# Experimentelle Teilchenphysik

## Vorlesungsskriptum

W. de Boer, A. Sopczak
S. Kappler

23. Juli 1999

Dieses Skriptum soll einen Überblick über die Themengebiete geben, die in der Vorlesung "Experimentelle Teilchenphysik" von Prof. Dr. W. de Boer und den Übungen von Dr. A. Sopczak abgehandelten werden. Ferner kann es einen Begleiter bei der Prüfungsvorbereitung darstellen.

Als Begleitliteratur zu Vorlesung und Übungen sind die Bücher von D. Griffiths [1], P. Schmüser [2] und F. Schwabl [3] zu nennen. Die neuesten Daten zur Teilchenphysik findet man im "Particle Data Booklet" [4] (s. Literaturverzeichnis).

Karlsruhe, 23. Juli 1999

Steffen Kappler

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einführung

## 1.1 Überblick über Theorien zur Beschreibung von Elementarteilchen

| | k l e i n ⇒ | |
|---|---|---|
| s | klassische Mechanik | Quantenmechanik |
| c | $F = ma$ | $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ |
| h | | |
| n | Spez. Relativitätstheorie | Relat. Quantenmechanik |
| e | $x' = \gamma(x + vt)$ | Klein-Gordon-Gln. |
| l | $t' = \gamma(t + vx/c^2)$ | Dirac-Gln. |
| l | $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ; $\beta = \frac{v}{c}$ | Proca-Gln. |
| ⇓ | | und Quantenfeldtheorie |
| | | Symmetrien |
| | | Eichtheorien |

## 1.2 Das Standardmodell

Das *Standardmodell* (SM) beschreibt die fundamentalen Teilchen und Wechselwirkungen. Es faßt alle bisher bekannten experimentellen Fakten zusammen und macht auch Vorhersagen über bisher unbekannte Teilchen. Es basiert auf einer Eichtheorie, in welcher renormierbare Parameter auftreten, die mit experimentell meßbaren Größen der Teilchen verglichen werden können. Nach dem heutigen Kenntnisstand besteht alle Materie und ihre Wechselwirkungen aus drei Sorten elementarer Teilchen: Leptonen, Quarks und Eichbosonen. Sie werden in den nächsten Abschhnitten vorgestellt.

### 1.2.1 Elementarteilchen

In den folgenden Tabellen werden die bis heute bekannten Elementarteilchen aufgeführt.

Zu den *Fermionen* zählen die *Quarks* und die *Leptonen*, welche in drei Familien mit je zwei Quarks und zwei Leptonen gegliedert sind. Hinzu kommen noch die jeweiligen Antiteilchen.

| | Name | Gen. | el.Lad. | Farbe | Spin | Masse ($1/c^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Quarks | $u$ up | 1. | $+2/3$ | r,g,b | 1/2 | 4 MeV |
| | $c$ charm | 2. | $+2/3$ | r,g,b | 1/2 | $1,23$ GeV |
| | $t$ top | 3. | $+2/3$ | r,g,b | 1/2 | 175 GeV |
| | $d$ down | 1. | $-1/3$ | r,g,b | 1/2 | $7,5$ MeV |
| | $s$ strange | 2. | $-1/3$ | r,g,b | 1/2 | 150 MeV |
| | $b$ bottom | 3. | $-1/3$ | r,g,b | 1/2 | $4,2$ GeV |
| Leptonen | $\nu_e$ e-neutrino | 1. | 0 | - | 1/2 | $\simeq 0$ |
| | $\nu_\mu$ $\mu$-neutrino | 2. | 0 | - | 1/2 | $\simeq 0$ |
| | $\nu_\tau$ $\tau$-neutrino | 3. | 0 | - | 1/2 | $\simeq 0$ |
| | $e$ electron | 1. | $-1$ | - | 1/2 | 511 keV |
| | $\mu$ myon | 2. | $-1$ | - | 1/2 | $105,7$ MeV |
| | $\tau$ tau | 3. | $-1$ | - | 1/2 | $1,777$ GeV |

Tabelle 1.1: Liste der elementaren Fermionen

Die *Austauschteilchen* der Wechselwirkungen hingegen sind *Bosonen* (Eichbosonen, force carriers). Das Graviton -das Austauschteilchen der Gravitation- ist nicht im Standardmodell enthalten, es wird aber aus Gründen der Vollständigkeit mit aufgeführt.

| | Sym. | Name | el. Lad. | Spin | Masse ($1/c^2$) |
|---|---|---|---|---|---|
| Eichbosonen | $\gamma$ | gamma | 0 | 1 | 0 |
| | $g$ | gluon | 0 | 1 | 0 |
| | $Z$ | Z-boson | 0 | 1 | $91,173$ GeV |
| | W$\pm$ | W-boson | $\pm 1$ | 1 | $80,220$ GeV |
| | | (graviton | 0 | 2 | 0 ) |

Tabelle 1.2: Liste der elementaren Bosonen

### 1.2.2 Ladungen und Wechselwirkungen

**Elektrische Ladung:** Es gibt positive und negative elektrische Ladungen, die mit gleichen Vorzeichen stoßen sich ab, die mit entgegengesetztem ziehen sich an. In der Natur kommen nur ganzzahlige Vielfache der elektrischen Einheitsladung, die der Ladung des Elektrons entspricht, vor.

**Schwache Ladung:** Für das "Zeug" was die schwache Wechselwirkung erzeugt gibt es wahrscheinlich deshalb keinen speziellen Namen, weil alle Quarks und Leptonen es besitzen.

**Farbladung:** Die Farbladung kann folgende Werte annehmen: $r, g, b$ sowie $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$. In der Natur kommen nur "weiße" Kombinationen vor wie Baryonen (z.B. $(u_r, u_g, d_b)$) oder Mesonen ( z.B. $(u_r, \bar{u}_{\bar{r}})$).

**Masse:** Die Rede ist hier im eigentlichen Sinne von der schweren Masse, die ja aber bekanntlich mit der trägen Masse identisch ist. Körper, die Masse tragen, ziehen sich gegenseitig an.

Welche Elementarteilchen welchen Ladungstyp tragen wurde bereits in den Tabellen (1.1) und (1.2) aufgelistet.

| Eichboson | Wechselwirkung | koppelt an ... | wirkt folglich auf ... |
|---|---|---|---|
| $\gamma$ | e.m. WW | elektrische Ladung | Quarks, Leptonen |
| Z, $W^{\pm}$ | schwache WW | schwache Ladung | Quarks, Leptonen |
| g | starke WW | Farbladung | Quarks |
| (graviton | Gravitation | Masse | Quarks, Leptonen) |

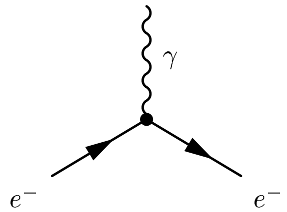
Tabelle 1.3: Liste der elementaren Wechselwirkungen

## 1.3 Feynman-Diagramme

Zur symbolischen Darstellung der Wechselwirkungen elementarer Teilchen werden *Feynman-Diagramme* verwendet. Hier soll ein kurzer Überblick gegeben werden, um ein Gefühl für die Sachlage zu vermitteln. Auf die Details zur Berechnung der Feynman-Diagramme werden wir in einem späteren Kapitel eingehen.

### 1.3.1 Die Quantenelektrodynamik (QED)

Alle e.m. Phänomene lassen sich letztendlich auf den folgenden elementaren Prozeß ($e^- \to e^- + \gamma$), den *primitiven Vertex*, reduzieren:



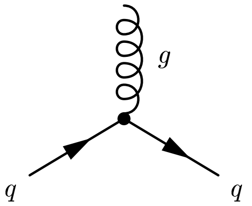

Nach heutzutage üblicher Konvention ist die Zeitachse nach rechts aufgetragen. Man beachte, daß diese Diagramme rein symbolischen Charakter besitzen und *keine* Teilchenspuren darstellen.

Um kompliziertere Prozesse zu beschreiben, fügen wir einfach zwei oder mehr Kopien dieses primitiven Vertex aneinender. Auch können einzelne Vertices in jede beliebige topologische Konfiguration gedreht werden. Stehen die Pfeile dann in *positiver* Zeitrichtung, so repräsentieren sie *Teilchen*, in *negativer* Zeitrichtung *Antiteilchen*.

Die "Innereien" des Diagramms sind für den beobachteten Prozeß irrelevant. *Innere* Linien (solche die innerhalb des Diagramms beginnen und enden) stehen für *virtuelle* Teilchen, die nicht beobachtet werden können, deren Beobachtung den Prozeß sogar stören würde. Nur *äußere* Linien (solche die in den Prozeß hinein- oder aus ihm herausragen) stehen für *reale* (beobachtbare) Teilchen. Aus Energie- und Impulserhaltung folgt, daß virtuelle Teilchen nicht dieselben Massen besitzen wie entsprechende freie Teilchen.

### 1.3.2 Die Quantenchromodynamik (QCD)

In der Quantenchromodynamik spielt die Farbe die Rolle der Ladung, und der fundamentale Prozeß ist $quark \rightarrow quark + g$:




Wie zuvor wird ein komplizierter Prozeß durch Kombination primitiver Vertices dargestellt. Allerdings bestehen zur QED einige Unterschiede. am auffälligsten ist wohl die Tatsache, daß es drei Arten Farbe gibt (r,g,b). Im Verlauf $quark \rightarrow quark + g$ kann ein Quark seine Farbe (aber nicht seinen Flavor) ändern. Da die Farbe immer erhalten ist, muß das Gluon die Differenz davontragen $u(b) \rightarrow u(r) + g(b, \bar{r})$. Gluonen sind demnach zweifarbig und tragen eine positive und eine negative Farbeinheit. Hierbei gibt es $3 \cdot 3 = 9$ verschiedene Möglichkeiten und man könnte 9 verschiedene Gluonen erwarten, tatsächlich gibt es aber nur 8. Auf die Gründe dafür werden wir später noch eingehen.

Da Gluonen selbst Farbe tragen koppeln sie auch untereinander, und wir erhalten zusätzlich zum fundamentalen Quark-Gluon-Vertex noch einfache Gluon-Gluon-Vertizes, nämlich die 3g-Vertizes und die 4g-Vertizes:

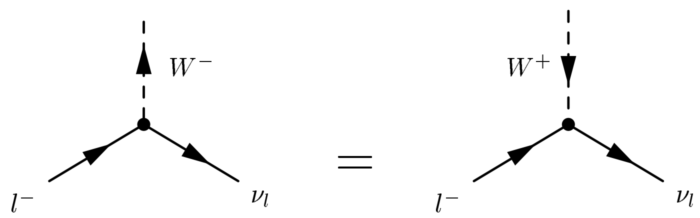
Durch Kombination von solchen Gluon-Gluon-Vertizes erhalten wir *Glueballs*, das sind gebundene Zustände wechselwirkender Gluonen ohne ein Quark weit und breit.

### 1.3.3 Die Schwache Wechselwirkung

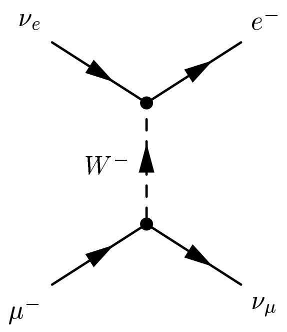
Es gibt zwei Arten schwacher Wechselwirkung, die geladene schwache Wechselwirkung (vermittelt durch $W^{\pm}$) und die neutrale schwache Wechselwirkung (vermittelt durch $Z$). Die Theorie ist bezüglich der Leptonen "sauberer" als für die Quarks, so wollen wir mit den Leptonen beginnen.

#### Die Schwache Wechselwirkung von Leptonen

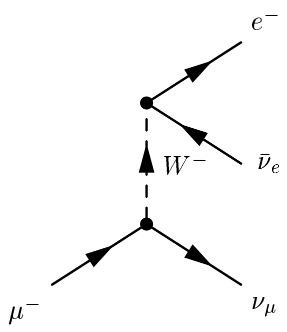
Der *fundamentale geladene Vertex* sieht folgendermaßen aus:



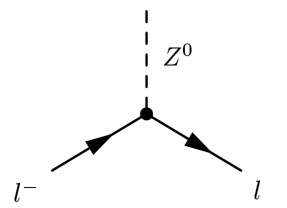
Ein negatives Lepton $(e, \mu, \tau)$ wandelt sich unter Aussendung eines $W^-$ (oder Absorption eines $W^+$) in das zugehörige Neutrino um (z.B. $e^- \to \nu_e + W^-$). Wie immer kombinieren wir primitive Vertizes um kompliziertere Reaktionen zu erzeugen. Der Prozeß $\mu^- + \nu_e \to e^- + \nu_\mu$ wird durch dieses Diagramm repräsentiert:



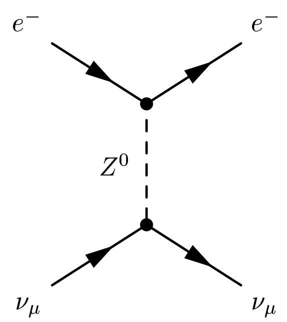

Solch ein Streuergebnis wäre im Labor schwer zu realiseren, aber mit einem kleinen Dreh beschreibt das im wesentlichen gleiche Diagramm den Zerfall eines Myons $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$, der ständig vorkommt:




Der *fundamentale neutrale Vertex* sieht hingegen folgendermaßen aus:



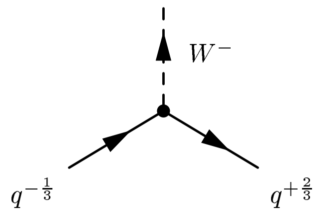

Dieser Vertex gilt für beliebige Leptonen. Das $Z$ vermittelt solche Prozesse als Neutrino-Elektron-Streuung $(\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-)$:



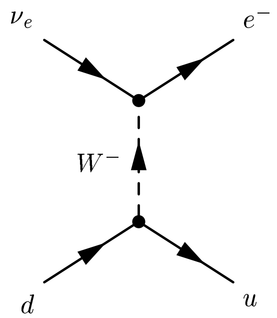
Bei der schwachen Wechselwirkung von Leptonen treten i.A. keine generationsüberschreitenden Prozesse auf.

### Die Schwache Wechselwirkung von Quarks

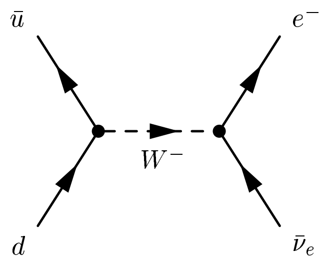
Man beachte, daß die *leptonisch* schwachen Vertizes Mitglieder *derselben Generation* verbinden. Dies führt leicht zur Annahme, daß dieselbe Regel auch auf die Quarks zutrifft, so daß der *fundamentale geladene Vertex* der folgende ist:



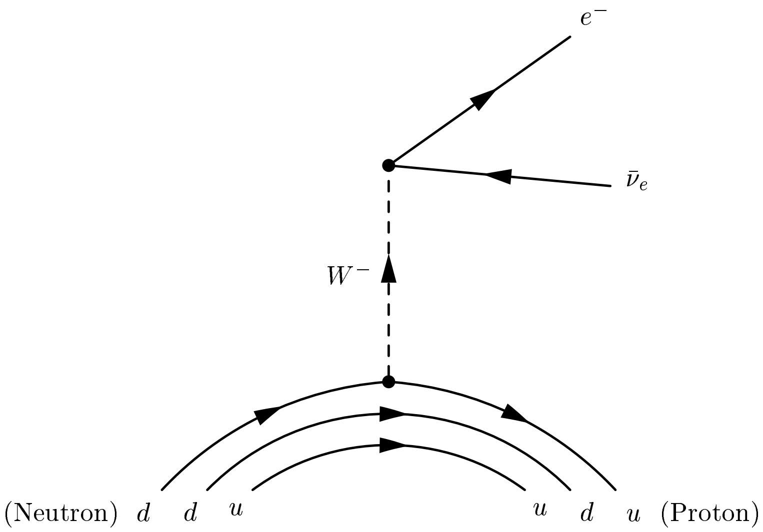

Da das $W^-$ nicht den "fehlenden" Flavor davontragen kann ist bei der schwachen Wechselwirkeung *Flavor* offensichtlich *keine Erhaltungsgröße*. Das andere Ende der $W^-$-Linie kann an Leptonen (semileptonischer Prozeß) oder andere Quarks koppeln (rein hadronischer Prozeß). Der wichtigste semileptonische Prozeß ist $d + \nu_e \to u + e$:



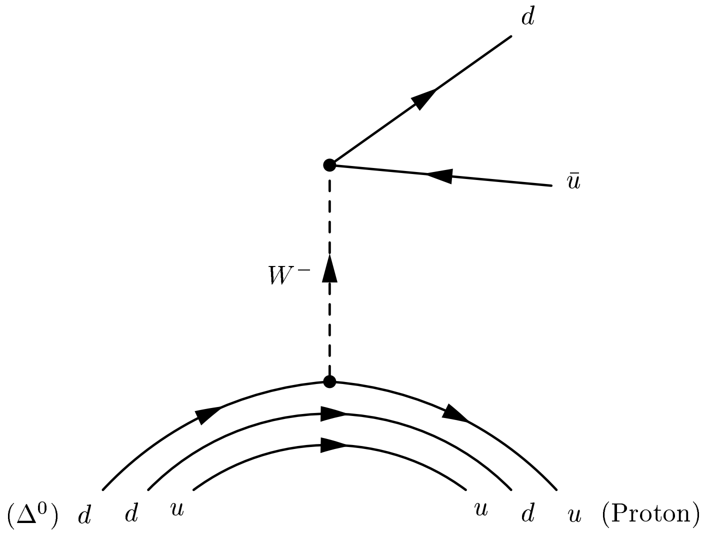

Wegen der Einschlußeigenschaft der Quarks (*Confinement*) würde dieser Prozeß -so wie er dasteht- in der Natur niemals auftreten. Auf die Seite gedreht gibt dieses Diagramm allerdings einen möglichen Zerfall des Pions $\pi^- = \bar{u} + d \to e^- + \bar{\nu}_e$ wieder:




Das im wesentlichen gleiche Diagramm steht für den Betazerfall des Neutrons $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$:

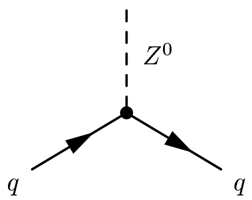



Wenn wir nun den Elektron-Neutrino-Vertex durch einen Quark-Vertex ersetzen, erhalten wir einen rein hadronischen Prozeß: $\Delta^0 \to p^+ + \pi^-$

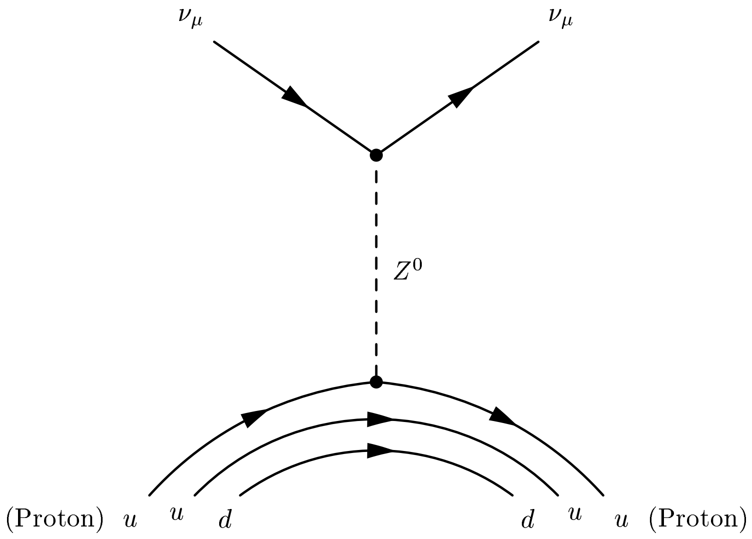



(Dieser Zerfall findet eigentlich über die starke Wechselwirkung statt. Der Beitrag durch die schwache Wechselwirkung liefert lediglich einen unmeßbar kleinen Beitrag.)

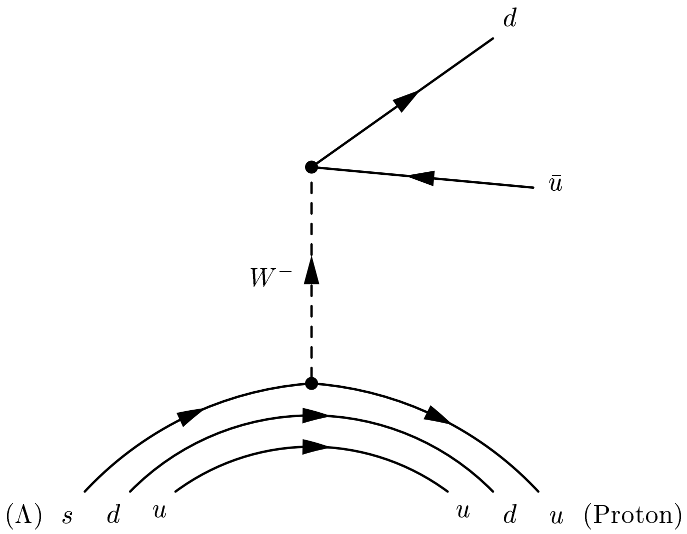
Der *fundamentale neutrale Vertex* für Leptonen erhält die Leptonenart. Wir nehemen an, daß sich dies bei den Quarks ebenso verhält:




Hieraus resultieren Neutrinoprozesse wie z.B. $\nu_\mu + p \to \nu_\mu + p$:




Bisher weisen die Quarks in der Handhabung außer der Einschlußeigenschaft der starken Wechselwirkung keine Besonderheiten gegenüber den Leptonen auf. Dieses Bild ist leider unvollständig, da wir so nie die Prozesse des $\Lambda$ ($\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$) erklären könnten, bei denen die Strangeness geändert wird:




Bei der schwachen Wechselwirkung von Quarks können also *generationsüberschreitende Prozesse* auftreten.

### 1.3.4 Schwache und e.m. Kopplungen von $\mathrm{W}^\pm$ und $\mathrm{Z}$

Es gibt in der GWS-Theorie auch direkte Kopplungen von $W^\pm$ und $Z$ aneinander. Darüberhinaus koppelt das W -weil es geladen ist- an das Photon. Obwohl diese Wechselwirkungen für die innere Konsistenz der Theorie kritisch sind, sind sie von (begrenzter) praktischer Bedeutung.

## 1.4 Konventionen und verwendete Maßeinheiten

In der Teilchenphysik ist es teilweise üblich, sich auf die Konvention

$$\hbar := c := 1 \tag{1.1}$$

zu einigen. In diesem Fall wird

- $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \to E^2 = p^2 + m_0^2$
- $[E]$ =GeV
- $[p]$ =GeV$/c \to [p]$ =GeV
- $[m]$ =GeV$/c^2 \to [m]$ =GeV
- $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-25}$GeV/s $\equiv 1 \to 1$ GeV= $\frac{10^{25}}{6,6}$s
- $c = 3 \cdot 10^8$m/s$\equiv 1 \to 1$ s= $3 \cdot 10^8$m
- $\hbar c \simeq$ 200MeV fermi (1fermi=$10^{-15}$m)

In diesem Skriptum werden -soweit es eine übersichtliche Darstellung zuläßt-die Konstanten $\hbar$ und $c$ mitgeführt.

## 1.5 Übungsaufgaben (Termin 1)

Zur Lösung der folgenden Aufgaben empfiehlt sich das Arbeiten mit dem "Particle Data Booklet" [4]. Ergänzende Informationen finden sich auch in Kapitel 2 von Griffiths Buch [1].

**Aufgabe 1.1**
Zeichnen Sie das Feynman-Diagramm niedrigster Ordnung, das die sog. *Delbruck-Streuung* $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$ wiedergibt. (Dieser Prozeß hat in der klassischen Elektrodynamik kein Analogon.)

**Aufgabe 1.2**
Zeichnen Sie alle Diagramme vierter Ordnung (vier Vertizes) für die Compton-Streuung. (Es gibt 17 Stück, unterbrochene Diagramme zählen nicht.)

**Aufgabe 1.3**
a) Welcher Zerfall wäre wohl wahrscheinlicher?

$$\Xi^- \to \Lambda + \pi^- \qquad \text{oder} \qquad \Xi^- \to n + \pi^-$$

Begründen Sie ihre Antwort und bestätigen Sie sie durch das Nachschlagen experimenteller Daten.
b) Welcher Zerfall des $D^0 = (c\bar{u})$ ist wahrscheinlicher?

$$D^0 \to K^- + \pi^+, \quad D^0 \to \pi^- + \pi^+ \quad \text{oder } D^0 \to K^+ + \pi^-$$

Welcher davon ist am wenigsten wahrscheinlich? Begründen Sie ihre Antwort und bestätigen Sie sie durch das Nachschlagen experimenteller Daten.

c) Sollten die "beautiful" $B$-Mesonen in die $D$'s, die $K$'s oder die $\pi$'s übergehen? Wie sieht es mit den "truthful" Mesonen aus?

**Aufgabe 1.4**

Zeichnen Sie alle Diagramme niedrigster Ordnung, die zum Prozeß $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ beitragen. (Eines davon enthält eine direkte Kopplung des $Z$ an die $W^\pm$, ein anderes die Kopplung des $\gamma$ an die $W^\pm$.)

**Aufgabe 1.5**

Untersuchen Sie die folgenden Prozesse und stellen Sie fest, ob sie nach dem Standardmodell (das keine Verletzung der Lepton- und Baryonenzahl enthält) möglich sind. Falls ja, schreiben Sie auf, welche Wechselwirkung verantwortlich ist: elektromagnetische, schwache oder starke. Falls nein, führen Sie einen Erhaltungssatz an, der den Zerfall verhindert.

| | | |
|---|---|---|
| a) $p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^-$ | b) $\eta \to 2\gamma$ | c) $\Sigma^0 \to \Lambda + \pi^0$ |
| d) $\Sigma^- \to n + \pi^-$ | e) $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ | f) $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ |
| g) $\Delta^+ \to p + \pi^0$ | h) $p + \bar{\nu}_e \to n + e^+$ | i) $e^- + p \to \nu_e + \pi^0$ |
| j) $2p \to \Sigma^+ + n + K^0 + \pi^+ + \pi^0$ | k) $p \to e^+ + \gamma$ | l) $2p \to 3p + \bar{p}$ |
| m) $n + \bar{n} \to \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$ | n) $\pi^+ + n \to \pi^- + p$ | o) $K^- \to \pi^+ + \pi^-$ |
| p) $\Sigma^+ + n \to \Sigma^- + p$ | q) $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ | r) $\Xi^- \to \Lambda + \pi^+$ |
| s) $\Xi^0 \to p + \pi^-$ | t) $\pi^- + p \to \Lambda + K^0$ | u) $\pi^0 \to 2\gamma$ |
| v) $\Sigma^- \to n + e^- + \bar{\nu}_e$ | | |

**Aufgabe 1.6**

Einige Zerfälle erlauben zwei (oder gar drei) verschiedene Wechselwirkungen. Zeichnen Sie die möglichen Diragramme für die beobachteten Prozesse

a) $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu + \gamma$

b) $\Sigma^+ \to p + \gamma$

Welche Wechselwirkung liegt jeweils vor ?

**Aufgabe 1.7**

Das Ypsilon-Meson ($b\bar{b}$) ist das $b$-Quark-Analogon zu $\psi = (c\bar{c})$. Seine Masse ist 9460 MeV/$c^2$ und seine mittlere Lebensdauer beträgt $1,3 \cdot 10^{-20}$ s. Was können Sie mit diesen Informationen über die Masse des $B$-Mesons ($u\bar{b}$) aussagen? (Die beobachtete Masse ist 5278 MeV/$c^2$.)

**Aufgabe 1.8**

Das $\psi'$-Meson (bei 3686 MeV/$c^2$) hat denselben Quakrinhalt wie das $\psi = (c\bar{c})$. Es zerfällt hauptsächlich gemäß $\psi' \to \psi + \pi^+ + \pi^-$. Ist dies eine starke Wechselwirkung ? Ist dieser Zerfall OZI-unterdrückt (→ Griffiths [1], Kap. 2.5)? Welche Lebensdauer würden Sie für das $\psi'$ erwarten ? (Der beobachtete Wert ist $2,4 \cdot 10^{-21}$ s.)

# Kapitel 2

# Relativistische Kinematik

## 2.1 Die Lorentz-Transformation

Beim Wechsel von einem Bezugssystem $S$ in das mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu $S$ bewegte Bezugssystem $S'$ transformieren sich in der klassischen Mechanik (d.h. $|\vec{v}| \ll c$) die Orts-und Zeitkoordinaten nach der *Galilei-Transformation*.

$$x' = x + vt \quad , \quad t' = t \tag{2.1}$$

$$x = x' - vt \quad , \quad t = t' \tag{2.2}$$

Für größere relative Geschwindigkeiten $\vec{v}$ transformieren sich die Orts-und Zeitkoordinaten nach der *Lorentz-Transformation*, die den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, keine bevorzugten Inertialsysteme, physikalische Gesetze sind Tensorgleichungen) Rechnung trägt.

$$x' = \gamma(x + vt) \quad , \quad t' = \gamma(t + \frac{vx}{c^2}) \tag{2.3}$$

$$x = \gamma(x' - vt') \quad , \quad t = \gamma(t' - \frac{vx'}{c^2}) \tag{2.4}$$

$$\beta := \frac{v}{c} \quad , \quad \beta \in [0; 1) \tag{2.5}$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \gamma \in [1; \infty) \tag{2.6}$$

Man sieht, daß für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c \to \gamma \simeq 1, \frac{vx}{c^2} \simeq 0$) die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation übergeht.

Die Lorentz-Transformation zieht folgende Konsequenzen nach sich:

- *Relativität der Gleichzeitigkeit:* Ereignisse, die von $S$ aus gesehen gleichzeitig sind, sind von $S'$ aus gesehen nicht gleichzeitig.

- *Längenkontraktion*: "Bewegt sich ein Objekt relativ zu uns, erscheint uns seine Länge kürzer als wenn es neben uns steht."

  Wir messen die Länge des Objektes $\Delta x = x_2 - x_1$ zum in $S$ festen Zeitpunkt $t_E = t_2 = t_1$, d.h. wir müssen die Formel (2.3) verwenden und erhalten:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} < \Delta x' \tag{2.7}$$

  Die Länge die wir sehen ($\Delta x$) ist kleiner als die tatsächliche Länge des bewegten Objektes ($\Delta x'$).

- *Zeitdilatation*: "Bewegt sich ein Objekt relativ zu uns, so geht seine Uhr langsamer als unsere."

  Wir messen die Zeitdifferenz $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ am in $S'$ festen Ort $x'_E = x'_2 = x'_1$, d.h. wir müssen jetzt die Formel (2.4) verwenden und erhalten:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t' \tag{2.8}$$

  Die Zeit die für uns verstreicht ($\Delta t$) ist länger als die Zeit die für das bewegte Objekt verstreicht ($\Delta t'$).
  Ein Teilchen mit der Lebensdauer $\tau_R$, das sich mit der Geschwindikeit $u = \beta c$ auf uns zu bewegt, lebt in unserem Bezugssystem länger

$$\tau = \gamma \tau_R$$

  und kommt weiter, als man naiv erwarten würde:

$$l = u \cdot \tau = \beta c \cdot \gamma \tau_R$$

- *Der relativistische Dopplereffekt:*

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}\, \nu_0 \tag{2.9}$$

  "Sendet ein Objekt, das sich mit der Geschwindigkeit $u$ auf uns zu bewegt, Licht der Frequenz $\nu_0$ aus, so sehen wir Licht der Frequenz $\nu$."

- *Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten:*

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}} \tag{2.10}$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \tag{2.11}$$

- *Der relativistische Impuls und die relativistische Masse:*

$$p = mu = \gamma m_0 u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.12}$$

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.13}$$

Daraus ergibt sich der oft benutzte Zusammenhang

$$\frac{cp}{E} = \frac{cmu}{mc^2} = \frac{u}{c} = \beta \tag{2.14}$$

- *Äquivalenz von Energie und Masse:*

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \int_0^s F ds = \int_0^s \frac{dp}{dt} ds \\ &= \int_0^p \frac{ds}{dt} dp = \int_0^p u d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \end{aligned}$$

Substitution $p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \to \frac{dp}{du} = \cdots = \frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} \to dp = \frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} du$

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \int_0^v \frac{m_0 u}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} du = m_0 c^2 \int_0^v -\frac{1}{2} \frac{\frac{-2u}{c^2}}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} du \\ &= \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right]_{u=0}^{v} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir die allgemein bekannte Formel

$$E = mc^2 = E_{kin} + m_0 c^2 \tag{2.15}$$

Es kann also aus Energie Masse und aus Masse Energie erzeugt werden. Aus Gleichung (2.15) können zwei weitere, oft benutzte Formeln hergeleitet werden. Den $\gamma$-Faktor kann man aus

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{E}{m_0\ c^2} \tag{2.16}$$

bestimmen, und durch Kombination von (2.12) mit (2.15) folgt die relativistische *Energie-Impuls-Beziehung*

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{2.17}$$

## 2.2 Formulierung mittels Vierervektoren

Man kann durch Zusammenfassen bestimmter Größen in sogenannte *Vierervektoren* eine vereinfachende Schreibweise einführen. Wir definieren den *Orts-Zeit-Vierervektor* $x^\mu$:

$$x^0 := ct, \qquad x^1 := x, \qquad x^2 := y, \qquad x^3 := z, \tag{2.18}$$

Steht ein Index *oben* so zeigt er an, daß es sich um eine *kontravariante* Komponente handelt. Entsprechend zeigt ein *unten* stehender Index an, daß es sich um eine *kovariante* Komponente handelt. Kontra- und kovariante Komponeten sind durch die *Metrik* $g_{\mu\nu}$ miteinander verknüpft:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{-1})^{\mu\nu} \tag{2.19}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad x^\mu = (g^{-1})^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.20}$$

Hierbei ist die *Einstein'sche Summationskonvention* zu beachten die besagt, daß über gleiche Indizes oben und unten summiert werden muß. Ferner gilt die Vereinbarung, daß die Summation über griechische Indizes von 0 bis 3 erfolgt, die Summation über arabische Indizes von 1 bis 3.
Es ergibt sich folglich für die kovariante Komponente des Orts-Zeit-Vierervektors $x_\mu$:

$$x_0 = ct, \qquad x_1 = -x, \qquad x_2 = -y, \qquad x_3 = -z, \tag{2.21}$$

Wir definieren das *Skalarprodukt* zweier Vierervektoren

$$x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{2.22}$$

sowie das *Abstandsquadrat*

$$x^2 = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \tag{2.23}$$

und unterscheiden zwischen zeitartigen ($x^2 > 0$), raumartigen ($x^2 < 0$) und lichtartigen ($x^2 = 0$) Vierervektoren. Ferner möchte ich an dieser Stelle den *Differentialoperator* nach ko- bzw. kontravarianter Komponente einführen:

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla}) \quad , \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, +\vec{\nabla}) \tag{2.24}$$

Die *Lorentztransformation* nimmt -ausgedrückt in Vierernotation- eine symmetrischere Form an:

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2.25}$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Es gilt die Relation

$$g_{\mu\tau} \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\tau_\sigma = g_{\nu\sigma} \tag{2.27}$$

was zur Folge hat, daß die Abstandsquadrate von Vierervektoren unter der Lorentztransformation invariant sind (*"lorentzinvariant"*)

$$x^{\mu\prime} x_\mu{}' = \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\tau_\mu x^\nu x_\tau = \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\tau_\mu g_{\mu\tau} x^\nu x^\mu = g_{\nu\mu} x^\nu x^\mu = x_\mu x^\mu \tag{2.28}$$

## 2.3 Energie und Impuls als Vierervektor

Wie wir in der Formel für die Zeitdilatation gesehen haben (2.8) läuft die Zeit eines bewegten Beobachters um einen kleineren Betrag $d\tau$ weiter als die Zeit im Laborsystem $dt$:

$$d\tau := \frac{dt}{\gamma} \tag{2.29}$$

Dieses Zeitelement heißt *Eigenzeit*.
Diesbezüglich führen wir die Eigengeschwindigkeit $\vec{\eta}$ ein, die sich aus dem Differentialquotienten aus im Laborsystem zurückgelegter Wegstrecke $dx$ und der Eigenzeit $d\tau$ ergibt:

$$\vec{\eta} := \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma\frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma\vec{v} \tag{2.30}$$

Durch Erweiterung des Vektors $\vec{\eta}$ um die nullte Komponente $\eta^0 := \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma\frac{c\cdot dt}{dt} = \gamma c$ erhalten wir die lorentzinvariante Vierergeschwindigkeit $\eta^\mu$:

$$\eta^0 = \gamma c \quad , \quad \eta^1 = \gamma v^1 \quad , \quad \eta^2 = \gamma v^2 \quad , \quad \eta^3 = \gamma v^3 \tag{2.31}$$

$$\eta^\mu\eta_\mu = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = \gamma^2 c^2(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}) = c^2 \tag{2.32}$$

Man beachte, daß Impulserhaltung nur gilt wenn der Impuls aus Masse und Eigengeschwindigkeit gebildet wird.

$$p^\mu = m_0\eta^\mu = m_0(\eta^0, \vec{\eta}) = m_0(\gamma c, \gamma\vec{v}) = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \tag{2.33}$$

Hierbei stellt die nullte Komponente die Energie in Einheiten von c dar und die Komponenten eins bis drei bilden den Impuls. Das Abstandsquadrat des Vierervektors $p^\mu$ ist ebenfalls lorentzinvariant

$$p^\mu p_\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})\cdot(\frac{E}{c}, -\vec{p}) = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \equiv inv. =: E_0 \tag{2.34}$$

und repräsentiert Impuls- und Energierhaltung.

## 2.4 Stoßprozesse

Der Grund für die Einführung von Energie und Impuls war natürlich, daß diese Größen in jedem physikalischen Prozeß erhalten sind. Wir stellen die Erhaltungsgrößen und Stoßprozeßtypen klassisch und relativistisch gegenüber.

| | klassisch | relativistisch |
|---:|---|---|
| Masse | ja | nein |
| Impuls | ja | ja |
| Energie | nein | ja |
| kin. Energie | ja oder nein | ja oder nein |

| | klassisch | relativistisch |
|---|---|---|
| klebrig | $E_{kin} \Downarrow$ | $E_{kin} \Downarrow$; $E_{Ruhe}, m \Uparrow$ |
| explosiv | $E_{kin} \Uparrow$ | $E_{kin} \Uparrow$; $E_{Ruhe}, m \Downarrow$ |
| elastisch | $E_{kin} =$ | $E_{kin}, E_{Ruhe}, m =$ |

=: bleibt erhalten $\Uparrow$: nimmt zu $\Downarrow$: nimmt ab

## 2.5 Rechenmethoden, Beispiele und Anwendungen

### 2.5.1 Die Mandelstamm-Variablen

In einem Zweikörper-Streuereignis der Form $A + B \to C + D$ ist es nützlich, die *Mandelstamm-Variablen* einzuführen:

$$\begin{aligned} s &:= (p_A + p_B)^2/c^2 \\ t &:= (p_A - p_C)^2/c^2 \\ u &:= (p_A - p_D)^2/c^2 \end{aligned}$$

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

Der *theoretische* Vorteil ist, daß diese Variablen lorentzinvariant sind, also in jedem Inertialsystem denselben Wert annehmen. Die *experimentell* zugänglichen Größen sind allerdings Energie und Streuwinkel.

### 2.5.2 Die 4 Standardstrategien

Es gibt 4 Standardstrategien, mit denen man die meisten speziell relativistischen Aufgabentypen lösen kann:

1. Benutzung der *Massenschalenbedingung*

   $$E^2 - c^2\vec{p}^{\,2} = m_0^2 c^4$$

   um die Energie eines Teilchens zu erhalten, dessen Ruhemasse und Impuls man kennt (oder v.v.)

2. Anwednung des Zusammenhangs

   $$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{E}$$

   um die Geschwindigkeit eines Teilchens zu erhalten, dessen Energie man kennt (oder v.v.)

3. Benutzung der Vierernotation und Ausnutzung der Invarianz des Skalarprodukts

4. Alternative Lösung eines Problems im CM-System (Schwerpunktsystem) oder im Laborsystem mit evtl. anschließender Rücktransformation

### 2.5.3 Beispiele und Anwendungen

---

*Beispiel:* $2p \to 3p + \bar{p}$-**Streuung im Laborsystem**

Wir interessieren uns für die Schwellenenergie, die ein Proton 1 im Laborsystem haben muß, damit bei der Streuung an einem ruhenden Proton 2 ein zusätzliches Proton-Antiproton-Paar entstehen kann.

Vor dem Stoß gilt im Laborsystem ($S$):

$$p^\mu_{1,i} = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} \qquad p^\mu_{2,i} = \begin{pmatrix} m_0 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$p^\mu_{tot,i} = p^\mu_{1,i} + p^\mu_{2,i} = \begin{pmatrix} E_1/c + m_0 c \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}$$

Zur Betrachtung der Situation nach dem Stoß wechseln wir ins CM-System ($S'$), wo (wenn $E_1$ =Schwellenenergie) alle Endprodukte gerade noch ruhen:

$$p'^\mu_{1/2/3/4,f} = \begin{pmatrix} m_0 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$p'^\mu_{tot,f} = \begin{pmatrix} 4m_0 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Invarianz des Betragsquadrates von $p^\mu$ (Strategie 3) sowie die Erhaltung von $p^\mu$ bei der Reaktion ausnutzen, können wir

$$\begin{aligned} p^\mu_{tot,i} p_{tot,i\ \mu} &= p'^\mu_{tot,f} p'_{tot,f\ \mu} \\ (E_1/c + m_0 c)^2 - \vec{p}_1^{\,2} &= 16 m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

setzen. Wir wenden die Massenschalenbedingung für $\vec{p}_1^{\,2}$ an (Strategie 1)

$$\vec{p}_1^{\,2} = E_1^2/c^2 - m_0^2 c^2$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} (E_1/c + m_0 c)^2 - (E_1^2/c^2 - m_0^2 c^2) &= 16 m_0^2 c^2 \\ (E_1^2/c^2 + 2E_1 m_0 + m_0^2 c^2) - (E_1^2/c^2 - m_0^2 c^2) &= 16 m_0^2 c^2 \\ 2E_1 m_0 &= 14 m_0^2 c^2 \\ E_1 &= 7 m_0 c^2 \end{aligned}$$

die Schwellenenergie $E_1 = 7m_0 c^2$ der Protonen im Laborsystem.

