

Vorläufiges Skript zur Vorlesung Strömungsakustik II

Klaus Ehrenfried

28. April 2003

Inhaltsverzeichnis

8	Schallfeld mit Berandung	4
8.1	Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral	4
8.2	Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen	26
8.3	Schallquellen und Reziprozität	34
9	Bewegte Schallquellen	47
9.1	Schallfeld eines bewegten Monopols	47
9.2	Frequenzverschiebung	57
9.3	Quelle mit Überschallgeschwindigkeit	60
9.4	Bewegte Massen- und Impulsquelle	63
10	Schallfelder umströmter Körper	73
10.1	Formale Darstellung von bewegten Flächen	73
10.2	Die Lighthill-Gleichung mit Berandung	76
10.3	Quellen auf festen Oberflächen	80
10.4	Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche	82
10.5	Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings	92
11	Dreidimensionale Kanalmoden	112
11.1	Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt	112
11.2	Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie	120
11.3	Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt	127
12	Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen	138
12.1	Kanal mit Querschnittssprung	138
12.2	Zusammengefaßte Parameter	145
12.3	Der Helmholtz-Resonator	150
12.4	Prinzip des Reflexionsschalldämpfers	159
12.5	Durchströmter Querschnittssprung	163
	Sachverzeichnis	176

8 Schallfeld mit Berandung

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

In den vorherigen Abschnitten wurde fast immer davon ausgegangen, daß das von einer Quellverteilung erzeugte Schallfeld keine Berandungen besitzen. Dann läßt sich die Lösung der inhomogenen Wellengleichung als Integral über die Quellstärkeverteilung multipliziert mit einer einfachen Greenschen Funktion darstellen. Sind jedoch Berandungen – wie zum Beispiel feste Körper – vorhanden, so müssen dort Randbedingungen erfüllt werden. Die Lösung wird dadurch deutlich komplizierter.

Bereits im 19-ten Jahrhundert wurden die theoretischen Grundlagen entwickelt, die dazu notwendig sind, ein Schallfeld mit Berandungen zu behandeln. Im folgenden sollen die wichtigsten dieser Erkenntnisse vorgestellt werden. Die formale Beschreibung orientiert sich dabei an den mathematischen Darstellungen aus dem 19-ten Jahrhundert. Es wird hier absichtlich auf neuere Elemente – wie etwa die Diracsche δ -Funktion – verzichtet. Dadurch werden die Herleitungen zwar etwas umfangreicher, aber die klassische Beschreibung ist im Vergleich zu den Umformungen mit δ -Funktionen etwas anschaulicher.

Die folgenden Überlegungen beginnen bei der homogene Wellengleichung. Sie lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (8.1.1)$$

Die Größe ϕ kann zunächst als ein Stellvertreter für sämtliche Größen, die die Wellengleichung in der gegebenen Form erfüllen, angesehen werden. Die vorgestellten Beziehungen gelten allgemein über das Gebiet der Akustik hinaus. Erst später wird ϕ wieder als akustisches Potential betrachtet.

Untersucht man die Lösung der Wellengleichung für eine Frequenz, kann der harmonische Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.2)$$

verwendet werden. Die Größe $\varphi(\vec{x})$ stellt die komplexe Amplitude des Feldes $\phi(\vec{x}, t)$ dar. Setzt man den harmonischen Ansatz in die Wellengleichung ein, ergibt sich mit

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (8.1.3)$$

die Helmholtz-Gleichung. Dabei ist $k = \omega/c$ wie üblich die Wellenzahl. Eine elementare Lösung der Wellengleichung sind die Kugelwellen. Ein einfaches Beispiel ist mit

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} = \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} e^{i\omega t} \quad (8.1.4)$$

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

gegeben. Zur Abkürzung wird der Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad (8.1.5)$$

verwendet. Das Feld (8.1.4) erfüllt die Wellengleichung überall außer an der Stelle \vec{x}_0 . Dort wird $r = 0$, und die Lösung besitzt eine Singularität.

Auf der rechten Seite von (8.1.4) ist bereits der $e^{i\omega t}$ -Term abgespalten. Für die komplexe Amplitude ergibt sich bei dieser Lösung

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (8.1.6)$$

Dies stellt eine Elementarlösung der Helmholtz-Gleichung (8.1.3) dar. Die weiteren Untersuchungen basieren im Wesentlichen auf dieser Lösung.

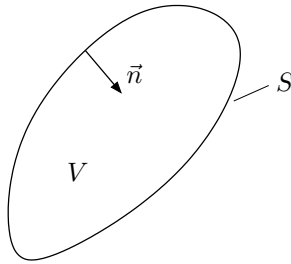


Abbildung 8.1: Volumen V mit Oberfläche S und nach innen zeigenden Normalenvektor \vec{n} .

Es wird ein abgeschlossenes Volumen V mit der Oberfläche S betrachtet. Auf der Oberfläche wird der Normalenvektor \vec{n} nach innen zeigend definiert. Die geometrische Situation ist in Abbildung 8.1 skizziert. Sind die Felder $\varphi_1(\vec{x})$ und $\varphi_2(\vec{x})$ überall in V gegeben, so können mit den Integralsätzen von Green Zusammenhänge zwischen jeweils einem Volumen und einem Oberflächenintegral hergestellt werden. Insbesondere liefert der zweite Greensche Integralsatz die allgemeine Aussage

$$\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS = \int_V (\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2) dV \quad (8.1.7)$$

Dabei ist mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad } \varphi \quad (8.1.8)$$

die Normalableitung eines Feldes φ an der Oberfläche in Richtung von \vec{n} dargestellt. Voraussetzung für (8.1.7) ist lediglich, dass φ_1 und φ_2 zweimal differenzierbar sind.

Erfüllen die Felder φ_1 und φ_2 überall in V zusätzlich auch die Helmholtz-Gleichung (8.1.2), dann gilt

$$\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2 = \varphi_2 (-k^2 \varphi_1) - \varphi_1 (-k^2 \varphi_2) = 0 \quad (8.1.9)$$

8 Schallfeld mit Berandung

Damit verschwindet das Integral auf der rechten Seite von (8.1.7). Es folgt

$$\int_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS = \int_S \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \quad (8.1.10)$$

Diese Beziehung gilt für alle Paare φ_1, φ_2 von Lösungen der Helmholtz-Gleichung. Im folgenden wird für φ_2 eine bestimmte Lösung – und zwar die Elementarlösung (8.1.6) – eingesetzt. Es wird

$$\varphi_2(\vec{x}) = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (8.1.11)$$

gewählt. Dies spezielle Feld φ_2 erfüllt überall außer im Punkt \vec{x}_0 , an dem $r = 0$ wird, die Helmholtz-Gleichung.

Zunächst wird der Fall betrachtet, daß der Punkt \vec{x}_0 außerhalb des Volumens V liegt. Dann ist φ_2 überall in V eine Lösung, und die Bedingung (8.1.10) gilt. Es folgt für alle Lösungen φ_1 die Gleichung

$$\int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \quad (8.1.12)$$

Liegt der Punkt \vec{x}_0 jedoch innerhalb des Volumens V , so ist φ_2 zumindest in einem Punkt nicht definiert und damit auch keine Lösung. Die Voraussetzung für (8.1.10) ist in diesem Fall nicht erfüllt. Es läßt sich jedoch eine wertvolle Beziehung herleiten, wenn man das Volumen V so modifiziert, daß der Punkt \vec{x}_0 herausfällt. Dazu wird eine kleine Kugel mit dem Radius a um den Punkt \vec{x}_0 aus dem Volumen V herausgeschnitten. Es ergibt sich ein neues Volumen

$$V_{\text{neu}} = V - V_{\text{K}} \quad (8.1.13)$$

wobei V_{K} das Volumen der kleinen Kugel bezeichnet. Die Situation ist in Abbildung 8.2 illustriert.

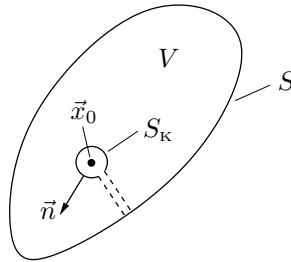


Abbildung 8.2: Volumen V mit herausgeschnittener Kugel um \vec{x}_0 und Oberflächen S des Volumens V und S_K der Kugel.

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Die Oberfläche der neuen Volumens besteht aus der Oberfläche S und der Kugeloberfläche S_K . Man kann sich zusätzlich einen unendlich dünnen Schlauch zwischen den beiden Teilen der Oberfläche vorstellen, wie er gestrichelt in Abbildung 8.2 angedeutet ist. Damit ergibt sich eine einfach zusammenhängende Oberfläche. Dieser Teil der Oberfläche ist jedoch bei folgenden Überlegungen nicht von Bedeutung, denn bei einer Oberflächenintegration liefert er keinen Beitrag. Für die neuen Oberfläche kann

$$S_{\text{neu}} = S + S_K \quad (8.1.14)$$

geschrieben werden.

Der Punkt \vec{x}_0 liegt außerhalb des konstruierten Volumens V_{neu} . Damit ist Gleichung (8.1.12) erfüllt, wenn man die Oberfläche S durch S_{neu} ersetzt. Wird dies durchgeführt und werden die Oberflächenintegrale über S_{neu} in zwei Teilintegrale über S und S_K aufgespalten, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS + \int_{S_K} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS_K \\ = \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS + \int_{S_K} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS_K \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

Die S_K -Teilintegrale über die Kugeloberfläche lassen sich berechnen, wenn man in einem Grenzprozeß die Kugel immer kleiner werden läßt. Dies ist erlaubt, denn der Punkt \vec{x}_0 bleibt dabei immer außerhalb des Volumens V_{neu} . Es wird angenommen, daß φ_1 und auch seine Ableitungen überall stetig und beschränkt sind. Dies ist vernünftig, denn φ_1 ist nach Voraussetzung eine Lösung der Helmholtz-Gleichung und zweimal differenzierbar. Zuerst wird das S_K -Teilintegral auf der linken Seite von (8.1.15) betrachtet. Dort tritt die Normalableitung der Elementarlösung auf. Auf der Kugel gilt der Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (8.1.16)$$

denn der Normalenvektor \vec{n} zeigt überall in die Richtung von r . Für die radiale Ableitung der Elementarlösung gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = - \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right) e^{-ikr} \quad (8.1.17)$$

Damit kann die Normalableitung im Integranden ersetzt werden. Dieser Anteil des Integranden wird singulär, wenn $a \rightarrow 0$ geht. Gleichzeitig geht jedoch auch die Oberfläche gegen Null. Der Wert von φ_1 konvergiert überall auf der Oberfläche gegen den Wert $\varphi_1(\vec{x}_0)$. Insgesamt erhält man

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS_K = \lim_{a \rightarrow 0} \left[-4\pi a^2 \left(\frac{1}{a^2} + i \frac{k}{a} \right) e^{-ika} \right] \varphi_1(\vec{x}_0) = -4\pi \varphi_1(\vec{x}_0) \quad (8.1.18)$$

8 Schallfeld mit Berandung

Die Abnahme der Kugeloberfläche $4\pi a^2$ hebt gerade die $1/a^2$ -Singularität auf, und es ergibt sich ein endlicher Grenzwert.

Im S_K -Teilintegral auf der rechten Seite kommt die Normalableitung des Feldes φ_1 vor. Sie ist beschränkt. Diesmal wird der erste Faktor im Integral singular für $a \rightarrow 0$. Jedoch reicht die $1/a$ -Singularität nicht aus um die Abnahme der Oberfläche mit a^2 auszugleichen. Es gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[4\pi a^2 \frac{e^{-ika}}{a} \right] = 0 \quad (8.1.19)$$

Wegen der Beschränktheit von $\partial\varphi_1/\partial n$ folgt unmittelbar

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_K} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS_K = 0 \quad (8.1.20)$$

Die beiden berechneten S_K -Teilintegrale können nun in Gleichung (8.1.15) eingesetzt werden. Werden die verbleibenden Integrale auf eine Seite gebracht, folgt der Zusammenhang

$$\int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS - \int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{x}_0 \notin V \\ -4\pi\varphi_1(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in V \end{cases} \quad (8.1.21)$$

Die Oberflächenintegrale auf der linken Seite ergeben entweder Null oder den Wert $-4\pi\varphi_1(\vec{x}_0)$ je nachdem, ob \vec{x}_0 außerhalb oder innerhalb des Volumens V liegt. Falls der Punkt \vec{x}_0 genau am Rand liegt, ist die Gleichung (8.1.21) nicht anwendbar. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß bei glatter Oberfläche S (ohne Knick) sich gerade $-2\pi\varphi_1(\vec{x}_0)$ ergibt. Hier wird jedoch zunächst der Fall $\vec{x}_0 \in S$ ausgeschlossen.

Die Beziehung (8.1.21) gilt unter der Voraussetzung, daß φ_1 überall in V eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (8.1.3) ist. Es ist damit möglich jede Lösung innerhalb des Volumens durch ein Integral über die Oberfläche darzustellen. Wird (8.1.21) nach φ_1 aufgelöst und der Index weggelassen, ergibt sich

$$\varphi(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS \quad (8.1.22)$$

wobei $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ wie oben definiert der Abstand vom Punkt \vec{x}_0 bezeichnet. Diese Beziehung wird üblicherweise als Kirchhoff-Helmholtz-Integral oder Kirchhoff-Helmholtz-Formel bezeichnet.

Interpretation

Die Oberflächenintegrale in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel lassen sich anschaulich interpretieren. Dazu wird ein Vergleich mit der Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = q(\vec{x}, t) \quad (8.1.23)$$

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

angestellt. Ohne Berandung kann die Lösung an einer Stelle \vec{x}_0 mit

$$\phi(\vec{x}_0, t) = \int_{V_Q} \frac{q(\vec{x}, t - r/c)}{4\pi r} d^3\vec{x} \quad (8.1.24)$$

angegeben werden. Dabei ist der Abstand

$$r = |\vec{x}_0 - \vec{x}| \quad (8.1.25)$$

definiert. Im harmonischen Fall mit

$$q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.26)$$

ergibt sich

$$\phi(\vec{x}_0, t) = \int_{V_Q} Q(\vec{x}) \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{4\pi r} d^3\vec{x} = e^{i\omega t} \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} Q(\vec{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d^3\vec{x} \quad (8.1.27)$$

Damit ist die komplexe Amplitude der Feldes $\phi(\vec{x}_0, t)$ durch

$$\varphi(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_Q} Q(\vec{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d^3\vec{x} \quad (8.1.28)$$

gegeben. Dies kann als Integral über Kugelwellen, die von Monopolen an den Quellpositionen \vec{x} ausgehen, angesehen werden. Die Stärke der Kugelwellen ist durch die Quellstärke $Q(\vec{x})$ gegeben.

Die Lösung (8.1.28) ist mit dem ersten Integral in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) vergleichbar, obwohl dort über eine Fläche und kein Volumen integriert wird. Es wird ebenfalls eine Überlagerung von Monopolfeldern gebildet. Die Monopole gehen von den Punkten auf der Oberfläche S aus. Die Stärke der Monopole ist durch die Ableitung $\partial\varphi/\partial n$ an der jeweiligen Ausgangsposition gegeben. In dem zweiten Integral tritt die Ableitung der Elementarlösung – des Monopolfeldes – in Normalenrichtung auf. Daraus resultiert ein Dipolfeld, welches senkrecht zur Oberfläche orientiert ist. Das zweite Integral stellt demnach eine Überlagerung von Dipolfeldern, die von den Punkten auf der Oberfläche ausgehen, und deren Stärke durch das Feld φ an der jeweiligen Ausgangsposition gegeben ist.

Die Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) besagt folglich, daß jede Lösung φ der Helmholtz-Gleichung in dem Volumen V durch eine Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern, die vom Rand des Volumens ausgehen, gebildet werden kann. In Abbildung 8.3 wird dies veranschaulicht. Jede Lösung im Inneren von V läßt sich also durch eine Quellverteilung am Rand darstellen. Dabei spielt es überhaupt keine Rolle, was außerhalb des Volumens passiert. Es können dort echte Quellen und auch Berandungen, an denen die Wellen reflektiert werden, vorhanden sein. Bei den in Gleichung (8.1.22) vorkommenden Quellen handelt es sich sozusagen um virtuelle Quellen, die den Einfluß des gesamten Außenbereichs auf die Lösung im Volumen V ersetzen. In jedem Fall läßt sich mit der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) die Lösung, wenn sie am Rand bekannt ist, auch im gesamten Innenbereich von V berechnen.

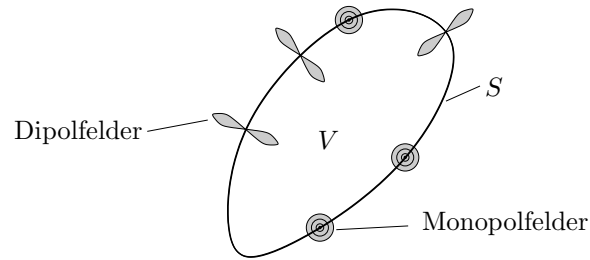


Abbildung 8.3: Illustration zur Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern, die von der Oberfläche S ausgehen.

Unendlich ausgedehnte Volumen

Bisher wurde immer ein abgeschlossenes Volumen V betrachtet. Es ist jedoch auch möglich, die Kirchhoff-Helmholtz-Formel auf unendlich ausgedehnte Volumen anzuwenden. In Abbildung 8.4 sind zwei Beispiele skizziert. In Teil a) entspricht V einem Halbraum. Die Oberfläche S ist eine Ebene. Damit die Kirchhoff-Helmholtz-Formel angewendet werden kann, muß eigentlich die Oberfläche geschlossen sein. Man nimmt an, daß sich die Oberfläche – wie in in der Abbildung gestrichelt angedeutet – im Unendlichen schließt. Der im unendlichen liegende Teil wird bei der Integration einfach weggelassen. Voraussetzung für diese Vernachlässigung ist, daß die Lösung in großer Entfernung vom Ursprung mit $1/|\vec{x}|$ abklingt. Sie muß asymptotisch gegen die Form

$$\varphi = C \frac{e^{-ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \quad \text{für } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (8.1.29)$$

gehen, wobei C nicht von Abstand $|\vec{x}|$ abhängt. In diesem Fall liefert der im Unendlichen liegende Teil der Oberfläche keinen Beitrag bei der Integration.

Praktisch sind dadurch alle Fälle mit Quellen im Unendlichen ausgeschlossen. Dazu gehört die ebene Welle, die im Unendlichen nicht abklingt. Wird die Bedingung (8.1.29) erfüllt, kann die Kirchhoff-Helmholtz-Formel auch bei der in Abbildung 8.4b dargestellten Geometrie angewendet werden. Dort ist die Oberfläche S geschlossen und V entspricht dem gesamten Außenraum. Wieder kann man sich S ins Unendliche fortgesetzt denken. Der vernachlässigte Teil liefert jedoch wie im vorigen Beispiel keinen Beitrag bei den Integrationen.

Anwendung in der Akustik

Bisher sind die Überlegungen allgemein unabhängig von einer physikalischen Anwendung vorgestellt worden. Im folgenden sollen die Erkenntnisse auf die Akustik übertragen werden. Es wird angenommen ϕ ist das akustische Potential. Mit dem harmoni-

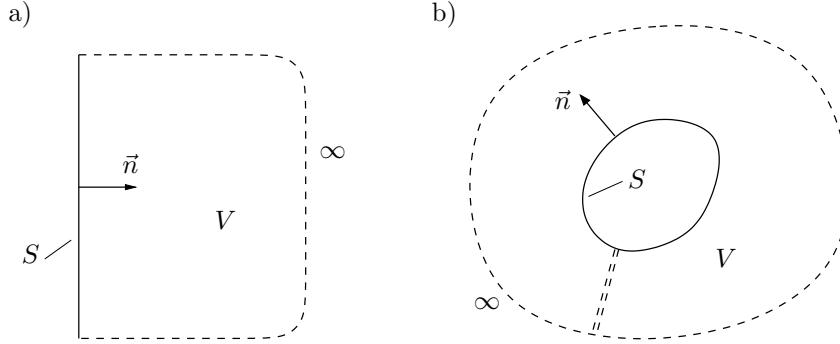


Abbildung 8.4: Beispiele für unendlich ausgedehnte Volumen: a) Halbraum; b) Außenraum um eine geschlossene Oberfläche.

schen Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.30)$$

wird die komplexe Amplitude $\varphi(\vec{x})$ des akustischen Potentials definiert. Wie gewohnt, führt man auch für die physikalischen Größen komplexe Amplituden ein. Es sollen für Druck und Schnelle die Ansätze

$$p = \hat{p} e^{i\omega t} \quad (8.1.31)$$

und

$$v'_i = \hat{v}_i e^{i\omega t} \quad (8.1.32)$$

gelten. Dabei ist \hat{p} die Druckamplitude und \hat{v}_i die Amplitude der i -ten Schnellekomponente. Die Schnelle \vec{v}' berechnet sich als Gradient der Potentials mit

$$\vec{v}' = \text{grad } \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \quad (8.1.33)$$

Damit folgt für die Schnelleamplitude

$$\hat{v}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \quad (8.1.34)$$

Auch der Druck ist mit dem akustischen Potential verknüpft. Es gilt

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\omega \rho_0 \varphi e^{i\omega t} \quad (8.1.35)$$

wobei die zweite Gleichheit aus dem harmonischen Ansatz folgt. Entsprechend kann die Druckamplitude mit

$$\hat{p} = -i\omega \rho_0 \varphi \quad (8.1.36)$$

aus dem Feld φ berechnet werden. Zweckmäßigerweise wird noch die Normalkomponente der Schnelle mit

$$v'_n = \vec{v}' \cdot \vec{n} \quad (8.1.37)$$

8 Schallfeld mit Berandung

eingeführt. Auch sie schwingt harmonisch entsprechend dem Ansatz

$$v'_n = \hat{v}_n e^{i\omega t} \quad (8.1.38)$$

Es gilt

$$v'_n = \text{grad}(\phi) \vec{n} \quad (8.1.39)$$

Daraus ergibt sich

$$\hat{v}_n = \text{grad}(\phi) \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (8.1.40)$$

Mit dieser Vorbereitung lassen sich die in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel benötigten physikalischen Größen identifizieren. Um das Feld ϕ zu bestimmen muß auf der Oberfläche ϕ und $\partial\phi/\partial n$ bekannt sein. Erstere läßt sich gemäß (8.1.36) aus der Druckamplitude bestimmen. Die zweite Größe entspricht der Amplitude der Schnelle normal zur Oberfläche. Ist also Druck und Schnelle auf der Oberfläche bekannt, so kann das gesamte Feld ϕ – und damit auch wieder die physikalischen Größen – im gesamten Volumen V berechnen.

Eine Anwendung für die Kirchhoff-Helmholtz-Formel ist zum Beispiel die Berechnung des Schallfeldes eines abstrahlenden Körpers im unbegrenzten Raum. Dabei kann es sich um eine atmende Kugel, eine Lautsprecherbox oder um eine vibrierende Maschine handeln. Durch die bewegte Oberfläche wird Schall erzeugt. Das Volumen V wird so gewählt, daß die Oberfläche S der mittleren Position der Körperoberfläche entspricht. Die Bewegung der Körperoberfläche gibt die Normalkomponente v'_n der Schnelle vor. Um das entstehende Schallfeld berechnen zu können, muß noch der Druck auf der Oberfläche bekannt sein. Die vorgegebene Schnelle allein reicht nicht aus. Zudem kann mit der Kirchhoff-Helmholtz-Formel immer nur eine einzelne Frequenz untersucht werden.

Vereinfachung der Integration

Unter bestimmten Umständen ist es möglich, daß Kirchhoff-Helmholtz-Integral zu vereinfachen. Die Lösung im Volumen V kann dann als Oberflächenintegral mit nur einen Quelltyp allein – entweder Monopol- oder Dipolquellen – ausgedrückt werden. Im folgenden wird die Herleitung der entsprechenden Formeln vorgestellt.

Es wird ein Feld $\varphi_1(\vec{x})$ betrachtet, welches überall in dem Volumen V_1 die Helmholtz-Gleichung erfüllt. Die Oberfläche des Volumens ist mit S bezeichnet, und \vec{n}_1 ist der in das Volumen V_1 hineinzeigende Normalenvektor. Nach der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) kann φ_1 an allen Punkten $\vec{x}_0 \in V_1$ durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt werden. Es gilt

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \varphi_1(\vec{x}_0) \quad (8.1.41)$$

wobei $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ wie oben der Abstand zum Punkt \vec{x}_0 ist. Das Volumen $V_2 = \mathbb{R}^3 - V_1$ sei der restliche Teil des Raumes außerhalb von V_1 . Die beiden Volumen sind durch die

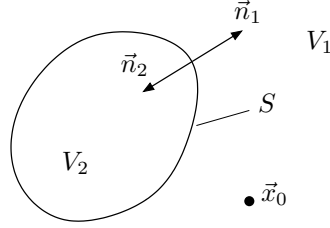


Abbildung 8.5: Äußeres Volumen V_1 und das durch die Oberfläche S eingeschlossene Volumen V_2 .

Oberfläche S getrennt. Die Situation ist die Abbildung 8.5 dargestellt. Mit \vec{n}_2 ist der ins Innere von V_2 zeigende Normalenvektor bezeichnet. Mindestens eines der beiden Volumina ist unendlich ausgedehnt. In dem gezeigten Beispiel ist dies V_1 . Damit in diesem Fall auch (8.1.41) gültig ist, muß das Feld φ_1 zusätzlich noch die Bedingung (8.1.29) erfüllen und im unendlichen mit $1/|\vec{x}|$ abklingen.

Es sei ein Feld $\varphi_2(\vec{x})$ gegeben, welches überall im Volumen V_2 die Helmholtz-Gleichung erfüllt. Es läßt sich dann eine zu (8.1.41) analoge Beziehung für diese Lösung aufstellen. Der Punkt \vec{x}_0 liegt jedoch außerhalb des Volumens V_2 . Entsprechend folgt aus (8.1.21) einfach

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_2 \frac{\partial}{\partial n_2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = 0 \quad (8.1.42)$$

Das Oberflächenintegral über die Quellterme ergibt Null. Auf den linken Seiten von (8.1.41) und (8.1.42), treten jeweils zwei Oberflächenintegrale über S auf. Addiert man die beiden Gleichungen können die Integrale zusammengefaßt werden. Dazu wird im zweiten Teilintegral von einer Bedingung zwischen den Normalableitungen Gebrauch gemacht. Da sich \vec{n}_1 und \vec{n}_2 genau gegenüberstehen, gilt

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial n_2} \quad (8.1.43)$$

Es ergibt sich durch Addition

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_S (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \varphi_1(\vec{x}_0) \quad (8.1.44)$$

Mit dieser Beziehung ist das Feld φ_1 im Volumen V_1 – genau wie durch (8.1.41) – durch ein Oberflächenintegral über S ausgedrückt. Das Integral stellt wieder eine Überlagerung von Monopol- und Dipolfeldern dar. Jedoch unterscheidet sich die Stärke der Felder von denen in (8.1.41). Die Verteilung der Monopol- und Dipolfelder auf der

8 Schallfeld mit Berandung

Oberfläche S , die überlagert die Lösung φ_1 ergeben, ist anscheinend nicht eindeutig. Es existieren mehrere Quellstärkeverteilungen auf S , die das gleiche Feld φ_1 in V_1 erzeugen.

Ein besonders interessanter Fall ergibt sich, wenn die beiden Felder φ_1 und φ_2 an der Oberfläche S die gleichen Werte besitzen:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{auf } S \quad (8.1.45)$$

Dann verschwindet die Stärke der Dipolfelder im zweiten Integral. Die Beziehung (8.1.43) vereinfacht sich zu

$$\varphi_1(\vec{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \right) dS \quad (8.1.46)$$

Das bedeutet, die Lösung φ_1 ist allein durch eine Überlagerung von Monopolfeldern ausgedrückt worden. Die Stärke der Felder ist durch die Summe der Normalableitungen in der runden Klammer gegeben.

Ein ähnliches Resultat ergibt sich, wenn die beide Lösungen φ_1 und φ_2 die gleiche Normalableitung an der Oberfläche S besitzen. Das heißt, es soll

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \quad \text{auf } S \quad (8.1.47)$$

gelten. In diesem Fall erhält man

$$\varphi_1(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS \quad (8.1.48)$$

Damit ist die Lösung φ_1 durch eine reine Überlagerung aus Dipolfeldern ohne Monopolfelder dargestellt. Die Stärke der Dipolfelder ist durch die Differenz $(\varphi_1 - \varphi_2)$ auf S gegeben.

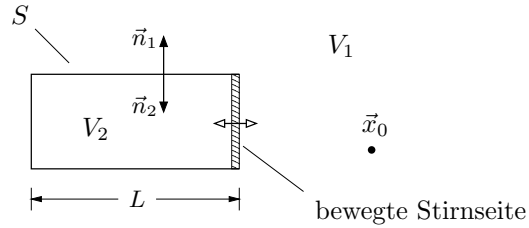


Abbildung 8.6: Rohr der Länge L mit bewegter Stirnseite.

Auf den ersten Blick scheinen die beiden Beziehungen (8.1.46) und (8.1.48) besonders für praktische Berechnungen interessant zu sein, da im Vergleich zu (8.1.41) der

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Integralausdruck weniger aufwendig ist. Jedoch muß für die Anwendung eine Lösung φ_2 in V_2 gefunden werden, die die Eigenschaft (8.1.45) beziehungsweise (8.1.47) besitzt. Im Allgemeinen ist dies nicht so einfach. Eine genauere Betrachtung zeigt sogar, daß eine solche Lösung φ_2 unter Umständen gar nicht existiert. Dies soll an einem Gegenbeispiel verdeutlicht werden. Es wird ein abgeschlossenes Rohr der Länge L mit einer bewegten Stirnseite betrachtet. Die Seitenwände sowie die zweite Stirnseite sind unbeweglich. Die Anordnung ist in Abbildung 8.6 in einem Schnitt dargestellt. Das Volumen V_1 ist der gesamte Außenbereich und V_2 entspricht dem Inneren des Rohrs. Die Oberfläche S stimmt mit der Rohroberfläche überein. Im Bereich der bewegten Stirnseite liegt S in der mittleren Position.

Es wird eine harmonische Bewegung der Stirnseite vorgegeben. Damit ist die Schnelle überall auf der Oberfläche S festgelegt. Auch der Druck auf der Rohroberfläche wird als bekannt vorausgesetzt. Ist φ_1 die komplexe Amplitude des akustischen Potentials im Außenbereich, so kann φ_1 und $\partial\varphi_1/\partial n_1$ auf der Oberfläche aus den komplexen Amplituden \hat{p} und \hat{v}_n bestimmt werden. Es soll die Lösung φ_1 im Außenbereich durch eine Dipolüberlagerung der Form (8.1.48) ausgedrückt werden. Dazu muß eine Lösung φ_2 im Innenbereich gefunden werden, die die Bedingung (8.1.47) erfüllt. In dem akustischen Beispiel bedeutet dies, es muß ein Schallfeld im Rohrinne berechnen werden. Die Bedingung (8.1.47) besagt, daß die Normalkomponente der Schnelle der Schallfelder im Innen- und Außenbereich übereinstimmt. Die feste Rohrwand und die bewegte Stirnseite legen die Normalkomponente der Schnelle fest. Für das innere Schallfeld ergibt sich eine quasi-eindimensionale Situation. Die Lösung im Inneren besteht aus einer geeigneten Überlagerung von hin- und herlaufenden ebenen Wellen. Die Stirnseite kann als Kolben angesehen werden, der stehende Wellen im Rohr anregt. Dabei können allerdings Resonanzen auftreten, wenn die Wellenlänge λ gerade einem vielfachen der halben Rohrlänge $L/2$ entspricht. In diesem Fall kommt es zu einer Resonanzkatastrophe und die innere Lösung "explodiert". Es läßt sich für die vorgegebene Schnelle an der Oberfläche dann kein Schallfeld im Rohrinne finden. Das bedeutet, es existiert keine Lösung φ_2 , welche die Bedingung (8.1.47) erfüllt.

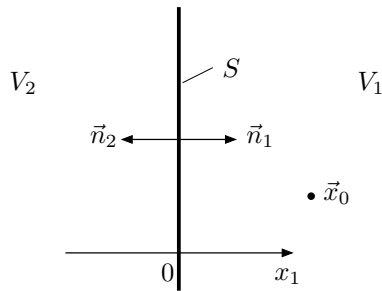


Abbildung 8.7: Die Ebene $x_1 = 0$ als Oberfläche S mit den Volumen V_1 und V_2 als Halbräume $x_1 > 0$ und $x_1 < 0$.

8 Schallfeld mit Berandung

Auch wenn das Volumen V_2 keine so einfache Form wie in dem betrachteten Gegenbeispiel hat, kann es zu Resonanzen im Inneren kommen. Im Allgemeinen wird daher die Anwendung der vereinfachten Integration mit (8.1.46) oder (8.1.48) nicht immer möglich sein. Zudem muß die Lösung im Volumen V_2 auch berechnet werden, was unter Umständen sehr aufwendig ist. Es gibt jedoch Fälle in denen eine passende Lösung sozusagen automatisch gegeben ist. Ein solches Beispiel ist in Abbildung 8.7 skizziert. Die Oberfläche S entspricht der Ebene $x_1 = 0$. Die Volumen V_1 und V_2 stellen die Halbräume $x_1 > 0$ und $x_1 < 0$ dar. Die Normalenvektoren zeigen in beziehungsweise entgegen der x_1 -Richtung. Das Feld φ_1 sei eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in dem Bereich $x_1 > 0$. Zusätzlich klingt es mit $1/|\vec{x}|$ im Unendlichen ab und erfüllt die Bedingung (8.1.29). Für alle Punkt \vec{x}_0 , die – wie das Beispiel in Abbildung 8.6 – in dem Bereich V_1 liegen, gilt die Gleichung (8.1.41).

Die Lösung für den Halbraum $x_1 < 0$ wird aus der Lösung φ_1 durch Spiegelung an der Ebene $x_1 = 0$ konstruiert. Es wird

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.1.49)$$

gesetzt. Das Feld φ_2 ist dann im Bereich $x_1 < 0$ definiert, und es ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, da

$$\Delta\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \Delta\varphi_1(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.1.50)$$

gilt. An der Oberfläche bei $x_1 = 0$ ergibt sich

$$\varphi_1(0, x_2, x_3) = \varphi_2(0, x_2, x_3) \quad (8.1.51)$$

Damit ist die Bedingung (8.1.45) erfüllt, und die Lösung φ_1 kann in der Form (8.1.46) dargestellt werden. Wegen der Symmetrie gilt an der Oberfläche bei $x_1 = 0$ zusätzlich

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2} \quad \text{auf } S \quad (8.1.52)$$

Aus Gleichung (8.1.46) ergibt sich mit dieser Beziehung

$$\varphi_1(\vec{x}_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} dS \quad (8.1.53)$$

Die Lösung im Bereich $x_1 > 0$ ist damit als reine Überlagerung von Monopolfeldern ausgedrückt. Die Stärke der Monopole ist durch die Anleitung $\partial\varphi_1/\partial n_1$ gegeben. Der Wert φ_1 wird zur Berechnung des Feldes gar nicht mehr benötigt. Das hat insbesondere auch bei akustische Anwendungen entscheidende Vorteile. Bezeichnet φ_1 die komplexe Amplitude des akustischen Potentials, so ist die Normalkomponente der Schnelle

$$\hat{v}_n = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1} \quad (8.1.54)$$

ausreichend, um das gesamte Schallfeld zu berechnen. Der Druck \hat{p} ist überhaupt nicht mehr notwendig. Das Schallfeld kann allein aus einer vorgegebenen Auslenkung der Oberfläche ermittelt werden. Das ist allerdings nur dann möglich, wenn S wie in dem Beispiel eine unendlich ausgedehnte Ebene ist.

Kolben in unendlich ausgedehnter Wand

Als akustische Anwendung für die Gleichung (8.1.53) wird ein runder Kolben in einer unendlich ausgedehnten Wand betrachtet. Der Kolben bewegt sich harmonisch. Die Bewegungsrichtung ist senkrecht zur Oberfläche. Ansonsten bewegt sich die Wand nicht. Zweckmäßigerweise wird wieder die Ebene $x_1 = 0$ als Wand angenommen. In der Ebene werden die Polarkoordinaten σ und μ mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \cos \mu \\ \sigma \sin \mu \end{pmatrix} \quad (8.1.55)$$

definiert. Die Ausrichtung der Koordinaten ist in Abbildung 8.8 veranschaulicht. Mit σ ist der Abstand vom Ursprung und mit μ der Winkel relativ zur x_2 -Achse bezeichnet.

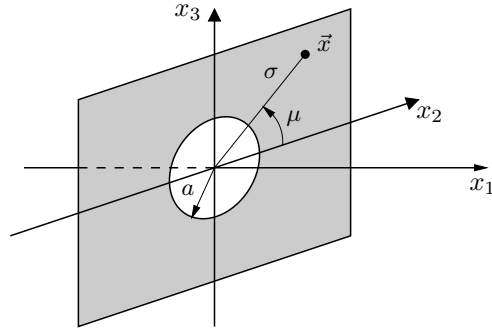


Abbildung 8.8: Kolben mit Radius a in der x_2, x_3 -Ebene, mit Polarkoordinaten σ und μ .

Die Geschwindigkeit des Kolbens $u_K(t)$ ist mit

$$u_K(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (8.1.56)$$

vorgegeben. Damit folgt für die Normalkomponente der Schnelleamplitude in der Wandebene

$$\hat{v}_n = \begin{cases} U_0 & \text{für } \sigma \leq a \\ 0 & \text{für } \sigma > a \end{cases} \quad (8.1.57)$$

Es soll das Druckfeld berechnet werden, welches von der Kolbenbewegung erzeugt wird. Zwischen der komplexen Amplitude des akustischen Potentials und der Druckamplitude gilt der Zusammenhang

$$\hat{p} = -i\omega\rho_0 \varphi(\vec{x}_0) \quad (8.1.58)$$

8 Schallfeld mit Berandung

Zusammen mit (8.1.53) folgt

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{v}_n \, dS \quad (8.1.59)$$

Die Integration kann auf die Kolbenoberfläche S_K beschränkt werden, da außerhalb $\hat{v}_n = \partial\varphi/\partial n$ verschwindet. Es ergibt sich

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} U_0 \int_{S_K} \frac{e^{-ikr}}{r} \, dS_K \quad (8.1.60)$$

Das Integral wird mit den Polarkoordinaten dargestellt. Man erhält

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} U_0 \int_0^a \left[\sigma \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \, d\mu \right] d\sigma \quad (8.1.61)$$

Für das auftretende Integral läßt sich nicht ohne weiteres eine geschlossene Lösung angeben. In jedem Fall kann das Integral für eine gegebene Position \vec{x}_0 numerisch berechnet werden. Im folgenden soll jedoch eine approximative Lösung vorgestellt werden, die für Punkte im geometrischen Fernfeld (relativ zur Abmessung des Kolbens weit entfernt) gültig ist.

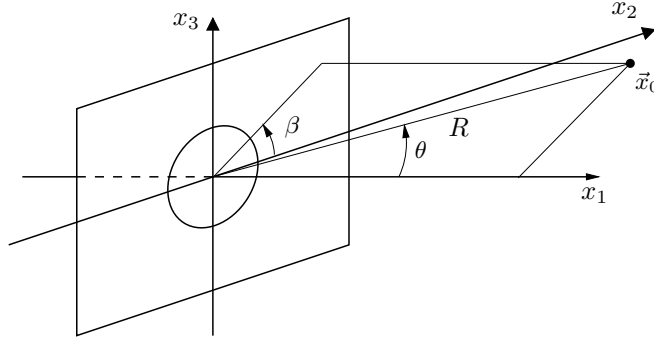
Es wird angenommen, der Abstand R des Beobachtungspunkts \vec{x}_0 vom Ursprung ist groß im Sinne von $R = |\vec{x}_0| \gg a$. Dann kann das Integral in zwei Schritten vereinfacht werden. Zuerst wird der Kehrwert des Abstands $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ zwischen Quelle und Beobachtungspunkt betrachtet. Er kann im geometrischen Fernfeld mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \approx \frac{1}{|\vec{x}_0|} = \frac{1}{R} \quad (8.1.62)$$

angenähert werden. Setzt man dies in den Integranden ein, kann der $1/R$ -Term vor das Integral gezogen werden. Im zweiten Schritt wird auch der Abstand r im e^{-ikr} -Ausdruck angenähert. Im Fall einer kompakten Quelle mit $\lambda \gg a$ könnte man dort ebenfalls einfach r durch R ersetzen. Der entstehende Fehler wäre gering, denn die Phasenunterschiede in dem Bereich der Kolbenoberfläche sind vernachlässigbar. Wenn die Quelle nicht kompakt ist, führt diese grobe Vereinfachung auf völlig falsche Ergebnisse. Daher soll eine etwas genauere Approximation für den Abstand r gefunden werden. Dazu wird die Beobachtungsposition mit

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \cos \beta \\ R \sin \theta \sin \beta \end{pmatrix} \quad (8.1.63)$$

in Kugelkoordinaten ausgedrückt. Die Koordinaten sind in Abbildung 8.9 veranschaulicht. Mit θ ist der Winkel relativ zur x_1 -Achse gegeben. Die Größe β ist (wie μ) der Winkel in der x_2, x_3 -Ebene und R bezeichnet den Abstand zum Ursprung.


 Abbildung 8.9: Kugelkoordinaten für den Punkt \vec{x}_0 .

Für den Abstand r zwischen einem Punkt \vec{x} in der Wandebene und dem Beobachtungspunkt \vec{x}_0 gilt

$$r = |\vec{x}_0 - \vec{x}| = \left[x_{0,1}^2 + (x_{0,2} - x_2)^2 + (x_{0,3} - x_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1.64)$$

Dabei ist $x_{0,i}$ die i -te Komponente von \vec{x}_0 . Unter Berücksichtigung von (8.1.55) und (8.1.63) ergibt sich nach einigen Umformungen

$$r = \left[R^2 - 2R\sigma \sin \theta \cos(\beta - \mu) + \sigma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1.65)$$

Für große Abstände gilt $R \gg \sigma$. Damit kann näherungsweise

$$r \approx R - \sigma \sin \theta \cos(\beta - \mu) \quad (8.1.66)$$

geschrieben werden. Diese Approximation berücksichtigt die Variation des Abstands r in der Kolbenoberfläche auf etwas einfachere Weise als die exakte Gleichung. Setzt man diesen Ausdruck in den e^{-ikr} -Term ein, ergibt sich als Näherungslösung im Fernfeld

$$\hat{p} = \frac{i\omega\rho_0 U_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \int_0^a \left[\sigma \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma \sin \theta \cos(\beta-\mu)} d\mu \right] d\sigma \quad (8.1.67)$$

Das Integral in diesem Ausdruck kann geschlossen berechnet werden. Man erhält schließlich

$$\hat{p} = i\omega\rho_0 U_0 a^2 \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \quad (8.1.68)$$

Das entstehende Druckfeld ist proportional zur Kolbengeschwindigkeit U_0 und zur Oberfläche des Kolbens ($\sim a^2$). Die Richtungsabhängigkeit wird durch den zweiten Quotienten ausgedrückt. Mit J_1 ist die Bessel-Funktion erster Ordnung bezeichnet. Der

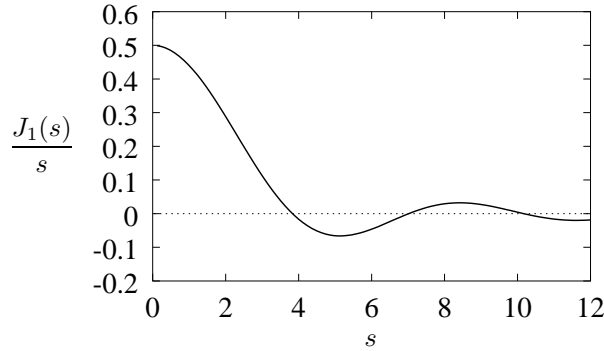


Abbildung 8.10: Verlauf des Ausdruck mit Besselfunktion erster Ordnung.

Verlauf des Quotienten ist in Abhängigkeit des Arguments $s = ka \sin \theta$ in Abbildung 8.10 dargestellt. In der x_1 -Richtung ist in jedem Fall die Abstrahlung maximal, da bei $\theta = 0$ auch $s = 0$ wird. Die Richtungsabhängigkeit wird im wesentlichen durch den Faktor

$$ka = \frac{\omega}{c}a = 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad (8.1.69)$$

bestimmt. Dieser Faktor entspricht dem Quotienten

$$\frac{\text{typische Abmessung}}{\text{Wellenlänge}} \quad (8.1.70)$$

und gibt die sogenannte Helmholtz-Zahl des Kolbens an.

Für einen kompakten Kolben gilt $\lambda \gg a$ beziehungsweise $ka \ll 1$. In diesem Fall ist unabhängig von dem Winkel θ immer $s \ll 1$. So strahlt die Quelle in alle Richtungen näherungsweise gleichstark ab. Für größere Helmholtz-Zahlen ergibt sich dagegen eine deutliche Abhängigkeit der Abstrahlung von der Richtung. In Abbildung 8.11 ist das Feld für den Fall $ka = 8$ dargestellt. Bei $\theta = 90^\circ$ ist dann gerade $s = 8$. Die Funktion $J_1(s)/s$ besitzt in dem Intervall $[0, 8]$ zwei Nullstellen. Entsprechend ergeben sich zwei Winkel θ_1 und θ_2 , für die $J_1(s)/s = 0$ wird. In diese Richtungen wird überhaupt kein Schall abgestrahlt. In den Zwischenbereichen ergibt sich eine gewisse Feldstärke. Diese Bereiche werden (nicht zuletzt wegen der Form der Konturlinien) auch als Keulen bezeichnet. Es ist hier zu bedenken, daß die Aufgabenstellung rotationssymmetrisch ist. Das bedeutet, durch die Winkel θ_1 und θ_2 werden Kegelflächen definiert, auf denen ein Beobachter im Fernfeld keinen Schall wahrnimmt.

Übergang auf den zeitabhängigen Fall

Bisher wurde die Lösung der Helmholtz-Gleichung betrachtet. Dies ist immer dann sinnvoll, wenn bestimmte Frequenzen oder Spektralbereiche von Interesse sind. Ist

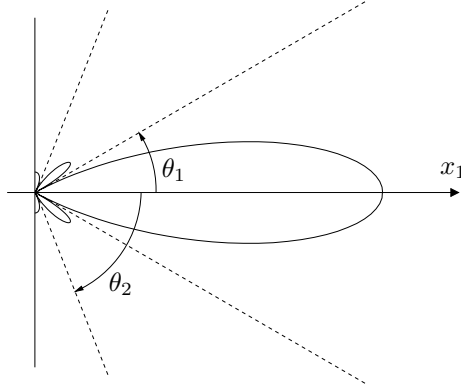


Abbildung 8.11: Fernfeld eines vibrierenden Kolbens in unendlich ausgedehnter Wand mit $ka = 8$; Entlang der durchgezogenen Linie gilt $|\hat{p}| = \text{const.}$

dagegen der konkrete Zeitverlauf an einer bestimmten Position gefragt, ist es günstiger die Lösung der Wellengleichung direkt zu betrachten.

Für die Lösungen der Helmholtz-Gleichung gilt die Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22). Aus ihr kann sich eine entsprechende Gleichung für den zeitabhängigen Fall abgeleitet werden. Dazu wird die Fourier-Integralformel angewendet. Für ein Zeitsignal $h(t)$ lautet sie

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] d\omega \quad (8.1.71)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer entspricht zusammen mit dem Vorfaktor $1/(2\pi)$ der Fourier-Transformierten $\tilde{h}(\omega)$ des Zeitsignals. Diese ist von der Frequenz ω abhängig und wird mit

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (8.1.72)$$

gebildet. Die Fourier-Transformierten gibt die Phase und Amplitude des Signals bei der jeweiligen Frequenz an.

Mit einem harmonischen Ansatz der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.1.73)$$

wird lediglich eine Frequenz berücksichtigt. Sind mehrere Frequenzen beteiligt, so ergibt sich das Feld als Überlagerung aller spektralen Anteile. Bezeichnet man die Fourier-Transformierte von $\phi(\vec{x}, t)$ bezüglich der Zeit t an der festen Position \vec{x} mit

8 Schallfeld mit Berandung

$\varphi_\omega(\vec{x})$, so gilt nach (8.1.71) die Rücktransformation

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.74)$$

Eigentlich müßte man $\tilde{\phi}_{\vec{x}}(\omega)$ statt $\varphi_\omega(\vec{x})$ schreiben, um zu verdeutlichen, daß es sich um die Fourier-Transformierte der Funktion ϕ – und damit auch um eine Funktion von ω – handelt. Hier wird jedoch aus Kompatibilität zur bisherigen Darstellung φ_ω verwendet.

Zunächst werden einige einfache Zusammenhänge vorgestellt, die bei der folgenden Herleitung nützlich sind. Die Gleichung (8.1.74) gilt für alle Position \vec{x} . Differenziert man (8.1.74) nach dem Ort, so kann man auf der rechten Seite die Ableitung mit dem Integral vertauschen. Es folgt für die Ableitung in Normalenrichtung auf einer Oberfläche S die Beziehung

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n}(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.75)$$

Wird in (8.1.74) die Zeit t durch $t + \Delta t$ ersetzt, erhält man

$$\phi(\vec{x}, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega(t+\Delta t)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\Delta t} \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.76)$$

Das bedeutet, bei Multiplikation der Fourier-Transformierten mit dem Faktor $e^{i\omega\Delta t}$ ergibt sich nach der Rücktransformation des Produkts ein um Δt verschobener Zeitverlauf (kurz: die Multiplikation mit $e^{i\omega\Delta t}$ im Frequenzbereich entspricht einer Verschiebung um Δt im Zeitbereich). Wird (8.1.74) nach der Zeit differenziert, ergibt sich

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \varphi_\omega(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.1.77)$$

Dies besagt, daß bei Multiplikation der Fourier-Transformierten mit dem Faktor $i\omega$ sich nach der Rücktransformation des Produktes die Zeitableitung des Signals ergibt (kurz: die Multiplikation mit $i\omega$ im Frequenzbereich entspricht der Differentiation im Zeitbereich).

Nach dieser Vorbereitung wird die Rücktransformation (8.1.74) an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ zur Zeit t_0 betrachtet. Ersetzt man in der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) die

8.1 Das Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Variable φ durch φ_ω , dann ergibt sich nach dem Einsetzen in die Rücktransformation

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}_0, t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega(\vec{x}_0) e^{i\omega t_0} d\omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n} e^{i\omega t_0} d\omega dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) e^{i\omega t_0} d\omega dS\end{aligned}\quad (8.1.78)$$

Hier ist bereits auf der rechten Seite die Integration über ω mit den Oberflächenintegralen vertauscht worden. Mit r ist weiterhin der Abstand $|\vec{x} - \vec{x}_0|$ bezeichnet. In nächsten Schritt werden die inneren Integrale betrachtet. Für das Integral im ersten Ausdruck folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n} e^{i\omega t_0} d\omega = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n} e^{i\omega(t_0 - r/c)} d\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(\vec{x}, t_0 - \frac{r}{c} \right) \quad (8.1.79)$$

Dabei wurde von den beiden Beziehungen (8.1.75) und (8.1.76) Gebrauch gemacht. Da in dem Integral die Ableitung $\partial \varphi_\omega / \partial n$ auftritt, ergibt sich auch die Ableitung $\partial \phi / \partial n$ nach Rücktransformation. Der Faktor e^{ikr} kann als ein $e^{i\omega \Delta t}$ mit $\Delta t = -r/c$ angesehen werden. Entsprechend ergibt die Rücktransformierte das Feld zur verschobenen Zeit $t_0 - r/c$.

Um das Integral im zweiten Ausdruck zu bestimmen, wird zunächst die Normalableitung des Monopolfeldes berechnet. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \left[-\frac{1}{r^2} e^{-ikr} - \frac{i\omega}{cr} e^{-ikr} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (8.1.80)$$

Setzt man dies in (8.1.78) ein, dann kann das zweite innere Integral in zwei Teilintegrale aufgespalten werden. Die resultierenden Teile werden einzeln behandelt. Für den Ersten folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{r^2} e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi_\omega e^{i\omega t_0} d\omega = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi \left(\vec{x}, t_0 - \frac{r}{c} \right) \quad (8.1.81)$$

Wieder wurde die Beziehung (8.1.76) verwendet. Für den zweiten Teil erhält man

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i\omega}{cr} e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi_\omega e^{i\omega t_0} d\omega &= -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \varphi_\omega e^{i\omega(t_0 - r/c)} d\omega \\ &= -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\vec{x}, t_0 - \frac{r}{c} \right)\end{aligned}\quad (8.1.82)$$

Jetzt wurde zusätzlich (8.1.77) angewendet. So ergibt sich aus der Rücktransformation die Zeitableitung $\partial \phi / \partial t$.

8 Schallfeld mit Berandung

Setzt man die Ergebnisse für alle inneren Integrale in die Ausgangsgleichung (8.1.78) ein, folgt schließlich

$$\phi(\vec{x}_0, t_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \phi + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{\text{ret}} dS \quad (8.1.83)$$

Die Schreibweise $[\cdot]_{\text{ret}}$ mit dem Kürzel “ret” an der eckigen Klammer bedeutet, daß alle Größen in der eckigen Klammer zur retardierten Zeit $t_0 - r/c$ zu nehmen sind. Diese kompakte Darstellung wird in der Literatur oft verwendet, um das wiederholte Schreiben des Ausdrucks $(\vec{x}, t_0 - r/c)$ zu vermeiden. Mit (8.1.83) ist die Lösung $\phi(\vec{x}_0, t_0)$ durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt. Diese Darstellung wird üblicherweise als Kirchhoff-Integral bezeichnet. Im Gegensatz zum Kirchhoff-Helmholtz-Integral treten in der eckigen Klammer auf der rechten Seite drei statt zwei Quellterme auf. Dies liegt daran, daß durch die Umformung (8.1.80) der Dipol Ausdruck in einen Nah- und einen Fernfeldanteil aufgespalten wurden. In der Kirchhoff-Helmholtz-Formel (8.1.22) ist dagegen der Dipol Ausdruck noch komplett. Der erste Summand in der eckigen Klammer stellt den Monopolanteil dar. Die Quellstärke ist durch die Normalableitung $\partial \phi / \partial n$ gegeben. Als nächstes kommt das Nahfeld des Dipolanteils. Dieser Term ist proportional zu $1/r^2$. Die Stärke ist durch ϕ gegeben. Der dritte Summand gibt das Fernfeld des Dipolanteils an. Die Stärke wird durch die Zeitableitung $\partial \phi / \partial t$ bestimmt.

In dem zweiten und dritten Summand tritt der Faktor $\partial r / \partial n$ auf. Dieser beinhaltet die Richtungsabhängigkeit der Dipolfelder. Es gilt

$$r = |\vec{x}_0 - \vec{x}| \quad (8.1.84)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad}(r) = n_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}_0 - \vec{x}| = -n_i \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})_i}{|\vec{x}_0 - \vec{x}|} \quad (8.1.85)$$

Dabei bezeichnet $(\vec{x}_0 - \vec{x})_i$ die i -te Komponente des Vektors $(\vec{x}_0 - \vec{x})$. Dieser entspricht der Beobachtungsrichtung. Somit stellt der Quotient auf der rechten Seite von (8.1.85) den Einheitsvektor in Beobachtungsrichtung dar. Die Situation ist in Abbildung 8.12 skizziert. Der Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Normalenrichtung wird mit θ bezeichnet. Das Skalarprodukt in (8.1.85) ergibt gerade den Cosinus dieses Winkels. Damit kann einfach

$$\frac{\partial r}{\partial n} = -\cos \theta \quad (8.1.86)$$

geschrieben werden. So steckt in dem $\partial r / \partial n$ -Ausdruck die bekannte Richtungsabhängigkeit der Dipolfelder mit \cos -Funktion.

Die bisherigen Überlegungen gelten für alle Größen ϕ , die die Wellengleichung erfüllen. Im folgenden soll das Kirchhoff-Integral (8.1.83) auf den akustischen Fall angewendet werden. Es sei ϕ das akustische Potential. Berechnet werden soll das Druckfeld. Der Druck ist über die Zeitableitung durch

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (8.1.87)$$

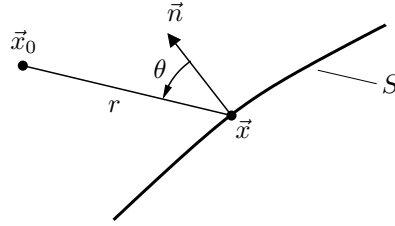


Abbildung 8.12: Winkel θ zwischen Beobachtungsrichtung $(\vec{x}_0 - \vec{x})$ und der Normalenrichtung \vec{n} .

mit dem akustischen Potential ϕ verknüpft. In (8.1.83) ist ϕ als Funktion der Zeit t_0 dargestellt. Um den Druck zu berechnen, muß diese Gleichung daher nach t_0 differenziert werden. Die Ableitung nach t_0 kann mit der Integration vertauscht werden. Die Größen in der eckigen Klammer sind nur über die Zeitabhängigkeit von ϕ und die retardierte Zeit von t_0 abhängig. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left\{ \phi \left(\vec{x}, t_0 - \frac{r}{c} \right) \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\vec{x}, t_0 - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t_0} \left\{ t_0 - \frac{r}{c} \right\} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\vec{x}, t_0 - \frac{r}{c} \right) \quad (8.1.88)$$

Aus (8.1.83) folgt somit

$$p'(\vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{\text{ret}} dS \quad (8.1.89)$$

Dabei wurde auch der Faktor $(-\rho_0)$ in das Integral hineingezogen.

In dem Integranden treten verschiedene Ableitungen des akustischen Potentials auf. Die Normalableitung von ϕ entspricht der Normalkomponente der Schnelle:

$$v'_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (8.1.90)$$

Die Zeitableitungen können zusammen mit dem Faktor $(-\rho_0)$ durch den Druck p' ersetzt werden. Man erhält schließlich die Gleichung

$$p'(\vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial v'_n}{\partial t} - \frac{p'}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial p'}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right]_{\text{ret}} dS \quad (8.1.91)$$

Dabei sind alle Größen in den eckigen Klammern zur retardierten Zeit $t_0 - r/c$ zu nehmen.

