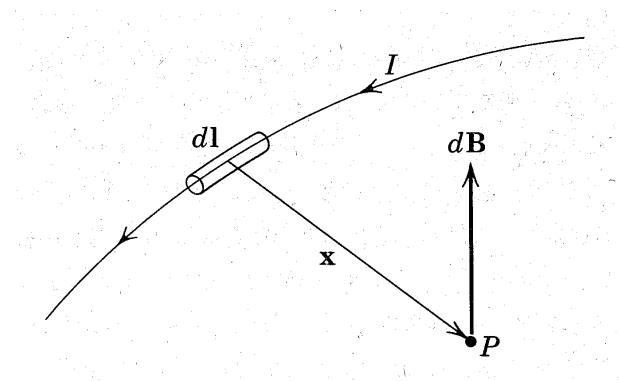


# Klassische Elektrodynamik



Reinhard Hentschke



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Konsequenzen des Relativitätsprinzips</b>	<b>1</b>
1.1 Lorentz-Transformation . . . . .	1
1.2 Zur Masse-Energie-Äquivalenz . . . . .	4
1.3 Wirkungsintegral freier Teilchen . . . . .	7
<b>2 Relativität und Elektrodynamik</b>	<b>9</b>
2.1 Viervektoren . . . . .	9
2.2 Wirkungsintegral einer Ladung im Feld . . . . .	10
2.3 Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes . . . . .	12
<b>3 Zeitunabhängige elektromagnetische Felder</b>	<b>17</b>
3.1 Das elektrostatische Feld . . . . .	17
3.2 Randwertprobleme der Elektrostatik - ideale Leiter im Vakuum . . . . .	20
3.3 Zeitunabhängige Magnetfelder . . . . .	28
<b>4 Elektromagnetische Wellen und deren Austrahlung</b>	<b>31</b>
4.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum: . . . . .	31
4.2 Retardierte Potenziale . . . . .	33
4.3 Das Feld beliebig bewegter Ladungen . . . . .	34
<b>5 Elektro- und Magnetostatik der Kontinua</b>	<b>37</b>
5.1 Das elektrostatische Feld im Dielektrikum . . . . .	37
5.2 Das magnetostatische Feld im Medium . . . . .	46
<b>6 Elektrodynamik der Kontinua</b>	<b>53</b>
6.1 Elektrodynamik einfacher Stromkreiselemente: . . . . .	53
6.2 Elektromagnetische Wellen in Materie . . . . .	56
6.3 Reflexion und Brechung . . . . .	59
<b>A Formeln und Einheiten</b>	<b>63</b>
<b>B Übungsaufgaben</b>	<b>67</b>

## Vorbemerkungen

Diese einsemestrige, einführende Vorlesung in die klassische Elektrodynamik richtet sich an Studierende der Physik, und zwar im Rahmen der üblichen Vorlesungsabfolge des Grundstudiums der theoretischen Physik (Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik, Statistische Mechanik). Die Vorlesung orientiert sich hauptsächlich an den folgenden Texten, den Bänden *Klassische Feldtheorie* [1] sowie *Elektrodynamik der Kontinua* [2] des Landau/Lifschitz<sup>1</sup>, *Classical Electrodynamics* [3] von Jackson sowie *Klassische Elektrodynamik* von Greiner [4].

Am Beginn steht eine kurze Einführung in die spezielle Relativitätstheorie. Dies liegt nahe aufgrund der Lorentz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen<sup>2</sup>, dem grundlegenden Gleichungssystem der Elektrodynamik. Die Maxwell-Gleichungen wiederum werden eingeführt gemäß der Darstellung im Landau/Lifschitz mit Hilfe des elektromagnetischen Wirkungsfunktionalen. Eine solche Darstellung ist insbesondere nützlich im Hinblick auf den Einstieg in die fortgeschrittene Quantentheorie (Feldquantisierung). Anschließend werden elektrostatische Felder sowie Randwertprobleme der Elektrostatik und die Magnetostatik im Vakuum diskutiert. Die im Rahmen der elektrostatischen Randwertprobleme oft behandelten mathematischen Methoden (insbesondere spezielle Funktionen) werden hier lediglich in den Übungsaufgaben gestreift. Sie

sollten Teil einer gesonderten Vorlesung über mathematische Methoden der Physik sein. Behandelt werden weiterhin elektromagnetische Wellen und deren Austrahlung. Wir verlassen dann das Vakuum und wenden uns der Elektrodynamik der Kontinua zu. Dieser Teil des Skripts behandelt elementare Aspekte der Elektro- und Magnetostatik sowie ausgewählte Themen der Elektrodynamik in kondensierter Materie. Dabei orientieren wir uns hauptsächlich am Landau [2] und am Greiner [4].

Ich möchte an dieser Stelle meinen Dank aussprechen: Frau Susanne Christ für das TeXen meiner Notizen; Herrn Dipl. Phys. Hendrik Kabrede für die Betreuung der Übungen im Sommersemester 2001; Herrn Trieu und Frau Peters für ihre Korrekturhinweise.

Reinhard Hentschke

Bergische Universität  
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften  
Gauß-Str. 20  
42097 Wuppertal  
e-mail: hentschk@uni-wuppertal.de  
<http://constanze.materials.uni-wuppertal.de>

Version vom 22.3.2005 (mit verschiedenen Korrekturen und Ergänzungen zur ursprünglichen Fassung vom August 2001).

<sup>1</sup>Landau, Lew Dawydowitsch, sowjetischer Physiker, \*Baku (Aserbaidschan) 22.1. 1908, †Moskau 1.4. 1968; Professor in Charkow und Moskau; erhielt 1962 für die theoretische Klärung der Erscheinungen des suprafluiden Zustands, wie er beim Helium II auftritt, den Nobelpreis für Physik. Weitere wesentliche Beiträge zur Quantenelektrodynamik und Quantenfeldtheorie sowie zum Diamagnetismus freier Elektronen in Metallen; verfasste ein Lehrbuch der theoretischen Physik (10 Bände). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>2</sup>Maxwell, James Clerk, britischer Physiker, \*Edinburgh 13.6. 1831, †Cambridge 5.11. 1879; erneuerte die von T. Young aufgestellte Dreifarbentheorie des Sehens und förderte besonders die kinetische Gastheorie (maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung), schloss aus mathematischen Überlegungen, dass der Saturnring aus festen Teilchen bestehen müsse, erweiterte die Vektor- und Tensoranalysis, zeigte die elektromagnetische Natur der Lichtwellen. Er entwickelte die Theorie des elektromagnetischen Feldes (Elektrizität) durch Mathematisierung des von M. Faraday in die Physik eingeführten Feldbegriffs (maxwellsche Theorie). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

# Das "Zukunftsland" der Elektrodynamik

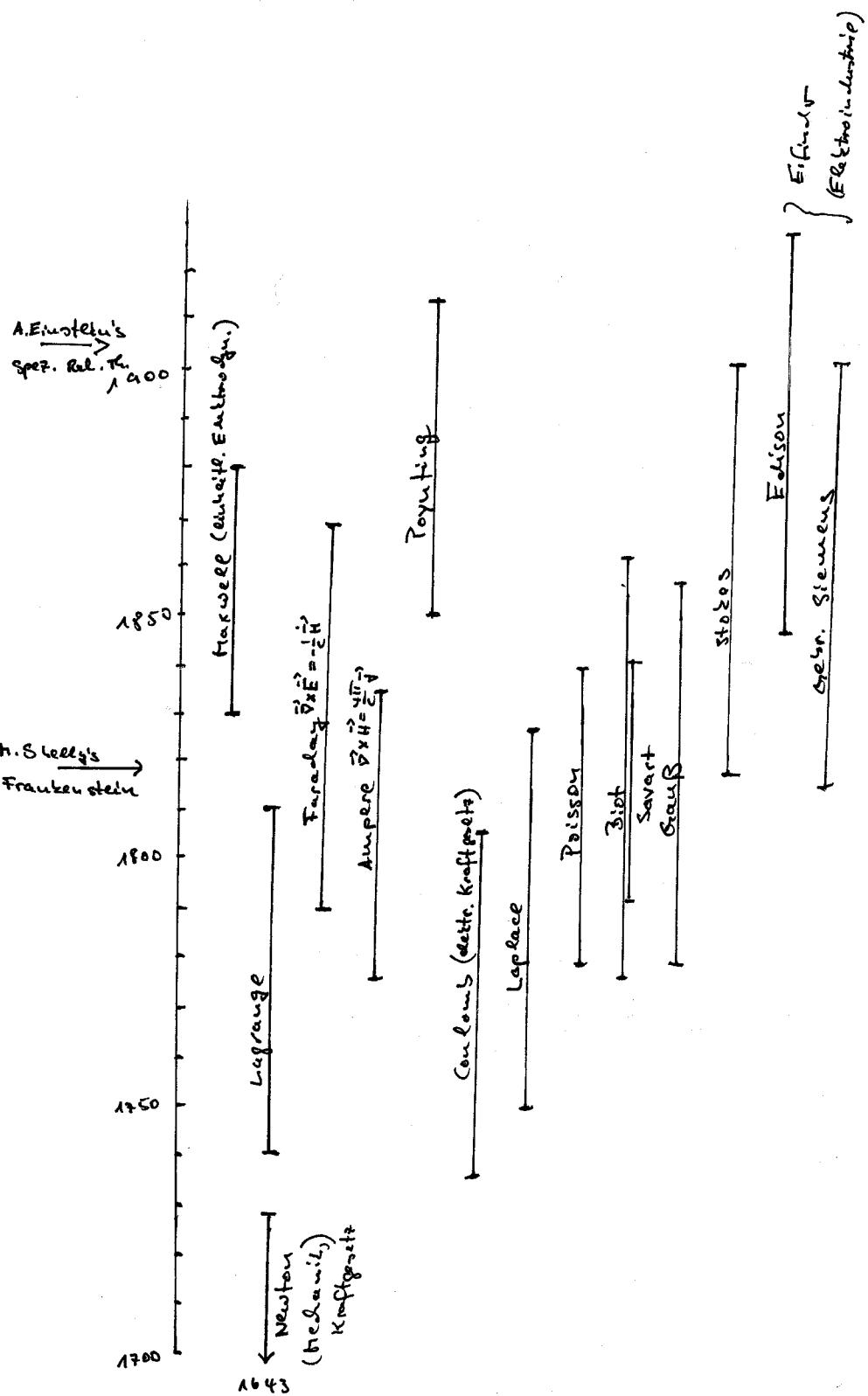


Abbildung 1: Hauptakteure unseres Themas.



# Kapitel 1

## Konsequenzen des Relativitätsprinzips

### 1.1 Lorentz-Transformation

Einige Begriffe:

Inertialsystem: Ein System, in dem ein sich frei bewegender Körper (keine Kräfte wirken) konstante Geschwindigkeit besitzt.

Relativitätsprinzip: Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich (Erfahrungstatsache<sup>1</sup>). D.h., die Gleichungen, durch die die Naturgesetze ausgedrückt werden, sind invariant unter Transformationen der Koordinaten und der Zeit von einem Inertialsystem zum anderen. Insbesondere gilt: (R1) Raum und Zeit sind homogen. Der Koordinatenursprung ist willkürlich wählbar. (R2) Der Raum ist isotrop. Alle Richtungen sind äquivalent.

Fernwirkung: Die Wechselwirkung materieller Teilchen wird durch ihre potentielle Energie beschrieben. Es gibt keine augenblickliche Fernwirkung! Daher ist die Mechanik, die auf der sofortigen Ausbreitung der Wirkung beruht, nicht exakt.

Ausbreitungsgeschwindigkeit: Abstand zweier Körper dividiert durch den Zeitintervall zwischen Ursache und Wirkung. Aus dem Relativitäts-

<sup>1</sup>Mit Erfahrungstatsachen sollte man natürlich vorsichtig umgehen. Gerade die Relativitätstheorie zeigt dies. Man sollte es lieber wie folgt sehen: Man geht von gewissen Postulaten aus und entwickelt darauf aufbauend eine Theorie. Diese muß sich dann im Experiment bewähren. Tut sie dies nicht, dann müssen die Postulate hinterfragt werden.

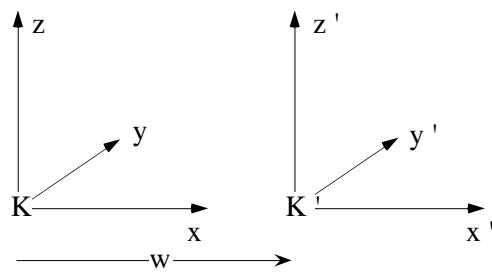


Abbildung 1.1: Inertialsystem  $K'$  bewegt sich relativ zu Inertialsystem  $K$  mit der Geschwindigkeit  $w$  entlang  $x$  bzw.  $x'$ .

prinzip folgt die Gleichheit der Ausbreitungsgeschwindigkeit (Wirkungsgeschwindigkeit) in allen Inertialsystemen. Dies ist die konstante Geschwindigkeit des Lichts ( $c = 2.99792 \cdot 10^{10} m/s$ ).

Spezielle Lorentz-Transformationen:

Ziel ist eine möglichst allgemeine Form der Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit zwischen Inertialsystemen  $K$  und  $K'$  auf der Basis des Relativitätsprinzips<sup>2</sup>. Wir betrachten den in Abbildung 1.1 dargestellten Fall. Die allgemeinste Form der Transformationsgleichungen, die mit R1 verträglich ist, lautet

<sup>2</sup>siehe auch U. E. Schröder (1981) Spezielle Relativitätstheorie. Verlag Harri Deutsch

$$\begin{aligned} i) \quad K \rightarrow K' \quad & x' = \gamma(w)(x - wt) \\ & y' = \alpha(w)y \\ & z' = \alpha(w)z \\ & t' = \mu(w)t + \epsilon(w)x . \end{aligned}$$

Wegen R2 muß ebenfalls gelten

$$\begin{aligned} ii) \quad K' \rightarrow K \quad & x = \gamma(-w)(x' + wt') \\ & y = \alpha(-w)y' \\ & z = \alpha(-w)z' \\ & t = \mu(-w)t' + \epsilon(-w)x' . \end{aligned}$$

Einen dritten Satz von Gleichungen ergibt die Inversion von  $w, x, x'$  (sowie  $y, y'$  um Rechtssystem zu erhalten):

$$\begin{aligned} iii) \quad & -x' = -\gamma(-w)(x - wt) \\ & -y' = -\alpha(-w)y \\ & z' = \alpha(-w)z \\ & t' = \mu(-w)t - \epsilon(-w)x . \end{aligned}$$

Der Vergleich von i) und iii) liefert

$$\begin{aligned} iv) \quad & \gamma(w) = \gamma(-w) \\ & \alpha(w) = \alpha(-w) \\ & \mu(w) = \mu(-w) \\ & \epsilon(w) = -\epsilon(-w) . \end{aligned}$$

Einsetzen von ii) in i) zusammen mit iv) ergibt

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(w) [\gamma(-w)(x' + wt')] \\ &\quad - w(\mu(-w)t' + \epsilon(-w)x') \\ &\stackrel{iv)}{=} \underbrace{(\gamma^2(w) + w\gamma(w)\epsilon(w))x'}_{=1} \\ &\quad + w\gamma(w) \underbrace{(\gamma(w) - \mu(w))t'}_{=0} \end{aligned}$$

sowie

$$y' = \alpha(w)\alpha(-w)y' \stackrel{iv)}{=} \underbrace{\alpha^2(w)y'}_{=1}$$

und nichts Neues von den anderen Gleichungen! Aus  $\alpha^2(w) = 1$  folgt  $\alpha(w) = \pm 1$ . Das Vorzeichen ist +, da für  $\lim_{w \rightarrow 0} \alpha(w) \rightarrow 1$  gelten muß. In

$\gamma^2(w) + w\gamma(w)\epsilon(w) = 1$  führen wir als Definition ein:  $\epsilon(w) \equiv -\frac{w\gamma(w)}{\eta^2(w)}$ <sup>3</sup> und erhalten:

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{\eta^2(w)}}} .$$

Damit folgt

$$x' = \gamma(w)(x - wt) \quad (1.1)$$

$$y' = y \quad (1.2)$$

$$z' = z \quad (1.3)$$

$$t' = \gamma(w) \left( t - \frac{wx}{\eta^2(w)} \right) . \quad (1.4)$$

Mehr Info über  $\gamma(w)$  erhalten wir daraus, dass  $K \xrightarrow{w_1} K' \xrightarrow{w_2} K''$  äquivalent zu  $K \xrightarrow{w} K''$  möglich ist. D.h.,

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w_2)(x' - w_2t') \\ t'' &= \gamma(w_2) \left( t' - \frac{w_2x'}{\eta^2(w_2)} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w_2) \left( \gamma(w_1)(x - w_1t) \right. \\ &\quad \left. - w_2\gamma(w_1) \left( t - \frac{w_1x}{\eta^2(w_1)} \right) \right) \end{aligned}$$

$$t'' = \dots$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w)(x - wt) \\ t'' &= \dots . \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= \gamma(w_1)\gamma(w_2) \left( 1 + \frac{w_1w_2}{\eta^2(w_1)} \right) \\ -w\gamma(w) &= -\gamma(w_1)\gamma(w_2)(w_1 + w_2) \end{aligned}$$

und somit

---

<sup>3</sup>erfüllt die Bedingung  $\epsilon(w) = -\epsilon(-w)$

$$w = \frac{w_1 + w_2}{1 + \frac{w_1 w_2}{\eta^2(w_1)}}.$$

Dieses spezielle Geschwindigkeitsadditionstheorem macht nur Sinn, wenn  $\eta = \text{Konstante}$  (d.h.,  $\eta = c$ , die Lichtgeschwindigkeit<sup>4</sup>). Insbesondere gilt für  $w_1 = w$  und  $w_2 = c$

$$w = \frac{w + c}{1 + \frac{wc}{c^2}} = c \frac{w + c}{w + c} = c.$$

D.h.,  $c$  ist die höchste erreichbare Geschwindigkeit!

Also:

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$
 (1.5)

Offensichtlich folgen die Galilei-Transformationen für  $w \rightarrow 0$  bzw.  $c \rightarrow \infty$ . Die speziellen Lorentz-Transformationen<sup>5</sup> (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) ( $\eta = c!$ ) und (1.5) zusammen mit der Existenz einer Grenzgeschwindigkeit sind das Ergebnis dieses Abschnitts. Man beachte auch, dass die Zeit nicht mehr als unabhängige Koordinate auftritt, sondern als Komponente des Raum-Zeit-Kontinuums.

Verallgemeinerung auf beliebige Raumrichtungen:

Der Ortsvektor in  $K$  sei  $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$  mit  $\vec{r}_\perp \perp \vec{w}$  und  $\vec{r}_\parallel \parallel \vec{w}$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{r}'_\parallel &= \gamma(w) (\vec{r}_\parallel - \vec{w}t) \\ \vec{r}'_\perp &= \vec{r}_\perp \\ t' &= \gamma(w) \left( t - \frac{\vec{w} \cdot \vec{r}_\parallel}{c^2} \right).\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Im Prinzip wissen wir hier noch nicht, dass  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Erst im Kapitel 4 werden wir diesen Zusammenhang herstellen.

<sup>5</sup>Lorentz, Hendrik Antoon, niederländischer Physiker, \*Arnhem 18.7. 1853, †Haarlem 4.2. 1928; Professor in Leiden, erklärte 1875 auf der Grundlage der maxwellschen Theorie die Brechung und Reflexion des Lichtes und mithilfe seiner Elektronentheorie (1895) auch den Zeeman-Effekt sowie die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im magnetischen Feld; führte 1892 die Lorentz-Kontraktion, 1895 die Lorentz-Kraft und 1899 die Lorentz-Transformation in die Elektrodynamik ein. 1902 erhielt er zusammen mit P. Zeeman den Nobelpreis für Physik. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Mit  $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2}$  und  $\vec{r}_\parallel = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2}$  folgt für  $\vec{r}' = \vec{r}'_\parallel + \vec{r}'_\perp$

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma(w) - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2} \quad (1.6)$$

$$- \gamma(w) \vec{w}t \quad (1.7)$$

wobei  $\vec{r}_\perp \cdot \vec{w} = 0$  verwendet wurde.

Transformation der Geschwindigkeiten:

Inertialsystem  $K'$  bewegt sich mit  $\vec{w}$  von  $K$  aus gesehen, und es seien  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  sowie  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$  die jeweiligen Laborgeschwindigkeiten. Es folgt mittels Gl. (1.6)

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt'} \\ &= \frac{d\vec{r}}{\gamma(w) \left( dt - \frac{\vec{w} \cdot d\vec{r}}{c^2} \right)} \\ &+ \frac{\gamma(w) - 1}{\gamma(w)} \frac{(d\vec{r} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2} \frac{1}{dt - \frac{\vec{w} \cdot d\vec{r}}{c^2}} - \frac{\vec{w} \cdot dt}{dt - \frac{\vec{w} \cdot d\vec{r}}{c^2}}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left[ \frac{\vec{v}}{\gamma(w)} \right. \\ &\left. + \left( 1 - \frac{1}{\gamma(w)} \right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2} - \vec{w} \right].\end{aligned}$$
 (1.8)

Die Umkehrung dieser Gleichung ist durch

$$\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{v}'_\parallel + \vec{w}}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}}$$
 (1.9)

und

$$\vec{v}_\perp = \frac{1}{\gamma(w)} \frac{\vec{v}'_\perp}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}}$$
 (1.10)

gegeben, wobei sich  $\parallel$  bzw.  $\perp$  auf die Richtung von  $\vec{w}$  beziehen (siehe Aufgabe). Die Gl. (1.9) ist wiederum das schon erwähnte Geschwindigkeitsadditionstheorem. Es ist in Abbildung 1.2 illustriert.

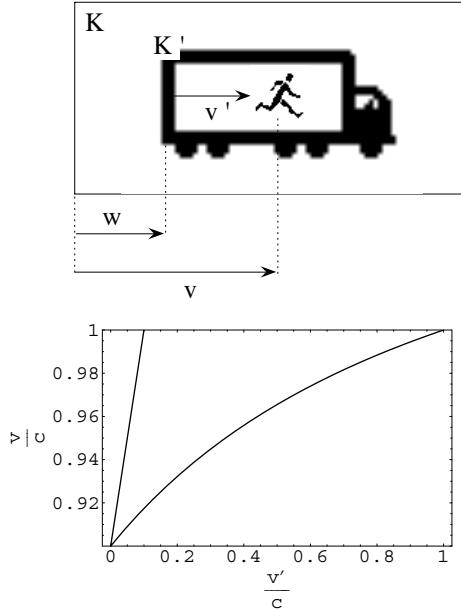


Abbildung 1.2: Oben: Inertialsystem  $K'$  bewegt sich relativ zu Inertialsystem  $K$  mit der Geschwindigkeit  $w$ . In  $K'$  wiederum bewegt sich der Läufer mit der Geschwindigkeit  $v'$  in die gleiche Richtung. Im System  $K$  ist seine Geschwindigkeit  $v$ . Unten: Auftragung von  $v$  gegen  $v'/c$  gemäß Gl. (1.9) für  $w = 0.9$ . Die gerade Linie zeigt die simple Addition  $v = v' + w$ , wie sie unserer Alltagserfahrung entspricht. Die Abweichung vom relativistischen Resultat ist umso größer, je näher  $w$  an der Grenzgeschwindigkeit liegt.

Nähert sich der Läufer in seinem Laborsystem der Grenzgeschwindigkeit, d.h.  $v' \rightarrow c$ , gelingt es ihm trotzdem nicht, diese Grenzgeschwindigkeit im System  $K$  zu überschreiten, wie wir oben schon festgestellt haben.

## 1.2 Zur Masse-Energie-Äquivalenz

Impulserhaltung und Massenveränderlichkeit:

Wir betrachten den in Abbildung 1.3 dargestellten Zweierstoß. Die Teilchen sollen identisch sein. Die Impulserhaltung im System  $K$  lautet

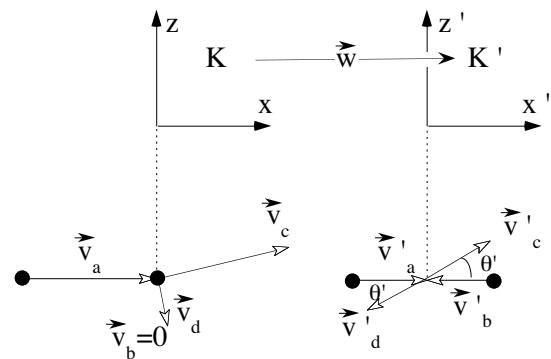


Abbildung 1.3: Abbilng. Links: Inertialsystem  $K$  in dem das Teilchen sich bewegt, und das andere ruht.  $\vec{v}_a$  und  $\vec{v}_b (= 0)$  sind die Geschwindigkeiten vor dem Stoß.  $\vec{v}_c$  und  $\vec{v}_d$  sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Rechts: Inertialsystem  $K'$  in dem der Massenschwerpunkt ruht. Aus Symmetriegründen gilt  $\vec{w} = \vec{v}'_a = -\vec{v}'_b$  sowie  $w = v'_a = v'_b = v'_c = v'_d$ .

$$m(v_a)\vec{v}_a = m(v_c)\vec{v}_c + m(v_d)\vec{v}_d .$$

Wieder wollen wir möglichst allgemein sein und betrachten daher die Masse  $m$  als Funktion von  $v$ . Da  $\vec{v}_a \parallel \vec{w}$  ist, lautet die  $z$ -Komponente der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= m(v_c)v_{c\perp} + m(v_d)v_{d\perp} \\ &\stackrel{(1.10)}{=} m(v_c)\frac{1}{\gamma(w)}\frac{v'_c \sin \theta'}{1 + \frac{wv'_c}{c^2} \cos \theta'} \\ &\quad - m(v_d)\frac{1}{\gamma(w)}\frac{v'_d \sin \theta'}{1 - \frac{wv'_d}{c^2} \cos \theta'} \\ &= m(v_c)\frac{1}{\gamma(w)}\frac{w \sin \theta'}{1 + \frac{w^2}{c^2} \cos \theta'} \\ &\quad - m(v_d)\frac{1}{\gamma(w)}\frac{w \sin \theta'}{1 - \frac{w^2}{c^2} \cos \theta'} . \end{aligned}$$

D.h.

$$m(v_c) = \frac{1 + \frac{w^2}{c^2} \cos \theta'}{1 - \frac{w^2}{c^2} \cos \theta'} m(v_d) . \quad (1.11)$$

Diese Gleichung gilt für alle  $\theta'$  also insbesondere für  $\theta' = 0$ . In diesem Fall gilt außerdem  $v_a = v_c$  sowie  $v_d = 0$  und daher

Energieerhaltung und Masse-Energie-Äquivalenz:

$$m(v_a) = \frac{1 + \frac{w^2}{c^2}}{1 - \frac{w^2}{c^2}} m(0) .$$

Gemäß Gl. (1.9) haben wir zusätzlich

$$\frac{v_a}{c} = \frac{2w/c}{1 + \frac{w^2}{c^2}}$$

und damit<sup>6</sup>

$$m(v) = \gamma(v) m(0) \quad (1.12)$$

bzw.

$$\vec{p} = \gamma(v) m(0) \vec{v}, \quad (1.13)$$

wobei  $v_a$  durch  $v$  ersetzt ist, und  $\vec{p}$  den Impuls bezeichnet. Dies ist die bekannte relativistische Massenzunahme bewegter Körper relativ zu ihrer Ruhemasse  $m(0)$ . Insbesondere folgt aus Gl. (1.13) sofort<sup>7</sup>

$$\delta mc^2 = \delta E_{kin}$$

mit  $E_{kin} = \frac{1}{2} m(0) v^2$  und  $\delta m = m(\delta v) - m(0)$ . D.h., die berühmte Formel für die Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt deutet sich hier schon an.

<sup>6</sup>Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v_a^2}{c^2} &= 1 - \frac{4w^2/c^2}{\left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right)^2} = \frac{1 + \frac{2w^2}{c^2} + \frac{w^4}{c^4} - 4\frac{w^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{w^2}{c^2}}{1 + \frac{w^2}{c^2}}\right)^2 \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Nebenrechnung:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \dots \quad (1.14)$$

Jetzt betrachten wir die Energieerhaltung

$$\epsilon(v_a) + \epsilon(0) = \epsilon(v_c) + \epsilon(v_d),$$

und wir entwickeln die rechte Seite um  $\theta' = 0$ . D.h.

$$\begin{aligned} \epsilon(v_a) + \epsilon(0) &= \epsilon(v_a) + \left. \frac{\partial \epsilon(v_c)}{\partial \theta'} \right|_{\theta'=0} \theta' \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \epsilon(v_c)}{\partial \theta'^2} \right|_{\theta'=0} \theta'^2 + \dots \\ &+ \epsilon(0) + \left. \frac{\partial \epsilon(v_d)}{\partial \theta'} \right|_{\theta'=0} \theta' \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \epsilon(v_d)}{\partial \theta'^2} \right|_{\theta'=0} \theta'^2 + \dots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \left. \frac{\partial \epsilon(v_c)}{\partial v_c^2} \right|_{v_a} \frac{\partial v_c^2}{\partial \theta'} \Big|_{\theta'=0} + \left. \frac{\partial \epsilon(v_d)}{\partial v_d^2} \right|_0 \frac{\partial v_d^2}{\partial \theta'} \Big|_{\theta'=0} \right] \theta' \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 v_c^2}{\partial \theta'^2} \right|_{\theta'=0} \frac{\partial \epsilon(v_c)}{\partial v_c^2} \Big|_{v_a} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v_c^2}{\partial \theta'} \Big|_{\theta'=0} \right)^2 \frac{\partial^2 \epsilon(v_c)}{\partial v_c^2 \partial v_c^2} \Big|_{v_a} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 v_d^2}{\partial \theta'^2} \Big|_{\theta'=0} \frac{\partial \epsilon(v_d)}{\partial v_d^2} \Big|_0 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v_d^2}{\partial \theta'} \Big|_{\theta'=0} \right)^2 \frac{\partial^2 \epsilon(v_d)}{\partial v_d^2 \partial v_d^2} \Big|_0 \right] \theta'^2 + \dots . \end{aligned}$$

Mit etwas Fußarbeit bzw. mit Hilfe von algebraischen Rechenprogrammen wie Mathematica können die folgenden Entwicklungen berechnet werden:<sup>8</sup>

$$v_c^2 = v_{c\perp}^2 + v_{c\parallel}^2$$

<sup>8</sup>Zur Erinnerung:

$$v_{\perp} = \pm \frac{1}{\gamma(w)} \frac{w \sin \theta'}{1 \pm \frac{w^2}{c^2} \cos \theta'} \quad (1.15)$$

$$v_{\parallel} = w \frac{1 \pm \cos \theta'}{1 \pm \frac{w^2}{c^2} \cos \theta'} \quad (1.16)$$

Hier steht + für  $v_c$  und - für  $v_d$ .

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{w^2}{\left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right)^2} - w^2 \frac{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right)^3} \theta'^2 + O(\theta'^4) \\
v_d^2 &= v_{d\perp}^2 + v_{d\parallel}^2 = \frac{w^2}{1 - \frac{w^2}{c^2}} \theta'^2 + O(\theta'^4) .
\end{aligned}$$

Damit folgt aus der obigen Entwicklung

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 v_c^2}{\partial \theta'^2} \Big|_{\theta'=0} \frac{\partial \epsilon(v_c)}{\partial v_c^2} \Big|_{v_a} + \frac{\partial^2 v_d^2}{\partial \theta'^2} \Big|_{\theta'=0} \frac{\partial \epsilon(v_d)}{\partial v_d^2} \Big|_0 \\
&= -\frac{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{w^2}{c^2}\right)^3} \frac{\partial \epsilon(v_a)}{\partial v_a^2} + \frac{1}{1 - \frac{w^2}{c^2}} \frac{m(0)}{2} .
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon(v_a)}{\partial v_a^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \frac{w^2}{c^2}}{1 - \frac{w^2}{c^2}} \right)^3 m(0) \\
&\stackrel{s.Nebr.}{=} \frac{1}{2} \gamma^3(v_a) m(0) .
\end{aligned}$$

Die Integration liefert

$$\begin{aligned}
\epsilon(v) &= \epsilon(0) + \frac{1}{2} m(0) \int_0^{v^2} dv_a^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\
&= \epsilon(0) + (\gamma(v) - 1) m(0) c^2
\end{aligned}$$

bzw.

$$\epsilon(v) = \gamma(v) m(0) c^2 + \left( \epsilon(0) - m(0) c^2 \right) . \quad (1.17)$$

Was hier fehlt, ist die berühmte Äquivalenz von Ruhemasse und Energie gemäß  $\epsilon(0) = m(0)c^2$ . Es gibt viele Wege zu dieser Relation, die in den Experimenten der Teilchenphysik bestätigt wurde. Wir nehmen sie momentan als gegeben an, da sie weiter unten noch einmal auftauchen wird.

Relativistischer Energie-Impuls-Satz:

Quadrieren der Gl. (1.13) sowie Multiplikation mit  $c^2$  ergibt

$$p^2(\vec{v}) c^2 = \gamma^2(v) m^2(0) v^2 c^2 = \epsilon^2(0) \frac{v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} ,$$

wobei wir  $\epsilon(0) = m(0)c^2$  verwendet haben. Quadrieren der Gl. (1.17) ergibt

$$\epsilon^2(v) = \epsilon^2(0) \gamma^2(v) = \epsilon^2(0) \underbrace{\left( \gamma^2(v) - 1 \right)}_{\frac{v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \epsilon^2(0) .$$

Die Kombination dieser beiden Gleichungen liefert die relativistische Version

$$\epsilon^2(v) = p^2(\vec{v}) c^2 + \epsilon^2(0) \quad (1.18)$$

der klassischen Energie-Impuls-Beziehung

$$\epsilon_{kin}^{(kl)} = \frac{(p^{(kl)})^2}{2m(0)},$$

wobei  $\epsilon_{kin}^{(kl)}$  und  $p^{(kl)}$  die klassischen Größen sind. Gl. (1.18) ist eine Invariante unter Lorentz-Transformationen (warum?).

Transformation der Kraft:

Die Definition der Kraft  $\vec{F}$  beruht auf einer Konvention<sup>9</sup>. In der Newtonschen Mechanik sind die folgenden Formen äquivalent:

$$\vec{F} = m(0) \vec{a} = m(0) \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m(0) \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Hier ist  $\vec{a}$  die Beschleunigung. Für relativistische Geschwindigkeiten gilt aber Gl. (1.13), so dass die obigen vier Formen nicht mehr äquivalent sind.