---

---

*Beispiel:* $2p \to 3p + \bar{p}$-**Streuung im CM-System**

Wir interessieren uns nun für die Schwellenenergie, die jedes von zwei aufeinander zu fliegenden Protonen im CM-System haben muß, damit bei der Streuung ein zusätzliches Proton-Antiproton-Paar entstehen kann.

Vor dem Stoß gilt im CM-System ($S$):

$$p^{\mu}_{1/2,i} = \begin{pmatrix} E/c \\ \pm\vec{p} \end{pmatrix}$$

$$p^{\mu}_{tot,i} = \begin{pmatrix} 2E/c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Nach dem Stoß ruhen (wenn $E_1$ =Schwellenenergie) alle Endprodukte gerade noch:

$$p^{\mu}_{1/2/3/4,f} = \begin{pmatrix} m_0 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$p^{\mu}_{tot,f} = \begin{pmatrix} 4m_0 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Invarianz des Betragsquadrates von $p^{\mu}$ (Strategie 3) sowie die Erhaltung von $p^{\mu}$ bei der Reaktion ausnutzen, können wir

$$\begin{aligned} p^{\mu}_{tot,i} p_{tot,i\ \mu} &= p^{\mu}_{tot,f} p_{tot,f\ \mu} \\ (2E/c)^2 &= (4m_0 c)^2 \\ E &= 2m_0 c^2 \end{aligned}$$

setzen und erhalten die Schwellenenergie $E = 2m_0c^2$ des Protons im CM-System.

---

## 2.6 Übungsaufgaben (Termin 2)

**Aufgabe 2.1**

Nach Uhren am Boden (System $S$) wurden die Straßenlaternen $A$ und $B$ (die 4 km voneinander entfernt stehen) beide genau um 20.00 Uhr angeschaltet. Welche der beiden Laternen ging für einen Beobachter in einem Zug (System $S'$), der sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 3/5$ von $A$ nach $B$ bewegt, zuerst an? Wieviele Sekunden später ging die andere an? (Beachten Sie: Wie immer in der Relativitätstheorie sprechen wir darüber, was $S'$ beobachtete, nachdem die Zeit korrigiert wurde, die das Licht benötigte, um den Beobachter zu erreichen und nicht, was er tatsächlich sah (was nämlich davon abhängen würde, wo im Zug er sich befand).)

**Aufgabe 2.2**

Myonen werden hoch in der Atmosphäre (in etwa 8 km Höhe) durch kosmische Strahlung erzeugt, und bewegen sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit (z.B. $\beta = 0,998$) auf die Erde zu.

a) Wie weit würde ein Myon, dessen mittlere Lebensdauer $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s beträgt, nach der nicht-relativistischen Physik kommen? Würden sie den Erdboden erreichen?

b) Beantworten Sie nun die selbe Frage unter Verwendung der relativistsichen Physik. (Aufgrund der Zeitdilatation leben die Myonen länger, kommen also weiter.)

c) Analysieren Sie nun den Prozeß aus Sicht des Myons. (In diesem Bezugssystem lebt das Myon nur $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Wie schafft es das Myon, den Boden zu erreichen?)

d) In der oberen Atmosphäre werden aus schnellen Protonen aus dem All und Protonen aus der Atmosphäre Pionen erzeugt:

$$2p \to 2p + \pi^+ + \pi^-$$

Diese Pionen zerfallen dann in Myonen:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \end{aligned}$$

Die Lebensdauer der Pionen ist nur ein Hundertstel der der Myonen. Können die Pionen, wenn sie auch mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,998$ Richtung Erde fliegen, die Erdoberfläche erreichen?

**Aufgabe 2.3**

Ein Polizist feuert aus einem Polizeiauto, das sich mit $\beta = 1/2$ bewegt, eine Kugel mit $\beta = 1/3$ (relativ zur Öffnung der Pistole) auf das Fluchtauto der Gangster, die mit $\beta = 3/4$ davonjagen. Erreicht die Kugel ihr Ziel

a) nach den Gesetzen der nicht-relativistischen Physik?

b) nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie?

**Aufgabe 2.4**

Zeigen Sie, daß die Größe

$$I := x^\mu x_\mu \equiv {x'}^\mu {x'}_\mu$$

invariant unter der Lorentztransformation (2.3) ist.

**Aufgabe 2.5**

Ein Tensor zweiter Stufe heißt symmetrisch, wenn er bei Vertauschung der Indizes ($s^{\mu\nu} = s^{\nu\mu}$) unverändert bleibt. Er heißt antisymmetrisch, wenn er das Vorzeichen ändert ($a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}$).

a) Wieviele unabhängige Elemente gibt es in einem symmetrischen Tensor?

b) Wieviele unabhängige Elemente gibt es in einem antisymmetrischen Tensor?

c) Zeigen Sie, daß wenn $s^{\mu\nu}$ symmetrisch ist, auch $s_{\mu\nu}$ symmetrisch ist. Zeigen Sie ferner, daß wenn $a^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, auch $a_{\mu\nu}$ antisymmetrisch sein muß.

d) Zeigen Sie, daß $s^{\mu\nu} a_{\mu\nu} = 0$ gilt, wenn $s^{\mu\nu}$ symmetrisch und $a^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist.

e) Zeigen Sie, daß jeder Tensor zweiter Stufe $t^{\mu\nu}$ als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Teils geschrieben werden kann:

$$t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + a^{\mu\nu}$$

Konstruieren Sie $s_{\mu\nu}$ und $a^{\mu\nu}$ explizit aus $t_{\mu\nu}$

**Aufgabe 2.6**
Ein Teilchen bewegt sich mit $\beta = 3/5$ in $x$-Richtung. Bestimmen Sie alle vier Komponenten seiner Eigengeschwindigkeit $\eta^\mu$.

**Aufgabe 2.7**
Wieviel mehr wiegt eine heiße Kartoffel ($T = 370$ K) gegenüber einer kalten ($T = 300$ K)?

**Aufgabe 2.8**
Ein Pion, das sich mit einer Geschwindigkeit $v$ bewegt, zerfällt in ein Myon und ein Antineutrino:

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

Wenn das Antineutrino senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung des Pions ausläuft, unter welchem Winkel läuft dann das Myon aus?
[ Antwort: $\tan\theta = \frac{1-(\frac{m_\mu}{m_\pi})^2}{2\beta\gamma^2}$ ]

## 2.7 Übungsaufgaben (Termin 3)

**Aufgabe 2.9**
Teilchen $A$ (Energie $E$) trifft auf Teilchen $B$ (in Ruhe) und erzeugt die Teilchen $C_1, \ldots, C_n$:

$$A + B \to C_1 + \cdots + C_n$$

Berechnen Sie die Schwellenenergie für diese Reaktion in Abhängigkeit von den verschiedenen Teilchenmassen.
[ Antwort: $E = \frac{(m_{C_1}+\cdots+m_{C_n})^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}$ ]

**Aufgabe 2.10**
Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2.9, um die Schwellenenergie für die Reaktionen

$$\text{a) } \pi^- + p \to K^0 + \Sigma^0$$
$$\text{b) } p + p \to p + K^0 + \Sigma^+$$

zu finden, unter der Annahme, daß das Targetproton ruht.

**Aufgabe 2.11**
Teilchen $A$ (in Ruhe) zerfällt in Teilchen $B$ und $C$:

$$A \to B + C$$

a) Bestimmen Sie die Energien der auslaufenden Teilchen in Abhängigkeit der verschiedenen Massen.
b) Bestimmen Sie die Beträge der auslaufenden Impulse.
[ Antwort: $|\vec{p}_B| = |\vec{p}_C| = \frac{\sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)}}{2m_A}$
mit $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$ ]
c) Beachten Sie, daß sich die sog. Dreiecksfunktion $\lambda$ wie folgt faktorisieren läßt:

$$\lambda(a^2, b^2, c^2) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) \tag{2.35}$$

Somit geht $|\vec{p}_B| \to 0$ für $m_A \to m_B + m_C$ und wird imaginär, für $m_A < m_B + m_C$. Erklären Sie das.

**Aufgabe 2.12**
Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2.11 a) um die Schwerpunktenergien für jedes Zerfallsprdukt der folgenden Reaktion zu bestimmen:

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

**Aufgabe 2.13**
Teilchen $A$ (in Ruhe) zerfällt in drei oder mehr Teilchen:

$$A \to B + C + D + \ldots$$

a) Bestimmen Sie die maximale und minimale Energie in Abhängigkeit der verschiedenen Massen, die $B$ in einem solchen Zerfall annehmen kann.
b) Finden sie die maximale und minimale Elektronenenergie im Myon-Zerfall

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

heraus.

**Aufgabe 2.14**
a) Ein Teilchen bewegt sich im System $S$ mit der Geschwindigkeit $v$ auf ein ruhendes, aber sonst identisches Teilchen zu. Wie groß ist die Geschwindigkeit jedes der beiden Teilchen im CM-System ($S'$)? (Klassisch wäre das natürlich einfach $v/2$. Warum stimmt das nicht im relativistischen Fall?)
b) Verwenden Sie ihr Ergebnis aus Teil a) um die kinetische Energie $T'$ jedes der beiden Teilchen im CM-System zu berechnen, so daß Sie auf die Gleichung

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right)$$

kommen.

**Aufgabe 2.15**

In Reaktionen der Form $A + B \to A + C_1 + C_2 + \ldots$ (in denen ein Teilchen $A$ an $B$ streut und $C_1, C_2, \ldots$ erzeugt werden) gibt es neben dem Laborsystem ($B$ in Ruhe) und dem CM-System noch ein weiteres Inertialsystem, das manchmal von Nutzen ist: Es ist das sog. *Breitsystem* oder *Steinmauersystem*, aus welchem $A$ mit umgekehrten Impuls aus der Reaktion hervorgeht, als ob es an einer Steinmauer zurückgeprallt wäre ($\vec{p}_f = -\vec{p}_i$).

a) Nehmen Sie elastische Streuung $A + B \to A + B$ an; Teilchen $A$ habe die Energie $E$ und streue in einem Winkel $\theta$ im CM-System $S$. Wie groß ist seine Energie im Breitsystem $S'$?

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{u}$ des Breitsystems relativ zum CM-System.

**Aufgabe 2.16**

Betrachten Sie die Compton-Streuung: Ein Photon der Wellenlänge $\lambda_i$ kollidiert elastisch mit einem geladenen Teilchen der Masse m. Bestimmen Sie die anschließende Wellenlänge $\lambda_f$, wenn das Photon unter einem Winkel $\theta$ streut.

[ Antwort: $\lambda_f = \lambda_i + \frac{\hbar}{mc}(1 - \cos\theta)$ ]

# Kapitel 3

# Quantenmechanik

## 3.1 Mathematische Vorbemerkungen

### 3.1.1 Die Fouriertransformation

Definition der *Fouriertransformation* in n-Dimensionen (d.h. $\bar{x}$ und $\bar{k}$ sind n-dimensionale Vektoren)

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int F(\bar{k}) e^{i\bar{k}\bar{x}} d^n k \tag{3.1}$$

$$F(\bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int f(\bar{x}) e^{-i\bar{k}\bar{x}} d^n x \tag{3.2}$$

Man schreibt auch $FT\Big\{f(\bar{x})\Big\} = F(\bar{k})$ und vice versa.

### 3.1.2 Die $\delta$-Funktion

Die *$\delta$-Funktion* ist keine analytische Funktion, sondern eine Distribution, die durch das $\delta$-Funktional

$$\int f(x)\delta(x-x')dx = f(x') \tag{3.3}$$

sowie die Bedingung

$$\delta(x-x') = 0 \quad \forall\ x \neq x' \tag{3.4}$$

definiert wird. Die $\delta$-Funktion kann formal als Ableitung der Heaviside-Funktion betrachtet werden und hat folgende Eigenschaften:

- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $\delta(h(x)) = \sum\limits_i \frac{\delta(x-x_i)}{|h'(x_i)|}$ wobei die $x_i$ die Nullstellen von $h(x)$ sind.
  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
  $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big\}$
- $FT\Big\{\delta(x-x')\Big\} = e^{ikx'}$

## 3.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

Für das $\vec{E}$-Feld im Vakuum gilt nach der klassischen Elektrodynamik die aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitete *Wellengleichung*

$$\left\{\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right\}\vec{E}(\vec{x},t) = 0 \tag{3.5}$$

Die Intensität ist proportional zum Betragsquadrat des $\vec{E}$-Feldes $I \propto |\vec{E}|^2$, d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein Photon ist dazu ebenfalls proportional $N^2 \propto |\vec{E}|^2$. Diese Gegebenheit motiviert zu der Definition der *Wellenfunktion* $\psi(\vec{x},t)$ eines Photons

$$|\psi(\vec{x},t)|^2 = N^2 \tag{3.6}$$

mit der Norm

$$\int |\psi(\vec{x},t)|^2 d^3x = \int N^2 d^3x = 1 \tag{3.7}$$

Die Aussage der Norm ist, daß die Wahrscheinlichkeit, das Photon irgendwo im gesamten Raum zu finden gleich 1 ist. Diese Wellenfunktion muß natürlich ebenfalls der Wellengleichung

$$\left\{\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right\}\psi(\vec{x},t) = 0 \tag{3.8}$$

genügen, welche von der *Ebenen Welle*

$$\psi(\vec{x},t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} \tag{3.9}$$

oder einer beliebigen Linearkombination

$$\psi(\vec{x},t) = \int A(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}d^3k \tag{3.10}$$

gelöst wird. Hierbei sind $\vec{k}$ und $\omega$ durch die *Dispersionsrelation* miteinander verknüpft, welche man durch Einsetzen von (3.10) in (3.8) erhält:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(\vec{k})^2 = c^2k^2 \tag{3.11}$$

Wenn wir diese Gleichung mit $\hbar^2$ multiplizieren und die Relationen für Energie $E = \hbar\omega$ und Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ des Photons verwenden, erhalten wir die relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Teilchens mit Masse $m = 0$ (ohne Betrachtung des Spin):

$$\hbar^2\omega^2 = c^2\hbar^2k^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = c^2p^2 \tag{3.12}$$

Es scheint eine Äquivalenz der Gleichungen (3.8) und (3.12) vorzuliegen. Man kann durch Verwendung der *Ersetzungsregel*

$$\boxed{E \to +i\hbar\partial_t \quad , \quad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}} \tag{3.13}$$

sogar einen direkten Übergang von der Energiegleichung (3.12) auf die DGL für die Wellenfunktion (3.8) vornehmen.

Betrachten wir nun die relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Teilchens mit Masse $m \neq 0$ (und ohne Betrachtung des Spin)

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \tag{3.14}$$

und wenden die Ersetzungsregel (3.13) an, so erhalten wir als DGL für die Wellenfunktion die *Klein-Gordon-Gleichung*:

$$\boxed{\left\{-\hbar^2 \partial_t^2 + c^2 \hbar^2 \vec{\nabla}^2 - m^2 c^4\right\} \psi(\vec{x}, t) = 0} \tag{3.15}$$

**Anmerkung**

Die Ersetzungsregel, die Wellengleichung sowie die Ebene Welle können auch in Vierernotation dargestellt werden. Die Ersetzungsregel lautet

$$\boxed{p_\mu \to i\hbar \partial_\mu \quad , \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \tag{3.16}$$

und die Wellengleichung nimmt die Form

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi(x^\mu) = 0 \tag{3.17}$$

an , wobei $\partial^\mu \partial_\mu = \left\{\partial_{ct}^2 - \vec{\nabla}^2\right\}$ ist. Die Ebene Welle läßt sich schreiben als

$$\psi(x^\mu) = \int A(p^\mu) e^{-\frac{i}{\hbar}(p^\nu x_\nu)} d^4 p \tag{3.18}$$

mit $p^\mu = (\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k})$ und $x^\mu = (ct, \vec{x})$, so daß $p^\nu x_\nu = \hbar\omega t - \hbar\vec{k}\vec{x}$ ist.

## 3.3 Die Schrödingergleichung

Im nicht-relativistischen Fall gilt für ein Teilchen mit Masse $m \neq 0$ im Potential $V(\vec{x}, t)$ für die Energie die folgende Beziehung:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}, t) \tag{3.19}$$

Wieder erhalten wir durch Anwenden der Ersetzungsregel (3.13) die DGL für die Wellenfunktion, die *Schrödinger-Gleichung*:

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{x}, t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}, t)\right\} \psi(\vec{x}, t) \tag{3.20}$$

In der Hamilton'schen Mechanik schreibt man Gleichung (3.19) auch als

$$E = H(\vec{p}, \vec{x}) \tag{3.21}$$

und erhält nach Anwenden der Ersetzungsregel (3.13) die allgemeine Form der Schrödingergleichung

$$\boxed{i\hbar \partial_t \psi(\vec{x}, t) = \hat{H}(\hat{\vec{p}}, \vec{x}) \psi(\vec{x}, t)} \tag{3.22}$$

## 3.4 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Ebene Welle stellt kein lokalisierbares Teilchen dar, da ihr Betragsquadrat konstant ist. Um ein lokalisiertes Teilchen zu beschreiben benötigt man -wie in Gleichung (3.18)- die Superposition von unendlich vielen Ebenen Wellen mit unterschiedlicher $k$- oder Impuls-Gewichtung. Formal ist dies aber nichts anderes, als die Fouriertransformierte dieser Gewichtungsfunktion.

Wenn wir bei der Gewichtungsfunktion eine Gaußfunktion der Standardabweichung $\Delta p^\mu$ zugrundelegen, so gilt für die Standardabweichung $\Delta x^\mu$ der Wellenfunktion $\Delta x^\mu \cdot \Delta p^\mu = \frac{\hbar}{2}$. Für *alle* anderen Gewichtungsfunktionen gilt die folgende Ungleichung, die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$\Delta x^\mu \cdot \Delta p^\mu \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.23}$$

Aufgelöst in Orts- und Zeitkoordinaten der Vierervektoren schreibt sie sich als

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad , \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{3.24}$$

Eine begrenzte Lebensdauer eines Teilchens zieht also eine begrenzte Energieauflösung nach sich.

# Kapitel 4

# Symmetrien

Welche Rolle *Symmetrien* in der Physik spielen wurde im Jahre 1917 richtig deutlich, als *Emmy Noether* in ihrem berühmten Theorem den direkten Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungssatz zeigte.

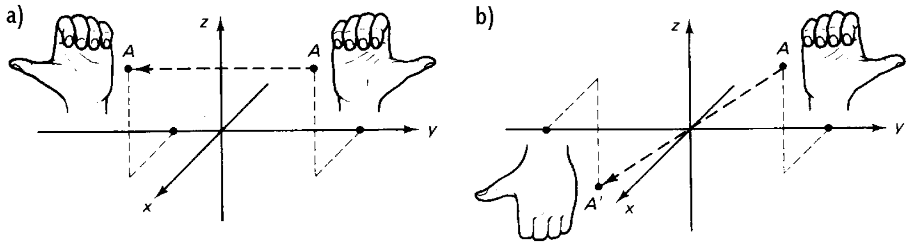
Was aber genau ist eine Symmetrie ? Es ist eine Operation, die man auf ein System anwenden kann und es dadurch in einen Zustand überführen, der vom vorherigen nicht unterscheidbar ist, d.h. unter der es *invariant* ist.

## 4.1 Parität und Zeitumkehrung

Der *Paritätsoperator* $\hat{P}$ erzeugt eine Punktspiegelung der Ortskoordinaten am Ursprung:

$$\boxed{\hat{P}\psi(\vec{x},t) := \psi(-\vec{x},t)} \tag{4.1}$$

Man beachte den Unterschied von Spiegelung a) und Parität b)




Parität kann durch Spiegelung und anschließende Drehung ersetzt werden.

Zweimaliges Anwenden der Parität bringt uns wieder in den Ausgangszustand zurück:

$$\hat{P}^2 = 1 \tag{4.2}$$

Daraus folgt, daß die Paritätseigenwerte $P = \pm 1$ sind. Im folgenden listen wir das Verhalten von Skalaren und Vektoren unter der Paritätsoperation auf:

| | |
|---|---|
| Skalar: | $\hat{P}s = s$ |
| Pseudoskalar: | $\hat{P}p = -p$ |
| Vektor (polarer vektor): | $\hat{P}\vec{v} = -\vec{v}$ |
| Pseudovektor (oder axialer Vektor): | $\hat{P}\vec{a} = \vec{a}$ |

Man beachte, daß Spin ein axialer Vektor ist, wohingegen Ort und Impuls polare Vektoren sind.

Wie wir später zeigen werden, muß die Parität eines *Fermions* der des entsprechenden Antiteilchens entgegengesetzt sein, während die Parität des *Bosons* mit der des entsprechenden Antiteilchens übereinstimmen muß. Die Parität ist *multiplikativ*, d.h. die Parität eines zusammengesetzten Systems ist das Produkt der einzelnen Partitäten.

Der *Zeitumkehrungsoperator* $\hat{T}$ erzeugt eine Umkehrung der Zeitkoordinaten:

$$\boxed{\hat{T}\psi(\vec{x},t) := \psi(\vec{x},-t)} \tag{4.3}$$

Bei der Betrachtung elektromagnetischer Phänomene muß beachtet werden, daß sich durch Zeitumkehrung das Vorzeichen des Vektorpotentials $\vec{A}$ (das ja durch Ströme $\partial\rho/\partial t$ erzeugt wird) ändert, wohingegen das Vorzeichen des skalaren Potentials (erzeugt durch Ladung $\rho$) erhalten bleibt.

## 4.2 Ladungskonjugation

Der *Ladungskonjugationsoperator* $\hat{C}$ konvertiert jedes Teilchen in sein Antiteilchen:

$$\boxed{\hat{C}|p>=|\bar{p}>} \tag{4.4}$$

Der Name Ladungskonjugation ist nicht ganz zutreffend, da egtl. die Konversion des Teilchens in sein Antiteilchen im Vordergrund steht und die Konjugation der Ladung ein Nebeneffekt ist (der bei ungeladenen Teilchen sogar ganz aus bleibt).

Wie bei der Parität bringt uns zweimaliges Anwenden der Ladungskonjugation wieder in den Ausgangszustand zurück:

$$\hat{C}^2 = 1 \tag{4.5}$$

Die Eigenwerte sind also ebenfalls $C = \pm 1$. *Anders* als bei $\hat{P}$ sind allerdings die meisten Teilchen keine Eigenzustände von $\hat{C}$. Denn die Eigenwertgleichung

$$\hat{C}|p>=\pm 1|p>=|\bar{p}> \tag{4.6}$$

wird offensichtlich nur von neutralen Teilchen erfüllt, die -bis auf ein Vorzeichen vor der Wellenfunktion- ihre eigenen Antiteilchen sind (z.B. Photonen).

## 4.3 Drehimpuls und Spin

Warum der Drehimpuls im Kapitel "Symmetrien" auftaucht, wird bei der Betrachtung des bereits angesprochenen Noether-Theorems klar: Kurz gefaßt besagt dieses Theorem, daß die Existenz einer Symmetrie auf eine Erhaltungsgröße führt. In unserem Fall hier ist es die Symmetrie unter Rotationen die auf die Erhaltung des Drehimpulses führt. In der Teilchenphysik ist dies von großer Bedeutung, da bei einer Teilchenreaktion die Erhaltung des gesamten Drehimpulses (einschließlich Spin) gewährleistet sein muß.

Die Eigenwerte des Drehimpulsoperators $\hat{\vec{L}}^2$ sind

$$\hat{\vec{L}}^2 \ |l, m_l >= l(l+1)\hbar^2 \ |l, m_l > \qquad \text{mit } l = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Die Eigenwerte von $\hat{L}_z$ sind bei gegebenem $l$

$$\hat{L}_z \ |l, m_l >= m_l \hbar \ |l, m_l > \qquad \text{mit } m_l = -l, -(l-1), \ldots, (l-1), l \tag{4.8}$$

d.h. es gibt alles in allem $2l+1$ Möglichkeiten für $m_l$ bei festem $l$.

Für den Spinoperator $\hat{\vec{S}}^2$ gilt das selbe, nur daß auch halbzahlige $s$ und $m_s$ zulässig sind:

$$\hat{\vec{S}}^2 \ |s, m_s >= s(s+1)\hbar^2 \ |s, m_s > \qquad \text{mit } s = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots \tag{4.9}$$

$$\hat{S}_z \ |s, m_s >= m_s \hbar \ |s, m_s > \qquad \text{mit } m_s = -s, -(s-1), \ldots, (s-1), s \tag{4.10}$$

Für die Addition zweier Drehimpuls- oder Spinoperatoren $\hat{\vec{L}}$ und $\hat{\vec{S}}$

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \tag{4.11}$$

gilt:

$$m_j = m_l + m_s \tag{4.12}$$

$$j = |l-s|, |l-s|+1, \ldots, |l+s|-1, |l+s| \tag{4.13}$$

Diese Gleichung sagt uns also, welche Gesamtimpulse $j$ wir aus der Kombination von $l$ und $s$ erhalten können, aber bisweilen benötigen wir eine explizite Zerlegung in die Zustände des Gesamtdrehimpulses:

$$|l, m_l > \ |s, m_s >= \sum_{j=|l-s|}^{|l+s|} C^{j,l,s}_{m_j, m_l, m_s} \ |j, m_j > \tag{4.14}$$

Die $C^{j,l,s}_{m_j, m_l, m_s}$ sind die sogenannten *Clebsch-Gordon-Koeffizienten*.

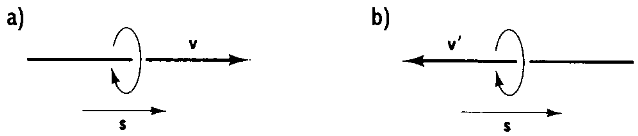
Die mathematische Beschreibung des Spin-$\frac{1}{2}$-Systems finden Sie in den Büchern von Griffiths [1] oder Schwabl [3].

## 4.4 Helizität und Chiralität

Die *Heliziztät* eines Teilchens ist die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung

$$\boxed{\hat{H} := \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}||\vec{s}|} = \cos \angle(\vec{p}, \vec{s})} \tag{4.15}$$

Sie bezieht sich also auf die Ausrichtung von Geschwindigkeit bzw. Impuls und Spin:




In a) sind Spin und Impuls parallel ($H = +1$) und man spricht von *rechtshändigen* Teilchen. In b) sind sie antiparallel ($H = -1$) und man spricht von *linkshändigen* Teilchen. Diese anschauliche Betrachtungsweise führte uns zum Begriff der Händigkeit oder *Chiralität.*

Es ist wichtig im Kopf zu behalten, daß die Helizität für Teilchen mit $v < c$ *nicht lorentzinvariant* ist. (Das Teilchen bewege sich in unserem Bezugssystem $S$ mit $v > 0$, $p > 0$ und habe die Helizität $H = +1$. Wir stellen uns nun ein Bezugssystem $S'$ vor, das sich relativ zu uns schneller als das Teilchen bewegt. In diesem Bezugssystem gilt $v' < 0$ und so auch $p' < 0$. Der Spin weist immer noch in dieselbe Richtung und die Helizität wird $H' = -1 \neq H$.)

Nur für Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ($v = c$) bewegen ist die Helizität eine lorentzinvariante Größe.

## 4.5 Einige Grundlagen der Gruppentheorie

Wir beginnen mit der Definition der *Gruppe* $G$:

1. **Abgeschlossenheit** $R^i, R^j \in G \Rightarrow R^i R^j = R^k \in G$
2. **Einselement** $\exists I \Rightarrow R^i I = I R^i = R^i$
3. **Inverselement** $\exists R^{i-1} \Rightarrow R^{i-1} R^i = R^i R^{i-1} = I$
4. **Assoziativität** $R^i(R^j R^k) = (R^i R^j) R^k$

Kommt hierzu noch die *Kommutativität* aller Gruppenelemente, so spricht man von einer *abel'schen Gruppe.* Man unterscheidet ferner zwischen *endlichen* und *unendlichen Gruppen* sowie zwischen *diskreten* und *kontinuierlichen Gruppen.* Wie sich zeigt sind die meisten für die Physik interessanten Gruppen Matrizengruppen. Die in der Elementarteilchenphysik häufigsten Matrizengruppen sind:

| Gruppe | dim | Eigenschaften |
|---|---|---|
| $U(n)$ | $n \times n$ | unitär ($U^\dagger U = 1$) |
| $SU(n)$ | $n \times n$ | unitär mit Determinante 1 |
| $O(n)$ | $n \times n$ | orthogonal ($O^T O = 1$) |
| $SO(n)$ | $n \times n$ | orthogonal mit Determinante 1 |

$U$ steht für unitär, $O$ für orthogonal und das $S$ steht für speziell und fordert, daß die Determinante 1 ist.

Die *Darstellung* der Gruppe geschieht über *Generatoren* (das sind infinitesimale Transformationen) und *Vertauschungsrelationen.*

**Rotationen in 3D -** $SO(3)$

Wir wollen nun als Beispiel die *Rotationen im dreidimensionalen Raum* genauer betrachten. Diese Rotationen bilden eine $SO(3)$-Gruppe mit kompakter Lie-Algebra. (kompakt: $\theta \in [0; 2\pi)$ beschränkter Parameter, Lie: $\theta$ kontinuierlich) Die drei linear unabhängigen Rotationsmatrizen sind:

$$R^1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

$$R^2 := \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$R^3 := \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

$$\tag{4.19}$$

Die $R^i$ stellen Rotationen um die Winkel $\theta_i$ um die Achsen $x, y, z$ dar. Das Produkt zweier Rotationen stellt wiederum eine Rotation dar, das Einselement erhält man durch die Wahl von $\theta_i = 0$ und das Inverselement durch die Wahl von $\theta_i^{-1} = -\theta_i$. Die $R^i$ sind orthogonal und haben eine Determinante von 1. Sie erfüllen also die Voraussetzungen der $SO(3)$-Gruppe. Da die $R^i$ nicht vertauschen ist die Gruppe nicht-abel'sch.

Die Generatoren $D^i$ erhalten wir durch Entwickeln der $R^i$ für kleine $\theta_i$. Wir führen dies für $R^3$ explizit vor:

$$R^3 \approx \begin{pmatrix} 1 & -d\theta_3 & 0 \\ d\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + d\theta_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: 1 - i\ d\theta_3\ D^3 \tag{4.20}$$

wobei sich der Generator $D^3$ zu

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

ergibt. In Analogie findet man $D^2$ und $D^1$:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Wählen wir nun die Rotationsachse beliebig in Richtung von $\vec{n} := \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 1$, so ergibt sich als Rotationsmatrix

$$R^{d\theta\ \vec{n}} \approx 1 - i\ d\theta\ n_i D^i \stackrel{formal}{=} 1 - i\ d\theta\ \vec{n} \cdot \vec{D} \tag{4.24}$$

Wenn wir ferner eine endliche Rotation um

$$\theta = m \cdot d\theta \quad \text{ mit } m \to \infty, d\theta \to 0 \tag{4.25}$$

ausführen wollen, wird die Rotationsmatrix zu

$$R^{\theta\ \vec{n}} = (R^{d\theta\ \vec{n}})^m = (1 - i\ d\theta\ \vec{n} \cdot \vec{D})^m = (1 - \frac{i\ \theta\ \vec{n} \cdot \vec{D}}{m})^m \to e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{D}} \tag{4.26}$$

Wir fassen nun $\theta$ und $\vec{n}$ zusammen zu

$$\vec{\theta} := \theta \cdot \vec{n} \tag{4.27}$$

wobei $\vec{\theta}$ in Richtung der Rotationsachse zeigt und der Absolutbetrag $|\vec{\theta}|$ den Rotationswinkel angibt. Damit vereinfacht sich die Rotationsmatrix zu:

$$\boxed{R^{\vec{\theta}} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{D}}} \tag{4.28}$$

Die Vertauschungsrelationen der Gruppe

$$\boxed{[D^i, D^j] = \epsilon_{ijk}\ D^k} \tag{4.29}$$

ergeben sich direkt aus den Generatoren.

**Die Pauli-Matrizen -** $SU(2)$

Die bereits vom Spin bekannten *Pauli-Matrizen* sind drei linear unabhängige Generatoren der $SU(2)$-Gruppe:

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

Die $SU(2)$-Transformation kann geschrieben werden als

$$\boxed{U^{\vec{\theta}} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}} \tag{4.31}$$

und die Vertauschungsrelationen lauten:

$$\boxed{[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\epsilon_{jkl}\ \sigma^l} \tag{4.32}$$

Die Pauli-Matrizen werden im Zusammenhang mit der schwachen Wechselwirkung auch $\tau^1, \tau^2, \tau^3$ bezeichnet.

Für $SU(n)$-Gruppen gelten die Forderungen

$$U^\dagger U = 1 \ \text{ und } \ det(U) = 1$$

Da jede unitäre Matrix durch eine hermitesche Matrix

$$U \equiv e^H \quad \text{mit } H = H^\dagger \tag{4.33}$$

repräsentiert werden kann folgt aus der zweiten Bedingung

$$\begin{aligned} det(U) &= 1 \quad \text{mit } U \equiv e^H \\ \rightarrow det(e^H) &= 1 \quad \text{mit } det(e^H) = e^{\mathrm{Tr}(H)} \\ \rightarrow e^{\mathrm{Tr}(H)} &= 1 \\ \rightarrow \mathrm{Tr}(H) &= 0 \end{aligned}$$

und man kann hieraus zeigen, daß $SU(n)$-Gruppen jeweils $n^2 - 1$ linear unabhängige Generatoren haben. Im Falle von $SU(2)$ macht dies $2^2 - 1 = 3$.

### Die Gell-Mann-Matrizen - $SU(3)$

Die $SU(3)$ besitzt $3^2 - 1 = 8$ linear unabhängige Generatoren, die sogenannten *Gell-Mann-Matrizen*:

$$\begin{aligned} &\lambda^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\lambda^4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda^5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda^6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\lambda^7 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda^8 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Die $SU(3)$-Transformation kann geschrieben werden als

$$\boxed{U^{\vec{\alpha}} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}}} \tag{4.35}$$

mit $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_8)$ und $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_8)$. Die Vertauschungsrelationen lauten

$$\boxed{[\lambda^j, \lambda^k] = 2if_{jkl}\ \lambda^l} \tag{4.36}$$

mit dem total antisymmetrischen *Strukturkonstantentensor*

$$f_{123} = 1 \quad f_{246;\ 257;\ 345;\ 516;\ 637} = \frac{1}{2} \quad f_{458;\ 678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.37}$$

### Gell-Mann-Matrizen plus Einheitsmatrix - $U(3)$

Nimmt man zu den Gell-Mann-Matrizen noch die $3 \times 3$- Einheitsmatrix $I$ hinzu, hat man die linear unabhängigen Generatoren der $U(3)$-Gruppe. Die $U(3)$-Transformation lautet

$$\boxed{U^{\alpha_0,\vec{\alpha}} = e^{i\alpha_0 \cdot I + i\sum\limits_{k=1}^{8} \alpha_k \gamma_k}} \tag{4.38}$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (4.33) folgt zwingend, daß jede hermitesche Matrix $H$ als Linearkombination aus Einheitsmatrix und Gell-Mann-Matrizen geschrieben werden kann:

$$H \equiv \alpha_0 \cdot I + \sum_{k=1}^{8} \alpha_k \gamma_k \tag{4.39}$$

Die Einheitsmatrix vertauscht als einziger Generator mit den anderen Generatoren der Gruppe.

### Die komplexe Phasenverschiebung - $U(1)$

Die $U(1)$-Transformation kann als Phasenverschiebung einer komplexen Zahl

$$\boxed{U^{\phi} = e^{i\phi}} \tag{4.40}$$

geschrieben werden. Der Generator der $U(1)$-Gruppe ist folglich ein Skalar und lautet 1. Daß dieser Generator mit sich selbst vertauscht ist klar.

### Zusammenfassung

Wir haben natürlich nicht aus Zufall diese speziellen Gruppen betrachtet. Der Grund liegt darin, daß -wie wir später sehen werden- jede von ihnen Anwendung in einem ganz speziellen physikalischen System findet. Die wichtigsten Erkenntnisse fassen wir im folgenden kurz zusammen.

| Gruppe | Generatoren | vertauschen | phys. System |
|---|---|---|---|
| $U(1)$ | 1 | ja | QED |
| $SU(2)$ | $\sigma^1, \ldots, \sigma^3$ | nein | Spin, schwache WW |
| $SU(3)$ | $\lambda^1, \ldots, \lambda^8$ | nein | QCD |
| $SO(3)$ | $D^1, \ldots, D^3$ | nein | Rotationen |

## 4.6 Übungsaufgaben (Termin 4)

### Aufgabe 4.1

Wenn Sie Drehimpulse gemäß Gleichung (4.8 ff.) addieren, ist es sinnvoll, das Ergebnis zu prüfen, indem Sie die Zahl der Zustände vor und nach der Addition abzählen. Gehen Sie von zwei Quarks ($s = \frac{1}{2}$) aus, jedes mit der Möglichkeit $m_s = \pm\frac{1}{2}$, so daß Sie insgesamt vier Zustände konstruieren können.

a) Was erhalten Sie als mögliche Werte für $l$ und $m_l$ bei der Addition der Spins der beiden Quarks ? (Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie die Zustände abzählen.)

b) Addieren Sie nun drei Drehmomente: $2, 1$ und $\frac{1}{2}$. Listen Sie die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses auf und überprüfen Sie Ihre Antwort durch Abzählen der Zustände

### Aufgabe 4.2

Zeigen Sie, daß die ursprüngliche Reaktionsgleichung für den $\beta$-Zerfall

$$n \rightarrow p + e^-$$

die Drehimpulserhaltung verletzen würde (Alle drei Teilchen haben Spin $\frac{1}{2}$). Wenn Sie Pauli wären, der die eigentliche Reaktionsgleichung

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

vorhersagte, welchen Spin würden Sie dem Antineutrino zuordnen ?

**Aufgabe 4.3**

Welches sind die im Endzustand möglichen Werte des Bahndrehimpulses $l$ für den Zerfall $\Delta^+ + \to p + \pi^+$?

**Aufgabe 4.4**

In einem Wasserstoffatom befinde sich ein Elektron in einem Zustand mit Bahndrehimpuls $l = 1$. Wenn der Gesamtdrehimpuls $j = \frac{3}{2}$ und $m_j = +\frac{1}{2}$ ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Zustand mit $m_s = +\frac{1}{2}$ vorzufinden?

**Aufgabe 4.5**

Nehmen Sie an, Sie haben zwei Teilchen, jedes mit Spin $s = 2$ und beide im Zustand $m_s = 0$. Nun wollen Sie den Gesamtdrehimpuls des Systems messen; der Bahndrehimpuls sei $l = 0$, welche Werte könnten Sie dann erhalten und wie groß sind ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten? (Vergewissern Sie sich, daß diese sich zu 1 addieren!)

**Aufgabe 4.6**

Gehen Sie von zwei Teilchen aus, eines mit Spin 2 und eines mit Spin $\frac{3}{2}$. Ihr Bahndrehimpuls sei $l = 0$ und der Gesamtspin des zusammengesetzten Systems $j = \frac{5}{2}$, wobei $m_j = -\frac{1}{2}$ ist. Welche Werte könnten Sie bei einer Messung von $S_z$ des Spin-2-Teilchens erhalten? Wie groß sind ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten? (Vergewissern Sie sich, daß diese sich zu 1 addieren!)

**Aufgabe 4.7**

a) Finden Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma^z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

Welche Zustände repräsentieren diese Eigenvektoren (Eigenspinoren) ? b) Sie messen $S_y$ eines Elektrons im Zustand $\chi = (a, b)$; welche Werte können Sie erhalten und wie wahrscheinlich ist jeder von ihnen ?
(*Anleitung:* Schreiben Sie die Matrix $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma^y$ hin, die die entsprechende Observable darstellt. Die erlaubten Werte für $S_y$ sind die Eigenwerte von $\hat{S}_y$. Schreiben Sie nun den Zustand $\chi = (a, b)$ als Linearkombination der Eigenvektoren von $\hat{S}_y$, die Betragsquadrate der Koeffizienten vor den (normierten!) Eigenvektoren sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.)

**Aufgabe 4.8**

Nehmen Sie an, ein Elektron befinde sich im Zustand

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sie wollen nacheinander $S_x, S_y$ und $S_z$ messen. Welche Werte könnten Sie erhalten und wie wahrscheinlich ist jeder von ihnen?

## 4.7 Übungsaufgaben (Termin 5)

**Aufgabe 4.9**

Die Erweiterung der mathematischen Beschreibung eines Spin-$\frac{1}{2}$-Systems auf höhere Spins ist relativ unkompliziert. Für Spin 1 ($s = 1$) erhalten wir drei Zustände $m_s = -1, 0, +1$, die wir durch die drei Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen können. Was uns jetzt noch fehlt sind die $3 \times 3$ Matrizen $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$. Letztere ist einfach:

a) Bilden Sie $\hat{S}_z$ für Spin 1.

Um $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ zu erhalten ist es am einfachsten, mit den Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{S}_\pm := \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

zu beginnen, die die folgende Eigenschaft haben:

$$\hat{S}_\pm \; |s, m_s >= \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} \; |s, m \pm 1 >$$

b) Bilden Sie die $\hat{S}_\pm$ für Spin 1.

c) Bestimmen Sie aus den $\hat{S}_\pm$ die Matrizen $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$.

d) Führen Sie das selbe für Spin $\frac{3}{2}$ durch.

**Aufgabe 4.10**

Betrachten Sie einen Vektor $\vec{a}$ in zwei Dimensionen. Seine Komponenten seien $(a_x, a_y)$, bezogen auf die kartesischen Koordinaten Wie lauten seine Komponenten $(a'_x, a'_y)$ in einem Koordinatensystem, das um einen Winkel $\theta$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist? Drücken Sie Ihre Antwort in der Form einer $2 \times 2$-Matrix $R(\theta)$ aus:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß $R(\theta)$ orthogonal ist. Wie lautet die Determinante von $R(\theta)$? Die Menge aller solcher Rotationen bildet eine Gruppe; wie lautet der Name dieser Gruppe? Zeigen Sie durch Matrizenmultiplikation, daß $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ gilt. Ist das eine abel'sche Gruppe?

**Aufgabe 4.11**
Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ist sie in der Gruppe $O(2)$ enthalten? Wie steht es mit $SO(2)$? Wie wirkt sie sich auf den Vektor $\vec{a}$ aus der vorigen Aufgabe aus? Beschreibt $M$ eine mögliche Drehung der Ebene?

