

Theorie Klassischer Teilchen und Felder 2

-  
Elektrodynamik

-  
Starre und elastische Körper

Barbara Drossel

WS 05/06

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Elektro- und Magnetostatik im materiegefüllten Raum</b>	<b>4</b>
1.1 Elektrostatik im materiegefüllten Raum . . . . .	4
1.2 Randbedingungen für die Felder der Elektrostatik . . . . .	7
1.3 Freundliche Vereinfachungen . . . . .	8
1.4 Beispiel: Plattenkondensator mit Dielektrikum . . . . .	9
1.5 Beispiel: Dielektrische Kugel im äußeren Feld . . . . .	11
1.6 Magnetostatik im materiegefüllten Raum . . . . .	14
1.7 Randbedingungen für die Felder der Magnetostatik . . . . .	16
1.8 Beispiel: Das von einer homogen magnetisierten Kugel erzeugte Feld im Vakuum . . . . .	16
1.9 Beispiel: paramagnetische Kugel im äußeren Feld . . . . .	18
1.10 Übersicht der verwendeten Größen . . . . .	19
1.11 Exkurs: Magnetismus in der Quantenmechanik . . . . .	20
<b>2 Die Maxwell-Gleichungen und elektromagnetische Wellen</b>	<b>24</b>
2.1 Maxwellgleichungen im materiegefüllten Raum . . . . .	24
2.2 Potenziale und Eichungen . . . . .	25
2.3 Energie- und Impulserhaltung . . . . .	29
2.4 Ebene Wellen in nichtleitenden Medien . . . . .	33
2.5 Frequenzabhängigkeit von $\varepsilon(\omega)$ und $\sigma(\omega)$ . . . . .	34
2.6 Ebene Wellen in leitenden und dissipativen Medien . . . . .	36
2.7 Hohlleiter und Hohlraumresonatoren . . . . .	38
2.8 Beispiel 1: TM Wellen im zylinderförmigen Hohlleiter . . . . .	42
2.9 Beispiel 2: TEM Wellen im Koaxialkabel . . . . .	43
<b>3 Das Feld vorgegebener Ladungs- und Stromverteilungen</b>	<b>44</b>
3.1 Zeitabhängige Greensfunktion . . . . .	44
3.2 Warum gibt es zwei qualitativ verschiedene Arten von Lösungen? . . . . .	49
3.3 Warum kommen in der Natur nur die retardierten Lösungen vor? . . . . .	51
3.4 Liénard-Wiechert Potenziale . . . . .	54
3.5 Felder und Strahlung einer lokalisierten, oszillierenden Quelle . . . . .	59

<b>4 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik</b>	<b>63</b>
4.1 Vierervektoren . . . . .	63
4.2 Lorentz-Transformation . . . . .	64
4.3 Viererstromdichte, Viererpotenzial und Feldstärketensor . . . . .	67
4.3.1 Viererstromdichte . . . . .	67
4.3.2 Viererpotenzial . . . . .	67
4.3.3 Feldstärketensor . . . . .	68
4.4 Transformation der elektromagnetischen Felder . . . . .	70
4.5 Lagrange- und Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	72
4.6 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes . . . . .	75
4.7 Energie-Impulstensor (kanonischer) . . . . .	76
<b>5 Mechanik des starren Körpers</b>	<b>78</b>
5.1 Einführung . . . . .	78
5.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor . . . . .	80
5.3 Drehimpuls und Bewegungsgleichung des starren Körpers . . . . .	86
5.4 Kräftefreie Bewegung von starren Körpern . . . . .	88
5.5 Starre Körper mit nur einem Freiheitsgrad . . . . .	90
5.6 Die Eulerschen Gleichungen . . . . .	94
5.7 Der Schwere Kreisel . . . . .	95
<b>6 Elastizitätstheorie</b>	<b>100</b>
6.1 Der Verzerrungstensor . . . . .	100
6.2 Der Spannungstensor . . . . .	102
6.3 Deformationsenergie und Hookesches Gesetz . . . . .	104
6.4 Homogene Deformationen . . . . .	108
6.5 Elastische Wellen im isotropen Medium . . . . .	109
6.6 Oberflächenwellen . . . . .	111
6.7 Longitudinalwellen in Stäben und Platten . . . . .	114
6.8 Biegewellen in Stäben . . . . .	115

# Kapitel 1

## Elektro- und Magnetostatik im materiegefüllten Raum

Bisher haben wir die Maxwellgleichungen im Vakuum betrachtet. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen sich im Vakuum befindenden Ladungen und Strömen und den elektrischen und magnetischen Feldern. In diesem Kapitel erweitern wir die Elektro- und Magnetostatik auf den materiegefüllten Raum. Die Ergebnisse verwenden wir, um die Maxwellgleichungen im materiegefüllten Raum zu formulieren.

### 1.1 Elektrostatisitk im materiegefüllten Raum

Die Elektrostatisitk befasst sich mit Systemen, in denen es keine bewegten Ladungen und keine elektrischen Ströme gibt. Alle Ladungen sind stationär im Raum, und ebenso die elektrischen Felder. Es gibt keine Magnetfelder.

Es gelten in der Elektrostatisitk im Vakuum folgende Beziehungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\varrho(\vec{r}) \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (1.2)$$

Aus der zweiten Beziehung folgt, dass das elektrische Feld sich als der Gradient eines Potenzials schreiben lässt,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad (1.3)$$

mit

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (1.4)$$

Im letzten Schritt haben wir die Multipolentwicklung verwendet, die immer dann sinnvoll ist, wenn der Ort  $\vec{r}$ , an dem das Potenzial gemessen wird, weit entfernt ist von der Ladungsverteilung, die das Potenzial hervorruft. Wir haben den Schwerpunkt der Ladungsverteilung in den Koordinatenursprung gelegt.  $Q$  ist die Gesamtladung  $\int d^3r' \varrho(\vec{r}')$ , und  $\vec{p}$  ist das elektrische Dipolmoment  $\int d^3r' \varrho(\vec{r}') \vec{r}'$  der Ladungsverteilung.

All diese Beziehungen gelten auch im materiegefüllten Raum, wenn wir eine *mikroskopische* Betrachtungsweise haben: Die Atome und Moleküle des Materials machen mit ihren Ladungsverteilungen einen Beitrag zum elektrischen Feld im Raum. Da es unmöglich und unnötig ist, alle Atome und Moleküle in die Rechnungen einzubeziehen, wählt man eine *makroskopische* Betrachtungsweise: Die Details auf ganz kleinen Längenskalen interessieren nicht. Wir mitteln daher über kleine Volumina, die viel größer als der Atom- bzw. Moleküldurchmesser sind. Außerdem machen wir für die Ladungsverteilung jedes Atoms oder Moleküls eine Multipolentwicklung, so dass von jedem Molekül  $j$  nur seine Gesamtladung  $q_j$  und sein Dipolmoment  $\vec{p}_j$  wichtig ist. Ihre Dichten sind dann

$$\text{Ladungsdichte der Moleküle: } \varrho_{Mol}(\vec{r}) = \sum_j q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (1.5)$$

$$\text{Polarisationsdichte der Moleküle: } \vec{\pi}_{Mol}(\vec{r}) = \sum_j \vec{p}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (1.6)$$

Damit können wir das elektrische Potenzial nähern durch den Ausdruck

$$\Phi(\vec{r}) \approx \int d^3 r'' \left( \frac{\varrho_{Mol}(\vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|} + \frac{\vec{\pi}_{Mol}(\vec{r}'') \cdot (\vec{r} - \vec{r}'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right) \quad (1.7)$$

Nun mitteln wir über ein kleines Volumen  $v$ :

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\vec{r}) \rangle &\equiv \frac{1}{v} \int_v d^3 r' \Phi(\vec{r}' + \vec{r}) \\ &\stackrel{\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'' = \vec{z}}{=} \int_v d^3 r' \int d^3 z \left( \frac{\varrho_{Mol}(\vec{r}' + \vec{r} - \vec{z})}{z} + \frac{\vec{\pi}_{Mol}(\vec{r}' + \vec{r} - \vec{z}) \cdot \vec{z}}{z^3} \right) \frac{1}{v} \\ &= \int d^3 z \left( \frac{\varrho(\vec{r} - \vec{z})}{z} + \frac{\vec{P}(\vec{r} - \vec{z}) \cdot \vec{z}}{z^3} \right) \\ &\stackrel{\vec{r} - \vec{z} = \vec{r}'}{=} \int d^3 r' \left( \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{mit } \varrho(\vec{r}) = \frac{1}{v} \int_v d^3 r' \varrho_{Mol}(\vec{r} + \vec{r}') \text{ Ladungsdichte} \quad (1.9)$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{v} \int_v d^3 r' \vec{\pi}_{Mol}(\vec{r} + \vec{r}') \text{ Polarisationsdichte} \quad (1.10)$$

$\varrho(\vec{r})$  und  $\vec{P}(\vec{r})$  sind die Ladung pro Einheitsvolumen und das Dipolmoment pro Einheitsvolumen. Sie sind ebenso wie das Potenzial über kleine Volumina gemittelt und sind daher kontinuierliche Funktionen.

Das zu dem gemittelten Potenzial gehörige elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \langle \Phi(\vec{r}) \rangle.$$

Wir berechen die Divergenz dieses Ausdrucks, um den neuen Ausdruck für die erste Maxwellgleichung zu erhalten. Unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= - \int d^3 r' \left( \varrho(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \underbrace{\left( \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{-4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')} \right) \\ &\stackrel{\text{part. Integration}}{\downarrow} 4\pi\varrho(\vec{r}) - \int d^3 r' 4\pi (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')) \cdot \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ &= 4\pi\varrho(\vec{r}) - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Wir definieren die *Verschiebungsdichte*

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) \quad (1.12)$$

und erhalten

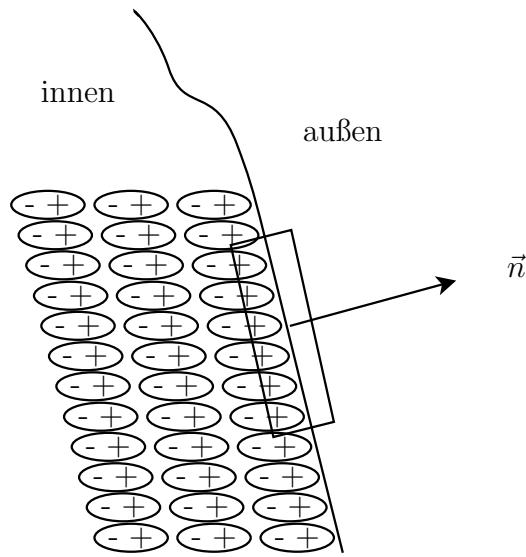
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\varrho}. \quad (1.13)$$

Die zweite Gleichung der Elektrostatisik lautet nach wie vor

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}. \quad (1.14)$$

Gleichung (1.13) lässt sich folgendermaßen interpretieren:

Es ist  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ . Dabei ist  $\varrho$  die Dichte der Raumladung, also derjenige Beitrag zur Ladungsdichte, der durch die Gesamtladung der Atome und Moleküle des Materials hervorgerufen wird. Der Ausdruck  $-4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  muss dann derjenige Beitrag zur Ladungsdichte sein, der durch die Polarisierung des Materials hervorgerufen wird, und wir nennen ihn die „Polarisationsladungsdichte“  $\varrho_P$ . Wir veranschaulichen ihn uns durch das folgende Bild, das den Rand des Dielektrikums zeigt:



Sei  $V$  das am Rand des Dielektrikums eingezeichnete flache Volumen. Dann ist

$$\begin{aligned}
 - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d^3 r' &= - \int_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{F} \\
 &= \vec{P} \cdot \vec{n} F (\leftarrow \text{Innenfläche}) \\
 &= \int_V \varrho_P d^3 r' = \sigma_P F .
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

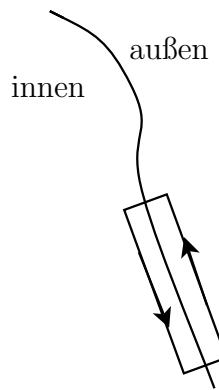
Hierbei ist  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$  die durch die Polarisation des Materials hervorgerufene Oberflächenladungsdichte.

## 1.2 Randbedingungen für die Felder der Elektrostatisik

Wir ermitteln im Folgenden, wie sich das elektrische Feld und die Verschiebungsdichte an Grenzflächen ändern.

Es seien  $\vec{E}_{\parallel}, \vec{P}_{\parallel}, \vec{D}_{\parallel}$  die Komponenten parallel zur Grenzfläche und  $\vec{E}_{\perp}, \vec{P}_{\perp}, \vec{D}_{\perp}$  die Komponenten senkrecht zur Grenzfläche .

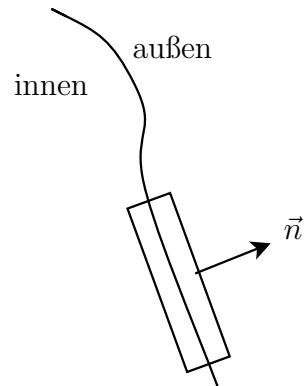
- Aus  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  folgt:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \Rightarrow \vec{E}_{\parallel}^i = \vec{E}_{\parallel}^a \quad (1.16)$$

Die Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  ist an einer Grenzfläche stetig.

- Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$  folgt: (wenn  $\rho = 0$  an der Grenzfläche)



$$\int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = 0 \quad (1.17)$$

$$\Rightarrow \vec{D}_{\perp}^i = \vec{D}_{\perp}^a \quad (1.18)$$

Die Normalkomponente von  $\vec{D}$  ist an der Grenzfläche stetig.

### 1.3 Freundliche Vereinfachungen

Die folgenden vereinfachenden Annahmen liefern – zumindest für schwache Felder – brauchbare Ergebnisse für das Rechnen mit Dielektrika.

1. Linearer Response des Materials:

$$\vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r})\vec{E} \quad (1.19)$$

$$\vec{P} = \underline{\underline{\chi}}_e(\vec{r})\vec{E} \quad (1.20)$$

wobei die Tensoren  $\underline{\underline{\epsilon}}$  und  $\underline{\underline{\chi}}_e$  nicht von  $\vec{E}$  abhängen. Wegen (5.44) gilt

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbb{1} + 4\pi\underline{\underline{\chi}}_e. \quad (1.21)$$

Wir gehen also davon aus, dass das Dipolmoment durch das äußere Feld  $\vec{E}$  induziert ist.

2. Isotropie des Materials:

$\Rightarrow \vec{D}$  und  $\vec{P}$  sind parallel zu  $\vec{E}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}}$  und  $\underline{\underline{\chi}}_e$  können durch Skalare ersetzt werden.

3. Homogenität des Materials

$\epsilon$  und  $\chi_e$  sind ortsunabhängig.

Diese Vereinfachungen führen auf folgende Beziehungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.22)$$

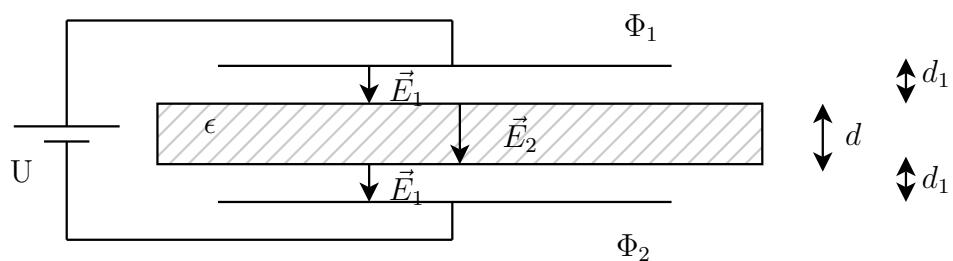
$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad (1.23)$$

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \vec{E}} \quad (1.24)$$

$$\boxed{\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e} \quad (1.25)$$

## 1.4 Beispiel: Plattenkondensator mit Dielektrikum

Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir einen Plattenkondensator, der teilweise mit einem Dielektrikum gefüllt ist, so wie in der Abbildung dargestellt:



Es ist

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (1.26)$$

Sei  $E_0$  das Feld, das ohne Dielektrikum im Kondensator wäre.

$$\Rightarrow U = (2d_1 + d) E_0 = 2d_1 E_1 + dE_2 \quad (1.27)$$

Da die Normalkomponente der Verschiebungsdichte stetig ist, haben wir die Beziehungen

$$D_2 = \varepsilon E_2 \quad D_1 = E_1 \quad D_2 = D_1 \quad (1.28)$$

und damit

$$E_1 = \varepsilon E_2. \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow U = E_1 \left( 2d_1 + \frac{d}{\varepsilon} \right) = (2d_1 + d) E_0 \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{2d_1 + d}{2d_1 \varepsilon + d} \varepsilon E_0 \quad (1.31)$$

Um die anschauliche Bedeutung dieser Beziehung zu erfassen betrachten wir folgenden zwei Grenzfälle:

$$\begin{aligned} d_1 \rightarrow 0 &\Rightarrow E_1 = E_0 \varepsilon, \quad E_2 = E_0 \\ d \rightarrow 0 &\Rightarrow E_1 = E_0, \quad E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Wenn das Dielektrikum den Kondensator völlig ausfüllt, ist also das Feld dasselbe wie im ungefüllten Kondensator.

Wir berechnen als nächstes die Oberflächenladungsdichte auf dem Dielektrikum (Oberseite):

$$\sigma_p = P_n = \frac{-1}{4\pi} (E_1 - E_2) = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_2 = -\chi_e E_2 \quad (1.32)$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass die Normale der Oberfläche antiparallel zum elektrischen Feld ist. Im Grenzfall  $d_1 \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\sigma_p = \chi_e E_0. \quad (1.33)$$

Die Flächenladungsdichte auf den Kondensatorplatten ist

$$\frac{Q}{F} = \sigma = \frac{E_1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{U}{2d_1 + \frac{d}{\varepsilon}} = \frac{E\varepsilon}{4\pi (2d_1 \varepsilon + d)} \quad (1.34)$$

Im Grenzfall  $d_1 = 0$  ist

$$\sigma = \frac{U\varepsilon}{4\pi d} = \frac{E_0}{4\pi} \varepsilon \quad (1.35)$$

und die Kapazität des Kondensators ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon F}{4\pi d}. \quad (1.36)$$

Dies ist das  $\varepsilon$ -fache der Kapazität im Vakuum.

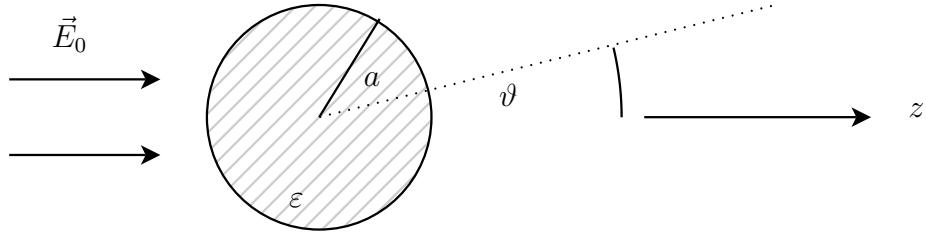
In diesem Grenzfall beträgt die Gesamtladung von Kondensatorplatte und Dielektrikumoberfläche

$$\sigma + \sigma_p = \frac{1-\varepsilon}{4\pi} E_0 + \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_0 = \frac{1}{4\pi} E_0 . \quad (1.37)$$

Die Kondensatorplatte und die Dielektrikumoberfläche haben also zusammen dieselbe Ladung wie im Vakuum. Die Platte selbst ist stärker geladen als im Vakuum.

## 1.5 Beispiel: Dielektrische Kugel im äußeren Feld

Als nächstes betrachten wir eine dielektrische Kugel im äußeren Feld.



Ohne Kugel ist das Feld  $\vec{E}_0$  und das Potenzial

$$\Phi = -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta . \quad (1.38)$$

Im Inneren der Kugel ist  $\Delta\Phi = 0$ , ebenso außerhalb der Kugel. In der Vorlesung Theorie I haben wir die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$  in Kugelkoordinaten kennengelernt. Mit dem Ansatz

$$\Phi = \frac{u(r)}{r} P(\vartheta) Q(\varphi)$$

erhält man

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\alpha_{lm} r^l + \beta_{lm} r^{-l+1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) . \quad (1.39)$$

Die  $Y_{lm}$  sind die Kugelflächenfunktionen, die in der Quantenmechanik als Eigenfunktionen des Drehimpulses auftraten. In unserem Beispiel liegt azimutale Symmetrie vor, d.h. das System ist invariant unter Rotation um die  $z$ -Achse. Also kann die Lösung nicht vom Winkel  $\varphi$  abhängen, und wir haben nur die Summanden  $m = 0$ . Der Lösungsansatz für

unser Beispiel ist also

$$\Phi^i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta) \quad (1.40)$$

$$\Phi^a = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.41)$$

Die  $P_l(x)$  sind Legendre-Polynome und auf dem Intervall  $[-1, 1]$  definiert. Sie sind gegeben durch die Beziehung

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left[ \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right]. \quad (1.42)$$

Ihr Zusammenhang mit den Kugelflächenfunktionen ist

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta). \quad (1.43)$$

Die Randbedingungen an der Kugeloberfläche und bei  $r = 0$  und  $r = \infty$  bestimmen die Koeffizienten  $A_l, B_l, C_l$ :

- $\Phi^i(r = 0) = \text{endlich}$ : diese Randbedingung ist schon berücksichtigt, da wir die Terme  $r^{-l-1}$  im Kugellinneren weggelassen haben.
- $\Phi^a(r \gg a) = -E_0 r \cos \vartheta$

$$\Rightarrow B_1 = -E_0, \quad B_{l \neq 1} = 0$$

- $\vec{E}_{\parallel}$  stetig

$$\Rightarrow -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi^i}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi^a}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{dP_l}{d\vartheta} = E_0 a \sin \vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-l-1} \frac{dP_l}{d\vartheta} \quad (1.45)$$

$$\Rightarrow A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \quad (1.46)$$

$$A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{für } l \neq 1 \quad (1.47)$$

- Die Kugel sei insgesamt ungeladen:  $\Rightarrow C_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 0$

- $\vec{D}_\perp$  stetig  $\Rightarrow \varepsilon \vec{E}_\perp$  stetig

$$\Rightarrow -\varepsilon \frac{\partial \Phi^i}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Phi^a}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow \varepsilon A_1 = -E_0 - \frac{2C_1}{a^3} \quad (1.49)$$

$$\varepsilon A_l = -\frac{l+1}{l} \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad l \neq 1 \quad (1.50)$$

Wenn wir alle diese Bedingungen zusammennehmen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\right) E_0 & A_l &= 0 \quad l \neq 1 \\ C_1 &= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} a^3 E_0 & C_l &= 0 \quad l \neq 1 \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\Rightarrow \Phi^i = -\frac{3}{\varepsilon+2} E_0 \underbrace{r \cos \vartheta}_z \quad (1.52)$$

$$\Phi^a = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \vartheta \quad (1.53)$$

Der zweite Beitrag zum äußeren Potenzial ist das Potenzial eines Dipols mit dem Dipolmoment

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 a^3 \vec{e}_z. \quad (1.54)$$

Die polarisierte Kugel wirkt also wie ein reiner Dipol, dessen Feld sich dem vom außen angelegten Feld überlagert. Die Polarisation im Inneren der Kugel ist homogen:

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \vec{E} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \vec{E}_0 \quad (1.55)$$

Die Oberflächenladungsdichte der Kugel beträgt

$$\sigma_p(\vartheta) = \vec{P} \cdot \vec{n} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} E_0 \cos \vartheta. \quad (1.56)$$

## 1.6 Magnetostatik im materiegefüllten Raum

Die Magnetostatik im materiegefüllten Raum ist konzeptionell ähnlich wie die Elektrostatisitk im materiegefüllten Raum. Während in der Elektrostatisitk das elektrische Feld ein elektrisches Dipolmoment  $\vec{P}$  pro Einheitsvolumen induziert, induziert in der Magnetostatik das magnetische Feld ein magnetisches Dipolmoment  $\vec{M}$  pro Einheitsvolumen. Man nennt  $\vec{M}$  die „Magnetisierung“, die für die *makroskopische* Formulierung der Magnetostatik wichtig ist.

Wir wiederholen zunächst die Grundgleichungen der Magnetostatik im Vakuum. Sie lauten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}.\end{aligned}\quad (1.57)$$

Aus der ersten Beziehung folgt, dass das Magnetfeld sich als Rotation eines Vektorpotenzials  $\vec{A}$  schreiben lässt:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.58)$$

mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (1.59)$$

Im letzten Schritt haben wir die Multipolentwicklung verwendet, die dann sinnvoll ist, wenn der Ort  $\vec{r}$ , an dem das Potenzial gemessen wird, weit entfernt ist von der Stromverteilung, die das Potenzial hervorruft. Das magnetische Dipolmoment  $\vec{m}$  ist gegeben durch

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]. \quad (1.60)$$

Das magnetische Dipolmoment von Atomen und Molekülen berechnet man allerdings nicht mit dieser Formel aus der klassischen Physik, sondern mit Hilfe der Quantenmechanik.

Wenn wir nun zu einer *makroskopischen* Betrachtungsweise übergehen, mitteln wir wieder über kleine Volumina, die viel größer sind als der Atom- oder Molekülabstand. Dann wird  $\vec{M}$ , das magnetische Dipolmoment pro Volumeneinheit, die relevante Größe. Mit  $\vec{j}$  bezeichnen wir ab jetzt die makroskopische Stromdichte, die bei dieser Mittelung übrigbleibt. Sie ist das Analogon zur Raumladungsdichte in der makroskopischen Elektrostatisitk. Neben dieser makroskopischen Stromdichte trägt die Magnetisierung zum Vektorpotenzial bei, so dass wir erhalten:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \underbrace{\int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'}_{-\left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \times \vec{M}(\vec{r}')} \quad (1.61)$$

$$\stackrel{\text{part. Integration}}{=} \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (1.62)$$

Der Ausdruck  $c\vec{\nabla} \times \vec{M}$  ist eine „effektive Stromdichte“  $\vec{j}^{(i)}$ . Um die makroskopische Version von Gleichung (1.57) zu erhalten, berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) &= -\Delta \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\
 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \int \underbrace{\left( \vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}^{(i)}(\vec{r}') \right)}_{\vec{j}_{ges}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} d^3 r' \\
 &\quad \underbrace{\frac{1}{c} \vec{\nabla} \int \left( \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_{ges}(\vec{r}') \right) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{= 0 \text{ in der Magnetostatik, denn}} \\
 &\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}^{(i)} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{M}) = 0 \text{ und} \\
 &\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\
 &\quad \text{da sich keine freien Ladungen bewegen.}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{B} - 4\pi \vec{M})}_{=: \vec{H}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.63)$$

und damit die makroskopische Version von Gleichung (1.57):

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.} \quad (1.64)$$

Für  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  haben sich folgende Bezeichnungen eingebürgert:

$\vec{H}$ : „magnetische Feldstärke“

$\vec{B}$ : „Induktion“, „Flussdichte“

Außerdem gilt weiterhin  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

Wenn wir ebenso wie in der Elektrostatisik die vereinfachenden Annahmen von linearem Respons und Homogenität und Isotropie des Materials machen, erhalten wir

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.65)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (1.66)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad (1.67)$$

$$\mu = 1 + 4\pi \chi_m \quad (1.68)$$

$\mu$  ist die „Permeabilität“. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

$\mu > 1$  : Paramagnetismus ( $\Leftrightarrow \chi_m > 0$ )

Material „bindet“ die magnetischen Feldlinien

$\mu < 1$  : Diamagnetismus ( $\Leftrightarrow \chi_m < 0$ )

Material schließt magnetische Feldlinien aus sich teilweise aus.

Ferromagnetische Materialien haben eine permanente Magnetisierung und lassen sich damit natürlich nicht durch die obigen linearen Beziehungen beschreiben.

## 1.7 Randbedingungen für die Felder der Magneto- statik

Wir gehen analog zur Elektrostatik vor:

- Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  folgt  $\vec{B}_{\perp}^{(i)} = \vec{B}_{\perp}^{(a)}$ .

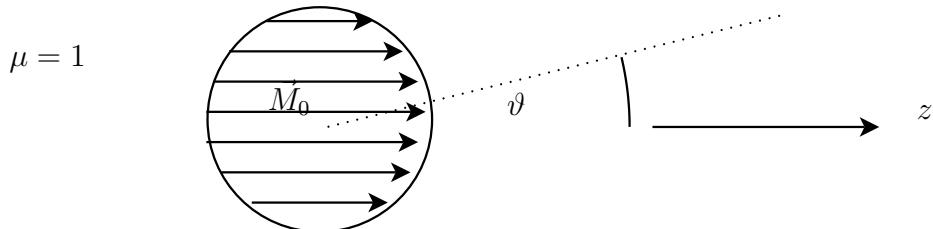
Die Normalkomponente von  $\vec{B}$  ist an der Grenzfläche stetig.

- Aus  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  (falls  $\vec{j} = 0$ ) folgt  $\vec{H}_{\parallel}^{(i)} = \vec{H}_{\parallel}^{(a)}$ .

Die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  ist stetig.

## 1.8 Beispiel: Das von einer homogen magnetisierten Kugel erzeugte Feld im Vakuum

Wir betrachten die in der Abbildung dargestellte Situation:



$$\vec{M} = \begin{cases} M_0 \vec{e}_z & \text{für } r < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.69)$$

Die Magnetisierung der Kugel ist vorgegeben, und wir wollen das durch diese Magnetisierung hervorgerufene Magnetfeld berechnen. Es ist  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$  im Inneren der Kugel (und außen sowieso), und folglich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} - 4\pi \vec{M}) = 0. \quad (1.70)$$

Wegen  $\vec{j} = 0$  ist auch  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  und folglich

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} = 0 \quad (1.71)$$

Dies ist eine Laplace Gleichung für  $\vec{H}$ . Wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  lässt sich  $\vec{H}$  schreiben als

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_M \quad (1.72)$$

mit einem „magnetischen Skalarpotential“  $\Phi_M$ . Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$  erhalten wir

$$\Delta \Phi_M = 0. \quad (1.73)$$

$\Phi_M$  erfüllt ebenfalls die Laplacegleichung.