Wir verwenden hier die Form

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(0) \gamma(v) \vec{a} + m(0) \vec{v} \frac{d}{dt} \gamma(v) .$$

D.h.,

$$\vec{F} = m(0) \gamma(v) \vec{a} + m(0) \gamma^3(v) \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{c^2} . \quad (1.19)$$

Man beachte, dass  $\vec{F}$  nicht mehr parallel zu  $\vec{a}$  sein muß. Die Transformationsformel für die Kraft lautet

---

<sup>9</sup>siehe auch H. Melcher Relativitätstheorie in elementarer Darstellung. Aulis Verlag Deubner & CoKg

$$\vec{F}' = \frac{\frac{\vec{F}}{\gamma(w)} + \vec{w} \left[ \left(1 - \frac{1}{\gamma(w)}\right) \frac{\vec{w} \cdot \vec{F}}{w^2} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{F} - \vec{v} \cdot \vec{p}}{v^2} \right]}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}} \quad (1.20)$$

(siehe Aufgabe). Hier bewegt sich das gestrichene System relativ zum ungestrichenen wieder mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{w}$ .

### 1.3 Wirkungsintegral freier Teilchen

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung (engl.: least action principle) gibt es für jedes mechanische System ein Wirkungsintegral  $S$ , das für die tatsächlich erfolgende Bewegung eines Teilchens ein Minimum besitzt, und dessen Variation  $\delta S$  daher verschwindet. Das Wirkungsintegral soll nicht vom Inertialsystem abhängen. D.h., es soll eine Invariante unter Lorentz-Transformationen sein. Es muß daher von Skalaren abhängig sein; die einzige Möglichkeit ist  $\alpha ds$ , wobei  $\alpha$  eine Konstante und

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.21)$$

der infinitesimale Abstand zweier Ereignisse ist<sup>10</sup>. Somit sollte gelten:

$$S = -\alpha \int_a^b ds . \quad (1.22)$$

---

<sup>10</sup>Im System  $K$  geht zum Zeitpunkt  $t_1$  am Ort  $x_1, y_1, z_1$  ein Lichtsignal aus (erstes Ereignis) und wird zur Zeit  $t_2$  am Ort  $x_2, y_2, z_2$  aufgefangen (zweites Ereignis). Es gilt

$$\begin{aligned} s_{21}^2 &\equiv c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 \\ &\quad - (z_2 - z_1)^2 = 0 , \end{aligned}$$

bzw. im System  $K'$

$$\begin{aligned} s'_{21}^2 &\equiv c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 \\ &\quad - (z'_2 - z'_1)^2 = 0 \end{aligned}$$

(siehe Aufgabe). D.h., verschwindet der Abstand  $s_{12}$  zweier Ereignisse in einem Inertialsystem, dann gilt dies auch für alle anderen. Sind zwei Ereignisse infinitesimal benachbart, so gilt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

Wie man leicht zeigen kann (vgl. [1] §2), ist  $ds$  und damit  $s$  eine Invariante unter Lorentz-Transformationen.

Hier gilt  $\alpha > 0$ , wie wir gleich sehen werden. Aus der speziellen Situation

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$$

folgt

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = \frac{dt}{\gamma(v)}$$

bzw.

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} .$$

Somit gilt

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha c}{\gamma(v)} dt .$$

Im klassischen Grenzfall erwarten wir

$$\lim_{v \rightarrow 0} S = \int_{t_1}^{t_2} L^{(kl)} dt$$

mit der klassischen Lagrange-Funktion<sup>11</sup>  $L^{(kl)} = m(0) v^2 / 2$ . Daraus folgt  $\alpha = m(0) c$ . Die relativistische Lagrange-Funktion des freien Teilchens ist somit

$$L = -\frac{m(0) c^2}{\gamma(v)} . \quad (1.23)$$

Aus  $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  folgt

$$\vec{p} = \gamma(v) m(0) \vec{v}$$

(vgl. Gl. (1.13)). Aus der Definition der Energie,  $\epsilon = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$ , folgt das schon bekannte Ergebnis

$$\epsilon(v) = \gamma(v) m(0) c^2 . \quad (1.24)$$

---

<sup>11</sup>Lagrange, Joseph Louis de, französischer Mathematiker, \*Turin 25.1. 1736, †Paris 10.4. 1813; herausragender Lehrer des 18.Jahrhunderts; Professor in Turin, Berlin und Paris, entwickelte die Variationsrechnung und wurde durch seine Zusammenfassung der Prinzipien der Mechanik zu den nach ihm benannten Gleichungssystemen der Begründer der analytischen Mechanik; Beiträge zur Theorie der analytischen Funktionen, zur Himmelsmechanik und Hydrodynamik. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG



## Kapitel 2

# Relativität und Elektrodynamik

### 2.1 Viervektoren

bzw.

Ein Ereignis habe die Koordinaten  $ct, x, y$  und  $z$ . Sie bilden die Komponenten  $x^i$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

eines vierdimensionalen Ortsvektors. Dessen Quadrat, gegeben durch

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 ,$$

ist invariant unter Lorentz-Transformationen<sup>1</sup>. Viervektoren heißen alle  $(A^0, A^1, A^2, A^3)$ , die sich wie der vierdimensionale Ortsvektor transformieren. Der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$$

ist das Skalarprodukt (hier Quadrat). Darin ist

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3 .$$

Die  $A^i$  heißen kontravariante und die  $A_i$  kovariante Komponenten. Wir verwenden die Summenkonvention, d.h., über doppelt vorkommende Indizes wird automatisch summiert:

$$\sum_{i=0}^3 A^i B_i \equiv A^i B_i \equiv A_i B^i \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i \equiv A^i A_i \equiv A_i A^i = A^2$$

Die Komponente  $A_0$  heißt zeitliche Komponente. Die übrigen Komponenten sind die räumlichen Komponenten. Wir schreiben auch  $A^i = (A^0, \vec{A})$ .

Der Vierergradient des Skalars  $\varphi$  ist der Vierervektor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla} \varphi \right) . \quad (2.2)$$

Die Ableitungen sind hierbei kovariante Komponenten, da

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$$

ein Skalar sein muß. Umgekehrt gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\vec{\nabla} \varphi \right) . \quad (2.3)$$

Kurzformen sind  $\partial^i = \partial/\partial x_i$  oder  $\partial_i = \partial/\partial x^i$ . Die Gesamtheit der 16 Größen  $A^{ik}$ , die sich wie Produkte von Komponenten von zwei Viervektoren transformieren, heißt Viertensor (4-Tensor) zweiter Stufe. Das Vorzeichen einer Komponente wird durch das Heben oder Senken eines räumlichen Index (1, 2, 3) geändert, durch die Bewegung eines zeitlichen (0) aber nicht. Z. B.:

---

<sup>1</sup>allgemein unter Drehungen im 4D Raum.

Bewegungsgleichung einer Ladung im Feld:

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00} & A_{01} &= -A^{01} \\ A_{11} &= A^{11} & A^0{}_1 &= -A^{01}, \dots \end{aligned}$$

$A^{ik}$  heißt symmetrisch, wenn  $A^{ik} = A^{ki}$  ist, und antisymmetrisch, wenn  $A^{ik} = -A^{ki}$  ist (d.h. gleichzeitig sind die Diagonalelemente Null). Die Größe

$$A^i{}_i = A_i{}^i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3 \quad (2.4)$$

ist die Spur. Die Spurbildung verjüngt hier den Tensor 2. Stufe zu einem Skalar.

Der Tensor  $g^{ik}$ , definiert durch

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

heißt metrischer Tensor. Offensichtlich ist

$$g_{ik}A^k = A_i \quad \text{bzw.} \quad g^{ik}A_k = A^i. \quad (2.6)$$

2. Für das Skalarprodukt gilt

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \quad (2.7)$$

## 2.2 Wirkungsintegral einer Ladung im Feld

Jetzt setzt sich das Wirkungsintegral aus dem Beitrag des freien Teilchens plus dem Feldbeitrag zusammen:

$$S = \int_a^b \left( -m(0) c ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right). \quad (2.8)$$

Hier ist  $e$  die Ladung und  $A^i = (\varphi, \vec{A})$ . Das Wirkungsintegral hat dann die Form

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \left( -m(0) c ds + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot d\vec{r} - e\varphi dt \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left( -\frac{m(0) c^2}{\gamma(v)} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\varphi \right)}_{=L} dt. \quad (2.9) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $ds^2 = dx_i dx^i = g^{ik} dx_i dx_k$

Wir betrachten die Variation des Wirkungsintegrals bzw. die resultierende Lagrange Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}. \quad (2.10)$$

Für  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma(v) m(0) \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (2.11)$$

und für  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$  gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \vec{\nabla} \varphi. \quad (2.12)$$

Mit der Identität

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \\ &\quad + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

(siehe Aufgabe) angewandt auf  $\vec{A} \cdot \vec{v}$  ( $\vec{v} = \text{konstant}$ ) folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e \vec{\nabla} \varphi. \quad (2.13)$$

Aus den Gl. (2.11) und (2.13) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \gamma(v) m(0) \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \\ = \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e \vec{\nabla} \varphi. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt auch noch  $\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$  beachten, dann erhalten wir für die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (2.14)$$

Wir definieren die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \quad (2.15)$$

die nicht von  $\vec{v}$  abhängt, sowie die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.16)$$

und aus Gl. (2.14) wird

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}. \quad (2.17)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird als Lorentz-Kraft bezeichnet.

Bemerkung: Ein elektromagnetisches Feld mit  $\vec{E} \neq 0$  und  $\vec{H} = 0$  heißt elektrisches Feld und umgekehrt mit  $\vec{E} = 0$  und  $\vec{H} \neq 0$  ein Magnetfeld.

Bemerkung: In die Bewegungsgleichung für die Ladung (2.17) gehen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  aber nicht  $\vec{A}$  bzw.  $\varphi$  ein. Die Gln. (2.15) und (2.16) aber sind invariant unter folgender Transformation:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}f \quad (2.18)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c}\dot{f}, \quad (2.19)$$

wobei  $f$  eine beliebige Funktion vom Ort und von der Zeit ist. D.h. mit (2.15) und (2.16) folgt

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}f\right) - \vec{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\dot{f}\right) = \vec{E} \\ \vec{H} &\rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla}f\right) = \vec{H}. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft heißt Eichinvarianz (engl.: gauge invariance).

Der elektromagnetische Feldstärketensor:

Wir betrachten explizit die Variation des Functionals (2.8) nach den  $x^i$ . Wir setzen  $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \left( m(0) c \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir definieren die Vierergeschwindigkeit  $u_i = \frac{dx_i}{ds}$ <sup>3</sup> und schreiben

<sup>3</sup> Beachte:  $ds = \frac{cdt}{\gamma(v)}$  und daher  $u_i = \gamma(v) \frac{dx_i}{d(ct)}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} &= \int u_i d\delta x^i \\ &= \int [d(u_i \delta x^i) - du_i \delta x^i] \\ &= \underbrace{\int_a^b u_i \delta x^i}_{\equiv 0} - \int du_i \delta x^i. \end{aligned}$$

Das zweite Glied wird ebenfalls partiell integriert, und wir erhalten

$$\int \left( m(0) c du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \delta x^i dA_i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0.$$

Mit

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \quad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k$$

wird daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left( m(0) c du_i \delta x^i \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) \\ &= \int \left[ m(0) c \frac{du_i}{ds} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i ds. \end{aligned}$$

Da  $\delta x^i$  willkürlich ist, muß [...] = 0 gelten, d.h.,

$$m(0) c \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k \quad (2.20)$$

sind die Bewegungsgleichungen der Ladung im Vierdimensionalen. Hier ist

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (2.21)$$

der elektromagnetische Feldstärketensor. Mit  $\frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$  sowie  $A_i = (\varphi, -\vec{A})$  folgt

$$\begin{aligned}
F_{01} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x - \frac{\partial}{\partial x} \varphi \stackrel{(2.15)}{=} E_x \\
F_{02} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_y - \frac{\partial}{\partial y} \varphi \stackrel{(2.15)}{=} E_y \\
&\vdots \\
F_{12} &= -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \stackrel{(2.16)}{=} -H_z \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

bzw.

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Bemerkung: Die Größe

$$F_{ik} F^{ik} = 2 (\vec{H}^2 - \vec{E}^2) \quad (2.24)$$

ist eine echte skalare Invariante. Man kann zeigen, dass auch

$$\vec{E} \cdot \vec{H} \quad (2.25)$$

eine Invariante ist (Aufgabe). D.h., gilt in einem Koordinatensystem  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , dann gilt dies für alle anderen Inertialsysteme ebenso. Allerdings ist  $\vec{E} \cdot \vec{H}$  das Produkt eines axialen und eines polaren Vektors. Polare Vektoren kehren ihre Richtung um, wenn die Koordinatenachsen gespiegelt werden. Axiale Vektoren (Vektorprodukte polarer Vektoren) tun dies nicht. Daher ist das Skalarprodukt  $\vec{E} \cdot \vec{H}$  nur ein sogenannter Pseudoskalar.

## 2.3 Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes

Jetzt interessieren wir uns für das Wirkungsintegral des Gesamtsystems gegeben durch

$$\begin{aligned}
S &= - \sum m(0) c \int ds \\
&\quad - \sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i + S_{Feld}.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Die beiden ersten Terme entsprechen dem uns schon bekannten Wirkungsintegral unabhängiger Ladungen im elektromagnetischen Feld.  $S_{Feld}$  dagegen ist jener Anteil der Wirkung, der nur von den Eigenschaften des Feldes abhängt, d.h. das Wirkungsintegral des Feldes, wenn keine Ladungen vorhanden sind. Bisher hatten wir uns nur für die Bewegung einer Ladung im Feld interessiert, so dass dieser Term keine Rolle spielte. Er ist jedoch zur Ableitung der Feldgleichungen nötig.

Wie aber sieht  $S_{Feld}$  aus? Eine naheliegende Wahl ist das Integral über die echte skalare Invariante  $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$ , d.h.,

$$S_{Feld} = a \int (\vec{H}^2 - \vec{E}^2) d\Gamma$$

mit  $d\Gamma = cdtdxdydz$ . Die Konstante muß negativ sein, da sonst gemäß Gl. (2.15) eine schnelle Änderung des Potenzials die Wirkung beliebig negativ machen würde, es gäbe also kein Minimum. Außerdem wollen wir, dass die resultierenden Differentialgleichungen linear in den Feldern sind. Damit ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Und dies ist das Superpositionsprinzip. Ausgedrückt durch den Feldstärketensor gilt  $\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$  und daher

$$S_{Feld} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Gamma. \quad (2.27)$$

Wir verwenden hier das Gauß'sche Maßsystem.

Bevor wir die endgültige Form von  $S$  angeben, schreiben wir den zweiten Term in Gl. (2.8) um. Dazu führen wir die Ladungsdichte

$$\rho = \sum_v e_v \delta(\vec{r} - \vec{r}_v) \quad (2.28)$$

ein. Die Größe  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_v)$  ist die Delta-Funktion<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Definition:  $\delta(x) = 0$  für alle  $x \neq 0$  und  $\delta(x) = \infty$  für

Damit folgt

$$\begin{aligned} -\sum \frac{e}{c} \int A_i dx^i &= -\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i dV dt \\ &= -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Gamma . \quad (2.30) \end{aligned}$$

Die Größe

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} \quad (2.31)$$

heißt Stromvierervektor. Der gewöhnliche räumliche Vektor lautet

$$\vec{j} = \rho \vec{v} . \quad (2.32)$$

$\vec{v}$  ist die normale 3-er Geschwindigkeit, und  $\vec{j}$  ist der Stromdichtevektor, d.h.  $\vec{j}$  ist die Ladung, die pro Zeiteinheit durch das Flächenelement senkrecht zu  $\vec{v}$  hindurchtritt. Die zeitliche Komponente von  $j^i$  ist  $c\rho$ .

$x = 0$  derart, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 .$$

Einige Eigenschaften:  $f(x)$  sei beliebige stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) .$$

Die Integrationsgrenzen brauchen nicht  $\pm\infty$  zu sein. Sie müssen aber den Punkt einschließen, an dem die Delta-Funktion nicht verschwindet. Weiterhin gilt (im Sinne der Integration über die beiden Seiten der Gleichungen)

$$\begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|} \delta(x - a_i) .$$

Hier ist  $\varphi(x)$  eine eindeutige Funktion, und die  $a_i$  sind die Lösungen von  $\varphi(x) = 0$ .

Definition in 3D:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) .$$

Mit den Gln. (2.27) und (2.30) lautet die endgültige Form des Wirkungsintegrals

$$\begin{aligned} S &= -\sum \int m(0) c ds \\ &\quad -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Gamma - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Gamma . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Maxwell Gleichungen im Vakuum:

Anwendung der Rotation auf beide Seiten der Gl. (2.15) ergibt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)}_{\equiv 0} .$$

Zusammen mit Gl. (2.16) folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{H}} \quad (2.34)$$

(Faradaysches Gesetz<sup>5</sup>). Anwendung der Divergenz auf beide Seiten von (2.16) ergibt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 . \quad (2.35)$$

Die Gln. (2.34) und (2.35) sind die ersten beiden von vier Maxwell Gleichungen.

Die anderen beiden Maxwell Gleichungen lassen sich aus der Variation des Wirkungsintegrals (2.33)

<sup>5</sup>Faraday, Michael, britischer Physiker und Chemiker, \*Newington Butts (heute zu London) 22.9. 1791, †Hampton Court Green bei London 25.8. 1867; bildete sich nach einer Buchbinderlehre autodidaktisch, wurde 1813 Laboratoriumsgehilfe bei H. Davy und 1825 dessen Nachfolger als Direktor des Laboratoriums der Royal Institution, danach auch Professor für Physik und Chemie. Faraday entdeckte das Benzol im Leuchtgas, die elektromagnetische Induktion, die Selbstinduktion, die dielektrischen und diamagnetischen Erscheinungen, die Drehung der Polarisationsebene des Lichts durch ein magnetisches Feld (Faradayeffekt, Magnetooptik) und die Grundgesetze der Elektrolyse. Faraday führte den Begriff der elektrischen und magnetischen Kraftlinien ein und konstruierte den ersten Dynamo. Werke: Experimental researches in electricity, 3 Bände (1844-55); Experimental researches in chemistry and physics (1859). Literatur: Lemmerich, J.: Michael Faraday 1791-1867 Erforscher der Elektrizität München 1991. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

nach den Potenzialen bei gegebenen Bahnkurven der Ladungen gewinnen<sup>6</sup>. Demnach folgt

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik} \right] d\Gamma = 0 ,$$

wobei  $F^{ik} \delta F_{ik} \equiv F_{ik} \delta F^{ik}$  verwendet wurde. Einsetzen von

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

liefert

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right] d\Gamma . \end{aligned}$$

Im zweiten Term in Klammern vertauschen wir  $i$  und  $k$ ; zusätzlich berücksichtigen wir  $F^{ki} = -F^{ik}$ . D.h.,

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[ \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right] d\Gamma .$$

Das zweite Glied wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} &\int F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i d\Gamma \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) d\Gamma \\ &\quad - \int \left( \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} \right) \delta A_i d\Gamma \\ &\stackrel{Gauß}{=} \oint F^{ik} \delta A_i df_k - \int \left( \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} \right) \delta A_i d\Gamma . \end{aligned}$$

Die räumlichen Integrationsgrenzen liegen im Unendlichen. Dort verschwindet das Feld. An den zeitlichen Anfangs- bzw. Endpunkten muß die Variation der Potenziale im Sinn des Prinzips der kleinsten Wirkung verschwinden. D.h., der Oberflächenbeitrag verschwindet, und wir erhalten

$$\int \left( \frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Gamma = 0 .$$

<sup>6</sup>Bei der Ableitung der Gl. (2.10) war dies gerade umgekehrt!

Aus der Willkürlichkeit der  $\delta A_i$  folgen die vier Gleichungen

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i . \quad (2.36)$$

Für  $i = 0$  ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho . \quad (2.37)$$

Für  $i = 1, 2, 3$  erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.38)$$

(mit  $\dot{\vec{E}} = 0$  heißt dies das Ampèresche Gesetz<sup>7</sup>. Dies sind die beiden anderen Maxwell Gleichungen.

Maxwell Gleichungen in Integralform:

Nach dem Stokeschen Satz angewandt auf Gl. (2.34) gilt

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{f} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

bzw.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot d\vec{f} \quad (2.39)$$

<sup>8</sup>. Auf die Gl. (2.35) wenden wir den Gauß'schen Satz an und erhalten

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{f} = 0 . \quad (2.40)$$

Analog gilt für (2.37)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int \rho dV . \quad (2.41)$$

<sup>7</sup>Ampère, André Marie, französischer Physiker und Mathematiker, \*Lyon 22.1. 1775, †Marseille 10.6. 1836; entdeckte Anziehung, Abstoßung und magnetische Wirkung elektrischer Ströme, erklärte den Magnetismus durch Molekularströme und stellte 1826 die erste mathematisch fundierte elektrodynamische Theorie auf. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>8</sup>Darauf das die Zeitableitung vor dem Integral steht kommen wir später noch zurück.

Und für (2.38)

(siehe Aufgabe) folgt

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cdot d\vec{f}. \quad (2.42)$$

Die Größe  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  heißt Verschiebungsstrom (engl.: displacement current).

Kontinuitätsgleichung:

Wir wenden die Divergenz auf beide Seiten von (2.38) an und erhalten

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{=0} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{(2.37)}{=} \frac{4\pi}{c} \dot{\rho} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

D.h.,

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.43)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \vec{j} \cdot d\vec{f}.$$

Die linke Seite ist die Ladungsveränderung im Volumen. Die rechte Seite liefert die Ursache, nämlich den Strom der Ladung durch die Oberfläche, wobei  $d\vec{f}$  nach außen weist. Gl. (2.43) ist die Kontinuitätsgleichung.

Energiedichte und Energiestrom:

Wir bilden  $-\vec{H} \cdot (2.34) + \vec{E} \cdot (2.38)$ , d.h.,

$$\begin{aligned} & - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ &= \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \dot{\vec{H}} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Mit der Identität

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (2.44)$$

mit

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (2.45)$$

$\vec{S}$  ist der sogenannte Poynting-Vektor <sup>9</sup>.

Jetzt integrieren wir die Gl. (2.44), d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV \\ = - \underbrace{\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV}_{\cong \sum e\vec{v} \cdot \vec{E}} - \oint \vec{S} \cdot d\vec{f}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die Summe läuft über alle Ladungen im Integrationsvolumen. Wenn die Grenzen des Volumens im Unendlichen liegen, dann gilt  $\oint \vec{S} \cdot d\vec{f} = 0$ , da dort die Felder verschwinden. Außerdem gilt

$$e\vec{v} \cdot \vec{E} = \frac{d}{dt} \epsilon_{kin}, \quad (2.47)$$

wobei  $\epsilon_{kin}$  die kinetische Energie der Ladungen inklusive ihrer Ruheenergie ist <sup>10</sup>. Demnach gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV + \sum \epsilon_{kin} \right] = 0 \quad (2.48)$$

Die Klammer [...] ist erhalten, und es liegt nahe, die Größe

<sup>9</sup>Poynting, John Henry, britischer Physiker, \*Monton (bei Manchester) 9.9. 1852, †Birmingham 30.3. 1914; arbeitete über Gravitation und Elektrodynamik, führte den Begriff der Energiestromdichte (Poynting-Vektor) ein. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>10</sup>Nebenrechnung:  $\epsilon_{kin}$  ist gegeben durch Gl. (1.24), d.h.,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \epsilon_{kin} &= \frac{d}{dt} (\vec{p} \cdot \vec{v} - L) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d}{dt} L \\ &\stackrel{(1.23)}{=} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \underbrace{m(0) c^2 \gamma(v) \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\stackrel{(1.13)}{=} \vec{p}} \end{aligned}$$

$$W = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} \quad (2.49)$$

als Energiedichte des elektromagnetischen Feldes zu betrachten.

Für ein endliches Volumen dagegen ist

$$\frac{\partial}{\partial t} [...] = - \oint \vec{S} \cdot d\vec{f}.$$

Die Größe  $\oint \vec{S} \cdot d\vec{f}$  ist der Energiestrom des Feldes durch die Oberfläche. D.h., der Poynting-Vektor ist die Energiestromdichte.

An dieser Stelle verfügen wir über eine vereinheitlichte Theorie der elektromagnetischen Kräfte! In den folgenden Kapiteln werden wir spezielle Lösungen und Konsequenzen der Maxwell-Gleichungen diskutieren.

# Kapitel 3

## Zeitunabhängige elektromagnetische Felder

### 3.1 Das elektrostatische Feld

Das Coulombsche Gesetz:

Gemäß Gl. (2.15) gilt jetzt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>. Aus der Maxwell Gleichung (2.37) folgt die Poisson Gleichung <sup>2</sup>

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (3.2)$$

bzw. in Abwesenheit von Ladungen die Laplace Gleichung <sup>3</sup>

<sup>1</sup>Bemerkung: Aufgrund von  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  gilt  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  und damit nach dem Stokeschen Satz  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ . Solche Felder nennt man konservativ.

<sup>2</sup>Poisson, Siméon Denis, französischer Mathematiker und Physiker, \*Pithiviers (Département Loiret) 21.6. 1781, †Paris 25.4. 1840; trug wesentlich zum Ausbau der Potenzialtheorie bei (Poisson-Gleichung), die er zur Lösung elektrostatischer und magnetischer Probleme anwandte. Poisson befasste sich u.a. mit Wärmeleitung und Wahrscheinlichkeitstheorie und gab als Grenzfall der Binomialverteilung die nach ihm benannte Poisson-Verteilung an, bei der die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses sehr klein, die Anzahl der unabhängigen Wiederholungen sehr groß ist. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>3</sup>Laplace, Pierre Simon Marquis de (seit 1817), französischer Physiker, Mathematiker, Astronom, \*Beaumont-en-Auge (Département Calvados) 28.3. 1749, †Paris 5.3. 1827; gab eine sehr detaillierte Darstellung der Bewegungsvorgänge der Himmelskörper, erklärte die Entwicklung des Sonnensystems (Kant-Laplace-Theorie). Laplace begründete

$$\Delta\varphi = 0 . \quad (3.3)$$

Das Feld  $\vec{E}$  einer einzelnen Ladung sollte radial-symmetrisch sein. D.h., für eine Ladung  $e$  im Ursprung sollte  $\vec{E}$  nur vom Ortsvektor  $\vec{r}$  abhängen. Gemäß Gl. (2.37) bzw. (2.41) liegt nahe

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.4)$$

und daher

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{r} . \quad (3.5)$$

Die Gl. (3.4) bzw. auch die Gl. (3.5) wird als Coulombsches Gesetz <sup>4</sup> bezeichnet. Für eine Verteilung von Ladungen  $e_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) gilt nach dem Superpositionsprinzip

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \int \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (3.6)$$

te die Potenzialtheorie und entwickelte u.a. die Laplace-Gleichung sowie die Laplace-Transformation, eine Integraltransformation, und verfasste Arbeiten zur Schwingungs- und Wärmelehre sowie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sein Hauptwerk ist *Traité de mecanique céleste* (5 Bände, 1799-1825). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>4</sup>Coulomb, Charles Augustin de, französischer Physiker und Ingenieur, \*Angoulême 14.6. 1736, †Paris 23.8. 1806; führte u.a. den Begriff des magnetischen Moments ein und begründete die Theorie der elektrischen Polarisation, fand 1785 mithilfe der von ihm erbauten Drehwaage das Grundgesetz der Elektrostatik (Coulombsches Gesetz). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

mit  $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ <sup>5</sup>. Für das elektrische Feld gilt dann

$$r'^2 = \gamma^2(w) (x - wt)^2 + y^2 + z^2.$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &= \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für das Vektorpotenzial gilt

$$\vec{A} = \gamma(w) \frac{\vec{w}}{c} \varphi' = \gamma(w) \frac{\vec{w} e}{c r'}.$$

Für die Kraft auf eine Ladung  $e$  am Ort  $\vec{r}$  aufgrund der Ladung  $e'$  am Ort  $\vec{r}'$  gilt nach Gl. (2.17) und Gl. (3.4)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{ee'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.8)$$

Bemerkung: Setzen wir  $\varphi = \frac{e}{r}$  sowie  $\rho = e\delta(\vec{r})$  in die Poisson Gleichung ein, so ergibt sich

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}). \quad (3.9)$$

Bemerkung: Das Kraftgesetz (3.8) ist funktional identisch mit dem entsprechenden Gesetz für die Gravitation. Allerdings ist die Gravitationskraft unglaublich viel schwächer: In MKSA-Einheiten  $(4\pi\epsilon_0)^{-1}e^2/(Gm_e(0)^2) = 4.2 \cdot 10^{42}$ , wobei  $G$  die Gravitationskonstante ist.

Eine Ladung in relativer Ruhe:

Wir betrachten die Situation in Abbildung 1.1, wobei die Ladung  $e$  im Ursprung von  $K'$  ruht, und fragen uns: wie sieht das Feld dieser Ladung vom System  $K$  gesehen aus? Zur Erinnerung: kontravariante Viervektoren  $A^i = (A^o, \vec{A})$  transformieren sich gemäß  $x^i = (x^o, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$ <sup>6</sup>. Insbesondere betrachten wir hier das Viererpotenzial  $A^i = (\varphi, \vec{A})$ . Im System  $K'$  gilt  $A^i = (\varphi, \vec{0})$  und die Verbindung zum  $K$ -System lautet

$$\varphi = \gamma(w) \varphi' = \gamma(w) \frac{e}{r'}$$

mit

<sup>5</sup>Im Abschnitt 1.7 der Referenz [3] ist gezeigt, dass Gl. (3.6) tatsächlich die Poisson Gleichung erfüllt.

<sup>6</sup> $A^o = \gamma(w) (A'^o + \frac{w}{c} A'^1)$ ,  $A^1 = \gamma(w) (A'^1 + \frac{w}{c} A'^o)$ ,  $A^2 = A'^2$ ,  $A^3 = A'^3$  (vgl. Gln. (1.1) bis (1.5)).

Gemäß Gl. (2.15),  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} \varphi$ , folgt mit

$$-\vec{\nabla} \varphi = \gamma(w) \frac{e}{r'^3} \begin{pmatrix} \gamma^2(w) (x - wt) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und

$$-\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\gamma(w) \frac{\vec{w} e}{c^2} \frac{1}{r'^3} \gamma^2(w) (x - wt) w$$

die Formel

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \gamma(w) \frac{e}{r'^3} \begin{pmatrix} x - wt \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{e \gamma(w)}{[\gamma^2(w) (x - wt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} x - wt \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit  $\vec{R} = (x - wt, y, z)$  und  $R^2 \sin^2 \theta = y^2 + z^2$ , d.h.,  $\theta$  ist der Winkel zur  $x$ -Achse (Bewegungsrichtung), folgt

$$\vec{E} = \frac{1 - \frac{w^2}{c^2}}{(1 - \frac{w^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} e \frac{\vec{R}}{R^3}. \quad (3.10)$$

Die Komponenten senkrecht und parallel zur Bewegungsrichtung sind

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} e \frac{\vec{R}}{R^3} \\ \vec{E}_{\parallel} &= \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) e \frac{\vec{R}}{R^3}. \end{aligned}$$

D.h., mit zunehmender Geschwindigkeit  $w$  wird das  $\vec{E}$ -Feld parallel zur Bewegungsrichtung gestaucht und senkrecht dazu gestreckt.

Energie  $U$  einer statischen Ladungsverteilung:

Gemäß Gl. (2.49) gilt

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2 dV \\ &\stackrel{(3.1)}{=} -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varphi dV \\ &= -\frac{1}{8\pi} \underbrace{\int \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \varphi) dV}_{\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int \vec{E} \varphi \cdot d\vec{f}} \\ &\quad = 0 \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int \varphi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\stackrel{\text{Gl. (2.37)}}{=} 4\pi\rho} dV. \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet im Unendlichen, da dort  $\vec{E}$  verschwindet. Somit gilt

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV \quad (3.11)$$

bzw.

$$U = \frac{1}{2} \sum_j e_j \varphi_j \quad (3.12)$$

$$\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{e_i e_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (3.13)$$

Als alternative Notation für  $\frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)}$  wird häufig  $\sum_{i < j}$  verwendet.

Bemerkung: In Gl. (3.13) haben wir explizit die Selbstenergie ( $i = j$ ) vermieden, für diesen Fall wird  $U$  unendlich und damit sinnlos. D.h., es gibt einen gewissen Grenzabstand  $r_0$ , unterhalb dessen unsere Elektrodynamik sinnlos wird. Aus den bisher bekannten Größen Elektronenruhemasse  $m_e(0)$ , Lichtgeschwindigkeit  $c$  und Elektronenladung  $-e_e$  sowie der Länge  $r_e$  konstruieren wir die dimensionslose Größe  $\frac{e_e^2}{r_e m_e(0)c^2}$  bzw.

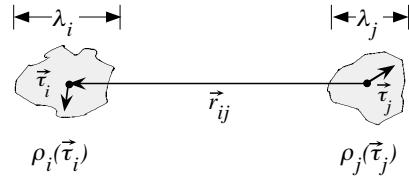


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung zweier Ladungsverteilungen  $\rho_i(\vec{r}_i)$  und  $\rho_j(\vec{r}_j)$  im Abstand  $r_{ij}$  voneinander.

$$r_e \sim \frac{e_e^2}{m_e(0)c^2}. \quad (3.14)$$

$r_e$  ist der sogenannte Elektronenradius ( $r_e \approx 2.810^{-15} m$ ). Quanteneffekte werden allerdings vorher schon wichtig (typische Länge  $\frac{\hbar}{m_e(0)c} \approx 3.9 \cdot 10^{-13} m$ ).

