen Index von R_{ij} und kontrahieren dann. Damit erhalten wir das simple Resultat

$$R^i{}_i = -\alpha^2 \, . \tag{123}$$

Wir haben nun alle relevanten geometrischen Größen berechnet und betrachten jetzt den Energie-Impuls Tensor T_{ij}. Für eine Materieverteilung in Ruhe (wir benutzen mitbewegte Koordinaten) gilt

$$T^{ij} = \rho\, u^i\, u^j = \rho\, \delta^i{}_0\, \delta^j{}_0 \, . \tag{124}$$

Mit Hilfe des metrischen Tensor erniedrigen wir die Indizes.

$$T_{ij} \;=\; \rho\, g_{i0}\, g_{j0} \;=\; \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{\alpha x^1} & 0 & e^{2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{125}$$

Wir bemerken, daß T_{ij} proportional zu R_{ij} ist

$$R_{ij} \;=\; -\frac{\alpha^2}{\rho}\, T_{ij} \; . \tag{126}$$

Wir wollen nun die Resultate der Rechnung zusammenfassen. Aufgrund der Einstein-Gleichung gilt

$$R_{ij} + \left(\Lambda - \tfrac{1}{2}\, R^m_{\ m}\right) g_{ij} \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\, T_{ij} \; . \tag{127}$$

Setzen wir unsere Resultate, die wir unter Verwendung der Gödelschen Metrik abgeleitet haben, in (127) ein, so sehen wir, daß in der Tat die Gödelsche Metrik die Einstein-Gleichung befriedigt, falls gilt

$$\Lambda \;=\; -\frac{\alpha^2}{2} \; , \tag{128}$$

$$\frac{\alpha^2}{\rho} \;=\; \frac{8\pi\kappa}{c^2} \; . \tag{129}$$

Falls α = 0 ist, folgt $\Lambda \;=\; \rho \;=\; 0$, d.h., der Raum ist flach. Damit kann α als Parameter betrachtet werden, der die Abweichung des Raumes von einer flachen Metrik beschreibt.

Wir hatten ein mitbewegtes Koordinatensystem gewählt, in dem die Materieverteilung in Ruhe ist. Der Energie-Impuls Tensor $T^{ij} \;=\; \rho\, u^i\, u^j$ ist jedoch genau derselbe, den wir bei der Diskussion kosmologischer Modelle im Rahmen der Robertson - Walker Metrik verwendet haben. Damit haben die Feldgleichungen

$$R_{ij} + \left(\Lambda - \tfrac{1}{2}\, R\right) g_{ij} \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\, T_{ij} \tag{130}$$

zwei total verschiedene Lösungen für dasselbe T_{ij}.

Entsprechend der Machschen Orginalhypothese aus dem Jahr 1883 ist die Trägheit eines Körpers bestimmt durch die Anwesenheit aller anderen Körper im Universum. Einstein bezeichnete etwas allgemeiner die Forderung, daß die Geometrie des Raumes durch die Materieverteilung festgelegt wird, als Machsches Prinzip. Aufgrund des Machschen Prinzips erwarten wir also, daß die Materieverteilung des Universums eindeutig die Geometrie des Universums fixiert. Aus der Mehrdeutigkeit der Lösung der Einstein-Gleichung folgt aber, daß das Machsche Prinzip nicht in den Feldgleichungen enthalten ist. Offensichtlich muß eine globale Bedingung, wie zum Beispiel eine Rand- oder Anfangsbedingung, zusätzlich angegeben werden, um das Machsche Prinzip zu befriedigen.

Wir wollen nun einige eigentümliche Eigenschaften der Gödel-Metrik näher untersuchen. Wir wollen zeigen, daß die Weltlinien, die die Materie in Ruhe im Gödelschen mitbewegten Koordinatensystem $(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$ charakterisieren, nicht überall orthogonal zu einer einparametrigen Familie von dreidimensionalen Hyperflächen sein können. Diese wichtige Eigenschaft der Metrik unterscheidet die Gödel-Lösung von jeder Lösung, die auf einem Gaußschen Koordinatensystem basiert mit $g_{00} = 1$ und $g_{0i} = 0$. Das Gaußsche Koordinatensystem ist im Einklang mit der Robertson - Walker Metrik. Es ist daher evident, daß nun die Existenz eines Koordinatensystems mit einer ausgezeichneten universellen Zeitkoordinate ausgeschlossen ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch. Wir nehmen an, eingebettet im vierdimensionalen Raum gibt es eine Familie F von dreidimensionalen Hyperflächen, die parametrisiert sind durch λ. Es gilt eine Gleichung in der Form

$$F(x^\mu) - \lambda \;=\; 0\,. \tag{131}$$

F ist eine feste Funktion. Ein spezieller Normalenvektor zu einem Element der Familie F, die den Weltpunkt x^μ enthält, ist $F_{|\mu}(x^\mu)$. Daraus folgt, jedes beliebige Vektorfeld v_μ, daß überall orthogonal zu den Elementen von F ist, kann geschrieben werden als

$$v_\mu \;=\; l\, F_{|\mu}\,. \tag{132}$$

l ist eine beliebige skalare Funktion.

Wir betrachten nun ausgehend von dem beliebigen Vektor v^μ den vollständig antisymmetrischen Tensor

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu\gamma} \;&\equiv\; \left\{v_\mu\, v_{\nu|\gamma}\right\} \\ &\equiv\; \frac{1}{3!}\left[v_\mu\,(v_{\nu|\gamma} - v_{\gamma|\nu}) + v_\nu\,(v_{\gamma|\mu} - v_{\mu|\gamma}) + v_\gamma\,(v_{\mu|\nu} - v_{\nu|\mu})\right]\,. \end{aligned} \tag{133}$$

Für das spezielle Vektorfeld (132) ist dieser Tensor identisch null, denn es ist

$$\begin{aligned}
v_{\nu|\gamma} &= (l\,F_{|\nu})_{|\gamma} \;=\; l_{|\gamma}\,F_{|\nu} + l\,F_{|\nu|\gamma}\;, \\
v_{\gamma|\nu} &= (l\,F_{|\gamma})_{|\nu} \;=\; l_{|\nu}\,F_{|\gamma} + l\,F_{|\gamma|\nu}
\end{aligned} \tag{134}$$

und damit

$$\begin{aligned}
v_{\mu}\,(v_{\nu|\gamma} - v_{\gamma|\nu}) &= l\,F_{|\mu}\,(l_{|\gamma}\,F_{|\nu} - l_{|\nu}\,F_{|\gamma})\;, \\
v_{\nu}\,(v_{\gamma|\mu} - v_{\mu|\gamma}) &= l\,F_{|\nu}\,(l_{|\mu}\,F_{|\gamma} - l_{|\gamma}\,F_{|\mu})\;, \\
v_{\gamma}\,(v_{\mu|\nu} - v_{\nu|\mu}) &= l\,F_{|\gamma}\,(l_{|\nu}\,F_{|\mu} - l_{|\mu}\,F_{|\nu})\;.
\end{aligned} \tag{135}$$

Die Summe dieser Terme ergibt null. Daher ist eine notwendige kovariante Bedingung, daß ein Vektorfeld v_μ überall zu einer einparametrigen Familie F von dreidimensionalen Hyperflächen orthogonal ist

$$a_{\mu\nu\gamma} \;=\; \left\{ v_\mu\, v_{\nu|\gamma} \right\} \;=\; 0\;. \tag{136}$$

Für den Fall der Gödel - Lösung sind wir an dem speziellen Vektor interessiert, der die Materie in Ruhe repräsentiert

$$\begin{aligned}
v^{\mu} &= (1,\,0,\,0,\,0)\;, \\
v_{\mu} &= (1,\,0,\,e^{\alpha x^1},\,0)\;.
\end{aligned} \tag{137}$$

Evidenterweise gilt für diesen Vektor

$$v_{\nu|\gamma} \;=\; \begin{cases} \alpha\, e^{\alpha x^1} & \text{für } \nu \;=\; 2,\; \gamma \;=\; 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{138}$$

und daher folgt für den Tensor $a_{\mu\nu\gamma}$

$$a_{\mu\nu\gamma} \;=\; \begin{cases} -\frac{1}{6}\,\alpha\, e^{\alpha x^1} & \text{für gerade Permutationen von 0, 1, 2} \\ \frac{1}{6}\,\alpha\, e^{\alpha x^1} & \text{für ungerade Permutationen von 0, 1, 2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\;. \tag{139}$$

Da $a_{\mu\nu\gamma}$ nicht identisch null ist, beendet das den Beweis. Wir haben somit einige mathematische Klimmzüge unternommen, um zu zeigen, daß die Weltlinien, die die Materie in Ruhe im Gödelschen mitbewegten System charakterisieren, nicht überall orthogonal zum dreidimensionalen Raum sein können. Dies unterscheidet die Gödelsche Lösung von jeder Lösung, die auf dem Gaußschen Koordinatensystem basiert, wie zum Beispiel die Robertson - Walker Metrik.

Um uns ein etwas besseres Verständnis der Gödel - Metrik erarbeiten zu können, betrachten wir im Rahmen der klassischen Mechanik die Metrik auf einer rotierenden Scheibe. Dazu führen wir im Laborsystem Zylinderkoordinaten ein mit

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\overline{\varphi}\ , \\ y &= r\,\sin\overline{\varphi} \end{aligned} \tag{140}$$

und der üblichen z-Koordinate. Das Quadrat des Längenelementes lautet dann einfach

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \left(dr^2 + r^2\,d\overline{\varphi}^2 + dz^2\right)\ . \tag{141}$$

Wir führen nun eine Transformation in ein neues Koordinatensystem mit den Koordinaten $t,\ r,\ \varphi,\ z$ durch. Dieses neue System soll gegenüber dem Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotieren. Also gilt

$$\begin{aligned} \varphi &= \overline{\varphi} - \omega t\ , \\ \overline{\varphi} &= \varphi + \omega t\ , \\ d\overline{\varphi} &= d\varphi + \omega\,dt\ . \end{aligned} \tag{142}$$

Damit erhalten wir für das Quadrat des Längenelementes

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2\,dt^2 - \left(dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + 2\,\omega\,r^2\,d\varphi\,dt + \omega^2\,r^2\,dt^2 + dz^2\right) \\ &= \left(c^2 - \omega^2\,r^2\right)dt^2 - \left(dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + 2\,\omega\,r^2\,d\varphi\,dt + dz^2\right)\ . \end{aligned} \tag{143}$$

Vergleichen wir diese Metrik mit der Gödel - Metrik, so können wir eine formale Verwandschaft feststellen. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Gödel - Lösung etwas mit einer Rotation zu tun hat. Dies muß in kovarianter Weise nachgewiesen werden. Der Tensor $a_{\mu\nu\gamma}$ erweist sich auch bei der Betrachtung des Rotationsverhaltens von Vektorfeldern als nützlich. Wir konstruieren einen neuen Vektor

$$\Omega^\beta = c\,\frac{\varepsilon^{\beta\mu\nu\gamma}}{\sqrt{-g}}\,a_{\mu\nu\gamma} = c\,\frac{\varepsilon^{\beta\mu\nu\gamma}}{\sqrt{-g}}\,\left\{v_\mu\,v_{\nu|\gamma}\right\}\ . \tag{144}$$

Damit verbinden wir einen Vektor Ω^β mit einem gegebenen Vektor v_μ. Die Gegenwart des antisymmetrischen Tensors $\varepsilon^{\beta\mu\nu\gamma}/\sqrt{-g}$ legt die Vermutung nahe, daß Ω^β verknüpft ist mit der gewöhnlichen Rotation von v_μ. Dies ist in der Tat der Fall, was man leicht sieht, wenn man sich auf den flachen Raum mit $\sqrt{-g} = 1$ beschränkt und sich die

Komponenten von Ω^β explizit betrachtet. Der kontravariante Vektor $\Omega^\beta \;=\; (\Omega^0,\,\vec{\Omega})$, der verbunden ist mit $v_\mu \;=\; (v_0,\,-\vec{v})$ ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\Omega^0 &= -c\,\vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})\,, & (145)\\
\vec{\Omega} &= -c\,v_0\,(\vec{\nabla}\times\vec{v}) - c\,(\vec{v}\times\dot{\vec{v}}) - c\,(\vec{v}\times\vec{\nabla})\,v_0\,. & (146)
\end{aligned}
$$

In einer Nebenrechnung wollen wir diese Behauptung verifizieren. Nach (145) gilt

$$
\Omega^0 \;=\; -c\,\Big[v_1\,(v_{3|2}-v_{2|3}) - v_2\,(v_{3|1}-v_{1|3}) + v_3\,(v_{2|1}-v_{1|2})\Big]\;. \qquad (147)
$$

Nach (144) folgt nach expliziter Auswertung

$$
\Omega^0 \;=\; c\,\Big[v_1\,(v_{2|3}-v_{3|2}) + v_2\,(v_{3|1}-v_{1|3}) + v_3\,(v_{1|2}-v_{2|1})\Big]\;, \qquad (148)
$$

was mit (147) übereinstimmt.

Um (146) zu beweisen, betrachten wir nur die Komponente Ω^1. Es ist

$$
(\vec{v}\times\dot{\vec{v}})_1 \;=\; v_2\,v_{3|0} - v_3\,v_{2|0} \qquad (149)
$$

Mit

$$
(\vec{v}\times\vec{\nabla})_1 \;=\; v_2\,\partial_3 - v_3\,\partial_2 \qquad (150)
$$

folgt

$$
(\vec{v}\times\vec{\nabla})_1\,v_0 \;=\; v_2\,v_{0|3} - v_3\,v_{0|2}\,. \qquad (151)
$$

Damit haben wir

$$
\Omega^1 \;=\; -c\,\Big[(v_0\,v_{3|2}-v_0\,v_{2|3}) + (v_2\,v_{3|0}-v_3\,v_{2|0}) + (v_2\,v_{0|3}-v_3\,v_{0|2})\Big]\;. \qquad (152)
$$

Andererseits gilt aufgrund (144) nachdem wir explizit die einzelnen Komponenten ausmultipliziert haben

$$
\Omega^1 \;=\; c\,\Big[-v_0\,v_{3|2} + v_0\,v_{2|3} + v_3\,v_{2|0} + v_3\,v_{0|2} - v_2\,v_{0|3} - v_2\,v_{3|0}\Big]\;, \qquad (153)
$$

was identisch ist mit (152). Damit sind die obigen Behauptungen verifiziert worden.

Um die Interpretation von Ω^β etwas transparenter zu machen, betrachten wir den Fall eines Vektorfeldes v_μ, das ein uniformes Feld darstellt, das entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert.

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 1\,,\\
\vec{v} &= v^i \;=\; \left(\frac{\omega}{c}\,y,\,-\frac{\omega}{c}\,x,\,0\right)\,. & (154)
\end{aligned}
$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \Omega^0 &= 0 \, , \\ \vec{\Omega} &= -c(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = (0,\ 0,\ 2\omega) \, . \end{aligned} \tag{155}$$

Damit ist die uniforme Rotation charakterisiert durch $\Omega^\beta = (0,\ 0,\ 0,\ 2\omega)$.

Wir wollen nun Ω^β benutzen, um die Bewegung der mitbewegten Materie im Gödel - Universum zu studieren. Wir bemerken zunächst, daß der kovariante Geschwindigkeitsvektor v_μ des mitbewegten Materiefeldes in der Robertson - Walker Metrik die selben Komponenten hat wie der kontravariante Vektor $v^\mu = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Daraus folgt $a_{\mu\nu\gamma} = 0$ und $\Omega^\beta = 0$. Jedoch ist in der Gödel - Metrik $a_{\mu\nu\gamma}$ verschieden von null. Wir finden aus (120), (139) und (144)

$$\Omega^\beta = c \frac{\varepsilon^{\beta\mu\nu\gamma}}{\sqrt{-g}} a_{\mu\nu\gamma} = (0,\ 0,\ 0,\ \sqrt{2}\alpha c) \, . \tag{156}$$

Dies ist genau die Form wie zuvor $\Omega^\beta = (0,\ 0,\ 0,\ 2\omega)$. Dies führt uns schließlich zu der Schlußfolgerung, daß die mitbewegte Materie im Gödel - Universum eine Rotation um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \alpha c / \sqrt{2}$ ausführt.

Aus (123) und (129) folgt

$$\omega = \frac{\alpha c}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{\pi \kappa \rho} = c \sqrt{\frac{-R^i{}_i}{2}} \, . \tag{157}$$

Die mitbewegte Materie im Gödel - Universum erfährt also eine intrinsische uniforme Rotation. Jedoch sollte aufgrund des Machschen Prinzips die Gesamtmasse des Universums die Geometrie festlegen. Man würde erwarten, daß die Masse in einem speziellen Koordinatensystem ruht und daß dieses System inertial wäre. Für das Gödelsche Universum gilt dies jedoch nicht. Es stellt sich natürlich sofort die Frage: Wie kann die gesamte Masse rotieren und gegen was rotiert die Gesamtmasse des Universums?

Als nächsten Punkt betrachten wir die Bewegung eines Testteilchens im Gödelschen Universum. Wir hatten die Gleichungen für die Geodäten bereits abgeleitet. Wir integrieren (92), (94) und (95)

$$\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1} \dot{x}^2 = a \, , \tag{158}$$

$$e^{\alpha x^1} \left(\dot{x}^0 + \tfrac{1}{2} \dot{x}^2 e^{\alpha x^1} \right) = e^{\alpha x^1} \left(a - \tfrac{1}{2} \dot{x}^2 e^{\alpha x^1} \right) = b \, , \tag{159}$$

$$\dot{x}^3 \;=\; l\,. \tag{160}$$

Aus (101) folgt

$$\ddot{x}^1 + \alpha\, b\, \dot{x}^2 \;=\; 0 \tag{161}$$

und hieraus

$$\dot{x}^1 + \alpha\, b\, x^2 \;=\; d\,. \tag{162}$$

a, b, d und l sind Integrationskonstanten. Aus diesen Gleichungen ist leicht zu ersehen, daß sich ein Teilchen in Ruhe mit

$$x^\mu \;=\; (s,\ A,\ B,\ C) \tag{163}$$

und

$$\dot{x}^\mu \;=\; (1,\ 0,\ 0,\ 0)\,, \tag{164}$$

wobei A, B, und C Konstanten sind, entlang einer Geodäten bewegt für die folgende Wahl der Konstanten

$$\begin{aligned} a &= 1\,, \\ l &= 0\,, \\ b &= e^{\alpha A}\,, \\ d &= \alpha b B\,. \end{aligned} \tag{165}$$

Wir fragen uns nun, was passiert, wenn sich das Teilchen anfangs nicht in Ruhe befindet, sondern eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit im mitbewegten System aufweist. Speziell nehmen wir an, daß wir ein Teilchen vom Ursprung $x^i = 0$ zu einer Target-Galaxis in radialer Richtung bei $x^i \;=\; (A,\ 0,\ 0)$ schießen. Die Anfangsbedingungen sind dann

$$\begin{aligned} &x^0 = 0\,, && \dot{x}^0 = 1\,, && x^1 = 0\,, && \dot{x}^1 = \beta\,, \\ &x^2 = 0\,, && \dot{x}^2 = 0\,, && x^3 = 0\,, && \dot{x}^3 = 0\,. \end{aligned} \tag{166}$$

Dies entspricht den Konstanten

$$\begin{aligned} a &= b = 1\,, \\ d &= \beta\,, \\ l &= 0\,. \end{aligned} \tag{167}$$

Man würde nun erwarten, das Teilchen bewegt sich auf einer Geraden zu der weit entfernten Galaxis. Die Lösung der Bewegungsgleichungen sollte also die Form haben

$$x^\mu \;=\; \Big(x^0(s),\; x^1(s),\; 0,\; 0\Big)\;. \tag{168}$$

Dies ist jedoch nicht der Fall in einem Gödelschen Universum. Um dies zu veranschaulichen, verwenden wir Störungstheorie und nehmen ferner an, α sei ein kleiner Parameter. Wir beginnen mit $\alpha = 0$. Die Lösung ist elementar

$$x^\mu \;=\; (s,\; \beta s,\; 0,\; 0)\;. \tag{169}$$

Für den flachen Raum ist also unsere Annahme erfüllt. Wir entwickeln nun die Lösungen der Differentialgleichungen in erster Ordnung in α.

$$\dot{x}^0 + \dot{x}^2 - 1 \;=\; -\alpha\, x^1\, \dot{x}^2\;, \tag{170}$$

$$\dot{x}^1 - \beta \;=\; -\alpha\, x^2\;, \tag{171}$$

$$\dot{x}^3 \;=\; 0\;. \tag{172}$$

Aus (159) folgt

$$(1+\alpha\, x^1)\Big(1-\tfrac{1}{2}\,\dot{x}^2\,(1+\alpha\, x^1)\Big) \;=\; 1 \tag{173}$$

und somit

$$\alpha\, x^1 - \tfrac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}\,\dot{x}^2\,\alpha\, x^1 - \tfrac{1}{2}\,\alpha\, x^1\,\dot{x}^2 \;=\; 0\;. \tag{174}$$

Dies ergibt

$$\dot{x}^2 \;=\; 2\,\alpha\, x^1\,\Big(1-\dot{x}^2\Big)\;. \tag{175}$$

In diese Gleichungen substituieren wir die Lösungen (169) sowie eine Korrektur in erster Ordnung gegeben durch $\alpha\, y^\mu$. Es folgt

$$\begin{aligned} x^0 &= s + \alpha\, y^0\;, \\ x^1 &= \beta\, s + \alpha\, y^1\;, \\ x^2 &= \alpha\, y^2\;, \\ x^3 &= \alpha\, y^3\;. \end{aligned} \tag{176}$$

Wenn wir uns auf Terme erster Ordnung in α beschränken, führt dies zu einem Satz von Gleichungen für die y^μ. Wir bekommen aus (170)

$$1 + \alpha\,\dot{y}^0 + \alpha\,\dot{y}^2 - 1 \;=\; -\alpha\,(\beta\, s + \alpha\, y^1)\,\alpha\,\dot{y}^2\;. \tag{177}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\dot{y}^0 + \dot{y}^2 &= 0 \, , \\
\dot{y}^2 &= 2\beta \, s \, , \\
\dot{y}^1 &= 0 \, , \\
\dot{y}^3 &= 0 \, .
\end{aligned}
\tag{178}
$$

Da die Terme nullter Ordnung in (176) die Anfangsbedingungen erfüllen gilt für $s = 0$

$$
\begin{aligned}
y^\mu &= 0 \, , \\
\dot{y}^\mu &= 0 \, .
\end{aligned}
\tag{179}
$$

Damit erhalten wir als Lösung in erster Ordnung

$$
x^\mu = \Big(s - \alpha\beta s^2, \; \beta s, \; \alpha\beta s^2, \; 0 \Big) \, . \tag{180}
$$

Dies folgt durch Integration von (178) und einsetzen in (176). Diese Lösung unterscheidet sich also vom geraden Strahl mit $x^2 = x^3 = 0$. Das Teilchen spiralisiert nach außen. Anders ausgedrückt lautet dies, die Materie des Universums rotiert um den Weg eines Teilchens.

Wir können das einschränkende Machsche Prinzip so formulieren: Die Materieverteilung des Universums bestimmt das Trägheitsverhalten eines Teilchens, aber beide dürfen *nicht* umeinander rotieren. Die Gödel - Lösung ist zwar im Einklang mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, erfüllt aber nicht das einschränkende Machsche Prinzip. Wir kommen zu der wichtigen Schlußfolgerung, daß das Machsche Prinzip als zusätzliche globale Randbedingung an die Allgemeine Relativitätstheorie gestellt werden muß.

Die kosmologische Konstante

Das Hauptproblem der Kosmologie besteht darin, die Metrik im vierdimensionalen Raum im Großen zu bestimmen. Die Metrik ergibt sich durch Lösung der Einsteinschen Gleichung. Aus der Metrik folgen die Bewegungsgleichungen. Beispielsweise bewegen sich Licht oder Galaxien entlang von Geodäten.

Im Gegensatz zu unseren Studien im Rahmen der Schwarzschild-Lösung, bei der wir von der Kenntnis des Energie - Impuls - Tensors ausgegangen waren, müssen wir bei der Diskussion kosmologischer Modelle Metrik und Energiedichte zusammen in der vierdimensionalen Welt bestimmen. Um die möglichen Formen der kosmologischen Metriken zu limitieren, wird zumeist die Forderung der räumlichen Isotropie gestellt. Leider erlaubt es die experimentelle Genauigkeit noch nicht, die verschiedenen Modelle deutlich voneinander zu unterscheiden.

Die Einstein-Gleichungen lauten in allgemeiner Form

$$R^i{}_j - \tfrac{1}{2}\, R\, g^i{}_j + \Lambda\, g^i{}_j \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\, T^i{}_j \; . \tag{181}$$

Λ wir die kosmologische Konstante genannt. Wir haben diese Gleichung bereits gelöst ohne jedoch explizit das kosmologische Glied zu berücksichtigen. So ergab sich beispielsweise die Schwarzschild - Lösung. Stellen wir nun das kosmologische Glied in Rechnung, so erkennen wir sofort, daß die Lösung des flachen Raumes für ein leeres Universum nun keine Lösung mehr ist. Der leere Raum ist charakterisiert durch $R^i{}_j \;=\; 0$ und $T^i{}_j \;=\; 0$. Daraus folgt jedoch sofort $\Lambda \;=\; 0$.