Genau wie im zweiten Beispiel zur Elektrostatik haben wir azimutale Symmetrie und können für das Skalarpotenzial den folgenden Ansatz machen:

$$\begin{aligned}\Phi_M^i &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta) \\ \Phi_M^a &= \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta)\end{aligned}$$

Die eine Stetigkeitsbedingung ist

$$\vec{H}_{\parallel}^{(i)} = \vec{H}_{\parallel}^{(a)} \quad (1.74)$$

und führt auf

$$A_l = B_l + \frac{C_l}{a^{2l+1}}. \quad (1.75)$$

Die zweite Stetigkeitsbedingung ist

$$\vec{H}_{\perp}^{(i)} + 4\pi \vec{M}_{\perp} = \vec{H}_{\perp}^{(a)} \quad (1.76)$$

und führt für  $l = 1$  auf

$$-A_1 + M_0 4\pi = -B_1 + \frac{2C_1}{a^3} \quad (1.77)$$

und für  $l \neq 1$  auf

$$A_l = B_l - \frac{l+1}{l} \frac{C_l}{a^{2l+1}}. \quad (1.78)$$

Für  $\vec{r} \rightarrow \infty$  muss  $\vec{H} = 0$  sein, also  $\Phi_M = 0$ .

$$\Rightarrow B_l = 0 \Rightarrow A_l = C_l = 0 \quad \text{für } l \neq 1. \quad (1.79)$$

Für  $l = 1$  folgt daraus

$$-A_1 + 4\pi M_0 = \frac{2C_1}{a^3}.$$

Aus (1.77) erhalten wir

$$A_1 = \frac{C_1}{a^3}$$

und folglich

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{4\pi}{3} a^3 M_0 \\ A_1 &= \frac{4\pi}{3} M_0.\end{aligned} \quad (1.80)$$

Unser Endergebnis für die Felder ist dann

$$\begin{aligned}\Phi_M(\vec{r}) &= \begin{cases} \frac{4\pi}{3}M_0r\cos\vartheta, & r < a \\ \frac{4\pi}{3}M_0a^3\frac{\cos\vartheta}{r^2}, & r > a \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{H}^{(i)} &= -\frac{4\pi}{3}\vec{M} \\ \vec{B}^{(i)} &= \vec{H}^{(i)} + 4\pi\vec{M} = \frac{8\pi}{3}\vec{M}\end{aligned}\tag{1.81}$$

Dies ist ein homogenes Feld.

Außerhalb der Kugel erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{H}^{(a)} &= \vec{B}^{(a)} = -\underbrace{\frac{4\pi}{3}M_0a^3}_{m: \text{ magnetisches Dipolmoment der Kugel}}\vec{\nabla}\left(\frac{z}{r^3}\right) \\ &= -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}.\end{aligned}\tag{1.82}$$

Dies ist das Feld eines magnetischen Dipols.

## 1.9 Beispiel: paramagnetische Kugel im äußeren Feld

Dieses Beispiel ist ähnlich wie das vorige Beispiel, aber mit den Bedingungen

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{in Kugel}\tag{1.83}$$

und  $\vec{H} = \vec{B} = \vec{H}_0$  im Unendlichen. Dieses Problem ist analog zu der dielektrischen Kugel, und die Lösung lässt sich sofort abschreiben, wenn wir dort die folgenden Ersetzungen machen:

$$\begin{aligned}\vec{D} &\rightarrow \vec{B} \\ \vec{E} &\rightarrow \vec{H} \\ \vec{P} &\rightarrow \vec{M} \\ \chi_e &\rightarrow \chi_m \\ \varepsilon &\rightarrow \mu\end{aligned}$$

## 1.10 Übersicht der verwendeten Größen

$\varrho_{Mol}$	Ladungsdichte der Moleküle
$\vec{\pi}_{Mol}$	Polarisationsdichte
$\vec{p}_j$	Polarisation eines Moleküls
$\Phi$	elektrisches Potenzial
$\vec{r}$	Ort
$v$	kleines Volumen
$\vec{P}$	Polarisationsdichte (über kleines $v$ gemittelt)
$\varrho$	Ladungsdichte (über kleines $v$ gemittelt)
$\sigma_p$	Oberflächenladungsdichte durch Polarisation
$\vec{D}$	Verschiebungsdichte
$\underline{\varepsilon}$	Dielektrizitätstensor
$\varepsilon$	Dielektrizitätskonstante
$U$	Spannung
$\vec{E}$	elektrisches Feld
$Q$	Ladung
$F$	Fläche
$P_n$	Polarisation senkrecht zur Oberfläche
$\sigma$	Flächenladungsdichte
$P_l$	Legendre-Polynom
$l$	Summationsindex
$A_l$	Koeffizienten
$B_l$	
$C_l$	
$\Phi_M$	magnetisches Potenzial
$\vec{M}$	Magnetisierung
$\vec{A}$	Vektorpotenzial
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$\vec{B}$	Induktion / Flußdichte
$\mu$	Permeabilität
$\vec{j}$	Stromdichte

## 1.11 Exkurs: Magnetismus in der Quantenmechanik

Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung im Magnetfeld. Für das Vektorpotenzial  $\vec{A}$  wählen wir die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , da dies die Rechnungen vereinfacht. Die Schrödinger-Gleichung lautet in Ortsdarstellung

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi \right] \psi \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 + \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + e\Phi \right] \psi, \end{aligned} \quad (1.84)$$

wobei wir im letzten Schritt die Coulomb-Eichung verwendet haben. Wir erinnern daran, dass der Impulsoperator  $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$  für den kanonischen Impuls (also die zur Ortsvariable kanonisch konjugierte Variable) steht, und  $\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e\vec{A}/c$  ist der kinetische Impuls  $m\vec{v}$ . Im Folgenden betrachten wir den einfachen Fall eines konstanten Magnetfeldes  $\vec{B}$ . Außerdem verschwinde das elektrische Potenzial  $\Phi$ . Das Vektorpotenzial ist dann

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{x} \times \vec{B}), \quad (1.85)$$

denn es erfüllt die beiden Bedingungen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ , wie wir nun zeigen. Die Komponenten von  $\vec{A}$  sind

$$A_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}x_jB_k.$$

Damit ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{2}\partial_i\epsilon_{ijk}x_jB_k = 0 \quad (1.86)$$

und

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}x_lB_m = \frac{1}{2}B_i \cdot 2 = B_i. \quad (1.87)$$

Wir summieren hier immer über doppelt auftretende Indizes, ohne explizit das Summenzeichen zu schreiben. Die beiden  $\vec{A}$ -abhängigen Terme in (1.84) werden zu

$$A^2 = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}x_jB_k\epsilon_{ilm}x_lB_m = \frac{1}{4}\vec{x}^2\vec{B}^2 - \frac{1}{4}(\vec{x} \cdot \vec{B})^2 \quad (1.88)$$

und

$$i\hbar\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = -\frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}x_jB_k\partial_i = \frac{i\hbar}{2}B_k\epsilon_{kji}x_j\partial_i = -\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \hat{\vec{L}}. \quad (1.89)$$

Wenn wir die  $z$ -Achse parallel zum Magnetfeld legen, vereinfacht sich der Ausdruck für  $A^2$  zu

$$A^2 = \frac{1}{4}B^2(x^2 + y^2). \quad (1.90)$$

Der Hamiltonoperator ist dann

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{e^2B^2}{8mc^2}(x^2 + y^2) - \frac{e}{2mc}\vec{B} \cdot \hat{\vec{L}}. \quad (1.91)$$

Der dritte Term liefert einen Beitrag zum Paramagnetismus, der zweite Term den Diamagnetismus. Wir betrachten zunächst den dritten Term. Er hat die Form

$$-\hat{\vec{m}} \cdot \vec{B}$$

mit

$$\hat{\vec{m}} = \frac{e}{2mc} \hat{\vec{L}}. \quad (1.92)$$

Dieser Ausdruck für das magnetische Dipolmoment des geladenen Teilchens entspricht dem klassischen Ausdruck (1.60)

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \left[ \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right],$$

der mit der Ersetzung

$$\vec{j}(\vec{r}') = e\vec{v}\delta^3(\vec{r}' - \vec{r})$$

zu

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{L}$$

wird. Der paramagnetische Beitrag zur Energie ist am niedrigsten, wenn das magnetische Dipolmoment parallel zum Magnetfeld orientiert ist. Wenn das Teilchen zusätzlich zum Bahndrehimpuls auch einen Spin hat, gibt es einen Zusatzterm

$$-\frac{ge}{2mc} \vec{B} \cdot \hat{\vec{S}}$$

zu (1.91), der in der nichtrelativistischen Quantenmechanik phänomenologisch eingeführt werden muss, und der sich aus der Dirac-Gleichung herleiten lässt. Aus der Diracgleichung erhält man  $g = 2$ , und die Quantenelektrodynamik erzeugt kleine Korrekturen zu diesem Wert. (Bemerkung: die Spin-Bahn-Kopplung, die dann ebenfalls auftritt, haben wir ignoriert.)

Um das Dipolmoment pro Volumeneinheit  $\vec{M}$  zu bestimmen, sind noch einige Schritte nötig, die man erst mit Kenntnis der statistischen Physik vollziehen kann. Die Idee ist folgende: Je nach Orientierung des Dipolmoments eines Atoms ist sein Beitrag zur Energie des Systems verschieden. Wenn das Dipolmoment parallel zum Magnetfeld ist, ist die Energie am niedrigsten. Die Energie hängt von der Quantenzahl  $l_z$  bzw  $S_z$  ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit welche Quantenzahl und damit welche Energie angenommen wird, hängt von der Temperatur des Systems und von der Stärke des Magnetfelds ab. Diese Rechnung kann mit Methoden der statistischen Physik durchgeführt werden. Wir können aber auch ohne Rechnung sofort schließen, dass für schwaches Magnetfeld die Magnetisierung  $\vec{M}$  proportional zum Feld sein sollte, da für schwaches Feld der Energieunterschied zwischen den verschiedenen Orientierungen kaum zu spüren ist und folglich die Differenz zwischen der Zahl von Dipolen, die parallel bzw antiparallel zum Feld orientiert sind, klein ist. Der lineare Term ist der führende Term in einer Taylorentwicklung im Magnetfeld. Der Proportionalitätsfaktor ist die Suszeptibilität.

Der zweite Term in (1.91) hat das umgekehrte Vorzeichen. Er erhöht die Energie des Teilchens. Bevor wir diesen Term diskutieren, schätzen wir seine Größenordnung relativ

zum paramagnetischen Term ab. Die typische Größenordnung von  $x^2 + y^2$  ist der Bohr-Radius  $a$  zum Quadrat, und die Größenordnung des Drehimpulses ist  $\hbar$ . Damit ist das Verhältnis des zweiten und dritten Terms aus (1.91) genähert durch

$$\frac{e^2 B^2 a^2 2mc}{8mc^2 e \hbar B} = \frac{a^2 e}{4\hbar c} B = 1.1 \times 10^{-10} B \text{ in Gauß.}$$

Diamagnetische Effekte sind also für im Atom gebundene Elektronen unter Laborbedingungen kleiner als paramagnetische. Nur in Atomen, deren Gesamtbahndrehimpuls und Gesamtspin verschwinden, wird der Diamagnetismus wichtig. Wir betrachten daher im Folgenden Atome oder Ionen mit abgeschlossenen Schalen, wie z.B. Helium und die anderen Edelgase oder die Alkalihalide, im Grundzustand  $|0\rangle$ . In erster Ordnung Störungstheorie verschiebt der diamagnetische Term die Grundzustandsenergie um den Wert

$$E_1 = \frac{e^2 B^2}{8mc^2} \langle 0 | \sum_i (x_i^2 + y_i^2) | 0 \rangle = \frac{e^2 B^2}{12mc^2} \langle 0 | \sum_i r_i^2 | 0 \rangle, \quad (1.93)$$

wobei der Index  $i$  die Elektronen des Atoms durchzählt. Wegen der Kugelsymmetrie der Wellenfunktion für abgeschlossene Schalen ist  $\langle 0 | \sum_i x_i^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_i y_i^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_i z_i^2 | 0 \rangle = (1/3) \langle 0 | \sum_i r_i^2 | 0 \rangle$ . Das durch das Feld induzierte magnetische Dipolmoment erhalten wir durch folgende Überlegung, die einen Zusammenhang zwischen der Energie und dem induzierten Dipolmoment herstellt: Wir argumentieren klassisch und betrachten einen kleinen Leiterring mit Radius  $a$ . Wenn in ihm der Strom  $I$  fließt, beträgt sein magnetisches Dipolmoment nach Gleichung (1.60)  $m = I\pi a^2/c$ . Das Induktionsgesetz besagt, dass das in dem Ring erzeugte elektrische Feld gegeben ist durch

$$E \cdot 2\pi a = -\frac{1}{c} \pi a^2 \frac{dB}{dt}.$$

Wenn wir dies in den Ausdruck

$$dW = qEdl$$

für die vom elektrischen Feld an den Ladungen des Leiters verrichtete Arbeit einsetzen, erhalten wir

$$\frac{dW}{dt} = qEv = EI2\pi a = -\frac{1}{c} \pi a^2 I \frac{dB}{dt} = -m \frac{dB}{dt}.$$

Wenn wir nun das Symbol  $E$  wieder für die Energie verwenden, erhalten wir  $dE = -\vec{m} \cdot d\vec{B}$  und

$$m_z = -\frac{\partial E_1}{\partial B} = -\frac{e^2}{6mc^2} \langle 0 | \sum_i r_i^2 | 0 \rangle B. \quad (1.94)$$

Das induzierte Dipolmoment ist proportional zum angelegten Feld, und der Proportionalitätsfaktor ist die magnetische Suszeptibilität.

Schließlich diskutieren wir noch die quantenmechanischen Grundlagen des Ferromagnetismus. Der Ferromagnetismus entsteht durch die Wechselwirkung zwischen den Spins der Teilchen. Die naheliegende Annahme, dass hier die Dipol-Dipol-Wechselwirkung den Hauptbeitrag liefert ist falsch. Die durch das Pauli-Prinzip und die Coulomb-Wechselwirkung entstehende Austauschwechselwirkung ist dominant und liefert (für zwei Spins) einen

Beitrag  $-J\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$  zur Energie, wobei  $J$  eine Kopplungskonstante ist. Da dieser Term eine parallele Ausrichtung der Spins bevorzugt, kann man sich vorstellen, dass bei genügend tiefen Temperaturen die Spins des Materials vorzugsweise parallel zueinander sind, auch ohne ein äußeres Magnetfeld. Das einfachste Modell, dass diesen Phasenübergang beschreibt, ist das Ising-Modell, das in der statistischen Physik oder einer späteren Vorlesung behandelt wird. Im folgenden wiederholen wir die Entstehung der Austauschwechselwirkung.

Wir betrachten zwei Elektronen, z.B. in einem Atom oder Molekül. Solange wir die Coulomb-Wechselwirkung zwischen ihnen vernachlässigen, können ihre Eigenzustände und Energieeigenwerte unabhängig berechnet werden. Da die Teilchen ununterscheidbar sind, ist der Ortsanteil ihrer gemeinsamen Wellenfunktion gegeben durch

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) \pm \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)) ,$$

wobei das Vorzeichen von der Symmetrie des Spinanteils abhängt, der hier nicht hingeschrieben wurde. Die Energieverschiebung durch die Coulombwechselwirkung ist in erster Ordnung Störungstheorie

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle \psi | \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) \pm \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)) \right|^2 \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ &= e^2 \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 |\psi_1(\vec{r}_1)|^2 |\psi_2(\vec{r}_2)|^2 / |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \\ &\quad \pm e^2 \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2)^* \psi_1(\vec{r}_2) \psi_2(\vec{r}_1) / |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \\ &\equiv A \pm B . \end{aligned} \tag{1.95}$$

Die niedrigere Energie liegt vor, wenn die beiden Spins parallel sind und der Ortsanteil folglich antisymmetrisch ist.

# Kapitel 2

## Die Maxwell-Gleichungen und elektromagnetische Wellen

### 2.1 Maxwellgleichungen im materiegefüllten Raum

Die Maxwellgleichungen im materiegefüllten Raum lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\varrho \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Für Medien mit linearer Antwort gilt:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \underline{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (2.5)$$

Gegenüber den Maxwell-Gleichungen im Vakuum haben wir in der ersten und vierten Gleichung  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  durch  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  ersetzt, so wie wir uns das im vorigen Kapitel erarbeitet haben. Der letzte Term der vierten Maxwell-Gleichung (2.4) kam in der Magnetostatik im materiegefüllten Raum nicht vor, und wir müssen im Folgenden noch begründen, warum wir auch hier  $\vec{E}$  durch  $\vec{D}$  ersetzt haben. Wir beginnen mit der Kontinuitätsgleichung und formen sie mit Hilfe der ersten Maxwellgleichung identisch um:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{= 0} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (2.7)$$

Diese Gleichung erhalten wir auch, wenn wir die Divergenz der vierten Maxwell-Gleichung bilden. Wenn dort im letzten Term ein  $\vec{E}$  statt  $\vec{D}$  stünde, hätten wir einen Widerspruch.

Anschaulich ist der letzte Term der vierten Gleichung der „Verschiebungsstrom“: dort, wo der Stromfluss endet (z.B. auf Kondensatorplatten), baut sich Ladung auf und damit ein elektrisches Feld. Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld verursacht ebenso wie fließender Strom ein Magnetfeld.

## 2.2 Potenziale und Eichungen

Die Potenziale  $\phi$  und  $\vec{A}$  sind nicht eindeutig, sondern wir haben die Freiheit, die *Eichung* zu wählen. In diesem Abschnitt machen wir die Rechnungen im Vakuum, also für  $\varepsilon = \mu = 1$  und  $\vec{H} = \vec{B}$  und  $\vec{D} = \vec{E}$ . Wir haben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} : \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (2.8)$$

Der Beweis von rechts nach links ist einfach: wenn  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  ist, dann ist  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Den Beweis von links nach rechts haben wir in der Magnetostatik dadurch geführt, dass wir einen expliziten Ausdruck (1.59) für  $\vec{A}$  geliefert haben. Im allgemeinen Fall geht der Beweis so: Wir definieren einen antisymmetrischen Tensor

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

und verbinden Punkte im betrachteten Gebiet durch gerade Wege mit dem Ursprung  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ . Der Weg zum Punkt  $\vec{r}$  wird also beschrieben durch  $\vec{r}(t) = t\vec{r}$  mit  $t \in [0, 1]$ . Dann ist

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \int_0^1 dt \underline{\underline{B}}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t), \quad \text{denn} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_1(\vec{r}) &= \partial_2 A_3(\vec{r}) - \partial_3 A_2(\vec{r}) \\ &= \int_0^1 dt [\partial_3(B_{2j}\tilde{x}_j) - \partial_2(B_{3j}\tilde{x}_j)] \\ &= \int_0^1 dt t [-\partial_3 B_3 x_1 + \partial_3 B_1 x_3 + \partial_2 B_1 x_2 - \partial_2 B_2 x_1] \\ &= \int_0^1 dt t \left[ -x_1 \underbrace{(\partial_3 B_3 + \partial_2 B_2)}_{-\partial_1 B_1} + 2B_1 + (x_3 \partial_3 + x_2 \partial_2) B_1 \right] \\ &= \int_0^1 dt t [2B_1 + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) B_1] \\ &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \left[ t^2 B_1(\vec{r}(t)) \right] = B_1(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

In der zweiten Zeile dieser Rechnung ist die Summation über den doppelt auftretenden Index  $j$  impliziert.

Nun besteht eine gewisse Freiheit in der Wahl von  $\vec{A}$ : Wir addieren zu  $\vec{A}$  den Gradienten einer skalaren Funktion  $\chi$ :

$$\vec{\tilde{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{A}} \quad (2.13)$$

Das Vektorpotenzial  $\vec{\tilde{A}}$  kann ebenso gut verwendet werden wie das Vektorpotenzial  $\vec{A}$ .

Als nächstes bestimmen wir das elektrische Potenzial  $\Phi$ , das in der Elektrodynamik eine kompliziertere Beziehung erfüllt als in der Elektrostatik. Wir setzen die Beziehung

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (2.14)$$

in die zweite Maxwell-Gleichung (Gl. 2.2) ein:

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \quad (2.15)$$

Dies bedeutet, dass es ein  $\Phi$  gibt mit:

$$\boxed{\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\vec{\nabla} \Phi.} \quad (2.16)$$

Denn ganz allgemein gilt für ein Vektorfeld  $\vec{F}$  mit  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , dass  $\vec{F}$  sich ausdrücken lässt durch  $\vec{F} = \vec{\nabla} \Phi$  mit

$$\Phi(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{F}(\vec{r}') \quad (2.17)$$

Die Begründung hierfür ist folgende: Aus  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  folgt  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  längs eines geschlossenen Weges.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{F}}_{\text{Weg 1}} - \underbrace{\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{F}}_{\text{Weg 2}} = 0 \quad \Rightarrow \Phi \text{ ist unabhängig vom Weg.} \quad (2.18)$$

Wir drücken nun die Maxwell-Gleichungen durch  $\Phi$  und  $\vec{A}$  aus:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\varrho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = -4\pi\varrho \quad (2.19)$$

$$\boxed{\Delta\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi\varrho} \quad (2.20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.22)$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad (2.23)$$

Statt vier gekoppelten parziellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat man jetzt zwei gekoppelte inhomogene parzielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Da die Potenziale nicht eindeutig sind, hat man die Freiheit, eine *Eichung* zu wählen: die Maxwell-Gleichungen bleiben invariant unter der Transformation

$$\boxed{\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t)} \quad (2.24)$$

$$\boxed{\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\vec{r}, t)} \quad (2.25)$$

Wir diskutieren im Folgenden zwei häufig verwendete Eichungen:

**Lorentz-Eichung:** Mit der Wahl

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \quad (2.26)$$

wird Gleichung (2.20) zu (schreibe jetzt  $\vec{A}, \Phi$  statt  $\vec{A}', \Phi'$ ):

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -4\pi \varrho \quad (2.27)$$

und Gleichung (2.23) zu

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.28)$$

Diese Wahl hat den Vorteil, dass die Gleichungen für  $\Phi$  und  $\vec{A}$  nun entkoppelt sind. Die Eichtransformation stellt folgende Bedingung an  $\Lambda$ :

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda = - \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) \quad (2.29)$$

Dies ist ebenso wie die beiden Gleichungen davor eine inhomogene Wellengleichung. Derartige Gleichungen löst man mit der Methode der Greenschen Funktionen (siehe später).

**Coulomb-Eichung:** Mit der Wahl  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ , die für  $\Lambda$  die Bedingung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta \Lambda = 0$  impliziert, wird Gleichung (2.20) zu

$$\Delta \Phi = -4\pi \varrho \quad (2.30)$$

und Gleichung (2.23) zu

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.31)$$

Dies lässt sich vereinfachen durch Einführen der transversalen und longitudinalen Komponente von  $\vec{j}$ :

$$\vec{j} = \vec{j}_t + \vec{j}_l \quad \text{mit} \quad (2.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_l = 0 \quad \text{und} \quad (2.33)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = 0. \quad (2.34)$$

Diese Komponenten bestimmen wir durch folgende Rechnung:

$$\vec{j} = -\frac{1}{4\pi} \Delta \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (2.35)$$

$$\text{denn } \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \underbrace{- \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \cdot \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right)}_{\vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}', t) \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'} \right\}$$

$$= -\vec{\nabla} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (\text{part. Int.})$$

$$= \vec{\nabla} \int \frac{\partial \varrho(\vec{r}', t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (\text{Kont.gl.})$$

$$= \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) + \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \quad (2.36)$$

$$= \vec{j}_t + \vec{j}_l \quad (2.37)$$

Damit wird Gleichung (2.23) zu

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_t. \quad (2.38)$$

Im Fall verschwindender Strom- und Ladungsdichte  $\varrho = 0$  und  $\vec{j} = 0$  ist

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{und} \quad (2.39)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0 \quad (2.40)$$

Die zweite Gleichung ist eine homogene Wellengleichung. Die erste Gleichung ist eine Laplace-Gleichung. Für Lorentzeichnung erfüllt auch  $\Phi$  eine homogene Wellengleichung.

## 2.3 Energie- und Impulserhaltung

Auch in der Elektrodynamik gilt Energie- und Impulserhaltung. Wir leiten zunächst aus den Maxwell-Gleichungen den Poyntingschen Satz her:

$$\begin{aligned} (\text{Gl. 2.2}) \cdot (-\vec{H}) + (\text{Gl. 2.4}) \cdot \vec{E} &\Rightarrow \\ \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für den Übergang zur letzten Zeile braucht man folgende Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \partial_i \varepsilon_{ijk} E_j H_k = \varepsilon_{ijk} (\partial_i E_j) H_k + \varepsilon_{ijk} E_j (\partial_i H_k) \\ &= -E_j \varepsilon_{ijk} \partial_i H_k + H_k \varepsilon_{kij} \partial_i E_j = -\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

Eine kleine Umformung von (2.41) gibt den Poyntingschen Satz:

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \stackrel{\vec{D}=\epsilon \vec{E}, \vec{B}=\mu \vec{H}}{\Downarrow} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu erkennen, interpretieren wir die einzelnen Terme von (2.42) nacheinander.

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ : Die vom Feld an der elektrischen Stromdichte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit.  
Wir machen uns dies anhand von zwei Beispielen klar.
  - Fall eines Ohmschen Drahtes:

$$\begin{aligned} \vec{j} = \sigma \vec{E} &\Rightarrow \int \vec{j} \cdot \vec{E} d^3r = \int \sigma E^2 d^3r \\ &= \sigma E^2 \cdot \underbrace{F}_{\text{Drahtquerschnitt}} \cdot \underbrace{l}_{\text{Drahtstücklänge}} \\ &= \sigma Fl \left( \frac{U}{l} \right)^2 = \frac{U^2}{R} = I^2 R \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dies ist die Ohmsche Leistung.

- Arbeit an geladenem Teilchen im elektromagnetischen Feld:

$$\text{Kraft: } \vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (2.44)$$

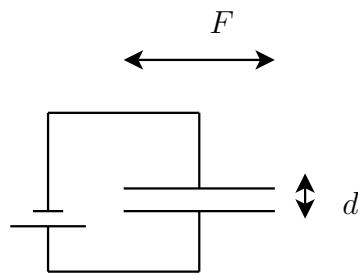
$$\frac{\text{verrichtete Arbeit}}{\text{Zeit}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.45)$$

- $\frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$  : Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

Dies begründen wir für das elektrische und magnetische Feld getrennt:

- Elektrisches Feld:

Hier könnte man die Rechnung aus der Theorie I Vorlesung wiederholen, aber mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\varrho$ . Wir wählen an dieser Stelle eine alternative Begründung und betrachten hierzu einen Kondensator:

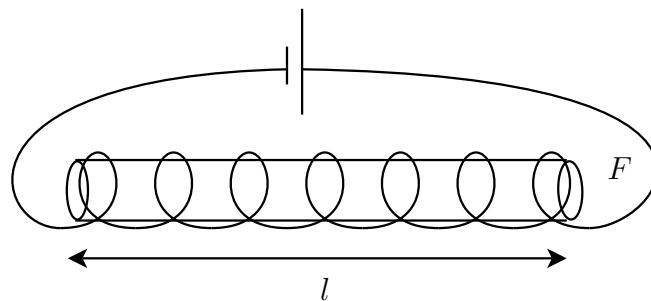


Die zum Laden des Kondensators nötige Arbeit ist

$$\int_0^{U_0} U dQ = \frac{F}{4\pi} \int_0^{U_0} U dD = \frac{Fd}{4\pi} \int_0^{U_0} EdD = \frac{FdDE}{8\pi} = \frac{DE}{8\pi} V \quad (2.46)$$

- Magnetisches Feld:

Im Skript zur Theorie I Vorlesung befindet sich eine allgemeine Herleitung für die Magnetostatik, in der man an der richtigen Stelle  $\vec{B}$  durch  $\vec{H}$  ersetzen muss. Wir stellen hier eine alternative Begründung vor und berechnen die magnetische Feldenergie einer Spule mit  $n$  Windungen pro Längeneinheit:



Die zum Aufbau des Magnetfeldes nötige Spannung ist nach dem Induktionsgesetz

$$U = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} nlF \frac{dB}{dt} \quad (2.47)$$

Das Magnetfeld in der Spule ist

$$H = \frac{4\pi}{c} nI \quad (\text{aus } \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}) \quad (2.48)$$

Damit ist die beim Aufbau des Magnetfeldes geleistete Arbeit:

$$\int_0^{H_0} U \cdot Idt = \frac{1}{c} nlF \int \frac{dB}{dt} \cdot \frac{c}{4\pi n} H dt = \frac{V}{4\pi} \int_0^{H_0} H dB = \frac{1}{8\pi} H_0 B_0 V \quad (2.49)$$

- $\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ : Den Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.50)$$

nennt man den *Poynting-Vektor* und interpretiert ihn als *Energiestromdichte*. Dies wird klar, wenn wir die Gleichung (2.42) insgesamt betrachten.

Insgesamt ist Gleichung (2.42) eine Kontinuitätsgleichung mit Dissipation:

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right)}_{\substack{\text{Abnahme der} \\ \text{Energiedichte} \\ \text{des Feldes}}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{S}}_{\substack{\text{Wegtransport von} \\ \text{Energie durch das} \\ \text{Feld}}} + \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\substack{\text{Dissipation von Energie} \\ \text{(Umwandlung in eine} \\ \text{andere Energieform)}}} \quad (2.51)$$

Diese Gleichung beschreibt also die Energieerhaltung in der Elektrodynamik.

Auch die Impulserhaltung können wir aus den Maxwellgleichungen ablesen. Es gibt zwei Beiträge zum Impuls, nämlich den Impuls sich bewegender Ladungen und den Impuls des elektromagnetischen Feldes.

Wir beginnen mit der Lorentzkraftdichte  $\vec{f}$  und der daraus resultierenden Kraft  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \varrho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B} \\ \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mech}} &= \int_V \vec{f}(\vec{r}) d^3r = \int_V \left( \varrho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B} \right) d^3r \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wir drücken nun die Ladungs- und Stromdichte durch die Felder aus:

$$\begin{aligned} (\text{Gl. 2.1}) \Rightarrow \varrho &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \\ (\text{Gl. 2.4}) \Rightarrow \vec{j} &= \frac{c}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mech}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \right) d^3r \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} + (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) + \underbrace{\frac{1}{c} \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{-c \vec{\nabla} \times \vec{E}} \right) d^3r \end{aligned} \quad (2.54)$$

Im Vakuum ist  $\varepsilon = \mu = 1$ , und wir können dies weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \vec{P}_{\text{mech}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi c} \int_V \vec{E} \times \vec{B} d^3r}_{\frac{1}{c^2} \int_V \vec{S} d^3r \equiv \vec{P}_{\text{feld}}} \right) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right. \\ &\quad \left. + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right] d^3r \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dies bedeutet

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\vec{P}_{\text{mech}} + \vec{P}_{\text{feld}})_i = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} d^3r} \quad (2.56)$$

mit dem Maxwellschen Spannungstensor

$$\boxed{T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right)} \quad (2.57)$$

Dies ist eine Kontinuitätsgleichung für die Komponenten des Impulses.