Die Multipolentwicklung:

Wir betrachten die in Abbildung 3.1 dargestellten Ladungsverteilungen  $\rho_i(\vec{r}_i)$  und  $\rho_j(\vec{r}_j)$ . Ihre Coulomb-Wechselwirkungsenergie ist

$$u_{ij} = \int \frac{\rho_i(\vec{r}_i) \rho_j(\vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j + \vec{r}_{ij}|} d^3\tau_i d^3\tau_j, \quad (3.15)$$

wobei über den gesamten Raum integriert wird. Wir nehmen an, dass der Abstand  $r_{ij}$  der beiden Ladungsverteilungen sehr viel größer ist als ihre jeweiligen räumlichen Ausdehnungen  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$ . Unter diesen Bedingungen ist es sinnvoll, den Integranden in Potenzen von  $r_{ij}^{-1}$  zu entwickeln. D.h., wir schreiben

$$\begin{aligned} |\vec{r}_i - \vec{r}_j + \vec{r}_{ij}|^{-1} &= \frac{1}{r_{ij}} \left| \vec{n} + \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} \right|^{-1} \\ &= \frac{1}{r_{ij}} \left( 1 + 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}} + \frac{\vec{r}_{ij}^2}{r_{ij}^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_{ij}} \left[ 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}} - \frac{1}{2} \frac{\vec{r}_{ij}^2}{r_{ij}^2} + \frac{3}{8} \left( 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{1}{r_{ij}^3}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r_{ij}} - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{r_{ij}^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{r}_i)^2 - \vec{r}_i^2 + 3(\vec{n} \cdot \vec{r}_j)^2 - \vec{r}_j^2}{r_{ij}^3} \\
&\quad + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j - 3(\vec{n} \cdot \vec{r}_i)(\vec{n} \cdot \vec{r}_j)}{r_{ij}^3} + O\left(\frac{1}{r_{ij}^4}\right).
\end{aligned}$$

Hier haben wir  $\vec{n} = \vec{r}_{ij}/r_{ij}$ , die Entwicklung  $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3x^2/8 + O(x^3)$  für kleine  $x$ , sowie die Abkürzung  $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$  verwendet. Als nächstes setzen wir die obige Entwicklung in (3.15) ein und definieren

$$e = \int \rho(\vec{r}) d^3\tau \quad (3.16)$$

$$\vec{p} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\tau \quad (3.17)$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 n_\alpha n_\beta Q_{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3\tau_\alpha \tau_\beta - \tau^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r}) d^3\tau. \quad (3.19)$$

Hier ist  $e$  die Gesamtladung und  $\vec{p}$  das Dipolmoment der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ . Die Größen  $Q_{\alpha\beta}$  sind die kartesischen Komponenten des Quadrupoltensors. Damit erhalten wir für die Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned}
u_{ij} &= \frac{e_i e_j}{r_{ij}} + \frac{\vec{n} \cdot (e_i \vec{p}_j - \vec{p}_i e_j)}{r_{ij}^2} \\
&\quad + \frac{e_i Q_j + Q_i e_j}{r_{ij}^3} \\
&\quad + \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j - 3(\vec{n} \cdot \vec{p}_i)(\vec{n} \cdot \vec{p}_j)}{r_{ij}^3} + O\left(\frac{1}{r_{ij}^4}\right).
\end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Terme auf der rechten Seite beschreiben der Reihe nach die Monopol-Monopol-, die Monopol-Dipol-, die Monopol-Quadrupol- und die Dipol-Dipol-Wechselwirkung der Ladungsverteilungen. Die folgenden Terme wären ein Dipol-Quadrupol- ( $\approx r_{ij}^{-4}$ ) und ein Quadrupol-Quadrupol-Term ( $\approx r_{ij}^{-5}$ ).

Es ist nützlich, die obige Multipolentwicklung aus einer zweiten unsymmetrischen Perspektive zu betrachten. Wir betrachten die Ladungsverteilung  $\rho_i(\vec{r}_i)$  im Feld der Ladungsverteilung  $\rho_j(\vec{r}_j)$ . D.h.

$$u_{ij} = \int \rho_i(\vec{r}_i) \varphi(\vec{r}_i + \vec{r}_j) d^3\tau_i.$$

Das Potenzial  $\varphi(\vec{r}_i + \vec{r}_j)$  ist bis einschließlich dem Quadrupolbeitrag durch die Taylor Entwicklung

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}_i + \vec{r}_j) &= \varphi(\vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i) \quad (3.21) \\
&\quad - \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 (3\tau_{i,\alpha} \tau_{i,\beta} - \tau_i^2 \delta_{\alpha\beta}) \\
&\quad \times \left. \frac{\partial E_\beta(\vec{r}_i + \vec{r}_i)}{\partial \tau_{i,\alpha}} \right|_{\vec{r}_i=0} + ...
\end{aligned}$$

gegeben<sup>7</sup>. Hier ist  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  das elektrische Feld hervorgerufen durch die Ladungsverteilung  $\rho_j$ . So mit erhalten wir für die Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned}
u_{ij} &= e_i \varphi(\vec{r}_i) - \vec{p}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i) \quad (3.22) \\
&\quad - \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 Q_{i,\alpha\beta} \left. \frac{\partial E_\beta(\vec{r}_i + \vec{r}_i)}{\partial \tau_{i,\alpha}} \right|_{\vec{r}_i=0} + ...
\end{aligned}$$

Insbesondere liefert der Vergleich von (3.22) mit (3.20)

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \frac{e_j \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \left[ \frac{\vec{p}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{p}_j) \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \right] + ... \quad (3.23)$$

Bemerkung: Es ist möglich, folgendes Theorem zu beweisen. Das niedrigste, nicht verschwindende Moment einer Ladungsverteilung ist unabhängig vom Ursprung. Dies gilt in der Regel nicht für die höheren, nicht verschwindenden Momente.

## 3.2 Randwertprobleme der Elektrostatik - ideale Leiter im Vakuum

Durchgang durch eine geladene Leiterplatte:

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{7}{2}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_\tau)(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_\tau)\varphi} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \tau_\alpha \tau_\beta \nabla_\alpha E_\beta (+\frac{1}{6} \tau^2 \underbrace{\nabla_\alpha \cdot \vec{E}}_{=0}) \\
&\text{und } (...) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{6} \tau^2 \delta_{\alpha, \beta} \frac{\partial E_\beta}{\partial \tau_\alpha}
\end{aligned}$$

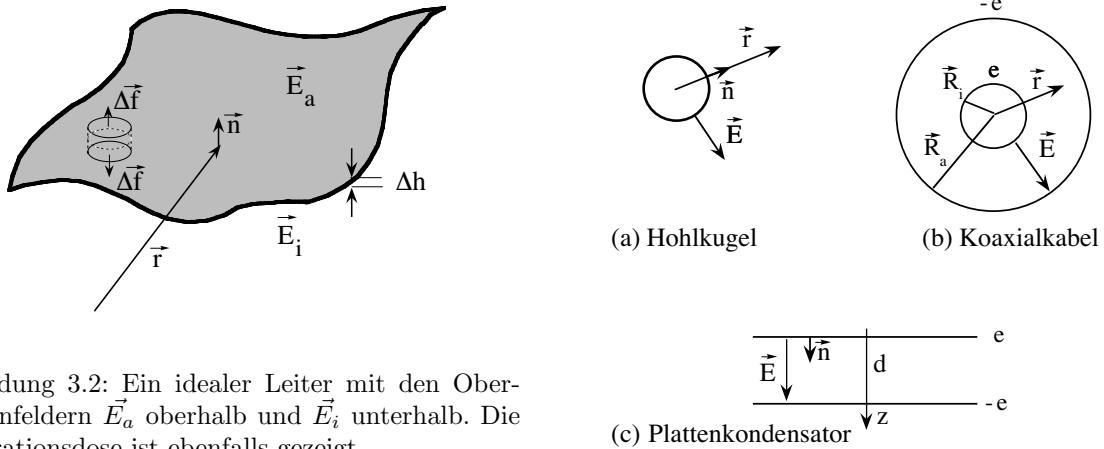


Abbildung 3.2: Ein idealer Leiter mit den Oberflächenfeldern  $\vec{E}_a$  oberhalb und  $\vec{E}_i$  unterhalb. Die Integrationsdose ist ebenfalls gezeigt.

Wir untersuchen die Potenzial- bzw. Feldverläufe in und um ideale Leiter<sup>8</sup>. Abbildung 3.2 zeigt einen solchen Leiter der Dicke  $\Delta h$ . Nach Gl. (2.41) gilt

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int \rho dV .$$

Wir schreiben  $\sigma(\vec{r}) = \Delta h \rho(\vec{r})$ , wobei  $\sigma(\vec{r})$  die Flächenladungsdichte ist. Außerdem gilt  $\Delta V = \Delta f \Delta h$ . D.h., für eine geschlossene Dose, deren Deckel sich unmittelbar über der Fläche befindet und ihr Boden unmittelbar darunter (vgl. Abbildung), folgt

$$(\vec{E}_a(\vec{r}) - \vec{E}_i(\vec{r})) \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma(\vec{r}) . \quad (3.24)$$

$\varphi$  und  $\vec{E}$  in einigen einfachen Leitergeometrien:

Ein spezieller Fall dieser Betrachtung ist die Hohlkugel mit gleichförmiger Ladungsverteilung  $\sigma$  (siehe Abbildung 3.3 (a)). Da es im Inneren keine Ladungen gibt, gilt dort

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{f} = 0 .$$

Dies gilt insbesondere, wenn wir über eine auf den Mittelpunkt der Hohlkugel zentrierte beliebige Kugelfläche integrieren. Auf dieser Fläche ist  $\vec{E}_i \cdot d\vec{f} =$

<sup>8</sup>In idealen Leitern können sich Ladungen unbehindert in dem herrschenden elektrischen Feld bewegen.

Abbildung 3.3: Verschiedene Spezialfälle im Kontext von Gl. (3.24).

konstant und daher  $\vec{E}_i = 0$ . Somit ist  $\vec{E}_i = 0$  überall in der Hohlkugel<sup>9</sup>.

Wir erhalten also für das äußere Feld im Abstand  $\vec{r}$  vom Kugelzentrum

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} .$$

Dies ist das bekannte Coulombsche Gesetz (vgl. Gl. (3.4)), wobei hier  $e$  die Gesamtladung der Kugel ist<sup>10</sup>.

Ein weiterer Spezialfall ist das Koaxialkabel (siehe Abbildung 3.3 (b)) mit  $R_i$  als Radius des Innenzylinders (Ladung  $e$ ) und  $R_a$  als Radius des Außenzylinders (Ladung  $-e$ ). Mit dem gleichen Argument wie eben gilt  $\vec{E}(\vec{r}) = 0$  für  $r < R_i$ . Hier ist  $r$  der senkrechte Abstand von der Zylinderachse. Für  $R_i \leq r < R_a$  dagegen ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{4\pi e}{2\pi r l} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{2e}{lr} \frac{\vec{r}}{r} . \quad (3.25)$$

Hier ist  $e/l$  die Ladung auf dem inneren Zylinder pro Längeneinheit. Für das Potenzial  $\varphi(\vec{r})$  gilt

<sup>9</sup>Selbst wenn die Oberflächenladungsverteilung nicht gleichförmig und die Oberfläche keine Kugel ist, gilt immer noch  $\vec{E}_i = 0$  (Warum? Stichwort: Faradayscher Käfig).

<sup>10</sup>Diese Gleichung gilt natürlich für jede radialsymmetrische Ladungsverteilung, wobei  $e = e(r)$  die bis zum Radius  $r$  aufintegrierte Ladung ist.

gemäß  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{2e}{l} \ln r . \quad (3.26)$$

Die Kapazität, Ladung/Potenzialdifferenz, des Kabels ist

$$C = \frac{e}{\Delta\varphi} = \frac{l}{2} \left[ \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) \right]^{-1} . \quad (3.27)$$

Die Größe  $\Delta\varphi = \varphi(R_i) - \varphi(R_a)$  heißt Spannung.

Ganz außen, für  $r > R_a$ , gilt wieder  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  bzw.  $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ .

Ein letzter Spezialfall ist der Plattenkondensator (Abbildung 3.3 (c)). Er kann als Grenzfall des Koaxialkabels für  $R_i, R_a \rightarrow \infty$  mit  $R_a - R_i = d$  erhalten werden. Aus Gl. (3.25) folgt dann

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n} , \quad (3.28)$$

wobei  $\sigma$  die Flächenladungsdichte  $e/(2\pi rl)$  ist.  $\vec{n}$  steht senkrecht auf der (inneren) Platte mit der positiven Ladung  $e$ . Man beachte, das  $\vec{E}$  im gesamten Innenraum des Kondensators konstant ist<sup>11</sup>. Außen verschwindet es. Für das Potenzial gilt

$$\varphi(z) = - \int_0^z 4\pi\sigma dz = -4\pi\sigma z . \quad (3.29)$$

Hier ist  $z$  die Koordinate senkrecht zur Fläche mit der Ladung  $e$ . Wenn die Platten den Abstand  $d$  haben, dann ist die Kapazität

$$C = \frac{e}{\varphi(0) - \varphi(d)} = \frac{A}{4\pi d} , \quad (3.30)$$

wobei  $A$  die Fläche einer Platte ist.

Bevor wir auf verschiedene Berechnungsmethoden für die Potenzialverläufe bzw. Feldverläufe eingehen, wollen wir kurz den Fall des Potenzialverlaufs beim Durchgang durch eine elektrische Doppelschicht betrachten.

<sup>11</sup>Natürlich treten bei realen Kondensatoren Abweichungen an den Rändern auf.

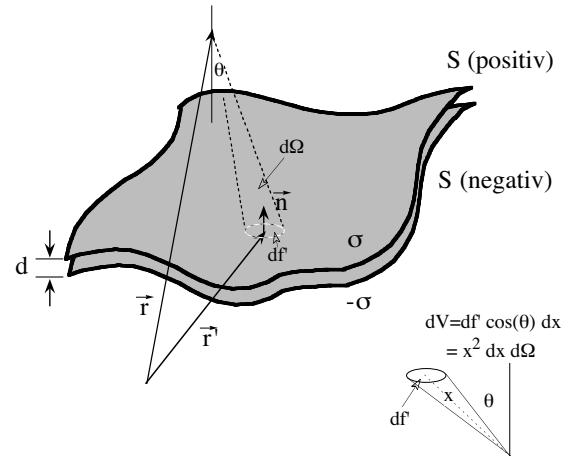


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung einer elektrischen Doppelschicht. Die Größen sind im Text erklärt. Der Einsatz zeigt den Zusammenhang mit dem Raumwinkelement  $d\Omega$ , wobei  $x \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$  ist.

#### Elektrische Doppelschicht:

Wir stellen uns zwei Leiterflächen  $S$  und  $S'$  (wie die in Abbildung 3.2 gezeigte) vor, die den kleinen Abstand  $d$  voneinander haben (siehe Abbildung 3.4). Der erste Leiter trägt die Ladungsdichte  $\sigma(\vec{r})$ , der zweite trägt die Ladungsdichte  $-\sigma(\vec{r})$ . Insgesamt entspricht diese Geometrie einer Dipolfläche bzw. einer elektrischen Doppelschicht, deren Potenzial durch

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{f}' - \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}' + \vec{n}d|} d\vec{f}' \quad (3.31)$$

gegeben ist.

Wir gehen von  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg d$  aus und entwickeln

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' + \vec{n}d|} &= \frac{1}{\sqrt{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + d^2 + 2d\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}} \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left( 1 - \frac{d\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + d\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \dots . \end{aligned}$$

Wenn wir dies in Gl. (3.31) einsetzen und gleichzeitig  $d \rightarrow 0$  betrachten (d.h.,  $S \rightarrow S'$ ) folgt

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_S \sigma(\vec{r}') d\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df' .$$

Wir nennen  $D(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') d$  die Dipolflächendichte und schreiben ( mit  $\nabla_{\vec{r}} \dots = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \dots$  )

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_S D(\vec{r}') \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df'}_{= -\frac{\cos \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} df' = -d\Omega} \\ &= - \int_S D(\vec{r}') d\Omega \end{aligned} \quad (3.32)$$

(vgl. Abbildung 3.4).

Die Formel (3.32) erlaubt es, den Potenzialsprung  $\Delta\varphi$  beim Durchgang durch die Doppelschicht hinzuschreiben. D.h., beim Durchgang von oben (laut Abbildung 3.4) nach unten gilt

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{unten} - \varphi_{oben} \\ &= 2\pi D + 2\pi D = 4\pi D \end{aligned} \quad (3.33)$$

wenn  $D(\vec{r}')$  örtlich konstant ist.

Wir betrachten nun Methoden zur Berechnung von  $\varphi(\vec{r})$  bzw.  $\vec{E}(\vec{r})$  in komplexen Leitergeometrien im Vakuum. D.h., wir lösen die Laplace Gleichung <sup>12</sup> unter vorgegebenen Randbedingungen auf den Leiteroberflächen. Man unterscheidet in der Regel -

Dirichletsche Probleme <sup>13</sup>:  $\Delta\varphi = 0$  im Inneren eines Bereiches  $B$  und  $\varphi|_{\partial B} = h$  auf dem Rand  $\partial B$ .  $h$  ist eine vorgegebene (stetige) Funktion auf  $\partial B$ .

<sup>12</sup>Bemerkung: Eine Funktion, deren 1. und 2. Ableitung stetig ist, und die Lösung der Laplace-Gleichung ist, heißt harmonische Funktion.

<sup>13</sup>Dirichlet, Johann Peter Gustav, eigentlich Lejeune-Dirichlet, Mathematiker, \*Düren 13.2. 1805, †Göttingen 5.5. 1859; arbeitete besonders über Zahlentheorie, unendliche Reihen, Integralrechnung, Potenzialtheorie und Randwertprobleme. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Neumannsche Probleme <sup>14</sup>:  $\Delta\varphi = 0$  in  $B$  und  $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}|_{\partial B} = g$ . Hier ist  $\partial\varphi/\partial\vec{n}$  die Normalenableitung und  $g$  ist wieder eine vorgegebene (stetige) Funktion auf  $\partial B$ .

Man kann zeigen (siehe Jackson I.9), dass diese Randbedingungen für eine eindeutige Lösung ausreichen!

Die Bildladungsmethode:

Die Abbildung 3.5 zeigt eine Punktladung im Abstand  $a$  von der ebenen Oberfläche eines idealen Leiters. Im Gleichgewicht bedeutet dies  $F_x = F_y = 0$  für die Kraft auf eine Ladung an der Leiteroberfläche. Daraus folgt  $E_x = E_y = 0$  bzw.  $\vec{E} \perp$  zur Leiteroberfläche. Daraus folgt  $\varphi = \text{konstant}$  entlang der Leiteroberfläche. Hier setzen wir  $\varphi(z=0) = 0$ ; man spricht von Erdung. In der unmittelbaren Umgebung von  $e$  dagegen gilt das Coulombsche Gesetz. Diese Vorgaben werden mit dem Bildladungsansatz

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} + \frac{e'}{|\vec{r} - \vec{r}_{e'}|} \quad (3.34)$$

erfüllt falls  $e' = -e$  und  $\vec{r}_{e'} = -\vec{r}_e$  gesetzt wird.

Interessant ist noch die tatsächliche Verteilung der induzierten Ladung in der Leiterebene. Diese folgt aus (3.24)

$$-\frac{d\varphi(\vec{r}, z)}{dz} \Big|_{z=0} = 4\pi\sigma(\vec{r}) ,$$

wobei  $\vec{r} = (x, y)$  ist. Mit  $\vec{r}_e = (0, 0, a)$  und  $\vec{r} = (\vec{r}, z)$  folgt

$$\varphi(\vec{r}, z) = \frac{e}{\sqrt{\tau^2 + (z - a)^2}} - \frac{e}{\sqrt{\tau^2 + (z + a)^2}}$$

bzw.

$$\sigma(\vec{r}) = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{(\tau^2 + a^2)^{3/2}} . \quad (3.35)$$

<sup>14</sup>Neumann, Franz Ernst, Physiker und Mineraloge, \*Johannisthal (Kreis Barnim) 11.9. 1798, †Königsberg (Pr) 23.5. 1895; Begründer der mathematischen Physik in Deutschland, grundlegende theoretische und experimentelle Arbeiten zur Wellenlehre des Lichts, zur Elektrodynamik und zur Kristallographie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

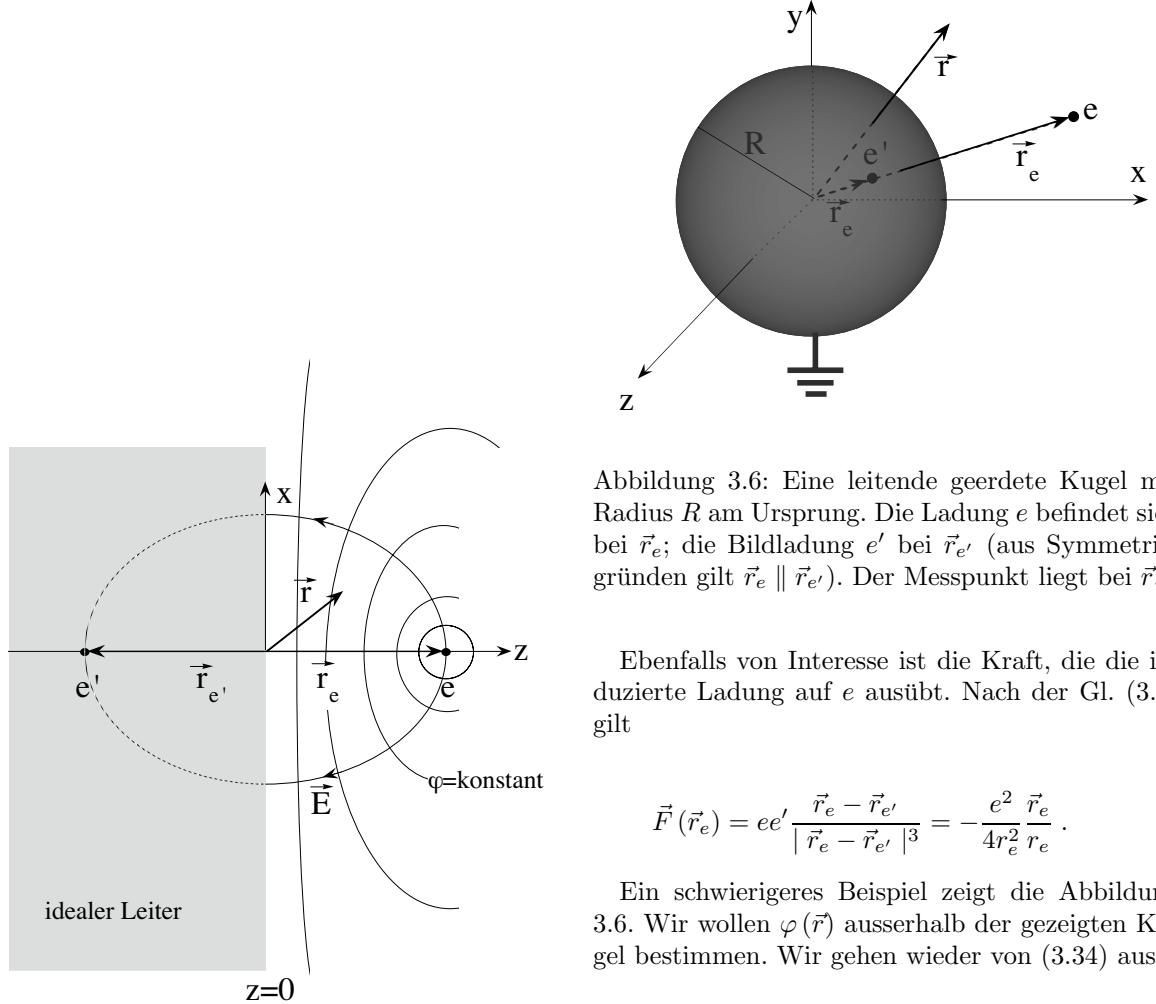


Abbildung 3.6: Eine leitende geerdete Kugel mit Radius  $R$  am Ursprung. Die Ladung  $e$  befindet sich bei  $\vec{r}_e$ ; die Bildladung  $e'$  bei  $\vec{r}'_{e'}$  (aus Symmetriegründen gilt  $\vec{r}_e \parallel \vec{r}'_{e'}$ ). Der Messpunkt liegt bei  $\vec{r}$ .

Ebenfalls von Interesse ist die Kraft, die die induzierte Ladung auf  $e$  ausübt. Nach der Gl. (3.8) gilt

$$\vec{F}(\vec{r}_e) = ee' \frac{\vec{r}_e - \vec{r}'_{e'}}{|\vec{r}_e - \vec{r}'_{e'}|^3} = -\frac{e^2}{4r_e^2} \frac{\vec{r}_e}{r_e}.$$

Ein schwierigeres Beispiel zeigt die Abbildung 3.6. Wir wollen  $\varphi(\vec{r})$  außerhalb der gezeigten Kugel bestimmen. Wir gehen wieder von (3.34) aus:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{n}\vec{r} - \vec{n}'\vec{r}_e|} + \frac{e'}{|\vec{n}\vec{r} - \vec{n}'\vec{r}'_{e'}|}.$$

Hier ist  $\vec{n} = \vec{r}/r$  bzw.  $\vec{n}' = \vec{r}'_{e'}/r_{e'}$ . D.h.,

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{e}{R |\vec{n} - \frac{r_e}{R} \vec{n}'|} + \frac{e'}{r_{e'} |\vec{n}' - \frac{R}{r_{e'}} \vec{n}|}. \quad (3.36)$$

Um  $\varphi(\vec{R}) = 0$  für beliebige  $\vec{n} \cdot \vec{n}'$  zu erreichen, muß

$$\frac{e}{R} = -\frac{e'}{r_{e'}} \quad \frac{r_e}{R} = \frac{R}{r_{e'}}.$$

gelten, und somit folgt

$$r_{e'} = \frac{R^2}{r_e} \quad e' = -\frac{R}{r_e} e. \quad (3.37)$$

Auch hier ist es interessant, die Kraft auf die Ladung  $e$  zu berechnen. Nach dem Coulombschen Gesetz bzw. Gl. (3.8) gilt wieder

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}_e) &= \underbrace{\frac{ee'}{-R_e^2}}_{=r_e^{-2}} \underbrace{\frac{\vec{r}_e - \vec{r}_{e'}}{|\vec{r}_e - \vec{r}_{e'}|^3}}_{=r_e^{-2} \left(1 - \frac{R^2}{r_e^2}\right)^{-2} \vec{n}} \quad (3.38) \\ &= -\frac{e^2}{R^2} \left(\frac{R}{r_e}\right)^3 \left(1 - \frac{R^2}{r_e^2}\right)^{-2} \vec{n} \\ &\xrightarrow{R \ll r_e} -\frac{e^2 R}{r_e^3} \vec{n}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Ebene geht hier die Kraft mit  $1/r_e^3$ !

Kurze Diskussion verschiedener Spezialfälle:

(a) Die Kugel in Abbildung 3.6 ist nicht geerdet und trägt die Überschussladung  $e_{ex}$ . Wie sieht  $\varphi(\vec{r})$  für diesen Fall aus? Antwort: Wenn die Kugel in Abbildung 3.6 von ihrer Erdung „abgeschnitten“ wird, trägt sie die Überschussladung (Bildladung)  $e'$ . D.h., der Rest  $e_{ex} - e'$  kann sich gleichförmig über die Kugel verteilen und es gilt einfach

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_{geerdet}(\vec{r}) + \frac{e_{ex} - e'}{|\vec{r}|}. \quad (3.39)$$

(b) Die Kugel in Abbildung 3.6 wird auf dem festen Potenzial  $\varphi_{ext}$  gehalten. In diesem Fall gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_{geerdet}(\vec{r}) + \frac{\varphi_{ext} R}{|\vec{r}|}, \quad (3.40)$$

da  $\varphi_{geerdet}(\vec{R}) = 0$ .

(c) Die Kugel in Abbildung 3.6 ohne die Ladung  $e$  wird einem konstanten  $\vec{E}$ -Feld in  $X$ -Richtung ausgesetzt. Wie sieht  $\varphi(\vec{r})$  aus? Diese Situation kann trickreich durch Ladungen  $e$  und  $-e$  erreicht werden, die bei  $x = -a$  und  $x = a$  liegen, wenn  $a \gg R$  gilt! Nach dem Superpositionsprinzip folgt

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{e}{|\vec{r} + \vec{n}_x a|} + \frac{-\frac{R}{a} e}{|\vec{r} + \vec{n}_x \frac{R^2}{a}|} \\ &+ \frac{-e}{|\vec{r} - \vec{n}_x a|} + \frac{\frac{R}{a} e}{|\vec{r} - \vec{n}_x \frac{R^2}{a}|}. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $|\vec{r} \pm \vec{n}_x a|^2 = r^2 + a^2 \pm 2ra \cos \theta$ , wobei  $\theta$  der Winkel des Betrachtungspunktes  $\vec{r}$  zur x-Achse ist. Wir bleiben mit dem Betrachtungspunkt in der Nähe der Kugel und entwickeln in  $r/a \ll 1$  mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= -\frac{2e}{a^2} r \cos \theta + \frac{2e}{a^2} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta + \dots \quad (3.41) \\ &= -E(x=0) \left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) \cos \theta, \end{aligned}$$

wobei  $E(x=0) = \frac{2e}{a^2}$  das Feld bei  $x=0$  ist. Für die Oberflächenladungsverteilung gilt

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta. \quad (3.42)$$

$\Delta \varphi = 0$  und konforme Abbildungen:

Die Idee dieser Methode ist wie folgt. Gesucht ist der Potenzialverlauf  $\varphi(\vec{r})$  in einer komplizierten Leitergeometrie, d.h., die Lösung von  $\Delta \varphi(\vec{r}) = 0$  mit komplizierten Randbedingungen. Man weicht der direkten Lösung aus, indem man versucht, eine Abbildung  $\vec{r} = f(\vec{u})$  zu finden, die die komplexe Geometrie im  $\vec{r}$ -Raum auf eine vereinfachte Geometrie im  $\vec{u}$ -Raum abbildet. Gleichzeitig soll  $\vec{\nabla}_{\vec{u}}^2 \varphi(f(\vec{u})) = 0$  gelten.

Im allgemeinen funktioniert dies nur in zwei Dimensionen, wobei die  $f$  analytische Funktionen  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  (mit  $z = x + iy$ ) sind. Dann nämlich gilt<sup>15</sup>

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right). \quad (3.43)$$

<sup>16</sup>. Mit  $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \neq 0$  folgt tatsächlich  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0$ . Die Abbildung  $f(z)$  nennt man auch konforme Abbildung (im kleinen Winkeltreu).

Beispiel: Potenzialverlauf in einem Zylinder aus zwei Hälften auf unterschiedlichem Potenzial (vgl. Abbildung 3.7). Wir betrachten den Zylinder entlang seiner Achse. Die obere Zylinderhälfte ist auf

<sup>15</sup>gezeigt z.B. in M. R. Spiegel (1971) Advanced Mathematics. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill

<sup>16</sup>  $|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ .

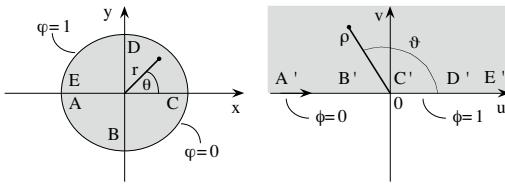


Abbildung 3.7: Links: Das eigentliche Problem. Rechts: Das einfache Problem, wobei die obere Halbebene anschließend auf das Innere des Kreises abgebildet wird.

dem Potenzial  $\varphi = 1$ , die untere auf dem Potenzial  $\varphi = 0$ . Anstatt die Laplace Gleichung mit diesen Randbedingungen direkt zu lösen, betrachten wir zunächst das etwas einfachere Problem auf der rechten Seite der Abbildung. Dort bestimmen wir den Potenzialverlauf in der oberen  $w$ -Ebene, wobei die Wand bei  $v = 0$  für  $u < 0$  das Potenzial  $\phi = 0$  hat und für  $u > 0$  das Potenzial  $\phi = 1$ .

Wir machen den Ansatz

$$\phi = A\vartheta + B \quad \text{mit} \quad \vartheta = \arctan \frac{v}{u},$$

der die Laplace Gleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \phi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \phi = 0$$

erfüllt. Hier ist  $\rho^2 = u^2 + v^2$ , und  $h$  ist die Koordinate entlang der Zylinderachse, die hier nicht interessiert. Die Konstanten bestimmen wir aus den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 &= A\pi + B \\ 1 &= B. \end{aligned}$$

Die Lösung in der Halbebene lautet daher

$$\phi = 1 - \frac{\vartheta}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{v}{u} \right).$$

Diese Lösung kann mittels der konformen Abbildung

$$w = i \frac{1-z}{1+z} \quad (3.44)$$

in den Einheitskreis abgebildet werden. D.h.,

$$u = \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2} \quad v = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2} \quad (3.45)$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{1 - [x^2 + y^2]}{2y} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{1 - r^2}{2r \sin \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

In einer der Aufgaben werden Sie zeigen, dass  $\varphi(r, \theta)$  tatsächlich eine Lösung der Laplace Gleichung ist, und das es die Randbedingungen erfüllt<sup>17</sup>.

Lösung von  $\Delta \varphi = 4\pi\rho$  als Integralgleichung:

Für eine Ladungsverteilung ohne Randwertbedingungen ist Gl. (3.6) die bequemste Lösung. Das Pendant zu Gl. (3.6) inklusive Randbedingungen ist

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (3.47) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] df'. \end{aligned}$$

Hier ist  $\partial/\partial n'$  die Ableitung in Normalenrichtung (nach außen) auf der Oberfläche des Volumens  $V$ . Man beachte, die linke Seite von (3.47) ist Null (aber nicht unbedingt  $\varphi(\vec{r})$ !) für  $\vec{r}$  außerhalb von  $V$ <sup>18</sup>. Während die Bildladungsmethode oder konforme Abbildungen mehr für spezielle Fälle geeignet sind, lässt sich aus Gl. (3.47) ein allgemeines Lösungsschema konstruieren.

Begründung der Gl. (3.47): Durch Einsetzen der Beziehungen

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \varphi \vec{\nabla}^2 \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi$$

und

<sup>17</sup>Oberflächenladung berechnen!

<sup>18</sup>wird aus der Herleitung von Gl. (3.47) klar.

$$\varphi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

in das Gauß'sche Theorem,  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} df$   
mit  $\vec{A} = \varphi \vec{\nabla} \psi$  folgt

$$\int_V (\varphi \vec{\nabla}^2 \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) dV = \oint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} df \quad (3.48)$$

(die erste Greensche Beziehung). Wenn wir in dieser Gleichung die skalaren Felder  $\varphi$  und  $\psi$  vertauschen und diese neue Gleichung von der ursprünglichen subtrahieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_V (\varphi \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \varphi) dV \\ &= \oint_{\partial V} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df. \end{aligned} \quad (3.49)$$

(die zweite Greensche Beziehung). Mit  $\psi = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$  sowie Gl. (3.9) und Gl. (3.2) ergibt sich unmittelbar Gl. (3.47) (wobei auch die gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten zu vertauschen sind).