In Betrachtungen kosmologischer Modelle müssen wir Λ mit berücksichtigen, für lokale Probleme bleibt der kosmologische Term unwichtig. Wir wollen nun einige Implikationen des kosmologischen Terms aufzeigen. Dazu setzen wir in den Einsteinschen Gleichungen $T^i{}_j \;=\; 0$. Durch Kontraktion finden wir

$$R^i{}_i - \tfrac{1}{2}\, R\, g^i{}_i + \Lambda\, g^i{}_i \;=\; 0 \; . \tag{182}$$

Mit $g^i{}_i \;=\; 4$ folgt

$$-\, R + 4\Lambda \;=\; 0 \tag{183}$$

und daher

$$R \;=\; 4\Lambda \; . \tag{184}$$

Dies ergibt

$$R_{ij} \;=\; \Lambda\, g_{ij}\;. \tag{185}$$

Wir wollen diese Gleichung lösen, so wie wir es für den radial symmetrischen Fall ohne kosmologisches Glied getan haben. Dort galt

$$ds^2 \;=\; e^{\nu(r)}\, c^2\, dt^2 - e^{\lambda(r)}\, dr^2 - r^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\varphi^2\right)\;. \tag{186}$$

Im Rahmen der Ableitung der Schwarzschild - Lösung hatten wir die folgende Gleichung abgeleitet

$$\begin{aligned} R_{00} \;=\; & -\left(\tfrac{1}{2}\,\nu'\, e^{\nu-\lambda}\right)' + \left(\tfrac{1}{2}\,\nu'^2\, e^{\nu-\lambda}\right) \\ & - \left(\tfrac{1}{2}\,\nu'\, e^{\nu-\lambda}\right)\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{187}$$

Verallgemeinert gilt nun

$$R_{00} \;=\; \Lambda\, g_{00} \tag{188}$$

mit $g_{00} \;=\; e^{\nu}$. Durch Ausdifferenzieren bekommen wir

$$\begin{aligned} & -\tfrac{1}{2}\,\nu''\, e^{\nu-\lambda} - \tfrac{1}{2}\,\nu'\, e^{\nu-\lambda}\,(\nu'-\lambda') + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2\, e^{\nu-\lambda} \\ & - \left(\tfrac{1}{2}\,\nu'\, e^{\nu-\lambda}\right)\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; \Lambda\, e^{\nu} \end{aligned} \tag{189}$$

und somit nach elementaren Umformungen

$$\nu'' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2 - \tfrac{1}{2}\,\nu'\,\lambda' + \frac{2\nu'}{r} \;=\; -2\,\Lambda\, e^{\lambda}\;. \tag{190}$$

Ebenso hatten wir früher aus der Gleichung für R_{11} abgeleitet

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2}\right) - \tfrac{1}{2}\,\lambda'' + \frac{1}{4}\,\nu'^2 + \frac{1}{4}\,\lambda'^2 + \frac{2}{r^2} \\ & - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{191}$$

Dies ergibt nach Umsortieren der Terme

$$\nu'' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2 - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\,\nu' - \frac{2\,\lambda'}{r} \;=\; 0\;. \tag{192}$$

In modifizierter Form gilt nun

$$R_{11} \;=\; \Lambda\, g_{11} \;=\; -\Lambda\, e^{\lambda}\;. \tag{193}$$

Dies führt nach (191) zu

$$\nu'' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2 - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\,\nu' - \frac{2\,\lambda'}{r} \;=\; -2\,\Lambda\,e^{\lambda}\;. \tag{194}$$

Wir ziehen die beiden Gleichungen (190) und (194) voneinander ab. Es folgt

$$\nu' + \lambda' \;=\; 0\;. \tag{195}$$

Dies impliziert

$$\nu + \lambda \;=\; \text{const} \;=\; \log k\;. \tag{196}$$

Wir haben aber nun nicht die Möglichkeit, den Wert dieser Konstanten zu bestimmen, denn wir können nicht mehr den Lorentz - Charakter der Lösung im Unendlichen fordern. Daher schreiben wir nun

$$\lambda \;=\; \log k - \nu\;. \tag{197}$$

Wir setzen dies in (190) ein und erhalten

$$\nu'' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2 - \tfrac{1}{2}\,\nu'(\log k)' + \tfrac{1}{2}\,\nu'\,\nu' + \frac{2\nu'}{r} \;=\; -2\,\Lambda\,k\,e^{-\nu}\;. \tag{198}$$

Dies ergibt

$$e^{\nu}\,\nu'' + \nu'^2\,e^{\nu} + \frac{2\nu'}{r}\,e^{\nu} \;=\; -2\,\Lambda\,k\;. \tag{199}$$

Jetzt ist

$$(e^{\nu})' \;=\; e^{\nu}\,\nu' \tag{200}$$

und weiter

$$(e^{\nu})'' \;=\; (e^{\nu}\,\nu')' \;=\; \nu'^2\,e^{\nu} + e^{\nu}\,\nu''\;. \tag{201}$$

Damit formen wir die linke Seite von (199) um

$$(e^{\nu})'' + \frac{2}{r}\,(e^{\nu})' \;=\; -2\,\Lambda\,k\;. \tag{202}$$

Jetzt ist aber auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\,(r\,e^{\nu})'' \;&=\; \frac{1}{r}\,(e^{\nu})' + \frac{1}{r}\,(r\,\nu'\,e^{\nu})' \\ &=\; \frac{1}{r}\,\nu'\,e^{\nu} + \frac{1}{r}\,\nu'\,e^{\nu} + \frac{1}{r}\,r\,\nu''\,e^{\nu} + \nu'^2\,e^{\nu} \\ &=\; \frac{2}{r}\,\nu'\,e^{\nu} + \nu''\,e^{\nu} + \nu'^2\,e^{\nu} \end{aligned} \tag{203}$$

und damit

$$\frac{1}{r}\,(r\,e^{\nu})'' \;=\; -2\,\Lambda\,k\,. \tag{204}$$

Somit folgt

$$(r\,e^{\nu})'' \;=\; -2\,\Lambda\,k\,r \tag{205}$$

und dadurch durch elementare Integrationen

$$(r\,e^{\nu})' \;=\; -\Lambda\,k\,r^2+\beta\,, \tag{206}$$

$$r\,e^{\nu} \;=\; \alpha+\beta\,r-\Lambda\,k\,\frac{r^3}{3}\,. \tag{207}$$

α und β sind Integrationskonstanten.

Als nächstes betrachten wir die Feldgleichung

$$R_{22} \;=\; \Lambda\,g_{22}\,. \tag{208}$$

Wir gehen aus von dem bekannten Ausdruck für R_{22}.

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{d^2}{d\theta^2}\,(\log|\sin\theta|)+\left(e^{-\lambda}\,r\right)'-2e^{-\lambda}+\cot^2\theta+e^{-\lambda}r\left(\frac{\lambda'+\nu'}{2}+\frac{2}{r}\right)\\ &= -\Lambda\,r^2\,. \end{aligned} \tag{209}$$

Wir verwenden nun $\nu+\lambda \;=\; \log k$. Es ist $\lambda'+\nu' \;=\; 0$. Weiter gilt

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\,(\log|\sin\theta|)+\cot^2\theta \;=\; -1\,, \tag{210}$$

denn es ist

$$\frac{d}{d\theta}\,(\log\sin\theta) \;=\; \cot\theta \tag{211}$$

und

$$\frac{d}{d\theta}\,\cot\theta \;=\; -\cot^2\theta-1\,. \tag{212}$$

Somit bekommen wir

$$-1+\left(e^{-\lambda}\,r\right)'-2\,e^{-\lambda}+\frac{2}{r}\,r\,e^{-\lambda} \;=\; -\Lambda\,r^2 \tag{213}$$

und schließlich

$$\left(e^{-\lambda}\,r\right)' \;=\; 1-\Lambda\,r^2\,. \tag{214}$$

Aus (214) folgt

$$\left(e^{-\log k+\nu}\, r\right)' \;=\; 1 - \Lambda\, r^2 \tag{215}$$

und weiter

$$(r\, e^{\nu})' \;=\; k\,(1 - \Lambda\, r^2)\;. \tag{216}$$

Wir vergleichen dies mit (206) und schließen

$$k \;\;=\;\; \beta. \tag{217}$$

Aus (207) und $\lambda \;=\; \log k - \nu$ folgt

$$e^{\nu} \;\;=\;\; k\, \left(1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda\, \frac{r^2}{3}\right) \tag{218}$$

beziehungsweise

$$e^{-\lambda} \;\;=\;\; 1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda\, \frac{r^2}{3}\;. \tag{219}$$

Angesichts des Linienelements in der Form

$$ds^2 \;=\; e^{\nu}\, c^2\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\varphi^2\right) \tag{220}$$

können wir die Zeiteinheit immer so wählen, daß k = 1 ist. Daher haben wir

$$e^{\nu} \;\;=\;\; 1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda\, \frac{r^2}{3} \;\;=\;\; e^{-\lambda}\;. \tag{221}$$

Die Schwarzschild-Metrik war bestimmt durch

$$ds^2 \;=\; \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(dx^0\right)^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\varphi^2\right)\;. \tag{222}$$

Jetzt haben wir ein ähnliches Resultat abgeleitet, nur das der Faktor $(1\;-\;2m/r)$ durch $(1\;-\;2m/r\;-\;\Lambda r^2/3)$ ersetzt wird. Wichtig ist: Im Fall m = 0 erhalten wir nicht die Lorentz-Metrik. Wir wollen für m = 0 den räumlichen Teil des Linienelementes betrachten

$$dl^2 \;=\; \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + r^2\, d\theta^2 + r^2\, \sin^2\!\theta\, d\varphi^2\;. \tag{223}$$

Wir sehen jetzt: Es tritt eine radiale Kraft auf, die vom Symmetriezentrum weggerichtet ist. Für kleine Werte von m können wir Störungstheorie verwenden, um die dynamischen Konsequenzen der Schwarzschild-Metrik bei Anwesenheit eines kosmologischen Terms zu diskutieren. Wir haben

$$g_{00} \;=\; 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\;. \tag{224}$$

Aufgrund des Zusammenhangs mit der Newtonschen Theorie gilt

$$g_{00} \;=\; 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \; . \tag{225}$$

Daher folgt, daß näherungsweise gilt

$$\varphi \;=\; -\frac{\kappa M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda c^2 r^2 \; . \tag{226}$$

Selbst bei Abwesenheit der Masse M am Ursprung, erfährt ein Testteilchen eine radiale Beschleunigung

$$a \;=\; \frac{1}{3}\Lambda c^2 r \; . \tag{227}$$

Dies zeigt, der Ursprung des Koordinatensystems ist dynamisch verschieden von allen anderen Punkten im Raum und ist kein beliebiger Punkt im dreidimensionalen Raum.

Als Nebenbemerkung erwähnen wir: Die Lösung des Linienelementes kann realisiert werden durch eine radial symmetrische Massenverteilung um den Ursprung, die im Innenraum leer ist und somit einer sphärischen Höhlung entspricht. A priori wissen wir nicht, was unser Universum “umgibt”, d.h. die Lösung mit kosmologischen Glied kann durchaus der Realität entsprechen.

Statisches Modell des Universums

Wir modellieren nun das Universum, in dem wir von einem Flüssigkeitskontinuum ausgehen, daß aus Galaxien besteht. Die Flüssigkeit wird beschrieben durch eine mittlere Dichte ρ und einem mittleren inneren Druck p, beides können Funktionen der Zeit aber nicht des Raumes sein. Dies führt uns zu einer einfachen Form von $T^i{}_j$. Das mitbewegte Koordinatensystem (Gaußsches Koordinatensystem) führt für die Koordinaten der Galaxien zu

$$\dot{x}^0 \;=\; 1, \quad \dot{x}^1 \;=\; \dot{x}^2 \;=\; \dot{x}^3 \;=\; 0, \quad g_{00} \;=\; 1 \; . \tag{228}$$

Wir gehen aus von

$$T^{il} \;=\; \rho\, u^i\, u^l + \frac{p}{c^2} \left(u^i\, u^l - g^{il} \right) \; . \tag{229}$$

Wir bekommen

$$T^i{}_j \;=\; g_{jl}\, T^{il} \;=\; g_{jl}\, \rho\, u^i\, u^l + \frac{p}{c^2}\, g_{jl}\, u^i\, u^l - \frac{p}{c^2}\, \delta^i_j \; . \tag{230}$$

Jetzt ist aber $u^i \;=\; 1$ für $i \;=\; 0$ und $u^i \;=\; 0$ für $i \;\neq\; 1$. Dies ergibt

$$T^i{}_j \;=\; \rho\, u^i\, (g_{j0}\, u^0) + \frac{p}{c^2}\, u^i\, (g_{j0}\, u^0) - \frac{p}{c^2}\, \delta^i_j \tag{231}$$

und somit $T^0_{\;0} \;=\; \rho$; $T^1_{\;1} \;=\; -\frac{p}{c^2} \;=\; T^2_{\;2} \;=\; T^3_{\;3}$. Wir bemerken, daß dies konsistent ist mit der Robertson-Walker-Metrik, da $T^1_{\;1} \;=\; T^2_{\;2} \;=\; T^3_{\;3}$ und $T^i{}_j \;=\; 0$ für $i \;\neq\; j$.

Die relative Größe von ρ und p/c^2 kann abgeschätzt werden. Wir nehmen an, der Druck wird durch die Zufallsbewegung der Galaxien erzeugt, d.h. durch die lokale Abweichung vom mittleren Zustand. Aus der kinetischen Gastheorie entnehmen wir den Zusammenhang

$$\frac{p}{\rho} \;=\; \frac{\hat{v}^2}{3} \tag{232}$$

mit $\hat{v} \;=<v^2>^{1/2}$. Angewandt auf das galaktische Gas des Universums gilt also

$$\frac{p/c^2}{\rho} \;=\; \frac{1}{3}\, \frac{\hat{v}^2}{c^2} \; . \tag{233}$$

Die stochastischen Geschwindigkeiten sind in der Regel klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c. Daraus folgt, die Druckkomponenten des Energie-Impuls Tensors sind klein gegenüber den Dichtekomponenten. Wir hatten

$$
\begin{aligned}
e^{G(x^0,r)} &= \frac{R^2(t)}{r_0^2\,[1+kr^2/(4r_0^2)]^2}\ , && (234)\\
e^{g(x^0)} &= \frac{R^2(t)}{r_0^2}\ , && (235)\\
e^{f(r)} &= \frac{1}{[1+kr^2/(4r_0^2)]^2}\ . && (236)
\end{aligned}
$$

Wir verwenden $T^i{}_j$ und $G^i{}_j$. Es gilt

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; -\Lambda - G^0{}_0\ . \tag{237}$$

Es war

$$G^0{}_0 \;=\; e^{-G}\left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r}\right) - \frac{3}{4}\,g'^2\ , \tag{238}$$

wobei e^{-G} durch (234) bestimmt ist. Wir hatten ferner

$$f'' \;=\; \tfrac{1}{2}\,f'^2 + \frac{1}{r}\,f'\ . \tag{239}$$

Dies ergibt

$$G^0{}_0 \;=\; e^{-G}\left(\frac{3}{4}\,f'^2 + \frac{3}{r}\,f'\right) - \frac{3}{4}\,g'^2\ . \tag{240}$$

Es gilt

$$f(r) \;=\; -2\,\ln[1+kr^2/(4r_0^2)] \tag{241}$$

und

$$f'(r) \;=\; \frac{-2}{1+\frac{kr^2}{4r_0^2}}\cdot\frac{2kr}{4r_0^2} \tag{242}$$

und weiter

$$\frac{3}{4}\,f'^2 + \frac{3}{r}\,f' \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{k^2r^2/r_0^4}{\left(1+\frac{kr^2}{4r_0^2}\right)^2} - \frac{3k/r_0^2}{1+\frac{kr^2}{4r_0^2}}\ . \tag{243}$$

Dies führt auf

$$
\begin{aligned}
e^{-G}\left(\frac{3}{4}\,f'^2 + \frac{3}{r}\,f'\right) &= \frac{3}{4}\,\frac{k^2r^2/r_0^2}{R^2(t)} - \frac{3k[1+kr^2/(4r_0^2)]}{R^2(t)}\\
&= -\frac{3k}{R^2(t)}\ . && (244)
\end{aligned}
$$

Jetzt berechnen wir noch den Ausdruck $\frac{3}{4}\, g'^2$. Mit

$$g(x^0) \;=\; \ln \left(\frac{R(t)}{r_0}\right)^2 \;=\; 2 \ln \frac{R(t)}{r_0} \tag{245}$$

folgt

$$g'(x^0) \;=\; \frac{2\, R'(t)/r_0}{c\, R(t)/r_0} \;=\; \frac{2\, R'(t)}{c\, R(t)} \tag{246}$$

und somit

$$\frac{3}{4}\, g'^2(x^0) \;=\; 3\, \frac{R'^2(t)}{c^2\, R^2(t)} \; . \tag{247}$$

Somit folgt nach dieser etwas länglichen Algebra

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\, \rho \;=\; -\Lambda - G^0{}_0 \;=\; -\Lambda + \left[\frac{3k}{R^2(t)} + \frac{3}{c^2}\, \frac{R'^2(t)}{R^2(t)}\right] \; . \tag{248}$$

Ferner gilt die Gleichung

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\, \left(\frac{p}{c^2}\right) \;=\; \Lambda + G^i{}_i \; . \tag{249}$$

Also muß noch $G^i{}_i$ berechnet werden mit $i \;=\; 1,\; 2,\; 3$. Es war

$$\begin{aligned} G^1{}_1 \;&=\; G^2{}_2 \;=\; G^3{}_3 \\ &=\; e^{-f}\, \left(\frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f'\right) e^{-g} - g'' - \frac{3}{4} g'^2 \; . \end{aligned} \tag{250}$$

Wir verwenden (236) und (242) sowie

$$g'' \;=\; \frac{2}{c^2}\, \frac{R''(t)}{R(t)} - \frac{2}{c^2}\, \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} \; . \tag{251}$$

Damit folgt zusammengefaßt

$$G^1{}_1 \;=\; \frac{1}{R^2(t)} \left\{\frac{1}{4} k^2 r^2 / r_0^2 - k[1 + k r^2/(4 r_0^2)]\right\} - \frac{2}{c^2}\, \frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} \; . \tag{252}$$

Dies führt auf

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\, \left(\frac{p}{c^2}\right) \;=\; \Lambda + G^i{}_i \;=\; \Lambda - \left[\frac{k}{R^2(t)} + \frac{R'^2(t)}{c^2\, R^2(t)} + \frac{2\, R''(t)}{c^2\, R(t)}\right] \; . \tag{253}$$

Für weiterführende Rechnungen wollen wir noch ein äquivalentes Gleichungssystem ableiten. Wir betrachten Linearkombinationen der beiden Gleichungen (248) und (253)

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\, \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \;=\; \Lambda - \frac{3\, R''(t)}{c^2\, R(t)} \; . \tag{254}$$

Diese Gleichung enthält keine erste Ableitung. Ebenso bekommen wir

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right) \;=\; \frac{k}{R^2(t)}+\frac{R'^2(t)-R(t)\,R''(t)}{c^2\,R^2(t)}\;. \tag{255}$$

Diese Gleichung enthält keinen kosmologischen Term. Wir können schon jetzt wichtige Schlußfolgerungen aus diesen Gleichungen ziehen. Wir können (255) umformen in

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{c^2}\,\frac{R'(t)}{R(t)}\right] \;=\; \frac{k}{R^2(t)}-\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\;. \tag{256}$$

Wir differenzieren (248) nach t und erhalten

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\frac{d\rho}{dt} \;=\; -\frac{6k}{R^3}\,R'+\frac{6R'}{R}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c^2}\,\frac{R'}{R}\right)\;. \tag{257}$$

Wir setzten (256) ein

$$\begin{aligned}\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\frac{d\rho}{dt} \;&=\; -\frac{6k}{R^3}\,R'+\frac{6R'}{R}\left\{\frac{k}{R^2}-\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\right\}\\ &=\; -\frac{4\pi\kappa}{c^2}\,6\,\frac{R'}{R}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\;.\end{aligned} \tag{258}$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\frac{d\rho}{dt} \;=\; -3\,\frac{R'}{R}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\;. \tag{259}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}\left(\rho R^3\right)+\frac{p}{c^2}\,\frac{dR^3}{dt} \;=\; 0\;. \tag{260}$$

Ausrechnen führt auf

$$\frac{d\rho}{dt}\,R^3+\rho 3R^2\,R'+\frac{p}{c^2}\,3R^2\,R' \;=\; 0\;. \tag{261}$$

Nach Division durch R^3 erhält man (259).

Wir betrachten nun ein Volumenelement in mitbewegten Koordinaten. Der geometrische Inhalt ist proportional zu R^3 aufgrund der Struktur der Robertson-Walker-Metrik. $V(t)$ sei das Volumen, dann ist $M \;=\; \rho V$ der Masseninhalt und die obige Gleichung kann geschrieben werden als

$$dM+\frac{1}{c^2}\,p\,dV \;=\; 0\;. \tag{262}$$

Da aber Mc^2 den Energieinhalt des Elementes und $p\,dV$ die Arbeit gegen die Druckkräfte angibt, sehen wir, daß die Energiebilanz im Rahmen der kosmischen Evolution erhalten bleibt.

Wenn wir die *Zustandsgleichung* der Flüssigkeit $p = p(\rho)$ vorgeben, so können wir aus (260) die Abhängigkeit von R in bezug auf ρ bestimmen. Wir können (260) umschreiben in

$$\frac{dR}{R} + \frac{1}{3}\left[\frac{d\rho}{\rho + p(\rho)/c^2}\right] = 0\ . \tag{263}$$

Dies folgt sofort aus (259). Damit folgt wiederum der Zusammenhang von R und ρ durch simple Integration.

Im druckfreien Fall ergibt sich sofort

$$R^3\,\rho = \text{const}\ . \tag{264}$$

Weiter folgt

$$3\,\rho\,R^2\,dR + R^3\,d\rho = 0 \tag{265}$$

und damit

$$\frac{dR}{R} + \frac{1}{3}\,\frac{d\rho}{\rho} = 0\ . \tag{266}$$

Im Fall eines idealen Gases mit $p = \alpha\rho$ erhalten wir

$$R^{3(1+\alpha/c^2)}\,\rho = \text{const}\ . \tag{267}$$

Im Fall, daß der Druck gänzlich durch Strahlung erzeugt wird, haben wir $p = c^2\,\rho/3$ und somit $R^4\,\rho$ = const. Haben wir einmal $R(\rho)$ oder $\rho(R)$ fixiert, so folgt aus

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho = -\Lambda + \left[\frac{3k}{R^2(t)} + \frac{3\,R'^2(t)}{c^2\,R^2(t)}\right] \tag{268}$$

die Zeitabhängigkeit des Radius. Welche Freiheiten haben wir also im Rahmen der Einsteinschen Theorie kosmologische Modelle zu konstruieren? Wir können die Zustandsgleichung $p(\rho)$, die kosmologische Konstante Λ und die Signatur $k = \pm 1$ oder 0 vorgeben. Damit sind alle physikalischen und geometrischen Größen bestimmt. Auf der anderen Seite sind wir natürlich nicht sicher, daß jedes solches Modell auch physikalisch sinnvoll ist.

Wir wenden uns nun explizit dem statischen Modell des Universums zu und setzen $R(t) \; = \text{const}$. Damit folgt aus den obigen Gleichungen, daß auch ρ und p zeitunabhängig sind. Weiter folgt $R_0 \; = \; R_e$. Somit findet die beobachtete Rotverschiebung keine Erklärung in der Geometrie des Raumes.

Wir fügen eine historische Bemerkung zur Frage an, warum es wünschenswert ist, ein endliches Universum zu haben. Bereits im Rahmen der klassischen Physik wurden zahlreiche Paradoxien entdeckt, sofern man die Annahme eines unendlichen, homogenen Universums machte. Das bekannteste Beispiel ist das Olbers-Paradoxon. Wir nehmen eine homogene Materieverteilung in der Welt an. Jedes Volumenelement dV soll Strahlung in alle Richtungen mit der Rate $\mu \, dV$ emittieren. μ ist die Emissionswahrscheinlichkeit. Das Strahlungsgesetz folgt dem r^{-2}-Verhalten. Wir betrachten einen Beobachter an einem Punkt des Universums. Die Kugelschale mit dem Radius r um ihn herum hat das Volumen $4\pi \, r^2 \, dr$, die total abgestrahlte Energie ist $\mu \, 4\pi \, r^2 \, dr$. Der Beobachter erhält davon $\mu(4\pi \, r^2 \, dr)/r^2 \; = \; 4\pi\mu \, dr$. Die Integration über alle r ergibt einen unendlichen Wert. Als Schlußfolgerung gilt: Das Weltall wäre unendlich hell. Ähnliches folgt auch aus dem Gravitationsgesetz und immer dann, wenn das r^{-2}-Gesetz gilt.

Im statischen Fall gelten die Gleichungen

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho \; = \; -\Lambda + \frac{3k}{R^2} \, , \tag{269}$$

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \; = \; \Lambda \, . \tag{270}$$

Bezüglich der kosmologischen Konstanten Λ können wir nun zwei Fälle unterscheiden. 1.) $\Lambda \; = \; 0$. Daraus folgt, das Weltall muß leer sein, wenn ρ und p nicht negativ sein sollen. Aus (269) folgt dann auch $k = 0$. Dies ist der flache Raum, in dem die spezielle Relativitätstheorie gilt. Ein geschlossenes Universum bedeutet aber $k = 1$. Rein mathematisch betrachtet, können wir auch die folgende Schlußfolgerung ziehen. Aus

$$\rho + \frac{3p}{c^2} \; = \; 0 \tag{271}$$

folgt

$$p \; = \; -\frac{\rho c^2}{3} \, . \tag{272}$$

Die physikalische Interpretation bleibt hier natürlich offen. Unter der Annahme $\Lambda = 0$ folgt aus der Gleichung (269)

$$R^2 \; = \; \frac{3kc^2}{8\pi\kappa\rho} \, . \tag{273}$$

Für $k = +1$ haben wir

$$R = c\sqrt{\frac{3}{8\pi\kappa\rho}}\,. \tag{274}$$

Dies führt auf $R \simeq 10^9 - 10^{11}$ Lichtjahre für $\rho = 10^{-27} - 10^{-31}$ g/cm^3. Dies stimmt zufällig mit den Erfahrungswerten überein. Die weitesten Sterne weisen eine Entfernung von etwa $16 \cdot 10^9$ Lichtjahre auf.

2.) $\Lambda \neq 0$. Aus (248) und (253) folgt

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho = -\Lambda + \frac{3k}{R^2}\,, \tag{275}$$

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{p}{c^2} = \Lambda - \frac{k}{R^2}\,. \tag{276}$$

Daraus bekommen wir, indem wir jeweils die linke Seite null setzen

$$\frac{k}{R^2} < \Lambda < \frac{3k}{R^2}\,. \tag{277}$$

Λ ist damit von der Größenordnung des Quadrates des inversen Radius des Universums. Daher kann Λ in unserem Sonnensystem keine Rolle spielen. Aus

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{k}{R^2(t)} \tag{278}$$

erhalten wir

$$R^2 = \frac{kc^2}{4\pi\kappa(\rho + p/c^2)} \tag{279}$$

und somit $k = +1$ für positiven reellen Radius. Da physikalisch ρ gewöhnlich viel größer ist als p/c^2 folgt, R ist ungefähr genauso groß wie im Fall $\Lambda = 0$.

Die innere Schwarzschild-Lösung

Wir haben bereits die zeitunabhängige, radial symmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichung für den freien Raum behandelt. Nun werden wir die zeitunabhängige Lösung ableiten, die die gleichen Symmetrieeigenschaften aufweist und die das Gravitationsfeld im Inneren einer Kugel beschreibt. Diese innere Schwarzschild-Lösung stammt ebenfalls aus dem Jahr 1916. Als einfaches Modell eines Sterns nehmen wir eine inkompressible Flüsigkeit in Form einer homogenen Kugel mit dem Radius r_0 an. Innerhalb von r_0 wird die Metrik die innere Schwarzschild-Metrik sein, außerhalb von r_0 wird sie stetig anschließen an die Metrik des freien Raums.

Wir hatten gezeigt, daß wir die zeitunabhängige und radial symmetrische Metrik in die Form bringen können

$$g_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{280}$$

Dies führt zu dem Linienelement

$$ds^2 \;=\; e^{\nu}\, c^2\, dt^2 - \left[e^{\lambda}\, dr^2 + r^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right] . \tag{281}$$

Die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ müssen noch bestimmt werden. Wir nehmen vereinfachend an: Die Flüssigkeit ist in Ruhe. Wir erlauben jedoch eine variable Dichte $\rho(r)$ und einen variablen Druck $p(r)$. Der Energie-Impuls-Tensor zur Beschreibung dieser Flüssigkeit wurde bereits diskutiert. Er lautet

$$T_{ij} \;=\; \rho\, u_i\, u_j + \frac{p}{c^2}\, \left(u_i\, u_j - g_{ij}\right) \tag{282}$$

mit den Vierergeschwindigkeiten u_i. T_{ij} wurde aus der Hydrodynamik entnommen. T_{ij} ist divergenzfrei, d.h., es gilt ${T^{ij}}_{||j} \;=\; 0$. Dieser Tensor liefert eine kovariante Beschreibung der Eigenschaften einer Flüssigkeit unter dem Einfluß einer eigenen inneren Kraft.

Da die Materie in Ruhe sein soll, gilt für die Komponenten der Vierergeschwindigkeit

$$u^i \;=\; \left(u^0,\; 0,\; 0,\; 0\right) . \tag{283}$$

Auf der Trajektorie eines jeden Materieteilchens in der Flüssigkeit gilt als Relation zwischen der Eigenzeit und der Koordinatenzeit

$$ds^2 \;=\; g_{00}\, \left(dx^0\right)^2 \;=\; g_{00}\, c^2\, dt^2 \tag{284}$$

und es ist

$$d\tau \;\equiv\; \frac{ds}{c} \;=\; \frac{1}{c}\,\sqrt{g_{00}}\,dx^0\;. \tag{285}$$

Aus $(u^0)^2 \;=\; c^2\,(dt/ds)^2$ folgt sofort

$$1 \;=\; \left(u^0\right)^2\,\frac{1}{c^2}\,\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \;=\; g_{00}\,\left(u^0\right)^2\;. \tag{286}$$

Weiterhin können wir ableiten

$$u_0 \;=\; g_{0i}\,u^i \;=\; g_{00}\,u^0 \;=\; \sqrt{g_{00}}\,\sqrt{g_{00}}\,u^0 \;=\; \sqrt{g_{00}}\;. \tag{287}$$

Damit können wir T_{ij} sofort in die Form bringen

$$T_{ij} \;=\; \rho\,\begin{pmatrix} g_{00} & \\ & 0 \end{pmatrix} - \frac{p}{c^2}\,\begin{pmatrix} 0 & g_{0m} \\ g_{m0} & g_{mn} \end{pmatrix} \tag{288}$$

mit $m, n \;=\; 1,\,2,\,3$. Aufgrund der expliziten Form des metrischen Tensors reduziert sich dies auf

$$T_{ij} \;=\; \left(\rho\,e^{\nu},\;\frac{p}{c^2}\,e^{\lambda},\;\frac{p}{c^2}\,r^2,\,\frac{p}{c^2}\,r^2\,\sin^2\theta\right) \tag{289}$$

für eine perfekte Flüssigkeit in Ruhe. Wenn wir dies in die Feldgleichungen einsetzen, sollten wir in natürlicher Weise eine Beziehung zwischen den geometrischen Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ und den Flüssigkeitsparametern $\rho(r)$ und $p(r)$ erhalten.