Gleichung (8.1.91) stellt die akustische "Version" des Kirchhoff-Integrals dar. Es erlaubt die Berechnung der Druckfeldes in einem Volumen V , wenn auf der Oberfläche S des Volumens die Normalkomponente der Schnelle v'_n , der Druck p' und die

Zeitableitung des Drucks $\partial p'/\partial t$ bekannt sind. Die Gleichung wird oft im Zusammenhang mit numerischen Lösungen eingesetzt. Dabei wird in einem Rechengebiet ein Strömungsfeld numerisch simuliert. In dem Gebiet wird eine geschlossene Oberfläche S festgelegt. Außerhalb der Oberfläche sind nur kleine Störungen vorhanden und das Fluid ist näherungsweise in Ruhe. In inneren Bereich können dagegen nichtlineare Effekte auftreten, die Schall erzeugen (zum Beispiel die Wechselwirkung von Wirbeln mit Körpern). Mit der numerischen Simulation wird die Ausbreitung der Wellen im inneren von der Quelle bis zur Oberfläche S simuliert. Die berechneten Größen können in das Integral (8.1.91) eingesetzt werden, um den erzeugten Schall bis in das Fernfeld zu ermitteln.

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

In vorherigen Abschnitt wurde das Kirchhoff-Helmholtz-Integral behandelt. Es erlaubt die Berechnung des Schallfeldes in einem Volumen, wenn die Schnelle und der Druck auf der Oberfläche des Volumens gegeben sind. Jedoch ist bei vielen praktischen Problemstellungen nur die Schnelle und nicht der Druck bekannt. Beispiel dafür ist die Berechnung des Schallfeldes eines vibrierenden Körpers, bei dem die Bewegung der Körperoberfläche vorgegeben ist. Dabei kann es sich um eine atmende Kugel, um einen Lautsprecher oder um eine vibrierende Maschine handeln. Nur in Ausnahmesituationen – wie bei dem Kolben in einer unendlich ausgedehnten Wand – ist die Schnelle allein ausreichend um das Schallfeld zu ermitteln. Normalerweise wird auch der Druck benötigt. Dann ist die Berechnung des Schallfeldes nur auf numerischen Wege möglich. Im folgenden werden die Grundlagen einiger wichtiger numerischer Methoden vorgestellt.

Randelementemethode

Die Randelementemethode oder auch “Boundary-Element Method” (BEM) basiert auf dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral (8.1.22). Dies wurde bereits im vorigen Abschnitt ausführlich vorgestellt. Allerdings muß hier noch eine kleine Ergänzung gegeben werden. Bisher wurde der Fall ausgeschlossen, daß der Beobachtungspunkt \vec{x}_0 direkt auf der Oberfläche S liegt. Im Zusammenhang mit der Randelementemethode ist jedoch auch dieser Fall von Bedeutung.

Es wird vorausgesetzt, daß die Oberfläche S an der Position \vec{x}_0 glatt ist. Das bedeutet, die Oberfläche besitzt dort keinen Knick, und der Normalenvektor ist definiert. In Abbildung 8.13 ist die Situation dargestellt. Das Vorgehen ist analog zu den Überlegungen im Abschnitt 8.1 (vergleiche auch mit Abbildung 8.2). Gleichung (8.1.12) ist gültig, wenn der Punkt \vec{x}_0 außerhalb des Volumens V liegt. Um dies in dem gegebenen Fall zu erreichen, wird wieder eine kleine Kugel um den Punkt \vec{x}_0 gelegt. Dann wird ein neues Volumen konstruiert, indem die in V liegende Hälfte der Kugel herausgeschnitten wird. Die neue Oberfläche besteht aus der Oberfläche S plus der Oberfläche der halben Kugel. Dieser Teil wird wieder mit S_K bezeichnet. Damit ist auch in dem

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

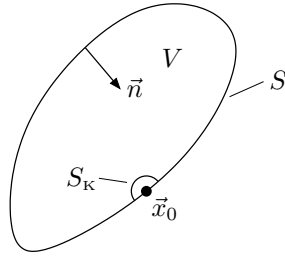


Abbildung 8.13: Volumen V mit Punkt \vec{x}_0 genau auf der Oberfläche S .

Fall $\vec{x}_0 \in S$ die Gleichung (8.1.15) anwendbar. Das Integral über die neue Oberfläche kann im Grenzfall eines unendlich kleinen Kugelradius berechnet werden. Allerdings ergibt sich im Vergleich zur Gleichung (8.1.21) ein geringeres Resultat, da jetzt nur ein Teil der Kugel herausgeschnitten wurde. Bei einer glatten Oberfläche und im Grenzfall eines unendlich kleinen Radius ist dieser Teil exakt die Hälfte.

Die Überlegungen führen auf eine Erweiterung der Gleichung (8.1.21) für Punkte $\vec{x}_0 \in S$. Es gilt

$$\int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{x}_0 \notin V \\ -2\pi\varphi(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in S \\ -4\pi\varphi(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in V \end{cases} \quad (8.2.1)$$

mit

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad (8.2.2)$$

Die Formel kann auf den akustischen Fall übertragen werden. Es soll φ die komplexe Amplitude des akustischen Potentials sein. Die Druckamplitude ist mit dieser über

$$\hat{p} = -i\omega\rho_0\varphi \quad (8.2.3)$$

verknüpft. Zusätzlich ist die Amplitude der Schnelle senkrecht zur Oberfläche

$$\hat{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.2.4)$$

von Bedeutung. Sie ergibt die Quellstärke im ersten Integral auf der linken Seite. Ersetzt man mit diesen Beziehungen die Größe φ in (8.2.1), ergibt sich

$$\frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{v}_n dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \hat{p} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{x}_0 \notin V \\ \frac{1}{2}\hat{p}(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in S \\ \hat{p}(\vec{x}_0) & \text{falls } \vec{x}_0 \in V \end{cases} \quad (8.2.5)$$

Ist die Schnelle und der Druck auf S bekannt, kann überall in V und auch auf S der Druck mit (8.2.5) berechnet werden. Ist lediglich die Schnelle gegeben, dann stellt

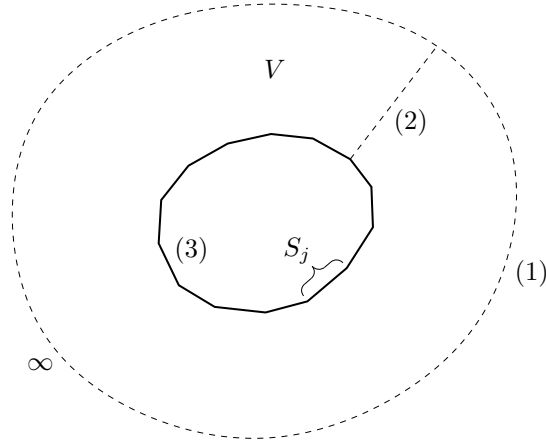


Abbildung 8.14: Diskretisierung der Kirchhoff-Helmholtz-Formel. Die Oberfläche S besteht aus (1) Teil der Oberfläche im Unendlichen, (2) Vernachlässigbare Verbindungsfläche und (3) aus Elementen S_j zusammengesetzter innerer Teil.

(8.2.5) eine implizite Beziehung für den unbekannten Druck auf der Oberfläche dar. Theoretisch ist es damit möglich, bei vorgegebener Schnelle \hat{v}_n zunächst den Oberflächenendruck und dann das gesamte Feld zu berechnen.

Nur in Ausnahmefällen bei besonders einfachen Geometrien ist eine geschlossene Lösung der Aufgabe möglich. Im allgemeinen muß das Problem numerisch behandelt werden. Dazu wird Gleichung (8.2.5) diskretisiert. Die Oberfläche S wird aus Elementen S_j aufgebaut. Das können zum Beispiel Drei- oder Vierecke sein. Die Oberfläche muß das Volumen V komplett umschließen. Ist das Volumen V nicht beschränkt, kann man sich die Oberfläche ins Unendliche fortgesetzt vorstellen. Die Situation ist in Abbildung 8.14 skizziert. In diesem Fall muß vorausgesetzt werden, daß die Lösung im Unendlichen mit $1/|\vec{x}|$ abfällt und sich asymptotisch wie (8.1.29) verhält. Teil (1) der Oberfläche liegt im Unendlichen. Er liefert keinen Beitrag zum Integral. Die Verbindungsfläche (2) ist vernachlässigbar klein, so daß nur der aus den Elementen S_j zusammengesetzte Teil (3) berücksichtigt werden muß.

Die Lösung auf der Oberfläche wird ebenfalls diskretisiert. Die einfachste Möglichkeit ist es, die Größen \hat{v}_n und \hat{p} auf den Elementen S_j als konstant anzunehmen. Es existiert dann für jedes Element ein Druck- und ein Schnellewert, die mit \bar{p}_j und $\bar{v}_{n,j}$ bezeichnet werden. Man kann sich vorstellen, daß die diskreten Werte die mittleren wahren Wert auf den Elementen repräsentieren. Natürlich ist es auch möglich, kompliziertere Ansätze zu verwenden. Zum Beispiel kann bei dreieckigen Elementen ein linearer Verlauf der Größen in jedem Element angenommen werden. Die Verteilung ist dann durch die diskreten Werte in den Eckpunkten der Dreiecke festgelegt. Bei gleicher Anzahl der Elemente ist im Vergleich zum Ansatz mit stückweise konstanten

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

Werten eine genauere Approximation möglich. Allerdings ist die Berechnung der Oberflächenintegrale auch komplizierter. Hier soll das Grundprinzip der Methode anhand des einfachen Ansatzes vorgestellt werden.

Die Integrale in (8.2.5) werden durch Summen approximiert. Für das erste Integral ergibt sich

$$\frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{v}_n \, dS \approx \frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \bar{v}_{n,j} \int_{S_j} \frac{e^{-ikr}}{r} \, dS_j \quad (8.2.6)$$

Dabei ist N die Anzahl der Elemente. Für das zweite Integral erhält man die diskrete Näherung

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \hat{p} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS_j \quad (8.2.7)$$

In den Summen treten die Integrale

$$\int_{S_j} \frac{e^{-ikr}}{r} \, dS_j \quad \text{und} \quad \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \, dS_j \quad (8.2.8)$$

über die einzelnen Elemente S_j auf. Sie sind nur von der Geometrie der Oberfläche und der Beobachtungsposition \vec{x}_0 abhängig. Aus Platzgründen kann hier nicht auf weitere Details bei der Berechnung dieser Integrale eingegangen werden. In der Praxis reicht eine approximative Berechnung meist aus, um hinreichend genaue Ergebnisse zu erhalten. Bei einfachen Geometrien kann näherungsweise sogar eine geschlossenen Lösung für die Integrale angegeben werden.

Eine Ausnahme liegt vor, wenn der Beobachtungspunkt \vec{x}_0 auf der Oberfläche sitzt. Dann gilt für ein Element $\vec{x}_0 \in S_j$. Bei der Integration wird eine Singularität in dem Punkt $\vec{x} = \vec{x}_0$ erreicht. Dort wird der Abstand $r = 0$. Bei Annäherung an diese Stelle wachsen die Integranden in (8.2.8) immer weiter an. Jedoch wird gleichzeitig die beteiligte Fläche immer kleiner. So ergibt sich trotz der Singularitäten für die Integrale jeweils einen endlicher Wert. Zur numerischen Berechnung der Integrale muß ein geeignetes Verfahren verwendet werden, welches die Singularität berücksichtigt.

Mit dieser Vorbereitung kann schließlich eine diskrete Gleichung aus (8.2.5) abgeleitet werden. Der Druck an einer Stelle \vec{x}_0 berechnet sich näherungsweise mit

$$\hat{p}_N(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^N A_j(\vec{x}_0) \bar{v}_{n,j} + \sum_{j=1}^N B_j(\vec{x}_0) \bar{p}_j \quad (8.2.9)$$

Dabei sind zur Abkürzung die Koeffizienten

$$A_j(\vec{x}_0) = \alpha \frac{i\omega\rho_0}{4\pi} \int_{S_j} \frac{e^{-ikr}}{r} \, dS_j \quad (8.2.10)$$

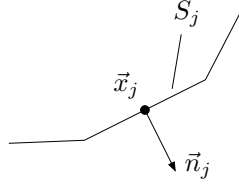


Abbildung 8.15: Element S_j der diskretisierten Oberfläche mit Kontrollpunkt \vec{x}_j und Normalenvektor \vec{n}_j .

und

$$B_j(\vec{x}_0) = \alpha \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS_j \quad (8.2.11)$$

eingeführt worden. Der Vorfaktor α hängt von der Position \vec{x}_0 ab. Es ist

$$\alpha = \begin{cases} 2 & \text{bei } \vec{x}_0 \in S \\ 1 & \text{bei } \vec{x}_0 \notin S \end{cases} \quad (8.2.12)$$

Wenn eine Position $\vec{x}_0 \notin V$ eingesetzt wird, müßte Gleichung (8.2.9) theoretisch $\hat{p}_N(\vec{x}_0) = 0$ liefern. In der Praxis wird sich jedoch immer eine kleine Abweichung ergeben, da die diskrete Formel nur eine Näherungslösung darstellt. Die Lösung an inneren Punkten kann zum Testen der Genauigkeit verwendet werden. Damit kann auch überprüft werden, ob die Druckwerte \bar{p}_j an den Oberflächenelementen vernünftig berechnet wurden. Wie man diese Werte bestimmt, wird im folgenden erläutert.

Auf jedem Element wird ein Testpunkt \vec{x}_j festgelegt. Üblicherweise wird der geometrische Mittelpunkt des Elements genommen. In Abbildung 8.15 ist die Situation veranschaulicht. Es wird gefordert, daß der an den Testpunkten \vec{x}_j mit (8.2.9) berechnete Druck mit dem Wert \bar{p}_j übereinstimmt. Das bedeutet, es soll für alle Testpunkte

$$\hat{p}_N(\vec{x}_j) = \bar{p}_j \quad (8.2.13)$$

gelten. Diese Beziehung stellt ein System mit N linearen Gleichungen für gleichviele unbekannte Werte \bar{p}_j dar. Damit erfordert die Berechnung des diskreten Oberflächen-drucks lediglich die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Sind die Druckwerte \bar{p}_j ermittelt, dann kann an allen anderen Stellen die Lösung bestimmt werden.

Einer der wesentlichsten Nachteile der Randelementemethode besteht darin, daß das Gleichungssystem (8.2.13) unter Umständen nicht lösbar ist. Die auftretende Matrix kann singulär werden, wenn die Wellenlänge kleiner als die Ausdehnung des inneren Bereichs $\mathbb{R}^3 - V$ ist. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß dies mit der Lösung der Helmholtz-Gleichung in dem inneren Bereich verknüpft ist. Besitzt eine solche Lösung bei vorgegebener Schnelle an der Oberfläche eine Resonanz, so ist das Gleichungssystem (8.2.13) nicht lösbar. Die Problematik zeigte sich bereits im vorigen Abschnitt bei der

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

Berechnung einer Lösung φ_2 in einem abgeschlossenen Volumen, die die Bedingungen (8.1.47) erfüllen soll. Um dieses Defizit der Randelementemethode zu beheben wurden verschiedenste Erweiterungen vorgeschlagen. Auf sie soll hier nicht weiter eingegangen werden. In jedem Fall kann die Methode ohne Erweiterungen bei Wellenlängen größer als die Abmessung des inneren Bereichs angewendet werden.

Ersatzquellenmethode

Das Schallfeld eines abstrahlenden Körpers kann mit dem Kirchhoff-Helmholtz-Integral berechnet werden. Dabei wird die Lösung durch Quellen auf der Körperoberfläche dargestellt. Das Schallfeld einer atmenden Kugel läßt sich aber auch durch einen einzigen Monopol im Mittelpunkt erzeugen. Das Feld einer vibrierenden Kugel erfordert lediglich einen Dipol. In diesen Fällen ist es anscheinend viel zweckmäßiger eine Quelle im Mittelpunkt statt eine Quellverteilung auf der Oberfläche zu verwenden. Es ergeben sich dann viel einfachere Gleichungen.

In jedem Fall kann eine Quellverteilung auf der Oberfläche mit Hilfe einer Multipolentwicklung durch Punktquellen an einer einzigen Stelle ausgedrückt werden. Üblicherweise wird der geometrische Mittelpunkt dafür ausgewählt. Bei der atmenden Kugel ergibt sich eine sehr einfache Quellverteilung auf der Oberfläche, so daß das erste Glied der Multipolentwicklung ausreicht, um diese exakt zu repräsentieren. Ist die Geometrie der Oberfläche oder deren Bewegung komplizierter, so resultiert auch eine entsprechend kompliziertere Quellverteilung. Folglich sind mehr Glieder in der Multipolentwicklung notwendig, um eine genaue Approximation der Quellverteilung zu erhalten.

Die Ersatzquellenmethode kann man sich als ein Verfahren zur numerischen Berechnung der Glieder einer Multipolentwicklung vorstellen. Es muß die Normalkomponente der Schnelle \hat{v}_n an der Oberfläche bekannt sein. Zuerst wird ein Mittelpunkt \vec{x}_M bestimmt, an dem die Punktquellen liegen sollen. Die komplexe Amplitude des akustischen Potentials wird durch die Summe

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i(\vec{x}) \quad (8.2.14)$$

ausgedrückt. Dabei ist φ_i das normierte Feld einer einzelnen Punktquelle, und der Faktor Q_i legt deren Stärke fest. Die Anzahl der verwendeten Punktquellen ist mit N bezeichnet. Die Quellen werden geeignet numeriert. Typischerweise wird in der

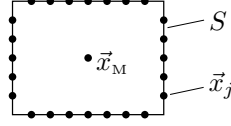


Abbildung 8.16: Mittelpunkt \vec{x}_M und Kontrollpunkte \vec{x}_j auf der Oberfläche S .

Reihenfolge Monopol, Dipol, Quadrupol usw. vorgegangen. Es ist dann

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\vec{x}) &= \frac{e^{-ikr}}{r} \\
 \varphi_1(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
 &\vdots \\
 \varphi_4(\vec{x}) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

mit

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_M| \tag{8.2.16}$$

als Abstand zum Mittelpunkt. Werden alle Quelltypen bis zum Quadrupol mit berücksichtigt, ergibt sich $N = 10$. Ein Monopol, drei Dipole und sechs Quadrupole bilden zusammen die Ersatzquellen. Damit sind für den jeweiligen Quelltyp alle Konstellationen abgedeckt.

Um die Quellstärken Q_i zu ermitteln, werden auf der Oberfläche Testpunkte \vec{x}_j definiert. Die Situation ist in Abbildung 8.16 dargestellt. Es wird gefordert, daß die Normalkomponente der Schnelle, die sich aus der Lösung (8.2.14) ergibt, in den Testpunkten mit einem vorgegebenen Wert $\hat{v}_{n,j}$ übereinstimmt. Für die Schnelle gilt

$$\hat{v} = \text{grad } \varphi = \text{grad} \left\{ \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i \right\} = \sum_{i=1}^N Q_i \text{grad } \varphi_i \tag{8.2.17}$$

Von Interesse ist die Normalkomponente der Schnelle. Für sie folgt

$$\hat{v}_n = \vec{n} \text{grad } \varphi = \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \tag{8.2.18}$$

8.2 Numerische Berechnung der Schallabstrahlung von Oberflächen

Dabei ist mit $\partial\varphi_i/\partial n$ die Normalableitung des Feldes einer einzelnen Punktquelle gegeben. Es soll für alle Testpunkte die Bedingung

$$\hat{v}_n(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}(\vec{x}_j) = \hat{v}_{n,j} \quad (8.2.19)$$

erfüllt sein. Sind gerade gleich viele Testpunkte wie Punktquellen vorhanden, dann stellt (8.2.19) ein System aus N linearen Gleichungen für N unbekannte Quellstärken Q_i dar. Dieses Gleichungssystem ist im Allgemeinen gut lösbar, falls nicht die Testpunkte ungeschickt verteilt wurden. Sind die Stärken Q_i der Ersatzquellen bekannt, kann mit

$$\hat{p}(\vec{x}) = -i\omega\rho_0 \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i(\vec{x}) \quad (8.2.20)$$

das Druckfeld berechnet werden.

Häufig wird eine Anzahl K von Testpunkten verwendet, die viel größer als die Anzahl der Punktquellen ist ($K > N$). Das System ist dann überbestimmt, und die Gleichung (8.2.19) kann im Allgemeinen nicht mehr für alle Punkte gleichzeitig erfüllt werden. Stattdessen wird ein Funktional

$$\Psi = \sum_{j=1}^K \left\{ \hat{v}_n(\vec{x}_j) - \hat{v}_{n,j} \right\}^2 = \sum_{j=1}^K \left\{ \left[\sum_{i=1}^N Q_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}(\vec{x}_j) \right] - \hat{v}_{n,j} \right\}^2 \quad (8.2.21)$$

definiert. Es stellt die Quadratsumme der Abweichungen dar. Die Quellstärken werden so gewählt, daß das Funktional Ψ minimal ist. Das führt auf eine quadratische Optimierungsaufgabe, die mit Standardmethoden leicht gelöst werden kann. Ein Vorteil der Variante mit $K > N$ ist es, das die Anzahl N verändert werden kann, ohne eine neue Verteilung der Testpunkte vorzunehmen.

Verteilte Ersatzquellenmethode

Eine weitere Variante der Ersatzquellenmethode arbeitet nicht mit Quellen in einem Punkt, sondern die Ersatzquellen sind auf mehrere Stellen im inneren des Körpers verteilt. Dies bietet sich besonders bei komplizierten Körpergeometrien an. Denn bei der in einem Punkt zentrierten Ersatzquellenmethode hängt die Anzahl der benötigten Quelltypen nicht nur von der Komplexität der Oberflächenauslenkung sondern auch von der Geometrie des Körpers ab. Selbst eine relative einfache Bewegung der Oberfläche kann bei einem flachen Körper – wie zum Beispiel einem Balken oder einer Platte – eine sehr große Anzahl N erfordern. Die Erfahrung zeigt, daß man mit viel weniger Punktquellen auskommt, wenn man die Quellpunkte verteilt. In Abbildung 8.17 ist ein Beispiel skizziert. Der dargestellte Körper besitzt in einer Richtung eine größere Ausdehnung. Entsprechend sind die Quellpunkte in dieser Richtung verteilt angeordnet. Formal unterscheiden sich die Variante mit verteilten Quellen von der ursprünglichen Methode nur geringfügig. Für die einzelnen Quellen in Gleichung (8.2.15)

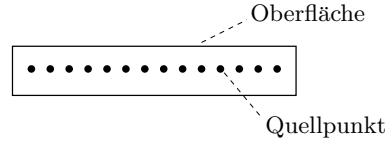


Abbildung 8.17: Flacher Körper mit einer Reihe von Quellpunkten.

muß statt dem Abstand zum Mittelpunkt gemäß (8.2.16) der Abstand zum jeweiligen Quellpunkt eingesetzt werden.

Ein Vorteil der verteilten Quellpunkte ist es, daß man im Allgemeinen mit den beiden einfachsten Quelltypen Monopol und Dipol auskommt. Das vereinfacht die praktische Realisierung des Verfahrens. Jedoch wird die Genauigkeit der Methode entscheidend von der Verteilung der Quellpunkte bestimmt. Die optimale Verteilung hängt von sehr vielen Parametern – wie der Geometrie der Oberfläche, der Frequenz und der Oberflächenbewegung – ab. Es bleibt letztlich dem Geschick und der Erfahrung des Anwenders überlassen, die Quell- und Testpunkte geeignet zu wählen.

8.3 Schallquellen und Reziprozität

Schallquelle in der Nähe einer Oberfläche

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Schallabstrahlung von Oberflächen betrachtet. Die Oberfläche war dabei immer aktiv an der Schallerzeugung beteiligt. Im folgenden Abschnitt sollen Fälle untersucht werden, in denen die Oberfläche eine passive Rolle spielt. Befindet sich zum Beispiel eine Schallquelle in der Nähe eines Körpers, so werden die von ihr ausgesandten Schallwellen an der Körperoberfläche reflektiert. Die Situation ist in Abbildung 8.18 skizziert. Das durch die Quelle erzeugte Schallfeld muß eine Randbedingung an der Oberfläche S des Körpers erfüllen. Im folgenden wird ein Körper mit undurchlässiger Oberfläche angenommen. Dort muß die Normalkomponente der Schnelle verschwinden: $v'_n = 0$.

Ein Schallfeld mit Quellen wird durch die inhomogene Wellengleichung beschrieben. Für das akustische Potential gilt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = q(\vec{x}, t) \quad (8.3.1)$$

Dabei ist $q(\vec{x}, t)$ die Quellstärkeverteilung. Die Lösung muß die Randbedingung

$$v'_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (8.3.2)$$

an der undurchlässigen Körperoberfläche S erfüllen. Es wird zunächst der rein harmo-

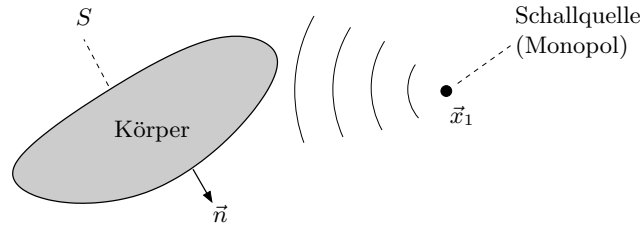


Abbildung 8.18: Schallquelle in der Nähe eines Körpers.

nische Fall bei einer Frequenz ω betrachtet. Die Lösung besitzt die Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.3.3)$$

und für die Quellstärke gilt

$$q(\vec{x}, t) = \hat{q}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.3.4)$$

Dabei bezeichnet \hat{q} die komplexe Amplitude der Quellstärkeverteilung. Die Größe φ ist wie gewohnt die komplexe Amplitude des akustischen Potentials. Nach dem Einsetzen der harmonischen Ansätze in die inhomogene Wellengleichung folgt

$$-k^2 \varphi e^{i\omega t} - \Delta \varphi e^{i\omega t} = \hat{q}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (8.3.5)$$

Kürzt man durch den $e^{i\omega t}$ -Faktor ergibt sich mit

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -\hat{q}(\vec{x}) \quad (8.3.6)$$

eine inhomogene Variante der Helmholtz-Gleichung.

In Abbildung 8.18 besteht die Quellverteilung lediglich aus einer Punktquelle. Die Quellstärkeverteilung kann in diesem Fall durch

$$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.7)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist $Q(t)$ das von der Quelle an der Stelle \vec{x}_1 ausgesandte Signal. Im harmonischen Fall ist die Zeitfunktion durch

$$Q(t) = A e^{i\omega t} \quad (8.3.8)$$

gegeben. Der konstante Faktor A legt die Stärke und Phase der Quelle fest. Es ergibt sich die komplexe Amplitude der Quellstärkeverteilung mit

$$\hat{q}(\vec{x}) = A \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.9)$$

Um die Lösung für die harmonische Punktquelle zu Berechnen muß also die inhomogene Gleichung

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -A \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.10)$$

8 Schallfeld mit Berandung

gelöst werden. An der undurchlässigen Körperoberfläche muß die Lösung die Randbedingung

$$\hat{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (8.3.11)$$

erfüllen. Dabei ist \hat{v}_n die komplexe Amplitude der Schnellekomponente in Normalenrichtung \vec{n} .

Bevor ein Weg zur Behandlung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung bei den gegebenen Randbedingungen vorgestellt wird, soll zuerst die Lösung der Gleichung ohne Berandung auf den harmonischen Fall übertragen werden. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung (8.3.1) kann im Fall ohne Berandungen als Integral in der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - r/c)}{4\pi r} d^3\vec{y} \quad (8.3.12)$$

dargestellt werden. Dabei ist der Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (8.3.13)$$

zwischen dem Beobachtungspunkt \vec{x} und alle möglichen Quellpunkte \vec{y} definiert. In dem Integral taucht die Quellstärke zur retardierten Zeit auf. Aus dem harmonischen Ansatz (8.3.4) folgt für diesen Term

$$q(\vec{y}, t - r/c) = \hat{q}(\vec{y}) e^{-ikr} e^{i\omega t} \quad (8.3.14)$$

Setzt man dies in das Integral ein und kürzt durch den $e^{i\omega t}$ -Faktor, erhält man einen Ausdruck für die komplexe Amplitude mit

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{q}(\vec{y}) \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} d^3\vec{y} \quad (8.3.15)$$

Damit ist auch die Lösung der inhomogenen Gleichung (8.3.6) als Integral dargestellt worden. Im Falle einer Punktquelle kann die Lösung weiter vereinfacht werden. In dem Integral tritt die Quellstärkeverteilung $\hat{q}(\vec{y})$ auf. Für die Punktquelle ist diese durch Gleichung (8.3.9) gegeben. Es muß nur \vec{x} durch \vec{y} ersetzt und in das Integral eingesetzt werden. Danach steht der Faktor $\delta(\vec{y} - \vec{x}_1)$ in dem Integranden. Die Integration liefert daher einfach die übrigen Faktoren an der Stelle $\vec{y} = \vec{x}_1$. Man erhält

$$\varphi(\vec{x}) = A \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x} - \vec{x}_1| \quad (8.3.16)$$

Das Ergebnis entspricht – wie erwartet – dem einfachen Monopolfeld.

Als nächstes soll der feste Körper mit einbezogen werden. Das durch (8.3.16) gegebene Feld erfüllt selbstverständlich nicht die Randbedingung an der Oberfläche. Man kann sich das Feld dennoch als ein Teil der Lösung vorstellen. Durch den Körper ergibt sich noch ein zweiter Teil, der die Reflexionen und alle anderen durch den Körper hervorgerufenen Abweichungen beinhaltet. Entsprechend wird die Lösung als Summe

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_E(\vec{x}) + \varphi_R(\vec{x}) \quad (8.3.17)$$

dargestellt. Es soll $\varphi_E(\vec{x})$ das Feld der Quelle ohne Körper sein, und mit $\varphi_R(\vec{x})$ ist der Anteil durch die Reflexionen am Körper bezeichnet. Das Feld $\varphi_E(\vec{x})$ hat die Form (8.3.16). Dagegen ist über $\varphi_R(\vec{x})$ zunächst nichts bekannt. Es kann jedoch aus der Randbedingung (8.3.11) eine Randbedingung für $\varphi_R(\vec{x})$ abgeleitet werden. Damit die Gesamtlösung wirklich (8.3.11) erfüllt, müssen für die beiden Anteile auf der Oberfläche

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_R}{\partial n} \quad (8.3.18)$$

gelten. Die Ableitung von φ_E kann überall ermittelt werden. Damit ist die Randbedingung an der Oberfläche S für das Feld φ_R vorgegeben. Das Feld φ_R kann dann berechnet werden. An der Oberfläche ist die Normalkomponente der Schnelle durch (8.3.18) bekannt und es können die Methoden aus dem vorherigen Abschnitt angewendet werden. Das bedeutet, die Lösung für eine Quelle in der Nähe einer Oberfläche läßt sich auf die Berechnung der Abstrahlung von einer Oberfläche zurückführen.

Das Vorgehen läßt sich anschaulich interpretieren. Die Teillösung φ_E ist einfach zu berechnen. Sie verletzt jedoch die Randbedingung. Das Feld φ_R entspricht der Lösung, die ein gedachter Körper mit bewegter Oberfläche erzeugt. Dieser gedachte Körper befindet sich an der Position des starren Körpers und seine Oberfläche bewegt sich gerade so, daß die Bewegung des Mediums durch die Teillösung φ_E kompensiert wird. Die Überlagerung der beiden Teillösungen erfüllt dann die Randbedingung am starren Körper.

Quelle neben einer unendlich ausgedehnten Wand

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Teillösung φ_R nicht analytisch möglich. Es muß auf ein numerisches Verfahren – wie die Randelemente- oder Ersatzquellenmethode – zurückgegriffen werden. In einigen Spezialfällen kann jedoch die Teillösung φ_R ohne komplizierte Berechnung sofort angegeben werden. Dafür soll ein Beispiel im folgenden vorgestellt werden.

Betrachtet wird der Fall, daß sich eine Punktquelle neben einer ebenen Wand mit fester Oberfläche befindet. Die Wand ist unendlich ausgedehnt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die Wand mit der Ebene $x_1 = 0$ übereinstimmt. Der Normalenvektor \vec{n} zeigt in x_1 -Richtung. Die geometrische Situation ist in Abbildung 8.19 dargestellt. Die Position der Quelle wird mit \vec{x}_1 bezeichnet. Das Feld der Quelle ohne die Wand ist durch

$$\varphi_E = A \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x} - \vec{x}_1| \quad (8.3.19)$$

gegeben. Es wird eine Lösung φ_R gesucht, die die Bedingung (8.3.18) erfüllt. Dazu wird ein Feld mit

$$\varphi_R(x_1, x_2, x_3) = \varphi_E(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.3.20)$$

konstruiert. Anschaulich stellt damit φ_R eine Spiegelung der Lösung φ_E an der Ebene $x_1 = 0$ dar. Diese Spiegelung erfüllt selbstverständlich in dem Halbraum $x_1 > 0$ die

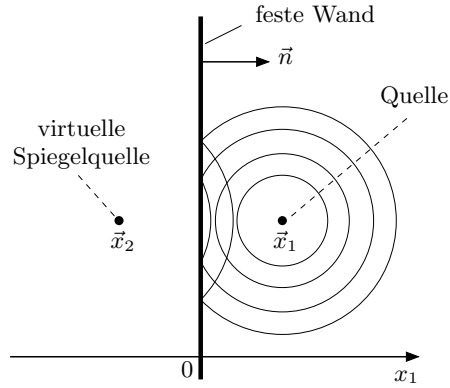


Abbildung 8.19: Schallquelle an der Position \vec{x}_1 neben einer ebenen Wand und Spiegelquelle bei \vec{x}_2 auf der anderen Seite.

Helmholtz-Gleichung. Aus der Definition (8.3.20) folgt direkt

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial x_1} = -\frac{\partial \varphi_R}{\partial x_1} \quad (8.3.21)$$

Da \vec{n} in x_1 -Richtung zeigt, ist auch automatisch die Bedingung (8.3.18) erfüllt.

Rein formal entspricht die Gesamtlösung $\varphi = \varphi_E + \varphi_R$ einer Überlagerung zweier Monopolfelder. Das erste Monopolfeld geht von der eigentlichen Quelle aus. Das Zweite entspringt einer virtuellen Spiegelquelle auf der anderen Seite der Wand bei \vec{x}_2 . Für die beiden Quellpositionen gilt

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} \quad (8.3.22)$$

Die Gesamtlösung kann als

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{A}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} r_1 &= |\vec{x} - \vec{x}_1| \\ r_2 &= |\vec{x} - \vec{x}_2| \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

geschrieben werden. Somit kann in diesem Spezialfall ohne numerische Berechnung die Lösung angegeben werden.

Bisher wurde eine feste undurchlässige Wand angenommen. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwindet, was durch die Randbedingung (8.3.11) ausgedrückt wird. Bei einer nachgiebigen Wand ist die formale Beschreibung der Oberfläche nicht so einfach. In einem der vorangegangenen Kapitel wurde der Begriff der Wandimpedanz eingeführt. Sie entspricht dem Verhältnis zwischen der Druck- und der

8.3 Schallquellen und Reziprozität

Schnelleamplitude an der Wand. Die gegebene Definition ist allerdings auf die eindimensionale Wellenausbreitung beschränkt. Bevor der Begriff der Wandimpedanz auf den drei-dimensionalen Fall verallgemeinert wird, soll ein weiterer Spezialfall betrachtet werden.

Die feste undurchlässige Wand wird als schallhart bezeichnet. Sie bewegt sich überhaupt nicht: $v'_n = 0$. An der sogenannten schallweichen Wand verschwinden dagegen die Druckschwankungen: $p' = 0$. Ebenso wie der Fall mit schallharter Wand läßt sich auch der mit schallweicher Wand noch relativ einfach behandeln. Es ist ebenfalls möglich, die Lösung für die Quelle neben einer schallweichen Wand direkt anzugeben. Betrachtet wird eine Situation wie in Abbildung 8.19 nur mit schallweicher statt schallharter Wand. Für die komplexe Amplitude gilt in diesem Fall

$$\hat{p}(\vec{x}) = 0 \quad \text{bei} \quad x_1 = 0 \quad (8.3.24)$$

Mit (8.3.17) folgt daraus

$$\varphi_E(\vec{x}) = -\varphi_R(\vec{x}) \quad \text{bei} \quad x_1 = 0 \quad (8.3.25)$$

Es kann wie oben ein Feld φ_R konstruiert werden, so daß diese Bedingung erfüllt ist. Im Gegensatz zu (8.3.20) wird jetzt

$$\varphi_R(x_1, x_2, x_3) = -\varphi_E(-x_1, x_2, x_3) \quad (8.3.26)$$

gesetzt. Das Feld φ_R entsteht also aus der Lösung φ_E durch eine Spiegelung mit Vorzeichenwechsel. Dies kann man sich wieder so vorstellen, daß man an der Position \vec{x}_2 eine virtuelle Spiegelquelle einsetzt. Jedoch besitzt jetzt die Spiegelquelle ein negatives Vorzeichen. Sie strahlt gegenphasig zur eigentlichen Quelle ab. Dadurch ergibt sich in der Ebene $x_1 = 0$ gerade eine Überlagerung, die (8.3.24) erfüllt. Diese Überlagerung läßt sich auch formal ausdrücken. Man erhält

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{A}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right\} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} r_1 &= |\vec{x} - \vec{x}_1| \\ r_2 &= |\vec{x} - \vec{x}_2| \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

Dieses Resultat unterscheidet sich von (8.3.23) nur durch das Vorzeichen des Feldes der virtuellen Spiegelquelle.

Lokal reagierende Wand

Die bisher vorgestellten Überlegungen gelten nur für schallharte oder schallweiche Oberflächen. Für eine etwas allgemeinere Betrachtung, die andere Oberflächen mit einschließt, bietet sich eine Darstellung mit der Wandimpedanz Z_W an. Diese Größe wurde am Beispiel der eindimensionalen Wellenausbreitung in einem durch eine bewegliche Wand abgeschlossenen Rohr eingeführt. Im harmonischen Fall wird an der abschließenden Wand

$$\frac{\hat{p}_W}{\hat{u}_W} = Z_W \quad (8.3.28)$$

8 Schallfeld mit Berandung

gesetzt. Dabei sind \hat{p}_w und \hat{u}_w die komplexen Amplituden des Drucks und der Geschwindigkeit an der Wand. Im eindimensionalen Fall kann die bewegliche Wand als federnd gelagerter Kolben mit Masse M , Reibungskoeffizient F und Federkonstante D angesehen werden. Die Wandimpedanz kann dann aus den mechanischen Größen berechnet werden. Es gilt

$$Z_w = i\omega \frac{M}{Q} + \frac{F}{Q} - \frac{i}{\omega} \frac{D}{Q} \quad (8.3.29)$$

wobei Q die Querschnittsfläche des Kolbens ist.

Im drei-dimensionalen Fall ist die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe. Daher kann die Definition (8.3.28) nicht einfach übernommen werden. Bewegt sich eine undurchlässige Wand, so werden die Fluidteilchen an der Wand entsprechend verschoben. Im reibungsfreien Fall können die Fluidteilchen an der Wand entlang gleiten. In der Richtung senkrecht zur Oberfläche stimmt jedoch die Geschwindigkeit der Fluidteilchen mit der Wandgeschwindigkeit überein. Das bedeutet, die Normalkomponente der Schnelle v'_n an der Wand ist mit der Dynamik der Wand verknüpft. Entsprechend wird die Wandimpedanz mit

$$Z_w = \frac{\hat{p}}{\hat{v}_n} \quad (8.3.30)$$

auf den drei-dimensionalen Fall erweitert. Die komplexe Amplitude der Normalkomponente der Geschwindigkeit \hat{v}_n stimmt in dem eindimensionalen Fall auch mit \hat{u}_w überein. Der Ansatz (8.3.30) ist mit der bisherigen Definition (8.3.28) konsistent.

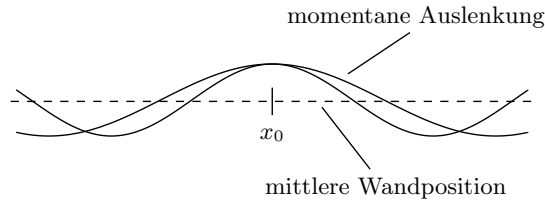


Abbildung 8.20: Auslenkung einer elastischen Wand.

Im dreidimensionalen Fall ist die Berechnung der Wandimpedanz nicht so einfach, wie bei dem mit einer beweglichen Wand abgeschlossenen Rohr. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Die Abbildung 8.20 zeigt eine Gummi-Membran, die flexibel nachgeben kann. Ein Schallfeld vor der Membran bewirkt eine Auslenkung. Die Ausgangsposition der Membran ist gestrichelt eingezeichnet. Die durchgezogenen Linien zeigen zwei mögliche Zustände. Die Rückstellkraft an der Stelle x_0 ist proportional zur Auslenkung. Die Kraft ergibt sich durch die Dehnung des Gummis. Die Dehnung hängt jedoch auch von der Krümmung ab. Ist die Membran stärker gekrümmt ergibt sich bei gleicher Auslenkung eine größere Dehnung des Gummis und eine entsprechend größere Rückstellkraft. Damit hängt die Rückstellkraft der Membran nicht nur von der lokalen Auslenkung ab.

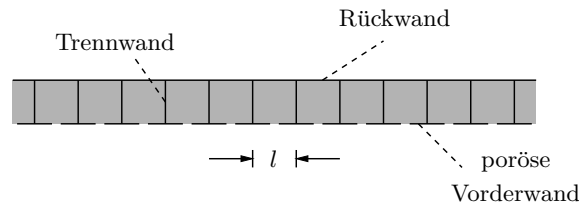


Abbildung 8.21: Praktische Ausführung einer lokal reagierenden Wand.

Die formelmäßige Beschreibung der Dynamik einer solchen Gummi-Membran ist relativ aufwendig. Für die Bewegung der Membran muß eine eigene Differentialgleichung aufgestellt werden. Diese ist dann mit den akustischen Gleichungen gekoppelt. Unter Umständen ist nur eine numerische Behandlung des Problems möglich. Es soll daher im folgenden immer von einer sogenannten "lokal reagierenden" Wand ausgegangen werden. Lokal reagierend bedeutet, daß die Wandimpedanz nur von der Frequenz ω und eventuell noch von der Position – jedoch nicht von der Lösung – abhängt. Die räumliche Verteilung des Drucks spielt keine Rolle. Man kann sich die lokal reagierende Wand als ein Feld von vielen kleinen Kolben vorstellen, die sich unabhängig voneinander bewegen können. Jeder der kleinen Kolben besitzt seine eigenen mechanischen Parameter, und die auftretenden Kräfte hängen nicht von der Position oder der Bewegung der benachbarten Kolben ab. Die Wellenlänge ist groß gegenüber der Abmessung der Kolben, so daß die Kolben für die Welle wie eine kontinuierliche Wand erscheinen.

Die Gummi-Membran ist mit Sicherheit keine lokal reagierende Wand. In der Praxis gibt es jedoch viele Beispiele bei denen die Wände als lokal reagierend angenommen werden können. Gerade die zur Dämmung eingesetzten Absorberplatten sind oft entsprechend aufgebaut. Die Abbildung 8.21 zeigt ein Beispiel für eine Absorberplatte. Vor einer geschlossenen Rückwand befinden sich kleine Kammern, in die durch eine poröse Vorderwand das Medium eindringen kann. Durch die Trennwände wird verhindert, daß sich Wellen in der Platte ausbreiten können. Jede kleine Kammer arbeitet daher unabhängig voneinander. Sie stellt einen kleinen Helmholtz-Resonator dar, der eine gewisse Dämpfung besitzt. Diese Dämpfung ergibt sich zum Beispiel durch Reibungseffekte beim Durchströmen der porösen Wand. Oft sind auch Fasermaterialien in den Kammern, die zu weiteren Reibungsverlusten bei der Bewegung des Mediums führen. Sind die Kammern klein gegenüber der Wellenlänge ($l \ll \lambda$), ist die Betrachtung als lokal reagierende Wand berechtigt.

Prinzip der Reziprozität

Bisher wurde betrachtet, wie das Schallfeld einer Quelle bei einer vorhandenen Berandung berechnet werden kann. Im folgenden soll ein wichtiges Grundprinzip vorgestellt werden, das die Berechnung der Schallfelder vereinfachen kann. Ausgangspunkt ist die zweite Greensche Integralformel. Gegeben ist ein von der Oberfläche S umschlossenes

8 Schallfeld mit Berandung

Volumen V und die beiden Felder φ_1 und φ_2 . Es gilt der Zusammenhang

$$\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS = \int_V (\varphi_1 \Delta \varphi_2 - \varphi_2 \Delta \varphi_1) dV \quad (8.3.31)$$

Diese Beziehung war auch die Basis zur Herleitung der Kirchhoff-Helmholtz-Formel in Abschnitt 8.1. Dort wurde zusätzlich angenommen, daß die Felder φ_1 und φ_2 im Volumen V die Helmholtz-Gleichung (8.1.3) erfüllen.

Jetzt wird die Situation untersucht, wenn eine Schallquelle in dem Volumen V vorhanden ist. φ_1 und φ_2 sollen die Lösung der Helmholtz-Gleichung bei einer Punktquelle darstellen. Damit müssen die Felder eine inhomogene Gleichung der Form (8.3.10) erfüllen. Es soll gelten

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 + k^2 \varphi_1 &= -A_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \\ \Delta \varphi_2 + k^2 \varphi_2 &= -A_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \end{aligned} \quad (8.3.32)$$

Dabei ist A_1 die Stärke der Quelle an dem Ort \vec{x}_1 , welche das Feld φ_1 erzeugt. Entsprechend ist A_2 die Stärke der Quelle bei \vec{x}_2 , die für das Feld φ_2 verantwortlich ist. Es werden also zwei verschiedene Lösungen φ_1 und φ_2 für zwei verschiedene Quellpositionen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 betrachtet. Die Situation ist in Abbildung 8.22 illustriert. Im

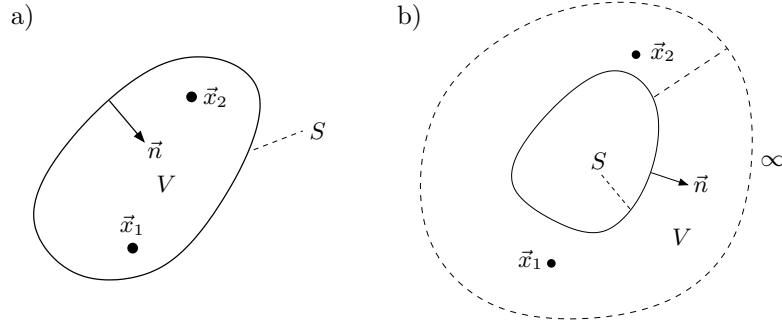


Abbildung 8.22: Zwei Quellen an den Positionen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 in dem Volumen V ; a) Volumen abgeschlossen, b) Volumen offen.

ersten Beispiel (a) handelt es sich um ein beschränktes Volumen V und in Zweiten (b) ist V unbeschränkt. Die Betrachtung ist in beiden Fällen gültig. Im zweiten Fall kann man sich wieder vorstellen, daß die Oberfläche S im Unendlichen geschlossen ist. Dies ist in der Abbildung mit der gestrichelten Linie angedeutet. Die Lösungen müssen im Unendlichen asymptotisch die Form (8.1.29) annehmen.

In Abschnitt 8.1 wurde gezeigt, daß die rechte Seite von (8.3.31) verschwindet, wenn φ_1 und φ_2 Lösungen der Helmholtz-Gleichung sind. Jetzt sind die inhomogenen Gleichungen (8.3.32) gültig. Löst man diese jeweils nach dem Laplace-Term auf, können

8.3 Schallquellen und Reziprozität

damit die Laplace-Terme in dem Integral auf der rechten Seite von (8.3.31) ersetzt werden. Für den Ausdruck im Integral erhält man

$$\begin{aligned}\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2 &= \varphi_2 \left[-k^2 \varphi_1 - A_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \right] - \varphi_1 \left[-k^2 \varphi_2 - A_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \right] \\ &= -\varphi_2 A_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + \varphi_1 A_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)\end{aligned}\quad (8.3.33)$$

Es ergeben sich zwei Produkte in denen jeweils eine δ -Funktion auftritt. Das Ergebnis kann daher leicht über das Volumen V integriert werden. Aus (8.3.31) folgt

$$\int_S \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS = -\varphi_2(\vec{x}_1) A_1 + \varphi_1(\vec{x}_2) A_2 \quad (8.3.34)$$

Durch die beiden Punktquellen ist die rechte Seite jetzt nicht mehr gleich Null.

Im nächsten Schritt wird das Oberflächenintegral auf der linken Seite betrachtet. Ist die Oberfläche S undurchlässig, so gilt überall $\hat{v}_n = 0$. Die Normalkomponente der Schnelleamplitude ist durch

$$\hat{v}_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.3.35)$$

mit der Normalableitung der Lösung φ verknüpft. Das bedeutet, daß in diesem Fall die Normalableitungen der Lösungen φ_1 und φ_2 auf S verschwinden. Damit ist die gesamte linke Seite von (8.3.34) gleich Null.

Es läßt sich zeigen, daß die linke Seite immer dann verschwindet, wenn die Oberfläche S wie eine lokal reagierende Wand beschrieben werden kann. Die undurchlässige Oberfläche ist lediglich ein spezielles Beispiel dafür. Im folgenden wird von einer Oberfläche ausgegangen, an der die komplexen Amplituden (8.3.30) erfüllen, und die Wandimpedanz Z_w nicht von der Lösung abhängt. Da es sich bei der Oberfläche nicht notwendigerweise um eine ebene Wand handelt, wird sie besser als lokal reagierende Oberfläche bezeichnet. Setzt man (8.3.35) in (8.3.30) ein und ersetzt zusätzlich noch die Druckamplitude mit

$$\hat{p} = i\omega \rho_0 \varphi \quad (8.3.36)$$

ergibt sich

$$\varphi = \frac{Z_w}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (8.3.37)$$

Zur Abkürzung wird der Faktor

$$C = \frac{Z_w}{i\omega \rho_0} \quad (8.3.38)$$

eingeführt. Er hängt von der Frequenz und von dem Ort, aber nicht von der Lösung ab: $C = C(\omega, \vec{x})$. Somit folgt an allen Punkten auf der Oberfläche S die Beziehung

$$\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = C \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - C \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (8.3.39)$$

Damit verschwindet tatsächlich die linke Seite von (8.3.34) und es folgt

$$\varphi_2(\vec{x}_1) A_1 = \varphi_1(\vec{x}_2) A_2 \quad (8.3.40)$$

8 Schallfeld mit Berandung

Nimmt man zusätzlich an, daß die beiden Quellen gleichstark sind, erhält man die einfache Relation

$$\varphi_2(\vec{x}_1) = \varphi_1(\vec{x}_2) \quad (8.3.41)$$

Diese Beziehung drückt das sogenannte Reziprozitätsprinzip aus. Eine Quelle am Ort \vec{x}_1 erzeugt ein bestimmtes Signal an der Position \vec{x}_2 . Die Stärke des Signals hängt von der zurückgelegten Strecke ab, und eventuell sind auch Reflexionen von der Oberfläche S beteiligt. Das Reziprozitätsprinzip besagt, daß eine gleichstarke Quelle am Ort \vec{x}_2 ein identisches Signal an der Position \vec{x}_1 bewirkt.

Im Fall der Schallausbreitung ohne Berandung ist das Reziprozitätsprinzip offensichtlich. Es hängt lediglich vom Abstand zwischen einer Quelle und dem Beobachter ab, welches Signal dieser empfängt. Die Quelle und der Beobachter können vertauscht werden, und nichts ändert sich. Ist eine Berandung vorhanden, dann ist die Gültigkeit des Reziprozitätsprinzip nicht ohne weiteres klar. Die obige Herleitung zeigt, daß es immer dann gilt, wenn die Berandung durch eine lokal reagierende Oberfläche beschrieben werden kann.

Das Reziprozitätsprinzip kann bei der praktischen Berechnung von Schallfeldern ausgenutzt werden. Um dies zu verdeutlichen, werden nochmal zwei spezielle Felder φ_1 und φ_2 betrachtet. Das erste Feld φ_1 soll durch eine Punktquelle am Ort \vec{x}_1 erzeugt werden. Die Stärke der Quelle wird auf Eins festgelegt. Es gilt die inhomogene Gleichung

$$\Delta\varphi_1 + k^2\varphi_1 = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (8.3.42)$$

Das zweite Feld stellt die Lösung für eine verteilte Quelle dar. Es erfüllt eine inhomogene Gleichung der Form (8.3.6). Die komplexe Amplitude der Quellstärke wird hier mit $\hat{q} = Q_2(\vec{x})$ geschrieben. Entsprechend erhält man

$$\Delta\varphi_2 + k^2\varphi_2 = -Q_2(\vec{x}) \quad (8.3.43)$$

Für die beiden Felder gilt der zweite Greensche Integralsatz (8.3.31). Analog zur Gleichung (8.3.33) ergibt sich für den Ausdruck im Volumenintegral auf der rechten Seite

$$\varphi_2 \Delta\varphi_1 - \varphi_1 \Delta\varphi_2 = -\varphi_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + \varphi_1 Q_2(\vec{x}) \quad (8.3.44)$$

Für das Volumenintegral folgt

$$\int_V (\varphi_1 \Delta\varphi_2 - \varphi_2 \Delta\varphi_1) dV = -\varphi_2(\vec{x}_1) + \int_V \varphi_1(\vec{x}) Q_2(\vec{x}) dV \quad (8.3.45)$$

Für eine lokal reagierende Oberfläche S verschwindet das Oberflächenintegral auf der linken Seite von (8.3.31), und damit sind auch beide Seiten von (8.3.45) gleich Null. Es muß also

$$\varphi_2(\vec{x}_1) = \int_V \varphi_1(\vec{x}) Q_2(\vec{x}) dV \quad (8.3.46)$$

gelten.

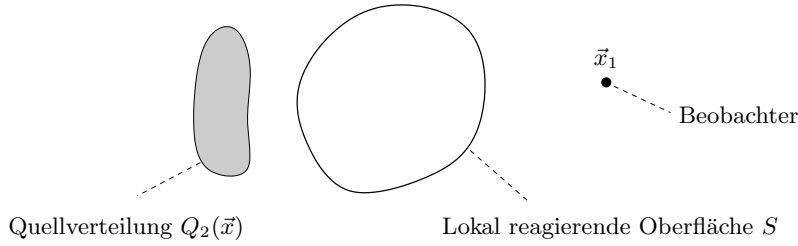


Abbildung 8.23: Zur Berechnung des Schallfeldes einer verteilten Quelle neben einer lokal reagierenden Oberfläche.

Mit Hilfe der Beziehung (8.3.46) kann die Lösung φ_2 in dem Punkt \vec{x}_1 berechnet werden. Die Situation ist in Abbildung 8.23 illustriert. Die Quellverteilung $Q_2(\vec{x})$ erzeugt das Schallfeld φ_2 . Das Feld ist nicht ohne weiteres zu bestimmen, da eine Berandung – zum Beispiel ein fester Körper mit schallharter Oberfläche – vorhanden ist. Ein Lösungsweg ist es, die Quellverteilung in einzelne Elemente zu zerlegen, und diese näherungsweise als Punktquellen zu behandeln. Dann könnten deren jeweilige Schallfelder einzeln numerisch ermittelt werden. In Abschnitt 8.2 wurden Methoden vorgestellt, wie das Schallfeld einer Punktquelle neben einer Berandung numerisch berechnet werden kann. Die Überlagerung dieser Felder ergibt schließlich die gesuchte Lösung an einer bestimmten Beobachtersposition – zum Beispiel in \vec{x}_1 . Soll die Lösung lediglich in einer Beobachtersposition \vec{x}_1 ermittelt werden, ist es jedoch zweckmäßiger sich eine Quelle der Stärke Eins in der Beobachtersposition zu denken und deren Schallfeld φ_1 zu berechnen. Ist φ_1 an allen Punkten \vec{x} – und insbesondere an den Orten der Quellverteilung – bekannt, dann kann mit (8.3.46) die gesuchte Lösung durch numerische Integration des Feldes $\varphi_1 Q_2$ ermittelt werden. Der Aufwand beim zweiten Weg ist deutlich geringer. Zur Bestimmung der Lösung an einer Beobachtersposition ist nur die Berechnung des Feldes einer Punktquelle erforderlich, obwohl es sich eigentlich um eine verteilte Quelle handelt. Auch bei vielen Abschätzungen kann die Beziehung (8.3.46) ausgenutzt werden. Oftmals ist es viel einfacher eine Abschätzung für einen Beobachter in der Nähe einer Oberfläche und eine weit entfernte Quelle zu geben als für den umgekehrten Fall. Mit dem Reziprozitätsprinzip kann immer die günstigere Konstellation betrachtet werden.

Die angegebene Gleichung (8.3.46) kann in einem umfassenderen mathematischen Zusammenhang gesehen werden. Sie kann in der Form

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{y}) Q(\vec{y}) d^3\vec{y} \quad (8.3.47)$$

geschrieben werden. Dabei ist die Integrationsvariable \vec{x} mit \vec{y} ersetzt worden, und der Index an dem Feld φ_2 und der Quellverteilung Q_2 wurde fortgelassen. Die Beobachtersposition ist jetzt mit \vec{x} statt \vec{x}_1 bezeichnet. Zusätzlich ist die Lösung φ_1 durch

8 Schallfeld mit Berandung

den Ausdruck $G(\vec{x}, \vec{y})$ ersetzt worden. Entsprechend bedeutet die Funktion $G(\vec{x}, \vec{y})$ die Lösung an der Beobachtersposition \vec{x} für eine Punktquelle der Stärke Eins in der Quellposition \vec{y} . Diese spezielle Lösung muß natürlich auch die Randbedingung an der Oberfläche erfüllen. Damit ist das zu berechnende Feld φ als Integral über das Produkt einer speziellen Lösung mit der Quellstärkeverteilung dargestellt. Die spezielle Lösung entspricht einer Greenschen Funktion. Im Fall ohne Berandungen konnte die Lösung mit (8.3.15) in vergleichbaren Form angegeben werden. Jedoch wird dort mit einer anderen speziellen Lösung $G(\vec{x}, \vec{y})$ – einem einfachen Monopolfeld – multipliziert. Das Monopolfeld ist die Lösung für eine Punktquelle am Ort des Beobachters, wenn keine Berandung vorhanden ist. Dagegen ist die Existenz der speziellen Lösung $G(\vec{x}, \vec{y})$ – beziehungsweise der Greenschen Funktion – im Fall mit Berandung nur gesichert, wenn die Berandung durch eine lokal reagierende Oberfläche gegeben ist.

