

Skript zur Vorlesung

Strömungsakustik I

Technische Universität Berlin

(WS 02/03)

Klaus Ehrenfried

4. November 2003

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Beispiele aus dem Bereich der Strömungsakustik	5
1.2. Allgemeine Eigenschaften von Schall	7
1.3. Quantitative Beschreibung von Schall	9
1.4. Darstellung mit komplexen Zahlen	11
1.5. Mathematisches Hilfsmittel: δ -Funktion	16
1.6. Spektrale Zerlegung	25
2. Die Wellengleichung der linearen Akustik	29
2.1. Herleitung der Wellengleichung	29
2.2. Einfache Lösungen	33
2.3. Die Schallgeschwindigkeit	37
2.4. Einfluß der Schwerkraft	39
3. Ebene Wellen	42
3.1. Eindimensionale Schallwellen im Rohr	42
3.2. Energie in ebenen Wellen	48
3.3. Stehende Welle und Resonanz	58
3.4. Komplexe Wandimpedanz	62
3.5. Reflexion und Transmission an Mediengrenzen	69
3.6. Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit	72
4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen	81
4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden	81
4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	91
4.3. Schallausbreitung bei Strömung	95
4.4. Kanal mit schallweichen Wänden	105
5. Einfache dreidimensionale Schallfelder	109
5.1. Das Geschwindigkeitspotential	109
5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel	113
5.3. Kausalität und Sommerfeld's Ausstrahlbedingung	121
5.4. Energie und Intensität	124
5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel	129

Inhaltsverzeichnis

6. Schallquellen	143
6.1. Monopol	143
6.2. Kontinuierliche Quellverteilung	152
6.3. Schallquellen durch Störung	157
6.4. Dipol und Quadrupol	166
6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation	171
6.6. Zweidimensionale Schallquellen	184
7. Schallerzeugung durch Strömungen	198
7.1. Lighthills akustische Analogie	198
7.2. Freistrahllärm	207
7.3. Wirbelschall	214
A. Mathematische Hilfsmittel	220
A.1. Fourier-Analyse	220
A.2. Divergenz- und Laplace-Operator	223
A.3. Rechenregel mit δ -Funktion	225
B. Herleitungen	228
B.1. Zur Wellenausbreitung in Strömungskanälen	228
B.2. Zum Erhaltungssatz der akustischen Energie	231
B.3. Inhomogene Wellengleichung mit Ableitung im Quellterm	232
Sachverzeichnis	236

1. Einleitung

1.1. Beispiele aus dem Bereich der Strömungsakustik

In vielen Bereichen des täglichen Lebens finden sich Anwendungen der Strömungsakustik. Um einen Eindruck zu geben, wie umfassend das gesamte Gebiet ist, werden hier einige Beispiele für strömungsakustische Phänomene aufgelistet. Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit:

- Fluglärm (Triebwerke, Überschallknall)
- Straßenlärm (Schall durch Umströmung der Fahrzeuge, Auspuffgeräusche)
- Eisenbahn (Umströmungslärm, Druckwellen im Tunnel)
- Musikinstrumente (Blasinstrumente, Orgelpfeifen)
- Blutkreislauf (Pulsschlag)
- Gebläselärm (Staubsauger, Föhn)
- Schall durch Umströmung von Gebäuden (“Der Wind pfeift”)
- Durch Schall erzeugte Strömungen (z.B.: Wirbelkanone)
- Rijke-Rohr (thermo-akustische Instabilität)

Die Akustik ist die Wissenschaft des Schalls einschließlich seiner Erzeugung, Ausbreitung und Auswirkung. Die Strömungsakustik beschäftigt sich dabei besonders mit den ersten beiden Punkten. Das Fachgebiet könnte man entsprechend in zwei Bereiche unterteilen:

- Schallerzeugung durch Strömung
- Schallausbreitung in strömenden Medien

Die Abbildung 1.1 soll einen Eindruck über den gesamten Umfang der Akustik und ihre Verknüpfung mit den angrenzenden Disziplinen geben. Wie die obige Liste zeigt, können strömungsakustische Phänomene in allen Bereichen gefunden werden.

Im Prinzip kann die gesamte Akustik in Fluiden als Spezialfall der Strömungsmechanik beziehungsweise Gasdynamik angesehen werden. Die strömungsmechanischen

1. Einleitung

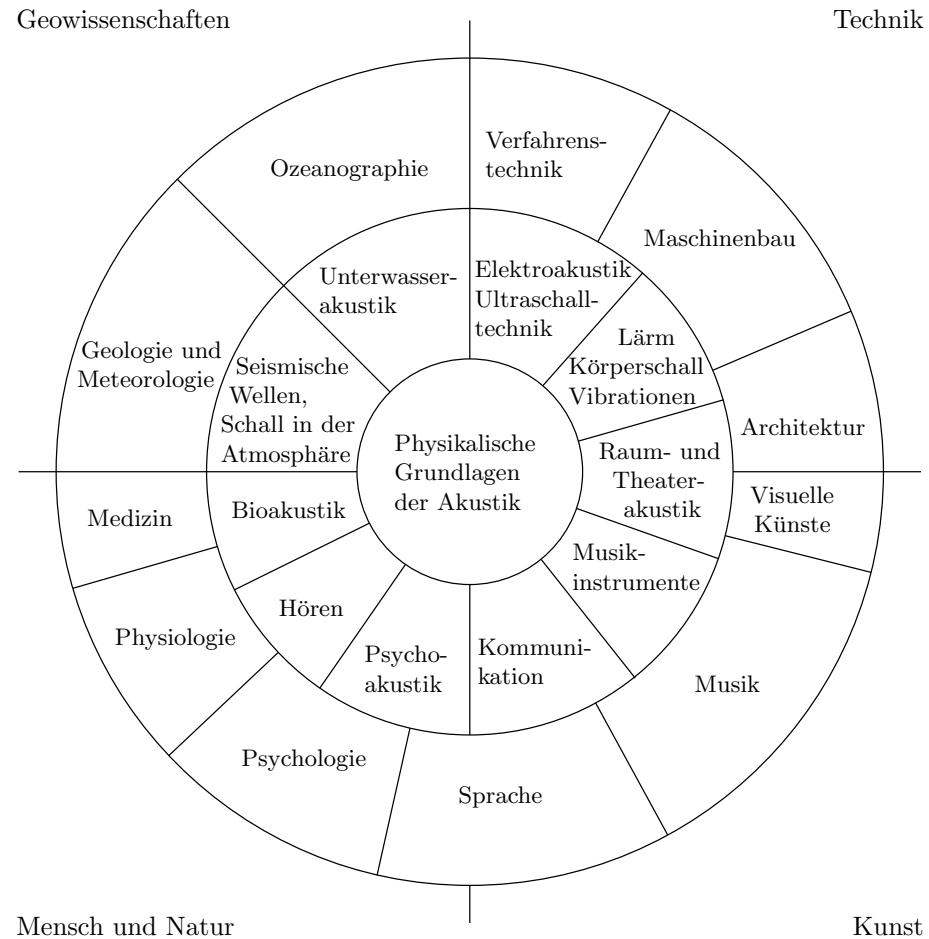


Abbildung 1.1.: Grafik zur Illustration des Umfangs und der Verzweigung der Akustik
[Frei übertragen aus: R.B. Lindsay, J. Acoust. Soc. Am., Nummer 36, Seite 2242 (1964)]

Grundgleichungen beschreiben alle Vorgänge. Jedoch ist in der Akustik die Herangehensweise an viele Probleme eine ganz Andere als in der Strömungsmechanik. Es bereitet erfahrenen Strömungsmechanikern häufig unerwartete Schwierigkeiten, wenn sie beginnen, sich mit akustischen Fragestellungen auseinanderzusetzen.

Die Akustik und die Strömungsmechanik sind eigenständige Fachgebiete, die in der Strömungsakustik zusammentreffen. Dabei stößt man auch auf das Problem, daß sich teilweise für gleiche Dinge unterschiedliche Bezeichnungen und Ausdrucksweisen etabliert haben. Zum Beispiel ist für den Strömungsmechaniker die Luft ein strömendes

1.2. Allgemeine Eigenschaften von Schall

“Fluid”, wogegen der Akustiker die Luft als ein “Medium” ansieht, in dem sich Wellen ausbreiten. Die Begriffe “Fluid” und “Medium” sind prinzipiell in dem vorliegenden Text überall austauschbar. Welcher der beiden Ausdrücke verwendet wird richtet sich danach, ob ein strömungsmechanischer oder ein akustischer Zusammenhang betont werden soll. Es wird generell versucht, die typischen Begriffe aus beiden Fachgebieten, wie zum Beispiel “Newtonsches Fluid” oder “mitschwingende Mediummasse”, zu verwenden.

Eine strikte Aufteilung der Akustik in reine Strömungsakustik und die restlichen Gebiete ist wenig sinnvoll. In der Vorlesung werden einige allgemeine Grundlagen der Akustik vorgestellt, bevor die wichtigsten Gleichungen aus dem Spezialgebiet der Strömungsakustik behandelt werden. Die Betrachtung der Akustik erfolgt aus der Sicht der Strömungsmechanik.

1.2. Allgemeine Eigenschaften von Schall

Historische Entwicklung der Akustik

Bereits in der Antike wurde der Wellencharakter des Schalls vermutet. Zum Beispiel wurde von dem griechischen Philosoph Crysippus (ca. 240 v.C.) und dem römischen Architekten und Ingenieur Vetruius (ca. 25 v.C.) die Analogie zwischen den Wellen auf einer Wasseroberfläche und der Schallausbreitung erkannt. So wurde eine Welle als “oszillatorische Störung, die sich von der Quelle weg bewegt ohne Material über große Entfernungen zu transportieren” beschrieben. Erstaunlicherweise war zum Bau der antiken Theater mit hervorragenden akustischen Eigenschaften weder die Kenntnis der Wellengleichung noch das Wissen um Schalldruck und dergleichen notwendig.

Die Entwicklung der modernen Akustik begann am Anfang des 17. Jahrhunderts. Es konnte experimentell nachgewiesen werden, daß ein vibrierender Körper, der einen Ton abstrahlt, die umliegende Luft zu einer oszillatorischen Bewegung der gleichen Frequenz anregt. Besonders hervorzuheben sind die Arbeiten des französischen Naturforschers Marin Mersenne (1588 - 1648) und von Galileo Galilei (1564 - 1642). So beschrieb Mersenne in seiner Arbeit “Harmonie universelle” (1636) die erste absolute Bestimmung der Frequenz eines hörbaren Tones (84 Hz). Durch das klassische Experiment von Robert Boyle (1660) mit einer tickenden Uhr in einem teilweise evakuierten Glasbehälter konnte bewiesen werden, daß die Luft entweder zur Ausbreitung oder zur Erzeugung des Schalls notwendig ist.

Die mathematische Theorie der Schallausbreitung begann mit Isaac Newtons (1642 - 1727) Arbeit “Principia” (1686). Allerdings ist von Newtons Forschungen auf dem Gebiet der Akustik heute vor allem seine falsche Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Luft bekannt. Newton machte den Fehler, die Zustandsänderung in Schallwellen als isotherm anstatt isentrop (adiabat) anzunehmen. Er erhielt so eine Schallgeschwindigkeit von 290 m/s, die deutlich von dem gemessenen Wert abwich. Erst Laplace berechnete 1816 die Schallgeschwindigkeit unter der Annahme isentroper Zustandsänderung und erhielt eine Lösung, die mit den Experimenten in Einklang stand. Die theoretische Beschreibung der Wellenausbreitung wurde später von Euler (1707 - 1783), Lagrange

1. Einleitung

(1736 - 1813) und d'Alembert (1717 - 1783) weiterentwickelt.

Definition von Schall

Folgende Punkte sind charakteristisch für Schall:

1. Schall breitet sich als Welle aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt zum Beispiel in Luft unter Normalbedingungen 340 m/s und in Wasser 1450 m/s.
2. Schallwellen bewegen das Fluid (Medium) um einen mittleren Zustand.
3. Schallwellen können Informationen transportieren.
4. Schallwellen transportieren Energie.
5. Schwankungen der Zustandsgrößen (z.B. Druck, Dichte,..) durch Schall sind fast immer relativ klein.

Mit den genannten Punkten ist eine Definition von Schall möglich. In der Praxis kann jedoch die Unterscheidung zwischen Schall und Strömung relativ schwierig werden. Dies wird am Beispiel eines umströmten Zylinders, hinter dem sich eine Wirbelstraße ausbildet verdeutlicht. Bei diesem Vorgang wird auch Schall erzeugt, der sich in alle Richtungen ausbreitet. Der Schall ist als Druckschwankung mit einem Mikrofon nachweisbar. Jedoch treten in dem Strömungsfeld auch Druckschwankungen auf, die nichts mit Schall zu tun haben. Zum Beispiel registriert ein Beobachter, der sich in der Bahn der Wirbel befindet (siehe Abbildung 1.2), eine Druckabsenkung, wenn ein Wirbel vorbeischwimmt. Diese lokal gemessene Druckschwankung kann ohne zusätzliche Information über das restliche Strömungsfeld nicht von Schall unterschieden werden.

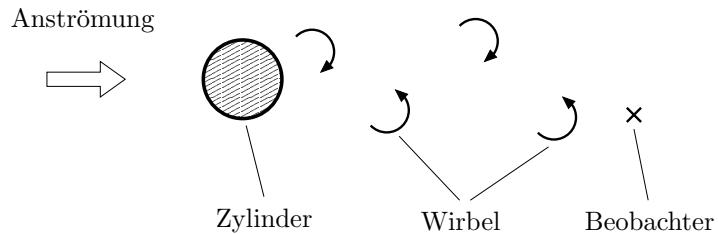


Abbildung 1.2.: Beobachter im Strömungsfeld hinter einem Kreiszylinder

Die Wirbel in diesem Beispiel erfüllen übrigens einige der für Schall charakteristischen Eigenschaften. Sie bewegen das Medium nur um einen mittleren Zustand und transportieren mit Sicherheit auch Energie. Die Wirbel breiten sich jedoch nicht mit Schallgeschwindigkeit aus, sondern bewegen sich im Strömungsfeld durch die Hauptströmung und Induktion der anderen Wirbel. Dadurch erfüllen sie nicht den ersten Punkt in der obigen Liste.

1.3. Quantitative Beschreibung von Schall

Die “wichtigste” Größe bei der Beschreibung des Schalls ist der Druck. Dies hat verschiedene Gründe: Der Druck ist relativ einfach meßbar. Er ist eine anschauliche Größe, und vom Menschen physiologisch erfaßbar also spürbar.

Üblicherweise werden alle Größen in einen Gleichanteil und einen Schwankungsanteil zerlegt. Betrachtet man zunächst den Fall eines ruhenden Mediums in dem sich Störungen durch Schall ausbreiten, ergibt sich für den Druck p , die Dichte ρ und die Geschwindigkeit \vec{v} (hier auch als Schnelle bezeichnet) die Zerlegung:

$$\begin{aligned} \text{Druck: } & p(\vec{x}, t) = p_0 + p'(\vec{x}, t) \\ \text{Dichte: } & \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{x}, t) \\ \text{Schnelle: } & \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}'(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Die Größen p_0 und ρ_0 entsprechen dem Druck und der Dichte in einem Ausgangszustand ohne Schall. Sie sind nicht von dem Ort \vec{x} und der Zeit t abhängig. Die Schwankungsanteile sind mit einem Strich $(\cdot)'$ markiert. Da sich das Medium in Ruhe befindet, verschwindet der Gleichanteil der Schnelle: $\vec{v}_0 = 0$.

Die Amplituden der im Alltag auftretenden Druckschwankungen erstrecken sich über viele Größenordnungen. So liegen zwischen der Hörschwelle und der Schmerzschwelle beim Menschen etwa sechs Größenordnungen der Amplitude des Schalldrucks. Jedoch sind die Schwankungen selbst bei der Schmerzschwelle immer noch sehr klein gegenüber den Gleichanteilen. In dem gesamten Bereich gilt

$$|p'/p_0| \ll 1; \quad |\rho'/\rho_0| \ll 1. \quad (1.3.2)$$

Für die praktischen Messungen wurde eine logarithmische Maßeinheit, der Schalldruckpegel L_p , eingeführt. Der Wert wird in der Einheit “Dezibel” (dB) angegeben. Es gilt

$$L_p = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{p_{\text{rms}}}{2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}} \right) \text{ dB} \quad (1.3.3)$$

Dabei ist der Effektiv- oder auch RMS-Wert der Druckschwankung mit

$$p_{\text{rms}} = \sqrt{\langle p'(t)^2 \rangle} \quad (1.3.4)$$

definiert. “RMS” ist die englische Abkürzung für die Berechnungsvorschrift: R-root (Wurzel), M-mean (Durchschnitt bzw. Mittel), S-square (Quadrat). Der in Gleichung (1.3.3) auftretende Wert von $2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$ ist ein international festgelegter Referenzdruck, der etwa der Hörschwelle des Menschen bei 1 kHz entspricht.

Die zeitliche Mittelung wird mit eckigen Klammern $\langle \cdot \rangle$ symbolisiert. Sie ist für eine beliebige Funktion $y(t)$ durch

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \, dt \quad (1.3.5)$$

1. Einleitung

	L_p	p_{rms}
Hörschwelle	0 dB	$2 \times 10^{-10} \text{ bar}$
Schmerzschwelle	120 dB	$0.2 \times 10^{-3} \text{ bar}$
Atmosphäre	194 dB	1 bar

Tabelle 1.1.: Schalldruckpegel für verschiedene RMS-Werte

gegeben. Dabei ist T eine Integrationszeit, die theoretisch unendlich groß sein muß. Für praktische Messungen ist dies natürlich nicht möglich, und es wird mit einer endlichen Zeit T gearbeitet. Dadurch kann sich ein Fehler in dem Mittelwert ergeben. Wenn das Signal relativ niedrige Frequenzen enthält, muß entsprechend länger integriert werden, damit auch über mehrere Schwankungen gemittelt wird und der Fehler klein bleibt. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn $y(t)$ ein periodisches Signal ist. Wird die Integrationszeit T gleich einem Vielfachen der Periode gewählt, erhält man den exakten Mittelwert.

In der Praxis sind häufig sinusförmige Schwingungen von Interesse, die in folgenden auch als ‘‘harmonisch’’ bezeichnet werden. Die harmonische Druckschwankung an einer Stelle kann mit

$$p'(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.3.6)$$

dargestellt werden. Dabei ist B die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und φ eine Phasenverschiebung. Jeder sinusförmige Zeitverlauf kann durch die drei Parameter erreicht werden. Für die Kreisfrequenz gilt dabei $\omega = 2\pi f$, wobei f die Frequenz in Hz ist.

Um den Effektivwert der harmonischen Druckschwankung zu berechnen, wird zuerst der Mittelwert der Schwankungen zum Quadrat gebildet. Es ergibt sich

$$\langle p'^2 \rangle = \frac{B^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{B^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) dt = \frac{B^2}{2} \quad (1.3.7)$$

Das letzte Gleichheit ergibt sich, da das Integral des Cosinus-Terms über eine Periode verschwindet. Damit folgt für den RMS-Wert der Druckschwankung

$$p_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{2} B} \quad (1.3.8)$$

Zu beachten ist, daß in der Schreibweise für den Effektivwert der hochgestellte Strich nicht verwendet wird.

In der Tabelle 1.1 sind die Schalldruckpegel für verschiedene RMS-Werte aufgelistet. Der letzte Wert ‘‘Atmosphäre’’ ist dabei rein theoretisch, da bei $p_0 = 1 \text{ bar}$ ein RMS-Wert von einem bar unrealistisch ist (mit einer Sinusschwingung ohne negativen Druck nicht zu erreichen). In der Tabelle 1.2 sind für eine ebene Welle in Luft die maximal auftretenden Geschwindigkeiten und Auslenkungen ε der Luftteilchen angegeben.

1.4. Darstellung mit komplexen Zahlen

L_p	$ \vec{v}' _{\max}$	$ \varepsilon _{\max}$
120 dB	$0.069 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$1.1 \times 10^{-5} \text{m}$
0 dB	$6.93 \times 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$	$1.1 \times 10^{-11} \text{m}$

Tabelle 1.2.: Schalldruckpegel für verschiedene RMS-Werte

Die Auslenkungen wurden für eine Frequenz von 1 kHz berechnet. Bemerkenswert ist, daß bei der Hörschwelle die Auslenkung der Luftteilchen in der Größenordnung von 1/1000 der mittleren freien Weglänge der Moleküle ist (für Luft unter Normalbedingungen: 1 bar, 20 Grad Celsius).

Das menschliche Ohr reagiert frequenzabhängig auf Schall. Zur Beschreibung der empfundenen Stärke des Schalls wurde die Maßeinheit Phon eingeführt:

Die Lautstärke eines Schalls in Phon entspricht dem Schalldruckpegel des gleichlaut empfundenen 1 kHz-Tones.

Das Phon ist damit ein Wert, der durch einen subjektiven Vergleich zweier Schalldrücke bestimmt wird (zweiohriges Hören!). Für die Lautstärkebestimmung mit Meßgeräten (also ohne Testhörer) wurden sogenannte Bewertungskurven eingeführt. Durch Filter wird die Signalstärke in verschiedenen Frequenzbereichen unterschiedlich verstärkt bzw. abgeschwächt, um so den Frequenzgang des menschlichen Ohrs zu berücksichtigen.

1.4. Darstellung mit komplexen Zahlen

Im folgenden soll am Beispiel eines schwingenden Kolbens die Vorteile einer komplexen Formulierung deutlich gemacht werden. Die Situation ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Ein Kolben bewegt sich in einem Rohr sinusförmig um eine Ruhelage. Mit x_K wird die Position der Kolbenvorderkante bezeichnet. Es gilt

$$x_K(t) = x_0 + s(t), \quad (1.4.1)$$

wobei mit

$$s(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.4.2)$$

die harmonische Auslenkung aus der Ruhelage gegeben ist. Es folgt für die Geschwindigkeit u_K des Kolbens

$$u_K(t) = \frac{ds}{dt} = -\omega B \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.4.3)$$

und die Beschleunigung ist mit

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 B \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.4.4)$$

1. Einleitung

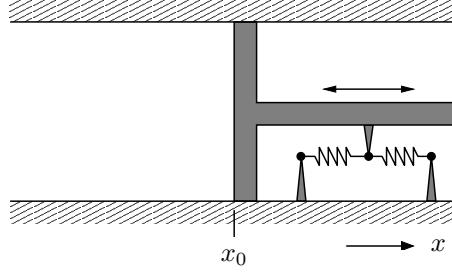


Abbildung 1.3.: Schwingender Kolben im Rohr

gegeben. Der Kolben sei federnd befestigt. Eine Auslenkung erzeugt eine Rückstellkraft. Die Reibung im Rohr bewirkt eine Kraft entgegen der Bewegungsrichtung. Für die gesamte mechanische Kraft, die sich durch die Bewegung des Kolbens ergibt, erhält man

$$K_{\text{mech}} = -sD - \frac{ds}{dt}F - \frac{d^2s}{dt^2}M \quad (1.4.5)$$

Dabei ist D die Federkonstante, F der Reibungskoeffizient und M die Masse des Kolbens. Setzt man Gleichungen (1.4.2) bis (1.4.4) in (1.4.5) ein, ergibt sich

$$K_{\text{mech}} = B[-D \cos(\omega t + \varphi) + \omega F \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 M \cos(\omega t + \varphi)] \quad (1.4.6)$$

Möchte man zum Beispiel das Maximum der mechanischen Kraft $|K_{\text{mech}}|_{\max}$ bei einer gegebenen maximalen Auslenkung B bestimmen, zeigt sich, daß Gleichung (1.4.6) relativ unhandlich ist. Die Berechnung wird deutlich einfacher, wenn man zu einer komplexen Formulierung übergeht. Anstatt Gleichung (1.4.2) wird die momentane Auslenkung nun mit

$$s(t) = \Re\{\hat{s} \cdot e^{i\omega t}\} \quad (1.4.7)$$

formuliert. Dabei ist \hat{s} eine komplexe Amplitude. In ihr „steckt“ die Information der reellen Amplitude B und die Phaseninformation φ . Damit (1.4.2) und (1.4.7) gleichwertig sind, muß

$$B = |\hat{s}| \quad \text{und} \quad \frac{\Im(\hat{s})}{\Re(\hat{s})} = \tan \varphi \quad (1.4.8)$$

gelten.

Anschaulich kann man sich die komplexen Zahlen \hat{s} und $e^{i\omega t}$ als Vektoren in der komplexen Ebene vorstellen. Die geometrische Situation ist in der Abbildung 1.4 dargestellt. Der Winkel zwischen \hat{s} und der reellen Achse ist gerade φ . Der Betrag von $e^{i\omega t}$ ist immer gleich eins. Der Winkel zwischen $e^{i\omega t}$ und der reellen Achse ist ωt . Das Produkt $\hat{s} \cdot e^{i\omega t}$ ist wieder eine komplexe Zahl mit dem gleichen Betrag wie \hat{s} . Der Winkel zwischen $\hat{s} \cdot e^{i\omega t}$ und der reellen Achse ist die Summe $(\omega t + \varphi)$. Das Produkt stellt praktisch einen Zeiger der Länge $|\hat{s}|$ dar, der sich mit der Kreisfrequenz ω um den

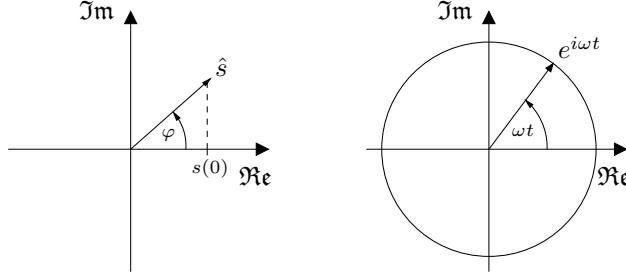


Abbildung 1.4.: Zur Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene

Ursprung dreht. Die Projektion dieses Zeigers auf die reelle Achse ergibt den Realteil und damit $s(t)$.

Mit der komplexen Formulierung erhält man statt Gleichung (1.4.6) für die mechanische Kraft den Ausdruck:

$$K_{\text{mech}} = \Re \left\{ \hat{s} [-D - i\omega F + \omega^2 M] e^{i\omega t} \right\} \quad (1.4.9)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer wird zweckmäßigerweise mit

$$Z := -D - i\omega F + \omega^2 M \quad (1.4.10)$$

abgekürzt. Die komplexe Größe Z beinhaltet die gesamte Information über die mechanischen Eigenschaften des Kolbens. Für feste Werte D , F und M hängt sie nur von der Frequenz ω ab. Damit ist die Berechnung der mechanischen Kraft K_{mech} bei gegebener Auslenkung \hat{s} durch einfache Multiplikation von komplexen Zahlen möglich:

$$K_{\text{mech}} = \Re \left\{ \hat{s} Z e^{i\omega t} \right\} \quad (1.4.11)$$

Oft ist nur die Amplitude der Kraft und nicht der momentane Wert von Interesse. Die maximale Kraft ist durch den Betrag der komplexen Zahl in der geschweiften Klammer gegeben. Es gilt

$$|K_{\text{mech}}|_{\max} = |\hat{s}| |Z| \quad (1.4.12)$$

So kann für eine gegebene maximale Kraft die maximale Auslenkung mit

$$B = |\hat{s}| = \frac{|K_{\text{mech}}|_{\max}}{|Z|} \quad (1.4.13)$$

berechnet werden. Dies wäre mit einer rein reellen Darstellung nicht so elegant möglich.

Äußere Kraft

Wirkt eine äußere Kraft auf den Kolben, so erzeugt diese eine Bewegung. Die Summe aller angreifenden Kräfte muß gleich Null sein. Neben der mechanischen Kraft auf den

1. Einleitung

Kolben soll nun auch noch eine Druckkraft wirken. Zur Vereinfachung des Beispiels werden folgende Punkte vorausgesetzt:

1. Rechts vom Kolben herrscht Vakuum. Der Druck ist dort gleich Null.
2. Auf der linken Seite vom Kolben ist der Druck räumlich konstant. Er wird mit p_K bezeichnet. Es wird die Zerlegung

$$p_K(t) = p_0 + p'_K(t) \quad (1.4.14)$$

eingeführt.

3. Die Ruhposition x_0 des Kolbens stellt sich bei $p_K = p_0$ ein. Die Feder ist entsprechend vorgespannt, um die Kraft durch den Ruhedruck auszugleichen. Die Größe s bezeichnet weiterhin die Auslenkung aus der Ruhelage.

Betrachtet wird eine harmonische Druckstörung am Kolben der Form

$$p'_K(t) = \Re\{\hat{p}_K \cdot e^{i\omega t}\} \quad (1.4.15)$$

Die Größe \hat{p}_K ist analog zu \hat{s} eine komplexe Druckamplitude. Der Druck bewirkt die Kraft

$$K_{\text{druck}}(t) = Q p_K(t) \quad (1.4.16)$$

Dabei ist Q die Querschnittsfläche des Rohres. Die Druckkraft kann in einen Gleichanteil und die Schwankung mit

$$K_{\text{druck}}(t) = K_{\text{druck},0} + K'_{\text{druck}}(t) \quad (1.4.17)$$

zerlegt werden. Für den Gleichanteil gilt

$$K_{\text{druck},0} = Q p_0 \quad (1.4.18)$$

Die Schwankung ist

$$K'_{\text{druck}}(t) = Q p'_K(t) = Q \Re\{\hat{p}_K \cdot e^{i\omega t}\} \quad (1.4.19)$$

Entsprechend wird die mechanische Kraft in

$$K_{\text{mech}}(t) = K_{\text{mech},0} + K'_{\text{mech}}(t) \quad (1.4.20)$$

aufgeteilt. Der Gleichanteil $K_{\text{mech},0}$ entspricht der Rückstellkraft durch die Vorspannung der Feder. Die rechte Seite der Gleichung (1.4.11) ist nun nicht mehr gleich der gesamten mechanischen Kraft sondern entspricht dem Schwankungsanteil. Statt (1.4.11) gilt jetzt

$$K'_{\text{mech}}(t) = \Re\{\hat{s} Z e^{i\omega t}\} \quad (1.4.21)$$

Damit Kräftegleichgewicht gilt muß

$$K_{\text{mech}}(t) + K_{\text{druck}}(t) = 0 \quad (1.4.22)$$

1.4. Darstellung mit komplexen Zahlen

erfüllt sein. Bereits die Gleichanteile heben sich auf:

$$K_{\text{mech},0} + K_{\text{druck},0} = 0 \quad (1.4.23)$$

Damit folgt für die Schwankungen ebenfalls

$$K'_{\text{mech}}(t) + K'_{\text{druck}}(t) = 0 \quad (1.4.24)$$

Einsetzen von (1.4.19) und (1.4.21) liefert aus der letzten Gleichung

$$\Re\{\hat{s}Z e^{i\omega t}\} = -Q \Re\{\hat{p}_{\text{K}} e^{i\omega t}\} \quad (1.4.25)$$

Diese Bedingung stellt eine Gleichung der Form

$$\Re\{z_1 \cdot e^{i\omega t}\} = \Re\{z_2 \cdot e^{i\omega t}\} \quad (1.4.26)$$

dar. Die Größen z_1 und z_2 sind die komplexen Amplituden der beiden Kräfte. Gleichung (1.4.26) ist für alle Zeiten t nur erfüllt, wenn $z_1 = z_2$ gilt. Damit folgt aus (1.4.25) die Beziehung

$$\hat{s}Z = -Q \hat{p}_{\text{K}} \quad (1.4.27)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist es sehr einfach möglich die komplexen Amplituden der Auslenkung \hat{s} und der Druckstörung \hat{p}_{K} ineinander umzurechnen. Dazu müssen natürlich die mechanischen Eigenschaften des Kolbens (D, F und M) und die Frequenz ω bekannt sein, um die Größe Z zu berechnen.

Häufig sind nur die Amplituden und nicht die Phasen der Größen von Interesse. Die Druckamplitude entspricht dem Betrag $|\hat{p}_{\text{K}}|$. Entsprechend gibt $|\hat{s}|$ die maximale Auslenkung an. Für eine vorgegebene Druckamplitude berechnet sich die maximale Auslenkung des Kolbens durch

$$|\hat{s}| = \frac{Q |\hat{p}_{\text{K}}|}{|Z|} \quad (1.4.28)$$

Diese Berechnungen sind im Komplexen deutlich eleganter als bei rein reeller Darstellung.

Die komplexe Darstellung ist mit $e^{i\omega t}$ und auch mit $e^{-i\omega t}$ möglich. Wird von der einen in die andere Formulierung übergegangen, müssen die komplexen Amplituden durch ihre konjugiert komplexen Werte ersetzt werden. Denn es gilt

$$\Re\{z \cdot e^{i\omega t}\} = \Re\{z^* \cdot e^{-i\omega t}\} \quad (1.4.29)$$

Dabei ist mit z^* der konjugiert komplexe Wert von z bezeichnet. Die beiden Schreibweisen sind äquivalent, jedoch sollten sie nicht vermischt werden.

Zuletzt soll noch auf eine übliche Vereinfachung der komplexen Schreibweise hingewiesen werden. In der Literatur findet man oft Gleichungen der Form

$$p'_{\text{K}}(t) = \hat{p}_{\text{K}} \cdot e^{i\omega t} \quad (1.4.30)$$

Im Vergleich zu Gleichung (1.4.15) fehlt die Realteilbildung auf der rechten Seite. Auf der rechten Seite steht damit ein komplexer Ausdruck, der mit einer physikalischen

1. Einleitung

Größe auf der linken Seite gleichgesetzt wird. Die Druckschwankung $p'_K(t)$ ist selbstverständlich reell. Strenggenommen ist die angegebene Gleichung nicht korrekt. Diese Schreibweise wird dennoch häufig verwendet. In diesem Fall gilt die Konvention, daß bei Gleichsetzung einer reellen Größe mit einem komplexen Ausdruck von letzteren der Realteil zu bilden ist. Die Realteilbildung steckt sozusagen implizit in der Gleichung.

Die reduzierte Schreibweise führt normalerweise zu keinen Verwechslungen. Lediglich bei der Produktbildung von reellen Größen ist Vorsicht geboten. Soll zum Beispiel der Ausdruck $p'_K(t)^2$ berechnet werden, so muß

$$p'_K(t)^2 = (\Re\{\hat{p}_K \cdot e^{i\omega t}\})^2 \quad (1.4.31)$$

geschrieben werden. Die Realteilbildung kann hier nicht weggelassen werden, denn das Quadrat des Realteils ist nicht unbedingt auch der Realteil des Quadrats einer Größe.

1.5. Mathematisches Hilfsmittel: δ -Funktion

Kontinuierliche DichteVerteilung und Punktmassen

Zur Beschreibung vieler Probleme in der Physik bietet es sich an, die sogenannte δ -Funktion zu verwenden. Als einfache Beispiele sind die Punktmasse in der Mechanik und die Punktquelle in der Akustik zu nennen. Auch bei vielen Herleitungen und Beweisen kann die δ -Funktion ein nützliches Hilfsmittel sein. Sie wurde von dem Physiker P.A.M. Dirac aus theoretisch-physikalischer Zweckmäßigkeit eingeführt. Erst danach wurde von L. Schwarz eine umfassende Theorie entwickelt, und die Anwendung der δ -Funktion auf exaktes mathematisches Fundament gestellt.

Eine ausführliche Beschreibung der mathematischen Grundlagen der Materie würde den Rahmen dieser Übersicht sprengen. Deshalb soll hier eine anschauliche Einführung in die wesentlichen Eigenschaften der δ -Funktion gegeben werden, die den praktischen Umgang mit der Funktion erleichtern soll.

Eine kontinuierliche Massenverteilung wird durch die DichteVerteilung $\rho(\vec{x})$ beschrieben. Die Gesamtmasse M eines Körpers kann durch Integration mit

$$M = \int_V \rho(\vec{x}) \, dV \quad (1.5.1)$$

aus der DichteVerteilung berechnet werden. Dabei ist V ein geeignet gewähltes Volumen. Am einfachsten wählt man V gleich dem Körpervolumen. Jedoch kann auch V größer gewählt werden, wenn außerhalb des Körpers $\rho(\vec{x}) = 0$ gesetzt wird.

Eine gegebene Massenverteilung besitzt in einem Schwerefeld potentielle Energie E_{pot} . Ist das Schwerepotential $\phi(\vec{x})$ gegeben, kann diese mit

$$E_{\text{pot}} = \int_V \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \, dV \quad (1.5.2)$$

aus der DichteVerteilung berechnet werden. In der Praxis wird häufig die Masse eines Körpers als Punktmasse behandelt. Viele Berechnungen vereinfachen sich dadurch

1.5. Mathematisches Hilfsmittel: δ -Funktion

erheblich. Für die potentielle Energie einer Punktmasse M am Ort \vec{x}_0 ergibt sich einfach

$$E_{\text{pot}} = M \phi(\vec{x}_0) \quad (1.5.3)$$

Betrachtet man einen relativ kleinen Körper in der Nähe der Erdoberfläche, so ist diese Vereinfachung gerechtfertigt. Die Erdbeschleunigung \vec{g} ergibt sich als Gradient des Schwerepotentials mit

$$\vec{g} = \text{grad } \phi \quad (1.5.4)$$

An der Erdoberfläche gilt näherungsweise

$$\phi(\vec{x}) = g x_3 \quad (1.5.5)$$

wobei das Koordinatensystem so gewählt wurde, daß die x_3 -Achse senkrecht zum Boden orientiert ist und in die Höhe zeigt. Die Größe g entspricht dem Betrag von \vec{g} . Ihr Wert ist etwa 9.81 m/s^2 . Für die potentielle Energie folgt

$$E_{\text{pot}} = Mgh \quad (1.5.6)$$

wobei h die Höhe der Punktmasse ist. Dieses Ergebnis ist allerdings nicht exakt. In Wirklichkeit nimmt die Erdanziehung mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt ab. Das bedeutet, g ist nicht überall konstant. Die Abweichung, die sich dadurch ergibt, ist jedoch bei kleinen Körpern verschwindend gering. Würde man zum Beispiel die potentielle Energie der Mondmasse im Schwerkraftfeld der Erde berechnen wollen, würde sich allerdings schon eine merkliche Abweichung ergeben. Aber zur Berechnung der Planetenbahnen um die Sonne ist das Prinzip der Punktmassen bestens geeignet.

Das Konzept der Punktmassen kann die mathematische Beschreibung deutlich vereinfachen, jedoch ist die Darstellung nicht mehr einheitlich. Für einige Anwendungen wäre es von Vorteil, wenn man Punktmassen und kontinuierliche Massenverteilungen formal miteinander verbinden könnte. Dies wird am folgenden Beispiel deutlich. Aus den Maxwellschen Gleichungen ergibt sich für das elektrische Potential $U(\vec{x})$ und die Ladungsdichte $q(\vec{x})$ im stationären Fall der Zusammenhang.

$$\Delta U = -\frac{1}{\epsilon_0} q \quad (1.5.7)$$

Diese Gleichung heißt Poisson-Gleichung und gilt so im luftleeren Raum. Das Symbol Δ stellt den Laplace-Operator dar. Die Größe ϵ_0 ist die Influenzkonstante ($\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$).

Um diese Differentialgleichung auf eine punktförmige Ladungsverteilung anwenden zu können, muß diese durch eine Funktion $q(\vec{x})$ beschrieben werden. Es stellt sich die Frage, ob eine solche Funktion für eine Punktladung angegeben werden kann. Die gleiche Problematik ergibt sich für den Massenpunkt. Es ist zunächst nicht klar, ob dieser durch eine Dichteverteilung $\rho(\vec{x})$ dargestellt werden kann. Dies soll anhand der folgenden Betrachtung geklärt werden. Gegeben sei eine Punktmasse M am Ort \vec{x}_0 . Es wird angenommen, daß dieser durch die Dichteverteilung $\rho(\vec{x})$ beschrieben wird. Dazu

1. Einleitung

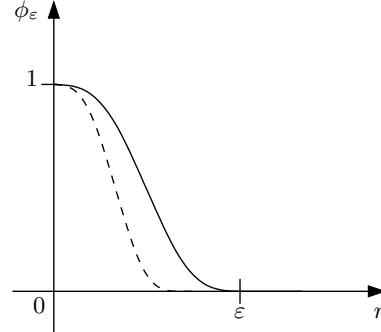


Abbildung 1.5.: Radialer Verlauf des Schwerepotentials im Gegenbeispiel

muß $\rho(\vec{x})$ die Gleichung (1.5.1) erfüllen. Damit auch die potentielle Energie immer korrekt berechnet wird, muß

$$\int_V \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV = M \phi(\vec{x}_0) \quad (1.5.8)$$

für beliebige Schwerepotentiale $\phi(\vec{x})$ gelten. Das Integrationsvolumen V ist dabei ein geeignet gewähltes Volumen, das den Massenpunkt einschließt.

Gegenbeispiel

Anhand eines Gegenbeispiels soll nun gezeigt werden, daß eine Funktion $\rho(\vec{x})$, die (1.5.1) und (1.5.8) erfüllt, nicht existiert. Dazu wird ein spezielles Schwerepotential ϕ_ε konstruiert. Es soll kugelsymmetrisch um die Punktmasse sein, und damit nur vom Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad (1.5.9)$$

abhängen. Das Potential fällt mit r monoton von $\phi_\varepsilon(0) = 1$ auf $\phi_\varepsilon(\varepsilon) = 0$ ab. Der radiale Verlauf ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Die potentielle Energie der Punktmasse ist nach (1.5.3) gleich $M\phi_\varepsilon(0) = M$. Für die linke Seite von Gleichung (1.5.8) gilt jedoch

$$\int_V \rho(\vec{x}) \phi_\varepsilon(r) dV < \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \max|\rho(\vec{x})| < M\phi_\varepsilon(0) \equiv M \quad (1.5.10)$$

Um die zweite Ungleichung zu erfüllen, muß ε nur hinreichend klein gewählt werden. Dies zeigt, daß keine Funktion $\rho(\vec{x})$ mit einem endlichen Maximum gefunden werden kann. Die Dichte müßte im Massenpunkt unendlich groß sein. Außerhalb des Massenpunktes muß die Dichte in jedem Fall gleich Null sein. Eine solche Verteilung läßt sich aber durch eine Funktion $\rho(\vec{x})$ nicht beschreiben. Der Wert der Funktion wäre überall

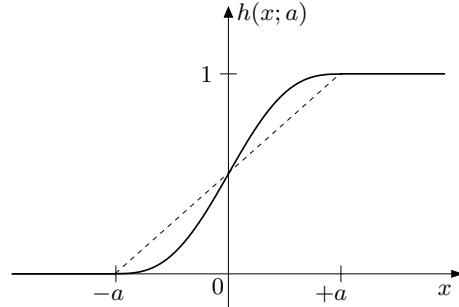


Abbildung 1.6.: Verlauf der Hilfsfunktion

gleich Null bis auf den Ort \vec{x}_0 . Dort ist die Dichte unendlich und damit die Funktion gar nicht definiert. Mit einer solchen Funktion kann formal wenig berechnet werden.

Um die punktförmigen Verteilungen allgemein behandeln zu können, bietet es sich an, die Punkte durch endliche Objekte zu ersetzen. So würde man statt eines Massenpunkts eine kleine Kugel der gleichen Masse annehmen. Die entsprechende Dichteverteilung lässt sich durch eine wohldefinierte Funktion ausdrücken. Allerdings ergibt sich bei der Berechnung der potentiellen Energie nach (1.5.2) ein Fehler. Dieser hängt von dem jeweiligen Potential ϕ und von der Größe der Kugel ab. Der Fehler nimmt mit der Radius der Kugel ab. Ist $\phi(\vec{x})$ stetig, so verschwindet der Fehler im Grenzfall einer unendlich kleinen Kugel ganz. Es lässt sich damit die potentielle Energie der Punktmasse durch eine Integration wie in (1.5.2) berechnen, indem man eine endlich ausgedehnte Ersatzverteilung der Dichte annimmt, und damit einen Grenzübergang durchführt. Dies kann auch dazu verwendet werden, Differentialgleichungen der Form (1.5.7) auf punktförmige Verteilungen anzuwenden. Die formalen Hilfsmittel, die dazu von Dirac entwickelt wurden, werden im folgenden vorgestellt.

Hilfsfunktion

Die formale Betrachtung wird für den eindimensionalen Fall durchgeführt. Es wird zunächst eine Hilfsfunktion konstruiert, aus der eine sogenannte δ -Folge abgeleitet werden kann. Diese Vorgehensweise orientiert sich nicht an den oben genannten physikalischen Beispielen der Punktmasse oder der Punktladung, sondern folgt einer eher mathematischen Überlegung. Es wird von einer stetigen und monotonen Funktion $h(x; a)$ ausgegangen, die in dem Intervall $[-a, +a]$ von Null auf Eins ansteigt. Die Funktion hängt von x und a ab, jedoch wird ihr Verlauf immer für einen festen Wert von a diskutiert. Dies erklärt die Schreibweise " $h(x; a)$ " mit dem Semikolon. In der Abbildung 1.6 sind zwei mögliche Varianten eingezeichnet. In jedem Fall gilt

$$h(x; a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -a \\ 1 & \text{für } x > a \end{cases} \quad (1.5.11)$$

1. Einleitung

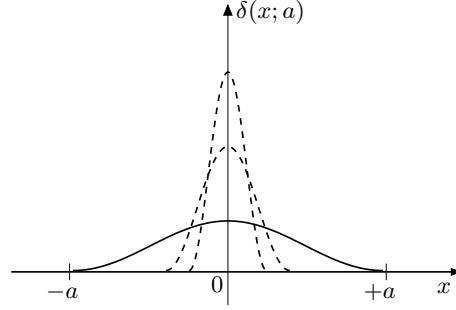


Abbildung 1.7.: Beispiel mit stetigem Verlauf

Die durchgezogene Kurve in Abbildung 1.6 entspricht der Funktion

$$h(x; a) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) + \frac{x}{a} + 1 \right] \quad \text{für } -a \leq x \leq a \quad (1.5.12)$$

Die Funktion ist überall stetig differenzierbar. Die gestrichelte Kurve stellt eine formal recht einfache Alternative dar, die durch

$$h(x; a) = \frac{x+a}{2a} \quad \text{für } -a \leq x \leq a \quad (1.5.13)$$

gegeben ist. Diese Funktion ist jedoch bei $x = -a$ und $x = a$ nicht differenzierbar.

Im nächsten Schritt wird die Ableitung der Hilfsfunktion für einen festen Wert a gebildet. Das Resultat ist wieder eine Funktion von x , die als $\delta(x; a)$ bezeichnet wird. Es gilt

$$\delta(x; a) = \frac{d}{dx} h(x; a) \quad (1.5.14)$$

Die Abbildung 1.7 zeigt den Verlauf der Ableitung für $h(x; a)$ nach (1.5.12). Es sind die Kurven für drei verschiedene Werte a eingezeichnet. Bei $x = 0$ ist die Steigung von $h(x; a)$ maximal. Je kleiner a gewählt wird, desto steiler ist der Verlauf von $h(x; a)$. Entsprechend höhere Werte für $\delta(x; a)$ ergeben sich.

In Abbildung 1.8 ist sind die entsprechenden Kurven für $h(x; a)$ nach (1.5.13) dargestellt. Der lineare Anstieg in Intervall $[-a, a]$ ergibt dort eine konstante Ableitung. Dem entsprechend ergibt sich ein kastenförmiger Verlauf von $\delta(x; a)$. Unabhängig von der Wahl des Parameters a muß die Bedingung

$$\int_{-a}^{+a} \delta(x; a) dx = 1 \quad (1.5.15)$$

erfüllt sein, da

$$\left[h(x; a) \right]_{-a}^a = 1 \quad (1.5.16)$$

1.5. Mathematisches Hilfsmittel: δ -Funktion

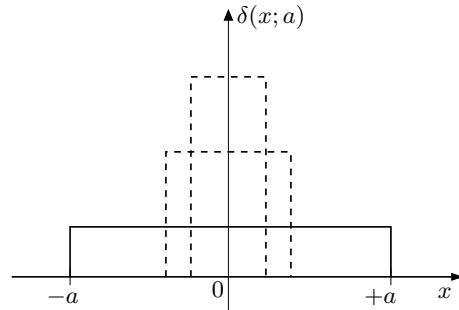


Abbildung 1.8.: Beispiel mit Kastenfunktion

ist. Weil $\delta(x; a)$ außerhalb der Intervalls $[-a, a]$ gleich Null ist, kann die Integration in (1.5.15) auf den gesamten Wertebereich ausgedehnt werten. Es gilt somit auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x; a) dx = 1 \quad (1.5.17)$$

δ -Folge

Wird ein kleineres a gewählt, so wird die Kurve $\delta(x; a)$ immer höher. Von besonderem Interesse ist dabei der Grenzfall $a \rightarrow 0$. Um diesen näher zu untersuchen, wird eine sogenannte δ -Folge eingeführt. Dies ist eine Folge von Funktionen, die durch

$$\delta_n(x) = \delta\left(x; \frac{1}{n}\right) \quad (1.5.18)$$

definiert wird. Damit gilt

$$\delta_n(x) = \frac{d}{dx} h\left(x; \frac{1}{n}\right) \quad (1.5.19)$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ist die Verteilung von $\delta_n(x)$ immer dichter um $x = 0$ konzentriert. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta_n(x) dx = 1 \quad (1.5.20)$$

Dies ist offensichtlich, da für $n > 1/\varepsilon$ das Integral in (1.5.17) exakt gleich Eins ist. Entsprechend gelten die beiden Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(x) dx = 0 \quad (1.5.21)$$

1. Einleitung

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 0 \quad (1.5.22)$$

Eine Funktionenfolge, die die drei Bedingungen (1.5.20) bis (1.5.22) erfüllt, wird δ -Folge genannt. Durch (1.5.14) kann aus den Hilfsfunktionen $h(x; 1/n)$ eine δ -Folge konstruiert werden. Es gibt natürlich noch viele andere Wege solche Folgen zu definieren.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Folge $h(x; 1/n)$ gegen die sogenannte Heaviside-Funktion, die im Allgemeinen mit $H(x)$ dargestellt wird. Die Heaviside-Funktion ist einfach durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.5.23)$$

definiert. Die Heaviside-Funktion besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h\left(x; \frac{1}{n}\right) = H(x) \quad (1.5.24)$$

Die Folge der stetigen Funktionen $h(x; 1/n)$ konvergiert gegen eine unstetige Funktion.

Es stellt sich die Frage, gegen was die Folge $\delta_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Angenommen die Folge konvergiert gegen eine Funktion, die mit $\delta(x)$ bezeichnet wird, dann würde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \delta(x) \quad (1.5.25)$$

gelten. Es lässt sich leicht zeigen, daß bei $x = 0$ die Funktion $\delta(x)$ eine Unendlichkeitsstelle besitzen muß. Sie ist dort im strengen Sinn gar nicht definiert. Für $x \neq 0$ muß $\delta(x) = 0$ sein. Damit ergibt sich eine Funktion, die überall gleich Null ist bis auf eine Stelle, an der sie nicht definiert ist. Scheinbar ist $\delta(x)$ als Funktion im eigentlichen Sinn gar nicht zu gebrauchen.

Man kann dem Grenzwert der δ -Folge jedoch auf ganz andere Weise eine Bedeutung geben. Man versteht unter $\delta(x)$ dann keine echte Funktion, sondern eine Verteilung beziehungsweise eine sogenannte Distribution. Dies ist analog zu der Dichteverteilung in einem Raum mit einem Massenpunkt. In dem Punkt ist die Dichte unendlich und außerhalb gleich Null. Wie weiter oben bereits diskutiert wurde, gibt es keine Funktion, die eine solche Dichteverteilung beschreibt. Das Integral der Dichteverteilung über den Raum muß in jedem Fall die Gesamtmasse ergeben. Die δ -Funktion ist als eine solche Dichteverteilung in einem linearen, eindimensionalen Raum zu verstehen, die an der Stelle $x = 0$ eine punktförmige Masse der Größe Eins darstellt. Das bedeutet, für das Integral über $\delta(x)$ muß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.5.26)$$

gelten. Da $\delta(x)$ keine echte Funktion darstellt, ist strenggenommen das Integral über $\delta(x)$ gar nicht definiert. Man kann der Gleichung (1.5.26) aber dennoch eine Bedeutung

1.5. Mathematisches Hilfsmittel: δ -Funktion

geben, in dem man sie als Schreibweise für den Ausdruck

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1 \quad (1.5.27)$$

versteht. Die Richtigkeit dieser Beziehung folgt direkt aus der Definition der δ -Folge. Die Integrale über die Elemente der δ -Folge sind wohldefiniert. Ein Integral über einen Ausdruck mit $\delta(x)$ kann damit immer als Grenzwert des Integrals mit den Elementen der δ -Folge verstanden werden.

Es macht sogar der Ausdruck $\delta(x)$ außerhalb von Integralen einen Sinn. Zum Beispiel kann mit der Beziehung

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} H(x) \quad (1.5.28)$$

der Ableitungsbegriff erweitert werden. Eigentlich ist die Ableitung der Funktion $H(x)$ an der Sprungstelle $x = 0$ nicht definiert, genausowenig wie der Funktionswert von $\delta(x)$. Integriert man (1.5.28) zunächst rein formal von $-\infty$ bis x , so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = H(x) \quad (1.5.29)$$

Dies ist im Sinne von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \delta_n(x') dx' = H(x) \quad (1.5.30)$$

wieder richtig, denn wegen (1.5.19) gilt

$$\int_{-\infty}^x \delta_n(x') dx' = h(x, \frac{1}{n}) \quad (1.5.31)$$

Das bedeutet, die Ausdrücke mit $\delta(x)$ gelten sozusagen im integralen Sinn. Es kann sogar mit $\delta(x)$ wie mit einer ganz gewöhnlichen Funktion gerechnet werden. Es darf nur nie außer Acht gelassen werden, daß es sich nicht um eine echte Funktion, sondern um eine Distribution handelt.

Rechnen mit der δ -Funktion

Im weiteren werden einige Rechenregeln mit der δ -Funktion vorgestellt. Für eine stetige Funktion $B(x)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \delta(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (1.5.32)$$

1. Einleitung

Diese bedeutet, daß für jede Folge δ_n die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \delta_n(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (1.5.33)$$

erfüllt sein muß. Mit (1.5.32) ist eine der wichtigsten Beziehungen gegeben. Um sie noch weiter zu verdeutlichen, ist in Anhang A.3 die Herleitung dieser Regel dargestellt. Dort wird auch klar, wieso die Voraussetzung an die Funktion $B(x)$ notwendig ist.

In den späteren Kapiteln tritt häufig der Fall auf, daß das Argument der δ -Funktion selbst wieder eine Funktion ist. Auch für eine solche Konstellation existieren einige Regeln. Zum Beispiel gilt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.5.34)$$

Diese Beziehung ist natürlich wieder im integralen Sinn zu verstehen. Sie folgt direkt aus der Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(ax) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(z) \frac{dz}{|a|} \quad (1.5.35)$$

Diese ergibt sich durch die Substitution

$$dx = \frac{1}{a} dz \quad (1.5.36)$$

Eine etwas kompliziertere Regel ist mit

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad (1.5.37)$$

gegeben. Diese Regel gilt nur unter der Bedingung, daß die Funktion $g(x)$ lediglich eine Nullstelle bei $x = x_0$ besitzt. Zusätzlich muß $g(x)$ an dieser Stelle differenzierbar sein. Allgemein gilt für eine stetige Funktion $f(x)$ die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (1.5.38)$$

Dabei sind x_n die Nullstellen der Funktion $g(x)$. Diese Funktion muß an den entsprechenden Stellen differenzierbar sein.

Die δ -Funktion, wie sie hier bisher betrachtet wurde, besitzt als Argument ein Skalar x . Es gibt auch eine vektorielle Version mit $\delta(\vec{x})$, die als Argument einen Vektor besitzt. Sie kann entsprechend als Grenzwert einer δ -Folge $\delta_n(\vec{x})$ eingeführt werden. Die Integrationen sind dabei statt von $-\infty$ bis $+\infty$ über den gesamten Raum \mathbb{R}^3 zu nehmen. Rein formal besteht sonst kein Unterschied zwischen der eindimensionalen

1.6. Spektrale Zerlegung

und der dreidimensionalen Version. Es existieren auch vergleichbare Rechenregeln. Für alle stetigen Funktionen $A(\vec{x})$ die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^3} A(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3 \vec{x} = A(\vec{x}_0) \quad (1.5.39)$$

Dies ist die dreidimensionale Entsprechung zu Gleichung (1.5.32).

1.6. Spektrale Zerlegung

Ein wichtiges Instrument der spektralen Analyse von Signalen ist die Fourier-Transformation. Betrachtet man ein reelle oder komplexe Funktion $s(t)$, so ist dessen Fourier-Transformierte gegeben durch:

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (1.6.1)$$

Die Transformierte $\tilde{s}(\omega)$ enthält die gesamte Information von $s(t)$. Durch die Rücktransformation

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1.6.2)$$

kann $s(t)$ wieder rekonstruiert werden. In der Literatur wird oft $\tilde{s}(\omega)$ auch mit $e^{+i\omega t}$ definiert. Ebenso wird häufig die Fourier-Transformierte mit dem Vorfaktoren $1/\sqrt{2\pi}$ definiert. Die Rücktransformation hat dann entsprechend auch einen anderen Vorfaktor oder ein anderes Vorzeichen im $e^{-i\omega t}$ -Term.

Zunächst soll eine einfache Eigenschaft der Fourier-Transformation vorgestellt werden. Für komplexe Zahlen z gilt allgemein die Beziehung

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad (1.6.3)$$

Mit $z = \omega t$ folgt aus (1.6.1)

$$\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt \quad (1.6.4)$$

Das erste Integral repräsentiert den Realteil der Fourier-Transformierten und das zweite den Imaginärteil. Ist $s(t)$ eine gerade Funktion, d.h. $s(t) = s(-t)$, verschwindet das zweite Integral und $\tilde{s}(\omega)$ ist rein reell. Falls $s(t)$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $s(t) = -s(-t)$, wird das erste Integral Null und $\tilde{s}(\omega)$ ist rein imaginär.

Es wird die Fourier-Transformierte eines wie in Abbildung 1.9 dargestellten Rechteckpulses betrachtet. Formal ist die Funktion $s(t)$ gegeben durch:

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{für } t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.6.5)$$

1. Einleitung

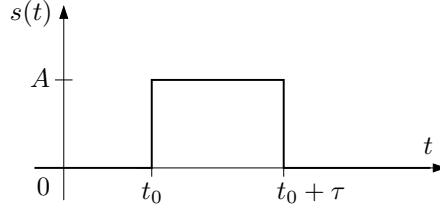


Abbildung 1.9.: Rechteckpuls der Dauer τ und Stärke A

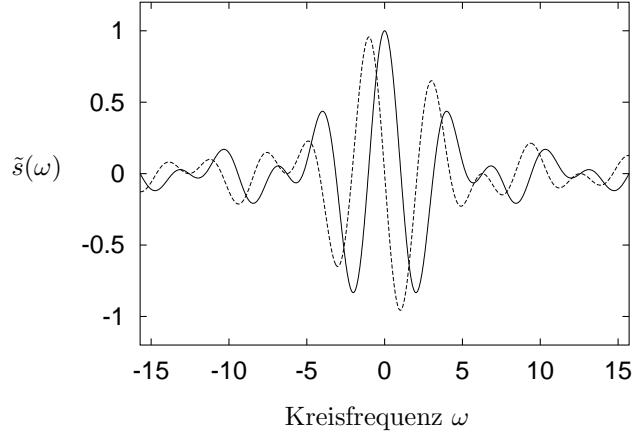


Abbildung 1.10.: Fourier-Transformierte eines Rechteckpulses mit $t_0 = 1$, $\tau = 1$ und $A = 1$; Durchgezogene Kurve: $\Re\{\tilde{s}(\omega)\}$; Gestrichelte Kurve: $\Im\{\tilde{s}(\omega)\}$

Einsetzen in (1.6.1) ergibt:

$$\tilde{s}(\omega) = A \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-i\omega t} dt = \left[-\frac{A}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{t_0}^{t_0+\tau} \quad (1.6.6)$$

Daraus folgt

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{iA}{\omega} \left[e^{-i\omega(t_0+\tau)} - e^{-i\omega t_0} \right] \quad (1.6.7)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist für ein Beispiel mit $t_0 = 1$, $\tau = 1$ und $A = 1$ in Abbildung 1.10 dargestellt.

Besonders interessant ist der Grenzfall, daß die Pulsbreite τ immer kleiner wird.

1.6. Spektrale Zerlegung

Um diesen Fall zu untersuchen, wird (1.6.7) durch Ausklammern zu

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{iA}{\omega} e^{-i\omega(t_0+\tau/2)} \left[e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2} \right] \quad (1.6.8)$$

umgeformt. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt der Zusammenhang

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1.6.9)$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der eckige Klammer in (1.6.8) ergibt sich

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{iA}{\omega} e^{-i\omega(t_0+\tau/2)} \left[2i \sin\left(-\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] \quad (1.6.10)$$

Dies kann in

$$\tilde{s}(\omega) = A\tau \cdot e^{-i\omega(t_0+\tau/2)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \quad (1.6.11)$$

umgewandelt werden. Der Betrag der ersten beiden Faktoren auf der rechten Seite ist unabhängig von ω . Der dritte Faktor geht für $\omega\tau \rightarrow 0$ gegen Eins und für $\omega\tau \rightarrow \pm\infty$ gegen Null. Das bedeutet, daß der Betrag $|\tilde{s}(\omega)|$ für ein festes τ mit $1/\omega$ abnimmt. Dieser Abnahme ist entsprechend dem sin-Term in (1.6.11) ein oszillierende Abhängigkeit von ω überlagert. Die Abnahme ist umso stärker je größer τ , also je breiter der Rechteckpuls, ist. Das bedeutet anschaulich, daß lange Pulse relativ geringe hochfrequente Anteile enthalten. Dagegen sind für relativ kurze Pulse auch für relativ große ω die Anteile noch bedeutend. Theoretisch kann man die Pulsdauer gegen Null ($\tau \rightarrow 0$) und gleichzeitig die Amplitude gegen unendlich ($A \rightarrow \infty$) gehen lassen, so daß die Pulsstärke $B = \tau A$ konstant bleibt. Für die Fourier-Transformierte ergibt sich für diesen Grenzfall:

$$\tilde{s}(\omega) \longrightarrow Be^{-i\omega t_0} \quad (1.6.12)$$

Das heißt, der unendlich kurze Puls mit endlicher Stärke besitzt Anteile in allen Frequenzbereichen. Der Betrag $\tilde{s}(\omega)$ ist für alle ω gleich groß.

Ein unendlich kurzer Puls mit der Stärke Eins wird mathematisch durch die Diracsche δ -Funktion ausgedrückt. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (1.6.13)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0) \quad (1.6.14)$$

unter der Voraussetzung, daß $g(t)$ eine stetige Funktion ist. Damit läßt sich für die Funktion

$$s(t) = B \delta(t - t_0) \quad (1.6.15)$$

1. Einleitung

die Fourier-Transformierte bestimmen. Einsetzen von (1.6.15) in (1.6.1) liefert

$$\tilde{s}(\omega) = B \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t - t_0) dt = Be^{-i\omega t_0} \quad (1.6.16)$$

Die formale Ergebnis für die δ -Funktion stimmt mit dem Grenzfall (1.6.12) überein. Die Rücktransformation ergibt nach (1.6.2):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} B \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \quad (1.6.17)$$

Vergleicht man dies mit (1.6.15) folgt eine weitere allgemeine Beziehung für die δ -Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = 2\pi \delta(y) \quad (1.6.18)$$

Dabei sind x und y reelle Zahlen. Mit Hilfe dieser Gleichung kann nun einfach die Fourier-Transformierte eines harmonischen Signals angegeben werden. Aus

$$s(t) = B e^{i\omega_0 t} \quad (1.6.19)$$

folgt mit (1.6.18)

$$\tilde{s}(\omega) = B \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi B \delta(\omega_0 - \omega) \quad (1.6.20)$$

Dies bedeutet, ein harmonisches Signal besitzt im Spektrum lediglich ein unendlich scharfen δ -Puls. In diesem Fall spricht man von einem diskreten Spektrum. Ist das Signal eine Überlagerung aus mehreren harmonischen Anteilen, zum Beispiel mit

$$s(t) = \sum_{n=1}^N B_n e^{i\omega_n t} \quad (1.6.21)$$

so wird die Transformierte zu

$$\tilde{s}(\omega) = 2\pi \sum_{n=1}^N B_n \delta(\omega_n - \omega) \quad (1.6.22)$$

Die Fourier-Tranformation (1.6.1) mit der Rücktransformation (1.6.2) kann als Erweiterung der Entwicklung in Fourier-Reihen angesehen werden. Damit lassen sich auch nichtperiodische Signale, die ein kontinuierliches Spektrum besitzen behandeln. Periodische Signale können immer als Reihe in der Form (1.6.21) dargestellt werden. Um die diskrete Form mit der integralen Darstellung zu verbinden ist die δ -Funktion notwendig. Analog zur Problematik des Massenpunkts im vorigen Abschnitt können damit diskrete Verteilungen auch in Integralform angegeben werden.

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

2.1. Herleitung der Wellengleichung

Ausgangspunkt für die Herleitung der Wellengleichung sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Sie werden hier als gegeben vorausgesetzt. Die folgenden drei Gleichungen werden benötigt:

a) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1.1)$$

b) Euler-Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p \quad (2.1.2)$$

c) Druck-Dichte-Beziehung

$$p = p(\rho) \quad (2.1.3)$$

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Massenerhaltung im Fluid. Sie gilt in der Form (2.1.1) falls keine Massenquellen oder Senken im Feld vorhanden sind. Die Euler-Gleichung (2.1.2) beschreibt die Impulserhaltung. Sie gilt so für ein reibungsfreies Fluid ohne Volumenkräfte. Das bedeutet, daß hier die Reibungs- und Volumenkräfte vernachlässigt werden. Beide Erhaltungsgleichungen (2.1.1) und (2.1.2) können durch eine Bilanzierung der Masse und des Impulses an einem Kontrollvolumen hergeleitet werden. Es ergeben sich dann zunächst integrale Beziehungen, aus denen die angegebenen Differentialgleichung abgeleitet werden können.

Die konkrete Form der Druck-Dichte-Beziehung (2.1.3) ist zunächst nicht von Bedeutung. Sie hängt davon ab, ob es sich bei dem Fluid um ein Gas oder eine Flüssigkeit handelt. Zunächst ist lediglich die Existenz der Beziehung mit der angegebenen Abhängigkeit bei der Herleitung der Wellengleichung vorauszusetzen. Der Druck darf nicht von weiteren Größen, wie zum Beispiel der Geschwindigkeit oder Geschwindigkeitsgradienten, abhängen. Er ist lediglich eine Funktion der momentanen Dichte. Damit sind auch Fälle, in denen mit Relaxation behaftete Prozesse – wie zum Beispiel Kondensation – das Verhältnis von Druck und Dichte beeinflussen, ausgeschlossen.

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

Zur Herleitung der linearen Wellengleichung werden die Gleichungen (2.1.1) bis (2.1.3) zunächst linearisiert. Dazu werden die Zerlegungen in Gleich- und Schwankungsanteile

$$p = p_0 + p' \quad (2.1.4)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.1.5)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \equiv \vec{v}' \quad (2.1.6)$$

eingesetzt. Anschließend werden alle Terme höherer Ordnung in den gestrichenen Größen vernachlässigt.

Bei der Zerlegung (2.1.6) wird vorausgesetzt, daß sich das Fluid im Ruhezustand $\vec{v}_0 = 0$ befindet und alle Bewegungen nur durch die Schwankungen verursacht werden. Im Prinzip könnte auf den Strich an dem Symbol \vec{v} verzichtet werden, da hier nur eine Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}'$ vorkommt und keine Verwechslungsgefahr besteht. Es wird dennoch \vec{v}' geschrieben, um zu verdeutlichen, daß es sich um eine Schwankungsgröße handelt.

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich nach dem Einsetzen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \operatorname{div}[(\rho_0 + \rho')\vec{v}'] = 0 \quad (2.1.7)$$

Die Größe ρ_0 ist eine Konstante. Ihre Zeitableitung verschwindet. Dies vereinfacht den ersten Term. In den eckigen Klammern steht die Summe $\rho_0\vec{v}' + \rho'\vec{v}'$. Wenn $|\rho'| \ll \rho_0$ gilt, dann ist der zweite Summand viel kleiner als der Erste. Entsprechend wird der zweite Summand einfach nicht mehr berücksichtigt. Es folgt die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0} \quad (2.1.8)$$

Dabei wurde die Konstante ρ_0 vor den div-Operator gezogen.

In Gleichung (2.1.2) tritt die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit auf. Allgemein gilt

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}' \quad (2.1.9)$$

Damit folgt aus der Euler-Gleichung (2.1.2) nach dem Einsetzen der Zerlegungen (2.1.4) bis (2.1.6) die Beziehung

$$(\rho_0 + \rho') \left[\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}' \right] = -\operatorname{grad}(p_0 + p') \quad (2.1.10)$$

Wie zuvor werden nur noch lineare Terme in den Schwankungsgrößen berücksichtigt. Alle Produkte von zwei gestrichenen Größen einschließlich deren Ableitungen – also auch die Produkte einer gestrichenen Größe mit der Ableitung einer gestrichenen Größe – werden einfach fortgelassen. Zusätzlich verschwindet auf der rechten Seite der Gradient der

2.1. Herleitung der Wellengleichung

Konstanten p_0 . Als linearisierte Euler-Gleichung ergibt sich

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\text{grad } p' \quad (2.1.11)$$

Da die Druck-Dichte-Beziehung (2.1.3) nicht konkret gegeben ist, kann sie nicht auf die gleiche Weise linearisiert werden. Stattdessen wird sie mit

$$p(\rho) = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0) \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) + \dots \quad (2.1.12)$$

in eine Taylor-Reihe entwickelt. Wird $p_0 = p(\rho_0)$ auf die linke Seite gebracht, liefert Einsetzen und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung die Beziehung

$$p' = \rho' \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \quad (2.1.13)$$

Die auftretende Ableitung wird mit

$$\frac{dp}{d\rho}(\rho_0) = c^2 \quad (2.1.14)$$

abgekürzt. Später wird sich zeigen, daß die so definierte Größe c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen – also die Schallgeschwindigkeit – darstellt. Die linearisierte Druck-Dichte-Beziehung lautet schließlich

$$p' = \rho' c^2 \quad (2.1.15)$$

Anschaulich ist dies eine Geradengleichung für die Tangente an die Kurve $p(\rho)$ an der Stelle ρ_0 . Die Steigung der Geraden ist durch den Faktor c^2 gegeben.

Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß man eigentlich c_0 statt c für die Schallgeschwindigkeit im Ausgangszustand schreiben müßte. Mit c sollte die Schallgeschwindigkeit bezeichnet werden, die eine Funktion der Dichte ρ ist. Der Wert im Ausgangszustand würde dann mit $c_0 = c(\rho_0)$ definiert werden können. Da fast immer nur die Schallgeschwindigkeit im Ausgangszustand benötigt wird und Schwankungen c' nie betrachtet werden, läßt man aus „Bequemlichkeit“ meistens den Index „0“ fort. Obwohl die Darstellung nicht wirklich konsistent ist, wird dies hier trotzdem so gehandhabt, auch um den Leser auf weiterführende Literatur vorzubereiten.

Die linearisierten Gleichungen (2.1.8), (2.1.11) und (2.1.15) stellen nur unter bestimmten Voraussetzungen gute Approximationen der nichtlinearen Beziehungen dar. In jedem Fall muß gelten, daß die Amplituden der Störungen klein gegen den Gleichanteil sind:

$$|p'| \ll p_0 ; \quad |\rho'| \ll \rho_0 \quad (2.1.16)$$

Dies ist jedoch nicht ausreichend, da auch Ableitungen der Schwankungsgrößen in den weggelassenen Termen höherer Ordnung vorkommen. Zum Beispiel tritt in dem

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

Ausdruck in der eckigen Klammer in Gleichung (2.1.10) als Term erster Ordnung die Zeitableitung $\partial \vec{v}' / \partial t$ auf, und das Produkt $\vec{v}' \cdot \text{grad } \vec{v}'$ ist ein quadratischer Term. Theoretisch ist es möglich, daß \vec{v}' räumlich stark schwankt, während die zeitlichen Änderungen relativ klein sind. Der Gradient von \vec{v}' könnte stellenweise so groß werden, das der quadratische Term gegenüber der Zeitableitung nicht zu vernachlässigen ist. Tatsächlich sind die zeitlichen und räumlichen Ableitungen nicht unabhängig voneinander, und eine solche Situation tritt normalerweise in Schallfeldern nicht auf. Um dies zu Begründen ist allerdings ein Wissen über die Lösungen der betrachteten Gleichungen nötig. Das kann an dieser Stelle noch nicht vorausgesetzt werden. Stattdessen werden hier weitere Bedingungen an die Schallfelder gestellt, die für eine gute Approximation notwendig sind.

Die charakteristische Länge der Störungen wird mit l und deren charakteristische Zeit mit τ bezeichnet. Die Länge l entspricht zum Beispiel dem typischen Abstand benachbarter Maxima. Entsprechend ist τ die typische Zeitspanne zwischen zwei maximalen Auslenkungen. Damit können die Größenordnung der Ableitungen der Schwankungsgrößen angegeben werden. Sei ψ' eine beliebige Schwankungsgröße (z.B. p , ρ' oder Komponente von \vec{v}') so ist die räumliche Ableitung $\partial \psi' / \partial x_i$ von der Größenordnung ψ'/l . Die Zeitableitung $\partial \psi' / \partial t$ ist von der Größenordnung ψ'/τ . Je dichter die Maxima beisammen liegen, desto größer sind die Ableitungen bei gleicher Amplitude.

Mit den charakteristischen Größen lassen sich nun Zusatzbedingungen formulieren, die erfüllt sein müssen, damit die linearisierten Gleichungen eine brauchbare Approximation darstellen. Die Bedingungen lauten:

$$|\vec{v}'| \ll \frac{l}{\tau} \quad (2.1.17)$$

$$|p'| \ll \rho_0 \left(\frac{l}{\tau} \right)^2 \quad (2.1.18)$$

$$\frac{|\rho'|}{\rho_0} \ll \frac{2c^2}{\rho_0 \left| \frac{d^2 p}{d \rho^2}(\rho_0) \right|} \quad (2.1.19)$$

Im Allgemeinen stellen die Bedingungen (2.1.17) bis (2.1.19) keine echte Einschränkung des Gültigkeitsbereichs der Linearisierung dar. Falls eine der Bedingungen verletzt ist, werden auch fast immer die Grundbedingungen (2.1.16) nicht erfüllt. Dies ist zum Beispiel in Fokuspunkten oder in der Nähe von lokalisierten Schallquellen der Fall.

Um die Wellengleichung für den Schalldruck zu erhalten wird die linearisierte Kontinuitätsgleichung (2.1.8) nach der Zeit abgeleitet. Es ergibt sich nach Vertauschen der Zeitableitung mit der Divergenz

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.1.20)$$

Die Divergenz wird von der linearisierten Euler-Gleichung (2.1.11) gebildet. Man erhält

$$\rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \operatorname{grad} p' = 0 \quad (2.1.21)$$

2.2. Einfache Lösungen

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, fallen die Terme mit \vec{v}' heraus. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (2.1.22)$$

Dabei ist der Laplace-Operator Δ als Abkürzung für die Kombination “div grad” eingeführt worden. Hier sei angemerkt, daß in der angelsächsischen Literatur die Schreibweise ∇^2 für den Laplace-Operator üblich ist.

