Theoretische Kernphysik SS 2002

Hartmuth Arenhövel
Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität
D-55099 Mainz, Germany

11. April 2003

Vorläufige Fassung, nur Teil I

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Manuskript ist aus einem zweisemestrigen Vorlesungszyklus „Theoretische Kernphysik“ entstanden, den ich mehrfach an der Johannes Gutenberg-Universität gehalten habe. Das Ziel der Vorlesung war, die wesentlichen physikalischen Mechanismen, welche die Struktur der Atomkerne bestimmen, zu beschreiben. Nach einem kurzen Exkurs über die geschichtliche Entwicklung der Kernphysik als Einführung und einer knappen Übersicht über die allgemeinen Eigenschaften der Atomkerne in Kap. 2 werden in Kap. 3 die wesentlichen Symmetrieprinzipien von Raum und Zeit sowie von inneren Symmetrien behandelt. Daran schliesst sich die Beschreibung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und der zugrundeliegenden dynamischen Vorstellungen in Kap. 4 an. Hier wird auch die Struktur des einfachsten Kernsystems, das Zwei-Nukleonensystem, betrachtet, zunächst das Deuteron als einzigem Bindungszustand und anschliessend die NN-Streuzustände mit einem kurzen Exkurs in die Streutheorie. Die nächsten beiden Kapitel sind den beiden scheinbar gegensätzlichen Aspekten der Kerndynamik, unabhängige Einteilchenbewegung auf der einen Seite gegenüber kohärenter Kollektivbewegung vieler Teilchen auf der anderen Seite, gewidmet. Dabei steht zunächst die reine Phänomenologie im Vordergrund. In Kap. 5 werden die dynamischen Aspekte des Kerns als Flüssigkeitstropfen einschliesslich von Dichteschwingungen betrachtet und dann in Kap. 6 das einfache Schalenmodell. Mit diesem Kapitel schliesst der Teil I ab.

Der zweite Teil, der in dieser vorläufigen Fassung noch nicht enthalten ist, beginnt in Kap. 7 mit einem kurzen Abriss der 2. Quantisierung und der FOCK-Darstellung zur Vorbereitung auf eine mikroskopische Beschreibung. Daran schliesst sich in Kap. 8 die Behandlung des HARTREE-FOCK-Verfahrens zur Bestimmung des dem Schalenmodell zugrundeliegenden mittleren Kernpotentials aus der NN-Wechselwirkung an. Einfache mikroskopische Modelle für Kollektivbewegungen wie TAMM-DANKOFF, “Random-Phase-Approximation” und Superflüssigkeitsmodell werden in Kap. 9 behandelt. Die Beschreibung kollektiver Freiheitsgrade auf mikroskopischer Grundlage erfolgt in Kap. 10. Den Abschluss des Vorlesungszyklus’ bildet in Kap. 11 die Struktur der Kerne bei kleinen internukleonischen Abständen, dem Bereich der kurzreichweitigen Korrelationen.

Eine erste kompakte Kurzfassung der Vorlesungsinhalte wurde 1995-96 von Elena Breitmoser und Gerhard Kress erarbeitet. Dafür möchte ich ihnen an dieser Stelle ganz herzlich danken.

Durchgehend werden die Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet.

1 Einführung und geschichtliche Entwicklung

Die eigentliche Kernphysik begann 1911 mit der indirekten Entdeckung, dass ein Atom aus Hülle und Kern besteht. Das hatte Ernest Rutherford mit seiner berühmten und scharfsinnigen Interpretation der Streuexperimente, die kurz zuvor Hans Geiger und Ernest Marsden mit α-Teilchen an Goldfolien durchgeführt hatten, erschlossen. Aber auch schon vorher gab es indirekte Hinweise, die sich jedoch erst aus der heutigen Rückschau als Aussagen über eine regelmässige Struktur der Atomkerne deuten lassen. Da ist an erster Stelle die um 1815 vom Arzt und Chemiker William Prout aufgestellte Hypothese zu nennen, derzufolge alle Atome sich aus Vielfachen des Wasserstoffatoms zusammensetzen sollten, natürlich noch ohne irgendeine detaillierte Vorstellung über die Art des Aufbaus zu entwickeln. Da sich aber die tatsächlichen Atomgewichte nicht exakt als Vielfache des Wasserstoff-Atomgewichts ergaben, fanden sich nicht viele Anhänger dieser Hypothese. Jedoch deutete die spätere Entdeckung des periodischen Systems der Elemente ebenfalls auf eine einheitliche Struktur der Materie hin.

Ein weiterer wichtiger Schritt war die Entdeckung der Radioaktivität durch Henri Becquerel (1896). Seine Untersuchungen wurden ausgelöst durch Berichte über Fluoreszenzerscheinungen, welche die wenige Monate zuvor entdeckten Röntgenstrahlen hervorriefen. Diese Radioaktivität wurde dann systematisch durch das Ehepaar Marie und Pierre Curie weiter erforscht. Rutherford und Mitarbeitern gelang bald der Nachweis, dass es sich bei zwei der drei Komponenten der radioaktiven Strahlung um geladenen Teilchen handelt (α- und β-Strahlen). Kurz darauf wurde auch die mit der Radioaktivität verbundene Änderung des chemischen Elements aufgezeigt. Fast gleichzeitig (1897) wurde u.a. von J.J. Thomson das freie Elektron als Bestandteil des Atoms entdeckt. Daran anschliessend entwickelte man die ersten, sehr einfachen Modelle eines Atoms, das man sich aus Elektronen und positiv geladener Materie zusammengesetzt vorstellte, z.B. im einfachsten Bild als gleichverteilt in einer Kugel.

Von grosser Bedeutung für die weitere Entwicklung war auch die Tatsache, dass mit freien Elektronen und α-Teilchen energetische Sonden zur Erforschung des Inneren der Materie zur Verfügung standen. So stellte z.B. Philip Lenard fest, dass energetische Elektronen weitgehend ungehindert durch dünne Materieschichten hindurchtraten. Der entscheidende Durchbruch sowohl für das Verständnis der Atomstruktur als auch für die Etablierung der Kernphysik gelang schliesslich durch die bereits erwähnten systematischen Streuversuche von Geiger und Marsden und deren geniale Deutung durch Rutherford.

Der experimentelle Befund dieser Experimente war, dass der überwiegende Teil der α-Teilchen in Vorwärtsrichtung gestreut wurden mit einem mittleren Streuwinkel von $0,87°$. Dennoch konnten auch grosse Streuwinkel ($\approx 90°$) mit einer Häufigkeit beobachtet werden, die sehr viel grösser war, als unter der Annahme von aufeinanderfolgenden Kleinwinkelstreuungen zu erwarten gewesen wäre. Dieses überraschende Ergebnis konnte Rutherford nur dadurch widerspruchsfrei erklären, indem er annahm, dass die Streuung der α-Teilchen an fast punktförmigen Ladungsträgern erfolgt sei, deren Ladung durch Ze gegeben ist, wobei Z die Ordnungszahl des Targets bedeutet. In diesem Zusammenhang hat Rutherford auch sein bekannte Streuformel abgeleitet. Aus der Übereinstimmung der beobachteten Häufigkeit grosser Streuwinkel mit der nach dieser Formel theoretisch zu erwartenden ergab sich eine obere Abschätzung für die Grösse des Atomkerns von 10^{-12} cm. Damit konnte zum ersten Mal eine detaillierte Vorstellung über die Struktur des Atoms entwickelt werden, nämlich die

Aufteilung des Atoms in einen Atomkern, indem sich fast die gesamte Masse konzentriert mit positiver Ladung Ze befindet, und der Hülle, die man sich von planetenartigen Bahnen der Elektronen gebildet vorstellte. Ein solches "Saturnian" Atom hatte HANTARO NAGAOKA bereits 1904 betrachtet. Auf dieser fruchtbaren Hypothese entwickelte sich dann über das Bohrsche Atommodell und die daraus resultierende Quantenmechanik unser heutiges Wissen über die Struktur der Atomhülle.

Für die Entwicklung der Kernphysik brachte das zunächst wenig, da keine Erkenntnisse über die Freiheitsgrade des Atomkerns vorlagen, d.h. über dessen Konstituenten und der zwischen diesen wirkenden Kräfte. Zunächst brachte die Entdeckung von Isotopen der chemischen Elemente durch J.J. THOMSON (1913) eine natürliche Erklärung für die Probleme der PROUTschen Hypothese und machte sie dadurch wieder attraktiv, wobei es dann nahe lag, als elementaren Baustein den einfachsten Atomkern, den des Wasserstoff-Atoms, also das Proton, anzusehen. Da die β-Radioaktivität auf Elektronen als Bestandteil des Kerns hinzuweisen schien, stellte man sich einen Kern der Massenzahl A und Ordnungszahl Z aus A Protonen und $A - Z$ Elektronen zusammengesetzt vor. Die Vorstellung, dass Protonen als Kernbausteine fungieren, fand wiederum experimentelle Unterstützung durch den Nachweis von Protonemission bei der künstlichen Elementumwandlung, die RUTHERFORD 1919 beim Beschuss von Stickstoff mit α-Teilchen ($^{14}N + \alpha \rightarrow {}^{17}O + p$) beobachtete.

Diese erste Annahme über die Konstituenten des Atomkerns führte aber mit der weiteren Entwicklung und Vollendung der Quantenmechanik, insbesondere mit der Entdeckung des Spins und der damit verbundenen Unterscheidung zwischen der BOSE-EINSTEIN-Statistik für ganzzahlige Spinteilchen und der FERMI-DIRAC-Statisik für halbzahlige Spinteilchen zu unüberwindlichen Schwierigkeiten. So ergab sich aus der Spinsequenz des Rotationsspektrums des Stickstoffmoleküls (N_2) ein ganzzahliger Spin für Stickstoff. Andererseits würde ein System aus 14 Protonen und 7 Elektronen, da beide Teilchensorten Spin 1/2 besitzen und somit Fermionen sind, ebenfalls einen halbzahligen Spin für Stickstoff zur Folge haben. Desweiteren würde die DIRACsche Elektronentheorie kein so kurzreichweitiges und damit entsprechend tiefes Potential (tiefer als $2m_e$) erlauben, um ein Elektron im Kern der Ausdehnung von einigen Femtometern zu binden. Schliesslich ergaben die aus der Hyperfeinstruktur bestimmten Kernmomente Werte, die um Grössenordnungen kleiner waren, als man aus der Existenz von Elektronen im Kern erwarten würde.

Die Auflösung all dieser Widersprüche fand sich dann mit der Entdeckung des Neutrons durch JAMES CHADWICK im Jahre 1932. Die Vorgeschichte dieser Entdeckung zog sich über mehrere Jahre hin. Bereits 1928 hatten WALTHER BOTHE und H. BECKER beobachtet, dass bei der Bestrahlung von Beryllium mit α-Teilchen eine sehr durchdringende neutrale Strahlung auftrat, die BOTHE und BECKER zunächst als Gammastrahlen deuteten. Anfang 1932 untersuchte das Ehepaar IRÈNE und FRÉDÉRIC JOLIOT-CURIE diese Strahlung und fand überraschenderweise, dass aus einer Paraffinschicht viele Protonen herausgeschlagen wurden. So waren sie eigentlich der Entdeckung des Neutrons schon sehr nahe, deuteten aber diese Ergebnisse als Comptonstreuung am Proton, obwohl sie unvernünftig hohe γ-Energien annehmen mussten und auch der Wirkungsquerschnitt nicht im Einklang mit der schon bekannten KLEIN-NISHINA-Formel stand. Diese falsche Deutung erkannte hingegen CHADWICK am CAVENDISH-Laboratorium sofort. Eigentlich hatte RUTHERFORD schon 1920 über ein neutrales Proton spekuliert, das man sich damals noch aus Proton und Elektron gebildet vorstellte. Insbesondere hatte Rutherford solche Teilchen als ideale Sonden zur Untersuchung von Materie angesehen, was sich in der Tat viele Jahre später in dem wichtigen Anwendungsgebiet der Neutronenstreuung bestätigt hat. So war CHADWICK vermutlich durch solche Spekulationen schon geistig auf ein derartiges Teilchen vorbereitet. Sein Verdienst lag darin, dass er dann durch eine Serie von systematischen Streuexperimenten, indem er die unbekannte Strahlung nicht nur an Wasserstoff, sondern auch an Helium und Stickstoff streuen liess und die Verhältnisse der Rückstossenergien bestimmte, eindeutig nachwies, dass die unbekannte Strahlung von neutralen Teilchen mit der Masse des Protons herrührten. Damit war endlich der noch fehlende zweite Baustein des Kerns gefunden, wie unabhängig voneinander HEISENBERG und IWANENKO sofort erkannten. Ebenso lösten sich ganz zwanglos die oben angeführten Widersprüche auf.

Die Kernphysik im eigentlichen Sinne war jetzt also mit der Erkenntnis der Konstituenten geboren. Die weitere, für die Entwicklung einer Dynamik wesentliche Frage nach der Natur der Kernkräfte war jedoch noch völlig offen. Nach anfänglich phänomenologischen Ansätzen, die auch später noch lange Verwendung fanden, entwickelte HIDEKI YUKAWA 1935 ein erstes grundlegendes Modell der starken Wechselwirkung, das er als Austausch von massiven Teilchen (Mesonen) in Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung formulierte, die bekanntlich durch den Austausch von virtuellen Photonen vermittelt wird. Er schätzte aus der endlichen Reichweite der Kernkräfte die Masse dieser Mesonen in der Grössenordnung von 100 MeV ab. Das zunächst damit identifizierte μ-Meson, das in der Höhenstrahlung entdeckt worden war, erwies sich aber bald als zu schwach wechselwirkend. Erst 1947 wurde dann das eigentliche, stark wechselwirkende π-Meson entdeckt, das als wesentlicher und langreichweitigster Vermittler der starken Wechselwirkung fungiert. Weitere wichtige Stufen der Entwicklung stellen die Entdeckung der künstlichen Radioaktivität durch das Ehepaar JOLIOT-CURIE 1934 und der Kernspaltung durch OTTO HAHN und FRITZ STRASSMANN 1938 dar. Ausführlichere Literatur zur geschichtlichen Entwicklung der Kernphysik findet man in [Bet49, Hei49, Seg81, Wei90].

Ebenso entscheidend für die ungeheure Ausweitung unseres Wissens über die Struktur der Kerne war die Entwicklung immer leistungsfähigerer Teilchenbeschleuniger und entsprechender Detektoren. Hierbei sind insbesondere die Entdeckung der Nukleonresonanzen, innerer Anregungszustände der Nukleonen, auch Isobaren genannt, und die Ergebnisse der tiefinelastischen Streuung zu nennen. Letztere weisen auf punktförmige Konstituenten im Nukleon hin. Diese Erkenntnisse, die zur Entwicklung der Quantenchromodynamik (QCD) als grundlegender Theorie der starken Wechselwirkung führte, warfen auche ein neues Licht auf das Schema, der nunmehr klassischen Kernphysik insofern, als deren zugrundeliegende Freiheitsgrade nunmehr als effektive Freiheitsgrade interpretiert werden mussten, bei denen die eigentlichen Quark-Gluon-Freiheitsgrade „ausintegriert“ bzw. eingefroren sind.

Man kann in der Entwicklung der Kernphysik somit verschiedene Stufen unterscheiden (siehe Tab. 1). Die erste ist durch das Bild der klassischen Kernphysik geprägt, die den Atomkern als ein Ensemble von im Vergleich zu ihrer Ruhmasse schwach gebundenen Nukleonen ansieht, die im wesentlichen punktförmig sind, d.h. keine inneren dynamischen Freiheitsgrade besitzen, die angeregt werden könnten. Die schwache Bindung erlaubt eine nichtrelativistische Behandlung. Es bleiben dann zwei Grundprobleme: (a) die Frage nach der Natur der Wechselwirkung der Nukleonen untereinander (NN-Kraft) und (b) die Lösung des Vielteilchenproblems. Die NN-Kraft wird zunächst als einfachste Möglichkeit als reine Zweiteilchenkraft angesetzt, die aus einem Potential abgeleitet wird, für das man unter Verwendung der Mesonenaustauschidee mehr oder weniger weitgehend phänomenologische Ansätze verwendet, die man an die experimentellen Daten der NN-Streuung anpasst. Zur Lösung des Vielteilchenproblems, ebenso eine äusserst formidable Aufgabe, wurden eine Vielzahl verschiedener Modelle und Näherungen entwickelt, die auf einen bestimmten Erfahrungsbereich zugeschnitten sind und dementsprechend nur einen beschränkten Anwendungs- und Gültigkeitsbereich besitzen.

Die zweite Stufe möchte ich mit der Entwicklung detaillierter, mesonentheoretischer NN-Potentialmodelle assoziieren, die zu einer Erweiterung des klassischen Bildes insofern führten, indem im Prinzip der Kern nicht nur Nukleonen sonder auch Mesonen enthält, wobei letzere nur „virtuell" auftreten, da sie nur kurzzeitig und damit weit von ihrer Energieschale entfernt sind. Aufgrund dieser Tatsache kann man die mesonischen Freiheitsgrade eliminieren und ihre Wirkung durch effektive Operatoren berücksichtigen. Dazu gehören neben dem NN-Potential auch Mehrkörperkräfte und Mesonaustauschstromoperatoren. Strenggenommen bricht dieses einfache Bild bei Energien oberhalb der Pionproduktionsschwelle zusammen, da dort reelle Pionen auftreten können, die explizit berücksichtigt werden müssen.

Tabelle 1: Entwicklungsstufen der nuklearen Freiheitsgrade und deren Wechselwirkungen

	Freiheitsgrade	Wechselwirkung
(I)	Nukleon	V_{NN} phänomenologisch
(II)	Nukleon, Meson	$H_{N\pi}$, $H_{N\rho}$,...
	$\downarrow$	$\downarrow$ Elimination der Mesonen
	Nukleon	V_{NN}^{eff}, Ω^{eff} effektive Operatoren
(III)	N, N^*, Δ, π,...	$H_{N\pi}$, $H_{N^*\pi}$, $H_{\Delta\pi}$,...
	$\downarrow$	$\downarrow$ Elimination der Mesonen
	Nukleon, Isobar	V_{NN}^{eff}, $V_{NN\to NN^*}^{eff}$,$V_{NN\to N\Delta}^{eff}$,...
	$\downarrow$	$\downarrow$ Elimination der Isobaren
	Nukleon	$\bar{V}_{NN}^{eff}$, $\bar{\Omega}^{eff}$
(IV)	Quark, Gluon	H_{qq}, H_{gg}, H_{qg}
	$\downarrow$	$\downarrow$ Elimination der Quarks und Gluonen
	Hadronen	$H_{hh'}^{eff}$

In der nächsten Stufe wird die innere dynamische Struktur der Konstituenten, der Nukleonen, selber berücksichtigt, nachdem sich diese in der Form von Resonanzen in der Pionstreuung und in Photoreaktionen am Proton manifestiert hatten. Das bedeutet, dass vom ursprünglichen Bild starrer Konstituenten abgegangen und stattdessen der Tatsache Rechnung getragen wird, dass während eines Stosses zweier Nukleonen im Kern innere Anregungen auftreten können, d.h. dass Nukleonresonanzzustände auch im Kern vorkommen können. Wegen der hohen Anregungsenergien von einigen 100 MeV handelt es sich wiederum um nur kurzzeitige, also virtuelle Anregungen, die im wesentlichen nur während eines Stosses auftreten, d.h. in den Bereich der kurzreichweitigen Korrelationen fallen. Anschaulich kann man diese Phänomen als zeitweilige Deformation eines gebundenen Nukleons im Kern interpretieren.

Die vorläufig letzte Stufe ist mit der Einbindung der neuen Erkenntnisse über die grundlegende Natur der starken Wechselwirkung in der QCD und deren Freiheitgraden, den Quark-Gluon-Freiheitsgraden, erreicht. Im Rahmen der QCD sollten alle Hadronen, also stark wechselwirkende Teilchen, als gebundene Quark-Gluon-Systeme betrachtet werden, wobei diese durch die neuartigen Phänomene der räumlichen Einschliessung ("confinement") und der asymptotischen Freiheit gekennzeichnet sind. Aus dieser Sicht stellt sich die klassische Kernphysik als eine effektive Theorie mit effektiven Konstituenten und effektiven Freiheitsgraden dar, deren Zurückführung auf die eigentliche Quark-Gluon-Freiheitsgrade einen wichtigen Schwerpunkt der aktuellen Forschung darstellt.

[Bet49] R.T. Beyer (ed.), *Foundations of Nuclear Physics*, Dover, New York, 1949. (enthält Nachdrucke von bahnbrechenden Arbeit zu Kernphysik)

[Hei49] W. Heisenberg, *Die Physik der Atomkerne*,Vieweg, Braunschweig 1949.

[Seg81] E. Segrè, *Die grossen Physiker und ihre Entdeckungen*, Piper, München, 1981.

[Wei90] S. Weinberg, *The Discovery of Subatomic Particles*, Freeman, New York, 1990.

2 Allgemeine Eigenschaften der Atomkerne

2.1 Aufbau der Atomkerne

Ein Atomkern ist gekennzeichnet durch die Massenzahl A und die Ordnungszahl Z und wird bezeichnet mit ^AZ. Hierbei ist A definiert als nächste ganze Zahl von $12M_A/M_{^{12}\mathrm{C}}$, wobei $M_{^{12}\mathrm{C}}$ die Masse des Kohlenstoffisotops ^{12}C bezeichnet. Die Ordnungszahl Z ist dabei durch die Ladung des Kerns eZ mit der elektrischen Elementarladung e bestimmt. Anstelle der Ordnungszahl verwendet man meistens das zugehörige chemische Symbol ^{A}chemisches Symbol z.B. ^{12}C für den Kohlenstoff-12-Kern.

Seit der Identifizierung des Neutrons durch Chadwick 1932 ist die grundlegende Hypothese, dass ein Kern der Massenzahl A und der Ladungszahl Z aus Z Protonen und $N = A-Z$ Neutronen aufgebaut ist. Proton und Neutron haben sehr ähnliche Eigenschaften bezüglich Masse und Spin, unterscheiden sich jedoch in der Ladung und in magnetischen Momenten. Ausserdem ist das Neutron im freien Zustand nicht stabil und zerfällt über die schwache Wechselwirkung gemäss $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ (Baryonenzahlerhaltung) mit einer Halbwertszeit von $10,4 \pm 0,2$ m. Die Ähnlichkeit von Proton und Neutron bezüglich Masse, Spin und der Wechselwirkungen untereinander hat Heisenberg dazu geführt, Proton und Neutron als fast entartete Zustände eines Teilchens, Nukleon genannt, aufzufassen. Die Zustände werden durch eine neue Quantenzahl, genannt Isospin, gekennzeichnet. Die Quasi-Entartung der Massen von Neutron und Proton weist auf die Existenz einer inneren Symmetrie, der Isospinsymmetrie hin, die nur leicht gebrochen ist. Da das Nukleon den Spin $s = \frac{1}{2}$ besitzt, gilt die Fermi-Dirac-Statistik für die Zustandsfunktion eines Kerns, d.h. Vorzeichenänderung unter Vertauschung zweier Teilchen (verallgemeinertes Pauli-Prinzip). Einige Eigenschaften des Nukleons sind in der Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Das anomale magnetische Moment des Nukleons sowie die durch die mittleren quadratischen Radien charakterisierten endliche Ausdehnungen von Ladungs- und Magnetisierungsdichten weisen eindeutig auf eine innere dynamische Struktur des Nukleons hin, die aber häufig im Rahmen der klassischen Kernphysik unberücksichtigt bleibt. Dennoch wirft die Existenz dieser inneren Struktur die Frage auf, inwieweit diese durch die Bindung eines Nukleons im Kern abgeändert wird. Zweifelsohne hängt das von der „Härte“ der inneren Struktur ab, d.h. vom Verhältnis der Wechselwirkungsstärke der Nukleonen untereinander zur inneren Anregung, wobei die mittlere Wechselwirkung wiederum von der Nukleonendichte im Kern abhängt (siehe Abschnitt 2.3).

Es hat sich nun im Laufe der Entwicklung der Kernphysik gezeigt, dass man eine Vielzahl von Phänomenen der Kernstruktur unter der Annahme, dass die Nukleonen ihre innere Struktur nicht ändern, d.h. sich wie freie Nukleonen in bezug auf innere Eigenschaften verhalten, gut verstehen kann. Dennoch ist zu erwarten, und die Entwicklung hat das auch bestätigt, dass man für bestimmte Phänomene die innere Polarisation, d.h. die Anregung von inneren Freiheitsgraden im Kern berücksichtigen muss.

2.2 Systematik der Bindungsenergien

Wichtige Hinweise auf qualitative Eigenschaften der Kernkräfte ergeben sich aus der Systematik der Kernbindungsenergien. Die Bindungsenergie eines Kerns erhält man aus dem sogenannten Massendefekt

$$B(N,Z) = NM_n + ZM_p - M_{A_Z}\,, \qquad (2.1)$$

Tabelle 2: Eigenschaften der Nukleonen. Die mittleren quadratischen Radien von Ladungs- und Magnetisierungsdichten sind mit $\langle r^2 \rangle_c$ bzw. $\langle r^2 \rangle_m$ bezeichnet.

		Proton	Neutron
Spin		1/2	1/2
Isospin		1/2	1/2
Isospinprojektion		1/2	$-1/2$
Masse	[MeV]	938,28	939,57
Ladung	[e]	1	0
Magn. Moment μ	$[\frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{M_p}}]$	2,793	$-1,913$
$\langle r^2 \rangle_c$	[fm^2]	0,64	$-0,13$
$\langle r^2 \rangle_m$	[fm^2]	0,64	0,63
Lebensdauer		$> 2 \cdot 10^{30}$ y	918 ± 14 s

den wir entsprechend der EINSTEINschen Äquivalenz von Masse und Energie als Bindungsenergie deuten können. In (2.1) bedeuten $M_{n/p}$ die Massen von Neutron bzw. Proton und M_{A_Z} die des Kerns ^ZA. Aus der Systematik von $B(N, Z)$ über der N-Z-Ebene ergeben sich eine Reihe von wichtigen Folgerungen:

(1) Im Mittel findet man eine konstante Bindungsenergie von etwa 8 MeV pro Nukleon. Daraus folgt die Sättigungseigenschaft der Kernkräfte, die sich nur mit einer kurzen Reichweite sowie einer Abstossung bei sehr kleinen internukleonischen Abständen erklären lässt, sodass eine Absättigung der auf ein Nukleon im Kernverband wirkenden Kräfte durch die nächsten Nachbarn erfolgt und weiter entfernte Nukleonen nicht mehr wesentlich zu dessen Bindung beitragen.

(2) Man findet für nicht zu grosse Werte von N und Z die stabilsten, d.h. am stärksten gebundenen Kerne für $N = Z$ und interpretiert dies durch eine sog. Symmetrieenergie, welche Kerne mit gleicher Zahl von Protonen und Neutronen, energetisch bevorzugt.

(3) Der Vergleich der Bindungsenergien von Kernen mit gerader Anzahl von Protonen und Neutronen, gg-Kerne genannt, mit denen von Kernen ungerader Massenzahl A, sog. ug-Kerne, weist auf eine Paarenergie hin, derzufolge gg-Kerne stärker gebunden sind im Vergleich zu ug- bzw. uu-Kernen. Letztere sind Kerne mit jeweils ungerader Zahl von Protonen und Neutronen und sind am schwächsten gebunden.

Den mittleren Verlauf der Bindungsenergie für die stabilen Kerne (siehe Abb. 2.1) kann man mit der einfachsten Vorstellung des Kerns als Flüssigkeitstropfen mit konstanter Dichte unter Berücksichtigung weiterer phänomenologischer Effekte verstehen. Das führt zur semiempirischen Formel von HANS BETHE und CARL FRIEDRICH VON WEIZSÄCKER (1935). Danach muss man folgende Beiträge zur Bindungsenergie berücksichtigen:

(a) einen Volumenterm $a_{vol}A$, der die Bindungsenergie eines Nukleons im Kernmedium konstanter Dichte beschreibt,

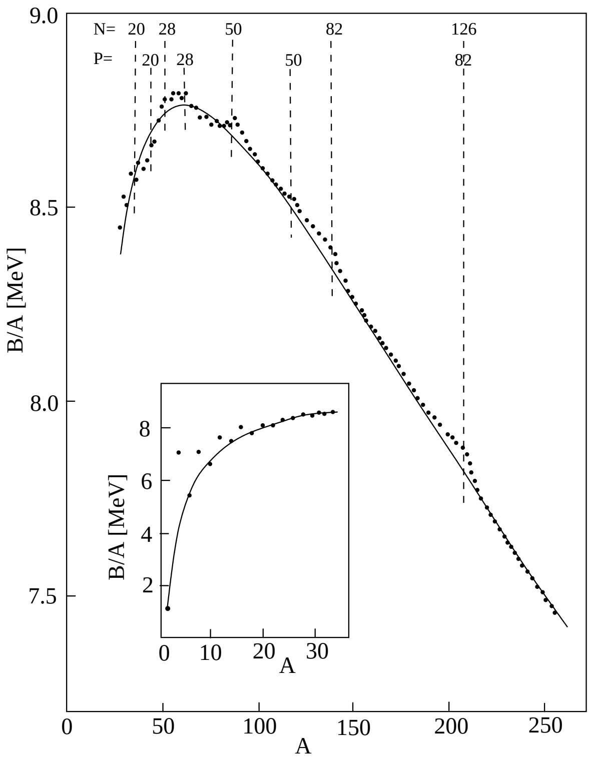

Abbildung 2.1: Bindungsenergie pro Nukleon B/A der stabilen Kerne als Funktion von A. Zusätzlich sind die magischen Neutronen- und Protonenzahlen angegeben sowie der Verlauf der BETHE-WEIZSÄCKER-Formel (2.2) (nach [BoM69]).

(b) einen Oberflächenterm $a_{surf}A^{2/3}$, der die schwächere Bindung der Nukleonen an der Kernoberfläche berücksichtigt,

(c) einen COULOMBenergieterm $a_{coul}\frac{Z^2}{A^{1/3}}$, der die COULOMBenergie der Protonen beinhaltet,

(d) einen Symmetrieenergieterm $a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A}$, der der empirischen Tatsache Rechnung trägt, dass eine gleiche Zahl von Neutronen und Protonen energetische bevorzugt ist, und

(e) einen Paarenergieterm $a_{pair}(\delta_{gg}-\delta_{nn})A^{-1/2}$, der das empirische Faktum berücksichtigt, dass von den Kerne mit gerader Massenzahl gg-Kerne stärker und uu-Kerne schwächer als Kerne mit ungerader Massenzahl gebunden sind.

Eine Übersicht über die Werte der Parameter ist in Tabelle 3 gegeben. Damit erhält man die

Tabelle 3: Parameter der BETHE-WEIZSÄCKER-Massenformel in [MeV] nach [GrE53].

a_{vol}	a_{surf}	a_{coul}	a_{sym}	a_{pair}
15,56	$-17,23$	$-0,70$	$-23,28$	12.3

halbempirische Massenformel von BETHE und WEIZSÄCKER

$$B(N,Z) \quad = \quad a_{vol}A + a_{surf}A^{2/3} + a_{coul}\frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A} + a_{pair}\frac{\delta_{gg}-\delta_{nn}}{A^{\frac{1}{2}}}\,, \quad (2.2)$$

die den mittleren Verlauf der Bindungsenergie beschreibt. Abweichungen treten besonders bei Kernen auf, deren Neutron- oder Protonzahl mit einer der sogenannten magischen Zahlen (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) übereinstimmt (siehe Abb. 2.1). Diese magischen Zahlen weisen auf Schaleneffekte hin, die man erst im Rahmen des Einteilchenmodells erklären kann. Darauf kommen wir später noch zurück.

Im Grenzübergang $A \to \infty$ erhält man formal unter Vernachlässigung der COULOMBenergie und für $N = Z$ aus (2.2)

$$\lim_{A\to\infty} \frac{B(N,Z)}{A} = a_{vol} \tag{2.3}$$

den Volumen-Energieparameter a_{vol} als Bindungsenergie pro Nukleon in symmetrischer Kernmaterie, nämlich ≈ 16 MeV. Den Effekt der Symmetrieenergie und der Paarenergie erkennt man am deutlichsten bei der Betrachtung von Kernen konstanter Massenzahl $A = const.$ (siehe Abb. 2.2). Ist A gerade, so erhält man wegen der Paarenergie zwei Parabeln für uu- und gg-Kerne. Dies macht verständlich, warum es kaum stabile uu-Kerne gibt, denn sie zerfallen durch β^+ oder β^- Emission in gg-Kerne.

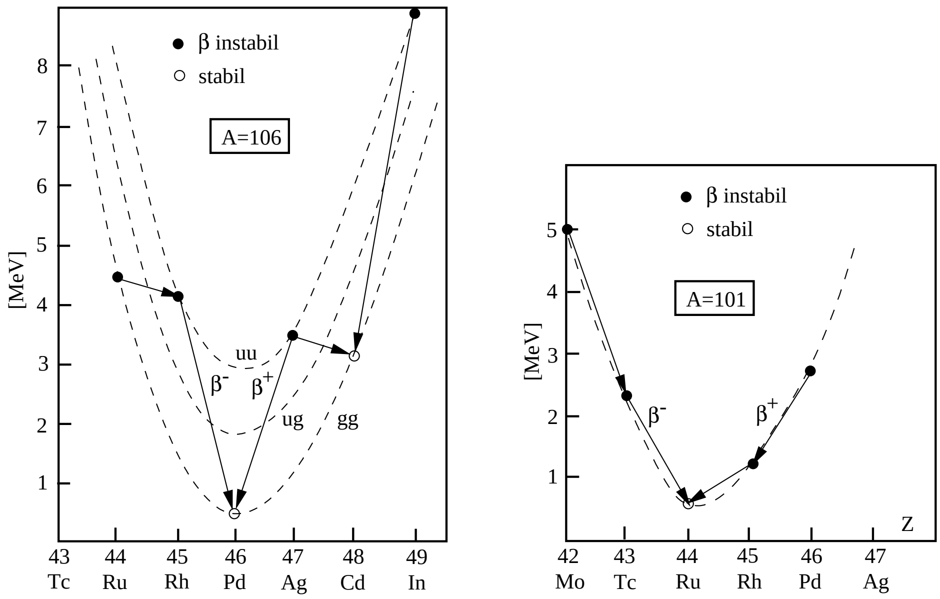

Abbildung 2.2: Bindungsenergie für Kerne (a) der Massenzahl $A = 106$ (links) und (b) der Massenzahl $A = 101$ (rechts). Die gestrichelten Kurven geben den Verlauf der Bindungsenergie nach (2.2) für $A = const.$ wider.

2.3 Systematik der Kernradien

Das Flüssigkeitstropfenmodell, das der Massenformel zugrundeliegt, setzt im wesentlichen eine konstante Nukleonendichte im Kern voraus. Also muss das Kernvolumen linear mit der Massenzahl A anwachsen, d.h. der Kernradius sollte proportional zu $A^{1/3}$ sein

$$R(A) = r_0 A^{1/3} \,. \tag{2.4}$$

Das lässt sich nun mit verschiedenen Methoden überprüfen:

(1) α-Zerfall:

Im einfachsten Modell von GAMOW für den α-Zerfall kann ein in einem Kastenpotential im Kern quasigebundenes α-Teilchen für $E_\alpha > 0$ durch Tunneleffekt den Kernbereich verlassen (siehe Abb. 2.3). Die Lebensdauer lässt sich in der WENTZEL-KRAMERS-BRILLOUIN-Näherung abschätzen

$$T = e^{-2\int_{R_0}^{R'} dr\sqrt{2m_\alpha(V_\alpha - E_\alpha)}}, \tag{2.5}$$

und ist durch die Ausdehnung R_0 des Potentials, die man mit dem Kernradius $R(A)$ identifiziert, bestimmt. R' ist allein durch das bekannte COULOMBpotential und die Energie E_α vollständig festgelegt. Also kann man aus den α-Lebensdauern eine Abschätzung für $R_0 = R(A)$ erhalten.

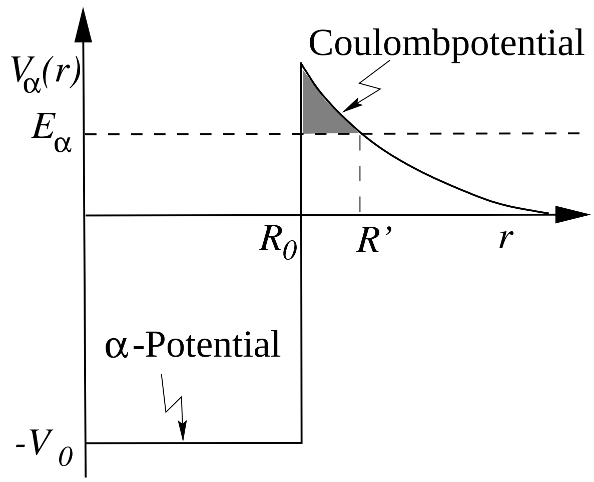

Abbildung 2.3: Einfaches Modell von GAMOW zum α-Zerfall.