Formale Lösung mit der Greens-Funktion:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' \quad (3.52) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right. \\ &\quad \left. - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] df'. \end{aligned}$$

Dirichlet-Bedingungen lassen sich jetzt einfach durch

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{\partial V'} = 0 \quad (3.53)$$

erfüllen, d.h.,

$$\begin{aligned} \varphi_D(\vec{r}) &= \int_V \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' \quad (3.54) \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \varphi_D(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} df'. \end{aligned}$$

Neumann-Bedingungen dagegen verlangen

$$\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \Big|_{\partial V'} = -\frac{4\pi}{\partial V} \quad (3.55)$$

<sup>19</sup> und somit

Wir machen den Ansatz

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + K(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (3.50)$$

wobei  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  die sogenannte Greens-Funktion ist, und außerdem

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'}^2 K(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (3.51)$$

(im Volumen  $V$ ) gelten soll. Der Sinn ist, dass wir Gl. (3.50) in Gl. (3.49) einsetzen können, um eines der Oberflächenintegrale zu eliminieren. Damit können wir die Randwertbedingungen entweder auf den Neumann-Typ oder auf den Dirichlet-Typ beschränken! Denn wenn wir jetzt in Gl. (3.49)  $\psi = G$  setzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi_N(\vec{r}) &= \int_V \rho(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r' \quad (3.56) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\partial V} \oint_{\partial V} \varphi_N(\vec{r}') d^3 r}_{\equiv \langle \varphi_N(\vec{r}') \rangle_{\partial V}} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\partial \varphi_N}{\partial n'} G_N df' \end{aligned}$$

Hier ist  $\langle \varphi_N(\vec{r}') \rangle_{\partial V}$  das mittlere Potenzial auf dem Rand von  $V$ . Da man die Bedingungen (3.53) sowie (3.55) wählen kann, die übrigens nicht von den spezifischen Randwerten abhängen, liegt natürlich an der Beliebigkeit von  $K(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{\partial V'}$ .

Dies beendet unsere Diskussion von Randwertproblemen der Elektrostatik. Eine umfassende Darstellung geben Kapitel 2 und 3 in [3].

<sup>19</sup>folgt aus  $\int_V dV' \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G) = \oint_{\partial V} d\vec{f}' \cdot \vec{\nabla} G = \oint_{\partial V} df' \partial G / \partial n'$  und  $\int_V dV' \Delta G = -4\pi \int_V dV' \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ .

### 3.3 Zeitunabhängige Magnetfelder

D.h.,

Das Biot-Savartsche Gesetz:

Wir betrachten die Maxwell Gleichungen (2.35) und (2.38) für stationäre Ströme. Die zeitliche Mittelung von (2.35) gibt einfach

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{H} \rangle = 0.$$

Im Fall von (2.38) erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \langle \vec{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle,$$

wobei  $\dot{\langle \vec{E} \rangle} = 0$  gilt<sup>20</sup>. Mit  $\vec{\nabla} \times \langle \vec{A} \rangle = \langle \vec{H} \rangle$  folgt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \langle \vec{A} \rangle) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{A} \rangle) - \Delta \langle \vec{A} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle.$$

Mittels einer Eichtransformation  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f$  gelingt  $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{A} \rangle = 0$ , und damit

$$\Delta \langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}(\vec{r}) \rangle. \quad (3.57)$$

Die Lösung ist

$$\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (3.58)$$

in Analogie zur Lösung (3.6) der Poisson Gleichung (3.2). Jetzt folgt  $\langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle$  aus

$$\begin{aligned} \langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle &= \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{c} \int \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{\langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{1}{c} \int \left[ \underbrace{(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|})}_{=-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \times \langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle \right] d^3 r' \quad (3.59) \\ &\quad + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle}_{=0} d^3 r'. \end{aligned}$$

<sup>20</sup>  $\dot{\langle \vec{E} \rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\vec{E}} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\vec{E}(T) - \vec{E}(0)}{T} = 0$  für  $|\vec{E}|$  endlich.

$$\langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (3.60)$$

Dies ist das Biot-Savartsche Gesetz<sup>21</sup>.

Das magnetische Moment:

Wir betrachten  $\langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle$  für den Fall, dass  $\vec{r}' \equiv \vec{r}$  auf ein kleines Volumen beschränkt ist und  $r >> \tau$  gilt. D.h., wir sind an der Entwicklung der Gl. (3.60) analog zur Entwicklung (3.23) von  $\vec{E}(\vec{r})$  in der Elektrostatik interessiert. Anstatt Gl. (3.60) direkt zu entwickeln, entwickeln wir zunächst das zeitlich gemittelte Vektorpotenzial  $\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{cr} \int \langle \vec{j}(\vec{\tau}) \rangle d^3 \tau \\ &\quad + \frac{1}{c} \int \langle \vec{j}(\vec{\tau}) \rangle \left( -\vec{\tau} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{\tau}} \frac{1}{r}}_{=-\frac{\vec{r}}{r^3}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet - und zwar wie folgt: Gemäß Sonderfall des Gaußschen Satzes (Anhang) gilt

$$\begin{aligned} \int_V \vec{j} d^3 \tau &= \int_V (\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} d^3 \tau = \oint_{\partial V} \vec{r} (d\vec{f} \cdot \vec{j}) \\ &- \int_V \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) d^3 \tau \stackrel{Gl.(2.43)}{=} \int \vec{r} \dot{\rho} d^3 \tau. \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet natürlich, da dort die Ströme verschwinden. Mit  $\langle \dot{\rho} \rangle = 0$  folgt die Behauptung.

Wenden wir uns dem zweiten Integral zu und schreiben (momentan ohne die Mittelung und den Faktor  $\frac{1}{cr^3}$ )

<sup>21</sup> Biot, Jean-Baptiste, französischer Physiker und Astronom, \*Paris 21.4. 1774, †ebenda 3.2. 1862; lieferte u.a. wichtige Beiträge zur Optik (Polarisation, Doppelbrechung) und stellte zusammen mit F. Savart das nach ihnen benannte biot-savartsche Gesetz der magnetischen Wirkung statioärer elektrischer Ströme auf.

Savart, Félix, französischer Arzt und Physiker, \*Mézières (heute zu Charleville-Mézières) 30.6. 1791, †Paris 16.3. 1841; leitete aus Versuchen 1820 mit J.B. Biot das nach beiden benannte Grundgesetz des Elektromagnetismus ab. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

$$\int (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{j} d^3\tau = \int (\vec{r} \times \vec{j}) \times \vec{r} d^3\tau + \int \vec{r}(\vec{j} \cdot \vec{r}) d^3\tau$$

$$= \int (\vec{r} \times \vec{j}) \times \vec{r} d^3\tau + \int \vec{r}(\vec{j} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})) d^3\tau.$$

$\left( \langle \vec{m} \rangle \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3} = -3 \frac{(\langle \vec{m} \rangle \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} + \frac{\langle \vec{m} \rangle}{r^3}.$   
D.h.,

Für das letzte Integral gilt

$$\begin{aligned} & \int \vec{r}(\vec{j} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})) d^3\tau \\ &= - \int (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{j} d^3\tau - \int \vec{r} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j})}_{=-\dot{\rho}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) d^3\tau \end{aligned}$$

<sup>22</sup>. Da  $\dot{\rho}$  im Mittel verschwindet folgt mit  $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$  in führender Ordnung

$$\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle = \frac{\langle \vec{m} \rangle \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.61)$$

mit

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \rho(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{v}) d^3\tau. \quad (3.62)$$

Mit der Vektoridentität

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \\ &\quad + \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \end{aligned}$$

(vgl. Aufgabe) sowie Gl. (2.16) folgt

$$\begin{aligned} \langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle &= \vec{\nabla} \times \langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle \\ &= \langle \vec{m} \rangle \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - \left( \langle \vec{m} \rangle \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{r} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{r^3}}_{=3} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_{=0} = 0$$

(für  $r > 0$ ) und

<sup>22</sup>sieht man aus  $\int \tau_i j_j \partial_j (\vec{r} \cdot \vec{r}) d^3\tau \stackrel{p.I.}{=} - \int (\partial_j \tau_i j_j) (\vec{r} \cdot \vec{r}) d^3\tau = - \int [j_i + \tau_i \partial_j j_j] (\vec{r} \cdot \vec{r}) d^3\tau$

$$\langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle = 3 \frac{(\langle \vec{m} \rangle \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\langle \vec{m} \rangle}{r^3}. \quad (3.63)$$

Man beachte, dass diese Formel derjenigen für das elektrostatische Feld (3.23) analog ist, wobei jedoch kein Monopolterm existiert!

Zum Abschluß betrachten wir noch einmal die Lagrange-Funktion einer Ladung im Feld. Dieses Feld soll ein konstantes Magnetfeld  $\vec{H}$  sein. Der entsprechende Teil der Lagrange-Funktion sei  $L_{\vec{H}}$  bzw.

$$L_{\vec{H}} = \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

gemäß Gl. (2.9). Für viele Ladungen gilt

$$L_{\vec{H}} = \frac{1}{c} \sum_{\nu} e_{\nu} \vec{A}_{\nu} \cdot \vec{v}_{\nu} = \frac{1}{c} \int dV \rho(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{v}.$$

Für  $\vec{H} = \text{konstant}$  <sup>23</sup> gilt  $\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{H} \times \vec{r})$  <sup>24</sup> und daher

$$L_{\vec{H}} = \frac{1}{2c} \int dV \rho(\vec{r}) \underbrace{(\vec{H} \times \vec{r}) \cdot \vec{v}}_{=(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{H}}.$$

Der Vergleich mit Gl. (3.62) liefert direkt

$$L_{\vec{H}} = \vec{m} \cdot \vec{H}.$$

<sup>23</sup>Konstant bedeutet hier, dass sich das Feld im Integrationsvolumen (Dipolvolumen) nicht bzw. wenig ändert.

<sup>24</sup>Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{H} \times \vec{r}) &= \underbrace{\vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})}_{=3} - \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) \\ &\quad + \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}}_{=0} - \underbrace{(\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}}_{=\vec{H}} \\ &\quad \text{da } \vec{H} = \text{konstant} \\ &= 2\vec{H} = 2(\vec{\nabla} \times \vec{A}). \end{aligned}$$

Damit gilt für den Beitrag zur potenziellen Energie

$$U_{\vec{m}} = -\vec{m} \cdot \vec{H} . \quad (3.64)$$

in Analogie zum elektrostatischen Feld (vgl. Gl.(3.22)) für das

$$U_{\vec{p}} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (3.65)$$

gilt.

Bemerkung: Magnetische bzw. elektrische Dipole können also ihre Energie reduzieren, wenn sie sich in inhomogenen Feldern in Gebiete erhöhter Feldstärke bewegen.

## Kapitel 4

# Elektromagnetische Wellen und deren Austrahlung

### 4.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum:

Wellengleichung für  $\vec{A}$ :

Die Maxwell Gleichungen für den Fall  $\rho = 0$  und  $\vec{j} = 0$  lauten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{H}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können Lösungen besitzen, die von Null verschieden sind. D.h., es gibt elektromagnetische Felder in Abwesenheit von Ladungen! Man spricht von elektromagnetischen Wellen.

Die beiden unteren Gleichungen lauten in Viererschreibweise (vgl. Gl. (2.36))

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A^k}{\partial x^k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} A^i.\end{aligned}$$

Wir verlangen  $\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$  (Lorentz-Eichung)<sup>1</sup> und erhalten mit  $A^i = (\varphi, \vec{A})$  sowie (2.2) und (2.3)

<sup>1</sup>In dreidimensionaler Schreibweise:  $0 = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ . Außerdem müssen die oben schon diskutierten Eichtransformationen beachtet werden:  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f$  und  $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} f$ . Die Lorentz-Eichung fordert also  $\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) f = 0$ . Man beachte, dass die Lorentz-Eichung invariant unter Wechseln des Koordinatensystems ist.

$$\square \vec{A} \equiv \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) (\varphi, \vec{A}) = 0.$$

Die Wellengleichung lautet also

$$\square \vec{A} \equiv \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \vec{A} = 0 \quad (4.1)$$

Das Symbol  $\square$  wird auch als d'Alembert Operator bezeichnet<sup>2 3</sup>.

Ebene Wellen:

Ebene Wellen hängen lediglich von einer Ortskoordinate (hier ist dies  $x$ ) und von der Zeit ab. Für eine beliebige Komponente  $A_\alpha$  gilt laut Gl. (4.1)

<sup>2</sup>Alembert, Jean-Baptiste Le Rond d', französischer Mathematiker, Philosoph und Physiker, \*Paris 16.11. 1717, †ebenda 29.10. 1783; gab mit Diderot seit 1751 die ersten sieben Bände der *Encyclopédie* (Enzyklopädisten) heraus. Seine Erkenntnistheorie, in der er die Erfahrungswissenschaft zu begründen suchte, wurde grundlegend für den Positivismus. Alembert hat bedeutende Fortschritte in der Zahlentheorie und Analysis erzielt. In seinem wissenschaftlichen Hauptwerk der Mechanik, *Traité de dynamique* (1743), stellte er das d'Alembertsche Prinzip auf, eine Beschreibung von beschleunigenden Kräften, die es ermöglicht, dynamische Aufgaben wie statische Gleichgewichtsaufgaben zu lösen (Extremalprinzipien). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>3</sup>Alternative: Mittels der Eichtransformation des skalaren Potenzials wird  $\varphi = 0$  erreicht. Daraus folgt  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Zusammen mit  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  eingesetzt in  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{E}$  folgt ebenfalls die Wellengleichung, wenn noch  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  erfüllt werden kann (Coulomb-Eichung). Dies ist möglich, da hier (!) die Erweiterung  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} g(\vec{r})$  die Feldgleichungen invariant lässt.

$$0 = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) A_\alpha . \quad (4.2)$$

Mit der Substitution

$$\xi = t - \frac{x}{c} \quad \eta = t + \frac{x}{c}$$

bzw.

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) ,$$

und aus Gl. (4.2) wird

$$\frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial \xi \partial \eta} = 0 .$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} A_\alpha &= A_{\alpha,1}(\xi) + A_{\alpha,2}(\eta) \\ &= A_{\alpha,1}\left(t - \frac{x}{c}\right) + A_{\alpha,2}\left(t + \frac{x}{c}\right) . \end{aligned}$$

Die Lösungen beschreiben Wellen in  $x$ -Richtung bzw. in  $-x$ -Richtung. Ihre Geschwindigkeit ist offensichtlich  $c$ . Die Feldstärken ergeben sich aus  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  sowie  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ :

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial (t-x/c)}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial (t-x/c)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial (t-x/c)}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} (t-x/c) \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial (t-x/c)} = \vec{n} \times \vec{E} .$$

Hier ist  $\vec{n}$  die Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$ , und wir betrachten lediglich  $A_{\alpha,1} \neq 0$ . Wir sehen, dass  $\vec{H}$  und  $\vec{E}$  senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung stehen<sup>4</sup>. Außerdem gilt  $|\vec{H}| = |\vec{E}|$ .

<sup>4</sup>Wellen, deren Ebene senkrecht zu  $\vec{n}$  steht, nennt man transversal.

Betrachten wir noch den Energietransport. Aus Gl. (2.45) folgt für den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \vec{H}^2 \vec{n} \stackrel{(2.49)}{=} cW \vec{n} .$$

D.h., die Welle transportiert die Energiedichte  $W$  mit Lichtgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung. Der Impuls des elektromagnetischen Feldes ist  $\vec{S}/c^2$  pro Volumeneinheit (vgl. Gl. (1.18)).

### Polarisation:

Eine periodische, monochromatische elektromagnetische Welle wird durch

$$\vec{A} = Re\{\vec{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\} \quad (4.3)$$

beschrieben. Offensichtlich ist (4.3) eine Lösung von Gl. (4.1). Die komplexe Schreibweise wählen wir aus Bequemlichkeit. Gl. (4.3) beschreibt eine Welle in  $x$ -Richtung. Allgemeiner wäre

$$\vec{A} = Re\{\vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\} . \quad (4.4)$$

Hier ist

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (4.5)$$

der sogenannte Wellenvektor. Mit der Hilfe der oben hergeleiteten Beziehungen  $\vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial (t-x/c)}$  und  $\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}$  sehen wir leicht, dass für  $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\vec{E} = ik \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{H} = i \vec{k} \times \vec{A}$$

gelten muß. Daß  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  hier komplex sind, stört uns nicht, solange wir lineare Operationen betrachten, die es uns jederzeit gestatten, den Realteil zu extrahieren, d.h.,

$$\vec{E} = Re\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\} = Re\{\vec{b} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha)}\} .$$

Das Gleiche gilt natürlich für  $\vec{H}$ . Hier ist die Phase  $\alpha$  so gewählt, dass

$$b^2 = (\vec{b}_R + i\vec{b}_I)^2 = b_R^2 - b_I^2 + 2i\vec{b}_R \cdot \vec{b}_I$$

reell ist. Die Indizes unterscheiden die Richtungen parallel und senkrecht zur reellen Achse. D.h.,  $\vec{b}_R \cdot \vec{b}_I = 0$  und somit

$$\begin{aligned} E_y &= b_R \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha) \\ E_z &= \pm b_I \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \alpha) . \end{aligned}$$

$\pm$  unterscheidet die zwei möglichen Orientierungen von  $\vec{b}_I$ . Hier ist  $x$  die Ausbreitungsrichtung. Diese Relationen erfüllen die Ellipsengleichung

$$\frac{E_y^2}{b_R^2} + \frac{E_z^2}{b_I^2} = 1 . \quad (4.6)$$

An einem festen Raumzeitpunkt zirkuliert der  $\vec{E}$ -Vektor also auf einer Ellipse senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Man spricht von elliptischer Polarisierung. Für den Fall  $b_R = b_I$  geht diese über in zirkulare Polarisierung. Und für  $b_R \neq 0, b_I = 0$  bzw.  $b_R = 0, b_I \neq 0$  erhält man lineare Polarisierung.

Bemerkung: Ebenso wie  $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  ist natürlich auch die Superposition derartiger Wellen mit unterschiedlicher Frequenz eine Lösung der Wellengleichung. Man kann somit das Vektorpotenzial bzw. die Feldstärken als Fourier-Reihen ansetzen.

## 4.2 Retardierte Potenziale

Oben hatten wir die Wellengleichung ausgehend von  $0 = \partial F^{ik} / \partial x^k$  hergeleitet. Diesmal wollen wir die Quellen beibehalten und gehen daher von

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

aus (siehe Gl. (2.36)). Wiederum mit der Lorentz-Eichung ( $\partial A^k / \partial x^k = 0$ ) folgt

$$-\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

bzw.

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.7)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (4.8)$$

(vgl. Gln. (3.57) und (3.2) für die entsprechenden zeitunabhängigen Fälle).

Zunächst bemerken wir, dass die Lösungen für die drei Komponenten von  $\vec{A}$  sowie für  $\varphi$  formal identisch sind. Wir betrachten daher nur Gl. (4.8). Die Lösung ist hier die Summe  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_i$ , wobei  $\varphi_0$  die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (ohne Quellen) und  $\varphi_i$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Wie wir durch Einsetzen zeigen werden (Aufgabe), gilt

$$\varphi_i(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} d^3 r' \quad (4.9)$$

mit  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Analog gilt für das Vektorpotenzial

$$\vec{A}_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} d^3 r' . \quad (4.10)$$

Die Gln. (4.9) und (4.10) werden als retardierte Potenziale bezeichnet: D.h.,  $\varphi_i(\vec{r}, t)$  bzw.  $\vec{A}_i(\vec{r}, t)$  sind Funktionen der zeitlichen Veränderungen ihrer Quellen zu einer früheren Zeit  $t - \frac{R}{c}$ . Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Fernwirkung ist die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Theoretisch könnte man auch die Rückwirkung von Quellen aufgrund von Veränderungen zu einem späteren Zeitpunkt  $t + \frac{R}{c}$  betrachten. Man würde dann von avancierten Potenzialen sprechen.

Liénard-Wiechert Potenziale:

Die Ladung  $e$  bewegt sich auf einer Bahnkurve  $r_e(t)$  und wird vom Punkt  $P$  am Ort  $\vec{r}$  beobachtet (vgl. Abbildung 4.1). Unser Ziel ist die Berechnung des Potenzials  $A^i$  bzw. des Feldes dieser bewegten Ladung am Ort  $P$ . Für eine bei  $\vec{r}_e(t')$  ruhende Ladung gilt

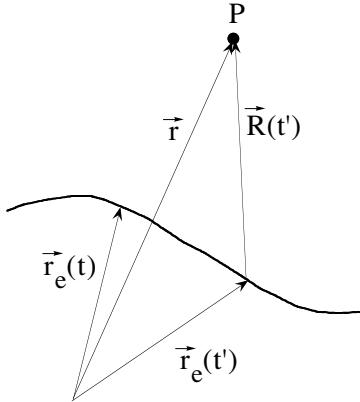


Abbildung 4.1: Eine Ladung auf der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$ . Das Feld der Ladung am Ort  $\vec{r}_e(t')$  erreicht den Punkt  $P$  zur Zeit  $t = t' + R(t')/c$ .

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{e}{R(t')} \quad \vec{A} = 0 \\ &= \frac{e}{c(t-t')}.\end{aligned}$$

Beim Übergang zu einem beliebigen Bezugssystem gehen wir davon aus, dass das gesuchte Viererpotenzial  $A^i$  nur von  $e$ ,  $R^k = (c(t-t'), \vec{r} - \vec{r}')$  sowie der Vierergeschwindigkeit der Ladung  $u^k$  abhängen kann. Der einzige sinnvolle Ausdruck, der sich daraus konstruieren lässt ist

$$A^i = e \frac{u^i}{R_k u^k}.$$

In dreidimensionaler Schreibweise heißt dies

$$\begin{aligned}\varphi = A^0 &= \frac{e}{c^2(t-t')} \frac{cdt}{dt - (x-x')} dx - \dots \\ &= \frac{e}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{w}}{c}}\end{aligned}\quad (4.11)$$

und

$$A_x = e \frac{dx}{...} = \frac{e}{c} \frac{w_x}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{w}}{c}}$$

bzw.

$$\vec{A} = \frac{e}{c} \frac{\vec{w}}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{w}}{c}}. \quad (4.12)$$

### 4.3 Das Feld beliebig bewegter Ladungen

Die Feldstärken zu den Gln. (4.11) und (4.12) erhalten wir aus  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi$  und  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Vorab einige nützliche Formeln: Die erste lautet

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( \frac{\partial t}{\partial t'} - 1 \right) \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right).$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{1}{R} \vec{R} \cdot \vec{w} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

und daher

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \left( 1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{w}}{Rc} \right)^{-1}.$$

Die Zweite lautet

$$\vec{\nabla} t' = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} R(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial R}{\partial t'} \vec{\nabla} t' + \frac{\vec{R}}{R} \right)$$

bzw.

$$\vec{\nabla} t' = -\frac{\vec{R}}{c \left( R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{w}}{c} \right)}.$$

Die Feldstärken lassen sich jetzt mit etwas Fleiß berechnen (siehe Aufgabe). Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{e}{R^2 \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c} \right)^3} \left[ \frac{\vec{n} - \frac{\vec{w}}{c}}{\gamma^2(w)} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{R}{c^2} \dot{\vec{w}} \times (\vec{n} - \frac{\vec{w}}{c}) \right) \times \vec{n} \right]\end{aligned}\quad (4.13)$$

mit  $\vec{n} = \vec{R}/R$  und

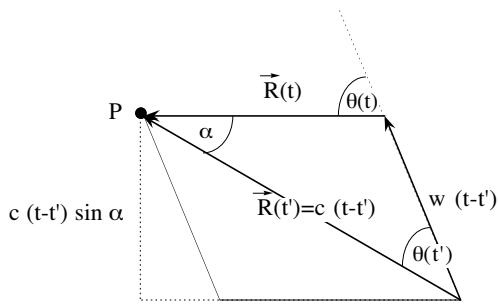


Abbildung 4.2: Skizze zum Zusammenhang zwischen  $\vec{R}(t')$  und  $\vec{R}(t)$  für den Fall  $\vec{w} = 0$ .

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (4.14)$$

Es gilt  $\dot{\vec{w}} = \partial \vec{w} / \partial t'$ . Die Zeit auf den rechten Seiten von (4.13) und (4.14) ist immer  $t'$ .

Gl. (4.13) setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen. Für  $\vec{w} = 0$  erhalten wir das Feld einer gleichförmig bewegten Ladung. Dieses Resultat kennen wir schon. Es ist Gl. (3.10)! Überprüfen wir dies: Anhand der Abbildung 4.2 sehen wir, dass

$$\vec{R}(t') = \vec{R}(t) + \vec{w}(t - t') = \vec{R}(t) + \vec{w} \frac{R(t')}{c} \quad (4.15)$$

gilt (mit  $\vec{w}(t') = \vec{w}(t) = \vec{w}$ ). Durch Multiplikation mit  $\vec{R}(t')$  folgt

$$\begin{aligned} R^2(t') &= \vec{R}(t) \cdot \vec{R}(t') + \frac{\vec{w} \cdot \vec{R}(t')}{c} R(t') \\ R(t') - \frac{\vec{w} \cdot \vec{R}(t')}{c} &= R(t) \cos \alpha \\ &= R(t) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Aus Abbildung 4.2 geht ferner hervor, dass  $c \sin \alpha = w \sin \theta_t$  gilt und damit

$$R(t') - \frac{\vec{w} \cdot \vec{R}(t')}{c} = R(t) \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2} \sin^2 \theta_t}. \quad (4.16)$$

Wenn wir die Gln. (4.15) und (4.16) in Gl. (4.13) einsetzen, dann ergibt sich sofort Gl. (3.10) wie behauptet.

Wenn jedoch  $\dot{\vec{w}} \neq 0$  gilt, dann liegt eine beschleunigte Bewegung der Ladung vor. Die beiden Beiträge unterscheiden sich zudem in ihrer Reichweite. Der erste Term verschwindet mit  $R^{-2}$  während der Beschleunigungsbeitrag nur mit  $R^{-1}$  verschwindet.

### Dipolstrahlung:

Wir betrachten die Gln. (4.13) und (4.14) im Grenzfall  $R \rightarrow \infty$  und  $w \ll c$ . Die zweite Bedingung bedeutet, dass das Raumgebiet  $a$  in dem sich die Ladung bewegt sehr viel kleiner ist als die Wellenlänge  $\lambda$  der elektromagnetischen Strahlung, die wiederum durch eine periodische Bewegung der Ladung erzeugt wird:

$$w \approx \frac{a}{T} \approx \frac{ac}{\lambda}.$$

D.h.

$$1 \gg \frac{w}{c} \approx \frac{a}{\lambda}.$$

Insbesondere gilt auch  $R \gg a$ . Unter diesen Bedingungen lautet der führende Term von  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} \sim \frac{e}{c^2 R} (\dot{\vec{w}} \times \vec{n}) \times \vec{n}.$$

Wir gehen jetzt davon aus, dass sich nicht eine einzelne Ladung, sondern viele Ladungen im Gebiet der Größe  $a$  aufhalten, d.h.,  $e\dot{\vec{w}} \rightarrow \sum_{\nu} e_{\nu} \dot{\vec{w}}_{\nu}$ . Das Feld der gesamten Ladungsverteilung ist dann

$$\vec{E} \sim \frac{1}{c^2 R_o} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n}. \quad (4.17)$$

Es gilt nämlich

$$\sum_{\nu} e_{\nu} \dot{\vec{w}}_{\nu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{\nu} e_{\nu} \vec{r}_{\nu}(t) \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3 \tau = \ddot{\vec{p}}$$

( $\rho(\vec{r}) = \sum_{\nu} e_{\nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\nu}(t))$ ). Hier ist  $\vec{r}_{\nu}$  der Ortsvektor der  $\nu$ ten Ladung. Außerdem haben wir  $\vec{R}_{\nu} =$

$\vec{R}_o + \vec{r}_\nu \approx \vec{R}_o$  angenommen, wobei  $\vec{R}_o$  der Abstandsvektor vom Ursprung in der Ladungsverteilung zum Betrachter ist.

Für  $\vec{H}$  folgt aus Gl. (4.17)

$$\vec{H} \sim \frac{1}{c^2 R_o} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) . \quad (4.18)$$

Wir erhalten für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \\ &= \frac{1}{4\pi c^3 R_o^2} [(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n}] \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \\ &= \frac{1}{4\pi R_o^2 c^3} [\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] \underbrace{[(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \cdot \vec{n}]}_{=0} + \vec{n} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n})^2 \\ &= \frac{1}{4\pi R_o^2 c^3} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n})^2 \vec{n} . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Gl. (4.19) zeigt, dass die Abstrahlung des Dipols senkrecht zu  $\vec{p}$  maximal ist. In Richtung der Dipolachse dagegen ist die Abstrahlung Null.

Betrachten wir zum Abschluß die vom Dipol pro Periode  $T$  abgestrahlte Leistung  $Q$  für  $\vec{p} = \vec{p}_o \sin(\omega(t - R_o/c))$ :

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_0^T dt R_o^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta S \\ &= \frac{1}{2c^3} \int_0^T dt \ddot{\vec{p}}^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \\ &= \frac{16}{3} \frac{\pi^4 p_o^2}{\lambda^3} , \end{aligned} \quad (4.20)$$

wobei  $\omega = 2\pi/T$  und  $cT = \lambda$  ist.

Strahlung schneller Ladungen:

Wir diskutieren einige Spezialfälle im Grenzfall  $1 - \frac{w}{c} \ll 1$ . Gemäß Gl. (4.13) gilt dann

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{(\dot{\vec{w}} \times (\vec{n} - \frac{\vec{w}}{c})) \times \vec{n}}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c})^3}$$

bzw. gemäß Gl. (2.45) und Gl. (4.14)

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} \\ &\approx \frac{e^2}{4\pi R^2 c^3} \frac{[(\dot{\vec{w}} \times (\vec{n} - \frac{\vec{w}}{c})) \times \vec{n}]^2}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c})^6} \vec{n} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Der Term [...]<sup>2</sup> im Zähler können wir mit der bacab Regel bearbeiten und erhalten

$$\begin{aligned} [...]^2 &= \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c}\right)^2 \dot{w}^2 - \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{w}})^2 \\ &+ 2 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c}\right) (\vec{n} \cdot \dot{\vec{w}}) \left(\frac{\vec{w} \cdot \dot{\vec{w}}}{c}\right) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Der Nenner in Gl. (4.21) wird besonders klein, wenn die Beobachtungsrichtung  $\vec{n}$  parallel zur Geschwindigkeit  $\vec{w}$  ist. D.h., in Geschwindigkeitsrichtung ist die Abstrahlung besonders groß. Allerdings gibt es Spezialfälle, die genauere Betrachtung verlangen.

Einer dieser Spezialfälle ist  $\vec{w} \parallel \vec{w}$  (Linearbeschleuniger). Hier sehen wir sofort aus Gl. (4.21)

$$\vec{S} \approx \frac{e^2}{4\pi R^2 c^3} \frac{\dot{w}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \frac{w}{c} \cos \theta)^6} \vec{n} , \quad (4.23)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen  $\vec{n}$  und  $\vec{w}$  ist. Man beachte, dass  $|\vec{S}|$  für  $\theta = 0$  verschwindet aber für  $\theta = \pi/2$  maximal wird.

Ein zweiter Spezialfall ist  $\vec{w} \perp \vec{w}$  (Ringbeschleuniger). Hier gilt

$$\begin{aligned} \vec{S} &\approx \frac{e^2}{4\pi R^2 c^3} \left[ \frac{\dot{w}^2}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c})^4} \right. \\ &\left. - \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{w}})^2}{(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c})^6} \right] \vec{n} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Man kann zeigen (Aufgabe), dass die Strahlung für  $w \rightarrow c$  stark in der Bahnebene konzentriert ist. Für  $w \rightarrow 0$  dagegen ist das Verhältnis von Intensität in der Ebene zu Intensität senkrecht zur Ebene 1/2.

Bemerkung: Sowohl Gl. (4.23) als auch Gl. (4.24) gelten auch bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten für große  $R$ .

# Kapitel 5

## Elektro- und Magnetostatik der Kontinua

### 5.1 Das elektrostatische Feld im Dielektrikum

<sup>1</sup> Allgemein unterscheidet man Leiter und Nichtleiter (Dielektrika). Leiter unterscheiden sich von Nichtleitern dadurch, dass in (homogenen) Leitern jedes elektrische Feld eine Ladungsbewegung hervorruft. Insbesondere bedeutet dies, dass im statischen Grenzfall das elektrische Feld in Leitern verschwinden muß. Daraus folgt weiter, dass sich alle Ladungen im Leiter auf seiner Oberfläche befinden müssen (wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ ). Dies wiederum haben wir schon im Abschnitt 3.2 untersucht.

Im folgenden betrachten wir Nichtleiter, in deren Inneren das elektrostatische Feld nicht verschwinden muß. Wir gehen dabei von der bisherigen mikroskopischen Betrachtungsweise zur makroskopischen Betrachtungsweise, dem Kontinuumslimes, über, indem wir geeignet mitteln. Unter  $\vec{E}$  verstehen wir ab jetzt nicht mehr das lokale Feld auf der Längenskala der Atome bzw. Moleküle des betrachteten Dielektrikums, sondern das sehr viel langsamere variierende mittlere Feld, wobei sich die Mittelung auf makroskopisch immer noch kleine aber mikroskopisch große Volumenelemente bezieht <sup>2</sup>. In die Atome hineinzuschauen und die einzelnen Ladungsträger wie Kern und Elektronen separat zu betrachten, macht aufgrund der Quantennatur der

korrekten Materiebeschreibung auf dieser Skala keinen Sinn. Erst wenn man Atome insgesamt, ggf. auch Ionenrümpfe, oder etwa ganze Moleküle betrachtet, kann man langsam wieder mit klassischer Elektrodynamik auskommen. Eine präzisere Formulierung dieser Aussage gibt das sogenannte Hellmann-Feynman Elektrostatik-Theorem, das Sie in der Quantentheorie kennenlernen werden. Lose formuliert gibt dieses Theorem an, dass wenn die Ladungsverteilung in Atomen bzw. Molekülen bekannt ist, dann können die Kräfte aufgrund dieser Ladungsverteilungen klassisch berechnet werden <sup>3</sup> <sup>4</sup>.

Die erste entsprechend gemittelte Maxwellgleichung (im statischen Fall) ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (5.1)$$

(vgl. Gl. (2.34)). Die Zweite ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\langle\rho\rangle. \quad (5.2)$$

<sup>3</sup>H. Hellmann war ein deutscher Chemiker, der dieses Resultat in einem Lehrbuch (*Einführung in die Quantenchemie*, 1937) veröffentlichte. Feynman war ein 21jähriger Student als sein Paper *Forces in Molecules*, *Phys. Rev.* **56**, 340, 1939 erschien.