9 Bewegte Schallquellen

9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

Durch die Bewegung einer Schallquellen verändert sich das von ihr erzeugte Druckfeld. Ein bekannter Effekt ist die Frequenzverschiebung, die ein Beobachter wahrnimmt, wenn sich eine Quelle relativ zu ihm bewegt. Jedoch ändert sich auch die Stärke der beobachteten Wellen mit der Bewegung. Dies soll im folgenden betrachtet werden. Ausgangspunkt für die Überlegungen ist die inhomogene Wellengleichung für den Druck. Sie lautet

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta \right) p'(\vec{x}, t) = q(\vec{x}, t) \quad (9.1.1)$$

Dabei ist $q(\vec{x}, t)$ eine allgemeine Quellverteilung. Im offenen Raum ohne Begrenzungen kann die Lösung für p' als Integral in der Form

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.1.2)$$

dargestellt werden. Im Allgemeinen kann der Quellbereich auf ein Volumen V_Q eingeschränkt werden, so daß nicht über den gesamten Raum integriert werden muß. Die Integrationsvariable ist \vec{y} . Der Beobachtungspunkt ist mit \vec{x} gegeben. Der Ausdruck $t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$ stellt die sogenannte retardierte Zeit dar. Sie ist praktisch die Quellzeit, zu der ein Signal an der Position \vec{y} ausgesandt werden muß, damit es zur Zeit t beim Beobachter an der Position \vec{x} eintrifft.

Im nächsten Schritt soll eine konkrete Quellverteilung für $q(\vec{x}, t)$ eingesetzt werden. Als einfaches Modell für einen bewegten Monopol wird die Verteilung

$$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.1.3)$$

gewählt. Dabei ist $Q(t)$ die momentane Stärke und $\vec{x}_s(t)$ die momentane Position der Punktquelle. Der Ansatz (9.1.3) ist formal die einfachste Möglichkeit eine bewegte Punktquelle darzustellen. Jedoch wird in einem der folgenden Abschnitte gezeigt, daß die gewählte Verteilung unrealistisch ist, insofern für sie keine physikalische Entsprechung existiert. Eine bewegte punktförmige Massenquelle wird durch eine Quellverteilung beschrieben wird, die etwas komplizierter als (9.1.3) ist. Trotzdem soll hier zunächst von dem formal einfachsten Ansatz ausgegangen werden.

Um das Druckfeld eines bewegten Monopols zu berechnen, muß die gewählte Quellverteilung $q(\vec{x}, t)$ in Gleichung (9.1.2) eingesetzt werden. Zuvor soll jedoch die rechte

9 Bewegte Schallquellen

Seite von (9.1.2) umgeformt werden. Es wird sich eine auf den ersten Blick viel komplizierter erscheinende Form ergeben, die jedoch für das weitere Vorgehen einige Vorteile bietet. Dazu wird eine allgemeine Rechenregel für die δ -Funktion verwendet. Allgemein gilt für eine Funktion $f(\tau)$ die Beziehung

$$f(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau_0 - \tau) d\tau \quad (9.1.4)$$

Hier wird speziell

$$\tau_0 = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (9.1.5)$$

und

$$f(\tau) = \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (9.1.6)$$

gewählt. Die Gleichung (9.1.4) entspricht dann

$$\frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d\tau \quad (9.1.7)$$

Damit kann der Integrand auf der rechten Seite von (9.1.2) ersetzt werden. Es ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d\tau d^3\vec{y} \quad (9.1.8)$$

Statt einer Integration über den dreidimensionalen Raum wird nun über einen vierdimensionalen Raum integriert, in dem die Variable τ einer künstlich hinzugefügten Zeitkoordinate entspricht.

Setzt man (9.1.3) in (9.1.8) ein und vertauscht zusätzlich noch die Integrationen, folgt

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d^3\vec{y} d\tau \quad (9.1.9)$$

Jetzt wird deutlich, wieso die Integration über τ eingeführt wurde. Für das innere Integral ist τ eine Konstante. Der im Argument der ersten δ -Funktion auftretende Vektor $\vec{x}_s(\tau)$ ist fest. Damit kann die erste δ -Funktion verwendet werden, um die Integration über \vec{y} durchzuführen. Ohne die Erweiterung würde zwar auch eine δ -Funktion im Integral vorhanden sein, jedoch wäre ihr Argument auf komplizierte Weise von der Integrationsvariablen \vec{y} abhängig. Diese Schwierigkeit wird so umgangen. Der Preis dafür ist die zusätzliche Integration über τ . Dabei bleibt die zweite δ -Funktion mit einem etwas "unschönen" Argument erhalten, jedoch ist das Integral nur eindimensional und die Lösung kann angegeben werden.

9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

Im ersten Schritt wird das innere Integral ausgewertet. Dazu wird nochmal eine allgemeine Beziehung für die δ -Funktion angewendet. Für ein skalares Feld $a(\vec{y})$ gilt

$$a(\vec{y}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} a(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{y}_0) d^3\vec{y} \quad (9.1.10)$$

Die Gleichung ist die räumliche Entsprechung von Beziehung (9.1.4). Es wird jetzt

$$\vec{y}_0 = \vec{x}_s(\tau) \quad (9.1.11)$$

und

$$a(\vec{y}) = \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) \quad (9.1.12)$$

gewählt. Die rechte Seite von (9.1.12) hängt natürlich auch noch von den Zeiten t und τ und von der Beobachungsposition \vec{x} ab. Für die Ausführung der inneren Integration in (9.1.9) können diese Variablen jedoch als konstant angenommen werden. Mit den Ersetzungen (9.1.11) und (9.1.12) entspricht Gleichung (9.1.10) dem Ausdruck

$$\begin{aligned} & \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}{c} - \tau\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau\right) d^3\vec{y} \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Damit kann das innere Integral in (9.1.9) durch die linke Seite von (9.1.13) ersetzt werden. Es ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \cdot \delta\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}{c} - \tau\right) d\tau \quad (9.1.14)$$

Nun ist die Lösung nicht mehr als Integral über den Raum sondern als Integral über die künstlich eingeführte Zeit τ dargestellt.

Um das Integral in (9.1.14) auszuwerten, wird noch eine weitere Beziehung für die δ -Funktion benötigt. Allgemein gilt für Integrale mit der in Gleichung (9.1.14) auftretenden Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(g(\tau)) d\tau = \sum_{n=1}^N \frac{f(\tau_n^*)}{\left| \frac{dg}{d\tau}(\tau_n^*) \right|} \quad (9.1.15)$$

Dabei sind $f(\tau)$ und $g(\tau)$ beliebige Funktionen. Die Werte τ_n^* mit $n = 1, \dots, N$ sind die numerierten Nullstellen von $g(\tau)$. Sie erfüllen die Bedingung

$$g(\tau_n^*) = 0 \quad (9.1.16)$$

9 Bewegte Schallquellen

Prinzipiell sind auch unendlich viele Nullstellen zulässig. Es ergibt sich dann eine unendliche Summe auf der rechten Seite von (9.1.15). Im vorliegenden Fall werden die Funktionen als

$$f(\tau) = \frac{Q(\tau)}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \quad (9.1.17)$$

und

$$g(\tau) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}{c} - \tau \quad (9.1.18)$$

gewählt. Dann entspricht die linke Seite von (9.1.15) genau dem Integral in Gleichung (9.1.14).

Die Anzahl N der Nullstellen von $g(\tau)$ wird durch die Bewegung der Quelle $\vec{x}_s(\tau)$ bestimmt. Bewegt sich die Quelle zum Beispiel überhaupt nicht, dann ist $\vec{x}_s(\tau) = \vec{x}_0$ ein konstanter Vektor. Für feste Werte \vec{x} und t besitzt in diesem Fall $g(\tau)$ genau eine Nullstelle bei

$$\tau^* = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{c} \quad (9.1.19)$$

Dies ist natürlich nur ein Sonderfall. Bei Bewegung der Quelle ist theoretisch alles zwischen $N = 0$ und $N = \infty$ möglich. Im folgenden wird noch genauer untersucht, unter welchen Bedingungen sich nur genau eine Nullstelle ergibt. Zunächst soll jedoch die Ableitung $dg/d\tau$ genauer betrachtet werden, die zur Berechnung des Integrals in (9.1.14) notwendig ist.

Auf der rechten Seite von (9.1.18) tritt der Abstand zwischen Quellposition zur Zeit τ und dem Beobachter auf. Für den Abstand gilt

$$|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| = \sqrt{(x_i - x_{s,i}(\tau))^2} \quad (9.1.20)$$

Dabei ist $x_{s,i}$ die i -te Komponente des Vektors \vec{x}_s . Das Quadrat unter der Wurzel impliziert nach der Summationskonvention eine Summe über die Komponenten. Differenziert man den Abstand folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_{s,i}} |\vec{x} - \vec{x}_s| = \frac{1}{2} \frac{2(x_i - x_{s,i})(-1)}{\sqrt{(x_i - x_{s,i})^2}} = -\frac{x_i - x_{s,i}}{|\vec{x} - \vec{x}_s|} \quad (9.1.21)$$

Für die Ableitung der Funktion $g(\tau)$ ergibt sich daraus

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{(x_i - x_{s,i}(\tau))}{c |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \frac{dx_{s,i}(\tau)}{d\tau} - 1 \quad (9.1.22)$$

Dies kann in rein vektorieller Darstellung als

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{c} \cdot \underbrace{\frac{(\vec{x} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|}}_{\substack{\text{Normierter} \\ \text{Richtungsvektor}}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{x}_s(\tau)}{d\tau}}_{\vec{v}_s(\tau)} - 1 \\ \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{= c M_r(\tau)} \end{aligned} \quad (9.1.23)$$

9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

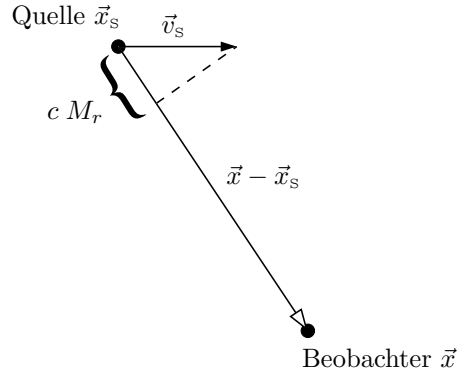


Abbildung 9.1: Zur Definition der Machzahl M_r .

geschrieben werden. Auf der rechten Seite von (9.1.23) ergibt sich ein Skalarprodukt zweier Vektoren. Der Erste ist ein normierter Richtungsvektor mit der Länge Eins. Er zeigt von der Quellposition (zur retardierten Zeit) zum Beobachter. Der zweite Vektor entspricht der Geschwindigkeit $\vec{v}_s(\tau)$, die die Quelle zur retardierten Zeit hatte. Das Skalarprodukt ergibt gerade den Betrag der Komponente von \vec{v}_s in Richtung des Beobachters. Definiert man mit M_r eine Machzahl der Quellbewegung in Richtung zum Beobachter hin, so ist diese Geschwindigkeitskomponente gleich $c M_r$. In Abbildung 9.1 ist der Zusammenhang veranschaulicht. Zu beachten ist, daß die Machzahl M_r vorzeichenbehaftet ist. Sie wird negativ, wenn sich die Quelle vom Beobachter entfernt. Im folgenden wird M_r auch als Beobachtungsmachzahl bezeichnet. Mit ihrer Definition vereinfacht sich (9.1.23) zu:

$$\frac{dg}{d\tau} = M_r(\tau) - 1 \quad (9.1.24)$$

Zur Berechnung des Schalldrucks am Beobachtungsort, müssen noch alle Quellzeiten τ^* ermittelt werden. Zunächst stellt sich die Frage, wie viele Lösungen τ^* überhaupt existieren. Bewegt sich die Quelle immer mit Unterschall und strebt auch nicht asymptotisch gegen Schallgeschwindigkeit für $\tau \rightarrow \pm\infty$, so gilt

$$|M_r(\tau)| \leq |M_r(\tau)|_{\max} < 1 \quad (9.1.25)$$

Damit ist $g(\tau)$ nach (9.1.24) eine streng monoton fallende Funktion, die genau eine Nullstelle τ^* besitzt. Die Summe in Gleichung (9.1.15) besteht damit nur aus einem Summanden. Es folgt für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{Q(\tau^*)}{4\pi r(\tau^*) |1 - M_r(\tau^*)|} \quad (9.1.26)$$

9 Bewegte Schallquellen

Diese Gleichung gilt, falls sich die Quelle immer nur mit Unterschallgeschwindigkeit bewegt. In (9.1.26) ist der Abstand zwischen Quellposition und Beobachtersposition mit

$$r(\tau) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| \quad (9.1.27)$$

abgekürzt. Es sind die Werte der beiden Größen r und M_r zu der Quellzeit τ^* in (9.1.26) einzusetzen.

Es zeigt sich, daß die Stärke der beobachteten Druckschwankungen nicht nur von der Entfernung zur Quelle sondern auch von deren Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit abhängt. Im Vergleich zur ruhenden Quelle ($M_r = 0$) erhält man eine Verstärkung des Signals, wenn sich die Quelle auf den Beobachter zu bewegt. In diesem Fall ist $M_r > 0$ und damit $|1 - M_r| < 1$. Entsprechend wird eine Abschwächung beobachtet, wenn sich die Quelle entfernt. Dann ist $M_r < 0$ und für den Ausdruck im Nenner gilt $|1 - M_r| > 1$.

Bewegt sich die Quelle zeitweise mit Überschall ist die Bedingung (9.1.25) nicht mehr erfüllt. Es können sich mehrere Quellzeiten τ^* ergeben. Alle müssen die Bedingung

$$c \cdot (t - \tau^*) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| \quad (9.1.28)$$

erfüllen, die äquivalent zu $g(\tau^*) = 0$ ist. Prinzipiell ist es auch möglich, daß überhaupt keine Lösung für τ^* existiert. Dies hängt von der Bewegung $\vec{x}_s(\tau)$, der Beobachtungszeit t und dem Beobachtungsort \vec{x} ab. Entsprechende Fälle werden weiter unten diskutiert. Falls mehrere Lösungen τ^* Gleichung (9.1.28) erfüllen, ergibt sich der Schalldruck als Summe. Es gilt

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi r(\tau_n^*)|1 - M_r(\tau_n^*)|} \quad (9.1.29)$$

Bei beliebiger Bewegung $\vec{x}_s(\tau)$ ist es im Allgemeinen nicht möglich die Nullstellen τ_n^* explizit anzugeben. Die Bestimmung von τ_n^* soll anhand eines eindimensionalen Beispiels veranschaulicht werden. Die Quellposition ist nun durch die skalare Größe $x_s(\tau)$ gegeben.

Eindimensionales Beispiel

Es wird die Situation in der (x_s, τ) -Ebene betrachtet. Dies ist eine Raum-Zeit-Ebene, in der alle möglichen Kombinationen aus Quellposition x_s und Quellzeit τ liegen. Die Bewegung der Quelle $x_s(\tau)$ definiert eine Kurve in dieser Ebene. Es soll der Schalldruck an der Beobachtersposition x_B zur Zeit t_B berechnet werden. Diese Kombination definiert einen Punkt in der Raum-Zeit-Ebene. Die geometrische Situation ist in Abbildung 9.2 dargestellt.

Die zur vorgegebenen Zeit t_B am Ort x_B empfangenen Signale können nicht von beliebigen Punkten in dem Raum-Zeit-Ebene ausgegangen sein. Damit das Signal, welches eine Quelle am Ort x_s zur Zeit τ aussendet, am Ort x_B zur Zeit t_B eintrifft, muß die Bedingung

$$c \cdot (t_B - \tau) = |x_B - x_s| \quad (9.1.30)$$

9.1 Schallfeld eines bewegten Monopols

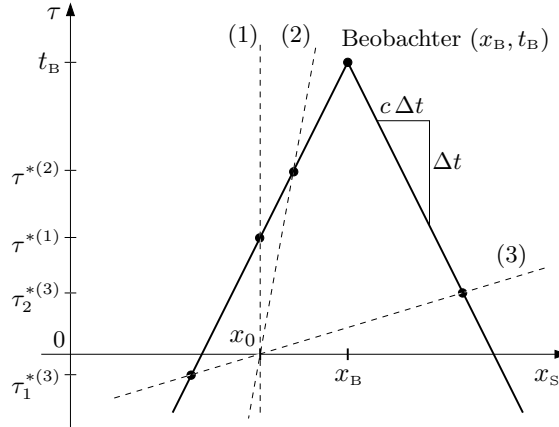


Abbildung 9.2: Raum-Zeit-Ebene mit drei Bewegungskurven.

erfüllt sein. Das bedeutet, die Entfernung zwischen Quell- und Beobachtersposition entspricht der Laufzeit multipliziert mit der Schallgeschwindigkeit. Die Beziehung ist analog zu Gleichung (9.1.28). Hier wird jedoch keine konkrete Bewegung $x_s(\tau)$ vorgegeben, sondern alle möglichen Quellpositionen im gesamten eindimensionalen Raum betrachtet.

Gleichung (9.1.30) definiert eine Menge in der Raum-Zeit-Ebene, die aus zwei Strahlen zusammengesetzt ist. Die Strahlen treffen im Punkt (x_B, t_B) zusammen und besitzen die Steigungen $1/c$ und $-1/c$. Nur (x_s, τ) -Kombinationen auf diesen Strahlen können einen Beitrag zum Signal in x_B, t_B liefern. Die Schnittpunkte der Strahlen mit der durch $x_s(\tau)$ gegebenen Kurve, ergeben die Quellzeiten τ^* und Quellpositionen $x_s(\tau^*)$.

Für das Beispiel wird angenommen, daß sich die Quelle mit konstanter Geschwindigkeit in positive x_s -Richtung bewegt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sie sich gerade an der Stelle $x_s = x_0$. Es werden drei Fälle betrachtet:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_s(\tau) = x_0 \\ (2) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s \tau; \quad 0 < U_s < c \\ (3) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s \tau; \quad U_s > c \end{aligned} \tag{9.1.31}$$

In den dargestellten Beispiel ist $x_0 < x_B$. Die Kurven $x_s(t)$ nach (9.1.31) stellen Geraden in der (x_s, τ) -Ebene dar. Die Neigung der Geraden hängt von der Geschwindigkeit ab. Die Lösungen für τ^* ergeben sich durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit den beiden Strahlen aus (x_B, t_B) . Fall (1) entspricht einer ruhenden Quelle. In den Fällen (1) und (2) ergibt sich genau eine Lösung für τ^* . Daran ändert sich auch nichts, wenn x_0 verschoben wird, da die Steigung größer als $1/c$ ist. Man findet immer genau einen Schnittpunkt beziehungsweise eine Lösung τ^* . Dies muß nach den obigen Überlegungen auch so sein, da im Fall (1) und (2) die Bedingung $|M_r| < 1$ gilt. Im dritten

9 Bewegte Schallquellen

Fall, in dem sich die Quelle mit Überschallgeschwindigkeit bewegt, ergeben sich in der Abbildung zwei Lösungen τ_1^* und τ_2^* . Das bedeutet, es ist $N = 2$. Die Steigung der Geraden ist kleiner als $1/c$. Durch verschieben von x_0 nach links ist es daher möglich, daß die Gerade keinen Schnittpunkt mit den beiden Strahlen mehr besitzt. In diesem Fall wäre $N = 0$ und der Beobachter am Ort x_B würde zur Zeit t_B noch nichts von der Quelle hören können. Erst zu einem späteren Zeitpunkt $t > t_B$ könnte er die Quelle wahrnehmen.

Nachdem die Bestimmung der Quellzeitpunkte τ^* geometrisch gedeutet werden konnte, soll anhand des eindimensionalen Beispiels auch noch die Veränderung der Signalstärke bei Bewegung der Quelle veranschaulicht werden. Dazu wird betrachtet, welche integrale Wirkung eine Quelle auf den Beobachter in einem kleinen Zeitintervall Δt besitzt.

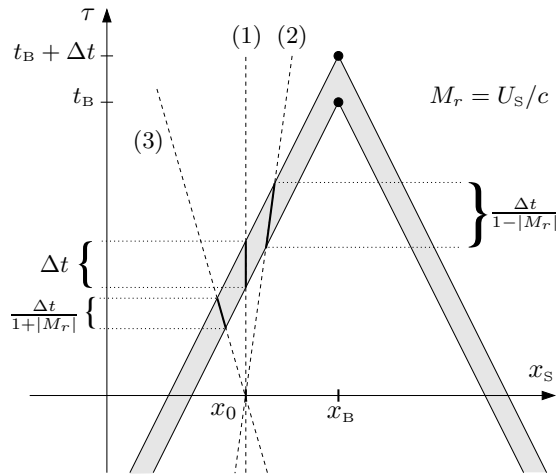


Abbildung 9.3: Zur Veranschaulichung der Verstärkung.

In dem Zeitintervall werden alle Signale empfangen, die von Punkten in der (x_s, τ) -Ebene ausgehen, die in dem in der Abbildung 9.3 schattiert dargestellten Bereich liegen. Es werden wieder drei Fälle mit konstanter Geschwindigkeit betrachtet:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_s(\tau) = x_0 \\ (2) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s t ; \quad 0 < U_s < c \\ (3) \quad & x_s(\tau) = x_0 + U_s t ; \quad 0 > U_s > -c \end{aligned} \quad (9.1.32)$$

Bei ruhender Quelle (1) befindet sich die Quelle genau das Zeitintervall $\Delta\tau = \Delta t$ in dem relevanten Bereich. Dies bedeutet, die in dieser Zeit von der Quelle abgesandten Signale werden vom Beobachter in Intervall $[t_B, t_B + \Delta t]$ empfangen.

Bewegt sich die Quelle auf den Beobachter zu (2), so wirken die Signale der Quelle aus einem längerem Zeitintervall $\Delta\tau = \Delta t / (1 - |M_r|)$ mit $M_r = U_s / c$ auf den Beob-

achter ein. Entfernt sich die Quelle (3), so wirken lediglich die in einem Zeitintervall $\Delta\tau = \Delta t/(1 + |M_r|)$ abgestrahlten Signale auf den Beobachter. Die Verstärkung beziehungsweise Abschwächung der beobachteten Signale kann durch die unterschiedlichen Verhältnisse von Quellzeitraum $\Delta\tau$ zu Beobachtungszeitraum Δt plausibel gemacht werden. Wird in dem relevanten Zeitintervall $\Delta\tau$ zum Beispiel ein konstantes Signal ausgesandt, so addieren sich die Anteile in dem Beobachtungszeitraum Δt . Je größer das Verhältnis von $\Delta\tau/\Delta t$ ist, desto stärker ist das beobachtete Signal.

Einfaches dreidimensionales Beispiel

Bisher wurde der eindimensionale Fall ausführlich betrachtet. Die Bestimmung der retardierten Zeiten τ^* läßt sich dort gut anschaulich darstellen. Im dreidimensionalen Fall wird die Situation jedoch unübersichtlicher. Dies gilt selbst bei gleichförmig, gradlinig bewegter Quelle. Die folgende Betrachtung soll dies verdeutlichen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß sich die Quelle zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $\vec{x} = 0$ befindet, und daß die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $U_s = |\vec{v}_s|$ entlang der x_1 -Achse erfolgt. Es gilt

$$\vec{x}_s(t) = U_s \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.1.33)$$

Der Beobachter empfängt an der Stelle \vec{x} zur Zeit t das von der Quelle zur Zeit τ^* abgestrahlte Signal. Der Zusammenhang zwischen τ^* und t ist durch (9.1.28) gegeben. Es gilt

$$c \cdot (t - \tau^*) = \sqrt{(x_1 - U_s \tau^*)^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (9.1.34)$$

Dies kann nach τ^* aufgelöst werden. Nach einigen Umformungen, die hier nicht gezeigt werden, ergibt sich

$$\tau^* = \frac{1}{c(1 - M_s^2)} \cdot \left\{ ct - M_s x_1 \pm \sqrt{(x_1 - U_s t)^2 + (1 - M_s^2)(x_2^2 + x_3^2)} \right\} \quad (9.1.35)$$

mit

$$M_s = \frac{U_s}{c} \quad (9.1.36)$$

Zu beachten ist, daß nur reelle Lösungen von (9.1.35) mit $\tau^* \leq t$ physikalisch sinnvoll sind.

Die Machzahl der Quellbewegung relativ zum Beobachter ist bei der betrachteten Geometrie durch den Winkel $\theta(\tau^*)$ gegeben. Dies ist der Winkel zwischen Bewegungs- und Beobachtungsrichtung zum Quellzeitpunkt. Er wird im folgenden auch als Beobachtungswinkel bezeichnet. Die Situation ist in Abbildung 9.4 illustriert. Es gilt

$$M_r(\tau^*) = \frac{U_s}{c} \cdot \cos(\theta(\tau^*)) = M_s \cos(\theta(\tau^*)) \quad (9.1.37)$$

9 Bewegte Schallquellen

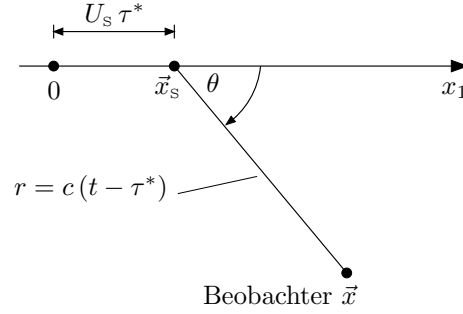


Abbildung 9.4: Zur Definition des Beobachtungswinkels θ zwischen Beobachtungs- und Bewegungsrichtung.

Damit ergibt sich für das beobachtete Signal die Winkelabhängigkeit:

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{Q(\tau^*)}{4\pi r |1 - M_s \cdot \cos \theta|} \quad (9.1.38)$$

Die Verstärkung beziehungsweise Abschwächung durch Bewegung kann als Funktion des Winkels θ in einem Polardiagramm veranschaulicht werden. Dies ist in Abbildung 9.5 dargestellt.

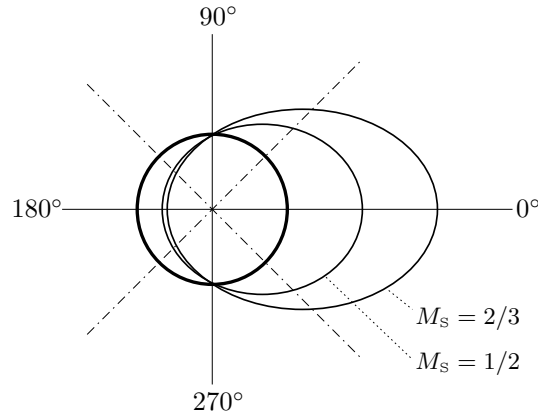


Abbildung 9.5: Polardiagramm der relativen Stärke bei Bewegung der Quelle mit M_s .

Die Stärke des abgestrahlten Signals in der entsprechenden Richtung ergibt sich aus dem Abstand zum Ursprung. Der fett eingezeichnete Kreis repräsentiert die richtungsunabhängige Stärkeverteilung eines ruhenden Monopols. Die Quelle bewegt sich

in 0° -Richtung. In dieser Richtung findet man auch die maximale Verstärkung bei Bewegung. In den Richtungen 90° und 270° ändert sich die Stärke der Abstrahlung überhaupt nicht. Entgegen der Bewegungsrichtung bei 180° wird die Abstrahlung am schwächsten.

9.2 Frequenzverschiebung

Betrachtet wird der Fall, daß die Quelle ein harmonisches Signal mit der Frequenz ω aussendet. Es soll

$$Q(t) = A e^{i\omega t} \quad (9.2.1)$$

gelten. Bewegt sich die Quelle immer mit Unterschallgeschwindigkeit, so ergibt sich der Schalldruck am Beobachter durch

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{A e^{i\omega\tau^*}}{4\pi r(\tau^*)|1 - M_r(\tau^*)|} \quad (9.2.2)$$

Um die Frequenz, mit der der Beobachter das Signal wahrnimmt, zu bestimmen, muß die zeitliche Änderung von p' betrachtet werden. Die rechte Seite von (9.2.2) hängt zunächst rein formal nur von τ^* ab. Die Quellzeit τ^* ist wiederum von der Bewegung $\vec{x}_s(\tau)$, der Beobachtungsposition \vec{x} und der Beobachtungszeit t abhängig. Das bedeutet, bei vorgegebener Bewegung der Quelle existiert eine Funktion $\tau^*(\vec{x}, t)$. Bei Bewegung mit Unterschallgeschwindigkeit ist die Funktion eindeutig. Sie kann allerdings selbst bei einfachen Bewegungen eine relativ komplexe Form annehmen.

Die folgenden Überlegungen gelten für eine feste Beobachtungsposition \vec{x} . Um den zeitliche Signalverlauf in der Nähe einer gegebenen Beobachtungszeit $t = t_0$ genauer zu untersuchen, wird die Funktion $\tau^*(\vec{x}, t)$ bezüglich t in eine Reihe entwickelt. Es kann

$$\tau^*(\vec{x}, t) = \underbrace{\tau^*(\vec{x}, t_0)}_{\tau_0^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}(\vec{x}, t_0) \cdot (t - t_0) + \dots \quad (9.2.3)$$

geschrieben werden. Das erste Glied der Reihe wird mit τ_0^* abgekürzt. Zunächst wird vereinfachend davon ausgegangen, daß die zeitliche Änderung des Nenners auf der rechten Seite von Gleichung (9.2.2) keine Rolle spielt. Dann erhält man für die Druckschwankung die Proportionalität

$$p' \sim e^{i\omega\tau^*} = e^{i\omega[\tau_0^* + (t - t_0)\frac{\partial \tau^*}{\partial t} + \dots]} \quad (9.2.4)$$

Die Größe τ_0^* bewirkt eine feste Phasenverschiebung des Signals. Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt sich für das beobachtete Signal auch eine harmonische Schwingung. Die beobachtete Frequenz ist jedoch nicht einfach gleich der ausgesandten Frequenz ω , sondern sie ist um den Faktor $\partial \tau^* / \partial t$ "verschoben".

Es ist zu bemerken, daß im Allgemeinen kein harmonisches Signal empfangen wird, obwohl die Quelle harmonisch abstrahlt. Theoretisch kann die retardierte Zeit τ^* sehr

9 Bewegte Schallquellen

kompliziert von der Beobachtungszeit t abhängen. Zusätzlich können auch die Schwankungen von r und M_r im Nenner das Signal entscheidend beeinflussen. In der Praxis wird jedoch oft einfach eine Oszillation mit verschobener Frequenz wahrgenommen. Betrachtet man einen kurzen Zeitabschnitt, so ändert sich die Ableitung $\partial\tau^*/\partial t$ möglicherweise nur gering. In diesem Fall ist eine Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in (9.2.4) gerechtfertigt. Ist zusätzlich der Einfluß der Schwankungen von r und M_r im Nenner vernachlässigbar, dann kann näherungsweise in diesem kurzen Zeitabschnitt das beobachtete Signal mit einer harmonischen Schwingung angenähert werden. Nur in diesem Sinne kann von einer Frequenz des Signals gesprochen werden. Im folgenden soll die Frequenzverschiebung genauer betrachtet werden.

In Abschnitt 9.1 wurde für den Fall einer gleichförmig, geradlinigen Bewegung der Quelle mit Gleichung (9.1.35) eine Funktion $\tau^*(\vec{x}, t)$ angegeben. Im Prinzip kann daraus die benötigte Ableitung $\partial\tau^*/\partial t$ berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß man die richtige Lösungen τ^* auswählt. Denn die angegebene Funktion ist quadratisch und lieferte unter Umständen auch unphysikalische Lösungen. Zusätzlich gilt die Funktion nur für eine bestimmte Quellbewegung.

Auch ohne Vorgabe einer bestimmten Quellbewegung kann eine nützliche Beziehung für die gesuchte Ableitung hergeleitet werden. Dazu wird von der Gleichung (9.1.28) ausgegangen. Für alle Quellzeiten τ^* , die einen Beitrag zur Zeit t am Ort \vec{x} liefern, muß

$$c \cdot (t - \tau^*) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| \quad (9.2.5)$$

erfüllt sein. Differenziert man beide Seiten nach der Beobachtungszeit t , ergibt sich

$$c \cdot \left(1 - \frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right) = \frac{d}{d\tau^*} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| \cdot \frac{\partial\tau^*}{\partial t} \quad (9.2.6)$$

Auf der rechten Seite tritt die Ableitung des Abstands zwischen Beobachtungsort und Quellposition nach der Quellzeit τ^* auf. Ein ähnlicher Ausdruck wurde bereits im letzten Abschnitt berechnet. Dort ergab sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| &= \frac{\partial}{\partial x_{s,i}} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)| \cdot \frac{dx_{s,i}}{d\tau} = -\frac{(x_i - x_{s,i}(\tau))}{|\vec{x} - \vec{x}_s(\tau)|} \cdot \frac{dx_{s,i}}{d\tau} \\ &= -c M_r(\tau) \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Um diese Beziehung hier anwenden zu können, muß nur τ durch τ^* ersetzt werden. Die linke Seite entspricht dann dem ersten Faktor auf der rechten Seite von (9.2.6). Er ist daher gleich $-c M_r(\tau^*)$. Setzt man dies in (9.2.6) ein und löst nach der gesuchten Ableitung auf, erhält man

$$\frac{\partial\tau^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.2.8)$$

Damit ist die gesuchte Ableitung als Funktion der Beobachtungsmachzahl M_r ausgedrückt.

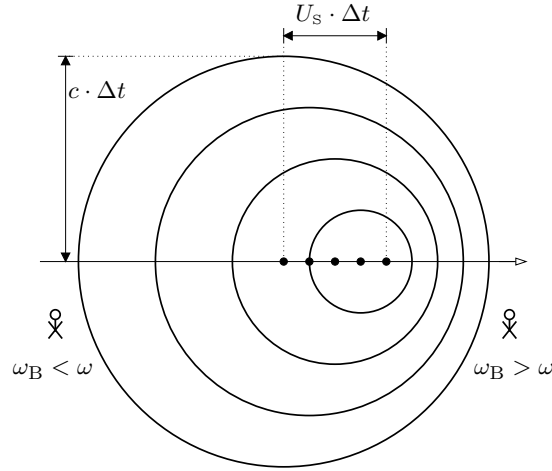


Abbildung 9.6: Zur Frequenzverschiebung.

Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung in der Reihenentwicklung von $\tau^*(t)$, so ergibt sich aus (9.2.2) für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{A}{4\pi r |1 - M_r|} \cdot e^{i\omega\tau_0^*} \cdot e^{i\omega_D(t - t_0)} \quad (9.2.9)$$

Dabei ist die verschobene Frequenz mit

$$\omega_D = \omega \cdot \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.2.10)$$

gegeben. Mit der Beziehung (9.1.37) kann M_r durch die Machzahl der Quellebewegung M_s und den Beobachtungswinkel θ ausgedrückt werden. Es ergibt sich

$$\omega_D = \frac{\omega}{1 - M_s \cos \theta} \quad (9.2.11)$$

Gleichung (9.2.9) ist nur in einem kurzen Augenblick bei $t \approx t_0$ eine gute Approximation. In diesem Moment nimmt der Beobachter die Quelle mit der Frequenz ω_D wahr. Im Allgemeinen verändert sich die Frequenz ω_D ständig als Funktion der Beobachtungsmachzahl M_r . Nur wenn sich die Quelle direkt auf den Beobachter zubewegt ($\theta = 0$), bleibt die Frequenz konstant und springt erst dann auf einen neuen Wert, wenn die Quelle den Beobachter passiert.

Die Frequenzverschiebung wird anschaulich plausibel, wenn man Phasenfronten (z.B. die Maxima) der abgestrahlten Wellen betrachtet. Dies ist in Abbildung 9.6 dargestellt. Durch die Bewegung rücken die Phasenfronten auf einer Seite zusammen und auf der anderen Seite auseinander. Der Beobachter, auf den sich die Quelle zubewegt,

sieht eine kürzere Wellenlänge und eine entsprechend höhere Frequenz. Dies steht im Einklang mit der formalen Überlegung. Für den Beobachter auf der rechten Seite ist $M_r > 0$. Damit wird der Ausdruck in (9.2.8) größer Eins. Die beobachtete Frequenz ist erhöht. Analog ergibt sich eine niedrigere Frequenz entgegen der Bewegungsrichtung. Dort ist $M_r < 0$. Entsprechend sind die Abstände der Phasenfronten auf der linken Seite in Abbildung 9.6 größer. Das Phänomen der Frequenzverschiebung wird üblicherweise als Doppler-Verschiebung bezeichnet. Der Faktor in (9.2.10), um den sich die Frequenz ändert, heißt Doppler-Faktor.

9.3 Quelle mit Überschallgeschwindigkeit

In einem Gedankenexperiment von Lord Rayleigh bewegt sich ein Geigespieler mit doppelter Schallgeschwindigkeit $M_s = 2$ direkt auf einen Beobachter zu. Der Beobachter befindet sich in der Bahn des Musikers. Der Musiker erzeugt ein Signal $Q(t)$. Zunächst hört der Beobachter den herannahenden Musiker überhaupt nicht. Wenn der Musiker den Beobachter passiert hat, hört der Beobachter eine Überlagerung von zwei Signalen, denn es existieren zwei Quellzeiten τ_1^* und τ_2^* . Sie entsprechen zwei Quellpositionen. Eine liegt auf dem Weg zum Beobachter hin und die andere auf dem Weg vom Beobachter weg. Für die erste Quellposition ist die Beobachtungsmachzahl $M_r = 2$ und für die zweite ist $M_r = -2$. Der Beobachter hört das Signal

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^2 \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi r(\tau_n^*)|1 - M_r(\tau_n^*)|} \quad (9.3.1)$$

Für die erste Quellposition gilt

$$\frac{\partial \tau_1^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_r} = -1 \quad (9.3.2)$$

Der Beobachter hört demnach die Musik in Originalgeschwindigkeit jedoch rückwärts! Das ganze ist Überlagert mit dem Signal, von der zweiten Quellzeit τ_2^* . Stoppt der Musiker sein Spiel, wenn er den Beobachter erreicht, hört der Beobachter die rückwärts spielende Musik sogar ungestört.

Dieses Phänomen wird anschaulich plausibel, wenn man die Situation in der (x_s, τ) -Ebene betrachtet. Hat die Quelle den Beobachter passiert, existieren für den Beobachter am Ort x_B zur Zeit t_B zwei Lösungen τ_1^* und τ_2^* . Diese sind durch die Schnittpunkte der Bewegungsbahn mit den $\pm 1/c$ -Strahlen durch (x_B, t_B) gegeben. Die Kurven sind in der Abbildung 9.7 dargestellt. Zu einem um Δt späteren Zeitpunkt ergeben sich neue Schnittpunkte in der (x_s, τ) -Ebene und damit andere Lösungen τ^* . Die mit τ_1^* bezeichnete Lösung ist genau um Δt verringert, wenn t_B um Δt erhöht wird. Dies entspricht der Aussage von Gleichung (9.3.2).

Bei dem Gedankenexperiment von Lord Rayleigh handelt es sich um einen Spezialfall. Im nächsten Schritt soll ein etwas allgemeinerer Fall betrachtet werden. Zur Vereinfachung wird weiterhin angenommen, daß sich die Quelle gradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit

$$U_s = |\vec{v}_s| > c \quad (9.3.3)$$

9.3 Quelle mit Überschallgeschwindigkeit

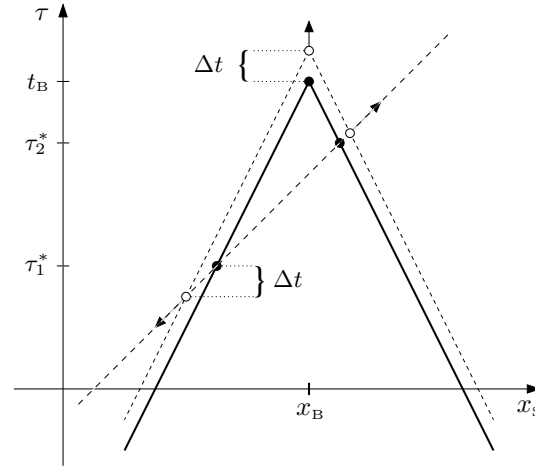


Abbildung 9.7: Verschiebung der Quellzeiten mit der Beobachtungszeit.

bewegt. Die Machzahl der Quellbewegung ist mit

$$M_s = \frac{U_s}{c} > 1 \quad (9.3.4)$$

gegeben. Im dem eindimensionalen Gedankenexperiment war klar, daß der Beobachter die herannahende Schallquelle nicht wahrnehmen kann, bevor sie ihn erreicht. Im dreidimensionalen Fall stellt sich die Frage, an welchen Orten ein Beobachter die Quelle zu einem bestimmten Zeitpunkt t_B bereits wahrgenommen hat. Die Quelle befindet sich zur Zeit t_B an der Position $\vec{x}_s(t_B)$, die im folgenden als aktuelle Position bezeichnet wird. Zum Zeitpunkt $t_B - \Delta t$ befand sich die Quelle noch um $U_s \Delta t$ vor der aktuellen Position. Konstruiert man sich um diese Position eine Kugel, deren Radius $c \Delta t$ gerade der Strecke entspricht, die Wellen in der Zeit Δt zurücklegen, so haben alle Beobachter innerhalb der Kugel zur aktuellen Zeit t_B die Quelle bereits wahrgenommen. Eine solche Kugel kann nun für alle möglichen Werte Δt konstruiert werden. Die Kugeln überlagern sich zu einem Kegel im Raum. Die Spitze des Kegels befindet sich in der aktuellen Position der Quelle. Die Situation ist in der Abbildung 9.8 in einem Schnitt durch die Mitte des Kegels veranschaulicht. Die Quelle bewegt sich von links nach rechts.

Der resultierende Kegel wird Machscher Kegel genannt. Beobachter außerhalb des Kegels haben die Quelle zur Zeit t_B noch nicht wahrgenommen. Beobachter auf dem Kegelmantel erreicht gerade die erste Information von der Quelle. Für diese Beobachter ergibt sich eine ganz besondere Situation. Betrachtet man den deren Beobachtungswinkel θ , so ergibt sich

$$\cos \theta = \frac{c \Delta t}{U_s \Delta t} = \frac{1}{M_s} \quad (9.3.5)$$

9 Bewegte Schallquellen

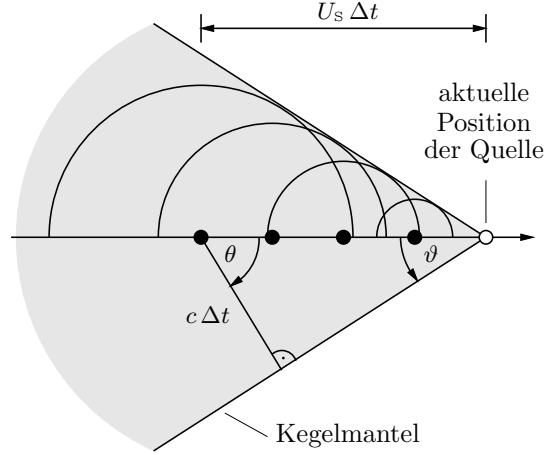


Abbildung 9.8: Zum Machschen Kegel.

Gleichzeitig gilt nach den Überlegungen aus Abschnitt 9.1 für die Beobachtungsmachzahl bei gradlinig gleichförmiger Bewegung

$$M_r = M_s \cos \theta \quad (9.3.6)$$

Zusammen mit (9.3.5) folgt daraus, daß für Beobachter auf dem Kegelmantel die Beobachtungsmachzahl

$$M_r = 1 \quad (9.3.7)$$

ist. Für das beobachtete Drucksignal einer bewegten Quelle gilt allgemein

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{Q(\tau_n^*)}{4\pi r(\tau_n^*)|1 - M_r(\tau_n^*)|} \quad (9.3.8)$$

In dem betrachteten Fall existiert für den Beobachter am Kegelmantel nur eine Quellzeit τ^* . Diese hängt vom Abstand des Beobachters zur aktuellen Quellposition ab. Der Beobachtungswinkel θ und die Beobachtungsmachzahl M_r sind jedoch für alle gleich. In jedem Fall ist

$$|1 - M_r(\tau^*)| = 0 \quad (9.3.9)$$

Dies bedeutet, daß für Beobachter am Kegelmantel der beobachtete Schalldruck theoretisch unendlich groß wird. Dort sind die Annahmen der Akustik nicht mehr erfüllt. In der Realität hört ein Beobachter am Kegelmantel den sogenannten Überschallknall. Für die Stärke und Form der realen Druckschwankungen im Überschallknall spielen nichtlineare Effekte und die Ausdehnung der Quelle eine Rolle.

9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

In Abbildung 9.8 ist auch der Kegelwinkel ϑ eingezeichnet. Er wird Machscher Winkel genannt. Die Regeln für rechtwinklige Dreiecke ergeben, daß

$$\sin \vartheta = \frac{1}{M_s} \quad (9.3.10)$$

gelten muß. Damit hängt der Machsche Winkel mit

$$\vartheta = \arcsin \left(\frac{1}{M_s} \right) \quad (9.3.11)$$

von der Machzahl der Quellbewegung M_s ab. Je schneller sich die Quelle bewegt, desto spitzer wird der Kegel.

Bewegt sich die Quelle nicht gradlinig, kann ebenfalls um jede durchlaufene Position der Quelle eine Kugel konstruiert werden. Bei einer gekrümmten Bahn entsteht dann kein Kegel sondern ein Konoid, falls $M_s > 1$ ist. Es ergibt sich auch in diesem Fall auf der Oberfläche des Konoids ein Beobachtungswinkel θ für den $M_r = 1$ wird. Die lineare Theorie liefert entsprechend auch dort einen singulären Schalldruck.

9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

Bisher wurde die bewegte Punktquelle durch eine Quellverteilung der Form

$$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.1)$$

beschrieben. Dies ist formal der einfachste Ansatz. Er entspricht jedoch nicht direkt einer physikalischen Quelle – wie etwa einer bewegten punktförmigen Massenquelle. Um dies zu verdeutlichen, wird die linearisierte Kontinuitätsgleichung für diesen Fall betrachtet. Die Massenzufuhr kann durch einen Quellterm auf der rechten Seite ausgedrückt werden. Für eine bewegte punktförmige Massenquelle gilt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = \rho_0 \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.2)$$

Vereinfachend soll angenommen werden, daß die zugeführte Masse die gleiche Dichte ρ_0 wie das vorhandene Medium besitzt. Mit $\beta(t)$ wird der Volumenanteil der zugeführten Masse zur Zeit t bezeichnet. Damit stellt $\rho_0 \beta$ die bereits zugeführte Masse pro Volumen dar, und $\rho_0 \dot{\beta}$ entspricht der zugeführten Masse pro Zeit und pro Volumen. Die Masse wird jedoch nur an einem Punkt $\vec{x}_s(t)$ zugeführt. Die δ -Funktion sorgt dafür, daß sich bei Integration über ein Volumen um die Quelle herum ein endlicher Massenstrom (Masse pro Zeit) ergibt.

Wenn die zugeführte Masse keinen Impuls besitzt, dann hat die Massenquelle keinen Einfluß auf die Impulserhaltung. Die linearisierte Euler-Gleichung gilt in der gewohnten Form:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \operatorname{grad} p' = 0 \quad (9.4.3)$$

Um einer Wellengleichung zu erhalten, differenziert man (9.4.2) nach der Zeit und bildet die Divergenz von (9.4.3). Die resultierenden Gleichungen werden subtrahiert.

9 Bewegte Schallquellen

Zusätzlich wird die Dichte mit $\rho' = p'/c^2$ ersetzt. Es ergibt sich die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \underbrace{\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}}_{q(\vec{x}, t)} \quad (9.4.4)$$

Die rechte Seite entspricht einer Quellverteilung $q(\vec{x}, t)$. Es zeigt sich, daß die hergeleitete Quellverteilung nicht der einfachen Punktquelle in (9.4.1) entspricht. Durch die Zeitableitung auf der rechten Seite ergibt sich eine grundsätzlich andere Form.

Analog kann eine bewegte, punktförmige Impulsquelle betrachtet werden. Für diesen Fall erhält man statt Gleichung (9.4.3) die linearisierte Euler-Gleichung mit Quellterm auf der rechten Seite:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \text{grad } p' = \vec{f}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.5)$$

Der Vektor $\vec{f}(t)$ gibt die Richtung und Stärke des zugeführten Impulses pro Volumen zur Zeit t an. Wird ausschließlich Impuls und keine Masse zugeführt, dann gilt die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v}' = 0 \quad (9.4.6)$$

Aus (9.4.5) und (9.4.6) kann in der üblichen Weise wieder eine Wellengleichung abgeleitet werden. Es folgt

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}}_{q(\vec{x}, t)} \quad (9.4.7)$$

Auch durch die Impulsquelle erhält man keine Quellverteilung, die der einfachen Form in Gleichung (9.4.1) entspricht. Hier ergibt sich durch die räumliche Ableitung ein prinzipieller Unterschied.

Zu bemerken ist, daß die bewegte Massen- und Impulsquelle in der Regel miteinander verknüpft sind. Betrachtet man zum Beispiel eine kleine atmende Kugel als punktförmige Massenquelle, so wird bei Bewegung dieser Kugel auch ein Impuls auf das Fluid übertragen. In der Praxis treten die beiden Effekte fast immer in Kombination auf. Bei der folgenden Untersuchung werden die Fälle jedoch getrennt behandelt.

Ableitung im Quellterm

Sowohl die bewegte Massen- und als auch die Impulsquelle werden beide durch Quellverteilungen beschrieben, die als Ableitung gegeben sind. Die Gleichung (9.4.4) besitzt die Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \frac{\partial B}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (9.4.8)$$

9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

Auf der rechten Seite steht die Zeitableitung eines Feldes $B(\vec{x}, t)$. Ohne Berandung kann die Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung mit

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.9)$$

angegeben werden. Dabei tritt eine Zeitableitung vor dem Integral auf. Auch für die Quellverteilung mit räumlicher Ableitung kann eine Lösung angegeben werden, bei der die Ableitung vor dem Integral steht. Gleichung (9.4.7) kann als

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p' = \frac{\partial B_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) \quad (9.4.10)$$

dargestellt werden. Dabei ist B_i die Komponente eines Vektorfeldes. Ohne Berandung lautet die Lösung für den Schalldruck

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.11)$$

Die angegebenen Lösungen gelten allgemein für beliebige Felder B beziehungsweise B_i . Ihre Herleitung ist im Anhang des Skriptes zum ersten Teil der Vorlesung gegeben.

Im nächsten Schritt sollen die konkreten Quellverteilungen für die bewegte Massen- und Impulsquelle betrachtet werden. Wählt man

$$B(\vec{x}, t) = \rho_0 \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.12)$$

dann entspricht (9.4.8) der Gleichung (9.4.4) für die bewegte Massenquelle. Setzt man dieses Feld B in die Lösung (9.4.9) ein, ergibt sich für die Druckverteilung

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\dot{\beta}(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.13)$$

Im Fall der bewegten Impulsquelle muß

$$B_i(\vec{x}, t) = -f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \quad (9.4.14)$$

gewählt werden, damit (9.4.10) mit (9.4.7) übereinstimmt. Aus (9.4.11) folgt für das entstehende Druckfeld

$$p'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_i(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.15)$$

Die Lösung für den einfachen bewegten Monopol mit einer Quellverteilung nach Gleichung (9.4.1) ist mit

$$p'(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\tau) \delta(\vec{y} - \vec{x}_s(\tau))}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (9.4.16)$$

9 Bewegte Schallquellen

gegeben. Der wesentliche Unterschied zu den beiden Lösungen (9.4.13) und (9.4.15) besteht in der Ableitung vor dem Integral. Außerdem muß natürlich in (9.4.15) die Summe über den Index i gebildet werden. Das vorkommende Integral selbst besitzt jedoch in allen drei Fällen die gleiche Gestalt. Für den einfachen bewegten Monopol wurde die Lösung bereits in Abschnitt 9.1 untersucht. Dort konnte das Integral in eine Summe umgewandelt werden (siehe Gleichung (9.1.29)). Die gleichen Umformungen können jetzt auch auf die Integrale in (9.4.13) und (9.4.15) angewendet werden. Die Ableitungen nach x_i und t , die vor den Integralen stehen, bleiben von den Operationen unberührt. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 9.1 folgt für die bewegte Massenquelle

$$p'(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{\dot{\beta}(\tau_n^*)}{4\pi r |1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.17)$$

Die bewegte Impulsquelle hat als Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{f_i(\tau_n^*)}{4\pi r |1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.18)$$

Dabei müssen die retardierten Zeitpunkte τ_n^* die Bedingung

$$c \cdot (t - \tau_n^*) = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau_n^*)| \quad (9.4.19)$$

erfüllen. Mit N ist die Anzahl aller Lösungen τ_n^* gegeben, die die Bedingung (9.4.19) erfüllen. In (9.4.17) und (9.4.18) ist zu beachten, daß auch der Abstand

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau_n^*)| \quad (9.4.20)$$

und die Beobachtungsmachzahl M_r wie die beiden Größen $\dot{\beta}$ und f_i zu den Quellzeiten τ_n^* zu nehmen sind.

Abschätzung für das Fernfeld

Durch die Ableitungen vor der Summe ist die Richtungsabhängigkeit des abgestrahlten Schalls in den beiden Lösungen für Massen- und Impulsquelle nicht so einfach ersichtlich. Um sie zu untersuchen, müssen die Ableitungen nach t beziehungsweise x_i berechnet werden. Zunächst sollen zwei nützliche Beziehungen angegeben werden. Es gilt

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.4.21)$$

und

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} = - \frac{x_i - x_{s,i}(\tau^*)}{c r (1 - M_r)} \quad (9.4.22)$$

Die beiden Gleichungen ergeben sich durch Differenzieren von (9.4.19) nach t beziehungsweise x_i und einigen Umformungen. Der Index n an der Größe τ^* wurde aus

Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen. Die erste Gleichung wurde bereits im Abschnitt 9.2 hergeleitet und bei der Berechnung der Dopplerverschiebung verwendet.

Zuerst soll die Lösung für die bewegte Massenquelle untersucht werden. In (9.4.17) kann die Ableitung mit der Summe vertauscht werden. Betrachtet man einen einzelnen Summanden, so ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\beta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.23)$$

zu berechnen. Durch Differenzieren des Ausdrucks ergibt sich nach der Produktregel eine Summe. Bei exakter Rechnung erhält man jedoch ein relativ unübersichtliches Resultat. Es zeigt sich, daß unter bestimmten Bedingungen zwei der Summanden mit $1/r^2$ abfallen und einer mit $1/r$. Für die Richtungsabhängigkeit im Fernfeld $r \rightarrow \infty$ ist es ausreichend nur den Anteil zu betrachten, der am schwächsten mit r abfällt. Bei einer genauen Betrachtung müßte strenggenommen die absolute Größe der einzelnen Anteile miteinander verglichen werden. Dann könnte man angeben, ab welchen Abstand r der $1/r$ -Anteil die Lösung dominiert. Da die Betrachtung ohnehin relativ kompliziert ist, wird auf eine solche Analyse verzichtet. Der Begriff "Fernfeld" wird hier einfach für den äußeren Bereich verwendet, in dem die Lösung in guter Näherung mit $1/r$ abfällt und der $1/r^2$ -Anteil abgeklungen ist, ohne wie bisher eine Bedingung direkt an den Abstand (z.B.: $r \gg \lambda$) zu stellen.

Um eine Näherungslösung für große Abstände r zu bestimmen, werden zunächst die Ableitungen der einzelnen Faktoren in (9.4.23) untersucht. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\beta}(\tau^*) = \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \tau^*} \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \quad (9.4.24)$$

Mit der Schreibweise

$$\ddot{\beta} = \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \tau^*} \quad (9.4.25)$$

folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\beta}(\tau^*) = \ddot{\beta}(\tau^*) \frac{1}{1 - M_r} \quad (9.4.26)$$

Dieser Ausdruck fällt offensichtlich nicht mit dem Abstand r ab. Nach der Produktregel ist das Ergebnis noch mit dem zweiten und dritten Faktor in (9.4.23) zu multiplizieren. Insgesamt ergibt sich dann ein Ausdruck, der wegen des zweiten Faktors mit $1/r$ skaliert.

Für die Ableitung des zweiten Faktors in (9.4.23) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \right\} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \tau^*} \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \quad (9.4.27)$$

Die Ableitung $\partial r / \partial \tau^*$ gibt die Änderung des Beobachtungsabstandes bei Variation der Quellzeit τ^* an. Sie entspricht damit der Komponente der Geschwindigkeit der Quelle in Richtung des Beobachters. Nach (9.2.7) gilt

$$\frac{\partial r}{\partial \tau^*} = \frac{\partial}{\partial \tau^*} |\vec{x} - \vec{x}_s| = -c M_r \quad (9.4.28)$$

9 Bewegte Schallquellen

Dieser Ausdruck skaliert nicht mit dem Abstand r . Man erhält die Proportionalität

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \right\} \sim \frac{1}{r^2} \quad (9.4.29)$$

Damit liefert der Summand mit der Ableitung des zweiten Faktors in (9.4.23) nur einen $1/r^2$ -Anteil an der Gesamtlösung.