(2) β-Zerfall:

Man betrachtet den β-Zerfall zwischen Spiegelkernen $(N = Z + 1, Z) \rightarrow (N = Z, Z + 1)$ und setzt die maximale β-Energie gleich der Differenz der COULOMBenergien. Nach (2.2) erhält man für die Zerfallsenergie

$$\Delta E \quad = \quad B(N = Z + 1, Z) - B(N = Z, Z + 1) = -a_{coul}\frac{2Z + 1}{A^{1/3}} \approx -a_{coul}A^{2/3}\,. \tag{2.6}$$

Daraus kann man $-a_{coul} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}$ bzw. r_0 bestimmen und erhält somit wieder eine Abschätzung für den Radius.

(3) Elastische Elektronen-Streuung:

Die elastische e^--Streuung an Kernen hat sich als sehr präzise Methode zur Bestimmung der Kernladungsdichte erwiesen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von Elektronen der Energie E an einem spinlosen Kern hat in der Ein-Photon-Austausch-Näherung die Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{MOTT}}}{d\Omega}|F(\vec{q})|^2 \tag{2.7}$$

wobei

$$\frac{d\sigma_{\text{MOTT}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\cos^2\theta/2}{4\sin^4\theta/2}\,\frac{E'}{E^3} \tag{2.8}$$

den MOTTschen Wirkungsquerschnitt von Elektronen an einer Punktladung e unter dem Elektronstreuwinkel θ darstellt. Die Energie der gestreuten Elektronen ist mit E' bezeichnet. Der Einfluss der endliche Ausdehnung der Kernladung wird durch den Formfaktor $F(\vec{q})$, der *cum grano salis* die FOURIERtransformierte der Ladungsverteilung $\rho_c(\vec{r})$

$$F(\vec{q}) = \int d^3r\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_c(\vec{r}) \tag{2.9}$$

darstellt, beschrieben. Hierbei bezeichnet $\vec{q}$ den Impulsübertrag des Elektrons auf den Kern. Die Ladungsverteilung ist dabei auf die Gesamtladung Z des Kerns normiert.

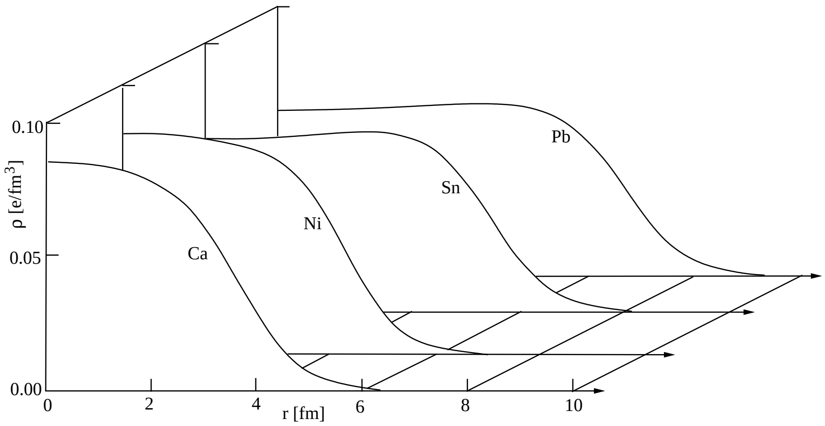

Abbildung 2.4: Ladungsdichten verschiedener Kerne in parametrisierter Form mithilfe der FERMI-Verteilung nach [FrV82].

Die einfachste Methode, die Ladungsverteilung aus dem Wirkungsquerschnitt zu bestimmen, besteht darin, einen hinreichend flexiblen Ansatz für die Form der Ladungsverteilung mit geeigneten Parametern, die an die Daten angepasst werden, zu verwenden, z.B. die GAUSS-modifizierte FERMI-Verteilung

$$\rho_{\mathrm{F}}(r) = \rho_0 \frac{1 + w\,(r/c)^2}{1 + \exp\left((r^2 - c^2)/z^2\right)} \,. \tag{2.10}$$

In Abb. 2.4 sind die auf diese Weise mithilfe der FERMI-Verteilung gewonnene Ladungsdichten einiger Kerne dargestellt. Moderne Methoden der modellunabhängigen Auswertung verwenden die FOURIER-BESSEL-Analyse [DrF74, FrN75]. Aus der Kenntnis von $\rho_c(\vec{r})$ kann man dann den mittleren quadratischen Ladungsradius des Kerns

$$< r^2 >_c = \int d^3r r^2 \rho_c(\vec{r}) \tag{2.11}$$

bestimmen.

(4) Isotopieverschiebung und Hyperfeinstruktur:

Die durch die endliche Kernausdehnung verursachte Verschiebung der Energiezustände der Atomspektren im Vergleich zu denen eines punktförmigen Kerns ist durch folgenden Ausdruck gegeben

$$\begin{aligned} \Delta E &= E - E_{\mathrm{Punktkern}} \\ &\approx \frac{2\pi}{3} Z e^2 < r^2 >_c \rho_e(0)\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

wobei $\rho_e(0)$ die Elektronendichte am Kernort bezeichnet.

(5) μ-Atome:

Diese Methode beruht auf der Tatsache, dass die Energiezustände von myonischen Atomen ebenfalls, jedoch erheblich stärker, durch die endliche Kernausdehnung verschoben sind. Aus der Energieverschiebung kann man in 1. Ordnung Störungstheorie ein sogenanntes BARRETT-Moment

$$\langle r^k e^{-\alpha r} \rangle = \frac{4\,\pi}{Z\,e} \int_0^\infty dr\, \rho_c(\vec{r}\,)\, r^{k+2}\, e^{-\alpha r} \tag{2.13}$$

extrahieren, wobei die Parameter k und α durch Anpassung ermittelt werden. Aus dem BARRETT-Moment lässt sich dann ein äquivalenter Radius bestimmen.

Aus allen diesen Methoden ergibt sich nun in der Tat, dass die A-Abhängigkeit des Kernradius sehr gut durch $R(A) = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 \approx 1.2$ fm) beschrieben werden kann. Eine Übersicht der verschiedenen Methoden und Tabellen der sich daraus ergebenden Ladungsradien findet man in [FrB95].

[BoM69] A. Bohr und B. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. I, Benjamin, New York, 1969.

[DrF74] B. Dreher, J. Friedrich, K. Merle, H. Rothhaas und G. Lührs, Nucl. Phys. **A235**, 219 (1974).

[FrN75] J.L. Friar und J.W. Negele, Adv. Nucl. Phys., Vol. 8, p. 219, Plenum, New York, 1975.

[FrB95] G. Fricke, C. Bernhardt, K. Heilig, L.A. Schaller, L. Schellenberg, E.B. Shera und C.W. de Jager, Atomic Data and Nuclear Data Tables **60**, 177 (1995).

[FrV82] J. Friedrich und N. Voegler, Nucl. Phys. **A373**, 192 (1982).

[GrE53] A.E.S. Green und N.A. Engler, Phys. Rev. 91, 40 (1953).

3 Symmetrien und Invarianzen

Von grosser Bedeutung für die Bestimmung der Dynamik eines physikalischen Systems, insbesondere für die Klassifikation der Zustände und für Auswahlregeln, sind Symmetrieeigenschaften. Diese manifestieren sich in Symmetrietransformationen, die den Hamiltonoperator invariant lassen. Solche Symmetrietransformationen können kontinuierlich sein, wie etwa Translationen und Rotationen oder diskret, wie z.B. Raum- und Zeitspiegelungen. Ferner unterscheidet man noch innere und äussere Symmetrien, wobei die letzteren Symmetrien von Raum und Zeit sind, während die inneren Symmetrien sich auf innere Freiheitsgrade, wie etwa den Isospin, beziehen.

Jeder Symmetrietransformation kann man einen unitären oder antiunitären Operator U zuordnen, der die Veränderung einer Zustandsfunktion ψ oder eines Operators unter dieser Transformation beschreibt.

$$\psi \quad \to \quad \psi' = U\,\psi\,, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{O} \quad \to \quad \mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}\,. \tag{3.2}$$

Die Invarianz des Hamiltonoperators bedeutet dann die Eigenschaft

$$H = UHU^{-1} \quad \text{bzw.} \quad [H,U] = 0\,, \tag{3.3}$$

d.h. dann vertauscht H mit U. Ist U unitär, so kann man die Eigenwerte von U zur Klassifikation der Eigenzustände von H verwenden.

Von besonderem Interesse sind die kontinuierlichen Transformationsgruppen, die von einem Satz von kontinuierlich veränderlichen Parametern abhängen, wie z.B. die Translationen in Raum und Zeit oder die Raumrotationen, die man durch die drei EULERwinkel beschreiben kann. In diesem Fall reicht es aus, infinitesimale Transformationen zu betrachten, die man durch sogenannte Erzeugende beschreiben kann. Diese hängen nicht mehr von den Gruppenparametern ab. Sie sind charakteristisch für die Transformationsgruppe und bilden eine sogenannte LIE-Algebra. Die Kenntnis der Erzeugenden reicht zur Beschreibung von endlichen Transformationen aus, da man diese durch Integration über die Gruppenparameter daraus gewinnen kann.

Sei also eine kontinuierliche Transformationsgruppe $\{T(\alpha)\}$ gegeben, wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ einen Satz von kontinuierlich variablen Parametern darstellt. Ferner seien $U(\alpha)$ die zugehörigen unitären Operatoren, so gilt für infinitesimale Transformationen $T(\delta\alpha)$ bis zur 1. Ordnung in $\delta\alpha$

$$U(\delta\alpha) = 1 + \sum_k \delta\alpha_k \frac{\partial U}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0}\,. \tag{3.4}$$

Als Erzeugende wird

$$G_k = i\,\frac{\partial U}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0} \tag{3.5}$$

definiert. Dann gilt also

$$U(\delta\alpha) \quad = \quad 1 - i\sum_k \delta\alpha_k\, G_k\,, \tag{3.6}$$

d.h.

$$U(\alpha) \quad = \quad e^{-i\sum_k \alpha_k\, G_k}\,. \tag{3.7}$$

Aus der Unitarität von U folgt, dass eine Erzeugende G_k hermitesch ist, d.h. $G_k^\dagger = G_k$. Die LIE-Algebra der Erzeugenden ist durch die Kommutatorrelationen

$$[G_k, G_l] = i \sum_j C_{kl}^j G_j \tag{3.8}$$

gekennzeichnet, wobei C_{kl}^j die für die Algebra charakteristischen Strukturkonstanten sind.

Die Invarianz von H unter $U(\alpha)$ hat dann ebenfalls die Vertauschung der Erzeugenden G_k mit H zur Folge

$$[G_k, H] = 0\,. \tag{3.9}$$

Damit können die Eigenwerte von G_k zur Klassifikation von Eigenzuständen von H verwendet werden. Weitere Erhaltungsgrössen bekommt man aus den sogenannten CASIMIR-Operatoren der LIE-Algebra. Das sind Formen von mindestens quadratischer Ordnung in den Erzeugenden, die mit allen Erzeugenden G_k vertauschen, z.B. ist $\vec{J}^2$, das Quadrat des Drehimpulsoperators, der einzige CASIMIR-Operator der Drehgruppe im R_3. Die CASIMIR-Operatoren dienen insbesondere zur Klassifikationen der irreduziblen Darstellungen der LIE-Algebra [Mes85, Rom65, Lip67, Gre79].

3.1 Raum- und Zeittranslationen

Zunächst betrachten wir Raumtranslationen der Form $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{a}$. Dies entspricht der Verschiebung des Koordinatenursprungs um $\vec{a}$. Der zugehörige Operator $U(\vec{a})$ muss die Eigenschaft besitzen

$$\vec{r} \;\to\; \vec{r}\,' = U(\vec{a})\,\vec{r}\,U^{-1}(\vec{a}) = \vec{r} - \vec{a}\,, \tag{3.10}$$

$$\vec{p} \;\to\; \vec{p}\,' = U(\vec{a})\,\vec{p}\,U^{-1}(\vec{a}) = \vec{p}\,. \tag{3.11}$$

Betrachten wir nun eine infinitesimale Translation $U(\delta\vec{a}) = 1 - i\delta\vec{a}\cdot\vec{G}$, so folgt bis zur 1. Ordnung in $\delta\vec{a}$

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r} - \delta\vec{a} \\ &= (1 - i\delta\vec{a}\cdot\vec{G})\,\vec{r}\,(1 + i\delta\vec{a}\cdot\vec{G}) \\ &= \vec{r} - i[\delta\vec{a}\cdot\vec{G}, \vec{r}\,]\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Der Vergleich liefert zunächst

$$i[\delta\vec{a}\cdot\vec{G}, \vec{r}\,] = \delta\vec{a}\,, \tag{3.13}$$

woraus man durch Differentiation nach $\delta\alpha_j$ schliesslich

$$[G_j, r_k] = -i\delta_{jk}\,. \tag{3.14}$$

erhält. Analog ergibt sich für den Impulsoperator $\vec{p}$

$$i[\delta\vec{a}\cdot\vec{G}, \vec{p}\,] = 0 \tag{3.15}$$

und somit

$$[G_j, p_k] = 0\,. \tag{3.16}$$

Also folgt $\vec{G} = \vec{p}$, d.h. der Impulsoperator ist Erzeugende der Raumtranslationen

$$\boxed{U(\vec{a}\,) = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{p}}\,,} \tag{3.17}$$

und somit gilt

$$\vec{r} - \vec{a} = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{p}}\,\vec{r}\,e^{i\vec{a}\cdot\vec{p}} \tag{3.18}$$

und

$$\langle \vec{x}|U(\vec{a})|\psi\rangle \quad = \quad \langle \vec{x} - \vec{a}|\psi\rangle\,. \tag{3.19}$$

Die Invarianz unter Raumtranslationen hat also Erhaltung des Impulses zur Folge: $[H, \vec{p}] = 0$.

Mithilfe des unitären Operators $U(\vec{a})$ können wir auch den Projektionsoperator auf einen bestimmten Impuls $\vec{p}_0$ darstellen, nämlich

$$\boxed{P(\vec{p}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3a\, e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{a}}\, U(\vec{a}\,)\,,} \tag{3.20}$$

d.h.

$$\langle \vec{r}\,|P(\vec{p}_0)\,|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\langle \vec{p}_0|\psi\rangle\; e^{i\,\vec{p}_0\cdot\vec{r}}\,, \tag{3.21}$$

wobei die Impulsraumdarstellung von $|\psi\rangle$ durch

$$\langle \vec{p}_0|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3r e^{-i\,\vec{p}_0\cdot\vec{r}}\langle \vec{r}\,|\psi\rangle \tag{3.22}$$

gegeben ist.

Als nächstes werden Zeittranslationen ($t \to t' = t + \tau$) betrachtet. Den zugehörigen unitären Operator erhält man leicht aus der Relation

$$\psi(t) \overset{t\to t+\delta\tau}{\longrightarrow} \psi'(t) = \psi(t + \delta\tau) \tag{3.23}$$

und somit

$$\psi'(t) \quad = \quad \Big(1 + \delta\tau\frac{\partial}{\partial t}\Big)\psi(t) = (1 - i\,\delta\tau\, H)\psi(t) = (1 - i\,\delta\tau\, G_t)\psi(t)\,. \tag{3.24}$$

Damit ergibt sich der Hamiltonoperator als Erzeugende G_t der Zeittranslationen, und man erhält durch Integration von $U(dt) = 1 - iHdt$ über ein endliches Zeitintervall τ die zugehörige Zeittranslation. Invarianz unter Zeittranslationen bedeutet dann, dass H nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann erhält man die Darstellung $U(\tau) = \exp(-iH\tau)$, und die Energie ist erhalten.

3.2 Raumrotationen

Zur Bestimmung der Erzeugenden von Rotationen im R_3 betrachten wir zunächst eine infinitesimale Rotation um eine Koordinatenachse, etwa die z-Achse um $\delta\varphi$. Dabei ändern sich die Komponenten des Ortsoperators wie folgt

$$x' \quad = \quad x + \delta\varphi\, y = x - i\,\delta\varphi\,[G_z, x]\,, \tag{3.25}$$

$$y' \quad = \quad y - \delta\varphi\, x = y - i\,\delta\varphi\,[G_z, y]\,, \tag{3.26}$$

$$z' \quad = \quad z = z - i\,\delta\varphi\,[G_z, z]\,. \tag{3.27}$$

Analog transformieren sich die Komponenten des Impulsoperators $\vec{p} \to \vec{p}\,'$. Also besitzt die Erzeugende G_z die Eigenschaften

$$\begin{aligned} [G_z, x] &= i\, y\,, & [G_z, p_x] &= i\, p_y\,, \\ [G_z, y] &= -i\, x\,, & [G_z, p_y] &= -i\, p_x\,, \\ [G_z, z] &= 0\,, & [G_z, p_z] &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dies sind genau die Eigenschaften der z-Komponente des Drehimpulses, und somit ergibt sich als Erzeugende für Rotationen um die z-Achse

$$G_z = x\, p_y - y\, p_x = L_z\,. \tag{3.29}$$

Der unitäre Operator für endliche Drehungen um die z-Achse um einen Winkel φ erhält man durch Integration $U_z(\varphi) = e^{-i\varphi\, L_z}$. Entsprechendes gilt für Drehungen um die x- und y-Achsen. Damit folgt die allgemeine Form für beliebige Drehungen um eine Achse $\vec{n}$ mit dem Winkel φ

$$\boxed{U_{\vec{n}}(\varphi) = e^{-i\,\varphi \vec{n}\cdot\vec{L}}\,.} \tag{3.30}$$

Die Drehimpulskomponenten als Erzeugende der Raumrotationen erfüllen die bekannten Vertauschungsrelationen

$$[L_k, L_l] = i\, \epsilon_{klm}\, L_m\,, \tag{3.31}$$

d.h. die Strukturkonstanten der Lie-Algebra der Raumrotationen sind durch den total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor ϵ_{klm} gegeben. Der zugehörige Casimir-Operator ist $\vec{L}^{\,2}$, denn es gilt

$$[L_k, \vec{L}^{\,2}] = 0\,. \tag{3.32}$$

Für Teilchen mit Spin bilden die Komponenten des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, der sich aus Bahn- und Spindrehimpuls zusammensetzt, die Erzeugenden der Drehgruppe.

Bei der Darstellung von endlichen Drehungen ist zu beachten, dass die Rotationen um verschiedene Achsen nicht mehr wegen (3.31) untereinander vertauschen. Man hat sich deshalb auf die Darstellung durch drei Eulerwinkel geeinigt, und zwar betrachtet man drei aufeinanderfolgende Drehungen:

(1) Drehung um die z-Achse um den Winkel α,

(2) Drehung um die neue y'-Achse um den Winkel β,

(3) Drehung um die neue z''-Achse um den Winkel γ.

Damit äquivalent ist die Darstellung durch drei entsprechende Rotationen in umgekehrter Reihenfolge um die ursprünglichen Achsen

(1) Drehung um die z-Achse um den Winkel γ,

(2) Drehung um die y-Achse um den Winkel β,

(3) Drehung um die z-Achse um den Winkel α.

Die letztere Darstellung besitzt dabei den Vorteil, dass sich alle Drehungen auf die Koordinatenachsen des ursprünglichen Systems beziehen. Den zu einer Rotation um die EULER-Winkel (α, β, γ) gehörigen unitären Operator kann man entsprechend den beiden Möglichkeiten

$$\begin{aligned} U(\alpha,\beta,\gamma) &= e^{-i\,\gamma\,L_{z''}}\, e^{-i\,\beta\,L_{y'}}\, e^{-i\,\alpha\,L_z} && (3.33)\\ &= e^{-i\,\alpha\,L_z}\, e^{-i\,\beta\,L_y}\, e^{-i\,\gamma\,L_z} && (3.34)\end{aligned}$$

darstellen, wobei die Konvention von [Ros57] gewählt wurde. Wegen der Nichtvertauschbarkeit der Rotationen um verschiedene Achsen ist die Reihenfolge der Einzelrotationen wesentlich.

Die durch eine Rotation des Achsensystems induzierte Koordinatentransformation

$$x \overset{R(\alpha,\beta,\gamma)}{\longrightarrow} x' = R(\alpha,\,\beta,\,\gamma)x\,. \tag{3.35}$$

führt zu zwei Interpretationsmöglichkeiten für die Transformation $f \overset{R(\alpha,\beta,\gamma)}{\longrightarrow} f'$ einer Funktion $f(\vec{x})$ unter $R(\alpha,\,\beta,\,\gamma)$:

(a) Rotation der Funktion, d.h. gleiches Koordinatensystem (aktive Interpretation):

$$(Rf)(\vec{x}) = f(R\vec{x})\,. \tag{3.36}$$

(b) Rotation des Koordinatensystems bei ungeänderter Funktion (passive Interpretation):

$$(\widetilde{R}f)(\vec{x}') = f(R^{-1}\vec{x}')\,. \tag{3.37}$$

Der Vergleich von (a) und (b) zeigt, dass sich die beiden Transformationen Rf und $\widetilde{R}f$ invers zueinander verhalten: $\widetilde{R} = R^{-1}$.

Invarianz des gegebenen Systems unter Raumrotationen hat zur Folge, dass die Generatoren J_k, die Drehimpulskomponenten, mit dem zugehörigen HAMILTONoperator H vertauschen

$$[J_k, H] = 0\,. \tag{3.38}$$

Dann gilt das gleiche für den CASIMIRoperator der Drehgruppe $\vec{J}^2$

$$[\vec{J}^2, H] = 0\,. \tag{3.39}$$

In diesem Fall kann man die Eigenzustände von H nach den Eigenzustände $|jm\rangle$ von $\vec{J}^2$ und J_z klassifizieren, für welche gilt

$$\begin{aligned} J_z\,|jm\rangle &= m\,|jm\rangle, && (3.40)\\ \vec{J}^2\,|jm\rangle &= j(j+1)\,|jm\rangle && (3.41)\end{aligned}$$

mit $j = 0,\,1/2,\,1,\,3/2, \ldots$ und $-j \le m \le j$.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der Drehimpulsoperatoren ist, dass die einzelnen Mitglieder eines Drehimpulsmultipletts über die Verschiebeoperatoren $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ aus einem Mitglied $|jm\rangle$ aufgrund der Eigenschaft

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|jm \pm 1\rangle \tag{3.42}$$

erzeugt werden können. Diese Eigenschaft folgt aus der Kommutatorbeziehung

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm\,. \tag{3.43}$$

3.2.1 Die Drehmatrizen als irreduzible Darstellungen endlicher Drehungen

Wir wollen nun das Transformationsverhalten einer Drehimpulseigenfunktion $|jm\rangle$ unter Rotationen $R(\alpha, \beta, \gamma)$ untersuchen. Die zugehörige unitäre Transformation ist in (3.34) gegeben. Da J_y nur die Projektionen von $|jm\rangle$ verändert, erkennt man an der expliziten Form von $R(\alpha, \beta, \gamma)$, dass die rotierte Funktion (das entspricht der Interpretation (a) von (3.36)) sich wieder als Linearkombination der $|jm'\rangle$ darstellen lassen muss

$$R(\alpha, \beta, \gamma)\,|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\langle jm'|R(\alpha, \beta, \gamma)|jm\rangle\,. \tag{3.44}$$

Die Transformationskoeffizienten bilden die sogenannten Drehmatrizen (hier in der Rose-Konvention [Ros57])

$$\begin{aligned} D^j_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle jm'|R(\alpha, \beta, \gamma)|jm\rangle \\ &= \langle jm'|e^{-i\alpha J_z} e^{-i\,\beta\, J_y}\, e^{-i\,\gamma\, J_z}|jm\rangle \\ &= e^{-i\,m'\,\alpha}\, d^j_{m'm}(\beta)\, e^{-i\,m\,\gamma} \end{aligned} \tag{3.45}$$

mit

$$d^j_{m'm}(\beta) = \langle jm'|e^{-i\,\beta\, J_y}|jm\rangle\,, \tag{3.46}$$

die nur von den Eulerwinkeln und den Drehimpulsquantenzahlen abhängen. Sie bilden die irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe im R_3, der Gruppe der orthogonalen Transformationen $O(3)$, und beschreiben vollständig das Transformationsverhalten von Drehimpulseigenfunktionen

$$R(\alpha, \beta, \gamma)\,|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\, D^j_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)\,. \tag{3.47}$$

Im Fall der Interpretation der Transformation als Rotation des Bezugsystems (Interpretation (b) von (3.37)) gilt

$$\widetilde{R}|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle D^j_{m'm}(R^{-1}) = \sum_{m'} D^{j\,*}_{mm'}(R)|jm'\rangle\,. \tag{3.48}$$

Die Drehmatrizen erfüllen ferner die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d(\cos\beta) \int_0^{2\pi} d\gamma D^{j'\,*}_{m'n'}(\alpha, \beta, \gamma) D^j_{mn}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2j+1}\, \delta_{j'j}\, \delta_{m'm}\, \delta_{n'n}\,. \tag{3.49}$$

Mit dieser Eigenschaft kann man leicht zeigen, dass der Operator

$$\boxed{P_{jm} = \frac{2j+1}{8\pi^2} \int d(\alpha, \beta, \gamma)\, D^{j\,*}_{mm}(\alpha, \beta, \gamma)\, R(\alpha, \beta, \gamma)} \tag{3.50}$$

aus einem beliebigen Zustand die Drehimpulskomponente $|jm\rangle$ herausprojiziert. Weitere wichtige Eigenschaften findet man in [Ros57, Edm57].

3.2.2 Die Kopplung von Drehimpulsen

Die Kopplung von Drehimpulsen ist für die Einbeziehung des Spins sowie für die Behandlung von Mehrteilchensystemen zur Konstruktion von Zuständen mit gutem Gesamtdrehimpuls von grosser Bedeutung.

Gegeben seien zwei Drehimpulszustände $|j_1 m_1\rangle$ und $|j_2 m_2\rangle$, z.B. Spin-und Bahndrehimpuls eines Teilchens oder die Drehimpulse zweier Teilchen. Dann kann man aus

$$|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \tag{3.51}$$

Zustände mit gutem Gesamtdrehimpuls $|(j_1 j_2) jm\rangle$ konstruieren, und zwar gilt

$$|(j_1 j_2) jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \tag{3.52}$$

mit den CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten $(j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)$, die nur von j_i, m_i $(i = 1, 2)$, j und m abhängen, unabhängig von der Natur der Zustände. Dabei addieren sich die Projektionen $m = m_1 + m_2$ und es gilt die Dreiecksrelation der Vektoraddition für die beteiligten Drehimpulse

$$|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2\,. \tag{3.53}$$

Ferner erfüllen sie die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m')(j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) = \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}\,, \tag{3.54}$$

$$\sum_{jm} (j_1 m_1' j_2 m_2' | jm)(j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) = \delta_{m_1' m_1}\, \delta_{m_2' m_2}\,. \tag{3.55}$$

Die Symmetrien der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten lassen sich am einfachsten mit dem WIGNERschen $3j$-Symbol beschreiben

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3)\,. \tag{3.56}$$

Für das $3j$-Symbol gilt ebenfalls die Dreiecksrelation und die Bedingung $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. Die Symmetrie besteht darin, dass bei Vertauschung zweier Spalten ein Phasenfaktor $(-)^{j_1 + j_2 + j_3}$ auftritt.

Bei der Kopplung von mehr als zwei Drehimpulse gibt es nun verschiedene Kopplungsmöglichkeiten. Z.B. bei der Kopplung von drei Drehimpulsen kann man auf drei verschiedene Arten zu einem Gesamtdrehimpuls koppeln, nämlich $((j_1 j_2) j_3)$, $(j_1 (j_2 j_3))$ oder $((j_1 j_3) j_2)$. Die verschiedenen Kopplungsschemata sind über Orthogonaltransformationen miteinander verknüpft, die i.w. durch ein sogenanntes $6j$-Symbol beschrieben werden, z.B.

$$\langle ((j_1 j_2)\, j_{12} j_3)\, j | ((j_1\, (j_2 j_3) j_{23})\, j\rangle = (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \tag{3.57}$$

3.2.3 Irreduzible Tensoren und das WIGNER-ECKART-Theorem

In bezug auf Zustände mit gutem Drehimpuls kommen den irreduziblen Tensoren besondere Bedeutung zu. Hierbei heisst eine Grösse $T_M^{[L]}$ (oder T_{LM}) mit $M = -L, -L+1, \ldots, L$ ein irreduzibler Tensor L-ter Stufe, wenn sich $T_M^{[L]}$ unter einer Raumrotation $R(\alpha,\,\beta,\,\gamma)$ wie eine Drehimpulseigenfunktion $|LM\rangle$ transformiert, d.h.

$$R(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\,T_M^{[L]}\,R^{-1}(\alpha,\,\beta,\,\gamma) = \sum_{M'} T_{M'}^{[L]}\,D^L_{M'M}(\alpha,\,\beta,\,\gamma)\,. \tag{3.58}$$

Damit äquivalent ist die Aussage, dass folgende Vertauschungsrelationen mit dem Drehimpulsoperator gelten

$$\begin{aligned} [J_z,\,T_M^{[L]}] &= M\,T_M^{[L]}\,, & (3.59)\\ [J_\pm,\,T_M^{[L]}] &= \sqrt{(L\mp M)(L\pm M+1)}\,T_{M\pm1}^{[L]}\,. & (3.60) \end{aligned}$$

Ein irreduzibler Tensor L-ter Stufe hat also $2L+1$ Komponenten. Tensoren mit $L=0$ und $L=1$ werden auch Skalare bzw. Vektoren genannt. Für Vektoroperatoren gelten folgende Beziehungen zwischen sphärischen und kartesischen Komponenten

$$T_\mu^{[1]} = \delta_{\mu 0}\,T_z - \frac{\mu}{\sqrt{2}}\,(T_x + i\,\mu\,T_y)\,. \tag{3.61}$$

Z.B. gilt für den Ortsoperator in sphärischen Komponenten (r,θ,ϕ)

$$r_\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,r\,Y_{1\mu}(\theta,\phi)\,. \tag{3.62}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Tensoroperatoren ist, dass man sie wie Drehimpulse koppeln kann, d.h. aus zwei Tensoren $T_1^{[L_1]}$ und $T_2^{[L_2]}$ kann man durch Bildung eines Tensorprodukts (Kopplung) einen neuen Tensor der Stufe L bilden

$$\begin{aligned} T_M^{[L]} &= [T_1^{[L_1]} \times T_2^{[L_2]}]_M^{[L]} \\ &= \sum_{M_1 M_2} (L_1 M_1 L_2 M_2|LM) T_{M_1}^{[L_1]} T_{M_2}^{[L]}\,. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Z.B. entspricht das Vektorprodukt zweier Vektoren im R_3 der Kopplung zweier Tensoren der Stufe 1 zu einem Produkt-Tensor der Stufe 1, d.h.

$$(\vec{a}\times\vec{b})_m = -i\,\sqrt{2}\,[a^{[1]}\times b^{[1]}]_m^{[1]}\,. \tag{3.64}$$

Für irreduzible Tensoroperatoren gilt nun das wichtige WIGNER-ECKART-Theorem, das die Zerlegung des Matrixelements eines irreduziblen Tensors zwischen Drehimpulseigenzuständen in einen kinematisch-geometrischen und einen dynamischen Anteil ermöglicht, und zwar gilt

$$\langle j' m'|T_M^{[L]}|jm\rangle = (-)^{j'-m'} \begin{pmatrix} j' & L & j \\ -m' & M & m \end{pmatrix} \langle j'||T^{[L]}||j\rangle\,. \tag{3.65}$$

Das $3j$-Symbol beschreibt den geometrischen Anteil und enthält die Drehimpulsauswahlregeln, welche die Tatsache beschreiben, dass $T_M^{[L]}$ einen Drehimpuls L auf das System überträgt und dabei die Projektion um M ändert. Die Stärke und damit der dynamische Anteil ist durch das sogenannte reduzierte Matrixelement $\langle j'||T^{[L]}||j\rangle$ gegeben. Für die Matrixelemente von gekoppelten Tensoren gelten einfache Rechenregeln, analog zur denen der Kopplung von Drehimpulsen.

3.2.4 Die Drehmatrizen als Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels

Die Bewegung eines starren Körpers (Kreisels) lässt sich durch die Orientierung eines körperfesten Achsensystems relativ zu einem raumfesten mit Hilfe der EULERwinkel $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ beschreiben. Wählt man als körperfestes Achsensystem das Hauptachsensystem, so ist die kinetische Energie durch

$$T = \sum_j \frac{\mathcal{L}_j^2}{2\Theta_j} \tag{3.66}$$

gegeben, wobei Θ_j die Hauptträgheitsmomente und $\mathcal{L}_j$ die Drehimpulskomponenten bezüglich des körperfesten Hauptachsensystems sind. Bezüglich des raumfesten Systems sei der Drehimpuls mit $\vec{L}$ bezeichnet. Für einen symmetrischen Kreisel ($\Theta_1 = \Theta_2$) folgt insbesondere

$$T = \frac{\vec{\mathcal{L}}^2}{2\Theta_1} + \frac{1}{2}(\frac{1}{\Theta_3} - \frac{1}{\Theta_1})\mathcal{L}_3^2 . \tag{3.67}$$

Man kann nun $\vec{\mathcal{L}}^{\,2} = \vec{L}^{\,2}$ und $\mathcal{L}_3$ durch die EULER-Winkel und deren Ableitungen ausdrücken, und erhält so den Hamiltonoperator eines symmetrischen Kreisels, dessen Eigenfunktionen durch die Drehmatrizen gegeben sind

$$\psi_{IMK}(\omega) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}}\, D_{MK}^{I*}(\omega) \tag{3.68}$$

mit $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$. ψ_{IMK} beschreibt einen Zustand mit Drehimpuls I, der Projektion M auf die raumfeste z-Achse und der Projektion K auf die körperfeste z_0-Achse, d.h. es gilt

$$\vec{L}^2 \psi_{IMK} = I(I+1)\psi_{IMK} , \tag{3.69}$$

$$L_z \psi_{IMK} = M\psi_{IMK} , \tag{3.70}$$

$$\mathcal{L}_3 \psi_{IMK} = K\psi_{IMK} . \tag{3.71}$$

Die Bedeutung der Drehmatrizen als Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels erschliesst sich auch aus der Beziehung zwischen Zuständen eines physikalischen Systems in einem raumfesten System (Laborsystem) $\mathcal{K}$ zu denen in einem sogenannten körperfesten oder intrinsischen System $\mathcal{K}_0$. Sei mit R die Rotation $\mathcal{K} \to \mathcal{K}_0$ bezeichnet und sei ferner in $\mathcal{K}_0$ ein Zustand $|jk\rangle_{\mathcal{K}_0}$ mit gutem Drehimpuls j und Projektion k auf die z_0-Achse des körperfesten Systems gegeben. In $\mathcal{K}$ stellt sich dieser Zustand als Überlagerung von guten Drehimpulszuständen $|jm\rangle_{\mathcal{K}}$ in $\mathcal{K}$ wie folgt dar

$$\widetilde{R}\,|jk\rangle_{\mathcal{K}_0} = \sum_m |jm\rangle_{\mathcal{K}}\, D_{mk}^j(R) \tag{3.72}$$

(Transformation des Koordinatensystems), da R^{-1} die Transformation $\mathcal{K}_0 \to \mathcal{K}$ beschreibt. Durch Umkehrung erhält man

$$|jm\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_k D_{mk}^{j\,*}(R)\, \widetilde{R}\,|jk\rangle_{\mathcal{K}_0} . \tag{3.73}$$

Betrachtet man z.B. einen Einteilchenzustand in der Ortsdarstellung in den beiden Bezugssystemen, etwa $\vec{x}$ bzgl. $\mathcal{K}$ und $\vec{x}_0 = R\vec{x}$ bzgl. $\mathcal{K}_0$, so erhält man aus

$$\langle\vec{x}\,|\widetilde{R}|jk\rangle_{\mathcal{K}_0} = \langle\vec{x}_0|jk\rangle_{\mathcal{K}_0} \tag{3.74}$$

die Darstellung

$$\langle \vec{x}\,|jm\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_k D^{j\,*}_{mk}(R)\,\langle \vec{x}_0|jk\rangle_{\mathcal{K}_0}\,. \tag{3.75}$$

Diese Gleichung stellt die Transformation eines Zustands im körperfesten System auf das raumfeste dar. Spezialisiert man auf den starren Kreisel, z.B. $\langle \vec{x}_0|jk\rangle_{\mathcal{K}_0} = \delta_{kk_0}$, so stellt offensichtlich

$$\langle \alpha,\beta,\gamma|jmk_0\rangle = D^{j\,*}_{mk_0}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{3.76}$$

die Eigenfunktion eines symmetrischen Kreisels zum Drehimpuls j und den Projektionen m auf die raumfeste z-Achse und k_0 auf die körperfeste z_0-Achse dar. Diese Eigenfunktionen sind insbesondere für die Beschreibung von deformierten Kernen im Kollektivmodell oder im NILSSON-Schalenmodell von Bedeutung.