<sup>4</sup>Feynman, Richard Phillips, amerikanischer Physiker, \*New York 11.5. 1918, †Los Angeles 15.2. 1988; verfasste grundlegende Arbeiten zur Theorie der Suprafluidität und des flüssigen HeliumsII sowie zur Theorie des Betazerfalls. Für Beiträge zur Quantenelektrodynamik erhielt er 1965 mit J.Schwinger und S.Tomonaga den Nobelpreis für Physik. Seine Lehrbücher begründeten eine neue Physikdidaktik. Literatur: Mehra, J.: *The beat of a different drum. The life and science of R.Feynman*. Neuauflage. Oxford 1994. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>1</sup>Der Klassiker zu diesem Abschnitt ist das Buch von H. Fröhlich (1958) *Theory of Dielectrics*, Oxford University Press. Allerdings ist es nicht ganz einfach zu lesen.

<sup>2</sup>Denken wir beispielsweise an die elektromagnetische Strahlung des Lichts. Bei ca. 500 nm oder 5000 Å entspricht eine Wellenlänge typischerweise 1000 Moleküldurchmessern bzw. einigen Tausend Atomdurchmessern.

Hier gilt für ein insgesamt neutrales Dielektrikum

$$\int \langle \rho \rangle dV = 0, \quad (5.3)$$

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = 0. \quad (5.7)$$

Im Spezialfall wenn 2 für einen Leiter steht gilt

$$\vec{E}_1 \times \vec{n} = 0 \quad \vec{D}_1 \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma, \quad (5.8)$$

wobei  $\sigma$  die Grenzflächenladungsdichte ist.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 0. \quad (5.4)$$

Die dielektrische Permeabilität:

$\vec{P}$  wird als Polarisationsvektor und  $\vec{D}$  als elektrische Verschiebung bzw. als elektrische Induktion bezeichnet. Man beachte, dass wegen  $0 = -\int \langle \rho \rangle dV = -\int \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \oint \vec{P} \cdot d\vec{l}$  der Polarisationsvektor außerhalb des Dielektrikums verschwindet. Im Dielektrikum ist  $\vec{P}(\vec{r})$  dessen lokales Dipolmoment pro Volumenelement<sup>5</sup>. Dies sieht man aus<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \langle \rho \rangle dV &= - \int \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV \\ &= - \underbrace{\oint \vec{r} (d\vec{l} \cdot \vec{P})}_{=0} + \underbrace{\int (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} dV}_{=\vec{P}}. \end{aligned}$$

Da  $\vec{E}$  an  $\langle \rho \rangle$  koppelt, sind auch  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  verknüpft. Allgemein kann man ansetzen:

$$D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} E_\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} E_\beta E_\gamma + \dots. \quad (5.9)$$

Im folgenden wollen wir uns aber auf

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (5.10)$$

beschränken (wobei wir (0) weglassen), d.h., auf isotrope Medien und Fälle, in denen das externe Feld klein ist gegenüber den inneren Feldern auf der atomaren Skala. Die Grösse  $\epsilon$  ist die dielektrische Konstante bzw. dielektrische Permeabilität. Eine eng verwandte Grösse, die dielektrische Suszeptibilität  $\chi$  folgt aus

$$\vec{P} \equiv \chi \vec{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}. \quad (5.11)$$

Einige Werte für  $\epsilon$  sind  $\epsilon = 1.0005$  (Luft),  $\epsilon = 5-8$  (Glas),  $\epsilon = 81$  (Wasser). Man beachte, dass diese Werte für die statische Dielektrizitätskonstante sind. In oszillierenden Feldern ist  $\epsilon$  frequenzabhängig (Dielektrische Spektroskopie).

Einige Beispiele:

- Plattenkondensator mit Dielektrikum: Analog zur Gl. (3.28) erhalten wir aus der Bedingung (5.8)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = 4\pi\sigma \vec{n}$$

und daher

$$C = \frac{\epsilon A}{4\pi d}. \quad (5.12)$$

wobei  $\vec{n}$  der Normaleneinheitsvektor an der Grenzfläche ist. Der Gaußsche Satz angewandt auf Gl. (5.4) liefert

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = 0, \quad (5.6)$$

<sup>5</sup>Erst diese Beziehung zum Dipolmoment definiert  $\vec{P}$  eindeutig, denn  $\vec{P} \rightarrow \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{f}$  würde Gl. (5.4) ebenso erfüllen!

<sup>6</sup>vgl. Anhang

<sup>7</sup>aber gleiche Temperatur etc. Bei Kristallen müssen auch die kristallographischen Richtungen in der Fläche konstant sein.

Die Kapazität ist also um einen Faktor  $\epsilon$  größer als im Vakuum.

- Punktladung im dielektrischen Halbraum: Wir betrachten die Situation in Abbildung 3.5 mit folgender Modifikation: für  $z < 0$  sei  $\epsilon = \epsilon_2$  und für  $z > 0$  sei  $\epsilon = \epsilon_1$ . Wieder wollen wir das Potenzial mithilfe der Bildladungsmethode berechnen. Diesmal haben wir statt (3.34)

$$\varphi_{z>0}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_1} \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{e'}{|\vec{r} - \vec{r}'_e|}$$

im positiven Halbraum. Um die beiden Bedingungen (5.6) ( $\vec{E}_{||1} - \vec{E}_{||2} = 0$ ) und (5.7) ( $\vec{D}_{\perp 1} - \vec{D}_{\perp 2} = 0$ ) zu erfüllen, machen wir den Ansatz

$$\varphi_{z<0}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{e''}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} .$$

$\epsilon_2 = \infty$  entspricht hier dem Fall der leitenden Ebene. Wir verwenden wieder  $\vec{r}_e = (0, 0, a)$ ,  $\vec{r}'_e = (0, 0, -a)$  sowie  $\vec{r} = (\vec{r}, z)$ . D.h. die Bedingungen sind

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \Big|_{z=0}$$

und

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} .$$

Eine einfache Rechnung liefert

$$e + e' = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} e'' \quad e - e' = e''$$

bzw.

$$e' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e \quad e'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e .$$

Diese Lösung erfüllt die Dirichletschen Randbedingungen im Unendlichen (das Potenzial verschwindet dort) und ist damit eindeutig.

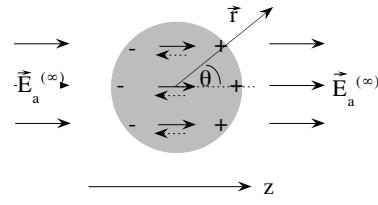


Abbildung 5.1: Dielektrische Kugel mit Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  im homogenen äußeren Feld  $\vec{E}_a^{(\infty)}$ . Der Radius der Kugel sei  $R$ . Kurze durchgehende Pfeile in der Kugel illustrieren das geschwächte Feld  $\vec{E}_i$ . Die kurzen gestrichelten Pfeile illustrieren das Polarisationsfeld.

- Polarisation einer Kugel im homogenen Feld  $\vec{E}_a^{(\infty)}$ : Die Situation ist in Abbildung 5.1 skizziert. Für das Potenzial des äußeren Feldes setzen wir an:

$$\varphi_a = -E_a^{(\infty)} z + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} .$$

Der zweite Term ist der Beitrag des induzierten Dipolmoments in  $z$ -Richtung (vgl. (3.20)), der für große  $r$  verschwindet und dort das Feld  $\vec{E}_a^{(\infty)}$  übrig lässt. Für das Potenzial  $\varphi_i$  im Inneren der Kugel setzen wir an:

$$\varphi_i = -E_i z .$$

Wir berechnen  $E_i$  und  $p_z$  aus den Randbedingungen an der Kugeloberfläche:

$$-\epsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

bzw.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta} \Big|_{r=R} .$$

Wir erhalten

$$\epsilon E_i = E_a^{(\infty)} + \frac{2p_z}{R^3} \quad E_i = E_a^{(\infty)} - \frac{p_z}{R^3}$$

bzw.

$$E_i = \frac{3}{\epsilon + 2} E_a^{(\infty)} \quad p_z = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} R^3 E_a^{(\infty)} .$$

Wir sehen, dass  $E_i$  gegenüber dem äußeren Fernfeld  $E_a^{(\infty)}$  um  $p_z/R^3$  reduziert ist. Aufgrund von  $\vec{p} = \int_{V_{Kugel}} \vec{P} dV$  können wir außerdem schreiben

$$\vec{E}_a^{(\infty)} - \vec{E}_i = \frac{4\pi}{3} \vec{P}. \quad (5.13)$$

- Kugelförmiger Hohlraum im homogenen Dielektrikum: Dies ist das zur dielektrischen Kugel im homogenen Feld komplementäre Problem<sup>8</sup>. Wir verwenden den gleichen Ansatz, wobei diesmal im Hohlraum  $\epsilon = 1$  und außerhalb  $\epsilon > 1$ . Somit sind hier die Gleichungen für die Randbedingungen dieselben wie zuvor aber mit  $\epsilon \rightarrow \frac{1}{\epsilon}$ .

Wir sind speziell an der Polarisationsladungsdichte interessiert, die sich an der Oberfläche des Hohlraums aufbaut. Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\langle \rho_{pol} \rangle$  folgt mithilfe des Gaußschen Satzes

$$(\vec{P}_i - \vec{P}_a) \cdot \vec{n} = -\sigma_{pol},$$

wobei  $\vec{n}$  in den Hohlraum hinein zeigt. Mit  $\vec{P}_i = \chi_i \vec{E}_i = -\chi_i \vec{\nabla} \varphi_i$  und  $\vec{P}_a = \chi_a \vec{E}_a = -\chi_a \vec{\nabla} \varphi_a$  folgt

$$\sigma_{pol} = \chi_a \frac{\partial}{\partial r} \left( -E_a^{(\infty)} r \cos \theta \right) \Big|_{r=R} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1/\epsilon - 1}{1/\epsilon + 2} \frac{R^3 E_a^{(\infty)} \cos \theta}{r^2} \Big|_{r=R} \\ & -\chi_i \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{3}{1/\epsilon + 2} E_a^{(\infty)} r \cos \theta \right) \Big|_{r=R} \\ & = -\frac{1}{4\pi} \frac{3(\epsilon - 1)}{1 + 2\epsilon} E_a^{(\infty)} \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit  $\chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$ .

- Eingebettete kugelförmige Dielektrika: Wir betrachten ein unendliches, homogenes Dielektrikum mit der statischen Dielektrizitätszahl  $\epsilon_a$ . In diesem Dielektrikum eingebettet sei eine dielektrische Kugel mit der Dielektrizitätszahl  $\epsilon_i$ . Der Kugelradius sei  $R$ .

Wir wollen das elektrische Feld aufgrund der folgenden drei Quellen berechnen:

<sup>8</sup>Allerdings ist hier das Vorzeichen der Oberflächenladungen gerade umgekehrt wie in Abbildung 5.1 (warum?).

(a) Es existiert ein konstantes Feld  $\vec{E}_a^{(\infty)}$  (in z-Richtung) in einem großen Abstand von der Kugel<sup>9</sup>.

(b) Ein Punktdipol  $\vec{p}$  (in z-Richtung) befindet sich im Zentrum der Kugel.

(c) Ein ausgedehnter Dipol  $\vec{p}_c$  (in z-Richtung) aufgrund einer homogen polarisierten Kugel mit Radius  $R$ ,

$$\vec{p}_c = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{P}_c,$$

wobei  $\vec{P}_c$  die Polarisation ist, füllt den Hohlraum.

Es ergeben sich folgende Bedingungen:

(a)  $\vec{E}_a = \vec{E}_a^{(\infty)}$  bzw.  $\varphi = -\vec{E}_a^{(\infty)} r \cos \theta$  für  $r \gg R$ .

(b)  $\varphi_i = \frac{p}{\epsilon_i r^2} \cos \theta$  für  $r \rightarrow 0$ .

(c)  $\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E}_i + 4\pi \vec{P}_c$  für  $r < R$  und  $\vec{D}_a = \epsilon_a \vec{E}_a$  für  $r > R$ .

Alle drei Fälle können gleichzeitig behandelt werden, da die Winkelabhängigkeit des Potenzials die gleiche ist. Generell würde man  $\varphi$  in Kugelflächenfunktionen entwickeln<sup>10</sup>. Hier jedoch gibt es aufgrund der Bedingungen lediglich Terme linear in  $\cos \theta$ . Die allgemeine Lösung lautet daher

$$\varphi(\vec{r}) = -\left(\frac{A}{r^2} + Br\right) \cos \theta.$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  sind innen ( $A_i, B_i$ ) und außen ( $A_a, B_a$ ) verschieden und müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. Immer noch in allen drei Fällen gilt somit

$$\varphi_i(\vec{r}) = \left(\frac{p}{\epsilon_i r^2} - B_i r\right) \cos \theta \quad (r < R)$$

$$\varphi_a(\vec{r}) = -\left(\frac{A_a}{r^2} + E_a^{(\infty)} r\right) \cos \theta \quad (r > R)$$

Aus der Bedingung

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta} \Big|_{r=R}$$

<sup>9</sup>Dieses Beispiel hatten wir oben schon für  $\epsilon_a = 1$  diskutiert.

<sup>10</sup>siehe Kapitel 3 in Referenz [3]; für Probleme mit axialer Symmetrie gilt allgemein

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} (Ar^l + Br^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta).$$

Die  $P_l(x)$  sind die Legendre-Polynome.

(vgl. Gl. (5.6)) erhalten wir zunächst

$$-\frac{p}{\epsilon_i R^3} + B_i = \frac{A_a}{R^3} + E_a^{(\infty)}. \quad (5.16)$$

Außerdem muss gelten

$$-\epsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\pi P_c = -\epsilon_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

(vgl. Gl. (5.7)). Und daraus folgt

$$2 \frac{p}{R^3} + \epsilon_i B_i + 4\pi P_c = -2\epsilon_a \frac{A_a}{R^3} + \epsilon_a E_a^{(\infty)}. \quad (5.17)$$

Aus den Gln. (5.16) und (5.17) erhalten wir schließlich

$$\frac{A_a}{R^3} = \frac{\epsilon_a - \epsilon_i}{2\epsilon_a + \epsilon_i} E_a^{(\infty)} - \frac{3}{2\epsilon_a + \epsilon_i} \frac{p}{R^3} - \frac{4\pi P_c}{2\epsilon_a + \epsilon_i}$$

und

$$B_i = \frac{3\epsilon_a}{2\epsilon_a + \epsilon_i} E_a^{(\infty)} + \frac{2}{\epsilon_i} \frac{\epsilon_a - \epsilon_i}{2\epsilon_a + \epsilon_i} \frac{p}{R^3} - \frac{4\pi P_c}{2\epsilon_a + \epsilon_i}.$$

Damit ist das Problem in allen drei Fällen gelöst, die wir aber kurz getrennt kommentieren wollen:

(a) Es gilt  $\vec{p} = 0$  und  $\vec{P}_c = 0$  und daher

$$\vec{E}_i = \frac{3\epsilon_a}{2\epsilon_a + \epsilon_i} \vec{E}_a^{(\infty)}$$

bzw.

$$\vec{E}_a = \vec{E}_a^{(\infty)} + \frac{\epsilon_a - \epsilon_i}{2\epsilon_a + \epsilon_i} R^3 \left[ \frac{\vec{e}_z}{r^3} - 3z \frac{\vec{r}}{r^5} \right] E_a^{(\infty)}$$

Wir erhalten Übereinstimmung (bzgl.  $\vec{E}_i$ ) mit unserem vorherigen Resultat für  $\epsilon_i = \epsilon$  und  $\epsilon_a = 1$ .

(b) In diesem Fall beschreibt der Koeffizient  $B_i$  den Unterschied zu einem reinen Dipolterm, d. h.,

$$\vec{E}_R = \frac{2}{\epsilon_i} \frac{\epsilon_a - \epsilon_i}{2\epsilon_a + \epsilon_i} \frac{p}{R^3} \vec{e}_z \quad (5.18)$$

ist das sogenannte Reaktionsfeld des Dielektrikums auf den Punktdipol.

(c) Zunächst betrachten wir die Kugel im Vakuum, d. h.,  $\epsilon_i = \epsilon_a = 1$ . In diesem Fall ist  $B_i$  das sogenannte Selbst-Feld der Kugel:

$$\vec{E}_{selbst} = -\frac{4\pi}{3} \vec{P}_c = -\frac{\vec{p}_c}{R^3}. \quad (5.19)$$

Wenn wir nun die Kugel mit einem Dielektrikum ( $\epsilon_a$ ) umgeben, dann ist  $B_i - E_{selbst}$  das Reaktionsfeld im Fall  $\epsilon_i = 1$ :

$$\vec{E}_R = -\frac{4\pi \vec{P}_c}{2\epsilon_a + 1} + \frac{4\pi}{3} \vec{P}_c = \frac{2(\epsilon_a - 1)}{2\epsilon_a + 1} \frac{\vec{p}_c}{R^3}.$$

Arten der Polarisation:

Oben wurde  $\vec{P}$  als (lokales) Dipolmoment des Dielektrikums pro Volumenelement (bzw. Einheitsvolumen) bezeichnet. Neben dem Fall des konstanten bzw. festen Dipolmoments gibt es verschiedene Möglichkeiten Dipolmomente zu induzieren:

Verschiebungspolarisation (a) Das Feld  $\vec{E}$  verschiebt die (Valenz-)Elektronen relativ zu den Ionenrümpfen, die entweder als fest betrachtet werden oder wesentlich trüger sind (dynamisches Phänomen!). (b) Das induzierte Dipolmoment entsteht durch eine Verschiebung positiver Ionen relativ zu negativen Ionen. Man bezeichnet (a) als Elektronenpolarisation und (b) als Ionenpolarisation.

Orientierungspolarisation bezeichnet die vom Feld induzierte Drehung bzw. Orientierung polarer Moleküle, wie  $H_2O$ ,  $HCl$  oder  $CO$ , die ein signifikantes permanentes Dipolmoment besitzen.

Experimentelle Verfahren zur Unterscheidung der verschiedenen Polarisationen beruhen in der Regel auf deren unterschiedlichen typischen Zeitskalen (Relaxationszeiten).

Clausius-Mossottische Gleichung:

Hauptsächlich in der physikalischen Chemie stößt man häufig auf die Beziehung

$$\vec{p}_{pol} = \alpha \vec{E}_{lok}. \quad (5.20)$$

Hier ist  $\vec{E}_{lok}$  das lokale Feld am Ort eines Atoms oder Moleküls in einem Medium<sup>11</sup>. Die Größe  $\vec{p}_{pol}$  ist das durch  $\vec{E}_{lok}$  in dem Atom oder in dem Molekül induzierte Dipolmoment. Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$ , die im allgemeinen Fall wieder eine tensorielle Größe ist (!); heißt (isotrope) atomare oder (isotrope) molekulare Polarisierbarkeit. Die Gl. (5.20) erlaubt es, unter noch zu diskutierenden Bedingungen, die mikroskopische Größe Polarisierbarkeit mit der makroskopischen Größe Dielektrizitätszahl eines Mediums zu verbinden. Dazu gehen wir wie folgt vor.

Ein Volumen sei angefüllt mit Molekülen, die kein permanentes Dipolmoment besitzen. Grundsätzlich soll in unserem Medium ein mittleres makroskopisches Feld  $\vec{E}$  herrschen, so wie es zu Beginn des Abschnitts 5.1 eingeführt wurde. Dieses mittlere makroskopische Feld ist über die Beziehung (5.11), also  $\vec{P} = \frac{1}{4\pi}(\epsilon - 1)\vec{E}$ , mit der Polarisation verknüpft. Andererseits gilt lokal bezogen auf unser Zentralmolekül

$$\vec{P} = \rho \vec{p}_{pol} = \alpha \rho \vec{E}_{lok}, \quad (5.21)$$

wobei  $\rho$  in diesem Fall die Anzahldichte der Moleküle im Dielektrikum ist. Hier wird das gleiche  $\vec{P}$  einmal vom makroskopischen Standpunkt aus betrachtet (in Gl. (5.11)) und einmal vom mikroskopischen Standpunkt aus (in Gl. (5.21))!

Um  $\alpha$  durch  $\epsilon$  bzw. umgekehrt ausdrücken zu können, benötigen wir eine zusätzliche Verbindung zwischen  $\vec{E}_{lok}$  und  $\vec{E}$ . Dazu greifen wir ein einzelnes Referenzmolekül heraus und nehmen an, dass sich dieses Molekül in einem effektiven kugelförmigen Käfig oder Hohlraum gebildet durch die umgebenden Moleküle befindet. Weiter nehmen wir an, dass die umgebenden Moleküle zu einem homogenen Dielektrikum verschmelzen. Damit entspricht diese Situation dem oben diskutierten Fall eines kugelförmigen Hohlraums in einem homogenen Dielektrikum.

An dieser Stelle gibt es zwei Fortsetzungen. Die Erste, die sich häufig in den Lehrbüchern findet, ist mehr intuitiver Natur. Sie verknüpft das lokale Feld mit dem mittleren makroskopischen Feld mittels der Beziehung

<sup>11</sup>Der Einfachheit halber gehen wir hier von nur einer einzigen Sorte Atome bzw. Moleküle aus.

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \vec{E}_{pol}. \quad (5.22)$$

Hier ist  $\vec{E}_{pol}$  ein Feld im Zentrum des Hohlraums aufgrund der Polarisationsladungsverteilung an dessen Rand. Für  $\vec{E}_{pol}$  gilt daher

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pol} &= \oint \frac{\sigma_{pol} d\vec{f}}{R^2} = - \oint \frac{\sigma_{pol}^{(0)} df}{R^2} \cos^2 \theta \vec{e}_z \\ &= \frac{4\pi}{3} \sigma_{pol}^{(0)} \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (5.23)$$

wobei  $d\vec{f}$  zum Kugelzentrum gerichtet ist. Hier ist  $\sigma_{pol}^{(0)}$  der richtungsunabhängige Teil von  $\sigma_{pol}$  (vgl. oben) und  $\vec{e}_z$  ist ein Einheitsvektor in  $z$ -Richtung. Gleichzeitig ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung  $\sigma_{pol}$  gegeben durch

$$\vec{p}_{pol} = R \int \sigma_{pol} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} df = \frac{4\pi}{3} R^3 \underbrace{\sigma_{pol}^{(0)} \vec{e}_z}_{=\vec{P}}$$

und daher

$$\vec{E}_{pol} = \frac{4\pi}{3} \vec{P}, \quad (5.24)$$

wobei  $\vec{P}$  wieder die gleiche Polarisation wie oben sein soll! Es ist auch wichtig zu bemerken, dass bei dieser Ableitung lediglich die Symmetrie des Problems eingegangen ist. Insbesondere ist  $\sigma_{pol}$  aus Gl. (5.14) abgeleitet für einen leeren Hohlraum nicht explizit verwendet worden. Nur die Winkelabhängigkeit, die im Fall des besetzten Hohlraums die gleiche ist, ist eingegangen.

Die Kombination der Gln. (5.11), (5.21), (5.22) und (5.24) liefert sofort

$$\alpha^{-1} \rho^{-1} \vec{P} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} = \left( \frac{4\pi}{\epsilon - 1} + \frac{4\pi}{3} \right) \vec{P},$$

d.h.

$$\alpha = \frac{3}{4\pi\rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}. \quad (5.25)$$

Dies ist die Clausius-Mossottische Gleichung<sup>12</sup><sup>13</sup>.

Die zweite alternative Fortsetzung berechnet  $\vec{E}_{lok}$  direkt aus den obigen Approximationen. D.h.,  $\vec{E}_{lok}$  ist das Feld am Ort des zentralen Punktadipols im kugelförmigen Hohlraum gegeben durch

$$\vec{E}_{lok} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} \vec{E} + g\vec{p}_{pol} \quad (5.26)$$

mit

$$g = \frac{8\pi\rho}{3} \frac{\epsilon-1}{2\epsilon+1}. \quad (5.27)$$

Dies entspricht dem Resultat, das wir im Beispiel *Eingebettete kugelförmige Dielektrika* für  $\vec{E}_i$  erhalten haben. Die Kombination der Gln. (5.11), (5.21) und (5.26) liefert wiederum die Clausius-Mossottische Gleichung!

Eine Grundvoraussetzung für diese Identität der Ergebnisse ist die Gleichheit der Polarisation  $\vec{P}$  in Gl. (5.21) verglichen mit  $\vec{P}$  in den Gln. (5.11) und (5.24). Generell setzt sich  $\vec{P}$  aus verschiedenen, oben aufgelisteten, Beiträgen (wie Verschiebungs- oder Orientierungspolarisation) zusammen, die durch unterschiedliche Zeitskalen charakterisiert sind. Gl. (5.20) berücksichtigt die (hochfrequenten) elektronischen Verschiebungen, und wir haben in unserer Betrachtung bisher angenommen, dass nur dieser Beitrag für das gesamte  $\vec{P}$  verantwortlich ist. Dementsprechend wird die Clausius-Mossottische Gleichung oft auch als

$$\alpha = \frac{3}{4\pi\rho} \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2}. \quad (5.28)$$

geschrieben. Hier ist  $\epsilon_\infty$  der Hochfrequenzgrenzfall der Dielektrizitätszahl. Die Wurzel aus dieser Grösse ist der Brechungsindex (vgl. Abschnitt 6.3).

<sup>12</sup>Clausius, Rudolf Julius Emanuel, Physiker, \*Köslin (heute Koszalin) 2.1. 1822, †Bonn 24.8. 1888; Mitbegründer der mechanischen Wärmetheorie; formulierte den 2. Hauptatz der Wärmetheorie und führte den Begriff der Entropie ein. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>13</sup>Mossotti, Ottaviano-Fabrizio, 1791-1863, war ein italienischer Physiker, der augrund seiner liberalen Ideen ins Exil gehen mußte. Er unterrichtete Astronomie und Physik an der Universität von Buenos Aires. Sein Name ist verbunden mit einem speziellen astronomischen Linsentyp sowie mit der Clausius-Mossotti Gleichung. Quelle: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

Jetzt wollen wir den Molekülen zusätzlich ein permanentes Dipolmoment  $\vec{p}$  und freie Orientierbarkeit verleihen. Treu dem bisherigen Vorgehen ersetzen wir Gl. (5.20) durch den Ansatz

$$\vec{p}_{pol} + \langle \vec{p} \rangle = (\alpha + \alpha') \vec{E}_{lok}.$$

Hier ist  $\langle \vec{p} \rangle = p \langle \cos \theta \rangle \vec{e}_z$  der zeitliche Mittelwert des permanenten Dipolmomentes bezogen auf die Richtung von  $\vec{E}_{lok}$  ( $\parallel \vec{e}_z$ ). Diese Beziehung setzt näherungsweise voraus, dass der permanente Dipol in einem mittleren Feld  $\vec{E}_{lok}$  thermische Richtungsfuktuations um die durch  $\vec{E}_{lok}$  definierte Vorzugsrichtung ausführt. Der Mittelwert  $\langle \cos \theta \rangle$  berechnet sich dann gemäß

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int d\Omega \cos \theta e^{\beta \vec{p} \cdot \vec{E}_{lok}}}{\int d\Omega e^{\beta \vec{p} \cdot \vec{E}_{lok}}}.$$

Hier ist  $\beta = (k_B T)^{-1}$  und  $\vec{p} \cdot \vec{E}_{lok} = p E_{lok} \cos \theta$ .  $T$  die Temperatur,  $k_B$  ist die sogenannte Boltzmann-Konstante, und  $d\Omega$  ist  $2\pi \sin \theta d\theta$ <sup>14</sup>. Die Lösung des Integrals lautet

$$\langle \cos \theta \rangle = \mathcal{L}(x) \quad \text{mit} \quad x = \beta p E_{lok},$$

wobei

$$\mathcal{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x}{3}$$

die Langevin-Funktion<sup>15</sup> ist. Für genügend hohe Temperaturen gilt also

$$\alpha' = \frac{p^2}{3k_B T}.$$

<sup>14</sup> $\langle \cos \theta \rangle$  ist ein Mittelwert im kanonischen Ensemble der statistischen Mechanik. Siehe z. B. R. Hentschke (2004) *Statistische Mechanik* Wiley-VCH (Abschnitt 6.1).

<sup>15</sup>Langevin, Paul, französischer Physiker, \*Paris 23.1. 1872, ebenda 19.12. 1946; formulierte die erste atomare Theorie für Paramagnetismus (Verallgemeinerung des curieschen Gesetzes) und Diamagnetismus; Arbeiten zur brownschen Molekularbewegung und kinetischen Gastheorie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

Ersetzen von  $\alpha$  in Gl. (5.25) durch  $\alpha + \alpha'$  liefert die Debyesche Gleichung<sup>16</sup>:

$$\alpha + \frac{p^2}{3k_B T} = \frac{3}{4\pi\rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} .$$

Diese Gleichung beinhaltet einen zusätzlichen Beitrag der Orientierungspolarisation. Dieser verschwindet mit zunehmender Temperatur. Aus einer Auftragung der (gemessenen) rechten Seite der Debyeschen Gleichung gegen  $(3k_B T)^{-1}$  kann man prinzipiell  $p$  und  $\alpha$  direkt bestimmen. Allerdings liefert diese Methode nur für Gase bei geringen Drücken, jedoch nicht für Flüssigkeiten brauchbare Ergebnisse<sup>17</sup>.

Auch hier kann gemäß der zweiten alternativen Fortsetzung vorgegangen werden. Das Ergebnis ist diesmal aber nicht wieder die Debyesche Gleichung. Die Details dieser Rechnung, die von Onsager durchgeführt wurde<sup>18 19</sup>, und eine Diskussion des Ergebnisses sowie verschiedene

<sup>16</sup>Debye, Peter Josephus Wilhelmus, niederländischer Physiker und Physikochemiker, seit 1946 amerikanischer Staatsbürger, \*Maastricht 24.3. 1884, †Ithaca (New York) 2.11. 1966; formulierte u.a. 1912 eine Theorie zur Erklärung der spezifischen Wärmekapazität von Festkörpern (Debye-Theorie) und klärte die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante; erhielt 1936 den Nobelpreis für Chemie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>17</sup>Dies ist nicht grundsätzlich der Fall. Im Lehrbuch von P. W. Atkins, *Physikalische Chemie* (VCH, 1990) findet man im Beispiel 24-2 (Seite 594) eine Auftragung für Campher, ein ätherisches Öl, die der Debyeschen Gleichung sehr schön gehorcht. Man kann sich dies dadurch klar machen, indem man die Langevin-Funktion entwickelt und die führende Korrektur zur Debyeschen Gleichung betrachtet. Diese spielt dann keine Rolle, wenn  $\frac{1}{15}(\frac{pE_{lok}}{k_B T})^2 \ll 1$  gilt. Wenn wir  $E_{lok}$  in grober Näherung als unabhängig von der Temperatur ansehen, dann kann durch einfache Dimensionsanalyse  $E_{lok}^2 \propto p^2 \rho$  gefolgert werden, wobei  $\rho$  die Anzahldichte der Moleküle im Volumen ist. Damit ergibt sich unter Vernachlässigung von numerischen Faktoren  $(\frac{p^2}{k_B T})^2 \rho \ll 1$ . Für Campher ist die Größe auf der linken Seite ungefähr 0.03 bei  $T = 300K$  während sich für Wasser ungefähr 7.7 ergibt! Es kommt also entscheidend auf die Größe des Moleküls im Verhältnis zu seinem Dipolmoment an.

<sup>18</sup>L. Onsager (1936) *Electric moments of molecules in liquids* J. Am. Chem. Soc. **58**, 1486.

<sup>19</sup>Onsager, Lars, amerikanischer Physikochemiker norwegischer Herkunft, \*Oslo 27.11. 1903, †Coral Gables (Florida) 5.10. 1976; arbeitete über die Leitfähigkeit von Lösungen, über Elektrolyte, Thermodynamik und statistische Mechanik; stellte eine Theorie zur Isotopentrennung auf. Für Untersuchungen zur Thermodynamik irreversibler Prozesse erhielt er 1968 den Nobelpreis für Chemie. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

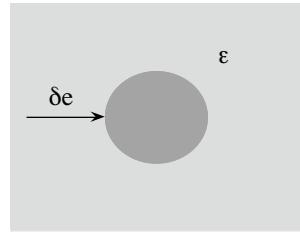


Abbildung 5.2: Ein Leiter befindet sich im Dielektrum und seine Ladung wird durch Heranführen von  $\delta e$  aus dem Unendlichen vergrößert.

Erweiterungen findet man im angegebenen Buch von Fröhlich (Kapitel II, §6).

Energie einer Ladungsverteilung im Dielektrum:

Wir betrachten die Situation in Abbildung 5.2. Die Arbeit, die geleistet werden muss, um die Ladung  $e$  auf dem Leiter zu vergrößern, ist

$$\delta w = \varphi \delta e .$$

Hier wird die Ladung aus dem Unendlichen ( $\varphi = 0$ ) herangeführt. Gemäß Gl. (5.8) gilt

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} .$$

Man beachte, dass  $d\vec{f}$  hier in den Leiter hinein gerichtet ist. Damit folgt

$$\delta w = -\frac{1}{4\pi} \oint \varphi \delta \vec{D} \cdot d\vec{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot (\varphi \delta \vec{D}) dV ,$$

wobei sich das Volumenintegral über das gesamte Gebiet außerhalb des Leiters erstreckt. Wir schreiben weiter

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \delta \vec{D}) = \varphi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D}}_{=0} + \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -\vec{E} \cdot \delta \vec{D}$$

und erhalten

$$\delta w = \int \frac{\vec{E} \cdot \delta \vec{D}}{4\pi} dV \quad (5.29)$$

bzw. für die gesamte Energie  $U = \sum \delta w$  des Feldes im Dielektrikum

$$U = \int \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{8\pi} dV . \quad (5.30)$$

Der zusätzliche Faktor  $1/2$  ergibt sich aus der angenommenen linearen Beziehung zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  (vgl. Gl. (5.10)), d.h.,  $\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{D})$ .