Zuletzt wird die Ableitung des dritten Faktors betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} &= \frac{1 - M_r}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial M_r}{\partial t} \\ &= \frac{1 - M_r}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial M_r}{\partial \tau^*} \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.4.30)$$

Mit der Schreibweise

$$\dot{M}_r = \frac{\partial M_r}{\partial \tau^*} \quad (9.4.31)$$

und der Beziehung (9.4.21) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} = \frac{\dot{M}_r}{|1 - M_r|^3} \quad (9.4.32)$$

Es stellt sich die Frage, wie dieser Ausdruck mit dem Abstand skaliert. Die Antwort darauf ist nicht so einfach zu geben, da \dot{M}_r entscheidend von der Bewegung der Quelle abhängt. Im Spezialfall der gleichförmig, gradlinigen Bewegung gilt

$$M_r = M_s \cos(\theta(\vec{x}, \tau^*)) \quad (9.4.33)$$

und die Machzahl der Quellbewegung M_s ist eine Konstante. Damit hängt M_r nur von dem Beobachtungswinkel θ ab. Anschaulich ist klar, daß sich dieser Winkel für große Abstände r nicht so schnell ändert wie bei kleinen Abständen. Damit fällt \dot{M}_r irgendwie mit r ab.

Ist jedoch die Bewegung der Quelle nicht gradlinig, dann kann unter Umständen \dot{M}_r unabhängig vom Abstand r sein. Ein Beispiel dafür ist eine Quelle, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt. In einem Moment bewegt sich die Quelle auf den Beobachter zu und dann wieder von ihm weg. Auch für große Abstände r fällt die Rate, mit der sich die Beobachtungsmachzahl M_r ändert, nicht ab. In diesem Fall skaliert \dot{M}_r nicht mit r .

Zur Vereinfachung wird für die weiteren Überlegungen eine gleichförmig gradlinige Bewegung angenommen. Aus (9.4.33) folgt

$$\dot{M}_r = -M_s \sin(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau^*} \quad (9.4.34)$$

Betrachtet man die zeitliche Änderung des Beobachtungswinkels, ergibt sich aus geometrischen Überlegungen

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau^*} = \frac{\sin \theta}{r} |\vec{v}_s| \quad (9.4.35)$$

9.4 Bewegte Massen- und Impulsquelle

Die Winkeländerung ist am größten, wenn sich die Quelle gerade tangential zum Beobachter bewegt. Vergrößert sich der Abstand so fällt $\partial\theta/\partial\tau^*$ mit $1/r$ ab. Offensichtlich gilt für eine Quelle mit gleichförmig, gradliniger Bewegung

$$\dot{M}_r \sim \frac{1}{r} \quad (9.4.36)$$

Daraus folgt insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} \sim \frac{1}{r} \quad (9.4.37)$$

Durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit dem ersten und zweiten Faktor in (9.4.23) ergibt sich insgesamt ein Anteil, der mit $1/r^2$ skaliert.

Somit fällt nur der Anteil, der durch Differenzieren des ersten Faktors entsteht, mit $1/r$ ab. Alle anderen Anteile sind proportional $1/r^2$. Aus (9.4.26) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\dot{\beta}}{r|1 - M_r|} \right\} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{\ddot{\beta}}{r|1 - M_r|(1 - M_r)} \quad (9.4.38)$$

Damit kann das resultierende Druckfeld angegeben werden. Für die punktförmige Massenquelle, die sich gleichförmig und gradlinig bewegt, ergibt sich

$$p'(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_0 \ddot{\beta}(\tau_n^*)}{4\pi r (1 - M_r) |1 - M_r|} \quad (9.4.39)$$

Zu beachten ist, daß diese Beziehung wirklich nur für eine unbeschleunigte Quellbewegung gilt. Für diesen Spezialfall kann jetzt die Richtungsabhängigkeit des erzeugten Schallfeldes für weit entfernte Beobachter betrachtet werden. Im Vergleich zur einfachen Quelle nach (9.4.1) findet man einen zusätzlichen Faktor $(1 - M_r)$ im Nenner. Die Richtungsabhängigkeit ist bei der bewegten Massenquelle stärker. Ist zum Beispiel $M_r = 0.5$, so ergibt sich nach (9.4.39) eine Verstärkung um den Faktor vier. Im Fall der bewegten einfachen Quelle beträgt der Faktor nur zwei.

Fernfeld der bewegten Impulsquelle

Im folgenden soll auch noch die Lösung für die bewegte Impulsquelle hergeleitet werden. Dazu muß die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} \quad (9.4.40)$$

berechnet werden. Das weitere Vorgehen ist analog zu der vorherigen Herleitung. Zu beachten ist, daß die Größen r und M_r zur Quellzeit τ^* zu nehmen sind. Diese Zeit hängt von der Beobachtungsposition x_i ab. Die Größen r und M_r sind zusätzlich noch direkt von x_i abhängig. Dadurch ergeben sich etwas kompliziertere Ausdrücke als im Fall der Massenquelle. Die Ableitung des ersten Faktors in (9.4.40) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\tau^*) = \frac{\partial f_i}{\partial \tau^*} \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} = \dot{f}_i \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \quad (9.4.41)$$

9 Bewegte Schallquellen

mit der Schreibweise

$$\dot{f}_i = \frac{\partial f_i}{\partial \tau^*} \quad (9.4.42)$$

Für den zweiten Faktor erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{r(\vec{x}, \tau^*)} \right\} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \{r(\vec{x}, \tau^*)\} \quad (9.4.43)$$

Es wird die Ableitung von $r(\vec{x}, \tau^*)$ nach x_i benötigt. Für diese ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \{r(\vec{x}, \tau^*)\} &= \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x} - \vec{x}_s(\tau^*)| = \frac{\partial r}{\partial x_i} \Big|_{\tau^*} + \frac{\partial r}{\partial \tau^*} \Big|_{\vec{x}} \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \\ &= \frac{x_i - x_{s,i}}{r} - c M_r \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (9.4.44)$$

Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{r} \right\} = -\frac{x_i - x_{s,i}}{r^3} + \frac{c M_r}{r^2} \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \quad (9.4.45)$$

Die Ableitung $\partial \tau^* / \partial x_i$ skaliert nach (9.4.22) nicht mit dem Abstand. Es gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{r(\vec{x}, \tau^*)} \right\} \sim \frac{1}{r^2} \quad (9.4.46)$$

Als letztes muß noch die Ableitung des dritten Faktors gebildet werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{|1 - M_r|} \right\} = \frac{1 - M_r}{|1 - M_r|^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \{M_r(\vec{x}, \tau^*)\} \quad (9.4.47)$$

Im folgenden wird wieder nur der Fall einer gleichförmig, gradlinigen Bewegung der Quelle betrachtet. Das heißt, es gilt (9.4.33) mit einem konstanten Wert M_s . Damit ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{M_r(\vec{x}, \tau^*)\} = -M_s \sin(\theta) \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \Big|_{\tau^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau^*} \Big|_{\vec{x}} \frac{\partial \tau^*}{\partial x_i} \right\} \quad (9.4.48)$$

Die Summanden in der geschweiften Klammer fallen beide mit dem Abstand ab. Aus (9.4.35) folgt, daß der zweite Summand mit $1/r$ skaliert. Die Ableitung $\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \Big|_{\tau^*}$ wurde bisher noch nicht betrachtet. Aus geometrischen Gründen ist jedoch klar, daß die Winkeländerung durch eine Verschiebung des Beobachtungsortes bei fester Quellposition umgekehrt proportional zum Abstand r ist. Damit gilt für große Abstände

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{M_r(\vec{x}, \tau^*)\} \sim \frac{1}{r} \quad (9.4.49)$$

Die Ableitung (9.4.40) liefert also auch nur einen Anteil, der mit $1/r$ skaliert. Die anderen beiden fallen mit $1/r^2$ ab. Für große Abstände ist nur der Anteil, der sich durch die Ableitung des ersten Faktors ergibt, zu berücksichtigen. Multipliziert man

die rechte Seite von (9.4.41) mit den zweiten und dritten Faktor ergibt sich unter Berücksichtigung von (9.4.22)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{f_i}{r|1-M_r|} \right\} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\frac{1}{c} \dot{f}_r}{r(1-M_r)|1-M_r|} \quad (9.4.50)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$f_r = f_i \cdot \frac{(x_i - x_{s,i})}{|\vec{x} - \vec{x}_s|} = \vec{f} \cdot \frac{(\vec{x} - \vec{x}_s)}{|\vec{x} - \vec{x}_s|} \quad (9.4.51)$$

verwendet. Die Größe f_r entspricht – analog zu M_r – der Komponente der Impulsquelle in Richtung des Beobachters.

Für die Druckverteilung der gleichförmig, gradlinig bewegten Impulsquelle erhält man schließlich

$$p'(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{n=1}^N \frac{\dot{f}_r(\tau_n^*)/c}{4\pi r(1-M_r)|1-M_r|} \quad (9.4.52)$$

Die Richtungsabhängigkeit dieser Lösung ist nicht nur durch die $(1-M_r)$ -Terme im Nenner gegeben, sondern auch \dot{f}_r hängt von der Beobachtungsrichtung ab. Dabei ist die Richtung des zugeführten Impulses ausschlaggebend. Senkrecht zu dieser Richtung wird kein Schall abgestrahlt. Daran ändern auch die Verstärkung beziehungsweise Abschwächung durch die Bewegung der Quelle nichts. Eine unbewegte Impulsquelle erzeugt ein Dipolfeld. Die Richtungsabhängigkeit des Dipolfeldes wird mit der Verstärkung beziehungsweise Abschwächung durch Bewegung überlagert.

Um einen Überblick zu geben, sind für die verschiedenen Quelltypen die Abhängigkeiten des Schalldrucks im Fernfeld von der Beobachtungsmachzahl M_r in der Tabelle 9.1 zusammengefaßt. Zu beachten ist, daß die Proportionalitäten in b) und c) nur für den Fall der gleichförmig, gradlinigen Bewegung gelten. Die Formel für den punktförmigen Quadrupol in c) wird hier nur angegeben und nicht hergeleitet.

Beschleunigt bewegte Massenquelle

Die Lösungen (9.4.39) und (9.4.52) werden durch die instationäre Massen- und Impulszufuhr bestimmt. Falls $\ddot{\beta} = 0$ und $\dot{f}_r = 0$ sind, ergeben sich bei gleichförmig, gradlinigen Bewegung der Quellen nur Druckfelder, die mit $1/r^2$ abfallen. Dies ändert sich jedoch bei beschleunigter Bewegung der Quelle. Dann gilt die Proportionalität (9.4.36) nicht mehr. Der Ausdruck in Gleichung (9.4.32) fällt nicht mehr notwendigerweise mit $1/r$ ab. Damit dominiert der entsprechende Summand die Lösung. In dem Fall $\ddot{\beta} = 0$ ergibt sich für eine bewegte Massenquelle das Druckfeld

$$p'(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_0 \dot{\beta}(\tau_n^*) \dot{M}_r}{4\pi r |1-M_r|^3} \quad (9.4.53)$$

Für eine unbeschleunigte Bewegung ist im Fernfeld $\dot{M}_r \sim 1/r$, und der Ausdruck in (9.4.53) fällt mit $1/r^2$ ab. Wird jedoch die Massenquelle zum Beispiel entlang einer

a) Einfache Quelle (rein formal)
$q(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t))$ $p'(\vec{x}, t) \sim \frac{1}{1 - M_r}$
b) Massen- und Impulsquelle
$q(\vec{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}$ $p'(\vec{x}, t) \sim \frac{1}{(1 - M_r)^2}$
c) Quadrupol-Quelle
$q(\vec{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ T_{ij}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\}$ $p'(\vec{x}, t) \sim \frac{1}{(1 - M_r)^3}$

Tabelle 9.1: Abhängigkeit des Schalldrucks im Fernfeld von der Beobachtungsmachzahl: Gegenüberstellung der verschiedenen Quelltypen; b) und c) bei gleichförmig gradliniger Bewegung.

Geraden periodisch hin- und herbewegt, ist \dot{M}_r in Richtung der Bewegung unabhängig von r . Der Schalldruck fällt dann mit $1/r$ im Fernfeld ab.

Anschaulich bedeutet dies, daß eine punktförmige Massenquelle mit zeitlich konstantem Massenfluß nur effizient Schall abstrahlt, wenn sich die Quelle beschleunigt bewegt. Bei einer ruhenden oder eine gleichförmig, gradlinig bewegten Massenquelle führt nur die instationäre Schwankung des Massenflusses zu einer Schallabstrahlung ins Fernfeld.

10 Schallfelder umströmter Körper

10.1 Formale Darstellung von bewegten Flächen

Das Vorhandensein eines Körpers erfordert bei der Lösung der Wellengleichung die Erfüllung von Randbedingungen an dessen Oberfläche. Bei einem festen undurchlässigen Körper ist dies eine sogenannte Nichtdurchflußbedingung. Eine solche Bedingung wurde auch bei der Behandlung der atmenden Kugel angewendet. Die formale Beschreibung der Randbedingung bei der atmenden oder vibrierenden Kugel war auf Grund der Symmetrie relativ einfach. Ebenso konnten die Lösungen der Wellengleichung für diese Fälle sozusagen durch “Probieren” gefunden werden. Bei einem beliebig geformten Körper, der sich irgendwie verformt, kann allein die formale Beschreibung der Oberflächenbewegung schon eine größere Schwierigkeit darstellen. Entsprechend ist die Lösung der Wellengleichung viel aufwendiger. In jedem Fall ist jedoch eine formale Darstellung notwendig.

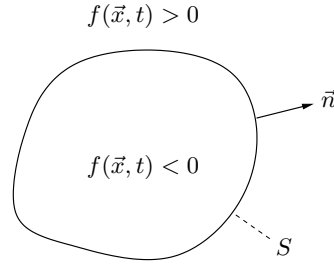
Im folgenden soll eine spezielle Methode vorgestellt werden, um eine beliebig bewegte Fläche im Raum zu beschreiben. Ein naheliegender Ansatz ist es, die Fläche zu parametrisieren. Dann kann die Position der Punkte auf der Oberfläche in Abhängigkeit der Parameter und der Zeit mit Funktionen dargestellt werden. Für allgemeine Herleitungen ist jedoch ein ganz anderer Ansatz viel besser geeignet. Dazu wird eine Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ auf spezielle Weise definiert. Gegeben sei ein zeitlich veränderliches Volumen mit der Oberfläche S . Zur formalen Beschreibung der Oberfläche wird die Hilfsfunktion so konstruiert, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, t) &< 0 && \text{falls } \vec{x} \text{ innerhalb von } V \\ f(\vec{x}, t) &> 0 && \text{falls } \vec{x} \text{ außerhalb von } V \\ f(\vec{x}, t) &= 0 && \text{auf der Oberfläche } S \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

Die Verhältnisse sind in Abbildung 10.1 veranschaulicht. Die Hilfsfunktion soll stetig und fast überall differenzierbar sein. Zusätzlich soll die Bedingung

$$\text{grad} f(\vec{x}, t) \neq 0 \quad \text{auf der Oberfläche } S \quad (10.1.2)$$

gelten. Dabei ist zu bemerken, daß der Gradient von $f(\vec{x}, t)$ nicht immer überall definiert sein kann. Der Gradient von $f(\vec{x}, t)$ zeigt auf S in Richtung des Normalenvektors \vec{n} . An Stellen, an denen die Oberfläche eine Kante besitzt, ist die Normalenrichtung nicht eindeutig festgelegt. Entsprechend ist dort $f(\vec{x}, t)$ nicht differenzierbar und der Gradient ist nicht definiert. Die Bedingung (10.1.2) kann an diesen Stellen nicht gelten. Um die Betrachtungen nicht unnötig kompliziert zu gestalten, soll im weiteren

Abbildung 10.1: Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ bei Volumen V mit Oberfläche S .

von diesen Schwierigkeiten abgesehen werden. Es wird angenommen, die Oberfläche sei “gutmütig” in dem Sinn, daß sie keine Kanten besitzt und eine differenzierbare Hilfsfunktion erlaubt.

Anschaulich ist klar, daß für alle möglichen Bewegungen der Oberfläche S eine solche Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ gefunden werden kann. Die Hilfsfunktion ist natürlich nicht eindeutig. Umgekehrt wird jedoch durch die Hilfsfunktion die Bewegung von S eindeutig festgelegt. Als Beispiel soll $f(\vec{x}, t)$ für eine einfache Geometrie angegeben werden. Betrachtet wird die Oberfläche einer atmenden Kugel, deren momentaner Radius mit $a(t)$ vorgegeben ist. Der Kugelmittelpunkt befindet sich an der Stelle \vec{x}_0 . Eine mögliche Wahl der Hilfsfunktion lautet

$$f(\vec{x}, t) = |\vec{x} - \vec{x}_0|^2 - a^2(t) \quad (10.1.3)$$

Die Quadrate dienen dazu, die Funktion auch an der Stelle \vec{x}_0 differenzierbar zu machen.

Das Konzept der Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ soll bei einigen Herleitungen verwendet werden. Dabei ist nicht die konkrete Form der Hilfsfunktion im Einzelfall wichtig, sondern die Existenz und einige allgemeine Relationen, die im Folgenden betrachtet werden. Da der Normalenvektor \vec{n} parallel zum Gradient von $f(\vec{x}, t)$ ist gilt auf S bei $f(\vec{x}, t) = 0$ die Beziehung

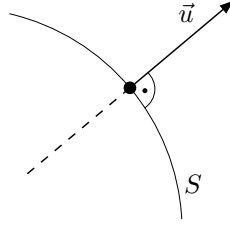
$$\vec{n}(\vec{x}, t) = \frac{\text{grad } f(\vec{x}, t)}{|\text{grad } f(\vec{x}, t)|} \quad (10.1.4)$$

Damit kann \vec{n} direkt aus $f(\vec{x}, t)$ berechnet werden.

Bei Bewegung der Oberfläche muß

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 \quad \text{bei} \quad f(\vec{x}, t) = 0 \quad (10.1.5)$$

gelten. Ist die Hilfsfunktion bei S zeitlich konstant, dann liegt keine Bewegung vor. Neben dieser grundsätzlichen Aussage, kann auch eine quantitative Beziehung zwischen der Oberflächenbewegung und der Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ gefunden werden. Dazu wird


 Abbildung 10.2: Zur Definition der Normalengeschwindigkeit \vec{u} .

die Normalengeschwindigkeit \vec{u} eingeführt. Dies ist die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt auf S in Richtung von \vec{n} bewegen. Wie in der Abbildung 10.2 dargestellt ist, steht \vec{u} definitionsgemäß immer senkrecht auf S .

Um eine formale Beziehung zu erhalten, wird das totale Differential

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i \quad (10.1.6)$$

betrachtet. Wählt man sich einen Punkt auf der Oberfläche S aus, so wird dieser bei Bewegung der Oberfläche ebenfalls verschoben. In einem infinitesimalen Zeitabschnitt dt ergibt sich die Verschiebung $dx_i^{(S)}$. Das hochgestellt S soll kennzeichnen, daß es sich um einen Punkt auf S handelt. Da auf S die Hilfsfunktion immer gleich Null ist, ergibt sich $df = 0$ für diesen Punkt. Es gilt damit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i^{(S)} = 0 \quad (10.1.7)$$

Allerdings ist die Verschiebung des Punktes auf der Oberfläche nicht eindeutig, da die Punkte auf der Oberfläche bei der gegebenen Methode im Gegensatz zu einer Parametrisierung nicht gekennzeichnet sind.

In Abbildung 10.3 sind drei mögliche Verschiebungen dargestellt. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die Oberfläche S zu zwei Zeitpunkten, zwischen denen die infinitesimale Zeit dt vergangen ist. Die hell gefüllten Punkte stellen mögliche neue Positionen des schwarz gefüllten Punktes dar. Für alle Verschiebungen gilt (10.1.7).

Betrachtet man ausgewählt nur die Verschiebung in Richtung von \vec{n} , so gilt

$$\frac{dx_i^{(S)}}{dt} = u_i \quad (10.1.8)$$

Aus (10.1.7) folgt daher

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (10.1.9)$$

oder in vektoriellen Schreibweise

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{grad} f = 0 \quad (10.1.10)$$

Diese Beziehung zwischen den Ableitungen der Hilfsfunktion f und der Normalengeschwindigkeit wird im folgenden Abschnitt benötigt.

Die Lighthill-Gleichung stellt eine inhomogene Wellengleichung für die Dichteschwankung dar. Ohne Berandung kann die Lösung direkt angegeben werden. Die Quellstärkeverteilung wird mit einer einfachen Greenschen Funktion multipliziert und über den gesamten Quellbereich integriert. Dies ist nicht mehr so einfach möglich, wenn sich feste Körper im Raum befinden. Innerhalb der Körper gilt die Wellengleichung nicht. An den Oberflächen der Körper müssen Randbedingungen erfüllt werden. Dadurch wird die Bestimmung des Schallfeldes deutlich erschwert. Es existiert ein Weg eine Wellengleichung so umzuformen und zu erweitern, daß eine Lösung auch mit der einfachen Greenschen Funktion berechnet werden kann. Dies soll hier für die Lighthill-Gleichung durchgeführt werden. Die Lösung der erweiterten Lighthill-Gleichung führt dann auf die Gleichung von Ffowcs-Williams und Hawkings. Hier soll die erweiterte Lighthill-Gleichung zunächst abgeleitet werden. Die Überlegungen gehen von einem Volumen V mit einer Oberfläche S aus. Die Oberfläche wird durch eine Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$, wie sie im letzten Abschnitt eingeführt wurde, beschrieben.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (10.2.1)$$

76

Eins ist. Das bedeutet, es ist

$$H(f(\vec{x}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{x} \notin V; f(\vec{x}, t) > 0 \\ 0 & \text{für } \vec{x} \in V; f(\vec{x}, t) < 0 \end{cases} \quad (10.2.2)$$

Für den weiteren Überlegungen spielt der Ausdruck $H(f)$ eine zentrale Rolle.

Wie bei der Herleitung der Lighthill-Gleichung wird auch hier mit den nichtlinearen Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls begonnen. Die beiden Gleichungen werden zunächst auf spezielle Weise umgeformt. Zuerst wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (10.2.3)$$

mit dem Ausdruck $H(f)$ multipliziert. Es ergibt sich

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) \right\} H(f) = 0 \quad (10.2.4)$$

Dabei ist mit ρ_0 eine frei wählbare Konstante eingeführt worden, deren zeitliche Ableitung gleich Null sein muß. Der Ausdruck $H(f)$ kann in die Ableitungen hineingezogen werden. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho - \rho_0) H(f) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\rho v_i) H(f) \right\} \\ &= (\rho - \rho_0) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ H(f) \right\} + (\rho v_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ H(f) \right\} \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Es ist zu bemerken, daß die Ableitung der Heaviside-Funktion nur als verallgemeinerte Funktion – die δ -Funktion – definiert ist. Für die weiteren Umformungen werden daher auch die verallgemeinerten Funktionen zugelassen. Für die Zeitableitung auf der rechten Seite folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ H(f(\vec{x}, t)) \right\} = \frac{dH}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = \delta(f) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (10.2.6)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nur bei $f(\vec{x}, t) = 0$ – also auf der Oberfläche S – von Null verschieden. Dort gilt die Gleichung (10.1.9). Sie stellt eine Beziehung zwischen der Normalengeschwindigkeit \vec{u} und den Ableitungen von $f(\vec{x}, t)$ dar. Mit ihr kann die Zeitableitung $\partial f / \partial t$ dort, wo $f(\vec{x}, t) = 0$ gilt, ersetzt werden. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ H(f(\vec{x}, t)) \right\} = -u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (10.2.7)$$

Für die räumliche Ableitung ergibt sich entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ H(f(\vec{x}, t)) \right\} = \frac{dH}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (10.2.8)$$

Setzt man die beiden Ableitungen auf der rechten Seite von Gleichung (10.2.5) ein, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho - \rho_0) H(f) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\rho v_i) H(f) \right\} = \left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \quad (10.2.9)$$

Diese Beziehung stellt eine Erweiterung der Kontinuitätsgleichung dar. Die rechte Seite ist nur auf der Oberfläche S von Null verschieden. Die linke Seite ist innerhalb des Volumens V gleich Null. Dies bedeutet, daß sich innerhalb von V die Gleichung (10.2.9) auf die Trivialität $0 = 0$ reduziert.

Die Kontinuitätsgleichung (10.2.3) beschreibt die Dichteänderung in dem Fluid. Sie wird nicht innerhalb eines Körpers angewendet, der sich im Strömungsfeld befindet. Falls ein Körper vorhanden ist, wird auf dessen Oberfläche eine Randbedingungen erfüllt. Dies kann zum Beispiel bei einer festen Oberfläche eine Nichtdurchflußbedingung sein. Im Gegensatz dazu kann Gleichung (10.2.9) ohne Probleme im gesamten Raum angewendet werden, auch wenn sich ein Körper im Strömungsfeld befinden. Es muß nur die Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ so gewählt werden, daß sich der Körper innerhalb des Volumens V befinden. Dabei ist auch der Spezialfall erlaubt, daß S mit den Körperoberflächen übereinstimmt. Dann entspricht das Volumen V genau dem Körpervolumen. Im Körper gilt $f(\vec{x}, t) < 0$ und Gleichung (10.2.9) wird zu $0 = 0$. Das bedeutet, Gleichung (10.2.9) gilt im gesamten Raum und geht sozusagen "durch den Körper". Es muß keine Randbedingungen erfüllt werden. Die Randbedingungen wurde gegen den zusätzlichen Term auf der rechten Seite von Gleichung (10.2.9) "eingetauscht".

Analog zur Kontinuitätsgleichung kann auch die Impulsgleichung umgeformt werden. Dabei wird von der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(P_{ij} + \rho v_i v_j) = 0 \quad (10.2.10)$$

mit der Abkürzung

$$P_{ij} = (p - p_0)\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (10.2.11)$$

ausgegangen. Die Größe τ_{ij} bezeichnet den Spannungstensor. Es wurde auch hier wieder eine frei wählbare Konstante p_0 eingeführt, deren räumliche Ableitung verschwindet. Die Umformung der Impulsgleichung liefert das Ergebnis

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\rho v_i) H(f) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (P_{ij} + \rho v_i v_j) H(f) \right\} = \left\{ \rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \quad (10.2.12)$$

Genau wie (10.2.9) gilt Gleichung (10.2.12) im gesamten Raum und auch in einem Körper, wenn $f(\vec{x}, t)$ geeignet gewählt wird. Aus der umgeformten Kontinuitätsgleichung und Impulsgleichung kann eine Wellengleichung hergeleitet werden. Dazu wird (10.2.9) partiell nach der Zeit abgeleitet und die Divergenz von (10.2.12) gebildet. Die Ergebnisse werden voneinander abgezogen. Dabei heben sich wie gewöhnlich zwei Terme auf der linken Seite gegeneinander auf. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ (\rho - \rho_0) H(f) \right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ (P_{ij} + \rho v_i v_j) H(f) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho (v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i (v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right) \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

10.2 Die Lighthill-Gleichung mit Berandung

Das Resultat besitzt allerdings noch nicht die Form einer Wellengleichung. Um dies zu erreichen wird – analog zur Herleitung der Lighthill-Gleichung – auf beiden Seiten der Ausdruck

$$c^2 \Delta \{(\rho - \rho_0)H(f)\} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{(\rho - \rho_0)\delta_{ij}H(f)\} \quad (10.2.14)$$

subtrahiert. Dabei ist c zunächst eine frei wählbare Konstante, die für sinnvolle Anwendungen später gleich der Schallgeschwindigkeit gesetzt wird. Zusätzlich wird der zweite Term auf der linken Seite von (10.2.13) durch Addition auf die rechte Seite gebracht. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \{(\rho - \rho_0)H(f)\} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{T_{ij}H(f)\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i(v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right) \end{aligned} \quad (10.2.15)$$

mit dem Lighthillschen Spannungstensor

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + P_{ij} - c^2(\rho - \rho_0)\delta_{ij} \quad (10.2.16)$$

Gleichung (10.2.15) stelle eine inhomogene Wellengleichung für den Ausdruck

$$(\rho - \rho_0) \cdot H(f) = \rho' \cdot H(f) \quad (10.2.17)$$

mit Quelltermen auf der rechten Seite dar. Sie folgt ohne Näherungen aus den nicht-linearen Erhaltungsgleichungen. Vereinfacht kann Gleichung (10.2.15) als

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \{\rho' H(f)\} = q(\vec{x}, t) \quad (10.2.18)$$

geschrieben werden. Der Ausdruck auf der linken Seite ist linear. Alle Nichtlinearitäten sind in dem Quellterm $q(\vec{x}, t)$ enthalten.

Für den Fall, daß überall $f(\vec{x}, t) > 0$ und damit $H(f) = 1$ gilt, reduziert sich (10.2.15) erwartungsgemäß auf die Lighthill-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \rho' = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \quad (10.2.19)$$

Die Lighthill-Gleichung gilt nur innerhalb des Fluids. Befinden sich ein Körper im Strömungsfeld müssen entsprechend Randbedingungen erfüllt werden. Dagegen gilt die erweiterte Gleichung (10.2.15) überall. Dies hat den Vorteil, daß ihre Lösung mit Hilfe einer einfachen Greenschen Funktion berechnet werden kann. Das bedeutet, die Lösung der erweiterten Gleichung kann in jedem Fall durch das Integral

$$\{\rho' H(f)\}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\vec{y}, t - |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (10.2.20)$$

dargestellt werden. Diese einfache Form der Lösung ist bei der Lighthill-Gleichung nur möglich, falls sich keine Körper im Strömungsfeld befinden.

Die erweiterte Form der Lighthill-Gleichung geht auf die Überlegungen von Ffowcs-Williams und Hawkings zurück. Historisch wurde allerdings zuerst eine spezielle Lösung der Gleichung (10.2.15) angegeben, bevor die Gleichung selbst abgeleitet wurde. Die spezielle Lösung wurde aus der Lösung der Lighthill-Gleichung durch Umformungen gewonnen. So wird in der Literatur uneinheitlich manchmal die spezielle Lösung und manchmal die Differentialgleichung (10.2.15) als “Ffowcs-Williams-Hawkings-Gleichung” bezeichnet. Die erwähnte spezielle Lösung wird in einem der folgenden Abschnitte noch vorgestellt.

10.3 Quellen auf festen Oberflächen

Zur sinnvollen Anwendung der erweiterten Lighthill-Gleichung muß die Hilfsfunktion $f(\vec{x}, t)$ und damit die Oberfläche S geeignet gewählt werden. Wenn S mit der Oberfläche eines undurchlässigen Körpers übereinstimmt, ergeben sich einige Vereinfachungen, die im folgenden vorgestellt werden sollen. Dazu wird nur der flächenhafte Anteil

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta(f) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i(v_j - u_j) + P_{ij} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta(f) \right) \quad (10.3.1)$$

der Quellverteilung betrachtet. Dieser ist ausschließlich auf der Oberfläche S aktiv, da sonst überall $\delta(f) = 0$ gilt.

In dem mit der Körperoberfläche mitbewegten Bezugssystem darf die Geschwindigkeit des Fluids keine Komponente senkrecht zur Oberfläche besitzen, um die Bedingung der undurchlässigen festen Wand zu erfüllen. Ist \vec{u} die Normalengeschwindigkeit der Oberfläche und \vec{v} die Geschwindigkeit des Fluids, so ist die Geschwindigkeit im mitbewegten System durch die Differenz $\vec{v} - \vec{u}$ gegeben. Dieser Differenzvektor muß senkrecht auf dem Normalenvektor \vec{n} stehen. Die Situation ist in Abbildung 10.4 dargestellt. Es gilt

$$(v_i - u_i) n_i = 0 \quad (10.3.2)$$

Mit dieser Beziehung lassen sich die Oberflächenquellterme deutlich vereinfachen, da einige Anteile herausfallen. Dazu wird der Gradient von f in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = n_i |\text{grad } f| \quad (10.3.3)$$

in (10.3.1) eingesetzt. Man erhält

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 u_i n_i |\text{grad } f| \delta(f) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ P_{ij} n_j |\text{grad } f| \delta(f) \right\} \quad (10.3.4)$$

Dabei sind wegen (10.3.2) die Terme mit $(v_i - u_i)$ herausgefallen.

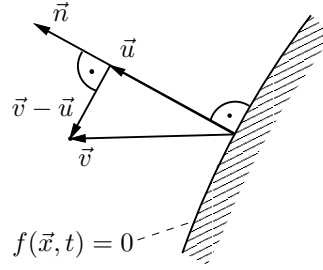


Abbildung 10.4: Zur Randbedingung an einer bewegten undurchlässigen Wand.

Üblicherweise werden die Quellverteilungen noch kompakter dargestellt, in dem die Abkürzungen

$$u_n = |\vec{u}| = u_i n_i \quad (10.3.5)$$

und

$$l_i = P_{ij} n_j = (p - p_0) n_i - \tau_{ij} n_j \quad (10.3.6)$$

eingeführt werden. Es ergibt sich dann

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 u_n |\text{grad } f| \delta(f) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ l_i |\text{grad } f| \delta(f) \right\} \quad (10.3.7)$$

Der Vektor l_i entspricht einer lokalen Kraft pro Fläche, die von dem Körper auf das Fluid ausgeübt wird. Dabei sind Anteile aus dem Druck und den Schubspannungen enthalten. Durch eine Kraft wird ein Impuls auf das Medium übertragen. Für eine bewegte punktförmige Impulsquelle ergab sich in Abschnitt 9.4 eine Quellverteilung der Form

$$q(\vec{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ f_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\} \quad (10.3.8)$$

Dabei war f_i eine Kraft pro Volumen. Der l_i -Term in (10.3.7) stellt damit das flächenhafte Gegenstück zu der punktförmigen Quellverteilung dar. Er repräsentiert sozusagen eine flächenhafte Impulsquelle, die bewegt sein kann.

Analog kann auch der erste Quellterm auf der rechten Seite in (10.3.7) physikalisch gedeutet werden. Die Größe $\rho_0 u_n$ entspricht einer verdrängten Masse pro Fläche und pro Zeit. Für eine bewegte punktförmige Massenquelle ergab sich eine Quellverteilung

$$q(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 \dot{\beta}(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_s(t)) \right\} \quad (10.3.9)$$

Dabei war $\rho_0 \dot{\beta}(t)$ eine verdrängte Masse pro Volumen und pro Zeit. Der $\rho_0 u_n$ -Term in (10.3.7) kann somit als bewegte flächenhafte Massenquelle angesehen werden.

Anscheinend kann die Randbedingung an einem festen Körper im Strömungsfeld gerade durch eine Überlagerung aus Massen- und Impulsquelle auf der Körperoberfläche ersetzt werden. Anstatt die Randbedingung zu erfüllen, werden die zusätzlichen Quellterme mit berücksichtigt.

Zu bemerken ist, daß bisher keine Näherungen – wie etwa eine Linearisierung – in die Überlegungen mit eingeflossen ist. Die abgeleiteten Beziehungen einschließlich der Ausdrücke auf der rechten Seite sind eine direkte Folge der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung. Sie wurden lediglich im akustischen Sinn als Quellterme interpretiert.

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

Betrachtet wird eine Modellquellverteilung, die bis auf die Ableitungen den in der erweiterten Lighthill-Gleichung auftretenden Oberflächenquelltermen entspricht. Auch bei der bewegten punktförmigen Quelle wurde zunächst eine Modellquelle ohne direkte physikalische Entsprechung untersucht. Die Ergebnisse für die Modellquelle konnten dann auf die physikalischen Fälle übertragen werden. Das gleiche Vorgehen wird hier wiederholt.

Die flächenhafte Modellquellverteilung lautet

$$q(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}, t) |\text{grad} f| \delta(f) \quad (10.4.1)$$

Berechnet werden soll die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = q(\vec{x}, t) \quad (10.4.2)$$

Es sei angemerkt, daß es für die rein formale Untersuchung zunächst keine Rolle spielt, ob die Wellengleichung für die Größe ϕ oder für $\rho' H(f)$ betrachtet wird. In diesem Abschnitt wird ϕ anstatt $\rho' H(f)$ geschrieben, um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten. Es muß nur angenommen werden, daß die inhomogene Wellengleichung – wie die erweiterte Lighthill-Gleichung – im gesamten Raum gilt. Dann ergibt sich für (10.4.2) die Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} Q(\vec{y}, \tau) |\text{grad} f(\vec{y}, \tau)| \delta(f(\vec{y}, \tau)) \, d^3 \vec{y} \quad (10.4.3)$$

Dabei ist die retardierte Zeit mit

$$\tau(\vec{x}, \vec{y}, t) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \quad (10.4.4)$$

und der Abstand zwischen Beobachter und Quellpunkt mit

$$r(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (10.4.5)$$

gegeben. Gleichung (10.4.3) läßt sich in kompakter Form als

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \left[Q |\text{grad} f| \delta(f) \right]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} \quad (10.4.6)$$

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

schreiben. Diese Art der Darstellung findet man häufig in der Literatur. Die eckigen Klammer $[\cdot]_{\text{ret}}$ gibt an, daß der in ihr eingeschlossene Ausdruck zur retardierten Zeit am Quellort ausgewertet werden muß.

Zunächst wird der Sonderfall einer unbewegten Oberfläche betrachtet. Das bedeutet, die Funktion f hängt ausschließlich von der Ortskoordinate und nicht mehr von der Zeit ab:

$$f(\vec{y}, \tau) = f_0(\vec{y}) \quad (10.4.7)$$

Die Fläche $f_0(\vec{y}) = 0$ entspricht der Oberfläche S . In diesem Fall kann zur Berechnung des Integrals in (10.4.3) die Rechenregel

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(\vec{y}) \delta(f_0(\vec{y})) \, d^3\vec{y} = \int_S \frac{h(\vec{y})}{|\text{grad} f_0(\vec{y})|} \, dS(\vec{y}) \quad (10.4.8)$$

angewendet werden. Hier ist $h(\vec{y})$ zunächst eine beliebige Funktion. Das Raumintegral wird in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Die Schreibweise $dS(\vec{y})$ soll klarstellen, daß die Oberflächenintegration bezüglich der Variablen \vec{y} durchgeführt wird. In dem betrachteten Fall wird

$$h(\vec{y}) = \frac{1}{r} Q(\vec{y}, \tau) |\text{grad} f_0(\vec{y})| \quad (10.4.9)$$

gewählt. Einsetzen in (10.4.8) ergibt für die Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} Q(\vec{y}, \tau) \, dS(\vec{y}) \quad (10.4.10)$$

Damit ist der Druck als Integral über die mit Quellen belegten Oberfläche S dargestellt.

Es ist zu bemerken, daß die Hilfsfunktion $f_0(\vec{y})$ nicht eindeutig durch die Oberfläche S festgelegt wird. Auf den ersten Blick hängt damit die Quellstärke in (10.4.1) von der Wahl der Hilfsfunktion ab. In der Lösung (10.4.10) ist jedoch der $|\text{grad} f_0(\vec{y})|$ -Term herausgefallen. Das bedeutet, die Lösung hängt nicht von der konkreten Wahl der Hilfsfunktion sondern nur von der Oberfläche $f_0(\vec{y}) = 0$ ab. Anscheinend wird dies durch den Ausdruck $|\text{grad} f| \delta(f)$ in der Quellverteilung garantiert.

Bei bewegter Oberfläche wird die Umformung der Lösung erheblich erschwert. In Gleichung (10.4.3) sind die Funktionswerte $Q(\vec{y}, \tau)$ und $f(\vec{y}, \tau)$ im Integrand zu einer bestimmten – nach (10.4.4) von \vec{y} abhängigen – retardierten Zeit τ zu nehmen. Der Integrand ist für ein festes \vec{x} und t nur an Stellen \vec{y} mit

$$f\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}\right) = [f]_{\text{ret}} = 0 \quad (10.4.11)$$

von Null verschieden. Gleichung (10.4.11) definiert eine Fläche im \mathbb{R}^3 , die im folgenden Σ genannt wird. Das heißt, Σ ist die Menge aller Punkte \vec{y} , für die bei gegebenen \vec{x} und t Gleichung (10.4.11) erfüllt ist. Im Gegensatz zu S hängt Σ nicht von der Zeit ab. Die Oberfläche S stimmt im allgemeinen zu keiner Zeit mit der Fläche Σ

überein. Theoretisch kann das Raumintegral in (10.4.3) in ein Integral über die Fläche Σ umgeformt werden. Die Fläche ist jedoch nicht direkt gegeben, und weiter unten wird gezeigt, daß ihre Berechnung relativ aufwendig sein kann.

Für die folgenden Überlegungen wird analog zum Fall der bewegten Punktquelle Gleichung (10.4.3) erweitert, und zusätzlich ein Integral über die retardierte Zeit τ eingeführt. Es kann

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} Q |\text{grad} f| \delta(f) \delta(g) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.4.12)$$

geschrieben werden. Jetzt ist τ eine unabhängige Integrationsvariable und entspricht nicht mehr der speziellen retardierten Zeit aus Gleichung (10.4.4). Die Variablen \vec{y} und τ sind unabhängig, und die Integrationen können vertauscht werden. Die Funktionen Q und f sind wie gehabt von \vec{y} und τ abhängig. Wie bei der bewegten Punktquelle tritt die Funktion

$$g(\vec{x}, t, \vec{y}, \tau) = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} - \tau \quad (10.4.13)$$

auf. Der Funktionswert entspricht der Differenz zwischen der in (10.4.4) gegebenen speziellen retardierten Zeit und der Integrationsvariablen τ . Für eine feste Beobachungsposition \vec{x} und Beobachtungszeit t ist die Funktion g nur von \vec{y} und τ anhängig.

Veranschaulichung der Quellverteilung

Die Integration in (10.4.12) erfolgt im vierdimensionalen (\vec{y}, τ) -Raum. Der Integrand in (10.4.12) ist nur an Stellen mit $f(\vec{y}, \tau) = 0$ und $g(\vec{y}, \tau) = 0$ von Null verschieden. Die Bedingungen $f = 0$ und $g = 0$ definieren zwei Hyperflächen im vierdimensionalen (\vec{y}, τ) -Raum. Die Schnittmenge der Flächen gibt wieder eine Hyperfläche in diesem Raum. Die Projektion dieser Schnittmenge auf den dreidimensionalen \vec{y} -Raum ist die durch Gleichung (10.4.11) gegebene Fläche Σ .

Zu Veranschaulichung wird die geometrische Situation zunächst für einen eindimensionalen y -Raum betrachtet. Dieser Fall wurde im Prinzip bereits in Abschnitt 9.1 behandelt. Abbildung 10.5 zeigt die Darstellung in der (y, τ) -Ebene nochmal auf. Die Fläche $g = 0$ entspricht zwei geraden Strahlen, die sich im Beobachtungspunkt (\vec{x}, t) treffen. Alle Ereignisse auf diesen Strahlen werden vom Beobachter gleichzeitig empfangen. Die Oberfläche S reduziert sich im eindimensionalen Raum zu einem Punkt. Die Bahn des Punktes ist durch $f = 0$ gegeben. Die Fläche Σ würde im eindimensionalen Fall einem Punkt auf der y -Achse unterhalb des Schnittpunktes der $f = 0$ Kurve mit den $g = 0$ Strahlen entsprechen.

Bei zwei Raumdimensionen ($\vec{y} \in \mathbb{R}^2$) wird die Menge $g = 0$ zu einem Kegelmantel im dreidimensionalen (\vec{y}, τ) -Raum. In der Spitze des Kegelmantels liegt der Beobachtungspunkt (\vec{x}, t) . In der Abbildung 10.6 ist $f = 0$ für einen bewegten Kreis dargestellt. Durch die Bewegung ergibt sich für $f = 0$ eine Art Schlauch, der den Kegelmantel schneidet. Die Projektion der entstehenden Schnittlinie auf die Ebene $\tau = 0$ entspricht der Fläche Σ .

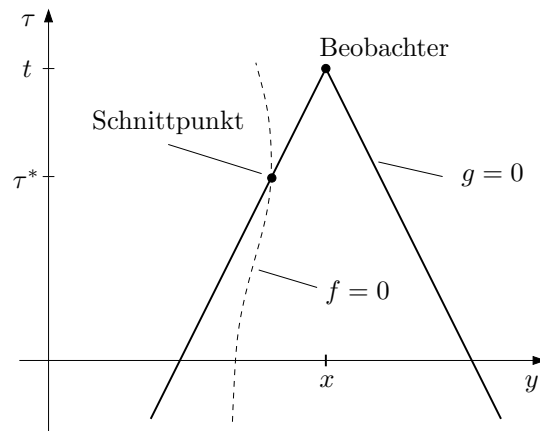


Abbildung 10.5: Betrachtung der Mengen $f = 0$ und $g = 0$ bei einer Raumdimension: $y \in \mathbb{R}$.

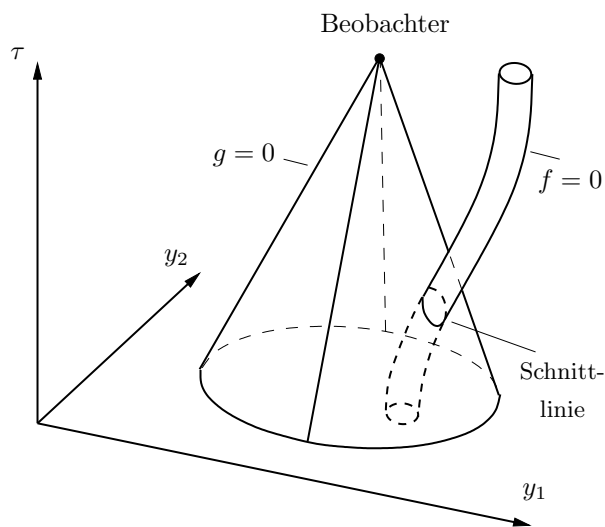


Abbildung 10.6: Betrachtung der Mengen $f = 0$ und $g = 0$ bei zwei Raumdimensionen: $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

Bei drei Raumdimensionen ($\vec{y} \in \mathbb{R}^3$) ist die Veranschaulichung nicht so einfach wie im ein- und zweidimensionalen Fall. Sie ist jedoch immer noch möglich, wenn als vierte Dimension die Zeit mit benutzt wird. Konstruiert man sich für eine feste retardierte Zeit τ eine Kugel mit dem Radius $c \cdot (t - \tau)$ um die Beobachtersposition \vec{x} , so gilt auf der Kugeloberfläche die Bedingung $g(\vec{y}, \tau) = 0$. Alle Ereignisse, die zur Zeit τ auf der Kugeloberfläche stattfinden, werden vom Beobachter zur Zeit t registriert. Mögliche Ereignisse sind die Quellen, die sich auf der Oberfläche S befinden. Im folgenden Beispiel soll S mit der Oberfläche eines sich drehenden Rotors übereinstimmen. Für alle Punkte auf der Rotoroberfläche gilt $f(\vec{y}, \tau) = 0$. Zur betrachteten Zeit τ schneidet die Rotoroberfläche die Kugeloberfläche, und es ergibt sich eine Schnittlinie, die mit $\Gamma(\tau)$ bezeichnet wird. In Abbildung 10.7 wird diese Schnittlinie veranschaulicht. Für eine geringfügig frühere Zeit τ' ergibt sich eine etwas größere Kugel und die Rotorposition ist entsprechend um einen kleinen Winkel zurückgedreht. Dadurch erhält man eine weitere Schnittlinie $\Gamma(\tau')$.

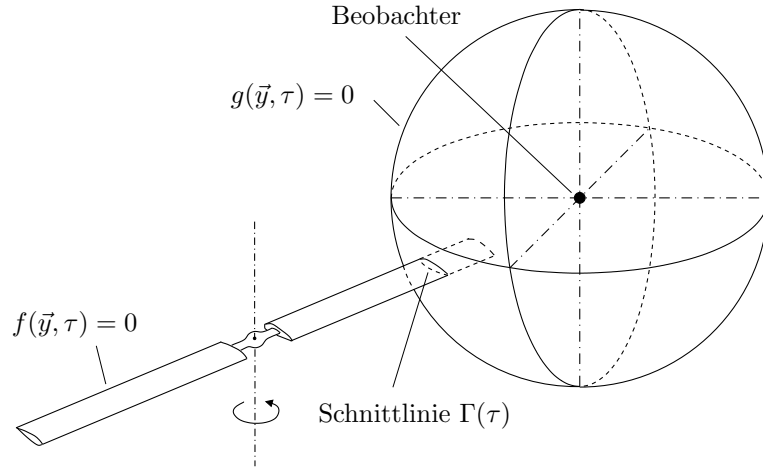


Abbildung 10.7: Zur Erklärung der Schnittlinie $\Gamma(\tau)$.

Denkt man sich nun die retardierte Zeit τ variable, und läßt τ von der Beobachtungszeit t beginnend gegen $-\infty$ laufen, so entspringt dem Beobachtungspunkt eine Kugel, die immer größer wird. Dabei wird von der Kugeloberfläche $g(\vec{y}, \tau) = 0$ der gesamte Raum einmal "abgetastet", wobei unendlich viele Schnittlinien $\Gamma(\tau)$ entstehen können. Die Vereinigungsmenge der Schnittlinien bildet die durch Gleichung (10.4.11) gegebene Fläche Σ . Die Form dieser Fläche weicht unter Umständen deutlich von der Rotorgeometrie ab. Bewegt sich der Rotor am äußeren Blattende mit Überschall, so ist Σ nicht mehr einfach zusammenhängend und besteht aus mehreren separierten Teilen.

Durch die bisherigen Überlegungen konnten zwar grundsätzliche Erkenntnisse über das Integral in (10.4.12) gewonnen werden, jedoch ist die praktische Berechnung der Fläche Σ sehr auswendig. Unter bestimmten Umständen läßt sich das Problem jedoch

umgehen, und das Integral in (10.4.12) kann durch ein Integral über die Oberfläche des Körpers ersetzt werden. Dies soll im folgenden erläutert werden.

Integration im mitbewegten Bezugssystem

Betrachtet wird der Fall, daß die durch $f = 0$ beschriebene Oberfläche eine starre Form besitzt. Dies ist zum Beispiel gegeben, wenn $f = 0$ die Oberfläche eines Körpers darstellt, der sich nicht verbiegt und auch nicht gestreckt oder gestaucht wird. Es liegt dann lediglich eine Translation der Fläche S im Raum und eventuell eine Rotation vor. Unter diesen Bedingungen läßt sich die Integration in Gleichung (10.4.12) vereinfachen, wenn man sie in einem mitbewegten Bezugssystem durchführt. Dazu wird ein mit der Oberfläche (bzw. dem Körper) fest verbundenes Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten eingeführt. In diesem Koordinatensystem ist die Hilfsfunktion f nicht mehr von der Zeit abhängig. Das neue Koordinatensystem wird so definiert, daß die $\vec{\eta}$ -Koordinaten mit den \vec{y} -Koordinaten zur Zeit $\tau = 0$ übereinstimmen. Die beiden Koordinaten sind durch

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau) \quad (10.4.14)$$

miteinander verknüpft. Dabei ist

$$\vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau) = \int_0^\tau \vec{U}(\vec{\eta}, \tau') d\tau' \quad (10.4.15)$$

der Verschiebungsvektor der Punktes mit der Koordinate $\vec{\eta}$ zur Zeit τ . Der Vektor $\vec{U}(\vec{\eta}, \tau')$ ist die Geschwindigkeit im \vec{y} -System, die der Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}$ besitzt. Bei reiner Translation ist \vec{U} konstant für alle $\vec{\eta}$. Bei Rotation um eine Achse gilt $\vec{U} = 0$ entlang der Achse, und mit dem Abstand von ihr nimmt \vec{U} betragsmäßig zu.

In der Abbildung 10.8 ist das Beispiel eines mit einem Rotorblatt rotierenden Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten veranschaulicht. Die Drehachse entspricht der y_3 -Achse. Im linken Teil ist die Situation zum Zeitpunkt $\tau = 0$ dargestellt. Die \vec{y} und $\vec{\eta}$ -Koordinaten stimmen überein. Etwas später – zur Zeit $\tau_1 > 0$ – hat sich der Rotor um einen kleinen Winkel gedreht. Die η_1 und η_2 -Achsen fallen nicht mehr mit den y_1 und y_2 -Achsen zusammen. Für einen Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}_*$ (im Beispiel direkt auf der Achse durch das Rotorblatt liegend) gibt $\vec{x}_s(\vec{\eta}_*, \tau_1)$ die momentane Verschiebung des Punktes an.

Nach dieser Vorbereitung wird die Lösung (10.4.12) betrachtet. Sie besitzt die Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} q \delta(g) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.4.16)$$

Dabei ist die Quellstärkeverteilung mit q abgekürzt worden. Zunächst ist die konkrete Gestalt der Quellstärkeverteilung nicht wichtig. Erst später wird wieder die flächenhafte Verteilung $Q |\text{grad} f| \delta(f)$ nach (10.4.1) eingesetzt. Die Betrachtungen sind jedoch

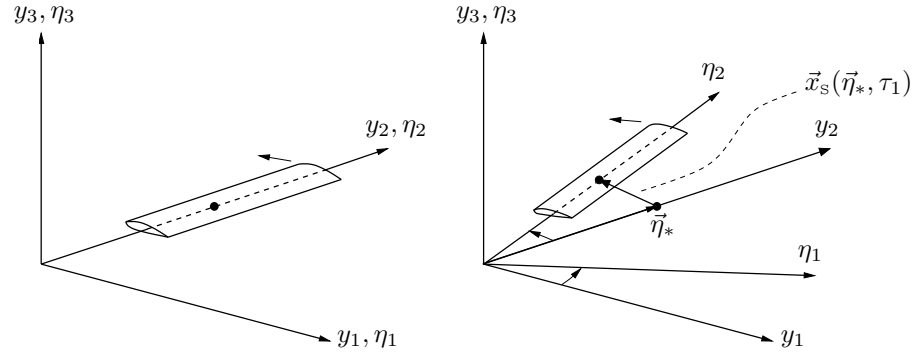


Abbildung 10.8: Zur Erläuterung des körperfesten Koordinatensystems: Zustand bei $\tau = 0$ links und bei einer etwas späteren Zeit $\tau = \tau_1$ rechts.

nur sinnvoll, wenn sich die Quellstärkeverteilung q einfach als Funktion der Koordinaten $\vec{\eta}$ in dem mitbewegten System ausdrücken läßt. Für die eigentliche Anwendung ist es tatsächlich auch praktisch die Quellstärke in diesem System zu betrachten. Das Feld Q ist durch die Strömungsgrößen wie zum Beispiel der Druck bestimmt. Es liegt nahe, die Druckverteilung auf einer Körperoberfläche in einem körperfesten Koordinatensystem zu beschreiben. So sollte sich nicht nur die Darstellung von f sondern auch die von Q vereinfachen.

Im ersten Schritt werden die Integrationen auf der rechten Seite von (10.4.16) vertauscht, so daß die räumliche Integration die Innere ist. Anschließend wird die Integrationsvariable \vec{y} mit $\vec{\eta}$ substituiert. Zwischen den infinitesimalen Volumenelementen in den verschiedenen Bezugssystemen besteht der Zusammenhang

$$d^3\vec{y} = J d^3\vec{\eta} \quad (10.4.17)$$

Dabei ist mit J die sogenannte Funktionaldeterminante (oder Jacobische Determinante) bezeichnet. Sie ist die Determinante der Funktionalmatrix (oder Jacobische Matrix). Es gilt

$$J = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial \eta_j} \right) \quad (10.4.18)$$

Da die beiden Bezugssysteme durch reine Translation und Rotation ineinander übergehen, entspricht eine Volumeneinheit in dem \vec{y} -System auch einer Volumeneinheit in dem $\vec{\eta}$ -System. Das bedeutet, für Funktionaldeterminante gilt überall einfach $J = 1$. Würde sich das mitbewegte System verzerren, dehnen oder stauchen, dann wäre das nicht unbedingt mehr der Fall.

Wenn die Substitution abgeschlossen ist, kann die räumliche und zeitliche Integra-

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

tion wieder “zurückgetauscht” werden. Aus (10.4.16) ergibt sich schließlich

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} q \delta(g) d\tau d^3\vec{\eta} \quad (10.4.19)$$

Die Quellstärke q ist jetzt eine Funktion von $\vec{\eta}$ und τ . Vergleicht man mit (10.4.16), so wurde rein formal lediglich das Symbol \vec{y} durch $\vec{\eta}$ ersetzt. Jedoch ist zu beachten, daß die Abhängigkeiten der Größen g und r von den Integrationsvariablen nun etwas komplizierter sind als vorher. Der Abstand r hängt jetzt mit

$$r = r(\vec{x}, \vec{\eta}, \tau) = |\vec{x} - \vec{\eta} - \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau)| \quad (10.4.20)$$

nicht nur von der neuen Koordinate $\vec{\eta}$ sondern zusätzlich auch von der Zeit τ ab. Entsprechend ist auch die Funktion

$$g = g(\vec{x}, t, \vec{\eta}, \tau) = t - \frac{r}{c} - \tau \quad (10.4.21)$$

einmal direkt und einmal über den Abstand r von der Zeit τ abhängig. Beides bereitet für die Integration keine grundsätzlichen Probleme.

Im nächsten Schritt wird das innere Integral in (10.4.19) betrachtet. Ein vergleichbares Integral wurde bereits im Abschnitt 9.1 berechnet. Ersetzt man $q(\vec{\eta}, \tau)$ mit $Q(\tau)$ und $\vec{\eta} + \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau)$ mit $\vec{x}_s(\tau)$, dann entspricht das inneren Integral in (10.4.19) rein formal dem Integral in Gleichung (9.1.14). Die Übereinstimmung kann auch anschaulich begründet werden. Für die Berechnung des inneren Integrals können die Größen \vec{x} , t und $\vec{\eta}$ als konstant betrachtet werden. Die Koordinate $\vec{\eta}$ markiert einen Punkt, der sich im \vec{y} -Raum bewegt. Die Quellstärke in diesem Punkt ist durch den Wert des Feldes q für diese Koordinate $\vec{\eta}$ gegeben. Man kann den Punkt isoliert als bewegte Punktquelle ansehen. Das innere Integral beschreibt den Schalldruck, den diese bewegte Punktquelle am Ort \vec{x} zur Zeit t bewirkt. Im Unterschied zum Abschnitt 9.1 besteht die Quelle hier aus vielen Punkten. Daher müssen, um den gesamten Schalldruck zu erhalten, die Anteile der Punktquellen aufsummiert werden. Die geschieht mit der äußeren Integration über die Koordinate $\vec{\eta}$.

