

Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik

Teil 2: Elektrodynamik

Vorlesung an der Ruhruniversität Bochum

K.-U. Riemann

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

| | |
|--|---|
| 1.1 Historische Notizen | 1 |
| Elektrizität und Magnetismus | |
| 1.2 Fernwirkung und Felder | 1 |
| Skalare - und Vektorfelder | |
| 1.3 Das elektrische und das magnetische Feld | 3 |
| Die LORENTZkraft | |
| Superposition der Kräfte und Felder | |
| Raumladungen, Ströme und Volumenkräfte | |
| Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter | |
| 1.4 Das elektromagnetische Einheitensystem | 5 |

2. Die Grundgesetze der Elektrodynamik

| | |
|--|----|
| 2.1 Das COULOMBSche Gesetz | 7 |
| Vergleich mit anderen Naturkräften | |
| Kraftfluß und dielektrische Verschiebung | |
| Kraft zwischen Magnetpolen | |
| Quellfreiheit des Magnetfeldes | |
| 2.2 Das AMPÈRESche Gesetz | 10 |
| Zirkulation eines Feldes | |
| Magnetfeld und magnetische Erregung | |
| 2.3 Das FARADAYSche Induktionsgesetz | 11 |
| Zusammenhang mit der LORENTZkraft | |
| Notwendige Konsequenz oder neues Naturgesetz? | |
| 2.4 GAUSSscher Satz und Quellendichte | 14 |
| Der Nabla-Operator | |
| Kontinuitätsgleichungen | |
| 2.5 STOKEScher Satz und Wirbeldichte | 17 |
| 2.6 Die MAXWELL-Gleichungen | 19 |
| MAXWELLS Verschiebungsstrom | |
| Die div-Gleichungen als Anfangsbedingungen | |
| Elektromagnetische Wellen und Lichtgeschwindigkeit | |

| | | |
|---|---|----|
| 2.7 | Elektromagnetische Felder in ruhender Materie Frei verfügbare und abhängige Ladungen und Ströme Polarisation und Magnetisierung Diskussion der Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{H} Das Modell der Materialkonstanten ε_0 , μ_0 und σ Voraussetzungen und Grenzen des Modells | 23 |
| 2.8 | Randbedingungen Stetigkeit und Sprungbedingungen an Grenzflächen | 29 |
| 2.9 | Die Energie des elektromagnetischen Feldes POYNTINGvektor und POYNTINGScher Satz Feldenergie und Energietransport Energiefluß in einem Leiter, JOULSCHE WÄRME Energiefluß in einer elektromagnetischen Welle POYNTINGScher Satz in Materie, Feldfluktuationen Feldenergie und Kraftwirkung | 33 |
| 3. Die elektrodynamischen Potentiale | | |
| 3.1 | Vektorfelder und Potentiale Zerlegung eines Vektorfeldes in quell- bzw. wirbelfreie Anteile Skalares - und Vektorpotential | 42 |
| 3.2 | Die Potentiale der Elektro- und Magnetostatik Das skalare Potential der Elektrostatik Das magnetische Vektorpotential einer beliebigen Stromverteilung Stromschleifen und BIOT-SAVARTSches Gesetz POISSON- und LAPLACEgleichung, Randbedingungen | 46 |
| 3.3 | Das skalare magnetische Potential Mehrdeutigkeit und AMPÈRESches Gesetz | 51 |
| 3.4 | Die allgemeinen Potentiale der Elektrodynamik Eichtransformationen, COULOMB- und LORENTZzeichnung | 55 |
| 3.5 | Die retardierten Potentiale Anvancierung, Retardierung und Kausalität Die Potentiale in der LORENTZzeichnung LORENTZzeichnung und Kontinuitätsgleichung | 58 |
| 3.6 | Der HERTZsche Dipol Das Vektorpotential einer langsam bewegten Punktladung HERTZvektor und elektrodynamische Potentiale Das Strahlungsfeld einer beschleunigten Ladung Abstrahlung und Bewegungsgleichungen, Runaway-Lösungen Strahlungsdämpfung und natürliche Linienbreite | 61 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.7 | Felder oder Potentiale? | 66 |
| | Potentiale im klassischen LAGRANGE- und HAMILTONformalismus | |
| | SCHRÖDINGERgleichung und HAMILTONfunktion | |
| | Das BOHM-AHARANOV-Experiment | |

4. Spezielle Probleme des statischen Feldes

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Das Selbstkonsistenzproblem | 69 |
| | Randbedingungen als Selbstkonsistenzproblem | |
| 4.2 | Randbedingungen der POISSONGleichung | 70 |
| | DIRICHLET-, NEUMANN- und gemischte Randbedingungen (Die GREENSche Funktion) | |
| 4.3 | Die Spiegelung an einer Ebene | 71 |
| | Der Halbraum vor einer ebenen Leiteroberfläche | |
| | Dielektrische oder magnetische Halbräume | |
| | Mehrfach-Spiegelungen | |
| 4.4 | Die Spiegelung an einer Kugel | 75 |
| | Invertiertes Potential | |
| | Punktladung vor einer geerdeten Kugel | |
| | Punktladung vor einer isolierten Kugel | |
| | Die leitende Kugel im homogenen Feld | |
| | Die dielektrische Kugel im homogenen Feld | |
| 4.5 | Leiter im elektrostatischen Feld | 81 |
| | THOMPSONs Theorem | |
| | Kapazitätskoeffizienten | |
| | Kondensatoren und Kapazität | |
| 4.6 | Multipole und Multipolentwicklung | 85 |
| | Dipol und Dipolpotential | |
| | Quadrupolmoment und Multipole | |
| | Die Multipolentwicklung | |
| | Der Quadrupoltensor | |
| | Multipol- und Kugelfunktionsentwicklung | |
| | Azimutale Symmetrie und LEGENDREpolynome | |
| | Das magnetische Dipolmoment einer Stromschleife | |
| 4.7 | Die magnetische Dipolnäherung | 92 |
| | Das Vektorpotential in Dipolnäherung | |
| | Das Dipolmoment einer beliebigen Stromverteilung | |
| | Magnetisches Dipolmoment und Drehimpuls | |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.8 | Kraftwirkungen auf einen Dipol | 94 |
| | Kraft auf einen Dipol im inhomogenen Feld | |
| | Die potentiell Energie eines Dipols im Feld | |
| | Das Drehmoment auf einen Dipol im Feld | |

| | | |
|-----|--|----|
| 4.9 | Das EARNshaw-Theorem | 95 |
| | Die Instabilität des statischen Gleichgewichts | |
| | Dynamische “Gleichgewichte” | |

5. Spezielle Probleme des quasistationären Feldes

| | | |
|-----|--|----|
| 5.1 | Die Relaxation des statischen Feldes | 97 |
| | Das zeitliche Abklingen von Raumladungen im leitenden Medium | |

| | | |
|-----|---|----|
| 5.2 | Kondensatoren und Widerstände | 98 |
| | Allgemeine Ähnlichkeitsgesetze | |
| | Plattenkondensator und Widerstand eines Drahtes | |
| | Kugelkondensator und Erdungswiderstand | |
| | Die Zeitkonstante der Kondensatorentladung | |

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.3 | Induktionskoeffizienten und Induktivität | 100 |
| | Die NEUMANNformel | |
| | Selbstinduktion | |
| | Induktionskoeffizienten und Feldenergie | |

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.4 | Quasistationäre Stromkreise | 103 |
| | Der unverzweigte Stromkreis | |
| | Die elektromotorische Kraft | |
| | Stromverzweigungen und Parallelschaltung von Widerständen | |
| | Die Kondensatorentladung | |
| | Die Stromrelaxation in einem induktiven Stromkreis | |
| | Der elektrische Schwingkreis | |
| | Wechselstrom und komplexe Widerstände | |

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.5 | Die Telegraphengleichung | 107 |
| | Die ideale Telegraphengleichung | |
| | Die Lichtgeschwindigkeit als quasistationäre Grenzgeschwindigkeit | |
| | Der Wellenwiderstand | |
| | Das ideale Koaxialkabel | |
| | Dispersion durch Dissipation | |
| | Die dispersionsfreie Leitung, PUPINspulen | |

| | | |
|-----|---|-----|
| 5.6 | Der Skineffekt | 112 |
| | Die “Diffusion” des Feldes in einen Leiter | |
| | Vergleich mit der Wärmeleitung bei periodischen Vorgängen | |

6. Elektromagnetische Wellen

| | | |
|-----|--|-----|
| 6.1 | Rückblick | 116 |
| 6.2 | Die Wellengleichung im Medium mit endlicher Leitfähigkeit Konkurrenz von Leitungs- und Verschiebungsstrom Die Lichtgeschwindigkeit in Materie | 116 |
| 6.3 | Ebene Wellen im homogenen Medium Der normal-mode-Ansatz Die Dispersionsgleichung Leitfähigkeit, Dämpfung und Phasenverschiebung | 118 |
| 6.4 | Linear und zirkular polarisierte Wellen Unpolarisiertes Licht als statistisches Gemisch | 120 |
| 6.5 | Reflexion und Brechung Allgemeine Anknüpfungsbedingungen an ebenen Grenzflächen Reflexionsgesetz und SNELLIUSSches Brechungsgesetz Die speziellen Grenzbedingungen der Elektrodynamik FRESNELformeln, Polarisierung und BREWSTERwinkel | 122 |

7. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

| | | |
|-----|---|-----|
| 7.1 | LORENTZtransformationen und MINKOWSKIraum GALILEITransformation und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit MINKOWSKIraum und Vierervektoren Spezielle und allgemeine LORENTZtransformation Kovariante Formulierung einer Beziehung | 127 |
| 7.2 | Viererpotential und Viererstromdichte LORENTZgleichung und Kontinuitätsgleichung Kovariante Formulierung der Potentiale | 131 |
| 7.3 | Der Feldstärketensor Kovariante Formulierung der MAXWELLgleichungen | 133 |
| 7.4 | Die Transformation der Felder Bezugssysteme und LORENTZkraft Die LORENTZKRAFT als Modell für die MINKOWSKIKraft Die Invarianten des elektromagnetischen Feldes | 135 |

| | | |
|--|--------------------------|-----|
| | Literaturhinweise | 132 |
|--|--------------------------|-----|

1 Einführung

1.1 Historische Notizen

Bereits die Namensgebung deutet darauf hin, daß elektrische und magnetische Erscheinungen seit der Antike bekannt sind: *Elektron* (ἤλεκτρον) ist das griechische Wort für Bernstein (Reibungselektrizität), und der Name *Magnet* geht auf den Magnetstein (μάγνης λίθος) zurück, den man in der thessalischen Landschaft Magnesia fand.

Wegen der Fernwirkungskräfte, die auch Materie durchdringen, ging von solchen Erscheinungen immer ein gewisser magischer Zauber aus – der auch heute noch nicht restlos erloschen ist. Als in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die systematische Erforschung (COULOMB 1785) begann, war von den inneren Zusammenhängen zwischen Elektrizität und Magnetismus natürlich noch nichts bekannt. Nicht einmal die Identität von “ruhender” (Elektrostatik, $\sim 10^4$ V, 10^{-7} Cb) und “fließender” (galvanische Ströme, ~ 1 V, 1 Cb) Elektrizität lag klar auf der Hand. Die Entdeckung der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes (ØRSTEDT 1820, AMPÈRE 1820–1836) stellte einen wesentlichen Durchbruch dar. Schon bald darauf fand FARADAY das Induktionsgesetz (1831) und legte mit seinen “*lines of force*” den Grundstein für eine *Feldtheorie* des Elektromagnetismus. Diese wurde von MAXWELL konsequent weiterentwickelt und erhielt 1865 mit den MAXWELLSchen Gleichungen ein konsistentes abgeschlossenes Fundament. MAXWELLS berühmte “Treatise” (1873) wurde damals aber von nur wenigen Physikern verstanden, und erst der experimentelle Nachweis (HERTZ 1888) der vorausgesagten elektromagnetischen Wellen verhalf der Theorie endgültig zum Durchbruch.

1.2 Fernwirkung und Felder

Elektrische Ladungen oder Magnetpole zeigen einen Effekt, den wir auch von der Gravitation her kennen: Sie üben auf “Distanz” Kräfte aufeinander aus. Diese Erscheinung ist uns bei der Schwerkraft so vertraut, daß wir sie fast für selbstverständlich halten. Dagegen erscheint die Fernwirkung zwischen elektrischen Ladungen oder Magnetpolen doch in gewisser Weise als Mysterium: Woran “merkt” eine elektrische Ladung, daß sich in der Umgebung eine zweite befindet, und wodurch “spürt” ein Nagel auf dem Tisch den Magneten unter dem Tisch?

Aufbauend auf der gedanklichen Vorarbeit von FARADAY und MAXWELL lehnen wir heute die Vorstellung der *Fernwirkung* ab und führen die Kraftwirkung auf das *lokale Feld* am Ort der (Test-)Ladung zurück. Dieses *Feld* hat seine Ursache in der *entfernten* zweiten Ladung (und natürlich umgekehrt). In sehr weit gefaßter Analogie können wir die Kräfte im elektromagnetischen Feld mit den Kräften in

einer strömenden Flüssigkeit vergleichen, wobei die “Strömung” von der zweiten Ladung ausgeht. Man könnte in dieser gedanklichen Konstruktion einen inhaltsleeren dialektischen Kunstgriff sehen, wenn es keinen *dynamischen* Aspekt gäbe: Wir wissen heute nämlich, daß sich die elektrischen und magnetischen Kräfte *nicht* instantan einstellen, sondern daß eine gewisse Zeit benötigt wird, die Felder *aufzubauen*¹.

Mit der Einführung elektrischer und magnetischer Felder ist das Geheimnis der Wirkung in die Ferne entschleiert – allerdings zu einem hohen Preis²: Der leere Raum, das Vakuum, ist nicht ein strukturloses “Nichts”, sondern kann bestimmte Eigenschaften aufweisen, die bestimmte Wirkungen zeigen, es wird zum “Träger” elektromagnetischer Felder.

Was *ist* denn nun so ein elektrisches oder magnetisches Feld? Wie verändert es das Vakuum? Da wir es nicht wissen, wählen wir einen pragmatischen Standpunkt und benutzen elektrische und magnetische Felder als *abstrakte* Rechengrößen.

So abstrakt gesehen verstehen wir unter einem “*Feld*” generell eine Funktion $f(\mathbf{r}, t)$, die jeden Punkt \mathbf{r} eines Gebiets (des R_3) einen eindeutigen Funktionswert f zuweist und ein “vernünftiges” Verhalten gegenüber orthogonalen Transformation, also Drehungen des Koordinatensystems, aufweist:

- Ein **skalares Feld** $a(\mathbf{r}, t)$ ist eine (i. a. reelwertige) Funktion, die gegenüber orthogonalen Transformationen invariant ist.
- Ein **Vektorfeld** $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ ist eine Vektorfunktion, die sich bei orthogonalen Transformationen wie der Radiusvektor \mathbf{r} transformiert.

(Man beachte, daß eine Komponente – etwa $a_3(\mathbf{r}, t)$ – eines Vektorfeldes *kein* skalares Feld bildet.)

Beispiele für skalare- und Vektorfelder (im R_2) kennen wir von der Wetterkarte: Temperaturverteilung $T(\mathbf{r})$ und Luftdruck $p(\mathbf{r})$ sind Beispiele für skalare Felder. Dagegen wird die Windgeschwindigkeit durch ein Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ beschrieben. Die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ in einer Flüssigkeit werden wir häufig benutzen, um uns Eigenschaften der Vektorfelder anschaulich vorzustellen. Aus diesem Bild können wir verstehen, daß die Strömung – also das Feld – von *Quellen* und *Wirbeln* verursacht wird. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik beschreiben die Quellen und Wirbel der Vektorfelder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (elektrisches Feld) und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (Magnetfeld).

¹Dabei treten elektrische und magnetische Felder *immer* gekoppelt auf.

²“Lehrsatz der Erhaltung der Problematik”.

1.3 Das elektrische und das magnetische Feld

Obwohl die Anziehung zwischen Magnet und Nagel zunächst etwas anderes zu lehren scheint, sind wir überzeugt, daß sich alle elektromagnetischen Kräfte durch die Wirkung von elektrischen und magnetischen Feldern auf elektrische Ladungen beschreiben lassen: Die Summe unserer Erfahrungen wird durch die *LORENTZkraft*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

wiedergegeben, welche eine punktförmige Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, erfährt. \mathbf{E} ist das *lokale* elektrische und \mathbf{B} das magnetische Feld *am Ort* der Ladung. Genauer sollten wir sagen: “das von allen anderen Ladungen erzeugte elektrische und magnetische Feld”. Denn unsere “Testladung” q erzeugt selbst Felder, übt aber keine Kraft auf sich selbst aus. Mit dem Begriff “Testladung” deuten wir an, daß wir Gl. (1) als *Meßvorschrift* zur Bestimmung elektrischer und magnetischer Felder verstehen können.

Gl. (1) macht auch deutlich, wie eng elektrische und magnetische Felder miteinander verwoben sind: Im Gegensatz zu \mathbf{F} ist nämlich der Beitrag $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ *nicht* galileiinvariant. Beim Wechsel von einem zu einem anderen Inertialsystem muß also aus dem Magnetfeld ein zusätzliches elektrisches Feld “erzeugt” werden. Wir wollen hierauf im Augenblick noch nicht näher eingehen, sondern verstehen Gl. (1) naiv in unserem Laborsystem.

Eine fundamental wichtige Eigenschaft der elektrischen und magnetischen Felder wird durch Gl. (1) fast als Selbstverständlichkeit (Parallelogramm der Kräfte) suggeriert: Die **lineare Superponierbarkeit**. Damit meinen wir folgenden *Erfahrungssatz*:

- Erzeugt die Ladungsanordnung (1) die Felder \mathbf{E}_1 und \mathbf{B}_1 und die Ladungsanordnung (2) die Felder \mathbf{E}_2 und \mathbf{B}_2 , so erzeugt die kombinierte Ladungsanordnung (1) und (2) die Felder

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad \text{und} \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (3)$$

Die Kraftwirkungen der Ladungsanordnungen (1) und (2) auf unsere Testladung q überlagern sich also ungestört. Daß eine solche lineare Superposition keineswegs selbstverständlich ist, sieht man beispielsweise an der Magnetisierung ferromagnetischer Materialien (Sättigung!).

Wir wollen die Grundgleichung (1) auf räumlich ausgedehnte Ladungsverteilungen übertragen. Dazu greifen wir ein infinitesimales Volumenelement $\delta\tau$ heraus und definieren mit

$$\delta q = \varrho \delta \tau \quad (4)$$

eine *Raumladungsdichte* (Ladung/Volumen) ϱ . Wenn wir entsprechend durch

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{f} \delta \tau$$

eine Volumen-Kraftdichte \mathbf{f} definieren, erhalten wir aus (1)

$$\mathbf{f} = \varrho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

Dabei ist die “*Stromdichte*”

$$\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v} \quad (6)$$

ein Maß für den Transport von Ladung.

Wir wollen noch eine weitere Spezialisierung der Kraft im elektromagnetischen Feld angeben, die technisch und historisch von großer Bedeutung ist: Die magnetische Kraft auf einem stromdurchflossenen Leiter. Dazu schreiben wir

$$d\tau = A \, ds \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = \frac{J}{A} d\mathbf{s}^0.$$

Dabei bezeichnet A die Querschnittsfläche des Leiters, ds ein gerichtetes Welement in Richtung des Leiters und J den Strom im Leiter. Damit erhalten wir als Kraft den Leiter

$$d\mathbf{F} = J \, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \quad (7)$$

Damit haben wir die Kräfte auf Ladungen und Strömen, die wir im vorgegebenem elektromagnetischen Feld beobachten, umfassend formuliert. Die Aufgabe der Elektrodynamik liegt nun darin, die Felder aus der Ladungs- und Stromverteilung zu berechnen.

Bevor wir dieses Programm in Angriff nehmen, wollen wir uns kurz mit dem elektromagnetischen Einheitensystem befassen.

1.4 Das elektromagnetische Einheitensystem

Bei Gl. (1) sind wir völlig frei, die Einheiten festzulegen, in denen q gemessen wird. Mit dieser Festlegung werden dann gleichzeitig die Einheiten für \mathbf{E} und \mathbf{B} festgelegt.

Im internationalen Maßsystem (SI), auf das wir uns ausschließlich beziehen wollen, benutzt man als Ladungseinheit das COULOMB ($1 \text{ Cb} = 6.24145 \cdot 10^{18}$ Elementarladungen). Äquivalent kann man auch das AMPÉRE ($1 \text{ A} = 1 \text{ Cb/s}$) als Grundeinheit (für die *Stromstärke*) benutzen. Hinzu kommen natürlich die mechanischen Einheiten m, kg und s. Daher wird das SI auch als MKSA-System bezeichnet.

Aus Gl. (1) folgt damit die Maßeinheit

$$1 \frac{\text{N}}{\text{Cb}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{Cb m}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1 \text{ Volt/m, benannt nach VOLTA})$$

für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} . Die Dimensionen von \mathbf{E} und \mathbf{B} unterscheiden sich wegen der Geschwindigkeit v gerade um den Faktor s/m, Maßeinheit für die magnetische Feldstärke \mathbf{B} ist also

$$1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T} \quad (1 \text{ TESLA} = 10^4 \text{ GAUSS}).$$

Die oben eingeführte Einheit $1 \text{ V} = 1 \text{ J/Cb}$ bezeichnet eine Energie je Ladungseinheit und eignet sich besonders zur Formulierung der *Arbeit*, die das elektromagnetische Feld an einer (Test-)Ladung leistet. Da $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ immer senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht, leistet das Magnetfeld keine unmittelbare Arbeit. Bewegen wir also die Testladung von a nach b , so leistet das Feld die Arbeit

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -qV_{ab}.$$

Dabei bezeichnet man

$$V_{ab} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{8}$$

als die *Spannung* (längs des vorgegebenen Integrationsweges) von a nach b ; diese Spannung wird im Volt gemessen. Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß man von einer “Spannung zwischen den Punkten a und b ” nur dann reden kann, wenn das Integral wegunabhängig ist. In diesem Fall bezeichnet man V_{ab} auch als “Potentialdifferenz” – aber damit greifen wir weit vor.

Wir schließen diese kurze Erörterung mit der Angabe der abgeleiteten Einheiten 1 Cb/m^3 für die Raumladungsdichte ϱ und 1 A/m^2 für die elektrische Stromdichte \mathbf{j} . Weitere abgeleitete Einheiten wie

$$1 \text{ F} = 1 \text{ Cb/V} \text{ (1 Farad, Kapazität, benannt nach FARADAY)}$$

$$1 \text{ Hy} = 1 \text{ Vs/A} \text{ (1 HENRY, Induktivität) und}$$

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A} \text{ (1 OHM, Widerstand)}$$

werden wir an gegebener Stelle erläutern bzw. aus der Experimentalphysik als bekannt voraussetzen.

2 Die Grundgesetze der Elektrodynamik

2.1 Das COULOMBSche Gesetz

1785 untersuchte COULOMB mit der Drehwaage die Kraftwirkung zwischen zwei statisch geladenen Kugeln (0,1) und fand

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3}. \quad (9)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ den Radiusvektor, der von der Kugel 0 zur Kugel 1 zeigt. Entscheidend an diesem Gesetz ist, daß die Kraft – Additivität der Ladungen vorausgesetzt – zu beiden Ladungen q_0 und q_1 proportional und zum Quadrat des Abstands umgekehrt proportional ist. Die generelle Form von Gl. (8) stimmt daher mit NEWTONs Gravitationsgesetz überein, im Gegensatz zur Gravitation ist die elektrostatische Kraft jedoch bei *gleichnamigen* Ladungen abstoßend. Die “Dielektrizitätskonstante des Vakuums” ϵ_0 hängt von den Einheiten ab, in denen q_0 und q_1 gemessen werden, im SI gilt

$$\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Der Zahlwert von ϵ_0 entspricht $10^7/(4\pi c^2)$. Die “Kopplungskonstante” $e^2/4\pi\epsilon_0$ charakterisiert die Stärke der elektrostatischen Wechselwirkung (wobei e die Elementarladung bezeichnet). Wenn wir die elektrostatische Wechselwirkungsenergie

$$W_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_c}$$

mit der typischen Bindungsenergie

$$W_K = \hbar\omega_c = \hbar \frac{c}{r_c}$$

der Kernkraft vergleichen, erhalten wir das Verhältnis

$$\frac{W_e}{W_K} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \alpha \approx \frac{1}{137}. \quad (10)$$

(α ist die SOMMERFELDSche “Feinstrukturkonstante”.) W_e ist also *kleiner* als W_K , aber doch bereits so weit *vergleichbar*, daß es bei schweren Kernen zu einer echten Konkurrenz kommt.