Schließlich kann ρ' mit Hilfe der linearisierten Druck-Dichte-Beziehung (2.1.15) durch p' ersetzt werden. Man erhält die Wellengleichung für den Schalldruck

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0} \quad (2.1.23)$$

Diese beschreibt die Ausbreitung kleiner Störungen (im Sinne von (2.1.16)), wenn sich das Medium in Ruhe befindet.

2.2. Einfache Lösungen

Eine der einfachsten Lösungen der Wellengleichung stellt die eindimensionale Wellenausbreitung dar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß sich die Wellen in x_1 -Richtung ausbreiten. Alle Bewegungen, die durch die Welle verursacht werden sind in dieser Richtung: $v_2 = 0$, $v_3 = 0$. Die Lösung hat die allgemeine Form

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct) \quad (2.2.1)$$

f und g sind beliebige Funktionen, die jedoch mathematisch “gutartig” sein müssen. Dies sind zum Beispiel alle Funktionen die zweimal differenzierbar sind. Allerdings wird in einem späteren Abschnitt noch gezeigt, daß es durchaus sinnvoll ist, auch Funktionen mit Sprungstellen als Lösungen der Wellengleichung zuzulassen. Der Begriff “gutartig” wird dann in diesem Zusammenhang noch weiter erläutert.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Druckverteilung (2.2.1) auch tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist. Dazu werden die beiden Hilfsgrößen

$$\xi = \xi(x_1, t) = x_1 - ct \quad (2.2.2)$$

und

$$\eta = \eta(x_1, t) = x_1 + ct \quad (2.2.3)$$

eingeführt. Sie entsprechen den Argumenten der Funktionen f und g in dem Ausdruck (2.2.1). Es kann damit $f(x_1 - ct) = f(\xi)$ und $g(x_1 + ct) = g(\eta)$ geschrieben werden. Zur Überprüfung muß die Lösung zweimal nach der Zeit t und der Ortskoordinate x_1 differenziert werden. Die Ableitungen nach x_2 und x_3 sind gleich Null.

Zunächst wird nur der Ausdruck $f(x_1 - ct)$ betrachtet und die Zeitableitung gebildet. Zu bedenken ist, daß die Funktion f nur von einer Variablen abhängt. Mit der

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

Kettenregel folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f(x_1 - ct)\} = \frac{df}{d\xi}(x_1 - ct) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.2.4)$$

Die partielle Ableitung $\partial \xi / \partial t$ ist gleich $-c$. So kann

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f(x_1 - ct)\} = -c \frac{df}{d\xi}(x_1 - ct) \quad (2.2.5)$$

geschrieben werden. Nochmaliges Anwenden der Kettenregel ergibt für die zweite Zeitableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f(x_1 - ct)\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -c \frac{df}{d\xi}(x_1 - ct) \right\} = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}(x_1 - ct) \quad (2.2.6)$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{g(x_1 + ct)\} = c^2 \frac{d^2 g}{d\eta^2}(x_1 + ct) \quad (2.2.7)$$

Es folgt schließlich für die zweite Zeitableitung der Lösung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}(x_1 - ct) + \frac{d^2 g}{d\eta^2}(x_1 + ct) \quad (2.2.8)$$

Die räumlichen Ableitungen besitzen eine etwas einfachere Gestalt, da $\partial \xi / \partial x_1$ und $\partial \eta / \partial x_1$ beide gleich Eins sind. Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \{f(x_1 - ct)\} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}(x_1 - ct) \quad (2.2.9)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \{g(x_1 + ct)\} = \frac{d^2 g}{d\eta^2}(x_1 + ct) \quad (2.2.10)$$

Damit erhält man

$$\Delta p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}(x_1 - ct) + \frac{d^2 g}{d\eta^2}(x_1 + ct) \quad (2.2.11)$$

Setzt man die Zeitableitung (2.2.8) und die räumliche Ableitung (2.2.11) in die Wellengleichung (2.1.23) ein, zeigt sich sofort die Richtigkeit der Lösung unabhängig von der konkreten Form der Funktionen f und g .

Eine Lösung der Form (2.2.1) wird ebene Welle genannt. Der Ausdruck "eben" besagt, daß die Wellenfronten ebene Flächen sind, und hat nichts mit einer Lösung im 2D-Fall zu tun. Anschaulich ist die Lösung eine Überlagerung aus einfachen Bewegungen in und entgegen der x_1 -Richtung mit der Geschwindigkeit c . Die Abbildung 2.1 illustriert ein Beispiel für den Fall $g = 0$. Die Funktion f beschreibt einen Hügel, der sich zur Zeit $t = t_0$ an einer bestimmten Stelle befindet. Zum späteren Zeitpunkt

2.2. Einfache Lösungen

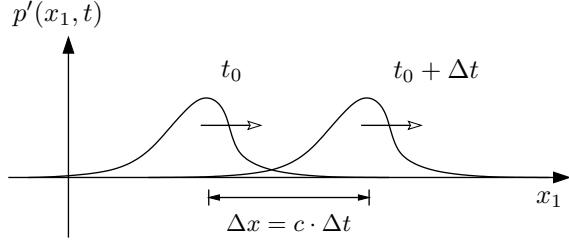


Abbildung 2.1.: Ausbreitung eines Pulses

$t_0 + \Delta t$ hat sich der Hügel um die Strecke $\Delta x = c \Delta t$ in x_1 -Richtung verschoben ohne sich zu verformen. Formal kann die Verschiebung der Druckverteilung mit der Zeit durch

$$p'(x_1, t_0 + \Delta t) = p'(x_1 - \Delta x, t_0) \quad (2.2.12)$$

ausgedrückt werden. Hier ist vereinfachend – entsprechend der obigen Annahme – der Druck mit $p'(x_1, t)$ nur von einer Ortskoordinate abhängig dargestellt. Im betrachteten Fall für $g = 0$ ist (2.2.12) gleichbedeutend mit

$$f(x_1 - c(t_0 + \Delta t)) = f((x_1 - \Delta x) - ct_0) \quad (2.2.13)$$

Hinreichende Bedingung für diese Gleichung ist

$$x_1 - c(t_0 + \Delta t) = (x_1 - \Delta x) - ct_0 \quad (2.2.14)$$

Und dies ist für $\Delta x = c\Delta t$ erfüllt.

Setzt man $f = 0$ statt $g = 0$, so ergibt sich aus (2.2.1) eine Bewegung entgegen der x_1 -Richtung. Beschreibt die Funktion g wieder einen Hügel, wie in Abbildung 2.1 dargestellt ist, dann verschiebt sich der Hügel mit der Zeit nach links statt nach rechts. Die Summe in (2.2.1) stellt somit eine Überlagerung von links- und rechtslaufenden Wellen dar. Alle möglichen Lösungen der Wellengleichung, die die genannte Bedingung der Eindimensionalität in x_1 -Richtung erfüllen ($v_2 = 0, v_3 = 0$), lassen sich in der Form (2.2.1) darstellen.

Dichte- und Schnelleverteilung

Aus einer gegebenen Druckverteilung $p'(\vec{x}, t)$ lässt sich die Dichteverteilung berechnen, indem durch c^2 dividiert wird:

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{p'(\vec{x}, t)}{c^2} \quad (2.2.15)$$

Für die betrachtete ebenen Welle der Form (2.2.1) ergibt sich

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} [f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct)] \quad (2.2.16)$$

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

Komplizierter ist die Berechnung der Schnelle \vec{v}' . In der ebenen Welle nach (2.2.1) ist nur die v_1 -Komponente von Null verschieden. Sie ist durch die linearisierte Kontinuitätsgleichung mit der Dichteverteilung verknüpft. Aus (2.1.8) folgt

$$\operatorname{div} \vec{v}' = \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (2.2.17)$$

Für die zeitliche Ableitung der Dichteverteilung (2.2.16) gilt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{df}{d\xi}(x_1 - ct) \cdot (-c) + \frac{dg}{d\eta}(x_1 + ct) \cdot c \right] \quad (2.2.18)$$

Daraus ergibt sich für die räumliche Ableitung der Schnelle

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho_0 c} \left[\frac{df}{d\xi}(x_1 - ct) - \frac{dg}{d\eta}(x_1 + ct) \right] \quad (2.2.19)$$

Die Integration dieser Gleichung über x_1 liefert schließlich die gesuchte Verteilung

$$v'_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho_0 c} [f(x_1 - ct) - g(x_1 + ct)] \quad (2.2.20)$$

Dabei ist eine mögliche Integrationskonstante gleich Null gesetzt worden, da ohne Schall bei $f = g = 0$ auch $\vec{v}' = 0$ sein muß.

Der Wellenwiderstand

Im Spezialfall, in dem sich nur eine Welle in x_1 -Richtung ausbreitet und $g = 0$ ist, erhält man aus (2.2.20) die Beziehung

$$v'_1 = \frac{1}{\rho_0 c} p' \quad (2.2.21)$$

Analog ergibt sich für reine Wellenausbreitung entgegen der x_1 -Richtung ($f = 0$)

$$v'_1 = -\frac{1}{\rho_0 c} p' \quad (2.2.22)$$

Das bedeutet, wenn nur Wellen in einer Richtung laufen, kann die Schnelleverteilung direkt aus einer gegebenen Druckverteilung nach Gleichung (2.2.21) oder (2.2.22) berechnet werden. Laufen jedoch Wellen in beide Richtungen, muß die Druckverteilung zuerst in die Anteile zerlegt werden, die in verschiedene Richtungen laufen. Das heißt, die Druckverteilung muß in der Form der Gleichung (2.2.1) vorliegen. Erst dann kann daraus nach (2.2.20) die Schnelle berechnet werden.

Der Faktor $\rho_0 c$ zwischen Druck und Schnelle wird akustische Impedanz oder auch Wellenwiderstand genannt. Der Wert ist kein reeller Widerstand, der mit Dissipation verbunden ist. Der Wellenwiderstand repräsentiert vielmehr den Widerstand den die Fluidelemente der oszillatorischen Bewegung in einer Welle entgegen bringen. Bei einem höherem Wellenwiderstand ist eine entsprechend höhere Druckamplitude notwendig, um in einer Welle die gleiche Schnelle und Teilchenauslenkung zu erreichen.

Die akustische Impedanz ist analog zum Spannungs-Strom-Verhältnis in der Elektrotechnik zu sehen. Dort wird der Wellenwiderstand von Leitungen in der Einheit Ohm angegeben.

2.3. Die Schallgeschwindigkeit

Harmonische Welle

In einer harmonischen Welle besitzen die Größen eine sinusförmige Verteilung in Raum und Zeit. Eine harmonischen Welle, die sich in x_1 -Richtung ausbreitet, ist zum Beispiel durch

$$p'(\vec{x}, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right) \right] \quad (2.2.23)$$

gegeben. Wenn man das Argument der Funktion f aus Gleichung (2.2.1) wieder mit

$$\xi = x_1 - ct \quad (2.2.24)$$

abkürzt, ist in dem gegebenen Beispiel die Funktion f als

$$f(\xi) = A \cos \left(-\frac{\omega}{c} \xi \right) \quad (2.2.25)$$

vorgegeben. Damit stellt (2.2.23) ein Spezialfall der Druckverteilung (2.2.1) mit $g = 0$ und f nach (2.2.25) dar. Im Allgemeinen wird, um eine kompaktere Darstellung zu erhalten die Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.2.26)$$

eingeführt. Sie entspricht dem Verhältnis aus Kreisfrequenz ω und Schallgeschwindigkeit c , welches gerade umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ ist. Die Wellenlänge ist der räumliche Abstand der Maxima in der Welle. Damit lässt sich die Druckverteilung (2.2.23) in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = A \cos (\omega t - kx_1) \quad (2.2.27)$$

schreiben. Äquivalent dazu ist die komplexe Darstellung der Welle mit

$$p'(\vec{x}, t) = \Re \left\{ A e^{i(\omega t - kx_1)} \right\} \quad (2.2.28)$$

Diese Form hat bei vielen Umformungen deutliche Vorteile gegenüber der reellen Schreibweise.

2.3. Die Schallgeschwindigkeit

Schallgeschwindigkeit in Luft

Für ein ideales Gas kann eine theoretische Druck-Dichte-Beziehung $p(\rho)$ zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit abgeleitet werden. Dies wurde bereits im 17. Jahrhundert von Newton versucht. Er betrachtete die Zustandsänderungen in den Schallwellen fälschlicherweise isotherm und nahm eine Druck-Dichte-Beziehung der Form

$$\frac{p}{\rho} = F(T) \Leftrightarrow p = \rho F(T) \quad (2.3.1)$$

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

an. Dabei ist $F(T)$ eine Funktion der Temperatur T . Dies ergibt für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \Big|_{T_0} = \frac{p_0}{\rho_0} = F(T_0) \quad (2.3.2)$$

Für Luft unter Normalbedingungen bei $T_0 = 293^\circ\text{K}$ (Grad Kelvin) erhält man damit $c \approx 290\text{ m/s}$. Dieses Ergebnis weicht deutlich von dem gemessenen Wert ab. Eine verbesserte Berechnung der Schallgeschwindigkeit wurde 1816 von Laplace gegeben. Er erkannte, daß die Schwankungen in den Schallwellen relativ schnell ablaufen und durch eine isentrope (adiabatische) Zuständänderung besser beschrieben werden. Das bedeutet, der Temperaturausgleich durch die Wärmeleitung in der Luft ist vernachlässigbar. Es gilt die Beziehung

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa \quad \leftrightarrow \quad p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^\kappa \quad (2.3.3)$$

wobei die Größe κ ("Kappa") den Adiabatenexponent bezeichnet. Dieser Exponent ist durch das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v gegeben: $\kappa = c_p/c_v$. Der Wert für Luft beträgt $\kappa = 1.4$. Um die Schallgeschwindigkeit zu berechnen, wird die Ableitung

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^{\kappa-1} = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (2.3.4)$$

benötigt. Damit folgt

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \Big|_{T_0} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \quad (2.3.5)$$

Für ein thermisch ideales Gas gilt

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (2.3.6)$$

mit der spezifischen Gaskonstante R . Damit ergibt sich schließlich

$$c^2 = \kappa RT_0 \quad (2.3.7)$$

Für Luft unter Normalbedingungen erhält man mit dieser Formel für die Schallgeschwindigkeit den Wert $c = 343\text{ m/s}$. Dies stimmt sehr gut mit den experimentellen Beobachtungen überein. Aus Gleichung (2.3.7) ist zusätzlich ersichtlich, daß die Schallgeschwindigkeit in einem Gas proportional zur Wurzel der Temperatur ist.

Schallgeschwindigkeit in Wasser

Die theoretische Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Wasser ist im Vergleich zum idealen Gas ungleich komplizierter. In Flüssigkeiten ist man in erster Linie auf eine experimentelle Bestimmung der Schallgeschwindigkeit angewiesen. Man verwendet häufig den Ansatz

$$c^2 = \frac{K}{\rho_0} \quad (2.3.8)$$

2.4. Einfluß der Schwerkraft

Dabei ist K das (adiabatische) Kompressionsmodul des Wassers. Allerdings ist es relativ schwierig, K direkt zu messen. Wie komplex die Vorgänge im Wasser sind wird deutlich, wenn man die Parameter betrachtet, von denen die Schallgeschwindigkeit abhängt. Dies sind die Temperatur, der Druck, der Salzgehalt und die Menge an gelösten Gasen. Dagegen steht bei idealen Gasen mit der Temperatur nur ein Parameter.

2.4. Einfluß der Schwerkraft

In schweren Flüssigkeiten – wie Wasser – ist die Druckzunahme mit der Tiefe so groß, dass eine Aufspaltung des Drucks in einen Gleichanteil, der räumlich und zeitlich konstant ist, und einen kleinen Schwankungsanteil nicht möglich ist. So nimmt der Druck in Wasser mit jedem Meter Tiefe um 100 mbar zu. Der Schwankungsanteil würde diese hydrostatische Druckänderung mit enthalten. Bei einem Ruhedruck von 1000 mbar wäre selbst in geringer Tiefe die Schwankung nicht mehr klein gegenüber dem Ruhedruck. Sinnvollerweise wird ein ortsabhängiger Gleichanteil $p_0(\vec{x})$ eingeführt. Die Aufspaltung des Drucks ist damit durch

$$p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}) + p'(\vec{x}, t) \quad (2.4.1)$$

gegeben. Der Gleichanteil muß die hydrostatische Beziehung

$$\operatorname{grad} p_0 = \rho_0 \vec{g} \quad (2.4.2)$$

erfüllen. Der Vektor \vec{g} bezeichnet die Schwerkraftbeschleunigung. Die Dichte ρ_0 wird dabei als räumlich konstant angenommen. Dies ist erlaubt, da die Kompressibilität des Wassers relativ gering ist, und sich die Dichte mit der Tiefe nur unwesentlich ändert.

In Abschnitt 2.1 wurde bei der Herleitung der Wellengleichung die Schwerkraft vernachlässigt. Es wurde von der Euler-Gleichung ohne Volumenkräfte ausgegangen. Um die hydrostatische Druckzunahme mit der Tiefe zu erfassen muß nun von der Euler-Gleichung mit Schwerkraftterm

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \vec{g} \quad (2.4.3)$$

ausgegangen werden. Im weiteren wird analog zu Abschnitt 2.1 vorgegangen. Einsetzen der Aufspaltungen ergibt

$$(\rho_0 + \rho') \frac{D\vec{v}'}{Dt} = -\operatorname{grad} (p_0 + p') + (\rho_0 + \rho') \vec{g} \quad (2.4.4)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.4.2) folgt nach dem Weglassen der Terme höherer Ordnung die linearisierte Euler-Gleichung bei Schwerkraft

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\operatorname{grad} p' + \rho' \vec{g} \quad (2.4.5)$$

2. Die Wellengleichung der linearen Akustik

Im Vergleich zum Resultat aus Abschnitt 2.1 ergibt sich ein zusätzlicher Term $\rho' \vec{g}$ auf der rechten Seite.

Die linearisierte Kontinuitätsgleichung gilt weiterhin in der bisherigen Form auch bei Schwerkraft. Würde man aus Gleichung (2.4.5) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung eine Wellengleichung ableiten, so würde man in dieser neuen Wellengleichung ebenfalls zusätzliche Terme erhalten. Die Wellengleichung wäre komplexer, und die bisher betrachteten Lösungen wären nicht mehr gültig.

Durch eine Abschätzung kann gezeigt werden, daß der $\rho' \vec{g}$ -Term, obwohl er von erster Ordnung ist, unter bestimmten Bedingungen gegenüber den anderen Ausdrücken vernachlässigt werden kann. Dies wird an einer ebenen Welle untersucht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, die Wellen breite sich in x_1 -Richtung aus. Der Druck ist durch

$$p'(\vec{x}, t) = A \cos(\omega t - kx_1) \quad (2.4.6)$$

gegeben. Für den in Gleichung (2.4.5) auftretenden Druckgradienten gilt in diesem Fall

$$\text{grad } p' = \begin{pmatrix} \partial p'/\partial x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

Um den Gradienten abzuschätzen, wird die Ableitung von (2.4.6) nach x_1 gebildet:

$$\frac{\partial p'}{\partial x_1} = -A k \sin(\omega t - kx_1) \quad (2.4.8)$$

Damit folgt für den maximalen Wert in der Welle

$$|\text{grad } p'|_{\max} = A k = A \frac{\omega}{c} = A \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4.9)$$

Eine entsprechende Berechnung wird für den Schwerkraftterm durchgeführt. Hier ergibt sich in der vorgegebenen Welle

$$|\rho' \vec{g}|_{\max} = \left| \frac{p'}{c^2} \vec{g} \right|_{\max} = \frac{A}{c^2} g \quad (2.4.10)$$

mit $g = |\vec{g}|$. Das Verhältnis der Maxima ist erwartungsgemäß unabhängig von der Amplitude A . Es wird durch die Wellenlänge, die Schallgeschwindigkeit und die Erdbeschleunigung bestimmt. Es gilt

$$\frac{|\rho' \vec{g}|_{\max}}{|\text{grad } p'|_{\max}} = \frac{\lambda g}{2\pi c^2} \quad (2.4.11)$$

Für Wasser mit $c = 1450 \text{ m/s}$ ergibt sich bei 1 m Wellenlänge ein Verhältnis von

$$\frac{\lambda g}{2\pi c^2} \approx 10^{-6} \quad (2.4.12)$$

2.4. Einfluß der Schwerkraft

Damit wird klar, daß der Schwerkraftterm in diesem Fall, ohne einen großen Fehler zu erhalten, vernachlässigt werden kann. Sowohl für Wasser als auch für Luft mit $c = 340 \text{ m/s}$ ist der Schwerkraftterm erst für sehr große Wellenlängen – weit außerhalb des hörbaren Bereichs – von Bedeutung. In diesem Fall ändert sich die Wellenausbreitung und es ergeben sich Gravitationswellen. Das Ergebnis für die ebene Welle läßt sich auch auf andere Lösungen der Wellengleichung übertragen. Für alle Berechnungen von Schall in Luft oder Wasser in technischen Anwendungen kann die Wellengleichung unter Vernachlässigung der Schwerkraft angenommen werden. Im Wasser muß lediglich bedacht werden, daß der Gleichanteil des Drucks p_0 ortsabhängig ist. Dies bedeutet jedoch für die meisten praktischen Berechnungen keinen Unterschied zum bisherigen Fall. Die in Abschnitt 2.2 angegebenen Lösungen gelten weiterhin.

3. Ebene Wellen

3.1. Eindimensionale Schallwellen im Rohr

Die in Abschnitt 2.2 als einfache Lösung der Wellengleichung vorgestellte ebene Welle erstreckt sich über den gesamten Raum. Sie scheint damit nicht zur Beschreibung praktischer Fälle, bei denen Oberflächen und Wände das Ausbreitungsgebiet begrenzen, geeignet zu sein. Es zeigt sich jedoch, daß die ebene Welle die Randbedingungen für den Fall eines geraden Rohres mit festen, undurchlässigen Wänden erfüllt und damit auch eine Lösung im Rohr darstellt. Entsprechend der Abbildung 3.1 wird angenommen,

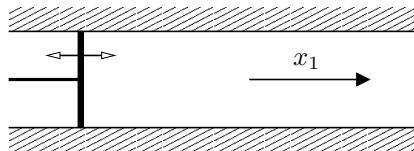


Abbildung 3.1.: Ausbreitung eines Pulses

daß die Rohrachse in x_1 -Richtung zeigt. An der Rohrwand muß die Normalkomponente der Schnelle verschwinden. Die Fluidteilchen dürfen sich nicht in oder aus der festen Oberfläche bewegen. Es gilt die Randbedingung

$$v_2 = v_3 = 0 \quad (3.1.1)$$

In einer ebenen Welle in x_1 -Richtung ist der Druck in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct) \quad (3.1.2)$$

gegeben. Für die Schnelle ergibt sich bei dieser Lösung nur eine v_1 -Komponente, und Beziehung (3.1.1) ist überall und damit natürlich auch an der Rohrwand erfüllt.

Neben der ebenen Welle existieren noch andere Lösungen, die die Randbedingung (3.1.1) erfüllen, aber im Rohrinneren v_2 und v_3 Komponenten besitzen. Diese Lösungen werden in einem späteren Kapitel besprochen. Hier soll zunächst nur der eindimensionale Fall betrachtet werden, in dem alle Größen nur von x_1 abhängen und nur die v_1 -Komponente auftritt. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird im folgenden

$$\begin{array}{ll} x_1 & \text{als } x \\ v'_1 & \text{als } u' \end{array} \quad (3.1.3)$$

3.1. Eindimensionale Schallwellen im Rohr

geschrieben.

Breitet sich eine Welle in x -Richtung aus, so ist der Druck und die Schnelle mit der neuen Schreibweise in der Form

$$p'(x, t) = f(x - ct) \quad (3.1.4)$$

$$u'(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} f(x - ct) \quad (3.1.5)$$

darstellbar. Die Ausbreitung der Welle kann man sich in der x, t -Ebene veranschaulichen. Die Größen p' und u' sind entlang der Geraden, die durch $x - ct = \text{const}$ gegeben sind, konstant. Dies verdeutlicht die pseudo-dreidimensionalen Darstellung von u' über der x, t -Ebene anhand einer Beispielwelle in Abbildung 3.2. Die Geraden $x - ct = \text{const}$ verlaufen schräg in der x, t -Ebene.

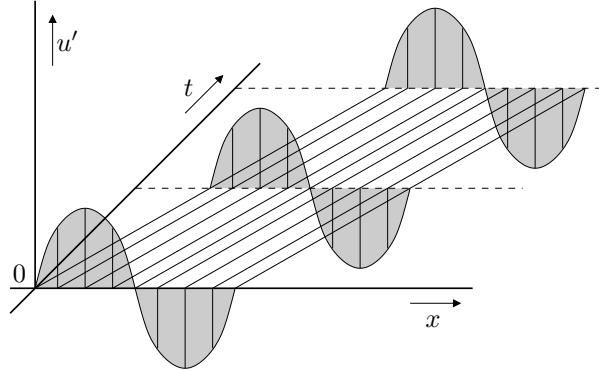


Abbildung 3.2.: Ausbreitung einer Welle in Raum und Zeit

Anregung der Welle

Die Lösung (3.1.4) und (3.1.5) beschreibt eine Welle in einen nach beiden Seiten unendlich ausgedehnten Rohr. Die Frage bleibt, wie eine derartige Welle in einem Rohr entstehen kann. Eine Möglichkeit ist – wie in der Abbildung 3.1 dargestellt – ein Kolben mit fester und undurchlässiger Oberfläche, der das Rohr nach einer Seite hin abschließt. Wird der Kolben bewegt, so muß das Fluid an der Kolbenoberfläche der Auslenkung folgen. Bezeichnet man die Position des Kolbens mit x_k und seine Geschwindigkeit mit u_k , so ist die Randbedingung am Kolben durch

$$u'(x_k(t), t) = u_k(t) \quad (3.1.6)$$

gegeben. Das heißt, die Schnelle u' am Ort des Kolbens stimmt mit der Kolbengeschwindigkeit überein. Dadurch ist die Lösung in dem Rohr festgelegt.

3. Ebene Wellen

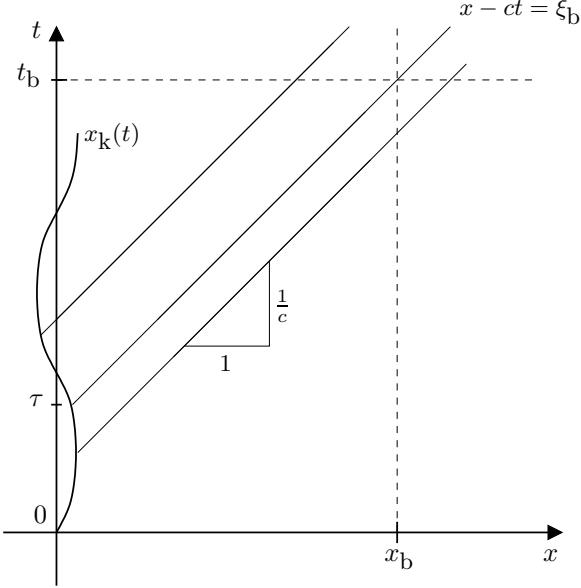


Abbildung 3.3.: Zur Erläuterung der retardierten Zeit τ

Dies soll an einem Beispiel mit harmonisch bewegtem Kolben verdeutlicht werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, die mittlere Kolbenposition liegt bei $x = 0$. Der Ort des Kolbens wird durch

$$x_k(t) = \varepsilon \sin(\omega t) \quad (3.1.7)$$

gegeben. Daraus folgt für die Kolbengeschwindigkeit

$$u_k(t) = \varepsilon \omega \cos(\omega t) \quad (3.1.8)$$

Für die Schnelle zur Zeit t_b am Ort x_b gilt

$$u'(x_b, t_b) = u_k(\tau) = \varepsilon \omega \cos(\omega \tau) \quad (3.1.9)$$

Dabei ist τ eine retardierte Zeit, für die

$$(t_b - \tau) c = x_b - x_k(\tau) = x_b - \varepsilon \sin(\omega \tau) \quad (3.1.10)$$

gelten muß. Die retardierte Zeit kann man sich in der x, t -Ebene veranschaulichen, wie es in Abbildung 3.3 dargestellt ist. τ ist sozusagen die Ursprungszeit der Störung, die zur Zeit t_b am Ort x_b angekommen ist. $(t_b - \tau)$ ist die Laufzeit der Störung von der Entstehung bis zum Erreichen des Beobachters. $(x_b - x_k(\tau))$ entspricht dem Abstand von dem Ursprungsort bis zum Beobachter. Durch die Gleichung

$$x - ct = x_b - c t_b \equiv \xi_b \quad (3.1.11)$$

3.1. Eindimensionale Schallwellen im Rohr

wird eine Gerade in der x, t -Ebene festgelegt, die durch den Punkt (x_b, t_b) läuft. Die Steigung der Geraden ist $1/c$. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve $x_k(t)$ liegt bei der durch Gleichung (3.1.10) festgelegten retardierten Zeit τ . Entlang der Geraden sind die Werte für u' und p' konstant, falls wie angenommen sich nur eine Welle in x -Richtung ausbreitet.

Die Lösung für u' und damit auch für p' ist mit Gleichung (3.1.9) und (3.1.10) nur implizit gegeben, da sich Gleichung (3.1.10) nicht nach τ auflösen lässt. Um u' in einer geschlossenen Form angeben zu können, wird die Randbedingung (3.1.6) vereinfacht. Die Geschwindigkeit des Kolbens wird nicht an der aktuellen Position des Kolbens vorgegeben, sondern an seiner mittleren Position $x = 0$. Es gilt statt (3.1.6) die Randbedingung

$$u'(0, t) = u_k(t) \quad (3.1.12)$$

Für die retardierte Zeit folgt damit

$$(t_b - \tau) c = x_b \quad (3.1.13)$$

Anschaulich bedeutet dies, daß man den Schnittpunkt der Geraden $x - ct = \xi_b$ mit der t -Achse statt mit der Kurve $x_k(t)$ nimmt, um τ und damit u' zu bestimmen. Im Gegensatz zu (3.1.10) kann (3.1.13) nach τ aufgelöst werden:

$$\tau = t_b - \frac{x_b}{c} \quad (3.1.14)$$

Einsetzen in (3.1.9) ergibt

$$u'(x_b, t_b) = u_k \left(t_b - \frac{x_b}{c} \right) = \varepsilon \omega \cos(\omega t_b - kx_b) \quad (3.1.15)$$

Dies ist die typische Formulierung für eine sinusförmige Welle. Sie ergibt sich allerdings nur, wenn die vereinfachte Randbedingung (3.1.12) verwendet wird. Mit der exakten Randbedingung (3.1.6) ergibt sich aus der sinusförmigen Kolbenbewegung keine sinusförmige sondern eine verzerrte Welle. Die Formen der Lösungen sind in der Abbildung 3.4 gegenübergestellt. Die durchgezogene Linie ist eine Lösung, die – für ein willkürlich ausgewähltes ε – aus der exakten Randbedingung folgt. Die gestrichelte Kurve zeigt die exakte Sinuswelle, die sich aus der vereinfachten Randbedingung ergibt.

Im folgenden wird die aus Gleichung (3.1.10) bestimmte retardierte Zeit mit τ_{exakt} bezeichnet. Umformen von (3.1.10) liefert

$$\tau_{\text{exakt}} = t_b - \frac{1}{c} x_b + \frac{\varepsilon}{c} \sin(\omega \tau_{\text{exakt}}) \quad (3.1.16)$$

Entsprechend wird die aus Gleichung (3.1.14) bestimmte retardierte Zeit mit τ_{approx} bezeichnet. Für die Differenz der beiden Werte ergibt sich

$$\Delta\tau \equiv \tau_{\text{exakt}} - \tau_{\text{approx}} = \frac{\varepsilon}{c} \sin(\omega \tau_{\text{exakt}}) \quad (3.1.17)$$

3. Ebene Wellen

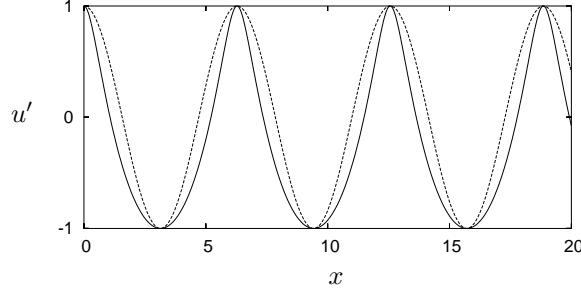


Abbildung 3.4.: Vergleich der Lösung für unterschiedliche Randbedingungen; Gestrichelte Kurve: Sinusförmige Lösung nach vereinfachter Randbedingung; Durchgezogene Kurve: Kolben mit endlicher Auslenkung nach (3.1.9) und (3.1.10) bei $\varepsilon/\lambda = 0.08$

Ihr Betrag lässt sich mit

$$|\Delta\tau| \leq \frac{\varepsilon}{c} \quad (3.1.18)$$

abschätzen. Bei einer Variation von τ bleibt der Unterschied in u' gemäß (3.1.9) klein, falls die Bedingung

$$\omega |\Delta\tau| \ll 2\pi \quad (3.1.19)$$

erfüllt ist. Denn die Änderung des Terms $\cos(\omega\tau)$ durch eine Verschiebung von τ um $\Delta\tau$ ist in diesem Fall vernachlässigbar. Hinreichend für (3.1.19) ist nach (3.1.18) die Bedingung

$$\omega \frac{\varepsilon}{c} \ll 2\pi \quad (3.1.20)$$

Diese ist äquivalent zu

$$k\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda}\varepsilon \ll 2\pi \quad (3.1.21)$$

oder einfach

$$\varepsilon \ll \lambda \quad (3.1.22)$$

Die Vereinfachung der Randbedingung ist demnach erlaubt, falls die maximale Auslenkung des Kollens klein gegenüber der Wellenlänge ist. In diesem Fall ergibt eine sinusförmige Kolbenbewegung in sehr guter Näherung eine sinusförmige Welle. Bei größeren Auslenkungen tritt eine deutliche Verzerrung auf, wie sie in der Abbildung 3.4 zu sehen ist. Wenn sich der Kolben nicht rein sinusförmig bewegt, sind die harmonischen Anteile mit den höchsten Frequenzen – und den zugehörigen kleinsten Wellenlängen – entscheidend. Die Auslenkung muß klein gegenüber diesen Wellenlängen sein, damit die vereinfachte Randbedingung eine brauchbare Approximation darstellt.

3.1. Eindimensionale Schallwellen im Rohr

Wellenausbreitung bei Strömung

Bisher wurde immer von einem ruhendem Medium ausgegangen. Jedoch können sich auch in einem durchströmten Rohr Wellen ausbreiten. Man kann sich vorstellen, der Kolben in Abbildung 3.1 ist porös, und das Rohr wird durchströmt. Durch die Bewegung des Kolbens wird der Strömung eine wellenförmige Störung überlagert. Hier soll der einfachste Fall einer eindimensionalen Strömung mit räumlich und zeitlich konstanter Geschwindigkeit u_0 betrachtet werden. Das bedeutet, es wird von einem ebenen Geschwindigkeitsprofil in dem Rohr ausgegangen. Dies stellt eine triviale Lösung der Euler-Gleichung dar. Die Reibung ist vernachlässigt und das Medium haftet nicht an der Wand.

Die in Abschnitt 2.1 hergeleitete Wellengleichung gilt nur für den Fall, daß das Medium ruht. Um die Wellenausbreitung bei Strömung behandeln zu können, müßte die Wellengleichung entsprechend erweitert werden. Dies ist in der Tat möglich. Jedoch kann bei der gegebenen einfachen Strömung mit konstanter Geschwindigkeit die Wellenausbreitung auch noch ohne erweiterte Wellengleichung angegeben werden. Dazu wird die Situation in dem mitbewegten Bezugssystem betrachtet. In diesem Bezugssystem ruht das Medium, und die Wellengleichung in der Form (2.1.23) gilt. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist bekannt. Sie muß nur in das ruhende Bezugssystem übertragen werden.

Die Koordinate im mitbewegten System wird mit x_B bezeichnet. Entsprechend ist x_R die Koordinate im ruhenden System. Allgemein bezeichnet der Index B im folgenden die Größen im mitbewegten System und R die im ruhenden System. Alle Schwankungsgrößen p' , ρ' und u' sind unabhängig vom Bezugssystem. Dies gilt auch für die Geschwindigkeit u' , da es sich um eine Geschwindigkeitsdifferenz handelt. Die absolute Geschwindigkeit ist selbstverständlich vom Bezugssystem abhängig. Es gilt

$$u_B = u' \quad (3.1.23)$$

$$u_R = u_0 + u' \quad (3.1.24)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß die Koordinaten der beiden Systeme zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen. Die Transformation zwischen den Koordinatensystemen wird dann durch die Gleichungen

$$x_R = x_B + u_0 t \quad (3.1.25)$$

$$x_B = x_R - u_0 t \quad (3.1.26)$$

beschrieben. Die allgemeine Lösung im mitbewegten System ist durch

$$p'_B(x_B, t) = f(x_B - ct) + g(x_B + ct) \quad (3.1.27)$$

gegeben. Der Druck p' ist unabhängig vom Bezugssystem. Das heißt, p'_B entspricht p'_R . Es müssen nur die Werte an den richtigen Koordinaten gleichgesetzt werden. Aus (3.1.26) folgt

$$p'_R(x_R, t) = p'_B(x_B, t) = p'_B(x_R - u_0 t, t) \quad (3.1.28)$$

3. Ebene Wellen

Damit wird aus der allgemeinen Lösung (3.1.27) im ruhenden System der Ausdruck

$$p'_R(x_R, t) = f(x_R - (c + u_0)t) + g(x_R + (c - u_0)t) \quad (3.1.29)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt eine Ausbreitung mit der Geschwindigkeit $c + u_0$ in positive x -Richtung. Der zweite Term stellt eine Ausbreitung mit $c - u_0$ in negative x -Richtung dar. Die hin- und herlaufenden Wellen besitzen nun eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Bei $u_0 = \pm c$ kann sogar der Fall eintreten, daß eine Welle sich überhaupt nicht bewegt.

Der Ausdruck in (3.1.29) beschreibt eine konvektierte Schallwelle, wie man sie in dem einfachen Fall anschaulich auch erwarten würde. Die formale Herleitung dieser Lösung wurde hier an diesem einfachen Beispiel vorgestellt, weil die Methode der Transformation des Bezugssystems in den folgenden Abschnitten noch öfters angewendet wird.

3.2. Energie in ebenen Wellen

Bei der Anregung der Schallwellen durch einen Kolben wird Arbeit an dem Fluid geleistet. Das bedeutet, durch die Schallwelle wird Energie vom Kolben in das Fluid transferiert. Diese Energie wird von der Welle abtransportiert. Im folgenden soll die Verteilung der Energie in Schallwellen analysiert werden. Dazu wird ein Fluidelement mit dem Volumen V und der Masse M betrachtet. Es wird angenommen, das Medium sei in Ruhe und alle Bewegungen entstehen nur durch die Schallwelle. Dann besitzt das betrachtete Fluidelement bei einer Bewegung mit der Geschwindigkeit u' die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} Mu'^2 \quad (3.2.1)$$

Teilt man diese Gleichung durch das Volumen ergibt sich eine spezifische kinetische Energie mit

$$\frac{E_{\text{kin}}}{V} = \frac{1}{2} \rho u'^2 = \frac{1}{2} (\rho_0 + \rho') u'^2 \quad (3.2.2)$$

Im akustischen Sinn können dann die Terme höherer Ordnung fortgelassen werden. Man erhält für die kinetische Energie pro Volumen

$$e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 \quad (3.2.3)$$

Dies ist eine quadratische Größe. Die vernachlässigten Terme sind nun von dritter Ordnung und nicht wie bisher immer von zweiter Ordnung.

Das Fluidelement wird durch die Schallwelle beschleunigt und erhält die angegebene kinetische Energie. Zusätzlich wird durch die Schallwelle auch Druckarbeit an dem Fluidelement geleistet. Bei Durchlaufen eines Druckpulses wird kurzzeitig Energie durch die Kompression des Fluidelements gespeichert. Ist der Puls fort, stellt sich wieder der Ausgangszustand ein. Bei der Kompression ergibt sich eine Änderung der

3.2. Energie in ebenen Wellen

inneren Energie E_{innere} in dem Fluidelement. Es gilt nach den Regeln der Thermodynamik

$$dE_{\text{innere}} = T dS - p dV \quad (3.2.4)$$

Dabei ist T die Temperatur und S die Entropie. In der Schallwelle spielt Wärmeleitung keine Rolle, und alle Vorgänge können isentrop $dS = 0$ betrachtet werden. Das bedeutet, die Änderung der innere Energie ist durch das Differential $-p dV$ gegeben. Allerdings ist darin die gesamte Änderung der innere Energie in dem Fluidelement und nicht nur die durch die Schallwelle geleistete Arbeit enthalten. Die Arbeit der Schallwelle wird durch das Differential $-p' dV$ beschrieben.

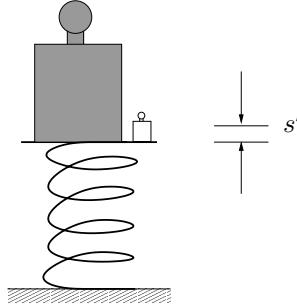


Abbildung 3.5.: Zur Erklärung der potentiellen Energie in einer Störung

Zur Veranschaulichung der von der Schallwelle geleisteten Arbeit wird der Vorgang am Fluidelement einem einfachen Masse-Feder-System gegenübergestellt, wie es in Abbildung 3.5 skizziert ist. Die inneren Energie in dem Fluidelement lässt sich mit der potentiellen Energie in der Feder vergleichen. Die Feder ist durch eine Kraft F_0 vorgespannt, die durch das große Gewicht ausgeübt wird. Dies entspricht der Kompression des Fluidelementes durch den Ruhedruck p_0 . Durch die Schallwelle wird das Fluidelement etwas weiter komprimiert oder expandiert. Dem entspricht bei der Feder eine kleine Störung durch ein winziges Zusatzgewicht – wie in der Skizze – oder etwa einen leichten Daumendruck auf das große Gewicht. Durch die Störung wird eine zusätzliche Kraft F' ausgeübt, die eine kleine Auslenkung s' von der Ruheposition bewirkt. Dabei wird von der Störung – dem Daumendruck – die Arbeit $\{\int F' ds\}$ geleistet. Insgesamt ändert sich die potentielle Energie in der Feder jedoch um den Wert $\{\int (F_0 + F') ds\}$. Bei dem Absenken verringert sich die potentielle Energie des großen Gewichtes, und die Energiedifferenz geht ebenfalls in die Feder über. Dem entspricht ein Umschichten von innerer Energie zwischen benachbarten Fluidelementen durch die Schallwelle.

Will man die potentielle Energie der Störung definieren, ist es sinnvoll nur die Arbeit durch die Störung und nicht die gesamte Änderung der potentielle Energie der Feder zu berücksichtigen. Wenn man leicht an dem Gewicht zieht statt zu drücken, sinkt die potentielle Energie der Feder sogar, obwohl man Arbeit leistet. Das Gesamtsystem aus dem großen Gewicht und der Feder hat jedoch potentielle Energie gewonnen.

3. Ebene Wellen

Analog wird hier für die Arbeit, die durch die Störung an dem Fluidelement geleistet wird, nur der Anteil durch die Druckstörung p' (entsprechend zu F' bei der Feder) berücksichtigt. Im weiteren wird dieser Anteil der inneren Energie im Fluidelement als potentielle Energie bezeichnet. Es ergibt sich

$$E_{\text{pot}} = - \int_{V_0}^{V_1} p' dV \quad (3.2.5)$$

Dabei ist V_0 das Volumen des Fluidelementes im Ruhezustand $p = p_0$, und V_1 ist das durch die Welle vergrößert oder verkleinerte Volumen. Um aus (3.2.5) eine spezifische Energie zu erhalten, wird die Integrationsvariable V durch die Dichte ρ substituiert. Die Masse $M = \rho V$ im Fluidelement ist konstant. Daraus folgt für das Differential

$$\rho_0 dV + V_0 d\rho = 0 \quad \leftrightarrow \quad dV = -\frac{V_0}{\rho_0} d\rho \quad (3.2.6)$$

Für das Integral erhält man

$$E_{\text{pot}} = \frac{V_0}{\rho_0} \int_{\rho(V_0)}^{\rho(V_1)} p' d\rho = \frac{V_0 c^2}{\rho_0} \int_{\rho(V_0)}^{\rho(V_1)} \rho' d\rho \quad (3.2.7)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt $p' = c^2 \rho'$ ausgenutzt. Zweckmäßigerweise wird ρ' im Integranden durch $\rho - \rho_0$ ersetzt. Dann kann die Größe ρ' zur Umformung der oberen Integrationsgrenze neu definiert werden, Beträgt das Volumen V_0 so ist die Dichte ρ_0 . Einem geringfügig geänderten Volumen V_1 kann eine Dichte $\rho_0 + \rho' = \rho(V_1)$ zugeordnet werden. Damit kann

$$E_{\text{pot}} = \frac{V_0 c^2}{\rho_0} \int_{\rho_0}^{\rho_0 + \rho'} (\rho - \rho_0) d\rho \quad (3.2.8)$$

geschrieben werden. Die Auflösung des Integrals bringt

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{V_0 c^2}{\rho_0} [(\rho - \rho_0)^2]_{\rho_0}^{\rho_0 + \rho'} = \frac{1}{2} \frac{V_0 c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.2.9)$$

Die spezifische potentielle Energie e_{pot} ergibt sich nach Division durch das Volumen. Statt durch V wird durch V_0 dividiert. Die dadurch resultierende Abweichung ist wieder von höherer Ordnung und wird vernachlässigt. Es folgt

$$e_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.2.10)$$

Schließlich lässt sich die gesamte akustische Energie pro Volumen mit $e_a = e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}$ zusammenfassen. Man erhält

$$e_a = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.2.11)$$

Damit ist die akustische Energie e_a als Funktion der Schwankungsgrößen u' und ρ' ausgedrückt.

Erhaltung der Energie

In dem Feld gilt selbstverständlich die Erhaltung der Energie. Die akustische Energie e_a stellt nur einen kleinen Teil der gesamten Energie dar. Jedoch lässt sich für diesen Teil eine separate Erhaltungsgleichung ableiten.

Zur Herleitung der Erhaltungsgleichung werden die linearisierte Kontinuitätsgleichung und die linearisierte Euler-Gleichung benötigt. In Abschnitt 2.1 wurden diese Gleichungen für den dreidimensionalen Fall abgeleitet. Hier werden lediglich die vereinfachten Gleichungen für eine Dimension benötigt. Die linearisierte Kontinuitätsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.2.12)$$

Die Euler-Gleichung ist einfach durch

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (3.2.13)$$

gegeben. Bildet man die Zeitableitung der kinetischen Energie ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \{e_{\text{kin}}\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 \right\} = \rho_0 u' \frac{\partial u'}{\partial t} = -u' \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (3.2.14)$$

Im letzten Schritt wurde dabei die linearisierte Euler-Gleichung (3.2.13) verwendet. Für die Ableitung der potentiellen Energie folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \{e_{\text{pot}}\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \right\} = \frac{c^2}{\rho_0} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -c^2 \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (3.2.15)$$

Hier wurde von der linearisierten Kontinuitätsgleichung (3.2.12) Gebrauch gemacht. Die Addition von (3.2.14) und (3.2.15) liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \{e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}\} = -u' \frac{\partial p'}{\partial x} - c^2 \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} = -u' \frac{\partial p'}{\partial x} - p' \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \{p' u'\} \quad (3.2.16)$$

Dies lässt sich kürzer als

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{p' u'\} = 0 \quad (3.2.17)$$

schreiben.

Gleichung (3.2.17) ist eine Erhaltungsgleichung für die akustische Energie. Um dies zu verdeutlichen wird die Gleichung über ein Volumen mit der Ausdehnung l in x -Richtung und dem Querschnitt Q integriert. Das Volumen entspricht zum Beispiel dem Abschnitt eines Rohres, wie es in Abbildung 3.6 dargestellt ist. Beginnt das Volumen bei x_0 , so ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x_0+l} Q \left\{ \frac{\partial e_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p' u') \right\} dx = 0 \quad (3.2.18)$$

3. Ebene Wellen

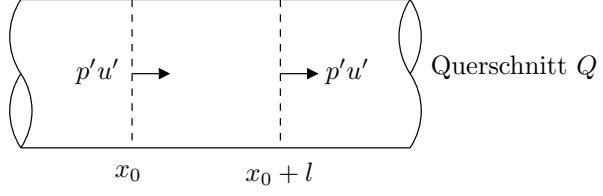


Abbildung 3.6.: Zur Energiebilanz an einem Volumen

Wird die Integration teilweise ausgeführt, erhält man

$$\frac{d}{dt} \left\{ Q \int_{x_0}^{x_0+l} e_a dx \right\} = [Qp'u']_{x_0} - [Qp'u']_{x_0+l} \quad (3.2.19)$$

Auf der linken Seite steht die zeitliche Änderung die gesamte akustische Energie in dem betrachteten Volumen. Der erste Term auf der rechten Seite gibt an, wieviel Energie pro Zeit an der Stelle x_0 in das Volumen hineintransportiert wird. Der zweite Term bedeutet entsprechend den akustischen Energiefuß an der Stelle $x_0 + l$ aus dem Volumen heraus. Die Energie fließt dann in ein benachbartes Volumen, das an der Stelle $x_0 + l$ beginnt. Insgesamt geht keine akustische Energie verloren.

Intensität

Der akustische Energiefuß pro Fläche ist durch das Produkt $p'u'$ gegeben. Zweckmäßig wird mit

$$I_a = p'u' \quad (3.2.20)$$

die akustische Intensität eingeführt. Die Größe I_a hat die Einheit

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \cdot \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}} \quad (3.2.21)$$

Es handelt sich somit um eine Energiefußdichte.

Die akustische Intensität beschreibt lediglich einen Anteil der gesamten Intensität, wie auch die akustische Energie einen Anteil der gesamten Energie darstellt. Um den Zusammenhang zwischen der gesamten Intensität und der akustischen Intensität zu verdeutlichen, wird die Arbeit betrachtet, die der Kolben im Rohr aus Abbildung 3.1 an dem Medium leistet. Der Kolben bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_k . Am Kolben herrscht überall der Druck p_k . Ist die Querschnittsfläche mit Q gegeben, so übt der Kolben die Kraft $Q p_k$ auf das Medium aus. Dies ergibt eine Leistung

$$P = Q p_k u_k \quad (3.2.22)$$

3.2. Energie in ebenen Wellen

Die Leistung pro Fläche wird als Intensität I bezeichnet. Es gilt

$$I = p_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \quad (3.2.23)$$

Zerlegt man den Druck und die Geschwindigkeit in Gleich- und Schwankungsanteil mit

$$p_{\mathbf{k}} = p_0 + p'_{\mathbf{k}} \quad (3.2.24)$$

$$u_{\mathbf{k}} = u_0 + u'_{\mathbf{k}} \quad (3.2.25)$$

so folgt für die Intensität nach dem Einsetzen

$$I = (p_0 + p'_{\mathbf{k}}) (u_0 + u'_{\mathbf{k}}) = p_0 u_0 + u_0 p'_{\mathbf{k}} + p_0 u'_{\mathbf{k}} + p'_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}} \quad (3.2.26)$$

Fall sich der Kolben nur um eine mittlere Position hin- und herbewegt, gilt $u_0 = 0$. Die ersten beiden Term auf der rechten Seite von (3.2.26) verschwinden in diesem Fall. Es ergibt sich

$$I = p_0 u'_{\mathbf{k}} + p'_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}} \quad (3.2.27)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite entspricht formal der akustischen Intensität nach (3.2.20). Der erste Term ändert sein Vorzeichen mit der Bewegungsrichtung. Er beschreibt damit ein Pendeln der Energie zwischen dem Kolben und dem Medium. Im zeitlichen Mittel gleichen sich die Anteile aus. Für den zeitlichen Mittelwert der Intensität gilt

$$\langle I \rangle = p_0 \langle u'_{\mathbf{k}} \rangle + \langle p'_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}} \rangle \quad (3.2.28)$$

Es ist $\langle u'_{\mathbf{k}} \rangle = 0$, wenn sich der Kolben nur um eine mittlere Position hin- und herbewegt. Damit folgt

$$\langle I \rangle = \langle p'_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}} \rangle \quad (3.2.29)$$

Das bedeutet, das Produkt $p'_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}}$ stimmt im zeitlichen Mittel mit der Intensität I überein.

In Abschnitt 3.1 wurde die Schallwelle bestimmt, die durch einen bewegten Kolben erzeugt wird. Die Werte für p' und u' an einem Beobachtungsort x_b zur Zeit t_b ergeben sich aus den Werten am Kolben zur Ursprungszeit τ . Es wird angenommen, daß sich der Kolben um die mittlere Position $x = 0$ bewegt. Verwendet man die einfache Randbedingung gilt die Gleichung (3.1.14) für τ . Es folgt für die Welle

$$u'(x_b, t_b) = u'_{\mathbf{k}} \left(t_b - \frac{x_b}{c} \right) \quad (3.2.30)$$

$$p'(x_b, t_b) = p'_{\mathbf{k}} \left(t_b - \frac{x_b}{c} \right) \quad (3.2.31)$$

Eine harmonische Kolbenbewegung würde eine harmonische Welle erzeugen. Für die akustische Intensität in der erzeugten Welle an der Stelle x_b gilt

$$\langle I_a \rangle_{x_b} = \langle p' u' \rangle_{x_b} = \langle p'_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}} \rangle = \langle I \rangle \quad (3.2.32)$$

Die akustische Intensität I_a an einer Stelle entspricht tatsächlich im Mittel der vom Kolben geleisteten Arbeit pro Zeit und Fläche.

3. Ebene Wellen

Genauigkeit

Die akustische Energie wurde nach einigen Plausibilitätsüberlegungen als ein Teil der gesamten Energie definiert. Es läßt sich mit (3.2.17) eine Erhaltungsgleichung beweisen, die auf die akustische Intensität $I_a = p' u'$ führt. Anscheinend stimmen im zeitlichen Mittel die akustische Intensität I_a und die Intensität I , die zur besseren Unterscheidung im folgenden als Gesamtintensität bezeichnet wird, überein. Wieso wird nicht gleich die Gesamtintensität I aus den Schwankungsgrößen p' und u' berechnet? Ist denn die Definition der akustischen Energie überhaupt notwendig?

Um die Fragen zu beantworten, wird die Genauigkeit betrachtet, mit der man die Gesamtintensität I aus den Schwankungsgrößen berechnen kann. Dazu wird wieder als Beispiel die Arbeit untersucht, die ein um eine mittlere Position hin- und herbewegter Kolben am Medium leistet. Die Gesamtintensität I ist nach (3.2.27) durch eine Summe aus zwei Termen gegeben. Diese Terme sind von unterschiedlicher Ordnung hinsichtlich der Schwankungsgrößen. Das Produkt $p_0 u'_k$ ist von erster Ordnung und $p'_k u'_k$ ist ein quadratischer Term. Es wird angenommen, die linearisierten Gleichungen wurden gelöst und p'_k und u'_k ermittelt. Die Lösung ist jedoch nicht exakt, denn die linearisierten Gleichungen gelten nur approximativ. Die berechneten Größen p'_k und u'_k sind mit einem kleinen Fehler behaftet. Wird die Kolbenbewegung u'_k direkt vorgegeben, so ist dort der Fehler natürlich Null. Es kann aber auch sein, daß – wie zum Beispiel bei einer Lautsprechermembran – nicht die Bewegung sondern die Kraft auf den Kolben vorgegeben ist. Dann muß u'_k berechnet werden und ist dadurch auch mit einem Fehler behaftet. Um die Auswirkung dieser Fehler zu verdeutlichen, wird die Zerlegung

$$p'_k = p_1 + p_2 \quad (3.2.33)$$

$$u'_k = u_1 + u_2 \quad (3.2.34)$$

eingeführt. Die Größen mit dem Index 1 sind die aus der linearen Theorie folgenden Lösungen. Sie sind von erster Ordnung. Die Größen mit dem Index 2 stellen die Fehler höherer Ordnung dar.

Die Fehler p_2 und u_2 sind unbekannt. Um sie zu berechnen, müßten die nichtlinearen Gleichungen gelöst werden. Dies ist aber im allgemeinen nur numerisch möglich und mit einem erheblichen Aufwand verbunden. Wenn man sich auf die linearen Gleichungen beschränkt, können nur Abschätzungen für p_2 und u_2 angegeben werden. Wird die Zerlegung (3.2.33) und (3.2.34) in Gleichung (3.2.27) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= p_0(u_1 + u_2) + (p_1 + p_2)(u_1 + u_2) \\ &= p_0 u_1 + p_0 u_2 + p_1 u_1 + p_1 u_2 + p_2 u_1 + p_2 u_2 \\ &\quad \mathcal{O}(1) \quad \mathcal{O}(2) \quad \mathcal{O}(2) \quad \mathcal{O}(3) \quad \mathcal{O}(3) \quad \mathcal{O}(4) \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Die Gesamtintensität I kann als Summe aus sechs Termen geschrieben werden. Diese Terme besitzen eine unterschiedliche Ordnung hinsichtlich der Schwankungsgrößen.

3.2. Energie in ebenen Wellen

Die Ordnung n ist unter den Summanden durch den Ausdruck $\mathcal{O}(n)$ angegeben. Nur der erste und der dritte Summand können aus der Lösung der linearen Gleichungen bestimmt werden. In den anderen vier Summanden treten die unbekannten Fehler p_2 und u_2 auf. Insbesondere ist der zweite Summand – ein quadratischer $\mathcal{O}(2)$ -Term – auch nicht bestimmbar. Die Gesamtintensität lässt sich somit nur bis auf einen quadratischen Fehler angeben:

$$I = p_0 u_1 + p_1 u_1 + \mathcal{O}(2) \quad (3.2.36)$$

Der Fehler ist von der gleichen Größenordnung wie der $p_1 u_1$ -Term. Es ist daher wenig sinnvoll, diesen mit zu berücksichtigen. Vernachlässigt man aber alle Terme höherer Ordnung und setzt näherungsweise $I = p_0 u_1$, dann ergibt sich im zeitlichen Mittel

$$\langle I \rangle = p_0 \langle u_1 \rangle \equiv 0 \quad (3.2.37)$$

Das heißt, die näherungsweise berechnete Gesamtintensität beschreibt nicht einmal im zeitlichen Mittel den Energiefluß. Weil Terme unterschiedlicher Ordnung in dem Ausdruck für I auftreten, lässt sich anscheinend keine befriedigende Näherung finden. Dies wird jedoch bei der akustischen Energie e_a und der akustischen Intensität I_a erreicht. Beide Größen werden allein aus Termen zweiter Ordnung gebildet. Der entstehende Fehler ist damit von dritter oder höherer Ordnung. Ebenso kann gezeigt werden, daß die abgeleitete Erhaltungsgleichung für die akustische Energie nur mit einem Fehler dritter Ordnung behaftet ist. Dadurch ist die gesamte Darstellung konsistent.

Energieerhaltung bei Strömung

In Abschnitt 3.1 wurde bereits die Lösung der Wellengleichung für den Fall einer einfachen Strömung mit konstanter Geschwindigkeit u_0 angegeben. Diese wurde durch Transformation aus dem mitbewegten Bezugssystem gewonnen. Die Schwankungsgrößen p' , ρ' und u' sind nicht vom Bezugssystem abhängig. Damit ist auch die akustische Energie

$$e_a = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 \quad (3.2.38)$$

unabhängig vom Bezugssystem. Im folgenden wird von der gleichen Situation wie in Abschnitt 3.1 ausgegangen. Die Indizes B und R kennzeichnen wieder die Koordinaten und Größen im mitbewegten (B) und im ruhenden (R) System. Die Transformation der Koordinaten ist durch die Beziehung (3.1.25) beziehungsweise (3.1.26) gegeben. Diese lauten:

$$x_R = x_B + u_0 t \quad (3.2.39)$$

$$x_B = x_R - u_0 t \quad (3.2.40)$$

Um die Energieerhaltungsgleichung für das ruhende Bezugssystem abzuleiten, ist etwas Vorbereitung notwendig. Dazu wird eine beliebige Größe ψ betrachtet, die vom Ort und der Zeit abhängt. Der Beobachter im ruhenden System sieht die Verteilung dieser Größe als $\psi_R(x_R, t)$ und für mitbewegter Beobachter erscheint sie als $\psi_B(x_B, t)$.

3. Ebene Wellen

Es wird angenommen, daß die Größe ψ nicht vom Bezugssystem abhängt. Dies läßt sich durch

$$\psi_B(x_B, t) = \psi_R(x_R, t) \quad (3.2.41)$$

ausdrücken. Damit diese Gleichheit gilt, müssen die Koordinaten x_B und x_R die Relation (3.2.39) beziehungsweise (3.2.40) erfüllen. Bildet man die partielle Zeitableitung ergibt sich zunächst rein formal

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = \frac{\partial \psi_R}{\partial x_R} \cdot \frac{\partial x_R}{\partial t} \Big|_{x_B} + \frac{\partial \psi_R}{\partial t} \quad (3.2.42)$$

Die zeitliche Veränderung der Koordinate x_R für eine feste Position x_B im bewegten System ist durch die Relativgeschwindigkeit u_0 gegeben. Aus (3.2.39) folgt entsprechend

$$\frac{\partial x_R}{\partial t} \Big|_{x_B} = u_0 \quad (3.2.43)$$

Damit gilt für die Zeitableitung im mitbewegten System

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = \frac{\partial \psi_R}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi_R}{\partial x_R} \quad (3.2.44)$$

Das heißt, der bewegte Beobachter sieht in seinem Bezugssystem auch eine zeitliche Änderung der Größe ψ , wenn sie für den ruhenden Beobachter zeitlich konstant ist. Die Änderung ist dann proportional zur räumlichen Ableitung und der Relativgeschwindigkeit. Die räumliche Ableitung ist in jedem Fall unabhängig vom Bezugssystem.

In dem mitbewegten Bezugssystem gilt die Wellengleichung und damit auch die Erhaltungsgleichung für die akustische Energie in der bekannten Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{e_A\}_B + \frac{\partial}{\partial x_B} \{p' u'\}_B = 0 \quad (3.2.45)$$

Mit der Beziehung (3.2.44) kann diese Gleichung in das ruhende System übertragen werden. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \{e_A\}_R + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \{e_A\}_R + \frac{\partial}{\partial x_R} \{p' u'\}_R = 0 \quad (3.2.46)$$

Dies kann zu

$$\frac{\partial}{\partial t} e_A + \frac{\partial}{\partial x} \{u_0 e_A + p' u'\} = 0 \quad (3.2.47)$$

umgeformt werden. Dabei wurde der Index R weggelassen. Für den ruhenden Beobachter ergibt sich somit eine akustische Intensität $u_0 e_A + p' u'$. Sie enthält zusätzlich zu I_A den konvektiven Anteil $u_0 e_A$.

Hier ist zu bemerken, daß die Energieerhaltungsgleichung (3.2.47) bei Strömung nur abgeleitet werden kann, weil es sich um ein sehr einfaches Strömungsfeld handelt. Im Allgemeinen ist es nicht möglich eine konsistente Definition der akustischen Energie und Intensität bei Strömung zu geben, die auf eine Erhaltungsgleichung führt, welche nur einen Fehler dritter Ordnung besitzt. Auf diese Problematik wird in einem späteren Kapitel nochmal eingegangen.

Spezialfall zur Veranschaulichung

Für die akustische Energie und Intensität lassen sich im Fall reiner Wellenausbreitung in einer Richtung ohne Überlagerung mit entgegenlaufenden Wellen einige interessante Eigenschaften ableiten. Angenommen es breiten sich nur Wellen in positive x -Richtung aus, dann gilt die Relation

$$u' = \frac{p'}{\rho_0 c} = \frac{c}{\rho_0} \rho' \quad (3.2.48)$$

Damit folgt für die Anteile der akustischen Energie

$$e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 = e_{\text{pot}} \quad (3.2.49)$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn reine Ausbreitung in negativer x -Richtung vorliegt. Das bedeutet, bei reiner Wellenausbreitung in einer Richtung ist die potentielle und kinetische (spezifische, akustische) Energie gleich groß, und es gilt

$$e_{\text{a}} = 2 e_{\text{kin}} = 2 e_{\text{pot}} \quad (3.2.50)$$

Eine solche Gleichverteilung ist typisch für viele Schwingungsprozesse.

Für eine einzelne Welle in positiver x -Richtung ergibt sich für die akustische Intensität

$$I_{\text{a}} = p' u' = \frac{c^3}{\rho_0} \rho'^2 = c e_{\text{a}} \quad (3.2.51)$$

Das gleiche Resultat mit einem zusätzlichen Minuszeichen ergibt sich bei einer einzelnen Welle in negativer x -Richtung. Damit läßt sich die Erhaltungsgleichung (3.2.17) als

$$\frac{\partial e_{\text{a}}}{\partial t} \pm c \frac{\partial e_{\text{a}}}{\partial x} = 0 \quad (3.2.52)$$

schreiben. Das Pluszeichen gilt für eine Welle in positiver x -Richtung und das Minuszeichen für eine Welle in entgegengesetzter Richtung. Anschaulich bedeutet die Gleichung, daß sich die spezifische akustische Energie mit Schallgeschwindigkeit – also mit der Welle – bewegt.

In dem Fall mit einfacher Strömung ergibt sich aus (3.2.47)

$$\frac{\partial e_{\text{a}}}{\partial t} + (u_0 \pm c_0) \frac{\partial e_{\text{a}}}{\partial x} = 0 \quad (3.2.53)$$

Wie es anschaulich auch zu erwarten ist, breitet sich hier die Energie mit $u_0 \pm c$ aus. Diese Aussage gilt jedoch nur bei dem angenommenen homogenen Strömungsfeld mit konstanter Geschwindigkeit und der Wellenausbreitung ohne Überlagerung mit einer entgegenlaufenden Welle.

3. Ebene Wellen

3.3. Stehende Welle und Resonanz

Im Abschnitt 3.1 wurde die Anregung von Wellen in einem halbunendlichen Rohr betrachtet. Die vom Kolben erzeugten Wellen breiten sich in dem unendlichen Teil theoretisch immer weiter aus. In der Realität wird natürlich das Rohr irgendwo einen Abschluß haben müssen. Dadurch wird auch die Wellenausbreitung in der Praxis anders aussehen. Im folgenden wird das Beispiel aus 3.1 erweitert und eine feste, undurchlässige Wand als Abschluß angenommen. Der Abstand zwischen Kolben und gegenüberliegender Wand wird mit L bezeichnet. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Wand bei $x = 0$ liegt. Der Kolben befindet sich dann bei $x = -L$. Die Anordnung ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Es wird wieder vorausgesetzt, daß die Kolbenauslenkung

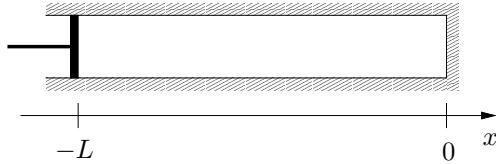


Abbildung 3.7.: Abgeschlossenes Rohr mit Kolben

klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen ist. Damit kann wie in Abschnitt 3.1 beschrieben die Randbedingung

$$u'(-L, t) = u_k(t) \quad (3.3.1)$$

verwendet werden. Die Kolbengeschwindigkeit $u_k(t)$ wird an der mittleren Kolbenposition $x = -L$ vorgegeben. Weiter wird eine harmonischen Bewegung des Kolbens angenommen. Die momentane Position des Kolbens ist durch den komplexen Ansatz

$$x_k(t) = -L + \Re\{\varepsilon e^{i\omega t}\} \quad (3.3.2)$$

gegeben. Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Kolbens

$$u_k(t) = \Re\{i\omega\varepsilon e^{i\omega t}\} \quad (3.3.3)$$

Die Randbedingung an der gegenüberliegenden festen Wand lässt sich einfach durch

$$u'(0, t) = 0 \quad (3.3.4)$$

ausdrücken.

Die allgemeine Lösung setzt sich aus hin- und herlaufenden Wellen zusammen. In Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, daß sich durch eine harmonische Kolbenbewegung mit der Randbedingung (3.3.1) eine sinusförmige Welle als Lösung ergibt. Daher werden

3.3. Stehende Welle und Resonanz

hier auch nur sinusförmige bzw. harmonische Wellen betrachtet. Für den Schalldruck wird entsprechend der komplexe Ansatz

$$p'(x, t) = \Re\{A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}\} \quad (3.3.5)$$

aufgestellt. Dieser entspricht der üblichen Aufteilung der Form $p' = f(x - ct) + g(x + ct)$ mit einer speziellen Wahl der Funktionen f und g . Die Größe A ist die Amplitude der Teilwelle in positiver x -Richtung und B in Negativer. A und B können auch komplex sein.

Da in der Druckverteilung (3.3.5) die Teilwellen getrennt gegeben sind, kann nach Abschnitt 2.2 in der ebenen Welle die Schnelleverteilung direkt berechnet werden. Die Schnelle- und Druckamplituden der Teilwellen sind durch Multiplikation beziehungsweise Division durch den Wellenwiderstand $\rho_0 c$ miteinander verknüpft. Es gilt

$$u'(x, t) = \Re\left\{\frac{A}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)}\right\} \quad (3.3.6)$$

Damit ist die Lösung für p' und u' bis auf die beiden unbekannten Amplituden A und B gegeben. A und B werden durch die beiden Randbedingungen am Kolben (3.3.1) und an der Wand (3.3.4) eindeutig festgelegt.

Setzt man $x = 0$ in Gleichung (3.3.6) ein, so ergibt sich aus der Randbedingung an der Wand

$$0 = u'(0, t) = \Re\left\{\frac{1}{\rho_0 c}(A - B) e^{i\omega t}\right\} \quad (3.3.7)$$

Daraus folgt unmittelbar, daß

$$A = B \quad (3.3.8)$$

sein muß. Das heißt, die beiden Teilwellen müssen gleiche Amplituden besitzen, um die Randbedingung an der Wand zu erfüllen. Nur zwei gleichstarke Sinuswellen können sich so überlagern, daß sich die beiden Schnelleanteile an einer Stelle ständig gegeneinander aufheben. Für den Druck folgt mit $A = B$ die einfachere Form

$$p'(x, t) = \Re\{A[e^{-ikx} + e^{ikx}] e^{i\omega t}\} \quad (3.3.9)$$

Mit der allgemeinen Rechenregel

$$\cos(z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \quad (3.3.10)$$

kann dies zu

$$p'(x, t) = \Re\{2A \cos(kx) e^{i\omega t}\} \quad (3.3.11)$$

umgeformt werden. Die Verteilung der Druckamplitude besitzt danach räumlich eine Sinusform. An den Stellen mit

$$kx = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (3.3.12)$$

ist $\cos(kx) = \pm 1$ und die Druckschwankungen sind maximal. Dagegen ist an Stellen mit

$$kx = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots \quad (3.3.13)$$

3. Ebene Wellen

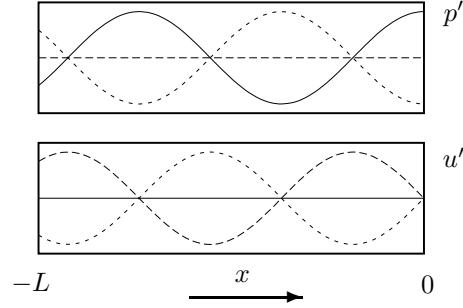


Abbildung 3.8.: Form der Druck- und Schnelleverteilung in Momenten mit maximaler Auslenkungen

immer $p' = 0$, da dort $\cos(kx) = 0$ gilt. Eine ähnliche Verteilung ergibt sich für die Schnelle. Mit $A = B$ folgt aus (3.3.6)

$$u'(x, t) = \Re \left\{ \frac{A}{\rho_0 c} [e^{-ikx} - e^{ikx}] e^{i\omega t} \right\} \quad (3.3.14)$$

Unter Verwendung der Rechenregel

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \quad (3.3.15)$$

wird dies zu

$$u'(x, t) = \Re \left\{ -i \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(kx) e^{i\omega t} \right\} \quad (3.3.16)$$

Wie die Druckamplitude besitzt auch die Schnelleamplitude eine sinusförmige Verteilung mit Extrema und Nullstellen. Die Form der Lösungen ist in Abbildung 3.8 veranschaulicht. Die Nullstellen in den Verteilungen werden Schwingungsknoten oder einfach Knoten genannt. Dazwischen liegen die Bereiche extremer Amplituden, die als Schwingungsbäuche oder einfach Bäuche bezeichnet werden. Die Knoten der Druckverteilung fallen mit den Bäuchen der Schnelleverteilung zusammen und umgekehrt. An der Wand bei $x = 0$ liegt in jedem Fall ein Schnelleknoten und ein Druckbauch. Die Position des nächsten Knotens hängt entsprechend (3.3.12) von der Wellenzahl k und damit der Kreisfrequenz ω ab. Der Abstand zwischen zwei Knoten entspricht der halben Wellenlänge.

Um die gesuchte Größe A zu ermitteln, wird die Randbedingung am Kolben betrachtet. Gleichung (3.3.1) und (3.3.3) ergeben zusammen

$$u'(-L, t) = \Re \{ i\omega \varepsilon e^{i\omega t} \} \quad (3.3.17)$$

Setzt man die Schnelleverteilung (3.3.16) auf der linken Seite ein, folgt

$$\Re \left\{ -i \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(-kL) e^{i\omega t} \right\} = \Re \{ i\omega \varepsilon e^{i\omega t} \} \quad (3.3.18)$$

3.3. Stehende Welle und Resonanz

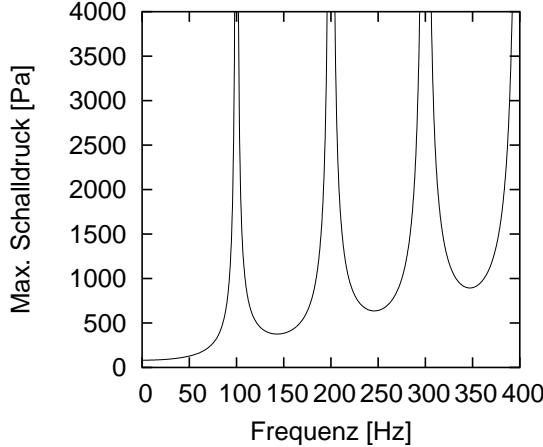


Abbildung 3.9.: Maximale Druckamplitude als Funktion der Frequenz (Rohrlänge $L = 1.7$ m und Auslenkung $\varepsilon = 1$ mm)

Die Beziehung ist nur erfüllt, falls

$$-i \frac{2A}{\rho_0 c} \sin(-kL) = i\omega\varepsilon \quad (3.3.19)$$

gilt. Diese Gleichung kann nach A aufgelöst werden. Man erhält

$$A = \frac{\rho_0 c \omega \varepsilon}{2 \sin(kL)} \quad (3.3.20)$$

Wie erwartet, ist die Stärke der Schwankungen im Rohr proportional zur Auslenkung des Kolkens ε . Eine kompliziertere Abhängigkeit ergibt sich von der Kreisfrequenz ω . Falls

$$kL = \frac{\omega}{c} L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.21)$$

ist, wird $\sin(kL) = 0$. Dann ergibt sich eine unendlich große Schwankung im Rohr. Die Abbildung 3.9 zeigt die typische Frequenzabhängigkeit der maximalen Schalldruckamplitude $|2A|$. In dem Beispiel wurde ein luftgefülltes Rohr (unter Normalbedingungen $p_0 = 1$ bar, $\rho_0 = 1.2$ Kg/m³) mit der Länge $L = 1.7$ m und eine Kolbenauslenkung von $\varepsilon = 1$ mm angenommen.