Ein dielektrisches Objekt im externen  $\vec{E}$ -Feld:

Wenn ein dielektrisches Objekt in ein elektrisches Feld, dessen Quellen als fest angenommen werden, eingebracht wird, ändert dies die Energie des Gesamtsystems. Wir wollen diese Energieänderung berechnen. Dazu gehen wir von der ursprünglichen elektrostatischen Energie

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 dV$$

aus. Das Objekt soll ein Volumen  $V_1$  und darin eine Dielektrizitätszahl  $\epsilon_1$  besitzen. Außerhalb ist diese  $\epsilon_0$ . Die Energiedifferenz ist dann

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0) dV ,$$

wobei der erste Term die Situation nach Einbringen des Objektes beschreibt. Mit viel Voraussicht schreiben wir

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0) dV \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E} + \vec{E}_0) \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) dV , \end{aligned}$$

denn das zweite Integral verschwindet. Es gilt nämlich  $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \vec{E}_0) = 0$  und daher  $\vec{E} + \vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \varphi$ . Einsetzen nebst partieller Integration liefert  $\frac{1}{8\pi} \int \varphi \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) dV = 0$ , da  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = 0$ . Die Dichte der Quellen soll ja konstant sein. Somit folgt

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0) dV \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\vec{E} \cdot \vec{D}_0 - \vec{D} \cdot \vec{E}_0) dV \\ \vec{D}_0 &= \epsilon_0 \vec{E}_0 \\ \vec{D} &= \epsilon_1 \vec{E} \quad - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E} \cdot \vec{E}_0 dV . \end{aligned}$$

Wenn jetzt  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätszahl des Vakuums ist, also  $\epsilon_0 = 1$ , dann folgt mit Gl. (5.11)

$$U = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{P} \cdot \vec{E}_0 dV . \quad (5.32)$$

Dies ist das zu Gl. (3.65) analoge Resultat. Der Faktor  $1/2$  resultiert hier aus der Polarisierbarkeit des ins Feld eingebrachten Objekts. Die Gln. (5.31) und (5.32) zeigen auch, dass ein dielektrischer Körper die Tendenz hat, sich in Richtung größerer elektrischer Feldstärke zu bewegen (vorausgesetzt  $\epsilon_1 > \epsilon_0$ !). Betrachten wir ein Beispiel.

- Punktdipol im Zentrum eines kugelförmigen Hohlraums ( $\epsilon_i = 1$ ) mit Radius  $R$  eingebettet in ein homogenes unendliches Dielektrikum ( $\epsilon_a$ ): Hier ist  $\vec{E}_0$  das Feld des Dipols

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \left( \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) .$$

Dagegen beschreibt  $\vec{P}$  die Polarisierung des Dielektrikums aufgrund von  $\vec{E}_0$ , d. h.

$$\vec{P} = -\frac{\epsilon_a - 1}{4\pi} \vec{\nabla} \varphi_a .$$

Hier ist

$$\varphi_a = -\frac{A_a}{r^2} \cos \theta$$

mit

$$A_a = -\frac{3}{2\epsilon_a + 1} p .$$

Die Form von  $\varphi_a$  entnehmen wir dem obigen Beispiel auf Seite 40. Insgesamt erhalten wir für Änderung der potenziellen Energie des Systems durch Einbettung des Dipols in das Dielektrikum:

$$U = -\frac{3}{8\pi} \frac{\epsilon_a - 1}{2\epsilon_a + 1} p^2 \int_D d^3r \left( \vec{\nabla} \frac{\cos \theta}{r^2} \right)^2.$$

Das Integrationsvolumen ist der Außenraum der Kugel (also das Dielektrikum). Mit

$$\begin{aligned} \left( \vec{\nabla} \frac{\cos \theta}{r^2} \right)^2 &= \left( \vec{\nabla} \frac{z}{r^3} \right)^2 = \left( \frac{\vec{e}_z}{r^3} - 3 \frac{z \vec{r}}{r^5} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r^6} \left( 1 - 6 \cos \theta \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}_{=\cos \theta} + 9 \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{1}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_D d^3r (\dots)^2 &= 2\pi \int_R^\infty dr \frac{1}{r^4} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 + 3 \cos^2 \theta) \\ &= \frac{8\pi}{3R^3}. \end{aligned}$$

D. h. wir erhalten

$$U = -\frac{\epsilon_a - 1}{2\epsilon_a + 1} \frac{p^2}{R^3}. \quad (5.33)$$

Dieses Ergebnis geht auf Lars Onsager zurück. Eine Anwendung ist die Löslichkeit polarer Moleküle in einer Flüssigkeit. Wir werden diesen Punkt in Aufgabe 27 wieder aufgreifen (allerdings für Monopole (Ionen)).

## 5.2 Das magnetostatische Feld im Medium

Das zeitunabhängige Magnetfeld in Medien wird durch Mittelung aus den Gln. (2.35) und (2.38) erhalten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \rho \vec{v} \rangle. \quad (5.35)$$

Hier ist  $\vec{B}$  die mittlere magnetische Feldstärke bzw. die magnetische Induktion. Für Nichtleiter, d.h. Dielektrika, gilt

$$\int \langle \rho \vec{v} \rangle \cdot d\vec{f} = 0, \quad (5.36)$$

wobei das Integral über irgendeinen Körperquerschnitt verläuft, während für Leiter  $\neq 0$  gelten kann. Wir gehen zunächst von (5.36) aus und definieren

$$\langle \rho \vec{v} \rangle \equiv c \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (5.37)$$

Die Größe  $\vec{M}$  wird als Magnetisierung bezeichnet. In Analogie zu Gl. (5.4) definieren wir weiter

$$\vec{B} \equiv \vec{H} + 4\pi \vec{M}, \quad (5.38)$$

d.h.,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0. \quad (5.39)$$

Man beachte allerdings, dass  $\vec{B}$  und nicht etwa  $\vec{H}$  die mittlere Feldstärke ist!

Welches ist die physikalische Bedeutung von  $\vec{M}$ ? Wir gehen von Gl. (3.62) für das magnetische Moment im Vakuum aus, d.h.,

$$\frac{1}{2c} \int (\vec{r} \times \langle \rho \vec{v} \rangle) dV = \frac{1}{2} \int [\vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M})] dV.$$

Das Integral kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) dV &= \oint \vec{r} \times (d\vec{f} \times \vec{M}) \\ &\quad - \int (\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{r} dV \end{aligned}$$

(Aufgabe). Das Flächenintegral verschwindet an der Körperoberfläche, da dort  $\rho \vec{v} = 0$  gilt. Der zweite Integrand ergibt <sup>20</sup>

<sup>20</sup>Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} [(\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{r}]_i &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} M_l \partial_m r_k \\ &= (-\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) M_l \partial_m r_k \\ &= -M_i \partial_j r_j + M_j \partial_i r_j \\ &= [-\vec{M} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})]_i + [\vec{M}]_i \end{aligned}$$

$$(\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{r} = -\vec{M} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + \vec{M} = -2\vec{M}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \langle \rho \vec{v} \rangle dV = \int \vec{M} dV. \quad (5.40)$$

D.h.,  $\vec{M}$  ist das magnetische Moment pro Volumeneinheit.

Analog der Beziehung  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  im elektrostatischen Fall verbinden wir  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  durch

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (5.41)$$

wobei  $\mu$  die magnetische Permeabilität ist. Die Gl. (5.41) setzt wieder nicht zu großen Feldstärken sowie ein isotropes Medium voraus.

Ebenfalls analog zum elektrostatischen Fall definieren wir über

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \vec{H} \quad (5.42)$$

die magnetische Suszeptibilität  $\chi$ .

Bemerkung: Während für alle Körper  $\epsilon > 1$  gilt, gilt hier  $\mu > 0$  (siehe §30 in Referenz [2]). Außerdem ist die magnetische Suszeptibilität in der Regel sehr viel kleiner als die dielektrische Suszeptibilität.

Man unterscheidet -

Paramagnetismus ( $\mu > 1$ ): Die Atome oder Moleküle dieser Substanzen haben ein eigenes magnetisches Moment. Ein äußeres Magnetfeld führt zur temperaturabhängigen Ausrichtung. Hier ist die Suszeptibilität als Funktion der Temperatur durch das Curie-Gesetz gegeben:

$$\chi \propto T^{-1}. \quad (5.43)$$

Ferromagnetismus ( $\mu \gg 1$ ): Innerhalb mikroskopischer Bereiche sind die atomaren bzw. molekularen Momente vollständig ausgerichtet (Sättigungsmagnetisierung). Die Richtungsverteilung dieser Bereiche (Weißsche Bezirke) ist allerdings isotrop.

Hier führt ein äußeres Magnetfeld zur Ausrichtung (Umklappen) der Bereiche als Ganzes. Das zu Gl. (5.43) analoge Gesetz lautet

$$\chi \propto |T - T_c|^{-\gamma}, \quad (5.44)$$

wobei  $\gamma = 1$  ist (Curie-Weiß Gesetz)<sup>21</sup>.  $T_c$  heißt dann Curie-Temperatur (Fe:  $T_c = 774^\circ C$ ; Ni:  $T_c = 372^\circ C$ ). Die Relation (5.44) gilt eigentlich für hohe Temperaturen oberhalb  $T_c$ . Sie gilt aber auch in der unmittelbaren Umgebung von  $T_c$ , wobei jedoch  $\gamma \neq 1$  ist.

Dazu einige Erläuterungen: Wir betrachten die Abbildung 5.3 (a), die den einfachsten Fall illustriert. Dargestellt ist die Magnetisierung in Feldrichtung aufgetragen als Funktion der  $H$ -Feldstärke. Der Wechsel von positiven zu negativen Werten bedeutet die Richtungsumkehr der Magnetisierung bzw. des Feldes. In einem Bereich um den Ursprung ist die Beziehung zwischen  $M$  und  $H$  linear. Dort ist die magnetische Suszeptibilität unabhängig von  $H$ . Dies ist der Bereich, der eigentlich von Gl. (5.42) beschrieben wird. Außerhalb dieses Bereiches strebt die Kurve gegen die Sättigungsmagnetisierung. Sie weicht vom linearen Verhalten ab. In Experimenten, in denen  $H$  zwischen großen positiven und großen negativen Werten kontinuierlich hin und her variiert wird, beobachtet man in der Regel Hystereseschleifen. Dies ist in Abbildung 5.3 (b) dargestellt. Die Hystereseschleife entspricht metastabilen Zuständen des Probenmaterials. D.h., würde man unendlich langsam (man sagt: im Gleichgewicht) den gezeigten Pfad durchlaufen können, dann ergäbe sich ein Bild wie in (a). Je nach Ausprägung der Schleife spricht man von magnetisch weicheren oder härteren Materialien.

Um die Relation (5.44) zu verstehen, muss man zur Definition der Suszeptibilität in der Gleichgewichtsthermodynamik übergehen:

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{T,H=0}.$$

<sup>21</sup>Curie, Pierre, französischer Physiker, \*Paris 15.5. 1859, †ebenda 19.4. 1906; seit 1904 Professor an der Sorbonne. Curie entdeckte 1880 die Piezoelektrizität der Kristalle und mit seiner Frau 1898 die radioaktiven Elemente Polonium und Radium. Mit ihr und A.H. Becquerel erhielt er 1903 den Nobelpreis für Physik. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

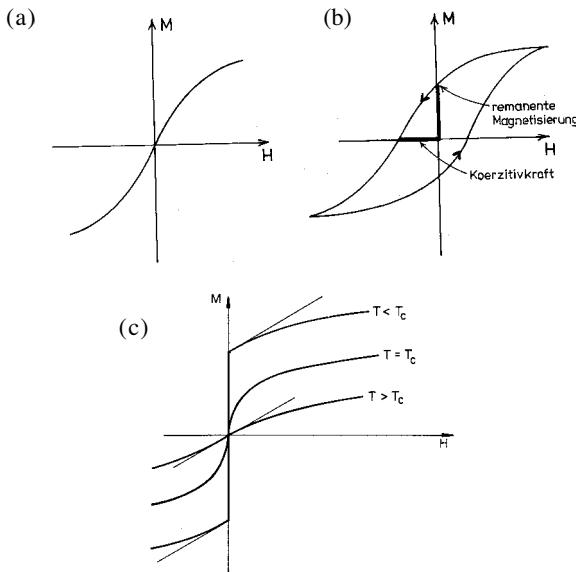


Abbildung 5.3: (a) Magnetisierung  $M$  aufgetragen gegen  $H$ -Feldstärke. (b) Wird das Feld variiert so durchläuft man in der Regel Hystereseschleifen. Die Restmagnetisierung bei  $H = 0$  nennt man Remanenz. (c) Gleichgewichtsmagnetisierung aufgetragen gegen  $H$  für Temperaturen  $T > T_c$ ,  $T = T_c$  und  $T < T_c$ . Die Geraden zeigen die Steigungen an den entsprechenden Punkten.

Im angesprochenen linearen Bereich ist dies mit Gl. (5.42) gleichbedeutend. Das Curie-Weiß Gesetz wird jetzt jedoch durch Abbildung 5.3 (c) verständlich. Bei hohen Temperaturen (hier  $T > T_c$ ) erhalten wir ein Bild wie im Teil (a) der Abbildung. Kühlen wir die Probe ab und nähern uns  $T_c$ , so wird die Steigung der Magnetisierungskurve immer größer. Bei  $T = T_c$  ist sie unendlich. Dies entspricht der Divergenz in der Relation (5.44). Für  $T < T_c$  ändert sich das Verhalten der Magnetisierung qualitativ. Dort macht  $M$  einen Sprung bei  $H = 0$ . Dieser Sprung entspricht einem Phasenübergang 1. Ordnung. Das Verhalten von  $M$  für  $T \rightarrow T_c$  und  $H \rightarrow 0$  dagegen bezeichnet man als Phasenübergang 2. Ordnung. Der Index  $c$  hat übrigens nicht mit Curie zu tun, sondern steht für *critical*, also kritisch. Das Verhalten von Systemen nahe ihrer kritischen Temperatur wird als kritische Phänomene bezeichnet. Die Erklärung des sogenannten kritischen Verhaltens gehört zu den großen Erfolgen der Physik in den vergangenen 40 Jahren.

Diamagnetismus ( $\mu < 1$ ): Hier ist  $\vec{M}$  antiparallel zu  $\vec{H}$ . Man kann dies erklären durch die Induktion von Wirbelströmen in den Atomen, die dann dem Feld  $\vec{H}$  entgegengesetzt sind (vgl. unten). Dadurch ist der Diamagnetismus temperaturunabhängig.

Bemerkung: Analog zu den Gln. (5.6) und (5.7) gilt hier

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = 0 \quad (5.45)$$

und

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 . \quad (5.46)$$

Hier zeigt  $\vec{n}$  in das Gebiet 2.

Was aber passiert mit der Tangentialkomponente von  $\vec{B}$ ? Dazu integrieren wir Gl. (5.35) über einen kleinen Längenelement  $\delta l$ , das die Grenzfläche senkrecht schneidet. Man erhält dann

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \vec{n} = \frac{4\pi}{c} \vec{g} , \quad (5.47)$$

wobei  $\vec{g}$ , die Oberflächendichte des Stromes, durch

$$\vec{g} = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \int_{-\delta l/2}^{\delta l/2} \langle \rho \vec{v} \rangle dl$$

gegeben ist (vgl. [2] §27).

**Biot-Savartsches Gesetz im Kontinuum:**

Die Behandlung konstanter Ströme im Abschnitt 3.3 lässt sich hier übernehmen. Ausgangspunkt sind diesmal die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Hier ist  $\vec{j}$  die Dichte des Leitungsstroms<sup>22</sup>. Man beachte jedoch

$$\langle \rho \vec{v} \rangle = c \vec{\nabla} \times \vec{M} + \vec{j},$$

wobei aber der Term  $c \vec{\nabla} \times \vec{M}$  keinen Beitrag zum Nettostrom (Integral über Leiterquerschnitt) liefert. Statt Gl. (3.57) erhalten wir mit  $\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$  und Gl. (5.41)

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}, \quad (5.48)$$

wobei  $\mu$  = konstant angenommen wurde. Bei der Lösung von Gl. (5.48) müssen natürlich die oben diskutierten Bedingungen an den Grenzen zwischen zwei Medien berücksichtigt werden (vgl. Gl. (5.46)).

Die Gl. (5.48) lässt sich leicht lösen, wenn sowohl im Medium als auch im umgebenden Raum  $\mu = 1$  gilt (z. B.  $\mu_{Kupfer} - 1 = -9.7 \cdot 10^{-6}$ ;  $\mu_{Sauerstoff} - 1 = -1.9 \cdot 10^{-6}$ ) und die Ströme auf einen endlichen Raumbereich beschränkt sind. Analog zu (3.60) folgt

$$\vec{B} = \vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{R^3} dV. \quad (5.49)$$

<sup>22</sup>Da wir es hier grundsätzlich mit gemittelten Größen zu tun haben, lassen wir die Klammern (...) weg.

Hier ist  $\vec{R}$  der Vektor vom Volumenelement zum Beobachtungspunkt. Wenn wir es mit dünnen Drähten zu tun haben gilt weiter

$$\vec{j} dV \approx I d\vec{l},$$

wobei  $I$  der durch den Leiter fließende Gesamtstrom ist, und  $d\vec{l}$  ist ein gerichtetes Linienelement.

Bemerkung: Tatsächlich sind wir hier nicht auf den Fall  $\mu = 1$  beschränkt, da der Leiterdurchmesser und damit zusammenhängende Grenzbedingungen gar nicht auftreten. D.h.,

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{c} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}. \quad (5.50)$$

Dies ist wieder das Biot-Savatsche Gesetz – aber diesmal für magnetisch permeable Medien.

**$\vec{F}$ ,  $\vec{N}$  und  $U$  für  $\vec{j}$  in  $\vec{B}$ :**

Es sei  $\vec{B}$  ein externes Feld und  $\vec{j}$  eine begrenzte Stromdichte. Gemäß der Gleichung für die Lorentzkraft ist

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3 r \quad (5.51)$$

die Gesamtkraft auf die Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  im Volumen. Entsprechend gilt für das Drehmoment

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) d^3 r. \quad (5.52)$$

Wenn wir  $\vec{B}(\vec{r})$  um einen geeigneten Ursprung entwickeln, so folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(0) + \dots. \quad (5.53)$$

Einsetzen in Gl. (5.51) ergibt

$$F_i = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \left[ \int j_j(\vec{r}) B_k(0) d^3 r + \int j_j(\vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) B_k(0) d^3 r + \dots \right].$$

Der erste Term verschwindet für Integrationsgebiete, die die Stromverteilung einschließen<sup>23</sup>. Der zweite Term kann so umgeschrieben werden, dass in führender Ordnung gilt

$$F_i = \epsilon_{ijk} \left( \vec{m} \times \vec{\nabla} \right)_j B_k (\vec{r}) |_{\vec{r}=0}$$

<sup>24</sup> Dies kann als

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \left( \vec{m} \times \vec{\nabla} \right) \times \vec{B} \\ &= \vec{\nabla} \left( \vec{m} \cdot \vec{B} \right) - \vec{m} \underbrace{\left( \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right)}_{=0} \end{aligned}$$

und damit als

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \left( \vec{m} \cdot \vec{B} \right) \quad (5.54)$$

geschrieben werden. Diese Näherung ist dann gut, wenn sich  $\vec{B}$  in dem von  $\vec{m}$  eingenommenen Volumen wenig ändert. Analog findet man

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} (0) . \quad (5.55)$$

Aus Gl. (5.54) folgt direkt für ein permanentes Moment  $\vec{m}$  dessen Energie im  $\vec{B}$ -Feld:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} . \quad (5.56)$$

Das magnetische Moment für Leiterschleifen:

Entsprechend Gl. (3.62) gilt in diesem Fall

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \oint \vec{r} \times d\vec{l} . \quad (5.57)$$

<sup>23</sup>Zu zeigen ist  $\int j_j d^3 r = 0$  (im Mittel). Dies wurde bewiesen bei der Herleitung von Gl. (3.61).

<sup>24</sup>Am besten ersetzt man die Kreuzprodukte durch die Komponentenschreibweise mittels des  $\epsilon_{klm}$  und arbeitet rückwärts. Produkte der  $\epsilon_{...}$  können mittels der  $\delta$ -Identität (vgl. Anhang) ausgedrückt werden. Dann benötigt man nur noch die Identität  $\int r_j j_m d^3 r + \int r_m j_j d^3 r = 0$  für lokalisierte Stromverteilungen. Die Identität ist leicht zu beweisen mit einer allgemeineren Form:  $\int [f(\vec{j} \cdot \vec{\nabla})g + g(\vec{j} \cdot \vec{\nabla})f] d^3 r = 0$ , wobei  $f(r) = r_j$  und  $g(r) = r_m$  gesetzt wird. Die verallgemeinerte Identität beweist man durch partielle Integration und mittels  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  (im Mittel).

Man beachte, dass  $d\vec{f} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{l}$  gilt, wobei  $d\vec{f}$  das vektorielle Flächenelement ist, das durch  $\vec{r}$  und  $d\vec{l}$  aufgespannt wird. Folglich gilt<sup>25</sup>

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \int d\vec{f} . \quad (5.58)$$

Energiestrom im Leiter:

Ausgehend von  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  sowie  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  folgt wie am Ende des Kapitels 2 schon gezeigt die stationäre Energie-Kontinuitätsgleichung

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (5.59)$$

mit

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left( \vec{E} \times \vec{H} \right) . \quad (5.60)$$

Die rechte Seite beschreibt die pro Zeit und Volumen durch das Feld geleistete mechanische Arbeit an den verschobenen Ladungen, die den Strom ausmachen. Diese Arbeit verteilt sich im Leiter und geht in Wärme über (Joulsche Wärme). Die Größen  $\vec{j}$  und  $\vec{E}$  sind miteinander verknüpft, wobei diese Verknüpfung von der Art des Leiters abhängt. Oft kann man von einer einfachen Proportionalität ausgehen

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} . \quad (5.61)$$

(Ohmsches Gesetz)<sup>26</sup><sup>27</sup>. Der Koeffizient ist eine temperaturabhängige Materialkonstante und wird elektrische Leitfähigkeit genannt<sup>28</sup>. Mit dem Ohmschen Gesetz folgt für die oben erwähnte Wärmeverteilungsdichte eines homogenen Leiters

<sup>25</sup>Insbesondere ist  $\int d\vec{f}$  nicht von der Form der Fläche, die die Leiterschleife begrenzt, abhängig.

<sup>26</sup>Ohm, Georg Simon, Physiker, \*Erlangen 16.3. 1789, †München 6.7. 1854; Gymnasiallehrer, Professor in München. Er entdeckte 1826 das nach ihm benannte Gesetz der Stromleitung (ohmsches Gesetz); weitere Arbeiten betrafen die physiologische Akustik und die Interferenz linear polarisierten Lichts beim Durchgang durch einachsige Kristalle. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>27</sup>im anisotropen Körper gilt  $j_i = \sigma_{ik} E_k$ .  $\sigma_{ik}$  ist der Leitfähigkeitsensor.

<sup>28</sup>sollte nicht mit der Flächenladungsdichte verwechselt werden

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} \quad (5.62)$$

(Joule-Lenzsches Gesetz)<sup>29</sup><sup>30</sup>.

$$\delta w = \int \frac{\vec{H} \cdot \delta \vec{B}}{4\pi} dV. \quad (5.64)$$

Dies ist formal<sup>32</sup> analog zu Gl.(5.29)! Entsprechend gilt für die Gesamtenergie  $U$

Energie magnetischer Felder in Materie:

Im Zeitintervall  $\delta t$  leistet das Feld  $\vec{E}$  an den Strömen die Arbeit

$$\delta t \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV.$$

Die dafür notwendige Arbeit  $\delta w$  einer äußeren EMK (elektromotorische Kraft) ist gerade das Negative dieses Ausdrucks. Setzt man  $\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{H}$  ein, so gilt

$$\begin{aligned} \delta w &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) dV \\ &= \delta t \frac{c}{4\pi} \underbrace{\oint (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{l}}_{=0(im Unendlichen)} \\ &\quad -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) dV. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.63)$$

ein<sup>31</sup> und erhalten mit  $\delta \vec{B} = \delta t \partial \vec{B} / \partial t$

Ein  $\mu$ -Objekt im externen  $\vec{B}$ -Feld:

Wenn ein Objekt mit Permeabilität  $\mu_1$  in ein magnetisches Feld gebracht wird, dessen Quellen (Ströme) fest sind, ändert dies die Energie des Gesamtsystems<sup>33</sup>. Hier wird die Rolle von  $\vec{E}$  durch  $\vec{B}$  übernommen und die von  $\vec{D}$  durch  $\vec{H}$ . Man kann dann zeigen (Aufgabe), dass die Energieänderung  $U$  durch

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\vec{B} \cdot \vec{H}_0 - \vec{H} \cdot \vec{B}_0) dV$$

gegeben ist. Hier ist  $V_1$  das Volumen des Objekts. Der Ausdruck kann umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mu_1 - \mu_0) \vec{H} \cdot \vec{H}_0 dV \quad (5.66) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) \vec{B} \cdot \vec{B}_0 dV. \end{aligned}$$

Sowohl  $\mu_0$  als auch  $\mu_1$  können ortsabhängig sein. Sie sind aber als unabhängig von der Feldstärke angenommen. Wenn das Objekt sich im Vakuum befindet ( $\mu_0 = 1$ ), so folgt

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{M} \cdot \vec{B}_0 dV. \quad (5.67)$$

Dieses Resultat entspricht wieder (bis auf das Vorzeichen) der Gl. (5.32).

<sup>29</sup>Joule, James Prescott, britischer Physiker, \*Salford (bei Manchester) 24.12. 1818, †Sale (County Cheshire) 11.10. 1889; einer der Entdecker des Energiesatzes. Er bestimmte die Menge der durch mechanische Arbeit erzeugten Wärme (mechanisches Wärmeäquivalent), untersuchte die innere Energie der Gase und entdeckte mit W.Thomson bei Gasdrosselversuchen den Abkühlungseffekt (Joule-Thomson-Effekt); fand 1841 das Joule-Gesetz. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>30</sup>Lenz, Heinrich, russischer Physiker deutscher Herkunft, \*Dorpat (heute Tartu) 24.3. 1804, †Rom 10.2. 1865; brachte durch Anwendung des Peltier-Effekts Wasser zum Gefrieren, stellte die lenzsche Regel für die Richtung eines induzierten elektrischen Stromes auf (Induktion). ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>31</sup>beachte:  $\vec{H}$  ist im Gegensatz zu  $\vec{E}$  nicht der Mittelwert der echten mikroskopischen Feldstärke.

<sup>32</sup>und verlassen kurzzeitig die Magnetostatik

<sup>33</sup>Vgl. den oben diskutierten Fall des dielektrischen Objekts



# Kapitel 6

## Elektrodynamik der Kontinua

### 6.1 Elektrodynamik einfacher Stromkreiselemente:

Induktionsgesetz für bewegte Leiter:

Wir bewegen einen dünnen Draht im Magnetfeld. Dies bewirkt eine Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$  auf die Ladungsträger im Draht:

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} .$$

Wenn sie können, bewegen sich die Ladungen und diese Bewegung können wir uns auch aufgrund eines  $\vec{E}$ -Feldes vorstellen:

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\vec{F}_L}{e} = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} .$$

Hier steht *ind* für induziert. Wenn der Draht die geschlossene Raumkurve  $\partial A$  beschreibt, dann erhält man so an den Leiterenden die Potenzialdifferenz oder Spannung

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{ind} &= \oint_{\partial A} \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \oint_{\partial A} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{1}{c} \oint_{\partial A} (d\vec{s} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} . \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die Größe  $d\vec{s} \times \vec{v}$  bzw.  $d\vec{s} \times (d\vec{r}/dt)$  hat die in Abbildung 6.1 dargestellte geometrische Bedeutung.

Das Integral ist also gerade der magnetische Fluss durch die Summe dieser Flächenelemente in der Zeit  $dt$ , d.h.,

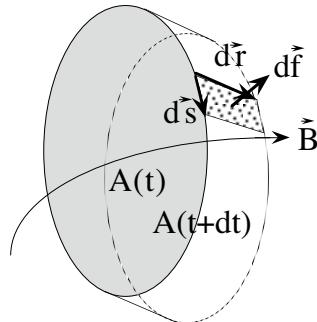


Abbildung 6.1: Eine bewegte Leiterschleife. Die Schleife bewegt sich in der Zeit  $dt$  um  $d\vec{r}$ .  $d\vec{r}$  und  $d\vec{s}$  spannen das gezeigte Flächenelement auf  $d\vec{f}$  auf.

$$\Delta\varphi_{ind} = \frac{1}{c} dt^{-1} \oint_{dA} d\vec{f} \cdot \vec{B} .$$

Hier ist  $dA$  gerade die Mantelfläche, die die Ränder der Flächen  $A(t)$  und  $A(t+dt)$  verbindet. Aufgrund von  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ <sup>1</sup>, lässt sich dieses Integral schreiben als

$$\Delta\varphi_{ind} = -\frac{1}{cdt} \left[ \int_{A(t)} d\vec{f} \cdot \vec{B} + \int_{A(t+dt)} d\vec{f} \cdot \vec{B} \right] .$$

Die Flächenelemente zeigen dabei nach außen, bezogen auf das durch  $A(t), A(t+dt)$  und  $dA$  begrenzte Volumen. Wenn wir nun die Richtung der

---

<sup>1</sup>  $0 = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B}$ , wobei  $\partial V = A(t) + A(t+dt) + dA$  gilt.

Flächenelemente auf  $A(t)$  umdrehen, so dass es in die Richtung des Flächenelements auf  $A(t+dt)$  weist, folgt endgültig

$$\Delta\varphi_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_A d\vec{f} \cdot \vec{B} \quad (6.2)$$

Dies entspricht der Gl. (2.39), wobei wir erst jetzt gezeigt haben, warum die Zeitableitung vor das Integral gehört! Aus dem Faraday-Gesetz wird so das Induktionsgesetz. Jede Änderung des magnetischen Flusses

$$\Phi = \int_A d\vec{f} \cdot \vec{B}$$

wobei sich sowohl die Fläche  $A$  als auch  $B$  als auch die relative Orientierung von  $d\vec{f}$  und  $\vec{B}$  ändern können, führt zu einer Induktionsspannung. Dabei gilt die Lenzsche-Regel, die besagt, dass der induzierte Strom so gerichtet ist, dass seine magnetische Flussänderung der erzeugenden entgegengesetzt ist (Aufgabe).

Impedanz eines Leiters:

Wenn eine zeitliche veränderliche Spannung  $\Delta\varphi(t)$  an den Leiterenden anliegt, führt dies zu einem zeitlich veränderlichen Fluss im Leiter der eine entgegengesetzte Spannung  $\Delta\varphi_{ind}(t)$  hervorruft, so dass aus (6.3) jetzt

$$\Delta\varphi(t) - \frac{d}{dt}\frac{L}{c^2}I(t) = RI(t) \quad (6.7)$$

wird<sup>2</sup>.  $L$  ist die (hier konstante) Induktivität, die von der Leitergeometrie sowie dessen Material abhängt. Daß der zweite Term in Gl. (6.7) diese Form hat, kann man sich leicht aus der Kombination der Gl. (6.2) mit  $|\vec{B}| \propto I$  überlegen.

Es ist üblich, durch Einsetzen der komplexen Größen  $\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi_0 e^{-i\omega t}$  und  $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$  in Gl. (6.7)<sup>3</sup>, d.h., über

$$\Delta\varphi(t) = \left( R - \frac{i}{c^2}\omega L \right) I(t) , \quad (6.8)$$

den komplexen Widerstand

$$Z \equiv R - \frac{i}{c^2}\omega L \quad (6.9)$$

des Leiters zu definieren<sup>4</sup>. Die reelle Stromamplitude ist

$$I(t) = \frac{\Delta\varphi_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2/c^4}} \cos(\omega t - \delta) , \quad (6.10)$$

wobei

$$\delta = \arctan \frac{\omega L}{c^2 R} \quad (6.11)$$

<sup>2</sup>Man kann dies auch überlegen, indem man die Energieerhaltung via

$$\Delta\varphi I = RI^2 + \frac{d}{dt}\frac{L}{2}\frac{I^2}{c^2}$$

betrachtet!

<sup>3</sup>Da Gl. (6.7) linear in den komplexen Größen ist, funktioniert dies!

<sup>4</sup>In der Elektrotechnik bezeichnet  $Z$  üblicherweise den Betrag von (6.9), d.h.,  $Z = \sqrt{R^2 + (\frac{\omega}{c^2}L)^2}$ . Diese Größe wird Scheinwiderstand oder Impedanz bezeichnet.

$$Q = \Delta\varphi \cdot I = RI^2 \quad (6.6)$$

gegeben. Man spricht vom Jouleschen Gesetz.

die Phasenverschiebung zwischen  $I(t)$  in Gl. (6.10) und  $\Delta\varphi$  beschreibt.

1. Bemerkung: Zur expliziten Berechnung von  $Z(w)$  in einem Draht muss der Skineffekt berücksichtigt werden, wonach sich der Strom bei zunehmender Frequenz hauptsächlich auf die Gänge in der Nähe der Leiteroberfläche konzentriert (vgl. §46 in Referenz [2]).

2. Bemerkung: Befindet sich eine Spule in dem betrachteten Leiter, so erscheint auf der linken Seite von (6.7) ein weiterer Term  $-\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ , der die Flussänderung in dieser Spule beschreibt (entweder nur durch Selbstinduktion oder durch zusätzliche induktive Kopplung). Dieser Term kann in der Regel auch als  $-\frac{d}{dt} \frac{L}{c^2} I$  geschrieben werden, wobei  $L$  die Induktivität der Spule ist (Aufgabe).

3. Bemerkung: Bei angelegter Wechselspannung<sup>5</sup> kann auch in einem unterbrochenen Leiter ein Strom fließen. Hier soll diese Unterbrechung ein Kondensator sein. Aus der Energieerhaltung folgt dies - und für einen Draht mit Spule<sup>6</sup> und Kondensator

$$\Delta\varphi I = \frac{d}{dt} \frac{L}{2c^2} I^2 + \frac{d}{dt} \frac{e(t)^2}{2C} + RI^2. \quad (6.12)$$

Hier ist  $C$  die Kapazität, wobei wir die Feldenergie des Kondensators via  $\frac{1}{8\pi} E^2 V$  aus den Gln. (3.28) und (3.30) bestimmt haben. Die Induktivität des Drahtes selbst ist vernachlässigt! Analog zu Gln. (6.9), (6.10) und (6.11) erhalten wir<sup>7</sup>

$$Z = R - i \left( \frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (6.13)$$

sowie für die reelle Stromamplitude

$$I(t) = \frac{\Delta\varphi_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (6.14)$$

und

<sup>5</sup>bzw. zeitlich veränderlicher Spannung

<sup>6</sup>Geometrie etc. ist zeitlich konstant

<sup>7</sup>man beachte:  $e = \int I dt$

$$\delta = \arctan \left( \frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \frac{1}{R}. \quad (6.15)$$

Die im zeitlichen Mittel dissipierte Leistung in diesem Stromkreis ist

$$\begin{aligned} Q &= \langle \operatorname{Re}\{\Delta\varphi\} \operatorname{Re}\{I\} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\cos \delta}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \Delta\varphi_0^2, \end{aligned}$$

wobei  $\operatorname{Re}\{I\}$  durch (6.14) gegeben ist.