Vergleichen wir W_e dagegen mit der Gravitationsenergie

$$W_G = \gamma \frac{m_p^2}{r_c}$$

zwischen zwei Protonen, so erhalten wir das unvorstellbar große Verhältnis

$$\frac{W_e}{W_G} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma m_p^2} \approx 1.23 \cdot 10^{36}. \quad (11)$$

Wenn in der Alltagserfahrung trotzdem die Gravitation alle elektrostatischen Kräfte überwiegt, so zeigt dies, wie ungeheuer *genau* die Ladungsbilanz der Materie ausgeglichen ist!

Die Notation der Gl. (9) entspricht noch der Fernwirkungsvorstellung. Um unsere Feld-Interpretation zu betonen, schreiben wir besser

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3}. \quad (12)$$

Dabei sehen wir in dem Feld \mathbf{E}_0 eine Wirkung, die von q_0 ausgeht, und die wir uns durch die Strömung einer Flüssigkeit aus einer Quelle veranschaulichen können. Um diesen Aspekt zu verdeutlichen, berechnen wir den “*Kraftfluß*”

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{r}^0}{r^2} \cdot \mathbf{r}^0 r^2 d\Omega \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q_0}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

durch eine geschlossene Fläche, die q_0 umschließt. Ins Bild der Flüssigkeit übersetzt bedeutet die Ladung q_0 also nichts anderes als die *Ergiebigkeit* der *Quelle*, von der die Strömung ausgeht. Wegen des Superpositionsprinzips können wir die Felder verschiedener Ladungen superponieren und erhalten

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (13)$$

wobei

$$Q = \sum_V q_i = \int_V \varrho d\tau \quad (14)$$

die gesamte im Volumen V eingeschlossene Ladung bezeichnet. Wir wollen die Gln. (13, 14) als die Integralform des COULOMBgesetzes ansehen. Die Integration in (14) erstreckt sich über ein beliebiges Volumen V und die Integration in (13) über seine Oberfläche ∂V .

Will man den Aspekt der Ladung als *Quelle* des Feldes noch deutlicher betonen, so mag man die Feldstärke \mathbf{E} durch die “*elektrische Erregung*” (SOMMERFELD) oder die “*dielektrische Verschiebung*” (die meisten Autoren, in Anlehnung an MAXWELLS “*displacement*”)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (15)$$

(Einheit: 1 Cb/m²) ersetzen und erhält das COULOMBgesetz in der prägnanten Formulierung

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \varrho d\tau, \quad (16)$$

in Worten: Der Gesamtfluß der elektrischen Erregung aus einem Volumen V ist gleich der gesamten eingeschlossener Ladung (Ergiebigkeit der Quellen) in V .

COULOMB hat neben der elektrostatischen auch die magnetische Kraftwirkung untersucht und gefunden, daß für die Kraft zwischen zwei Magnetpolen p_0 und p_1 eine zu Gl. (9) völlig analoge Beziehung gilt. Und doch gibt es einen entscheidenden Unterschied zwischen Elektrostatik und der Magnetostatik: Es gibt nach unserer Kenntnis keine *isolierten* Magnetpole p . Ob wir einen Permanentmagneten oder eine stromdurchflossene Spule benutzen, unser Magnet wird stets (mindestens) zwei entgegengesetzt gleiche Pole haben, die einen magnetischen *Dipol* (Multipol) bilden. Und wenn wir einen zweipoligen Stabmagneten in zwei Stücke zerbrechen, wird jedes Stück wieder zwei Pole aufweisen. Wie immer wir unser Volumen V legen, stets wird mit einem Magnetpol p der Gegenpol $-p$ mit eingeschlossen, so daß das integrale COULOMBgesetz für das magnetische Feld

$$\oint_V \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (17)$$

lautet.

2.2 Das AMPÈRESche Gesetz

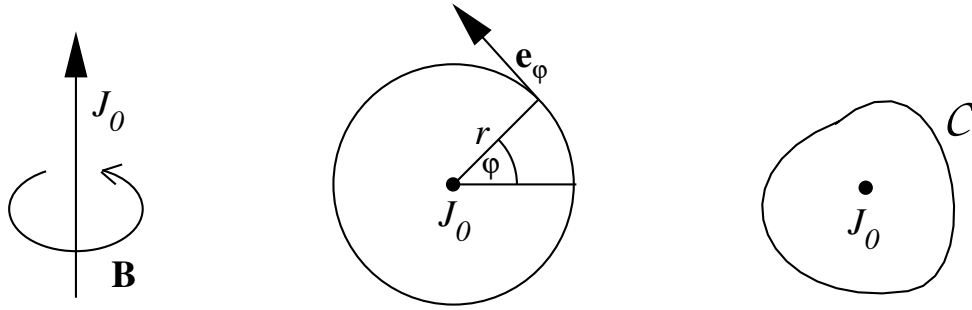
Wenn also das Magnetfeld *keine* Quellen besitzt, wie kommt dann überhaupt ein Magnetfeld zustande? Gegen 1820 fanden ØRSTEDT und AMPÈRE, daß ein stationärer elektrischer *Strom* (Ladungsfluß je Zeiteinheit) eine Magnetnadel ablenkt. Das Magnetfeld “strömt” dabei nicht aus einer “Quelle” in eine “Senke”, sondern “zirkuliert” um den stromdurchflossenen Leiter. Wir können uns das Feld also durch die Strömung veranschaulichen, die wir in einer Kaffeetasse durch Umrühren erzeugen. Speziell für einen Strom J_0 längs der z -Achse eines Koordinatensystems fand man das Magnetfeld

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (18)$$

wobei r und φ die Polarkoordinaten der $x - y$ -Ebene bezeichnen (siehe Skizze). Dabei ist μ_0 eine weitere Maßsystemkonstante, die als “Permeabilität des Vakuums” bezeichnet wird und im SI durch

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

festgesetzt ist³.



Für eine beliebige Kurve \mathcal{C} , die den Strom J umschließt, erhält man also die “Zirkulation” des Feldes

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi} \int \frac{1}{r} r d\varphi = \mu_0 J_0.$$

³Bei der Festlegung des Maßsystems ist man tatsächlich von der Kraft zwischen zwei Strömen ausgegangen, vgl. Gln. (7) und (18)

Diese Beziehung gilt im Gegensatz zu Gl. (18) auch dann, wenn J_0 nicht gradlinig in z -Richtung geführt wird. Wir können wieder die Wirkung verschiedener Ströme, die von $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$ umschlossen werden, superponieren und erhalten

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = J_{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (19)$$

Dabei ist $\partial\mathcal{F}$ der Rand eines beliebigen Flächenstücks \mathcal{F} und $J_{\mathcal{F}}$ der gesamte elektrische Strom, der \mathcal{F} durchsetzt.

Gl. (19) ist die Integralform des AMPÉRESchen Gesetzes. Die Analogie zur Strömung in einer Flüssigkeit läßt sich wieder besonders deutlich herausstellen, wenn man von \mathbf{B} zu dem äquivalentem Vektorfeld

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (20)$$

übergeht. In Analogie zu \mathbf{D} nennen wir \mathbf{H} “*magnetische Erregung*”. Die Maßeinheit ist 1 A/m. Leider hat sich aus historischen Gründen und einer falsch verstandenen Analogie formaler Gesetzmäßigkeiten (vgl. Abschnitt 2.7) eine abweichende Nomenklatur eingebürgert: In den meisten Darstellungen wird

\mathbf{B} als magnetische Induktion und
 \mathbf{H} als magnetische Feldstärke

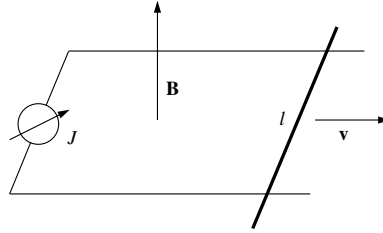
bezeichnet. Nun ist es im Vakuum natürlich völlig gleichgültig, ob wir \mathbf{B} oder $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ als Magnetfeld ansehen. Wir werden aber später sehen, daß wir diese Felder in Anwesenheit von Materie (ebenso wie \mathbf{E} und \mathbf{D}) unterscheiden müssen. Darum bleiben wir bei der inhaltlich richtigen Nomenklatur und bezeichnen \mathbf{B} als magnetisches Feld.

2.3 Das FARADAYSche Induktionsgesetz

Als 1820 die magnetische Wirkung des Stromes bekannt wurde, suchte man auch nach influenzähnlichen Erscheinungen der “fließenden Elektrizität”. Die Experimente zeigten bei *stationären* Strömen ein negatives Ergebnis; aber 1831 fand FARADAY, daß durch zeitliche *veränderliche* Ströme in benachbarten Stromkreisen tatsächlich ein Strom “*induziert*” wird. Um die verschiedenen Aspekte dieses wichtigen Effekts deutlicher herauszuarbeiten, wollen wir das **Induktionsgesetz** schrittweise am Gedankenexperiment konstruieren:

1. Dazu betrachten wir zunächst eine rechteckige Drahtschleife, deren Fläche durch eine bewegliche Brücke verändert werden kann. Die Drahtschleife

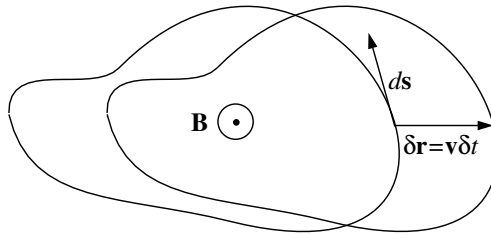
werde senkrecht von einem homogenem Magnetfeld \mathbf{B} durchsetzt (siehe Skizze).



Bei einer Bewegung der Brücke beobachtet man einen Strom J im Stromkreis. Wir deuten diesen Strom aus der LORENTZkraft, welche die Elektronen im Draht erfahren: Bewegen wir die Brücke mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} , so “sehen” die Elektronen diese Kraft als ein elektrisches Feld $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Dem entspricht eine “*Ringspannung*” oder “*elektromotorische Kraft*”

$$\oint \hat{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{s} = -Blv = -B \frac{dA}{dt} = -\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}.$$

2. Im nächsten Schritt bewegen wir eine *formfeste* Stromschleife im *inhomogenen* Magnetfeld, etwa im Feld eines Stabmagneten. Wir beobachten wieder einen Strom, der sich aus der *unterschiedlichen* LORENTZkraft $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ deuten läßt (siehe Skizze):



$$\begin{aligned} \oint_{\partial \mathcal{F}} \hat{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{s} &= \oint d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = - \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) \\ &= - \frac{1}{\delta t} \oint \mathbf{B} \cdot (\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{s}) = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet \mathcal{F} die von der Drahtschleife berandete Fläche ⁴.

⁴Wegen Gl.(17) spielt es keine Rolle, wie die Fläche zwischen der Berandung geformt ist.

Soweit haben wir bereits ein sehr interessantes Ergebnis erhalten, aber doch nichts Neues formuliert. Der bisher diskutierte Effekt basiert allein auf der LORENTZkraft. Und nun kommt eine entscheidende Überlegung:

3. Im System, das sich mit der Drahtschleife bewegt, muß ich den selben Strom J beobachten. Mit anderen Worten: Es kann und darf keinen Unterschied machen, ob ich die Drahtschleife gegen den Magneten oder den Magneten gegen die Drahtschleife bewege. In dem System, in dem die Drahtschleife ruht, gibt es aber keine Kraft $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, hier müssen die Elektronen im Draht *tatsächlich* ein elektrisches Feld \mathbf{E} sehen, für das gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (21)$$

4. Da wir den Gedanken an einer *Fernwirkung* verworfen haben, müssen wir als *direkte* Ursache des induzierten Feldes \mathbf{E} nicht etwa die Bewegung des Magneten, sondern die Änderung $\partial\mathbf{B}/\partial t$ der magnetischen Feldstärke (aufgrund der Bewegung des Magneten) ansehen. Ein veränderliches Magnetfeld können wir aber auch durch veränderliche Ströme in einem anderen Stromkreis (Transformator) erzeugen. Wir postulieren daher (im Einklang mit der Erfahrung), daß Gl. (21) *immer* gilt, wenn sich der magnetische Fluß

$$\Phi_m = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

durch eine Leiterschleife ändert.

5. Wir sind bei unseren bisherigen Diskussion immer von der Kraft ausgegangen, welche die Elektronen *im Leiter* erfahren und hatten postuliert, daß *im Leiter* ein Feld indiziert wird. Wegen der Stetigkeit wird dieses Feld auch noch zumindest in unmittelbarer Nähe des Drahtes zu erwarten sein.

MAXWELL ging von seinem kompromißlosen Feldstandpunkt aus nun aber einen kühnen Schritt weiter und postulierte, daß das FARADAYSche **Induktionsgesetz** (21) *unabhängig* von einer Leiterschleife für *jede* Fläche \mathcal{F} mit Rand $\partial\mathcal{F}$ gilt, die von einem zeitlich veränderlichen magnetischen Fluß Φ_m durchsetzt wird.

Wir fassen die obige Diskussion wegen ihrer Bedeutung noch einmal komprimiert zusammen: Wir beobachten in einer Leiterschleife einen “induzierten Strom”, wenn wir

- a) einen Leiter im Magnetfeld bewegen

- b) die “Ursache” des Magnetfeldes bewegen oder
- c) durch veränderliche Ströme ein veränderliches Magnetfeld erzeugen.

Als Ursache des induzierten Stromes sehen wir ein “induziertes elektrisches Feld” an. Dieses Feld existiert nach MAXWELLS Postulat auch *ohne* Leiterschleife.

Die Diskussion hat deutlich gemacht, daß es schwierig ist zu entscheiden, ob das Induktionsgesetz ein *neues* Naturgesetz darstellt oder als notwendige Konsequenz aus der LORENTZkraft gefolgert werden kann. Auf jeden Fall bekommen wir bereits hier einen Vorgeschmack auf die enge Verflechtung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} durch relativistische Gesichtspunkte.

Zum Schluß wollen wir noch einen weiteren wichtigen Aspekt nachtragen: Das elektromagnetische Feld kann durch seine Kraftwirkung mechanische Arbeit leisten (Elektromotor). Soll für Mechanik und Elektrodynamik ein genereller *Energiesatz* gelten, so muß der (dissipationsfreie) Motor auch umgekehrt mechanische Arbeit in elektrische Energie rückverwandeln können (Generator). Für Maschinen, die auf der magnetischen Kraftwirkung auf Strömen beruhen, *erfordert* dies die Induktion.

2.4 GAUSSscher Satz und Quellendichte

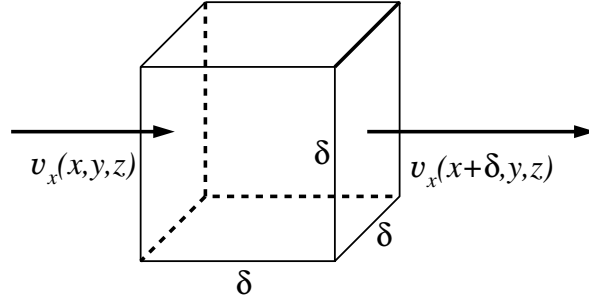
Um die bisher formulierten Grundgesetze der Elektrodynamik in eine differentielle Form zu bringen, wenden wir uns nun zunächst zwei allgemeinen Sätzen der Vektoranalysis zu. Wegen der Integralform des COULOMBgesetzes [vgl. (13, 16) und (17)] interessieren wir uns für das Oberflächenintegral

$$Q_V = \oint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (22)$$

eines Vektorfeldes \mathbf{v} . Wenn wir wieder an die Strömung einer Flüssigkeit denken, bedeutet Q_V offenbar die gesamte je Zeiteinheit aus dem Volumen V austretende Flüssigkeit. Wir zerlegen V in kleine achsenparallele Würfel von Volumen $\delta\tau = \delta^3$. Offenbar ergibt sich Q_V aus der Summation über alle

$$\delta Q = \delta Q_x + \delta Q_y + \delta Q_z,$$

da die internen Würfelflächen keinen Beitrag zu Q_V leisten. δQ_x steht nun für den Fluß, der den kleinen Würfel in x -Richtung verläßt (siehe Skizze)



und berechnet sich gemäß

$$\delta Q_X = [v_x(x + \delta, y, z) - v_x(x, y, z)] \delta^2 = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta^3 = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta \tau.$$

Entsprechend berechnen sich δQ_y und δQ_z , insgesamt gilt also

$$\delta Q = \oint_{\partial(\delta \tau)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta \tau.$$

Der Ausdruck in der Klammer gibt also die *Quellstärke* oder *Ergiebigkeit* des Volumenelements $\delta \tau$ an und wird mit dem lateinischen Kunstwort “*Divergenz*” belegt:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (23)$$

Wie wir bereits durch die Schreibweise angedeutet haben, läßt sich die Divergenz algebraisch als das innere Produkt von \mathbf{v} mit dem *Nabla-Operator*

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (24)$$

auffassen⁵. Wenn wir nun zu (22) zurückkehren, erhalten wir wegen

$$Q_V = \sum \delta Q = \sum \operatorname{div} \mathbf{v} \delta \tau$$

den GAUSSschen Satz

⁵Wegen der Differentiationsregeln ist beim algebraischen Rechnen mit dem Nabla-Operator natürlich Vorsicht geboten. Bei sorgsamer Beachtung der Differentiationsreihenfolge ist die Rechnung jedoch unproblematisch und sehr vorteilhaft.

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau. \quad (25)$$

Wenn wir uns die Divergenz als Quelldichte vorstellen, ist der GAUSSsche Satz fast selbstverständlich. Wenden wir ihn auf das integrale Coulombgesetz (16) bzw. (17) an, so erhalten wir die differentiellen Beziehungen

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho \quad (26)$$

und

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (27)$$

in Worten:

- Die *Raumladung* gibt die Quelldichte des *elektrischen* Feldes an. Das *Magnetfeld* ist *quellfrei*.

Wir wollen den Gaußschen Satz noch auf die Strömung \mathbf{j} einer “Substanz” anwenden, für die ein *Erhaltungssatz* gilt, die also weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Der Fluß aus einer Oberfläche ∂V kann dann nur aus der in V vorhandenen Substanz gespeist werden und muß zu einer Abnahme (Zunahme) ihrer Dichte ϱ führen:

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \varrho d\tau = -\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\tau.$$

Wenden wir hierauf den GAUSSschen Satz an, so erhalten wir die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (28)$$

Eine Kontinuitätsgleichung dieser Form gilt beispielsweise

- für die Massen-Stromdichte \mathbf{j}_m eines strömendes Gases (Massenerhaltung)
- für die Wärme-Stromdichte \mathbf{j}_T bei Wärmeleitung (Energieerhaltung)

Für uns besonders bedeutsam ist die *Erhaltung der elektrischen Ladung*, die durch ein umfangreiches Erfahrungsmaterial gesichert ist. Daraus folgt die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung (28)

- für die elektrische Stromdichte \mathbf{j} .

Dabei bezeichnet ϱ wieder die Raumladungsdichte.

2.5 STOKEScher Satz und Wirbeldichte

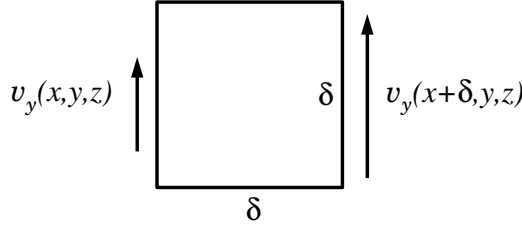
Im AMPÈRESchen Gesetz (19) und im FARADAYSchen Induktionsgesetz (21) begegnen uns Integrale der Form

$$Z_{\mathcal{F}} = \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad (29)$$

die im Flüssigkeitsbild die *Zirkulation* der Strömung um ein Flächenstück \mathcal{F} beschreiben. Ähnlich wie bei dem GAUSSschen Satz können wir das Flächenstück in kleine Quadrate $\delta\mathbf{S}$ der Kantenlänge δ zerlegen und $Z_{\mathcal{F}}$ durch Summation der δZ berechnen; denn die Beiträge interner Berandungen heben sich wieder weg. Orientieren wir die z -Achse in Richtung von $\delta\mathbf{S}$, gilt

$$\delta Z = \oint_{\partial(\delta\mathbf{S})} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \delta Z_x + \delta Z_y.$$

Als Beitrag δZ_y zur Zirkulation erhalten wir (siehe Skizze)



$$\delta Z_y = [v_y(x + \delta, y, z) - v_y(x, y, z)] \delta = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta^2 = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta S_z,$$

wobei wir mit der Bezeichnung $\delta S_z = \delta^2$ an die spezielle *Orientierung* des Flächenstücks $\delta\mathbf{S}$ erinnern. Ebenso ergibt sich

$$\delta Z_x = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \delta S_z,$$

und wir erhalten

$$\delta Z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta S_z.$$

Wir können das Ergebnis unabhängig von der Orientierung der z -Achse in der Form

$$\delta Z = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S}$$

anschreiben, wenn wir einen Vektor

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (30)$$

eingeführen. $\text{rot } \mathbf{v}$ wird die “*Rotation*” des Vektorfeldes \mathbf{v} genannt. Wie bereits in Gl. (30) angedeutet, läßt sie sich bequem als Vektorprodukt mit dem in Gl. (24) eingeführten Nabla-Operator beschreiben. Wenn wir nun die oben besprochene Summation gemäß

$$Z_{\mathcal{F}} = \oint \delta Z$$

ausführen, erhalten wir den STOKESchen Satz

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{F}} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (31)$$

Daß die Gültigkeit von Gl. (31) nicht davon abhängt, mit *welcher* Fläche \mathcal{F} man die Berandung $\partial \mathcal{F}$ ausfüllt, folgt unmittelbar aus dem GAUSSschen Satz. Denn aus der Notation mit dem Nabla-Operator erkennt man sofort die wichtige Beziehung

$$\text{div rot } \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (32)$$

Vergleichen wir den STOKESchen Satz mit dem AMPÈRESchen Gesetz [vgl. (19, 20)], erhalten wir die differentielle Beziehung

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (33)$$

Ebenso folgt aus dem Induktionsgesetz (21)

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (34)$$

2.6 Die MAXWELL-Gleichungen

Fassen wir die Gleichungen (26), (27), (33) und (34) zusammen, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \varrho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{j},\end{aligned}$$

das die *Quellen* und *Wirbel* des elektrischen und des magnetischen Feldes beschreibt. Es faßt die experimentelle Erfahrung zur Zeit MAXWELLS zusammen und geht in seiner konsequenten Feldbeschreibung – insbesondere bei der Formulierung des Induktionsgesetzes (34) – bereits darüber hinaus. Dieses Gleichungssystem weist jedoch, wie MAXWELL richtig erkannte, einen inneren *Widerspruch* auf. Es ist nämlich mathematisch *nicht* möglich, die Verteilung der Wirbeldichte $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ eines Vektorfeldes *beliebig* vorzuschreiben. Vielmehr muß dabei von vornherein die Bedingung (32) erfüllt sein: Die Wirbel eines Feldes bilden selbst Wirbelfelder, sie besitzen keine Quellen. Wenn wir zur Veranschaulichung wieder an die strömende Flüssigkeit denken, heißt das: Wirbel “entspringen” und “münden” nicht im Strömungsfeld, sondern bilden entweder unendlich lange Wirbelfäden oder geschlossene Wirbelringe.

Wenn wir diese Bedingung beim *Induktionsgesetz* prüfen, erhalten wir

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

in Übereinstimmung mit dem “COULOMBgesetz” $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Diese Beziehung macht wieder den inneren Zusammenhang der Felder und ihrer Grundgleichungen deutlich. Wenn wir uns im Abschnitt 2.3 gefragt haben, ob das Induktionsgesetz ein “neues” Naturgesetz oder eine notwendige Konsequenz der LORENTZkraft $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ist, so können wir uns nun fragen, ob das COULOMBgesetz $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ein eigenständiges Naturgesetz oder eine notwendige Konsequenz des Induktionsgesetzes ist. In der Tat finden wir ja, daß sich $\operatorname{div} \mathbf{B}$ mit der Zeit nicht ändert, und die Aussage $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ entspricht lediglich einer *Anfangsbedingung*.