Unter den durch (3.3.21) festgelegten Bedingungen ergibt sich eine Resonanzkatastrophe mit unendlich großer Amplitude. Für stärkere Schwankungen sind jedoch die Annahmen der linearen Akustik ($|p'| \ll p_0$, $|\rho'| \ll \rho_0$) verletzt, und die reale beobachteten Wellen entsprechen nicht mehr der akustischen Lösung. In der Realität stellt sich eine durch Dissipation und nichtlineare Effekte begrenzte Amplitude ein.

Für einen festen Wert L sind die Frequenzen, bei denen die Resonanzfälle eintreten durch

$$\omega = \omega_n = n \frac{c\pi}{L} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.22)$$

3. Ebene Wellen

gegeben. Betrachtet man die Lösung der Wellengleichung für eine dieser sogenannten Resonanzfrequenzen ω_n und legt den Amplitudenfaktor A künstlich auf einen endlichen Wert $A \equiv 1$ fest, ergibt sich für die Schnelle nach (3.3.16)

$$u'_n(x, t) = \Re \left\{ -i \frac{2}{\rho_0 c} \sin\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) e^{i\omega_n t} \right\} \quad (3.3.23)$$

Die so definierten u'_n erfüllen natürlich nicht die Randbedingung am Kolben. Es gilt dagegen

$$u'_n(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad u'_n(-L, t) = 0 \quad (3.3.24)$$

Das bedeutet, daß die Lösungen u'_n nach (3.3.23) die Randbedingung einer zweiten festen Wand bei $x = -L$ statt dem Kolben erfüllt. Die Lösung beschreibt eine sogenannte Eigenschwingung des Rohres, die theoretisch ohne Anregung existieren kann. Es ist sogar die Überlagerung der Eigenschwingungen

$$u'(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u'_n(x, t) \quad (3.3.25)$$

eine Lösung der Wellengleichung bei den Randbedingungen (3.3.24). Die Faktoren a_n können dabei frei gewählt werden.

Für eine bestimmte Kreisfrequenz ω und Auslenkung ε des Kolbens sei die Lösung mit $u'_{\omega, \varepsilon}$ gegeben. Sie erfüllt die Randbedingung am Kolben. Damit erfüllt aber auch die Überlagerung

$$u'(x, t) = u'_{\omega, \varepsilon}(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u'_n(x, t) \quad (3.3.26)$$

diese Randbedingung, denn es gilt $u'(-L, t) = u'_{\omega, \varepsilon}(-L, t)$. Überlagert man der Lösung für den angeregten Fall mit Kolbenbewegung eine Eigenschwingung, so erfüllt das Resultat auch die Randbedingung am Kolben. Das bedeutet, die Lösung für den angeregten Fall ist gar nicht eindeutig. Rein theoretisch könnten immer beliebige Eigenschwingungen zusätzlich im Rohr überlagert sein. In der Realität klingen die Eigenschwingungen jedoch durch Reibungsverluste langsam mit der Zeit ab, so daß das beobachtete Wellenfeld der angeregte Lösung $u'_{\omega, \varepsilon}(x, t)$ in reiner Form entspricht.

3.4. Komplexe Wandimpedanz

Im Beispiel aus Abschnitt 3.3 war das Rohr durch eine feste, undurchlässige Wand abgeschlossen, an der die Wellen reflektiert wurden. Statt der festen Wand wird nun eine bewegliche Wand angenommen, die sich wie ein federnd befestigter Kolben im Rohr verhält. Der zweite Kolben dient als ein mechanisches Wandmodell, das in der Realität zum Beispiel eine Gummwand oder eine zur Dämmung mit Matten beklebte Wand sein kann. Die betrachtete Anordnung ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Bereits in Abschnitt 1.4 wurde ein Kolben im Rohr betrachtet, der durch Druckstörungen zum schwingen angeregt wird. Die Ergebnisse der dortigen Überlegungen können für das Wandmodell verwendet werden. Es werden folgende Annahmen gemacht:

3.4. Komplexe Wandimpedanz

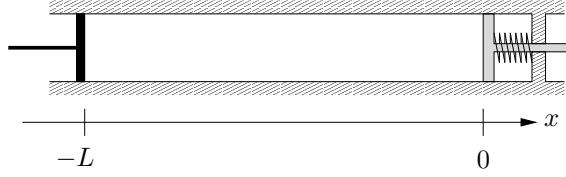


Abbildung 3.10.: Rohr mit beweglicher Wand als Abschluß

- 1.) Rechts von der beweglichen Wand ist Vakuum ($p = 0$). Keine Druckkräfte greifen auf dieser Seite an. Andernfalls würde das Wandmodell zu kompliziert werden, weil auch Wellen auf der anderen Seite der Wand berücksichtigt werden müßten.
- 2.) Bei Ruhedruck $p = p_0$ im Rohr befindet sich die Wand an der Position $x = 0$. Die Druckkraft durch den Ruhedruck wird von der Vorspannung der Feder ausgeglichen. Bei Auslenkung der Wand bewirkt die Feder eine Rückstellkraft zur Ruheposition.
- 3.) Alle Störungen sind sinusförmig beziehungsweise harmonisch.

Die Position der beweglichen Wand wird mit x_w und der Druck an der Wand mit p_w bezeichnet. Es ergeben sich die Ansätze

$$x_w(t) = \Re\{\hat{s} e^{i\omega t}\} \quad (3.4.1)$$

und

$$p_w(t) = p_0 + p'_w(t) = p_0 + \Re\{\hat{p}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.4.2)$$

Dabei sind \hat{s} und \hat{p}_w die komplexen Amplituden der Auslenkung und des Wanddrucks. Der Betrag $|\hat{s}|$ ergibt die reale maximale Auslenkung in jeder Richtung. Aus (3.4.1) leitet sich für die Geschwindigkeit der Wand

$$u'_w(t) = \Re\{i\omega \hat{s} e^{i\omega t}\} = \Re\{\hat{u}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.4.3)$$

ab. Es wird hier die Schreibweise u'_w mit einem Strich verwendet, da es sich bei der Bewegung der Wand um eine kleine Störung handelt, für die $u'_w = u_w$ gesetzt werden kann. Weiterhin ist die komplexe Amplitude der Geschwindigkeit

$$\hat{u}_w = i\omega \hat{s} \quad (3.4.4)$$

eingeführt worden.

Die Randbedingung an der beweglichen Wand ergibt sich aus dem in Abschnitt 1.4 beschriebenen Kräftegleichgewicht. Die Summe aus mechanischer Kraft K_{mech} und Druckkraft K_{druck} muß verschwinden. Beide Kräfte werden in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil zerlegt. Der Gleichanteil der mechanischen Kraft ist durch

3. Ebene Wellen

die Vorspannung der Feder gegeben. Dieser hebt sich mit dem Gleichanteil der Druckkraft auf, der durch den Ruhedruck p_0 bewirkt wird. Analog müssen sich auch die Schwankungsanteile aufheben. Es gilt entsprechend

$$K'_{\text{mech}} + K'_{\text{druck}} = 0 \quad (3.4.5)$$

Die mechanische Kraft hängt von der Auslenkung und damit von der Größe \hat{s} ab. Es ist

$$K'_{\text{mech}} = \Re\{\hat{s} Z e^{i\omega t}\} \quad (3.4.6)$$

Dabei tritt die Größe $Z(\omega) \in \mathbb{C}$ auf. Sie wurde als Abkürzung mit

$$Z(\omega) = -D - i\omega F + \omega^2 M \quad (3.4.7)$$

eingeführt. Mit $Z(\omega)$ werden die mechanischen Eigenschaften des Wandmodells in einer Größe zusammengefaßt. Es ist D die Federkonstante, F der Reibungskoeffizient und M die Masse der Wand.

Die Druckkraft auf die Wand ergibt sich als Produkt des Wanddrucks \hat{p}_w mit der Querschnittsfläche des Rohres Q . In den Schwankungsanteil der Druckkraft geht nur die Druckschwankung p'_w ein. Es gilt

$$K'_{\text{druck}} = Q p'_w(t) = \Re\{Q \hat{p}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.4.8)$$

Die Schwankungsanteile können nun in die Gleichung (3.4.5) eingesetzt werden. Es folgt, daß die Summe der komplexen Amplituden in den beiden Ausdrücken verschwinden muß:

$$\hat{s}Z + Q\hat{p}_w = 0 \quad (3.4.9)$$

Dieser Zusammenhang war bereits in Abschnitt 1.4 angegeben worden. Damit kann die Druckamplitude auf einfache Weise in die Auslenkung \hat{s} umgerechnet werden.

In dem akustischen Zusammenhang ist jedoch nicht die Auslenkung sondern die Geschwindigkeit die wichtigere Größe. Üblicherweise wird mit dem Schalldruck p' und der Schnelle u' gerechnet. Der Zusammenhang zwischen \hat{s} und \hat{u}_w ist durch (3.4.4) gegeben. Damit kann \hat{s} in (3.4.9) ersetzt werden. Das Ergebnis kann wiederum nach \hat{p}_w aufgelöst werden. Es ergibt sich

$$\hat{p}_w = \frac{iZ}{\omega Q} \hat{u}_w \quad (3.4.10)$$

Zweckmäßigerweise wird mit

$$Z_w = \frac{iZ}{\omega Q} = -\frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} + \frac{F}{Q} + i\omega \frac{M}{Q} \quad (3.4.11)$$

eine neue Abkürzung eingeführt. Damit wird (3.4.10) zu

$$\hat{p}_w = Z_w \cdot \hat{u}_w \quad (3.4.12)$$

Die Größe Z_w wird als Wandimpedanz bezeichnet. Sie ist das Verhältnis der komplexen Amplituden von Druck und Schnelle an der Wand. Die Wandimpedanz ist Analog

3.4. Komplexe Wandimpedanz

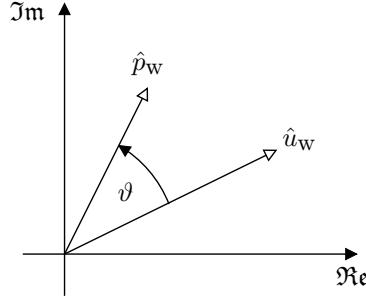


Abbildung 3.11.: Veranschaulichung der komplexe Amplituden des Drucks und der Geschwindigkeit an der Wand

zum Wellenwiderstand $\rho_0 c$ zu sehen, der das Verhältnis von Druck und Schnelle in der ebenen Welle angibt. Anders als $\rho_0 c$ ist jedoch $Z_w = Z_w(\omega)$ von der Frequenz abhängig. Auch ist Z_w eine komplexe Zahl im Gegensatz zum rein reellen Wellenwiderstand in der ebenen Welle. In der Abbildung 3.11 sind \hat{p}_w und \hat{u}_w als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt. Der Winkel zwischen den Zeigern ist mit ϑ bezeichnet. Es gilt

$$Z_w = \frac{|\hat{p}_w|}{|\hat{u}_w|} \cdot e^{i\vartheta} \quad (3.4.13)$$

Nur wenn Z_w rein reell ist, gilt $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$, und die beiden Zeiger sind parallel. Im allgemeinen liegt jedoch eine Phasenverschiebung vor, die sich durch einen Winkel $\vartheta \neq 0$ und $\vartheta \neq \pi$ ausdrückt. Dann sind Druck und Schnelle an der Wand nicht mehr in Phase. Sie erreichen ihre maximalen und minimalen Werte zu unterschiedlichen Zeiten.

Im Zusammenhang mit der Wandimpedanz werden häufig zwei Ausdrücke verwendet, die die Eigenschaften der Wand in speziellen Fällen kennzeichnen:

- Schallharte Wand*

$$\hat{u}_w = 0 \rightarrow Z_w = \infty$$

Dies entspricht einer absolut unbeweglichen Wand wie in Abschnitt 3.3.

- Schallweiche Wand*

$$\hat{p}_w = 0 \rightarrow Z_w = 0$$

Die Wand bewegt sich, jedoch sind keine Druckschwankungen an der Wand vorhanden.

Diese beiden Begriffe werden später noch häufiger benutzt, und das akustische Verhalten der Wand in den speziellen Fällen diskutiert.

3. Ebene Wellen

Der Reflexionsfaktor

Zunächst soll gezeigt werden, wie die Lösung in dem Rohr mit beweglicher Wand berechnet werden kann. Wie in Abschnitt 3.3 wird der Ansatz

$$p'(x, t) = \Re\{A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}\} \quad (3.4.14)$$

für den Druck und entsprechend

$$u'(x, t) = \Re\left\{\frac{A}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)}\right\} \quad (3.4.15)$$

für die Schnelle verwendet. Die beiden Unbekannten A und B sind zu bestimmen. Dazu müssen wieder die Randbedingungen ausgenutzt werden.

Wie bei der Kolbenbewegung am linken Ende des Rohres wird auch für die bewegliche Wand vorausgesetzt, daß die Auslenkung klein gegenüber der Wellenlänge im Sinne von

$$|\hat{s}| \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (3.4.16)$$

ist. Damit kann die vereinfachte Randbedingung verwendet werden, wobei die Wandgrößen p_w und u_w an der mittleren Position bei $x = 0$ angenommen werden. Es soll gelten

$$p'(0, t) = p'_w(t) \quad (3.4.17)$$

und

$$u'(0, t) = u'_w(t) \quad (3.4.18)$$

Die beiden letzten Beziehungen verknüpfen die Lösung p' und u' mit den Wandgrößen p'_w und u'_w . Die komplexen Amplituden der Wandgrößen sind über die Wandimpedanz Z_w miteinander verknüpft. Dies kann benutzt werden, um eine Randbedingung zwischen p' und u' abzuleiten.

Die linken Seite von (3.4.17) wird mit dem Ansatz für $p'(x, t)$ nach (3.4.14) bei $x = 0$ ersetzt. Auf der rechten Seite wird der harmonische Ansatz für p'_w nach (3.4.2) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\Re\{(A + B) e^{i\omega t}\} = \Re\{\hat{p}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.4.19)$$

Entsprechend erhält man aus (3.4.18) mit den Ansätzen für die Schnelle (3.4.15) und (3.4.3) die Beziehung

$$\Re\left\{\frac{1}{\rho_0 c}(A - B) e^{i\omega t}\right\} = \Re\{\hat{u}_w e^{i\omega t}\} \quad (3.4.20)$$

Aus (3.4.19) folgt sofort

$$\hat{p}_w = A + B \quad (3.4.21)$$

und (3.4.20) liefert

$$\hat{u}_w = \frac{1}{\rho_0 c}(A - B) \quad (3.4.22)$$

3.4. Komplexe Wandimpedanz

Das Verhältnis der komplexen Amplituden \hat{p}_w und \hat{u}_w ist nach (3.4.12) gerade die Wandimpedanz. Es gilt

$$Z_w = \frac{\hat{p}_w}{\hat{u}_w} = \left(\frac{A+B}{A-B} \right) \rho_0 c \quad (3.4.23)$$

Dies kann auch in der Form

$$Z_w = \left(\frac{1 + \frac{B}{A}}{1 - \frac{B}{A}} \right) \rho_0 c \quad (3.4.24)$$

dargestellt werden. Die Wandimpedanz ist gleich dem Wellenwiderstand multipliziert mit dem Faktor in der runden Klammer. Um eine einfache Beziehung zwischen den beiden gesuchten Größen A und B zu erhalten, wird nach dem Quotienten B/A aufgelöst. Es ergibt sich

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{Z_w}{\rho_0 c} - 1}{\frac{Z_w}{\rho_0 c} + 1} \equiv R_w \quad (3.4.25)$$

Das Verhältnis der Amplituden der von der Wand weg (B) und der zur Wand hin (A) laufenden Welle wird mit R_w abgekürzt. Die Größe R_w wird als Reflexionsfaktor bezeichnet.

Im Allgemeinen ist der Reflexionsfaktor eine komplexe Zahl. Er hängt von der Wandimpedanz und dem Wellenwiderstand ab

$$R_w = R_w(Z_w, (\rho_0 c)) \quad (3.4.26)$$

Mit der Abkürzung ergibt sich die einfache Darstellung

$$B = R_w A \quad (3.4.27)$$

Das heißt, die Randbedingung an der Wand bei $x = 0$ liefert wie im vorangegangen Abschnitt 3.3 eine Beziehung zwischen A und B . Diese ist jedoch etwas komplizierter als einfach $A = B$, wie im Fall der starren Wand. Dennoch kann analog zu diesem Fall Gleichung (3.4.27) verwendet werden, um eine der beiden Unbekannten A und B zu eliminieren. Durch die Randbedingung am Kolben bei $x = -L$ kann dann – wie in Abschnitt 3.3 – die verbleibende Unbekannte bestimmt werden.

Die konkrete Berechnung der Lösung wird hier jedoch nicht durchgeführt. Sie wird dem Leser als Übung überlassen. Stattdessen sollen einige Spezialfälle betrachtet werden. Diese sind in der folgenden Liste zusammengestellt:

Schallharte Wand

$$\hat{u}_w = 0, Z_w = \infty \rightarrow R_w = 1$$

Damit führt Gleichung (3.4.27) auf $B = A$, was dem Resultat für die unbewegliche Wand entspricht. Eine eintreffende Welle wird in gleicher Stärke reflektiert.

In der Praxis gilt eine Wand als schallhart, falls

$$|Z_w| \gg \rho_0 c \quad (3.4.28)$$

3. Ebene Wellen

ist. Nach Gleichung (3.4.25) wird dann $R_w \approx 1$, und $A = B$ ist eine gute Approximation.

- *Schallweiche Wand*

$$\hat{p}_w = 0, Z_w = 0 \rightarrow R_w = -1$$

Eine eintreffende Welle wird in gleicher Stärke jedoch mit umgekehrten Vorzeichen (auf den Druck p' bezogen) reflektiert. Analog zu oben gilt eine Wand als schallweich, falls

$$|Z_w| \ll \rho_0 c \quad (3.4.29)$$

gilt. Dann ergibt sich $R_w \approx -1$. Da der Wellenwiderstand von Luft relativ klein ist, sind für Luft praktisch keine Oberflächen schallweich. Eine Styroporplatte im Wasser wird im Experimenten oft als schallweiche Wand verwendet.

- *Reflexionsfreier Abschluß oder reflexionsfreie Anpassung*

$$Z_w = \rho_0 c \rightarrow R_w = 0$$

Eine eintreffende Welle wird komplett von der Wand verschluckt und keine Welle wird reflektiert. In diesem Fall muß Z_w rein reell sein. Das mechanische Wandmodell liefert

$$Z_w = -\frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} + \frac{F}{Q} + i\omega \frac{M}{Q} \quad (3.4.30)$$

Ein reflexionsfreier Abschluß ergibt sich zum Beispiel für

$$M = 0; D = 0; \frac{F}{Q} = \rho_0 c \quad (3.4.31)$$

Die Masse und die Federkonstante sind Null. Der Reibungskoeffizient ist so angepaßt, daß durch die Reibung die Energie der Welle gerade absorbiert wird. Dies ist analog zu den Abschlußwiderständen von 50 Ohm oder 75 Ohm, die häufig an Koaxialleitungen eingesetzt werden, um störende Reflexionen an den Leitungsenden zu vermeiden.

Auch bei endlicher Masse und Federkonstante ist ein reflexionsfreier Abschluß möglich. Dazu müssen M , D und ω die Bedingung

$$-\frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} + i\omega \frac{M}{Q} = 0 \quad (3.4.32)$$

erfüllen. Dies ist äquivalent zu

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} \quad (3.4.33)$$

Das heißt, bei einer Frequenz ω verschwindet der Imaginärteil von Z_w . Ist zusätzlich $F/Q = \rho_0 c$, dann wird die Welle nicht reflektiert. Dies gilt jedoch nur für die nach (3.4.33) gegebenen speziellen Frequenz, die der Resonanzfrequenz der Wand entspricht.

3.5. Reflexion und Transmission an Mediengrenzen

Im letzten Abschnitt wurde die Reflexion von Schallwellen an einer flexiblen Wand betrachtet. Eine Reflexion kann auch an Trennflächen zwischen zwei verschiedenen Medien auftreten. Eine solche Trennfläche oder Mediengrenze liegt zum Beispiel in einem senkrecht ausgerichtetem Rohr vor, das bis zu einer bestimmten Höhe mit Wasser angefüllt ist. Über der Wasseroberfläche befindet sich Luft. Im folgenden soll betrachtet werden, was passiert, wenn eine ebene Welle von oben auf die Trennfläche trifft. Die Situation ist in Abbildung 3.12 illustriert. Es sind zwei Bereiche mit verschiedenen

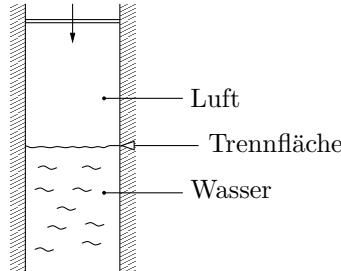


Abbildung 3.12.: Zum Übergang der Schallwelle von Luft nach Wasser

Fluiden vorhanden, in denen eine unterschiedliche Schallgeschwindigkeit und Dichte – und damit ein unterschiedlicher Wellenwiderstand – vorliegt. Zweckmäßigerweise wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die Trennfläche bei $x = 0$ liegt.

Betrachtet wird der Fall, daß eine harmonische Welle mit der komplexen Amplitude A_1 sich im Bereich des Fluids 1 ausbreitet und auf die Trennfläche trifft. Dabei kann eine reflektierte Welle mit der Amplitude B_1 und eine transmittierte Welle mit der Amplitude A_2 im Bereich des Fluids 2 entstehen. Die formale Darstellung des Problems ist in Abbildung 3.13 veranschaulicht. Es wird angenommen, daß keine Welle aus dem Bereich des Fluids 2 – von rechts kommend – auf die Trennfläche zuläuft.

In den beiden Bereichen gilt die Wellengleichung für den Schalldruck. Jedoch kann die Wellengleichung nicht auf das gesamte Gebiet angewendet werden, da in den beiden Bereichen unterschiedliche Werte für ρ_0 und c eingesetzt werden müssen. Es werden daher zunächst getrennte Lösungen für die beiden Bereiche betrachtet. Entsprechend wird die Lösung für den Druck mit

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{für } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

und für die Schnelle mit

$$u'(x, t) = \begin{cases} u'_1(x, t) & \text{für } x < 0 \\ u'_2(x, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.5.2)$$

3. Ebene Wellen

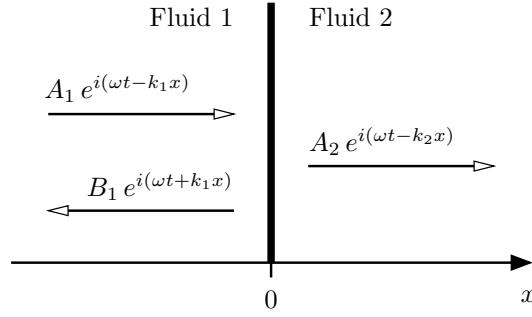


Abbildung 3.13.: Einfallende (A_1), reflektierte (B_1) und transmittierte (A_2) Welle an der Mediengrenze bei $x = 0$.

in Teillösungen unterteilt. Im Bereich 1 wird für den Druck der Ansatz

$$p'_1(x, t) = \Re\{A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}\} \quad (3.5.3)$$

und im Bereich 2

$$p'_2(x, t) = \Re\{A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}\} \quad (3.5.4)$$

verwendet. Die unterschiedlichen Größen in den beiden Bereichen werden durch die Indizes 1 und 2 gekennzeichnet. Auch die Wellenzahl $k = \omega/c$ ist über die Schallgeschwindigkeit c von dem Fluid abhängig und entsprechend mit einem Index versehen. Sonst entspricht die Darstellung der üblichen komplexen Schreibweise. Die Ansätze (3.5.3) und (3.5.4) stellen allgemeine Lösungen für den betrachteten harmonischen Fall dar.

Für die Schnelle ergibt sich aus den Ansätzen für den Druck

$$u'_1(x, t) = \Re\left\{\frac{A_1}{(\rho_0 c)_1} e^{i(\omega t - k_1 x)} - \frac{B_1}{(\rho_0 c)_1} e^{i(\omega t + k_1 x)}\right\} \quad (3.5.5)$$

und

$$u'_2(x, t) = \Re\left\{\frac{A_2}{(\rho_0 c)_2} e^{i(\omega t - k_2 x)}\right\} \quad (3.5.6)$$

Anstatt die Symbole ρ_0 und c einzeln zu kennzeichnen, wird der Wellenwiderstand $(\rho_0 c)$ eingeklammert und der entsprechenden Index an die Klammer geschrieben.

Es stellt sich die Frage, wie stark die reflektierte und die transmittierte Welle bei einer vorgegebenen Amplitude der einfallenden Welle ist. Das heißt, es soll für ein bekanntes A_1 die Größen B_1 und A_2 berechnet werden. Um die beiden Unbekannten bestimmen zu können, sind zwei Bedingungen notwendig. Diese ergeben sich durch die Bedingungen, die an der Trennfläche erfüllt sein müssen. Wenn die Trennfläche durch die eintreffende Störung ausgelenkt wird, folgen auf beiden Seiten die Fluidelemente. Damit herrscht auf beiden Seiten die gleiche Geschwindigkeit, und an der

3.5. Reflexion und Transmission an Mediengrenzen

Trennfläche gilt $u'_1 = u'_2$. Genauso ist eine Unstetigkeit des Drucks in der nichtdurchströmten Trennfläche unmöglich. Ein Drucksprung würde sofort zu einer unendlichen Beschleunigung von Fluidelementen führen. Es muß daher auch $p'_1 = p'_2$ gelten.

Die Bedingungen für Druck und Schnelle stellen Randbedingungen an die Teillösungen (3.5.3) bis (3.5.6) dar. Die Randbedingungen gelten an der momentanen Position der Trennfläche. Es wird angenommen, daß die Auslenkung der Trennfläche klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen bleibt. Dabei ist zu beachten, daß für eine gegebene Frequenz die Wellenlänge $\lambda = \omega/(2\pi c)$ in den Bereichen unterschiedlich sein kann. Die Bedingung muß selbstverständlich für beide Werte von λ erfüllt sein. Dann kann hier – analog zu der Randbedingung am Kolben in den vorherigen Abschnitten – die Auslenkung der Wand vernachlässigt und die Bedingungen für u' und p' an der mittleren Position der Trennfläche bei $x = 0$ angenommen werden. Für den Druck ergibt sich

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (3.5.7)$$

und für die Schnelle

$$u'_1(0, t) = u'_2(0, t) \quad (3.5.8)$$

Es sei hier angemerkt, daß durch die beiden Bedingungen die Erhaltung der akustischen Energie an der Trennfläche gewahrt bleibt. Die akustische Intensität $p'u'$ ist auf beiden Seiten gleich. So kann an der Stelle $x = 0$ keine Energie verschwindet oder aus ihr entspringen.

Setzt man die Ansätze (3.5.3) und (3.5.4) in die Bedingung (3.5.7) ein, ergibt sich

$$\Re\{[A_1 + B_1] e^{i\omega t}\} = \Re\{A_2 e^{i\omega t}\} \quad (3.5.9)$$

Daraus folgt sofort die Beziehung

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (3.5.10)$$

zwischen den gesuchten Größen. Einsetzen der Ansätze für die Schnelle (3.5.5) und (3.5.6) in Bedingung (3.5.8) ergibt

$$\Re\left\{\frac{[A_1 - B_1]}{(\rho_0 c)_1} e^{i\omega t}\right\} = \Re\left\{\frac{A_2}{(\rho_0 c)_2} e^{i\omega t}\right\} \quad (3.5.11)$$

Man erhält eine zweite Beziehung

$$\frac{[A_1 - B_1]}{(\rho_0 c)_1} = \frac{A_2}{(\rho_0 c)_2} \quad (3.5.12)$$

mit der die gesuchten Größen bestimmt werden können. Auflösen des Gleichungssystems (3.5.10) und (3.5.12) nach der Amplitude der reflektierten Welle ergibt

$$B_1 = -\frac{(\rho_0 c)_2 - (\rho_0 c)_1}{(\rho_0 c)_2 + (\rho_0 c)_1} A_1 \equiv R A_1 \quad (3.5.13)$$

3. Ebene Wellen

Erwartungsgemäß ist die Stärke der reflektierten Welle proportional zur Stärke der einfallenden Welle. Der Proportionalitätsfaktor wird mit R abgekürzt und als Reflexionsfaktor bezeichnet. Es gilt

$$R = \frac{\frac{(\rho_0 c)_2}{(\rho_0 c)_1} - 1}{\frac{(\rho_0 c)_2}{(\rho_0 c)_1} + 1} \quad (3.5.14)$$

Nach (3.5.10) ergibt sich schließlich für die transmittierte Welle

$$A_2 = A_1 + B_1 = (1 + R) A_1 \equiv T A_1 \quad (3.5.15)$$

Dabei wurde der Transmissionsfaktor $T = 1 + R$ eingeführt. Im Gegensatz zu dem komplexen Reflexionsfaktor R_w aus dem letzten Abschnitt, der die Reflexion an der flexiblen Wand beschreibt, ist R nach (3.5.14) rein reell. Auch hängt R – und damit die Reflexion an der Trennfläche – nicht von der Frequenz ω ab. Die Größe R_w ist dagegen über die Wandimpedanz von der Frequenz abhängig.

Natürlich gilt die bisherige Betrachtung auch für Trennflächen zwischen zwei Flüssigkeiten, aber in der Praxis sind Trennflächen zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas besonders häufig. Typischerweise sind die Wellenwiderstände in Gasen deutlich niedriger als in Flüssigkeiten. Zum Beispiel ist der in Wasser etwa 4000 mal so groß wie der in Luft. Die Dichte in Flüssigkeiten ist höher, und auch die Schallgeschwindigkeit ist größer, da Flüssigkeiten inkompressibler als Gase sind. Ist zum Beispiel

$$(\rho_0 c)_2 \gg (\rho_0 c)_1 \quad (3.5.16)$$

so wird nach (3.5.14) der Reflexionsfaktor $R \approx 1$. Das bedeutet, eine aus Luft kommende und senkrecht auf eine Wasseroberfläche treffende Welle wird total reflektiert. Die transmittierte Welle besitzt nach (3.5.15) die doppelte Druckamplitude der einfallenden Welle $A_2 \approx 2 A_1$. Umgekehrt wird bei

$$(\rho_0 c)_2 \ll (\rho_0 c)_1 \quad (3.5.17)$$

der Wert $R \approx -1$. Die reflektierte Welle besitzt die gleiche Stärke der einfallenden Welle, jedoch ist die Phase gespiegelt. Die Druckamplitude der transmittierten Welle ist mit $|A_2| \ll |A_1|$ vernachlässigbar gering.

3.6. Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Randwertprobleme behandelt. Dabei wurden ausschließliche harmonische Lösungen betrachtet, die sich durch die harmonischen Randbedingungen ergaben. Nun soll ein anderen Typ von Aufgabenstellung vorgestellt werden.

Gegeben ist ein beidseitig abgeschlossenes Rohr mit einer undurchlässigen Membran in der Mitte. Die beiden Rohrhälften sind mit dem gleichen Medium jedoch mit

3.6. Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

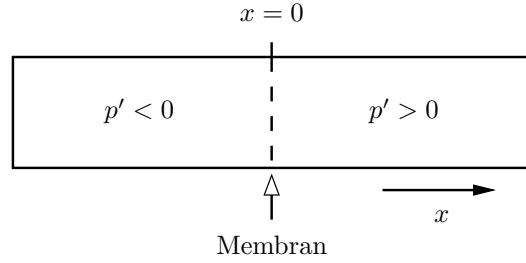


Abbildung 3.14.: Durch Membran in zwei Kammern unterschiedlichen Drucks unterteiltes Rohr

einem unterschiedlichen Druck gefüllt. Die Anordnung ist in Abbildung 3.14 skizziert. In dem Beispiel ist links der Druck niedriger als rechts. Zur Zeit $t = 0$ platzt die Membran, und der Druck im Rohr kann sich ausgleichen. In der Realität klingen nach einiger Zeit alle Störungen ab, und es stellt sich der mittlere Druck $p = p_0$ im gesamten Rohr ein. Dabei spielen Effekte wie Reibung und Dissipation eine Rolle. Die akustischen Gleichungen können damit das Abklingen nicht beschreiben. Jedoch kann mit ihnen berechnet werden, wie die Druckwellen kurz nach dem Platzen der Membran aussehen, und wie der Ausgleichsvorgang im einzelnen abläuft. Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes Anfangswertproblem. Die Anfangswerte bei $t = 0$ sind gegeben. Die Druckverteilung hat die Form

$$p'(x, 0) = \begin{cases} -A & \text{für } x < 0 \\ A & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Dabei ist $A > 0$ der Über- beziehungsweise Unterdruck in den beiden Hälften. Der Druckunterschied beträgt $2A$. Vor der Platzen der Membran ist alles in Ruhe und damit

$$u'(x, 0) = 0 \quad (3.6.2)$$

Gesucht ist nun die Druckverteilung

$$p'(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (3.6.3)$$

für spätere Zeitpunkte $t > 0$. Das bedeutet, die Funktionen f und g sollen bestimmt werden.

Die Anfangswertverteilung (3.6.1) besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit. Dadurch ergibt sich eine Schwierigkeit beim Einsetzen in die Wellengleichung, da die Lösung nicht überall differenzierbar ist. Auf diese Problematik wird weiter unten noch ausführlicher eingegangen. Zunächst soll hier ganz allgemein dargestellt werden, wie für gegebene Anfangsverteilungen p' und u' die Funktionen f und g berechnet werden können. Dabei wird vorerst angenommen, p' und u' seien überall zweimal differenzierbar.

3. Ebene Wellen

Die Wellengleichung für den Druck ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung müssen auch hier zwei Bedingungen – zum Beispiel der Wert und die Zeitableitung – als Anfangsbedingung vorgegeben werden. Erst dann kann die Lösung eindeutig bestimmt werden. Allein mit der Vorgabe des Drucks p' wäre die Lösung nicht eindeutig. Ist zusätzlich die Schnelle u' bekannt, so kann daraus eine zweite Bedingung an den Druck p' erzeugt werden. Dies ist mit Hilfe der linearisierten Kontinuitätsgleichung möglich. Diese lautet in einer Dimension

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.6.4)$$

Ersetzt man mit $p' = c^2 \rho'$ die Dichte durch den Druck erhält man

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.6.5)$$

Mit $u'(x, 0)$ ist auch die räumliche Ableitung von u' zur Zeit $t = 0$ gegeben. Daraus kann mit (3.6.5) die Zeitableitung für p' berechnet werden. Es sind dann zwei Bedingungen an p' gegeben, und eine Lösung der Anfangswertproblems ist theoretisch möglich.

Entkopplung der Gleichungen

Hier soll ein etwas anderer Weg vorgestellt werden, an dem einige mathematischen Eigenschaften der Wellengleichung und ihrer Lösungen deutlich werden. Die Wellengleichung wurde aus der linearisierten Kontinuitätsgleichung und der linearisierten Euler-Gleichung abgeleitet. Im eindimensionalen Fall lautet letztere

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.6.6)$$

Die linearisierte Kontinuitätsgleichung war bereits in die Gleichung (3.6.5) umgeformt worden. Zusammen bilden die beiden Gleichungen (3.6.5) und (3.6.6) ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die abhängigen Variablen p' und u' . Dieses System ist voll äquivalent zur Wellengleichung für p' . Das heißt, jede Lösung der Wellengleichung erfüllt (3.6.5) und (3.6.6). Umgekehrt erfüllen die Lösungen des Systems auch die Wellengleichung.

Das System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung kann nun auf eine interessante Form gebracht werden. Multipliziert man Gleichung (3.6.6) mit $\rho_0 c$ und addiert das Resultat zu (3.6.5) ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}(p' + \rho_0 c u') + c \frac{\partial}{\partial x}(p' + \rho_0 c u') = 0 \quad (3.6.7)$$

Analog erhält man durch Subtraktion die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t}(p' - \rho_0 c u') - c \frac{\partial}{\partial x}(p' - \rho_0 c u') = 0 \quad (3.6.8)$$

3.6. Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

Die beiden neuen Gleichungen sind wieder ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Das neue System ist zum alten System und damit zur Wellengleichung für den Schalldruck immer noch voll äquivalent. Es hat nur mathematische eine besondere Eigenschaft. Dies wird deutlich, wenn man eine Substitution der abhängigen Variablen durchführt. Statt den physikalischen Größen p' und u' werden die Variablen

$$R_1 = p' + \rho_0 c u' \quad (3.6.9)$$

und

$$R_2 = p' - \rho_0 c u' \quad (3.6.10)$$

verwendet. Damit kann das Differentialgleichungssystem als

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \quad (3.6.11)$$

und

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - c \frac{\partial R_2}{\partial x} = 0 \quad (3.6.12)$$

geschrieben werden. Die Lösung dieses Systems ist relativ einfach, da beide Gleichungen entkoppelt sind. Die Variable R_1 tritt nur in (3.6.11) auf und R_2 nur in (3.6.12). Im ursprünglichen System waren p' und u' immer gemischt vorgekommen.

Die gezeigte Entkopplung der Gleichungen in einem System partieller Differentialgleichungen funktioniert immer, wenn das System vom sogenannten hyperbolischen Typ ist. Auf die mathematischen Details der Klassifizierung der Differentialgleichungssystem kann hier nicht weiter eingegangen werden. Es soll nur erwähnt werden, daß die eingeführten Variablen R_1 und R_2 üblicherweise als Riemann-Invarianten bezeichnet werden.

In jedem Fall ist die Wellengleichung und damit auch das äquivalente System vom hyperbolischen Typ. Die Entkopplung bedeutet anschaulich eine Trennung der hin und herlaufenden Wellen. Gleichung (3.6.11) beschreibt eine reine Ausbreitung in positiver x -Richtung. Die Lösung hat die allgemeine Form

$$R_1(x, t) = F(x - ct) \quad (3.6.13)$$

Die Funktion F wird durch die Anfangs und Randbedingungen festgelegt. Die Lösung stellt eine einfache Verschiebung der Verteilung von R_1 mit der Geschwindigkeit c in positive x -Richtung dar. Betrachtet man die Lösung in der x, t -Ebene, so ist die Größe R_1 entlang der Kurven mit $x - ct = const$ konstant beziehungsweise invariant. Daher stammt auch der Ausdruck "Invariante". Die Kurven $x - ct = const$ werden als Charakteristiken bezeichnet. Entlang ihnen breitet sich sozusagen die Lösung R_1 aus. Im allgemeinen können die Charakteristiken auch gekrümmmt sein. Für lineare Differentialgleichung wie (3.6.11) sind sie jedoch einfach Geraden.

Die Wellenausbreitung in der Gegenrichtung – in negativer x -Richtung – wird durch (3.6.12) erfaßt. Entsprechend lautet die Lösung auch

$$R_2(x, t) = G(x + ct) \quad (3.6.14)$$

3. Ebene Wellen

Die Funktion G ist das Analogon zu F . Die Größe R_2 ist entlang der Kurven $x + ct = \text{const}$ konstant. Die Verteilung von R_2 verschiebt sich entsprechend mit der Geschwindigkeit c in negativer x -Richtung.

Sind p' und u' zur Zeit $t = 0$ bekannt, so kann daraus mit (3.6.9) und (3.6.10) die Verteilung von R_1 und R_2 berechnet werden. Damit sind dann auch die Funktionen F und G festgelegt, denn es gilt $R_1(x, 0) = F(x)$ und $R_2(x, 0) = G(x)$. So kann sofort die Lösung für R_1 und R_2 für alle Zeiten $t > 0$ angegeben werden. Für die praktische Anwendung sind jedoch nicht die Riemann-Invarianten sondern der Druck und die Schnelle von Interesse. Um sie zu berechnen wird das 2×2 Gleichungssystem (3.6.9) und (3.6.10) invertiert. Es ergibt sich

$$p' = \frac{1}{2} (R_1 + R_2) \quad (3.6.15)$$

und

$$u' = \frac{1}{2\rho_0 c} (R_1 - R_2) \quad (3.6.16)$$

Damit kann aus den mathematischen Größen R_1 und R_2 wieder der gesuchte Druck p' und die Schnelle u' berechnet werden. Setzt man (3.6.13) und (3.6.14) in (3.6.15) ein, ergibt sich

$$p'(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + G(x + ct)] \quad (3.6.17)$$

Diese Lösung entspricht der ursprünglichen Form (3.6.3). Die gesuchten Funktion f und g können direkt angegeben werden. Es gilt einfach: $f = F/2$ und $g = G/2$. Somit wurde ein systematischer Weg gefunden, die Funktionen f und g zu bestimmen.

Im folgenden sollen die Ergebnisse auf das konkrete Anfangswertproblem aus Abbildung 3.14 angewendet werden. Die Anfangsbedingungen sind durch (3.6.1) und (3.6.2) gegeben. Wegen $u'(x, 0) = 0$ ergibt sich für die Funktion F

$$F(x) = R_1(x, 0) = p'(x, 0) + \rho_0 c u'(x, 0) \equiv p'(x, 0) \quad (3.6.18)$$

Analog folgt für G

$$G(x) = R_2(x, 0) = p'(x, 0) - \rho_0 c u'(x, 0) \equiv p'(x, 0) \quad (3.6.19)$$

Das bedeutet, wenn – wie in dem Rohr – die Schnelle u' zu Beginn bei $t = 0$ gleich Null ist, folgt einfach

$$F(x) = G(x) = p'(x, 0) \quad (3.6.20)$$

Die beiden Funktionen F und G sind in dem speziellen Fall identisch.

Die Lösung (3.6.17) lässt sich damit veranschaulichen. Das obere linke Bild in Abbildung 3.15 zeigt den Verlauf von $F(x - ct)$ und $G(x + ct)$ bei $t = 0$. Die Kurven entsprechen dem Druckverlauf $p'(x, 0)$, der rechts daneben aufgezeichnet ist. Darunter sind die gleichen Kurven für einen Zeitpunkt $t_1 > 0$ dargestellt. Die durchgezogene F -Kurve hat sich nach rechts und die gestrichelte G -Kurve nach links verschoben. Entsprechend ergibt sich nach (3.6.17) in dem Intervall $[-ct_1, ct_1]$ der Druck $p'(x, t_1) = 0$. Außerhalb dieses Bereichs entspricht der Druck noch seinem Anfangswert.

3.6. Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

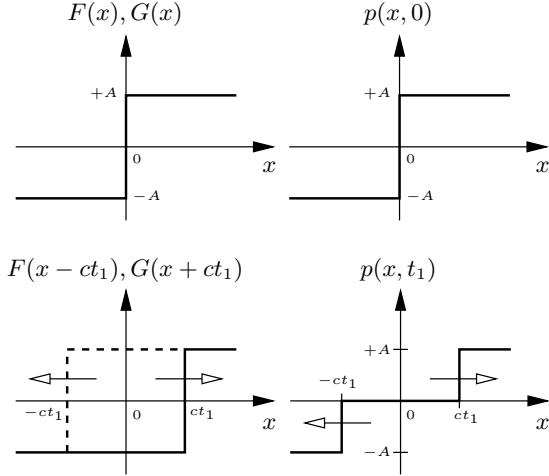


Abbildung 3.15.: Anfangsverteilungen zur Zeit $t = 0$ oben und zur Zeit $t_1 > 0$ unten

Gültigkeit der Lösung mit Sprungstellen

Bei den bisherigen Überlegungen wurde nicht berücksichtigt, daß die angegebene Lösung zwei Sprungstellen besitzt. Diese ergeben sich notwendigerweise aus der Unstetigkeit in der Anfangsbedingung. Strenggenommen ist die angegebene Druckverteilung mit Sprungstellen als Lösung der Wellengleichung nicht zulässig, da sie nicht überall differenzierbar ist. Die gegebene Anfangswertaufgabe wäre also mit der Wellengleichung gar nicht vernünftig zu beschreiben.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß es dennoch sinnvoll ist, die Lösungen mit Sprungstellen zuzulassen. Zunächst wird betrachtet, wie die Richtigkeit einer Lösung mit Sprungstelle rein formal überprüft werden kann. Dazu wird stellvertretend für das ganze System die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \quad (3.6.21)$$

betrachtet. Als ein Beispiellösung mit Unstetigkeit sei

$$R_1(x, t) = A H(x - ct) \quad (3.6.22)$$

gegeben. Dabei ist die Heaviside-Funktion

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \quad (3.6.23)$$

zur Darstellung verwendet worden. Die Heaviside-Funktion $H(\xi)$ besitzt eine Unstetigkeit an der Stelle $\xi = 0$. Dort ist sie im klassischen Sinne nicht differenzierbar. Das

3. Ebene Wellen

gewählte Beispiel ist zwar nicht genau mit der Lösung aus Gleichung (3.6.18) identisch besitzt aber die Sprungstelle an der gleichen Stelle.

Erweitert man den Funktionenraum um die sogenannten Distributionen, so kann auch die Ableitung von unstetigen Funktionen angegeben werden. Dies wurde im Abschnitt 1.6 ausführlich behandelt. Die Ableitung der Heaviside-Funktion lässt sich mit Hilfe der Diracschen δ -Funktion ausdrücken. Es gilt insbesondere auch im Punkt $\xi = 0$ die Beziehung

$$\frac{dH(\xi)}{d\xi} = \delta(\xi) \quad (3.6.24)$$

Mit dieser Erweiterung kann nun die Lösung (3.6.22) überprüft werden. Für die Zeitableitung folgt

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = A \frac{dH}{d\xi}(x - ct) \frac{\partial}{\partial t}\{x - ct\} = -A c \delta(x - ct) \quad (3.6.25)$$

und für die räumliche Ableitung gilt entsprechend

$$\frac{\partial R_1}{\partial x} = A \frac{dH}{d\xi}(x - ct) \frac{\partial}{\partial x}\{x - ct\} = A \delta(x - ct) \quad (3.6.26)$$

Durch Einsetzen der beiden Ausdrücke in die Differentialgleichung (3.6.21) ergibt sich

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} = [-c + c] \cdot A \delta(x - ct) = 0 \quad (3.6.27)$$

Damit ist rein formal gezeigt, daß (3.6.22) tatsächlich eine Lösung der betrachteten Differentialgleichung ist. Das bedeutet jedoch noch nicht, daß die formale Lösung auch physikalisch sinnvoll ist.

Es stellt sich die Frage, ist die Zulassung der erweiterten Funktionen physikalisch gerechtfertigt. Die δ -Funktion besitzt ihre Bedeutung im einem integralen Sinn, wie es in Abschnitt 1.6 gezeigt wurde. Um die Bedeutung der Lösung zu veranschaulichen, wird die Differentialgleichung (3.6.21) in Raum und Zeit integriert. Der Integrationsbereich ist ein Rechteck in der x, t -Ebene. Zuerst wird in x -Richtung in dem Intervall $[x_0, x_0 + l]$ integriert. Es ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x_0+l} \left[\frac{\partial R_1}{\partial t} + c \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] dx = \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{\partial R_1}{\partial t} dx + c [R_1(x_0 + l, t) - R_1(x_0, t)] = 0 \quad (3.6.28)$$

Als nächstes wird die Integration in t -Richtung im Intervall $[t_0, t_0 + \tau]$ durchgeführt. Man erhält nach Vertauschen der Integrationen im ersten Term auf der rechten Seite

$$\int_{x_0}^{x_0+l} [R_1(x, t_0 + \tau) - R_1(x, t_0)] dx + c \int_{t_0}^{t_0+\tau} [R_1(x_0 + l, t) - R_1(x_0, t)] dt = 0 \quad (3.6.29)$$

Jede klassische (differenzierbare) Lösung der Differentialgleichung (3.6.21) erfüllt automatisch die Integralgleichung (3.6.29) unabhängig von der Wahl der Integrationsgrenzen x_0, t_0, l und τ . Es lässt sich leicht zeigen, daß dies auch für die Lösung (3.6.22)

3.6. Anfangswertproblem mit einer Unstetigkeit

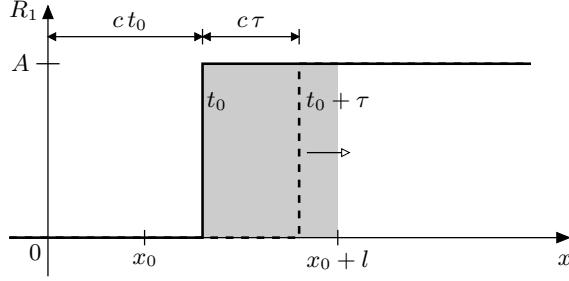


Abbildung 3.16.: Ausbreitung der unstetigen Verteilung

zutrifft. Dabei sind erweiterte Funktionen zur Überprüfung nicht mehr notwendig, weil in der Integralgleichung keine Ableitungen auftreten. Das heißt, die Lösung (3.6.22) erfüllt die Integralgleichung im klassischen Sinn. Der exakte Beweis hierfür wird dem Leser zur Übung überlassen. Im folgenden soll dies stattdessen anschaulich verdeutlicht werden.

In Abbildung 3.16 ist der Verlauf von $R_1(x, t)$ nach (3.6.22) zu zwei verschiedenen Zeiten dargestellt. Die durchgezogene Linie ist die Verteilung zur Zeit t_0 und die gestrichelte Linie zur Zeit $t_0 + \tau$. Die Integrationsgrenzen sind so gewählt, daß sich die Unstetigkeitsstelle in beiden Fällen im Intervall $[x_0, x_0 + l]$ befindet. Die Integrale in (3.6.29) werden in Teilintegrale aufgespalten. In dem speziellen Beispiel ergibt sich für die Raumintegrale

$$\int_{x_0}^{x_0+l} R_1(x, t_0) dx = [(x_0 + l) - ct_0] A \equiv S \quad (3.6.30)$$

und

$$\int_{x_0}^{x_0+l} R_1(x, t_0 + \tau) dx = S - c\tau A \quad (3.6.31)$$

Dabei wurde als Abkürzung die Größe S eingeführt. Sie entspricht dem Flächeninhalt des schattierten Bereichs in Abbildung 3.16. Für die Zeitintegrale erhält man

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} R_1(x_0, t) dt = 0 \quad (3.6.32)$$

und

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} R_1(x_0 + l, t) dt = A\tau \quad (3.6.33)$$

3. Ebene Wellen

Setzt man (3.6.30) bis (3.6.33) in die Integralgleichung (3.6.29) ein, ergibt sich

$$(S - c \tau A) - S + c[A \tau - 0] = 0 \quad (3.6.34)$$

Die linke Seite ist tatsächlich gleich Null. Die betrachtete Lösung erfüllt damit die Integralgleichung. Dabei spielt es keine Rolle, daß die Lösung eine Unstetigkeit besitzt, die sich sogar in dem betrachteten Intervall befindet.

Es können Lösungen der Integralgleichung (3.6.29) gefunden werden, die jedoch wegen Unstetigkeiten – wie zum Beispiel (3.6.22) – keine klassische Lösung der Differentialgleichung darstellen. Diese Lösungen werden als “schwache Lösungen” der Differentialgleichung bezeichnet. Es muß nicht unbedingt die Integralgleichung herangezogen werden, um eine schwache Lösungen zu überprüfen. Auch mit dem Formalismus der δ -Funktion kann anhand der Differentialgleichung die Richtigkeit der Lösung – wie in (3.6.27) – gezeigt werden.

Es bleibt die Frage, ob die schwachen Lösungen physikalisch sinnvoll sind. Die Wellengleichung für den Druck wurde aus der Kontinuitätsgleichung und der Euler-Gleichung abgeleitet. Die beiden Gleichungen wurden linearisiert und das resultierende Gleichungssystem entspricht den Gleichungen (3.6.11) und (3.6.12). Die Kontinuitäts-gleichung und die Euler-Gleichung leiten sich aus einer Bilanzüberlegung an einem Kontrollvolumen ab. Das heißt, sie sind zuerst in einer integralen Form vorhanden. Entsprechend ist an dieser Stelle die Differenzierbarkeit der Druck- und Schnelleverteilungen nicht vorausgesetzt. Weil es für viele Berechnungen zweckmäßiger ist mit Differentialgleichungen zu arbeiten, werden die partielle Differentialgleichungen aus den integralen Beziehungen abgeleitet. Dabei gehen jedoch die schwachen Lösungen sozusagen verloren. Sie sind nicht mehr zulässig. Dies ist jedoch nur eine Folge des rein formalen Schritts beim Übergang auf eine Differentialgleichung. Die schwachen Lösungen des Differentialgleichungssystems (3.6.11) und (3.6.12) stellen damit Lösungen einer physikalisch sinnvollen Integralgleichung dar. Genauso gehen bei Übergang auf die Wellengleichung noch weitere Lösungen verloren. Denn die Druckverteilung muß zweimal differenzierbar sein, um eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung zu sein. Damit sind auch nicht alle Lösungen des Differentialgleichungssystems erster Ordnung automatisch Lösungen der Wellengleichung. In jedem Fall können Lösungen, die nicht überall zweimal differenzierbar sind, sinnvolle physikalische Lösungen der Wellengleichung darstellen. Entsprechend werden die schwachen Lösungen des Differentialgleichungssystems (3.6.11) und (3.6.12) im weiteren als Lösungen der Wellengleichung zugelassen.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

Im vorangegangenen Kapitel wurden ebene Wellen betrachtet, die sich in Rohren ausbreiten. Alle Vorgänge wurden als eindimensional angenommen und es gab nur eine Bewegung der Fluidelemente in Richtung der Rohrrachse. Damit wurde die Randbedingung an den festen Rohrwänden automatisch erfüllt. An der Wand muß die Schnellekomponente senkrecht zur Oberfläche verschwinden. Es sind jedoch auch Lösungen denkbar, die im Inneren des Rohres eine Bewegung quer zur Rohrrachse besitzen. Solche Lösungen sollen im folgenden für einen zweidimensionalen Kanal mit festen Wänden hergeleitet werden. Der Kanal soll die Breite H besitzen, und er soll in x_1 -Richtung

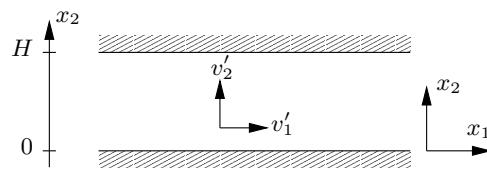


Abbildung 4.1.: Koordinaten im zweidimensionalen Kanal

unendlich ausgedehnt sein. Die Anordnung der Koordinaten ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Man kann sich den Kanal auch in drei Dimensionen als zwei unendlich ausgedehnte ebene Platten mit dem Abstand H vorstellen. Die x_2 -Achse geht senkrecht durch die Platten. Es werden nur Lösungen betrachtet, die unabhängig von x_3 sind, und deren Schnellekomponente v'_3 überall gleich Null ist.

Die Wellengleichung für den Druck in der Ebene lautet (mit Summationskonvention)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{mit } j = 1, 2 \quad (4.1.1)$$

Eine Lösung muß neben dieser Gleichung auch die Randbedingungen an den Wänden erfüllen. Bei festen undurchlässigen Wänden gilt für die Schnelle die Bedingung

$$v'_2(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.2)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Um daraus eine Beziehung für den Druck abzuleiten, wird später noch die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial v'_j}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad \text{mit } j = 1, 2 \quad (4.1.3)$$

benötigt.

Zur Lösung der Wellengleichung (4.1.1) bei der gegebenen Randbedingung (4.1.2) wird der Ansatz

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1) \cdot g(x_2) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.1.4)$$

verwendet. Dabei sind $f(x_1)$ und $g(x_2)$ komplexwertige Funktionen. Die Lösung ist harmonisch in der Zeit und die räumlichen Abhängigkeiten sind separiert. Eigentlich müßte auf der rechten Seite von Gleichung (4.1.4) der Realteil des komplexen Ausdrucks stehen, denn p' auf der linken Seite ist eine reelle Größe. Für eine größere Übersichtlichkeit der Gleichungen wird im weiteren, wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht, die Bildung des Realteils mit $\Re\{\cdot\}$ nicht explizit hingeschrieben. Bei allen Gleichungen, in denen eine reell definierte Größe mit einem komplexen Ausdruck gleichgesetzt wird, ist dann die Bildung des Realteils auf der komplexen Seite implizit enthalten.

Einsetzen von (4.1.4) in (4.1.1) liefert

$$\left[-\frac{f g \omega^2}{c^2} - \frac{d^2 f}{dx_1^2} g - \frac{d^2 g}{dx_2^2} f \right] e^{i\omega t} = 0 \quad (4.1.5)$$

Damit dies für alle Zeiten t gilt, muß der Inhalt der eckigen Klammer verschwinden. Es folgt

$$-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_1^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_2^2} \quad (4.1.6)$$

Die linke Seite von (4.1.6) ist ausschließlich eine Funktion von x_1 . Die rechte Seite hängt nur von x_2 ab. Die Bedingung gilt aber für alle möglichen Kombinationen von x_1 und x_2 . Dies ist nur möglich, wenn beide Seiten unabhängig von x_1 und x_2 – also räumlich konstant – sind. Die Konstante wird zu $-\beta^2$ gesetzt. Wenn auch komplexe β zugelassen sind, ist durch diese Wahl keine Einschränkung gegeben. Es gilt also

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_2^2} = -\beta^2 \quad (4.1.7)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $g(x_2)$. Die allgemeine Lösung von (4.1.7) kann in der Form

$$g(x_2) = A_2 \cos(\beta x_2) + B_2 \sin(\beta x_2) \quad (4.1.8)$$

dargestellt werden. Die Konstanten A_2 , B_2 und β müssen so gewählt werden, daß die Randbedingungen (4.1.2) erfüllt werden. Da nur zwei Bedingungen gegeben sind, lassen sich die Konstanten nicht alle bestimmen. Es ist leicht einzusehen, daß die Lösung der Wellengleichung bei den gegebenen Randbedingungen nur bis auf einen konstanten Faktor angegeben werden kann. Findet man eine Lösung und multipliziert

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

sie mit einer Konstanten, so ergibt sich eine weitere Lösung. Erst durch zusätzliche Randbedingungen in x_1 -Richtung würde die Lösung eindeutig werden.

An den Kanalwänden ist $v'_2 = 0$. Daraus folgt für die zeitliche Ableitung

$$\frac{\partial v'_2}{\partial t} = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.9)$$

Durch die Gleichung (4.1.3) läßt sich dies in eine Bedingung für den Druck umwandeln. Es ergibt sich

$$\frac{\partial p'}{\partial x_2} = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.10)$$

Das bedeutet, die Normalableitung des Schalldrucks an der festen Kanalwand verschwindet. Dies ist eine direkte Folge der Nichtdurchflußbedingung (4.1.2). Umgekehrt folgt aus der Druckbedingung (4.1.10), daß sich v'_2 an der Wand nicht zeitlich ändert. Ist zu einer Zeit an der Wand $v'_2 = 0$, so bleibt immer $v'_2 = 0$, und die Randbedingung (4.1.2) ist erfüllt.

Um die Bedingung (4.1.10) zu erreichen, wird der Ansatz (4.1.4) nach x_2 differenziert. Es ergibt sich

$$\frac{\partial p'}{\partial x_2}(\vec{x}, t) = f(x_1) \frac{dg}{dx_2}(x_2) e^{i\omega t} \quad (4.1.11)$$

Man sieht, daß (4.1.10) erfüllt wird, falls

$$\frac{dg}{dx_2} = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.1.12)$$

gilt. Aus der Randbedingung an den Kanalwänden folgt damit letztlich eine Bedingung an die Ableitung der Funktion $g(x_2)$. Bildet man die Ableitung ergibt sich

$$\frac{dg}{dx_2}(x_2) = -\beta A_2 \sin(\beta x_2) + \beta B_2 \cos(\beta x_2) \quad (4.1.13)$$

Es wird $B_2 = 0$ gesetzt, wodurch die Randbedingung bei $x_2 = 0$ immer erfüllt ist. Damit auch bei $x_2 = H$ die Ableitung von g verschwindet, muß $A_2 = 0$ oder

$$\sin(\beta H) = 0 \quad (4.1.14)$$

sein. Der Fall $A_2 = 0$ führt auf die triviale Lösung $g = 0$ und damit $p' = 0$ im gesamten Feld. Die zweite Weg ist, die Größe β so zu wählen, daß (4.1.14) erfüllt wird. Dafür gibt es eine ganze Reihe von Möglichkeiten:

$$\beta = \frac{m\pi}{H} \equiv \beta_m \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.15)$$

Somit ergeben sich für $g(x_2)$ auch eine ganze Reihe von Lösungen

$$g(x_2) = A_2 \cos\left(\frac{m\pi x_2}{H}\right) = A_2 \cos(\beta_m x_2) \quad (4.1.16)$$

In Abbildung 4.2 sind die entsprechenden Verläufe $g(x_2)$ für $m = 0, 1, 2$ dargestellt.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

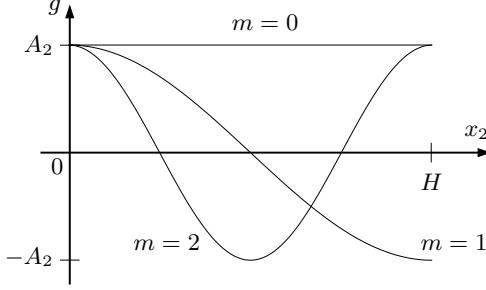


Abbildung 4.2.: Verlauf der Lösung in x_2 -Richtung für verschiedene Werte m

Um das Druckfeld $p'(\vec{x}, t)$ vollständig zu bestimmen, muß noch die Funktion $f(x_1)$ ermittelt werden. Die Gleichungen (4.1.6) und (4.1.7) ergeben zusammen

$$-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_1^2} = -\beta^2 = -\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \quad (4.1.17)$$

Dies kann zu

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right] f = 0 \quad (4.1.18)$$

umgeformt werden. Beziehung (4.1.18) ist eine Differentialgleichung für $f(x_1)$. Die allgemeine Lösung von (4.1.18) hat die Gestalt

$$f(x_1) = A_1 e^{-i\alpha x_1} + B_1 e^{i\alpha x_1} \quad (4.1.19)$$

Dieser Ansatz ist äquivalent zu dem Ansatz (4.1.8). Jedoch ist für $f(x_1)$ – wie sich später zeigen wird – die Exponentialdarstellung zweckmäßiger, da in x_1 -Richtung besonders laufende Wellen von Interesse sind. Die freien Parameter sind A_1 , B_1 und α . Aus (4.1.19) folgt

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) = -\alpha^2 f(x_1) \quad (4.1.20)$$

Damit der Ansatz (4.1.19) die Differentialgleichung (4.1.18) erfüllt, muß für α die Beziehung

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2} = \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \equiv \alpha_m \quad (4.1.21)$$

gelten. Das bedeutet, für jedes m gibt es ein bestimmtes α und β . Die Funktionen f und g können damit nicht voneinander unabhängig gewählt werden. Zu einem bestimmten $g(x_2)$ gehört ein bestimmtes $f(x_1)$.

Schließlich kann die vollständige Lösung für das Druckfeld angegeben werden. Sie lautet

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 \cos(\beta_m x_2) [A_1 e^{-i\alpha_m x_1} + B_1 e^{i\alpha_m x_1}] e^{i\omega t} \quad (4.1.22)$$

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

Die Größen A_1 , B_1 und A_2 sind Faktoren, die frei gewählt werden können. Zieht man den $e^{i\omega t}$ -Term mit in die eckige Klammer hinein, ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 \cos(\beta_m x_2) \left[A_1 e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_m x_1)} \right] \quad (4.1.23)$$

Die beiden Summanden in der eckigen Klammer besitzen jeweils die Form eines Wellenausdrucks in komplexer Darstellung. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Lösungen tritt statt der Wellenzahl k die Größe α_m im Exponenten auf. Es ist zu beachten, daß α_m nach (4.1.21) auch komplex werden kann. Wenn α_m reell ist, besteht die Lösung aus einer Überlagerung von zwei Teilwellen, die in positive und negative x_1 -Richtung laufen. Die Amplituden der Teilwellen werden durch A_1 und B_1 festgelegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist jedoch nicht unbedingt die Schallgeschwindigkeit. Sie hängt wie die Form der gesamten Lösung von der gewählten Zahl m ab.

Die verschiedenen Formen der Lösung werden Moden genannt. Die Zahl m heißt Ordnung der Mode. Die Lösung für $m = 0$ wird als Grundmode bezeichnet. Nach (4.1.15) ist

$$\beta_0 = 0 \quad (4.1.24)$$

und mit (4.1.21) folgt daraus

$$\alpha_0 = \frac{\omega}{c} = k \quad (4.1.25)$$

Für die Grundmode ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 \left[A_1 e^{i(\omega t - kx_1)} + B_1 e^{i(\omega t + kx_1)} \right] \quad (4.1.26)$$

Sie entspricht damit den eindimensionalen ebenen Wellen aus dem vorangegangenen Abschnitten.

“Cut-Off”-Bedingung

Die Form (4.1.22) beziehungsweise (4.1.23) beschreibt nur eine reguläre Wellenausbreitung, falls α_m reell ist. Dies ist jedoch nur unter bestimmten Bedingungen gegeben. Wird bei einer festen Frequenz ω die Ordnungszahl m immer weiter erhöht, so wird irgendwann der Ausdruck unter der Wurzel in (4.1.21) negativ. Dadurch ergibt sich ein imaginäres α_m , und die Lösung stellt keine reguläre Wellenausbreitung mehr dar. Die Lösung klingt dann mit dem Faktor $e^{\pm|\alpha_m|x_1}$ in x_1 -Richtung ab oder wächst entsprechend an.

Für eine feste Frequenz gibt es also ein maximale Ordnung m , mit der sich die Moden noch ausbreiten können. Umgekehrt gibt es für jede Ordnung m – also jede Mode – eine untere Grenzfrequenz $\omega_{c,m}$, ab der sich die Mode ausbreitet. Damit α_m reell ist, muß

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 > 0 \quad (4.1.27)$$

gelten. Dazu muß die Kreisfrequenz

$$\omega > m \frac{c\pi}{H} \equiv \omega_{c,m} \quad (4.1.28)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

erfüllen. Die Frequenz $\omega_{c,m}$ wird als ‘‘Cut-Off’’-Frequenz der m -ten Mode bezeichnet. Wird keine Ordnung angegeben, dann ist mit dem Ausdruck ‘‘Cut-Off’’-Frequenz meistens der Wert für die erste höhere Mode $m = 1$ gemeint. Für

$$\omega < \omega_{c,1} = \frac{c\pi}{H} \quad (4.1.29)$$

breitet sich nur die Grundmode aus, die immer bei allen Frequenzen ausbreitungsfähig ist ($\omega_{c,0} = 0!$). Die Ungleichung (4.1.29) kann zu

$$\frac{\pi}{H} > \frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.1.30)$$

umgeformt werden. Die Größe $\lambda = 2\pi c/\omega$ ist die Wellenlänge, die in einer ebenen Welle mit der Frequenz ω beobachtet wird. Sie entspricht nicht unbedingt den Wellenlängen, die in dem Kanal auftreten. Um eine Verwechslung zu vermeiden, wird λ im folgenden als Freifeldwellenlänge bezeichnet. Aus (4.1.30) folgt

$$\lambda > 2H \quad (4.1.31)$$

Das heißt, nur wenn die Freifeldwellenlänge kleiner als die doppelte Kanalbreite ist, breitet sich die erste Mode regulär aus.

Die Phasengeschwindigkeit im Kanal

Beschränkt man sich auf die Wellenausbreitung in positiver x_1 -Richtung und setzt $B_1 = 0$, ergibt sich für den Druck

$$p' = A_1 A_2 \cos(\beta_m x_2) e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} \quad (4.1.32)$$

Die Ausbreitung in x_1 -Richtung wird durch den Exponentialterm beschrieben. Die Abhängigkeit in x_2 -Richtung kann in einer Funktion $G(x_2) = A_1 A_2 \cos(\beta_m x_2)$ zusammengefaßt werden. Es gilt

$$p' = G(x_2) e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} = G(x_2) e^{i\omega(t - x_1/c_m^{\text{ph}})} \quad (4.1.33)$$

Dabei wurde die Größe

$$c_m^{\text{ph}} = \frac{\omega}{\alpha_m} \quad (4.1.34)$$

eingeführt. Sie wird als Phasengeschwindigkeit der m -ten Mode bezeichnet. Die Phasengeschwindigkeit gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich die Wellenberge in x_1 -Richtung bewegen. Dies ist nicht unbedingt die Schallgeschwindigkeit c . Nur die Grundmode $m = 0$ bewegt sich mit der Schallgeschwindigkeit, denn es gilt

$$c_0^{\text{ph}} = \frac{\omega}{\alpha_0} = \frac{\omega}{k} = c \quad (4.1.35)$$

Für höhere Moden $m > 0$ ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit $c_m^{\text{ph}} > c$. Die gesamte Überlegung gilt jedoch nur, solange α_m reell ist.

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

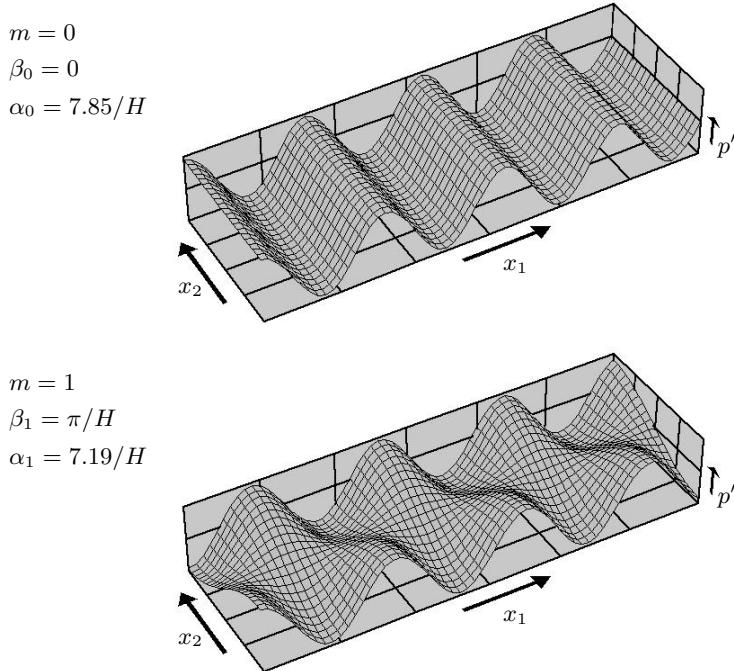


Abbildung 4.3.: Verschiedene Formen der Lösung in einem Kanal mit festen Wänden;
 $\omega = 2\pi c/(0.8 H)$.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 sind die Moden für $m = 0, 1, 2, 3$ veranschaulicht. In den Beispielen wurde $B_1 = 0$ gesetzt und die dargestellte Lösung enthält nur die Teilwelle in positiver x_1 -Richtung nach (4.1.32). Der Bereich in x_2 -Richtung entspricht der gesamten Kanalbreite von $x_2 = 0$ bis H . Die gewählte Frequenz beträgt $\omega = 2\pi c/(0.8 H)$. Das entspricht einer Freifeldwellenlänge von $\lambda = 0.8 H$. Damit ergeben sich für $m = 0, 1, 2$ reelle α_m . Der Wert α_3 ist komplex, und die entsprechende Lösung klingt in x_1 -Richtung ab.

Hier sei angemerkt, daß bei der Ableitung der Gleichung (4.1.21) die negativen Lösungen für α_m nicht berücksichtigt wurden. Im Prinzip muß α_m die Beziehung $k^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2$ erfüllen. Demnach ist auch die negative Wurzel aus Gleichung (4.1.21) eine mögliche Lösung für α_m . Allerdings ergeben sich daraus nicht wirkliche weitere Lösungen für p' , denn ein Wechsel des Vorzeichens von α_m kann in der Lösung (4.1.23) durch das Vertauschen der freien Faktoren A_1 und B_1 ausgeglichen werden.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

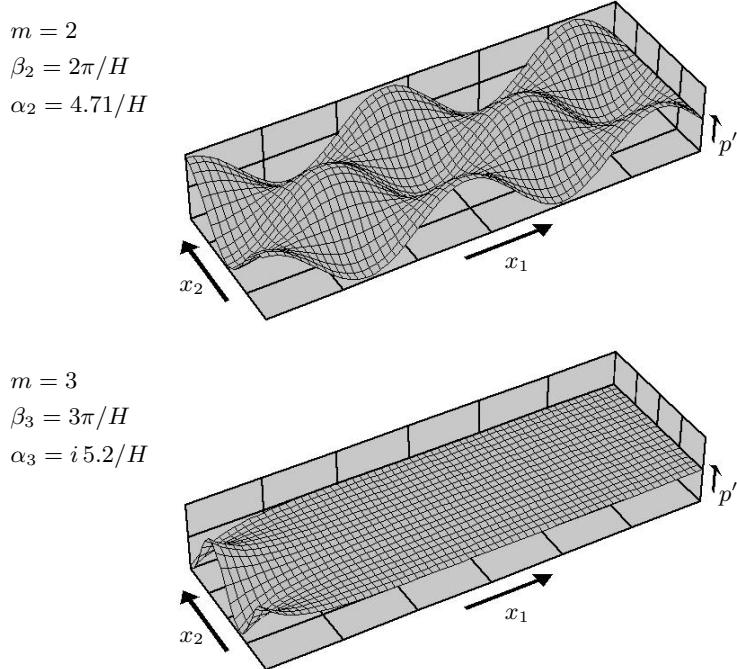


Abbildung 4.4.: Fortsetzung von 4.3

Geometrische Interpretation

Die Phasengeschwindigkeit c^{ph} wird durch die Wellenzahl α_m in x_1 -Richtung festgelegt. Die Wert für α_m ergibt sich zunächst ganz formal aus der Gleichung (4.1.21). Die Größen α_m und β_m können aber auch auf eine anschaulichere Art geometrisch interpretiert werden. Dies soll im folgenden gezeigt werden. Dazu wird die Lösung (4.1.32) betrachtet, die nur die Teilwelle in positive x_1 -Richtung enthält. Der cos-Term in (4.1.32) wird mit

$$\cos(\beta_m x_2) = \frac{1}{2} (e^{i\beta_m x_2} + e^{-i\beta_m x_2}) \quad (4.1.36)$$

ersetzt. Dann kann die Lösung als eine Summe

$$p' = \frac{A_1 A_2}{2} (p'_+ + p'_-) \quad (4.1.37)$$

dargestellt werden. Die beiden Anteile sind dabei mit

$$p'_+ = e^{i(\omega t - \alpha_m x_1 + \beta_m x_2)} \quad (4.1.38)$$

und

$$p'_- = e^{i(\omega t - \alpha_m x_1 - \beta_m x_2)} \quad (4.1.39)$$

4.1. Moden im Kanal mit festen Wänden

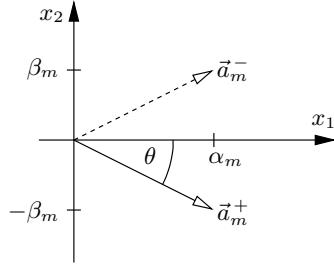


Abbildung 4.5.: Veranschaulichung der Wellenzahlvektoren nach (4.1.40) und (4.1.41) in der x_1, x_2 -Ebene.

gegeben. Anders als in der bisherigen Lösung tritt hier nicht nur die Koordinate x_1 im Exponenten auf, sondern auch x_2 . Die Ausdrücke in (4.1.38) und (4.1.39) beschreiben ebenfalls eine Wellenausbreitung, jedoch nicht in x_1 -Richtung. Die Ausbreitungsrichtung der Wellen wird durch α_m und β_m in der (x_1, x_2) -Ebene festgelegt.