**Aufgabe 4.12**
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma^k \\
&\text{b) } (\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \\
&\text{c) } [\sigma^i,\sigma^j] = \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k \\
&\text{d) } \{\sigma^i,\sigma^j\} = \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2i\delta_{ij}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4.13**
a) Zeigen Sie, daß $e^{-\frac{i}{2}\pi\sigma^z} = -i\sigma^z$ gilt.

b) Finden Sie die Matrix $U$, die eine Drehung um $180^o$ um die $y$-Achse darstellt, und zeigen Sie, daß sie "Spin up" in "Spin down" überführt, also eine Spinortransformation $(1,0) \to (0,1)$ bewirkt.

c) Eine Drehung um eine Achse $\vec{\theta}$ um den Winkel $|\vec{\theta}|$ im Ortsraum transformiert einen Spinor über die $2\times 2$-Matrix

$$U(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 4.12 b), daß man diese Transformation auch als

$$U(\vec{\theta}) = \cos\frac{|\vec{\theta}|}{2} - i\left(\frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|}\cdot\vec{\sigma}\right)\sin\frac{|\vec{\theta}|}{2}$$

schreiben kann.

# Kapitel 5

# Dirac-Theorie

## 5.1 Herleitung der Dirac-Gleichung

Wir gehen von der aus der Energie-Impuls-Beziehung in Vierernotation

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \quad , \quad p^\mu = (E/c, \vec{p}) \tag{5.1}$$

hergeleiteten Klein-Gordon-Gleichung aus,

$$\left\{\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2c^2\right\}\psi(x^\mu) = 0 \tag{5.2}$$

lösen diese mit dem Ansatz der Ebenen Welle,

$$\psi(x^\mu) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(p^\nu x_\nu)} = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} \tag{5.3}$$

und betrachten die sich durch Einsetzen von (5.3) in (5.2) ergebenden Energieeigenwerte

$$E_\pm = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{5.4}$$

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine DGL, die von 2. Ordnung in $t$ (also auch $E$) ist und so zu zwei Energieeigenwerten, einem positiven und einem negativen (!), führt. Um auf nur einen Energieeigenwert zu kommen benötigten wir eine Gleichung, die von 1. Ordnung in $t$ ist. Diracs grundsätzliche Strategie war es, die Energie-Impuls-Beziehung (5.1) zu faktorisieren.

**Teilchen in Ruhe ($\vec{p} = 0$)**

Diese Faktorisierung fällt für $\vec{p} = 0$ besonders leicht:

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \tag{5.5}$$

Man erhält zwei Gleichungen 1. Ordnung,

$$p^0 + mc = 0 \quad \vee \quad p^0 - mc = 0 \tag{5.6}$$

von welchen jede garantiert, daß $p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0$ gilt.

**Teilchen in Bewegung ($\vec{p} \neq 0$)**

Im Falle $\vec{p} \neq 0$ suchen wir dann nach etwas von der Form

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\kappa p_\kappa - mc) = 0 \tag{5.7}$$

was bedeutet, daß die $\gamma^\mu$ die Bedingung

$$\begin{aligned}
(p^0)^2 - &(p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2c^2 \\
&= (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\kappa p_\kappa - mc) \\
&= (\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 + mc) \\
&\quad \cdot(\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 - mc) \\
&= (\gamma^0 p^0)^2 + (\gamma^1 p^1)^2 + (\gamma^2 p^2)^2 + (\gamma^3 p^3)^2 \\
&\quad +(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)p^0p^1 \; +(\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0)p^0p^2 \; +(\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)p^0p^3 \\
&\quad +(\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)p^1p^2 \; +(\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)p^1p^3 \; +(\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)p^2p^3 \\
&\quad -m^2c^2
\end{aligned}$$

erfüllen müssen. Diese Forderung läßt sich im einfachsten Fall dadurch erfüllen -und genau das war Dirac's geniale Idee-, daß die vier Koeffizienten $\gamma^\mu$ für je eine $4 \times 4$-Martix stehen.
Da Matrizen nicht kommutieren kann man einen Satz finden, so daß

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0 \quad \forall\, \mu \neq \nu \tag{5.10}$$

gilt. In einfacherer Notation lautet diese *Definition der $\gamma$-Matrizen*

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \tag{5.11}$$

mit dem *Anitkommutator*

$$\{A, B\} := AB + BA \tag{5.12}$$

Es gibt viele Sätze von Matrizen, die diese Bedingungen erfüllen, wir werden die *Standard-Darstellung nach Bjorken und Drell* benutzen:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$\gamma^i := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

wobei die $\sigma^i$ die $2 \times 2$-*Pauli-Matrizen*

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

sind. Später wird folgende Matrix benötigt, die wir der Vollständigkeit halber gleich hier definieren:

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \tag{5.16}$$

Nun können wir die Faktorisierung von (5.7) durchführen und erhalten wieder zwei Gleichungen 1. Ordnung,

$$\gamma^\kappa p_\kappa + mc = 0 \quad \vee \quad \gamma^\kappa p_\kappa - mc = 0 \tag{5.17}$$

von welchen jede garantiert, daß $p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0$ wird. Im Allgemeinen favorisiert man die Gleichung mit dem Minuszeichen und erhält nach Anwendung der Ersetzungsregel (3.16) die sogenannte *Dirac-Gleichung*

$$\boxed{\Big\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\Big\}\psi = 0} \tag{5.18}$$

Da die $\gamma^\mu$ $4 \times 4$-Matrizen sind, ist $\psi$ ein 4-dimensionaler Vektor (*Dirac-Spinor* oder *Bi-Spinor*)

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \tag{5.19}$$

Man definiert aus praktischen Gründen die zweidimensionalen Vektoren (*Spinoren*)

$$\psi_A := (\psi_1, \psi_2) \quad , \quad \psi_B := (\psi_3, \psi_4) \tag{5.20}$$

Es sei vorweg genommen: Die Komponenten von $\psi_A$ stehen für Teilchen, die Komponenten von $\psi_B$ für Antiteilchen. Dabei stehen $\psi_1$ und $\psi_3$ für Zustände mit Spin $+1/2$, $\psi_2$ und $\psi_4$ für solche mit Spin $-1/2$.

Man beachte ferner, daß $\psi$ *kein* lorentzinvarainter Vierervektor ist (d.h. er transformiert sich nicht über Lorentz-Transformationen).

## 5.2 Lösungen der Dirac-Gleichung

**Einfache Lösung ($\psi$ ortsunabhängig)**

Nehmen wir an, $\psi$ sei ortsunabhängig, d.h. $\partial_x\psi = \partial_y\psi = \partial_z\psi = 0$. Unter Beachtung von $\vec{p} \leftrightarrow i\hbar\vec{\nabla}$ sagt uns dies, daß $\psi$ dann einen Zustand mit Impuls $\vec{p} = 0$ beschreibt. Die Dirac-Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\Big\{i\hbar\gamma^0\partial_t - mc^2\Big\}\psi = 0 \tag{5.21}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \psi_A \\ \partial_t \psi_B \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \partial_t \psi_A \\ \partial_t \psi_B \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

Somit gelten die beiden Gleichungen

$$\partial_t \psi_A = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi_A \quad , \quad -\partial_t \psi_B = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi_B \tag{5.23}$$

und die Lösung lautet

$$\psi_A(t) = \psi_A(0)e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \quad , \quad \psi_B(t) = \psi_B(0)e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \tag{5.24}$$

Für Teilchen mit $\vec{p} = 0$ gilt $mc^2 = E$, so daß wir den Faktor $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ in den Lösungen wiedererkennen. Dies ist die charakteristische Zeitabhängigkeit eines Quantenzustands mit der Energie $E$. Für $\psi_A$ folgt $E = mc^2 > 0$, was nach intuitivem Empfinden für ein freies Teilchen auch so sein sollte. Aber was ist mit $\psi_B$? Anscheinend repräsentiert es einen Zustand mit negativer Energie ($E = -mc^2 < 0$). Um diesen unangenehmen Sachverhalt aus dem Wege zu gehen postulierte Dirac einen *unendlichen See* von Teilchen mit negativer Energie, die die unwerwünschten Zustände auffüllen. Heute interpretieren wir die Zustände mit negativer Energie als Lösungen, die *Anti*teilchen mit *positiver* Energie repräsentieren. Somit beschreibt beispielsweise $\psi_A$ Elektronen, während $\psi_B$ Positronen beschreibt. Beide sind zweidimensionale Spinoren, ideal also für die Beschreibung eines Systems mit Spin 1/2. Es folgt, daß die Dirac-Gleichung für $\vec{p} = 0$ vier unabhängige Lösungen zuläßt:

$$\psi_a \propto e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_b \propto e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\psi_c \propto e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_d \propto e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese beschreiben jeweils ein Elektron mit Spin up, ein Elektron mit Spin down, ein Positron mit Spin up und ein Positron mit Spin down.

### Lösung mittels Ebener Welle

Wir setzen für die Lösung der Dirac-Gleichung (5.18) eine Ebene Welle der Form

$$\psi(x^\mu) = a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu} \cdot u(p^\mu) \tag{5.25}$$

wobei $u(p^\mu)$ einen Bi-Spinor

$$u(p^\mu) = \begin{pmatrix} u_A(p^\mu) \\ u_B(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(p^\mu) \\ u_2(p^\mu) \\ u_3(p^\mu) \\ u_4(p^\mu) \end{pmatrix}$$

darstellt. Wir bilden

$$\partial_\mu \psi(x^\mu) = a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}x^\mu p^\mu} \cdot \frac{p^\mu}{i\hbar} \cdot u(p^\mu) \tag{5.26}$$

und setzen in die Dirac-Gleichung (5.18) ein:

$$\Big\{ i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc \Big\} \psi(x^\mu) = 0$$
$$\Big\{ i\hbar\gamma^\mu \tfrac{p^\mu}{i\hbar} - mc \Big\} a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu} \cdot u(p^\mu) = 0$$

$$\Big\{ \gamma^\mu p_\mu - mc \Big\} u(p^\mu) = 0 \tag{5.27}$$

Diese Gleichung (5.27) nennt man auch *Impulsraum-Dirac-Gleichung.* Als nächsten Schritt berechnen wir die $4 \times 4$-Matrix $\gamma^\mu p_\mu$, wobei beachtet werden muß, daß die Koeffizienten $p^\mu$ Skalare und die $\gamma^\mu$ $4 \times 4$-Matrizen sind:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu p_\mu &= p^0\gamma^0 - p^1\gamma^1 - p^2\gamma^2 - p^3\gamma^3 \\
&= \tfrac{E}{c}\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} \\
&= \tfrac{E}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \vec{p}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir berechnen an dieser Stelle gleich die später benötigten Ausdrücke

$$\vec{p}\cdot\vec{\sigma} = p^1\sigma^1 + p^2\sigma^2 + p^3\sigma^3 = p_x\sigma^1 + p_y\sigma^2 + p_z\sigma^3 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

und

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}^2 = \vec{p}^{\,2} \tag{5.29}$$

In diesem Formalismus wird die Impulsraum-Dirac-Gleichung (5.27) zu

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -\frac{E}{c} - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \tag{5.30}$$

Nach Lösen des LGS (5.30) erhält man als Bedingung für $u_A$ und $u_B$ die Gleichungen

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, u_B \quad , \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, u_A \tag{5.31}$$

die man durch gegenseitiges Einsetzen entkoppeln kann:

$$u_A = \tfrac{c^2}{(E-mc^2)(E+mc^2)}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 u_A = \tfrac{\vec{p}^2 c^2}{E^2 - m^2c^4} u_A$$
$$u_B = \cdots = \tfrac{\vec{p}^2 c^2}{E^2 - m^2c^4} u_B$$

Hieraus folgt

$$\frac{\vec{p}^2c^2}{E^2-m^2c^4} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$$

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{5.32}$$

die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, was in Konsistenz mit unserem Ausgangspunkt steht.

Um Lösungen zu konstruieren kehren wir zu (5.31) zurück und berechnen nach freier Wahl von $u_A$ bzw. $u_B$ jeweils den Rest der Bi-Spinoren $u(p^\mu)$, so beispielsweise

$$\begin{aligned}
u_A = N\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &\to u(p^\mu) = N\begin{pmatrix}1\\0\\c\frac{p_z}{E+mc^2}\\c\frac{p_x+ip_y}{E+mc^2}\end{pmatrix} =: u_a\\
u_A = N\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &\to u(p^\mu) = N\begin{pmatrix}0\\1\\c\frac{p_x-ip_y}{E+mc^2}\\c\frac{-p_z}{E+mc^2}\end{pmatrix} =: u_b\\
u_B = N\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &\to u(p^\mu) = N\begin{pmatrix}c\frac{p_z}{-E-mc^2}\\c\frac{p_x+ip_y}{-E-mc^2}\\1\\0\end{pmatrix} =: u_c\\
u_B = N\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &\to u(p^\mu) = N\begin{pmatrix}c\frac{p_x-ip_y}{-E-mc^2}\\c\frac{-p_z}{-E-mc^2}\\0\\1\end{pmatrix} =: u_d\\
\text{mit } E = \sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

wobei $N$ die Normierung der Spinoren berücksichtigt. Wir wollen die *Normierung nach Halzen und Martin*

$$u^\dagger u = \frac{2|E|}{c} \quad , \quad u^\dagger := (u^*)^T \tag{5.34}$$

verwenden. Damit wird der Vorfaktor zu $N = \sqrt{|E|/c + mc}$.

### Energie der Antiteilchenzustände

Die Variablen $E$ und $\vec{p}$ in unserem Ansatz (5.25) sind ursprünglich mathematische Parameter, die wir nun mit physikalischen Größen identifizieren sollten. Wir haben für $E$ die positive Lösung von Gleichung (5.32) angesetzt, da nur diese für die Energie stehen kann. Denn in einem ungebundenen Zustand (und genau das liegt hier vor) muß die Energie -auch von Antiteilchen- positiv sein.

Es ist allgemein üblich, für die Antiteilchenzustände den Ansatz

$$\psi(x^\mu) = a \cdot e^{+\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu} \cdot v(p^\mu) \qquad \text{mit } v_{a/b}(p^\mu) := u_{c/d}(-p_\mu) \tag{5.35}$$

zu machen, wobei das Vorzeichen von $p^\mu$ umgedreht ist und statt des Buchstabens $u$ der Buchstabe $v$ verwendet wird. Dieser Ansatz löst die Gleichung von (5.17) mit dem Plus-Zeichen

$$\left\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc\right\}v(p^\mu) = 0 \tag{5.36}$$

und die Lösung der Antiteilchenzustände wird zu

$$v_a(p^\mu) = N\begin{pmatrix} c\frac{p_z}{E+mc^2} \\ c\frac{p_x+ip_y}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_b(p^\mu) = -N\begin{pmatrix} c\frac{p_x-ip_y}{E+mc^2} \\ c\frac{-p_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{mit } E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}$$

## 5.3 Parität und Zeitumkehrung von Dirac-Teilchen

Wir wollen nun die Wirkung der *Paritätsoperation auf Bi-Spinoren* untersuchen. $\psi(\vec{x},t)$ sei ein Bi-Spinor, der die Dirac-Gleichung

$$\left\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right\}\psi(\vec{x},t) = 0 \tag{5.37}$$

löst. Es kann gezeigt werden, daß der Bi-Spinor nach einer Paritätsoperation der Form $\psi'(\vec{x},t) = \hat{P}\ \psi(\vec{x},t) = \psi(-\vec{x},t)$ die Dirac-Gleichung nicht mehr löst. Vielmehr muß die Paritätsoperation auf Bi-Spinoren in der folgenden Form wirken:

$$\boxed{\psi'(\vec{x},t) = \hat{P}\ \psi(\vec{x},t) = \gamma^0\psi(-\vec{x},t)} \tag{5.38}$$

---

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
&\left\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right\}\gamma^0\psi(-\vec{x},t) \\
&\quad= \left\{i\hbar\left(\gamma^0\partial^0 + \gamma^1\partial_x + \gamma^2\partial_y + \gamma^3\partial_z\right) - mc\right\}\gamma^0\psi(-x,-y,-z,t) \\
&\quad| \qquad \text{Substitution } \vec{X} = -\vec{x} \text{ und } \gamma^0 \text{ von re. ”reinziehen”} \\
&\quad= \left\{i\hbar\left(\gamma^0\gamma^0\partial^0 - \gamma^1\gamma^0\partial_X - \gamma^2\gamma^0\partial_Y - \gamma^3\gamma^0\partial_Z\right) - mc\right\}\psi(X,Y,Z,t) \\
&\quad| \qquad \text{Verwende } \gamma^0\gamma^0 = 1 \ \ , \ \ \{\gamma^k,\gamma^0\} = 0 \\
&\quad= \left\{i\hbar\left(\gamma^0\gamma^0\partial^0 + \gamma^0\gamma^1\partial_X + \gamma^0\gamma^2\partial_Y + \gamma^0\gamma^3\partial_Z\right) - mc\right\}\psi(X,Y,Z,t) \\
&\quad| \qquad \text{Umbenennen } \vec{x} = \vec{X} \text{ und } \gamma^0 \text{ nach li. ”rausschieben”} \\
&\quad= \gamma^0\left\{i\hbar\left(\gamma^0\partial^0 + \gamma^1\partial_x + \gamma^2\partial_y + \gamma^3\partial_z\right) - mc\right\}\psi(x,y,z,t) \\
&\quad= \gamma^0\left\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right\}\psi(\vec{x},t) \\
&\quad| \qquad \text{siehe Gleichung (5.37)} \\
&\quad\equiv 0 \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

---

Wenn wir uns

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nochmals vor Augen halten, erkennen wir, daß Gleichung (5.38) nichts anderes bedeutet, als daß -wie bereits erwähnt- die Parität eines Fermions der des entsprechenden Antiteilchens entgegengesetzt sein muß.

Die Wirkung der *Zeitumkehrungsoperation auf Bi-Spinoren* verhält sich wie folgt: $\psi(\vec{x}, t)$ sei ein Bi-Spinor, der die Dirac-Gleichung (5.37) löst. Dieser muß sich unter Zeitumkehr nach der Vorschrift

$$\boxed{\psi'(\vec{x}, t) = \hat{T}\ \psi(\vec{x}, t) = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(\vec{x}, -t)} \tag{5.39}$$

transformieren.

## 5.4 Spin von Dirac-Teilchen

Man könnte vermuten, daß $u_a$ ein Teilchen mit Spin up, $u_b$ ein Teilchen mit Spin down usw. beschreibt. Dies ist aber falsch. Für Dirac-Teilchen sind die Spin-Matrizen

$$\boxed{\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \quad , \quad \Sigma^i := \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}} \tag{5.40}$$

und man kann beweisen, daß $u_a, u_b, u_c, u_d$ i.A. keine Eigenzustände von $\Sigma_z$ sind. Wenn jedoch die z-Achse so orientiert ist, daß sie entlang der Bewegungsrichtung zeigt, d.h. $p_x = p_y = 0$ gilt, so sind sie Eigenzustände von $\Sigma_z$, und $u_a$, $u_c$ stehen für Spin up, $u_b$, $u_d$ für Spin down.

## 5.5 Transformation von Bi-Spinoren

Wir hatten bereits erwähnt, daß Bi-Spinoren keine Vierervektoren sind und sich folglich nicht über Lorentz-Transformationen transformieren. Die Transformation beim "Boost" in $x$-Richtung vom System $S$ ins System $S'$ erfolgt nach der Vorschrift

$$\boxed{\psi' = S\psi} \tag{5.41}$$

$$S = a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma^1 \\ a_-\sigma^1 & a_+ \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

$$a_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.43}$$

Die $4 \times 4$-Transformationsmatrix $S$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$S^\dagger S = S^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c}\sigma^1 \\ -\frac{v}{c}\sigma^1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1 \tag{5.44}$$

$$S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0 \tag{5.45}$$

## 5.6 Bilineare Kovarianten

Die Bildung einer lorentzinvarianten *skalaren Größe* aus einem Bi-Spinor erfolgt *nicht* wie naiv vermutet durch $\psi^\dagger \psi$, denn es ist

$$(\psi^\dagger \psi)' = (\psi')^\dagger \psi' = \psi^\dagger S^\dagger S \psi \neq \psi^\dagger \psi$$

Eine lorentzinvariante skalare Größe erhalten wir durch $\bar{\psi}\psi$ mit dem *adjungierten Bi-Spinor*

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*) \tag{5.46}$$

Denn mit Gleichung (5.45) erkennt man leicht, daß

$$(\bar{\psi}\psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \psi = \bar{\psi}\psi$$

eine Lorentzinvariante ist. Um zu unterscheiden, ob dies eine skalare oder eine pseudoskalare Größe ist, läßt man den in Kapitel 5.3 hergeleiteten Paritätsoperator für Bi-Spinoren auf $\bar{\psi}\psi$ wirken:

$$\hat{P}\bar{\psi}\psi = (\gamma^0\bar{\psi})(\gamma^0\psi) = ((\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0)(\gamma^0\psi) = (\psi^\dagger {\gamma^0}^\dagger \gamma^0)(\gamma^0\psi) = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar{\psi}\psi \tag{5.47}$$

Der Paritätseigenwert ist $P = +1$, also handelt es sich um einen Skalar.

Man kann unter Einbeziehung der in Gleichung (5.16) definierten Matrix $\gamma^5$ auch noch Pseudoskalare, Vektoren, axiale Vektoren etc. (vgl. Kapitel 4.1) aus Bi-Spinoren aufbauen:

| | |
|---|---|
| Skalar | $\bar{\psi}\psi$ |
| Pseudoskalar | $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ |
| Vektor (Polarvektor) | $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ |
| Pseudovektor (oder axialer Vektor) | $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ |
| antisymm. Tensor | $\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi$ |

## 5.7 Wahrscheinlichkeitsströme von Dirac-Teilchen

In der Quantenmechanik definiert man für eine Wellenfunktion $\phi(\vec{x}, t)$ eine *Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$\rho := \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi(\partial_t\phi) - (\partial_t\phi^*)\phi\right) \tag{5.48}$$

und eine *Wahrscheinlichkeitsstromdichte*,

$$\vec{j} := -\frac{i\hbar}{2m}\left(\phi(\vec{\nabla}\phi) - (\vec{\nabla}\phi^*)\phi\right) \tag{5.49}$$

die die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{5.50}$$

erfüllen. In Viderernotation geschreiben erhalten wir die sogenannte *Vierer-Wahrscheinlichkeitsstromdichte*

$$j^\mu := (c\rho, \vec{j}) \tag{5.51}$$

Die Frage ist nun, welche Form $j^\mu$ für Bi-Spinoren annimmt. Wir setzen

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{5.52}$$

an und erhalten aus der Kontinuitätsgleichung (5.50) und unter Verwendung der Dirac-Gleichung (5.18) die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j} = c\psi^\dagger \vec{\alpha}\psi = c\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \quad \text{mit} \quad \alpha^i := (\gamma^0)^{-1}\gamma^i \tag{5.53}$$

Damit wird die *Vierer-Wahrscheinlichkeitsstromdichte für Bi-Spinoren* zu

$$j^\mu := (c\bar{\psi}\gamma^0\psi, c\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{5.54}$$

was in der Tat ein lorentzinvarianter Vierervektor ist (s. Übungen).

Die entsprechende elektrische Viererstromdichte eines Dirac-Teilchens mit Ladung $q$ und Bi-Spinor $\psi$ erhält man aus

$$j^\mu = q \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{5.55}$$

## 5.8 Die Weyl-Gleichung, Helizität und Chiralität

Wir betrachten die Dirac-Gleichung (5.18) für ein masseloses Fermion (d.h. $m = 0, s = 1/2$):

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0 \tag{5.56}$$

Diese Gleichung wird die *Weyl-Gleichung* genannt und beschreibt z.B. Neutrinos.

Wir gehen über zur entsprechenden Impulsraum-Dirac-Gleichung (5.27), der *Impulsraum-Weyl-Gleichung*

$$\gamma^\mu p_\mu u(p^\mu) = 0 \tag{5.57}$$

und schreiben diese in Matrix-Form:

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -\frac{E}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \tag{5.58}$$

Nach dem Lösen des LGS (5.58) erhält man als Bedingung für $u_A$ und $u_B$ die Gleichungen

$$u_A = \frac{c}{E}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\; u_B \quad , \quad u_B = \frac{c}{E}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\; u_A \tag{5.59}$$

An dieser Stelle benötigen wir den *Helizitätsoperator* für Bi-Spinoren, der mit Hilfe des Spin-Operators (5.40) zu

$$\boxed{\hat{H} := \frac{\vec{p}\cdot\vec{S}}{|\vec{p}||\vec{S}|} \equiv \frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} \equiv \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{5.60}$$

wird, was -man beachte- eine $4\times 4$-Matrix ist.

Ferner verwenden wir die beiden Relationen

$$\begin{aligned} E^2 = \vec{p}^2c^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{c|\vec{p}|}{E} = 1 \\ (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 &= \vec{p}^2 \end{aligned}$$

und vereinfachen die Gleichungen (5.59) zu

$$\begin{aligned} u_A =&\frac{c}{E}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\cdot\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|}\; u_B = \frac{c|\vec{p}|}{E}\cdot\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\; u_B = 1\cdot\hat{H}\; u_B = \hat{H}u_B \\ u_B =& \cdots = \hat{H}u_A \end{aligned} \tag{5.61}$$

Durch gegenseitiges Einsetzen können diese entkoppelt werden:

$$u_A = \hat{H}u_B = \hat{H}^2u_A$$

$$u_B = \hat{H}u_A = \hat{H}^2u_B$$

Es folgt die Bedingung $H^2 = 1$, also

$$\boxed{H = \pm 1} \tag{5.62}$$

was bedeutet, daß masselose Fermionen Eigenzustände der Helizität sind und die Helizitätseigenwerte nur $H = +1$ oder $H = -1$ sein können (d.h. Spin und Impuls stehen immer parallel oder antiparallel).

Interessant ist die Tatsache, daß sich der Helizitätsoperator für masselose Fermionen zur der in Gleichung (5.16) definierten $\gamma^5$-Matrix vereinfacht:

$$\hat{H}\psi_{m=0} = \gamma^5\psi_{m=0} = \pm\psi_{m=0} \tag{5.63}$$

---

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \gamma^5\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B \\ u_A \end{pmatrix} \\ &\overset{(5.61)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\; u_A \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\; u_B \end{pmatrix} \overset{(5.60)}{=} \hat{H}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ein Beispiel für (quasi) masselose Fermionen sind die *Neutrinos*, die -wie wir später im Abschnitt 5.9 diskutieren werden - in der Natur als *linkshändige Neutrinos* ($H = -1$) oder *rechtshändige Antineutrinos* ($H = +1$) vorkommen.

In diesem Zusammenhang bietet es sich an, die *Chiralitätsprojektoren* für Bi-Spinoren zu definieren:

$$\boxed{\hat{P}_L := \frac{1}{2}(1-\gamma^5) \quad , \quad \hat{P}_R := \frac{1}{2}(1+\gamma^5)} \tag{5.64}$$

Wenn $u$ ein beliebiger Bi-Spinor ist, so definieren wir seine Chiralitätskomponenten durch

$$u = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u = \hat{P}_L u + \hat{P}_R u =: u_L + u_R \tag{5.65}$$

Die Bi-Spinoren $u_{L/R}$ nennen wir links-/rechtshändig. Die Chiralitätsprojektoren genügen den folgenden Regeln:

$$\hat{P}^2_{L/R} = \hat{P}_{L/R} \tag{5.66}$$

$$\hat{P}^\dagger_{L/R} = P_{L/R} \tag{5.67}$$

$$\hat{P}_L \hat{P}_R = \hat{P}_R \hat{P}_L = 0 \tag{5.68}$$

Folglich ergibt ihre Anwendung auf $u_{L/R}$

$$\begin{array}{ll} \hat{P}_L u_L = u_L & \hat{P}_L u_R = 0 \\ \hat{P}_R u_L = 0 & \hat{P}_R u_R = u_R \end{array}$$

---

*Beispiel:*

Diese Chiralitätsprojektoren lassen wir nun auf die Bi-Spinoren von Neutrinos $u(\nu)$ und Antineutrinos $v(\bar{\nu})$ wirken:

$$\hat{P}_L u(\nu) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u(\nu) = \frac{1}{2}(1-\hat{H})u(\nu) = \frac{1}{2}(1-(-1))u(\nu) = u(\nu) \tag{5.69}$$

$$\hat{P}_R u(\nu) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u(\nu) = \frac{1}{2}(1+\hat{H})u(\nu) = \frac{1}{2}(1+(-1))u(\nu) = 0 \tag{5.70}$$

Hierbei ging ein, daß für Neutrinos der Helizitätseigenwert $H = -1$ ist. Für Antineutrinos ist der Helizitätseigenwert $H = +1$ und wir erhalten entsprechend

$$\hat{P}_L v(\bar{\nu}) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)v(\bar{\nu}) = \frac{1}{2}(1-\hat{H})v(\bar{\nu}) = \frac{1}{2}(1-(+1))v(\bar{\nu}) = 0 \tag{5.71}$$

$$\hat{P}_R v(\bar{\nu}) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)v(\bar{\nu}) = \frac{1}{2}(1+\hat{H})v(\bar{\nu}) = \frac{1}{2}(1+(+1))v(\bar{\nu}) = v(\bar{\nu}) \quad (5.72)$$

Die Chiralitätsprojektoren sorgen also dafür, daß Neutrinos stets negative und Antineutrinos stets positive Helizität haben.

---

## 5.9 Paritätsverletzung, V-A–Kopplung

Bis Mitte der 50er Jahre sah man es als selbstverständlich an, daß die Gesetze der Physik ambidexter seien, d.h. daß das Spiegelbild eines jeden physikalischen Prozesses wieder einen möglichen physikalischen Prozess darstellt. Das dies nicht immer der Fall sein muß, wollen wir an den folgenden Beispielen kurz erläutern.

### Der Zerfall des Kaon

Mesonen bestehen immer aus einem Quark und einem Antiquark. Wie wir in Abschnitt 5.3 gesehen haben, haben Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte Parität. Wir nehmen an, das Quark habe Parität $P_q = +1$, dann hat das Antiquark $P_{\bar{q}} = -1$ und das Meson insgesamt $P_{Meson} = (+1)\cdot(-1) = -1$. Das $\mathrm{K}^+$, bestehend aus $\mathrm{u\bar{s}}$, zerfallt über drei verschiedene Moden in Pionen $\pi^+ = \mathrm{u\bar{d}}, \pi^- = \mathrm{d\bar{u}}, \pi^0 = 1/\sqrt{2}(\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}})$:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & \underset{P=-1}{\mathrm{K}^+} \rightarrow \underset{P=+1}{\pi^+ + \pi^0} \\
\text{II.} & \mathrm{K}^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \\
\text{III.} & \underset{P=-1}{\mathrm{K}^+} \rightarrow \underset{P=-1}{\pi^+ + \pi^+ + \pi^-}
\end{array}$$

Der Zerfall in zwei Pionen ergibt eine Parität von $(-1)^2 = +1$ im Endzustand, und der Zerfall in drei Pionen eine Parität von $(-1)^3 = -1$. Die Theoretiker Lee und Yang räumten 1956 ein, daß die Parität in der schwachen Wechselwikrung möglicherweise verletzt sei, und schlugen einen experimentellen Test vor.

### Das Experiment von Wu

Die japanische Physikerin *C.S. Wu* führte in jenem Jahre 1956 das berühmte Experiment durch, in welchem $^{60}Co$-Kerne bei einer Temperatur von ca. 10mK magnetisch so ausgerichtet wurden, daß ihre Spins in z-Richtung (nach "oben") zeigten. $^{60}Co$ unterliegt dem schwachen Betazerfall $\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ Man untersuchte die Richtung der emittierten Elektronen und fand heraus, daß die meisten Elektronen *entgegen* der Spinrichtung der Kerne (also nach "unten") ausgestrahlt wurden.

$$\begin{array}{ll}
^{60}Co & \rightarrow^{60} Ni + e^- + \bar{\nu}_e \\
j = 5 & j = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
\vec{p} = 0 & \vec{p} = 0 + \vec{p}_e - \vec{p}_e
\end{array} \quad (5.73)$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt, daß Elektron und Antineutrino jeweils Spins $s = \frac{1}{2}$ besitzen, die in die Spinrichtung des Kerns weisen. Die Elektronen, die entgegen der Spinrichtung der Kerne emittiert werden sind also alle linkshändig. Die Erhaltung des Translationsimpulses fordert nun, daß Elektron und Antineutrino in entgegengesetzten Richtungen 'davonfliegen'. Damit sind die emittierten Antineutrinos alle rechtshändig.

Stellen wir uns nun das Spiegelbild dieses Prozesses vor (wir spiegeln an der x-y-Ebene), so bleibt der Spin der Kerne derselbe, nur die bevorzugte Austrittsrichtung der Elektronen weist nun nach "oben", also *in* Richtung der Kernspins. Dieses Spiegelbild stellt einen Prozeß dar, der in der Natur nicht vorkommt; folglich ist die Parität *keine* Invariante der schwachen Wechselwirkung.

### Neutrinos sind Vampire

Die Parität ist in der schwachen Wechselwirkung *maximal* verletzt, denn es existieren *ausschließlich* linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos. Man kann das Neutrino also als einen Vampir betrachten, denn es besitzt kein Spiegelbild ...

### Berechnung der Polarisation der beim $\beta$-Zerfall emittierten Elektronen

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho$ der linkshändigen Komponente eines beim $\beta$-Zerfall emittierten Elektrons untersuchen. Hierzu betrachten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho(u_{L/R})}{c} &\stackrel{(5.54)}{=} u^\dagger_{L/R} u_{L/R} = (\hat{P}_{L/R} u)^\dagger (\hat{P}_{L/R} u) = u^\dagger \hat{P}^\dagger_{L/R} \hat{P}_{L/R} u \\
&\stackrel{(5.67)}{=} u^\dagger \hat{P}^2_{L/R} u \stackrel{(5.66)}{=} u^\dagger \hat{P}_{L/R} u = (u_A, u_B)\, \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(5.31)}{=} \frac{1}{2}(u_A, c\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\; u_A) \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 \\ \mp 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ c\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\; u_A \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}|u_A \mp c\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2} u_A|^2 \qquad \text{mit } (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})u_A = |\vec{p}|\hat{H}u_A = |\vec{p}|H u_A \\
&= \frac{1}{2}|u_A \mp c\frac{|\vec{p}|\;H}{E+mc^2} u_A|^2 = \frac{1}{2}|1 \mp c\frac{|\vec{p}|\;H}{E+mc^2}|^2 \cdot |u_A|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 \mp c\frac{|\vec{p}|\;H}{E+mc^2}\right)^2 |u_A|^2 = \frac{1}{2}\left(1 \mp 2\frac{c|\vec{p}|\;H}{E+mc^2} + \frac{c^2\vec{p}^2\;H^2}{(E+mc^2)^2}\right)|u_A|^2 \\
&\qquad \text{mit } H^2 = 1 \text{ und } c^2\vec{p}^2 = (E+mc^2)(E-mc^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 \mp 2\frac{c|\vec{p}|\;H}{E+mc^2} + \frac{E-mc^2}{E+mc^2}\right)|u_A|^2 = \frac{E \mp c|\vec{p}|\;H}{E+mc^2}\;|u_A|^2
\end{aligned}
$$

Wir definieren die *Polarisation* der linkshändigen Komponente $\mathcal{P}_L$ als das Verhältnis

$$
\mathcal{P}_L := \frac{\rho(u_L, H=+1) - \rho(u_L, H=-1)}{\rho(u_L, H=+1) + \rho(u_L, H=-1)} \tag{5.74}
$$

was mit $\rho(u_L, H=\pm 1) = c \cdot \frac{E \mp c|\vec{p}|}{E+mc^2}\, |u_A|^2$ zu

$$\mathcal{P}_L = \frac{-2c\,|\vec{p}|}{2E} = -\frac{c\,|\vec{p}|}{E} = -\beta \tag{5.75}$$

wird. *Die Wahrscheinlichkeit*, eine linkshändige Komponente eines Elektrons mit Helizität $H = \pm 1$ vorzufinden ist

$$W(H=\pm 1) := \frac{\rho(u_L, H=\pm 1)}{\rho(u_L, H=+1) + \rho(u_L, H=-1)} = \frac{1 \mp \beta}{2} \tag{5.76}$$

Wir erhalten also das Resultat, daß die longitudinale Polarisation der (von unpolarisierten Kernen emittierten) Elektronen $\mathcal{P}_L = -\beta$ sein muß. (Für Positronen erhält man $\mathcal{P}_R = +\beta$) Die experimentellen Ergebnisse sind in Abbildung 5.1 dargestellt.

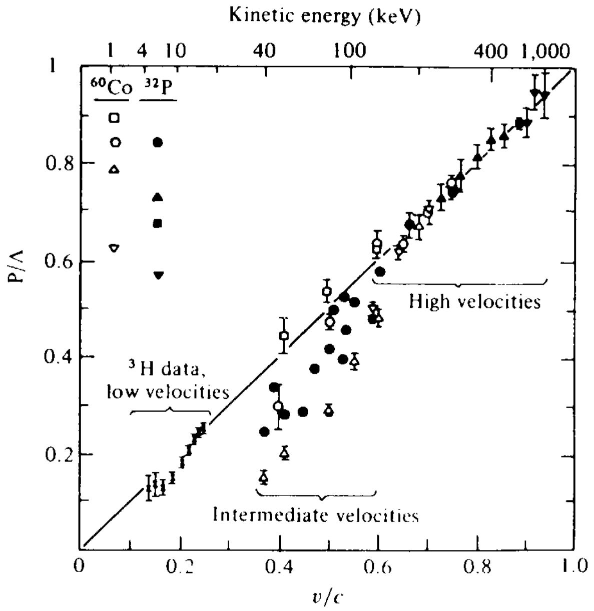



Abbildung 5.1: *Polarisation für erlaubte $\beta$–Zerfälle. $\Lambda$ ist eine kleine Korrektur für Coulomb- und Abschirmungseffekte.*

**Der Zerfall des Pion**

Wir betrachten die leptonischen Zerfallszweige des $\pi^-$:

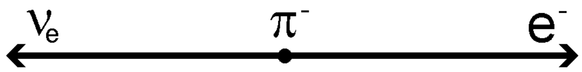
$$\begin{array}{ll} \pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e & e\text{-Modus} \\ \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu & \mu\text{-Modus} \end{array}$$

$$m_{\pi^-} = 139 \text{ MeV} \quad m_e = 0,5 \text{ MeV} \quad m_\mu = 105 \text{ MeV}$$

Man würde erwarten, daß die Zerfallsrate für den e-Modus (aufgrund der geringeren Masse von e) größer ist als die Zerfallsrate für den $\mu$-Modus Die Natur verhält sich aber anders:

$$\frac{I(\mathrm{e}-\mathrm{Modus})}{I(\mu-\mathrm{Modus})}=10^{-4}$$

Der e-Modus ist also stark unterdrückt. Die Erklärung dafür ist recht simpel:

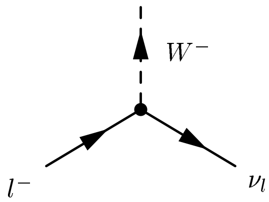



$$\begin{array}{ccc} \pi^- & \rightarrow & l^- \;+\; \bar{\nu}_l \\ j=0 & & j=\pm\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2} \\ \vec{p}=0 & & \vec{p}=+\vec{p}_l-\vec{p}_l \end{array} \tag{5.77}$$

Aus der Dreh- und Translationsimpulserhaltung folgt, daß $l^-$ und $\bar{\nu}_l$ entgegengesetzten Spin und entgegengesetzten Impuls haben müssen, d.h. sie sind beide linkshändig oder beide rechtshändig. Antineutrinos sind immer rechtshändig, also sind die $l^-$ ebenfalls rechtshändig. Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß die Wahrscheinlichkeit rechtshändige Teilchen ($H=+1$) vorzufinden gerade $\frac{1}{2}(1-\beta)$ ist. Da die $e^-$ wesentlich leichter sind als die $\mu^-$ sind sie wesentlich schneller. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit welche vorzufinden wesentlich kleiner, was die starke Unterdrückung des Zerfallsastes erklärt.

**V-A–Kopplung**

Um die V-A–Kopplung einführen zu können müssen wir an dieser Stelle mit den Grundprinzipien der Pädagogik brechen, und die Übergangsamplitude $\mathcal{M}$ mit den Feynman-Regeln für die schwache Wechselwirkung bilden, die erst in einem späteren Kapitel besprochen werden. Der Zerfall eines Leptons $l^-$ in das entsprechende (linkshändige !) Neutrino $\nu_l$ unter Emission eines W$^-$ sieht wie folgt aus:




Die Übergangsamplitude ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\propto \bar{u}(l)\gamma^\mu u_L(\nu) \\ &= \bar{u}(l)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u(\nu) \\ &= \bar{u}(l)\frac{1}{2}(\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma^5)u(\nu) \\ &= \frac{1}{2}\bar{u}(l)\gamma^\mu u(\nu)-\frac{1}{2}\bar{u}(l)\gamma^\mu\gamma^5 u(\nu) \\ &=: \frac{1}{2}(V^\mu-A^\mu) \end{aligned} \tag{5.78}$$

Wie wir in Kapitel 5.6 gesehen haben transformiert sich der erste Term

$$V^\mu := \bar{u}(l)\gamma^\mu u(\nu) \quad \text{"QED-Strom"} \tag{5.79}$$

wie ein **V**ektor (genau wie die Viererstromdichte der QED). Der zweite Term

$$A^\mu := \bar{u}(l)\gamma^\mu\gamma^5 u(\nu) \quad \text{"schwacher Strom"} \tag{5.80}$$

transformiert sich wie ein **A**xialvektor (Pseudovektor), weshalb man im Gesamten von einer *V-A-Kopplung* spricht.

Dies stellt später den Rahmen für die Vereinheitlichung von schwacher und e.m. Wechselwirkung dar, denn die schwache Wechselwirkung unterscheidet sich von der e.m. formal nur dadurch, daß von ultrarelativistischen Teilchen nur die linkshändigen Komponenten und von deren Antiteilchen nur die rechtshändigen Komponenten wechselwirken. Wir werden auf diesen Aspekt später in Kapitel 9 ausführlich eingehen.

## 5.10 Theoreme für die Arbeit mit Bi-Spinoren und $\gamma$-Matrizen

Die folgenden Theoreme sind für das Rechnen mit Bi-Spinoren und $\gamma$-Matrizen von großem praktischen Nutzen. Wir geben nur die Ergebnisse an, die Beweise werden Sie selbst in den Übungen erarbeiten. Hierbei wird häufig die von Feynman eingeführte abkürzende Schreibweise mit dem *Slash-Symbol*

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu \tag{5.81}$$

benutzt, wobei $a^\mu$ ein beliebiger vierdimensionaler Vektor ist.