Führen wir die entsprechende Überlegung am AMPÈRESchen Gesetz durch, erhalten wir

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Diese Gleichung garantiert in *stationären* Systemen die Stromkontinuität, ist für *dynamische* Vorgänge aber offenbar *falsch*. Nach Gl. (28) erwarten wir nämlich

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

oder wenn wir das COULOMBGesetz (26) einsetzen:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Der innere Widerspruch läßt sich *ad hoc* auflösen, wenn wir das AMPÈRESche Gesetz (33) durch

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (35)$$

ersetzen. Das heißt nicht mehr und nicht weniger, als daß wir außer in der strömenden Ladung auch im “*Verschiebungsstrom*” (MAXWELLS “*displacement current*”) – genauer: in der Verschiebungsstromdichte –

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (36)$$

eine *gleichberechtigte* Ursache magnetischer Felder sehen. Diese Annahme war zur Zeit MAXWELLS (im Jahre 1865) keineswegs experimentell überprüfbar und muß als kühnes Postulat einer genialen Konzeption angesehen werden. Mit diesem Postulat erhalten wir das vollständige System

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \quad (37)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (38)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (39)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (40)$$

der MAXWELL-Gleichung, wobei wir der Ästhetik wegen von der Abkürzung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{und} \quad (41)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (42)$$

Gebrauch gemacht haben.

Diese Ästhetik trat im vergangenen Jahrhundert noch längst nicht so deutlich in Erscheinung, weil die abkürzenden Operatoren div und rot noch nicht gebräuchlich waren und die Gleichungen in der wesentlich umständlicheren Koordinatenform notiert wurden. Trotzdem war BOLTZMANN⁶ von der Symmetrie und Schönheit dieser Gleichungen so beeindruckt, daß er ihnen (in enger Anlehnung an ein Zitat aus GOETHE'S Faust) das Motto “*War es ein Gott, der diese Zeilen schrieb?*” voranstellte.

Wir erinnern noch einmal daran, daß sich die $\text{div } \mathbf{B}$ -Gleichung (38) und – unter Beachtung der Ladungskontinuität (28) – auch die $\text{div } \mathbf{D}$ -Gleichung (37) wegen Gl. (32) als eine reine *Anfangsbedingung*⁷ interpretieren läßt. Bezüglich der *dynamischen* Aspekte mag man also die Gln. (39) und (40) als den wesentlichen Teil der MAXWELL-Gleichungen ansehen: Aus diesen Gleichungen folgt die Existenz nicht-trivialer Felder *ohne* Raumladungen und Ströme in der näheren Umgebung: Magnetfelder, die elektrische Felder induzieren [Gl. (39)], welche als Verschiebungsstrom wieder Magnetfelder erzeugen [Gl. (40)].

Mathematisch erhalten wir mit $\mathbf{j} = 0$ aus den Gln. (39) und (40) [zusammen mit (41, 42)]

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (43)$$

Unter Benutzung des Nabla-Operators [vgl. Gln. (24) und (30)] berechnen wir dazu

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{E} \\ &= \text{grad div } \mathbf{E} - \text{div grad } \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Hier haben wir den Begriff des “*Gradienten*” ($\text{grad } u$) einer skalaren Funktion u eingeführt. Er kennzeichnet einen Vektor, der nach Betrag und Richtung den steilsten Anstieg der Funktion u kennzeichnet, und der formal durch die Anwendung des Nabla-Operators auf u gebildet wird:

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (44)$$

Für die Divergenz des Gradienten schreibt man auch

⁶Bd. 2 seiner “Vorlesung über MAXWELLS Theorie der Elektrizität und des Lichtes”, München 1893.

⁷Daß die explizite Auswertung dieser Anfangsbedingung nicht trivial zu sein braucht, zeigt sich in der Elektrostatik und Magnetostatik!

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (45)$$

und führt damit den LAPLACEoperator

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (46)$$

ein. Mit $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ folgt dann aus Gl. (43)

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (47)$$

wobei die Anwendung des LAPLACEoperators komponentenweise zu verstehen ist.

Gl. (47) beschreibt die Ausbreitung **elektromagnetischer Wellen**. Wir sehen das am einfachsten, wenn wir von dem Ansatz

$$\mathbf{E} = \mathbf{g}(z \pm ct) \quad (48)$$

ausgehen, der ebene Wellen beschreibt, die sich mit konstanter Phasengeschwindigkeit c in (positiver oder negativer) z -Richtung ausbreiten. Aus Gl. (48) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} &= \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit Gl. (47) finden wir als Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen die *Lichtgeschwindigkeit*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99793 \cdot 10^{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (49)$$

Daß sich aus den Konstanten ε_0 der Elektrostatik (Kapazität eines Leiters) und μ_0 der Magnetostatik (Induktivität eines Leiters) nach Gl. (49) eine “kritische Geschwindigkeit” bilden läßt, war schon vor MAXWELL bekannt. Aber erst MAXWELLS Theorie sagte die Existenz elektromagnetischer Wellen voraus und klärte die Natur des Lichts auf. Volle Anerkennung fand die Theorie – wie bereits einleitend erwähnt – erst nach der experimentellen Bestätigung (1888) durch HERTZ.

2.7 Elektromagnetische Felder in ruhender Materie

Die Gleichungen [vgl. (37)–(42)]

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho \quad (50)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (51)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (52)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (53)$$

werden häufig “MAXWELLgleichungen des Vakuums” genannt. Diese Beziehung ist etwas irreführend, da die Gln. (50)–(53) *immer* und *überall* uneingeschränkt gelten – vorausgesetzt man beschreibt mit ϱ und \mathbf{j} die *exakten mikroskopischen* Raumladungen und Ströme und mit \mathbf{E} und \mathbf{B} die exakten Felder.

Das ist für elektromagnetische Felder in *Materie* aber weder möglich noch wünschenswert: Die elektrisch geladenen mikroskopischen Bausteine der Materie führen zu unüberschaubaren statistisch fluktuierenden Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} . Tatsächlich interessieren wir uns in *makroskopischen* Experimenten nur für *gemittelte* Felder $\langle \mathbf{E} \rangle$ und $\langle \mathbf{B} \rangle$, wobei sich die Mittelung über einen Raumbereich erstreckt, der makroskopisch als klein, mikroskopisch aber als groß angesehen werden kann. Da die MAXWELLgleichungen (50)–(53) linear sind, erfüllen die gemittelten Felder die Gleichungen

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle = \langle \varrho \rangle \quad (54)$$

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{B} \rangle = 0 \quad (55)$$

$$\operatorname{rot} \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{B} \rangle \quad (56)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (57)$$

Wenn wir uns auf *ruhende* Medien beschränken (also keine *Konvektionsströme* berücksichtigen), setzen sich die *mittlere Raumladung* $\langle \varrho \rangle$ und die *mittlere Stromdichte* $\langle \mathbf{j} \rangle$ aus zwei Anteilen zusammen:

1. Vom Experimentator kontrollierbare, “frei verfügbare” Raumladungen ϱ_{ex} und Ströme \mathbf{j}_{ex} . Hierzu zählen insbesondere die Ladungen und Ströme, die von üblichen Meßgeräten angezeigt werden.

2. Mittlere mikroskopische Raumladungen ϱ_m und Ströme \mathbf{j}_m , die sich, “abhängig” von den Feldern – vom Experimentator i. a. nicht unmittelbar kontrollierbar – in der Materie einstellen.

Wir notieren die gemittelten MAXWELLGleichungen daher in der Form

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle = \varrho_{\text{ex}} + \varrho_m \quad (58)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{j}_{\text{ex}} + \mathbf{j}_m + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \langle E \rangle. \quad (59)$$

Wir hatten im Abschnitt 2.1 darauf hingewiesen, wie ungeheuer genau die Ladungsbilanz in der Materie ausgeglichen ist. Wenn in der Materie eine Raumladung ϱ_m gebildet wird, beruht dies auf einer *Ladungstrennung* (meistens durch das angelegte Feld):

$$\ominus \oplus \quad \ominus \oplus \quad \Longrightarrow \quad \ominus \quad \oplus \oplus \quad \oplus$$

Eine solche Ladungstrennung beschreiben wir durch die **Polarisation** \mathbf{P} und definieren

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\varrho_m. \quad (60)$$

Eine zeitliche Änderung $\partial \mathbf{P} / \partial t$ der Polarisation liefert einen Beitrag zur mikroskopischen Stromdichte \mathbf{j}_m . Vergleichen wir die zeitliche Ableitung

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} = 0$$

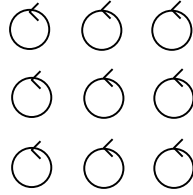
von Gl. (60) mit der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m + \frac{\partial \varrho_m}{\partial t} = 0,$$

so bietet es sich an,

$$\mathbf{j}_m = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (61)$$

zu schreiben: Dabei bezeichnet $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ *molekulare AMPÈRESche Ringströme*, die wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ [vgl. (32)] quellfrei sind und in der Kontinuitätsgleichung nicht in Erscheinung treten:



M wird als **Magnetisierung** bezeichnet. Eine Magnetisierung kann sich als Reaktion auf ein Magnetfeld einstellen (Eisenkern) oder auch von vornherein vorliegen (Permanentmagnet).

Setzen wir die Gln. (60) und (61) in (58) und (59) ein, so erhalten wir

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{P}) = \varrho_{\text{ex}} \quad \text{und} \quad (62)$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{B} \rangle - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_{\text{ex}} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{P}) . \quad (63)$$

Hier bietet es sich natürlich an, die Gln. (41) und (42) durch

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{P} \quad \text{und} \quad (64)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{B} \rangle - \mathbf{M} \quad (65)$$

zu verallgemeinern. Damit erhalten die MAXWELLGleichungen für die *mittleren* Felder in *Materie* die zu (37)–(40) analoge Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_{\text{ex}} \quad (66)$$

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{B} \rangle = 0 \quad (67)$$

$$\operatorname{rot} \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{B} \rangle \quad (68)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ex}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \quad (69)$$

Wir müssen an dieser Stelle auf einige verwirrende Sprachregelungen eingehen, die häufig zu Mißverständnissen führen:

- Aus *physikalischer* Sicht ist durch die obige Konstruktion klar, daß $\langle \mathbf{E} \rangle$ und $\langle \mathbf{B} \rangle$ die tatsächlichen gemittelten Felder beschreiben. Die parallel verwendeten Vektorfelder \mathbf{D} und \mathbf{H} wurden mit den Definitionen (64) und (65) als künstliche Hilfsgrößen eingeführt, um die Felder direkt auf der Basis der experimentell kontrollierbaren Ladungen ϱ_{ex} und Ströme \mathbf{j}_{ex} zu beschreiben.

- Die *mathematische* Struktur der MAXWELLgleichungen stellt dagegen eine Parallelität zwischen \mathbf{E} und \mathbf{H} sowie zwischen \mathbf{B} und \mathbf{D} her. Diese *formale* Parallelität zeigt sich auch in den Dimensionen

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}] &= \text{V/m}, & [\mathbf{H}] &= \text{A/m} \\ [\mathbf{D}] &= \text{As/m}^2, & [\mathbf{B}] &= \text{Vs/m}^2. \end{aligned}$$

Leider hat – wie wir schon im Abschnitt 2.2. bedauernd erwähnt haben – die formale Parallelität dazu geführt, daß die Hilfsgröße \mathbf{H} als “magnetische Feldstärke” und \mathbf{B} zur Unterscheidung als “magnetische Induktion” bezeichnet wurde. Im bewußten Unterschied dazu behalten wir die magnetische Feldstärke \mathbf{B} bei und bezeichnen \mathbf{H} als “magnetische Erregung”.

Gefährlicher und verwirrender noch als die Bezeichnung “magnetische Feldstärke” für \mathbf{H} ist die Nomenklatur der Quellen und Wirbel der Felder. In *völliger Verkehrung* des tatsächlichen Zusammenhangs werden

- die experimentell kontrollierbaren Größen ϱ_{ex} und \mathbf{j}_{ex} nämlich als *wahre* Ladungen und Ströme bezeichnet, während
- die abhängigen gemittelten mikroskopischen Ladungen ϱ_{m} und Ströme \mathbf{j}_{m} *scheinbar* genannt werden.

Wir werden uns dieser weit verbreiteter Nomenklatur nicht anschließen und – wo erforderlich – experimentell kontrollierbare (frei verfügbare) und mikroskopische (abhängige) Ladungen und Ströme unterscheiden.

Nach dieser grundsätzlichen Klarstellung schließen aber auch wir uns der gebräuchlichen ungenauen Notation der Formelzeichen an und *verzichten* im allgemeinen

1. auf die Mittelungsklammern $\langle \rangle$ bei $\langle \mathbf{E} \rangle$ und $\langle \mathbf{D} \rangle$ und
2. auf den Index ex bei ϱ_{ex} und \mathbf{j}_{ex} .

Damit erhalten die MAXWELLgleichungen in neuer, erweiterter Interpretation ihre alte, ursprüngliche Form [vgl. (37)–(41)]

$$\text{div } \mathbf{D} = \varrho \tag{70}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \tag{71}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{72}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (73)$$

zurück. Sie sind allerdings nicht ausreichend, um die *vier* Vektorfelder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ und \mathbf{H} zu bestimmen und müssen durch eine Festlegung der Polarisation \mathbf{P} [vgl. Gl. (64)] und der Magnetisierung \mathbf{M} [vgl. Gl. (65)] ergänzt werden.

Das *denkbar einfachste* Modell einer solchen Festlegung besteht in der Annahme eines *linearen* Zusammenhangs zwischen \mathbf{P} (bzw. \mathbf{D}) und \mathbf{E} sowie zwischen \mathbf{M} (bzw. \mathbf{H}) und \mathbf{B} . Der übliche Ansatz

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}, \quad (74)$$

mit einer “Dielektrizitätskonstanten” ε und einer “Permeabilität” μ formuliert also keineswegs ein allgemein gültiges Naturgesetz, sondern lediglich die einfachste *ad-hoc*-Annahme zur Beschreibung des Einflusses der Materie. Wenn dieser einfache Ansatz dennoch häufig zufriedenstellend ist, so liegt das an der *geringen* Störung der materiellen Ladungsbilanz durch Felder der üblichen Größenordnung. Besonders augenfälligen Abweichungen von (74) begegnen wir im

- Modell des Permanentmagneten mit $\mathbf{M} = \text{const}$ und im
- Modell des Elektreten mit $\mathbf{P} = \text{const}$.

Aber selbst im Rahmen der Gültigkeit eines “*linear response*” muß der Ansatz (74) im allgemeinen verallgemeinert werden:

1. Ist in der Materie (etwa durch die Kristallstruktur oder durch ein starkes Magnetfeld⁸) die *Isotropie* gestört, muß der lineare Zusammenhang *tensoriell*, also in der Form

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (75)$$

angesetzt werden.

2. Die mikroskopische Reaktion erfolgt nicht instantan. \mathbf{P} (bzw. \mathbf{D}) hängt damit von der Vorgeschichte ab. Für *periodische* Felder kann man dies durch den Ansatz

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (76)$$

berücksichtigen.

⁸Mit einer \mathbf{B} -Abhängigkeit von ε wird der lineare Zusammenhang also nur noch für eine *Störung* angesetzt.

Die Permeabilität μ ist für die meisten Materialien nur unwesentlich von 1 verschieden (Diamagnetismus, Paramagnetismus). Die starke Magnetisierung *ferromagnetischer* Materialien wird häufig durch den Ansatz (74) mit $\mu \geq 100$ beschrieben. Hierin muß man aber eine grobe Näherung sehen, tatsächlich besteht nämlich *nicht einmal ein funktionaler* Zusammenhang $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$. Vielmehr hängt die Magnetisierung nicht-linear von der gesamten Vorgeschichte ab (Hysterese).

Wir müssen den Einfluß der Materie noch in einem wichtigen Punkt ergänzen: Die Materie ist nicht nur für die mikroskopischen Ladungen ϱ_m und Ströme \mathbf{j}_m verantwortlich, sondern sie ist im allgemeinen auch *Träger* des experimentell kontrollierbaren *Leitungsstroms* \mathbf{j}_{ex} . Auch hierfür ist ein linearer Ansatz

$$\mathbf{j}_{\text{ex}} = \sigma \mathbf{E} \quad (77)$$

üblich. Gl. (77) wird das *OHMsche Gesetz* (in differentieller Form) genannt, und σ (Einheiten: $\text{Vm/A} = \Omega\text{m}$) wird als *Leitfähigkeit* bezeichnet.

Ein “*Gesetz*” stellt Gl. (77) aber ebensowenig dar, wie der Ansatz (74). Vielmehr gelten die selben Kritikpunkte wie bei der Einführung der Dielektrizitätskonstanten ε . So ist Gl. (77) im Rahmen des *linear response* unter Umständen durch

$$j_i(\omega) = \sum_j \sigma_{ij}(\omega) E_j(\omega) \quad (78)$$

zu ersetzen. Aber auch Abweichungen von der Linearität – beispielsweise schon durch die *JOULEsche* Erwärmung – sind keinesfalls ungewöhnlich. Und schließlich gibt es ja auch andere “treibende Kräfte” – z. B. Konzentrations- oder Temperaturgefälle (galvanisches Element!) –, die zu einem Ladungstransport führen. Man kann das berücksichtigen, indem man statt (77)

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_e = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e) \quad (79)$$

schreibt. Dabei bezeichnet \mathbf{E}_e eine “Ersatzfeldstärke”, die häufig als “eingeprägte elektrische Feldstärke” bezeichnet wird. Eine entgegengesetzte tatsächliche Feldstärke wird durch die treibenden Kräfte erzeugt, wenn der Stromkreis nicht “belastet” ist ($\mathbf{j} = 0$).

2.8 Randbedingungen

Die *MAXWELLGleichungen* sind die differentiellen *Grundgleichungen* des elektromagnetischen Feldes. Zu einer eindeutigen Festlegung der Felder benötigen wir außerdem *Randbedingungen*.

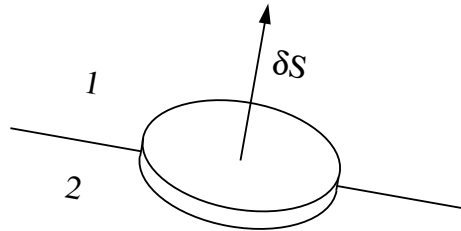
Die korrekten Randbedingungen für die MAXWELLgleichungen lauten bei bekannter endlicher Ladungs- und Stromverteilung grundsätzlich

$$\mathbf{E} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \quad (80)$$

Wenn wir trotzdem gelegentlich unendlich ausgedehnte Felder (z. B. homogene Felder oder ebene elektromagnetische Wellen) betrachten, so verstehen wir dies als eine Idealisierung von Feldern, die in dem uns interessierenden Bereich noch kein Abklingverhalten zeigen. Diese idealisierten Felder gehören zu entsprechend idealisierten unendlich ausgedehnten Ladungs- und Stromverteilungen (vgl. z. B. das Modell des unendlich ausgedehnten linearen Leiters). Wir betonen den Aspekt der Idealisierung, weil durch ihn i. a. die *Eindeutigkeit* der Lösung der Feldgleichungen verloren geht.

Zu einem gewissen (Selbstkonsistenz-) Problem wird die Formulierung der *Randbedingungen an Grenzflächen*, durch die wir den gesamten Raum – mehr oder weniger willkürlich – unterteilen. Solche Grenzflächen können sowohl *physikalisch* (Grenze verschiedener Materialien) als auch *mathematisch* (Grenze eines Konvergenzbereichs, Symmetrieebene⁹) motiviert sein. Da solche Grenzen artifiziiell eingeführt werden, müssen die entsprechenden Randbedingungen aus den MAXWELLgleichungen selbst folgen.

Wir betrachten dazu zunächst die div-Gleichungen und wenden den GAUSSschen Satz auf eine hinreichend kleine flache “Pillendose” an der Grenzfläche zweier Bereiche (1) und (2) an (siehe Skizze).



Aus $\text{div } \mathbf{B} = 0$ erhalten wir dann $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \delta \mathbf{S} = 0$ oder

$$B_{1 \text{ norm}} = B_{2 \text{ norm}}. \quad (81)$$

- Die Normalkomponente B_{norm} der magnetischen Feldstärke ist an einer Grenzfläche *immer* stetig.

⁹Ein keineswegs triviales Beispiel ist das elektrostatische Problem der geladenen leitenden Kreisscheibe, siehe JACKSON, Sec. 3.12.

Aus $\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho$ folgt entsprechend $(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \delta \mathbf{S} = \delta Q_{\text{ex}} = \sigma_{\text{ex}} \delta F$ oder

$$D_{1\text{ norm}} - D_{2\text{ norm}} = \sigma_{\text{ex}} , \quad (82)$$

wenn σ_{ex} die Flächenladungsdichte¹⁰ bezeichnet.

- Die Normalkomponente D_{norm} der elektrischen Erregung ist an einer Grenzfläche stetig, wenn keine Oberflächenladung σ_{ex} auftritt.

Wir haben hier den Index ex wieder benutzt, um zu betonen, daß σ_{ex} nur die *experimentell kontrollierbaren* Ladungen bezeichnet. Für die *gesamte* Flächenladung $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{ex}} + \sigma_{\text{m}}$ gilt nämlich [vgl. (58)]

$$E_{1\text{ norm}} - E_{2\text{ norm}} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\varepsilon_0} . \quad (83)$$

Mit Gl. (64) lesen wir daraus ab, daß die Polarisation eine “abhängige” Flächenladung

$$P_{1\text{ norm}} - P_{2\text{ norm}} = \sigma_{\text{m}} \quad (84)$$

erzeugt, die auf der rechten Seite von Gl. (82) *nicht* berücksichtigt werden darf.

Experimentell kontrollierbare Oberflächenladungen σ_{ex} entstehen insbesondere, wenn experimentell kontrollierbare Ströme \mathbf{j}_{ex} nicht stetig durch die Grenzfläche gehen (Kondensatorplatte!). Wir formulieren das durch die Randbedingung

$$j_{1n} + \frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = j_{2n} + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t} , \quad (85)$$

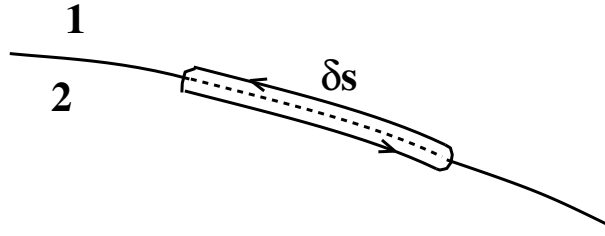
welche aus

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

(vgl. Gl. (74) oder die Kontinuitätsgleichung zusammen mit Gl. [70]) folgt und die Kontinuität des gemessenen *Gesamtstroms* (Leitungsstrom plus Verschiebungsstrom) ausdrückt.

Zur Formulierung der Randbedingungen, die den Feldern an einer Grenzfläche durch die rot-Gleichungen auferlegt werden, wenden wir den STOKESchen Satz auf hinreichend kleine enge “Haarnadelschleifen” durch die Grenzfläche an (siehe Skizze).

¹⁰Man vermeide Verwechslungen mit der Leitfähigkeit σ .



Wählen wir die Schleife so eng, daß wir den magnetischen Fluß durch die Schleifenfläche vernachlässigen können, erhalten wir aus dem Induktionsgesetz die Beziehung $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \delta\mathbf{s} = 0$ oder

$$\mathbf{E}_{1\text{tan}} = \mathbf{E}_{2\text{tan}} . \quad (86)$$

- Die Tangentialkomponenten \mathbf{E}_{tan} der elektrischen Feldstärke sind an einer Grenzfläche *immer* stetig.

Die entsprechende Betrachtung für das AMPÈRESche Gesetz (73) führt zu

$$\mathbf{H}_{1\text{tan}} - \mathbf{H}_{2\text{tan}} = \mathbf{i} , \quad (87)$$

wenn in der Oberfläche ein gerichteter Strom \mathbf{i} pro Längeneinheit fließt ($\mathbf{i} \cdot \delta\mathbf{s}$ ist also der Strom durch die Haarnadelschleife). Es ist üblich, *stromlose* Grenzflächen zu betrachten, und darum formulieren wir:

- Die Tangentialkomponenten \mathbf{H}_{tan} der magnetischen Erregung sind an einer Grenzfläche stetig, wenn in der Grenzfläche kein Strom fließt.