Zweckmäßigerweise werden die Vektoren

$$\vec{a}_m^+ = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ -\beta_m \end{pmatrix} \quad (4.1.40)$$

und

$$\vec{a}_m^- = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ +\beta_m \end{pmatrix} \quad (4.1.41)$$

eingeführt. Sie sind in der Abbildung 4.5 dargestellt. Damit können (4.1.38) und (4.1.39) in der Form

$$p'_+ = e^{i(\omega t - \vec{a}_m^+ \cdot \vec{x})} \quad (4.1.42)$$

und

$$p'_- = e^{i(\omega t - \vec{a}_m^- \cdot \vec{x})} \quad (4.1.43)$$

geschrieben werden. Durch einen Ausdruck der Form

$$p' \sim e^{i(\omega t - \vec{a} \cdot \vec{x})} \quad (4.1.44)$$

wird eine Wellenausbreitung in der Richtung des Vektors \vec{a} beschrieben. Dies wird anschaulich klar, wenn man das Koordinatensystem so wählt, daß die x_1 -Achse in Richtung von \vec{a} zeigt. Dann gilt $\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| x_1$. Entsprechend ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle nach (4.1.44) durch $\omega/|\vec{a}|$ gegeben. Der Vektor \vec{a} wird üblicherweise als Wellenzahlvektor bezeichnet.

Es stellt sich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich die Anteile p'_+ und p'_- ausbreiten. Es gilt

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \quad (4.1.45)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

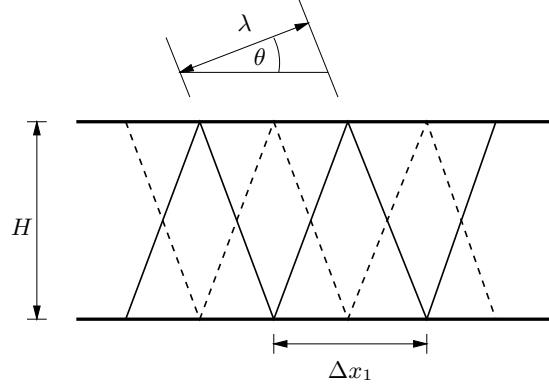


Abbildung 4.6.: Lage der Wellenfronten in den überlagerten ebenen Wellen für die Mode $m = 1$; Maxima: durchgezogene Linien; Minima: gestrichelte Linien

beziehungsweise

$$k^2 = \alpha_m^2 + \beta_m^2 \quad (4.1.46)$$

Daraus folgt für die Beträge

$$|\vec{a}_m^+| = |\vec{a}_m^-| = k = \frac{\omega}{c} \quad (4.1.47)$$

Das bedeutet, die Anteile p'_+ und p'_- sind ebene Wellen, die sich mit der "normalen" Schallgeschwindigkeit c ausbreiten. Sie sind damit einfache Lösungen der Wellengleichung, die im freien Raum gelten. Die Lösung (4.1.32) lässt sich also durch eine Überlagerung von zwei ebenen Wellen erzeugen. Die Wellen müssen sich nur in bestimmte Richtungen ausbreiten und gleichstark sein.

Für $m > 0$ ist auch $\beta_m > 0$. Die Vektoren \vec{a}_m^+ und \vec{a}_m^- stehen dann, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, unter einem Winkel θ schräg zur x_1 -Achse. Für den Winkel θ gilt die Beziehung

$$\tan \theta = \frac{\beta_m}{\alpha_m} \quad (4.1.48)$$

Die ebenen Wellen p'_+ und p'_- erfüllen dann natürlich nicht die Randbedingung an den Kanalwänden. Sie besitzen eine Schnelle, die parallel zu \vec{a}_m^+ beziehungsweise \vec{a}_m^- liegt und durch die Wand hindurchzeigt. Die Wellen überlagern sich so, daß sich die x_2 -Komponenten der Schnelle an den Kanalwänden gerade gegeneinander aufheben. Dazu müssen die Wellen an den Kanalwänden immer die gleiche Phase besitzen.

Die geometrische Situation ist in der Abbildung 4.6 für den Fall $m = 1$ dargestellt. Die Druckmaxima der Wellen sind mit durchgezogenen und die Minima mit gestrichelten Linien markiert. An den Wänden überlagern sich die Minima und Maxima konstruktiv. Dadurch sind dort die x_2 -Komponenten der Schnelle in den einzelnen

4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wellen immer gleichstark und heben sich gegenseitig auf. In der Kanalmitte fallen immer Minima und Maxima zusammen und die Druckschwankungen löschen sich gegenseitig aus. Der Abstand der Wellenmaxima an der Wand sei mit Δx_1 bezeichnet. Es gilt

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\cos \theta} \quad (4.1.49)$$

Das heißt, die an der Kanalwand beobachtete Wellenlänge in x_1 -Richtung ist immer größer als die Freifeldwellenlänge λ . Während einer Periode wandern die Maxima in den ebenen Wellen um die Strecke λ in Ausbreitungsrichtung, und damit bewegen sich die Maxima an der Wand gerade um diese Strecke Δx_1 in Kanalrichtung. Entsprechend ist die Phasengeschwindigkeit in x_1 -Richtung um den Faktor $(1/\cos \theta)$ größer als c .

Der Abstand der Maxima an der Wand ist mit der Wellenzahl α_m verknüpft. Es gilt

$$\Delta x_1 = \frac{2\pi}{\alpha_m} \quad (4.1.50)$$

Ist eine Frequenz beziehungsweise Wellenlänge vorgegeben, kann man geometrisch die möglichen Winkel θ ermitteln, bei denen eine Überlagerung der Extrema an der Wand gegeben ist. Aus den Winkeln lassen sich dann die Abstände Δx_1 und damit die Wellenzahlen α_m berechnen. Die ist umgekehrt zu dem oben beschriebenen rein formalen Weg, bei dem erst α_m mit (4.1.45) und daraus θ mit (4.1.48) berechnet wird.

4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Für die höheren Kanalmoden ergab sich im letzten Abschnitt eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, die oberhalb der Schallgeschwindigkeit liegt. Es stellt sich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Information aus, wenn sie von höheren Moden getragen wird. Eine einzelne Mode mit konstanter Amplitude transportiert keine Information. Um Information zu übertragen muß zum Beispiel die Stärke der Mode variiert werden, wodurch sich ein amplitudenmoduliertes Signal ergibt.

Als einfaches Modell für ein moduliertes Signal $s(t)$ wird eine einzelne Wellengruppe betrachtet, wie sie in der Abbildung 4.7 skizziert ist. Die Grundschwingung besitzt die Periode T . Die Amplitude der Schwingung ist nur in einem begrenzten Zeitintervall von Null verschieden. Die Information in dieser Wellengruppe ist die Form der Hüllkurve der Grundschwingung.

Mit einer ebenen Welle wird ein solches Signal ohne Veränderung ideal übertragen. Die räumliche Verteilung entspricht dem dargestellten Zeitverlauf und die Wellengruppe verschiebt sich mit der Geschwindigkeit c in Ausbreitungsrichtung. Im Kanal ist die Ausbreitung in Achsrichtung von Bedeutung. Nun soll als Grundschwingung zur Signalübertragung die m -te Mode verwendet werden. Die Phasengeschwindigkeit c_m^{ph} ist Frequenzabhängig, und das betrachteten Signal besitzt nicht nur eine Frequenz. Zerlegt man das Signal spektral in seine harmonischen Anteile, so breiten sich diese mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Damit kann die exakte Form des Signals nicht erhalten bleiben.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

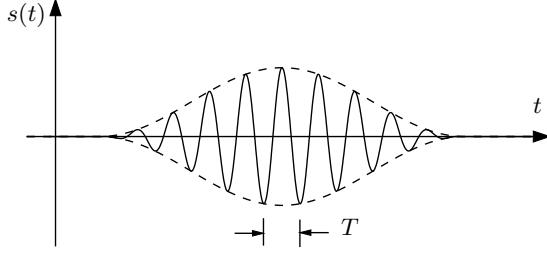


Abbildung 4.7.: Wellengruppe mit einhüllender Kurve (gestrichelt)

Da das dargestellte Zeitsignal nicht periodisch ist, besitzt es ein kontinuierliches Spektrum, das um die Frequenz $\omega = 2\pi/T$ konzentriert ist. Je breiter die Einhüllende ist, desto schmäler ist der beteiligte Frequenzbereich. Im Grenzfall der unendlich ausgedehnten Hüllkurve ergibt sich eine harmonische Schwingung und entsprechend nur eine Linie im Spektrum.

Überlagerung von zwei Wellen

Im folgenden soll plausibel gemacht werden, daß unter bestimmten Umständen die Form der Hüllkurve erhalten bleibt, obwohl sich die einzelnen harmonischen Anteile unterschiedlich verhalten. Es ist sogar möglich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Hüllkurve zu berechnen. Dazu wird die Überlagerung von nur zwei harmonischen Wellen

$$s(x, t) = A [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] \quad (4.2.1)$$

betrachtet. Die Größe $s(x, t)$ sei eine beliebige Feldgröße, wie zum Beispiel der Schalldruck oder eine elektrische Feldstärke. Die Wellenzahlen k_1 und k_2 sind mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 durch eine gegebene Funktion $\omega(k)$ verknüpft. Wie diese Funktion in konkreten Fällen aussieht, wird weiter unten besprochen. Allgemein gilt

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \quad (4.2.2)$$

Wählt man die Größen

$$a = \frac{1}{2} \{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x\}; \quad b = \frac{1}{2} \{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x\} \quad (4.2.3)$$

so folgt aus Gleichung (4.2.2)

$$s(x, t) = 2A \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right] \quad (4.2.4)$$

Liegen nun die Frequenzen im Sinne von

$$\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (4.2.5)$$

4.2. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

sehr dicht beisammen (was dem sehr schmalen Spektrum der Wellengruppe entspricht), so ergibt sich das typische Bild einer Schwebung, wie in der Abbildung 4.8 dargestellt ist. Die Grundschwingung wird durch den zweiten Cosinus-Ausdruck in Gleichung

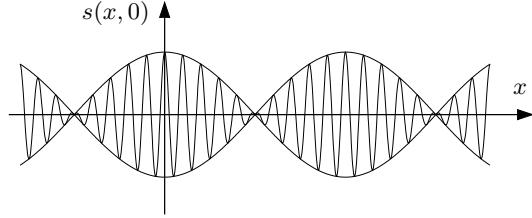


Abbildung 4.8.: Räumliche Verteilung nach (4.2.1) zur Zeit $t = 0$; Verhältnis der Wellenzahlen: $|k_1 - k_2| = 0.05 (k_1 + k_2)$.

(4.2.4) beschrieben. Sie hat die Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Die Einhüllende wird durch den ersten Cosinus-Ausdruck dargestellt. Die Frequenz der Einhüllenden ist $(\omega_1 - \omega_2)/2$. Beide Cosinus-Ausdrücke stellen für sich allein eine Ausbreitung in x -Richtung dar. Die Grundschwingung breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \quad (4.2.6)$$

aus. Wenn k_1 und k_2 (beziehungsweise ω_1 und ω_2) eng beisammen sind, ist das etwa die mittlere Phasengeschwindigkeit der überlagerten harmonischen Wellen:

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_1}{k_1} \quad \text{für } k_2 \rightarrow k_1 \quad (4.2.7)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden ist mit

$$c^{\text{gr}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad (4.2.8)$$

gegeben. Die Größe c^{gr} wird als Gruppengeschwindigkeit bezeichnet. Wie oben vorausgesetzt, soll eine Funktion $\omega = \omega(k)$ gegeben sein. Dann kann

$$c^{\text{gr}} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} \quad (4.2.9)$$

geschrieben werden. Daraus folgt für den Grenzfall, daß die Frequenzen beziehungsweise die Wellenzahlen immer weiter zusammenrücken

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}(k_1) \quad \text{für } k_2 \rightarrow k_1 \quad (4.2.10)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Die in Abbildung 4.7 gezeigten Wellengruppe besitzt ein kontinuierliches Spektrum, in dem die Frequenzen beliebig dicht liegen. Es ist daher plausibel, daß sich die Einhüllende der Wellengruppe – wie die Einhüllende der Schwebung – auch mit der Gruppengeschwindigkeit nach (4.2.10) bewegt. Dabei ist die Ableitung $d\omega/dk$ bei der mittleren Wellenzahl der Wellengruppe zu nehmen.

Dispersion der Wellen

Bisher wurde die konkrete Form der Funktion $\omega(k)$ nicht benötigt. Das Feld in (4.2.1) kann als Überlagerung von zwei ebenen Schallwellen betrachtet werden. In der ebenen akustischen Welle gilt zwischen der Wellenzahl k und der Frequenz ω die Beziehung

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (4.2.11)$$

Dabei ist die Schallgeschwindigkeit c eine Konstante. So ergibt sich die lineare Funktion

$$\omega(k) = c k \quad (4.2.12)$$

Daraus folgt erwartungsgemäß

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega(k_1) + \omega(k_2)}{k_1 + k_2} = c \quad (4.2.13)$$

und

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = c \quad (4.2.14)$$

Das heißt, in einer Überlagerung von ebenen akustischen Wellen gibt es nur eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, und das ist die Schallgeschwindigkeit c .

Die Situation ändert sich, wenn die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz abhängt. Ein Beispiel dafür sind ebene Lichtwellen in Glas. Die Überlagerung von zwei ebenen Lichtwellen mit unterschiedlicher Frequenz läßt sich auch in der Form (4.2.1) darstellen. Die Größe $s(x, t)$ ist dann zum Beispiel die elektrische Feldstärke in einer bestimmten Richtung. Die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz kann ausgenutzt werden, um mit einem Prisma das Licht spektral zu zerlegen. Zwischen der Wellenzahl und der Frequenz gilt der Zusammenhang

$$k = \frac{\omega}{c(\omega)} \quad (4.2.15)$$

wobei jetzt c die Geschwindigkeit einer ebenen Lichtwelle im Glas ist. Ist der Verlauf $c(\omega)$ aus Experimenten bekannt, kann eine Funktion $\omega(k)$ angegeben werden. Damit ist es möglich, auch die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für eine Wellengruppe zu ermitteln.

Im folgenden sollen die obigen Überlegungen auf die Ausbreitung der Kanalmoden abgewendet werden. Das Druckfeld ist in der Form (4.1.23) gegeben. Die Ausdrücke in den eckigen Klammern beschreiben die Ausbreitung in positiver und negativer x_1 -Richtung. Statt der Wellenzahl k tritt nun die Größe α_m auf. Sie stellt die Wellenzahl

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

in x_1 -Richtung dar. Die Phasengeschwindigkeit in dieser Richtung ist nach (4.1.34) mit ω/α_m gegeben. Ersetzt man in den obigen Überlegungen k durch α_m , stimmt dies mit der Beziehung (4.2.7) überein. Zur Berechnung der Gruppengeschwindigkeit muß die Funktion $\omega(\alpha_m)$ differenziert werden.

Die Wellenzahl in Kanalrichtung ist durch

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_m^2} \quad (4.2.16)$$

gegeben. Daraus folgt

$$\omega(\alpha_m) = c \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} \quad (4.2.17)$$

Es ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega}{\alpha_m} = c \frac{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}}{\alpha_m} \quad (4.2.18)$$

Dies formal abgeleitete Ergebnis entspricht der geometrischen Überlegung aus dem letzten Abschnitt. In Abbildung 4.5 wurde der Winkel θ definiert. Der Quotient auf der rechten Seite von (4.2.18) ist gerade der Kehrwert von $\cos \theta$. Es folgt

$$c^{\text{ph}} = \frac{c}{\cos \theta} \quad (4.2.19)$$

Für die Gruppengeschwindigkeit ergibt sich

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega}{d\alpha_m} = c \frac{\alpha_m}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}} \quad (4.2.20)$$

Die läßt sich einfacher als

$$c^{\text{gr}} = c \cos \theta \quad (4.2.21)$$

schreiben. Damit wird klar, das mit den höheren Moden die Ausbreitung von Information in Kanalrichtung langsamer als mit Schallgeschwindigkeit abläuft.

Die Funktion $\omega(k)$ wird üblicherweise als Dispersionsbeziehung bezeichnet. Im Fall der ebenen akustischen Welle ist die Phasengeschwindigkeit nicht von der Frequenz abhängig. Es gilt der einfache Zusammenhang $\omega = c k$. Ist die Phasengeschwindigkeit – wie bei Lichtwellen in Glas – von der Frequenz abhängig spricht man von Dispersion.

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde davon ausgegangen, daß keine Grundströmung im Kanal vorhanden ist. Jedoch ist gerade die Schallausbreitung in durchströmten Kanälen von großem praktischen Interesse. Beispiele sind der Schalldämpfer in Auspuffanlagen von Fahrzeugen oder Gebläse aller Art. Es stellt sich die Frage, wie eine Strömung die Schallausbreitung beeinflußt, und ob sich die bisherigen Ergebnisse auf den Fall mit Strömung übertragen lassen. Für die folgende Betrachtung wird

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

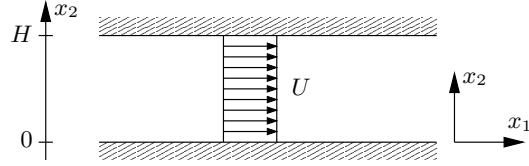


Abbildung 4.9.: Kanal mit homogenen Strömungsfeld

eine homogene Strömung mit der Geschwindigkeit U in Kanalrichtung angenommen. Das heißt, das Geschwindigkeitsprofil im Kanal ist eben, und Reibungseffekte werden vernachlässigt. Die Situation ist in Abbildung 4.9 skizziert. Es gilt

$$\vec{v}_0(\vec{x}) = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

Diese Grundströmung ist formal eine Lösung der Euler-Gleichung. Sie erscheint jedoch auf den ersten Blick relativ unrealistisch, da in Wirklichkeit die Strömung in Kanälen meistens durch Reibungseffekte dominiert wird. Das einfache Geschwindigkeitsprofil entspricht am ehesten dem mittleren Profil in einer turbulenten Kanalströmung oder einer Kanalströmung kurz nach dem Einlauf. Hier soll mit einer so einfachen Grundströmung begonnen werden, um die Betrachtung nicht zu kompliziert werden zu lassen. Auch an dem einfachen Fall können einige grundsätzliche Auswirkungen der Strömung auf die Schallausbreitung deutlich gemacht werden.

Bereits im Abschnitt 3.1 wurde kurz auf die Ausbreitung von eindimensionalen Wellen bei Strömung eingegangen. Für ein Strömungsfeld nach (4.3.1) kann die Vorgehensweise aus dieser Betrachtung übernommen werden. Bei der Herleitung der Wellengleichung in Abschnitt 2.1 wurde angenommen, daß keine Grundströmung vorliegt und $\vec{v}_0 = 0$ gilt. Die Wellengleichung beschreibt daher den Fall mit Strömung im Kanal nicht mehr. Es bieten sich zwei prinzipielle Möglichkeiten an, das Problem zu lösen.

- a) Die Wellengleichung wird erweitert, um den Fall mit Grundströmung zu erfassen. Anschließend werden die Lösungen der erweiterten Wellengleichung ermittelt.
- b) Das Problem wird im einem Bezugssystem betrachtet, das sich mit der Strömung mitbewegt. In diesem Bezugssystem ist keine Grundströmung vorhanden, und die bisherige Wellengleichung mit ihren Lösungen gilt. Die bekannten Lösungen werden in das kanalfeste Bezugssystem transformiert.

Der Weg b) hat den Vorteil, daß man die Lösungen schon kennt. Der Nachteil ist die Transformation des Bezugssystems, deren Schwierigkeiten oft unterschätzt werden. Dennoch soll hier – wie auch in Abschnitt 3.1 – der Weg b) bestritten werden. Dazu werden zunächst einige grundlegende Überlegungen zu einer eindimensionalen harmonischen Welle, die aus einem ruhendem und einem bewegten Bezugssystem betrachtet werden, vorgestellt.

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

Im bewegten Bezugssystem ist der Druckverlauf in der Welle durch

$$p'_B(x_B, t) = A e^{i(\omega_B t - kx_B)} \quad (4.3.2)$$

gegeben. x_B ist die Koordinate im bewegten System und ω_B die Kreisfrequenz. Entsprechend sieht der Beobachter im ruhenden System die Welle als

$$p'_R(x_R, t) = A e^{i(\omega_R t - kx_R)} \quad (4.3.3)$$

Er hat die Koordinate x_R und beobachtet die Kreisfrequenz ω_R . Die Wellenzahl k ist nur mit der Wellenlänge λ verknüpft und damit vom Bezugssystem unabhängig. In dem mitbewegten Bezugssystem soll die Wellengleichung gelten. Die Welle läuft in diesem System mit der Schallgeschwindigkeit in positive x -Richtung. Damit ist k festgelegt. Es muß gelten

$$k = \frac{\omega_B}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.3.4)$$

Der Ursprung des mitbewegten Bezugssystems bewegt sich mit der Geschwindigkeit U im ruhenden System. Zur Zeit $t = 0$ sollen die Ursprünge der Koordinatensysteme aufeinanderfallen. Eine Umrechnung der Koordinaten ist dann durch die Beziehung

$$x_R = x_B + Ut \quad (4.3.5)$$

gegeben. Der Druck hängt nicht vom Bezugssystem ab. Daher müssen sich die beobachteten Druckverläufe (4.3.2) und (4.3.3) am selben Ort (aber mit unterschiedlichen Koordinaten) entsprechen. Es muß gelten

$$p'_R(x_B + Ut, t) = p'_B(x_B, t) \quad (4.3.6)$$

Daraus ergibt sich wegen (4.3.2) und (4.3.3), daß

$$\omega_R t - k(x_B + Ut) = \omega_B t - kx_B \quad (4.3.7)$$

gelten muß. So erhält man eine Beziehung zwischen den beobachteten Frequenz in den beiden Bezugssystemen. Es gilt

$$\omega_R = \omega_B + kU \quad (4.3.8)$$

oder

$$\omega_R = \omega_B + \frac{\omega_B}{c} U = \omega_B (1 + M) \quad (4.3.9)$$

wobei die Machzahl

$$M = \frac{U}{c} \quad (4.3.10)$$

eingeführt wurde. Die Frequenz im ruhenden System ist um den sogenannten Doppelfaktor $(1 + M)$ gegenüber der im mitbewegten System „verschoben“.

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Zweidimensionale Kanalmoden

Die bisherigen Überlegungen zur eindimensionalen Ausbreitung der ebenen Welle lassen sich auf die zweidimensionalen Kanalmoden übertragen. x wird durch die x_1 -Koordinate in Kanalrichtung ersetzt. Statt der Wellenzahl k wird die Wellenzahl α_m in Kanalrichtung eingesetzt. Das Druckfeld der Mode m im Kanal ohne Strömung für eine reine Ausbreitung in positive x_1 -Richtung ist durch (4.1.32) gegeben. Diese Lösung gilt in dem mitbewegten System. Sie kann als

$$p'_B(\vec{x}_B, t) = G(x_2) e^{i(\omega_B t - \alpha_m x_{1,B})} \quad (4.3.11)$$

geschrieben werden. Dabei stellt die Funktion $G(x_2) \equiv A_1 A_2 \cos(\beta_m x_2)$ wieder die von x_2 abhängige Amplitude dar. Zu beachten ist, daß die x_2 -Koordinate in beiden Bezugssystemen gleich ist. Die Systeme verschieben sich nur in x_1 -Richtung nach der Beziehung

$$x_{1,R} = x_{1,B} + Ut \quad (4.3.12)$$

zueinander. Analog zur Gleichung (4.3.8) ergibt sich für die beobachteten Frequenzen der Kanalmoden die Relation

$$\omega_R = \omega_B + \alpha_m U \quad (4.3.13)$$

In Abschnitt 3.1 wurde die Wellenzahl α_m immer positiv definiert. Die Druckverteilung (4.3.11) beschreibt dann eine in positive x_1 -Richtung laufende Welle. Um die Wellenausbreitung in negative x_1 -Richtung zu betrachten, muß ein Ansatz mit $(\omega_B t + \alpha_m x_{1,B})$ im Exponenten gewählt werden. Mit der Gleichung (4.3.11) können jedoch auch beide Lösungen gleichzeitig erfaßt werden, falls negative Wellenzahlen α_m zugelassen werden. Als Erweiterung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 setzt man

$$\alpha_m = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_B}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} = \pm \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \quad (4.3.14)$$

Bisher wurde nur die positive Wurzel genommen. Jetzt legt das Vorzeichen von α_m die Ausbreitungsrichtung fest. Ohne Strömung bringt dieses Vorgehen kein Gewinn, da sich die Wellenausbreitung in den beiden Richtungen nicht unterscheidet und alles an der Welle in einer Richtung untersucht werden kann. Bei Strömung ist die Ausbreitung jedoch unsymmetrisch: Mit oder gegen die Strömungsrichtung. Mit dem erweiterten α_m können dann beide Lösungen gleichzeitig behandelt werden.

Um die Lösungen zu bestimmen, die sich bei einer vorgegebenen Anregungsfrequenz ergeben, muß die Wellenzahl α_m berechnet werden. Die Anregung soll im Bezug zum ruhenden System (z.B. mit einem Lautsprecher in der Kanalwand) geschehen, wodurch nur die Frequenz ω_R bekannt ist. Die Beziehung (4.3.14) verknüpft die Wellenzahl α_m mit der Frequenz ω_B im mitbewegten System. Für den Beobachter im ruhenden System ist diese Beziehung so nicht brauchbar, da er nach (4.3.13) nicht ω_B ermitteln kann, ohne α_m zu kennen. Es soll daher eine Beziehung zwischen ω_R und α_m abgeleitet werden.

Löst man (4.3.13) nach ω_B auf und setzt das Ergebnis in (4.3.14) ein, ergibt sich

$$\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{(\omega_R - \alpha_m U)^2}{c^2} - \beta_m^2} \quad (4.3.15)$$

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

Diese Gleichung kann nach α_m aufgelöst werden. Nach einigen Umformungen, die im Anhang B.1 gegeben sind, folgt die Beziehung

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{S_m - M}{1 - M^2} \quad (4.3.16)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$S_m = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R}\right)^2 (1 - M^2)} \quad (4.3.17)$$

eingeführt. Für eine gegebene Frequenz ω_R kann mit (4.3.17) zunächst die Größe S_m und anschließend mit (4.3.16) die Wellenzahl α_m berechnet werden. Die Wellenzahl β_m in x_2 -Richtung geht in die Berechnung von S_m mit ein. β_m ist in beiden Bezugssystemen gleich und entspricht dem Wert ohne Strömung.

Eine reguläre Wellenausbreitung liegt vor, falls die Wellenzahl α_m rein reell ist, also bei $\Im\{\alpha_m\} = 0$. Dies ist gegeben, falls $\Im\{S_m\} = 0$ ist. Damit muß für reguläre Wellenausbreitung der Ausdruck unter der Wurzel in (4.3.17) größer oder gleich Null sein. Dies bedeutet

$$1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R}\right)^2 (1 - M^2) \geq 0 \quad (4.3.18)$$

oder nach einigen Umformungen

$$\omega_R \geq \beta_m c \sqrt{1 - M^2} \equiv \omega_{C,m} \quad (4.3.19)$$

Dabei ist mit $\omega_{C,m}$ wieder die Cut-Off-Frequenz der Mode m bezeichnet. Die Cut-Off-Frequenz unterscheidet sich von der im Fall ohne Strömung durch den Faktor $\sqrt{1 - M^2}$. Beschränkt man sich auf Unterschallströmungen mit $M < 1$, so wird durch die Strömung die Cut-Off-Frequenz abgesenkt. Das bedeutet, mit Strömung sind eventuell Moden ausbreitungsfähig, die ohne Strömung abklingen würden. Dies ist bei praktischen Anwendungen zu beachten, da oft eine Ausbreitung höherer Moden unerwünscht ist. Mit der Cut-Off-Frequenz kann die Größe S_m als

$$S_m = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{C,m}}{\omega_R}\right)^2} \quad (4.3.20)$$

dargestellt werden. Diese Beziehung wird weiter unten noch benötigt.

Durch die Transformation der Lösung von dem mitbewegten in das ruhende System kann tatsächlich relativ einfach die Wellenzahl α_m bei vorgegebener Frequenz ω_R im ruhenden System abgegeben werden. Damit kann dann auch die Druckverteilung berechnet werden. Die Lösung ergibt sich formal durch Einsetzen der Transformationsbeziehungen. Es ist dabei zu beachten, daß sich für eine abklingende Lösung mit komplexer Wellenzahl $\alpha_m \in \mathbb{C}$ nach (4.3.13) eine imaginäre Frequenz ω_B ergibt. Das bedeutet, die Lösung im mitbewegten System wächst nicht nur räumlich sondern auch

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

zeitlich exponentiell an beziehungsweise klingt exponentiell ab. Die Lösung mit komplexer Frequenz ist natürlich richtig und erfüllt die Wellengleichung mit den Randbedingungen. Solche Lösungen wurden bisher jedoch nicht betrachtet. In jedem Fall wird weiterhin eine reelle Frequenz im ruhenden System vorgegeben: $\omega_R \in \mathbb{R}$.

Durch α_m wird die Form der Mode festgelegt. In den unterschiedlichen Frequenzbereichen ergeben sich verschiedene Typen von Lösungen. Im folgenden werden einige Fälle diskutiert:

Fall a) $\omega_R < \omega_{c,m}$ und $M < 1$

In diesem Fall ist die Mode m nicht ausbreitungsfähig. Ohne Strömung ist die Wellenzahl α_m für die nicht ausbreitungsfähigen Moden rein imaginär, also $\Re\{\alpha_m\} = 0$. Mit Strömung ergibt sich jetzt aber ein von Null verschiedener Realteil. Die Größe S_m wird rein imaginär, und nach (4.3.16) gilt

$$\Re\{\alpha_m\} < 0 \quad (4.3.21)$$

und

$$\Im\{\alpha_m\} \neq 0 \quad (4.3.22)$$

Die Lösung, die der Beobachter im ruhenden System sieht, ist mit

$$p'_R(\vec{x}_R, t) = G(x_2) e^{i(\omega_R t - \alpha_m x_{1,R})} \quad (4.3.23)$$

gegeben. Dadurch, daß sowohl Real- und Imaginärteil von α_m von Null verschieden sind, besitzt die Lösung eine etwas kompliziertere Form als im Fall ohne Strömung. Spaltet man die Wellenzahl mit

$$\alpha_m = \Re\{\alpha_m\} + i \Im\{\alpha_m\} \quad (4.3.24)$$

auf, und setzt dies in (4.3.23) ein ergibt sich

$$p'_R(\vec{x}_R, t) = G(x_2) \cdot \underbrace{e^{i(\omega_R t - \Re\{\alpha_m\} x_{1,R})}}_{\text{laufende Welle}} \cdot \underbrace{e^{\Im\{\alpha_m\} x_{1,R}}}_{\substack{\text{Abklingen od.} \\ \text{Anfachen}}} \quad (4.3.25)$$

Der Faktor $e^{\Im\{\alpha_m\} x_{1,R}}$ beschreibt ein Abklingen oder ein Anfachen, je nach Vorzeichen von $\Im\{\alpha_m\}$ beziehungsweise S_m . Der zweite Faktor $e^{i(\omega_R t - \Re\{\alpha_m\} x_{1,R})}$ beschreibt eine Wellenausbreitung, die wegen $\Re\{\alpha_m\} < 0$ in negative x_1 -Richtung läuft. Die Wellenbewegung ist dem Abklingen überlagert. Die Abbildung 4.10 zeigt am Beispiel $m = 1$ die Form einer solchen Lösung. Sie klingt in negativer x_1 -Richtung ab. In dem Beispiel ist $\Im\{\alpha_m\} > 0$. Das bedeutet, es ist die sogenannte “-“-Welle – die Lösung für die negative Wurzel in (4.3.17) – dargestellt. In x_2 -Richtung ist die gesamte Kanalbreite H zu sehen. In x_1 -Richtung ist eine Strecke von $3H$ herausgegriffen.

Anschaulich kann man sich die überlagerte Wellenbewegung in der Lösung mit Strömung auch plausibel machen. Wird durch ein Lautsprecher in der Kanalwand eine

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

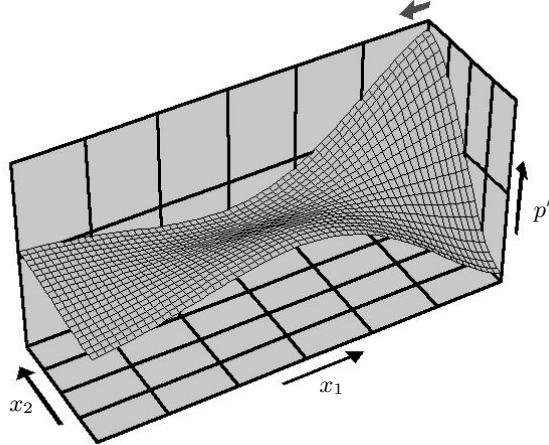


Abbildung 4.10.: Nicht ausbreitungsfähige Mode der Ordnung $m = 1$ im Kanal mit Strömung ($M = 0.5$ und $\lambda/H = 2.35$)

nicht ausbreitungsfähige Mode angeregt, so klingt die Lösung im Fall ohne Strömung nach beiden Seiten einfach ab. Bei Strömung wird jedoch die Schallenergie in dem angeregten Wellenfeld vor dem Lautsprecher ständig stromabwärts durch die Grundströmung fortbewegt. Weit entfernt von dem Lautsprecher wird die Amplitude der Mode beliebig klein. Es kann in der abklingenden Mode im Mittel daher keine Schallenergie transportiert werden. Da auch kein Austausch von Schallenergie mit anderen Moden oder ein Ansammeln von Energie an irgendeinem Punkt stattfindet, muß überall – auch im Bereich vor dem Lautsprecher – im zeitlichen Mittel der Energiefuß verschwinden. Die überlagerte Wellenbewegung transportiert Schallenergie entgegen der Strömung. Sie kompensiert so den Energietransport durch die Grundströmung.

Fall b) $\omega_R > \omega_{C,m}$ und $M < 1$

In diesem Fall ist nach (4.3.20) S_m und damit auch α_m rein reell. Das bedeutet, die Mode m ist ausbreitungsfähig. Betrachtet man die Phasengeschwindigkeit der Moden im ruhendem Bezugssystem

$$c^{ph} = \frac{\omega_R}{\alpha_m} \quad (4.3.26)$$

ergibt sich mit (4.3.16)

$$c^{ph} = c \cdot \frac{(1 - M^2)}{(S_m - M)} \quad (4.3.27)$$

Aus der Bedingung, daß $\omega_R > \omega_{C,m}$ ist, folgt nach Gleichung (4.3.20)

$$0 < |S_m| < 1 \quad (4.3.28)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Interessant ist der Bereich in dem

$$|S_m| < M \quad (4.3.29)$$

gilt. Dort ist $c^{\text{ph}} < 0$ unabhängig von dem Vorzeichen von S_m . Das heißt, beide Lösungen – die “+” und die “-“-Welle – breiten sich scheinbar entgegen der Strömungsrichtung aus. Ein solches Phänomen gibt es im Fall ohne Strömung nicht. Aus (4.3.17) folgt, daß

$$\frac{\beta_m c}{\omega_R} > 1 \quad (4.3.30)$$

gelten muß, damit $|S_m| < M$ erfüllt ist. Das ist gerade die Cut-Off-Bedingung ohne Strömung. Es ist also in dem Zwischenbereich

$$\beta_m c \sqrt{1 - M^2} < \omega_R < \beta_m c \quad (4.3.31)$$

die Mode m zwar ausbreitungsfähig (obwohl sie ohne Strömung nicht ausbreitungsfähig ist), jedoch ergeben sich nur Wellen entgegen der Strömungsrichtung.

Betrachtet man die Gruppengeschwindigkeit

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega_R}{d\alpha_m} \quad (4.3.32)$$

der Mode m , so ergibt sich

$$c^{\text{gr}} = c \frac{(1 - M^2) \cdot S_m}{1 - M S_m} \quad (4.3.33)$$

Die Herleitung dieser Beziehung ist im Anhang B.1 ausführlich dargestellt. Für $M < 1$ und wegen $0 < |S_m| < 1$ ist der Nenner auf der rechten Seite von (4.3.33) immer positiv. Ebenso ist die runde Klammer im Zähler größer Null. Das heißt, die Gruppengeschwindigkeit hat das gleiche Vorzeichen wie S_m . Es tritt in dem Zwischenbereich nach (4.3.31) also der interessante Fall ein, daß die “+“-Welle negative Phasengeschwindigkeit und positive Gruppengeschwindigkeit besitzt. Die Wellenberge bewegen sich gegen die Strömung, aber Information breitet sich in Strömungsrichtung aus. Für $\omega_R > \beta_m c$ wird $|S_m| > M$. Die Phasengeschwindigkeit nach (4.3.27) wechselt dann auch mit S_m das Vorzeichen. Damit stimmen die Vorzeichen der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit wieder überein.

Die Abbildung 4.11 zeigt für den Fall $m = 1$ das Verhalten der Wellenzahl α_m in Abhängigkeit der Frequenz im ruhenden Bezugssystem. Im oberen Teil des Bildes ist der Realteil und im unteren Teil der Imaginärteil aufgetragen. Beide Werte sind mit der Kanalbreite H normiert. Entsprechend ist die Frequenz mit H/c normiert. Dadurch gilt die Darstellung für beliebige Kanalbreiten und Schallgeschwindigkeiten.

Die durchgezogene Linie entspricht dem Fall ohne Strömung, also $M = 0$. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für $M = 0.5$. Der Punkt 7 markiert den Verzweigungspunkt der durchgezogenen Kurven. Er liegt bei der Cut-Off-Frequenz für den Fall ohne Strömung. Dort wo die gestrichelte Kurven verzweigen liegt die Cut-Off-Frequenz für den Fall mit Strömung. In dem Zwischenbereich, zum Beispiel an den Punkten 3 und 6, ergeben sich zwei reelle aber negative α_m . Das heißt, dort laufen

4.3. Schallausbreitung bei Strömung

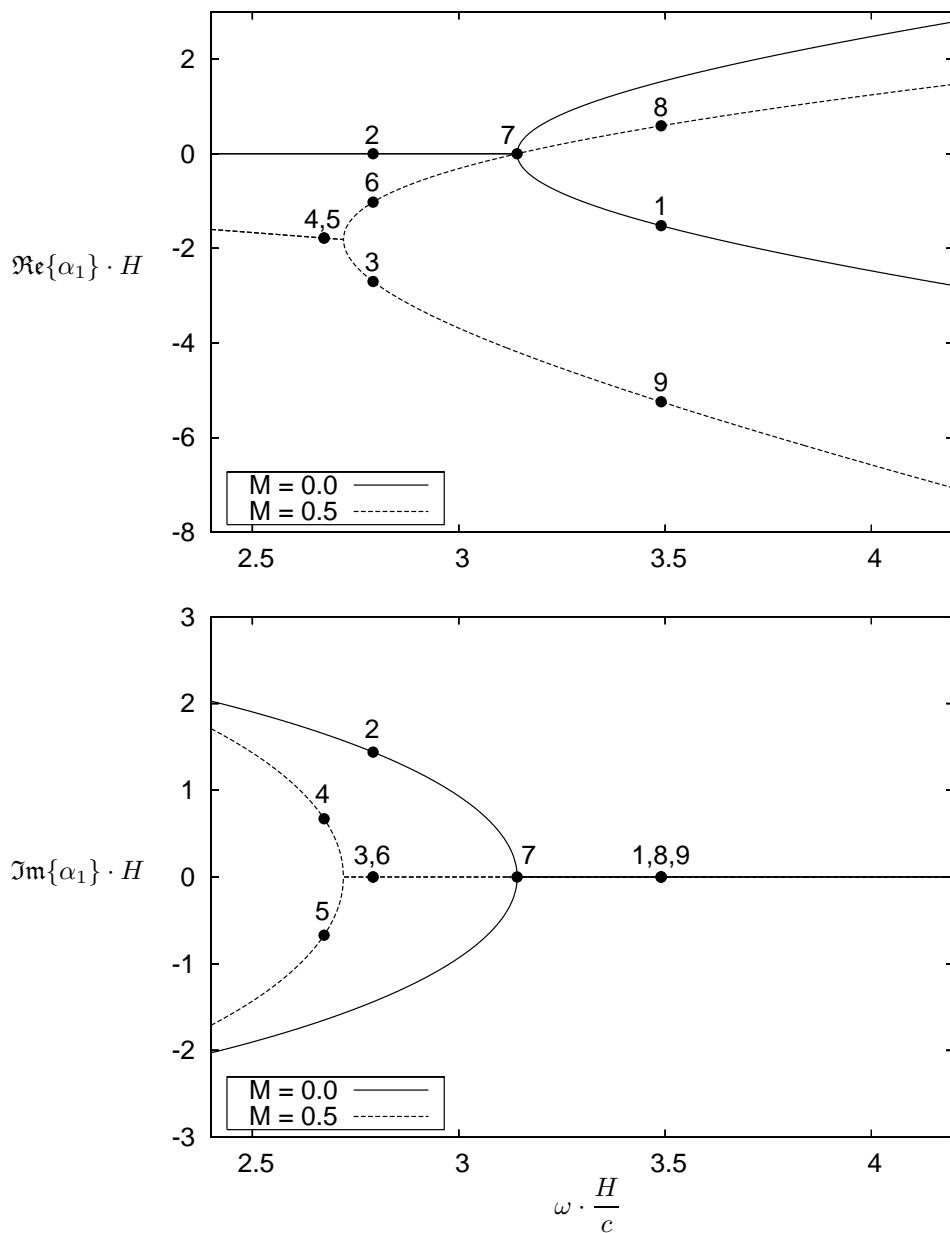


Abbildung 4.11.: Komplexe Wellenzahl α_1 in Abhängigkeit der Frequenz ω im kalfesten Bezugssystem; Ohne Strömung: durchgezogene Linien; Mit Strömung ($M = 0.5$): gestrichelte Linie

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

beide Wellen entgegen der Strömung mit $c^{\text{ph}} < 0$. Die Punkten 8 und 9 repräsentieren Lösungen, die sich auch bei Strömung in beide Richtungen ausbreiten. Die Punkte 4 und 5 entsprechen abklingenden beziehungsweise anfachenden Lösungen mit einer überlagerten Wellenbewegung. Der Punkt 2 steht für eine abklingenden beziehungsweise anfachenden Lösungen ohne Grundströmung und damit auch ohne überlagerten Wellenbewegung. Letztlich markiert der Punkt 1 eine sich regulär ausbreitende Welle ohne Grundströmung.

Bisher wurden zwei Fälle betrachtet, in denen Unterschallströmung im Kanal vorlag. Einmal war die Frequenz unterhalb der ‘‘Cut-Off’’-Frequenz und einmal oberhalb. Als drittes soll die Situation bei Überschallströmung diskutiert werden.

Fall c) $M > 1$ Überschallströmung

Bei $M > 1$ kann der Ausdruck unter der Wurzel in (4.3.17) nicht mehr negativ werden, da $(1 - M^2) < 0$ gilt. Das bedeutet, die Größe S_m und damit auch α_m ist unabhängig von der Frequenz immer reell. Zusätzlich gilt

$$|S_m| > 1 \quad (4.3.34)$$

Bei Überschall gibt es also keine ‘‘Cut-Off’’-Bedingung, wie bei Unterschall. Alle Moden sind ausbreitungsfähig.

Ein interessantes Detail zeigt sich, wenn man die Phasengeschwindigkeit

$$c^{\text{ph}} = \frac{\omega_R}{\alpha_m} = c \cdot \frac{(1 - M^2)}{(S_m - M)} \quad (4.3.35)$$

der Moden betrachtet. In dem Bereich, in dem

$$1 < |S_m| < M \quad (4.3.36)$$

gilt, ist $c^{\text{ph}} > 0$ für die ‘‘+’’- und die ‘‘−’’-Welle. Das heißt, beide Wellen laufen in Strömungsrichtung, wie man es bei Überschallströmung erwartet. Für den Fall

$$|S_m| > M > 1 \quad (4.3.37)$$

ergibt sich jedoch eine Welle mit negativer Phasengeschwindigkeit $c^{\text{ph}} < 0$, die gegen die Überschallströmung läuft. Nach (4.3.17) ist Ungleichung (4.3.37) erfüllt, falls für die Frequenz

$$\omega_R < \beta_m c \quad (4.3.38)$$

gilt. Für die Grundmode $m = 0$ ist diese Bedingung nicht erfüllbar, da $\beta_0 = 0$ ist. Für alle $m > 0$ gibt es einen Frequenzbereich, in dem für eine Welle die Phasengeschwindigkeit $c^{\text{ph}} < 0$ ist. Es stellt sich die Frage, ob sich Information in den höheren Moden gegen die Überschallströmung ausbreiten kann. Dies kann beantwortet werden, wenn man die Gruppengeschwindigkeit betrachtet. Für $S_m > 0$ sind Nenner und Zähler in (4.3.33) negativ, und für $S_m < 0$ sind beide positiv (wegen $|S_m| > 1$). Es ergibt sich in beiden Fällen eine positive Gruppengeschwindigkeit $c^{\text{gr}} > 0$. Das heißt, keine Information breitet sich gegen die Überschallströmung aus.

4.4. Kanal mit schallweichen Wänden

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde von einem Kanal mit festen undurchlässigen Wänden ausgegangen. Im Abschnitt 3.1 wurden bereits nachgiebige Wände betrachtet. Die Überlegungen dort gingen von eindimensionaler Wellenausbreitung aus, jedoch lassen sich einige Resultate auf den mehrdimensionalen Fall direkt übertragen. Die bisher angenommenen festen Wände sind undurchdringlich. Die Schnellekomponente senkrecht zur Wand ist immer gleich Null. Dies entspricht einer Wandimpedanz $Z_w = \infty$. Die Wand ist schallhart. Bei schallweichen Wänden ist die Wandimpedanz $Z_w = 0$, und der Schalldruck an der Wand verschwindet. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Schallausbreitung in einem Kanal mit schallweichen Wänden von der bisher betrachteten bei schallharten Wänden unterscheidet. Bis auf die Art der Wand ist die

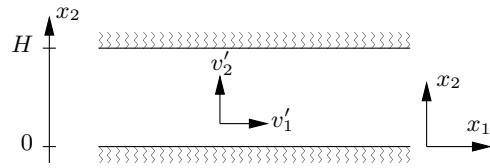


Abbildung 4.12.: Koordinaten im Kanal mit schallweichen Wänden

geometrische Situation mit der in Abschnitt 4.1 vergleichbar. Die Abbildung 4.12 zeigt das Koordinatensystem im Kanal. Die Kanalbreite ist H . Es werden Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{mit } j = 1, 2 \quad (4.4.1)$$

gesucht. Die Lösungen sollen die Randbedingungen

$$p'(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei } x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.4.2)$$

erfüllen. Im Gegensatz zum Fall mit schallharten Wänden müssen die Randbedingungen nicht erst mit der linearisierten Euler-Gleichung in Bedingungen für den Schalldruck umgewandelt werden. Denn mit (4.4.2) ist schon eine Bedingung an den Druck gegeben. Es wird der gleiche Lösungsansatz

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1) \cdot g(x_2) \cdot e^{i\omega t} \quad (4.4.3)$$

wie bisher verwendet. Es ergibt sich wieder

$$-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx_1^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx_2^2} = -\beta^2 \quad (4.4.4)$$

Die Größe β ist eine zu bestimmende Konstante. Der zweite Teil von (4.4.4) stellt eine Differentialgleichung für $g(x_2)$ dar. Deren allgemeine Lösung lautet

$$g(x_2) = A_2 \cos(\beta x_2) + B_2 \sin(\beta x_2) \quad (4.4.5)$$

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

Bis zu diesem Punkt unterscheidet sich der Lösungsweg nicht von dem Fall mit schallharten Wänden. Jetzt müssen jedoch die Größen A_2 , B_2 und β so gewählt werden, daß die Randbedingungen (4.4.2) an den schallweichen Wänden erfüllt werden. Dazu muß erreicht werden, daß

$$g(x_2) = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H \quad (4.4.6)$$

gilt. Die Bedingung (4.4.6) wird erfüllt, wenn man $A_2 = 0$ setzt und

$$\beta = \beta_m = \frac{m\pi}{H} \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.7)$$

wählt. Es ergibt sich

$$g(x_2) = B_2 \sin\left(\frac{m\pi}{H} x_2\right) = B_2 \sin(\beta_m x_2) \quad (4.4.8)$$

Der formale Unterschied zum Resultat bei schallharten Wänden besteht lediglich in dem Sinus- statt dem Cosinus-Ausdruck. Die schallharten Randbedingungen fordern, daß $B_2 = 0$ ist – statt wie hier $A_2 = 0$. Die Größe β ist in beiden Fällen gleich. Der Unterschied ist praktisch nur eine “Verschiebung” von $g(x_2)$ um $\pi/2$.

Aus (4.4.4) folgt für $f(x_1)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right] f = 0 \quad (4.4.9)$$

Diese Gleichung ist mit (4.1.18) aus Abschnitt 4.1 identisch. Für die Funktion $f(x_1)$ wird wieder der Ansatz

$$f(x_1) = A_1 e^{-i\alpha x_1} + B_1 e^{i\alpha x_1} \quad (4.4.10)$$

verwendet. Daraus ergibt sich

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2} = \sqrt{k^2 - \beta_m^2} \equiv \alpha_m \quad (4.4.11)$$

Wie die Größen β_m ist daher auch die Wellenzahl α_m für alle Moden die gleiche wie im Kanal mit schallharten Wänden. Die Lösung für das Druckfeld hat die Form

$$p'(\vec{x}, t) = B_2 \sin(\beta_m x_2) \left[A_1 e^{i(\omega t - \alpha_m x_1)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_m x_1)} \right] \quad (4.4.12)$$

Diese Lösung beschreibt eine reguläre Wellenausbreitung, falls α_m reell ist. Es ergeben sich die gleichen Cut-Off-Bedingungen für die einzelnen Moden wie im Fall mit schallharten Wänden. Die Mode m breitet sich regulär aus, falls

$$\omega > \beta_m c \equiv \omega_{c,m} \quad (4.4.13)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\omega_{c,m}$ die Cut-Off-Frequenz.

In der Abbildung 4.13 sind die Unterschiede der Lösung im schallharten und schallweichen Fall am Beispiel der Mode $m = 2$ gegenübergestellt. Die Bilder zeigen das

4.4. Kanal mit schallweichen Wänden

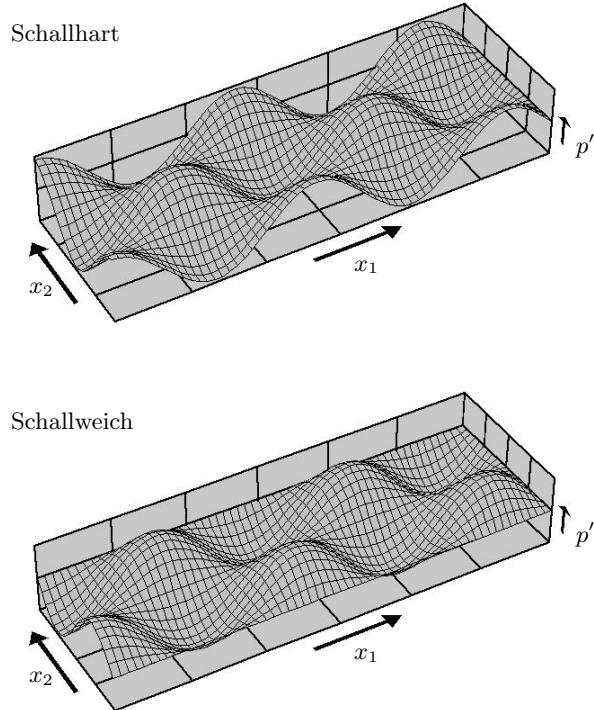


Abbildung 4.13.: Gegenüberstellung der Mode $m = 2$ bei unterschiedlichen Wand-eigenschaften; $\omega = 2\pi c/(0.8H)$

Druckfeld in einem Ausschnitt, der sich in x_2 -Richtung über die gesamte Kanalbreite H erstreckt. Die Länge des Ausschnitts in x_1 -Richtung entspricht $3H$. Bei schallharten Wänden hat das Druckfeld gerade an der Kanalwand die maximalen Auslenkungen. Im Fall schallweicher Wand ist dagegen die Druckschwankung an der Wand Null. Die Lösung ist praktisch in x_2 -Richtung verschoben.

Der Hauptunterschied zwischen den beiden Fällen zeigt sich, wenn man die Grundmode $m = 0$ betrachtet. Bei schallharten Wänden ergab sich bei $m = 0$ gerade eine ebene Welle in x_1 -Richtung. Jetzt wird jedoch bei $m = 0$ wegen $\beta_0 = 0$ auch $g(x_2) = 0$ für alle x_2 . Das heißt, für $m = 0$ ergibt sich die triviale Lösung $p'(\vec{x}, t) = 0$. Es existiert also gar keine Grundmode, die sich ausbreitet. Daraus folgt, daß in einem Kanal mit schallweichen Wänden sich unterhalb der Cut-Off-Frequenz der ersten Mode

$$\omega_{c,1} = \frac{c\pi}{H} \quad (4.4.14)$$

überhaupt keine Moden ausbreiten können. Findet an einer Stelle im Kanal eine Anregung statt, klingt die gesamte Störung nur exponentiell ab, falls die Frequenz entspre-

4. Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen

chend gering ist. Erst oberhalb der Frequenz $\omega_{c,1}$ ist eine Wellenausbreitung möglich.

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

5.1. Das Geschwindigkeitspotential

Bevor an einigen Beispielen einfache dreidimensionale Lösungen der Wellengleichung diskutiert werden, soll ein rein formales Hilfsmittel – das Geschwindigkeitspotential – vorgestellt werden. Das Geschwindigkeitspotential vereinfacht die Lösung der Gleichungen nicht grundlegend, es erlaubt jedoch eine sehr elegante Darstellung.

Die gesamten Überlegungen basieren auf der Wellengleichung für den Schalldruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (5.1.1)$$

Weiterhin wird auch die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = 0 \quad (5.1.2)$$

benötigt. Wendet man den rot-Operator auf die Gleichung (5.1.2) an, ergibt sich

$$\rho_0 \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \right) + \underbrace{\text{rot grad}}_{=0} p' = 0 \quad (5.1.3)$$

Die Rotation von einem Gradientenfeld ist immer gleich Null. Damit verschwindet der zweite Term. Durch Vertauschen der Ableitungen im ersten Term folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{v}') = 0 \quad (5.1.4)$$

Die bedeutet, die Größe $\text{rot } \vec{v}'$ ist an jedem Ort zeitlich konstant. Geht man von einem Ausgangszustand $\vec{v}' = 0$ im gesamten Raum aus, und “schaltet” dann die Störungen ein, so bleibt

$$\text{rot } \vec{v}' = 0 \quad (5.1.5)$$

überall erhalten. Mathematisch kann gezeigt werden, daß ein rotationsfreies Vektorfeld immer als Gradientenfeld eines Potentials dargestellt werden kann. Es gibt also ein ϕ , so daß

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi \quad (5.1.6)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

gilt. Bisher sind die Überlegungen analog zu denen, die auch zur Potentialtheorie in der Strömungsmechanik angestellt werden. Spielen Reibungseffekte keine Rolle, kann im Strömungsfeld $\text{rot } \vec{v} = 0$ angenommen werden. Anschaulich kann man sich dies anhand eines Fluidelementes klarmachen, an dem nur Druckkräfte angreifen. Die Druckkräfte sind nicht in der Lage das Fluidelement in Drehung zu versetzen. Dazu ist Reibung und Schubspannung notwendig. Ohne Reibung bleibt ein rotationsfreies Strömungsfeld immer rotationsfrei. In der Euler-Gleichung ist die Reibung vernachlässigt. Daher lassen sich daraus die obigen Beziehungen ableiten. Dabei spielt es keine Rolle, daß die Euler-Gleichung linearisiert wurde. Das Potential kann auch in diesem Fall eingeführt werden.

Das Geschwindigkeitspotential zu einem vorgegebenen Schnellefeld $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ ist nicht eindeutig. Es ist lediglich seine Existenz gegeben. Angenommen es sei ein Potential ϕ_1 mit

$$\text{grad } \phi_1(\vec{x}, t) = \vec{v}'(\vec{x}, t) \quad (5.1.7)$$

bekannt. Damit kann man sich leicht ein weiteres Potential

$$\phi_2(\vec{x}, t) = \phi_1(\vec{x}, t) + h(t) \quad (5.1.8)$$

ableiten, das ebenfalls

$$\text{grad } \phi_2(\vec{x}, t) = \vec{v}'(\vec{x}, t) \quad (5.1.9)$$

erfüllt. Die Funktion $h(t)$ kann eine beliebige Funktion der Zeit sein. Damit wird klar, daß es für jedes Schnellefeld eine unendliche Vielzahl von möglichen Potentialen gibt.

Es lassen sich jedoch spezielle Potentiale mit besonderen Eigenschaften finden, die für die Lösung akustischer Probleme eine elegante Darstellung ermöglichen. Es wird angenommen, das Schnellefeld $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ gehört zu einer Lösung $p'(\vec{x}, t)$ der Wellengleichung (5.1.1), und zusammen erfüllen sie die linearisierte Euler-Gleichung (5.1.2). ϕ_1 sei ein Potential, das Gleichung (5.1.7) genügt. Dann kann man (5.1.7) in (5.1.2) einsetzen und erhält

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi_1) + \text{grad } p' = 0 \quad (5.1.10)$$

Vertauscht man die Ableitungen ergibt sich

$$\text{grad} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p' \right) = 0 \quad (5.1.11)$$

Das bedeutet, der Ausdruck in den runden Klammern ist räumlich konstant. Er ist eine reine Funktion der Zeit, die mit

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p' \equiv K_1(t) \quad (5.1.12)$$

dargestellt werden kann. Es läßt sich nun ein spezielles Potential ϕ_a finden, für das die Konstante immer gleich Null ist. Dazu konstruiert man

$$\phi_a(\vec{x}, t) = \phi_1(\vec{x}, t) + h_1(t) \quad (5.1.13)$$

5.1. Das Geschwindigkeitspotential

mit der speziellen Wahl einer Funktion $h_1(t)$, die

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} K_1(t) \quad (5.1.14)$$

erfüllt. Die Funktion $h_1(t)$ und damit auch ϕ_a ist bis auf eine Konstante bestimmt. Es gilt

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial t} + p' = \underbrace{\rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t}}_{K_1(t)} + p' + \underbrace{\rho_0 \frac{dh_1}{dt}}_{-K_1(t)} \quad (5.1.15)$$

Und damit folgt

$$\rho_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial t} + p' = 0 \quad (5.1.16)$$

Der Vorteil dieses speziellen Potentials ist, daß beide in dem Schallfeld interessanten Größen – Schnelle und Druck – mit den Beziehungen

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi_a \quad (5.1.17)$$

und

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial t} \quad (5.1.18)$$

aus dem Potential relativ einfach berechnet werden können. Ein Potential mit den Eigenschaften (5.1.17) und (5.1.18) wird akustisches Potential genannt. Im folgenden wird statt ϕ_a nur noch ϕ geschrieben. Es wird immer davon ausgegangen, daß ein Potential ϕ beide Bedingungen (5.1.17) und (5.1.18) erfüllt.

Es zeigt sich, daß das Schallfeld besonders elegant durch das akustische Potential ausgedrückt werden kann. Es stellt sich die Frage, wie das akustische Potential ϕ praktisch berechnet werden kann. Die bisherigen Überlegungen zeigten lediglich die Existenz ausgehend von einem gegebenen ϕ_1 . In der Potentialtheorie, die aus der Strömungslehre bekannt ist, wird analog zu (5.1.17) die Strömungsgeschwindigkeit als Gradient eines Potentials dargestellt. Im inkompressiblen Fall ergibt sich dann aus der Kontinuitätsgleichung als Bestimmungsgleichung für das Geschwindigkeitspotential die Laplace-Gleichung. Entsprechend wird hier, um eine Bestimmungsgleichung für das akustische Potential zu erhalten, (5.1.18) in die Wellengleichung (5.1.1) eingesetzt. Soll das akustische Potential ϕ eine Lösung der Wellengleichung beschreiben, muß es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \Delta \left(-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.1.19)$$

erfüllen. Durch Vertauschen der Ableitungen folgt daraus

$$-\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right] = 0 \quad (5.1.20)$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist zeitlich konstant. Für einen Ausgangszustand mit $\vec{v}' = 0$ und $p' = 0$ müssen die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

	Stationäre Potentialströmung	Akustisches Feld/ Akustisches Potential
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \text{grad } \phi$	$\vec{v}' = \text{grad } \phi$ (Schnelle)
Druck	$p = p_0 - \frac{\rho}{2} \vec{v} ^2$ (Druck aus Bernoulli)	$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (Schalldruck direkt)
Bestimmungsgleichung	$\Delta \phi = 0$ (Laplace-Gleichung)	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0$ (Wellengleichung)

Tabelle 5.1.: Gegenüberstellung der Potentiale für stationäre Strömung und akustische Felder

ϕ verschwinden. Das heißt, die eckige Klammer ist im Ausgangszustand überall gleich Null. Werden dann die Störungen „eingeschaltet“, so bleibt der Wert überall gleich Null. Es muß daher auch für ϕ die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi^2}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (5.1.21)$$

gelten. Zweckmäßigerweise wird noch $\phi = 0$ im Ausgangszustand mit $\vec{v}' = 0$ und $p' = 0$ festgelegt. Dadurch ist ϕ dann mit der Wellengleichung eindeutig bestimmbar. Satt der Wellengleichung für den Druck kann Gleichung (5.1.21) gelöst werden, und der Druck dann anschließend mit (5.1.18) berechnet werden. Auf diesem Wege kann auch gleich die Schnelle mit (5.1.17) angegeben werden, ohne erst wieder die linearisierte Euler-Gleichung zum Umrechnen zwischen Druck und Schnelle zu bemühen.

Das akustische Potential ist ein formales Hilfsmittel, um die Lösung der Wellengleichung auf elegante Weise zu ermitteln und darzustellen. Es soll hier mit dem Geschwindigkeitspotential, das aus der Potentialtheorie der Strömungsmechanik bekannt ist, verglichen werden. Dabei wird von einer stationären Potentialströmung ausgegangen. Die Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die wesentlichen Merkmale. Beide, das Geschwindigkeits- und das Schnellefeld, sind als Gradient des Potentials gegeben. Der Druck kann im Fall des akustischen Potentials direkt aus ϕ berechnet werden. In der stationären Potentialströmung muß man die Bernoulli-Gleichung zu Hilfe nehmen, um den Druck zu bestimmen. Die Bestimmungsgleichung für ϕ ist in einem Fall die Laplace-Gleichung und im anderen Fall die Wellengleichung.

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

Gegeben sei eine sogenannte atmende Kugel, deren Mittelpunkt sich im Koordinatenursprung befindet. Der Radius der Kugel schwankt sinusförmig um den mittleren Wert a . Die komplexe Amplitude der Auslenkung wird mit ε bezeichnet. Für den momentanen Radius $R_K(t)$ soll

$$R_K(t) = a + \varepsilon e^{i\omega t} \quad (5.2.1)$$

gelten. Die Parameter sind in Abbildung 5.1 veranschaulicht. Das gegebene Problem

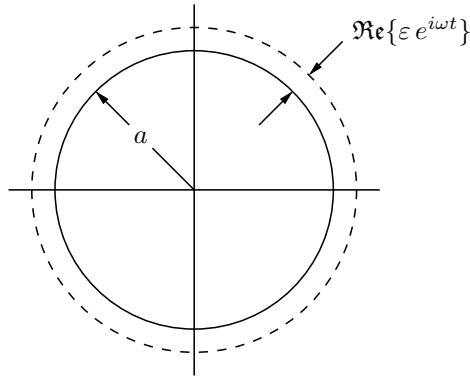


Abbildung 5.1.: Atmende Kugel

wird zweckmäßigerweise in Kugelkoordinaten (r, θ, β) dargestellt. Mit $r = |\vec{x}|$ wird der Abstand von Ursprung bezeichnet, und die Größen θ und β sind Winkel. Die Orientierung der Koordinaten wird in Anhang A.2 beschrieben. In der Wellengleichung tritt der Laplace-Operator auf. Dieser lautet in den Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (5.2.2)$$

Da das Problem kugelsymmetrisch ist, gibt es keine Abhängigkeit von den Winkeln θ und β . Für die Ableitungen gilt entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = 0 \quad (5.2.3)$$

Dadurch vereinfacht sich der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, und die Wellengleichung für das akustische Potential wird bei Kugelsymmetrie zu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.2.4)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Die Ableitungen im zweiten Term auf der linken Seite können ausgeführt werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \phi}{\partial r} = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) \quad (5.2.5)$$

Setzt man dies in (5.2.4) ein und multipliziert mit r , folgt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{r \phi\} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \{r \phi\} = 0 \quad (5.2.6)$$

Dabei wurde die Variable r im ersten Term mit in die Zeitableitung hineingezogen. Gleichung (5.2.6) hat die Form einer eindimensionalen Wellengleichung. Die Variable dieser Wellengleichung ist das Produkt $\{r \phi\}$. Das heißt, $\{r \phi\}$ erfüllt die Wellengleichung (5.2.6), falls ϕ die radiale Wellengleichung (5.2.4) erfüllt. Für den eindimensionalen Fall sind die Lösungen bekannt. Die allgemeine Lösung für (5.2.6) lautet

$$\{r \phi\} = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (5.2.7)$$

Dabei sind f und g beliebige Funktionen. Daraus kann die Lösung für (5.2.4) einfach abgeleitet werden. Division durch r liefert

$$\phi(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r} \quad (5.2.8)$$

Lösungen dieser Form werden als Kugelwellen bezeichnet. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt eine nach außen in positive r -Richtung laufende Welle. Der zweite Term stellt eine nach innen in negative r -Richtung laufende Welle dar. Im Unterschied zu der ebenen Welle nehmen hier die Amplituden nach außen hin mit $1/r$ ab. Ein nach außen laufender Puls behält seine Form, denn diese ist durch die Funktion f festgelegt. Jedoch nimmt die Stärke des Pulses mit zunehmendem Abstand vom Ursprung ab. Umgekehrt wird ein nach innen laufender Puls immer stärker. Am Ursprung bei $r = 0$ tritt eine Singularität auf. Dort ist weder die Lösung (5.2.8) noch die Wellengleichung (5.2.4) gültig. Die Lösungen sind trotzdem verwendbar, da die Singularität bei der betrachteten Geometrie im Inneren der Kugel liegt und so praktisch keine Bedeutung hat.

Druck- und Schnellefeld

Bisher wurde die kugelsymmetrische Lösung für das akustische Potential abgeleitet. Die Randbedingung an der Oberfläche der atmenden Kugel ist eine Bedingung an das Schnellefeld. In der Praxis ist besonders der Schalldruck von Interesse. Folglich soll das Druck- und Schnellefeld zu der gefundenen Lösung bestimmt werden. Dabei wird jedoch nicht von der allgemeinen Lösung (5.2.8) ausgegangen, sondern die spezielle Form

$$\phi(r, t) = A \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (5.2.9)$$

betrachtet. Da die Kugel harmonisch pulsiert, ist es sinnvoll, auch von einer harmonischen Lösung mit der gleichen Frequenz für das Schallfeld auszugehen. Zusätzlich

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

wird angenommen, daß von außen keine Wellen eintreffen. Alle Wellen werden von der Kugel erzeugt und laufen nach außen. Nach innen laufende Wellen sind entsprechend in (5.2.9) nicht berücksichtigt.

Der Druck ergibt sich aus dem akustischen Potential durch die Beziehung

$$p'(r, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.2.10)$$

Einsetzen von (5.2.9) ergibt

$$p'(r, t) = -\frac{i\omega \rho_0 A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.2.11)$$

Die komplexen Ausdrücke für Druck und akustischen Potential unterscheidet sich nur durch den Faktor $-i\omega \rho_0$. Für weitere Umformungen bietet sich die Schreibweise mit komplexer Amplitude an. Das Druckfeld kann in der Form

$$p'(r, t) = \hat{p}(r) e^{i\omega t} \quad (5.2.12)$$

geschrieben werden. Die komplexen Amplitude \hat{p} hängt vom Abstand r ab und ist mit

$$\hat{p}(r) = -\frac{i\omega \rho_0 A}{r} e^{-i\omega r/c} = -\frac{i\omega \rho_0 A}{r} e^{-ikr} \quad (5.2.13)$$

gegeben. Dabei ist die Wellenzahl $k = \omega/c$ eingesetzt worden.

Das Schnellefeld kann mit der Beziehung

$$\vec{v}' = \text{grad} \phi \quad (5.2.14)$$

aus dem akustischen Potential bestimmt werden. Bei der Darstellung in Kugelkoordinaten ist es zweckmäßig die radiale Schnelle

$$u'_R = \vec{v}' \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad (5.2.15)$$

einzuführen. Dabei ist

$$\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (5.2.16)$$

der nach außen zeigende Einheitsvektor an der Stelle \vec{x} . Für den Gradienten des Potentials gilt

$$\text{grad} \phi \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (5.2.17)$$

Für die radiale Schnelle folgt

$$u'_R = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (5.2.18)$$

Damit kann die Schnelle für das in (5.2.9) gegebene Potential berechnet werden. Es ergibt sich

$$u'_R(r, t) = A \left(-\frac{i\omega}{r c} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.2.19)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Es wird – wie für den Druck – auch für die Schnelle eine komplexe Amplitude eingeführt. Das Schnellefeld wird mit

$$u'_R(r, t) = \hat{u}_R(r) e^{i\omega t} \quad (5.2.20)$$

dargestellt. Die komplexe Amplitude der Schnelle ist durch

$$\hat{u}_R(r) = A \left(-\frac{i\omega}{r c} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-ikr} = \left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) \frac{A}{r} e^{-ikr} \quad (5.2.21)$$

gegeben. Um einen Zusammenhang zwischen den komplexen Amplituden zu erhalten, wird die Gleichung (5.2.21) durch (5.2.13) dividiert. Es ergibt sich

$$\frac{\hat{u}_R(r)}{\hat{p}(r)} = \frac{1}{\rho_0 c} \left(1 - \frac{ic}{\omega r} \right) \quad (5.2.22)$$

Vergleicht man dies Resultat mit den Verhältnissen in der ebenen Welle, so erkennt man deutliche Unterschiede. In einer eindimensionalen ebenen Welle gilt

$$p' = \rho_0 c u' \quad (5.2.23)$$

Diese Beziehung ist unabhängig von der Form der Welle. Sie gilt für harmonische Wellen aber auch für einzelne Pulse. Gleichung (5.2.22) ist dagegen eine Beziehung zwischen den komplexen Amplituden, die nur im harmonischen Fall gilt. Das Verhältnis zwischen Druck und Schnelle in der Kugelwelle hängt von der Frequenz ω ab. In der ebenen Welle ist der Wellenwiderstand reell. Das bedeutet, Druck und Schnelle sind immer in Phase. Das Verhältnis in der Kugelwelle ist durch einen komplexen Faktor in (5.2.22) gegeben. Es kann sich damit auch eine Phasenverschiebung ergeben.

Üblicherweise wird zur einfacheren Darstellung die radiale Impedanz Z_R eingeführt. Für sie gilt

$$\hat{p} = Z_R \hat{u}_R \quad (5.2.24)$$

Damit muß

$$Z_R = \rho_0 c \left(1 - \frac{ic}{\omega r} \right)^{-1} \quad (5.2.25)$$

sein. Um die Abhängigkeit der radialen Impedanz vom Abstand und der Frequenz zu untersuchen, wird der Ausdruck in (5.2.25) umgeformt. Durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen der runden Klammer ergibt sich

$$Z_R = \rho_0 c \frac{1 + i \frac{c}{\omega r}}{1 + \left(\frac{c}{\omega r} \right)^2} \quad (5.2.26)$$

Jetzt ist der Nenner reell und Real- und Imaginärteil von Z_R können angegeben werden. In (5.2.26) tritt der Faktor

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{1}{kr} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (5.2.27)$$

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

auf. Er bestimmt die radiale Impedanz. Es ergibt sich der Grenzfall

$$Z_R \rightarrow \rho_0 c \quad \text{für} \quad \frac{c}{\omega r} \rightarrow 0 \quad (5.2.28)$$

Das bedeutet, es gilt näherungsweise

$$Z_R \approx \rho_0 c \quad \text{falls} \quad r \gg \lambda \quad (5.2.29)$$

Diese Erkenntnis ist für die Praxis von großem Nutzen. Sie besagt, daß die Verhältnisse in Kugelwellen denen in ebenen Wellen entsprechen, wenn man sich – relativ zur Wellenlänge – weit entfernt von Ursprung befindet. Dort ist die akustische Impedanz gleich dem Wellenwiderstand in der ebenen Welle, und Druck und Schnelle sind in Phase.

Vollständigkeithalber wird hier auch noch der andere Grenzfall betrachtet. Es ergibt sich

$$Z_R \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow 0 \quad (5.2.30)$$

Dies verdeutlicht, daß die Singularität im Schnellefeld ($1/r^2$) stärker als die im Druckfeld ist. Rein formal könnte man auch den Ursprung als schallweich ansehen.

Randbedingung

Nachdem die kugelsymmetrische Lösung der Wellengleichung eingehend untersucht wurde, soll schließlich noch die Lösung an die zu Beginn vorgegebene Randbedingung angepaßt werden. Die Oberfläche der Kugel bewegt sich nach (5.2.1) mit der Geschwindigkeit

$$u_s(t) = \frac{\partial R_K}{\partial t}(t) = i\omega\varepsilon e^{i\omega t} \quad (5.2.31)$$

in radialer Richtung. Die Geschwindigkeit kann in der Form

$$u_s(t) = \hat{u}_s e^{i\omega t} \quad (5.2.32)$$

mit der komplexen Amplitude

$$\hat{u}_s = i\omega\varepsilon \quad (5.2.33)$$

geschrieben werden. Die atmende Kugel stellt eine Randbedingung an das Schnellefeld. Exakterweise müßte die radiale Schnelle u'_R am momentanen Kugelradius $R_K(t)$ der Geschwindigkeit der Oberfläche u_s entsprechen. Analog zur Anregung von ebenen Wellen durch einen bewegten Kolben wird auch hier die vereinfachte Version der Randbedingung – wie in Abschnitt 3.1 vorgestellt – angewendet. Die Geschwindigkeit der Oberfläche wird nicht am momentanen Radius sondern am mittleren Radius angenommen. Das bedeutet, an der Stelle $r = a$ soll die Geschwindigkeit u'_R des Mediums mit der Oberflächengeschwindigkeit u_s übereinstimmen:

$$u'_R(a, t) = u_s(t) \quad (5.2.34)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Diese vereinfachte Randbedingung ist eine gute Approximation, falls die Auslenkung klein gegenüber der Wellenlänge ist. Es gilt

$$u'_R(a, t) = \hat{u}_R(a) e^{i\omega t} \quad (5.2.35)$$

Damit muß für die komplexe Amplitude bei $r = a$ die Beziehung

$$\hat{u}_R(a) = \hat{u}_S = i\omega\varepsilon \quad (5.2.36)$$

erfüllt sein. Mit (5.2.21) folgt daraus

$$\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{a}\right) \frac{A}{a} e^{-ika} = i\omega\varepsilon \quad (5.2.37)$$

Dies kann nach der unbekannten Größe A aufgelöst werden. Man erhält

$$A = \frac{i\omega\varepsilon a e^{ika}}{\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\varepsilon a c e^{ika}}{\left(1 - i \frac{c}{\omega a}\right)} \quad (5.2.38)$$

Der Betrag der Größe A legt die Stärke des Schallfeldes fest. Es ergibt sich wie erwartet ein linearer Zusammenhang zwischen der Auslenkung der Kugeloberfläche ε und der Stärke $|A|$. Die Abhängigkeit der Stärke vom Kugelradius a ist komplizierter. Der e^{ika} -Term ist nur für die Phase wichtig. Der Faktor $c/(\omega a) = \lambda/(2\pi a)$ spielt dagegen eine entscheidende Rolle für die Stärke. Für eine relativ große Kugel im Sinne von $a \gg \lambda$ ist der Imaginärteil des Nenners in (5.2.38) vernachlässigbar. Die Stärke ändert sich dann nahezu linear mit dem Radius. Bei einer relativ kleinen Kugel ($a \ll \lambda$) ist die Situation anders. In diesem Fall ist der Imaginärteil im Nenner dominant, und die Stärke A ist näherungsweise proportional zu a^2 . Eine kleine atmende Kugel strahlt anscheinend relativ ineffizient Schall ab.