3.3 Raumspiegelung und Parität

Nun komme ich zur Diskussion zweier diskreter äusserer Symmetrien, der Raum- und Zeitspiegelungen P und T. Zunächst werde die Raumspiegelung betrachtet, die über

$$P\,\vec{r}\,P^{-1} = -\vec{r}\,, \quad P\,\vec{p}\,P^{-1} = -\vec{p} \tag{3.77}$$

definiert ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Transformation des Bahndrehimpulses

$$P\,\vec{l}\,P^{-1} = \vec{l}\,. \tag{3.78}$$

In Analogie dazu postuliert man die Transformation des Spins unter P

$$P\,\vec{s}\,P^{-1} = \vec{s}\,. \tag{3.79}$$

Ebenso erhält man für die Eigenfunktionen von Orts- und Impulsoperatoren das Transformationsverhalten

$$P|\vec{r}\rangle = |-\vec{r}\rangle \quad \text{und} \quad P|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle\,. \tag{3.80}$$

Daraus ergibt sich als Transformation einer rein räumlichen Wellenfunktion $\langle \vec{x}\,|\psi\rangle$ (d.h. ohne innere Freiheitsgrade)

$$\langle \vec{x}\,|P\,|\psi\rangle = \langle -\vec{x}\,|\psi\rangle\,. \tag{3.81}$$

Aus den obigen Eigenschaften folgt ferner $P^2 = 1$, und damit als mögliche Eigenwerte ± 1. Also ist P hermitesch und wegen $P^{-1} = P$ auch unitär.

Die räumliche Parität eines Teilchenzustands lässt sich leicht aus dem Bahndrehimpuls bestimmen. Dazu betrachten wir einen Teilchenzustand mit gutem Drehimpuls $|lm\rangle$ in der Ortsdarstellung

$$\langle \vec{r}\,|lm\rangle = \langle r\,\theta\,\phi\,|lm\rangle = R(r)\,Y_{lm}(\theta,\,\phi)\,. \tag{3.82}$$

Dann erhält man für den transformierten Zustand unter der Paritätstransformation $(r,\theta,\phi) \to (r,\pi-\theta,\phi+\pi)$

$$\langle \vec{r}\,|P|lm\rangle = R(r)\,Y_{lm}(\pi-\theta,\,\phi+\pi) = (-)^l\,\langle \vec{r}\,|lm\rangle\,, \tag{3.83}$$

sodass man schliesslich findet

$$\boxed{P\,|lm\rangle = (-)^l\,|lm\rangle\,.} \tag{3.84}$$

Also besitzt ein Drehimpulszustand $|lm\rangle$ die äussere Parität $\pi_{|lm\rangle} = (-)^l$. Betrachtet man einen Zweiteilchenzustand, so erkennt man, dass die Parität nicht eine additive sondern multiplikative Quantenzahl ist

$$P\left(|l_1 m_1\rangle |l_2 m_2\rangle\right) = (-)^{l_1+l_2} \, |l_1 m_1\rangle \, |l_2 m_2\rangle \,. \tag{3.85}$$

Ist nun der Hamiltonoperator eines Systems invariant unter P, d.h. $[H, P] = 0$, so kann man wiederum die Zustände nach ihrer Parität, d.h. den Eigenwerten von P klassifizieren. Hierbei muss man noch zwischen der äusseren Parität der räumlichen Wellenfunktion und der inneren Parität der Konstituenten unterscheiden. Die Gesamtparität setzt sich dann aus dem Produkt der Einzelparitäten zusammen. Es sei hier noch angemerkt, dass es keine klassische Observable als Analogon zur Parität gibt.

Von besonderer Bedeutung sind Operatoren guter Parität, d.h. Operatoren, die mit dem Paritätsoperator kommutieren oder antikommutieren,

$$P\, \mathcal{O}\, P^{-1} = \pi_{\mathcal{O}}\, \mathcal{O} \quad \text{mit} \;\; \pi_{\mathcal{O}} = \pm 1 \,, \tag{3.86}$$

denn dann gelten einfache Paritätsauswahlregeln zwischen Zuständen guter Parität. Es gilt nämlich in diesem Fall

$$\begin{aligned} \langle f|\mathcal{O}|i\rangle &= \langle Pf|P\mathcal{O}P^{-1}|Pi\rangle \\ &= \pi_f \pi_i \pi_{\mathcal{O}} \langle f|\mathcal{O}|i\rangle \,, \end{aligned} \tag{3.87}$$

wobei $\pi_{i/f}$ die Parität vom Anfangs- bzw. Endzustand bezeichnet. Daraus folgt, dass das Matrixelement $\langle f|\mathcal{O}|i\rangle$ verschwindet, falls $\pi_f \pi_i \pi_{\mathcal{O}} = -1$ gilt. Diese Auswahlregel ist u.a. für die Bestimmung der relativen Parität zweier Zustände $(\pi_f \pi_i)$ von grosser Bedeutung. Umgekehrt macht sich die Nichterhaltung der Parität in der Verletzung dieser Auswahlregel bemerkbar, z.B. im Nichtverschwinden einer pseudoskalaren Observablen, etwa $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ zwischen Zuständen gleicher Parität. Auf diese Weise hat man die Nichterhaltung der Parität in der schwachen Wechselwirkung nachgewiesen [LeY56, WuA57].

3.4 Zeitspiegelung

In der klassischen Physik beschreibt man die Zeitspiegelung oder Zeitumkehr durch die Transformation $(\vec{r}, \vec{p}) \to (\vec{r}, -\vec{p})$, die formal einer Zeitumkehr $(t \to -t)$ entspricht. Demgemäss hat in der Quantenmechanik der zugehörige Operator T die Eigenschaften

$$T\,\vec{r}\,T^{-1} = \vec{r}\,, \tag{3.88}$$

$$T\,\vec{p}\,T^{-1} = -\vec{p}\,, \tag{3.89}$$

$$T\,\vec{s}\,T^{-1} = -\vec{s}\,. \tag{3.90}$$

Wegen der grundlegenden Kommutatoren zwischen den Komponenten von Orts- und Impulsoperator sowie den Spinoperatoren

$$[x_j, p_k] = i\,\delta_{jk}\,, \quad [s_j, s_k] = i\,\epsilon_{jkl}\,s_l\,, \tag{3.91}$$

kann T nicht durch einen unitären Operator dargestellt werden, denn Anwendung von T auf die vorstehenden Kommutatoren ergibt die Relation

$$T\,i\,T^{-1} = -i\,. \tag{3.92}$$

Vielmehr wird T durch einen antiunitären Operator repräsentiert, d.h. T ist antilinear und es gilt $T^\dagger = T^{-1}$. Bei einem antilinearen Operator Ω gilt für eine c-Zahl α

$$\Omega\left(\alpha|\psi\rangle\right) = \alpha^* \, \Omega \, |\psi\rangle \, . \tag{3.93}$$

Ferner ist der adjungierte Operator $\Omega^\dagger$ eines antilinearen Operators durch

$$\langle\psi|\Omega^\dagger|\phi\rangle = \langle\Omega\psi|\phi\rangle^* \tag{3.94}$$

für beliebige Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ definiert. Bezeichnen wir mit K den Operator der komplexen Konjugation bezüglich eines gewählten Orthonormalsystems $\{|\alpha\rangle\}$, der durch

$$K\,|\psi\rangle = \sum_\alpha |\alpha\rangle\,\langle\alpha|\psi\rangle^* \tag{3.95}$$

definiert wird, d.h. es gilt $\langle\alpha|K\psi\rangle = \langle\alpha|\psi\rangle^*$, so kann man immer T in der Form

$$T = U_T\,K \tag{3.96}$$

darstellen, wobei U_T unitär ist. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Definition von K darstellungsabhängig ist. Führt man nämlich einen Darstellungswechsel mit $|\tilde\alpha\rangle = e^{i\phi_\alpha}|\alpha\rangle$ (ϕ_α reell) durch, so folgt mit $K|\tilde\alpha\rangle = e^{-2i\phi_\alpha}|\tilde\alpha\rangle$

$$K\,|\psi\rangle = \sum_\alpha |\tilde\alpha\rangle\,\langle\tilde\alpha|\psi\rangle^*\,e^{-2i\phi_\alpha} \, . \tag{3.97}$$

Die Darstellungsabhängigkeit der Definition von K ist damit offensichtlich. Entsprechend ändert sich der unitäre Anteil $U_T \to \widetilde{U}_T$.

Die Tatsache, dass T nur durch einen antiunitären Operator beschrieben werden kann, hat zur Folge, dass man T keine Quantenzahl wie bei der Parität zuordnen kann, denn die Eigenwerte von T hängen von der Darstellung ab und zwar von der Phasendefinition. Das liegt an der antiunitären Eigenschaft (3.93). Denn sei $\widetilde{U}$ ein antiunitärer Operator und $|\lambda\rangle$ ein Eigenzustand von $\widetilde{U}$ mit Eigenwert λ, d.h.

$$\widetilde{U}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \, , \tag{3.98}$$

so gilt für den mit einer Phase versehenen Zustand $|\lambda'\rangle = e^{i\phi}\,|\lambda\rangle$

$$\widetilde{U}\,|\lambda'\rangle = \widetilde{U}\left(e^{i\phi}\,|\lambda\rangle\right) = e^{-i\phi}\,\lambda\,|\lambda\rangle = e^{-2i\phi}\,\lambda\,|\lambda'\rangle \, . \tag{3.99}$$

Also ist $|\lambda'\rangle$ ebenfalls ein Eigenzustand von $\widetilde{U}$ jedoch mit Eigenwert $\lambda' = e^{-2i\phi}\,\lambda$.

Bezeichnen wir einen zeitgespiegelten Zustand mit $|\overline{\psi}\rangle = T|\psi\rangle = U_T\,K\,|\psi\rangle$, so gilt unabhängig von der Darstellung allgemein

$$\boxed{\langle\overline{\psi}|\overline{\phi}\rangle = \langle K\psi|K\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \, .} \tag{3.100}$$

Als Beispiel sei die Ortsdarstellung betrachtet. Dann gilt

$$\begin{aligned} K\,\vec r\,K^{-1} &= \vec r \, , & (3.101)\\ K\,\vec p\,K^{-1} &= -\vec p \, . & (3.102) \end{aligned}$$

Ferner folgen für die Spinoperatoren in der kanonischen Darstellung

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{3.103}$$

die Relationen

$$K\, \sigma_{x/z}\, K^{-1} = \sigma_{x/z} \quad \text{und} \quad K\, \sigma_y\, K^{-1} = -\sigma_y \,. \tag{3.104}$$

Folglich muss U_T die Vorzeichen der x/z-Komponenten umkehren, jedoch die y-Komponente ungeändert lassen. Das kann man durch eine 180°-Drehung um die y-Achse erreichen, also

$$U_T = e^{-i\,\pi\, s_y} \,. \tag{3.105}$$

Auch wenn man bei Invarianz unter Zeitumkehr keine neue Quantenzahl einführen kann, so kann man doch durch geeignete Phasenwahl der Zustände ein einfaches Transformationsverhalten unter T erreichen. Hierbei verwendet man die Eigenschaft des Drehimpulsoperators $T\, J_z\, T^{-1} = -J_z$. Durch Kombination mit einer zusätzlichen Drehung um die y-Achse um 180° ergibt sich

$$R_y(\pi)\, T\, J_z\, T^{-1}\, R_y(\pi)^{-1} = J_z \quad \text{sowie} \quad R_y(\pi)\, T\, \vec{J}^2\, T^{-1}\, R_y(\pi)^{-1} = \vec{J}^2 \,, \tag{3.106}$$

woraus folgt, dass ein Drehimpulszustand $|jm\rangle$ auch eine Eigenfunktion von $R_y(\pi)\, T$ ist, wobei durch geeignete Phasenwahl der Eigenwert zu 1 gewählt werden kann. Dann gilt also

$$R_y(\pi)\, T\, |jm\rangle = |jm\rangle \,, \tag{3.107}$$

bzw.

$$T\, |jm\rangle = R_y(-\pi)\, |jm\rangle = (-)^{j+m}\, |jm\rangle \,. \tag{3.108}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt

$$\langle jm'|\, R_y(-\pi)\, |jm\rangle = d^j_{m'm}(-\pi) = (-)^{j+m}\, \delta_{m',-m} \,. \tag{3.109}$$

Damit erhält man für den zeitumgekehrten Zustand die Beziehung

$$|\overline{jm}\rangle = T\, |jm\rangle = (-)^{j+m}\, |j-m\rangle \,, \tag{3.110}$$

und daher speziell

$$T^2\, |jm\rangle = (-)^{2j}\, |jm\rangle \,. \tag{3.111}$$

Dies bedeutet, dass die Eigenwerte von T^2 gleich $+1$ für ganz- und -1 für halbzahlige Spins sind.

Als Beispiel sei ein orbitaler Drehimpulszustand betrachtet $\langle \vec{r}\,|lm\rangle = R(r)\, Y_{lm}(\hat{r})$. Wegen der Eigenschaft $\langle \vec{r}\,|\, K\, |lm\rangle = (-)^m\, R(r)\, Y_{lm}(\hat{r})$ hat offensichtlich der Zustand $i^l\, R(r)\, Y_{lm}$ das richtige Verhalten unter T. Mit dieser Phasenkonvention ergeben sich einige wichtige Eigenschaften:

(1) Wendet man zweimal T auf $|jm\rangle$ an, so folgt für Zeitumkehrinvarianz aus (3.111) eine Superauswahlregel, nämlich, dass die Zustände mit gerader und ungerader Fermionenzahl disjunkt sind, d.h. durch keine physikalische Observable $\mathcal{O}$ miteinander verbunden sein können, denn es gilt mit $T^2\, \mathcal{O}\, T^{-2} = \mathcal{O}$ die Beziehung

$$\langle j'm'|\, \mathcal{O}\, |jm\rangle = \langle T^2(j'm')|\, \mathcal{O}\, |T^2(jm)\rangle = (-)^{2(j+j')} \langle j'm'|\, \mathcal{O}\, |jm\rangle \,. \tag{3.112}$$

Hieraus folgt somit das Verschwinden von $\langle j'm' | \mathcal{O} | jm \rangle$ falls $j' + j$ halbzahlig ist.

(2) Aus der Beziehung

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \varphi \rangle = \langle \overline{\psi} | \overline{\mathcal{O}} | \overline{\varphi} \rangle^* , \tag{3.113}$$

wobei $\overline{\mathcal{O}} = T\mathcal{O}T^{-1}$ ist, ergibt sich für Zustände mit obiger Phasenkonvention

$$\begin{aligned} \langle j'm' | \mathcal{O} | jm \rangle &= \langle \overline{j'm'} | T \, \mathcal{O} \, T^{-1} | \overline{jm} \rangle^* \\ &= \langle j'm' | R_y(\pi) T \, \mathcal{O} \, (R_y(\pi)T)^{-1} | jm \rangle^* . \end{aligned} \tag{3.114}$$

Besitzt nun der Operator $\mathcal{O}$ die Eigenschaft $R_y(\pi)T \, \mathcal{O} \, (R_y(\pi)T)^{-1} = \pm \mathcal{O}$, so sind dessen Matrixelemente rein reell oder rein imaginär. Zum Beispiel folgt aus dieser Eigenschaft das Verschwinden des Erwartungswertes des elektrischen Dipoloperators, wenn T-Invarianz gilt. Aus diesem Grund hat man mögliche T-Invarianz-Verletzung anhand eines nichtverschwindenden elektrischen Dipolmoments des Neutrons nachzuweisen versucht.

(3) Das detaillierte Gleichgewicht für Reaktionen: Betrachtet man etwa eine auslaufende Streulösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$|i\rangle^{(+)} = \lim_{\eta \to +0} \frac{i\,\eta}{E_i - H + i\eta} |i\rangle , \tag{3.115}$$

wobei $|i\rangle$ der asymptotisch freie Zustand mit Energie E_i für $t \to -\infty$ ist, so folgt für den zeitumgekehrten Zustand unter der Annahme der T-Invarianz

$$\overline{|i\rangle^{(+)}} = - \lim_{\eta \to +0} \frac{i\,\eta}{E_i - H - i\eta} |\overline{i}\rangle . \tag{3.116}$$

Dies entspricht offensichtlich einer einlaufenden Streulösung, die für $t \to +\infty$ asymptotisch gegen den Zustand $|\overline{i}\rangle = T|i\rangle$, dem zu $|i\rangle$ zeitumgekehrten freien Zustand, strebt. Also gilt

$$\overline{|i\rangle^{(+)}} = |\overline{i}\rangle^{(-)} . \tag{3.117}$$

Für das zugehörige S-Matrixelement, das den Übergang $i \to f$ beschreibt, erhält man

$$\begin{aligned} S_{fi} &= {}^{(-)}\langle f | i \rangle^{(+)} = \overline{{}^{(-)}\langle f} \, | \, \overline{i\rangle^{(+)}}^{\,*} \\ &= {}^{(-)}\langle \overline{i} | \overline{f} \rangle^{(+)} = S_{\overline{i}\,\overline{f}} . \end{aligned} \tag{3.118}$$

Das bedeutet, S_{fi} ist gleich dem Übergangsmatrixelement $\overline{f} \to \overline{i}$ für die zeitumgekehrten Zustände. Daraus folgt, dass die Übergangswahrscheinlichkeit für $i \to f$ gleich der des zeitumgekehrten Prozesses $\overline{f} \to \overline{i}$ ist

$$w_{i \to f} = w_{\overline{f} \to \overline{i}} . \tag{3.119}$$

Dies ist das Prinzip der Mikroreversibilität oder des detaillierten Gleichgewichts, das eine wichtige Folgerung aus der T-Invarianz darstellt. Die experimentelle Überprüfung des detaillierten Gleichgewichts anhand spezifischer Reaktionen stellt somit einen weiteren Test der T-Invarianz dar.

3.5 Der Isospin

Zum Abschluss diese Kapitels wollen wir den Isospin als einfaches Beispiel einer inneren Symmetrie betrachten. Der Isospin wurde 1932 von Heisenberg als ein neuer Freiheitsgrad bzw. neue Quantenzahl der Nukleonen eingeführt. Ausgehend von der Beobachtung, dass Neutron und Proton sehr ähnliche Eigenschaften in bezug auf Spin und Masse besitzen, hat

HEISENBERG Neutron und Proton als zwei verschiedene Zustände eines Teilchen, nämlich des Nukleons, aufgefasst und zu ihrer Unterscheidung eine neue Quantenzahl eingeführt, die nur zwei Werte annehmen kann. Das bedeutet, dass man das Nukleon durch eine zweikomponentige Wellenfunktion darstellt, z.B. ein Proton durch

$$\begin{pmatrix} \varphi_p(\vec{r}, m_s) \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_p(\vec{r}, m_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.120}$$

und ein Neutron durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n(\vec{r}, m_s) \end{pmatrix} = \varphi_n(\vec{r}, m_s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{3.121}$$

Führen wir nun Isospinoren χ_{m_t} formal über

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{3.122}$$

ein, so lässt sich ein Nukleon durch die Einführung einer weiteren Quantenzahl m_t in der Form

$$\psi(\vec{r},\, m_s,\, m_t) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_p\, \chi_{\frac{1}{2}} & m_t = \frac{1}{2} \\ \varphi_n\, \chi_{-\frac{1}{2}} & m_t = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \tag{3.123}$$

beschreiben. Hierbei wurde $m_t = \frac{1}{2}$ für ein Proton und $m_t = -\frac{1}{2}$ für ein Neutron definiert. Der Name „Isospin“ wird verständlich, wenn wir nun folgende drei Operatoren bezüglich der neuen Quantenzahl m_t betrachten

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.124}$$

Sie haben die Eigenschaften

$$\tau_0\, \chi_{m_t} \;=\; 2\, m_t\, \chi_{m_t}\, , \tag{3.125}$$

$$\tau_+\, \chi_{m_t} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \chi_{m_t+1}\, , & m_t = -\frac{1}{2}\, , \\ 0\, , & m_t = +\frac{1}{2}\, , \end{array} \right. \tag{3.126}$$

$$\tau_-\, \chi_{m_t} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} 0\, , & m_t = -\frac{1}{2}\, , \\ \chi_{m_t-1}\, , & m_t = +\frac{1}{2}\, . \end{array} \right. \tag{3.127}$$

τ_+ erzeugt also aus einem Neutron ein Proton und vernichtet ein Proton, während τ_- aus einem Proton ein Neutron erzeugt und ein Neutron vernichtet. Statt der Operatoren τ_0, $\tau_\pm$ kann man auch

$$\tau_1 = \tau_+ + \tau_-\, , \quad \tau_2 = -i(\tau_+ - \tau_-) \;\; \text{und} \;\; \tau_3 = \tau_0 \tag{3.128}$$

einführen, die formal den PAULI-Spinmatrizen σ_j entsprechen und damit den Namen “Isospin” erklären.

Der eigentliche Isospinoperator wird dann durch $\vec{t} = \frac{1}{2}\,\vec{\tau}$ definiert. Die Komponenten erfüllen offensichtlich die Vertauschungsrelationen eines Drehimpulsoperators. Daher kann man sie auch als Generatoren für formale Rotationen in einem inneren Isospinraum ansehen. Das erscheint zunächst als rein formale Betrachtung, gewinnt aber in der Tat eine eminent wichtige physikalische Bedeutung. Man hat nämlich empirisch festgestellt, dass sich alle Elementarteilchen in sogenannten Ladungsmultipletts, z.B. (π^-, π^0, π^+) für π-Mesonen, zusammenfassen lassen, sodass man diese durch sogenannte Isospinmultipletts mit festem Isospin beschreiben kann. Dementsprechend hat das π-Meson den Isospin 1, da es in drei Ladungszuständen vorkommt. Allgemein kann man den Ladungsoperator eines Hadrons, d.h. eines stark wechselwirkenden Teilchens, durch

$$Q = e\left(t_3 + \frac{1}{2}(S+B)\right) \tag{3.129}$$

mit B als Baryonenzahl und S als Seltsamkeit (Strangeness) darstellen. Für π-Mesonen gilt $B = S = 0$ und für Nukleonen $B = 1$ und $S = 0$.

Mit der Einführung des Isospins muss man auch das PAULI-Prinzip verallgemeinern, indem auch die Isospinquantenzahl bei der Vertauschung zweier Nukleonen mitberücksichtigt werden muss. Das bedeutet insbesondere, dass dann eine Mehrnukleonenwellenfunktion auch unter Vertauschung von Proton und Neutron antisymmetrisch sein muss.

Ebenso wie beim Spin kann man auch einen Gesamtisospin eines System aus mehreren Nukleonen durch Kopplung der einzelnen Isospins bilden. Zum Beispiel erhält man für ein Zweinukleonensystem als Zustände mit gutem Gesamtisospin

(a) einen antisymmetrischen ($T = 0$)-Zustand

$$|T=0\,M_T=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{\frac{1}{2}}(1)\,\chi_{-\frac{1}{2}}(2) - \chi_{-\frac{1}{2}}(1)\,\chi_{\frac{1}{2}}(2)\right), \tag{3.130}$$

(b) und einen symmetrischen ($T = 1$)-Zustand

$$|T=1\,M_T\rangle = \begin{cases} \chi_{\pm\frac{1}{2}}(1)\,\chi_{\pm\frac{1}{2}}(2)\,, & M_T = \pm 1\,, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{\frac{1}{2}}(1)\,\chi_{-\frac{1}{2}}(2) + \chi_{-\frac{1}{2}}(1)\,\chi_{\frac{1}{2}}(2))\,, & M_T = 0\,. \end{cases} \tag{3.131}$$

Eine besondere Bedeutung bekommt der Isospin, falls er eine dynamische Erhaltungsgrösse darstellt. In anderen Worten, wenn für den Hamiltonoperator Isospininvarianz gilt, d.h. wenn $[T,\,H] = 0$ oder etwas schwächer $[T_3,\,H] = 0$ erfüllt ist. Dann kann man Isospinquantenzahlen zur Klassifizierung von Zuständen einführen, wie das bereits beim Nukleon gemacht wurde.

[Edm57] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University, Princeton, 1957.

[Gre79] W. Greiner, *Theoretische Kernphysik V, Quantenmechanik II, Symmetrien*, Verlag Harri Deutsch, Farnkfurt, 1979.

[LeY56] T.D. Lee und C.N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).

[Lip67] H.J. Lipkin, *Anwendung von Lieschen Gruppen in der Physik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[Mes85] A. Messiah, *Quantenmechanik*, Bd. 2, de Gruyter, Berlin, 1985.

[Rom65] P. Roman, *Advanced Quantum Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1965.

[Ros57] E.M. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957.

[WuA57] C.S. Wu, E. Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hoppes und R.F. Hudson, Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).

4 Die Struktur der Kernkräfte und das Zwei-Nukleonen-System

Ausgangspunkt jeder dynamischen Beschreibung eines physikalischen Systems ist die Bestimmung der relevanten Freiheitsgrade und der wirkenden Kräfte. In der Einführung hatten wir schon darauf hingewiesen, dass in der klassischen Kernphysik die Nukleonen die Konstituenten des Kerns bilden. Damit sind die Freiheitsgrade durch Position $\vec{r}_i$, Impuls $\vec{p}_i$, Spin $\vec{s}_i$ und Isospin t_i des i-ten Nukleons gegeben. Für die Wechselwirkung macht man zunächst die einfachste Annahme, dass zwischen den Nukleonen nur Zweiteilchenkräfte wirken, die durch ein Potential beschrieben werden können. In der weiteren Entwicklung zu einem tieferen Verständnis hat sich aber gezeigt, dass man auch Drei- und Mehrkörperkräfte in Betracht ziehen muss. Aus historischen Gründen wollen wir zunächst die phänomenologischen Potentialansätze betrachten, um anschliessend moderne, mesonentheoretische Modelle zu behandeln.

4.1 Phänomenologische Potentiale

Für die phänomenologische Methode wählt man eine geeignete, in weiten Grenzen jedoch willkürliche funktionale Form für das Potential, die mit hinreichend vielen Parametern flexibel genug gestaltet wird, sodass man durch optimale Wahl dieser Parameter eine möglichst genaue Beschreibung der experimentellen Daten des NN-Systems erhält. Man unterscheidet dabei lokale und nichtlokale Potentiale, wobei die Grenze fliessend ist.

4.1.1 Lokale Potentiale

Ausgangspunkt ist folgender allgemeiner Ansatz als Funktion der relevanten Freiheitsgrade der beiden Nukleonen

$$V(1,2) = V(\vec{r}_j, \vec{p}_j, \vec{\sigma}_j, \vec{\tau}_j;\, j = 1,2)\,, \tag{4.1}$$

wobei Symmetrie- und Invarianzeigenschaften des HAMILTONoperators bereits einige Einschränkungen der allgemeinsten Form zur Folge haben. Diese bestehen in der Forderung nach Invarianz unter Translationen, Rotationen, GALILEI-Transformationen und Teilchenvertauschung im Sinne des verallgemeinerten PAULI-Prinzips, d.h.

$$V(1,2) = V(2,1)\,. \tag{4.2}$$

Zur Berücksichtigung dieser Invarianzen führt man Relativ- und Schwerpunktkoordinaten und Impulse ein, wobei die kleine Massendifferenz zwischen Neutron und Proton vernachlässigt wird,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,, \quad \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\,, \tag{4.3}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\,, \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,. \tag{4.4}$$

Die Forderung nach Invarianz unter Translationen $\vec{r}_j \to \vec{r}_j + \vec{a}$ führt zur Bedingung

$$V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{R}, \vec{P}) = V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{R} + \vec{a}, \vec{P})\,, \tag{4.5}$$

und Invarianz unter GALILEI-Transformationen $\vec{p}_j \to \vec{p}_j + \vec{p}_0$ zu

$$V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{R}, \vec{P}) = V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{R}, \vec{P} + 2\vec{p}_0)\,. \tag{4.6}$$

Tabelle 4: Tensoren im Zwei-Nukleon-Spinor-Raum.

Typ	Operator	Symmetrie	Parität	Zeitumkehr	Anzahl
Skalar	1	s	$+$	$+$	1
Skalar	$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$	s	$+$	$+$	1
Vektor	$\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2$	a	$+$	$+$	3
Vektor	$\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2$	a	$+$	$-$	3
Vektor	$\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$	s	$+$	$-$	3
Tensor	$[\sigma_1^{[1]} \times \sigma_2^{[1]}]^{[2]}$	s	$+$	$+$	5
	Gesamtzahl				16

Da $\vec{a}$ und $\vec{p}_0$ beliebig sind, bedeuten diese Relationen, dass V nicht von $\vec{R}$ und $\vec{P}$ abhängen darf, d.h. folgende Form besitzen muss

$$V(1,2) = V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{\sigma}_j, \vec{\tau}_j;\ j = 1,2). \tag{4.7}$$

Als nächstes untersuchen wir die Forderung nach Rotationsinvarianz. Sie legt die Struktur bezüglich der Spinfreiheitsgrade fest. Jede Funktion $f(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$ stellt im Raum der Zwei-Nukleonen-Spinoren eine (4×4)-Matrix dar, die sich als Linearkombination von 16 Spinmatrizen darstellen lässt. Diese können wir nach ihren Tensoreigenschaften klassifizieren wie in Tabelle 4 dargestellt ist. Bei der Bildung des Potentials aus einer Linearkombination dieser Operatoren ist darauf zu achten, dass der resultierende Ausdruck ein Skalar ist und die Forderungen nach Symmetrie unter Teilchenvertauschung sowie Parität und Zeitumkehr erfüllt. Das bedeutet insbesondere, dass wir die Vektor- und Tensor-Spinoperatoren mit entsprechenden Vektor- und Tensoroperatoren, aus $\vec{r}$ und $\vec{p}$ gebildet, kombinieren müssen. Die entsprechend möglichen Operatoren sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

Tabelle 5: Tensoren gebildet aus $\vec{r}$ und $\vec{p}$.

Typ	Operator	Symmetrie	Parität	Zeitumkehr
Skalar	$\vec{r}^2$	s	$+$	$+$
Skalar	$\vec{p}^2$	s	$+$	$+$
Skalar	$\vec{r} \cdot \vec{p}$	s	$+$	$-$
Vektor	$\vec{r}$	a	$-$	$+$
Vektor	$\vec{p}$	a	$-$	$-$
Vektor	$\vec{r} \times \vec{p}$	s	$+$	$-$
Tensor	$[r^{[1]} \times r^{[1]}]^{[2]}$	s	$+$	$+$
Tensor	$[p^{[1]} \times p^{[1]}]^{[2]}$	s	$+$	$+$
Tensor	$[r^{[1]} \times p^{[1]}]^{[2]}$	s	$+$	$-$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie- und Invarianzforderungen bleiben nur folgende Vektor-Vektor und Tensor-Tensor Kombinationen übrig

(a) Vektor-Vektor: Spin-Bahn-Operator

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) , \tag{4.8}$$

(b) Tensor-Tensor:

$$\begin{aligned} [r^{[1]} \times r^{[1]}]^{[2]} \cdot [\sigma_1^{[1]} \times \sigma_2^{[1]}]^{[2]} &= (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - \tfrac{1}{3} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \, r^2 , \\ [p^{[1]} \times p^{[1]}]^{[2]} \cdot [\sigma_1^{[1]} \times \sigma_2^{[1]}]^{[2]} &= (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p}) - \tfrac{1}{3} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \, p^2 , \\ [\sigma_1^{[1]} \times \sigma_2^{[1]}]^{[2]} &\cdot [r^{[1]} \times p^{[1]}]^{[2]} \, \vec{r} \cdot \vec{p} . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Anstelle des letzten Tensors verwendet man den äquivalenten quadratischen Spin-Bahn-Term $(\vec{L} \cdot \vec{S})^2$. Somit ergibt sich als allgemeinste Form des Potentials, das die Forderungen nach Invarianz unter Teilchenvertauschung, Translation, GALILEI-Tranformation, Raumrotation, Parität und Zeitumkehr erfüllt

$$V(1,2) = V_C + V_S(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_T S_{12}(\vec{r}) + V_{T'} S_{12}(\vec{p}) + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{S} + V_Q (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 , \tag{4.10}$$

wobei die noch unbestimmten Grössen V_α mit $\alpha \in \{C, S, T, T', LS, Q\}$ skalare Funktionen der noch verbleibenden Skalare r^2, p^2 und $(\vec{r} \cdot \vec{p})^2$ sind. Zur Definition des Tensoroperators S_{12} siehe weiter unten Gleichung (4.31).

Wegen der Beziehung

$$(\vec{r} \cdot \vec{p})^2 = r^2 \, p^2 - L^2 \tag{4.11}$$

wählt man jedoch r^2, p^2 und L^2 als unabhängige Variable. Schliesslich ist auch noch zu beachten, dass V insgesamt ein hermitescher Operator sein muss.

Als letzten Punkt wollen wir noch die Isospinabhängigkeit untersuchen. Experimentelle Ergebnisse weisen darauf hin, dass die NN-Wechselwirkung nahezu unabhängig vom Ladungszustand der Nukleonen ist, d.h. für nn, pp und np Systeme fast gleich ist. Das kann man formal durch die Eigenschaft $[H, T_\pm] = 0$ zum Ausdruck bringen, wobei $\vec{T}$ den Operator des Gesamtisospins $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$, bezeichnet. Zusammen mit der Ladungserhaltung $[H, T_z] = 0$ folgt damit $[H, T^2] = 0$, d.h. Invarianz unter allgemeinen Rotationen im Isospinraum. Anschaulich bedeutet das, dass die hadronische Wechselwirkung nicht zwischen Neutron oder Proton oder einer kohärenten Überlagerung von beiden unterscheiden kann. Unter dieser Hypothese der Isospininvarianz muss jede der Funktionen V_α ein Isoskalar sein, d.h. bzgl. der Isospinabhängigkeit von der Form

$$V_\alpha = V_{\alpha 0} + V_{\alpha 1} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \tag{4.12}$$

sein. Eine schwächere Forderung stellt diejenige nach Ladungssymmetrie dar, d.h. gleiche Wechselwirkung für pp und nn Systeme, wohingegen über np Systeme keine Aussage gemacht wird. In diesem Fall muss nur $[H, (T_\pm)^2] = 0$ gelten. Es ist aber aufgrund elektromagnetischer Effekte zu erwarten, dass Abweichungen von der Ladungssymmetrie bzw. -unabhängigkeit auftreten.

4.1.2 Nichtlokale Potentiale

Die allgemeinste Form eines Potentials, das sowohl lokale als auch nichtlokale Potentiale umfasst, wird durch einen Integraloperator dargestellt

$$\langle \vec{r} \mid \hat{V} \mid \psi \rangle \;=\; \int d^3 r' \langle \vec{r} \mid \hat{V} \mid \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' \mid \psi \rangle = \int d^3 r' V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}')) . \tag{4.13}$$

Dementsprechend ist die Schrödingergleichung im allgemeinen eine Integrodifferentialgleichung. Der Spezialfall eines lokalen Potentials ist durch die Diagonalform

$$V(\vec{r}, \vec{r}\,') = V(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{4.14}$$

ausgezeichnet. In anderen Worten, ein lokales Potential ist dadurch gekennzeichnet, dass die Darstellung

$$\langle \vec{r}|V|\psi\rangle = V(\vec{r})\,\psi(\vec{r}) \tag{4.15}$$

gilt, d.h. die Wirkung der Wechselwirkung am Ort $\vec{r}$ ist nur durch den Wert der Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ an diesem Ort bestimmt. Damit gehört strenggenommen ein geschwindigkeitsabhängiges Potential $V(\vec{r}, \vec{p})$ nicht mehr zur Klasse der lokalen Potentiale, denn die Abhängigkeit des Potentials von $\vec{p}$ beschreibt gerade den Einfluss der Änderung von ψ in der Umgebung von $\vec{r}$ auf die Wechselwirkung. In der Tat werden wir am Ende dieses Abschnitts die Äquivalenz zwischen geschwindigkeitsabhängigen und nichtlokalen Potentialen aufzeigen.

Für $V(\vec{r}, \vec{r}\,')$ kann man nun wieder eine mit allen Invarianzforderungen verträgliche Form finden. Das soll hier aber nicht im Einzelnen ausgeführt werden. Vielmehr soll hier nur eine besondere Klasse von nichtlokalen Kräften erwähnt werden, die sogenannten separablen Kräfte, die für manche Anwendungen sehr nützlich sind und sich in der Form

$$V(\vec{r}, \vec{r}\,') = f^*(\vec{r})\,f(\vec{r}\,') \tag{4.16}$$

darstellen lassen. Das bedeutet, dass die Abhängigkeit von $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$ separiert. Dann gilt

$$\langle \vec{r} \mid \hat{V} \mid \psi\rangle = f^*(\vec{r}) \int d^3\vec{r}\,' f(\vec{r}\,')\,\psi(\vec{r}\,')\,, \tag{4.17}$$

und damit lässt sich die Schrödingergleichung erheblich einfacher lösen.