Die zu den Umformungen nötige Nebenrechnung ist

$$\begin{aligned} &\left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right]_i \\ &= (\partial_j E_j) E_i + \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{jlm} \partial_l E_m) E_k \\ &= E_i \partial_j E_j + E_k \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm}}_{\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il} \text{ mit } k \neq l} \partial_l E_m \\ &= E_i \partial_j E_j + E_k (\partial_k E_i - \partial_i E_k) \\ &= \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2} \partial_i (E_k E_k) \\ &= \partial_j \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

## 2.4 Ebene Wellen in nichtleitenden Medien

Wir befassen uns im Folgenden mit elektromagnetischen Wellen. In diesem Unterkapitel betrachten wir ein Medium mit konstantem  $\epsilon$  und  $\mu$ . Das Medium sei nichtleitend und ungeladen, also  $\varrho = 0$  und  $\vec{j} = 0$ . Die Maxwell-Gleichungen reduzieren sich dann auf

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.59)$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.60)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen gewinnen wir Gleichungen für  $\vec{E}$  allein und für  $\vec{B}$  allein:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \end{aligned}$$

Mit den Definitionen  $v = \frac{c}{n}$  (Phasengeschwindigkeit) und  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  (Brechungsindex) erhalten wir daraus die folgende Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.} \quad (2.61)$$

Ganz analog erhalten wir

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.} \quad (2.62)$$

Wir betrachten das Medium als unendlich ausgedehnt. Dann sind ebene Wellen Lösungen der Wellengleichung. Andere Lösungen lassen sich durch die Überlagerung ebener Wellen konstruieren. Um die Eigenschaften der ebenen Wellen zu bestimmen, beginnen wir mit dem Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.63)$$

Genaugenommen ist das elektrische Feld der Realteil dieses Ausdrucks. Aber da es sich mit komplexen Größen leichter rechnet, bleiben wir bei diesem Ausdruck, behalten aber im Hinterkopf, dass wir zur Ermittlung des tatsächlichen Felds am Ende den Realteil nehmen müssen. Eingesetzt in die Wellengleichung erhalten wir

$$-\vec{k}^2 \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}_0 = 0$$

und daraus den Zusammenhang zwischen  $k$  und  $\omega$ :

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (2.64)$$

Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  folgt  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ , und analog für das magnetische Feld. Dies bedeutet, dass  $\vec{k}$  auf beide Felder senkrecht steht, d.h. ebene elektromagnetische Wellen sind *Transversalwellen*. Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld ergibt sich über die Rechnung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{n\vec{k}}{k} \times \vec{E}_0. \quad (2.65)$$

Die beiden Felder stehen senkrecht aufeinander.

Der Poynting-Vektor einer ebenen Welle ist

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{cn}{4\pi\mu} E_0^2 \underbrace{\left( \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right)^2}_{\begin{array}{l} \text{gibt } \frac{1}{2} \text{ bei Mittelung} \\ \text{über die Zeit} \end{array}} \frac{\vec{k}}{k}. \quad (2.66)$$

## 2.5 Frequenzabhängigkeit von $\varepsilon(\omega)$ und $\sigma(\omega)$

Die einfache Annahme des letzten Unterkapitels, dass  $\varepsilon$  konstant ist, lässt sich im Allgemeinen nicht aufrecht erhalten. Um dies zu sehen, betrachten wir ein einfaches Modell aus voneinander unabhängigen polarisierbaren Atomen oder Molekülen. Außerdem erlauben wir, dass es freie Ladungsträger gibt, d.h. dass das Material leitfähig ist. Wir setzen  $\mu = 1$ .

Das einfachste Modell einer polarisierbaren Ladungsverteilung ist eine Masse  $m$  der Ladung  $q$  in einem harmonischen Potenzial:

$$m \left( \ddot{\vec{x}} + \underbrace{\gamma \dot{\vec{x}}}_{\text{Dämpfung}} + \omega_0^2 \vec{x} \right) = q \vec{E}(\vec{x}, t) \quad (2.67)$$

Der dritte Term auf der linken Seite beschreibt das harmonische Potenzial, das eine Rückstellkraft proportional zur Auslenkung verursacht. Das elektrische Feld kommt von einer auf das Material fallenden elektromagnetischen Welle und hat daher die zeitliche Form  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ . Also machen wir für  $\vec{x}$  den Ansatz  $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ . Einsetzen in (2.67) und Auflösen nach  $\vec{x}_0$  ergibt

$$\vec{x}_0 = \frac{q \vec{E}_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}. \quad (2.68)$$

Das molekulare Dipolmoment ist dann

$$\vec{p} = q\vec{x}_0 = \frac{q^2}{m \omega_0^2} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (2.69)$$

und die molekulare Polarisierbarkeit ist

$$\alpha = \frac{p}{E_0} = \frac{q^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}. \quad (2.70)$$

Der Real- und Imaginärteil von  $\alpha$  sind

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \alpha(\omega) &= \frac{q^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \\ \operatorname{Im} \alpha(\omega) &= \frac{q^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.\end{aligned}\quad (2.71)$$

Je größer der Imaginärteil ist, desto größer ist die Phasenverschiebung zwischen dem elektrischen Feld und dem durch das Feld induzierten Dipolmoment. Diese Phasenverschiebung wird durch den Dämpfungsterm in (2.67) verursacht. Dieser Term kommt daher, dass das Molekül die absorbierte Strahlungsenergie in anderer Form wieder abgibt (isotrope Strahlung,...). Mit der Beziehung (1.25) erhalten wir daraus die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi q^2}{m} \underbrace{\sum_j f_j}_{\substack{\text{Molek\"ul-} \\ \text{Dichte}}} \underbrace{\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}}_{\substack{\text{Summe \"uber} \\ \text{schwingungsf\"ahige} \\ \text{Systeme}}}\quad (2.72)$$

Hierbei haben wir angenommen, dass ein Molekül je  $f_j$  schwingungsfähige Systeme der Sorte  $j$  hat, nämlich die verschiedenen Arten von Elektronen, die jeweils ihre eigene Dämpfungskonstante und Eigenfrequenz haben. Die Gesamtzahl der schwingungsfähigen Systeme ist  $Z$ , also

$$\sum_j f_j = Z.\quad (2.73)$$

$f_j$  heißt auch „Oszillatorstärke“.

Im Folgenden betrachten wir getrennt den Grenzfall kleiner und großer Frequenzen.

- Kleine Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$

Wir unterscheiden zwischen Isolatoren und Leitern:

1. Isolator: Es sind alle  $\omega_j \neq 0$ , und es gibt keine freien Ladungen.

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon_0 \text{ ist endlich}$$

2. Leiter: Es gibt ein  $\omega_j = 0$ , dazu gehören die Konstanten  $\gamma_0, f_0$ . Nun erhalten wir

$$\varepsilon(\omega) = \underbrace{\varepsilon_0}_{\substack{\text{Beitrag aller} \\ \omega_j \neq 0}} + i4\pi N \frac{q^2 f_0}{m\omega (\gamma_0 - i\omega)}\quad (2.74)$$

Der zweite Term divergiert im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$ . Dies ist für einen Leiter anschaulich klar: das Feld bewegt die Ladungen über makroskopische Entfernung. Das Bild eines schwingungsfähigen Systems bricht damit für die frei

beweglichen Ladungen (also den Beitrag  $j = 0$ ) für kleine Frequenzen zusammen, und wir sollten stattdessen die Leitfähigkeit des Materials bestimmen. Zu diesem Zweck gehen wir zurück zur Gleichung (2.67) und setzen dort  $\omega_0 = 0$  und  $\ddot{\vec{x}} = -i\omega\dot{\vec{x}}$ :

$$\vec{j} = Nf_0q\dot{\vec{x}} = f_0Nq\frac{q\vec{E}}{m(\gamma_0 - i\omega)} \equiv \sigma\vec{E} \quad (2.75)$$

Daraus erhalten wir eine frequenzabhängige Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{f_0Nq^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}. \quad (2.76)$$

Dies ist das sogenannte Drude-Modell. Die Leitfähigkeit wird bei kleinen Frequenzen fast reell. Strom und Feld sind dann in Phase.

- Hohe Frequenzen  $\omega \gg \omega_j, \gamma_j$ : Der Term  $\omega^2$  im Nenner von (2.72) dominiert, und alle Ladungen verhalten sich wie freie Ladungen. Wir erhalten den vereinfachten Ausdruck

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{1}{\omega^2} \underbrace{\left[ \frac{4\pi Nq^2}{m} \sum f_j \right]}_{\omega_p^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.77)$$

mit der *Plasmafrequenz*

$$\omega_p = 2\sqrt{\frac{\pi N Z q^2}{m}}. \quad (2.78)$$

Für  $\omega < \omega_p$  wird  $\varepsilon$  negativ und  $n$  bzw.  $v$  imaginär. Dies bedeutet, dass die Wellenamplitude exponentiell abklingt, wenn eine ebene Welle auf das Medium trifft. Die Welle wird dann reflektiert.

## 2.6 Ebene Wellen in leitenden und dissipativen Medien

Nachdem wir einen Ausdruck für eine frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante bestimmt haben, betrachten wir nun ebene Wellen in solchen Medien. Außerdem erlauben wir, dass das Medium auch leitfähig ist. Wir beginnen also mit den Beziehungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}. \quad (2.79)$$

Für eine ebene Welle haben wir außerdem die Beziehungen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (2.80)$$

Die Ladungsdichte schwingt mit dem elektrischen Feld,

$$\varrho = \tilde{\varrho} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.81)$$

Mit diesem Ansatz werden die Maxwell-Gleichungen zu

$$\begin{aligned} i\varepsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{E}_0 &= 4\pi\tilde{\varrho} & i\vec{k} \times \vec{E}_0 &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B}_0 &= 0 & \frac{1}{\mu} i\vec{k} \times \vec{B}_0 &= \frac{1}{c} (4\pi\sigma - i\omega\varepsilon_0) \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Wir betrachten nun hauptsächlich den Fall  $\rho = 0$  und untersuchen den Fall  $\rho \neq 0$  nur für eine spezielle Situation.

1. Fall  $\varrho = 0$ :

Es ist  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ , und die drei Vektoren  $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$  bilden ein kartesisches Dreibein. Wir berechnen den Zusammenhang zwischen  $\omega$  und  $k$  wie vorher:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E}_0 = -k^2 \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B}_0 = -i \frac{\omega\mu}{c} (4\pi\sigma - i\omega\varepsilon_0) \vec{E}_0. \quad (2.83)$$

Also ist

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega\mu}{c^2} (\omega\varepsilon_0 + i4\pi\sigma) = \omega^2 \frac{\mu\varepsilon_0}{c^2} \left( 1 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right). \quad (2.84)$$

Wir unterscheiden nun zwischen Isolatoren und Leitern:

- (a) *Isolator,  $\sigma = 0$ :*  $\Rightarrow k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_0} = \frac{\omega}{v}$  Ob  $\varepsilon_0$  und damit  $v$  reell ist, hängt davon ab, ob die Frequenz  $\omega$  in der Nähe einer der Resonanzen  $\omega_0$  ist. Wenn  $\omega$  weit weg von den  $\omega_j$  ist, ist  $\varepsilon_0$  praktisch reell. In der Nähe von „Resonanzen“  $\omega = \omega_j$  ist der Realteil von  $\varepsilon_0$  nicht mehr so dominant, und wir schreiben

$$\Rightarrow \sqrt{\mu\varepsilon_0} = n + i\kappa$$

mit dem Extinktionskoeffizienten  $\kappa$ . Die ebene Welle hat dann die Form

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{i\omega(\frac{nx}{c} - t)} e^{-\frac{\kappa x \omega}{c}}. \quad (2.85)$$

Dies ist eine gedämpfte Welle.

- (b) *Leiter,  $\sigma \neq 0$ :* Wir haben den vollen Ausdruck

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon_0 \left( 1 + i4\pi \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \right)} \quad (2.86)$$

Dies bedeutet, dass es auch weit weg von den Resonanzen gedämpfte Wellen gibt, bei guten Leitern sogar bis zu sehr hohen Frequenzen. Bei hoher Leitfähigkeit nähern wir

$$k \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu i 4\pi \sigma / \omega} = \frac{(1+i)}{c} \sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}. \quad (2.87)$$

Die Eindringtiefe der Welle in den Leiter ist dann die „Skintiefe“

$$d \approx \frac{1}{\operatorname{Im} k} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}. \quad (2.88)$$

Die Stromverdrängung aus Leitern bei hohen Frequenzen nennt man den Skineffekt.

2. Fall  $\rho \neq 0$ :

Interessant ist der Spezialfall

$$4\pi\sigma - i\omega\varepsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_0 = 0 \quad (2.89)$$

$$\stackrel{\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0}{\Rightarrow} \vec{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}_0 \parallel \vec{k} \quad (2.90)$$

$\Rightarrow$  es gibt rein elektrische Schwingungen, und zwar Longitudinalwellen.

Wir bestimmen die Frequenz, bei der dies passiert. Wir hatten oben für einen Leiter die Ausdrücke (2.74) und (2.76), aus denen

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{i4\pi\sigma}{\omega} \quad (2.91)$$

resultiert. Dies bedeutet, dass in unserem Spezialfall  $\varepsilon = 0$  gilt.

Außerdem hatten wir

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{für} \quad \omega \gg \omega_0, \omega_p, \gamma. \quad (2.92)$$

$\Rightarrow$  dieser Effekt passiert bei der Plasmafrequenz.

## 2.7 Hohlleiter und Hohlraumresonatoren

Wir betrachten nun elektromagnetische Wellen in einem durch einen Leiter begrenzten Raum. Wir wählen einen zylinderförmigen Metallkörper, der also überall den gleichen Querschnitt hat. Wenn er an den Enden geschlossen ist, ist er ein *Hohlraumresonator*, wenn er an den Enden offen ist, ist er ein *Hohlleiter* oder *Wellenleiter*. Der Zylinder sei mit einem Material gefüllt, dass durch die Konstanten  $\varepsilon$  und  $\mu$  charakterisiert ist. Die Oberfläche des Zylinders sei ein idealer Leiter. Wir setzen wieder zeitlich periodische Felder an,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{r}), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= e^{-i\omega t} \vec{B}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ab hier meinen wir mit  $\vec{E}$  den zeitunabhängigen Faktor  $\vec{E}(\vec{r})$  und mit  $\vec{B}$  entsprechend  $\vec{B}(\vec{r})$ , wenn es nicht anders spezifiziert wird.

Die Maxwell-Gleichungen und die Wellengleichungen im Inneren des Zylinders sind

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{i\omega}{c} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \vec{E} \end{aligned} \right\} \Delta \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} &= 0 \\ \Delta \vec{B} + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Wegen der Translationsinvarianz in  $z$ -Richtung machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}(x, y)e^{\pm ikz} \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}(x, y)e^{\pm ikz}\end{aligned}\quad (2.95)$$

Im Hohlraumleiter haben wir laufende Wellen  $e^{ikz}$  oder  $e^{-ikz}$ , und im Hohlraumresonator stehende Wellen  $e^{ikz} \pm e^{-ikz}$ . Entsprechend zerlegen wir den Laplace-Operator in einen transversalen Anteil und einen  $z$ -abhängigen Anteil:

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2$$

mit

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{cases} \left( \nabla_t^2 + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t} = 0 \\ \left( \nabla_t^2 + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B}(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t} = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich genauso ohne den Faktor  $e^{\pm ikz - i\omega t}$ .

Nun zerlegen wir auch die Felder in die Komponenten senkrecht und parallel zur  $z$ -Richtung:  $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z$  und  $\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_z$ . Die folgenden Umformungen dienen dem Ziel,  $\vec{E}_t$  und  $\vec{B}_t$  durch  $\vec{E}_z$  und  $\vec{B}_z$  auszudrücken. Damit wird gezeigt, dass die transversalen Feldkomponenten durch die longitudinalen vollständig bestimmt sind.

Wenn wir die Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}$  in ihren transversalen und longitudinalen Anteil zerlegen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}_z \quad \text{und} \\ \vec{\nabla}_z \times \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}_t.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Wir benötigen nachher den folgenden Ausdruck, den wir aus der letzten Gleichung bekommen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_z \times \frac{i\omega}{c} \vec{B}_t &= \vec{\nabla}_z \left( \vec{\nabla}_z \cdot \vec{E}_t \right) + \vec{\nabla}_t \left( \vec{\nabla}_z \cdot \vec{E}_z \right) - \underbrace{\vec{\nabla}_z^2 \vec{E}_t}_{k^2 \vec{E}_t} - \left( \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\nabla}_z \right) \vec{E}_z \\ &= \vec{\nabla}_t \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + k^2 \vec{E}_t.\end{aligned}\quad (2.98)$$

Wenn wir die Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{i\omega}{c} \mu\varepsilon \vec{E}$  in ihren transversalen und longitudinalen Anteil zerlegen, erhalten wir

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t = -\frac{i\omega}{c} \mu\varepsilon \vec{E}_z \quad (2.99)$$

und

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_z + \underbrace{\vec{\nabla}_z \times \vec{B}_t}_{-\frac{ic}{\omega} \left( k^2 \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right)} = -\frac{i\omega}{c} \mu \varepsilon \vec{E}_t \quad (2.100)$$

Also können wir  $\vec{E}_t$  durch die longitudinalen Felder ausdrücken:

$$\vec{E}_t \left( \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = \vec{\nabla}_t \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}_t \times \vec{B}_z, \quad (2.101)$$

und wenn  $\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \neq k^2$  ist, können wir auflösen nach

$$\boxed{\vec{E}_t = \frac{1}{\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left[ \vec{\nabla}_t \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} (\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t) B_z \right].} \quad (2.102)$$

Die Ausgangsgleichungen sind invariant, wenn  $\vec{E}$  durch  $\vec{B}$  und  $\vec{B}$  durch  $-\mu \varepsilon \vec{E}$  ersetzt wird. Also gelten auch alle weiteren Gleichungen mit dieser Ersetzung. Die Beziehung für  $\vec{B}_t$  ist also

$$\boxed{\vec{B}_t = \frac{1}{\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left[ \vec{\nabla}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{i\omega \varepsilon \mu}{c} (\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t) E_z \right].} \quad (2.103)$$

Die Transversalkomponenten werden aus den longitudinalen vollständig bestimmt. Man bestimmt also die Lösung der Maxwellgleichungen am einfachsten, indem man die Wellengleichung für die longitudinalen Komponenten löst und daraus die transversalen bestimmt. Um diese Lösungen zu finden, benötigen wir noch die richtigen Randbedingungen. Das elektrische Feld steht senkrecht auf die Leiteroberfläche, weil in einem idealen Leiter die Ladungen unendlich schnell fließen und daher immer im Gleichgewicht mit dem momentanen Feld sind. Also gilt die Beziehung der Elektrostatik, dass  $\vec{E}_{||}$  stetig ist. Ebenso ist  $\vec{B}_{\perp}$  stetig an der Leiteroberfläche. Da die elektromagnetische Welle nicht in den Leiter eindringt, verschwinden aber im Inneren des Leiters beide Felder. Die Randbedingungen sind also ( $\vec{n}$  ist der Einheitsvektor senkrecht zur Leiteroberfläche)

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{B} &= 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{B}_t = 0 \\ \vec{n} \times \vec{E} &= 0 \Rightarrow E_z = 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Wir formen die Randbedingung  $\vec{n} \cdot \vec{B}_t = 0$  um in eine Randbedingung für  $B_z$ , indem wir Gleichung (2.103) mit  $\vec{n}$  multiplizieren. Dies gibt

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\ \Rightarrow ik \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Für die erste Zeile benötigen wir folgende Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} -\vec{n} \cdot (\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t) E_z &= \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z) \\ &= \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y E_z \\ -\partial_x E_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} E_z = 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Der letzte Ausdruck ist die Änderung von  $E_z$  längs der Oberfläche bei festem  $z$ , und sie verschwindet wegen der Randbedingung.

Also ist an der Oberfläche

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0.} \quad (2.107)$$

Man klassifiziert die Wellen im Hohlleiter je nachdem, welche Komponenten auftreten.

- Transversal magnetische (TM) Wellen:

$B_z = 0$  überall im Inneren,  $E_z = 0$  an der Oberfläche.

- Transversal elektrische (TE) Wellen:

$E_z = 0$  überall im Inneren,  $\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0$  an der Oberfläche.

- TEM:  $E_z = B_z = 0$ . Dies geht aufgrund der Gleichungen (2.102) und (2.103) nur, wenn

$$\mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

ist. Die Wellengleichungen (2.96) werden dann zu

$$\nabla_t^2 \vec{E}_{\text{TEM}} = 0 \quad \text{und} \quad (2.108)$$

$$\nabla_t^2 \vec{B}_{\text{TEM}} = 0. \quad (2.109)$$

Diese drei Beziehungen sind dieselben wie für eine elektromagnetische Welle im unbegrenzten Medium, die sich in  $z$ -Richtung ausbreitet. Derartige Wellen lassen sich aber nicht mit einfachen Hohlleitern realisieren. Wir haben in der  $x - y$ -Ebene eine Laplacegleichung für  $\vec{E}$ . Diese können wir lösen mit dem Ansatz  $\vec{E} = -\nabla_t \Phi$ , wobei  $\Phi$  an der Oberfläche konstant sein muss. Dieses Randwertproblem hat ein überall konstantes Potenzial als Lösung, und damit verschwindet  $\vec{E}$ . Damit eine andere Lösung als die triviale Lösung  $\vec{E} = 0$  möglich ist, ist eine zweite Oberfläche nötig, auf der die Feldlinien enden, die auf der ersten Oberfläche starten (oder umgekehrt). Zu diesem Zweck baut man Koaxialkabel.

## 2.8 Beispiel 1: TM Wellen im zylinderförmigen Hohlleiter

Wir betrachten einen Hohlleiter in der Form eines Kreiszylinders mit Radius  $R$ . Die Wellengleichung für die Komponente  $E_z$  ist dann

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z = 0 \quad \text{mit der Abkürzung} \quad \gamma^2 = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (2.110)$$

Die Randbedingung an der Oberfläche ist  $E_z = 0$ . Wegen  $B_z = 0$  sind die transversalen Felder allein aus  $E_z$  berechenbar. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{B}_t &= \frac{1}{\gamma^2} \left( i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \right) (\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t) E_z \quad \text{und} \\ \vec{E}_t &= \frac{1}{\gamma^2} ik \vec{\nabla}_t E_z. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Damit ist  $\vec{B}_t = \frac{\mu\varepsilon\omega}{kc} \vec{e}_z \times \vec{E}_t$ , d.h. die transversalen Felder stehen senkrecht aufeinander.

Für negatives  $\gamma^2$  gibt es keine nichttriviale Lösung, da  $E_z$  dann im Wesentlichen eine Exponentialfunktion ist, und diese verschwindet nicht bei  $R$ . Wir rechnen also für positives  $\gamma^2$  und gehen über zu Zylinderkoordinaten:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) E_z(\varrho, \varphi) = -\gamma^2 E_z \quad (2.112)$$

Mit dem Ansatz  $E_z = e^{im\varphi} f_m(\varrho)$  mit ganzzahligem  $m$  reduziert sich dies auf

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \gamma^2 - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) f_m(\varrho) = 0. \quad (2.113)$$

Dies ist die Besselsche Differenzialgleichung, und folglich ist

$$\Rightarrow f_m(\varrho) = J_m(\gamma_m \varrho) \quad (2.114)$$

mit der Besselfunktion  $J_m$ . Die Randbedingung lässt nur bestimmte  $\gamma_m$  zu:  $\gamma_m R$  muss eine Nullstelle der Besselfunktion  $J_m$  sein. Wir schreiben also statt  $\gamma_m$

$$\gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{R},$$

wobei  $x_{mn}$  die  $n$ -te Nullstelle der Besselfunktion  $J_m$  ist. Die zugehörigen Frequenzen sind

$$\omega_{mn} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\gamma_{mn}^2 + k^2} \quad \text{wenn } k \text{ vorgegeben ist,} \quad (2.115)$$

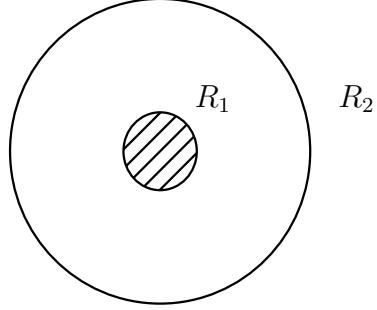
und die Wellenzahlen sind

$$k_{mn} = \pm \sqrt{-\gamma_{mn}^2 + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{wenn } \omega \text{ vorgegeben ist.} \quad (2.116)$$

Wellen mit  $\omega < \frac{c\gamma_{mn}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$  können sich nicht ausbreiten, da  $k$  imaginär wird.

Bemerkung: EM Wellen berechnet man ganz analog zu diesem Beispiel, aber mit den Ersetzungen  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\mu\varepsilon \vec{E}$  und der Randbedingung  $\frac{\partial B_z}{\partial \varrho}|_R = 0$ .

## 2.9 Beispiel 2: TEM Wellen im Koaxialkabel



Der Radius des äußeren Zylinders ist  $R_2$ , der des inneren Zylinders  $R_1$ . Für TEM Wellen hatten wir die Beziehung

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c}. \quad (2.117)$$

Wegen  $B_z = E_z = 0$  reduziert sich die zweite Maxwellgleichung dann auf

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \vec{e}_z \times \vec{E}. \quad (2.118)$$

Wir bestimmen im Folgenden die Lösung für  $\vec{E}$  aus den beiden Beziehungen

$$\Delta_t \vec{E} = 0, \quad \vec{E}_z = 0. \quad (2.119)$$

Diese Lösung finden wir mit dem Ansatz

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}_t \Phi e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (2.120)$$

wobei  $\Delta_t \Phi = 0$  ist und  $\Phi = \Phi_{1,2}$  bei  $R_{1,2}$ .

Wir setzen  $x^2 + y^2 = \rho^2$  und machen den Ansatz  $\Phi = \Phi(\rho)$ , weil die Randbedingung von  $\varphi$  unabhängig ist. Die Lösung der Laplace-Gleichung für  $\Phi$  reduziert sich in Zylinderkoordinaten auf die folgende Rechnung:

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (2.121)$$

$$\Rightarrow \Phi(\rho) = A \ln \rho + B \quad (2.122)$$

$$A = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (2.123)$$

$$B = \frac{\Phi_2 \ln R_1 - \Phi_1 \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (2.124)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{TEM}} = \frac{A}{\rho} \vec{e}_\rho e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2.125)$$

$$\vec{B}_{\text{TEM}} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{A}{\rho} \vec{e}_\varphi e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2.126)$$

Das Kabel überträgt TEM Wellen beliebiger Frequenz mit der Geschwindigkeit des Lichts im Dielektrikum.

# Kapitel 3

## Das Feld vorgegebener Ladungs- und Stromverteilungen

In diesem Kapitel berechnen wir das elektromagnetische Feld bei vorgegebenen Ladungen und Strömen. Wir werden sehen, dass beschleunigte Ladungen Energie abstrahlen, und wir werden als Anwendung den Hertzschen Dipol betrachten.

### 3.1 Zeitabhängige Greensfunktion

In der Elektrostatik hatten wir aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung und einer vorgegebenen Randbedingung das elektrische Potential mit Hilfe der Greenschen Funktion berechnet. In der Elektrodynamik gehen wir analog vor, aber nun mit einer Greenschen Funktion, die auch von der Zeit abhängt.

Zunächst wiederholen wir die wichtigen Schritte der Rechnung in der Elektrostatik: Dort haben wir die Lösung von

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \varrho(\vec{r}) \quad (3.1)$$

mit Hilfe der Greenschen Funktion gesucht. Sie war definiert als Lösung von

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.2)$$

und damit war

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}'). \quad (3.3)$$

Die Lösung für die Greensfunktion war

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.4)$$

wobei  $F$  im betrachteten Volumen die Bedingung  $\Delta F = 0$  erfüllt und ansonsten noch dafür sorgt, dass die Randbedingungen erfüllt werden.

In der Elektrodynamik haben wir in Lorentz-Eichung nun statt (3.1) die folgenden Gleichungen für die Potenziale  $\vec{A}$  und  $\Phi$  (siehe (2.27) und (2.28)):

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -4\pi \varrho \quad (3.5)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.6)$$

Dies sind vier Gleichungen der Form

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{r}, t) \quad (3.7)$$

Analog zur Definition (3.2) aus der Elektrostatik definieren wir die zeitabhängige Greensfunktion über

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') . \quad (3.8)$$

Dann ist nämlich

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3 r' dt' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t') . \quad (3.9)$$

Um die zeitabhängige Greensfunktion zu bestimmen, gehen wir in den Fourierraum,

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} . \quad (3.10)$$

Hier haben wir berücksichtigt, dass  $G$  nur von den Differenzen  $\vec{r} - \vec{r}'$  und  $t - t'$  abhängt. Die linke Seite von (3.8) wird dann zu

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\vec{k}, \omega) \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} . \quad (3.11)$$

Die rechte Seite lässt sich ebenfalls als Fourierintegral ausdrücken,

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} . \quad (3.12)$$

Also erhalten wir

$$g(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (3.13)$$

und

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{c^2}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} . \quad (3.14)$$

Bei der Ausführung dieses Integrals gibt es ein Problem. Der Integrand hat Pole bei  $\omega = \pm ck$ . Wir lösen dieses Problem durch einen Trick, dessen Bedeutung und Konsequenzen im Anschluss an die Rechnung ausführlich diskutiert werden. Wir ersetzen  $\omega$  durch

$\omega + i\varepsilon$  und schicken am Ende  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Die Pole liegen nun bei  $\omega = \pm ck - i\varepsilon$ . Mit der Notation  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  und  $\tau = t - t'$  ergibt sich

$$G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}}. \quad (3.15)$$

Dieses Integral wird mit Hilfe der Funktionentheorie durchgeführt. Bevor wir dies tun, wiederholen wir kurz die wichtigsten Bausteine der Funktionentheorie:

- Eine Funktion  $f(z)$  heißt „holomorph“, wenn sie im betrachteten Teilgebiet  $G$  der komplexen Ebene differenzierbar ist.
- Cauchyscher Integralsatz: Ist  $f(z)$  holomorph auf  $G$  und ist  $C$  eine einfache geschlossene Kurve, so gilt

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (3.16)$$

- Hat  $f(z)$  in einem Punkt  $z_0$  einen Pol ersten Grades, dann heißt

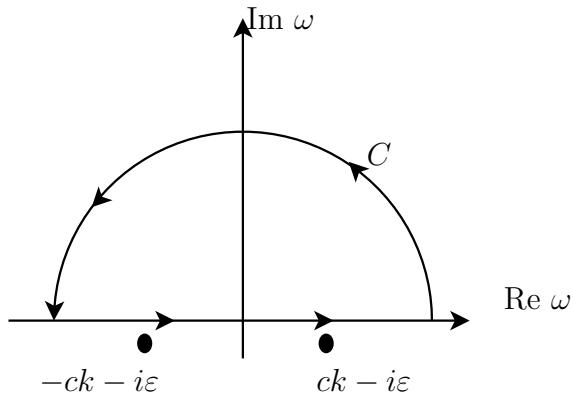
$$\text{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (3.17)$$

das „Residuum“ von  $f(z)$  in  $z_0$ .