Um die linke Seite ausgedrückt durch $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ zu bekommen, ist es zunächst zweckmäßig den kontrahierten Riemann-Tensor R_{ij} zu berechnen. Da wir bereits formal alle Komponenten von R_{ij} berechnet haben, ist dies sehr einfach. So hatten wir

$$R_{00} \;=\; -\left(\tfrac{1}{2}\,\nu'\,e^{\nu-\lambda}\right)' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2\,e^{\nu-\lambda} - \tfrac{1}{2}\,\nu'\,e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right)\;. \tag{290}$$

Da wir nicht mehr im freien Raum sind, gilt nun $R_{00} \;\neq\; 0$. Ausrechnen ergibt

$$\begin{aligned} R_{00} \;&=\; -\tfrac{1}{2}\,\nu''e^{\nu-\lambda} - \tfrac{1}{2}\nu'\,(\nu'-\lambda')e^{\nu-\lambda} + \tfrac{1}{2}\nu'^2\,e^{\nu-\lambda} - \tfrac{1}{2}\,\nu'\,e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \\ &=\; e^{\nu-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{4}\,\nu'\,\lambda' - \frac{1}{4}\,\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right]\;. \end{aligned} \tag{291}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned} R_{11} \;&=\; \left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2}\right) - \tfrac{1}{2}\,\lambda'' + \frac{1}{4}\,\nu'^2 + \frac{1}{4}\,\lambda'^2 + \frac{2}{r^2} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\lambda'\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \end{aligned} \tag{292}$$

und

$$R_{22} = \frac{d^2}{d\theta^2}(\log|\sin\theta|) + \left(e^{-\lambda}\,r\right)' - 2\,e^{-\lambda} + \cot^2\theta$$
$$+\,e^{-\lambda}\,r\,\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \ . \tag{293}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich zu

$$R_{11} = \tfrac{1}{2}\,\nu'' - \frac{1}{4}\,\lambda'\,\nu' + \frac{1}{4}\,\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} \tag{294}$$

und

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left[1 + \tfrac{1}{2}\,r\,\nu' - \tfrac{1}{2}\,r\,\lambda'\right] - 1 \ . \tag{295}$$

Natürlich gilt wie früher

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta \ . \tag{296}$$

Die linke Seite der Feldgleichungen ist durch den Ricci-Tensor gegeben

$$G_{ij} = R_{ij} - \tfrac{1}{2}\,g_{ij}\,R \ . \tag{297}$$

Als nächstes müssen wir zunächst den Riemann-Skalar $R = R^i{}_i$ berechnen. Unter Verwendung des metrischen Tensors

$$g_{ij} = \left(e^{\nu},\ -e^{\lambda},\ -r^2,\ -r^2\sin^2\theta\right) ,$$
$$g^{ij} = \left(e^{-\nu},\ -e^{-\lambda},\ -\frac{1}{r^2},\ -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right) \tag{298}$$

erhöhen wir einen Index. Es ist $R^0{}_0 = g^{00}\,R_{00}$. Somit folgt

$$R^0{}_0 = e^{-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{4}\,\lambda'\,\nu' - \frac{1}{4}\,\nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right] ,$$
$$R^1{}_1 = -e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{1}{4}\,\lambda'\,\nu' + \frac{1}{4}\,\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r}\right] ,$$
$$R^2{}_2 = R^3{}_3 = -\frac{1}{r^2}\left\{e^{-\lambda}\left[1 + \tfrac{1}{2}\,r\,\nu' - \tfrac{1}{2}\,r\,\lambda'\right] - 1\right\} . \tag{299}$$

Wir summieren auf

$$R = -e^{-\lambda}\left[\nu'' - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\,\nu' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^2 + 2\frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2}\right] + \frac{2}{r^2} \ . \tag{300}$$

Damit läßt sich der Ricci-Tensor schreiben als

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \tfrac{1}{2}\, g_{00}\, R \;=\; e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}\, e^{\nu} \;, \\
G_{11} &= R_{11} - \tfrac{1}{2}\, g_{11}\, R \;=\; -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\, e^{\lambda} \;, \\
G_{22} &= R_{22} - \tfrac{1}{2}\, g_{22}\, R \;=\; e^{-\lambda}\left[\frac{r^2}{4}\,\nu'\,\lambda' - \frac{r^2}{4}\,\nu'^2 - \frac{r^2}{2}\,\nu'' - \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right] \;, \\
G_{33} &= R_{33} - \tfrac{1}{2}\, g_{33}\, R \;=\; G_{22}\sin^2\theta \;. \qquad (301)
\end{aligned}
$$

Somit lauten die Einsteinschen Gleichungen mit den obigen Ausdrücken für T_{ij} und G_{ij} explizit

$$
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;=\; e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \;, \qquad (302)
$$

$$
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\frac{p}{c^2} \;=\; \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) \;, \qquad (303)
$$

$$
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\frac{p}{c^2} \;=\; e^{-\lambda}\left[\frac{1}{4}\,\nu'\,\lambda' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu' - \lambda'}{r}\right)\right] \;. \qquad (304)
$$

Das gleiche Resultat wie (304) erhalten wir auch aus der Gleichung für G_{33}. Somit haben wir drei unabhängige Gleichungen vorliegen. Es gibt aber vier unbekannte Funktionen $\lambda(r),\ \nu(r),\ p(r),\ \rho(r)$. Wir haben aber auch noch die Freiheit, spezielle Annahmen über die physikalische Natur der Flüssigkeit zu machen. Wir können nämlich noch die *Zustandsgleichung* der Flüssigkeit vorgeben: $p \;=\; p(\rho)$. Aus den Gleichungen (303) und (304) können wir p eliminieren. Es folgt

$$
\frac{e^{\lambda}}{r^2} \;=\; \frac{1}{4}\,\nu'\,\lambda' - \frac{1}{4}\,\nu'^2 - \frac{1}{2}\,\nu'' + \frac{\nu' + \lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \;. \qquad (305)
$$

Diese Gleichung verknüpft nur die geometrischen Funktionen $\lambda(r)$ und $\nu(r)$. Wir könnten hier $\nu(r)$ beliebig vorgeben und finden $\lambda(r)$ durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Daraus können wir dann $p(r)$ und aus der Gleichung (302) $\rho(r)$ berechnen. Daraus folgt auch die Zustandsgleichung $p(\rho)$. Der Satz von Funktion $\lambda,\ \nu,\ p,\ \rho$, den man durch diese Prozedur erhält, stellt eine spezielle Lösung der Feldgleichungen dar. Es muß natürlich noch geprüft werden, ob diese Lösung auch physikalisch ist, d.h. ob gilt $p(r) \;\geq\; 0,\;\; \rho(r) \;\geq\; 0$.

Es werden nun einige allgemeine Untersuchungen durchgeführt, die nützlich für einige nachfolgende Betrachtungen sind. Wir addieren die Gleichungen (302) und (303). Mit

$$
C \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2} \qquad (306)
$$

folgt

$$- C \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{r} \, (\nu' + \lambda') \, . \tag{307}$$

Daraus schließen wir $\nu' + \lambda' \;>\; 0$ für jede physikalisch sinnvolle Lösung. Als nächstes differenzieren wir (303) nach r und erhalten

$$C \, \frac{p'(r)}{c^2} \;=\; -\frac{2}{r^3} + e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda' \nu'}{r} + \frac{2}{r^3} + \frac{\nu'}{r^2} - \frac{\nu''}{r} \right] \, . \tag{308}$$

Mit (305) können wir $\nu''(r)$ aus dieser Gleichung eliminieren. Damit folgt

$$\begin{aligned} C \, \frac{p'(r)}{c^2} \;&=\; e^{-\lambda} \, \frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda' \nu'}{r} \, e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \, \frac{2}{r^3} + \frac{\nu'}{r^2} \, e^{-\lambda} - \frac{\nu'}{r^2} \, e^{-\lambda} \\ &\quad - \frac{\lambda'}{r^2} \, e^{-\lambda} - \frac{2}{r^3} \, e^{-\lambda} + \frac{1}{2} \, \frac{\nu'^2}{r} \, e^{-\lambda} - \frac{1}{2} \, \frac{\nu' \lambda'}{r} \, e^{-\lambda} \\ &=\; e^{-\lambda} \, \frac{\nu'}{2r} \, (\lambda' + \nu') \; . \end{aligned} \tag{309}$$

Wir kombinieren dieses Resultat mit (307) und bekommen

$$\frac{p'(r)}{c^2} \;=\; -\tfrac{1}{2} \nu'(r) \left(\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right) \; . \tag{310}$$

Diese Gleichung führt direkt auf $\nu(r)$, wenn die Funktionen $\rho(r)$ und $p(r)$ bekannt sind.

Wir machen jetzt eine spezielle Annahme, indem wir von einer inkompressiblen Flüssigkeit ausgehen, d.h.

$$\rho(r) \;=\; \rho_0 \;=\; \text{const} \; . \tag{311}$$

Dies impliziert nicht notwendigerweise, daß die physikalische Flüssigkeitsdichte konstant ist, da das Konzept der Dichte von der Metrik abhängt und diese durchaus innerhalb der Flüssigkeit variieren kann. Der Fall $\rho_0 \;=$ const wurde bereits von Schwarzschild diskutiert. Wir multiplizieren nun (302) mit r^2 und erhalten

$$C \, \rho_0 \, r^2 \;=\; e^{-\lambda} (1 - \lambda' \, r) - 1 \;=\; \left(e^{-\lambda} \, r \right)' - 1 \; . \tag{312}$$

Die Integration ergibt

$$e^{-\lambda} \;=\; 1 + C \, \rho_0 \, \frac{r^2}{3} + \frac{\text{const}}{r} \; . \tag{313}$$

Wir fordern nun, daß die Metrik regulär ist im gesamten Innenbereich des Sterns, also auch bei $r \;=\; 0$. Dies bewirkt: const = 0. Für const $\neq$ 0 würde folgen $e^{\lambda} \;=\; 0$ und damit $g \;=\; \det |g_{ik}| \;=\; 0$. Wir definieren

$$\hat{R}^2 \;=\; \frac{3 \, c^2}{8 \pi \kappa \, \rho_0} \; . \tag{314}$$

$\hat{R}$ hat die Dimension einer Länge. Wir können dann schreiben

$$- g_{11} \;=\; e^{\lambda} \;=\; \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1} \quad . \tag{315}$$

Wir betrachten nun wieder die Beziehung (310). Es folgt

$$\frac{p'(r)}{c^2\,\rho_0 + p(r)} \;=\; -\tfrac{1}{2}\nu'(r) \tag{316}$$

und damit

$$\ln'(c^2\,\rho_0 + p(r)) \;=\; -\tfrac{1}{2}\nu'(r)\;. \tag{317}$$

Integration der logarithmischen Ableitung ergibt

$$\frac{p}{c^2} + \rho_0 \;=\; -\frac{D}{C}\,e^{-\nu/2}\;. \tag{318}$$

D ist hierbei eine Integrationskonstante. Die linke Seite dieser Gleichung trat bereits einmal bei (307) auf. Damit finden wir

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\lambda' + \nu') \;=\; D\,e^{-\nu/2} \;=\; -C\,\left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) \tag{319}$$

und weiter

$$r\,D\,e^{-\nu/2} \;=\; e^{-\lambda}\,\nu' - \left(e^{-\lambda}\right)'\;. \tag{320}$$

Da $e^{-\lambda}$ bereits bekannt ist, haben wir nun eine einfache Differentialgleichung für $\nu(r)$ vorliegen. Wir setzen $e^{-\lambda}$ ein

$$r\,D\,e^{-\nu/2} \;=\; \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)\,\nu'(r) + \frac{2r}{\hat{R}^2}\;. \tag{321}$$

Diese Differentialgleichung wollen wir nun lösen. Wir setzen

$$e^{\nu/2} \;=\; \gamma(r). \tag{322}$$

Dies ergibt

$$\gamma' \;=\; \frac{\nu'}{2}\,e^{\nu/2} \tag{323}$$

und weiter

$$\left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)\gamma'(r) + \frac{r}{\hat{R}^2}\,\gamma \;=\; \tfrac{1}{2}\,r\,D\;. \tag{324}$$

Wir sehen sofort, daß eine offensichtliche Teillösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist

$$\gamma_p \;=\; \tfrac{1}{2}\, D\, \hat{R}^2 \,. \tag{325}$$

Die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right) u'(r) + \frac{r}{\hat{R}^2}\, u(r) \;=\; 0 \tag{326}$$

hat die allgemeine Lösung

$$u(r) \;=\; B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2} \,. \tag{327}$$

Daher nimmt die Funktion $\gamma(r) \;=\; e^{\nu/2}$ die Gestalt an

$$e^{\nu/2} \;=\; \tfrac{1}{2}\, D\, \hat{R}^2 - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2} \,, \tag{328}$$

wobei B wieder eine Integrationskonstante ist. Damit haben wir auch die letzte unbekannte Komponente des metrischen Tensors bestimmt

$$g_{00} \;=\; e^{\nu} \;=\; \left[\tfrac{1}{2}\, D\, \hat{R}^2 - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \,. \tag{329}$$

Abkürzend führen wir die neue Bezeichnung ein

$$A \;=\; \tfrac{1}{2}\, D\, \hat{R}^2 \,. \tag{330}$$

Damit bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned} ds^2 \;=\; & \left[A - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}\right]^2 c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1} dr^2 \\ & - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \,. \end{aligned} \tag{331}$$

Diese Beziehung ist das wesentliche Resultat unserer Betrachtungen. Hierbei sind A und B zunächst beliebige Konstanten. Sie müssen durch Randbedingungen an der Oberfläche der Kugel bestimmt werden, d.h. zusätzliche physikalische Überlegungen müssen herangezogen werden. Weiterhin bemerken wir, daß das Linienelement nur bestimmt werden kann bis

$$r \;=\; \hat{R} \;=\; \sqrt{\frac{3\, c^2}{8\pi\kappa\, \rho_0}} \,. \tag{332}$$

An diesem Punkt wird g_{11} unendlich und g_{00} ist nicht länger reell.

Man beachte jedoch, daß r nur eine Markierungskoordinate ist. Wir können auch eine neue radiale Variable wählen

$$l \;=\; \int\limits_0^r \left(1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1/2} dr \;=\; \hat{R}\,\arcsin\frac{r}{\hat{R}}\;. \tag{333}$$

Damit wird aus dem Quadrat des Längenelementes

$$\begin{aligned} ds^2 \;&=\; \left[A - B\,\cos\frac{l}{\hat{R}}\right]^2 c^2\,dt^2 \\ &\qquad - \left[dl^2 + \hat{R}^2\sin^2\frac{l}{\hat{R}}\,\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right]\;. \end{aligned} \tag{334}$$

Es gilt dabei

$$\cos\frac{l}{\hat{R}} \;=\; \cos\arcsin\frac{r}{\hat{R}} \;=\; \cos\arccos\sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}} \;=\; \sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}}\;. \tag{335}$$

Ferner ist

$$\sin\frac{l}{\hat{R}} \;=\; \frac{r}{\hat{R}} \tag{336}$$

also

$$\hat{R}^2\sin^2\frac{l}{\hat{R}} \;=\; r^2\;. \tag{337}$$

Ebenso haben wir

$$\frac{dl}{dr} \;=\; \left[1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right]^{-1/2} \tag{338}$$

also

$$dl^2 \;=\; \left[1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}\right]^{-1} dr^2\;. \tag{339}$$

In dem Ausdruck (334) sind die scheinbaren Divergenzen verschwunden.

Wir können die innere Schwarschild-Metrik besser verstehen, wenn wir sie in isotrope Form bringen. Isotrope Koordinaten sind dadurch ausgezeichnet, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen die gleiche ist. Dies bedeutet, wir suchen eine radiale Variable L, so daß der raumartige Anteil des Linienelementes bis auf einen Faktor mit dem euklidischen Element

$$dL^2 + L^2\,\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)$$

übereinstimmt. Dazu setzen wir $l = l(L)$ und

$$\{l'(L)\}^2 = \frac{\hat{R}^2}{L^2} \sin^2 \frac{l}{\hat{R}} , \tag{340}$$

d.h.

$$l = 2\,\hat{R} \arctan L . \tag{341}$$

Daraus folgt

$$l' = \frac{2\,\hat{R}}{1 + L^2} . \tag{342}$$

Nach (340) gilt

$$\sin \frac{l}{\hat{R}} = l' \frac{L}{\hat{R}} = \frac{2\,\hat{R}}{1 + L^2} \frac{L}{\hat{R}} = \frac{2L}{1 + L^2} . \tag{343}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \sin \frac{l}{\hat{R}} &= \sin(2 \arctan L) = 2 \sin(\arctan L) \cos(\arctan L) \\ &= 2 \frac{L}{\sqrt{1 + L^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}} = \frac{2\,L}{1 + L^2} . \end{aligned} \tag{344}$$

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß wir mit dieser Substitution das Linienelement in isotropen Koordinaten erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(A - B \frac{1 - L^2}{1 + L^2} \right)^2 c^2\,dt^2 \\ &\quad - \frac{4\,\hat{R}^2}{(1 + L^2)^2} \left[dL^2 + L^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right) \right] . \end{aligned} \tag{345}$$

Dazu müssen wir nur noch zeigen

$$\begin{aligned} \cos \frac{l}{\hat{R}} &= \cos(2 \arctan L) = \cos^2(\arctan L) - \sin^2(\arctan L) \\ &= \frac{1}{1 + L^2} - \frac{L^2}{1 + L^2} = \frac{1 - L^2}{1 + L^2} . \end{aligned} \tag{346}$$

Damit haben wir drei verschiedene Formen des Quadrats des Längenelementes abgeleitet, die alle verschiedene Grundstrukturen haben.

Studien zur inneren Schwarzschild - Lösung

In den folgenden Diskussionen werden wir wieder zu unserer ursprünglichen radialen Koordinate r zurückkehren, denn wir wollen die innere Schwarzschild-Lösung mit der äußeren verbinden. Dieses Vorgehen wird es uns erlauben die bislang noch unbestimmten Integrationskonstanten A und B zu fixieren. In unseren Studien sind wir stets von einem Modellstern ausgegangen, der durch eine perfekte Flüssigkeitskugel mit dem Radius r_0 beschrieben wird. Ferner gilt normalerweise $r_0 \; < \; \hat{R}$. Außerhalb der Kugel gilt für das Quadrat des Bogenlängenelementes

$$ds^2 \;=\; \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\, c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{347}$$

mit

$$m \;=\; \frac{\kappa M}{c^2} \; .$$

Um die Konstante A zu bestimmen, nehmen wir nun an, daß der Druck der Flüssigkeit an der Oberfläche null wird und somit stetig in den Außenraum übergeht.

Wir hatten die folgende Gleichung abgeleitet

$$C\, \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \;=\; -D\, e^{-\nu/2} \; . \tag{348}$$

Wir setzen $e^{-\nu/2}$ ein und erhalten

$$C\, \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \;=\; \frac{-D}{A - B\left[1 - r^2/\hat{R}^2\right]^{1/2}} \; . \tag{349}$$

Mit der Forderung $p \;=\; 0$ bei $r \;=\; r_0$ folgt

$$C\,\rho \;=\; \frac{-D}{A - B\left[1 - {r_0}^2/\hat{R}^2\right]^{1/2}} \; . \tag{350}$$

Es galt $A \;=\; \frac{1}{2}\, D\, \hat{R}^2$ und $\hat{R}^2 \;=\; -3/(C\,\rho) \;=\; 3c^2/(8\pi\kappa\rho)$. Damit ergibt sich

$$C \;=\; -\frac{3}{\rho\, \hat{R}^2} \tag{351}$$

und

$$D \;=\; \frac{2A}{\hat{R}^2} \; . \tag{352}$$

Dies führt auf

$$3 \;=\; \frac{2A}{A - B\left[1 - r_0^2/\hat{R}^2\right]^{1/2}} \tag{353}$$

oder

$$A \;=\; 3B\left[1 - r_0^2/\hat{R}^2\right]^{1/2} \;. \tag{354}$$

Somit verbleibt nur noch die unbestimmte Konstante B in der Metrik. Um die Konstante B zu bestimmen, stellen wir eine weitere physikalische Forderung. Bei $r \;=\; r_0$ soll die innere Schwarzschild - Lösung stetig an die äußere Schwarzschild - Lösung anschließen. Wir vergleichen die Koeffizienten von dr^2 bei $r \;=\; r_0$.

$$1 - \frac{2m}{r_0} \;=\; 1 - \frac{2\kappa M}{r_0\, c^2} \;=\; 1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2} \;. \tag{355}$$

Ebenso vergleichen wir die Koeffizienten von dt^2

$$1 - \frac{2m}{r_0} \;=\; \left(A - B\left[1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right]^{1/2}\right)^2 \;=\; 4B^2\left(1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right) \;. \tag{356}$$

Daraus folgt

$$B^2 \;=\; \frac{1}{4} \tag{357}$$

und weiter

$$B \;=\; \frac{1}{2} \;. \tag{358}$$

Das Vorzeichen von B ist willkürlich gewählt. Schließlich haben wir

$$A \;=\; \frac{3}{2}\left[1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right]^{1/2} \;. \tag{359}$$

Es galt $\hat{R}^2 \;=\; 3c^2/(8\pi\kappa\rho)$. Einsetzen in (355) liefert

$$M \;=\; \frac{4\pi}{3}\, r_0^3\, \rho \;. \tag{360}$$

Wir haben nun das Linienelement innerhalb und außerhalb eines Sterns, dargestellt durch eine perfekte Flüssigkeit, vollständig bestimmt. Es gilt

$$\begin{aligned} ds^2 \;=&\; \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\hat{R}^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{\hat{R}^2}}\right)^2 c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/\hat{R}^2} \\ &- r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\varphi^2\right) \quad \text{für r} \;\leq\; \mathrm{r}_0 \;, \end{aligned} \tag{361}$$

mit

$$\hat{R}^2 \;=\; \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho}\;,$$

sowie

$$ds^2 \;=\; \left(1-\frac{2m}{r}\right)\, c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1-2m/r} - \; r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

$$\text{für r} \;\geq\; \text{r}_0\;, \tag{362}$$

mit

$$m \;=\; \frac{\kappa M}{c^2}\;.$$

Wir können nun die Schwarzschild - Lösung verwenden, um Grenzwerte für die Masse einer Flüssigkeitskugel abzuleiten. Als erstes bemerken wir, daß die äußere Schwarzschild - Lösung auf Werte von r beschränkt ist, die größer als der Schwarzschild - Radius sind.

$$r_0 \;>\; 2m \;=\; \frac{2\kappa M}{c^2}\;. \tag{363}$$

Dies beschränkt M auf

$$M \;<\; \frac{c^2\, r_0}{2\kappa}\;. \tag{364}$$

Die innere Lösung hingegen ist nur gültig für $r \;<\; \hat{R}$. Eine Verbindung der beiden Bogenlängenelemente ist also nur möglich für

$$r_0^2 \;<\; \hat{R}^2 \;=\; \frac{3c^2}{8\pi\kappa\rho}\;. \tag{365}$$

Wir verwenden nun einfach

$$\rho \;=\; \frac{3M}{4\pi r_0^3} \tag{366}$$

und setzen das in (365) ein

$$r_0^2 \;<\; \frac{3c^2}{8\pi\kappa}\,\frac{4\pi r_0^3}{3M}\;. \tag{367}$$

Dies ergibt

$$M \;<\; \frac{c^2}{2\kappa}\, r_0\;. \tag{368}$$

Dies ist genau die gleiche Beschränkung für M, die wir aus der Betrachtung des äußeren Linienelementes gewonnen hatten. Bei kleineren Radien als dem Schwarzschild - Radius erzeugen wir einen katastrophalen Effekt in der Metrik.

Einen stengeren Grenzwert für M erhalten wir aus der Druckgleichung

$$C\left(\frac{p}{c^2}+\rho\right) = \frac{-D}{A-B\left[1-r^2/\hat{R}^2\right]^{1/2}} \tag{369}$$

mit

$$C = -\frac{3}{\rho\hat{R}^2} \tag{370}$$

und

$$D = 2A/\hat{R}^2\ . \tag{371}$$

Damit der Druck innerhalb der Flüssigkeit niemals unendlich groß wird, darf der Nenner in (369) nicht verschwinden. Dies ist gewährleistet, wenn A größer als B ist. Somit folgt

$$\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}} > \frac{1}{2} \tag{372}$$

und damit

$$1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2} > \frac{1}{9}\ . \tag{373}$$

Dies führt auf

$$r_0^2 < \frac{8}{9}\hat{R}^2 = \frac{c^2}{3\pi\kappa\rho}\ . \tag{374}$$

Wir setzen ρ ein

$$r_0^2 < \frac{c^2}{3\pi\kappa}\frac{4\pi r_0^3}{3M}\ . \tag{375}$$

Damit bekommen wir sofort

$$M < \frac{4}{9}\frac{c^2\,r_0}{\kappa}\ . \tag{376}$$

Dieser Wert ist geringfügig kleiner als der bereits gefundene Grenzwert.

Wir betrachten den Koeffizienten K von dx^0 bei r = 0.

$$K = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}}-\frac{1}{2}\ . \tag{377}$$

Einsetzen von (374) führt auf

$$\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{8}{9}\frac{\hat{R}^2}{\hat{R}^2}}-\frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}-\frac{1}{2} \;=\; 0\;. \tag{378}$$

Also ist K stets positiv.

Nun wollen wir die Dichte ρ festhalten und einen Grenzwert für die Masse bestimmen. Aus $\rho \;=\; 3M/(4\pi r_0^3)$ folgt

$$r_0 \;=\; \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}\;. \tag{379}$$

Einsetzen in die Relation $M \;<\; c^2\, r_0/(2\kappa)$ liefert

$$M \;=\; \frac{c^2}{2\kappa}\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}\;. \tag{380}$$

Daraus folgt

$$M^2 \;=\; \frac{3}{32}\frac{c^6}{\pi\rho\kappa^3}\;. \tag{381}$$

Aus der Bedingung $M \;<\; \frac{4}{9}c^2 r_0/\kappa$ folgt

$$M^2 \;=\; \frac{16\,c^6}{243\pi\rho\kappa^3}\;. \tag{382}$$

Als nächsten Punkt wollen wir die physikalischen Konsequenzen der Annahme einer konstanten Dichte untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst die “physikalische” Dichte in der Flüssigkeit, die Masse dividiert durch das Volumen. Das physikalische radiale Intervall ist nicht das Koordinatenintervall dr, sondern

$$ds_r \;=\; \sqrt{g_{11}}\,dr\;. \tag{383}$$

Dies führt auf

$$ds_r \;=\; \left(1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1/2} dr\;. \tag{384}$$

Ähnlich folgt für die Koordinaten θ und φ

$$ds_\theta \;=\; \sqrt{g_{22}}\,d\theta \;=\; r\,d\theta\;, \tag{385}$$

$$ds_\varphi \;=\; \sqrt{g_{33}}\,d\varphi \;=\; r\,\sin\theta\,d\varphi\;. \tag{386}$$

Das physikalische Volumenelement ist daher

$$dV \;=\; ds_r\, ds_\theta\, ds_\varphi \;=\; \left(1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{-1/2} r^2\;\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr\;. \tag{387}$$

Dies unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Volumenelement $r^2\;\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$ durch den Faktor $(1-r^2/\hat{R}^2)^{-1/2}$, der größer als 1 ist. Für das totale Volumen erhalten wir

$$V \;=\; \int\!\!\int\!\!\int \frac{r^2\;\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr}{\left(1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}} \;=\; 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2\, dr}{\left(1-\frac{r^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}}\;. \tag{388}$$

Wir substituieren nun

$$\sin\alpha \;=\; \frac{r}{\hat{R}}\;, \tag{389}$$

$$\sin\alpha_0 \;=\; \frac{r_0}{\hat{R}}\;. \tag{390}$$

Dies ergibt

$$V \;=\; 4\pi\,\hat{R}^3 \int_0^{\alpha_0} \sin^2\!\alpha\, d\alpha\;, \tag{391}$$

denn es ist

$$\left(1-r^2/\hat{R}^2\right)^{1/2} \;=\; \left(1-\sin^2\!\alpha\right)^{1/2} \;=\; \cos\alpha \tag{392}$$

und mit $r \;=\; \hat{R}\;\sin\alpha$ folgt

$$\frac{dr}{d\alpha} \;=\; \hat{R}\;\cos\alpha\;. \tag{393}$$

Die Volumenintegration ergibt dann

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\hat{R}^3\,(\alpha_0 - \sin\alpha_0\;\cos\alpha_0) \\ &= 2\pi\hat{R}^3\left(\arcsin\frac{r_0}{\hat{R}} - \frac{r_0}{\hat{R}}\left(1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2}\right)\;. \end{aligned} \tag{394}$$

Für die meisten Fälle ist $r_0/\hat{R}$ eine kleine Zahl, so daß wir eine Taylor - Entwicklung durchführen können

$$\begin{aligned} \arcsin\frac{r_0}{\hat{R}} - \frac{r_0}{\hat{R}}\left(1-\frac{r_0^2}{\hat{R}^2}\right)^{1/2} &= \frac{r_0}{\hat{R}} + \left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^3\frac{1}{2\cdot 3} + \left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^5\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots \\ &\quad - \frac{r_0}{\hat{R}} + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^3 + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^5 + \ldots \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{r_0}{\hat{R}}\right)^5 + \ldots\;. \end{aligned} \tag{395}$$

Dies ergibt schließlich für das Volumen

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{r_0}{\hat{R}} \right)^2 + \dots \right] . \tag{396}$$

Daher ist die mittlere Dichte $< \rho >$ der Kugel

$$< \rho > \equiv \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r_0^3} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{r_0}{\hat{R}} \right)^2 + \dots \right] . \tag{397}$$

Wir verwenden $\rho = 3M/(4\pi r_0^3)$ und bekommen

$$< \rho > \equiv \frac{M}{V} = \rho \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{r_0}{\hat{R}} \right)^2 + \dots \right] . \tag{398}$$

Daher unterscheiden sich die mittlere Dichte und ρ um Terme der Ordnung $r_0^2/\hat{R}^2$. Bewirkt durch die Krümmung des Raumes unterscheiden sich $< \rho >$ und ρ.