Der tiefere Grund für nichtlokale Effekte in der NN-Wechselwirkung liegt einmal in der endlichen Ausdehnung der Nukleonen, d.h. in deren interner Struktur und Dynamik, und in relativistischen, insbesondere Retardierungs-Effekten.

Zum Abschluss wollen wir den Zusammenhang von nichtlokalen mit geschwindigkeits- bzw. impulsabhängigen Potentialen erläutern. Gegeben sei zunächst ein nichtlokales Potential in der Ortsdarstellung $\langle \vec{r}|V|\vec{r}\,'\rangle = V(\vec{r}, \vec{r}\,')$, und es werde das Matrixelement von V zwischen zwei beliebigen Zuständen in der Ortsdarstellung betrachtet

$$\langle \phi|V|\psi\rangle = \int d^3r'' d^3r'\,\langle \phi|\vec{r}\,''\rangle\,V(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\langle \vec{r}\,'|\psi\rangle\,. \tag{4.18}$$

Mithilfe der Transformation der Integrationsvariablen

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\,(\vec{r}\,'' + \vec{r}\,')\,, \quad \vec{\rho} = \vec{r}\,'' - \vec{r}\,'\,, \tag{4.19}$$

und der Taylorentwicklung, ausgedrückt durch den Translationsoperator von (3.17)

$$\langle \vec{r}\,'|\psi\rangle = \langle \vec{r} - \tfrac{1}{2}\,\vec{\rho}\,|\psi\rangle = \langle \vec{r}\,|U(\tfrac{1}{2}\,\vec{\rho})|\psi\rangle\,, \tag{4.20}$$

kann man das Matrixelement in folgende Form bringen

$$\langle \phi|V|\psi\rangle = \int d^3r\,\langle \phi|\vec{r}\,\rangle\,\widetilde{V}(\vec{r}, \vec{p})\,\langle \vec{r}\,|\psi\rangle \tag{4.21}$$

mit dem äquivalenten, impulsabhängigen Potential in der Ortsdarstellung

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(\vec{r},\vec{p}) &= \int d^3\rho\, e^{-\frac{i}{2}\vec{\rho}\cdot\vec{p}}\, V(\vec{r}+\tfrac{1}{2}\vec{\rho},\vec{r}-\tfrac{1}{2}\vec{\rho})\, e^{-\frac{i}{2}\vec{\rho}\cdot\vec{p}} \\ &= \int d^3\rho\, V(\vec{r}+\tfrac{1}{2}\vec{\rho},\vec{r}-\tfrac{1}{2}\vec{\rho}) \\ &\quad +\frac{i}{2}\int d^3\rho \left\{\vec{\rho}\cdot\vec{p},\, V(\vec{r}+\tfrac{1}{2}\vec{\rho},\vec{r}-\tfrac{1}{2}\vec{\rho})\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{4.22}$$

mit $\vec{p} = -i\,\vec{\nabla}_r$. Eine alternative Form ist

$$\widetilde{V}(\vec{r},\vec{p}) = \frac{1}{2}\int d^3\rho \Big(V(\vec{r},\vec{r}-\rho)\, e^{-i\,\vec{\rho}\cdot\vec{p}} + h.c.\Big)\,. \tag{4.23}$$

Nun sei umgekehrt ein geschwindigkeitsabhängiges Potential $V(\vec{r},\vec{p})$ gegeben. Man kann es immer in die Form

$$V(\vec{r},\vec{p}) = v(\vec{r},\vec{p}) + v^\dagger(\vec{r},\vec{p}) \tag{4.24}$$

bringen, wobei in $v(\vec{r},\vec{p})$ alle $\vec{p}$-Terme rechts von den Ortsoperatoren $\vec{r}$ stehen. Für dessen Matrixelement erhält man nacheinander

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}\mid v(\vec{r},\vec{p})\mid\vec{r}\,'\rangle &= \int d^3r''\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'')\,v(\vec{r}\,'',\vec{p}\,'')\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r''\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'')\,v(\vec{r}\,'',\vec{p}\,'')\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}\,''-\vec{r}\,')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r''\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'')\int d^3k\, v(\vec{r}\,'',\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}\,''-\vec{r}\,')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, v(\vec{r},\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\,, \end{aligned} \tag{4.25}$$

und somit schliesslich als äquivalentes nichtlokales Potential

$$\langle\vec{r}|V|\vec{r}\,'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\Big(v(\vec{r},\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} + c.c.\Big)\,. \tag{4.26}$$

Die neuerliche Konstruktion des zugehörigen, äquivalenten, $\vec{p}$-abhängigen Potentials $\widetilde{V}$ führt natürlich wieder auf das ursprüngliche Potential, wie man sich leicht am einfachsten unter Verwendung von (4.23) überzeugen kann.

4.2 Mesonentheoretische Potentiale

Zu einem tieferen Verständnis der NN-Kräfte führt die Idee von Hideki Yukawa (1935), der in Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung ein die Kernkraft vermittelndes Feld einführt, das aber im Gegensatz zu den Photonen des elektromagnetischen Feldes Teilchen, die Mesonen getauft wurden, mit einer nicht verschwindenden Ruhemasse beschreibt, damit die resultierend Kraft eine endliche Reichweite besitzt. Den wesentlichen Inhalt dieser Idee kann man bereits am einfachen Bild eines statischen, klassischen Feldes verdeutlichen. Der Coulombwechselwirkung, die man durch ein statisches, skalares Feld ϕ_γ vermittelt darstellen kann, stellen wir in Tabelle 6 eine durch ein massives, statisches Mesonenfeld (pseudoskalar) $\vec{\phi}_\pi$ als Isovektorfeld übertragene Wechselwirkung gegenüber. Genauso wie eine elektrische Ladung Quelle eines statischen Coulombfeldes ist, erzeugt ein Nukleon ein statisches Mesonfeld.

Tabelle 6: Gegenüberstellung der statischen COULOMBwechselwirkung (Photonaustausch) und der starken Wechselwirkung (Mesonaustausch).

	Photonaustausch	Mesonaustausch
skalares Feld	ϕ_γ	$\vec{\phi}_\pi$
stat. Feldgleichung	$\Delta\,\phi_\gamma(\vec{x}) = -4\pi\,\rho_\gamma(\vec{x},\vec{r}_1)$	$(\Delta - m_\pi^2)\vec{\phi}_\pi(\vec{x}) = -\vec{\rho}_\pi(\vec{x},\vec{r}_1)$
Punktquelle	$\rho_\gamma(\vec{x},\vec{r}_1) = q_1\delta(\vec{x}-\vec{r}_1)$	$\vec{\rho}_\pi(\vec{x},\vec{r}_1) = \frac{f_\pi}{m_\pi}\vec{\tau}_1\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}\delta(\vec{x}-\vec{r}_1)$
Lösung	$\phi_\gamma(\vec{x},\vec{r}_1) = \frac{q_1}{\vert\vec{x}-\vec{r}_1\vert}$	$\vec{\phi}_\pi(\vec{x},\vec{r}_1) = \frac{f_\pi}{4\pi\,m_\pi}\,\vec{\tau}_1\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}\frac{e^{-m_\pi\vert\vec{x}-\vec{r}_1\vert}}{\vert\vec{x}-\vec{r}_1\vert}$

Das Potential der durch das Feld vermittelten Wechselwirkung erhält man aus der potentiellen Energie des zweiten Teilchens im vom ersten Teilchen erzeugten Feld

$$V_\gamma(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \int d^3x\,\rho_\gamma(\vec{x},\vec{r}_2)\phi_\gamma(\vec{x},\vec{r}_1) = \frac{q_1q_2}{\mid\vec{r}_1-\vec{r}_2\mid} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} V_\pi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) &= \int d^3x\,\vec{\rho}_\pi(\vec{x},\vec{r}_2)\cdot\vec{\phi}_\pi(\vec{x},\vec{r}_1) \\ &= -\frac{f_\pi^2}{4\pi m_\pi^2}\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\nabla}_1\vec{\sigma}_2\cdot\vec{\nabla}_2\frac{e^{-m|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{\mid\vec{r}_1-\vec{r}_2\mid}\,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Im Fall des vermittelnden Pionfeldes erhält man auf diese Weise das statische Ein-Pion-Austauschpotential (OPEP)

$$V_\pi(\vec{r}) = \frac{f_\pi^2}{4\pi\,m_\pi^2}\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\nabla}\vec{\sigma}_2\cdot\vec{\nabla}\frac{e^{-m_\pi r}}{r} \tag{4.29}$$

mit der Pion-Nukleon-Kopplungskonstanten $f_\pi^2/4\pi$, deren empirischer Wert etwa 0.08 beträgt. Den Spinoperator zerlegt man durch Umkopplung zweckmässigerweise in einen skalaren und einen tensoriellen Anteil. Es gilt allgemein

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}_2\cdot\vec{a} &= \frac{1}{3}\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\,\vec{a}^{\,2} + \sqrt{5}\Big[[\sigma_1^{[1]}\times\sigma_2^{[1]}]^{[2]}[a^{[1]}\times a^{[1]}]^{[2]}\Big]^{[0]} \\ &= \frac{1}{3}\Big(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\,\vec{a}^{\,2} + S_{12}(\vec{a})\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Man bezeichnet

$$S_{12}(\vec{a}\,) = 3\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}_2\cdot\vec{a} - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\,\vec{a}^{\,2} \tag{4.31}$$

als Tensoroperator. Mit $\vec{a} = \vec{\nabla}$ ergibt sich schliesslich

$$V_\pi(\vec{r}) = \frac{f_\pi^2}{12\pi}\,\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2\,\Big[\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\Big(\frac{e^{-m_\pi r}}{r} - \frac{4\pi}{m_\pi^2}\delta(\vec{r})\Big) + S_{12}(\vec{r})\Big(1+\frac{3}{m_\pi r}+\frac{3}{(m_\pi r)^2}\Big)\frac{e^{-m_\pi r}}{r}\Big]\,. \tag{4.32}$$

Der Austausch eines pseudoskalaren Mesons erzeugt also neben einem spinabhängigen Zentralpotential zusätzlich einen Tensoranteil, d.h. eine nichtzentrale Kraft. Eine analoge Betrachtung für den Austausch eines skalaren Teilchens, d.h. $\rho(\vec{x},\vec{r}) = g\delta(\vec{x}-\vec{r})$, würde ein spinunabhängiges, reines Zentralpotential erzeugen.

4.2.1 Ein-Boson-Austauschpotentiale (OBEP)

Bisher haben wir eine rein klassische Überlegung verwendet. Die quantenmechanische Behandlung liefert jedoch das gleiche Ergebnis, wenn man sich auf die niedrigste Ordnung Störungsrechnung in statischer Näherung beschränkt. Ausgangspunkt ist ein System gekoppelter Nukleon- und Mesonfelder,

$$H = H_N^0 + H_m^0 + H_{mN} \tag{4.33}$$

wobei die freien Felder durch H_N^0 und H_m^0 beschrieben werden. Die Meson-Nukleon-Kopplung H_{mN} hängt vom Mesontyp ab. Die Wichtigsten sind folgende drei Typen (ψ bezeichnet das Nukleonfeld):

(1) skalare Mesonen: $\phi^{(s)}$ mit Kopplungskonstanten g_s

$$H_{mN}^{(s)} = g_s \, \bar{\psi} \, \psi \, \phi^{(s)} \, . \tag{4.34}$$

(2) pseudoskalare Mesonen: $\phi^{(ps)}$
Hier unterscheidet man zwischen pseudoskalarer (ps) und pseudovektorieller (pv) Kopplung

$$\begin{aligned} H_{mn}^{(ps)} &= i \, g_{ps} \, \bar{\psi} \, \gamma_5 \, \psi \, \phi^{(ps)} \, , & (4.35) \\ H_{mN}^{(pv)} &= i \, \frac{f_{ps}}{m_{ps}} \, \bar{\psi} \, \gamma_5 \, \gamma^\mu \, \psi \, \partial_\mu \, \phi^{(ps)} \, , & (4.36) \end{aligned}$$

mit entsprechenden Kopplungskonstanten g_{ps} bzw. f_{ps}.

(3) Vektormesonen: $\phi_\mu^{(V)}$
Auch hier hat man zwei Kopplungsmöglichkeiten, nämlich Vektorkopplung (γ^μ) mit Kopplungskonstanten g_V und Tensorkopplung ($\sigma^{\mu\nu}$) mit Kopplungskonstanten f_V.

$$H_{mN}^{(V)} = g_V \, \bar{\psi} \, \gamma^\mu \, \psi \, \phi_\mu^{(V)} - \frac{f_V}{4M} \, \bar{\psi} \, \sigma^{\mu\nu} \, \psi \Big(\partial_\mu \, \phi_\nu^{(V)} - \partial_\nu \phi_\mu^{(V)} \Big) \tag{4.37}$$

mit $M =$ Nukleonmasse. In diesen Ausdrücken wird das Mesonfeld durch ϕ bzw. ϕ_μ beschrieben. Ferner können die Mesonen isoskalaren als auch isovektoriellen Ckarakter tragen. Im letzteren Fall sind die Kopplungen $\bar{\psi} \cdots \psi \, \phi$ sinngemäss durch $\bar{\psi} \cdots \vec{\tau} \, \psi \, \cdot \vec{\phi}$ zu ersetzen.

In bezug auf die beiden Kopplungsmöglichkeiten für pseudoskalare Mesonen gilt für Nukleonen auf der Massenschale Äquivalenz, falls die Kopplungskonstanten die Beziehung

$$\frac{f_{ps}}{m_{ps}} = \frac{g_{ps}}{2M} \tag{4.38}$$

erfüllen. Diese Äquivalenz gilt jedoch nicht mehr für "off-shell"-Situationen. Insbesondere sind Antiteilchenbeiträge für die ps-Kopplung gross, während sie für pv-Kopplung sehr stark unterdrückt sind. An dieser Stelle sei auch noch darauf hingewiesen, dass für Prozesse, für welche die chirale Symmetrie von Bedeutung ist, die pv-Kopplung bevorzugt wird, da sie im Gegensatz zur ps-Kopplung die chirale Symmetrie erhält.

In 2. Ordnung Störungsrechnung ergibt sich dann für das in Abb. 4.1 dargestellte Feynman-Diagramm als Amplitude

$$\bar{u}_1(\vec{q}\,') \, \Gamma_1 \, u(\vec{q}) \, G_m(q' - q) \, \bar{u}_2(-\vec{q}\,') \Gamma_2 u(-\vec{q}) \, , \tag{4.39}$$

Tabelle 7: Übersicht über die in Bosonaustauschpotentialen verwendeten Mesonen mit Spin J, Parität P, Isospin I und G-Parität G. (Zur G-Parität siehe Lieratur über Quantenfeldtheorie)

Bezeichnung	J^P	I^G	Masse [MeV]
$\pi^{\pm}$	0^-	1^-	139.57
π^0	0^-	1^-	134.96
η	0^-	0^+	548.8
ρ	1^-	1^+	769
ω	1^-	0^-	769

wobei $u(\vec{p})$ den DIRAC-Spinor eines Nukleons bezeichnet, Γ_k die sich aus H_{mN} ergebende Vertexfunktion und G_m den freien Mesonpropagator. Vertexfunktion Γ_k und Propagator G_m hängen vom Mesontyp ab. Für skalare und pseudoskalare Mesonen ist z.B.

$$G_m(q' - q) = \frac{1}{(q' - q)^2 - m^2} . \tag{4.40}$$

Bei Vektormesonen muss noch die Spinstruktur berücksichtigt werden.

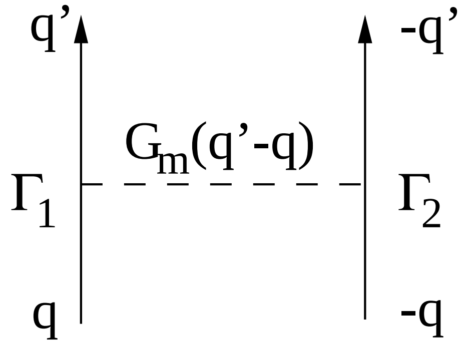

Abbildung 4.1: FEYNMAN-Diagramm für Ein-Boson-Austausch.

Die Reichweite des durch ein Meson beschriebenen Potentialanteils ist durch dessen COMPTONwellenlänge m^{-1} gegeben. Das hat G.C. WICK allgemein aus der Energie-Zeit-Unschärferelation hergeleitet. Danach bedeutet die Emission eines virtuellen Mesons eine Verletzung des Energiesatzes um $\Delta E \approx m$, die mit einer Zeitunschärfe von $\Delta t \approx m^{-1}$ verknüpft ist. In diesem Zeitabschnitt kann sich das Meson höchstens mit Lichtgeschwindigkeit um Δt bewegen, bevor es wieder reabsorbiert sein muss. Somit nimmt mit zunehmender Masse des ausgetauschten Mesons die Reichweite ab.

Eine Übersicht der verwendeten Mesonen ist in Tabelle 7 gegeben. Man erkennt, dass die π-Mesonen wegen ihrer kleinen Masse den langreichweitigsten Anteil beschreiben. η, ρ und ω sind die nächstwichtigen mit immer kürzerer Reichweite. Realistische Potentiale benötigen jedoch noch zusätzlich ein skalares Meson mittlerer Reichweite ($m \approx 500$ MeV), das eine notwendige Attraktion bei mittleren Abständen erzeugt, dessen Existenz jedoch umstritten ist.

Als Beispiel sei kurz das realistische BONN-Ortsraum-Potential vorgestellt. Die verwendeten Mesonen sind mit den entsprechenden Kopplungskonstanten in Tabelle 8 zusammen-

Tabelle 8: Übersicht über die im BONN-Ortsraum-Potential A verwendeten Mesonen mit Kopplungskonstanten und Abschneide-Parametern Λ ($n = 1$, siehe (4.42)). Ferner $f_\rho/g_\rho = 6,1$ und $f_\omega/g_\omega = 0$.

Meson	Masse [MeV]	$g^2/4\pi$	Λ [GeV]
π	$138,03$	$14,9$	1,3
η	$548,8$	2	1,5
ρ	769	$1,2$	1,2
ω	$782,6$	25	1,4
δ	983	$2,742$	2,0
σ	550	$8,77171$	2,0

gestellt. In jedem Spin-Isospin-Kanal lässt sich das Potential in der Form

$$V = V_C + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{S} \tag{4.41}$$

darstellen. Bei diesem Potential wurden hadronische Vertexformfaktoren zusätzlich eingeführt, um pauschal die endliche Ausdehnung von Nukleon und Meson zu berücksichtigen. Man wählt sie häufig in der einfachen analytischen Form

$$F(q^2) = \Big(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 - q_\mu^2}\Big)^{\frac{n}{2}}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.42}$$

mit geeigneten Abschneide-Parametern Λ, die ebenfalls in Tabelle 8 aufgeführt sind. Dadurch werden die hohen Impulskomponenten gedämpft, insbesondere im skalaren Anteil des OPEPs die störende δ-Funktion eliminiert. Es werden aber auch andere funktionale Formen verwendet, etwa GAUSS-Funktionen. Im Ortsraum entspricht diese Einführung von Vertexformfaktoren einer Abschwächung bei kleinen Nukleonabständen. Im Grunde ist dies ein rein heuristisches Verfahren, das unser Nichtwissen über die tatsächliche Struktur der Wechselwirkung bei kleinen Abständen in einfachster Weise parametrisiert.

Bezüglich der Rolle der verschiedenen Mesonen ergeben sich qualitativ folgende Eigenschaften:

(a) Der langreichweitige Anteil ($r > 2$ fm) wird ausschliesslich durch das Pion beschrieben. Auch moderne phänomenologische Potentiale berücksichtigen diese Tatsache.

(b) Im Bereich mittlerer Reichweite ($1 \leq r \leq 2$ fm) herrscht Anziehung, die durch σ und η bzw. Zwei-π-Austausch (TPE) beschrieben wird.

(c) Der kurzreichweitige Anteil wird durch ρ und ω beherrscht,und zwar bewirken diese eine Abstossung.

(d) Der Bereich kürzester Abstände wird schliesslich rein phänomenologisch beschrieben, entweder durch einen scharfen Abschneideradius ("hard core") oder in weicher Form ("soft core").

4.2.2 Weitere Entwicklungen

Eines der Hauptprobleme der OBE-Potentiale ist die Rechtfertigung des skalaren σ-Austausches, das für die Beschreibung der mittelreichweitigen Anziehung nötig ist. Denn unter den physikalischen Mesonen gibt es kein Meson mit den geforderten Eigenschaften. Weitergehende Untersuchungen haben gezeigt, dass der zugrundeliegende Mechanismus ein korrelierter Zwei-Pion-Austausch (TPE) ist. Zwei Methoden zur realistischen Beschreibung dieses Sachverhalts möchte ich kurz erwähnen.

(1) Dispersionstheoretischer Ansatz:

Dieser beruht auf der Annahme, dass man den TPE-Beitrag diagrammatisch wie in Abb. 4.2 darstellen kann, d.h. dass er durch alleiniges Schneiden von zwei Pionlinien in zwei disjunkte, gleichartige Diagramme zerlegen werden kann, welche off-shell Pion-Nukleon-Streuung beschreiben. Die off-shell Pion-Nukleon-Streuung wird zerlegt in einen reinen πN-Streubeitrag

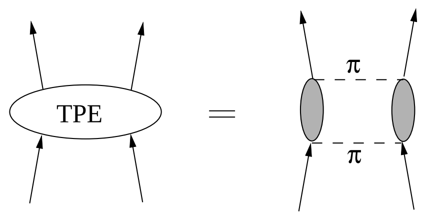

Abbildung 4.2: Zwei-Pion-Austausch-Diagramm.

ohne $\pi\pi$-Wechselwirkung und einem zusätzlichen $\pi\pi$-Streubeitrag. Das ist in Abb. 4.3 schematisch dargestellt. Die 2π-Austauschamplitude lässt sich dann als Dispersionsintegral in t,

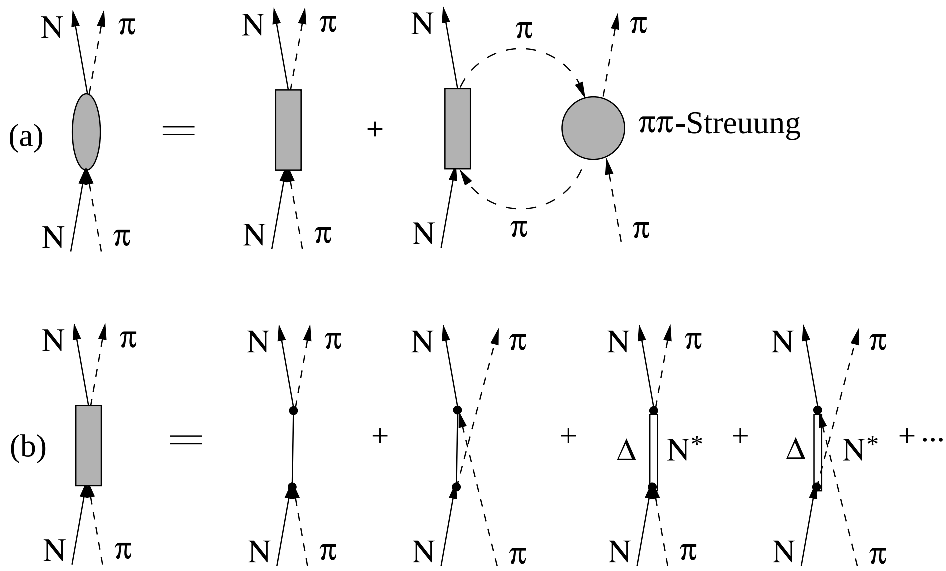

Abbildung 4.3: Off-shell Pion-Nukleon-Streuung, zerlegt in einen reinen πN-Anteil ohne $\pi\pi$-Wechselwirkung und zusätzlicher Berücksichtigung letzterer (nach Vinh Mau [ChR79]).

wobei $t = (p - p')^2$ eine der Mandelstam-Variablen ist, darstellen

$$T_{2\pi}(s,t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt' \, \frac{\rho_{2\pi}(s,t')}{t'-t}, \tag{4.43}$$

wobei $\rho_{2\pi}(t)$ über "crossing"-Symmetrie zum Prozess $N\bar{N} \to 2\pi$ in Beziehung gesetzt wird. Mit dispersionstheoretischen Methoden kann man $\rho_{2\pi}$ aus $\pi\pi$ und πN Streuphasen bestimmen. Einzelheiten kann man einem Übersichtsartikel von R. VINH MAU [ChR79] entnehmen. Der Potentialbeitrag ist dann von der Form

$$\frac{1}{r}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt'\, \rho_{2\pi}(s,t)\, e^{-\sqrt{t}\,r} \tag{4.44}$$

Das eigentliche PARIS-Potential ist auf diese Weise konstruiert worden, deren explizite Form dann mit Yukawa-Funktionen parametrisiert wurde [Lac80].

(2) Feldtheoretischer Zugang:

Hier verwendet man wie beim OBEP ein explizites feldtheoretisches Modell für die Bestimmung der TPE-Amplitude. Die auftretenden Diagramme niedrigster Ordnung sind in Abb. 4.4 dargestellt. Wesentlich für eine realistische Beschreibung sind Kopplungen an intermediäre Resonanzen (hauptsächlich die $\Delta(1232)$-Resonanz) und eine $\pi\pi$-W.W. Die Nukleonresonanzen werden hierbei als elementare Teilchen behandelt. Man bekommt auf diese Weise eine detaillierte, mikroskopische Beschreibung des 2π-Austauschs. Im Gegensatz zu den einfacheren OBE-Potentialen werden hier die korrelierten 2π-Austauschbeiträge durch realistische ρ und σ-Resonanzen mit breiter Massenverteilung beschrieben. Im Hinblick auf die Bedeutung des 2π-Austausches erhebt sich die Frage, inwieweit noch weiter Diagramme höherer Ordnung berücksichtigt werden müssen und in welcher Weise man eine systematische Entwicklung vornehmen kann. Das ist schematisch in Abb. 4.5 dargestellt, wobei die Pfeile andeuten, welche Diagramme gleichzeitig betrachtet werden, um eine Konvergenz zu erreichen.

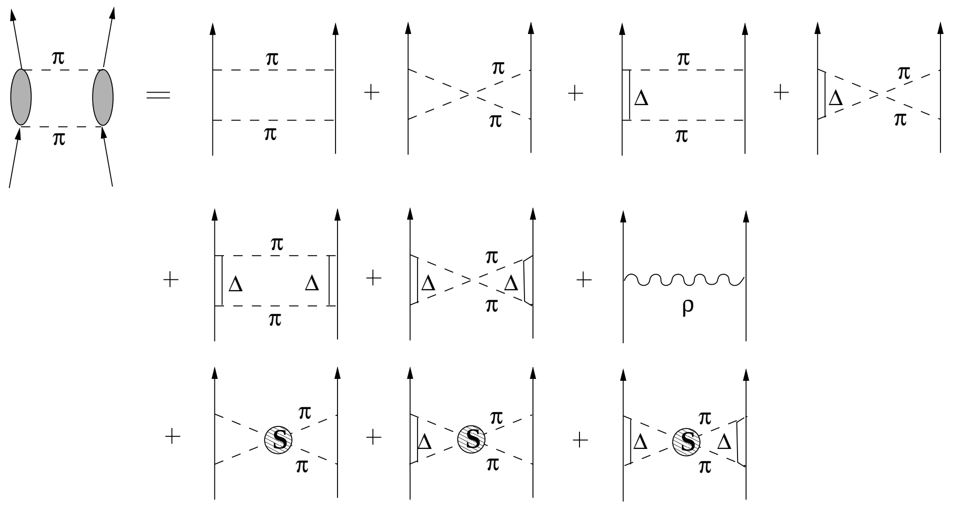

Abbildung 4.4: Berücksichtigte Zwei-Pion-Austausch-Diagramme des feldtheoretischen Zugangs (nach MACHLEIDT [Mac89]).

Parallel zu diesen Verfeinerungen, die sich im Rahmen der konventionellen Kernphysik bewegen, hat sich mit der Entwicklung der Quanten-Chromo-Dynamic (QCD) als fundamentaler Theorie der starken Wechselwirkung die Frage gestellt, wie die NN-Wechselwirkung im Rahmen der QCD zu beschreiben ist. Die grundlegende Schwierigkeit, diese Frage befriedigend zu beantworten, liegt darin, dass bereits die Struktur der Hadronen und um wieviel mehr die der Kerne sich im sogenannten nicht-perturbativen Bereich der QCD abspielt, in welchem

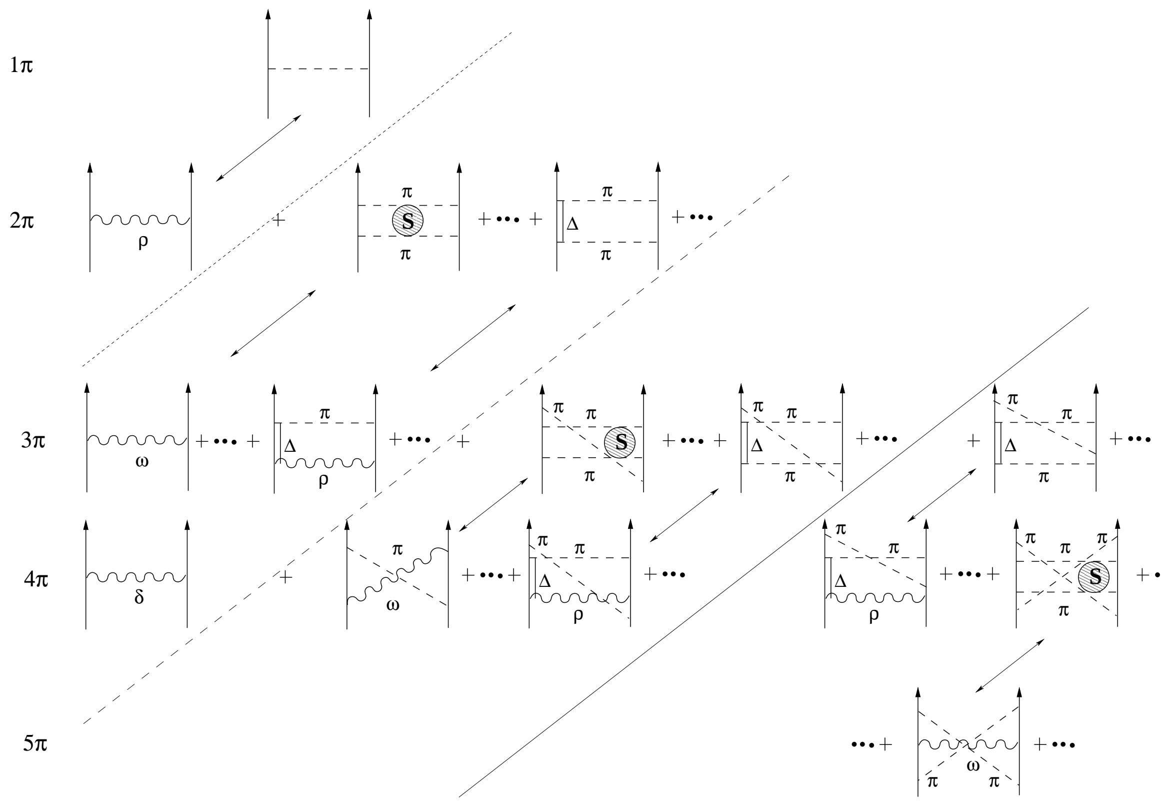

Abbildung 4.5: Systematische Entwicklung des feldtheoretischen Zugangs (nach MACHLEIDT [Mac89]).

die nicht-linearen Bewegungsgleichungen nicht störungstheoretisch behandelt werden können und der durch das Phänomen der Einschliessung ("confinement") beherrscht wird. Aus diesem Grund hat man Hybridmodelle entwickelt, in denen die interne Hadronstruktur mit effektiven Quark-Modellen beschrieben wird. Die Wechselwirkung wird in diesen Modellen im langreichweitigen Bereich weiterhin durch konventionellen Meson-Austausch beschrieben, wobei aber die Mesonen direkt an die Quarks gekoppelt sind, sodass die ausgedehnte Struktur der Meson-Nukleon-Vertizes automatisch durch die Quarkwellenfunktionen geliefert wird. Nur bei sehr kleinen Abständen wird die Wechselwirkung durch expliziten Quark-Gluon-Austausch erzeugt (Siehe Abb. 4.6). Zusätzlich werden auch 6-Quark-Konfigurationen berücksichtigt, die den Isobarkonfigurationen der konventionellen Beschreibung teilweise entsprechen.

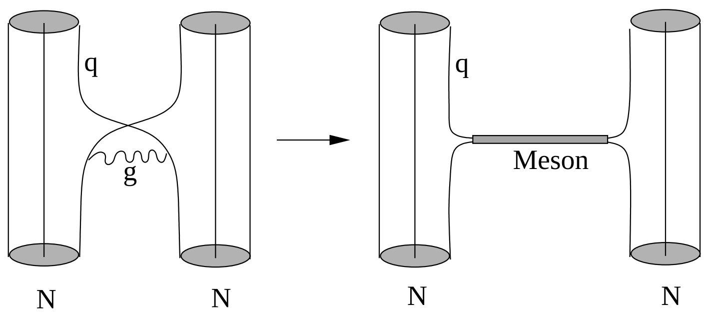

Abbildung 4.6: Quark-Gluon-Austausch zwischen zwei Nukleonen bei kurzen Abständen (links) und effektiver Mesonaustausch bei grösseren Abständen (rechts).

4.3 Das Zwei-Nukleon-System

In diesem Abschnitt soll die allgemeine Struktur der Zustände des NN-Systems behandelt werden (Bindungs- und Streuzustände), sowie deren physikalische Eigenschaften. Zunächst können wir die Schwerpunktbewegung abseparieren, sodass wir uns auf die Relativbewegung im Ruhsystem beschränken können. Wegen der Drehimpulserhaltung und unter der Annahme der Isospininvarianz können wir die Zustände nach Gesamtdrehimpuls und Isospin klassifizieren.

$$\begin{aligned}\psi^{(LS)JT}(\vec{r}\,) &= \langle \vec{r} \mid (LS)J,T\rangle \\ &= R_{(LS)J,T}(r)\left[Y^{[L]}(\hat{r})[\chi(1)^{[\frac{1}{2}]}\times\chi(2)^{[\frac{1}{2}]}]^{[S]}\right]^{[J]}[\xi^{[\frac{1}{2}]}(1)\times\xi^{[\frac{1}{2}]}(2)]^{[T]}\,. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Hierbei verlangt das verallgemeinerte Pauliprinzip, dass $(-)^{L+S+T} = -1$ sein muss. Als spektroskopische Bezeichnung verwendet man ${}^{2S+1}L_J$. Die möglichen Zustände kann man nach $T = 0$ bzw. 1 klassifizieren (siehe Tabelle 9).

Tabelle 9: Klassifikation der Zwei-Nukleon-Zustände.

T	S	L	P		
0	1	gerade	$+$	even-triplet	${}^3S_1$, ${}^3D_{1/2/3}$, ${}^3G_{3/4/5}, \ldots$
0	0	ungerade	$-$	odd-singlet	${}^1P_1$, ${}^1F_3$, ${}^1H_5, \ldots$
1	0	gerade	$+$	even-singlet	${}^1S_0$, ${}^1D_2$, ${}^1G_4, \ldots$
1	1	ungerade	$-$	odd-triplet	${}^3P_{0/1/2}$, ${}^3F_{2/3/4}$, ${}^3H_{4/5/6}, \ldots$

Zu $J = 0$ gibt es zwei Zustände entgegengesetzter Parität, ${}^1S_0$ und ${}^3P_0$, hingegen für $J > 0$ insgesamt 4 Zustände, jeweils zwei mit entgegengesetzter Parität,

(a) $P = (-)^J$, $L = J$, $S = 0$ und $S = 1$,

(b) $P = (-)^{J+1}$, $S = 1$, $L = J - 1$ und $L = J + 1$.

Da die NN-Wechselwirkung die Parität erhält und $(S = 0)$-Zustände nicht mit $(S = 1)$-Zuständen verbindet, sind zu gegebenem $J > 0$ die beiden Zustände mit $P = (-)^J$ ungekoppelt, während die beiden Zustände mit $P = (-)^{J+1}$ miteinander gekoppelt sind. Die Kopplung wird durch die Tensorkraft vermittelt, da im Triplett-Zustand $(S = 1)$ das Matrixelement des Tensoroperators S_{12}

$$\langle (L = J - 1, 1)J \mid S_{12} \mid (L = J + 1, 1)J\rangle \quad (4.46)$$

nicht verschwindet. Wir wollen nun Bindungs- und Streuzustände im Einzelnen betrachten.