- Residuensatz: Für einen geschlossenen Weg  $C$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  mit singulären Punkten  $a_1 \dots a_n$  innerhalb  $C$  gilt

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k} f(z). \quad (3.18)$$

Zur Ausführung des Integrals (3.15) wählen wir für  $\tau < 0$  folgende geschlossene Kurve:

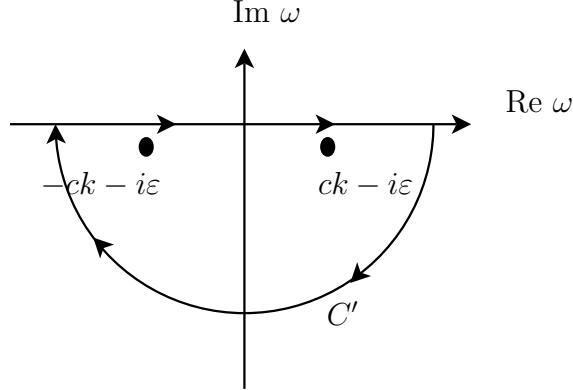


Der Halbkreis befindet sich im Unendlichen, und das Integral über ihn verschwindet wegen  $\tau < 0$ . Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}} = \oint_C \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}} d\omega = 0, \quad (3.19)$$

da es keine Pole in der oberen Halbebene gibt.

Für  $\tau > 0$  wählen wir den Weg in der unteren Halbebene, damit das Integral über den Halbkreis verschwindet:



Damit ist

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}} = \oint_{C'} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}} d\omega \\
&= -2\pi i \left( \text{Res}_{ck-i\varepsilon} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}} + \text{Res}_{-ck-i\varepsilon} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}} \right) \\
&\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -2\pi i \left( \frac{-c^2 e^{-ick\tau}}{ck + ck} + \frac{c^2 e^{ick\tau}}{ck + ck} \right) \\
&= \frac{2\pi c}{k} \sin(ck\tau)
\end{aligned}$$

und schließlich zusammengefasst

$$G(\vec{R}, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \quad \text{d.h. f\"ur } t < t' \\ \frac{c}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk k e^{i\vec{k} \cdot \vec{R} \sin(ck\tau)} \frac{1}{k}, & \tau > 0 \quad \text{d.h. f\"ur } t > t' \end{cases} \quad (3.20)$$

Wir formen um f\"ur  $t > t'$ :

$$\begin{aligned}
G(\vec{R}, \tau) &= \frac{c}{\pi} \int_0^{\infty} dk k \sin(ck\tau) \int_{-1}^1 dy e^{ikRy} \\
&= \frac{2c}{\pi R} \int_0^{\infty} dk \sin(ck\tau) \sin(kR) \\
&= \frac{c}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} dk (e^{ik(c\tau-R)} - e^{ik(c\tau+R)}) \\
&= \frac{c}{R} (\delta(c\tau - R) - \delta(c\tau + R)) \\
&= \frac{1}{R} \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right)
\end{aligned}$$

Wenn wir  $\tau$  und  $R$  wieder durch die ursprünglichen Variablen ersetzen, erhalten wir

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.22)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.23)$$

Man nennt  $\Phi$  und  $\vec{A}$  „retardierte Potenziale“. Sie haben folgende Interpretation: Die Ladungs- und Stromverteilung zur Zeit  $t'$  am Ort  $\vec{r}'$  verursacht zur späteren Zeit  $t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$  am Ort  $\vec{r}$  ein Feld. Das Signal breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Im statischen Grenzfall, wo  $\varrho$  nur von  $\vec{r}$  abhängt, ergibt sich das Ergebnis der Elektrostatik.

Es gibt eine zweite Klasse von Lösungen, die man dadurch erhält, dass man die Pole statt in die untere in die obere Halbebene verschiebt. Dann ersetzt man  $\omega$  durch  $\omega - i\varepsilon$  statt durch  $\omega + i\varepsilon$ , und man bekommt

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.24)$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\varrho(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.25)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.26)$$

Dies sind die „avancierten Potenziale“. Diese Situation ergibt sich aus der retardierten Situation durch Umkehr der Zeitrichtung. Beide Lösungen sind formal korrekt. Wenn man nun die avancierten Lösungen als „unphysikalisch, weil die Kausalität verletzend“ ausschließt, steckt man außer den Maxwellgleichungen ein zweites Element in die E-Dynamik, nämlich „es treten nur die retardierten Lösungen auf“.

Hier ergeben sich zwei Fragen:

1. Wie kommt es, dass es zwei wesensmäßig verschiedene Klassen von Lösungen gibt (wobei eine Klasse die zeitumgekehrte andere Klasse ist)?

Die in der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik betrachteten Lösungen gehören nämlich alle zu einer Klasse: die zeitumgekehrte Version einer Lösung ist entweder identisch (Bsp: schwingendes Pendel) oder durch eine Symmetrietransformation im Raum erhältlich (Bsp: nach rechts hüpfender Ball → nach links hüpfender Ball (Raumspiegelung)) oder durch eine andere Transformation auf eine Situation derselben Klasse (Bsp:  $\psi \rightarrow \psi^*$  bei Zeitumkehr der Schrödinger-Gleichung -  $|\psi|^2$  bleibt dabei gleich).

2. Wie kommt es, dass nur die eine Klasse von Lösungen in der Natur vorkommt?

Wir diskutieren diese beiden Fragen in den nächsten beiden Unterkapiteln.

## 3.2 Warum gibt es zwei qualitativ verschiedene Arten von Lösungen?

Um dies zu verstehen, beginnen wir mit einer Situation, in der es nur eine Klasse von Lösungen gibt und untersuchen, wann diese Lösungen nicht mehr möglich sind:

Wir betrachten einen quaderförmigen Hohlraum mit leitender Oberfläche, der zunächst leer ist: Im Inneren gilt dann

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0, \quad (3.27)$$

und an der Oberfläche ist  $\Phi = 0$ . Die Lösung ist

$$\Phi = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.28)$$

mit

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x \quad n_x \in \mathbb{Z} \quad (3.29)$$

und ebenso für die anderen Komponenten. Zwischen den Komponenten gilt die Beziehung

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (3.30)$$

Bei vorgegebener Anfangsbedingung im Raum ist die Lösung eindeutig. Die zeitumgekehrte Lösung gehört offensichtlich zur selben Klasse. Man erhält sie nämlich einfach durch die Transformation  $\omega \rightarrow -\omega$  oder  $(\varphi, \vec{k}) \rightarrow (-\varphi, -\vec{k})$ .

Jetzt setzen wir in den Hohlraum eine periodisch oszillierende Ladungsverteilung. Die Gleichung für das Potenzial lautet dann

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_\omega(\vec{r}, t) = -4\pi\varrho(\vec{r}) \sin(\omega t) \quad (3.31)$$

Mit dem Ansatz  $\Phi_\omega = \sin(\omega t)\Phi(\vec{r})$  erhalten wir

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi(\vec{r}) = -4\pi\varrho(\vec{r}) \quad (3.32)$$

Mit der Fouriertransformation  $\Phi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \Phi_{\vec{k}}$  und  $\varrho(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \varrho_{\vec{k}}$  erhalten wir die Gleichung

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi_{\vec{k}} = -4\pi\varrho_{\vec{k}}$$

mit der Lösung

$$\Phi_{\vec{k}} = \frac{4\pi \varrho_{\vec{k}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}},$$

die im Ortsraum die Form

$$\Phi(\vec{r}) = 4\pi \sum_{\vec{k}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \frac{\varrho_{\vec{k}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (3.33)$$

nimmt. Summiert wird jeweils über die  $\vec{k}$ -Vektoren mit  $k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i$ .

Dieser speziellen Lösung überlagert sind die vorher ermittelten homogenen Lösungen. Die Lösung wird eindeutig, wenn die Anfangsbedingung für das Potenzial zur Zeit  $t_0$  vorgegeben ist. Diese Lösung ist eine Summe von stehenden Wellen, wobei diejenigen Wellen, deren Wellenzahl am nächsten bei  $\omega/c$  liegt, die größte Amplitude haben. Diese Lösung ist invariant unter Zeitumkehr. Ein Problem mit dieser zeitumkehrinvarianten Sorte von Lösungen entsteht dann, wenn  $\omega^2$  mit einem der  $k^2 c^2$  übereinstimmt. Dann liegt eine Resonanz vor. Die Amplitude der entsprechenden Mode schaukelt sich immer weiter auf, bis das Modell zusammenbricht und z.B. Energie im begrenzenden Leiter dissipiert wird.

Da die  $\vec{k}$  diskrete Werte sind, treten diese Resonanzen bei willkürlicher Wahl von  $\omega$  eigentlich nicht auf. Aber je größer das Volumen wird (große  $L_x, L_y, L_z$ ), desto näher liegt  $\omega$  bei einer Resonanz. Im unendlich großen System bzw im freien Raum gibt es dann auf jeden Fall eine Schwingungsmodus, die mit der Schwingungsfrequenz der Ladungsverteilung in Resonanz ist, und an die die oszillierende Ladungsverteilung folglich unbegrenzt Energie abgibt. Dies ist der Grund dafür, dass von der oszillierenden Ladungsverteilung eine elektromagnetische Strahlung ausgesandt wird. Da der Raum unbegrenzt ist, kann diese Strahlung sich nicht zu einer stehenden Welle aufbauen, sondern sie läuft immer weiter von der Quelle weg.

Wir lernen aus dieser Überlegung, dass der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  und der Limes  $\vec{L} \rightarrow \infty$  nicht vertauschen. Schickt man zuerst  $\varepsilon$  nach Null, bekommt man stehende Wellen, deren Amplitude für  $\vec{L} \rightarrow \infty$  divergiert. Schickt man zuerst  $\vec{L}$  nach Unendlich, weiß das Feld nichts von einem Rand, aber es sieht die „Resonanz“, die in diesem Fall eine sich mit  $\omega = ck$  ausbreitende Welle ermöglicht. Dies ist die retardierte Lösung. Die avancierte Lösung entspricht einer anderen Randbedingung im Unendlichen: statt dass anfangs kein Feld außerhalb der Ladungsverteilung ist, entspricht die avancierte Lösung einer aus dem Unendlichen einlaufenden Welle, die an der Ladungsverteilung vollständig absorbiert wird.

Zusammengefasst: im Kontinuumslimes auftretende Resonanzen zwischen der Frequenz der schwingenden Ladungsverteilung und einer Schwingungs-Mode des leeren Raumes sind die Ursache für die Instabilität der zeitumkehrinvarianten Lösungen und das Auftreten der qualitativ neuen Arten von Lösungen.

Statt die Pole von Anfang an in die untere Halbebene zu verschieben, können wir die retardierten Lösungen auch auf die folgende plausible Art bekommen: Wir stellen uns vor, dass die Ladungsverteilung langsam „eingeschaltet“ wird von der Zeit  $t = -\infty$  bis  $t = 0$ . Wir haben dann in diesem Zeitintervall für die Fourierkomponente  $\vec{k}$  die Gleichung

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_{\vec{k}} = -4\pi \varrho_{\vec{k},\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + i\varepsilon)t)} \quad (3.34)$$

Entsprechend machen wir für das Feld den Ansatz

$$\Phi_{\vec{k}} = \Phi_{\vec{k},\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + i\varepsilon)t)} \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow \Phi_{\vec{k},\omega} = -\frac{4\pi \varrho_{\vec{k},\omega}}{k^2 + \frac{1}{c^2}(\omega + i\varepsilon)^2} \quad (3.36)$$

Dies entspricht formal genau dem Ausdruck mit den verschobenen Polen. Dies gibt also im Kontinuumslimes die retardierten Lösungen.

Die avancierten Lösungen erhält man durch ein „Ausschalten“ der Ladungsverteilung von  $t = 0$  bis  $t = \infty$  mit der Bedingung, dass bei  $t = \infty$  auch alle Felder verschwunden sein sollen.

Nun haben wir erklärt, dass Resonanzen im Kontinuumslimes die stationäre Klasse von Lösungen zerstören und zwei neue Arten von Lösungen auftreten. Als nächstes müssen wir überlegen, warum in der Natur nur die retardierten Lösungen auftreten (sofern sich dies aus etwas „Fundamentalerem“ überhaupt ableiten lässt).

### 3.3 Warum kommen in der Natur nur die retardierten Lösungen vor?

Hierzu müssen wir etwas weiter ausholen. Wir betrachten einen räumlich und zeitlich begrenzten Ausschnitt des Universums und ermitteln die Felder als Funktion der Ladungen und der Randbedingungen. Die Randbedingungen umfassen die räumlichen und zeitlichen Ränder: sie beinhalten die Anfangsbedingung zur Zeit  $t_1$  und die Endbedingung zur Zeit  $t_2$  im gesamten betrachteten Raum, und die Potenziale an der Oberfläche (also am Rand des betrachteten Raums) zu allen Zeiten  $\in (t_1, t_2)$ .

Dies ist die Verallgemeinerung von Randwertproblemen der Elektrostatik auf die Elektrodynamik. Zur Erinnerung wiederholen wir zunächst kurz den Formalismus aus der Elektrostatik. Aus dem Greenschen Theorem

$$\begin{aligned} & \int_V d^3r' (\Phi(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r} - \vec{r}')) - G(\vec{r} - \vec{r}') \Delta' \Phi(\vec{r}')) \\ &= \oint_{\partial V} \left( \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial \vec{n}'} dF' - \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial \vec{n}'} G(\vec{r} - \vec{r}') dF' \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

haben wir erhalten (mit  $G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ )

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \varrho(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left( G(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial \vec{n}'} - \Phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial \vec{n}'} G(\vec{r} - \vec{r}') \right) dF'. \quad (3.38)$$

So erhielten wir aus dem Potenzial an der Oberfläche und der Ladungsverteilung im Inneren das Potenzial  $\Phi(\vec{r})$  im Inneren. Die Greensfunktion ist nun nicht eindeutig. Das Ergebnis für  $\Phi$  ist dasselbe, wenn statt der Greensfunktion

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.39)$$

eine andere Greensfunktion

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{mit } \Delta F = 0 \quad \text{in } V \quad (3.40)$$

genommen wird.

Nun machen wir eine analoge Rechnung in der Elektrodynamik. Wir starten wieder mit

$$\begin{aligned} & \int_V d^3 r' (A^\mu(\vec{r}', t') \Delta' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') - G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \Delta' A^\mu(\vec{r}', t')) \\ &= \int_{\partial V} \left( A^\mu(\vec{r}', t') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') - G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{\nabla}' A^\mu(\vec{r}', t') \right) d\vec{S}', \end{aligned} \quad (3.41)$$

wobei  $d\vec{S}'$  ein gerichtetes Oberflächenelement ist und wir die Notation

$$A^0 \equiv \Phi \quad j^0 \equiv \varrho c \quad (3.42)$$

verwendet haben. Die Greensfunktion muss die Gleichung

$$\left( \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (3.43)$$

erfüllen. Multiplikation mit  $A^\mu$  und Integration über unseren raumzeitlichen Ausschnitt gibt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt' \int_V d^3 r' A^\mu(\vec{r}', t') \left( \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -4\pi A^\mu(\vec{r}, t). \quad (3.44)$$

Für die weitere Umformung benötigen wir folgende Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt' A^\mu \frac{\partial^2}{\partial t'^2} G &= A^\mu \frac{\partial}{\partial t'} G \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A^\mu}{\partial t'} \frac{\partial G}{\partial t'} dt' \\ &= \left[ A^\mu \frac{\partial G}{\partial t'} - G \frac{\partial A^\mu}{\partial t'} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} G \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t'^2} dt' \end{aligned}$$

Wenn wir mit Hilfe von (3.41) den Ausdruck  $\int_V A^\mu \Delta' G d^3 r'$  in (3.44) ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_V d^3 r' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') j^\mu(\vec{r}', t') \\ &\quad - \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3 r' [G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \partial_t A^\mu(\vec{r}', t') - A^\mu(\vec{r}', t') \partial_t G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')]_{t_1}^{t_2} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{\partial V} \left[ G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{\nabla}' A^\mu(\vec{r}', t') - A^\mu(\vec{r}', t') \vec{\nabla}' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \right] \cdot d\vec{S}' \end{aligned} \quad (3.45)$$

Diese Formel gilt mit jeder Funktion  $G$ , die die Bedingung (3.43) erfüllt, also gilt sie sowohl mit der retardierten als auch mit der avancierten Greensfunktion.

Mit der retardierten Greensfunktion haben wir

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{t_1}^t dt' \int_V d^3 r' G_{\text{ret}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') j^\mu(\vec{r}', t') \quad (3.46)$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3 r' [G_{\text{ret}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t_1) \partial_{t_1} A^\mu(\vec{r}', t_1) - A^\mu(\vec{r}', t_1) \partial_{t_1} G_{\text{ret}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t_1)]$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^t dt' \int_{\partial V} [G_{\text{ret}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{\nabla}' A^\mu(\vec{r}', t') - A^\mu(\vec{r}', t') \vec{\nabla}' G_{\text{ret}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t')] \cdot d\vec{S}'$$

$$= \text{Quellterm} + \text{Randterme} = A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t) + A_{\text{in}}^\mu \quad (3.47)$$

$A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t)$  ist das von  $j^\mu(\vec{r}', t')$  (mit  $t' < t$ ) erzeugte Feld, und  $A_{\text{in}}^\mu$  resultiert aus der Anfangsbedingung (Feld bei  $t_1$  in  $V$ ) und der Randbedingung für Zeiten  $t' < t$ .

Das Potenzial hat also folgende Beiträge:

- was von  $j^\mu$  erzeugt wird;
- was sich aus dem Anfangsfeld entwickelt;
- was von draußen reinkommt.

Mit der avancierten Greensfunktion haben wir

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_t^{t_2} dt' \int_V d^3 r' G_{\text{adv}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') j^\mu(\vec{r}', t') \quad (3.48)$$

$$- \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3 r' [G_{\text{adv}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t_2) \partial_{t_2} A^\mu(\vec{r}', t_2) - A^\mu(\vec{r}', t_2) \partial_{t_2} G_{\text{adv}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t_2)]$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_t^{t_2} dt' \int_{\partial V} [G_{\text{adv}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{\nabla}' A^\mu(\vec{r}', t') - A^\mu(\vec{r}', t') \vec{\nabla}' G_{\text{adv}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t')] \cdot d\vec{S}'$$

$$= \text{Quellterm} + \text{Randterme} = A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t) + A_{\text{out}}^\mu. \quad (3.48)$$

$A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t)$  ist das von  $j^\mu(\vec{r}', t')$  (mit  $t > t'$ ) erzeugte Feld, und  $A_{\text{out}}^\mu$  resultiert aus der Endbedingung (Feld bei  $t_2$  in  $V$ ) und der Randbedingung für Zeiten  $t' > t$ .

Anschaulich sind dies folgende Beiträge:

- was vom (zukünftigen!)  $j^\mu$  erzeugt wird (also „Senken“ von  $A^\mu$  statt „Quellen“);
- was am Ende da sein wird;
- was für Zeiten  $t' > t$  nach draußen abwandert.

Die Existenz nur von retardierten Feldern bedeutet in der Darstellung mit der retardierten bzw in der Darstellung mit der avancierten Greensfunktion

$$A_{\text{in}}^\mu = 0 \quad \text{bzw.} \quad A_{\text{adv}}^\mu = 0. \quad (3.49)$$

Wir wählen die erste Darstellung. Die Zeitrichtung resultiert also aus der Bedingung  $A_{\text{in}}^\mu = 0$  bald nach der Zeit  $t_1$ . Dies können wir uns so vorstellen dass die anfangs vorhandenen oder von außen einlaufenden Felder am Rand absorbiert werden. Im Labor ist diese Bedingung oft ganz gut realisiert. Der Rand hat also die Eigenschaft, dass einfallende Strahlung thermisch ins Gleichgewicht kommt, und dass er umgekehrt Strahlung von der avancierten Form nicht abgeben kann. Dies ist eine thermodynamische Erklärung, die auf den Entropiesatz zurückzuführen ist! Wenn der betrachtete Raum nicht nach außen durch Absorber isoliert ist, müssen wir ein größeres Gebiet oder gar das ganze Universum betrachten. Die Bedingung  $A_{\text{in}}^\mu = 0$  bedeutet dann, dass nur solche Strahlung vorhanden ist, die in der Vergangenheit mal von einer lokalisierten Quelle abgesandt wurde. Auch hier können wir wieder den Entropiesatz bemühen: Verschiedene Raumgebiete können sich nicht “verschwören”, so dass sie gemeinsam avancierte Strahlung abgeben, die dann an einen Punkt zusammenläuft und dort Ladungen bewegt und dabei absorbiert wird. Denn dazu müsste aus der thermisch ungeordneten Bewegung der Moleküle in diesen Raumgebieten eine Bewegung werden, die so korreliert ist, dass die avancierte Strahlung ausgesandt werden kann. Alle Materie, die der Strahlung im Weg steht, müsste sich ebenfalls an dieser Verschwörung beteiligen und dazu beitragen, dass die Strahlung auf das Ziel einlaufen kann.

Mit der Zurückführung auf den Entropiesatz haben wir freilich das Problem der Irreversibilität von Abstrahlungsphänomenen nicht gelöst. Wir haben es nur auf die Thermodynamik abgewälzt....

### 3.4 Liénard-Wiechert Potenziale

In diesem Abschnitt berechnen wir die Felder von sich bewegenden Punktladungen.

Wir beginnen mit den Potenzialen. Das Skalarpotenzial von Gleichung (3.22) wird für ein sich auf einer Trajektorie  $\vec{r}_0(t')$  bewegendes Punktteilchen zu

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3 r' dt' \frac{\varrho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \\ &= \int d^3 r' dt' \frac{e\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \\ &= e \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c}} \Big|_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}}}.$$

(3.50)

Hier haben wir die Formel  $\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \delta(x - x_0) / |f'(x_0)|$  verwendet ( $x_0$  sind die Nullstellen von  $f$ ) und die Definitionen

$$\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \quad (3.51)$$

(Einheitsvektor von der Ladung zum Beobachtungsort  $\vec{r}$ ) und

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}_0(t')}{dt'} . \quad (3.52)$$

Analog erhalten wir für das Vektorpotenzial

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e \frac{\vec{v}(t')}{c}}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \frac{1}{1 - \vec{n}(t') \cdot \frac{\vec{v}(t')}{c}} \Big|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}}} \quad (3.53)$$

Zur Berechnung von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  verwenden wir die Abkürzungen  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$  und  $q = t' - t + \frac{R}{c}$ . Außerdem benötigen wir die Umformungen

$$\vec{\nabla} \delta(q) = \frac{d\delta(q)}{dq} \frac{dq}{dR} \vec{\nabla} R = \frac{d\delta(q)}{dq} \frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \quad (3.54)$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{d\delta(q)}{dq} f(t') dt' &= \int \frac{d\delta(q)}{dt'} \frac{dt'}{dq} f(t') dt' \\ &= \underbrace{\delta(q) \frac{dt'}{dq} f(t') \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int \delta(q) \frac{d}{dt'} \frac{f(t')}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}(t')}{Rc}} dt' \\ &= - \frac{d}{dt'} \left[ \frac{f(t')}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t')}{c}} \right] \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t')}{c}} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Das Magnetfeld berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{e}{c} \int \frac{\vec{v}(t')}{R} \delta(q) dt' \\ &= \frac{e}{c} \int \left[ \left( \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) \times \vec{v} \delta(q) + \vec{\nabla} \delta(q) \times \frac{\vec{v}(t')}{R} \right] dt' \\ &= \frac{e}{c} \int \left[ -\frac{\vec{R} \times \vec{v}(t')}{R^3} \delta(q) + \frac{\vec{R} \times \vec{v}(t')}{cR^2} \frac{d\delta(q)}{dq} \right] dt' \\ &= -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\vec{R} \times \vec{v}}{R^3 (1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} + \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\vec{R} \times \vec{v}}{cR^2} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}} \right] \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Mit  $\frac{d\vec{R}}{dt'} = -\vec{v}$  und  $\frac{dR}{dt'} = \frac{-\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} = -\vec{n} \cdot \vec{v}$  und

$$\frac{d}{dt'} (\vec{n} \cdot \vec{v}) = \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}}{R} - \frac{v^2 R^2 - (\vec{R} \cdot \vec{v})^2}{R^3} = \vec{n} \cdot \dot{\vec{v}} - \frac{v^2 - (\vec{n} \cdot \vec{v})}{R} \quad (3.57)$$

folgt (wir verstehen alle folgenden Formeln wieder mit dem Zusatz  $t' = t - R/c$ )

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\vec{R} \times \vec{v}}{R^3 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)} + \frac{\vec{R} \times \dot{\vec{v}}}{cR^2 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)^2} + \frac{2\vec{R} \times \vec{v}(\vec{n} \cdot \vec{v})}{cR^3 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\vec{R} \times \vec{v}}{cR^2 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)^3} \left( \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} - \frac{v^2 - (\vec{n} \cdot \vec{v})^2}{cR} \right) \right\} \\
&= -\frac{e}{c} \underbrace{\frac{\vec{R} \times \vec{v}}{R^3 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)^3} \left( 1 - \frac{2\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} + \left( \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 + \frac{2}{c} \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) (\vec{n} \cdot \vec{v}) - \frac{v^2 - (\vec{n} \cdot \vec{v})^2}{c^2} \right)}_{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&\quad - \frac{e}{c^2 R^2 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)^3} \left( \vec{R} \times \dot{\vec{v}} \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) + \vec{R} \times \vec{v} \left( \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Den letzten Term können wir umformen gemäß

$$\begin{aligned}
\left( \vec{R} \times \dot{\vec{v}} \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) + \vec{R} \times \vec{v} \left( \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} \right) \right) &= \vec{R} \times \left( \dot{\vec{v}} \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) + \vec{v} \left( \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} \right) \right) \\
&= \vec{R} \times \left( \dot{\vec{v}} + \frac{\vec{n} \times (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})}{c} \right) \\
&= \frac{\vec{R}}{R^2} \times \left[ -\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}}) \right] + \frac{\vec{R}}{R^2 c} \times \left[ \vec{R} \times (\vec{v} R \times \dot{\vec{v}}) \right] \\
&= -\frac{1}{R^2 c} \vec{R} \times \left[ \vec{R} \times \left( (c\vec{R} - \vec{v}R) \times \dot{\vec{v}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Also ist das Magnetfeld

$$\boxed{\vec{B} = e \frac{-\left(\vec{R} \times \vec{v}(t')\right) c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \vec{R} \times \left[\vec{R} \times \left(\left(\vec{R}c - R\vec{v}(t')\right) \times \dot{\vec{v}}(t')\right)\right] / R}{\left(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}(t')\right)^3} \Big|_{t'=t-\frac{R}{c}}} \tag{3.60}$$

Berechnung von  $\vec{E}$  ergibt

$$\boxed{\vec{E} = e \frac{\left(\vec{R}c - \vec{R}\vec{v}(t')\right) c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \vec{R} \times \left[\left(\vec{R}c - R\vec{v}(t')\right) \times \dot{\vec{v}}(t')\right]}{\left(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}(t')\right)^3} \Big|_{t'=t-\frac{R}{c}}} \tag{3.61}$$

- Wenn die Ladung ruht, oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist  $\dot{\vec{v}} = 0$  und

$$\vec{E} = e \frac{(\vec{R}c - R\vec{v}(t'))c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}(t')\right)^3} \Bigg|_{t' = t - \frac{R}{c}} \quad (3.62)$$

$$\vec{B} = e \frac{-\vec{R} \times \vec{v}(t')c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}(t')\right)^3} \Bigg|_{t' = t - \frac{R}{c}} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}. \quad (3.63)$$

Beide Felder sind für große  $R$  proportional zu  $R^{-2}$ . Der Poynting-Vektor verhält sich für große  $R$  wie

$$|\vec{S}| \propto |\vec{E}| |\vec{B}| \propto \frac{1}{R^4}. \quad (3.64)$$

Eine gleichförmig bewegte Ladung kann also nicht strahlen, denn dann müsste  $|\vec{S}| \propto \frac{1}{R^2}$  sein, damit der Energiefloss durch Kugeloberflächen mit großem Radius  $R$  für alle  $R$  gleich groß ist.

Für eine gleichförmig bewegte Ladung lässt sich  $t'$  explizit eliminieren aus  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ :

Es ist

$$\vec{R}(t) - \vec{R}(t') = \vec{r}_0(t') - \vec{r}_0(t) = \vec{v}(t' - t) = -\vec{v} \frac{R(t')}{c}. \quad (3.65)$$

Also kann man im Zähler von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Ersetzung

$$c\vec{R}(t) = c\vec{R}(t') - \vec{v}R(t') \quad (3.66)$$

machen. Um im Nenner  $t'$  zu eliminieren, berechnen wir

$$\begin{aligned} \left(c\vec{R}(t)\right)^2 - \left(\vec{R}(t) \times \vec{v}\right)^2 &= c^2\vec{R}(t')^2 + v^2R^2(t') - 2cR(t')\vec{v} \cdot \vec{R}(t') - \left(\vec{R}(t') \times \vec{v}\right)^2 \\ &= c^2R^2(t') - 2cR(t')\vec{v} \cdot \vec{R}(t') + \left(\vec{v} \cdot \vec{R}(t')\right)^2 \end{aligned} \quad (3.67)$$

Für eine mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Ladung sind somit die Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e c^3 \vec{R}(t) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\left(c\vec{R}(t)\right)^2 - \left(\vec{R}(t) \times \vec{v}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{e \vec{R}(t) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[R^2(t) - \left(\vec{R}(t) \times \frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.68)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c} = \frac{e}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{R}(t) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[R^2(t) - \left(\vec{R}(t) \times \frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.69)$$

Für kleine  $\frac{v}{c}$  sind die führenden Terme

$$\vec{E} = e \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \frac{e}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{R}(t)}{R^3}. \quad (3.70)$$

Für  $v \lesssim c$  haben wir

– für  $\vec{R} \parallel \vec{v}$ :

$$|\vec{E}| = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{und} \quad |\vec{B}| = 0 \quad (3.71)$$

– für  $\vec{R} \perp \vec{v}$ :

$$|\vec{E}| = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad |\vec{B}| = \frac{e}{R^2} \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.72)$$

In Flugrichtung ist das  $\vec{E}$ -Feld geschwächt, und senkrecht zur Flugrichtung ist es verstärkt.

