

# Kontinuumsmechanik

ETH Zürich – Sommersemester 2006

Manfred Sigrist, HPZ G13 (Tel.: 3-2584,  
Email: sigrist@itp.phys.ethz.ch)

Literatur:

- *Theoretische Mechanik: Punkt- und Kontinuumsmechanik*, H. Stephani und G. Kluge, Spektrum Akademischer Verlag.
- *Lehrbuch der Theoretischen Physik VII: Elastizitätstheorie*, L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Akademie Verlag.
- *Mechanik der deformierbaren Medien*, A. Sommerfeld Band II, Verlag Harri Deutsch.
- *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, A.L. Fetter and J.D. Walecka, Dover Publications Inc.
- *Feynman Vorlesungen über Physik, Band II*, R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, Oldenburg Verlag.
- *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, J. Altenbach und H. Altenbach, Teubner Studienbücher.
- *Kontinuumsmechanik*, Ralf Greve, Springer Verlag,
- *Lehrbuch der Theoretischen Physik VI: Hydrodynamik*, L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Akademie Verlag.
- *Hydrodynamik*, W. Greiner und H. Stock, Verlag Harri Deutsch.
- *Fluid dynamics for physicists*, T.E. Faber, Cambridge University Press.
- *Fluid mechanics*, P.K. Kundu, Academic Press Inc..
- *Strömungslehre*, H. Schade und E. Kunz, de Gruyter Lehrbuch, Berlin.
- *Strömungslehre*, J.H. Spurk, Springer.

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| Einleitung . . . . .   | 5         |
| Vom Massepunkt zum Kontinuum . . . . .                                     | 5         |
| <b>1 Elastische Medien</b>   | <b>9</b>  |
| 1.1 Deformationstensor . . . . .   | 9         |
| 1.2 Spannungstensor . . . . .  | 11        |
| 1.3 Energie der Deformation . . . . .                                      | 13        |
| 1.3.1 Hook'sches Gesetz . . . . .  | 13        |
| 1.3.2 Beispiel: deformierter Stab . . . . .                                | 14        |
| 1.3.3 Elastizität eines Kristalls . . . . .                                | 15        |
| 1.4 Temperatur und Deformation . . . . .                                   | 19        |
| <b>2 Elastostatik</b>  | <b>21</b> |
| 2.1 Grundlegende Feldgleichungen . . . . .                                 | 21        |
| 2.2 Variationelle Formulierung . . . . .                                   | 21        |
| 2.3 Torsion eines Zylinders . . . . .                                      | 23        |
| 2.4 Biegung eines Balkens . . . . .  | 24        |
| 2.5 Einzelne Punktkraft auf einen elastischen Halbraum . . . . .           | 26        |
| 2.6 Statik von Flüssigkeiten and Gasen . . . . .                           | 31        |
| <b>3 Bilanzgleichungen</b>   | <b>33</b> |
| 3.1 Kontinuitätsgleichung: Erhaltung der Materie . . . . .                 | 33        |
| 3.2 Bilanz des Impulses und des Spannungstensor: Impulserhaltung . . . . . | 34        |
| 3.3 Drehimpulserhaltung . . . . .  | 36        |
| 3.4 Energieerhaltung . . . . .   | 36        |
| <b>4 Schwingungen und Wellen</b>   | <b>38</b> |
| 4.1 Elastische Wellen in isotropen Körpern . . . . .                       | 38        |
| 4.2 Elastische Wellen in Kristallen . . . . .                              | 39        |
| 4.3 Hamilton'sches Extremalprinzip . . . . .                               | 40        |
| 4.4 Elastische Wellen im elastischen Halbraum . . . . .                    | 41        |
| 4.4.1 Reflektierte Raumwellen . . . . .                                    | 42        |
| 4.4.2 Oberflächenwellen . . . . .  | 44        |
| 4.4.3 Seismologie . . . . .  | 46        |
| <b>5 Plastische Deformationen und Kristallgitterversetzungen</b>           | <b>48</b> |
| 5.1 Volterra-Konstruktion von Versetzungen . . . . .                       | 49        |
| 5.2 Deformation und Energie einer Schraubenversetzung . . . . .            | 51        |
| 5.3 Deformation und Energie einer Stufenversetzung . . . . .               | 53        |
| 5.4 Plastische Deformationen . . . . .                                     | 55        |
| 5.5 Uniforme Bewegung einer Schraubenversetzung . . . . .                  | 56        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>6</b>  | <b>Dynamik von Fluida</b>   | <b>58</b>  |
| 6.1       | Geschwindigkeitsfeld des Fluidums . . . . .                                   | 58         |
| 6.2       | Euler'sche Gleichung für ideale Fluida . . . . .                              | 59         |
| 6.3       | Reale Fluida und Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .                          | 60         |
| <b>7</b>  | <b>Eigenschaften idealer Fluida</b>   | <b>62</b>  |
| 7.1       | Quellen und Wirbel . . . . .  | 62         |
| 7.2       | Wirbelsätze nach Thomson und Helmholtz . . . . .                              | 63         |
| 7.3       | Wirbeldynamik . . . . .   | 64         |
| 7.3.1     | Lineare Wirbelfäden . . . . .   | 65         |
| 7.3.2     | Axialsymmetrische Strömung - Wirbelringe . . . . .                            | 67         |
| 7.4       | Bernoulli-Gleichung . . . . .   | 68         |
| 7.4.1     | Stationäre Situation . . . . .  | 69         |
| 7.4.2     | Anwendungen der Bernoulli-Gleichung . . . . .                                 | 70         |
| 7.4.3     | Hugoniot-Strömungsgleichung . . . . .   | 71         |
| <b>8</b>  | <b>Schwingungen und Wellen</b>  | <b>73</b>  |
| 8.1       | Schallwellen . . . . .  | 73         |
| 8.2       | Jeans'sche Instabilität . . . . .   | 74         |
| 8.3       | Schwerewellen in Flüssigkeiten . . . . .                                      | 75         |
| 8.3.1     | Tiefes Wasser . . . . .   | 76         |
| 8.3.2     | Mässig tiefes und seichtes Wasser . . . . .                                   | 76         |
| 8.3.3     | Stromlinien und Bahnkurven . . . . .  | 77         |
| 8.4       | Kapillarwellen . . . . .  | 79         |
| 8.5       | Kreiswellen im tiefen Wasser . . . . .  | 80         |
| 8.6       | Schiffswellen . . . . .   | 83         |
| <b>9</b>  | <b>Zweidimensionale Potentialströmungen</b>                                   | <b>86</b>  |
| 9.1       | Grundlagen . . . . .  | 86         |
| 9.2       | Zirkulation . . . . .   | 87         |
| 9.3       | Kutta-Zhukhovski-Satz - Kraft auf umströmten Körper . . . . .                 | 88         |
| 9.4       | Konstruktion von zwei-dimensionalen Potentialströmungen . . . . .             | 90         |
| 9.4.1     | Zylinder ohne Zirkulation . . . . .   | 90         |
| 9.4.2     | Zylinder mit Zirkulation . . . . .  | 91         |
| 9.5       | Konforme Abbildungen als Werkzeug . . . . .                                   | 92         |
| 9.5.1     | Von Zylinder zur Platte . . . . .   | 92         |
| 9.5.2     | Einfachste Plattenströmungen . . . . .  | 94         |
| 9.5.3     | Drehung der Grundströmungsrichtung . . . . .                                  | 94         |
| 9.5.4     | Kutta-Bedingung . . . . .   | 95         |
| 9.6       | Strömung um Zhukhovski-Flügel . . . . .                                       | 96         |
| 9.7       | Ideale Linien-Wirbel . . . . .  | 98         |
| <b>10</b> | <b>Inkompressible, viskose Fluida</b>   | <b>101</b> |
| 10.1      | Innere Reibung und Energiebilanz . . . . .                                    | 101        |
| 10.2      | Hagen-Poiseuille'sche laminare Strömung . . . . .                             | 102        |
| 10.3      | Stokes Widerstandsgesetz . . . . .  | 104        |
| 10.4      | Prandtl'sche Grenzschicht . . . . .   | 106        |
| 10.5      | Couette-Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern . . . . . | 110        |
| 10.5.1    | Laminare Strömung . . . . .   | 110        |
| 10.5.2    | Taylor-Couette-Instabilität . . . . .   | 111        |

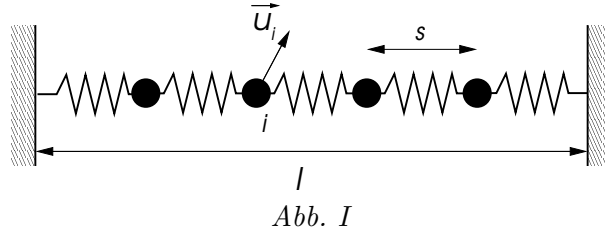
|  |            |
|--|------------|
| <b>11 Turbulenz</b>  | <b>113</b> |
| 11.1 Stabilität der laminaren stationären Strömung . . . . . | 114        |
| 11.2 Instabilität und Energieübertrag . . . . .              | 114        |
| 11.2.1 Stetige Instabilität . . . . .                        | 115        |
| 11.2.2 Unstetige Instabilität . . . . .                      | 116        |
| 11.3 Entwicklung der Turbulenz . . . . .                     | 118        |
| 11.4 Energie-Kaskade in der homogenen Turbulenz . . . . .    | 120        |

# Einleitung

Die Einführung in die klassische Mechanik beschäftigte sich mit der Dynamik von Massepunkten oder starren Körpern, deren Bewegung durch wenige diskrete Freiheitsgrade beschreibbar ist. Selbst im Falle von vielen wechselwirkenden Teilchen besitzt das mechanische System eine abzählbare Menge von Freiheitsgraden. In der Vorlesung über Kontinuumsmechanik erweitern wir unser Konzept auf die Dynamik von elastischen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen. Obwohl vom mikroskopischen Standpunkt all diese Systeme aus Atomen (Massepunkten) bestehen, erweist es sich als sinnvoll, von abzählbaren, diskreten zu einer kontinuierlichen Menge von Freiheitsgraden überzugehen, wenn wir uns für Längenskalen interessieren, die weit über denjenigen der Atome liegen. In natürlicher Weise werden dann makroskopische Begriffe wie Dichte, Druck, Spannung usw. eingeführt.

## Vom Massepunkt zum Kontinuum

Wir betrachten eine eingespannte elastische Saite, die wir zunächst vom mikroskopischen Standpunkt her als eine Kette von identischen Massepunkten beschreiben, die durch gespannte Federn miteinander verbunden sind.



Die Auslenkung des  $i$ -ten Massepunktes wird durch den Vektor  $\vec{u}_i$  bezeichnet, den wir in einen longitudinalen (entlang der Saite) und transversalen (senkrecht auf die Saite) Teil aufspalten können:

$$\vec{u}_i = (u_{xi}, \vec{u}_{\perp i}) . \quad (1)$$

Die kinetische Energie ist dann

$$T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{\vec{u}}_i^2 \quad (2)$$

mit  $m$  als Masse der einzelnen Massepunkte. Die Gleichgewichtslage des  $i$ -ten Massenpunktes ist  $x_i = is$ . Die Positionen  $i = 0$  und  $i = N$  sind fixiert ( $x_0 = 0$  und  $x_N = Ns = l$ ). Die potentielle Energie ist gegeben durch

$$V = \sum_{\mu=x,y,z} \sum_i \frac{K_\mu}{2} (u_{\mu,i+1} - u_{\mu,i})^2 \quad (3)$$

wobei  $\vec{u}_0 = \vec{u}_N = 0$ , weil die Aufhängungspunkte fixiert sind, und  $K_x = K$ ,  $K_y = K_z = K' < K$ . Wir verwenden nun die Lagrange-Formulierung,  $L = T - V$ . Die Bewegungsgleichungen für  $u_{\mu,i}$  folgen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_{\mu,i}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{\mu,i}} = K_\mu (u_{\mu,i+1} - 2u_{\mu,i} + u_{\mu,i-1}) - m\ddot{u}_{\mu,i} \quad (4)$$

Dies ergibt ein gekoppeltes lineares Differentialgleichungssystem.

Nun führen wir den entscheidenden Übergang durch, der uns die Beschreibung dieser Kette als elastische Saite, ein kontinuierliches Medium, erlaubt. Wir betrachten nämlich den Grenzfalle  $N \rightarrow \infty$ , wobei  $Ns = l$  fixiert bleibt. Damit kommen sich die Massepunkte immer näher und

wir betrachten  $\vec{u}_i = \vec{u}(x)$  mit  $x$  als kontinuierlichem Index der Position auf der Saite (Position eines Längenelements  $[x, x + dx]$ ). Dies führt auf:

$$\frac{u_{\mu,i+1} - u_{\mu,i}}{s} \rightarrow \frac{\partial u_{\mu}(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{u_{\mu,i+1} - 2u_{\mu,i} + u_{\mu,i-1}}{s^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u_{\mu}(x)}{\partial x^2} . \quad (5)$$

Aus der Auslenkung  $\vec{u}_i$  der Massepunkte ist nun ein Auslenkungsfeld  $\vec{u}(x)$  geworden. Zudem führen wir noch das Grenzverhalten für die Masse und die Federkonstante ein:  $m \rightarrow s\rho$  und  $K \rightarrow \tilde{K}/s$  ( $K' \rightarrow \tilde{K}'/s$ ) mit  $\rho$  und  $\tilde{K}$  als  $s$ -unabhängigen Konstanten. Damit lautet die obige Bewegungsgleichung dann

$$\frac{\partial^2 u_{\mu}(x)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tilde{K}_{\mu}} \frac{\partial^2 u_{\mu}(x)}{\partial t^2} = 0 . \quad (6)$$

Die Randbedingungen sind nun  $u_{\mu}(x=0) = u_{\mu}(x=l) = 0$ .

Die Saite wird zum kontinuierlichen elastischen Medium mit  $\rho$  als Massendichte und der Elastizitätskonstanten  $\tilde{K}, \tilde{K}'$ :

$$T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{\vec{u}}_i^2 \rightarrow \frac{\rho}{2} \int dx \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 , \quad V = \sum_{i,\mu} \frac{K_{\mu}}{2} (u_{\mu,i+1} - u_{\mu,i})^2 \rightarrow \sum_{\mu} \frac{\tilde{K}_{\mu}}{2} \int dx \left( \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} \right)^2 . \quad (7)$$

Das entsprechende Lagrange-Funktional ist

$$L = T - V = \int dx \mathcal{L}(\partial_t \vec{u}, \partial_x \vec{u}) = \int dx \left[ \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tilde{K}}{2} \left( \frac{\partial u_x(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\tilde{K}'}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}_{\perp}(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] , \quad (8)$$

wobei verwendet wurde, dass  $s \sum_i \rightarrow \int dx$  und  $\mathcal{L}$  die Lagrange-Dichte ist. Die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung ergibt dann (6):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{u}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \vec{u})} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \vec{u})} = 0 . \quad (9)$$

Die Gleichung (6) entspricht einer Wellengleichung mit der Wellengeschwindigkeit  $c_l = \sqrt{\tilde{K}/\rho}$  bzw.  $c_{\perp} = \sqrt{\tilde{K}'/\rho}$  je nach Schwingungsrichtung (Polarisation). Wir benötigen Anfangsbedingungen für das Auslenkungsfeld:

$$\vec{u}(x, t=0) = \vec{f}(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, t=0) = \vec{g}(x) , \quad (10)$$

wobei  $\vec{f}(x)$  und  $\vec{g}(x)$  den Randbedingungen bei  $x=0$  und  $l$  Rechnung tragen.

Die Bewegungsgleichung lässt sich durch Variablenseparation lösen, d.h. wir machen den Ansatz  $\vec{u}(x,t) = \vec{A}(x)B(t)$ . Daraus resultieren die separaten Gleichungen

$$\partial_x^2 A_{\mu} + k^2 A_{\mu} = 0 \quad \partial_t^2 B + \omega^2 B = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = c_{\mu} k . \quad (11)$$

Die Lösungen für  $\vec{A}$  ergeben sich zusammen mit der Randbedingung. Wir unterscheiden hier zwischen der longitudinalen ( $A_x$ ) und den beiden transversalen Schwingungen ( $\vec{A}_{\perp}$ ) mit  $c_x = c_l$  bzw.  $c_{y,z} = c_{\perp}$ . Longitudinale und transversale Schwingungen besitzen unterschiedliche Wellengeschwindigkeiten ( $c_l > c_{\perp}$ ).

$$\vec{A}(x) = \vec{A}_n \sin k_n x \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{\pi n}{l} , n = 1, 2, 3, \dots , \quad (12)$$

$$B(t) = B_{1n} \cos \omega_{n\mu} t + B_{2n} \sin \omega_{n\mu} t \quad \text{mit} \quad \omega_{n\mu} = c_{\mu} k_n .$$

Beachte, dass für diese Lösung gilt  $\vec{A}(0) = \vec{A}(l) = 0$ . Der Wellenvektor  $k_n$  und der Polarisationsvektor  $\vec{A}_n$  definieren eine Normalmode oder Eigenschwingung der Saite. Dies sind stehende

Wellen der an beiden Enden fixierten Saite - eine Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen  $e^{\pm ik_n x} \rightarrow \sin k_n x = (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x})/2i$ . Eine allgemeine Schwingung lässt sich durch Überlagerung der Normalmoden beschreiben:

$$\vec{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left\{ \vec{C}_{1n} \cos \omega_{n\mu} t + \vec{C}_{2n} \sin \omega_{n\mu} t \right\}, \quad (13)$$

wobei die Koeffizienten durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sind, da wir  $\vec{f}(x)$  und  $\vec{g}(x)$  eindeutig in ihren Fourier-Komponenten zerlegen können:

$$\begin{aligned} \vec{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{C}_{1n} \sin k_n x &\Rightarrow \vec{C}_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l dx \vec{f}(x) \sin k_n x, \\ \vec{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{n\mu} \vec{C}_{2n} \sin k_n x &\Rightarrow \vec{C}_{2n} = \frac{2}{l \omega_{n\mu}} \int_0^l dx \vec{g}(x) \sin k_n x. \end{aligned} \quad (14)$$

Wir erweitern diese Formulierung nun noch um einen Zusatzterm für äussere Kräfte in der potentiellen Energie:

$$V = \int dx \left\{ \sum_{\mu} \frac{\tilde{K}_{\mu}}{2} \left( \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} \right)^2 - \vec{F}(x) \cdot \vec{u} \right\}. \quad (15)$$

Im statischen Fall, d.h. keiner Zeitabhängigkeit, muss das Auslenkungsfeld folgende (Euler-Lagrange-) Gleichung erfüllen:

$$\tilde{K}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x} = -F_{\mu}(x). \quad (16)$$

Wir betrachten ein einfaches Beispiel: eine Kraft in  $z$ -Richtung greift an einem Punkt zwischen  $x = 0$  und  $l$  an:  $F_z(x) = F \delta(x - a)$ ; die Saite ist an beiden Enden fixiert. Die Lösung der obigen Gleichung liefert in den Bereichen  $[0, a[$  und  $]a, l]$  lineare Lösungen der Form

$$u_z(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x < a \\ B(l - x) & a < x \leq l \end{cases} \quad (17)$$

Diese Lösung muss bei  $x = a$  verbunden werden mit der Bedingung, dass die Saite stetig sein muss, und es gilt ferner

$$0 = \int_{a-\delta}^{a+\delta} dx \left[ \tilde{K}_z \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} + F_z(x) \right] = \tilde{K}_z \left\{ \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_{a+\delta} - \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_{a-\delta} \right\} + F \quad (18)$$

mit  $\delta \rightarrow 0_+$ . Daraus folgen für  $A$  und  $B$  die Gleichungen

$$Aa = B(l - a) \quad \text{und} \quad B + A = \frac{F}{\tilde{K}_z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{l - a}{l} \frac{F}{\tilde{K}_z} \\ B = \frac{a}{l} \frac{F}{\tilde{K}_z} \end{cases} \quad (19)$$

Die Auslenkung ist proportional zur angreifenden Kraft: das Hook'sche Gesetz (Abb.II).

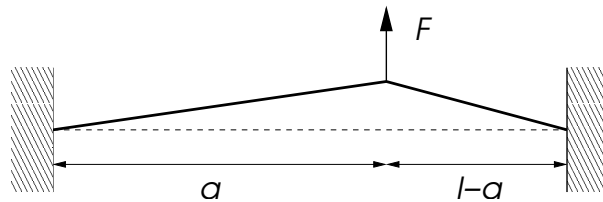


Abb. II

Es wirken auch Kräfte von der Wand auf die Saite. Diese ergeben sich auch aus der Gleichung (16). Es gilt  $u_z(x) = 0$  in der Wand, so dass die Kraft  $\vec{P}$ , die die Wand auf die Saite ausübt, gegeben ist durch

$$P_\mu|_{x=0} = -\tilde{K}_\mu \left. \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right|_{x=0} \quad \text{und} \quad P_\mu|_{x=l} = \tilde{K}_\mu \left. \frac{\partial u_\mu}{\partial x} \right|_{x=l} \quad (20)$$

Daraus folgt

$$P_z|_{x=0} = -F \frac{l-a}{l} \quad \text{und} \quad P_z|_{x=l} = -F \frac{a}{l} \quad \Rightarrow \quad P_z|_{x=0} + P_z|_{x=l} = -F, \quad (21)$$

d.h. diese Kräfte halten der angelegten Kraft  $F$  entgegen, so dass die Saite statisch ist.

In der Kontinuumsformulierung lässt sich also sowohl das statische als auch das dynamische Verhalten der Saite beschreiben. Im Folgenden werden wir die hier angedeuteten Begriffe allgemeiner einführen und erweitern.



# Kapitel 1

## Elastische Medien

In diesem Kapitel führen wir die wesentlichen Begriffe ein, die wir für die Beschreibung der elastischen Medien benötigen.

### 1.1 Deformationstensor

Für die Dynamik des Körpers spielt die elastische Deformation eine wichtige Rolle. Ein elastischer Körper kann unter äusserem Einfluss sowohl seine Form als auch sein Volumen ändern. Wir werden diese Deformation jetzt allgemein durch den Deformationstensor (englisch: strain tensor) charakterisieren.

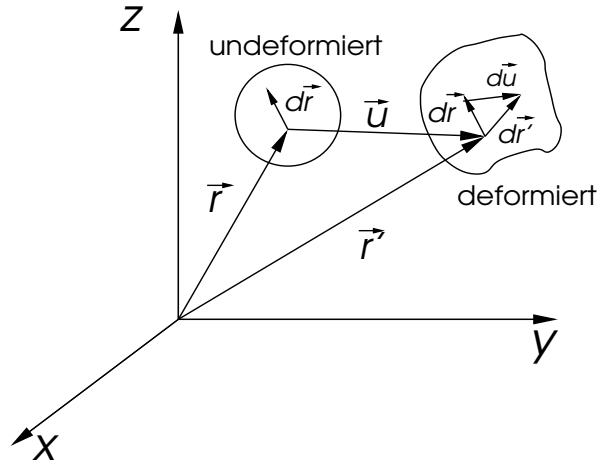


Abb. 1.2

Im undeformierten Körper identifizieren wir jedes Volumenelement durch den Vektor  $\vec{r}$ , der seiner Position im undeformierten Zustand entspricht. Die Position des Volumenelements  $\vec{r}$  nach der Deformation ist gegeben durch  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$  wobei der Auslenkungsvektor  $\vec{u}$  eine stetige und eindeutige Funktion von  $\vec{r}$  ist. Die Stetigkeit entspricht der Bedingung, dass der elastische Körper nirgends zerreißt. Wie ändert sich der Abstand zweier nahe beieinander liegenden Punkte ( $\vec{r}$ ,  $\vec{r} + d\vec{r}$ ) mit der Deformation?

$$\begin{aligned} d\vec{r}'^2 - d\vec{r}^2 &= dx'_i dx'_i - dx_i dx_i = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i) - dx_i dx_i \\ &= \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \right) \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) - dx_i dx_i = 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

wodurch wir den Deformationstensor definiert haben:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right). \quad (1.2)$$

Beachte dass  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Wir verwenden hier bei Summen die Einstein-Konvention  $\sum_i a_i b_i = a_i b_i$ , indem wir über doppelt auftretende Indizes summieren.

In den meisten Fällen sind Deformationen klein, d.h.  $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$ , so dass wir in guter Näherung schreiben können,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

Starre Rotation: Der Deformationstensor  $\epsilon_{ij}$  ist der *symmetrische* Teil des Tensors  $\partial u_i / \partial x_j$ :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \epsilon_{ij} + D_{ij} \quad (1.4)$$

mit  $D_{ij}$  als antisymmetrischem Anteil. Damit definieren wir den Vektor  $\vec{D}$  durch

$$D_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} D_{ij} = \frac{1}{4} \epsilon_{kij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{u}. \quad (1.5)$$

$\vec{D}(\vec{r})$  beschreibt eine starre Rotation (beinhaltet keine weitere Deformation, wie etwa Volumenänderung) in der Umgebung von  $\vec{r}$  um die Achse  $\vec{n} = \vec{D} / |\vec{D}|$ . Betrachte den Fall einer Rotation um einen kleinen Winkel  $\theta \ll \pi$  bei  $\vec{r} = 0$  mit  $\vec{\theta} = \theta \vec{n}$ :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{\theta} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{u}(\vec{r}) = \vec{\theta} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\theta}. \quad (1.6)$$

Hauptachsenform: Betrachten wir nun die Bedeutung des Deformationstensors  $\epsilon_{ij}$ . Da  $\epsilon_{ij}$  symmetrisch ist, können wir ihn an jedem Punkt  $\vec{a}$  durch Koordinationstransformation in Diagonalfom oder Hauptachsenform bringen:

$$\epsilon_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

mit den orthogonalen Eigenvektoren  $\vec{e}_{1,2,3}$ . Jede Deformation kann daher durch drei unabhängige Dehnungen bzw. Stauchungen beschrieben werden:

$$dx_i'^2 = (1 + 2\epsilon^{(i)}) dx_i^2 \quad (1.8)$$

In diesen Hauptachsenrichtungen entspricht die Deformation linearen Längenänderungen.

Volumenerhaltende Scherung: Wenden wir uns den Winkeländerungen zu: Wir wählen im undeformierten Körper bei  $\vec{r}$  zwei orthogonale Richtungen,  $d\vec{r}^{(1)} \perp d\vec{r}^{(2)}$ . Dann folgt

$$dx_i'^{(1)} dx_i'^{(2)} = (\delta_{ij} + 2\epsilon_{ij}) dx_i^{(1)} dx_j^{(2)} = 2\epsilon_{ij} dx_i^{(1)} dx_j^{(2)}, \quad (1.9)$$

wobei verwendet wurde, dass  $dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} = 0$ . In linearer Ordnung im Deformationstensor gilt

$$\cos \theta \approx \frac{dx_i'^{(1)} dx_i'^{(2)}}{|d\vec{r}^{(1)}| |d\vec{r}^{(2)}|} = 2\epsilon_{ij} \frac{dx_i^{(1)} dx_j^{(2)}}{|d\vec{r}^{(1)}| |d\vec{r}^{(2)}|}. \quad (1.10)$$

Betrachten wir den Fall einer einfachen *Scherung* (Abb. 1.3)

$$d\vec{r}^{(1)} = |d\vec{r}^{(1)}| (1, 0, 0), \quad d\vec{r}^{(2)} = |d\vec{r}^{(2)}| (0, 1, 0) \quad \text{und} \quad \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

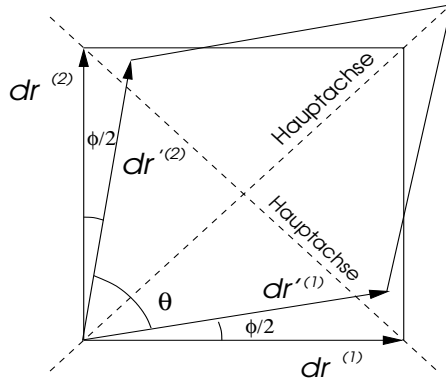


Abb. 1.3

$$\cos \theta = \cos(\pi/2 - \phi) = \sin \phi = 2\epsilon_{12} \approx \phi \quad (1.12)$$

Diese Deformation erhält das Volumen.

Formerhaltende Volumenänderung: Eine Deformation, die das Volumen des elastischen Körpers lokal ändert, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} dV' - dV &= dx'_1 dx'_2 dx'_3 - dx_1 dx_2 dx_3 = \{(1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{22})(1 + \epsilon_{33}) - 1\} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\approx \{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}\} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (1.13)$$

so dass die Volumendilatation  $\Theta = \frac{dV' - dV}{dV} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \epsilon_{kk}$ . Die Richtungen 1, 2 und 3 stehen senkrecht aufeinander. Beachte, dass die Volumenänderung durch die *Spur*  $\epsilon_{kk}$  des Deformationstensors gegeben ist. Daher sind spurfreie Deformationen volumenerhalten wie in (1.11).

Wir können daher den Deformationstensor in einen volumenerhaltenden und einen formerhaltenden Teil aufspalten:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(0)} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \epsilon_{ij}^{(0)} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk}. \quad (1.14)$$

Der volumenerhaltende Tensor  $\epsilon_{ij}^{(0)}$  hat eine verschwindende Spur  $\epsilon_{kk}^{(0)} = 0$  ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ).

Deformationsellipsoid: Eine einfache Veranschaulichung einer Deformation ergibt sich mit folgender geometrischer Betrachtung. Wir definieren mit

$$(\delta_{ij} - \epsilon_{ij})x_i x_j = 1 \quad (1.15)$$

eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Der undeformierte Körper entspricht der Einheitskugel, während jede Deformation im allgemeinen ein Ellipsoid ergibt. Die Deformation eines elastischen Körpers ist analog zur Deformation der Kugel. Die formgetreue Deformation entspricht einfach der Änderung des Kugelradius. Volumenerhaltend hingegen sind Deformationen in ein Ellipsoid mit dem gleichen Volumen wie die Einheitskugel ( $4\pi/3$ ).

## 1.2 Spannungstensor

Wir gehen aus von einem undeformierten elastischen Körper auf den keine Kräfte wirken. Wenn er durch eine äussere Einwirkung deformiert wird, existieren intern Spannungen, d.h. Kräfte zwischen benachbarten Volumenelementen. Betrachten wir die Kraft, die auf ein bestimmtes Teilvolumen  $\Delta V$  des Körpers wirkt, so können wir dies durch das Raumintegral

$$\vec{F}_{\Delta V} = \int_{\Delta V} \vec{F} dV. \quad (1.16)$$

ausdrücken. Im Teilvolumen intern wirkende Kräfte heben sich wegen “actio = reactio” weg und kommen in dieser Kraftbilanz nicht vor. Nur die Kräfte, die von der Umgebung auf das Teilvolumen wirken, sind in  $\vec{F}_{\Delta V}$  enthalten. Diese Kräfte wirken auf die Oberfläche  $\partial\Delta V$  von  $\Delta V$ . Wir definieren daher einen Tensor  $\sigma_{ij}$  mit

$$F_{\Delta V,i} = \oint_{\partial\Delta V} \sigma_{ik} df_k \quad (1.17)$$

wobei  $\sigma_{ik} df_k$  der  $i$ -ten Komponente der auf dem Flächenelement  $d\vec{f}$  ( $\parallel \vec{n}$  Normalvektor) angreifenden Kraft entspricht. Dabei können wir die Kraft in eine Normalkomponente und in Parallelkomponenten aufspalten. Wir verwenden nun den Gauss’schen Satz der Vektoranalysis und erhalten

$$F_{\Delta V,i} = \oint_{\partial\Delta V} \sigma_{ik} df_k = \int_{\Delta V} dV \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \int_{\Delta V} dV F_i \quad (1.18)$$

Die Kraftkomponente  $F_i$  kann als Divergenz des Tensors  $\sigma_{ij}$  geschrieben werden, den wir *Spannungstensor* nennen.

Drehmoment: Wir definieren das Drehmoment eines Volumenelements als antisymmetrischen Tensor  $dM_{ik}$  durch  $(F_i x_k - F_k x_i) dV$ , so dass für das gesamte Volumen gilt

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \int \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} x_i \right) dV \\ &= \int \frac{\partial \{ \sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i \}}{\partial x_j} dV - \int \left( \sigma_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} - \sigma_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) dV . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Wieder wenden wir den Gauss’schen Satz auf den ersten Term an und erhalten

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) df_j + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV . \quad (1.20)$$

Das zweite Integral verschwindet, falls der Spannungstensor symmetrisch ist,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , was wir von nun an immer voraussetzen werden. Der Vektor  $\vec{M}$  des Drehmoments ist gegeben durch

$$M_l = \varepsilon_{lik} M_{ik} = \varepsilon_{lik} \oint (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) df_j . \quad (1.21)$$

Uniformer Druck: Gleichmässiger äusserer Druck (hydrostatischer Druck) wirkt auf einen Körper mit gleicher Normal-Kraft pro Flächenelement in alle Richtungen,

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} . \quad (1.22)$$

Daher sind alle Diagonalelemente gleich, während alle anderen Komponenten verschwinden.

Gleichgewichtssituation: In einem elastischen Körper wirken keine Kräfte, wenn er im Gleichgewichtszustand ist. Falls keine Volumenkräfte vorhanden sind, muss dann gelten:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 . \quad (1.23)$$

Wenn aber eine Volumenkraft, wie etwa die Schwerkraft, wirkt, dann finden wir als Bedingung:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad (1.24)$$

mit  $\vec{g}$  als Schwerkraft und  $\rho$  als Dichte.

Die Kräfte  $\vec{P} df$ , die an der Oberfläche auf dem Flächenelement  $df = |d\vec{f}|$  angreifen, bilden die Randbedingungen

$$P_i df - \sigma_{ij} df_j = P_i df - \sigma_{ij} n_j df = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \sigma_{ij} n_j . \quad (1.25)$$

## 1.3 Energie der Deformation

Die infinitesimale Deformation eines elastischen Körpers wird durch das Auslenkungsfeld  $\delta \vec{u}(\vec{r})$  beschrieben. Die Arbeit, die dabei geleistet wird, ist gegeben durch

$$\delta W = \int \delta w \, dV = \int F_i \delta u_i \, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, dV = \oint \sigma_{ij} \delta u_i \, df_j - \int \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \, dV \quad (1.26)$$

Wir nehmen an, dass die Spannung an der Oberfläche verschwindet. Da der Spannungstensor symmetrisch ist, gilt

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) dV = - \int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \, dV. \quad (1.27)$$

Das Differential der inneren Energiedichte  $U$  des elastischen Körpers ist für ein Volumenelement daher durch

$$dU = T ds - \delta w = T ds + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.28)$$

gegeben, wobei  $s$  die Entropiedichte und  $T$  die Temperatur bezeichnet. Beachte, dass die Arbeit, die der elastische Körper leistet, seiner inneren Energie verloren geht und daher subtrahiert wird. Die innere Energie hängt von den Variablen Entropiedichte  $s$  und Deformationstensor  $\epsilon_{ij}$  ab. Man kann auch die freie Energiedichte betrachten, die von der Temperatur abhängt,

$$dF = -s dT + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (1.29)$$

In beiden Fällen gilt, dass

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_s \quad \text{und} \quad \sigma_{ij} = \left( \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T. \quad (1.30)$$

Es ist im allgemeinen bequemer, mit der freien Energie als mit der inneren Energie zu arbeiten, da die Temperatur eine Grösse ist, die einfacher gemessen werden kann als die Entropie.

### 1.3.1 Hook'sches Gesetz

Der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  ist eine Funktion des Deformationstensors  $\epsilon_{ij}$ . Wir definieren den Gleichgewichtszustand für einen elastischen Körper durch die Bedingung, dass sowohl der Spannungstensor als auch der Deformationstensor verschwindet. Wir können die freie Energiedichte in Potenzen des Deformationstensors  $\epsilon_{ij}$  um seinen Nullwert herum entwickeln. Terme linear in  $\epsilon_{ij}$  müssen wegen der Gleichgewichtsbedingung verschwinden, denn sonst wäre

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \Big|_{\epsilon_{ij}=0} \neq 0, \quad (1.31)$$

was unsere Definition verletzt. Die allgemeine Form dieser Entwicklung basiert darauf, dass die freie Energiedichte eine skalare Funktion des Deformationstensors ist, d.h. sie ist invariant unter allen räumlichen Symmetrien des undeformierten Körpers (Punktsymmetrien: erlaubte Rotationen und Spiegelungen mit Achsen oder Spiegelebenen durch gegebene Punkte). Für einen homogenen isotropen elastischen Körper (jeder Punkt ist ein Symmetriepunkt und alle Achsen für beliebige Rotationen und alle Ebenen sind Spiegelebenen) ist die allgemeine Form daher

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii}^2 + \mu \epsilon_{ij}^2 \quad (1.32)$$

wobei  $\lambda$  und  $\mu$  die sogenannten Lamé-Koeffizienten sind und  $F_0$  ist die freie Energiedichte ohne Deformation. Wir vernachlässigen Terme höherer Ordnung, in der Annahme, dass diese vernachlässigbar klein sind (harmonische Näherung). Die beiden Ausdrücke  $\epsilon_{ii}^2 = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})^2$

und  $\epsilon_{ij}^2 = (\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + 2\epsilon_{yz}^2 + 2\epsilon_{zx}^2 + 2\epsilon_{xy}^2)$  sind offensichtlich invariant unter beliebigen räumlichen Rotationen. Beachte, dass  $\epsilon_{ij}$  unter Rotationen und Spiegelungen (um  $\vec{r} = 0$ ) wie das Produkt  $u_i x_j$  oder  $x_i x_j$  transformiert, d.h.

$$\left. \begin{aligned} u'_i &= R_{ii'} u_{i'} \\ x'_i &= R_{ii'} x_{i'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon'_{ij} = R_{ii'} R_{jj'} \epsilon_{i'j'} \quad (1.33)$$

wobei  $R_{ij}$  die Rotations- oder Spiegelungsmatrix im dreidimensionalen Raum um den Nullpunkt darstellt.

Wir separieren nun hier *hydrostatische Deformationen* (reine formerhaltende Volumenänderungen:  $\epsilon_{ij} \propto \delta_{ij}$ ) und *reine Scherungen* (volumenerhaltende Deformationen):

$$\epsilon_{ij} = \left( \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} = \epsilon_{ij}^{(0)} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} . \quad (1.34)$$

Beachte, dass  $\epsilon_{kk}$  die Spur des Deformationstensors ist. Der erste Term entspricht einer reinen Scherung, da seine Spur verschwindet.

$$F = F_0 + \mu \epsilon_{ij}^{(0)2} + \frac{K}{2} \epsilon_{kk}^2 \quad (1.35)$$

wobei  $K = \lambda + 2\mu/3$  Kompressionsmodul und  $\mu$  Torsionsmodul (Schubmodul) genannt wird. Damit ohne äussere Kräfte der undeformierte Zustand stabil ist, müssen  $K, \mu > 0$  sein.

Wir bilden nun das Differential von  $F$ ,

$$dF = dF_0 + \left( K \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^{(0)} \right) d\epsilon_{ij} = dF_0 + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.36)$$

so dass der Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = K \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^{(0)} \quad (1.37)$$

ist. Dies bedeutet, dass wir eine lineare Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Deformationstensor haben. Dies ist eine Näherung und ist als *Hook'sche Gesetz* bekannt. Beachte, dass das Torsionsmodul mit der Winkeländerung (1.12) der einfachen Scherung zusammenhängt,  $\sigma_{12} = \mu \phi = 2\mu \epsilon_{12}$ .

### 1.3.2 Beispiel: deformierter Stab

An einem aufgehängten elastischen Stab wird mit einer Kraft  $\vec{P} \parallel z$  gezogen (siehe Abbildung). Dies entspricht gemäss (1.25) einer konstanten Spannung  $\sigma_{zz} = P$ , während alle anderen Komponenten des Spannungstensors verschwinden.

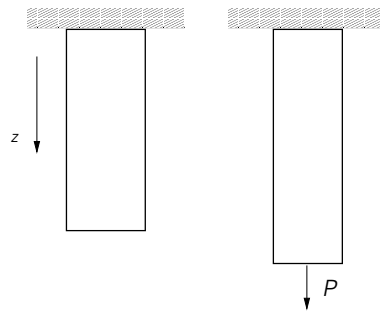


Abb. 1.4

Wir invertieren nun die Hook'sche Beziehung zwischen Spannungs- und Deformationstensor (1.37):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.38)$$

Daraus ergibt sich

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{zz} \quad \text{und} \quad \epsilon_{zz} = \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\right)\sigma_{zz} . \quad (1.39)$$

Obwohl keine Kraft auf die Seiten des Stabes wirkt, ändert sich sein Durchmesser. Wir definieren das Young'sche Elastizitätsmodul  $E$  und das Poisson'sche Querkontraktionsmodul  $\nu$  als

$$E = \frac{\sigma_{zz}}{\epsilon_{zz}} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad \text{und} \quad \nu = -\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} . \quad (1.40)$$

Da  $K, \mu > 0$  folgt, dass  $E > 0$  und  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ . Je nach Kompressions- und Torsionsmodul wird der Stab dicker ( $\nu < 0$ ) oder dünner ( $\nu > 0$ ), wenn an ihm gezogen wird.

Das Kompressionsmodul und das Torsionsmodul lassen sich nun auch schreiben als

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (1.41)$$

### 1.3.3 Elastizität eines Kristalls

Anstelle eines isotropen Körpers betrachten wir nun einen Kristall. Analog zum einfachen Beispiel, das wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels betrachtet haben, können wir den Kristall als Gitter von Atomen betrachten, die durch elastische Federn aneinander gekoppelt sind. Dies ist eine gute Näherung für die wirklichen interatomaren Kräfte bei kleinen Abweichungen vom Gleichgewicht. Wenn wir die freie Energie der Deformation hinschreiben wollen, brauchen wir jedoch nicht auf dieses Bild zurückzugreifen, sondern können unmittelbar von Symmetrien der Kristalle ausgehen. Die erlaubten Rotationen sind durch endliche Gruppen, sogenannte Punktgruppen, gegeben. Die freie Energie soll eine skalare Funktion bezüglich der Punktgruppe des Kristalls sein.

Der allgemeine Ausdruck für die freie Energiedichte ist

$$F = F_0 + \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} , \quad (1.42)$$

wobei  $C_{ijkl}$  das Elastizitätsmodul genannt wird. Es gibt zunächst einige allgemeine Symmetrien in  $\epsilon_{ij}$  und dem Produkt  $\epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$ . Der Deformationstensor ist symmetrisch, so dass  $i \leftrightarrow j$  und  $k \leftrightarrow l$  erlaubt ist. Ferner gilt im Produkt  $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$ , so dass

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{klij} \quad (1.43)$$

Dies bedeutet, dass wir die Indizes in eine Kurznotation überführen können:  $C_{ijkl} = C_{(ij)(kl)} \rightarrow c_{\alpha\beta}$ . Die neuen Indizes gehen von 1 bis 6 mit

$$xx \rightarrow 1 , \quad yy \rightarrow 2 , \quad zz \rightarrow 3 , \quad yz, zy \rightarrow 4 , \quad zx, xz \rightarrow 5 , \quad xy, yx \rightarrow 6 \quad (1.44)$$

Damit können die Elastizitätsmodule als symmetrischer  $6 \times 6$ -Tensor dargestellt werden, wodurch maximal 21 unabhängige Komponenten übrig bleiben ( $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ). Diese bleiben unabhängig in einem Kristall ohne Symmetrieachsen, d.h. in einem *triklinen Kristall*. Für höhere Symmetrien nimmt die Zahl der unabhängigen Module ab.

Punktgruppen: Wir kennen 32 Punktgruppen  $\mathcal{P}$  der Bravais-Gitter (Landau-Lifschitz, Band 3, Kap. XII):

Als Beispiel betrachten wir die tetragonale Punktgruppe  $D_4$ , deren Elemente alle Rotationen bezeichnen. Es gibt eine 4-fache Rotationsachse parallel zur z-Richtung (3 Elemente:  $C_4, C_2, C_4^3$ ) und vier 2-fache Rotationsachsen (je ein Element:  $C_2$ ), die in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen. Inklusive der Identität hat diese Gruppe 8 Elemente.

|                |  |
|----------------|--|
| triklin        | $C_1, C_i$   |
| monoklin       | $C_2, C_s, C_{2h}$                                 |
| orthorhombisch | $D_2, C_{2v}, D_{2h}$                              |
| tetragonal     | $C_4, S_4, C_{4h}, D_4, C_{4v}, D_{2d}, D_{4h}$    |
| trigonal       | $C_3, C_{3i}, D_3, C_{3v}, D_{3d}$                 |
| hexagonal      | $C_6, C_{3h}, C_{6h}, D_6, C_{6v}, D_{3h}, D_{6h}$ |
| kubisch        | $T, T_h, O, T_d, O_h$                              |

Skalare Funktionen: Wir können skalare Funktionen des Deformationstensors durch Symmetrisierung finden. Als einfachstes Beispiel für eine Symmetrisierung verwenden wir eine Funktion  $f(x)$ . Falls  $x \rightarrow -x$  eine Symmetrie ist, können wir eine Funktion  $\bar{f}(x)$ , die invariant (skalar) unter dieser Operation ist, finden, indem wir wie folgt symmetrisieren:  $\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ , so dass  $\bar{f}(-x) = \bar{f}(x)$ .

Wir beginnen nun mit einer beliebigen Funktion  $f(\epsilon_{ij})$  und wenden alle Elemente der Gruppe (inkl. Identität) darauf an. Wenn wir alle Resultate zusammenzählen, erhalten wir die skalare Funktion  $\bar{f}(\epsilon_{ij})$ , die offensichtlich invariant unter allen Transformationen (Rotationen und Spiegelungen) von  $\mathcal{P}$  ist:

$$\bar{f}(\epsilon_{ij}) = \frac{1}{|\mathcal{P}|} \sum_{g \in \mathcal{P}} g f(\epsilon_{ij}) , \quad \text{so dass} \quad g \bar{f}(\epsilon_{ij}) = \bar{f}(\epsilon_{ij}) , \quad (1.45)$$

wobei  $|\mathcal{P}|$  die Anzahl Elemente in  $\mathcal{P}$  bezeichnet. Diese Form entspricht einer Mittelung über alle Symmetrieoperationen. Als Beispiel betrachten wir  $f = \epsilon_{xx}\epsilon_{xx}$  für  $\mathcal{P} = D_4$ :

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(\epsilon_{xx}\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}\epsilon_{yy}) \quad (1.46)$$

oder  $f = \epsilon_{zz}\epsilon_{zz} \rightarrow \bar{f} = \epsilon_{zz}\epsilon_{zz}$ . Daraus folgt für die Elastizitätsmodule:  $C_{xxxx} = C_{yyyy} \neq C_{zzzz}$  ( $c_{11} = c_{22} \neq c_{33}$ ).