4.3.1 Das Deuteron

Im Zwei-Nukleon-System existiert nur ein einziger Bindungszustand, das Deuteron mit Spin und Parität 1^+ und somit ist der Isospin $T = 0$. Weitere Eigenschaften sind in der Tabelle 10 zusammengestellt.

Aus diesen Eigenschaften kann man schon einige wichtige qualitative Schlussfolgerungen ziehen:

Tabelle 10: Eigenschaften des Deuterons: Bindungsenergie E_d, magnetisches Moment μ_d und Quadrupolmoment Q_d.

E_d [MeV]	μ_d [n.m.]	Q_d [e^2mb]
2,2246	0,8574	2,87

(1) Da i.a. ($L = 0$)-Zustände am stärksten gebunden sind und es nur einen Bindungszustand mit Spin und Parität 1^+ gibt, bleibt für das Deuteron als einzig gebundener Zustand nur der $^3S_1$-Zustand übrig. Das erklärt auch die Tatsache, dass für das magnetische Moment $\mu_d \approx \mu_p + \mu_n$ gilt. Das Fehlen eines weiteren gebundenen Zustandes mit $L = 0$, nämlich $^1S_0$, weist auf eine Spinabhängigkeit von V_{NN} hin.

(2) Das nichtverschwindende Quadrupolmoment lässt sich nur mit einer Beimischung einer $^3D_1$-Komponente erklären und weist somit auf die Existenz einer Tensorkraft hin. Aus der Differenz $\mu_d - \mu_p - \mu_n$ kann man unter Vernachlässigung von Austauscheffekten die Beimischungswahrscheinlichkeit der D-Welle zu $P_D \approx 4\,\%$ abschätzen.

Mit der allgemeinen Form des NN-Potentials für $S = 1$

$$V = V_C + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{S} \tag{4.47}$$

und der Deuteronwellenfunktion

$$\psi_d(\vec{r}) = \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, u_S(r)\, \chi^{[1]} + u_D(r)\, [Y^{[2]} \times \chi^{[1]}]^{[1]}\Big)\,, \tag{4.48}$$

wobei der Zwei-Nukleon-Spinor mit

$$\chi^{[S]} = [\chi^{[1/2]} \times \chi^{[1/2]}]^{[S]} \quad (S = 0, 1) \tag{4.49}$$

bezeichnet ist, erhält man ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen für die Radialfunktionen $u_S(r)$ und $u_D(r)$ ($E_d > 0$)

$$\Big(-\frac{1}{M}\frac{d^2}{dr^2} + V_C(r) + E_d\Big) u_S(r) \;=\; \sqrt{8}\, V_T(r)\, u_D(r)\,, \tag{4.50}$$

$$\Big(-\frac{1}{M}\Big(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\Big) + V_C(r) - 3V_{LS}(r) - 2\,V_T(r) + E_d\Big) u_D(r) \;=\; \sqrt{8}\, V_T(r)\, u_S(r)\,. \tag{4.51}$$

Das im Gegensatz zum $^1S_0$-Zustand zusätzliche Auftreten der Tensorkraft ist wesentlich für die Bindung des $^3S_1$-Zustandes wie bereits erwähnt wurde. Das erkennt man am einfachsten durch formale Elimination von u_D durch

$$u_D(r) = -\Big(h_D(r) + E_d\Big)^{-1} \sqrt{8}\, V_T\, u_S(r) \tag{4.52}$$

mit

$$h_D(r) = -\frac{1}{M}\Big(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\Big) + V_C(r) - 3V_{LS}(r) - 2\,V_T(r)\,. \tag{4.53}$$

Man erhält dann für $u_S(r)$ die Differentialgleichung

$$\Big(-\frac{1}{M}\frac{d^2}{dr^2} + V_C(r) - 8\,V_T(r)(h_D(r) + E_d)^{-1} V_T(r) + E_d\Big) u_S(r) = 0\,. \tag{4.54}$$

Das durch die Tensorkraft erzeugte zusätzliche effektive Potential $-8V_T(h_D + E_d)^{-1}V_T$ ist offensichtlich unabhängig vom Vorzeichen von V_T anziehend und sorgt somit für die Bindung des Deuterons, für das der reine Zentralanteil V_C nicht ausreicht. Bevor wir nun zur Untersuchung der ungebundenen, d.h. Streuzustände gehen, wollen wir kurz einige wesentlichen Ergebnisse der Streutheorie zusammenfassen.

4.3.2 Kurzer Exkurs in die Streutheorie

Zur Illustration der charakterisierenden Grössen eines Streuzustandes können wir die vereinfachte Situation der Streuung eines spinlosen Teilchens an einem Zentralpotential betrachten (siehe Abb. 4.7). Ein physikalischer Streuzustand wird durch Randbedingungen festgelegt,

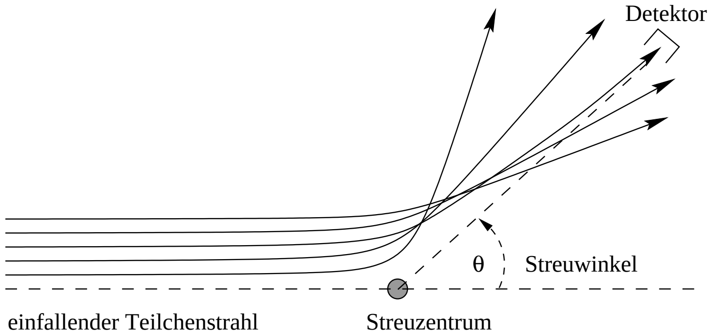

Abbildung 4.7: Streuung eines spinlosen Teilchens an einem Zentralpotential.

die sich aus der physikalischen Fragestellung ergeben. Hier sei mit $\psi_{\vec{k}}^{(+)}$ eine „einlaufende Welle" bezeichnet, die sich für $t \to -\infty$ (ferne Vergangenheit) als ebene Welle $\phi_{\vec{k}}$ mit Impuls $\vec{k}$ und für $t \to +\infty$ (ferne Zukunft) als ebenfalls ebene Welle zuzüglich einer auslaufenden Streuwelle darstellt. Entsprechend wird mit $\psi_{\vec{k}}^{(-)}$ eine „auslaufende Welle" bezeichnet, die sich für $t \to -\infty$ als ebene Welle plus einlaufender Streuwelle und für $t \to +\infty$ als reine ebene Welle darstellt.

Mit dem Hamiltonoperator $H = T + V$ kann man $\psi^{(\pm)}$ formal mit der LIPPMANN-SCHWINGER-Gleichung darstellen

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}}^{(\pm)} &= \lim_{\eta\to 0}\Big(1 + \frac{1}{E - H \pm i\,\eta} V\Big)\,\phi_{\vec{k}} \\ &= \lim_{\eta\to 0}\frac{\pm i\eta}{E - H \pm i\,\eta}\,\phi_{\vec{k}}\,, \end{aligned} \tag{4.55}$$

wobei $E = k^2/(2m)$ mit m als Masse des einlaufenden Teilchens die Energie des Zustandes bezeichnet sowie $\phi_{\vec{k}}$ die zugehörige freie ebene Welle mit $T\phi_{\vec{k}} = E\phi_{\vec{k}}$. Für $r \to \infty$ hat $\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,)$ die asymptotische Form

$$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}\,) \xrightarrow{r\to\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(k,\theta)\,\frac{e^{\,ikr}}{r}\,. \tag{4.56}$$

Die Streuamplitude $f(k,\theta)$, die nicht vom Azimutwinkel abhängt, da das Potential als zentralsymmetrisch angenommen wird, bestimmt den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\,f(k,\theta)\,|^2\,. \tag{4.57}$$

Die Information über das Potential V ist in $f(\theta)$enthalten. Zur weiteren Charakterisierung empfiehlt es sich, die Streuwelle nach Zuständen mit gutem Drehimpuls bzgl. des Streuzentrums zu entwickeln, da der Drehimpuls für das Zentralpotential eine Erhaltungsgrösse ist und somit die zugehörigen Partialwellen als Eigenzustände voneinander unabhängig sind,

$$\psi_{\vec{k}}^{(+)}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{4\pi}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l\, \hat{l}\, e^{i\delta_l(k)}\, u_{l,k}(r)\, Y_{l0}(\theta)\,. \tag{4.58}$$

Hierbei wurde ein Koordinatensystem mit der z-Achse in Richtung des einlaufenden Impulses, d.h. $\vec{k} \,||\, \vec{z}$, gewählt. Die Radialfunktionen $u_{l,k}$ sind Lösung der radialen Schrödingergleichung

$$u''_{l,k} + \Big(k^2 - 2m\,V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\Big) u_{l,k} = 0 \tag{4.59}$$

mit der asymptotischen Randbedingung

$$u_{l,k}(r) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(k))\,. \tag{4.60}$$

Die Grösse $\delta_l(k)$ wird Streuphase genannt und beschreibt die Phasenverschiebung der asymptotischen Form der Streuwelle gegenüber der freien Welle. Sie ist charakteristisch für das gegebene Potential. Für $V \equiv 0$ gilt natürlich

$$u_{l,k}(r) = kr\, j_l(kr) \tag{4.61}$$

mit sphärischer Besselfunktion $j_l(x)$. Die Darstellung in (4.58) stellt wegen $Y_{l0}(\theta) = \frac{\hat{l}}{\sqrt{4\pi}} P_l(\cos\theta)$ eine Entwicklung nach LEGENDRE-Polynomen dar. Die Streuamplitude lässt sich analog entwickeln

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, T_l(k)\, P_l(\cos\theta) \tag{4.62}$$

mit den Partialwellenamplituden

$$T_l(k) \;=\; e^{i\,\delta_l(k)} \sin\delta_l(k) = \frac{1}{\cot\delta_l(k) - i}\,. \tag{4.63}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt lässt sich dann als Funktion der Streuphasen $\delta_l(k)$ darstellen

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(k,\theta)}{d\Omega} &= \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, e^{i\delta_l} \sin\delta_l\, P_l(\cos\theta) \right|^2 \\
&= \frac{1}{k^2} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 \sin^2\delta_l\, P_l^2(\cos\theta) \\
&\quad + 2 \sum_{l<l'} (2l+1)\,(2l'+1)\, \sin\delta_l\, \sin\delta_{l'}\, \cos(\delta_l - \delta_{l'})\, P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) \Big)\,.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Der zweite Term enthält Interferenzen zwischen den verschiedenen Partialwellen. Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über $d\Omega$

$$\sigma_{tot}(k) \;=\; \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l(k)\,. \tag{4.65}$$

Dabei verschwinden die Interferenzterme. Der Vergleich dieses Ausdrucks mit der Streuamplitude unter Vorwärtsrichtung ($\theta = 0$) liefert das sehr nützliche optische Theorem

$$\sigma_{tot}(k) = \frac{4\pi}{k} \Im m f(k,\theta)|_{\theta=0}\,, \tag{4.66}$$

das erlaubt, den Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude aus dem totalen Wirkungsquerschnitt zu bestimmen und umgekehrt.

Für formale Untersuchungen sind die Darstellungen der radialen Funtion $u_{l,k}$ und der Streuphase $\delta_l(k)$ durch das Potential in Form von Integralgleichungen von Bedeutung

$$u_{l,k}(r) = kr\cos\delta_l(k)j_l(kr) + 2mkr\int_0^\infty dr'r'g_{l,k}(r,r')V(r')u_{l,k}(r')\,, \tag{4.67}$$

$$\sin\delta_l(k) = -2m\int_0^\infty dr\, r\, j_l(kr)\, V(r)\, u_{l,k}(r)\,, \tag{4.68}$$

mit

$$g_{l,k}(r,r') = j_l(kr_<)\, n_l(kr_>) \tag{4.69}$$

und $r_< = \min r, r'$ sowie $r_> = maxr, r'$. Beide Gleichungen müssen simultan gelöst werden. Die Beziehung (4.68) erlaubt bei Kenntnis der radialen Lösung $u_{l,k}(r)$ die Berechnung von $\delta_l(k)$. Natürlich kann man $\delta_l(k)$ auch direkt aus der Asymptotik (4.60) bestimmen. Diese Beziehungen sind nützlich für Störungsentwicklungen. So kann man in niedrigster Näherung ansetzen

$$u_{l,k}^{(0)}(r) = kr\cos\delta_l(k)j_l(kr) \tag{4.70}$$

und erhält damit

$$\tan\delta_l(k) = -2mk\int_0^\infty dr\, r^2 V(r) j_l^2(kr) \tag{4.71}$$

als BORNsche Näherung. Daraus ergibt sich eine nützliche Abschätzung für das Verhalten der Phasenverschiebung bei kleinen Energien im Vergleich zur Reichweite r_0 des Potentials, d.h. für $kr_0 \ll 1$. Dann kann man näherungsweise

$$j_l(kr) \approx \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \tag{4.72}$$

setzen und erhält

$$\tan\delta_l(k) \approx -\left[\frac{2m}{((2l+1)!!)^2}\int_0^\infty drr^{2l+2}V(r)\right]k^{2l+1}\,. \tag{4.73}$$

Diese Näherung ist nur sinnvoll für Potentiale endlicher Reichweite, die hinreichend schnell für $r \to \infty$ abfallen, d.h. stärker als $1/r^{2l+3}$. Insbesondere folgt aus diesem Ausdruck, dass für hinreichend kleine Energien die s-Wellenstreuung überwiegt. In diesem Fall ist der differentielle Wirkungsquerschnitt isotrop

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_0(k)}{d\Omega} &= \frac{\sin^2\delta_0(k)}{k^2} \\ &= \frac{1}{k}\frac{1}{\cot^2\delta_0(k)+1}\,,\end{aligned} \tag{4.74}$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2(\cot^2\delta_0(k)+1)}\,. \tag{4.75}$$

Für diesen wichtigen Spezialfall der s-Wellenstreuung nahe der Schwelle hat man die Theorie der effektiven Reichweite entwickelt. Aus dem Schwellenverhalten ergibt sich die Existenz folgenden Grenzwerts

$$a = -\lim_{k\to 0}\frac{\delta_0(k)}{k}\,, \tag{4.76}$$

den man die Streulänge des Potentials nennt. Man erhält dann

$$\delta_0(k) = -ak + \mathcal{O}(k^3)\,, \tag{4.77}$$

$$\sigma_0(k) = 4\pi a^2 + \mathcal{O}(k^2)\,. \tag{4.78}$$

Die Bedeutung der Streulänge ergibt sich aus der Betrachtung der Radialfunktion $u_{0,k}(r)$ im Limes $k \to 0$. Für diesen Grenzfall definiert man

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_0(r) &= -\frac{1}{a}\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}u_{0,k}(r) \\ r \overset{\Rightarrow}{\to} \infty \quad & -\frac{1}{a}\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\sin(kr+\delta_0) = 1 - \frac{r}{a}\,. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Demnach verhält sich $\widetilde{u}_0(r)$ asymptotisch linear mit der Steigung $-1/a$, und a erhält man aus dem Schnittpunkt mit der r-Achse. Das ist in Abb. 4.8 schematisch für ein abstossendes Potential ($V(r) > 0$) dargestellt. Innerhalb der Reichweite des Potentials ist $\widetilde{u}_0''/\widetilde{u}_0 = V > 0$, d.h. u_0 ist konvex. Somit ist $a > 0$ und $\delta_0 < 0$. Auch aus dem Ausdruck für $\tan\delta_l$

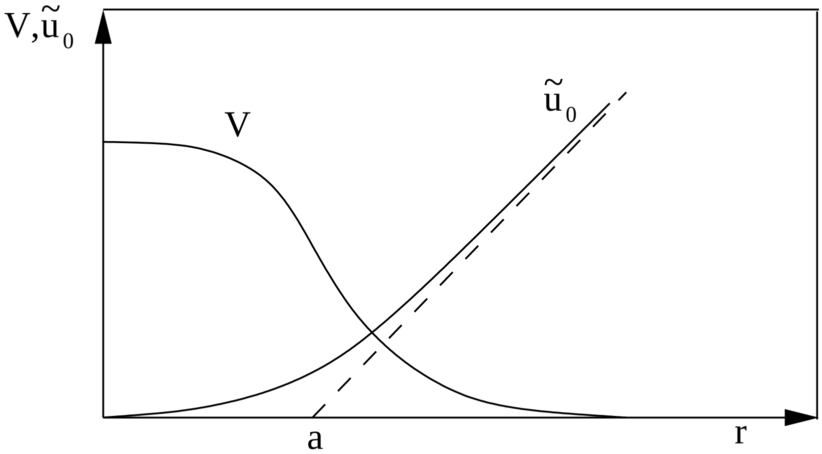

Abbildung 4.8: Schematische Darstellung der Streulänge für ein abstossendes Potential.

in der BORNschen Näherung (4.71) erkennt man, dass allgemein $\delta_l < 0$ ist für $V(r) > 0$. Entsprechend erhält man für ein anziehendes Potential, das keinen Bindungszustand besitzt $a < 0$ und $\delta_0 > 0$ (siehe Abb. 4.9). Falls es jedoch genau einen gebundenen Zustand gibt, so ist $a > 0$ und $\delta_0 < 0$, da in diesem Fall das Potential so stark anziehend ist, dass die Streuwelle innerhalb der Reichweite des Potentials eine Nullstelle besitzt (siehe Abb. 4.10). Die Existenz genau eines Bindungszustands wirkt also wie ein abstossendes Potential.

Man kann die Entwicklung nach Potenzen von k^2 einen Schritt weiter treiben und erhält in der nächsten Ordnung (SCHWINGER)

$$k\cot\delta_0(k) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \mathcal{O}(k^4) \tag{4.80}$$

mit der effektiven Reichweite

$$r_e = 2\int_0^\infty dr(v_0^2 - \widetilde{u}_0^2)\,, \tag{4.81}$$

wobei $v_0(r)$ Lösung der freien s-Wellen-Gleichung für $k \to 0$ mit gleicher Asymptotik wie $\widetilde{u}_0$, d.h. $v_0 = 1 - r/a$ ist. Diese Grösse r_e charakterisiert die Reichweite des Potentials.

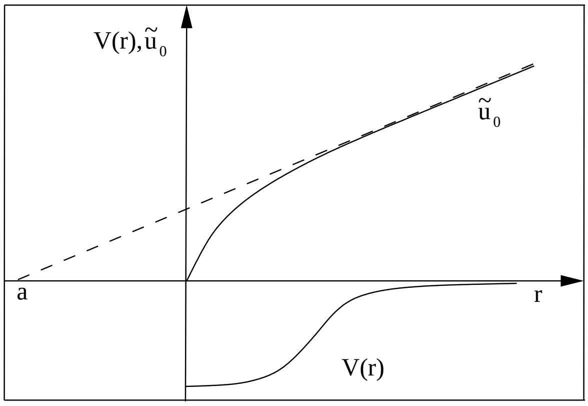

Abbildung 4.9: Schematische Darstellung der Streulänge für ein anziehendes Potential ohne Bindungszustand.

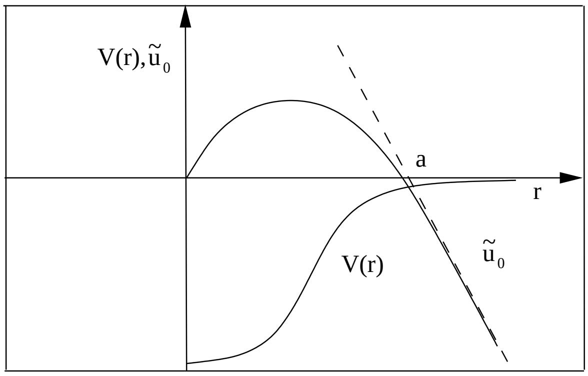

Abbildung 4.10: Schematische Darstellung der Streulänge für ein anziehendes Potential mit genau einem Bindungszustand.

4.3.3 Nukleon-Nukleon-Streuung

Die NN-Streuung hat aufgrund der Spins der Nukleonen eine komplexere Struktur als die Streuung spinloser Teilchen. Wie schon weiter oben erwähnt gibt es zu gegebenem Gesamtdrehimpuls $J > 0$ zwei ungekoppelte Zustände mit $L = J$, einen Singulett- ($S = 0$) und einen Triplett-Zustand ($S = 1$), die jeweils durch eine Phasenverschiebung δ gekennzeichnet sind, sowie zwei über die Tensorkraft gekoppelte Triplett-Zustände ($S = 1, L = J \pm 1$). Für die beiden gekoppelten Triplett-Partialwellen $L = J \pm 1, S = 1$ wird die unitäre (2×2)-S-matrix durch drei reelle Parameter, zwei Phasen und einen Mischungsparameter, charakterisiert für deren Wahl es verschiedene Konventionen gibt:

(a) Blatt-Biedenharn-Phasen (Rev. Mod. Phys. **24** (1952) 258).
Die S-Matrix wird wie folgt durch die Eigenphasen $\delta_{J\pm}$ und den Mischungsparameter ϵ_J dargestellt

$$S_J = U^\dagger(\epsilon_J) \begin{pmatrix} e^{2i\delta_{J-}} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_{J+}} \end{pmatrix} U(\epsilon_J) \tag{4.82}$$

mit der Orthogonalmatrix

$$U(\epsilon_J) = \begin{pmatrix} \cos\epsilon_J & \sin\epsilon_J \\ -\sin\epsilon_J & \cos\epsilon_J \end{pmatrix} . \tag{4.83}$$

(b) "bar"- oder Stapp-Phasen (Phys. Rev. **105** (1957) 302).

$$S_J = \begin{pmatrix} e^{i\bar{\delta}_{J-}} & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\delta}_{J+}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\bar{\epsilon}_J & i\sin 2\bar{\epsilon}_J \\ i\sin 2\bar{\epsilon}_J & \cos 2\bar{\epsilon}_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\bar{\delta}_{J-}} & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\delta}_{J+}} \end{pmatrix} . \tag{4.84}$$

Die bar-Phasen sind einfacher interpretierbar und zugleich lassen sich die COULOMBeffekte einfacher behandeln. Diese beiden Phasenkonventionen stehen in folgender Beziehung zueinander

$$\delta_{J-} + \delta_{J+} = \bar{\delta}_{J-} - \bar{\delta}_{J+} , \tag{4.85}$$

$$\sin(\bar{\delta}_{J-} - \bar{\delta}_{J+}) = \tan 2\bar{\epsilon}_J / \tan 2\epsilon_J , \tag{4.86}$$

$$\sin(\delta_{J-} - \delta_{J+}) = \sin 2\bar{\epsilon}_J / \sin 2\epsilon_J . \tag{4.87}$$

Die Streuphasen dienen meistens als Referenz des Vergleichs von Theorie und Experiment, obwohl man auch direkt Streuquerschnitte und Polarisationsobservable verwenden kann.

4.3.4 Die Observablen der NN-Streuung

Für eine gegebene Kombination zweier Nukleonen (pp, nn, pn) und für gegebenen Relativimpuls $\vec{k}$ im c.m. System gibt es 4 verschiedene Spinzustände. Dies bedeutet, dass insgesamt $4 \times 4 = 16$ Übergangsamplituden auftreten, die i.a. komplex sind. Ist die Parität erhalten, so reduziert sich die Anzahl auf 8 Amplituden. Zeitumkehrinvarianz führt zu einer weiteren Reduktion auf 6 Amplituden. Im Fall von identische Teilchen (nn und pp) bleiben sogar nur noch 5 unabhängige Amplituden. Da eine Phase immer unbestimmt bleibt, braucht man also zur vollständigen Bestimmung 9 (nn und pp) bzw. 11 (np) unabhängige Observable (siehe Moravcsik [Mor63]). Daher sind für eine vollständige experimentelle Bestimmung neben dem unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt auch Ein- und Doppel-Polarisationsexperimente durchzuführen. Die Darstellung der möglichen Observablen ist am Einfachsten und Übersichtlichsten im Dichtematrixformalismus. Die Spindichtematrix eines (S=1/2)-Teilchens ist wie folgt gegeben

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) . \tag{4.88}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{P}$ den Polarisationsvektor des Teilchens.

Sei $T = \{T_{m_1' m_2', m_1 m_2}\}$ die Übergangsmatrix, wobei m_j und m_j' die Spinprojektionen der Nukleonen im Anfangs- bzw. Endzustand bezeichnen, so ist allgemein eine Observable durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Tr(T \rho_i T^\dagger \mathcal{O}) \tag{4.89}$$

mit der Dichtematrix des Anfangszustands

$$\rho_i = \rho(1) \otimes \rho(2) \tag{4.90}$$

gegeben. Die Spurbildung bezieht sich dabei auf die Spinquantenzahlen. Z.B. hat der differentielle Wirkungsquerschnitt die Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Tr(T \rho_i T^\dagger) , \tag{4.91}$$

und die Polarisation eines auslaufenden Nukleons

$$\vec{P}(j) \frac{d\sigma}{d\Omega} = Tr(T \rho_i T^\dagger \vec{\sigma}(j)) . \tag{4.92}$$

Setzt man

$$\sigma_\mu = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ \sigma_k & \mu = k = 1,2,3 \end{cases} , \qquad (4.93)$$

so kann man die möglichen Observablen in kompakter Weise durch die allgemeine Grösse

$$\Omega_{\mu\nu\rho\omega} = Tr(T\sigma_\rho(1)\sigma_\omega(2)T^\dagger\sigma_\mu(1)\sigma_\nu(2)) \qquad (4.94)$$

ausdrücken; z.B. gilt

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \Omega_{0000} \, , \qquad (4.95)$$

$$P_k(1)\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \Omega_{k000} \, . \qquad (4.96)$$

Diese 256 Observablen sind aber, wie schon oben erwähnt wurde, nicht alle unabhängig und es genügen 9 bzw. 11 zur vollständigen Bestimmung.

[ChR79] M. Chemtob und M. Rho (eds.), *Mesons in Nuclei* Vol. I (North Holland, Amsterdam, 1979).

[Lac80] M. Lacombe et al., Phys. Rev. C **21**, 861 (1980).

[MaH87] R. Machleidt et al., Phys. Rep. **149**, 1 (1987).

[Mac89] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. Vol. **19** (1989) p. 189.

[Mor63] M. Moravcsik, *The Two-Nucleon Force*, (Oxford University Press, 1993).

[Nag78] M.M. Nagels et al., Phys. Rev. D **17**, 768 (1978).

[WiS84] R.W. Wiringa et al., Phys. Rev. C **29**, 1207 (1984).

5 Phänomenologische Kollektivmodelle

Zunächst möchte ich einige allgemeine Bemerkungen zur Bedeutung von Modellen in der Kernphysik vorausschicken. Das Ziel der Kernphysik ist es, die Struktur und Eigenschaften der Atomkerne zu verstehen, d.h. sie aus den grundlegenden Freiheitsgraden und der entsprechenden physikalischen Dynamik zu bestimmen. In der klassischen Kernphysik werden die Freiheitsgrade allein durch diejenigen der Nukleonen gebildet, und dementsprechend wird die Dynamik durch die zwischen den Nukleonen wirkenden Kräfte bestimmt, von denen man annimmt, dass diese dominant Zweiteilchenkräfte sind. Bereits diese Annahmen bilden strenggenommen ein Modell für den Atomkern. Akzeptiert man diese, so bleibt als eigentliche Aufgabe die Lösung einer Vielteilchen-Schrödingergleichung

$$\Big(H(1,\ldots,A) - i\partial_t\Big)\psi(1,\ldots,A) = 0\,. \tag{5.1}$$

Hierbei stellen sich im wesentlichen zwei Grundprobleme, nämlich erstens die Frage nach der NN-Wechselwirkung und zweitens die korrekte Behandlung des Vielteilchenproblems. Erst die Lösung beider Probleme kann als eigentlich mikroskopische Beschreibung der Kernstruktur angesehen werden. Dieses Ziel ist auch heute trotz vieler Fortschritte noch nicht vollständig erreicht. Dennoch haben wir inzwischen für viele Phänomene eine über das rein Qualitative hinausgehende nahezu quantitative Erklärung gefunden. Auf diesem Weg haben häufig, sozusagen als Zwischenstufen, vereinfachende Modelle eine wichtige Rolle gespielt, mithilfe derer es gelang, eine eingeschränkte Klasse von Phänomenen, d.h. experimentelle Fakten, im Rahmen derartiger Modelle in einem eingeschränkten Sinn zu verstehen. In diesem Fall spricht man auch von "modellmässigem" oder phänomenologischem Verständnis. Die Aufgabe der Modelle ist dabei, wesentliche physikalische Mechanismen zu isolieren und in vereinfachender Weise darzustellen und im Idealfall zugleich einen Schlüssel oder zumindest Hinweise darauf zu liefern, in welcher Beziehung das Modell zu dem ursprünglichen Vielteilchenproblem steht.

Die Einführung eines Modells bedeutet die Ersetzung des ursprünglichen Systems durch ein Modellsystem mit einfacheren Freiheitsgraden und einfacherer Dynamik, beschrieben durch einen Modell-Hamiltonoperator H_{mod}. Dieser sollte sich wie schon erwähnt im Idealfall durch geeignete Näherungen aus dem ursprünglichen Hamiltonoperator ergeben. In der überwiegenden Zahl der Fälle wird er jedoch, ausgehend von experimentellen Fakten, aufgrund einer Analogiebetrachtung (d.h. physikalischer Intuition) ad hoc eingeführt. Es bleibt dann einer späteren Entwicklungsstufe vorbehalten zu sehen, ob sich dieses Modell aus der grundlegenden Theorie über geeignete Näherungen ableiten lässt.

Folgende Forderungen sollte dabei ein Modell erfüllen:

1. Es sollte physikalisch sinnvoll, d.h. aus einer vernünftigen physikalischen Vorstellung entwickelt worden sein.

2. Es sollte relativ einfach zu handhaben sein, um im Rahmen des Modells möglichst exakte Lösungen zu erlauben, d.h. ohne zusätzliche, einschneidende Näherungen zu benötigen.

3. Es sollte möglichst umfassend sein, d.h. möglichst viele experimentelle Fakten erklären können.

Insbesondere die letzte Forderung ist entscheidend für die Bedeutung und Fruchtbarkeit eines Modells. Weiterhin ist zu beachten, dass man ein Modell nicht überinterpretieren darf.

In anderen Worten, man muss sich der Grenzen des Modells bewusst bleiben. Hierbei ist die Bestimmung der Grenzen sehr wichtig, da man gerade daraus wichtige Hinweise über mögliche Erweiterungen, Verbesserungen oder Abänderungen erhalten kann. Schematisch ist die Beziehung eines Modells im Hinblick auf das mikroskopische Verständnis des eigentlichen Vielteilchensystems in Abbildung 5.1 dargestellt. Schliesslich muss man sich immer vor Augen halten, dass die richtige Beschreibung einer Reihe von experimentellen Daten mit einem Modell nicht notwendigerweise garantiert, dass die Voraussetzungen des Modells tatsächlich näherungsweise gelten.

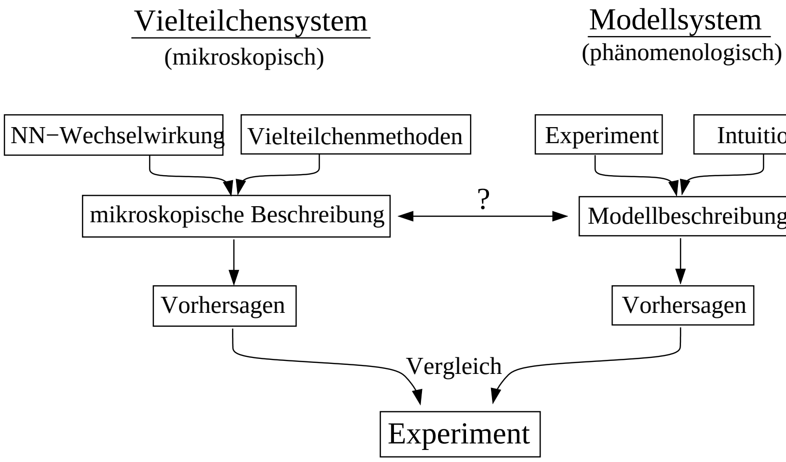

Abbildung 5.1: Schema der Beziehung zwischen mikroskopischer Behandlung und Modellbeschreibung.

In den einfachsten Modellen wird der Kern als Flüssigkeitstropfen oder als ein Fermigas betrachtet. Diese Modelle markieren in Extremis zwei sich scheinbar gegenseitig auschliessende Aspekte der Kerndynamik, nämlich auf der einen Seite eine stark korrelierte Bewegung vieler Nukleonen im Flüssigkeitstropfen und auf der anderen Seite eine völlig unabhängige, d.h. unkorrelierte Bewegung der einzelnen Nukleonen wie in einem Fermigas. Man fasst diese unterschiedlichen Aspekte auch unter dem Begriffspaar Kollektiv- und Einteilchenmodelle zusammen. Wir werden noch sehen, wie sich diese beiden gegensätzliche Aspekte in einer einheitlichen Vielteilchentheorie vereinigen lassen. Das ist wiederum schematisch in Abbildung 5.2 dargestellt.

5.1 Definition der Kollektivvariablen des Flüssigkeitstropfens

Die dem Kollektivmodell zugrundeliegende Vorstellung ist der Kern als klassischer Flüssigkeitstropfen mit wohldefinierter Oberfläche, wobei man zeitliche Veränderungen der Oberflächenform zulässt. Man unterscheidet dabei grundsätzlich drei Typen von Kollektivbewegungen (siehe Abb. 5.3):

1. Rotationen: Hierbei setzt man eine permanente Deformation, d.h. eine Abweichung von der Kugelgestalt voraus, etwa eine ellipsoidale Deformation, und betrachtet dann Rotationen des deformierten Kerns.

2. Oberflächenvibrationen: Die Oberfläche kann Schwingungen um eine vorgegebene Oberflächenform, etwa eine sphärische Ruhelage, ausführen.

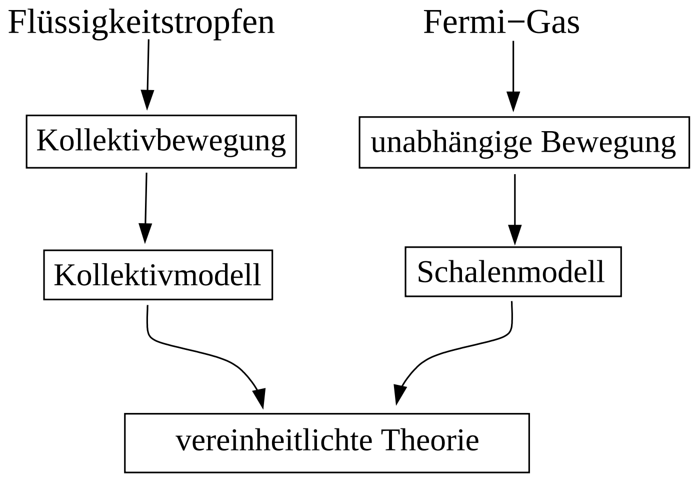

Abbildung 5.2: Schema der Beziehung zwischen Kollektiv- und unabhängiger Einteilchenbewegung.

3. Spaltung: Die Kernoberfläche wird immer stärker in einer Richtung deformiert, bis zunächst eine Einschnürung und dann ein Zerreissen in mindesten zwei Bruchteile eintritt.

Einen weiteren Typ von Kollektivbewegeung findet man in der Dipolriesenresonanz, bei der Dichteschwingungen, etwa Protonen- gegen Neutronenflüssigkeiten bei konstanter Gesamtdichte auftreten. Die ersten beiden Typen von Kollektivbewegungen führen zu den Modellen von Bohr und Mottelson, Fässler und Greiner sowie in der weiteren Entwicklung zum Gneuss-Greiner Modell, während die Riesenresonanzen im Steinwedel-Jensen-Modell beschrieben werden.

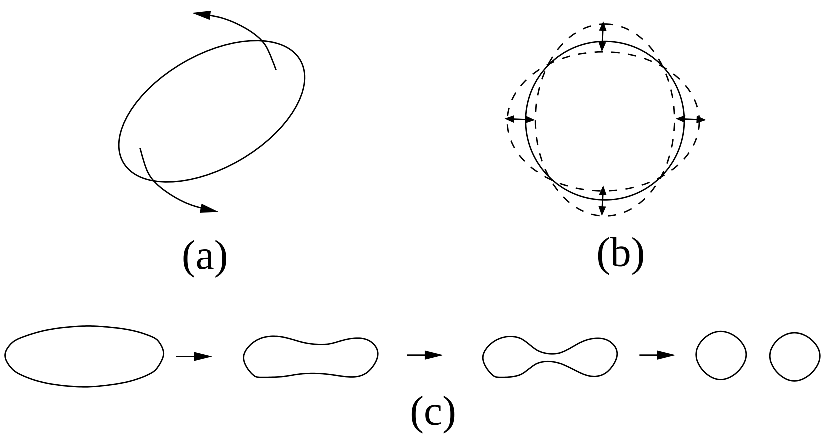

Abbildung 5.3: Übersicht über verschiedene Typen von Kollektivbewegung: (a) Rotation eines deformierten Kerns, (b) Oberflächenvibration und (c) Kernspaltung.