Dieses Ergebnis bekommt man später mit der kovarianten Formulierung viel einfacher ...

- Wenn die Ladung beschleunigt ist, addieren sich zu  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Terme

$$\vec{E}_2 = e \frac{\vec{R} \times [\vec{R}c - R\vec{v}(t')] \times \dot{\vec{v}}(t')}{[Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}(t')]^3} \Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} \quad (3.73)$$

und

$$\vec{B}_2 = e \frac{\vec{R} \times [\vec{R} \times (\vec{R}c - R\vec{v}(t')) \times \dot{\vec{v}}(t')] / R}{[Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}(t')]^3} \Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} \quad (3.74)$$

Beide sind für große  $R$  proportional zu  $R^{-1}$  und sind dort folglich die dominanten Terme. Damit ist  $|\vec{S}| \propto \frac{1}{R^2}$ .

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab.

Die abgestrahlten Felder stehen senkrecht aufeinander, denn es ist  $\vec{B}_2 = \vec{R} \times \vec{E}_2 / R$ .

Für  $v \ll c$  sind die führenden Terme

$$\vec{E}_2 = e \frac{\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}})}{c^2 R^3} \quad (3.75)$$

$$\vec{B}_2 = e \frac{\vec{R} \times [\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}})]}{c^2 R^4} = -e \frac{\vec{R} \times \dot{\vec{v}}}{c^2 R^2} \quad (3.76)$$

Der Beitrag der beschleunigungsabhängigen Terme zum Poynting-Vektor ist

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_2 \times \vec{B}_2) \\
&= -\frac{e^2}{4\pi c^3 R^5} (\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}})) \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}}) \\
&= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\vec{R} (\vec{R} \times \dot{\vec{v}})^2}{R^5}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

⇒ Die Abstrahlung erfolgt senkrecht zur Momentanbeschleunigung am stärksten. Der durch eine Kugeloberfläche im Abstand  $R$  austretende Energiestrom wird durch das „Larmor-Gesetz“ beschrieben:

$$\int R^2 |\vec{S}| d\Omega = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2.$$

Für  $v \lesssim c$  findet man die stärkste Abstrahlung in Richtung  $\vec{v}$  (Synchrotronstrahlung), da dort der Nenner von (3.75) und (3.76) am kleinsten ist.

### 3.5 Felder und Strahlung einer lokalisierten, oszillierenden Quelle

Wir betrachten eine periodisch oszillierende Ladungs- und Stromverteilung

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}) e^{-i\omega t}; \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \tag{3.78}$$

Das Vektorpotenzial hat dieselbe Zeitabhängigkeit:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i\omega \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}}}_{=: \vec{A}(\vec{r})} e^{-i\omega t} = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \tag{3.79}$$

Somit gilt für das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \tag{3.80}$$

wobei der Ortsteil sich durch den Ortsteil des Vektorpotenzials ausdrücken lässt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{3.81}$$

Außerhalb der Quelle ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = -i \frac{\omega}{c} \vec{E} \tag{3.82}$$

und folglich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i c}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}). \tag{3.83}$$

Für die weitere Behandlung führen wir einige Längenskalen ein: Sei  $d$  die Abmessung der Quelle,  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  die Wellenlänge der emittierten Strahlung, und  $r = |\vec{r}|$  der Abstand des Beobachters von der Quelle. Außerdem betrachten wir den Fall  $d \ll \lambda$ , d.h. die Quelle schwingt so langsam, dass die Wellenlänge der emittierten Strahlung viel größer als die Ausdehnung der Quelle ist. Dann unterscheidet man 3 Bereiche

1. Nahbereich  $d \ll r \ll \lambda$ . Wegen  $r \ll \lambda$  ist  $kr \ll 1$  und damit  $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx 1$ .

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (3.84)$$

Das Potenzial hängt mit dem Strom genauso wie in der Magnetostatik zusammen. In unmittelbarer Nähe der Quelle sieht man noch nicht, dass eine Abstrahlung erfolgt.

2. Übergangsbereich  $r \approx \lambda$ : In diesem Bereich lassen sich die Formeln nicht vereinfachen.
3. Fernbereich  $r \gg \lambda \Rightarrow kr \gg 1$ . Hier können wir folgende Näherungen machen:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) = r - \vec{n} \cdot \vec{r}' \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r} \quad (3.86)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx e^{ikr} \frac{1}{rc} \int \vec{j}(\vec{r}') e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'} d^3 r'. \quad (3.87)$$

Wir haben also eine aus der Quelle auslaufenden Welle mit Winkelabhängigkeit. Wir entwickeln die Exponentialfunktion im Fernfeld:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^m}{m!} \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{n} \cdot \vec{r}')^m d^3 r' \quad (3.88)$$

Im Folgenden diskutieren wir die führenden Terme dieser Entwicklung.

- Dipolstrahlung: Sie ist der Summand  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &\approx \frac{e^{ikr}}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \\ &= -\frac{e^{ikr}}{cr} \int \vec{r}' \left( \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \right) d^3 r' \\ &= \underbrace{\frac{-i\omega e^{ikr}}{c} \int \vec{r}' \varrho(\vec{r}') d^3 r'}_{\vec{p} : \text{Dipolmoment der Ladungsverteilung}} \text{ wegen } \vec{\nabla}' \cdot \vec{j} = -\dot{\varrho} = i\omega \varrho \quad (3.89) \end{aligned}$$

Das Magnetfeld ist dann

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= -ik \left( \vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \vec{p} \\
&= k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right) \\
&\approx k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{für } kr \gg 1
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Das elektrische Feld berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B} \\
&\approx k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n} \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{für } kr \gg 1 \\
&= \vec{B} \times \vec{n}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Wir berechnen daraus die ausgestrahlte Leistung pro Raumwinkel  $d\Omega$ :

$$\begin{aligned}
dP &= r^2 d\Omega (\vec{n} \cdot \vec{S}) \\
\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} r^2 (\vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})) = \frac{c}{4\pi} r^2 |\vec{B}|^2 = \frac{ck^4}{4\pi} \sin^2 \vartheta |\vec{p}|^2
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Gemittelt über eine Periode erhalten wir unter Verwendung von

$$|\vec{p}_t| = \sin(\omega t) p \tag{3.93}$$

und

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \tag{3.94}$$

das Ergebnis

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ck^4}{8\pi} p^2 \sin^2 \vartheta. \tag{3.95}$$

Integration über den Raumwinkel ergibt die insgesamt abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{ck^4}{8\pi} p^2 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta = \frac{ck^4 p^2}{3} = \frac{p^2 \omega^4}{3c^3}. \tag{3.96}$$

Die vom Dipol ausgestrahlte Leistung ist proportional zur vierten Potenz der Frequenz.

Dies ist für die blaue Farbe des Himmels verantwortlich: Die einfallende Sonnenstrahlung induziert in den Luftmolekülen ein periodisch oszillierendes Dipolmoment. Seine Stärke ist frequenzunabhängig, solange  $\omega \ll \omega_0$  (Resonanzfrequenz) ist. Die von der Atmosphäre abgestrahlte (also gestreute) Leistung ist daher proportional zu  $\omega^4$ , und kurzwelliges (blaues) Licht wird deutlich stärker gestreut als langwelliges (rotes) Licht.

- Höhere multipolare Anteile der Strahlung:

Der Term  $m=1$  ist dominant, wenn  $\vec{p} = 0$  ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &\simeq \frac{e^{ikr}}{cr} (-ik) \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{n} \cdot \vec{r}') d^3 r' \\
 &= \frac{e^{ikr}}{r} (-ik) \int \left[ \frac{1}{2c} (\vec{r}' \times \vec{j}) \times \vec{n} + \frac{1}{2c} ((\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j} + (\vec{n} \cdot \vec{j}) \vec{r}') \right] \\
 &= \frac{e^{ikr}}{r} (ik) \vec{n} \times \vec{m} + \frac{ik}{2c} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}' (\vec{n} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \cdot \vec{j} d^3 r' \\
 &\quad \text{mit dem magnetischen Dipolmoment } \vec{m} \text{ und } i\omega\varrho = ik\varrho \\
 &= \frac{e^{ikr}}{r} \left[ ik\vec{n} \times \vec{m} - \frac{k^2}{2} n_j \int \vec{r}' r'_j \varrho(\vec{r}') d^3 r' \right]
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Der erste Term ist die magnetische Dipolstrahlung und der zweite Term die elektrische Quadrupolstrahlung.

# Kapitel 4

## Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

In diesem Kapitel behandeln wir die kovariante Formulierung der Elektrodynamik. In dieser Formulierung sieht man deutlich, dass die Elektrodynamik in jedem Inertialsystem gleich ist, und es vereinfachen sich einige Formeln. Wir führen auch die Langrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes ein und die Lagrange- und Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Damit schlagen wir die Brücke zu den in der Mechanik-Vorlesung vermittelten Konzepten.

### 4.1 Vierervektoren

Die kovariante Formulierung beruht auf einer gemeinsamen Behandlung von Raum und Zeit. Dem wird durch die Einführung des Vierer-Ortsvektors Rechnung getragen. Er ist definiert als

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z). \quad (4.1)$$

Jeder Vektor  $a^\mu$ , der sich bei einer Lorentztransformation in derselben Weise transformiert wie der Ortsvektor, ist ein kontravarianter Vierervektor. Für ihn gilt also

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu \equiv \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (4.2)$$

Wir vereinbaren wieder die Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Weitere Vierervektoren sind (Begründung später) die Viererstromdichte

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad (4.3)$$

und das Viererpotenzial (bei Lorentz-Eichung)

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}). \quad (4.4)$$

Wir definieren den kovarianten Vierervektor

$$a_\mu \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) = g_{\mu\nu} a^\nu \quad (4.5)$$

mit der Matrix

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

Wir verlangen, dass das Produkt eines kovarianten mit einem kontravarianten Vierervektor invariant unter einer Lorentztransformation ist. Kovariante Vierervektoren müssen sich daher gemäß

$$a'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu a_\nu \quad (4.7)$$

transformieren. Dann ist nämlich das Produkt eines ko- und eines kontravarianten Vierervektors

$$a'_\mu b'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu a_\nu \Lambda^\mu_\sigma b^\sigma = (\Lambda^{-1}\Lambda)^\nu_\sigma a_\nu b^\sigma = a_\nu b^\nu . \quad (4.8)$$

Durch diese Bedingung ist die Lorentztransformation definiert.

Bemerkung:  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  ist ein kovarianter Vierervektor. Er transformiert sich nämlich gemäß

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \quad (4.9)$$

## 4.2 Lorentz-Transformation

Wir betrachten homogene Lorentztransformationen

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu . \quad (4.10)$$

Die allgemeine (inhomogene) Lorentztransformation hat die Form  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ . Der Vektor  $a^\mu$  macht eine Translation. Wir betrachten nur den Fall  $a^\mu = 0$ . Inhomogene Lorentztransformationen lassen Produkte  $(x_1^\mu - x_2^\mu)(x_{1\mu} - x_{2\mu})$  invariant.

Aus der Bedingung, dass das Produkt eines kovarianten Vektors mit einem kontravarianten Vektor invariant unter einer Lorentztransformation ist, erhalten wir folgende Bedingung für  $\Lambda^\mu_\nu$ :

$$\begin{aligned} a'^\mu b'_\mu &= \Lambda^\mu_\nu a^\nu g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma_\varrho b^\varrho \stackrel{!}{=} a^\nu b_\nu = a^\nu g_{\nu\varrho} b^\varrho \\ &\Rightarrow \Lambda^\mu_\nu g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma_\varrho = g_{\nu\varrho} \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist dies

$$\boxed{\Lambda^T g \Lambda = g} \quad (4.11)$$

Inversion beider Seiten dieser Gleichung gibt

$$\Lambda^{-1} g (\Lambda^T)^{-1} = g$$

und damit die Variante

$$\boxed{\Lambda g \Lambda^T = g} . \quad (4.12)$$

Im Folgenden zählen wir einige Eigenschaften der Lorentztransformationen auf:

- Es ist

$$\det(\Lambda^T g \Lambda) = (\det \Lambda)^2 \det g \stackrel{!}{=} \det g .$$

Also ist der Betrag der Determinante 1 und

$$\det \Lambda = \pm 1 .$$

- Wenn wir in der Beziehung vor (4.11)  $\nu = 0$  setzen, erhalten wir

$$\Lambda^\mu{}_0 g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\varrho = g_{\varrho 0} = \delta_{\varrho 0} .$$

Wenn wir auch  $\varrho = 0$  setzen, wird daraus

$$\Lambda^\mu{}_0 g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_0 = 1$$

und explizit

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k{}_0)^2 = 1 .$$

Dies bedeutet

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 .$$

- Wenn  $\Lambda$  eine Lorentztransformation ist, dann auch  $g\Lambda$ :

$$(g\Lambda)^T g(g\Lambda) = \Lambda^T \underbrace{ggg}_{=g} \Lambda = g . \quad (4.13)$$

Die Matrix

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

macht eine Raumspiegelung. Sie invertiert das Vorzeichen von  $\det \Lambda$ .

- Wenn  $\Lambda$  eine Lorentztransformation ist, dann auch  $(-g)\Lambda$ :

$$(-g\Lambda)^T g(-g\Lambda) = \Lambda^T \underbrace{ggg}_{=g} = g . \quad (4.15)$$

Die Matrix

$$-g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

invertiert die Zeitrichtung.  $\Rightarrow$  Jede Lorentztransformation lässt sich als Produkt von  $g$  und/oder  $-g$  mit einer Matrix  $\Lambda$  schreiben, die  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$  und  $\det \Lambda = 1$  erfüllt.

- Wenn  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  Lorentztransformationen sind, dann ist auch das Produkt  $\Lambda_2\Lambda_1$  eine Lorentztransformation:

$$(\Lambda_2\Lambda_1)^T g(\Lambda_2\Lambda_1) = \Lambda_1^T \Lambda_2^T g \Lambda_2 \Lambda_1 = \Lambda_1^T g \Lambda_1 = g.$$

- Im folgenden sei  $\det \Lambda = 1$  und  $\Lambda^0_0 \geq 1$ . Für die Matrix  $\Lambda$  mit 16 Elementen bleiben 6 voneinander unabhängige Parameter übrig. Denn die Bedingung (4.11) wird zu 16 Bedingungen an die Elemente von  $\Lambda$ , wenn wir sie für alle 16 Matrixelemente ausschreiben. Allerdings sind jeweils 6 dieser Bedingungen identisch, da Transposition von (4.11) wieder die identische Bedingung liefert. Also haben wir 10 voneinander unabhängige Bedingungen an 16 Elemente, was auf 6 freie Parameter führt. Wenn wir also 6 voneinander unabhängige Lorentz-Transformationen angeben, die jeweils durch einen Parameter charakterisiert sind, können wir alle anderen aus ihnen durch Produktbildung zusammensetzen. Diese 6 Parameter sind 3 Drehwinkel für die Rotationen um die drei Achsen und 3 Geschwindigkeiten für eigentliche Lorentztransformationen längs der 3 Achsen.

Wir behandeln zunächst die Drehungen. Eine Drehung um  $\varphi$  um die z-Achse entspricht der Lorentztransformation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\varphi}{N} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi}{N} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N \quad (4.17)$$

Die Drehungen um die anderen Achsen erhalten wir durch zyklisches Vertauschen von  $x, y, z$ . Es ist leicht zu zeigen, dass die Drehungen die Beziehung (4.11) erfüllen.

Bei einer Lorentztransformation im engeren Sinn bewegt sich das Inertialsystem  $I'$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gegenüber  $I$ .

Wenn  $\vec{v}$  in  $x^1$ -Richtung zeigt, ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\eta}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{\eta}{N} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N \quad (4.18)$$

mit

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

und

$$\sinh \eta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \beta \gamma.$$

Damit haben wir die vertraute Form der Lorentztransformation:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass auch diese Lorentztransformationen die Beziehung (4.11) erfüllen.

Wir fassen die Essenz dieses Abschnitts zum Schluss nochmal zusammen: Jede Lorentztransformation lässt sich als das Produkt von  $g$  (Raumspiegelung),  $-g$  (Zeitumkehr), Rotation um die drei Achsen und Lorentztransformationen im engeren Sinn in Richtung der drei Achsen schreiben.

## 4.3 Viererstromdichte, Viererpotenzial und Feldstärketensor

### 4.3.1 Viererstromdichte

Es muss in jedem Inertialsystem die Kontinuitätsgleichung gelten:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4.19)$$

Mit  $j^0 = c\varrho$  wird dies zu

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}. \quad (4.20)$$

An dieser Gleichung sehen wir, dass  $j^\mu$  ein Vierervektor ist.

### 4.3.2 Viererpotenzial

Mit der Lorentz-Eichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.21)$$

gilt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.22)$$

und

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi \varrho. \quad (4.23)$$

Wir definieren den d'Alembert-Operator

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (4.24)$$

und

$$A^0 = \Phi \quad (4.25)$$

und erhalten dann die Eichbedingung in der Form

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \quad (4.26)$$

und die Gleichungen für die Potenziale in der Form

$$\boxed{\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.} \quad (4.27)$$

Also ist auch  $A^\mu$  ein Vierervektor.

Wir benötigen nun den Zusammenhang zwischen dem Viererpotenzial und elektrischen und magnetischen Feldern.

### 4.3.3 Feldstärketensor

Die Felder hängen mit den Potenzialen zusammen über

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi; \quad (4.28)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.29)$$

Komponentenweise geschrieben ist dies

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\ B_x &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \end{aligned}$$

(und entsprechend mit zyklischer Vertauschung der drei Raumkoordinaten).

Wir definieren den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein kontravarianter Tensor zweiter Stufe. Jede Komponente transformiert sich gemäß einer Lorentztransformation:

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (4.30)$$

Der kovariante Feldstärketensor ist

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich daher schreiben als

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta} \quad (4.32)$$

Dies überprüfen wir durch folgende Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \beta = 0 : \quad & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial E_k}{\partial x^k} = 4\pi \varrho \\ \beta = 1 : \quad & -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x \end{aligned}$$

Durch zyklisches Vertauschen der Raumkoordinaten erhalten wir aus der letzten Gleichung die vierte Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Die homogenen Maxwellgleichungen lassen sich schreiben als

$$\boxed{\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0} \quad (4.33)$$

Dies ist die sogenannte Jacobi-Identität.

Auch dies überprüfen wir durch eine kurze Nebenrechnung:

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 : \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2 : \quad -\partial_0 B_z - \partial_x E_y + \partial_y E_x = 0$$

bzw. mit allen drei Komponenten

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (4.34)$$

Die Jacobi-Identität folgt unmittelbar aus der Definition

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

durch Addition der entsprechenden Ableitungen:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \partial^\beta A^\gamma - \partial^\alpha \partial^\gamma A^\beta + \partial^\beta \partial^\gamma A^\alpha - \partial^\beta \partial^\alpha A^\gamma + \partial^\gamma \partial^\alpha A^\beta - \partial^\gamma \partial^\beta A^\alpha = 0. \quad (4.35)$$

Sie lässt sich kompakter schreiben mit der Definition des dualen Feldstärketensors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\mu\nu} &:= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} F_{\lambda\varrho} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

und lautet dann

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0.} \quad (4.37)$$

Bemerkung:  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho}$  ist der „vollständig antisymmetrische Tensor vierter Stufe“  
 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} = 1$  falls  $\mu\nu\lambda\varrho$  eine gerade Vertauschung von 0 1 2 3 ist  
 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} = -1$  falls  $\mu\nu\lambda\varrho$  eine ungerade Vertauschung von 0 1 2 3  
 $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} = 0$  sonst

Aus dem Feldstärketensor lassen sich zwei unter Lorentztransformation invariante Größen konstruieren:

$$\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \quad (4.38)$$

und

$$\frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (4.39)$$

## 4.4 Transformation der elektromagnetischen Felder

$F^{\mu\nu}$  ist ein Tensor zweiter Stufe und transformiert sich daher gemäß

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\varrho F^{\sigma\varrho}. \quad (4.40)$$

Wir betrachten eine Lorentztransformation im engeren Sinn. Sei  $I'$  gegenüber  $I$  mit Geschwindigkeit  $v$  in  $x^1$ -Richtung bewegt. Dann ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

und die Felder transformieren sich gemäß

$$\begin{aligned} E'_x &= F'^{10} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1 F^{01} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 F^{10} = \beta^2 \gamma^2 (-E_x) + \gamma^2 E_x \\ &= E_x \\ E'_y &= F'^{20} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_0 F^{20} + \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_1 F^{21} = \gamma E_y - \beta \gamma B_z \\ &= \gamma(E_y - \beta B_z) \\ E'_z &= F'^{30} = \Lambda^3{}_3 \Lambda^0{}_0 F^{30} + \Lambda^3{}_3 \Lambda^0{}_1 F^{31} = \gamma E_z + \beta \gamma B_y \\ &= \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B'_x &= F'^{32} = \Lambda^3{}_3 \Lambda^2{}_2 F^{32} \\ &= B_x \\ B'_y &= F'^{13} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13} = \gamma \beta E_z + \gamma B_y \\ &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ B'_z &= F'^{21} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_0 F^{20} + \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_1 F^{21} = -\beta \gamma E_y + \gamma B_z \\ &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned}$$

Vektoriell geschrieben lautet dies

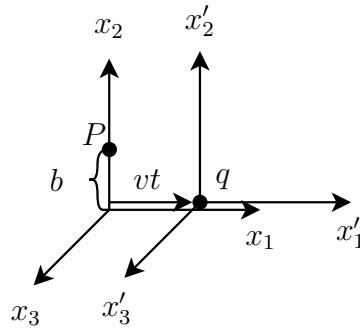
$$\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B}) = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \quad (4.42)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}_\parallel + \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{\beta} \times \vec{E}) = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \quad (4.43)$$

wobei  $\vec{E}_\parallel$  und  $\vec{B}_\parallel$  die Komponenten in Richtung  $\vec{v}$  sind.

Ein Feld, das in einem System rein elektrisch oder rein magnetisch ist, erscheint im anderen System als eine Mischung von elektrischen und magnetischen Feldern. Elektrische und magnetische Felder sind eng miteinander verknüpft.

Wir betrachten als Beispiel das Feld einer Punktladung, die sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  am Beobachter vorbeibewegt. Die Ladung  $q$  ruht im System  $I'$  (Eigensystem der Ladung) am Ursprung. Der Beobachter sitzt in seinem System  $I$  bei  $P = (0, b, 0)$ .



Im System  $I'$  gibt es nur ein elektrisches Feld. Am Ort P beträgt das Feld

$$E'_1 = -\frac{qvt'}{r'^3}, \quad E'_2 = \frac{qb}{r'^3}, \quad E'_3 = 0$$

mit  $r' = \sqrt{b^2 + v^2 t'^2}$  (4.44)

Um zu den Feldern im System  $I$  zu gelangen, machen wir die Ersetzung  $t = \frac{t'}{\gamma}$ . Dann gilt am Ort P:

$$E_1 = E'_1 = \frac{qv\gamma t}{\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}} \quad (4.45)$$

$$E_2 = \gamma E'_2 = \frac{\gamma qb}{\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}} \quad (4.46)$$

$$B_3 = \gamma \beta E'_2 = \beta E_2. \quad (4.47)$$

Die übrigen Komponenten verschwinden.

Wir betrachten die Grenzfälle kleiner und großer Geschwindigkeit.

- Bei nichtrelativistischer Geschwindigkeit, d.h. für  $\gamma \approx 1$  gilt

$$\vec{E} = \vec{E}'$$

und

$$\vec{B} = \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{c r^3}$$

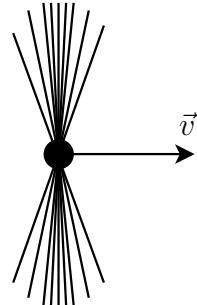
- Bei relativistischer Geschwindigkeit, also bei  $\beta \approx 1, \gamma \gg 1$  ist

$$E_1 = -\frac{q}{\gamma^2 v^2 t^2},$$

und wenn  $\gamma v t \gg b$  ist, ist

$$E_2 = B_3.$$

Zur Zeit  $t = 0$  bewegt sich die Ladung senkrecht zur Beobachtungsrichtung, und es ist  $E_1 = 0, E_2 = B_3 = \frac{\gamma q}{b^2}$ . Das Feld ist um den Faktor  $\gamma$  höher als das einer ruhenden Ladung, aber nur für eine Zeit der Größenordnung  $\frac{b}{\gamma v}$ . Die elektrischen Feldlinien scheinen senkrecht zur Flugrichtung komprimiert.



## 4.5 Lagrange- und Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Für die Teilchenbahn in elektromagnetischen Feld muss das Prinzip der minimalen Wirkung gelten. Die Wirkung ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L d\tau \quad (4.48)$$

Hierbei haben wir als Integrationsvariable eine invariante Größe gewählt, die Eigenzeit  $\tau$  des Teilchens, die mit der Zeit im System des Beobachters zusammenhängt über

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

und die gegeben ist durch die Bedingung

$$dx^\mu dx_\mu = (d\tau)^2/c^2.$$

Die Wirkung sollte Lorentz-invariant sein, also auch  $\gamma L$ . Um  $\gamma L$  zu finden, suchen wir zunächst den einfachsten Lorentz-invarianten Ausdruck, der sowohl die Geschwindigkeit des Teilchens als auch seine Masse und das elektromagnetische Feld enthält. Er ist

$$L = -\frac{1}{\gamma} \left( mc^2 + \frac{e}{c} u_\mu A^\mu \right).$$

(4.49)

$u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$  ist die Vierergeschwindigkeit.

Um zu überprüfen, ob dies die richtige Lagrangefunktion sein kann, betrachten wir den nichtrelativistischen Grenzfall, in dem die Lagrangefunktion in diejenige aus der Theo-1 Vorlesung übergehen sollte. Wenn wir in  $v/c$  entwickeln und nur die führenden Terme mitnehmen, erhalten wir

$$L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (4.50)$$

in Übereinstimmung mit dem Ausdruck aus der Theo-1 Vorlesung. Der Ausdruck (4.49) ist also der richtige Ausdruck für die relativistischen Lagrange-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld. Dies ist nicht das einzige Beispiel dafür, dass der einfachste Ausdruck, der den logischen Anforderungen genügt, auch tatsächlich der richtige ist.

Als nächstes leiten wir die Hamilton-Funktion nach den gewohnten Regeln her. Der zu  $x_i$  kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma mv_i + \frac{e}{c}A_i. \quad (4.51)$$

(Bei lateinischen Indizes sind die räumlichen Komponenten gemeint.) Damit ist die Hamilton-Funktion

$$H = p_i v_i - L = \gamma mv^2 + \frac{1}{\gamma}mc^2 + \frac{e}{c}\vec{A} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\gamma c}\left(\gamma c\Phi - \gamma \vec{v} \cdot \vec{A}\right) \quad (4.52)$$

$$= \gamma mc^2 + e\Phi. \quad (4.53)$$

Nun müssen wir die Hamilton-Funktion noch durch den kanonischen Impuls ausdrücken statt durch die Geschwindigkeit, die in  $\gamma$  enthalten ist. Dazu machen wir folgende Berechnung: Es ist

$$\frac{H - e\Phi}{c} = \gamma mc$$

und

$$\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} = \gamma m\vec{v}$$

Auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen stehen die Komponenten des Viererimpulses  $mu^\mu$ . Aus beiden Gleichungen zusammen bekommen wir die Beziehung

$$\left(\frac{H - e\Phi}{c}\right)^2 - \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m^2c^2, \quad (4.54)$$

und aufgelöst nach  $H$  ist dies

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\Phi. \quad (4.55)$$

Bemerkungen:

- Für  $\Phi = 0, \vec{A} = 0$  ist diese relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls bekannt.
- Das elektromagnetische Feld wird eingekoppelt durch die Ersetzungen  $H \rightarrow H - e\Phi$  und  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ .
- Im nichtrelativistischen Grenzfall erhält man

$$H \approx mc^2 + \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + e\Phi, \quad (4.56)$$

so wie man es von der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik schon kennt.

Als nächstes bestimmen wir die relativistischen Bewegungsgleichungen, also die aus (4.49) resultierenden Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (4.57)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma m v_i + \frac{e}{c} A_i \right) = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \quad (4.58)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = -e \vec{\nabla} \Phi - \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (4.59)$$

$$= -e \vec{\nabla} \Phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \underbrace{\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}}_{\frac{e}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (4.60)$$

Also ist die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}.} \quad (4.61)$$

Wir betrachten getrennt die Komponente in Flugrichtung des Teilchens und senkrecht zu ihr: In Flugrichtung des Teilchens haben wir

$$\left( \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) \right)_\parallel = e \vec{E}_\parallel = e \vec{E}'_\parallel \quad (4.62)$$

(Zur Erinnerung:  $\vec{E}'_\parallel$  ist das Feld im Bezugssystem des Teilchens.)

Senkrecht zur Flugrichtung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) \right)_\perp &= e \vec{E}_\perp + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\gamma} e \vec{E}'_\perp \\ \left[ \frac{d}{d\tau} (\gamma m \vec{v}) \right]_\perp &= e \vec{E}'_\perp \\ \left( \frac{d}{d\tau} m \vec{u} \right)_\perp &= e \vec{E}'_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

## 4.6 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich aus dem Prinzip der minimalen Wirkung herleiten. Dazu müssen wir eine Lagrange-Dichte für „Felder“ einführen:

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu) \quad (4.64)$$

Sie hängt von allen Feldkomponenten und allen ersten Ableitungen ab.  
Die Lagrange-Funktion ist dann

$$L(x^0) = \int d^3x \mathcal{L}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu) \quad (4.65)$$

und die Wirkung ist

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu) = \int dx^0 L(x^0), \quad (4.66)$$

wobei  $\Omega$  ein Gebiet im 4-dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum ist.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung wird uns auf die Bewegungsgleichungen der Felder führen. Wir verlangen also  $\delta S = 0$  bei Variation der Felder, d.h. bei der Variation

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \delta A^\mu(x) \quad (4.67)$$

mit  $\delta A^\mu(x) = 0$  auf der Oberfläche  $\Gamma(\Omega)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \delta (\partial_\nu A^\mu) \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} \delta A^\mu - \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \right) \delta A^\mu \right\} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \delta A^\mu \right)}_{\int_{\Gamma(\Omega)} d\sigma_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \delta A^\mu = 0} \end{aligned} \quad (4.68)$$

(Dabei ist  $d\sigma_\nu$  ein Oberflächenelement.)