Wir betrachten einige Beispiele:

1) *Monokliner Kristall:* Es gibt eine 2-fache Rotationsachse (z-Achse) und eine Spiegelebene (x-y-Ebene) in der Punktgruppe  $C_s$ :

$$\begin{aligned} \text{Rotation} \quad & (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z) \\ \text{Spiegelung} \quad & (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Aus diesen beiden Transformationen folgt, dass alle Elemente in (1.42) verschwinden, die  $z$  nur einmal oder dreimal enthalten.

$$\begin{aligned} F = & F_0 + \frac{1}{2}C_{xxxx}\epsilon_{xx}^2 + \frac{1}{2}C_{yyyy}\epsilon_{yy}^2 + \frac{1}{2}C_{zzzz}\epsilon_{zz}^2 + C_{xxyy}\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + C_{xxzz}\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + C_{yyzz}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} \\ & + 2C_{xyxy}\epsilon_{xy}^2 + 2C_{xxzx}\epsilon_{xz}^2 + 2C_{yzyz}\epsilon_{yz}^2 + 4C_{xzyz}\epsilon_{xz}\epsilon_{yz} \\ & + 2C_{xxyx}\epsilon_{xx}\epsilon_{xy} + 2C_{yyyx}\epsilon_{yy}\epsilon_{yx} + 2C_{xyzz}\epsilon_{xy}\epsilon_{zz} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Dies sind 13 unabhängige Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} . \quad (1.49)$$



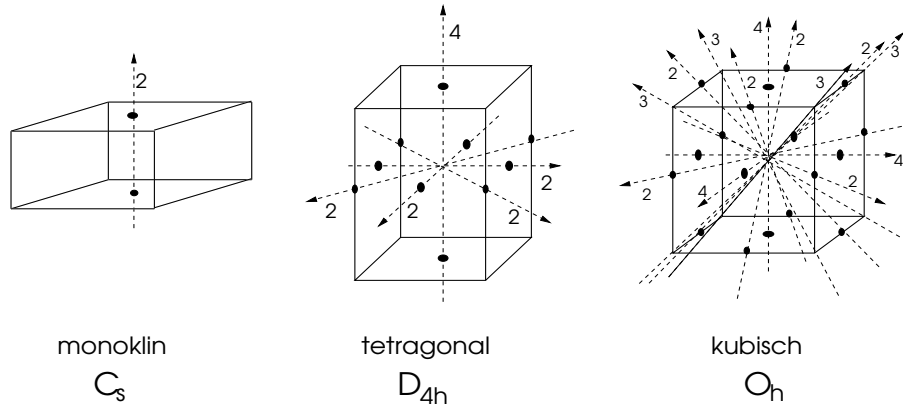


Abb. 1.5

2) Tetragonaler Kristall: Die zugehörige Punktgruppe  $D_{4h}$  enthält neben den Rotationen von  $D_4$  auch die Spiegelung an 5 Ebenen und die Inversion. Alle Indizes  $(x, y, z)$  kommen entweder zweifach oder vierfach vor, und  $x$  und  $y$  sind völlig äquivalent. Dies ergibt folgende erlaubten Terme:

$$F = F_0 + \frac{1}{2}C_{xxxx}(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2) + \frac{1}{2}C_{zzzz}\epsilon_{zz}^2 + C_{xxzz}(\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz}) + C_{xxyy}\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + 2C_{xyxy}\epsilon_{xy}^2 + 2C_{xzzz}(\epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{yz}^2) \quad (1.50)$$

mit 6 unabhängigen Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

3) Kubischer Kristall: Wir verwenden die Punktgruppe  $O_h$ , die alle kubischen Rotationen und Spiegelungen enthält. Alle Indizes kommen entweder zweifach oder vierfach vor und sind untereinander äquivalent. Die invarianten Terme sind:

$$F = F_0 + \frac{1}{2}C_{xxxx}(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2) + C_{xxyy}(\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{yy}) + 2C_{xyxy}(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{yz}^2), \quad (1.52)$$

wobei nur noch drei Koeffizienten übrig bleiben:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Im isotropen System waren es zwei unabhängige Koeffizienten.

Spannungsoptik: Wir betrachten hier ein experimentelles Verfahren, mit dessen Hilfe man die Spannungen in einem transparenten, elastischen Medium sichtbar machen kann. Dabei kommt der Eigenschaft der Doppelbrechung eine wichtige Rolle zu. Ist ein Medium isotrop, können seine optischen Eigenschaften durch einen einzigen Brechungsindex beschrieben werden. Ein doppelbrechendes Medium hat verschiedene Brechungsindizes für verschiedenen Polarisationsrichtungen (bekanntes Beispiel Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ ), an dem das Phänomen der Doppelbrechung

von N. Bartholinus im Jahre 1669 entdeckt wurde). Einen solchen Unterschied des Brechungsindex kann auch durch Spannungen in einem isotropen Medium erzeugt werden. Es gilt nämlich für die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ij} + a \epsilon_{ij} + a' \epsilon_{kk} \delta_{ij} , \quad (1.54)$$

wobei  $\varepsilon^{(0)}$  die Dielektrizitätskonstante des undeformierten Mediums ist. Wir nehmen an, dass wir für die Ebene senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung den Brechungsindex in Hauptachsenform bringen können:

$$n_1 = n_0 + C\sigma_a + C'\sigma_b \quad \text{und} \quad n_2 = n_0 + C\sigma_b + C'\sigma_a \quad (1.55)$$

wobei  $n_0$  der Brechungsindex des undeformierten Mediums ist und  $\sigma_a$  und  $\sigma_b$  die Hauptachsen-Spannungstensoranteile für die Ebene senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung. Beachte, dass kein Unterschied zwischen  $n_1$  und  $n_2$  besteht, falls die Spannungen  $\sigma_a = \sigma_b$ , d.h. die Spannung in dieser Ebene formerhaltend ist, weil dann das Medium isotrop bleibt.

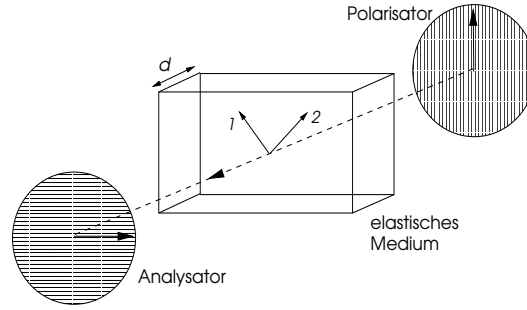


Abb. 1.6

Wir konstruieren nun folgende Vorrichtung, bestehend aus zwei Polarisatoren ("Polarisator" und "Analysator") und dem transparenten, isotropen, elastischen Medium dazwischen (Abb. 1.6). Die Polarisationsrichtungen der beiden Polarisatoren stehen senkrecht zu einander. Das Medium werde nun von aussen belastet, so dass sich intern Spannungen aufbauen. Damit erzeugen wir doppelbrechende Regionen mit räumlicher Variation je nach den Verhältnissen der Spannung. Für Bereiche, in denen keine der optischen Hauptachsen 1 und 2 parallel zu einer der Polarisationsrichtungen steht und die Deformation nicht formerhaltend ist, ergibt sich folgender Effekt. Ein monochromatischer Lichtstrahl, im Polarisator linear polarisiert, trifft senkrecht auf das Medium und propagiert darin in zwei senkrechten Komponenten, die verschiedene Geschwindigkeit haben,  $c_1 = c/n_1$  und  $c_2 = c/n_2$ . Damit haben die beiden Komponenten nach dem Durchgang eine relative Phasenverschiebung  $\delta$ ,

$$\delta = \frac{d}{2\pi\lambda}(n_1 - n_2) = \frac{d}{2\pi\lambda}(C - C')(\sigma_a - \sigma_b) , \quad (1.56)$$

wobei  $d$  die Dicke des Mediums ist und  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichts. Folglich ist das Licht nach dem Durchgang zirkular polarisiert:

$$\vec{E}_{\text{Eintritt}} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{E}_{\text{Austritt}} = \begin{pmatrix} E_1 \cos(\omega t) \\ E_2 \cos(\omega t + \delta) \end{pmatrix} . \quad (1.57)$$

Wenn nun der Lichtstrahl durch den Analysator tritt, wird die Intensität der zur Eingangspolarisation senkrechten Komponente festgestellt. Damit ergibt sich eine unterschiedliche Helligkeit je nach Grösse von  $\delta$ . Die Intensität ist dann

$$I \propto (\vec{n}_P \times \vec{n}_1) \cdot (\vec{n}_A \times \vec{n}_1) \{1 - \cos \delta\} , \quad (1.58)$$

wobei  $\vec{n}_{P,A}$  die Polarisationsrichtungen (senkrecht zur Propagationsrichtung des Lichts) des Polarisators (P) bzw. des Analysators (A) ist, und  $\vec{n}_1$  ist eine der beiden lokalen optischen Hauptachsen des Mediums (man nimmt zur Vereinfachung an, dass die optischen Eigenschaften des

Mediums entlang der Lichtausbreitungsrichtung keine Variation haben.). Insbesondere kommt auch kein Licht durch den Analysator, falls  $\delta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Ferner gibt es auch keine Intensität, falls die optischen Hauptachsen mit den Polarisationsrichtungen des Polarisators und Analysators übereinstimmen.

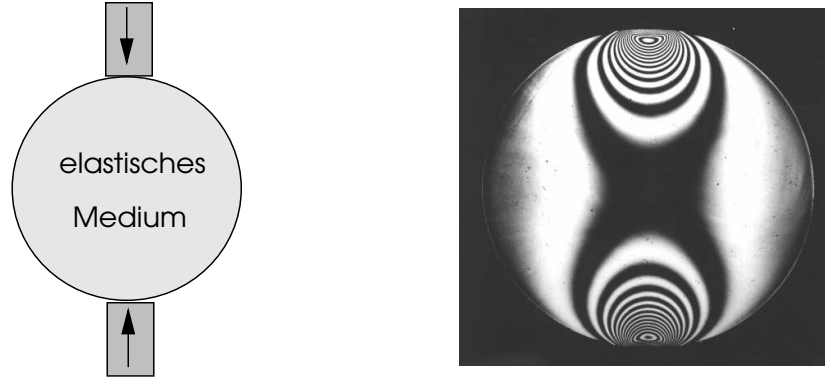


Abb. 1.7

Mit Hilfe dieses Verhaltens kann man nun das Spannungsmuster des Mediums als optisches Muster abbilden. Damit lassen sich die Spannungsverhältnisse in Materialien untersuchen, indem man nämlich Werkstücke, die stark belastet werden (z.B.: Achsen, Hacken, ...), aus einem transparenten Material (Plexiglas oder Kunstharzen) nachbaut und es dann unter gegebener Belastung spannungsoptisch ausmisst. Dies ergibt dann Muster wie in Abb. 1.7 gezeigt, die es erlauben, die Regionen grösster Belastung zu finden.

Weiter Ausführungen finden sich z.B. in:

[http://www.cip.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/E15b/lectures/mw/mw\\_v04.html](http://www.cip.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/E15b/lectures/mw/mw_v04.html).

## 1.4 Temperatur und Deformation

Wir erweitern hier die freie Energiedichte um einen Term, der den Einfluss von Temperaturänderungen auf den Deformationstensor beschreibt. Wir nehmen  $T_0$  als Referenztemperatur, bei der  $\epsilon_{ij} = 0$  dem Gleichgewicht entspricht, falls keine äusseren Kräfte wirken. Dann schreiben wir für die freie Energiedichte des homogenen, isotropen elastischen Körpers

$$F(T) = F_0(T) + \frac{K}{2} \epsilon_{kk}^2 + \mu \epsilon_{ij}^{(0)2} - K \alpha (T - T_0) \epsilon_{kk} . \quad (1.59)$$

Der letzte Term entspricht einer Entwicklung um die Temperatur  $T_0$  und verschwindet bei  $T = T_0$ . Wir berechnen den Spannungstensor,

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = -K \alpha (T - T_0) \delta_{ij} + K \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^{(0)} , \quad (1.60)$$

der nun einen zusätzlichen Beitrag durch die thermische Ausdehnung erhält. Wenn keine äusseren Kräfte wirken ( $\sigma_{ij} = 0$ ), ergibt sich

$$\frac{\Delta V}{V} = \Theta = \epsilon_{kk} = \alpha (T - T_0) = \alpha \Delta T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \alpha , \quad (1.61)$$

so dass  $\alpha$  den thermischen Ausdehnungskoeffizienten bei  $T_0$  bezeichnet.

Isotherm: Die Deformation eines Körpers unter äusserem Druck wird durch die Kompressibilität beschrieben. Die isotherme<sup>1</sup> Kompressibilität ist definiert als

$$\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{\kappa_T} \quad (1.62)$$

<sup>1</sup>Isotherm bedeutet "bei konstanter Temperatur". Der Körper ist an ein Wärmereservoir einer bestimmten Temperatur  $T$  gekoppelt.

wobei wir den hydrostatischen Druck durch  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  und die Volumenänderung durch  $dV/V = \epsilon_{kk}$  ausdrücken. Aus (1.60) finden wir durch Ableitung nach  $p$  auf beiden Seiten,

$$-p = K\epsilon_{kk} = K \frac{\Delta V}{V} \quad \Rightarrow \quad -1 = \frac{K}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad \kappa_T = K = \frac{p}{\epsilon_{kk}} . \quad (1.63)$$

Adiabatisch: Wenn der Körper wärmeisoliert ist, sprechen wir von "adiabatischer" Deformation, d.h. ohne Abgabe oder Aufnahme von Wärmeenergie, oder, äquivalent, bei konstanter Entropie  $s = -\partial F/\partial T$ . Deformationen führen daher zu einer Temperaturänderung, die bei der Berechnung der Kompressibilität berücksichtigt werden muss. Die Entropiedichte gewinnen wir durch die Ableitung der freien Energiedichte nach der Temperatur,

$$s(T) = s_0(T) + K\alpha\epsilon_{kk} . \quad (1.64)$$

Die Entropiedichte  $s$  soll nicht temperaturabhängig sein:  $s(T) = s_0(T_0)$  für alle  $T$ , so dass

$$s_0(T) - s_0(T_0) = \frac{c_v}{T_0}(T - T_0) = -K\alpha\epsilon_{kk} , \quad (1.65)$$

wobei  $\frac{c_v}{T_0} = \left( \frac{\partial s_0}{\partial T} \right)_{\epsilon_{ij}, T=T_0}$  die spezifische Wärme bei konstantem Volumen ist. Wenn wir (1.65) in (1.60) einsetzen, erhalten wir

$$\sigma_{ij} = K_S\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}^{(0)} , \quad (1.66)$$

mit

$$K_S = K + \frac{K^2\alpha^2 T_0}{c_v} = \kappa_S \quad \text{mit} \quad \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = -\frac{1}{\kappa_S} \quad (1.67)$$

als adiabatischer Kompressibilität. Beachte, dass mit jeder adiabatischen Volumenänderung  $\Theta$  eine Temperaturänderung einhergeht:  $T = T_0 - \kappa_T\alpha\Theta T_0/c_v$ .

Es zeigt sich, dass auch die spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $c_p$ , verschieden ist von derjenigen bei konstantem Volumen. Wenn wir den Ausdruck für  $\epsilon_{ij}(T)$  in Abwesenheit von äusserem Druck aus (1.61) übernehmen und in (1.64) einsetzen, finden wir

$$\frac{c_p}{T_0} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{\partial s_0}{\partial T} + K\alpha \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial T} = \frac{c_v}{T_0} + K\alpha^2 , \quad (1.68)$$

woraus folgt

$$c_p - c_v = K\alpha^2 T_0 > 0 , \quad (1.69)$$

d.h. es gilt immer  $c_p \geq c_v$ , da adiabatische Volumenänderungen auch durch die Arbeit, die dabei verrichtet wird, in die Energiebilanz eingeht.

Beachte, dass das Torsionsmodul  $\mu$  für die isotherme und adiabatische Situation identisch ist.

# Kapitel 2

## Elastostatik

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der statischen Deformation elastischer Körper unter verschiedenen Bedingungen, insbesondere unter Anwendung äusserer Kräfte. Dabei beschränken wir uns auf isotrope, homogene elastische Medien. Natürlich kann die Diskussion unter Anwendung des Variationsprinzips (Abschnitt 2.2) auch auf Kristalle verallgemeinert werden.

### 2.1 Grundlegende Feldgleichungen

Die Gleichungen, die den elastischen Körper im Gleichgewicht beschreiben, wurden bereits in (1.24) hingeschrieben. Falls eine Volumenkraft  $\vec{F}$  (z.B. Gravitation) vorgegeben ist, gilt,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -F_i \quad (2.1)$$

Zusätzlich gibt es eine Beziehung zwischen Spannungs- und Deformationstensor, die für einen isotropen Körper die Form

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (2.2)$$

hat, wobei  $\epsilon_{ij}$  aus dem Auslenkungsfeld  $\vec{u}$  folgt als

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

Wenn wir diese bekannten Gleichungen kombinieren, erhalten wir lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für das Auslenkungsfeld  $\vec{u}$ :

$$\mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = -\vec{F} \quad (2.4)$$

Ferner gibt es zwei Typen von Randbedingungen:

1. *Feste Randbedingungen:* Das Auslenkungsfeld ist auf der Oberfläche gegeben:  $\vec{u}|_{\partial V} = \vec{b}$ .
2. *Offene Randbedingungen:* Ein Flächenkräftfeld ist auf der Oberfläche vorgegeben:  $\sigma_{ij}n_j|_{\partial V} = P_i$ . Falls es kein Kräftfeld gibt ( $\vec{P} = 0$ ), ist die Oberfläche "frei".

### 2.2 Variationelle Formulierung

Die Feldgleichungen und Randbedingungen lassen sich auch aus einem Variationsprinzip herleiten. Wir betrachten die freie Energie (1.32) als Funktional des Auslenkungsfeldes  $\vec{u}$  und fügen zusätzliche Terme dazu, die äussere Kräfte, Volumenkräfte  $\vec{F}$  und Oberflächenkräfte  $\vec{P}$  berücksichtigen:

$$\mathcal{F}[\vec{u}] = \int_V \left[ \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii}^2 + \mu \epsilon_{ij}^2 \right] dV + \mathcal{F}_K[\vec{u}] = \int_V \left[ \frac{\lambda}{2} (\partial_i u_i)(\partial_j u_j) + \frac{\mu}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \right] dV + \mathcal{F}_K[\vec{u}] \quad (2.5)$$

mit dem Kraftterm

$$\mathcal{F}_K[\vec{u}] = - \int_V \vec{u} \cdot \vec{F} dV - \int_{\partial V} \vec{u} \cdot \vec{P} df \quad (2.6)$$

Die variationelle Minimierung diese Funktionalen nach  $\vec{u}$  führt auf

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \int_V [\lambda (\partial_i u_i) \delta (\partial_j u_j) + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \delta (\partial_i u_j) - F_j \delta u_j] dV - \int_{\partial V} P_j \delta u_j df \\ &= \int_V \underbrace{[-\lambda \partial_j (\partial_k u_k) - \mu \partial_i (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - F_j] \delta u_j dV}_{=0 \quad \text{Feldgleichung}} \\ &\quad + \int_{\partial V} \underbrace{\{\lambda (\partial_k u_k) n_j + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_i - P_j\} \delta u_j df}_{=0 \quad \text{Randbedingung 2}} , \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei  $\vec{n}$  der Oberflächennormalvektor ist. Wir haben angenommen, dass  $\delta (\partial_i u_j) = \partial_i \delta u_j$  und wir haben partiell integriert. Die Feldgleichungen ergeben sich daraus, dass wir den Integranden des Volumenintegrals Null setzen:

$$0 = (\lambda + \mu) \partial_j (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \vec{\nabla}^2 u_j + F_j \quad (2.8)$$

Falls der Wert von  $\vec{u}$  auf der Oberfläche festgelegt ist, wird dort  $\delta u_j = 0$  und das Oberflächenintegral verschwindet sowieso (Randbedingung 1). Wenn aber  $\vec{u}$  nicht bestimmt ist, erhalten wir offene Randbedingungen 2, die sich durch Nullsetzen des Integranden des Oberflächenintegrals ergeben. Daher gilt auf der Oberfläche

$$0 = n_j \lambda (\partial_k u_k) + n_i \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - P_j \Rightarrow \sigma_{ji} n_i - P_j = 0 \quad (2.9)$$

Das variationelle Minimum entspricht dem thermodynamischen Gleichgewichtszustand der freien Energie, und die Temperatur-Abhängigkeit kann hier auch ohne weiteres mitgenommen werden. Wir bestimmen nun noch die freie Energie einer gegebenen physikalischen Deformation, die die Feldgleichung erfüllt. Dazu schreiben wir das Funktional der freien Energie etwas um:

$$\mathcal{F}[\vec{u}] = \int_V dV \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \vec{F} \cdot \vec{u} \right\} - \oint_{\partial V} \vec{u} \cdot \vec{P} df . \quad (2.10)$$

Die partielle Integration des ersten Terms ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{u}] &= \int_V dV \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right\} u_i + \oint_{\partial V} df \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{ij} n_j - P_i \right\} u_i \\ &= - \int_V dV \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{2} - \oint_{\partial V} df \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{2} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wenn die Lösung der Feldgleichung inklusive Randbedingungen bekannt ist, erhalten wir die Energie im Wesentlichen aus den Termen, die die Kräfte beinhalten.

Wir betrachten nun einige illustrative Beispiele.

## 2.3 Torsion eines Zylinders

Gegeben sei ein elastischer Zylinder mit Radius  $R$ , dessen Grundfläche ( $z = 0$ ) fixiert ist (Abb. 2.1). Es gibt keine Volumenkräfte:  $\vec{F} = 0$ . Die Deckfläche ( $z = l$ ) sei jedoch um den Winkel  $\alpha$  verdreht.

Der Winkel  $\alpha$  wird als klein angenommen ( $\alpha \ll \pi$ ). Die festen Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 0 & z &= 0 \quad (\text{Grundfläche}) \\ \left. \begin{aligned} u_x &= -\alpha y, \\ u_y &= \alpha x, \\ u_z &= 0 \end{aligned} \right\} & z &= l \quad (\text{Deckfläche}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das Auslenkungsfeld gehorcht der Differentialgleichung:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (2.13)$$

wofür wir den Lösungsansatz

$$u_x = -y\phi(z), \quad u_y = x\phi(z), \quad u_z = 0 \quad (2.14)$$

machen mit  $\phi(l) = \alpha$ :

$$-\mu y \frac{d^2 \phi}{dz^2} = \mu x \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0. \quad (2.15)$$

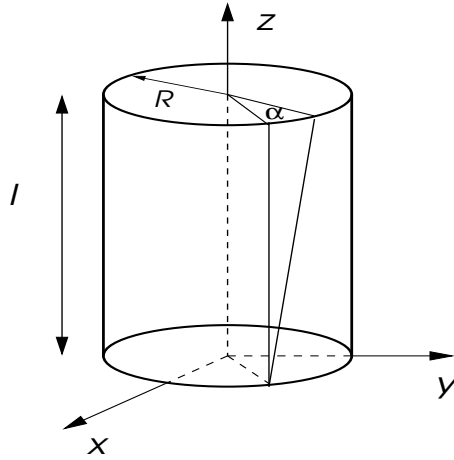


Abb. 2.1

Die Lösung:  $\phi(z) = az + b = \alpha z/l$ . Daraus ergibt sich der Deformationstensor,

$$\epsilon_{xz} = -\frac{y\alpha}{2l}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{x\alpha}{2l}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (2.16)$$

und der Spannungstensor,

$$\sigma_{xz} = -\mu \frac{y\alpha}{l}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{x\alpha}{l}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (2.17)$$

Die Flächenkraft auf der Deckfläche (Rückstellkraft) ist

$$P_x = \sigma_{xz} = -\mu \frac{y\alpha}{l}, \quad P_y = \mu \frac{x\alpha}{l}, \quad P_z = 0 \quad (2.18)$$

was auf ein Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P}$  führt,

$$\overline{M}_z = \int (xP_y - yP_x)df = \int \mu \frac{\alpha}{l} (x^2 + y^2)df = \frac{\mu\alpha}{l} \int r^3 dr d\phi = \mu \frac{\pi R^4}{2l} \alpha. \quad (2.19)$$

Das bedeutet, dass ein Drehmoment  $\overline{M}_z$  die Verdrehung der Deckfläche um den Winkel

$$\alpha = \frac{2l\overline{M}_z}{\mu\pi R^4} \quad (2.20)$$

erzeugt.

## 2.4 Biegung eines Balkens

Wir betrachten einen Balken der Länge  $l$  ( $x$ -Achse), der Dicke  $2h$  ( $z$ -Achse) und der Breite  $b$  ( $y$ -Achse), der an einem Ende ( $x = 0$ ) eingespannt sein soll (Abb.2.2). Am freien Ende ( $x = l$ ) wirkt die Kraft  $\vec{K}$ , die nach unten zieht. Wie verbiegt sich dadurch der Balken? Die Beschreibung dieser Situation ist im allgemeinen schwierig. Wenn wir jedoch annehmen, dass die Biegung nur schwach ist, dann können wir Bernoullis Näherung verwenden.

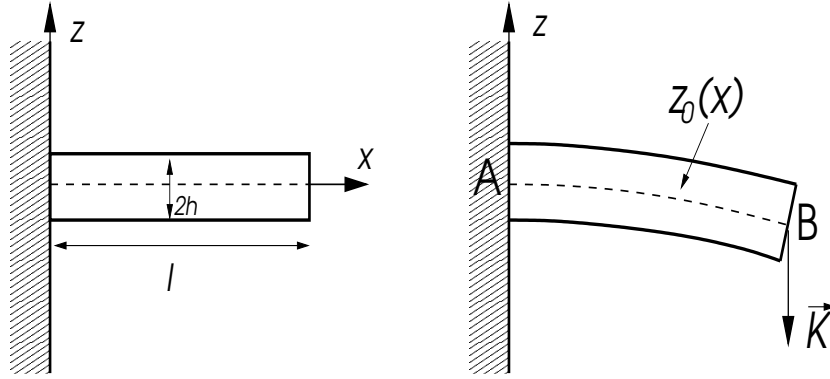


Abb. 2.2

Bernoullis Näherung basiert auf dem Konzept der *neutralen Schicht*. Bei einer Biegung des Balkens (gemäss Abb. 2.2) wird der oberer Teil des Stabes gedehnt, während ein unterer Teil gestaucht wird. Dazwischen gibt es eine Schicht, deren Länge durch die Biegung nicht verändert wird (gestrichelte Linie  $\overline{AB}$  in Abb.2.2). Das Ziel unserer Beschreibung soll sein, die Position der neutralen Schicht zu berechnen:  $z_0(x)$ .

Jedes infinitesimale Segment entlang des Balkens hat im gebogenen Zustand einen gewissen Krümmungsradius (Abb.2.3). Damit lässt sich die Längendeformation wie folgt diskutieren.

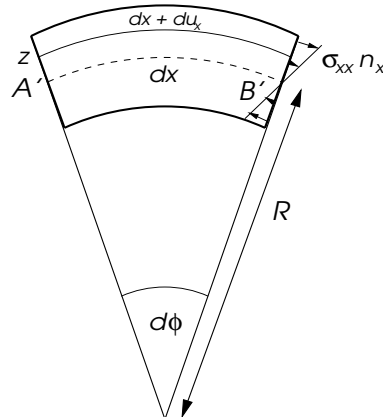


Abb.2.3



Die Länge der neutralen Schicht im Segment ist definiert als

$$dx = R d\phi \quad (2.21)$$

unabhängig von der Verbiegung. Weg von der Schicht ändert sich die Länge

$$dx + du_x = (R + z)d\phi \quad (2.22)$$

wobei wir  $z$  relativ zur neutralen Schicht messen. Die Deformation ergibt

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{(R + z)d\phi - R d\phi}{dx} = \frac{z d\phi}{dx} = \frac{z}{R} \quad (2.23)$$

und der entsprechende Spannungstensor ist ( $E$  Young'scher Elastizitätsmodul)

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \frac{z}{R}, \quad (2.24)$$

während die anderen Komponenten von  $\sigma_{ij}$  verschwinden.

Jetzt geht es darum den Radius  $R$  als Funktion von  $x$  zu bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst das Drehmoment des Balkens. Für das Flächenelement  $df = dydz$  mit Normalvektor  $\vec{n} = (1, 0, 0)$  muss die Kraft senkrecht zur Querschnittsfläche bei gegebenen  $x$  und  $R$  verschwinden

$$\int \sigma_{xx} df = \frac{E}{R} \int z df = \frac{Eb}{R} \int_{-h}^h z dz = 0 \quad (2.25)$$

so dass sich die mittlere Länge des Balkens (neutrale Schicht) nicht verändert. Das bedeutet, dass die neutrale Schicht in der Mitte des Balkens zu liegen kommt. Es gibt aber ein endliches Drehmoment (parallel zur  $y$ -Richtung)

$$M_B(x) = \int z \sigma_{xx} df = \frac{E}{R} I \quad \text{mit dem Flächenträgheitsmoment} \quad I = \int z^2 df = \frac{2bh^3}{3}. \quad (2.26)$$

Dem muss im Gleichgewicht das Drehmoment der äusseren Kraft  $\vec{K}$  entgegeng gehalten werden. Das Produkt  $EI$  wird *Biegesteifigkeit* genannt. Für jeden Punkt entlang des Balkens ist das Drehmoment ausgeübt von  $\vec{K}$  wegen der Hebelarmlänge  $l - x$  verschieden:

$$M(x) = K(l - x) = M_B = \frac{EI}{R}, \quad (2.27)$$

wobei  $K = |\vec{K}|$ . Der Krümmungsradius bestimmt sich aus der Form der neutralen Schicht  $z_0$ . Es gilt die Standardbeziehung

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{z_0''}{(1 + z_0'^2)^{3/2}} \approx \pm \frac{d^2 z_0}{dx^2} \quad (2.28)$$

für  $z_0 = z_0(x)$ , und die Striche bezeichnen die Ableitung. Für die Näherung haben wir angenommen, dass  $z_0'^2 \ll 1$ , wenn die Biegung schwach ist. Zusammen mit (2.27) erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} = \pm \frac{K}{EI} (l - x) \quad \Rightarrow \quad z_0(x) = \pm \frac{K}{EI} \left( \frac{l}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B \quad (2.29)$$

Da der Balken bei  $x = 0$  eingespannt ist, gelten die Randbedingung,  $z_0(0) = 0$  und  $z_0'(0) = 0$ , so dass  $A = B = 0$ . Zudem wird der Balken nach unten gebogen, wozu wir das negative Vorzeichen wählen. Damit wird die Position der neutralen Schicht beschrieben durch

$$z_0 = -\frac{K}{2EI}x^2 \left( l - \frac{x}{3} \right) \quad (2.30)$$

und das freie Ende wird um

$$z_0(l) = -\frac{l^3 K}{3EI} \quad (2.31)$$

gesenkt. Die Spannung  $\sigma_{xx}$  als Funktion von  $x$  hat ein Maximum:

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{E}{R}z = \frac{K}{I}z(l-x) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx}^{(max)} = \frac{K}{I}hl \quad (2.32)$$

welches sich bei  $x = 0$  befindet, also bei der Einspannstelle. Dort ist die Gefahr eines Balkenbruches am grössten. Man beachte, dass das Resultat für  $\sigma_{xx}(x)$  nur im Grenzfall  $x \ll l$  den Feldgleichungen entspricht, d.h. im Grenzfall eines konstanten Krümmungsradius (dann gilt  $\partial_j \sigma_{ij} = 0$ ). Für  $x \sim l$  ist das Resultat nur qualitativ richtig.

## 2.5 Einzelne Punktkraft auf einen elastischen Halbraum

Wir betrachten einen elastischen Halbraum, der durch eine Kraft senkrecht auf die Oberfläche an einem einzelnen Punkt belastet wird (Boussinesq, 1879). Die Oberfläche des Halbraumes liege bei  $z = 0$  in der  $x$ - $y$ -Ebene und der elastische Halbraum fülle den Raum  $z \geq 0$  aus (Abb. 2.4).

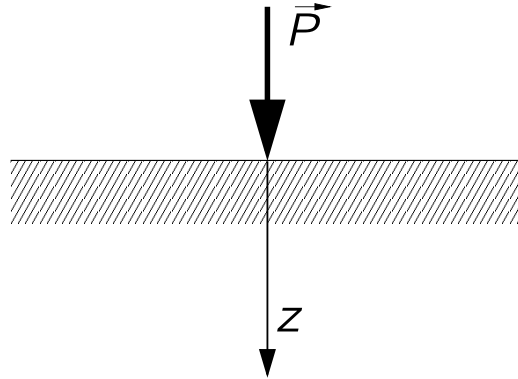


Abb. 2.4

Dies erlaubt es uns für das Problem in Zylinderkoordinaten zu verwenden.

---

*Formulierung in Zylinderkoordinaten:* Wir zerlegen Vektoren und Tensoren in Zylinderkoordinaten  $(r, \phi, z)$  nach der Basis  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ . Der Auslenkungsvektor ist dann

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\phi \vec{e}_\phi + u_z \vec{e}_z = (u_r, u_\phi, u_z) . \quad (2.33)$$

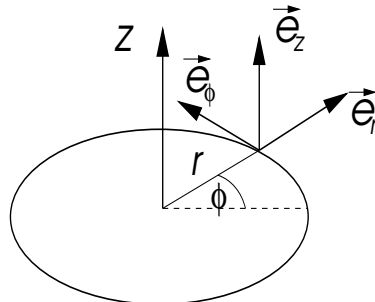


Abb. 2.5

Man kann leicht sehen, dass für die Basisvektoren gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_r = \vec{e}_\phi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_r \quad (2.34)$$

während alle übrigen Ableitungen der Basisvektoren verschwinden. Damit können wir nun die verschiedenen Ableitungen des Auslenkungsvektors bestimmen:

$$\begin{aligned} \left( \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{u} = (\partial_r u_r, \partial_r u_\phi, \partial_r u_z) \\ \left( \vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{u} = \frac{1}{r} (\partial_\phi u_r - u_\phi, \partial_\phi u_\phi + u_r, \partial_\phi u_z) \\ \left( \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} &= \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} = (\partial_z u_r, \partial_z u_\phi, \partial_z u_z) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Entsprechend hat der Deformationstensor die Form

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \partial_r u_r & \epsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} (\partial_\phi u_r - u_\phi) + \partial_r u_\phi \right) \\ \epsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{r} (\partial_\phi u_\phi + u_r) & \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} (\partial_z u_r + \partial_r u_z) \\ \epsilon_{zz} &= \partial_z u_z & \epsilon_{\phi z} &= \frac{1}{2} \left( \partial_z u_\phi + \frac{1}{r} \partial_\phi u_z \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ferner ist die Volumenänderung, gegeben durch die Spur des Deformationstensor:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi u_\phi + \partial_z u_z. \quad (2.37)$$

In der gegebenen Geometrie ist das Auslenkungsfeld  $\vec{u}$  rotationssymmetrisch um die  $z$ -Achse und spiegelsymmetrisch bezüglich jeder Ebene, die die  $z$ -Achse enthält. Es gibt keine  $\phi$ -Abhängigkeit. Daraus folgt auch, dass  $u_\phi = 0$  und

$$\vec{u} = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z)). \quad (2.38)$$

Damit wird der Deformationstensor,

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \partial_r u_r, \quad \epsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \partial_z u_z, \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} (\partial_z u_r + \partial_r u_z), \quad \epsilon_{r\phi} = \epsilon_{\phi z} = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ferner ergibt die Spur hier

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \partial_z u_z = \Theta(r, z) \quad (2.40)$$

die Volumenänderung. Daraus folgt für den Spannungstensor

$$\sigma_{rr} = 2\mu \partial_r u_r + \lambda \Theta, \quad \sigma_{\phi\phi} = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda \Theta, \quad \sigma_{zz} = 2\mu \partial_z u_z + \lambda \Theta, \quad \sigma_{rz} = \mu (\partial_z u_r + \partial_r u_z), \quad \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi z} = 0. \quad (2.41)$$

Nun gilt für die Randbedingungen, dass auf die Oberfläche ( $z = 0$ ) ausser bei  $r = 0$  keine Kraft einwirkt:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\phi z} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{für } z = 0, r > 0 \quad (2.42)$$

Weiter gilt, dass die Kraft entlang  $z$ -Richtung  $-P$  ist und erfordert, dass für alle  $z \geq 0$

$$2\pi \int_0^\infty dr \, r \sigma_{zz}(r, z) = -P. \quad (2.43)$$

Die Auslenkungen verschwinden im Unendlichen:  $\vec{u}, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij} = 0$  für  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ .  
Wir betrachten nun die Feldgleichungen (2.4)

$$\mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (2.44)$$

und nehmen davon die Divergenz:

$$(2\mu + \lambda) \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \Theta = 0, \quad (2.45)$$

d.h.  $\Theta$  erfüllt die Laplace-Gleichung. Ferner können wir aus (2.44) für  $u_z$  finden, dass

$$\vec{\nabla}^2 u_z = -\frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \Theta. \quad (2.46)$$

Aus den Gleichungen (2.40, 2.45, 2.46) können wir nun  $u_z, u_r$  und  $\Theta$  bestimmen.

Die Gleichung (2.45) wird durch den Ansatz

$$\Theta = -\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} = \alpha \frac{z}{R^3} \quad \text{mit } R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (2.47)$$

gelöst. Beachte nämlich, dass

$$\vec{\nabla}^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla}^2 \frac{1}{R} = 0 \quad \text{für } R \neq 0, \quad (2.48)$$

denn in sphärischen Koordinaten gilt  $\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (Rf)$ . Mit diesem Ansatz gilt gemäss (2.46)

$$\vec{\nabla}^2 u_z = \alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} \quad (2.49)$$

Wir führen die Funktion  $v = R/2$  ein, so dass  $\vec{\nabla}^2 v = 1/R$ . Durch Einsetzen in (2.46) und Eliminieren von  $\vec{\nabla}^2$  finden wir

$$u_z = \alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \left( \frac{1}{R} - \frac{z^2}{R^3} \right). \quad (2.50)$$

Da diese spezielle Lösung aus (2.49) folgt, können wir natürlich eine beliebige harmonische Funktion dazu addieren, selbst wenn diese bei  $R = 0$  singular sein sollte. Wir wählen

$$u_z = \frac{\gamma}{R} - \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \frac{z^2}{R^3} \quad (2.51)$$

wobei nun  $\gamma$  bestimmt werden muss. Aus dieser allgemeinen Lösung erhalten wir

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = - \left( \gamma + \alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{z}{R^3} + \alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{3}{2} \frac{z^3}{R^5} \quad (2.52)$$

und mit (2.40)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) &= r \left( \Theta - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \left( \gamma + \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \right) z \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R} + \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} z^3 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R^3} \\ \Rightarrow \quad r u_r &= - \left( \gamma + \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{z}{R} + \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \frac{z^3}{R^3} + \varphi(z) \end{aligned} \quad (2.53)$$

mit  $\varphi(z)$  als  $z$ -abhängige Integrationskonstante. Bei  $r = 0$  verschwindet  $ru_r$  und wir können  $\varphi(z)$  bestimmen:

$$\varphi(z) = \gamma + \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu} - \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} = \gamma + \alpha \frac{3\mu + \lambda}{2\mu} \quad (2.54)$$

Daraus folgt

$$u_r = \left( \gamma + \alpha \frac{3\mu + \lambda}{2\mu} \right) \frac{1}{r} - \left( \gamma + \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{z}{rR} + \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \frac{z^3}{rR^3} . \quad (2.55)$$

Es lässt sich leicht sehen, dass  $u_r \propto r$  für  $r \rightarrow 0$ .

Nun bleiben uns noch die Randbedingungen zu erfüllen. Zunächst gilt an der Oberfläche für  $z = 0$  und  $r > 0$ :

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \Theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.56)$$

wobei letzters aus (2.52) folgt. Ferner

$$\sigma_{rz} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = - \left( \gamma + \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{1}{rR} - \gamma \frac{r}{R^3} \quad (2.57)$$

was für  $z = 0$  oder  $R = r$  bedeutet, dass

$$\gamma = -\alpha \frac{2\mu + \lambda}{2\mu} \quad (2.58)$$

Damit vereinfachen sich die Lösungen für das Auslenkungsfeld,

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{\alpha}{2R} \left( \frac{2\mu + \lambda}{\mu} + \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{z^2}{R^2} \right) \\ u_r &= \frac{\alpha}{2r} \left( 1 - \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \frac{z}{R} + \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{z^3}{R^3} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Nun können wir  $\alpha$  durch die Bedingung an die Spannung im Innern des Halbraumes bestimmen. Für  $z > 0$  gilt

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \Theta = 3\alpha(\mu + \lambda) \frac{z^3}{R^5} \quad (2.60)$$

so dass mit (2.43)

$$P = -6\pi\alpha(\mu + \lambda) \int_0^\infty dr r \frac{z^3}{(z^2 + r^2)^{5/2}} = -3\pi\alpha(\mu + \lambda) \int_1^\infty du u^{-5/2} = -2\pi\alpha(\mu + \lambda) \quad (2.61)$$

also

$$\alpha = -\frac{P}{2\pi(\mu + \lambda)}, \quad (2.62)$$

womit das Randwertproblem gelöst ist.

Betrachten wir nun den Fall  $P > 0$ , so dass  $\alpha < 0$ . Dann sind  $u_z > 0$  und  $\sigma_{zz} < 0$ , und beide divergieren für  $R \rightarrow 0$ . In diesem Grenzfall ist die Voraussetzung für die linearisierte Formulierung der Elastostatik, nämlich  $\epsilon_{ij} \ll 1$ , nicht gewährleistet. Aus (2.59) lässt sich grob abschätzen, dass die Theorie nur in Abständen vom Angriffspunkt der Kraft grösser als  $\sqrt{\alpha}$  anwendbar ist. Dies stellt eine natürliche "Abschneidelänge" (cutoff) dar.

Für  $z = 0$  ist  $u_r < 0$  und für  $z > 0$  hängt das Vorzeichen von  $z/R$  ab (Abb.2.6).

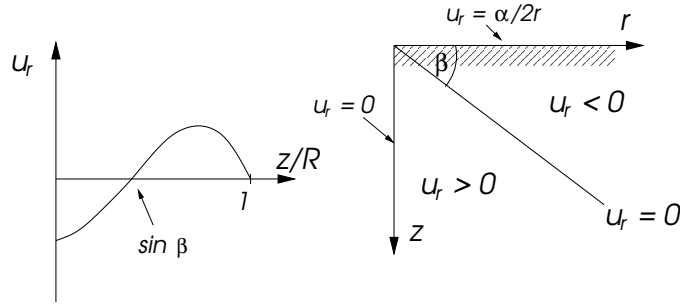


Abb. 2.6

An der Oberfläche kommt es zu einer Kontraktion der Ringe mit konstantem Radius ( $u_r < 0$ ), während in der Tiefe des Körpers das Vorzeichen wechselt und die Ringe sich ausdehnen. Die Nullstelle liegt bei

$$\frac{z}{R} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}} - \frac{1}{2} = \sin \beta \quad (2.63)$$

und liegt umso tiefer je weiter wir radial vom Angriffspunkt entfernt sind.

Das Analoge sehen wir für die Ringspannung  $\sigma_{\phi\phi}$ . Die Ringspannung wirkt senkrecht zu den Meridianebenen  $\phi = \text{konst.}$ . Es gilt (Abb. 2.7)

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{\alpha\mu}{r^2} \left( 1 - 2\frac{z}{R} + \frac{z^3}{R^3} \right) . \quad (2.64)$$

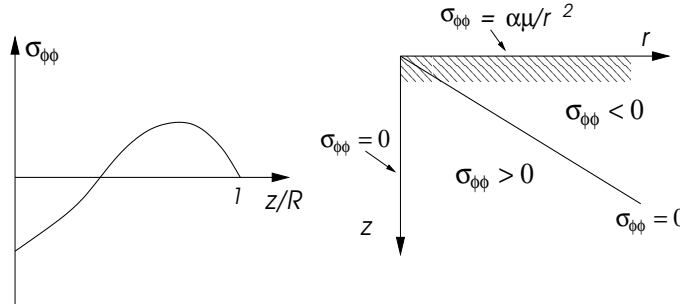


Abb. 2.7

Überlagerung: Die Situation beliebiger Flächenkräfte auf der Oberfläche lässt sich durch Superposition beschreiben. Wir betrachten nun den einfachsten Fall von zwei gleichen Punktkräften an zwei Angriffspunkten auf der Oberfläche bei  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$  und bei  $\vec{r}_a = (a, 0, 0)$ :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}[\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)] = \vec{P}_0 + \vec{P}_a \quad (2.65)$$

Das Auslenkungsfeld ist nun gegeben durch Superposition

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_a \quad (2.66)$$

der Auslenkungsfelder der beiden Punktkräfte. Wir möchten nun die freie Energie als Funktion des Abstandes  $a$  bestimmen.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vec{u}_0 + \vec{u}_a] &= \mathcal{F}[\vec{u}_0] + \mathcal{F}[\vec{u}_a] + \underbrace{\int_V [-\lambda \partial_j (\partial_k u_{0k}) - \mu \partial_i (\partial_i u_{0j} + \partial_j u_{0i}) - F_j] u_{aj} dV}_{=0} \\ &+ \int_{\partial V} \underbrace{\{\lambda (\partial_k u_{0k}) + \mu (\partial_i u_{0j} + \partial_j u_{0i}) n_i - P_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\}}_{=0} u_{aj} df \\ &- \int_{\partial V} P_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) u_{0j} df \end{aligned} \quad (2.67)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\Delta U(a) &= -\frac{1}{2} \int_{\partial V} \left\{ \vec{P}_0 \cdot \vec{u}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + \vec{P}_a \cdot \vec{u}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\} df \\
&= - \int_{\partial V} P_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) u_{0j} df = -P u_{0z}(\vec{r}_a) = -\frac{P^2}{4\pi} \frac{2\mu + \lambda}{\mu(\mu + \lambda)} \frac{1}{a}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Das resultierende Potential ist anziehend.



Abb. 2.8

Zwei Kugeln auf der Oberfläche eines elastischen Körper laufen zusammen (Abb. 2.8).

## 2.6 Statik von Flüssigkeiten und Gasen

Fluida im Gleichgewicht besitzen keine Schubspannungen, womit die statische Feldgleichung lautet:

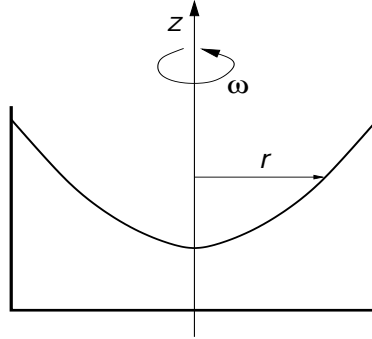
$$\rho F_i = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \rho \vec{F} = -\vec{\nabla} p \tag{2.69}$$

mit  $p$  als Druck ( $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ ).

*Inkompressible Fluida:* Die Dichte  $\rho$  ist konstant in inkompressiblen Fluida. Als Beispiel betrachten wir Wasser im Schwerfeld.

$$\vec{F} = (0, 0, -g) = -\vec{\nabla}(gz) \quad \Rightarrow \quad p + \rho gz = \text{konst.} \tag{2.70}$$

Der Druck wächst linear mit der Tiefe an, zirka 1 Atmosphäre per 10 m.