Zur Berechnung des inneren Integrals wird das Vorgehen aus Abschnitt 9.1 übernommen. Im folgenden wird die Beobachtungsort \vec{x} und die Beobachtungszeit t festgehalten. Die Funktion g hängt dann nur von $\vec{\eta}$ und τ ab. Für eine feste Koordinate $\vec{\eta}$ ist g sogar nur eine Funktion von τ . Es gilt die allgemeine Regel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta(g(\tau)) d\tau = \sum_{n=1}^N \frac{h(\tau_n^*)}{\left| \frac{dg}{d\tau} \right|} \quad (10.4.22)$$

Dabei ist $h(\tau)$ eine beliebige Funktion. Mit der Regel kann das innere Integral in eine Summe umgewandelt werden. Zuerst wird noch die Ableitung der Funktion g nach der Zeit τ für eine feste Koordinate $\vec{\eta}$ berechnet. Es ergibt sich

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(\vec{\eta}, \tau) = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} - 1 = M_r(\vec{\eta}, \tau) - 1 \quad (10.4.23)$$

Dabei ist mit $M_r(\vec{\eta}, \tau)$ die Beobachtungsmachzahl für den Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}$ eingeführt worden. Sie gibt an, mit welcher Machzahl sich der Punkt auf den Beobachter zu bewegt. Denn der Faktor

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} = \frac{\partial r}{\partial x_{s,i}} \cdot \frac{\partial x_{s,i}}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} = - \frac{(\vec{x} - \vec{\eta} - \vec{x}_s)_i}{r} \cdot \frac{\partial x_{s,i}}{\partial \tau} \Big|_{\vec{\eta}} \quad (10.4.24)$$

ist die Komponente der Geschwindigkeit des Punkts in Richtung vom Beobachter weg. Der erste Faktor auf der rechten Seite entspricht dem Einheitsvektor, der von dem Punkt mit der Koordinate $\vec{\eta}$ zum Beobachter zeigt. Der zweite Faktor gibt die Geschwindigkeit des Punktes an. Durch den $-1/c$ -Vorfaktor in (10.4.23) ergibt sich daraus eine Machzahl. Zu beachten ist, daß diese Geschwindigkeit beziehungsweise Machzahl ihre Bedeutung in dem \vec{y} -System hat, obwohl sie mit $M_r(\vec{\eta}, \tau)$ als Funktionen in dem $\vec{\eta}$ -System ausgedrückt wird.

Bisher unterscheidet sich die Darstellung von der im Abschnitt 9.1 im wesentlichen dadurch, daß jetzt alle Größen zusätzlich von der Koordinate $\vec{\eta}$ abhängen. So sind auch die Nullstellen der Funktion g , über die in Gleichung (10.4.22) summiert wird, eine Funktion von $\vec{\eta}$. Sogar die Anzahl der Nullstellen kann von $\vec{\eta}$ abhängen: $N = N(\vec{\eta})$. Die Nullstellen werden wieder mit τ^* bezeichnet. Sie müssen die Gleichung

$$c \cdot (t - \tau^*(\vec{\eta})) = |\vec{x} - \vec{\eta} - \vec{x}_s(\vec{\eta}, \tau^*(\vec{\eta}))| \quad (10.4.25)$$

erfüllen. Die Überlegungen aus Abschnitt 9.1 können auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Bewegt sich der betreffende Punkt immer mit Unterschallgeschwindigkeit, dann besitzt Funktion $g(\vec{\eta}, \tau)$ bezüglich τ nur eine Nullstelle τ^* . Es ist damit $N(\vec{\eta}) = 1$, und die Summe besteht nur aus einem Glied.

Wird $h(\tau) = q/r$ in (10.4.22) eingesetzt, folgt für die Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \quad (10.4.26)$$

Dabei geben die eckigen Klammern $[\cdot]_{\tau=\tau^*}$ an, daß der darin enthaltene Ausdruck zur retardierten Zeit τ^* ausgewertet werden muß. Ferner ist, falls mehr als eine retardierte Zeit τ^* existiert, eine Summe über die entsprechenden Ausdrücke zu bilden. Wenn es keine Zeit τ^* gibt, dann ist der Ausdruck in der Klammer gleich Null zu setzen. Diese in der Literatur oft verwendete Konvention gestaltet die Darstellung etwas übersichtlicher, als die Verwendung eines Summenzeichens. Zu beachten ist, daß die in Abschnitt 8.1 verwendete Schreibweise $[\cdot]_{\text{ret}}$ mit eckigen Klammern und dem Index "ret" eine etwas andere Bedeutung besitzt. Dort wurde die retardierte Zeit durch eine viel einfachere Beziehung berechnet, und eine Summation war nicht notwendig. Nur wenn sich die beiden Koordinatensysteme nicht gegeneinander bewegen, sind beide Formen identisch.

Die bisherigen Überlegungen waren unabhängig von der konkreten Form der Quellstärkeverteilung. Sie gelten allgemein auch für eine räumlich ausgedehnte Quelle. Jetzt soll die flächenhafte Quellstärkeverteilung $q = Q |\text{grad} f| \delta(f)$ nach Gleichung

10.4 Integration der Quellen auf einer bewegten Fläche

(10.4.1) eingesetzt werden. Dort tritt der Gradient der Funktion f auf. Der Gradient hängt von dem Koordinatensystem ab, in dem man ihn bildet. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird daher der Gradient entsprechend gekennzeichnet. Allerdings wird in der vorliegenden Herleitung explizit nur der Betrag des Gradienten benötigt. Da die beiden Bezugssysteme gleiche Skalierung besitzen, stimmt der Betrag eines Gradienten im \vec{y} -System mit dem im $\vec{\eta}$ -System überein. Es kann

$$|\text{grad}_{\vec{y}} f| = |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \quad (10.4.27)$$

geschrieben werden. Weiterhin wird angenommen, daß die Größe Q jetzt als Funktion $Q(\vec{\eta}, \tau)$ in dem mitbewegten System gegeben ist.

Setzt man die flächenhafte Quellstärkeverteilung in die Lösung (10.4.26) ein, ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{Q |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \delta(f)}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \vec{\eta} \quad (10.4.28)$$

Die Funktion f ist in dem $\vec{\eta}$ -Bezugssystem nicht von der Zeit τ abhängig. Daher können die Ausdrücke mit f aus der eckigen Klammer herausgezogen werden. Man erhält

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{Q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \delta(f) d^3 \vec{\eta} \quad (10.4.29)$$

Um das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umzuwandeln, wird wieder die allgemeinen Beziehung (10.4.8) verwendet. Sie lautet in den $\vec{\eta}$ -Koordinaten

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(\vec{\eta}) \delta(f(\vec{\eta})) d^3 \vec{\eta} = \int_S \frac{h(\vec{\eta})}{|\text{grad}_{\vec{\eta}} f|} dS(\vec{\eta}) \quad (10.4.30)$$

Setzt man hier

$$h(\vec{\eta}) = \left[\frac{Q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} |\text{grad}_{\vec{\eta}} f| \quad (10.4.31)$$

ein, so ergibt sich für die Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{Q}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.4.32)$$

Damit ist die Lösung als Integral über die Oberfläche S in dem mitbewegten Bezugssystem dargestellt. Dies hat den Vorteil, daß keine komplizierte Fläche Σ berechnet werden muß. Im Allgemeinen ist die Integration in dem mitbewegten Bezugssystem relativ leicht zu realisieren. Es bleibt lediglich die Berechnung der retardierten Zeiten τ^* . Dazu muß an allen Punkten $\vec{\eta}$ die Gleichung (10.4.25) auf mögliche Lösungen τ^* untersucht werden. Auch dies kann unter Umständen sehr aufwendig werden. Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die gezeigte Umformung der Lösung nur möglich ist, falls die Oberfläche S starr ist. Es muß ein $\vec{\eta}$ -Bezugssystem existieren, in dem f beziehungsweise S zeitunabhängig ist, und das sich mit einer reinen Translation und Rotation in das \vec{y} -System überführen läßt.

Quellstärke mit Ableitung

In der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.2.15) treten zwar flächenhafte Quellterme auf, jedoch unterscheiden sie sich durch eine Ableitung nach t beziehungsweise x_i von der bisher untersuchten Quellstärkeverteilung nach (10.4.1). Bereits im Abschnitt 9.4 wurden Ableitungen als Quellstärkeverteilung betrachtet. Es kann immer zunächst die Lösung der Wellengleichung mit der Quellstärkeverteilung ohne Ableitung berechnet werden, und anschließend die eigentliche Lösung durch nachträgliches Differenzieren ermittelt werden. Dabei stört nicht, daß die Lösung als Integral im bewegten $\vec{\eta}$ -System dargestellt ist. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \phi = \frac{\partial}{\partial t} b(\vec{x}, t) \quad (10.4.33)$$

ist durch

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{b}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3\vec{\eta} \quad (10.4.34)$$

gegeben. Dies läßt sich auch auf eine flächenhafte Quellstärkeverteilung übertragen. Entspricht zum Beispiel

$$b(\vec{x}, t) = B(\vec{x}, t) |\text{grad} f| \delta(f) \quad (10.4.35)$$

einer solchen Verteilung, dann ergibt sich die Lösung

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{B}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.4.36)$$

Es tritt die Ableitung des Oberflächenintegrals nach der Beobachtungszeit t auf. Die Umformungen lassen sich selbstverständlich auch mit den räumlichen Ableitung $\partial/\partial x_i$ und auch mit der zweiten Ableitung $\partial^2/(\partial x_i \partial y_i)$ durchführen.

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie die Lösung für eine flächenhafte Quellstärkeverteilung als Integral im bewegten Bezugssystem dargestellt werden kann. Diese Erkenntnisse sollen im folgenden bei der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.2.15) angewendet werden. Voraussetzung ist, daß die durch $f = 0$ gegebene Oberfläche starr ist. Dann kann ein mitbewegtes Koordinatensystem gefunden werden, in dem f zeitunabhängig ist.

Die erweiterte Lighthill-Gleichung (10.2.15) kann in der Form

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \{ \rho' H(f) \} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{ T_{ij} H(f) \} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\left\{ \rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i \right\} n_i |\text{grad} f| \delta(f) \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\{ \rho v_i(v_j - u_j) + P_{ij} \right\} n_j |\text{grad} f| \delta(f) \right) \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

geschrieben werden. Dabei wurde lediglich $\rho' = \rho - \rho_0$ auf der linken Seite eingeführt, und auf der rechten Seite der Gradient von f mit (10.3.3) umgeformt. Der erste Term auf der rechten Seite stellt eine räumlich verteilte Quelle dar. Es ist mit dem Quellterm in der ursprünglichen Lighthill-Gleichung ohne Erweiterung identisch. Die anderen beiden Terme repräsentieren flächenhafte Quellstärkeverteilungen. Jedem der Quellterme entspricht eine Teillösung, die er für sich allein erzeugen würde. Die komplette Lösung erhält man durch Überlagern der Teillösungen. Alle drei Quellterme sind durch Ableitungen gegeben. Folglich lassen sich die Teillösungen alle auch durch entsprechende Ableitungen ausdrücken.

Der zweite Quellterm hat die Form der Quellstärkeverteilung aus Gleichung (10.4.33). Im Fall der starren Oberfläche kann seine Teillösung – wie in (10.4.36) – durch ein Oberflächenintegral dargestellt werden. Die Integration wird im mitbewegten Bezugssystem durchgeführt, und vor dem Integral steht die Ableitung nach der Beobachtungszeit t . Analoges gilt für den dritten Quellterm. Es ist möglich, seine Teillösung durch die räumliche Ableitung eines Oberflächenintegrals auszudrücken. Die Teillösung für den ersten Quellterm mit räumlich verteilter Quellstärke, kann ebenfalls durch ein Integral im mitbewegten System angegeben werden. Mit den Überlegungen des letzten Abschnitts ergibt sich – im Fall einer starren Oberfläche – die Lösung der erweiterten Lighthill-Gleichung

$$\begin{aligned} 4\pi c^2 \{ \rho' H(f) \}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{T_{ij} H(f)}{r |1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \vec{\eta} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho(v_i - u_i) + \rho_0 u_i}{r |1 - M_r|} n_i \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{\rho v_i(v_j - u_j) + P_{ij}}{r |1 - M_r|} n_j \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

Diese Beziehung wird üblicherweise als Ffowcs-Williams-Hawkings-Gleichung (FW-H-Gleichung) bezeichnet. Allerdings findet man auch Literaturstellen, in denen nicht die Lösung (10.5.2) sondern die Differentialgleichung (10.5.1) so genannt wird. Es hat sich bisher noch keine einheitliche Bezeichnung durchgesetzt. Zu beachten ist auch, daß es

sich mit “Ffowcs Williams” und “Hawkings” um zwei Personen handelt, nach denen die Gleichung benannt wird.

Im folgenden werden einige Bemerkungen zur Lösung (10.5.2) gegeben. Zu beachten ist, daß der Faktor 4π abweichend von der üblichen Darstellung diesmal auf der linken Seite steht. Der Faktor c^2 auf der linken Seite erklärt sich dadurch, daß in der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.5.1) der c^2 -Term vor dem Laplace-Operator und nicht als $1/c^2$ vor der Zeitableitung steht. Die Integrationen werden in dem mitbewegten Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten durchgeführt. Die Schreibweise mit den eckigen Klammern $[\cdot]_{\tau=\tau^*}$ wurde im letzten Abschnitt mit Gleichung (10.4.26) eingeführt. Die Klammern geben an, daß der darin enthaltene Ausdruck zur retardierten Zeit τ^* ausgewertet werden muß. Die Zeit τ^* wird durch die Gleichung (10.4.25) bestimmt. Falls mehrere Lösungen τ^* existieren, impliziert die Schreibweise mit den eckigen Klammern, daß eine Summe zu bilden ist. In allen drei Integralen tritt der Faktor $1/|1 - M_r|$ auf. Dieser Faktor ergibt sich durch die Integration im mitbewegten Bezugssystem.

Prinzipiell gilt die Gleichung (10.5.1) in jedem nicht beschleunigt bewegten Bezugssystem, das als Inertialsystem bezeichnet werden kann. Die Größen \vec{v} und \vec{u} sind Geschwindigkeiten. Sie hängen von dem Bezugssystem ab. Bei der Lösung (10.5.2) ist zu beachten, daß obwohl die Integration im $\vec{\eta}$ -System durchgeführt wird, alle Geschwindigkeiten im Inertialsystem zu messen sind. Das mitbewegte $\vec{\eta}$ -System führt unter Umständen eine beschleunigte Bewegung (z.B. Rotation) aus. Es kann dann nicht als Bezugssystem für die FW-H-Gleichung verwendet werden.

Häufig kann ein besonders günstiges Inertialsystem gefunden werden. Betrachtet man einen Körper in homogener Anströmung, so ist in seiner Umgebung das Strömungsfeld mehr oder weniger stark gestört. Es können Fluktuationen auftreten, und auch die zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen unterscheiden sich von den Werten in der Anströmung. Die Störungen nehmen meist mit der Entfernung vom Körper ab. Theoretisch kann der Körper die Strömung im gesamten Raum beeinflussen. Jedoch findet man häufig in genügend großem Abstand näherungsweise die ungestörten Anströmbedingungen. In diesem Fall bietet es sich an, das Inertialsystem so zu wählen, daß in dem Außenbereich die mittlere Geschwindigkeit verschwindet. Das bedeutet, das System bewegt sich mit der Außenströmung mit. Dieses Bezugssystem hat den Vorteil, daß sich in ihm die Ausbreitung der Störungen im Außenbereich durch die normale Wellengleichung beschreiben läßt.

Die eigentlichen Schallquellen befinden sich alle in der Umgebung des umströmten Körpers und auf seiner Oberfläche. Von dort breiten sich Störungen wellenförmig aus, die auch den Außenbereich erreichen können. All das wird durch die erweiterte Lighthill-Gleichung (10.5.1) beschrieben. Der T_{ij} -Term auf der rechten Seite stellt eine Quellstärke dar, die theoretisch im gesamten Raum vorhanden sein kann. Ist jedoch im Außenbereich die mittlere Geschwindigkeit gleich Null, und alle Störungen sind klein im akustischen Sinn, dann kann dort der T_{ij} -Term vernachlässigt werden. Die entsprechenden Überlegungen wurden bereits im Zusammenhang mit der Lighthill-Gleichung ohne Erweiterung durchgeführt. Auch dort wird zweckmäßigerweise immer das Bezugssystem so gewählt, daß im Außenbereich die Quellstärke vernachlässigbar ist. Dann kann das erste Integral in (10.5.2) auf einen Quellbereich V_Q um den Körper eingeschränkt werden. Der Quellbereich muß allerdings so groß sein, daß alle Quel-

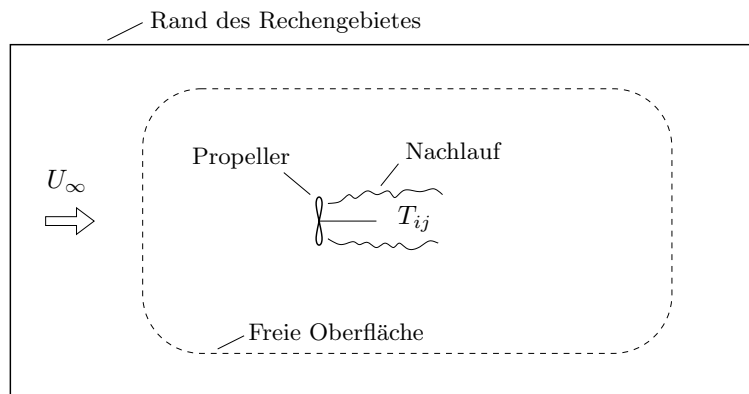


Abbildung 10.9: Propeller als Beispiel für einen Körper im Rechengebiet mit numerisch simulierter Umströmung.

len und nichtlinearen Effekte erfaßt werden. So bleibt der entstehende Abweichung gering. In jedem Fall wird bei der Beschränkung des Quellbereichs ein kleiner Fehler gemacht, und die Lösung gilt nur noch näherungsweise. Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, daß bisher keine Näherungen bei den Umformungen verwendet wurden und die FW-H-Gleichung (10.5.2) eine exakte Folge der nichtlinearen Kontinuitäts- und Impulsgleichung ist.

Anwendungen

Die typische Anwendung der FW-H-Gleichung (10.5.2) liegt in der Berechnung des Schalls, der durch Körpern im Strömungsfeld erzeugt wird. Klassische Beispiele dafür sind die Propeller- und Rotorgeräusche. Dabei geht es hauptsächlich um die Anteile des Schalls durch die Quellen auf den festen Oberfläche. Diese wurden mit Hilfe der FW-H-Gleichung intensiv untersucht. In den letzten Jahren wird die Berechnung von Schallfeldern mit der FW-H-Gleichung zunehmend in Kombination mit numerischen Strömungssimulationen eingesetzt. Wie dabei vorgegangen wird soll anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht werden.

In einem ausgedehnten Rechengebiet wird die Umströmung eines Körpers numerisch simuliert. In Abbildung 10.9 ist eine typische Anordnung skizziert. Ziel ist es, aus den Ergebnissen der Strömungssimulation den entstehenden Schall im Fernfeld zu berechnen. Eine direkte numerische Rechnung bis in das Fernfeld ist wegen des benötigten großen Anzahl von Gitterpunkten zu aufwendig. Daher wird der Schall mit Hilfe der FW-H-Gleichung durch ein Integral über die numerisch berechneten Quellterme ermittelt. In jedem Fall muß das Rechengebiet so ausgedehnt sein, daß alle Störungen am Rand als klein im akustischen Sinn betrachtet werden können. Dann erfaßt die numerische Simulation im Rechengebiet alle Quellen. Die FW-H-Gleichung wird in dem Bezugssystem angewendet, welches sich mit der Anströmung mitbewegt. Das bedeu-

tet, das Rechengebiet zur Strömungssimulation bewegt sich in dem Bezugssystem der FW-H-Gleichung. Prinzipiell sind zwei Vorgehensweisen möglich:

- a) Die Fläche $f = 0$ wird auf die Körperoberfläche (im Beispiel die Propelleroberfläche) gelegt. Zur Berechnung des Schalls werden die Quellstärken auf der Körperoberfläche und im Strömungsfeld (T_{ij} -Term) berechnet. Es müssen sowohl Oberflächen- als auch ein Volumenintegral gebildet werden.

Vorteil: Wie in Abschnitt 10.3 gezeigt wurde vereinfachen sich die Quellterme, wenn die Fläche $f = 0$ mit einer undurchlässigen Oberfläche übereinstimmt.

Nachteil: Wenn sich die Körperoberfläche im Rechengebiet bewegt (wie im Fall des sich drehenden Propellers), dann kann die Berechnung der retardierten Zeiten τ^* relativ aufwendig werden.

- b) Es wird $f = 0$ als eine freie Oberfläche mit einfacher Geometrie gewählt, die alle Quellen einschließt. In der Abbildung ist diese Oberfläche durch die gestrichelte Linie angedeutet. Eventuell ist das Rechengebiet entsprechend zu vergrößern. Die Quellterme auf der freien Oberfläche repräsentieren alle Quellen im Inneren.

Vorteil: Für die Berechnung des Schalls sind nur die Oberflächenintegrale zu berechnen. Die Oberfläche $f = 0$ bewegt sich nur translatorisch im Bezugssystem der FW-H-Gleichung bewegt. Als $\bar{\eta}$ -Bezugssystem kann das Bezugssystem der Strömungssimulation verwendet werden. Der Aufwand ist deutlich geringer im Vergleich zur Integration in einem beschleunigt bewegten (z.B. rotierenden) Bezugssystem.

Nachteil: Das numerische Verfahren muß die Ausbreitung der Schallwellen, die am Körper entstehen, mit relativ großer Genauigkeit bis an die freie Oberfläche berechnen können. Eventuell muß ein viel feineres Gitter und ein Verfahren höherer Ordnung verwendet werden.

Bei der Variante (a) entsprechen die Quellterme in der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.5.1) den tatsächlich vorhandenen Quellen. Dagegen werden die echten Quellen bei der Variante (b) sozusagen durch künstliche Quellen auf der freien Oberfläche ersetzt. Auf vergleichbare Weise ist es möglich mit dem Kirchhoff-Integral aus Abschnitt 8.1 die Quellen im Inneren einer Oberfläche durch virtuelle Quellen auf der Oberfläche zu ersetzen. Die virtuellen Quellen erzeugen das gleiche Schallfeld außerhalb der Oberfläche wie die echten Quellen. Im Gegensatz zur FW-H-Gleichung sind die Terme in dem Kirchhoff-Integral alle linear. Auch ist das Kirchhoff-Integral in der in Abschnitt 8.1 vorgestellten Form nicht bei bewegten Oberflächen anwendbar. Weiter unten wird gezeigt, daß in der Tat das Kirchhoff-Integral durch Vereinfachungen aus der FW-H-Gleichung abgeleitet werden kann.

Umformungen

Im folgenden werden einige allgemeine Umformungen vorgestellt, die später auf Terme in der FW-H-Gleichung angewendet werden sollen. Zunächst wird eine inhomogene

Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right)\phi = \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \quad (10.5.3)$$

betrachtet. Die Quellstärkeverteilung ist durch eine Divergenz gegeben. Die Größe ϕ erfüllt die Wellengleichung. Dabei spielt ihre physikalische Bedeutung zunächst keine Rolle. Sie kann als Platzhalter für den Schalldruck, das akustische Potential oder zum Beispiel auch für den Ausdruck $\{\rho' H(f)\}$ angesehen werden. Es wird angenommen, die Gleichung gilt im gesamten Raum. Es müssen keine Randbedingungen erfüllt werden. Dann kann die Lösung als

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_i(\vec{y}, \tau)}{r} \delta(g) \, d\tau \, d^3\vec{y} \quad (10.5.4)$$

in Form einer Divergenz angegeben werden. Die Darstellung mit der Integration über τ entspricht wieder der Formulierung, die schon bei der Behandlung der bewegten Punktquelle in Abschnitt 9.1 und auch bei den Herleitungen im letzten Abschnitt verwendet wurde. Genau wie dort ist die Funktion g durch

$$g = t - \frac{r}{c} - \tau \quad (10.5.5)$$

gegeben, wobei der Abstand wie üblich mit

$$r = |\vec{x} - \vec{y}| \quad (10.5.6)$$

abgekürzt ist. Im Integrand ist nur der Abstand r und die Funktion g von der Beobachtungsposition \vec{x} abhängig. Da die Integrationsgrenzen keine Funktion von \vec{x} sind, kann die Ableitung einfach in das Integral hineingezogen werden. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} B_i(\vec{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} \, d\tau \, d^3\vec{y} \quad (10.5.7)$$

Um den Ausdruck weiter umzuformen, wird die Ableitung ausgeführt. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} = \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dg} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{1}{r^2} \delta(g) \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (10.5.8)$$

Dabei bezeichnet $d\delta/dg$ die Ableitung der δ -Funktion. Zusätzlich treten die partiellen Ableitungen von g und r nach x_i auf. Die Ableitung des Abstands nach der Beobachtungsposition wurde schon häufiger berechnet. Es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x} - \vec{y}| = \frac{x_i - y_i}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{x_i - y_i}{r} \quad (10.5.9)$$

Damit folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{1}{c} \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.10)$$

10 Schallfelder umströmter Körper

Die Funktion g ist ebenfalls von der Beobachtungszeit t abhängig. Der Zusammenhang ist jedoch relativ einfach. Nach (10.5.5) gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 \quad (10.5.11)$$

Dies kann ausgenutzt werden um (10.5.8) umzuschreiben. Bildet man von dem Ausdruck in den geschweiften Klammern die partielle Ableitung nach der Zeit, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} = \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dg} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{d\delta}{dg} \quad (10.5.12)$$

Damit kann die Zeitableitung verwendet werden, um die Ableitung der δ -Funktion zu ersetzen. Aus Gleichung (10.5.8) wird nach Einsetzen der obigen Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} - \frac{1}{r^2} \delta(g) \right) \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.13)$$

Setzt man dies wiederum in Gleichung (10.5.7) ein, erhält man

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 - \infty}^{+\infty} B_r \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} - \frac{1}{r^2} \delta(g) \right) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.5.14)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$B_r = B_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.15)$$

verwendet. Der Ausdruck $(x_i - y_i)/r$ stellt einen normierten Vektor dar, der von dem Quellpunkt in Richtung des Beobachters zeigt. Die Größe B_r ist somit die Komponente des Vektors \vec{B} in Richtung des Beobachters.

Das Integral in (10.5.14) kann in zwei Teilintegrale zerlegt werden. Man erhält

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 - \infty}^{+\infty} \frac{B_r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta(g)}{r} \right\} d\tau d^3\vec{y} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 - \infty}^{+\infty} \frac{B_r}{r^2} \delta(g) d\tau d^3\vec{y} \quad (10.5.16)$$

Die Ableitung nach der Beobachtungszeit t im ersten Ausdruck wird vor die Integrale gezogen. Die inneren Integrale über τ werden dann ausgeführt. Es ergibt sich

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{cr} [B_r]_{\text{ret}} d^3\vec{y} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^2} [B_r]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.17)$$

Dabei gibt die Schreibweise mit den eckigen Klammern an, daß entsprechend

$$[B_r]_{\text{ret}} = B_r \left(\vec{y}, t - \frac{r}{c} \right) \quad (10.5.18)$$

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

der eingeschlossene Ausdruck zur retardierten Zeit $t - r/c$ auszuwerten ist. Die τ -Integration kann auch auf der rechten Seite von (10.5.4) ausgeführt werden. Das Gleichsetzen dieser Lösung mit der Form (10.5.17) ergibt die interessante Regel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} [B_i]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{cr} [B_r]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r^2} [B_r]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} \quad (10.5.19)$$

zur Umformung der Lösungsintegrale. Damit kann die räumliche Ableitung der Integrale umgangen werden. Zu beachten ist, das auf der linken Seite nach Summationskonvention eine Summe aus drei Ableitungen steht. Dagegen sind auf der rechten Seite nur zwei Integrale und von einem die Zeitableitung zu berechnen. Es ergibt sich insgesamt eine Vereinfachung.

Die Integrationen in (10.5.19) können auch in einem mitbewegten Bezugssystem mit $\vec{\eta}$ -Koordinaten durchgeführt werden. Geht das $\vec{\eta}$ -System durch reine Translation und Rotation in das \vec{y} -System über, dann können die Ergebnisse aus Abschnitt 10.4 angewendet werden. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{B_i}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \vec{\eta} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{B_r}{cr|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \vec{\eta} - \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{B_r}{r^2|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} d^3 \vec{\eta} \end{aligned} \quad (10.5.20)$$

In den Integralen taucht nun der Faktor $1/|1 - M_r|$ auf, der sich durch die Bewegung des Bezugssystems ergibt. Die Ausdrücke in den eckigen Klammern sind jetzt zu den retardierten Zeiten τ^* nach (10.4.25) zu nehmen. Ist die Quellstärkeverteilung auf eine Fläche beschränkt, kann das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Als Beispiel wird eine Quellstärkeverteilung der Form

$$B_i = W_i |\text{grad} f| \delta(f) \quad (10.5.21)$$

betrachtet. Die Fläche S ist wie üblich durch $f(\vec{x}, t) = 0$ definiert. Im mitbewegten $\vec{\eta}$ -System soll die Oberfläche zeitlich konstant sein: $f = f(\vec{\eta})$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{W_i}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{W_r}{cr|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) - \int_S \left[\frac{W_r}{r^2|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \end{aligned} \quad (10.5.22)$$

Dabei ist

$$W_r = W_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.23)$$

die Komponente von \vec{W} in Richtung des Beobachters.

Im folgenden soll noch eine weitere hilfreiche Regel angegeben werden, die im Prinzip schon in einem vorangegangenen Abschnitt hergeleitet wurde. Dazu wird die inhomogene Wellengleichung der Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right)\phi = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (10.5.24)$$

betrachtet. Die Quellstärke ist als zeitliche Ableitung gegeben. Es wird angenommen, daß die Gleichung überall gilt und keine Randbedingungen erfüllt werden müssen. Die Lösung kann einmal in der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 - \infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial B}{\partial \tau}(\vec{y}, \tau)}{r} \delta(g) \, d\tau \, d^3\vec{y} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial B}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.25)$$

angegeben werden. Die Zeitableitung ist als Quellstärke in das Integral eingesetzt worden. Da in dem Integral das Feld B eine Funktion von \vec{y} und τ ist, wurde entsprechend die Zeitableitung auch mit $\partial B / \partial \tau$ dargestellt. Zu beachten ist, daß die Variable t in Gleichung (10.5.25) als Beobachtungszeit verwendet wird und die Ableitung nach dieser Zeit eine andere Bedeutung hat als die Ableitung nach der Quellzeit τ .

Alternativ läßt sich aber auch die Lösung als zeitliche Ableitung eines Integrals darstellen. Dies wurde bereits im Abschnitt 9.4 ausführlich behandelt. Für die Lösung gilt auch

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3 - \infty}^{+\infty} \frac{B(\vec{y}, \tau)}{r} \delta(g) \, d\tau \, d^3\vec{y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} [B]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.26)$$

Dabei wird jetzt nach der Beobachtungszeit und nicht nach der Quellzeit differenziert. Setzt man die Lösungen (10.5.25) und (10.5.26) gleich, dann ergibt sich die Regel

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial B}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} d^3\vec{y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} [B]_{\text{ret}} d^3\vec{y} \quad (10.5.27)$$

zur Umformung der Lösungsintegrale mit Zeitableitungen. Hier treten jetzt beide Zeitableitungen – einmal nach der Quellzeit und einmal nach der Beobachtungszeit – auf. Zu bemerken ist, daß sich die Regel (10.5.27) nicht so einfach in ein mitbewegtes System übertragen läßt. Sinnvollerweise müßte dann auch die Zeitableitung $\partial B / \partial \tau$ in dem mitbewegten System ausgedrückt werden. Die Zeitableitung ist jedoch vom Bezugssystem abhängig. Beim Übergang in ein mitbewegtes $\vec{\eta}$ -Bezugssystem würde sich ein komplizierter Ausdruck ergeben.

Ist die Quellstärkeverteilung auf eine Fläche beschränkt, dann können die Volumenintegrale wieder in Oberflächenintegrale umgewandelt werden. Analog zu oben wird von einer Quellstärkeverteilung

$$B = W |\text{grad} f| \delta(f) \quad (10.5.28)$$

ausgegangen. Zusätzlich wird angenommen, daß die Funktion f zeitlich konstant ist. Damit bewegt sich die Oberfläche S nicht. Die Zeitableitung von W wird mit \dot{W} geschrieben. Es folgt

$$\int_S \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{r} [W]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.29)$$

Die Verallgemeinerung auf eine sich bewegende Oberfläche und eine Integration im mitbewegten Bezugssystem ist wie oben wegen der Zeitableitung $\partial W / \partial \tau$ nicht so einfach möglich.

Übergang zum Kirchhoff-Integral

Im folgenden wird das Kirchhoff-Integral, wie es in Abschnitt 8.1 vorgestellt wurde, aus der FW-H-Gleichung abgeleitet. Das Kirchhoff-Integral basiert auf der linearen Wellengleichung. Entsprechend beschreibt es die Ausbreitung von kleinen Störungen. Dagegen gilt die FW-H-Gleichung allgemein. Sie enthält nichtlineare Terme und auch die Reibungseffekte sind mit berücksichtigt. Die FW-H-Gleichung kann jedoch an die Bedingungen, unter denen das Kirchhoff-Integral gilt, angepaßt werden. Sind überall nur kleine Störungen vorhanden, dann können die nichtlinearen Anteile und die Reibungseffekte vernachlässigt werden. Weiterhin ist die im Kirchhoff-Integral verwendete Oberfläche unbeweglich. Beschränkt man die FW-H-Gleichung auf unbewegte Oberflächen ergeben sich sofort die Vereinfachungen $\vec{u} = 0$, $M_r = 0$ und $\vec{y} = \vec{r}$. Zusätzlich wird die Berechnung der retardierten Zeiten deutlich vereinfacht. Bei Bewegung müssen die Zeiten τ^* als Lösung der Gleichung (10.4.25) ermittelt werden. Bei unbewegter Oberfläche kann man die retardierte Zeit einfach mit $\tau = t - r/c$ berechnen. Dies kann formal durch

$$[\cdot]_{\tau=\tau^*} = [\cdot]_{\text{ret}} \quad \text{bei} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (10.5.30)$$

ausgedrückt werden. Damit vereinfacht sich die FW-H-Gleichung (10.5.2) zu

$$\begin{aligned} 4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{T_{ij} H(f)}{r} \right]_{\text{ret}} d^3 \vec{y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho v_i}{r} n_i \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{\rho v_i v_j + P_{ij}}{r} n_j \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \end{aligned} \quad (10.5.31)$$

Im folgenden wird angenommen, daß auf der Oberfläche S und außerhalb von ihr nur kleine Störungen auftreten. Alle Bewegungen werden nur durch diese Störungen

hervorgerufen. In diesem Fall können die Lighthillschen Spannungen T_{ij} auf der Oberfläche und in dem gesamten Außenbereich vernachlässigt werden. Dies wurde bereits im Zusammenhang mit der Lighthill-Gleichung ausführlich behandelt. Wenn nur kleine Schwankungen vorliegen und das Bezugssystem ist entsprechend gewählt, dann ergibt der Term mit den Lighthill-Spannungen nur einen Effekt von höherer Ordnung in den Schwankungsgrößen.

Auch die anderen Ausdrücke in der FW-H-Gleichung enthalten noch Anteile von höherer Ordnung. Betrachtet man das Produkt ρv_i , so gilt

$$\rho v_i = (\rho' + \rho_0) v'_i = \rho_0 v'_i + \mathcal{O}(2) \quad (10.5.32)$$

Die Terme von zweiter und höherer Ordnung sind dabei mit dem Ausdruck $\mathcal{O}(2)$ zusammengefaßt. Zu beachten ist, daß keine mittlere Strömung vorliegt. Damit kann $v_i = v'_i$ gesetzt werden. Analog folgt für den Ausdruck im dritten Integral auf der rechten Seite

$$\rho v_i v_j + P_{ij} = \rho v_i v_j + (p - p_0) \delta_{ij} - \tau_{ij} = p' \delta_{ij} + \mathcal{O}(2) \quad (10.5.33)$$

Hier sind auch die Reibungsspannungen mit in dem $\mathcal{O}(2)$ -Term enthalten. Strenggenommen sind die Reibungsspannungen τ_{ij} jedoch nicht von höherer Ordnung. Sie kann man jedoch auf andere Weise als klein abschätzen. Dies wurde bereits ausführlich im Rahmen der Herleitung der Wellengleichung behandelt. Hier werden sie vereinfachend mit den Termen höherer Ordnung zusammengefaßt.

Wenn man in der schon reduzierten FW-H-Gleichung (10.5.31) den T_{ij} -Term und die $\mathcal{O}(2)$ -Anteile vernachlässigt, ergibt sich

$$4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho_0}{r} \left[v'_i n_i \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{1}{r} \left[p' n_i \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.34)$$

Diese Gleichung entspricht bereits dem Kirchhoff-Integral aus Abschnitt 8.1. Allerdings besitzt es noch nicht ganz die dort angegebene Form. Um eine analoge Darstellung zu erhalten, wird hier die Schnelle senkrecht zur Oberfläche mit

$$v'_n = v'_i n_i \quad (10.5.35)$$

eingeführt. Wendet man die Umformungsregel (10.5.29) auf das erste Integral an, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho_0}{r} \left[v'_i n_i \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \int_S \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{\partial v'_n}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.36)$$

Zur Umformung des zweiten Integrals kann die Regel (10.5.22) benutzt werden. Dazu wird die Größe

$$W_i = p' n_i \quad (10.5.37)$$

gewählt. Mit (10.5.23) erhält man

$$W_r = p' n_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.38)$$

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkings

Das Skalarprodukt auf der rechten Seite kann mit Hilfe der Ableitung des Abstands r in Normalenrichtung

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial y_i} n_i = -\frac{(x_i - y_i)}{r} n_i \quad (10.5.39)$$

ausgedrückt werden. Es folgt

$$W_r = -p' \frac{\partial r}{\partial n} \quad (10.5.40)$$

Zur Erinnerung sei angemerkt, daß in Abschnitt 8.1 auch der Ausdruck $\partial r / \partial n$ in der Formulierung des Kirchhoff-Integrals verwendet wurde.

Die beiden Ausdrücke für W_i und W_r können nun in Gleichung (10.5.22) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{1}{r} [p' n_i]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) + \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.41)$$

Damit kann das zweite Integral auf der rechten Seite von (10.5.34) umgewandelt werden. Statt der Ableitung nach der Beobachtungsposition x_i tritt die Ableitung nach der Beobachtungszeit t vor einem Integral auf. Diese Ableitung kann mit Hilfe der Beziehung (10.5.36) durch eine Ableitung im Integral dargestellt werden. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial p'}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \quad (10.5.42)$$

Dabei tritt mit $\partial p' / \partial t$ die zeitliche Änderung des Schalldrucks im Integral auf.

Setzt man die umgeformten Lösungsintegrale in die Gleichung (10.5.34) ein, erhält man

$$\begin{aligned} 4\pi c^2 \left\{ \rho' H(f) \right\}(\vec{x}, t) &= \int_S \frac{\rho_0}{r} \left[\frac{\partial v'_n}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \\ &\quad - \int_S \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial p'}{\partial \tau} \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \\ &\quad - \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [p']_{\text{ret}} dS(\vec{y}) \end{aligned} \quad (10.5.43)$$

Bisher wurde die linke Seite noch nicht verändert. Es wurde vorausgesetzt, daß außerhalb der Oberfläche S alle Schwankungen klein sind. Da innerhalb von S die linke Seite wegen $H(f) = 0$ sowieso verschwindet, kann generell mit $p' = c^2 \rho'$ die Dichte durch die Druckfluktuation ersetzt werden. Zusätzlich können die drei Integrale zusammengefaßt werden. Es ergibt sich

$$\int_S \left[\frac{\rho_0}{r} \frac{\partial v'_n}{\partial \tau} - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} p' \right]_{\text{ret}} dS(\vec{y}) = 4\pi \begin{cases} p'(\vec{x}, t) & \text{falls } f(\vec{x}) > 0 \\ 0 & \text{falls } f(\vec{x}) < 0 \end{cases} \quad (10.5.44)$$

Diese Beziehung stimmt mit dem Kirchhoff-Integral (8.1.91) überein. Hier ist lediglich die Beobachungsposition mit \vec{x} statt \vec{x}_0 , die Beobachtungszeit mit t statt t_0 , die Quellposition mit \vec{y} statt \vec{x} und die Quellzeit mit τ statt t bezeichnet. Die Zeitableitung im Integral wird nach der Quellzeit also der Größe τ durchgeführt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß das Volumen V in Abschnitt 8.1 genau invers zu der Definition in diesem Abschnitt verwendet wurde. In Abschnitt 8.1 war V der von der Oberfläche S eingeschlossene Bereich. Der Normalenvektor \vec{n} war nach innen gerichtet. Das Kirchhoff-Integral gibt die Lösung an einem Punkt \vec{x}_0 im Volumen V an. Dies wurde entsprechend der historischen Herleitung so gewählt. Hier ist V der innere Bereich in dem die FW-H-Gleichung das Ergebnis Null liefert. Die eigentliche Lösung wird außerhalb der Oberfläche S – also nicht in V – berechnet. Entsprechend ist der Normalenvektor \vec{n} nach außen gerichtet.

In Abbildung 10.10 wird ein Überblick gegeben, wie die verschiedenen Gleichungen zusammenhängen. Der linke Zweig entspricht der Ableitung des Kirchhoff-Integrals in Abschnitt 8.1. Der rechte Weg zeigt, wie das Kirchhoff-Integral über die FW-H-Gleichung hergeleitet werden kann. Übrigens kann man das Kirchhoff-Integral auch auf dem gleichen Weg wie die FW-H-Formel direkt ableiten. Man muß nur in einem Zwischenschritt als erstes die Kontinuitäts- und Impulsgleichung linearisieren. Statt der erweiterten Lighthill-Gleichung ergibt sich eine Wellengleichung mit linearen Quelltermen. Die Lösung dieser Gleichung liefert dann das Kirchhoff-Integral. Auf diese Weise ist es auch möglich das Kirchhoff-Integral auf bewegte Oberflächen zu erweitern.

Propeller- und Rotorgeräusche

Ein klassisches Einsatzgebiet für die FW-H-Gleichung ist die Untersuchung der Propeller- und Rotorgeräusche. Zur Anwendung der FW-H-Gleichung wird die Oberfläche S auf die feste Oberfläche der Propeller- beziehungsweise Rotorblätter gelegt. Das $\vec{\eta}$ -Bezugssystem rotiert mit dem Propeller beziehungsweise Rotor mit. In diesem Bezugssystem ist die Oberfläche S zeitlich konstant. Zu beachten ist, daß Verformungen der Propeller- und Rotorblätter vernachlässigt werden müssen. Die Blätter müssen als starr angenommen werden. Nur dann kann ein $\vec{\eta}$ -Bezugssystem mit den erforderlichen Eigenschaften – wie in Abschnitt 10.4 beschrieben – gefunden werden.

Zweckmäßigerweise wird das Bezugssystem der FW-H-Gleichung so gewählt, daß im Außenbereich nur kleine Schwankungen auftreten. Betrachtet man zum Beispiel den Propeller an einem fliegenden Flugzeug, dann ist das FW-H-Bezugssystem fest mit der ruhenden Luftmasse in der Umgebung verbunden. In dem Bezugssystem bewegt sich das Flugzeug und natürlich auch der Propeller. Ein Beobachter, der sich am Boden befindet und den Schall des Propellers wahrnimmt, ist in Ruhe. Das mitbewegte $\vec{\eta}$ -Bezugssystem hängt sozusagen fest an dem Propeller. Es führt eine Überlagerung aus Rotations- und Translationsbewegung aus. Entsprechend schwierig wird die Berechnung der retardierten Zeiten τ^* .

Üblicherweise betrachtet man den von den verschiedenen Quelltermen herrührenden Schall getrennt voneinander. In der erweiterten Lighthill-Gleichung (10.5.1) sind zwei Quellterme vorhanden, die eine flächenhafte Quellstärkeverteilung darstellen. Sie repräsentieren Quellen auf der Oberfläche des Propellers beziehungsweise Rotors. Die

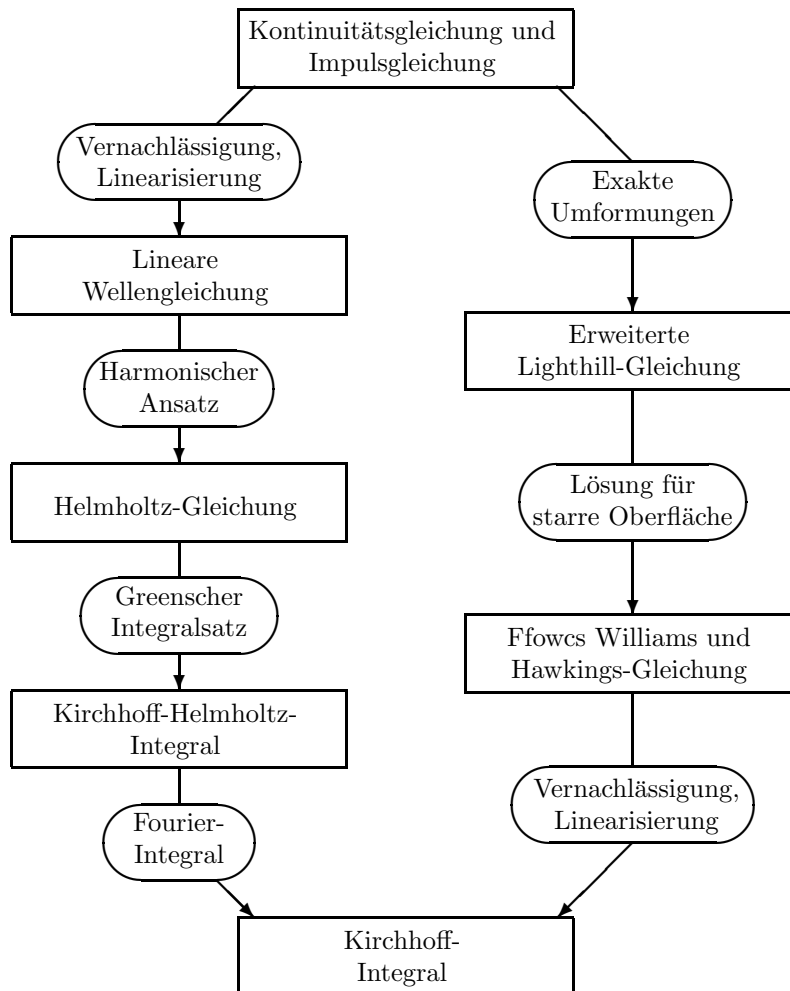


Abbildung 10.10: Zusammenhang der verschiedenen Gleichungen in einem Ableitungsschema.

beiden Quellterme wurden in Abschnitt 10.3 für den Fall, das S mit einer undurchlässigen Oberfläche übereinstimmt, bereits untersucht. Es ergab sich eine vereinfachte Form der Quellstärkeverteilung. Sie lautet

$$q(\vec{x}, t) = + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_0 u_n |\text{grad } f| \delta(f) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ l_i |\text{grad } f| \delta(f) \right\} \quad (10.5.45)$$

Dabei ist $u_n = \vec{u} \vec{n}$ die skalare Normalengeschwindigkeit, und mit l_i ist die Kraft pro Flächenelement gegeben, die von dem Körper auf das Medium ausgeübt wird. Die Teillösungen für die beiden Terme werden im folgenden getrennt untersucht.

Zunächst wird der Einfluß des Quellterms mit der räumlichen Ableitung betrachtet. Es wird die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) p'_L = - \frac{\partial}{\partial x_i} \{ l_i |\text{grad } f| \delta(f) \} \quad (10.5.46)$$

aufgestellt. Sie soll für den Schalldruck p'_L gelten. Der Index L kennzeichnet, daß es sich nur um einen Anteil von der Gesamtlösung handelt. In der Literatur wird dieser Anteil als "Loading-Noise" bezeichnet, da er durch die Kraft beziehungsweise Last auf den Propeller beziehungsweise Rotor verursacht wird. Zu beachten ist, daß im Gegensatz zur erweiterten Lighthill-Gleichung der Schalldruck und nicht die Größe $\{\rho' H(f)\}$ die abhängige Variable ist. Da üblicherweise nur die Lösung im Außenbereich interessiert, kann auf den Faktor $H(f)$ verzichtet werden. Er ist dort sowieso überall gleich Eins. Wenn im Außenbereich nur kleine Schwankungen auftreten, gilt dort die linearisierte Druck-Dichtebeziehung $p' = c^2 \rho'$. So läßt sich die Dichteschwankung ρ' näherungsweise durch den Schalldruck p' ersetzen. Der entstehende Fehler ist im Außenbereich vernachlässigbar klein. In der Nähe des Rotors beziehungsweise Propellers, wo stärkere Schwankungen vorliegen, tritt möglicherweise eine größere Abweichung.

Die Lösung für die inhomogene Wellengleichung (10.5.46) lautet

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[\frac{l_i}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.47)$$

Um die Lösung besser interpretieren zu können, wird die räumliche Ableitung mit Hilfe der Umformungsregel (10.5.22) in eine zeitliche Ableitung verwandelt. Mit $W_i = l_i$ ergibt sich für die Lösung

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{l_r}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) + \int_S \left[\frac{l_r}{r^2|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.48)$$

Dabei ist mit

$$l_r = l_i \frac{(x_i - y_i)}{r} \quad (10.5.49)$$

die Komponente der Kraft l_i in Richtung des Beobachters gegeben. Die neue Form der Lösung besteht aus zwei Integralen. Im zweiten Ausdruck tritt der Faktor $1/r^2$ auf.

Für einen Beobachter im Fernfeld spielt sein Anteil an der Lösung daher keine Rolle. Der Schall wird im wesentlichen durch die Schwankung des ersten Integrals mit der Beobachtungszeit bestimmt. Schwankungen können sich durch viele Faktoren ergeben. Zum einen können sich die Kräfte l_i zeitlich ändern. Zusätzlich ergibt sich durch die Rotations des Propellers beziehungsweise Rotors eine ständige Variation des Abstands r , der Beobachtungsrichtung und der Beobachtungsmachzahl M_r .

Für einen Flugzeugpropeller ist es selbstverständlich notwendig, daß er eine Kraft auf das Medium ausübt. Schließlich bewirkt die entstehende Gegenkraft den Vortrieb des Flugzeugs. Die Reduzierung des "Loading-Noise" durch Verringerung der Kräfte l_i ist damit kaum möglich, wenn das Flugzeug noch fliegen soll. Es bleibt die Möglichkeit die zeitlichen Schwankungen abzusenken. Das könnte zum Beispiel mit einer Zurücknahme der Propellerdrehzahl erfolgen. Läßt sich durch bessere Formgebung der Propellerblätter bei kleinerer Drehzahl die gleiche Kraft erzeugen, dann hätte man damit auch den "Loading-Noise" reduziert. In jedem Fall sollte eine instationäre Fluktuation der Kräfte l_i vermieden werden. Idealerweise ist die Umströmung des Propellers in dem mitbewegten Bezugssystem zeitlich konstant. Die Kräfte l_i ändern dann nur durch die Drehung ihre Richtung einmal pro Umdrehung. Der Betrag $|\vec{l}|$ bleibt konstant. Ist jedoch die Umströmung des Propellers stark instationär, so kommt es zu zusätzlichen Schwankungen. Dies ist zum Beispiel auch der Fall, wenn die Anströmung des Propeller nicht homogen ist. Die zusätzlichen Schwankungen bewirken eine verstärkte zeitliche Änderung der ersten Integrals und damit eine erhöhte Schallemission.

Als nächstes wird noch der erste Quellterm in (10.5.45) untersucht. Analog zu oben wird die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) p'_T = \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_0 u_n |\text{grad} f| \delta(f) \} \quad (10.5.50)$$

aufgestellt. Die Größe p'_T ist wieder ein Anteil des Schalldrucks. Er wird üblicherweise als "Thickness-Noise" bezeichnet. Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung lautet

$$4\pi p'_T(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho_0 u_n}{r|1 - M_r|} \right]_{\tau=\tau^*} dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.51)$$

Wie oben bestimmt die zeitliche Änderung eines Integrals den entstehenden Schall. Im Integral tritt der Faktor $\rho_0 u_n$ auf. Es gibt die Rate an, mit der Masse von einem Oberflächenelement bei seiner Bewegung verdrängt wird. Je schneller die Bewegung, desto größer die Verdrängung. Allerdings kann insgesamt durch einen starren Körper keine Masse verdrängt werden. Das auf einer Seite verdrängte Medium strömt auf der anderen Seite nach. Es muß zu jeder Zeit

$$\int_S \rho_0 u_n dS(\vec{\eta}) = 0 \quad (10.5.52)$$

gelten. Im Gleichung (10.5.51) wird allerdings nicht wie hier über den Ausdruck $\rho_0 u_n$ zu einer festen Zeit integriert. Der Wert von $\rho_0 u_n$ ist zu unterschiedlichen Zeiten

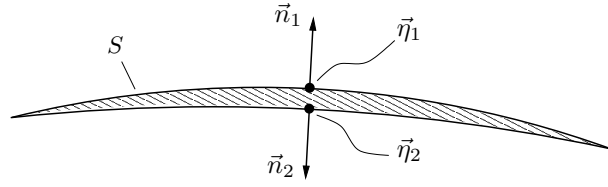


Abbildung 10.11: Schnitt durch einen dünnen Körper mit zwei gegenüberliegenden Punkten an den Koordinaten $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$.

$\tau^*(\vec{\eta})$ zu nehmen. Die Zeiten τ^* hängen wie die Größen r und M_r natürlich auch noch von dem Beobachtungsort \vec{x} und der Beobachtungszeit t ab, jedoch werden diese Parameter im folgenden fest gehalten und nur die Abhängigkeit von $\vec{\eta}$ dargestellt. Auf der rechten Seite von (10.5.51) wird im Unterschied zu (10.5.52) auch noch mit dem Faktor $1/(r|1 - M_r|)$ multipliziert. Dieser ist im allgemeinen nicht konstant und hängt von $\vec{\eta}$ ab. Damit kann sich auch bei einer starren Oberfläche ein endlicher Wert für das Integral ergeben.

Ein relativ geringer “Thickness-Noise” wird bei einem dünnen beziehungsweise flachen Körper beobachtet. Dies soll anhand eines Beispiels erläutert werden. In Abbildung 10.11 ist ein Schnitt durch einen entsprechenden Körper dargestellt. Es werden zwei Punkte auf der Oberfläche mit den Koordinaten $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$ betrachtet. Sie sollen sich direkt gegenüber liegen. Die Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 in den beiden Punkten sind genau gegeneinander gerichtet. Die Oberflächenelemente um die Punkte liefern jeweils einen Anteil zum Integral in (10.5.51). Die Werte im Integral sind zur retardierten Zeit τ^* zu nehmen. Die beiden Punkte $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$ haben jedoch fast die gleiche retardierte Zeit. Je dünner der Körper ist, und je geringer damit der Abstand der beiden Punkte ist, desto kleiner ist der Unterschied in der retardierten Zeit. Im Grenzfall eines unendlich dünnen Körpers stimmen die Zeiten sogar überein. Es gilt

$$|\tau^*(\vec{\eta}_1) - \tau^*(\vec{\eta}_2)| \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad |\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2| \rightarrow 0 \quad (10.5.53)$$

Ist der Körper nur hinreichend dünn, dann kann der Unterschied zwischen den retardierten Zeiten $\tau^*(\vec{\eta}_1)$ und $\tau^*(\vec{\eta}_2)$ vernachlässigt werden.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß der Körper nicht um eine Achse in der Nähe der beiden Punkte $\vec{\eta}_1$ und $\vec{\eta}_2$ rotiert. Dann bewegen sich die Punkte näherungsweise mit der gleichen Geschwindigkeit, und es gilt für die Normalgeschwindigkeit

$$u_n(\vec{\eta}_1, \tau^*(\vec{\eta}_1)) \approx -u_n(\vec{\eta}_2, \tau^*(\vec{\eta}_2)) \quad (10.5.54)$$

Entsprechend erhält man für die Beobachtungsmachzahl

$$M_r(\vec{\eta}_1, \tau^*(\vec{\eta}_1)) \approx M_r(\vec{\eta}_2, \tau^*(\vec{\eta}_2)) \quad (10.5.55)$$

Damit heben sich die Beiträge der gegenüberliegenden Oberflächenelemente zum Integral in (10.5.51) auf. Im Grenzfall eines unendlich dünnen Körpers verschwindet

das Integral sogar. Ein Körper ohne Volumen erzeugt demnach überhaupt keinen “Thickness-Noise”, auch wenn er eine ausgedehnte Oberfläche besitzt.

Kompakte Oberfläche

Die Berechnung der Schallfelder, die von den Oberflächenquellen erzeugt werden, kann unter bestimmten Umständen weiter vereinfacht werden. Als Beispiel wird der “Loading-Noise”-Anteil betrachtet, welcher durch ein einzelnes Blatt eines rotierenden Propellers erzeugt wird. Vereinfachend wird angenommen, daß die Umströmung des Blatts im mitbewegten $\vec{\eta}$ -Bezugssystem konstant ist. Dadurch sind die Kräfte \vec{l} , die auf die Blattoberfläche ausgeübt werden, betragsmäßig von der Zeit unabhängig. Jedoch ist eine zeitliche Schwankung der Komponenten l_i durch die Drehbewegung möglich. Die Komponenten ändern sich im allgemeinen – wie die Beobachtungsrichtung und die Beobachtungsmachzahl M_r – periodisch einmal pro Umlauf. Damit kann auch die resultierende Druckverteilung p'_L mit einer bestimmten Frequenz oszillieren. Ist die entsprechende Wellenlänge λ groß gegenüber der Ausdehnung der Quellstärkeverteilung, können einige Vereinfachungen bei der Berechnung des “Loading-Noise” durchgeführt werden. Zu beachten ist, daß nicht die Ausdehnung des Propellerblatts sondern die Ausdehnung der in Abschnitt 10.4 beschriebenen Fläche Σ entscheidend ist. Auf ihr liegen alle Quellpositionen, von denen die gleichzeitig am Beobachtungsort eintreffenden Signale ausgegangen sind.