**Die Theoreme:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.) | $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ | | |
| 2.) | $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{Tr}(A)$ | | |
| 3.) | $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ | | |
| 4.) | $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ | | |
| 5.) | $\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}$ | 5'.) | $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2\ a\cdot b$ |
| 6.) | $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$ | | |
| 7.) | $\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu$ | 7'.) | $\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}$ |
| 8.) | $\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}$ | 8'.) | $\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4\ a\cdot b$ |
| 9.) | $\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu$ | 9'.) | $\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$ |
| 10.) | $\mathrm{Tr}(\prod_{i=1}^{n}\gamma^{\mu_i}) = 0 \ \ \forall\, n$ ungerade | | |
| 11.) | $\mathrm{Tr}(1) = 4$ | | |
| 12.) | $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ | 12'.) | $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4\ a\cdot b$ |
| 13.) | $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma)$ $= 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$ | 13'.) | $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a\cdot b\cdot c\cdot d$ $-a\cdot cb\cdot d + a\cdot db\cdot c)$ |

## 5.11 Übungsaufgaben (Termin 6)

**Aufgabe 5.1**

Zeigen Sie explizit, daß die in Gleichung (5.13) und (5.14) definierten $\gamma$-Matrizen die Bedingung (5.11) erfüllen.

**Aufgabe 5.2**

Zeigen Sie, daß $u_a$ und $u_b$ aus Gleichung (5.33) in dem Sinne orthogonal sind, daß $u_a^\dagger \cdot u_b = 0$. Zeigen Sie das selbe für $u_c$ und $u_d$. Sind $u_a$ und $u_c$ ebenfalls orthogonal?

**Aufgabe 5.3**

Zeigen Sie, daß sich im Falle $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ die Bi-Spinoren in Gleichung (5.33) zu

$$u_a = \begin{pmatrix} \sqrt{E/c + mc} \\ 0 \\ \sqrt{E/c - mc} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{usw.}$$

reduzieren. Bestätigen Sie, daß dies die Eigen-Bi-Spinoren von $\hat{S}_z$ sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

**Aufgabe 5.4**

Berechnen Sie ausgehend von der Definition (5.42) die Größe $S^\dagger S$ und bestätigen Sie die Eigenschaft (5.44). Zeigen Sie ferner, daß $S^\dagger \gamma^0 S \equiv \gamma^0$

**Aufgabe 5.5**

Zeigen Sie, daß der Ausdruck $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ invariant unter der Lorentz-Transformation (5.41) ist.

**Aufgabe 5.6**

Zeigen Sie, daß der Ausdruck $v^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ sich unter der Lorentz-Transformation (5.41) wie ein Vierervektor transformiert. Zeigen Sie auch, daß er sich unter der Paritätoperation (5.38) wie ein Vektor transformiert (d.h. $v^0$ invariant, $\vec{v}$ wechselt das Vorzeichen).

**Aufgabe 5.7**

Zeigen Sie, daß der Bi-Spinor, der ein Elektron in Ruhe darstellt, Eigenzustand der Paritätsoperation (5.38) ist. Welche innere Parität hat demnach das Teilchen? Wie verhält sich das Positron? Was würde passieren, wenn man die Vorzeichenskonvention in (5.38) änderte? (Beachten Sie, daß die absolute Parität eines Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens zwar willkürlich ist, die relative Parität von Teilchen und Antiteilchen aber entgegengesetzt sein muß.)

**Aufgabe 5.8**

a) Zeigen Sie, daß $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$ gilt.

b) Es sei $\Gamma$ ein beliebiges Produkt von $\gamma$-Matrizen:

$$\Gamma = \gamma_a \gamma_b \dots \gamma_z$$

Zeigen Sie, daß $\bar{\Gamma} := \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ das selbe Produkt nur in umgekehrter Reihenfolge ist:

$$\bar{\Gamma} = \gamma_z \dots \gamma_b \gamma_a$$

**Aufgabe 5.9**

Beweisen Sie nun die Theoreme aus Abschnitt 5.10:

a) Beweisen Sie die Spurtheoreme 1.), 2.) und 3.)

b) Beweisen Sie die Gleichung 4.)

c) Benutzen Sie die Antikommutatorrelation 5.) um 5'.) zu beweisen.

d) Benutzen Sie die Antikommutatorrelation 5.) um die Kontraktionstheoreme 6.), 7.) und 8.) zu beweisen.

e) Beweisen Sie 7.') ausgehend von 7.), 8'.) von 8.) und 9'.) von 9.).

f) Bestätigen Sie die Theoreme 10.), 11.), 12.) und 13.)

g) Beweisen Sie 12.') ausgehend von 12.) und 13'.) von 13.).

# Kapitel 6

# Feynman-Regeln

Für die experimentelle Untersuchung der Wechselwirkungen von Elementarteilchen stehen uns drei Untersuchungsobjekte zur Verfügung: *gebundene Zustände*, *Zerfälle* und *Streuung*.

Wir werden in diesem Kapitel die grundlegenden Ideen und Strategien des *Feynman'schen Kalküls* einführen, welcher sich besonders gut für die Beschreibung von Zerfällen und Streuung eignet.

## 6.1 Lebensdauer und Wirkungsquerschnitt

### 6.1.1 Zerfallsrate und Lebensdauer

Die *Zerfallsrate* $\Gamma$ ist durch die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N(t) \tag{6.1}$$

definiert, welche das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\Gamma t} \tag{6.2}$$

ergibt. Wie in den Übungen gezeigt wird, ist die *mittlere Lebensdauer* $\tau$ der Kehrwert der Zerfallsrate.

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \tag{6.3}$$

Zerfallen Teilchen in *mehreren verschiedenen Moden*, so ist die Gesamtzerfallsrate die Summe der Einzelzerfallsraten.

$$\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i \tag{6.4}$$

Entsprechend bildet sich die mittlere Lebensdauer aus

$$\tau_{tot} = \frac{1}{\Gamma_{tot}} = \frac{1}{\sum\limits_i \Gamma_i} \tag{6.5}$$

Das Verzweigungsverhältnis $BR_i$ für den $i$. Modus berechnet sich aus der Formel

$$BR_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}} \tag{6.6}$$

### 6.1.2 Wirkungsquerschnitt

Wenn wir einen Teilchenstrahl auf ein Target schicken, so interessiert uns die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Teilchen des Strahls das Target trifft (mit dem Target wechselwirkt). Zur Untersuchung dieses Sachverhalts führen wir die *Luminosität* ein, der Quotient aus Zahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit $dN_{ein}/dt$ und Querschnittsfläche des Strahls $A_{Strahl}$

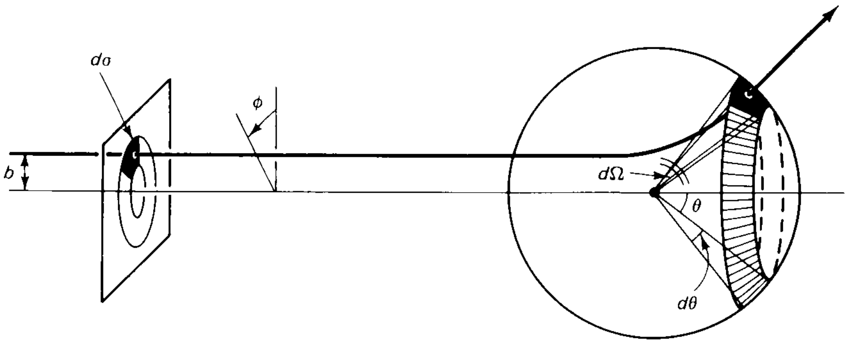
$$L = \frac{dN_{ein}}{dt} \cdot \frac{1}{A_{Strahl}} \tag{6.7}$$

Die Luminosität ist meist eine Funktion der Zeit $L = L(t)$.

Der *Wirkungsquerschnitt* $\sigma$ eines Teilchens ist nun definiert durch die Zahl der wechselwirkenden Teilchen pro Zeiteinheit $dN_{WW}/dt$ und die Luminosität $L(t)$

$$\frac{dN_{WW}}{dt} = \sigma \cdot L(t) \tag{6.8}$$

Der Wirkungsquerschnitt $\sigma$ wird i.A. aus dem experimentell zugänglichen *differentiellen Wirkungsquerschnitt* $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ berechnet.




(Diesen differentiellen Wirkungsquerschnitt findet man rechnerisch, indem man die Abhängigkeit des Ablenkwinkels $\theta$ vom Stoßparameter $b$ findet und diese Beziehung nach $b(\theta)$ umstellt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich nun aus $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{db}{d\theta}| = |\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{db^2}{d\theta}|$.)

Die Integration über den gesamten Raumwinkelbereich ergibt den Wirkungsquerschnitt,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) \cdot d\Omega \tag{6.9}$$

wobei $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

### 6.1.3 Fermis Goldene Regel

Nach Fermis Goldener Regel banötigt man nun zur Berechnung der beiden Größen Übergangsrate und Wirkungsquerschnitt folgende "Zutaten":

- die Übergangsamplitude

- den für den Übergang zur Verfügung stehenden Phasenraum

Die *Übergangsamplitude* erhalten wir durch Konstruktion des *Matrixelements* $\mathcal{M}$ aus den Feynman-Regeln, die für jeden Wechselwirkungstyp verschieden sind, und später im Detail erklärt werden.

Der *Phasenraum* wird durch das infintesimale Phasenraumvolumenelement *dLips* (<u>l</u>orentz<u>i</u>nvariant <u>p</u>hase <u>s</u>pace) repräsentiert:

$$\boxed{\begin{aligned} dLips(m,n) := & \frac{c\ d^3p_{m+1}}{(2\pi)^3\ 2E_{m+1}} \cdot \frac{c\ d^3p_{m+2}}{(2\pi)^3\ 2E_{m+2}} \cdots \frac{c\ d^3p_n}{(2\pi)^3\ 2E_n} \\ & \cdot (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{j=m+1}^{n} p_j \right) \end{aligned}} \tag{6.10}$$

---

*Beweis:* **Lorentzinvarianz von** $\frac{c\ d^3p}{2E}$

Wir betrachten die lorentzinvariante Größe $l$

$$l := p^\mu p_\mu - m^2c^2 = \tfrac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 + m^2c^2 = \tfrac{E^2}{c^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}^2$$

und integrieren eine $\delta$-Funktion von $l$ über den gesamten Viererraum

$$\begin{aligned} \int \delta(l) d^4p &= \int \delta(\tfrac{E^2}{c^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}^2) d^4p \qquad \text{mit } \delta(x^2 - a^2) = \tfrac{\delta(x-a)+\delta(x-a)}{2|a|} \\ &= \int \int_0^\infty \tfrac{\delta(\frac{E}{c} + \sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2}) + \delta(\frac{E}{c} - \sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2})}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2}} d\left(\tfrac{E}{c}\right) d^3p \\ &= \int \tfrac{1+0}{2\sqrt{\vec{p}^2+m^2c^2}}\ d^3p \\ &= \int \tfrac{c\ d^3p}{2E} \end{aligned}$$

Da $l$ lorentzinvariant ist, ist auch das Integral $d^4p$ über die $\delta$-Funktion von $l$ lorentzinvariant, und es folgt die Lorentzinvarianz des inifinitesimalen Volumenelements $\frac{c\ d^3p}{2E}$.

---

### Goldene Regel für Zerfälle

Wir nehmen an, Teilchen 1 zerfällt in verschiedene andere Teilchen 2, 3, ... n:

$$1 \to 2 + 3 + \cdots + n$$

Die Zerfallsrate ergibt sich dann aus

$$\boxed{d\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1}\ |\mathcal{M}|^2\ dLips(1,n)} \tag{6.11}$$

Der *statistische Faktor* $S$ ist ein Produkt aus $1/j_i!$ für jede Gruppe $i$ von $j_i$ identischen Teilchen.

$$S = \prod_i \frac{1}{j_i!} \tag{6.12}$$

Man beachte, daß $\mathcal{M}$ i.A. von den Viererimpulsen $p_2, p_3, \ldots p_n$ abhängt und bei der Integration der Term $|\mathcal{M}|^2$ nicht vor das Integral gezogen werden darf.

---

*Beispiel:*

Wir betrachten einen Zerfall vom Typ $1 \to 2+3$. Für die Viererimpulse gilt Energie- und Impulserhaltung, d.h.

$$p_1 = \begin{pmatrix} m_1 c^2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p}^2 + m_2 c^2} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p}^2 + m_3 c^2} \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Wir setzen für die Zerfallsrate wie folgt an:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2\hbar m_1} \, |\mathcal{M}|^2 \; dLips(1,3) \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2\hbar m_1} \, \frac{c\; d^3p_2}{(2\pi)^3 \; 2E_2} \cdot \frac{c\; d^3p_3}{(2\pi)^3 \; 2E_3} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \end{aligned}$$

Es gelten

$$\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta(\frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c}) \cdot \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \tag{6.14}$$

$$d^3p_3 = |\vec{p}_3|^2 \cdot d|\vec{p}_3| \cdot d\Omega_3 \tag{6.15}$$

$$\frac{E_3}{c} = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \Rightarrow \frac{dE_3}{c} = \frac{|\vec{p}_3| \; d|\vec{p}_3|}{\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2}} \tag{6.16}$$

$$d|\vec{p}_3| = \frac{E_3}{c\;|\vec{p}_3|} \cdot \frac{dE_3}{c} \tag{6.17}$$

$$\mathcal{M} \neq \mathcal{M}(p_2, p_3) \tag{6.18}$$

Durch Ausführen der Integration über $d^3p_2$ wird wegen der $\delta^3$-Funktion aus Gleichung (6.14) $\vec{p}_2 = \vec{p}_3 - \vec{p}_1 \equiv \vec{p}_3$, was $E_2/c = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_2^2 c^2} = \sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2 c^2 + m_2^2 c^2}$ bewirkt. So wird

$$\Gamma = \oint \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\hbar m_1 \; (2\pi)^2} \; \frac{\delta(\frac{E_1}{c} - \sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2 c^2 + m_2^2 c^2} - \frac{E_3}{c})}{\sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2 c^2 + m_2^2 c^2}} \cdot |\vec{p}_3| \cdot \frac{dE_3}{c} \cdot d\Omega_3$$

Wir betrachten nun den Term $\frac{\delta(\frac{E_1}{c} - \sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2 c^2 + m_2^2 c^2} - \frac{E_3}{c})}{\sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2 c^2 + m_2^2 c^2}}$ etwas genauer und formen die $\delta$-Funktion mittels der Formel $\delta(h(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|h'(x_i)|}$ um:

$$h(E_3/c) = \frac{E_1}{c} - \sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2 c^2 + m_2^2 c^2} - \frac{E_3}{c} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} h'(E_3/c) &= \frac{E_3/c}{\sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2c^2 + m_2^2c^2}} - 1 \\ &\equiv \frac{E_3}{E_2} - 1 = \frac{E_3 - E_2}{E_2} = \frac{E_1}{E_2} \\ &= \frac{m_1 c}{\sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2c^2 + m_2^2c^2}} \end{aligned} \tag{6.20}$$

Die Nullstelle von $h(E_3)$ ist nicht von weiterem Interesse, wir nenne sie $\tilde{E_3}$ und erhalten für den Term

$$\frac{\delta(\frac{E_1}{c} - \sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2c^2 + m_2^2c^2} - \frac{E_3}{c})}{\sqrt{E_3^2/c^2 - m_3^2c^2 + m_2^2c^2}} = \frac{\delta(E_3 - \tilde{E_3})}{m_1 c} \tag{6.21}$$

so daß die Zerfallsrate bei isotropem Matrixelement $\mathcal{M}$ (d.h. $\int_{\bigcirc} |\mathcal{M}|^2 d\Omega_3 = 4\pi|\mathcal{M}|^2$) zu

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{\bigcirc} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\hbar m_1\ (2\pi)^2} \frac{\delta(E_3 - \tilde{E_3})}{m_1 c^2} \cdot |\vec{p}_3| \cdot \frac{dE_3}{c} \cdot d\Omega_3 \\ &= \int_{\bigcirc} \frac{|\mathcal{M}|^2\ |\vec{p}_3|}{8\hbar m_1^2 c\ (2\pi)^2} \cdot d\Omega_3 \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2\ |\vec{p}|}{8\pi\ \hbar\ m_1^2 c} \end{aligned} \tag{6.22}$$

wird.

---

**Goldene Regel für Streuung**

Wir nehmen an, Teilchen 1 wird an Teilchen 2 gestreut, und es entstehen mindestens zwei andere Teilchen 3, 4, ... n:

$$1 + 2 \to 3 + 4 + \cdots + n$$

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich hier aus

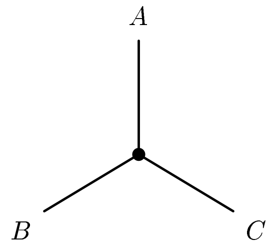
$$\boxed{d\sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}}\ |\mathcal{M}|^2\ dLips(2,n)} \tag{6.23}$$

Man beachte wiederum, daß $\mathcal{M}$ i.A. von den Viererimpulsen $p_3, p_4, \ldots p_n$ abhängt und bei der Integration der Term $|\mathcal{M}|^2$ nicht vor das Integral gezogen werden darf.

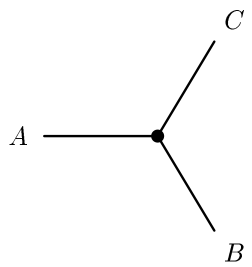
## 6.2 Die Feynman-Regeln für eine Spielzeug-Theorie

David Griffiths führt in seinem Buch 'Einführung in die Elementarteilchenphysik' [1] eine fiktive Spielzeug-Theorie ein, welche der Illustration der Feynman'schen Technik zur Bestimmung des Matrixelementes $\mathcal{M}$ mit einem Minimum an unnötigem Beiwerk dienen soll.

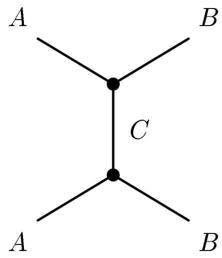
Man stelle sich eine Welt vor, in der es nur drei Arten von Teilchen gibt: A, B und C mit den Massen $m_A$, $m_B$ und $m_C$ und ohne Spin. Jedes Teilchen sei sein eigenes Antiteilchen. Es gebe einen primitiven Vertex, über den die drei Teilchen wechselwirken:



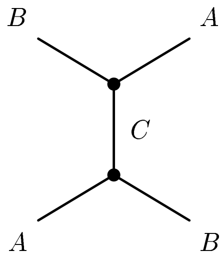

Wir nehmen an, daß A das Schwerste der drei sei, so daß es in B + C zerfallen kann. Dieser Zerfall wird durch das Diagramm niedrigster Ordnung beschrieben:



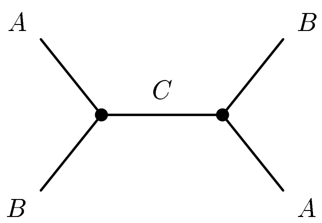

zu dem es kleinere Korrekturen dritter und höherer Ordnung gibt, die wir an dieser Stelle ignorieren wollen. Streuprozesse können folgende Gestalt haben:




a)




b)




c)

Hierbei ist a) ein Prozeß vom Typ $A + A \to B + B$ und b) bzw. c) vom Typ $A + B \to A + B$. Die Diagramme a) und b) beschreiben Streuung (*t-Kanal*), das Diagramm c) Annihilation mit anschließender Paarbildung (*s-Kanal*).

Das Matrixelement $\mathcal{M}$ wird nach folgenden Regeln gebildet:

1. **Notation:** Man nummeriere die Viererimpulse der *ein-* und *auslaufenden* Linien mit $p_1, \ldots, p_n$, die Viererimpulse der *inneren* Linien mit $q_1, q_2, \ldots$, und zeichne an jede Linie einen *Pfeil*, um die positive Richtung im Auge zu behalten.

2. **Kopplungskonstante:** Man schreibe für *jeden Vertex* einen Faktor $-ig$.

3. **Propagator:** Man schreibe für *jede innere Linie* einen Faktor $\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2}$, worin $q_j$ der Viererimpuls der Linie und $m_j$ die Masse des von der Linie beschriebnen Teilchens ist.

4. **Energie- und Impulserhaltung:** Für *jeden Vertex* schreibe man eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$, worin die $k_i$ die Viererimpulse sind, die in den Vertex ein- oder aus ihm auslaufen. Einlaufende Linien werden positiv gezählt, auslaufende negativ.

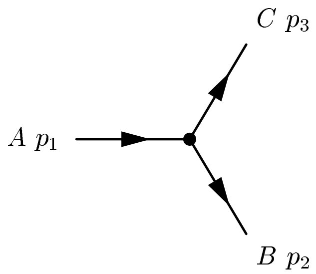
5. **Integration über innere Impulse:** Für jede innere Linie schreibe man einen Faktor $\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$ und integriere über alle inneren Viererimpulse.

6. **Streichen der $\delta$-Funktion:** Das Ergebnis wird eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 + \cdots - p_n)$ enthalten. Nach dem Streichen dieses Faktors bleibt $-i\mathcal{M}$ übrig.

---

*Beispiel:* **Die mittlere Lebensdauer von A**

Wir betrachten den Zerfall $A \to B + C$




Das Diagramm hat keine inneren Linien und nur einen Vertex, der uns den Faktor $-ig$ (Regel 2) sowie die $\delta$-Funktion $(2\pi)^4 \cdot \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$ (Regel 4) liefert, welche wir sofort wieder streichen (Regel 6). Es bleibt

$$-i\mathcal{M} = -ig \Leftrightarrow \mathcal{M} = g$$

übrig. Wir gehen damit in Gleichung (6.22) und erhalten die Zerfallsrate

$$\Gamma = \frac{g^2 \, |\vec{p}|}{8\pi\hbar m_A^2 c} \tag{6.24}$$

Die mittlere Lebensdauer erhalten wir nach (6.3) durch Kehrwertbildung:

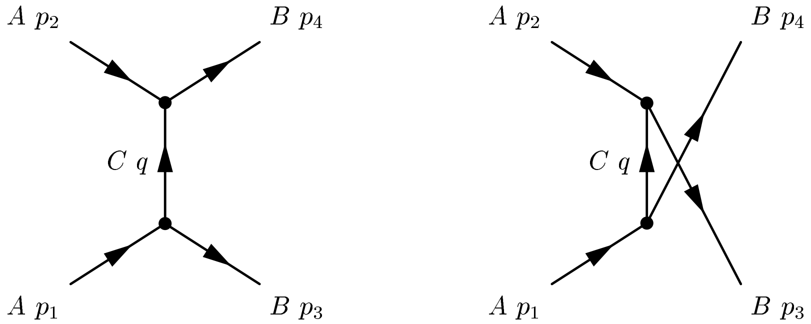
$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi\hbar m_A^2 c}{g^2\ |\vec{p}|} \tag{6.25}$$

---

---

*Beispiel:* **Die Streuung** $A + A \to B + B$

Wir betrachten die Streuung $A + A \to B + B$, welche durch zwei mögliche Diagramme dargestellt wird:




Wir berechnen zuerst das Matrixelement für das *linke* Diagramm $\mathcal{M}_L$: Wir haben zwei Vertizes, die uns den Faktor $(-ig)^2 = g^2$ (Regel 2) sowie die $\delta$-Funktionen $(2\pi)^4 \cdot \delta^4(p_1 - p_3 - q)$ und $(2\pi)^4 \cdot \delta^4(p_2 + q - p_4)$ (Regel 4) liefern. Hinzu kommt von der inneren Linie ein Propagator $\frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$ (Regel 3) und die Integration über $\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ (Regel 5):

$$\begin{aligned} &\int \frac{-ig^2}{q^2 - m_C^2 c^2} \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 - p_3 - q)\delta(p_2 + q - p_4) d^4 q \\ &= \frac{-ig^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

Wir streichen die übrig bleibende $\delta$-Funktion $(2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ (Regel 6) und erhalten

$$-i\mathcal{M}_L = \frac{-ig^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \Leftrightarrow \mathcal{M}_L = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \tag{6.26}$$

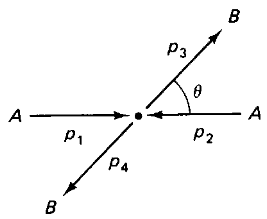
Das Matrixelement für das *rechte* Diagramm $\mathcal{M}_R$ erhalten wir (das geht bereits aus dem Diagramm hervor) durch Vertauschen von $p_3$ und $p_4$ in der Formel für $\mathcal{M}_L$:

$$\mathcal{M}_R = \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \tag{6.27}$$

Das Gesamtmatrixelement $\mathcal{M}$ ist die Summe der beiden einzelnen Matrixelemente

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_L + \mathcal{M}_R = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} \tag{6.28}$$

Wir betrachten die Geometrie der Anordnung unter Beachtung von Energie- und Impulserhaltung, um $(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2$ und $(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2$ durch den Streuwinkel $\theta$ ausdrücken zu können. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, daß wir uns im Schwerpunktsystem befinden und die Massen $m_A = m_B = m$ und $m_C = 0$ seien:




$$p_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p}^2 + mc^2} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p}^2 + mc^2} \\ 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}$$
$$p_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p}^2 + mc^2} \\ 0 \\ p\sin\theta \\ p\cos\theta \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p}^2 + mc^2} \\ 0 \\ -p\sin\theta \\ -p\cos\theta \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2 &= p_4^2 + p_2^2 - 2\, p_4 \cdot p_2 = -2p^2(1 - \cos\theta) \\ (p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2 &= p_3^2 + p_2^2 - 2\, p_3 \cdot p_2 = -2p^2(1 + \cos\theta) \end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{g^2}{-2p^2(1-\cos\theta)} + \frac{g^2}{-2p^2(1+\cos\theta)} \\ &= \frac{g^2}{-p^2(1-\cos^2\theta)} \\ &= -\frac{g^2}{p^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Nach der Goldenen Regel (6.23) und Ausführen bzw. Umstellen der Integrale erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi\ E p^2\ \sin^2\theta}\right)^2 \tag{6.30}$$

---

## 6.3 Übungsaufgaben (Termin 7)

**Aufgabe 6.1**

Leiten Sie Gleichung (6.3) her. (Hinweis: Welcher Bruchteil der ursprünglichen

Probe zerfällt zwischen $t$ und $t + dt$? Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit irgendeines Teilchen zwischen $t$ und $t + dt$ zu zerfallen?)

**Aufgabe 6.2**

Kernphysiker arbeiten traditionell mit der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ anstelle der mittleren Lebensdauer $\tau$. Die Halbwertszeit ist die Zeit, die es benötigt, bis in einer (großen) Probe die Hälfte aller Teilchen zerfallen ist. Zeigen Sie, daß für einen exponentiellen Zerfall folgender Zusammenhang gilt:

$$t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$$

**Aufgabe 6.3**

a) Nehmen Sie an, Sie haben zunächst eine Million (ruhender) Myonen. Wieviele wären nach $2,2 \cdot 10^{-6}$ s noch vorhanden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein $\pi^-$ länger als 1 s lebt?

**Aufgabe 6.4**

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse $m$ streut an einem stationären, abstoßenden Potential der Form:

$$V(r) = \frac{k}{r^2}$$

a) Bestimmen Sie den Streuwinkel $\theta$ in Abhängigkeit vom Stoßparameter $b$.

b) Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

c) Bestimmen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma$.

**Aufgabe 6.5**

Betrachten Sie den Fall der elastischen Streuung $A + B \to A + B$ im Laborsystem (B ruht anfangs). Nehmen Sie an, das Target sei so schwer ($m_B \gg E_A$), daß sein Rückstoß vernachlässigbar sei. Benutzen Sie Gleichung (6.23) um den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu bestimmen.

[ Antwort: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi \; m_B c}\right)^2 |\mathcal{M}|^2$ ]

**Aufgabe 6.6**

Betrachten Sie den Stoß $1 + 2 \to 3 + 4$ im Laborsystem (Teilchen 2 ruht). Teilchen 3 und 4 seien masselos. Erarbeiten Sie die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt.

[ Antwort: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2|\vec{p}_3|}{m_2|\vec{p}_1|(E_1+m_2c^2-|\vec{p}_1|c\cos\theta)}$ ]

**Aufgabe 6.7**

a) Ist $A \to B + B$ nach der Spielzeugtheorie ein möglicher Prozeß?

b) Nehmen Sie an, ein Diagramm habe $n_A$ externe $A$-Linien, $n_B$ externe $B$-Linien und $n_C$ externe $C$-Linien. Entwickeln Sie ein einfaches Kriterium zur Entscheidung, ob eine erlaubte Reaktion vorliegt.

c) Nehmen wir an, $A$ sei schwer genug: Was sind nach $A \to B + C$ die naheliegendsten Zerfallsmoden? Zeichnen Sie für jeden Zerfall ein Feynman-Diagramm.

**Aufgabe 6.8**

a) Zeichnen Sie alle Diagramme niedrigster Ordnung zu $A + A \to A + A$. (Es gibt insgesamt sechs.)

b) Bestimmen Sie unter der Annahme, daß $m_B = m_C = 0$ ist, für diesen Prozeß die Übergangsamplitude $\mathcal{M}$ in niedrigster Ordnung. Schreiben Sie Ihre Antwort als Integral über einen verbleibenden inneren Viereimpuls $q^\mu$ hin.

**Aufgabe 6.9**

Bestimmen Sie unter der Annahme, daß $m_B = m_C = 0$ ist, den differentiellen Wirkungsquerschnitt für $A+A \to B+B$ im CM-System. Bestimmen Sie daraus den totalen Wirkungsquerschnitt.

**Aufgabe 6.10**

a) Bestimmen Sie die Amplitude niedrigster Ordnung für $A + B \to A + B$. (Beachten Sie, daß es hierzu zwei Diagramme gibt!)

b) Bestimmen Sie für diesen Prozeß den differentiellen Wirkungsquerschnitt im CM-System und nehmen Sie an, daß $m_A = m_B = m$ und $m_C = 0$ ist. Drücken Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von der Einfallsenergie $E$ und dem Streuwinkel $\theta$ aus.

c) Bestimmen Sie unter der Annahme, daß $B$ viel schwerer ist als $A$ und somit sein Rückstoß vernachläsigbar ist, den differentiellen Wirkungsquerschnitt für diesen Prozeß im Laborsystem. $A$ läuft mit der Energie $E$ ein, es gelte $m_B \gg m_A, m_C, \frac{E}{c^2}$ .

d) Bestimmen Sie nun den totalen Wirkungsquerschnitt zu Teil c).

# Kapitel 7

# Quantenelektrodynamik

## 7.1 Kovariante Formulierung, Eichinvarianz

In der **klassischen Elektrodynamik** werden das *elektrische Feld* $\vec{E}$ und die *magnetische Flußdichte* $\vec{B}$ durch eine *Ladungsdichte* $\rho$ bzw. eine *Stromdichte* $\vec{j}$ hervorgerufen. Diese Prozesse werden durch die vier *Maxwell-Gleichungen*

$$\begin{array}{llll} (a) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 & (c) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ (b) & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 & (d) & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \tag{7.1}$$

beschrieben. Wir führen die Potentiale für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein. Das *Vektorpotential* $\vec{A}$ ist definiert durch

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{7.2}$$

und durch Einsetzen in Gleichung (7.1.b)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

sieht man, daß $(\vec{E} + \partial_t \vec{A})$ als Gradient eines *Skalarfeldes* $V$ geschrieben werden kann. Das elektrische Feld ergibt sich dann aus

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A} \tag{7.3}$$

Da die eigentlichen Felder durch "Ableiten" der Potentiale gebildet werden besitzen die Potentiale natürlich eine *Eichfreiheit.* Die Potentiale

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda(\vec{x},t) \quad , \quad V' = V - \partial_t \lambda(\vec{x},t) \tag{7.4}$$

erzeugen dieselben Felder wie $\vec{A}$ und $V$.

In der **kovarainten Formulierung** bilden $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zusammen einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe, den *elektrischen Feldstärketensor*

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

während $\rho$ und $\vec{j}$ den *Viererstrom*

$$J^\mu = (c\rho, \vec{j}) \tag{7.6}$$

bilden, welcher laut Kontinuitätsgleichung divergenzfrei

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{7.7}$$

ist. Die Potentiale werden zum *Viererpotential*

$$A^\mu = (V/c, \vec{A}) \tag{7.8}$$

zusammengefaßt, so daß sich der Feldstärketensor durch die Vorschrift

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{7.9}$$

aus $A^\mu$ bildet. Die *Eichfreiheit* lautet in dieser Formulierung

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \lambda(x^\mu) \tag{7.10}$$

und die *Maxwellgleichungen (7.1.b) und (7.1.d)* vereinfachen sich zu

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 J^\mu \tag{7.11}$$

Wenn wir jetzt die *Lorentz-Eichung*

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{7.12}$$

verwenden und uns im ladungsfreien Raum ($J^\mu = 0$) befinden, vereinfacht sich diese Gleichung (7.11) sogar zu

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \tag{7.13}$$

Das ist eine Wellengleichung für jede Komponente von $A^\nu$. Es ist eine mathematische Eigenschaft der Wellengleichung, daß Ableitungen von Lösungen die Wellengleichung wiederum lösen:

$$\partial_\mu \partial^\mu f(x^\mu) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_\mu \partial^\mu (\partial_\nu f(x^\nu)) = 0$$

Wir hatten in der Hinleitung auf Gleichung (3.8) gesagt, daß die Wellenfunktion proportional zum $E$-Feld sei. Dies ist aber im Prinzip nichts anderes als die "Ableitung" der ersten Komponente von $A^\mu$. Wir können also in Verallgemeinerung -bis auf einen Normierungsfaktor- $A^\mu$ getrost als Wellenfunktion des Photons betrachten. Gleichung (7.13) ist dann eine Klein-Gordon-Gleichung (3.15) mit $m = 0$.

Gleichung (7.13) wird -wie bereits besprochen- von einer Ebenen Welle

$$A^\nu(x^\mu) = a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \cdot \epsilon^\nu(p^\mu) \tag{7.14}$$

gelöst. Der Term $\epsilon^\nu(p^\mu)$ steht dabei für die *Viererpolarisation* und charakterisiert den Spin. Einsetzen in die Lorentz-Eichbedingung (7.12) ergibt

$$\begin{aligned}
&\partial_\nu A^\nu = 0 \\
&\partial_\nu a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \cdot \epsilon^\nu(p^\mu) = 0 \\
&p_\nu a \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu} \cdot \epsilon^\nu(p^\mu) = 0 \\
&p_\nu \epsilon^\nu(p^\mu) = 0
\end{aligned}$$

Die vier Komponenten der Viererpolarisation sind also durch die Relation

$$p_\nu \epsilon^\nu(p^\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^\nu \perp \epsilon^\nu(p^\mu) \tag{7.15}$$

miteinander verknüpft. Wenn wir die Eichfreiheit von $A^\mu$ weiter einschränken und

$$A^0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{7.16}$$

wählen (*Coulomb-Eichung*), dann folgt, daß die räumlichen Komponenten der Viererpolarisation "senkrecht auf dem Impuls stehen"

$$\vec{p} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \perp \vec{\epsilon} \tag{7.17}$$

Das Photon ist unter Coulomb-Eichung also transversal polarisiert, man spricht auch von einer *transversalen Eichung*. Wenn wir die z-Achse unseres Koordinatensystems in Richtung von $\vec{p}$ legen, erhalten wir zwei linear unabhängige Ausrichtungen in der x-y-Ebene, d.h. wir können $\epsilon^\mu$ beispielsweise zu

$$\begin{array}{lll} \epsilon^0 = 0 & \text{und} & \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 = (1,0,0) \\ & \text{bzw.} & \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_2 = (0,1,0) \end{array}$$

oder zu

$$\begin{array}{lll} \epsilon^0 = 0 & \text{und} & \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_+ = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \\ & \text{bzw.} & \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_- = \epsilon_1 - i\epsilon_2 \end{array}$$

oder zu einer beliebigen Linearkombination dieser wählen. Es gibt im Fall der transversalen Eichung nur *zwei* linear unabhängige Möglichkeiten für $\epsilon^\mu$. Erwartet hätte man für ein Teilchen mit Spin $s = 1$ eigtl. *drei* Möglichkeiten (nämlich $m_s = +1, 0, -1$). Die dritte Möglichkeit erhielten wir, wenn wir nicht nach (7.16) eichen würden. Dann gäbe es -zumindest in der Theorie- *longitudinal freie Photonen*, welche aber an nichts bekanntes koppeln. (Die Ursache dafür liegt in der Tatsache, daß das Photon keine Ruhemasse besitzt.) Wir können diese Polariasation also ohne Bedenken wegeichen. Wir stellen fest, daß Teilchen mit Ruhemasse $m = 0$ aber Spin $s \neq 0$ insgesamt nur zwei Orientierungen $m_s = \pm s$ aufweisen können. Dies entspricht jeweils einer Helizität von $H = \pm 1$. Teilchen mit $m = 0, s = 0$ weisen folglich sogar nur eine Orientierung $m_s = 0$ auf.

Wir wollen nun in Erweiterung des Gefundenen die **Polarisationsvektoren für massebehaftete Spin-1-Teilchen** einführen.
Wir betrachten also ein Teilchen mit $s = 1, m \neq 0$. Im Ruhesystem des Teilchens können wir die *lineare Polarisation* durch *jetzt drei* Einheitsvektoren beschreiben. Zweckmäßiger ist es, die zirkulare Polarisation zu verwenden, die definierten Werten der Helizität $H$ entspricht. Wenn wir uns im *Ruhesystem* befinden gilt $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$ und die $\epsilon^\mu$ müssen die Bedingung $p_\nu \epsilon^\nu(p^\mu) = 0$ erfüllen:

$$\begin{array}{lll} \epsilon^0 = 0 & \text{und} & \vec{\epsilon}(H=+1) = \vec{\epsilon}_{+1} = (-1, -i, 0)/\sqrt{2} \\ & \text{oder} & \vec{\epsilon}(H=0) = \vec{\epsilon}_0 = (0,0,1) \\ & \text{oder} & \vec{\epsilon}(H=-1) = \vec{\epsilon}_{-1} = (1, -i, 0)/\sqrt{2} \end{array}$$

Die $\vec{\epsilon}_i$ erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$\vec{\epsilon}_i^{\,*} \cdot \vec{\epsilon}_j = \delta_{i,j} \quad \text{mit} \quad (i,j = \pm 1, 0) \tag{7.18}$$

Wir wählen nun ein *beliebiges Bezugssystem* in welchem $p^\mu = (mc, 0, 0, p)$ gilt, und damit $p_\nu \epsilon^\nu(p^\mu) = 0$ erfüllt wird, wählen wir $\epsilon^\mu$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rl}
& \epsilon^\mu(p^\mu, H=+1) = (0,-1,-i,0)/\sqrt{2} \\
\text{oder} & \epsilon^\mu(p^\mu, H=0) = (p,0,0,E/c)/mc \\
\text{oder} & \epsilon^\mu(p^\mu, H=-1) = (0,1,-i,0)/\sqrt{2}
\end{array}
$$

Während die Polarisationsvektoren für transversale Spin-1-Teilchen unabhängig vom Impuls sind, wächst der longitudinale Polarisationsvektor linear mit dem Impuls $p$ an.

## 7.2 Die Feynman-Regeln der QED

Zur Berechnung der Übergangsamplitude $\mathcal{M}$ gehe man wie folgt vor:

1. **Notation, Externe Linien:** Man nummeriere die Viererimpulse der *ein-* und *auslaufenden* Linien mit $p_1, \ldots, p_n$, die Viererimpulse der *inneren* Linien mit $q_1, q_2, \ldots$, und zeichne an jede Linie einen *Pfeil*, um die positive Richtung im Auge zu behalten. Für eine externe Linie mit Impuls $p$ schreibe man

| | | |
|---|---|---|
| Elektronen | einlaufend | $u(p)$ |
| | auslaufend | $\bar{u}(p)$ |
| Positronen | einlaufend | $\bar{v}(p)$ |
| | auslaufend | $v(p)$ |
| Photonen | einlaufend | $\epsilon_\mu(p)$ |
| | auslaufend | $\epsilon^*_\mu(p)$ |

2. **Kopplungskonstante:** Man schreibe für *jeden Vertex* einen Faktor $ig_e\gamma^\mu$ Die dimensionslose Kopplungskonstante $g_e$ ist wie folgt definiert:

$$
g_e := \sqrt{4\pi\alpha} = \sqrt{4\pi\frac{e^2}{\hbar c}} \tag{7.19}
$$

3. **Propagator:** Man schreibe für *jede innere Linie* einen Faktor

| | |
|---|---|
| Elektronen/Positronen | $i\frac{\not{q}+mc}{q^2-m^2c^2}$ |
| Photon | $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ |

4. **Energie- und Impulserhaltung:** Für *jeden Vertex* schreibe man eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta^4(k_1+k_2+k_3)$, worin die $k_i$ die Viererimpulse sind, die in den Vertex ein- oder aus ihm auslaufen. Einlaufende Linien werden positiv gezählt, auslaufende negativ.

5. **Integration über innere Impulse:** Für jede innere Linie schreibe man einen Faktor $\frac{d^4q_j}{(2\pi)^4}$ und integriere über alle inneren Viererimpulse.

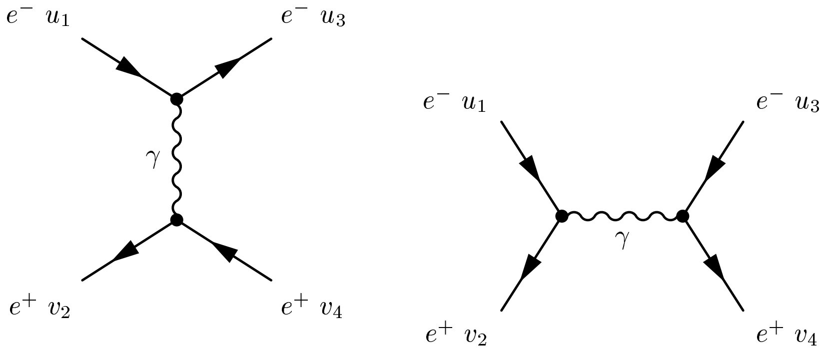
6. **Streichen der $\delta$-Funktion:** Das Ergebnis wird eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 + \cdots - p_n)$ enthalten. Nach dem Streichen dieses Faktors bleibt $-i\mathcal{M}$ übrig.

7. **Antisymmetrisierung bei Kombination:** Einführung eines Minuszeichens zwischen zwei Diagrammen, die sich lediglich durch den *Austausch zweier* ein- oder auslaufender Fermionen oder Antifermionen bzw. durch die *Ersetzung eines* Fermion durch ein Antifermion oder v.v. unterscheiden.