Wir berechnen nun die Oberfläche einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer Zentrifuge mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die Zentrifugalkraft ist  $r\omega^2$ . Das Potential dieser Flüssigkeit ist gegeben durch

$$U(r, z) = \rho gz - \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 \tag{2.71}$$

und der Druck

$$p = \rho g \left( -z + \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right) + \text{konst.} \tag{2.72}$$

Die Oberfläche des Wassers definiert durch  $p = p_0$  (Atmosphärendruck) hat eine Parabelform

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + \text{konst.} \quad (2.73)$$

unabhängig von der Dichte.

*Kompressible Fluida:* Für kompressible Fluida benötigen wir zusätzlich eine Zustandsgleichung, z.B. die ideale Gasgleichung

$$\rho = \frac{pM}{RT} \quad (2.74)$$

mit  $M$  als Molekulargewicht. Wir betrachten zunächst den Fall der isothermen Atmosphäre, d.h.  $T = \text{konst.}$  . Es gilt

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho = -\frac{gM}{RT}p \quad (2.75)$$

was auf die berühmte Barometer-Formel führt:

$$p(z) = p_0 e^{-gMz/RT} . \quad (2.76)$$

Die Barometer-Formel lässt sich jedoch nur anwenden, wenn wir annehmen, dass die Temperatur überall konstant ist. Dies ist jedoch in der Atmosphäre nur sehr beschränkt der Fall. Die Beschreibung der "polytropen Atmosphäre" basiert auf der adiabatischen Zustandsgleichung.

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad \text{mit} \quad n = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.77)$$

Wir definieren

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.78)$$

was mit (2.70)

$$\vec{\nabla} P = \vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad P + U = \text{konst.} \quad (2.79)$$

Mit der Zustandsgleichung erhalten wir aus obigem Integral

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-1/n} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{n}{n-1} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \text{konst.} - gz . \quad (2.80)$$

Die Konstante wird bestimmt durch die Bedingung, dass die Erdoberfläche als  $z = 0$  definiert wird mit dem Druck  $p_0$ :

$$\left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \frac{gz}{a} \quad (2.81)$$

mit  $a = (p_0/\rho_0)(n/n-1)$ . Es gibt also eine kritische Höhe  $h = a/g$ , bei der der Druck verschwindet ( $h \approx 48$  km für  $n = 1.2$ ). Unter Verwendung der Zustandsgleichungen finden wir

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^{\frac{n}{n-1}} , \quad \frac{\rho(z)}{\rho_0} = \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^{\frac{1}{n-1}} , \quad T(z) = \frac{Mp(z)}{R\rho(z)} = T_0 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \quad (2.82)$$

mit  $T_0 = Mp_0/R\rho_0$ . Damit sehen wir, dass mit dem Druck und der Dichte auch die Temperatur abnimmt. Die Atmosphäre der Erde besitzt zwei wesentliche Sphären, die untere *Troposphäre* und die obere *Stratosphäre*. Die Troposphäre reicht je nach Breitengrad zwischen 10 km (Pole) und 18 km (Äquator) hoch. Die Temperatur nimmt hier ungefähr um 0.5 - 1 K pro 100 m Höhe ab. Natürlich gibt es auch starke Zirkulation, die das Wetter bestimmt. Die Stratosphäre reicht bis ca. 50 km Höhe, wobei hier die Temperatur wegen der Absorption des UV-Lichtes wieder mit der Höhe ansteigt.



# Kapitel 3

## Bilanzgleichungen

Wir können das statische und dynamische Verhalten kontinuierlicher Medien auch vom Blickwinkel der sogenannten Bilanzgleichungen her betrachten. Dies bedeutet, dass wir das Verhalten einer gegebenen Grösse (Materie, Impuls, Energie ...) in einem Volumen  $V$  im Zeitablauf untersuchen. Dies hängt direkt mit Erhaltungssätzen für diese Grössen zusammen, deren zeitliche Änderung davon abhängt, was von aussen zugefügt bzw. weggenommen wird. Diese Betrachtungen sind sowohl auf elastische Körper als auch auf Fluida anwendbar.

### 3.1 Kontinuitätsgleichung: Erhaltung der Materie

Die Masse eines elastischen Mediums in einem Volumen  $V$  ist gegeben durch

$$M = \int_V \rho \, dV \quad (3.1)$$

mit  $\rho$  als die Massedichte. Wir betrachten im Folgenden nur Phänomene, in denen Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. Daher kann die Masse im obigen Volumen nur durch Hinein- oder Herausströmen von Materie aus dem Volumen verändert. Die Masseänderung  $\Delta M$  während der Zeit  $\Delta t$  durch das Oberflächenelement  $d\vec{f}$  ist,

$$-\Delta M = \rho(\vec{v} \cdot d\vec{f})\Delta t, \quad (3.2)$$

wobei  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit des Mediums bezeichnet. Die Masse  $\Delta M$ , die in der Zeit  $\Delta t$  aus einem Gebiet  $V$  "herausfliesst", resultiert aus dem Integral über die gesamte Oberfläche des Gebietes.

$$-\Delta M = \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = - \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} \quad (3.3)$$

Diese Gleichung erlaubt nun den Satz von Gauss anzuwenden:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right\} dV = 0. \quad (3.4)$$

Natürlich ist dieses Resultat für beliebige Volumen  $V$  gültig, so dass der Integrand verschwinden muss:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0. \quad (3.5)$$

Dies ist die *Kontinuitätsgleichung*. Wir können diese Gleichung noch etwas umformen, indem wir die *substantielle zeitliche Ableitung* einführen:

$$\frac{D}{Dt} A(\vec{r}, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A \quad (3.6)$$

Diese misst die Änderung der Funktion  $A(\vec{r}, t)$  in einem Volumenelement, das sich mit dem Medium mitbewegt. Der erste Term,  $\partial A / \partial t$ , ist die lokale zeitliche Änderung von  $A$ , der in einer stationären Strömung verschwindet. Der zweite Term,  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} A$ , wird auch *advective* Ableitung genannt und beschreibt die Änderung von  $A$  durch die Mitführung (Advektion) des Fluidums. Mit der substantiellen Ableitung ist die Kontinuitätsgleichung auch in der Form

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (3.7)$$

schreibbar.

Die Kontinuitätsgleichung ist eine sogenannte *Bilanzgleichung*, d.h. es wird über eine Menge, die in ein Volumen einfließt bzw. ausströmt, Buch geführt. Solche Bilanzgleichungen können nicht nur für Materie, sondern auch für andere physikalische Größen aufgestellt werden: Energie, Impuls, Drehimpuls, ....

### 3.2 Bilanz des Impulses und des Spannungstensor: Impulserhaltung

Ein Masse-Element  $dM = \rho dV$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  hat den Impuls

$$\vec{p} = dM \vec{v} = \rho dV \vec{v} \quad (3.8)$$

Gemäss der Newton'schen Bewegungsgleichung werden zeitliche Änderungen des Impulses durch Kräfte hervorgerufen. Dabei unterscheiden wir wieder zwei Typen von Kräften: Volumenkräfte (z.B. Schwerkraft) und Flächenkräfte, die auf die Oberfläche wirken. Die Schwerkraft auf ein Masse-Element  $d\vec{K} = dM \vec{g}$  lässt sich auch durch eine spezifische Kraft ausdrücken,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dM} = \frac{d\vec{K}}{\rho dV} = \vec{g}, \quad (3.9)$$

die auf ein Volumenelement  $dV$  wirkt.

Betrachten wir ein Schnittflächenelement innerhalb eines Körpers (oder eines Fluidums) mit einem Normalvektor  $\vec{n}$  (oder  $-\vec{n}$  je nach Standpunkt). Die Flächenkraft  $\vec{P}(\vec{n})$  auf dem Schnittflächenelement entspricht einem Spannungsvektor (oder einfach Spannung):

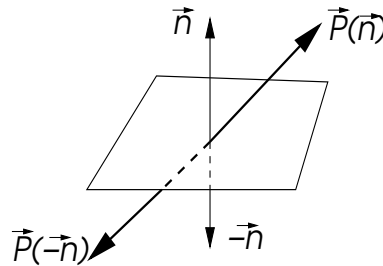


Abb. 3.1

Der Spannungsvektor ist ungerade in  $\vec{n}$ , d.h.  $\vec{P}(-\vec{n}) = -\vec{P}(\vec{n})$  (Abb. 3.1). Wir können ihn separieren in

$$\vec{P}(\vec{n}) = \underbrace{\left\{ \vec{P}(\vec{n}) \cdot \vec{n} \right\}}_{\text{Normalspannung}} \vec{n} + \underbrace{\left[ \vec{P}(\vec{n}) - \left\{ \vec{P}(\vec{n}) \cdot \vec{n} \right\} \vec{n} \right]}_{\text{Tangentialspannung}} \quad (3.10)$$

Gehen wir nun über zur Newton'schen Bewegungsgleichung für das Volumen  $V$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{p} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \oint_{\partial V} \vec{P}(\vec{n}) df \quad (3.11)$$

Für ein System im statischen Gleichgewicht ohne Volumenkräfte gilt

$$\int_{\partial V} \vec{P}(\vec{n}) df = 0 \quad (3.12)$$

wobei sich das Integral über die ganze Oberfläche erstreckt.

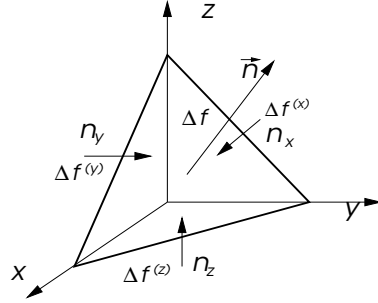


Abb. 3.2

Im Tetraheder (Abb. 3.2) gilt für die Flächenelement  $\Delta f^{(j)} = \Delta f n_j$  für  $j = x, y, z$  (dreieckige Seitenflächen in Abb.3.2,  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ), so dass

$$\int_{\partial V} \vec{P}(\vec{n}) df = \left[ \vec{P}(\vec{n}) \Delta f + \sum_{j=x,y,z} \vec{P}(-\vec{n}_j) \Delta f^{(j)} \right] = \Delta f \left[ \vec{P}(\vec{n}) + \sum_j \vec{P}(-\vec{n}_j) n_j \right] = 0, \quad (3.13)$$

d.h. die Spannung hängt linear von der Normalrichtung des Flächenelements ab. Im Grenzfall eines infinitesimal kleinen Volumens gilt dann:

$$P_i(\vec{n}) = P_i(\vec{n}_x) n_x + P_i(\vec{n}_y) n_y + P_i(\vec{n}_z) n_z = \sigma_{ij} n_j \quad (3.14)$$

was in natürlicher Weise auf den Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  führt. Daraus folgt, dass

$$\oint_{\partial V} P_i(\vec{n}) df = \oint_{\partial V} \sigma_{ij} n_j df = \oint_{\partial V} \sigma_{ij} df_j = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV. \quad (3.15)$$

Wir formulieren nun die Newton'sche Gleichung in folgender Form:

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{p} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV + \oint_{\partial V} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial V} \vec{P}(\vec{n}) df + \int_V \rho \vec{F} dV \quad (3.16)$$

wobei das erste Oberflächenintegral auf der rechten Seite Strom von  $\rho \vec{v}$  durch die Oberfläche beschreibt in derselben Art wie in (3.3). Wir können nun den Gauss'schen Satz anwenden und finden

$$\int_V \left[ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho v_i v_j - \sigma_{ij} \} - \rho F_i \right] dV = 0 \quad (3.17)$$

woraus sich die Impulsbilanzgleichung ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{[(\rho v_i) v_j - \sigma_{ij}]}_{\text{Impulsstromdichte}} = \rho F_i \quad (3.18)$$

Dies definiert den (symmetrischen) Impulsstromdichtetensor

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}, \quad (3.19)$$

wobei der erste Term *konvektiven* Ursprungs ist.

Wir verwenden nun folgenden Zusammenhang

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - \underbrace{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}}_{=0} \quad (3.20)$$

Kontinuitätsgleichung

Dies erlaubt es uns die Impulsbilanz mit Hilfe der materiellen Ableitung darzustellen als

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.21)$$

*Beispiel Hydrostatik:* Fluida kennen keine Schubspannung, sondern nur den hydrostatischen Druck  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ . Damit lässt sich im statischen Fall aus (3.21) herleiten, dass

$$\rho \vec{F} = \vec{\nabla} p. \quad (3.22)$$

Aus vorgegebener Kraftdichte können wir die Druckverteilung berechnen.

### 3.3 Drehimpulserhaltung

Wir definieren die Drehimpulsdichte bezüglich dem Ursprung ( $\vec{r} = 0$ ) als  $\vec{L} = \vec{r} \times \rho \vec{v}$ . Aus der Impulsbilanzgleichung (3.18) erhalten wir

$$\varepsilon_{lki} x_k \left[ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \right] = \varepsilon_{lkj} x_k \rho F_i = M_l, \quad (3.23)$$

wobei  $\vec{M}$  das Drehmoment beschreibt. Wir können dies umschreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{lki} x_k \rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\varepsilon_{lki} x_k (\rho v_i v_j - \sigma_{ij})] = M_l - \varepsilon_{lki} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{=\delta_{kj}} = M_l - \varepsilon_{lki} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}). \quad (3.24)$$

Beachte, dass

$$\varepsilon_{lki} (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) = 0 \quad (3.25)$$

da  $\rho v_i v_k - \sigma_{ik}$  ein symmetrischer Tensor ist. Die Bilanzgleichung lautet daher

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{lki} x_k \rho v_i)}_{\text{Drehimpulsdichte}=L_l} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \varepsilon_{lki} x_k (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \}}_{\text{Drehimpulsstromdichte}=\Lambda_{lj}} = M_l \quad (3.26)$$

wodurch die Drehimpulsdichte  $L_i$  und Drehimpulsstromdichte  $\Lambda_{ij}$  definiert wird.

### 3.4 Energieerhaltung

Um die Energiebilanz zu bestimmen, gehen wir von der Impulsbilanz aus und bilden das Skalarprodukt mit der Geschwindigkeit.

$$v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} = v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + v_i \rho F_i \quad (3.27)$$

Die linke Seite können wir unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung umschreiben als

$$v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 v_j \right), \quad (3.28)$$

und weiter gilt

$$v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} . \quad (3.29)$$

Damit können wir (3.27) umformen:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \right)}_{\text{kin. Energiedichte}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 v_j - \sigma_{ij} v_i \right\}}_{\text{Energiestromdichte}} = -\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \rho F_i \quad (3.30)$$

Die Energiestromdichte  $\rho \vec{v}^2 v_j / 2 - \sigma_{ij} v_i$  besitzt einen konvektiven Teil (erster Term) der kinetischen Energie und einen Anteil der übertragenen Spannungsenergie. Die Quellenterme auf der rechten Seite entsprechen Leistungsdichten der Volumenkraft und der inneren Spannungen. Falls die Volumenkraft als Gradient eines Potentials ausgedrückt werden kann:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad v_i \rho F_i = -v_i \rho \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U v_i) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \rho \frac{\partial U}{\partial t} , \quad (3.31)$$

dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + \rho U \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 + \rho U \right) v_j - \sigma_{ij} v_i \right\} = -\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.32)$$

wobei nun die Energie(strom)dichte neben kinetischer Energie auch die potentielle Energie enthält.

Die gefundenen Bilanzgleichungen bilden die Grundlage zur Beschreibung der Dynamik von elastischen Medien und Fluida.

# Kapitel 4

## Schwingungen und Wellen

Zu den wichtigsten dynamischen Eigenschaften elastischer Körper gehören ihre Schwingungen um Gleichgewichtszustände und die Propagation von Wellen. In diesem Kapitel untersuchen wir einige Aspekte in diesem Zusammenhang und geben zum Schluss einen kurzen Einblick in die Seismologie der Erde.

### 4.1 Elastische Wellen in isotropen Körpern

Die Dynamik elastischer Körper ohne Volumenkräfte ist durch folgende Newton'sche Bewegungsgleichung gegeben, die sich aus der Impulsbilanz (3.21) herleiten lässt:

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 . \quad (4.1)$$

Wir vernachlässigen nun jegliche Terme, die in ihrer Ordnung höher als linear in  $\vec{u}$  sind, d.h. der zweite Term fällt weg und  $\rho$  wird durch die Gleichgewichtsdichte  $\rho_0$  ersetzt. Damit folgt

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 . \quad (4.2)$$

Für einen homogenen isotropen Körper finden wir daher folgende Wellengleichung:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{E}{2(1+\nu)} \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) . \quad (4.3)$$

Die elementaren Lösungen sind ebene Wellen:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \eta} \left\{ \vec{A}_{\vec{k}, \eta} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + \vec{A}_{\vec{k}, \eta}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \right\} , \quad (4.4)$$

wobei verschiedenen Polarisierungen der Wellen möglich sind (Index  $\eta$ ). Wegen der Linearität der Wellengleichung gilt das Superpositionsprinzip.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Longitudinale Welle:  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$  oder  $\vec{A}_{\vec{k}, \eta} \times \vec{k} = 0$ . Daraus folgt

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})}_{=0} , \quad (4.5)$$

so dass die Wellengleichung (4.3) sich auf

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad \text{mit} \quad c_l^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho_0} = \frac{E(1-\nu)}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.6)$$

reduziert. Durch Einsetzen von (4.4) finden wir

$$\omega_{\vec{k}} = c_l |\vec{k}|, \quad (4.7)$$

wobei  $c_l$  die longitudinale Schallgeschwindigkeit bezeichnet.

Transversale Welle:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  oder  $\vec{A}_{\vec{k},\eta} \cdot \vec{k} = 0$  (keine Volumenänderung).

$$\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{u} = 0 \quad \text{mit} \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho_0} = \frac{E}{2\rho_0(1+\nu)} \quad (4.8)$$

und  $\omega_{\vec{k}} = c_t |\vec{k}|$  ( $c_t$ : transversale Schallgeschwindigkeit).

Die allgemeine Wellengleichung lässt sich daher schreiben als

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c_t^2 \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (4.9)$$

mit

$$\frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{\mu}{2\mu + \lambda}} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}. \quad (4.10)$$

Für die Polarisation der transversalen Welle wählen wir

$$\vec{u}_t(\vec{r}, t) = \vec{A}_t e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + \vec{A}_t^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}, \quad (4.11)$$

und mit  $\vec{A}_t = \vec{A}_{t,1} + i \vec{A}_{t,2}$  folgt

$$\vec{u}(\vec{r} = 0, t) = \vec{A}_{t,1} \cos(\omega_{\vec{k}} t) + \vec{A}_{t,2} \sin(\omega_{\vec{k}} t). \quad (4.12)$$

Dies entspricht einer Ellipse. Wir kennen zwei Spezialfälle: (1) lineare Polarisation:  $\vec{A}_{t,1} \parallel \vec{A}_{t,2}$ ; (2) zirkulare Polarisation:  $\vec{A}_{t,1} \perp \vec{A}_{t,2}$  mit  $|\vec{A}_{t,1}| = |\vec{A}_{t,2}|$ .

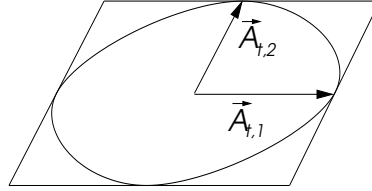


Abb.4.1

## 4.2 Elastische Wellen in Kristallen

Die Bewegungsgleichung (4.2) schreibt sich

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad \text{mit} \quad \sigma_{ik} = c_{iklm} \epsilon_{lm} \\ \Rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= c_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Wir betrachten eine monochromatische Welle als elementare Lösung

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.14)$$

welche, eingesetzt in die Wellengleichung,

$$\rho_0 \omega^2 A_i = c_{ijkl} k_j k_l A_m \quad (4.15)$$

ergibt. Dies entspricht einem Eigenwertproblem mit der Frequenz  $\omega$  als Eigenwert. Es resultieren aus der Gleichung

$$\text{Det} \{c_{ijlm}k_jk_l - \rho_0\omega^2\delta_{im}\} = 0 \quad (4.16)$$

drei Lösungen für  $\omega_{\vec{k}}^2$ .

Wir untersuchen das Beispiel eines kubischen Kristalls, der durch drei unabhängige, nicht verschwindende Koeffizienten charakterisiert wird:

$$c_{xxxx} = c_{11} , \quad c_{xxyy} = c_{12} , \quad c_{xyxy} = c_{44} \quad (4.17)$$

Einige wichtige Propagationsachsen:

1)  $\vec{k} = (k, 0, 0)$ : Dies ergibt die Gleichung

$$\text{Det} \begin{pmatrix} c_{11}k^2 - \rho_0\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}k^2 - \rho_0\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}k^2 - \rho_0\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

mit einer longitudinalen und zwei transversalen Wellen:

$$\omega_l^2 = \frac{c_{11}}{\rho_0}k^2 \quad \text{und} \quad \omega_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho_0}k^2 \quad (4.19)$$

2)  $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k, k, 0)$ :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_{11} + c_{44})k^2 - \rho_0\omega^2 & \frac{1}{2}(c_{12} + c_{44})k^2 & 0 \\ \frac{1}{2}(c_{12} + c_{44})k^2 & \frac{1}{2}(c_{11} + c_{44})k^2 - \rho_0\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}k^2 - \rho_0\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

mit

$$\omega_l^2 = \frac{1}{2\rho_0}(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})k^2 , \quad \omega_t^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\rho_0}(c_{11} - c_{12})k^2 & \vec{u} \perp z \\ \frac{c_{44}}{\rho_0}k^2 & \vec{u} \parallel z \end{cases} \quad (4.21)$$

3)  $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(k, k, k)$ :

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(c_{11} + 2c_{44})k^2 - \rho_0\omega^2 & \frac{1}{3}(c_{12} + c_{44})k^2 & \frac{1}{3}(c_{12} + c_{44})k^2 \\ \frac{1}{3}(c_{12} + c_{44})k^2 & \frac{1}{3}(c_{11} + 2c_{44})k^2 - \rho_0\omega^2 & \frac{1}{3}(c_{12} + c_{44})k^2 \\ \frac{1}{3}(c_{12} + c_{44})k^2 & \frac{1}{3}(c_{12} + c_{44})k^2 & \frac{1}{3}(c_{11} + 2c_{44})k^2 - \rho_0\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

mit

$$\omega_l^2 = \frac{1}{3\rho_0}(c_{11} + 2c_{12} + c_{44})k^2 , \quad \omega_t^2 = \frac{1}{3\rho_0}(c_{11} - c_{12} + c_{44})k^2 \quad (4.23)$$

Die Schallgeschwindigkeiten sind richtungs- und polarisationsabhängig.

### 4.3 Hamilton'sches Extremalprinzip

Analog zur Elastostatik können wir die Bewegungsgleichungen durch ein Variationsprinzip herleiten. Dieses Prinzip beruht auf dem Hamilton'schen Prinzip der klassischen Mechanik. Wir formulieren die Lagrange-Funktion des elastischen Körpers:

$$L[\vec{u}] = \int \left\{ \frac{\rho_0}{2} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{F}[\vec{u}] \right\} dV , \quad (4.24)$$



wobei  $\mathcal{F}[\vec{u}]$  durch (2.5) gegeben ist. Man sucht das Extremum der Wirkung

$$W = \int L dt . \quad (4.25)$$

Wir betrachten den Fall eines Kristalls und führen die Variation durch:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int dV \{ \rho_0 \partial_t u_i \delta \partial_t u_i - c_{ijlm} \partial_m u_l \partial_j \delta u_i + \rho_0 F_i \delta u_i \} + \int df P_i \delta u_i \right] . \quad (4.26)$$

Wir erhalten durch partielle Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} dt dV \rho_0 \partial_t u_i \delta \partial_t u_i = \int dV (\rho_0 \partial_t u_i) \delta u_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt dV (\rho_0 \partial_t^2 u_i) \delta u_i \quad (4.27)$$

und

$$\int_{t_1}^{t_2} dt dV \underbrace{c_{ijlm} \partial_m u_l}_{= \sigma_{ij}} \partial_j \delta u_i = \int_{t_1}^{t_2} dt df_j \sigma_{ij} \delta u_i - \int_{t_1}^{t_2} dt dV \partial_j \sigma_{ij} \delta u_i . \quad (4.28)$$

Daraus ergibt sich

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \{ -\rho_0 \partial_t^2 u_i + \partial_j \sigma_{ij} + \rho_0 F_i \} \delta u_i - \int_{t_1}^{t_2} dt \int df \{ \sigma_{ij} n_j - P_i \} \delta u_i = 0 , \quad (4.29)$$

was auf die Bewegungsgleichung

$$\rho_0 \partial_t^2 u_i = \partial_j \sigma_{ij} + \rho_0 F_i \quad (4.30)$$

und die Randbedingung

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (4.31)$$

führt, mit dem Spannungsvektor  $\vec{P}$ , der auf die Oberfläche wirkt.

## 4.4 Elastische Wellen im elastischen Halbraum

Wenn eine Welle auf eine Trennfläche zwischen zwei verschiedenen elastischen Körpern trifft, dann wird sie teilweise reflektiert und teilweise transmittiert. Wir betrachten hier den einfacheren Fall der Reflexion einer Welle an der freien Oberfläche eines elastischen Halbraumes. Diese Oberfläche (wir nehmen den Normalvektor parallel zur  $z$ -Richtung an) ist charakterisiert durch die Randbedingung

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 , \quad (4.32)$$

da keine Oberflächenspannung vorhanden sein soll. Wir untersuchen *Raumwellen*, die sich durch den ganzen elastischen Körper bewegen können und an der Oberfläche reflektiert werden. Dabei gibt es zwei wesentliche Fälle der Polarisation. Es gibt einerseits (longitudinale und transversale) Wellen, die eine Polarisationskomponente parallel zum Normalvektor der Oberfläche besitzen. In diesem Falle kommt es zwangsläufig zu einer Überlagerung von longitudinalen und transversalen Wellen. Andererseits finden wir auch transversale Wellen, deren Auslenkung senkrecht zum Normalvektor liegt und die rein transversal bleiben.

Die Oberfläche ändert die lokalen elastischen Eigenschaften so, dass auch spezielle Oberflächenwellen möglich sind, die nicht ins Innere des Halbraumes entweichen können. Hier gibt es einen Typ von Wellen, die sogenannten Rayleigh-Wellen.

#### 4.4.1 Reflektierte Raumwellen

Für eine ebene Welle  $\vec{u} = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  in einem isotropen elastischen Körper finden wir den Spannungstensor

$$\sigma_{jl} = 2\mu\epsilon_{jl} + \lambda\epsilon_{ss}\delta_{jl} = i \left[ \mu(A_j k_l + A_l k_j) + \lambda(\vec{A} \cdot \vec{k})\delta_{jl} \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.33)$$

Dies ergibt für transversale ( $\omega = c_t k_{(t)}$ ) bzw. longitudinale ( $\omega = c_l k_{(l)}$ ) Wellen:

$$\begin{aligned} \vec{A} \perp \vec{k}, \vec{k} = k_{(t)} \vec{n} &\Rightarrow \sigma_{jl} = i\mu k_{(t)} (A_j n_l + A_l n_j) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{A} = A \vec{n} \parallel \vec{k}, \vec{k} = k_{(l)} \vec{n} &\Rightarrow \sigma_{jl} = i k_{(l)} A (2\mu n_j n_l + \lambda \delta_{jl}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

*Polarisation 1:* Wir betrachten eine einlaufende ebene Welle, die so transversal polarisiert ist, das  $\vec{u}$  in der Ebene liegt, die durch Normalvektor und Wellenvektor gebildet wird. Diese Welle (1) wird in einen transversalen (2) und longitudinalen (3) Teil reflektiert (Abb.4.2).

Die Randbedingung der verschwindenden Spannungstensoren an der Oberfläche führt wegen der Überlagerung aller Wellen auf Gleichungen der Form

$$0 = \sum_{\gamma=1,2,3} \Lambda^{(\gamma)} e^{i(\vec{k}^{(\gamma)} \cdot \vec{r} - \omega^{(\gamma)} t)} \quad (4.35)$$

die für alle Positionen  $\vec{r}$  bei  $z = 0$  und Zeiten  $t$  gültig sein muss. Damit muss

$$\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \omega^{(3)} \quad \text{und} \quad \vec{k}^{(1)} \times \hat{z} = \vec{k}^{(2)} \times \hat{z} = \vec{k}^{(3)} \times \hat{z} \quad (4.36)$$

gelten, d.h. die Komponenten aller  $k$ -Vektoren parallel zur Oberfläche müssen gleich sein. Zunächst bedeutet dies, dass die Wellenvektoren der einfallenden und der reflektierten Wellen in der gleichen Ebene liegen, die auch die  $z$ -Achse mit einschliesst. Damit können wir, analog zum Snelliusgesetz der Strahlenoptik, die Wellenvektoren durch ihre Winkel mit der  $z$ -Achse bezeichnen (Abb.4.2), und die Randbedingung ergibt dann die Beziehung

$$k^{(1)} \sin \alpha^{(1)} = k^{(2)} \sin \alpha^{(2)} = k^{(3)} \sin \alpha^{(3)}. \quad (4.37)$$

Wegen der identischen Frequenz aller drei Wellen muss der Wellenvektor für die transversalen Komponenten die gleiche absolute Grösse besitzen:

$$k^{(1)} = k^{(2)} = k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad (4.38)$$

und für die longitudinale Komponente gilt:

$$k^{(3)} = k_l = \frac{\omega}{c_l}. \quad (4.39)$$

Dies legt die Beziehung zwischen den Winkeln fest,  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha$  und  $\alpha^{(3)} = \beta$ :

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad \text{mit} \quad n = \frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{\mu}{2\mu + \lambda}} \quad (4.40)$$

Hier spielt  $n$  die analoge Rolle zum Brechungsindex der Optik.

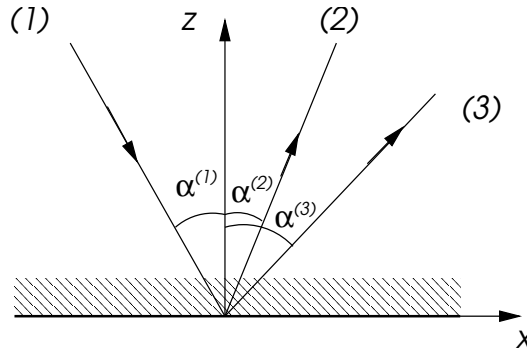


Abb.4.2

Nun wenden wir uns den Amplituden der einzelnen Komponenten zu:

Welle (1):

$$\vec{n}^{(1)} = (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha) ; \quad \vec{A}^{(1)} = A(\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \quad (4.41)$$

Die Komponenten des Spannungstensors sind:

$$\sigma_{xz} = -Ak_t\mu \cos 2\alpha , \quad \sigma_{yz} = 0 , \quad \sigma_{zz} = -Ak_t\mu \sin 2\alpha \quad (4.42)$$

Welle (2):

$$\vec{n}^{(2)} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) ; \quad \vec{A}^{(2)} = B(\cos \alpha, 0, -\sin \alpha) \quad (4.43)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{xz} = Bk_t\mu \cos 2\alpha , \quad \sigma_{yz} = 0 , \quad \sigma_{zz} = -Bk_t\mu \sin 2\alpha$$

Welle (3):

$$\vec{n}^{(3)} = (\sin \beta, 0, \cos \beta) ; \quad \vec{A}^{(3)} = C(\sin \beta, 0, \cos \beta) \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{xz} = Ck_l\mu \sin 2\beta , \quad \sigma_{yz} = 0 , \quad \sigma_{zz} = Ck_l(2\mu \cos^2 \beta + \lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{xz} = Cnk_t\mu \sin 2\beta , \quad \sigma_{yz} = 0 , \quad \sigma_{zz} = Cnk_t\mu \left( 2 \cos^2 \beta + \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

Wir führen folgende Umformungen durch:

$$2 \cos^2 \beta = 2 - 2 \sin^2 \beta = 2 - \frac{2}{n^2} \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad 2 \cos^2 \beta + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{n^2} (1 - 2 \sin^2 \alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{n^2} \quad (4.45)$$

wobei wir verwenden, dass

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2\mu + \lambda}{\mu} = 2 + \frac{\lambda}{\mu} \quad (4.46)$$

Daraus folgt für die Welle (3)

$$\sigma_{zz} = \frac{Ck_t\mu}{n} \cos 2\alpha \quad (4.47)$$

Wir sammeln nun alle Wellen und setzen sie in die Randbedingungen  $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$  ein ( $\sigma_{yz} = 0$  ist automatisch erfüllt):

$$\begin{aligned} -A \cos 2\alpha + B \cos 2\alpha + Cn \sin 2\beta &= 0 \\ -A \sin 2\alpha - B \sin 2\alpha + \frac{C}{n} \cos 2\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Also gilt

$$\frac{C}{A} = \frac{n \sin 4\alpha}{\cos^2 2\alpha + n^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta} , \quad \frac{B}{A} = \frac{\cos^2 2\alpha - n^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta}{\cos^2 2\alpha + n^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta} \quad (4.49)$$

wobei die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  durch die "Snellius-Beziehung" (4.40) bestimmt werden. Beachte, dass bei  $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$  keine longitudinale Wellenkomponente reflektiert wird.

Totalreflexion: Wenn  $\sin \alpha > n$ , dann gibt es keine reelle Lösung von (4.40). Da  $n < 2^{-1/2}$ , ist diese Bedingung sicher für  $\alpha > \pi/4$  erfüllt. Es gibt also einen Grenzwert  $\alpha_T$ , der  $\beta = \pi/2$  ergibt. Für  $\alpha > \alpha_T$  finden wir

$$\beta = \frac{\pi}{2} + i\gamma \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} = \cosh \gamma \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = n \cosh \gamma \quad (4.50)$$

Damit wird der Wellenvektor der Komponente (3)  $\vec{k}^{(3)} = k_l(\cosh \gamma, 0, -i \sinh \gamma)$ , so dass

$$e^{i(\vec{k}^{(3)} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i(k_l \cosh \gamma x - \omega t)} e^{k_l \sinh \gamma z} \quad (4.51)$$

wobei nur  $\gamma < 0$  möglich, d.h. die Welle zerfällt für  $z \rightarrow +\infty$ . Diese Welle propagiert nur in der Nähe der Oberfläche entlang der  $x$ -Achse in einer Schicht der Dicke  $1/k_l |\sinh \gamma|$ . Die Schallgeschwindigkeit ist reduziert zu

$$c^* = \frac{\omega}{k_l \cosh \gamma} = \frac{c_l}{\cosh \gamma} \quad (4.52)$$

Durch Einsetzen von  $\beta = \pi/2 + i\gamma$  erhalten wir

$$\frac{B}{A} = \frac{\cos^2 2\alpha + in^2 \sin 2\alpha \sinh 2\gamma}{\cos^2 2\alpha - in^2 \sin 2\alpha \sinh 2\gamma} \Rightarrow \left| \frac{B}{A} \right| = 1 \quad (4.53)$$

was bedeutet, dass wir in der transversalen Komponente eine *Totalreflektion* haben. Dazu gehört die an der Oberfläche konzentrierte longitudinale Komponente, die das Resultat der Randbedingungen ist. Die transversale Polarisation muss zwischen der einlaufenden und auslaufenden Welle entsprechend rotiert werden, voraus sich zwangsläufig die Überlagerung mit einer longitudinalen Komponente ergibt.

*Polarisation 2:* Nun gehen wir über zum einfacheren Fall einer transversalen einlaufenden Welle, deren Polarisation senkrecht auf der Ebene des Wellenvektors und des Normalvektors liegt. In diesem Fall wird keine longitudinale Komponente der reflektierten Welle erzeugt. In der obigen Abbildung können wir daher die Wellenkomponente (3) weglassen. Es gilt  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha$  und  $\vec{A}^{(j)} = (0, A^{(j)}, 0)$ . Die einzige Randbedingung, die nicht automatisch erfüllt ist, ist

$$0 = \sigma_{yz} = ik_t \mu \cos \alpha (A^{(1)} - A^{(2)}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \Big|_{z=0} \Rightarrow A^{(1)} = A^{(2)}. \quad (4.54)$$

In diesem Fall wird die einfallende transversale immer zu 100% in eine transversale Welle reflektiert, ohne dass je eine andere Polarisationskomponente ins Spiel kommt.

#### 4.4.2 Oberflächenwellen

Die obigen Gleichungen für die Polarisation 1 haben noch einen weiteren Typ von Lösungen, nämlich Wellen, die sich nur entlang der Oberfläche bewegen und zum Innern des elastischen Körpers hin abfallen. Diese Wellen sind Überlagerungen von longitudinalen und transversalen Wellen. Wenn wir die Formulierung des vorhergehenden Abschnittes verwenden, dann können wir diesen Aspekt mittels des folgenden Ansatzes für die einfallende transversale Welle fassen:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + i\delta \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \cosh \delta, \cos \alpha = -i \sinh \delta \quad \text{und} \quad \vec{n}^{(1)} = (\cosh \delta, 0, i \sinh \delta) \quad (4.55)$$

Die reflektierte longitudinale Welle hat wie oben  $\beta = \frac{\pi}{2} + i\gamma$ . Die "Snelliusgleichung" lautet damit

$$\cosh \delta = n \cosh \gamma \quad (4.56)$$

Wir können zusätzlich noch die reflektierte transversale Komponente null setzen:  $B = 0$ , was folgende Gleichung liefert:

$$\cos^2 \alpha = n^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \quad \Rightarrow \quad \cosh^2 2\delta = -n^2 \sinh 2\delta \sinh 2\gamma. \quad (4.57)$$

Dies ergibt eingesetzt in (4.49)

$$\frac{C}{A} = \frac{n \sin 4\alpha}{2 \cos^2 2\alpha} = n \tan 2\alpha = in \tanh 2\delta \quad (4.58)$$

Wir nehmen nun (4.56) und (4.57) zusammen:

$$n = \frac{\cosh \delta}{\cosh \gamma} = \frac{x}{x/n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sinh \delta = \sqrt{x^2 - 1} \\ \sinh \gamma = -\sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1} \end{cases} \quad (4.59)$$

mit  $\delta \geq 0, \gamma < 0$  and  $n \leq 2^{-1/2}$ . Man erhält aus den hyperbolischen Identitäten:

$$\sinh 2\delta = 2x\sqrt{x^2 - 1}, \quad \cosh^2 2\delta = 1 + 4x^2(x^2 - 1) \quad \text{und} \quad \sinh 2\gamma = -2\frac{x}{n}\sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1}, \quad (4.60)$$

was uns aus (4.57) die Gleichung

$$(2x^2 - 1)^2 = 4x^2\sqrt{x^2 - n^2}\sqrt{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^4 = (1 - n^2\xi)(1 - \xi) \quad (4.61)$$

mit  $\xi = 1/x^2$  liefert. Da  $\xi = 0$  eine offensichtliche Lösung ist, lässt sich die Gleichung in ein Polynom 3. Grades umschreiben. Mit  $x = \cosh \delta > 1$  sind nur Lösungen mit  $0 < \xi \leq 1$  physikalisch relevant. Man kann zeigen, dass es somit nur eine physikalische Lösung gibt. Für das einfache Beispiel  $\lambda = \mu \Rightarrow n^2 = 1/3$  ist die relevante Lösung  $\xi = 2(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.845$ , so dass  $\cosh \delta = 1.09$ .

Die Geschwindigkeiten der transversalen und longitudinalen Komponenten der Oberflächenwelle sind gleich:

$$c = \frac{c_l}{\cosh \gamma} = \frac{c_t}{\cosh \delta} < c_t < c_l \quad (4.62)$$

Die Oberflächenwellen propagieren langsamer als die Raumwellen. Die Eindringtiefen der beiden Komponenten sind jedoch verschieden:

$$\begin{aligned} \text{transversal:} \quad e^{-zk_t|\sinh \delta|} = e^{-z/d_t} &\Rightarrow d_t = \frac{1}{k_t|\sinh \delta|} \\ \text{longitudinal:} \quad e^{-zk_l|\sinh \gamma|} = e^{-z/d_l} &\Rightarrow d_l = \frac{1}{k_l|\sinh \gamma|} \end{aligned} \quad (4.63)$$

was auf das Verhältnis

$$\frac{d_l}{d_t} = \frac{|\sinh \delta|}{n|\sinh \gamma|} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - n^2}} < 1 \quad (4.64)$$

führt und für  $\mu = \lambda$   $d_l = 0.465d_t$  ergibt. Die transversalen Wellen dringt tiefer ein als die longitudinalen.<sup>1</sup>

Es ist auch interessant, die Bewegung eines Volumenelementes zu betrachten. Wir finden für  $x$ - und  $z$ -Komponente (longitudinal und transversal) die folgende Form:

$$\begin{aligned} u_x &= ARe \left[ -i \left\{ \sinh \delta e^{-z/d_t} - n \cosh \gamma \tanh 2\delta e^{-z/d_l} \right\} e^{ikx - i\omega t} \right] = f_x(z) \sin(kx - \omega t) \\ u_z &= ARe \left[ \left\{ \cosh \delta e^{-z/d_t} - n \sinh \gamma \tanh 2\delta e^{-z/d_l} \right\} e^{ikx - i\omega t} \right] = f_z(z) \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Die Volumenelemente an der Oberfläche vollführen Bewegungen auf ellipsenförmigen Bahnen, d.h. eine Kombination von Auf/Ab- und Schubbewegungen. Damit haben diese Wellen eine Ähnlichkeit mit den Schwerewellen von Flüssigkeiten. Dieser Typ von Wellen werden auch *Rayleigh-Wellen* genannt; Rayleigh hat sie im Jahre 1886 theoretisch entdeckt.

Es ist relativ einfach zu zeigen, dass es keine Oberflächenwellen mit der rein transversalen Komponente gibt, d.h. eine Oberflächenwelle mit Propagationsrichtung entlang  $x$ -Richtung und Auslenkungen entlang  $y$ -Richtung. Im Jahre 1911 hat A.E.H. Love jedoch gezeigt, dass im Falle eines mehrfach geschichteten elastischen Körpers, diese Form von Oberflächenwelle durch mehrfache Reflexion an den Schichten auftreten kann: *Love-Wellen*.

<sup>1</sup>Beachte, dass die Oberflächenwelle eine Lösung der Wellengleichung ist, die sich von den übrigen Lösungen mit transversalen Raumwellen abhebt. Letztere stellen eine kontinuierliche Menge von möglichen Lösungen der Wellengleichung dar (kontinuierlich im Wellenvektor  $k_z$  und ausgedehnt in  $z$ -Richtung). Hingegen haben die Oberflächenwellen eine spezielle Struktur, indem sie nämlich in  $z$ -Richtung an der Oberfläche lokalisiert sind. Dabei ist  $k_z$  auf einen einzelnen Wert fixiert:  $k_z = i/d_{l,t}$ .

### 4.4.3 Seismologie

Das Verständnis der Ausbreitung von elastischen Wellen findet eine wichtige Anwendung im Zusammenhang mit Erdbeben. Die Erde ist in guter Näherung ein elastischer Körper. Bei Erdbeben spielen sowohl Raumwellen als auch Oberflächenwellen eine wichtige Rolle. Dabei wirken die Oberflächenwellen meist zerstörerischer als die Raumwellen.

Erdbebenherde sind im allgemeinen stark lokalisiert. Ihre Position lässt sich aufgrund von Messungen über die Wellenlaufzeiten sehr präzise bestimmen. Seismische Messdaten der elastischen Wellenausbreitung erlauben es auch, Informationen über tektonische Schichten im Untergrund zu gewinnen. Solche Methoden werden auch in der modernen Geologie verwendet, indem man elastische Wellen studiert, die durch gezielte Explosionen ausgelöst werden.

Bei einem Erdbebenherd handelt es sich meist um ein elastisches Entspannungsereignis, z.B. eine plötzliche tektonische Verschiebung einer Bruchfläche, wobei bis zu 50% der Energie in elastische Wellen übergeht, während der Rest als Wärme und mechanische Zerrüttungsarbeit des Gesteins in der Bruchgegend dissipiert wird. Die Herde liegen meist in Tiefen zwischen 3 und 30 km unter der Erdoberfläche, es können aber auch Herde in bis zu 700 km Tiefe auftreten. Wenn sich tektonische Schichten gegeneinander bewegen wollen, kommt es zum sogenannten "stick-slip"-Phänomen ("hängenbleiben-durchrutschen"), ähnlich wie bei Reibung. Plötzliche Durchrutsch-Ereignisse lassen sich kaum vorhersagen, so dass Prognosen für Erdbeben kaum möglich sind.

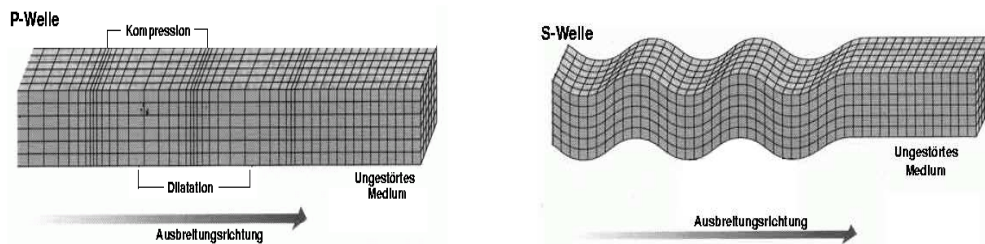


Abb.4.3

Das sogenannte Epizentrum, der Ort an der Oberfläche unmittelbar oberhalb des Herdes, erfährt die stärkste Intensität. Mit der Entfernung  $R$  vom Herd nimmt die Intensität ab. Dabei gilt für die Raumwellen eine Abnahme der Intensität mit  $R^{-2}$ , während für die Oberflächenwellen nur eine Abnahme mit  $R^{-1}$  vorliegt. Daher sind Oberflächenwellen bei Erdbeben verheerender als der Raumwellenanteil. Hingegen breiten sich Raumwellen schneller aus als Oberflächenwellen. Bei Raumwellen unterscheiden wir longitudinale und transversale Wellen. Die schnelleren longitudinalen Wellen werden bei einem Erdbeben zuerst registriert und deswegen auch Primärwellen (P-Wellen) genannt. Die langsameren transversalen Wellen kommen als zweite an und heißen Sekundärwellen (S-Wellen). Die zerstörerischen Oberflächenwellen kommen wegen ihrer reduzierten Geschwindigkeit zuletzt an (sie gehen radial vom Epizentrum aus), wobei es sich meist um Rayleigh-Wellen handelt (wie schon von Rayleigh selbst vermutet wurde). Die Love-Wellen spielen nur eine Rolle, falls die Tektonik starke Schichtung aufweist.