Beispielaufgabe

Die bisherigen Erkenntnisse über Druck und Schnelle in den Kugelwellen sollen jetzt auf ein konkretes Beispiel mit einer atmenden Kugel angewendet werden. Die atmende Kugel kann als ein perfekter Kugellautsprecher angesehen werden. Es sei ein solcher Kugellautsprecher mit einem Radius von $a = 0.25$ m gegeben. Mit diesem Lautsprecher soll in 30 m Entfernung vom Mittelpunkt ein Schalldruckpegel von 110 dB bei den Frequenzen 10 kHz, 1 kHz und 50 Hz erzeugt werden. Beantwortet werden sollen die beiden Fragen:

- a) Wie groß muß die maximale Auslenkung $|\varepsilon|$ der Kugeloberfläche sein, um die geforderte Lautstärke zu erreichen?
- b) Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle an der Kugeloberfläche bei den drei Frequenzen?

5.2. Das Schallfeld einer atmenden Kugel

Zuerst wird der Pegel in einen Effektivwert umgerechnet. Es ergibt sich

$$L_p = 110 \text{ dB} \leftrightarrow p_{\text{rms}} = 6.32 \text{ Pa} \quad (5.2.39)$$

Bei einer harmonischen Schwingung ist die maximale Auslenkung immer um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der Effektivwert. Damit kann der Betrag der komplexen Amplitude in 30 m Entfernung berechnet werden. Es gilt

$$|\hat{p}(30 \text{ m})| = \sqrt{2} \cdot 6.32 \text{ Pa} = 8.93 \text{ Pa} \quad (5.2.40)$$

Im folgenden werden nur die Beträge der Größen betrachtet. Dies reicht völlig aus, um die Frage a) zu beantworten.

Es wird von einem Druckfeld mit einer komplexen Amplitude nach (5.2.13) ausgegangen. Zweckmäßigerweise wird

$$\hat{p}(r) = \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (5.2.41)$$

geschrieben, wobei die komplexe Konstante

$$B = -i\omega\rho_0 A \quad (5.2.42)$$

eingeführt wurde. Es gilt

$$|\hat{p}| = \frac{|B|}{r} \quad (5.2.43)$$

Daraus ergibt sich

$$|B| = 30 \text{ m} \cdot 8.93 \text{ Pa} = 268.13 \text{ Pa} \cdot \text{m} \quad (5.2.44)$$

Damit kann der Betrag der Schalldruckamplitude an der Kugel berechnet werden. Es folgt

$$|\hat{p}(0.25 \text{ m})| = \frac{|B|}{0.25 \text{ m}} = 1072.52 \text{ Pa} \quad (5.2.45)$$

Dieser Wert entspricht einem Pegel von etwa 155 dB und soll durch das Pulsieren der Kugel erzeugt werden.

Aus (5.2.36) folgt für die Schnelleamplitude

$$|\hat{u}_R(a)| = \omega |\varepsilon| \quad (5.2.46)$$

Bildet man den Betrag auf beiden Seiten von Gleichung (5.2.22) folgt

$$|\hat{u}_R| = \frac{1}{\rho_0 c} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega r}\right)^2} |\hat{p}| \quad (5.2.47)$$

Damit kann schließlich die Auslenkung der Oberfläche in Abhängigkeit der Druckamplitude an der Oberfläche ausgedrückt werden. Es ergibt sich

$$|\varepsilon| = \frac{|\hat{u}_R(a)|}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\rho_0 c} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega a}\right)^2} |\hat{p}(a)| \quad (5.2.48)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

$f = \frac{\omega}{2\pi}$	$\frac{c}{\omega a}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega a}\right)^2}$	$ \hat{u}_R(a) $	$ \varepsilon $
10 kHz	0.0216	1.00023	2.62 m/s	$4.18 \cdot 10^{-5}$ m
1 kHz	0.2164	1.023	2.689 m/s	$4.28 \cdot 10^{-4}$ m
50 Hz	4.329	4.44	11.679 m/s	0.037 m

Tabelle 5.2.: Ergebnisse für die atmende Kugel bei verschiedenen Frequenzen

Um $|\varepsilon|$ zu berechnen, ist nur der Betrag der Druckamplitude erforderlich. Die Tabelle 5.2 faßt das Ergebnis für die drei Frequenzen zusammen. In allen Fällen bleibt die maximale Auslenkung klein gegenüber der Wellenlänge, so daß die Anwendung der Randbedingung (5.2.36) nachträglich gerechtfertigt wird.

Um die Frage b) zu beantworten, werden die komplexen Amplituden von Druck und Schnelle betrachtet. Das Verhältnis zwischen den Amplituden ist durch die radiale Impedanz Z_R nach (5.2.25) gegeben. In bestimmten Fällen ist es zweckmäßiger statt der Impedanz deren Kehrwert zu betrachtet. Der Kehrwert wird als Admittanz bezeichnet.

Dieser Begriff ist nicht ganz so gebräuchlich wie die Impedanz. Jedoch bietet es sich in unserem Fall an, die radiale Admittanz mit

$$Y_R \equiv \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{\rho_0 c} \left[1 - i \frac{c}{\omega r} \right] \quad (5.2.49)$$

einzuführen. Es gilt dann

$$\hat{u}_R = Y_R \hat{p} \quad (5.2.50)$$

Der komplexe Faktor Y_R bestimmt den Phasenwinkel zwischen \hat{u}_R und \hat{p} . Ist Y_R reell, so sind Druck und Schnelle in Phase. Dies ist näherungsweise gegeben, wenn

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \ll 1 \quad (5.2.51)$$

erfüllt ist. Es gilt dann

$$Y_R \approx \frac{1}{\rho_0 c} \quad (5.2.52)$$

Der Realteil von Y_R ist unabhängig von Frequenz und Abstand. Der Imaginärteil geht gegen $-\infty$ für steigendes $c/(\omega r)$. Die Situation ist in der Abbildung 5.2 veranschaulicht. Formal kann die komplexe Admittanz mit Betrag und Phase als

$$Y_R = |Y_R| \cdot e^{-i\vartheta} \quad (5.2.53)$$

dargestellt werden. Der Winkel ϑ liegt zwischen 0 und 90 Grad. Entsprechend hat nach (5.2.50) der Druck einen Phasenvorsprung vor der Schelle. Man sagt, der Druck eilt der Schnelle voraus. Für die Phasenverschiebung gilt

$$\tan \vartheta = \frac{c}{\omega r} \quad (5.2.54)$$

5.3. Kausalität und Sommerfeld's Ausstrahlbedingung

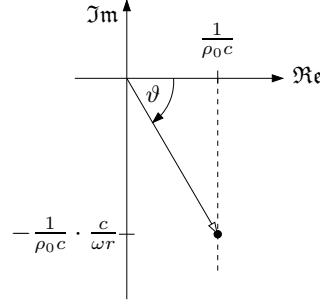


Abbildung 5.2.: Verlauf der radialen Admittanz Y_R bei Variation der Frequenz (gestrichelte Kurve)

Damit kann der Winkel mit

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{c}{\omega r}\right) \quad (5.2.55)$$

berechnet werden. Für die drei gegebenen Frequenzen f ergeben sich an der Kugeloberfläche bei $r = 0.25$ m die Werte in der Tabelle 5.3. Bei 10 kHz ist die Wellenlänge

f	ϑ
10 kHz	1.23°
1 kHz	12.21°
50 Hz	76.99°

Tabelle 5.3.: Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle für die betrachteten Frequenzen

wesentlich kleiner als der Kugelradius. Das Verhältnis zwischen Druck und Schnelle an der Kugeloberfläche entspricht näherungsweise der Situation in einer ebenen Welle, in der Druck und Schnelle in Phase sind ($\vartheta = 0$). Bei 1 kHz ist die Wellenlänge in der Größenordnung des Kugelradius und eine merkliche Abweichung von der ebenen Welle festzustellen. Bei 50 Hz liegt bereits eine erhebliche Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle vor. Die Situation ist völlig anders als in einer ebenen Welle.

5.3. Kausalität und Sommerfeld's Ausstrahlbedingung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde nur die nach außen laufende harmonische Kugelwelle betrachtet. Jedoch ist neben (5.2.9) auch mit dem Ansatz

$$\phi = \frac{A}{r} e^{i\omega(t+r/c)} \quad (5.3.1)$$

eine Lösung gegeben, die bei entsprechender Wahl von A die Randbedingung an der Kugeloberfläche erfüllt. Die Lösung (5.3.1) stellt eine Kugelwellen dar, die aus dem

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Unendlichen kommend auf die Kugeloberfläche zuläuft und dort eine Schnellebewegung entsprechend der Auslenkung der Kugeloberfläche bewirkt. Formal ist dies eine Lösung des Randwertproblems. Die ankommenden Wellen existieren schon unendlich lange. In den Wellen ist daher schon vorher die Information enthalten, wie sich die Kugeloberfläche zu einem bestimmten Zeitpunkt bewegt.

Es ist denkbar, daß das Atmen der Kugel mit einem Schalter ein- und ausgeschaltet werden kann. Die ankommenden Wellen müßten dann vorher "wissen", wann die Kugel eingeschaltet wird. Das ist natürlich in der Praxis nicht möglich, und daher ist die nach innen laufende Kugelwelle nach (5.3.1) keine physikalische sinnvolle Lösung des Randwertproblems. Man sagt sie verletzt das Kausalitätsprinzip. Würde man das Problem nicht analytisch lösen, sondern die Lösung einschließlich des Einschaltvorganges numerisch simulieren, so würde sich selbstverständlich nur die physikalisch sinnvolle Lösung – nämlich die nach außen laufende Kugelwelle – ergeben.

Anscheinend erhält man die unphysikalischen Lösungen nur dadurch, daß man sich auf harmonische Lösungen beschränkt hat und die Einschwingvorgänge außer acht läßt. Die Problematik soll im folgenden verdeutlicht werden. Die Wellengleichung für das akustische Potential lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (5.3.2)$$

Beschränkt man sich auf harmonische Lösungen, so kann ein Ansatz der Form

$$\phi = \varphi e^{i\omega t} \quad (5.3.3)$$

verwendet werden. Dabei ist $\varphi(\vec{x})$ die komplexe Amplitude des Potentials. Setzt man (5.3.3) in (5.3.2) ein ergibt sich

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \varphi e^{i\omega t} - \Delta \varphi e^{i\omega t} = 0 \quad (5.3.4)$$

Daraus folgt eine Bestimmungsgleichung für die komplexe Amplitude

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (5.3.5)$$

Diese Gleichung wird in der Literatur auch als Helmholtz-Gleichung bezeichnet.

Sucht man rein formal die Lösungen von (5.3.5) und leitet daraus Lösungen von (5.3.2) ab, so werden eventuell auch unphysikalische Lösungen gefunden, die das Kausalitätsprinzip verletzen. Man könnte das Problem umgehen, indem man immer die Einschwingvorgänge mit berücksichtigt und (5.3.2) löst. In der Praxis sind jedoch oft nur die eingeschwungenen harmonischen Lösungen von Interesse. Lösungen von (5.3.5) sind auch meist wesentlich einfacher zu ermitteln, als Lösungen, die den kompletten Einschaltvorgang mit beinhalten. Es ist daher sinnvoll ein Kriterium zu formulieren, daß die unphysikalischen von den sinnvollen Lösungen unterscheidet.

In dem bisher betrachteten einfachen kugelsymmetrischen Beispiel, war die Situation anschaulich klar. Jedoch können bei komplizierteren Randbedingungen die

5.3. Kausalität und Sommerfeld's Ausstrahlbedingung

Lösungen komplexer und unanschaulicher werden. Von Sommerfeld wurde daher die sogenannte Ausstrahlbedingung vorgeschlagen. Nur Lösungen, die

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} = 0 \quad (5.3.6)$$

erfüllen, sind physikalisch sinnvoll. Die Bedingung gilt natürlich nur für die Abstrahlung von Wellen im offenen Raum. Zum Beispiel ist für die Betrachtung im Inneren einer atmenden Kugel natürlich auch die nach innen laufende Welle im Lösungsansatz mit zu berücksichtigen. Weiterhin ist anzumerken, daß die Bedingung in der Form (5.3.6) nur für den dreidimensionalen Fall gilt. Sie kann prinzipiell auf Lösungen in beliebig-dimensionalen Räumen erweitert werden. Dies wird hier jedoch nicht betrachtet.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß eine nach außen laufende Kugelwelle mit

$$\phi(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (5.3.7)$$

auch tatsächlich die Ausstrahlbedingung (5.3.6) erfüllt. Dabei ist $f(\xi)$ eine beliebige Funktion, die die Form der Welle festlegt. Das Argument hängt mit $\xi = r - ct$ vom Ort und Zeit ab. Es gilt für die Zeitableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{c}{r} \frac{df}{d\xi} \quad (5.3.8)$$

Wegen $\partial \xi / \partial r = 1$ folgt für die räumliche Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f + \frac{1}{r} \frac{df}{d\xi} \quad (5.3.9)$$

Setzt man die beiden Ableitungen von ϕ in Gleichung (5.3.6) ein, so heben sich die Terme mit den Ableitungen $df/d\xi$ heraus. Aus (5.3.8) und (5.3.9) ergibt sich

$$r \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} = r \left\{ -\frac{f}{r^2} \right\} = -\frac{f}{r} \quad (5.3.10)$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $r \rightarrow \infty$. Damit wird die Ausstrahlbedingung (5.3.6) tatsächlich von Lösung (5.3.7) erfüllt. Entsprechend kann gezeigt werden, daß der Ansatz (5.3.1) die Ausstrahlbedingung nicht erfüllt.

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer in (5.3.6) würde für eine künstliche Welle verschwinden, die ohne mit $1/r$ abzufallen sich wie eine ebene Welle in positive r -Richtung bewegt. Eine solche Welle hätte die Form

$$\phi = h(r - ct) \quad (5.3.11)$$

wobei h eine beliebige Funktion wäre. Der Ansatz (5.3.11) löst natürlich nicht die Wellengleichung. Entsprechend weichen die Kugelwellen von der künstlichen Welle ab, jedoch werden die Verhältnisse in den Kugelwellen mit steigendem Abstand immer

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

ähnlicher zu dieser. Der Faktor $1/r$ ändert sich für große r immer langsamer, wenn r weiter ansteigt. Zusätzlich reduziert sich mit wachsendem r die Krümmung der Wellenfronten. Entsprechend verhält sich die Lösung (5.3.7) immer mehr wie eine ebene Welle. In Gleichung (5.3.10) wird sozusagen in der geschweiften Klammer die Abweichung zum ebenen Fall berechnet. Die Abweichung fällt mit r^2 nach außen ab.

5.4. Energie und Intensität

In Abschnitt 3.2 wurde die akustische Energie in eindimensionalen Wellen eingeführt. Die gesamten Überlegungen aus diesem Abschnitt lassen sich auch auf den dreidimensionalen Fall übertragen. Für die kinetische akustische Energie pro Volumen ergibt sich

$$e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 \quad (5.4.1)$$

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall tritt hier das Quadrat des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}'^2 = |\vec{v}'|^2$ auf. Das heißt, statt der skalaren Geschwindigkeit wird der Betrag der Geschwindigkeit eingesetzt. Die potentielle akustische Energie pro Volumen wird weiterhin mit

$$e_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \rho'^2 = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \quad (5.4.2)$$

angenommen. Dies entspricht exakt der eindimensionalen Welle. Dagegen ist die akustische Intensität jetzt eine vektorielle Größe, die mit

$$\vec{I}_{\text{a}} = p' \vec{v}' \quad (5.4.3)$$

definiert ist. Der Vektor \vec{I}_{a} ist ein Energieflußdichtevektor. Für die akustische Energie gilt auch im dreidimensionalen eine Erhaltungsgleichung. Diese lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}}) + \text{div } \vec{I}_{\text{a}} = 0 \quad (5.4.4)$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \right) + \text{div} (p' \vec{v}') = 0 \quad (5.4.5)$$

Die Gültigkeit der Energieerhaltungsgleichung kann gezeigt werden, indem die Schelle und der Druck durch das akustischen Potential ausgedrückt wird. Setzt man

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi \quad (5.4.6)$$

und

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.4.7)$$

in (5.4.5) ein, so kann die Gleichung nach

$$\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right\} = 0 \quad (5.4.8)$$

umgeformt werden. Die Zwischenschritte dieser Umformung sind im Anhang B.2 gegeben. In der geschweiften Klammer in (5.4.8) steht der Wellengleichungsterm für das Potential. Entsprechen p' und \vec{v}' einer gültigen Lösung, so erfüllt auch das dazugehörige akustische Potential die Wellengleichung, und der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist gleich Null. Damit ist (5.4.8) erfüllt und die Richtigkeit von (5.4.4) beziehungsweise (5.4.5) gezeigt.

Intensität in der Kugelwelle

Bisher wurde allgemein der Energieerhaltungssatz im dreidimensionalen Fall behandelt, und die Definition der akustischen Intensität erweitert. Im folgenden sollen die Erkenntnisse auf die Kugelwellen angewendet werden. Zweckmäßigerverweise definiert man die radiale Intensität mit

$$I_R = \vec{I}_a \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad (5.4.9)$$

Dabei ist

$$\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (5.4.10)$$

der nach außen zeigende Einheitsvektor am Ort \vec{x} . Es ergibt sich für die radiale Intensität

$$I_R = p' \vec{v}' \frac{\vec{x}}{r} = p' u'_R \quad (5.4.11)$$

Als Beispiel soll die Intensität für den in Abschnitt 5.2 vorgestellten Fall der atmenden Kugel berechnet werden. Das Schalldurckfeld und die Schnelle können in der komplexen Schreibweise mit

$$p'(r, t) = \hat{p}(r) e^{i\omega t} \quad (5.4.12)$$

und

$$u'_R(r, t) = \hat{u}_R(r) e^{i\omega t} \quad (5.4.13)$$

dargestellt werden. Bei den Gleichungen (5.4.12) und (5.4.13) ist implizit die Realteilbildung auf der rechten Seite enthalten, obwohl sie nicht hingeschrieben wird. Dies ist beim Einsetzen von in (5.4.11) unbedingt zu beachten. Vor der Multiplikation der komplexen Ausdrücke müssen die Realteile gebildet werden. Für die radiale Intensität folgt

$$I_R = \Re\{\hat{p} e^{i\omega t}\} \cdot \Re\{\hat{u}_R e^{i\omega t}\} \quad (5.4.14)$$

Nach (5.2.13) ist in der Kugelwelle die komplexe Druckamplitude \hat{p} nur vom Abstand r abhängig. Es kann

$$\hat{p}(r) = \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (5.4.15)$$

geschrieben werden. Dabei ist B eine komplexe Konstante, die Stärke und Phase des Druckfeldes festlegt. Schreibt man

$$B = |B| e^{i\sigma} \quad (5.4.16)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

so ist durch $|B|$ die Stärke und durch σ die Phase bestimmt. Um die Berechnung der Intensität zu vereinfachen, wird die komplexe Druckamplitude in der Form

$$\hat{p} = \frac{|B|}{r} e^{i\sigma} e^{-ikr} = \frac{|B|}{r} e^{-i\psi} \quad (5.4.17)$$

dargestellt. Dabei wurde zusätzlich die Abkürzung

$$\psi = kr - \sigma \quad (5.4.18)$$

eingeführt. Für den Schalldruck ergibt sich

$$p' = \Re\{\hat{p} e^{i\omega t}\} = \Re\left\{\frac{|B|}{r} e^{i(\omega t - \psi)}\right\} \quad (5.4.19)$$

Der reelle Faktor kann aus der Realteilbildung herausgezogen werden. Man erhält

$$p' = \frac{|B|}{r} \Re\{e^{i(\omega t - \psi)}\} \quad (5.4.20)$$

Schließlich kann die Realteilbildung ausgeführt werden. Für die Exponentialfunktion gilt die allgemeine Beziehung

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (5.4.21)$$

Es folgt damit

$$p' = \frac{|B|}{r} \cos(\omega t - \psi) \quad (5.4.22)$$

Diese einfache Form ergibt sich nur, weil in (5.4.17) der Faktor $e^{i\sigma}$ geschickt abgespalten wurde.

Im nächsten Schritt muß ein reeller Ausdruck für u'_R gefunden werden. Dazu wird die komplexe Amplitude der Schnelle betrachtet. Verwendet man die radiale Admittanz Y_R nach (5.2.49), so ergibt sich

$$\hat{u}_R = Y_R \hat{p} = Y_R \frac{|B|}{r} e^{-i\psi} \quad (5.4.23)$$

Für die radiale Schnelle folgt

$$u'_R = \Re\{\hat{u}_R e^{i\omega t}\} = \Re\left\{Y_R \frac{|B|}{r} e^{i(\omega t - \psi)}\right\} = \frac{|B|}{r} \Re\{Y_R e^{i(\omega t - \psi)}\} \quad (5.4.24)$$

Es muß der Realteil von dem Ausdruck

$$Y_R e^{i(\omega t - \psi)} = \left[\Re\{Y_R\} + i \Im\{Y_R\} \right] \cdot \left[\cos(\omega t - \psi) + i \sin(\omega t - \psi) \right] \quad (5.4.25)$$

bestimmt werden. Multipliziert man die rechte Seite aus, dann ergeben sich zwei reelle und zwei komplexe Summanden. Für den Realteil sind nur die Reellen wichtig. Es folgt

$$\Re\{Y_R e^{i(\omega t - \psi)}\} = \Re\{Y_R\} \cos(\omega t - \psi) - \Im\{Y_R\} \sin(\omega t - \psi) \quad (5.4.26)$$

5.4. Energie und Intensität

und damit

$$u'_R = \frac{|B|}{r} \left[\Re\{Y_R\} \cos(\omega t - \psi) - \Im\{Y_R\} \sin(\omega t - \psi) \right] \quad (5.4.27)$$

Mit (5.4.22) und (5.4.27) sind die beiden Schwankungsgrößen durch rein reelle Ausdrücke gegeben. Für die radiale Intensität ergibt sich durch Multiplikation

$$I_R = p' u'_R = \frac{|B|^2}{r^2} \left[\Re\{Y_R\} \cos^2(\omega t - \psi) - \Im\{Y_R\} \cos(\omega t - \psi) \sin(\omega t - \psi) \right] \quad (5.4.28)$$

In der eckigen Klammer tritt das Produkt von Sinus und Cosinus eines Arguments auf. Dies kann mit Hilfe der allgemeinen Beziehung

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \quad (5.4.29)$$

in einen einfachen Sinus-Ausdruck umgewandelt werden. Für die radiale Admittanz gilt

$$Y_R = \frac{1}{\rho_0 c} \left[1 - i \frac{c}{\omega r} \right] \quad (5.4.30)$$

Daraus folgt für den Realteil

$$\Re\{Y_R\} = \frac{1}{\rho_0 c} \quad (5.4.31)$$

und den Imaginärteil

$$\Im\{Y_R\} = -\frac{1}{\rho_0 \omega r} \quad (5.4.32)$$

Setzt man diese beiden Teile in (5.4.28) ein, erhält man unter Berücksichtigung von (5.4.29) die Beziehung

$$I_R = \frac{|B|^2}{r^2 \rho_0 c} \cos^2(\omega t - \psi) + \frac{|B|^2}{2r^3 \rho_0 \omega} \sin(2\omega t - 2\psi) \quad (5.4.33)$$

Formal setzt sich die radiale Intensität aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Term ist immer positiv. Der zweite Summand wechselt das Vorzeichen mit der Zeit. Er oszilliert mit der doppelten Frequenz der Lösung.

In der Praxis ist oft nur die zeitlich gemittelte Intensität von Bedeutung. Bildet man den Mittelwert, so liefert der zweite Summand in (5.4.33) keinen Beitrag. Der Mittelwert des \cos^2 -Terms ist $1/2$. Es ergibt sich

$$\langle I_R \rangle = \frac{|B|^2}{2r^2 \rho_0 c} \quad (5.4.34)$$

Der zeitliche Mittelwert beschreibt die effektiv abgestrahlte Leistung. Der zweite Summand in (5.4.33) beschreibt die sogenannte Blindleistung. Ihr Momentanwert kann die mittlere Leistung weit übersteigen. Die Amplitude des zweiten Terms kann als Produkt

$$\frac{|B|^2}{2r^3 \rho_0 \omega} = \frac{|B|^2}{2r^2 \rho_0 c} \left(\frac{c}{\omega r} \right) = \langle I_R \rangle \left(\frac{c}{\omega r} \right) \quad (5.4.35)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

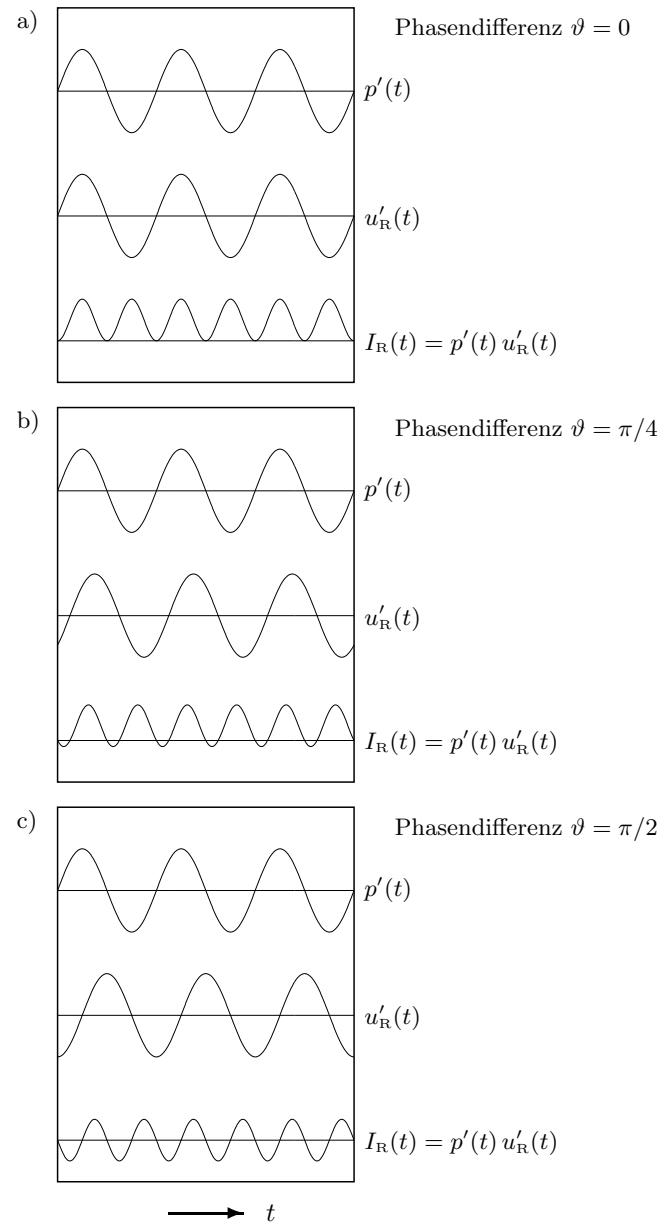


Abbildung 5.3.: Zur Veranschaulichung der Intensität bei Phasenverschiebung

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

geschrieben werden. Das Verhältnis zwischen der Amplitude der Blindleistung pro Fläche und der mittleren Intensität ist durch den Faktor

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (5.4.36)$$

gegeben. Dieser Faktor tritt schon im Ausdruck (5.4.30) für die radiale Admittanz auf. Er legt das Verhältnis zwischen Real- und Imaginärteil und damit gemäß (5.2.54) auch die Phasenverschiebung ϑ zwischen Druck und radialer Schnelle fest. Wie die Phasenverschiebung sich auf den Intensitätsverlauf auswirkt, ist in Abbildung 5.3 an drei Fällen veranschaulicht. Im Fall a) ist Druck und Schnelle in Phase. Dies entspricht dem Grenzfall $r \rightarrow \infty$. Entsprechend ist der Faktor in (5.4.36) und damit auch die Blindleistung gleich Null. Die Intensität ist immer positiv. Sie oszilliert mit der doppelten Frequenz. Je dichter man sich am Ursprung befindet, umso größer wird die Phasenverschiebung. Im Fall b) ist gerade eine Verschiebung von 45° dargestellt. Dies entspricht einem Abstand, für den $c/(\omega r) = 1$ gilt. Die Intensität wird zeitweise negativ. Schließlich ist im Fall c) die Situation bei einer Verschiebung von 90° gezeigt. Dies entspricht dem Grenzfall $r \rightarrow 0$. Dann wird der Faktor in (5.4.36) unendlich groß. Entsprechend ist die mittlere Intensität gleich Null. Es ergibt sich eine reine Blindleistung.

Der Faktor in (5.4.36) ist klein, falls

$$r \gg \lambda \quad (5.4.37)$$

gilt. Wenn man sich relativ zur Wellenlänge weit entfernt vom Zentrum der Kugelwelle befindet, dann ist die Blindleistung verschwindend gering gegenüber der effektiven Wirkleistung. Dagegen überwiegt die Blindleistung an Stellen, wo $\lambda > 2\pi r$ gilt. In der nach außen laufenden Kugelwelle tritt dort periodisch eine starke negative radiale Intensität auf. Die akustische Energie "pendelt" sozusagen im Schallfeld hin und her.

Der Bereich, in dem die Bedingung (5.4.37) gilt, wird Fernfeld genannt. Entsprechend befindet man sich im Nahfeld, wenn (5.4.37) nicht erfüllt ist. Im Fernfeld ist die Situation mit der in der ebenen Welle vergleichbar.

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Im Abschnitt 5.2 wurde das Schallfeld einer atmenden Kugel behandelt. Im folgenden wird der etwas kompliziertere Fall der vibrierenden Kugel vorgestellt. Mit dem Ausdruck "vibrierende Kugel" ist eine periodisch hin- und herbewegte Kugel gemeint. Das Problem ist nun nicht mehr kugelsymmetrisch, wie im Fall der atmenden Kugel.

Betrachtet wird eine starre Kugel mit undurchlässiger Oberfläche. Ihr Radius wird mit a bezeichnet. Die Kugel schwingt in x_1 -Richtung hin und her. Die Bewegung ist harmonisch, d.h. sinusförmig. Der Mittelpunkt der Kugel bewegt sich auf der x_1 -Achse. Die mittlere Position des Kugelmittelpunktes befindet sich im Ursprung bei $\vec{x} = 0$ beziehungsweise $r = 0$. Die Bewegung ist in der Abbildung 5.4 veranschaulicht. Es ist ein Schnitt durch die Kugel dargestellt. Die Kugel in der mittleren Position ist gestrichelt

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

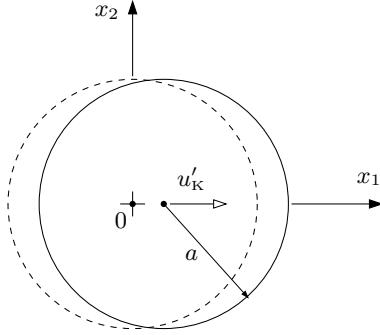


Abbildung 5.4.: Schematische Darstellung der vibrierenden Kugel mit Bewegung in x_1 -Richtung

eingezzeichnet. Die Schnittebene ist die x_1, x_2 -Ebene. Das Problem ist rotationssymmetrisch im Bezug auf die x_1 -Achse. Das heißt, das gleiche Bild würde sich auch in der x_1, x_3 -Ebene ergeben. Die Geschwindigkeit der Kugel wird mit u'_K bezeichnet. Der Strich deutet an, daß es sich um eine kleine Geschwindigkeit im akustischen Sinne handeln soll. Das heißt, die Geschwindigkeit soll klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit sein. Für die harmonische Bewegung gilt

$$u'_K(t) = \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.1)$$

Dabei ist \hat{u}_K eine komplexe Konstante, die Stärke und Phase der Bewegung festlegt.

Für die Randbedingung an das Schnellefeld sind mehrere Punkte zu beachten. Es darf kein Durchströmen der Kugeloberfläche geben, da die Kugel undurchlässig ist. Eine Bewegung des Fluids tangential zur Oberfläche ist jedoch erlaubt, weil keine Haftbedingung erfüllt werden muß. Es wird analog zu Abschnitt 3.1 eine vereinfachte Randbedingung verwendet. Die Schnelle wird nicht an der aktuellen Position der Kugeloberfläche vorgegeben, sondern an der mittleren Position bei $r = a$. Diese Näherung ist erlaubt, wenn die Auslenkung der Kugel klein gegenüber der Wellenlänge ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $|u'_K| \ll c$.

Um eine formale Beschreibung der Randbedingung zu erhalten, wird ein kleines Element der Kugeloberfläche betrachtet. Da die Kugel starr ist, wird durch die Bewegung der Kugel mit u'_K in x_1 -Richtung auch das Element mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. Die Komponente der Oberflächenbewegung in radialer Richtung muß mit der radialem Schnelle u'_R an dieser Stelle übereinstimmen. Andernfalls würde das Oberflächenelement durchströmt werden. Das Verhältnis von u'_K und u'_R an der Oberfläche hängt von der Position ab. Die Situation ist in Abbildung 5.5 veranschaulicht.

Im Gegensatz zum Fall der atmenden Kugel ist jetzt die radiale Schnelle auch von dem Winkel θ abhängig:

$$u'_R = u'_R(r, \theta, t) \quad (5.5.2)$$

Es bietet sich weiterhin die Darstellung in Kugelkoordinaten an. Aus Abbildung 5.5

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

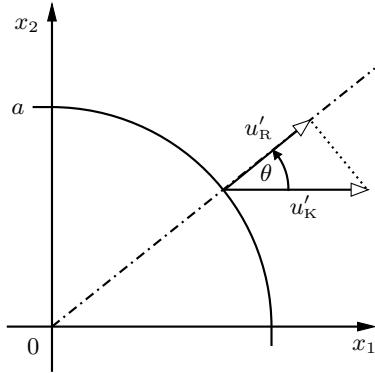


Abbildung 5.5.: Zur Berechnung der radialem Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche

ergibt sich für die radiale Schnelle an der Oberfläche der Zusammenhang

$$u'_R(a, \theta, t) = \cos \theta u'_K(t) \quad (5.5.3)$$

Mit dem harmonischen Ansatz (5.5.1) folgt

$$u'_R(a, \theta, t) = \hat{u}_K \cos \theta e^{i\omega t} \quad (5.5.4)$$

Diese Beziehung stellt die Randbedingung an das Schnellefeld dar. Es stellt sich die Frage welche Lösung der Wellengleichung eine solche Randbedingung erfüllt. Dazu sind einige Punkte zu bemerken:

- Es werden nur harmonische Lösungen betrachtet, da die Randbedingung auch harmonisch ist. Für die exakte Randbedingung, bei der die Schnelle an der aktuellen Position vorgegeben wird, würde sich jedoch keine harmonische Lösung finden lassen. Dies wurde schon in Abschnitt 3.1 für den Kolben diskutiert. Bei der Vorgabe der Schnelle an der mittleren Position liefert eine harmonische Randbedingung auch harmonische Lösungen.
- Die Lösung soll die Ausstrahlbedingung von Sommerfeld erfüllen. Aus dem Unendlichen kommende Wellen, die "zufällig" die Randbedingung an der Kugeloberfläche erfüllen, werden nicht berücksichtigt.

Zur Darstellung der Lösung wird der Formalismus mit dem akustischen Potential verwendet. Die Lösung lautet

$$\phi = A \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \right\} \quad (5.5.5)$$

Führt man die Differentiation aus ergibt sich

$$\phi = -A \cos \theta \left(\frac{1}{r} + i \frac{\omega}{c} \right) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (5.5.6)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Weiter unten wird gezeigt, daß das diesem Potential entsprechende Schnellefeld tatsächlich die Randbedingung (5.5.4) erfüllt. Zuvor soll überprüft werden, ob (5.5.6) auch eine Lösung der Wellengleichung ist. Dazu wird zunächst ein allgemeines Prinzip vorgestellt.

Neue Lösungen der Wellengleichung durch Differenzieren

Ist ϕ_* eine Lösung der Wellengleichung, die

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_* - \Delta \phi_* = 0 \quad (5.5.7)$$

erfüllt, so ist auch

$$\phi = \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \quad (5.5.8)$$

eine Lösung der Wellengleichung. Dies läßt sich leicht nachweisen, wenn man die Wellengleichung (5.5.7) nach x_1 differenziert. Es ergibt sich

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_* - \Delta \phi_* \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \right\} - \Delta \left\{ \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} \right\} \quad (5.5.9)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer entspricht gerade ϕ . So folgt direkt

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \Delta \phi \quad (5.5.10)$$

Das bedeutet, das Potential ϕ nach (5.5.8) erfüllt ebenfalls die Wellengleichung. Das Gleiche gilt übrigens für alle Ableitungen der Lösung ϕ_* sowohl nach einer Raumrichtung x_j als auch nach der Zeit t . Es ergibt sich eine allgemeine Regel:

Durch Differenzieren nach x_j oder t ergibt sich aus einer Lösung der Wellengleichung immer eine neue Lösung.

So lassen sich aus einer bekannten Lösung beliebig viele neue Lösungen herleiten.

Auch die Lösung (5.5.6) läßt sich durch differenzieren aus einer Ausgangslösung ϕ_* gewinnen. Und zwar wurde die entsprechende Lösung bereits im Abschnitt 5.2 behandelt. Das akustische Potential nach (5.2.9) beschreibt eine nach außen laufende harmonische Kugelwelle. Sie löst die Wellengleichung und erfüllt die Randbedingung an der Oberfläche einer atmenden Kugel. Diese Kugelwelle wird im weiteren mit

$$\phi_* = A \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (5.5.11)$$

als Ausgangslösung eingesetzt. Dieses Feld ist kugelsymmetrisch:

$$\phi_* = \phi_*(r, t) \quad (5.5.12)$$

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Für die Ableitung nach x_1 folgt

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (5.5.13)$$

Dies würde deutlich komplizierter werden, wenn ϕ_* auch noch von θ abhängen würde. Der Abstand r ist mit

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \quad (5.5.14)$$

gegeben. Für die Ableitung von r ergibt sich

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} \quad (5.5.15)$$

Die Koordinate x_1 kann durch Kugelkoordinaten ausgedrückt werden. Es gilt

$$x_1 = r \cos \theta \quad (5.5.16)$$

Damit läßt sich die Ableitung auch als

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos \theta \quad (5.5.17)$$

darstellen. Setzt man (5.5.11) und (5.5.17) in (5.5.13) ein, folgt

$$\phi = \frac{\partial \phi_*}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left\{ A \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \right\} \quad (5.5.18)$$

Jetzt braucht man nur noch die Konstante A vorziehen, und man erhält die angegebene Lösung (5.5.5). Das bedeutet die Lösung für die hin- und herbewegte Kugel ergibt sich aus der Lösung für die atmende Kugel durch Differenzieren in der Bewegungsrichtung.

Das Schnellefeld

Bisher wurde gezeigt, daß die Lösung (5.5.5) beziehungsweise (5.5.6) die Wellengleichung erfüllt. Im folgenden muß noch überprüft werden, ob die angegebene Lösung tatsächlich auch der Randbedingung für die harmonisch hin- und herbewegte Kugel entspricht. Die Randbedingung ist eine Bedingung an das Schnellefeld. Die Schnelle wird aus dem Potential ϕ durch

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi \quad (5.5.19)$$

bestimmt. In dem vorliegenden Fall ist nur die radiale Schnelle von Bedeutung, denn nur sie kommt in den Randbedingung vor. Für die radiale Schnelle ergibt sich

$$u'_r = \vec{v}' \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \text{grad } \phi \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (5.5.20)$$

Diese Beziehung gilt allgemein für die Darstellung in Kugelkoordinaten und wurde auch schon bei der Betrachtung der atmenden Kugel verwendet. Dort ergab sich durch die Kugelsymmetrie eine von der Richtung unabhängige Schnelle. Hier erhält man jetzt

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

aus (5.5.6) durch Differenzieren nach r eine vom Winkel θ abhängige radiale Schnelle mit

$$u'_R(r, \theta, t) = A \cos \theta \left(\frac{2}{r^3} + i \frac{2\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.5.21)$$

Die Randbedingung wird an der mittleren Position der Oberfläche bei $r = a$ vorgegeben. Es muß nun der komplexe Faktor A so gewählt werden, damit die durch (5.5.21) gegebene radiale Schnelle bei $r = a$ tatsächlich die Gleichung (5.5.4) erfüllt. Setzt man $r = a$ in (5.5.21) ein und vergleicht das Ergebnis mit (5.5.4), folgt

$$A \cos \theta \left(\frac{2}{a^3} + i \frac{2\omega}{ca^2} - \frac{\omega^2}{c^2 a} \right) e^{i\omega(t-a/c)} = \hat{u}_K \cos \theta e^{i\omega t} \quad (5.5.22)$$

Division durch die Faktoren $\cos \theta$ und $e^{i\omega t}$ liefert

$$A \left(\frac{2}{a^3} + i \frac{2\omega}{ca^2} - \frac{\omega^2}{c^2 a} \right) e^{-ika} = \hat{u}_K \quad (5.5.23)$$

Schließlich kann nach A aufgelöst werden. Es folgt

$$A = \frac{\hat{u}_K a^3 e^{ika}}{2 + 2i \left(\frac{\omega a}{c} \right) - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2} \quad (5.5.24)$$

Damit ist gezeigt, daß bei entsprechender Wahl von A die Randbedingung wirklich erfüllt wird. Das Ergebnis zeigt auch, wie die Stärke des Schallfeldes von dem Radius der Kugel a abhängt. Die Stärke ist durch $|A|$ bestimmt. Durch den komplexen Faktor \hat{u}_K ist die Bewegung der Kugel vorgegeben. Der Faktor

$$\frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (5.5.25)$$

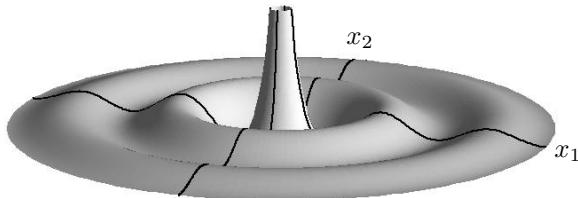
legt fest, wie die Stärke des Schallfeldes von dem Radius a abhängt. Der Ausdruck e^{ika} spielt für den Betrag von A keine Rolle. Er geht lediglich in die Phase von A ein. Ebenso ist für die Stärke des Schallfeldes nur der Betrag von \hat{u}_K wichtig.

Ist der Kugelradius klein gegenüber der Wellenlänge λ , so ist der Faktor in (5.5.25) ebenfalls klein und der Nenner in (5.5.24) ist näherungsweise gleich 2. Daraus ergibt sich eine Abhängigkeit der Stärke mit der dritten Potenz vom Kugelradius. Das bedeutet, die Erzeugung von Schallfeldern mit einer kleinen Kugel ist relativ ineffizient. Ist dagegen der Radius der Kugel groß gegenüber der Wellenlänge, so ist der Faktor in (5.5.25) groß. In diesem Fall dominiert das Quadrat des Faktors den Nenner in (5.5.24). Dann ist der Betrag von A linear mit dem Kugelradius a verknüpft. Für relativ große Kugeln ergibt also eine Verdoppelung des Durchmessers bei gleicher Bewegung ein doppelt so starkes Schallfeld. Ein ähnliche Abhängigkeit ergab sich auch im Abschnitt 5.2 für die atmende Kugel.

In Abbildung 5.6 soll die Lösung für die vibrierende Kugel veranschaulicht werden. Zum Vergleich ist im oberen Teil das ϕ -Feld einer atmenden Kugel nach (5.5.20) abgebildet. Im unteren Teil ist die Lösung nach (5.5.5) zu sehen. Dargestellt ist ϕ in einer

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Atmende Kugel



Vibrierende Kugel

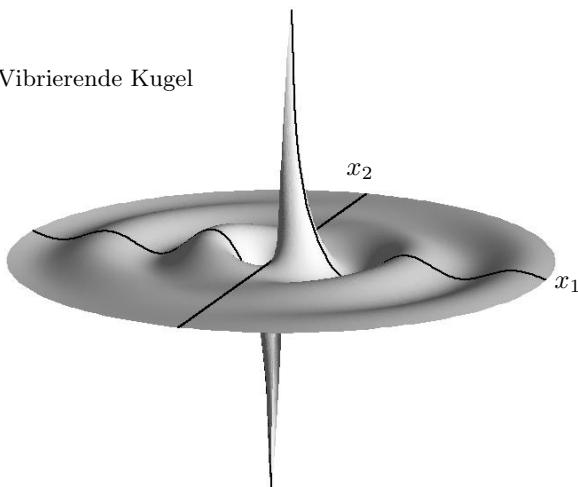


Abbildung 5.6.: Gegenüberstellung der ϕ -Felder für die atmende Kugel (oben) und die vibrierende Kugel (unten); dargestellt ist ϕ in der x_1, x_2 -Ebene; die vibrierende Kugel schwingt in x_1 -Richtung.

Kreisscheibe um die Kugel in der x_1, x_2 -Ebene. Diese Ebene schneidet die Kugel in der Mitte. Die Darstellung ist pseudo-dreidimensional. In der dritten Dimension ist ϕ zu einem festen Moment aufgetragen. Die Lage der x_1 - und x_2 -Achsen ist mit dunklen Linien markiert. Die Lösung für die atmende Kugel ist kugelsymmetrisch. Entsprechend ergibt sich in jeder Richtung der gleiche Verlauf. Bei der vibrierenden Kugel ist das nicht der Fall. In der Richtung senkrecht zur x_1 -Achse – also senkrecht zur Bewegungsrichtung – ist ϕ gleich Null, da $\cos \theta$ dort verschwindet. Dies wird im unteren Teil von Abbildung 5.6 deutlich. In x_1 -Richtung breiten sich Wellen aus und in x_2 -Richtung ist keine Auslenkung zu beobachten. Auffällig ist auch, dass die in entgegengesetzter Richtung laufenden Wellen auch eine entgegengesetzte Phase besitzen.

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Druckverteilung und radiale Impedanz

Bisher wurde lediglich das Potential ϕ und die radiale Schnelle u'_R betrachtet. Schließlich soll auch noch das Druckfeld untersucht werden. Dies ist wie die radiale Schelle auch richtungsabhängig. Das Druckfeld berechnet sich allgemein mit

$$p'(r, \theta, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.5.26)$$

aus dem Potential. Für die Lösung (5.5.6) ergibt sich speziell

$$p'(r, \theta, t) = i\omega\rho_0 A \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{\omega}{rc} \right) e^{i\omega(t-r/c)} \quad (5.5.27)$$

Sowohl für die radiale Schnelle als auch für den Druck lassen sich komplexe Amplituden \hat{u}_R beziehungsweise \hat{p} einführen. Damit kann das Schnellefeld mit

$$u'_R(r, \theta, t) = \hat{u}_R(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.5.28)$$

und das Druckfeld mit

$$p'(r, \theta, t) = \hat{p}(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.5.29)$$

dargestellt werden. Die komplexen Amplituden hängen vom Abstand r und vom Winkel θ ab. Durch Vergleich mit (5.5.21) und (5.5.27) können \hat{u}_R und \hat{p} einfach ermittelt werden. Es ergibt sich

$$\hat{u}_R(r, \theta) = A \cos \theta \left(\frac{2}{r^3} + i \frac{2\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) e^{-ikr} \quad (5.5.30)$$

und

$$\hat{p}(r, \theta) = i\omega\rho_0 A \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{\omega}{rc} \right) e^{-ikr} \quad (5.5.31)$$

Analog zur atmenden Kugel kann dann eine radiale Impedanz als Quotient der komplexen Amplituden berechnet werden. Man erhält

$$Z_R \equiv \frac{\hat{p}}{\hat{u}_R} = \frac{\rho_0 \left(i \frac{\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{rc} \right)}{\frac{2}{r^3} + i \frac{2\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r}} \quad (5.5.32)$$

Zu bemerken ist, daß die radiale Impedanz Z_R nicht vom Winkel θ abhängt. Die $\cos \theta$ -Abhängigkeit von \hat{u}_R und \hat{p} fällt bei der Division heraus. Es ist lediglich

$$Z_R = Z_R(r) \quad (5.5.33)$$

Natürlich hängt Z_R auch noch von ρ_0 , c und ω ab, aber diese Parameter werden bei der weiteren Diskussion als konstant angenommen.

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

Die radiale Impedanz ist komplex wie im Fall der atmenden Kugel. Durch Erweitern mit rc^2/ω^2 auf der rechten Seite von (5.5.32) ergibt sich

$$Z_R = \rho_0 c \frac{i \left(\frac{c}{\omega r} \right) - 1}{2 \left(\frac{c}{\omega r} \right) + 2i \left(\frac{c}{\omega r} \right) - 1} \quad (5.5.34)$$

In dieser Form wird die Abhängigkeit der radialen Impedanz vom Abstand r etwas deutlicher. Entscheidend ist der Faktor

$$\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (5.5.35)$$

Im Grenzfall für große Abstände r geht der Faktor gegen Null. Für den Limes der radiale Impedanz ergibt sich dann

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Z_R = \rho_0 c \quad (5.5.36)$$

Für große Abstände im Sinne von

$$r \gg \lambda \quad (5.5.37)$$

gilt also näherungsweise

$$Z_R \approx \rho_0 c \quad (5.5.38)$$

Dies entspricht auch dem Fall der atmenden Kugel. Im Fernfeld $r \gg \lambda$ ist die radiale Impedanz näherungsweise reell. Damit sind radiale Schnelle und Schalldruck in Phase. Das Verhältnis zwischen beiden entspricht dem in einer ebenen Welle. Dagegen wird für kleinere Abstände r , die nicht (5.5.37) erfüllen, die radiale Impedanz komplex. Das heißt, es gibt eine nicht vernachlässigbare Phasenverschiebung zwischen Druck und radialem Schnelle.

Kraft auf die Kugel

Die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle bewirkt eine Blindleistung im Nahfeld, wie im Fall der atmenden Kugel. In Abschnitt 5.4 wurde die Intensität in dem Schallfeld der atmenden Kugel untersucht. Die abgestrahlte Leistung ergibt sich dann durch Integration über eine geschlossene Fläche um die Kugel. Im Fall der vibrierenden Kugel kann die abgestrahlte Leistung aus der zur Bewegung notwendigen Kraft abgeleitet werden. Diese Kraft kompensiert die durch die unsymmetrische Druckverteilung auf der Kugeloberfläche entstehende Kraft. Sie stellt damit die Gegenkraft zur Druckkraft dar. Zunächst soll diese Kraft berechnet werden.

Der Druck auf der Oberfläche lässt sich formal mit

$$p'(a, \theta, t) = \hat{p}(a, \theta) e^{i\omega t} \quad (5.5.39)$$

darstellen. Für die Bewegung ist nur die Kraftkomponente in x_1 -Richtung wichtig. Diese ergibt sich durch Integration des Drucks über die Oberfläche S der Kugel. Dabei braucht nur der Schalldruck berücksichtigt werden. Das Integral des Gleichanteils p_0

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

über die Oberfläche ist gleich Null. Die Druckkraft auf einem infinitesimalen Flächen-element dS bewirkt eine Kraft in radialer Richtung. Die x_1 -Komponente dieser Kraft ist durch Multiplikation mit $\cos \theta$ gegeben. Es ergibt sich für die zur Bewegung notwendige Kraft

$$F_1(t) = \int_S \cos \theta p'(a, \theta, t) dS \quad (5.5.40)$$

Im folgenden werden die beiden Punkte, an denen die x_1 -Achse die Kugeloberfläche durchstößt, als Pole bezeichnet. Eine positive Druckstörung an dem Pol auf der positiven Halbachse bei $\theta = 0$ bewirkt eine Kraft entgegen der x_1 -Richtung – also eine negative Kraft auf die Kugel. Diese muß durch eine positive Gegenkraft ausgeglichen werden. Druckstörungen an dem Äquator der Kugel bei $\theta = \pi/2$ ergeben keinen Anteil in x_1 -Richtung.

Mit Hilfe der radialen Impedanz läßt sich der Druck auf der Oberfläche in der Form

$$p'(a, \theta, t) = \hat{u}_R(a, \theta) Z_R(a) e^{i\omega t} \quad (5.5.41)$$

schreiben. Aus der Randbedingung (5.5.4) folgt für die komplexe Amplitude \hat{u}_R bei $r = a$ die Beziehung

$$\hat{u}_R(a, \theta) = \hat{u}_K \cos \theta \quad (5.5.42)$$

Damit ergibt sich für den Druck

$$p'(a, \theta, t) = \hat{u}_K \cos \theta Z_R(a) e^{i\omega t} \quad (5.5.43)$$

Die Winkelabhängigkeit des Drucks $p'(a, \theta, t)$ steckt in dem $\cos \theta$ -Term. Wird (5.5.43) auf der rechten Seite von (5.5.40) eingesetzt, können alle Terme, die nicht von θ abhängen und damit überall auf der Oberfläche S konstant sind, aus dem Integral herausgezogen werden. Es ergibt sich

$$F_1(t) = \hat{u}_K Z_R(a) e^{i\omega t} \int_S \cos^2 \theta dS \quad (5.5.44)$$

Das verbleibende Integral läßt sich nach Parametrisierung der Oberfläche mit den Kugelkoordinaten θ und β einfach berechnen. Man erhält

$$\int_S \cos^2 \theta dS = \frac{4}{3}\pi a^2 \quad (5.5.45)$$

Zweckmäßigerweise wird auch die Kraft F_1 in komplexer Schreibweise mit

$$F_1(t) = \hat{F}_1 e^{i\omega t} \quad (5.5.46)$$

dargestellt. Die komplexe Amplitude \hat{F}_1 ist durch die Vorfaktoren in (5.5.44) gegeben. Es gilt

$$\hat{F}_1 = \frac{4}{3}\pi a^2 \hat{u}_K Z_R(a) \quad (5.5.47)$$

Leistung der vibrierenden Kugel

Die an der Kugel vollbrachte Leistung berechnet sich nach

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Kraft} \times \text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad (5.5.48)$$

aus dem Produkt von Kraft und Geschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit der Kugel gilt

$$u'_K(t) = \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.49)$$

Bei der Berechnung der Leistung ist wieder die korrekte Realteilbildung zu beachten. Vereinbarungsgemäß ist implizit in dem Gleichheitszeichen in (5.5.46) und (5.5.49) die Realteilbildung enthalten. Daher muß die Leistung, die mit P bezeichnet wird, nach

$$P(t) = \Re\{\hat{F}_1 e^{i\omega t}\} \cdot \Re\{\hat{u}_K e^{i\omega t}\} \quad (5.5.50)$$

berechnet werden. Im Fall der atmenden Kugel wurde die radiale Intensität mit Hilfe der Gleichung (5.4.14) berechnet. Auch dort wurde ein Produkt von zwei Realteilen gebildet. Anschließend wurde durch Integration über die Kugeloberfläche aus der Intensität die Leistung bestimmt. Hier wurde dagegen die Integration bereits vor der Produktbildung durchgeführt.

Wie im Fall der atmenden Kugel kann die Leistung in einen Blindanteil, der im zeitlichen Mittel verschwindet, und einen Wirkanteil zerlegt werden. Das Verhältnis von Blind- und Wirkleistung ist durch die Phasenverschiebung zwischen der Kraft und der Geschwindigkeit gegeben. Sind die Größen in Phase, dann besitzen beide Realteile in (5.5.50) immer das gleiche Vorzeichen. Damit ist $P(t)$ für alle Zeiten positiv, und der Blindanteil ist gleich Null. Bei einer Phasenverschiebung um 90° wechselt das Vorzeichen von $P(t)$ gerade so, daß die Leistung im zeitlichen Mittel verschwindet. Dann liegt nur noch Blindleistung vor. Im allgemeinen liegt die Phasenverschiebung irgendwo zwischen diesen beiden extremen Konstellationen. Die Amplituden \hat{u}_K und \hat{F}_1 können, wie es in Abbildung 5.7 dargestellt ist, als Vektoren in der komplexen Ebene angesehen werden. Die Kraftamplitude \hat{F}_1 läßt sich in zwei Komponenten parallel und senkrecht zu \hat{u}_K zerlegen. Der Anteil in Richtung von \hat{u}_K bestimmt die Wirkleistung und die senkrechte Komponente die Blindleistung. Die Größen \hat{u}_K und \hat{F}_1 hängen nach (5.5.47) voneinander ab. Die Phasenverschiebung zwischen den komplexen Amplituden wird durch die radiale Impedanz $Z_R(a)$ bestimmt. Ist \hat{u}_K gegeben, wird die Komponente von \hat{F}_1 parallel zu \hat{u}_K durch den Realteil $\Re\{Z_R(a)\}$ festgelegt. Die Senkrechte Komponente hängt entsprechend nur von $\Im\{Z_R(a)\}$ ab.

Bisher wurde nicht berücksichtigt, daß auch eine Kraft notwendig ist, um die Masse M_K der Kugel bei der Bewegung zu beschleunigen. Die mechanische Kraft ergibt zusammen mit F_1 , die im folgenden als akustische Kraft bezeichnet wird, die Gesamtkraft. Für die mechanische Kraft (Masse \times Beschleunigung) gilt

$$F_{\text{mech}} = M_K \frac{du'_K}{dt} \quad (5.5.51)$$

Für den harmonischen Fall ergibt sich in komplexer Formulierung

$$F_{\text{mech}}(t) = \hat{F}_{\text{mech}} e^{i\omega t} = i\omega M_K \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.52)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

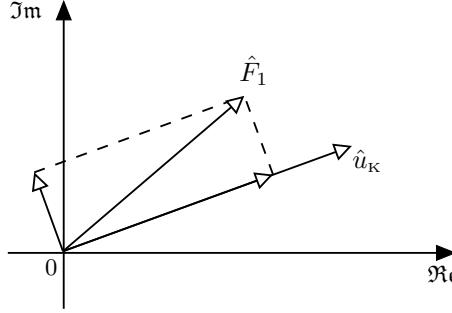


Abbildung 5.7.: Komplexe Amplituden der Kraft und Geschwindigkeit

Die mechanische Kraft $F_{\text{mech}}(t)$ ist damit relativ zur Geschwindigkeit $u'_K(t)$ um 90° phasenverschoben. Im zeitlichen Mittel wird keine mechanische Leistung beim hin- und herbewegen der Kugelmasse verbraucht. Die Energie pendelt sozusagen zwischen dem Antrieb und der Kugel hin- und her. Bei Beschleunigen wird Arbeit an der Kugel geleistet, die dann beim Abbremsen zurückgewonnen wird. Wenn der Antrieb reibungsfrei ist, ergibt sich durch die mechanische Kraft nur eine Blindleistung.

Um die Phasenverschiebung zwischen $F_1(t)$ und $u'_K(t)$ zu bestimmen, wird die radiale Impedanz genauer betrachtet. Der Ausdruck für Z_R in (5.5.32) wird so umgeformt, daß der Nenner reell wird. Dies ist durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners möglich. Es ergibt sich

$$Z_R = \frac{\rho_0 c}{2} \cdot \frac{i \left(\frac{\omega r}{c}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^4}{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2} \quad (5.5.53)$$

Real- und Imaginärteil von Z_R lassen sich in dieser Form besser miteinander vergleichen. Der gesamte Ausdruck hängt von dem Term

$$\frac{\omega r}{c} = kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (5.5.54)$$

ab. Speziell an der Kugeloberfläche bei $r = a$ ist demnach der Faktor

$$\frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (5.5.55)$$

für $Z_R(a)$ entscheidend. Der Realteil hängt mit der vierten Potenz von diesem Faktor ab. Der Imaginärteil besitzt dagegen einen Anteil, der nur linear mit dem Faktor verknüpft ist.

Betrachtet man den Grenzfall einer relativ kleinen Kugel im Sinne von

$$a \ll \lambda \quad (5.5.56)$$

5.5. Schallfeld einer vibrierenden Kugel

dann gilt

$$\frac{\omega a}{c} \ll 1 \quad (5.5.57)$$

In diesem Fall ist der Realteil von $Z_R(a)$ gegenüber dem Imaginärteil vernachlässigbar gering. Der Nenner des zweiten Quotienten in (5.5.53) ist approximativ gleich Eins. Entsprechend folgt die Näherung

$$Z_R(a) \approx i \frac{\rho_0 c}{2} \left(\frac{\omega a}{c} \right) = i\omega \frac{\rho_0 a}{2} \quad (5.5.58)$$

Setzt man diese Beziehung in (5.5.47) ein, erhält man für die akustische Kraft

$$F_1 = \hat{F}_1 e^{i\omega t} \approx i\omega \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_0 \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.59)$$

Bei einer relativ kleinen Kugel ergibt sich demnach überwiegend Blindleistung. Die Wirkleistung ist demgegenüber verschwindend gering. Berechnet man die Gesamtkraft

$$F_{\text{ges}}(t) = F_{\text{mech}}(t) + F_1(t) = (\hat{F}_{\text{mech}} + \hat{F}_1) e^{i\omega t} \quad (5.5.60)$$

auf die Kugel, ergibt sich zusammen mit (5.5.52) die Näherung

$$F_{\text{ges}}(t) \approx i\omega (M_K + M_F) \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.61)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$M_F = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 = \frac{1}{2} V_K \rho_0 \quad (5.5.62)$$

eingeführt. Anschaulich entspricht M_F der halben Masse des Mediums, welches durch die Kugel mit dem Volumen V_K verdrängt wird. Das bedeutet, im Grenzfall der relativ kleinen Kugel wirkt die Druckkraft auf die Kugel so wie eine zusätzliche Masse. Man bezeichnet daher M_F auch als die mitschwingende Mediummasse.

Im Grenzfall einer relativ großen Kugel im Sinne von

$$a \gg \lambda \quad (5.5.63)$$

gilt

$$\frac{c}{\omega a} \ll 1 \quad (5.5.64)$$

Die radiale Impedanz für große Abstände r wurde bereits oben diskutiert. Gemäß (5.5.38) gilt

$$Z_R(a) \approx \rho_0 c \quad (5.5.65)$$

Für eine relativ große Kugel entspricht die radiale Impedanz an der Kugeloberfläche näherungsweise dem reellen Wellenwiderstand. Die Wirkleistung überwiegt der Blindleistung. Für die akustische Kraft folgt

$$F_1(t) = \hat{F}_1 e^{i\omega t} \approx \frac{4}{3} \pi a^2 \rho_0 c \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.66)$$

5. Einfache dreidimensionale Schallfelder

Dies kann mit der Kraft auf einen harmonisch oszillierenden Kolben im Rohr verglichen werden. Bewegt dieser sich mit der Geschwindigkeit $u'_K(t)$, so ist der Druck auf der Kolbenoberfläche mit

$$p'_K(t) = \rho_0 c u'_K(t) \quad (5.5.67)$$

gegeben. Die Kraft $F_K(t)$ auf den Kolben erhält man durch Multiplikation mit der Querschnittsfläche Q . Bei harmonischer Bewegung nach (5.5.52) folgt

$$F_K(t) = Q p'_K(t) = Q \rho_0 c \hat{u}_K e^{i\omega t} \quad (5.5.68)$$

Dieses Ergebnis kann mit der Kraft $F_1(t)$ nach (5.5.66) verglichen werden. Im Grenzfall der relativ großen Kugel entspricht $F_1(t)$ näherungsweise der Kraft, die auf ein bewegten Kolben im Rohr mit der Querschnittsfläche

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^2 \quad (5.5.69)$$

wirkt. Entsprechend wird auch die akustische Leistung abgestrahlt, die ein Kolben im Rohr mit der angegebenen Oberfläche bei der gleichen Auslenkung abgibt.

6. Schallquellen

6.1. Monopol

Im letzten Kapitel wurden einfache Lösungen der Wellengleichung vorgestellt, die die Abstrahlung von Schall in den unendlich ausgedehnten Raum beschreiben. Die Lösungen für die atmende und die vibrierende Kugel besitzen beide eine Singularität im Kugelmittelpunkt. Im folgenden soll diese Singularität genauer untersucht werden. Dazu wird zunächst die Lösung für die atmende Kugel aus Abschnitt 5.2 betrachtet. Die Lösung für das akustische Potential lautet

$$\phi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.1.1)$$

Stärke und Phase des Schallfeldes sind durch die komplexe Konstante A festgelegt. Sie muß so gewählt werden, daß die Randbedingung an der Kugeloberfläche erfüllt wird. Das wird durch die Bestimmungsgleichung 5.2.38 erreicht. Für die Stärke des Schallfeldes ist allein $|A|$ entscheidend. Wird die Auslenkung der Kugeloberfläche verdoppelt, ergibt sich auch eine Verdopplung von $|A|$.

Es ist möglich mit verschiedenen großen Kugeln genau die gleiche Lösung zu erzeugen, wenn die Auslenkung der Oberflächen mit Phase und Amplitude angepaßt wird. Die kleinere Kugel müßte entsprechend mehr auslenken. In einem Gedankenexperiment kann man sich sogar vorstellen, daß man immer kleinere Kugeln nimmt, um das gleiche Feld zu erzeugen. Das bedeutet, der mittlere Kugelradius a wird immer kleiner und die Stärke $|A|$ wird konstant gehalten, indem die Auslenkung der Kugeloberfläche immer weiter erhöht wird. Es ergibt sich folgendes Szenario

- Die Auslenkung der Kugeloberfläche wird größer als der mittlere Radius a . Eine solche Kugel ist damit praktisch gar nicht mehr denkbar.
- Die Druckamplitude und die Schnelleamplitude an der Oberfläche werden immer größer. Irgendwann ist die Druckamplitude größer als der Ruhedruck p_0 und es ergibt sich zeitweise ein negativer Druck.
- Die Voraussetzungen für die linearen Gleichungen der Akustik sind wegen der großen Amplituden in Kugelnähe dort auch nicht mehr erfüllt.

Im Grenzfall

$$a \rightarrow 0 \quad (6.1.2)$$

6. Schallquellen

ergibt sich schließlich eine unendlich kleine Kugel mit unendlicher großer Auslenkung der Oberfläche. Das Schallfeld geht scheinbar von einem Punkt aus. Man erhält eine Punktquelle, die Monopol genannt wird.

Obwohl mit den Punktquellen viele prinzipielle Probleme, wie die unendlich großen Amplituden und der negative Druck, verknüpft sind, ist das Konzept der Punktquellen durchaus ein nützliches Hilfsmittel in der Akustik. Es ist zu Vergleichen mit den Quellen und Senken in einer stationären Potentialströmung. In der Nähe der Quellen wird auch die Geschwindigkeit unendlich groß. Das gleiche gilt für das Zentrum eines Potentialwirbels. Die genannten Ansätze besitzen alle prinzipielle "Schwierigkeiten" wie der Monopol. Dennoch lassen sich mit der Potentialtheorie viele praktische Strömungsprobleme lösen.

Massenquelle in stationärer Potentialströmung

Die Punktquellen in der Akustik lassen sich direkt mit den Quellen und Senken in einer stationären Potentialströmung vergleichen. Auch lassen sich beide Arten von Quellen in analoger Weise mathematisch beschreiben. Es wird daher im folgenden zunächst eine einfache Potentialströmung mit einer Quelle im Ursprung bei $\vec{x} = 0$ betrachtet. Das Potential für eine solche Strömung ist mit

$$\phi = \frac{A}{r} \quad (6.1.3)$$

gegeben. Dabei ist A eine reelle Konstante, die die Stärke der Quelle festlegt. Das Vorzeichen von A bestimmt, ob es sich um eine Quelle oder eine Senke handelt. Mit $r = |\vec{x}|$ ist der Abstand vom Ursprung gegeben. Das Feld (6.1.3) erfüllt die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi = 0 \quad (6.1.4)$$

überall, außer im Punkt $\vec{x} = 0$ beziehungsweise $r = 0$. Dort besitzt die Lösung eine Singularität, und $\Delta\phi$ ist dort nicht definiert.

Das Problem ist kugelsymmetrisch. Alle Größen hängen nur vom Abstand r zum Ursprung ab. Es ist zweckmäßig die radiale Geschwindigkeit

$$u_R = \vec{v} \frac{\vec{x}}{r} \quad (6.1.5)$$

einzuführen. Die Geschwindigkeit \vec{v} entspricht dem Gradienten des Potentials. Es folgt

$$u_R = \text{grad}\phi \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (6.1.6)$$

Das gesamte Strömungsfeld wird von der Massenquelle am Punkt $r = 0$ bestimmt. Die Lösung besitzt dort eine Singularität. Für einen anderen Faktor A ändert sich der Wert von ϕ bei $r = 0$ nicht: Er bleibt unendlich. Die Singularität muß sich aber irgendwie verändert haben, denn die Quellstärke hat sich verändert. Es soll im folgenden eine quantitative Beschreibung für die Singularität bei $r = 0$ gefunden werden.

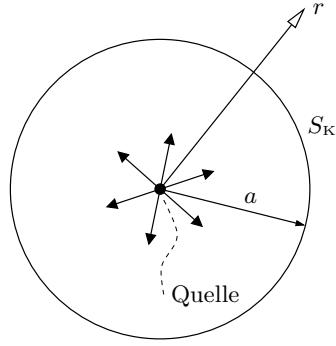


Abbildung 6.1.: Kugel mit Oberfläche S_K und punktförmiger Massenquelle im Mittelpunkt bei $r = 0$

Dazu betrachtet man zunächst die Masse pro Zeit, die von der Quelle ausgeht. Sie wird mit Q_M bezeichnet. Um ihren Wert zu berechnen wird ein Kugelvolumen mit Radius a um die Stelle $r = 0$ konstruiert, wie es in Abbildung 6.1 illustriert ist. Der Massenfluß ist durch ein Integral über die Oberfläche S_K der Kugel zu berechnen. Es gilt

$$Q_M = \int_{S_K} \rho_0 u_R dS_K \quad (6.1.7)$$

Das Produkt $\rho_0 u_R$ ist die Massenflußdichte in radialer Richtung. Mit Gleichung (6.1.6) folgt

$$Q_M = \rho_0 \int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K \quad (6.1.8)$$

Für die Lösung (6.1.3) ergibt sich die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} \quad (6.1.9)$$

Auf der Kugeloberfläche ist überall $r = a$. Das Integral in (6.1.8) kann leicht berechnet werden, da der Integrand konstant ist. Man erhält

$$Q_M = 4\pi a^2 \left(-\frac{A}{a^2} \right) \rho_0 \quad (6.1.10)$$

Dies kann in

$$Q_M = -4\pi A \rho_0 \quad (6.1.11)$$

umgeformt werden. Damit ist der Massenfluß bestimmt. Ein positives A ergibt eine negativen Massenfluß, also eine Senke.

Die Größe Q_M wurde durch Integration über die Kugeloberfläche gewonnen. In dem Oberflächenintegral „steckt“ sozusagen Information über die Verhältnisse am Quellpunkt $r = 0$. Der Radius a der gedachten Kugel, über deren Oberfläche integriert

6. Schallquellen

wurde, kann frei gewählt werden. Das Ergebnis für Q_M muß immer das gleiche sein – unabhängig von a . In dem Oberflächenintegral scheint daher ausschließlich Information über den Punkt $r = 0$ zu stecken. Dies wird deutlich wenn man das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral mit Hilfe des Satzes von Gauss umwandelt. Dazu wird der nach außen zeigende Normalenvektor auf der Kugeloberfläche mit

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r} \quad (6.1.12)$$

definiert. Damit kann auf der Oberfläche

$$u_R = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \vec{n} \cdot \nabla \phi = \vec{n} \cdot \vec{v} \quad (6.1.13)$$

geschrieben werden. Mit dem Satz von Gauss ergibt sich die Beziehung

$$\int_{S_K} \vec{n} \cdot \nabla \phi \, dS_K = \int_{V_K} \operatorname{div}(\nabla \phi) \, dV_K \quad (6.1.14)$$

Dabei ist mit V_K das Volumen der Kugel bezeichnet.

Zur Erinnerung sei hier nochmal der Satz von Gauss angegeben. Für ein Vektorfeld \vec{B} und ein Volumen V mit Oberfläche S gilt die Beziehung

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = \int_S (\vec{n} \cdot \vec{B}) \, dS \quad (6.1.15)$$

In unserem speziellen Fall entspricht $\nabla \phi$ dem Vektorfeld \vec{B} .

In Gleichung (6.1.14) tritt die Kombination von div- und grad-Operator auf. Dafür gilt allgemein

$$\operatorname{div}(\nabla \phi) = \Delta \phi \quad (6.1.16)$$

Damit kann die Beziehung zwischen dem Oberflächen- und dem Volumenintegrale über die Kugel als

$$\int_{S_K} u_R \, dS_K = \int_{V_K} \Delta \phi \, dV_K \quad (6.1.17)$$

geschrieben werden. Diese Beziehung gilt allgemein für beliebige Potentiale ϕ . Hier wird speziell die Lösung der Punktquelle (6.1.3) betrachtet. Für sie wurde das Oberflächenintegral auf der linken Seite bereits weiter oben berechnet. Es entspricht nach (6.1.7) bis auf den Faktor ρ_0 dem Massenfluß Q_M . Mit (6.1.11) ergibt sich für die betrachtete Quellströmung die Beziehung

$$\int_{V_K} \Delta \phi \, dV_K = \int_{V_K} \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} \, dV_K = -4\pi A \quad (6.1.18)$$

Interessanterweise gilt

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \neq 0 \quad (6.1.19)$$

6.1. Monopol

Das bedeutet, der Integrand in (6.1.18) ist überall gleich Null außer im Punkt $r = 0$ (beziehungsweise $\vec{x} = 0$). Das Integral besitzt jedoch einen Wert ungleich Null. Dieser kann nur durch die Integration über die Singularität an der Stelle $r = 0$ herrühren. Verschiebt man die gedachte Kugel, so daß ihr Mittelpunkt an der Position $\vec{x}_0 \neq 0$ liegt, dann wird das Integral davon abhängig, ob der Punkt $r = 0$ in der Kugel liegt. Wird der Radius a der verschobenen Kugel verkleinert, bis $r = 0$ außerhalb ist, dann ergibt sich Null. Es gilt daher

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K(\vec{x}_0)} \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} dV_K = 0 \quad (6.1.20)$$

Dabei ist mit $V_K(\vec{x}_0)$ das Volumen der verschobenen Kugel mit Mittelpunkt bei \vec{x}_0 bezeichnet. Nur für die Kugel um $\vec{x} = 0$ ist der Limes ungleich Null. Es gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K(0)} \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} dV_K = -4\pi A \quad (6.1.21)$$

Anscheinend liefert nur die Stelle $\vec{x} = 0$ einen Beitrag zum Integral. Dort ist jedoch $\Delta\phi$ für die singuläre Lösung (6.1.3) gar nicht definiert. Denn durch die Singularität der Lösung ist $\Delta\phi$ selbst singulär. Diese Singularität kann anscheinend durch ein Integral wie in (6.1.21) quantifiziert werden. Die Größe

$$\Delta\phi = \Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} \quad (6.1.22)$$

verhält sich wie die Diracsche δ -Funktion, die in Abschnitt 1.5 vorgestellt wurde. Die δ -Funktion ist auch überall gleich Null bis auf den Punkt $\vec{x} = 0$, in dem sie singulär ist. Das Integral über die δ -Funktion ist ebenfalls endlich. Es gilt

$$\int_V \delta(\vec{x}) dV = \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{x} = 0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.1.23)$$

Das bedeutet, man kann $\Delta\phi$ für die Lösung (6.1.3) mit einer δ -Funktion beschreiben. Dies kann mit

$$\Delta \left\{ \frac{A}{r} \right\} = -4\pi A \delta(\vec{x}) \quad (6.1.24)$$

dargestellt werden. Die Gleichung (6.1.24) gilt in dem erweiterten Funktionenraum, in dem die sogenannten Distributionen, wie die δ -Funktion, zugelassen sind. Dort ist dann auch $\Delta\phi$ an den Stellen definiert, an denen ϕ eine Singularität besitzt.