Wir berechnen nun den Massendefekt

$$V\rho - M = V\rho \left[\frac{3}{10} \left(\frac{r_0}{\hat{R}} \right)^2 + \dots \right] . \tag{399}$$

Dieser Massendefekt kann dem Verlust an Energie durch das Zusammenpacken der Materie aufgrund der eigenen Gravitationsenergie zugeschrieben werden. In der klassischen Mechanik hat eine Kugel mit dem Radius r und der homogenen Dichte ρ an der Oberfläche das Potential

$$V(r) = -\kappa \frac{4\pi}{3} \rho \frac{r^3}{r} = -\frac{4\pi\kappa}{3} r^2 \rho . \tag{400}$$

Wenn wir den Radius um dr vergrößern, bringen wir die Materie $dM = 4\pi r^2 \rho \, dr$ vom Nullniveau auf das Energieniveau $V(r)$ und verlieren die Energie

$$dE(r) = dM \; V(r) = -\frac{16\pi^2 \, \kappa \, \rho^2}{3} r^4 \, dr . \tag{401}$$

Daher ergibt sich als Energieverlust durch das sphärische Packen durch Gravitation

$$E = \int_0^{r_0} dE = -\frac{16}{15} \pi^2 \kappa \rho^2 r_0^5 . \tag{402}$$

Der Massendefekt ist aber in erster Näherung

$$\Delta M = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \, \rho \, \frac{3}{10} r_0^2 \left(\frac{\rho 8\pi\kappa}{3 \, c^2} \right) = \frac{16}{15} \pi^2 \kappa \rho^2 \, r_0^5 / c^2 \tag{403}$$

und somit

$$\Delta M = -\frac{E}{c^2} . \tag{404}$$

Der Massendefekt wird also durch die Einsteinsche Energie - Massen - Relation in Rechnung gestellt.

Einführung in die Physik der Schwarzen Löcher

Als Schwarze Löcher bezeichnet man Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen, die das Gravitationsfeld kollabierender Massen beschreiben. Dieses Feld wird durch drei Parameter gekennzeichnet: durch die Masse M, den Drehimpuls L und die elektrische Ladung Q. Da aber - wie neuere Studien gezeigt haben - die Maximalladung eines Schwarzen Loches nur in der Größenordnung von etwa einem Coulomb liegen kann, hat der dritte Parameter keine weitreichenden Konsequenzen. Ein Beobachter im Außenraum kann diese drei Parameter durch Beobachtung der Bahnkurven ungeladener bzw. geladener Teilchen bestimmen. Andere Charakteristika der ursprünglichen Massenverteilung - etwa gravische, elektrische und magnetische Multipolmomente - gehen während der dynamischen Phase des Kollaps verloren. Sie werden abgestrahlt. Etwaige physikalische Eigenschaften, die die Quelle des Feldes vor dem Kollaps hatte (Baryonenzahl, ...) gehen ebenfalls beim Kollaps verloren. Als Nebenbemerkung erwähnen wir: Das Verhältnis zwischen Drehimpuls und dem durch die Rotation erzeugten magnetischen Moment gleicht dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons. Schwarze Löcher stellen also eine sehr eingeschränkte Menge der möglichen Endzustände dar.

Schwarze Löcher enthalten einen geschlossenen Ereignishorizont. Innerhalb dieser Fläche ist das Gravitationsfeld so stark, daß Teilchen, Lichtstrahlen und innen erzeugte zeitabhängige Felder das Gebiet nicht mehr verlassen können. Teilchen und Lichtstrahlen von außen können den Horizont durchdringen; sie brauchen dafür von einem entfernten Beobachter aus gesehen unendliche lange Zeit. Ein Beobachter kann den Horizont in endlicher Eigenzeit überwinden und sich im Prinzip jedenfalls von der Richtigkeit der Theorie überzeugen. Er kann aber nie nach außen darüber berichten.

Im Innern des Ereignishorizonts gibt es eine echte Singularität des Gravitationsfeldes, die sich während des Kollaps bildet. Glücklicherweise ist die Welt so beschaffen, daß wir wegen des Ereignishorizonts diese Singularität nicht sehen können ("cosmic censorship"), sie ist für die Physik in der Außenwelt ohne Bedeutung.

Wenn ein rotierender Stern sich sehr stark zusammenzieht, wird er wegen der Drehimpulserhaltung immer schneller rotieren und eventuell in einzelne Stücke zerreißen. Nur der Kern zieht sich weiter zusammen. Ein Stern kann im allgemeinen nur dann extrem kontrahiert werden, wenn er Drehimpuls an seine Umgebung abgeben kann. Dies kann durch Massenabstoßung oder durch Gravitationswechselwirkung mit anderen Massen geschehen.

Wir betrachten nun Nachweismöglichkeiten für die Existenz von Schwarzen Löchern.
a) Einzelne Schwarze Löcher im interstellaren Medium senden elektromagnetische Strahlung aus, wenn das umgebende Gas in das Loch hineinfällt und sich dabei aufheizt. Diese Strahlung kann im Prinzip gemessen werden.
b) Wenn ein Schwarzes Loch Teil eines Doppelsternsystems ist, dann zeigt der Hauptstern eine scheinbar unbegründete periodische Doppler-Verschiebung, die auf einen unsichtbaren Begleiter schließen läßt. Falls aus der Dynamik des Doppelsternsystems auf eine Masse $M > 3 M_\odot$ des Begleiters geschlossen werden muß, so kann es sich bei diesem Begleiter nicht um einen Weißen Zwerg oder Neutronenstern handeln.
c) Ist das Schwarze Loch Teil eines engen Doppelsternsystems, bei dem der Abstand der beiden Sterne mit dem Radius des Hauptsterns vergleichbar ist, so strömt Materie vom Stern auf das Schwarze Loch über. Diese Materie heizt sich dabei so stark auf, daß Röntgenstrahlen emittiert werden.

Röntgenquellen mit den gesuchten Eigenschaften wurden 1972 entdeckt. Seit 1973 weiß man mit einiger Wahrscheinlichkeit, daß Cygnus X1 tatsächlich ein Schwarzes Loch mit einer Masse von $M = 14 M_\odot$ ist. Die Schwierigkeit bei der Identifikation besteht generell in der Abgrenzung von der Möglichkeit eines Weißen Zwergs oder eines Neutronensterns. Helligkeitsunterschiede der beiden Partner stellen eine weitere Schwierigkeit dar. Der eine Stern kann den anderen Stern völlig überstrahlen. Im Fall von Cygnus X1 läßt sich die rasche Fluktuation im Röntgenspektrum und auch die Spektralverteilung der Strahlung sehr gut durch Materie erklären, die in ein Schwarzes Loch hineinfällt und dabei bis auf einige Millionen Grad aufgeheizt wird. Auch hier läßt sich aus der Dynamik des Systems die Masse der Röntgenquelle ermitteln, wobei als Untergrenze $M = 6 M_\odot$ und als wahrscheinlichster Wert $M = 14 M_\odot$ für Cygnus X1 folgt. Sowohl die Masse als auch die Spektralcharakteristik weisen daher bei Cygnus X1 auf ein Schwarzes Loch hin.

Ist in einem Doppelsternsystem ein Partner ein Schwarzes Loch, so kann die Ablenkung der Lichtstrahlen am Schwarzen Loch und ein möglicher Gravitationslinseneffekt zu dessen Indentifikation beitragen. Weiterhin erwähnen wir, daß die Metrik innerhalb eines rotierenden Schwarzen Loches noch nicht bekannt ist. Außerhalb des Ereignishorizonts gilt die sogenannte Kerr - Metrik. Da jedoch die Innenraumlösung noch nicht abgeleitet werden konnte (sofern sie überhaupt existiert), ist auch keine stetige Anpassung an die Außenraumlösung möglich. Generell muß noch bemerkt werden, daß ohne die Einbeziehung von Quanteneffekten, die Theorie der Schwarzen Löcher unvollkommen bleibt.

Die Explosion von Roten Riesen kann die Erzeugung von Weißen Zwergen oder Neutronensternen bewirken. Zur Beschreibung dieser Sterne benötigen wir realistische Zustandsgleichungen. Die Dichte für Weiße Zwerge beträgt etwa $\rho \simeq 10^6$ g/cm^3, die Dichte für Neutronensterne beträgt etwa $\rho \simeq 10^{14}$ g/cm^3. Dies entspricht etwa der normalen Kerndichte. Wir wollen nun einige qualitative Aspekte der Zustandsgleichung diskutieren. Wesentliche Eigenschaften des Sterns werden durch die Zentraldichte ρ_c bestimmt. Damit der Stern stabil ist muß es einen Radius r_0 geben, so daß gilt $p(r_0) = 0$. Der Sternradius und die totale Sternmasse $m(r_0)$ hängen von ρ_c ab. Weiße Zwerge entsprechen dicht gepackten Atomen. Da dies ein atomphysikalisches Problem ist, können in diesem Fall einigermaßen realistische Zustandsgleichungen angegeben werden. Trägt man die Masse der Sterne als Funktion von ρ_c auf, so steigt die Masse monoton an für 10^5 g/cm^3 $\leq \rho_c \leq 10^9$ g/cm^3. Die maximale Masse für einen Weißen Zwerg beträgt 1.2 $M_\odot$. Dies ist die Chandrasekhar-Grenze. Weiße Zwerge mit höheren Massen sind instabil und stellen daher ein zeitabhängiges Problem dar. Diese theoretische Vorhersage entspricht auch den bisherigen Beobachtungen. Für größere Massen werden die Elektronen über den inversen β-Prozess von den Protonen absorbiert, es entstehen Neutronen. Ein Neutronenstern hat typischerweise eine Ausdehnung von 10 km. Pulsare sind Neutronensterne in schneller Rotation. Bei Neutronensterne ist die Zustandsgleichung leider weniger gut bekannt. Die Bestimmung dieser Zustanfsgleichung ist eine der Hauptaufgaben der gegenwärtigen Kernphysik. $\rho = 10^{15}$ g/cm^3 und $M = 2.5\, M_\odot$ scheinen obere Grenzen für Neutronensterne zu sein. Als Grenzmasse für einen Stern hatten wir bereits abgeleitet

$$M^2 < \frac{16\, c^6}{243\, \pi\, \rho\, \kappa^3}\ . \tag{405}$$

Als nächsten Punkt betrachten wir die Metrik Schwarzer Löcher unter Verwendung der Schwarzschild - Lösung. Im Schwarschildschen Linienelement tritt eine Singularität bei $r = 2m$ auf. Bei diesem Radius ist g_{11} singulär, während g_{00} verschwindet. Aus $g_{00} = 0$ folgt, daß die Oberfläche bei $r = 2m$ eine Oberfläche unendlicher Rotverschiebung ist, denn die Rotverschiebung wird durch g_{00} festgelegt. Dies entspricht gerade dem Unterschied zwischen Eigenzeit und Koordinatenzeit. Licht, das von einem Atom auf dieser Oberfläche emittiert würde, wäre nicht sichtbar, da es bis zur Nullfrequenz verschoben wäre.

Für $r < 2m$ ändern sich die Vorzeichen von g_{00} und g_{11}. g_{11} wird positiv und g_{00} wird negativ. Dies zwingt uns dazu die physikalische Bedeutung von t und r als Zeit- und als radiale Markierung innerhalb des Schwarschild - Radius neu zu überdenken. Eine Weltlinie entlang der t-Achse mit $r,\ \theta,\ \varphi$ = const hat $ds^2 < 0$ und ist daher eine raumartige Kurve, während für eine Weltlinie entlang der r-Achse gilt $ds^2 > 0$. Dies ist daher eine zeitartige Kurve. Daher ist es natürlich nun r als Zeitmarkierung und t als radiale Markierung für Ereignisse innerhalb des Schwarzschild - Radius zu betrachten.

Nun verfolgen wir ds/c als Eigenzeitintervall entlang der Weltlinie eines Teilchens und fordern ds^2 soll positiv sein entlang eines solchen Weges. Daraus folgt, ein Teilchen kann sich niemals an einem konstanten Wert von r innerhalb des Schwarzschild - Radius aufhalten, denn dies würde $ds^2 < 0$ bedeuten.

All dies zeigt, daß in der Tat $r = 2m$ ein ungewöhnlicher Radius ist, aber dies bedeutet noch nicht notwendigerweise, daß die Raum-Zeit Geometrie bei $r = 2m$ singulär wird. Diese Singularität hängt hauptsächlich mit der Wahl der Koordinaten zusammen. Dies läßt sich zeigen, wenn man die Invarianten $R^i{}_i,\ R_{ijkl}R^{ijkl}$ oder g berechnet. Diese Größen bleiben bei $r = 2m$ endlich.

Wir werden zunächst das Verhalten eines Testkörpers verfolgen, der in die Schwarzschild - Singularität fällt. Danach werden wir die Kruskal-Koordinaten (1960) einführen, die keine Singularitäten außer der am Ursprung enthalten. Wir werden sehen, daß die Schwarzschild - Koordinaten gut geeignet sind, die Geometrie im Bereich $2m < r < \infty$ und $-\infty < t < \infty$ zu beschreiben. Aber eine andere Wahl ist besser geeignet für das Innere der Schwarzschild - Kugel.

Wir betrachten die radial, zum Zentrum hin gerichtete Bewegung im Rahmen der Schwarzschild-Geometrie. Die Euler-Lagrange Gleichungen für r und t als Funktion von s hatten wir bereits abgeleitet. Wir hatten

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = l = \text{const} , \qquad (406)$$

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2\, l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} . \qquad (407)$$

Radiale Bewegung impliziert für den Drehimpulsterm $h = 0$. Ferner wollen wir für große Werte von r haben $t = s/c$, also die Relation der speziellen Relativitätstheorie erzielen. Daraus folgt sofort $l = 1/c$. Somit ergibt sich

$$\dot{t} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} , \qquad (408)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2m}{r} . \tag{409}$$

Zwei Standpunkte zur Beschreibung der radialen Bewegung sind nun von Interesse. Einer ist die radiale Position als Funktion der Eigenzeit s/c des Testteilchens. Eine andere radiale Position wird als Funktion der Koordinatenzeit bestimmt. Dies entspricht einerseits dem Eigensystem des Testteilchens sowie andererseits dem System eines Beobachters in Ruhe, der weit weg von der Zentralmasse den Fall betrachtet.

Wir wollen zunächst r als Funktion von s bestimmen. Aus

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}} \tag{410}$$

folgt

$$\frac{dr\,\sqrt{r}}{\sqrt{2m}} = -ds . \tag{411}$$

Integration ergibt

$$\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(r^{3/2} - r_0^{3/2}\right) = s_0 - s , \tag{412}$$

wobei r_0 die Anfangsposition bei s_0 ist. Es tritt keine Singularität bei $r = 2m$ auf. Das Testteilchen kann stetig in endlicher Eigenzeit nach $r = 0$ fallen.

Wir beschreiben jetzt die Bewegung ausgedrückt durch die Koordinatenzeit t. Wir bilden dr/dt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -c\sqrt{\frac{2m}{r}}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) . \tag{413}$$

Die Integration läßt sich im Prinzip analytisch durchführen. Wir wollen hier jedoch nur die Grenzfälle $r \gg 2m$ und $r \sim 2m$ betrachten. Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} -\,c\,dt &= dr\sqrt{\frac{r}{2m}}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = dr\sqrt{\frac{r}{2m}}\,\frac{r}{r\,(1-2m/r)} \\ &= dr\sqrt{\frac{r}{2m}}\,\frac{r}{r-2m} . \end{aligned} \tag{414}$$

Für $r \gg 2m$ folgt

$$-\,c\,dt \simeq \sqrt{\frac{r}{2m}} \tag{415}$$

und daher

$$-\,c\,(t - t_0) \simeq dr\,\frac{2}{3\sqrt{2m}}\left(r^{3/2} - r_0^{3/2}\right) . \tag{416}$$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie in (412). Für $r \sim 2m$ haben wir hingegen

$$- c\,dt \simeq dr\,\frac{2m}{r-2m}\ . \tag{417}$$

Damit folgt

$$- c\,(t-t_0) \simeq 2m\,\ln(r-2m) \tag{418}$$

und weiter

$$e^{-c(t-t_0)/2m} \simeq r-2m\ . \tag{419}$$

Daraus wird ersichtlich, daß als Funktion der Koordinatenzeit der Radius $r = 2m$ angenähert, aber niemals ganz erreicht wird.

Die Kruskal - Metrik

Wir wollen nun die Kruskal - Koordinaten einführen, um die gesamte Schwarzschild - Geometrie befriedigend beschreiben zu können. Zunächst betrachten wir die Lichtausbreitung, ausgedrückt durch Schwarzschild - Koordinaten. Die Weltlinien des Lichtes sind charakterisiert durch $ds^2 \;=\; 0$. Daraus folgt für die radiale Bewegung eines Lichtstrahles

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \, c^2 \, dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \, dr^2 \;=\; 0 \; . \tag{420}$$

Die Koordinatengeschwindigkeit des Lichtes ist damit gegeben durch

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \;=\; c^2 \, \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \; . \tag{421}$$

Bei $r \;=\; 2m$ verschwindet die Koordinatengeschwindigkeit des Lichtes. Dies ist eine unerwünschte Eigenschaft der Schwarzschild - Koordinaten. Wir wollen nun eine Tranformation von den Koordinaten r und t auf die Koordinaten u und v durchführen, so daß das Linienelement die Form annimmt

$$ds^2 \;=\; f^2(u,v) \, \left(dv^2 - du^2\right) - r^2 \, \left(d\theta^2 + \sin^2\!\theta \, d\varphi^2\right) \; . \tag{422}$$

Berechnen wir wieder die radiale Geschwindigkeit des Lichtes, so folgt

$$0 \;=\; f^2(u,v) \, \left(dv^2 - du^2\right) \tag{423}$$

und damit

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 \;=\; 1 \; , \tag{424}$$

vorausgesetzt f^2 hat keine Nullstellen. Daher haben wir in den u und v Koordinaten keine derartige Schranke wie bei den Schwarzschild - Koordinaten.

Wir werden nun Differentialgleichungen ableiten, die die Transformation von $r, \; t$ nach $u, \; v$ erlauben und die die Funktion f bestimmen. Die Winkelkoordinaten θ und φ werden nicht geändert. Die Fundamentaltransformation des metrischen Tensors

$$g_{ij} \;=\; \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \, \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \, \hat{g}_{kl} \tag{425}$$

und des Linienelements führt auf die folgenden Differentialgleichungen

$$1 - \frac{2m}{r} = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} \right)^2 \right] , \tag{426}$$

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] , \tag{427}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial r} . \tag{428}$$

Die Vorzeichen von u und v werden durch diese Gleichungen nicht fixiert. (426) resultiert aus dem g_{00}-Anteil des metrischen Tensors, (427) folgt aus dem g_{11}-Anteil, und (428) wird durch den Mischterm bestimmt. (428) ergibt sich aus dem Zusammenhang

$$g_{01} = \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^0} \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^1} g_{00} + \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^0} \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^1} g_{11} . \tag{429}$$

Wir führen einen neuen radialen Parameter ξ und eine Funktion $F(\xi)$ ein

$$\xi = r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| , \tag{430}$$

$$F(\xi) = \frac{1 - 2m/r}{f^2(r)} . \tag{431}$$

Hierbei haben wir angenommen, daß eine Funktion f gefunden wird, die nur von r abhängt. Genau diese Annahme wird uns auf die Kruskal - Form führen und die Koordinatensingularität bei $r = 2m$ beseitigen.

Damit können wir die obigen Differentialgleichungen schreiben als

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} \right)^2 = F(\xi) . \tag{432}$$

Dies entspricht (426). Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dr} &= 1 + \frac{2m \frac{1}{2m}}{\frac{r}{2m} - 1} = \frac{\frac{r}{2m} - 1 + 1}{\frac{r}{2m} - 1} \\ &= \frac{r}{r - 2m} = \frac{1}{1 - 2m/r} \end{aligned} \tag{433}$$

und

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 . \tag{434}$$

Damit haben wir aus (427)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = -F(\xi) \tag{435}$$

sowie nach (428)

$$\frac{\partial u}{\partial x^0}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial x^0}\,\frac{\partial v}{\partial \xi}\ . \tag{436}$$

Wir addieren (432) und (435) und alternativ addieren bzw. subtrahieren wir dazu das Doppelte von (436). Es folgt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2\ , \tag{437}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2\ . \tag{438}$$

Für die erste Gleichung wählen wir ein positives Vorzeichen der Wurzel, für die zweite Gleichung ein relatives Minuszeichen der Wurzel. Die Wahl des gleichen Vorzeichens würde die Jacobi - Determinante zum Verschwinden bringen. Es folgt daher

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\ , \tag{439}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\ . \tag{440}$$

und weiter

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\ , \tag{441}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0}\ . \tag{442}$$

Die letzte Gleichung führt auf

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\,\frac{\partial u}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{\partial u}{\partial \xi}\ . \tag{443}$$

Wir bekommen also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0\ , \tag{444}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0\ . \tag{445}$$

Daher erfüllen u und v beide die Wellengleichung in x^0 und ξ. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist aber eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion von $x^0 \pm \xi$. Damit lauten die Lösungen

$$v = h(\xi + x^0) + g(\xi - x^0) \ , \tag{446}$$

$$u = h(\xi + x^0) - g(\xi - x^0) \ , \tag{447}$$

wobei h und g noch zu bestimmen sind. Gleichung (436) ist automatisch erfüllt. Wir behaupten nun, die Gleichungen (432) und (435) führen auf

$$-\,4h'(\xi + x^0)\, g'(\xi - x^0) = F(\xi) \ . \tag{448}$$

Dies wollen wir rasch beweisen. Es ist

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial h(\xi + x^0)}{\partial x^0} + \frac{\partial g(\xi - x^0)}{\partial x^0} \ . \tag{449}$$

Mit $p = \xi + x^0$, $q = \xi - x^0$ und $\partial p/\partial x^0 = 1$, $\partial p/\partial \xi = 1$, $\partial q/\partial \xi = 1$, $\partial q/\partial x^0 = -1$ folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial h(p)}{\partial p} - \frac{\partial g(q)}{\partial q} \tag{450}$$

und weiter

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 = h'^2 + g'^2 - 2\,h'\,g' \ . \tag{451}$$

Genauso gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} = \frac{\partial h(\xi + x^0)}{\partial x^0} - \frac{\partial g(\xi - x^0)}{\partial x^0} \tag{452}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} = \frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial q} \tag{453}$$

Dies ergibt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 = h'^2 + g'^2 + 2\,h'\,g' \ . \tag{454}$$

Also folgt in der Tat zusammengefaßt

$$-\,4\,h'\,g' = F(\xi) \ , \tag{455}$$

wobei der Strich die Ableitung in bezug auf das Argument bedeutet.

Wir teilen nun die Regionen auf und betrachten zunächst das Gebiet $r \geq 2m$. Aus der Definition von F erkennen wir, daß es positiv ist. Wir differenziern (455) nach ξ und x^0 und erhalten

$$F'(\xi) \;=\; -4\,\frac{\partial h'}{\partial \xi} g' - 4\,h'\,\frac{\partial g'}{\partial \xi} \;=\; -4\,h''\,g' - 4\,h'\,g'' \tag{456}$$

und

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} \;=\; \frac{h''}{h'} + \frac{g''}{g'} \tag{457}$$

sowie

$$0 \;=\; \frac{h''}{h'} - \frac{g''}{g'}. \tag{458}$$

Die Addition von (457) und (458) führt auf

$$[\log\, F(\xi)]' \;=\; 2\,\left[\log\, h'(\xi + x^0)\right]' \;. \tag{459}$$

Wir betrachten nun ξ und $y \;\equiv\; \xi + x^0$ als unabhängige Variable. Daher müssen beide Seiten von (459) konstant sein. Wir benennen const = η. Aus (459) und (458) sehen wir, daß die Lösungen Exponentialfunktionen sind. Die Lösungen lauten

$$\begin{aligned} h(y) &= \tfrac{1}{2}\,e^{\eta y} \;, \\ g(y) &= -\tfrac{1}{2}\,e^{\eta y} \;, \\ F(\xi) &= \eta^2\,e^{2\eta\xi} \;. \end{aligned} \tag{460}$$

Damit folgt bezüglich (457)

$$2\eta \;=\; \frac{\eta^2}{\eta} + \frac{\eta^2}{\eta} \;=\; 2\eta \tag{461}$$

und bezüglich (458)

$$0 \;=\; \frac{\eta^2}{\eta} - \frac{\eta^2}{\eta} \;. \tag{462}$$

Das relative Vorzeichen von h und g ist negativ, vorbestimmt durch $F \; > 0$. Aus den Definitionen von ξ und $F(\xi)$ sowie aus (460) folgt schließlich

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{2m\eta} \; e^{\eta r}\; \cosh\eta x^0 \;, \\ v &= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{2m\eta} \; e^{\eta r}\; \sinh\eta x^0 \;, \\ f^2 &= \frac{2m}{\eta^2\,r}\,\left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1-4m\eta} \; e^{-2\,\eta r} \;. \end{aligned} \tag{463}$$

Wir prüfen nach, ob dies in der Tat die richtigen Lösungen sind. Es muß gelten

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 \;=\; F(\xi) \;=\; \frac{1-2m/r}{f^2(r)}\,. \tag{464}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x^0} &= \left(\frac{r}{2m}-1\right)^{2m\eta} e^{\eta r}\,\eta\,\cosh\eta x^0\,, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 &= \left(\frac{r}{2m}-1\right)^{4m\eta} e^{2\eta r}\,\eta^2\cosh^2\eta x^0\,, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 &= \left(\frac{r}{2m}-1\right)^{4m\eta} e^{2\eta r}\,\eta^2\sinh^2\eta x^0\,. \end{aligned} \tag{465}$$

Somit folgt

$$\left(\frac{r}{2m}-1\right)^{4m\eta} e^{2\eta r}\,\eta^2 \;=\; \frac{1-2m/r}{\left(\frac{r}{2m}-1\right)^{1-4m\eta}}\,e^{2\eta r}\,\frac{\eta^2 r}{2m} \tag{466}$$

und weiter

$$\frac{r}{2m}-1 \;=\; (1-2m/r)\,\frac{r}{2m}\,, \tag{467}$$

was zu beweisen war. Damit bleibt nur noch die Bestimmung des bisher beliebigen Parameters η. Dazu fordern wir, daß f^2 keine Nullstelle oder Singularität bei $r \;=\; 2m$ aufweist. Damit folgt $\eta \;=\; 1/4m$. Damit verschwindet auch ds^2 nur auf dem Lichtkegel.