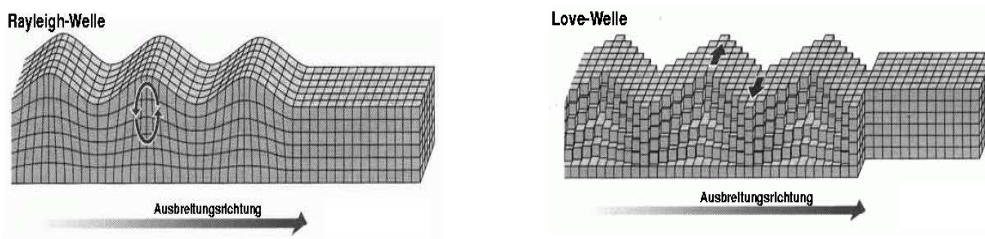


Abb.4.4

Interessant ist die Tatsache, dass der endliche Radius der Erde wohldefinierte Eigenschwingungen der Oberflächenwellen erlaubt. Dabei ergeben die Rayleigh-Wellen radiale und die Love-Wellen torodiale Schwingungen. Diese können bei einem Erdbeben angeregt werden und erst nach einigen Tagen abklingen. Die niedrigste durch ein Erdbeben angeregte Mode ist eine radiale Schwingung mit einer Schwingungsperiode von zirka 54 s.

## Kapitel 5

# Plastische Deformationen und Kristallgitterversetzungen

Wir haben uns bisher mit dem Bereich sehr kleiner Deformationen beschäftigt, bei denen die lineare Näherung gemäss Hook'schem Gesetz eine gute Beschreibung liefert. Wenn die Deformationen grösser werden, dann verlassen wir den Bereich der Gültigkeit dieser Näherung. Insbesondere der Übergang von Gleichung (1.2) zur linearisierten Version (1.3) sind nicht mehr gerechtfertigt. Wenn wir "anharmonische" Elastizität (nicht linear) berücksichtigen, ist auch die Bewegungsgleichungen nicht mehr linear. Folglich können elementare Wellen nicht mehr ohne weiteres überlagert werden, sondern es findet eine wechselseitige Beeinflussung von Wellen statt. Diese Korrekturen werden meist als klein betrachtet, wenn wir von Schall (Phononen) in elastischen Medien sprechen. Aber im Zusammenhang mit Schockwellen in Materialien können solche anharmonischen Effekte eine wichtige Rolle spielen.

Durch äussere Kräfte können wir einen elastischen Körper also über den Bereich hinaus verformen, in dem das Hook'sche Gesetz (lineare Beziehung zwischen Spannung und Deformation) gilt. Nichtsdestoweniger, ist die Deformation reversibel, d.h. das Ausschalten der Kraft bringt den Körper in seine alte Form zurück. Die Erfahrung zeigt aber, dass für noch grössere Kräfte auch die Reversibilität verloren geht. Die elastische Deformation geht über in einen Fliess- oder Kriechbereich. Deformationen bilden sich nur noch teilweise oder überhaupt nicht mehr zurück, nachdem die Kräfte ausgeschaltet worden sind. Ferner können kleine Änderungen äusserer Kräfte grosse Deformationen hervorrufen. Bei noch weiterer Deformation kann es schliesslich zum Riss oder Bruch des Körpers kommen.

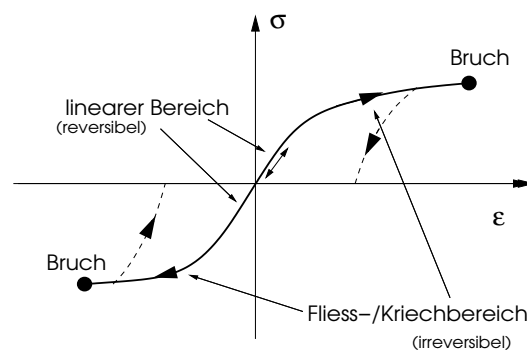


Abb. 5.1

Während im linearen (und schwach anharmonischen) Bereich die Deformation durch Entfernen der Spannung wieder vollständig rückgängig gemacht wird (reversibel), bleibt die Deformation im Fließbereich weitgehend erhalten. Man spricht hier von *plastischer Deformation* (irreversibel).

Um dieses Verhalten von einem mikroskopischen Gesichtspunkt her etwas konkreter beschreiben zu können, betrachten wir einen perfekten Kristall, in dem die Atome auf einem einfachen kubi-



schen Gitter angeordnet sind (Gitterkonstante  $a$ ). Eine Scherung  $\epsilon_{xz}$  kann nun als Verschiebung von Atomschichten gegeneinander verstanden werden.

Dies bedeutet, dass auf dem Niveau der Atomverschiebung (siehe Abb.5.2)

$$\epsilon_{xz} = \frac{u}{2a} \quad (5.1)$$

gilt, woraus im linearen Bereich folgt, dass

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{u}{a} . \quad (5.2)$$

Wenn wir jedoch soweit deformieren, dass  $u = a$ , dann sollte die Spannung wieder verschwinden, da sich die Atome wieder in einem gleichen Umfeld befinden. Daher muss  $\sigma_{xz}$  eine periodische Funktion von  $u$ , am einfachsten von der Form

$$\sigma_{xz} = \frac{\mu}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi u}{a}\right) \quad (5.3)$$

sein. Dies geht natürlich in eine lineare Beziehung über, wenn  $u \ll a$ . Innerhalb dieses Modells ergibt sich nun eine kritische Spannung bei  $u \approx a/4$  (maximales  $\sigma$ ), wo ein Übergang zu unbeschränkter Deformation stattfindet:

$$\sigma_{xz,\text{krit.}} \approx \frac{\mu}{2\pi} \approx 10^{-1} \mu . \quad (5.4)$$

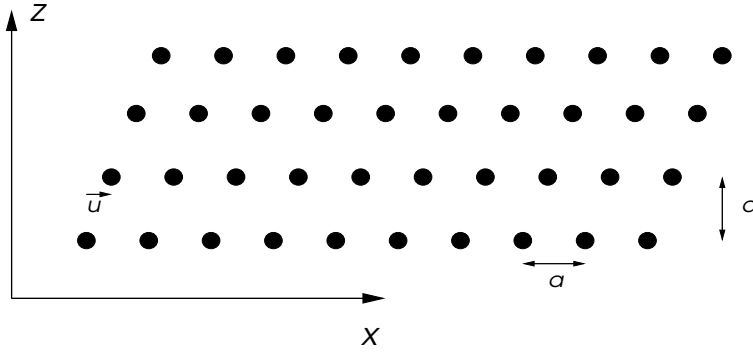


Abb.5.2.

Ein Vergleich mit der Praxis zeigt, dass dieser geschätzte Wert viel zu hoch liegt und der typische Wert eher bei  $\sigma_{xz} \sim 10^{-4} \mu$  liegt. Diese Diskrepanz kommt daher, dass reale Kristalle nicht perfekt (ideal) sind, sondern Defekte, insbesondere topologische Defekte wie Versetzungen besitzen, die in grossen Konzentrationen vorkommen und das Verhalten unter Anwendung grösserer Spannungen dominieren. Sie sind auch verantwortlich für Kriech- und Fließverhalten eines Materials unter grossem Druck. In diesem Kapitel wollen wir uns solche Defekte etwas genauer anschauen.

## 5.1 Volterra-Konstruktion von Versetzungen

Versetzungen sind Gitterdefekte, die einen topologischen Aspekt besitzen. Wie wir gleich sehen werden handelt es sich dabei um linienartige Defekte, die sich nicht so einfach aus einem Gitter eliminieren lassen, wenn sie einmal vorhanden sind. Wir führen hier ein einfaches Verfahren ein, um die wichtigsten Grundstrukturen von Versetzungen zu verstehen.

Betrachten wir einen Zylinder mit einem konzentrischen Loch. Wir schneiden diesen Zylinder entlang einer Fläche, die parallel zur Rotationsachse liegt (Abb. 5.3), auf und fügen ihn wieder atomar genau zusammen. Dabei verschieben wir jedoch die Fläche um eine Atomlage, entweder entlang der Zylinderachse (Verschiebungsvektor  $\vec{b} = (0, 0, a)$ ) oder senkrecht dazu (Verschiebungsvektor  $\vec{b} = (a, 0, 0)$ ). Im ersten Fall sprechen wir von einer *Schraubenversetzung* und im

zweiten von einer *Stufenversetzung*. Dieses gedankliche Verfahren wird Volterra-Konstruktion genannt. Das konzentrische Loch schliesst eine Singularität des Auslenkungsfeldes ein, die einem Liniendefekt entspricht (Abb.5.3), eine Linie beschrieben durch den Tangentialvektor  $\vec{l}$ . Wenn wir den Auslenkungsvektor  $\vec{u}$  auf einem beliebigen Pfad  $\Gamma$  um den Liniendefekt  $\vec{l}$  herum verfolgen, dann erhalten wir

$$\oint_{\Gamma} d\vec{u} = \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{u}}{ds} ds = \vec{b}, \quad (5.5)$$

den sogenannten *Burgers-Vektor*, eine topologische "Quantenzahl" der Versetzung. Es gilt:

$$\text{Schraubenversetzung: } \vec{b} \parallel \vec{l}, \quad (5.6)$$

$$\text{Stufenversetzung: } \vec{b} \perp \vec{l}.$$

Der Liniendefekt einer Versetzung kann nicht irgendwo im Kristall enden, da er eine solche Quantenzahl besitzt, die erfordert, dass der entsprechende Pfad  $\Gamma$  nicht kontrahierbar ist. Daher können solche Liniendefekte entweder geschlossen sein oder müssen von Oberfläche zu Oberfläche laufen.

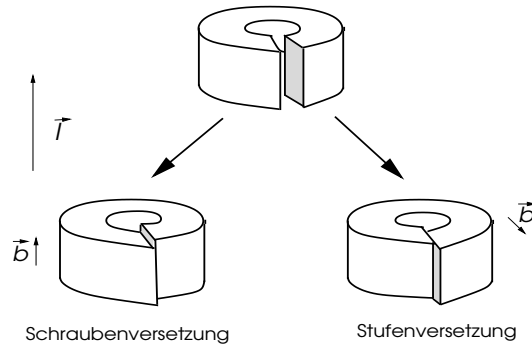


Abb.5.3.

---

**Liniendefekt und Burgers-Vektor:** Wir betrachten hier einige einfache Eigenschaften des Liniendefektes. Der Burgers-Vektor ist gegeben durch

$$b_i = \oint_{\Gamma} du_i = \oint_{\Gamma} \frac{du_i}{dx_k} dx_k = \int_{S_{\Gamma}} dS_k \epsilon_{kmj} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \quad (5.7)$$

wobei der letzte Schritt der Anwendung des Stokes'schen Satzes entspricht, mit  $S_{\Gamma}$  als einer beliebigen Fläche, die durch  $\Gamma$  berandet wird. Es gilt nun jedoch, dass

$$\epsilon_{kmj} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad (5.8)$$

überall ausser auf der Singularität des Liniendefektes. Wir definieren

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{l} \delta(\rho) = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{kmj} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} = b_i l_k \delta(\rho) \quad (5.9)$$

wobei  $\rho$  hier den radialen Abstand vom Liniendefekt auf der Fläche  $S_{\Gamma}$  bezeichnet.

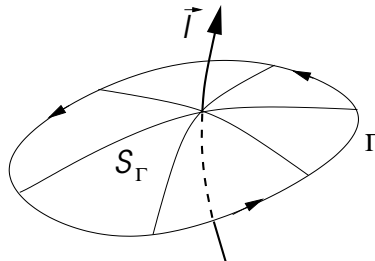


Abb.5.4.

Damit wird klar, dass die Burgers-Vektoren addiert werden, wenn mehr als ein Liniendefekt von  $\Gamma$  einge- kreist wird. Insbesondere gibt es zu jeder Versetzung eine inverse Versetzung. Damit können im perfekten Kristall Versetzungen in Paaren erzeugt werden.

Wenn wir die Situation von vielen Versetzungen (makroskopisch dicht, aber mikroskopisch verdünnt) betrachten, können wir die folgende Dichte definieren:

$$\epsilon_{kmj} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} = \rho_{ik} \quad (5.10)$$

Die Komponente des Burgers-Vektors ist  $i$ ;  $k$  ist die Komponente der Tangentialen zum Liniendefekt. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial x_k} = \epsilon_{kmj} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_m} = 0 , \quad (5.11)$$

was zeigt, dass sich der Burgers-Vektor entlang der Liniendefekte nicht verändert. Die Formulierung als Dichte erlaubt es, die Versetzungen als ein Gas zu betrachten.

## 5.2 Deformation und Energie einer Schraubenversetzung

Betrachte einen zylinderförmigen Körper vom Radius  $R$  und Länge  $L$  mit einer Schraubenver- setzung, wobei der Liniendefekt  $\vec{l}$  gerade auf der Zylinderachse liegt. Wir berechnen jetzt das Auslenkungsfeld  $\vec{u}$  dieser Versetzung. Die Feldgleichung für den Gleichgewichtszustand lautet nach wie vor

$$\partial_j \sigma_{ij} = 2\mu \partial_j \epsilon_{ij} + \lambda \partial_i \epsilon_{kk} = 0 , \quad (5.12)$$

falls keine Volumenkräfte vorhanden sind. Diese Gleichung ist überall im Körper ausser auf dem Liniendefekt gültig. Aus Symmetriegründen verschwinden die Komponenten von  $\vec{u}$ , die senkrecht auf  $\vec{l}$  stehen:

$$\vec{u} = (0, 0, u_z) \quad \text{mit} \quad u_z = u_z(x, y) \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{kk} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 , \quad (5.13)$$

d.h. es gibt keine Volumendeformation. Die elastostatische Gleichung reduziert sich zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_z}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} = 0 , \quad (5.14)$$

wobei sich die Gleichung in Zylinderkoordinaten  $(r, \phi, z)$  ausdrücken lässt. Die Lösung dieser Gleichung muss die Bedingung für den Burgers-Vektor erfüllen, d.h.

$$\oint_{\Gamma} du_z = \oint_{\Gamma} \frac{d}{d\phi} u_z(r, \phi) d\phi = b , \quad (5.15)$$

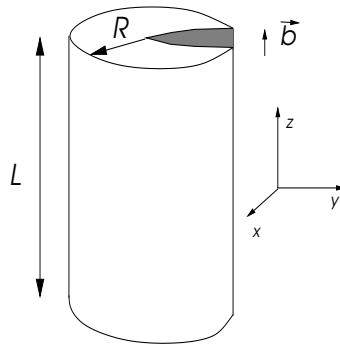


Abb.5.5

wobei der Pfad  $\Gamma$  in der  $x$ - $y$ -Ebene kreisförmig um  $\vec{l}$  verläuft. Es ist einfach, die entsprechende Lösung zu finden:

$$u_z(r, \phi) = \frac{b\phi}{2\pi} \quad \text{oder} \quad u_z(x, y) = \frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (5.16)$$

Offensichtlich ist  $u_z$  keine einwertige Funktion, und  $r = 0$  definiert eine Singularität von  $u_z$ . Andererseits ist der Deformationstensor einwertig:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zx} &= \frac{b}{4\pi} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{b}{4\pi} \frac{\sin \phi}{r}, \\ \epsilon_{zy} &= \frac{b}{4\pi} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{b}{4\pi} \frac{\cos \phi}{r}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

während alle anderen Koeffizienten verschwinden. Der Spannungstensor ist dann  $\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}$ . Wir benutzen nun den Deformationstensor, um die Energiekosten einer Versetzung zu berechnen:

$$E_V = \mu L \int d^2x \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = \mu \left( \frac{b}{4\pi} \right)^2 4\pi \int_a^R \frac{dr}{r} = \mu L \frac{b^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right), \quad (5.18)$$

wobei wir als untere Grenze eine Abschneidelänge für den Liniendefekt eingeführt haben, der im Kristall natürlich nicht eine mathematische Linie, sondern ein Objekt ist, dessen transversale Ausdehnung näherungsweise der kleinsten Längenskala, näherungsweise der Gitterkonstanten  $a$ , entspricht. Der Kern des Liniendefektes ist durch sehr starke Deformationen charakterisiert, die nicht mehr mit unserer linearen Elastizitätstheorie beschreibbar sind. Der Energiebeitrag des Kerns ist eine zusätzliche Konstante.

Wichtig ist die Erkenntnis, dass die Energie der Versetzung von der Körpergröße, hier dem Radius  $R$ , abhängt. Wir können daher nicht einfach eine Linienenergie pro Einheitslänge definieren.

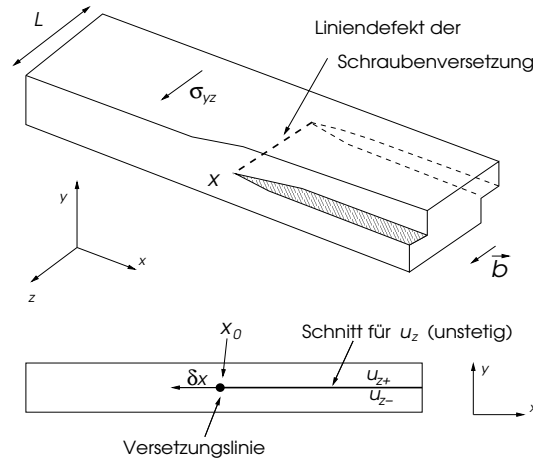


Abb.5.6.

Kraft auf Versetzung: Wir betrachten die Situation in Abbildung 5.6 mit einer Schraubenversetzung  $\vec{l} \parallel \hat{z}$ . Nun wird eine uniforme Spannung  $\sigma_{yz}$  angelegt. Wenn sich die Versetzung um  $\delta x$  entlang der  $x$ -Achse verschiebt, erhalten wir durch Betrachtung der Arbeit die potentielle Energie:

$$\delta W = - \int \sigma_{yz} \delta \epsilon_{yz} d^3x = -\sigma_{yz} \int d^3x \delta \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\sigma_{yz} L \int dx \delta \underbrace{(u_{z+} - u_{z-})(x)}_{=b\Theta(x-x_0)} = -b\sigma_{yz} L \delta x, \quad (5.19)$$

wobei  $u_{z\pm}$  den Wert der Auslenkung auf den beiden Seiten des Schnitts und  $x_0$  die Position der Versetzungslinie bezeichnet (vgl. Abb.5.6). Daher wirkt eine Kraft pro Einheitslänge auf die Versetzungslinie entlang der  $x$ -Richtung:

$$F_x = b\sigma_{yz} \quad \text{oder allgemeiner} \quad F_i = \varepsilon_{ijk} l_j \sigma_{km} b_m . \quad (5.20)$$

Mit dieser Art der Betrachtung lassen sich auch Wechselwirkungen zwischen zwei Schraubenversetzungen beschreiben. Nehmen wir zwei parallele Liniendefekte an, die sich auf einer Distanz  $d$  entlang der  $x$ -Achse voneinander entfernt befinden. Ihre Burgers-Vektoren sind  $\vec{b}_{1,2} = (0, 0, b_{1,2})$ . Da die von der einen Versetzung erzeugte Spannung auf die andere wirkt, können wir die Kraft pro Längeneinheit berechnen:

$$\sigma_{yz,1} = \mu \frac{b_1}{4\pi d} \quad \Rightarrow \quad F_x = \sigma_{yz,1} b_2 = \mu \frac{b_1 b_2}{4\pi d} . \quad (5.21)$$

Das Wechselwirkungspotential ist entsprechend gegeben durch

$$W = \mu \frac{b_1 b_2}{4\pi} \ln \left( \frac{d}{a} \right) \quad (5.22)$$

Dies bedeutet, dass für parallele (antiparallele) Schraubversetzungen die Wechselwirkung abstosend (anziehend) ist. Insbesondere können sich antiparallele Versetzungen annihilieren, wenn sie zusammentreffen und entgegengesetzt gleiche Burgers-Vektoren besitzen.

Interessant ist dieser Aspekt der Wechselwirkung auch in der Nähe von freien Obeflächen. Es gilt nämlich die Randbedingung  $\sigma_{ij} n_j |_{\text{Oberfläche}} = 0$ . Ganz analog zur Elektrostatik können wir die Randbedingung bei einer unendlichen planaren Oberfläche durch Einführung einer Spiegelversetzung erfüllen, die ausserhalb des elastischen Körpers liegt.

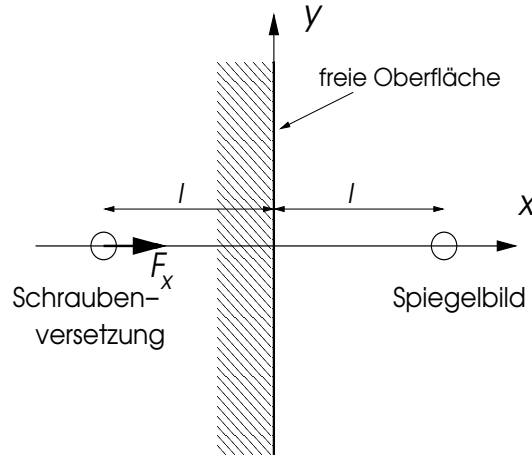


Abb.5.7.

Diese Spiegelversetzung hat entgegengesetzten Burgers-Vektor. Somit wirkt eine anziehende Kraft von der Oberfläche auf die Schraubversetzung:

$$F_x = \mu \frac{b^2}{4\pi l} \quad \Rightarrow \quad W(l) = \mu \frac{b^2}{4\pi} \ln \left( \frac{l}{a} \right) , \quad (5.23)$$

wobei  $l$  die Distanz der Versetzung zur Oberfläche ist. Offensichtlich besteht die Tendenz, die Versetzung aus dem Körper zu entfernen, was die Energie erniedrigen würde.

### 5.3 Deformation und Energie einer Stufenversetzung

Wir betrachten einen Zylinder des Radius  $R$  und der Länge  $L$  mit einer Stufenversetzung, deren Singularität mit der Rotationsachse zusammenfällt:  $\vec{l} \parallel \hat{z}$ .

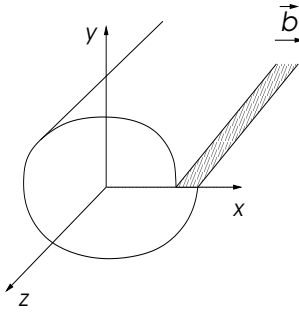


Abb.5.8.

Der Burgers-Vektor ist  $\vec{b} = (b, 0, 0)$ . Das Auslenkungsfeld enthält keine  $z$ -Komponente:

$$\vec{u} = [u_x(x, y), u_y(x, y), 0] . \quad (5.24)$$

Die Feldgleichungen lauten:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 . \quad (5.25)$$

Ferner gilt

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{E} , \quad \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{E} , \quad \epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \quad (5.26)$$

und

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) . \quad (5.27)$$

Wir definieren nun eine Funktion  $\psi(x, y)$ , so dass

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} , \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} . \quad (5.28)$$

Damit sind die Gleichungen (5.25) automatisch erfüllt. Aus der Definition des Deformationstensors ergibt sich ferner die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} . \quad (5.29)$$

Wir können nun die Gleichungen (5.26) und (5.27) verwenden, um die folgende Gleichung für  $\psi$  zu erhalten:

$$0 = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 \psi \quad (5.30)$$

in kartesischen und zylindrischen Koordinaten. Wir führen nun eine weitere Funktion ein:

$$\chi(x, y) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi . \quad (5.31)$$

Dann muss  $\chi$  eine harmonische Funktion sein, d.h.

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \chi(r, \phi) = 0 \quad (5.32)$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$\chi = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^n} \right) \sin n\phi + \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n r^n + \frac{d_n}{r^n} \right) \cos n\phi . \quad (5.33)$$

In Anlehnung an den Fall der Schraubenversetzung wählen wir hier die spezielle Lösung mit der  $1/r$ -Abhängigkeit, da  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  so abfallen sollten:

$$\chi(r, \phi) = B \frac{\sin \phi}{r} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi = B \frac{\sin \phi}{r} \quad (5.34)$$

Wir können wieder geeignete spezielle Lösungen finden:

$$\psi(r, \phi) = \frac{B}{2} r \ln r \sin \phi \quad \text{oder} \quad \psi(x, y) = \frac{B}{4} y \ln(x^2 + y^2) \quad (5.35)$$

Daraus ergibt sich für den Spannungstensor:

$$\sigma_{xx} = \frac{B}{2} \frac{y(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = -\frac{B}{2} \frac{y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{B}{2} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.36)$$

Über den Deformationstensor berechnen wir das Auslenkungsfeld:

$$u_x = -\frac{B}{8} \sin 2\phi - \frac{B(1-\nu)}{2\mu} \phi, \quad u_y = \frac{B}{8} \{2(1-2\nu) \ln r + \cos 2\phi\}. \quad (5.37)$$

Damit können wir die Konstante  $B$  bestimmen, indem wir den Burgers-Vektor auf einem Pfad um die singuläre Linie berechnen:

$$b = \oint_{\Gamma} du_x = \int \frac{du_x}{d\phi} d\phi = -2\pi \frac{B(1-\nu)}{2\mu} \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)}. \quad (5.38)$$

Wir sehen, dass hier  $u_x$  nicht einwertig ist und somit ein Schnitt im Körper von der Versetzungslinie ausgeht.

Analog zum vorhergehenden Beispiel können wir hier die Energie der Stufenversetzung bestimmen, für die wir

$$E_V = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \left( \frac{R}{a} \right) \quad (5.39)$$

erhalten. Die Energie hat eine sehr ähnliche Form wie für Schraubenversetzungen. Ferner lassen sich ähnliche Diskussionen wie oben durchführen, um die Kräfte zwischen zwei Versetzungen zu berechnen.

## 5.4 Plastische Deformationen

Nun kehren wir zurück zur Diskussion der plastischen Deformation. Wie oben erörtert, liegt die kritische Spannung, oberhalb derer plastische (irreversible) Deformation stattfindet, für einen perfekten Kristall zu hoch, um dieses Phänomen in realen Materialien zu beschreiben. Hier kommen die Gitterdefekte, besonders die Versetzung, ins Spiel. Äussere Spannungen auf den Körper führen zu Kräften, die auf die Versetzungen wirken. Solange sie klein sind, bleiben die Versetzungen unbeweglich und der Kristall verhält sich reversibel elastisch. Wenn jedoch die Spannungen genügend gross werden, beginnen sich die Versetzungen zu bewegen. Da es sich dabei auf mikroskopischem Niveau um eine Umstrukturierung der lokalen Atomverbindung in der Nähe der Versetzung handelt, muss eine gewisse Energiebarriere überwunden werden. (Diese Barriere ist natürlich viel kleiner als diejenige, die wir vorher im perfekten Kristall geschätzt hatten.) Zudem gibt es innere Reibung, die die Bewegung von Versetzungen verlangsamen kann. Infolgedessen werden Bewegungen dieser Art nicht rückgängig gemacht, wenn die Spannung wieder reduziert wird. Dies entspricht einem sehr viskosen Fliessen des Körpers, einer plastischen Deformation. Es gibt weitere Barrieren aufgrund der Wechselwirkung von Versetzungen untereinander und mit Verunreinigungen. Insbesondere können Verunreinigungen Haftzentren (pinning centers) für Versetzungen bilden, so dass sich diese weniger leicht bewegen lassen. Damit ergibt sich die etwas paradox anmutende Schlussfolgerung, dass sich ein reiner (nicht perfekter) Kristall weniger "hart" bezüglich plastischer Deformation erweist als ein verunreinigter Kristall. Dies ist zum Beispiel der Fall bei Stahl, der durch die Beigabe von Chrom und/oder Nickel besonders hart wird. Chrom-Nickel-Stahl wird etwa für Panzerplatten und Wagenachsen verwendet.

## 5.5 Uniforme Bewegung einer Schraubenversetzung

Die Dynamik einer Versetzung ist mit der Bewegung des elastischen Mediums verbunden und wird von denselben Bewegungsgleichungen wie die elastischen Wellen bestimmt. Im Falle einer Schraubenversetzung mit  $\vec{l} \parallel z$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v} \perp \vec{l}$  gilt

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} u_z = 0 \quad (5.40)$$

mit  $c^2 = \mu/\rho_0$ . Diese Gleichung ist invariant unter Lorentz-Transformationen

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c) \quad (5.41)$$

mit  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , wobei  $\vec{v} = (v, 0, 0)$ . Wir betrachten eine Versetzung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  entlang der  $x$ -Achse bewegt. Im Ruhesystem der Versetzung ist die bestimmende Gleichung:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right\} u_z = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z = \frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right), \quad (5.42)$$

wobei  $b$  die Länge des Burgers-Vektor (parallel zur  $z$ -Achse) ist. Durch die Transformation finden wir daher

$$u_z(x, y, t) = \frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{\gamma(x - vt)}\right). \quad (5.43)$$

Dies bedeutet, dass man den Effekt der Lorentz-Kontraktion beobachtet. Das Auslenkungsfeld um die Versetzung wird entlang der Bewegungsrichtung um den Faktor  $\gamma$  gestaucht. Beachte jedoch, dass

$$b = \oint_{\Gamma} du_z \quad (5.44)$$

invariant ist und nicht von der Bewegung abhängt. Damit ist  $b$  eine Erhaltungsgrösse.<sup>1</sup> Die Relativität als Konzept gilt nur bedingt, da wir natürlich mit dem elastischen Medium ein absolutes Ruhesystem vorgegeben haben.



Abb.5.9.

Wir können auch die Energie der sich bewegendes Versetzung berechnen. Diese besteht aus der elastischen und der kinetischen Energie  $E_1$  bzw.  $E_2$ ,

$$E_1 = \frac{\mu}{2} \int dV \left\{ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \frac{\rho}{2} \int dV \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2, \quad (5.46)$$

woraus folgt, dass

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \gamma \quad \text{mit} \quad E_0 = m_0 c^2 \quad (5.47)$$

<sup>1</sup>Für diese Erhaltungsgrösse können wir eine Bilanzgleichung herleiten, die Kontinuitätsgleichung für die Versetzungsdichte (Schraubenversetzungsdichte:  $\rho_{zz}$ ):

$$\frac{\partial \rho_{zz}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \rho_{zz}) = 0 \quad (5.45)$$

wobei  $\vec{v}$  das Geschwindigkeitsfeld der Versetzungen darstellt.



als Ruheenergie. Diese hatten wir früher schon berechnet:

$$E_0 = \frac{\mu b^2}{4\pi} \ln \left( \frac{R}{a} \right) \sim \mu b^2 \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{\mu b^2}{c^2} = \rho b^2 . \quad (5.48)$$

Die Ruhemasse  $m_0$  entspricht einer Masse pro Längeneinheit der Versetzung und ist natürlich proportional zur Massendichte  $\rho$ . Wenn  $b$  von der Grösse der Gitterkonstante ist, entspricht  $m_0$  ungefähr einer Atommasse pro Gitterkonstante. Der Impuls bestimmt sich aus der Beziehung

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad p = m_0 v \gamma , \quad (5.49)$$

woraus sich, analog zur Relativitätstheorie, die Zunahme der Masse mit steigender Geschwindigkeit ableiten lässt.

Es ist interessant, hier die Analogie zur Teilchenphysik zu betrachten. Betrachte Schraubenversetzungen mit  $\vec{l} \parallel z$  und verschiedenen "Ladungen"  $b$ . Die Ruheenergie entspricht der Energie, eine Versetzung zu erzeugen. Wir können aus dem "Nichts" durch Energiezufuhr ein Paar von Versetzungen mit  $b$  und  $-b$  erzeugen. Die Energiezufuhr geschieht im Normalfall durch eine innere Spannung (Verbiegen des Mediums), die durch die Erzeugung von Versetzungspaaren verringert werden kann. Die reduzierte Spannungsenergie geht in die Versetzungsenergien. Paare können sich auch wieder unter Freisetzung von Energie annihilieren, wenn sie zusammenkommen. Diese freiwerdende Energie kann auch in Form von Wellen im Medium erscheinen. Wir besitzen hier also ein zweidimensionales Analogon zu Teilchen, die Antiteilchen mit umgekehrter Ladung haben. Diese Form der "Materie" kann in Energie umgewandelt werden und umgekehrt. Können Versetzungen auch schneller als die Schallgeschwindigkeit  $c$  sein? In der Kontinuumsbeschreibung führt dies auf Probleme, da  $v \rightarrow c$  ein singulärer Grenzfall ist, z.B. wird die Versetzung entlang der Bewegungsrichtung auf Null kontrahiert. Die mikroskopische Struktur stellt hier wieder die Gitterkonstante als einen natürlichen Abschneideparameter zur Verfügung, um die Singularität bei  $v = c$  zu umgehen. Daher können Versetzungen sich im Prinzip auch mit Überschall bewegen. Dabei senden sie jedoch Schallwellen aus, analog zur Cherenkov-Strahlung für Teilchen mit Überlichtgeschwindigkeit (nur in optischen Medien möglich, z.B. blauer Schein des Reaktorwassers).

Die Versetzungen mit  $v < c$  besitzen nach obiger Betrachtung eine träge Masse und müssen durch Spannungen (Kräfte) beschleunigt oder abgebremst werden (auch innere Reibung bremst Versetzungen ab). Es zeigt sich, dass wir bei der Veränderung der Geschwindigkeit einer Versetzung die Bewegungsgleichungen nur konsistent lösen können, wenn wir einen Anteil elastischer Wellen mitberücksichtigen. Das bedeutet, dass beschleunigte Versetzungen elastische Wellen abstrahlen, in enger Analogie zur Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung durch ein beschleunigten geladenen Teilchens (Bremsstrahlung). Dies führt schliesslich auf eine Form der "Strahlungsdämpfung" der Bewegung einer Versetzung.

# Kapitel 6

## Dynamik von Fluida

### 6.1 Geschwindigkeitsfeld des Fluidums

Der Begriff Fluidum beinhaltet sowohl Gase wie Flüssigkeiten, die sich dadurch auszeichnen, dass sie kein elastisches Schubmodul besitzen ( $\mu = 0$ ). Wie bei Massepunktteilchen können wir für die Beschreibung eines Fluidums die Trajektorien (Bahnkurven) von Masse-Elementen betrachten. Diese bezeichnen wir durch die Vektoren  $\vec{a}_i$ , die zum Beispiel den Positionen der Masse-Elemente zum Zeitpunkt  $t = 0$  entsprechen. Die Trajektorien sind gegeben durch  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{a}_i, t)$ . Damit können wir die Strömung eines Fluidums vollständig beschreiben. Die Geschwindigkeit eines Masse-Elementes ist gegeben durch

$$\vec{v}(\vec{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(\vec{a}, t) . \quad (6.1)$$

Diese Formulierung der Trajektorien wird *Lagrange-Darstellung* genannt.

Eine alternative Formulierung geht auf Euler zurück. In der *Euler'schen Darstellung* wird die Information über die Trajektorien der Masse-Elemente fallengelassen. Wichtig ist nur noch die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Fluidums an einem Punkt  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$ . Damit definieren wir das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) , \quad (6.2)$$

aus dem sich Strömungslinien ergeben. Strömungslinien sind Kurven, deren Tangente parallel zur Geschwindigkeit am jeweiligen Ort zur gegebenen Zeit ist. Im Falle stationärer Strömung fallen Strömungslinien und Bahnkurven zusammen. Im allgemeinen Fall sind die Strömungslinien zeitabhängig und sind nicht mehr mit den Bahnkurven der Masse-Elemente identisch. Wenn man eine Stromlinienschar zeichnet, dann ist die Dichte der Schar proportional zum Betrag der Geschwindigkeit  $v = |\vec{v}|$ , so dass eine grosse Geschwindigkeit einer grossen Stromliniendichte entspricht.

Falls das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei ist, d.h.

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 , \quad (6.3)$$

können wir ein Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  einführen mit

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi \quad (6.4)$$

denn allgemein gilt  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ . Ist zudem die Strömung quellenfrei, folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad (6.5)$$

und das Potential ist eine Funktion, die die Laplace-Gleichung mit gegebenen Randbedingungen erfüllt.

Die Beschleunigung  $\vec{b}$  eines Masse-Elementes  $\vec{a}$  lässt sich in der Lagrange'schen Darstellung sofort hinschreiben,

$$\vec{b}(\vec{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{a}, t). \quad (6.6)$$

Wechseln wir jedoch in die Euler'sche Darstellung über, dann müssen wir die Zeitabhängigkeit von  $\vec{r}(\vec{a}, t)$  berücksichtigen. Damit wird

$$\vec{b}(\vec{r}, t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{r}(\vec{a}, t), t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{D}{Dt} \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (6.7)$$

d.h. die Beschleunigung ist durch die substantielle Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes gegeben. Wir hatten diese Ableitung zum Beispiel schon im Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung gesehen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad (6.8)$$

Einerseits ist  $\rho \vec{v}$  die Massenstromdichte, andererseits auch die Impulsdichte.

## 6.2 Euler'sche Gleichung für ideale Fluida

Wie wir bereits früher im Kapitel 3 Gleichung (3.18) diskutiert hatten, führt die Newton'sche Gleichung auf die Impuls-Bilanzgleichung

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} - \rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (6.9)$$

wobei der Spannungstensor aus einem Teil der den hydrostatischen Druck  $p$  enthält und einem Reibungsterm  $R_{ij}$  besteht:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + R_{ij}. \quad (6.10)$$

Wenn wir den Reibungsterm vernachlässigen, erhalten wir die Euler-Gleichung für ideale Fluida:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{F} + \vec{\nabla} p = 0 \quad (6.11)$$

Ideal bedeutet, dass das Fluidum keine innere Reibung (Viskosität) hat. Die Euler-Gleichung bestimmt  $\rho$ ,  $\vec{v}$  und  $p$ , wobei wir als Randbedingungen für ein Fluidum in einem Gefäß gilt, dass die Geschwindigkeit normal zur Oberfläche verschwindet:  $\vec{n} \cdot \vec{v}|_{\text{Oberfläche}} = 0$ .

Kompressibles ideales Fluidum: Für ein solches Fluidum benötigen wir eine Zustandsgleichung, die einen Zusammenhang zwischen Dichte und Druck ergibt. Dies kann die adiabatische Zustandsgleichung der Form (kein Wärmetransport innerhalb des Fluidums)

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (6.12)$$

sein, wobei  $\rho_0$  und  $p_0$  Referenzdichte und -druck bezeichnen. Daraus leiten wir die sogenannte polytropen Euler-Gleichungen her:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0 \quad \text{und} \quad \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{F} + \frac{dp}{d\rho} \vec{\nabla} \rho = 0 \quad (6.13)$$

Inkompressibles ideales Fluidum: Inkompressible Flüssigkeit sind gekennzeichnet durch volumenhaltende Strömungen (dies ist im Prinzip auch für kompressible Flüssigkeiten möglich). Es gilt dabei  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . Damit folgt:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{und} \quad \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p \quad (6.14)$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir, dass die Dichte  $\rho$  entlang der Trajektorie eines Masse-Elementes konstant bleibt. Dies gilt zum Beispiel auch für horizontale Winde in der Atmosphäre, bei der die Dichte nur von der Höhe abhängt. Inkompressible Flüssigkeiten hingegen haben überall eine konstante Dichte. Für diesen Fall gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (6.15)$$

### 6.3 Reale Fluida und Navier-Stokes-Gleichungen

Bei einem Fluidum können wir beobachten, wie eine Strömungsschicht eine benachbarte Schicht mit sich ziehen kann. Dies geschieht aufgrund von Reibung, die wir bei der Beschreibung realer Fluida nicht vernachlässigen dürfen. Diese innere Reibung des Fluidums wird *Viskosität* genannt. Dies führt zum Beispiel zur Situation, die in Abb.6.1 gezeigt wird. Eine viskose Flüssigkeit erhält ein lineares Geschwindigkeitsprofil zwischen zwei sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegenden Wänden (Haftung an den Wänden).

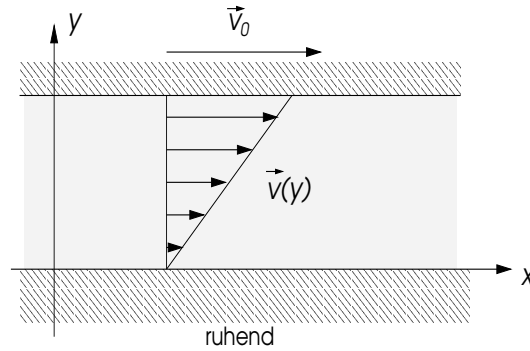


Abb.6.1.

Falls das Fluidum überall konstante Geschwindigkeit hat, erwarten wir keinen Effekt der inneren Reibung. Innere Reibung hängt also mit der räumlichen Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes zusammen. Wir führen dafür den Reibungsspannungstensor ein, der also nicht von der Geschwindigkeit, sondern von den Gradienten der Geschwindigkeit abhängt:

$$R_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (6.16)$$

Analog zur Volumenänderung  $\epsilon_{kk}$  können wir hier die Spur von  $R_{ij}$  betrachten:

$$R_{kk} = (2\eta + 3\eta') \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -3\zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -3\tilde{p} \quad (6.17)$$

was einem Reibungsdruck proportional zur Dilatationsgeschwindigkeit entspricht. Wenn diese vernachlässigbar ist, d.h.  $\zeta = 0$  oder  $R_{kk} = 0$ , dann gilt die sogenannte *Stokes'sche Beziehung* zwischen  $\eta$  und  $\eta'$ :

$$\eta' = -\frac{2}{3}\eta \quad (6.18)$$

Daher können wir für den Spannungstensor eines Fluidums nun schreiben:

$$\sigma_{ij} = (\zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - p) \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \quad (6.19)$$

Die innere Reibung wird daher durch die beiden Parameter  $\zeta$  (Volumenviskosität) und  $\eta$  (dynamische Viskosität) bestimmt. Diese Parameter hängen meist nur schwach von der Dichte ab, aber sind material- und temperaturabhängig.

---

**Viskosität:**

| Fluidum (Temperatur °C)                                    | Dichte (g cm <sup>-3</sup> ) | Viskosität $\eta$ (10 <sup>-3</sup> g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ) |
|--|------------------------------|--|
| Wasser (20)  | 1                            | 10.1   |
| Wasser (50)  | 1                            | 5.5  |
| Glycerin C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O <sub>3</sub> (20) | 1.26                         | 14700  |
| Normalglas (600)   | 2.6                          | 10 <sup>14</sup>   |
| Normalglas (1400)  | 2.6                          | 10 <sup>5</sup>  |
| Luft (0)   | 0.0013                       | 0.172  |
| Sauerstoff (0)   | 0.0014                       | 0.192  |

Die Einheit der dynamischen Viskosität  $\eta$  ist g cm<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup> und wird auch "Poise" genannt nach J.L.M. Poiseuille (1799-1869):

$$1 \text{ Poise} = 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (6.20)$$

Die dynamische Viskosität von Gasen hängt nur schwach von der Dichte ab (Maxwell) und ändert sich gemäss kinetischer Gastheorie mit

$$\eta(T, p) \approx \eta(T) \propto \sqrt{T} \propto \text{mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle} \quad (6.21)$$

wobei  $T$  in der Kelvin-Skala gemessen wird. Die Viskosität nimmt also mit steigender Temperatur zu. Im Gegensatz dazu sehen wir aus der obigen Liste, dass für Flüssigkeiten und Gläser die umgekehrte Tendenz vorherrscht. Flüssigkeiten haben eine sehr viel grössere Viskosität, die mit steigender Temperatur stark abnimmt:

$$\eta(T, p) \approx \eta_{\infty} \exp\left(\frac{E_A + pV'}{k_B T}\right) \quad (6.22)$$

wobei  $E_A$  eine Aktivierungsenergie (Energiebarriere) und  $V'$  ein effektives Volumen bezeichnen, beide Grössen pro Molekül gegeben. Das Fliessen wird durch thermische Aktivierung erleichtert.

---

Wir können nun die Form für den Spannungstensor  $\sigma$  in (6.9) einsetzen und erhalten die Feldgleichung für die Hydrodynamik reale Fluida

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (6.23)$$

Diese lassen sich auf kompressible Fluida anwenden, wenn wir zusätzlich die Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  einführen. Diese Gleichungen sind als nicht-lineares partielles Differenzialgleichungssystem (Navier-Stokes-Gleichungen) für  $\vec{v}$ ,  $\rho$  und  $p$  im allgemeinen sehr schwierig zu lösen.

Eine Vereinfachung ergibt sich für inkompressible Fluida ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ):

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (6.24)$$

Aus ihnen folgen die Euler-Gleichungen idealer Fluida durch Nullsetzen der Viskosität. Wir werden im Folgenden nur inkompressible reale Flüssigkeit betrachten.

# Kapitel 7

## Eigenschaften idealer Fluida

Das Thema dieses Kapitels sind Fluida ohne innere Reibung, d.h.  $\eta = \zeta = 0$ . Solche Fluida bezeichnen wir als *ideal*. Wir werden später jedoch sehen, dass der Übergang von realen zu idealen Fluida ( $\eta, \zeta \rightarrow 0$ ) keineswegs trivial ist und zu Problemen der Turbulenz führt.

### 7.1 Quellen und Wirbel

Strömungen des idealen Fluidums werden durch das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  beschrieben (Euler-Formulierung). Betrachten wir eine beliebige Fläche  $S$ , dann fließt das Fluid-Volumen

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{f} \quad (7.1)$$

pro Zeiteinheit durch diese Fläche hindurch. Nehmen wir nun eine geschlossene Fläche  $\partial V$ , die das Volumen  $V$  umschließt, dann entspricht das Oberflächenintegral

$$Q_V = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{f} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, dV \quad (7.2)$$

dem Fluid-Volumen, das pro Zeiteinheit aus  $V$  strömt, wobei wir den Satz von Gauss angewendet haben. Das bedeutet, dass in  $V$  eine Quelle (oder Senke) vorhanden ist, wenn  $Q_V > 0$  ( $Q_V < 0$ ). Damit können wir an jedem Punkt in  $V$  eine Quelledichte

$$q_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (7.3)$$

definieren. Wir nennen eine Strömung mit  $q_v = 0$  *quellenfrei*.

Wir führen zusätzlich die Grösse *Zirkulation*  $\Gamma$  ein. Dies entspricht einem Integral von  $\vec{v}$  auf einem geschlossenen Pfad  $\partial S$

$$\Gamma = \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{f} \quad (7.4)$$

wobei wir für die zweite Gleichung den Satz von Stokes verwendet haben. Dies bedeutet, dass Zirkulation und Rotation des Geschwindigkeitsfeldes miteinander verknüpft sind. Betrachte das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , das eine starre Rotation um  $\vec{r} = 0$  mit dem Rotationsvektor  $\vec{\omega}$  beschreibt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega} \quad (7.5)$$

Die Rotation hat die Winkelgeschwindigkeit  $|\vec{\omega}|$  um die Achse  $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$ .

Wir definieren das Wirbeldichtefeld als

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (7.6)$$

Die lokale Rotationswinkelgeschwindigkeit für jedes Masseelement ist daher lokal  $\vec{\Omega}/2$  um die Achse  $\vec{\Omega}/|\vec{\Omega}|$ . Die Zirkulation für einen geschlossenen Pfad  $\partial S$  entspricht dem Fluss von  $\vec{\Omega}$  durch die eingeschlossene Fläche  $S$ :

$$\Gamma = \int_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{f} . \quad (7.7)$$

Mit Hilfe von  $\vec{\Omega}$  lassen sich die Wirbellinien definieren, deren Tangentialvektor parallel zu  $\vec{\Omega}$  liegt. Mathematisch können wir die Wirbellinie  $(\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)))$  aus der Beziehung

$$\frac{1}{\Omega_x} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega_y} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\Omega_z} \frac{dz}{ds} \quad (7.8)$$

erhalten. Die starre Rotation entspricht einer konstanten Dichte von Wirbellinien parallel zu  $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$ . Ist  $\vec{\Omega} = 0$  überall, so ist das Fluidum *wirbelfrei*.