Dies muss für beliebige  $\delta A^\mu(x)$  verschwinden. Also haben wir die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} = 0.} \quad (4.69)$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen der Feldtheorie.

Nun setzen wir für das elektromagnetische Feld eine Langrange-Dichte an und zeigen, dass die zugehörigen Euler-Langrange-Gleichungen die inhomogenen Maxwellgleichungen sind. Wir benötigen wieder einen Lorentz-invarianten Ausdruck und setzen daher an

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu} \quad (4.70)$$

mit  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Dann ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} = -\frac{1}{16\pi} 2F_{\lambda\varrho} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} \underbrace{(\partial^\lambda A^\varrho - \partial^\varrho A^\lambda)}_{g^{\lambda\lambda} \partial_\lambda A^\varrho - g^{\varrho\varrho} \partial_\varrho A^\lambda} \quad (4.71)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} (F_{\lambda\varrho} \delta_{\lambda\nu} \delta_{\varrho\mu} g^{\lambda\lambda} - F_{\lambda\varrho} \delta_{\varrho\nu} \delta_{\lambda\mu} g^{\varrho\varrho}) \quad (4.72)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} F^\nu_\mu \quad (4.73)$$

und die Euler-Langrange-Gleichungen sind

$$-\frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^\nu_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu \quad (4.74)$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (4.75)$$

Dies sind die inhomogenen Maxwellgleichungen.

## 4.7 Energie-Impulstensor (kanonischer)

Die Hamilton-Dichte ergibt sich aus der Lagrange-Dichte über die Beziehung

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)}}_{\text{zu } A^\mu \text{ kanonisch konjugierter Felldimpuls}} (\partial_0 A^\mu) - \mathcal{L} \quad (4.76)$$

Wir definieren die allgemeinere Größe

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \partial^\nu A^\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4.77)$$

deren 00-Komponente die Hamilton-Dichte ist. Wir werten dies für das freie elektromagnetische Feld aus:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (4.78)$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} g^{\mu\varrho} F_{\varrho\lambda} \partial^\nu A^\lambda - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.79)$$

$$\Rightarrow T^{00} = -\frac{1}{4\pi} F_{0\lambda} \partial^0 A^\lambda - \mathcal{L} \quad (4.80)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{-\vec{E} - \vec{\nabla} \Phi} - \mathcal{L} \quad (4.81)$$

$$= \frac{1}{4\pi} E^2 + \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) \quad (4.82)$$

$$= \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \Phi) - \Phi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0}) \quad (4.83)$$

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}\Phi) \quad (4.84)$$

Dabei ist  $\frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$  die Energiedichte, so wie früher definiert, und  $\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}\Phi)$  verschwindet bei Integration über den Raum.

$$T^{0i} = -\frac{1}{4\pi}F_{0\lambda}\partial^iA^\lambda = \frac{1}{4\pi}\vec{E} \cdot \partial_i\vec{A} \quad (4.85)$$

Für den nächsten Schritt benötigen wir folgende Nebenrechnung:

$$(\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_i = \vec{E} \cdot \partial_i\vec{A} - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})A_i$$

Also wird

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_i + \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})A_i \quad (4.86)$$

und wegen  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  ist dies gleichbedeutend mit

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_i + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot (A_i\vec{E}) \quad (4.87)$$

Dabei ist  $\frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_i$  die Impulsdichte, so wie früher definiert, und  $\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot (A_i\vec{E})$  verschwindet bei Integration über den Raum.

Bemerkung:

Es gibt ein allgemeines Verfahren, um aus dem kanonischen Energie-Impulstensor  $T^{\mu\nu}$  einen symmetrischen Energie-Impuls-Tensor  $\Theta^{\mu\nu}$  zu konstruieren, der invariant und spurlos ist. Es verschwinden dann die Zusatzterme, und  $\Theta^{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$ ,  $\Theta^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$ ,  $\Theta^{ij} = -\frac{1}{4\pi}(E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + B^2))$ .

# Kapitel 5

## Mechanik des starren Körpers

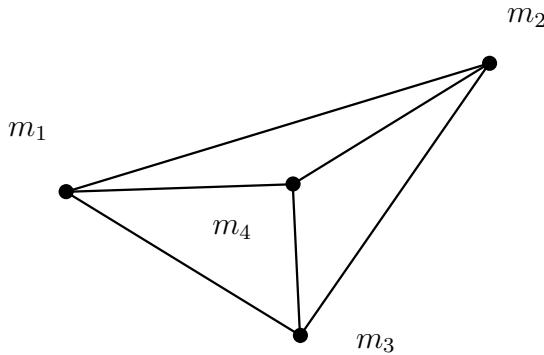
### 5.1 Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir die Bewegung starrer Körper. Ein starrer Körper ist ein Körper mit fest vorgegebener, diskreter oder kontinuierlicher Massenverteilung, dessen Gestalt sich nicht ändert. Wir betrachten zwei Arten von starren Körpern:

- (a) Ein System von  $n$  Massepunkten mit den Massen  $m_1, \dots, m_n$ , die durch starre Abstände verbunden sind. Die Gesamtmasse ist

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (5.1)$$

Beispiel:



- (b) Ein Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung  $\varrho(\vec{r})$ . Seine Gesamtmasse ist

$$M = \int d^3r \varrho(\vec{r}). \quad (5.2)$$

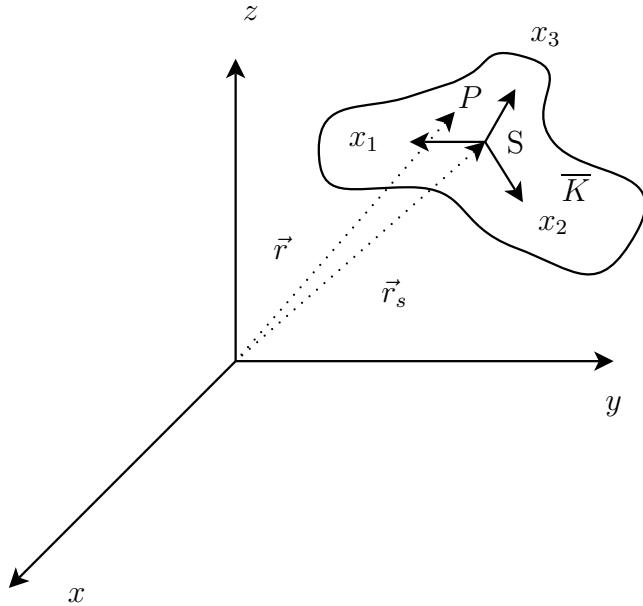
Die zweite, kontinuierliche Beschreibung können wir auch als Grenzfall der ersten Beschreibung auffassen, indem wir die Massepunkte mit Atomen oder Molekülen identifizieren und über kleine Volumina mitteln (die groß sind verglichen mit einem Atom).

In diesem Kapitel werden keine Deformationen betrachtet. Der starre Körper kann also nur seine Lage und seine Orientierung ändern. Er ist ein idealer Kandidat für die Benutzung des Lagrange-Formalismus, da die starren Abstände Zwangsbedingungen darstellen. Es ist zweckmäßig, genau so viele verallgemeinerte Koordinaten zu wählen, wie der Körper Freiheitsgrade hat. Dies sind drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade, wenn nicht weitere Zwangsbedingungen hinzukommen, die dem Körper von außen auferlegt werden.

Um die Lage und Bewegung des Körpers zu beschreiben, benötigen wir ein Koordinatensystem. Wir betrachten zwei Koordinatensysteme:

1. Ein raumfestes Koordinatensystem  $K$ , also das Laborsystem, mit den Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .
2. Ein fest im starren Körper verankertes intrinsisches Koordinatensystem  $\bar{K}$  mit den Achsen  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

Im System  $K$  lassen sich Bewegungen in einfacher Weise beschreiben. Im System  $\bar{K}$  ist die Masseverteilung  $\varrho$  unabhängig von der Zeit, ganz gleich, welche Bewegung der Körper ausführt. Die beiden Koordinatensysteme sind in der folgenden Abbildung gezeigt:



Der Ursprung  $S$  von  $\bar{K}$  wird oft in den Schwerpunkt gelegt, kann aber auch in einem anderen Punkt des Körpers verankert sein. Anhand dieser Abbildung kann man begründen, dass der starre Körper 6 Freiheitsgrade hat: Um seine Lage im Raum vollständig festzulegen, genügt es, die momentane Position  $\vec{r}_s(t)$  des Ursprungs  $S$  des Koordinatensystems  $\bar{K}$  zu kennen sowie die momentane Orientierung von  $\bar{K}$  relativ zu  $K$ . Diese Orientierung kann man durch 3 Winkel beschreiben (Rotation von  $\bar{K}$  relativ zu  $K$  um die 3 Achsen von  $K$ ). oder durch die Positionen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  zweier im starren Körpers verankerten Punkte (da die Abstände zwischen diesen beiden Punkten und zu  $S$  fest vorgegeben sind, erhält man auch auf diesem Weg  $6 - 3 = 3$  Orientierungsfreiheitsgrade).

## 5.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor

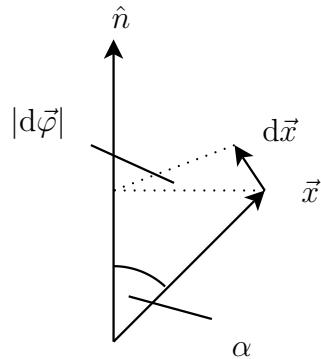
Für den Lagrange-Formalismus benötigen wir die kinetische Energie. Um sie zu ermitteln, beginnen wir mit der Betrachtung infinitesimaler Verrückungen des Körpers. Der Punkt  $P$  habe die Position  $\vec{r}$  in  $K$  und die Position  $\vec{x}$  in  $\overline{K}$ . Verschiebt und rotiert man den starren Körper ein wenig, so gilt für  $P$ :

$$d\vec{r} = d\vec{r}_S + d\vec{\varphi} \times \vec{x} \quad (5.3)$$

Die Richtung

$$\hat{n} = \frac{d\vec{\varphi}}{|d\vec{\varphi}|} \quad (5.4)$$

ist die Rotationsachse (Rotation im Uhrzeigersinn wenn man in Achsenrichtung schaut), und  $|d\vec{\varphi}|$  ist der Winkel, um den der Körper gedreht wird bei festgehaltenem  $S$ . Die Drehung ist im folgenden Bild veranschaulicht:



Aus  $|d\vec{x}| = |\vec{x}| \sin(\alpha) |d\vec{\varphi}|$  und  $d\vec{x} \perp \hat{n}, \vec{x}$  folgt  $d\vec{x} = d\vec{\varphi} \times \vec{x}$ .

Wir dividieren die Gleichung (5.3) durch  $dt$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_S}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{x} \quad (5.5)$$

und schreiben dies in der Form

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{x}. \quad (5.6)$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  hängt nicht von der Wahl des Punktes  $S$  ab. Um dies zu sehen, wählen wir einen anderen Ursprung von  $\overline{K}$ , den Punkt  $S'$  im Abstand  $\vec{a}$  von  $S$ :  $\vec{r}_{S'} = \vec{r}_S + \vec{a}$ . Gleichung (5.6) lässt sich dann alternativ schreiben als

$$\vec{v} = \vec{V}' + \vec{\omega}' \times \vec{x}'. \quad (5.7)$$

Außerdem ist  $\vec{r} = \vec{r}_{S'} + \vec{x}' = \vec{r}_S + \vec{a} + \vec{x}' = \vec{r}_S + \vec{x}$  und folglich  $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{a}$ . Eingesetzt in (5.6) gibt dies

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{x}'. \quad (5.8)$$

Diese Formel setzen wir nun gleich mit (5.7). Die Gleichheit muss für jede Wahl von  $\vec{x}$  und dazugehörigem  $\vec{x}'$  gelten. Also ist

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (5.9)$$

und

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}. \quad (5.10)$$

Als nächstes bestimmen wir den Ausdruck für die kinetische Energie. Wir wählen  $S$  als den Schwerpunkt des starren Körpers, wenn wir nicht explizit etwas anderes vermerken. Dann ist

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}(i) = 0 \quad (5.11)$$

bzw.

$$\int d^3x \vec{x} \varrho(\vec{x}) = 0. \quad (5.12)$$

Im System von Massenpunkten ist die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}^{(i)2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)})^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) \vec{V}^2}_{M} + \underbrace{\sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)})}_{\sum_i m_i \vec{x}^{(i)} \cdot (\vec{V} \times \vec{\omega})} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)})^2}_{=0} \\ &= \vec{\omega}^2 \vec{x}^{(i)2} \sin^2 \alpha \\ &= \vec{\omega}^2 \vec{x}^{(i)2} (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \vec{\omega}^2 \vec{x}^{(i)2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}^{(i)})^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \omega_j [\vec{x}^{(i)2} \delta_{jk} - x_j x_k] \omega_k \\ &= \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \omega_j J_{jk} \omega_k. \end{aligned} \quad (5.13)$$

In Zukunft lassen wir die Summenzeichen weg und implizieren, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Der *Trägheitstensor* ist

$$J_{jk} := \sum_{i=1}^n m_i [\vec{x}^{(i)2} \delta_{jk} - x_j^{(i)} x_k^{(i)}]$$

(5.14)

Im kontinuierlichen Fall sieht die Rechnung so aus:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int d^3x \varrho(\vec{x}) (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{x})^2 \\ &= \frac{1}{2} \vec{V}^2 \underbrace{\int d^3x \varrho(\vec{x})}_{M} + \underbrace{\vec{V} \times \vec{\omega} \int d^3x \vec{x} \varrho(\vec{x})}_{0} + \omega_j J_{jk} \omega_k \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit

$$J_{jk} := \int d^3x \varrho(\vec{x}) [\vec{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k] \quad (5.16)$$

Also haben wir die kinetische Energie in zwei Beiträge zerlegt,

$$T = T_{trans} + T_{rot} \quad (5.17)$$

mit dem Beitrag der Translation

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 \quad (5.18)$$

und dem Beitrag der Rotation

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \underline{\underline{J}} \vec{\omega}. \quad (5.19)$$

$\underline{\underline{J}}$  ist ein Tensor zweiter Stufe: Sei  $\underline{\underline{R}}$  eine Rotationsmatrix, so dass die Koordinaten unter einer Rotation die Transformation

$$x_j \rightarrow x'_j = R_{jk} x_k$$

machen. Dann transformiert sich  $\underline{\underline{J}}$  gemäß

$$J_{nm} \rightarrow J'_{nm} = R_{nj} R_{mk} J_{jk}.$$

Dies kann man für den zweiten Term in  $\underline{\underline{J}}$  sofort sehen. Für den ersten Term machen wir die Rechnung

$$R_{jm} \underbrace{R_{kn} \delta_{mn}}_{R_{mk}^T} = \delta_{jk},$$

d.h. der erste Term ist invariant unter einer Rotation.

Der Translationsterm verschwindet, wenn das Koordinatensystem  $\bar{K}$  in einem Punkt des Körpers verankert ist, der ruht. In diesem Fall ist  $\vec{V} = 0$ , und in der Herleitung (5.13) verschwinden die ersten beiden Terme der dritten Zeile, so dass  $T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \underline{\underline{J}} \vec{\omega}$  übrigbleibt.

Im Folgenden listen wir einige Eigenschaften des Trägheitstensors auf:

- $\underline{\underline{J}}$  hängt von der Wahl des Koordinatensystems  $\bar{K}$  ab.
- $J$  ist linear in  $\varrho(\vec{x})$  und daher additiv. Bei Zusammenfügen zweier starrer Körper addieren sich die Trägheitstensoren.

- Satz von Steiner:

Sei  $\underline{\underline{J}}$  der Trägheitstensor, wie er im körperfesten System  $\overline{K}$  berechnet wird, das im Schwerpunkt  $S$  zentriert ist, und sei  $\overline{K}'$  ein zu  $\overline{K}$  achsenparalleles System, das gegenüber diesem um  $\vec{a}$  verschoben ist.  $\Rightarrow$  Der in  $\overline{K}'$  berechnete Trägheitstensor ist

$$J'_{ij} = \int d^3x' \varrho(\vec{x}') [\vec{x}'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j] \quad (5.20)$$

$$\stackrel{\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}}{\doteq} J_{ij} + M (\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \quad (5.21)$$

(denn alle in  $\vec{x}$  linearen Terme verschwinden wegen der Schwerpunktbedingung).

- $J$  ist reell und symmetrisch,

$$\underline{\underline{J}} = \int d^3x \varrho(\vec{x}) \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_2 x_1 & x_3^2 + x_1^2 & -x_2 x_3 \\ -x_3 x_1 & -x_3 x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

und lässt sich durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalf orm bringen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}}_0 \underline{\underline{J}} \underline{\underline{R}}_0^{-1} &= \underline{\underline{J}}_0 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \\ &= \int d^3y \varrho(\vec{y}) \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2 + y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Hierzu bestimmt man die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\underline{\underline{J}} \vec{\omega}^{(i)} = I_i \vec{\omega}^{(i)}. \quad (5.24)$$

$\underline{\underline{R}}_0^{-1}$  hat als Spalten die  $\vec{\omega}^{(i)}$ .

$I_1, I_2, I_3$  sind die (Haupt-)Trägheitsmomente des starren Körpers. Für sie gilt

$$\Rightarrow I_k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3$$

und

$$I_1 + I_2 \geq I_3$$

(und analog unter zyklischer Vertauschung der Indizes). Dasjenige körperfeste System, in dem der Trägheitstensor diagonal ist, heißt Hauptträgheitsachsensystem.

Bei Entartung von Eigenwerten wählt man die  $\vec{\omega}^{(i)}$  so, dass sie senkrecht aufeinander stehen. Diese Situation tritt auf, wenn der starre Körper rotationssymmetrisch um eine Achse ist. Diese Achse ist dann eine Hauptträgheitsachse; die anderen beiden sind senkrecht dazu und sind beliebig wählbar. Dies zeigen wir wie folgt: Sei die Symmetrieachse die  $x_3$ -Achse. Dann ist

$$\varrho(x_1, x_2, x_3) = \varrho(-x_1, x_2, x_3) = \varrho(x_1, -x_2, x_3) = \varrho(-x_1, -x_2, x_3), \quad (5.25)$$

und die Außendiagonalelemente des Trägheitstensors verschwinden, wie wir am Beispiel des Elements 12 zeigen:

$$\begin{aligned} -J_{12} &= \int d^3x \varrho(\vec{x}) x_1 x_2 = \frac{1}{2} \int d^3x x_1 x_2 (\varrho(x_1, x_2, x_3) + \varrho(-x_1, x_2, x_3)) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \varrho(x_1, x_2, x_3) (x_1 x_2 + x_2 (-x_1)) = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Also sind nur die Diagonalelemente von 0 verschieden. Außerdem ist  $I_1 = I_2$ , weil  $\int d^3x \varrho(\vec{x}) x_1^2 = \int d^3x \varrho(\vec{x}) x_2^2$  aufgrund der Rotationssymmetrie.

## Beispiel 1

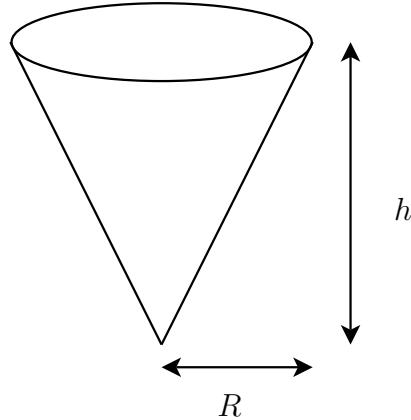
Homogene Kugel der Dichte  $\varrho$  und des Radius  $R$ . Es ist  $I_1 = I_2 = I_3$  aus Symmetriegründen, und das Hauptachsensystem ist im Kugelzentrum verankert. Es ist

$$I_1 + I_2 + I_3 = 3I = 3\varrho \int r^2 d^3x = 8\pi\varrho \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi\varrho R^5}{5}. \quad (5.27)$$

Mit  $\varrho = \frac{3M}{4\pi R^3}$  erhalten wir daraus

$$I = \frac{2}{5}MR^2. \quad (5.28)$$

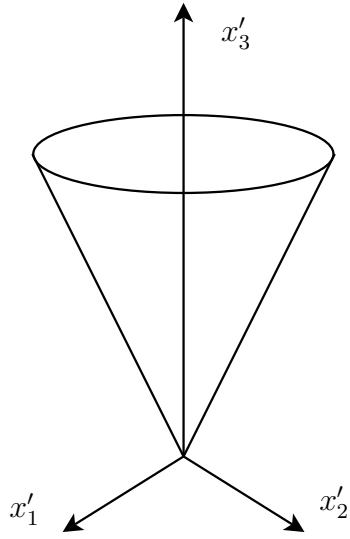
## homogener Kinderkreisel



$$\text{Volumen } V = \frac{1}{3}R^2\pi h \quad (5.29)$$

$$\text{Dichte } \varrho = \frac{3M}{\pi R^2 h} \quad (5.30)$$

- Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Hauptachsensystem in der Spitze verankert ist:



In Zylinderkoordinaten

$$x'_1 = r \cos(\varphi) \quad (5.31)$$

$$x'_2 = r \sin(\varphi) \quad (5.32)$$

$$x'_3 = z \quad (5.33)$$

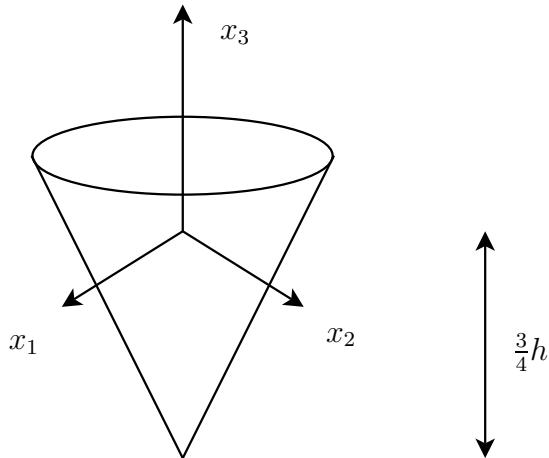
berechnen wir dann

$$\begin{aligned} I'_1 = I'_2 &= \varrho \int d^3x' (x'^2_2 + x'^2_3) \\ &= \varrho \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \\ &= \varrho \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} dr (r^3 \pi + 2\pi r z^2) \\ &= \varrho \int_0^h dz \left( \frac{R^4 z^4 \pi}{4 h^4} + \frac{2\pi R^2 z^4}{2 h^2} \right) \\ &= \pi \varrho \left( \frac{R^4 h}{4 \cdot 5} + \frac{R h^3}{5} \right) \\ &= \frac{3}{5} M \left( \frac{1}{4} R^2 + h^2 \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

und

$$\begin{aligned} I'_3 &= \varrho \int d^3x' (x'^2_1 + x'^2_2) \\ &= \varrho \int_0^h dz \int_0^{Rz/h} dr \int_0^{2\pi} r d\varphi (r^2 \cos^3 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \\ &= \varrho \int_0^h dz 2\pi \frac{R^4 z^4}{4 h^4} \\ &= \frac{3}{10} M R^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

- Wenn das Hauptachsensystem im Schwerpunkt verankert ist,



erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Steiner

$$I_1 = I_2 = I'_1 - M \left( \frac{3}{4}h \right)^2 = \frac{3}{20}M(R^2 + \frac{1}{4}h^2) \quad (5.36)$$

$$I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}MR^2. \quad (5.37)$$

### 5.3 Drehimpuls und Bewegungsgleichung des starren Körpers

Der Drehimpuls hat zwei Beiträge:

- Drehimpuls des Schwerpunktes: das ist derjenige, den man erhält, wenn der Körper auf eine Punktmasse zusammenschrumpft. Er ist von der speziellen Wahl des (raumfesten) Koordinatenursprungs abhängig.
- Relativdrehimpuls: das ist der Drehimpuls um die Achse durch den Schwerpunkt.

Wir berechnen hier den Relativdrehimpuls. Wenn wir den Ursprung des Laborsystems in den Schwerpunkt des Körpers legen, ist dies der einzige Beitrag zum Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad \text{bzw.} \\
 \vec{L} &= \int d^3x \varrho(\vec{x}) \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \\
 &\stackrel{\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}}{=} \int d^3x \varrho(\vec{x}) \vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \\
 &= \int d^3x \varrho(\vec{x}) [\vec{x}^2 \vec{\omega} - (\vec{x} \cdot \vec{\omega}) \vec{x}] \\
 &= \underline{\underline{J}} \vec{\omega}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Also:

$$\boxed{\vec{L} = \underline{\underline{J}} \vec{\omega}} \tag{5.39}$$

$\vec{L}$  hat im allgemeinen nicht dieselbe Richtung wie  $\vec{\omega}$ . Es hat nur dann dieselbe Richtung, wenn  $\vec{\omega}$  entlang einer der drei Hauptachsen gewählt wird.

Die Rotationsenergie können wir nun auch durch den Drehimpuls ausdrücken: Aus (5.19) und (5.39) erhalten wir

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}.} \tag{5.40}$$

Wenn  $\vec{\omega}$  zur  $i$ -ten Hauptachse parallel ist, vereinfachen sich die beiden letzten Gleichungen zu

$$\vec{L} = I_i \omega_i \tag{5.41}$$

und

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_i \omega^2. \tag{5.42}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \\
 &= \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) \\
 &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) \\
 &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\
 &= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{K}_i}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_{i,k \neq i} F_{ki} \vec{r}_i \times \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}}_{\text{innere Kräfte}}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Wegen dem dritten Newtonschen Gesetz heben sich die inneren Kräfte paarweise auf. Also bleibt

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{K}_i \equiv \vec{D}} \quad (5.44)$$

mit dem Drehmoment  $\vec{D}$ .

## 5.4 Kräftefreie Bewegung von starren Körpern

Ohne äußere Kräfte gilt

- Der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig. Dies folgt unmittelbar aus

$$0 = \sum_{i=i}^n \vec{K}_i = \sum_{i=i}^n m\ddot{\vec{r}}_i = M\ddot{\vec{r}}_S.$$

Der Schwerpunkt  $S$  verhält sich wie ein Massenpunkt unter der Wirkung der Resultierenden der äußeren Kräfte, und wenn diese verschwindet, bewegt sich  $S$  geradlinig und gleichförmig.

- Der Drehimpuls ist erhalten:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0. \quad (5.45)$$

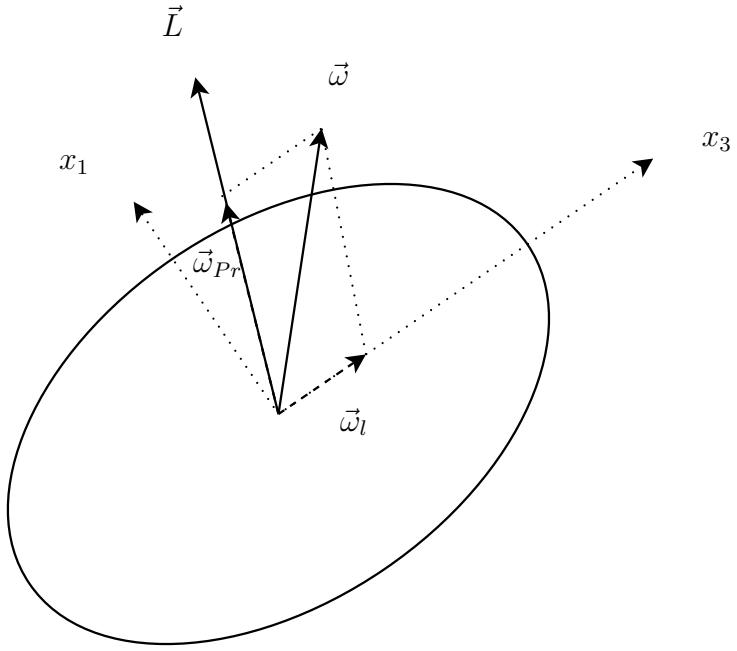
Dies folgt aus (5.44).

- Die Rotationsenergie ist erhalten:

$$\frac{d}{dt}T_{rot} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{\omega}^t \underline{\underline{J}} \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \cdot \vec{L}) = 0. \quad (5.46)$$

Dies folgt aus der Energieerhaltung und  $\frac{d}{dt}T_{trans} = 0$ .