Bezeichnet man die Ausdehnung der Quellstärkeverteilung mit D und die beobachtete Frequenz mit ω , dann soll die Bedingung

$$D \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (10.5.56)$$

gelten. Das bedeutet, die Quelle ist kompakt. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß sich der Beobachter weit entfernt von der Quelle befindet. Es wird ein Mittelpunkt $\vec{y}_M(t)$ der Quelle festgelegt. Bewegt sich die Oberfläche, dann verschiebt sich auch der Mittelpunkt. Er ist also Zeitabhängig. In dem mitbewegten $\vec{\eta}$ -Bezugssystem ruht der Mittelpunkt. Seine Koordinate wird mit $\vec{\eta}_M$ bezeichnet. Zu beachten ist, daß der Mittelpunkt nicht unbedingt auf der Oberfläche selbst liegen muß. Er kann zum Beispiel mit dem geometrischen Schwerpunkt des eingeschlossenen Volumens übereinstimmen. In Abbildung 10.12 ist die betrachtete Anordnung skizziert. Der Abstand vom Beobachtungsort \vec{x} zur Mitte der Quelle wird mit R bezeichnet. Es soll

$$R = |\vec{x} - \vec{y}_M| \gg D \quad (10.5.57)$$

erfüllt sein. Unter den genannten Bedingungen kann die Lösung (10.5.47) für den “Loading-Noise”-Anteil approximativ mit

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) \approx -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{R} \int_S \frac{l_i}{|1 - M_r|} dS(\vec{\eta}) \right]_{\tau=\tau^*} \quad (10.5.58)$$

berechnet werden. Dabei wurden zwei Vernachlässigungen eingeführt. Einmal wurde der exakten Kehrwert des Abstands $1/r$ näherungsweise durch den Kehrwert des mittleren Abstands $1/R$ ersetzt. Zum zweiten wurde die Variation der retardierten Zeit

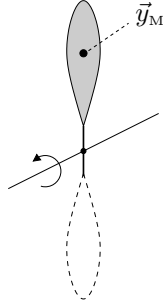


Abbildung 10.12: Blatt eines sich drehenden Propellers.

vernachlässigt. Das bedeutet, die Werte im Integral werden alle zur gleichen retardierten Zeit τ^* berechnet. Entsprechend schließt die eckige Klammer nun das Integral ein. Die Zeit τ^* hängt vom Beobachtungsort \vec{x} , der Beobachtungszeit t und der Koordinate $\vec{\eta}$ ab. Zweckmäßigerweise wird zur Berechnung des Integrals der Wert τ^* genommen, welcher dem Mittelpunkt – also der Koordinate $\vec{\eta}_M$ – entspricht. Praktisch bewirkt die Vereinfachung eine deutliche Verringerung des Rechenaufwands.

Der Vektor \vec{l} gibt die Kraft pro Fläche an, die vom Körper auf das Medium ausgeübt wird. Integriert man diese Größe über die gesamte Körperoberfläche ergibt sich die Gesamtkraft vom Körper auf das Medium. Im Integral in (10.5.58) wird allerdings die Kraft pro Fläche mit dem Faktor $1/|1 - M_r|$ multipliziert. Dadurch weicht der Wert des Integrals im allgemeinen von der Gesamtkraft ab. Unter bestimmten Umständen kann der Faktor $1/|1 - M_r|$ für einen entfernten Beobachter näherungsweise als konstant angenommen werden. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn der Körper eine reine Translationsbewegung ausführt, oder wenn die Beobachtungsmachzahl insgesamt relativ klein ist ($M_r \ll 1$). Auch im Fall des rotierenden Propellerblattes kann eine solche Vereinfachung erlaubt sein. Dies hängt von den jeweiligen Parametern wie der Geometrie des Propellers, der Drehzahl und auch der Beobachtungsrichtung ab.

Wird der Faktor $1/|1 - M_r|$ näherungsweise als konstant angenommen, dann kann M_r durch den Wert $M_R = M_r(\vec{\eta}_M, \tau^*)$ am Mittelpunkt ersetzt werden. Man erhält eine weitere Vereinfachung mit

$$4\pi p'_L(\vec{x}, t) \approx -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{F_i}{R|1 - M_R|} \right]_{\tau=\tau^*} \quad (10.5.59)$$

wobei die Gesamtkraft vom Körper auf das Medium mit

$$F_i = \int_S l_i \, dS(\vec{\eta}) \quad (10.5.60)$$

eingeführt wurde. Die Lösung entspricht dem Schallfeld einer bewegten punktförmigen Impulsquelle, die sich am Ort $\vec{y}_M(t)$ befindet. Ein solches Feld wurde bereits in

10.5 Die Gleichung von Ffowcs Williams und Hawkins

Abschnitt 9.4 berechnet. Ein Vergleich mit Gleichung (9.4.18) zeigt die formale Übereinstimmung mit der approximativen Lösung (10.5.59).

11 Dreidimensionale Kanalmoden

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Im folgendem wird die Schallausbreitung in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt untersucht. Es wird angenommen der Kanal sei unendlich lang. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Kanalwände starr und undurchlässig also schallhart sind, und daß keine Strömung im Kanal vorliegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird das

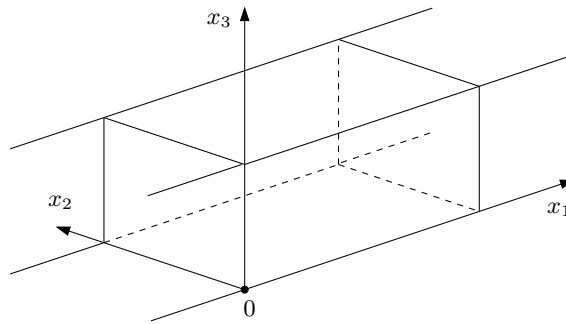


Abbildung 11.1: Ausrichtung des Koordinatensystems im Kanal mit rechteckigem Querschnitt.

Koordinatensystem so gewählt, daß die Kanalachse in x_1 -Richtung verläuft. Die Ausrichtung der Achsen ist in Abbildung 11.1 dargestellt. Akustische Wellen in dem Kanal müssen die Wellengleichung für den Schalldruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (11.1.1)$$

erfüllen. Um die Wellenausbreitung im Kanal zu verstehen, werden Lösungen für feste Frequenzen ω untersucht. Dies ist analytisch viel einfacher, als beliebige Störungen zu betrachten. Im Allgemeinen kann jede Störung in ihre spektralen Anteile zerlegt werden. Ist das Verhalten der einzelnen Anteile bekannt, kann die zeitliche Entwicklung der Störung vorhergesagt werden.

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Zu Berechnung der harmonischen Lösung wird der Ansatz

$$p'(\vec{x}, t) = f(x_1)g(x_2)h(x_3)e^{i\omega t} \quad (11.1.2)$$

gewählt. Dies stellt einen Separationsansatz dar, in dem die Abhängigkeiten von den verschiedenen Koordinaten mit den Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ getrennt enthalten sind. Setzt man den Ansatz (11.1.2) in die Wellengleichung (11.1.1) ein, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x_1) g(x_2) h(x_3) \\ & + \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) g(x_2) h(x_3) + f(x_1) \frac{d^2 g}{dx_2^2}(x_2) h(x_3) + f(x_1) g(x_2) \frac{d^2 h}{dx_3^2}(x_3) = 0 \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

Die Zeit t ist nach dem Kürzen durch den Faktor $e^{i\omega t}$ herausgefallen.

Um die Lösung zu bestimmen, müssen die Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ ermittelt werden. Dazu wird (11.1.3) so umgeformt, daß alle Terme mit $g(x_2)$ auf einer Seite isoliert sind. Man erhält

$$\frac{1}{g(x_2)} \frac{d^2 g}{dx_2^2}(x_2) = -\frac{1}{f(x_1)} \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) - \frac{1}{h(x_3)} \frac{d^2 h}{dx_3^2}(x_3) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (11.1.4)$$

Es stellt sich heraus, daß x_2 auf der rechten Seite von (11.1.4) überhaupt nicht mehr auftritt. Die linke Seite hängt ausschließlich von x_2 ab, und die rechte Seite nur von x_1 und x_3 . Die Gleichheit muß jedoch für alle \vec{x} erfüllt sein. Dies ist nur möglich wenn beide Seiten konstant – also unabhängig von \vec{x} – sind. Zweckmäßigerweise wird für die Konstante $-\beta^2$ gewählt. Dies scheint zunächst eine Einschränkung der Allgemeinheit zu sein, da die Konstante immer negativ ist. Jedoch sind mit komplexen Werten für β alle beliebigen Konstanten möglich. Es ergibt sich als Folge von (11.1.4) die Gleichung

$$\frac{1}{g(x_2)} \frac{d^2 g}{dx_2^2}(x_2) = -\beta^2 \quad (11.1.5)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung in der Form

$$g(x_2) = A_2 \cos(\beta x_2) + B_2 \sin(\beta x_2) \quad (11.1.6)$$

geschrieben werden kann. Durch Einsetzen läßt sich leicht zeigen, daß (11.1.6) wirklich die Gleichung (11.1.5) erfüllt. Damit ist die Funktion $g(x_2)$ bis auf die drei Faktoren A_2 , B_2 und β bestimmt. Das bedeutet, daß der Separationsansatz (11.1.2) zum Erfolg führt. Die Funktion $g(x_2)$ kann unabhängig von $f(x_1)$ und $h(x_3)$ bis auf einige Konstanten bestimmt werden.

Entsprechend zur Gleichung (11.1.4) können alle alle Terme, die von x_3 abhängen, auf eine Seite gebracht werden. Dann ergibt sich wieder ein Ausdruck, der überall konstant sein muß. Die Konstante wird diesmal als $-\sigma^2$ gewählt. Man erhält analog zu (11.1.5) eine Differentialgleichung für $h(x_3)$. Es muß gelten

$$\frac{1}{h(x_3)} \frac{d^2 h}{dx_3^2}(x_3) = -\sigma^2 \quad (11.1.7)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Die allgemeine Lösung wird mit

$$h(x_3) = A_3 \cos(\sigma x_3) + B_3 \sin(\sigma x_3) \quad (11.1.8)$$

dargestellt. Dieser Ausdruck ist äquivalent zur Lösung für $g(x_2)$ in (11.1.6). Der gleichen Umformungen können letztlich auch für die Variable x_1 und damit für die Funktion $f(x_1)$ durchgeführt werden. Als Konstante wird $-\alpha^2$ gewählt. Es ergibt sich eine zu (11.1.5) und (11.1.7) analoge Differentialgleichung mit

$$\frac{1}{f(x_1)} \frac{d^2 f}{dx_1^2}(x_1) = -\alpha^2 \quad (11.1.9)$$

Im folgenden wird sich zeigen, daß die für $g(x_2)$ und $h(x_3)$ gewählte Form der Lösung besonders gut zur Erfüllung der Randbedingungen an den festen Wänden geeignet ist. Die Funktion $f(x_1)$ beschreibt die Form der Welle in Kanalrichtung. Dort sind keine Randbedingungen gegeben. In Kanalrichtung sind laufende Wellen von besonderem Interesse. Die Formen (11.1.6) und (11.1.8) mit cos- und sin-Ausdruck sind eher für stehende Wellen geeignet. Für die Funktion $f(x_1)$ ist es zweckmäßiger, die allgemeine Lösung in der Form

$$f(x_1) = A_1 e^{-i\alpha x_1} + B_1 e^{i\alpha x_1} \quad (11.1.10)$$

darzustellen. Natürlich kann auch mit dem cos- und sin-Ausdruck eine laufende Welle und umgekehrt mit dem Ansatz (11.1.10) eine stehende Welle beschrieben werden. Dann werden jedoch die entstehenden Ausdrücke umfangreicher. Mit den gewählten Ansätzen wird eine besonders einfache Darstellung erreicht.

Bisher wurde die Form der Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ ermittelt. Die konkrete Lösung wird durch die Konstanten A_i , B_i und die Wellenzahlen α , β und σ bestimmt. Durch die Wellenzahlen wird die Wellenlänge in der jeweiligen Richtung festgelegt. Die Wellenzahlen müssen so gewählt werden, daß die Randbedingungen an den festen Wänden erfüllt werden. Die Randbedingungen reichen jedoch nur aus, um β und σ zu bestimmen. Die Wellenzahl α ist dann indirekt durch die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 \quad (11.1.11)$$

bestimmt, die sich aus Gleichung (11.1.4) durch Einsetzen von (11.1.5), (11.1.7) und (11.1.9) ableitet.

Die Abbildung 11.2 zeigt einen Schnitt durch den Kanal. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß jeweils eine Kanalwand bei $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ liegt. Die Ausdehnung des Kanals in x_2 - und x_3 -Richtung wird mit H_2 und H_3 bezeichnet. Die Randbedingung an den schallharten Wänden fordert, daß kein Medium durch die Wand strömt. Entsprechend muß die Schnellekomponente senkrecht zur Wand gleich Null sein. Es gilt daher

$$v'_2(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H_2 \quad (11.1.12)$$

und

$$v'_3(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = 0, x_3 = H_3 \quad (11.1.13)$$

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

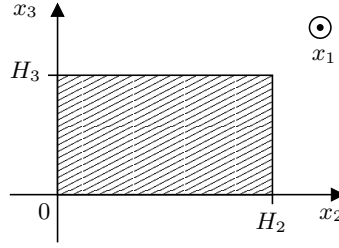


Abbildung 11.2: Schnitt durch den Kanal.

Diese beiden Gleichungen stellen Bedingungen an die Schnelle. Sie sind daher nicht direkt als Randbedingungen für den Schalldruck geeignet. Es muß zunächst aus den Bedingungen eine Beziehung für den Schalldruck abgeleitet werden. Dazu bietet sich die linearisierte Euler-Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial v'_j}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial x_j} \quad (11.1.14)$$

an. An den Wänden ist die Normalkomponenten der Schnelle gleich Null. Damit verschwindet auch ihre zeitliche Ableitung, die auf der linken Seite von (11.1.14) steht. So ergeben sich Bedingungen an die räumliche Ableitung des Schalldrucks. Es muß

$$\frac{\partial p'}{\partial x_2} = 0 \quad \text{bei} \quad x_2 = 0, x_2 = H_2 \quad (11.1.15)$$

und

$$\frac{\partial p'}{\partial x_3} = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = 0, x_3 = H_3 \quad (11.1.16)$$

gelten. Der Verlauf von $\partial p' / \partial x_2$ wird durch die Funktion $g(x_2)$ bestimmt. Damit die Bedingung (11.1.15) gilt, muß die Funktion

$$\frac{dg}{dx_2}(0) = \frac{dg}{dx_2}(H_2) = 0 \quad (11.1.17)$$

erfüllen. Analog folgt aus (11.1.16) eine Beziehung für $h(x_3)$ an den Wandkoordinaten:

$$\frac{dh}{dx_3}(0) = \frac{dh}{dx_3}(H_3) = 0 \quad (11.1.18)$$

Aus den Bedingungen bei $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ folgt sofort, daß

$$B_2 = B_3 = 0 \quad (11.1.19)$$

sein muß. Sonst würde die Ableitung der Funktion $g(x_2)$ beziehungsweise $h(x_3)$ an der Stelle $x_2 = 0$ beziehungsweise $x_3 = 0$ wegen der Sinus-Ausdrücke nicht verschwinden.

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Der Cosinus-Anteil besitzt bei Null ein Maximum und erfüllt die Bedingung. Damit auch an der zweiten Wand die Ableitung gleich Null wird, muß

$$\beta = \frac{m\pi}{H_2} \equiv \beta_m \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.20)$$

beziehungsweise

$$\sigma = \frac{n\pi}{H_3} \equiv \sigma_n \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.21)$$

gelten. Anschaulich bedeutet dies, daß eine ganze Zahl von halben Wellenlängen zwischen den Kanalwänden Platz haben muß. Dadurch werden jedoch die Wellenzahlen β und σ nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr gibt es eine ganze Serie von zulässigen Werten, die der Größe nach geordnet mit β_m und σ_n bezeichnet werden. Die Ordnungszahlen sind dabei m und n . Sie legen letztlich die Form der Lösung fest. Denn über β und σ ist auch die Wellenzahl in Kanalrichtung α festgelegt. Aus (11.1.11) folgt

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2 - \sigma^2} \quad (11.1.22)$$

Das bedeutet es gibt eine ganze Schar von möglichen α -Werten, die durch

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{H_2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{H_3}\right)^2} \equiv \alpha_{mn} \quad (11.1.23)$$

gegeben sind. Für jedes mn -Paar gibt es eine eigene Wellenzahl in Kanalrichtung, die mit α_{mn} bezeichnet wird.

Setzt man die ermittelten Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ und $h(x_3)$ in den Ansatz (11.1.2) ein, dann erhält man die Lösung

$$p'(\vec{x}, t) = A_2 A_3 \cos(\beta_m x_2) \cos(\sigma_n x_3) [A_1 e^{-i\alpha_{mn} x_1} + B_1 e^{+i\alpha_{mn} x_1}] e^{i\omega t} \quad (11.1.24)$$

Die Ordnungszahlen m und n legen die Wellenzahlen β_m , σ_n und α_{mn} fest. Sie bestimmen somit die Form der Lösung bei einer vorgegebenen Frequenz ω . Die entsprechende Lösung wird auch als mn -Mode bezeichnet. Mit den Faktoren A_1 , B_1 , A_2 und A_3 wird die Amplitude der Lösung festgelegt. Für $B_1 = 0$ ergibt sich eine "reine" Welle in positiver x_1 -Richtung. Entsprechend stellt die Lösung für $A_1 = 0$ eine Welle in negativer x_1 -Richtung dar. Im allgemeinen Fall erhält man eine Überlagerung von beiden Wellen. Eine reguläre Wellenausbreitung liegt jedoch nur vor, wenn die Wellenzahl α_{mn} reell ist. Dazu muß die Frequenz ω die Bedingung

$$\omega > c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H_3}\right)^2} \equiv \omega_{c,mn} \quad (11.1.25)$$

erfüllen. Die Größe $\omega_{c,mn}$ wird als "Cut-Off"-Frequenz der mn -Mode bezeichnet.

Für niedrigere Frequenzen, die die "Cut-Off"-Bedingung (11.1.25) nicht erfüllen, ist α_{mn} rein imaginär. Dann beschreibt die Lösung (11.1.24) eine Überlagerung aus einem Teil, der in x_1 -Richtung exponentiell abklingt, und einem exponentiell anwachsenden

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

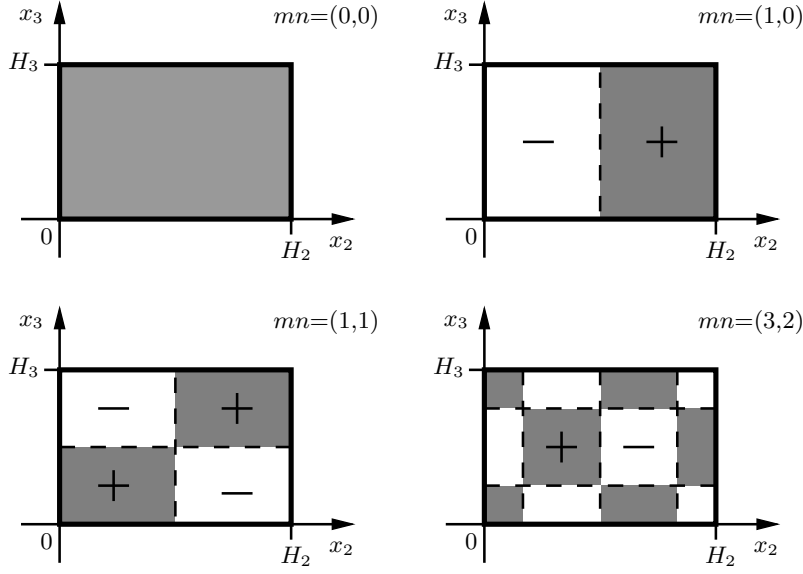


Abbildung 11.3: Momentane Druckverteilung in einem Querschnitt für verschiedene Moden.

Teil. Ob die gesamte Lösung in x_1 -Richtung steigt, liegt an der Wahl von A_1 und B_1 . Für die Modenzahlen $mn = (0,0)$ ergibt sich übrigens eine ebene Wellen in oder entgegen der x_1 -Richtung, je nach Wahl von A_1 und B_1 . Diese Lösung wird Grundmode genannt. Sie ist immer ausbreitungsfähig, da $\omega_{c,00} = 0$ gilt.

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Moden sind in der Abbildung 11.3 mehrere Lösungen skizziert. Es sind jeweils in einem Querschnitt des Kanals für eine fest Zeit Bereiche positiven und negativen Schalldrucks markiert. In den grau schattierten Feldern ist der Schalldruck positiv und in den Hellen negativ. Die Bilder sind sozusagen Momentaufnahmen. Zu einem anderen Zeitpunkt können die Bereiche mit positiven und negativen Werten vertauscht sein. Die Grenzlinien zwischen den Bereichen – die sogenannten Knotenlinien – bleiben allerdings konstant. Sie verlaufen entlang der Positionen x_2 und x_3 , an denen einer der beiden \cos -Terme in (11.1.24) verschwindet. Dort hat die Lösung beziehungsweise Mode immer einen Schalldruck gleich Null.

Um die Druckverteilung noch weiter zu verdeutlichen, ist in der Abbildungen 11.4 der Druckverlauf entlang der Linie $x_3 = H_3/2$ (also durch die Mitte des Kanals in Bezug auf x_3) für zwei Fälle aufgetragen. In x_2 - und x_3 -Richtung beschreibt die Lösung stehende Wellen zwischen den Kanalwänden. Es befindet sich immer ein Extremum des Schalldrucks an der Wand. Die Lösungen haben dort einen sogenannten “Druckbauch”, der durch die Randbedingung der schallharten Wand erzwungen ist.

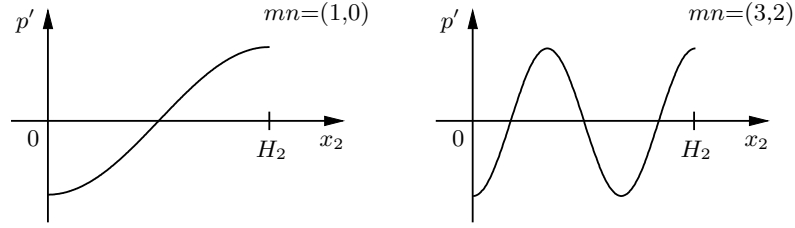


Abbildung 11.4: Momentaner Druckverlauf in x_2 -Richtung entlang einer Linie bei $x_3 = H_3/2$.

Resonanter Quader

Bisher wurden nur laufende Wellen in x_1 -Richtung betrachtet. Es wurde angenommen, daß der Kanal in x_1 -Richtung zu beiden Seiten unendlich ausgedehnt ist. Wird der Kanal mit schallharten Wänden auch in x_1 -Richtung abgeschlossen, ergibt sich ein quaderförmiger Raum. Im folgenden sollen die Lösungen der Wellengleichung in einem solchen Raum betrachtet werden. Eine Wand wird bei $x_1 = 0$ und die zweite bei $x_1 = H_1$ angenommen. Der Quader besitzt damit die Abmessungen $H_1 \times H_2 \times H_3$. Die Lösung wird wieder für eine vorgegebene Frequenz ω gesucht. Der Separationsansatz bleibt unverändert. Die Funktion $f(x_1)$ kann nun auf gleichem Wege wie die Funktionen $g(x_2)$ und $h(x_3)$ ermittelt werden. Dazu wird der Lösungsansatz

$$f(x_1) = A_1 \cos(\alpha x_1) + B_1 \sin(\alpha x_1) \quad (11.1.26)$$

angenommen. Es muß gelten

$$\frac{\partial p'}{\partial x_1} = 0 \quad \text{für } x_1 = 0, x_1 = H_1 \quad (11.1.27)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{dx_1}(0) = \frac{df}{dx_1}(H_1) = 0 \quad (11.1.28)$$

Die Bedingung bei $x_1 = 0$ erfüllt man, indem

$$B_1 = 0 \quad (11.1.29)$$

gesetzt wird. Um die Bedingung bei $x_1 = H_1$ zu erreichen, muß die Wellenzahl

$$\alpha = \frac{l\pi}{H_1} \equiv \alpha_l \quad \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots \quad (11.1.30)$$

gewählt werden. Analog zu β und σ wird durch die Randbedingung α nicht eindeutig festgelegt. Es gibt eine ganze Reihe von möglichen Lösungen, die mit α_l bezeichnet werden. Dabei ist l eine weitere Ordnungszahl.

11.1 Wellenausbreitung im Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Im Fall des in x_1 -Richtung unendlich ausgedehnten Kanals wurden β und σ durch die Randbedingungen bestimmt, und α ergab sich indirekt aus der Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 \quad (11.1.31)$$

Diese Gleichung folgte unmittelbar aus dem Lösungsansatz für $p'(\vec{x}, t)$ nach Einsetzen in die Wellengleichung. Im Fall des Quaders ist die Wellenzahl α direkt durch die Randbedingungen an den zusätzlichen Wänden festgelegt. Jedoch muß Gleichung (11.1.31) immer noch gelten, damit die Wellengleichung wirklich erfüllt wird. Dadurch ist das System jetzt überbestimmt. Es gibt mehr Bedingungen als Unbekannte. Tatsächlich läßt sich nicht mehr für jede vorgegebene Frequenz ω eine Lösung finden. Die Frequenz muß die Bedingung

$$\omega = c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2} \quad (11.1.32)$$

für eine mögliche Kombination der Wellenzahlen α , β und σ erfüllen. Dies wird für die Werte

$$\omega_{lmn} \equiv c\pi \sqrt{\left(\frac{l}{H_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{H_3}\right)^2} \quad (11.1.33)$$

erreicht. Nur für diese Werte ergibt sich eine harmonische Lösung. Für vorgegebene Ordnungszahlen l , m und n hat das Druckfeld die Form

$$\begin{aligned} p'(\vec{x}, t) &= A_1 A_2 A_3 \cos(\alpha_l x_1) \cos(\beta_m x_2) \cos(\sigma_n x_3) e^{i\omega_{lmn} t} \\ &\equiv A_1 A_2 A_3 p'_{lmn}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (11.1.34)$$

Anschaulich beschreibt die Lösung stehende Wellen, die in den Quader "hineinpassen". Dies ist nur bei den ausgezeichneten Frequenzen nach (11.1.33) – den Resonanzfrequenzen – möglich. Für andere Frequenzen erhält man keine Lösung mit dem harmonischen Ansatz.

Theoretisch halten sich die stehenden Wellen bei den Resonanzfrequenzen unendlich lange, wenn sie einmal angeregt wurden. In der Praxis wird jedoch jede Schwingung durch Wärmeleitung und Reibung gedämpft. Regt man in dem Quader mit einem Lautsprecher harmonische Schwingungen an, so ergibt sich ein Stehwellenfeld, das zusätzlich die periodischen Randbedingungen am Lautsprecher erfüllt. Stimmt die Anregungsfrequenz mit einer Resonanzfrequenz überein, so kann eine sogenannte Resonanzkatastrophe eintreten.

In der Realität läßt sich eine einzelne Mode – zum Beispiel mit einem Lautsprecher in der Seitenwand – nur sehr schwer gezielt erzeugen. Im allgemeinen wird eine Überlagerung aus viele Moden angeregt, so daß die reale Lösung als Summe

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_l \sum_m \sum_n B_{lmn} p'_{lmn}(\vec{x}, t) \quad (11.1.35)$$

dargestellt werden muß.

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

Bevor die Schallausbreitung in einem runden Kanal behandelt wird, soll auf die Lösung der Wellengleichung im zylindersymmetrischen Fall eingegangen werden. Die sich ergebenden Erkenntnisse werden später bei der Behandlung des runden Kanals nützlich sein. Es wird die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (11.2.1)$$

betrachtet. Die physikalische Bedeutung der Größe ϕ spielt an dieser Stelle keine Rolle, da es zunächst um eine rein mathematische Betrachtung geht. ϕ kann der Schalldruck, das akustische Potential oder irgendeine andere physikalische Größe sein, für die die Wellengleichung gilt. Es werden nur harmonische Lösungen zugelassen, die dem Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad (11.2.2)$$

entsprechen. Einsetzen in (11.2.1) führt auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (11.2.3)$$

für die komplexe Amplitude φ .

Es sollen nur zylindersymmetrische Lösungen betrachtet werden. Dazu werden die Zylinderkoordinaten (r, θ, z) eingeführt. Sie sind mit den kartesischen Koordinaten durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \\ x_3 &= z \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

verknüpft. In der Abbildung 11.5 sind die Koordinaten veranschaulicht. Die Koordinate r gibt den Abstand von der x_3 -Achse an. θ stellt ein Winkel in der x_1, x_2 -Ebene dar, und z stimmt einfach mit x_3 überein. In dem neuen Koordinatensystem hat der Laplace-Operator die Form

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (11.2.5)$$

Bei Zylindersymmetrie ist das Feld φ ausschließlich von r abhängig. Die Ableitungen von φ nach θ und z verschwinden. Weiterhin kann die partielle Ableitung nach r durch eine Gewöhnliche ersetzt werden. Es gilt

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (11.2.6)$$

Durch Einsetzen von (11.2.6) in die Helmholtz-Gleichung erhält man schließlich für den zylindersymmetrischen Fall

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2 \varphi = 0 \quad (11.2.7)$$

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

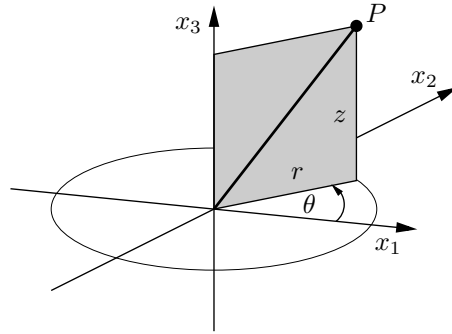


Abbildung 11.5: Zur Darstellung eines Punktes P in Zylinderkoordinaten.

Mathematisch betrachtet ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\varphi(r)$. Die Lösung dieser Differentialgleichung findet man in Formelsammlungen. Allerdings ist dort meist eine etwas andere Form angegeben. Um sie zu erhalten wird eine neue Funktion mit

$$a(kr) = \varphi(r) \quad (11.2.8)$$

definiert. Passend dazu wird die Variable

$$s = kr \quad (11.2.9)$$

eingeführt. Zwischen den Ableitungen der beiden Funktionen $a(s)$ und $\varphi(r)$ gelten die Zusammenhänge

$$\frac{d\varphi}{dr} = k \frac{da}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = k^2 \frac{d^2a}{ds^2} \quad (11.2.10)$$

Durch Einsetzen erhält man aus (11.2.7) eine Differentialgleichung für $a(s)$. Sie lautet

$$\frac{d^2a}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{da}{ds} + a = 0 \quad (11.2.11)$$

Dies ist der Spezialfall $\nu = 0$ der klassischen Besselschen Differentialgleichung

$$s^2 \frac{d^2a}{ds^2} + s \frac{da}{ds} + (s^2 - \nu^2) a = 0 \quad (11.2.12)$$

Die Größe ν wird üblicherweise als die Ordnung der Gleichung bezeichnet. Es zeigt sich, daß man in wenigen Schritten von der Wellengleichung – mit den Annahmen einer harmonischen Lösung und Zylindersymmetrie – auf die Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung gelangt.

Vergleich mit dem eindimensionalen und kugelsymmetrischen Fall

Die sogenannten Bessel-Funktionen sind Lösungen der Besselsche Differentialgleichung. Bevor auf die Lösungen näher eingegangen wird, soll hier der Zusammenhang der Differentialgleichung (11.2.7) und der Helmholtz-Gleichung noch weiter verdeutlicht werden. Dies geschieht anhand einer Gegenüberstellung verschiedener Fälle. Es soll dabei die Lösung φ nur von einer Koordinate abhängen. Damit die abgeleiteten Formeln besser verglichen werden können, wird die Koordinate immer mit r bezeichnet, obwohl sie jedesmal eine andere Bedeutung besitzt.

Im ersten Fall wird eine eindimensionale Lösung betrachtet. Das Feld φ soll nur von x_1 abhängen. Entsprechend wird

$$r = x_1 \quad (11.2.13)$$

gesetzt. In dem eindimensionalen Fall gilt einfach

$$\Delta\varphi = \frac{d^2}{dr^2} \varphi \quad (11.2.14)$$

Man kann r dabei auch als Abstand ansehen. Nur ist jetzt nicht der Abstand von einem Punkt oder einer Achse sondern von der Ebene $x_1 = 0$ gemeint. Im zweiten Fall wird Zylindersymmetrie angenommen. Die Situation ist zweidimensional. In x_3 -Richtung ist die Lösung konstant. In Zylinderkoordinaten ist r dann der Abstand von der x_3 -Achse. Es gilt

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (11.2.15)$$

Wie bereits in Gleichung (11.2.6) dargestellt, ergibt sich in diesem Fall

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \varphi \quad (11.2.16)$$

für den Laplace-Ausdruck. Im dritten Fall wird Kugelsymmetrie angenommen. Es wird ein dreidimensionales Feld $\varphi(r)$ betrachtet. Die Koordinate r ist der Abstand vom Ursprung mit

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (11.2.17)$$

In Kugelkoordinaten gilt

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \varphi \quad (11.2.18)$$

Zu bemerken ist, daß sich die Laplace-Ausdrücke auf den rechten Seiten von (11.2.14), (11.2.16) und (11.2.18) formal nur durch den Exponenten von r unterscheiden. Denn Gleichung (11.2.14) könnte auch als

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^0} \frac{d}{dr} \left(r^0 \frac{d}{dr} \right) \varphi \quad (11.2.19)$$

geschrieben werden. Durch die unterschiedlichen Ausdrücke für $\Delta\varphi$ in den verschiedenen Koordinatensystemen, leiten sich aus der Helmholtz-Gleichung (11.2.3) auch verschiedene Bestimmungsgleichungen für $\varphi(r)$ ab.

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

Durch Einsetzen von (11.2.14) ergibt sich im eindimensionalen Fall

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + k^2\varphi = 0 \quad (11.2.20)$$

Im zweidimensionalen Fall bei Zylindersymmetrie erhält man

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0 \quad (11.2.21)$$

und bei Kugelsymmetrie folgt

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0 \quad (11.2.22)$$

Die drei Differentialgleichungen unterscheiden sich lediglich durch den Faktor vor den Term mit der ersten Ableitung. In Gleichung (11.2.20) könnte theoretisch als zweiter Term noch

$$\frac{0}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (11.2.23)$$

eingefügt werden.

Die allgemeine Lösungen der Differentialgleichung (11.2.20) lautet

$$\varphi(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr) \quad (11.2.24)$$

Dabei sind A und B Faktoren, die durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. Die allgemeine Lösungen der Differentialgleichung (11.2.22) kann als

$$\varphi(r) = A \frac{\sin(kr)}{r} + B \frac{\cos(kr)}{r} \quad (11.2.25)$$

dargestellt werden. Sowohl für den eindimensionalen als auch für den kugelsymmetrischen Fall lassen sich die Lösungen mit Hilfe der Sinus- und Cosinus-Funktionen ausdrücken. Wie die Lösung im zweidimensionalen, zylindersymmetrischen Fall aussieht, soll im folgenden vorgestellt werden sollen.

Bessel- und Neumann-Funktionen

Um die Lösung der Besselschen Differentialgleichung zu finden wird ein sogenannter Potentialreihenansatz aufgestellt:

$$a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{l+m} \quad (11.2.26)$$

Dabei sind c_m Koeffizienten, und l ist ein freier Index. Für weitere mathematische Details und den genauen Lösungsweg sei hier auf die einschlägige Literatur verwiesen.

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Durch Bestimmen der Koeffizienten erhält man letztlich als Lösung der Besselschen Differentialgleichung (11.2.12) den Ausdruck

$$a(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}s\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \equiv J_{\nu}(s) \quad (11.2.27)$$

Die Lösung wird im allgemeinen mit den Symbol J_{ν} dargestellt. Sie wird Bessel-Funktion ν -ter Ordnung genannt. Da Gleichung (11.2.7) der Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung entspricht, ist hier zunächst nur die Besselfunktionen J_0 von Interesse.

In Gleichung (11.2.27) kommt die sogenannte Gammafunktion vor. Sie ist durch

$$\Gamma(\nu + 1) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\nu} d\xi \quad (11.2.28)$$

definiert. Es gilt

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \quad (11.2.29)$$

Die Gammafunktion stellt eine Verallgemeinerung der Fakultät auf reelle Argumente dar. Ist ν eine ganze Zahl, kann die Gammafunktion durch einen Ausdruck mit Fakultät ersetzt werden, denn es gilt

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (11.2.30)$$

Die Besselsche Differentialgleichung ist eine Gleichung zweiter Ordnung. Es muß daher noch eine zweite linear unabhängige Lösung geben. Für eine Darstellung, wie diese zweite Lösung gefunden werden kann, wird wieder auf einschlägige Literatur verwiesen. Die zweite Lösung wird üblicherweise mit Y_{ν} bezeichnet und Neumann-Funktion genannt. Für nichtganzzahlige ν besteht der Zusammenhang

$$Y_{\nu}(s) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [J_{\nu}(s) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(s)] \quad \text{für } \nu \neq 0, 1, 2, \dots \quad (11.2.31)$$

zwischen Neumann- und Bessel-Funktionen. Die Neumann-Funktion kann für alle ν als eine unendliche Reihe dargestellt werden. Die Formel ist allerdings sehr umfangreich, und daher wird sie hier nicht angegeben. Stattdessen sind die Bessel- und Neumann-Funktionen für ganzzahlige ν , die für die akustischen Anwendungen besonders von Interesse sind, in der Abbildungen 11.6 veranschaulicht. Die Bessel-Funktionen $J_1(s)$, $J_2(s)$, usw. verschwinden bei $s = 0$. Dagegen ist $J_0(0) = 1$. Die Neumann-Funktionen besitzen bei $s = 0$ alle eine Singularität. Alle Funktionen besitzen unendlich viele Nullstellen.

Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ν -ter Ordnung wird aus einer Linearkombination der beiden Lösungen gebildet. Es ergibt sich

$$a(s) = A J_{\nu}(s) + B Y_{\nu}(s) \quad (11.2.32)$$

11.2 Harmonische Lösungen der Wellengleichung bei Zylindersymmetrie

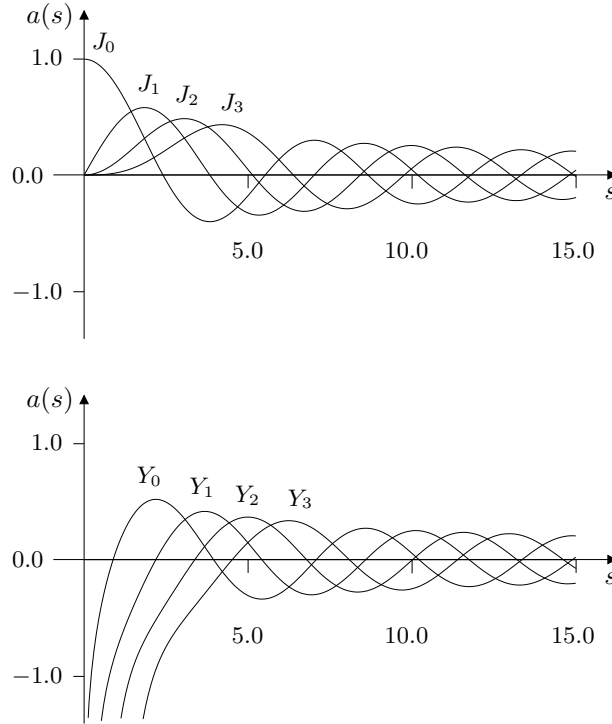


Abbildung 11.6: Bessel- und Neumann-Funktionen.

Damit kann auch die allgemeine Lösung der Helmholtz-Gleichung im zylindersymmetrischen Fall angegeben werden. Nach (11.2.8) gilt $\varphi(r) = a(kr)$. Die Ordnung der Besseschen Differentialgleichung ist $\nu = 0$. Die Lösung lautet damit

$$\varphi(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr) \quad (11.2.33)$$

Stehende und laufende Wellen

Ausgangspunkt für die gesamte Überlegung war die Wellengleichung (11.2.1) für die Größe ϕ . Bei Zylindersymmetrie hängt ϕ nur vom Abstand r und von der Zeit t ab. Es gilt

$$\phi = \phi(r, t) = \varphi(r) e^{i\omega t} \quad (11.2.34)$$

Setzt man auf der rechten Seite (11.2.33) ein, ergibt sich

$$\phi(r, t) = [A J_0(kr) + B Y_0(kr)] e^{i\omega t} \quad (11.2.35)$$

Durch die Wahl der Faktoren A und B lassen sich verschiedene Lösungsformen erzeugen. Wenn jeweils einer der Faktoren gleich Null gesetzt wird, erhält man zum

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Beispiel

$$\begin{aligned}\phi_1(r, t) &= A J_0(kr) e^{i\omega t} \\ \phi_2(r, t) &= B Y_0(kr) e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{11.2.36}$$

Beide Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 stellen stehende Wellen dar. In einem Abstand r , bei dem $J_0(kr) = 0$ wird, ergibt sich für alle Zeiten $\phi_1 = 0$. An den Positionen, an denen $J_0(kr)$ ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, ergibt sich ein sogenannter Bauch. Dort schwankt die Lösung ϕ_1 mit besonders großer Amplitude.

An dieser Stelle wird noch einmal mit der Lösung (11.2.24) für den eindimensionalen Fall verglichen. Zu beachten ist, daß dabei wieder

$$r = x_1\tag{11.2.37}$$

gesetzt wird. Setzt man (11.2.24) auf der rechten Seite von (11.2.34) ein, ergibt sich

$$\phi(r, t) = [A \sin(kr) + B \cos(kr)] e^{i\omega t}\tag{11.2.38}$$

Beispiele für einfache eindimensionale Lösungen sind dann mit

$$\begin{aligned}\phi_1(r, t) &= A \sin(kr) e^{i\omega t} \\ \phi_2(r, t) &= B \cos(kr) e^{i\omega t}\end{aligned}\tag{11.2.39}$$

gegeben. Genau wie oben beschreiben auch diese beiden Lösungen stehende Wellen. Eine laufende ebene Welle wird zum Beispiel durch die Form

$$\phi_3(r, t) = C e^{\pm ikr} \cdot e^{i\omega t} = C e^{i(\omega t \pm kr)}\tag{11.2.40}$$

ausgedrückt. Die Lösung ϕ_3 kann durch Linearkombination der Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 erzeugt werden, denn es gilt

$$e^{\pm ikr} = \cos(kr) \mp i \sin(kr)\tag{11.2.41}$$

Jetzt wird wieder der zylindersymmetrischen Fall betrachtet. Auch hier kann durch Überlagerung der Lösungen ϕ_1 und ϕ_2 aus (11.2.36) eine laufende Welle erzeugt werden. Um die Darstellung zu vereinfachen, werden die sogenannten Hankel-Funktionen mit

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(s) &= J_\nu(s) + iY_\nu(s) \\ H_\nu^{(2)}(s) &= J_\nu(s) - iY_\nu(s)\end{aligned}\tag{11.2.42}$$

definiert. Sie enthalten die notwendigen Linearkombinationen, um laufende Wellen zu bilden. Die Hankel-Funktionen übernehmen sozusagen im zylindersymmetrischen Fall die Aufgabe, die im eindimensionalen Fall der Ausdruck $e^{\pm ikr}$ hat.

Mit den Hankel-Funktionen kann eine zu (11.2.35) alternative Form der Lösung angegeben werden. Sie lautet

$$\phi(r, t) = \underbrace{A H_0^{(2)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}_{\text{Welle nach außen}} + \underbrace{B H_0^{(1)}(kr) \cdot e^{i\omega t}}_{\text{Welle nach innen}}\tag{11.2.43}$$

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

	Bestimmungsgleichung für φ bei Symmetrie $\varphi = \varphi(r)$	Allgemeine Lösung (reelle und komplexe Variante)
1D: Kartesische Koordinaten $r = x_1$	$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + k^2\varphi = 0$	$\varphi(r) = A \sin(kr) + B \cos(kr)$ oder $\varphi(r) = A e^{-ikr} + B e^{+ikr}$
2D: Zylinder- koordinaten $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0$	$\varphi(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr)$ oder $\varphi(r) = A H_0^{(2)}(kr) + B H_0^{(1)}(kr)$
3D: Kugelkoordinaten $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$	$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + k^2\varphi = 0$	$\varphi(r) = A \frac{\sin(kr)}{r} + B \frac{\cos(kr)}{r}$ oder $\varphi(r) = A \frac{e^{-ikr}}{r} + B \frac{e^{+ikr}}{r}$

Tabelle 11.1: Zur Lösung der Helmholtz-Gleichung in verschiedenen Koordinatensystemen.

Im Prinzip sind die beiden Varianten der Lösung gleichwertig. Die Form (11.2.35) ist bei der Beschreibung von stehenden Wellen zu bevorzugen. Dagegen ist mit (11.2.43) die Darstellung von laufenden Wellen einfacher. In der Tabelle 11.1 ist eine Übersicht der Lösungen φ der Helmholtz-Gleichung in den verschiedenen Koordinatensystemen gegeben.

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt eine zylindersymmetrische Lösung der Wellengleichung betrachtet wurde, wird im folgenden die Wellenausbreitung in einem Rohr untersucht. Zweckmäßigerweise werden auch dabei die Zylinderkoordinaten verwendet. Der Radius des Rohres wird mit R bezeichnet. Der Abstand von der Rohrachse ist r . Die Koordinate in Richtung der Rohrachse ist z . Die Größe θ gibt den Winkel relativ zu einer festgelegten Richtung an. Das Rohr ist in Achsrichtung unendlich ausgedehnt.

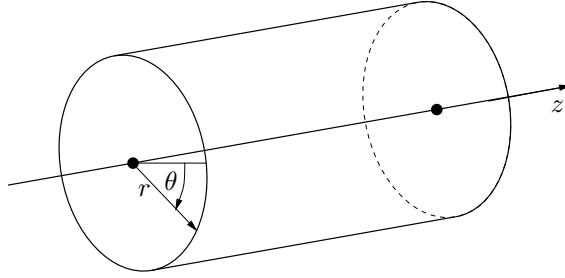


Abbildung 11.7: Lage der Koordinaten im Rohr.

Das Druckfeld im Kanal soll die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (11.3.1)$$

erfüllen. In Zylinderkoordinaten lautet diese Gleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p'}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0 \quad (11.3.2)$$

Analog zum Fall mit rechteckigem Querschnitt wird von einem Separationsansatz mit harmonischer Zeitabhängigkeit

$$p'(z, r, \theta, t) = f(z) g(r) h(\theta) \cdot e^{i\omega t} \quad (11.3.3)$$

ausgegangen. Einsetzen dieses Ansatzes in (11.3.2) ergibt

$$\frac{1}{g(r)} \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr}(r) \right) \right] + \frac{1}{h(\theta)} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 h}{d\theta^2}(\theta) \right] + \frac{1}{f(z)} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = 0 \quad (11.3.4)$$

Der $e^{i\omega t}$ -Faktor wurde dabei bereits herausgekürzt. Es wird wie im Fall des Kanals mit rechteckigem Querschnitt aus Abschnitt 11.1 vorgegangen. Um die Funktionen $f(z)$, $g(r)$ und $h(\theta)$ zu bestimmen, muß die Gleichung so umgeformt werden, daß alle Terme mit den jeweiligen Variablen auf einer Seite isoliert werden. Wird der zweite Summand auf die rechte Seite gebracht und anschließend mit r^2 multipliziert, dann hängt die rechte Seite ausschließlich von θ ab. Auf der linken Seite tritt θ nicht mehr auf. Damit die Gleichheit für alle Kombinationen r , z und θ erfüllt ist, müssen beide Seiten unabhängig von r , z und θ – also konstant – sein. Die Konstante wird mit $-\sigma^2$ bezeichnet. Damit ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die Funktion h mit

$$\frac{1}{h(\theta)} \cdot \frac{d^2 h}{d\theta^2}(\theta) = -\sigma^2 \quad (11.3.5)$$

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Auch die von der Variablen z abhängigen Terme lassen sich auf einer Seite isolieren. Es ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die nächste Funktion mit

$$\frac{1}{f(z)} \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) = -\alpha^2 \quad (11.3.6)$$

Problematisch wird es jedoch mit der Variablen r . Sie tritt nicht nur im ersten sondern auch im zweiten Summand in Gleichung (11.3.4) auf. Die Gleichung kann nicht so umgeformt werden, daß eine Seite nur von r abhängt und die andere überhaupt nicht. Dadurch ist die direkte Herleitung einer Bestimmungsgleichung für $g(r)$ unmöglich. Eine Bestimmungsgleichung ergibt sich, wenn zum Beispiel die Konstante σ schon bekannt ist. Der zweite Summand in (11.3.4) entspricht

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{h(\theta)} \cdot \frac{d^2 h}{d\theta^2}(\theta) = -\frac{\sigma^2}{r^2} \quad (11.3.7)$$

Wird σ fest vorgegeben, so kann der zweite Summand in (11.3.4) durch die rechte Seite von (11.3.7) ersetzt werden. Die Variable θ kommt dann nicht mehr vor, und die von r abhängigen Terme können auf eine Seite gebracht werden. Die andere Seite hängt ausschließlich von z ab. Beide Seiten müssen wieder konstant sein. Die Konstante wird mit $-\beta^2$ bezeichnet. Es folgt die Bestimmungsgleichung

$$\frac{1}{g(r)} \cdot \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr}(r) \right) \right] - \frac{\sigma^2}{r^2} = -\beta^2 \quad (11.3.8)$$

Zu beachten ist, daß für diese Gleichung σ eine vorgegebene und β eine zu bestimmende Konstante ist.

Einsetzen von (11.3.8) und (11.3.6) in (11.3.4) ergibt schließlich noch einen Zusammenhang zwischen den Konstanten und der Frequenz. Es folgt

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (11.3.9)$$

Damit ist festgelegt, wie die Lösung (11.3.3) zu bestimmen ist. Zuerst muß die Lösung für $h(\theta)$ gefunden und die Konstante σ ermittelt werden. Ist diese bekannt, kann auch $g(r)$ mit Hilfe von (11.3.8) berechnet werden. Damit ergibt sich die Konstante β . Durch die Beziehung (11.3.9) kann letztlich auch α angegeben werden.

Zur Bestimmung von $h(\theta)$ wird der Ansatz

$$h(\theta) = A_3 e^{-i\sigma\theta} + B_3 e^{i\sigma\theta} \quad (11.3.10)$$

gewählt. Dieser Ausdruck stellt eine allgemeine Lösung von (11.3.5) dar. Die Faktoren A_3 und B_3 sowie die Konstante σ müssen so gewählt werden, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Die Randbedingungen an die Funktion $h(\theta)$ sind jedoch nicht so offensichtlich, wie etwa die Randbedingungen bei festen Wänden. Die Ränder sind bei $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ gegeben. Die Koordinate $\theta = 0$ ist nicht durch eine physikalische Gegebenheit festgelegt, sondern die Richtung $\theta = 0$ wird einfach definiert. Die Wahl

11 Dreidimensionale Kanalmoden

von $\theta = 0$ sollte jedoch keinen Einfluß auf die Lösung der Wellengleichung haben. Dies wird durch die Wahl einer sogenannten "periodischen Randbedingung" garantiert. Es soll

$$h(\theta) = h(\theta + 2\pi) \quad (11.3.11)$$

gelten. Dieser Ausdruck stellt eine Bedingung dar, die unabhängig von der Wahl der Richtung $\theta = 0$ ist.

Die periodische Randbedingung wird erfüllt, wenn man die Konstante

$$\sigma = 0, 1, 2, \dots \quad (11.3.12)$$

wählt. Dann liefert der Ansatz (11.3.10) eine periodische Lösung, die sich bei $\theta = 2\pi$ wiederholt. Das bedeutet, die Konstante σ ist durch die Randbedingung nicht eindeutig festgelegt. Es gibt eine ganze Serie von möglichen Werten, die mit

$$\sigma = \sigma_m = m \quad (11.3.13)$$

bezeichnet werden können. Dabei ist m wieder eine Ordnungszahl, die mit

$$m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.3.14)$$

gegeben ist. Durch die periodische Randbedingung sind die Faktoren A_3 und B_3 nicht festgelegt. Sie können unabhängig voneinander frei gewählt werden.

In nächsten Schritt soll $g(r)$ näher bestimmt werden. Dazu wird Gleichung (11.3.8) zu

$$r^2 \frac{d^2 g}{dr^2}(r) + r \frac{dg}{dr}(r) + (\beta^2 r^2 - \sigma^2) g(r) = 0 \quad (11.3.15)$$

umgeformt. Mit den Substitutionen

$$s = \beta r ; \quad a(s) = a(\beta r) = g(r) ; \quad \nu = \sigma \quad (11.3.16)$$

ergibt sich aus (11.3.15) die Besselsche Differentialgleichung in der klassischen Form

$$s^2 \frac{d^2 a}{ds^2}(s) + s \frac{da}{ds}(s) + (s^2 - \nu^2) a(s) = 0 \quad (11.3.17)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$a(s) = A J_\nu(s) + B Y_\nu(s) \quad (11.3.18)$$

Die Ordnung ν der Besselschen Differentialgleichung stimmt hier mit der Ordnungszahl m überein: $\nu = \sigma = m$. Das heißt, die Ordnungszahl m legt nicht nur die Lösung für $h(\theta)$ sondern auch die Bestimmungsgleichung für $g(r)$ (und damit natürlich auch die Lösung) fest. Es ergibt sich die allgemeine Lösung

$$g(r) = A_2 J_m(\beta r) + B_2 Y_m(\beta r) \quad (11.3.19)$$

Diese muß ebenfalls Randbedingungen erfüllen. An der Wand des Rohres ist die radiale Schnelle u'_R gleich Null. Es gilt

$$u'_R = 0 \quad \text{bei} \quad r = R \quad (11.3.20)$$

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Daraus folgt für die Ableitung des Drucks

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad \text{bei } r = R \quad (11.3.21)$$

und es ergibt sich die Randbedingung

$$\frac{dg}{dr}(R) = 0 \quad (11.3.22)$$

Es muß noch eine zweite Randbedingung bei $r = 0$ gefordert werden. Bei $r = 0$ ist strenggenommen die Differentialgleichung in der Form (11.3.2) nicht gültig. Der allgemeine Ausdruck (11.3.19) läßt formal auch Lösungen $g(r)$ mit einer Singularität bei $r = 0$ zu. Damit würde sich nach dem Ansatz (11.3.3) dort ebenfalls eine Singularität des Schalldrucks ergeben. Die singuläre Lösung führt dann an der Stelle $r = 0$ (entlang der Rohrachse) zu einer linienförmigen Massenquelle, die periodisch schwankt. Eine Zufuhr oder Abfuhr von Masse an diesem Ort ist in der Praxis normalerweise auszuschließen. Die physikalische Randbedingung lautet daher, daß bei $r = 0$ keine Massenquelle vorliegt. Formal bedeutet dies, daß die Lösung bei $r = 0$ endlich sein muß. Es werden daher alle Lösungen für $g(\theta)$ mit einer Singularität bei $r = 0$ ausgeschlossen. Daraus folgt direkt, daß der Faktor vor der Neumann-Funktion in (11.3.19) verschwinden muß. Damit ist

$$B_2 = 0 \quad (11.3.23)$$

und (11.3.19) vereinfacht sich zu

$$g(r) = A_2 J_m(\beta r) \quad (11.3.24)$$

Die Konstante β muß nun so gewählt werden, daß

$$\frac{dJ_m}{ds}(\beta R) = 0 \quad (11.3.25)$$

gilt. Mit dem Faktor β wird der Abstand r so skaliert, daß die Funktion $J_m(\beta r)$ gerade bei $r = R$ ein Maximum oder Minimum hat. Da die Bessel-Funktionen unendlich viele lokale Extrema besitzen, ergeben sich auch unendlich viele Möglichkeiten β zu wählen.

Die Positionen der lokalen Extrema werden der Größe nach geordnet und mit einer zweiten Ordnungszahl $n = 0, 1, 2, \dots$ durchnummeriert. Mit s_{mn} ist das n -te lokale Extrema der Bessel-Funktion m -ter Ordnung bezeichnet. Es gilt

$$\frac{dJ_m}{ds}(s_{mn}) = 0 \quad (11.3.26)$$

Zu bemerken ist, daß das lokale Minima bei $s = 0$ für die höheren Ordnungen $m > 0$ nicht berücksichtigt wird. Bei $s = s_{m0}$ besitzt die Bessel-Funktion m -ter Ordnung ihr erstes Maximum und bei $s = s_{m1}$ ihr erstes Minimum. Es gilt

$$s_{00} = 0; \quad s_{m0} > 0 \quad \text{für } m = 1, 2, \dots \quad (11.3.27)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

Für die Wahl der Konstante β ergeben sich nun die Möglichkeiten

$$\beta = \frac{s_{mn}}{R} \equiv \beta_{mn} \quad (11.3.28)$$

um die Randbedingung (11.3.22) zu erfüllen. Die Lösung für $g(r)$ hängt damit von zwei Ordnungszahlen m und n ab:

$$g(r) = A_2 J_m(\beta_{mn} r) \quad (11.3.29)$$

Dies bringt zum Ausdruck, daß in der Lösung für $g(r)$ indirekt die Lösung für $h(\theta)$ und die Konstante σ_m mit eingegangen ist.