---

*Beispiel:* **Elektron-Positron-Streuung**

Zu diesem Prozeß tragen zwei Diagramme bei:




a) t-Kanal b) s-Kanal

Für das das Matrixelement $\mathcal{M}_1$ aus Diagramm a) erhalten wir nach Regel 1. u. 2.

$$\begin{aligned} &ig_e(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)\cdot ig_e(\bar{v}_2\gamma^\nu\ v_4) \\ &= -g_e^2(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma^\nu\ v_4) \end{aligned}$$

mit $u_i = u(p_i)$ und $v_i = v(p_i)$. Nach Regel 3. benötigen wir einen Faktor $-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ der $g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu$ bewirkt:

$$\frac{ig_e^2}{q^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4)$$

Regel 4. und 5. ergeben

$$\begin{aligned} &\int \frac{ig_e^2}{q^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4) \\ &\cdot(2\pi)^4\delta(p_1-p_3-q)\cdot(2\pi)^4\delta(p_4-p_2+q)\cdot\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{ig_e^2}{(p_1-p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4) \\ &\cdot(2\pi)^4\delta(p_1+p_4-p_2-p_3) \end{aligned}$$

Regel 6. besagt, daß nach dem Streichen des Faktors $(2\pi)^4\delta(\dots)$ der Ausdruck $-i\mathcal{M}_1$ übrigbleibt. Es folgt

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_e^2}{(p_1-p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4) \tag{7.20}$$

Für das Matrixelement $\mathcal{M}_2$ erhält man entsprechend

$$\mathcal{M}_2 = +\frac{g_e^2}{(p_1+p_2)^2}(\bar{v}_2\gamma^\mu\, u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\, v_4) \tag{7.21}$$

wobei das unterschiedliche Vorzeichen sich aus Regel 7. ergibt.

Das Gesamtmatrixelement bildet sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \\ &= -\frac{g_e^2}{(p_1-p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\, u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\, v_4) \\ &\quad + \frac{g_e^2}{(p_1+p_2)^2}(\bar{v}_2\gamma^\mu\, u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\, v_4) \end{aligned} \tag{7.22}$$

---

**Spinmittelung des Matrixelements**

Die zur Berechnung von Lebensdauer und Wirkungsquerschnitt relevante Größe ist das Betragsquadrat der Übergangsamplitude $|\mathcal{M}|^2$. In einigen Experimenten sind die Spins der reagierenden Teilchen sowie die Polarisation des Photons bekannt. In diesen Fällen muss man lediglich die entsprechenden Bi-Spinoren und Polarisationsvektoren in $\mathcal{M}$ einsetzen. Sehr viel häufiger sind wir aber nicht an den Spins interessiert, sondern haben einen Teilchenstrahl mit willkürlichen Spinorientierungen. In diesem Fall müssen wir

- den Mittelwert von $|\mathcal{M}|^2$ über alle Spinorientierungen im Anfangszustand
- und die Summe über $|\mathcal{M}|^2$ für alle Spinkonfigurationen im Endzustand

bilden. Diese Größe bezeichnen wir mit $<|\mathcal{M}|^2>$. Bei ihrer Berechnung stößt man immer wieder auf Terme der Form

$$\sum_{s_a}\sum_{s_b}(\bar{a}Xb)(\bar{a}Yb)^*$$

Hierbei sind $X, Y$ beliebige $4\times 4$-Matrizen, $a, b$ sind Bi-Spinoren und $s_a, s_b$ die Spins über die gemittelt bzw. summiert wird.

Wir besprechen nun einen mathematischen Satz, der diese Terme auf die *Berechnung der Spur* eines komplizierten Produkts von $\gamma$-Matrizen reduziert:

$$\boxed{\sum_{s_a}\sum_{s_b}(\bar{a}Xb)(\bar{a}Yb)^* = \mathrm{Tr}(X(\not{p}_b + \hat{m}_b c)\bar{Y}(\not{p}_a + \hat{m}_a c))} \tag{7.23}$$

mit den Massen der Teilchen $a, b$

$$\hat{m}_{a,b} = m_{a,b}\begin{cases} \cdot 1 & \text{für Teilchen} \\ \cdot(-1) & \text{für Antiteilchen} \end{cases} \tag{7.24}$$

*Beweis:*
Wir benutzen die Relationen (s. Schmüser [2])

$$\sum_{s_a} a\bar{a} = (\not{p}_a + \hat{m}_a c) \qquad \sum_{s_b} b\bar{b} = (\not{p}_b + \hat{m}_b c) \tag{7.25}$$

und definieren

$$\bar{Y} := \gamma^0 Y^\dagger \gamma^0 \tag{7.26}$$

Wir betrachten zunächst den Term

$$\begin{aligned}(\bar{a}Yb)^* &= (a^\dagger\gamma^0 Yb)^\dagger = b^\dagger Y^\dagger \gamma^{0\dagger} a \\ &= b^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=1} Y^\dagger \gamma^0 a = (\bar{b}\bar{Y}a)\end{aligned} \tag{7.27}$$

und erhalten so

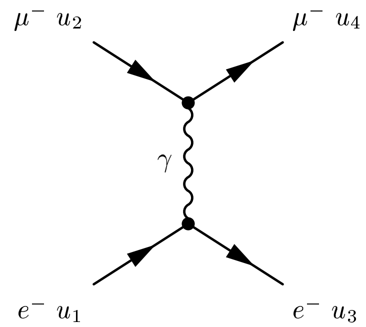
$$\begin{aligned}\sum_{s_a}\sum_{s_b}(\bar{a}Xb)(\bar{b}\bar{Y}a) &= \sum_{s_a}\sum_{s_b}\bar{a}Xb\bar{b}\bar{Y}a = \sum_{s_a}\bar{a}X\left(\sum_{s_b}b\bar{b}\right)\bar{Y}a \\ &= \sum_{s_a}\bar{a}X(\not{p}_b + \hat{m}_b c)\bar{Y}a \\ &\text{Nach der Substitution } Z := X(\not{p}_b + \hat{m}_b c)\bar{Y} \text{ folgt} \\ &= \sum_{s_a}\bar{a}Za = \sum_{s_a}\sum_{i,j}\bar{a}_i Z_{ij} a_j = \sum_{i,j} Z_{ij}\sum_{s_a} a_j \bar{a}_i \\ &= \sum_{i,j} Z_{ij}\left(\sum_{s_a} a\bar{a}\right)_{ji} = \sum_{i,j} Z_{ij}(\not{p}_a + \hat{m}_a c)_{ji} \\ &\text{mit } Z_{ij} = -Z_{ji} \wedge (\not{p}_a + \hat{m}_a c)_{ij} = -(\not{p}_a + \hat{m}_a c)_{ji} \text{ folgt} \\ &= \sum_{i} Z_{ii}(\not{p}_a + \hat{m}_a c)_{ii} = \mathrm{Tr}(Z(\not{p}_a + \hat{m}_a c)) \\ &= \mathrm{Tr}(X(\not{p}_b + \hat{m}_b c)\bar{Y}(\not{p}_a + \hat{m}_a c))\end{aligned} \tag{7.28}$$

was zu zeigen war.

Die praktische Anwendung dieses Satzes soll nun am Beispiel der Elektron-Myon-Streuung gezeigt werden.

*Beispiel:* **Spinmittelung bei Elektron-Myon-Streuung**

Zu diesem Prozeß trägt folgendes Diagramm bei:




Das Matrixelement $\mathcal{M}$ lautet nach den Regeln 1. bis 6.

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2) \tag{7.29}$$

Das gemittelte Betragsquadrat der Amplitude bildet sich aus

$$\begin{aligned} <|\mathcal{M}|^2> &= \frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2,s_3,s_4}\frac{g_e^4}{(p_1-p_3)^4}(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)^*(\bar{u}_4\gamma_\nu u_2)^* \\ &= \frac{g_e^4}{4(p_1-p_3)^4}\sum_{s_1,s_3}(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)^* \cdot \sum_{s_2,s_4}(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2)(\bar{u}_4\gamma_\nu u_2)^* \end{aligned} \tag{7.30}$$

Man erkennt, daß auf zwei Teile der Gleichung der Satz (7.23) angewendet werden kann:

$$\begin{aligned} \sum_{s_1,s_3}(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)^* &= \mathrm{Tr}(\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e c)\bar{\gamma}^\nu(\not{p}_3 + m_e c)) \\ \sum_{s_2,s_4}(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2)(\bar{u}_4\gamma_\nu u_2)^* &= \mathrm{Tr}(\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu c)\bar{\gamma}_\nu(\not{p}_4 + m_\mu c)) \end{aligned} \tag{7.31}$$

Damit wird $<|\mathcal{M}|^2>$ zu

$$\begin{aligned} <|\mathcal{M}|^2> = \frac{g_e^4}{4(p_1-p_3)^4} &\cdot \mathrm{Tr}(\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e c)\bar{\gamma}^\nu(\not{p}_3 + m_e c)) \\ &\cdot \mathrm{Tr}(\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu c)\bar{\gamma}_\nu(\not{p}_4 + m_\mu c)) \end{aligned} \tag{7.32}$$

---

Zur Berechnung der Spuren hatten wir in Abschnitt 5.10 einige Theoreme für die Arbeit mit Bi-Spinoren und $\gamma$-Matrizen zusammengestellt.

## 7.3 Kanonischer Impuls und kovariante Ableitung

Die Hamiltonfunktion eines Teilchens mit Ladung $q$, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im elektromagnetischen Feld bewegt, lautet

$$H(\vec{p},\vec{x}) = \tfrac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV \qquad (\vec{p} = m\vec{v})$$

Diese ist nach einer kanonischen Transformation

$$\vec{p} \to \vec{p'} = (\vec{p} - q\vec{A}) \quad , \quad \vec{x} \to \vec{x'} = \vec{x}$$

und einer Umeichung der Energie

$$H \to H' = H - qV$$

formal identisch mit der Hamiltonfunktion eines freien ungeladenen Teilchens

$$H'(\vec{p'},\vec{x}) = \tfrac{\vec{p'}^2}{2m}$$

Der kanonische Impuls des geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld lautet also $\vec{p'} = (\vec{p} - q\vec{A})$ und die Energie $H' = (H - qV)$. In Vierernotation können wir dies zu

$$p^\mu \to p'^\mu = p^\mu - qA^\mu \tag{7.33}$$

zusammenfassen. Die Ersetzungsregel (3.16) wird damit zu

$$p'^\mu \to i\hbar D^\mu \stackrel{(7.33)}{=} i\hbar\partial^\mu - qA^\mu \tag{7.34}$$

Der Differentialoperator $D_\mu$ heißt *kovariante Ableitung* und der Übergang von $\partial_\mu$ zu $D_\mu$ schreibt sich als

$$\boxed{\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}A_\mu} \tag{7.35}$$

## 7.4 Phasentransformationen

### 7.4.1 Der Aharonov-Bohm-Effekt

Es ist sehr nützlich, die Auswirkungen einer Eichtransformation auf die **Schrödingergleichung** (3.20) und deren Lösungen zu untersuchen. Wir haben im vorigen Abschnitt die Hamiltonfunktion eines Teilchens mit Ladung $q$ besprochen, damit läßt sich leicht die entsprechende Schrödingergleichung finden:

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{x},t) = \left\{\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + qV\right\}\psi(\vec{x},t) \tag{7.36}$$

Wenn wir nun eine Eichtransformation der Form

$$\begin{aligned} \vec{A} \to \vec{A'} &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{x},t) \\ V \to V' &= V - \partial_t\chi(\vec{x},t) \end{aligned}$$

durchführen, wird die neue Schrödingergleichung von der Wellenfunktion $\psi'$ gelöst:

$$\boxed{\psi \to \psi' = e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi} \tag{7.37}$$

Der Beweis folgt durch Einsetzen.

Um das Verhalten der **Dirac-Gleichung** und deren Lösungen zu untersuchen gehen wir zur Vierernotation über. Die Dirac-Gleichung für ein Telichen mit Ladung $q$ im elektromagnetischen Feld erhalten wir durch "kovariantisieren", d.h. durch Anwenden der Übergangsregel (7.35) auf die Dirac-Gleichung (5.18)

$$\Big\{i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc\Big\}\psi = 0$$

$$\Big\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - mc\Big\}\psi = 0 \tag{7.38}$$

Bei einer Eichtransformation der Form

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi(x^\mu)$$

müssen sich die Bi-Spinoren -analog zum Beispiel der Schrödingergleichung- wie folgt transformieren:

$$\boxed{\psi \to \psi' = e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi} \tag{7.39}$$

---

*Beweis:*

Einsetzen der Eichtransformation in Gleichung (7.38) ergibt

$$\Big\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu + q(\gamma^\mu\partial_\mu\chi) - mc\Big\}e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi = 0$$

Wir betrachten den ersten Summanden

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi = -q(\gamma^\mu\partial_\mu\chi)e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi + i\hbar(\gamma^\mu\partial_\mu\psi)e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}$$

und stellen fest, daß alle anderen Summanden nicht mehr als Operatoren auf $e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}\psi$ wirken. Wir führen das Ergebnis zusammen, teilen durch $e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}$ und erhalten

$$\Big\{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - mc\Big\}\psi = 0$$

was -q.e.d.- mit Gleichung (7.38) identisch ist.

---

Wir sehen also, daß die Eichtransformation des Viererpotentials eine Phasenverschiebung der Wellenfunktion mit sich zieht. Dies nennt man auch den *Aharonov-Bohm-Effekt.*

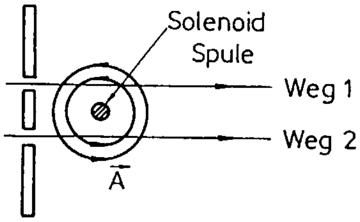
Man unterscheidet zwischen einer *globalen Phasentransformation* ($\chi \neq \chi(\vec{x})$) und einer *lokalen* Phasentransformation ($\chi = \chi(x^\mu)$) Letztere ändert die Wellenfunktion viel nachhaltiger als die globale und führt i.A. zu einer geänderten physikalischen Situation.

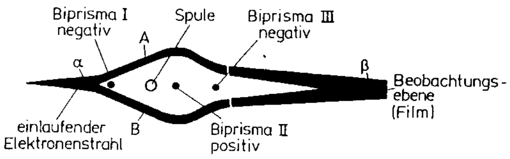
Gleichung (7.39) ist eine eindimensionale unitäre Transformation, d.h. sie gehört der $U(1)$-Gruppe an. Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang auch von einer $U(1)$-*Eichinvarianz.*

### 7.4.2 Möllenstedts Experiment

Der von *Aharonov-Bohm* vorhergesagte Effekt wurde durch *Möllenstedt* experimentell bestätigt. Die Idee war, die Phasenverscheibung aufgrund von Interferenzerscheinungen von Elektronenwellen hinter einem Doppelspalt nachzuweisen. Dazu benötigt man ein Gebiet mit $A^\mu \neq 0$ aber $F^{\mu\nu} = 0$ (da sonst ein

Teilchen mit der Ladung q sofort abgelenkt würde). Eine Änderung von $A^\mu$ sollte dann eine Verschiebung des Interferenzmusters zur Folge haben. Die Forderung nach $A^\mu \neq 0$ aber $F^{\mu\nu} = 0$ wird durch eine lange Solenoidspule mit extrem kleinen Durchmesser (ca. $14\mu m$) hinter dem Doppelspalt realisiert.




Das Vektorpotential umgibt die Spule mit ringförmigen Feldlinien. Für den *magnetischen Fluß* $\Phi_m$ gilt

$$\Phi_m = \int_F \vec{B}\, d\vec{F} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{A})\, d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{A}\, d\vec{s}$$
$$\Rightarrow |\vec{A}| = \tfrac{\Phi_m}{2\pi r} \quad \text{für} \quad r > r_{Spule}$$

Der kanonische Impuls eines Elektrons mit Ladung $q = -e$ ist gegeben durch

$$\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A}$$

was nach de Broglie eine Wellenlänge von

$$\lambda = \tfrac{2\pi\hbar}{|\vec{p}|} = \tfrac{2\pi\hbar}{|m\vec{v} - e\vec{A}|}$$

ergibt. Das bedeutet, daß bei gleichem mechanischem Impuls $m\vec{v}$ das Elektron im feldfreien Raum eine andere Wellenlänge $\lambda$ besitzt als wenn es sich in einem Potential $\vec{A}$ bewegt. Wir berechnen die Phasenänderung $d\varphi$ einer Elektronenwelle auf einer Strecke $dx$

$$d\varphi = \tfrac{2\pi}{\lambda} dx = \vec{k}\vec{dx} = \tfrac{m}{\hbar}\vec{v}\vec{dx} - \tfrac{e}{\hbar}\vec{A}\vec{dx}$$

Die Gesamtphase von Weg 1 bzw. Weg 2 ergibt sich also zu

$$\varphi_{1/2} = \int d\varphi = \int_{\text{Weg } 1/2} (\tfrac{m}{\hbar}\vec{v} - \tfrac{e}{\hbar}\vec{A})\vec{dx}$$

Die Phasendifferenz zwischen Weg 1 und Weg 2 beträgt

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\tfrac{e}{\hbar}\left(\int_{\text{Weg } 2} \vec{A}\vec{dx} - \int_{\text{Weg } 1} \vec{A}\vec{dx}\right)$$

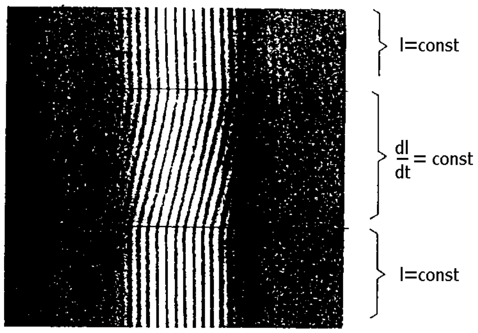
Durch einen Trick können wir $\Delta\varphi$ als Funktion des Spulenstroms $I$ schreiben: Wir laufen Weg 1, springen dann zum Ende von Weg 2 und laufen diesen zurück. Das ist dann ein "quasigeschlossenes" Wegintegral

$$\Delta\varphi = -\tfrac{e}{\hbar}\left(-\int_{-\text{Weg } 2} \vec{A}\vec{dx} - \int_{\text{Weg } 1} \vec{A}\vec{dx}\right) \approx \tfrac{e}{\hbar}\oint \vec{A}\vec{dx} = \tfrac{e}{\hbar}\Phi_m$$

Mit der Näherung für eine unendlich lange Spule $\Phi_m \approx \mu_0 n F_{Spule} I$ erhalten wir die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ in Abhängigkeit vom Spulenstrom $I$:

$$\boxed{\Delta\varphi \approx \frac{e\mu_0 n F_{Spule}}{\hbar} I} \tag{7.40}$$

Gleichung (7.40) zeigt, daß man durch Änderung des Spulenstroms die Phasendifferenz und somit das Interferenzmuster kontinuierlich verändern kann. Dies zeigt sich in der aus dem Experiment entstandenen Aufnahme sehr deutlich:




Der Film zur Aufnahme der Interferenzen wurde konstant in vertikaler Richtung bewegt.

## 7.5 Übungsaufgaben (Termin 8)

**Aufgabe 7.1**

Bestimmen Sie, ausgehend von Gleichung (7.22) die spingemittelte Amplitude für die Elektron-Elektron-Streuung. Nehmen Sie an, daß wir bei ausreichend hohen Energien arbeiten, so daß die Elektronenmasse vernachlässigt werden kann (Setzen Sie also $m_e = 0$).

(Hinweis: Sie können für die gemischten Terme in

$$\begin{aligned} < |\mathcal{M}|^2 > &=< |(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)|^2 > \\ &=< |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + (\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*) + (\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*) > \\ &=< |\mathcal{M}_1|^2 > + < |\mathcal{M}_2|^2 > + < \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* > + < \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^* > \end{aligned}$$

die gleiche Strategie wie in Satz (7.23) verwenden. So wird z.B.

$$< \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* >= \frac{-g_e^4}{4(p_1 - p_3)^2(p_2 - p_4)^2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_3)$$

Benutzen Sie nun die Kontraktionstheoreme um die Spur auszuwerten. Beachten Sie, daß bei masselosen Teilchen die Impulserhaltung ($p_1 + p_2 = p_3 + p_4$) impliziert, daß $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4$ und $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4$ sowie $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$ gilt.)

[ Antwort: $< |\mathcal{M}|^2 >= \frac{2g_e^4}{(p_1\cdot p_3)^2(p_1\cdot p_4)^2}\left((p_1\cdot p_2)^4 + (p_1\cdot p_3)^4 + (p_1\cdot p_4)^4\right)$ ]

**Aufgabe 7.2**

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 7.1 die über alle

Spins gemittlete Übergangsamplitude für die Elektron-Elektron-Streuung im CM-System bei hohen Energien (d.h. $m_e \to 0$).

b) Bestimmen Sie nun den differentiellen Wirkungsquerschnit für das genannte Problem.

*Für die folgenden Aufgaben gelte das folgende Modell:*

*Nehmen Sie an, das Photon wäre statt eines masselosen (Spin 1) Vektorteilchens ein massives skalares (Spin 0) Teilchen. Nehmen wir insbesondere an, daß der Vextexfaktor $ig_e 1$ und der Photonpropagator $\frac{-i}{q^2-(m_\gamma c)^2}$ laute. In diesem Fall gäbe es keinen Photon-Polarisationsvektor und folglich keinen Faktor für externe Photon-Linien. Ansonsten seien die Feynman-Regeln unverändert.*

**Aufgabe 7.3**

Unter der Voraussetzung, daß dieses Photon schwer genug ist, kann es zerfallen.

a) Berechnen Sie die Zerfallsrate für $\gamma \to e^+ + e^-$

b) Es sei $m_\gamma = 300$ MeV$/c^2$. Bestimmen Sie die Lebensdauer des Photons (in Sekunden).

**Aufgabe 7.4**

a) Bestimmen Sie, ausgehend von diesem Modell, die Übergangsamplitude $\mathcal{M}$ für die Elektron-Myon-Streuung.

b) Berechnen Sie die über alle Spins gemittelte Größe $< |\mathcal{M}|^2 >$.

c) Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Myon-Streuung im CM-System. Nehmen Sie an, daß die Energie groß genug ist, um die Elektronen- und Myonenmasse vernachlässigen zu können ($m_\mu, m_e \to 0$). Drücken Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von der Einfallsenergie $E$ des Elektrons und dessen Streuwinkel $\theta$ aus.

d) Berechnen Sie nun den totalen Wirkungsquerschnitt. Nehmen Sie dazu an, daß das Photon extrem schwer sein ($m_\gamma \gg E/c^2$).

e) Betrachten Sie nun, ausgehend von b), den Fall der *niederenergetischen* Streuung an einem extrem schweren Myon ($|\vec{p}_e|/c \ll m_e \ll m_\gamma \ll m_\mu$). Bestimmen Sie den differentiellen Wrikungsquerschnitt im Laborsystem (Ruhesystem des Myons) unter der Annahme, daß der Rückstoß des Myons vernachlässigbar bleibt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formel für die Rutherford-Streuung und berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt.

**Aufgabe 7.5**

a) Bestimmen Sie aufgrund dieses Modells die Amplitude $\mathcal{M}$ für die Paarvernichtung $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$.

b) Bestimmen Sie $< |\mathcal{M}|^2 >$ unter der Annahme, daß die Energie groß genug ist, um die Elektronen- und Photonenmasse vernachlässigen zu können ($m_e, m_\gamma \to 0$).

c) Werten Sie Ihr Ergebnis aus Teil b) im CM-System aus. Drücken Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von der Einfallsenergie $E$ des Elektrons und dessen

Streuwinkel $\theta$ aus.

d) Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Paarvernichtung im CM-System, immer noch unter der Annahme, daß $m_e, m_\gamma \to 0$ gilt. Ist der totale Wirkungsquerschnitt endlich?

# Kapitel 8

# Eichtheorie

**Anmerkung zur Notation:** Um die betrachteten Formeln auch in andere Bereiche der Physik übertragen zu können hatte es sich bisher empfohlen, die Konstanten $c$ und $\hbar$ explizit mitzuführen. Wir werden von nun an die *in der Teilchenphysik übliche Konvention* $c = \hbar = 1$ verwenden und zugunsten einer vereinfachenden Schreibweise $c$ und $\hbar$ in den Formeln weglassen.

## 8.1 Das Eichprinzip

Wir haben im letzten Kapitel mit der QED ein Beispiel für eine *Eichtheorie* kennengelernt: Die Wellengleichung ist invariant gegenüber Eichtransformationen des Eichfeldes (Viererpotentials), wenn gleichzeitig an der Wellenfunktion geladener Teilchen eine Phasentransformation ($U(1)$-Transformation) vorgenommen wird. Man kann die Argumentation natürlich auch umkehren und kommt so zum *Eichprinzip*:

Eine Invarianz der Wellengleichung unter beliebigen lokalen Transformationen der Wellenfunktion erfordert

- die **Einführung eines Eichfeldes**
  - Quantenelektrodynamik: $A^\mu$ als Wellenfunktion des Photons
  - elektroschwache WW: $\vec{W}^\mu, B^\mu$ für $W^\pm$ sowie $Z$ und Photon
  - Quantenchromodynamik: $\vec{G}^\mu$ für die Gluonen
- und die Kompensation der Phasenverschiebung durch **Eichtransformationen** dieser Eichfelder.

Die Einführung des Eichfeldes erfolgt dabei formal durch Kovariantisieren der Ableitungen:

$$[\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + iq\ A^\mu]$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu &+ i\frac{g'}{2}\ Y_w B^\mu \\ &+ i\frac{g}{2}\ \vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu \\ &+ i\frac{g_s}{2}\ \vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu \end{aligned} \tag{8.1}$$

($Y_w$ ist ein Skalar, die $\tau^i$ sind die Pauli-Matrizen und die $\lambda^i$ die Gell-Mann-Matrizen.)
Die Eichtransformation der Felder wird durch

$$[A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu\chi]$$

$$\begin{aligned} B^{\mu\prime} &= B^\mu - \partial^\mu\beta \\ W_k^{\mu\prime} &= W_k^\mu - \partial^\mu\alpha_k - g\sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ijk}\alpha_i W_j^\mu \\ G_k^{\mu\prime} &= G_k^\mu - \partial^\mu\gamma_k - g_s\sum_{i,j=1}^{8} f_{ijk}\gamma_i G_j^\mu \end{aligned} \tag{8.2}$$

vorgenommen. Die gemischten Terme ($\sum\limits_{i,j}\dots$) rühren vom nicht-abel'schen Charakter von $SU(2)$ und $SU(3)$ her. Die Kompensation der dadurch erzeugten Phasenverschiebung geschieht dann durch die Transformation

$$[U = e^{iq\ \chi}]$$

$$U = e^{i\frac{g'}{2}\ \beta Y_w + i\frac{g}{2}\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}} \cdot e^{i\frac{g_s}{2}\ \vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda}} \tag{8.3}$$

In der *Feldtheorie* arbeitet man aufgrund übersichtlicher Rechnungen mit Lagrangedichten an Stelle der Wellengleichungen. Das Eichprinzip fordert dann entsprechend die *Invarianz der Lagrangedichte* unter Eichtransformationen.

**PS:** Die bisher unbekannten Ausdrücke in Gleichung (8.1)-(8.3) stehen für die elektroschwache und die starke Wechselwirkung. Ihre Herkunft sowie eine Diskussion der Terme erfolgt später in den Kapiteln 9 und 10.

## 8.2 Lagrange-Formalismus in der Feldtheorie

In der **klassischen Mechanik** können die Bewegungsgleichungen aus der *Lagrange-Funktion*

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) := T - U \tag{8.4}$$

($T$: kin. Energie, $U$: pot. Energie) gebildet werden. Diese ist abhängig von den *verallgemeinerten Koordinaten* $\vec{q}$, deren zeitlichen Ableitung $\dot{\vec{q}}$ und der Zeit $t$. Nach dem *Hamiltonschen Prinzip*, das eine Minimierung des *Wirkungsintegrals*

$$S[\vec{q}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)dt = Min! \tag{8.5}$$

fordert, folgen die Bewegungsgleichungen aus den *Euler-Lagrange-Gleichungen.*

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = 0 \tag{8.6}$$

In der **Feldtheorie** definiert man nun die *Lagrangedichte* $\mathcal{L}$ als Funktional des Feldes $\Phi(x^\mu)$ und dessen Vierergradienten $\partial_\mu \Phi(x^\mu)$, die über den gesamten dreidimensionalen Raum integriert die Lagrange- Funktion ergibt:

$$L = \int \mathcal{L}(\Phi(x^\mu), \partial_\mu \Phi(x^\mu))d^3x \tag{8.7}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen werden dann zu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x^\mu)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x^\mu))} = 0 \tag{8.8}$$

und repräsentieren die entsprechenden DGLs für die Wellenfunktionen.

Die Lagrangedichten kommen aus dem Nichts, d.h. sie wurden so ausgeheckt, daß sie die gewünschten Feldgleichungen ergeben. Während sie in der klassischen Mechanik aus $L = T - U$ hergeleitet werden müssen sie in der Feldtheorie als *Axiome* eingeführt werden.

**Einige Beispiele für Lagrangedichten:**

**Klein-Gordon-Feld** Die einfachste Feldtheorie ist die eines *reellen skalaren Feldes*, das sich bei einer Lorentztransformation wie ein Skalar (oder Pseudoskalar) transformiert.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - m^2\Phi^2\right] \tag{8.9}$$

Eingesetzt in (8.8) ergibt sich die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left\{\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right\}\Phi(x^\mu) = 0$$

Für ein *komplexes skalares Feld* gilt

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi)^* - m^2\Phi^2\right] \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2) \tag{8.10}$$

Eingesetzt in (8.8) ergeben sich die Klein-Gordon-Gleichungen für zwei entkoppelte Felder

$$\left\{\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right\}\Phi(x^\mu) = 0 \text{ und } \left\{\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right\}\Phi^*(x^\mu) = 0$$

**Dirac-Feld** Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x^\mu)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x^\mu) \tag{8.11}$$

Faßt man $\psi$ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Koordinaten auf folgt die Dirac-Gleichung

$$\Big\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Big\}\psi(x^\mu) = 0$$

**Elektromagnetisches Feld ohne Quellen** Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{8.12}$$

Es folgt die homogene Wellengleichung

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0$$

**Proca-Feld** Die Lagrangedichte lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \end{aligned} \tag{8.13}$$

Es folgt die Proca-Gleichung

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$$

# Kapitel 9

# Die elektroschwache Wechselwirkung

Die V-A-Struktur der geladenen schwachen Ströme erfordert geladene Vektorteilchen als Feldquanten, die wegen der kurzen Reichweite eine hohe Masse besitzen müssen. Um eine eichinvariante Theorie konstruieren zu können, geht man von masselosen Feldquanten aus und erzeugt die Masse durch die Wechselwirkung mit einem Higgs-Hintergrundfeld. Wenn man versucht, diese Theorie auf die schwache Wechselwirkung anzuwenden, so muss die e.m. Wechselwirkung mit einbezogen werden.

## 9.1 Elektroschwache Eigenzustände, Mischungsmatrix

Wie wir in Abschnitt 1.3.3 bereits erwähnt hatten gibt es bei der *geladenen schwachen Wechselwirkung* von Quarks über $W^{\pm}$ generationsüberschreitende Prozesse. Um diesem Phänomen Rechnung zu tragen führt man die *elektroschwachen Eigenzustände* $(d', s', b')$ ein. Diese Zustände sind Linearkombinationen der *Masseneigenzustände* $(d, s, b)$:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{u\to d} & V_{u\to s} & V_{u\to b} \\ V_{c\to d} & V_{c\to s} & V_{c\to b} \\ V_{t\to d} & V_{t\to s} & V_{t\to b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

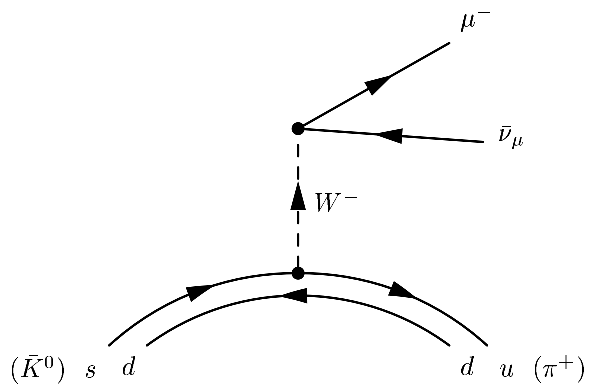
Anfang der 70er Jahre kannte man lediglich $u-, d-$ und $s-$Quark. Glashow, Iliopoulos und Maiani postulierten im Jahr 1970 das $c-$Quark um eine Symmetrie zwischen Quarks und Leptonen $(e, \mu, \nu_e, \nu_\mu)$ herzustellen. Um diese Symmetrie in der schwachen Wechselwirkung forstzusetzen stellte man die $2 \times 2$ Cabibbo-Mischungsmatrix auf (Cabibbo-GIM-Ansatz)

$$V_C := \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C & 0 \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

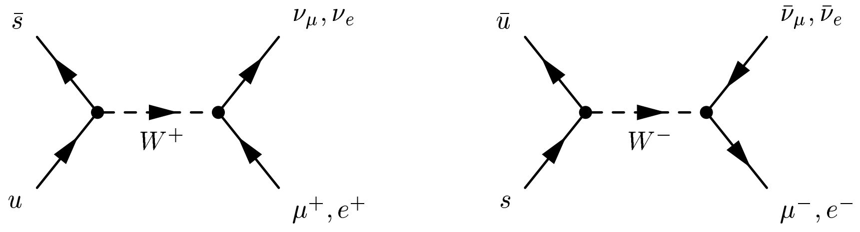
wobei $\theta_C = 13,1^o$ der *Cabibbo-Winkel* ist. Diese Hypothese hat die Folge, daß die Charm-Hadronen bevorzugt in Teilchen mit Strangeness zerfallen:

$$\begin{aligned} \Gamma(c \to s) &\propto \cos^2\theta_C = 0,974^2 = 0,95 \\ \Gamma(c \to d) &\propto \sin^2\theta_C = 0,227^2 = 0,05 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Es wird in der Tat beobachtet, daß der Zerfall der $D^+$- und $D^0$-Mesonen in $K^-$-Mesonen plus Pionen dominiert, während der rein pionische Zerfall unterdrückt ist.
Der Zerfall $\bar{K}^0 \to \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ ist ein weiteres (und bereits beobachtetes) Beispiel:

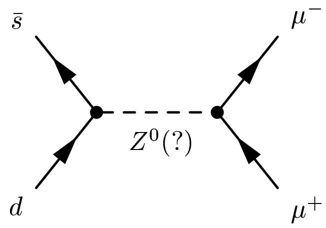



Bei der *neutralen schwachen Wechselwirkung* über $Z^0$ treten *keine* generationsüberschreitenden Prozesse auf. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir ein berühmtes Beispiel: Wir vergleichen die Zerfälle des $K^0$ mit denen von $K^\pm$. Der Zerfall des $K^\pm$ verhält sich wie folgt $[K^+ = (u\bar{s}), K^- = (s\bar{u})]$:




$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(K^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu)}{\Gamma(K^\pm \to \text{alle Kanäle})} &= 63\% \\ \\ \frac{\Gamma(K^\pm \to e^\pm + \nu_e)}{\Gamma(K^\pm \to \text{alle Kanäle})} &= 1,6 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{9.4}$$

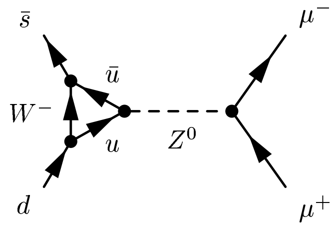
Der Zerfall des $K^0$ $[= (d\bar{s})]$ ist hingegen:

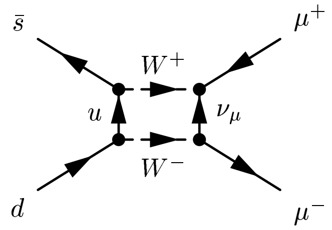



Man bestätigte experimentell, daß dieser Zerfallsast stark unterdrückt ist:

$$\frac{\Gamma(K^0 \to \mu^+ + \mu^-)}{\Gamma(K^0 \to \text{alle Kanäle})} = (7,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \tag{9.5}$$

Wenn es keine generationsüberschreitenden neutralen Prozesse geben soll ist allerdings fraglich, warum er nicht identisch null ist ? Wir betrachten hierzu höhere Ordnungen:




Diese Graphen sind erlaubt, würden aber einen größeren Zerfallsast bewirken, als im Experiment gemessen. Die Lösung ist das $c$-Quark, das in den Graphen das $u$-Quark ersetzen kann und so zwei weitere (entgegengesetzte !) Beiträge liefert. Eine Aufhebung findet nicht statt, da die Beiträge der $c$-Quarks kleiner als die der $u$-Quarks sind (da $m_u < m_c$ ist $\mathcal{M}_c < \mathcal{M}_u$). Dies war übrigens der historische Auslöser für die Forderung nach dem $c$-Quark. Im Jahre 1973 schätzte man $m_c$ auf $1,5$ GeV bis 2 GeV, und im Jahre 1974 fand man in Brookhaven das langlebige $J/\Psi$-Meson, das aus $(c\bar{c})$ besteht und die Masse $3,1$ GeV trägt.

Als 1975/76 das $\tau$-Lepton mit einer Masse von $1,77$ GeV gefunden wurde und somit die 3. Generation der Leptonen 'geboren' war lag es nahe, daß auch die Quarks drei Generation aufweisen. Die Verallgemeinerung der Mischungsmatrix auf drei Quarkgenerationen erfolgte durch Kobayashi und Maskawa im Jahre 1976:

$$V_{CKM} := \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 p & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 p \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 p & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 p \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

mit $s_i := \sin\theta_i, c_i := \cos\theta_i$ und $p := e^{i\delta}$. Die $\theta_i$ sind die verallgemeinerten Cabibbo-Winkel und $\delta$ ein Phasenfaktor, der eine $CP$-Verletzung im $K^0$- und $B^0$-System erlaubt.

Die Werte der einzelnen Komponenten von $V_{CKM}$ können zur Zeit nicht theoretisch berechnet werden und man ist auf experimentelle Daten angewiesen:

$$V_{CKM}^{exp} := \begin{pmatrix} 0,97? & 0,2? & 0,00? \\ 0,2? & 0,97? & 0,0? \\ 0,0? & 0,0? & 0,99? \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

Man sieht deutlich, daß die Mischung zwischen 3. und 1. bzw. 3. und 2. Generation sehr gering ist. Das ist der Grund für die lange Lebensdauer der $B$-Mesonen ($\tau \approx 1$ ps).

## 9.2 Elektroschwache Felder und lokale $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Invarianz

Es bietet sich an, die Teilchen, die durch Emission schwacher Feldquanten ineinander übergehen, in Multiplett's eines *schwachen Isospins I* anzuordnen. Die linkshändigen Fermionen bilden Dubletts mit $I = \frac{1}{2}$ und $I_3 = \pm\frac{1}{2}$, die rechtshändigen Fermionen Singuletts mit $I = 0$ und $I_3 = 0$. Man findet in der Literatur oft die folgende *symbolische* Schreibweise

$$\begin{array}{ll} I_3 = +\frac{1}{2}: \\ I_3 = -\frac{1}{2}: \end{array} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

$$I_3 = \ 0: \quad (e)_R \ (\mu)_R \ (\tau)_R \ (u)_R \ (c)_R \ (t)_R \ (d)_R \ (s)_R \ (b)_R$$

Die Wellenfunktion $\Phi$ eines Teilchens muß als Produkt aus einem *Bi-Spinor* $\psi(x^\mu)$ und einem *schwachen Isospinor* $\chi$ geschrieben werden:

$$\Phi = \psi(x^\mu) \cdot \chi \tag{9.8}$$

Der Isospinor $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht für $I_3 = +\frac{1}{2}$ und $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $I_3 = -\frac{1}{2}$

$$\Phi(\nu_{eL}) = \psi(x^\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Phi(e_L) = \psi(x^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

Die *schwache Hyperladung* $Y_w$ wird über die *Gell-Mann-Nishijima-Relation*

$$Q = I_3 + \frac{Y_w}{2} \quad \Leftrightarrow \quad Y_w = 2(Q - I_3) \tag{9.10}$$

eingeführt, die schwachen Isospin $I_3$, elektrische Ladung $Q$ und schwache Hyperladung $Y_w$ miteinader verknüpft. Man erhält die folgenden Werte:

| $Y_w$ | Fermion |
|---|---|
| $-1$ | $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$ |
| $-2$ | $(e)_R \ (\mu)_R \ (\tau)_R$ |
| $+\frac{1}{3}$ | $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$ |
| $+\frac{4}{3}$ | $(u)_R \ (c)_R \ (t)_R$ |
| $-\frac{2}{3}$ | $(d)_R \ (s)_R \ (b)_R$ |

Eine lokale $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformation schreiben wir in der Form

$$\Phi' = e^{i\frac{g'}{2}\ \beta Y_w + i\frac{g}{2}\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}\Phi \tag{9.11}$$

mit $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und den Pauli-Matrizen $\tau_i$ sowie der schwachen Hyperladung $Y_w$. Die Invarianz der Dirac-Gleichung ist gewährleistet, wenn man die elektroschwachen Felder $B^\mu, \vec{W}^\mu$ durch Kovariantisieren der Ableitung einführt

$$\begin{aligned} \partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu &+ i\frac{g'}{2}\ Y_w B^\mu \\ &+ i\frac{g}{2}\ \vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu \end{aligned} \tag{9.12}$$

und diese eichtransformiert:

$$\begin{aligned} B^{\mu\prime} &= B^\mu - \partial^\mu\beta \\ W_k^{\mu\prime} &= W_k^\mu - \partial^\mu\alpha_k - g\sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ijk}\alpha_i W_j^\mu \end{aligned} \tag{9.13}$$

Der Term proportional zur Kopplungskonstante $g$ kommt vom nicht-abel'schen Charakter der $SU(2)$. In Anlehnung an die QED und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Generatoren der $SU(2)$ nicht vertauschen definieren wir die *elektroschwachen Feldstärketensoren*:

$$\begin{aligned} F^i_{\mu\nu} &:= \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu - g\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}W^j_\mu W^k_\nu \\ f_{\mu\nu} &:= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \tag{9.14}$$

## 9.3 Die Fermion-$W^{\pm}$-Kopplung

Um Vertizes zu betrachten, bei denen sich der schwache Isospin ändert, ist es sinnvoll, die *Isospin-Schiebeoperatoren* zu definieren, die solche Übergänge erzeugen:

| Schiebeop. | $I_3$-Übergang | Boson | Boson-Feld |
|---|---|---|---|
| $\tau_+ := \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$ | $-\frac{1}{2} \to +\frac{1}{2}$ | $W^+$ | $(W^+)^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^\mu + iW_2^\mu)$ |
| $\tau_- := \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2)$ | $+\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}$ | $W^-$ | $(W^-)^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^\mu - iW_2^\mu)$ |

Entsprechend gilt $W_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_+^\mu + W_-^\mu)$ und $W_2^\mu = \frac{-i}{\sqrt{2}}(W_+^\mu - W_-^\mu)$. Unter Verwendung dieser Operatoren kann der Ausdruck $i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu$ wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu &= i\frac{g}{2}\sum_{i=1}^{3}\tau_i W_i^\mu \\ &= i\frac{g}{\sqrt{2}}\ \tau_+(W^-)^\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}}\ \tau_-(W^+)^\mu + i\frac{g}{2}\tau_3 W_3^\mu \end{aligned} \tag{9.15}$$

Man sieht, daß nur die ersten beiden Summanden für die geladene schwache Wechselwirkung mittels $W^{\pm}$ verantwortlich sind. Aufgrund der Struktur der Schiebeoperatoren nehmen an der geladenen schwachen Wechselwirkung nur die linkshändigen Komponenten Teil.