Wir betrachten nun einen rotationssymmetrischen starren Körper (Kreisel) in Abwesenheit von äußeren Kräften. Sei die  $x_3$ -Achse die Symmetriearchse, so dass  $I_1 = I_2 \neq I_3$  ist. Weiterhin sei  $\vec{L}$  vorgegeben. Wir legen die  $x_1$ -Achse in die von  $\vec{L}$  und der Symmetriearchse aufgespannte Ebene. Dann steht die  $x_2$ -Achse senkrecht auf dieser Ebene, und  $L_2 = \omega_2 = 0$ . Also liegt  $\vec{\omega}$  in der  $(1, 3)$ -Ebene. Diese Situation ist in der folgenden Abbildung am Beispiel eines ellipsenförmigen Kreisels dargestellt, wobei die  $(1, 3)$ -Ebene die Papierebene ist:



Wie schon erwähnt, liegen die Vektoren  $\vec{L}$ ,  $\vec{\omega}$  und die Symmetrieachse in einer Ebene, und da man diese Betrachtung zu jedem Zeitpunkt anstellen kann, liegen sie folglich immer in einer Ebene. Wir können dies auch zeigen, indem wir das Spatprodukt der drei Vektoren bilden und zeigen, dass es Null ist:

$$(\vec{\omega} \times \vec{e}_3) \cdot \vec{L} = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 I_1 \\ \omega_2 I_2 \\ \omega_3 I_3 \end{pmatrix} = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = 0.$$

In unserem Beispiel ist  $I_1 > I_3$ . Deshalb liegt der Vektor  $\vec{L}$  näher an der  $x_1$ -Achse als der Vektor  $\vec{\omega}$ . Die Symmetrieachse  $x_3$  bewegt sich nach „hinten“ (also senkrecht zur Papierebene). Sie rotiert gleichförmig um die Richtung des raumfesten  $\vec{L}$ . Man nennt dies die „reguläre Präzession“. Die Frequenz der regulären Präzession erhalten wir durch Aufspalten von  $\vec{\omega}$  in eine Komponente  $\vec{\omega}_l$  parallel zur  $x_3$ -Achse und eine Komponente  $\vec{\omega}_{Pr}$  parallel zu  $\vec{L}$ :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_l + \vec{\omega}_{Pr}.$$

$\vec{\omega}_l$  ist irrelevant für die Präzessionsbewegung. Wir berechnen daher  $\omega_{Pr} = |\vec{\omega}_{Pr}|$ : Aus

$$\omega_1 = \omega_{Pr} \sin(\theta) \quad (5.47)$$

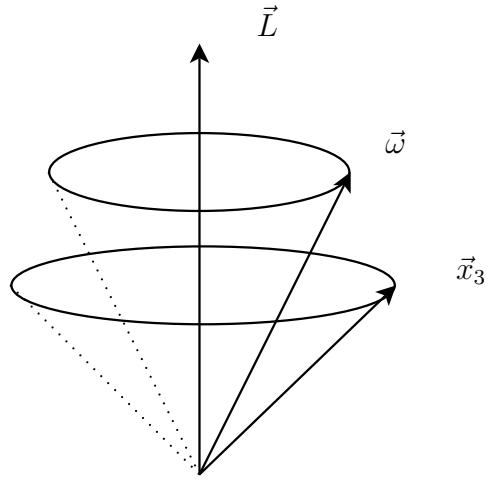
und

$$L_1 = |\vec{L}| \sin(\theta) = I_1 \omega_1 = I_1 \omega_{Pr} \sin(\theta) \quad (5.48)$$

erhalten wir

$$\omega_{Pr} = \frac{|\vec{L}|}{I_1}. \quad (5.49)$$

$\vec{\omega}$  überstreicht bei der regulären Präzession den „Spurkegel“, die Symmetrieachse den „Nutationskegel“:

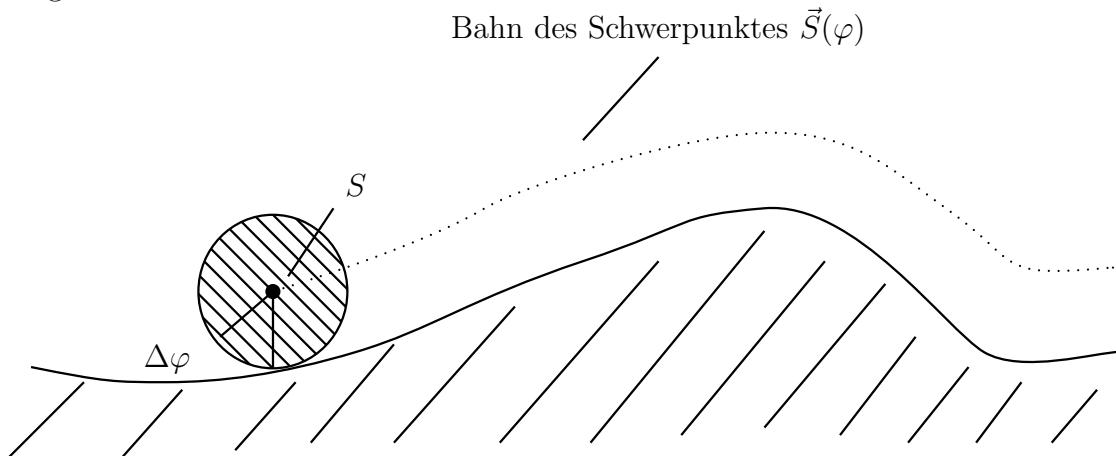


Die Winkelgeschwindigkeit um die Symmetriechse können wir auch durch den Drehimpuls und die Trägheitsmomente ausdrücken: Es ist

$$\omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \frac{|\vec{L}| \cos(\theta)}{I_3}. \quad (5.50)$$

## 5.5 Starre Körper mit nur einem Freiheitsgrad

Nun betrachten wir starre Körper mit äußeren Kräften und beschränken uns zunächst auf Systeme mit nur einem Freiheitsgrad. Es ist zum Beispiel der Körper fest auf einer Rotationsachse montiert, oder er rollt auf einer Unterlage in nur einer Richtung. In beiden Fällen behält die Rotationsachse ihre Richtung bei, und wir können den Winkel  $\varphi$  als Freiheitsgrad wählen:



Wir wählen die  $z$ -Richtung parallel zur Rotationsachse. Die kinetische Energie hat

dann die Beiträge

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\varphi}^2 \quad (5.51)$$

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 = \frac{1}{2} M \dot{s}^2, \quad (5.52)$$

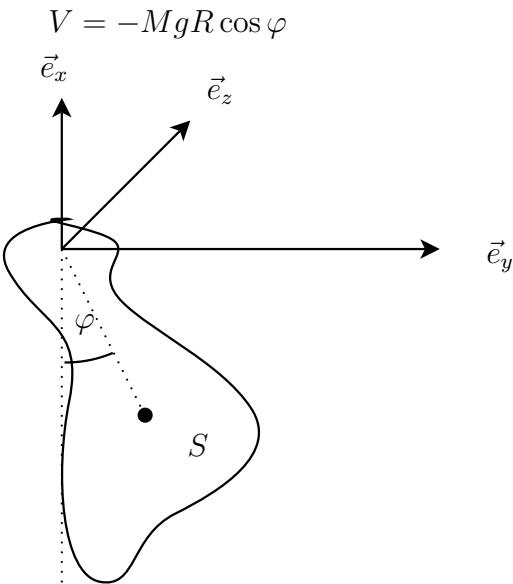
wobei  $\dot{s}$  die Geschwindigkeit des Schwerpunkts längs seiner Bahnkurve ist.

### Beispiel 1: physikalisches Pendel

Dies ist ein an der z-Achse aufgehängter starrer Körper. Sei  $R$  der Abstand  $\overline{SO}$ . Dann ist

$$T = \frac{1}{2} J'_{zz} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (J_{zz} + MR^2) \dot{\varphi}^2 \quad (5.53)$$

und



Die Lagrange-Funktion ist also

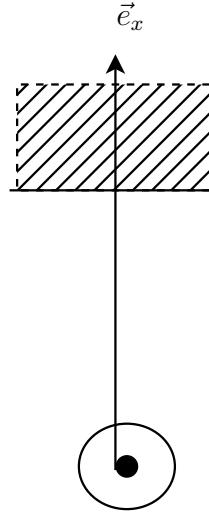
$$L = \frac{1}{2} J'_{zz} \dot{\varphi}^2 + MgR \cos \varphi \quad (5.54)$$

und die Lagrange-Gleichung 2. Art ist

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = J'_{zz} \ddot{\varphi} + MgR \sin \varphi. \quad (5.55)$$

Diese Bewegungsgleichung ist diejenige eines mathematischen Pendels der Länge  $l = \frac{J'_{zz}}{MR}$ .

## Beispiel 2: Jojo



$R$  = Radius der Achse, um die der Faden gewickelt ist.

$S$  sei in der Mitte der Achse. Hier ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - M g x \stackrel{\varphi=R^{-1}x}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{J_{zz}}{R^2} + M \right) \dot{x}^2 - M g x, \quad (5.56)$$

und die Bewegungsgleichung ist folglich

$$0 = \left( \frac{J_{zz}}{R^2} + M \right) \ddot{x} + M g \quad (5.57)$$

mit der Lösung

$$x(t) = -\frac{\frac{1}{2} M g t^2}{\frac{J_{zz}}{R^2} + M} + x_0 + v_0 t. \quad (5.58)$$

Am untersten Punkt haben wir eine elastische Reflektion

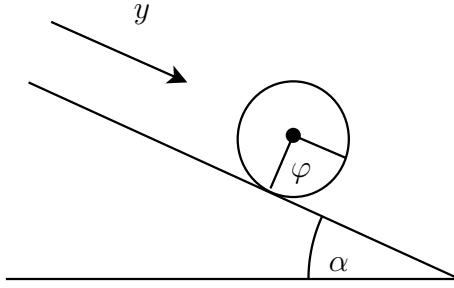
$$\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$$

und die Rolle steigt dann wieder bis zu dem Punkt, bei dem  $\dot{x} = 0$  ist. Sei  $l$  die Fadenlänge. Dann ergibt sich die Schwingungsperiode zu

$$T = 2 \sqrt{\frac{2l}{Mg} \left( \frac{J_{zz}}{R^2} + M \right)} \quad (5.59)$$

Dies ist übrigends eine Methode, um  $J_{zz}$  zu messen: Man misst  $l, T, R, M$  und berechnet daraus  $J_{zz}$ .

### Beispiel 3: Walze auf schiefer Ebene



Die Walze habe den Radius  $R$  und die Masse  $M$ , und der Schwerpunkt der Walze sei in der Mitte der Walze. Der Zusammenhang zwischen  $y$  und  $\varphi$  ist

$$\dot{y} = R\dot{\varphi} \quad (5.60)$$

und die Lagrange-Funktion ist

$$L = \frac{1}{2}J_{zz} \left( \frac{\dot{y}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}My^2 + Mg \sin(\alpha)y. \quad (5.61)$$

Die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (5.62)$$

führt auf

$$\ddot{y} = \frac{Mg \sin(\alpha)}{\frac{J_{zz}}{R^2} + M} \quad (5.63)$$

Wenn die Massenverteilung homogen ist, ist  $\varrho$  konstant und  $M = R^2\pi\varrho l$  und

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \varrho \int_0^l dz \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \\ &= \varrho l 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Also ist

$$\ddot{y} = \frac{2}{3}g \sin \alpha. \quad (5.65)$$

Im Unterschied hierzu lautet die Bewegungsgleichung, wenn die Walze reibungsfrei gleitet ohne zu rollen

$$\ddot{y} = g \sin \alpha$$

## 5.6 Die Eulerschen Gleichungen

Nun heben wir die Beschränkung auf einen Freiheitsgrad auf. Wir bestimmen die Bewegungsgleichungen bezogen auf das körperfeste System  $\bar{K}$ , dessen Ursprung im Schwerpunkt liegt. Hierbei ist es wichtig, sich bewusst zu machen, dass auch  $\bar{K}$  ein Interzialsystem ist. Es rotiert also nicht mit, sondern ist zu jedem Zeitpunkt neu zu wählen.

Wir hatten

$$\vec{D} = \frac{d}{dt} \vec{L}$$

und

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

und

$$\vec{L} = \int d^3x \varrho(\vec{x}) \vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})$$

Bemerkung: wir verstehen alle Größen auf dieser Seite (Vektoren, Tensoren) im System  $\bar{K}$ , aber schreiben keine Querstriche über die Größen.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \int d^3x \varrho(\vec{x}) \left[ (\vec{\omega} \times \vec{x}) \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \vec{x} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}) + \vec{x} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})) \right] \\ &= 0 + \underline{\underline{J}} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \int \vec{\omega} \times (\vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})) \varrho(\vec{x}) d^3x \end{aligned}$$

und somit

$$\boxed{\vec{D} = \underline{\underline{J}} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{L}} \quad (5.66)$$

Dabei haben wir benutzt, dass

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = \vec{b} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

ist. Denn die linke Seite ist

$$\vec{a} \times (\vec{a} \cdot \vec{b}^2 - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{b})) = -(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

und die rechte Seite ist

$$\vec{b} \times (\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}\vec{a}^2) = (\vec{b} \times \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \text{linke Seite}.$$

wenn  $\underline{\underline{J}}$  diagonal ist, lauten die Eulerschen Gleichungen

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) \\ I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) \\ I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

Diese Gleichungen sind nichtlinear und führen damit im Allgemeinen auf komplizierte Bewegungen. Wir betrachten noch einmal einen rotationssymmetrischen starren Körper

ohne äußere Kräfte. Es ist also  $\vec{D} = 0$  und  $I_1 = I_2$ . Aus der dritten Euler-Gleichung folgt sofort, dass  $\dot{\omega}_3 = 0$  ist. Wenn wir die erste Euler-Gleichung nach der Zeit ableiten und  $\dot{\omega}_2$  durch die zweite Euler-Gleichung ausdrücken, erhalten wir

$$\ddot{\omega}_1 + \omega_1 \frac{(I_1 - I_3)^2 \omega_3^2}{I_1^2} = 0.$$

Wir definieren

$$\omega_0^2 = \frac{(I_1 - I_3)^2 \omega_3^2}{I_1^2}$$

und erhalten damit

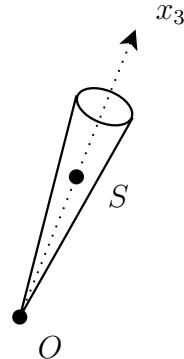
$$\omega_1 = A \sin(\omega_0 t - \phi) \quad (5.68)$$

und

$$\omega_2 = -A \cos(\omega_0 t - \phi), \quad (5.69)$$

wobei  $A$  und  $\phi$  durch die Anfangsbedingungen festzulegen sind. Die Vektoren  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  rotieren mit Frequenz  $\omega_0$  um die Symmetrieachse. Dies wird in der Literatur auch ‘‘Nutation’’ genannt. Die Frequenz  $\omega_0$  ist verschieden von der Präzessionsfrequenz  $\omega_{Pr}$  aus Gleichung (5.49), mit der die Symmetrieachse im Laborsystem um den Drehimpuls rotiert.

## 5.7 Der Schwere Kreisel

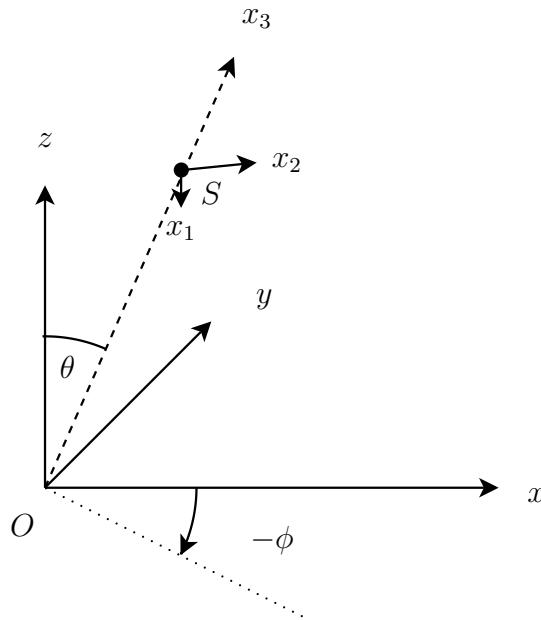


Der Kreisel im Schwerefeld ist ein anspruchsvolles Thema der theoretischen Mechanik, und wir beschränken uns hier auf eine Berechnung der wesentlichen Phänomene. Der Kreisel sei rotationssymmetrisch um die  $x_3$ -Achse, und wir definieren

$$l = \overline{OS}$$

wobei  $O$  der Punkt ist, in dem der Kreisel gestützt wird. Da der Punkt  $O$  fest ist, bleiben von den 6 Freiheitsgraden des starren Körpers nur 3 übrig.

Wir wählen 3 Winkel als Freiheitsgrade:



- $\theta$  Winkel zwischen  $z$ -Achse und  $x_3$ -Achse
- $\phi$  Winkel zwischen Projektion der  $x_3$ -Achse auf den Boden und der  $x$ -Achse des Laborsystems
- $\psi$  Winkel zwischen  $x_1$ -Achse und der Verbindungsleitung von  $S$  zur  $z$ -Achse (Linie  $\perp$   $x_3$ -Achse)

Die kinetische Energie ausgedrückt durch die 3 Winkel ist

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{(I_1 + Ml^2)}_{I'_1} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (5.70)$$

Die potenzielle Energie ist

$$V = Mgl \cos(\theta).$$

Die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  erfüllt die Gleichungen  $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$  und  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ . Also sind  $\psi$  und  $\phi$  zyklische Variablen, und

$$P_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \quad (5.71)$$

und

$$P_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (5.72)$$

sind Erhaltungsgrößen. Außerdem ist auch die Gesamtenergie  $E = T + V$  eine Erhaltungsgröße. Wir haben folglich genauso viele Erhaltungsgrößen wie Freiheitsgrade und können die Lösung der Bewegungsgleichungen finden.

Wir drücken zunächst  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\psi}$  durch die Erhaltungsgrößen aus:

$$P_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (5.73)$$

$$P_\phi = (I'_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \quad (5.74)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta} \quad (5.75)$$

$$\dot{\psi} = \frac{P_\psi}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta. \quad (5.76)$$

Dies wird in den Ausdruck für die Energie eingesetzt:

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{1}{2} \left( I'_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right) + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I'_1 \dot{\theta}^2 + \frac{P_\psi^2}{2I_3} + Mgl + \underbrace{\frac{(P_\phi - P_\psi \cos \theta)^2}{2I'_1 \sin^2 \theta}}_{\equiv U_{eff}(\theta)} - Mgl (1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Weil  $E$  eine Erhaltungsgröße ist, ist auch

$$E' \equiv E - \frac{P_\psi^2}{2I_3} - Mgl = \frac{1}{2} I'_1 \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \quad (5.78)$$

eine Erhaltungsgröße. Der Ausdruck für  $E'$  ist der eines gewöhnlichen eindimensionalen Problems mit der Variablen  $\theta$  und dem Potenzial  $U_{eff}$ .

Wir diskutieren die Dynamik des Kreisels im Folgenden qualitativ und in mehreren Schritten.

- Es ist  $E' > U_{eff}$ .
- Wenn  $P_\phi \neq P_\psi$  ist:  $\lim_{\theta \rightarrow 0} U_{eff} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} U_{eff} = \infty$
- Definiere  $u(t) = \cos \theta(t)$ . Dann ist

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2}$$

und

$$\dot{u}^2 = f(u)$$

mit

$$\begin{aligned} f(u) &= (1 - u^2) \left[ \frac{2E'}{I'_1} + \frac{2Mgl(1 - u)}{I'_1} \right] - \frac{(P_\phi - P_\psi u)^2}{I'^2_1} \\ u &\in [-1, 1] \text{ und } f(u) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.79)$$

- $u = 1$  entspricht  $P_\phi = P_\psi$  und  $\dot{u} = 0$  (stehender Kreisel)
- $u = -1$  bedeutet  $P_\phi = -P_\psi$  und  $\dot{u} = 0$  (hängender Kreisel)

–  $-1 < u < 1$ : schiefer Kreisel

- $f(u)$  ist positiv zwischen zwei Werten  $u_1, u_2 \in ]-1, 1[$  Also bewegt sich  $\theta(t)$  zwischen zwei Werten  $\theta_1$  und  $\theta_2$ .

Betrachte

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{I'_1} \frac{u_0 - u}{1 - u^2}$$

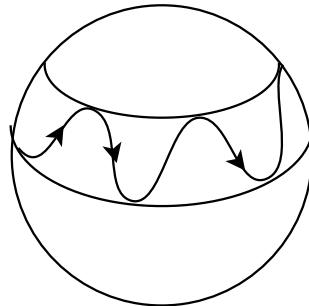
(mit  $u_0 = \frac{P_\psi}{P_\phi}$ )

zusätzlich zu  $\dot{\theta}$  bzw.  $\dot{u}$ :

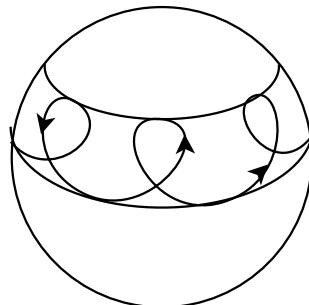
Man muss 3 Fälle unterscheiden, je nachdem wie  $u_0$  relativ zu  $u_1$  und  $u_2$  liegt:

1.  $u_0 > u_2$  (bzw.  $u_0 < u_1$ ):

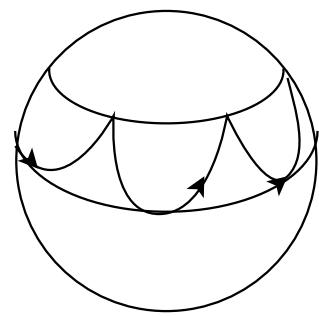
$\Rightarrow \dot{\phi}$  hat stets dasselbe Vorzeichen. Die Bewegung des Durchstoßpunktes der  $x_3$ -Achse durch eine Kugelschale sieht folgendermaßen aus:



2.  $u_1 < u_0 < u_2 \Rightarrow \dot{\phi}$  hat am oberen Breitengrad ein anderes Vorzeichen als am unteren:



3.  $u_0 = u_1$  oder  $u_0 = u_2$



$\dot{\phi}$  verschwindet an einem Breitenkreis.

# Kapitel 6

## Elastizitätstheorie

Während wir im vorigen Kapitel Bewegungen eines starren Körpers betrachtet haben, der sich nicht deformiert, behandeln wir in diesem Kapitel Deformationen fester Körper. Wir fassen den festen Körper als Kontinuum auf. In den folgenden Abschnitten werden wir zunächst die Grundlagen legen und den Verzerrungstensor und den Spannungstensor sowie die elastischen Module einführen, bevor wir dann verschiedene Arten von Verformungen und Schwingungen behandeln.

### 6.1 Der Verzerrungstensor

Bei einer Deformation ändern im Allgemeinen sämtliche Punkte eines Körpers ihre Lage. Wir bezeichnen mit dem *Verschiebungsvektor*

$$\vec{u} = \vec{x}' - \vec{x} \quad (6.1)$$

die Verschiebung eines Körperpunktes durch die Deformation.  $\vec{x}$  ist seine Position vor der Deformation,  $\vec{x}'$  ist seine Position nach der Deformation. Der Verschiebungsvektor ist an verschiedenen Stellen des Körpers verschieden und ist daher eine Funktion von  $\vec{x}$ . Die Vorgabe des Vektors  $\vec{u}$  als Funktion von  $\vec{x}$  bestimmt vollständig die Deformation des Körpers.

Wir betrachten als nächstes die Veränderung des Abstands zweier infinitesimal benachbarter Punkte unter der Deformation. Vor der Deformation war er

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

und nach der Deformation ist er

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}.$$

Wir verwenden wieder die Summenkonvention, d.h. wir summieren über alle in einem Ausdruck doppelt auftretenden Indizes, und schreiben daher

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Wir machen nun die Substitution

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$

und erhalten

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx_i dx_k, \quad (6.2)$$

wobei der Tensor  $u_{ik}$  durch die Gleichung

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (6.3)$$

definiert ist. Der Tensor  $u_{ik}$  heißt *Verzerrungstensor*. Aus seiner Definition ist ersichtlich, dass er symmetrisch ist, d.h. es ist  $u_{ik} = u_{ki}$ .

Wie jeden symmetrischen Tensor kann man  $u_{ik}$  in einem beliebig vorgegebenen Punkt auf Diagonalform bringen. Man muss natürlich im Auge behalten, dass der in einem vorgegebenen Punkt diagonalisierte Tensor in allen übrigen Punkten des Körpers im Allgemeinen nicht diagonal ist. Wenn der Verzerrungstensor im gegebenen Punkt diagonalisiert ist, dann hat das Längenelement (6.2) in der Umgebung des Punktes die folgende Form

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik})dx_i dx_k \\ &= (1 + 2u^{(1)})dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)})dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)})dx_3^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Hierbei sind  $u^{(1)}$ ,  $u^{(2)}$  und  $u^{(3)}$  die drei Diagonalelemente (Hauptwerte) des Verzerrungstensors.

Dieser Ausdruck zerfällt in drei voneinander unabhängige Terme. Das bedeutet, dass man die Deformation in jedem Volumenelement des Körpers als Überlagerung dreier voneinander unabhängiger Deformationen in drei zueinander orthogonalen Richtungen, den Hauptachsen des Verzerrungstensors, betrachten kann. Jede dieser Deformationen stellt eine einfache Dehnung oder Kompression in der entsprechenden Richtung dar.

Die Deformationen des Körpers sind praktisch fast in allen Fällen klein, d.h. die Änderung eines beliebigen Abstands im Körper bleibt im Vergleich zum Abstand selbst stets klein. Dies bedeutet, dass auch alle Komponenten des Verzerrungstensors klein sind. Dagegen kann der Verschiebungsvektor selbst in einigen Fällen trotz kleiner Deformation große Werte annehmen. So erfahren zum Beispiel die Enden eines langen, dünnen Stabs beim Verbiegen des Stabs eine wesentliche räumliche Verschiebung, während die Dehnung und Kompression im Inneren des Stabs klein bleiben. Dies ist dadurch möglich, dass der Stab dünn ist bezogen auf seine Länge. Aber in Körpern, deren Maß in keiner Richtung besonders klein ist, kann kein Teil eine starke räumliche Verschiebung erfahren, ohne dass im Körper starke Dehnungen und Kompressionen auftreten. Wir beschränken uns zunächst auf Körper, die in allen Richtungen eine ähnlich große Ausdehnung haben. In ihnen ist  $u_i$  bei kleinen Deformationen klein, und wir können das letzte Glied in (6.3) vernachlässigen. Somit ist der Verzerrungstensor bei kleinen Deformationen durch den Ausdruck

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (6.5)$$

gegeben. Die relativen Änderungen der Längenelemente in Richtung der Hauptachsen des Verzerrungstensors (im gegebenen Punkt) sind jetzt, bis auf Glieder höherer Ordnung,

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \simeq u^{(i)},$$

d.h. sie sind gleich den Hauptwerten des Vezerrungstensors.

Wir betrachten zum Schluss die Änderung eines kleinen Volumens bei der Deformation. Das Volumenelement  $dV$  besteht aus dem Produkt  $dx_1 dx_2 dx_3$ . Nach der Deformation beträgt es

$$dV' = dV(1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)}).$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung folgt hieraus

$$dV' = dV(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}).$$

Die Summe der drei Hauptwerte des Tensors ist gleich der Summe der Diagonalelemente  $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$  unabhängig vom Koordinatensystem. Wir haben daher

$$dV' = dV(1 + u_{ii}). \quad (6.6)$$

Die Summe der Diagonalelemente des Verzerrungstensors stellt also die relative Volumenänderung  $(dV' - dV)/dV$  dar.

## 6.2 Der Spannungstensor

Eine Deformation bringt den Körper aus seinem Gleichgewicht, und es entstehen Kräfte, die ihn in den Gleichgewichtszustand zurückzuversetzen suchen. Diese bei der Deformation auftretenden Kräfte nennt man *innere Spannungen*. Die Kräfte, die die inneren Spannungen bewirken, sind in der Elastizitätstheorie Nahwirkungskräfte, d.h. sie werden von einem bestimmten Punkt aus nur auf die nächsten Nachbarn übertragen. Hieraus folgt, dass die von einem Teil des Körpers von den benachbarten Teilen gerichteten Kräfte nur über die Oberfläche dieses Teils wirken können.

Wir betrachten jetzt die auf einen bestimmten Teil des Körpers wirkende resultierende Kraft,

$$\int \vec{F} dV,$$

wobei  $\vec{F}$  die auf eine Volumeneinheit wirkende Kraft ist, so dass auf das Volumenelement  $dV$  die Kraft  $\vec{F} dV$  einwirkt. Andererseits können die Kräfte, mit denen die verschiedenen Teile innerhalb des Teilvolumens aufeinander wirken keine von Null verschiedene Resultierende bilden, da sie infolge der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (3. Newtonsches Gesetz) sich gegenseitig kompensieren. Die auf ein Teilvolumen wirkende Gesamtkraft kann man daher als Summe derjenigen Kräfte betrachten, die aus seiner Umgebung auf das Teilvolumen einwirken. Wie wir aber oben schon erwähnt haben, wirken diese Kräfte auf das betrachtete Teilvolumen über seine Oberfläche. Die resultierende Kraft kann daher als die Summe der auf jedes Oberflächenelement wirkenden Kräfte, also

als ein Integral über diese Oberfläche dargestellt werden. Damit kann jede der drei Komponenten  $\int F_i dV$  der Resultierenden aller inneren Kräfte eines beliebigen Volumens in ein Integral über die Oberfläche dieses Volumens umgewandelt werden. Der Vektor  $F_i$  muss daher als Divergenz eines Tensors zweiten Ranges darstellbar sein:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.7)$$

Dann kann die auf ein Volumen wirkende Kraft als ein Integral über eine das Volumen umspannende geschlossene Fläche dargestellt werden:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k, \quad (6.8)$$

wobei  $df_i$  die Komponenten des Flächenelements sind, also eines Vektors, der stets in der Richtung der äußeren Normalen der Fläche liegt.

Der Tensor  $\sigma_{ik}$  heißt *Spannungstensor*. Wie man aus (6.8) ersieht, ist  $\sigma_{ik} df_k$  die  $i$ -te Komponente der auf das Flächenelement  $df$  wirkenden Kraft.

Wir zeigen im Folgenden, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Dazu bestimmen wir das auf ein Teilvolumen des Körpers wirkende Drehmoment  $\vec{D}$ . Seine erste Komponente ist

$$\begin{aligned} D_1 &= \int (x_2 F_3 - x_3 F_2) dV = \int \left( \frac{\partial \sigma_{3l}}{\partial x_l} x_2 - \frac{\partial \sigma_{2l}}{\partial x_l} x_3 \right) dV \\ &= \int \frac{\partial (\sigma_{3l} x_2 - \sigma_{2l} x_3)}{\partial x_l} dV - \int \left( \sigma_{3l} \frac{\partial x_2}{\partial x_l} - \sigma_{2l} \frac{\partial x_3}{\partial x_l} \right) dV \\ &= \oint (\sigma_{3l} x_2 - \sigma_{2l} x_3) df_l - \int (\sigma_{32} - \sigma_{23}) dV. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da das Drehmoment nur an der Oberfläche des betrachteten Volumens angreifen kann, muss der zweite Term verschwinden. Für die anderen beiden Komponenten des Drehmoments erhalten wir ein entsprechendes Ergebnis. Wir kommen also zum Ergebnis

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad (6.10)$$

d.h. der Spannungstensor ist symmetrisch.

Wenn der Körper gleichmäßig von allen Seiten komprimiert wird (hydrostatische Kompression), kann der Ausdruck für den Spannungstensor leicht hingeschrieben werden. Bei einer solchen Kompression wirkt auf jede Oberflächeneinheit des Körpers dem Betrag nach der gleiche Druck, der entlang der Normalen zur Oberfläche in das Innere des Körpervolumens gerichtet ist. Wenn man diesen Druck mit  $p$  bezeichnet, wirkt auf das Oberflächenelement  $df_i$  die Kraft  $-p df_i$ . Andererseits muss diese Kraft, durch den Spannungstensor ausgedrückt, die Form  $\sigma_{ik} df_k$  aufweisen. Also hat der Spannungstensor bei einer hydrostatischen Kompression folgendes Aussehen:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}. \quad (6.11)$$

Alle seine von Null verschiedenen Komponenten sind einfach dem Druck gleich.

Im allgemeinen Fall beliebiger Deformation sind auch die nichtdiagonalen Komponenten des Spannungstensors von Null verschieden. Dies bedeutet, dass auf jedes Oberflächenelement im Innern des Körpers neben der Normalkraft noch Tangenzialkräfte wirken, die parallele Oberflächenelemente relativ zueinander zu verschieben suchen.