Die gesuchte Transformation lautet schließlich

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{r}{2m}-1}\;e^{r/4m}\,\cosh\frac{x^0}{4m}\,, \\ v &= \sqrt{\frac{r}{2m}-1}\;e^{r/4m}\,\sinh\frac{x^0}{4m}\,, \\ f^2 &= \frac{32\,m^3}{r}\,e^{-r/2m}\,. \end{aligned} \tag{468}$$

Der damit definierte Bereich der u, v - Ebene gilt für $r \;\geq\; 2m$ und $u \;\geq\; |v|$. Für jedes endliche x^0 korrespondiert die Grenzlinie $r \;=\; 2m$ in der r, t - Ebene zum Punkt $u \;=\; v \;=\; 0$ in der u, v - Ebene. $x^0 \;\rightarrow\; \infty$ entspricht $u \;=\; v$ und $x^0 \;\rightarrow\; -\infty$ entspricht $u \;=\; -v$.

Wir invertieren die Transformation

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)\, e^{r/2m}\ , \\ \frac{v}{u} &= \tanh\frac{x^0}{4m}\ . \end{aligned} \tag{469}$$

Daraus folgt, die Linien mit konstantem r entsprechen Hyperbeln und die mit konstantem x^0 entsprechen Strahlen (Geraden) durch den Nullpunkt. Für $r \to 2m$ nähern sich die Hyperbeln den Geraden $u = |v|$, aber für $r = 2m$ degenerieren die Hyperbeln zum Punkt $u = v = 0$.

Für $r < 2m$ müssen wir dieselbe Ableitung wiederholen. Nun ist F negativ. Es folgt, daß nun das relative Vorzeichen von g und h positiv gewählt werden muß. Mit den selben Rechenschritten wie zuvor erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}}\, e^{r/4m}\ \sinh\frac{x^0}{4m}\ , \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}}\, e^{r/4m}\ \cosh\frac{x^0}{4m}\ , \\ f^2 &= \frac{32\, m^3}{r}\, e^{-r/2m}\ . \end{aligned} \tag{470}$$

Nach dieser Transformation entspricht $r < 2m$ dem Bereich $v > |u|$, dies bezeichnen wir als den Bereich II. Die beiden gefundenen Transformationen schließen an den Grenzen $x^0 = \infty$ und $x^0 = -\infty$ aneinander an. Wir kehren auch diese Transformation für $r < 2m$ um und finden

$$\begin{aligned} v^2 - u^2 &= \left(1 - \frac{r}{2m}\right)\, e^{r/2m}\ , \\ \frac{u}{v} &= \tanh\frac{x^0}{4m}\ . \end{aligned} \tag{471}$$

Damit erhalten wir wieder Hyperbeln und Strahlen in II für konstante Werte von r und t. Der Ursprung $r = 0$ entspricht der Hyperbel $v^2 - u^2 = 1$.

In Kruskal - Koordinaten erhalten wir also für das Linienelement

$$ds^2 = f^2(u,v)\left(dv^2 - du^2\right) - r^2\ \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{472}$$

mit

$$f^2 = \frac{32\, m^3}{r}\, e^{-r/2m} \tag{473}$$

als Lösung der Einstein - Gleichungen. Diese Lösung ist nirgends singulär außer am Ursprung. Nur entlang der Hyperbel $v^2 - u^2 = 1$, dies entspricht $r = 0$, erhalten wir eine Singularität des Riemann-Tensors. Lichtstrahlen mit $ds^2 = 0$ bewegen sich auf Geraden $(du/dv)^2 = 1$. u dient somit als globale radiale Koordinate, während v eine globale Zeitmarkierung ist.

Wir wollen nun im Rahmen der Kruskal - Koordinaten das Schicksal eines Lichtstrahles verfolgen, der in ein Schwarzes Loch fällt. Dies entspricht der Linie A im Diagramm. Er hat die Steigung -1. Ausgedrückt durch u und v ist die Trajektorie also recht einfach. Er beginnt bei $r > 2m$ und endlichem x^0, geht nach $r = 2m$ und schneidet die Linie bei $x^0 \to \infty$. Danach fällt r weiter, aber auch x^0 sinkt. Wir können also das Verhalten des Lichtstrahls nach der $x^0 = \infty$ Linie untersuchen. Auch dies zeigt, daß x^0 keine geeignete Zeitmarkierung ist. Auch für Lichtstrahlen, die von innen emittiert werden und sich auf die Schwarzschild - Kugel zu bewegen, bleiben die Kruskal - Koordinaten sinnvoll. Wir betrachten den Lichtstrahl B. r wächst an, aber x^0 fällt; dann hat er die Linie $x^0 = -\infty$ zum Außenraum zu kreuzen, wo die Ausbreitung wieder normal ist. Vom Außenraum her ist klar, daß Licht von innen von der Schwarzschild - Kugel total absorbiert wird. Da Licht während seiner Ausbreitung den Ursprung der Zeit $x^0 = -\infty$ kreuzen muß, bleibt zweifelhaft, ob es jemals beobachtet werden kann. Hieraus folgt die Bezeichnung "Schwarzes Loch". Für alle massiven Teilchen gilt natürlich das Gleiche, da sie sich innerhalb des Lichtkegels bewegen $(dv/du)^2 > 1$. Das Schwarze Loch ist eine Ein-Weg-Membran.

Ergänzungen zum relativistischen Energie-Impuls Tensor

In unserer ursprünglichen Diskussion des Energie-Impuls Tensors waren wir von einer idealen Flüssigkeit ausgegangen, d.h. es galt $p = 0$. In der inkohärenten, nichtwechselwirkenden Materie hatten wir irreversible Vorgänge vernachlässigt. Es galt

$$T^{ij} = \rho(x)\, u^i(x)\, u^j(x) \tag{474}$$

mit $u^i = dx^i/ds$. Ferner hatten wir bereits die Relationen $T^{00} = \gamma^2\,\rho$, $T^{0m} = \rho\, v^m/c$ und $T^{mn} = \rho\, v^m v^n/c^2$ mit $m, n = 1, 2, 3$ diskutiert. Aus dem Verschwinden der Divergenz des Energie - Impuls Tensors resultierten die Bewegungsgleichungen. Aus

$$T^{0i}_{\ |i} = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v}\right] \tag{475}$$

folgte

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v} = 0 \tag{476}$$

und somit die Kontinuitätsgleichung der klassischen Hydrodynamik. Aus

$$T^{mi}_{\ |i} = \frac{\rho}{c^2}\left[\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v^m\right] \tag{477}$$

ergab sich

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v^m = 0\,. \tag{478}$$

Dies ist die Eulersche Ableitung, die den kräftefreien hydrodynamischen Fluß beschreibt.

Wir wollen jetzt innere Kräfte, die mit dem Druck verknüpft sind, in Rechnung stellen. Speziell betrachten wir eine ideale Flüssigkeit, die charakterisiert ist durch die Eigendichte $\rho(x)$, die Vierergeschwindigkeit des Flusses $u^i(x)$ und durch ein skalares Druckfeld $p(x)$. Den Materieanteil des Energie-Impuls Tensors bezeichnen wir mit $M^{ij} = \rho\, u^i(x)\, u^j(x)$. Wir wollen zeigen, daß durch Einbeziehung des Druckes in T^{ij} nach Divergenzbildung die richtigen Bewegungsgleichungen der klassischen Hydrodynamik resultieren.

Wir betrachten zunächst den klassischen Limes kleiner Geschwindigkeiten und kleiner Drucke, so daß wir Terme der Ordnung v^2/c^2 und $p\,(v/c)$ vernachlässigen können.

Der Druck soll ferner nur den Materiefluß beeinflussen, nicht aber die Elastizitätseigenschaften der Materie. Viskositätseffekte werden vollständig ausgeschlossen. Mit diesen Annahmen können wir wieder für die Kontinuitätsgleichung schreiben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \ = \ 0 \ . \tag{479}$$

Die Kraftgleichung ändert sich nun zu

$$\rho \left(\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^m \right) \ = \ f^m \ = \ -\frac{\partial p}{\partial x^m} \ = \ \rho \frac{D v^m}{D t} \ . \tag{480}$$

Die Beutung dieser Gleichung ist evident. Durch den Druckgradienten $-\partial p/\partial x^m$ wird ein Volumenelement beschleunigt und ein Beobachter in der Flüssigkeit erfährt die Beschleunigung Dv^m/Dt. Dies entspricht also gerade dem zweiten Newtonschen Gesetz. Sollten äußere Kräfte wirken, müßte man den Term mit f^m modifizieren. Diese Gleichung ist noch nicht relativistisch invariant. Wir müssen noch eine Tensorgestalt der Gleichung (480) ableiten, die die Bedingung der relativistischen Kovarianz befriedigt.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus der Forderung

$$M^{0i}_{\ \ |i} \ = \ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) \ = \ 0 \ . \tag{481}$$

Die Bewegungsgleichung muß jetzt aber ausgedrückt werden durch

$$M^{mi}_{\ \ |i} \ = \ \frac{\rho}{c^2} \frac{D v^m}{D t} \ = \ \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^m \right) \ = \ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^m} \ \neq \ 0 \ . \tag{482}$$

Bei Anwesenheit eines inneren Druckes ist M^{ij} also nicht divergenzfrei. Um dieses Problem zu lösen betrachten wir eine 3×3 Matrix S^{mn} mit der Eigenschaft

$$S^{mn}_{\ \ |n} \ = \ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^m} \ . \tag{483}$$

Diese Matrix ist bekannt als der dreidimensionale Drucktensor, seine Divergenz stellt eine Kraft dar. Ein Drucktensor, der die Forderung (483) erfüllt, ist gegeben durch

$$S^{mn} \ = \ \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{484}$$

Mit Hilfe des Drucktensors können wir die Bewegungsgleichung insgesamt schreiben als

$$M^{mi}_{\ \ |i} + S^{mn}_{\ \ |n} \ = \ 0 \ . \tag{485}$$

Wir erweitern S^{mn} zu einer 4×4 Matrix

$$S^{ij} \;=\; \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{486}$$

Damit folgt

$$\left(M^{ij} + S^{ij}\right)_{|j} \;=\; T^{ij}_{\;\;|j} \;=\; 0 \;, \tag{487}$$

wobei T^{ij} explizit ausgeschrieben lautet

$$T^{ij} \;=\; \rho \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & 0 & 0 & 0 \\ v_y/c & 0 & 0 & 0 \\ v_z/c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{488}$$

Dies gilt im Rahmen unserer klassischen Näherung.

T^{ij} ist noch kein Tensor, denn die Relation zwischen $\vec{v}$, p und T^{ij} ist nicht kovariant. Wir wollen also verallgemeinern. Für M^{ij} kennen wir das Resultat schon. Wir suchen noch eine geeignete Form für S^{ij}. Es gibt nur zwei symmetrische Tensoren vom Rang 2, die als Basistensoren mit der Flüssigkeit verknüpft werden können, nämlich g^{ij} und $u^i\, u^j$. Wir machen als Ansatz

$$S^{ij} \;=\; \frac{p}{c^2} \left[\alpha\, u^i\, u^j + \beta\, g^{ij}\right] \;, \tag{489}$$

wobei α und β noch unbekannte Koeffizienten sind, die wir zu bestimmen haben. Für kleine Geschwindigkeiten und Drucke müssen wir das klassische Resultat erhalten. Die entsprechende Reduktion liefert

$$S^{ij} \;=\; \frac{p}{c^2} \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] . \tag{490}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\alpha \;=\; 1$ und $\beta \;=\; -1$. Damit haben wir

$$S^{ij} \;=\; \frac{p}{c^2} \left(u^i\, u^j - g^{ij}\right) \tag{491}$$

und insgesamt für den vollständigen Energie - Impuls Tensor

$$T^{ij} \;=\; \rho\, u^i\, u^j + \frac{p}{c^2} \left(u^i\, u^j - g^{ij}\right) \;. \tag{492}$$

Gravitationskollaps eines Gasballes

Bei der Explosion eines Roten Riesen mit einem dichten Kern hoher Masse gibt es keinen stabilen Endzustand. Ein Gravitationskollaps findet statt . Da der Druck nicht in der Lage ist, den Kollaps aufzuhalten, vernachlässigen wir ihn in der folgenden Betrachtung. Wir studieren den Kollaps eines sphärisch symmetrischen Gasballes, der frei zusammenfällt. Der Radius sei r_d, die homogene, aber zeitabhängige Dichte sei ρ. Die äußere Metrik ist wieder die Schwarzschild - Metrik. Die innere Metrik sei diesmal vom Robertson - Walker Typ und wir nehmen in diesem Bereich wieder ein mitbewegtes Koordinatensystem an, in dem das Gas in Ruhe ist. Der einzige Unterschied zur kosmologischen Behandlung ist, daß sich die mitbewegte radiale Koordinate u auf den endlichen Bereich bis u_d erstreckt. u_d wird im mitbewegten Koordinatensystem betrachtet. Die physikalische Bewegung des Gasballes wird durch $R(t)$ bestimmt. Wir können die mathematischen Betrachtungen aus den früheren Diskussionen einfach übernehmen. Wir setzen $k = 0$ und $\Lambda = 0$. Somit gilt im Außenraum

$$ds^2 \;=\; \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\, c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{493}$$

und im Innenraum

$$ds^2 \;=\; c^2 d\tau^2 - R^2(\tau)\left[du^2 + u^2\, \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]\; . \tag{494}$$

Ferner gelten wie bei unseren kosmologischen Betrachtungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;&=\; \frac{3R'^2}{R^2\, c^2}\,, \\ \frac{4\pi\kappa}{c^2}\,\rho \;&=\; -\frac{3R''}{R\, c^2}\,. \end{aligned} \tag{495}$$

Die Robertson - Walker Zeitkoordinate wurde mit τ bezeichnet, um sie von der Schwarzschild - Koordinate t zu unterscheiden. Für uns besteht somit die Aufgabe, ein abgeschnittenes Friedmann - Universum an die äußere Schwarzschild - Metrik anzuschließen. Wir setzen u und r in Relation und müssen zeigen, daß die Metriken stetig ineinander übergehen. Wir identifizieren

$$r_d(t) \;=\; R(\tau)\, u_d\; . \tag{496}$$

Bezüglich R wissen wir bereits, daß gilt

$$R'^2 \;=\; \frac{D_0}{R}\, c^2\; . \tag{497}$$

Daraus folgt

$$(u_d\,R')^2 \;=\; \frac{D_0\,u_d^3}{u_d\,R}\,c^2\;. \tag{498}$$

Dies hat die Lösung

$$(u_d\,R)^{3/2} \;=\; (u_d\,R(0))^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{D_0\,u_d^3}\,c\tau\;. \tag{499}$$

Zur Prüfung differenzieren wir

$$\frac{3}{2}\,(u_d\,R)^{1/2}\;R'\,u_d \;=\; -\frac{3}{2}\sqrt{D_0\,u_d^3}\,c \tag{500}$$

Daraus folgt

$$R'^2\,u_d^2 \;=\; \frac{D_0\,u_d^3}{u_d\,R}\,c^2\;, \tag{501}$$

was zu beweisen war. Das Minuszeichen in der Lösung bewirkt das Zusammenfallen. Zunächst bemerken wir, daß die Robertson - Walker Zeitkoordinate dieselbe ist wie die Eigenzeit, somit sind $c\tau$ und s austauschbar. Weiter sehen wir, R' wird niemals null, es sei denn für $R = \infty$. D_0 hatten wir bestimmt als

$$D_0 \;=\; \left(\frac{4\pi}{3}\,R^3\,\rho\right)\,\frac{2\kappa}{c^2}\;. \tag{502}$$

Wir wollen nun zeigen, daß $u_d^3\,D_0$ zweimal die totale geometrische Masse des Gasballes ist. Das invariante dreidimensionale Volumenelement der Robertson - Walker Metrik ist

$$dV \;=\; \sqrt{-g}\,du\,d\theta\,d\varphi \;=\; R^3\,u^2\,\sin\theta\,du\,d\theta\,d\varphi\;. \tag{503}$$

Dies wollen wir uns noch mal rasch in Erinnerung rufen. Wir betrachten eine Koordinatentransformation $x^i \;\rightarrow\; \bar{x}^i$ im vierdimensionalen Raum. Dabei transformiert sich der metrische Tensor entsprechend

$$\bar{g}_{ik} \;=\; \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\,g_{\alpha\beta}\;. \tag{504}$$

Die Determinante der rechten Seite ist gerade das Produkt der Determinanten der Einzelmatrizen. Damit gilt

$$\bar{g} \;=\; g\left(\det\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^i}\right)\right)^2\;. \tag{505}$$

Wir ziehen die Wurzel

$$\sqrt{-\bar{g}} \;=\; \sqrt{-g}\,\left|\frac{\partial(x^1,\,x^2,\ldots)}{\partial(\bar{x}^1,\,\bar{x}^2,\ldots)}\right| \;, \tag{506}$$

wobei der letzte Faktor das Inverse des Absolutbetrages der Jacobi - Determinante ist.

Das vierdimensionale Volumenelement ist gegeben durch

$$dV \;=\; dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \;. \tag{507}$$

Es transformiert sich wie

$$d\bar{V} \;=\; \left|\frac{\partial(\bar{x}^1,\,\bar{x}^2,\ldots)}{\partial(x^1,\,x^2,\ldots)}\right|\,dV \;. \tag{508}$$

Somit folgt also

$$\sqrt{-\bar{g}}\,d\bar{V} \;=\; \sqrt{-g}\,dV \;. \tag{509}$$

$\sqrt{-g}\,dV$ ist also in der Tat eine skalare Invariante, es ist das invariante vierdimensionale Volumenelement.

Für die Masse der Gaswolke folgt

$$M \;=\; \rho\,V \;=\; 4\pi\int\limits_0^{u_d}\rho\,R^3\,u^2\,du \;=\; \frac{4\pi}{3}\,u_d^3\,R^3\,\rho \;. \tag{510}$$

Das Doppelte der geometrischen Masse ist damit

$$2m \;=\; \frac{2\kappa}{c^2}\,M \;=\; \frac{2\kappa}{c^2}\,\left(\frac{4\pi}{3}\,R^3\,\rho\right)\,u_d^3 \;=\; u_d^3\,D_0 \;. \tag{511}$$

Damit können wir schreiben

$$(u_d\,R')^2 \;=\; \frac{D_0\,u_d^3}{u_d\,R}\,c^2 \;=\; \frac{2mc^2}{u_d\,R} \tag{512}$$

und

$$(u_d\,R)^{3/2} \;=\; (u_d\,R(0))^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2m}\,\tau c \;. \tag{513}$$

Jetzt müssen wir noch verifizieren, daß die innere und äußere Lösung wirklich bei $r_d = u_d\,R(\tau)$ ineinander übergehen. Die Bewegung im Außenbereich wird durch die Geodätengleichung beschrieben

$$1 \;=\; \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\,c^2\,\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\,\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \tag{514}$$

mit $l = 1/c$ und $h = 0$. Damit folgt

$$1 - \frac{2m}{r} = 1 - \dot{r}^2 \tag{515}$$

und weiter

$$\dot{r}_d^2 = \left(\frac{dr_d}{ds}\right)^2 = \frac{2m}{r_d} . \tag{516}$$

Dies ist die selbe Gleichung wie (512) mit $c\tau = s$.

Was sind nun die physikalischen Eigenschaften des Kollapses vom Außenbereich aus betrachtet? Das Resultat entspricht unseren früheren Diskussionen. Man beobachtet *asymptotisch* das Schrumpfen zum Schwarzschild - Radius $r_d = 2m$. Beobachtet von einem mitfallenden Beobachter würde der Kollaps in endlicher Eigenzeit zum Radius $r = 0$ erfolgen und keine Singularität außer der Ursprungssingularität tritt auf. Für die Fälle $k = \pm 1$ gelten die gleichen qualitativen Schlußfolgerungen.

Der Kollaps eines galaktischen Nebels hat bezüglich der theoretischen Behandlung den Vorteil, daß die kritische Dichte etwa $\rho \simeq 10^{-3}$ g/cm^3 beträgt. Hier können Druckterme vernachlässigt werden. Hingegen ist die kritische Dichte beim Kollaps einer Sonne etwa $\rho = 5 \cdot 10^{16}$ g/cm^3, wobei Druckterme eine wesentliche Rolle spielen.

Ein Teilchen an der Sternoberfläche geht nach endlicher Eigenzeit durch den Schwarschild-Radius hindurch und erreicht zur Eigenzeit $s = \pi \left(R^3/8m\right)^{1/2}$ den Punkt $r = 0$, wobei R der ursprüngliche Radius ist. Ein Signal hingegen, das im Augenblick des Durchgangs durch den Schwarzschild - Radius emittiert wird, erreicht einen Beobachter im Außenraum erst bei $t = \infty$. Für den Außenraumbeobachter tritt nie der Fall ein, daß nur ein Schwarzes Loch, also eine Singularität, zurückbleibt. Der kollabierende Stern sendet vielmehr zu allen Zeiten Licht aus. Allerdings ist dieses Licht zunehmend rotverschoben, wobei für radial emittierte Lichtstrahlen die Rotverschiebung exponentiell mit der Zeit zunimmt.

Auch die Leuchtkraft des Sterns nimmt rapide ab, wobei die zunehmende Rotverschiebung als auch die Tatsache wichtig ist, daß in gleichen Eigenzeitintervallen von der Sternoberfläche ausgehende Photonen in immer größeren Zeitintervallen beim entfernten Beobachter ankommen. Die Berechnung der Leuchtkraftabnahme ergibt ein exponentielles Verhalten als Funktion der Zeit. Der Stern erlischt also nach außen hin sehr schnell. Daher ist auch die Bezeichnung “Schwarze Löcher” für kollabierende Sterne gerechtfertigt, wenngleich diese Objekte nie wirklich schwarz werden. Dynamische

Rechnungen zeigen, daß für einen Stern von etwa der Dichte der Sonne ($\rho \simeq 1$ g/cm^3) die Kollapszeit etwa eine Stunde beträgt, falls der innere Druck einmal verschwindet.

Aufgrund des Hawking - Effekts zerstrahlen auch Schwarze Löcher in einer Zeitspanne von etwa $\tau \simeq 10^{66} \, (M/M_{\odot})$ Jahre. Die quantentheoretische Durchrechnung des Effekts läßt folgende heuristische Deutung zu. Das Gravitationsfeld beeinflußt durch seine Gezeitenkräfte die Vakuumschwankungen eines betrachteten Testfelds (zum Beispiel des Elektron-Positron Felds). Während normalerweise virtuelle Paare des freien Testfeldes nur eine durch die Energie - Zeit - Unschärferelation beschränkte kleine Lebensdauer haben, können unter dem Einfluß des Gravitationsfeldes (wie auch unter dem Einfluß anderer an das Testfeld koppelnder äußerer Felder) Paare reell werden, wobei der Energiepreis auf verschiedene Weise bezahlt werden kann. Eine Möglichkeit dafür besteht in der Nichtstationarität des äußeren Feldes, das dadurch Energie ins Testfeld pumpen kann. Beim Kollaps astrophysikalischer Objekte ist dieser Beitrag jedoch klein und in der stationären Endphase zu vernachlässigen. Eine andere Möglichkeit bietet sich bei solchen stationären äußeren Feldern, in denen der Wert der erhaltenen Teilchenenergie in gewissen Raumbereichen negativ sein kann. Hier können virtuelle Paare durch "Vakuumtunneln", also der spontanen Paarerzeugung, reell werden. Bei Schwarzen Löchern etwa kann ein Partner eines virtuellen Paares, das nahe dem Horizont entsteht, durch den Horizont tunneln und so in eine Region gelangen, in der Zustände negativer Energie (negativ gegenüber der asymptotischen Region) möglich sind. Dadurch kann der Energiepreis für die Paarerzeugung bezahlt werden und der andere Partner kann, das effektive Potential der Schwarzschild - Metrik mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit überwindend, in die asymptotische Region entweichen. Der Fluß negativer Energie durch den Horizont vermindert dabei die Masse des Loches.

Sterne, Weiße Zwerge und Neutronensterne

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache Eigenschaften von Sternen und anderen Objekten, die durch die Gravitation zusammengehalten werden, besprechen. Es sollen hier nur sphärisch symmetrische und nichtrotierende Objekte betrachtet werden.
Eine gravitativ gebundene Gaskugel, die sich im Gleichgewicht befindet, muß für jedes Volumenelement die nach innen gerichtete Gravitationskraft durch eine nach außen gerichtete Kraft kompensieren. Hier kommen der gaskinetische Druck und der durch die vorhandene elektromagnetische Strahlung ausgeübte Strahlungsdruck in Frage. Bei normalen Sternen im Gleichgewicht überwiegt der gaskinetische Druck und wir wollen den Strahlungsdruck vernachlässigen.
Nach der Newtonschen Theorie beträgt die Gravitationskraft auf ein kleines Volumenelement $f \cdot dr$ im Abstand r vom Zentrum der Kugel

$$F_{grav} = -\frac{G\,M(r)\,\rho(r)\,f\,dr}{r^2}, \tag{517}$$

wobei

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\,r'^2\rho(r')\,dr' \tag{518}$$

die Masse der innerhalb von r liegenden Kugel ist. Die durch den Druckgradienten hervorgerufene Kraft lautet

$$F_p = -f\,\Delta P = -f\frac{dP}{dr}dr. \tag{519}$$

Die Gleichgewichtsbedingung $0 = F_{grav} + F_p$ führt damit auf

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}. \tag{520}$$

Zu berechnen sind nun $P(r)$, $M(r)$ und $\rho(r)$. Zusätzlich zu den beiden Gleichungen (518) und (520) benötigen wir also noch eine dritte Gleichung, die Zustandsgleichung der Materie, die den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte wiedergibt:

$$P = P(\rho). \tag{521}$$

Dieser Zusammenhang kann im allgemeinen beliebig kompliziert sein und Materialkonstanten enthalten. Im Falle normaler Sterne ist wegen der hohen Temperaturen im Inneren die Zustandsgleichung des idealen Gases eine sehr gute Näherung:

$$P = \frac{\rho}{m_0}kT. \tag{522}$$

Allerdings wird nun zusätzlich die Funktion $T(r)$ eingeführt. Zur exakten Behandlung wären nun detaillierte Kenntnisse über die Energieerzeugung in Sternen, den Energietransport an die Sternoberfläche und die Abstrahlung von der Oberfläche nötig. Wir wollen das Problem durch die Annahme einer konstanten Dichte

$$\rho = \frac{M}{V} = \text{const} \tag{523}$$

vereinfachen um wenigstens die Größenordnungen von Druck und Temperatur im Sterninneren abschätzen zu können. Gleichung (518) vereinfacht sich damit zu

$$M(r) \quad = \quad \frac{r^3}{R^3}M \tag{524}$$

und eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung (520) erhalten wir

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{3GM^2 r}{4\pi R^6}. \tag{525}$$

Integration führt auf

$$P(r) = -\frac{3}{8\pi}\,\frac{GM^2}{R^6}\,r^2 + P(0) \tag{526}$$

mit der Integrationskonstanten $P(0)$, dem Druck im Zentrum. Dieser Zentraldruck kann bestimmt werden durch die Forderung, daß der Druck an der Oberfläche des Sternes verschwindet,

$$P(r = R) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P(0) = \frac{3}{8\pi}\,\frac{GM^2}{R^4}. \tag{527}$$