Bisher wurden die Funktionen $h(\theta)$ und $g(r)$ bestimmt. Die allgemeine Lösung für die Funktion $f(z)$ kann durch den Ansatz

$$f(z) = A_1 e^{-i\alpha z} + B_1 e^{i\alpha z} \quad (11.3.30)$$

ausgedrückt werden. Dieser Ansatz löst die Bestimmungsgleichung für $f(z)$. An $f(z)$ werden keine Randbedingungen gestellt. Die Konstante α wird über die Beziehung (11.3.9) aus der Konstante β ermittelt. Für vorgegebene Ordnungszahlen m und n ergibt sich

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_{mn}^2} \equiv \alpha_{mn} \quad (11.3.31)$$

Die Lösung für den Schalldruck lautet schließlich

$$p'(z, r, \theta, t) = (A_3 e^{-im\theta} + B_3 e^{im\theta}) \cdot A_2 J_m(\beta_{mn} r) \cdot (A_1 e^{-i\alpha_{mn} z} + B_1 e^{i\alpha_{mn} z}) \cdot e^{i\omega t} \quad (11.3.32)$$

Dieser Ausdruck repräsentiert das Druckfeld in der Mode (m, n) . Die Ordnungszahlen bestimmen die Form der Lösung beziehungsweise der Mode. Zusätzlich haben die Konstanten A_1 , B_1 , A_3 und B_3 einen Einfluß auf das zeitliche Verhalten der Lösung.

Zunächst soll die momentane Druckverteilung in einem Querschnitt betrachtet werden. In der Abbildung 11.8 sind Isolinien des Schalldrucks in einem Querschnitt für verschiedene Moden dargestellt. Die dunklen Bereiche markieren einen negativen Schalldruck und die hellen einen positiven Wert. Auf die Darstellung der Grundmode $mn = (0, 0)$ wurde verzichtet. Für sie ist der Schalldruck im gesamten Querschnitt konstant.

Die Ordnungszahl n legt die Anzahl der Knotenringe um die Mitte fest. Die Zahl m gibt die Periode in Umfangsrichtung an. Sie definiert auch die Anzahl der Knotenlinien, die gerade durch die Mitte laufen. Der radiale Verlauf von der Mitte zum Rand ist durch die entsprechende Bessel-Funktion J_m gegeben. Die Form der Druckverteilung in einem Querschnitt ist von A_3 und B_3 unabhängig. Die Wahl von A_3 und B_3 bestimmt nur die Amplitude und die Phase. Das bedeutet, durch Variation von A_3 und B_3 können die dargestellten Druckverteilungen in der Amplitude skaliert und gedreht werden. Der Einfluß der beiden Parameter wird erst deutlich, wenn das gesamte Rohr und nicht nur ein Querschnitt betrachtet wird. In der Abbildung 11.9 ist die Druckverteilung an der Rohrwand zu einem festen Zeitpunkt für verschiedene Verhältnisse von A_3 zu B_3

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

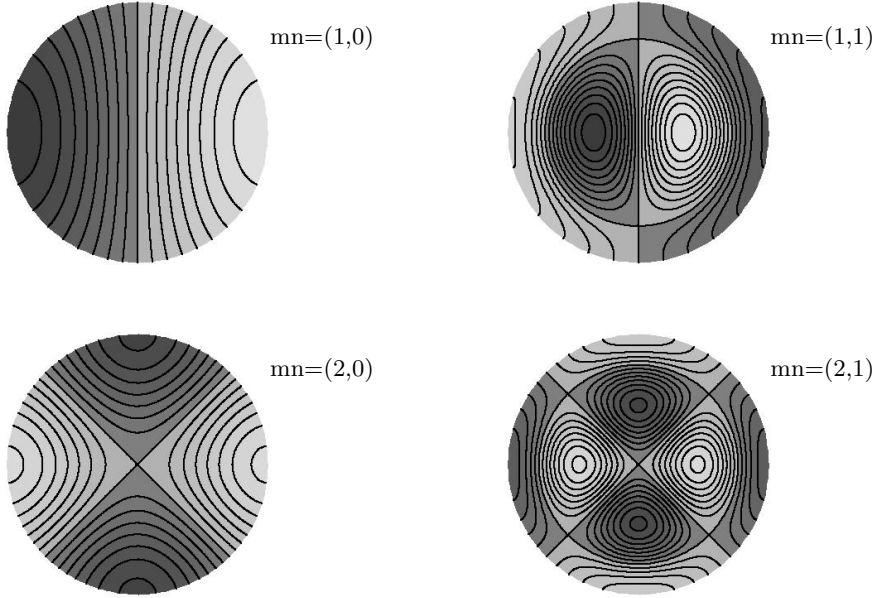


Abbildung 11.8: Momentane Druckverteilungen in einem Querschnitt für verschiedene Moden.

dargestellt. Helle Bereiche markieren wieder einen positiven Wert und dunkle Bereiche einen Negativen. In allen drei Fällen ist $m = 1$. Die Ordnungszahl n spielt für die Verteilung des Wanddrucks keine Rolle, da sie nur den radialen Verlauf beeinflusst.

Bei $A_3 = 1$ und $B_3 = 0$ liegt eine sogenannte “Spinning Mode” vor, die ein spiralförmiges Druckfeld besitzt. Eine vergleichbare Verteilung – nur mit entgegengesetzter Drehrichtung – ergibt sich für $A_3 = 0$ und $B_3 = 1$. In dem Fall $A_3 = B_3$ ergibt sich eine ganz andere Situation. Die Knotenlinien, die die Bereiche mit negativen und positiven Wanddruck voneinander trennen, verlaufen exakt in Kanal- beziehungsweise z -Richtung oder in Umfangs- beziehungsweise θ -Richtung. Ein gemischtes Bild ergibt die Wahl von $A_3 = 2B_3$.

Anhand der Abbildungen kann man sich auch die zeitliche Entwicklung der Lösungen verdeutlichen. Betrachtet man die Lösung für einen festen Winkel θ und einen festen Radius r (wie zum Beispiel an der Wand bei $r = R$), gilt die Proportionalität

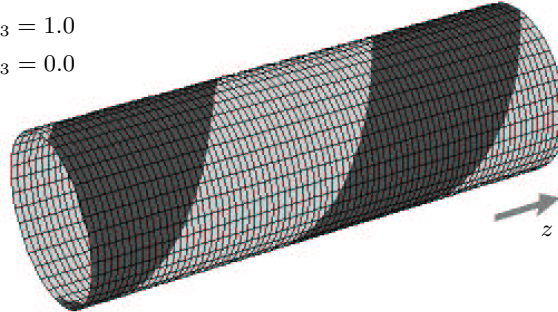
$$p' \sim (A_1 e^{-i\alpha_{mn}z} + B_1 e^{i\alpha_{mn}z}) \cdot e^{i\omega t} = A_1 e^{i(\omega t - \alpha_{mn}z)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_{mn}z)} \quad (11.3.33)$$

Der Ausdruck beschreibt eine Wellenausbreitung in z -Richtung. Die Phasengeschwindigkeit ist durch die Wellenzahl α_{mn} gegeben. Ist α_{mn} eine reelle Zahl

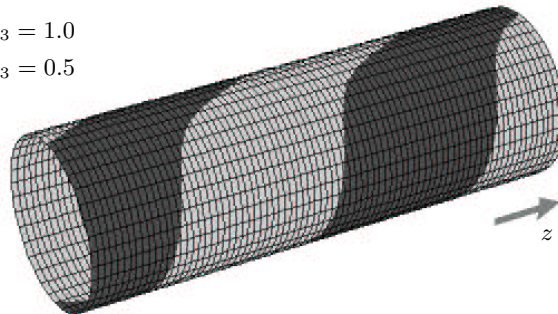
$$\alpha_{mn} \in \mathbb{R} \quad (11.3.34)$$

11 Dreidimensionale Kanalmoden

$$A_3 = 1.0$$
$$B_3 = 0.0$$



$$A_3 = 1.0$$
$$B_3 = 0.5$$



$$A_3 = 1.0$$
$$B_3 = 1.0$$

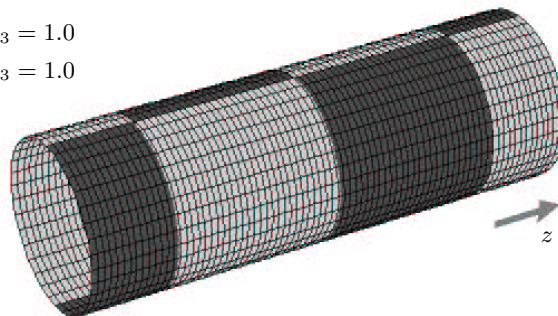


Abbildung 11.9: Druckverteilung an der Rohrwand für die Ordnungszahl $m = 1$.

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

ergibt sich eine reguläre Wellenausbreitung. Für $B_1 = 0$ erhält man eine reine Ausbreitung in positiver z -Richtung, für $A_1 = 0$ in negativer z -Richtung, und die Wahl $A_1 = B_1$ führt zu einer stehenden Welle. Betrachtet man den ersten Fall $B_1 = 0$, so verschiebt sich das Druckfeld im Rohr mit der Zeit einfach in positive z -Richtung, ohne sich zu verformen.

Je nachdem, ob es sich um eine “Spinning Mode” handelt oder nicht, folgen durch diese Verschiebung verschiedenen zeitliche Entwicklungen in einem Querschnitt. Dies wird klar, wenn man die Lösung für feste Werte z und r betrachtet. Dann gilt die Proportionalität

$$p' \sim (A_3 e^{-im\theta} + B_3 e^{im\theta}) \cdot e^{i\omega t} = A_3 e^{i(\omega t - m\theta)} + B_3 e^{i(\omega t + m\theta)} \quad (11.3.35)$$

Der Ausdruck beschreibt eine Wellenausbreitung in θ -Richtung. Für $A_3 = 1$ und $B_3 = 0$ ergibt sich eine reine Ausbreitung in positiver θ -Richtung. Anschaulich entspricht dies einer Drehung der Druckverteilung mit einer Winkelgeschwindigkeit, die durch die Ordnungszahl m festgelegt wird. Für $A_3 = 0$ und $B_3 = 1$ wäre die Drehrichtung entgegengesetzt. Die Drehung erklärt den Ausdruck “Spinning Mode”, mit dem solche Lösungen bezeichnet werden. Bei $A_3 = B_3$ schwankt die Amplitude des Druckfeldes in einem Querschnitt ohne sich zu drehen. Das entspricht einer stehenden Welle in θ -Richtung. Für $A_3 = 2 B_3$ ergibt sich eine Kombination aus Drehung und Schwankung der Amplitude.

In der Literatur werden häufig auch negative Ordnungszahlen m zugelassen. Die Lösung wird in der Form

$$p'(z, r, \theta, t) = A e^{-im\theta} \cdot J_m(\beta_{mn} r) \cdot e^{-i\alpha_{mn} z} \cdot e^{i\omega t} \quad (11.3.36)$$

dargestellt. Im Prinzip wurde hier B_1 und B_3 gleich Null gesetzt, und die Konstanten A_1 , A_2 und A_3 in A zusammengefaßt. Wenn negative m zugelassen sind, können damit “Spinning Modes” mit beiden Drehrichtungen dargestellt werden. Läßt man auch negative Wellenzahlen α_{mn} zu, dann kann auch die Ausbreitung in negativer z -Richtung beschrieben werden. Die Form (11.3.36) besitzt gegenüber (11.3.32) den Vorteil, daß die Form nur von m und n und nicht mehr von zusätzlichen Faktoren – wie A_3 und B_3 – abhängt. Sie wird deshalb häufig bevorzugt. Konsequenterweise werden dann auch die Lösungen der Form (11.3.36) als Moden bezeichnet. Um eine stehende Welle in θ -Richtung oder z -Richtung zu erzeugen, müssen dann allerdings zwei Moden mit unterschiedlichem Vorzeichen von m beziehungsweise α_{mn} überlagert werden.

Zur “Cut-Off”-Bedingung

Reguläre Wellenausbreitung in Achsrichtung liegt nur vor, falls (11.3.34) erfüllt ist. Dazu muß der Ausdruck unter der Wurzel in (11.3.32) positiv sein. Das bedeutet, es muß

$$\frac{\omega}{c} > \beta_{mn} = \frac{s_{mn}}{R} \quad (11.3.37)$$

gelten. Es ergibt sich eine “Cut-Off”-Frequenz

$$\omega_{c,mn} = \frac{c s_{mn}}{R} \quad (11.3.38)$$

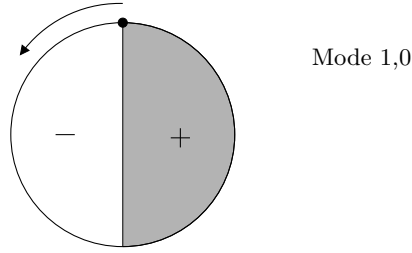


Abbildung 11.10: Zur Interpretation der “Cut-Off”-Bedingung.

für jede mn -Mode.

In dem Fall des runden Querschnitts kann die “Cut-Off”-Bedingung (11.3.37) geometrisch interpretiert werden. Durch Multiplikation folgt die Ungleichung

$$\omega R > c s_{mn} \quad (11.3.39)$$

Der Ausdruck ωR auf der linken Seite entspricht einer Geschwindigkeit. Im Fall der “Spinning Mode” mit $m = 1$ ist das gerade die Geschwindigkeit, mit der in einem Querschnitt ein Knotenpunkt an der Wand umläuft. Die Situation ist in der Abbildung 11.10 veranschaulicht. In einer Periode dreht sich das Druckfeld einmal um 360 Grad. Der Knotenpunkt an der Wand legt eine Strecke von $2\pi R$ zurück. Das ergibt eine Bahngeschwindigkeit von ωR . Bei Moden mit $m = 2$ dreht sich das Druckfeld nur um 180 Grad in einer Periode. Entsprechend ist die Bahngeschwindigkeit der Knotenpunkte an der Wand gleich $\omega R/2$.

Die “Cut-Off”-Bedingung (11.3.39) besagt, daß die Knotenpunkte an der Wand eine Mindestgeschwindigkeit haben müssen, damit sich die entsprechende “Spinning Mode” ausbreiten kann. Für $m = 1$ muß

$$\text{Umlaufgeschwindigkeit} = \omega R > c s_{1n} \quad (11.3.40)$$

gelten. Das erste Maximum der Bessel-Funktion J_1 liegt bei $s_{10} \approx 1.84$. Daraus ergibt sich eine minimale Umlaufgeschwindigkeit von

$$c s_{10} \approx 1.84 c \quad (11.3.41)$$

Das heißt, die Machzahl des Knotenpunktes beim Umlauf muß größer als 1.84 sein, damit sich eine “Spinning Mode” mit $m = 1$ ausbreiten kann. Für $m = 2$ ist

$$2 \times \text{Umlaufgeschwindigkeit} = \omega R > c s_{2n} \quad (11.3.42)$$

Voraussetzung für die Ausbreitung. Es ergibt sich eine minimale Umlaufgeschwindigkeit von

$$c \frac{s_{20}}{2} \approx 1.53 c \quad (11.3.43)$$

11.3 Wellenausbreitung im Kanal mit rundem Querschnitt

Analog erhält man für $m = 3$ eine Mindestgeschwindigkeit der Knotenpunkte von

$$c \frac{s_{30}}{3} \approx 1.40 c \quad (11.3.44)$$

In jedem Fall liegt die minimale Umlaufgeschwindigkeit über der Schallgeschwindigkeit. Zu beachten ist, daß die Bewegung der Knotenpunkte an der Wand nicht mit dem Transport von Information verbunden ist. Es handelt sich um die Phasengeschwindigkeit für die Ausbreitung in Umfangsrichtung.

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

12.1 Kanal mit Querschnittssprung

In den vergangenen Abschnitten wurde die Wellenausbreitung in Kanälen mit konstantem Querschnitt untersucht. Jetzt wird ein Kanal mit veränderlichem Querschnitt betrachtet. Die geometrische Situation ist in der Abbildung 12.1 dargestellt. Es sind zwei Rohre mit den Durchmessern d_1 und d_2 miteinander verbunden. Die Querschnittsflächen der Rohre werden mit S_1 und S_2 bezeichnet. Das Übergangsstück hat die Länge l . Die Wände werden als schallhart angenommen. Es wird eine niederfrequente Wel-

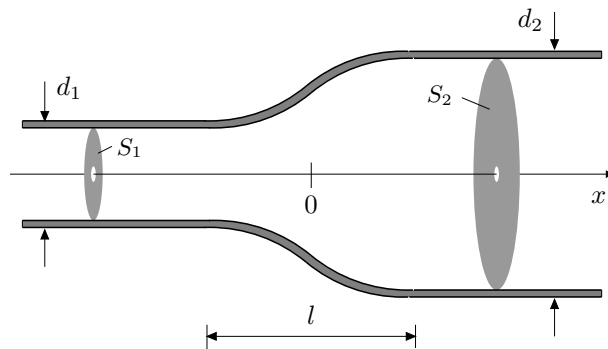


Abbildung 12.1: Kanal mit veränderlichem Querschnitt

lenausbreitung bei einer bestimmten Frequenz ω untersucht. Der Ausdruck “niederfrequent” bedeutet, daß die entsprechende Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (12.1.1)$$

groß gegenüber den Abmessungen der Rohre ist:

$$\lambda \gg d_1 \quad \text{und} \quad \lambda \gg d_2 \quad (12.1.2)$$

12.1 Kanal mit Querschnittssprung

Die Frequenz liegt damit weit unterhalb der “Cut-Off”-Frequenzen aller höherer Moden in den beiden Rohren. Somit können sich nur ebene Wellen in den Rohren ausbreiten. Weiterhin wird angenommen, daß es sich um einen Querschnittssprung handelt. Damit ist gemeint, daß die Ausdehnung des Übergangsbereichs ebenfalls klein gegenüber der Wellenlänge ist:

$$\lambda \gg l \quad (12.1.3)$$

Betrachtet wird der Fall einer einlaufenden ebenen Welle von der Seite 1. Abgesehen von komplizierten Vorgängen in dem Übergangsbereich kann es nur eine transmittierte und eine reflektierte Welle geben. Diese beiden Wellen sind eben. Ohne Absorption müssen die beiden Wellen die von der einlaufenden Welle “angelieferte” akustische Energie wieder “abtransportieren”. Bei der Reflexion werden wahrscheinlich in dem Übergangsbereich auch höhere Moden angeregt. Diese können sich jedoch nicht ausbreiten und klingen relativ schnell ab. Die dreidimensionalen Effekte sind daher auf den Bereich um die Querschnittsänderung beschränkt.

Zur Beschreibung der Wellen wird die Koordinate x in Richtung der Rohre eingeführt. Der Ursprung befindet sich genau in der Mitte des Übergangs. Es werden nur die ebenen Wellen betrachtet. Die Anteile des Schallfeldes durch dreidimensionale Effekte im Übergangsbereich werden nicht mit einbezogen. Der Druck p' hängt damit nur von x ab. Es wird der Ansatz

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{bei } x > 0 \end{cases} \quad (12.1.4)$$

verwendet. Dabei sind die beiden Anteile mit

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{i(\omega t + kx)} \\ p'_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.1.5)$$

gegeben. Die Schnelle in x -Richtung wird mit u' bezeichnet. Analog zum Druck wird für sie der Ansatz

$$u'(x, t) = \begin{cases} u'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ u'_2(x, t) & \text{bei } x > 0 \end{cases} \quad (12.1.6)$$

mit den Anteilen

$$\begin{aligned} u'_1(x, t) &= \frac{A_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \\ u'_2(x, t) &= \frac{A_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.1.7)$$

verwendet. Wird die eintreffende Welle vorgegeben, so ist damit A_1 festgelegt. Die Aufgabe ist es nun daraus die Werte B_1 und A_2 zu berechnen.

Die Ansätze (12.1.5) und (12.1.7) beschreiben nur die Anteile des Schallfeldes, die zu den ebenen Wellen gehören. Im Übergangsbereich ergibt sich ein dreidimensionales Druck- und Schnellefeld. Zur Beschreibung des Übergangsbereichs wird ein Kontrollvolumen V eingeführt, das den gesamten Bereich umfaßt. Das Kontrollvolumen ist in

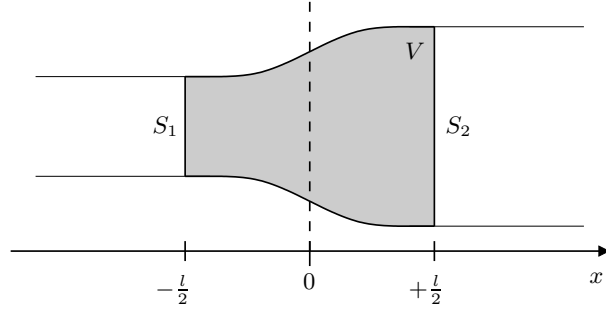


Abbildung 12.2: Kontrollvolumen im Übergangsbereich

der Abbildung 12.2 als schattierter Bereich dargestellt. Es wird angenommen, daß außerhalb des Kontrollvolumens das Schallfeld exakt den Ansätzen (12.1.5) und (12.1.7) entspricht. Das bedeutet, auch an den seitlichen Rändern bei $x = \pm l/2$ besteht das Schallfeld nur aus ebenen Wellen.

Es muß die Massenerhaltung erfüllt sein. Durch die Wellen wird ständig Masse hin und her verschoben. Stellt man eine Bilanzgleichung auf, ergibt sich

$$\rho_0 S_1 u'_1(-\frac{l}{2}, t) - \rho_0 S_2 u'_2(+\frac{l}{2}, t) = \frac{dM}{dt} \quad (12.1.8)$$

Der erste Term auf der linken Seite ist die Masse, die gerade bei $x = -l/2$ von den Wellen in das Volumen hineintransportiert wird. Der zweite Term entspricht der aus tretenden Masse bei $x = +l/2$. Die Differenz der beiden Terme ergibt die zeitliche Änderung der gesamten Masse M , die sich momentan im Volumen V befindet. Das Schallfeld im Übergangsbereich ist wahrscheinlich sehr komplex. So ist eine genaue Berechnung der Ableitung auf der rechten Seite von (12.1.8) nur numerisch möglich.

Eine analoge Bilanzgleichung kann für die akustische Energie aufgestellt werden. Zuerst soll hier jedoch die Gleichung (12.1.8) durch Näherungen vereinfacht werden, so daß damit später zusammen mit der Energiebilanzgleichung die gesuchten Konstanten B_1 und A_2 berechnet werden können.

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist die Tatsache, das die Wellenlänge groß gegenüber den Abmessungen ist. Dadurch können näherungsweise in (12.1.8) die u' -Terme mit

$$\begin{aligned} u'_1(-\frac{l}{2}, t) &= u'_1(0, t) \\ u'_2(+\frac{l}{2}, t) &= u'_2(0, t) \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

ersetzt werden. Der Fehler ist dabei relativ gering. Die Änderung von u'_2 zwischen $x = 0$ und $x = l/2$ ist nach (12.1.7) durch den Faktor $e^{-ikl/2}$ gegeben. Entsprechen

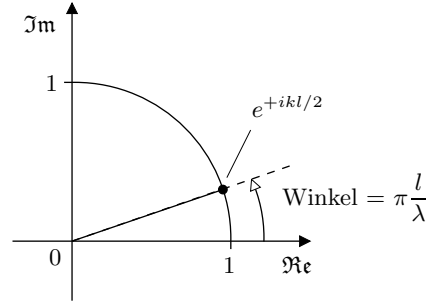


Abbildung 12.3: Zur Abschätzung des Phasenunterschieds

ändern sich die beiden Anteile von u'_1 zwischen $x = -l/2$ nach $x = 0$ um die Faktoren $e^{\pm ikl/2}$. Die beiden Faktoren sind jedoch annähernd gleich Eins, denn es gilt wegen

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12.1.10)$$

die Abschätzung

$$e^{\pm ikl/2} = e^{\pm i\pi l/\lambda} \approx 1 \quad \text{bei} \quad \frac{l}{\lambda} \ll 1 \quad (12.1.11)$$

Betrachtet man den Wert von $e^{+ikl/2}$ als Punkt in der komplexen Ebene, ergibt sich das Bild in Abbildung 12.3. Der Punkt bewegt sich bei steigendem Wert von $kl/2$, auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Dabei ist $kl/2$ gerade der Winkel zwischen der Verbindungslinie zum Ursprung und der reellen Achse. Unter der Voraussetzung (12.1.3) ist jedoch der Winkel sehr klein und der Punkt liegt sehr dicht bei Eins.

Die Abschätzung bedeutet, daß die Phasendifferenz der ebenen Wellen zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = \pm l/2$ aufgrund der relativ langen Wellenlänge vernachlässigbar ist. Diese Aussage läßt sich sogar auf alle Wellen in dem Übergangsbereich erweitern. Unabhängig davon, wie kompliziert das Schallfeld im Übergangsbereich wirklich ist, es besitzt die gleiche Frequenz ω wie die einlaufende Welle. Angenommen, die Wellenlänge ist 1000 mal größer als die Ausdehnung l , so können in einer Periode die Wellen 500 mal in dem Übergangsbereich hin und herlaufen. Damit ist der Ausgleich des Drucks im Übergangsbereich praktisch unendlich schnell gegenüber der Änderung des äußeren Drucks durch die einlaufende Welle. Der Druck und damit auch die Dichte können im Übergangsbereich – im Kontrollvolumen – als räumlich konstant angenommen werden. Die Auftretenden Abweichungen sind gering gegenüber den Amplituden, mit denen die Werte zeitlich schwanken. Man kann sich die Änderungen im Übergangsbereich als quasistatisch vorstellen. Dies ist analog zu der Änderung des Luftdrucks in einem Gebäude durch das Wettergeschehen im Zeitraum von einigen Stunden.

An den beiden Seiten des Kontrollvolumens herrscht damit der gleiche Druck. Der Phasenunterschied im gesamten Kontrollvolumen ist vernachlässigbar, so das nähe-

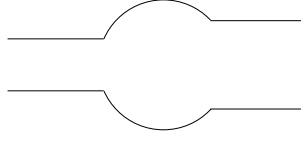


Abbildung 12.4: Verdickung im Übergangsbereich

rungsweise

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (12.1.12)$$

gilt.

Durch die Ersetzung (12.1.9) kann die linke Seite von (12.1.8) vereinfacht werden. Es ergibt sich

$$\rho_0 S_1 u'_1(0, t) - \rho_0 S_2 u'_2(0, t) = \frac{dM}{dt} \quad (12.1.13)$$

Mit den bisherigen Überlegungen kann aber auch eine Abschätzung für die rechte Seite gefunden werden. Es gilt

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{d\rho'_V}{dt} = \frac{V}{c^2} \frac{dp'_V}{dt} \quad (12.1.14)$$

Dabei ist ρ'_V die Dichte und p'_V der Druck im Kontrollvolumen. Die geringen räumlichen Schwankungen des Drucks und der Dichte sind dabei vernachlässigt. Man kann sich ρ'_V und p'_V als die räumlichen Mittelwerte im Kontrollvolumen vorstellen.

Die zeitliche Schwankung des Drucks kann durch

$$p'_V = \Re\{\hat{p}_V e^{i\omega t}\} \quad (12.1.15)$$

ausgedrückt werden. Dabei wurde die komplexe Amplitude \hat{p}_V eingeführt. Es folgt damit für die zeitliche Änderung der Masse

$$\frac{dM}{dt} = \Re\left\{i\omega \frac{V}{c^2} \hat{p}_V e^{i\omega t}\right\} \quad (12.1.16)$$

Der Volumeninhalt V hängt von der konkreten Geometrie des Übergangs ab. Es kann

$$V = S_2 l \alpha \quad (12.1.17)$$

geschrieben werden, wobei die Größe α ein Formfaktor ist. Ist S_2 größer als S_1 so ist für die betrachteten Geometrie $\alpha < 1$. Im Prinzip sind jedoch auch Übergänge möglich, bei denen $\alpha > 1$ ist. Ein Beispiel ist in der Abbildung 12.4 schematisch dargestellt. Die Amplitude \hat{p}_V ist näherungsweise gleich der Druckamplitude auf der rechten Seite des Kontrollvolumens, an der das Schallfeld nur aus der transmittierten ebenen Welle besteht. Es gilt daher

$$\hat{p}_V = \hat{p}_2(0) = \rho_0 c \hat{u}_2(0) \quad (12.1.18)$$

Dabei sind $\hat{p}_2(x)$ und $\hat{u}_2(x)$ die Druck und Schnelleamplituden in der transmittierten Welle an der Stelle x .

12.1 Kanal mit Querschnittssprung

Schließlich kann die Amplitude auf der rechten Seite von (12.1.16) abgeschätzt werden. Es ergibt sich durch Einsetzen von (12.1.17) und (12.1.18)

$$i\omega \frac{V}{c^2} \hat{p}_V = \underbrace{\left[i2\pi \frac{l}{\lambda} \alpha \right]}_{\ll 1} \cdot \left[S_2 \rho_0 \hat{u}_2(0) \right] \quad (12.1.19)$$

Dabei wurde auch die Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (12.1.20)$$

verwendet. Der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer auf der rechten Seite von (12.1.18) entspricht gerade der Amplitude des zweiten Terms auf der linken Seite von (12.1.13), da

$$\rho_0 S_2 u'_2(x, t) = \rho_0 S_2 \hat{u}_2(x) e^{i\omega t} \quad (12.1.21)$$

ist. Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer ist klein gegenüber Eins, falls die Bedingung

$$\lambda \gg \alpha l \quad (12.1.22)$$

erfüllt ist. Bei den angenommenen Wellenlängen und nicht zu voluminösen Übergängen ist diese Bedingung sicherlich erfüllt.

Die Gleichung (12.1.19) zeigt, daß die Schwankungen des Ausdrucks dM/dt sehr gering gegenüber den Schwankungen auf der linken Seite von (12.1.13) sind. Damit kann der Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden und man erhält letztlich aus (12.1.8) die Näherung

$$\rho_0 S_1 u'_1(0, t) - \rho_0 S_2 u'_2(0, t) = 0 \quad (12.1.23)$$

Analog zur Bilanzgleichung für die Masse läßt sich eine zweite Gleichung für die akustische Energie aufstellen. Diese lautet

$$S_1 p'_1\left(-\frac{l}{2}, t\right) u'_1\left(-\frac{l}{2}, t\right) - S_2 p'_2\left(+\frac{l}{2}, t\right) u'_2\left(+\frac{l}{2}, t\right) = \frac{dE}{dt} \quad (12.1.24)$$

Der erste Term auf der linken Seite ist die akustische Energie, die pro Zeiteinheit an der Stelle $x = -l/2$ in das Kontrollvolumen durch die Wellen hinein transportiert wird. Der zweite Term gibt die auf der anderen Seite bei $x = +l/2$ heraus transportierte Energie pro Zeiteinheit an. Die Differenz der beiden Werte gibt die zeitliche Änderung der gesamten akustischen Energie E im Volumen an.

Gleichung (12.1.24) wird entsprechend dem Vorgehen bei der Massenbilanz vereinfacht. Die Schwankungsgrößen p' und u' werden statt an den Positionen $x = \pm l/2$ einfach bei $x = 0$ genommen. Die rechte Seite wird wieder vernachlässigt, da das Volumen im Übergangsbereich keine nennenswerte Energie speichern kann. Die rechte Seite von (12.1.24) kann genau wie im Fall der Massenbilanz als klein gegenüber den Termen auf der linken Seite abgeschätzt werden. An dieser Stelle wird auf eine detaillierte Herleitung jedoch verzichtet.

Es ergibt sich schließlich mit den Vereinfachungen als Energiebilanz

$$S_1 p'_1(0, t) u'_1(0, t) - S_2 p'_2(0, t) u'_2(0, t) = 0 \quad (12.1.25)$$

Die Massenbilanz kann zu

$$S_1 u'_1(0, t) = S_2 u'_2(0, t) \quad (12.1.26)$$

umgeformt werden. Aus den Gleichungen (12.1.25) und (12.1.26) folgt sofort die Beziehung

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (12.1.27)$$

Die Energiebilanz reduziert sich mit der Massenbilanz zu einer einfachen Druckgleichheit. Diese Beziehung wurde bereits aus den Überlegungen zum Druckfeld im Übergangsbereich geschlossen. Die räumlichen Druckänderungen im Kontrollvolumen sind verschwindend gering gegenüber den zeitlichen Schwankungen. Die Wellenfelder auf beiden Seiten des Übergangsbereich sind aneinander gekoppelt. Sie haben damit die gleiche Druckamplitude und bei $x = 0$ die gleiche Phase.

Für die Druckfelder wurde der Ansatz (12.1.5) angenommen. Durch Einsetzen in (12.1.27) ergibt sich daraus

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (12.1.28)$$

Dies ist eine direkte Beziehung zwischen den beiden gesuchten Größen B_1 und A_2 . Für die Schnellefelder gilt (12.1.7). Dies kann nun in die Massenbilanz (12.1.26) eingesetzt werden. Man erhält

$$S_1 (A_1 - B_1) = S_2 A_2 \quad (12.1.29)$$

Mit (12.1.28) und (12.1.29) sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten B_1 und A_2 gegeben. Das Gleichungssystem kann aufgelöst werden. Für die Amplitude der reflektierten Welle ergibt sich

$$B_1 = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} A_1 \quad (12.1.30)$$

Sinnvollerweise wird ein Reflexionsfaktor mit

$$R = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \quad (12.1.31)$$

definiert, so daß sich (12.1.30) zu

$$B_1 = R A_1 \quad (12.1.32)$$

vereinfacht. Für die Amplitude der transmittierten Welle folgt

$$A_2 = \frac{2 S_2}{S_1 + S_2} A_1 \quad (12.1.33)$$

Definiert man den Transmissionsfaktor mit

$$T = \frac{2 S_2}{S_1 + S_2} \quad (12.1.34)$$

erhält man die einfache Form

$$A_2 = T A_1 \quad (12.1.35)$$

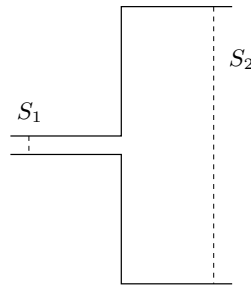


Abbildung 12.5: Querschnittsprung mit relativ großem Flächenverhältnis

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren sind nicht von der Frequenz ω abhängig. Die Frequenz muß nur niedrig genug sein, damit die Voraussetzung erfüllt ist und die Wellenlänge groß gegenüber allen Abmessungen ist.

Besonders interessant ist der Fall, in dem der zweite Querschnitt viel größer als der erste Querschnitt ist

$$S_2 \gg S_1 \quad (12.1.36)$$

Die Situation ist in der Abbildung 12.5 dargestellt. Es ist S_1 gegenüber S_2 vernachlässigbar. Für den Reflexionsfaktor nach (12.1.31) ergibt sich die Näherung

$$R \approx -1 \quad (12.1.37)$$

Dies bedeutet, die von links einlaufende Welle wird praktisch vollständig reflektiert. Der Betrag der Amplituden der reflektierten und der einlaufenden Welle sind gleich. Die Phase der reflektierten Welle ist um 180 Grad gedreht.

läßt man den zweiten Querschnitt S_2 gegen unendlich gehen, entspricht der Übergang einem Rohr mit Querschnitt S_1 , das in einem offenen Raum endet. Für diesen Fall ist sicherlich die Voraussetzung, das alle Abmessungen klein gegenüber der Wellenlänge sind, auf der Seite mit Index 2 nicht mehr erfüllt. Jedoch ist die Totalreflexion mit $R \approx -1$ an offenen Rohrenden experimentell gut bestätigt. Es muß nur die Wellenlänge groß gegenüber dem Rohrdurchmesser sein.

12.2 Beschreibung mit zusammengefaßten Parametern (“Lumped Parameter Model”)

Im vorigen Abschnitt wurde eine eindimensionale Beschreibung des Schallfeldes verwendet, um den Reflexionsfaktor am Übergang zu berechnen. Die dreidimensionalen Effekte im Übergangsbereich spielen für den Reflexionsprozeß bei niedrigen Frequenzen überhaupt keine Rolle. Für die Beschreibung der Wellen genügt es den Druck und die Schnelle in einer Richtung nur von einer Ortskoordinate abhängig zu betrach-

ten. Es wurde mit $p'(x, t)$ und $u'(x, t)$ anstatt mit den Feldgrößen $p'(\vec{x}, t)$ und $\vec{v}'(\vec{x}, t)$ gerechnet.

In diesem Abschnitt soll eine neue Wahl von Variablen vorgestellt werden, mit denen die Beschreibung eines Übergangs formal noch weiter vereinfacht werden kann. Zum Beispiel gibt es mit dem im vorigen Abschnitt verwendeten Ansatz Probleme bei der Behandlung eines Übergangs zwischen Rohren, die in verschiedene Richtungen laufen. Die Abbildung 12.6 zeigt ein Beispiel. Es müßte das Koordinatensystem erst

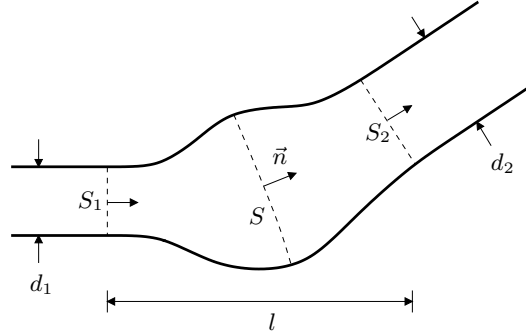


Abbildung 12.6: Kanal mit Änderung der Laufrichtung

geeignet definiert werden, um dann Druck und Schnelle in Abhängigkeit einer Ortskoordinate darstellen zu können. Für die Berechnung der reflektierten Welle ist dies allerdings gar nicht notwendig.

In dem gesamten Kanal werden Querschnittsflächen S definiert, wie in der Abbildung angedeutet ist. In den geraden Rohrstücken werden die Flächen zweckmäßigerweise eben und senkrecht zur Rohrachse gelegt. Im Übergangsbereich sind auch leicht gekrümmte Flächen denkbar. Der Normalenvektor auf den Flächen wird mit \vec{n} bezeichnet. Die Richtung des Vektors wird einfach festgelegt. Als erste neue Variable wird der mittlere Druck auf einer Fläche S gewählt. Dieser wird mit p'_S bezeichnet. Die zweite Variable wird mit

$$U'_S = \int_S \vec{v}' \cdot \vec{n} \, dS \quad (12.2.1)$$

definiert. Sie ist das Integral der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Fläche. Dies ergibt eine sogenannte Volumengeschwindigkeit mit der Einheit “Liter pro Sekunde”. Die Größe U'_S gibt also an, wieviel Volumen pro Zeiteinheit über die Fläche S bewegt wird. Bei dieser Darstellung werden sozusagen die Größen Druck und Schnelle auf der Fläche S in jeweils einem Wert “zusammengefaßt”. Die neuen Variablen hängen nicht mehr von einer Ortskoordinate sondern von der gewählten Fläche S und von der Zeit ab.

In der angelsächsischen Literatur werden die zusammengefaßten Größen als “lumped parameters” bezeichnet. Dies läßt sich mit “zusammengefaßte Parameter” über-

12.2 Zusammengefaßte Parameter

setzen. Gelegentlich werden sie auch “konzentrierte Parameter” genannt. Dabei stellt man sich vor, daß die Werte sozusagen in einem Punkt (z.B. den Mittelpunkt der Querschnittsfläche) konzentriert werden.

Im niederfrequenten Fall können sich nur ebene Wellen in den geraden Rohrstücken ausbreiten. Dort ist der Druck und die Schnelle über dem Querschnitt S konstant. Aus (12.2.1) ergibt sich

$$U'_S = S \vec{v}' \vec{n} \quad (12.2.2)$$

Breitet sich nur eine ebene Welle in einer Richtung aus, so gilt

$$\vec{v}' = \pm \frac{1}{\rho_0 c} p' \vec{n} \quad (12.2.3)$$

dabei ist das (+) Vorzeichen zu nehmen, wenn die Welle in Richtung des Normalenvektors \vec{n} läuft, und (−) gilt für die Wellen in Gegenrichtung.

Entsprechend ergibt sich für eine ebene Welle in einer Richtung der Zusammenhang

$$U'_S = \pm \frac{S}{\rho_0 c} p'_S \quad (12.2.4)$$

zwischen den neuen Variablen. Zum Vergleich gilt in einer eindimensionalen Welle in einer Richtung

$$u' = \pm \frac{1}{\rho_0 c} p' \quad (12.2.5)$$

Das Verhältnis zwischen der Schnelle u' und dem Druck p' hängt nur von den Eigenschaften des Mediums ab, die ρ_0 und c festlegen. das Verhältnis zwischen dem mittleren Druck p'_S und der Volumengeschwindigkeit U'_S hängt zusätzlich noch von der Fläche S ab.

Geht man von einer harmonischen Welle aus, so kann der Ansatz

$$U'_S = \hat{U}_S e^{i\omega t} \quad (12.2.6)$$

und

$$p'_S = \hat{p}_S e^{i\omega t} \quad (12.2.7)$$

verwendet werden. Dabei sind \hat{U}_S und \hat{p}_S komplexe Amplituden. Damit läßt sich auch eine Impedanz

$$Z_S = \frac{\hat{p}_S}{\hat{U}_S} \quad (12.2.8)$$

definieren. Diese Impedanz ist nicht zu verwechseln mit der klassischen akustischen Impedanz. Sie besitzt eine andere Einheit. Es gilt für den Fall einer ebenen Welle in einer Richtung

$$Z_S = \pm \frac{\rho_0 c}{S} \quad (12.2.9)$$

Überlagern sich zwei Wellen, die in entgegengesetzte Richtungen laufen, gilt Gleichung (12.2.9) natürlich nicht.

Für die Beschreibung des Übergangs zwischen zwei Rohren mit unterschiedlichen Querschnittsflächen, werden auf beiden Seiten des Übergangsbereichs Kontrollflächen S_1 und S_2 angenommen. Die Normalenvektoren sind so gewählt, wie es in der Abbildung 12.6 dargestellt ist. Die Flächen liegen in den geraden Rohrstücken. Es wird vorausgesetzt, daß an diesen Stellen alle dreidimensionalen Störungen durch den Übergang abgeklungen sind. Die Ausdehnung des gesamten Übergangsbereichs l sei klein gegenüber der Wellenlänge:

$$l \ll \lambda \quad (12.2.10)$$

Damit kann der Druck im Übergangsbereich als näherungsweise konstant angenommen werden. Es gilt

$$p'_{S,1}(t) = p'_{S,2}(t) \quad (12.2.11)$$

Ebenfalls sei das Volumen im Übergangsbereich so klein, daß keine nennenswerte Masse gespeichert werden kann. Dies wird durch

$$U'_{S,1}(t) = U'_{S,2}(t) \quad (12.2.12)$$

beschrieben. Das Volumen, welches pro Zeit durch S_1 einströmt muß bei S_2 wieder ausströmen.

Formal sind die beiden Bedingungen am Übergangsbereich etwas einfacher als die entsprechenden Bedingungen im letzten Abschnitt. Es zeigt sich eine Parallele zu dem Fall, daß eine ebene Welle senkrecht auf eine Mediengrenze trifft. Die Mediengrenze, zum Beispiel eine Wasseroberfläche, trennt zwei Medien mit einem unterschiedlichen Wellenwiderstand. Druck und Schnelle müssen auf beiden Seiten der Trennfläche konstant sein. Das heißt, es gilt

$$p'_1(t) = p'_2(t) \quad (12.2.13)$$

und

$$u'_1(t) = u'_2(t) \quad (12.2.14)$$

An der Mediengrenze wird eine einfallende Welle teilweise reflektiert, und es entsteht eine transmittierte Welle.

Beide Fälle sind direkt miteinander vergleichbar. Der Schnelle u' im Fall der Mediengrenze entspricht der Volumengeschwindigkeit U'_S . Die Impedanz Z_S ist nach (12.2.9) von der Fläche S abhängig. Obwohl das Medium und damit der Faktor $\rho_0 c$ in gesamten Kanal konstant ist, ergibt sich am Übergang ein Sprung der Impedanz, der dem Sprung des Wellenwiderstandes an der Mediengrenze entspricht. Durch die neuen Variablen wird der Querschnittssprung formal wie eine Mediengrenze beschrieben.

In den Querschnitten S_1 und S_2 sollen nur ebene Wellen vorliegen. Es wird der Fall mit einer einlaufenden harmonischen Welle von der Seite mit Index 1 betrachtet. Entsprechend wird der Ansatz

$$\begin{aligned} p'_{S,1}(t) &= A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{i\omega t} \\ p'_{S,2}(t) &= A_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

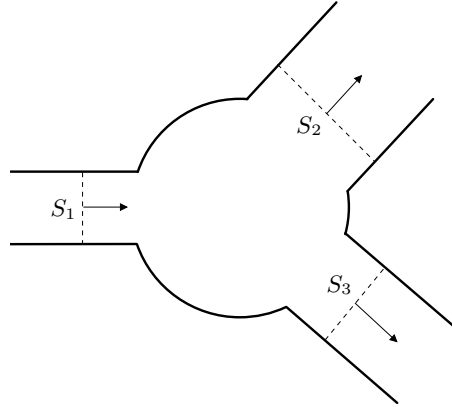


Abbildung 12.7: Verbindungsstelle dreier Kanäle

aufgestellt. Mit A_1 wird die Amplitude der einlaufenden Welle vorgegeben. Die Amplitude der reflektierten Welle B_1 und der transmittierten Welle A_2 sollen berechnet werden.

Für die Volumengeschwindigkeiten in den Kontrollflächen ergibt sich

$$U'_{S,1}(t) = A_1 \frac{S_1}{\rho_0 c} e^{i\omega t} - B_1 \frac{S_1}{\rho_0 c} e^{i\omega t} \quad (12.2.16)$$

$$U'_{S,2}(t) = A_2 \frac{S_2}{\rho_0 c} e^{i\omega t}$$

Einsetzen von (12.2.15) in (12.2.11) ergibt

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (12.2.17)$$

Aus (12.2.16) und (12.2.12) folgt

$$S_1 (A_1 - B_1) = S_2 A_2 \quad (12.2.18)$$

Damit führt die Beschreibung mit den neuen Variablen erwartungsgemäß auf die gleichen Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Amplituden B_1 und A_2 , wie sie schon im letzten Abschnitt hergeleitet wurden.

Bisher brachten die neuen Variablen nur eine geringe Vereinfachung der Beschreibung. Der Vorteil der neuen Methode wird deutlich, wenn kompliziertere Übergänge behandelt werden sollen. Zum Beispiel kann auch eine Verbindung von drei Rohren, wie sie in der Abbildung 12.7 dargestellt ist, einfach beschrieben werden. Sind die Kontrollflächen S_1 , S_2 und S_3 mit den entsprechenden Normalenvektoren wie in der Abbildung definiert, so muß im niederfrequenten Fall

$$U'_{S,1} = U'_{S,2} + U'_{S,3} \quad (12.2.19)$$

und

$$p'_{S,1} = p'_{S,2} = p'_{S,3} \quad (12.2.20)$$

gelten. Die Ansätze (12.2.15) und (12.2.16) müssen noch durch die beiden Gleichungen

$$p'_{S,3}(t) = A_3 e^{i\omega t} \quad (12.2.21)$$

und

$$U'_{S,3}(t) = A_3 \frac{S_3}{\rho_0 c} e^{i\omega t} \quad (12.2.22)$$

ergänzt werden. Wird eine einlaufende Welle von dem Rohr mit Index 1 vorgegeben, so ist A_1 bekannt. Jetzt müssen drei Unbekannte B_1 , A_2 und A_3 bestimmt werden. Dafür sind auch drei Gleichungen mit (12.2.19) und (12.2.20) gegeben, wobei letztere zwei Bedingungen enthält. Durch Einsetzen der Ansätze in (12.2.19) und (12.2.20) lassen sich die Unbekannten berechnen.

12.3 Der Helmholtz-Resonator

Ein wichtiges Anwendungsbeispiel, bei dem zusammengefaßte Parameter besonders gut verwendet werden können, ist der sogenannte Helmholtz-Resonator. Er besteht aus einem Volumen V , das mit einem offenen Rohr verbunden ist. Die Querschnittsfläche des Rohres ist S . Die Abbildung 12.8 zeigt schematisch die Anordnung. Das

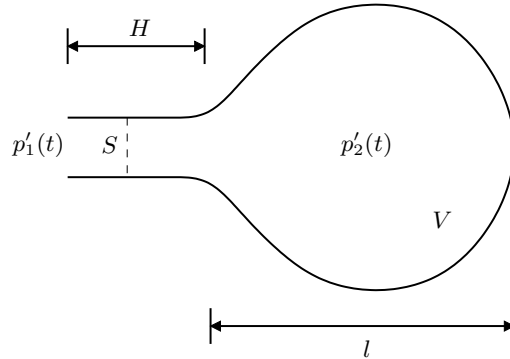


Abbildung 12.8: Helmholtz-Resonator mit Hals und Volumen

Rohrstück wird auch als Hals bezeichnet. Die Form des Volumens spielt keine Rolle, wenn niederfrequente Vorgänge betrachtet werden. Niederfrequent bedeutet, daß die Abmessungen – wie etwa die Ausdehnung l des Volumens, die Hals-Länge H und der Durchmesser des Halses – klein gegenüber der Wellenlänge sind.

Schwankt der äußere Druck $p'_1(t)$, so wird Medium durch das Rohr in das Volumen gedrückt. Die Masse des Mediums im Hals des Resonators wird zusammengefaßt.

Es wird angenommen, die Masse verhalte sich wie ein gleich schwerer Kolben oder Stopfen, der sich im Hals befindet. Die Bewegung des Medium außerhalb des Halses wird komplett vernachlässigt. Das Volumen wirkt wie eine pneumatische Feder. Wird der gedachte Stopfen in das Volumen gedrückt, so wird dort das Medium komprimiert und es ergibt sich eine Rückstellkraft. Das vereinfachte Modell des Resonators ist in der Abbildung 12.9 skizziert. Die Masse des Mediums im Hals ist gleich $\rho_0 H S$. Es

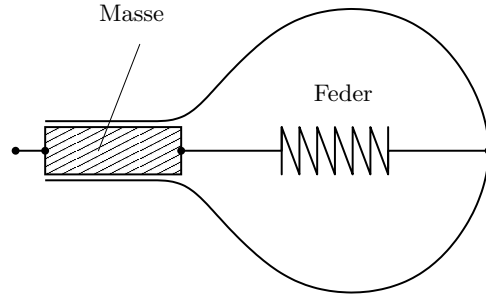


Abbildung 12.9: Prinzipskizze des Helmholtz-Resonators

wird die Anregung des Resonators mit einer vorgegebenen Frequenz ω betrachtet. Die Dichte und der Druck im Volumen V werden als räumlich konstant angenommen.

Wenn die Dichte ρ'_2 im inneren des Volumens schwankt, so ändert sich die Masse im Volumen. Da eine räumlich konstante Verteilung angenommen wurde, ergibt sich für die Schwankung der Masse

$$V \frac{d\rho'_2}{dt} = \rho_0 U'_S(t) \quad (12.3.1)$$

Die Volumengeschwindigkeit $U'_S(t)$ gibt den Volumenstrom durch eine Querschnittsfläche im Hals zum Beispiel in Liter pro Sekunde an. Auf der rechten Seite von (12.3.1) steht damit der momentane Massenstrom in das Volumen hinein. Dies muß der zeitlichen Änderung der Masse im Volumen entsprechen.

Es werden nur harmonische Störungen betrachtet. Damit kann für alle Größen ein entsprechender Ansatz aufgestellt werden. Insbesondere gilt

$$\rho'_2(t) = \hat{\rho}_2 e^{i\omega t} \quad (12.3.2)$$

und

$$U'_S(t) = \hat{U}_S e^{i\omega t} \quad (12.3.3)$$

Die mit dem Symbol $\hat{}$ gekennzeichneten Größen sind die komplexen Amplituden der Größen. Aus (12.3.1) folgt für die Amplituden

$$i\omega V \hat{\rho}_2 = \rho_0 \hat{U}_S \quad (12.3.4)$$

Diese Beziehung repräsentiert sozusagen die Massenerhaltung. Für die Impulserhaltung wird die Kräftebilanz an dem gedachten Stopfen im Hals der Resonators betrachtet. Der Stopfen besitzt die Masse $\rho_0 H S$. Die momentane Geschwindigkeit des Stopfens wird mit u_{Stopfen} bezeichnet. Wenn sich der gedachte Stopfen reibungsfrei im Hals bewegen kann, muß

$$S(p'_1 - p'_2) = \rho_0 H S \frac{du_{\text{Stopfen}}}{dt} \quad (12.3.5)$$

gelten. Auf der rechten Seite steht die Masse des Stopfens multipliziert mit dessen Beschleunigung. Der Druck p'_1 wirkt von der äußeren Seite auf den Stopfen. Der Druck wird konstant auf der gesamten Querschnittsfläche angenommen. Von Innen wirkt p'_2 auf den Stopfen. Die linke Seite entspricht somit der resultierenden Druckkraft.

Die Geschwindigkeit des Stopfens kann durch die Volumengeschwindigkeit im Hals ausgedrückt werden. Es ist

$$u_{\text{Stopfen}} S = U'_S \quad (12.3.6)$$

Und für die Ableitungen ergibt sich

$$S \frac{du_{\text{Stopfen}}}{dt} = \frac{dU'_S}{dt} \quad (12.3.7)$$

Damit kann die Ableitung von u_{Stopfen} in (12.3.5) ersetzt werden. Im nächsten Schritt soll aus (12.3.5) eine Beziehung für die komplexen Amplituden abgeleitet werden. Es gelten die Ansätze

$$p'_1(t) = \hat{p}_1 e^{i\omega t} \quad (12.3.8)$$

$$p'_2(t) = \hat{p}_2 e^{i\omega t}$$

Durch Einsetzen der harmonischen Ansätze folgt aus (12.3.5) die Gleichung

$$S(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \rho_0 H i\omega \hat{U}_S \quad (12.3.9)$$

Mit (12.3.4) und (12.3.9) sind zwei Beziehungen zwischen den komplexen Amplituden \hat{p}_1 , \hat{p}_2 , $\hat{\rho}_2$ und \hat{U}_S gegeben. Ist die Druckstörung außerhalb des Resonators vorgegeben, so ist \hat{p}_1 bekannt. Um die restlichen drei Größen daraus berechnen zu können, fehlt noch eine weitere Gleichung. Diese kann aus der allgemeinen Druck-Dichte-Beziehung

$$p'_2 = c^2 \rho'_2 \quad (12.3.10)$$

abgeleitet werden. Es gilt entsprechend

$$\hat{p}_2 = c^2 \hat{\rho}_2 \quad (12.3.11)$$

Damit kann $\hat{\rho}_2$ in (12.3.4) durch \hat{p}_2 ersetzt werden. Es folgt

$$\hat{p}_2 = \frac{c^2 \rho_0 \hat{U}_S}{i\omega V} \quad (12.3.12)$$

Setzt man dies in (12.3.9) ein, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\hat{p}_1 = \left\{ \frac{i\omega\rho_0 H}{S} + \frac{c^2\rho_0}{i\omega V} \right\} \hat{U}_S \quad (12.3.13)$$

Die Größe in der geschweiften Klammer ist eine komplexe Zahl, die von der Frequenz und den Parametern des Resonators abhängt. Sie gibt das Verhältnis des Drucks und der Volumengeschwindigkeit am Eingang des Resonators an. Damit stellt die Größe in der geschweiften Klammer eine Impedanz bezüglich der zusammengefaßten Parameter p'_S und U'_S dar. Der äußere Druck p'_1 wurde konstant über den gesamten Querschnitt angenommen und entspricht damit dem mittleren Druck über der Fläche S am Eintritt. Es ist

$$p'_1 = p'_S \quad (12.3.14)$$

und der Quotient

$$\frac{\hat{p}_1}{\hat{U}_S} = Z_{S,\text{HR}} \quad (12.3.15)$$

entspricht der Impedanz des Helmholtz-Resonators (HR), die mit $Z_{S,\text{HR}}$ bezeichnet ist. Durch Umformen der geschweiften Klammer ergibt sich

$$Z_{S,\text{HR}} = \frac{i\rho_0 H}{\omega S} \left[\omega^2 - \frac{c^2 S}{VH} \right] \quad (12.3.16)$$

Diese Darstellung zeigt, daß die Impedanz bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{c^2 S}{VH}} \quad (12.3.17)$$

verschwindet. Für eine vorgegebene Druckamplitude \hat{p}_1 ergibt sich eine unendliche große Amplitude der Volumengeschwindigkeit \hat{U}_S . In diesem Fall spricht man von einer Resonanzkatastrophe. Diese tritt jedoch nur ein, wenn die Impedanz $Z_{S,\text{HR}}$ die ideale Form (12.3.16) besitzt. In der Realität gibt es immer Reibungseffekte. Zusätzlich spielen bei größeren Amplituden auch Nichtlinearitäten eine Rolle. Würde man Reibung in dem einfachen Modell mit berücksichtigen, so würde $Z_{S,\text{HR}}$ einen zusätzlichen Realteil besitzen. Im Resonanzfall wird die Impedanz dann nicht mehr gleich Null. Die Amplitude bleibt durch die Reibung begrenzt.

Wird eine berechnete Resonanzfrequenz durch experimentelle Untersuchungen überprüft, so liegt der reale Werte typischerweise etwas niedriger. Die Ursache dafür ist in der relativ einfachen Modellierung der bewegten Masse als einfacher Stopfen zu sehen. Die tatsächliche Form des Schallfeldes kann im Detail recht kompliziert sein. Auf empirische Weise lassen sich jedoch für einfache Geometrien Korrekturen ermitteln. So läßt sich eine bessere Vorhersage der Resonanzfrequenz erhalten, wenn die Halslänge H etwas größer als der tatsächlich Wert angenommen wird. Die notwendige Verlängerung wird üblicherweise als Mündungs- oder Endkorrektur bezeichnet. Mündungskorrekturen wurden empirisch für verschiedenste Querschnittsformen (rund oder eckig) und Austrittskonfigurationen (frei im Raum oder eingelassen in eine ebene Wand) ermittelt.