Daß die einschränkende Bedingung der Stromlosigkeit notwendig und keineswegs akademisch-spitzfindig ist, zeigt die Abschirmung magnetischer Wechselfelder durch einen FARADAYSchen Käfig!

Als Gedächtnisstütze stellen wir die wichtigsten Grenzbedingungen noch einmal tabellarisch zusammen:

An der Grenzfläche verschiedener Bereiche sind

- \mathbf{E}_{tan} und B_{norm} *immer* stetig.
- \mathbf{H}_{tan} und D_{norm} stetig, *falls* die Grenzfläche frei von Ladungen und Strömen ist.

Auch hier wird natürlich wieder die *mathematische* Parallelität von \mathbf{E} und \mathbf{H} (Tangentialkomponenten) sowie von \mathbf{B} und \mathbf{D} (Normalkomponenten) deutlich. *Physikalisch* zeigen sich die “wahren” Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} dagegen in der *uneingeschränkten* Gültigkeit der entsprechenden Randbedingungen.

2.9 Die Energie des elektromagnetischen Feldes

Mit der Diskussion der MAXWELLgleichungen und ihrer Randbedingungen ist die Formulierung der Grundgleichungen der Elektrodynamik eigentlich abgeschlossen. Bevor wir das Kapitel beenden, wollen wir jedoch noch einen Bezug zur Mechanik herstellen und fragen nach der Gültigkeit und Form des *Energiesatzes* in einer kombinierten Theorie der Mechanik und Elektrodynamik. Dazu gehen wir von der Kraftdichte [vgl. (5)]

$$\mathbf{f} = \varrho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

aus und berechnen die je Zeit- und Volumeneinheit geleistete mechanische Arbeit

$$\dot{w}_{\text{mech}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (88)$$

Dabei ist zu beachten, daß \dot{w}_{mech} *jede* vom Feld geleistete mechanische Arbeit enthält, sowohl makroskopisch “gewonnene” als auch mikroskopisch dissipierte (JOULEsche Wärme) oder in der atomistischen Struktur “verborgene” Arbeit (z. B. Polarisierung). Entsprechend steht auf der rechten Seite von Gl. (88) die wirkliche mikroskopische Stromdichte und das mikroskopische Feld.

Wir wollen den Term $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ mit Hilfe der MAXWELLgleichungen umformen. Diese Gleichungen sind – wie betont – *mikroskopisch* zu verstehen. Trotzdem *notieren* wir sie zur Vorbereitung der späteren Interpretation in der *makroskopischen* Form $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$ und $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Dabei soll der Punkt eine Ableitung nach der Zeit kennzeichnen. Multiplizieren wir die erste Gleichung (AMPÈRESches Gesetz) mit \mathbf{E} und die zweite (FARADAYSches Induktionsgesetz) mit \mathbf{H} , erhalten wir

$$\begin{aligned} -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} \\ 0 &= \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}. \end{aligned}$$

Die beiden “Spatprodukte” auf der rechten Seite lassen sich nach den Regeln der Vektoralgebra in der Form

$$\nabla_E \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad \text{bzw.} \quad \nabla_H \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

schreiben, wobei der Index an ∇ angibt, welche Größe zu differenzieren ist. Wenn wir die beiden Gleichungen addieren, entspricht die Summe dieser beiden Terme gerade der Produktregel, und wir erhalten den **POYNTINGSchen Satz**

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (89)$$

oder mit Gl. (88)

$$\dot{w}_{\text{mech}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0. \quad (90)$$

Integrieren wir diese Beziehung über den ganzen Raum, so folgt mit dem GAUSSschen Satz

$$\dot{W}_{\text{mech}} + \int (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) dt + \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Felder für $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ hinreichend verschwinden, folgt daraus der *Energiesatz* in der Form

$$\dot{W}_{\text{mech}} + \dot{W}_{\text{el}} = 0, \quad (91)$$

wenn wir

$$\dot{W}_{\text{el}} = \int (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) d\tau \quad (92)$$

als die Änderung einer *elektromagnetischen Feldenergie* interpretieren. Wenn ein *linearer* Zusammenhang zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} sowie zwischen \mathbf{H} und \mathbf{B} besteht – also insbesondere bei Verwendung der exakten mikroskopischen MAXWELLGleichungen – läßt sich (92) unmittelbar integrieren und liefert

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d\tau. \quad (93)$$

Die Gln. (92) bzw. (93) sagen nichts darüber, *ob* und ggf. *wo* die Feldenergie zu lokalisieren ist. Aber es liegt natürlich nahe, die Integranden von (92) und (93) unmittelbar im Sinne einer räumlichen *Energiedichte* w_{el} zu interpretieren. (Vgl. dazu aber auch Gl. (205) und Fußnote (25) sowie Gl. (273).) Bei *linearen* Beziehungen zwischen den Feldern (s. o.) gilt also

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (94)$$

Hängen \mathbf{D} bzw. \mathbf{H} dagegen nicht-linear von \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} ab – hier greifen wir also bereits der späteren *makroskopischen* Interpretation vor –, so läßt sich nur die differentielle Form

$$dw_{\text{el}} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (95)$$

für die Energiedichte angeben. Eine Aufspaltung in einen *elektrischen* und einen *magnetischen* Anteil liegt auf der Hand.

In dieser lokalen Interpretation läßt sich Gl. (90) als *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} = 0 \quad (96)$$

für die *gesamte* Energiedichte $w = w_{\text{mech}} + w_{\text{el}}$ verstehen. Dabei wird die *Energieflußdichte* durch den POYNTINGVEKTOR

$$\vec{\mathcal{S}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (97)$$

beschrieben. Im Gegensatz zur Energiedichte w_{el} läßt sich die Energieflußdichte also *nicht* in einen elektrischen und einen magnetischen Anteil aufspalten. Hieraus folgt, daß am Energietransport *immer* elektrische *und* magnetische Felder gemeinsam beteiligt sind (vgl. Fußnote 1).

Die Grenzen dieser lokalen Anschauung werden deutlich, wenn man sich zu den konstanten homogenen Feldern $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_y$ einen ständigen Energiefluß in z -Richtung vorstellt. Ebenso sinnentleert ist die Vorstellung eines Energieflusses in allen *statischen* Fällen mit $j \equiv 0$ und $\partial/\partial t \equiv 0$, denn nach Gl. (89) gilt dann $\operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} \equiv 0$: Der “Energiefluß” wird durch ein reines Wirbelfeld beschrieben, das keine Energie transportiert, da für jedes Volumen V

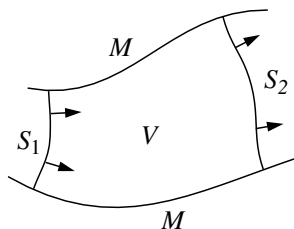
$$\oint_{\partial V} \vec{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

gilt.

Ganz anders sieht das bereits im *stationären* ($\partial/\partial t \equiv 0$) Stromkreis aus, wo

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{S}} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (98)$$

gilt, aus. Wir integrieren Gl. (98) über ein isoliertes Leiterstück V mit Mantelfläche M , das im Leiterinnern von zwei Stirnflächen S_1 und S_2 , die *senkrecht* vom elektrischen Feld \mathbf{E} durchsetzt werden ($d\mathbf{S}_1, d\mathbf{S}_2 \parallel \mathbf{E}$, siehe Skizze) begrenzt wird:



Wenden wir den GAUSSschen Satz an, so erhalten wir

$$\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau = - \int_M \vec{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{S}, \quad (99)$$

da auf den Stirnflächen nach Konstruktion $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ gilt. Auf der linken Seite von Gl. (99) steht die gesamte je Zeiteinheit in V umgesetzte elektrische Energie (JOULEsche Wärme) und diese Energie “fließt” mit dem POYNTINGvektor $\vec{\mathcal{S}}$ *nicht* etwa durch die Stirnflächen S_1 und S_2 , sondern durch die Mantelfläche M nach V ! Für den Fall eines homogenen zylindrischen Leiters läßt sich das unschwer durch die explizite Angabe der Felder bestätigen (Übungen).

Dieses Ergebnis ist überraschend, denn es widerspricht der elementaren Anschauung, daß allein das *elektrische* Feld *im* Leiter die Energie transportiert. Unsere Rechnung führt den *Energietransport* dagegen auf das elektrische *und magnetische* Feld *außerhalb* des Leiters zurück. Zum anschaulichen Verständnis mag man ein mechanisches Analogon diskutieren: Den Energietransport durch eine inkompressible Flüssigkeit in einem elastischen Schlauch¹¹. Daß der Schlauch für den Energietransport wichtig ist, erkennt man, wenn der Schlauch platzt. Und ein elektrischer Kurzschluß mag hilfreich sein, die Bedeutung der Felder außerhalb des Drahtes zu verstehen.

Mag man die vorangegangene Diskussion des Energieflusses im stationären Stromkreis noch als akademisch spitzfindig empfinden, so tritt die Bedeutung des POYNTINGvektors für den Energiestrom bei *elektromagnetischen Wellen* klar ins Blickfeld. Wir betrachten dazu eine Welle mit dem elektrischen Feldvektor [vgl. Gl. (48)]

$$\mathbf{E} = E(z - ct)\mathbf{e}_x \quad (100)$$

im Vakuum, die in positive z -Richtung läuft. Aus dem Induktionsgesetz

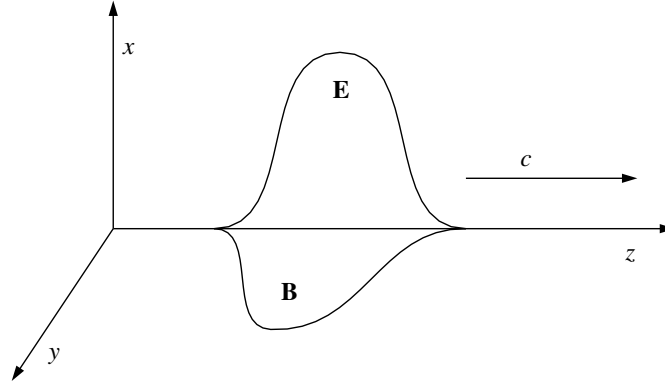
$$\dot{\mathbf{B}} = -\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{e}_y$$

folgt mit

$$\dot{\mathbf{B}} = -c\mathbf{B}' \quad \text{und} \quad \partial E_x / \partial z = E'$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}E(z - ct)\mathbf{e}_y. \quad (101)$$

¹¹Man beachte insbesondere die dynamische Reaktion der Schlauchwand beim Öffnen des Wasserhahns und beim Einschalten eines Verbrauchers.



\mathbf{E} und \mathbf{B} stehen also senkrecht aufeinander, haben das gleiche Profil und breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ in positive z -Richtung aus. Die Energiedichte der Welle ist durch

$$w_{\text{el}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c^2}\right) E^2$$

oder

$$w_{\text{el}} = \varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0 \quad (102)$$

gegeben. Für den POYNTINGvektor finden wir

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \mathbf{e}_z = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c} w_{\text{el}} \mathbf{e}_z$$

oder

$$\vec{\mathcal{S}} = c w_{\text{el}} \mathbf{e}_z . \quad (103)$$

Die Energieflußdichte ergibt sich hier in anschaulich vertrauter Weise als das Produkt aus Energiedichte w_{el} und “Strömungsgeschwindigkeit” $c\mathbf{e}_z$.

Nach dieser Diskussion einiger Anwendungen des POYNTINGschen Satzes (89, 90) müssen wir noch einmal auf seine Herleitung und seine Interpretation im materiegefüllten Raum zu sprechen kommen. Wir haben die Diskussion zwar bereits durch die formale Anschrift der Felder \mathbf{H} und \mathbf{D} vorbereitet, dabei aber zunächst betont, daß alle Felder und Ströme *mikroskopisch* zu verstehen sind. Das hat uns auf jeden Fall die Gewißheit gebracht, daß ein mechanisch-elektrodynamischer Energiesatz *in Strenge* gültig ist.

Wenn wir nun versuchen, den Energiesatz mit den mittleren Feldern im materiegefüllten Raum zu formulieren, können wir zunächst einmal konstatieren, daß der POYNTINGsche Satz in der Form (89) in Strenge gültig bleibt, wenn wir

uns auf *ruhende* Medien beschränken. Denn wir haben Gl. (89) allein aus dem AMPÈRESchen Gesetz und dem Induktionsgesetz hergeleitet. Die linke Seite von Gl. (89) müssen wir dann (abgesehen vom Vorzeichen) präzise als

$$\dot{w}_{\text{eff}} = \mathbf{j}_{\text{ex}} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle \quad (104)$$

interpretieren. \dot{w}_{eff} beschreibt den effektiven Leistungsumsatz, den ein elektrisches Meßgerät registriert (und den wir mit dem Versorgungsunternehmen abrechnen). Dieser Leistungsumsatz balanciert sich mit dem effektiven Energiefluß $\vec{\mathcal{S}}_{(\text{eff})}$ und der Änderung $\dot{w}_{\text{el}(\text{eff})}$ der effektiven Feldenergie, wenn wir [vgl. (95) und (97)]

$$w_{\text{el}(\text{eff})} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad \text{und} \quad (105)$$

$$\vec{\mathcal{S}}_{(\text{eff})} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (106)$$

setzen, dabei aber nun die übliche Bedeutung von \mathbf{D} und \mathbf{B} im Medium zugrunde legen.

Wie aber hängt \dot{w}_{eff} und \dot{w}_{mech} zusammen? Zunächst müssen wir an die Voraussetzung *ruhender* Medien erinnern. Unsere momentanen Überlegungen sind also weder geeignet zu beschreiben, warum sich ein Papierschnitzel im homogenen elektrischen Feld bewegt, noch, wie die Energie im Elektromotor transportiert wird. Aber auch mit dieser Beschränkung stimmt \dot{w}_{eff} nicht mit \dot{w}_{mech} überein: Wir müssen auf jeden Fall zu *gemittelten* Größen übergehen. Wenn wir aber von Gl. (88) zur gemittelten Gleichung

$$\langle \dot{w}_{\text{mech}} \rangle = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$$

übergehen, stehen wir sofort vor einer *prinzipiellen* Schwierigkeit: $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$ läßt sich im allgemeinen nämlich keineswegs durch $\langle \mathbf{j} \rangle$ und $\langle \mathbf{E} \rangle$ ausdrücken: Schreiben wir

$$\mathbf{j} = \langle \mathbf{j} \rangle + \delta \mathbf{j} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle + \delta \mathbf{E},$$

so wird

$$\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{E} \rangle.$$

Wir räumen diese Schwierigkeit aus, indem wir *postulieren*, daß die *Korrelation* $\langle \delta \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{E} \rangle$ der Strom- und Feldfluktuationen verschwindet. Damit folgt

$$\langle \dot{w}_{\text{mech}} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle.$$

Wenn wir nun wieder

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_{\text{ex}} + \mathbf{j}_{\text{m}}$$

schreiben, erhalten wir

$$\dot{w}_{\text{eff}} = \mathbf{j}_{\text{ex}} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \langle \dot{w}_{\text{mech}} \rangle - \mathbf{j}_{\text{m}} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (107)$$

Die effektive Arbeitsleistung der experimentell kontrollierbaren Ströme \mathbf{j}_{ex} ist also gleich der mittleren mechanischen Arbeitsleistung *abzüglich* der Arbeitsleistung der abhängigen Ströme \mathbf{j}_{m} . Es entspricht einer gewissen Logik, diesen Beitrag von der mechanischen Arbeitsleistung abzuziehen, denn er wird zur Polarisierung und Magnetisierung des Mediums verwendet und ist eindeutig mit der Feldänderung verknüpft: Wir sollten $\mathbf{j}_{\text{m}} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle$ nicht als Beitrag zur mechanischen, sondern als Beitrag zur *Feldenergie* deuten¹². Genau das tun aber wir, wenn wir

- \dot{w}_{mech} durch \dot{w}_{eff} ersetzen und
- bei der Berechnung von w_{el} und $\vec{\mathcal{S}}$ die übliche Bedeutung von \mathbf{D} und \mathbf{H} zugrunde legen.

Da wir in den makroskopischen Maxwellgleichungen keine Konvektionsströme berücksichtigt haben, mußten wir unsere Analyse auf ortsfeste Medien beschränken. Was die elektromagnetische Feldenergie

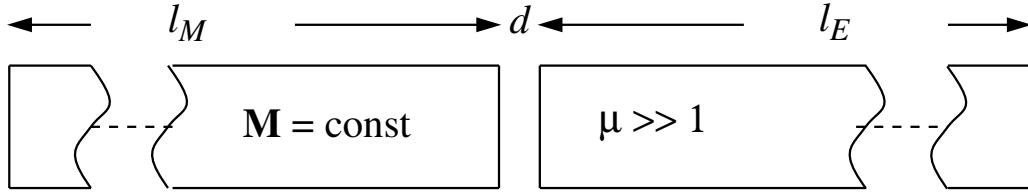
$$W_{\text{em}} = \int w_{\text{em}} d\tau \quad \text{und} \quad w_{\text{em}} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

betrifft, können wir diese Voraussetzung jedoch am Schluß wieder fallen lassen. Denn die Feldenergie kann nur vom *Zustand* des Systems, nicht vom Weg, auf dem der Zustand erreicht wurde, abhängen. Hierauf beruht die Möglichkeit, Kräfte auf dielektrische oder magnetisierbare Materialien im Feld zu berechnen¹³.

Wir wollen das an einem einfachen Beispiel erläutern und betrachten einen *langen* Stabmagneten ($\mathbf{M} = \text{const}$) und einen *langen* Eisenstab ($\mu \gg 1$) gleichen Querschnitts, die durch einen engen Luftspalt (Dicke d) getrennt sind (siehe Skizze):

¹²Dieses Konzept bringt allerdings Schwierigkeiten, wenn bei der Änderung der Polarisierung oder Magnetisierung Energie dissipiert wird.

¹³Man mache sich klar, daß $\mathbf{j}_{\text{ex}} \cdot \langle \mathbf{E} \rangle \equiv 0$ ist, wenn ein Nagel von einem Permanentmagneten oder ein Papierschnitzel von einem geriebenem Stab angezogen wird!



Offenbar sind alle Felder achsenparallel und es gilt $B = B_{\text{norm}} = \text{const.}$

Im Bereich des *Magneten* gilt (warum?)

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = 0,$$

also

$$B = \mu_0 M.$$

Der Vollständigkeit halber notieren wir auch die zugehörige Energiedichte

$$w_M = \int \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) dB = \frac{B^2}{2\mu_0} - MB = -\frac{\mu_0}{2} M^2.$$

Sie spielt jedoch für die Kraftwirkung keine Rolle, da sie konstant ist.

Im *Eisenstab* haben wir das schwache Magnetfeld

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{M}{\mu}$$

und die geringe Energiedichte

$$w_E = \frac{1}{\mu\mu_0} \int B dB = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu_0}{2\mu} M^2.$$

Auch sie spielt für die Kraftwirkung keine Rolle.

Im *Luftspalt* schließlich gilt

$$H = \frac{B}{\mu_0} = M,$$

und dazu gehört die (konstante) Feldenergiedichte

$$w_L = \frac{1}{\mu_0} \int B dB = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 M^2}{2}.$$

Sie ist für die Kraftwirkung entscheidend, da das Volumen des Luftspalts von d abhängt. Für die gesamte Feldenergie gilt nämlich

$$W_m = (w_L d + w_M l_M + w_E l_E) A + W_a,$$

wenn A die Querschnittfläche und W_a die Energie des äußeren “Restfeldes” bezeichnet. Nur der erste Beitrag hängt von d ab ($d \ll l$) und führt zu einer Kraft

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial d} = w_L A = \frac{\mu_0 M^2}{2} A.$$

3 Die elektrodynamischen Potentiale

3.1 Vektorfelder und Potentiale

Wir haben in den ersten Kapiteln mehrfach auf das Bild einer strömenden Flüssigkeit zurückgegriffen, um uns Vektorfelder anschaulich vorzustellen. Aus dieser Anschauung hatten wir “*Quellen*” und “*Wirbel*” als die möglichen Ursachen der “*Strömung*” erkannt. Wir wollen diese anschauliche Vorstellung nun mathematisch untermauern. Dabei geht es uns nicht einmal in erster Linie um mathematische Strenge. Vielmehr interessiert uns an dem Beweis, daß er ein *konstruktives* Verfahren zur Berechnung eines Vektorfeldes aus seiner Quelldichte $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ und Wirbelldichte $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ liefert.

Sei also \mathbf{v} ein Vektorfeld, das den partiellen Differentialgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = q(\mathbf{x}) \quad (108)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (109)$$

genügt, wobei wir annehmen, daß q und \mathbf{w} für $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ hinreichend rasch verschwinden. Wir zeigen nun, daß sich \mathbf{v} in der Form

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (110)$$

aus einem **skalaren Potential**

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (111)$$

und einem **Vektorpotential**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{w}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (112)$$

gewinnen läßt. Offenbar zerfällt \mathbf{v} damit in einen

- wirbelfreien Anteil $\mathbf{v}_q = -\nabla\Phi$ und einen
- quellfreien Anteil $\mathbf{v}_w = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Zum Beweis müssen wir also zeigen, daß

1. \mathbf{v}_q die Gl. (108) erfüllt

2. \mathbf{v}_w die Gl. (109) erfüllt und
3. die Lösung eindeutig ist.

Bevor wir diese drei Aussagen beweisen, merken wir an, daß wir grundsätzlich

- den *Aufpunkt* \mathbf{x} , an dem wir das Feld berechnen wollen, und
- den *Quellpunkt* \mathbf{x}' , an dem die Quell- oder Wirbeldichte vorgegeben ist,

unterscheiden müssen: Wir berechnen die Potentiale am Aufpunkt \mathbf{x} durch Integration über alle Quellpunkte \mathbf{x}' . Der Beitrag eines Quellpunktes ist dabei umgekehrt proportional zum Abstand

$$r(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$

Um nun die erste Aussage zu beweisen, berechnen wir

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_q = -\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{-1}{4\pi} \Delta \int \frac{q(\mathbf{x}')}{r} d^3 \mathbf{x}' = \frac{-1}{4\pi} \int q(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{r} d^3 \mathbf{x}'. \quad (113)$$

Eine Berechnung von $\Delta(1/r)$ in kartesischen Koordinaten ist nun etwas umständlich; außerdem wird dabei nicht klar, wie wir die *Singularität* bei $r = 0$ behandeln müssen. Wesentlich bequemer gelangen wir zum Ziel, wenn wir ausnutzen, daß $\Delta(1/r)$ isotrop ist, und den GAUSSschen Satz auf eine Kugel K_R vom Radius R um den Ursprung anwenden:

$$\int_{K_R} \Delta \frac{1}{r} d\tau = \int_{K_R} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} d^3 r = \int_{\partial K_R} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{1}{R^2} R^2 d\Omega = -4\pi.$$

Das Integral hängt also nicht von R ab, es muß daher gelten

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad \text{für} \quad r > 0.$$

Trotzdem hat das Integral $\int \Delta(1/r) d\tau$ den *endlichen* Wert -4π . Dieser konstante Beitrag zum Integral kann nur aus der Singularität bei $r = 0$ stammen. Wir schreiben daher

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \quad (114)$$

Dabei bezeichnet $\delta(\mathbf{r})$ eine “verallgemeinerte Funktion”, die überall außer im Ursprung verschwindet und die im Ursprung selbst “so unendlich” wird, daß

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{0}) \quad (115)$$

gilt. Man mag sich $\delta(\mathbf{r})$ durch einen Grenzprozeß regulärer Funktionen mit steilem “Peak” bei $\mathbf{r} = 0$ vorstellen¹⁴.