## 7.2 Wirbelsätze nach Thomson und Helmholtz

Wir diskutieren nun die Zeitevolution der Zirkulation entlang einer Kurve  $\partial S_t$ , die mit der Strömung mitgetragen wird. Die zeitliche Ableitung ist

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{\partial S_t} = \frac{d}{dt} \oint_{\partial S_t} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \oint_{\partial S_0} v_i(\vec{r}(\vec{a}, t), t) \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k \quad (7.9)$$

wobei  $\partial S_0$  die geschlossene Kurve zur Zeit  $t = 0$  sei. Es gilt in der Lagrange Formulierung, die wir hier zu Hilfe nehmen:  $\vec{r}(\vec{a}, 0) = \vec{a}$ .

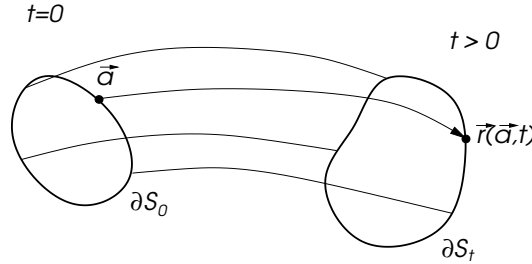


Abb. 7.1

Wir können nun folgende Umformung durchführen:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\partial S_t} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S_0} \frac{Dv_i}{Dt} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k + \underbrace{\oint_{\partial S_0} v_i(\vec{r}, t) \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_k \partial t} da_k}_{\oint_{\partial S_0} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_k} \vec{v}^2 da_k = 0} = \oint_{\partial S_t} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{s} \quad (7.10)$$

Aus der Euler'sche Gleichung finden wir, dass  $D\vec{v}/Dt$  ein Gradient ist, denn in der Regel ist  $\vec{F}$  der Gradient eines Potentials und

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} P \quad \text{mit} \quad P(\rho) = \begin{cases} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho'} \frac{dp}{d\rho'} d\rho' & \text{kompressible Fluidum} \\ \frac{p}{\rho} & \text{inkompressible Fluidum} \end{cases} \quad (7.11)$$

Natürlich verschwindet das Integral eines Gradienten auf jedem geschlossenen Pfad. Daraus ergibt sich *Thomsons Wirbelsatz*:

Falls  $D\vec{v}/Dt$  ein Gradient ist, dann folgt für die Zirkulation

$$\Gamma(\partial S_t) = \oint_{\partial S_t} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \text{konst.} \quad (7.12)$$

für jede von der Strömung transportiert geschlossene Kurve  $\partial S_t$ . Wenn die Strömung zum Zeitpunkt  $t = 0$  wirbelfrei ist (überall  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ), dann ist sie zu jedem anderen Zeitpunkt auch wirbelfrei.

Dieses Resultat bedeutet, dass in einem idealen Fluidum nie spontan Wirbel erzeugt werden können. Wirbel können im Prinzip in Paaren von Wirbel und Anti-Wirbel (Wirbel mit umgekehrter Zirkulation) entstehen, so dass die gesamte Zirkulation unverändert bleibt. Solche Prozesse sind jedoch in dieser Beschreibung nicht eingeschlossen, da dabei Viskosität eine Rolle spielt.

Wir gehen nun davon aus, dass  $D\vec{v}/Dt$  ein Gradient ist. Eine Konsequenz davon ist der *Wirbelsatz von Helmholtz*. Eine transportierte Wirbellinie, die zur Zeit  $t = 0$  durch  $\vec{a}$  geht, geht zur Zeit  $t$  durch  $\vec{r}(\vec{a}, t)$ . Ein Volumenelement, das auf einer Wirbellinie liegt, bleibt für alle Zeiten auf der Wirbellinie, d.h. die Wirbellinie bewegt sich mit dem Fluidum mit.<sup>1</sup>

Weiter gilt, dass die Zirkulation  $\Gamma$  um eine transportierte Wirbelröhre (ein Bündel von Wirbellinien) einen festen und für die Wirbelröhre charakteristischen Wert unabhängig von der Form der umschließenden Kurve  $\partial S_t$  hat. Damit haben Wirbelröhren im Fluidum weder einen Anfang noch ein Ende. Entweder enden sie an einer Oberfläche oder sind geschlossen. Beachte, dass diese Eigenschaften sehr ähnlich zu denen der Versetzungen sind, wobei der Burgers-Vektor konzeptionell der Zirkulation entspricht.

### 7.3 Wirbeldynamik

Die Dynamik von Wirbeln ist ein komplexes und sehr interessantes Gebiet der Hydrodynamik. Wir können hier nur einige einfache Konsequenzen des Helmholtz'schen Theorems betrachten. In inkompressiblen idealen Fluida reicht das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  zur vollständigen Beschreibung aus. Die Dichte  $\rho$  bleibt konstant, so dass wir durch folgende Umformungen den Druck aus der Euler-Gleichung (6.11) eliminieren können. Es gilt die allgemeine Beziehung:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 \quad (7.17)$$

Damit schreiben wir (6.11) als

---

<sup>1</sup>Der Beweis dieses Satzes muss zeigen, dass eine Wirbellinie, die bei  $t = 0$  tangential zu  $\vec{\Omega}$  steht, unter Mitführung mit der Strömung immer noch tangential ist. Die Linie sei bei  $t = 0$  gegeben durch  $\vec{s}$ . Die Strömung wird beschrieben durch  $\vec{r}(\vec{a}, t)$ , so dass  $\vec{r}(\vec{s}, 0) = \vec{s}$  ist. Die Tangentialabbildung für Vektoren nahe bei  $\vec{s}$  ist gegeben durch

$$\vec{s} + \delta \vec{a} \rightarrow \vec{r}(\vec{s}, t) + \hat{T} \delta \vec{a} \quad \text{mit} \quad T_{ij} = \left. \frac{\partial r_i(\vec{a}, t)}{\partial a_j} \right|_{\vec{a}=\vec{s}} \quad (7.13)$$

Wir definieren mit den beiden Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  eine sehr kleine Fläche um  $\vec{s}$ , so dass

$$\Gamma(t=0) = \vec{\Omega}(\vec{s}, 0) \cdot (\varepsilon \vec{e}_1 \times \varepsilon \vec{e}_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (7.14)$$

die Zirkulation der Wirbellinie ist für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Zum Zeitpunkt  $t$  gilt analog:

$$\Gamma(t) = \vec{\Omega}(\vec{r}(\vec{s}, t), t) \cdot (\varepsilon \hat{T} \vec{e}_1 \times \varepsilon \hat{T} \vec{e}_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (7.15)$$

Nach dem Thompson'schen Satz bleibt die Zirkulation erhalten:  $\Gamma(t) = \Gamma(0)$ . Wenn wir nun  $\vec{e}_1 \parallel \vec{\Omega}(\vec{s}, 0)$  annehmen, dann folgt  $\Gamma(t) = 0$  für beliebige Vektoren  $\vec{e}_2$  und folglich:

$$\vec{\Omega}(\vec{r}(\vec{s}, t), t) \cdot (\hat{T} \vec{\Omega}(\vec{s}, 0) \times \vec{e}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}(\vec{r}(\vec{s}, t), t) \parallel \hat{T} \vec{\Omega}(\vec{s}, 0). \quad (7.16)$$

Damit bleibt  $\vec{s} \rightarrow \vec{r}(\vec{s}, t)$  die Wirbellinie (tangential zu  $\vec{\Omega}(\vec{r}, t)$ , d.h. die Wirbellinie wird von der Strömung einfach mitgeschleppt.



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = - \vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \vec{\nabla} U \quad (7.18)$$

wobei  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  und die Volumenkraft kann durch ein Potential dargestellt werden,  $\vec{F} = - \vec{\nabla} U$ . Wir können nun die Rotation ( $\vec{\nabla} \times$ ) auf diese Gleichung anwenden, so dass die rechte Seite verschwindet und erhalten

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \quad (7.19)$$

Nun verwenden wir weiter

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \underbrace{\vec{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}_{=0} - \underbrace{\vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega})}_{=0} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (7.20)$$

und erhalten

$$\frac{D \vec{\Omega}}{Dt} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (7.21)$$

Sehen wir uns einen Wirbel an, dessen Wirbellinie entlang der  $z$ -Achse liegt. Dann finden wir für  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ .

$$\frac{D \Omega}{Dt} = \Omega \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (7.22)$$

Falls das Fluidum gestreckt (gestaucht) wird, vergrößert (verkleinert) sich die Wirbeldichte. Beachte, dass natürlich bei einer uniformen Strömung ( $v_z = \text{konst.}$ ) die Wirbeldichte unverändert bleibt.

### 7.3.1 Lineare Wirbelfäden

Betrachten wir Strömungen, die sich nur in einer Ebene ( $x$ - $y$ -Ebene) bewegen, d.h.  $v_z = 0$  und es gibt keine  $z$ -Abhängigkeiten (effektiv zweidimensionales Problem). Unter diesen Umständen gilt  $D \vec{\Omega} / Dt = 0$ . Wir betrachten zunächst einen einzelnen "Wirbelfaden", der durch folgendes Geschwindigkeitsfeld definiert ist:

$$\vec{v} = \frac{1}{2\pi r^2} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (7.23)$$

wobei  $\vec{r} = (x, y, 0)$  und  $r = |\vec{r}|$ . Dies entspricht einem unendlich dünnen, geraden Wirbelfaden entlang der  $z$ -Achse. Die Zirkulation auf einem kreisförmigen Pfad um den Wirbelfaden ist

$$\Gamma = \oint d\vec{s} \cdot \vec{v} = \int r d\phi \frac{\Omega}{2\pi r} = \Omega \quad (7.24)$$

also unabhängig vom Radius, so dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\Omega} \delta^{(2)}(\vec{r}). \quad (7.25)$$

Die Strömung auf dem Wirbelfaden verschwindet, so dass sich der Wirbel nach Helmholtz nicht bewegt.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Der einzelne Wirbelfaden stellt nach obiger Definition ein singuläres Gebilde dar. In Realität hat ein Wirbelfaden eine gewisse Ausdehnung  $a$  innerhalb derer die Rotation des Fluidums als starr betrachtet werden kann. Das Geschwindigkeitsfeld weicht für Abstände kleiner als  $a$  vom Zentrum von (7.23) ab und kann durch

$$\vec{v} = \frac{1}{2\pi a^2} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (7.26)$$

beschrieben werden. Dies entspricht dem *Kern* des Wirbels.

Wirbelpaare: Wirbel beeinflussen sich gegenseitig durch die Geschwindigkeitsfelder, die von ihnen erzeugt werden. Betrachten wir den Fall zweier paralleler Wirbelfäden gleicher Stärke. Das entsprechende Geschwindigkeitsfeld ergibt sich aus der Überlagerung der beiden Zirkulärströmungen:

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Omega}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} + \frac{\vec{\Omega}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}_2)}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \quad (7.27)$$

mit  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 2\vec{d}$  ( $d_z = 0$ ). Die Bewegung der Wirbelfäden wird durch das Geschwindigkeitsfeld des jeweils anderen Wirbels an der Wirbelfadenposition bestimmt. Für Wirbel 1 bzw. 2 finden wir die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\Omega}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\Omega}_2 \times \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{2\pi} \frac{\vec{\Omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\Omega}_1 \times \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \quad (7.28)$$

Entgegengesetzt orientiertes Wirbelpaar:  $\vec{\Omega}_1 = -\vec{\Omega}_2$ . Damit sind die beiden Geschwindigkeiten gleichgerichtet

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} \perp \vec{d} \quad \text{mit} \quad |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \propto \frac{|\vec{\Omega}|}{d} \quad (7.29)$$

so dass sich die beiden Wirbel mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in die gleiche Richtung bewegen (Abb. 7.2).

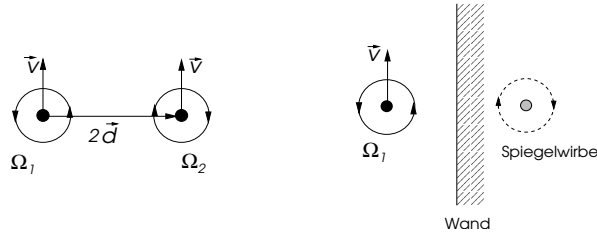


Abb.7.2

Interessant ist hier die Tatsache, dass auf der Spiegelebene zwischen den beiden Wirbelfäden das Geschwindigkeitsfeld senkrecht auf  $\vec{d}$  steht. Damit können wir auch das Verhalten eines Wirbelfadens in der Nähe einer planaren Wand die parallel zu  $\vec{\Omega}$  liegt, beschreiben. Die Randbedingung lautet:  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  mit dem Normalvektor  $\vec{n}$  der Wand. Die Randbedingung ist automatisch erfüllt, wenn wir einen Spiegelwirbel entgegengesetzter Orientierung einführen (Abb.7.2). Daraus folgt analog, dass sich der Wirbel mit konstantem Abstand parallel zur Wand bewegt. Seine Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional zum Abstand zur Wand.

Gleichorientiertes Wirbelpaar:  $\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}_2$ . Die Geschwindigkeiten auf den beiden Wirbelfäden sind umgekehrt:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{v} \quad (7.30)$$

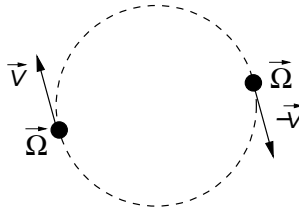


Abb.7.3

Hier bewegen sich die Wirbel auf einer Kreisband mit konstantem Radius.

Im zweiten Beispiel sehen wir, dass die Wirbel sich um ein Zentrum herum bewegen, das sich wie ein ruhender Schwerpunkt verhält. Wir können einen allgemeinen ruhenden Schwerpunkt für beliebig viele Wirbellinien senkrecht zur  $x$ - $y$ -Ebene definieren. Die Position des Schwerpunktes in der  $x$ - $y$ -Ebene ist definiert durch

$$\vec{r}_M = \frac{\sum_j \Omega_j \vec{r}_j}{\sum_j \Omega_j} \quad (7.31)$$

wobei  $\vec{\Omega}_j = \Omega_j \hat{z}$ . Die zeitliche Ableitung ergibt:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{1}{\sum_j \Omega_j} \sum_j \Omega_j \vec{v}_j = \frac{1}{\sum_j \Omega_j} \sum_{k \neq j} \Omega_j \Omega_k \frac{\hat{z} \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{2\pi |\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} = 0. \quad (7.32)$$

Dies bedeutet, dass der Schwerpunkt, den wir so definiert haben, sich nicht bewegt. Beachte, dass für den Fall der beiden Wirbelfäden mit exakt entgegengesetzter Zirkulation der Schwerpunkt im Unendlichen liegt. Analog kann man zeigen, dass das "Trägheitsmoment"

$$I = \sum_j \Omega_j \vec{r}_j^2 \quad (7.33)$$

in der Zeit unveränderlich ist.

### 7.3.2 Axialsymmetrische Strömung - Wirbelringe

Wir nennen eine Strömung axialsymmetrisch, wenn in Zylinderkoordinaten

$$\vec{v} = v_r(r, z, t) \vec{e}_r + v_z(r, z, t) \vec{e}_z, \quad (7.34)$$

d.h.: die Komponente  $v_\phi \vec{e}_\phi$  fehlt, und zudem gibt es keine  $\phi$ -Abhängigkeit. Daraus folgt, dass

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\phi = \Omega \vec{e}_\phi \quad (7.35)$$

Die Wirbellinien haben in diesem Fall Ringform und sind geschlossen. Die Zirkulation  $\Omega$  ist proportional zum Radius des Wirbelringes, denn es gilt

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\Omega}{r} \right) = 0 \quad (7.36)$$

Dies folgt aus folgender Beziehung

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \Omega \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \{v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z\} = \frac{\Omega v_r}{r} \vec{e}_\phi \quad (7.37)$$

wobei wir verwendet haben, dass  $\partial \vec{e}_r / \partial \phi = \vec{e}_\phi$ . Dann gilt nämlich mit (7.21)

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\Omega}{r} \right) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_\phi}{r} \right) = \frac{\vec{e}_\phi}{r} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\Omega} \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{e}_\phi}{r} \right) = \frac{\Omega v_r}{r^2} + \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_\phi (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = 0 \quad (7.38)$$

Die Bewegung des Wirbelrings lässt sich analog zu den Paaren von Wirbelfäden verstehen. Da die Zirkulärströme sich auf den jeweils gegenüberliegenden Wirbel ausdehnen, befinden sich die Wirbellinien in einem vorwärtsgerichteten Geschwindigkeitsfeld und bewegen sich folglich mit dieser Strömung vorwärts (Abb.7.4). Damit sind die Zirkulärströme für die Gesamtbewegung des Wirbels verantwortlich.

Rauchringe sind ein typisches Beispiel. Der Rauchring ist eine geschlossene Wirbelröhre, ein torusförmiges Bündel von Wirbellinien. Ein Querschnitt durch den Wirbelring zeigt die Strömung  $\vec{v}$ .

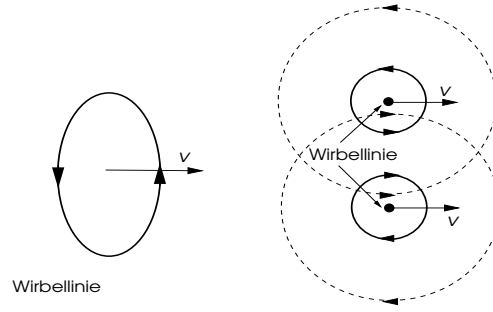


Abb. 7.4

Interessant ist auch die Situation, wenn sich ein Wirbelring (Rauchring) einer Wand nähert. Wir nehmen an, dass die Bewegungsrichtung des Rings parallel zur Wandnormalen liege. Ein Blick auf die Orientierung der Zirkulärströme zeigt, dass der Wirbel sich ausdehnt, d.h. sein Radius wächst (Abb.7.5). Dabei muss sich seine Zirkulation  $\Omega$  gemäss (7.36) vergrössern.

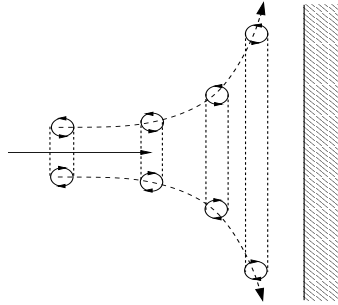


Abb.7.5

## 7.4 Bernoulli-Gleichung

Wir kehren nun zur Euler'schen Gleichung zurück,

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p \quad (7.39)$$

und suchen eine spezielle Form von Lösungen, bei denen wir folgende Voraussetzungen machen. Die Strömung ist wirbelfrei,  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ , und die Volumekraft lässt sich durch ein Potential ausdrücken,  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ . Dann ist es nämlich möglich, das Geschwindigkeitsfeld durch ein entsprechendes Geschwindigkeitspotential zu beschreiben:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (7.40)$$

Unter Verwendung von (7.17) können wir die Euler'sche Gleichung umschreiben, als

$$\rho \frac{D \vec{v}}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} v^2 = -\rho \vec{\nabla} U - \vec{\nabla} p. \quad (7.41)$$

Da alle Terme Gradienten sind, fassen wir sie zusammen und dividieren durch  $\rho$

$$\vec{\nabla} \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + P + U \right\} = 0, \quad (7.42)$$

wobei wir  $P$  wie in (7.11) definieren. Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + P + U = c(t) \quad (7.43)$$

mit der zeitabhängigen Integrationskonstante (unabhängig natürlich von der Position).  $c(t)$  lässt sich aus den Rand- und Anfangsbedingungen bestimmen. Das Potential  $\Phi$  kommt nur in der zeitlichen Ableitung vor. Damit wird ein "Umeichen" möglich, wodurch die Integrationskonstante im Potential absorbiert werden kann:

$$\Phi(\vec{r}, t) \rightarrow \Phi(\vec{r}, t) - \int_0^t c(t') dt' \quad (7.44)$$

Wir können damit nun die Kontinuitätsgleichung und Euler'sche Gleichung neu durch das Potential ausdrücken und erhalten die sogenannten Euler-Bernoulli-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \Phi) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + P + U \end{aligned} \quad (7.45)$$

Zusätzlich muss noch die Randbedingung definiert werden. Diese folgt aus dem Strom, der durch die Oberfläche des untersuchten Gebietes fließt:

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}|_{\partial V} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\partial V} \quad (7.46)$$

Zusammen mit den beiden obigen Gleichungen stellt dies das System von Gleichungen dar, die das Fluidum komplett beschreiben.

#### 7.4.1 Stationäre Situation

Im stationären Fall entfällt die Zeitabhängigkeit. Alle Größen hängen nur vom Ort ab. Wir können nun die Euler'sche Gleichung auch für Strömung mit Wirbeln lösen, indem wir die Integration von (7.42) entlang von Strömungslinien durchführen

$$\int \left[ \vec{\nabla} \left\{ \frac{1}{2} \vec{v}^2 + P + U \right\} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right] \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.47)$$

wobei wir den letzten Term aus (7.17), der in einem Fluidum mit Wirbeln nicht verschwindet, noch hinzugenommen haben. Sein Beitrag fällt jedoch wieder heraus, denn  $d\vec{s} \parallel \vec{v}$  (Integration entlang der Strömungslinie) bedeutet, dass

$$(\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.48)$$

an jedem Punkt. Damit folgt, dass für jede Strömungslinie  $\gamma$  die Beziehung gilt

$$\frac{1}{2} \vec{v}^2 + P + U = C_\gamma \quad (7.49)$$

wobei  $C_\gamma$  ein Parameter ist, der von der Strömungslinie abhängt.

Wenn die stationäre Strömung keine Wirbel besitzt, dann ist der Parameter  $C_\gamma$  überall im Fluidum konstant. Falls zusätzlich das Fluidum inkompressibel ist, d.h.  $\rho = \rho_0$  ist ortsunabhängig, dann können wir wegen (7.11) schreiben,

$$\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}^2 + p + \rho_0 U = C \quad (7.50)$$

welches die berühmte Bernoulli-Gleichung ergibt. Diese ist äquivalent zur Energiebilanzgleichung, die wir früher im Kapitel 3 angetroffen haben.

### 7.4.2 Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

Strömung aus einem Behälter: Wir betrachten einen mit einer Flüssigkeit gefüllten Behälter, der einen Ausfluss hat. Die Höhendifferenz zwischen Ausfluss und Flüssigkeitsspiegel sei  $h$  (Abb. 7.6). Wir können aus der Bernoulli-Gleichung nun die Ausströmungsgeschwindigkeit berechnen. Im Sinne der Integration (7.47) verfolgt man Strömungslinien der Flüssigkeit. Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{2}\rho_0 \vec{v}^2 - \rho_0 gh + p_0 = C \quad (7.51)$$

Die Integrationskonstante lässt sich leicht am Flüssigkeitsspiegel bestimmen, wo die ersten beiden Terme verschwinden ( $\vec{v} = 0, h = 0$ ), so dass  $C = p_0$ . Damit finden wir sofort

$$v = \sqrt{2gh} \quad (7.52)$$

was das Resultat einer reinen Energiebilanz darstellt.

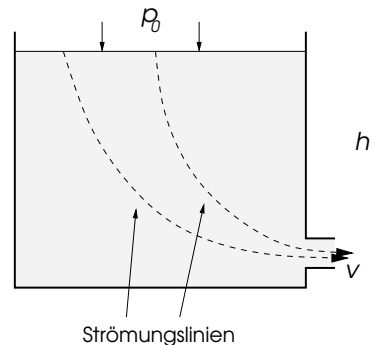


Abb. 7.6

Prandtl'sches Staurohr: Basierend auf der Bernoulli-Gleichung kann man eine Vorrichtung zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten in Fluida bauen: das Prandtl'sche Staurohr (Abb. 7.7). Die Strömung ist wirbelfrei gerichtet wie in der Abbildung eingezeichnet. Beim Staupunkt  $S$  muss die Geschwindigkeit verschwinden, wegen der Randbedingung, dass die Normalkomponente von  $\vec{v}$  Null ist, und es herrscht ein Druck  $p_0$ . Andererseits verlaufen die Stromlinien bei  $R$  tangential und hat den vollen Geschwindigkeitswert  $v$  der Strömung. Hier gibt es einen anderen Druck  $p$ . An beiden Stellen hat es Öffnungen, so dass wir den Druckunterschied messen können. In der abgebildeten Vorrichtung geschieht das mittels Flüssigkeitssäulen in einem U-Rohr.

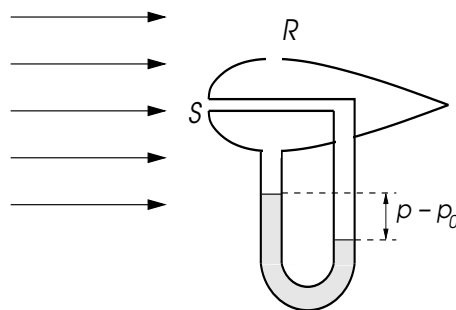


Abb. 7.7

Wir verwenden nun den Druckunterschied, um aus der Bernoulli-Gleichung die Strömungsgeschwindigkeit zu bestimmen. Es gilt nämlich hier,

$$\frac{\rho_0}{2} v_R^2 + p_R = \frac{\rho_0}{2} v_S^2 + p_S \quad \Rightarrow \quad v = v_R = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_0}}, \quad (7.53)$$

wobei  $v_S = 0$ . Neben dem praktischen Nutzen eines solchen Messinstruments, ergibt sich noch ein konzeptionell interessanter Punkt. Aus dieser Beziehung (10.64) sehen wir auch, dass es eine

kritische Geschwindigkeit  $v_c$  gibt, für die der Druck  $p$  verschwindet, so dass  $p < 0$  für  $v > v_c$  folgen würde. Nun wird schon bei etwas kleineren Geschwindigkeiten, der Druck  $p$  soweit absinken, dass der Dampfdruck der Flüssigkeit erreicht wird. Das bedeutet, dass sich Blasen verdampfter Flüssigkeit bilden. Dieses Phänomen nennt man *Kavitation* und ist beobachtbar bei Körpern, die schnell durch eine Flüssigkeit bewegt werden, z.B. bei schnell rotierenden Schiffsschrauben.

### 7.4.3 Hugoniot-Strömungsgleichung

Wir betrachten nun eine stationäre Strömung durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt.

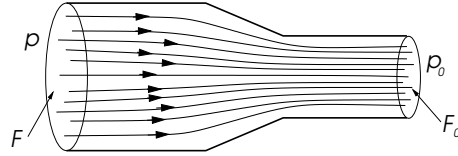


Abb. 7.8

Im stationären Fall lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} = \rho_0 F_0 v_0 - \rho F v, \quad (7.54)$$

d.h.  $\rho F v = konst.$ . In Differentialform können wir dies ausdrücken als,

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dF}{F} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (7.55)$$

Die Bernoulli-Gleichung mit  $U = 0$  erhält nun die Form:

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v dv = - \frac{dp}{\rho} \quad (7.56)$$

Dies führt mit (7.55) auf

$$\frac{dF}{F} = - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{dp}{\rho v^2} \left( 1 - v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) = \frac{dp}{\rho v^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (7.57)$$

wobei  $c^2 = dp/d\rho$  die Schallgeschwindigkeit ist. Damit erhalten wir die Hugoniot-Gleichung:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \quad (7.58)$$

Die Grösse  $v/c$  wird auch Mach'sche Zahl genannt. Für Geschwindigkeiten  $v \ll c$  findet man näherungsweise, dass Querschnittsflächenänderung und Geschwindigkeitsänderung umgekehrt proportional zu einander. Diese inverse Proportionalität gilt exakt für inkompressible Fluida, für die gilt  $\rho = konst.$ :

$$\frac{dF}{F} = \frac{dp}{\rho v^2} = - \frac{dv}{v}. \quad (7.59)$$

Korrekturen zu dieser einfachen Beziehung ergeben sich für kompressible Flüssigkeiten, wenn  $v$  in die Nähe der Schallgeschwindigkeit  $c$  kommt. Solange aber  $v < c$ , gilt, dass die Geschwindigkeit mit abnehmendem Rohrquerschnitt zunimmt. Wenn  $v$  aber  $c$  übersteigt, kehrt sich dies um, und die Geschwindigkeit nimmt mit wachsendem Querschnitt zu. Diese Eigenschaft wird in der *Laval-Düse* verwendet (Abb.7.9).

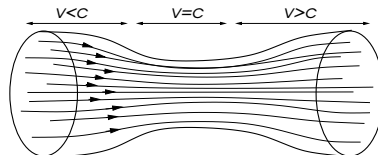


Abb.7.9

In einer solchen Düse erreicht man durch eine Verengung des Rohres die Strömungsschwindigkeit  $v = c$ . In der Erweiterung der Röhre nach der Verengung steigt dann die Geschwindigkeit im Überschallbereich weiter an. Damit ist die Strömung unterkritisch vor der Verengung und überkritisch danach, so dass mit dieser Düse sehr hohe Strömungsgeschwindigkeiten erzeugt werden können.



# Kapitel 8

## Schwingungen und Wellen

Analog zu den elastischen Medien spielen auch in Fluida Schwingungen um das (hydrostatische) Gleichgewicht eine wichtige Rolle. Wir diskutieren in diesem Kapitel einige der bekanntesten Formen der Wellen, die in Fluida vorkommen. Diese sind die Schallwellen und die Schwerewellen. Grundsätzlich gehen wir wieder ähnlich vor wie bei den elastischen Medien. Wir nehmen an, dass die Auslenkung vom das Gleichgewicht klein ist, so dass wir die Bewegungsgleichungen linearisieren dürfen.

### 8.1 Schallwellen

Wir betrachten ein ideales kompressibles Fluidum, auf das keine äussere Kraft wirkt ( $\vec{F} = 0$ ), dessen Dichte in der Ausgangslage konstant ist ( $\rho = \rho_0$ ) und das in Ruhe ist ( $\vec{v} = 0$ ). Die Euler'schen Gleichungen haben die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}), \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} p(\rho) \quad (8.1)$$

Für kleine Störungen um das Gleichgewicht setzen wir an

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \vec{v} \quad (8.2)$$

und behalten in den Euler'schen Gleichungen nur Terme erster Ordnung in  $\vec{v}$  und  $\tilde{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= -\rho_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -p'(\rho_0) \vec{\nabla} \tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

wobei  $p' = dp/d\rho$ . Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = p'(\rho_0) \vec{\nabla}^2 \tilde{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \tilde{\rho} = 0, \quad (8.4)$$

die Wellengleichung für die Dichteschwankungen, wobei  $c^2 = p'(\rho_0)$ . Analog gilt für  $\vec{v}$ :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -c^2 \vec{\nabla} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = c^2 \rho_0 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (8.5)$$

Wir verwenden nun, dass  $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$  und erhalten für eine wirbelfreie Situation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{v} = 0 \quad (8.6)$$

Damit besitzen wir zwei unabhängige Gleichungen für  $\tilde{\rho}$  und  $\vec{v}$ . Dies bedeutet jedoch nicht, dass die beiden Grössen unabhängig sind. Vielmehr müssen auch die ursprünglichen Gleichungen (8.3) erfüllt sein.

Die beiden Wellengleichungen können durch ebene Wellenansätze gelöst werden:

$$\tilde{\rho} = a\rho_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \vec{b} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}, \quad (8.7)$$

mit  $\omega = c|\vec{k}|$ . Diese Lösungen in (8.3) eingesetzt führen auf:

$$-i\omega\rho_0 a = i\rho_0(\vec{k}\cdot\vec{b}) \quad \text{und} \quad -i\omega\rho_0 \vec{b} = -ic^2 \vec{k} a\rho_0 \quad (8.8)$$

Es zeigt sich, dass  $\vec{b} \parallel \vec{k}$  also longitudinal ist ( $\vec{k} = k\vec{n}$  und  $\vec{b} = b\vec{n}$  mit  $|\vec{n}| = 1$ ). Es gibt keine transvers polarisierte Wellen. Dann müssen  $a$  und  $b$  die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\omega a - kb = 0 \quad \text{und} \quad c^2 ka - \omega b = 0 \quad (8.9)$$

so dass mit  $\omega = ck$  folgt:  $b = ca$ . Die Linearisierung, die wir oben verwendet haben, ist gerechtfertigt, wenn

$$\tilde{\rho} \ll \rho_0 \quad \Rightarrow \quad a \ll 1, b \ll c \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| \ll c \quad (8.10)$$

Die Schallgeschwindigkeit  $c$  hängt mit der Druck-Dichte-Beziehung zusammen. Die Zustandsgleichung kann geschrieben werden als,

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \quad \Rightarrow \quad c^2 = p'(\rho_0) = n \frac{p_0}{\rho_0} \quad (8.11)$$

Für Luft gilt:

$$\begin{aligned} \text{isotherm} \quad n = 1 \quad c &\approx 280 \text{ms}^{-1} \\ \text{adiabatisch} \quad n = 1.4 \quad c &\approx 333 \text{ms}^{-1} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Aus dem Experiment wissen wir, dass die adiabatische Beziehung anwendbar ist. Das heisst in der Zeitskala der Schallschwingungen  $\omega^{-1}$  ist kein merklicher Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Volumenelementen des Fluidums möglich.

## 8.2 Jeans'sche Instabilität

Wir untersuchen ein kompressibles ideales Gas unter Berücksichtigung der eigenen Gravitationskräfte. Daher führen wir die Volumenkraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \phi(\vec{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (8.13)$$

ein (beachte:  $\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G\rho$ ;  $G$  ist die Gravitationskonstante). Wir gehen nun von einer uniformen Situation mit  $\rho_0 = \text{konst.}$  aus und betrachten die Auswirkung einer schwachen räumlichen Modulation. Die linearisierte Gleichung (8.3) muss nun erweitert werden:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho_0 \vec{\nabla} \tilde{\phi} - p'(\rho_0) \vec{\nabla} \tilde{\rho} \quad (8.14)$$

wobei  $\vec{\nabla}^2 \tilde{\phi} = 4\pi G\tilde{\rho}$ . Damit erhalten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \cdot \left( \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \rho_0 \vec{\nabla}^2 \tilde{\phi} + p'(\rho_0) \vec{\nabla}^2 \tilde{\rho}, \quad (8.15)$$

und weiter durch Einsetzen des Wellenansatzes  $\tilde{\rho} = u e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - i \omega t}$  finden wir die Beziehung

$$\omega^2 = p'(\rho_0) \vec{k}^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (8.16)$$

Für

$$\vec{k}^2 < \frac{4\pi G \rho_0}{p(\rho_0)'} \quad (8.17)$$

findet man  $\omega^2 < 0$ , so dass die Dichtemodulation zeitlich exponentiell wächst. Dies bedeutet, dass für Modulationen genügend grosser Wellenlänge eine Instabilität auftritt. Die Modulation schliesst nämlich genügend Masse ein, um durch die Gravitationkraft kollabieren zu können (Astrophysik: Galaxienbildung, ...).<sup>1</sup>

### 8.3 Schwerewellen in Flüssigkeiten

Wir betrachten nun eine ideale inkompressible Flüssigkeit im Schwerfeld. Die Dichte  $\rho$  ist konstant und es wirkt die Volumenkraft  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$  mit  $U = gz$ . Die Strömungen werden als wirbelfrei vorausgesetzt.

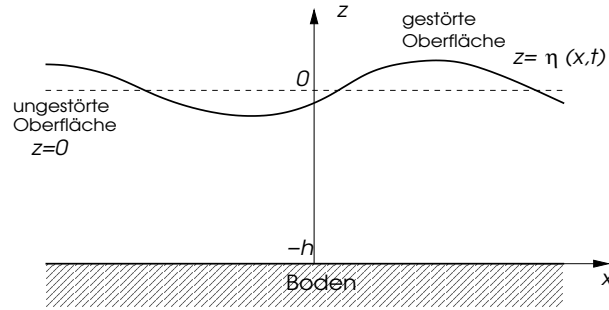


Abb. 8.1

Die Dynamik wird nun beschrieben durch die linearisierten Gleichungen von (7.45)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + U \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad (8.21)$$

wobei  $p$  die Druckdifferenz zum Aussendruck  $p_0$  bezeichnet. Die Randbedingungen beziehen sich auf den Boden  $z = -h$

$$v_z = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (8.22)$$

<sup>1</sup>Geht man von einer Gaswolke eines mittleren Radius  $R$  mit einer Temperatur  $T$  und der mittleren Dichte  $\rho$  aus, dann gilt die Bedingung für die Instabilität

$$\frac{\pi}{R^2} < \frac{G \rho_0 m_M}{k_B T} \quad (8.18)$$

wobei wir die Zustandsgleichung des idealen Gases verwendet haben:  $p = (\rho_0/m_M) k_B T$  ( $m_M$ : Molekülmasse des Gases). Die Masse der Wolke ist gegeben durch

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \quad (8.19)$$

und führt auf das Jeans'sche Kriterium für den Gravitationskollaps der Wolke:

$$M > M_J = \rho_0^{-1/2} T^{3/2} \frac{4}{3} \left( \frac{\pi k_B}{G m_M} \right)^{3/2}. \quad (8.20)$$

$M_J$  ist die kleinste Masse, so dass die Wolke unter den gegebenen Bedingungen kollabieren kann. Bei  $T = 20\text{K}$  und  $\rho_0 = 10^{-23} \text{gcm}^{-3}$  ergibt sich  $M_J \approx 250$  Sonnenmassen.

und auf der Oberfläche

$$p|_{z=\eta(x,t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, \eta(x, t), t) = g\eta(x, t) \quad (8.23)$$

Da  $\vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi$ , erhalten wir aus der Randbedingung (8.23) nach der Linearisierung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, 0, t) = g \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = g v_z(x, 0, t) = -g \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x, z, t) \Big|_{z=0} \quad (8.24)$$

Diese homogene Differential-Gleichung lässt sich durch Variablen-Separation lösen. Der einfachste monochromatische Ansatz für die Zeitabhängigkeit ergibt

$$\Phi(x, z, t) = u(x, z) e^{-i\omega t} . \quad (8.25)$$

Dann folgt, dass

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = \vec{\nabla}^2 u = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad \text{und} \quad \omega^2 u(x, 0) = g \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) \Big|_{z=0} \quad (8.26)$$

Durch die Lösung dieses Randwertproblems erhalten wir das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(x, z, t)$ , den Druck  $p(x, z, t)$  und  $\eta(x, z, t)$  aus obigen Gleichungen. Ein nützlicher Ansatz für  $u$  ist

$$u(x, z) = u_+ e^{ikx+kz} + u_- e^{ikx-kz} , \quad (8.27)$$

der die Laplace-Gleichung erfüllt. Es handelt sich also um entlang  $x$  laufende, entlang  $z$  gedämpfte Wellen.

### 8.3.1 Tiefes Wasser

Wenn  $h \rightarrow \infty$ , dann können wir in (8.27) sofort  $u_- = 0$  setzen, da sonst die Randbedingung bei  $-h$  nicht erfüllt werden kann, d.h.  $u \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow -\infty$ . Aus (8.26) erhalten wir durch Einsetzen:

$$\omega^2 = gk \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} & \text{Phasengeschwindigkeit} \\ c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} c_{ph} & \text{Gruppengeschwindigkeit} \end{cases} \quad (8.28)$$

Wir finden nun auch

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= u_+ \cos(kx - \omega t) e^{kz} \\ \eta(x, t) &= u_+ \frac{\omega}{g} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$p(x, z, t) = -\rho g z + u_+ \rho \omega \sin(kx - \omega t) e^{kz}$$

Der Druck nimmt natürlich mit der Tiefe zu. Aber die Wellenbewegung ergibt eine zusätzliche zeitliche Variation.

### 8.3.2 Mässig tiefes und seichtes Wasser

Beide Anteile von  $u$  in (8.27) müssen mitgenommen werden, wenn  $h$  endlich ist. Sonst können die Randbedingungen nicht erfüllt werden. Diese ergeben nun:

$$\begin{aligned} \omega^2(u_+ + u_-) &= gk(u_+ - u_-) \\ k(u_+ e^{-kh} - u_- e^{+kh}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.30)$$

Die Lösung dieses homogenen Gleichungssystems führt auf

$$u_- = u_+ e^{-2kh} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} . \quad (8.31)$$

Falls  $h$  viel grösser als die Wellenlänge ist ( $kh \gg 1$ , dann erhalten wir wieder  $\omega = \sqrt{gk}$ ). Im umgekehrten Grenzfall,  $kh \ll 1$ , gilt  $\omega = k\sqrt{gh}$ , d.h. es gibt keine Dispersion,  $c_{ph} = c_{gr} = \sqrt{gh}$ .

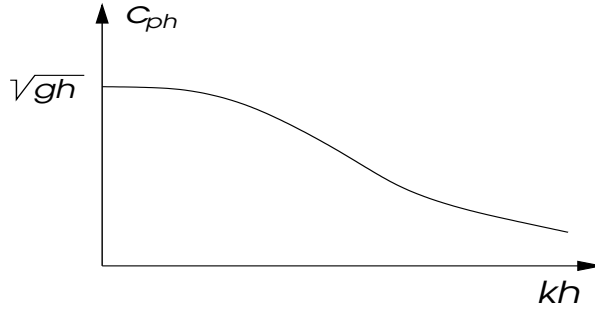


Abb.8.2

Im Zwischenbereich gilt (8.31) mit der Phasengeschwindigkeit

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}} \quad (8.32)$$

Obwohl unsere Lösungen nur für konstantes  $h$  gelten, kann man auch den Fall variierender Tiefe in der Nähe des Ufers qualitativ diskutieren. Die vollständige Lösung ist kompliziert. Sobald  $kh \ll 1$  ist  $c_{ph} \propto \sqrt{h}$ . Damit sind die Phasengeschwindigkeiten von Wellenberg und -tälern,  $c_B$  und  $c_T$ , verschieden:  $c_B/c_T = \sqrt{h_B/h_T} > 1$ . Mit der grösseren Berggeschwindigkeit überschlagen sich die Wellen und wir erhalten das bekannte Verhalten der Brandungswellen.

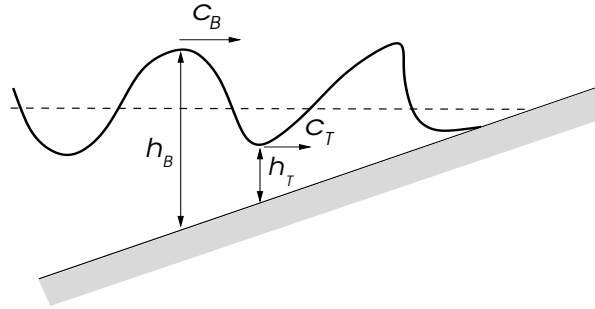


Abb.8.3

### 8.3.3 Stromlinien und Bahnkurven

Die Information über die Bewegung der Flüssigkeitselemente gewinnen wir aus dem Realteil von  $\Phi(x, z, t)$ .

$$\text{Re } \Phi(x, z, t) = u_+ \cos(kx - \omega t) \left\{ e^{kz} + e^{-2kh} e^{-kz} \right\} = 2u_+ e^{-kh} \cos(kx - \omega t) \cosh(kz + kh) \quad (8.33)$$

Wir messen zur Vereinfachung die Längen indem wir den Wellenvektor  $k$  als Einheit nehmen, d.h. die Wellenlänge wird  $\lambda = 2\pi$ .

$$\text{Re } \Phi(x, z, t) = A \cos(x - \omega t) \cosh(z + h)$$

$$v_x(x, z, t) = -\frac{\partial \text{Re } \Phi}{\partial x} = A \sin(x - \omega t) \cosh(z + h) \quad (8.34)$$

$$v_z(x, z, t) = -\frac{\partial \text{Re } \Phi}{\partial z} = -A \cos(x - \omega t) \sinh(z + h)$$

Ferner gilt für die Oberfläche

$$\eta(x, 0, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \text{Re}\Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = A \frac{\omega}{g} \sin(x - \omega t) \cosh h \quad (8.35)$$

Betrachten wir zuerst die Situation zu gegebener Zeit, z.B.  $t=0$ . Dann gilt für die Oberfläche  $\eta(x) \propto \sin x$ . Die Geschwindigkeiten der Volumenelemente an der Oberfläche sind in Abb.8.4 schematisch dargestellt.

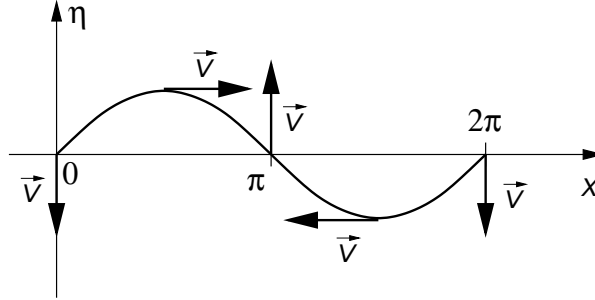


Abb.8.4

Die Stromlinien bei  $t = 0$  erhalten wir durch ein Hilfspotential. Wir definieren  $\vec{v}_\perp = \vec{\nabla} \Psi$ , was wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  möglich ist. Die Stromlinien sind dann die Niveaulinien der Funktion  $\Psi$ .

$$\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -v_z \\ v_x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos x \sinh(z+h) \\ \sin x \cosh(z+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} A \sin x \sinh(z+h) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} \Psi(x, z) \quad (8.36)$$

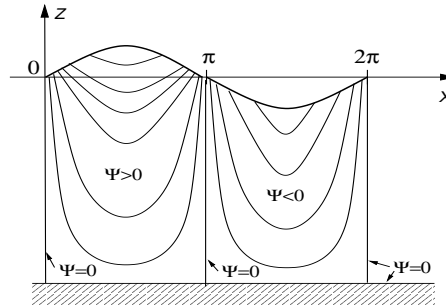


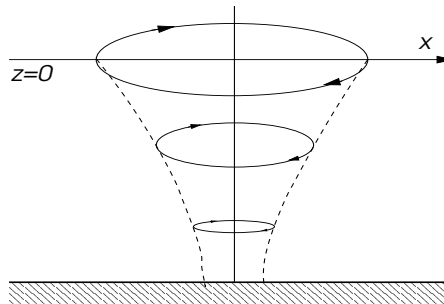
Abb.8.5

Schliesslich betrachten wir die Bewegung eines Flüssigkeitselementes in der unmittelbaren Umgebung von  $(x, z) = (0, -a)$ . Es gelten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = -A \sin(\omega t) \cosh(h-a) \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = -A \cos(\omega t) \sinh(h-a) \quad (8.37)$$

was nach der Integration auf

$$x = \frac{A}{\omega} \cosh(h-a) \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad z = -a - \frac{A}{\omega} \sinh(h-a) \sin(\omega t) \quad (8.38)$$



führt. Im Allgemeinen sind die Bahnkurven ellipsenförmig. Im unendlich tiefen Wasser hingegen ergibt sich ( $\cosh(h - a) \approx \sinh(h - a)$ ), so dass die Bahnkurven Kreise werden. Wir sehen an diesem Beispiel wie die Bahnkurven und die Strömungslinien nicht miteinander übereinstimmen. Der Grund ist natürlich, dass diese Strömung nicht stationär ist, sondern in der Zeit (periodisch) variiert.