4. Bemerkung: Für einfache Stromkreise aus Ohmschen Drähten, Spulen und Kondensatoren können wir somit leicht den Strom  $I(t)$  berechnen. Dazu müssen wir einfache lineare Differentialgleichungen des Typs (6.12) lösen. Bei verzweigten Stromkreisen müssen wir dabei die Spannungsabfälle in dem geschlossenen Teilkreis zu Null aufzufaddieren (Energieerhaltung) und die Summe der Ströme, die in einem Leiterknoten zusammen treffen ist ebenfalls Null (1. Kirchhoffsches Gesetz<sup>8</sup>; Ladungserhaltung).

Beispiel - Induktivität eines (geraden) Drahtes: Wir betrachten einen linienförmigen Leiter und gehen davon aus, dass sich die Induktivität hauptsächlich aus der Feldenergie außerhalb des Leiters bestimmt. Wir berechnen daher

$$\frac{\mu_a}{8\pi} \int H^2 2\pi r dr$$

<sup>8</sup>Kirchhoff, Gustav Robert, Physiker, \*Königsberg (Pr) 12.3. 1824, †Berlin 17.10. 1887; stellte 1845 bereits als Student in Königsberg weit allgemeiner als G.S. Ohm die Gesetze der Stromverzweigung auf (kirchhoffsche Regeln). 1850-54 Professor in Breslau, ab 1854 in Heidelberg, wo er zusammen mit R.W. Bunsen 1859/60 Untersuchungen zur Emission und Absorption des Lichts durchführte, die die Grundlage der Spektralanalyse darstellten und zur Aufstellung des kirchhoffschen Strahlungsgesetzes (1859) führten. Mit der Spektralanalyse konnte er die Fraunhofer'schen Linien als Absorptionslinien erklären und entdeckte dadurch zusammen mit Bunsen die Elemente Cäsium und Rubidium. In diese Zeit fällt auch die Definition des schwarzen Strahlers (1862, schwarzer Körper). Kirchhoff behandelte außerdem Fragen der Mechanik, der Akustik (Erklärung der Chladni-Figuren) und der Elektrizitätsleitung, wobei er 1857 erkannte, dass diese annähernd mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt. 1875-86 war Kirchhoff Professor in Berlin. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

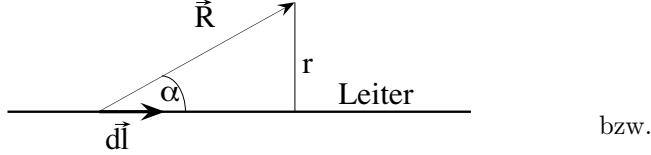


Abbildung 6.2: Geometrie zum Beispiel: Induktivität eines Drahtes.

( $a$  für außerhalb), die magnetische Feldenergie außerhalb des Leiters pro Längeneinheit. Für  $\vec{H}$  gilt

$$\vec{H} = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

(vgl. Abbildung 6.2). Mit  $|d\vec{l} \times \vec{R}| = dlR |\sin \alpha| = dr$  folgt

$$H = 2 \frac{Ir}{c} \int_{-h/2}^0 \frac{dl}{(l^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2Ir}{c} \frac{h}{2r^2 \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}},$$

wobei  $h$  die Leiterlänge ist<sup>9</sup>. Für die Magnetfeldenergie außerhalb des Leiters folgt

$$h \frac{\mu_a I^2}{c^2} \underbrace{h^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r(\frac{h^2}{4} + r^2)}}_{= 2 \ln \frac{h^2 + 4a^2}{4a^2}} \approx h \mu_a \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{h}{2a}$$

wobei  $a$  der Drahtradius ist ( $a \ll h$ ). Für die Induktivität  $L$  folgt

$$L \approx 2\mu_a h \ln \frac{h}{2a}$$

durch Vergleich mit

$$\frac{L}{2} \frac{I^2}{c^2}.$$

Beispiel - Ausschaltvorgang: Wir betrachten Gl. (6.7), wenn die Spannung zur Zeit  $t = 0$  abgeschaltet wird. Es gilt dann

<sup>9</sup>Den Beobachtungspunkt in der Mitte des Leiters zu legen, ist eine Vereinfachung, die jedoch das Ergebnis nicht wesentlich verändert.

$$-\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} = RI$$

bzw.

$$\frac{dI}{I} = -\frac{c^2 R}{L} dt$$

oder

$$I(t) = I(t=0) e^{-\frac{c^2 R}{L} dt}.$$

Man beachte, je kleiner  $\tau^{-1} = \frac{c^2 R}{L}$  desto länger dauert der Stromabfall.

## 6.2 Elektromagnetische Wellen in Materie

Wir betrachten die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in unendlich ausgedehnten, homogenen ruhenden Medien. Diese seien durch die Materialkonstanten  $\epsilon$  und  $\mu$  charakterisiert. Wir beschränken uns auf normal polarisierbare und magnetisch isotrope Substanzen. Es gilt dann:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Mit  $\rho = 0$  erhalten wir die Maxwell Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \quad (6.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}} \quad (6.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (6.19)$$

Aus  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H}$  folgt mit (6.16) und (6.17)

$$\Delta \vec{H} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{H}}. \quad (6.20)$$

Analog folgt aus (6.17) zusammen mit (6.16) und (6.19)

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{E}}. \quad (6.21)$$

Diese Gleichungen heißen Telegraphengleichungen. Für Isolatoren ( $\sigma = 0$ ) sind (6.20) und (6.21) gewöhnliche Wellengleichungen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dann

$$c_{Isolator} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (6.22) \quad \text{bzw.}$$

Wir hatten schon erwähnt, dass  $\epsilon$  frequenzabhängig ist ( $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ). Das Gleiche gilt für ( $\sigma = \sigma(\omega)$ ). Wir machen den Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ i \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] \quad (6.23)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp \left[ i \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right], \quad (6.24)$$

der natürlich nur eine Frequenz- bzw. Fourier-Komponente enthält. Mit  $\partial_i E_j = ik_i E_j$  bzw.  $\partial_i H_j = ik_i H_j$  folgt dann  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}$  bzw.  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\vec{k} \times \vec{H}$  und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E}$  bzw.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = i\vec{k} \cdot \vec{H}$ . Daraus ergeben (6.23) und (6.24) eingesetzt in (6.16) bis (6.19)

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \eta \vec{E} \quad (6.25)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} \quad (6.26)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (6.27)$$

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(\alpha x - \omega t)} e^{\beta x}.$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0, \quad (6.28)$$

wobei  $\eta = \epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}$  eine verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante ist. Wir sehen, dass auch jetzt  $\vec{k}, \vec{E}$

und  $\vec{H}$  ein orthogonales Rechtssystem bilden (aber diesmal  $|\vec{E}| \neq |\vec{H}|$ ).

Wir bestimmen zunächst den Zusammenhang zwischen  $\vec{k}$  und  $\omega$ , die sogenannte Dispersionsrelation. Aus  $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{H}) - \vec{H}k^2$  folgt mit (6.25), (6.28) und (6.26)

$$k^2 \vec{H} = \frac{\omega}{c} \eta \frac{\omega}{c} \mu \vec{H},$$

d.h.,

$$k^2 = \frac{\eta\mu}{c^2} \omega^2 \quad (6.29)$$

$$|\vec{k}| = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \left( 1 + \left( \frac{4\pi\sigma^2}{\omega\epsilon} \right)^2 \right)^{1/4} \omega \quad (6.30)$$

Interessant ist der Spezialfall einer ebenen Welle (in  $x$ -Richtung), die von einem Medium mit  $\sigma = 0$  auf ein Medium mit  $\sigma \neq 0$  trifft. Während die ebene Welle für  $\sigma = 0$  ungedämpft ist, folgt aus  $k = \alpha + i\beta$  eingesetzt in Gl. (6.29)

$$\alpha = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left( \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1}{2} \right)^{1/2}$$

sowie

$$\beta = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \left( \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1}{2} \right)^{1/2}$$

(für positives  $\beta$  muß  $\alpha$  ebenfalls positiv sein). Insbesondere muß die Welle im  $\sigma \neq 0$ -Medium wie folgt abklingen:

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(\alpha x - \omega t)} e^{\beta x}.$$

Damit dies physikalisch sinnvoll ist, müssen  $\alpha$  und  $\beta$  natürlich positiv sein. Die Größe  $1/\beta$  wird als Eindringtiefe bezeichnet. D.h., nach der Strecke  $x = \beta$  ist die Wellenamplitude auf das  $1/e$ -fache

reduziert.

Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit:

Wir nehmen an, dass für die beweglichen Ladungsträger das Newtonsche Gesetz gilt:

$$m\dot{\vec{v}}_k = e\vec{E}_k - \xi\vec{v}_k \quad (6.31)$$

Hier ist  $m$  die Masse und  $\vec{v}_k$  die Geschwindigkeit der  $k$ ten Ladung  $e$ .  $\vec{E}_k$  ist das elektrische Feld, und  $\xi$  ist ein Reibungskoeffizient, den wir zunächst bestimmen wollen. Dazu schreiben wir  $\vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_k e\vec{v}_k$ , wobei  $\Delta V$  ein Volumenelement ist, in dem sich die  $\sum_k$  Ladungen befinden. Außerdem soll das mittlere Feld  $\vec{E}$  durch  $\vec{E}_k$  gegeben sein (Näherung!). Aus (6.31) wird dann

$$m\dot{\vec{j}} = e\rho\vec{E} - \xi\vec{j}, \quad (6.32)$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Ladungen im Volumenelement ist. Im stationären Fall,  $\dot{\vec{j}} = 0$ , folgt mit  $\vec{j} = \sigma_0\vec{E}$

$$\xi = \frac{e\rho_{stat}}{\sigma_0}, \quad (6.33)$$

wobei  $\sigma_0$  die Gleichstromleitfähigkeit ist.

Wenn an den betrachteten Leiter ein Feld mit dem Zeitverhalten  $E \sim e^{-i\omega t}$  angelegt wird, ist es sinnvoll, für  $j$  ebenfalls  $j \sim e^{-i\omega t}$  anzunehmen. Damit und mit (6.33) folgt aus Gl. (6.32)  $\vec{E} = \sigma^{-1}(\omega)\vec{j}$ . Dabei ist

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (6.34)$$

und die Dämpfungszeit

$$\tau = \frac{m}{\xi} = \frac{m\sigma_0}{e\rho_{stat}} \quad (6.35)$$

<sup>10</sup>. Für kleine Frequenzen  $\omega\tau \ll 1$  gilt  $\sigma(\omega) \approx \sigma_0$  während für hohe Frequenzen  $\omega\tau \gg 1$  die Leitfähigkeit rein imaginär ist. Dies entspricht

<sup>10</sup>Die Bedeutung von  $\tau$  als Dämpfungszeit ersieht man aus Gl. (6.32), wenn man  $\vec{E}$  ausschaltet (vgl. den oben betrachteten Ausschaltvorgang).

einer Phasenverschiebung zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{j}$  um  $\pi/2$  ( $\dots e^{-i\omega t} \approx \dots e^{i\pi/2} \dots e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega t - \pi/2)}$ ).

Betrachten wir zum Schluß noch die Divergenz von Gl. (6.32):

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{j}} + \frac{1}{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \left( \frac{e\rho}{m} \vec{E} \right) \approx \frac{e\rho_{stat}}{m} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \quad (6.36)$$

Mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\epsilon^{-1}\rho$  und  $\dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$  folgt

$$0 = \ddot{\rho} + \tau^{-1}\dot{\rho} + \omega_P^2 \rho \quad (6.37)$$

mit

$$\omega_P = -\sqrt{\frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon\tau}} = \sqrt{\frac{4\pi e\rho_{stat}}{\epsilon m}}. \quad (6.38)$$

Gl. (6.36) beschreibt gedämpfte Schwingungen der Dichte der Ladungen (man spricht auch von einem Plasma). Die Größe  $\omega_P$  wird als Plasmafrequenz bezeichnet. In der Festkörper spricht man im Zusammenhang mit der Anregung bestimmter Frequenzen im Elektronenplasma auch von Plasmonen.

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit:

Wir betrachten das einfache Beispiel der Überlagerung zweier Wellen mit gleicher Amplitude und verschiedenen aber benachbarten Frequenzen ( $\omega_1$ ,  $k_1$  und  $\omega_2$ ,  $k_2$ ):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \left( e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \right) \\ &= Ae^{i\frac{k_1+k_2}{2}x - i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t} \\ &\quad \times \left( e^{i\frac{k_1-k_2}{2}x - i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} + e^{i\frac{k_2-k_1}{2}x - i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t} \right) \\ &= 2A \cos \left( \frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \right) \\ &\quad \times e^{i\frac{k_1+k_2}{2}x - i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t} \end{aligned}$$

Durch diese Umformung ist die Welle in einen mit  $\omega_1 - \omega_2$  langsam oszillierenden Amplitudenfaktor und einen mit  $\omega_1 + \omega_2$  schnell oszillierenden Phasenfaktor aufgespalten. Die Phase bewegt sich mit der Geschwindigkeit

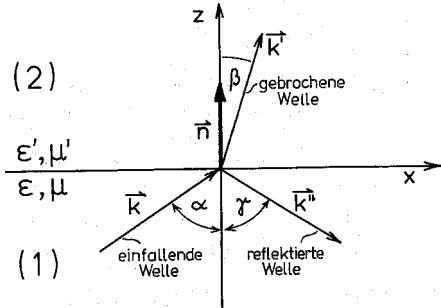


Abbildung 6.3: Brechung und Reflexion an der Grenzfläche zweier Medien.

Entsprechend gelten für die gebrochene und die reflektierte Welle die gleichen Beziehungen. Außerdem gelten die Grenzbedingungen (5.6), (5.7), (5.45) und (5.46) (es sollen keine Oberflächenladungen oder -ströme auftreten). Damit diese unabhängig von Ort und Zeit in der ganzen Grenzfläche gelten können, folgt

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} = e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)}$$

und daher

$$v_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \approx \frac{\omega}{k} \quad (6.39)$$

(mit  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ ). Die Amplitude (Wellengruppe) bewegt sich mit der geringeren Geschwindigkeit

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \cong \frac{d\omega}{dk}. \quad (6.40)$$

Die Energie einer Welle wird durch die Amplitude bestimmt. Die Gruppengeschwindigkeit gibt somit auch die Geschwindigkeit des Energietransports an. Da in einem Medium in der Regel  $v_p$  von der Frequenz abhängt, sind die Phasengeschwindigkeiten verschiedener Wellen verschieden. Man spricht von Dispersion. Nur in einem dispersionsfreien Medium gilt  $v_p = v_g$ .

### 6.3 Reflexion und Brechung

Snelliussches Brechungsgesetz:

Wir betrachten den Einfall einer elektromagnetischen Welle unter einem Winkel  $\alpha$  auf die Grenzfläche zweier unterschiedlicher isotroper Medien wie in Abbildung 6.3 gezeigt.

Die einfallende Welle sei

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (6.41)$$

Gemäß den Gln. (6.26) und (6.29) (mit  $\sigma = 0$ ) gilt

$$\vec{B} = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k}. \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ = \vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + 2\pi m_1 = \vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t + 2\pi m_2 \end{aligned}$$

für alle  $t$  ( $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ). Für  $\vec{r} = 0$  und  $t = 0$  folgt  $m_1 = m_2 = 0$ . Für  $\vec{r} = 0$  und  $t \neq 0$  gilt damit

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad (6.43)$$

d.h., es erfolgt keine Frequenzänderung bei der Brechung bzw. der Reflexion. Weiterhin haben wir

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega''}{c} \sqrt{\epsilon \mu} = k'' \quad (6.44)$$

d.h., der einfallende und reflektierte Wellenvektor sind betragsmäßig gleich. Und es gilt

$$\vec{k} \cdot \vec{r} |_{z=0} = \vec{k}' \cdot \vec{r} |_{z=0} = \vec{k}'' \cdot \vec{r} |_{z=0}. \quad (6.45)$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass alle drei  $\vec{k}$ -Vektoren in der gleichen Ebene liegen, der sogenannten Einfallsebene<sup>11</sup>. Für die spezielle Wahl  $\vec{r} = \vec{e}_x$  folgt weiter

$$k \sin \alpha = k' \sin \beta = k'' \sin \gamma \quad (6.46)$$

und mittels  $k = k''$  ist

$$\sin \alpha = \sin \gamma \quad \text{bzw. } \alpha = \gamma \quad (6.47)$$

<sup>11</sup>Dies sieht man, wenn  $\vec{r}$  senkrecht zu einem der  $\vec{k}$ -Vektoren gewählt wird.

Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind also gleich. Aus (6.46) erhalten wir außerdem das Snelliussche Brechungsgesetz<sup>12</sup>

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{\epsilon' \mu'}}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{n'}{n} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (6.48)$$

wobei  $c_1, \lambda_1$  bzw.  $c_2, \lambda_2$  Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge im Medium 1 bzw. 2 sind. Ferner ist

$$n = \frac{c}{c_1} = \sqrt{\epsilon \mu} \quad (6.49)$$

der Brechungsindex. Im optisch dichteren Medium sind Lichtgeschwindigkeit, Wellenlänge und Winkel reduziert. Der Brechungsindex, die Dielektrizitätskonstante und der Betrag des Wellenvektors sind dafür größer.

Gl. (6.48) beinhaltet die interessante Möglichkeit der Totalreflexion, d.h.,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Für den entsprechenden Einfallswinkel  $\alpha_o$  gilt

$$\sin \alpha_o = \frac{n'}{n}. \quad (6.50)$$

Es muß aber  $n > n'$  gelten, d.h., Totalreflexion kann nur beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünnern Medium auftreten. Was aber passiert für  $\alpha > \alpha_o$ ? Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} &= e^{i(k'_x x + k'_z z)} \\ &= e^{i(k' x \sin \beta + k' z \cos \beta)} \\ &= e^{ik' x \frac{n}{n'} \sin \alpha} e^{-k' z \sqrt{(\sin \alpha / \sin \alpha_0)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

wobei wir  $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (n^2/n'^2) \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\sin \alpha / \sin \alpha_0)^2}$  verwendet haben. Für  $\alpha > \alpha_o$  wird die Welle im dichteren Medium also weggedämpft bzw. kann dieses nur durchdringen, wenn es sehr dünn ist (Größenordnung der Dämpfungslänge).

Der Energiefluß durch die Grenzfläche für  $\alpha > \alpha_0$  ist (im zeitlichen Mittel)

<sup>12</sup>Snellius, eigentlich Snel van Rojen, Willebrord, niederländischer Mathematiker und Physiker, \*Leiden 1580, †ebenda 30.10. 1626; entdeckte das nach ihm benannte Gesetz der Lichtbrechung (Brechung) und begründete eine bestimmte Art der Gradmessung. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

$$\begin{aligned} \langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle \vec{n} \cdot (Re\{\vec{E}'\} \times Re\{\vec{H}'\}) \rangle \\ &= \frac{c}{8\pi} \langle Re\{\vec{n} \cdot (\vec{E}'^* \times \vec{H}')\} \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{n}$  der Normaleneinheitsvektor in  $z$ -Richtung ist, und  $*$  bedeutet konjugiert komplex. Mit Gl. (6.26) folgt

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{S} &= \frac{c^2}{8\pi \mu' \omega} Re\{\vec{n} \cdot \vec{k}'\} |E_0|^2 = \\ &= \frac{c^2}{8\pi \mu' w} Re\{k' \cos \beta\} |E_0'|^2 = 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich, da  $\cos \beta$ , wie oben gesagt, rein imaginär ist. Die gesamte Energie geht also in die reflektierte Welle über.

#### Fresnelsche Formeln:

Wir betrachten noch einmmal die Randbedingungen explizit:

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0') \times \vec{n} = 0 \quad (6.51)$$

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' - \vec{k}' \times \vec{E}_0') \cdot \vec{n} = 0 \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu'} (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \right) \times \vec{n} = 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\left( \epsilon (\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') - \epsilon' \vec{E}_0' \right) \cdot \vec{n} = 0. \quad (6.54)$$

Die Gln. (6.51) und (6.54) entsprechen dabei den Bedingungen (5.6) und (5.7). Die Gln. (6.52) und (6.53) folgen aus den Bedingungen (5.46) und (5.45), wobei Gl. (6.26) eingesetzt wurde. Außerdem haben wir  $\sqrt{\epsilon \mu}/k = c/w = c/w' = \sqrt{\epsilon' \mu'}/k'$  sowie  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  verwendet. Ausgehend von diesen Gleichungen betrachten wir die Reflexion bzw. Brechung einer linear polarisierten Welle für zwei Spezialfälle.

(a)  $\vec{E}_0$  ist parallel zur Grenzfläche: Aus (6.51) folgt dann  $(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0') \times \vec{n} = (E_0 + E_0'' - E_0') \vec{e}_x = 0$  und somit

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (6.59)$$

und

$$E_0 + E_0'' - E_0' = 0. \quad (6.55)$$

Aus (6.53) folgt

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \times \vec{n} &= -\frac{1}{\mu} (\vec{k} (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\vec{n} \cdot \vec{k})) \\ &= \frac{1}{\mu} k \vec{E}_0 \cos \alpha = \frac{w}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}_0 \cos \alpha, \end{aligned}$$

sowie entsprechende Beziehungen für die gestrichenen Größen. Da die Frequenzen gleich sind und auch der Einfalls- bzw. Reflexionswinkel, ergibt sich insgesamt

$$(E_0 - E_0'') \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos \alpha - E_0' \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} \cos \beta = 0. \quad (6.56)$$

Gl. (6.54) liefert nichts Neues, und mit Gl. (6.55) können wir jeweils  $E_0'$  bzw.  $E_0''$  eliminieren, d.h.,

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'} \cos \beta}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'} \cos \alpha}} = \frac{1 - \frac{\mu}{\mu'} \tan \alpha}{1 + \frac{\mu}{\mu'} \tan \beta} \quad (6.57)$$

sowie

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'} \cos \beta}} = \frac{2}{1 + \frac{\mu}{\mu'} \tan \beta}. \quad (6.58)$$

Für die Frequenzen des sichtbaren Lichtes gilt i. a.  $\mu = \mu'$ . Dann ergeben sich die Fresnelschen Formeln<sup>13</sup> für Licht, das senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist:

<sup>13</sup>Fresnel, Augustin Jean, französischer Physiker und Ingenieur, \*Broglie (Département Eure) 10.5. 1788, †Ville d'Avray (bei Sèvres) 14.7. 1827; seit 1823 Mitglied der Académie des sciences, begründete ab 1815 die Wellentheorie des Lichtes (fresnelscher Spiegelversuch), untersuchte die Polarisation des Lichts und die Doppelbrechung; erfand den nach ihm benannten Doppelspiegel und das Doppelprisma; er konstruierte ferner Linsen (Fresnel-Linse), die noch heute verwendet werden. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

(b)  $\vec{E}_0$  liegt in der Einfallsebene: Eine ganz analoge Betrachtung liefern statt (6.57) und (6.58) die Gleichungen

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon \mu'}{\epsilon' \mu} \cos \beta}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon \mu'}{\epsilon' \mu} \cos \alpha}} = \frac{1 - \frac{\epsilon}{\epsilon'} \tan \alpha}{1 + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \tan \beta} \quad (6.61)$$

und

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon \mu'}{\epsilon' \mu}}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon \mu'}{\epsilon' \mu} \cos \beta}} = \frac{2 \frac{\mu}{n} \frac{\epsilon}{\epsilon'}}{1 + \frac{\epsilon}{\epsilon'} \tan \beta}. \quad (6.62)$$

Mit  $\mu = \mu'$  ergibt dies

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (6.63)$$

sowie

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}, \quad (6.64)$$

die Fresnelschen Formeln für  $\vec{E}_0$  in der Einfallsebene.

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich für  $\mu = \mu'$  und  $\alpha + \beta = \pi/2$  aus Gl. (6.63). In diesem Fall gilt  $E_0'' = 0$ , d.h., es gibt keinen reflektierten Strahl, dessen elektrischer Vektor parallel zur Einfallsebene schwingt. Nach dem Snellius Gesetz, Gl. (6.48), gilt hier für den Einfallswinkel

$$\frac{n'}{n} = \tan \alpha_B. \quad (6.65)$$

Der Winkel  $\alpha_B$  heißt Brewsterscher Winkel<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>D. Brewster (\*1781, †1868), britischer Physiker



# Anhang A

## Formeln und Einheiten

**Kartesische Einheitsvektoren:**  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ;  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  mit  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$  und  $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$  aber  $\delta_{ii} = 3$ !

**Skalarprodukt:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \vec{e}_i \cdot b_j \vec{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$

**Vektorprodukt:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_k \equiv \vec{e}_i \epsilon_{ijk}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$\epsilon_{ijk}$  ist in allen Indizes antisymmetrisch.

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_j b_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Nützlich:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

**Vektoridentitäten:**

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} &= \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) \\ &= \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \\ &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) \\ &\quad - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a} \\ \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{a}) &= \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \\ \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{a}) &= \vec{\nabla} \varphi \times \vec{a} + \varphi \vec{\nabla} \times \vec{a} \\ \vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \\ &\quad + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \\ &\quad + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ &\quad + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\ &\quad - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \\ &\quad - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \\ &\quad + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \\ &\quad - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \end{aligned}$$

**Häufig auftretende Ableitungen:** Es soll gelten

$|\vec{r}| = r$  und  $\vec{n} = \vec{r}/r$ , dann ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= 3 & \vec{\nabla} \times \vec{r} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{n} &= \frac{2}{r} & \vec{\nabla} \times \vec{n} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{n} &= \frac{1}{r} [\vec{a} - \vec{n} (\vec{a} \cdot \vec{n})] \\ \vec{\nabla} r &= \vec{n} \\ \vec{\nabla} \frac{1}{r} &= -\frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$

**Laplace Operator in Zylinderkoordinaten:**

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

**Laplace Operator in Kugelkoordinaten:**

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

**Taylorentwicklung:**

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}_o + \delta\vec{r}) &= \varphi(\vec{r}_o) + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_o} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_o} + \dots\end{aligned}$$

**Integraltheoreme:**

(a) Integralsatz von Gauß<sup>1</sup> - Es sei  $\partial V$  eine geschlossene Fläche, die das Volumen  $V$  begrenzt.  
Dann gilt

<sup>1</sup>Gauß, Carl Friedrich, Mathematiker und Astronom, \*Braunschweig 30.4. 1777, †Göttingen 23.2. 1855; seit 1807 Direktor der Sternwarte in Göttingen, Professor für Mathematik und Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften, einer der bedeutendsten Mathematiker. Gauß begründete mit den 1801 erschienenen *Disquisitiones arithmeticae* die moderne Zahlentheorie. In seiner 1809 veröffentlichten Theorie der Bewegungen der Himmelskörper behandelte er die Probleme der kleinsten Quadrate (Ausgleichsrechnung) haben die Entwicklung der Himmelsmechanik, die Theorie der unendlichen Reihen und die numerischen Methoden der angewandten Mathematik sehr gefördert. 1816 wurde ihm die Vermessung des Königreichs Hannover übertragen, an der er 25 Jahre arbeitete und dabei zu bahnbrechenden Untersuchungen zur Geodäsie und zur Differenzialgeometrie angeregt wurde. Von großer Bedeutung sind auch

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f}.$$

Das gerichtete Flächenelement  $d\vec{f}$  zeigt dabei nach außen<sup>2</sup>. In der englischsprachigen Literatur wird dieser Satz auch als *divergence theorem* oder *Green's theorem in space* genannt. Die 2D Version heißt auch Integralformel von Gauß:

$$\begin{aligned}\int_S \left( \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\ = \oint_{\partial S} (A_x dx + A_y dy).\end{aligned}$$

Weitere Sonderfälle:

$$\int_V \vec{\nabla} \varphi dV = \oint_{\partial V} \varphi d\vec{f}$$

Beweis: durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf  $\vec{A} = (\varphi, 0, 0)$ ,  $\vec{A} = (0, \varphi, 0)$  und  $\vec{A} = (0, 0, \varphi)$ .

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} dV = \oint_{\partial V} d\vec{f} \times \vec{A}$$

Beweis: folgt aus den vorherigen Spezialfall. D.h.,  $\int \nabla_j A_k dV = \int A_k df_j$  bzw.  $\epsilon_{ijk} \int \nabla_j A_k dV = \epsilon_{ijk} \int A_k df_j$ .

$$\oint_{\partial V} \vec{r} (d\vec{f} \cdot \vec{A}) = \int_V (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} d^3 r + \int_V \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d^3 r$$

Beweis: betrachte

seine Abhandlungen zur Physik, zur Potenzialtheorie und zur Optik sowie die Erfindung des Magnetometers. Zusammen mit dem Physiker Wilhelm Weber untersuchte er den Erdmagnetismus und stellte dabei sein absolutes physikalisches Maßsystem (1832) auf. Große Teile seines mathematischen Schaffens, so die Theorie der elliptischen Funktionen und die Arbeiten zur nichteuclidischen Geometrie, wurden erst durch die Veröffentlichung seines Nachlasses bekannt. Literatur: Bühler, W. K.: Gauß. Eine biographische Studie. Aus dem Englischen. Berlin u.a. 1987. Wußing, H.: C. F. Gauß. Leipzig 51989. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG

<sup>2</sup>Beweis siehe z. B. M. R. Spiegel (1971) Advanced Mathematics. Schaum's outline series. McGraw-Hill

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \varphi(d\vec{f} \cdot \vec{A}) &= \int_V \vec{\nabla}(\varphi \vec{A}) d^3 r \\ &= \int_V [(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\varphi + \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] d^3 r.\end{aligned}$$

Wenn man  $\varphi = x$  bzw.  $\varphi = y$  oder  $\varphi = z$  setzt, so erkennt man die Richtigkeit der obigen Behauptung.

(b) Integralsatz von Stokes<sup>3</sup> - Es sei  $S$  eine offene zweiseitige Fläche, deren Rand  $\partial S$  eine geschlossene, sich nicht schneidende Kurve bildet. Dann gilt

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Hier soll  $d\vec{s}$  ein Wegelement im mathematisch positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeiger) sein.  $d\vec{f}$  ist so orientiert, dass wenn der Daumen der rechten Hand in Richtung von  $d\vec{s}$  weist, dann weisen die um den Rand gekrümmten Finger in Richtung von  $d\vec{f}$ . Beweis: siehe oben.

Weiterer Spezialfall:

$$\int_S d\vec{f} \times \vec{\nabla} \varphi = \oint_{\partial S} \varphi d\vec{s}$$

Beweis: Einsetzen von  $\vec{A} = (\varphi, 0, 0)$ ,  $\vec{A} = (0, \varphi, 0)$  sowie  $\vec{A} = (0, 0, \varphi)$  in den Stokeschen Satz.

### Einheiten: Konversion vom Gauß zum MKSA-System

	Gauß	MKSA
Lichtgeschwindigkeit	$c$	$(\mu_o \epsilon_o)^{1/2}$
Ladung, Ladungsdichte	$e, \rho$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_o}} e,$ $\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_o}} \rho$
elektr. Feld, Potenzial	$\vec{E}, \varphi$	$\sqrt{4\pi\epsilon_o} \vec{E},$ $\sqrt{4\pi\epsilon_o} \varphi$
magnet. Feld	$\vec{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_o} \vec{H}$
Verschiebungs(dichte)	$\vec{D}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_o}} \vec{D}$
magnet. Induktion	$\vec{B}$	$\sqrt{4\mu_o} \vec{B}$
Leitfähigkeit	$\sigma$	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o}$
Dielektrische Konstante	$\epsilon$	$\frac{\epsilon}{\epsilon_o}$
Permeabilität	$\mu$	$\frac{\mu}{\mu_o}$
Widerstand, Impedanz	$R, Z$	$4\pi\epsilon_o R,$ $4\pi\epsilon_o Z$
Induktivität	$L$	$4\pi\epsilon_o L$
Kapazität	$C$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_o} C$

Konstanten (MKSA):

$$\begin{aligned}c &= 2.99792458 \text{ ms}^{-1} \\ m_e(0) &= 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ e_e &= -1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_o &= 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (\text{F m}^{-1} = \text{As V}^{-1} \text{ m}^{-1}) \\ \mu_o &= 1.2566370 \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1} \quad (\text{H m}^{-1} = \text{Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1})\end{aligned}$$

Größe	Einheit (MKSA)
Leitfähigkeit $\sigma$	$(m\Omega)^{-1}$ ( $\frac{1}{\Omega}$ : Siemens)
elektr. Widerstand $R$	$\Omega = V A^{-1}$ ( $\Omega$ : Ohm)
elektr. Spannung $\Delta\varphi$	$V = J(As)^{-1}$ ( $V$ : Volt)
Kapazität $C$	$F = CV^{-1}$ ( $F$ : Farad)
Induktivität $L$	$H = JA^2$ ( $H$ : Henry)
magnet. Fluß $\Phi$	$Wb = Vs$ ( $Wb$ : Weber)
magnet. Flußdichte, Induktion $B$	$T = Wbm^{-2}$ ( $T$ : Tesla)
elektr. Stromstärke $I$	$A = Cs^{-1}$ ( $A$ : Ampere)

<sup>3</sup>Stokes, Sir (seit 1889) George Gabriel, britischer Mathematiker und Physiker, \*Skreen (County Sligo, Irland) 13.8. 1819, †Cambridge 1.2. 1903; wurde 1849 Professor in Cambridge und war 1885-90 Präsident der Royal Society; bedeutende Beiträge zur Hydrodynamik (stokesches Reibungsgesetz), Optik (stokesche Regel) und Analysis, in der er den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz und den Zusammenhang zwischen Oberflächen- und Kurvenintegralen (stokescher Integralsatz) erarbeitete. ©2000 Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG



## Anhang B

# Übungsaufgaben

### Aufgabe 1: Vektoridentitäten

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\epsilon_{klm}\epsilon_{njk} = \delta_{kn}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{ln} \quad (*) .$$

Wir verwenden die Summenkonvention: über die in einem Produkt doppelt vorkommenden Indizes wird summiert.  $\epsilon_{ijk}$  ist definiert über

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Insbesondere gilt daher  $\vec{e}_j \times \vec{e}_k \equiv \vec{e}_i \epsilon_{ijk}$ , wobei die  $\vec{e}_i$  kartesische Einheitsvektoren sind. D.h.,  $\vec{a} \times \vec{b} = a_j b_k \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} a_j b_k$ .

Außerdem ist  $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$  und  $\delta_{12} = \delta_{21} = \dots = \delta_{32} = 0$  aber  $\delta_{ii} = 3!$

Hinweise: Zeigen Sie zunächst die beiden einfachen Beziehungen (i)  $\vec{e}_j \times (\vec{e}_k \times \vec{e}_l) = \epsilon_{mkl}\epsilon_{njm}\vec{e}_n$  sowie (ii)  $\vec{e}_j \times (\vec{e}_k \times \vec{e}_l) = \delta_{jl}\vec{e}_k - \delta_{jk}\vec{e}_l$ . Durch einfaches Gleichsetzen dieser Beziehungen, ist (\*) leicht zu zeigen.