Setzen wir die Gln. (114, 115) in Gl. (113) ein, erhalten wir sofort

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_q = \int q(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})d^3\mathbf{x}' = q(\mathbf{x}),$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Zum Beweis der zweiten Aussage rechnen wir zunächst

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_w = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

Mit Gl. (112) erhalten wir dazu

$$4\pi \operatorname{div} \mathbf{A} = \int \mathbf{w}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \frac{1}{r} d^3\mathbf{x}' = - \int \mathbf{w}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} d^3\mathbf{x}',$$

wobei ∇ die Differentiation nach \mathbf{x} und ∇' die Differentiation nach \mathbf{x}' bezeichnet. Wenn wir partiell integrieren, folgt

$$4\pi \operatorname{div} \mathbf{A} = - \int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{w}(\mathbf{x}')}{r} d^3\mathbf{x}' + \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'.$$

Wir setzen nun voraus, daß die Wirbeldichte auf einen endlichen Raumbereich begrenzt ist. Dann verschwindet das erste Integral nach dem GAUSSschen Satz. Im zweiten Beitrag verschwindet aber der Integrand, weil $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ ist. Also ist

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

und wir erhalten

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_w = -\Delta \mathbf{A} = \frac{-1}{4\pi} \int \mathbf{w}(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{r} d^3\mathbf{x}' = \int \mathbf{w}(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}' \quad \text{oder}$$

¹⁴Mathematisch sauberer arbeitet man mit dem Begriff “Distribution”, die durch die Abbildung $f \rightarrow f(\mathbf{0})$ nach Gl. (115) definiert ist.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_w = -\Delta \mathbf{A} = \mathbf{w}(\mathbf{x}') , \quad (116)$$

was zu beweisen war.

Wir müssen nun noch die *Eindeutigkeit* bestätigen. Dazu nehmen wir an, daß die Gln. (108, 109) zwei Lösungen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ besitzen. Der Differenzvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

erfüllt dann die Gleichungen $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Da \mathbf{u} wirbelfrei ist, können wir in jedem Fall

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi$$

schreiben, wobei für φ die LAPLACEgleichung $\Delta \varphi = 0$ gilt. Wir rechnen damit

$$0 = \int \varphi \Delta \varphi d\tau = \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) d\tau - \int (\nabla \varphi)^2 d\tau$$

oder nach dem Gaußschen Satz (mit $\mathbf{u} = \nabla \varphi$)

$$\int \mathbf{u}^2 d\tau = \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) d\tau = \oint \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} .$$

Wenn wir nun annehmen, daß alle Felder für $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ mindestens wie $1/|\mathbf{x}|^2$ fallen, verschwindet das Oberflächenintegral und wir erhalten

$$\int \mathbf{u}^2 d\tau = 0 .$$

Dazu aber muß $\mathbf{u} \equiv 0$ oder $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_2$ gelten. Die Lösung der Differentialgleichungen (108, 109) ist also *eindeutig*. Wir rufen uns noch einmal ins Gedächtnis zurück, daß wir bei unserer Beweisführung zwei *Bedingungen* voraussetzen mußten:

1. Die Wirbeldichte $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ ist nur in einem endlichen Raumgebiet von Null verschieden
2. Die Vektorfelder fallen für $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ mindestens wie $1/r^2$.

Wir werden – wie bereits erwähnt – auf diese Voraussetzungen achten müssen, wenn wir über-idealisierte Modelle (homogene Felder, endlich lange Leiter usw.) betrachten.

3.2 Die Potentiale der Elektro- und Magnetostatik

Im *stationären* Fall können wir die Ergebnisse des vorigen Abschnitts unmittelbar auf das elektrische und das magnetische Feld übertragen. Denn die MAXWELLgleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} sind dann nicht gekoppelt und beschreiben die Quellen und Wirbel der Felder.

Für das stationäre *elektrische* Feld haben wir¹⁵

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (117)$$

Das stationäre elektrische Feld ist also *wirbelfrei* und läßt sich aus einem *skalaren Potential* Φ ableiten [vgl. (108)–(111)]:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (118)$$

Gl. (118) beinhaltet im Grunde nur eine selbstverständliche Verallgemeinerung des COULOMBGesetzes (12). Für *eine* Punktladung \mathbf{q}_0 bei \mathbf{x}_0 haben wir nämlich

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{q}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{q}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|},$$

und für *mehrere* Punktladungen (\mathbf{q}_i bei \mathbf{x}_i) folgt aus dem Superpositionsprinzip

$$\mathbf{E} = -\nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{\mathbf{q}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}.$$

Wenn wir nun von diskreten Raumladungen zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung übergehen ($\mathbf{q}_i \rightarrow \varrho(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$), erhalten wir die Gl. (118). Um umgekehrt von Gl. (118) zum Potential und Feld einer Punktladung \mathbf{q}_0 bei \mathbf{x}_0 zu kommen, müssen wir die “Raumladung” in der Form

$$\varrho(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

notieren und Gl. (115) beachten.

Im *stationären* Fall finden wir das vektorielle elektrische *Feld* also einfach durch Differentiation einer *skalaren* Größe, des Potentials Φ . Darin liegt eine bequeme Vereinfachung, denn uns bleibt die Vektorrechnung weitgehend erspart. Zur

¹⁵Wir beschränken uns in der Anschrift auf die Vakuumfelder. Bei *linearem* Zusammenhang $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ und *konstantem* ε lassen sich die Gleichungen unschwer auf das Materiefeld übertragen.

Berechnung des Potentials liefert uns Gl. (110) eine explizite Integrationsformel. Trotzdem ist es häufig *bequemer* (um etwa eine Symmetrie auszunutzen) oder sogar *notwendig* (weil etwa $\varrho(\mathbf{x})$ nicht überall explizit bekannt ist), von der differentiellen POISSONGleichung [vgl. (117) und (118)]

$$\Delta\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (119)$$

auszugehen. Speziell in raumladungsfreien Gebieten geht sie in die LAPLACEgleichung (oder “*Potentialgleichung*”)

$$\Delta\Phi = 0 \quad (120)$$

über, für die zahlreiche spezielle Lösungen und Entwicklungen bekannt sind.

Die andere “Hälfte”

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (121)$$

der stationären Vakuum¹⁶ MAXWELLgleichungen gibt Auskunft über die Wirbel und die (fehlenden) Quellen des Magnetfeldes \mathbf{B} . Da das Magnetfeld *quellfrei* ist, läßt es sich stets aus einem *Vektorpotential* \mathbf{A} ableiten:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (122)$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist weniger offensichtlich als beim skalaren Potential, denn \mathbf{A} ist ja wie \mathbf{B} eine vektorielle Größe. Aber die formale Analogie zwischen den Gln. (118) und (122) deutet schon darauf hin, daß sich viele Lösungen und Lösungsverfahren für das skalare Potential Φ unmittelbar auf die einzelnen Komponenten des Vektorpotentials \mathbf{A} übertragen lassen.

\mathbf{B} gewinnt man aus \mathbf{A} durch Differentiation nach den *Aufpunkt*koordinaten \mathbf{x} . Wenn wir diese Differentiation schon im Integranden ausführen, erhalten wir nach den Regeln der Vektoralgebra

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \nabla \frac{1}{r} d^3\mathbf{x}' \quad \text{oder} \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d^3\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (123)$$

¹⁶Auch hier liegt bei *linearem* Zusammenhang $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ und *konstantem* μ die Verallgemeinerung auf das Materiefeld auf der Hand.

wobei $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ den Vektor vom *Quellpunkt* zum *Aufpunkt* bezeichnet. Insbesondere die *Spezialisierung*

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J \oint \frac{d\mathbf{s}' \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (124)$$

dieser Beziehung für *linienförmige Stromkreise* mit

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = J d\mathbf{s}'$$

wird BIOT-SAVARTSches Gesetz genannt.

Wie im elektrischen Fall kann es vorteilhaft sein, nicht von der expliziten Integraldarstellung (122), sondern von der Differentialgleichung [vgl. (116)]

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (125)$$

auszugehen. Auch hierin zeigt sich wieder die enge mathematische Analogie zwischen dem skalaren (elektrischen) Potential Φ und den Komponenten des (magnetischen) Vektorpotentials \mathbf{A} . Dabei sei noch einmal an die Voraussetzung der *Stationarität* erinnert, die sich im elektrischen und magnetischen Fall durchaus auf verschiedene *Zeitskalen* beziehen kann:

- $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ beruht auf $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Das bedeutet, daß *induzierte Felder* zu vernachlässigen sind.
- $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ beruht auf der Gl. $\text{div } \mathbf{B} = 0$, die *immer* gültig ist. Bei der *Auswertung* haben wir jedoch von $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ Gebrauch gemacht und damit den *Verschiebungsstrom* $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ vernachlässigt.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir die allgemeinen Zusammenhänge an einem konkreten Beispiel illustrieren, das die formale Analogie zwischen Φ und \mathbf{A} bewußt betont. Dazu betrachten wir einen unendlich langen homogenen Zylinder ($x^2 + y^2 \leq a^2$) längs der z -Achse, der

- eine homogene Raumladung ϱ trägt oder
- von einem homogenen Strom $j\mathbf{e}_z$ durchflossen wird (endlich dicker Draht).

Mit

$$\text{a) } V = \Phi \quad \text{und} \quad q = \varrho / \varepsilon_0 \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } V = A_z \quad \text{und} \quad q = \mu_0 j$$

[vgl. Gln. (119) und (125)] erhalten wir das *gemeinsame* mathematische Problem

$$\Delta V = \begin{cases} -q & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{für } r > a, \end{cases}$$

wobei $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ den Radius in Zylinderkoordinaten bezeichnet. Aus Symmetriegründen darf auch V nur von r abhängen. Einer Formelsammlung (oder einer einfachen Überlegung mit dem GAUSSschen Satz¹⁷) entnehmen wir dazu

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dV}{dr}.$$

Wir erhalten damit für $r \leq a$

$$(rV')' = -qr \quad \text{und} \quad rV' = -\frac{q}{2}r^2 + \alpha.$$

Aus der Regularität für $r = 0$ folgt $\alpha = 0$, also $V' = -qr/2$ und

$$V = -\frac{q}{4}(r^2 - a^2) \quad (r \leq a).$$

Die zweite Integrationskonstante haben wir nun *willkürlich* (o.B.d.A.) so gewählt, daß auf der Zylinderoberfläche $V = 0$ wird.

Für $r > a$ finden wir entsprechend

$$(rV')' = 0, \quad V' = \beta/r \quad \text{und} \quad V = \beta \ln \frac{r}{a}.$$

Dabei haben wir die zweite Integrationskonstante bereits so gewählt, daß V für $r = a$ stetig wird. Die erste Integrationskonstante β haben wir so zu bestimmen, daß V' bei $r = a$ stetig ist. Das impliziert die Stetigkeit der Felder und bedeutet physikalisch, daß die Zylinderoberfläche frei von Flächenladungen bzw. Flächenströmen ist. Es folgt $\beta = -qa^2/2$ und

$$V = -\frac{q}{2}a^2 \ln \frac{r}{a} \quad (r \geq a).$$

Kehren wir nun zu den physikalischen Problemen zurück, so haben wir im Fall a)

$$\Phi = -\frac{\varrho}{4\varepsilon_0}(r^2 - a^2) \quad (r \leq a) \quad \text{bzw.} \quad \Phi = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}a^2 \ln \frac{a}{r} \quad (r \geq a).$$

¹⁷ $\mathbf{a} = a(r)\mathbf{e}_r, \implies \int_0^r 2\pi r \operatorname{div} \mathbf{a} dr = 2\pi r a(r), \text{ also } \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r a$

Gemäß $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -d\Phi/dr \mathbf{e}_r$ folgt daraus das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} r \mathbf{e}_r \quad (r \leq a) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} \frac{a^2}{r} \mathbf{e}_r \quad (r \geq a),$$

ein Ergebnis, das sich leicht mit dem GAUSSschen Satz bestätigen läßt.

Im Fall b) haben wir $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$ mit

$$A_z = -\frac{\mu_0 j}{4}(r^2 - a^2) \quad (r \leq a) \quad \text{bzw.} \quad A_z = -\frac{\mu_0 j}{2} a^2 \ln \frac{r}{a} \quad (r \geq a).$$

Dazu berechnen wir $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = -\partial A_z / \partial r \mathbf{e}_\varphi$, also

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} r \mathbf{e}_\varphi \quad (r \leq a) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{a^2}{r} \mathbf{e}_\varphi \quad (r \geq a).$$

Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar aus dem STOKESchen Satz (oder dem AMPÈRESchen Gesetz in Integralform) bestätigen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß Beispiele wie dieses mit *Vorsicht* zu behandeln sind, da sie die Voraussetzung der *endlichen* Ladungs- bzw. Stromverteilung nicht erfüllen. Aus dem Grunde *konnten* wir die explizite Integraldarstellung von Φ bzw. \mathbf{A} hier gar nicht benutzen. Die fehlende Eindeutigkeit der Lösung haben wir durch Symmetrieforderungen beseitigt.

3.3 Das skalare magnetische Potential

Die elektrodynamischen Potentiale Φ und \mathbf{A} nehmen einen zentralen Platz im Kanon der Elektrodynamik ein. Sie existieren, wie wir gesehen haben, im stationären Fall *immer* und *überall* und lassen sich auch für beliebig zeitabhängige Felder verallgemeinern (Abschnitt 3.4). Sie lassen sich relativistisch zu einem kovarianten Viererpotential zusammenfassen (Kapitel 7) und sie verdrängen in der Quantenmechanik die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} aus den Bewegungsgleichungen (Abschnitt 3.7). Daneben führt das “skalare magnetische Potential” nur ein kümmerliches Schattendasein: Es existiert *nicht* immer und überall¹⁸ und spielt *keine* Rolle bei der Formulierung allgemeiner Zusammenhänge. Dafür ist es aber – *wo* es existiert – meistens wesentlich *bequemer* zur Berechnung von Magnetfeldern als das Vektorpotential \mathbf{A} .

Der Grundgedanke zur Einführung dieses Potentials geht denn auch von ganz *praktischen* Gesichtspunkten aus: Meistens ist die Stromdichteverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{x})$

¹⁸Auch nicht in allen Lehrbüchern der Elektrodynamik!

nicht über den ganzen Raum ausgedehnt, sondern auf ein vorgegebenes Leitersystem \mathcal{L} beschränkt. *Außerhalb* des Leitersystems gilt also im stationären Fall überall $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, und daraus folgt, daß sich \mathbf{H} als Gradient eines Potentials ϕ_m darstellen läßt:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi_m(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \notin \mathcal{L} \quad (126)$$

Wir wollen ϕ_m für den wichtigen Grenzfall einer *dünnen* Leiterschleife \mathcal{L} im Vakuum explizit berechnen. Dazu gehen wir vom BIOT-SAVARTSchen Gesetz [vgl. Gl. (124)]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{s}' \times \nabla' \frac{1}{r} \quad (127)$$

aus. Da das Kurvenintegral mit $d\mathbf{s}' \times$ unbequem ist, multiplizieren wir skalar mit einem beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a} und vertauschen die Faktoren des Spatprodukts:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{a} \cdot \left(d\mathbf{s}' \times \nabla' \frac{1}{r} \right) = \frac{J}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{s}' \cdot \left(\nabla' \frac{1}{r} \times \mathbf{a} \right).$$

Dieses Integral können wir nun nach dem STOKESchen Satz umformen und erhalten

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \nabla' \times \left(\nabla' \frac{1}{r} \times \mathbf{a} \right) \cdot d\mathbf{S},$$

wobei sich die Integration über *irgendeine* von \mathcal{L} berandete Fläche $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ erstreckt, die *nicht* durch den Aufpunkt geht. Den Integranden formen wir gemäß

$$\nabla' \times \left(\nabla' \frac{1}{r} \times \mathbf{a} \right) = \mathbf{a} \cdot \nabla' \nabla' \frac{1}{r} - \mathbf{a} \Delta' \frac{1}{r}$$

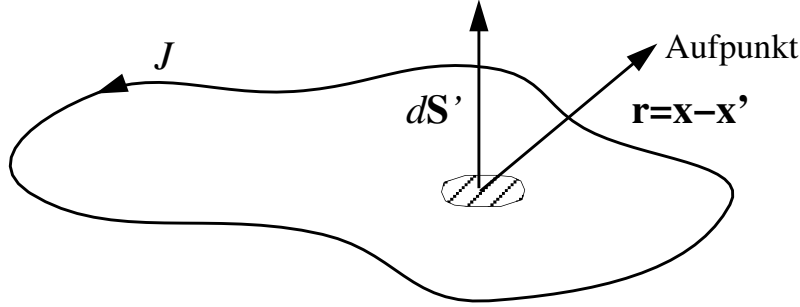
um. Da der Aufpunkt nicht auf $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ liegt, ist $\Delta'(1/r) = 0$. Berücksichtigen wir außerdem $\nabla' = -\nabla$, so erhalten wir

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{a} \cdot \nabla \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \nabla' \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S}'.$$

Da \mathbf{a} beliebig gewählt werden kann, folgt daraus

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m \quad \text{mit} \quad \phi_m = \frac{J}{4\pi} \int_{\mathcal{F}_L} \nabla' \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S}' . \quad (128)$$

Das Integral in Gl. (128) hat eine anschauliche geometrische Bedeutung: (siehe Skizze)



Wegen

$$\nabla' \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S}' = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{r^3} \cdot d\mathbf{S}' = \frac{\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}'}{r^2} = d\Omega$$

beschreibt das Integral nichts anderes als den Raumwinkel Ω , unter dem die Stromschleife vom Aufpunkt aus erscheint. (Dabei ist auf die richtige *Vorzeichenwahl* zu achten: $d\mathbf{S}'$ ist so zu orientieren, daß der Strom J die Fläche \mathcal{F}_L im mathematischen Sinn umfließt!) Damit erhalten wir für das skalare Potential die einprägsame Formel

$$\phi_m = \frac{\Omega}{4\pi} J . \quad (129)$$

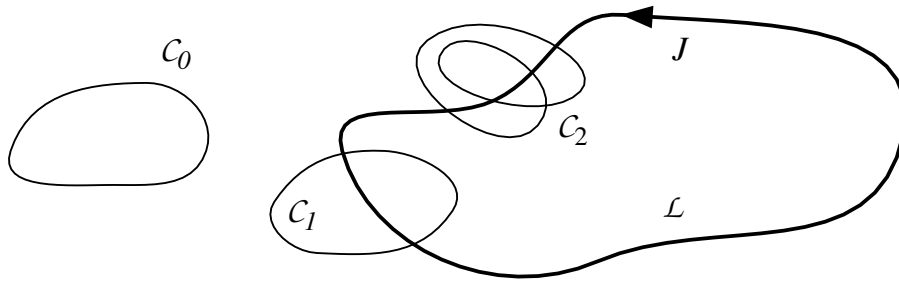
Man beachte, daß ϕ_m nach Konstruktion nur außerhalb der berandeten Fläche \mathcal{F}_L definiert ist. Durchstoßen wir diese Fläche, so ändert sich der Raumwinkel um 4π und das skalare magnetische Potential macht einen *Sprung* J . Aus

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \phi_m(1) - \phi_m(2)$$

erhalten wir also im Einklang mit dem AMPÈRESchen Gesetz

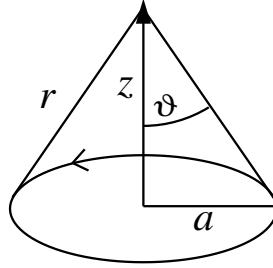
$$\phi_m^{(0)} - \phi_m^{(n)} = \oint_{\mathcal{C}_n} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = nJ , \quad (130)$$

wenn die Kurve \mathcal{C}_n die Leiterschleife n -mal umschließt (siehe Skizze):



Dabei steht es uns *frei* zu wählen, *wohin* wir – abgesehen vom Rand – die Sprungfläche $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ legen: Es handelt sich hier *nicht* um eine physikalische Unstetigkeit, sondern um einen mathematischen *Verzweigungsschnitt*, der das AMPÈRESche Gesetz (130) gewährleistet. Das zweidimensionale Analogon ist vielleicht aus der Funktionentheorie bekannt (vgl. den Residuensatz und $\ln z$).

Zur Illustration berechnen wir das skalare magnetische Potential der Kreisschleife $\mathcal{L} = \{\mathbf{x} | z = 0, x^2 + y^2 = a^2\}$ auf der positiven z -Achse (siehe Skizze):



Die Stromschleife wird vom Aufpunkt aus unter dem Raumwinkel

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\vartheta} \sin \theta d\theta = 2\pi(1 - \cos \vartheta)$$

gesehen. Mit

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

erhalten wir also aus Gl. (129)

$$\phi_m(0, 0, z > 0) = \frac{J}{2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]. \quad (131)$$

Aus der Ableitung

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial z} = -\frac{J}{2} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] = -\frac{J}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

ergibt sich das Magnetfeld

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = -\mu_0 \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{r^3} \mathbf{e}_z$$

auf der positiven z -Achse. Die Übereinstimmung mit dem BIOT-SAVARTschen Gesetz erkennt man sofort, wenn man in Gl. (124) Zylinderkoordinaten a, φ einführt:

$$B_z = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint \frac{(d\mathbf{s}' \times \mathbf{r})_z}{r^2} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{a d\varphi a}{r^2} = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{r^3}.$$

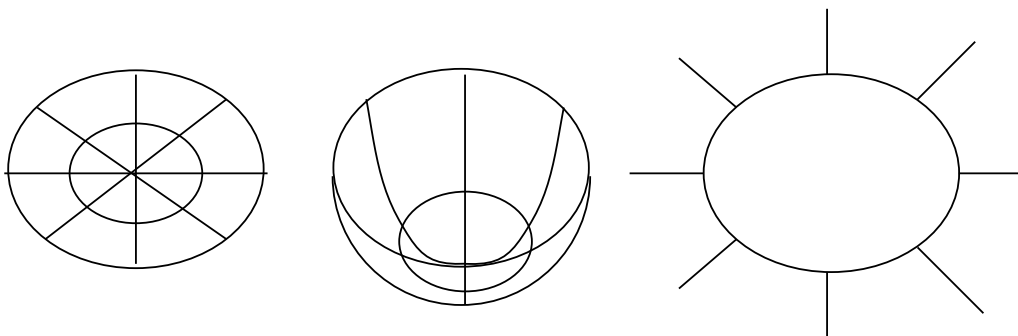
Dieses Ergebnis gilt demnach auch auf der *negativen* z -Achse. Wir bestätigen dies durch die Symmetrie (warum?)

$$\phi_m(-z) = -\phi_m(z)$$

des skalaren magnetischen Potentials. Mit $\phi_m(0_+) = J/2$ [vgl. Gl. (131)] folgt daraus ein Sprung

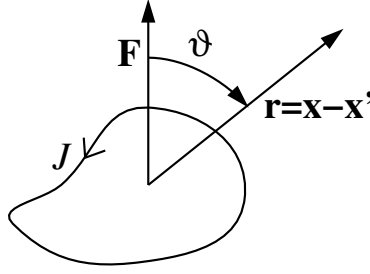
$$\phi_m(0_+) - \phi_m(0_-) = J.$$

Das *Potential* geht also *unstetig*, das *Feld* jedoch *stetig* durch Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$. Schon das weist darauf hin, daß wir den “Verzweigungsschnitt” beliebig “verbiegen” können:



Entscheidend ist nur, daß wir bei *jedem* Umlauf um den Stromleiter *einmal* die Fläche mit dem Sprung J durchstoßen.

Um die Eleganz und rechnerische Überlegenheit zu demonstrieren, wollen wir abschließend noch das skalare magnetische Potential einer *beliebig* geformten ebenen Stromschleife (Fläche F) in *großer Entfernung* angeben (siehe Skizze):



Mit $\Omega = F \cos \vartheta / r^2$ erhalten wir unmittelbar

$$\phi_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} J F \frac{\cos \vartheta}{r^2}, \quad (132)$$

ein Ergebnis, das die Entwicklung $z \gg a$ von Gl. (131) verallgemeinert, und auf das wir noch zurückkommen werden.