## 8.4 Kapillarwellen

Bisher haben wir uns nicht darum gekümmert, dass Fluida eine Oberflächenspannung besitzen. Diese rührt daher, dass die Moleküle in der äussersten Schicht nicht auf allen Seiten Nachbarn haben. Um einen solchen Platz zu erreichen muss ein Molekül eine gewisse Arbeit leisten, was auf einen Kohäsionseffekt führt, d.h. eine zusätzliche intrinsische Spannung an der Oberfläche, die sich deswegen wie eine elastische Haut verhält, die die Oberfläche zu minimieren versucht. Diese Oberflächenspannung wird wichtig, wenn die Oberfläche auf kleineren Längenskalen moduliert wird. Insbesondere ist dies der Fall, wenn Schwerewellen kurze Wellenlänge besitzen. Dann dürfen wir den Effekt der Oberflächenspannung nicht vernachlässigen.

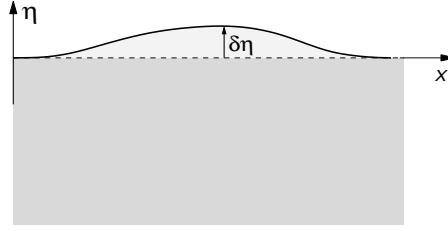


Abb.8.7

Wir führen die Oberflächenspannung durch die Arbeit ein, die umgesetzt wird, wenn die Fläche eines Oberflächenelements um  $\delta F$  variiert wird:

$$\delta w = \sigma \delta F \quad (8.39)$$

wobei  $\sigma$  eine fluidumabhängige Konstante ist. Im Gleichgewicht mit dem Druck des Fluidums gilt für eine Oberfläche zum Vakuum (äusserer Druck  $p = 0$ ):

$$\sigma \delta F - \int p \delta \eta df = 0 \quad (8.40)$$

für das Flächenelement  $df = dx dy$ . Betrachten wir nun, was die Oberflächenänderung für eine gegebene Oberflächenmodulation  $\eta(x, y)$  ist. Die Oberfläche für einen gewissen Bereich des  $x$ - $y$ -Raumes lässt sich berechnen als

$$F = \int dx dy \left\{ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx \int dx dy \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (8.41)$$

unter der Annahme, dass die Modulation schwach ist, i.e.  $|\vec{\nabla} \eta| \ll 1$ . Die Änderung der Oberfläche ergibt sich dann aus  $F \rightarrow F + \delta F$  für  $\eta \rightarrow \eta + \delta \eta$ :

$$\delta F = \int dx dy \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} \right\} = - \int dx dy \vec{\nabla}^2 \eta \delta \eta \quad (8.42)$$

mit Hilfe partieller Integration unter Vernachlässigung der Randterme. Damit lässt sich die Gleichgewichtsbedingung (8.40) umschreiben,

$$p + \sigma \vec{\nabla}^2 \eta = 0 . \quad (8.43)$$

Diese Gleichung lässt sich verallgemeinern auf die Grenzfläche zwischen zwei Fluida, 1 und 2,

$$p_1 + \sigma_1 \vec{\nabla}^2 \eta = p_2 + \sigma_2 \vec{\nabla}^2 \eta . \quad (8.44)$$

Wir können nun die Gleichung (8.23) erweitern zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, z=0, t) &= g\eta(x, t) - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, z=0, t) &= -g \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x, z, t) \Big|_{z=0} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \Phi(x, z, t) \Big|_{z=0} , \end{aligned} \quad (8.45)$$

wobei wir annehmen, dass keine Abhängigkeit von der  $y$ -Koordinate vorhanden ist, d.h. ebene Welle entlang der  $x$ -Richtung. Als einfachsten Fall betrachten wir unendlich tiefes Wasser, für das wir wieder den Ansatz

$$\Phi(x, z, t) = u_+ e^{ikx + kz - i\omega t} \quad (8.46)$$

verwenden. Das resultierende Dispersiongesetz hat nun die Form

$$\omega_k = \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad c_{ph} = \frac{\omega_k}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}} \quad (8.47)$$

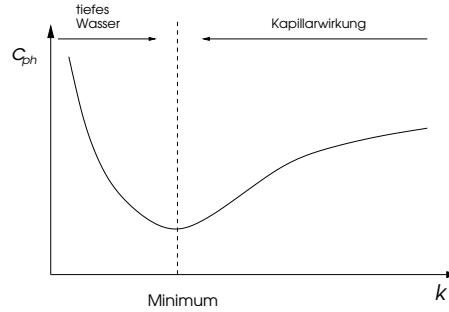


Abb.8.8

Es zeigt sich, dass die Phasengeschwindigkeit  $c_{ph}$  nicht monoton von  $k$  abhängt und bei  $k_{min} = \sqrt{g\rho/\sigma}$  ein Minimum hat. Für Wasser sind die relevanten Grössen

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 7.2 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1} \\ \rho &= 1 \text{ g cm}^{-3} \\ g &= 9.81 \text{ m s}^{-2} \end{aligned} \right\} \rightarrow c_{ph,min} = 23 \text{ cm s}^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda_{min} = \frac{2\pi}{(g\rho/\sigma)^{1/2}} = 1.73 \text{ cm} \quad (8.48)$$

Die Kapillarwellen auf Wasser sind als Wellen sehr kurzer Wellenlänge vor grösseren "normalen" Wellen zu sehen (Kapillarwellen können schneller sein als die normalen Wellen!).

## 8.5 Kreiswellen im tiefen Wasser

Kreisförmig sich ausbreitende Wellen auf Flüssigkeitsoberflächen entstehen zum Beispiel um die Eintrittsstelle eines ins Wasser geworfenen Steins. Hier interessiert uns die Form und das Ausbreitungsverhalten solcher Wellen. Da unsere Beschreibung linear ist, können die kreisförmigen Wellen als Überlagerung von ebenen Wellen beschrieben werden, die durch die Oberflächenauslenkung folgendermassen ausgedrückt werden:



$$\begin{aligned}
\eta(\vec{r}, t) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left\{ \tilde{u}_+(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega_k t} + \tilde{u}_-(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega_k t} \right\} \\
&= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \hat{u}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cos \omega t + \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \dot{\hat{u}}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\sin \omega t}{\omega}
\end{aligned} \tag{8.49}$$

wobei  $\vec{r} = (x, y)$ ,  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ ,  $k = |\vec{k}|$  und  $\omega_k = \sqrt{gk}$  (unendlich tiefes Wasser). Es gelten dann die Anfangsbedingungen, die  $\tilde{u}_\pm(\vec{k})$  festlegen:

$$\hat{u}(\vec{k}) = \int d^2 r \eta(\vec{r}, t=0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{und} \quad \dot{\hat{u}}(\vec{k}) = \int d^2 r \partial_t \eta(\vec{r}, t=0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tag{8.50}$$

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass  $\partial_t \eta(\vec{r}, 0) = 0$ , so dass

$$\eta(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [I(\vec{r}, t) + I(\vec{r}, -t)] \quad \Rightarrow \quad I(\vec{r}, t) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \hat{u}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega_k t} \tag{8.51}$$

Wir betrachten nun die Phase  $\varphi(\vec{k}) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t$ , und nähern das Integral für  $I(\vec{r}, t)$  durch die Methode der stationären Phase an.

**Methode der stationären Phase:** Wir betrachten folgendes Integral für den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$ :

$$f(t) = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x) e^{ith(x)} \tag{8.52}$$

1)  $h'(x) \neq 0$  für  $x_1 \leq x \leq x_2$ : Dann erhalten wir durch partielle Integration

$$f(t) = \frac{1}{it} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{g(x)}{h'(x)} \frac{d}{dx} e^{ith(x)} = \frac{1}{it} \frac{g(x)}{h'(x)} e^{ith(x)} \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{it} \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h'(x)} \right) e^{ith(x)} = \mathcal{O}(t^{-1}). \tag{8.53}$$

2)  $h'(x)$  hat eine einzige Nullstelle im gegebenen Intervall, nämlich bei  $x = x_0$ : Es gelte also

$$h'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad h''(x_0) \neq 0 \tag{8.54}$$

Damit gilt für  $\varepsilon > 0$  aber klein, dass

$$f(t) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx g(x) e^{ith(x)} + \mathcal{O}(t^{-1}). \tag{8.55}$$

In diesem kleinen Integrationsbereich entwickeln wir um  $x_0$ :  $s = x - x_0$  und

$$g(x) \approx g(x_0) + sg'(x_0), \quad h(x) \approx h(x_0) + \frac{s^2}{2} h''(x_0) \tag{8.56}$$

woraus folgt:

$$f(t) = e^{ith(x_0)} g(x_0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} ds e^{it \frac{s^2}{2} h''(x_0)} + e^{ith(x_0)} g'(x_0) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} ds s e^{it \frac{s^2}{2} h''(x_0)}}_{=0} + \mathcal{O}(t^{-1}) \tag{8.57}$$

Wir ersetzen im ersten Term  $\tau = s\sqrt{t|h''(x_0)|}$ . Damit gehen die Integrationsgrenzen im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  auch gegen  $\pm\infty$  und das Integral entpuppt sich als Fresnel-Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{\pm i\tau^2/2} = e^{\pm i\pi/4} \sqrt{2\pi} \tag{8.58}$$

mit  $\pm = \text{sgn}\{h''(x_0)\}$ . Damit finden wir

$$f(t) = \left( \frac{2\pi}{t|h''(x_0)|} \right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}\{h''(x_0)\}} g(x_0) e^{ith(x_0)} + \mathcal{O}(t^{-1}) \quad (8.59)$$

Im mehrdimensionalen Fall mit

$$f(t) = \int d^n x g(\vec{r}) e^{ith(\vec{r})} \quad (8.60)$$

und dem stationären Punkt  $\vec{r}_0$  gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{r}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(\vec{r}) \approx h(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_i s_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h(\vec{r}_0) \quad (8.61)$$

mit  $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$ . Es ist einfach das Integral in derselben Art wie oben auszuführen, wenn wir in die Hauptachsenform der symmetrischen Matrix  $\partial^2 h(\vec{r}_0)/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 h(\vec{r}_0)$  gehen.

$$f(t) = \left( \frac{2\pi}{t} \right)^{n/2} |\det\{\partial^2 h(\vec{r}_0)\}|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}\{\partial^2 h(\vec{r}_0)\}} g(\vec{r}_0) e^{ith(\vec{r}_0)} + \text{Terme höherer Ordnung.} \quad (8.62)$$

Beachte, dass für eine Matrix  $A$  gilt, dass  $\text{sgn}\{A\} = \sum_i \text{sgn}(\lambda_i)$  gleich der Anzahl der positiven minus der Anzahl der negativen Eigenwerte  $\lambda_i$  ist.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} = \vec{r} - \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} t = \vec{r} - \omega'_k \vec{e} t = \vec{r} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \vec{e} t \quad (8.63)$$

mit  $\vec{k} = k \vec{e}$ . Als Funktion von  $\vec{k}$  ist die Phase  $\varphi$  stationär (minimal) für  $\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}$  mit  $\vec{e} \parallel \vec{r}$ :

$$k_0 = \frac{gt^2}{4r^2} \quad \text{mit} \quad \vec{e} = \pm \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{für} \quad \pm t > 0, \quad (8.64)$$

wobei  $r = |\vec{r}|$ . Damit ist

$$\varphi(k_0) = \pm k_0 r - \sqrt{g k_0} t = \pm \frac{gt^2}{4r} - \frac{g|t|}{2r} t = \mp \frac{gt^2}{4r} = \mp \alpha \quad (8.65)$$

Die Jakobi-Matrix von  $\varphi$  ist

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_i \partial k_j} = - \frac{\partial}{\partial k_i} \left( \frac{\omega'_k}{k} k_j \right) t = - \left\{ \left( \frac{\omega'_k}{k} \right)' \frac{k_i k_j}{k} + \frac{\omega'_k}{k} \delta_{ij} \right\} t \quad (8.66)$$

mit

$$\frac{\omega'_k}{k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k^3}} \quad \text{und} \quad k \left( \frac{\omega'_k}{k} \right)' = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{k^3}}. \quad (8.67)$$

Wir wählen nun  $\vec{e}$  entlang der  $x$ -Richtung:  $k_{0x} = \pm k_0$  und  $k_{0y} = 0$ , so dass  $A_{ij}$  diagonal wird

$$A(\vec{k}_0) = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} \sqrt{\frac{g}{k_0^3}} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} \sqrt{\frac{g}{k_0^3}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det A(\vec{k}_0)| = \frac{gt^2}{8k_0^3} = \frac{r^2}{2k_0^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{\alpha} \right)^2 \quad (8.68)$$

mit  $k_0 = \alpha/r$  und  $\text{sgn}(A) = 0$ . Die Methode der stationären Phase liefert nun

$$\eta(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \hat{u}(\vec{k}_0) \frac{1}{|\det A(\vec{k}_0)|^{1/2}} \frac{1}{2} (e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) \approx \frac{\hat{u}(0)}{\sqrt{2\pi} r^2} \alpha \cos \alpha \quad (8.69)$$

wobei die letzte Näherung gilt, wenn  $r \gg l_0$  mit  $l_0$  als die Ausdehnung der Kreiswelle am Anfang. Es gilt nämlich

$$\hat{u}(\vec{k}_0) = \int d^2x \eta(\vec{r}, t=0) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \approx \int d^2x \eta(\vec{r}, t=0) (1 + i\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \dots) \approx \hat{u}(0)(1 + k_0 l_0 + \dots) \quad (8.70)$$

Das erste Integral  $\hat{u}(0)$  entspricht der anfänglichen "Volumen" der Welle (Auslenkung  $\times$  Fläche). Der zweite Term ist

$$k_0 l_0 \sim \alpha \frac{l_0}{r} \ll 1 \quad (8.71)$$

im Bereich von  $\alpha$ , der uns interessiert.

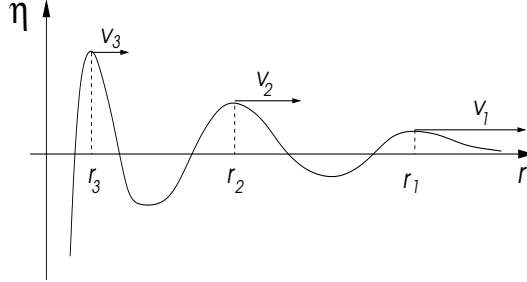


Abb.8.9

Die obige Näherung der stationären Phase gilt für lange Zeiten, für die  $r \ll gt^2/4$  erfüllt ist (wobei  $l_0 \ll r$ ). Dann ist die Kreiswelle beschrieben durch

$$\eta \sim \frac{gt^2}{4r^3} \cos\left(\frac{gt^2}{4r}\right) \quad (8.72)$$

und besitzt Maxima bei  $r = r_n$  für  $n = 1$  als äusserstes Maximum:

$$\frac{gt^2}{4r_n} \approx 2\pi n \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{gt^2}{8\pi n} \quad (8.73)$$

mit der lokalen Geschwindigkeit  $v_n = gt/4\pi n$ . Die Geschwindigkeit nimmt für die äusseren Wellen zu, so dass sich die Kreise immer mehr von einander entfernen. Die Abstände zwischen den Maxima führen auf folgende Beziehung:

$$r_n - r_{n+1} = \frac{gt^2}{8\pi} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{8\pi}{gt^2} r_n r_{n+1} \propto r^2 \quad (8.74)$$

Betrachten wir abschliessend das Beispiel von Wasser für  $t = 10s$ .

| $n$ | $r_n (m)$ | $v_n (ms^{-1})$ |
|-----|-----------|-----------------|
| 1   | 39        | 7.8             |
| 2   | 19.5      | 3.9             |
| 3   | 13        | 2.6             |

Man beachte, dass sich für ansteigende  $n$  Abweichungen aufgrund des Kapillarbeitrages ergeben. Bei kürzeren Wellenlängen darf die Oberflächenspannung nicht vernachlässigt werden.

## 8.6 Schiffswellen

Ein sich bewegendes Objekt auf der Wasseroberfläche ist eine Quelle für Kreiswellen. Die Wellen, die von einem Schiff ausgesandt werden, stellen ein interessantes Beispiel dafür dar. Wir betrachten hier eine Schiff als eine mit konstanter Geschwindigkeit fahrende Punktquelle:  $x(t) = vt$ .

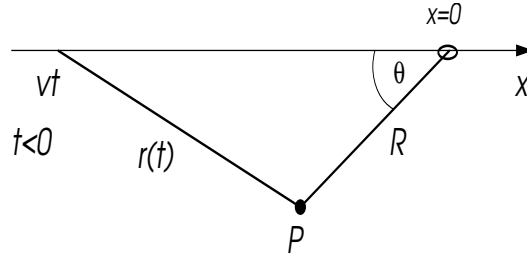


Abb.8.10

Die Oberflächenstörungen  $\eta$  am Punkt  $P$  in Abb.8.10 ergeben sich aus der Überlagerung aus Kreiswellen, die in der Vergangenheit vom Schiff ausgingen. Das bedeutet, dass

$$\eta(P) = \int_{-\infty}^0 dt \eta(r(t), |t|) \quad \text{mit} \quad \eta(r, t) \sim \frac{u}{r^2} e^{iu} \quad \text{und} \quad u = \frac{gt^2}{4r} \quad (8.75)$$

Auch dieses Integral kann mit Hilfe der Methode der Stationären Phase berechnet werden, wenn wir grosse  $u$  annehmen. Der Hauptbeitrag kommt nämlich von den Zeitbereichen her, bei denen  $u(t)$  stationär ist. Die Geometrie des Problems ergibt:

$$r(t) = \sqrt{R^2 + v^2 t^2 + 2Rvt \cos \theta} \quad \text{für} \quad t < 0 \quad (8.76)$$

Damit können wir  $u(t)$  und seine Ableitung bilden:

$$\dot{u}(t) = \frac{g}{4} \left\{ \frac{2t}{r} - \frac{t^2}{r^3} (v^2 t + Rv \cos \theta) \right\} = \frac{gt}{4r^3} (2r^2 - v^2 t^2 - Rvt \cos \theta) = \frac{gt}{4r^3} (v^2 t^2 + 3Rvt \cos \theta + 2R^2) \quad (8.77)$$

woraus sich zwei Nullstellen ergeben:

$$t_{1,2} = -\frac{3R}{2v} \left\{ \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{8}{9}} \right\} = -\frac{3R}{2v} \left\{ \cos \theta \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \sin^2 \theta} \right\} \quad (8.78)$$

Falls  $\sin \theta < \sin \theta_0 = 1/3$  ( $\theta < \theta_0 = 19.5^\circ$ ), finden wir zwei negative reelle Lösungen. Die Bestimmung dieses Grenzwinkels geht auf Lord Kelvin zurück.

Die beiden Lösungen können auch umgekehrt für gegebene Zeit  $t$  in zwei Werte von  $R$  übersetzt werden. Geometrisch dargestellt ergibt sich die Abb. 8.11 wobei die Schnittpunkte des Halbkreises für gegebenen Winkel  $\theta$  die stationären Punkte  $P'$  und  $P''$  ergeben.

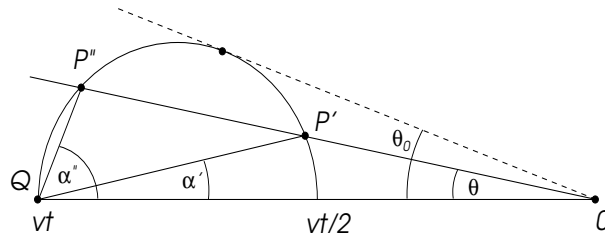


Abb.8.11

Nur wenn die Position  $P$  innerhalb der "Schere" mit Winkel  $\theta_0$  liegt, gibt es eine nennenswerte Störung auf der Wasseroberfläche. In Abb.8.11 sind  $P'$  und  $P''$  stationäre Punkte, weil gilt

$$r \cos \alpha + R \cos \theta = -vt \quad \text{und} \quad r = -\frac{vt}{2} \cos \alpha \quad (\text{Thales}) \quad (8.79)$$

wobei die zweite Gleichung aus (8.77) durch Einsetzen der ersten Gleichung folgt, denn

$$\frac{4r^3}{gt} \dot{u} = 2r^2 - v^2 t^2 - Rvt \cos \theta = 2r^2 - v^2 t^2 - vt(-vt - r \cos \alpha) = 2r \left( r + \frac{vt}{2} \cos \alpha \right) = 0. \quad (8.80)$$

Wir betrachten nun die Orientierung der Wellenfronten. Da in Abb.8.12 die Quelle  $Q$  Kreiswellen aussendet, muss die Wellenfront senkrecht auf  $\overline{QP'}$  bzw.  $\overline{QP''}$  liegen. Die beiden Punkte  $P'$  und  $P''$  fallen auf der Schere zusammen, wo

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \approx 35^\circ \quad (8.81)$$

so dass die Wellenberge den Winkel

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \approx 55^\circ \quad (8.82)$$

relativ zur Fahrtrichtung bilden. Im Inneren der Schere ergeben sich für jede Position  $P$  zwei Quellen, die verschiedene Wellenfronten erzeugen. Für  $\theta = 0$ , zum Beispiel, ist die Wellenfront senkrecht zur Fahrtrichtung bei  $R = -vt/2$  (beachte, dass hier  $P = Q$  oder  $R = -vt$  nicht physikalisch ist).

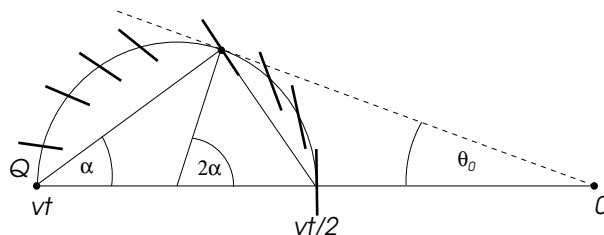


Abb.8.12

Damit wird die Störung für Winkel kleiner als  $\theta_0$  durch Quer- und Längswellen gebildet, wobei sich letztere an den Schiffsrumpf anschmiegen. Vom Schiff aus betrachtet ist die Wasseroberfläche jedoch stationär.

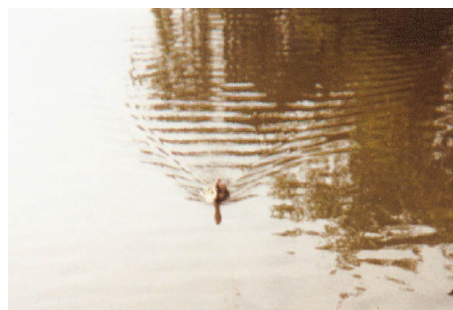
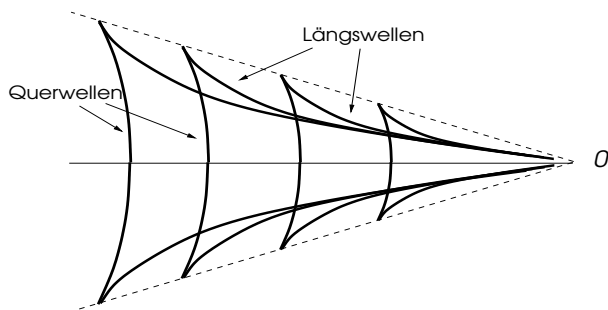


Abb.8.13

Interessanterweise ist der Winkel  $\theta_0$  nicht von der Geschwindigkeit abhängig. Dies hat mit der Dispersion der Schwerewellen zu tun:  $\omega_k = \sqrt{gk}$  und  $c_{ph} = \sqrt{g/k}$ . Betrachten wir die ähnlich Situation in der Luft, dann findet man einen sogenannten Mach'schen Kegel, falls das Objekt (Flugzeug) sich schneller als die Schallgeschwindigkeit  $c$  bewegt. In diesem Fall ist der maximale Winkel

$$\frac{1}{\sin \theta_0} = \frac{v}{c} \quad \text{Mach'sche Zahl,} \quad (8.83)$$

also geschwindigkeitsabhängig. Hier gilt nämlich  $\omega_k = ck$  mit  $c_{ph} = c$ .

# Kapitel 9

## Zweidimensionale Potentialströmungen

In diesem Kapitel betrachten wir stationäre Strömungen idealer, inkompressibler Fluida in zwei Dimensionen. Das bedeutet, dass es nur zwei relevante räumliche Koordinaten  $(x, y)$  gibt. Dies hat wichtige Anwendungen bei der Untersuchung von Strömungen um Hindernisse die transvers zur Flussrichtung sehr lang sind. Ein Beispiel ist die Strömung um einen Tragflügel eines Flugzeuges, ein wichtiges Problem der Aerodynamik.

### 9.1 Grundlagen

Der zweidimensionale reelle Raum kann auch auf die komplexe Ebene abgebildet werden:

$$(x, y) \rightarrow z = x + iy \quad (9.1)$$

Damit stehen uns die Werkzeuge der Funktionentheorie zur Verfügung. Betrachten wir ein Gebiet  $G$  der komplexen Ebene, worin die analytische Funktion  $w(z)$  definiert ist. Diese Funktion lässt sich in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$w(z) = v_x(z) - iv_y(z) \quad \text{mit} \quad v_x(z) = \operatorname{Re}(w(z)), \quad -v_y(z) = \operatorname{Im}(w(z)) \quad (9.2)$$

Damit  $w(z)$  analytisch ist, muss die Cauchy-Riemann-Bedingung erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Damit erfüllt  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  dieselben Gleichungen wie das Geschwindigkeitsfeld eines quellen- und wirbelfreien Fluidums in zwei Dimensionen. Die analytische Funktion  $w(z)$  lässt sich dann auch als Ableitung einer analytischen Funktion  $\Phi(z)$  schreiben:

$$w(z) = -\frac{d}{dz}\Phi(z) \quad (9.4)$$

selbst wenn das Gebiet  $G$  nicht einfach zusammenhängend ist. In einem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet muss auch  $\Phi(z)$  nicht einwertig sein.

Wir zerlegen diese Funktion in Real- und Imaginärteil:  $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ , woraus folgt, dass

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Dies kann zusammengefasst werden in

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -\vec{\nabla} \Phi_1 \Rightarrow \Phi_1(x, y) \text{ Geschwindigkeitspotential} \\ \vec{v} &\perp \vec{\nabla} \Phi_2 \Rightarrow \Phi_2(x, y) \text{ Strömungsfunktion}\end{aligned}\tag{9.6}$$

Dies bedeutet, dass die Niveaulinien von  $\Phi_2(x, y)$  ( $\perp \vec{\nabla} \Phi_2$ ) parallel zu  $\vec{v}$  liegen und somit den Strömungslinien entsprechen. Dies erlaubt auch eine erstaunlich einfache Handhabung von Randbedingungen der Strömung an einer Wand. Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  muss nämlich immer parallel zur Wand sein. Daher muss also  $\Phi_2$  auf jeder Wand konstant sein. Ferner lassen sich Randbedingungen der Strömung im Unendlichen  $|z| \rightarrow \infty$  für das Geschwindigkeitsfeld gut implementieren. Damit haben wir die Voraussetzungen, die wir benötigen, um eine stationäre zweidimensionale Strömung mit Hindernissen zu beschreiben.

Beachte, dass beide  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  als Funktionen von  $(x, y)$  aufgefasst die Laplace-Gleichung erfüllen:  $\vec{\nabla} \Phi_1 = \vec{\nabla} \Phi_2 = 0$ . Dies sind die Bestimmungsgleichungen für eine Potentialströmung, wie wir sie bereits im Kapitel 7 angetroffen hatten.

Ein weiteres wertvolles Werkzeug bietet die *Konformen Abbildungen* der komplexen Ebene. Diese Abbildungen erlauben uns zwei äquivalenten Probleme miteinander in Verbindung zu bringen.

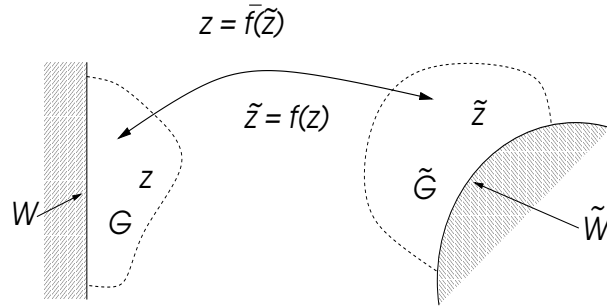


Abb.9.1

Hier ist  $f(z)$  eine analytische Funktion mit  $\bar{f}$  als Inverse und bildet das Gebiet  $G$  in das Gebiet  $\tilde{G}$  in der komplexen Ebene ab:

$$\tilde{z} = f(z) \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{f}(\tilde{z})\tag{9.7}$$

Wenn  $\Phi(z)$  analytisch in  $G$  mit  $\Phi_2(z)|_{z \in W} = \text{konst.}$ , dann gilt nämlich

$$\tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi(z) = \Phi(\bar{f}(\tilde{z}))\tag{9.8}$$

mit  $\tilde{\Phi}(\tilde{z})$  als Potential in  $\tilde{G}$ , wobei für die Randbedingungen gilt:

$$\tilde{\Phi}_2(\tilde{z}) \Big|_{\tilde{z} \in \tilde{W}} = \Phi_2(\bar{f}(\tilde{z})) \Big|_{\tilde{z} \in \tilde{W}} = \Phi_2(z) \Big|_{z \in W} = \text{konst.}\tag{9.9}$$

Die Geschwindigkeitsfelder in  $G$  und  $\tilde{G}$  sind folgendermassen miteinander verknüpft:

$$w(z)dz = \tilde{w}(\tilde{z})d\tilde{z} \quad \text{mit} \quad d\tilde{z} = f'(z)dz \quad \Rightarrow \quad w(z) = f'(z)\tilde{w}(\tilde{z})\tag{9.10}$$

Dies erlaubt es uns bekannte Strömungsverläufe um gewisse Ränderprofile in Strömungen um andere Profile zu übersetzen.

## 9.2 Zirkulation

Obwohl wir angenommen haben, dass in  $G$  die Strömung wirbelfrei sei, ist es trotzdem möglich, dass im mehrfach zusammenhängenden Gebiet eine Zirkulation existiert, eine Zirkulation um

einen Körper, dessen Inneres von  $G$  ausgeschlossen ist. Solche Zirkulationen bleiben unter konformen Abbildungen erhalten. Wir berechnen die Zirkulation durch

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{P}} w(z) dz = \oint_{\mathcal{P}_0} w(z) dz \quad (9.11)$$

um den Körper  $K$ . Da  $w(z)$  analytisch ist, können wir gemäss dem Satz von Cauchy jeden geschlossenen Pfad benutzen, der  $K$  umschliesst, insbesondere die Körperoberfläche ( $\mathcal{P}_0$ ). Es gilt nämlich:

$$w(z) dz = (v_x - iv_y)(dx + idy) = \underbrace{(v_x dx + v_y dy)}_{\vec{v} \cdot d\vec{s}} + i \underbrace{(v_x dy - v_y dx)}_{=0} \quad (9.12)$$

wobei  $v_x dy - v_y dx = 0$  auf  $\mathcal{P}_0$ , da das Geschwindigkeitsfeld parallel zur Oberfläche des Körpers liegt ( $\vec{v} \times d\vec{s} = 0$ ).

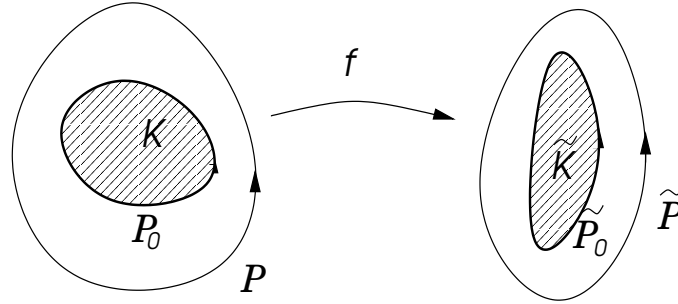


Abb.9.2

Die Zirkulation verändert sich nicht, wenn wir eine konforme Abbildung machen, da

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{P}} w(z) dz = \oint_{\tilde{\mathcal{P}}} \tilde{w}(\tilde{z}) d\tilde{z} = \tilde{\Gamma} \quad (9.13)$$

Es ist auch klar, dass für  $\Gamma \neq 0$  das Potential  $\Phi(z)$  nicht eindeutig sein kann.

### 9.3 Kutta-Zhukhovski-Satz - Kraft auf umströmten Körper

Ein Körper in einer laminaren Strömung verspürt eine Kraft, wenn um ihn eine endliche Zirkulation vorhanden ist. Diese Kraft ergibt sich aus dem Druck, der auf die Oberfläche des Körpers wirkt:

$$\vec{f} = - \oint_{\mathcal{P}_0} p \vec{n} ds \quad (9.14)$$

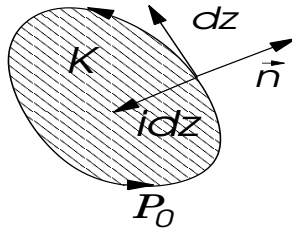


Abb.9.3

Der Oberflächendruck folgt aus der Bernoulli-Gleichung:

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \quad (9.15)$$



Der uniforme Druck  $p_0$  liefert keinen Beitrag zur Kraft. Wir verwenden nun die komplexe Darstellung in Abb.9.3:  $\vec{n} ds \rightarrow -idz = -i(dx + idy) = dy - idx$  und  $\vec{f} = (f_x, f_y) \rightarrow f = f_x + if_y$ :

$$f = \oint_{\mathcal{P}_0} p idz = -i\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{P}_0} \vec{v}^2 dz \quad (9.16)$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} (w^2 dz)^* &= (v_x^2 - v_y^2 + 2iv_x v_y)(dx - idy) = (v_x^2 + v_y^2)(dx + idy) - 2iv_x^2 dy - 2v_y^2 dx + 2iv_x v_y(dx - idy) \\ &= \vec{v}^2 dz + 2(v_y - iv_x)(v_x dy - v_y dx) = \vec{v}^2 dz \end{aligned} \quad (9.17)$$

Das bedeutet, dass  $(w^2 dz)^* = \vec{v}^2 dz$  auf dem Pfad  $\mathcal{P}_0$ . Infolgedessen gilt

$$f = -i\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{P}_0} (w^2 dz)^* \quad (9.18)$$

Da  $w^2(z)$  analytisch ist, können wir den Pfad durch einen beliebigen Pfad um  $K$  herum ersetzen.

Satz von Kutta-Zhukhovski: Die Kraft die auf einen umströmten Körper in der laminaren Grundströmung  $\vec{v}^\infty$  steht senkrecht auf  $\vec{v}^\infty$  und ist proportional zur Zirkulation  $\Gamma$  um den Körper ( $\vec{v}^\infty = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \vec{v}(z)$ ):

$$\vec{f} = \rho\Gamma(v_y^\infty, -v_x^\infty) \quad \text{und} \quad \vec{v}^\infty \cdot \vec{f} = 0 \quad (9.19)$$

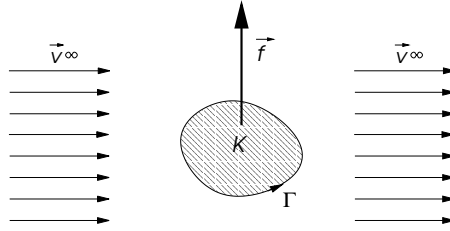


Abb.9.4

Ausserhalb eines gewissen Kreises  $\mathcal{P}$  um  $K$  können wir  $w(z)$  als Laurent-Reihe schreiben:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{-n} \quad (9.20)$$

wobei  $w_0 = v_x^\infty - iv_y^\infty$ . Insbesondere finden wir nun nach dem Residuensatz

$$w_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{P}} w(z) dz = \frac{\Gamma}{2\pi i} . \quad (9.21)$$

Im Grenzfall  $|z| \rightarrow \infty$  gilt

$$w^2(z) = w_0^2 + 2\frac{w_0 w_1}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) = w_0^2 + \frac{1}{2\pi i} \frac{2\Gamma}{z} (v_x^\infty - iv_y^\infty) + \mathcal{O}(z^{-2}) \quad (9.22)$$

Damit können wir nun mit (9.18) die Kraft hinschreiben als

$$f = -\frac{i\rho}{2} 2\Gamma(v_x^\infty + iv_y^\infty) = \rho\Gamma(v_y^\infty - iv_x^\infty) \quad (9.23)$$

weil  $\Gamma$  reell ist und  $w_0^2$  keinen Beitrag gibt. Offensichtlich ist  $\vec{f} \perp \vec{v}$  und ist proportional zur Zirkulation  $\Gamma$ .

## 9.4 Konstruktion von zwei-dimensionalen Potentialströmungen

Die einfachste Potentialströmung, nämlich die uniforme Grundströmung, hat ein Potential der Form

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -wz = -(v_x - iv_y)(x + iy) = \Phi_1 + i\Phi_2 = -\{v_x x + v_y y\} - i\{v_x y - v_y x\} \\ \Rightarrow \quad w &= -\frac{d\Phi}{dz} = v_x - iv_y\end{aligned}\tag{9.24}$$

Beachte, dass  $\vec{\nabla} \Phi_2 \perp \vec{\nabla} \Phi_1$ . Wir werden nun Situationen betrachten, für die das Geschwindigkeitsfeld im Unendlichen der uniformen Grundströmung entspricht, während im Nahbereich ein Hindernis die Strömung umleitet.

### 9.4.1 Zylinder ohne Zirkulation

Wir betrachten das folgende Potential, das die Randbedingung im Unendlichen erfüllt, indem es für  $|z| \rightarrow \infty$  in die uniform Strömung übergeht:

$$\Phi(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right). \tag{9.25}$$

Wir nehmen an, dass  $U$  reell ist, so dass die Grundströmung entlang der  $x$ -Achse fließt mit  $v_x^\infty = -U$ . Wir separieren Real- und Imaginärteil, indem wir  $z = re^{i\theta}$  verwenden,

$$\Phi_1 = U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad \text{und} \quad \Phi_2 = U \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \tag{9.26}$$

Interessant ist die Eigenschaft  $\Phi_2 = 0$  für  $r = a$ . Da die Bedingung  $\Phi_2 = \text{konst.}$  eine Strömungslinie definiert, verschwindet die radiale Geschwindigkeit für alle Winkel  $\theta$  bei  $r = a$  und entspricht somit der Randbedingung für ein zylindrisches Hindernis mit Radius  $a$  um den Ursprung. Das Geschwindigkeitsfeld kann dann in die radiale und azimuthale Komponente aufgespalten werden

$$v_r = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -U \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \text{und} \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta. \tag{9.27}$$

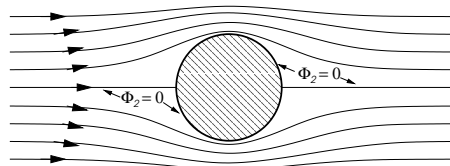


Abb. 9.5

An der Oberfläche des Zylinders finden wir die Tangentialgeschwindigkeit:

$$v_\theta(r = a, \theta) = 2U \sin \theta \tag{9.28}$$

wobei wir für  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  den Maximalstrom finden, während für  $\theta = 0, \pi$  die Geschwindigkeit verschwindet. Bei letzterem sprechen wir von *Staupunkten*. Beachte, dass  $v_r = 0$  bei  $r = a$ .

Wir können nun die Druckverteilung auf der Oberfläche berechnen. Dabei verwenden wir wieder Bernoullis Gleichung.

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 = p + \frac{\rho}{2} v_\theta^2(r = a, \theta) \quad \Rightarrow \quad p = p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 \left\{ 1 - \frac{v_\theta^2(r = a, \theta)}{U^2} \right\} = p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 \{ 1 - 4 \sin^2 \theta \} \tag{9.29}$$

Der Druck wechselt das Vorzeichen auf der Oberfläche und ist symmetrisch um die Richtung senkrecht zur Grundströmung ( $\theta \rightarrow -\theta$ ). Dies bedeutet, dass

$$\vec{f} = - \oint p \vec{n} ds = -2 \int_0^\pi pa(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 0 . \quad (9.30)$$

Wir finden also (seltsamerweise) keine Kraft auf den Zylinder. Auch ein Mitschleppen des Zylinders mit dem Grundstrom lässt sich nicht finden (aus der Symmetrie  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ). Dies widerspricht der allgemeinen Erfahrung (d’Alamberts Paradox). Wir haben jedoch die Oberflächenreibung und die Turbulenzen, die sich hinter dem Zylinder bilden können, hier vernachlässigt. Diese Eigenschaften der realen (viskosen) Fluida sind nämlich für den Mitschlepp-Effekt eines Körpers in einer strömenden Flüssigkeit verantwortlich.

#### 9.4.2 Zylinder mit Zirkulation

Wegen der Linearität der Bestimmungsgleichung ( $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$ ) können wir die verschiedenen Komponenten der Strömung einfach Überlagern. Eine Zirkularströmung wird durch das Potential

$$\Phi_\Gamma = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad \Rightarrow \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, v_r = 0 \quad (9.31)$$

gegeben, wobei  $\Gamma$  die früher eingeführte Zirkulation ist. Das Gesamtpotential ist folglich

$$\Phi = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z . \quad (9.32)$$

Wieder betrachten wir die Geschwindigkeit an der Oberfläche

$$v_\theta(r = a, \theta) = 2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} , \quad (9.33)$$

die verschwindet für  $\sin \theta = -\Gamma/4\pi aU$ . Solange  $\Gamma < 4\pi aU$  ist, gibt es zwei Staupunkte. Diese vereinigen sich jedoch, wenn  $\Gamma = 4\pi aU$  und lösen sich als einzelner ”Stau-“ oder ”Stagnationspunkt“ von der Oberfläche ab:

$$v_\theta(r, \theta = -\pi/2) = U \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{4\pi U} \left\{ \Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi aU)^2} \right\} \quad (9.34)$$

wobei nur das + Zeichen relevant ist, da der Punkt ausserhalb des Zylinders liegen muss.

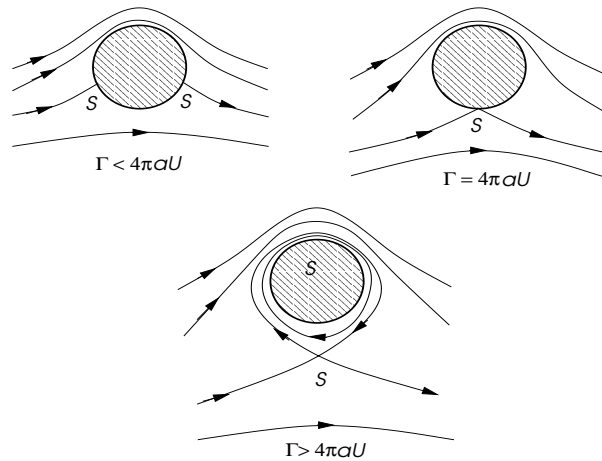


Abb.9.6

Der Druck auf der Oberfläche erhalten wir wieder gleich wie oben aus der Bernoulli-Gleichung

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} \left[ U^2 - \left\{ 2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right\}^2 \right] . \quad (9.35)$$

Es zeigt sich, dass die Symmetrie bezüglich positiven und negativen  $\theta$ , die wir vorher hatten, aufgehoben ist. Es gibt die Symmetrie  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ , die immer noch garantiert, dass kein Mitschlepp-Effekt stattfindet. Auf der anderen Seite können wir nun die Kraft bestimmen, die auf den Zylinder wirkt:

$$\vec{f} = - \oint p \vec{n} ds = - \int p a (\cos \theta, \sin \theta) d\theta = (0, \rho U \Gamma) \quad (9.36)$$

d.h. es gibt eine Kraft senkrecht zur Grundströmungsrichtung wie im Satz von Kutta-Zhukhovski gezeigt wurde. Diese Kraft wird auch *Magnus-Kraft* genannt.

Es ist nicht so einfach, die Zirkularströmung innerhalb der gegebenen reibungsfreien Näherung zu erzeugen. In der Praxis würde man den Zylinder in Rotation versetzen und über die Oberflächenreibung eine Zirkularströmung mitreißen. Dies ist im idealen Fluidum nicht möglich. Daher bleibt innerhalb unsere Betrachtung offen woher die Zirkulation kommt.

Man kann "Segelschiffe" konstruieren, die aufgrund der Magnus-Kraft angetrieben werden (z.B. Flettners Rotor-Schiff). Senkrechte auf dem Deck stehende Zylinder rotieren um ihre Achse und erzeugen eine zirkuläre Luftströmung. Mit dem äusseren Wind als Grundströmung wirkt eine Kraft senkrecht zur Windrichtung.

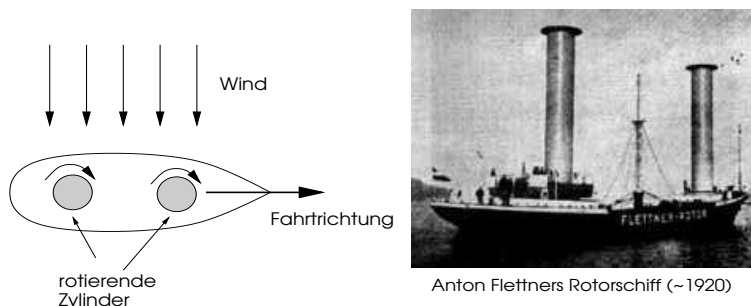


Abb.9.7

## 9.5 Konforme Abbildungen als Werkzeug

Wir werden nun verschiedene Situationen untersuchen, die wir ausgehend von einfachen Potentialströmungen mit Hilfe der konformen Abbildung erreichen können. Da die konforme Abbildung winkeltreu ist, werden die Randbedingungen auf einer Körperoberfläche korrekt mit-transformiert. Dies erlaubt es uns die Form eines Körper fast beliebig zu ändern und die Potentialströmung aus bekannten Fällen in die neue Geometrie (aber mit gleicher Topologie) überzuführen.

### 9.5.1 Von Zylinder zur Platte

Wir betrachten eine konforme Abbildung, die einen Kreis in eine Ellipse überführt:

$$z \rightarrow \tilde{z} = z + \frac{R^2}{z} \quad (9.37)$$

Beachte, dass die Grundströmung für  $|z|, |\tilde{z}| \rightarrow \infty$  identisch bleibt. Wir nehmen nun  $z = re^{i\theta}$  und erhalten:

$$\tilde{z} = re^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} = \tilde{x} + i\tilde{y} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = (r + R^2/r) \cos \theta \\ \tilde{y} = (r - R^2/r) \sin \theta \end{cases} \quad (9.38)$$

Damit wird ein Kreis des Radius  $a$  in eine Ellipse abgebildet:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= A \cos \theta \\ \tilde{y} &= B \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad A = a + \frac{R^2}{a}, \quad B = a - \frac{R^2}{a} \quad (9.39)$$

mit Hauptachsen  $A$  und  $B$ .