Die Größen auf der rechten Seite der Gleichung können für die Sonne relativ leicht aus astronomischen Beobachtungen bestimmt werden, während der Druck im Sonneninneren direkten Messungen nicht zugänglich ist. Einsetzen der Werte

$$\begin{aligned} M_\odot &\approx 2\cdot 10^{33}\ \text{g} \\ R_\odot &\approx 7\cdot 10^{10}\ \text{cm} \end{aligned} \tag{528}$$

ergibt

$$P_\odot \sim 1.3\cdot 10^{15}\,\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \approx 1.3\cdot 10^{9}\ \text{atm} \tag{529}$$

sowie unter Ausnutzung der idealen Gasgleichung (522)

$$T_\odot \sim 10^7\ \text{K}. \tag{530}$$

Für m_0 haben wir dabei die Protonenmasse eingesetzt. Damit diese hohe Temperatur trotz der dauernden Energieabstrahlung aufrecht erhalten werden kann, muß im Sonneninneren Energie erzeugt werden. Bekanntlich erfolgt diese Energieerzeugung durch die Fusion von Wasserstoff zu Helium. Um fusionieren zu können müssen sich die Ausgangskerne so nahe kommen, daß die Kerne durch die starke Wechselwirkung zu einem großen Kern gebunden werden können. Dazu müssen die Kerne die Coulomb-Abstoßung überwinden:

$$E_C = \frac{Z^2\alpha}{r_0} \sim \text{MeV}. \tag{531}$$

Die vorhandene thermische Energie ist mit der eben abgeschätzten Temperatur

$$E_{th} = kT \sim \text{keV}. \tag{532}$$

Es gibt zwar in der Energieverteilung der Kerne stets auch einige Kerne mit etwas höherer Energie, jedoch ist die Wahrscheinlichkeit, die nötige Energie von MeV zu finden, verschwindend klein. Quantenmechanisch können die Kerne trotzdem die Barriere mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit durchtunneln und eine Fusionsreaktion machen. Man sieht, daß die Höhe der Coulomb-Barriere quadratisch mit der Kernladung geht und daher bei “kleinen” Temperaturen wie in unserer Sonne die direkte Fusion von Wasserstoff zu Helium überwiegt:

$$4\text{p} \longrightarrow^4 \text{He} + 2\text{e}^+ + 2\nu + 26\ \text{MeV}. \tag{533}$$

Diese Nettoreaktion läuft in mehreren Schritten ab:

$$\begin{aligned} \text{p} + \text{p} &\longrightarrow \text{d} + \text{e}^+ + \nu \\ \text{d} + \text{p} &\longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma \\ {}^3\text{He} +^3 \text{He} &\longrightarrow {}^4\text{He} + 2\text{p} \end{aligned} \tag{534}$$

Der erste Schritt läuft dabei am langsamsten ab, da dabei durch die schwache Wechselwirkung ein Proton in ein Neutron umgewandelt werden muß. Dies ist der Grund dafür, daß bei etwas höheren Temperaturen eine andere Reaktion dominiert:

$$\begin{aligned} {}^{12}\text{C} + \text{p} &\longrightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma \\ {}^{13}\text{N} &\longrightarrow {}^{13}\text{C} + \text{e}^+ + \nu \\ {}^{13}\text{C} + \text{p} &\longrightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma \\ {}^{14}\text{N} + \text{p} &\longrightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma \\ {}^{15}\text{O} &\longrightarrow {}^{15}\text{N} + \text{e}^+ + \nu \\ {}^{15}\text{N} + \text{p} &\longrightarrow {}^{12}\text{C} +^4 \text{He} \end{aligned} \tag{535}$$

Der am Anfang dieses *CNO-Zyklus* benötigte Kohlenstoffkern wird also am Ende der Kette wieder zurückgeliefert; der ^{12}C-Kern wirkt hier als Katalysator. Auch in dieser Zerfallskette werden zwei Umwandlungen durch die schwache Wechselwirkung vermittelt, jedoch sind die Kerne ^{13}N und ^{15}O abgesehen von dieser Zerfallsmöglichkeit stabil und können sich daher für den Betazerfall Zeit lassen. In der direkten Fusion zweier Protonen dagegen ist das Diproton völlig ungebunden und der schwache Zerfall muß während der kurzen Zeit der gegenseitigen Annäherung passieren. Andererseits sind im CNO-Zyklus schwerere Kerne beteiligt, so daß die Coulomb-Barriere höher ist. Deshalb setzt der CNO-Zyklus erst bei höheren Temperaturen ein, dominiert dann aber.
Nicht die gesamten 26 MeV der Nettoreaktion (533) stehen dem Stern zur Verfügung. Die entstandenen Neutrinos tragen einen kleinen Teil davon weg, da sie ungehindert aus dem Inneren des Sternes entweichen können. Die von der Sonne emittierten Neutrinos können sogar auf der Erde noch nachgewiesen werden. Damit kann man gewissermaßen bis in das Zentrum der Sonne sehen, wo die Kernfusionen stattfinden. Allerdings stellt man fest, daß im experimentell zugänglichen Energiebereich nur etwa ein Drittel der Neutrinos gemessen werden, die man theoretisch erwarten würde. Möglicherweise ist also die Energieverteilung der Neutrinos anders als erwartet und die Modelle zur Beschreibung des Sonneninneren sind mangelhaft. Eine andere diskutierte Möglichkeit wäre, daß die ursprünglich in der Sonne erzeugten Elektron-Neutrinos sich auf dem langen Weg zur Erde in Neutrinos der beiden anderen Leptonenfamilien umwandeln. Da es gerade drei Leptonenfamilien mit den Neutrinos ν_e, ν_μ und ν_τ gibt, könnte dies gerade den fehlenden Faktor drei der Sonnenneutrinos erklären, denn Myon- und Tau-Neutrinos können nicht nachgewiesen werden.
Bei noch höheren Temperaturen im Sterninneren können schließlich auch noch schwerere Kerne zur Fusion gebracht werden. Solche Reaktionen werden in Sternen wichtig, die bereits einen großen Teil ihrer Wasserstoffvorräte aufgebraucht haben. Bei Erreichen von ^{56}Fe kann allerdings durch weitere Fusion keine Energie mehr gewonnen werden.
Irgendwann sind alle Energievorräte eines Sternes erschöpft. Die Temperatur und damit der Druck sinken; der Stern schrumpft. Diese Endphase kann sehr schnell durchlaufen werden und ist ein dynamischer Prozeß. Beispielsweise kann es hier auch zu spektakulären Supernova-Explosionen kommen.
Ein möglicher Endzustand eines Sternes ist ein *Weißer Zwerg* oder — nach längerer Abkühlzeit — ein *Schwarzer Zwerg*. Ein völliges Zusammenfallen der Materie wird dabei (bei nicht zu schweren Sternen) durch das Pauli-Prinzip verhindert.

Bei großer Verdichtung der Materie sind die Elektronen nicht mehr an den Atomen gebunden sondern können sich wie in Metallen frei zwischen den positiven Ionen bewegen. Der Hintergrund der positiven Ionen bildet einen Potentialtopf für die Elektronen, die sich darin frei bewegen können. Die Elektronen-Wellenfunktionen müssen aber Randbedingungen an der Oberfläche des Potentialtopfes erfüllen. Dadurch sind nur noch diskrete Zustände für die Elektronen erlaubt, denn es muß (im eindimensionalen Bild) ein Vielfaches der Elektronenwellenlänge genau in den Topf passen. Die Elektronen müssen sich als Fermionen an das Pauli-Prinzip halten und dürfen jeden dieser Zustände nur jeweils paarweise besetzen (mit je einem Elektron mit Spin nach oben und Spin nach unten). Bei niedrigen Temperaturen $T \approx 0$ sind also genau die untersten Zustände von Elektronen besetzt.
Wird der Topf verkleinert, so werden auch die erlaubten Wellenlängen kleiner, was zu höheren Impulsen und damit höheren Energien führt. Möchte man also das Volumen des Systems verkleinern, so muß Energie zugeführt werden, was sich als Druck bemerkbar macht. Wir wollen im folgenden den Fermidruck bzw. die Zustandsgleichung eines solchen *entarteten Elektronengases* berechnen.
Zunächst bestimmen wir die Zahl der Zustände dN in einem Volumen V mit Impulsen zwischen k und $k + dk$. Es gilt

$$h^3 dN = 2 \cdot \underbrace{V \cdot 4\pi k^2 dk}_{\text{Phasenraumvolumen}}, \tag{536}$$

weil sich in jeder Phasenraumzelle der Größe h^3 nur höchstens 2 Elektronen mit antiparallelen Spins befinden können. Die Gesamtzahl der Elektronen mit Impuls $\leq k_f$, dem Fermiimpuls, beträgt dann

$$N = \int_0^{k_f} \frac{dN}{dk}\, dk = V\, \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_f} k^2\, dk = \frac{8\pi}{3h^3}\, V k_f^3. \tag{537}$$

Aufgelöst nach dem Fermiimpuls erhalten wir

$$k_f = \frac{h}{2} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{1/3} \tag{538}$$

und

$$\frac{dk_f}{dV} = -\frac{1}{3}\, \frac{k_f}{V}. \tag{539}$$

Die gesamte Energie aller Elektronen erhalten wir durch

$$E = \int_0^{k_f} E(k)\, \frac{dN}{dk}\, dk = V\, \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_f(V)} E(k) k^2\, dk. \tag{540}$$

Der Druck ergibt sich nun als Energieänderung pro Volumenänderung:

$$-P = \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{E}{V} + V\,\frac{8\pi}{h^3}\,E(k_f)k_f^2\,\frac{dk_f}{dV} = \frac{E}{V} - \frac{8\pi}{3h^3}E(k_f)k_f^3. \tag{541}$$

Zur konkreten Berechnung benötigen wir noch den Zusammenhang zwischen Impuls und Energie:

$$E(k) = \sqrt{m_e^2c^4 + k^2c^2} \approx \begin{cases} \dfrac{k^2}{2m_e} & k \ll m_e c \\[2ex] kc & k \gg m_e c \end{cases} \tag{542}$$

Da ohnehin nur Energiedifferenzen interessieren, haben wir im nichtrelativistischen Grenzfall die Ruhemasse der Elektronen weggelassen. In den beiden angegebenen Grenzfällen ist die Integration zur Berechnung von E sehr einfach und nach Einsetzen in (541) erhalten wir für den Druck des entarteten Elektronengases (n bezeichnet die Elektronendichte N/V)

$$P \approx \begin{cases} \dfrac{8\pi}{15h^3}\,\dfrac{k_f^5}{m_e} \;=\; \dfrac{1}{20}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{2/3}\dfrac{h^2}{m_e}\,n^{5/3} & \text{nichtrelativistisch} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{3h^3}\,k_f^4 c \;=\; \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc\,n^{4/3} & \text{extrem relativistisch.} \end{cases} \tag{543}$$

Dabei geschieht der Übergang von der nichtrelativistischen zur relativistischen Beschreibung ungefähr bei dem Impuls

$$k_0 \approx m_e c = \frac{h}{2}\left(\frac{3n_0}{\pi}\right)^{1/3} \tag{544}$$

beziehungsweise bei einer zugehörigen Fermionendichte

$$n_0 = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} \tag{545}$$

$$\approx 6 \cdot 10^{29}\ \text{cm}^{-3}\ \text{für Elektronen.} \tag{546}$$

Dem nichtrelativistischen Grenzfall der Gleichung (543) können wir entnehmen, daß zum Druck im wesentlichen nur die leichten Elektronen beitragen, denn der analoge Ausdruck für den Protonendruck wäre durch die größere Protonenmasse um einen Faktor 2000 unterdrückt. Andererseits ist die Masse des Sternes fast ausschließlich durch die Masse der Nukleonen gegeben.

Nehmen wir an, daß der Stern im wesentlichen aus Wasserstoff aufgebaut ist, dann enthält er genauso viele Nukleonen (Protonen) wie Elektronen und wir erhalten eine

Massendichte von

$$\begin{aligned} \rho_0 &= m_p n_0 && (547)\\ &\approx 1000\,\mathrm{kg/cm^3} \quad \text{für Weiße Zwerge.} && (548) \end{aligned}$$

Wir können nun die Zustandsgleichung (543) in die Beziehung (527) für den Zentraldruck einsetzen und erhalten schließlich die Masse eines weißen Zwerges in Abhängigkeit von seiner Zentraldichte:

$$M = \begin{cases} \dfrac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\dfrac{m_e}{m_p}\right)^{3/2} \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} = M_C \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} & \text{falls } \rho < \rho_0 \\ \dfrac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\dfrac{m_e}{m_p}\right)^{3/2} = M_C & \text{falls } \rho > \rho_0 \end{cases} \qquad (549)$$

Dabei wurde $R = (3M/4\pi\rho)^{1/3}$ benutzt. Da bereits mehrere Näherungen eingegangen sind, haben wir konstante Zahlenfaktoren in der Größenordnung von 1 weggelassen. Die hier eingeführte Größe M_C ist die *Chandrasekhar-Masse*. Wie man sieht, wächst die Masse des weißen Zwerges mit steigender Zentraldichte bis zur Chandrasekhar-Masse an und bleibt dann konstant.
Wenn wir ρ_0 und n_0 aus den Gleichungen (547) und (545) einsetzen, dann sehen wir, daß die Chandrasekhar-Masse gar nicht von der Fermionenmasse — also von m_e — abhängt, sondern allein von der Größe der Gravitationskonstanten und der Protonenmasse bestimmt wird:

$$\begin{aligned} M_C &= m_p \left(\frac{c\hbar}{m_p^2 G}\right)^{3/2} && (550)\\ &\approx 1.4\, M_\odot && (551) \end{aligned}$$

Für $\rho < \rho_0$, das heißt im nichtrelativistischen Fall, ist

$$R^3\rho \propto M \propto \rho^{1/2} \quad \Rightarrow \quad R^3\rho^{1/2} \propto R^3 M = \text{const}, \qquad (552)$$

das heißt der Stern schrumpft, wenn seine Masse vergrößert wird.
Im extrem relativistischen Fall, $\rho > \rho_0$, gilt sogar

$$R^3\rho \propto M = M_C, \qquad (553)$$

das heißt bei konstanter Masse kann der Stern beliebige Radien annehmen. Bei einer kleinen Störung kollabiert der Stern bereits.

Bei sehr hohen Dichten kommt noch ein weiterer Aspekt ins Spiel. Wenn nämlich die Fermienergie der Elektronen die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton übersteigt, dann ist kein β-Zerfall des Neutrons mehr möglich, weil die energetisch erlaubten Zustände des erzeugten Elektrons bereits alle besetzt sind. Es wird sogar der umgekehrte Prozeß stattfinden:

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- + 1.3\,\mathrm{MeV} \quad \rightarrow \quad \mathrm{n} + \nu \tag{554}$$

so daß die Zahl der Elektronen abnimmt. Dies senkt allerdings auch den Fermidruck der Elektronen, und der Stern ist nicht mehr stabil. Er kollabiert und es werden praktisch alle Protonen in Neutronen umgewandelt. Es sind nun zwar auch keine Elektronen mehr vorhanden, aber da auch die jetzt vorhandenen Neutronen Fermionen sind, kann jetzt der Fermidruck des entarteten Neutronengases (bei nicht zu schweren Systemen) den völligen Kollaps verhindern und es bildet sich ein *Neutronenstern*. In den obigen Gleichungen ist nur m_e durch $m_n \approx m_p$ zu ersetzen.
Da die Chandrasekhar-Masse unabhängig von der Fermionenmasse war, ist die Grenzmasse für Neutronensterne im Rahmen unserer Betrachtungen die gleiche wie für weiße Zwerge. Lediglich die Massendichte ρ_0 skaliert mit $(m_p/m_e)^3$ und der Radius mit m_e/m_p. Die typische Dichte eines Neutronensternes wäre also

$$\rho_0 \approx 10^{15}\ \mathrm{g/cm^3} \text{ für Neutronensterne} \tag{555}$$

Der typische Radius eines Neutronensternes ergibt sich zu 5 km, was bereits vergleichbar ist mit dem Schwarzschildradius, der in der gleichen Größenordnung liegt. Bei einer genaueren Untersuchung sind also Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie in Rechnung zu stellen. Außerdem ist zu beachten, daß die Neutronen wegen der bei hohen Dichten einsetzenden starken Wechselwirkung nicht mehr gut durch ein *freies* Fermionengas beschrieben werden können. Bessere Abschätzungen liefern für Neutronensterne eine etwas größere Grenzmasse von etwa zwei Sonnenmassen.
Bei größeren Massen kann der Fermidruck der Neutronen der Gravitation keinen Widerstand leisten und das System kollabiert völlig. Es ist aber zu beachten, daß der Übergang von Sternen zu Weißen Zwergen oder Neutronensternen ein dynamischer Prozeß ist, der sehr heftig und explosiv verlaufen kann (Supernova), wobei große Materiemengen in das Weltall geschleudert werden können. Daher muß nicht jeder Stern mit ursprünglich mehr als zwei Sonnenmassen als schwarzes Loch enden.

Freier Fall im Kruskal-Diagramm

Wir hatten gesehen, daß im Schwarzschildschen Linienelement die Koordinate r innerhalb des Schwarzschild-Radius zeitartig wird. Kruskal führte im Jahr 1960 neue "Zeit"- und "Radial"-Koordinaten u und v ein, die - wie wir abgeleitet haben - zu den Schwarzschild - Koordinaten t und r in folgender Beziehung stehen ($\xi = \frac{\kappa M}{c^2 r} = \frac{m}{r}$)

$$u = \left(\frac{1}{2\xi} - 1\right)^{1/2} e^{1/4\xi} \cosh\left(\frac{ct}{4r\xi}\right) , \tag{556}$$

$$v = \left(\frac{1}{2\xi} - 1\right)^{1/2} e^{1/4\xi} \sinh\left(\frac{ct}{4r\xi}\right) \tag{557}$$

für $r > r_s$. Ebenso gilt für $r < r_s$

$$u = \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)^{1/2} e^{1/4\xi} \sinh\left(\frac{ct}{4r\xi}\right) , \tag{558}$$

$$v = \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right)^{1/2} e^{1/4\xi} \cosh\left(\frac{ct}{4r\xi}\right) . \tag{559}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Transformation immer reell ist. Das Linienelement schreibt sich dann

$$ds^2 = f^2(u,v)\left(dv^2 - du^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{560}$$

mit

$$\left(\frac{1}{2\xi} - 1\right) e^{1/2\xi} = u^2 - v^2 \tag{561}$$

und

$$f^2 = 32\,\xi^3\, r^2\, e^{-1/2\xi} . \tag{562}$$

Das Kruskal-Diagramm hat im Vergleich zu den Schwarzschild-Koordinaten folgende Eigenschaften:

1) Linien mit r = const gehen über in Linien mit $u^2 - v^2$ = const, also in Hyperbeln.
2) Außen, d.h. $r > r_s$, ist $u^2 - v^2 > 0$.
3) Für $r = r_s$ ist $u^2 - v^2 = 0$.
4) Für r = 0 gilt $u^2 - v^2 = -1$.
5) Linien mit t = const gehen über in Linien mit u/v = const, also Geraden.
6) Für $r > r_s$ gehen Linien mit t = 0 in Linien mit v = 0 über.

7) Für $r < r_s$ gehen Linien mit $t = 0$ in Linien mit $u = 0$ über.
8) Linien mit $t = \infty$ gehen über in Linien mit $u = v$.

Für radiale Lichtsignale gilt $d\theta = d\varphi = 0$ und $ds = 0$. Hieraus ergibt sich

$$du^2 = dv^2 \tag{563}$$

oder

$$du = \pm dv \; . \tag{564}$$

Dies sind stets 45°–Linien. Im Kruskal-Diagramm ist also ein Lichtkegel recht einfach.

Wir betrachten nun die möglichen Bahnen des Lichtes in der Nähe eines Schwarzen Loches. b bezeichne dabei den Stoßparameter. Ohne eine konkrete Ableitung in diesem Fall durchzuführen geben wir die folgenden Sachverhalte an:
Für $b^2 > 27\,r_s^2/4$ haben wir es mit normaler Lichtablenkung zu tun.
Für $b^2 < 27\,r_s^2/4$ findet ein Spiralisieren durch den Ereignishorizont bei $r = r_s$ statt bis hin zu $r = 0$.
$b^2 = 27\,r_s^2/4$ ist ein kritischer Fall. Das Licht kann spiralisieren bis hin zum kritischen Kreisradius $r = \frac{3}{2}\,r_s$. Diese Bahn ist jedoch instabil gegenüber kleinsten Störungen. Es tritt dann entweder der Fall ins Zentrum oder das Entweichen ins Unendliche ein.

Schwarze Löcher erscheinen größer als sie sind. Schicken wir ein ursprünglich paralleles Lichtbündel an einem Schwarzen Loch vorbei, so beträgt der kritische Stoßparameter für den Einfang $b_{kr} = r_s\,\sqrt{27/4}$ und nicht r_s oder $\frac{3}{2}\,r_s$.

Die Gleichung von Tolman, Oppenheimer und Volkoff

Bei der Diskussion von Sternmodellen ist die Gleichung des sogenannten hydrostatischen Gleichgewichts von Tolman, Oppenheimer und Volkoff aus den Jahren 1934 - 39 von Bedeutung. Diese Gleichung wollen wir jetzt ableiten. Bei der Diskussion der inneren Schwarzschild - Lösung fanden wir

$$\frac{p'(r)}{c^2\rho + p(r)} \;=\; -\frac{1}{2}\nu'(r) \; . \tag{565}$$

Dies ergibt sofort

$$\frac{dp}{dr} \;=\; -(c^2\rho + p)\,\frac{1}{2}\,\frac{d\nu}{dr} \; . \tag{566}$$

Ferner galt ebenso ursprünglich

$$e^{-\lambda} \;=\; 1 - \frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho\,\frac{r^2}{3} + \frac{\mathrm{const}}{r} \; . \tag{567}$$

Aus der Forderung der Regularität der Metrik bei r = 0 hatten wir die Konstante bestimmt, es gilt const = 0. Unter Berücksichtigung der konstanten Dichte ρ können wir (567) schreiben als

$$e^{-\lambda} \;=\; 1 - \frac{1}{r}\int\limits_0^r \frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\rho\, r^2\, dr \; . \tag{568}$$

Dies ist die eigentliche Urform von (567). Wir definieren nun eine Größe M_r durch

$$M_r \;=\; \int\limits_0^r 4\pi r^2\,\rho\, dr \; . \tag{569}$$

Damit können wir (568) ausdrücken durch

$$e^{-\lambda} \;=\; 1 - \frac{2\kappa M_r}{c^2 r} \; . \tag{570}$$

Weiterhin hatten wir bereits die Gleichung

$$-\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\frac{p}{c^2} \;=\; \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) \tag{571}$$

abgeleitet. Wir lösen diese Gleichung nach ν' auf

$$\frac{d\nu}{dr} \;=\; \left(\frac{1}{r} + \frac{8\pi\kappa}{c^4}\, r\, p\right) e^{\lambda} - \frac{1}{r} \; . \tag{572}$$

Jetzt kombinieren wir schließlich (570), (572) und (566). Wir erhalten die gesuchte Gleichung von Tolman, Oppenheimer und Volkoff

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr} &= -(c^2\rho + p)\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r} + \frac{8\pi\kappa}{c^4} r p\right)\frac{1}{1-\frac{2\kappa M_r}{r c^2}} - \frac{1}{r}\right] \\
&= -c^2(\rho + \frac{p}{c^2})\frac{1}{2}\frac{1 + \frac{8\pi\kappa}{c^4} r^2 p - 1 + \frac{2\kappa M_r}{r c^2}}{r\left(1-\frac{2\kappa M_r}{r c^2}\right)} \\
&= -(\rho + \frac{p}{c^2})\frac{\frac{4\pi\kappa}{c^2} r^2 p + \frac{\kappa M_r}{r}}{r\left(1-\frac{2\kappa M_r}{r c^2}\right)} \; . \qquad (573)
\end{aligned}$$

Also zusammengefaßt

$$\frac{dp}{dr} = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{4\pi\kappa r \frac{p}{c^2} + \frac{\kappa M_r}{r^2}}{1-\frac{2\kappa M_r}{r c^2}} \; . \qquad (574)$$

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen dem Druck und der Massendichte her.

Bemerkungen zum Gravitationskollaps

Eine gesamte Galaxis kann relativ leicht zu einem Schwarzen Loch führen. Typischerweise genügt schon ein linearer Kontraktionsfaktor von ungefähr 10^6, um die gesamte Galaxis innerhalb ihres Ereignishorizonts zu bringen. Dabei ist noch nicht einmal die dichteste Kugelpackung erreicht. Ohne Relativbewegungen der Sonnen und ohne Rotation der Galaxis würde dieser Gravitationskollaps auch stattfinden. Quasare, die 1963 entdeckt wurden, können möglicherweise solche kollabierende Galaxien darstellen.

Aus

$$2m \;=\; \frac{2\kappa M}{c^2} \;=\; r_s \;=\; \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \tag{575}$$

folgt

$$\rho \;=\; \frac{3c^6}{32\pi\kappa^3\, M^2} \;=\; 2 \cdot 10^{16}\, \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \,. \tag{576}$$

Die kritische Dichte einer Galaxis liegt bei $\rho \;\approx\; 10^{-3}$ g/cm^3, also etwa bei der Dichte von Luft.

Erfahrungsgemäß existieren Sterne, nachdem sie sich aus Wasserstoff und Staub gebildet haben, sehr lange. Es gelingt ihnen also fast immer, im Wechselspiel der anziehenden Gravitationskraft, des abstoßenden, temperaturabhängigen Drucks und der ausgehenden Strahlung einen relativ stabilen Zustand zu finden.

Der erste stabile Zustand wird erreicht, wenn die Gravitationsanziehung die Sternmaterie so weit verdichtet und erhitzt hat, daß die Umwandlung von Wasserstoff in Helium für lange Zeit eine ausreichende Energiequelle ist, um eine Abkühlung zu verhindern und den nötigen Druck, also eine hinreichend große thermische Geschwindigkeit der Sternmaterie, zur Kompensation der Schwerkraft aufrechtzuerhalten. Die mittlere Dichte eines solchen Sterns hat die Größenordnung 1 g/cm^3. Ein typisches Beispiel eines solchen Sterns ist unsere Sonne.

Ist der Wasserstoff des Sterns verbraucht, kann der Stern (eventuell erst nach einer instabilen, mit Explosionen verbundenen Phase) auf andere nukleare Prozesse umschalten und Kerne höherer Ordnungszahl erzeugen. Diese Prozesse werden aber jeweils nur kürzere Zeit dauern und schneller nacheinander durchlaufen werden. Bei hinreichend massereichen Himmelskörpern ist der dann entstehende Druck so groß, daß die Kerne ihre Elektronen verlieren und ein entartetes Elektronengas entsteht. Die Dichte dieses Sterns liegt bei 10^7 g/cm^3. Sterne solcher Dichte sind als Weiße Zwerge schon gefunden worden. Außerordentlich wichtig ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, daß Weiße Zwerge oberhalb 1.2 Sonnenmassen nicht stabil sein können. Ihr Radius beträgt höchstens 5000 km. Sterne größerer Masse müssen also entweder nach der Wasserstoff-Verbrennung einen Teil ihrer Masse abstoßen oder einem anderen Endzustand zustreben.

Ist der Druck (die Masse des Sterns) groß genug, kann das dadurch geschehen, daß ausgehend z.B. von ^{56}Fe die Elektronen und die Protonen der Kerne sich in Neutronen umwandeln und der ganze Stern am Ende aus Kernmaterie dichtester Packung besteht. Die Dichte solcher Neutronensterne liegt bei 10^{14} g/cm^3. Auch Neutronensterne dürfen die Masse unserer Sonne nicht wesentlich überschreiten.

Wenn es einem massereichen kugelsymmetrischen Stern nicht gelingt, auf seinem Weg zum Neutronenstern genügend Masse auszustoßen oder abzustrahlen, gibt es für ihn keinen stabilen Endzustand. Er wird irgendwann den Zustand erreichen, in dem der Druckgradient die Gravitationsanziehung nicht mehr kompensieren kann. Er wird sich infolgedessen ständig weiter zusammenziehen, sein Radius wir den Schwarzschild - Radius $r = 2m$ unterschreiten und $r = 0$ zustreben: Der Stern erleidet einen Gravitationskollaps.

Bei der Betrachtung einer homogenen Gaskugel als einfaches Modell eines Sterns hatten wir unter Einbeziehung des Druckes p die folgende Beziehung zwischen der Maximalmasse M und dem Radius r_0 eines Sterns abgeleitet

$$M < \frac{4}{9} \frac{c^2 r_0}{\kappa} . \tag{577}$$

Lösen wir dies nach r_0 auf, so folgt

$$r_0 > \frac{9}{4} \frac{M\kappa}{c^2} = \frac{9}{8} 2m = \frac{9}{8} r_s . \tag{578}$$

Der kritische Radius eines Sterns ist also größer als der Schwarzschild - Radius.

Zur Beschreibung des Sternkollaps verwendet man oft Gaußsche Koordinaten wie bei der Robertson - Walker Metrik. Die Koordinate τ ist dabei die Eigenzeit der im Koordinatensystem ruhenden Teilchen. Die Kurven u = const, θ = const, φ = const sind die Geodäten. Im Innenraum hat man eine Friedman - Metrik, im Außenraum eine Schwarzschild - Metrik vorliegen.