3.4 Die allgemeinen Potentiale der Elektrodynamik

Bisher haben wir bei der Einführung von Potentialen das Problem der Zeitabhängigkeit ausgeklammert: Die Quellen und Wirbel der Felder waren allein durch Ladungen und Ströme gegeben. Wenn wir nun beliebig zeitabhängige Felder zulassen, stehen wir vor der Schwierigkeit, daß die Felder selbst zur Wirbeldichte beitragen. Wegen

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{und} \quad (133)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (134)$$

ist nun im allgemeinen weder \mathbf{E} noch \mathbf{B} aus einem skalaren Potential ableitbar. Uneingeschränkt gilt jedoch $\text{div } \mathbf{B} = 0$, und darum können wir das Magnetfeld *immer* in der Form

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (135)$$

mit einem Vektorpotential \mathbf{A} darstellen. Setzen wir dies ins Induktionsgesetz (133) ein, so folgt die universelle Beziehung

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Nicht wie im statischen Fall \mathbf{E} , sondern $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ ist also immer wirbelfrei und läßt sich stets und überall aus einem *skalaren* Potential Φ ableiten:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (136)$$

Setzen wir das ins COULOMBgesetz $\operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0$ ein, so folgt eine (skalare) Gleichung

$$\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (137)$$

zur Bestimmung von \mathbf{A} und Φ . Eine zweite (vektorielle) Gleichung erhalten wir aus dem AMPÈRESchen Gesetz (134):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

oder mit dem Entwicklungssatz und $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \text{also}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right). \quad (138)$$

Mit den Gln. (137) und (138) sind \mathbf{A} und Φ noch *nicht* eindeutig festgelegt, denn wir haben $\operatorname{div} \mathbf{A}$ bisher überhaupt nicht festgelegt. Die Ausgangsgleichungen (135) und (136) ändern sich darum auch nicht, wenn wir \mathbf{A} und Φ durch

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla\psi \quad \text{und} \quad (139)$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (140)$$

ersetzen. Solche Transformationen zwischen Potentialen, die *keinen* Einfluß auf die *Felder* haben, werden **Eichtransformationen** genannt. Die *Eichinvarianz* ist eine zentrale Grundforderung moderner Feldtheorien. Wegen der Eichinvarianz können wir *frei* über $\operatorname{div} \mathbf{A}$ verfügen.

Wenn wir das COULOMBgesetz (137) betrachten, so liegt es nahe, die “COULOMB*eichung*”

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (141)$$

zu wählen, die Gl. (137) in die vertraute POISSONGleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad (142)$$

überführt. Nachteilig ist dabei jedoch, daß die Potentiale in Gl. (138) gekoppelt bleiben.

Für eine Entkoppelung der Gleichungen bietet sich die “LORENTZzeichnung”

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (143)$$

an, die auf die beeindruckend symmetrischen Beziehungen

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad (144)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (145)$$

führt. Die Entkoppelung und die Symmetrie sind nicht die einzigen Vorzüge der LORENTZzeichnung. Man erkennt nämlich leicht, daß die Gln. (144, 145) den natürlichen Ausgangspunkt für eine kovariante Formulierung der Elektrodynamik bilden (siehe Kapitel 7). Wir treffen daher die Konvention, daß wir *grundsätzlich* von der LORENTZzeichnung ausgehen.

3.5 Die retardierten Potentiale

Nach (144, 145) genügen die Potentiale im *Vakuum* den selben homogenen Wellengleichungen wie die Felder und beschreiben die *Ausbreitung* elektromagnetischer Wellen. Wir wollen nun an den *inhomogenen* Wellengleichungen (144, 145) studieren, wie solche Wellen *erzeugt* werden. Darum suchen wir – in Verallgemeinerung der Gln. (111) und (112) – nach der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q(\mathbf{x}, t). \quad (146)$$

Dazu nutzen wir die lineare Superponierbarkeit aus und betrachten zunächst eine punktförmige Quelle

$$q(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)q_0(t) \quad (147)$$

(“Methode der GREENschen Funktion”, vgl. die Argumentation im Abschnitt 3.2). Führen wir relative Koordinaten $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ein, haben wir also zunächst das Grundproblem

$$\Delta V_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} = -q_0(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (148)$$

zu lösen. Offenbar hängt V_0 aus Symmetriegründen nur vom Abstand $r = |\mathbf{r}|$ ab. Mit der entsprechenden Darstellung

$$\Delta V_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r V_0)$$

des LAPLACEoperators (Formelsammlung, COULOMBfeld) folgt für $r \neq 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r V_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r V_0) = 0.$$

Dies ist eine eindimensionale homogene Wellengleichung für $r V_0(r, t)$ mit der allgemeinen Lösung

$$V_0(r, t) = \frac{1}{r} \left\{ f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right\}.$$

Dabei beschreibt f radial *auslaufende* und g radial *einlaufende* Kugelwellen. Wir stellen nun eine *Zusatzforderung*, die *nicht* aus den Grundgleichungen [den Gln. (146, 148)] oder letztlich den MAXWELLgleichungen) begründet werden kann: Wir verlangen *Kausalität* in dem Sinne, daß die *Wirkung* $V_0(\mathbf{r}, t)$ nur von der Quellstärke $q(t')$ in der *Vergangenheit* ($t' < t$) abhängen darf. Wir verwenden damit – um diese Begriffe einzuführen – *retardierte Potentiale* und schließen *avancierte* Potentiale aus. Die *retardierten* Potentiale werden offenbar gerade durch die *auslaufenden* Kugelwellen beschrieben:

$$V_0(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Für $r \rightarrow 0$ muß

$$V_0(r, t) \rightarrow \frac{1}{r} f(t)$$

offenbar mit dem COULOMBpotential

$$V_c = \frac{q_0(t)}{4\pi r}$$

übereinstimmen¹⁹. Daraus folgt $f(t) = q(t)/4\pi$ oder – nun wieder für beliebige r ! –

$$V_0(r, t) = \frac{q_0(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}. \quad (149)$$

Wir erhalten also gerade das COULOMBpotential zu q_0 , allerdings mit einer zeitlichen Verzögerung $\tau = r/c$, die exakt der Laufzeit des Lichts vom Quellpunkt \mathbf{x}_0 zum Aufpunkt \mathbf{x} entspricht!

Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Quellverteilung $q(\mathbf{x}', t)$ liegt nun auf der Hand: Überlagern wir zunächst die Potentiale V_i mehrerer Punktquellen (q_i bei \mathbf{x}_i), erhalten wir

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{q_i(t - \frac{r_i}{c})}{r_i} \quad (r_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|),$$

und durch Übergang zum Integral mit $q_i \rightarrow q d^3\mathbf{x}'$ folgt

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d^3\mathbf{x}' \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (150)$$

Übertragen wir diese Betrachtungen auf die Gln. (144) und (145), so erhalten wir die *retardierten elektrodynamischen Potentiale*

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d^3\mathbf{x}' \quad \text{und} \quad (151)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d^3\mathbf{x}' \quad (r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \quad (152)$$

Damit haben wir also auch im beliebig zeitabhängigen Fall eine explizite Darstellung der Potentiale [Gln. (151, 152)] und Felder [Gln. (135) und (136)], wenn

¹⁹Mathematisch folgt das, wenn wir Gl. (148) über eine Kugel vom Radius a integrieren, den Gaußschen Satz anwenden und den Limes $a \rightarrow 0$ betrachten:

$$-4\pi a^2 \left\{ \frac{1}{a^2} f - \frac{1}{ac} f' \right\} + \frac{4\pi a^3}{3c^2} \frac{f''}{a} = -q$$

die Ladungs- und Stromverteilung bekannt sind. Der einzige Unterschied zum stationären Fall liegt bei den Potentialen in der *Retardierung*, also in der Berücksichtigung der Lichtlaufzeit $\tau = r/c$ von Quellpunkt \mathbf{x}' zum Aufpunkt \mathbf{x} .

Abschließend sei nochmal darauf hingewiesen, daß diese elegante und symmetrische Darstellung der Potentiale an die LORENTZzeichnung gebunden ist. Es ist deshalb nicht ganz überflüssig zu fragen, ob die *Nebenbedingung* der LORENTZkonvention (143) durch die Potentiale (151, 152) denn auch tatsächlich erfüllt ist. Durch direkte Auswertung der Gln. (151) und (152) findet man nach kurzer Umformung ($\nabla \rightarrow \nabla'$), daß dies durch die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

sichergestellt ist.

3.6 Der HERTZsche Dipol

Als Anwendung untersuchen wir das Strahlungsfeld einer Punktladung e , die sich mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{a}}$ in der Nähe des Koordinatensprungs bewegt. Dabei lehnen wir uns – wie es allgemein üblich ist – an die historische Behandlung durch HERTZ (1888) an.

Für hinreichend kleine Amplituden \mathbf{a} der Bewegung und für nicht-relativistische²⁰ Geschwindigkeiten erhalten wir das retardierte Vektorpotential

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\varrho\mathbf{v}]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{|\mathbf{x}|} [\dot{\mathbf{a}}], \end{aligned}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$g\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = [g]$$

gesetzt haben. Mit dem HERTZ-Vektor

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 e}{4\pi |\mathbf{x}|} \mathbf{a} \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) \quad (153)$$

²⁰Mit $v \ll c$ ersparen wir uns die LIENARD-WIECHERTSche Korrektur der erfaßten Ladung.

gilt also

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Pi}. \quad (154)$$

Zur Berechnung des skalaren Potentials benutzen wir die LORENTZkonvention

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{1}{c^2} \Phi \right) = 0.$$

Wenn wir von einem trivialen, zeitlich konstanten COULOMBanteil absehen²¹, folgt daraus

$$\Phi = -c^2 \operatorname{div} \vec{\Pi}. \quad (155)$$

Wir betrachten nun speziell eine Auslenkung $\mathbf{a} = a(t)\mathbf{e}_z$ nur in z -Richtung. Mit $r = |\mathbf{x}|$ erhalten wir dann über

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} a \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{e}_z$$

die Potentiale

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \dot{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{e}_z \quad (156)$$

und

$$\Phi = -c^2 \operatorname{div} \vec{\Pi} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{a(t - \frac{r}{c})}{r}$$

oder wegen $\partial r / \partial z = z/r$

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r} \left[\frac{a(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\dot{a}(t - \frac{r}{c})}{cr} \right]. \quad (157)$$

Wir gehen nun zu sphärischen Polarkoordinaten r, φ, ϑ über und notieren

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \dot{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cos \vartheta \\ A_\vartheta &= \frac{\mu_0 e}{4\pi r} \dot{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \vartheta \\ A_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (158)$$

²¹Dieser Anteil läßt sich durch eine zweite Punktladung $-e$ im Koordinatensprung eliminieren. $e\mathbf{a}$ gibt dann das Dipolmoment der Ladungsverteilung an.

sowie

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\dot{a}(t - \frac{r}{c})}{cr} \right] \cos \vartheta. \quad (159)$$

Die Berechnung der Felder aus

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

ist nun nicht schwierig, aber mühsam. Wenn man einer Formelansammlung die Darstellung von rot und grad in Polarkoordinaten entnimmt, findet man

$$\begin{aligned} B_r &= (\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = 0 \\ B_\vartheta &= (\text{rot } \mathbf{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \vartheta \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial \varphi} \right] = 0 \\ B_\varphi &= (\text{rot } \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left(\frac{\ddot{a}}{cr} + \frac{\dot{a}}{r^2} \right) \sin \vartheta \\ E_r &= -(\nabla\Phi)_r - \dot{A}_r = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left(\frac{2ac^2}{r^3} + \frac{2\dot{a}c}{r^2} \right) \cos \vartheta \\ E_\vartheta &= -(\nabla\Phi)_\vartheta - \dot{A}_\vartheta = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left(\frac{ac^2}{r^3} + \frac{\dot{a}c}{r^2} + \frac{\ddot{a}}{r} \right) \sin \vartheta \\ E_\varphi &= -(\nabla\Phi)_\varphi - \dot{A}_\varphi = 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind die Auslenkung a und die Ableitungen \dot{a} und \ddot{a} stets *retardiert*, also zur Zeit $t - r/c$ zu nehmen.

Man erkennt, daß das Magnetfeld kreisförmig um die z -Achse verläuft, und daß das elektrische Feld in den dazu senkrechten Meridianebenen liegt. Weiter erkennt man, daß die Beiträge zu den Feldern mit verschiedener Potenz vom Radius r abhängen. Wir interessieren uns für die *Fernzone*, in der nur noch die Terme $\sim 1/r$ wirksam sind. Dort haben die Felder die relativ einfache Gestalt

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi c} \frac{\ddot{a}(t - \frac{r}{c})}{r} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \quad \text{und} \quad (160)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\ddot{a}(t - \frac{r}{c})}{r} \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta. \quad (161)$$

\mathbf{E} und \mathbf{B} stehen also aufeinander und auf der radialen Richtung senkrecht. Ihre Intensität ist proportional zum Sinus des Polarwinkels ϑ , sie wird also maximal in

der Äquatorialebene ($\vartheta = \pi/2$) und verschwindet auf der Polarachse ($\vartheta = 0, \pi$). \mathbf{E} und \mathbf{B} sind zeitlich in Phase, ihr Betrag ist, abgesehen von dem konstanten Faktor c , gleich. Die Intensität fällt mit $1/r$ deutlich schwächer als die Intensität stationärer Felder. Diese weitreichenden Felder werden nur von *beschleunigten* Ladungen erzeugt.

Aus dem POYNTINGvektor

$$\vec{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mu_0 e^2}{(4\pi)^2} \frac{\ddot{a}^2}{c} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (162)$$

sehen wir, daß hierbei – bevorzugt in der Äquatorialebene – Energie in radialer Richtung abgestrahlt wird. Als gesamte abgestrahlte Leistung finden wir

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \oint \vec{S} \cdot d\mathbf{S} = \int \vec{S}_r r^2 d\varphi \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\mu_0 e^2}{(4\pi)^2} \frac{\ddot{a}^2}{c} 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \ddot{a}^2 \quad \text{oder} \\ \dot{W} &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{a}^2. \end{aligned} \quad (163)$$

Die abgestrahlte Leistung hängt also – wie zu erwarten – nicht vom Abstand r ab, ihr Betrag ist proportional zum Quadrat der Beschleunigung.

Es sei nur am Rande erwähnt, daß die Berücksichtigung dieser Energieabgabe in den mechanischen Bewegungsgleichungen mit gewissen Schwierigkeiten verbunden ist: Die naiv formulierte Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{2} v^2 = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2$$

ist nämlich erstens *nicht* galileivariant und führt zweitens zu “Runaway”-Lösungen, bei denen die gesamte Bewegung auf eine Zeitskala

$$\tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} = \frac{2r_0}{3c} = 9.4 \cdot 10^{-24} \text{s} \quad (164)$$

(bezogen auf ein Elektron) zum Stillstand kommt. Für eine ausführliche Diskussion verweisen wir auf Panofsky-Phillips, Abschnitt 21–6 bis 21–8 und Jackson, Kapitel 17.

Wir wollen abschließend noch explizit die Abstrahlung eines harmonischen Oszillators mit

$$a(t) = a_0 \sin \omega t \quad (165)$$

betrachten. Mit $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ und $\ddot{a} = -\omega^2 a$ folgt aus den Gln. (160) und (161) für die Fernzone $r \gg \lambda$

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_\vartheta \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \frac{E}{c} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{mit} \quad (166)$$

$$E = \frac{\mu_0 e}{4\pi} a_0 \omega^2 \sin \vartheta \frac{\sin(kr - \omega t)}{r}. \quad (167)$$

Wir erhalten also radial auslaufende harmonische Wellen. Nach Gl. (163) wird dabei im *zeitlichen Mittel* die Leistung

$$\dot{W} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a_0^2}{2} \omega^4 = -\dot{U} \quad (168)$$

abgestrahlt. Vergleichen wir sie mit der Gesamtenergie

$$U = \frac{m\omega^2}{2} a_0^2$$

des harmonischen Oszillators, so finden wir eine *Strahlungsdämpfung* mit einem Dekrement

$$\gamma = -\frac{\dot{U}}{U} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} = \frac{2}{3} \tau_0 \omega^2. \quad (169)$$

Statt der unphysikalischen Zeitskala τ_0 [vgl. (164)] tritt also hier die lange Zeitskala $1/\gamma \sim 1/\omega^2 \tau_0$ auf. Schreiben wir

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar \omega}{mc^2} = \frac{2\alpha}{3} \frac{\hbar \omega}{mc^2},$$

so erkennen wir, daß für Elektronen $\gamma \ll \omega$ gilt, solange

$$\hbar \omega \ll \frac{3}{2} \frac{mc^2}{\alpha} \approx 100 \text{ MeV}$$

ist. Dabei ist $\alpha \approx 1/137$ die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante. Im Bereich atomarer Linienstrahlung ($\hbar \omega \sim 1 \text{ eV}$) erhalten wir $\gamma \approx 10^{-8} \omega$. Dieser Dämpfung entspricht die *natürliche Linienbreite*.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die abgestrahlte Leistung nach Gl. (168) mit ω^4 geht. Die “RAYLEIGH-Streuung” geladener Teilchen im Sonnenlicht bevorzugt deshalb hohe Frequenzen und ist für das Himmelsblau verantwortlich.

3.7 Felder oder Potentiale?

Im ersten Kapitel hatten wir die *Felder* \mathbf{E} und \mathbf{B} eingeführt, um die Kraft [vgl. (1)]

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (170)$$

auf geladene Teilchen zu beschreiben. In diesem Kapitel haben wir gesehen, daß wir die Felder *immer* in die Form [vgl. (135, 136)]

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

aus *Potentiale* \mathbf{A} und Φ berechnen können. Die Symmetrie und Eleganz der Wellengleichungen [LORENTZzeichnung, vgl. (144, 145)]

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

sowie ihrer einfachen, anschaulich interpretierbaren Lösungen [vgl. (151), (152)]

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d^3\mathbf{x}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d^3\mathbf{x}'$$

regt nun Spekulationen darüber an, was denn eigentlich *grundlegender* ist: Die *Felder* oder die *Potentiale*?

Zunächst einmal ist klar, daß die *klassische* Mechanik darüber keine Aussage machen kann. Statt von Gl. (170) können wir auch von der LAGRANGEfunktion

$$L = T - e\Phi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (171)$$

oder der HAMILTONfunktion

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi \quad (172)$$

ausgehen, um die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld zu beschreiben.

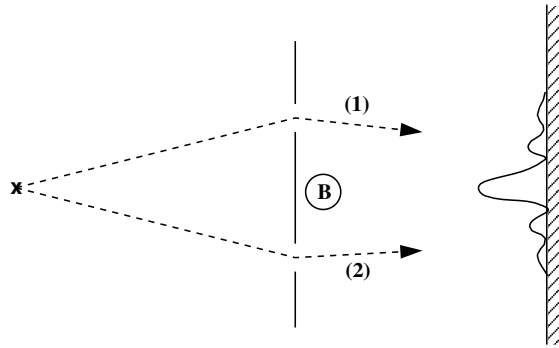
Anders sieht es in der *Quantenmechanik* aus: Hier haben die klassischen Begriffe der *Bahn* eines Teilchens und der *Kraft*, die ein Teilchen erfährt, keinen Platz mehr, und wir *müssen* nun von Gl. (172) ausgehen, um die SCHRÖDINGERgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld zu formulieren. Aber *sieht* ein quantenmechanisches Teilchen nun wirklich die Potentiale oder doch letztlich wieder die Felder?

Um diese Frage zu beantworten, schlugen BOHM und AHARANOV 1956 ein Experiment vor, welches den Umstand ausnutzt, daß im Außenraum einer langen zylindrischen Spule oder eines langen zylindrischen Stabmagneten wohl das Magnetfeld \mathbf{B} , *nicht* aber das Vektorpotential \mathbf{A} verschwindet. Nach dem STOKESchen Satz gilt nämlich *außerhalb* des Magneten ($r > a$) in Zylinderkoordinaten

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r A_\varphi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi a^2 B_z \quad (173)$$

$$\text{oder } A_\varphi = \frac{a^2 B_z}{2r}, \quad (174)$$

wenn B_z das Feld *im Magneten* bezeichnet. Nach dem Vorschlag von BOHM und AHARANOV wurde nun ein Doppelspaltexperiment mit Elektronen durchgeführt, bei dem ein mikroskopisch kleiner magnetisierter Eisenfaden (“whisker”) B im “Schattenbereich” zwischen den Spaltöffnungen angebracht wurde²² (siehe Skizze):



Obwohl die Elektronen bei diesem Experiment kaum eine Chance haben, das Magnetfeld \mathbf{B} zu “sehen”, ergibt sich die aus dem Vektorpotential \mathbf{A} berechnete Verschiebung des Interferenzmusters.

²²Eine genauere Beschreibung findet man bei FEYNMAN, Bd. II, Abschnitt 15–5.

Danach sollte also das Vektorpotential \mathbf{A} und *nicht* das Magnetfeld \mathbf{B} als das “wahre” Feld angesehen werden.

Dann bringt es uns aber in Schwierigkeiten, daß die Potentiale \mathbf{A} und Φ gar *nicht eindeutig* definiert sind: Wir haben ja die Eichfreiheit! Gibt es etwa ein anderes Interferenzmuster, wenn wir statt von Gl. (174) von einem anders geeichten Vektorpotential ausgehen? Natürlich nicht. Tatsächlich hängt das Interferenzmuster nur von dem Wegintegral

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

über die beiden Wege (1) und (2) ab, und dieses Integral ist nach Gl. (173) nichts anderes als der magnetische Fluß

$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

durch die Magnetnadel – *unabhängig* von der Eichung (vgl. Übungen). Die beobachtbaren Effekte bleiben also auch in der Quantenmechanik *eichinvariant*.

Schließlich sei daran erinnert, daß es in der Quantenmechanik keine wohldefinierte Bahn gibt: Das Elektron ist nicht eindeutig lokalisierbar und “sieht” daher vielleicht doch das Magnetfeld selbst. Eine eindeutige Antwort auf die Frage “Felder oder Potentiale?” kann also auch das BOHM-AHARANOV-Experiment nicht geben.

4 Spezielle Probleme des statischen Feldes

Im *Rohbau* steht unser Gebäude der Elektrodynamik: Wir haben gelernt, wie sich aus beliebig vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen im Prinzip die elektrodynamischen Potentiale und Felder berechnen lassen. Was noch fehlt, ist die detaillierte Auswertung und die Anwendung der Theorie. Ein Blick in das Inhaltsverzeichnis eines Standard-Lehrbuches (etwa Jackson oder Panofsky-Phillips) macht deutlich, daß wir uns im Rahmen dieser Vorlesung auf wenige ausgewählte Probleme beschränken müssen.

4.1 Das Selbstkonsistenzproblem

An der Grenze zu den grundsätzlichen Fragen steht dabei ein Problemkreis, den wir bisher noch kaum angesprochen haben: Häufig ist die Ladungs- und Stromverteilung nicht *a priori* vorgegeben, sondern stellt sich *selbstkonsistent* auf die Felder ein. Bei einem sehr guten Leiter werden sich beispielsweise gerade *solche* Oberflächen-Ladungen und -Ströme bilden, *daß* das Leiterinnere feldfrei bleibt (FARADAYScher Käfig). Die Situation ist vergleichbar mit dem Problem der Zwangskräfte in der Mechanik: Auch die Zwangskräfte sind nicht von vornherein bekannt, sondern stellen sich *so* ein, *daß* die Zwangsbedingungen erfüllt sind. In der Mechanik läßt sich das Problem nicht allein aus den NEWTONschen Bewegungsgleichungen behandeln. Im LAGRANGEformalismus haben wir *zusätzlich* vom Prinzip der virtuellen Verrückungen Gebrauch gemacht und haben uns damit auf das *spezielle Modell* der “glatten Führung” beschränkt.

Entsprechend lassen sich die Selbstkonsistenzprobleme der Elektrodynamik nicht allein aus den MAXWELLgleichungen behandeln. Wir brauchen zusätzlich *Modelle der Materie*, die festlegen, wie sich Ladungen und Ströme auf die Felder einstellen. Einfache Modelle solcher Art haben wir im Abschnitt 2.7 kennengelernt, als wir die Materialkonstanten ε , μ und σ eingeführt haben. Ein anderes gern benutztes Modell ist das des unendlich guten Leiters.

Auch wenn man sich auf bestimmte Modelle der Materie beschränkt, gibt es in der Elektrodynamik kein *allgemeines* Verfahren, das Selbstkonsistenzprobleme analytisch zu behandeln. Hierin liegt ein Grund für die etwas verwirrende Vielfalt *spezieller* lösbarer Probleme in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik. Im allgemeinen ist das Selbstkonsistenzproblem jedoch eng mit der Frage der *Randbedingungen* (vgl. auch Abschnitt 2.8) verknüpft. Darum wollen wir die Diskussion spezieller Probleme des statischen Feldes nun mit einer mathematischen Analyse der Randbedingungen für die POISSONGleichung beginnen.