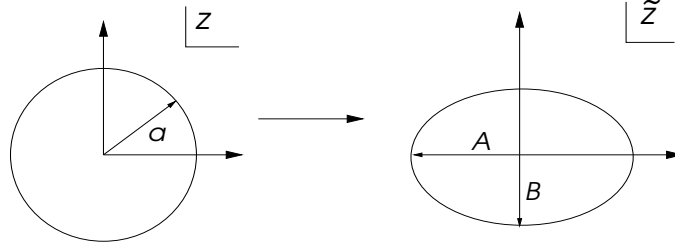


Abb.9.8

Im Extremfall können wir daraus eine Platte erzeugen:  $a = R \rightarrow A = 2R$  und  $B = 0$ .

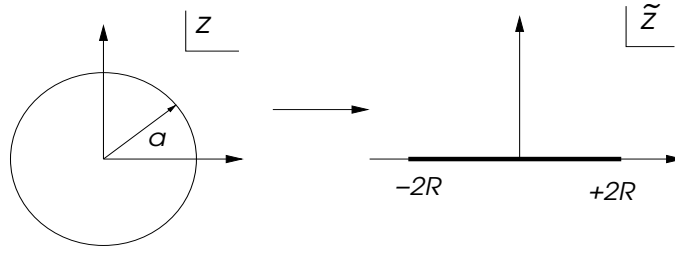


Abb.9.9

Damit wird das Äussere des Zylinders eindeutig auf das Äussere der Platte abgebildet. Es gibt zwei Singularitäten bei  $z = \pm R$ . Die Abbildung kann umgekehrt werden:

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} \right\} \quad (9.40)$$

Die Platte entspricht hier einem Schnitt entlang der reellen Achse und wir müssen die Wurzel entsprechend wählen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{z} > 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} > 0 \\ \operatorname{Re} \tilde{z} < 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} < 0 \\ \operatorname{Im} \tilde{z} > 0 &\Rightarrow \operatorname{Im} \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} > 0 \\ \operatorname{Im} \tilde{z} < 0 &\Rightarrow \operatorname{Im} \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} < 0 \\ \operatorname{Re} \tilde{z} = 0 &\Rightarrow \operatorname{Re} \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} = 0 \\ \operatorname{Im} \tilde{z} = 0 &\Rightarrow \operatorname{Im} \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} = 0 \end{aligned} \quad (9.41)$$

Das Potential wird nun in folgender Weise transformiert:

$$\Phi(z) = \Phi(z(\tilde{z})) = \tilde{\Phi}(\tilde{z}) \quad \text{mit} \quad \tilde{z} = z + \frac{R^2}{z} \quad (9.42)$$

Das Geschwindigkeitsfeld wird folglich:

$$w(z) = -\frac{d\Phi(z)}{dz} \quad \rightarrow \quad \tilde{w}(\tilde{z}) = -\frac{d\tilde{\Phi}(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = -\frac{d\Phi(z)/dz}{1 - R^2/z^2} \quad (9.43)$$

Beachte, dass diese Transformation die Zirkulation  $\Gamma$  unverändert lässt. Ferner ist die Grundströmung identisch:

$$\Phi(z) = -w^\infty z \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = -w^\infty \tilde{z} \quad (9.44)$$

Damit folgt nach dem Satz von Kutta-Zhukhovski, dass die Kraft auf die Platte und den Zylinder gleich ist. Mit den Strömungslinien werden auch die Staupunkte eins-zu-eins überführt.

### 9.5.2 Einfachste Plattenströmungen

Wir nehmen an, dass  $w^\infty$  reell ist, so dass die Strömung entlang der Platte führt.

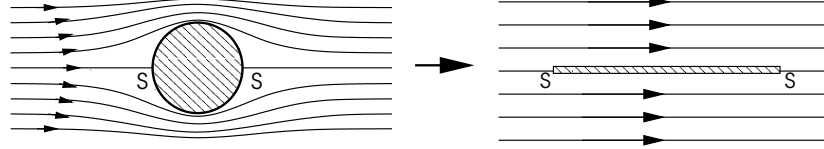


Abb.9.10

$$\Phi(z) = -w^\infty z \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = -w^\infty \tilde{z} \quad (9.45)$$

wobei es auch bei der Platte zwei Staupunkte gibt.

Als nächstes betrachten wir die einfache Wirbelströmung um die Platte

$$\Phi(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left( \frac{1}{2} \{ \tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 4R^2} \} \right) \quad (9.46)$$

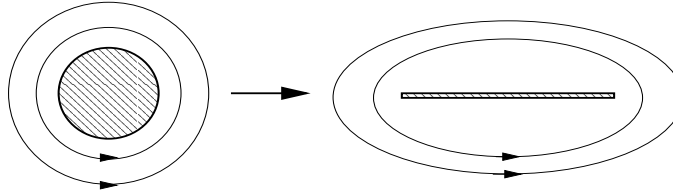


Abb.9.11

Die zirkuläre Strömung um die Platte besteht aus konfokalen Ellipsen.

$$\tilde{z} = re^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} = a_+ \cos \theta + ia_- \sin \theta \quad (9.47)$$

mit  $a_\pm = r \pm R^2/r$ , wobei die Brennpunktdistanz vom Ursprung,  $c = \sqrt{a_+^2 - a_-^2} = 2R$  unabhängig von  $r$ .

Interessanterweise finden wir für die Strömung an den Oberflächen  $z = ae^{i\theta} \rightarrow \tilde{z} = 2a \cos \theta$ , so dass die Tangentialgeschwindigkeit

$$w(\tilde{z}) = -\frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tilde{z}} = -\frac{\Gamma}{4\pi a \sin \theta} \quad (9.48)$$

Dies ist unendlich für  $\theta = 0, \pi$  welche den beiden Kanten entspricht. Diese Strömung ist unphysikalisch.

### 9.5.3 Drehung der Grundströmungsrichtung

Die Strömung um den Zylinder wird durch die Abbildung

$$z \rightarrow \tilde{z} = ze^{i\alpha} \quad \Rightarrow \quad \Phi_\alpha = \Phi(ze^{-i\alpha}) \quad (9.49)$$

in eine äquivalent Strömung um einen Zylinder mit um den Winkel  $\alpha$  rotierter Grundströmungsrichtung übergeführt. Es gilt nämlich

$$w^* \rightarrow w^* e^{i\alpha} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} v'_x = v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha \\ v'_y = v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha \end{cases} . \quad (9.50)$$

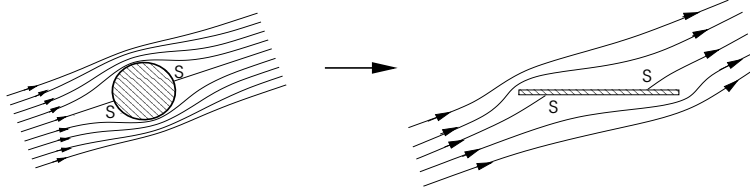


Abb. 9.12

Wenn wir nun die Zylinderströmung wieder in die Plattenform transformieren, erhalten wir

$$\Phi_\alpha(z) = -v^\infty \left( z e^{-i\alpha} + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) \quad (9.51)$$

Auf der Plattenoberfläche gilt  $z = R e^{i\theta}$  und  $\tilde{z} = 2R \cos \theta$ :

$$\Phi_\alpha(\theta) = -v^\infty R \left( e^{i(\theta-\alpha)} + e^{-i(\theta-\alpha)} \right) = -2v^\infty R \cos(\theta - \alpha) \quad (9.52)$$

woraus die Tangentialgeschwindigkeit folgt:

$$w_\alpha = -\frac{d\Phi_\alpha(\theta)/d\theta}{d\tilde{z}/d\theta} = v^\infty \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \quad (9.53)$$

Die beiden Staupunkte finden wir für  $\theta = \alpha$  und  $\pi + \alpha$ . Die Geschwindigkeit wird an den Kanten ( $\theta = 0, \pi$ ) unendlich. Diese Form der Strömung ist nun nicht mehr so trivial wie der vorhergehenden Fall bei  $\alpha = 0$ .

Nun nehmen noch die Zirkulärströmung dazu.

$$\Phi_\alpha(z) = -v^\infty \left( z e^{-i\alpha} + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z e^{-i\alpha}) \quad (9.54)$$

Beachte, dass der Phasenfaktor im Logarithmus nur eine bedeutungslose Konstante liefert. Für die Platte untersuchen wir wieder die Tangentialströmung:

$$w(\tilde{z})|_{\tilde{z}=2R \cos \theta} = \frac{v^\infty R \sin(\theta - \alpha) + \Gamma/4\pi}{R \sin \theta} \quad (9.55)$$

Damit können wir durch geeignete Wahl der Zirkulation  $\Gamma$  die Tangentialgeschwindigkeit an der hinteren Kante ( $\theta = 0$ ) endlich machen:

$$\Gamma = 4\pi v^\infty R \sin \alpha = \Gamma_c \sin \alpha \quad \text{mit} \quad w = v^\infty \cos \alpha \quad (9.56)$$

für  $\tilde{z} = 2R$ . Diese Situation nennt man *Kutta-Bedingung*. Der Staupunkt in der Nähe der vorderen Kante bleibt und auch die Geschwindigkeit an der vorderen Kante ist immer noch unendlich.

#### 9.5.4 Kutta-Bedingung

Die Kutta-Bedingung ist das empirisch festgestellte Verhalten, dass die Strömung an einer spitzauslaufenden Hinterkante sich die Strömungslinien immer in Richtung der Spitze mit der gleichen Geschwindigkeit oben und unten ablösen. Dies entspricht auch der gerade diskutierten Form der Strömung mit der speziell gewählten Zirkulation  $\Gamma_{\text{Kutta}}$ .

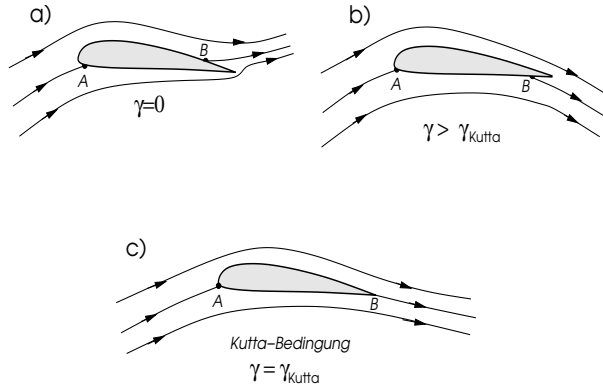


Abb.9.13

Tatsächlich ist hier die Strömungsrichtung an der Hinterkante parallel zu  $x$  und das Geschwindigkeitsfeld ist stetig. Die Kutta-Bedingung bedeutet folglich, dass sich eine geeignete zirkuläre Strömung einstellt. Die Zirkulation baut sich mit Hilfe der Reibung auf, wie wir dies innerhalb der Theorie des idealen Fluidums nicht beschreiben können. Es entsteht nämlich eine Verschiebungsschicht auf der Oberfläche, mit der sich der Staupunkt gegen die Hinterkante verschiebt und einen Wirbel erzeugt. Dieser Wirbel löst sich ab und hinterlässt eine Zirkularströmung, die die Kutta-Bedingung erfüllt. Die gesamte Zirkulation verschwindet. Der gegenläufige Startwirbel wird jedoch von der Grundströmung weggetragen, (bzw. für ein Flugzeug bleibt er auf dem Startplatz zurück und wird allmählich dissipiert).

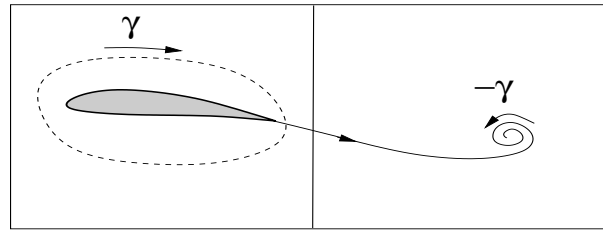


Abb.9.14

## 9.6 Strömung um Zhukhovski-Flügel

Konforme Abbildungen erlauben uns auch, die Potentialströmung um den Zylinder auf die Strömung für ein Flügelprofil überzuführen. Der Trick liegt in der Verschiebung des Zylinders um eine Distanz  $\delta$  nach links, wobei wir auch den Radius auf  $R + \delta$  vergrößern. Damit geht der Zylinderkreis auf den positiven reellen Achse immer noch durch den Punkt  $R$  aus dem wir eine singuläre Hinterkante bilden, indem wir dieselbe Abbildung wie vorher machen.

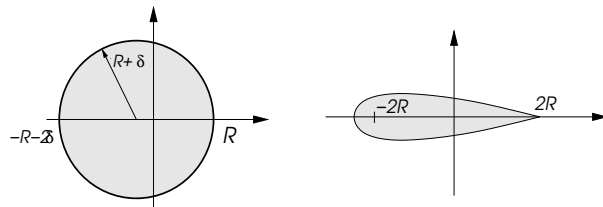


Abb.9.15

Die konforme Abbildung ist gegeben durch

$$\tilde{z} = z + \frac{R^2}{z}, \quad (9.57)$$



für die bei  $\tilde{z} = 2R$  die folgende Entwicklung gilt:

$$\tilde{z} = z + \frac{R}{\frac{z}{R} - 1 + 1} = 2R + R \left[ \left( \frac{z}{R} - 1 \right)^2 - \left( \frac{z}{R} - 1 \right)^3 + \dots \right] \quad (9.58)$$

mit

$$z - R = \lambda \left( R e^{i\theta} - R \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{R} - 1 = \lambda \left( e^{i\theta} - 1 \right) = \lambda \left( i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots \right) \quad (9.59)$$

wobei  $\lambda = (R + \delta)/R > 1$ . Daraus folgt nun

$$\frac{\tilde{z} - 2R}{\lambda^2 R} = \xi_1 + i\xi_2 = -\theta^2 + i(\lambda - 1)\theta^3 + \dots \quad (9.60)$$

Die Hinterkante lässt sich daher in folgender Weise parametrisieren:

$$\xi_1 = -\theta^2 \quad \text{and} \quad \xi_2 = (\lambda - 1)\theta^3 = (\lambda - 1)(-\xi_1)^{3/2} \quad (9.61)$$

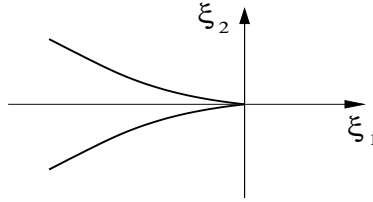


Abb.9.16

Das Potential der Strömung lässt sich leicht aus der früheren Diskussion herleiten,

$$\Phi(z) = -v^\infty \left[ (z + \delta)e^{-i\alpha} + \frac{(R + \delta)^2}{z + \delta} e^{i\alpha} \right] - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln [(z + \delta)e^{-i\alpha}] \quad (9.62)$$

und daraus die Tangentialgeschwindigkeit in der Nähe der Hinterkante des Profils ( $|\theta| \ll 1$ )

$$v_{||}(\theta) = -\frac{d\Phi/d\theta}{d\tilde{z}/d\theta} \approx -\frac{v^\infty(R + \delta) \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi}}{R \sin \theta} \quad (9.63)$$

wobei wir den Winkel  $\alpha$  für die Richtung der Grundströmung annehmen. Die Kutta-Bedingung besagt nun, dass  $v_{||}(\theta = 0)$  endlich sein muss, d.h.

$$\Gamma = 4\pi v^\infty (R + \delta) \sin \alpha \quad (9.64)$$

Die Geschwindigkeit an der Hinterkante wird dann

$$w = v_x = v^\infty \frac{R}{R + \delta} \cos \alpha \quad (9.65)$$

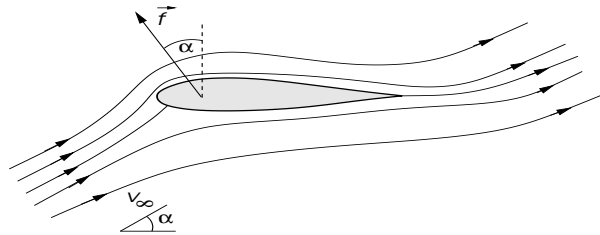


Abb.9.17

Wir können nun die Hebekraft der Strömung berechnen. Diese ergibt sich aus dem Satz von Kutta-Zhukhovski:

$$f = 4\pi\rho v^{\infty 2}(R + \delta) \sin \alpha \quad (9.66)$$

und ist senkrecht auf  $\vec{v}^{\infty}$  gerichtet. Die Druckverteilung auf der Flügeloberfläche ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung

$$p(\theta) = p_{\infty} + \frac{\rho}{2}[v^{\infty 2} - v_{\parallel}(\theta)^2] \quad (9.67)$$

Durch geeignete Wahl des Profils und des Anstellwinkels kann die Hebekraft verbessert werden.

**Zirkulation um endliche Flügel:** Bisher haben wir uns auf Profilen in einer zwei-dimensionalen Potentialströmung beschränkt. Aber Flügel eines Flugzeuges haben natürlich nur eine endliche Ausdehnung. An den Enden des Flügels ergibt sich damit eine Netto-Strömung von der Unterseite Richtung Oberseite.

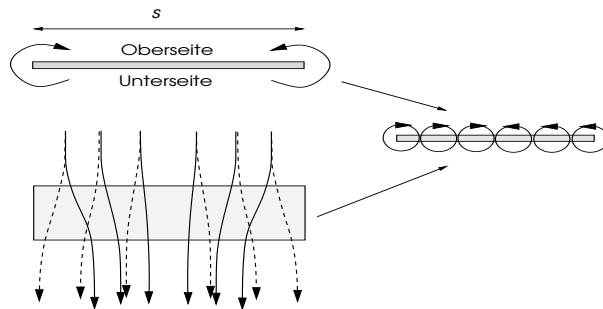


Abb.9.18

Damit nimmt die Zirkulation um das Flügelprofil langsam gegen die beiden Flügelenden ab. Nach dem Helmholtz-Theorem muss die Zirkulation jedoch erhalten bleibt, was durch einen Wirbelzopf an den Flügelenden sicher gestellt wird. Dieser schliesst sich im Prinzip mit dem Startwirbel.

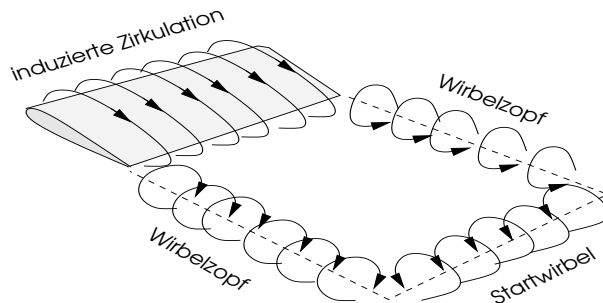


Abb.9.19

## 9.7 Ideale Linien-Wirbel

Ein Versuch einen unendlich langen Linienwirbel in einem Fluidum zu beschreiben könnte auf dem früher eingeführten Potential

$$\Phi(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad \Rightarrow \quad w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i z} \quad (9.68)$$

woraus für die Tangentialgeschwindigkeit folgt:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} . \quad (9.69)$$

Diese Geschwindigkeit divergiert für  $r \rightarrow 0$ , was nicht physikalisch ist. Die Singularität des Linienwirbels erfordert vielmehr, dass die Geschwindigkeit bei  $r = 0$  verschwindet. Eine einfache Konstruktion von Rankine erlaubt es, diesen Aspekt mitzubetrachten. Wir korrigieren die Tangentialgeschwindigkeit

$$v_\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi r} & r > a \\ \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} & r \leq a \end{cases} \quad (9.70)$$

womit  $v_\theta$  eine kontinuierliche Funktion von  $r$  ist. Die Länge  $a$  entspricht dem Radius des "Kerns" des Wirbels. Innerhalb des Kerns entspricht die Tangentialgeschwindigkeit einer starren Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0 = \Gamma/2\pi a^2$ .

Die kinetische Energie des Wirbels pro Längeneinheit ist

$$K = \frac{1}{2} \rho 2\pi \int_0^R v_\theta(r)^2 r dr = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{R}{a} \right) \right\} \quad (9.71)$$

Der erste Term entspricht einer konstanten Kernenergie, während der zweite Term logarithmisch mit dem Radius  $R$  divergiert, analog der Energie der Versetzungen in Kapitel 5.

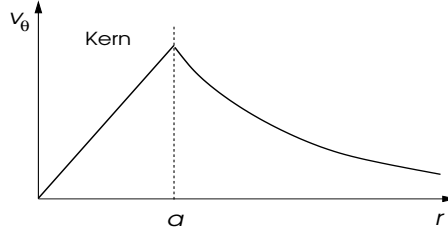


Abb.9.20

Der Wirbel in einer relativen Grundströmung  $\vec{v}^\infty$  erfährt eine Kraft senkrecht zu  $\vec{v}^\infty$  analog zum Kutta-Zhukhovski-Satz. Diese Kraft wird *Magnus-Kraft* genannt. Wirbel mit quantisierter Zirkulation tauchen in Supraflüssigkeiten wie  $^3\text{He}$  oder  $^4\text{He}$  und in Supraleitern auf. Dort spielt die Magnus-Kraft eine wichtige Rolle.

Es ist interessant zu sehen, dass in Suprafluida und Supraleitern, die Quantenphänomene darstellen, Quantisierungseigenschaften der Wirbel auftreten. Man kann diese im Sinne der deBroglie oder der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung von geschlossenen Teilchentrajektorien auffassen. Es gilt nämlich nach Bohr-Sommerfeld

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{m} \oint_C \vec{p} \cdot d\vec{s} = \frac{h}{m} n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.72)$$

Daraus folgt, dass die Zirkulation quantisiert ist, wobei das Planck'sche Wirkungsquantum  $h = 6.6261 \times 10^{-34} \text{ Js}$  ist und  $m$  die Masse der "elementaren" Teilchen, die die Supraflüssigkeit bzw. den Supraleiter ausmachen. Im Falle der Bosonischen Supraflüssigkeit  $^4\text{He}$  ist  $m = 4m_H$  die Masse des Atoms, für das Fermionische  $^3\text{He}$  wie auch für Supraleiter, ist das "elementare" Teilchen ein sogenanntes Cooper-Paar. Daher  $m_{SF,^3\text{He}} = 6m_H$  und  $m_{SL} = 2m_e$ , d.h. zweimal die

He-Atommasse bzw. zweimal die Elektronenmasse. Im Falle der Supraleitung sind die Teilchen (Elektronen) geladen, so dass jeder Wirbel ein magnetische Feld erzeugt. Die quantisierte Zirkulation ergibt dort, dann eine Quantisierung des magnetischen Flusses:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_0 n \quad (9.73)$$

mit dem Flussquantum  $\Phi_0 = hc/2e = 2 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2$ .

# Kapitel 10

## Inkompressible, viskose Fluida

### 10.1 Innere Reibung und Energiebilanz

Ein inkompressibles Fluidum mit innerer Reibung wird durch die Navier-Stokes-Gleichung beschrieben, die wir in Kapitel 6 eingeführt haben:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (10.1)$$

und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ,  $D\rho/Dt = 0$ , d.h.  $\rho = \text{konst.}$ . Deswegen verschwindet der letzte Term. Der Parameter  $\eta$  bezeichnet die Viskosität. Wir untersuchen im Folgenden den Fall  $\vec{F} = 0$ . Die Dissipation wird in der Bilanzgleichung der Energie ersichtlich. Die Spannungs- und die Energiedichte haben die Form:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta R_{ij} \quad \text{mit} \quad R_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.2)$$

$$\epsilon = \frac{\vec{v}^2}{2} ,$$

Die Bilanzgleichung lautet also

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} . \quad (10.3)$$

Wir betrachten das mit der Strömung mitgeführte Volumen  $V_t$ , so dass

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \epsilon dV = \oint_{\partial V_t} v_i \sigma_{ij} n_j df - \int_{V_t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \quad (10.4)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt der Leistung des Energieübertrages an die Oberfläche, denn  $v_i \sigma_{ij} n_j = \vec{v} \cdot \vec{P}$  entspricht der lokalen Leistung. Der zweite Term hingegen enthält die Reibungsverluste im ganzen Volumen,

$$- \int_{V_t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = -2\eta \int_{V_t} R_{ij}^2 dV < 0 . \quad (10.5)$$

Wir betrachten nun ein beschränktes Gebiet  $G$ , z.B. ein ruhendes Gefäß. Die Randbedingungen für ein ruhendes Gefäß sind für das Fluidum

$$\vec{v}|_W = 0 , \quad (10.6)$$

wobei  $W$  die Punkte auf der Gefäßwand bezeichnet. Also verschwindet nicht bloss die Normalkomponente der Geschwindigkeit, sondern alle Komponenten, da das Fluidum an der Oberfläche wegen der Reibung haften bleibt. Damit gilt für ein beschränktes Gebiet  $G$  wegen

$$R_{ij}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})^2 + 4 \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} . \quad (10.7)$$

Mit den Randbedingungen des ruhenden Gefäßes ergibt sich daraus die Bilanzgleichung in  $G$ :

$$\frac{d}{dt} \int_G \rho \epsilon dV = -\eta \int_G (\vec{\nabla} \times \vec{v})^2 dV = -\eta \int_G \vec{\Omega}^2 dV. \quad (10.8)$$

Interessanterweise ergibt, diese Gleichung, dass die Dissipation mit der Wirbeldichte  $\vec{\Omega}$  verknüpft ist. Zusätzliche Terme kommen ins Spiel, wenn das Gefäß nicht mehr in Ruhe ist.

Reynolds-Skalierung: Die Navier-Stokes-Gleichung lässt sich durch dimensionslose Variablen ausdrücken. Zu diesem Zweck führen wir eine charakteristische Längenskala  $\lambda$  und Geschwindigkeitsskala  $\nu$  ein. Die Längenskala kann zum Beispiel die lineare Ausdehnung eines umflossenen Objektes sein, wie etwa der Radius  $R$  des Zylinders aus dem vorhergehenden Kapitel und die Geschwindigkeitsskala ist die Geschwindigkeit der Grundströmung  $v_\infty$ . Die dimensionslosen Variablen  $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}'$  und  $t'$  sind infolgedessen definiert durch

$$\vec{r} = \lambda \vec{r}', \quad \vec{v} = \nu \vec{v}', \quad t = \frac{\lambda}{\nu} t' \quad (10.9)$$

so dass die Navier-Stokes-Gleichung neu die Form

$$\frac{D \vec{v}'}{Dt'} = -\vec{\nabla}' p' + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}'^2 \vec{v}' \quad (10.10)$$

annimmt, wobei  $p/\rho = \nu^2 p'$  und die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho \nu \lambda}{\eta} \quad (10.11)$$

ist, die das Verhältnis zwischen Trägheitskraft und Reibungskrafts darstellt. Die Trägheitskraft entspricht der kinetischen Energie pro Längeneinheit  $\rho \nu^2 / \lambda$  und die Reibungskraft  $\eta \nu / \lambda^2$  ( $\sim \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}$ ). Damit hat die Reynolds-Zahl die Funktion abzuschätzen, ob Reibung oder kinetische Energie wichtiger sind. Wenn die Reibungskräfte dominieren, finden wir *laminare* Strömungen, so dass sich benachbarte Schichten geordnet nebeneinander bewegen.

## 10.2 Hagen-Poiseuille'sche laminare Strömung

Die Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit in einem Rohr vom Radius  $R$  ohne Volumenkräfte liefert ein einfaches erstes Beispiel für die Anwendung der Navier-Stokes-Gleichung. Für die stationäre Strömung gilt:

$$\rho = \text{konst.}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{F} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (10.12)$$

was auf die vereinfachte Navier-Stokes-Gleichung führt,

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (10.13)$$

Wir führen zylindrische Koordinaten ein  $(r, \phi, z)$  und setzen als Randbedingung an, dass  $\vec{v} = 0$  für  $r = R$ . Um eine solche stationäre Strömung aufrecht zu erhalten, benötigen wir eine Druckdifferenz entlang der Röhre, sonst würde die Flüssigkeit wegen der inneren Reibung allmählich zum Stillstand kommen.

Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{und} \quad v_z = v_z(r) \quad (10.14)$$

Damit ist sofort klar, dass  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0$  und folglich

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_z \quad (10.15)$$

Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  folgt auch aus

$$\vec{\nabla} p = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 p = 0 . \quad (10.16)$$

Weil  $p$  nur von  $z$  abhängt, finden wir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = p' = \text{konst.} \quad (10.17)$$

und die Navier-Stokes-Gleichung schreibt sich dann:

$$p' = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \Rightarrow \quad v_z(r) = -\frac{p'}{4\eta} (R^2 - r^2) \quad (10.18)$$

Die Schubspannung auf die Wand längs des Rohres ist

$$\sigma_{rz} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{p'}{2} R , \quad (10.19)$$

die Massenströmung  $Q$  ist

$$Q = \rho \int d^2x v_z = 2\pi\rho \int_0^R r v_z dr = -\frac{\pi p' \rho}{8\eta} R^4 \quad (10.20)$$

und die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}_z$  ist

$$\bar{v}_z = \frac{Q}{\rho\pi R^2} = -\frac{p' R^2}{8\eta} = \frac{1}{2} v_z(r=0) , \quad (10.21)$$

( $p' < 0 \Rightarrow v_z > 0$ ). Die Schubspannung kann auch als Kraft pro Längeneinheit entlang des Rohres aufgefasst werden:

$$K_z = -p' \pi R^2 = 8\pi\eta \bar{v}_z . \quad (10.22)$$

Vergleichen wir nun noch die Dissipation wie sie aus (10.8) folgt. Die laminare Strömung (10.18) hat eine endliche (ringförmige) Wirbeldichte  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\vec{e}_\phi \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{p' r}{2\eta} \vec{e}_\phi , \quad (10.23)$$

das in (10.8) eingesetzt ergibt (pro Längeneinheit des Rohres):

$$\frac{d}{dt} \int \rho \epsilon d^2x = -\eta \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi \vec{\Omega}^2 = -\frac{\pi p'^2 R^4}{8\eta} = K_z \bar{v}_z . \quad (10.24)$$

Dies entspricht gerade der Verlustleistung pro Längeneinheit.

Im Falle  $\eta = 0$  (Euler-Gleichung) ist das transverse Profil der Strömung nicht bestimmt. Wenn wir aber zusätzlich annehmen, dass die Flüssigkeit wirbelfrei ist, dann gilt  $\vec{v} = (0, 0, v_z)$  unabhängig von  $x$  und  $y$ .

Die Hagen-Poiseuille'sche Lösung entspricht einer laminaren Strömung. Wenn wir jedoch Reynolds-Zahl grösser werden lassen, dann findet oberhalb einer kritischen Grösse,  $Re \geq 10^3$  ein Übergang zu einer turbulenten Strömung statt. Damit erhöht sich der Widerstand des Flusses drastisch. Es gibt von Blasius eine empirische Beziehung zwischen  $p'$  und  $\bar{v}_z$  in diesem Bereich:

$$p' = 0.1582 \frac{\eta^{1/4} \rho^{3/4}}{(2R)^{5/4}} \bar{v}_z^{7/4} . \quad (10.25)$$

### 10.3 Stokes Widerstandsgesetz

Im Gegensatz zum idealen Fluidum findet man, dass ein viskoses Fluidum eine Mitschleppkraft auf einen Körper in der Fluidumströmung ausübt. Um dies zu zeigen, betrachten wir eine Kugel vom Radius  $R$ , die einer Strömung der Grundgeschwindigkeit  $\vec{v}^\infty$  ausgesetzt wird. Die Strömung sei stationär und es seien auch keine äusseren Kräfte vorhanden. Aus der Navier-Stokes-Gleichung finden wir

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (10.26)$$

mit den Randbedingungen

$$\vec{v}(\vec{r})|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{v}^\infty \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{r})|_{r=R} = 0 \quad (10.27)$$

d.h. das Fluidum haftet an der Kugel. Wenn die Reynolds-Zahl sehr klein ist,  $Re \ll 1$ , dann dürfen wir den Term  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  gegenüber dem Reibungsterm  $\eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}$  vernachlässigen:

$$\frac{\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}{\eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}} \sim \frac{\rho \nu^2 / \lambda}{\eta \nu / \lambda^2} = Re \ll 1 \quad (10.28)$$

Die resultierenden Gleichungen lauten dann

$$\vec{\nabla} p = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (10.29)$$

Wir können nun die Rotation ( $\vec{\nabla} \times$ ) auf die erste Gleichung anwenden und erhalten

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}^2 \vec{v} = 0 \quad (10.30)$$

wofür sich folgende Lösung abzeichnet:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi + \vec{v}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{v}_2 = 0 \quad (10.31)$$

Zur Lösung  $\vec{v}_2$  ist zu bemerken, dass hier die Richtung der Geschwindigkeit eine Rolle spielt. Da wir die Grundströmung  $\vec{v}^\infty$  als ausgezeichnete Richtung kennen, setzen wir an

$$\vec{v}_2 = \vec{v}^\infty g(r) \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla}^2 g(r) = 0 \quad (10.32)$$

wobei  $g(r)$  rotationssymmetrisch ist und ausserhalb der Kugel gilt. Die relevante Lösung ist  $g(r) = a/r$ :

$$\vec{v}_2 = \vec{v}^\infty \frac{a}{r} \quad (10.33)$$

Nun setzen wir den kompletten Ansatz (10.31) in  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  ein und erhalten die Gleichung:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_2 = \vec{\nabla}^2 \Phi - a \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}^\infty}{r^3} = 0 \quad (10.34)$$

Diese Gleichung lösen wir mit dem Ansatz

$$\Phi = \vec{v}^\infty \cdot \vec{r} f(r) \quad (10.35)$$

wobei  $f(r)$  nur vom Radius  $r$  abhängt. Eingesetzt in (10.34) erhalten wir die Gleichung

$$f'' + \frac{4}{r} f' = \frac{a}{r^3}, \quad (10.36)$$

die wir mit dem Ansatz  $f = a_1 r^n + a_2/r$  lösen. Einsetzen in (10.36) ergibt, dass  $n = 0$  und  $-3$  erlaubt sind. Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung

$$f(r) = A + \frac{B}{r^3} - \frac{a}{2r}. \quad (10.37)$$



Die freien Parameter  $A, B$  und  $a$  erlauben uns nun die Randbedingungen zu erfüllen. Das Geschwindigkeitsfeld ist

$$\vec{v} = \vec{v}^\infty f(r) + (\vec{v}^\infty \cdot \vec{r}) f'(r) \frac{\vec{r}}{r} + a \frac{\vec{v}^\infty}{r} \quad (10.38)$$

mit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r f'(r) = 0 \quad (10.39)$$

und bei  $r = R$

$$f(R) + \frac{a}{R} = 0 \quad \text{und} \quad f'(R) = 0. \quad (10.40)$$

Damit bestimmen wir

$$A = 1 \quad B = -\frac{R^3}{4} \quad \text{und} \quad a = -\frac{3}{2}R \quad (10.41)$$

und erhalten

$$\vec{v} = \vec{v}^\infty \left( 1 - \frac{R^3}{4r^3} - \frac{3R}{4r} \right) + (\vec{v}^\infty \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{3R}{4} \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \quad (10.42)$$

Mit Hilfe von (10.29) finden wir für den Druck

$$p = p_0 + \eta \vec{\nabla}^2 \Phi = p_0 - \frac{3\eta R}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}^\infty}{r^3} \quad (10.43)$$

Nun wenden wir uns der an der Kugel angreifenden Kraft zu, die wir mittels des Spannungstensors bestimmen:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \vec{\nabla}^2 v_i = -\eta \vec{\nabla}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \eta \vec{\nabla}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + a \eta v_i^\infty \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = a \eta v_i^\infty \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r}. \quad (10.44)$$

Die Kraft erhalten wir durch das Integral über das Kugelvolumen  $V$

$$K_i = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (10.45)$$

so dass

$$\vec{K} = a \eta \vec{v}^\infty \int_V \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} dV = a \eta \vec{v}^\infty \int_{\partial V} \vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot d\vec{f} = -a \eta \vec{v}^\infty \int_{\partial V} \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi a \eta \vec{v}^\infty. \quad (10.46)$$

Wenn wir  $a = -3R/2$  einsetzen, dann ergibt sich

$$\vec{K} = 6\pi \eta R \vec{v}^\infty, \quad (10.47)$$

die Reibungskraft, die linear von der Geschwindigkeit, dem Radius und der Reibungskonstante abhängt. Diese Rechnung wurde unter der Annahme, dass die Reynolds-Zahl klein ist, durchgeführt. Daher kann man auch als Entwicklung in  $Re$  Korrekturen angeben:

$$\vec{K} = 6\pi \eta R \vec{v}^\infty \left( 1 + \frac{3}{8} Re \right) \quad (10.48)$$

Da  $Re = \rho R |\vec{v}^\infty| / \eta$  auch von der Geschwindigkeit und Radius abhängt, darf  $\vec{v}^\infty$  nicht zu gross sein, um die Näherung nicht zu gefährden. Nehmen wir als Kriterium  $Re < 10^{-1}$ , dann darf in Wasser bei einer Geschwindigkeit von  $10^{-3} \text{ ms}^{-1}$  darf der Kugelradius nicht grösser als  $10^{-4} \text{ m}$  sein.

## 10.4 Prandtl'sche Grenzschicht

Die Strömung von realen Fluida ist im Allgemeinen eine äusserst komplexe Angelegenheit. Um 1904 führte Ludwig Prandtl ein Konzept ein, das es erlaubt, Strömungsprobleme um Körper von einem neuen Gesichtspunkt zu betrachten, und das auch technisch bei deren Behandlung zu gewissen Erleichterungen führte.<sup>1</sup> Prandtl's Idee war, dass der Effekt der Oberflächenhaftung auf einem Körper das Fluidum nur innerhalb einer gewissen Schichtdicke beeinflusst, während ausserhalb dieser Schicht das Fluidum sich im Wesentlichen nicht-viskos verhält. Diesen Aspekt wollen wir hier diskutieren.

Betrachten wir die Navier-Stokes-Gleichung eines inkompressiblen Fluidums in der dimensionsloser Formulierung:

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{v}}{Dt} &= -\vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{v} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0\end{aligned}\tag{10.49}$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{auf dem Rand.}$$

Im Grenzfall grosser Reynolds-Zahlen könnte man versucht sein, die Strömung einfach durch die Euler'schen Gleichungen zu beschreiben. Wir dürfen jedoch den letzten Term der Navier-Stokes-Gleichung nicht einfach vernachlässigen. Insbesondere müssen die Randbedingungen erfüllt sein, und es stellt sich heraus, dass

$$\frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } Re \rightarrow \infty\tag{10.50}$$

Betrachten wir nun eine Wand (Abb.10.1) mit einer Grundströmung parallel dazu. "Genügend" weit weg von der Wand sieht die Strömung nahezu wie diejenige eines idealen Fluidums aus, d.h. eine uniforme laminare Strömung, für die die Reibung keine wichtige Rolle spielt. In der Nähe der Wand gibt es jedoch eine *Grenzschicht* innerhalb derer die Geschwindigkeit auf Null absinken muss. Diese Schicht der lokalen Dicke  $\delta$  hängt schwach von  $x$  ab.

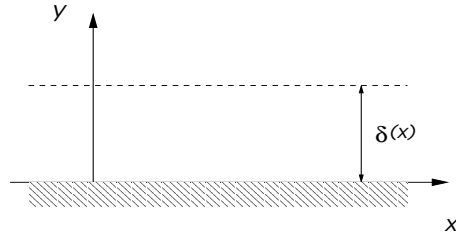


Abb.10.1

---

**Wirbelschicht:** Eine transverse Änderung einer laminaren Strömung führt auf eine Wirbelschicht. Die in der Situation von Abb. 10.1 vorausgesetzten Randbedingungen

$$\vec{v} = \begin{cases} (v_0, 0) & y \rightarrow \infty \\ (0, 0) & y = 0 \end{cases}\tag{10.51}$$

werden durch folgendes Geschwindigkeitsprofil erfüllt werden (keine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung):

$$\vec{v} = \begin{cases} (v_0, 0) & y > y_0 \\ \left(v_0 \frac{y}{y_0}, 0\right) & 0 \leq y \leq y_0 \end{cases}\tag{10.52}$$

---

<sup>1</sup>Historischer Übersichtsartikel: "Ludwig Prandtl's Boundary Layer" von J.D. Anderson in Physics Today, December 2005, S. 42-48.)

Dies bedeutet, dass eine Wirbelschicht der Dicke  $y_0$  auf der Wand liegt, deren Wirbeldichte nur eine  $z$ -Komponente hat:

$$\Omega = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = \begin{cases} 0 & y > y_0 \\ \frac{v_0}{y_0} & 0 \leq y \leq y_0 \end{cases} \quad (10.53)$$

Im idealen Fluidum ist diese Form stationär. Nun stellt sich die Frage, wie sich dieser Zustand in der Zeit entwickelt, wenn Viskosität vorhanden ist. Dazu betrachten wir die Gleichung für die Wirbeldichte, indem wir die Rotation der Navier-Stokes-Gleichung bilden. Dabei verweisen wir auch auf die Diskussion in Abschnitt 7.3.

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{\Omega} . \quad (10.54)$$

Diese Gleichung reduziert sich im obigen Falle ( $\vec{\Omega} \parallel z$ ) auf:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \eta \vec{\nabla}^2 \Omega = v_x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (10.55)$$

Es ist offensichtlich, dass für  $\eta = 0$  die Wirbelschicht (10.53) eine stationäre Lösung dieser Gleichung ist. Die linke Seite entspricht jedoch für  $\eta \neq 0$  einer Diffusionsgleichung, so dass eine endliche "Diffusionskonstante" auftaucht und die (laminare) Wirbelschicht nicht mehr stationär sein kann. Es findet Diffusion statt, so dass die Wirbelschicht in einer charakteristischen Weise zerfließt.

Die Wirbelschicht beschreibt eine Grenzschicht auf der Wand entsprechend dem Prandtl'schen Konzept. Im Folgenden werden wir diese Grenzschicht nicht durch die "Diffusion" beschreiben, sondern durch eine stationäre Form an einer dünnen Platte die sich von  $x = 0$  bis  $x = \infty$  erstreckt. Während in der Diffusionsgleichung das Zerfließen zu einer Zunahme der charakteristischen Länge  $\delta$  ("Ausdehnung der Wirbelschicht" entlang  $y$ -Richtung) mit der Quadratwurzel der Zeit  $t$  erfolgt ( $\delta \propto \sqrt{t}$ ), wird in der stationären Form die Zeit durch  $x$  ( $\approx ut$ ) ersetzt, so dass wir finden werden  $\delta \propto \sqrt{x}$ . Diese einfache Betrachtung wird nun etwas genauer diskutiert werden.

Wir betrachten folgende Anordnung. Eine unendlich dünne Platte sei definiert durch  $y = 0$  und  $x \geq 0$ . Von links ( $x = -\infty$ ) her trifft eine uniforme laminare Strömung in  $x$ -Richtung auf diese Platte. Wir wollen nun die Struktur der stationären Strömung im Bereich  $x > 0$  betrachten.

Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  erfüllt die stationären Navier-Stokes-Gleichungen:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (10.56)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (10.57)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (10.58)$$

und die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} v_x = v_y = 0 & \quad \text{bei } y = 0 \\ (v_x, v_y) \rightarrow (u(x), 0) & \quad \text{für } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (10.59)$$

Die Änderung aller Größen ist gross entlang  $y$ -Richtung, da die charakteristische Länge  $\delta$  kurz im Vergleich zur charakteristischen Länge entlang der  $x$ -Achse ist, die wir als Einheitslänge annehmen (Abb. 10.1, 10.2). Daher werden Änderungen entlang  $x$  als schwach betrachtet. Die Hauptströmungsrichtung ist  $x$ , so dass  $v_x \gg v_y$ . Dies ergibt sich auch aus (10.58):  $v_y \sim \delta v_x$ . Eine einfache Betrachtung des dominanten Anteils in  $\vec{\nabla}^2 \vec{v}$  ( $\mathcal{O}(\delta^{-2})$ ) in (10.50) ergibt die Skalierung

$\delta \propto Re^{-1/2}$ . Wir finden in Gleichung (10.56), dass

$$\underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{O(1)} + \underbrace{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{O(1)} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}_{O(\delta^{-2})} \right) \quad (10.60)$$

und in (10.57), dass

$$\underbrace{v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}}_{O(\delta)} + \underbrace{v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{O(\delta)} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}_{O(\delta)} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}_{O(\delta^{-1})} \right). \quad (10.61)$$

Mit dieser Beziehung folgt, dass  $\partial p / \partial y \ll \partial p / \partial x$ , so dass wir die  $y$ -Abhängigkeit des Druckes vernachlässigen:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x, y) \rightarrow p(x) \quad (10.62)$$

Dies ergibt nun eine nützliche Beziehung, wenn wir die Bernoulli-Gleichung verwenden. Genügend weit weg von der Wand ist die Strömung identisch mit der Grundströmung  $(u(x), 0)$  und es gilt  $p + u^2/2 = konst.$ , woraus folgt ( $p$  unabhängig von  $y$ ):

$$\frac{dp}{dx} = -u \frac{du}{dx}. \quad (10.63)$$

Dies wird nun in (10.56) eingesetzt, um die sogenannten Prandtl-Gleichungen zu erhalten:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10.64)$$

wobei wir nur Terme der führenden Ordnung mitgenommen haben. Dazu kommen die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen. Die Prandtl-Gleichungen benötigen zusätzlich die Information, wie das Strömungsprofil einem "Anfangspunkt"  $x_0 = 0$  aussieht:  $v_x(x_0 = 0, y) = u_0(y)$ .

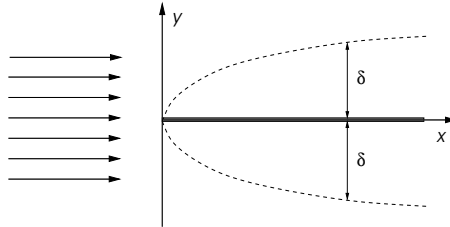


Abb.10.2

Wir betrachten nun das Beispiel einer dünnen Halbsplatte, die entlang der Grundströmung ausgerichtet ist (Abb. 10.2). Die Grundströmung ist gegeben durch  $u(x) = v_0 = konst.$ . Die Kontinuitätsgleichung erlaubt es uns eine Stromfunktion  $\psi$  einzuführen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.65)$$

Damit wird die Gleichung (10.64) folgendermassen ausgedrückt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (10.66)$$

Das Anfangsprofil wird bei  $x = 0$  definiert durch

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{x=0} = v_0. \quad (10.67)$$

Weiter gelten die Randbedingungen bei  $y \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow v_0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (10.68)$$

und bei  $y = 0$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi = 0 . \quad (10.69)$$

Aus den obigen Gleichungen ergibt sich das Skalierverhalten:

$$\psi(x, y) = \delta \psi(\delta^{-2}x, \delta^{-1}y) \quad (10.70)$$

wobei  $\delta$  grundsätzlich beliebig gewählt werden kann. Das bedeutet, dass (10.66) sich nicht ändert, wenn wir die Reskalierung  $\psi \rightarrow \delta \psi$ ,  $x \rightarrow \delta^{-2}x$  und  $y \rightarrow \delta^{-1}y$  durchführen. Wir definieren nun

$$\delta = \delta(x) := \sqrt{\frac{x}{v_0 Re}} \quad \Rightarrow \quad \psi(x, y) = v_0 \delta(x) f(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{y}{\delta(x)} \quad (10.71)$$

Die Ableitungen sind folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_0 \frac{d\delta}{dx} (f - \xi f') , & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -v_0 \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \xi f'' \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= v_0 f' , & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{v_0}{\delta} f'' \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{v_0}{\delta^2} f''' \end{aligned} \quad (10.72)$$

und führen mit (10.66) auf

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0 \quad \text{mit} \quad f'(\infty) = 1 , \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad (10.73)$$

Daraus ergibt sich das Geschwindigkeitsprofil:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_0 f'(\xi) \quad \text{wobei} \quad \xi = y \sqrt{\frac{v_0 Re}{x}} \quad (10.74)$$

Die Differentialgleichung (10.73) kann nicht analytisch gelöst werden, sondern muss numerisch angegangen werden. In den Grenzbereichen ergeben sich die Verhalten

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^5) & \xi \rightarrow 0 \\ \xi - \beta & \xi \rightarrow \infty \end{cases} \quad (10.75)$$

mit  $\alpha = 0.332$  und  $\beta = 1.72$ .