Wir betrachten den Kollaps eines Gasballes. Der Kollaps starte bei sehr großen negativen Zeitwerten und werde von einem Astronomen beobachtet, der sich bei konstanten Abstand $r = r_B$ befindet. Seine Weltlinie ist eine Hyperbel. Was beobachtet nun dieser Astronom innerhalb seiner Koordinatenzeit?
Zunächst breiten sich Lichtsignale immer unter einem Winkel von 45^o aus. Sie können daher einen Beobachter nur dann treffen, wenn der Radius R des Objekts größer als r_s ist. Für $R = r_s$ brauchen die Lichtsignale unendliche lange Zeit, und für $R < r_s$ erreichen die Signale den Beobachter überhaupt nicht mehr. Dahingegen empfängt der kollabierende Stern immer Lichtsiganle, die vom Beobachter ausgehen.

Wir machen nun – ohne explizite Ableitungen durchzuführen – einige ergänzende Bemerkungen zur Kerr - Metrik, die erst 1963 – also fast 50 Jahre nach der Schwarzschild - Metrik – gefunden wurde. Die meisten uns bekannten Sterne rotieren relativ zum lokalen Inetrialsystem (relativ zum Fixsternhimmel) und sind infolgedessen nicht kugelsymmetrisch. Ihr Gravitationsfeld wird also nicht durch die Schwarzschild - Lösung beschrieben. Die Kerr - Metrik beschreibt das Außenfeld eines rotierenden Sterns. Die Kerr - Metrik ist nicht zeitumkehrinvariant ($t \to -t$), aber invariant gegenüber Zeitumkehr und gleichzeitiger Umkehr des Rotationssinns.

Wenn sich ein Teilchen – aus dem Fernfeld kommend – sich der Singularität der Kerr - Lösung nähert, stößt es zuerst auf die Grenzfläche der Stationarität. Zwischen ihr und der Fläche $r = r_+$ liegt die sogenannte Ergosphäre. Teilchen und Lichtstrahlen können von außen in sie eindringen und sie wieder verlassen. Folgender ungewöhnlicher Prozess ist dabei denkbar. Ein Teilchen mit positiver Energie, zerfällt in der Ergosphäre in zwei Teilchen. Eines der Teilchen kann die Ergosphäre wieder verlassen, unter Umständen mit einer größeren Energie als das ursprüngliche Teilchen. Energielieferant für diesen Prozess ist die Rotation der Quelle.

Die Fläche bei $r = r_+$ kann zwar von außen mit Teilchen oder Photonen überschritten werden, es ist ihnen aber unmöglich den Innenraum wieder zu verlassen. $r = r_+$ ist ein Ereignishorizont.

Wir erwähnen die folgende Spekulation. Es könnte sogenannte primordial (uranfängliche) Schwarze Löcher geben, die schon zu Beginn des Universums existierten. Beispielsweise könnte es Schwarze Löcher ohne Materie geben. Dann gäbe es wohl Teile des Universums, die unendlich ausgedehnt sein könnten, die für den Beobachter immer verschlossen blieben. Wir können sie niemals sehen und niemals beieinflussen.

Abschließend zu diesem Kapitel wollen wir uns noch einmal die etwas merkwürdigen Gebiete III und IV im Kruskal-Diagramm anschauen. Die Gebiete III und IV, in die man durch weiteres Variieren der Koordinaten u und v gelangen kann, sind isometrisch (metrisch ununterscheidbar) zu I und II. Die maximale Erweiterung der Schwarzschild - Lösung enthält den äußeren ($r > 2m$) und den inneren ($r < 2m$) Teil der Schwarzschild-Metrik genau je zweimal.

Aus der mathematischen Darstellung der Zusammenhangsverhältnisse der Teilgebiete der Schwarzschild-Lösung könnte man den Eindruck gewinnen, daß es einem Beobachter möglich sei, von unserer Welt (Gebiet I) durch die Schwarzschild-Singularität $r = 2m$ und den Innenraum (Gebiet II) in eine andere Welt (Gebiet III) zu gelangen, die wieder Außenraum einer Schwarzschild-Metrik ist. Da dieser Beobachter ja allein bis zum Erreichen von $r = 2m$ unendliche lange Zeit braucht (gemessen an der Eigenzeit zurückgelassener Beobachter), wäre er für die Zurückgebliebenen für immer verschwunden.

Als Extremfall betrachten wir das Verhalten von Licht im Kruskal - Diagramm. Trägt man in das Kruskal - Diagramm alle Nullgeodäten ein, die im Gebiet I radial einlaufen (t wächst, r nimmt ab) oder radial auslaufend sind (t wächst, r nimmt zu), und verlängert sie über $r = 2m$ hinaus, erhält man folgendes Ergebnis: Alle radial einwärts gehenden Lichtstrahlen durchstoßen $r = 2m$ (für $t = \infty$), dringen in das Gebiet II ein und enden in der Singularität $r = 0$; alle auswärts laufenden Lichtstrahlen kommen aus dem Gebiet IV bzw. der dortigen Singularität.

Man kann also keine radial gerichteten Lichtstrahlen aus unserer Welt (I) in das Gebiet III oder IV schicken; nur II ist erreichbar, und wenn das Photon dort ist, kann es der Singularität $r = 0$ nicht entgehen. Für Objekte mit Masse gelten die gleichen prinzipiellen Überlegungen. Ein Beobachter endet stets bei $r = 0$ im Gebiet II; III und IV kann er nie erreichen.

Aus unserer Welt I können wir II beeinflussen, aber nicht III und IV. Wir könnten aber im Prinzip vom Gebiet IV beeinflußt werden, jedoch nicht von II und III. Für uns ist II ein Schwarzes Loch (alles kann hinein, nichts heraus), und IV ein Weißes Loch (nichts kann hinein, alles nur heraus). Natürlich ist die Betrachtung der Gebiete III und IV bis jetzt nur mathematische Spielerei.

Linearisierung der Feldgleichungen

Die Feldgleichungen sind in ihrer vollständigen Form nichtlinear. Dies impliziert, daß das Superpositionsprinzip nicht gilt. Die physikalische Ursache der Nichtlinearitäten ist durch die Rückkopplung der Gravitation gegeben, die ihrerseits Arbeit leisten kann. Die damit verbundene Energie generiert wieder Gravitation. So dient das Feld teilweise als Quelle für sich selbst.

Linearisiert man die Feldgleichungen, so ergeben sich beträchtliche Vereinfachungen. Diese Linearisierung kann für schwache Felder angewendet werden und behält auch nur dort ihre Gültigkeit. Wir machen den Ansatz

$$g_{ij} \;=\; g_{ij}^{(L)} + \varepsilon\,\gamma_{ij}\;. \tag{579}$$

In diesem Kapitel benutzen wir Minkowski-Koordinaten $ict,\, x, ,\, y,\, z,$ d.h., es gilt $g_{ij}^{(L)} = (-1,\,-1,\,-1,\,-1) \;=\; -\delta_{ij}$. Die Feldgleichungen lauten im freien Raum allgemein

$$0 \;=\; R_{kl} \;=\; \Gamma^{j}_{jk|l} - \Gamma^{j}_{lk|j} + \Gamma^{j}_{rl}\Gamma^{r}_{jk} - \Gamma^{j}_{rj}\Gamma^{r}_{lk}\;. \tag{580}$$

Die Ableitungen der Koeffizienten $g_{ij}^{(L)}$ verschwinden. Dies bedeutet, daß die ersten beiden Terme linear in ε sind. Die beiden letzten Terme in (580) enthalten Terme der Ordnung ε^2; Terme dieser Ordnung werden vernachlässigt. Damit erhalten wir in erster Ordnung in ε

$$\Gamma^{j}_{jk|l} - \Gamma^{j}_{lk|j} \;=\; 0\;. \tag{581}$$

Wir nutzen nun aus, daß gilt

$$\Gamma^{j}_{jk} \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\log|g|)_{|k}\;. \tag{582}$$

Daraus folgt für (581)

$$\tfrac{1}{2}\,(\log|g|)_{|k|l} - \Gamma^{j}_{lk|j} \;=\; 0\;. \tag{583}$$

Es ist nach (579)

$$|g| \;=\; |-g_{ij}| \;=\; \begin{vmatrix} 1-\varepsilon\gamma_{00} & -\varepsilon\gamma_{01} & -\varepsilon\gamma_{02} & -\varepsilon\gamma_{03} \\ -\varepsilon\gamma_{10} & 1-\varepsilon\gamma_{11} & -\varepsilon\gamma_{12} & -\varepsilon\gamma_{13} \\ -\varepsilon\gamma_{20} & -\varepsilon\gamma_{21} & 1-\varepsilon\gamma_{22} & -\varepsilon\gamma_{23} \\ -\varepsilon\gamma_{30} & -\varepsilon\gamma_{31} & -\varepsilon\gamma_{32} & 1-\varepsilon\gamma_{33} \end{vmatrix}\;. \tag{584}$$

In niedrigster Ordnung in ε folgt

$$\begin{aligned}
|g| &\simeq (1-\varepsilon\gamma_{00})(1-\varepsilon\gamma_{11})(1-\varepsilon\gamma_{22})(1-\varepsilon\gamma_{33}) \\
&\simeq 1-\varepsilon(\gamma_{00}+\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}) \\
&= 1-\varepsilon \,\mathrm{Tr}\,\gamma \;, \qquad (585)
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Tr}\,\gamma$ die Spur der Matrix γ bezeichnet. Wir entwickeln $\log|g|$ in eine Taylor-Reihe. In erster Ordnung in ε folgt

$$\log|g| \;=\; \log(1-\varepsilon\,\mathrm{Tr}\,\gamma) \;=\; -\varepsilon\,\mathrm{Tr}\,\gamma \qquad (586)$$

und somit

$$\tfrac{1}{2}\,(\log|g|)_{|k|l} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon(\mathrm{Tr}\,\gamma)_{|k|l} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\sum_{i=0}^{3}\gamma_{ii|k|l} \;. \qquad (587)$$

Das Christoffel-Symbol Γ^j_{lk} kann geschrieben werden als

$$\Gamma^j_{lk} \;=\; g^{jm}\,[lk,m] \;=\; \tfrac{1}{2}\,(g^{(L)jm}+\varepsilon\gamma^{jm})(\varepsilon\,\gamma_{ml|k}+\varepsilon\,\gamma_{mk|l}-\varepsilon\,\gamma_{lk|m})\;. \qquad (588)$$

Wir benutzen die explizite Form von $g^{(L)}_{ij}$ und erhalten in erster Ordnung in ε

$$\Gamma^j_{lk} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\Big(\varepsilon\,\gamma_{jl|k}+\varepsilon\,\gamma_{jk|l}-\varepsilon\,\gamma_{lk|j}\Big)\;. \qquad (589)$$

Somit ist weiter

$$\Gamma^j_{lk|j} \;=\; -\sum_{j=0}^{3}\tfrac{1}{2}\,\Big(\varepsilon\,\gamma_{jl|k}+\varepsilon\,\gamma_{jk|l}-\varepsilon\,\gamma_{lk|j}\Big)_{|j}\;. \qquad (590)$$

Zusammengefaßt lauten die linearisierten Feldgleichungen

$$\sum_{j=0}^{3}\gamma_{jj|k|l} \;=\; \sum_{j=0}^{3}\Big(\gamma_{jk|l|j}+\gamma_{lj|k|j}-\gamma_{kl|j|j}\Big)\;. \qquad (591)$$

Dies ist natürlich keine kovariante Theorie mehr. Die linearisierten Feldgleichungen sind ein Satz von partiellen Differentialgleichungen für die 10 unbekannten Koeffizienten γ_{ij}. In den folgenden Kapiteln werden wir diese Gleichungen untersuchen, vereinfachen und lösen.

Das zeitunabhängige, sphärisch symmetrische Feld

Wie bei unseren Diskussionen statischer Gravitationsfelder gehen wir aus von

$$ds^2 \;=\; g_{00}\,\left(dx^0\right)^2 + g_{mn}\,dx^m\,dx^n\;, \tag{592}$$

wobei die Koeffizienten $g_{00}(x^m)$ und $g_{mn}(x^m)$ nur von den räumlichen Koordinaten x^m abhängen. Es ist $x_0 \;=\; ict$ und damit folgt

$$ds^2 \;=\; -g_{00}\,c^2\,dt^2 + g_{mn}\,dx^m\,dx^n \tag{593}$$

mit einer negativ definiten g_{ik}-Matrix. Wir machen den Ansatz

$$g_{00} \;=\; -1 + \varepsilon a \tag{594}$$

mit $a \;=\; \gamma_{00}$ und $\gamma_{0i} \;=\; 0$ und schreiben g_{mn} in der Form $(m,\, n \;=\; 1,\, 2,\, 3)$

$$g_{mn} \;=\; -\delta_{mn} + \epsilon\gamma_{mn}\;. \tag{595}$$

Wir starten von den Feldgleichungen

$$\sum_{j=0}^{3}\gamma_{jj|k|l} \;=\; \sum_{j=0}^{3}\left(\gamma_{jk|l|j} + \gamma_{lj|k|j} - \gamma_{kl|j|j}\right)\;. \tag{596}$$

Wir betrachten die $k \;=\; l \;=\; 0$ Komponente

$$\sum_{j=0}^{3}\gamma_{jj|0|0} \;=\; \sum_{j=0}^{3}\left(\gamma_{j0|0|j} + \gamma_{0j|0|j} - \gamma_{00|j|j}\right)\;. \tag{597}$$

Die Koeffizienten γ_{ij} hängen nicht von x^0 ab. Damit verschwindet die linke Seite in (597) sowie die ersten beiden Terme der rechten Seite. Es bleibt

$$\sum_{j=0}^{3}\gamma_{00|j|j} \;=\; \sum_{k=1}^{3}a_{|k|k} \;=\; 0 \tag{598}$$

oder

$$\vec{\nabla}^2 a \;=\; \vec{\nabla}^2\,\gamma_{00} \;=\; 0\;. \tag{599}$$

Dies ist die Laplace-Gleichung.

Unter Verwendung der Koordinaten $(ct,\, x,\, y,\, z)$ hatten wir früher gefunden

$$g_{00} \;=\; 1 + \frac{2\varphi}{c^2}\;. \tag{600}$$

Dies wird jetzt in Minkowski-Koordinaten zu

$$g_{00} \;=\; -1 - \frac{2\varphi}{c^2} \;. \tag{601}$$

Damit ist

$$\varepsilon\gamma_{00} \;=\; \varepsilon a \;=\; -\frac{2\varphi}{c^2} \;. \tag{602}$$

Es gilt natürlich auch

$$\vec{\nabla}^2\varphi \;=\; 0 \;. \tag{603}$$

Dies entspricht der klassischen Theorie. Aus der klassischen Theorie wissen wir, daß φ überall null ist, wenn es im Unendlichen verschwindet; es sei denn, die Laplace - Gleichung bricht an irgendeiner Stelle im Raum zusammen. Dies impliziert, daß es einen Punkt oder ein Gebiet geben muß mit $\vec{\nabla}^2\varphi \;\neq\; 0$. Die gleiche Aussage gilt natürlich auch für $\gamma_{00} \;=\; a$. Wir wählen jetzt die isotrope Form der Metrik

$$ds^2 \;=\; -g_{00}\, c^2\, dt^2 - g_{11}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \;. \tag{604}$$

Der radiale Abstand ist $r \;=\; [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$. Aufgrund der radialen Symmetrie gilt

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \varepsilon\, a(r) \;, \\ g_{11} &= -1 + \varepsilon\, b(r) \;, \end{aligned} \tag{605}$$

d.h., $\gamma_{ii}(r) \;=\; (a(r),\, b(r),\, b(r),\, b(r))$ und $\gamma_{ij} \;=\; 0$ für alle $i \;\neq\; j$. In der klassischen Mechanik gilt $\varphi \;=\; -\kappa M/r$. Wir haben jetzt

$$\varepsilon\, a(r) \;=\; \frac{2\kappa M}{c^2\, r} \;. \tag{606}$$

Wir müssen somit noch $b(r)$ bestimmen. Wir betrachten dazu die linearisierten Gleichungen für $\gamma_{11} \;=\; \gamma_{22} \;=\; \gamma_{33}$. Wir setzen $k \;=\; l \;=\; m$ und erhalten

$$\sum_{j=0}^{3} \gamma_{jj|m|m} \;=\; \sum_{j=0}^{3} \left(\gamma_{jm|m|j} + \gamma_{mj|m|j} - \gamma_{mm|j|j}\right) \;. \tag{607}$$

Ausgedrückt durch $a(r)$ und $b(r)$ wird die linke Seite

$$\sum_{j=0}^{3} \gamma_{jj|m|m} \;=\; \gamma_{00|m|m} + \sum_{n=1}^{3} \gamma_{nn|m|m} \;=\; a_{|m|m} + 3\, b_{|m|m} \;. \tag{608}$$

Da γ_{ij} diagonal ist und symmetrisch in i und j sowie zeitunabhängig ist, wird die rechte Seite zu

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3}\left(\gamma_{jm|m|j}+\gamma_{mj|m|j}-\gamma_{mm|j|j}\right) &= 2\,\gamma_{mm|m|m}-\sum_{n=1}^{3}\gamma_{mm|n|n} \\
&= 2\,b_{|m|m}-\sum_{n=1}^{3}b_{|n|n}\;. \qquad (609)
\end{aligned}$$

Damit können wir die linearisierten Gleichungen schreiben als

$$a_{|m|m}+3\,b_{|m|m} \;=\; 2\,b_{|m|m}-\sum_{n=1}^{3}b_{|n|n} \qquad (610)$$

oder

$$a_{|m|m}+b_{|m|m}+\vec{\nabla}^2 b \;=\; 0\;. \qquad (611)$$

Wir summieren über alle m-Werte und berücksichtigen $\vec{\nabla}^2 a \;=\; 0$. Dies ergibt

$$\vec{\nabla}^2 b \;=\; 0 \qquad (612)$$

und somit

$$(a+b)_{|m|m} \;=\; 0\;. \qquad (613)$$

$a+b$ ist demnach eine lineare Funktion der Koordinaten. Daraus folgt, daß sie überall verschwinden muß, wenn sie im Unendlichen null ist. Hieraus schließen wir

$$a \;=\; -b\;. \qquad (614)$$

Somit haben wir abschließend $\gamma_{ij} \;=\; (a,\,-a,\,-a,\,-a)$ für $i \;=\; j$ und

$$g_{ij} \;=\; (-1+\varepsilon a,\; -1-\varepsilon a,\; -1-\varepsilon a,\; -1-\varepsilon a) \qquad (615)$$

für $i \;=\; j$. Es gilt zusammengefaßt

$$ds^2 \;=\; (1-\varepsilon a)\,c^2\,dt^2-(1+\varepsilon a)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)\;. \qquad (616)$$

Abschließend folgt

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1+\frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2\,dt^2-\left(1-\frac{2\varphi}{c^2}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \\
&= \left(1-\frac{2\kappa M}{c^2\,r}\right)c^2\,dt^2-\left(1+\frac{2\kappa M}{c^2\,r}\right)d\sigma^2\;. \qquad (617)
\end{aligned}$$

Dieses Resultat stimmt mit der Schwarzschild - Lösung überein.

Die Weyl-Lösung der linearisierten Feldgleichungen

Wir wollen nun eine spezielle Klasse von Lösungen der linearisierten Gleichungen ableiten, die von Weyl gefunden wurde. Wir definieren den vierdimensionalen D'Alembert-Operator durch

$$\Box^2 \gamma_{kl} \;=\; -\sum_{j=0}^{3} \gamma_{kl|j|j} \;. \tag{618}$$

Damit lassen sich die linearisierten Gleichungen schreiben als

$$\Box^2 \gamma_{kl} + \sum_{j=0}^{3} \gamma_{lj|k|j} + \sum_{j=0}^{3} \gamma_{jk|l|j} - \sum_{j=0}^{3} \gamma_{jj|k|l} \;=\; 0 \;. \tag{619}$$

Dies läßt sich in etwas symmetrischerer Form ausdrücken durch

$$\Box^2 \gamma_{kl} + \sum_{j=0}^{3} \Big(\gamma_{lj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|l}\Big)_{|k} + \sum_{j=0}^{3} \Big(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|k}\Big)_{|l} \;=\; 0 \tag{620}$$

Wir definieren eine vierkomponentige Größe durch

$$\tau_k \;=\; -\sum_{j=0}^{3} \Big(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|k}\Big) \;. \tag{621}$$

Damit bekommen wir aus (620)

$$\Box^2 \gamma_{kl} \;=\; \tau_{l|k} + \tau_{k|l} \;. \tag{622}$$

Dies ist vollständig äquivalent zu den ursprünglichen Feldgleichungen.

Wir folgen nun Weyl und setzen τ_l versuchsweise an als

$$\tau_l \;=\; \Box^2 \varphi_l \;. \tag{623}$$

Einsetzen in (622) liefert

$$\Box^2 \gamma_{kl} \;=\; \Box^2 \varphi_{l|k} + \Box^2 \varphi_{k|l} \;. \tag{624}$$

Dies führt offensichtlich auf die Lösungsmöglichkeit

$$\gamma_{kl} \;=\; \varphi_{l|k} + \varphi_{k|l} \;, \tag{625}$$

wobei die φ_l vier beliebig bestimmte Funktionen sind. Um dies zu zeigen setzen wir (625) in (619) ein

$$\begin{aligned} & \Box^2 \gamma_{kl} + \sum_{j=0}^{3} \Big(\gamma_{lj|k|j} + \gamma_{jk|l|j} - \gamma_{jj|k|l} \Big) \\ = \;& \Box^2 \gamma_{kl} + \sum_{j=0}^{3} \Big(\varphi_{l|j|k|j} + \varphi_{j|l|k|j} + \varphi_{j|k|l|j} + \varphi_{k|j|l|j} - \varphi_{j|j|k|l} - \varphi_{j|j|k|l} \Big) \\ = \;& \Box^2 \gamma_{kl} - \Big(\Box^2 \varphi_{l|k} + \Box^2 \varphi_{k|l} \Big) \ . \end{aligned} \tag{626}$$

Wir haben von der Vertauschbarkeit der gewöhnlichen Ableitung gebrauch gemacht. Aufgrund von (624) ist das null. Die Unterklasse der Lösungen (625) sind die Weylschen Lösungen der linearisierten Gleichungen.

Nun betrachten wir eine beliebige Lösung γ_{kl} der linearisierten Gleichungen. Zu diesen Lösungen betrachten wir den Satz τ_k zugeordneter Funktionen

$$\tau_k \;=\; -\sum_{j=0}^{3} \Big(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\, \gamma_{jj|k} \Big) \ . \tag{627}$$

Wir können auch einen Satz zugeordneter Funktionen φ_l definieren, die durch die vier Gleichungen bestimmt sind

$$\Box^2 \varphi_l \;=\; \tau_l \ . \tag{628}$$

Mit diesen φ_l, die wir aus den Orginallösungen γ_{kl} der Feldgleichungen gewonnen haben, können wir nun *neue* Lösungen der Feldgleichungen vom Weyl-Typ generieren

$$\gamma^{(W)}_{kl} \;=\; \varphi_{k|l} + \varphi_{l|k} \ . \tag{629}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tau^{(W)}_k \;&=\; -\sum_{j=0}^{3} \Big(\gamma^{(W)}_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\, \gamma^{(W)}_{jj|k} \Big) \\ &=\; -\sum_{j=0}^{3} \Big(\varphi_{k|j|j} + \varphi_{j|k|j} - \tfrac{1}{2}\, \varphi_{j|j|k} - \tfrac{1}{2}\, \varphi_{j|j|k} \Big) \\ &=\; \Box^2 \varphi_k \ . \end{aligned} \tag{630}$$

Zu den $\gamma^{(W)}_{kl}$ gehört der selbe Satz zugeordneter Funktionen τ_k wie zu den γ_{kl}. Somit entspricht jeder Lösung der linearisierten Gleichung eine eindeutig assoziierte Weyl-Lösung.

Es gibt noch eine weitere Lösung, die assoziiert ist mit den beliebigen Lösungen γ_{kl} und die letztlich die physikalisch interessante ist. Wir betrachten die Differenz der Orginallösung und der Weyl-Lösung

$$\gamma_{kl} - \gamma_{kl}^{(W)} \;=\; \hat{\gamma}_{kl} \; . \tag{631}$$

Wegen der Linearität der Gleichungen ist dies auch eine Lösung. $\hat{\gamma}_{kl}$ ist durch γ_{kl} eindeutig bestimmt. Wir haben nach (622)

$$\Box^2 \, \gamma_{kl} \;=\; \tau_{k|l} + \tau_{l|k} \; . \tag{632}$$

Ähnlich folgt aus den Definitionen der $\gamma_{kl}^{(W)}$ und der φ_l nach (623) - (625)

$$\Box^2 \, \gamma_{kl}^{(W)} \;=\; \Box^2 \, \varphi_{k|l} + \Box^2 \, \varphi_{l|k} \;=\; \tau_{k|l} + \tau_{l|k} \; . \tag{633}$$

Daraus folgt offensichtlich

$$\Box^2 \, \hat{\gamma}_{kl} \;=\; \Box^2 \, \gamma_{kl} - \Box^2 \, \hat{\gamma}_{kl}^{(W)} \;=\; 0 \; . \tag{634}$$

Dies ist die uns bekannte Wellengleichung. Die Störung $\hat{\gamma}_{kl}$ propagiert mit der Lichtgeschwindigkeit c.

Als nächstes wollen wir einen Satz von Gleichungen ableiten, der die Komponenten $\hat{\gamma}_{kl}$ miteinander verknüpft. Der Satz von Funktionen $\hat{\tau}_k$, der zu den $\hat{\gamma}_{kl}$ gehört, gehorcht den Gleichungen

$$\Box^2 \, \hat{\gamma}_{kl} \;=\; \hat{\tau}_{k|l} + \hat{\tau}_{l|k} \;=\; 0 \; . \tag{635}$$

Dies hatten wir weiter oben bereits bewiesen. Vektorfelder in Riemannschen Räumen mit der Differentialeigenschaft

$$\xi_{l||k} + \xi_{k||l} \;=\; 0 \tag{636}$$

heißen Killing-Vektorfelder. Sie spielen eine wesentliche Rolle in der Differentialgeometrie. Im Rahmen unserer Näherungen können wir die $\hat{\tau}_k$ als Felder von Killing-Vektoren verstehen. Wir zeigen nun, daß ein Feld solcher Vektoren, das überall regulär ist und das im Unendlichen in einem Raum, der asymptotisch pseudo-Euklidisch ist, verschwindet, identisch null ist. Wir differenzieren (635) nach x^r und erhalten

$$\hat{\tau}_{k|l|r} + \hat{\tau}_{l|k|r} \;=\; 0 \; . \tag{637}$$

Wir nutzen wieder aus, daß gewöhnliche Ableitungen vertauschen. Durch zyklisches Vertauschen den Indizes $k,\ l$ und r bekommen wir

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_{k|l|r} + \hat{\tau}_{l|r|k} &= 0 \,, \\
\hat{\tau}_{l|r|k} + \hat{\tau}_{r|k|l} &= 0 \,, \\
\hat{\tau}_{r|k|l} + \hat{\tau}_{k|l|r} &= 0 \,. \qquad (638)
\end{aligned}$$

Wir können dies in Matrixform schreiben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{k|l|r} \\ \hat{\tau}_{l|k|r} \\ \hat{\tau}_{r|l|k} \end{pmatrix} = 0 \,. \qquad (639)$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann eine nichtverschwindende Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Die Determinante ist aber 2, d.h., es gilt

$$\hat{\tau}_{k|l|r} = 0 \,. \qquad (640)$$

Durch Integration folgt, $\hat{\tau}$ ist eine lineare Funktion, d.h. für große Argumente folgt entweder null, eine Konstante oder unendlich. Nun soll das Gravitationsfeld asymptotisch verschwinden. Aus dieser Forderung erhalten wir

$$\hat{\tau}_k = 0 \,. \qquad (641)$$

Somit ist abschließend

$$\hat{\tau}_k = \sum_{j=0}^{3} \left(\hat{\gamma}_{kj|j} - \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{jj|k} \right) = 0 \,. \qquad (642)$$

Dies ist der gesuchte Satz von Verknüpfungsgleichungen für die Komponenten $\hat{\gamma}_{kl}$.