## 9.4 Die Fermion-$Z^0/\gamma$-Kopplung

Als nächstes wollen wir die Übergänge betrachten, bei denen der schwache Isospin erhalten ist. Dies geschieht über die Terme

$$+i\frac{g}{2}\tau_3 W_3^\mu + i\frac{g'}{2}Y_w B^\mu \tag{9.16}$$

in der kovariantisierten Ableitung. Die Felder $W_3^\mu$ und $B^\mu$ stehen für das Photon ($A^\mu$) und das $Z^0$-Boson ($Z^\mu$). Da sowohl $W_3^\mu$ als auch $B^\mu$ an Neutrinos koppeln, muß $A^\mu$ eine Linearkombination aus beiden sein. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} A^\mu &= \cos\theta_W\ B^\mu + \sin\theta_W\ W_3^\mu \\ Z^\mu &= -\sin\theta_W\ B^\mu + \cos\theta_W\ W_3^\mu \end{aligned} \tag{9.17}$$

Der Ansatz für $Z^\mu$ erfolgt aus der Überlegung, daß $A^\mu$ und $Z^\mu$ bezüglich der Basis $W_3^\mu, B^\mu$ orthogonal sein müssen. Aufgelöst nach $W_3^\mu$ bzw. $B^\mu$ erhalten wir

$$\begin{aligned} B^\mu &= \cos\theta_W\ A^\mu - \sin\theta_W\ Z^\mu \\ W_3^\mu &= \sin\theta_W\ A^\mu + \cos\theta_W\ Z^\mu \end{aligned} \tag{9.18}$$

Wenn wir nun (9.18) in (9.16) einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} +i\frac{g}{2}\tau_3 W_3^\mu + i\frac{g'}{2}Y_w B^\mu &= +i\frac{g}{2}\tau_3(\sin\theta_W\ A^\mu + \cos\theta_W\ Z^\mu) \\ &\quad + i\frac{g'}{2}Y_w(\cos\theta_W\ A^\mu - \sin\theta_W\ Z^\mu) \\ &= + \underbrace{\frac{i}{2}(g\tau_3\sin\theta_W + g'Y_w\cos\theta_W)}_{=:a} A^\mu \\ &\quad + \underbrace{\frac{i}{2}(g\tau_3\cos\theta_W + g'Y_w\sin\theta_W)}_{=:z} Z^\mu \end{aligned} \tag{9.19}$$

**Neutrinos**

Wir betrachten nun die Kopplung von *linkshändigen Neutrinos* an $A^\mu$. Für Neutrinos gilt:

$$\tau_3 \to 2I_3 = +1 \qquad Y_w = -1 \qquad Q = 0 \tag{9.20}$$

Da Neutrinos keine elektrische Ladung tragen koppeln sie nicht an $A^\mu$, d.h. in Gleichung (9.16) muß gelten

$$\begin{aligned} a = a(\tau_3 \to +1, Y_w = -1) &= 0 \\ \frac{i}{2}(g\tau_3\sin\theta_W + g'Y_w\cos\theta_W) &= 0 \\ \frac{i}{2}(g(+1)\sin\theta_W + g'(-1)\cos\theta_W) &= 0 \\ g\sin\theta_W &= g'\cos\theta_W \end{aligned} \tag{9.21}$$

was durch Umstellen und unter Verwendung von $\cos^2\theta_W + \sin^2\theta_W = 1$ auf die Gleichungen

$$\boxed{\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}} \qquad \boxed{\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}} \tag{9.22}$$

führt. Diese Gleichungen definieren den schwachen Mischungswinkel $\theta_W$ (*Weinberg-Winkel*), dessen Wert im Standardmodell nur experimentell bestimmt werden kann:

$$\theta_W = 28,7^o \tag{9.23}$$

Unter Verwendung dieser Relationen erhält man bei Neutrinos für $z$

$$z = z(\tau_3 \to +1, Y_w = -1) = \frac{ig}{2\cos\theta_W} \left[= \frac{ig_z}{2}\right] \tag{9.24}$$

**Elektronen (linkshändige Komponente)**

Betrachten wir nun *linkshändige Elektronen*, so finden wir mit

$$\tau_3 \to 2I_3 = -1 \qquad Y_w = -1 \qquad Q = \frac{q}{e} = -1 \tag{9.25}$$

für $a$ und $z$ die Werte

$$\begin{aligned} a = a(\tau_3 \to -1, Y_w = -1) &= -ig\sin\theta_W \equiv -ig'\cos\theta_W \\ &[= -ie] \\ z = z(\tau_3 \to -1, Y_w = -1) &= -\frac{i}{2}g\cos\theta_W - \frac{i}{2}g'\sin\theta_W \\ &\equiv -\frac{i}{2}\frac{g}{\cos\theta_W}\,(2\sin^2\theta_W - 1) \\ &\left[= -\frac{ig_z}{2}\,(2\sin^2\theta_W - 1)\right] \end{aligned} \tag{9.26}$$

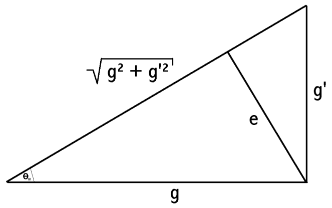
Aus der QED kennen wir die Kopplung des Elektrons an $A^\mu$

$$+iq\,A^\mu = +iQe\,A^\mu = +\underbrace{(-ie)}_{\equiv a}\,A^\mu \tag{9.27}$$

Der Vergleich von $a = -ie$ mit dem aus (9.26) liefert die fundamentale Beziehung zwischen den Kopplungskonstanten $g, g'$ und der Elementarladung $e$:

$$\boxed{e = g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W} \tag{9.28}$$

Diese Gleichung (9.28) kann zusammen mit Gleichung (9.22) geometrisch dargestellt werden:



Bei den Feynman-Regeln werden wir später statt $g, g'$ die folgenden Konstanten verwenden:

$$\boxed{g_w := g \equiv \frac{e}{\sin\theta_W}} \qquad \boxed{g_z := \frac{g}{\cos\theta_W} \equiv \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}} \tag{9.29}$$

**Elektronen (rechtshändige Komponente)**

Für *rechtshändige Elektronen* finden wir mit

$$\tau_3 \to 2I_3 = 0 \qquad Y_w = -2 \qquad Q = \frac{q}{e} = -1 \tag{9.30}$$

für $a$ und $z$ die Werte

$$\begin{aligned} a &= a(\tau_3 \to 0, Y_w = -2) = -ig\sin\theta_W \equiv -ig'\cos\theta_W \\ &\qquad\qquad [= -ie] \\ z &= z(\tau_3 \to 0, Y_w = -2) = -ig'\sin\theta_W \equiv -\frac{i}{2}\frac{g}{\cos\theta_W}\ 2\sin^2\theta_W \\ &\qquad\qquad \left[= -\frac{ig_z}{2}\ 2\sin^2\theta_W\right] \end{aligned} \tag{9.31}$$

Die Kopplungen der *Quarks* findet man in analoger Weise.

**Elektronen (beide Komponenten)**

Der Bi-Spinor eines Elektrons kann in seine links- und rechtshändige Komponente zerlegt werden:

$$u(e) = u_L(e) + u_R(e) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u(e) + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u(e) \tag{9.32}$$

Wir hatten gesehen, wie die links- und rechtshändige Komponente an das $Z^0$ koppelt, und setzen nun die Kopplungen der beiden Komponenten zusammen:

$$\begin{aligned} z &= z_L \cdot \frac{1}{2}(1-\gamma^5) + z_R \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \\ &= \frac{-ig_z}{2}(2\sin^2\theta_W - 1)\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma^5) + \frac{-ig_z}{2}2\sin^2\theta_W \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \\ &= \frac{-ig_z}{2}\ \frac{1}{2}(\underbrace{[-1+4\sin^2\theta_W]}_{=:C_V} - \underbrace{[-1]}_{=:C_A}\gamma^5) \end{aligned} \tag{9.33}$$

**Allgemeine Kopplung für Fermionen**

Die allgemeine Formel für die Kopplung von Fermionen an $A^\mu$ und $Z^0$ ist:

$$\begin{aligned} a &= iQe \\ z &= \frac{-ig_z}{2}\ \frac{1}{2}(C_V - C_A\gamma^5) \end{aligned} \tag{9.34}$$

wobei $C_V = 2I_3 - 4Q\sin^2\theta_W$ und $C_A = 2I_3$ ist.

## 9.5 Die Feynman-Regeln der elektroschwachen Wechselwirkung

Nachdem wir in den vorangehenden Kapiteln das Kopplungsverhalten der Fermionen an die Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung beleuchtet haben, können wir nun die Feynman-Regeln für selbige angeben. Über das Kopplungsverhalten der Eichbosonen untereinander soll an dieser Stelle keine Aussage gemacht werden.

Zur Berechnung der Übergangsamplitude $\mathcal{M}$ gehe man wie folgt vor:

1. **Notation, Externe Linien:** Man nummeriere die Viererimpulse der *ein-* und *auslaufenden* Linien mit $p_1, \ldots, p_n$, die Viererimpulse der *inneren* Linien mit $q_1, q_2, \ldots$, und zeichne an jede Linie einen *Pfeil*, um die positive Richtung im Auge zu behalten. Für eine externe Linie mit Impuls $p$ schreibe man

| | | |
|---|---|---|
| Fermionen | einlaufend | $u(p)$ |
| | auslaufend | $\bar{u}(p)$ |
| Antifermionen | einlaufend | $\bar{v}(p)$ |
| | auslaufend | $v(p)$ |
| Photonen, $W^\pm$, $Z^0$ | einlaufend | $\epsilon_\mu(p)$ |
| | auslaufend | $\epsilon^*_\mu(p)$ |

2. **Kopplungskonstante:** Man schreibe für *jeden Vertex* einen Faktor

| | |
|---|---|
| Lepton-Photon-Vertex | $ig_e\gamma^\mu$ |
| Lepton-$W^\pm$-Vertex | $-\frac{ig_w}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \ \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ |
| Quark-$W^\pm$-Vertex | $-\frac{ig_w}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \ \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\cdot(V_{CKM})_{q_1,q_2}$ |
| Fermion-$Z^0$-Vertex | $-\frac{ig_z}{2}\gamma^\mu \ \frac{1}{2}(C_V^f - C_A^f\gamma^5)$ |

$$C_V = 2c_V = 2I_3 - 4Q\sin^2\theta_W \qquad C_A = 2c_A = 2I_3$$

| $f$ | $C_V$ | $C_A$ | s. Gln. |
|---|---|---|---|
| $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ | $+1$ | $+1$ | (9.24) |
| $e, \mu, \tau$ | $-1+4\sin^2\theta_W$ | $-1$ | (9.33) |
| $u, c, t$ | $+1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W$ | $+1$ | (9.34) |
| $d, s, b$ | $-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W$ | $-1$ | (9.34) |

Ferner gibt es Kopplungen von $W^\pm, Z^0$ untereinander. Die entsprechenden Vertexfaktoren können dem Anhang des Buchs von Griffiths [1] entnommen werden.

3. **Propagator:** Man schreibe für *jede innere Linie* einen Faktor

| | |
|---|---|
| Fermionen | $i\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2}$ |
| Photon | $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ |
| $W^\pm, Z^0$ | $-i\frac{g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2-m^2}$ |

4. **Energie- und Impulserhaltung:** Für *jeden Vertex* schreibe man eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta^4(k_1+k_2+k_3)$, worin die $k_i$ die Viererimpulse sind, die in den Vertex ein- oder aus ihm auslaufen. Einlaufende Linien werden positiv gezählt, auslaufende negativ.

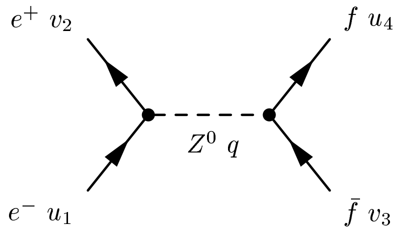
5. **Integration über innere Impulse:** Für jede innere Linie schreibe man einen Faktor $\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$ und integriere über alle inneren Viererimpulse.

6. **Streichen der $\delta$-Funktion:** Das Ergebnis wird eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta(p_1+\cdots-p_n)$ enthalten. Nach dem Streichen dieses Faktors bleibt $-i\mathcal{M}$ übrig.

7. **Antisymmetrisierung bei Kombination:** Einführung eines Minuszeichens zwischen zwei Diagrammen, die sich lediglich durch den *Austausch zweier* ein- oder auslaufender Fermionen oder Antifermionen bzw. durch die *Ersetzung eines* Fermion durch ein Antifermion oder v.v. unterscheiden.

## 9.6 Neutrale schwache $e^-e^+ \to f\bar{f}$-Übergänge

Wir betrachten im folgenden neutrale schwache Übergänge der Form




Die Übergangsamplitude berechnet sich nach den Feynman-Regeln zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M} =& \frac{-g_z^2}{4(q^2-m_Z^2)}\left[\bar{u}_4\gamma^\mu(c_V^f - c_A^f\gamma^5)v_3\right] \\ &\cdot (g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2})\left[\bar{v}_2\gamma^\nu(c_V^e - c_A^e\gamma^5)u_1\right]\end{aligned} \tag{9.35}$$

mit $u_i := u(p_i), v_i := v(p_i)$ und $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

Wenn wir die Leptonenmassen vernachlässigen ($m_i \ll m_Z^2$), was wir außer beim $t$-Quark auch beruhigt tun können, ergibt sich in der Formel für die Übergangsamplitude folgende Vereinfachung:

$$\frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \to 0 \tag{9.36}$$

---

*Beweis:*
Die Impulsraum-Dirac-Gleichung vereinfacht sich für $m^i \to 0$ zu:

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p^i_\mu - m^i)u(p^i) = 0 &\to \gamma^\mu p^i_\mu \; u(p^i) = 0 \\ \bar{v}(p^i)(\gamma^\mu p^i_\mu + m^i) = 0 &\to \bar{v}(p^i) \; \gamma^\mu p^i_\mu = 0\end{aligned} \tag{9.37}$$

Wenn man in Gleichung (9.35) für $q = p_1 + p_2$ einsetzt, und $\gamma^\mu p^i_\mu \; u(p^i) = 0$ und $\bar{v}(p^i) \; \gamma^\mu p^i_\mu = 0$ berücksichtigt, findet man, daß sich die Terme mit $\frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2}$ herausheben.

---

Wir können in dieser Näherung für $\mathcal{M}$ also schreiben

$$\mathcal{M} = \frac{-g_z^2}{4(q^2 - m_Z^2)} \left[\bar{u}_4 \gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) v_3\right] \left[\bar{v}_2 \gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) u_1\right] \tag{9.38}$$

und das spingemittelte Betragsquadrat wird zu

$$\begin{aligned}< |\mathcal{M}|^2 > &= \left[\frac{g_z^2}{8(q^2 - m_Z^2)}\right]^2 \mathrm{Tr}(\gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) \not{p}_3 \gamma^\nu (c_V^f - c_A^f \gamma^5) \not{p}_4) \\ &\quad \cdot \mathrm{Tr}(\gamma_\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_1 \gamma_\nu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \not{p}_2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{g_z^2}{q^2 - m_Z^2}\right]^2 \Big\{ (c_V^{f\,2} + c_A^{f\,2})(c_V^{e\,2} + c_A^{e\,2}) \\ &\qquad \cdot [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\ &\quad + 4 c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e \cdot [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \Big\}\end{aligned} \tag{9.39}$$

Im Schwerpunktsystem reduziert sich der Ausdruck auf

$$\begin{aligned}< |\mathcal{M}|^2 > = \frac{1}{2} &\left[\frac{g_z^2 \; E^2}{4E^2 - m_Z^2}\right]^2 \\ &\cdot \Big\{ (c_V^{f\,2} + c_A^{f\,2})(c_V^{e\,2} + c_A^{e\,2}) \cdot (1 + \cos^2\theta) \\ &\quad - 8 c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e \cdot \cos\theta \Big\}\end{aligned} \tag{9.40}$$

wobei $E$ die Energie jedes Teilchens und $\theta$ der Streuwinkel ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(16\pi)^2} &\left[\frac{g_z^2 \; E^2}{4E^2 - m_Z^2}\right]^2 \\ &\cdot \Big\{ (c_V^{f\,2} + c_A^{f\,2})(c_V^{e\,2} + c_A^{e\,2}) \cdot (1 + \cos^2\theta) \\ &\quad - 8 c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e \cdot \cos\theta \Big\}\end{aligned} \tag{9.41}$$

### 9.6.1 Der $Z^0$-Pol

Man beachte die Singularität von $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ an der Stelle $s := 4E^2 = m_Z^2$. Man spricht vom $Z^0$-*Pol*, das ist die Energie, bei der das $Z^0$ auf seine Massenschale gehoben

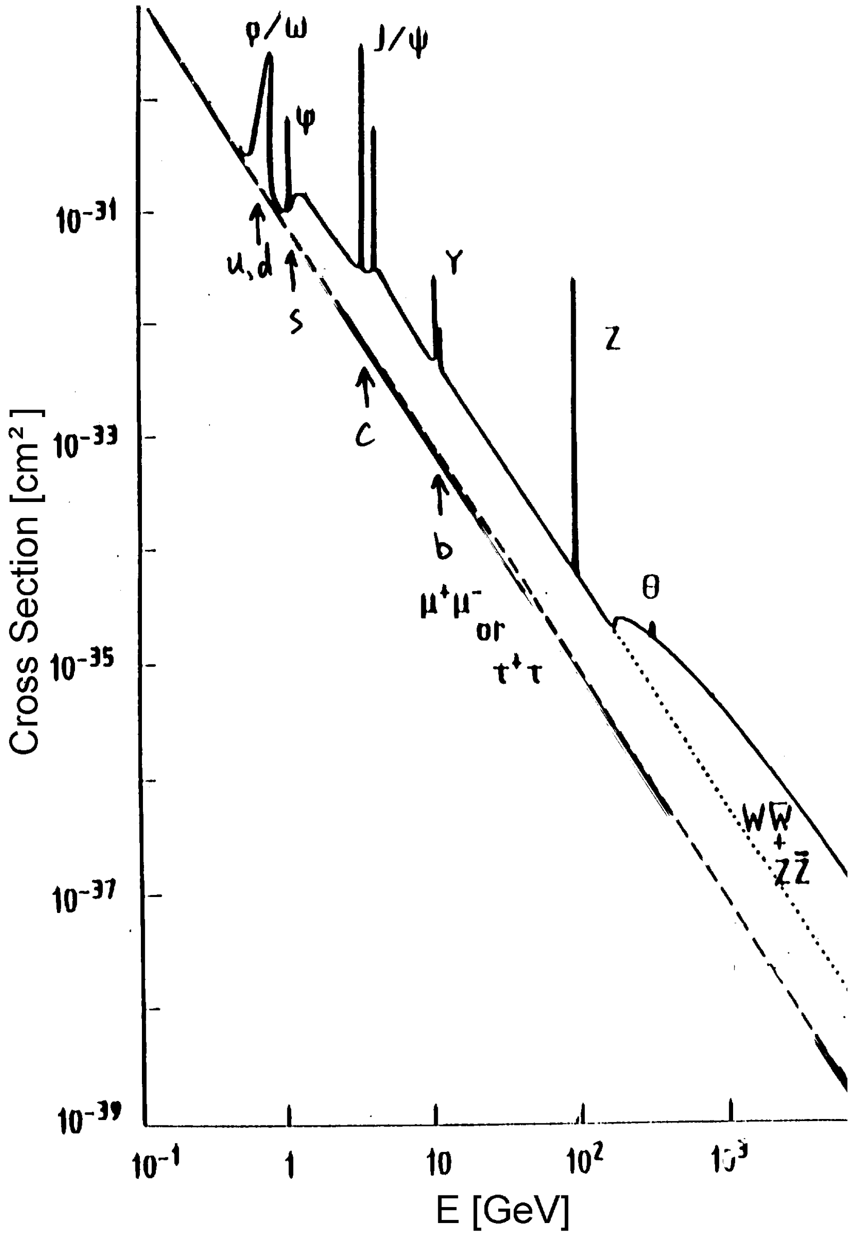



Abbildung 9.1: *Wirkungsquerschnitt bei der Reaktion* $e^+ + e^- \to f + \bar{f}$. *Bei den Resonanzen reicht die Energie gerade aus, um die eingezeichneten Teilchen zu erzeugen. Die Resonanzen lassen auf die Ruhemassen der erzeugten Teilchen schließen.*

wird. Nun setzt der von uns verwendete Propagator ein virtuelles $Z^0$-Boson voraus, das weit von seiner Massenschale entfernt ist. Die Singularität bei $s = m_Z$ können wir allerdings vermeiden, indem wir den Propagator modifizieren:

$$-i\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2}}{q^2 - m_Z^2} \qquad \rightarrow \qquad -i\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2}}{q^2 - m_Z^2 + im_Z\Gamma_Z} \tag{9.42}$$

Mit dieser Korrektur wird der totale Wirkungsquerschnitt zu

$$\sigma = \frac{g_z^2\ s}{192\pi}\frac{({c_V^f}^2 + {c_A^f}^2)({c_V^e}^2 + {c_A^e}^2)}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2} \tag{9.43}$$

Das Maximum bei $s = m_Z^2$ kann zur experimentellen Bestimmung der $Z^0$-Masse benutzt werden.

### 9.6.2 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

Es fällt auf, daß es einen Interferenzterm von axialer und vektorieller Komponente des Stromes von $Z^0$ gibt. Es sei erwähnt, daß wenn man den Feynman-Graphen mit einem Photon anstelle des $Z^0$ miteinbezieht, auch noch eine Interfernz zwischen dem Vektorstrom des Photons und dem Axialvektorstrom des $Z^0$ auftritt. Besonders deutlich äußert sich dieser Effekt in der sogenannten *Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie*. Hierbei überlegt man sich, wie sich die Formel für den differnetiellen Wirkungsquerschnitt ändern würde, wenn $f$ und $\bar{f}$ gerade in die vertauschten Richtungen davonfliegen würden, d.h.

$$\begin{aligned} \theta \rightarrow \bar{\theta} &= \theta - \pi \\ \cos(\theta) \rightarrow \cos(\bar{\theta}) &= \cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta) \\ 1 + \cos^2(\theta) \rightarrow 1 + \cos(\bar{\theta}) &= 1 + \cos^2(\theta) \end{aligned} \tag{9.44}$$

Man definiert die 'Forward-Backward'-Asymmetrie $A_{FB}$ als

$$A_{FB} := \frac{\int \frac{d\sigma}{d\Omega}|_\theta d\Omega - \int \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\bar{\theta}} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega}|_\theta d\Omega + \int \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{\bar{\theta}} d\Omega} \tag{9.45}$$

Nach Einsetzen von Gleichung (9.41), Kürzen und anschließender Integration erhält man

$$\boxed{A_{FB} = 3\frac{c_V^f c_A^f c_V^e c_A^e}{({c_V^f}^2 + {c_A^f}^2)({c_V^e}^2 + {c_A^e}^2)}} \tag{9.46}$$

Da sowohl $c_V$ als auch $c_A$ mit dem Weinberg-Winkel $\theta_W$ verknüpft sind, stellt die Untersuchung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie eine gute Möglichkeit zur experimentellen Bestimmung von $\theta_W$ dar.

## 9.7 Der Higgs-Mechanismus

Wegen der kurzen Reichweite der schwachen Wechselwirkung gingen wir davon aus, daß die Eichbosonen eine hohe Masse besitzen müssen. Um den Zusammenhang zwischen der Reichweite einer Wechselwirkung und der Masse der zugehörigen Feldquanten zu verdeutlichen, betrachten wir die *zeitunabhängige* Klein-Gordon-Gleichung für das *skalare Potential* $V(\vec{x})$ einer Quelle $\rho(\vec{x})$:

$$\left\{-\nabla^2 + m^2\right\} V(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \tag{9.47}$$

Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch das *Yukawa-Potential*,

$$V(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \cdot \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi\ |\vec{x}'|} d^3x' \tag{9.48}$$

einem Coulomb-Potential mit zusätzlichem exponentiellen Dämpfungsterm $e^{-m|\vec{x}|}$. Man sieht also, daß bei einer $e^{-m|\vec{x}|}$-Dämpfung den Feldquanten eine Masse $m$ zugeordnet werden kann.

Wenn wir nun die Masse für $W^{\pm}, Z^0$ in die Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung als einen *Proca-Masseterm* der Form

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} m\ W^{\mu} W_{\mu} \tag{9.49}$$

einbringen würden, würde dieser bei einer Eichtransformation von $W^{\mu}$ eine *Verletzung des Eichprinzips* verursachen. Also müssen wir anders an die Sache herangehen: Wir werden uns des *Higgs-Mechanismus* bedienen, bei welchem man sich vorstellt, daß die Masse keine statische Quantenzahl ist, sondern durch Wechselwirkung mit einem *äußeren Skalarfeld* dynamisch erzeugt wird.

### 9.7.1 Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Beim *Meißner-Ochsenfeld-Effekt* beobachtet man, daß das Innere eines Supraleiters von einem äußeren $\vec{B}$-Feld *nicht* durchdrungen wird. Es bilden sich lediglich kleine, schmale *Flußschläuche*, der Rest des Supraleiters ist feldfrei. Dieser Zustand kann auf zwei verschiedene Arten erzeugt werden:

1. Man fährt das $\vec{B}$-Feld in einem bereits abgekühlten Supraleiter hoch auf den konstanten Endwert. Beim Hochfahren ist $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$.

2. Man kühlt den Supraleiter in einem konstanten $\vec{B}$-Feld auf seine kritische Tempaeratur ab. Dabei ist die ganze Zeit $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Zur quantitativen Beschreibung des ersten Falls benötigen wir die 4. Maxwell-Gleichung,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_s \qquad \text{für } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{9.50}$$

Beim Hochfahren des $\vec{B}$-Feldes wird im Supraleiter ein Abschrimstrom induziert, der durch die *London'sche Gleichung*

$$\vec{\nabla} \times j_c = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \qquad \text{mit } \lambda^2 := \frac{m_C}{(2e)^2 n_C} \tag{9.51}$$

beschrieben wird, sofern gilt:

- Schwache Wechselwirkung zwischen den Cooper-Paaren (Elektron-Phonon-Wechselwirkung)
- Kohärente Überlappung der Wellenfunktionen der Cooper-Paare über makroskopische Abstände

Eingesetzt in die 4. Maxwell-Gleichung ergibt dies

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} &= 0 \\ \left\{ -\nabla^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right\} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{9.52}$$

Gehen wir nun über zum Vektorpotential $\vec{A}$, so erhalten wir

$$\left\{ -\nabla^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right\} \vec{A} = 0 \tag{9.53}$$

Wir betrachten das Problem an einer unendlich ausgedehnten flachen Grenzfläche in der $x-y$-Ebene, dann ist $\nabla = \partial_z$ und (9.53) wird gelöst durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0 \cdot e^{-z/\lambda} \tag{9.54}$$

d.h. $\lambda$ [$\approx 30nm$] ist die Eindringtiefe des $\vec{B}$-Feldes in den Supraleiter.

Betrachten wir nun den zweiten Fall: Kühlt man den Supraleiter in einem konstanten $\vec{B}$-Feld unter die kritische Temperatur ab, so kann wegen $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ kein Abschirmstrom induziert werden. Da das Verhalten des Supraleiters aber identisch mit dem ersten Fall ist, müssen wir unser Modell neu formulieren:
Die Photonen des äußeren $\vec{B}$-Feldes erhalten durch Wechselwirkung mit den Cooper-Paaren beim Eindringen in den Supraleiter eine Ruhemasse. Das führt zu einer kurzen Reichweite der Photonen im Supraleiter, d.h. das $\vec{B}$-Feld verschwindet im Inneren des Supraleiters.
Zur formalen Bestätigung definieren wir

$$M^2 := \frac{1}{\lambda^2} \tag{9.55}$$

und setzen dies in Gleichung (9.53) ein:

$$\left\{ -\nabla^2 + M^2 \right\} \vec{A} = 0 \tag{9.56}$$

Wir erhalten die zeitunabhängige Klein-Gordon-Gleichung (9.47) für ein Teilchen der Masse $M$, und sie gilt für $\vec{A}$, also die Wellenfunktion der Photonen ! Damit haben wir den Photonen eine (effektive) Ruhemasse gegeben.

### 9.7.2 Der Higgs-Mechanismus im Lagrange-Formalismus

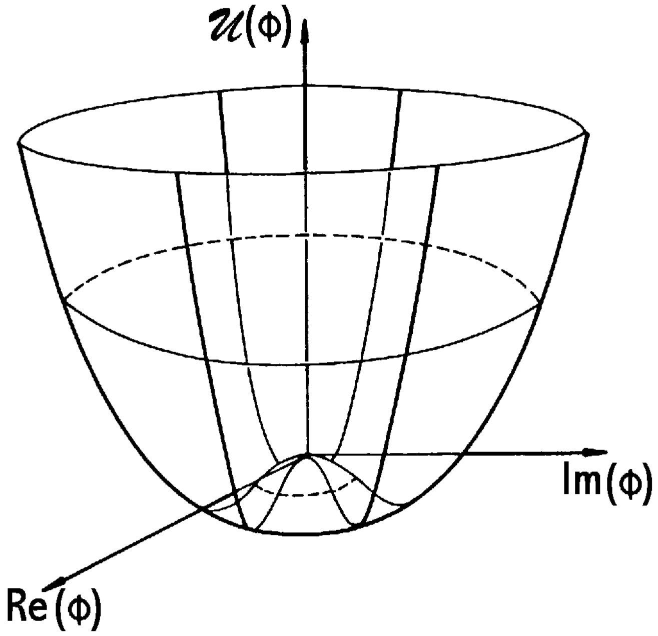
Der Higgs-Mechanismus stellt die relativistische Verallgemeinerung in drei Raumrichtungen dar. Wir wählen als Higgs-Feld ein komplexes skalares Feld $\Phi$, um auch an geladene Teilchen koppeln zu können. Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ eines komplexen skalaren Feldes kann zerlegt werden in

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{T} - \mathcal{U} \\ &= (\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi)^* - \mathcal{U} \end{aligned} \tag{9.57}$$

wobei $\mathcal{U}$ die *Potentialdichte* ist. Für diese wird im Higgs-Mechanismus der folgende Ansatz gemacht:

$$\mathcal{U}(\Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2|\Phi|^2 + \frac{1}{4}\lambda^2|\Phi|^4 \tag{9.58}$$

Für $\mu^2 > 0$ hat diese Potentialdichte die Form eines Mexikanerhutes:




Der Grundzustand dieser Potentialdichte (*Vakuum-Erwartungswert*) ist dann von null verschieden und liegt bei

$$|\Phi_0| = \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda} = \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad \text{mit } v := \frac{\mu}{\lambda} \tag{9.59}$$

Bemerkenswert ist, daß nur der Betrag von $\Phi_0$ eine Rolle spielt. Die Phase $\theta := \arg(\Phi_0)$ ist frei wählbar, so daß der Grundzustand $\infty$-fach entartet ist (Stichwort: *Spontane Symmetriebrechung*):

$$\Phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}\, e^{i\theta} \qquad \text{wobei } \theta \in [0; 2\pi) \tag{9.60}$$

(Der Vakuum-Erwartungswert wird in der Literatur auch oft mit $< \Phi >$ statt $\Phi_0$ bezeichnet.) Das Higgs-Feld $\Phi$ ist komplex und wir können es durch

$$\begin{aligned}\Phi &= \Re\{\Phi\} + i\Im\{\Phi\} \\ &=: \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v \cdot e^{i\theta} + \eta + i\zeta\right]\end{aligned} \tag{9.61}$$

in seinen Grundzustand, eine reelle Komponente $\eta$ und eine imaginäre Komponente $i\zeta$ zerlegen. Die Lagrangedichte schreibt sich nun als

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Higgs} &= (\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi)^* + \frac{1}{2}\mu^2|\Phi|^2 + \frac{1}{4}\lambda^2|\Phi|^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta)^* - \mu^2\ \eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta)^* + const + \mathcal{O}(\eta^3, \zeta^3) \\ &\approx \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta)^* - \mu^2\ \eta^2}_{\mathcal{L}_\eta} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta)^*}_{\mathcal{L}_\zeta}\end{aligned} \tag{9.62}$$

und man erkennt sofort zwei Beiträge:

- die Lagrangedichte des reellen *massiven* Skalarfeldes $\eta$ (Higgs-Boson)

- die Lagrangedichte des reellen *masselosen* Skalarfeldes $\zeta$ (Goldstone-Boson)

### 9.7.3 Die Wechselwirkung zwischen Higgs-Feld und e.m. Feld

Die Lagrangedichte für Higgs-Feld und e.m. Feld lautet

$$\mathcal{L}_{H,em} = (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^* + \frac{1}{2}\mu^2|\Phi|^2 + \frac{1}{4}\lambda^2|\Phi|^4 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{9.63}$$

wobei $D^\mu$ die kovariantisierte Ableitung für das e.m. Feld ist:

$$D^\mu = \partial^\mu + iq\ A^\mu \tag{9.64}$$

Wir setzen für das Higgs-Feld wieder wie folgt an:

$$\Phi =: \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v \cdot e^{i\theta} + \eta + i\zeta\right] \tag{9.65}$$

Wir betrachten nur den $\mathcal{T}$-Teil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{H,em}$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{H,em} &= (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^* \\ &= \frac{1}{2}([\partial_\mu + iq\ A_\mu][v \cdot e^{i\theta} + \eta + i\zeta]) \\ &\quad \cdot ([\partial^\mu - iq\ A^\mu][v \cdot e^{-i\theta} + \eta - i\zeta]) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta) \\ &\quad + \frac{1}{2}q^2 \underbrace{[v(e^{+i\theta} + e^{-i\theta})(\eta + i\zeta) + v^2 + \eta^2 + \zeta^2]}_{\approx v^2} A_\mu A^\mu \\ &\quad + qvA_\mu(\partial^\mu \zeta) + \mathcal{O}(\eta^2, \zeta^2) \\ &\approx \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta) + qvA_\mu(\partial^\mu \zeta) + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\mu\end{aligned} \tag{9.66}$$

Wollen wir nun die gesamte Lagrangedichte unter Vernachlässigung von $\mathcal{O}(\eta^2, \zeta^2)$ hinschreiben, so benötigen wir noch einen Term $-\mu^2\eta^2$ (siehe 9.62) sowie einen Term $+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (siehe 9.63):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,em} \approx & \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta)^* - \mu^2 \ \eta^2 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta)^* + qvA_\mu(\partial^\mu \zeta) + \frac{1}{2}q^2v^2 A_\mu A^\mu}_{\mathcal{L}_{\zeta,A}} \end{aligned} \tag{9.67}$$

Den Term $\mathcal{L}_{\zeta,A}$ können wir noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\zeta,A} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \zeta)(\partial^\mu \zeta)^* + qvA_\mu(\partial^\mu \zeta) + \frac{1}{2}q^2v^2 A_\mu A^\mu \\ &= \frac{1}{2}q^2v^2 \left(A^\mu + \frac{(\partial^\mu \zeta)}{qv}\right)\left(A_\mu + \frac{(\partial_\mu \zeta)}{qv}\right) \\ &=: \frac{1}{2}q^2v^2 {A'}^\mu {A'}_\mu \end{aligned} \tag{9.68}$$

d.h. wir können mit einer Eichtransformation,

$$A^\mu \to {A'}^\mu = A^\mu + \frac{(\partial^\mu \zeta)}{qv} \tag{9.69}$$

und der kompensierenden Phasentransformation

$$\begin{aligned} \Phi \to \Phi' &= e^{-\frac{i}{v}\zeta}\Phi \\ &=: \frac{1}{\sqrt{2}}[v' \cdot e^{i\theta'} + \eta' + i\zeta'] \end{aligned} \tag{9.70}$$

die Invarianz der Lagrangedichte ausnutzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,em} \approx & \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta')(\partial^\mu \eta')^* - \mu^2 \ {\eta'}^2 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}\underbrace{q^2v^2}_{=:m_\gamma^2} {A'}^\mu {A'}_\mu \end{aligned} \tag{9.71}$$

Durch diese Eichtransformation verschwindet also das Goldstone-Boson $\zeta$ und ein Masseterm für das Photon taucht plötzlich auf:

$$m_\gamma = qv \tag{9.72}$$

Die Zahl der Freiheitsgrade bleibt durch die Wechselwirkung des Higgs-Feldes mit dem e.m. Feld allerdings unberührt:

**Ohne Wechselwirkung** $\eta$-Feld, $\zeta$-Feld, 2 transversale Freiheitsgrade für *masselose* Photonen

**Mit Wechselwirkung** $\eta$-Feld, 2 transversale + 1 longitudinales Freiheitsgrad für *massive* Photonen

Diese Diskussion hat Modellcharakter: Sie gilt nur innerhalb eines Supraleiters. Da für Photonen im Vakuum $m_\gamma = 0$ gilt, müssen dort zusätzliche 'Faktoren' ins Spiel kommen. Wir werden es im nächsten Abschnitt zeigen: Benutzt man die Kovariantisierung der elektroschwachen Wechselwirkung verschwindet die Photonenmasse wieder.

### 9.7.4 Die Massen der Eichbosonen $W^{\pm}, Z^0$

Um auf die Massen der Eichbosonen $W^{\pm}, Z^0$ (und auch auf die des Photons im Vakuum) zu kommen, müssen wir das Higgs-Feld $\Phi$ als ein komplexes $SU(2)_L$ -Dublett mit schwacher Hyperladung $Y_w = 1$ ansetzen:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \tag{9.73}$$

Hierin sind $\Phi^+$ und $\Phi^0$ komplexe Felder. Der Vakuum-Erwartungswert wird als

$$< \Phi >= \begin{pmatrix} < \Phi^+ > \\ < \Phi^0 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, v \cdot e^{i\theta} \end{pmatrix} \tag{9.74}$$

angenommen. Es ist $< \Phi^+ >= 0$, da das Vakuum elektrisch neutral sein sollte. In der Nähe des Grundzustandes ist $\Phi$ deshalb näherungsweise

$$\Phi \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \tag{9.75}$$

Es folgt nun die Kovariantisierung der Ableitungen in der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \to D^\mu &= \partial^\mu + i\frac{g'}{2}\, Y_w B^\mu + i\frac{g}{2}\, \vec{\tau} \cdot \vec{W}^\mu \\ &= \partial^\mu + i\frac{g'}{2}\, Y_w B^\mu + i\frac{g}{2}\, \tau^3 W^{3,\mu} \\ &\quad + i\frac{g}{\sqrt{2}}\, \tau^+ W^{-,\mu} + i\frac{g}{\sqrt{2}}\, \tau^- W^{+,\mu} \end{aligned} \tag{9.76}$$

Wir bilden

$$\begin{aligned} D^\mu \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^\mu \Phi^0 \end{pmatrix} + \frac{ig'}{2} B^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} W^{3,\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{ig}{\sqrt{2}} W^{-,\mu} \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{ig}{\sqrt{2}} W^{+,\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^\mu \Phi^0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(g' B^\mu - g W^{3,\mu}) \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} + \frac{ig}{\sqrt{2}} W^{-,\mu} \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.77}$$

und betrachten wieder nur den $\mathcal{T}$-Teil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{Higgs}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{Higgs} &= (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^* \\ &= (\partial_\mu \Phi^0)(\partial^\mu \Phi^{0*}) \\ &\quad + \frac{|\Phi^0|^2}{4}(g' B_\mu - g W_\mu^3)(g' B^\mu - g W^{3,\mu})^* \\ &\quad + \frac{g^2 |\Phi^0|^2}{2}\, W^{+,\mu} W_\mu^- \\ &= (\partial_\mu \Phi^0)(\partial^\mu \Phi^{0*}) \\ &\quad + \frac{1}{4}|\Phi^0|^2 \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3,\mu} \end{pmatrix} \qquad [*1] \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{g^2 |\Phi^0|^2}{2}\, (|W^+|^2 + |W^-|^2) \qquad [*2] \end{aligned} \tag{9.78}$$

Hierbei gingen die Pauli-Matrizen sowie die Quantenzahlen $Y_w = 1$ und $2I_3 = -1$ für das Higgs-Feld $\Phi$ ein. Ferner wurde $(W^+)^* \equiv W^-$ verwendet. Man erhält in Zeile [*2] einen Masseterm für $W^\pm$:

$$m_W^2 = \frac{g^2|\Phi^0|^2}{2} \approx \frac{g^2v^2}{4} \tag{9.79}$$

Der Term in Zeile [*1] kann mittels

$$\begin{pmatrix} B^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \tag{9.80}$$

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}^\dagger U^\dagger \qquad \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3,\mu} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \tag{9.81}$$

umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}|\Phi^0|^2 \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}^\dagger \underbrace{\begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3,\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}|\Phi^0|^2 \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}^\dagger U^\dagger M U \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}|\Phi^0|^2 \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g^2+g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{\equiv m_\gamma^2} & 0 \\ 0 & \underbrace{\frac{g^2+g'^2}{2}|\Phi^0|^2}_{\equiv m_Z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.82}$$

was einem Masseterm für $Z^0$ und das Photon entspricht. Man erhält also für die Massen der Eichbosonen

| | |
|---|---|
| $W^\pm$ | $m_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$ |
| $Z^0$ | $m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2+g'^2)v^2$ |
| Photon | $m_\gamma^2 = 0$ |

Das Verhältnis der Massen von $W^\pm$ und $Z^0$ ist demnach gegeben durch

$$\boxed{\frac{m_W}{m_Z} = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \cos\theta_W} \tag{9.83}$$

### 9.7.5 Die Massen der Fermionen, Yukawa-Kopplung

Sicherlich werden Sie sich nun zwei Fragen stellen:

- "Wenn die Eichbosonen ihre Masse aus der Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld bekommen, gilt dann nicht auch das selbe für die Fermionen?"

- "Verletzt denn der Masseterm der Fermionen nicht auch die Eichinvarianz der Lagrangedichte?"