4.2 Randbedingungen der POISSONGleichung

Aufgrund der andiskutierten Problematik ist die Quellverteilung $q(\mathbf{x})$ häufig nicht im ganzen Raum R_3 , sondern nur in einem Gebiet $G \subset R_3$ vorgegeben. Damit stellt sich die Frage, welche Randbedingungen auf dem Rand ∂G erforderlich sind, um die Lösung $V(\mathbf{x})$ der Poissongleichung

$$\Delta V(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \quad (175)$$

in G *eindeutig* festzulegen.

Dazu gehen wir von *zwei* Lösungen V_1 und V_2 aus. Dann erfüllt die Differenz

$$U = V_1 - V_2 \quad (176)$$

die LAPLACEgleichung

$$\Delta U = 0. \quad (177)$$

Wir wenden nun den GAUSSschen Satz auf die Funktion $U \nabla U$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} U \nabla U \cdot d\mathbf{S} &= \int_G \nabla \cdot (U \nabla U) d\tau \\ &= \int_G U \Delta U d\tau + \int_G (\nabla U)^2 d\tau. \end{aligned} \quad (178)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet wegen Gl. (177). Das Differenzfeld

$$\nabla U = \nabla V_1 - \nabla V_2$$

wird also genau dann identisch verschwinden, wenn die linke Seite von Gl. (178) Null wird. Hinreichend dafür ist, daß überall auf ∂G entweder U oder die Normalkomponente $(\nabla U)_{\text{norm}}$ verschwindet. Daraus folgt, daß das stationäre Potentialproblem der POISSONGleichung (175) in einem begrenzten Gebiet G (falls überhaupt) *eindeutig* lösbar ist, wenn auf dem Rand ∂G

- das Potential V vorgegeben ist (DIRICHLETSche Randbedingungen) oder
- die Normalkomponente $(\nabla V)_{\text{norm}}$ der Feldstärke vorgegeben ist (NEUMANNsche Randbedingungen) oder

- (auf verschiedenen Teilstücken von ∂V) entweder V oder $(\nabla V)_{\text{norm}}$ vorgegeben ist (gemischte Randbedingungen).

Man beachte, daß man *nicht* sowohl V als auch $(\nabla V)_{\text{norm}}$ vorgeben kann; damit wäre das Problem überbestimmt.

Von besonderer Bedeutung für die *Elektrostatik* sind DIRICHLETSche Randbedingungen für ein Gebiet G , das durch *Leiteroberflächen* mit vorgegebenem Potential begrenzt ist.

Der Eindeutigkeitssatz macht keine Aussage darüber, *wie* die Randwertaufgabe gelöst werden kann. Eine Reduzierung auf den Kern der Problematik läßt sich durch die “GREENSche Funktion” erzielen. Dabei reicht es aus, das Problem für beliebige *punktförmige* Quellen und *homogene* Randbedingungen zu lösen. Darüber hinaus existiert jedoch kein generelles analytisches Verfahren, so daß man bei der Lösung der POISSONGleichung in begrenzten Gebieten im allgemeinen auf numerische Verfahren angewiesen ist. Eine analytische Lösung läßt sich angeben, wenn aufgrund der Symmetrie eine eindimensionale Behandlung möglich ist (z. B. Kugelkondensator, siehe Übungen). Außerdem läßt sich in einigen wenigen Spezialfällen die Lösung aus “Spiegelbildern” der Ladungsverteilung konstruieren.

4.3 Die Spiegelung an einer Ebene

Mit $\psi(x, y, z)$ ist auch $\tilde{\psi} = \psi(x, y, 2z_0 - z)$ Lösung der LAPLACEgleichung.

$$\phi = \psi - \tilde{\psi}$$

ist also eine Lösung der LAPLACEgleichung, welche die Randbedingungen $\phi = 0$ in der Ebene $z = z_0$ erfüllt. Daraus ergibt sich sofort die Lösung für das Potentialproblem

$$\Delta V(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \quad \text{für} \quad z > z_0 \quad (179)$$

mit der DIRICHLETSchen Randbedingung

$$V = V_0 \quad \text{für} \quad z = z_0 : \quad (180)$$

Sei $U(\mathbf{x})$ die Lösung im gesamten Raum, welche die Randbedingung (180) *nicht* berücksichtigt, also

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (181)$$

Dann erfüllt

$$\tilde{U}(\mathbf{x}) = U(x, y, 2z_0 - z) = U(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (182)$$

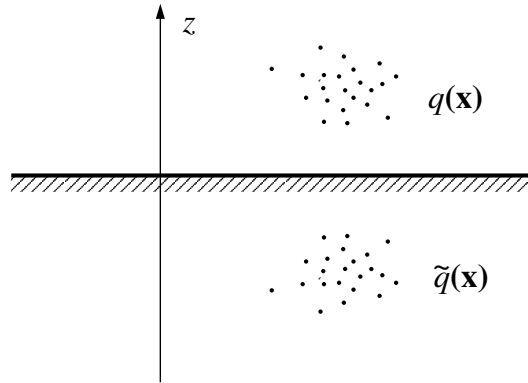
im Halbraum $z \geq z_0$ die LAPLACEgleichung, und

$$V(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - \tilde{U}(\mathbf{x}) + V_0 \quad (z \geq z_0) \quad (183)$$

ist die gesuchte Lösung. $-\tilde{U}(\mathbf{x})$ ist das Potential, das von der *gespiegelten* Quellverteilung

$$\tilde{q}(\mathbf{x}) = -q(\tilde{\mathbf{x}}) = -q(x, y, 2z_0 - z) \quad (184)$$

erzeugt wird (vgl. Skizze).



Dabei ist unbedingt zu beachten, daß diese Lösung nur im Halbraum $z \geq z_0$ gültig ist; für $z < z_0$ ist das Potential durch die Problemstellung gar nicht definiert. Das “Spiegelbild” $\tilde{q}(\mathbf{x})$ ist also ebenso *virtuell* wie das Gesicht hinter dem Rasierspiegel.

In der Elektrostatik repräsentiert die Spiegelfläche $z = z_0$ eine leitende Ebene, deren Potential fest vorgegeben ist, etwa eine geerdete Abschirmung. Magnetostatisch kann $q(\mathbf{x})$ eine Stromverteilung vor einem hochpermeablen ($\mu \rightarrow \infty$) Medium im Bereich $z \leq z_0$ repräsentieren (vgl. Übungen).

Als *Beispiel* berechnen wir das Potential $\Phi(\mathbf{x})$ einer Punktladung Q vor der geerdeten ($\Phi = 0$) Fläche $z = 0$. O.B.d.A. liege die Punktladung bei $z = a$ auf

der positiven z -Achse. Mit der Spiegelladung $-Q$ bei $z = -a$ erhalten wir die gesuchte Lösung

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right\}, \quad z \geq 0. \quad (185)$$

Der erste Beitrag ist das COULOMBpotential der Punktladung Q bei $z = a$. Der zweite Beitrag wird *mathematisch* durch die *virtuelle* Spiegelladung bei $z = -a$ beschrieben und beruht *physikalisch* auf der *reellen* influenzierten Oberflächenladung

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{-Qa}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$$

bei $z = 0$. (Man bestätigt leicht, daß die gesamte influenzierte Ladung der Spiegelladung $\tilde{Q}' = -Q$ entspricht). Diese influenzierte Ladung übt auch eine Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \mathbf{e}_z$$

auf die Punktladung Q aus, die der Wechselwirkung mit der virtuellen Spiegelladung entspricht. Wir schließen die Diskussion des Beispiels mit der Entwicklung des Potentials für große Abstände $r \gg a$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &\rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(-2a) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{2aQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} \quad \text{oder} \\ \Phi(\mathbf{x}) &\rightarrow \frac{2aQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (186)$$

Diese Potential hat die selbe Form wie das magnetische Potential einer Stromschleife [vgl. Gl. (132)]. Es ist das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $p = 2aQ$ (siehe Abschnitt 4.5).

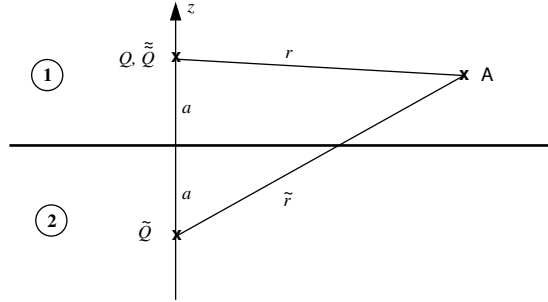
Die Spiegelmethode läßt sich auch auf ebene Grenzflächen zwischen Medien verschiedener Dielektrizitätskonstanten (oder Permeabilität) übertragen. Hier haben wir die Randbedingungen der Stetigkeit von

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} \text{ (bzw. } \mathbf{H}_{\text{tan}}) \quad \text{und} \quad D_{\text{norm}} \text{ (bzw. } B_{\text{norm}})$$

zu erfüllen. Gehen wir wieder von einer Punktladung Q bei $z = a > 0$ im Medium 1 aus, während der Halbraum $z < 0$ mit Medium 2 gefüllt ist, so setzen wir an

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_1 r} + \frac{\tilde{Q}}{\epsilon_1 \tilde{r}} & \text{für } z \geq 0 \\ \frac{\tilde{Q}}{\epsilon_2 r} & \text{für } z \leq 0. \end{cases} \quad (187)$$

Dabei bezeichnet r bzw. \tilde{r} den Abstand des Aufpunkts A von der Punktladung Q bzw. ihrem Spiegelbild \tilde{Q} (siehe Skizze):



Im Medium 1 – d. h. im Halbraum $z > 0$ – rechnen wir also wieder mit einer Spiegelladung \tilde{Q} , welche die Oberflächenladung in der Grenzfläche repräsentiert. Im Medium 2 – d. h. im Halbraum $z < 0$ – wird die Wirkung der Ladung Q und der Oberflächenladung zu einer scheinbaren Ladung $\tilde{\tilde{Q}}$ zusammengefaßt.

Die Stetigkeit von \mathbf{E}_{tan} garantieren wir am einfachsten durch die Stetigkeit von Φ . Daraus folgt

$$\frac{Q + \tilde{Q}}{\epsilon_1} = \frac{\tilde{\tilde{Q}}}{\epsilon_2} \quad \text{oder} \quad \epsilon_2(Q + \tilde{Q}) = \epsilon_1 \tilde{\tilde{Q}}.$$

Die Stetigkeit von D_{norm} verlangt außerdem

$$\epsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=+0} = \epsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-0} \quad \text{oder} \quad Q - \tilde{Q} = \tilde{\tilde{Q}}.$$

Daraus erhält man nach kurzer Umrechnung

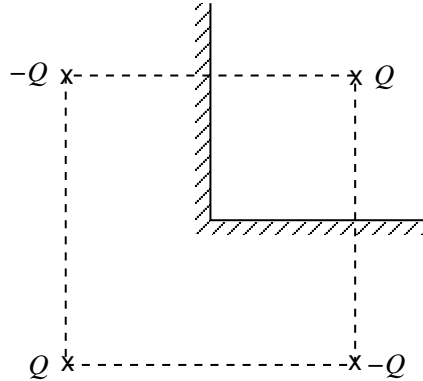
$$\tilde{Q} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{Q}} = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q. \quad (188)$$

Für $\epsilon_1 = 1$ und $\epsilon_2 = \infty$ geht (187, 188) für $z > 0$ in (185) über. Analog kann man in der Magnetostatik einen Strom J durch die virtuellen Ströme

$$\tilde{J} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{J}} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J \quad (189)$$

ergänzen²³. Die Verallgemeinerung auf beliebige Ladungs- bzw. Stromverteilungen liegt auf der Hand.

Abschließend erwähnen wir, daß sich manche komplexeren Probleme mit ebenen Grenzflächen durch *mehrfache* (ggf. unendlich viele) Spiegelungen lösen lassen. Als Beispiel sei das Schema der Spiegelladungen für einen Winkelraum skizziert:



4.4 Die Spiegelung an einer Kugel

Mit $\psi(\mathbf{r})$ bzw. $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ ist auch das “invertierte” oder “gespiegelte” Potential

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{R}{r} \psi\left(\frac{R^2}{r^2} \mathbf{r}\right) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\psi}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R}{r} \psi\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$$

Lösung der LAPLACEgleichung. Man kann dies durch direktes Ausdifferenzieren – am bequemsten in sphärischen Polarkoordinaten – leicht verifizieren. Durch

$$\phi = \psi - \tilde{\psi}$$

erhalten wir also eine Lösung der LAPLACEgleichung, welche die Randbedingung $\phi = 0$ auf der Kugeloberfläche $r = R$ erfüllt. Wie im Fall der Spiegelung an der Ebene ergibt sich daraus die Lösung für das Potentialproblem

$$\Delta V(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) \quad \text{für} \quad r > R \quad (190)$$

²³Man beachte, daß durch die *formale* Analogie zwischen \mathbf{E} und \mathbf{H} sowie \mathbf{D} und \mathbf{B} (vgl. Abschnitt 2.7 und 2.8) μ und nicht $1/\mu$ die Rolle von ε übernimmt. Bei der Herleitung von Gl. (189) geht man am besten vom skalaren magnetischen Potential für \mathbf{H} (nicht \mathbf{B} , warum?) aus.

mit den DIRICHLETschen Randbedingungen

$$V = V_0 \quad \text{für} \quad r = R \quad \text{und} \quad V \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty : \quad (191)$$

Sei

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' . \quad (192)$$

die Lösung im gesamten Raum, welche die Randbedingung (189) auf der Kugel *nicht* berücksichtigt. Dann erfüllt

$$\tilde{U}(\mathbf{r}) = \frac{R}{r} U\left(\frac{R^2}{r^2} \mathbf{r}\right) = \frac{R}{r} U(\tilde{\mathbf{r}}) \quad (193)$$

im Außenraum $r > R$ der Kugel die LAPLACEgleichung, und

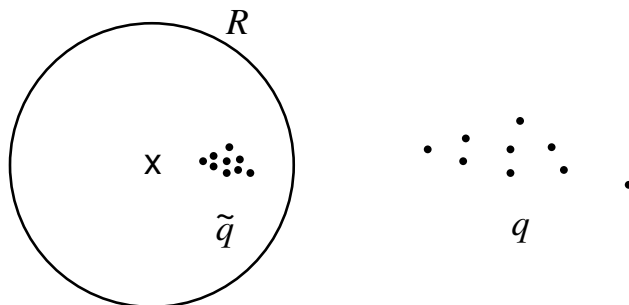
$$V(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - \tilde{U}(\mathbf{r}) + V_0 \frac{R}{r} \quad (r \geq R) \quad (194)$$

ist die gesuchte Lösung. Das Zusatzglied $V_0 R/r$ entspricht einer Punktladung $4\pi R V_0$ im Mittelpunkt der Kugel. Dabei ist wieder zu beachten, daß diese Lösung auf den *Außenraum* $r \geq R$ der Kugel beschränkt ist. Das Kugel*innere* ist – soweit dort keine zusätzlichen Ladungen angebracht sind – ladungsfrei und durch die Randbedingung $V = V_0$ für $r = R$ von jeder Feldwirkung “abgeschirmt” (FARADAYSche Käfig!).

$-\tilde{U}(\mathbf{r})$ ist das Potential, das von der *gespiegelten* Quellverteilung

$$\tilde{q}(\mathbf{r}) = -\frac{R}{r} q(\tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{R}{r} q\left(\frac{R^2}{r^2} \mathbf{r}\right) \quad (195)$$

erzeugt wird (vgl. Skizze).



[Um das zu verifizieren gehen wir vom Potential $U(\mathbf{r}) = Q/4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{a}|$ einer Punktquelle Q bei $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ($a > R$) aus und bilden

$$4\pi\tilde{U}(\mathbf{r}) = \frac{R}{r} \frac{Q}{|\frac{R^2}{r^2}\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{R}{a} \frac{Q}{|\frac{R^2}{a}\mathbf{r}^0 - r\mathbf{a}^0|}.$$

Der Abstand $|\dots|$ im Nenner bleibt natürlich gleich, wenn wir die Faktoren R^2/a und r vor den Einheitsvektoren \mathbf{r}^0 und \mathbf{a}^0 vertauschen. Also gilt

$$4\pi\tilde{U}(\mathbf{r}) = \frac{R}{a} \frac{Q}{|r\mathbf{r}^0 - \frac{R^2}{a}\mathbf{a}^0|} = \frac{-\tilde{Q}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{a}}|}$$

mit $\tilde{Q} = -QR/a$ und $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}R^2/a^2$. Damit ist die Behauptung für eine Punktquelle bewiesen, die Verallgemeinerung auf eine Quellverteilung folgt aus dem Superpositionsprinzip.]

Das “Spiegelbild” $\tilde{q}(\mathbf{r})$ der Quellen im *Außenraum* der Kugel liegt also *in* der Kugel und ist wieder *virtuell*. Damit ist Spiegelung ähnlich, aber *nicht* gleich wie beim optischen Kugelspiegel²⁴. Wie die Spiegelung an der Ebene ist die Spiegelung an der Kugel *selbstinvers*, der Außenraum und Innenraum der Kugel sind also trivial vertauschbar.

Wir illustrieren die Spiegelung am Beispiel einer Punktladung Q außerhalb einer *geerdeten* ($\Phi = 0$ für $r = R$) Kugel. Die Punktladung liege o.B.d.A. bei $z = a > R$ auf der Polarachse. Mit der Spiegelladung

$$\tilde{Q} = -\frac{R}{a}Q \quad \text{bei} \quad \tilde{z} = \frac{R^2}{a} \quad (196)$$

erhalten wir die Lösung

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{R/a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - R^2/a)^2}} \right\}, \quad r \geq R. \quad (197)$$

Die Spiegelladung $\tilde{Q} = -RQ/a$ ist natürlich virtuell, reell ist dagegen – wie beim ebenen “Spiegel” – eine *Influenzladung* gleicher Größe auf der Kugeloberfläche (GAUSSscher Satz!). Diese Influenzladung fließt durch den “Draht”, der die Erdung der Kugel ($\Phi_0 = 0$) sicherstellt, auf die Kugel.

Was aber ist, wenn wir eine *ungeladene* Kugel *isoliert* aufstellen? Dann stellt sich auf der leitenden Kugeloberfläche ein konstantes Potential Φ_{10} ein, das *nicht* von vornherein bekannt ist. Dieses Potential entspricht einer virtuellen Punktladung

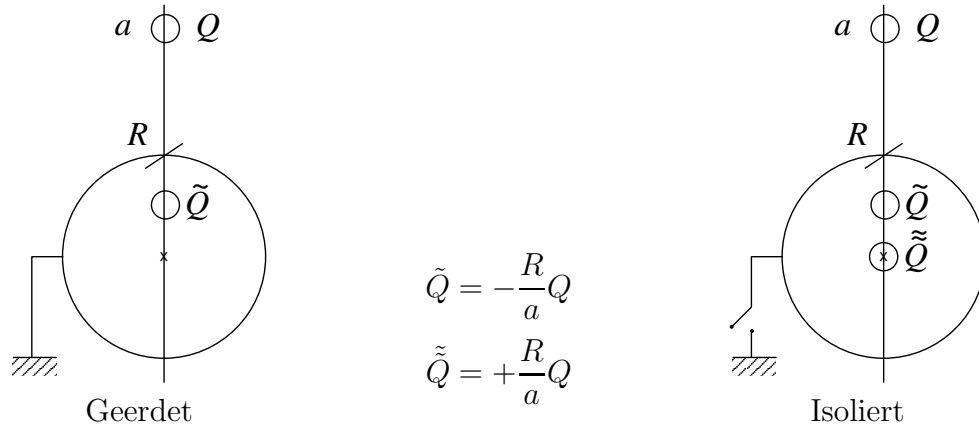
²⁴Beim optischen Kugelspiegel ist die Brennweite $R/2$ und nicht R ; die optische Abbildung ist außerdem mit Fehlern behaftet.

$\tilde{\tilde{Q}} = 4\pi\epsilon_0 R \Phi_{10}$ im Ursprung. Und damit ist klar, wie das Potentialproblem Φ_1 einer Punktladung außerhalb einer *isolierten* leitenden Kugel zu lösen ist: Wir haben eine *zweite* virtuelle Ladung $\tilde{\tilde{Q}} = -\tilde{Q} = QR/a$ im *Zentrum* der Kugel zu berücksichtigen:

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{R/a}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-R^2/a)^2}} + \frac{R/a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\},$$

(198)

$r \geq R.$



Als zweites Beispiel betrachten wir eine leitende Kugel im (ursprünglich) homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$. (Hier verzichten wir also auf die Randbedingung $\phi \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.) Ohne Kugel hätten wir das Potential

$$\phi(r, \vartheta) = -Ez = -Er \cos \vartheta.$$

Zur Erfüllung der Randbedingung auf der Kugel subtrahieren wir das “invertierte” Potential

$$\tilde{\phi}(r, \vartheta) = \frac{R}{r} \phi\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta\right) = -\frac{R}{r} E \frac{R^2}{r} \cos \vartheta$$

und erhalten die gesuchte Lösung

$$\Phi = \phi - \tilde{\phi} = -E \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \vartheta. \quad (199)$$

Das ursprüngliche Potential ϕ wird also von dem “*Dipolpotential*” (vgl. die Gln. (132) und (186) sowie Abschnitt 4.6)

$$\tilde{\phi} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta \quad \text{mit} \quad p = 4\pi\epsilon_0 ER^3 \quad (200)$$

überlagert. Der virtuelle Dipol p im Ursprung der Kugel kann als Spiegelbild von Flächenladungen im Unendlichen, die das homogene Feld erzeugen, interpretiert werden. Physikalisch wird $\tilde{\phi}$ von einer influenzierten Oberflächenladung

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = 3\epsilon_0 E \cos \vartheta \quad (201)$$

auf der Kugeloberfläche erzeugt. Da die influenzierte *Gesamtladung* verschwindet, brauchen wir die Probleme der *geerdeten* und der *isolierten* Kugel hier nicht zu unterscheiden.

Wie im ebenen Fall läßt sich die Spiegelung an der Kugel auch auf entsprechende Probleme dielektrischer oder permeabler Medien übertragen. Wir wollen das nicht mehr allgemein ausführen, sondern beschränken uns auf das Problem der *dielektrischen Kugel im homogenen Feld*: In ein homogenes Medium der Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 sei eine Kugel ($r \leq R$) der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 eingebettet. Weit entfernt herrsche das elektrische Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$.