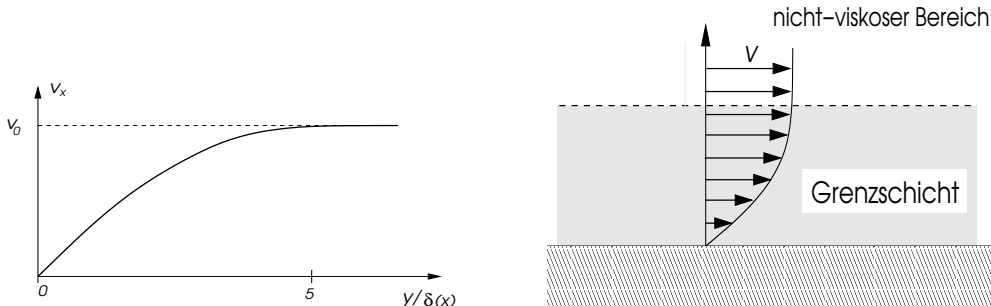


Abb.10.3

Die Reibungskraft pro Flächeneinheit der Oberfläche ist gegeben durch:

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \eta \sqrt{\frac{v_0^3 Re}{x}} f''(0) = 0.332 \eta \sqrt{\frac{Re v_0^3}{x}}. \quad (10.76)$$

Wir können auch die sogenannte Verdrängungsdicke definieren:

$$v_0 \delta^* = \int_0^\infty (v_0 - v_x) dy = \sqrt{\frac{x v_0}{Re}} \int_0^\infty (1 - f'(\xi)) d\xi = \sqrt{\frac{x v_0}{Re}} \{\xi - f(\xi)\} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = \beta \sqrt{\frac{x v_0}{Re}} \quad (10.77)$$

Die Dicke  $\delta^*$  ist die Dicke, um die die laminar strömende Flüssigkeit effektiv von der Platte weggedrückt wird aufgrund der reibungsbedingten Verlangsamung an der Oberfläche. Diese Verdrängung bewirkt bemerkenswerter Weise, dass die  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit selbst für  $y \rightarrow \infty$  nicht verschwindet, sondern

$$v_y|_{y \rightarrow \infty} = v_0 \frac{\delta(x)}{2x} [\xi f' - f] \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = \beta v_0 \frac{\delta(x)}{2x} = v_0 \frac{\delta^*(x)}{2x} \quad (10.78)$$

beträgt, wobei wir beachten müssen, dass diese Näherung nur für  $x \gg \delta$  gültig ist.

## 10.5 Couette-Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern

Die Strömung eines viskosen Fluidums zwischen zwei konzentrischen, rotierenden Zylindern. Der innere (äussere) Zylinder mit Radius  $R_1$  ( $R_2$ ) rotiere mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ).

### 10.5.1 Laminare Strömung

Wir nehmen an, dass das Geschwindigkeitsfeld azimuthal ist und schreiben in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{v}(\vec{r}) = v(r) \vec{e}_\phi \quad (10.79)$$

Es gilt daher, dass

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{v(r)}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} v(r) \vec{e}_\phi = -\frac{v(r)^2}{r} \vec{e}_r \quad (10.80)$$

radial ist, unter Verwendung von  $\partial \vec{e}_\phi / \partial \phi = -\vec{e}_r$ . Ferner ist

$$\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \left\{ \frac{d^2 v(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv(r)}{dr} - \frac{v(r)}{r^2} \right\} \vec{e}_\phi \quad (10.81)$$

azimutal. Beachte, dass  $\partial_\phi^2 \vec{e}_\phi = -\vec{e}_\phi$ . Der Druck wird als  $p(\vec{r}) = p(r)$  angenommen. Damit können wir die Navier-Stokes-Gleichung in Radial- und Azimutal-Teil zerlegen.

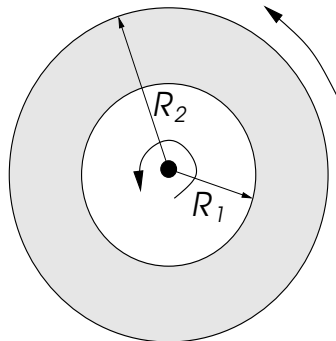


Abb.10.4

$$-\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r} & \text{radial} \\ \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r^2} & \text{azimutal} \end{cases} \quad (10.82)$$

Die Lösung der azimutalen Differentialgleichung ist

$$v(r) = ar + \frac{b}{r} \quad (10.83)$$

mit den Randbedingungen:  $v(R_1) = \omega_1 R_1$  und  $v(R_2) = \omega_2 R_2$ . Damit folgt sofort:

$$a = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad b = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (10.84)$$

Der Druck berechnet sich aus der radialen Gleichung,

$$p(r) = p(R_1) + \rho \int_{R_1}^r \frac{v(r')^2}{r'} dr' = \frac{a^2}{2} (r^2 - R_1^2) + ab \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{b^2}{4} \left( \frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{r^4} \right) \quad (10.85)$$

Diese Lösung beschreibt die laminare Strömung zwischen den beiden Zylindern und ist stabil, falls die Reynolds-Zahl genügend klein ist.

### 10.5.2 Taylor-Couette-Instabilität

G.I. Taylor hat 1923 festgestellt, dass die laminare Strömung gegen eine axialsymmetrische Störung instabil ist. Um dies konzeptuell zu illustrieren, betrachten wir den Fall, dass  $\omega_1 > 0$  und  $\omega_2 = 0$ . Die Reynolds-Zahl ist dann

$$Re = \frac{\rho \omega_1 R_1 d}{\eta} \quad (10.86)$$

wobei  $\omega_1 R_1$  die Geschwindigkeit an der Oberfläche des inneren Zylinders ist und  $d = R_2 - R_1$ , die charakteristische Längenskala. Nach Kelvin gilt für die Zirkulation im Zylinder

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi \omega r^2. \quad (10.87)$$

Nun betrachten wir zwei radiale Schichten A und B bei den Radien  $r_A$  und  $r_B$  ( $> r_A$ ) mit ihren entsprechenden Zirkulationen  $\Gamma_A$  bzw.  $\Gamma_B$ . Die Winkelgeschwindigkeiten sind dann  $\omega_i = \Gamma_i / 2\pi r_i^2$  ( $i = A, B$ ). Wir nehmen nun an, dass wir die beiden Schichten vertauschen können, ohne je ihre Zirkulation zu verändern (Drehimpulserhaltung). Damit ändern wir den Anteil der kinetischen Energie der beiden Schichten ( $E_{kin} = v_\phi^2 / 2 = \Gamma^2 / 8\pi^2 r^2$ ):

$$E_{vorher} = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\Gamma_A^2}{r_A^2} + \frac{\Gamma_B^2}{r_B^2} \right) \quad \rightarrow \quad E_{nachher} = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{\Gamma_B^2}{r_A^2} + \frac{\Gamma_A^2}{r_B^2} \right) \quad (10.88)$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_{nachher} - E_{vorher} = \frac{1}{8\pi^2} (\Gamma_B^2 - \Gamma_A^2) \left( \frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2} \right) \approx \frac{1}{4\pi^2} \frac{d\Gamma^2}{dr} \frac{\tilde{d}^2}{r_A^3}$$

wobei wir annehmen, dass  $r_B = r_A + \tilde{d}$  mit  $0 < \tilde{d} \ll r_A$ . Daraus folgt, dass die Vertauschung der beiden Schichten einen Gewinn an kinetischer Energie abwirft, falls

$$\frac{d\Gamma^2}{dr} < 0. \quad (10.89)$$

Für die laminare Couette-Strömung gilt, dass  $\Gamma(r) = 2\pi(ar^2 + b)$ . Rayleigh (1888) schloss daraus, dass die Couette-Strömung eines idealen Fluidums unter dieser Bedingung instabil ist. Für die laminare Couette-Strömung gilt, dass  $\Gamma(r) = 2\pi(ar^2 + b)$ . Mit der obigen Bedingung  $\omega_2 = 0$ , folgt

$$\frac{d\Gamma^2}{dr} = -16\pi^2 \frac{R_1^2 \omega_1 r}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\omega_1 R_1^2 (R_2^2 - r^2)}{R_2^2 - R_1^2} < 0 \quad (10.90)$$

da  $r < R_2$ . Damit wird diese Couette-Strömung instabil. (Im umgekehrten Fall, dass der innere Zylinder in Ruhe und der äussere rotierend ist ( $\omega_1 = 0$  und  $\omega_2 \neq 0$ ) ist die Couette-Strömung entsprechend dem obigen Kriterium stabil.)

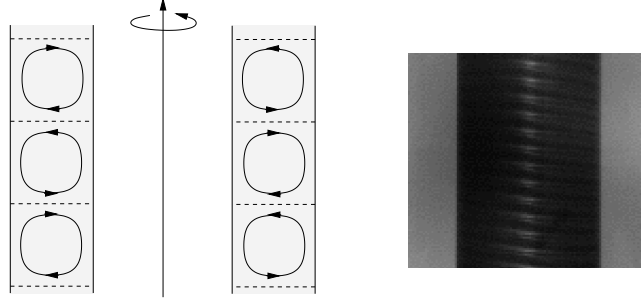


Abb.10.5

Für viskose Fluida wird die Instabilität jedoch unterdrückt, solange die Reynolds-Zahl genügend klein ist, d.h.  $\omega_1$  genügend klein. Der Gewinn der kinetischen Energie muss abgewägt werden gegenüber der Dissipation aufgrund der Reibungskraft. Eine einfache Argumentation kann in folgender Weise gegeben werden. Die Reibungskraft auf eine Fluid-Schicht, die sich radial zwischen den beiden Zylindern bewegt, ist

$$F_R \sim \eta \frac{v}{d^2} \quad \text{wobei} \quad v \sim \frac{d}{t} . \quad (10.91)$$

Wir gehen nun davon aus, dass  $t \ll \tau$ , wobei  $\tau$  die Diffusionszeit für die gleiche Strecke ist:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sim \eta \nabla^2 v \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{\tau} \sim \eta \frac{1}{d^2} \quad \Rightarrow \quad \tau \sim \frac{d^2 \rho}{\eta} . \quad (10.92)$$

Die Bedingung  $t \ll \tau$  ist notwendig, um das Rayleigh'sche Argument des Gewinns der kinetischen Energie aufrecht zu erhalten. Denn es basiert auf der Erhaltung der Zirkulation in einer Schicht (Drehimpuls), was in einem stark viskosen Fluidum nur über verhältnismässig kurze Zeiten möglich ist. Wenn wir nun die Zentrifugalkraft  $F_Z$  des Radialschichte bei  $R_1$  mit der Reibungskraft vergleichen, finden wir als grobes Instabilitätskriterium

$$F_Z \sim \rho \omega_1^2 R_1 > F_R \sim \eta \frac{1}{dt} \gg \eta \frac{1}{d\tau} \sim \frac{\eta^2}{d^3 \rho} \quad (10.93)$$

Wir definieren damit nun die sogenannte Taylor-Zahl:

$$T = \frac{\rho^2 \omega_1^2 R_1 d^3}{\eta^2} \quad (10.94)$$

Für  $T > T_{krit}$  ist die laminare Strömung instabil gegen radiale Bewegungen:  $T_{krit} \approx 1700 \gg 1$ . Die Instabilität führt das System über in eine axialsymmetrische Strömung mit einem horizontalen Wirbelringmuster (Abb.10.5).



# Kapitel 11

## Turbulenz

Unter stationären Bedingungen können viskose Fluida stationäre Strömungen aufweisen, die sich als Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen ergeben. Diese Lösungen existieren im Prinzip für beliebige Viskositäten. Die Frage stellt sich jedoch, wie stabil solche Lösungen gegen kleine Störungen sind. Je kleiner die Viskosität oder je grösser die Reynolds-Zahl ist, desto eher kommt es zur Instabilität, aus der sich Turbulenz entwickeln kann. Wie schon früher diskutiert, entspricht die Reynolds-Zahl dem Verhältnis zwischen Trägheits- und Reibungskraft. Turbulenz ist ein Effekt, der davon profitiert, dass die Trägheit oder die kinetische Energie über die Dissipation durch Reibung dominiert. Starke Reibung versucht alle Bewegung auf das Notwendige zu reduzieren, d.h. nur die durch äussere Energiezufuhr erzwungene Strömung wird realisiert. Trägheit hingegen versucht einmal angeregte Bewegungen beizubehalten unter der Erhaltung der kinetischen und potentiellen Energie.

Wenn wir die Strömung um einen Objekt betrachten, dann gibt es verschiedene Stadien auf dem Weg von der laminaren Strömung bei kleinen Reynoldszahlen zur unregelmässigen Bewegung der turbulenten Strömung (Abb. 11.1).

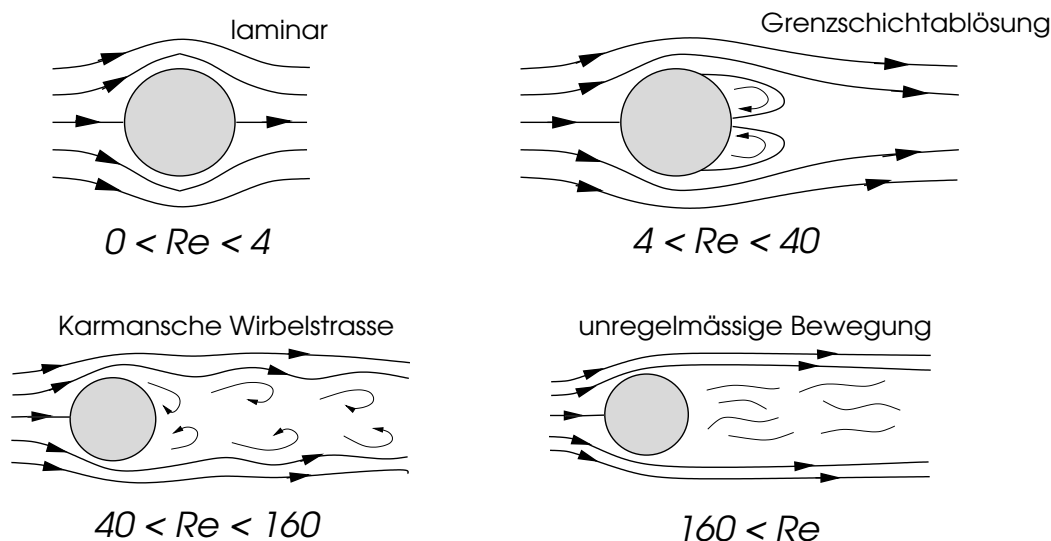


Abb.11.1

Die Vergrösserung der Reynoldszahl (Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit) führt zunächst zur Ablösung der Prandtl'schen Grenzschicht (Wirbelschicht) von der Oberfläche, so dass sich erste Wirbel hinter dem Zylinder bilden können. Man nennt den Bereich der nicht-laminaren Strömung "Totwasser". Diese Region löst sich schliesslich bei weiterer Erhöhung von  $Re$  ab und lässt hinter dem Zylinder eine charakteristische Wirbelkonfiguration entstehen, die unter dem Namen Karmansche Wirbelstrasse bekannt ist. Diese nahezu geordneten Wirbel lösen sich auf, wenn  $Re$  weiter ansteigt. Es entwickelt sich dann eine Region völlig unregelmässiger und

nicht-stationärer Bewegung. Dies ist dann eine ausgebildete Turbulenz, die hier an die laminare Strömung angrenzt. Turbulenz entwickelt sich um Objekte herum aus, die die laminare Strömung umleiten und aufgrund der Oberflächenreibung Grenzschichten bilden, in denen das Geschwindigkeitsprofil sich relative rasch ändert und Wirbeldichte ausbildet.

## 11.1 Stabilität der laminaren stationären Strömung

Der Übergang von der einfachen laminaren zur turbulenten Strömung entspricht einer Instabilität. Grosse Viskosität (kleine  $Re$ ) bedeutet, dass jede Abweichung von der laminaren Strömung rasch gedämpft wird. Die Instabilität tritt dann auf, wenn diese Dämpfung nicht mehr ausreicht. Wir gehen nun davon aus, dass wir für gegebene äussere Parameter eine stationäre laminare Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen besitzen, d.h.  $\vec{v}_0$  und  $p_0$  erfüllen die Gleichung:

$$(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{v}_0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad (11.1)$$

Nun betrachten wir eine kleine Abweichung  $\vec{v}_1$  und  $p_1$ . Wir setzen also  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$  und  $p = p_0 + p_1$  in die Navier-Stokes-Gleichung ein und entwickeln bis zu linearer Ordnung in den Störungen:

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla} p_1}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{v}_1, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0. \quad (11.2)$$

Dazu kommen die Randbedingung  $\vec{v}_1|_{\text{Rand}} = 0$  (beachte:  $\vec{v}_0$  schliesst alle nicht-verschwindenden Geschwindigkeitskomponenten am Rande ein). Die allgemeine Lösung ist die Überlagerung von Termen mit Zeitabhängigkeiten der Form  $\propto e^{-i\omega t}$ . Die Frequenzen  $\omega$  ergeben sich als Eigenwerte aus dem linearen homogenen Randwertproblem, dessen Lösung im allgemeinen kompliziert ist. Die Stabilität der stationären Strömung hängt nun davon ab, welches Vorzeichen der Imaginärteil von  $\omega$  hat. Falls  $\text{Im}\{\omega\} < 0$  für alle Eigenwerte, dann ist die stationäre laminare Strömung  $\vec{v}_0$  stabil. Dies ist der Fall, wenn die Reynolds-Zahl genügend klein ist. Es gibt einen kritische Wert  $Re_{krit}$  bei dem der erste Eigenwert einen verschwindenden Imaginärteil hat. Für  $Re > Re_{krit}$  finden wir dann  $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$  mit  $\gamma_1 > 0$  ( $\gamma_1 = 0$  für  $Re = Re_{krit}$ ). Damit nimmt die entsprechende Störungsmoden in der Zeit exponentiell zu, gemäss

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = u(t) \vec{f}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad u(t) = u_0 e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t} \quad (11.3)$$

und  $\vec{f}$  eine komplexe Vektorfunktion. Obwohl hier formal  $u(t)$  exponentiell ansteigt, muss diese Lösung in der Praxis beschränkt sein, denn die linearisierte Version der obigen Gleichung für  $\vec{v}_1$  und  $p_1$  verliert schnell ihre Gültigkeit, so dass Terme höherer Ordnung mitgenommen werden müssen.

## 11.2 Instabilität und Energieübertrag

Wir untersuchen nun ein stark vereinfachtes, aber illustratives Modell einer nicht-stationären Störung, die sich einer laminaren Strömung überlagert. Wegen der Reibung muss ständig Energie von der Grundströmung auf diese Störung übertragen werden, weil sie sonst allmählich abklingen würden. Es ist daher interessant, die Energiebilanz zu untersuchen, woraus wir einfache "Bewegungsgleichungen" herleiten können.

Wir setzen  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$  in die Navier-Stokes-Gleichung ein. Dabei ist  $\vec{v}_0$  die stationäre Grundströmung und  $\vec{v}_1$  die zeitlich oszillierende Störung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \\ = -\vec{\nabla} P + \nu \vec{\nabla}^2 (\vec{v}_0 + \vec{v}_1), \end{aligned} \quad (11.4)$$

wobei  $P = p/\rho$  und  $\nu = \eta/\rho$ . Zusätzlich gilt  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$ . An den Rändern erfüllt  $\vec{v}_0$  die Randbedingungen, insbesondere enthält es den Ein-/Abfluss des Fluidums im betrachteten Gebiet  $G$ . Damit können wir  $\vec{v}_1$  überall am Rande Null setzen, i.e. die Störung ist auf ein Gebiet  $G'$  innerhalb des gesamten Volumens  $G$  beschränkt. In einer ersten Betrachtung nehmen wir an, dass  $G$  eine lange Röhre ohne Querschnittsveränderung ist. Dann ist die laminare Strömung vom Typ der Hagen-Poiseuille-Strömung mit  $\vec{v}_0 = (0, 0, v_0(x, y))$ . Dies hat zur Folge, dass der zweite Term der linken Seite von (11.4) verschwindet.

### 11.2.1 Stetige Instabilität

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit  $\vec{v}_0$  und führen eine Mittelung über eine Zeitperiode ein, die lang verglichen mit der Oszillation von  $\vec{v}_1$ , aber kurz im Vergleich zu den anderen Zeitskalen (die exponentiell anwachsenden oder abfallenden) ist. Dann bleiben in der Gleichung nur noch die Terme mit geraden Potenzen in  $\vec{v}_1$ . Wir integrieren nun über das ganze Gebiet  $G$  und erhalten

$$\frac{d}{dt} \int_G \frac{1}{2} \overline{\vec{v}_0^2} dV + \int_G \overline{\vec{v}_0 \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1} dV = - \int_G \overline{\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} P} dV - \nu \int_G \overline{\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}} dV \quad (11.5)$$

wobei  $\overline{\dots}$  die erwähnte zeitliche Mittelung bezeichnet. Wir schreiben damit die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} E_0 = \Pi - S - \nu D_0 \quad (11.6)$$

mit

$$E_0 = \int_G \frac{1}{2} \overline{\vec{v}_0^2} dV, \quad S = - \int_G \overline{v_{1i} v_{1j} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}} dV, \quad (11.7)$$

$$\Pi = - \int_G \overline{\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} P} dV, \quad D_0 = \int_G \overline{\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j}} dV.$$

Dabei entspricht  $E_0$  der kinetischen Energie der Grundströmung,  $D_0$  beschreibt die Reibung innerhalb der Grundströmung,  $\Pi$  bezeichnet die Energiezufuhr (Verlustleistung), um die Strömung aufrecht zu erhalten, und  $S$  die Energieübertragungsrate von der Grundströmung in die Störung.

Wir führen das Analoge für den Störungsteil durch, indem wir (11.4) mit  $\vec{v}_1$  multiplizieren, zeitlich mitteln und über das Volumen integrieren. Wir erhalten damit

$$\frac{d}{dt} E_1 = S - \nu D_1 \quad (11.8)$$

mit

$$E_1 = \int_G \frac{1}{2} \overline{\vec{v}_1^2} dV \quad \text{und} \quad D_1 = \int_G \overline{\left( \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_j} \right)^2} dV. \quad (11.9)$$

Die kinetischen Energie der Störung erhält nach (11.6) folgerichtig eine Energiezufuhr  $S$  von der Grundströmung und dissipiert Energie durch die eigene Reibung,  $D_1$ . Die Energiezufuhr für das ganze System geschieht dadurch, dass ein Druckgradient da ist.

Nun führen wir räumlich (und zeitlich) gemittelte Parameter als "Geschwindigkeiten" ein:

$$\frac{E_i}{V} = \frac{u_i^2}{2}, \quad \frac{S}{V} = s u_0 u_1^2, \quad \frac{D_i}{V} = d_i u_i^2, \quad \frac{\Pi}{V} = P' u_0 \quad (11.10)$$

wobei  $i = 0, 1$  und  $V$  bezeichnet das Volumen des Gebietes  $G$  und  $P'$  ist proportional zum Druckgradienten. Dies setzen wir in (11.6) und (11.8) und dividieren die erste Gleichung durch  $u_0$  und die zweite durch  $u_1$  und erhalten somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_0 &= P' - s u_1^2 - \nu d_0 u_0 \\ \frac{d}{dt} u_1 &= s u_0 u_1 - \nu d_1 u_1 \end{aligned} \quad (11.11)$$

Dies liefert ein stark vereinfachtes Gleichungssystem, um die Strömung zu diskutieren. Zunächst betrachten wir die stabile stationäre Lösung mit  $u_1 = 0$ . Um die erste Gleichung stationär zu halten, muss die rechte Seite verschwinden:

$$u_0 = \frac{P'}{\nu d_0}, \quad (11.12)$$

d.h. die mittlere Geschwindigkeit der Grundströmung wächst proportional zum Druckgradienten  $P'$ . Die Störung  $u_1$  ist exponentiell gedämpft, solange in der zweiten Gleichung  $su_0 - \nu d_1 < 0$ , d.h. der Effekt der Energiezufuhr ist kleiner als derjenige der Reibung. Wenn aber  $su_0 - \nu d_1 > 0$ , dann finden wir eine (exponentiell wachsende) Instabilität und eine neue "turbulente" Lösung muss gefunden werden. Der kritische Punkt ist gegeben durch

$$u_0 = u_m = \frac{\nu d_1}{s} = \frac{P'}{\nu d_0} \quad \Rightarrow \quad P'_c = \frac{\nu^2 d_1 d_0}{s}. \quad (11.13)$$

Wir suchen nun die neue stationäre Lösung für  $P' > P'_c$ . Diese finden wir sofort, indem wir die rechten Seiten in beiden Gleichungen von (11.11) Null setzen. Dies ergibt,

$$u_0 = \frac{\nu d_1}{s} \quad \text{und} \quad u_1 = \sqrt{\frac{P' - P'_c}{s}} = u_s \sqrt{\frac{P'}{P'_c} - 1} = u_s \sqrt{\frac{Re}{Re_{krit}} - 1} \quad (11.14)$$

mit  $u_s^2 = P'_c/s$ . Dies bedeutet, dass die Störung unter Erhöhung des Druckgradienten  $P'$  kontinuierlich von Null anwächst. Die Grundströmung hingegen wächst nicht mehr weiter, sondern bleibt konstant, da aus ihr die Energie, die in die turbulente Strömung abfließt, abgezogen wird (Abb.11.2). Dies würde auch bedeuten, dass der Nettofluss (proportional zu  $u_0$ ) durch das System in der turbulenten Situation nicht mehr in gleicher Weise mit dem Druckgradienten zunimmt. Ferner sehen wir auch, dass eine relative Umverteilung der gespeicherten kinetischen Energien stattfindet:

$$E_0 = \frac{1}{2}u_0^2 \quad \text{und} \quad E_1 = \frac{1}{2}u_1^2. \quad (11.15)$$

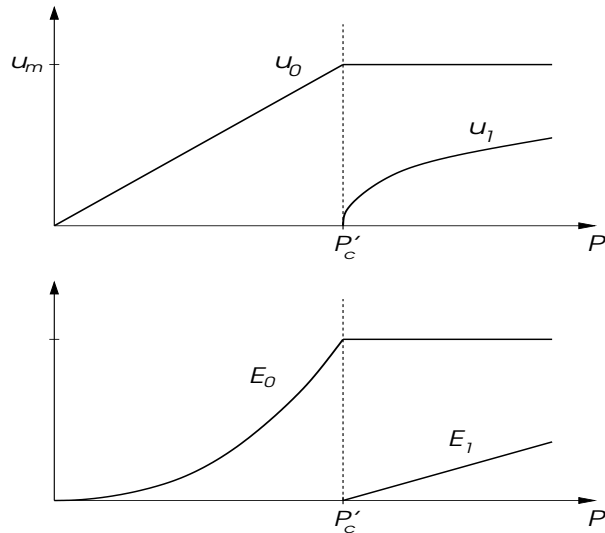


Abb.11.2

### 11.2.2 Unstetige Instabilität

Wir geben nun die Bedingung  $(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = 0$  auf. Dies wird erreicht, wenn wir zum Beispiel eine variable Querschnittfläche für das Rohr annehmen, etwa eine Erweiterung oder Verengung

des Rohres. Dadurch erhält die Gleichung (11.6) einen zusätzlichen Term

$$\frac{d}{dt}E_0 = \Pi - S - \nu D_0 - Q \quad (11.16)$$

wobei

$$Q = \frac{1}{2} \int_G \overline{(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0^2} dV = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \overline{\vec{v}_0 \vec{v}_0^2} d\vec{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{V} = -\alpha u_0^3. \quad (11.17)$$

Man beachte, dass  $\vec{v}_0$  den stationären (nicht oszillierenden) Anteil der Strömung bezeichnet. Damit wird das Gleichungssystem (11.11) neu geschrieben als

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_0 &= P' - s u_1^2 - \nu d_0 u_0 + \alpha u_0^2 \\ \frac{d}{dt}u_1 &= s u_0 u_1 - \nu d_1 u_1 \end{aligned} \quad (11.18)$$

Nun spielt das Vorzeichen von  $\alpha$  eine wichtige Rolle.

Falls  $\alpha < 0$ , dann wirkt der zusätzliche Term stabilisierend. Die analoge Lösungsstrategie, wie oben, ergibt einen grösseren kritischen Wert für den Druckgradienten,

$$P'_{c\alpha} = P'_{c0} \left\{ 1 - \alpha \frac{d_1}{d_0 s} \right\} \quad \text{mit} \quad u_1 = \sqrt{\frac{P' - P'_{c\alpha}}{s}}, \quad (11.19)$$

denn der zusätzlich Term wirkt dämpfend. Die turbulente Situation ist wieder durch eine konstante Grundströmung  $u_0 = \nu d_1/s$  gekennzeichnet.

Betrachten wir nun den Fall  $\alpha > 0$ . Hier trägt der Korrekturterm positiv zur kinetischen Energie bei und wirkt "aufpeitschend", so dass der kritische Druckgradient kleiner wird. Es gibt aber einen kritischen Wert für  $\alpha$ :  $\alpha_c = d_0 s / 2d_1$ . Für  $\alpha < \alpha_c$  ist die Instabilität immer noch vom Typ wie oben mit einem nach unten renormierten kritischen Druckgradienten. Die Lösung hat die gleiche Form wie (11.19) mit  $P'_{c\alpha} < P'_{c0}$ . Die laminare Strömung ist weniger stabil.

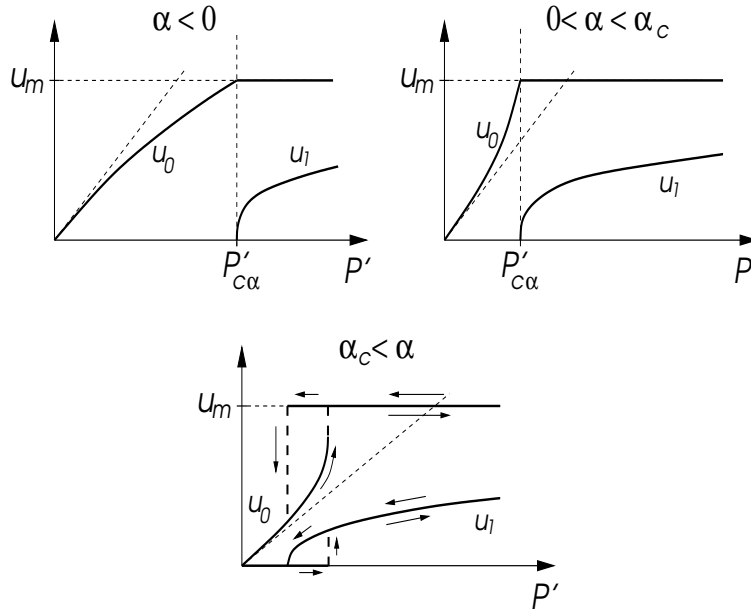


Abb.11.3

Für  $\alpha > \alpha_c$  finden wir, dass der Bereich die möglichen Werte  $P'$  beschränkt wird, wenn wir  $u_1 = 0$  fixieren:

$$u_0 = \frac{1}{2\alpha} \left( \nu d_0 \pm \sqrt{\nu^2 d_0^2 - 4P'\alpha} \right) \quad \text{wobei} \quad P' < \frac{\nu^2 d_0^2}{4\alpha} \quad (11.20)$$

wobei nur das "–"-Zeichen physikalisch relevant ist. Damit ist der maximale Wert von  $u_0$  gegeben durch  $\tilde{u}_{0\alpha} = \nu d_0/2\alpha$ . Mit  $\alpha > \alpha_c$  ist dieser jedoch kleiner als  $u_0 = \nu d_1/s$ , der Wert für die turbulente Lösung, um in der zweiten Gleichung in (11.18) eine ungedämpfte Lösung zu finden (beachte:  $\tilde{u}_{0\alpha_c} = \nu d_1/s$ ). Damit folgt, dass wir durch Vergrößerung von  $P'$  keinen stetigen Übergang in die turbulente Strömung erhalten, sondern bei  $\tilde{P}' = \nu^2 d_0^2/4\alpha$  springen müssen. Dort wird abrupt  $u_0$  vergrößert und die Störung erhält einen endlichen Wert  $u_1 = \sqrt{(\tilde{P}' - P'_{c\alpha})/s}$ . Beachte, dass dieser Übergang zwischen laminarer und turbulenter Strömung hysteretisch ist, d.h. der Übergang kann im Prinzip überall zwischen  $P'_{c\alpha}$  und  $\tilde{P}'$  geschehen (Abb. 11.3). Aus der laminaren Strömung kommend findet der Übergang im allgemeinen bei höherem  $P'$  statt als beim umgekehrten Weg. Der abrupte Anstieg von  $u_0$  kann als eine stationäre (nicht-oszillierende) Strömungskomponente interpretiert werden, die als Störung zusätzlich zur Grundströmung auftritt und kinetische Energie absorbiert. Der Übergang ist jedoch mit dem Überwinden einer "Barriere" verbunden.

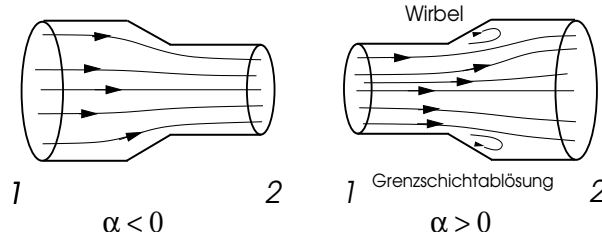


Abb.11.4

Abschliessend diskutieren wir kurz, wie der Wert (Vorzeichen) von  $\alpha$  zustande kommt, indem wir die Verhältnisse in einem zylindrischen Rohr betrachten, dessen Radius verändert wird. An den beiden Enden besitzt das Rohr den Radius  $R_1$  bzw.  $R_2$  und ändert sich irgendwo dazwischen. Die Grundströmung läuft von 1 nach 2. Um  $\alpha$  zu bestimmen, brauchen wir nach (11.17) nur die beiden Querschnittsflächen zu untersuchen, da  $\vec{v}_0$  an den Wänden verschwindet. Wir nehmen an, dass die Hagen-Poiseuille-Strömung realisiert sei,

$$v_{0z}|_i = \frac{C}{R_i^4}(R_i^2 - r^2) \quad (11.21)$$

mit derselben Gesamtströmung durch beide Querschnittsflächen. Damit gilt

$$Q = \frac{2\pi C^3}{R_2^{12}} \int_0^{R_2} (R_2^2 - r^2)^3 r dr - \frac{2\pi C^3}{R_1^{12}} \int_0^{R_1} (R_1^2 - r^2)^3 r dr = \frac{C^3}{8} (R_2^{-4} - R_1^{-4}) = -V u_0^3 \alpha \quad (11.22)$$

Daraus folgt, dass  $\alpha < 0$ , wenn  $R_2 < R_1$ , d.h. wenn sich das Rohr verengt. Dies führt zu einer Verstärkung der Reibungseffekte und einem Anschmiegen der Grenzschicht. Umgekehrt ergibt sich aus der Erweiterung  $\alpha > 0$  und macht das Fluidum anfälliger auf Störungen, bis hin zum un stetigen Auftreten von Turbulenz. Der Struktur der Ränder spielt daher eine wesentliche Rolle für die Entwicklung der Turbulenz. Insbesondere erleichtert die Rohrerweiterung dem Abreißen der Grenzschicht, der die Turbulenz auslöst.

### 11.3 Entwicklung der Turbulenz

Die vereinfachte Diskussion des vorangegangenen Abschnittes basiert auf der Näherung, dass die räumliche und zeitliche Form der Grund- und Störungsströmung nahe beim Übergang zur Turbulenz als fixiert angesehen werden kann und nur die Grösse (Vorfaktor) sich ändert. Im Bereich  $Re > Re_{krit}$  können wir aufgrund obiger Diskussion zwar zunächst annehmen, dass die Korrektur zum Geschwindigkeitsfeld die Form hat:

$$\vec{v}_1(\vec{r}), t = \vec{f}(\vec{r}) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)} \quad (11.23)$$

Wir können jedoch die stationäre und störende Strömung nicht mehr so einfach separieren, wenn nicht-lineare Effekte stärker werden. Die Gesamtströmung ist daher von der Form

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{u}_n(\vec{r}) e^{-in\varphi_1} \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1 \quad (11.24)$$

wobei  $n$  ganzzahlig ist, so dass auch höhere harmonische der Grundfrequenzen auftreten können. Die Phase  $\beta_1$  wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt und kann einen beliebigen Wert annehmen. Damit ergibt sich für die turbulente Strömung hier ein neuer Freiheitsgrad, den man für die stationäre laminare Strömung nicht hat.

Taylor-Couette-Instabilität: Im vorhergehenden Kapitel haben wir die Instabilität der tangentialen stationären Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern diskutiert. Man kann die linearisierte Navier-Stokes-Gleichung für die Störung  $\vec{v}_1$  untersuchen, mit den Randbedingungen, dass  $\vec{v}_1 = 0$  bei  $r = R_1, R_2$ . Die Lösung wird dann die Form besitzen:

$$\vec{v}_1(r, \phi, z, t) = \vec{f}(r) e^{in\phi + ikz - i\omega t} \quad (11.25)$$

wobei die Einwertigkeit des Geschwindigkeitsfelds verlangt, dass  $n$  eine ganze Zahl ist. Für gegebenes  $n$  und Wellenvektor  $k$  entlang der  $z$ -Richtung finden wir Frequenzen  $\omega_n^{(j)}(k)$ , wobei  $j$  der Index der verschiedenen Moden zu gleichem  $n$  und  $k$ . Wenn die Taylor-Zahl  $T$  langsam erhöht wird, wird der Imaginärteil einer solchen Eigenfrequenz positiv werden. Der erste solche Nulldurchgang,  $\gamma_n^{(j)}(k) = \text{Im}\{\omega_n^{(j)}(k)\}$ , definiert die Instabilität. Die Taylor-Couette-Instabilität hat die Besonderheit, dass der Realteil der entsprechenden Frequenz verschwindet  $\text{Re}\{\omega_n^{(j)}(k)\} = 0$  und  $n = 0$ . Das bedeutet, dass die neue Strömung wieder stationär ist und axialsymmetrisch ist, wie im vorhergehenden Kapitel besprochen. Die konkrete Berechnung dieser stationären Strömung ist viel schwieriger als die einfache Couette-Strömung.

Die Reynolds-Zahl oder Taylor-Zahl kann nun noch weiter erhöht werden und es ist zu erwarten, dass weitere Instabilitäten auftreten, die nun endliche reelle Frequenzen haben und daher weg von der stationären Strömung zu wirklicher Turbulenz führen. Die verschiedenen Frequenzen sind im allgemeinen nicht kommensurabel, so dass eine komplizierte Strömung auftritt, deren Verlauf stark von den Anfangsbedingungen abhängt, denn es gibt viele freie Phasen  $\beta_j$  in der Form des Geschwindigkeitsfeldes:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{p_1, \dots, p_N} \vec{U}_{p_1, p_2, \dots, p_N}(\vec{r}) \exp[-i \sum_{j=1}^N p_j \varphi_j] \quad \text{mit} \quad \varphi_j = \omega_j t + \beta_j \quad (11.26)$$

Wenn die Reynolds-Zahl stark den kritischen Wert übersteigt, dann findet man ein Kontinuum von Frequenzen und Wellenvektoren und spricht von einer *voll entwickelten Turbulenz*. Der Aufbau einer solchen Turbulenz ist kaskadenartig und ist daher kompliziert. Dabei wird jedoch ähnlich wie bei unserer einfachen Formulierung, kinetische Energie aus der Grundströmung in einer Kaskade auf die turbulenten Moden übertragen (Abb.11.5). Die Energieinhalte der einzelnen Moden folgen dabei bestimmten Regeln.

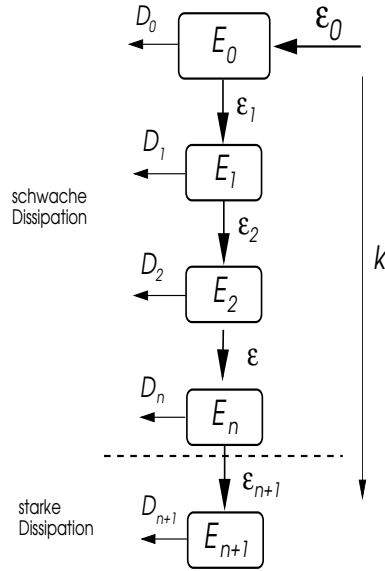


Abb.11.5

## 11.4 Energie-Kaskade in der homogenen Turbulenz

Wir betrachten nun eine voll entwickelte Turbulenz. Für die Grundströmung (zeitlich gemittelte Strömung) gelte, dass sie die notwendige Energie zugeführt erhält, z.B. über einen endlichen Druckgradienten. Diese Energierate sei  $\epsilon_0$  und die charakteristische Längenskala werde durch den Wellenvektor  $k_0$  gegeben (z.B. der inverse Rohrradius). In der Turbulenz wird jetzt Energie auf Moden mit grösserem  $k$  übertragen. Wir betrachten nun den Bereich von  $k$ , in dem weder Energie erzeugt noch dissipiert wird, sondern nur von Turbulenzströmungen grösserer zu solchen kleinerer Längenskalen überführt wird.

Wir definieren die mittlere kinetische Energie, die in den Moden zwischen  $k$  und  $k+dk$  gespeichert ist, als

$$E(k)dk \quad (11.27)$$

Die dimensionale Analyse zeigt, dass  $\epsilon_0$  die Einheiten  $(\text{Länge})^2 (\text{Zeit})^{-3}$  hat während es bei  $E(k)$   $(\text{Länge})^3 (\text{Zeit})^{-2}$  ist. Damit ist  $\epsilon_0^2/k^5 E(k)^3$  eine dimensionslose Grösse. Wir nehmen nun an, dass  $E(k)$  nur von  $\epsilon_0$  und  $k$  abhängt, aber nicht von  $k_0$  und  $\eta$ , dann erwarten wir, dass

$$E(k) \propto \epsilon_0^{2/3} k^{-5/3}. \quad (11.28)$$

Diese Annahme ist nicht so einfach zu begründen, ausser dadurch, dass die Konsequenzen, auf die wir stossen, empirisch bestätigt werden. Daher fahren wir in diesem Sinne fort. Der "Verlust" durch innere Reibung ist gemäss (10.5)

$$-2\eta R_{ij}^2 = -\frac{1}{2}\eta \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2} \sim \nu k^2 E(k)dk \quad (11.29)$$

mit  $\nu = \eta/\rho$ . Damit muss für die Moden zwischen  $k$  und  $k + dk$  gelten

$$\frac{d\epsilon}{dk} \sim -\nu k^2 E(k) \quad (11.30)$$

wobei  $\epsilon(k)$  die in der Kaskade transferierte Rate der Energie für die Mode  $k$  bedeutet. Innere Reibung wird wichtiger für wachsende Wellenvektoren. Für kleine  $k$  ist die Dissipation schwach und wir können davon ausgehen, dass  $\epsilon(k) \approx \epsilon_0$  ist (d.h. alle Energie von einer Mode zur nächsten weitergereicht):

$$E \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (11.31)$$



dann können wir mit (11.30) herleiten:

$$\frac{d \ln E}{d \ln k} \propto -\frac{5}{3} - \frac{2\nu}{3} \frac{k^{4/3}}{\epsilon^{1/3}} \approx -\frac{5}{3} - \frac{2\nu}{3} \frac{k^{4/3}}{\epsilon_0^{1/3}} . \quad (11.32)$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir, dass im Spektrum der gespeicherten Energie für Wellenvektoren kleiner als  $k_K$  die Viskosität keine wichtige Rolle spielt, wobei

$$k_K = \left( \frac{\epsilon_0}{\nu^3} \right)^{1/4} \quad (11.33)$$

Daraus ergibt sich die sogenannte Kolmogorov-Skalierung mit dem Exponenten  $-5/3$  für die Spektralfunktion der gespeicherten kinetischen Energie

$$E(k) = E(k_0) k^{-5/3} , \quad (11.34)$$

die bis zum Abschneide-Wellenvektor  $k_K$  gilt ( $k_K^{-1}$ : Kolmogorov-Skalenlänge). Für  $k > k_K$  ist die turbulente Strömung wegen Reibung unterdrückt. Dieses Verhalten ist experimentell für homogene, isotrope turbulente Fluida im Experiment sehr gut erfüllt.

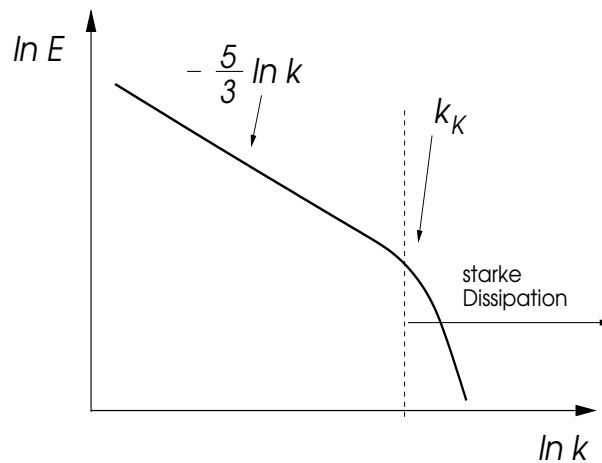


Abb.11.6

Turbulenz ist ein sehr komplexes Problem der Hydrodynamik und ist immer noch ein Thema der aktuellen Forschung. In dieser Vorlesung konnte nur einen kleinen Einblick in die Problematik der Turbulenz gegeben werden. Für ein weiteres Studium eignen sich: P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press; T.E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press; H. Schade und E. Kunz, *Strömungslehre*, de Gruyter Lehrbuch.