Die Antwort auf die erste Frage lautet "Ja", die auf die zweite "Nein". Um allerdings auch die Fermion-Massen mit dem Higgs-Feld verknüpfen zu können, bedient man sich der sog. *Yukawa-Kopplung.*

Wir werden uns an dieser Stelle aus zeitlichen Gründen darauf beschränken müssen, den Mechanismus der Yukawa-Kopplung nur kurz vorzustellen, ohne ihn herzuleiten. Der Term, der zur Erzeugung der Masse eines Fermions $f$ in der Lagrangedichte eingesetzt werden muß, lautet:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\tilde{g}_f[\bar{\Psi}_R(\Phi^\dagger \Psi_L)][(\bar{\Psi}_L \Phi)\Psi_R)] \tag{9.84}$$

Dabei sind die Yukawa-Kopplungskonstanten $\tilde{g}_f$ und die Massen der Fermionen $m_f$ über

$$m_f = \tilde{g}_f \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{9.85}$$

mit dem Vakuum-Erwartungswert $v$ des Higgs-Feldes $\Phi$ verknüpft.

## 9.8 Die Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung

Die Lagrangedichte setzt sich aus einem *freien Term* für das Dirac-Feld ohne den Massenterm,

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_f)\Psi = \underbrace{i\bar{\Psi}\gamma_\mu \partial^\mu \Psi}_{=\mathcal{L}_{fom}} - m_f \bar{\Psi}\Psi \tag{9.86}$$

dem *Yukawa-Term* für die Masse jeder Fermionsorte $f$

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\tilde{g}_f[\bar{\Psi}_R(\Phi^\dagger \Psi_L)][(\bar{\Psi}_L \Phi)\Psi_R)] \tag{9.87}$$

einem elektroschwachen *Wechselwirkungsterm* (durch Kovariantisieren der Ableitungen),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{int} &= \bar{\Psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m_f)\Psi - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} F_{i,\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \\
&= \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_f)\Psi - \frac{g'}{2}\bar{\Psi}(\gamma_\mu Y_w B^\mu)\Psi - \frac{g}{2}\bar{\Psi}(\gamma_\mu \vec{\tau}\cdot \vec{W}^\mu)\Psi \\
&\quad - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} F_{i,\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.88}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= -\frac{g'}{2}\bar{\Psi}(\gamma_\mu Y_w B^\mu)\Psi - \frac{g}{2}\bar{\Psi}(\gamma_\mu \vec{\tau}\cdot \vec{W}^\mu)\Psi \\
&\quad - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} F_{i,\mu\nu}F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

sowie dem Term für das Higgs-Feld,

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi)^* + \frac{1}{2}\mu^2|\Phi|^2 - \frac{1}{4}\lambda^2|\Phi|^4 \tag{9.89}$$

zusammen. Die gesamte Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung lautet somit:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{fom} + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{Higgs} \tag{9.90}$$

## 9.9 Übungsaufgaben (Termin 9)

**Aufgabe 9.1**

a) Berechnen Sie $< |\mathcal{M}|^2 >$ unter Verwendung der allgemeinen Kopplung $\gamma^\mu(1+\epsilon\gamma^5)$ für $\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e$.

$$\text{[ Antwort:} \quad \sum_{Spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{g_w}{m_W}\right)^4 ((1-\epsilon^2)^2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)$$
$$+ (1+6\epsilon^2+\epsilon^4)(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)) \quad ]$$

b) Setzen Sie $m_e = m_\mu = 0$ und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt. im CM-System. Bestimmen Sie gleichfalls den totalen Wirkungsquerschnitt.

c) Wenn Sie genaue experimentelle Daten über diese Reaktion hätten, wie würden Sie $\epsilon$ bestimmen?

**Aufgabe 9.2**

Berechnen Sie die Lebensdauer des $\tau$-Leptons und vergleichen Sie sie mit dem experimentellen Ergebnis. (Nehmen Sie an, daß $m_\mu$ gegen $m_\tau$ vernachlässigt werden kann. Stützen die experimentellen Daten diese Näherung?)

**Aufgabe 9.3**

Zeigen Sie, daß im Falle $m \ll E$

$$\gamma^5 u \approx \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & 0 \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & 0 \end{pmatrix} u$$

gilt, worin $u$ ein Teilchen-Bi-Spinor

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m} u_A \end{pmatrix}$$

mit $E > 0$ ist, der die Dirac-Gleichung löst. Zeigen Sie davon ausgehend, daß die Projektionsmatrix

$$\hat{P}_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$$

die Helizitätskomponenten $\mp 1$ von $u$ herausgreift:

$$\underbrace{\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}}_{=\hat{H}}(\hat{P}_{L/R}u) = \mp(\hat{P}_{L/R}u)$$

**Aufgabe 9.4**

Berechnen Sie das Verhältnis der Zerfallsraten von $K^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ und $K^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Die beobachtete Lebensdauer des $K^-$ beträgt $1,2 \cdot 10^{-8}$ s und 64% aller $K^-$-Teilchen zerfallen über den Kanal $\mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Schätzen Sie die Zerfallskonstante $f_K$ ab.

**Aufgabe 9.5**

a) Berechnen Sie die Zerfallsrate für $Z^0 \to f + \bar{f}$, worin $f$ irgendein Fermion ist. Nehmen Sie an, daß $f$ leicht genung ist, so daß seine Masse gegen die des $Z^0$ vernachlässigt werden kann ($m_f \ll m_Z$).

[ Antwort: $\Gamma = \frac{g_z^2\ m_Z}{48\pi}(|c_V^f|^2 + |c_A^f|^2)$ ]

b) Bestimmen Sie, unter der Annahme, daß dies die dominierenden Zerfallsarten sind, das Verzweigungsverhältnis für jede Quark- und Leptonensorte. Vergessen Sie dabei nicht, daß es für jede Quarksorte drei Farben gibt. Nehmen Sie an, daß für die Masse des $t$-Quark $2m_t < m_Z$ sei und so die Näherung aus a) selbst für das $t$-Quark gelte. [ Antwort: Je 3% für $e, \mu, \tau$, je 6% für $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$, je 10% für $u, c, t$ und je 14% für $d, s, b$ ]

c) Berechnen Sie die Lebensdauer des $Z^0$. wie würde sie sich ändern, wenn es eine vierte Generation gäbe? (Beachten Sie, daß uns eine genaue Messung der $Z^0$-Lebensdauer sagen wird, wieviele Quarks und Leptonen es mit Massen $< 45$ GeV geben kann.)

# Kapitel 10

# Quantenchromodynamik

In Anlehnung an die QED wird angenommen, daß die starken Kräfte zwischen den Quarks durch Feldquanten mit Spin 1 vermittelt werden. Der experimentelle Nachweiß der Gluonen durch die Beobachtung von *3-Jet-Ereignissen* im Jahre 1979 war eine bedeutende Stütze für die Theorie der *Quantenchromodynamik.*

## 10.1 Die Forderung nach der Existenz der Farbladung

Das $\Delta^{++}$-Baryon mit Spin $\frac{3}{2}$ besteht aus drei u-Quarks mit je Spin $\frac{1}{2}$. Da die Wellenfunktion total symmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier u-Quarks ist, muß (um die Gültigkeit des Pauli-Prinzips zu wahren) eine neue Quantenzahl gefordert werden: die *Farbladung.*

$$\psi = \psi_{Ort} \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Farbe} \tag{10.1}$$

Da $\psi_{Ort}$ und $\Phi_{Spin}$ symmetrisch sind muß der Term $\chi_{Farbe}$ die Symmetrie der drei u-Quarks brechen:

$$\begin{aligned} \psi_{Farbe} = \frac{1}{\sqrt{6}}(u_R u_G u_B + u_G u_B u_R + u_B u_R u_G \\ - u_R u_B u_G - u_B u_G u_R - u_G u_R u_B) \\ = \frac{1}{\sqrt{6}}\, \epsilon_{ijk} u_i u_j u_k \end{aligned} \tag{10.2}$$

Quarks können also die Farbladung rot, grün oder blau ($RGB$) tragen, Antiquarks dementsprechend antirot, antigrün oder antiblau ($\bar{R}\bar{G}\bar{B}$). Baryonen sind gebundene Zustände von drei Quarks und nach außen immer farbneutral ('weiß'), d.h. sie bilden eine Kombination $RGB$. Mesonen, gebundene Zustaände von zwei Quarks, sind ebenfalls immer farbneutral, d.h. sie kombinieren zu $R\bar{R}$, $G\bar{G}$ oder $B\bar{B}$. Für die Tatsache, daß es *genau drei* verschiedene Arten der Farbladung gibt, sprechen die folgenden experimentellen Befunde:

**$e^+e^- \to$ Hadronen**

Nach dem Quark-Parton-Modell erwartet man für das Verhältnis

$$\frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \propto N_C \cdot N_F \tag{10.3}$$

mit der Anzahl der Arten von Farbladung $N_C$ und der Anzahl an Flavours $N_F$. Die experimentellen Daten ergeben $N_C = 3$.

**Zerfallsmoden des $\tau^-$**

Das $\tau^-$ geht unter Emission eines intermediären $W^-$ in ein $\nu_\tau$ über, das $W^-$ zerfällt in drei gleichgewichteten Ästen in $e^- + \bar{\nu}_e$, in $\mu^- + \bar{\nu}_\mu$ oder in ein Meson $d' + \bar{u}$. Ohne Farbfreiheitsgrad sollte man als Verzeigungsverhältnis $BR(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{1}{3}$ erhalten, bei drei Quarkfarben erwartet man $BR(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{1}{5}$. Der experimentelle Wert ist

$$BR(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e) = 0.1801 \pm 0.0018 \approx \frac{1}{5} \tag{10.4}$$

Wir können also 1/3 mit Sicherheit ausschließen.

**Zerfallsrate des $\pi^0$**

Die Zerfallsrate des $\pi^0$-Meson in zwei Photonen berechnet sich über eine Quark-Antiquark-Schleife und ist abhängig von $N_C^2$. Die vorhergesagte Rate ohne Farbfreiheitsgrad ist $\Gamma = 0,86$ eV, mit drei Quarkfarben $\Gamma = 7,75$ eV. Der Meßwert beträgt

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma + \gamma) = (7,86 \pm 0,54) \text{ eV} \tag{10.5}$$

## 10.2 Gluon-Felder und lokale $SU(3)_C$ -Invarianz

Da Photonen nur einen Typ Ladung (-) und die dazugehörige Antiladung (+) tragen, sind sie elektrisch neutral. Gluonen können nun eine Farbladung und eine Antifarbladung tragen, da diese aber nicht gleich sein müssen, sind Gluonen nicht unbedingt farbneutral.

Da drei Typen Farbladung und drei Typen Antifarbladung existieren müsste es eigentlich neun verschiedene Gluonen geben. Die Kombination Farbe-Antifarbe ergibt ein *Oktett*, das durch eine $SU(3)$-Gruppe beschrieben werden kann und theoretisch ein *Singulett*. Das Singulett könnte durch eine $U(1)$-Gruppe beschrieben werden, was analog zu QED eine *unendliche Reichweite* der starken Wechselwirkung fordern würde. Da dies den experimentellen Beobachtungen widerspricht ist das *Singulett physikalisch verboten.*

Nach den Erfolgen der Eichtheorie lag es nahe, eine Theorie der starken Wechselwirkung zu konstruieren, die auf lokalen Eichtransformationen bezüglich der Gluon-Felder und damit verbundenen Phasentransformationen der Wellenfunktion $\Psi$ beruht. Diese schreiben wir als ein Produkt eines Bi-Spinors $\psi(x^\mu)$ und eines *Farbspinors* $\chi_{Farbe}$

$$\Psi = \psi(x^\mu) \cdot \chi_{Farbe} \tag{10.6}$$

wobei wir

$$\chi_R := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_G := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

definieren. Eine lokale $SU(3)_C$ -Transformation schreiben wir in der Form

$$\Psi' = e^{i\frac{g_s}{2}\ \vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda}}\ \Psi \tag{10.8}$$

mit $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_8)$ und den Gell-Mann-Matrizen $\lambda_k$. Die Invarianz der Dirac-Gleichung ist gewährleistet wenn man acht *Gluonfelder* $G_k^\mu$ durch Kovariantisieren der Ableitung einführt

$$\partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_s}{2}\ \vec{\lambda} \cdot \vec{G}^\mu \tag{10.9}$$

und diese eichtransformiert:

$$G_k^{\mu\prime} = G_k^\mu - \partial^\mu \gamma_k - g_s \sum_{i,j=1}^{8} f_{ijk} \gamma_i G_j^\mu \tag{10.10}$$

Der Term *proportional zur Kopplungskonstante* $g_s$ kommt aus der Nichtvertauschbarkeit der Generatoren der $SU(3)$. In Anlehnung an die QED und unter Berücksichtigung, daß die Generatoren der $SU(3)$ nicht vertauschen definieren wir den *Gluon-Feldstärketensor*

$$F_k^{\mu\nu} := \partial^\mu G_k^\nu - \partial^\nu G_k^\mu - g_s \sum_{i,j=1}^{8} f_{ijk} G_i^\mu G_j^\nu \tag{10.11}$$

## 10.3 Die Lagrangedichte der QCD

Anders als in der QED koppeln in der QCD die Gluonen nicht nur an Quarks sondern auch an andere Gluonen. Die Lagrangedichte der QCD setzt sich dem entsprechend aus einem *freien Term* für das Dirac-Feld

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_q)\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\gamma_\mu \partial^\mu \Psi - m_q \bar{\Psi}\Psi \end{aligned} \tag{10.12}$$

einem *Quark-Gluon-Wechselwirkungsterm* (durch Kovariantisieren der Ableitung)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{int}^q &= \bar{\Psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m_q)\Psi - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} F_{k,\mu\nu} F_k^{\mu\nu} \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_q)\Psi - \frac{g_s}{2}\ \bar{\Psi}(\gamma_\mu\ \vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu)\Psi - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} F_{k,\mu\nu} F_k^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.13}$$

$$\mathcal{L}_{int}^q = -\frac{g_s}{2}\ \bar{\Psi}(\gamma_\mu\ \vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu)\Psi - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} F_{k,\mu\nu} F_k^{\mu\nu}$$

und aus einem *Gluon-Gluon-Wechselwirkungsterm*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^G_{int} = & \frac{g_s}{2}\ f_{ijk}(\partial^\mu G_i^\nu - \partial^\nu G_i^\mu)G_{j\ \mu}G_{k\ \nu} \\ & - \frac{g_s^2}{4}\ f_{ijk}f_{ilm}G_j^\mu G_k^\nu G_{l\ \mu}G_{m\ \nu}\end{aligned} \tag{10.14}$$

bestehend aus einem Beitrag für einen *3g-Vertex* und einem Beitrag für den *4g-Vertex* zusammen. Die gesamte Lagrangedichte für eine Quarksorte '$q$' lautet dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_f + \mathcal{L}^q_{int} + \mathcal{L}^G_{int} \\ &= i\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - m_q\bar{\Psi}\Psi \\ &\quad - \frac{g_s}{2}\ \bar{\Psi}(\gamma_\mu\ \vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu)\Psi - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} F_{k,\mu\nu}F_k^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{g_s}{2}\ f_{ijk}(\partial^\mu G_i^\nu - \partial^\nu G_i^\mu)G_{j\ \mu}G_{k\ \nu} \\ &\quad - \frac{g_s^2}{4}\ f_{ijk}f_{ilm}G_j^\mu G_k^\nu G_{l\ \mu}G_{m\ \nu}\end{aligned} \tag{10.15}$$

Da die Gluonen als *masselos* betrachtet werden enthält die Lagrangedichte *keinen* Proca-Masseterm.

## 10.4 Quark-Gluon-Kopplung

Die Kopplung von Quarks und Gluonen wird wie gesagt durch Kovariantisieren der Ableitung in der Lagrangedichte oder der Dirac-Gleichung der freien Quarks ermittelt, d.h.

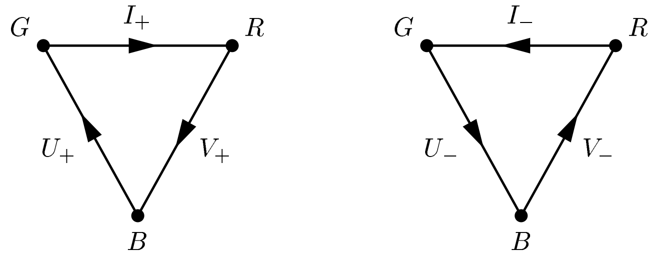
$$\begin{aligned}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\Psi &= 0 \\ (i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\Psi &= -i^2\frac{g_s}{2}(\gamma_\mu\ \vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu)\Psi\end{aligned}$$

wir erhalten also

$$\boxed{(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi\chi_{Farbe} = +\frac{g_s}{2}\sum_{k=1}^{8}(\gamma_\mu G_k^\mu)\psi\ (\lambda_k\chi_{Farbe})} \tag{10.16}$$

Um Vertizes zu betrachten, bei denen sich die Farbe von Quarks unter Emission eines Gluons ändert, ist es sinnvoll die sogenannten *Schiebeoperatoren der QCD* zu definieren, die solche *Farbübergänge* erzeugen:

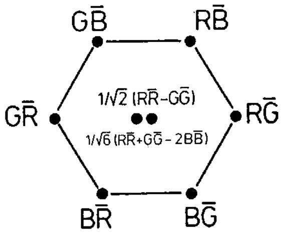
| Schiebeop. | Farbübergang | Gluon | Gluon-Feld |
|---|---|---|---|
| $I_+ := \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2)$ | $G \to R$ | $R\bar{G}$ | $X^\mu = (R\bar{G})^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1^\mu + iG_2^\mu)$ |
| $V_+ := \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5)$ | $R \to B$ | $B\bar{R}$ | $Y^\mu = (B\bar{R})^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(G_4^\mu - iG_5^\mu)$ |
| $U_+ := \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)$ | $B \to G$ | $G\bar{B}$ | $Z^\mu = (G\bar{B})^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(G_6^\mu + iG_7^\mu)$ |
| $I_- := \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2)$ | $R \to G$ | $G\bar{R}$ | $\bar{X}^\mu = (G\bar{R})^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1^\mu - iG_2^\mu)$ |
| $V_- := \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)$ | $B \to R$ | $R\bar{B}$ | $\bar{Y}^\mu = (R\bar{B})^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(G_4^\mu + iG_5^\mu)$ |
| $U_- := \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7)$ | $G \to B$ | $B\bar{G}$ | $\bar{Z}^\mu = (B\bar{G})^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}(G_6^\mu - iG_7^\mu)$ |




Ferner gibt es zwei Operatoren, die einen *farberhaltenden Übergang* vermitteln:

| Op. | wirkt auf | Gluon | Gluon-Feld |
|---|---|---|---|
| $\lambda_3$ | $R\bar{R}G\bar{G}$ | $R\bar{R}-G\bar{G}$ | $A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R}-G\bar{G})^\mu = G_3^\mu$ |
| $\lambda_8$ | alle | $R\bar{R}+G\bar{G}-2B\bar{B}$ | $B^\mu = \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R}+G\bar{G}-2B\bar{B})^\mu = G_8^\mu$ |

Die acht Gluonen können im $SU(3)_C$ -Oktett




angeordnet werden. Unter Verwendung dieser acht Operatoren kann der Ausdruck $\vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu = \sum\limits_{k=1}^{8}\lambda_k G_k^\mu$ wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}\cdot\vec{G}^\mu &= \sum_{k=1}^{8}\lambda_k G_k^\mu \\ &\equiv \sqrt{2}\,I_+X^\mu + \sqrt{2}\,V_+Y^\mu + \sqrt{2}\,U_+Z^\mu \\ &\quad + \sqrt{2}\,I_-\bar{X}^\mu + \sqrt{2}\,V_-\bar{Y}^\mu + \sqrt{2}\,U_-\bar{Z}^\mu \\ &\quad + \lambda_3 A^\mu + \lambda_8 B^\mu\end{aligned} \tag{10.17}$$

Die Eigenwerte der Operatoren $\frac{1}{2}\lambda_3$ und $\frac{1}{2}\lambda_8$ bezeichnet man als *Isospinfarbladung* $Q_A$ und *Hyperladung* $Q_B$:

$$\frac{1}{2}\lambda_3\ \Psi = Q_A\ \Psi \qquad Q_A\text{: Isospinfarbladung} \tag{10.18}$$

$$\frac{1}{2}\lambda_8\ \Psi = Q_B\ \Psi \qquad Q_B\text{: Hyperladung} \tag{10.19}$$

Das bedeutet für Quarks und Gluonen:

| | | $Q_A$ | $Q_B$ |
|---|---|---|---|
| Quark | R | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ |
| | G | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ |
| | B | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| Gluon | X | $-1$ | 0 |
| | Y | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | Z | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

## 10.5 Die Feynman-Regeln der QCD

Die *starke Kopplungskonstante* ist analog zur QED definiert als

$$g_s := \sqrt{4\pi\alpha_s} \tag{10.20}$$

Wie das Photon so sind auch die acht Gluonen masselose Spin-1-Teilchen und werden durch einen *Polarisationsvektor* $\epsilon^\mu$ dargestellt, der senkrecht zum Impuls $p^\mu$ des Gluons steht:

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0 \tag{10.21}$$

Das Matrixelement $\mathcal{M}$ in Baumdiagrammen wird nach folgenden Regeln gebildet:

1. **Notation, Externe Linien:** Man nummeriere die Viererimpulse der *ein-* und *auslaufenden* Linien mit $p_1, \ldots, p_n$, die Viererimpulse der *inneren* Linien mit $q_1, q_2, \ldots$, und zeichne an jede Linie einen *Pfeil*, um die positive Richtung im Auge zu behalten. Für eine externe Linie mit Impuls $p$ bzw. Farbspinor $\chi$ schreibe man

| | | |
|---|---|---|
| Quark | einlaufend | $u(p)\ \chi$ |
| | auslaufend | $\bar{u}(p)\ \chi^\dagger$ |
| Antiquark | einlaufend | $\bar{v}(p)\ \chi^\dagger$ |
| | auslaufend | $v(p)\ \chi$ |
| Gluon | einlaufend | $\epsilon_\mu(p)\lambda^k$ |
| | auslaufend | $\epsilon^*_\mu(p)\lambda^{k*}$ |

2. **Kopplungskonstante:** Man schreibe für *jeden Vertex* einen Faktor

| | |
|---|---|
| Quark-Gluon-Vertex | $\frac{ig_s}{2}\lambda^k\gamma^\mu$ |
| 3g-Vertex | $-ig_s f^{klm}[g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2-k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3-k_1)_\nu]$ |
| 4g-Vertex | $-g_s^2[f^{klo}f^{mno}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f^{kmo}f^{lno}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f^{kno}f^{lmo}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]$ |

3. **Propagator:** Man schreibe für *jede innere Linie* einen Faktor

| | |
|---|---|
| Quark/Antiquark | $i\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2}$ |
| Gluon | $-i\frac{g_{\mu\nu}\delta^{kl}}{q^2}$ |

4. **Energie- und Impulserhaltung:** Für *jeden Vertex* schreibe man eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4\cdot\delta^4(k_1+k_2+k_3)$, worin die $k_i$ die Viererimpulse sind, die in den Vertex ein- oder aus ihm auslaufen. Einlaufende Linien werden positiv gezählt, auslaufende negativ.

5. **Integration über innere Impulse:** Für jede innere Linie schreibe man einen Faktor $\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$ und integriere über alle inneren Viererimpulse.

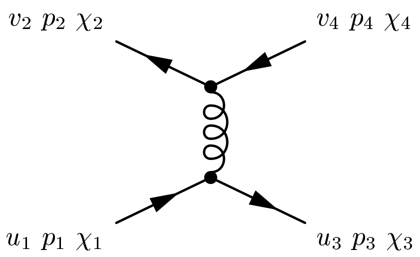
6. **Streichen der $\delta$-Funktion:** Das Ergebnis wird eine $\delta$-Funktion der Form $(2\pi)^4 \cdot \delta(p_1 + \cdots - p_n)$ enthalten. Nach dem Streichen dieses Faktors bleibt $-i\mathcal{M}$ übrig.

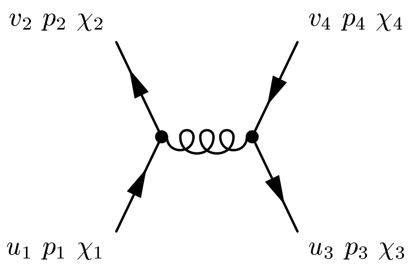
7. **Antisymmetrisierung bei Kombination:** Einführung eines Minuszeichens zwischen zwei Diagrammen, die sich lediglich durch den *Austausch zweier* ein- oder auslaufender Quarks oder Antiquarks bzw. durch die *Ersetzung eines* Quarks durch ein Antiquark oder v.v. unterscheiden.

---

*Beispiel:* **Quark-Antiquark-Streuung**

Zu diesem Prozeß tragen zwei Diagramme bei:




Für das das Matrixelement $\mathcal{M}_1$ aus Diagramm a) erhalten wir nach Regel 1. u. 2.

$$\begin{aligned}
&\frac{ig_s}{2}(\bar{u}_3\chi_3^\dagger\ \lambda^k\gamma^\mu\ u_1\chi_1)\frac{ig_s}{2}(\bar{v}_2\chi_2^\dagger\ \lambda^l\gamma^\nu\ v_4\chi_4) \\
= &-g_s^2(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma^\nu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^l\chi_4)
\end{aligned}$$

mit $u_i = u(p_i)$ und $v_i = v(p_i)$. Nach Regel 3. benötigen wir einen Faktor $-\frac{g_{\mu\nu}\delta^{kl}}{q^2}$ der $k = l$ bewirkt. Ferner wird durch $g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu$

$$\frac{ig_s^2}{q^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_4)$$

Regel 4. und 5. ergeben

$$\begin{aligned}
&\int \frac{ig_s^2}{q^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_4) \\
&\cdot(2\pi)^4\delta(p_1 - p_3 - q)\cdot(2\pi)^4\delta(p_4 - p_2 + q)\cdot\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
= &\frac{ig_s^2}{(p_1 - p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_4) \\
&\cdot(2\pi)^4\delta(p_1 + p_4 - p_2 - p_3)
\end{aligned}$$

Regel 6. besagt, daß nach dem Streichen des Faktors $(2\pi)^4\delta(\dots)$ der Ausdruck $-i\mathcal{M}_1$ übrigbleibt. Es folgt

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{(p_1-p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_4) \tag{10.22}$$

Das Diagramm b) tritt *nur* dann auf, wenn Quark und Antiquark *gleichen Flavour* tragen, da sie sich sonst nicht annihilieren können. Dann erhält man für das Matrixelement $\mathcal{M}_2$

$$\mathcal{M}_2 = +\frac{g_s^2}{(p_1+p_2)^2}(\bar{v}_2\gamma^\mu\ u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_4) \tag{10.23}$$

wobei das unterschiedliche Vorzeichen sich aus Regel 7. ergibt. *In allen anderen Fällen* ist $\mathcal{M}_2 \equiv 0$.

Das Gesamtmatrixelement für gleichen Flavor bildet sich zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2\\ &= -\frac{g_s^2}{(p_1-p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_4)\\ &\quad+\frac{g_s^2}{(p_1+p_2)^2}(\bar{v}_2\gamma^\mu\ u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\ v_4)\cdot\frac{1}{4}(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_4)\end{aligned} \tag{10.24}$$

Wir wollen noch kurz den Spezialfall betrachten, daß Quark und Antiquark im Ausgangs- und Endzustand jeweils entgegengesetzte Farbe besizten, d.h. $\chi_1 = -\chi_2 = \chi_i$ und $\chi_3 = -\chi_4 = \chi_f$. In diesem Fall vereinfacht sich das Gesamtmatrixelement zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = &\left[-\frac{g_s^2}{(p_1-p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\ u_1)(\bar{v}_2\gamma_\mu\ v_4) + \frac{g_s^2}{(p_1+p_2)^2}(\bar{v}_2\gamma^\mu\ u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\ v_4)\right]\\ &\cdot\frac{1}{4}(\chi_f^\dagger\ \lambda^k\chi_i)(\chi_i^\dagger\ \lambda^k\chi_f)\end{aligned} \tag{10.25}$$

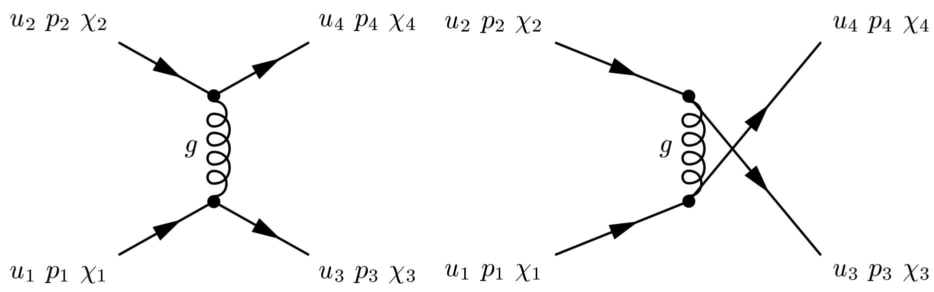
und ist bis auf den Faktor $(\chi_f^\dagger\ \lambda^k\chi_i)(\chi_i^\dagger\ \lambda^k\chi_f)$ identisch mit der für die Elektron-Positron-Streuung.

---

---

*Beispiel:* **Quark-Quark-Streuung**

Die Diagramme, die zu diesem Prozeß beitragen sind:



Für das das Matrixelement $\mathcal{M}_1$ aus Diagramm a) erhalten wir nach den Feynman-Regeln

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g_s^2}{(p_1 - p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\, u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu\, u_2) \cdot \frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\, \lambda^k \chi_1)(\chi_4^\dagger\, \lambda^k \chi_2) \tag{10.26}$$

Das Diagramm b) tritt *nur* dann auf, wenn die beiden Quarks *gleichen Flavour* tragen, da sie sonst unterscheidbar sind. Dann erhält man für das Matrixelement $\mathcal{M}_2$

$$\mathcal{M}_2 = +\frac{g_s^2}{(p_1 - p_4)^2}(\bar{u}_4\gamma^\mu\, u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\, u_2) \cdot \frac{1}{4}(\chi_4^\dagger\, \lambda^k \chi_1)(\chi_3^\dagger\, \lambda^k \chi_2) \tag{10.27}$$

wobei das unterschiedliche Vorzeichen sich wiederum aus Regel 7. ergibt. *In allen anderen Fällen* ist $\mathcal{M}_2 \equiv 0$.

Das Gesamtmatrixelement für gleichen Flavor bildet sich zu

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \\ &= -\frac{g_s^2}{(p_1 - p_3)^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu\, u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu\, u_2) \cdot \frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\, \lambda^k \chi_1)(\chi_4^\dagger\, \lambda^k \chi_2) \\ &\quad + \frac{g_s^2}{(p_1 - p_4)^2}(\bar{u}_4\gamma^\mu\, u_1)(\bar{u}_3\gamma_\mu\, u_2) \cdot \frac{1}{4}(\chi_4^\dagger\, \lambda^k \chi_1)(\chi_3^\dagger\, \lambda^k \chi_2)\end{aligned} \tag{10.28}$$

---

## 10.6 Stabilität hadronischer Systeme

Baryonen und Mesonen sind sind *Farbsinguletts*. Warum sind diese gebundenen Zustände stabil ?

Zur qualitativen Beantwortung dieser Frage soll gezeigt werden, daß gerade diese Systeme eine verhältnismäßig große negative potentielle Energie besitzen. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß das Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}$ für Quark-Antiquark-Streuung genau daselbe ist wie das der Elektron-Positron-Streuung, außer daß $g_e$ durch $g_s$ ersetzt ist und wir einen zusätzlichen *Colour-Factor* der Form

$$f_c := \frac{1}{4}(\chi_a^\dagger \lambda^k \chi_b) \cdot (\chi_c^\dagger \lambda^k \chi_d) \tag{10.29}$$

berücksichtigen müssen. Wir können schlußfolgern, daß für den Bereich *kleiner Abstände* das *Farb-Potential* dem Coulomb-Potential ähnlich sieht:

$$V(r) = \frac{C_F \cdot \alpha_s}{r} \qquad \text{für kleine } r \tag{10.30}$$

Hierbei ist $C_F$ definiert als

$$C_F := 2 \cdot f_c \cdot \begin{cases} (-1) & \text{für } q\bar{q} \\ (+1) & \text{für } qq \end{cases} \tag{10.31}$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß das Farb-Potential noch einen weiteren Term enthält, der in der Näherung für kleine Abstände allerdings nur einen vernachlässigbaren Beitrag liefert:

$$\boxed{V(r) = \frac{C_F \cdot \alpha_s}{r} + \sigma r} \tag{10.32}$$

Dieser Term trägt dem *Confinement* Rechnung und enthält die *String-Tension* $\sigma \approx 0,9$ GeV/fm.

Wir werden im Anschluß die Farbfaktoren $f_c$ für ausgewählte Beispiele berechnen, um ein Maß für die potentielle Energie dieser Systeme zu erhalten.

---

*Beispiel:* **Quark und Antiquark gleicher Farbe**

Wir gehen von einem $R\bar{R}$ Paar im Ausgangszustand aus, also $\chi_i = (1,0,0)$. Es gibt drei mögliche Austausch-Gluonen $(R\bar{R})$, $(R\bar{G})$ und $(R\bar{B})$, die im Endzustand ein $R\bar{R}$, $G\bar{G}$ oder ein $B\bar{B}$ Paar hinterlassen, d.h. $\chi_{f1} = (1,0,0)$, $\chi_{f2} = (0,1,0)$ und $\chi_{f3} = (0,0,1)$.

$$\begin{aligned} f_c &= f_c^{R\bar{R}\to R\bar{R}} + f_c^{R\bar{R}\to G\bar{G}} + f_c^{R\bar{R}\to B\bar{B}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{8}\left[\chi_{fm}^{\dagger}\lambda^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[(1,0,0)\lambda^k\chi_{fm}\right] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{8}(\lambda^k)_{1m}(\lambda^k)_{m1} \end{aligned} \tag{10.33}$$

Nach Einsetzen der Gell-Mann-Matrizen $\lambda^k$ erhält man für den Colour-Factor

$$\boxed{f_c = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C_F = -\frac{8}{3}} \tag{10.34}$$

also ein *anziehendes* Potential.

---

*Beispiel:* **Quark und Antiquark unterschiedlicher Farbe**

Wir betrachten ein Paar *unterschiedlicher Flavors*, d.h. $\mathcal{M}_2 \equiv 0$ so daß wir nur den Colour-Factor von $\mathcal{M}_1$ untersuchen müssen. Wir gehen im Ausgangszustand von einem $R\bar{G}$ Paar aus, also $\chi_1 = (1,0,0) = \chi_R$ und $\chi_2 = (0,-1,0) = \chi_{\bar{G}}$. Die einzig möglichen Austauschgluonen sind $\lambda^3$ und $\lambda^8$. Demnach ist der Endzustand ebenfalls $R\bar{G}$, also $\chi_3 = \chi_R$ und $\chi_4 = \chi_{\bar{G}}$. Der Colour-Faktor des Matrixelements

$\mathcal{M}_1$ in Gleichung (10.24) wird zu

$$\begin{aligned} f_c^1 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_2^\dagger\ \lambda^k\chi_4) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}(\chi_R^\dagger\ \lambda^k\chi_R)(\chi_{\bar{G}}^\dagger\ \lambda^k\chi_{\bar{G}}) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\left[(1,0,0)\ \lambda^k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\left[(0,-1,0)\ \lambda^k\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}(\lambda^k)_{11}(\lambda^k)_{22} \\ &= \frac{1}{4}(\lambda^3)_{11}(\lambda^3)_{22}+(\lambda^8)_{11}(\lambda^8)_{22} = \frac{1}{4}(-1+\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6} \end{aligned} \tag{10.35}$$

Da dies der einzige Beitrag ist folgt

$$\boxed{f_c = -\frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad C_F = +\frac{1}{3}} \tag{10.36}$$

und es liegt ein *abstoßendes* Potential vor.

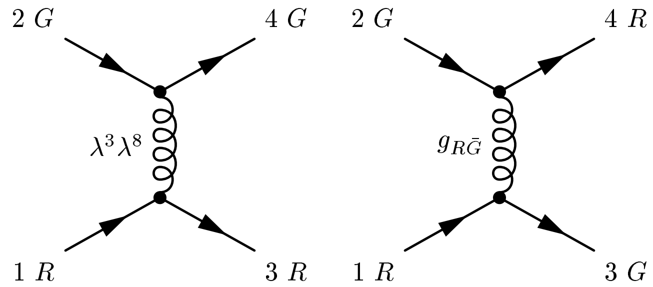
---

*Beispiel:* **Zwei Quarks unterschiedlicher Farbe**

Wir betrachten zwei Quarks unterschiedlichen Flavors. Der eingehende Colour-Factor aus Gleichung (10.28) lautet

$$f_c^1 = \frac{1}{4}(\chi_3^\dagger\ \lambda^k\chi_1)(\chi_4^\dagger\ \lambda^k\chi_2) \tag{10.37}$$

Wir legen nun fest, daß die Quarks im Ausgangszustand $R$ und $G$ sind. Die Quarks im Endzustand sind ebenfalls $R$ und $G$, allerdings wissen wir nicht a priori, ob die Quarks ihre Farbe über das Gluon $(R\bar{G})$ getauscht haben oder mittels $\lambda^3$ oder $\lambda^8$ eine farberhaltende Wechselwirkung durchgeführt haben:




Wir können nun *symmetrische* oder *antisymmetrische* Kombinationen betrachten.

**a) symmetrisch** Der Colour-Factor wird zu

$$
\begin{aligned}
f_c^1 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1,0,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(0,1,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \\
&+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(0,1,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1,0,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\left(\lambda_{11}^k\lambda_{22}^k+\lambda_{21}^k\lambda_{12}^k\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\lambda_{11}^3\lambda_{22}^3+\lambda_{11}^8\lambda_{22}^8+\lambda_{12}^1\lambda_{21}^1+\lambda_{12}^2\lambda_{21}^2\right) \\
&= \frac{1}{8}(-1+\frac{1}{3}+1+1)=+\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$\boxed{f_c=+\frac{1}{6}\qquad\Leftrightarrow\qquad C_F=+\frac{1}{3}} \tag{10.38}$$

und es liegt ein *abstoßendes* Potential vor. Die Kombinationen $\frac{1}{\sqrt{2}}(RG+GR)$ , $\frac{1}{\sqrt{2}}(GB+BG)$ , $\frac{1}{\sqrt{2}}(BR+RB)$ sowie $RR$ , $GG$ , $BB$ (Sextett) sind alle symmetrisch und liefern das selbe Resultat.

**b) antisymmetrisch** Der Colour-Factor wird zu

$$
\begin{aligned}
f_c^1 &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1,0,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(0,1,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \\
&-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(0,1,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1,0,0)\;\lambda^k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\left(\lambda_{11}^k\lambda_{22}^k-\lambda_{21}^k\lambda_{12}^k\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\lambda_{11}^3\lambda_{22}^3+\lambda_{11}^8\lambda_{22}^8-\lambda_{12}^1\lambda_{21}^1-\lambda_{12}^2\lambda_{21}^2\right) \\
&= \frac{1}{8}(-1+\frac{1}{3}-1-1)=-\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$\boxed{f_c=-\frac{1}{3}\qquad\Leftrightarrow\qquad C_F=-\frac{2}{3}} \tag{10.39}$$

und es liegt ein *anziehendes* Potential vor. Die Kombinationen $\frac{1}{\sqrt{2}}(RG-GR)$ , $\frac{1}{\sqrt{2}}(GB-BG)$ , $\frac{1}{\sqrt{2}}(BR-RB)$ (Triplett) sind alle antisymmetrisch und liefern das selbe Resultat.

---

**Zusammenfassung der Ergebnisse**

Nun die Zusammenfassung der Ergebnisse sowie ergänzende Beispiele für $C_F$:

| | Konfiguration | $SU(3)_C$ -Multiplett | $C_F$ |
|---|---|---|---|
| $q\bar{q}$ | Quark + Antiquark gl. Farbe | Singulett | $-\frac{8}{3}$ |
| | Quark + Antiquark unt. Farbe | Oktett | $+\frac{1}{3}$ |
| $qq$ | 2 Quarks unt. Farbe | Triplett | $-\frac{4}{3}$ |
| | 2 Quarks unt. Farbe | Sextett | $+\frac{1}{3}$ |
| | oder 2 Quarks gl. Farbe | | |
| $qqq$ | | Singulett | $-4$ |
| | | Oktett | $-1$ |
| | | Dekett | $+2$ |
| $qqqq$ | | Triplett | $-4$ |

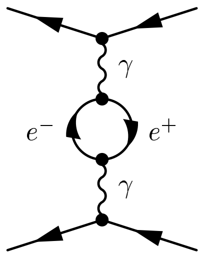
# Kapitel 11

# Standardmodell und Supersymmetrie

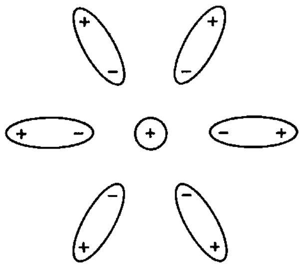
## 11.1 Effektive Ladungen, Asymptotische Freiheit und Confinement

**Effektive Ladungen in der QED**

Aus den von einer punktförmigen, elektrischen Ladung $q_0$ emittierten Photonen können im Rahmen der Heisenberg'schen Unschärferelation vituelle $e^-e^+$-Paare gebildet werden:




Eine punktförmige, elektrische Ladung erzeugt also immer eine Wolke virtueller $e^-e^+$-Paare um sich herum (*Vakuum-Polarisation*),



die die "nackte" Ladung $q_0$ abschirmen. Die von einer Ladungssonde gemessene Ladung ist also eine *effektive Ladung*, die vom Abstand $r$ abhängt und immer kleiner als die tatsächliche Ladung ist:

$$q^{eff} = q^{eff}(r) < q_0 \tag{11.1}$$

Damit würde das Potential $V(r)$ zu

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} q_0^{eff}(r) \cdot q_P^{eff}(r) \tag{11.2}$$

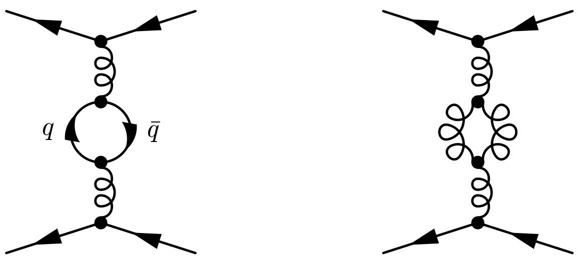
Man kann diesen Effekt formal natürlich auch auf die Kopplungskonstante $\alpha$ überwälzen und behaupten, daß diese vom Abstand $r$ abhängt und die Ladungen unverändert lassen:

$$\boxed{V(r) = \frac{\alpha(r)}{r} q_0 \cdot q_P} \tag{11.3}$$

Anzumerken wäre noch, daß uns etwas ganz ähnliches bereits in der Atomphysik über den Weg gelaufen ist: Der Lamb-Shift. Dort wird die Kernladung u.a. durch die inneren Hüllenelektronen abgeschirmt.