Nun soll zunächst auf die genaue Definition der Kollektivvariablen für Rotationen, Oberflächenvibrationen und Dichteschwingungen eingegangen werden.

5.1.1 Rotations- und Oberflächenvibrationsfreiheitsgrade

Ausgangspunkt ist die Annahme, dass die Kernoberfläche nicht mehr starr kugelförmig ist, sondern sich zeitlich verändern kann. Zu einem festen Zeitpunkt t kann man die Kugeloberfläche $R(\theta, \phi)$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln bezüglich eines fest gewählten Koordinatensystems

$$\begin{aligned} R(\theta, \phi) &= R_0\Big(1 + \sum_{\lambda\mu} (-)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)\Big) \\ &= R_0\Big(1 + \sum_{\lambda} (-)^{\lambda} \hat{\lambda} \Big[\alpha^{[\lambda]} Y^{[\lambda]}\Big]^{[0]}\Big)\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

hierbei sind $(R(\theta, \phi), \theta, \phi)$ die sphärischen Koordinaten eines Aufpunktes auf der Oberfläche des Kerns.

Die Entwicklungsparameter $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ sind Funktionen der Zeit und beschreiben die zeitliche Veränderung der Kernoberfläche, die einzige Dynamik des inkompressiblen Flüssigkeitstropfens. Die $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ sind somit die dynamischen Variablen dieser Bewegung. Zunächst seien einige Eigenschaften der Kollektivvariablen aufgeführt:

(a) $R(\theta, \phi)$ ist reell. Das bedeutet

$$\sum_{\lambda\mu} (-)^{\mu} \alpha^*_{\lambda-\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)^* = \sum_{\lambda\mu} (-)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \sum_{\lambda\mu} \alpha^*_{\lambda-\mu} Y_{\lambda-\mu}(\theta, \phi)\,. \tag{5.3}$$

Daraus folgt die Beziehung

$$\alpha^*_{\lambda\mu} = (-)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu}\,. \tag{5.4}$$

Diese Eigenschaft beschreibt insbesondere das Verhalten unter Zeitumkehr.

(b) Bei Rotationen des Koordinatensystems folgt aus dem Transformationsverhalten der $Y_{\lambda\mu}$ als irreduzible Tensoren der Stufe λ und der Invarianz des Radius, dass sich die $\alpha_{\lambda\mu}$ wie irreduzible Tensoren der Stufe λ transformieren

$$R(\alpha, \beta, \gamma)\, \alpha_{\lambda\mu}\, R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \sum_{\mu'} \alpha_{\lambda\mu'}\, D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\alpha, \beta, \gamma)\,, \tag{5.5}$$

wobei $R(\alpha, \beta, \gamma)$ eine Rotation mit Euler-Winkeln (α, β, γ) beschreibt.

(c) Analog erhält man für das Verhalten unter Paritätstransformation

$$P\, \alpha_{\lambda\mu}\, P^{-1} = (-)^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}\,. \tag{5.6}$$

Für $\lambda = 0$ würde man eine Volumenänderung erhalten, die aber wegen der Dichtekonstanz ausgeschlossen werden muss. Damit entfällt also α_{00} als unabhängige Variable. Ferner entspricht $\lambda = 1$ einer Translation des gesamten Kerns als ein Ganzes, das ebenso ausgeschlossen werden muss. Somit bleibt als Freiheitsgrad niedrigster Multipolarität $\lambda = 2$, d.h. eine Quadrupoldeformation der Oberfläche. Für $\lambda = 2 - 4$ sind in Abb. 5.4 die verschiedenen Multipole dargestellt.

Schliesslich ist zu beachten, dass die Anzahl der möglichen Kollektivvariablen natürlich durch die Gesamtzahl der inneren Freiheitsgrade eines Kerns $3(A-1)$ begrenzt ist. Mit den auf diese Weise eingeführten Kollektivvariablen $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ kann man sowohl Rotationen des Kerns als auch Vibrationen der Oberfläche beschreiben, wie bald gezeigt werden wird. Doch zuvor sollen noch die Kollektivvaraiblen für die Dichteänderungen eingeführt werden.

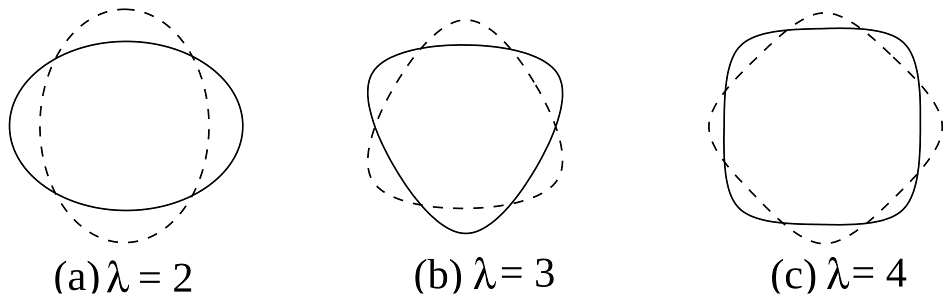

Abbildung 5.4: Darstellung der Oberflächenmultipole für (a) Quadrupol, (b) Oktupol und (c) Hexadekapol.

5.1.2 Die Freiheitgrade der Dichteschwingungen

Das Modell eines inkompressiblen Flüssigkeitstropfens beinhaltet eine konstante Massendichte ($\rho(\vec{r},t) = \rho_0$ für $r \leq R(\theta,\phi)$). Nach der Entdeckung der Dipolriesenresonanz beim Kernphotoeffekt hat sich nun gezeigt, dass dennoch Dichteschwankungen auftreten können ohne in Widerspruch zur konstanten Dichte zu geraten und zwar, wenn man ein Zweiflüssigkeitsmodell betrachtet, bestehend aus einer Protonen- und einer Neutronenflüssigkeit. Dann können relative Dichteschwankungen der Einzelflüssigkeiten auftreten ohne die Gesamtdichte zu verändern. In der Tat lassen sich die Dipolriesenresonanzen sehr erfolgreich als Dipolschwingungen der Protonen- gegen die Neutronenflüssigkeit bei konstanter Gesamtdichte deuten.

In diesem hydrodynamischen Modell von Steinwedel und Jensen macht man folgenden Ansatz für die Dichte

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_p(\vec{r},t) + \rho_n(\vec{r},t) = \rho_0 = const.\,, \tag{5.7}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_p(\vec{r},t) &= \rho_p^0(1+\eta(\vec{r},t))\,, & (5.8)\\ \rho_n(\vec{r},t) &= \rho_n^0(1-\frac{Z}{N}\,\eta(\vec{r},t))\,, & (5.9) \end{aligned}$$

wobei gilt

$$\rho_p^0 = \frac{Z}{A}\,\rho_0\,, \qquad \rho_n^0 = \frac{N}{A}\,\rho_0\,. \tag{5.10}$$

Die Dichtefluktuation $\eta(\vec{r},t)$ beschreibt eine weitere kollektive Dynamik, die unter der einfachsten Annahme harmonische Schwingungen beschreibt, d.h.

$$\eta(\vec{r},t) = \eta(\vec{r}\,)e^{-i\omega t}\,, \tag{5.11}$$

wobei $\eta(\vec{r}\,)$ Lösung der Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\eta(\vec{r}\,) = 0 \tag{5.12}$$

mit noch zu bestimmendem Wellenvektor k ist. Hierbei muss die homogene Neumann-Bedingung an der Kernoberfläche mit Normalen $\vec{n}$ erfüllt werden

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\eta(\vec{r}\,) = 0\,. \tag{5.13}$$

Dies bedeutet, dass der radiale Fluss durch die Kernoberfläche verschwinden muss, da der Kern stabil soll sein und nicht zerfliessen darf.

Man findet als Lösungen folgende Moden

$$\eta_{\lambda\mu}^{(n)}(\vec{r}) = F_\lambda^{(n)} j_\lambda(k_\lambda^{(n)} r)\, Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \,, \tag{5.14}$$

wobei $k_\lambda^{(n)}$ aus der Lösung der Randbedingung

$$\frac{d\, j_\lambda(kr)}{d\, r}\bigg|_{r=R} = 0 \tag{5.15}$$

bestimmt wird. Hierbei nummeriert n die verschiedenen Lösungen zu festem λ. $F_\lambda^{(n)}$ ist eine Normierungskonstante. Eine allgemeine Lösung hat dann die Form

$$\eta(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (-)^\mu q_{\lambda-\mu}^{(n)}(t)\, \eta_{\lambda\mu}^{(n)}(\vec{r}) \,, \tag{5.16}$$

und die Amplituden $q_{\lambda\mu}^{(n)}(t)$ bilden die Kollektivvariablen für die Dichteschwingungen. Analog wie bei den Oberflächenvariablen findet man folgende Eigenschaften:

(1) $q_{\lambda\mu}^{(n)}$ bildet einen irreduziblen Tensor der Stufe λ,

(2) $(q_{\lambda\mu}^{(n)})^* = (-)^\mu q_{\lambda-\mu}^{(n)}$,

(3) $P q_{\lambda\mu}^{(n)} P^{-1} = (-)^\lambda q_{\lambda\mu}^{(n)}$.

Für die niedrigsten Multipolaritäten $\lambda = 0$ bis 2 sind die zugehörigen Dichteschwingungen in Abb. 5.5 dargestellt.

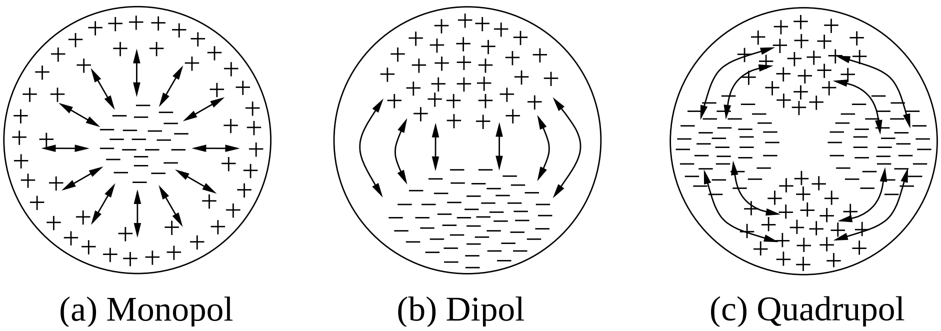

Abbildung 5.5: Schematische Darstellung der verschiedenen Multipolmoden der Dichteschwingungen von Protonen (+) gegen Neutronen (−).

5.2 Oberflächenschwingungen und Rotationen

Als Prototyp für Oberflächenschwingungen sollen nun die Quadrupolschwingungen $\alpha^{[2]}$ betrachtet werden. Für eine dynamische Beschreibung benötigt man noch den zugehörigen Hamiltonoperator, für den folgender einfacher Ansatz gemacht wird

$$H = T + V \tag{5.17}$$

mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2B}\sum_\mu |\pi^{[2]}_\mu|^2 = \frac{1}{2B}\sum_\mu (-)^\mu (\pi^{[2]}_{-\mu})^\dagger \pi^{[2]}_\mu , \tag{5.18}$$

wobei $\pi^{[2]}$ der zu $\alpha^{[2]}$ kanonische konjugierte Impuls sei, d.h.

$$\left[\alpha^{[2]}_\mu, \pi^{[2]}_{\mu'}\right] = i\delta_{\mu\mu'} . \tag{5.19}$$

B ist ein noch zu bestimmender Massenparameter, der die Trägheit der Oberflächenbewegung charakterisiert. Das Potential V setzt man als eine Funktion an, die nur von $\alpha^{[2]}$ abhängt,

$$V = V(\alpha^{[2]}) . \tag{5.20}$$

Mit diesem Ansatz hat man im Prinzip mögliche Kopplungsterme zwischen Impulsen und Koordinaten vernachlässigt.

Über das Potential V kann man noch weitergehende Aussagen aus der Tatsache, dass V eine skalare Grösse bezüglich Raumrotationen sein muss, gewinnen. Die einzigen unabhängigen Skalare, die man aus $\alpha^{[2]}$ konstruieren kann, sind

$$L_2 = \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}\right]^{[0]} , \tag{5.21}$$

$$L_3 = \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}\right]^{[0]} , \tag{5.22}$$

sodass V von der Form sein muss

$$\begin{aligned} V(\alpha^{[2]}) &= V(L_2, L_3) \\ &= C_2\, L_2 + C_3\, L_3 + C_4\, L_2^2 + C_5\, L_2\, L_3 + C_6\, L_3^2 + D_6\, L_2^3 + \cdots , \end{aligned} \tag{5.23}$$

wobei in der zweiten Gleichung die Existenz einer TAYLORentwicklung in den L_2 und L_3 angenommen wurde.

Eine anschauliche Vorstellung von $V(\alpha^{[2]})$ gewinnt man, wenn man V im sogenannten intrinsischen System, das als Hauptachsensystem definiert ist, darstellt. Das Hauptachsensystem ist durch das Verschwinden der Deviationsmomente des Trägheitstensors charakterisiert. Das beinhaltet die Bedingungen

$$\alpha_{2\,-1} = \alpha_{2\,1} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{2\,-2} = \alpha_{2\,2} . \tag{5.24}$$

Mit anderen Worten, im intrinsischen System wird die quadrupoldeformierte Oberfläche allein durch zwei Variable

$$a_0 = \alpha_{2\,0} \quad \text{und} \quad a_2 = \alpha_{2\,2} \tag{5.25}$$

beschrieben. Man führt häufig auch Polarkoordinaten über

$$a_0 = \beta\, \cos\gamma \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\, \sin\gamma \tag{5.26}$$

ein. Da die Orientierung des Hauptachsensystems durch drei Eulerwinkel beschrieben wird, erhält man insgesamt wieder fünf Variable zur Beschreibung, d.h. statt der $\alpha_{2\,\mu}$ kann man auch β, γ und die Eulerwinkel θ, ϕ und ψ verwenden. Hierbei ist zu beachten, dass der Übergang zu diesen Variablen nicht eindeutig ist, da man auf 24 verschiedene Weisen das Hauptachsensystem wählen kann. Das bedeutet, dass verschiedenen Variablensätze $(\theta, \phi, \psi, \beta, \gamma)$ zu den gleichen Variablen $\alpha_{2\,\mu}$ gehören. Das führt dazu, dass man in der $(a_0, \sqrt{2}\,a_2)$-Ebene nur einen Sektor von 60° benötigt. Die Länge der Hauptachsen ist durch

$$R_k = R_0(1 + \delta\, r_k) \tag{5.27}$$

mit

$$\delta\, r_k = \sqrt{\frac{5}{4\,\pi}}\,\beta\,\cos(\gamma - \frac{2}{3}\,k\,\pi)\,, \quad k = 1, 2, 3 \tag{5.28}$$

gegeben. Daraus folgen insbesondere als mögliche Oberflächenformen (siehe Abb. 5.6)

(a) für $\beta = 0$ sphärische Form,

(b) für $\gamma = 0°$ und $R_1 = R_2 < R_3$ um die z-Achse axialsymmetrisch, prolat deformiert (zigarrenförmig),

(c) für $\gamma = 60°$ und $R_1 = R_3 > R_2$ um die y-Achse axialsymmetrisch, oblat deformiert (diskusförmig),

(d) für $\beta = 0$ und $0° < \gamma < 60°$ asymmetrisch bzw. triaxial deformiert.

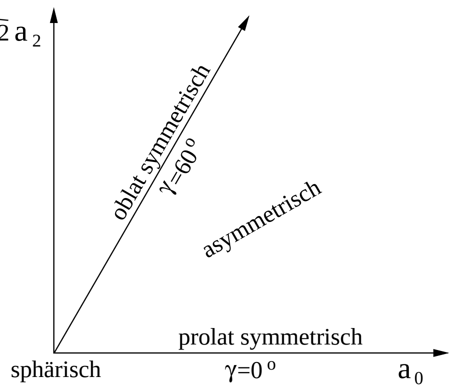

Abbildung 5.6: Darstellung möglicher Kernformen in der a_0-$\sqrt{2}a_2$-Ebene

Vom Verhalten des Potentials $V(L_2, L_3)$ – im intrinsischen System gilt

$$L_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\beta^2 \quad \text{und} \quad L_2 = -\sqrt{\frac{2}{35}}\,\beta^3\cos 3\gamma \tag{5.29}$$

– hängt nun der Typus der Kerndynamik ab. Die potentielle Energie kann man als Fläche über der a_0-$\sqrt{2}a_2$-Ebene darstellen. Einige mögliche Fälle sind in der Abbildung 5.7 dargestellt. Insbesondere bestimmt die Lage des Minimums der Potentialenergiefläche darüber, ob es sich um einen im Grundzustand sphärischen, axialsymmetrisch oder asymmetrisch deformierten Kern handelt. Im Folgenden sollen nun einige Spezialfälle, die von besonderer Bedeutung sind, betrachtet werden.

5.2.1 Der harmonische Quadrupolvibrator

Der einfachste Fall stellt einen sphärischen Kern dar, dessen Oberfläche harmonische Quadrupol-Schwingungen um die sphärische Ruhelage vollführt. Dann hängt das Potential V nicht von L_3 ab und hat die sehr einfache Form

$$V(L_2, L_3) = \frac{\sqrt{5}}{2}\,C\,L_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,C\left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}\right]^{[0]}. \tag{5.30}$$

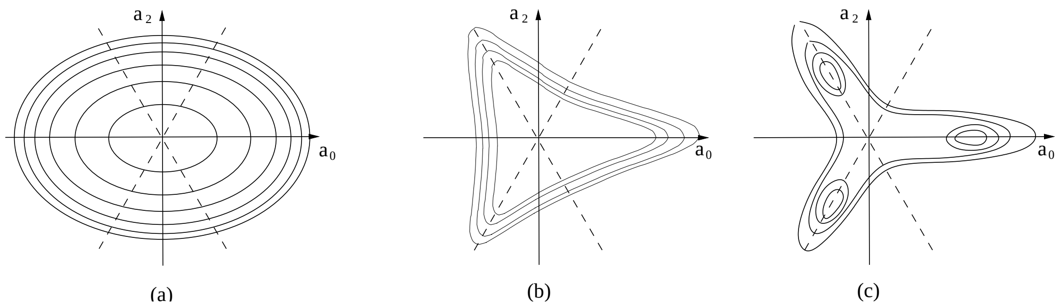

Abbildung 5.7: Potentialenergieflächen in der a_0-a_2-Ebene: (a) harmonischer Oszillator um sphärische Form, (b) anharmonischer Oszillator um sphärische Form, (c) deformierter Kern im Grundzustand mit angeregten, sphärischen Zuständen

In diesem Fall ist das intrinsische System nicht geeignet. Insgesamt hat der Hamiltonoperator die Form

$$H(\alpha^{[2]}, \pi^{[2]}) = \frac{\sqrt{5}}{B} \left[\pi^{[2]} \times \pi^{[2]}\right]^{[0]} + \frac{\sqrt{5}}{2} C \left[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}\right]^{[0]} . \tag{5.31}$$

Es werden nun wie üblich Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeführt

$$\alpha_{2\,\mu} = \frac{1}{\sqrt{2B\omega}} (\beta^\dagger_{2\,\mu} + (-)^\mu \beta_{2\,-\mu}) , \tag{5.32}$$

$$\pi_{2\,\mu} = i\sqrt{\frac{B\omega}{2}} (\beta_{2\,\mu} - (-)^\mu \beta^\dagger_{2\,-\mu}) , \tag{5.33}$$

mit $\omega^2 = C/B$. Man beachte, dass $(-)^\mu \pi_{2\,-\mu}$ einen irreduziblen Tensor der Stufe 2 darstellt. Die Umkehrung lautet dann

$$\beta^\dagger_{2\,\mu} = \sqrt{\frac{B\omega}{2}}\, \alpha_{2\,\mu} - i\, \frac{1}{\sqrt{2B\omega}} (-)^\mu \pi_{2\,-\mu} , \tag{5.34}$$

$$\beta_{2\,\mu} = \sqrt{\frac{B\omega}{2}} (-)^\mu \alpha_{2\,-\mu} + i\, \frac{1}{\sqrt{2B\omega}}\, \pi_{2\,\mu} . \tag{5.35}$$

Man erhält dann die bekannten Vertauschungsrelationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\left[\beta_{2\,\mu}, \beta^\dagger_{2\,\mu'}\right] = \delta_{\mu\mu'} , \tag{5.36}$$

$$\left[\beta_{2\,\mu}, \beta_{2\,\mu'}\right] = \left[\beta^\dagger_{2\,\mu}, \beta^\dagger_{2\,\mu'}\right] = 0 , \tag{5.37}$$

und für den Hamiltonoperator die Darstellung

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega}{2} \sum_\mu \left(\beta_{2\,\mu}\, \beta^\dagger_{2\,\mu} + \beta^\dagger_{2\,\mu}\, \beta_{2\,\mu}\right) \\ &= \omega \sum_\mu \left(\beta^\dagger_{2\,\mu}\, \beta_{2\,\mu} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \omega \left(\sqrt{5} \left[\beta^{\dagger\,[2]} \times \beta^{[2]}\right]^{[0]} + \frac{5}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.38}$$

Somit beschreibt $\beta^\dagger_{2\,\mu}$ die Erzeugung eines Vibrationsquants der Energie $\omega = \sqrt{C/B}$. Man erhält durch Mehrfachanwendung ein äquidistantes Spektrum. Mit zunehmender Phononenzahl n wächst dabei der Entartungsgrad schnell an. Ein N-Phononzustand hat die Form

$$|N, \mu_1, \ldots, \mu_N\rangle = C(\mu_1, \ldots, \mu_N)\, \beta^\dagger_{2\,\mu_1} \ldots \beta^\dagger_{2\,\mu_N} |0\rangle . \tag{5.39}$$

Tabelle 11: Die niedrigsten Zustände des sphärischen, harmonischen Oberflächenvibrators.

N	$\|N,I\rangle$
0	$\|0,0\rangle$
1	$\|1,2\rangle = \beta^{\dagger\,[2]}\|0,0\rangle$
2	$\|1,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\beta^{\dagger\,[2]} \times \beta^{\dagger\,[2]}\|0,0\rangle\right]^{[I]}, I = 0,2,4$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Phononen wegen des Spins $S = 2$ Bosonen sind, und daher die Wellenfunktion symmetrisch unter Vertauschung zweier Phononen, d.h. unter Vertauschung zweier $\beta^{\dagger}_{2\,\mu}$ sein muss. Die Normierung wird durch den Vorfaktor $C(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ sichergestellt. Übersichtlicher stellen sich die Zustände dar, wenn man sie nach dem Gesamtdrehimpuls klassifiziert in der Notation $|N, I\rangle$ (siehe Tabelle 11).

Beim Zweiphononzustand entfallen die ungeraden Spins wegen der erwähnten Symmetrie der Wellenfunktion und der Vorfaktor berücksichtigt die Normierung. Charakteristisch für einen Vibrator ist somit ein äquidistantes Spektrum mit einer Spinsequenz der Zustände der drei niedrigsten Energien 0^+, 2^+ und dem Triplett der drei entarteten Zuständen der Zweiphononanregung (0^+, 2^+, 4^+). Weitere typische Eigenschaften erhält man für die elektrischen Quadrupolübergangsmomente, die man etwa in der Coulombanregung messen kann. Dazu benötigt man zunächst den Quadrupoloperator, ausgedrückt in den Kollektivvariablen. Unter der Annahme einer konstanten Ladungsdichte im Kerninnern erhält man bis zu linearen Termen in den $\alpha^{[2]}\mu$

$$\begin{aligned} Q^{[2]}_{\mu} &= \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}\,)\, r^2\, Y^{[2]}_{\mu} = \rho_0 \int d\Omega\, Y^{[2]}_{\mu} \int_0^{R(\theta,\phi)} dr\, r^4 \\ &= \rho_0\, R_0^5\, \alpha^{[2]}_{\mu} + \cdots = q_2' \left(\beta^{\dagger\,[2]}_{\mu} + (-)^{\mu} \beta^{[2]}_{-\mu}\right) \end{aligned} \tag{5.40}$$

mit

$$q_2' = \rho_0\, R_0^5\, \frac{1}{\sqrt{2B\omega}} = \frac{3}{4\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2B\omega}}\, Z\, R_0^2\,. \tag{5.41}$$

Beschränkt man sich auf den linearen Term, so sind Quadrupolübergänge nur zwischen benachbarten Vibrationszuständen möglich, bei denen sich die Phononenzahl gerade um eins ändert, d.h. nur für $\Delta N = \pm 1$. Daraus folgt insbesondere das Verschwinden aller statischen Quadrupolmomente

$$\langle N, I | Q^{[2]} | N, I\rangle = 0\,. \tag{5.42}$$

Für die Quadrupolübergänge zwischen den niedrigsten Zuständen erhält man

(a) $N = 0 \to 1$:

$$\begin{aligned} \langle 1, 2M | Q^{[2]}_{M} | 0, 0\rangle &= q_2' \langle 1, 2M | \beta^{\dagger\,[2]}_{M} | 0, 0\rangle = q_2' \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1, 2 || Q^{[2]} || 0, 0\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Hieraus folgt

$$\langle 1, 2 || Q^{[2]} || 0, 0\rangle = \sqrt{5}\, q_2'\,. \tag{5.44}$$

(b) $N = 1 \to 2$:
$$\langle 2, IM|Q_0^{[2]}|1, 2M\rangle = q_2' \, \langle 2, IM|\beta_0^{\dagger\,[2]}\beta_M^{\dagger\,[2]}|0,0\rangle \,. \tag{5.45}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \beta_0^{\dagger\,[2]}\beta_M^{\dagger\,[2]}|0,0\rangle &= \sum_{I'}(20\,2M|I'M)\left[\beta^{\dagger\,[2]} \times \beta^{\dagger\,[2]}\right]^{[I']}|0,0\rangle \\ &= \sum_{I'}(20\,2M|I'M)\,\sqrt{2}\,|2, I'M\rangle \end{aligned} \tag{5.46}$$

folgt schliesslich

$$\langle 2, IM|Q_0^{[2]}|1, 2M\rangle = \sqrt{2}\, q_2' \,(20\,2M|IM) = \frac{(-)^I}{\hat{I}}\,(20\,2M|IM)\,\langle 2, I||Q^{[2]}||1, 2\rangle \,. \tag{5.47}$$

Somit erhält man das einfache Ergebnis

$$\langle 2, I||Q^{[2]}||1, 2\rangle = (-)^I\,\sqrt{2\,(2I+1)}\, q_2' \,. \tag{5.48}$$

Die elektromagnetischen Quadrupolübergangstärken – bezeichnet mit $B(E2; I_N \to I'_{N'})$ – sind durch die Betragsquadrate der reduzierten Quadrupolmatrixelemente bestimmt. Man erhält dann für das Verhältnis der Übergangsstärken vom Zweiphononzustand in den Einphononzustand ($I_2 \to 2_1$) zum Übergang $2_1 \to 0_0$

$$\frac{B(E2; I_2 \to 2_1)}{B(E2; 2_1 \to 0_0)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2I+1}}\left|\frac{\langle 2, I||Q^{[2]}||1, 2\rangle}{\langle 1, 2||Q^{[2]}||0, 0\rangle}\right|^2 = 2\,. \tag{5.49}$$

Insgesamt ergibt sich das in Abb. 5.8 gezeigte Bild für die niedrigsten Zustände des Spektrums des idealen harmonischen Oberflächenvibrators. Zur Bestimmung der beiden Parameter des Modells, dem Trägheitsparameter B und der Rückstellkonstante C, entnimmt man der Energie des ersten angeregten 2^+-Zustands die Frequenz ω, und aus dem $B(E2; 2_1 \to 0_0)$-Wert kann man den Parameter q_2' bestimmen. Aus ω und q_2' kann man dann B und C berechnen.

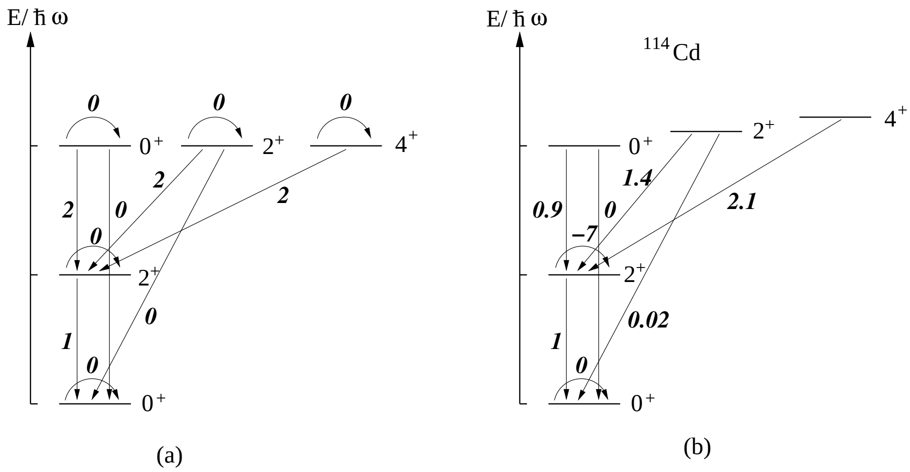

Abbildung 5.8: Spekrum eines idealen harmonischen Oberflächenvibrators mit relativen Quadrupolübergangsstärken (a) und des realen ^{114}Cd-Kerns (b).

Vergleicht man dieses Spektrum mit einem realistischen Vibratorkern, etwa dem ebenfalls in Abb. 5.8 dargestellten ^{114}Cd-Kern, so erkennt man signifikante Abweichungen vom idealen Vibrator. Der im Idealfall entartete Zweiphononenzustand ist aufgespalten und dessen Schwerpunkt zu höheren Energien verschoben. Ebenso zeigen die relativen $E2$-Übergangsstärken z.T. erhebliche Abweichungen von den Idealwerten. Insbesondere das nichtverschwindende Quadrupolmoment des ersten 2^+-Zustands weist auf eine permanente Deformation hin. In der Tat findet man unter den Vibrationskernen keinen, der auch nur annähernd einem harmonischen Vibrator entspricht. Offensichtlich sind überall Anharmonizitäten hinreichend stark vertreten.

5.2.2 Der starre Rotator

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass die Potentialenergiefläche des Kerns ein ausgeprägtes Minimum bei $\gamma = 0°$ oder $60°$ und $\beta < 0$ aufweist, also einen axialsymmetrisch deformierten Kern beschreibt. In diesem Fall ist es nützlich, die Vibrationen der Oberfläche im intrinsischen Hauptachsensystem zu beschreiben und die drei EULER-Winkel als zusätzliche Rotationsfreiheitsgrade einzuführen. Dazu ist es notwendig, den HAMILTONoperator auf diese Variablen umzuschreiben. Da die potentielle Energie nur von den Skalaren L_2 und L_3 abhängt, die nicht von den EULER-Winkeln abhängen und allein durch die intrinsischen Variablen ausgedrückt werden können, bleibt nur dir kinetische Energie zu transformieren.

Die Beziehung zwischen den $\alpha_{2\mu}$ und den a_ν wird durch die Drehmatrizen geliefert

$$\alpha_{2\mu} = \sum_\nu D^{2\,*}_{\mu\nu}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\, a_\nu \,, \tag{5.50}$$

wobei $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ die EULER-Winkel der Transformation zwischen intrinsischem und Laborsystem beschreiben. Explizit lauten sie

$$\begin{aligned} D^{2\,*}_{\mu\nu}(\theta_j) &= \langle 2\mu | e^{-i\theta_1 J_3} e^{-i\theta_2 J_2} e^{-i\theta_3 J_3} | 2\nu \rangle \\ &= e^{-i\mu\theta_1} d^2_{\mu\nu}(\theta_2) e^{-i\nu\theta_3} \,. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Damit erhält man für die Zeitableitung der $\alpha_{2\mu}$

$$\dot{\alpha}_{2\mu} = \sum_\nu \Big(\dot{D}^{2\,*}_{\mu\nu}(\theta_j)\, a_\nu + D^{2\,*}_{\mu\nu}(\theta_j)\ \dot{a}_\nu \Big) \,. \tag{5.52}$$

Zur Berechnung von $\dot{D}^{2\,*}_{\mu\nu}$ betrachtet man

$$\Delta\, D^I_{\mu\nu}(\theta_j) = D^I_{\mu\nu}(\theta_j(t + \Delta t)) - D^I_{\mu\nu}(\theta_j(t)) \,, \tag{5.53}$$

und benutzt den Satz von EULER, nachdem man eine orthogonale Transformation im R_3 durch eine einzige Rotation um eine geeignete (momentane) Achse mit geeignetem Winkel darstellen kann

$$e^{-i\theta_1 J_3} e^{-i\theta_2 J_2} e^{-i\theta_3 J_3} = e^{-i\vec{\Omega}\cdot\vec{J}} \,. \tag{5.54}$$

Hierbei ist $\Omega(\theta_j)$ der durch die EULER-Winkel bestimmte Rotationswinkel. Die Richtung von $\vec{\Omega}$ legt die momentane Drehachse fest und $|\vec{\Omega}|$ den Drehwinkel. Ferner kann man die Rotation $R(\theta_j(t + \Delta\, t))$ in eine Rotation $R(\theta_j(t))$ gefolgt von der Rotation $R(\dot{\theta}_j\ \Delta\, t)$ zerlegen, d.h.

$$e^{-i\vec{\Omega}(\theta_j(t+\Delta\, t))\cdot\vec{J}} = e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{K}\,\Delta\, t}\, e^{-i\vec{\Omega}(\theta_j(t))\cdot\vec{J}} \,, \tag{5.55}$$

wobei $e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{K}\,\Delta\, t}$ die Rotation vom körperfesten Achsensysten zur Zeit t in das körperfeste System zur Zeit $t + \Delta\, t$ beschreibt, und $\vec{\omega} = \dot{\vec{\Omega}}$ bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit sowie $\vec{K}$

den Drehimpulsoperator im körperfesten System, das selbst zeitlich veränderlich ist. Daher hat $\vec{K}$ etwas andere Vertauschungsrelationen, wie weiter unten gezeigt wird. Insgesamt erhält man bis zur ersten Ordnung in $\Delta\, t$

$$\begin{aligned} D^I_{\mu\nu}(\theta_j(t+\Delta\, t)) &= \langle I\mu|e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{K}\,\Delta\, t}\, e^{-i\vec{\Omega}(\theta_j(t))\cdot\vec{J}}|I\nu\rangle \\ &= D^I_{\mu\nu}(\theta_j(t)) - i\,\Delta\, t\,\langle I\mu|\vec{\omega}\cdot\vec{K}\, e^{-i\vec{\Omega}(\theta_j(t))\cdot\vec{J}}|I\nu\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Im letzten Term kann man $\vec{K}$ mit $e^{-i\vec{\Omega}(\theta_j(t))\cdot\vec{J}}$ vertauschen, da $[K_j, J_l] = 0$ gilt, wie weiter unten gezeigt wird. Damit erhält man für die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \dot{D}^I_{\mu\nu}(\theta_j(t)) &= \lim_{\Delta\, t\to 0}\frac{1}{\Delta\, t}\,\Delta\, D^I_{\mu\nu} = -i\vec{\omega}\cdot\langle I\mu|e^{-i\vec{\Omega}(\theta_j(t))\cdot\vec{J}}\,\vec{K}|I\nu\rangle \\ &= -i\sum_\sigma D^I_{\mu\sigma}(\theta_j(t))\langle I\sigma|\vec{\omega}\cdot\vec{K}|I\nu\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Wie schon erwähnt wurde, beziehen sich die Komponenten von $\vec{\omega}$ und $\vec{K}$ auf das körperfeste System. Diese sind also bezüglich Rotationen des Laborkoordinatensystems Skalare, d.h. invariant, denn es gilt

$$\omega_j = \vec{\omega}\cdot\vec{e}_j\,, \quad \text{und} \quad K_j = \vec{K}\cdot\vec{e}_j\,, \tag{5.58}$$

wobei $\vec{e}_j$ die körperfesten Achsen bezeichnet. Das ist aber nicht zu verwechseln mit der Tatsache, dass sich mit der zeitlichen Änderung des körperfesten Systems bezüglich des Laborsystems auch ω_j und K_j zeitlich ändern. Aus der Invarianz folgt insbesondere die Eigenschaft

$$[K_j, J_l] = 0\,, \tag{5.59}$$

von der bereits weiter oben Gebrauch gemacht wurde. Hierbei bezeichnet J_l eine Komponente des Drehimpulsoperators bezüglich des Laborsystems. Wir sind nun in der Lage die Vertauschungsrelationen der Komponenten K_j abzuleiten. Dazu verwendet man die Beziehung zwischen den sphärischen Komponenten von $\vec{K}$ und $\vec{J}$

$$K_\mu = \sum_\nu J_\nu\, D^1_{\nu\mu}\,. \tag{5.60}$$

Mit (5.59) und der Vertauschungsrelation für J_μ in der Form

$$[J_\mu, J_\nu] = \sqrt{2}\,(1\nu\, 1\mu|1\nu+\mu)\, J_{\nu+\mu} \tag{5.61}$$

folgt aus

$$\begin{aligned} [K_\mu, J_\nu] = 0 &= \sum_{\mu'}[J_{\mu'}\, D^1_{\mu'\mu}, J_\nu] \\ &= \sum_{\mu'} J_{\mu'}\Big(\sqrt{2}\,(1\nu\, 1\mu'-\nu|1\mu')\, D^1_{\mu'-\nu,\mu} + [D^1_{\mu'\mu}, J_\nu]\Big) \end{aligned} \tag{5.62}$$

die Relation

$$[J_\nu, D^1_{\mu'\mu}] = \sqrt{2}\,(1\nu\, 1\mu'-\nu|1\mu')\, D^1_{\mu'-\nu,\mu} \tag{5.63}$$

und ferner

$$\begin{aligned} [D^1_{\mu'\mu}, K_\nu] &= -\sqrt{2}\sum_\nu\sum_\rho(1\nu'\, 1\rho|1\mu')\, D^1_{\rho\mu}\, D^1_{\nu'\nu} \\ &= -\sqrt{2}\,(1\nu\, 1\mu|1\nu+\mu)\, D^1_{\mu',\nu+\mu}\,, \end{aligned} \tag{5.64}$$

wobei im letzten Schritt die CLEBSCH-GORDAN-Summe für Drehmatrizen verwendet wurde. Schliesslich erhält man

$$\begin{aligned}[K_\mu, K_\nu] &= \sum_{\mu'} J_{\mu'} [D^1_{\mu'\mu}, K_\nu] \\ &= -\sqrt{2}\,(1\nu\,1\mu|1\nu+\mu) \sum_{\mu'} J_{\mu'}\, D^1_{\mu',\nu+\mu} \\ &= -\sqrt{2}\,(1\nu\,1\mu|1\nu+\mu)\, K_{\nu+\mu}\,. \end{aligned} \tag{5.65}$$