Durch den Formalismus in (6.1.24) lassen sich ebenfalls Quellen an anderen Stellen ausdrücken. Die Gleichung

$$\Delta\phi = -4\pi A \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6.1.25)$$

wird durch das Potential

$$\phi = \frac{A}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (6.1.26)$$

6. Schallquellen

gelöst. Diese Lösung beschreibt eine Quelle an der Stelle \vec{x}_0 . Gleichung (6.1.25) kann als Bestimmungsgleichung für diese Quellströmung angesehen werden. Im Gegensatz zur homogenen Laplace-Gleichung (6.1.4) gilt (6.1.25) im gesamten Raum, also auch in dem singulären Punkt. Gleichung (6.1.25) stellt damit eine Erweiterung von (6.1.4) dar. Die Eigenschaften der Quelle sind mit in der Differentialgleichung enthalten.

Akustische Monopolquelle

Im folgenden sollen die obigen Überlegungen zur Potentialströmung auf die Akustik übertragen werden. Betrachtet wird die Lösung für eine harmonisch atmende Kugel. Das akustische Potential hat die Form

$$\phi = \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.1.27)$$

Es löst die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \Delta \phi = 0 \quad (6.1.28)$$

Wie oben gilt diese Gleichung nicht im Punkt $\vec{x} = 0$. Beides, die Lösung (6.1.27) und die Bestimmungsgleichung (6.1.28) besitzen jetzt eine kompliziertere Form als im Fall der Quellströmung. Dennoch kann auch hier die Singularität in formal gleicher Weise untersucht werden. Analog zu (6.1.18) wird das Integral der linken Seite von (6.1.28) über eine gedachte Kugel V_K um $\vec{x} = 0$ gebildet. Das heißt, auch über die Stelle, an der die linke Seite zunächst nicht definiert ist, wird wieder integriert. Es ergibt sich

$$\int_{V_K} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \Delta \phi \right] dV_K = \int_{V_K} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi dV_K - \int_{V_K} \Delta \phi dV_K \quad (6.1.29)$$

Dabei wurde das Integral aufgeteilt. Zunächst wird der Term mit der Zeitableitung getrennt betrachtet. Setzt man die Lösung (6.1.27) ein, ergibt sich für den Zeitableitungsterm

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} = -k^2 \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.1.30)$$

Damit folgt für das erste Integral auf der rechten Seite von (6.1.29)

$$\begin{aligned} \int_{V_K} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} dV_K &= \int_0^a 4\pi r^2 \left(-k^2 \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right) dr \\ &= -4\pi k^2 A \int_0^a r e^{i\omega(t-r/c)} dr \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

Die Umformungen ergeben sich dadurch, daß der Integrand nur von r abhängt. Innerhalb einer infinitesimalen Kugelschale mit dem Radius r und der Dicke dr ist der Integrand konstant. Man braucht daher nur mit dem Volumen der Kugelschale $4\pi r^2 dr$ zu multiplizieren und das Ergebnis über r zu integrieren.

6.1. Monopol

Von Interesse ist der Wert des Integrales für unendlich kleine Kugelvolumen, die nur die singuläre Stelle umfassen. Analog zu (6.1.21) wird daher der Limes gebildet. Der Term $e^{i\omega(t-r/c)}$ ist beschränkt. Daher gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a r e^{i\omega(t-r/c)} dr = 0 \quad (6.1.32)$$

Damit folgt für das erste Teilintegral

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} dV_K = 0 \quad (6.1.33)$$

Der Zeitableitungsterm besitzt zwar eine Singularität an der Stelle $\vec{x} = 0$, jedoch ist diese Singularität zu schwach um einen endlichen Wert für das Integral über ein unendlich kleines Kugelvolumen zu ergeben.

Als nächstes wird das zweite Teilintegral auf der rechten Seite von (6.1.29) betrachtet. Dieses enthält den Laplace-Term. Das Volumenintegral über das Kugelvolumen V_K wird zunächst mit dem Satz von Gauss in ein Oberflächenintegral über S_K umgewandelt. Dieser Schritt entspricht der Umformung in (6.1.14) jedoch in umgekehrter Richtung. Es gilt auch für das akustische Potential

$$\int_{V_K} \Delta \phi dV_K = \int_{S_K} \vec{n} \cdot \nabla \phi dS_K = \int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K \quad (6.1.34)$$

Um das Integral für die betrachtete Lösung (6.1.27) zu ermitteln, ist die Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} = -\frac{A}{r^2} e^{i\omega(t-r/c)} - i \frac{A\omega}{rc} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.1.35)$$

einsetzen. Die Berechnung des Oberflächenintegrals ist wieder einfach, da der Integrand nach (6.1.35) nur von r abhängt und somit auf der gesamten Oberfläche konstant ist. Die Integration liefert

$$\int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K = 4\pi a^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}(a) = -4\pi A e^{i\omega(t-a/c)} - i4\pi a \frac{A\omega}{c} e^{i\omega(t-a/c)} \quad (6.1.36)$$

Untersucht werden soll die singuläre Stelle bei $r = 0$. Es wird daher wieder der Grenzfall einer unendlich kleinen Kugel betrachtet. Der zweite Summand in (6.1.36) hängt für kleine Werte linear von a ab. Im Limes liefert daher nur der erste Summand einen Beitrag. Es folgt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \Delta \phi dV_K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS_K = -4\pi A e^{i\omega t} \quad (6.1.37)$$

6. Schallquellen

Damit ergibt sich für das gesamte Integral

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi \, dV_K = +4\pi A e^{i\omega t} \quad (6.1.38)$$

Dies Ergebnis ist die Entsprechung zu Gleichung (6.1.21), die für den Fall einer einfachen Quellströmung abgeleitet wurde. Die beiden Fälle unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen und den $e^{i\omega t}$ -Term.

Es können wieder die gleichen Überlegungen angestellt werden. Der Integrand in (6.1.38) ist bis auf die Stelle $r = 0$ überall gleich Null. Dort ist sein Wert singulär. Das Integral über diese Singularität liefert einen endlichen Wert. Damit kann die Singularität quantifiziert werden. Dies kann formal mit der δ -Funktion dargestellt werden. Für die Lösung (6.1.27) kann

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \left\{ \frac{A}{r} e^{i\omega(t-r/c)} \right\} = 4\pi A e^{i\omega t} \delta(\vec{x}) \quad (6.1.39)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung gilt nun überall auch in dem singulären Punkt bei $r = 0$.

Verallgemeinerung auf beliebige Monopolquellen

Bisher wurde nur der harmonische Fall betrachtet. Die Überlegungen gelten jedoch auch für nichtharmonische Lösungen der Form

$$\phi = \frac{f(t - r/c)}{r} \quad (6.1.40)$$

Sie erfüllt die Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 4\pi f(t) \delta(\vec{x}) \quad (6.1.41)$$

Die Herleitung dieser Beziehung wird hier nicht im Detail gezeigt. Zerlegt man die Zeitfunktion $f(t)$ in ihre harmonischen Anteile, so gilt für die Anteile einzeln die Gleichung (6.1.39). Durch Aufsummieren beziehungsweise Integrieren der harmonischen Anteile lässt sich dann von (6.1.39) auf (6.1.41) schließen.

Um auf die inhomogene Differentialgleichung (6.1.39) zu gelangen wurde von der Lösung (6.1.27) ausgegangen. Analog ergibt sich für die Lösung (6.1.40) die inhomogene Wellengleichung (6.1.41). Man kann sich aber auch umgekehrt (6.1.41) als Bestimmungsgleichung für die Lösung (6.1.40) vorstellen. Die Lösungen (6.1.27) beziehungsweise (6.1.40) wurden bisher als Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 0 \quad (6.1.42)$$

betrachtet, die die Randbedingung an der Oberfläche einer atmenden Kugel erfüllen. Das heißt, Gleichung (6.1.42) gilt überall außerhalb der atmenden Kugel. Im Grenzfall einer unendlich kleinen Kugel ist dies überall bis auf den Punkt $r = 0$. Dagegen

gilt (6.1.41) auch in diesem Punkt. Es gibt keinen Rand mehr. Statt der Randbedingung bestimmt jetzt die rechte Seite der Differentialgleichung die Lösung. Im Fall von (6.1.41) beschreibt die rechte Seite eine punktförmige Monopolquelle. Man hat sozusagen die Randbedingung gegen den Quellterm auf der rechten Seite eingetauscht.

Akustischer Monopol als instationäre punktförmige Massenquelle

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde das Gedankenexperiment mit der immer kleiner werdenden atmenden Kugel vorgestellt. Im Grenzfall ergab sich dann eine punktförmige Schallquelle. Die bisherigen Überlegungen führen auf eine alternative Veranschaulichung der akustischen Monopolquelle. Für das Integral über ein Kugelvolumen V_K mit Oberfläche S_K gilt nach (6.1.34) der Zusammenhang

$$\int_{V_K} \Delta\phi \, dV_K = \int_{S_K} \vec{n} \cdot \nabla \phi \, dS_K = \int_{S_K} \vec{n} \cdot \vec{v}' \, dS_K \quad (6.1.43)$$

Das Oberflächenintegral über $\vec{n} \cdot \vec{v}'$ ergibt den Volumenfluß über die Oberfläche, der durch die akustische Welle bewirkt wird. Multipliziert mit der Dichte ρ_0 ergibt sich daraus die Masse, die pro Zeit durch die Oberfläche bewegt wird, denn es gilt

$$\text{Volumenfluß} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit} \times \text{Dichte}}$$

Für das Feld nach Gleichung (6.1.27) wurde gezeigt, dass in Grenzfall eines unendlich kleinen Volumens

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V_K} \Delta\phi \, dV_K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \vec{n} \cdot \vec{v}' \, dS_K = -4\pi A e^{i\omega t} \quad (6.1.44)$$

gilt. Das bedeutet, die Lösung (6.1.27) beschreibt an dem Punkt $r = 0$ eine Massenquelle. Der Massenfluß (Masse pro Zeit) aus diesem Punkt ist mit

$$Q_M = -4\pi A e^{i\omega t} \rho_0 \quad (6.1.45)$$

gegeben. Man kann sich die akustische Monopolquelle – statt als kleine atmende Kugel – als eine periodisch schwankende Massenquelle vorstellen. Diese bewirkt auch ein entsprechendes Schallfeld.

Das Ergebnis (6.1.45) stimmt bis auf den $e^{i\omega t}$ -Term mit der Formel für eine Punktquelle in einer stationären Potentialströmung überein. Das bedeutet, in der Nähe der Singularität verhält sich die akustische Lösung anscheinend wie eine stationäre Potentialströmung. In einer kleinen Umgebung um die singuläre Stelle $r = 0$ stimmt das Schnellefeld der Lösung (6.1.27) mit dem Geschwindigkeitsfeld einer angepaßten Potentialströmung überein. Allerdings schwankt das Schnellefeld und für jeden Zeitpunkt muß die Quellstärke der Potentialströmung entsprechend angepaßt werden. Das akustische Feld kann in der kleinen Umgebung als quasi-statisch betrachtet werden. Dies

6. Schallquellen

kann man sich auch formal anhand der Lösung klarmachen. Der Exponentialterm in (6.1.27) kann mit

$$e^{i\omega(t-r/c)} = e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega r/c} \quad (6.1.46)$$

in einen zeitabhängigen und einen ortsabhängigen Faktor aufgespalten werden. Ist für den Ausdruck im Exponenten

$$\frac{\omega r}{c} \ll 1 \quad (6.1.47)$$

erfüllt, dann gilt die Näherung

$$e^{-i\omega r/c} \approx 1 \quad (6.1.48)$$

und die Ortsabhängigkeit durch diesen Faktor ist vernachlässigbar. Das akustische Potential fällt dann approximativ mit $1/r$ ab, wie das Geschwindigkeitspotential auch. Die Bedingung (6.1.47) ist erfüllt, falls der Abstand r klein gegenüber der Wellenlänge $\lambda = \omega/(2\pi c)$ ist. Das heißt, in einer kleinen Umgebung mit $r \ll \lambda$ entspricht das akustische Schnellefeld in guter Näherung einer quasi-statischen Potentialströmung.

6.2. Kontinuierliche Quellverteilung

Bisher wurde eine Punktquelle an der Stelle $\vec{x} = 0$ betrachtet. Mit dem im letzten Abschnitt vorgestellten Formalismus ist auch die Beschreibung von Quellen an einer beliebigen Stelle einfach möglich. Die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 4\pi f(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6.2.1)$$

wird durch

$$\phi = \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{x}_0|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (6.2.2)$$

gelöst. Die Lösung besitzt ihre Singularität an der Stelle \vec{x}_0 . Sie stellt die Lösung für eine atmende Kugel dar, deren Mittelpunkt sich bei \vec{x}_0 befindet.

Da die Wellengleichung (6.2.1) linear ist, lassen sich auch mehrere Punktquellen an verschiedenen Orten einfach überlagern. Auf der rechten Seite erscheint dabei eine Summe über mehrere δ -Funktionen. Für N Punktquellen ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 4\pi \sum_{n=1}^N f_n(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \quad (6.2.3)$$

Dabei ist $f_n(t)$ die Stärke der Quelle n zur Zeit t . Mit \vec{x}_n ist der Ort der Quelle n bezeichnet. Als Lösung von (6.2.3) ergibt sich entsprechend auch eine Summe:

$$\phi = \sum_{n=1}^N \frac{f_n(t - |\vec{x} - \vec{x}_n|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_n|} \quad (6.2.4)$$

Hier sei angemerkt, daß für jede Quelle ein andere Zeit

$$t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_n|}{c} \quad (6.2.5)$$

6.2. Kontinuierliche Quellverteilung

in die Funktion f_n eingesetzt werden muß. Diese Zeit wird retardierte Zeit genannt. Sie ist die Zeit, zu der das Signal, welches zur Zeit t am Beobachter \vec{x} ankommt, von der Quelle am Ort \vec{x}_n ausgesandt wurde. Wie in Abbildung 6.2 verdeutlicht, muß

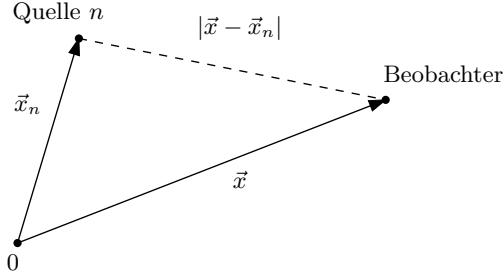


Abbildung 6.2.: Zur Erklärung der retardierten Zeit

das Signal die Strecke $|\vec{x} - \vec{x}_n|$ zurücklegen. Dabei vergeht die Zeitspanne $|\vec{x} - \vec{x}_n|/c$. Diese muß von der aktuellen Zeit t abgezogen werden, um die Quellzeit zu erhalten. Die retardierte Zeit hängt damit von dem Beobachtungsort, dem Quellort und der aktuellen Zeit ab. Im folgenden werden noch häufiger Ausdrücke der Form (6.2.5) vorkommen.

Die Lösung für mehrere Punktquellen (6.2.4) wird durch einfaches Aufsummieren der Lösungen für die einzelnen Quellen gebildet. Auf analoge Weise kann auch die Lösung für eine kontinuierliche Quellverteilung gewonnen werden. Die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 4\pi q(\vec{x}, t) \quad (6.2.6)$$

enthält auf der rechten Seite eine Feldfunktion $q(\vec{x}, t)$, die die Quellen beschreibt. Damit kann übrigens auch die Quellverteilung aus (6.2.1) oder (6.2.3) dargestellt werden. Das Feld $q(\vec{x}, t)$ muß nur entsprechend gewählt werden. Um nun ein beliebiges Feld $q(\vec{x}, t)$ aus δ -Funktionen zusammenzusetzen wird ein Integral statt einer Summe benötigt. Nach den Rechenregeln für δ -Funktionen gilt

$$q(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} q(\vec{y}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^3 \vec{y} \quad (6.2.7)$$

Diese Regel wurde bereits im Abschnitt 1.5 vorgestellt. Mit der Schreibweise $d^3 \vec{y}$ wird verdeutlicht, daß die Integrationsvariable \vec{y} und nicht \vec{x} ist.

Die Quellverteilung $q(\vec{x}, t)$ wird in Anteile zerlegt, die dem Integrand in (6.2.7) entsprechen. Der Integrand hängt sowohl von \vec{x} als auch von \vec{y} ab. Es wird der Anteil der Quellverteilung für einen festen Vektor \vec{y} betrachtet. Er stellt eine Punktquelle am Ort \vec{y} dar, für die die Lösung im Prinzip bekannt ist. Die Lösung erfüllt die inhomogene

6. Schallquellen

Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi_{\vec{y}} = 4\pi q(\vec{y}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.2.8)$$

Das Symbol $\phi_{\vec{y}}$ soll deutlich machen, daß die Lösung jetzt auch von dem gewählten \vec{y} abhängt. Die gegebenen Gleichung entspricht der Form (6.2.1), wenn man die Stärke der Punktquelle

$$f(t) = q(\vec{y}, t) \quad (6.2.9)$$

setzt, und für \vec{x}_0 einfach \vec{y} schreibt. Damit lautet die Lösung von (6.2.8)

$$\phi_{\vec{y}}(\vec{x}, t) = \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{x}_0|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.2.10)$$

Das ist das Feld, welches durch einen Anteil der Quellverteilung von der festen Stelle \vec{y} ausgeht.

Um das gesamte Feld – und damit die Lösung von (6.2.6) – zu erhalten, müssen alle Anteile aufsummiert beziehungsweise aufintegriert werden. Dazu wird die Teillösung (6.2.10) in (6.2.8) eingesetzt und anschließend werden beide Seiten über alle möglichen Quellpunkte \vec{y} – also über den gesamten Raum – integriert. Es ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\vec{x}} \right) \phi_{\vec{y}}(\vec{x}, t) d^3 \vec{y} = \int_{\mathbb{R}^3} 4\pi q(\vec{y}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^3 \vec{y} \quad (6.2.11)$$

Das Symbol $\Delta_{\vec{x}}$ soll verdeutlichen, daß die Ableitung nach der \vec{x} -Variablen und nicht nach \vec{y} gemeint ist. Die rechte Seite entspricht bis auf den Faktor 4π dem Integral in (6.2.7). Auf der linken Seite kann man den Wellenoperator, der Ableitungen nach Ort \vec{x} und Zeit t enthält, mit der Integration vertauschen. Dies ist ohne Probleme möglich, wenn die Integrationsgrenzen nicht von den Größen \vec{x} und t abhängen. Die Integrationsgrenzen liegen im Unendlichen. Es wird daher gefordert, daß das Feld $q(\vec{y}, t)$ im Unendlichen verschwindet. Dies bedeutet keine wirkliche Einschränkung, da Quellen im Unendlichen sowieso nie betrachtet werden. In fast allen Fällen kann sogar der Bereich der Quellen mit einem Volumen endlicher Ausdehnung abgedeckt werden. Es ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\vec{x}} \right) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\vec{y}}(\vec{x}, t) d^3 \vec{y} = 4\pi q(\vec{x}, t) \quad (6.2.12)$$

oder nach Einsetzen der Lösung (6.2.10)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\vec{x}} \right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} = 4\pi q(\vec{x}, t) \quad (6.2.13)$$

Diese Beziehung besitzt die Form der Gleichung (6.2.6). Das Integral auf der linken Seite entspricht der Gesamtlösung ϕ .

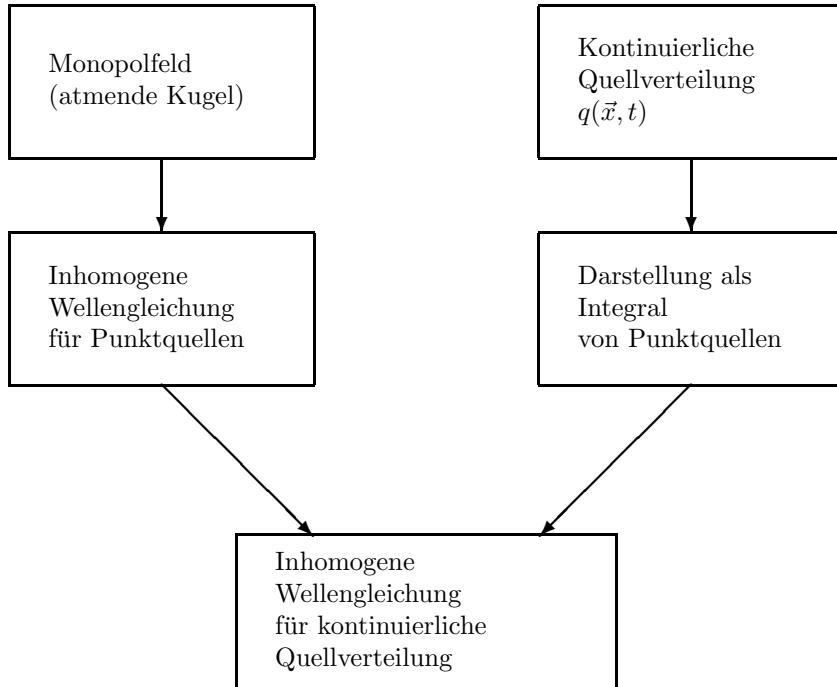


Abbildung 6.3.: Zur Herleitung der inhomogenen Wellengleichung

Üblicherweise wird der Faktor 4π mit in die Lösung geschrieben. Um eine solche Darstellung zu erhalten, muß man Gleichung (6.2.12) nur durch 4π dividieren. Das Feld

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.2.14)$$

erfüllt damit die inhomogene Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = q(\vec{x}, t) \quad (6.2.15)$$

Anzumerken ist, daß die Lösung (6.2.14) nur im unendlich ausgedehnten, offenen Raum ohne Berandungen gilt. In Abbildung 6.3 ist nochmal in einem Schema zusammengefaßt, auf welchem Wege sich die inhomogenen Wellengleichung (6.2.15) ergeben hat. Ein Ausgangspunkt ist die einfache Lösung für eine Monopolquelle im offenen Raum. Entsprechend gilt die gesamte Überlegung nur für den Fall, daß keine Begrenzungen vorhanden sind.

6. Schallquellen

Greensche Funktion

In vielen theoretischen Arbeiten wird eine spezielle Darstellung der Lösung (6.2.14) verwendet. Diese soll im folgenden vorgestellt werden. Für eine stetige Funktion $B(\tau)$ gilt

$$B(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \delta(\tau_0 - \tau) d\tau \quad (6.2.16)$$

Dabei kann τ_0 frei gewählt werden. Für die folgende Herleitung wird speziell

$$\tau_0 = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (6.2.17)$$

gewählt und die Funktion $B(\tau)$ mit

$$B(\tau) = \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.2.18)$$

für feste Werte von \vec{x} und \vec{y} definiert. Setzt man beide Definitionen in (6.2.16) ein, folgt der Zusammenhang

$$\frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau) d\tau \quad (6.2.19)$$

Auf der linken Seite ergibt sich der Integrand aus Gleichung (6.2.14). Damit kann dieser durch die rechte Seite ersetzt werden. Man erhält für die Lösung den Ausdruck

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) q(\vec{y}, \tau) d\tau d^3 \vec{y} \quad (6.2.20)$$

wobei die Funktion

$$G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) = \frac{\delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.2.21)$$

eingeführt wurde. Die Lösung ist nun als Integral über den Raum und die retardierte Zeit τ gegeben. Dies scheint zunächst weniger praktisch als die ursprüngliche Form (6.2.14). Jedoch besitzt die Darstellung (6.2.21) einige Vorteile, die für theoretische Untersuchungen sehr nützlich sind.

Die Funktion G wird allgemein als Greensche Funktion bezeichnet. Das Konzept der Greenschen Funktionen geht weit über die Akustik hinaus. In vielen Fällen kann die Lösung einer inhomogenen partiellen Differentialgleichung als Integral über das Produkt von einem Quellterm mit einer geeigneten Greenschen Funktion angegeben werden.

Die Lösung einer inhomogenen partiellen Differentialgleichung mit Hilfe einer Greenschen Funktion nach (6.2.20) kann auch anschaulich interpretiert werden. Dies

6.3. Schallquellen durch Störung ...

soll hier mit einem einfachen Beispiel klar gemacht werden. Eine Punktquelle bei $\vec{x} = 0$, die bei $t = 0$ einen unendlich kurzen Puls mit endlicher Stärke – einen δ -Puls – aussendet, ist durch

$$q(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \delta(t) \quad (6.2.22)$$

gegeben. Setzt man diese spezielle Quellverteilung in die Gleichung (6.2.20) ein, ergibt sich als Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = G(\vec{x}, t, 0, 0) = \frac{\delta(t - r/c)}{r} \quad (6.2.23)$$

Dabei bezeichnet r jetzt den Abstand vom Ursprung:

$$r = |\vec{x}| \quad (6.2.24)$$

Es zeigt sich, daß die Greensche Funktion selbst eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung darstellt, wenn die Quellverteilung einer Punktquelle entspricht, die einen δ -Puls aussendet. Die Funktion $G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ gibt an, welches Signal am Ort \vec{x} zur Zeit t durch das Aussenden eines δ -Pulses am Ort \vec{y} zur Zeit τ bewirkt wird. Man bezeichnet dieses Signal auch als Impulsantwort des Systems. Die Greensche Funktion beschreibt sozusagen Elementarwellen, aus denen sich alle Lösungen zusammensetzen lassen. Wird ein kontinuierliches Signal ausgesendet und ist die Quelle räumlich verteilt, dann müssen die einzelnen Elementarwellen entsprechend aufsummiert werden. Genau dieses wird bei den Integrationen in (6.2.20) durchgeführt.

6.3. Schallquellen durch Störung der Massen-, Impuls- oder Energieerhaltung

Im vorangegangen Abschnitt wurde die inhomogene Wellengleichung mit Quelltermen auf der rechten Seite betrachtet. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich inhomogene Wellengleichungen dieser Art ergeben, wenn die Erhaltung von Masse, Impuls oder Energie nicht überall erfüllt ist.

Energieerhaltung

Zuerst wird die Energieerhaltung untersucht. Die Energieerhaltung „steckt“ sozusagen in dem Zusammenhang

$$p' = c^2 \rho' \quad (6.3.1)$$

Diese Gleichung folgt aus einer Druck-Dichte-Beziehung

$$p = p(\rho) \quad (6.3.2)$$

deren Existenz bei der Ableitung der Wellengleichung in Abschnitt 2.1 vorausgesetzt wurde. Die Schallgeschwindigkeit c ist durch

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (6.3.3)$$

6. Schallquellen

definiert. Damit bestimmt die Funktion $p(\rho)$ die Schallgeschwindigkeit. Konkret hängt $p(\rho)$ von dem Medium ab. Bei Gasen ist die Zustandsänderung in den Schallwellen adiabatisch, und $p(\rho)$ ist eine Adiabatengleichung.

Bei vielen Vorgängen in der Praxis ist jedoch durch Energiezufuhr die Zustandsänderung nicht mehr adiabatisch. Ein Beispiel dafür ist die Verbrennung von Gasen. Dort wird Bindungsenergie in thermische Energie umgewandelt. Der Druck p ist dann nicht nur von der Dichte sondern auch noch von der freigesetzten Energie abhängig.

Wird dem Gas irgendwie Energie zugeführt, so hängt der Druck zusätzlich von der zugeführten Energiemenge pro Masse e_z ab. Statt der einfachen Druck-Dichte-Beziehung muß jetzt

$$p = p(\rho, e_z) \quad (6.3.4)$$

geschrieben werden. Durch diese Erweiterung verliert Gleichung (6.3.1) seine Gültigkeit. Eine entsprechende Gleichung wird jedoch bei der Herleitung der Wellengleichung benötigt. Die Wellengleichung wird aus der linearisierten Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \quad (6.3.5)$$

und der linearisierten Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0 \quad (6.3.6)$$

abgeleitet. Dazu differenziert man (6.3.5) nach der Zeit und bildet die Divergenz von (6.3.6). Anschließend subtrahiert man die entstehenden Gleichungen. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (6.3.7)$$

Diese Beziehung stellt sozusagen die “Vorstufe” der Wellengleichung für den Druck dar. Um die Wellengleichung zu erhalten, wird normalerweise die Variable ρ' mit (6.3.1) durch p' ersetzt. Dies ist jedoch bei Energiezufuhr nicht möglich.

Um ρ' in (6.3.7) zu ersetzen, muß eine neue Beziehung zwischen ρ' und p' gefunden werden. Dazu wird das totale Differential von ρ bei Energiezufuhr betrachtet. Aus (6.3.4) folgt

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{e_z} dp + \left. \frac{\partial \rho}{\partial e_z} \right|_p de_z \quad (6.3.8)$$

Aus (6.3.3) ergibt sich für die partielle Ableitung bei konstanter Energie e_z

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{e_z} = \frac{1}{c^2} \quad (6.3.9)$$

Ist die zugeführte Energiemenge de_z gleich Null, so verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von (6.3.8), und man kann direkt (6.3.1) ableiten. Bei Energiezufuhr ist de_z ungleich Null, und es ergibt sich eine Abweichung. Um diese zu berechnen wird

6.3. Schallquellen durch Störung ...

im folgenden von einem idealen Gas ausgegangen. Es gilt die Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (6.3.10)$$

Dabei ist R die spezifische Gaskonstante. Die Zustandsgleichung kann zu

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (6.3.11)$$

umgeformt werden. Es folgt für die partielle Ableitung bei konstanten Druck

$$\frac{\partial \rho}{\partial e_Z} \Big|_p = -\frac{p}{RT^2} \frac{\partial T}{\partial e_Z} \Big|_p \quad (6.3.12)$$

Damit wurde die Ableitung von ρ durch eine Ableitung von der Temperatur T ausgedrückt. Bei Zufuhr von Energie steigt die Temperatur. Das bedeutet, die Ableitung auf der rechten Seite von (6.3.12) ist positiv.

Üblicherweise wird in der Thermodynamik die inverse Funktion $e_Z(T)$ betrachtet. Es wird die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck mit

$$c_p = \frac{\partial e_Z}{\partial T} \Big|_p \quad (6.3.13)$$

eingeführt. Daraus ergibt sich für die gesuchte Ableitung

$$\frac{\partial T}{\partial e_Z} \Big|_p = \frac{1}{c_p} \quad (6.3.14)$$

Die Größen R und c_p sind über

$$R = c_p - c_v \quad (6.3.15)$$

miteinander verknüpft. Dabei ist c_v die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen. In der Akustik werden meistens – wie in der Strömungsmechanik – alle Größen spezifisch auf das Volumen bezogen. In diesem Fall entspricht ein konstantes Volumen eines Fluidelementes einer konstanten Dichte ρ in dem Fluidelement.

Für das ideale Gas lässt sich die Schallgeschwindigkeit direkt berechnen. Dies wurde bereits in Abschnitt 2.3 durchgeführt. Es gilt

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (6.3.16)$$

Dabei ist der sogenannte Adiabatenexponent mit

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.3.17)$$

gegeben. Mit Hilfe der Beziehungen (6.3.13) bis (6.3.17) lässt sich nun Gleichung (6.3.12) auf eine “schönere” Form bringen. Es folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial e_Z} \Big|_p = -\frac{p}{RT^2} \frac{1}{c_p} \quad (6.3.18)$$

6. Schallquellen

Löst man (6.3.10) nach T auf und setzt in (6.3.18) ein, ergibt sich

$$\frac{\partial \rho}{\partial e_z} \Big|_p = -\frac{\rho^2 R}{pc_p} = -\frac{\kappa}{c^2} \rho \frac{c_p - c_v}{c_p} \quad (6.3.19)$$

Anschließend folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial e_z} \Big|_p = -\frac{\rho}{c^2} (\kappa - 1) \quad (6.3.20)$$

Damit sind die beiden Ableitungen des totalen Differentials in (6.3.8) als Funktion der Zustandsgrößen ausgedrückt. Setzt man die entsprechenden Ausdrücke in das totale Differential ein, erhält man

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp - \frac{\rho(\kappa - 1)}{c^2} de_z \quad (6.3.21)$$

Dies kann nun verwendet werden, um die Ableitung von ρ' in (6.3.7), der ‘‘Vorstufe’’ der Wellengleichung, zu ersetzen. Dabei ist zu bemerken, daß für die Differentiale

$$dp = dp' \quad (6.3.22)$$

und

$$d\rho = d\rho' \quad (6.3.23)$$

gilt. Es ergibt sich für die zweite Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\rho_0(\kappa - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} \quad (6.3.24)$$

Dabei ist ρ durch ρ_0 ersetzt worden. Das bedeutet, die Ableitungen in (6.3.8) werden für den Ausgangszustand mit p_0 und ρ_0 berechnet, genau wie die Schallgeschwindigkeit jetzt mit

$$c^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \quad (6.3.25)$$

gegeben ist. Eigentlich müßte man nun auch c_0 statt c schreiben. Das gilt übrigens auch für Gleichung (6.3.1). Der Index 0 wurde jedoch von Anfang an weggelassen, da normalerweise keine Gefahr der Verwechslung besteht. Bei den thermodynamischen Überlegungen ist jedoch die Schallgeschwindigkeit nach (6.3.16) der tatsächliche Wert und nicht der Wert im Ausgangszustand. Das heißt, die Größe c schwankt dann auch zeitlich in einer Schallwelle. Im folgenden bedeutet c wieder die mittlere Schallgeschwindigkeit im akustischen Sinn nach Gleichung (6.3.25).

Schließlich kann (6.3.24) in die ‘‘Vorstufe’’ der Wellengleichung (6.3.7) eingesetzt werden. Es wird so umgeformt, daß die linken Seite der homogenen Wellengleichung entspricht. Der zusätzliche Term wird auf die rechte Seite gebracht. Man erhält

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\rho_0(\kappa - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} \quad (6.3.26)$$

Diese Gleichung stellt nun tatsächlich eine inhomogene Wellengleichung dar, wie sie im letzten Abschnitt besprochen wurde. Dort wurde zwar die Wellengleichung für das

6.3. Schallquellen durch Störung ...

Potential ϕ betrachtet, aber alle Ergebnisse lassen sich auch auf die Wellengleichung für den Schalldruck übertragen. Die Gleichung (6.3.26) entspricht der allgemeinen Form

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = q(\vec{x}, t) \quad (6.3.27)$$

mit der Quellstärkeverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0 (\varkappa - 1)}{c^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} \quad (6.3.28)$$

Die Quellstärke hängt von der zweiten Ableitung der zugeführten Energiemenge nach der Zeit ab. Dies Ergebnis scheint plausibel zu sein. Zum Beispiel brennt eine Kerze ohne Geräusche. Zweifellos wird bei der Verbrennung Energie freigesetzt, jedoch ist bei gleichmäßiger Verbrennung die zweite Ableitung gleich Null. Eine instationäre Verbrennung – wie zum Beispiel das Zünden eines Feuerzeugs – ist dagegen hörbar. Ein extremes Beispiel ist der Blitz bei einem Gewitter. Dort ist e_z relativ hoch und zudem ist der Vorgang extrem instationär. Dies ergibt eine relativ starke zweite Ableitung und damit ein lautes Geräusche, den Donner.

Für den freien Raum läßt sich die Lösung von (6.3.27) als Integral darstellen. Es gilt

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.3.29)$$

Für die spezielle Quellstärke (6.3.28) ergibt sich als Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0 (\varkappa - 1)}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e_z(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.3.30)$$

Dabei wurde die Zeitableitung aus dem Integral herausgezogen. Es muß an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß dieses “Herausziehen” der Ableitung aus dem Integral nicht so selbstverständlich ist, wie es auf den ersten Blick erscheint. Da solche Umformungen mit Ableitungen im den Quelltermen häufig benötigt werden, sind im Anhang B.3 die wichtigsten Regeln dargestellt.

Weiter ist zu bemerken, daß in der Praxis natürlich immer irgendwo Begrenzungen vorhanden sind und die Lösung für den freien Raum nicht gültig ist. Die Lösung beinhaltet nicht die Reflexionen, die von vorhandenen Rändern ausgehen. Dennoch kann sie für viele Abschätzungen, bei denen diese Reflexionen keine Rolle spielen, verwendet werden. Am Schluß sei nochmal darauf hingewiesen, daß diese Ergebnisse bei Energiezufuhr nur für ein ideales Gas gelten.

Massenerhaltung

Bisher wurde nur die Störung der Energieerhaltung betrachtet. Analog kann auch die Verletzung der Massenerhaltung untersucht werden. Jedoch lassen sich für die Massenzuführung im Raum nicht so einfach praktische Beispiele nennen, denn Masse kann

6. Schallquellen

nicht einfach im Raum entstehen oder verschwinden. Natürlich kann Gas irgendwo ausströmen. Dazu ist aber immer eine Leitung also eine Berandung notwendig. Nur wenn die Berandung vernachlässigt werden kann, wird sich eine Massenquelle im freien Raum näherungsweise realisieren lassen.

Die Massenerhaltung wird durch die linearisierte Kontinuitätsgleichung (6.3.5) beschrieben. Durch Massenzufuhr ändert sich die Dichte, selbst wenn die Divergenz von \vec{v}' gleich Null ist. Dies kann durch

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = \frac{\partial m_z}{\partial t} \quad (6.3.31)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist m_z die zugeführte Masse pro Volumen. Im Gegensatz zu (6.3.5) ist die neue Kontinuitätsgleichung (6.3.31) inhomogen. Die linearisierte Euler-Gleichung (6.3.6) gilt weiterhin auch bei Massenzufuhr, wenn man annimmt, daß die zugeführte Masse keinen Impuls mitbringt. Um eine Wellengleichung für den Druck zu erhalten wird in gewohnter Weise die Zeitableitung der neuen Kontinuitätsgleichung gebildet. Davon wird die Divergenz der linearisierten Eulergleichung subtrahiert. Es ergibt sich eine "Vorstufe" zur Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \quad (6.3.32)$$

Diese ist jedoch im Gegensatz zu (6.3.7) bereits inhomogen. Um eine Wellengleichung für den Druck zu erhalten muß noch ρ' in (6.3.32) ersetzt werden. Dazu ist jedoch eine weitere Annahme notwendig. Es wird vorausgesetzt, daß die zugeführte Masse die gleiche Dichte ρ_0 wie die bereits vorhandene Masse besitzt. Dies kann man sich so vorstellen, daß Gas mit den gleichen Eigenschaften und der gleichen Temperatur zugeführt wird. In diesem Fall gilt weiterhin die Beziehung (6.3.1) und ρ' kann einfach durch p'/c^2 ersetzt werden. Es ergibt sich

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \quad (6.3.33)$$

Dies ist wieder eine inhomogene Wellengleichung der Form (6.3.27) mit der Quellverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} \quad (6.3.34)$$

Es zeigt sich, daß instationäres Zuführen von Masse Schall bewirkt.

Hat die zugeführte Masse andere Eigenschaften als die vorhandene Masse – zum Beispiel es wird Helium in Luft zugeführt oder Luft mit anderer Temperatur – gilt $p' = c^2 \rho'$ nicht mehr. Um ρ' in (6.3.32) zu ersetzen, muß die Abhängigkeit der Dichte von der zugeführten Masse berücksichtigt werden. Zweckmäßigerweise führt man folgende Bezeichnungen ein:

- ρ_z : Dichte der zugeführten Masse
- ρ_u : Dichte der ursprünglich vorhandenen Masse
- β : Volumenanteil der zugeführten Masse

6.3. Schallquellen durch Störung ...

Für die gesamte Masse pro Volumen ρ gilt damit

$$\rho = \beta \rho_z + (1 - \beta) \rho_u \quad (6.3.35)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite entspricht gerade der zugeführten Masse pro Volumen

$$m_z = \beta \rho_z \quad (6.3.36)$$

Damit kann (6.3.35) in der Form

$$\rho = m_z + \rho_u - \beta \rho_u \quad (6.3.37)$$

geschrieben werden. Die Größen ρ_z und ρ_u hängen von dem Druck p ab. Die Dichte ρ der vorhandenen Mischung hängt damit von p und β ab

$$\rho = \rho(p, \beta) \quad (6.3.38)$$

Die zeitlichen Schwankungen von ρ' lassen sich entsprechend durch Schwankungen von p und β ausdrücken. Um den Zusammenhang zu berechnet, wird (6.3.37) zweimal nach t differenziert. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \rho_u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\beta \rho_u) \quad (6.3.39)$$

Um die rechte Seite weiter zu vereinfachen, wird vorausgesetzt, daß für den Volumenanteil

$$\beta \ll 1 \quad (6.3.40)$$

gilt. Damit können im Sinne einer Linearisierung Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Man führt die Zerlegung in Gleich- und Schwankungsanteil

$$\rho_u = \rho_0 + \rho'_u \quad (6.3.41)$$

für das ursprüngliche Gas ein. Mit ρ_0 ist die Dichte im Ausgangszustand ohne zugeführte Masse bezeichnet. Die Dichteschwankungen sind über die Schallgeschwindigkeit mit den Druckschwankungen verknüpft. Wird mit c die Schallgeschwindigkeit in der ursprünglichen Masse bezeichnet, so gilt für infinitesimale Schwankungen

$$c^2 d\rho_u = dp \quad (6.3.42)$$

Eine analoge Beziehung mit einer zweiten Schallgeschwindigkeit gilt für die zugeführte Masse. Diese Beziehung wird hier jedoch gar nicht benötigt. Mit (6.3.41) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho'_u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' \quad (6.3.43)$$

Damit kann der zweite Summand auf der rechten Seite von (6.3.39) ersetzt werden. Für den Ausdruck im dritten Summand auf der rechten Seite ergibt sich

$$\beta \rho_u = \beta \rho_0 + \beta \rho'_u \quad (6.3.44)$$

6. Schallquellen

Das Produkt $\beta \rho'_u$ zweier kleiner Größen kann gegenüber $\beta \rho_0$ vernachlässigt werden. Im Sinne dieser Linearisierung folgt die Näherung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta \rho_u) \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\beta \rho_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (6.3.45)$$

Somit ergibt sich aus (6.3.39) die linearisierte Beziehung

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (6.3.46)$$

Damit sind die Schwankungen von ρ' durch Schwankungen von m_z , p' und β ausgedrückt. Beim Einsetzen von (6.3.46) in (6.3.32) hebt sich der Term mit m_z gerade auf. Es ergibt sich die inhomogene Wellengleichung für den Druck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (6.3.47)$$

Die rechte Seite repräsentiert wieder die Quellstärkeverteilung. Das Produkt $\rho_0 \beta$ ist die Masse pro Volumen, die von der zugeführten Masse verdrängt wurde. Es ergibt sich, daß zeitliche Schwankungen des verdrängten Volumens die Quellstärke bestimmen. Instationäres Verdrängen von Masse ergibt also Schall. Es kommt gar nicht auf die zugeführte Masse selbst an. Die Dichte der zugeführten Masse spielt überhaupt keine Rolle! Lediglich das verdrängte Volumen und die Dichte des verdrängten Mediums ist wichtig.

Im freien Raum ohne feste Wände kann die Lösung von (6.3.47) wieder als Integral angegeben werden. Es gilt

$$p'(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\beta(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.3.48)$$

Dabei wurde die Zeitableitung analog zur Lösung bei Energiezufuhr (6.3.30) vor das Integral gezogen.

Impulserhaltung

Als drittes soll noch die Störung der Impulserhaltung betrachtet werden. Die Impulserhaltung wird durch die linearisierte Euler-Gleichung ausgedrückt. Wird irgendwo Impuls zugeführt ergibt sich folgende Form dieser Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = \vec{g}(\vec{x}, t) \quad (6.3.49)$$

Dabei ist $\vec{g}(\vec{x}, t)$ der Impuls, der pro Volumen und pro Zeiteinheit am Ort \vec{x} zur Zeit t zugeführt wird. Dies kann auch als eine äußere Kraft pro Volumen, die auf das Medium wirkt, interpretiert werden. Die linearisierte Kontinuitätsgleichung bleibt durch die Impulszufuhr unverändert. Es gilt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v}' = 0 \quad (6.3.50)$$

6.3. Schallquellen durch Störung ...

Weiterhin wird durch die Impulszufuhr die Druck-Dichte-Beziehung nicht beeinträchtigt. Damit gilt der einfache Zusammenhang $p' = c^2 \rho'$. Um eine Wellengleichung für den Druck zu erhalten, wird wie gewohnt (6.3.50) nach der Zeit abgeleitet und die Divergenz von (6.3.49) gebildet. Die resultierenden Gleichungen werden voneinander subtrahiert und die Größe ρ' durch p' ersetzt. Man erhält die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = -\operatorname{div} \vec{g} \quad (6.3.51)$$

Diesmal ergibt sich für die Quellstärke kein Zeitableitungsterm, sondern ein Ausdruck mit Divergenz-Operator. Das bedeutet, die Schallentstehung hängt von dem räumlichen Gradienten der Impulszufuhr ab. Analog zu (6.3.48) kann auch für (6.3.51) die Lösung im freien Raum ohne Wände als Integral angegeben werden. Sie lautet

$$p'(\vec{x}, t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\{\operatorname{div} \vec{g}\}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.3.52)$$

Dabei ist zu bemerken, daß sich der Ausdruck

$$\{\operatorname{div} \vec{g}\}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \quad (6.3.53)$$

von

$$\operatorname{div} \{\vec{g}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)\} \quad (6.3.54)$$

unterscheidet. Um dies deutlich zu machen, wurden in (6.3.52) die geschweiften Klammern um den Divergenzterm verwendet. Mit (6.3.53) ist die Divergenz von \vec{g} an der Stelle \vec{y} zur retardierten Zeit $\tau = t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$ gemeint. Dagegen ist bei (6.3.54) gar nicht eindeutig klar, auf welche Koordinaten sich die Divergenzbildung bezieht. Der Ausdruck in den geschweiften Klammern in (6.3.54) hängt von \vec{x} , \vec{y} und t ab. Das heißt, die räumliche Divergenz könnte bezüglich \vec{x} oder \vec{y} gemeint sein. Zu beachten ist, daß in den vorliegenden Integralen fast immer nur Ausdrücke der Form (6.3.53) auftreten.

Im folgenden wird eine Umformung des Integrals in (6.3.52) vorgestellt, die später noch öfters benutzt werden wird. Die Quellstärke und damit das Vektorfeld \vec{g} hängen vom Quellort \vec{y} und der Quellzeit τ ab: $\vec{g}(\vec{y}, \tau)$. Die Größen \vec{y} und τ werden zunächst als unabhängige Variablen betrachtet. Die Divergenz wird in einer anderen Schreibweise mit Summationskonvention als

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \quad (6.3.55)$$

dargestellt. Es wird hier nochmals darauf hingewiesen, daß die partielle Ableitung nach y_i bei einer festen Zeit τ genommen wird. Beim Einsetzen in das Integral hängt die Quellzeit mit $\tau = t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$ auch vom Quellort \vec{y} ab. Diese indirekte Abhängigkeit vom Ort geht nicht in die Divergenz (6.3.55) mit ein. Das in (6.3.52) auftretende Integral kann als Summe einzelner Integrale geschrieben werden. Es ergibt sich nach

6. Schallquellen

einigen Umformungen die Beziehung

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\{ \frac{\partial g_i}{\partial y_i} \right\} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.3.56)$$

Die räumliche Ableitung ist scheinbar einfach aus dem Integral herausgezogen worden. Dies ist allerdings nur durch die spezielle Form des Integranden möglich. Zu beachten ist, dass auf der linken Seite im Integral die Ableitung nach den Koordinaten y_i des Quellortes steht. Dagegen wird auf der rechten Seite die Ableitung nach den Koordinaten x_i der Beobachtungsposition gebildet. Die Details der Herleitung von (6.3.56) sind im Anhang B.3 dargestellt.

6.4. Dipol und Quadrupol

Im Abschnitt 6.1 wurde der punktförmige Monopol untersucht. Diesen kann man sich als punktförmige Massenquelle vorstellen, die zeitlich schwankt. Durch eine räumlich verteilte Zufuhr von Masse ergibt sich eine kontinuierliche Quellverteilung. Entsprechend kann diese als verteilte Monopolquelle ansehen werden. Eine besondere Quellverteilung ergibt sich – wie im vorherigen Abschnitt gezeigt – durch Impulszufuhr. Sie hat die Form

$$q(\vec{x}, t) = -\operatorname{div} \vec{g}(\vec{x}, t) \quad (6.4.1)$$

Es tritt eine räumliche Ableitung im Quellterm auf. Eine solche Quellverteilung wird als Dipolverteilung bezeichnet. Im folgenden wird erklärt, was man unter einem Dipol versteht, und es soll verdeutlicht werden, wie die Quellverteilung (6.4.1) mit einem Dipol zusammenhängt.

Zunächst wird ein einfaches Beispiel betrachtet. Es wird das spezielle Feld

$$\vec{g}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \delta(\vec{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4.2)$$

in (6.4.1) eingesetzt. Es beschreibt eine punktförmige Zufuhr von Impuls in x_1 -Richtung mit der Stärke $f(t)$ an der Stelle $\vec{x} = 0$. Es ergibt sich

$$q(\vec{x}, t) = -f(t) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(\vec{x}) \quad (6.4.3)$$

Da g_2 und g_3 überall gleich Null sind erhält man unter Verwendung der Beziehung (6.3.56) als Lösung im freien Raum ohne Berandungen das Integral

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_1(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.4.4)$$

6.4. Dipol und Quadrupol

Mit der konkreten Gestalt von g_1 folgt

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) \delta(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.4.5)$$

Das Integral kann einfach berechnet werden, da im Integrand das Produkt der Funktion $\delta(\vec{y})$ mit einem Faktor auftritt. Als Resultat ergibt sich der Wert des Faktors bei $\vec{y} = 0$. Man erhält

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} \right\} \quad (6.4.6)$$

Eine Lösung dieser Form wurde bereits ausführlich in Abschnitt 5.5 behandelt. Die Lösung entspricht dem Schallfeld einer vibrierenden Kugel, deren Mittelpunkt sich bei $\vec{x} = 0$ befindet. Im Abschnitt 5.5 werden Kugelkoordinaten zur Darstellung verwendet. Der Abstand vom Ursprung wird mit

$$r = |\vec{x}| \quad (6.4.7)$$

bezeichnet. Der Ausdruck in den geschweiften Klammern lautet dann

$$\frac{f(t - r/c)}{r} \quad (6.4.8)$$

Setzt man für $f(t)$ eine harmonische Funktion der Form

$$f(t) = A e^{i\omega t} \quad (6.4.9)$$

ein, ergibt sich die Lösung für die harmonisch vibrierende Kugel:

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{A}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \right\} \quad (6.4.10)$$

Die Kugel bewegt sich dabei in x_1 -Richtung. Zur Bewegung der Kugel ist eine Kraft notwendig. Es wird daher auch Impuls auf das Medium übertragen. Die Impulsübertragung der endlichen Kugel auf das Medium entspricht anscheinend einer punktförmigen Impulsquelle im Kugelmittelpunkt.

Führt man die Differentiation in (6.4.10) aus, erhält man die Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{A}{4\pi} \cos \theta \left[\frac{i\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right] e^{i\omega(t-r/c)} \quad (6.4.11)$$

Diese Gleichung stimmt bis auf einen konstanten Vorfaktor mit (5.5.27) überein. Die Koordinate θ gibt den Winkel zwischen dem Beobachtungsvektor \vec{x} und der x_1 -Achse an. Daraus wird die Richtungsabhängigkeit des erzeugten Schalls deutlich. Senkrecht zur Richtung des zugeführten Impulses – beziehungsweise zur Bewegungsrichtung der Kugel – ist $\cos \theta = 0$ und es ergibt sich keine Druckschwankung. Die maximale Amplitude wird in Richtung des zugeführten Impulses beobachtet. Durch den $\cos \theta$ -Term ergibt sich die typische Verteilung für ein Dipolfeld.

6. Schallquellen

Dipol als Überlagerung zweier Monopole

Es stellt sich jedoch die Frage, warum für eine Verteilung nach (6.4.11) der Ausdruck “Dipolfeld” beziehungsweise “Dipol” verwendet wird. Dies beruht auf der Möglichkeit, daß man ein solches Feld als Überlagerung von zwei Monopolfeldern ansehen kann. Um dies zu verdeutlichen, wird zunächst ganz allgemein eine beliebige Lösung $p' = a(\vec{x}, t)$ der inhomogenen Wellengleichung für eine gegebene Quellverteilung $q(\vec{x}, t)$ betrachtet. Es soll gelten

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) a(\vec{x}, t) = q(\vec{x}, t) \quad (6.4.12)$$

Diese Gleichung wird nach x_1 differenziert. Vertauscht man die Ableitungen auf der linken Seite ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial a}{\partial x_1}(\vec{x}, t) = \frac{\partial q}{\partial x_1}(\vec{x}, t) \quad (6.4.13)$$

Das bedeutet, das Feld $\partial a / \partial x_1$ ist die Lösung für die Quellverteilung $\partial q / \partial x_1$. Kennt man die Lösung zu einer bestimmten Quellverteilung, dann lassen sich auch die Lösungen für Ableitungen der Quellverteilung einfach durch Differenzieren ermitteln.

Für die weiteren Überlegungen wird die Ableitung des Feldes $a(\vec{x}, t)$ nach x_1 betrachtet. Es gilt allgemein

$$\frac{\partial}{\partial x_1} a(\vec{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a(\vec{x}, t) - a(\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1, t)}{\varepsilon} \quad (6.4.14)$$

Dabei ist mit

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4.15)$$

der Einheitsvektor in x_1 -Richtung bezeichnet. Die Darstellung (6.4.14) erlaubt es, die Ableitung von $a(\vec{x}, t)$ als Überlagerung zweier Felder anzusehen. Definiert man die zwei Verteilungen b_1 und b_2 mit

$$\begin{aligned} b_1(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\varepsilon} a(\vec{x}, t) \\ b_2(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{\varepsilon} a(\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1, t) \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

dann kann

$$\frac{\partial}{\partial x_1} a(\vec{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [b_1(\vec{x}, t) + b_2(\vec{x}, t)] \quad (6.4.17)$$

geschrieben werden. Die Felder b_1 und b_2 besitzen die Form von a jedoch sind sie mit $1/\varepsilon$ skaliert. Zusätzlich ist b_2 gespiegelt und um die Strecke ε in x_1 -Richtung verschoben. Zur Veranschaulichung wird ein Beispiel betrachtet, in dem $a(\vec{x}, t)$ einen Puls mit Maximum an der Stelle $\vec{x} = 0$ beschreibt. In der Abbildung 6.4 sind die Verteilungen von b_1 , b_2 und $b_1 + b_2$ entlang der x_1 -Achse dargestellt. Wird der Parameter ε verrin-

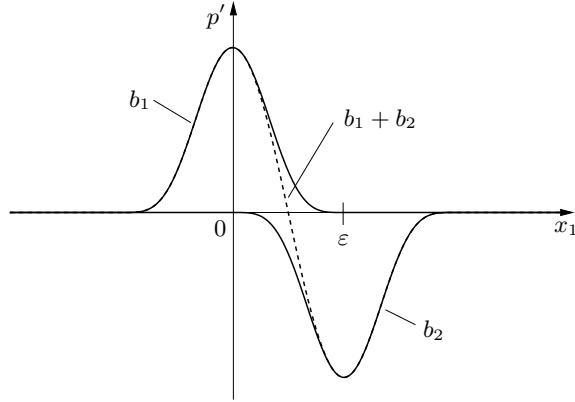


Abbildung 6.4.: Zur Überlagerung zweier Felder

gert, so wird auch die Verschiebung von b_2 immer kleiner. Ohne die Skalierung mit $1/\varepsilon$ würde im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ eine komplette Auslöschung eintreten. Mit der Skalierung wachsen b_1 und b_2 immer weiter an. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ werden die beiden Felder unendlich groß, und die Überlagerung ergibt die Ableitung von a . So kann die Ableitung eines Feldes nach einer Ortskoordinate immer als Überlagerung von zwei Feldern mit gleicher Form und unendlicher Stärke interpretieren werden.

Der Sinn dieser Vorüberlegungen wird deutlich, wenn man ein konkretes Feld für $a(\vec{x}, t)$ einsetzt. Mit

$$a(\vec{x}, t) = \frac{f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} \quad (6.4.18)$$

wird das Feld eines Monopols am Ort $\vec{x} = 0$ und der Stärke $f(t)$ ausgewählt. Es beschreibt Kugelwellen, die nach außen laufen und mit $1/r$ abfallen. Einsetzen in Gleichung (6.4.14) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon} f(t - |\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|} + \frac{-\frac{1}{\varepsilon} f(t - |\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1|/c)}{|\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1|} \right] \quad (6.4.19)$$

Auf der linken Seite steht das Feld einer punktförmigen Impulsquelle, die sich bei $\vec{x} = 0$ befindet und in x_1 -Richtung orientiert ist. Die Stärke der Quelle entspricht $f(t)$. In der eckigen Klammer auf der rechten Seite steht die Summe aus zwei Monopolfeldern. Der erste Monopol befindet sich am Ort $\vec{x} = 0$ und hat die Stärke $f(t)/\varepsilon$. Der zweite Monopol sitzt bei $\vec{x} = \varepsilon \vec{e}_1$. Das heißt, er ist auf der x_1 Achse um ε verschoben. Er hat die Stärke $-f(t)/\varepsilon$. Die beiden Monopole sind damit gegenphasig.

Noch klarer wird die gesamte Konstellation, wenn man die dazugehörigen Quellverteilungen betrachtet. Die zum Monopolfeld (6.4.18) gehörende Quellverteilung ist durch

$$q(\vec{x}, t) = 4\pi f(t) \delta(\vec{x}) \quad (6.4.20)$$

6. Schallquellen

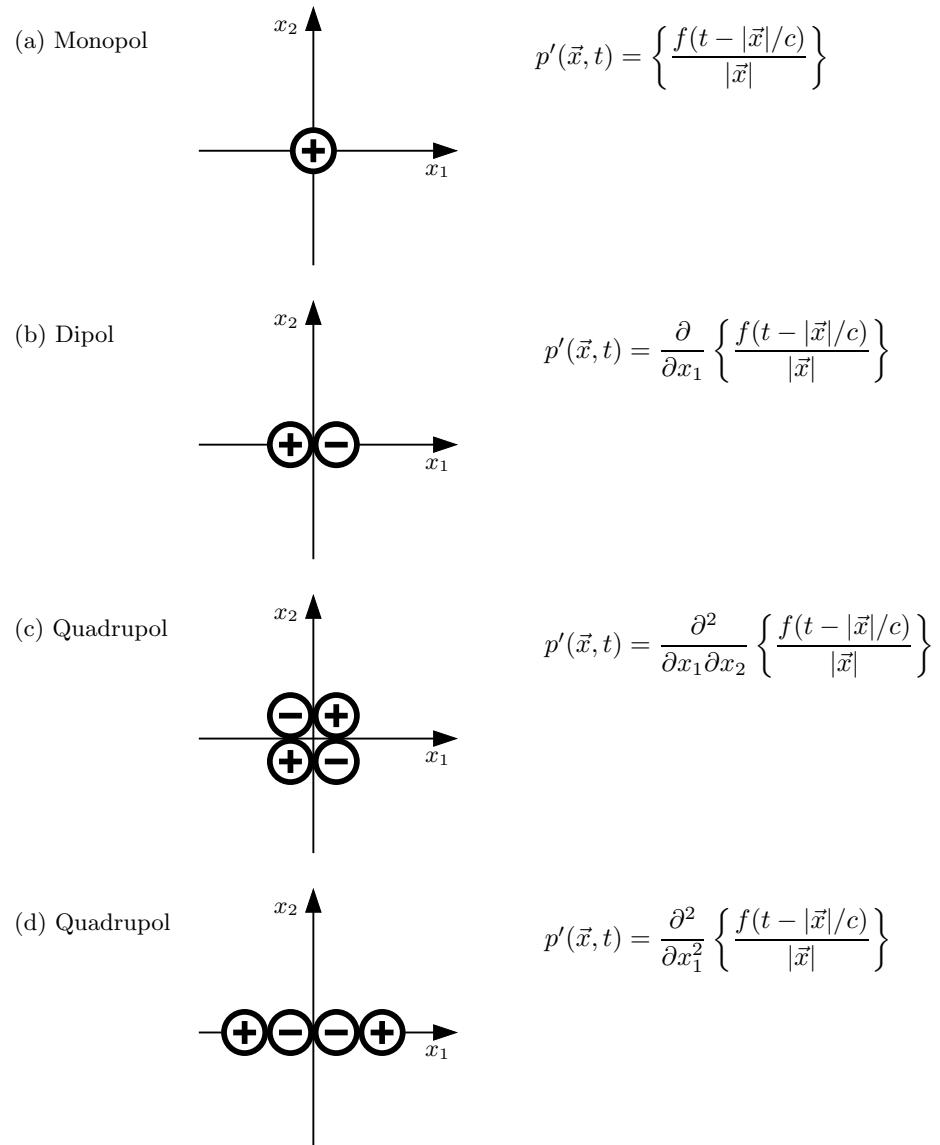


Abbildung 6.5.: Schematische Darstellung der Punktquellen für die verschiedenen Quelltypen

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

gegeben. Die zur Lösung (6.4.19) passende Quellverteilung ergibt sich daraus durch Differentiation nach x_1 . Es können für die Ableitung von q die obigen Überlegungen angewendet werden. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{f(t)\delta(\vec{x})\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} f(t)\delta(\vec{x}) - \frac{1}{\varepsilon} f(t)\delta(\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_1) \right] \quad (6.4.21)$$

Zur besseren Übersichtlichkeit wurde der Faktor 4π weggelassen. Auf der linken Seite ergibt sich eine Quellverteilung, die bis auf das Vorzeichen mit (6.4.3) übereinstimmt. Sie beschreibt eine punktförmige Impulsquelle. In der eckigen Klammer auf der rechten Seite steht die Überlagerung von zwei Quellverteilungen, die eine punktförmige Massenquelle – einen Monopol – beschreiben. Im Grenzfall ε gegen Null rücken die überlagerten Monopole auf einem Punkt zusammen und werden dabei unendlich stark. So kann man sich die punktförmige Impulsquelle anschaulich als die Überlagerung von zwei Monopolen vorstellen. Entsprechend wird eine solche Quelle als “Dipol” bezeichnet.

Die Überlagerung von Feldern lässt sich noch weiter fortsetzen. Es können auch zwei Dipolfelder überlagert werden, so daß die neue Lösung der Ableitung des Dipolfeldes entspricht. Im folgenden soll ein Überblick über die Möglichkeiten gegeben werden. Der Ausgangspunkt ist das Monopolfeld. In der Abbildung 6.5(a) ist die Position des Monopols mit einem (+)-Zeichen markiert. Durch Ableiten nach x_1 erhält man aus dem Monopolfeld ein Dipolfeld. Das (–)-Zeichen in der Abbildung 6.5(b) stellt den gegenphasigen Monopol dar. Wird nun die Dipollösung nach x_2 differenziert ergibt sich ein sogenannter Quadrupol. Wie in der Abbildung 6.5(c) deutlich wird, kann der Quadrupol als Überlagerung von vier Monopolen oder von zwei Dipolen angesehen werden. Die Monopole liegen alle bei $\vec{x} = 0$ und sind unendlich stark. Für den Quadrupol ergibt sich aber noch eine zweite Konfiguration. Leitet man das nach der x_1 -Richtung orientierte Dipolfeld ein zweites mal nach x_1 ab, ergibt sich die Konstellation in der Abbildung 6.5(d).

Dieses “Spiel” lässt sich noch beliebig fortführen, jedoch sind in der Akustik meistens nur Monopole, Dipole und Quadrupole von Interesse. Dipolfelder ergeben sich als Lösung der inhomogenen Wellengleichung, wenn die Quellverteilung als räumliche Ableitung dargestellt werden kann. Dies ist zum Beispiel bei Impulszufuhr mit (6.4.1) der Fall. Entsprechend ergeben sich Quadrupollösungen, wenn auf der rechten Seite in der Quellverteilung zweite Ableitungen nach dem Ort vorkommen. Beispiele dafür werden später noch ausführlich behandelt.

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung im freien Raum ohne Berandungen lässt sich als Integral in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.5.1)$$

6. Schallquellen

darstellen. Damit kennt man im Prinzip die Lösung, wenn die Quellstärkeverteilung $q(\vec{x}, t)$ vorgegeben ist. Jedoch ist es selbst bei relativ einfachen Funktionen $q(\vec{x}, t)$ meist nicht möglich, das Integral auf der rechten Seite wirklich geschlossen zu lösen. Dies ist fast immer nur numerisch berechenbar. Häufig sind solche numerischen Lösungen aber sehr aufwendig.

In einigen Fällen ist es jedoch möglich das Integral durch eine einfachere Form zu approximieren. Dabei beginnt man mit der Ausdehnung des Integrationsgebiets. In fast allen Fällen braucht nicht über den gesamten Raum integriert zu werden, da die Quellverteilung irgendwie begrenzt ist. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß ein endliches Volumen V_Q existiert, welches alle Punkte mit $q(\vec{x}, t) \neq 0$ umfaßt. Außerhalb dieses Volumens ist die Quellstärke gleich Null. Damit kann das Integral auf das Volumen V_Q begrenzt werden. Es wird die Ausdehnung D des Volumen V_Q eingeführt. Die

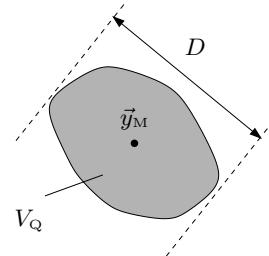


Abbildung 6.6.: Zur Ausdehnung D und dem Mittelpunkt \vec{y}_M des Quellvolumens V_Q

Größe D entspricht dem Durchmesser der kleinsten Kugel, das gesamte Volumen V_Q gerade umschließt. In Abbildung 6.6 ist die geometrische Situation dargestellt. Weiterhin wird ein Mittelpunkt des Volumens V_Q definiert. Dieser wird mit \vec{y}_M bezeichnet. Er kann zum Beispiel als geometrischer Schwerpunkt des Volumens gewählt werden. Der Abstand aller Punkte in V_Q ist in jedem Fall kleiner oder gleich D .

Besonders sind zwei Approximationen von praktischem Nutzen, da die benötigten Voraussetzungen in vielen Fällen erfüllt sind. Das sind das sogenannte “geometrische Fernfeld” und die “kompakte Quelle”. In beiden Fällen muß die Abmessung D bestimmte Bedingungen erfüllen, damit die Approximation angewendet werden kann. Die beiden Approximationen werden zunächst einzeln vorgestellt.

Geometrisches Fernfeld

Für die erste Approximation wird vorausgesetzt, daß sich der Beobachter weit entfernt von dem Quellvolumen befindet. Zweckmäßigerweise führt man den Abstand des Beobachtungspunktes zum Mittelpunkt des Quellvolumens mit

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| \quad (6.5.2)$$

ein. Dieser Abstand soll groß relativ zur Ausdehnung des Quellvolumens sein:

$$R \gg D \quad (6.5.3)$$

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Es wird hier der Ausdruck des “geometrischen” Fernfeldes verwendet. Ein Beobachter befindet sich im geometrischen Fernfeld, wenn Bedingung (6.5.3) erfüllt ist. Dies darf nicht mit dem “normalen” Fernfeld verwechselt werden, in dem der Abstand groß gegenüber der Wellenlänge ist ($R \gg \lambda$). Zur Unterscheidung wird letzteres auch als “akustisches” Fernfeld bezeichnet. Die Bedingungen $R \gg D$ und $R \gg \lambda$ können unabhängig voneinander erfüllt sein oder auch nicht. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß der Begriff des “geometrischen” Fernfeldes in der Literatur nicht sehr verbreitet ist. Im Allgemeinen ist mit dem Ausdruck “Fernfeld” immer der Bereich mit $R \gg \lambda$ gemeint. Dies ist auch hier der Fall, wenn nicht speziell von dem “geometrischen” Fernfeld gesprochen wird.

Der Beobachter nimmt zu einer bestimmten Zeit Signale aus dem gesamten Quellvolumen V_Q wahr. Die Signale von verschiedenen Punkten legen jedoch auch unterschiedliche Entfernung zurück bis sie den Beobachter erreichen. Vergleicht man den Weg von dem Quellpunkt \vec{y} zum Beobachter \vec{x} mit der Entfernung des Beobachters zu Mittelpunkt des Volumens, dann ergibt sich eine Abweichung d . Es gilt

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x} - \vec{y}_M| + d = R + d \quad (6.5.4)$$

In Abbildung 6.7 wird versucht diesen Zusammenhang zu veranschaulichen. Zu beachten ist, daß die Größe d auch negativ Werte annehmen kann. In jedem Fall ist der

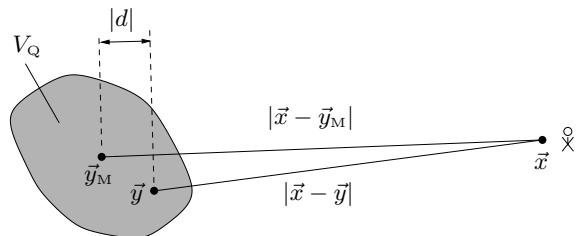


Abbildung 6.7.: Zur Variation der Entfernung zwischen Quellpunkt und Beobachter um Quellvolumen V_Q

Betrag der Abweichung kleiner als die Ausdehnung des Quellvolumens:

$$|d| \leq D \quad (6.5.5)$$

Aus der Annahme (6.5.3) folgt damit

$$|d| \ll R \quad (6.5.6)$$

Die Entfernung zwischen Quellposition \vec{y} und Beobachter \vec{x} taucht in dem Integral in Gleichung (6.5.1) zweimal auf. Einmal in der retardierten Zeit im Zähler und einmal im Nenner. Durch letzteres wird die Abschwächung der Signale mit dem Abstand vom Quellpunkt ausgedrückt. Die Stärke nimmt mit dem Kehrwert des Abstands ab. Wird

6. Schallquellen

der Abstand R des Beobachters zur Quelle immer größer und die Ausdehnung D bleibt gleich, so ergibt sich im Grenzfall

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{R + d} \longrightarrow \frac{1}{R} \quad \text{für} \quad \frac{R}{D} \rightarrow \infty \quad (6.5.7)$$

Das bedeutet, für einen hinreichend großen Abstand R kann der Kehrwert des Abstands mit

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}_M|} \quad (6.5.8)$$

angenähert werden. Der Fehler, der dabei gemacht wird, nimmt mit der Entfernung von der Quelle immer weiter ab. Diese Approximation kann nun in die Lösung (6.5.1) eingesetzt werden. Es ergibt sich die Näherungslösung

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}_M|} d^3\vec{y} \quad (6.5.9)$$

Der Nenner hängt damit nicht mehr von der Integrationsvariablen \vec{y} ab und kann vor das Integral gezogen werden. Es ergibt sich die Vereinfachung

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi R} \int_{V_Q} q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c) d^3\vec{y} \quad (6.5.10)$$

Diese Lösung gilt approximativ für weite entfernte Beobachter im Sinne von (6.5.3). Das Integral in (6.5.10) hat eine etwas einfachere Form im Vergleich zu (6.5.1). Jedoch ist oft noch eine weitere Vereinfachung möglich, wie sie anschließend vorgestellt wird.

Kompakte Quelle

Es wird angenommen, daß die Ausdehnung der Quelle klein gegenüber den auftretenden Wellenlängen ist. Dazu muß die Quelle ein begrenzten Frequenzbereich besitzen. Die höchste Frequenz, die im Spektrum auftritt, ist entscheidend für die Abschätzung. Ist die Wellenlänge λ , die der höchsten Frequenz entspricht, groß gegenüber der Ausdehnung D , wird von einer kompakten Quelle gesprochen. Im folgenden wird die Betrachtung nur für eine feste Frequenz ω durchgeführt. Eine Quelle mit einem ausgedehnten Spektrum kann als Überlagerung der einzelnen Spektralanteile angesehen werden. Es ist daher ausreichend nur eine Frequenz zu betrachten. Es wird angenommen, die Quellverteilung besitzt die Form

$$q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (6.5.11)$$

Das Feld $Q(\vec{x})$ gibt die räumliche Verteilung der Quellstärke vor. Setzt man (6.5.11) in (6.5.1) ein, ergibt sich für die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = \int_{V_Q} \frac{Q(\vec{y}) e^{i\omega(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.5.12)$$

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Im Integral tritt die retardierte Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (6.5.13)$$

auf. Sie ist die Quellzeit, zu der ein Signal am Ort \vec{y} ausgesandt werden muß, damit es zur Zeit t den Beobachter am Ort \vec{x} erreicht. Die Quellzeit ist vom Quellort abhängig. Das bedeutet, den Beobachter erreichen gleichzeitig Signale, die zu unterschiedlichen Zeiten ausgesandt wurden. Die empfangenen Signale sind dann nicht mehr in Phase, auch wenn die Quelle in Phase abstrahlt.

Es stellt sich die Frage, wie groß ist die Abweichung von τ innerhalb des Quellvolumens, und wie wirkt sich diese Abweichung auf die beobachteten Signale aus. Um letzteres zu klären, wird der Faktor $e^{i\omega\tau}$ betrachtet, der die Phase der beobachteten Signale bestimmt. Zunächst wird eine mittlere retardierte Zeit mit

$$\tau_M = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}_M|}{c} = t - \frac{R}{c} \quad (6.5.14)$$

definiert. Sie stellt die Zeit dar, zu der ein Signal am Mittelpunkt des Quellvolumens ausgesandt werden muß, damit es zur Zeit t den Beobachter erreicht. Für die Abweichung $\Delta\tau$ von der mittleren retardierten Zeit gilt

$$\Delta\tau = \tau - \tau_M = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - t + \frac{|\vec{x} - \vec{y}_M|}{c} = -\frac{d}{c} \quad (6.5.15)$$

Dabei ist mit d wieder der Unterschied zwischen den Wegstrecken nach (6.5.4). Ist nun die Variation von τ klein, so daß im gesamten Quellvolumen für das Produkt $\omega \Delta\tau$ die Abschätzung

$$|\omega \Delta\tau| \ll 2\pi \quad (6.5.16)$$

gilt, so ergeben sich insgesamt keine nennenswerte Abweichung bei dem Faktor $e^{i\omega\tau}$. Es gilt dann

$$|e^{i\omega\tau} - e^{i\omega\tau_M}| \ll 1 \quad (6.5.17)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.8 veranschaulicht. Der Faktor $e^{i\omega\tau}$ kann als ein Punkt in der komplexen Ebene, der auf dem Einheitskreis liegt, angesehen werden. Das Produkt $\omega\tau$ entspricht dem Winkel, unter dem sich der Punkt relativ zur reellen Achse befindet. Durch eine Variation von $\omega\tau$ wandert der Punkt entlang der Einheitskreises. Eine Veränderung um 2π entspricht einem kompletten Umlauf. Gilt die Abschätzung (6.5.16), dann ist der Punkt nur um eine relativ kurze Distanz verschoben und die Bedingung (6.5.17) ist erfüllt. Die Beziehung (6.5.16) ist übrigens identisch mit (3.1.19). Dort wurde eine vergleichbare Abschätzung durchgeführt. Allerdings war dort die Schwankung durch einen reellen Faktor $\cos(\omega\tau)$ gegeben.