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

Als Beispiel soll die Resonanzfrequenz einer leeren Bierflasche berechnet werden. Das Volumen der Flasche ist

$$V = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \quad (0.5 \text{ Liter}) \quad (12.3.18)$$

Die Querschnittsfläche wird mit

$$S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (2 \text{ cm}^2) \quad (12.3.19)$$

abgeschätzt. Für die Halslänge wird

$$H = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (5 \text{ cm}) \quad (12.3.20)$$

angenommen. Mit der Schallgeschwindigkeit von $c = 340 \text{ m/s}$ ergibt sich eine Resonanzfrequenz von

$$\omega_{\text{res}} \approx 1000 \frac{1}{\text{Sec}} \quad (12.3.21)$$

Dies entspricht

$$f_{\text{Res}} \approx 150 \text{ Hz} \quad (12.3.22)$$

Ein Ton mit dieser Frequenz ist zu hören, wenn mit dem Mund über die Öffnung der Flasche geblasen wird. Die Strömung löst an der Kante ab und erzeugt Druckschwankungen. Diese Störungen sind breitbandig und enthalten unter anderem auch die Resonanzfrequenz. Als Antwort auf die Störungen reagiert der Resonator mit einer besonders kräftigen Oszillation mit der Resonanzfrequenz.

Helmholtz-Resonator als Schalldämpfer

Im folgenden soll die praktische Anwendung des Helmholtz-Resonators als Schalldämpfer vorgestellt werden. Betrachtet wird eine Anordnung, wie sie in der Abbildung 12.10 skizziert ist. An einer Verbindungsstelle von zwei Rohren ist ein Helmholtz-Resonator angeschlossen. In der Zeichnung sind die Querschnitte der beiden Rohre gleich darge-

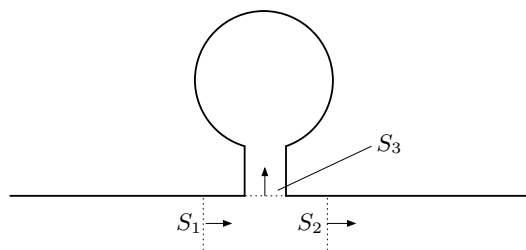


Abbildung 12.10: Kanal mit angeschlossenem Resonator

stellt. Die formale Betrachtung schließt jedoch auch dem Fall mit ein, daß die Querschnitte unterschiedlich sind.

Untersucht wird der Fall einer einlaufenden Welle von der linken Seite. Die Welle soll harmonisch sein und die Frequenz ω besitzen. Betrachtet werden wieder die zusammengefaßten Parameter in drei ausgewählten Querschnitten S_1 , S_2 und S_3 . Die ersten beiden schließen den Anschlußbereich des Resonators nach beiden Seiten ab. Dort soll das Schallfeld ebene Wellen entsprechen. Der Querschnitt S_3 liegt am Eingang des Oszillators. Es können die Ansätze

$$p'_{S,1}(t) = \hat{p}_{S,1} e^{i\omega t} \quad (12.3.23)$$

und

$$U'_{S,1}(t) = \hat{U}_{S,1} e^{i\omega t} \quad (12.3.24)$$

verwendet werden. Analog gilt dies auch für die Größen mit den Indizes 2 und 3.

Wie bei der Behandlung der Verbindung von Rohren mit verschiedenen Durchmessern wird die Amplitude der einfallenden mit A_1 und die der reflektierten Welle mit B_1 bezeichnet. Die Amplitude der transmittierten Welle im Querschnitt S_2 ist A_2 , und A_3 entspricht dem Druck am Eingang des Resonators. Es gilt

$$\begin{aligned} p'_{S,1}(t) &= (A_1 + B_1) e^{i\omega t} \\ p'_{S,2}(t) &= A_2 e^{i\omega t} \\ p'_{S,3}(t) &= A_3 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12.3.25)$$

Die Aufgabe ist es wieder für ein vorgegebenes A_1 die Größen B_1 , A_2 und A_3 zu berechnen.

Es wird angenommen die Ausdehnung des Anschlußbereiches ist klein gegenüber der Wellenlänge. Der Druck ist damit im gesamten Bereich näherungsweise konstant. Im niederfrequenten Grenzfall wird

$$p'_{S,1}(t) = p'_{S,2}(t) = p'_{S,3}(t) \quad (12.3.26)$$

Daraus folgt

$$\hat{p}_{S,1} = \hat{p}_{S,2} = \hat{p}_{S,3} \quad (12.3.27)$$

Dies läßt sich auch als

$$A_1 + B_1 = A_2 = A_3 \quad (12.3.28)$$

schreiben. Diese Gleichung stellt zwei Bedingungen zwischen den gesuchten Größen dar. Für die Bestimmung ist noch eine weitere Bedingung notwendig, die sich aus der Massenerhaltung ergibt.

Die Volumengeschwindigkeit U'_S ist in den drei Querschnitten durch den jeweiligen Ansatz für den Druck p'_S vorgegeben. Bei S_1 und S_2 müssen die Relationen für ebene Wellen gelten, die auch schon im vorangegangenen Abschnitt verwendet wurden. Im Querschnitt S_3 gilt

$$U'_{S,3}(t) = \hat{U}_{S,3} e^{i\omega t} = \frac{\hat{p}_{S,3}}{Z_{S,3}} e^{i\omega t} \quad (12.3.29)$$

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

Die Impedanz $Z_{S,3}$ ist die Impedanz des Resonators

$$Z_{S,3} = Z_{S,HR} \quad (12.3.30)$$

Es ergibt sich für die Volumengeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} U'_{S,1}(t) &= \frac{S_1}{\rho_0 c} (A_1 - B_1) e^{i\omega t} \\ U'_{S,2}(t) &= \frac{S_2}{\rho_0 c} A_2 e^{i\omega t} \\ U'_{S,3}(t) &= \frac{1}{Z_{S,3}} A_3 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (12.3.31)$$

Die Massenerhaltung lautet im niederfrequenten Fall bei der Wahl der Normalenvektoren wie in der Abbildung

$$U'_{S,1}(t) = U'_{S,2}(t) + U'_{S,3}(t) \quad (12.3.32)$$

Daraus folgt

$$\hat{U}_{S,1} = \hat{U}_{S,2} + \hat{U}_{S,3} \quad (12.3.33)$$

Durch Einsetzen der komplexen Amplituden aus (12.3.31) in (12.3.33) läßt sich die fehlende Beziehung zwischen den unbekannten Größen B_1 , A_2 und A_3 ableiten. Mit den drei Gleichungen lassen sich die gesuchten Größen nun bestimmen.

Im folgenden soll die Lösung des Gleichungssystem auf eine besondere Weise abgeleitet werden. Zunächst wird die Impedanz im Querschnitt S_1 betrachtet.

$$Z_{S,1} = \frac{\hat{p}_{S,1}}{\hat{U}_{S,1}} \quad (12.3.34)$$

Einsetzen der entsprechenden Amplituden aus (12.3.25) und (12.3.31) ergibt

$$Z_{S,1} = \frac{A_1 + B_1}{\frac{S_1}{\rho_0 c} (A_1 - B_1)} \quad (12.3.35)$$

Zur Abkürzung wird die Größe

$$Z_L = \frac{\rho_0 c}{S} \quad (12.3.36)$$

Sie stellt eine Impedanz der Rohre bei Wellenausbreitung in einer Richtung dar. Beispielsweise gilt

$$Z_{S,1} = \begin{cases} +Z_{L,1} & \text{falls } B_1 = 0 \\ -Z_{L,1} & \text{falls } A_1 = 0 \end{cases} \quad (12.3.37)$$

Mit der Abkürzung wird aus (12.3.35)

$$Z_{S,1} = \frac{A_1 + B_1}{\frac{1}{Z_{L,1}} (A_1 - B_1)} \quad (12.3.38)$$

Dies kann nach der gesuchten Größe B_1 aufgelöst werden. Es ergibt sich

$$B_1 = \frac{Z_{S,1} - Z_{L,1}}{Z_{S,1} + Z_{L,1}} A_1 \quad (12.3.39)$$

Der Quotient auf der rechten Seite wird zweckmäßigerweise wieder als Reflexionsfaktor

$$R = \frac{Z_{S,1} - Z_{L,1}}{Z_{S,1} + Z_{L,1}} \quad (12.3.40)$$

abgekürzt. Es gilt dann einfach

$$B_1 = R A_1 \quad (12.3.41)$$

Die Impedanz $Z_{S,1}$ repräsentiert die Eigenschaft des Systems rechts von der Querschnittsfläche S_1 mit dem angeschlossenen Helmholtz-Resonator.

Um den Reflexionsfaktor zu bestimmen, müssen die beiden Impedanzen $Z_{S,1}$ und $Z_{L,1}$ bekannt sein. Letztere kann mit (12.3.36) einfach aus der Querschnittsfläche und dem Wellenwiderstand bestimmt werden. Die Impedanz $Z_{S,1}$ kann man mit Hilfe der Gleichungen (12.3.27) und (12.3.33) berechnet werden. Im ersten Schritt wird (12.3.33) in (12.3.34) eingesetzt. Dann wird durch die Druckamplitude $\hat{p}_{S,1}$ dividiert, wobei die Gleichheit in (12.3.27) ausgenutzt wird. Es folgt

$$Z_{S,1} = \frac{\hat{p}_{S,1}}{\hat{U}_{S,2} + \hat{U}_{S,3}} = \frac{1}{\frac{\hat{U}_{S,2}}{\hat{p}_{S,2}} + \frac{\hat{U}_{S,3}}{\hat{p}_{S,3}}} \quad (12.3.42)$$

Die beiden Summanden im Nenner auf der rechten Seite sind die Kehrwerte der Impedanzen in den beiden Querschnitten S_2 und S_3 . Es gilt somit der Zusammenhang zwischen den Impedanzen

$$Z_{S,1} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{S,2}} + \frac{1}{Z_{S,3}}} \quad (12.3.43)$$

Um $Z_{S,1}$ zu berechnen müssen damit zuerst die Werte für $Z_{S,2}$ und $Z_{S,3}$ ermittelt werden. Da im Querschnitt S_2 nur die transmittierte Welle vorliegt, gilt einfach

$$Z_{S,2} = +Z_{L,2} = +\frac{\rho_0 c}{S_2} \quad (12.3.44)$$

Die Impedanz $Z_{S,3} = Z_{S,HR}$ erhält man bei vorgegebener Frequenz ω aus der Gleichung (12.3.16). Der Lösungsweg kann schließlich wie folgt zusammengefaßt werden:

- 1.) Berechnung der Impedanzen $Z_{S,2}$ und $Z_{S,3}$ aus den Parametern.
- 2.) Mit (12.3.43) ergibt sich daraus $Z_{S,1}$.
- 3.) Aus $Z_{S,1}$ und $Z_{L,1}$ kann mit (12.3.40) der Reflexionsfaktor R bestimmt werden.
- 4.) Bei vorgegebener Amplitude A_1 folgt mit (12.3.41) die Amplitude der reflektierten Welle B_1 .

12 Niederfrequente Wellenausbreitung in Kanälen

- 5.) Mit (12.3.27) können aus A_1 und B_1 schließlich auch A_2 und A_3 berechnet werden.

Eine besondere Situation ergibt sich für den Fall, daß die Frequenz der einlaufenden Welle gerade der Resonanzfrequenz des Resonators entspricht

$$\omega = \omega_{\text{res}} \quad (12.3.45)$$

In diesem Fall verschwindet nach (12.3.16) die Impedanz am Eingang des Resonators, und es gilt

$$Z_{S,3} = 0 \quad (12.3.46)$$

Daraus folgt nach (12.3.43) auch für die Impedanz des Systems

$$Z_{S,1} = 0 \quad (12.3.47)$$

In diesem Fall ergibt sich der Reflexionsfaktor

$$R = -1 \quad (12.3.48)$$

Der angeschlossene Resonator bewirkt, daß sich der Anschlußbereich wie eine ideal schallweiche Wand verhält. Diese Eigenschaft wird zum Bau von Schalldämpfern ausgenutzt. Soll in einem Rohr oder Kanal die Ausbreitung von Wellen einer bestimmte Frequenz verhindert werden, so bietet sich der Anschluß eines Resonators mit der entsprechenden Frequenz an. Die Wellen werden dann an dem Anschlußbereich zurückgeworfen.

In der Praxis wird die Wirkung eines Schalldämpfers mit der Durchgangsdämpfung („Transmission Loss“) erfaßt, die hier mit L_T bezeichnet wird. Diese Größe gibt die Pegelabsenkung bei dem Schalldurchgang an. Sie ist in dem betrachteten Fall mit

$$L_T = 10 \log_{10} \left\{ \frac{|A_1|^2}{|A_2|^2} \right\} \quad (12.3.49)$$

definiert. Der Quotient in der geschweiften Klammer hängt ausschließlich von dem Reflexionsfaktor R ab, denn es gilt nach (12.3.28) und (12.3.41)

$$A_2 = (1 + R) A_1 \quad (12.3.50)$$

Für den Fall $R = -1$ ergibt sich daher eine unendlich große Durchgangsdämpfung

$$L_T = \infty \quad (12.3.51)$$

Die Abbildung 12.11 zeigt für ein typisches Beispiel die Verläufe von R und L_T als Funktion der Frequenz ω . Die Frequenz ist mit der Resonanzfrequenz ω_{res} normiert.

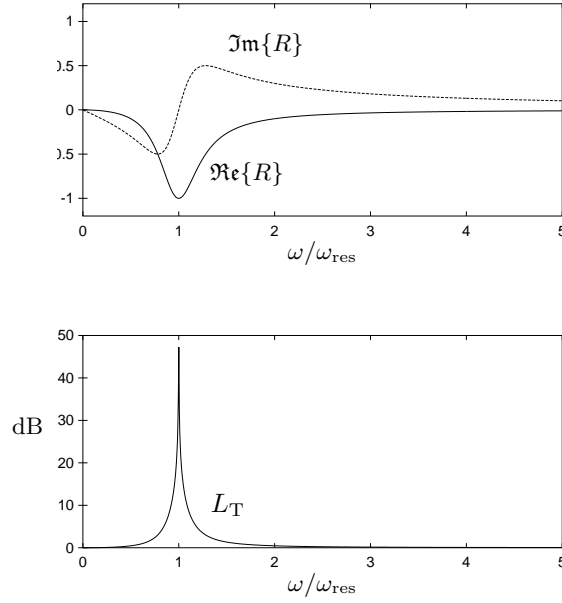


Abbildung 12.11: Komplexer Reflexionsfaktor (oben) und Durchgangsdämpfung (unten) als Funktion der Frequenz für den Schalldämpfer mit Helmholtz-Resonator.

12.4 Prinzip des Reflexionsschalldämpfers

In diesem Abschnitt wird die einfachste Form eines Schalldämpfertopfs ohne Strömung untersucht. Dieser ist zusammengesetzt aus zwei Übergängen, wie sie im Abschnitt 12.1 behandelt wurden. Die Anordnung ist in Abbildung 12.12 skizziert. Es wird angenommen, daß die Frequenz ω klein ist und sich nur ebene Wellen ausbreiten können. Die Wellenlänge sei groß gegenüber den Durchmessern d_1 und d_2 und der Länge der Übergänge. Die Länge L des Topfs ist keiner Einschränkung unterworfen. L kann größer als die Wellenlänge sein. Für die Druckverteilung wird der Ansatz

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{bei } 0 < x < L \\ p'_3(x, t) & \text{bei } x > L \end{cases} \quad (12.4.1)$$

mit

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{i(\omega t + kx)} \\ p'_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega t - kx)} + B_2 e^{i(\omega t + kx)} \\ p'_3(x, t) &= A_3 e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

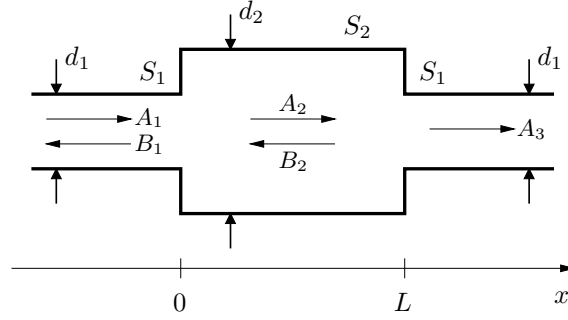


Abbildung 12.12: Kanal mit Erweiterung als Modell für Schalldämpfertopf.

verwendet. Gesucht sind die komplexen Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen B_1 und A_3 bei vorgegebener Amplitude A_1 der einlaufenden Welle. Unbekannt sind ebenfalls die Amplituden A_2 und B_2 der Wellen im Topf. Der Druckverteilung (12.4.1) und (12.4.2) entspricht die Schnelleverteilung

$$u'(x, t) = \begin{cases} u'_1(x, t) & \text{bei } x < 0 \\ u'_2(x, t) & \text{bei } 0 < x < L \\ u'_3(x, t) & \text{bei } x > L \end{cases} \quad (12.4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} u'_1(x, t) &= \frac{A_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \\ u'_2(x, t) &= \frac{A_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \\ u'_3(x, t) &= \frac{A_3}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

An den beiden Übergängen müssen jeweils zwei Bedingungen erfüllt sein. Dies ergibt insgesamt vier Bedingungen, um die vier unbekannten Amplituden zu bestimmen.

In dem niederfrequenten Fall muß der Druck auf beiden Seiten jedes Übergangs gleich sein. Es gilt also

$$p'_1(0, t) = p'_2(0, t) \quad (12.4.5)$$

$$p'_2(L, t) = p'_3(L, t) \quad (12.4.6)$$

Aus der Massenerhaltung an den Übergängen ergeben sich die Bedingungen

$$S_1 u'_1(0, t) = S_2 u'_2(0, t) \quad (12.4.7)$$

$$S_2 u'_2(L, t) = S_1 u'_3(L, t) \quad (12.4.8)$$

12.4 Prinzip des Reflexionsschalldämpfers

Im nächsten Schritt werden die Ansätze (12.4.2) und (12.4.4) in die vier Bedingungen eingesetzt. Dabei kann jeweils durch den Faktor $e^{i\omega t}$ auf beiden Seiten dividiert werden. Für den ersten Übergang bei $x = 0$ ergibt sich aus (12.4.5) und (12.4.7)

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (12.4.9)$$

$$S_1 (A_1 - B_1) = S_2 (A_2 - B_2) \quad (12.4.10)$$

Für den zweiten Übergang bei $x = L$ folgen die Gleichungen

$$A_2 e^{-ikL} + B_2 e^{+ikL} = A_3 e^{-ikL} \quad (12.4.11)$$

$$S_2 (A_2 e^{-ikL} - B_2 e^{+ikL}) = S_1 A_3 e^{-ikL} \quad (12.4.12)$$

Die Beziehungen (12.4.11) und (12.4.12) sind komplizierter als (12.4.9) und (12.4.10), da in ihnen der Faktor $e^{\pm ikL}$ auftritt. Ein Auflösen der vier Gleichungen ist daher nur in vielen Zwischenschritten möglich, die hier aus Platzgründen nicht abgedruckt werden können.

Letztlich lassen sich durch geeignetes Einsetzen der Gleichungen die Unbekannten A_2 , B_2 und A_3 eliminieren, und es ergibt sich eine Beziehung der Form

$$B_1 = R A_1 \quad (12.4.13)$$

Dabei ist R bereits die Abkürzung für den Reflexionsfaktor der gesamten Anordnung, der die Form

$$R = \frac{\left(\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_2}{S_1}\right) i \sin(kL)}{2 \cos(kL) + i \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) \sin(kL)} \quad (12.4.14)$$

besitzt. Auf analoge Weise läßt sich eine Gleichung der Gestalt

$$A_3 = T A_1 \quad (12.4.15)$$

mit dem Transmissionsfaktor

$$T = \frac{2 e^{ikL}}{2 \cos(kL) + i \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) \sin(kL)} \quad (12.4.16)$$

herleiten.

Der Reflexions- und der Transmissionsfaktor hängt nicht nur von den Querschnittsflächen S_1 und S_2 sondern auch von dem Faktor

$$kL = \frac{\omega L}{c} \quad (12.4.17)$$

ab. Das bedeutet, die Reflexion ist frequenzabhängig. Zusätzlich ist der Abstand L zwischen den Übergängen wichtig. Bei

$$kL = n\pi \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.4.18)$$

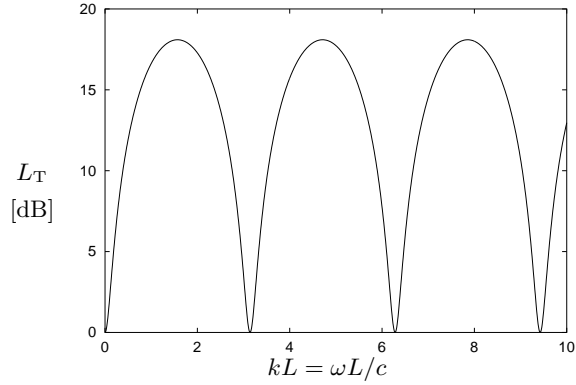


Abbildung 12.13: Durchgangsdämpfung des Reflexionsschalldämpfers als Funktion der Frequenz

ergibt sich die besondere Situation, daß $R = 0$ und $T = 1$ wird. Für die Frequenz muß dazu

$$\omega = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.4.19)$$

gelten. In diesem Fall wird nichts reflektiert und die transmittierte Welle besitzt die gleiche Amplitude und Phase wie die einlaufende Welle. Das aus den beiden Übergängen bestehende System ist scheinbar für die einlaufende Welle gar nicht vorhanden. Die Welle kann ungestört passieren.

Durch die hin und herlaufenden Wellen im Topf besteht eine Koppelung zwischen den Übergängen. Die Wirkung der einzelnen Übergänge addiert sich nicht einfach zur Gesamtwirkung des Systems. Bei bestimmten Frequenzen ist die transmittierte Welle besonders stark und bei anderen besonders schwach.

Für die Praxis ist die Durchgangsdämpfung, die hier mit

$$L_T = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{|A_1|^2}{|A_3|^2} \right) \quad (12.4.20)$$

gegeben ist, von Interesse. Mit (12.4.15) und (12.4.16) erhält man

$$L_T = 10 \log_{10} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \sin^2(kL) \right] \quad (12.4.21)$$

Ein typische Verlauf der Durchgangsdämpfung als Funktion des Faktors kL ist in der Abbildung 12.13 dargestellt. Für die Frequenzen, die die Bedingung (12.4.19) erfüllen, wird $L_T = 0$. Dazwischen ergeben sich Bereiche mit maximaler Durchgangsdämpfung.

Die Bedingung, ob besonders gute Durchgangsdämpfung vorliegt oder nicht, kann

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

veranschaulicht werden. Dazu wird die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (12.4.22)$$

betrachtet. Einsetzen von (12.4.19) ergibt, daß bei

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (12.4.23)$$

$L_T = 0$ wird. Wenn der Abstand L gerade dem Vielfachen der halben Wellenlänge entspricht, wird also nichts reflektiert und die einlaufende Welle wird unverändert transmittiert. Dagegen ist die Durchgangsdämpfung besonders groß wenn

$$kL = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots \quad (12.4.24)$$

gilt. Dies ist bei

$$L = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots \quad (12.4.25)$$

erfüllt.

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

Es soll die Ausbreitung von Wellen in einem durchströmten Kanal mit veränderlichem Querschnitt betrachtet werden, wie er in Abbildung 12.14 dargestellt ist. Es wird von einer stationären Grundströmung ausgegangen. In dem Strömungsfeld breiten sich die Störungen als Wellen aus. Für die Strömung werden weitere Annahmen gemacht:

- Links und rechts von dem Übergangsbereich (mit der Ausdehnung l) liegt jeweils eine homogene Strömung mit ebenen Geschwindigkeitsprofilen vor.
- Die Grenzschicht und andere Reibungseffekte sowie die Wärmeleitung können vernachlässigt werden.
- Die Strömung ist ablösefrei auch im Übergangsbereich.
- Im gesamten Feld herrscht Unterschall mit einer Machzahl $M < 1$.
- Die Grundströmung ist bekannt (z.B. aus Messung oder Rechnung).

Wie im Fall ohne Strömung wird eine relativ niedrige Frequenz ω vorausgesetzt, so daß die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ groß gegenüber den Durchmessern d_1 und d_2 und der Ausdehnung l ist. Die kann formal durch

$$\lambda \gg d_1 ; \lambda \gg d_2 ; \lambda \gg l \quad (12.5.1)$$

ausgedrückt werden. Zu beachten ist, daß die Schallgeschwindigkeit im Strömungsfeld vom Ort abhängen kann, da die Dichte und der Druck in der Grundströmung räumlich variieren. Damit ist bei gegebener Frequenz ω auch λ vom Ort abhängig.

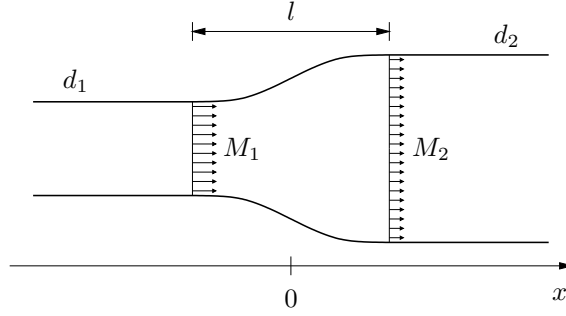


Abbildung 12.14: Schematische Darstellung des durchströmten Übergangs

Aus (12.5.1) folgt, daß sich nur ebene Wellen ausbreiten können, und der gesamte Übergangsbereich kann als Punkt mit vernachlässigbaren Volumen quasi-statisch betrachtet werden. Zur Beschreibung der Schwankungen außerhalb des Übergangs wird das Druckfeld mit

$$p(x, t) = p_0(x) + p'(x, t) \quad (12.5.2)$$

in einen Gleichanteil, der vom Ort abhängt, und einen Schwankungsanteil zerlegt. Der Gleichanteil ändert sich nur im Übergang. Entsprechend gilt einfach

$$p_0(x) = \begin{cases} p_{0,1} & \text{für } x < 0 \\ p_{0,2} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (12.5.3)$$

Der Schwankungsanteil beschreibt die laufenden Wellen. Es wird wie üblich eine von links einlaufende Welle angenommen. Dadurch kann sich eine reflektierte und eine transmittierte Welle ergeben. Folglich werden die Druckschwankungen in der Form

$$p'(x, t) = \begin{cases} p'_1(x, t) & \text{für } x < 0 \\ p'_2(x, t) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (12.5.4)$$

mit

$$\begin{aligned} p'_1(x, t) &= A_1 e^{i(\omega t - \alpha_1^+ x)} + B_1 e^{i(\omega t + \alpha_1^- x)} \\ p'_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega t - \alpha_2^+ x)} \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

ausgedrückt. Wie in Abschnitt 12.1 berücksichtigt dieser Ansatz nicht die komplexen Vorgänge im Übergangsbereich. Es werden überall ebene Wellen angenommen und entsprechend hängt der Schalldruck p' nur von einer Koordinate x ab.

Im Gegensatz zum Fall ohne Strömung sind die Wellenzahlen von der Strömungsgeschwindigkeit beziehungsweise der Machzahl abhängig. Die Wellenzahlen ergeben

sich aus Überlegungen, die zur Schallausbreitung in zweidimensionalen Kanälen mit homogener Strömung durchgeführt wurden. Dabei wurde die Beziehung

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega_B}{c}\right)^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_R - \alpha U}{c}\right)^2 - \beta^2} \quad (12.5.6)$$

abgeleitet. Mit ω_B und ω_R sind die Frequenzen im mitbewegten (B) und ruhendem (R) Bezugssystem bezeichnet. α und β sind die Wellenzahlen in Kanalrichtung und senkrecht dazu. Mit U ist die Strömungsgeschwindigkeit gegeben. Hier breiten sich nur ebene Wellen aus, und entsprechend ist $\beta = 0$. Löst man (12.5.6) nach α auf, ergeben sich zwei Lösungen:

$$\alpha^\pm = \frac{\omega_R}{c} \frac{1}{M \pm 1} \quad (12.5.7)$$

Die (+)-Lösung gilt für Wellen in Strömungsrichtung und die (-)-Lösung für entgegenlaufende Wellen. Dabei ist die Machzahl mit $M = U/c$ als Abkürzung verwendet worden. In der jetzigen Betrachtung entspricht ω_R der "normalen" Frequenz ω . Die Geschwindigkeit der Grundströmung U wird weiter unten mit u_0 bezeichnet. Zu beachten ist, daß diese Größen in den Gebieten links und rechts vom Übergang unterschiedlich sind. So sind insgesamt vier Wellenzahlen α mit

$$\alpha_1^\pm = \frac{\omega}{c_1} \cdot \frac{1}{M_1 \pm 1} \quad \text{und} \quad \alpha_2^\pm = \frac{\omega}{c_2} \cdot \frac{1}{M_2 \pm 1} \quad (12.5.8)$$

beteiligt. Die Größen für das jeweilige Gebiet sind dabei mit den Indizes 1 beziehungsweise 2 gekennzeichnet. Auch die Schallgeschwindigkeit hängt von dem Ort ab. Jedoch ist die Frequenz überall gleich. Bei einer vorgegebenen Frequenz ergeben sich demnach unterschiedliche Wellenzahlen und damit auch unterschiedliche Wellenlängen in den beiden Gebieten. Diese hängen von der Ausbreitungsrichtung und den Zustandsgrößen in der Grundströmung ab. Für die Berechnung der Reflexions- und Transmissionsfaktoren am Übergang sind die Wellenzahlen allerdings nicht erforderlich.

Massenerhaltung

Wie im Fall ohne Strömung werden wieder zwei Kontrollflächen S_1 und S_2 links und rechts von dem Übergangsbereich definiert, und eine Bilanz für Masse und Energie an den beiden Flächen aufgestellt. In Abbildung 12.15 ist die Situation skizziert. Ohne Grundströmung wird Masse nur durch die Wellen bewegt. Jetzt wird allein schon durch die Grundströmung Masse transportiert. Dies ist in der Bilanzgleichung zu berücksichtigen. Bei der Behandlung der Wellenausbreitung in ebenen Kanälen mit Strömung konnten viele Probleme dadurch umgangen werden, daß die Schallausbreitung im mitbewegten Bezugssystem betrachtet wurde. In diesem Bezugssystem liegt keine Grundströmung vor und die Lösung vereinfachte sich. Hier ist ein vergleichbares Vorgehen nicht möglich, da es keine ausgezeichnete Geschwindigkeit gibt. Man findet kein Bezugssystem, in dem an den beiden Kontrollflächen das Medium im Mittel ruht. Dies ist immer nur getrennt für eine der beiden Flächen möglich.

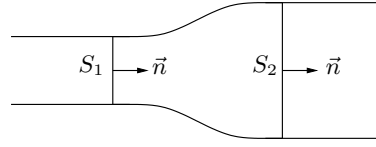


Abbildung 12.15: Zur Definition der Kontrollflächen

Es wird daher im folgenden die nichtlineare Massenbilanz aufgestellt und durch Linearisierung eine Bedingung für die Störungen abgeleitet. Dazu wird wieder mit zusammengefaßten Parametern gearbeitet. Diesmal wird jedoch nicht die Volumengeschwindigkeit sondern der Massenfluß μ durch einen Querschnitt verwendet. Seine Definition lautet

$$\mu = \int_S \rho \vec{v} \vec{n} dS \quad (12.5.9)$$

Sind – wie vorausgesetzt – an den Kontrollflächen nur ebene Wellen vorhanden, und die Kontrollflächen sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gewählt, so ist die Geschwindigkeit in der Kontrollfläche räumlich konstant. Dadurch vereinfacht sich (12.5.9) zu

$$\mu = S \rho u \quad (12.5.10)$$

wobei u die Geschwindigkeit in Kanalrichtung ist, die mit der Richtung des Normalenvektors \vec{n} übereinstimmt.

Die Größe μ wird mit

$$\mu = \mu_0 + \mu' \quad (12.5.11)$$

in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil zerlegt. Für die beiden Anteile wird die Gleichheit in den beiden Kontrollflächen S_1 und S_2 gefordert. Formal wird dies durch

$$\mu_{0,1} = \mu_{0,2} \quad (12.5.12)$$

und

$$\mu'_1 = \mu'_2 \quad (12.5.13)$$

ausgedrückt. Wenn für die Grundströmung die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist auch Bedingung (12.5.12) erfüllt. Der stationäre Massenfluß über die Querschnittsfläche S_1 muß dem in S_2 entsprechen. Die Bedingung (12.5.13) für die Schwankungen basiert auf der Annahme, daß in dem Kontrollvolumen keine nennenswerte Masse gespeichert werden kann. Die Schwankungen laufen quasi-stationär ab, da die Wellenlaufzeiten innerhalb des Volumens viel kleiner als die Periode der Schwankungen sind. Eine analoge Betrachtung wurde auch im Fall ohne Strömung in Abschnitt 12.1 durchgeführt.

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

Um aus der Bedingung für Schwankungen μ' des Massenflusses eine Gleichung für die gesuchten Amplituden der Druckwellen abzuleiten, muß μ' durch die Druckschwankung p' ausgedrückt werden. Dazu werden auch Dichte und Geschwindigkeit in einen Gleich- und einen Schwankungsanteil mit

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (12.5.14)$$

und

$$u = u_0 + u' \quad (12.5.15)$$

zerlegt. Für den Massenfluß über eine Kontrollfläche gilt (12.5.10). Durch Einsetzen ergibt sich daraus

$$\mu = S(\rho_0 + \rho')(u_0 + u') \quad (12.5.16)$$

Dies kann zu

$$\mu = \underbrace{S\rho_0 u_0}_{\mu_0} + \underbrace{S\rho_0 u' + S u_0 \rho'}_{\mu'} + \underbrace{S\rho' u'}_{2. \text{ Ord.}} \quad (12.5.17)$$

umgeformt werden. Der erste Term auf der rechten Seite entspricht dem Massenfluß μ_0 in der Grundströmung. Der zweite und dritte Term hängt linear von einer Schwankungsgröße ab. Diese beiden Terme werden als Schwankung μ' zusammengefaßt. Dabei wird der vierte Term vernachlässigt. Es ergibt sich

$$\mu' = S(u_0 \rho' + \rho_0 u') \quad (12.5.18)$$

Diese Beziehung gilt näherungsweise für kleine Störungen im akustischen Sinn.

Die Schwankungen der Dichte und der Geschwindigkeit stehen mit dem Druckschwankungen im Zusammenhang. Es gilt

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} \quad (12.5.19)$$

Um eine direkte Beziehung zwischen u' und p' zu erhalten, muß vorausgesetzt werden, daß sich nur Wellen in einer Richtung – entweder in (+) oder entgegen (–) der \vec{n} -Richtung – ausbreitet. Dann gilt

$$u' = \pm \frac{p'}{\rho_0 c} \quad (12.5.20)$$

Es sei hier nochmal darauf hingewiesen, daß es eigentlich auch c_0 im Nenner auf der rechten Seite lauten müßte. Der Index 0 wird jedoch an dem Symbol c üblicherweise weggelassen. Da die Schwankung der Schallgeschwindigkeit c' nie vorkommt, besteht keine Verwechslungsgefahr. Mit c ist immer die lokale Schallgeschwindigkeit im Ausgangszustand, der hier der Grundströmung entspricht, gemeint.

Aus den letzten drei Gleichungen ergibt sich eine Beziehung zwischen μ' und p' für eine ebene Welle, die sich in $\pm \vec{n}$ -Richtung ausbreitet. Man erhält

$$\mu' = S \frac{p'}{c} (M \pm 1) \quad (12.5.21)$$

wobei die Abkürzung

$$M = \frac{u_0}{c} \quad (12.5.22)$$

eingeführt wurde. Die Größe M ist die Machzahl der Grundströmung. Zu bemerken ist, daß M hier vorzeichenbehaftet definiert wurde und negativ werden kann, falls das Medium gegen die Normalenrichtung \vec{n} strömt.

Die Schwankung des Massenflusses an der Querschnittsfläche S_1 setzt sich aus einem Anteil durch die einlaufende Welle und einem durch die reflektierte Welle zusammen. Die Druckamplituden der beiden Teilwellen waren mit A_1 und B_1 bezeichnet worden. Entsprechend wird nacheinander $p' = A_1 e^{i\omega t}$ und $p' = B_1 e^{i\omega t}$ in (12.5.21) eingesetzt, und die resultierenden Schwankungen μ' addiert. Es ergibt sich

$$\mu'_1 = \frac{S_1}{c_1} [A_1(M_1 + 1) + B_1(M_1 - 1)] e^{i\omega t} \quad (12.5.23)$$

Auf der rechten Seite im Querschnitt S_2 liefert nur die transmittierte Welle einen Anteil. Die Druckamplitude in dieser Welle ist mit A_2 bezeichnet. Man erhält damit

$$\mu'_2 = \frac{S_2}{c_2} A_2(M_2 + 1) e^{i\omega t} \quad (12.5.24)$$

Die Massenbilanz für die quasi-statische Schwankung mit $\mu'_1 = \mu'_2$ ergibt damit eine Beziehung zwischen den gesuchten Größen. Es folgt

$$\frac{S_1}{c_1} [A_1(M_1 + 1) + B_1(M_1 - 1)] = \frac{S_2}{c_2} A_2(M_2 + 1) \quad (12.5.25)$$

Energieerhaltung

Um B_1 und A_2 bestimmen zu können fehlt eine weitere Beziehung. Diese wird wieder aus der Energiebilanz am Übergangsbereich abgeleitet. In Abschnitt 12.1 wurde gezeigt, daß im Fall ohne Strömung die Energieerhaltung zur Druckgleichheit am Übergang äquivalent ist. Mit Strömung ist die Situation komplizierter. Die Energieerhaltung in einem reibungsfreien Fluid wird durch die Bernoulli-Gleichung beschrieben. Da der Übergang als quasi-statisch angesehen werden kann, genügt es die Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömungen zu betrachten. Längs einer Stromlinie gilt

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} - \psi = \text{const} \quad (12.5.26)$$

Dabei bezeichnet ψ ein Potential, das zum Beispiel durch die Schwerkraft mit $\psi = -gz$ (z : Höhe) gegeben sein kann. Die Konstante hängt von dem Startpunkt der Integration ab. Insbesondere gilt Gleichung (12.5.26) entlang einer Stromlinie im Übergangsbereich, die einen Punkt im Querschnitt S_1 mit einem Punkt im Querschnitt S_2 verbindet. Um die Berechnungen nicht unnötig kompliziert zu machen, wird im folgenden die Schwerkraft vernachlässigt ($\psi \equiv 0$).

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Bernoulli-Gleichung mit einer thermodynamischen Variablen darzustellen. Um das Integral in (12.5.26) auswerten zu können, muß die Beziehung zwischen Druck und Dichte bekannt sein. Diese

hängt von Medium ab, und lautet zum Beispiel für Wasser ganz anders als für Luft. Wir beschränken uns hier auf Gase, die im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Für diese gilt die Beziehung

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp \quad (12.5.27)$$

wobei h die spezifische Enthalpie (pro Masse), T die Temperatur und s die Entropie bezeichnen. Bereits am Anfang wurde die Einschränkung gemacht, daß neben der Reibung auch die Wärmeleitung keine Rolle spielt. Damit ändert sich die Entropie in einem Fluidelement nicht, und alle Zustandsänderungen laufen adiabatisch ab. In der Strömung gilt also $ds = 0$, und das Integral in (12.5.26) entspricht einfach der spezifischen Enthalpie. Es kann

$$h = \int \frac{dp}{\rho} \quad (12.5.28)$$

geschrieben werden. Zu beachten ist, daß durch das unbestimmte Integral hier die Größe h nur bis auf einen konstanten Anteil gegeben ist. Allerdings spielt dieser Anteil keine Rolle und kann frei gewählt werden.

Die spezifische Enthalpie besitzt die Einheit "Energie pro Masse". Mit $\vec{v}^2/2$ ist die kinetische Energie pro Masse in der Strömung gegeben. Die ersten beiden Terme auf der linken Seite von (12.5.26) bilden also zusammen die spezifische Ruheenthalpie, die gelegentlich auch Gesamtenthalpie oder Kesselenthalpie genannt wird. Sie wird hier mit b bezeichnet. Es gilt

$$b = h + \frac{\vec{v}^2}{2} \quad (12.5.29)$$

Mit dieser thermodynamischen Variablen kann die Bernoulli-Gleichung in der einfachen Form

$$\frac{Db}{Dt} = 0 \quad (12.5.30)$$

ausgedrückt werden. Diese Beziehung gilt allgemein für stationäre isentrope Strömungen.

Um den Begriff der spezifischen Enthalpie etwas anschaulicher werden zu lassen, soll exemplarisch die Enthalpie für ein ideales Gas berechnet werden. In einem idealen Gas gilt bei adiabatischer Zustandsänderung die Beziehung

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{p}{p_*} \right)^{1/\kappa} \quad (12.5.31)$$

Dabei ist κ der Adiabatenexponent. Mit dem Index $*$ sind die Größen in einem festzulegenden Ausgangszustand bezeichnet. In unserem Fall würde sich zum Beispiel der Grundzustand in der Kontrollfläche S_1 als Ausgangszustand anbieten. Durch Umformung erhält man

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_*} \left(\frac{p}{p_*} \right)^{-1/\kappa} = \frac{1}{\rho_*} \left(\frac{1}{p_*} \right)^{-1/\kappa} p^{-1/\kappa} \quad (12.5.32)$$

Daraus ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\rho} dp &= \frac{1}{\rho_*} \left(\frac{1}{p_*} \right)^{-1/\kappa} p^{1-1/\kappa} \cdot \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right)^{-1} = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p_*}{\rho_*} \left(\frac{p}{p_*} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \\ &= \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p}{\rho}\end{aligned}\quad (12.5.33)$$

Die spezifische Enthalpie kann in dem idealen Gas also mit

$$h = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right) \frac{p}{\rho} \quad (12.5.34)$$

aus dem Druck und der Dichte berechnet werden.

Die spezifische Ruheenthalpie ist in den Kontrollflächen S_1 und S_2 jeweils konstant, weil alle Größen über den Querschnitten konstant sind. Da sich die Ruheenthalpie entlang einer Stromlinie zwischen den beiden Querschnitten nicht ändert, ist die Ruheenthalpie sogar im gesamten Übergangsbereich konstant. Zwischen den Werten in den beiden Kontrollflächen ergibt sich die einfache Beziehung

$$b_1 = b_2 \quad (12.5.35)$$

Dies gilt jedoch nur unter den gemachten Annahmen. Die quasi-statische Betrachtung der Strömung im Übergang ist Voraussetzung, daß die Bernoulli-Gleichung in der Form (12.5.26) angewendet werden kann. Die Vernachlässigung der Reibung ist nicht nur für die Bernoulli-Gleichung sondern auch für die Anwendung von (12.5.28) notwendig. Ebenso würden Verdichtungsstöße im Übergangsbereich zu einer Verletzung von (12.5.28) führen. In der angenommenen quasi-statischen Unterschallströmung können jedoch keine Stöße vorkommen.

Die Ruheenthalpie wird wie der Massenfluß in einen Gleich- und einen Schwingungsanteil zerlegt:

$$b = b_0 + b' \quad (12.5.36)$$

Aus der quasi-statischen Überlegung folgt, daß beide Anteile jeweils für sich in dem Übergangsbereich räumlich konstant sind. Es ist also

$$b_{0,1} = b_{0,2} \quad (12.5.37)$$

und

$$b'_1 = b'_2 \quad (12.5.38)$$

erfüllt. Aus der Bedingung (12.5.38) kann eine weitere Beziehung zwischen den gesuchten Druckamplituden abgeleitet werden. Dazu muß die Schwankung b' der Ruheenthalpie mit der Druckschwankung p' in Zusammenhang gebracht werden.

In dem Kontrollflächen S_1 und S_2 kann die Geschwindigkeit \vec{v} durch die Größe u ersetzt werden. Entsprechend lautet die Formel für die Ruheenthalpie

$$b = h + \frac{u^2}{2} \quad (12.5.39)$$

Für die Schwankungsanteile ergibt sich daraus

$$b' = h' + u_0 u' + \mathcal{O}(2) \quad (12.5.40)$$

Aus (12.5.28) folgt für die Schwankung der Enthalpie

$$h' = \frac{1}{\rho_0} p' + \mathcal{O}(2) \quad (12.5.41)$$

Das gleiche Resultat würde man auch aus (12.5.34) und der Beziehung $p' = c^2 \rho'$ herleiten können. Unter Vernachlässigung der Anteile höherer Ordnung gilt also

$$b' = \frac{1}{\rho_0} p' + u_0 u' \quad (12.5.42)$$

Um die Geschwindigkeitsschwankung u' durch den Druck ausdrücken zu können, wird wieder von reiner Wellenausbreitung in eine Richtung ausgegangen. Dann gilt Beziehung (12.5.20). Damit folgt

$$b' = \frac{1}{\rho_0} p' \pm u_0 \frac{p'}{\rho_0 c} = \frac{p'}{\rho_0} (1 \pm M) \quad (12.5.43)$$

Das (+)-Zeichen gilt für Wellen in Richtung des Normalenvektors \vec{n} (in x -Richtung) und das (-)-Zeichen entsprechend für entgegengesetzt laufende Wellen.

Die Schwankungen in der Querschnittsfläche S_1 ergeben sich aus der Überlagerung der einlaufenden und der reflektierten Welle. Für beide Wellen kann getrennt mit (12.5.43) die Ruheenthalpieschwankung durch die Druckschwankung ausgedrückt werden. Die gesamte Schwankung ergibt sich wieder durch Überlagerung der beiden Anteile. Man erhält

$$b'_1 = \frac{1}{\rho_0} [A_1(1 + M_1) + B_1(1 - M_1)] \cdot e^{i\omega t} \quad (12.5.44)$$

In dem Querschnitt S_2 trägt nur die transmittierte Welle zu den Schwankungen bei. Dort gilt

$$b'_2 = \frac{1}{\rho_0} A_2(1 + M_2) e^{i\omega t} \quad (12.5.45)$$

Die Energiebilanz für die quasistatischen Schwankungen mit $b'_1 = b'_2$ liefert schließlich

$$\frac{1}{\rho_0} [A_1(1 + M_1) + B_1(1 - M_1)] = \frac{1}{\rho_0} A_2(1 + M_2) \quad (12.5.46)$$

Mit (12.5.25) und (12.5.46) sind nun zwei Gleichungen für die beiden gesuchten Größen B_1 und A_2 gegeben. Damit läßt sich bei vorgegebener Druckamplitude A_1 der einlaufenden Welle die reflektierte und die transmittierte Welle berechnen.

Reflexionsfaktor

Bevor das Gleichungssystem gelöst wird, soll auf eine alternative Möglichkeit der Darstellung des Problems hingewiesen werden. Der Druck ist eine anschauliche Größe, die relativ leicht zu messen ist. Daher wird in der Darstellung oft alles auf den Druck bezogen. Im folgenden soll die Ruheenthalpie als Bezugsgröße verwendet werden. In der einlaufenden Welle wird nicht die Druckamplitude sondern die Amplitude der Ruheenthalpieschwankung vorgegeben. Sie wird mit $A_{b,1}$ bezeichnet. Gesucht sind die entsprechenden Amplituden in der reflektierten und der transmittierten Welle. Diese werden durch die Größen $B_{b,1}$ und $A_{b,2}$ dargestellt. Für die Schwankungen in den Querschnittsflächen S_1 und S_2 gilt entsprechend

$$b'_1 = (A_{b,1} + B_{b,1}) e^{i\omega t} \quad (12.5.47)$$

und

$$b'_2 = A_{b,2} e^{i\omega t} \quad (12.5.48)$$

Zwischen den Druckamplituden und den Amplituden der Größe b' gelten die Zusammenhänge

$$A_{b,1} = \frac{1}{\rho_{0,1}} A_1 (1 + M_1), \quad (12.5.49)$$

$$B_{b,1} = \frac{1}{\rho_{0,1}} B_1 (1 - M_1), \quad (12.5.50)$$

$$A_{b,2} = \frac{1}{\rho_{0,2}} A_2 (1 + M_2) \quad (12.5.51)$$

Eine Beziehung zwischen den gesuchten Größen ergibt sich aus der Energiebilanz am Übergang $b'_1 = b'_2$. Es folgt

$$A_{b,1} + B_{b,1} = A_{b,2} \quad (12.5.52)$$

Diese Gleichung ist formal deutlich einfacher als die entsprechende Beziehung (12.5.46) zwischen den Druckamplituden.

Aus der Massenbilanz läßt sich eine weitere Beziehung zwischen den neuen Amplituden ableiten. Vergleicht man die Gleichungen (12.5.21) und (12.5.43), so folgt für eine ebene Welle in $\pm \vec{n}$ -Richtung die Relation

$$b' = \pm \frac{c}{\rho_0 S} \mu' \quad (12.5.53)$$

Der Faktor vor μ' auf der rechten Seite kann als Impedanz interpretiert werden. Man definiert entsprechend

$$Z_b = \frac{b'}{\mu'} \quad (12.5.54)$$

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

Diese Größe unterscheiden sich natürlich von der akustischen Impedanz, die das Verhältnis von Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen angibt. In einer alternativen Darstellung mit den Parametern b' und μ' erweist sich die Impedanz Z_b als nützliche Größe. In einer reinen Welle in $\pm\vec{n}$ -Richtung gilt

$$Z_b = \pm \frac{c}{\rho_0 S} \quad (12.5.55)$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist sozusagen der Wellenwiderstand in der (b', μ') -Darstellung.

Mit (12.5.53) folgt für die Schwankungen des Massenflusses in den Kontrollflächen

$$\mu'_1 = \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_1 (A_{b,1} - B_{b,1}) e^{i\omega t} \quad (12.5.56)$$

und

$$\mu'_2 = \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_2 A_{b,2} e^{i\omega t} \quad (12.5.57)$$

Zu beachten ist, daß in (12.5.56) ein Minuszeichen vor der Amplitude $B_{b,1}$ auftritt.

Aus der Massenbilanz $\mu'_1 = \mu'_2$ folgt schließlich die Beziehung

$$\left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_1 (A_{b,1} - B_{b,1}) = \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_2 A_{b,2} \quad (12.5.58)$$

Diese Gleichung ist ebenfalls etwas einfacher als die entsprechende Beziehung (12.5.25) für die Druckamplituden.

Die Gleichungen (12.5.52) und (12.5.58) lassen sich nach $B_{b,1}$ und $A_{b,2}$ auflösen. Man erhält

$$B_{b,1} = R_b A_{b,1} \quad (12.5.59)$$

$$A_{b,2} = T_b A_{b,1} \quad (12.5.60)$$

Dabei ist der Reflexionsfaktor für die einlaufende Ruheenthalpiewelle mit

$$R_b = \frac{\left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_1 - \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_2}{\left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_1 + \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_2} \quad (12.5.61)$$

und der Transmissionsfaktor mit

$$T_b = 1 - R_b = \frac{2 \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_2}{\left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_1 + \left(\frac{\rho_0 S}{c} \right)_2} \quad (12.5.62)$$

gegeben. Betrachtet man die Reflexion an den durchströmten Querschnittssprung für den Schalldruck, ergeben sich durch Auflösen von (12.5.25) und (12.5.46) die analogen Beziehungen

$$B_1 = R A_1 \quad (12.5.63)$$

und

$$A_2 = T A_1 \quad (12.5.64)$$

Die Größen R und T ohne Index sind wie bisher der Reflexions- und der Transmissionsfaktor für die Druckwellen. Allerdings ergeben sich für diese Faktoren kompliziertere Ausdrücke. Man erhält

$$R = R_b \frac{(1 + M_1)}{(1 - M_1)} \quad (12.5.65)$$

und

$$T = (1 - R_b) \frac{\rho_{0,2}}{\rho_{0,1}} \frac{(1 + M_1)}{(1 + M_2)} \quad (12.5.66)$$

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren hängen von der Grundströmung ab. In die Größen R_b und T_b gehen neben den geometrischen Parametern die Dichte ρ_0 und die Schallgeschwindigkeit c ein. Die Größen R und T hängen zusätzlich noch von der Strömungsgeschwindigkeit ab. Anscheinend ist die (b', μ') -Darstellung besser zur Beschreibung der Aufgabenstellung geeignet, weil sie auf etwas einfachere Gleichungen führt. Sie hat jedoch den Nachteil, daß die Ruheenthalpie gegenüber dem Druck eine relativ unanschauliche Größe ist.

Zahlenbeispiel

Zuletzt soll ein Zahlenbeispiel vorgestellt werden. Es wird eine Querschnittsänderung mit

$$d_2 = 2 d_1$$

und

$$S_2 = 4 S_1$$

angenommen. Der Durchmesser verdoppelt sich, und die Fläche vervierfacht sich. Die Machzahl im breiten Teil wird mit $M_2 = 0.1$ vorgegeben. Es strömt ein ideales Gas mit $\kappa = 1.4$ (z.B. Luft). Daraus berechnet sich

$$M_1 = 0.448$$

Für die Dichte in der Grundströmung ergibt sich

$$\rho_{0,1} = 0.906 \rho_K \quad \text{und} \quad \rho_{0,2} = 0.995 \rho_K$$

12.5 Durchströmter Querschnittssprung

und die Schallgeschwindigkeiten werden mit

$$c_1 = 0.961 c_K \quad \text{und} \quad c_2 = 0.998 c_K$$

berechnet. Dabei sind die Werte auf die Ruhedichte ρ_K und die Ruheschallgeschwindigkeit c_K in der Strömung bezogen. Um den Reflexionsfaktor zu berechnen werden die Ausdrücke

$$\frac{\rho_{0,1} S_1}{c_1} = 0.943 \frac{\rho_K S_1}{c_K}$$

und

$$\frac{\rho_{0,2} S_2}{c_2} = 3.988 \frac{\rho_K S_1}{c_K}$$

berechnet. Daraus ergibt sich der Reflexionsfaktor für die Ruheenthalpiewelle mit

$$R_b = \frac{0.943 - 3.988}{0.943 + 3.988} = -0.617$$

Schließlich erhält man den Reflexionsfaktor für die Druckwelle mit

$$R = R_b \frac{1 + 0.448}{1 - 0.448} = -1.618$$

In diesem Beispiel hat die reflektierte Druckwelle eine größere Amplitude als die einlaufende Welle!

Sachverzeichnis

- Ansatz
 - harmonischer, 4, 120
- Beobachtungsmachzahl, 51, 60
- Beobachtungswinkel, 55, 59, 61
- Bernoulli-Gleichung, 168
- Bessel-Funktion, 124
- Besselsche Differentialgleichung, 121, 130
- Bezugssystem
 - mitbewegt, 87
- “Cut-Off”-Frequenz, 116, 135
- Dipol, 32
- Dipolfeld, 9
- Doppler-Faktor, 60
- Doppler-Verschiebung, 60
- Druckbauch, 117
- Durchgangsdämpfung, 158, 162
- Enthalpie
 - spezifische, 169
- Ersatzquellenmethode, 31
- Euler-Gleichung
 - linearisierte, 115
- Fernfeld, 67
 - geometrisches, 18
- Ffowcs Williams und Hawkings Gleichung von, 80, 93
- Fourier-Integralformel, 21
- Fourier-Transformierte, 21
- Frequenzverschiebung, 57
- Gammafunktion, 124
- Gas
 - ideales, 169
- Greensche Funktion, 46
- Greenscher Integralsatz, 5
- Grundmode, 117
- Hankel-Funktionen, 126
- Heaviside-Funktion, 76
- Helmholtz-Gleichung, 4, 120
 - inhomogene, 35
- Helmholtz-Resonator, 41, 150
- Helmholtz-Zahl, 20
- Impedanz, 147, 153, 156
- Impulsleichung, 78
- Impulsquelle
 - bewegte, 64
- Körperoberfläche
 - undurchlässige, 34
- Kanal
 - mit rechteckigem Querschnitt, 112
 - mit rundem Querschnitt, 127
 - mit veränderlichem Querschnitt, 138
- Kirchhoff-Helmholtz-Integral, 4, 8
- Kirchhoff-Integral, 24, 96, 101
- Knotenlinie, 132
- Knotenring, 132
- Kolben
 - in unendlich ausgedehnter Wand, 17
- Kontinuitätsgleichung, 77
- Kugelwelle, 4
- Lösungen
 - zylindersymmetrische, 120
- Lighthill-Gleichung, 76
 - erweiterte, 80, 93
- “Loading-Noise”, 106
- “Lumped Parameters”, 146

- Machscher Kegel, 61
- Machscher Winkel, 63
- Massenquelle
 - bewegte, 63
- Mediengrenze, 148
- Mode
 - im Kanal, 116
 - im Rohr, 132
- Monopol, 32
 - bewegter, 47
- Monopolfeld, 9
- Multipolentwicklung, 31

- Neumann-Funktion, 124
- Normalengeschwindigkeit, 75, 77

- Oberfläche
 - bewegte, 73, 74
 - lokal reagierend, 43

- Parameter
 - zusammengefaßte, 147
- Potential
 - akustisches, 11
- Propellergeräusche, 104

- Quadrupol, 32
- Quelle
 - bewegt mit Überschall, 54
 - bewegte, 47
- Quellverteilung
 - flächenhafte, 80
- Querschnittssprung
 - durchströmt, 163

- Randbedingung, 34
 - periodische, 130
- Randelementemethode, 26
- Reflexionsfaktor, 144, 157, 161, 173
- Resonanzfrequenz, 153
- Resonanzfrequenzen
 - im Quader, 119
- Reziprozitätsprinzip, 44
- Rohrende
 - offenes, 145
- Rotorgeräusche, 104

- Ruheenthalpie
 - spezifische, 169

- Schalldämpfer, 154
- Schalldämpfertopf, 159
- “Spinning Mode”, 133
- Strömungssimulation, 95

- “Thickness-Noise”, 107
- Transmissionsfaktor, 144, 161

- Überschallknall, 62

- Wand
 - lokal reagierende, 39
 - schallhart, 39, 114
 - schallweich, 39
- Wandimpedanz, 39
- Wellen
 - stehende, 126
- Wellengleichung, 112, 120
 - inhomogene, 8, 34, 47, 82
- Wellenwiderstand, 148
- Wellenzahlenl
 - im Kanal, 116
- Wellenzahlen
 - im durchströmten Kanal, 164
 - im Kanal, 114

- Zeit
 - retardierte, 47, 55, 82
- Zylinderkoordinaten, 120