In cartesischen Koordinaten lautet die Vertauschungsrelation

$$\vec{K} \times \vec{K} = -\vec{K}\,, \tag{5.66}$$

die sich von der des Drehimpulses $\vec{J} \times \vec{J} = \vec{J}$ nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

Nun sind wir in der Lage die Transformation der kinetischen Energie auf EULER-Winkel durchzuführen. Aus (5.52) und (5.56) folgt

$$\dot{\alpha}_{2\mu} = \sum_\nu \Big(i\, a_\nu \sum_{\mu'} (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\mu\mu'}\, D^{2\,*}_{\mu'\nu}(\theta_j) + D^{2\,*}_{\mu\nu}(\theta_j)\ \dot{a}_\nu \Big) \tag{5.67}$$

mit $(\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\mu\mu'} = \langle 2\mu|\vec{\omega} \cdot \vec{K}|2\mu'\rangle$, und schliesslich für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{B}{2} \Big\{ \sum_\nu \dot{a}_\nu\, \dot{a}^*_\nu + \sum_{\mu\nu\nu'} a_\nu\, a^*_{\nu'}\, (\vec{\omega} \cdot \vec{K})^*_{\mu\nu} (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\mu\nu'} \\ &\qquad + \Big(i \sum_{\nu\nu'} a_\nu\, (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\nu\nu'}\ \dot{a}^*_{\nu'}\ + c.c. \Big) \Big\}\,. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Der gemischte Term verschwindet. Denn erstens gilt für $\nu \neq \nu'$, dass $|\nu - \nu'| > 1$ ist, da $a_1 = a_{-1} = 0$ gilt. In diesem Fall verschwindet aber nach den Drehimpulsauswahlregeln $(\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\nu\nu'}$, denn $\vec{K}$ kann die Projektion ν nur um höchstens eins ändern. Für den verbleibenden Fall $\nu = \nu'$ ist die Summe jedoch reell, denn es gilt dann

$$\sum_\nu a_\nu\, (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\nu\nu}\ \dot{a}^*_\nu = a_0\, (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{00}\ \dot{a}_0\ + a_2 \Big((\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{22} + (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{-2-2} \Big)\, \dot{a}_2\,, \tag{5.69}$$

und dieser Ausdruck enthält nur reelle Grössen. Den zweiten Term von (5.68) kann man unter Verwendung von

$$\sum_\mu (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\nu\mu} (\vec{\omega} \cdot \vec{K})_{\mu\nu'} = \Big((\vec{\omega} \cdot \vec{K})^2 \Big)_{\nu\nu'} = \sum_j (K_j^2)_{\nu\nu'}\, \omega_j^2 + \sum_{j'>j} \{K_j, K_{j'}\}_{\nu\nu'}\, \omega_j\, \omega_{j'} \tag{5.70}$$

umschreiben. Da ν und ν' nur die Werte 0 und ± 2 durchlaufen, verschwinden die Matrixelemente $\{K_1, K_3\}_{\nu\nu'}$ und $\{K_2, K_3\}_{\nu\nu'}$, denn K_3 is diagonal und $K_{1/2}$ ändert die Projektion um ± 1. Schliesslich folgt aus

$$\{K_1, K_2\} = -\frac{i}{2}\,(K_+K_+ - K_-K_-) \tag{5.71}$$

die Relation

$$\{K_1, K_2\}_{02} = -\{K_1, K_2\}_{0-2}\,, \tag{5.72}$$

denn nach dem WIGNER-ECKART-Theorem gilt $(K_+K_+)_{02} = (K_-K_-)_{0-2}$. Demzufolge verschwindet der zweite Beitrag des zweiten Terms insgesamt, sodass man als Endergebnis für die kinetische Energie, ausgedrückt durch die körperfesten Oberflächenvariablen a_0 und a_2 und durch die Winkelgeschwindigkeiten ω_j, erhält

$$T = \frac{B}{2} \Big\{ \sum_{\nu} \dot{a}_\nu^2 + \sum_j \Big(\sum_{\nu\nu'} a_\nu \, (K_j^2)_{\nu\nu'} \, a_{\nu'} \Big) \omega_j^2 \Big\} . \tag{5.73}$$

Der Koeffizient von ω_j^2 liefert gerade das Hauptträgheitsmoment bezüglich der körperfesten j-Achse

$$\mathcal{J}_j(a_0, a_2) = B \sum_{\nu\nu'} (K_j^2)_{\nu\nu'} \, a_{\nu'} . \tag{5.74}$$

Die Auswertung der Matrixelemente (sieh z.B. Eisenberg-Greiner, Nuclear Theory I, Kap. 5) liefert im Einzelnen

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{1/2}(a_0, a_2) &= B\,(3\,a_0^2 \pm 2\sqrt{6}\,a_0 a_2 + 2\,a_2^2) , & (5.75) \\ \mathcal{J}_3(a_0, a_2) &= 8\,B\,a_2^2 , & (5.76) \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathcal{J}_j(a_0, a_2) = 4\,B\,\beta^2 \sin^2(\gamma - j\frac{2\pi}{3}) . \tag{5.77}$$

Da der Drehimpulsoperator $\vec{J}$ im körperfesten Hauptachsensystem die Komponenten

$$K_j = \vec{J} \cdot \vec{e}_j = \mathcal{J}_j \, \omega_j \tag{5.78}$$

besitzt, kann man die kinetische Energie auch in die kanonische Form bringen

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \frac{K_j}{\mathcal{J}_j} + \frac{1}{2B} \sum_\nu \pi_\nu^2 . \tag{5.79}$$

Hierbei ist zu beachten, dass K_j die Komponente des Drehimpulses bezüglich des körperfesten Systems darstellt.

Für die weitere Diskussion soll zunächst die Oberflächendynamik vernachlässigt und auf den starren Rotator spezialisiert werden, wobei noch zusätzlich $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ angenommen werde (symmetrischer Kreisel). Dann gilt

$$T_{rot} = \frac{\vec{J}^2}{2\mathcal{J}_1} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\mathcal{J}_3} - \frac{1}{\mathcal{J}_1}\Big) K_3^2 . \tag{5.80}$$

Offensichtlich sind $\vec{J}^2$, J_3 und K_3 gute Quantenzahlen, die zur Kennzeichnung der Eigenzustände von T_{rot} dienen können. Diese Eigenzustände werden mit $|JMK\rangle$ bezeichnet und es gilt

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |JMK\rangle &= J(J+1)\,|JMK\rangle , & (5.81) \\ J_3/K_3 |JMK\rangle &= M/K\,|JMK\rangle , & (5.82) \\ T_{rot}|JMK\rangle &= E_{J,K}\,|JMK\rangle , & (5.83) \end{aligned}$$

mit

$$E_{J,K} = \frac{J(J+1)}{2\mathcal{J}_1} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\mathcal{J}_3} - \frac{1}{\mathcal{J}_1}\Big) K^2 . \tag{5.84}$$

Als Darstellung von $|JMK\rangle$ bezüglich der Euler-Winkel erhält man

$$\langle \theta_1 \theta_2 \theta_3 | JMK \rangle = \frac{\hat{J}}{8\pi^2} \, D_{MK}^{J\,*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) . \tag{5.85}$$

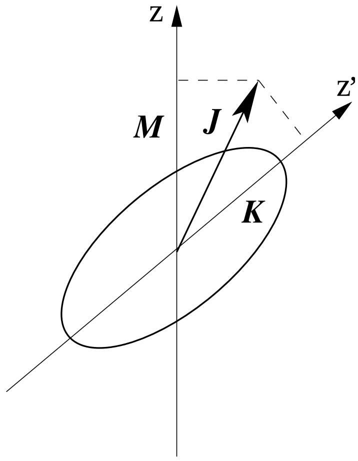

Abbildung 5.9: Projektion des Drehimpulses J auf die intrinsische Symmetrieachse z' und die Laborachse z.

Der Zustand $|JMK\rangle$ besitzt die Drehimpulsprojektion M auf die z-Achse des Laborsystems und die Projektion K auf die körperfeste z'-Achse (siehe Abb. 5.9).

Da die Wahl der z'-Achse nicht eindeutig ist, muss man noch symmetrisieren bezüglich der Transformation $z' \to -z'$ (Parität). Dies bedeutet für die sphärischen Winkel die Transformation $\theta_2 \to \pi - \theta_2$ und führt mit

$$d^J_{mm'}(\pi - \theta_2) = (-)^{J+m'} d^J_{m-m'}(\theta_2) \tag{5.86}$$

zur symmetrisierten Form

$$\langle \theta_j | JMK \rangle = \frac{\hat{J}}{\sqrt{16(1+\delta_{K0})\pi^2}} \left(D^{J\,*}_{MK}(\theta_j) + \pi_R (-)^{J+K} D^{J\,*}_{M-K}(\theta_j) \right), \tag{5.87}$$

wobei π_R die intrinsische Parität des starren Rotators beschreibt. Zu gegebenem $K \geq 0$ gibt es somit eine Rotationsbande, die mit $J = K$ als niedrigstem Drehimpuls beginnt, d.h. man erhält eine Sequenz von Rotationszuständen K^{π_R}, $(K+1)^{\pi_R}$, $(K+2)^{\pi_R}, \ldots$. Für $K = 0$ ergibt sich eine Auswahlregel, denn dann folgt aus (5.87)

$$\langle \theta_j | JM0 \rangle = \frac{\hat{J}}{\sqrt{32\pi^2}} D^{J\,*}_{M0}(\theta_j) \left(1 + \pi_R (-)^J\right), \tag{5.88}$$

sodass man für positive Parität ($\pi_R = +1$) die Spinfolge 0^+, 2^+, $4^+, \ldots$ und für negative Parität ($\pi_R = -1$) die Spinfolge 1^-, 3^-, $5^-, \ldots$ erhält.

Das Auftreten von Rotationsbanden mit entsprechenden Rotationsenergien in einem Kernspektrum ist also ein typisches Kennzeichen eines deformierten Kerns. Ein weiteres Kennzeichen erhält man aus den Quadrupolübergangsstärken. Den zugehörigen Quadrupoloperator kann man aus dem intrinsischen Quadrupoloperator $\widetilde{Q}^{[2]}_\mu$ bezüglich des körperfesten Systems durch Rotation ins Laborsystem erhalten. Der intrinsische Quadrupoloperator wird durch die innere Struktur des Kerns bestimmt. Bezüglich des Laborsystems ergibt sich dann die Beziehung

$$Q^{[2]}_\mu = \sum_\nu D^{2*}_{\mu\nu}(\theta_j)\, \widetilde{Q}^{[2]}_\mu \,. \tag{5.89}$$

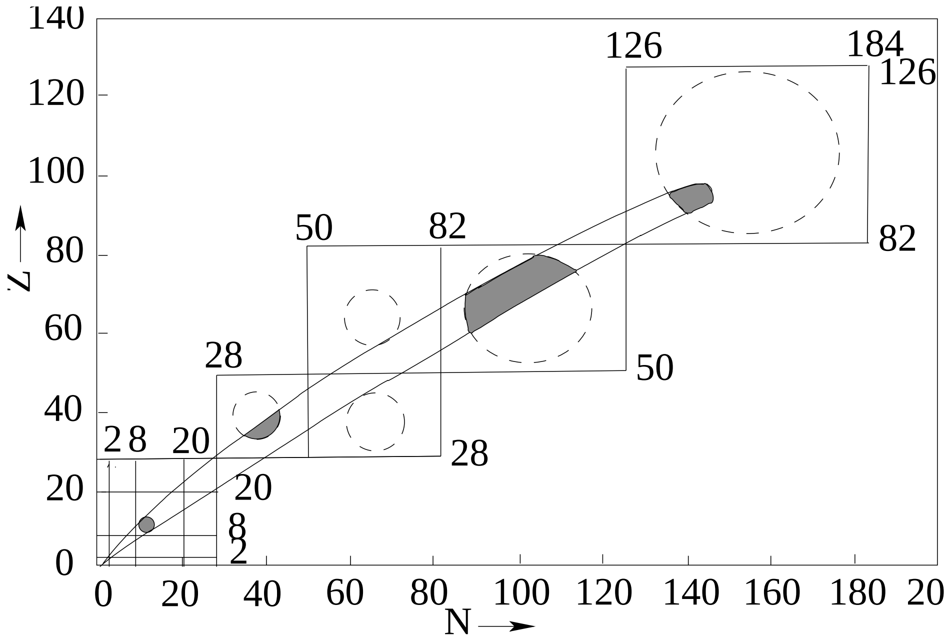

Abbildung 5.10: Übersicht über die Bereiche deformierter Kerne.

Im Fall des axialsymmetrisch deformierten, starren Rotators mit konstanter Ladungsdichte ist die einzige nicht verschwindende Komponente des intrinsischen Operators

$$\widetilde{Q}_0^{[2]} = \widetilde{Q}_0 = \sqrt{\frac{16\,\pi}{5}} \int d^3r\, \rho(\vec{r}\,)\, r^2\, Y_{20}(\hat{r})\,. \tag{5.90}$$

Mit den Eigenfunktionen des starren Rotators erhält man dann für das Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle J'M'K'|Q_\mu^{[2]}|JMK\rangle &= (-)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \langle J'K'||Q^{[2]}||JK\rangle \\ &= (-)^{J+M'}\,\hat{J'} \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} (JK\,20|J'K')\,\widetilde{Q}_0\,, \end{aligned} \tag{5.91}$$

und damit für das reduzierte Matrixelement

$$\langle J'K'||Q^{[2]}||JK\rangle = \delta_{K'K}\,(-)^{J'-K}\,\hat{J'}^2 \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -K & 0 & K \end{pmatrix}\,. \tag{5.92}$$

Daraus folgt als erstes wichtiges Ergebnis, dass alle statischen und Übergangsquadrupolmomente allein durch $\widetilde{Q}_0$ und geometrische Faktoren, ausgedrückt durch das $3j$-Symbol, bestimmt sind, sodass deren Verhältnisse allein durch die geometrischen Faktoren, d.h. die Drehimpulsquantenzahlen (JK) festgelegt sind. Ferner erkennt man an der Auswahlregel $\delta_{K'K}$, dass nur Übergänge innerhalb einer Bande mit festem K möglich sind („$\Delta\,K \neq 0$-Verbot“). Diese Eigenschaft führt zum sogenannten K-Isomerismus.

Kerne mit ausgeprägten Rotationsspektren und entsprechenden Verhältnissen der statischen und Übergangs-Quadrupolstärken findet man in den Bereichen stark deformierter Kerne zwischen den durch die magischen Zahlen gekennzeichneten Gebieten (siehe Abb. 5.10).

Als ein Beispiel für einen guten Rotationskern ist in Abb. 5.11 die Grundzustandsbande von ^{164}Dy gezeigt.

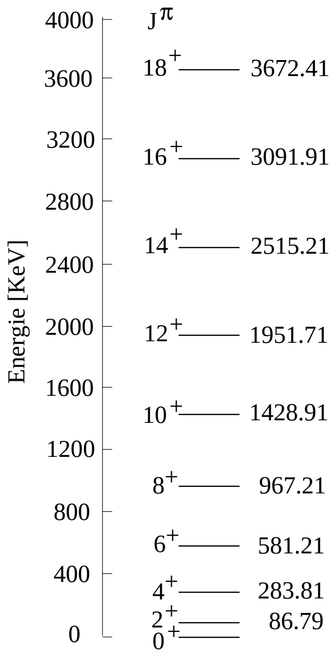

Abbildung 5.11: Grundzustandsbande von ^{164}Dy.

5.2.3 Rotationen und Vibrationen

Wir wollen nun zum eigentlichen Kollektivmodell von Bohr und Mottelson zurückkehren. Der Hamiltonoperator mit allgemeinem Potential für die intrinsischen Oberflächenschwingungen hat die Form

$$H = \sum_j \frac{K_j^2}{2\,\mathcal{J}_j(a_0, a_2)} + \frac{1}{2\,B}\,(\pi_0^2 + 2\pi_2^2) + V(a_0, a_2)\,, \tag{5.93}$$

bzw. in (β-γ)-Variablen

$$H = \sum_j \frac{K_j^2}{2\,\mathcal{J}_j(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2\,B}\,(\pi_\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\pi_\gamma^2) + \overline{V}(\beta, \gamma)\,. \tag{5.94}$$

mit $\mathcal{J}_j(\beta,\gamma) = 4\,B\,\beta^2 \sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}\,j)$.

Selbst ohne genaue Kenntnis von $\overline{V}(\beta,\gamma)$ kann man für die Eigenfunktionen einen allgemeinen Ansatz der Form

$$\overline{\psi}_n^{IM}(\theta_j, \beta, \gamma) = \sum_{K=-I}^{I} g_{Kn}^I(\beta,\gamma)\, D_{MK}^{I*}(\theta_j) \tag{5.95}$$

machen, da der Drehimpuls erhalten ist. Wegen der Nichteindeutigkeit der Wahl der intrinsischen Achsen, muss jedoch die Gesamtwellenfunktion bestimmte Symmetrien erfüllen, d.h. invariant unter den folgenden drei Transformationen R_j ($j = 1, 2, 3$) sein:

1. R_1: Drehung um den Winkel π um die intrinsische x-Achse.
   Die zugehörigen Euler-Winkel lauten $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ und $\gamma = \pi$. Dann transformieren sich die Winkel θ_j wie folgt:

$$\theta_1 \to \theta_1\,,\ \theta_2 \to \pi - \theta_2\,,\ \theta_3 \to \pi - \theta_3\,. \tag{5.96}$$

Da ferner unter R_1 gilt

$$a_\nu \to \sum_\mu a_\mu \, D^2_{\mu\nu}(0,\pi,\pi)\,, \tag{5.97}$$

erhält man

$$a_\nu \to a_\nu \quad \text{bzw.} \;\; \beta \to \beta\,, \;\; \gamma \to \gamma\,. \tag{5.98}$$

2. R_2: Drehung um den Winkel $\pi/2$ um die intrinsische z-Achse.
   Die zugehörigen EULER-Winkel lauten $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = \pi/2$. Dann transformieren sich die Variablen wie folgt:

$$\theta_{1/2} \to \theta_{1/2}\,, \;\; \theta_3 \to \theta_3 + \frac{\pi}{2}\,, \;\; a_0 \to a_0 \;\; a_2 \to -a_2 \;\; \text{bzw.} \;\; \beta \to \beta\,, \;\; \gamma \to -\gamma\,. \tag{5.99}$$

3. R_3: Zyklische Vertauschung der intrinsischen Achsen.
   Die zugehörigen EULER-Winkel lauten $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ und $\gamma = \pi/2$. Die Transformation der Winkel θ_j, die sich nicht so einfach darstellen lässt, wird nicht benötigt, wie weiter unten deutlich werden wird. Für die Oberflächenvariablen erhält man mit $D^2_{\mu\nu}(0,\pi/2,\pi/2) = d^2_{\mu\nu}(\pi/2)\,\exp(-i\nu\pi/2)$

$$a_0 \;\; \to \;\; -\frac{1}{2}\,(a_0 - \sqrt{6}\,a_2)\,, \;\; a_2 \to -\frac{1}{2}\,(\frac{\sqrt{6}}{2}\,a_0 + a_2)\,, \tag{5.100}$$

   bzw.

$$\beta \;\; \to \;\; \beta\,, \;\; \gamma \to \gamma - \frac{2\pi}{3}\,. \tag{5.101}$$

   Diese Symmetrietransformation stellt sich bezüglich der Oberflächenvariablen als eine Rotation um 120° in der $(a_0, \sqrt{2}\,a_2)$-Ebene dar. Sie wird durch eine Beschränkung des Bereichs der Oberflächenvariablen auf einen Sektor, der sich von $\gamma = -60°$ bis $\gamma = 60°$ erstreckt, berücksichtigt.

Insgesamt muss die Wellenfunktion unter diesen drei Transformationen invariant sein. Die Wirkung der ersten beiden Transformationen lässt sich wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
R_1\Big(g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,D^{I*}_{MK}(\theta_j)\Big) &= g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,D^{I*}_{MK}(\theta_1,\pi-\theta_2,\pi-\theta_3) \\
&= (-)^I\,g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,D^{I*}_{M-K}(\theta_j)\,, && (5.102)\\
R_2\Big(g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,D^{I*}_{MK}(\theta_j)\Big) &= g^I_{Kn}(\beta,-\gamma)\,D^{I*}_{MK}(\theta_1,\theta_2,\theta_3+\pi/2) \\
&= e^{i\,\pi\,K/2}\,g^I_{Kn}(\beta,-\gamma)\,D^{I*}_{MK}(\theta_j)\,. && (5.103)
\end{aligned}$$

Somit muss $g^I_{Kn}(\beta,\gamma)$ die Symmetrieeigenschaft

$$e^{i\,\pi\,K/2}\,g^I_{Kn}(\beta,-\gamma) = g^I_{Kn}(\beta,\gamma) \tag{5.104}$$

besitzen. Zweimalige Anwendung liefert die Bedingung

$$g^I_{Kn}(\beta,\gamma) = (-)^K\,g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,, \tag{5.105}$$

die nur für $K = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ erfüllt wird. Eine weitere Folgerung ist, dass nur ganzzahlige Spins I zulässig sind. Schliesslich erhält man aus der Invarianzforderung unter R_3 die Beziehung

$$\sum_{K=-I}^{I} g^I_{Kn}(\beta,\gamma - \frac{2\pi}{3}) \sum_{K'} D^{I*}_{MK'}(\theta_j)\,D^I_{K'K}(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \;\; = \;\; \sum_{K=-I}^{I} g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,D^{I*}_{MK}(\theta_j) \tag{5.106}$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen der Drehmatrizen erhält man daraus als Bedingung

$$\sum_K g^I_{Kn}(\beta,\gamma-\frac{2\pi}{3})\, D^I_{K'K}(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = g^I_{K'n}(\beta,\gamma)\,, \tag{5.107}$$

bzw.

$$g^I_{Kn}(\beta,\gamma-\frac{2\pi}{3}) = \sum_{K'} g^I_{K'n}(\beta,\gamma)\, D^{I*}_{K'K}(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\,. \tag{5.108}$$

Somit ergibt sich für die Gesamtwellenfunktion, welche die besagten Symmetrien erfüllt, die Form

$$\psi^{IM}_n(\theta_j,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{2\,I+1}{16\,\pi^2}} \sum_{K=0,\pm2,\pm4,\ldots} g^I_{Kn}(\beta,\gamma)\,\frac{1}{1+\delta_{K0}}\Big(D^{I*}_{MK}(\theta_j) + (-)^I D^{I*}_{M-K}(\theta_j)\Big)\,, \tag{5.109}$$

wobei die Funktionen $g^I_{Kn}(\beta,\gamma)$ die Bedingungen (5.105) und (5.108) erfüllen müssen. Aufgrund dieser Symmetrien braucht man die Variable γ nur im Sektor $0 \le \gamma \le \pi/3$ zu betrachten.

Die Abhängikeit der Trägheitsmomente $\mathcal{J}_j$ von β und γ beinhaltet eine Kopplung von Rotations- und Vibrationsbewegung. Für im Vergleich zum Radius kleine Vibrationsamplituden um ein stabiles Minimum kann man $\mathcal{J}_j$ um die Ruhelage (β_0,γ_0) entwickeln. Für $\beta_0 \neq 0$ und $\gamma_0 = 0$ erhält man das Rotations-Vibrations-Modell von Fässler und Greiner zur Beschreibung von axialsymmetrisch deformierten Kernen und für $\gamma_0 \neq 0$ das Modell von Davidov und Filipov eines dreiachsigen Kerns (asymmetrischer Rotator). In beiden Fällen lässt sich der Hamiltonoperator als Summe von statischem Rotator und reinem Vibrator sowie einem Kopplungsterm dieser Kollektivbewegungen schreiben

$$H = H_{\mathrm{rot}} + H_{\mathrm{vib}} + H_{\mathrm{rot-vib}}\,. \tag{5.110}$$

Im Fässler-Greiner-Modell für axialsymmetrisch deformierte Kern mit $a_0 = \beta_0 + \xi$ und $a_2 = \eta$ erhält man

$$H_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2\,\Theta}\,(\vec{J}^2 - J_3^2)\,, \tag{5.111}$$

$$H_{\mathrm{vib}} = \frac{1}{2\,B}\,\beta_0^2\,(\pi_0^2 + \frac{1}{2}\,\pi_2^2) + \frac{C_0}{2}\,\xi^2 + C_2\,\eta^2 - \frac{1}{16\,B\,\eta^2}\,, \tag{5.112}$$

$$H_{\mathrm{vib-rot}} = \frac{J_3^2}{16\,B\,\eta^2} - \frac{\xi}{\beta_0\,\Theta}\,(\vec{J}^2 - J_3^2) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\eta}{\beta_0\,\Theta}\,(J_1^2 + J_2^2)\,. \tag{5.113}$$

Betrachtet man zunächst nur $H_{\mathrm{rot}} + H_{\mathrm{vib}}$, so sind Rotationen und Vibrationen entkoppelt, sodass sich die Energien als Summe von Rotations- und Vibrationsenergien und die Eigenfunktionen als Produkte der Rotations- und Vibrationseigenfunktionen darstellen lassen

$$\psi^{IM}_{K\,n_0\,n_2}(\theta_j,\xi,\eta) = \sqrt{\frac{2\,I+1}{16\,\pi^2(1+\delta_{K0})}}\Big(D^{I*}_{MK}(\theta_j) + (-)^I D^{I*}_{M-K}(\theta_j)\Big)\,\phi_{n_0}(\xi)\,\chi_{K\,n_2}(\eta) \tag{5.114}$$

mit Eigenwerten

$$E_{I\,K\,n_0\,n_2} = \frac{I(I+1)-K^2}{2\Theta} + (n_0+\frac{1}{2})\,E_\beta + (\frac{K}{2}+1+2\,n_2)\,E_\gamma\,. \tag{5.115}$$

Hierbei durchlaufen die Quantenzahlen die Werte

$$K = 0,2,4,\ldots \qquad I = \begin{cases} 0,2,4,\ldots & K=0\,, \\ K, K+1, K+2,\ldots & K>0\,, \end{cases} \tag{5.116}$$

$$n_0 = 0,1,\ldots\ (\beta\text{–Vibrationen})\,, \qquad n_2 = 0,1,\ldots\ (\gamma\text{–Vibrationen})\,. \tag{5.117}$$

Ein typisches ungestörtes Spektrum ist in Abb. 5.12 dargestellt. Auf jedem Vibrationszustand

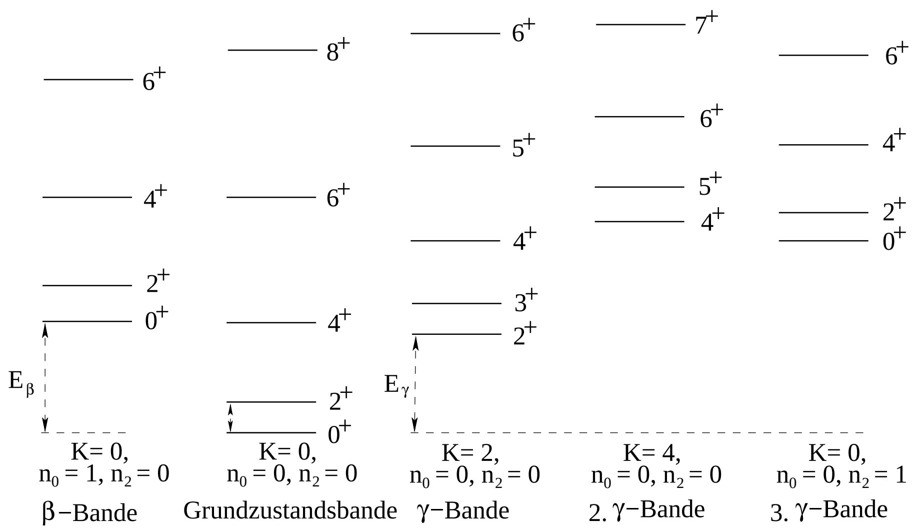

Abbildung 5.12: Ungestörtes Rotations-Vibrations-Spektrum im Fässler-Greiner-Modell.

baut sich eine Rotationsbande auf. Die verschiedenen Rotationsbanden werden durch die von $H_{\mathrm{rot-vib}}$ verursachte Kopplung gemischt. Die wesentlichen Effekte dieser Mischung sind

(a) eine Abänderung der Trägheitsmomente,

(b) die Berücksichtigung der Zentrifugalausdehnung, d.h. Absenkung der Zustände mit höherem Drehimpuls und

(c) eine starke Änderung der $E2$-Übergänge zwischen verschiedenen Banden.

Inzwischen ist das ursprüngliche Modell von Bohr und Mottelson so erweitert worde, dass man Kerne mit ganz unterschiedlichem Kollektivverhalten einheitlich beschreiben kann (Gneuss-Greiner Modell). In diesem Modell hat man einen sehr allgemeinen Ansatz für den Kollektivhamiltonoperator eingeführt, der eine Reihe von Parametern besitzt, die ans Experiment angepasst werden. Trotz der Erfolge dieser Kollektivmodelle bleiben sie letztendlich unbefriedigend, solange sie nicht auf die eigentlich zugrundeliegende Vielteilchendynamik zurückführbar sind.

6 Das Schalenmodell

Nun soll der zur Kollektivbewegung quasi konträre Einteilchenaspekt der Kernstruktur, die nahezu unabhängige Bewegung der Konstituenten, im Detail betrachtet werden. Die einfachste Realisierung stellt ein FERMIgas dar, bei dem die Nukleonen sich kräftefrei in einem Kasten bewegen. Eine etwas weniger drastisch vereinfachende Beschreibung erhält man im Schalenmodell, das Grundlage jeder mikroskopischen Beschreibung der Kernstruktur ist. Es beruht auf der Annahme unabhängiger Bewegung der Nukleonen in einem Zentralpotential, d.h. ohne miteinander in Wechselwirkung zu treten. Entsprechend setzt sich der A-Teilchen-HAMILTONoperator $H_{SM}(1,\ldots,A)$ aus A unabhängigen Einteilchenoperatoren $h(n)$ zusammen

$$H_{SM}(1,\ldots,A) = \sum_{n=1}^{A} h(n)\,, \tag{6.1}$$

mit

$$h(n) = \frac{\vec{p}_n^{\,2}}{2M} + V_{SM}(\vec{r}_n)\,. \tag{6.2}$$

Hierbei repräsentiert V_{SM} das zentrale Schalenmodellpotential.

6.1 Das Schalenmodellpotential

Zwei einfache Ansätze für V_{SM} erlauben analytische Lösungen:

(a) Kastenpotential ("square well") mit unendlich hohen Wänden

$$V_{SW}(\vec{r}\,) = \begin{cases} -V_0 & |\vec{r}\,| < R_0 \\ \infty & |\vec{r}\,| \geq R_0 \end{cases}\,. \tag{6.3}$$

R_0 charakterisiert die Ausdehnung des Kerns und V_0 die Tiefe des Potentials.

(b) Harmonisches Oszillatorpotential

$$V_{HO}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,M\omega^2\,r^2 - V_0\,. \tag{6.4}$$

Die Ausdehnung wird durch ω bestimmt und die Tiefe durch V_0.

Ein grosser Nachteil dieser beiden Potentiale besteht darin, dass sie unendlich hohe Wände besitzen und daher keine Emission von Nukleonen ins Kontinuum erlauben. Mit anderen Worten, es gibt für diese Potentiale keine Streuzustände. In dieser Hinsicht realistischer ist das WOODS-SAXON-Potential, das insbesondere im optischen Modell zur Beschreibung der Nukleon-Kern-Streuung Verwendung findet,

$$V_{WS}(\vec{r}) = -V_0\Big(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\Big)^{-1}\,. \tag{6.5}$$

Der Abfall des Potentials an der Kernoberfläche wird durch a charakterisiert ("diffuseness"). Tiefe und Ausdehnung sind wieder durch V_0 und R_0 bestimmt. Im Kerninnern kann man dieses Potential als Interpolation zwischen Kasten- und Oszillatorpotential ansehen. Ein Nachteil dieses Potentials ist, dass es keine analytischen Lösungen zulässt. Diese drei Potentiale sind in Abb. 6.1 dargestellt.

Für schematische Untersuchung und auch als Basis für die mikroskopische Beschreibung ist das Oszillatorpotential wegen seiner einfachen mathematischen Handhabung i.a. geeigneter. Zur Erinnerung seien einige Eigenschaften des Oszillatorpotentials aufgelistet:

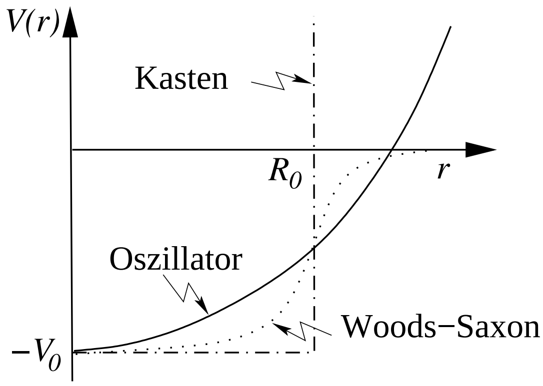

Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der einfachsten Schalenmodellpotentiale: Kasten-, Oszillator- und Woods-Saxon-Potential.

1. Das Energiespektrum ist äquidistant

$$E_N = \omega N + const. \tag{6.6}$$

   mit $\omega \approx 40A^{-\frac{1}{3}}$ MeV und der Hauptquantenzahl $N = 2(n-1)+l$. Hierbei bezeichnen l den Bahndrehimpuls und $n = 1, 2, \ldots$ die Radialquantenzahl, d.h. $n-1$ gibt die Anzahl der Knoten der Radialwellenfunktion an.

2. Die Zustände werden nach Radialquantenzahl und Bahndrehimpuls (nl) klassifiziert. Zu gegebenem N gibt es nur gerade oder ungerade Bahndrehimpulse, je nachdem N gerade oder ungerade ist (siehe Tabelle 12).

Tabelle 12: Klassifikation der Zustände des dreidimensionalen harmonischen Oszillators.

l	N=0	1	2	3	4	5
0	$1s$		$2s$		$3s$	
1		$1p$		$2p$		$3p$
2			$1d$		$2d$	
3				$1f$		$2f$
4					$1g$	
5						$1h$
$D(N)$	2	6	12	20	30	42

3. Die Gesamtentartung der Eigenzustände zur Energie E_N beträgt einschliesslich Spin

$$D(N) = (N+1)(N+2)\,. \tag{6.7}$$

   Wegen der Drehimpulsentartung wächst der Entartungsgrad der Zustände sehr schnell mit $\approx N^2$ an.