Im Gleichgewichtszustand müssen sich die Kräfte der inneren Spannungen in jedem Volumenelement des Körpers kompensieren, d.h. es muss gelten  $F_i = 0$ . Die Gleichung für den Gleichgewichtszustand eines deformierten Körpers lautet somit

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (6.12)$$

Wenn sich der Körper im Schwerefeld befindet, muss die Summe aus den Kräften der inneren Spannungen und der Schwerkraft pro Einheitsvolumen,  $\vec{F} + \varrho \vec{g}$ , verschwinden. Die Gleichgewichtsbedingungen haben in diesem Fall die Form

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \varrho g_i = 0. \quad (6.13)$$

Wenn es unmittelbar an der Oberfläche angreifende äußere Kräfte gibt (sie sind gewöhnlich die Ursache der Deformation), so gehen sie in die Randbedingungen der Gleichgewichtsbedingung ein. Es sei  $\vec{K}$  die auf die Oberflächeneinheit des Körpers wirkende äußere Kraft, so dass auf das Oberflächenelement  $df$  die Kraft  $\vec{K} df$  wirkt. Im Gleichgewicht muss diese durch die Kraft  $-\sigma_{ik} df_k$ , welche auf das gleiche Oberflächenelement infolge der inneren Spannungen wirkt, kompensiert werden. Es muss daher gelten

$$K_i df - \sigma_{ik} df_k = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man für  $df_k$  den Ausdruck  $df_k = n_k df$  einsetzt ( $\vec{n}$  ist der Einheitsvektor der äußeren Normalen zur Oberfläche),

$$\sigma_{ik} n_k = K_i. \quad (6.14)$$

Das ist die Bedingung, die auf der gesamten Oberfläche des Körpers im Gleichgewichtszustand erfüllt sein muss.

### 6.3 Deformationsenergie und Hookesches Gesetz

In diesem Teilkapitel berechnen wir einen Zusammenhang zwischen einer Deformation und den dadurch auftretenden inneren Spannungen. Wir gehen wieder davon aus, dass die Deformation klein ist, so dass wir in Potenzen des Verzerrungstensors entwickeln können. Zunächst berechnen wir die Energie einer Deformation. Der Körper ändert seine innere Energie dadurch, dass durch die außen angreifenden Kräfte bei der Deformation Arbeit verrichtet wird. Wir bezeichnen mit  $\delta EdV$  die Änderung der inneren Energie in einem kleinen Teilvolumen  $dV$  des Körpers. Wir gehen weiterhin davon aus, dass die Energieänderung unabhängig von der Geschwindigkeit der Deformation ist, so dass wir eine

quasistatische (also unendlich langsame) Deformation annehmen dürfen zur Berechnung der Energieänderung. Dann ist der Körper zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht, und es gilt die Gleichung (6.12) im Inneren des Körpers und (6.14) an seiner Oberfläche. Da die Kräfte an der Oberfläche angreifen, erhalten wir damit den folgenden Ausdruck für die Energieänderung des Körpers

$$\begin{aligned}\int \delta E dV &= \oint K_i \delta u_i df = \oint \sigma_{ik} \delta u_i df_k \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \delta u_i) dV = \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV \\ &= \frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV = \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Beim Übergang zur letzten Zeile haben wir die Symmetrie des Spannungstensors ausgenutzt. Also lautet der Zusammenhang zwischen der Änderung der inneren Energie und der Deformation

$$dE = \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (6.16)$$

Dieses Ergebnis gilt, solange bei der Deformation keine Wärme zwischen den verschiedenen Teilen des Körpers fließt, also für eine adiabatische Deformation. Wenn Wärme fließt, müssen wir auf der rechten Seite den aus der Thermodynamik bekannten Term  $TdS$  addieren, wobei  $S$  die Entropie (pro Volumen) ist. Wenn der Körper immer auf konstanter Temperatur bleibt, beschreibt (6.16) nicht die Änderung der inneren Energie, sondern die Änderung der freien Energie  $dF = d(E - TS)$ . Im folgenden nehmen wir an, dass die Temperatur konstant ist und verwenden die freie Energie. Also gilt

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}. \quad (6.17)$$

Dieses und alle folgenden Ergebnisse können wir auf adiabatische Prozesse anwenden, wenn wir überall die freie Energie durch die innere Energie ersetzen und alle Module bei konstanter Entropie statt bei konstanter Temperatur definieren.

Um einen Zusammenhang zwischen der freien Energie  $F$  und der Deformation zu bekommen, entwickeln wir  $F$  in Potenzen der  $u_{ik}$ . Da wir annehmen, dass die Deformationen klein sind, genügt es, die führenden Terme dieser Entwicklung zu berücksichtigen. Wir machen also den Ansatz

$$F = F_0 + a_{ik} u_{ik} + b_{ijkl} u_{ik} u_{jl}$$

mit Entwicklungskoeffizienten  $a_{ik}$  und  $b_{ijkl}$ . Die meisten dieser Koeffizienten verschwinden. Wegen

$$a_{ik} = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right|_{\{u_{lm}\}=0} = \sigma_{ik}|_{\{u_{lm}\}=0} = 0$$

verschwinden die linearen Terme. Wir betrachten ein isotropes Material, in dem also alle Richtungen gleichberechtigt sind. Von den quadratischen Termen bleiben dann nur diejenigen, die unter einem Wechsel des Koordinatensystems invariant sind. (Für Kristalle

werden die folgenden Ausdrücke komplizierter.) Es gibt nur zwei solche skalaren Terme zweiter Ordnung. Zunächst ist die Spur  $u_{ii}$  des Verzerrungstensors invariant unter Koordinatentransformationen, und folglich auch ihr Quadrat  $u_{ii}^2$ . Außerdem ist auch die Spur des Quadrats des Verzerrungstensors invariant unter Koordinatentransformationen, also der Ausdruck  $u_{ik}u_{ki} = u_{ik}^2$ . Wir erhalten somit den Ausdruck

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \quad (6.18)$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für die freie Energie eines deformierten isotropen Körpers. Die Größen  $\lambda$  und  $\mu$  nennt man *Lamé-Koeffizienten*. Unter Verwendung der Beziehung (6.17) erhalten wir daraus den folgenden Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor:

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik} + \lambda u_{ll}\delta_{ik}.$$

Statt der Lamé-Koeffizienten werden meist der Kompressions- und der Schermodul verwendet, so dass wir den Ausdruck für  $F$  im Folgenden auf diese beiden Parameter umschreiben. Eine reine Scherung ist eine Deformation ohne Volumenänderung, und die Spur des Verzerrungstensors verschwindet daher bei einer reinen Scherung. Der umgekehrte Fall ist eine mit einer Volumenänderung verbundene Deformation, bei der der Körper seine Form beibehält. Dabei wird der Abstand zweier Punkt in jeder Richtung und überall im Körper um den gleichen Faktor geändert, und der Verzerrungstensor lautet  $u_{ik} = \text{const} \cdot \delta_{ik}$ , er ist also proportional zur Einheitsmatrix. Wir haben eine solche Deformation schon unter dem Namen hydrostatische Kompression kennengelernt. Man nennt sie auch *homogene Dilatation*.

Jede Deformation kann als Summe einer reinen Scherung und einer homogenen Dilatation dargestellt werden,

$$u_{ik} = \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}. \quad (6.19)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt eine reine Scherung dar, da die Summe seiner Diagonalelemente verschwindet ( $\delta_{ll} = 3$ ). Das zweite Glied beschreibt die homogene Dilatation. Wenn wir diese Zerlegung des Verzerrungstensors in den Ausdruck (6.18) einsetzen, erhalten wir

$$F = \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2. \quad (6.20)$$

Die Größen  $K$  und  $\mu$  nennt man *Kompressionsmodul* und *Torsionsmodul (Schubmodul, Schermodul)*.  $K$  hängt mit den Lamé-Koeffizienten über folgende Gleichung zusammen

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (6.21)$$

Der Kompressionsmodul und der Torsionsmodul sind stets positive Größen. Dies folgt daraus, dass die freie Energie im thermodynamischen Gleichgewicht ein Minimum hat. In Abwesenheit von äußeren Kräften muss dieses Minimum bei  $u_{ik} = 0$  liegen. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist die Positivität von  $K$  und  $\mu$ .

Zur Berechnung des Spannungstensors müssen wir die Ableitung  $\partial F/\partial u_{ik}$  auswerten. Hierzu schreiben wir das totale Differenzial

$$dF = Ku_{ll}du_{ll} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) d \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right).$$

Die Multiplikation der ersten Klammer im zweiten Glied mit  $\delta_{ik}$  liefert Null. Es bleibt daher der Ausdruck

$$dF = Ku_{ll}du_{ll} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) du_{ik} = \left[ Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right) \right] du_{ik}.$$

Hieraus folgt für den Spannungstensor

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right). \quad (6.22)$$

Dieser Ausdruck erlaubt die Bestimmung des Spannungstensors aus dem Verzerrungstensor im Fall isotroper fester Körper. Man sieht u.a., dass bei einer reinen Scherung oder einer reinen homogenen Dilatation die Beziehung zwischen den  $\sigma_{ik}$  und  $u_{ik}$  allein durch den Torsions- bzw. Kompressionsmodul bestimmt wird.

Wir können auch umgekehrt den Verzerrungstensor durch den Spannungstensor ausdrücken. Dazu benötigen wir die Summe der Diagonalelemente  $\sigma_{ii}$ . Das zweite Glied in (6.22) verschwindet bei der Summation, und wir haben  $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$  oder

$$u_{ii} = \frac{1}{3K}\sigma_{ii}. \quad (6.23)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (6.22) ein und bestimmen hieraus die  $u_{ik}$ :

$$u_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll} \right). \quad (6.24)$$

Aus Gleichung (6.23) ist ersichtlich, dass die relative Volumenänderung  $u_{ii}$  bei beliebiger Deformation eines isotropen Körpers nur von der Spur  $\sigma_{ii}$  des Spannungstensors abhängt. Bei hydrostatischer Kompression des Körpers hat der Spannungstensor die Form  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ , und es folgt

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \quad (6.25)$$

Wegen der Kleinheit der Deformation sind  $u_{ii}$  und  $K$  ebenfalls kleine Größen, und wir können das Verhältnis von relativer Volumenänderung zum Druck  $u_{ii}/p$  in der Form  $(1/V)(\partial V/\partial p)_T$  schreiben. Somit haben wir

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (6.26)$$

Dies ist die *Kompressibilität* des Körpers.

Nach (6.24) ist der Verzerrungstensor eine lineare Funktion des Spannungstensors. Die Deformation ist also proportional zu den angreifenden Kräften. Dieses bei kleinen Deformationen geltende Gesetz heißt *Hooke'sches Gesetz*.

## 6.4 Homogene Deformationen

Bei homogenen Deformationen ist der Verzerrungstensor im gesamten Volumen des Körpers konstant. Folglich ist auch der Spannungstensor im gesamten Volumen konstant. Wir betrachten in diesem Teilkapitel Körper, die Zylinderform haben. Sie sind längs der  $z$ -Achse orientiert, und ihr oberes und unteres Ende sind parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene. Am oberen und unteren Ende wird mit konstanter Kraft  $p$  pro Flächeneinheit gezogen, so dass der Körper gestreckt wird. Wir betrachten nacheinander zwei verschiedene Randbedingungen für die Seitenflächen. Zuerst betrachten wir den Fall, dass die Seitenflächen frei sind, d.h. dass keine Kraft auf sie wirkt. Anschließend betrachten wir den Fall, dass die Seitenflächen fixiert sind, z.B. weil sie an den Wänden eines Behälters kleben.

Wenn die Seitenflächen frei sind, ist dort  $\sigma_{ik}n_k = 0$ . Der Einheitsvektor  $\vec{n}$  steht senkrecht zur  $z$ -Achse, d.h. er besitzt nur die Komponenten  $n_x$  und  $n_y$ . Also ist  $\sigma_{ix} = \sigma_{iy} = 0$ . Die einzige von Null verschiedene Komponente ist also  $\sigma_{zz} = p$ . Daraus erhält man unter Verwendung von (6.24) den Verzerrungstensor. Die einzigen von Null verschiedenen Komponenten sind

$$u_{zz} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p \equiv \frac{p}{E} \quad (6.27)$$

und

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) p \equiv -\sigma u_{zz}. \quad (6.28)$$

Hier haben wir den *Elastizitätsmodul (Youngsche Zahl)*

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (6.29)$$

und den *Querkontraktionskoeffizienten (Poissonsche Zahl)*

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu} \quad (6.30)$$

eingeführt. Da  $K$  und  $\mu$  positiv sind, muss  $\sigma$  im Bereich  $[-1, 1/2]$  liegen. Allerdings sind Körper mit  $\sigma < 0$ , d.h. deren Querdimension sich bei einer longitudinalen Dehnung vergrößert, nicht bekannt.

Die relative Volumenänderung des Körpers nach seiner Streckung ist

$$u_{ii} = p \frac{1}{3K}. \quad (6.31)$$

Die freie Energie des gestreckten Körpers ist

$$F = \frac{1}{2} u_{zz} \sigma_{zz} = \frac{p^2}{2E}. \quad (6.32)$$

Im folgenden werden wir anstelle von  $K$  und  $\mu$ , wie üblich, die Koeffizienten  $E$  und  $\sigma$  benutzen. Die bisherigen allgemeinen Beziehungen lauten dann

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)}, \quad (6.33)$$

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left( u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}^2 \right), \quad (6.34)$$

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left( u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right), \quad (6.35)$$

$$u_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}]. \quad (6.36)$$

Als nächstes betrachten wir die Kompression des Zylinders bei festgehaltenen Seitenwänden. Da der Körper nur in  $z$ -Richtung deformiert wird, ist von allen Komponenten des Verzerrungstensors nur  $u_{zz}$  von Null verschieden. Daraus ergibt sich

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz}$$

und

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} u_{zz} = p$$

wobei  $p$  wieder die streckende Kraft pro Flächeneinheit ist. Wir erhalten also

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} p. \quad (6.37)$$

Die Spannungen in Querrichtung des Zylinders sind

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (6.38)$$

Schließlich erhalten wir für die freie Energie den Ausdruck

$$F = p^2 \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \quad (6.39)$$

## 6.5 Elastische Wellen im isotropen Medium

In einem elastischen Medium können sich Wellen ausbreiten. Die mit der Welle einhergehenden Dehnungen und Kontraktionen laufen i.A. so schnell ab, dass man sie als adiabatisch ansehen kann. Wir verstehen in diesem Teilkapitel die elastischen Koeffizienten  $E$  und  $\sigma$  daher als adiabatische Koeffizienten.

Um die Bewegungsgleichungen für ein elastisches Medium zu erhalten, muss die Kraft der inneren Spannungen dem Produkt aus Beschleunigung und Dichte gleichgesetzt werden,

$$\varrho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.40)$$

Wir müssen die rechte Seite durch den Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  ausdrücken. Zu diesem Zweck drücken wir den Spannungstensor durch den Verzerrungstensor aus und ersetzen

diesen durch (6.5):

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{u}_i &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} \\
&= \frac{E\sigma}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} \right) + \frac{E}{2(1+\sigma)} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \right) \\
&= \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} (2\sigma + 1 - 2\sigma).
\end{aligned}$$

Vektoriell geschrieben lautet diese Beziehung

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}). \quad (6.41)$$

Wir betrachten als erstes ebene Wellen. Mit dem Ansatz

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

erhalten wir

$$-\rho \omega^2 \vec{u}_0 = \frac{E}{2(1+\sigma)} (-k^2) \vec{u}_0 + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} (-k^2) (\vec{u}_0)_x \vec{e}_x.$$

Wenn  $\vec{u}_0$  parallel zur Ausbreitungsrichtung liegt, erhalten wir daraus

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} \equiv c_l^2, \quad (6.42)$$

und wenn  $\vec{u}_0$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung liegt, erhalten wir

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \equiv c_t^2. \quad (6.43)$$

Longitudinale und transversale Wellen haben also verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit. Wegen  $\sigma > 0$  ist

$$c_l > c_t \sqrt{2}$$

d.h. die longitudinale Welle breitet sich schneller aus als die transversale.

Auch allgemeine (d.h. nicht ebene) Wellen lassen sich in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil zerlegen, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit ausbreiten. Wir formen (6.41) um zu

$$\ddot{\vec{u}} = c_t^2 \Delta \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \quad (6.44)$$

und zerlegen  $\vec{u}$  in einen longitudinalen und transversalen Teil,  $\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$ , die den Beziehungen

$$\nabla \cdot \vec{u}_t = 0 \quad (6.45)$$

und

$$\nabla \times \vec{u}_l = 0 \quad (6.46)$$

genügen. Eingesetzt in (6.44) führt dies auf

$$\ddot{\vec{u}}_l + \ddot{\vec{u}}_t = c_t^2 \Delta (\vec{u}_l + \vec{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_l). \quad (6.47)$$

Wenn wir darauf die Divergenz anwenden, erhalten wir

$$\nabla \cdot (\ddot{\vec{u}}_l - c_l^2 \Delta \vec{u}_l) = 0.$$

Da auch die Rotation des Ausdrucks in der Klammer verschwindet, muss der Ausdruck in der Klammer selbst verschwinden, und wir erhalten für den longitudinalen Anteil die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \vec{u}_l = 0. \quad (6.48)$$

Analog wenden wir auf Gleichung (6.47) die Rotation an und erhalten

$$\nabla \times (\ddot{\vec{u}}_t - c_t^2 \Delta \vec{u}_t) = 0.$$

Da die Divergenz des Ausdrucks in der Klammer verschwindet, muss der Ausdruck in der Klammer selbst verschwinden, und wir erhalten für den transversalen Anteil die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \vec{u}_t = 0. \quad (6.49)$$

## 6.6 Oberflächenwellen

Als nächstes berechnen wir Oberflächenwellen. Dies sind Wellen, die sich in der Nähe der Körperoberfläche ausbreiten, ohne in das Innere des Körpers einzudringen. Wir beginnen mit der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{u} = 0, \quad (6.50)$$

wobei  $\vec{u}$  eine transversale oder eine longitudinale Welle bezeichnet, und  $c$  die entsprechende Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die tatsächliche Welle ist eine Linearkombination einer transversalen und einer longitudinalen Welle. Wenn wir die allgemeine Lösung für die transversale und longitudinale Welle gefunden haben, müssen wir sie so kombinieren, dass auch die Randbedingung an der Oberfläche erfüllt ist.

Die Oberfläche sei in der Ebene  $z = 0$ , und das Körperinnere sei bei  $z < 0$ . Wir machen den Ansatz einer monochromatischen Welle, die sich in  $x$ -Richtung ausbreitet,

$$\vec{u} = e^{i(kx - \omega t)} \vec{f}(z).$$

Wir werden später sehen, dass die Randbedingung eine Beziehung zwischen  $k$  und  $\omega$  vorgibt. Durch Einsetzen in die Wellengleichung erhalten wir

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{f}(z).$$

Für  $k^2 < \omega^2/c^2$  ist die Lösung periodisch in  $z$  und kann daher keine Oberflächenwelle beschreiben. Wir fordern daher  $k^2 > \omega^2/c^2$ . Dann erhalten wir für  $\vec{f}$  Lösungen der Form

$$\vec{f}(z) = \text{const} \cdot e^{z\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}}.$$

(Die Lösungen mit einem Minuszeichen im Exponenten scheiden aus, da sie im Körper anwachsen statt abklingen). Wir setzen  $\kappa = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$  und erhalten damit für  $\vec{u}$

$$\vec{u} = e^{i(kx - \omega t)} e^{\kappa z}. \quad (6.51)$$

Die transversale und die longitudinale Welle haben hierbei verschiedene Werte für  $\kappa$ . Im Folgenden bestimmen wir diejenige Linearkombination einer transversalen und einer longitudinalen Welle, die die Randbedingung an der Oberfläche erfüllt. An der freien Oberfläche muss  $\sigma_{ik} n_k = 0$  sein. Da  $\vec{n}$  in  $z$ -Richtung zeigt, folgt hieraus

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

und daraus ergibt sich

$$u_{xz} = 0, \quad u_{yz} = 0, \quad \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \sigma)u_{zz} = 0. \quad (6.52)$$

Da keine der Größen von  $y$  abhängt, liefert die zweite Gleichung

$$u_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

woraus wir mit Hilfe von (6.51) erhalten

$$u_y = 0. \quad (6.53)$$

Der Verschiebungsvektor der Oberflächenwelle liegt somit in einer Ebene, die zur Oberfläche orthogonal ist.

Die Divergenz des “Transversalanteils” der Welle,  $\vec{u}_t$ , muss verschwinden,

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

Wenn wir (6.51) einsetzen, wird daraus

$$iku_{tx} + \kappa_t u_{tz} = 0.$$

Wir können daher schreiben

$$u_{tx} = \kappa_t a e^{ikx - \kappa_t z - i\omega t}, \quad u_{tz} = -ik a e^{ikx - \kappa_t z - i\omega t} \quad (6.54)$$

mit einer Konstanten  $a$ .

Die Rotation des “Longitudinalanteils” der Welle,  $\vec{u}_l$ , muss verschwinden,

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0.$$

Wenn wir (6.51) einsetzen, wird daraus

$$iku_{lx} + \kappa_l u_{lx} = 0.$$

Wir können daher schreiben

$$u_{lx} = kbe^{ikx - \kappa_l z - i\omega t}, \quad u_{lz} = -i\kappa_l b e^{ikx - \kappa_l z - i\omega t} \quad (6.55)$$

mit einer Konstanten  $b$ .

Jetzt benützen wir die erste und dritte Randbedingung (6.52):

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad c_l^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \quad (6.56)$$

Hierin muss

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \quad u_z = u_{lz} + u_{tz}$$

eingesetzt werden. Wir erhalten dann die Bedingungen

$$a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_l = 0 \quad (6.57)$$

und

$$2ac_t^2\kappa_t k + b[c_l^2(\kappa_l^2 - k^2) + 2c_t^2k^2] = 0.$$

Die letzte Gleichung dividieren wir durch  $c_l^2$  und setzen in sie

$$\kappa_l^2 - k^2 = -\frac{\omega^2}{c_l^2} = (k^2 - \kappa_t^2)^2 \frac{c_t^2}{c_l^2}$$

ein. Sie erhält dann die Form

$$2a\kappa_t k + b(k^2 + \kappa_t^2) = 0. \quad (6.58)$$

Aus (6.57) und (6.58) können wir  $a$  und  $b$  eliminieren und erhalten

$$(k^2 + \kappa_t^2)^2 = 4k^2\kappa_t\kappa_l$$

oder, wenn man diese Gleichung quadriert und  $\kappa_t$  und  $\kappa_l$  durch  $c_t$  und  $c_l$  ausdrückt

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \quad (6.59)$$

Aus dieser Gleichung erhält man eine Beziehung zwischen  $\omega$  und  $k$ . Wir machen den Ansatz

$$\omega = c_t k \xi \quad (6.60)$$

und erhalten für  $\xi$  die Gleichung

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2 \left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \quad (6.61)$$

$\xi$  muss positiv, reell und  $< 1$  sein. Es gibt nur eine Wurzel, die diesen Bedingungen genügt, so dass man zu jedem gegebenen  $c_t/c_l$  nur ein bestimmtes  $\xi$  erhält. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle ist dann  $c_t \xi$ , und das Amplitudenverhältnis des Transversalteils und des Longitudinalteils lässt sich durch  $\xi$  ausdrücken als

$$\frac{a}{b} = -\frac{2 - \xi^2}{2\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (6.62)$$

## 6.7 Longitudinalwellen in Stäben und Platten

Im Rest dieses Kapitels befassen wir uns mit Wellen in Stäben und Platten. Zunächst betrachten wir longitudinale Wellen, bei denen der Verschiebungsvektor in Richtung der Stabachse bzw. in der Plattenebene liegt. Im nächsten Abschnitt betrachten wir dann Biegewellen von Stäben, bei denen die Verschiebung senkrecht zur Stabachse ist.

Betrachten wir zunächst Longitudinalwellen in einem Stab. Die longitudinale (im Stabquerschnitt homogene) Deformation eines Stabes, auf dessen Seitenflächen keine äußeren Kräfte wirken, ist eine einfache Dehnung oder Kompression. Bei einer einfachen Dehnung ist nur die Komponente  $\sigma_{zz}$  des Spannungstensors von Null verschieden. (Die  $z$ -Achse liegt in der Stabachse.) Sie hängt mit dem Verzerrungstensor durch die Beziehung (6.27)

$$\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (6.63)$$

zusammen. Setzt man diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichung

$$\varrho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k}$$

ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\varrho}{E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (6.64)$$

Dies ist eine Wellengleichung, und aus ihr erhält man die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (6.65)$$

der Schwingung. Sie ist kleiner als die longitudinale Wellengeschwindigkeit (6.42) in unbegrenzten Medien. Dies liegt daran, dass im unbegrenzten Medium das Material bei Kompression in einer Richtung nicht in der dazu senkrechten Richtung ausweichen kann, was die Rückstellkraft und damit die Wellengeschwindigkeit größer macht.

Wir betrachten jetzt Longitudinalwellen in dünnen Platten. Die Platte sei in der  $x$ - $y$ -Ebene ausgedehnt. Auf der Ober- und Unterseite greifen keine Kräfte an, d.h.  $\sigma_{iz} = 0$ . Unter Verwendung der Gleichungen (6.35) und (6.36) können wir die folgenden Rechenschritte durchführen, um den Spannungstensor durch den Verzerrungstensor auszudrücken

$$\begin{aligned} u_{xz} &= u_{yz} = 0, \\ u_{xx} + u_{yy} &= \frac{1+\sigma}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{2\sigma}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1-\sigma}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2}(u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2}(u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma}u_{xy}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\varrho \ddot{u}_x &= \frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}, \\ \varrho \ddot{u}_y &= \frac{\partial \sigma_{yk}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1-\sigma)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (6.66)$$

Wir untersuchen eine “ebene” Welle in Richtung der  $x$ -Achse, d.h. eine solche Welle, in der die Deformation nur von  $x$  abhängt. Die Gleichungen (6.66) vereinfachen sich dann sehr und nehmen die folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\varrho(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \quad (6.67)$$

Wir haben somit wiederum einfache Wellengleichungen. Die Koeffizienten darin sind für  $u_x$  und  $u_y$  verschieden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle mit parallelen Schwingungen zur Ausbreitungsrichtung ist

$$\sqrt{\frac{E}{\varrho(1-\sigma)^2}}. \quad (6.68)$$

Dagegen ist die Geschwindigkeit der Welle ( $u_y$ ) mit orthogonalen Schwingungen (die aber in der Plattenebene liegen) der Geschwindigkeit  $c_t$  der Transversalwellen im unbegrenzten Medium gleich.

Wir sehen also, dass die “Longitudinalwellen” in Stäben und Platten den gleichen Charakter besitzen wie Wellen im unbegrenzten Medium und sich nur durch die Geschwindigkeit unterscheiden, welche nach wie vor nicht von der Frequenz abhängt.

## 6.8 Biegewellen in Stäben

Wir betrachten einen in  $z$ -Richtung orientierten Stab, der transversale Schwingungen in  $x$ -Richtung ausführt. Dadurch wird der Stab gebogen. Sei  $X(z)$  die Auslenkung der Stabachse aus ihrer Ruhelage, und sei  $R$  der durch die transversale Biegung entstandene Krümmungsradius an einer gegebenen Stelle. Ausgedrückt durch  $X$  ist er

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}. \quad (6.69)$$

Wir betrachten Stäbe, die bei der Biegeschwingung nur wenig deformiert werden, so dass ihre Orientierung nur wenig von der  $z$ -Achse abweicht. Dann können wir  $z$  immer auch als Koordinate längs der Stabachse auffassen, so wie wir das in der letzten Formel gemacht haben.

Sei  $x$  die Koordinate in Richtung  $X$  in einem in der Stabachse verankerten Koordinatensystem. Der Abstand  $dz$  zweier parallel zur Stabachse infinitesimal benachbarter Punkte ändert sich bei der Deformation zu

$$dz' = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz, \quad (6.70)$$

und damit ist

$$u_{zz} = \frac{x}{R} \quad (6.71)$$

(denn  $u_{zz}$  ist die relative Änderung des Abstands in  $z$ -Richtung) und

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R} E. \quad (6.72)$$

Wir suchen nun einen Ausdruck für die Kraft, die auf ein gegebenes Stabelement in  $X$ -Richtung wirkt. Diese Kraft kommt daher, dass die Dehnung  $u_{zz}$  für verschiedene Werte von  $x$  verschieden ist. Es greift daher ein *Biegemoment*

$$M_y = - \int x \sigma_{zz} df = - \frac{E}{R} \int x^2 df = - \frac{EI_y}{R} \quad (6.73)$$

an der Querschnittsfläche  $f$  an.  $M_y$  ist das Drehmoment der inneren Spannungskräfte, die im gegebenen Querschnitt wirken, und es zeigt bei unserer Wahl der Achsen ( $z$  in Richtung des Stabs und  $x$  in Richtung der Auslenkung) in negativer  $y$ -Richtung. Dabei ist  $I_y$  das Trägheitsmoment der betrachteten Querschnittsfläche. Nun betrachten wir eine infinitesimal dünne Scheibe der Dicke  $dz$  des Stabs, die durch zwei Querschnittsflächen begrenzt wird. Das insgesamt an der Oberfläche angreifende Biegemoment ist dann

$$M_y(z + dz) - M_y(z) = \frac{\partial M_y}{\partial z} dz, \quad (6.74)$$

wobei das Minuszeichen des zweiten Terms daher kommt, dass die linke Oberfläche der Scheibe in Richtung  $-z$  orientiert ist. Das Biegemoment  $d\vec{M}$  können wir aber auch in der Form

$$d\vec{M} = d\vec{z} \times \vec{F} \quad (6.75)$$

schreiben, wobei  $\vec{F}$  die Kraft ist, die auf die rechte Oberfläche der Scheibe in Richtung  $x$  und auf die linke Oberfläche in Richtung  $-x$  wirkt und damit das Drehmoment verursacht. Wir dividieren beide Seiten durch  $dz$  und erhalten

$$\frac{dM_y}{dz} = F_x, \quad (6.76)$$

und durch nochmaliges Differenzieren wird dies zu

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = \frac{dF_x}{dz}. \quad (6.77)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist das Negative der Kraft  $\varrho f \ddot{x}$  pro Längeneinheit, die den Stab in  $x$ -Richtung auslenkt, so dass wir unter Verwendung von (6.73) und (6.69) die Bewegungsgleichung

$$\varrho f \ddot{X} = -EI_y \frac{d^4 X}{dz^4} \quad (6.78)$$

bekommen. Die Lösung erhalten wir wieder mit dem Ansatz

$$X = X_0 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (6.79)$$

Dies führt auf die Dispersionsrelation

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_y}{\varrho f}} k^2 \quad (6.80)$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{d\omega}{dk} = 2\sqrt{\frac{EI_y}{\varrho f}} k. \quad (6.81)$$