Zur Struktur der linearisierten Gleichungen

Wir wollen nun zeigen, daß die $\hat{\gamma}_{kl}$ die physikalisch relevanten Lösungen darstellen. Wir betrachten den Riemannschen Tensor

$$R^i{}_{kjl} \;=\; \Gamma^i_{jk|l} - \Gamma^i_{kl|j} + \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} - \Gamma^i_{rj}\Gamma^r_{lk} \;. \tag{643}$$

Linearisieren ergibt als Näherung

$$R^i{}_{kjl} \;=\; \Gamma^i_{jk|l} - \Gamma^i_{kl|j} \;. \tag{644}$$

Wie wir bereits abgeleitet haben lauten in erster Ordnung in ε die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^i_{jk} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{ij|k} + \gamma_{ik|j} - \gamma_{jk|i}\right) \;. \tag{645}$$

Einsetzen in den Riemannschen Tensor liefert

$$\begin{aligned} R^i{}_{kjl} \;&=\; -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{ij|k|l} + \gamma_{ik|j|l} - \gamma_{jk|i|l}\right) + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{ik|l|j} + \gamma_{il|k|j} - \gamma_{kl|i|j}\right) \\ &=\; \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{il|k|j} + \gamma_{jk|i|l} - \gamma_{ij|k|l} - \gamma_{kl|i|j}\right) \;. \end{aligned} \tag{646}$$

Diese Gleichung gilt für jede Störmatrix γ_{ij}. Für den Spezialfall der Weylschen Lösung

$$\gamma_{ij} \;=\; \varphi_{i|j} + \varphi_{j|i} \tag{647}$$

folgt

$$\begin{aligned} R^i{}_{kjl} \;=\;& \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\Big(\varphi_{i|l|k|j} + \varphi_{l|i|k|j} + \varphi_{j|k|i|l} + \varphi_{k|j|i|l} \\ &- \;\varphi_{i|j|k|l} - \varphi_{j|i|k|j} - \varphi_{k|l|i|j} - \varphi_{l|k|i|j}\Big) \;=\; 0 \;. \end{aligned} \tag{648}$$

Die Weyl-Lösung ergibt also einen exakt verschwindenden Riemann-Tensor. Die Weyl - Lösung entspricht keinem Gravitationsfeld, sie ist vielmehr eine künstliche Eigenschaft des gewählten Koordinatensystems, aber keine physikalische Eigenschaft des Raumes.

Gravitationswellen

Die linearisierten Gleichungen können in knapper Form geschrieben werden als

$$\Box^2 \gamma_{ij} \;=\; 0 \tag{649}$$

mit der Verknüpfungsgleichung

$$\sum_{j=0}^{3} \left(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|k}\right) \;=\; 0\;. \tag{650}$$

Hierbei haben wir einen Wechsel in der Nomenklatur durchgeführt und änderten $\hat{\gamma} \to \gamma$. Es gelten Euklidische Randbedingungen im Unendlichen. Der Riemannsche Tensor lautet in erster Ordnung in ε

$$R^{i}{}_{kjl} \;=\; \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{il|k|j} + \gamma_{jk|i|l} - \gamma_{ij|k|l} - \gamma_{kl|i|j}\right)\;. \tag{651}$$

Der Teil des Tensors, der mit der Weylschen Lösung korrespondiert, verschwindet identisch. Aufgrund von (649) folgt

$$\Box^2\, R^{i}{}_{kjl} \;=\; 0\;. \tag{652}$$

Damit gehorcht der Riemann-Tensor selber, der ein absolutes Kriterium für die Existenz eines Gravitationsfeld liefert, der Wellengleichung. Wir haben bisher festgestellt, daß sich Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Jedoch haben wir noch nicht die Existenz von Gravitationsstrahlung nachgewiesen, die auch Energietransfer involviert.

Wir wollen nun die allgemeinen Eigenschaften einer Lösung mit Ebenen Wellen betrachten. Dazu studieren wir das Verhalten von (649) und (650) bei Koordinatentransformationen.

$$\bar{x}^{i} \;=\; x^{i} - \varepsilon\,\varphi_i(x)\;. \tag{653}$$

Dies impliziert

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \;=\; \delta^{i}{}_{m} + \varepsilon\,\varphi_{i|m}\;. \tag{654}$$

Weiter gilt

$$\bar{g}_{lk} \;=\; \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\,\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}\,g_{ij} \tag{655}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{lk} &= \left(\delta^i{}_l + \varepsilon\,\varphi_{i|l}\right)\left(\delta^j{}_k + \varepsilon\,\varphi_{j|k}\right) g_{ij} \\
&= g_{lk} + \varepsilon\,\varphi_{i|l}\,\delta^j{}_k\,g_{ij} + \varepsilon\,\varphi_{j|k}\,\delta^i{}_l\,g_{ij} \\
&= g_{lk} + \varepsilon\,\varphi_{i|l}\,g_{ik} + \varepsilon\,\varphi_{j|k}\,g_{lj} \\
&\simeq g_{lk} - \varepsilon\,\varphi_{k|l} - \varepsilon\,\varphi_{l|k}\,.
\end{aligned} \tag{656}$$

Wir erhalten also nach dieser einfachen Rechnung in niedrigster Ordnung

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - \varepsilon\left(\varphi_{i|j} + \varphi_{j|i}\right) \tag{657}$$

oder

$$\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \left(\varphi_{i|j} + \varphi_{j|i}\right)\ . \tag{658}$$

Außerdem folgt aus (654) näherungsweise

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} + \mathcal{O}(\varepsilon)\ . \tag{659}$$

Damit ist in niedrigster Ordnung der d'Alembert-Operator $\Box^2$ eine Invariante und wir können schreiben

$$\overline{\Box}^2\,\bar{\gamma}_{ij} = \Box^2\,\gamma_{ij} - \Box^2\left(\varphi_{i|j} + \varphi_{j|i}\right)\ . \tag{660}$$

Ähnlich folgt für (650)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3}\left(\bar{\gamma}_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\bar{\gamma}_{jj|k}\right) &= \sum_{j=0}^{3}\left(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|k}\right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{3}\left(\varphi_{k|j|j} + \varphi_{j|k|j}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\left(\varphi_{j|j|k} + \varphi_{j|j|k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{3}\left(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|k}\right) + \Box^2\,\varphi_k\ .
\end{aligned} \tag{661}$$

Somit sind die linearisierten Gleichungen dann und nur dann invariant bei Koordinatentransformationen, wenn gilt

$$\Box^2\,\varphi_k = 0\ . \tag{662}$$

In der linearisierten Theorie haben die Lösungen mit Ebenen Wellen die interessante Eigenschaft, daß der Riemann-Tensor hochgradig degeneriert ist, d.h., nicht alle Komponenten des metrischen Tensors treten in $R^i{}_{kjl}$ auf. Wir wollen dies für eine Ebene

Welle in x-Richtung demonstrieren. Solch eine Welle ist charakterisiert durch die Tatsache, daß alle Variablen γ_{ij} nur von den Koordinaten $x^0 = ict$ und $x^1 = x$ abhängen. Die Komponenten des metrischen Tensors haben verschwindende Ableitungen in y und z-Richtung, d.h. $\gamma_{ij|2} = \gamma_{ij|3} = 0$. Wir nutzen diese Bedingungen aus und schreiben die 21 nichtverschwindenden Komponenten von R_{ikjl} auf. Innerhalb unserer Näherungen gilt in niedrigster Ordnung

$$R_{ikjl} = -R^i{}_{kjl} \ . \tag{663}$$

Es ist

$$R^i{}_{kjl} = \tfrac{1}{2}\varepsilon \left(\gamma_{il|k|j} + \gamma_{jk|i|l} - \gamma_{ij|k|l} - \gamma_{kl|i|j}\right) \ . \tag{664}$$

Damit folgt

$$R^1{}_{223} = R^1{}_{323} = R^1{}_{023} = R^2{}_{323} = R^2{}_{320} = R^2{}_{330} = 0 \ . \tag{665}$$

Beispielsweise gilt

$$R^1{}_{223} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{13|2|2} + \gamma_{22|1|3} - \gamma_{12|2|3} - \gamma_{23|1|2}\right) = 0 \ . \tag{666}$$

Alle Ableitungen mit der Ausnahme der nach 0 und 1 verschwinden. Ferner folgt

$$\begin{aligned}
R^1{}_{030} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{10|0|3} + \gamma_{30|1|0} - \gamma_{13|0|0} - \gamma_{00|1|3}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{30|1|0} - \gamma_{13|0|0}\right) \ , \\
R^1{}_{010} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{10|0|1} + \gamma_{10|1|0} - \gamma_{11|0|0} - \gamma_{00|1|1}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(2\,\gamma_{10|0|1} - \gamma_{11|0|0} - \gamma_{00|1|1}\right) \ , \\
R^1{}_{310} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{13|1|0} - \gamma_{30|1|1}\right) \ , \\
R^1{}_{020} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{20|1|0} - \gamma_{12|0|0}\right) \ , \\
R^1{}_{210} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon \left(\gamma_{12|1|0} - \gamma_{20|1|1}\right) \ .
\end{aligned} \tag{667}$$

Ebenso haben wir

$$\begin{aligned}
R^2{}_{020} &= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{22|0|0} \ , \\
R^2{}_{030} &= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{23|0|0} \ , \\
R^3{}_{030} &= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{33|0|0} \ , \\
R^1{}_{220} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{22|0|1} \ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R^1{}_{230} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{23|0|1}\ , \\
R^1{}_{320} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{32|0|1}\ , \\
R^1{}_{330} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{33|0|1}\ , \\
R^1{}_{212} &= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{22|1|1}\ , \\
R^1{}_{213} &= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{23|1|1}\ , \\
R^1{}_{313} &= -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{33|1|1}\ .
\end{aligned}
\tag{668}
$$

Wir schreiben nun die linearisierten Gleichungen in der Form $R_{kl} = 0$. Zum Beispiel gilt

$$
R_{13} = R^i{}_{1i3} = R^0{}_{103} = 0\ . \tag{669}
$$

Eine ähnliche Betrachtung der Feldgleichungen zeigt, daß auch alle anderen Komponenten des Krümmungstensors aus (667) identisch verschwinden und es bleiben nur die bereits berechneten Komponenten (668) übrig. Es verbleibt also nur die letzte Gruppe (668). Sie beinhaltet die Komponenten $\gamma_{22},\ \gamma_{23},\ \gamma_{32},\ \gamma_{33}$. Wir können also die Störung in zwei Teile aufspalten

$$
\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(1) + \gamma_{ij}(2) \tag{670}
$$

mit

$$
\gamma_{ij}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \tag{671}
$$

und

$$
\gamma_{ij}(2) = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{03} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & 0 & 0 \\ \gamma_{30} & \gamma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{672}
$$

Der Krümmungstensor von $\gamma_{ij}(2)$ ist identisch null. Es sollte also ein Koordinatensystem existieren, in dem nur $\gamma_{22},\ \gamma_{23},\ \gamma_{32},\ \gamma_{33}$ von null verschieden sind. Wir werden ein solches Koordinatensystem konstruieren. Eine solche Form nennen wir eine kanonische Wellenlösung. Mit der Abhängigkeit

$$
\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^1 - ct) = \gamma_{ij}(x^1 + ix^0) \tag{673}
$$

wird die Wellengleichung automatisch erfüllt. Wir führen die Notation ein

$$\sum_{j=0}^{3} \gamma_{jj} \; = \; \mathrm{Tr}\,\gamma \; = \; \Gamma \; . \tag{674}$$

Somit folgt aus

$$\sum_{j=0}^{3} \left(\gamma_{kj|j} - \tfrac{1}{2}\,\gamma_{jj|k} \right) \; = \; 0 \tag{675}$$

explizit

$$\begin{aligned} \gamma_{00|0} + \gamma_{01|1} - \tfrac{1}{2}\,\Gamma_{|0} \; &= \; 0 \\ \gamma_{10|0} + \gamma_{11|1} - \tfrac{1}{2}\,\Gamma_{|1} \; &= \; 0 \\ \gamma_{20|0} + \gamma_{21|1} \; &= \; 0 \\ \gamma_{30|0} + \gamma_{31|1} \; &= \; 0 \; . \end{aligned} \tag{676}$$

Aufgrund der funktionalen Abhängigkeit der γ_{ij} verwenden wir nun $\gamma_{ij|1} \; = \; {\gamma'}_{ij}$ und $\gamma_{ij|0} \; = \; i\,{\gamma'}_{ij}$ mit ${\gamma'}_{ij} \; = \; d/d(x^1 + i x^0)\,\gamma_{ij}$. Damit folgt weiter aus (676)

$$\begin{aligned} i\,{\gamma'}_{00} + {\gamma'}_{01} - \tfrac{1}{2}\,i\,\Gamma' \; &= \; 0 \\ i\,{\gamma'}_{10} + {\gamma'}_{11} - \tfrac{1}{2}\,\Gamma' \; &= \; 0 \\ i\,{\gamma'}_{20} + {\gamma'}_{21} \; &= \; 0 \\ i\,{\gamma'}_{30} + {\gamma'}_{31} \; &= \; 0 \; . \end{aligned} \tag{677}$$

Da alle γ_{ij} im Unendlichen bei Euklidischen Randbedingungen verschwinden, kann der ganze Satz von Differentialgleichungen sofort integriert werden. Wir lassen einfach die Ableitungsstriche weg. Wir multiplizieren die 2. Gleichung von (677) mit i und addieren sie dann zur 1. Gleichung. Es folgt

$$i\,\gamma_{00} + i\,\gamma_{11} - i\,\gamma_{00} - i\,\gamma_{11} - i\,\gamma_{22} - i\,\gamma_{33} \; = \; 0 \tag{678}$$

und somit

$$\gamma_{22} \; = \; -\gamma_{33} \; . \tag{679}$$

Damit gilt auch

$$\Gamma \; = \; \mathrm{Tr}\,\gamma \; = \; \gamma_{00} + \gamma_{11} \; . \tag{680}$$

Wir lösen die erste Gleichung von (677) nach γ_{01} auf

$$\gamma_{01} \; = \; \tfrac{1}{2}\,i\,\Gamma - i\,\gamma_{00} \; = \; \tfrac{1}{2}\,i\,\left(\gamma_{11} - \gamma_{00} \right) \; . \tag{681}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \gamma_{20} &= i\,\gamma_{21}\,, \\ \gamma_{30} &= i\,\gamma_{31}\,. \end{aligned} \tag{682}$$

Wir fassen die einzelnen Resultate zusammen

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & \frac{1}{2}\,i\,(\gamma_{11}-\gamma_{00}) & i\,\gamma_{12} & i\,\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\,i\,(\gamma_{11}-\gamma_{00}) & \gamma_{11} & \gamma_{12} & i\,\gamma_{13} \\ i\,\gamma_{12} & \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ i\,\gamma_{13} & \gamma_{13} & \gamma_{23} & -\gamma_{22} \end{pmatrix}. \tag{683}$$

Dies ist die allgemeinste Lösung in einem beliebigen Lorentz-ähnlichen Koordinatensystem. Wir wollen dies nun in eine kanonische Form bringen, in dem die Extrakomponenten von (683) verschwinden. Wir beschränken uns auf Transformationen (653) mit $\Box^2\,\varphi_i = 0$, damit die linearisierten Gleichungen auch in transformierten Koordinaten ihre Form beibehalten. Wir fordern

$$\bar{\gamma}_{00} = \bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{13} = 0\,. \tag{684}$$

Entsprechend (658) müssen dann die φ_i den Gleichungen erster Ordnung gehorchen

$$\varphi_{0|0} = \tfrac{1}{2}\,\gamma_{00}\,, \tag{685}$$

$$\varphi_{1|1} = \tfrac{1}{2}\,\gamma_{11}\,, \tag{686}$$

$$\varphi_{1|2} + \varphi_{2|1} = \gamma_{12}\,, \tag{687}$$

$$\varphi_{1|3} + \varphi_{3|1} = \gamma_{13}\,. \tag{688}$$

Wenn wir nun die φ_i so wählen, daß sie die funktionale Abhängigkeit $\varphi_i(x^1 + i\,x^0)$ haben, dann gilt auch stets $\Box^2\,\varphi_i = 0$. Damit brauchen wir bloß für (685) eine Funktion $F(Z)$ zu suchen mit $F'(Z) = \gamma_{00}(Z)$, dann wird $\varphi_0(x^1 + i\,x^0) = -\frac{1}{2}\,i\,F(x^1 + i\,x^0)$ (685) befriedigen. Wenn wir also die Funktionen $F(Z)$, $G(Z)$, $H(Z)$ und $K(Z)$ wählen mit

$$\begin{aligned} F'(Z) &= \gamma_{00}(Z)\,, \\ G'(Z) &= \gamma_{11}(Z)\,, \\ H'(Z) &= \gamma_{12}(Z)\,, \\ K'(Z) &= \gamma_{13}(Z)\,, \end{aligned} \tag{689}$$

dann folgen aus den Gleichungen (685) - (688) die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= -\tfrac{1}{2}\, i\, F(x^1 + ix^0) \ , \\
\varphi_1 &= \tfrac{1}{2}\, G(x^1 + ix^0) \ , \\
\varphi_2 &= H(x^1 + ix^0) \ , \\
\varphi_3 &= K(x^1 + ix^0) \ .
\end{aligned} \tag{690}$$

Aus den Transformationsgleichungen

$$\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \Big(\varphi_{i|j} + \varphi_{j|i}\Big) \tag{691}$$

folgt dann schließlich wie beabsichtigt

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & \gamma_{23} & -\gamma_{22} \end{pmatrix} \ . \tag{692}$$

Wir wollen nun abschließend die Bewegung eines Testteilchens im metrischen Feld (692) einer Ebenen Welle untersuchen. Die Trajektorie wird beschrieben durch die Geodätengleichung

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j = 0 \ . \tag{693}$$

Da die Metrik (692) eine sehr einfache Struktur hat, lassen sich auch die Christoffel-Symbole sehr einfach berechnen. In erster Ordnung in ε galt

$$\Gamma^i_{jk} = -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \Big(\gamma_{ij|k} + \gamma_{ik|j} - \gamma_{jk|i}\Big) \ . \tag{694}$$

Jetzt haben wir

$$\Gamma^0_{ij} = -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \Big(\gamma_{0i|j} + \gamma_{0j|i} - \gamma_{ij|0}\Big) = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \gamma_{ij|0} \ , \tag{695}$$

da alle γ_{0i} verschwinden. Ähnlich folgt

$$\Gamma^1_{ij} = -\tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \Big(\gamma_{1i|j} + \gamma_{1j|i} - \gamma_{ij|1}\Big) = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon\, \gamma_{ij|1} \ . \tag{696}$$

Auf der anderen Seite wissen wir, daß γ_{ij} eine Funktion von $x^1 + ix^0$ ist. Daraus folgt

$$\gamma_{ij|0} = i\, \gamma_{ij|1} \tag{697}$$

und weiter

$$i\,\Gamma^1_{ij} \;=\; \Gamma^0_{ij}\;. \tag{698}$$

Somit folgt auch sofort aus den Geodätengleichungen mit (698)

$$i\,\ddot{x}^0 + \ddot{x}^1 \;=\; 0\;. \tag{699}$$

Eine erste Integration liefert

$$i\,\dot{x}^0 + \dot{x}^1 \;=\; A\;, \tag{700}$$

wobei A eine Integrationskonstante bezeichnet. Wir wollen nun die Bewegungsgleichung (693) für m = 1 betrachten

$$\ddot{x}^1 + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\left[\gamma'_{22}\left(\left(\dot{x}^2\right)^2 - \left(\dot{x}^3\right)^2\right) + 2\,\gamma'_{23}\,\dot{x}^2\,\dot{x}^3\right] \;=\; 0\;. \tag{701}$$

Auch für m = 2, 3 betrachten wir die Bewegungsgleichungen. Es ist

$$\Gamma^k_{ij} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\left(\gamma_{ik|j} + \gamma_{jk|i}\right) \tag{702}$$

mit k = 2, 3. Es folgt

$$\ddot{x}^k - \varepsilon\,\gamma_{ik|j}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j \;=\; 0 \tag{703}$$

mit k = 2,3, wobei i = 2,3 und j = 0,1 ist. Da gilt $\gamma_{ik|0} \;=\; i\,\gamma_{ik|1} \;=\; i\,\gamma'_{ik}$ finden wir

$$\ddot{x}^k \;=\; \varepsilon\,\gamma'_{ik}\,\left(i\,\dot{x}^0 + \dot{x}^1\right)\dot{x}^i \;=\; \varepsilon\,\left(i\,\dot{x}^0 + \dot{x}^1\right)\left(\gamma'_{2k}\,\dot{x}^2 + \gamma'_{3k}\,\dot{x}^3\right)\;. \tag{704}$$

Mit (700) wird daraus

$$\ddot{x}^2 \;=\; \varepsilon\,A\,\left(\gamma'_{22}\,\dot{x}^2 + \gamma'_{23}\,\dot{x}^3\right) \tag{705}$$

und

$$\ddot{x}^3 \;=\; \varepsilon\,A\,\left(\gamma'_{23}\,\dot{x}^2 + \gamma'_{33}\,\dot{x}^3\right) \;=\; \varepsilon\,A\,\left(\gamma'_{23}\,\dot{x}^2 - \gamma'_{22}\,\dot{x}^3\right)\;. \tag{706}$$

Die Form, in die wir die Gleichungen für $x^1,\ x^2$ und x^3 gebracht haben, erlaubt sehr interessante Schlußfolgerungen bezüglich der Natur der Metrik der Ebenen Welle. Für kleine Geschwindigkeiten und schwache Felder gilt $-\dot{x}^0 \;=\; c\,\dot{t} \;\simeq\; 1$ und $\dot{x}^k \;\sim\; v^k/c$ mit k = 1,2,3. Daraus lernen wir für die Beschleunigungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x}^1 \;&=\; \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon\,v^2}{c^2}\right)\;,\\ \ddot{x}^2 \;&=\; \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon\,v}{c}\right)\;,\\ \ddot{x}^3 \;&=\; \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon\,v}{c}\right)\;.\end{aligned} \tag{707}$$

Die Beschleunigung in x^1-Richtung ist also viel kleiner als in x^2 oder x^3-Richtung für $v \ll c$. Wir können eine ähnliche Behauptung für die Komponenten der Geschwindigkeit aufstellen. Wir multiplizieren (705) mit $\dot{x}^2$ und (706) mit $\dot{x}^3$. Die Addition liefert

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\left[\left(\dot{x}^2\right)^2 + \left(\dot{x}^3\right)^2\right] \;=\; \varepsilon\, A\left[\gamma'_{22}\left(\left(\dot{x}^2\right)^2 - \left(\dot{x}^3\right)^2\right) + 2\,\gamma'_{23}\,\dot{x}^2\,\dot{x}^3\right] \;. \qquad (708)$$

Der Vergleich mit (701) liefert nach erfolgter Integration

$$4\,A\,\dot{x}^1 + \left(\dot{x}^2\right)^2 + \left(\dot{x}^3\right)^2 \;=\; \mathrm{const} \qquad (709)$$

oder

$$4\,A\,\frac{v^1}{c} + \left(\frac{v^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{v^3}{c}\right)^2 \;\simeq\; \mathrm{const} \qquad (710)$$

und damit

$$\frac{v^1}{c} \;=\; \mathcal{O}\left(\left(\frac{v^{2,3}}{c}\right)^2\right) \;. \qquad (711)$$

Die Geschwindigkeit in x^1-Richtung ist also sehr klein. Eine Ebene Welle erzeugt eine viel stärkere transversale als longitudinale Bewegung. Die Bewegung ist dominanterweise transversal.

In Analogie zur klassischen Elektrodynamik lassen sich nun auch linear polarisierte Ebene Wellen (usw.) untersuchen. Dies wollen wir hier jedoch nicht weiter verfolgen. Der Experimentator Weber hat versucht Gravitationswellen auf piezoelektrischem Wege nachzuweisen mit zwei in Koinzidenz geschalteten Aluminiumbehältern. Dieses Experiment ergab zunächst auch ein positives Resultat. Jedoch haben nachfolgende Experimente mit größerer Nachweiswahrscheinlichkeit ein negatives Resultat ergeben. Gegenwärtig wird an der Entwicklung von Gravitationswellendetektoren gearbeitet, um die Gravitationswellen, wie sie beim Gravitationskollaps und bei Supernovaexplosionen auftreten, nachzuweisen.

Wurmlöcher

In diesem Kapitel wollen wir abschließend rein qualitativ einige Sachverhalte aus der aktuellen Forschung aufführen. Eines der faszinierensten Spekulationsobjekte stellen dabei sicherlich die Wurmlöcher dar. Wurmlöcher sind Brückenverbindungen zwischen entfernten Regionen von einem oder mehreren Universen. Diese Brücken werden zuweilen auch Einstein-Rosen-Brücken genannt.

Ein Schwarzschild-Wurmloch, entstanden durch die Formation von Schwarzen Löchern, kann beispielsweise zwei entfernte Regionen in einem einzigen, asymptotisch flachen Universum verbinden. Das einzelne Universum weist dann eine mehrfache Verbindung auf, wobei zwei Punkte A und B durch den raumartigen Weg über den Schwarschild-Schlund miteinander verbunden werden können oder über die asymptotisch flache Region. Es ist natürlich auch eine Topologie mit mehrfachen Verbindungen denkbar. Ein Wurmloch kann aber auch, dargestellt auf einer raumartigen Hyperfläche mit t = const, zwei getrennte asymptotisch flache Universen miteinander verbinden.

Wichtig is es in diesem Zusammenhang festzuhalten, daß in den Regionen II und IV in der Kruskal-Darstellung der Schwarzschild-Geometrie der Übergang $t \rightarrow t + \Delta t$ eine raumartige Bewegung und *nicht* eine zeitartige Bewegung darstellt. Dies bedeutet auch, daß eine raumartige Hyperfläche mit t = const, die sich von der Region I durch $u = v =$ 0 in die Region III erstreckt eben *nicht* statisch ist. Ein Wurmloch ist ein dynamisches Objekt.

Wir wenden uns nun dem Mikrokosmos zu. In der Quantentheorie des Raumes unterliegt auch die Geometrie des Raumes Quantenfluktuationen. Die metrischen Koeffizienten unterliegen Quantenfluktuationen in der Ordnung

$$\delta g \;=\; \frac{L^*}{\text{Ausdehnung des betrachteten Objektes}} \tag{712}$$

mit der Planck-Länge

$$L^* \;=\; \sqrt{\frac{\hbar\kappa}{c^3}} \;\simeq\; 1.6 \,\times\, 10^{-33}\,\mathrm{cm}\;. \tag{713}$$

Diese Quantenfluktuationen der Geometrie werden generell erwartet unabhängig beispielsweise von der Existenz von punktförmigen Teilchen. Dennoch wird vereinzelt spekuliert, daß auch punktförmige Elementarteilchen solche Wurmlöcher bilden und somit mit anderen Raumregionen in Kontakt stehen könnten. Auch Wurmlöcher können natürlich in Form von Quantenfluktuationen ständig entstehen und vergehen. Maßgeblich dafür ist die Planck-Skala:

$$\begin{array}{llll} \text{Planck-Zeit:} & T^* = \sqrt{\hbar\kappa/c^5} & & \simeq 5.4 \times 10^{-44} \text{ sec} , \\ \text{Planck-Masse:} & M^* = \sqrt{\hbar c/\kappa} & & \simeq 2.2 \times 10^{-5} \text{ g} , \\ \text{Planck-Dichte:} & \rho^* = M^*/L^{*3} & = c^5/(\hbar\kappa^2) & \simeq 5.2 \times 10^{93} \, \mathrm{g/cm^3} . \end{array} \tag{714}$$

Wurmlöcher sind Topologie-ändernde Konfigurationen in der Euklidischen Quantengravitation. Nach *S. Coleman, Why there is nothing rather than something: A theory of the cosmological constant, Nuclear Physics B310 (1988) 643*, verschwindet die kosmologische Konstante λ falls Wurmlöcher existieren. Als Wurmlöcher werden somit mikroskopisch auch Feldkonfigurationen verstanden, die in der Euklidischen Pfadintegral-Formulierung der Quantengravitation auftreten. Zwei asymptotisch flache Räume können durch eine enge Röhre miteinander verbunden werden. Es kann auch unverbundene oder halbe Wurmlöcher geben. Ebenso kann es auch abgeschlossene Baby-Universen (Miniuniversen ohne Kontakt mit anderen Universen geben) geben. Nach diesem Vorstellung gleicht das Universum mehr einem löchrigen Schaum. Es existiert auch die bislang unbewiesene Behauptung, daß geometrische Fluktuationen in kleinen Bereichen für den Verlust von Quantenkohärenz in großen Bereichen verantwortlich ist.