Wenn die Abweichung des $e^{i\omega\tau}$ -Faktors klein bleibt, kann der exakte τ -Wert durch den mittleren Wert τ_M näherungsweise ersetzt werden. Die beobachteten Signale aus dem gesamten Quellvolumen werden dann so berechnet, als ob sie alle die gleiche Laufzeit zum Beobachter hätten. Der dabei entstehende Fehler verändert die Signale

6. Schallquellen

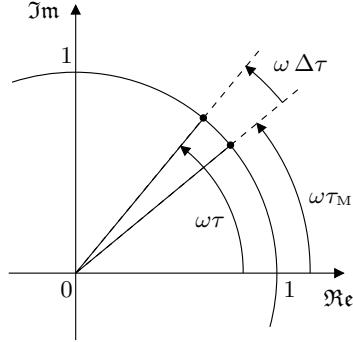


Abbildung 6.8.: Veranschaulichung der Abweichung des Phasenfaktors $e^{i\omega\tau}$ in der komplexen Ebene

nur unwesentlich, falls die Ungleichung (6.5.16) erfüllt ist. Durch Umformen erhält man daraus die Bedingung

$$|\omega\Delta\tau| = \left| \omega \frac{d}{c} \right| = 2\pi \frac{|d|}{\lambda} \ll 2\pi \quad (6.5.18)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$|d| \ll \lambda \quad (6.5.19)$$

Für die kompakte Quelle gilt

$$D \ll \lambda \quad (6.5.20)$$

Wegen der Bedingung (6.5.5) ist damit auch (6.5.19) erfüllt. In diesem Fall kann tatsächlich die Abweichung der retardierten Zeit in dem Quellbereich vernachlässigt werden. Für die Lösung ergibt sich die Approximation

$$p'(\vec{x}, t) \approx \int_{V_Q} \frac{Q(\vec{y}) e^{i\omega(t-R/c)}}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.5.21)$$

Der von der Laufzeit abhängige Term ist damit für eine bestimmte Beobachtungszeit t eine Konstante und kann vor das Integral gezogen werden. Man erhält

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{4\pi} \int_{V_Q} \frac{Q(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (6.5.22)$$

Diese Approximation gilt für den Fall, daß (6.5.20) erfüllt ist.

Kombination der Approximationen

Die in den approximativen Lösungen (6.5.10) und (6.5.22) auftretenden Integrale sind oft etwas leichter zu berechnen als die exakte Form in (6.5.1). Eine deutliche Vereinfachung wird üblicherweise jedoch erst erreicht, wenn beide Approximationen zusammen angewendet werden können. Für eine kompakte Quelle im Sinne von $D \ll \lambda$ ergibt sich im geometrischen Fernfeld für weit entfernte Beobachter mit $D \ll R$ näherungsweise die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) \approx \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{4\pi R} \int_{V_Q} Q(\vec{y}) d^3\vec{y} \quad (6.5.23)$$

Damit wird die Integration auf ein einfaches Integral über die Quellstärke reduziert.

Die vorgestellte Approximation hat allerdings eine prinzipielle Schwäche. Selbst wenn die beiden Bedingungen $D \ll \lambda$ und $D \ll R$ erfüllt sind, kann sich in ungünstigen Fällen dennoch ein großer relativer Fehler ergeben. Dies soll anhand eines speziellen Beispiels verdeutlicht werden. Dazu wird von einer harmonischen Quelle nach (6.5.11) ausgegangen. Die räumliche Verteilung der Quellstärke sei mit

$$Q(\vec{y}) = \delta(\vec{y} - \vec{y}_1) - \delta(\vec{y} - \vec{y}_2) \quad (6.5.24)$$

gegeben. Diese Verteilung beschreibt zwei Monopole an den Stellen \vec{y}_1 und \vec{y}_2 , die gegenphasig überlagert sind. Die Situation ist in Abbildung 6.9 illustriert.

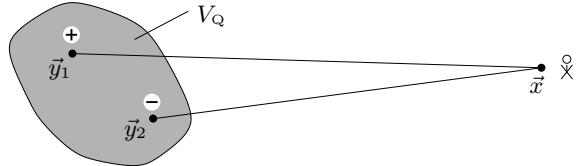


Abbildung 6.9.: Veranschaulichung der Quellverteilung nach (6.5.24).

Für das Integral in Gleichung (6.5.23) gilt in dem betrachteten Beispiel

$$\int_{V_Q} Q(\vec{y}) d^3\vec{y} = 0 \quad (6.5.25)$$

Die Approximation (6.5.23) besagt in diesem Fall

$$p'(\vec{x}, t) \approx 0 \quad (6.5.26)$$

Die Näherungslösung liefert also den Wert Null. Die Monopole erzeugen am Ort des Beobachters jedoch Schall. Dieser Schall hebt sich größtenteils gegenseitig auf, da die

6. Schallquellen

Signale gegenphasig sind. Wenn die Abstände von den beiden Monopolen zum Beobachter nicht exakt gleich sind, dann kann eine vollständige Auslöschung nicht eintreten. Am Beobachtungsort ist damit ein Signal $p' \neq 0$ zu registrieren, selbst wenn die Voraussetzungen $D \ll \lambda$ und $D \ll R$ erfüllt sind. Dies bedeutet, die Approximation (6.5.23) liefert ein 100 % falsches Ergebnis. Gemessen an der Amplitude, die ein Einzelner der beiden Monopole am Beobachtungsort erzeugen würde, ist der Fehler zwar absolut winzig. Jedoch ist die Vorhersage von Null schlecht, wenn tatsächlich etwas vorhanden ist. In diesem Spezialfall ist der relative Fehler maximal.

Multipolentwicklung

Anscheinend ist bei der Herleitung der Approximation an einer Stelle etwas übersehen worden. Sonst dürfte sich ein so großer relativer Fehler niemals ergeben. Um das “Versagen” der Abschätzungen zu erklären, wird die exakte Lösung nochmal genauer betrachtet. Die Lösung kann in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \frac{e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c)}}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (6.5.27)$$

geschrieben werden. Der Quotient im Integral wird als Funktion von \vec{x} , \vec{y} und t mit

$$F(\vec{x}, \vec{y}, t) = \frac{e^{i\omega(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c)}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \quad (6.5.28)$$

dargestellt. Die obigen Abschätzungen können als eine Näherung für die Funktion F angesehen werden, mit der sich die Berechnung des Integrals vereinfacht. Um den auftretenden Fehler quantitativ zu beschreiben, wird die Funktion F bezüglich der Variablen \vec{y} in eine Reihe um die Stelle \vec{y}_M entwickelt. Dazu wird die Abweichung des Quellortes vom Mittelpunkt

$$\Delta\vec{y} = \vec{y} - \vec{y}_M \quad (6.5.29)$$

und entsprechend die i -te Komponente dieses Vektors

$$\Delta y_i = y_i - y_{M,i} \quad (6.5.30)$$

eingeführt. Eine Entwicklung ergibt eine Darstellung als Reihe in der Form

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{y}, t) &= F(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \Delta y_i \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \Delta y_i \Delta y_j \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (6.5.31)$$

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Dies kann nun in die Lösung (6.5.27) eingesetzt werden. Damit kann die Lösung als Reihe von Integralen dargestellt werden. Die nicht von der Integrationsvariablen \vec{y} abhängigen Terme werden vor die Teilintegrale geschrieben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} p'(\vec{x}, t) = & F(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) d^3\vec{y} \\ & + \frac{\partial F}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i d^3\vec{y} \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \cdot \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i \Delta y_j d^3\vec{y} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (6.5.32)$$

Zur weiteren Umformung wird die Symmetrie von F bezüglich der Variablen \vec{x} und \vec{y} ausgenutzt. Die Koordinaten \vec{x} und \vec{y} können vertauscht werden, ohne daß sich der Wert von F ändert. Es gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (6.5.33)$$

Diese Beziehung kann anschaulich gedeutet werden. Die Funktion $F(\vec{x}, \vec{y}, t)$ liefert das Signal im Beobachtungspunkt \vec{x} zur Zeit t , welches von einer harmonischen Monopol mit Einheitsstärke am Quellort \vec{y} erzeugt wird. Es macht keinen Unterschied, ob man den Monopol auf den Beobachter zu verschiebt, oder ob sich der Beobachter dem Monopol nähert. In beiden Fällen ändert sich das Signal beziehungsweise der Wert von F in gleicher Weise. Mit der Symmetriebeziehung können die Ableitungen nach y_i durch x_i -Ableitungen ersetzt werden. Zusätzlich wird die konkrete Form der Funktion F an der Stelle $\vec{y} = \vec{y}_M$ eingesetzt. Dadurch erhalten die Terme mit den Ableitungen von F die typische Form der Dipol- und Quadrupol-Felder, wie sie im Abschnitt 6.4 vorgestellt wurden. Es gilt

$$F(\vec{x}, \vec{y}_M, t) = \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \quad (6.5.34)$$

Dabei ist $R = |\vec{x} - \vec{y}_M|$ der Abstand der Beobachters vom festgelegten Punkt \vec{y}_M . Einsetzen ergibt schließlich

$$\begin{aligned} p'(\vec{x}, t) = & \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} A_0 \quad (\text{Monopol}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} B_i \quad (\text{Dipol}) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \right\} C_{ij} \quad (\text{Quadrupol}) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (6.5.35)$$

6. Schallquellen

Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) d^3\vec{y} \\ B_i &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i d^3\vec{y} \\ C_{ij} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\vec{y}) \Delta y_i \Delta y_j d^3\vec{y} \end{aligned} \quad (6.5.36)$$

eingeführt.

Die Darstellung der Lösung als eine Reihe in der Form (6.5.35) wird Multipolentwicklung genannt. Der erste Term auf der rechten Seite entspricht einem Monopol. Der zweite Term stellt einen Dipol und der dritte einen Quadrupol dar. Die Stärke der Quellen wird durch die Koeffizienten A_0 , B_i und C_{ij} festgelegt. Das Feld für eine gegebene Quellverteilung lässt sich also immer als eine Überlagerung von Monopol, Dipol, Quadrupol und Punktquellen höherer Ordnung darstellen, die sich alle am festgelegten Mittelpunkt \vec{y}_M befinden.

Konvergenz der Reihe

Das erste Glied der Reihenentwicklung – der Monopolanteil – stimmt übrigens exakt mit der oben abgeleiteten approximativen Lösung nach (6.5.23) überein. Das bedeutet, die Approximation nach (6.5.23) ist dann gut, wenn die Summe der restlichen Glieder klein gegenüber dem ersten Glied ist. Es stellt sich damit die Frage nach der Konvergenz der Reihe. Um dies zu beantworten, müssen die einzelnen Glieder miteinander verglichen werden. Die gesamte Untersuchung wird für Beobachter im Fernfeld durchgeführt. Für diese lassen sich die Glieder leichter abschätzen. Hier werden beispielhaft nur die ersten drei Glieder, die auch in (6.5.35) ausgeschrieben sind, betrachtet. Auf die höheren Glieder wird dann ohne genauerer Herleitung geschlossen.

Jedes Glied in (6.5.35) stellt das Feld einer Punktquelle dar. Und jedes dieser Felder besitzt einen Anteil, der mit $1/R$ abfällt. Nur dieser Anteil ist für die Betrachtung im Fernfeld interessant. Diese Anteile sollen im folgenden berechnet werden. Zuerst wird die Funktion

$$F_M(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, \vec{y}_M, t) \quad (6.5.37)$$

eingeführt. Sie entspricht genau dem Feld, das in den geschweiften Klammern in (6.5.35) auftritt. Die Funktion F_M hängt nicht von \vec{y} ab. Dadurch wird die Darstellung etwas vereinfacht.

Die Glieder der Reihe sind jeweils ein Produkt aus einer räumlichen Ableitung von F_M und einem Koeffizienten. Zunächst werden die Ableitungen untersucht. Es gilt

$$\frac{\partial F_M}{\partial x_i} = \frac{\partial F_M}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_i} \quad (6.5.38)$$

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

und

$$\frac{\partial^2 F_M}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F_M}{\partial R^2} \frac{\partial R}{\partial x_j} \frac{\partial R}{\partial x_i} + \frac{\partial F_M}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} \quad (6.5.39)$$

Der erste Ausdruck stellt ein Dipolfeld dar, welches in x_i -Richtung orientiert ist. Der zweite Ausdruck entspricht einem Quadrupolfeld mit x_i, x_j -Ausrichtung. Die Richtungsabhängigkeit der Felder ist in den Termen $\partial R / \partial x_i$ beziehungsweise $\partial^2 R / (\partial x_i \partial x_j)$ enthalten.

Im nächsten Schritt werden die Ableitungen von F_M nach dem Abstand R untersucht. Es gilt

$$\frac{\partial F_M}{\partial R} = -\frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R^2} - \left(\frac{i\omega}{c}\right) \frac{e^{i\omega(t-R/c)}}{R} \quad (6.5.40)$$

Dies kann zu

$$\frac{\partial F_M}{\partial R} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c}\right) F_M \quad (6.5.41)$$

umgeformt werden. Das Feld F_M fällt selbst mit $1/R$ ab. In der runden Klammer tritt ein weiterer $1/R$ -Ausdruck auf. Der Ausdruck $i\omega/c = 2\pi/\lambda$ ändert sich nicht mit dem Abstand. Im Fernfeld, wo $R \gg \lambda$ ist, kann daher der erste Term in der runden Klammer vernachlässigt werden. Es sei nochmal darauf hingewiesen, daß es sich hier um das "akustische" Fernfeld und nicht um das "geometrische" Fernfeld handelt. Die erste Ableitung kann im Sinne einer Näherung für das Fernfeld als

$$\frac{\partial F_M}{\partial R} \Big|_{R \gg \lambda} = -\left(\frac{i\omega}{c}\right) F_M \quad (6.5.42)$$

geschrieben werden.

Analog wird die zweite Ableitung berechnet. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 F_M}{\partial R^2} = \frac{1}{R^2} F_M - \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c}\right) \frac{\partial F_M}{\partial R} \quad (6.5.43)$$

Setzt man noch die erste Ableitung ein folgt

$$\frac{\partial^2 F_M}{\partial R^2} = \frac{1}{R^2} F_M + \left(\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c}\right)^2 F_M \quad (6.5.44)$$

Man erhält mehrere Anteile, die unterschiedlich mit $1/R$ abfallen. Für das Fernfeld gilt

$$\frac{\partial^2 F_M}{\partial R^2} \Big|_{R \gg \lambda} = \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2 F_M \quad (6.5.45)$$

Damit sind schon zwei wichtige Faktoren aus den Gleichungen (6.5.38) und (6.5.39) bestimmt. Es fehlen noch die Ableitungen des Abstands R nach der Beobachtungsposition. Da solche Ausdrücke noch häufiger auftreten werden, sollen diese im folgenden etwas genauer betrachtet werden.

6. Schallquellen

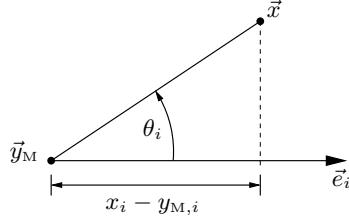


Abbildung 6.10.: Veranschaulichung des Beobachtungswinkels θ_i

Der Abstand zwischen Beobachter und dem Mittelpunkt der Quellverteilung lautet in ausführlicher Schreibweise

$$R = [(x_1 - y_{M,1})^2 + (x_2 - y_{M,2})^2 + (x_3 - y_{M,3})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5.46)$$

Für die erste Ableitung ergibt sich daraus

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{x_i - y_{M,i}}{|\vec{x} - \vec{y}_M|} = \frac{x_i - y_{M,i}}{R} \quad (6.5.47)$$

Anschaulich entspricht die Ableitung gerade dem Cosinus des Winkels zwischen dem Beobachtungsvektor $(\vec{x} - \vec{y}_M)$ und dem Einheitsvektor \vec{e}_i , der die x_i -Richtung vorgibt. Die Situation ist in Abbildung 6.10 skizziert. Wenn der besagte Winkel mit θ_i bezeichnet wird, kann

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \cos \theta_i \quad (6.5.48)$$

geschrieben werden. Das bedeutet, die Ableitung $\partial R / \partial x_i$ hängt ausschließlich von der Beobachtungsrichtung ab. Sie ist unabhängig vom Abstand R selbst. In jedem Fall gilt

$$\left| \frac{\partial R}{\partial x_i} \right| \leq 1 \quad (6.5.49)$$

Bildet man die zweite Ableitung von (6.5.46) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{(x_i - y_{M,i})(x_j - y_{M,j})}{R^3} + \frac{\delta_{ij}}{R} \quad (6.5.50)$$

Dieser Ausdruck fällt im Fernfeld mit $1/R$ ab. Er tritt auf der rechten Seite von (6.5.39) auf. Dort steht das Produkt aus der zweiten Ableitung von R und dem Ausdruck $\partial F_M / \partial R$, der auch mit $1/R$ abfällt. Damit hat der zweite Summand auf der rechten Seite von (6.5.39) insgesamt eine $1/R^2$ -Abhängigkeit. Er kann somit gegenüber dem ersten Summanden im Fernfeld vernachlässigt werden.

6.5. Kompakte Quelle und Fernfeldapproximation

Schließlich können die Ergebnisse für das Fernfeld zusammengefaßt werden. Mit (6.5.42) und (6.5.48) folgt für das Dipolfeld

$$\frac{\partial F_{\text{M}}}{\partial x_i} \Big|_{R \gg \lambda} = - \left(\frac{i\omega}{c} \right) F_{\text{M}} \cos \theta_i \quad (6.5.51)$$

Analog ergibt sich mit (6.5.45) und (6.5.50) für das Quadrupolfeld

$$\frac{\partial^2 F_{\text{M}}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{R \gg \lambda} = \left(\frac{i\omega}{c} \right)^2 F_{\text{M}} \cos \theta_i \cos \theta_j \quad (6.5.52)$$

Die Ergebnisse lassen eine Regelmäßigkeit in den Ausdrücken erkennen. Bei jeder Ableitung kommt ein Cosinus-Term hinzu, und die Potenz des $(i\omega/c)$ -Faktors erhöht sich um Eins. Eine genaue Betrachtung liefert tatsächlich, daß die n -te Ableitung mit $(\omega/c)^n$ skaliert. Die Stärke der Felder, die vor den Koeffizienten in der Reihe (6.5.35) auftreten, verändern sich von Ordnung zu Ordnung immer um den von der Wellenlänge abhängenden Faktor $\omega/c = 2\pi/\lambda$. Zu beachten ist, daß dies nur im Fernfeld für Beobachter mit $R \gg \lambda$ gilt. Übrigens sind die Cosinus-Terme für die Fernfeldabschätzung nicht von Bedeutung. Es kann zum Beispiel $(\cos \theta_i)^n$ immer gleich Eins werden. Dies ist unabhängig von der Entfernung R und hängt nur von der Beobachtungsrichtung ab.

Um die Konvergenzfrage zu klären, muß noch das Verhalten der Koeffizienten in (6.5.36) berücksichtigt werden. Es wird davon ausgegangen, daß das Quellgebiet beschränkt ist und außerhalb des abgeschlossenen Volumens V_{Q} überall $Q(\vec{x}) = 0$ gilt. Die Ausdehnung des Volumens im Sinne von Abbildung 6.6 ist mit D gegeben. Die in den Integralen in (6.5.36) auftretenden Abweichungen Δy_i sind in jedem Fall betragsmäßig kleiner als D . Zur Abschätzung der Koeffizienten wird die Größe

$$A_{\max} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_{\text{Q}}} |Q(\vec{y})| d^3 \vec{y} \quad (6.5.53)$$

definiert. Der Betrag des Koeffizienten A_0 kann nicht größer als A_{\max} werden. Gilt überall $Q(\vec{x}) \geq 0$ ergibt sich gerade $A_0 = A_{\max}$. In jedem Fall gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |A_0| &\leq A_{\max} \\ |B_i| &\leq D A_{\max} \\ |C_{ij}| &\leq D^2 A_{\max} \end{aligned} \quad (6.5.54)$$

Dies läßt sich auch für alle weiteren Koeffizienten der Reihe fortsetzen. Damit unterscheiden sich der maximal mögliche Betrag der Koeffizienten, die in der Reihe (6.5.35) neben den Multipolfeldern vorkommen, von Ordnung zu Ordnung jeweils um den Faktor D .

Schließlich kann eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihenentwicklung angegeben werden. Die Multipolfelder skalieren mit der Ordnung n entsprechend $(\omega/c)^n$. Das gesamte Glied läßt sich somit durch $(\omega/c \cdot D)^n$ abschätzen. Es zeigt

6. Schallquellen

sich, daß die Reihe (6.5.35) dann schnell konvergiert, wenn

$$\left| \frac{\omega}{c} D \right| = \left| \frac{2\pi}{\lambda} D \right| \ll 1 \quad (6.5.55)$$

gegeben ist. Diese Aussage gilt allerdings nur für Beobachter im akustischen Fernfeld, da nur der $1/R$ -Anteil der Quellen berücksichtigt wurde.

Die Bedingung (6.5.55) ist für eine kompakte Quelle mit $D \ll \lambda$ erfüllt. In diesem Fall ist für einen Beobachter im Fernfeld die Quelle bereits sehr gut durch das erste Glied der Reihenentwicklung approximiert. Die ausgedehnte Quelle erscheint dem entfernten Beobachter wie ein punktförmiger Monopol. Das Ganze gilt jedoch nur, wenn der Koeffizient A_0 nicht verschwindet. Für eine Quellverteilung nach (6.5.24) ist aber exakt $A_0 = 0$. In diesem Spezialfall dominiert der Dipolterm die Lösung im Fernfeld und die Koeffizienten B_i sind entscheidend. Falls auch diese alle gleich Null sind, ergibt sich eine Quadrupolverteilung im Fernfeld, usw. Bei einer kompakten Quelle konvergiert die Reihenentwicklung in jedem Fall. Ist die Quelle nicht kompakt und damit die Abschätzung (6.5.55) nicht gültig, kann auch keine einfache Aussage über die Konvergenz der Reihe angegeben werden.

Dieses Ergebnis läßt nun die Approximation nach Beziehung (6.5.23) besser einordnen. Diese Approximation berücksichtigt nur den Monopolanteil. Sie entspricht dem ersten Glied in der Multipolentwicklung. Zu beachten ist, daß die Voraussetzungen für die Approximation (6.5.23) eine kompakte Quelle und ein Beobachter im geometrischen Fernfeld sind. Die Bedingung des "geometrischen" Fernfeldes ($R \gg D$) ist im Zusammenhang mit der Multipolentwicklung überhaupt nicht mehr aufgetaucht. Sie ist aber automatisch erfüllt ist, wenn man eine kompakte Quelle ($\lambda \gg D$) hat und sich im "akustischen" Fernfeld ($R \gg \lambda$) befindet. Dann gilt natürlich auch $R \gg D$.

Die gesamte Betrachtung wurde nur für eine feste Frequenz durchgeführt. Ist eine nichtharmonische Quellverteilungen gegeben, so kann eine spektrale Zerlegung vorgenommen werden. Für die Abschätzung (6.5.55) ist die höchste auftretende Frequenz (beziehungsweise kürzeste Wellenlänge) entscheidend. Die einzelnen Spektralkomponenten können in Reihen der Form (6.5.32) entwickelt werden. Die Glieder der Reihen lassen sich dann anschließend wieder überlagern. So erhält man die entsprechende Multipoldarstellung für nichtharmonische Quellverteilungen.

6.6. Zweidimensionale Schallquellen

In Abschnitt 4.1 wurde die Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen betrachtet. Die Überlegungen wurden nur für zwei Dimensionen durchgeführt, da die Darstellung der Lösungen einfacher ist und die wesentlichen physikalischen Effekte auch in der zweidimensionalen Lösung enthalten sind. Bei der Schallabstrahlung im offenen Raum wurde mit der atmenden Kugel gleich ein dreidimensionales Beispiel untersucht. Auch dort könnte man vermuten, daß die Behandlung des zweidimensionalen Analogons – des atmenden Zylinders – etwas einfacher ist. In der Strömungsmechanik wird ebenfalls im Rahmen der Potentialströmung meistens die Zylinderumströmung ausführlicher behandelt als die umströmte Kugel. In der Akustik ergibt sich jedoch für

6.6. Zweidimensionale Schallquellen

den zweidimensionalen Fall eine wesentlich kompliziertere Lösung als für den Dreidimensionalen. Dies wird im folgenden näher betrachtet.

Das akustische Potential ϕ soll die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = q(\vec{x}, t) \quad (6.6.1)$$

erfüllen. Ohne Berandungen kann die Lösung in der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (6.6.2)$$

angegeben werden. In Abschnitt 6.2 wurde bereits eine mathematischere Darstellung der Lösung mit Greenschen Funktionen vorgestellt. Diese wird auch für die folgenden Überlegungen verwendet. Es kann

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) q(\vec{y}, \tau) d^3y d\tau \quad (6.6.3)$$

geschrieben werden, wenn man die Greensche Funktion

$$G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) = \frac{\delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \quad (6.6.4)$$

einführt. Gleichung (6.6.3) unterscheidet sich von (6.2.20) durch die vertauschten Integrationen. Eine Vertauschung ist ohne weiteres möglich, da die Integrationsvariablen \vec{y} und τ sowie die Integrationsgrenzen nicht voneinander abhängen. Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßiger, wenn die innere Integration die Räumliche ist.

Eine zweidimensionale Quellverteilung ist durch

$$q = Q(x_1, x_2, t) \quad (6.6.5)$$

gegeben. Dabei bestimmt die Funktion $Q(x_1, x_2, t)$ die Quellstärke in Abhängigkeit von der Position in der x_1, x_2 -Ebene. In x_3 -Richtung ist die Quellstärke konstant. Die Lösung für die zweidimensionale Quellverteilung kann durch Einsetzen von (6.6.5) in (6.6.3) berechnet werden. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(y_1, y_2, \tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) dy_3 \right\} dy_1 dy_2 d\tau \quad (6.6.6)$$

Das räumliche Integral wurde aufgespalten. Da Q nicht von y_3 abhängt, kann die Größe vor das Integral über y_3 gezogen werden. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer kann als neue Greensche Funktion G_{2d} für den zweidimensionalen Fall aufgefaßt werden. Damit kann die zweidimensionale Lösung in der zu (6.6.3) analogen Form

$$\phi(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{2d}(y_1, y_2, \tau) Q(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2 d\tau \quad (6.6.7)$$

6. Schallquellen

dargestellt werden. Die neue Greensche Funktion hängt nun nicht mehr von x_3 und y_3 ab. Es kann

$$G_{2d} = G_{2d}(x_1, x_2, t, y_1, y_2, \tau) \quad (6.6.8)$$

geschrieben werden. Die Funktion ist durch das Integral

$$G_{2d} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) dy_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c - \tau)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} dy_3 \quad (6.6.9)$$

gegeben.

Um eine für praktische Berechnungen geeignete Form der Funktion G_{2d} zu erhalten, wird das Integral in (6.6.9) berechnet. Dazu werden die Abkürzungen

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6.10)$$

für den Abstand im dreidimensionalen Raum und

$$R = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6.11)$$

für den im zweidimensionalen Raum eingeführt. zur Integration wird das Argument der δ -Funktion mit σ substituiert. Es gilt

$$\sigma = t - \frac{r}{c} - \tau \quad (6.6.12)$$

Daraus folgt

$$d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y_3} dy_3 \quad (6.6.13)$$

Durch Ableiten von (6.6.10) ergibt sich

$$\frac{\partial r}{\partial y_3} = \frac{y_3 - x_3}{r} \quad (6.6.14)$$

Damit erhält man die Beziehung zwischen den Differentialen

$$dy_3 = \frac{cr}{x_3 - y_3} d\sigma \quad (6.6.15)$$

Für $y_3 = \pm\infty$ ist $\sigma = -\infty$. Wenn y_3 von $-\infty$ nach ∞ läuft, dann wächst σ zunächst an, um nach dem Erreichen eines Maximums wieder abzufallen. Es gilt

$$\sigma \leq t - \frac{R}{c} - \tau \equiv \sigma_{\max} \quad (6.6.16)$$

Die Gleichheit in (6.6.16) wird erreicht, wenn $r = R$ ist. Die ist gerade bei $x_3 = y_3$ der Fall. Dort besitzt σ das Maximum.

Es bietet sich an, das Integral in zwei Teilintegrale aufzuspalten. In der erste Integration läuft y_3 von $-\infty$ bis x_3 . Die zweite Integration erstreckt sich von x_3 bis $+\infty$.

6.6. Zweidimensionale Schallquellen

Für die neue Variable σ ergibt sich entsprechend ein Integral von $-\infty$ bis σ_{\max} und ein zweites in entgegengesetzter Richtung. Man erhält

$$G_{2d} = \int_{-\infty}^{t-R/c-\tau} \frac{\delta(\sigma)}{4\pi r} \frac{cr}{x_3 - y_3} d\sigma + \int_{t-R/c-\tau}^{-\infty} \frac{\delta(\sigma)}{4\pi r} \frac{cr}{x_3 - y_3} d\sigma \quad (6.6.17)$$

Im ersten Integral gilt $x_3 - y_3 > 0$, und im zweiten ist $x_3 - y_3 < 0$. Ersetzt man überall $x_3 - x_3$ durch $|x_3 - x_3|$, so ergibt sich im zweiten Integral ein Faktor -1 . Dieser kann durch Vertauschen der Integrationsgrenzen kompensiert werden. Es folgt

$$G_{2d} = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-R/c-\tau} \frac{1}{|x_3 - y_3|} \delta(\sigma) d\sigma \quad (6.6.18)$$

Das verbleibende Integral kann einfach berechnet werden. Falls die obere Integrationsgrenze ($t - R/c - \tau$) kleiner Null ist, dann ist der Wert des Integrals gleich Null. Andernfalls ergibt sich der Wert des Quotienten an der Stelle $\sigma = 0$. Dieser Wert kann angegeben werden. Bei $\sigma = 0$ gilt

$$0 \equiv t - \frac{r}{c} - \tau = t - \frac{\sqrt{R^2 + |x_3 - y_3|^2}}{c} - \tau \quad (6.6.19)$$

Dies kann zu

$$|x_3 - y_3| = \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2} \quad (6.6.20)$$

umgeformt werden. Damit erhält man schließlich die Greensche Funktion für den zweidimensionalen Fall mit

$$G_{2d} = \begin{cases} \frac{c}{2\pi\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}} & \text{für } t - \frac{R}{c} - \tau > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.6.21)$$

Die Greensche Funktion hängt nur von dem Abstand R und der Zeitdifferenz $t - \tau$ ab. Dies ist analog zu der Funktion G aus (6.6.4), jedoch ist die Form (6.6.21) auf den ersten Blick nicht mit dem Ausdruck für G vergleichbar. In der Tat besitzen im zweidimensionalen Fall die Greensche Funktion und damit auch die Lösungen einige Besonderheiten.

Einfache Punktquelle

Am Beispiel einfacher Punktquellen sollen die wesentlichen Unterschiede zwischen zwei- und dreidimensionalen Schallquellen verdeutlicht werden. Im Abschnitt 6.2 wurde bereits eine einfache Punktquelle im dreidimensionalen Fall betrachtet, die bei $\vec{x} = 0$ und $t = 0$ einen unendlich kurzen Puls mit endlicher Stärke – einen δ -Puls – aussendet. Sie ist durch die Quellstärkeverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \delta(t) \quad (6.6.22)$$

6. Schallquellen

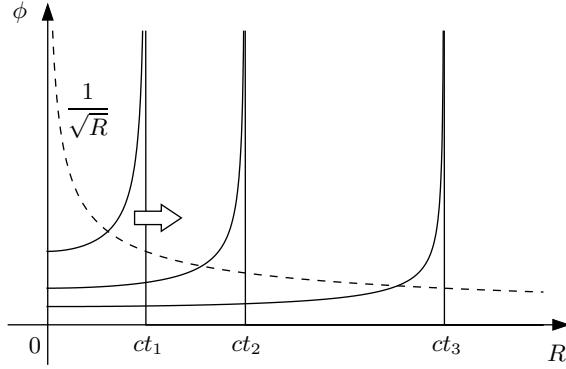


Abbildung 6.11.: Zweidimensionale Elementarwelle nach (6.6.25) zu drei verschiedenen Zeiten t_1 , t_2 und t_3 .

gegeben. Es zeigte sich, daß die Greensche Funktion $G(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau)$ nach (6.6.4) angibt, welches Signal am Ort \vec{x} zur Zeit t durch das Aussenden eines δ -Pulses am Ort \vec{y} zur Zeit τ bewirkt wird. Diese Greensche Funktion beschreibt sozusagen Elementarwellen im dreidimensionalen Raum, aus denen sich alle Lösungen zusammensetzen lassen.

Die Überlegungen aus Abschnitt 6.2 lassen sich auch für zweidimensionale Schallquellen durchführen. Eine einfache zweidimensionale Punktquelle, die vom Ursprung einen δ -Puls aussendet, ist analog zu (6.6.22) durch

$$Q(x_1, x_2, t) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(t) \quad (6.6.23)$$

gegeben. Nach (6.6.7) ergibt sich für das Feld dieser Quelle

$$\phi(x_1, x_2, t) = G_{2d}(x_1, x_2, t, 0, 0, 0) \quad (6.6.24)$$

Dies stellt eine zweidimensionale Elementarwelle dar. Mit (6.6.21) folgt

$$\phi(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \frac{c}{2\pi\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{für } t - \frac{R}{c} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.6.25)$$

Dabei ist die Größe R jetzt der Abstand vom Ursprung in 2D-Raum, der auch als Abstand zur x_3 -Achse im 3D-Raum aufgefaßt werden kann. Es gilt

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (6.6.26)$$

Die Lösung ist in Abbildung 6.11 für verschiedene Zeitpunkte dargestellt.

Es zeigt sich ein prinzipieller Unterschied zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Fall. In 3D bewirkt ein ausgehender δ -Puls auch ein δ -Puls an jedem

6.6. Zweidimensionale Schallquellen

Beobachtungsort. Die Stärke des Pulses fällt zwar mit $1/r$ ab, aber die charakteristische Signalform bleibt erhalten. Bei zweidimensionalen Quellen ist dies nicht der Fall. Ein δ -Puls bewirkt eine Elementarwelle mit der in Abbildung 6.11 dargestellten Form. Sie besitzt eine Singularität bei $R = ct$. Dort wird die Wurzel in (6.6.25) gleich Null. Hinter der Singularität folgt ein monoton abfallender Signalverlauf.

In einem vorgegebenen Abstand R trifft bei $t = R/c$ die Singularität ein. Danach klingt das Signal wieder ab. Für $t \rightarrow \infty$ wird die Stärke proportional zu $1/t$. Das bedeutet, erst nach unendlich langer Zeit wird wieder $\phi = 0$ erreicht. Ein unendlich kurzer Puls bewirkt ein unendlich lang abklingendes Signal. Dies ist ein deutlicher Unterschied zum dreidimensionalen Fall, in dem die Lösung nach dem Durchlaufen des δ -Pulses sofort wieder auf $\phi = 0$ zurückgeht.

Aus energetischen Gründen muß auch die Elementarwelle in zwei Dimensionen nach außen schwächer werden. Um dies zu verdeutlichen, wird die Lösung (6.6.25) an einer Stelle im festen Abstand L (in radialer Richtung) hinter der Singularität betrachtet. Die Singularität befindet sich bei $R = ct$. Die betrachtete Stelle liegt demnach bei $R = ct - L$. Für den Ausdruck unter der Wurzel in (6.6.25) ergibt sich daraus

$$c^2 t^2 - R^2 = c^2 t^2 - (ct - L)^2 = ct L - L^2 \quad (6.6.27)$$

Hält man L konstant, dann ist dieser Ausdruck für $t \rightarrow \infty$ proportional zur Zeit t und damit auch zur Position der Singularität $R = ct$. Das Signal an der betrachteten Stelle nimmt also mit $1/\sqrt{R}$ bei $t \rightarrow \infty$ ab. Dieses Verhalten wird mit der gestrichelten $1/\sqrt{R}$ -Kurve in Abbildung 6.11 veranschaulicht. Sie schneidet die dargestellten Lösungen näherungsweise immer im gleichen Abstand hinter der Singularität.

Linienhafter Monopol

Das abklingende Verhalten der einfachen Lösung nach (6.6.25) lässt sich auch anschaulich erklären. Die zweidimensionale Schallquelle nach (6.6.23) repräsentiert eine konstante Quellverteilung, die sich ausschließlich auf die x_3 -Achse konzentriert. Die Quellverteilung kann man sich näherungsweise aus vielen einzelnen Monopolen zusammengesetzt denken, die entlang der x_3 -Achse aufgereiht sind. In Abbildung 6.12 ist eine solche Anordnung dargestellt. Die schwarzen Punkte markieren die Monopole und der helle Punkt kennzeichnet einen Beobachter, der sich im Abstand R vom Ursprung auf der x_1 -Achse befindet.

Senden die Monopole auf der x_3 -Achse alle gleichzeitig einen Puls aus, so werden die Pulse beim Beobachter zu unterschiedlichen Zeiten eintreffen. Zuerst trifft der Puls ein, der von dem nächstgelegenen Monopol ausgesandt wurde. Er kommt zur Zeit $t = R/c$ beim Beobachter an. Die anderen Pulse benötigen länger. Betrachtet man einen bestimmten Monopol bei $x_3 = s$, so trifft sein Signal erst bei $t = \sqrt{R^2 + s^2}/c$ ein. Das Signal ist auch entsprechend der größeren Entfernung $r = \sqrt{R^2 + s^2}$ schwächer als das erste Signal. Im weiteren Zeitverlauf treffen weitere Pulse ein, deren Stärke jedoch immer schwächer ist. Insgesamt klingt das beobachtete Signal mit der Zeit ab. Dies entspricht einer Lösung der Form (6.6.25).

Anschaulich kann man sich das Gedankenexperiment besser mit einem Puls endlicher Breite als mit einem δ -Puls vorstellen. Ein Puls endlicher Breite kann durch die

6. Schallquellen

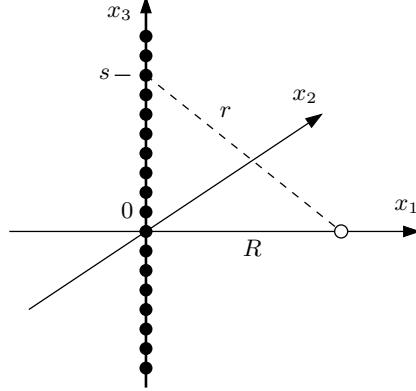


Abbildung 6.12.: Linienhafter Monopol entlang der x_3 -Achse

Quellverteilung

$$Q(x_1, x_2, t) = \delta(x_1) \delta(x_2) f(t) \quad (6.6.28)$$

realisiert werden, wenn die Zeitfunktion $f(t)$ entsprechend gewählt wird. Setzt man diese Quellverteilung in (6.6.7) ein, ergibt sich die Lösung

$$\phi(x_1, x_2, t) = \phi(R, t) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{f(\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} d\tau \quad (6.6.29)$$

Das ist das Feld einer zweidimensionale Punktquelle mit der Stärke $f(t)$. Diese Lösung soll im folgenden für eine einfache Zeitfunktion, die einen wie in Abbildung 6.13 gezeigten endlichen Puls beschreibt, veranschaulicht werden. Die dieser Quellstärke entsprechende Lösung ist in Abbildung 6.14 dargestellt. In dem ansteigendem Teil der Welle ist die ursprüngliche Pulsform noch zu erkennen. Hinter dem Maximum folgt jedoch der Bereich mit abklingender Lösung, der auf den ersten Blick nichts mit dem Zeitverlauf der Quellstärke zu tun hat.

Im dreidimensionalen Fall bleibt die Form eines Signals, welches von einer Punktquelle ausgesendet wird, erhalten. Die Stärke des Signals nimmt zwar mit $1/r$ ab, aber es wird nicht verformt. Dies ist in zwei Dimensionen anders. Egal wie die Funktion $f(t)$ gewählt wird, eine Lösung nach (6.6.29) ergibt für unterschiedliche Abstände R auch verschiedene Signalformen, die sich nicht nur durch einen Skalierungsfaktor unterscheiden. Es kann gezeigt werden, daß sich für $R \rightarrow \infty$ die Form der Signale immer weniger verändert. Im Grenzfall ergibt sich ein Abklingen mit $1/\sqrt{R}$. Dies gilt jedoch wirklich nur für Wellen, die unendlich weit vom Ursprung entfernt sind.

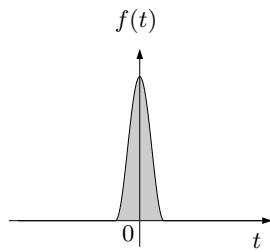


Abbildung 6.13.: Einfacher Puls als Zeitfunktion der Quellstärke in (6.6.28).

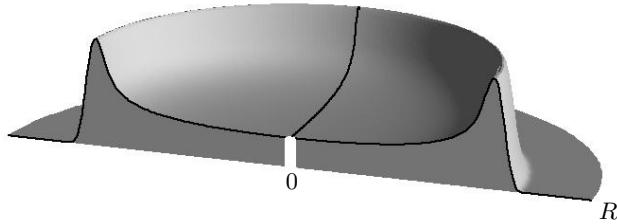


Abbildung 6.14.: Lösung für die in Abbildung 6.13 gegebenen Puls

Vergleich von ein- und zweidimensionaler Wellenausbreitung

Anscheinend ist es nicht möglich eine zylindersymmetrische Welle auszusenden, deren Form erhalten bleibt. Dagegen ist es mit den eindimensionalen ebenen Wellen und den kugelsymmetrischen dreidimensionalen Wellen möglich, ein Signal ohne Verformung zu transportieren. Eine Plausibilitätserklärung für die Besonderheiten im zylindersymmetrischen Fall wurde durch das Gedankenexperiment nach Abbildung 6.12 gegeben. Die später eintreffenden Signale von entfernten Quellen erklären die abklingende Lösung.

Ein analoges Modell lässt sich jedoch auch für eine ebene Welle konstruieren. Denkt man sich die Punktquellen nicht nur entlang einer Achse sondern in einer Ebene verteilt, so ergibt sich quasi eine eindimensionale Situation. Die eindimensionalen ebenen Wellen zeigen jedoch kein abklingendes Verhalten. Es stellt sich die Frage, wieso sich die zylindersymmetrische und die ebene Überlagerung unterscheiden. Um dies zu klären, wird das Signal einer eindimensionalen Quellverteilung berechnet.

Es wird folgende Situation betrachtet. Von allen Punkten in der x_2, x_3 -Ebene gehen identische Kugelwellen aus. Das heißt, die x_2, x_3 -Ebene ist homogen mit identischen Monopolen besetzt. Die Stärke der Monopole ist mit $f(t)$ gegeben. Die eindimensionale

6. Schallquellen

Quellverteilung hat damit die Form

$$q(\vec{x}, t) = \delta(x_1) f(t) \quad (6.6.30)$$

Dies kann in (6.6.2) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{4\pi r} dy_2 dy_3 \quad (6.6.31)$$

wobei der Abstand wieder mit

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (6.6.32)$$

abgekürzt wird. Für einen Beobachter am Ort \vec{x} ergibt sich die Lösung durch Integration über die flächige Quellverteilung.

Das Doppelintegral in (6.6.31) erstreckt sich über die gesamte Ebene $x_1 = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Beobachter auf der x_1 -Achse sitzt. Es gilt damit für die Beobachtungsposition

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.6.33)$$

Der Quellpunkt ist mit dem Vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (6.6.34)$$

gegeben. Für eine feste Beobachtungsposition \vec{x} und Beobachtungszeit t hängt der Integrand in (6.6.31) nur vom Abstand s des Quellpunktes \vec{y} zum Ursprung ab. Es gilt

$$s = \sqrt{y_2^2 + y_3^2} \quad (6.6.35)$$

Für den Abstand r des Quellpunktes zum Beobachter folgt entsprechend

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{s^2 + x_1^2} \quad (6.6.36)$$

Die geometrische Situation ist in Abbildung 6.15 dargestellt.

Zweckmäßigerweise wird die Integration nicht über x_2 und x_3 durchgeführt, sondern es wird über den Abstand s integriert. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_0^{\infty} \frac{f(t - r/c)}{4\pi r} 2\pi s ds \quad (6.6.37)$$

Zur endgültigen Lösung wird s durch τ mit

$$\tau = t - \frac{r}{c} = t - \frac{\sqrt{s^2 + x_1^2}}{c} \quad (6.6.38)$$

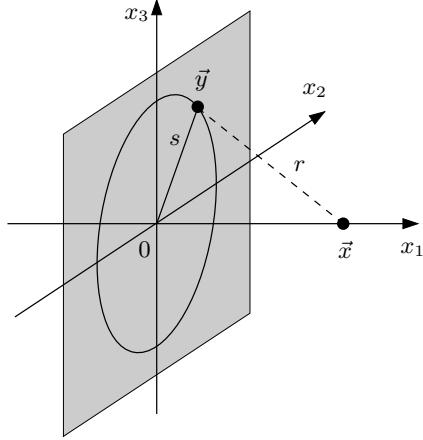


Abbildung 6.15.: Zur Integration der Quellstärke über die x_2, x_3 -Ebene.

ersetzt. Es gilt für die Differentiale

$$ds = -\frac{c \sqrt{s^2 + x_1^2}}{s} d\tau \quad (6.6.39)$$

Durchführen der Substitution ergibt

$$\phi(\vec{x}, t) = - \int_{t-x_1/c}^{\infty} \frac{f(\tau)}{4\pi \sqrt{s^2 + x_1^2}} 2\pi s \frac{c \sqrt{s^2 + x_1^2}}{s} d\tau \quad (6.6.40)$$

Im Integrand heben sich einige Terme heraus, so daß sich das Integral wesentlich vereinfacht. Man erhält schließlich

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t-x_1/c} f(\tau) d\tau \equiv F(t - x_1/c) \quad (6.6.41)$$

Das Integral in (6.6.41) hängt bei gegebener Funktion $f(t)$ ausschließlich von der oberen Integrationsgrenze $(t - x_1/c)$ ab. Das heißt, die Lösung kann als Funktion $F(t - x_1/c)$ aufgefaßt werden. Damit wird eine Welle in x_1 -Richtung beschrieben. Die Form der Welle entspricht dem Verlauf der Funktion F . Diese ergibt sich durch Integration aus f . In Abbildung 6.16 wird die Lösung $\phi(\vec{x}, t)$ für zwei verschiedenen Zeitverläufe $f(t)$ miteinander verglichen.

Senden die Quellen einen einfachen positiven Puls mit endlicher Breite aus, so ergibt sich ein einmaliger Druckanstieg am Beobachtungsort. Dies ist in Teil a) von Abbildung 6.16 zu sehen. Entscheidend ist, daß die Form des Anstiegs nicht von der Koordinate x_1

6. Schallquellen

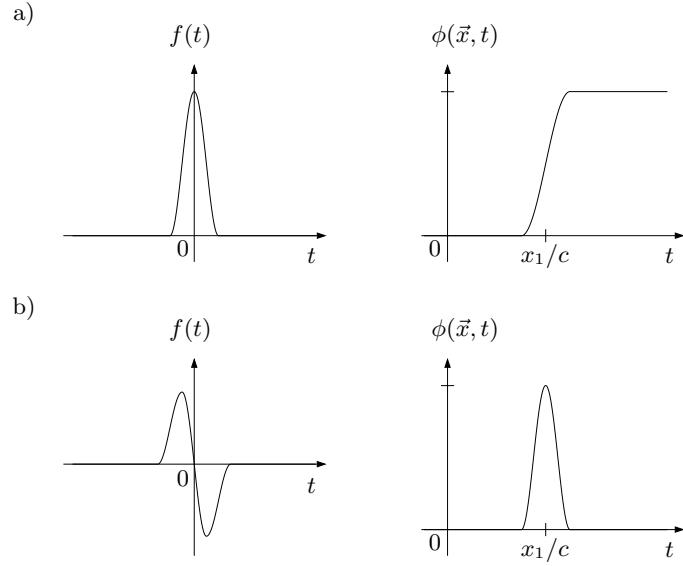


Abbildung 6.16.: Vergleich des Signalverlaufs nach (6.6.41) für verschiedene Pulsformen $f(t)$.

abhängt. Für größere x_1 folgt der Anstieg nur etwas später. Das Ergebnis kann auch anschaulich plausibel gemacht werden. Zuerst erreichen den Beobachter die Wellen von den Quellen am Ursprung. Von dort ist die Weg zu Beobachter am kürzesten. Zu späteren Zeitpunkten treffen die Anteile von den weiter entfernten Quellpunkten ein. Die Quellpunkte, deren Anteile synchron eintreffen, liegen alle auf einem Kreis um den Ursprung. Die späteren Anteile sind entsprechend dem $1/r$ -Abfall schwächer, da sie eine längere Strecke zurückgelegt haben. Jedoch ist das Gesamtgewicht dieser Anteile gleich, da entsprechend mehr Quellpunkte auf dem größeren Kreis beteiligt sind. Der $1/r$ -Abfall wird durch die r -proportionale Zunahme des Kreisumfangs gerade kompensiert, so daß sich ein konstantes Signal ergibt.

Um eine pulsförmige Welle zu erzeugen, muß die Quellstärke der Quellen einen Verlauf besitzen, wie in Teil b) der Abbildung 6.16 gezeigt wird. In jedem Fall ergibt sich durch Überlagerung aller Quellen aus der x_2, x_3 -Ebene eine gewöhnliche ebene Welle. Diese breitet sich mit Schallgeschwindigkeit in x_1 -Richtung aus, ohne das sich die Form des Wellenzuges verändert. Damit unterscheidet sich die entstehende ebene Welle vom zylindersymmetrischen Fall, in dem die Überlagerung der Signale immer eine vom Abstand abhängige Wellenform ergibt.

Harmonische Quelle

Bisher wurde nur die Abstrahlung eines Pulses betrachtet. Zuletzt soll noch die zweidimensionale harmonische Punktquelle behandelt werden. Ohne Beschränkung der All-

6.6. Zweidimensionale Schallquellen

gemeinheit kann angenommen werden, daß sich die Quelle im Ursprung befindet. Die Quellverteilung entspricht der Form (6.6.28). Für die Zeitfunktion wird

$$f(t) = A e^{i\omega t} \quad (6.6.42)$$

eingesetzt. Die entsprechende Lösung ergibt sich aus (6.6.29) mit

$$\phi(R, t) = \frac{Ac}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-R/c} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} d\tau \quad (6.6.43)$$

Das Integral auf der rechten Seite kann etwas einfacher dargestellt werden, indem man mit

$$\xi = \frac{c(t-\tau)}{R} \quad (6.6.44)$$

substituiert. Es folgt

$$\tau = t - \frac{R\xi}{c} \quad (6.6.45)$$

Daraus ergibt sich für das Differential

$$d\tau = -\frac{R}{c} d\xi \quad (6.6.46)$$

Mit (6.6.45) erhält man für den Exponentialterm im Zähler die Aufspaltung

$$e^{i\omega\tau} = e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega\xi R/c} \quad (6.6.47)$$

Für den Wurzelausdruck im Nenner folgt

$$\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2} = R \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (6.6.48)$$

Zusammen ergibt die Substitution

$$\phi(R, t) = \frac{Ac}{2\pi} \int_{-\infty}^1 \frac{e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega\xi R/c}}{R \sqrt{\xi^2 - 1}} \left(-\frac{R}{c} \right) d\xi \quad (6.6.49)$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\phi(R, t) = \frac{Ac e^{i\omega t}}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-i\omega\xi R/c}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (6.6.50)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist nicht mehr von der Beobachtungszeit t abhängig. Es ist ausschließlich Funktion des Abstands R . Die Zeitabhängigkeit steht vor dem Integral. Wie erwartet, führt die harmonische Quelle auch zu einem harmonischen

6. Schallquellen

Zeitsignal. Eine weitere Vereinfachung ist jedoch nicht mehr möglich. Der Wert des Integrals kann numerisch berechnet werden. Da Integrale dieses Typs häufiger auftreten, wurde die sogenannte Hankel-Funktion nullter Ordnung mit

$$H_0^{(2)}(s) = \frac{2i}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-is\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (6.6.51)$$

definiert. Die Ordnung der Hankel-Funktion wird als Index geschrieben. Die hochgestellte "(2)" gibt an, daß es sich um die zweite Hankel-Funktion handelt. Der Funktionswert von $H_0^{(2)}(\xi)$ ist komplex. Der Realteil entspricht der Bessel-Funktion nullter Ordnung J_0 und der Imaginärteil der Neumann-Funktion nullter Ordnung Y_0 . Es gilt

$$H_0^{(2)}(s) = J_0(s) - i Y_0(s) \quad (6.6.52)$$

Die erste Hankel-Funktion nullter Ordnung ist mit

$$H_0^{(1)}(s) = J_0(s) + i Y_0(s) \quad (6.6.53)$$

definiert. Die beiden Versionen unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils.

Die Bessel- und Neumann-Funktionen lassen sich auch als unendlichen Reihen darstellen. Diese Form ist dann geeignet, die Werte numerisch mit einer bestimmten Genauigkeit zu berechnen, in dem man die Reihe entsprechend abbricht. So sind diese Funktionen in mathematischen Bibliotheken auf vielen Rechnern implementiert. Die Bessel- und Neumann-Funktionen nullter Ordnung sind in Abbildung 6.17 dargestellt. Die Neumann-Funktion $Y_0(s)$ hat an der Stelle $s = 0$ eine Singularität. Dagegen gilt $J_0(0) = 1$. Beide Funktionen besitzen einen wellenförmigen Verlauf, deren Amplitude proportional zu $1/\sqrt{s}$ ist.

Die nach außen laufende Welle läßt sich mit der gegebenen Definition nun einfach als

$$\phi(R, t) = \frac{A}{4i} e^{i\omega t} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega R}{c}\right) \quad (6.6.54)$$

schreiben. Würde in Gleichung (6.6.54) nicht $H_0^{(2)}(s)$ sondern $H_0^{(1)}(s)$ stehen, würde die angegebene Lösung eine nach innen laufende Welle beschreiben. So stellt die Lösung in (6.6.54) eine nach außen laufende Welle dar. Zu bestimmten Zeitpunkten besitzt die Lösung $\phi(R, t)$ in radialer Richtung genau die in Abbildung 6.17 gezeigten Formen und ist proportional zu $J_0(\omega R/c)$ beziehungsweise $Y_0(\omega R/c)$. Zu anderen Zeitpunkten entspricht der Verlauf einer Überlagerung der beide Funktionen.

6.6. Zweidimensionale Schallquellen

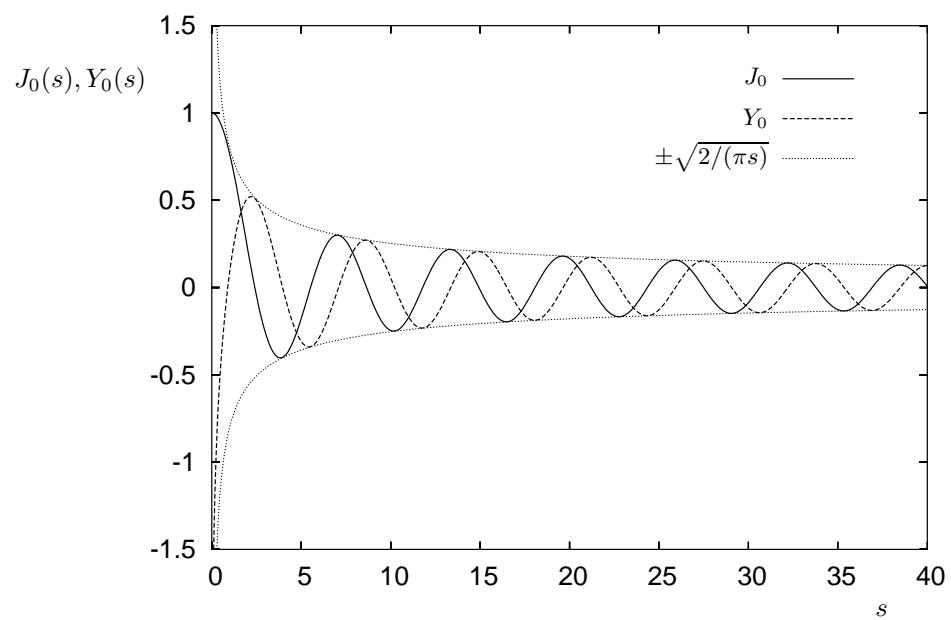


Abbildung 6.17.: Bessel- und Neumannfunktion nullter Ordnung

7. Schallerzeugung durch Strömungen

7.1. Lighthills akustische Analogie

In der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts wurden die ersten Düsentriebwerke entwickelt und eingesetzt. Mit Hilfe dieser neuen Technologie konnte die Leistungsfähigkeit der Flugzeuge deutlich verbessert werden, jedoch ergab sich durch die neuen Antriebe ein viel größeres Lärmparallelproblem als mit den vorhandenen Propellerflugzeugen. Die Schallentstehung in turbulenten Strömungsfeldern, wie sie im Strahl eines Düsentriebwerks vorliegt, war bis dahin wenig erforscht. Dies lag zum Teil auch daran, daß es sich beim turbulenten Freistrahrl um ein relativ kompliziertes Strömungsfeld handelt.

Der mit Abstand wichtigsten Beitrag zum Verständnis der Schallentstehung in turbulenten Strömungen stammt von Lighthill (1951). Die Idee von Lighthill war es, eine Wellengleichung ohne Näherung aus den nichtlinearen Gleichungen abzuleiten. Die Strömung wird in jedem Fall durch die Kontinuitätsgleichung zusammen mit der Impulsgleichung beschrieben. Die linearen und die nichtlinearen Terme werden aufgespalten, und die nichtlinearen Terme werden zusammen mit den Reibungstermen auf die rechte Seite gebracht. Auf der linken Seite ergibt sich ein "normaler" Wellenausdruck. Die Terme auf der rechten Seite können als Quellen interpretiert werden.

Herleitung

Die Herleitung der Lighthill-Gleichung wird im folgenden vorgestellt, und die einzelnen Schritte werden denen zur Herleitung der linearen Wellengleichung gegenübergestellt. Es wird von der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (7.1.1)$$

ausgegangen. Diese kann in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (7.1.2)$$

mit Summationskonvention geschrieben werden. Gleichung (7.1.2) wurde zusammen mit der Euler-Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \operatorname{grad} p = 0 \quad (7.1.3)$$

7.1. Lighthills akustische Analogie

benutzt, um die Wellengleichung in Abschnitt 2.1 abzuleiten. Die Euler-Gleichung kann in Indexschreibweise als

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (7.1.4)$$

dargestellt werden. Diese Gleichung enthält keine Reibungseffekte, und auch die äußere Kräfte sind in der gegebenen Form nicht vorhanden.

Um die Wellengleichung zu erhalten, wurden die Gleichungen (7.1.2) und (7.1.4) zunächst linearisiert. Dieser Schritt zur Vereinfachung wird jetzt ausgelassen. Statt dessen wird sogar die Euler-Gleichung durch die Impulsgleichung mit Reibung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \operatorname{div} P = 0 \quad (7.1.5)$$

ersetzt. Das heißt, es werden Reibungseffekte, die in (7.1.3) beziehungsweise (7.1.4) nicht enthalten sind, mit berücksichtigt. Auch die Impulsgleichung lässt sich komponentenweise mit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \quad (7.1.6)$$

schreiben. Die Reibungseffekte sind in dem Tensor

$$P_{ij} = (p - p_0)\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (7.1.7)$$

enthalten. Dort treten die Schubspannungen τ_{ij} auf. Mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (7.1.8)$$

ist die sogenannte Kronecker-Delta-Funktion bezeichnet.

Die Darstellung mit dem gegebenen Tensor P_{ij} ist aus Sicht der klassischen Strömungsmechanik etwas ungewöhnlich. Abweichend von der üblichen Form ist hier die Größe p_0 enthalten. In diesem Abschnitt wird anders als bisher p_0 zunächst als eine Konstante angesehen, die frei gewählt werden kann. Da in der Impulsgleichung nur die Ableitung von P_{ij} vorkommt, ist es möglich wie in (7.1.7) eine Konstante zu addieren. Die Gleichung gilt dann immer noch. Definiert man

$$p' = p - p_0 \quad (7.1.9)$$

so ergibt sich

$$P_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (7.1.10)$$

Dabei ist zu bemerken, daß die Einführung der Größe p' hier nicht mit einer Linearisierung oder sonstigen Näherungen verbunden ist. Die physikalische Bedeutung von p' hängt von der Wahl der Konstante p_0 ab.

Komponentenweise kann der Tensor P_{ij} als Matrix mit

$$P_{ij} = - \begin{pmatrix} \tau_{11} - p' & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - p' & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - p' \end{pmatrix} \quad (7.1.11)$$

7. Schallzeugung durch Strömungen

geschrieben werden. Für die folgenden Umformungen spielt die konkrete Form des Spannungstensors τ_{ij} keine Rolle. So sind zum Beispiel die Schubspannungen in einem Newtonschen Fluid durch den Ansatz

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (7.1.12)$$

gegeben, wobei η die Viskosität bezeichnet. Mit einem solchen Ansatz geht die Impulsgleichung (7.1.6) in die Navier-Stokes-Gleichung über. Die Beziehung (7.1.12) wird hier jedoch überhaupt nicht benötigt. Die folgenden Überlegungen gelten daher allgemein für beliebige Fluide.

Bei der Herleitung der linearen Wellengleichung wurde zuerst die linearisierte Kontinuitätsgleichung nach der Zeit differenziert. Die Ableitung wird nun auf die nichtlinearen Variante angewendet. Aus (7.1.2) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = 0 \quad (7.1.13)$$

In nächsten Schritt wurde die Divergenz von der linearisierten Euler-Gleichung gebildet. Das Entsprechende wird hier mit der nichtlinearen Impulsgleichung durchgeführt. Aus (7.1.6) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \quad (7.1.14)$$

Dabei wurden im ersten Term die Ableitungen vertauscht. Der zweite Term in (7.1.13) ist mit den ersten Term in (7.1.14) identisch. Daran hat sich durch das Auslassen der Linearisierung nichts geändert. Zieht man (7.1.14) von (7.1.13) ab, folgt die Beziehung

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) = 0 \quad (7.1.15)$$

Im zweiten Term dieser Gleichung sind die Nichtlinearitäten und Reibungseffekte enthalten.

Entsprechend zu p_0 wird mit ρ_0 eine weitere Konstante eingeführt, die zunächst frei wählbar ist. Analog wird auch

$$\rho' = \rho - \rho_0 \quad (7.1.16)$$

definiert. Es gilt für die Ableitung

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \quad (7.1.17)$$

Damit kann (7.1.15) in

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij}) \quad (7.1.18)$$

7.1. Lighthills akustische Analogie

umgeformt werden. Um schließlich auf der linken Seite einen Wellenausdruck zu erhalten, wird von beiden Seiten der Ausdruck

$$c_0^2 \Delta \rho' = c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_k^2} = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\delta_{ij} \rho') \quad (7.1.19)$$

abgezogen. Dabei ist c_0 eine weitere Konstante, die zunächst frei wählbar ist. Man erhält

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij} - c_0^2 \delta_{ij} \rho') \quad (7.1.20)$$

Es ergibt sich tatsächlich auf der linken Seite ein Ausdruck, wie er in der Wellengleichung zu finden ist. Ungewöhnlich scheint, daß in dem Wellenausdruck die Abweichung der Dichte ρ' und nicht die Druckschwankung auftritt. Gegenüber der üblichen Form ist der Ausdruck auch noch mit c_0^2 multipliziert. Dies ändert jedoch nichts an den Eigenschaften der Gleichung. Beziehung (7.1.20) stellt eine inhomogene Wellengleichung für ρ' dar. Die linke Seite beschreibt die lineare Ausbreitung der Schwankungen mit der Geschwindigkeit c_0 . Durch die rechte Seite ist eine Quellverteilung gegeben.

Üblicherweise wird der Ausdruck in den runden Klammern auf der rechten Seite mit

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + P_{ij} - c_0^2 \delta_{ij} \rho' \quad (7.1.21)$$

abgekürzt. Setzt man P_{ij} nach (7.1.10) ein, ergibt sich

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \tau_{ij} + \delta_{ij} (p' - c_0^2 \rho') \quad (7.1.22)$$

Damit wird die inhomogene Wellengleichung zu

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.1.23)$$

Dies ist die klassische Form der Lighthill-Gleichung, wie man sie häufig in der Literatur findet. Der Tensor T_{ij} wird als Lighthillscher Spannungstensor bezeichnet. Durch die zweite räumliche Ableitung der T_{ij} ergibt sich eine Quadrupolverteilung.

Bemerkenswert ist, daß die Lighthill-Gleichung (7.1.23) ohne Näherung aus den nichtlinearen Gleichungen folgt. Sie gilt damit überall, wenn man die Gültigkeit der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung voraussetzt.

Im freien Raum ohne Berandungen kann die Lösung von (7.1.23) angegeben werden. Sie lautet

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (7.1.24)$$

Diese Lösung ist jedoch zunächst nicht von großem praktischen Nutzen. Die zu berechnende Größe ρ' tritt auch auf der rechten Seite auf. Um sie mit (7.1.24) zu bestimmen, muß sie schon überall bekannt sein. Dies macht wenig Sinn. Zudem sind die drei Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 noch frei wählbar.

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Eigenschaften und Anwendungen

Die Lighthill-Gleichung (7.1.23) ergibt sich ohne Näherungen und Linearisierungen durch Umformungen der strömungsmechanischen Grundgleichungen. Die lineare Wellengleichung basiert auf den selben Grundgleichungen. Bei ihrer Herleitung wird die Reibung vernachlässigt, und die Grundgleichungen werden in einem der ersten Schritte linearisiert. Sie gilt, wenn nur kleine Schwankungen vorliegen und das Medium im Mittel ruht. Bei diesen Bedingungen sollte die Lighthill-Gleichung daher bis auf eine geringe Abweichung mit der Wellengleichung übereinstimmen. Es sollte sogar möglich sein, die Wellengleichung für den Schalldruck aus der Lighthill-Gleichung zu gewinnen. Dazu müssen nur die entsprechenden Vernachlässigungen und Näherungen sozusagen "nachträglich" vorgenommen werden.

Auf den ersten Blick scheint es relativ leicht zu sein, aus Gleichung (7.1.23) eine "normale" Wellengleichung abzuleiten. Auf der linken Seite ist bereits ein linearer Wellenausdruck vorhanden. Allerdings ist die physikalische Deutung dieses Ausdrucks nicht so einfach, wie man vielleicht vermutet. Es ist zu beachten, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 eine frei wählbare Konstante ist. Auch in der Schwankungsgröße $\rho' = \rho - \rho_0$ steckt eine gewisse Unsicherheit über deren Bedeutung, da ρ_0 frei wählbar ist. Damit die linke Seite der Lighthill-Gleichung (7.1.23) wirklich dem "normalen" Wellenausdruck entspricht, müssen die freien Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 geeignet gewählt werden. Zusätzlich muß auch das Bezugssystem, in dem man die Gleichung anwendet, passend festgelegt werden. Die Wellengleichung, wie sie in Abschnitt 2.1 abgeleitet wurde, gilt nur, wenn das Medium im Mittel ruht. Die Lighthill-Gleichung gilt unabhängig von der Wahl der Konstanten und des Bezugssystems. Damit die linke Seite der Gleichung die Ausbreitung von Wellen in der gewohnten Weise beschreibt, muß die mittlere Geschwindigkeit gleich Null sein. Dieser Fall soll zunächst untersucht werden.

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß in gesamten Raum nur kleine Schwankungen um einen Ausgangszustand auftreten. Das Bezugssystem wird so gewählt, daß im Ausgangszustand überall $v_i = 0$ gilt. Alle Schwankungen der Geschwindigkeit werden durch Schall hervorgerufen. Man kann die Geschwindigkeit als Schnelle auffassen:

$$v_i = v'_i \quad (7.1.25)$$

Als Konstante ρ_0 wird die Dichte im Ausgangszustand gewählt. Entsprechend ist p_0 der Druck und c_0 die Schallgeschwindigkeit im Ausgangszustand. Damit ist ρ' eine kleine Schwankung im akustischen Sinn, und die linke Seite von (7.1.23) ergibt einen Wellenausdruck, der die Ausbreitung der Schwankungen mit Schallgeschwindigkeit beschreibt.

Bis auf einen Fehler von zweiter Ordnung gilt die lineare Wellengleichung für den Schalldruck p' . Entsprechend gilt auch eine Wellengleichung für die Dichteschwankungen ρ' . Sie kann als

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = 0 \quad (7.1.26)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung gilt näherungsweise, wenn lediglich kleine Schwankungen auftreten. Daraus folgt, daß die rechte Seite von (7.1.23) in dem be-

7.1. Lighthills akustische Analogie

trachteten Fall zu vernachlässigen sei muß. Der Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \quad (7.1.27)$$

muß im akustischen Sinn klein sein gegenüber den Termen auf der linken Seite, wie zum Beispiel

$$c_0^2 \Delta \rho' \quad (7.1.28)$$

Um dies zu überprüfen, wird der Lighthillsche Spannungstensor T_{ij} genauer betrachtet. Der Term

$$\rho v_i v_j \quad (7.1.29)$$

ist von zweiter Ordnung in den Schwankungsgrößen. In akustischen Wellen sind die Spannungen durch Reibung gegenüber den Druckspannungen sehr gering. Damit ist auch τ_{ij} gegenüber p' oder $c_0^2 \rho'$ zu vernachlässigen. Bis auf einen Fehler höherer Ordnung gilt für die Schwankungen

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (7.1.30)$$

Somit ist die Differenz $p' - c_0^2 \rho'$ auch von höherer Ordnung. Zusammen ergibt sich daher tatsächlich, daß die Lighthillschen Spannungen T_{ij} in einem Gebiet, in dem nur kleine Schwankungen im akustischen Sinn auftreten, gegenüber den Termen von erster Ordnung vernachlässigt werden können. Formal kann man schreiben

$$|T_{ij}|_{\max} \ll |c_0^2 \rho'|_{\max} \quad (7.1.31)$$

Das Maximum wird dabei über den betrachteten Bereich und über die Zeit genommen.

In der Lighthill-Gleichung treten die Ableitungen von T_{ij} und $c_0^2 \rho'$ auf. Es stellt sich die Frage, ob aus (7.1.31) auch

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \right|_{\max} \ll |c_0^2 \Delta \rho'|_{\max} \quad (7.1.32)$$

folgt. Man könnte sich vorstellen, daß die Größe T_{ij} räumlich mit einer relativ kurzen Wellenlänge oszilliert. Obwohl die Amplitude von T_{ij} viel kleiner als die von $c_0^2 \rho'$ ist, könnte rein theoretisch für die zweiten Ableitungen das Gegenteil gelten. In einer Schallwelle sind jedoch die Schwankungen aller Größen miteinander verknüpft. Daher können die Lighthillschen Spannungen auch nur mit der gleichen Wellenlänge oszillieren wie die anderen Größen. Unter diesen Bedingungen folgt dann wirklich aus (7.1.31) immer auch (7.1.32).

Die rechte Seite der Lighthill-Gleichung ist also vernachlässigbar klein, wenn nur kleine Schwankungen vorliegen. Es sei nochmal darauf hingewiesen, daß dies nur bei passender Wahl der Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 und des Bezugssystems gilt. Stimmen zum Beispiel die Konstanten nicht alle mit den entsprechenden Werten im Ausgangszustand überein, dann kann keine Abschätzung für die rechte Seite angegeben werden. Im allgemeinen wird ihr Wert – relativ zu den kleinen Schwankungen – dann groß werden.

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Liegen nicht nur kleine Schwankungen vor, dann ist es unter Umständen nicht mehr möglich, durch Anpassung der Konstanten die rechte Seite der Lighthill-Gleichung auf relativ kleine Werte zu beschränken. Betrachtet man zum Beispiel einen einzelnen Wirbel im freien Raum, so kann je nach Zirkulation im Kernbereich die Größe $\rho v_i v_j$ groß werden. Daran kann auch die Wahl eines geeigneten Bezugssystems nichts ändern. Man kann es nur so wählen, daß die Geschwindigkeit \vec{v} außerhalb des Kernbereichs abfällt und mit steigendem Abstand vom Wirbelzentrum gegen Null geht. Im Außenbereich ist dann die rechte Seite der Lighthill-Gleichung klein im akustischen Sinn. Daraus ergibt sich die typische Interpretation der Lighthill-Gleichung. Sie wird als Wellengleichung für kleine Störungen verstanden, die überall gilt. In bestimmten Bereichen – wie zum Beispiel den Kernbereich des Wirbels – ergeben sich auf der rechten Seite Quellterme, die nicht vernachlässigt werden können. Außerhalb dieser Bereiche wird die Quellstärke näherungsweise gleich Null gesetzt.

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß die Größe $\rho v_i v_j$ besonders groß in Bereichen mit turbulenter Strömung ist. So spielt die zeitliche Mittelwert $\langle v_i v_j \rangle$, die als Reynoldssche Spannungen bezeichnet werden, bei der theoretischen Beschreibung der Turbulenz eine große Rolle. Es wurden daher viele Messungen gerade dieser Größe durchgeführt. Typischerweise sind in turbulenten Strömungen die Reynoldsschen Spannungen deutlich größer als die laminaren Spannungen, und es gilt

$$|\rho v_i v_j|_{\max} \gg |\tau_{ij}|_{\max} \quad (7.1.33)$$

So wird es besonders dort zu stärkeren Quellen kommen.

Es können auch noch andere Effekte zu Quellen führen. Wenn die Schwankungen des Drucks und der Dichte größer werden, dann wächst auch der Fehler in der linearisierten Beziehung (7.1.30) immer weiter an. Ab einer bestimmten Stärke der Schwankungen werden die nichtlinearen Abweichungen deutlich, und die Differenz $p' - c_0^2 \rho'$ ist nicht mehr vernachlässigbar. Das gleiche gilt auch, wenn räumliche Entropieschwankungen vorliegen. Als Beispiel kann ein einfacher sogenannter "Hot Spot" betrachtet werden. Der Druck ist überall konstant, jedoch ist in einem kleinen Bereich die Temperatur erhöht. Entsprechend findet man dort eine niedrigere Dichte. Wählt man die Konstanten p_0 , ρ_0 und c_0 so, daß im Außenbereich die Differenz $p' - c_0^2 \rho'$ verschwindet, ergibt sich im "Hot Spot" eine von dem Temperaturunterschied abhängiger Wert. So können sich durch nichtlineare Effekte relativ große Werte für die Lighthillschen Spannungen T_{ij} ergeben.