(b) Mit der Relation aus Teilaufgabe (a) zeigen Sie, dass die folgenden Vektoridentitäten gelten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \\ &\quad + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \\ &\quad + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(c) Warum führt man nicht den Vektoroperator  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}$  ein?

**Aufgabe 2:** Gradient und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

Wir betrachten den Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$  als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten  $u, v, w$  und definieren ein Koordinatensystem durch die Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_u &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \\ \vec{e}_v &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \\ \vec{e}_w &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} . \end{aligned}$$

Leiten Sie den Gradienten sowie den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten her ( $u = r$ ,  $v = \phi$ ,  $w = z$ ).

**Aufgabe 3:** Geschwindigkeitsadditionstheorem

Inertialsystem  $K'$  bewegt sich relativ zu Inertialsystem  $K$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{w}$ . Wir hatten

in der Vorlesung die folgende Transformationsgleichung (1.8) für die Geschwindigkeiten eines Teilchens innerhalb seines jeweiligen Inertialsystems hergeleitet:

$$\vec{v}' = \frac{1}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}} \left[ \frac{\vec{v}}{\gamma(w)} + \left(1 - \frac{1}{\gamma(w)}\right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{w}}{w^2} - \vec{w} \right].$$

Zeigen Sie, dass die Umkehrung dieser Transformationsgleichung durch

$$\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{v}'_\parallel + \vec{w}}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}} \quad \text{und} \quad \vec{v}_\perp = \frac{1}{\gamma(w)} \frac{\vec{v}'_\perp}{1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}'}{c^2}}$$

gegeben ist, wobei sich  $\parallel$  bzw.  $\perp$  auf die Richtung von  $\vec{w}$  beziehen.

#### Aufgabe 4: Lorentz-Transformation der Kraft

Leiten Sie die Transformationsgleichung (1.20),

$$\vec{F}' = \frac{\frac{\vec{F}}{\gamma(w)} + \vec{w} \left[ \left(1 - \frac{1}{\gamma(w)}\right) \frac{\vec{w} \cdot \vec{F}}{w^2} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{F} - \vec{v} \cdot \vec{p}}{v^2} \right]}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{c^2}},$$

für die Kraft her<sup>1</sup>. Die Situation ist die gleiche wie in Aufgabe 3.

#### Aufgabe 5: Invarianz von $ds$

Zeigen Sie durch explizites Einsetzen der Lorentz-Transformation (Gln. (1.6) und (1.7) im Skript) die Invarianz von  $ds$ .

#### Aufgabe 6: Geometrischer Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\varphi$

Zeigen Sie, dass das elektrostatische Feld  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  senkrecht zu den Äquipotenziallinien bzw. den Höhenlinien von  $\varphi$  ist und dass  $\vec{E}$  von  $\varphi_{hoch}$  zu  $\varphi_{niedrig}$  gerichtet ist.

#### Aufgabe 7: Ladungstrajektorien in elektromagnetischen Feldern

---

<sup>1</sup>Die hier angegebene Formel weicht im letzten Term des Zählers von der im Melcher angegebenen ab. Ich denke jedoch, dass dies die Korrekte ist. Für den Beweis des Gegenteils gibt es 5 Punkte extra!

(a) In einem zeitlich konstanten elektromagnetischen Feld bewegt sich eine Ladung  $e$ . Die Bahn  $t \rightarrow \vec{r}(t)$  der Ladung ist die Kurve  $C$  mit  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$  als Anfangspunkt und  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$  als Endpunkt. Man Zeige, dass

$$e \int_C d\vec{s} \cdot \vec{E} = -e (\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1))$$

die Arbeit ist, die vom elektromagnetischen Feld an der Ladung geleistet wird, wenn es die Kurve  $C$  durchläuft. Warum leistet das Magnetfeld keine Arbeit?

Bemerkung: Die Arbeit (Energie) für  $e = e_e$  und  $\Delta\varphi = 1V$  heißt 1 Elektronenvolt (eV) =  $1.60 \cdot 10^{-19} J$ .

(b) Im konstanten Magnetfeld  $\vec{H}(\vec{r}) = (0,0,H)$  bewegt sich ein Elektron. Prüfen Sie nach, dass eine Schraubenlinie als Trajektorie eine Lösung der nichtrelativistischen Bewegungsgleichung darstellt. Für ein mit der Geschwindigkeit  $(v,0,0)$  in das Feld eintretendes Elektron lässt sich diese Bahnkurve durch ein zusätzliches  $\vec{E}$ -Feld in eine Gerade in  $x$ -Richtung verwandeln. Geben Sie dieses  $\vec{E}$  an.

#### Aufgabe 8: Lorentz-Invarianz von $\vec{E} \cdot \vec{H}$

Zeigen Sie die Invarianz von  $\vec{E} \cdot \vec{H}$  unter der speziellen Lorentz-Transformation:  $x' = \gamma(w)(x - wt)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  und  $ct' = \gamma(w)(ct - \frac{wx}{c})$  mit  $\gamma(w) = (1 - \frac{w^2}{c^2})^{-1/2}$ .

#### Aufgabe 9: Bewegungsgleichungen: Ladung im Feld

Die Bewegungsgleichung einer Ladung  $e$  in der vierdimensionalen Raumzeit lautet

$$m(0)c \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k$$

(vgl. Gl. (2.20) im Skript). Davon ausgehend leiten Sie die resultierenden 3D Gleichungen für  $i = 0$  sowie für  $i = 1, 2, 3$  ab. Interpretieren Sie Ihr Resultat im Fall  $i = 0$ . Im Fall  $i = 1, 2, 3$  sollten Sie die Gl. (2.17) im Skript erhalten.

#### Aufgabe 10: Ein Kernkraftwerk

In einer Kugel aus  $\beta$ -aktivem Material werden kontinuierlich Elektronen ausgestoßen. Folglich nimmt die Ladungsdichte in der Kugel (Radius  $R$ ) wie

$$\rho(t, r) = \begin{cases} \rho_o(1 - e^{-t/\tau}) & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

zu. Die Stromdichte ist radialsymmetrisch,

$$\vec{j}(t, r) = j(t, r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Berechnen Sie  $j(t, r)$ . Skizzieren Sie  $j(t, r)$  als Funktion von  $r$ .

**Aufgabe 11:** Poisson-Gleichung und Kugelsymmetrie

Für die kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \frac{3e}{4\pi a^3} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{a}\right) \theta(a - r),$$

hier ist  $\theta(x) = 1$  ( $x > 0$ ) und  $\theta(x) = 0$  ( $x < 0$ ), berechne man das Potenzial  $\varphi(\vec{r})$  sowie die Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$ . Skizzieren Sie sowohl  $\varphi(\vec{r})$  als auch  $\vec{E}(\vec{r})$ .

**Aufgabe 12:** Kraft zwischen geladenen Platten

Berechnen Sie die Kraft pro Einheitsfläche zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten, wenn diese die Flächenladungsdichten  $\sigma$  und  $\sigma'$  tragen.

**Aufgabe 13:** Coulomb-Integrale

In der Quantenchemie spielen die sogenannten Coulomb-Integrale  $J_{ij}$  eine wichtige Rolle:

$$J_{ij} = \int d^3\tau d^3\tau' |\phi_i(\vec{r})|^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} |\phi_j(\vec{r}' - \vec{r}_{ij})|^2.$$

Sie beschreiben die elektrostatische Wechselwirkung zwischen den äußeren Valenzorbitalen  $\phi_i$  und  $\phi_j$  an den Atomen  $i$  und  $j$  im Abstand  $r_{ij}$  (vgl. Gl. (3.15) im Skript). Hier liegt der Ursprung im Atom  $i$ . Verwenden Sie die Näherung  $\phi_i(\vec{x}) = N_n x^{n-1} \exp[-\zeta_i x]$  mit  $x \equiv |\vec{x}|$  und  $N_n =$

$\sqrt{\frac{(2\zeta_i)^{2n+1}}{4\pi(2n)!}}$ , und berechnen Sie  $J_{ij}$  für  $\zeta = \zeta_i = \zeta_j$  und  $n = 1$ . Zeigen Sie, dass

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{r_{ij}} + \dots & \text{wenn } r_{ij} \rightarrow \infty \\ \frac{5}{8}\zeta - \frac{1}{12}\zeta^3 r_{ij}^2 + \dots & \text{wenn } r_{ij} \rightarrow 0 \end{cases}.$$

gilt. Hinweis:  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k k^{-2} \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')]^2$ .

Beachten Sie, die elektrostatische Wechselwirkungsenergie ist somit bei großen Abständen die gleiche wie für Punktladungen  $e_i = e_j = 1$ . Bei kleinen Abständen dagegen tritt keine Divergenz mehr auf!

**Aufgabe 14:** Eine Anwendung des Gaußschen Satzes

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Gauß, dass an der Oberfläche eines gebogenen, geladenen Leiters gilt

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

wobei  $\partial E / \partial n$  die Ableitung in Normalenrichtung ist, und  $R_1$  sowie  $R_2$  sind die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche.

**Aufgabe 15:** Monopol-Dipol- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung

(a) Welche Kraft wirkt auf eine Ladung  $e_i$  am Ort  $\vec{r}_i$  im Feld eines Punktdipols  $\vec{p}_j$  am Ort  $r_j$ ? Geben Sie auch die Kraft für die folgenden Spezialfälle an:  $\vec{p}_j \perp \vec{r}_{ij}$ ,  $\vec{p}_j \uparrow \vec{r}_{ij}$ ,  $\vec{p}_j \downarrow \vec{r}_{ij}$ ;  $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

(b) Rechnen Sie explizit aus, welche Kraft umgekehrt auf den Punktdipol  $\vec{p}_j$  im Feld der Ladung  $e_i$  wirkt?

(c) Berechnen Sie das Drehmoment, das im Fall (b) auf den Dipol ausgeübt wird.

(d) Zwei gleichstarke Dipole  $\vec{p}_1 = p\vec{n}_1$  und  $\vec{p}_2 = p\vec{n}_2$  sind bei  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  frei drehbar angeordnet. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsorientierung

<sup>2</sup>folgt aus der Darstellung der  $\delta$ -Funktion als  $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]$  und Gl. (3.9) im Skript.

der Dipole zueinander.

**Aufgabe 16:** Dipol-Dipol-Wechselwirkung in verdünnten Gasen

Wir betrachten ein verdünntes monomolekulares Gas, wie beispielsweise reiner Wasserdampf, bestehend aus  $N$  Molekülen in einem Volumen  $V$  (Anzahldichte  $\rho = N/V$  ist konstant). Das Dipolmoment der neutralen Moleküle sei  $\vec{p}$ . Da der mittlere Abstand zwischen den Molekülen groß sein soll, ist die Dipol-Dipol-Wechselwirkungsenergie  $u^{DD}$  der dominante Beitrag zur Gesamtwechselwirkungsenergie des Gases  $U$ . D.h.,  $U/N \approx \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N u_{ij}^{DD}$ . Da sich die Moleküle ständig bewegen, verstehen wir alle diese Größen als Mittelwerte über lange Zeiträume. Als Integral geschrieben ist  $U$  in diesem Fall durch

$$\frac{U}{N} \approx \frac{1}{2N} (N-1) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega'}{4\pi} \int d^3r \rho g_2(r; \vec{p}, \vec{p}') u^{DD}(r; \vec{p}, \vec{p}')$$

gegeben. Die Größe  $d^3r \rho g_2(r; \vec{p}, \vec{p}')$  ist die mittlere Anzahl der Moleküle im Volumenelement  $d^3r$  im Abstand  $r$  vom Ursprung, deren Dipol  $\vec{p}'$  entlang dem Raumwinkelement  $d\Omega'$  orientiert ist. Der Ursprung wiederum liegt auf einem beliebig gewählten Molekül, dessen Dipol  $\vec{p}$  in das Raumwinkelement  $d\Omega$  zeigt. In der Vorlesung über Statistische Physik werden Sie noch lernen, dass in guter Näherung gilt

$$g_2(r; \vec{p}, \vec{p}') \approx \exp[-u^{DD}(r; \vec{p}, \vec{p}')/T].$$

Hier ist  $T$  die Temperatur des Gases in Energieeinheiten.

(a) Sie sollen  $g_2$  für große  $T$  entwickeln und den führenden Term von  $U/N$  berechnen. Beachten Sie dabei, dass sich die  $r$ -Integration von  $a$  bis  $\infty$  erstreckt, wobei  $a$  ein typischer kleinsten Molekülabstand sein soll. Verwenden Sie auch  $N-1 \approx N$ , da  $N$  eine sehr große Zahl ist.

(b) Begründen Sie warum  $|U/N|$ , also der Betrag der Wechselwirkungsenergie pro Molekül, unendlich wäre, wenn die Orientierungen der

molekularen Dipolmomente festgehalten würde.

**Aufgabe 17:** Kapazität paralleler Zylinder in großem Abstand

Zwei lange zylindrische Leiter sind parallel und besitzen die Radien  $a_1$  und  $a_2$ . Der Abstand der Zylinderachsen  $d$  soll groß sein verglichen mit den jeweiligen Zylindrerradien. Unter dieser Annahme zeigen Sie, dass die Kapazität pro Längeneinheit  $C_l$  der Anordnung ungefähr durch

$$C_l \approx \left( 4 \ln \frac{d}{a} \right)^{-1}$$

gegeben ist, wobei  $a = \sqrt{a_1 a_2}$  der geometrische Mittelwert der Radien ist.

**Aufgabe 18:** Bildladungsmethode: Dipol vor Metallocberfläche

Die Abbildung zeigt einen Dipol vor einer idealen Metallocberfläche.

(a) Geben Sie mithilfe der Bildladungsmethode einen Ausdruck für die potenzielle Energie des Dipoles an.

(b) Berechnen Sie die Kraft auf den Dipol, wenn dieser verglichen zu seiner linearen Ausdehnung  $r$  weit von der Oberfläche entfernt ist ( $r \ll S, D, d$ ).

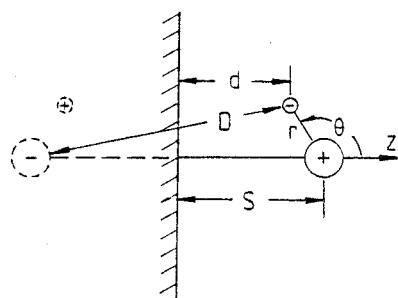


Abbildung B.1: Dipol (rechts) vor Metallgrenzfläche (links) in der er einen Bilddipol erzeugt.

**Aufgabe 19:** Konforme Abbildungen

(a) Welche konforme Abbildung verbindet das Potenzial des Koaxialkabels (Gl. (3.26)) mit dem des Plattenkondensators (Gl. (3.29))?

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung des Beispiels für die Methode der konformen Abbildung (Gl. (3.46)) tatsächlich die Laplace Gleichung für  $r < 1$  sowie die Randbedingungen für  $r = 1$  erfüllt. Berechnen Sie außerdem die Oberflächenladungsverteilung in diesem Fall. Sie dürfen hier *Mathematica* oder ähnliche Rechenprogramme verwenden. Sie sollten jedoch Ihre Arbeit anhand eines Programmausdrucks dokumentieren.

#### Aufgabe 20: Kraft zwischen Stromverteilungen

(a) Zwei unendlich lange Drähte kreuzen sich im senkrechten Abstand  $d$  (siehe Abbildung) unter dem Winkel  $\phi$ . In den Drähten fließen die Ströme  $I$  und  $I'$  in die Richtung der Linienelemente  $\delta l$  bzw.  $\delta l'$ . Berechnen Sie die Kraft, die der Strom  $I'$  auf den Strom  $I$  ausübt.

(b) Im Fall paralleler Drähte geben Sie die entsprechende Kraft pro Längeneinheit Draht an. Hinweis: Kombinieren Sie geeignet die Lorentz-Kraft mit dem Gesetz von Biot-Savart, wobei Sie  $\rho v \delta V = I \delta l$  verwenden sollten.

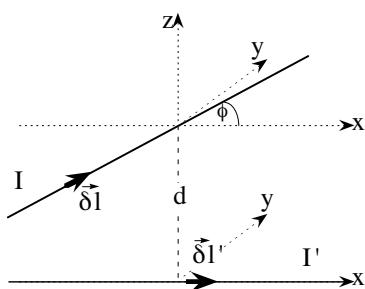


Abbildung B.2: Strom  $I'$  fließt in  $x$ -Richtung, während Strom  $I$  in  $z$ -Richtung um  $d$  verschoben in der  $x-y$ -Ebene fließt, wobei  $\phi$  der Winkel zwischen der  $x$ -Richtung und  $\delta l$  ist.

#### Aufgabe 21: Elementare Magnetostatik

(a) In der Vorlesung wurde für das Magnetfeld einer stationären Stromverteilung die Gleichung

$$\langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'$$

hergeleitet. Zeigen Sie durch explizites Einsetzen, daß dieses  $\langle \vec{H} \rangle$  die beiden gemittelten Maxwell-Gleichungen  $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{H} \rangle = 0$  und  $\vec{\nabla} \times \langle \vec{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle$  erfüllt.

(b) Zeigen Sie auch, daß mit dem Vektorpotenzial

$$\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\langle \vec{j}(\vec{r}') \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

die Gleichung  $\langle \vec{H} \rangle = \vec{\nabla} \times \langle \vec{A} \rangle$  gilt, und überprüfen Sie außerdem, ob dieses  $\langle \vec{A}(\vec{r}) \rangle$  die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{A} \rangle = 0$  erfüllt.

#### Aufgabe 22: Rotierende Scheibe mit homogener Ladungsverteilung

Eine homogen geladene Platte, ihr Radius sei  $R$  und ihre Flächenladungsdichte sei  $\sigma$ , rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihre Hauptträgheitsachse senkrecht zur Scheibenebene.

(a) Berechnen Sie das magnetische Feld  $\langle \vec{H} \rangle$  der Scheibe entlang der Rotationsachse, und geben Sie auch den führenden Term im Grenzfall  $r \gg R$  an.

(b) Berechnen Sie das magnetische Moment  $\langle \vec{m} \rangle$  der Scheibe. Wie können Sie dieses Ergebnis einsetzen, um den Grenzfall  $r \gg R$  in Teil (a) sofort hinzuschreiben?

#### Aufgabe 23: Magnetischer Dipol im inhomogenen Feld

In der Vorlesung wurde die Formel

$$U_{\vec{m}} = -\vec{m} \cdot \vec{H}$$

hergeleitet. In die Ableitung ging ein, dass  $\vec{H}$  konstant sein sollte. Andererseits wurde behauptet, dass der negative Gradient von  $U_{\vec{m}}$  die Kraft auf den Dipol liefert. Wie kann dies sein, wenn

$\vec{H}$  konstant ist? Die Ableitung bzw. die Kraft sollte dann verschwinden und dadurch wäre die obige Gleichung unbrauchbar – oder? Hinweis: Betrachten Sie die Herleitung im Skript genau, und fragen Sie sich, was mit  $\vec{H}$  =konstant wirklich gemeint ist bzw. inwiefern  $\vec{H}$  =konstant überhaupt notwendig ist.

**Aufgabe 24:** Retardierte Potenziale

Zeigen Sie, dass

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R}$$

mit  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  eine Lösung von

$$\Delta_{\vec{r}} \varphi - c^{-2} \ddot{\varphi} = -4\pi \rho$$

ist.

**Aufgabe 25:**  $\vec{E}$ -Feld einer bewegten Ladung:

In dieser Aufgabe sollen Sie Gl. (4.13) im Skript, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \frac{e}{R^2 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{w}}{c}\right)^3} \left[ \frac{\vec{n} - \frac{\vec{w}}{c}}{\gamma^2(w)} + \right. \\ & \left. \left( \frac{R \dot{\vec{w}}}{c^2} \times (\vec{n} - \frac{\vec{w}}{c}) \right) \times \vec{n} \right], \end{aligned}$$

aus den dort angegebenen Potenzialen ( $\varphi = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{c}}$  sowie  $\vec{A} = \frac{e}{cR} \frac{\vec{w}}{1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{c}}$  mit  $\vec{n} = \vec{R}/R$ ) mittels  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi$  herleiten. Beachten Sie, dass  $\vec{A}$  und  $\varphi$  zur früheren Zeit  $t'$  gegeben sind. Dies gilt auch für die gesamte rechte Seite der Gl. (4.13).

(a) Geben sie den Ausdruck für  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  an.

(b) Geben Sie den Ausdruck für  $-\vec{\nabla} \varphi$  an.

Hinweis: Verwenden Sie die im Skript angegebenen nützlichen Formeln! Stellen Sie den gesuchten Ausdruck bitte so dar, dass Ähnlichkeiten mit  $\vec{E}$  gut erkennbar werden!

**Aufgabe 26:** Strahlung einer Ladung auf einer Kreisbahn

Auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  bewegt sich in der  $xy$ -Ebene eine Ladung  $e$  mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $\vec{w}$  und strahlt Energie ab. In der Vorlesung war gezeigt worden, dass der Poynting-Vektor durch

$$\begin{aligned} \vec{S} \approx & \frac{e^2}{4\pi R^2 c^3} \left[ \frac{\dot{w}^2}{\left(1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{c}\right)^4} \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{w}})^2}{\left(1 - \frac{\vec{w} \cdot \vec{n}}{c}\right)^6} \right] \vec{n}. \end{aligned}$$

gegeben ist (vgl. Skript Gl. (4.24)). Der Einheitsvektor  $\vec{n}$  in Richtung zum Beobachter (in der großen Entfernung  $R$ ) soll in der  $yz$ -Ebene liegen, und den Winkel  $\vartheta$  mit der  $y$ -Achse bilden. Die Energie  $dE$ , die im Mittel in ein Raumwinkelement  $d\Omega$  um  $\vec{n}$  abgestrahlt wird, kann gemäß der Formel  $dE = d\Omega \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt$  berechnet werden. Hier ist  $T$  die Zeit einer Periode.

(a) Tragen Sie  $dE/d\Omega$  (in Einheiten von  $e^2 w / (4\pi R^2 c r)$ ) gegen  $\vartheta$  auf (für  $w/c = 0, 0.4, 0.6$  und  $0.8$ ).

(b) Geben Sie eine Formel für  $dE_{\vartheta=0}/dE_{\vartheta=\pi/2}$  (Verhältnis der Strahlungsintensität in der Bahnebene zur Intensität senkrecht zur Bahnebene) an, und plotten Sie das Verhältnis gegen  $w/c$ . Geben Sie auch die führenden Terme in den Grenzfällen  $w \rightarrow 0$  sowie  $w \rightarrow c$  an.

Hinweise: Beachten Sie, dass die rechte Seite der Gleichung für  $\vec{S}$  von  $t'$  abhängt, und sie daher die Integrationsvariable substituieren müssen, d.h.,  $dt = (\partial t / \partial t') dt'$ . Die Integration können Sie mit allen zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln -außer Abschreiben- ausführen.

**Aufgabe 27:** Reaktionsfeldnäherung: Born-Modell

(a) In einem unendlich ausgedehnten Dielektrikum ( $\epsilon_a$ ) befindet sich ein kugelförmiges Volumen (Radius  $R$ ) angefüllt mit einem anderen Dielektrikum ( $\epsilon_i$ ). Im Abstand  $r_e$  ( $< R$ ) vom Kugelzentrum befindet sich eine Ladung  $e$ . Bestimmen Sie das Potenzial  $\varphi(\vec{r}) = \{\varphi_i(\vec{r})(r < R); \varphi_a(\vec{r})(r > R)\}$  dieser

Ladung im gesamten Raum mit der Bildladungsmethode.

Hinweise: Im Skript (S. 24) hatten wir die Bildladungsmethode auf eine Ladung außerhalb einer leitenden Kugel angewandt. Modifizieren Sie diese Vorgehensweise im Sinne des Beispiels einer Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum (Skript S. 39), und berücksichtigen Sie die Randbedingungen analog zum Beispiel der dielektrischen Kugel im homogenen Feld (Skript S. 39). Seien Sie nicht überrascht, wenn ihre Bildladungen vom Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}_e$  abhängen.

(b) Geben Sie die Potenziale  $\varphi_i(\vec{r})$  und  $\varphi_a(\vec{r})$  im Spezialfall  $r_e = 0$  an, d.h., die Ladung  $e$  befindet sich im Kugelzentrum. Wenn Sie jetzt die potentielle Energie der Ladung mittels  $U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV$  berechnen (vgl. Skript Gl. (3.11)), dann erhalten Sie einen unendlichen Beitrag, die Selbstenergie der Ladung, der hier nicht interessiert und einen endlichen Beitrag  $U_{RF}$  proportional zu  $e^2/R$  (der Reaktionsfeldbeitrag). Dieser Beitrag, der ursprünglich von M. Born diskutiert wurde (Z. Physik (1920) 1, 45), beschreibt den Anteil der Polarisierungsenergie des die Ladung umgebenden Mediums zur gesamten potenziellen Energie der Ladung.

Mit seiner Hilfe kann beispielsweise der Energieunterschied zwischen einem Ion im Vakuum und dem gleichen Ion in (beispielsweise) Wasser abgeschätzt werden. Wir wollen dies probieren. Gemessen wurden die folgenden Energieunterschiede  $\Delta E_{hyd}$  (in  $kJmol^{-1}$ ) für die Überführung der angegebenen Ionen vom Vakuum (Luft) ins Wasser:  $Li^+(-520)$ ,  $Na^+(-405)$ ,  $K^+(-321)$ ,  $F^-(-506)$ ,  $Cl^-(-364)$ ,  $Br^-(-337)$ . Das Ion selbst hat einen bestimmten Radius, der hier dem Kugelradius entspricht ( $R$  in  $10^{-10}m$  aus Kristallstrukturdaten:  $Li^+(0.68)$ ,  $Na^+(0.97)$ ,  $K^+(1.33)$ ,  $F^-(1.33)$ ,  $Cl^-(-1.81)$ ,  $Br^-(-1.96)$ ). Weiter nehmen wir an:  $1/\epsilon_i \approx 1$  und  $1/\epsilon_a = 1/\epsilon_{Wasser} \approx 0$ . Berechnen Sie  $U_{RF}$  in  $kJmol^{-1}$  und vergleichen Sie mit den experimentellen Werten für  $\Delta E_{hyd}$ .

### Aufgabe 28: Ponderomotorische Kräfte

Wir betrachten einen „Kondensator“ bestehend aus zwei koaxialen, zylindrischen Röhren. Die Innere habe den Radius  $R$  und die äußere den Radius  $R + \delta R$  ( $\delta R \ll R$ ). Die innere Röhre trägt die festgehaltene Flächenladungsdichte  $\sigma$ ;

auf der äußeren ist diese  $-\sigma$ . Der Kondensator sei teilweise in eine Flüssigkeit mit Massendichte  $\rho$  und der Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  eingetaucht. Die Flüssigkeitsoberfläche und die Zylinderachse sind dabei senkrecht zueinander.

(a) Ausgehend von

$$U = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{P} \cdot \vec{E}_o dV$$

(vgl. Gl. (5.22) im Skript) geben Sie die Kraft an, mit der das flüssige Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird.

(b) Aus dem entsprechenden Kräftegleichgewicht berechnen Sie die Steighöhe  $h$ , die die Flüssigkeit im Kondensator erreicht.

(c) Diskutieren Sie die beiden folgenden Fragen:

1. Warum wäre die Aufgabe ohne die Bedingung  $\delta R \ll R$  schwieriger?
2. Ein Metallrörchen soll gerade (berührungslos) zwischen die beiden Kondensatorröhren passen. Welche Kraft erfährt dieses Metallrörchen im Kondensator (in Analogie zur Flüssigkeit) und warum?

### Aufgabe 29: Integralidentität

Zeigen Sie, dass die folgende Integralidentität gilt:

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) dV &= \oint \vec{r} \times (d\vec{f} \times \vec{M}) \\ &\quad - \int (\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{r} dV. \end{aligned}$$

Hier sollen  $\vec{r}$  der Ortsvektor und  $\vec{M}$  ein beliebiger Vektor sein.

### Aufgabe 30: Äquipotenzialflächen in einem anisotropen Medium

In einem anisotropen Medium mit den Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  und  $\epsilon_3$  in den Koordinatenrichtungen befindet sich am Nullpunkt eine Punktladung  $e$ . Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$ .

**Aufgabe 31:**  $\vec{B}$ -Feld in zylindrischer Bohrung

Bestimmen Sie das  $\vec{B}$ -Feld in einer zylindrischen Ausbohrung mit Radius  $a$  parallel zur Achse eines zylindrischen Leiters mit Radius  $b$ , in dem gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ein Strom  $I$  in  $z$ -Richtung fließt. Das Zentrum der Ausbohrung befindet sich im Abstand  $d$  von der Leitermitte (Ursprung) auf der  $x$ -Achse. Hinweis: Gehen Sie von  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  mit  $\vec{j} = (0, 0, j)$  aus. Verwenden Sie außerdem das Superpositionsprinzip.

**Aufgabe 32:** Lenzsche Regel

Eine kreisrunde Leiterschleife mit Radius  $r_1$  wird vom Strom  $I$  durchflossen. Die Schleife soll mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  rotieren. Die Rotationsachse liegt in der Schleifenebene und verläuft durch den Schleifenmittelpunkt, der gleichzeitig den Koordinatenursprung bildet. Zur Zeit  $t = 0$  sei die Schleifenebene parallel zur  $xy$ -Ebene. Ebenfalls auf der  $z$ -Achse liegt bei  $z = -d$  der Mittelpunkt einer zweiten Leiterschleife, mit Radius  $r_2$ , deren Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene fixiert ist. Die Stromrichtung von  $I$  sei für einen Beobachter in negative  $z$ -Richtung entgegen dem Uhrzeigersinn. Außerdem soll  $d \gg r_1, r_2$  (Retartierungseffekte seien aber vernachlässigbar.) sowie  $\mu = 1$  gelten.

Berechnen Sie das  $\vec{B}$ -Feld von Schleife 1 im Zentrum von Schleife 2 in Dipolnäherung. Vergleichen Sie dort  $B_z(t)/B_z^{(max)}$  mit dem entsprechenden Quotienten des induzierten Feldes in Schleife 2 - also  $B_{z,ind}(t)/B_{z,ind}^{(max)}$ . Skizzieren Sie! Gehen Sie von einem rein Ohmschen Zusammenhang zwischen  $I_{ind}$  und  $U_{ind}$  aus.

# Literaturverzeichnis

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifschitz (1981) Klassische Feldtheorie. Akademie-Verlag
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifschitz (1980) Elektrodynamik der Kontinua. Akademie-Verlag
- [3] J. D. Jackson (1975) Classical Electrodynamics. Wiley
- [4] W. Greiner (1978) Klassische Elektrodynamik. Harri Deutsch

# Index

- Amperesches Gesetz, 14
- Ausbreitungsgeschwindigkeit, 1
- avancierte Potenziale, 33
- axialer Vektor, 12
- Biot-Savartsches Gesetz, 28
- Brechungsindex, 60
- Brewsterscher Winkel, 61
- Clausius-Mossottische Gleichung, 43
- Coulomb-Eichung, 31
- Coulombsches Gesetz, 17
- Curie-Gesetz, 47
- Curie-Temperatur, 47
- Curie-Weiss Gesetz, 47
- Debyesche Gleichung, 44
- Diamagnetismus, 48
- Dielektrika, 37
- dielektrische Permeabilität, 38
- dielektrische Suszeptibilität, 38
- Dirichletsche Randbedingungen, 23
- Dispersion, 59
- Dispersionsrelation, 57
- ebene Welle, 31
- Eichinvarianz, 11
- elektrische Doppelschicht, 22
- elektrische Leitfähigkeit, 50
- elektrische Verschiebung, 38
- elektromagnetische Wellen, 31
- Elektronenpolarisation, 41
- Elektronenradius, 19
- EMK, 51
- Energiedichte, 16
- Erdung, 23
- Faradaysches Gesetz, 13
- Feld
  - elektrisches, 11
  - magnetisches, 11
- Feldstärke
  - elektrische, 10
  - magnetische, 11
- Feldstärketensor, 11
- Fernwirkung, 1
- Ferromagnetismus, 47
- Flächenladungsdichte, 21
- Fresnelsche Formeln, 61
- Geschwindigkeitsadditionstheorem, 3
- Greens-Funktion, 27
- Greensche Beziehungen, 27
- Hysterese, 47
- Impedanz, 54
- Induktionsgesetz, 54
- Induktivität, 54
- Inertialsystem, 1
- Ionenpolarisation, 41
- Joule-Lenzsches Gesetz, 51
- Joulesches Gesetz, 54
- Kapazität, 22
- Kirchhoffsches Gesetz (1.), 55
- komplexer Widerstand, 54
- Kondensator, 22
- konforme Abbildung, 25
- konservative Felder, 17
- Kontinuitätsgleichung, 15
- kontravariant, 9
- kovariant, 9
- Langevin-Funktion, 43
- Laplace Gleichung, 17
- Leitfähigkeitstensor, 50
- Lichtgeschwindigkeit, 1
- Lorentz-Eichung, 31
- Lorentz-Kraft, 11
- magnetische Induktion, 46
- magnetische Permeabilität, 47

magnetische Suszeptibilität, 47  
magnetischer Fluss, 54  
Magnetisierung, 46  
Massenzunahme, 5  
metrischer Tensor, 10  
  
Neumannsche Randbedingungen, 23  
  
Ohmsches Gesetz, 50  
  
Paramagnetismus, 47  
Plasmafrequenz, 58  
Plasmonen, 58  
Poisson Gleichung, 17  
polarer Vektor, 12  
Polarisation  
    elliptische, 33  
    lineare, 33  
    zirkular, 33  
Polarisationsvektor, 38  
Polarisierbarkeit, 42  
Poynting-Vektor, 15  
Prinzip der kleinsten Wirkung, 7  
Pseudoskalar, 12  
  
Reaktionsfeld, 41  
Relativitätsprinzip, 1  
Remanenz, 48  
retardierte Potenziale, 33  
Ruhemasse, 5  
  
Scheinwiderstand, 54  
Selbst-Feld, 41  
Skineffekt, 55  
Snelliussche Brechungsgesetz, 60  
Spannung, 22  
Stromdichte, 13  
Stromvierervektor, 13  
Summenkonvention, 9  
Superpositionsprinzip, 17  
  
Telegraphengleichungen, 57  
Totalreflexion, 60  
  
Verschiebungsstrom, 15  
Viergeschwindigkeit, 11  
Viertensor, 9  
  
Wellengleichung, 31  
Wellenvektor, 32  
Wirkungsintegral, 7