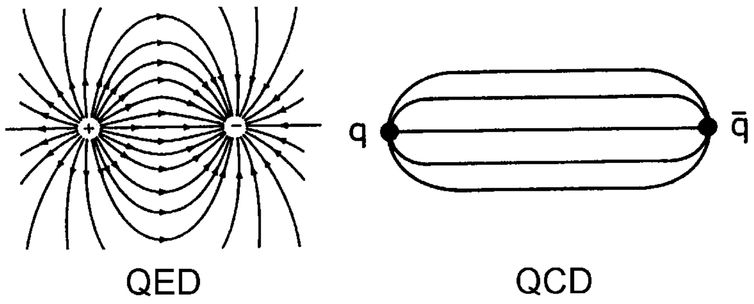
**Anwendung auf die QCD**

Genau wie in der QED ist auch in der QCD $\alpha_s = \alpha_s(r)$. Denn auch aus den von einer punktförmigen Farbladung emittierten Gluonen können im Rahmen der Heisenberg'schen Unschärferelation vituelle $q\bar{q}$ gebildet werden. Aber anders als bei der QED können hier aufgrund der Wechselwirkung der Gluonen untereinander auch virtuelle Gluonen-Paare gebildet werden:




a) Screening b) Antiscreening

Die Selbstwechselwirkung der Gluonen hat auch zur Folge, daß der Feldverlauf der QCD zu schmalen *Strings* von ca. 1 fm Durchmesser mit quasi parallelen Feldlinien zusammenschrumpft:



Aus der Elektrostatik wissen wir, daß die parallelen Feldlinien eines Plattenkondensators ein Potential der Form $V(d) = |\vec{E}| \cdot d$ bewirken. Im Potential der QCD fügen wir deswegen einen Zusatz-Term der Form $+\sigma r$ ein,

$$\boxed{V(r) = \frac{C_F \cdot \alpha_s(r)}{r} + \sigma r} \tag{11.4}$$

wobei $\sigma \approx 0,9$ GeV/fm $\approx 160$ N die sog. *String-Tension* ist.

#### Asymptotische Freiheit und Confinement

Man kann durch eine einfache Überlegung einen Zusammenhang zwischen dem Abstand $r$ der Partner einer Reaktion und dem Impulsübertrag $Q^2 := \vec{q}^{\ 2}$ manifestieren: "Je größer der Impulsübertrag bei einer Reaktion ist, desto näher müssen sich wohl die Reaktionspartner gekommen sein."
Wie der Zusammenhang zwischen $r$ und $Q^2$ aussieht sei uns an dieser Stelle egal. Wichtig ist nur, *daß* einer besteht, denn so können die Kopplungskonstanten in Abhängigkeit von $Q^2$ statt $r$ ausgedrückt werden:

$$\alpha = \alpha(r) = \alpha(Q^2) \tag{11.5}$$

(was uns in der Teilchenphysik wesentlich "leichter fällt")

Unter *asymptotischer Freiheit* versteht man das Verschwinden der Kopplung für große Impulsüberträge:

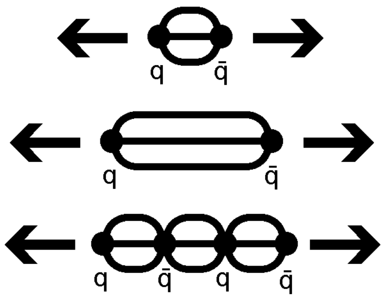
$$\lim_{Q^2 \to \infty} \alpha_s(Q^2) = 0 \tag{11.6}$$

Das bedeutet, daß sich die Quarks im Falle großer $Q^2$ wie nahezu freie Teilchen bewegen.
Asymptotische Freiheit tritt nur bei nicht-abel'schen Eichtheorien auf, also nicht bei der QED.

Mit *Confinement* bezeichnet man die Einschlußeigenschaft von Quarks in Hadronen, welche -wie wir gleich illustrieren werden- vom Term $+\sigma r$ in der Potentialgleichung herrührt: Vergrößert man den Abstand eines $q\bar{q}$-Paares, so kann das Potential $V(r)$ durch

$$V(r) \approx \sigma r \qquad \text{für große r} \tag{11.7}$$

angenähert werden. Ist der Abstand nun gerade so groß, daß die potentielle Energie die doppelte Quarkmasse erreicht, reißt der String auf und es wird ein neues $q\bar{q}$-Paar gebildet (*Fragmentation* oder *Hadronisation*):



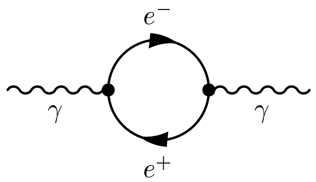

$$\begin{aligned} V(r) &= 2m_q c^2 \\ \sigma r &= 2m_q c^2 \\ r &= \frac{2m_q c^2}{\sigma} \end{aligned} \tag{11.8}$$

Das ist bei einem Abstand von $r \approx 1fm$ der Fall. (Analogie: Zerreißen eines Gummibandes.) Da das selbe innerhalb von Baryonen geschieht, kann man nie ein einzelnes Quark bzw. Antiquark separieren. Sie sind immer in Mesonen oder Baryonen eingeschlossen.

Das Confinement funktioniert nur, wenn die Anzahl Quakrsorten $N_f < 16$ ist.

## 11.2 Renormierung und laufende Kopplungskonstanten

Die Berechnung der $\alpha(Q^2)$-Abhängigkeit erfolgt über sog. Schleifendiagramme:




Der wesentliche Unterschied zu den bisher behandelten *Baum-Diagrammen* besteht darin, daß über alle möglichen Impulse in der Schleife integriert werden muß. Dabei treten *komplizierte, divergierende Integrale* auf.

In der Theorie der *Regularisierung und Renormierung* wird gezeigt, daß das Einführen einer oberen Integrationsgrenze $|p^\mu| = \lambda$ gleichbedeutend damit ist, im Graphen niedrigster Ordnung die "nackte Ladung" der Fermionen $e$ durch eine *renormierte* Ladung $e_R$ zu ersetzen und die Schleifendiagramme wegzulassen:

$$e_R = \sqrt{Z_3} \cdot e \tag{11.9}$$

Alternativ dazu kann man statt der Ladung auch die Kopplungskonstante renormieren:

$$\alpha_R = Z_3 \cdot \alpha \tag{11.10}$$

In der Näherung für $Q^2 \to 0$ ist $Z_3$

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\lambda^2}{m_e^2} \tag{11.11}$$

und für $Q^2 \to \infty$ gilt

$$Z_3 = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m_e^2} \tag{11.12}$$

Damit ist die Kopplungskonstante $\alpha(Q^2)$ bei *hohen* Impulsüberträgen

$$\alpha(Q^2) = \left(1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}\right) \alpha \tag{11.13}$$

wobei $\alpha \approx \frac{1}{137}$ (aus Compton-Streuung) und $Q_0 = m_e$ ist. Die Summation über alle Ordnungen ergibt

$$\boxed{\alpha(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}}} \tag{11.14}$$

was bei hohen Energien um die Beiträge der $\mu^+\mu^-$- und $\tau^+\tau^-$-Paare ergänzt werden muß.

In der QCD gilt für die *$q\bar{q}$-Schleifen*

$$\alpha_s^{q\bar{q}}(Q^2) = \left(1 + N_f \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{6\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}\right) \alpha_s(Q_0^2) \tag{11.15}$$

mit der Anzahl an Quarksorten $N_f$ (zur Zeit geht man von $N_f = 6$ aus). Die *Gluon-Schleifen* ergeben

$$\alpha_s^{g}(Q^2) = \left(1 - 11 \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}\right) \alpha_s(Q_0^2) \tag{11.16}$$

Die Summation beider Ausdrücke über alle Ordnungen ergibt

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 + (33 - 2N_f) \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{12\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}} \tag{11.17}$$

was sich durch die Substitution $\Lambda^2 = Q_0^2 e^{-\frac{1}{\frac{33-2N_f}{12\pi}\alpha(Q_0^2)}}$ und in der Näherung $Q^2 \gg \Lambda^2$ zu

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}} \tag{11.18}$$

vereinfacht. Im Gegensatz zur QED macht es keinen Sinn, den Grenzfall $Q^2 \to 0$ zu betrachten, da es dort keine Störungsrechnung gibt. Der *Skalenparameter* $\Lambda^2$ kann in der QCD nicht berechnet sondern nur experimentell bestimmt werden.

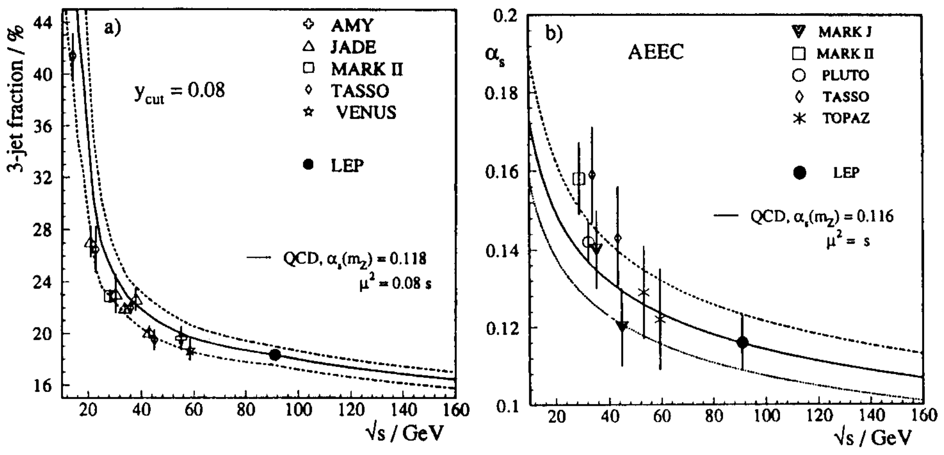



Abbildung 11.1: *Energieabhängigkeit* a) *der 3-Jet-Fraction und* b) *der straken Kopplungskonstanten.*

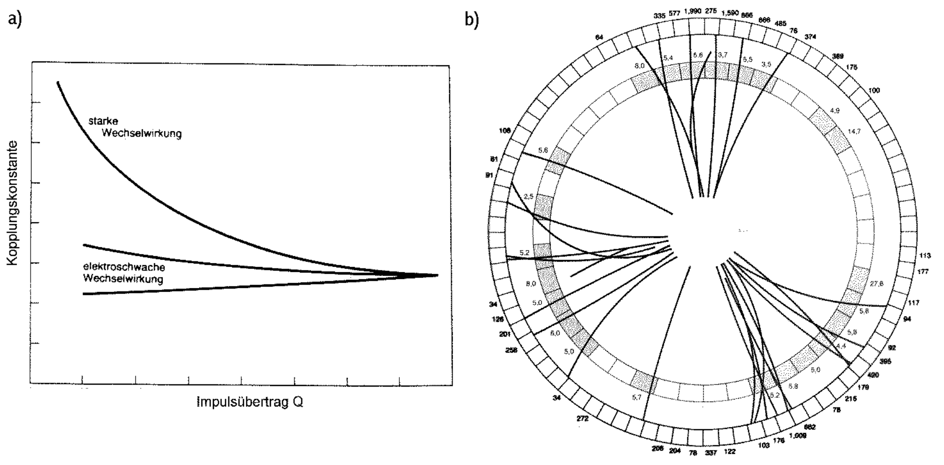
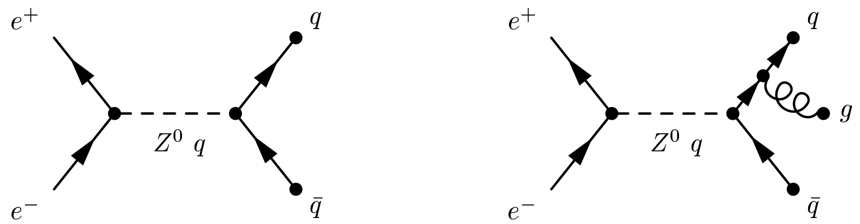



Abbildung 11.2: a) *Laufen der Kopplungskonstanten von starker und elektroschwacher Wechselwirkung.* b) *Typisches Drei-Jet-Eriegnis. Hadronenjets wie diese drei Bündel bestätigen zwei fundamentale Voraussagen der QCD: Die Existenz der Gluonen und die Asymptotische Freiheit der Quarks. Wenn die Energie, die sich nach der Kollision am Stoßort konzentriert, hoch genug ist, bewegen sich die entstehenden $q\bar{q}$ -Paare wie freie Teilchen.*

## 11.3 Experimentelle Verifikation des Standard-Modells

### 11.3.1 Beobachtung der laufenden Kopplungskonstanten

Die Feynman-Graphen für 2-Jet- bzw. 3-Jet-Ereignisse lauten:




Die Übergangsamplitude für das Drei-Jet-Ereignis $\mathcal{M}_{3-Jet}$ enthält wegen des Quark-Gluon-Vertex einen Faktor $g_s \propto \sqrt{\alpha_s}$, den die Übergangsamplitude für das Zwei-Jet-Ereignis $\mathcal{M}_{2-Jet}$ nicht enthält. Somit gilt für das Verhältnis:

$$R_3 := \frac{\sigma_{3-Jet}}{\sigma_{2-Jet}} \propto \frac{|\mathcal{M}_{3-Jet}|^2}{|\mathcal{M}_{2-Jet}|^2} \propto \alpha_s \tag{11.19}$$

Indem man $R_3$ bei verschiedenen Schwerpunktsenergien (und somit verschiedenen Impulsüberträgen $Q^2$) beobachtet, findet man, daß $R_3$ "läuft": $R_3 = R_3(Q^2)$. Somit folgt auch $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$.

### 11.3.2 Zahl der Neutrino-Familien

Das $Z^0$ kann nur in $f\bar{f}$-Paare zerfallen. Als Teilchen im Endzustand kommen die Quarks $u, d, c, s, b$, die geladenen Fermionen $e, \mu, \tau$ sowie die Neutrinos $\nu_e, \nu_\mu, \nu$ sowie evtl. noch unbekannte Neutrinos in Frage. Das $t$-Quark wird wegen seiner hohen Masse ausgeschlossen.

Die Zerfallsbreite $\Gamma$ beim $Z^0$-Pol bildet sich also zu

$$\begin{aligned}\underbrace{\Gamma_Z}_{=(2490\pm 7)\ \text{MeV}} &= \underbrace{\Gamma_{u\bar{u}} + \Gamma_{d\bar{d}} + \Gamma_{c\bar{c}} + \Gamma_{s\bar{s}} + \Gamma_{b\bar{b}}}_{=(1740{,}7\pm 5{,}9)\ \text{MeV}} \\ &\quad + \underbrace{\Gamma_{e^+e^-} + \Gamma_{\mu^+\mu^-} + \Gamma_{\tau^+\tau^-}}_{=(251{,}52\pm 0{,}81)\ \text{MeV}} \\ &\quad + N_\nu \cdot \underbrace{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}}_{=(167{,}1\pm 0{,}3)\ \text{MeV}}\end{aligned} \tag{11.20}$$

Man kann nun aus den einzelnen Beiträgen die Anzahl der Neutrino-Familien $N_\nu$ bestimmen, und erhält:

$$\boxed{N_\nu = 2{,}99 \pm 0{,}01} \tag{11.21}$$

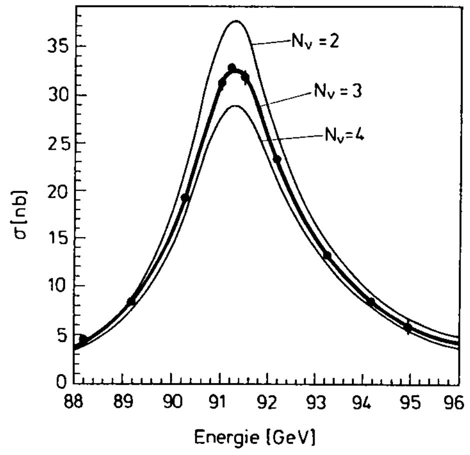



Abbildung 11.3: *Wirkungsquerschnitt der Reaktion $e^+ + e^- \rightarrow f + \bar{f}$ beim $Z^0$-Pol und die theoretischen Kurven für zwei, drei und vier Neutrinosorten.*

### 11.3.3 Eingrenzung der $t$-Quark-Masse

Der Zerfall $Z^0 \rightarrow b + \bar{b}$ liefert eine starke indirekte Evidenz für die Existenz des $t$-Quarks. Die gemessene Zerfallsbreite von $383 \pm 5$ MeV stimmt sehr gut mit dem Wert des Standardmodells 375 MeV überein. Gäbe es kein $t$-Quark, so müßte man das $b$-Quark in ein Singulett des schwachen Isospin einteilen und erhielte eine Zerfallsbreite von nur 24 MeV.

Die Daten zum Zerfall $Z^0 \rightarrow b + \bar{b}$ sind noch nicht präzise genug, aber man kann für die Masse des $t$-Quark bereits folgende Abschätzung machen:

$$m_t = (170 \pm 20) \text{ GeV} \tag{11.22}$$

Beim CDF-Experiment gibt es Kandidaten für $t$-Ereignisse, die auf eine Masse von 175 GeV hindeuten würden.

## 11.4 Grand Unified Theories

### 11.4.1 Motivation

Das Standardmodell beschreibt alle beobachteten Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen mit einer erstaunlichen Präzision. Trotzdem kann es nicht als die ultimative Theorie angesehen werden, weil zu viele Fragen noch unbeantwortet sind:

- **Das Gauge-Problem**
  Warum gibt es genau 3 unabhängige Symmetiregruppen?

- **Das Parameter-Problem**
  Wie kann die Zahl der freien Parameter reduziert werden? (Es gibt insgesamt 20 freie Parameter wie Kopplungen, Massen und Mischungsparameter)

- **Das Fermion-Problem**
  Warum gibt es genau 3 Generationen? Wo rührt die Symmetrie zwischen Quarks und Leptonen her? Sind diese Teilchen fundamental?

- **Das Ladungsproblem**
  Warum sind die elektrischen Ladungen von Proton und Elektron exakt entgegengesetzt?

- **Das Hierarchie-Problem**
  Warum ist die schwache Skala so klein verglichen mit der GUT-Skala, oder warum ist $m_W \approx 10^{-17} m_{Planck}$?

- **Das Fine-Tuning-Problem**
  Bei den Strahlungskorrekturen zu den Massen von Higgsteilchen und Eichbosonen treten quadratische Divergenzen auf. Das heißt, die Korrekturen zu den Higgsmassen ($\Delta m_H \approx \mathcal{O}(M_{Planck})$) sind viele Größenordnungen größer als die Massen selbst, von welchen man vermutet, daß sie in der Größenordnung der elektroschwachen Eichbosonen angesiedelt sind ($m_H \approx \mathcal{O}(M_{W/Z})$). Das erfordert ein unnatürliches "Fine-Tuning" der Parameter des Higgs-Potentials. (Dieses Problem würde durch eine minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells gelöst.)

In einer großen vereinheitlichten Theorie (GUT) geht man davon aus, daß alle Massen und Kopplungen im Energiebereich der GUT-Skala identisch sind, und die Abweichungen bei geringeren Energien aus unterschiedlichen Strahlungskorrekturen herrühren.

### 11.4.2 Große Vereinheitlichung, $SU(5)$-Modell

Einige der o.g. Probleme können gelöst werden, wenn man die Symmetriegruppen $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ als Teil einer größeren Gruppe $G$ betrachtet:

$$G \subset SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

Die kleinste Gruppe $G$, auf die dies zutrifft ist die $SU(5)$-Gruppe. Diese Gruppe beinhaltet *eine einzige* Kopplungskonstante für *alle* Wechselwirkungen. Die beobachteten Abweichungen der verschiedenen Kopplungen bei geringen Energien erhält man aus den entsprechenden Strahlungskorrekturen. Weil die Energieabhängigkeit der Kopplungskonstanten logartihmisch ist, ist die Vereinheitlichungsskala ziehmlich hoch: $10^{15}$ bis $10^{16}$ GeV je nachdem welche Teilchen man in den Schleifendiagrammen berücksichtigt.

In der $SU(5)$-Gruppe können die 15 Teilchen und Antiteilchen für jede Generation in einem $\overline{5}$-plet und $\overline{10}$-plet angeordnet werden. Für die erste Generation lauten diese:

$$\overline{5} = \begin{pmatrix} d_g^C \\ d_r^C \\ d_b^C \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix} \quad \overline{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & +u_b^C & -u_r^C & -u_g & -d_g \\ -u_b^C & 0 & +u_g^C & -u_r & -d_r \\ +u_r^C & -u_g^C & 0 & -u_b & -d_b \\ +u_g & +u_r & +u_b & 0 & -e^+ \\ +d_g & +d_r & +d_b & +e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \tag{11.23}$$

Das Superscript $^C$ bezeichnet jeweils das ladungskonjugierte Teilchen, d.h. die Antiteilchen und Teilchen sind alle als linkshändig gewählt, denn ein rechtshändiges Antiteilchen transformiert sich wie ein linkshändiges Teilchen. Das Superscript $^C$ repräsentiert ein rechtshändiges Singulett mit schwachem Isospin $I_3 = 0$.

Beachten Sie, daß es in diesen Multiplets keine Antineutrinos gibt. Das bedeutet, daß das *Neutrino* innerhalb des $SU(5)$-Modells *masselos* ist, denn für ein massives Teilchen gäbe es auch eine rechthändige Komponente. (Natürlich, es wäre möglich, eine rechtshändige Neutrinokomponente in eine Singulett-Repräsentation zu packen.)

Die $SU(5)$-Transformationen können durch $5 \times 5$-Matrizen dargestellt werden. Die lokale Eichinvarianz fordert die Einführung von $5^2 - 1 = 24$ Eichfeldern, die sog. *Mediatoren*, die die Wechselwirkungen zwischen den Materiefeldern bewirken:

$$24 = \left(\begin{array}{ccc|cc} G_{11} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{12} & G_{13} & X_1^C & Y_1^C \\ G_{21} & G_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{23} & X_2^C & Y_2^C \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & X_3^C & Y_3^C \\ \hline X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{array}\right) \tag{11.24}$$

Die $G_{ij}$ stehen für die Komponenten der $3 \times 3$-Matrix, vgl. auch (10.17):

$$(G_{ij}) = \vec{G}^\mu \cdot \vec{\lambda} = \sum_{k=1}^{8} G_k^\mu \lambda_k \tag{11.25}$$

aus der QCD. Die $W^\pm, W^3$ und $B$ sind direkt die Felder der elektroschwachen Wechselwirkung. Die $X_i$ und $Y_i$ sind neue Eichbosonen und repräsentieren die Umwandlung von Quarks in Leptonen und andersherum. Folglich müssen die $X$-($Y$-) Bosonen, die an Elektron (Neutrino) und $d$-Quark koppeln, die elektrische Ladung $Q = \frac{4}{3}$ ($Q = \frac{1}{3}$) tragen.

### 11.4.3 Vorhersagungen des $SU(5)$-Modells

#### Der Proton-Zerfall

Die Eichbosonen $X$ und $Y$ können Übergänge zwischen Quarks und Leptonen und somit eine *Leptonenzahl*- und *Baryonzahlverletzung* bewirken. (Anmerkung: Die Differenz aus beiden $B-L$ bleibt aber erhalten !) Dies führt zu den folgenden möglichen Proton- bzw. Neutronzerfällen:

$$\begin{array}{llcll} p \to & e^+ + \pi^0 & & & \\ & e^+ + \rho^0 & & n \to & e^+ + \pi^- \\ & e^+ + \omega^0 & & & e^+ + \rho^- \\ & e^+ + \eta & \text{und} & & \nu + \omega^0 \\ & \bar{\nu} + \pi^+ & & & \bar{\nu} + \pi^0 \\ & \bar{\nu} + \rho^+ & & & \bar{\nu} + K^0 \\ & \bar{\nu} + K^+ & & & \end{array}$$

Die Zerfälle mit $K$-Mesonen sind aufgrund der Mischungen bei der elektroschwachen Wechselwirkung erlaubt. Für die Lebensdauer des Protons setzt man in Analogie zum Myonenzerfall

$$\tau_p \approx \frac{m_X}{\alpha_5^2 \; m_p^5}$$

an. Aufgrund des zur Verfügung stehenden Phasenraums ist der bevorzugte Zerfall $p \to e^+ + \pi^0$. Man geht hierbei von einer Lebensdauer $\tau_p \geq 5 \cdot 10^{32}$ a aus. Daraus ergäbe sich $m_X \geq 10^{15}$ Gev. Aus den Extrapolationen der Kopplungskonstanten im $SU(5)$-Modell erwartet man aber eine GUT-Skala im Bereich *deutlich unter* $10^{15}$ Gev. Die Messungen der Lebensdauer des Protons schließen also das $SU(5)$-Modell als GUT aus. Wir werden später sehen, daß die *supersymmetrische Erweiterung des $SU(5)$-Modells* eine GUT-Skala von *deutlich über* $10^{15}$ Gev besitzt, und somit in Frage kommt.

### Baryon-Asymmetrie

Die schweren Eichbosonen, die für die vereinheitlichte Kraft verantwortlich wären, können nicht mit konventionellen Beschleunigern erzeugt werden. Allerdings waren Energien überhalb von $10^{15}$ Gev während der Geburt des Universums kein Problem. Das könnte zu einer Bevorzugung der Materie gegenüber der Antimaterie direkt am Anfang geführt haben: Die Eichbosonen $X$ und $Y$ können direkt in Materie zerfallen: $X \to uu$. Dieser Zerfall ist erlaubt, da $X$ die elektrische Ladung $Q = \frac{4}{3}$ trägt. Solch eine Bevorzugung ist möglich, wenn sowohl $\hat{C}$ als auch $\hat{CP}$, die Baryonzahl $B$ verletzt sind, und der Prozeß über eine Phase des Ungleichgewichts abläuft. Alle drei Bedingungen sind im $SU(5)$-Modell möglich. Die Ungleichgewichtsphase findet statt, wenn das heiße Universum unter die Temperatur abkühlt, so daß keine neuen $X$ und $Y$ mehr erzeugt werden können. Dann sind nur noch die Zerfälle der bereits vorhandenen möglich. Da die $\hat{CP}$-Verletzung nur sehr klein ist, wird sich die meiste Materie mit Antimaterie in Photonen annihilieren, was den großen Photonenüberschuß über die Baryonen ($\frac{N_\gamma}{N_B} \approx 10^{10}$) erklären würde.

### Quantisierung der Ladung

Aus der Tatsache, daß Quarks und Leptonen im selben Multiplett angeordnet sind, folgt, daß ihre Ladungen in Bezug stehen müssen. Denn die Spur eines jeden Generators muß identisch null sein. Der Ladungsoperator, z.B., ergibt

$$\mathrm{Tr}(Q) = \mathrm{Tr}(q_{\bar{d}}, q_{\bar{d}}, q_{\bar{d}}, e, 0) = 0 \tag{11.26}$$

Es folgt also, daß die Ladung des $d$-Quarks $Q_d = -\frac{1}{3}$ sein muß. Für das $u$-Quark erhält man $Q_u = \frac{2}{3}$, so daß die Ladung des Protons zu $Q_p = 2Q_u + Q_d = 1$ wird, also genau entgegengesetzt zu der des Elektrons.

### Vorhersage von $\sin^2\theta_W$

Wenn die Gruppen $U(1)_Y$ und $SU(2)_L$ dieselben Kopplungskonstanten $g = g'$ hätten, könnte der elektroschwache Mischungswinkel $\theta_W$ leicht berechnet werden. Aus Gleichung (9.22) erhielte man: $\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} \stackrel{g=g'}{=} \frac{1}{2}$. Allerdings ist die Sache etwas komplizierter, denn die Generatoren $F_i$ unitärer Transformationen müssen orthogonal sein in dem Sinne, daß

$$\mathrm{Tr}(F_k F_l) = \delta_{kl} \tag{11.27}$$

gilt. Diese Normierung ist unkritisch, wenn man für jede Untergruppe eine eigene Kopplungskonstante bereithält. Normierungsfehler könnte man mit dieser Konstanten korrigieren. Diese Freiheit geht verloren, wenn man mit *einer einzigen* Kopplungskonstanten auskommen muß. Man sieht dies an der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformation:

$$U = e^{i\frac{g'}{2}\ \beta Y_w + i\frac{g}{2}\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}} \tag{11.28}$$

Hier sind die Pauli-Matrizen $\tau_i$ korrekt normiert, aber der Operator der schwachen Hyperladung $Y_w$ muß angepaßt werden:
Wir definieren $CT_0 := \frac{1}{2}Y_w$, womit die Gell-Mann-Nishijima-Relation zu

$$Q = T_3 + CT_0 \tag{11.29}$$

wird. Die Kopplungskonstanten definieren wir zu $g_5 := g = Cg'$. Die Forderung nach der selben Normierung für $T_3$ und $T_0$ impliziert nach (11.27) für $C$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(Q^2) &= (1+C^2)\mathrm{Tr}(T_3^2) \\ (1+C^2) &= \frac{\mathrm{Tr}(Q^2)}{\mathrm{Tr}(T_3^2)} \overset{\text{5-plet}}{=} \frac{3\cdot 1/9+1}{2\cdot 1/4} = \frac{8}{3} \\ C^2 &= \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{11.30}$$

Damit wird der elektroschwache Mischungswinkel $\theta_W$ zu:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W &= \frac{g'^2}{g^2+g'^2} = \frac{g_5^2/C^2}{g_5^2+g_5^2/C^2} = \frac{1}{1+C^2} \\ &= \frac{3}{8} = 0,375 \end{aligned} \tag{11.31}$$

Die starke Abweichung dieses Wertes vom experimentellen Wert $(\sin^2\theta_W)_{exp} = 0,23$ bei niedrigen Energien brachte das $SU(5)$-Modell ursprünglich in Verruf, bis man feststellte, daß das Laufen der Kopplungskonstanten den Wert von $\sin^2\theta_W$ zwischen der GUT-Skala und der niederenergetischen Skala erheblich senken kann. Wie der präzise Vergleich mit experimentellen Daten von LEP allerdings zeigt, ist eine Vereinheitlichung der *drei* Kopplungskonstanten im $SU(5)$-Modell *nicht* möglich, und genau wie beim Proton-Zerfall kommt auch hier, wie wir später sehen werden, die supersymmetrische Erweiterung des SU(5)-Modells als Retter ins Spiel: In dieser Erweiterung ist eine Vereinheitlichung der Kopplungskonstanten perfekt möglich. (Beachten Sie: $\sin^2\theta_W = 3/8$ erhält man in jedem Modell, das $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ als Untergruppe enthält. Der Wert ist also nicht $SU(5)$-spezifisch.)

**Spontane Symmetriebrechung im $SU(5)$-Modell**

Die Symmetrie im $SU(5)$-Modell ist mit Sicherheit gebrochen, denn wenn $X$ und $Y$ masselos wären, würden Protonen extrem schnell zerfallen. Wie bereits erwähnt ist die lange Lebensdauer des Protons ein Indiz für die großen Massen der Eichbosonen $X$ und $Y$. Die Erzeugung dieser Massen kann auf eine eichinvariante Art und Weise wieder über den Higgs-Mechanismus erreicht werden. Hierbei wird die Symmetrie in zwei Schritten gebrochen:

$$SU(5) \to SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \to SU(3) \otimes U(1)$$

Das führt zwei Massenskalen ein ($m_X$ für den ersten Übergang und $m_W$ für den zweiten), welche den Eichbosonen $X$ und $W^\pm$ entsprechen.

### Die Massen der Fermionen

Das Higgs-$\overline{5}$-plet $H_5$ kann benutzt werden, um in der selben Weise die Massen der Fermionen zu erzeugen wie im Standardmodell. Über den Yukawa-Mechanismus werden die Massen mit den Vakuum-Erwartungswerten des Higgs-Feldes verknüpft:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = h_D^{ij}\ \overline{5}_i^*\ H^*\ \overline{10}_j + h_U^{ij}\ \overline{10}_i\ \overline{10}_j\ H \qquad (11.32)$$

Da das $\overline{5}$-plet sowohl Leptonen als auch "down-type"-Quarks enthält, werden diese miteinander verknüpft. Bei der GUT-Skala erwartet man:

$$m_d = m_e \qquad m_s = m_\mu \qquad m_b = m_\tau$$

Die Massen der "up-type"-Quarks sind frei. Um die Massen der Quarks bei geringeren Energien zu finden, muß auf die RGE (renormalization group equation) zurückgegriffen werden. Für die Massen der leichten Quarks ergeben sich wegen der Einschlußeigenschaft starke Ungenauigkeiten, aber die Masse des $t$-Quarks kann aus der Masse des $\tau$-Leptons vorhergesagt werden, wenn man gewisse Strahlungskorrekturen berücksichtigt. Da die dominanten Korrekturterme die starke Kopplungskonstante $\alpha_s$ enthalten, erwartet man

$$\frac{m_b}{m_\tau} = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_s(m_b)}{\alpha_s(m_X)}\right) \equiv \mathcal{O}(3)$$

## 11.5 Supersymmetrie

In der *Supersymmetrie* (SUSY) setzt man eine *Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen* voraus: Man geht davon aus, daß zu jedem Teichen (Particle) mit Spin $j$ ein supersymmetrischer Partner (Sparticle) mit $j - \frac{1}{2}$ existiert. Diese werden in einem sog. *chiralen Multiplett* und einem *vektoriellen Multiplett* angeordnet:

| Vektorielles Multiplett | | Chriales Multiplett | |
|---|---|---|---|
| $J = 1$ | $J = 1/2$ | $J = 1/2$ | $J = 0$ |
| $g$ | $\tilde{g}$ | $Q_L, U_L^C, D_L^C$ | $\tilde{Q}_L, \tilde{U}_L^C, \tilde{D}_L^C$ |
| $W^\pm, W^0$ | $\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$ | $L_L, E_L^C$ | $\tilde{L}_L, \tilde{E}_L^C$ |
| $B$ | $\tilde{B}$ | $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ | $H_1, H_2$ |

Die *Nomenklatur* erfolgt nach der folgenden Regel: SUSY-Partner von Fermionen erhalten ein vorangestelltes "s" (z.B. Lepton und Slepton, Quark und Squark). Bei Bosonen ersetzt man die Endung "on" durch "ino" (Photon und Photino) oder hängt einfach nur ein "ino" an ($Z$ und Zino, Higgs und Higgsino).

### 11.5.1 Motivation

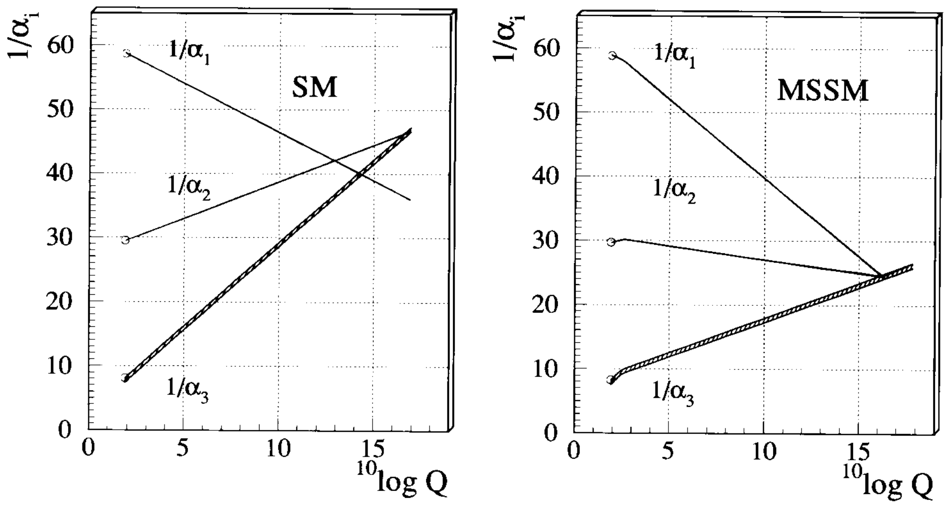
Unglücklicherweise konnten Sparticles noch nicht beobachtet werden. Demnach ist entweder SUSY eine elegante Idee, die nichts mit der Realität zu tun hat, oder die Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen ist bezüglich der Massen gebrochen, so daß die Sparticles schwerer als die Particles sein können. Da viele gute Gründe *für* SUSY sprechen, preferieren viele Wissenschaftler die letztere Möglichkeit. Das Modell, das wir zu Grunde legen, ist die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (MSSM), das auf dem $SU(5)$-Modell basiert und *zwei* Higgs-Dubletts beinhaltet.

Gründe für die Popularität der SUSY sind:

- **Lösung des Fine-Tuning-Problem**
  In der SUSY enthalten die Schleifendiagramme Fermionen *und* Bosonen. Diese Beiträge tragen nach den Feynman-Regeln entgegengesetzte Vorzeichen und heben sich gegenseitig auf, wenn die Sparticles nicht allzu schwer sind (d.h. $< 1$ TeV).

- **Lösung für das Hierarchie-Problem**

- **Vereinheitlichung der Kopplungskonstanten**




- **Vereinheitlichung mit der Gravitation**
  In der SUSY ist eine Vereinheitlichung mit der Einsteinschen Relativitätstheorie grundsätzlich möglich, allerdings führen alle bisher entworfenen Modelle auf nicht renormierbare Divergenzen.

- **Große GUT-Skala**
  Wie wir bereits beim $SU(5)$-Modell besprochen haben, impliziert die lange

Lebensdauer des Protons eine GUT-Skala von $> 10^{15}$ GeV. In der SUSY ist dies der Fall!

- **Photino perfekter Kandidat für dunkle Materie**
  Das LSP (Lightest SParticle) kann aufgrund der $\hat{R}$-Parität nicht in normale Materie zerfallen. Demnach ist es ein idealer Kandidat für dunkle Materie.

## 11.5.2 SUSY Wechselwirkungen

### Drehimpuls, $B$- und $L$-Zahl

Die Erhaltung von Drehimpuls, Baryon- und Leptonzahl muß bei allen Reaktionen sichergestellt sein! Das erfordert die Einführung einer neuen, multiplikativen Quantenzahl ($\hat{R}$-Parität) die erhalten ist.

### $\hat{R}$-Parität

Einführung einer neuen, multiplikativen Quantenzahl:

$$R = (-1)^{3B+L+2S} = \begin{cases} +1 & \text{für Particles} \\ -1 & \text{für Sparticles} \end{cases} \tag{11.33}$$

Wenn man die Erhaltung der $\hat{R}$-Parität fordert, folgt, daß das LSP stabil ist und schwach wechselwirken kann. Außerdem ist nur eine paarweise Erzeugung von Sparticles möglich. Auch kann das Wechselwirkungsverhalten der Sparticles anders sein, als das der Particles. So koppelt das Photon z.B. an Elektron und Positron, wohingegen eine Kopplung von Photino an Selektron und Spositron eine Verletzung der $\hat{R}$-Parität zur Folge hätte.

Teilchensignaturen findet man über die Missing-Energy-Methode.

### Higgs-Mechanismus

In der SUSY muß der Higgs-Mechanismus aus zwei Gründen erweitert werden:

- Die Higgsinos haben Spin $\frac{1}{2}$, weshalb sie die Eichanomalie verursachen, es sei denn, man hat Paare von Higgsinos mit entgegengesetzter schwachen Hyperladung $Y_w$, so daß $\sum\limits_i Y_w^i = 0$ gilt:

$$H_1(1,2,-1) = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2(1,2,1) = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \tag{11.34}$$

  Da das Vakuum neutral sein sollte, muß man davon ausgehen, daß nur die neutralen Komponenten einen von Null verschiedenen Vakuum-Erwartungswert haben:

$$< H_1 >= \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad < H_2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{11.35}$$

  Es gilt $v_1 \neq v_2$ und man definiert $\tan\beta := \frac{v_2}{v_1}$.

- Die Einführung des zweiten Dubletts löst ein weiteres Problem: Es legt die Massen der "up-type"-Materiefelder fest, die im $SU(5)$-Modell ja frei waren. Verwendet man die oben eingeführten Higgs-Felder, so erzeugt $H_1$ die Massen der "down-type"-Materiefelder während $H_2$ die der "up-type"-Materiefelder erzeugt.

Die Tree-Level-Potentialdichte für den *neutralen Sektor* (d.h. für die $H_i^0$) kann als

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(H_1^0, H_2^0) &= m_1^2|H_1^0|^2 + m_2^2|H_2^0|^2 - m_3^2(H_1^0 H_2^0 + h.c.) \\ &+ \frac{g^2 + g'^2}{8}(|H_1^0|^2 - |H_2^0|^2)^2\end{aligned} \tag{11.36}$$

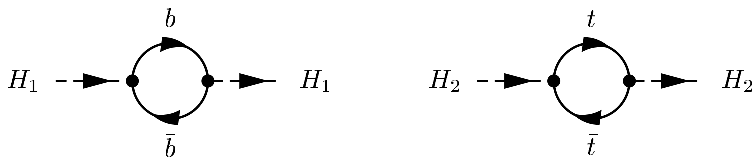
geschrieben werden. Der Vakuum-Erwartungswert, also das Minimum von $\mathcal{U}$, findet man, indem man

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial |H_1^0|} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial |H_2^0|} = 0 \tag{11.37}$$

fordert. Aus diesen Gleichungen kann die Masse des $Z^0$ leicht abgeleitet werden:

$$m_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{2} < H >^2 \equiv 2\frac{m_1^2 - m_2^2 \tan^2\beta}{\tan^2\beta - 1} \tag{11.38}$$

Bei der GUT-Skala gibt es keine elektroschwache Symmetriebrechung und es wird dort wegen $m_1 = m_2 = m$ die Masse des $Z^0$ zu $m_Z^2 = -2m^2 < 0$. Bei Energien unterhalb der GUT-Skala wird aufgrund von Strahlungskorrekturen die Symmetrie gebrochen:




Die Korrekturen für $H_2$ sind größer als die für $H_1$ und so wird $m_2 < m_1$, was zur Brechung der Symmetrie führt.

# Index

# Literaturverzeichnis


[1] D. Griffiths: *Einführung in die Elementarteilchenphysik*; Akademie Verlag (1. Auflage, 1996)

[2] P. Schmüser: *Feynmann Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*; Springer Verlag (2. Auflage, 1995)

[3] F. Schwabl: *Quantenmechanik (QM I)* und *Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)*; Springer Verlag (5., erweiterte Auflage, 1998)

[4] Particle Data Group: *Particle Data Booklet*; http://www.cern.ch/pdg