Die bisherigen Überlegungen führen direkt auf einen typischen Anwendungsfall der Lighthill-Gleichung. Im allgemeinen kann der Bereich, in dem die nichtlinearen Effekte und die Reibung eine Rolle spielen, räumlich eingegrenzt werden. Es wird dann angenommen, das außerhalb dieses Bereiches nur kleine Störungen auftreten und die Lighthillschen Schubspannungen T_{ij} werden dort gleich Null gesetzt. So folgt für die Lösung im Fall ohne Berandungen näherungsweise

$$\rho'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (7.1.34)$$

7.1. Lighthills akustische Analogie

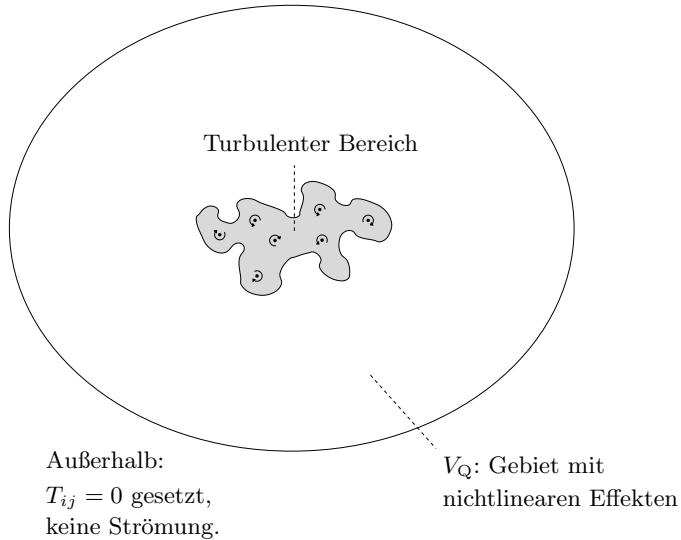


Abbildung 7.1.: Prinzipskizze zur Anwendung der Lighthill-Gleichung

Dabei ist im Vergleich zur exakten Lösung nur der Integrationsbereich auf ein Volumen V_Q , welches alle Gebiete mit nichtlinearen Effekten umfaßt, eingeschränkt worden. Das Vorgehen ist in Abbildung 7.1 illustriert. In dem Volumen V_Q befindet sich die eigentliche Schallquelle, wie zum Beispiel ein Bereich mit turbulenter Strömung.

Aus diese Weise läßt sich die Lighthill-Gleichung praktisch einsetzen. Ist in einem begrenzen Bereich durch numerische Simulation die Strömung bekannt, können die akustischen Schwankungen außerhalb des Rechengebietes mit der Lösung (7.1.34) ermittelt werden. Damit läßt sich der Schall im Fernfeld berechnen. Dies ist durch eine numerische Simulation der nach außen laufenden Wellen wegen der Größe des benötigten Rechengitters im allgemeinen nicht möglich. Zu beachten ist, daß die Lösung in der Form (7.1.34) nur im Fall ohne Berandungen gilt.

Lighthill selbst benutzte die Lösung seiner Gleichung für eine Abschätzung des durch einen turbulenten Freistrahrl erzeugten Schalls. Dabei geht er ebenfalls davon aus, daß das "aktive Gebiet", in dem die T_{ij} wirklich einen nennenswerten Beitrag liefern, um den Freistrahrl eingeschränkt werden kann.

Lighthill-Gleichung mit dem Schalldruck

In der Literatur findet man auch eine Variante der Lighthill-Gleichung, die auf der linken Seite die Druck- statt den Dichteschwankungen enthält. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man die Lighthill-Gleichung für die Druckschwankungen ableiten kann. Bei der gezeigten Herleitung ergab sich als Zwischenergebnis die Beziehung (7.1.18). Durch Subtraktion eines geeigneten Ausdrucks von beiden Seiten folgte daraus die klassische Lighthill-Gleichung. Nun wird abweichend von der ursprünglichen Herlei-

7. Schallerzeugung durch Strömungen

tung der Ausdruck

$$\Delta p' = \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (p' \delta_{ij}) \quad (7.1.35)$$

subtrahiert. Es ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + P_{ij} - p' \delta_{ij}) \quad (7.1.36)$$

Setzt man den Tensor

$$P_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (7.1.37)$$

ein, vereinfacht sich die rechte Seite, und es folgt

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) \quad (7.1.38)$$

Im nächsten Schritt wird auf beiden Seiten

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c_0^2} p' - \rho' \right) \quad (7.1.39)$$

addiert. Es ergibt sich

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c_0^2} p' - \rho' \right) \quad (7.1.40)$$

Diese Gleichung erhält die einfache Form

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij}^* + \frac{\partial^2}{\partial t^2} W \quad (7.1.41)$$

wenn man die Abkürzungen

$$T_{ij}^* = \rho v_i v_j - \tau_{ij} \quad (7.1.42)$$

und

$$W = \frac{1}{c_0^2} p' - \rho' \quad (7.1.43)$$

einführt. Dabei ist T_{ij}^* ein verallgemeinerter Spannungstensor, der dem Lighthillschen Spannungstensor ähnlich ist, jedoch nicht mit ihm übereinstimmt. Um den Unterschied deutlich zu machen wurde das Symbol * verwendet. Die Größe W kann als ein Maß für die Abweichung von der linearen Beziehung (7.1.30) angesehen werden. Gleichung (7.1.41) stellt eine inhomogene Wellengleichung für die Druckschwankungen p' dar. Sie folgt wie die originale Lighthill-Gleichung ohne Näherungen aus der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung. Die linke Seite besitzt die übliche Form der Wellengleichung für den Schalldruck. Auf der rechten Seite stehen zwei Ausdrücke, ein Quadrupol- und ein Monopol-Quellterm. Dies ist sozusagen der Preis dafür, daß man auf der linken Seite die gewohnte Form wiederfindet.

7.2. Freistrahllärm

Lighthill benutzte die Lösung (7.1.34), um die Abhängigkeit des Freistrahllärms von den Parametern des Freistrahls zu bestimmen. Dazu führte er die im folgenden dargestellten Abschätzungen und Dimensionsüberlegungen durch. In Abbildung 7.2 ist die

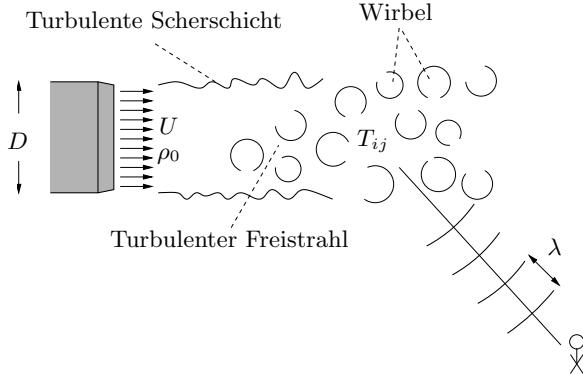


Abbildung 7.2.: Düse mit turbulenten Freistahl

Situation illustriert. Der Freistahl tritt aus einer Düse mit einem Durchmesser D aus. Das Geschwindigkeitsprofil am Austritt wird eben angenommen. Die Geschwindigkeit des Freistrahls wird mit U bezeichnet. Der Freistahl wird als kalt vorausgesetzt. Das bedeutet, die Dichte im Inneren entspricht der Dichte im Außenbereich, die mit ρ_0 bezeichnet wird.

Am Rand des Freistrahls bildet sich eine turbulente Scherschicht. In dem turbulenten Bereich entstehen Wirbel. Mit den Wirbeln sind ebenfalls Scherungen verbunden, so daß in diesem Bereich die Lighthillschen Spannungen T_{ij} besonders groß sind. Es wird davon ausgegangen, daß eine typische Zeitkonstante Δt in dem turbulenten Gebiet existiert. Diese kann man zum Beispiel als die Zeit ansehen, die im Mittel zwischen dem Eintreffen von zwei Wirbeln an einem festgelegten Punkt vergeht. Mit dieser Zeitkonstante ist eine Frequenz und eine typische Wellenlänge λ verknüpft. Das bedeutet, wenn sich die Vorgänge im Freistahl durchschnittlich nach der Zeitspanne Δt wiederholen, ergibt sich im Mittel diese Wellenlänge.

Die Abläufe im Freistahl werden durch U , D , ρ_0 und weitere Parameter, wie zum Beispiel die Zähigkeit, festgelegt. Aus einer Dimensionsbetrachtung ergibt sich für die typische Zeitkonstante die Proportionalität

$$\Delta t \sim \frac{D}{U} \quad (7.2.1)$$

Damit folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = c_0 \Delta t \sim c_0 \frac{D}{U} \quad (7.2.2)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Dies kann durch

$$\lambda \sim \frac{D}{M} \quad (7.2.3)$$

ausgedrückt werden, wenn man die mit der Schallgeschwindigkeit im Außenbereich gebildete Machzahl

$$M = \frac{U}{c_0} \quad (7.2.4)$$

einführt.

Auf den ersten Blick mag die einfache Dimensionsbetrachtung recht grob erscheinen, jedoch läßt sich die Beziehung (7.2.3) tatsächlich mit Beobachtungen und Erfahrungen aus dem Alltag in Einklang bringen. Jeder kennt das typische Geräusch eines defekten Fahrrad- oder Autoreifens, aus dem langsam durch ein kleines Loch die Luft entweicht. Es ist ein Zischen zu hören, das durch die turbulenten Verwirbelungen der austretenden Luft hervorgerufen wird. Das Geräusch enthält Frequenzen, die am oberen Ende des hörbaren Bereichs liegen. Der Überdruck, der normalerweise in einem Autoreifen herrscht, bewirkt eine Strömung mit Schallgeschwindigkeit im engsten Querschnitt der Öffnung. Das bedeutet, die Machzahl in dem "unerwünschten" Freistrahrl erreicht zumindest lokal Werte um Eins und darüber. Die Proportionalität (7.2.3) sagt aus, daß bei gleicher Machzahl eine Vergrößerung der Ausdehnung D die typische Wellenlänge erhöht. Entsprechend muß sich die typisch Frequenz verringern. In der Tat sind die Frequenzen, die der relative große turbulente Freistahl mit ähnlichen Machzahlen hinter einem Flugzeugtriebwerk erzeugt, im Vergleich viel niedriger. In dem Spektrum sind sogar Anteile unterhalb der Hörschwelle enthalten. Dies kann jeder bestätigen, der an einem Flughafen einmal aus der Nähe den Start eines Düsenflugzeugs erlebt hat.

Die Ausdehnung des Freistrahls wird proportional zum Durchmesser D angenommen. Das heißt, auch die Länge des Strahls wird durch den Durchmesser bestimmt. Dies entspricht den Beobachtungen. Der Strahl hinter dem Flugzeugtriebwerk ist natürlich viel länger als der Freistahl am defekten Autoreifen.

Unabhängig, wie groß die Proportionalitätskonstante in (7.2.3) wirklich ist, ergibt gilt für eine hinreichend kleine Machzahl M immer

$$\lambda \gg D \quad (7.2.5)$$

Das heißt, im Grenzfall $M \rightarrow 0$ ist die Wellenlänge groß gegenüber der Ausdehnung der Düse und des gesamten Freistrahls. Die Schallquelle, die durch den Freistahl entsteht, ist in diesem Grenzfall kompakt. Diese Eigenschaft wird im weiteren verwendet, um einige Näherungen und Abschätzungen durchzuführen. Das bedeutet, die gesamte Betrachtung wird auf sehr kleine Machzahlen eingeschränkt. Zusätzlich werden alle festen Wände und damit zum Beispiel auch die Düse, die den Freistahl erzeugt, vernachlässigt. Man geht von der Lösung der Lighthill-Gleichung für den freien Raum ohne Berandungen nach (7.1.34) aus.

Im Abschnitt 6.5 wurde gezeigt, wie die Lösung für eine kompakte Quelle im Fernfeld abgeschätzt werden kann. Dort wurde die Lösung (6.5.1) der inhomogenen Wellengleichung für den Schalldruck behandelt. Die Lösung der Lighthill-Gleichung (7.1.34)

7.2. Freistrahlärm

unterscheidet sich davon rein formal durch die zweite Ableitung vor dem Integral. Dennoch lassen sich die in Abschnitt 6.5 gewonnenen Ergebnisse auch hier anwenden. Dazu wird zunächst die Lösung (7.1.34) in der Form

$$\rho' = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.2.6)$$

mit der Abkürzung

$$F_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{V_Q} \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (7.2.7)$$

geschrieben. Im ersten Schritt wird das Feld F_{ij} für weit entfernte Beobachter abgeschätzt, und dann erst wird die zweite Ableitung gebildet. Wie in Abschnitt 6.5 wird nur eine Frequenz betrachtet. Die ist jetzt natürlich die typische Frequenz $\omega = 2\pi c/\lambda$, die der oben beschriebenen typischen Wellenlänge λ entspricht. Man nimmt damit an, die kompakte Quelle strahlt im wesentlichen mit dieser Frequenz ab. Die Quellstärke ist durch die Lighthill-Spannungen T_{ij} festgelegt. Es soll also

$$T_{ij}(\vec{x}, t) = \hat{T}_{ij}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (7.2.8)$$

gelten. Dabei ist \hat{T}_{ij} die komplexe Amplitude der Lighthill-Spannung an einem Ort. Setzt man dies in die Gleichung (7.2.7) ein, folgt

$$F_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{V_Q} \frac{\hat{T}_{ij}(\vec{y}) e^{i\omega(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c_0)}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (7.2.9)$$

Die Entfernung des Beobachters von der Quelle wird wieder mit

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| \quad (7.2.10)$$

bezeichnet. Dabei ist \vec{y}_M ein festgelegter Mittelpunkt der Quelle. Dies muß nicht unbedingt der geometrische Mittelpunkt des Freistrahls sein, sondern es kann zum Beispiel auch einfach die Mitte des Düsenaustritts genommen werden. Für einen Beobachtungs-ort \vec{x} im Fernfeld gilt $R \gg \lambda$. Wegen der kompakten Quelle ist $\lambda \gg D$, und damit gilt auch $R \gg D$. Das heißt, ein Beobachter im akustischen Fernfeld befindet sich bei kompakter Quelle automatisch auch im geometrischen Fernfeld. Unter diesen Voraussetzungen kann, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt, der Ausdruck $|\vec{x} - \vec{y}|$ im Integral durch den mittleren Abstand R ersetzt werden. Es ergibt sich im Fernfeld

$$F_{ij}(\vec{x}, t) \approx \int_{V_Q} \hat{T}_{ij}(\vec{y}) \frac{e^{i\omega(t - R/c_0)}}{R} d^3\vec{y} \quad (7.2.11)$$

Der Quotient im Integranden hängt nun nicht mehr von der Integrationsvariablen ab. Er kann vor das Integral gezogen werden. Man erhält

$$F_{ij}(\vec{x}, t) \approx A_{ij} \frac{e^{i\omega(t - R/c_0)}}{R} \quad (7.2.12)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Dabei ist mit

$$A_{ij} = \int_{V_Q} \widehat{T}_{ij}(\vec{y}) d^3\vec{y} \quad (7.2.13)$$

das von dem Beobachter (Ort und Zeit) unabhängige Restintegral über die komplexe Amplitude abgekürzt worden.

Der Quotient, welcher in Gleichung (7.2.11) und (7.2.12) auftritt, wird hier wie in Abschnitt 6.5 mit

$$F_M = \frac{e^{i\omega(t-R/c_0)}}{R} \quad (7.2.14)$$

abgekürzt. Es ist dann

$$F_{ij}(\vec{x}, t) \approx A_{ij} F_M(\vec{x}, t) \quad (7.2.15)$$

Für die Dichte im Fernfeld kann

$$\rho' \approx \frac{A_{ij}}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2 F_M}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.2.16)$$

geschrieben werden. Die hier vorkommende zweite Ableitung wurde bereits berechnet und auch für das Fernfeld abgeschätzt. Nach (6.5.52) gilt

$$\left. \frac{\partial^2 F_M}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{R \gg \lambda} = \left(\frac{i\omega}{c_0} \right)^2 F_M \cos \theta_i \cos \theta_j \quad (7.2.17)$$

Mit θ_i und θ_j ist jeweils der Beobachtungswinkel relativ zur x_i - beziehungsweise x_j -Achse bezeichnet. Der Ausdruck fällt wie das Feld F_M selbst mit $1/R$ nach außen ab. Setzt man die zweite Ableitung in Gleichung (7.2.16) ein, ergibt sich

$$\rho' \approx \frac{A_{ij}}{4\pi c_0^2} \left(\frac{i\omega}{c_0} \right)^2 \left\{ \frac{e^{i\omega(t-R/c_0)}}{R} \right\} \cos \theta_i \cos \theta_j \quad (7.2.18)$$

Im nächsten Schritt wird betrachtet, zu welchen Größen die Dichteschwankungen im Fernfeld proportional sind. Das heißt, wie skaliert der Ausdruck auf der rechten Seite von (7.2.18), wenn sich zum Beispiel die Machzahl, die mittlere Dichte, die Schallgeschwindigkeit oder die Ausdehnung des Freistrahls ändert. Aus Dimensionsüberlegungen folgt für die komplexe Amplitude der Lighthill-Spannungen die Proportionalität

$$\widehat{T}_{ij} \sim \rho_0 U^2 \quad (7.2.19)$$

Die Spannungen T_{ij} , die typischerweise auftreten, sind damit bei doppelter Geschwindigkeit viermal so groß. Das Integral über das Volumen V_Q ist proportional zur Ausdehnung von V_Q und damit aus Dimensionsgründen proportional zu D^3 . Es folgt entsprechend

$$A_{ij} = \int_{V_Q} \widehat{T}_{ij} d^3\vec{y} \sim \rho_0 U^2 D^3 \quad (7.2.20)$$

In der runden Klammer in (7.2.18) tritt der Faktor ω/c_0 auf. Er ist umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ . Die geschweifte Klammer entspricht dem Feld F_M , welches mit $1/R$ skaliert.

Damit kann auch für die Dichte im Fernfeld eine Proportionalität angegeben werden. Unter Berücksichtigung der verschiedenen Relationen ergibt sich aus (7.2.18) für die Dichte im Fernfeld

$$\rho' \sim \frac{\rho_0 U^2 D^3}{c_0^2} \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{R} \quad (7.2.21)$$

Wegen (7.2.3) gilt

$$\frac{1}{\lambda} \sim \frac{M}{D} \quad (7.2.22)$$

Damit kann die Beziehung für die Dichte weiter vereinfacht werden. Es folgt

$$\rho' \sim \rho_0 M^4 \frac{D}{R} \quad (7.2.23)$$

Die hergeleitete Beziehung besagt, daß die Dichteschwankungen an einem festen Punkt im Fernfeld proportional zur vierten Potenz der Machzahl sind. Eine Verdoppelung der Geschwindigkeit des Freistrahls würde 16 mal so starke Dichteschwankungen bewirken.

Im Zusammenhang mit dem Strahlärm wird häufig die akustische Leistung betrachtet. Sie ist proportional zum Quadrat der Schwankungen ρ'^2 . Für die mittlere akustische Leistung des Freistrahls folgt

$$\langle \rho'^2 \rangle \sim \rho_0^2 M^8 \frac{D^2}{R^2} \quad (7.2.24)$$

Diese Beziehung ist das bekannte M^8 -Gesetz, das häufig auch als U^8 -Gesetz bezeichnet wird. Es drückt die sehr starke Abhängigkeit der akustischen Leistung von der Geschwindigkeit des Freistrahls aus.

Hier sei nochmal darauf hingewiesen, daß die Beziehung (7.2.24) nur für sehr kleine Machzahlen mit $M \ll 1$ gilt. Zusätzlich ist die Überlegung auch nur für kalte Freistrahlen gültig, bei denen im Inneren die gleiche Dichte ρ_0 wie im Außenbereich herrscht. Für diesen Fall ist das M^8 -Gesetz auch experimentell bestätigt worden.

Näherung für nichtkompakte Quelle

Bisher wurde von einer kompakten Quelle ausgegangen. Dadurch konnte die gezeigte Abschätzungen für das Fernfeld erst durchgeführt werden. Im folgenden soll eine approximative Umformung der Gleichung (7.1.34) vorgestellt werden, die nicht die Kompaktheit sondern lediglich das geometrische Fernfeld voraussetzt. Es wird angenommen, daß der Abstand des Beobachtungsortes zur Quelle groß gegenüber deren Ausdehnung ist. Zur Vereinfachung wird zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Bezugssystem so gewählt, daß der Mittelpunkt der Quellverteilung – also des Freistrahls – im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Das heißt, es gilt

$$\vec{y}_M = 0 \quad (7.2.25)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Damit wird der Abstand einfach

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| = |\vec{x}| \quad (7.2.26)$$

Für den weit entfernten Beobachter wird vorausgesetzt, daß alle Quellpositionen \vec{y} im Quellvolumen V_Q die Ungleichung

$$|\vec{y}| \ll |\vec{x}| \quad (7.2.27)$$

erfüllen. Damit kann die erste Näherung

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (7.2.28)$$

angegeben werden. Sie entspricht der Approximation (6.5.8), die in Abschnitt 6.5 für Beobachter im geometrischen Fernfeld bereits abgeleitet wurde. Mit ihr folgt für die Lösung der Lighthill-Gleichung (7.1.34) die Beziehung

$$\rho'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \right\} \quad (7.2.29)$$

Der Term $1/|\vec{x}|$ ist vor das Integral gezogen worden. Dies dient zur Vorbereitung der weiteren Schritte.

Im folgenden soll die Lösung in eine praktischere Form gebracht werden. Dazu wird die zweite Ableitung berechnet. Da nur der Schall im Fernfeld von Interesse ist, werden ausschließlich die Anteile der Lösung berücksichtigt, die mit $1/R$ abfallen. Alle Anteile, die mit höheren Potenzen von $1/R$ skalieren werden vernachlässigt. Im ersten Schritt wird die erste Ableitung des Ausdrucks in der geschweiften Klammer betrachtet. Es muß die Produktregel angewendet werden. Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \right\} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} + \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} \quad (7.2.30)$$

wobei die retardierte Zeit mit

$$\tau(\vec{x}, \vec{y}, t) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \quad (7.2.31)$$

abgekürzt ist. Auf der rechten Seite von (7.2.30) stehen zwei Summanden, in denen jeweils das gleiche Integral auftritt. Das Integral selbst fällt nicht mit der Entfernung R ab. Dagegen skaliert sowohl die x_i -Ableitung des Integrals als auch die Vorfaktoren vor den Integralexpressionen irgendwie mit $1/R$. Zunächst wird der erste Vorfaktor betrachtet. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \right\} = -\frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \quad (7.2.32)$$

7.2. Freistrahlärm

Dieser Ausdruck fällt mit $1/|\vec{x}|^2$ beziehungsweise $1/R^2$ ab. Diese Skalierung gilt dann für den gesamten ersten Summand auf der linken Seite. Man kann

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \right\} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (7.2.33)$$

schreiben.

Um den zweiten Summand in (7.2.30) zu untersuchen, wird die x_i -Ableitung mit der Integration vertauscht. Es ergibt sich

$$\frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} = \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T_{ij}(\vec{y}, \tau) \right\} d^3 \vec{y} \quad (7.2.34)$$

Der Ausdruck $T_{ij}(\vec{y}, \tau)$ hängt über die retardierte Zeit τ von der Beobachtungsposition \vec{x} ab. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T_{ij}(\vec{y}, \tau) \right\} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau}(\vec{y}, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \quad (7.2.35)$$

Für die Ableitung von τ ergibt sich aus (7.2.31)

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = -\frac{1}{c_0} \frac{(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{1}{c_0} \frac{y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (7.2.36)$$

Mit der Näherung für das geometrische Fernfeld (7.2.28) folgt

$$\frac{x_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{x_i}{|\vec{x}|} \quad (7.2.37)$$

Dieser Ausdruck skaliert nicht mit R . Er hängt nur von der Beobachtungsrichtung ab. Dagegen fällt der zweite Quotient

$$\frac{y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{y_i}{|\vec{x}|} \quad (7.2.38)$$

mit $1/R$ ab. Er kann im geometrischen Fernfeld ($|\vec{y}| \ll |\vec{x}|$) gegenüber dem Ersten vernachlässigt werden. Für weit entfernte Beobachter gilt damit die Näherung

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|} \quad (7.2.39)$$

Im Fernfeld kann also die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T_{ij}(\vec{y}, \tau) \right\} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau}(\vec{y}, \tau) \quad (7.2.40)$$

geschrieben werden. Nach Einsetzen in (7.2.34) ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} T_{ij}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|^2} \int_{V_Q} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \quad (7.2.41)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

Dieser Ausdruck skaliert mit $1/R$ im Fernfeld. Hätte man den Quotienten aus (7.2.38) nicht vernachlässigt, würde jetzt noch ein Anteil erscheinen, der mit $1/R^2$ abfällt.

Die Untersuchung ergibt, daß auf der rechten Seite von (7.2.30) nur der zweite Summand einen Anteil besitzt, der mit $1/R$ abfällt. Alle anderen Anteile skalieren mit einer höheren Potenz von $1/R$. Sie werden im Fernfeld nicht berücksichtigt. Es ergibt sich für weit entfernte Beobachtungspunkte

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \right\} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{|\vec{x}|^2} \int_{V_Q} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.2.42)$$

Die gleichen Überlegungen lassen sich auch für die zweite Ableitung durchführen. Unter Vernachlässigung der $1/R^2$ -Anteile erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{V_Q} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \right\} \approx \frac{1}{c_0^2} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \int_{V_Q} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial \tau^2} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.2.43)$$

Damit kann die Dichte im Fernfeld näherungsweise angegeben werden. Es gilt

$$\rho'(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \int_{V_Q} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial \tau^2} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.2.44)$$

Im Gegensatz zur ursprünglichen Lösung (7.2.29) tritt hier keine räumliche sondern eine zeitliche Ableitung auf. Die Ableitung wirkt zudem nur auf die Lighthillschen Schubspannungen T_{ij} und nicht auf das gesamte Integral. Die Gleichung (7.2.44) ist daher für praktische Berechnungen häufig besser geeignet als die Lösung (7.2.29). Es muß nur der zeitliche Verlauf der Schubspannungen T_{ij} bekannt sein. Viele Abschätzungen basieren auf dieser Gleichung. Sie wird aber auch zur Berechnung des Fernfeldes aus numerischen Daten verwendet. Sind die Lighthillschen Schubspannungen T_{ij} in einem Gebiet aus einer numerischen Strömungssimulation bekannt, so kann der von der Strömung bewirkte Fernfeldschall mit (7.2.44) ermittelt werden.

7.3. Wirbelschall

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß in turbulenten Strömungsfeldern die sogenannten Reynoldsschen Spannungen $v_i v_j$ relativ groß sind. So ist der Betrag des Ausdrucks $\rho v_i v_j$ im Zeitlichen Mittel deutlich größer als die Beträge der laminaren Spannungen τ_{ij} . Daraus kann man schließen, daß die Lighthillschen Spannungen

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \tau_{ij} + \delta_{ij} (p' - c_0^2 \rho') \quad (7.3.1)$$

in Gebieten mit turbulenten Schwankungen im wesentlichen von dem ersten Term dominiert werden. Bei der Wechselwirkung von Wirbeln in einem turbulenten Feld

nimmt der Term $\rho v_i v_j$ betragsmäßig besonders große Werte an. Auf dieser Vorstellung basiert auch die Herleitung des M^8 -Gesetzes für den Freistrahlschall, das im vorigen Abschnitt vorgestellt wurde. Dieses Gesetz ist zwar in Experimenten bestätigt worden, jedoch wird besonders dann eine Abweichung beobachtet, wenn zwischen Freistrahl und Außenbereich ein Dichteunterschied vorliegt. Genauere Untersuchungen zeigen, daß in diesem Fall wegen des $(p' - c_0^2 \rho')$ -Terms die Lighthillschen Spannungen nicht mit der einfachen Dimensionsbetrachtung aus dem vorigen Abschnitt abgeschätzt werden können. Dagegen scheinen ohne Dichteunterschiede alle für die Schallerzeugung wesentlichen Vorgänge durch den $\rho v_i v_j$ -Term erfaßt zu werden. Im folgenden soll dieser Term etwas genauer betrachtet werden, um auch eine anschauliche Vorstellung von den grundlegenden Mechanismen bei der Schallerzeugung zu erhalten.

Es wird von einer isolierten Wirbelstärkeverteilung ausgegangen. Dabei kann es sich zum Beispiel um zwei Wirbel handeln, die gerade miteinander wechselwirken. Die Betrachtung wird auf kleine Machzahlen beschränkt. Vereinfachend wird angenommen, daß das Strömungsfeld isentrop ist. Bei kleinen Machzahlen sind die Dichteschwankungen in der Strömung relativ gering. Näherungsweise entspricht die Dichte überall einem Außenwert ρ_0 . In diesem Fall können die Lighthillschen Spannungen mit

$$T_{ij} = \rho_0 v_i v_j \quad (7.3.2)$$

angenähert werden. Das bedeutet, es wird nur noch die durch die Reynoldsschen Spannungen bewirkte Quellstärke berücksichtigt. Vereinfachend sind dazu noch in dem Term $\rho v_i v_j$ die Dichteschwankungen vernachlässigt.

Für die Quellstärke in der Lighthill-Gleichung ergeben diese Vereinfachungen

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 (v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.3.3)$$

Die Quellstärke ist damit proportional zur zweiten Ableitung von $v_i v_j$. Um den Ausdruck in eine etwas anschaulichere Form zu überführen, wird zunächst die erste Ableitung des Produkts $v_i v_j$ betrachtet. Es gilt

$$\frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (7.3.4)$$

Im ersten Term auf der rechten Seite tritt der Ausdruck

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{v} \quad (7.3.5)$$

auf. Bei kleinen Machzahlen ist das Strömungsfeld näherungsweise inkompressibel und die Divergenz der Geschwindigkeit verschwindet: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Entsprechend kann der erste Ausdruck auf der rechten vernachlässigt werden.

Der zweite Term auf der rechten Seite von (7.3.4) wird umgeschrieben. Es ergibt sich

$$v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = (\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \quad (7.3.6)$$

7. Schallerzeugung durch Strömungen

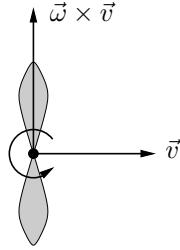


Abbildung 7.3.: Zur Quellstärke durch einen bewegten Wirbel

Der Vektor $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ bezeichnet dabei die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes. Mit der Vernachlässigung des ersten Terms folgt für die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2(v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} = \text{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \Delta \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \quad (7.3.7)$$

Daraus ergibt sich schließlich eine approximative Variante der Lighthill-Gleichung mit

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \rho_0 \text{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \rho_0 \Delta \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \quad (7.3.8)$$

Diese gilt bei kleinen Machzahlen und einem isentropen Strömungsfeld, in dem die Reibung vernachlässigt ist.

In der modifizierten Lighthill-Gleichung (7.3.8) treten zwei Quellterme auf. Der Erste entspricht einer typischen Dipolverteilung, wie sie sich zum Beispiel auch bei Impulszufuhr ergibt. Die Schallerzeugung durch Störung der Impulserhaltung wurde in Abschnitt 6.3 ausführlich betrachtet. Die Quellstärke bei Impulszufuhr ist mit $-\text{div}(\vec{g})$ gegeben, wenn der zugeführte Impuls pro Volumen und Zeit mit \vec{g} bezeichnet wird. Die Größe \vec{g} kann als Kraft pro Volumen aufgefaßt werden. Hier ist statt der Kraft \vec{g} das Vektorfeld $\vec{\omega} \times \vec{v}$ für die Schallerzeugung maßgeblich. Um diese Größe zu veranschaulichen, wird ein einfaches zweidimensionales Beispiel betrachtet. Man geht von einem einfachen Wirbel mit konzentrierter Wirbelstärkeverteilung – zum Beispiel ein Potentialwirbel – aus. Der Wirbel bewegt sich mit Geschwindigkeit \vec{v} . Die Situation ist in Abbildung 7.3 veranschaulicht. Außerhalb des Wirbelkerns ist die Wirbelstärke $\vec{\omega}$ gleich Null. Dort ist dementsprechend keine Quellstärke vorhanden. Nur im Wirbelkern – beim Potentialwirbel also nur in einem Punkt – ergibt sich ein $\vec{\omega} \times \vec{v} \neq 0$. Der Vektor $\vec{\omega} \times \vec{v}$ steht senkrecht zur Bewegungsrichtung. Entsprechend ist der resultierende Dipol quer zur Bewegungsrichtung orientiert. Dies ist in der Abbildung 7.3 durch die eingezeichnete Richtcharakteristik eines Dipols angedeutet.

Falls der Wirbel ruht, ist $\vec{v} = 0$ und folglich auch keine Schallquelle vorhanden. Bewegt sich der Wirbel mit konstanter Geschwindigkeit, ergibt sich eine Quellstärke. Die Größe $\vec{\omega} \times \vec{v}$ ist jedoch zeitlich konstant. Das resultierende Druckfeld zeigt dement-

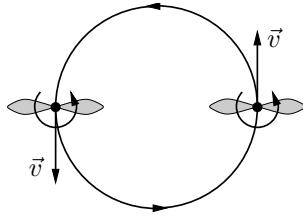


Abbildung 7.4.: Modell mit zwei gleichsinnig drehenden Wirbeln, die um einander kreisen.

sprechend keine echte Schwingung. Nur in der Nähe des Wirbels ergibt sich eine Druckschwankung, wenn der Wirbel vorbeikommt. Ein weit entfernter Beobachter registriert durch die konstante Quelle eine Abweichung vom Ausgangsdruck, die sich – je nach Entfernung – zeitlich relativ langsam verändert.

Eine merkliche Schwingung – also hörbaren Schall – ergibt sich, wenn die Größe $\vec{\omega} \times \vec{v}$ zeitlich schwankt. Bei einem Potentialwirbel kann man davon ausgehen, daß die Wirbelstärke $\vec{\omega}$ konstant bleibt. Die angesprochenen Schwankungen können dann nur durch eine beschleunigte Wirbelbewegung entstehen. In Abbildung 7.4 ist ein einfaches Beispiel mit einer solchen Bewegung dargestellt. Es handelt sich um zwei gleichsinnig drehende Potentialwirbel, die zusätzlich gleich stark sein sollen. Die Wirbel induzieren jeweils ein Geschwindigkeitsfeld am Ort des anderen Wirbels. Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz bewegen sich die Wirbel dann auf einer Kreisbahn um einander herum. Dabei ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} permanent. Es ergibt sich eine Überlagerung zweier Dipole, also eine quadrupolartige Quellverteilung. Ein weit entfernter Beobachter registriert entsprechend eine periodische Dichteschwankung, die von den beiden Punktquellen verursacht wird.

Bisher wurde lediglich der erste Quellterm auf der rechten Seite von (7.3.8) untersucht. Der zweite Term läßt sich leider nicht so einfach anschaulich deuten. Es kann jedoch gezeigt werden, daß für weit entfernte Beobachter der Anteil des Schalls durch den zweiten Term vernachlässigbar gering ist. Die dazu notwendige Abschätzung ist jedoch etwas umfangreich, und kann hier aus Platzgründen nur grob skizziert werden. Dies soll im folgenden geschehen.

Ohne Berandungen kann die Lösung der Gleichung (7.3.8) wie gewohnt durch ein Integral über das Quellgebiet dargestellt werden. Für das Dichtefeld ergibt sich

$$\frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v})_i(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int_{V_Q} \frac{\frac{1}{2}\vec{v}^2(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (7.3.9)$$

Zweckmäßigerweise wurde dabei durch die Dichte im Ausgangszustand ρ_0 dividiert. Das Quellvolumen V_Q erstreckt sich über alle Bereiche, in denen einer der beiden Quellterme ungleich Null ist. Aus dem Divergenzterm ergibt sich die erste räumliche Ableitung $\partial/\partial x_i$ des Integrals über V_Q . Im Integrand tritt dabei die i -te Komponente

7. Schallerzeugung durch Strömungen

des $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ -Feldes auf. Der Laplace-Term liefert eine zweite Ableitung vor dem Integral. Zur Vereinfachung wird wieder der Mittelpunkt des Quellvolumens V_Q in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt.

In einer ersten Abschätzung für Beobachter im geometrischen Fernfeld wird von der Beziehung

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (7.3.10)$$

Gebrauch gemacht. Diese gilt für alle Punkte $|\vec{x}| \gg D$, wobei die Größe D die Ausdehnung des Quellvolumens darstellt. Das heißt, es gilt für alle Punkte \vec{y} im Quellvolumen: $|\vec{y}| \leq D$. Analog zur Herleitung der Fernfeldnäherung (7.2.44) ergibt sich hier

$$\begin{aligned} \frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} &\approx \frac{1}{4\pi c_0^2 |\vec{x}|} \left\{ -\frac{x_i}{c_0 |\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_Q} (\vec{\omega} \times \vec{v})_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_Q} \frac{1}{2} \vec{v}^2 \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \right\} \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Aus den räumlichen Ableitungen ergeben sich wieder Zeitableitungen. Im Gegensatz zu (7.2.44) sind die Ableitungen nur vor dem Integral geschrieben. Alle Terme, die mit $1/|\vec{x}|^2$ beziehungsweise $1/R^2$ abfallen sind vernachlässigt worden. Das Schallfeld setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, die durch die beiden Integrale in (7.3.11) gegeben sind. Im weiteren werden die Anteile mit I_1 und I_2 bezeichnet. Es gilt damit

$$\frac{\rho'(\vec{x}, t)}{\rho_0} \approx I_1 + I_2 \quad (7.3.12)$$

Bei der angenommenen kleinen Machzahl kann die Quelle als kompakt angesehen werden. Das bedeutet, die Wellenlänge ist groß gegenüber der Ausdehnung der Quelle. Dies lässt sich auch anhand des Beispiels aus Abbildung 7.4 anschaulich plausibel machen. Die induzierten Geschwindigkeiten sind klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit. Dementsprechend lange benötigen die beiden Punktwellen für einen Umlauf auf der Kreisbahn. In der Zeit eines halben Umlaufs legen Schallwellen eine Strecke zurück, die sehr groß gegenüber dem Umfang oder dem Durchmesser des Kreises ist. Die ausgestrahlte Wellenlänge λ stimmt genau mit dieser Strecke überein. Die Ausdehnung D des Quellvolumens entspricht dem Kreisdurchmesser. Damit gilt $D \ll \lambda$.

Bei kompakter Quelle kann die Variation der retardierten Zeit in dem Quellvolumen vernachlässigt werden. Das vereinfacht die Integrale zusätzlich. Zunächst wird der zweite Anteil I_2 näher betrachtet. Es wird $|\vec{x} - \vec{y}|$ durch $|\vec{x}|$ ersetzt. Man erhält

$$I_2 = \frac{1}{4\pi c_0^4 |\vec{x}|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_Q} \frac{1}{2} \vec{v}^2 \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.3.13)$$

7.3. Wirbelschall

Mit einer Dimensionsbetrachtung läßt sich dieser Ausdruck weiter abschätzen. Es ergibt sich letztlich die Proportionalität

$$I_2 \sim \frac{D}{|\vec{x}|} M^6 \quad (7.3.14)$$

Auf analoge Weise kann auch der erste Anteil I_1 angenähert werden. Es folgt näherungsweise bei kompakter Quelle

$$I_1 = -\frac{1}{4\pi c_0^3 |\vec{x}|} \cdot \frac{x_i}{|\vec{x}|} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_Q} (\vec{\omega} \times \vec{v})_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) d^3 \vec{y} \quad (7.3.15)$$

Die anschließende Abschätzung liefert

$$I_1 \sim \frac{D}{|\vec{x}|} M^4 \quad (7.3.16)$$

Es zeigt sich, daß bei kleinen Machzahlen der zweite Anteil gegenüber dem Ersten für Beobachter im Fernfeld vernachlässigbar ist. Das bedeutet, für eine Untersuchung des Schalls im Fernfeld kann statt Gleichung (7.3.8) die noch weiter reduzierte Variante

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \rho_0 \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (7.3.17)$$

herangezogen werden. Sie beschreibt zwar die Schwankungen im Nahfeld nicht korrekt, jedoch sind in der Regel sowieso nur die Fernfeldschwankungen von Interesse.

Die Gleichung (7.3.17) wurde 1975 von Howe angegeben. Er formulierte die Lighthillsche Analogie um, so daß die Quellstärke durch den Ausdruck $\operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{v})$ gegeben ist. Die Analogie ist dann zwar nur noch approximativ für kleine Machzahlen gültig, jedoch sind die Lösungen viel einfacher zu bestimmen. Wesentlicher Vorteil ist, daß sich das Integrationsgebiet deutlich verkleinert. Zur Lösung von (7.3.17) ist nur über die Gebiete mit Wirbelstärke zu integrieren. Diese sind im Allgemeinen viel kleiner als die Bereiche, in denen die Lighthillschen Spannungen T_{ij} einen nicht vernachlässigbaren Beitrag liefern. Im Beispiel der PunktWirbel aus Abbildung 7.4 ist die Quellstärke nur in zwei Punkten von Null verschieden. Aus dem Integral wird eine Summe, die viel einfacher zu berechnen ist.

A. Mathematische Hilfsmittel

A.1. Fourier-Analyse

Teile der folgenden Darstellung wurde frei nach den Abschnitten 1.3.1 und 1.4.1 des Buches "Schwingungslehre" von E. Meyer und D. Guicking verfaßt.

Fourier-Reihe

Nach dem Satz von Fourier läßt sich eine periodische Zeitfunktion $s(t)$ mit der Periodendauer $\tau = 2\pi/\omega_0$ als Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ darstellen:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [S_n \sin(n\omega_0 t) + C_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (\text{A.1.1})$$

Voraussetzung ist, daß $s(t)$ höchstens endlich viele Sprungstellen endlicher Höhe und endlich viele Maxima und Minima besitzt. Die Koeffizienten sind durch die folgenden Integrale bestimmt:

$$A_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt \quad (\text{A.1.2})$$

$$S_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (\text{A.1.3})$$

$$C_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{A.1.4})$$

Die Größe A_0 ist der arithmetische Mittelwert von $s(t)$ während einer Periode. Die Darstellung der Zeitfunktion $s(t)$ durch eine trigonometrische Reihe nach Gleichung (A.1.1) bezeichnet man als Fourier-Reihe oder Fourier-Entwicklung. Die Größen S_n und C_n werden Fourier-Koeffizienten genannt. Die einzelnen Summanden heißen Fourier-Komponenten.

Komplexe Darstellung

Zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.\end{aligned}\tag{A.1.5}$$

Daraus folgt für die einzelnen Komponenten der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}S_n \sin(n\omega_0 t) &= \frac{S_n}{2i} [e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}], \\ C_n \cos(n\omega_0 t) &= \frac{C_n}{2} [e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}].\end{aligned}\tag{A.1.6}$$

Faßt man den Sinus- und den Cosinus-Term zusammen ergibt sich

$$S_n \sin(n\omega_0 t) + C_n \cos(n\omega_0 t) = A_n e^{in\omega_0 t} + A_{-n} e^{-in\omega_0 t}\tag{A.1.7}$$

mit den komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{2} [C_n - iS_n] \\ A_{-n} &= \frac{1}{2} [C_n + iS_n] = A_n^*\end{aligned}\tag{A.1.8}$$

Das bedeutet, daß jede reelle Fourier-Komponente durch ein Paar zueinander konjugiert komplexer Schwingungsfunktionen dargestellt werden kann. Damit kann die komplexe Form der Fourier-Reihe angegeben werden:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega_0 t}\tag{A.1.9}$$

Der Koeffizient A_0 ist wie in (A.1.2) definiert. Die übrigen Koeffizienten sind nach (A.1.8) gegeben und können analog zu (A.1.3) und (A.1.4) durch das Integral

$$A_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) e^{-in\omega_0 t}, \quad n > 0\tag{A.1.10}$$

bestimmt werden. Die A_{-n} sind durch die konjugiert komplexen Werte der A_n gegeben.

A. Mathematische Hilfsmittel

Fourier-Integral

Eine periodische Zeitfunktion $s(t)$ läßt sich nach (A.1.1) als Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit diskreten Frequenzen $\omega_0, 2\omega_0, \dots$ darstellen. Anschaulich bedeutet dies, daß ihr Spektrum aus diskreten Linien besteht. Dagegen besitzt eine unperiodische Zeitfunktion ein kontinuierliches Spektrum.

Sei nun $s(t)$ eine unperiodische Zeitfunktion, so kann man sich daraus eine periodische Funktion $g(t)$ erzeugen, indem man einen Zeitabschnitt $-\tau/2 \leq t \leq +\tau/2$ von $s(t)$ herausschneidet und außerhalb dieses Intervalls periodisch fortsetzt. Innerhalb des Intervalls gilt:

$$g(t) = s(t), \quad -\tau/2 \leq t \leq +\tau/2 \quad (\text{A.1.11})$$

Die konstruierte Funktion läßt sich als Fourier-Reihe darstellen mit:

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [S_n \sin(n\omega_0 t) + C_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (\text{A.1.12})$$

Die Periodendauer von $g(t)$ ist die Intervallbreite $\tau = 2\pi/\omega_0$. Um eine Fourier-Darstellung von der unperiodischen Zeitfunktion $s(t)$ zu erhalten, läßt man $\tau \rightarrow \infty$ gehen. Dann wird $g(t)$ zu $s(t)$ für alle t , und man erhält aus (A.1.12) die gesuchte Darstellung.

Wird die Intervallbreite τ variiert, so ändern sich auch die im Spektrum auftretenden Frequenzen. Zweckmäßigerweise führt man

$$\omega = n\omega_0 = 2\pi n/\tau \quad (\text{A.1.13})$$

als neue Variable ein. Zusätzlich wird der Linienabstand des diskreten Spektrums mit

$$\Delta\omega = 2\pi/\tau \quad (\text{A.1.14})$$

bezeichnet. Wird τ größer sinkt $\Delta\omega$, und die Spektrallinien rücken immer mehr zusammen, bis sie im Grenzübergang $\tau \rightarrow \infty$ ein kontinuierliches Spektrum bilden. Um diesen Grenzübergang vornehmen zu können, wird angenommen, daß $s(t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null abfällt und das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt \quad (\text{A.1.15})$$

existiert beziehungsweise endlich ist. Dann strebt mit $\tau \rightarrow \infty$ der Koeffizient $A_0 \rightarrow 0$. Weglassen von A_0 und Einsetzen der Integralausdrücke für S_n und C_n in (A.1.12) liefert

$$g(t) = \sum_{[\omega]} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \sin(\omega t) dt \right] \sin(\omega t) + \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) \cos(\omega t) dt \right] \cos(\omega t) \right\} \quad (\text{A.1.16})$$

A.2. Divergenz- und Laplace-Operator

Mit $\tau \rightarrow \infty$ gehen die in den eckigen Klammern geschriebenen Integrale unter Einbeziehung des Faktors $1/\pi$ über in die Spektralfunktionen

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt \quad (\text{A.1.17})$$

und

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt \quad (\text{A.1.18})$$

Aus der Summe über die diskreten Frequenzen in (A.1.16) wird für $\tau \rightarrow \infty$ das Integral

$$s(t) = \int_0^{\infty} \{ S(\omega) \sin(\omega t) + C(\omega) \cos(\omega t) \} d\omega \quad (\text{A.1.19})$$

Wenn dieses Integral existiert ist es die gesuchte Darstellung der unperiodischen Zeitfunktion $s(t)$ durch ein sogenanntes Fourier-Integral.

Komplexe Fourier-Transformation

Die in Gleichung (A.1.17) bis (A.1.19) angegebenen Beziehungen bekommen eine besonders einfache Gestalt, wenn man die komplexe Darstellung benutzt, wie sie auch für die Fourier-Reihe eingeführt wurde. Die Zeitfunktion lautet dann

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.1.20})$$

und die darin auftretende komplexe Spektralfunktion $A(\omega)$ ist gegeben durch

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.1.21})$$

Die Funktion $A(\omega)$ wird üblicherweise als Fourier-Transformierte von $s(t)$ bezeichnet.

A.2. Divergenz- und Laplace-Operator

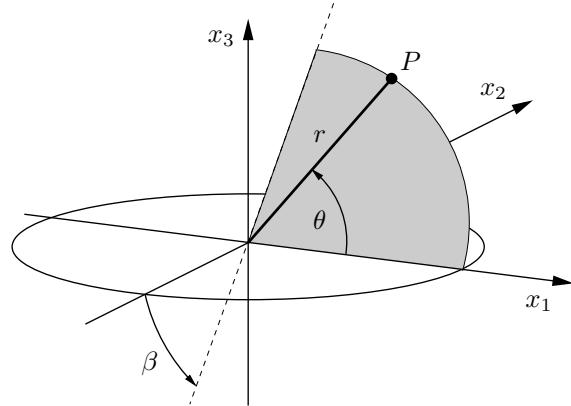
Produktregel für Divergenz-Operator

$h(\vec{x})$: Skalarfeld; $\vec{a}(\vec{x})$: Vektorfeld

$$\operatorname{div}(h \vec{a}) = h \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{grad} h \cdot \vec{a} \quad (\text{A.2.1})$$

A. Mathematische Hilfsmittel

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten



Koordinaten des Punktes P:

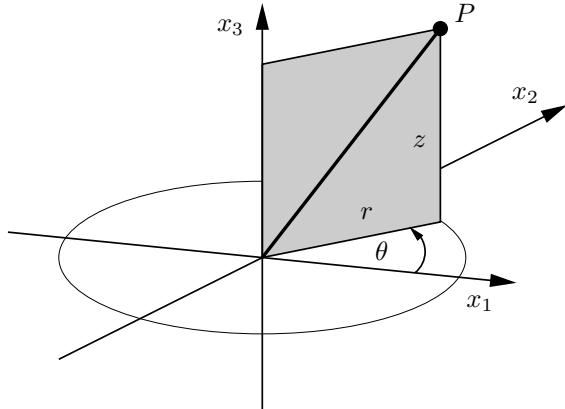
$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \beta$$

$$x_3 = r \sin \theta \sin \beta$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (\text{A.2.2})$$

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten



Koordinaten des Punktes P:

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

$$x_3 = z$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.2.3})$$

A.3. Rechenregel mit δ -Funktion

Eine der wichtigsten Rechenregeln für die δ -Funktion wurde im Abschnitt 1.5 vorgestellt. Für eine stetige und beschränkte Funktion $B(x)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\delta(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (\text{A.3.1})$$

Diese bedeutet, daß für jede Delta-Folge δ_n die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\delta_n(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (\text{A.3.2})$$

geltend muß. Um die Aussage der Gleichung (A.3.1) deutlich zu machen, soll hier die Beziehung (A.3.2) überprüft werden. Die folgenden Überlegungen sind jedoch nicht als exakter Beweis sondern nur als Beweisskizze zu verstehen.

Es wird von Gleichung (1.5.27) ausgegangen. Sie besagt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x - x_0) dx = 1 \quad (\text{A.3.3})$$

Jede δ -Folge erfüllt definitionsgemäß diese Bedingung. Multipliziert man mit dem konstanten Faktor $B(x_0)$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x_0)\delta_n(x - x_0) dx = B(x_0) \quad (\text{A.3.4})$$

Subtrahiert man (A.3.2) und (A.3.4) voneinander folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - B(x_0)] \delta_n(x - x_0) dx = 0 \quad (\text{A.3.5})$$

Dies Aussage ist äquivalent zu Gleichung (A.3.2). Um sie zu beweisen, ist folgendes zu zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ kann ein N_0 gefunden werden, so daß für alle $n > N_0$ die Beziehung

$$d_n \equiv \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [B(x) - B(x_0)] \delta_n(x - x_0) dx \right| < \varepsilon \quad (\text{A.3.6})$$

erfüllt ist.

Allgemein gilt für eine beliebige Funktionen $a(x)$ die Ungleichung

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(x)| dx \quad (\text{A.3.7})$$

A. Mathematische Hilfsmittel

Zu beachten ist, daß die Integration von $-\infty$ nach $+\infty$ durchgeführt wird, womit dx positiv ist. Es ergibt sich aus (A.3.6)

$$d_n \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \quad (\text{A.3.8})$$

Da $B(x)$ eine stetige Funktion ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung um x_0 , so daß innerhalb dieser Umgebung

$$|B(x) - B(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{A.3.9})$$

gilt. Diese Umgebung muß nur eng genug gewählt werden. Sie kann durch eine Konstante N_1 definiert werden, so daß für alle

$$x \in [x_0 - b, x_0 + b] \quad \text{mit } b = \frac{1}{N_1} \quad (\text{A.3.10})$$

die Bedingung (A.3.9) erfüllt ist. Es muß N_1 entsprechend groß gewählt werden. Das Integral in (A.3.8) wird mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx = I_{-\infty}^{x_0-b} + I_{x_0-b}^{x_0+b} + I_{x_0+b}^{\infty} \quad (\text{A.3.11})$$

in drei Teilintegrale zerlegt. Die Teilintegrale sind durch

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{x_0-b} &= \int_{-\infty}^{x_0-b} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \\ I_{x_0-b}^{x_0+b} &= \int_{x_0-b}^{x_0+b} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \\ I_{x_0+b}^{\infty} &= \int_{x_0+b}^{+\infty} |B(x) - B(x_0)| \delta_n(x - x_0) dx \end{aligned} \quad (\text{A.3.12})$$

definiert. Für das zweite Teilintegral kann sofort eine Abschätzung angegeben werden. Da innerhalb der Integrationsgrenzen (A.3.9) gilt, folgt

$$I_{x_0-b}^{x_0+b} < \int_{x_0-b}^{x_0+b} \frac{\varepsilon}{4} \delta_n(x - x_0) dx = \frac{\varepsilon}{4} \int_{x_0-b}^{x_0+b} \delta_n(x - x_0) dx \quad \text{für } n > N_1 \quad (\text{A.3.13})$$

Nach (1.5.20) konvergiert das Integral auf der rechten Seite gegen Eins für $n \rightarrow \infty$. Es gibt daher ein N_2 , so daß gilt

$$\int_{x_0-b}^{x_0+b} \delta_n(x - x_0) dx < 2 \quad \text{für } n > N_2 \quad (\text{A.3.14})$$

A.3. Rechenregel mit δ -Funktion

Daraus folgt für das Teilintegral

$$I_{x_0-b}^{x_0+b} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n > N_1, N_2 \quad (\text{A.3.15})$$

Auch die anderen beiden Teilintegrale lassen sich abschätzen. Da die Funktion $B(x)$ beschränkt ist, existiert das Maximum von $|B(x) - B(x_0)|$. Es ergibt sich

$$I_{-\infty}^{x_0-b} < |B(x) - B(x_0)|_{\max} \cdot \int_{-\infty}^{x_0-b} \delta_n(x - x_0) dx \quad (\text{A.3.16})$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert nach (1.5.21) gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Es existiert daher ein N_3 , so daß

$$I_{-\infty}^{x_0-b} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > N_3 \quad (\text{A.3.17})$$

erfüllt ist. Analog kann ein N_4 zur Abschätzung des letzten Teilintegrals gefunden werden, so daß

$$I_{x_0+b}^{\infty} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > N_4 \quad (\text{A.3.18})$$

gilt. Definiert man nun N_0 als das Maximum von N_1, N_2, N_3 und N_4 , so gelten für alle $n > N_0$ alle drei Ungleichungen (A.3.15), (A.3.17) und (A.3.18). Dies ist gleichbedeutend mit

$$d_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \text{für } n > N_0 \quad (\text{A.3.19})$$

Das bedeutet, für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kann tatsächlich ein N_0 gefunden werden, so daß (A.3.5) für alle $n > N_0$ gilt. Dies war zu zeigen.

B. Herleitungen

Einige umfangreiche Herleitungen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in den entsprechenden Abschnitten eingebunden. Sie werden hier im Anhang dargestellt.

B.1. Zur Wellenausbreitung in Strömungskanälen

Wellenzahl

Im Abschnitt 4.3 wird die Wellenzahl als Funktion der Frequenz im ruhendem Bezugssystem betrachtet. Im folgenden soll die Gleichung (4.3.16) hergeleitet werden. Es wird von der Beziehung (4.3.15) ausgegangen. Diese lautet

$$\alpha_m = \pm \sqrt{\frac{\omega_B^2}{c^2} - \beta_m^2} \quad (\text{B.1.1})$$

Nach (4.3.13) gilt

$$\omega_R = \omega_B + \alpha_m U \quad (\text{B.1.2})$$

Auflösen von (B.1.2) nach ω_B und einsetzen in (B.1.1) ergibt

$$\alpha_m = \pm \left(\frac{(\omega_R - \alpha_m U)^2}{c^2} - \beta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.3})$$

Dies kann nach α_m aufgelöst. Es ergeben sich die Umformungsschritte:

$$c^2 \alpha_m^2 = \omega_R^2 - 2\omega_R \alpha_m U + \alpha_m^2 U^2 - c^2 \beta_m^2 \quad (\text{B.1.4})$$

$$0 = \omega_R^2 - 2\omega_R \alpha_m U + \alpha_m^2 (U^2 - c^2) - c^2 \beta_m^2 \quad (\text{B.1.5})$$

$$\alpha_m^2 (c^2 - U^2) + 2\alpha_m \omega_R U = \omega_R^2 - c^2 \beta_m^2 \quad (\text{B.1.6})$$

$$\alpha_m^2 + 2\alpha_m \frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} = \frac{\omega_R^2 - c^2 \beta_m^2}{c^2 - U^2} \quad (\text{B.1.7})$$

$$\left(\alpha_m + \frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} \right)^2 = \frac{\omega_R^2 - c^2 \beta_m^2}{c^2 - U^2} + \frac{\omega_R^2 U^2}{(c^2 - U^2)^2} \quad (\text{B.1.8})$$

$$\alpha_m = -\frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} \pm \left[\frac{(\omega_R^2 - c^2 \beta_m^2)(c^2 - U^2) + \omega_R^2 U^2}{(c^2 - U^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.9})$$

B.1. Zur Wellenausbreitung in Strömungskanälen

$$\alpha_m = -\frac{\omega_R U}{c^2 - U^2} \pm \left[\frac{\omega_R^2 c^2 - c^2 \beta_m^2 (c^2 - U^2)}{(c^2 - U^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.10})$$

$$\alpha_m = \frac{\pm [\omega_R^2 c^2 - c^2 \beta_m^2 (c^2 - U^2)]^{\frac{1}{2}} - \omega_R U}{c^2 - U^2} \quad (\text{B.1.11})$$

$$\alpha_m = \frac{\pm c \omega_R \left[1 - \frac{\beta_m^2}{\omega_R^2} (c^2 - U^2) \right]^{\frac{1}{2}} - c \omega_R M}{c^2 (1 - M^2)} \quad (\text{B.1.12})$$

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{\pm \left[1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R} \right)^2 (1 - M^2) \right]^{\frac{1}{2}} - M}{(1 - M^2)} \quad (\text{B.1.13})$$

Schließlich folgt

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{(S - M)}{(1 - M^2)} \quad (\text{B.1.14})$$

mit

$$S = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_m c}{\omega_R} \right)^2 (1 - M^2)} \quad (\text{B.1.15})$$

und

$$M = \frac{U}{c} \quad (\text{B.1.16})$$

Die Beziehung (B.1.14) entspricht Gleichung (4.3.16).

Gruppengeschwindigkeit

Die Gruppengeschwindigkeit der Kanalmoden bei Strömung wird ebenfalls in Abschnitt 4.3 behandelt. Im folgenden wird dort angegebene Beziehung (4.3.33) hergeleitet. Dazu wird die Ableitung (4.3.32) berechnet:

$$c^{\text{gr}} = \frac{d\omega_R}{d\alpha_m} \quad (\text{B.1.17})$$

Weiter oben wurde bereits gezeigt, daß

$$\alpha_m = \pm \left(\frac{(\omega_R - \alpha_m U)^2}{c^2} - \beta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.18})$$

beziehungsweise

$$\alpha_m = \frac{\omega_R}{c} \cdot \frac{(S - M)}{(1 - M^2)} \quad (\text{B.1.19})$$

gilt. Zunächst wird (B.1.18) nach ω_R aufgelöst:

$$\alpha_m^2 c^2 = (\omega_R - \alpha_m U)^2 - \beta_m^2 c^2 \quad (\text{B.1.20})$$

B. Herleitungen

$$\pm c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} = \omega_R - \alpha_m U \quad (\text{B.1.21})$$

$$\omega_R = \pm c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} + \alpha_m U \quad (\text{B.1.22})$$

Dann wird die Ableitung gebildet. Es ergeben sich die Umformungen:

$$c^{gr} = \frac{d\omega_R}{d\alpha_m} = \pm c \frac{\alpha_m}{\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}} + U \quad (\text{B.1.23})$$

$$c^{gr} = c^2 \frac{\alpha_m}{\omega_R - \alpha_m U} + U \quad (\text{B.1.24})$$

$$c^{gr} = c^2 \frac{\left(\frac{\alpha_m}{\omega_R}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha_m}{\omega_R}\right) U} + U \quad (\text{B.1.25})$$

$$c^{gr} = c \frac{\left(\frac{\alpha_m c}{\omega_R}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha_m c}{\omega_R}\right) M} + U \quad (\text{B.1.26})$$

Mit (B.1.19) kann der Ausdruck in der Klammer ersetzt werden. Es folgt:

$$c^{gr} = c \frac{\left(\frac{S - M}{1 - M^2}\right)}{1 - \left(\frac{S - M}{1 - M^2}\right) M} + U \quad (\text{B.1.27})$$

$$c^{gr} = c \frac{S - M}{1 - M^2 - MS + M^2} + U \quad (\text{B.1.28})$$

$$c^{gr} = c \left[\frac{S - M}{1 - MS} + \frac{M \cdot (1 - MS)}{1 - MS} \right] \quad (\text{B.1.29})$$

$$c^{gr} = c \frac{S - M + M - M^2 S}{1 - MS} \quad (\text{B.1.30})$$

Schließlich ergibt sich

$$c^{gr} = c \frac{(1 - M^2) \cdot S}{1 - MS} \quad (\text{B.1.31})$$

Diese Beziehung stimmt mit Gleichung (4.3.33) überein.

B.2. Zum Erhaltungssatz der akustischen Energie

Es werden die einzelnen Herleitungsschritte für Gleichung (5.4.8) gegeben. Die kinetische akustische Energie ist mit (5.4.1) gegeben. Für ihre zeitliche Ableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 \right) = \rho_0 \vec{v}' \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \rho_0 \operatorname{grad} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \phi) \quad (\text{B.2.1})$$

Die zeitliche Ableitung der potentiellen akustischen Energie nach (5.4.2) ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_0}{2 c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{B.2.2})$$

Für die akustische Intensität ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (p' \vec{v}') &= \operatorname{grad} p' \cdot \vec{v}' + p' \cdot \operatorname{div} (\vec{v}') \\ &= \operatorname{grad} \left[-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \cdot \operatorname{grad} \phi - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \Delta \phi - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \phi) \cdot \operatorname{grad} \phi \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

Damit sind alle Komponenten, die in Gleichung (5.4.5) auftreten, als Funktionen des akustischen Potentials ausgedrückt worden. Setzt man nun in (5.4.5) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho_0 c^2} \right) + \operatorname{div} (p' \vec{v}') \\ &= \rho_0 \operatorname{grad} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \phi) + \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \Delta \phi - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \phi) \cdot \operatorname{grad} \phi \\ &= \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right\} \\ &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

Damit ist gezeigt, daß die Gleichungen (5.4.5) und (5.4.8) äquivalent sind.

B. Herleitungen

B.3. Inhomogene Wellengleichung mit Ableitung im Quellterm

Allgemeine Betrachtung

Im folgenden werden einige Überlegungen zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung vorgestellt und schließlich auch die Gleichung (6.3.56) hergeleitet. Im freien Raum ohne Begrenzungen ist die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = q(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.1})$$

durch das Integral

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (\text{B.3.2})$$

gegeben. Dabei ist zur Abkürzung die retardierte Zeit

$$\tau = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (\text{B.3.3})$$

eingeführt worden. Zur Berechnung der entstehenden Schallfelder muß die entsprechende Quellverteilung für q in dem Integral eingesetzt werden.

In Abschnitt 6.3 treten in mehreren Fällen Quellverteilungen mit Ableitungen auf. Hier wird zunächst eine einfache Zeitableitung betrachtet. Die inhomogene Wellengleichung hat die Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.4})$$

Auf der rechten Seite steht die Zeitableitung eines Feldes $B(\vec{x}, t)$. Die folgende Überlegung ist unabhängig von der konkreten Form des Feldes. Rein formal lässt sich eine inhomogene Wellengleichung aufstellen, in der nicht die Ableitung $\partial B / \partial t$ sondern das Feld B selbst die Quellstärke angibt. Es soll

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi = B(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.5})$$

gelten. Dabei ist ψ eine Hilfsgröße, die nicht notwendigerweise eine physikalische Bedeutung besitzt. Ohne Berandung kann die Lösung der Gleichung mit

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (\text{B.3.6})$$

angegeben werden. Differenziert man (B.3.5) nach der Zeit t , ergibt sich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.7})$$

B.3. Inhomogene Wellengleichung mit Ableitung im Quellterm

Die rechte Seite ist mit der von Gleichung (B.3.5) identisch. Damit muß p' mit der Zeitableitung der Größe ψ übereinstimmen. Aus (B.3.6) folgt

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.8})$$

Diese Lösung hätte sich natürlich auch aus (B.3.2) ergeben, wenn man für q die Zeitableitung von B einsetzt. Es ist jedoch nicht so einfach den entstehenden Ausdruck so umzuformen, daß die Zeitableitung vor dem Integral erscheint.

Auch für die Quellverteilung mit räumlicher Ableitung kann eine Lösung angegeben werden, bei der die Ableitung vor dem Integral steht. Gleichung (6.3.51) kann als

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.9})$$

dargestellt werden. Dabei ist B_i die Komponente eines Vektorfeldes. Analog zu (B.3.5) wird mit jeder dieser Komponenten eine inhomogene Wellengleichung aufgestellt. Diese lauten

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi_i = B_i(\vec{x}, t) \quad (\text{B.3.10})$$

Dabei ist ψ_i wieder eine Hilfsgröße. Differenziert man beide Seiten nach x_i und vergleicht das Resultat mit (B.3.9), dann folgt für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.11})$$

Auch hier wurde erreicht, daß die Ableitung nicht im sondern vor dem Integral steht. Das direkte Einsetzen der Quellverteilung $q = \partial B_i / \partial x_i$ in (B.3.2) ergibt dagegen

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial B_i}{\partial y_i}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.12})$$

Die Quellstärke im Integral wird an der Quellposition \vec{y} und zur Quellzeit τ genommen. Entsprechend wird B_i nun als Funktion von \vec{y} und τ angesehen: $B_i(\vec{y}, \tau)$. Die Divergenz im Integral ist nun mit $\partial B_i / \partial y_i$ dargestellt, da jetzt die Variable \vec{x} die Beobachtungsposition angibt.

Setzt man die beiden Formen der Lösung gleich, erhält man die Beziehung

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial B_i}{\partial y_i}(\vec{y}, \tau) d^3 \vec{y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.13})$$

Dies entspricht Gleichung (6.3.56). Zu beachten ist, das auf der linken Seite die Ableitung nach der Quellposition \vec{y} und auf der rechten Seite nach der Beobachtungsposition \vec{x} auftritt.

B. Herleitungen

Direkte Herleitung

Es ist auch eine direkte Herleitung von Gleichung (B.3.13) möglich, die nicht auf einer Lösung der inhomogenen Wellengleichung basiert. Gegeben ist das zeitabhängige Vektorfeld $\vec{B}(\vec{y}, t)$. Die Komponenten des Felder werden wieder mit $B_i(\vec{y}, t)$ bezeichnet. Zusätzlich werden die Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} b &= b(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ \tau &= \tau(\vec{x}, \vec{y}, t) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \end{aligned} \quad (\text{B.3.14})$$

definiert. Beide hängen jeweils von zwei Vektoren ab. Zusätzlich ist τ noch eine Funktion eines Skalar. Die Größe b entspricht dem Kehrwert des Abstands zwischen den beiden Vektoren, und τ gibt eine retardierte Zeit an.

Mit der Vorbereitung folgt für die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \\ = \left\{ \frac{\partial B_i}{\partial y_i}(\vec{y}, \tau) + \frac{\partial B_i}{\partial t}(\vec{y}, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}, \tau) \right\} b(\vec{x}, \vec{y}) + B_i(\vec{y}, t) \frac{\partial b}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.3.15})$$

Die Antisymmetrie von b und τ bezüglich \vec{x} und \vec{y} kann formal ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial y_i} &= -\frac{\partial b}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \tau}{\partial y_i} &= -\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{B.3.16})$$

Damit lässt sich (B.3.15) weiter umformen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \\ = \frac{\partial B_i}{\partial y_i}(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) - \left\{ \frac{\partial B_i}{\partial t}(\vec{y}, \tau) \frac{\partial \tau}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) + B_i(\vec{y}, \tau) \frac{\partial b}{\partial x_i}(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \\ = \frac{\partial B_i}{\partial y_i}(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3.17})$$

Die Integration dieses Ausdrucks über ein Volumen V_Q ergibt

$$\begin{aligned} \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} d^3 \vec{y} \\ = \int_{V_Q} \frac{\partial B_i}{\partial y_i}(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) d^3 \vec{y} \end{aligned} \quad (\text{B.3.18})$$

B.3. Inhomogene Wellengleichung mit Ableitung im Quellterm

Die linke Seite kann mit Hilfe des Satzes von Gauss in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ B_i(\vec{y}, \tau) b(\vec{x}, \vec{y}) \right\} d^3 \vec{y} &= \int_{V_Q} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \frac{B_i(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right\} d^3 \vec{y} \\ &= \int_{V_Q} \operatorname{div}_{\vec{y}} \left\{ \frac{\vec{B}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right\} d^3 \vec{y} = \int_S \vec{n} \cdot \left\{ \frac{\vec{B}(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right\} dS_{\vec{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.3.19})$$

Dabei ist mit S die Oberfläche von V_Q bezeichnet. Im weiteren wird angenommen, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer $\vec{B}/|\vec{x} - \vec{y}|$ auf der Oberfläche verschwindet. Dann ist das Oberflächenintegral und damit auch die linke Seite von (B.3.18) gleich Null. Folglich müssen die Integrale auf der rechten Seite von (B.3.18) gleich sein. In diesem Fall gilt

$$\int_{V_Q} \frac{\frac{\partial B_i}{\partial y_i} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_Q} \frac{B_i \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{B.3.20})$$

Setzt man den gesamten Raum \mathbb{R}^3 für das Volumen V_Q ein, dann stimmt diese Beziehung mit Gleichung (B.3.13) übereinstimmt. Die Oberfläche S liegt dann im Unendlichen. In diesem Fall muß der Ausdruck $\vec{B}/|\vec{x} - \vec{y}|$ für $|\vec{y}| \rightarrow \infty$ auf Null abfallen (bei festem \vec{x}), damit die Voraussetzungen erfüllt sind. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß der Betrag $|\vec{B}|$ beschränkt ist.

Sachverzeichnis

- Abschlußwiderstand, 68
- Adiabatenexponent, 159
- Admittanz, 120
 - radiale, 120
- Amplitude
 - komplexe, 115, 116
- Anfangsbedingung, 73, 77
- Anfangswertproblem, 72
- Anpassung
 - reflexionsfreie, 68
- Ausstrahlbedingung, 121

- Bessel-Funktion, 196
- Bezugssystem
 - mitbewegt, 96
- Blindleistung, 127, 139

- Charakteristiken, 75
- “Cut-Off”-Bedingung, 86
- “Cut-Off”-Frequenz, 86

- δ -Folge, 19
- δ -Funktion, 16, 27, 78, 147
- Dezibel, 9
- Differentialgleichungssystem
 - hyperbolisches, 75
- Dipol, 166, 168
- Dipolfeld, 168
- Dispersion, 91, 94, 95
- Dispersionsbeziehung, 95
- Distribution, 22
- Donner, 161
- Dopplerfaktor, 97
- Druckamplitude
 - komplexe, 14

- Ebene
 - komplexe, 12

- Effektivwert, 9
- Eigenschwingung, 62
- Energie, 48, 124
 - akustische, 50
 - kinetische, 48
 - potentielle, 50
- Energieerhaltung, 51, 55, 124, 157
- Energiefluß, 52
- Energieflußdichtevektor, 124
- Euler-Gleichung, 29, 199
 - linearisierte, 31, 82

- Fernfeld, 129, 173, 184, 209
 - geometrisches, 172, 184, 209
- Fluid, 7
 - Newton'sches, 200
 - reibungsfreies, 29
- Fourier-Integral, 222
- Fourier-Reihe, 220
- Fourier-Transformation, 25
- Freifeldwellenlänge, 86
- Freistrahl
 - turbulenter, 198
- Freistrahlärm, 207

- Gas
 - ideales, 159
- Gaskonstante
 - spezifische, 159
- Gesamtintensität, 54
- Gleichanteil, 9
- Gravitationswellen, 41
- Greensche Funktion, 156, 157, 185, 188
- Grundmode, 85
- Gruppengeschwindigkeit, 91, 93

- Hankel-Funktion, 196
- Heaviside-Funktion, 22, 77

- Helmholtz-Gleichung, 122
- Howe-Gleichung, 219
- Impedanz, 120
 - radiale, 116, 136
- Impulsgleichung, 198, 200
- Impulsquelle
 - punktförmige, 167
- Intensität, 52, 124, 125
 - radiale, 125
- Kanal
 - zweidimensionaler, 81
- Kausalität, 121
- Kolben
 - im Rohr, 11, 58
- Kontinuitätsgleichung, 29, 198
 - linearisierte, 30
- Kreisfrequenz, 10
- Kugel
 - atmende, 113
 - vibrierende, 129, 167
- Kugelkoordinaten, 113, 224
- Kugelwelle, 114, 125
- Lösung
 - schwache, 80
- Laplace-Operator, 113, 224
- Lautstärke, 11
- Lighthill-Gleichung, 198
- Lighthillscher Spannungstensor, 201
- Lindsay
 - Akustik-Übersicht von, 5
- M^8 -Gesetz, 211
- Massenquelle, 144
- Mediengrenze, 69
- Medium, 7
- Mediummasse
 - mitschwingende, 141
- Membran, 72
- Mode, 81, 85
- Monopol, 143, 148, 166
 - linienhafter, 189
- Multipolentwicklung, 178, 180
- Nahfeld, 129
- Navier-Stokes-Gleichung, 200
- Neumann-Funktion, 196
- Ordnung der Mode, 85
- Phasengeschwindigkeit, 86, 91
- Phasenverschiebung, 119, 121, 129
- Phon, 11
- Potential
 - akustisches, 111
- Potentialströmung, 144
- Quadrupol, 171
- Quelle
 - kompakte, 174, 208
- Quellverteilung, 152
- Randbedingung, 42
- Randwertproblem, 72
- Reflexion, 69
- Reflexionsfaktor, 67
- Relaxation, 29
- Resonanz, 58
- Resonanzfrequenz, 62, 68
- Reynoldsschen Spannungen, 204
- Riemann-Invarianten, 75
- RMS-Wert, 9
- Schall, 8
- Schalldruck, 9
- Schalldruckpegel, 9
- Schallgeschwindigkeit, 31
 - in Luft, 37
- Schallquelle
 - durch Energiezufuhr, 157
 - durch Impulszufuhr, 164
 - durch Massenzufuhr, 161
 - zweidimensionale, 184
- Schnelle
 - in ebener Welle, 35
- Schnellefeld, 133
- Schubspannungen, 199
- Schwankungsanteil, 9
- Schwebung, 93
- Schwingung

Sachverzeichnis

- harmonisch, 10
- Schwingungsbauch, 60
- Schwingungsknoten, 60
- Spektrum, 28, 92
- Strömung, 47
 - turbulente, 204
- Transformation des Bezugssystems, 47,
 - 96
- Transmission, 69
- Transmissionsfaktor, 72
- Unstetigkeit in der Lösung, 72
- Viskosität, 200
- Wand
 - feste, 81
 - schallharte, 65, 67, 105
 - schallweiche, 65, 68, 105
- Wandimpedanz, 64, 105
 - komplexe, 62
- Welle
 - ebene, 34, 42
 - harmonische, 37
 - reflektierte, 69
 - stehende, 58
 - transmittierte, 69
- Wellengleichung, 29
 - inhomogene, 150, 153, 155
- Wellengruppe, 93
- Wellenlänge, 37
- Wellenwiderstand, 36
- Wellenzahl, 37, 95, 98
- Wellenzahlvektor, 89
- Wirbelschall, 214
- Wirkleistung, 129, 139
- Zeigerdarstellung, 12
- Zeit
 - retardierte, 44, 153
- Zustandsänderung
 - adiabatische, 158
- Zylinderkoordinaten, 224