Das Spektrum ist in Abb. 6.2 zusammen mit dem Spektrum des Kastenpotentials dargestellt. Man erkennt deutlich, dass beim Kastenpotential die Drehimpulsentartung des Oszillators aufgehoben ist. Die Entartung der Zustände mit $j = l \pm 1/2$ bleibt jedoch erhalten.

Die sich bei vollständiger Besetzung der Einteilchenzustände ergebenden magischen Zahlen $2, 8, 20, 70, 112, \ldots$ sind ebenfalls angegeben. Offensichtlich werden nur die niedrigsten empirisch gefundenen magischen Zahlen 2, 8 und 20 richtig wiedergegeben. Erst nach Einführung einer Spin-Bahn-Wechselwirkung ist es möglich, auch die höheren magischen Zahlen zu reproduzieren, worauf als erste unabhängig voneinander M. GOEPPERT-MAYER und J.H.D. JENSEN hingewiesen haben.

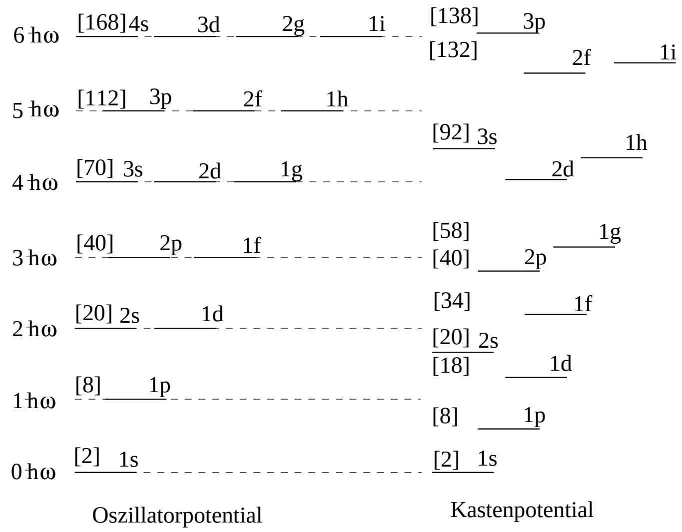

Abbildung 6.2: Einteilchenenergiespektrum im Oszillator- und Kastenpotential. Die Zahlen in eckigen Klammern geben die sich bei vollständiger Besetzung der Einteilchenzustände ergebenden magischen Zahlen an.

6.2 Die Spin-Bahn-Wechselwirkung V_{LS}

Als einfachsten Ansatz für eine Spin-Bahn-Wechselwirkung V_{LS} setzt man

$$V_{LS} = -V_{LS}^0 \vec{l} \cdot \vec{s} \tag{6.8}$$

mit einem empirischen Wert von $V_{LS}^0 \approx 20 A^{-2/3}$ MeV. Der wesentliche Effekt von V_{LS} ist, dass er die Entartung für $j = l \pm \frac{1}{2}$ aufhebt (siehe Abb. 6.3). Das kann man am einfachsten in einer Einteilchenbasis mit gutem Gesamtdrehimpuls j eines Teilchens einsehen, denn es gilt für die Diagonalelemente von $\vec{l} \cdot \vec{s}$

$$\begin{aligned} \langle nljm | \vec{l} \cdot \vec{s} | nljm \rangle &= \frac{1}{2} \langle nljm | (\vec{j}^{\,2} - \vec{l}^{\,2} - \vec{s}^{\,2}) | nljm \rangle \\ &= \pm \frac{\hbar^2}{4} (2l + 1 \mp 1) \quad \text{für} \quad j = l \pm \frac{1}{2} , \end{aligned} \tag{6.9}$$

während alle Nichtdiagonalelemente verschwinden. Damit wird die Aufspaltung ΔE_{jl} proportional zu $2l+1$, wobei der Zustand mit $j = l + \frac{1}{2}$ abgesenkt und der mit $j = l - \frac{1}{2}$ angehoben wird (im Gegensatz zur Atomhülle). Insgesamt werden die Einteilchenenergien derart umgeordnet, sodass neue Energielücken entstehen, die zu den richtigen magischen Schalen führen (siehe Abb. 6.3). Dabei muss man aber V_{LS} von Schale zu Schale etwas variieren, um Übereinstimmung mit experimentellen Daten zu erzielen.

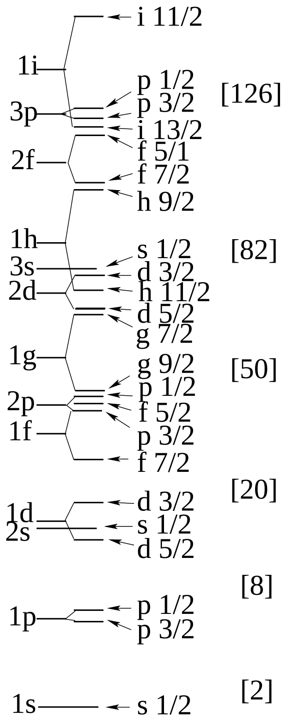

Abbildung 6.3: Einfluss der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf das Einteilchenspektrum, links ohne und rechts mit V_{LS}. Die Zahlen in eckigen Klammern bezeichnen die neuen magischen Zahlen, die sich durch die neuen Energielücken im Einteilchenspektrum ergeben.

Qualitativ kann man V_{LS} als relativistischen Effekt verstehen, der als THOMAS-Präzession des Spins eines Teilchens in einem Zentralpotential V_c analog wie in der Atomphysik zu einer Spin-Bahn-Wechselwirkung V_{LS} führt

$$V_{LS} = \frac{1}{2M^2}\,\vec{s}\cdot\vec{l}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV_c}{dr}\,. \tag{6.10}$$

Quantitativ erhält man aber etwa mit dem Oszillatorpotential eine viel zu schwache Spin-Bahn-Wechselwirkung, nämlich

$$V_{LS} = -\frac{\omega^2}{2M}\,\vec{s}\cdot\vec{l} \approx -0.8\,A^{-2/3}\vec{s}\cdot\vec{l} \tag{6.11}$$

für $\omega = 40\,A^{-1/3}$ MeV. Ein genaueres Verständnis von V_{LS} erfordert daher die Bestimmung des mittleren Zentralpotentials aus der elementaren NN-Kraft.

Zum Abschluss sei noch darauf hingewiesen, dass das Schalenmodellpotential für Protonen im Vergleich zu dem für Neutronen aufgrund der zusätzlichen COULOMBwechselwirkung für Protonen eine unterschiedliche Tiefe und ausserdem einen abstossenden COULOMBwall am Kernrand aufweist. Dabei ist zusätzlich zu beachten, dass für $N > Z$ bereits der nukleare Anteil unterschiedlich wegen der stärkeren np-Bindung im Vergleich zur nn- und pp-Bindung ist. Das führt bei Neutronenüberschuss zu einem stärkeren mittleren Kernpotential für Protonen, zu dem dann jedoch die COULOMBabstossung zu addieren ist, sodass sich insgesamt ein flacheres Zentralpotential einstellt und somit sich schematisch das in Abb. 6.4 gezeigte Bild ergibt. Die Einteilchennivaus sind dabei gleichmässig für Protonen wie Neutronen bis zur Fermi-Kante aufgefüllt.

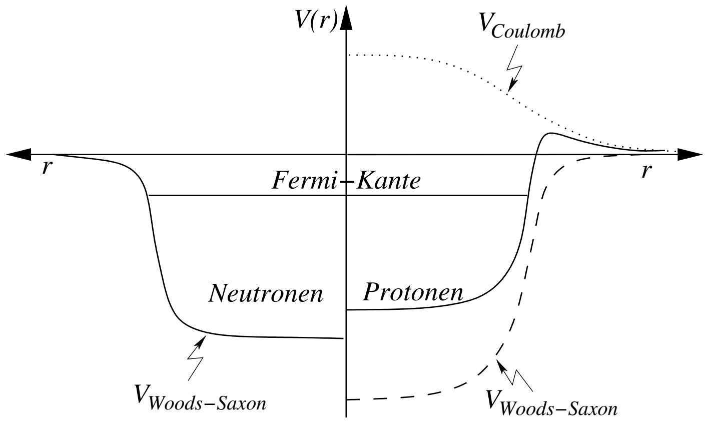

Abbildung 6.4: Schematische Darstellung des Schalenmodellpotentials für Neutronen (links) und für Protonen unter Berücksichtigung der COULOMBwechselwirkung (rechts).

6.3 Die Gesamtwellenfunktion

Die Grundzustandswellenfunktion erhält man durch sukzessives Auffüllen der Neutronen- und Protonenzustände unter Beachtung des Pauli-Prinzips bis zur gemeinsamen Fermikante. Sei mit ϕ_α ($\alpha = (nljm_jm_\tau)$ mit m_t als Isospinprojektion) ein Einteilchenzustand bezeichnet, so erhält man einen total antisymmetrischen Gesamtzustand, in dem die Einteilchenzustände $(\alpha_1, \ldots, \alpha_A)$ besetzt sind, durch Bildung der SLATER-Determinante

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_A) &= \mathcal{A} \prod_{i=1}^{A} \phi_{\alpha_i}(i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_{\alpha_1}(1) & \cdots & \phi_{\alpha_1}(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{\alpha_A}(1) & \cdots & \phi_{\alpha_A}(A) \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Mit $\mathcal{A}$ ist der Operator der totalen Antisymmetrisierung bezeichnet. Dieser Zustand ist jedoch i.a. nicht eindeutig, wenn der letzte Einteilchenzustand nicht vollständig gefüllt ist, d.h. wenn nicht alle Projektionen m_j von $\phi_{nljm_jm_\tau}$ besetzt sind. Das liegt an der Drehimpulsentartung, aufgrund derer man die Teilchen im nur teilweise gefüllten Einteilchenzustand in verschiedener Weise auf die verschiedenen Zustände mit Drehimpulsprojektion m_j verteilen kann. Lediglich bei vollbesetztem Zustand ist die Besetzung eindeutig und dann ist der Gesamtdrehimpuls Null. Dies sieht man wie folgt: Sei Ψ_j die total antisymmetrische Wellenfunktion einer vollbesetzten j-Schale, die aus den Einteilchenwellenfunktionen ϕ_{jm} gebildet wird

$$\Psi_j(1, \ldots, 2j+1) = \frac{1}{\sqrt{(2j+1)!}} \begin{vmatrix} \phi_{j,-j}(1) & \cdots & \phi_{j,-j}(2j+1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{j,j}(1) & \cdots & \phi_{j,j}(2j+1) \end{vmatrix} , \tag{6.13}$$

so gilt offensichtlich

$$J_z\Psi_j = \sum_{i=1}^{2j+1} J_z(i)\Psi_j = \left(\sum_{m=-j}^{j} m \right) \Psi_j = 0 , \tag{6.14}$$

$$J_\pm\Psi_j = \sum_{i=1}^{2j+1} J_\pm(i)\Psi_j = 0 , \tag{6.15}$$

wobei letztere Relation sich daraus ergibt, dass $J_\pm(i)$ den Zustand des i-ten Teilchens in einen bereits besetzten Zustand umwandelt. Wegen der Darstellung

$$\vec{J}^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \tag{6.16}$$

folgt somit $\vec{J}^2\,\Psi_j = 0$.

Bei nichtabgeschlossenen Schalen liefert das Schalenmodell keine Kopplungsvorschrift für den Grundzustandsspin. Betrachtet man etwa eine Konfiguration $(nlj)^k$, d.h. k gleichartige Nukleonen befinden sich in einer j-Schale ψ_{nlj}, so erhält man je nach Anzahl k verschiedene Kopplungsmöglichkeiten. Als Beispiel seien die Fälle $k = 2$ und 3 betrachtet:

1. $k = 2$ und $j > \frac{1}{2}$:

$$|j^2, IM\rangle_{(1,2)} \quad = \quad \mathcal{A}\,[\psi_{nl}^{[j]}(1) \times \psi_{nl}^{[j]}(2)]_M^{[I]}\,. \tag{6.17}$$

   Wegen der Antisymmetrisierung treten nur gerade Drehimpulse $I = 0, 2, \ldots, 2j-1$ auf.

2. $k = 3$ und $j > \frac{3}{2}$: Hier kann man zunächst das dritte Teilchen mit dem Zweiteilchenzustand $|j^2, I'M\rangle_{(1,2)}$ mit Drehimpuls I' zum Gesamtdrehimpuls I koppeln

$$|j^2(I')j, IM\rangle_{(1,2,3)} \quad = \quad [\psi^{[I']}(1,2) \times \psi_{nl}^{[j]}(3)]_M^{[I]}\,. \tag{6.18}$$

   Die total antisymmetrische Wellenfunktion mit Drehimpuls I, mit $|\}j^3, IM\rangle$ bezeichnet, muss sich nach den Zuständen $|j^2(I')j, IM\rangle$ mit $I' = 0, \ldots 2j$ entwickeln lassen:

$$|\}j^3, IM\rangle = \sum_{I'} F_{I'}\,|j^2(I')j, IM\rangle\,. \tag{6.19}$$

   Die Koeffizienten $F_{I'} = \langle j^2(I')jI|\}j^3I\rangle$ werden mit "coefficients of fractional parentage" (cfp) bezeichnet.

Mit zunehmender Teilchenzahl wächst die Anzahl der möglichen Zustände und damit der Entartungsgrad zunächst rapide an (siehe Tabelle 6.3) bis der Einteilchenzustand zur Hälfte gefüllt ist. Bei weiterer Besetzung nimmt der Entartungsgrad dann wieder ab, da ein Mehrteilchenzustand mit k unbesetzten Zuständen eines Einteilchenzustands sich genauso verhält wie ein mit k Teilchen besetzter Zustand. In Tabelle 6.3 sind die auftretenden Gesamtspins I für $j = 3/2, \ldots, 9/2$ und Teilchenzahlen $k = 1, \ldots, (2j+1)/2$ aufgeführt einschliesslich Entartungsgrad. Höhere Teilchenzahlen braucht man nicht zu betrachten, da sich die gleichen Spins für $((2j+1) - k)$ Teilchen wie für k Teilchen in einer Schale ergeben.

Da das Schalenmodell keine Aussage über den tatsächlichen Grundzustandsspin, falls Entartung vorliegt, machen kann – die Entartung wird natürlich durch die Restwechselwirkung aufgehoben –, hat man folgende empirische Regeln für den Grundzustandsspin aufgestellt:

1. Bei gg-Kernen ist $I = 0$.

2. Bei ug-Kernen ist $I = j$, wenn das ungepaarte Nukleon im Einteilchenzustand $|j\rangle$ ist. Offensichtlich koppeln sich Paare von gleichen Nukleonen in einer Schale zum Gesamtdrehimpuls Null. Lediglich bei leichten Kernen findet man auch $I = j - 1$.

Weit ab von abgeschlossenen Schalen, also in Gebieten mit deformierten Kernen, versagen diese Regeln. Dort muss man ein nichtsphärisches, d.h. deformiertes mittleres Potential verwenden, das sogenannte NILSSON-Modell.

Tabelle 13: Mögliche Zustände mit Gesamtspin I für verschiedene Konfigurationen $(j)^k$ mit $1 < k \leq (2j+1)/2$. Der Entartungsgrad ist in Klammern angegeben.

k	$j=\frac{3}{2}$	$j=\frac{5}{2}$	$j=\frac{7}{2}$	$j=\frac{9}{2}$
2	$0,2$	$0,2,4$	$0,2,4,6$	$0,2,4,6,8$
3		$\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2},\frac{15}{2}$	$\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}(2),\frac{11}{2},\frac{15}{2},\frac{17}{2},\frac{21}{2}$
4			$0,2(2),4(2),5,6,8$	$0(2),2(2),3,4,(3),5,6(3),7,8,9,10,12$
5				$\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}(2),\frac{7}{2}(2),\frac{9}{2}(3),\frac{11}{2}(2),\frac{13}{2}(2)$ $\frac{15}{2}(2),\frac{17}{2}(2),\frac{19}{2},\frac{21}{2},\frac{25}{2}$

6.4 Multipolmomente und WEISSKOPF-Abschätzung

Wichtige Hinweise auf das Schalenmodell hat man aus systematischen Untersuchungen von Kernmomenten (magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolmomente) gewonnen. Zur Illustration wollen wir das sphärische Schalenmodell für einen ug-Kern betrachten unter der extrem vereinfachenden Annahme, dass sich die Drehimpulse der Nukleonen in der äussersten, nicht voll besetzten Schale paarweise zu Null koppeln, sodass der Gesamtspin des Kerns allein durch den Spin j des einzigen ungepaarten Nukleons gebildet wird. In anderen Worten, es wird angenommen, dass der ug-Kern aus einem inertem Rumpf mit Spin Null und einem Leuchtnukleon in einem Schalenmodellzustand mit Drehimpuls j und Bahndrehimpuls l besteht. Der magnetische Dipoloperator, der nur einen Beitrag des ungepaarten Nukleons erhält, lautet

$$\vec{\mu} = \mu_B \sum_i \left(g_l(i)\vec{l} + g_s(i)\vec{s} \right) \tag{6.20}$$

mit dem BOHRschen Magneton $\mu_B = \frac{e}{2M}$ und

$$g_l = \frac{1}{2}(1+\tau_3)\,, \tag{6.21}$$

$$g_s = \frac{1}{2}(1+\tau_3)\,g_p + \frac{1}{2}(1-\tau_3)\,g_n \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{lcr} g_p & = & 5.59\,, \\ g_n & = & -3.83\,. \end{array} \right. \tag{6.22}$$

Das magnetische Moment ist als Erwartungswert von $\vec{\mu}$ im Zustand der maximalen Projektion $m = j$ definiert

$$\begin{aligned} \mu_j &= \langle n\,l\,j\,j|\,\mu_z|n\,l\,j\,j\rangle \\ &= \mu_B \left\{ \begin{array}{ll} (j-\frac{1}{2})\,g_l + \frac{1}{2}\,g_s\,, & j = l+\frac{1}{2}\,, \\ \frac{j}{j+1}((j+\frac{3}{2})\,g_l - \frac{1}{2}\,g_s)\,, & j = l-\frac{1}{2}\,. \end{array} \right. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Die graphische Darstellung von μ_j als Funktion von j für ug-Kerne mit ungepaartem Neutron oder ungepaartem Proton liefert die bekannten SCHMIDT-Linien. Im Idealfall müssten die experimentellen Werte auf diesen Linien liegen. Bis auf wenige Ausnahmen liegen sie aber innerhalb der durch $\mu_p = 2.89$ und $\mu_p = 1$ bei ungepaartem Proton bzw. $\mu_n = -1.93$ und $\mu_n = 0$ bei ungepaartem Neutron abgegrenzten Bereiche (siehe Abb. 6.5). Diese Unterdrückung ("quenching") der magnetischen Momente führt man auf Konfigurationsmischungen und mesonische Austauschströme zurück.

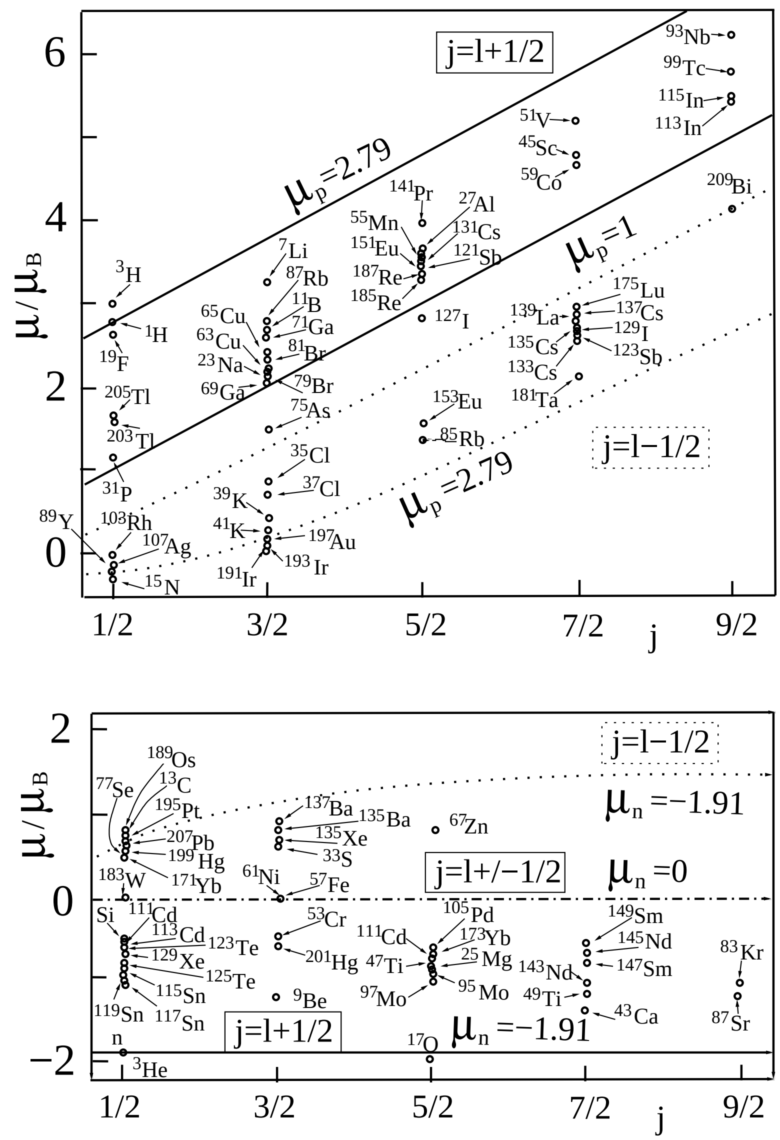

Abbildung 6.5: Magnetische Momente und Schmidt-Linien für Kerne mit ungepaartem Proton (oben) und ungepaartem Neutron (unten).

Als nächstes sollen die statische Quadrupolmomente betrachtet werden, die ebenfalls interessante Aussagen über die Kerndynamik liefern. Ebenso wie das magnetische Moment ist das elektrische Quadrupolmoment als Erwartungswert im Zustand der maximalen Spinprojektion definiert. Legt man wieder das extreme Einteilchenmodell mit einem ungepaarten Nukleon im Zustand (lj) zugrunde, so findet man

$$
\begin{aligned}
Q_0(j) &= e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\,\langle l\,j\,j|\,r^2\,Y_{20}|l\,j\,j\rangle \\
&= \begin{cases} -e\,\frac{2j-1}{2j+2}\,<r^2> & \text{für Proton}\,, \\ \qquad 0 & \text{für Neutron}\,. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Die experimentellen Werte weichen jedoch erheblich von dieser Abschätzung ab, und zwar in positiver Richtung. Besonders in der Mitte zwischen abgeschlossenen Schalen sind die Abwei-

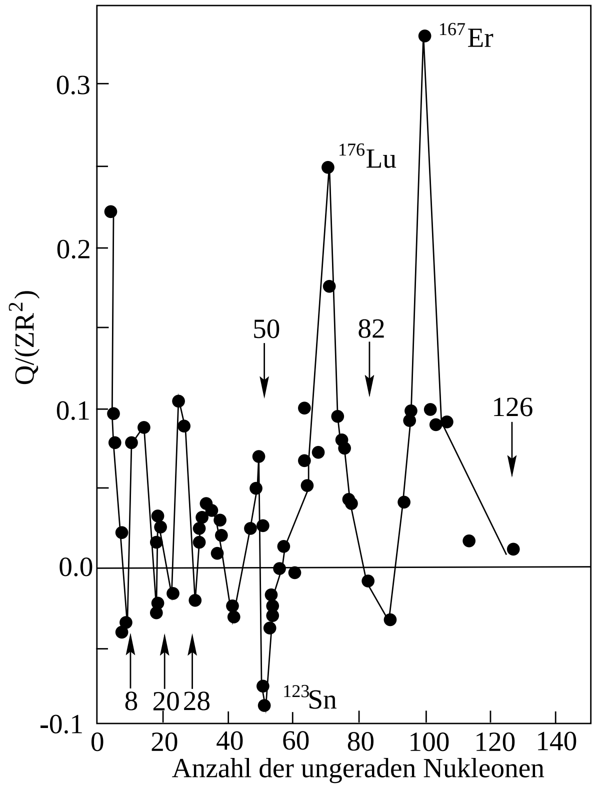

Abbildung 6.6: Quadrupolmomente von Kernen mit ungepaartem Nukleon.

chungen sehr ausgeprägt (siehe Abb. 6.6). In diesen Bereichen befinden sich stark deformierte Kerne, die relativ grosse Quadrupolmomente aufweisen.

Für die elektromagnetische Übergänge liefert die WEISSKOPF-Abschätzung eine wichtige Einheit zur Charakterisierung der Übergangsstärken beliebiger Multipolübergänge. Sie basiert wiederum auf dem reinen Einteilchenmodell. Als Übergangsstärke wählt man die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit, die für einen Multipolübergang λL mit $\lambda = E$ (elektrisch) und $\lambda = M$ (magnetisch) durch

$$B(\lambda L; I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i + 1} \left| < I_f \| \, \Omega_L^{(\lambda)} \| I_i > \right|^2 \quad . \tag{6.25}$$

definiert ist. Die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit ist dann durch

$$P_{if}(\lambda L) = \frac{8\pi(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} (E_\gamma)^{2L+1} B(\lambda L; I_i \to I_f) \tag{6.26}$$

gegeben. Setzt man als stark vereinfachende Annahme die Radialwellenfunktion im Kerninnern als konstant an,

$$R(r) = \left\{ \begin{array}{ll} c\,, & r \le R_0 \\ 0\,, & r > R_0 \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad c = \frac{3}{R_0^{3/2}}\,, \tag{6.27}$$

so ergeben sich als WEISSKOPF-Abschätzung die sogenannten WEISSKOPF-Einheiten für elektromagnetische Kernübergänge

$$B_W(EL) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 \left(r_0 A^{\frac{1}{3}} \right)^{2L} \left[\mathrm{e}^2 \mathrm{fm}^{2L} \right] , \tag{6.28}$$

$$B_W(ML) = \frac{1}{4\pi} \left(g_s - \frac{2}{L+1} g_l \right)^2 L^2 \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 \left(r_0 A^{\frac{1}{3}} \right)^{2L-2} \left[\mu_B^2 \mathrm{fm}^{2L-2} \right] . \tag{6.29}$$

Multipolübergänge, die wesentlich stärker als die WEISSKOPF-Einheit sind, werden als Kollektivübergänge eingestuft, da man sich diese als kohärente Überlagerung verschiedener Einteilchenübergänge vorstellt.

6.5 Das Schalenmodell für ein deformiertes Potential (NILSSON-Modell)

Die Existenz von deformierten Kernen führt zwangsläufig zu der Annahme, dass für diese Kerne auch das Schalenmodellpotential deformiert ist, d.h. dass die Äquipotentialflächen nicht mehr sphärisch sondern deformiert sind, im einfachsten Fall axialsymmetrisch. Dementsprechend hat S.G. NILSSON folgenden Einteilchen-HAMILTONoperator vorgeschlagen

$$h = h_0 + C\,\vec{l}\cdot\vec{s} + D\,\vec{l}^{\,2} \tag{6.30}$$

mit

$$h_0 = \frac{\vec{p}'^2}{2M} + \frac{M}{2}\left(\omega_\perp^2\,(x'^2 + y'^2) + \omega_\parallel^2\,z'^2\right), \tag{6.31}$$

wobei Koordinaten und Impulse sich auf das intrinsische System mit der z'-Achse als Symmetrieachse beziehen. Es stellt den HAMILTONoperator eines anisotropen, axialsymmetrisch deformierten Oszillators dar. Zusätzlich enthält er eine Spin-Bahn-Wechselwirkung und einen $\vec{l}^{\,2}$-Term. Letzterer dient dazu, die Zustände mit höherem Bahndrehimpuls abzusenken, um ein mehr kastenförmiges Potential zu simulieren. Die Anisotropie wird durch einen Deformationsparameters δ beschrieben, der die Frequenzen parametrisiert und wie folgt definiert ist

$$\omega_\perp^2 = \omega^2\,(1 + \frac{2}{3}\,\delta) \quad \text{und} \quad \omega_\parallel^2 = \omega^2\,(1 - \frac{4}{3}\,\delta)\,. \tag{6.32}$$

Zusätzlich wird noch die Volumenkonstanz innerhalb einer Potentialenergiefläche gefordert. Das führt zur Bedingung

$$\omega_\perp^2\,\omega_\parallel = \omega_0^3 \tag{6.33}$$

Mit ω_0^3 als Frequenz eines sphärischen Oszillators. Daraus ergibt sich, dass die Frequenz ω in (6.32) selbst noch vom Deformationsparameter δ abhängt, und zwar folgt bis zur quadratischen Ordnung in δ

$$\omega = \omega_0\,(1 - \frac{4}{3}\,\delta^2 - \frac{16}{27}\,\delta^3)^{\frac{1}{6}} \approx \omega_0\,(1 + \frac{2}{9}\,\delta^2)\,. \tag{6.34}$$

Die Konstanten C und D in (6.30) sind so gewählt, dass für $\delta = 0$ die sphärischen Schalenmodellzustände reproduziert werden. Die Eigenzustände von h sind jedoch nicht mehr analytisch bestimmbar. Man diagonalisiert vielmehr h im Raum der Eigenzustände des isotropen Oszillators

$$\bar{h}_0 = \frac{\vec{p}'^{\,2}}{2M} + \frac{M}{2}\omega^2 r'^{\,2}\,. \tag{6.35}$$

Dann lässt sich h wie folgt darstellen

$$h = \bar{h}_0 + h_\delta + C\,\vec{l}\cdot\vec{s} + D\,\vec{l}^{\,2} \tag{6.36}$$

mit

$$h_\delta = -\frac{2}{3}M\,\omega^2\,\delta\,r'^{\,2}\,P_2(\cos\theta)\,. \tag{6.37}$$

Wegen h_δ sind l und j keine guten Quantenzahlen mehr, wohl aber die Projektion des Drehimpulses $\Omega = m_l + m_s$ auf die z'-Achse sowie die Parität. Bezüglich der Basiszustände von

$\bar{h}_0$ gelten folgende Auswahlregeln für die Matrixelemente von h_δ, $\vec{l}\cdot\vec{s}$ und $\vec{l}^{\,2}$,

$$\langle N'l'm_l'm_s'|h_\delta|Nlm_lm_s\rangle \neq 0 \quad \text{höchstens für} \begin{cases} N' &= N, N\pm 2 \\ l' &= l, l\pm 2 \\ m_{l/s}' &= m_{l/s} \end{cases} \tag{6.38}$$

$$\langle N'l'm_l'm_s'|\vec{l}\cdot\vec{s}|Nlm_lm_s\rangle \neq 0 \quad \text{höchstens für} \begin{cases} N' = N \quad l' = l \\ m_l' + m_s' = m_l + m_s \end{cases} \tag{6.39}$$

$$\langle N'l'm_l'm_s'|\vec{l}^2|Nlm_lm_s\rangle \neq 0 \quad \text{höchstens für} \begin{cases} N' = N \quad l' = l \\ m_{l/s}' = m_{l/s} \end{cases} \tag{6.40}$$

Das bedeutet, dass nur h_δ verschiedene Schalen miteinander koppelt. Da für $|\Delta N| = 2$ die ungestörte Energiedifferenz im Vergleich zu den Matrixelementen von h_δ gross ist, diagonalisiert man nur innerhalb einer Schale im Unterraum $(N\Omega)$. Das resultierende Einteilchenspektrum als Funktion des Deformationsparameters δ, das sogenannte Nilsson-Diagramm, ist in Abb. 6.7 dargestellt. Zur Klassifizierung der Zustände werden neben Ω, π und N noch

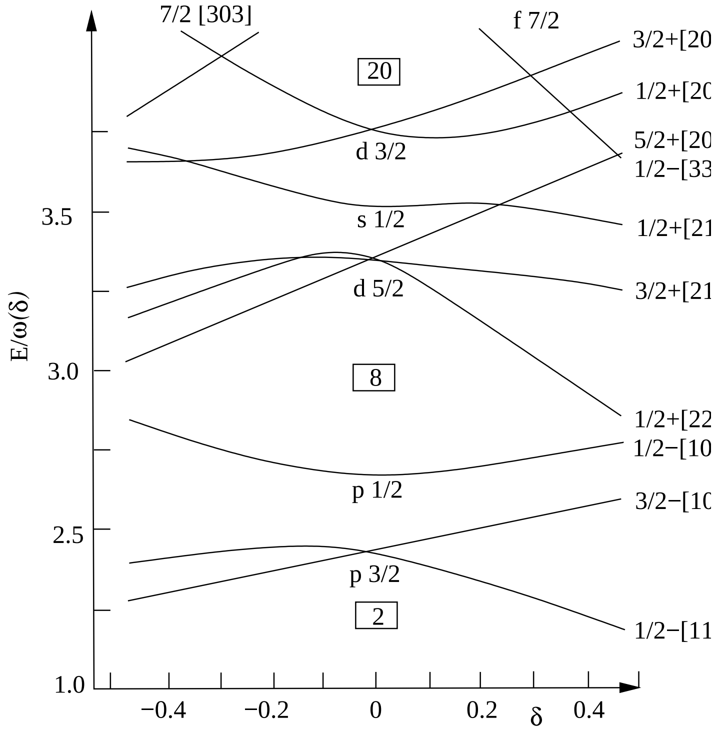

Abbildung 6.7: Einteilchenspektrum (Nilsson-Diagramm) des Nilsson-Modells als Funktion des Deformationsparameters δ.

die asymptotischen Quantenzahlen des anisotropen Oszillators n_z und Λ (Bahndrehimpulskomponente bezüglich der z'-Achse) verwendet: $\Omega\pi[Nn_z\Lambda]$.

6.6 Das vereinheitlichte Modell ("unified model")

Das im vorigen Abschnitt betrachtete deformierte Potential zeigt nun den Weg auf, wie die beiden scheinbar gegensätzlichen Aspekte der Kernstruktur – korrelierte Kollektivbewegung und unabhängige Einteilchenbewegung – im vereinheitlichten Modell vereinigt werden werden können. Die Grundidee ist, dass das Schalenmodell durch die gemeinsame und daher kollektive

Bewegung aller Nukleonen im Kern erzeugt wird. Somit wird das Schalenmodellpotential Träger der Kollektivdynamik. Diese Vorstellung basiert auf der kurzreichweitigen Natur der Kernkräfte und deren Sättigung, sodass die Stärke des mittleren Potentials näherungsweise proportional zur Nukleonendichte anzusetzen ist. Dadurch wird auch quasi auf natürliche Weise eine Kopplung von Kollektiv- und Einteilchenfreiheitsgraden erzeugt. Der gesamte HAMILTONoperator hat dann die Form

$$H = H_{coll} + H_{sp} + H_{coll-sp}\,, \tag{6.41}$$

wobei H_{coll} die unabhängige Kollektivbewegung beschreibt. Der HAMILTONoperator der Einteilchenbewegungen enthält über eine Abhängigkeit des Schalenmodellpotentials von den Kollektivvariablen zusätzlich die Ankopplung an die Kollektivbewegung

$$H_{sp} + H_{coll-sp} = \sum_i \left(T_i + V_i(\vec{r}, \alpha)\right)\,. \tag{6.42}$$

Hierbei ist $\{\alpha\}$ ein geeigneter Satz von Kollektivvariablen. Bei diesem Ansatz hat man bereits eine Adiabasieannahme gemacht, nämlich, dass die Kollektivbewegung im Vergleich zur Einteilchenbewegung langsam verläuft. Sie spiegelt sich in der Abwesenheit von $\dot{\alpha}$-Termen im Potential wider.

Als Beispiel wird die Quadrupoldeformation einer Äquipotentialfläche betrachtet

$$V(\vec{r}, \alpha_{2\mu}) = V_0\Big(\frac{r}{1 + \sum_\mu \alpha^*_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \phi)}\Big)\,. \tag{6.43}$$

Man unterscheidet zwischen starker und schwacher Kopplung, je nachdem, ob eine deformierte oder sphärische Ruhelage vorliegt. Liegt die schwache Kopplung vor, so entwickelt man um die sphärische Ruhelage

$$V(\vec{r}, \alpha_{2\mu}) = V_0(r) - \frac{\partial V_0}{\partial r} r \sum_\mu \alpha^*_{2\mu} Y_{2\mu} + \ldots \tag{6.44}$$

Im anderen Fall der starken Kopplung führt man zunächst Rotationsfreiheitsgrade durch Übergang in ein intrinsisches Hauptachsensystem ein und entwickelt dann um die deformierte Ruhelage. Ein Problem dieses vereinheitlichten Modells ist, dass zuviele, d.h. überzählige Freiheitsgrade vorhanden sind. Dies Problem taucht bereits im einfachen sphärischen Schalenmodell auf, das spuriose Schwerpunktbewegungen enthält, die man entweder herausprojizieren oder durch zusätzliche Nebenbedingungen eliminieren muss. Das wird noch in einem späteren Kapitel ausführlicher behandelt werden.