Wir gehen wieder vom Potential

$$\phi = -Er \cos \vartheta$$

des homogenen Feldes und dem “invertierten” Potential

$$\tilde{\phi} = -\frac{ER^3}{r^2} \cos \vartheta$$

aus. *Außerhalb* der Kugel setzen wir an

$$\Phi = a\phi + b\tilde{\phi} \quad (r \geq R),$$

und *innerhalb*

$$\Phi = c\phi + d\tilde{\phi} \quad (r \leq R).$$

Da Φ für $r \rightarrow \infty$ mit ϕ übereinstimmen muß, folgt $a = 1$. Die Regularität bei $r = 0$ verlangt außerdem $d = 0$. Die beiden restlichen Koeffizienten b und c sind aus der Stetigkeit von E_{\tan} oder Φ sowie der Stetigkeit von D_{norm} bei $r = R$ zu bestimmen. Mit $\phi = \tilde{\phi}$ und $\partial\tilde{\phi}/\partial r = -2\partial\phi/\partial r$ für $r = R$ folgt

$$1 + b = c \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_1(1 - 2b) = \varepsilon_2 c$$

oder aufgelöst

$$b = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{und} \quad c = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

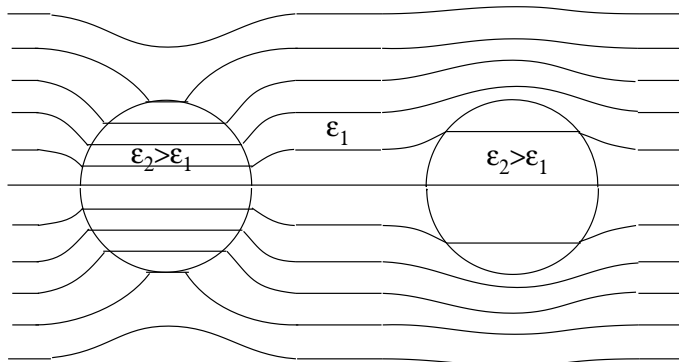
Damit erhalten wir *außen*

$$\Phi = -E \left[r + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \frac{R^3}{r^2} \right] \cos \vartheta \quad (r \geq R), \quad (202)$$

also das vorgegebene Feld, dem ein reines *Dipolfeld* überlagert ist. *Innen* haben wir dagegen ein *homogenes* Feld mit dem Potential

$$\Phi = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Er \cos \vartheta = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Ez. \quad (203)$$

Mit der *formalen* Analogie zwischen **E** und **H** sowie zwischen **D** und **B** lassen sich diese Ergebnisse unmittelbar auf magnetisierbare Kugeln übertragen (Übungen). Abschließend sei das Feld für $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ und $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ skizziert:



4.5 Leiter im elektrostatischen Feld

Wir wollen unsere speziellen Lösungen der Potentialgleichung vor leitenden Oberflächen nun durch einige allgemeine Gesichtspunkte ergänzen. Dazu gehen wir von der Feldenergie

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau = -\frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi d\tau \\
&= -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\mathbf{D} \Phi) d\tau + \frac{1}{2} \int \nabla \cdot \mathbf{D} \Phi d\tau.
\end{aligned}$$

im linearen Medium aus. Wenn wir – wie bisher – den gesamten Raum betrachten, verschwindet das erste Integral nach dem GAUSSSCHEN Satz und wir erhalten wegen $\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho$ die Feldenergie²⁵

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho \Phi d\tau \quad (204)$$

Alternativ zu dieser Beschreibung betrachten wir nun das elektrische Feld in einem Medium, dessen verfügbare Ladungen allein auf den Oberflächen $\partial \mathcal{L}_i$ von Leitern $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ liegen. Da außerhalb der Leiter keine verfügbaren Ladungen liegen, verschwindet nun $\operatorname{div} \mathbf{D}$. Unter Verwendung des GAUSSschen Satzes erhalten wir deshalb die Feldenergie

$$W = -\frac{1}{2} \oint \Phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = +\frac{1}{2} \sum_i \oint_{\partial \mathcal{L}_i} \Phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}. \quad (205)$$

Der Vorzeichenwechsel trägt dabei der verschiedenen Orientierung von $d\mathbf{S}$ – bezogen auf den Raum außerhalb der Leiter bzw. auf die Leiter – Rechnung.

Wir fragen zunächst, bei welcher Ladungsverteilung die Feldenergie *unter den Nebenbedingungen* vorgegebener Ladungen

$$Q_i = \oint_{\partial \mathcal{L}_i} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (206)$$

auf $\partial \mathcal{L}_i$ minimal wird. Mit LAGRANGEMultiplikatoren Φ_i folgt

$$\sum_i \delta \oint_{\partial \mathcal{L}_i} (\Phi - \Phi_i) \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

oder, da \mathbf{D} nun frei variiert werden darf,

$$\Phi = \Phi_i \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{L}_i. \quad (207)$$

²⁵Man beachte, daß dieser Ausdruck eine *andere* Interpretation der Energiedichte nahelegt als die Gln. (93,94).

Gerade das ist bei Leitern im Feld aber erfüllt: Die Ladungen verteilen sich so auf der Leiteroberfläche $\partial\mathcal{L}_i$, daß $\partial\mathcal{L}_i$ Äquipotentialfläche wird. Daß bei dieser Verteilung die *Feldenergie minimal* wird, ist als THOMSONS *Theorem* bekannt.

Mit $\Phi = \Phi_i$ auf $\partial\mathcal{L}_i$ folgt aus Gl. (205)

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i Q_i . \quad (208)$$

Das ist genau der Ausdruck, den wir analog zu Gl. (204) aus der Kraftwirkung auf ruhende Ladungen erwarten. Der Faktor 1/2 trägt dabei dem *linearen* Zusammenhang (Superpositionsprinzip!) zwischen den Q_i und Φ_i beim schrittweisen Aufbau des Feldes Rechnung: $\delta W = \sum \Phi_i \delta Q_i$.

Um diesen linearen Zusammenhang explizit auszudrücken, führt man "*Kapazitätskoeffizienten*" C_{ij} [Maßeinheit: 1 As/V=1 F (Farad)] ein und schreibt

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j . \quad (209)$$

Damit erhält man die Feldenergie

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j . \quad (210)$$

Vertauschen wir i und j , so finden wir, daß für *beliebige* Potentiale Φ_i, Φ_j offenbar $\sum (C_{ij} - C_{ji}) \Phi_i \Phi_j = 0$ gelten muß, die Matrix der Kapazitätskoeffizienten ist also *symmetrisch*:

$$C_{ij} = C_{ji} . \quad (211)$$

Besteht das System nur aus *einem* Leiter \mathcal{L}_1 , so wird

$$C = C_{11} \quad (212)$$

als die *Kapazität* des Leiters bezeichnet. Zum Beispiel gilt für eine *Kugel* vom Radius R der Zusammenhang $\Phi_1 = Q_1/(4\pi\epsilon_0 R)$. Die Kugel besitzt also die Kapazität²⁶

²⁶Im cgs-System mit $4\pi\epsilon_0 = 1$ wird $C = R$. Die Kapazität von 1 cm $\hat{=}$ 1.11 pF entspricht also einer Kugel von 1 cm Radius. *Rationale* Systeme wie das SI sind daran zu erkennen, daß *Kugelprobleme* den Faktor 4π tragen.

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \quad (213)$$

Von großer *praktischer* Bedeutung ist der “*Kondensator*” aus *zwei* Leitern, welche die *Gesamtladung Null* tragen, also

$$Q_1 = Q \quad \text{und} \quad Q_2 = -Q.$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2 &= Q & \text{und} \\ C_{12}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 &= -Q \end{aligned}$$

erhält man

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q.$$

Die *Kapazität* C des Kondensators ist durch die elementare Relation

$$Q = CU \quad (214)$$

definiert. Zwischen der Kapazität C und den Kapazitätskoeffizienten C_{ij} besteht also der etwas verwickelte Zusammenhang

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}. \quad (215)$$

Es ist daher im allgemeinen bequemer, die Kapazität *direkt* aus der elementaren Definition $Q = CU$ zu berechnen.

[Als **Beispiel** untersuchen wir den *Kugelkondensator* aus zwei konzentrischen Kugeln der Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$). Wir setzen zunächst noch nicht $Q_2 = -Q_1$ voraus. Im Außenraum des Kondensators gilt dann

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}, \quad r \geq R_2.$$

Im Zwischenraum des Kondensators gilt dagegen

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r} + \text{const},$$

und mit der Stetigkeit von Φ für $r = R_2$ folgt

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2.$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} &= 4\pi\epsilon_0\Phi_1 \quad \text{und} \\ \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_2}{R_2} &= 4\pi\epsilon_0\Phi_2. \end{aligned}$$

Speziell für $\Phi_2 = 0$ erhalten wir $Q_2 = -Q_1$ und

$$Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Phi_1 \quad (\Phi_2 = 0)$$

und lesen daraus ab

$$C_{11} = -C_{12} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (216)$$

Für $\Phi_1 = 0$ erhalten wir entsprechend $Q_1 = -Q_2 R_1 / R_2$ und

$$Q_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2^2}{R_2 - R_1} \Phi_2 \quad (\Phi_1 = 0).$$

Daraus lesen wir schließlich ab

$$C_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2^2}{R_2 - R_1} = \frac{R_2}{R_1} C_{11}. \quad (217)$$

und die Kapazität [vgl. Gl. (215)]

$$C = C_{11} \frac{R_2/R_1 - 1}{1 - 2 + R_2/R_1} = C_{11}$$

ab.]

Aus den Kapazitätskoeffizienten C_{11} , C_{12} und C_{22} lassen sich die Ladungen Q_1 und Q_2 zu beliebig vorgeschriebenen Potentialen Φ_1 und Φ_2 ablesen. Wenn es aber nur um die Berechnung der Kapazität C des Kugelkondensators geht, ist es viel bequemer, direkt vom Potential

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{für } R_1 \leq r \leq R_2$$

zu $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q$ auszugehen. Damit erhält man sofort

$$U = \Phi(R_1) - \Phi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad \text{also}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (218)$$

4.6 Multipole und Multipolentwicklung

Uns sind inzwischen mehrfach [vgl. Gln. (132, 186, 200, 202)] Potentiale der Form

$$V_1(r, \vartheta) = \frac{p}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{r^2} \quad (219)$$

begegnet, die wir als “Dipolpotentiale” bezeichnet haben. Unter einem **Dipol** verstehen wir eine Anordnung aus zwei gleichstarken Quellen $\pm q$ verschiedenen Vorzeichens im Abstand a , genauer: im Limes $a \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, $aq = \text{const.}$ Der Grenzwert

$$\mathbf{p} = \lim_{|a| \rightarrow 0} aq \quad (220)$$

wird “Dipolmoment” genannt. Das Dipolmoment \mathbf{p} besitzt also drei Komponenten und ist ein Vektor. Wenn wir die z -Achse in Richtung von \mathbf{p} legen, wird ein Dipol im Koordinatensprung durch Punktquellen $\pm q$ bei $z = \pm a/2$ gebildet. Dazu gehört das Potential

$$V = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a/2)^2}} \right).$$

Für $a \rightarrow 0$ folgt daraus

$$V \longrightarrow \frac{q}{4\pi} \left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{aq}{4\pi r^2} \frac{dr}{dz}.$$

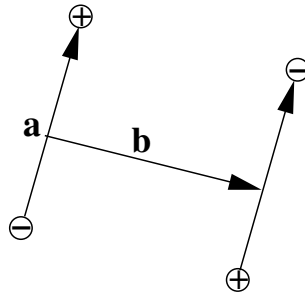
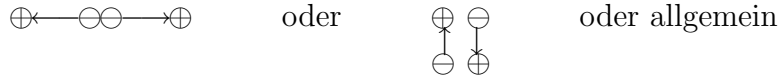
Mit $aq = p$ und $dr/dz = z/r$ erhalten wir also das Dipolpotential

$$V_1 = \frac{p}{4\pi r^2} \frac{z}{r} = \frac{p}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

oder koordinateninvariant

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} . \quad (221)$$

Aus 2 antiparallelen Dipolen läßt sich ein “*Quadrupol*” bilden:



Ein “*Quadrupolmoment*” entsteht also durch zwei Verschiebungen **a** und **b**, hat aber nicht sechs, sondern nur fünf unabhängige Koeffizienten (s. u.). Aus zwei Quadrupolen läßt sich ein “*Oktopol*” bilden, und generell aus zwei 2^l -Polen ein 2^{l+1} -Pol. Der 2^l -Pol läßt sich durch $(2l + 1)$ unabhängige Momente charakterisieren (s. u.).

Die besondere Bedeutung solcher “*Multipole*” liegt darin, daß sich jede beliebige endliche Quellverteilung *im Außenraum* durch eine Superposition von Multipolen im Koordinatenursprung darstellen läßt²⁷. Wir erläutern das zunächst anschaulich am Beispiel einer Punktquelle bei $z = a$ in Form einer Skizze:



$$\text{Monopol}' = \text{Monopol} + \text{Dipol}' , \quad \text{Dipol}' = \text{Dipol} + \text{Quadrupol}'$$

²⁷Die allgemeine Definition von Multipolmomenten ist also *nicht* koordinateninvariant.

Dabei haben wir Multipole, die nicht im Ursprung liegen, durch ein Strich gekennzeichnet. Bei der mathematischen Präzisierung beziehen wir uns nun explizit auf das elektrostatische Potential

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

einer endlichen Raumladungsverteilung $\varrho(\mathbf{x}')$ mit $\varrho(\mathbf{x}') = 0$ für $|\mathbf{x}'| > a$. Für $r = |\mathbf{x}| > a$ können wir dann im Integranden die Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} - \sum_i x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} - + \dots$$

einsetzen und erhalten für $r > a$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x}) + \dots \quad \text{mit} \quad (222)$$

$$4\pi\epsilon_0\Phi_0 = \frac{q}{r} \quad , \quad q = \int \varrho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' , \quad (223)$$

$$4\pi\epsilon_0\Phi_1 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad , \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' , \quad (224)$$

$$4\pi\epsilon_0\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} \quad , \quad Q_{ij} = \int x'_i x'_j \varrho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (225)$$

usw. Allgemein bezeichnet also

$$\Phi_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l!} \sum_{i_1, \dots, i_l} p_{i_1, \dots, i_l}^{(l)} \frac{\partial^l}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}} \frac{1}{r} \quad (226)$$

das Potential eines 2^l -Pols. Es fällt offenbar wie $r^{-(l+1)}$ mit dem Abstand. Die zugehörigen Multipolmomente werden grundsätzlich nach dem Schema

$$p_{i_1, \dots, i_l}^{(l)} = \int x'_{i_1} \dots x'_{i_l} \varrho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (227)$$

gebildet. $p^{(0)} = q$ ist die Gesamtladung der Anordnung; allein dieses Moment ist koordinatenunabhängig. $p_i^{(1)} = p_i$ kennzeichnet das vektorielle Dipolmoment und $p_{ij}^{(2)} = Q_{ij}$ den *Quadrupoltensor*. Für das zugehörige Quadrupolpotential erhält man explizit

$$4\pi\varepsilon_0\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right),$$

oder wenn man Q_{ij} durch den *spurfreien* Quadrupoltensor²⁸

$$D_{ij} = 3Q_{ij} - \delta_{ij} \sum_{\nu} Q_{\nu\nu} \quad (228)$$

ersetzt,

$$4\pi\varepsilon_0\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{D_{ij} x_i x_j}{r^5}. \quad (229)$$

Hieraus geht hervor, daß der symmetrische Quadrupoltensor nicht *sechs*, sondern nur *fünf* unabhängige Komponenten besitzt.

Die Multipolentwicklung steht im engen Zusammenhang mit der Separationslösung der LAPLACEgleichung in sphärischen Polarkoordinaten r, ϑ, φ . Wir wollen diese Separation hier nicht allgemein durchführen, merken aber an, daß sich das 2^l -Pol-Potential offenbar in der Form

$$\Phi_l = \frac{1}{r^{l+1}} Y_l(\vartheta, \varphi)$$

schreiben läßt. Aus der erwähnten Separation geht hervor, daß der Winkelanteil

$$Y_l(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

aus *zugeordneten Kugelfunktionen* Y_l^m aufgebaut ist. Die $(2l+1)$ Koeffizienten c_{lm} repräsentieren die $(2l+1)$ unabhängigen Komponenten des Multipolmoments. Im *quellfreien Außenraum* einer Kugel vom Radius R läßt sich das Potential daher grundsätzlich in der Form

$$\Phi = \frac{1}{r} \sum_{l,m} c_{lm} \left(\frac{R}{r} \right)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (230)$$

ansetzen. Durch Spiegelung an der Kugel folgt, daß im *quellfreien Innenraum* einer Kugel entsprechend eine Entwicklung

²⁸Eine alternative Begründung beruht auf $\Delta \frac{1}{r} = \sum \delta_{ij} \partial^2 / \partial x_i \partial x_j \frac{1}{r} = 0$.

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{R} \sum_{l,m} \tilde{c}_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (231)$$

gilt.

Im Ansatz (230) bzw. (231) liegt eine wichtige praktische Methode zur Lösung vieler Potentialprobleme. Besonders einfach lassen sich damit Probleme *azimutaler Symmetrie*, bei denen Φ nicht vom Polarwinkel φ abhängt, behandeln. Die dazu benötigten Kugelfunktionen $Y_l^0(\vartheta) \sim P_l(\cos \vartheta)$ erhält man am bequemsten aus dem speziellen Potential

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2h\mu + h^2}}$$

mit $h = \frac{a}{r}$ und $\mu = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{ar} = \cos \vartheta$.

Wir *definieren* nun die Kugelfunktionen $P_l(\mu)$ durch die Entwicklung ($r > a$, d. h. $0 \leq h < 1$)

$$f(h, \mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2h\mu + h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\mu) h^l. \quad (232)$$

Durch Vergleich mit der binomischen Reihe

$$f(h, \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (h - 2\mu)^\nu h^\nu \quad (233)$$

folgt, daß $P_l(\mu)$ ein Polynom l -ten Grades in μ ist. Die $P_l(\mu)$ heißen **LEGENDRE-Polynome**, und die Funktion $f(h, \mu)$ wird als ihre *Erzeugende* bezeichnet. Aus der Erzeugenden liest man ab $f(-h, -\mu) = f(h, \mu)$, also

$$P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu). \quad (234)$$

Die **LEGENDRE-Polynome** sind also jeweils *gerade* oder *ungerade*. Weiter folgt aus

$$f(h, 1) = \frac{1}{1 - h} = \sum_{\nu} h^\nu$$

die allgemeine Beziehung

$$P_l(1) = 1. \quad (235)$$

Durch Vergleich von (232) und (233) lassen sich auch die ersten Polynome

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu \quad \text{und} \quad P_2(\mu) = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2} \quad (236)$$

noch recht einfach ablesen. Zur Berechnung der höheren Polynome geht man bequemer von der *Rekursion* (ohne Beweis)

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)\mu P_l + lP_{l-1} = 0 \quad (237)$$

oder von der RODRIGUES-Formel (ohne Beweis)

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \quad (238)$$

aus.

Wenn wir nun also die P_n als bekannt betrachten, können wir die allgemeine *azimutalsymmetrische* Lösung der LAPLACEgleichung in der Form

$$\Phi = \frac{1}{r} \sum_l c_l \left(\frac{R}{r} \right)^l P_l(\cos \vartheta) \quad (r \geq R) \quad \text{bzw.} \quad (239)$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{R} \sum_l \tilde{c}_l \left(\frac{r}{R} \right)^l P_l \cos \vartheta \quad (r \leq R) \quad (240)$$

schreiben. Voraussetzung ist dabei also jeweils, daß der Geltungsbereich (also der Außenraum bzw. der Innenraum der Kugel) ladungsfrei ist. (Für eine ladungsfreie Kugelschale zwischen den Radien R_1 und R_2 sind die Ansätze (239) und (240) zu kombinieren.)

Speziell auf der z -Achse ($\cos \vartheta = 1$, $r = z$) erhält man wegen Gl. (235)

$$\Phi(z) = \frac{1}{z} \sum_l c_l \left(\frac{R}{z} \right)^l \quad (z \geq R) \quad \text{bzw.} \quad (241)$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{R} \sum_l \tilde{c}_l \left(\frac{z}{R} \right)^l \quad (|z| \leq R) \quad (242)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_l (bzw. \tilde{c}_l) erhält man also bereits durch Entwicklung des Potentials auf der z -Achse. Das heißt: Ist das Potential auf der z -Achse

bekannt, so folgt daraus bereits die komplette Lösung des azimuthalsymmetrischen Potentialproblems im ganzen Raum!

Als **Beispiel** verallgemeinern wir das skalare magnetische Potential

$$\phi_m(z) = \frac{J}{2} \left[1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \right]$$

der Stromschleife $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ auf der z -Achse [vgl. Abschnitt 3.3, Gl. (131)]. Für $z < a$ wird

$$\phi_m(z) = \frac{J}{2} \left[1 - \frac{z}{a} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/a^2}} \right] = \frac{J}{2} \left[1 - \frac{z}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} \left(\frac{z}{a} \right)^{2l} \right].$$

Daraus lesen wir ab

$$\phi_m(r, \vartheta) = \frac{J}{2} \left[1 - \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l} \left(\frac{r}{a} \right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \vartheta) \right] \quad (r < a). \quad (243)$$

Entsprechend rechnen wir für $z > a$

$$\phi_m(z) = \frac{J}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - a^2/z^2}} \right] = -\frac{J}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{a}{z} \right)^{2n}.$$

Wir setzen $n = l + 1$ und verallgemeinern²⁹

$$\phi_m(r, \vartheta) = -\frac{J}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{l+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{2l+2} P_{2l+1}(\cos \vartheta) \quad (r > a). \quad (244)$$

Für $r \gg a$ erhalten wir in niedrigster Näherung in Übereinstimmung mit Gl. (132) das Dipolpotential

$$\phi_m \rightarrow \frac{J a^2}{4 r^2} P_1(\cos \vartheta) = \frac{J \pi a^2 \cos \vartheta}{4 \pi r^2}.$$

Die Kreisschleife erscheint in großer Entfernung also als magnetischer Dipol mit dem Dipolmoment

$$m = J \pi a^2 = J F. \quad (245)$$

²⁹Man beachte, daß ϕ_m für $r = a$ nicht stetig ist; vgl. die Diskussion des Verzweigungsschnitts im Abschnitt 3.3.

In endlicher Entfernung muß man nach Gl. (244) neben dem Dipolmoment auch noch Oktopol-, 32-Pol- sowie höhere Multipolmomente berücksichtigen.

4.7 Die magnetische Dipolnäherung

Wegen der generellen Bedeutung der Dipolnäherung ist es angebracht, auch das magnetische Vektorpotential in die Betrachtung einzubeziehen. Wir gehen dazu von einer stationären begrenzten Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{j} = 0$ für $r > a$ aus. Für $r > a$ ist \mathbf{B} dann sowohl aus einem skalaren Potential ϕ_m als auch aus einem Vektorpotential \mathbf{A} darstellbar:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mu_0 \nabla \phi_m.$$

In der Dipolnäherung, also für $r \gg a$, wird

$$\phi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{r}.$$

Also gilt

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla \nabla \frac{1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla \nabla - \mathbf{m} \nabla^2) \frac{1}{r},$$

denn für $r \neq 0$ gilt $\nabla^2 \frac{1}{r} = \Delta \frac{1}{r} = 0$. Nach dem Entwicklungssatz können wir also schreiben

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Daraus folgt, daß die *Dipolnäherung* durch das Vektorpotential

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (246)$$

repräsentiert wird. Für die ebene dünne Leiterschleife hatten wir

$$\mathbf{m} = J\mathbf{F} = \frac{J}{2} \oint \mathbf{x}' \times d\mathbf{s}'$$

gefunden. Gehen wir durch $J d\mathbf{s}' \rightarrow \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$ [vgl. Gln. (123, 124)] wieder zu einer kontinuierlichen Stromverteilung über, erhalten wir die allgemeine Darstellung³⁰

³⁰Natürlich kann man Darstellung (246, 247) auch aus einer direkten Entwicklung des Vektorpotentials herleiten; vgl. z. B. Panofsky-Phillips, Abschnitt 7-11.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (247)$$

Trägt nur *eine* Teilchensorte (Ladung e , Masse M) zum Strom bei, so können wir $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$ schreiben, wobei n die Dichte und \mathbf{v} die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger bezeichnet. Das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2} \int n \mathbf{x}' \times \mathbf{v} d^3 \mathbf{x}'$$

wird also ganz analog wie der Drehimpuls

$$\mathbf{l} = M \int n \mathbf{x}' \times \mathbf{v} d^3 \mathbf{x}'$$

gebildet, und wir erhalten ein festes Verhältnis zwischen dem Drehimpuls und dem magnetischen Moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{e}{M} \mathbf{l}. \quad (248)$$

Speziell für atomare Drehimpulse \hbar der Elektronen erwarten wir also das magnetische Moment

$$\mu_B = \frac{1}{2} \frac{e}{M_e} \hbar \quad (249)$$

(BOHRsches Magneton). Die Beziehung (249) wird für die *Bahndrehimpulse* der Elektronen bestätigt, *nicht* aber für den *Spin*: Das magnetische Moment eines Elektrons ist (fast genau) doppelt so groß wie nach Gl. (249) zu erwarten wäre (EINSTEIN-DE HAAS-Versuch). μ_B ist also *auch* das magnetische Moment eines Elektrons mit Spin $\hbar/2$.

4.8 Kraftwirkungen auf einen Dipol

Wir haben in den vorigen Abschnitten untersucht, welches Feld ein Dipol *erzeugt*. Ergänzend wollen wir nun beschreiben, welche Kräfte ein Dipol in einem *vorgegebenem* Feld erfährt. Mit der Definition (220) des Dipolmoments folgt sofort

$$\mathbf{F} = \lim_{|\mathbf{a}| \rightarrow 0} q[\mathbf{E}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{E}(\mathbf{x})] = \lim_{|\mathbf{a}| \rightarrow 0} q \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{E}, \quad \text{also}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E} . \quad (250)$$

Für die *rotationsfreien* Felder der Statik folgt mit der Identität

$$0 = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{p} \cdot \nabla E$$

die anschauliche Potentialdarstellung

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad \text{mit} \quad U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} . \quad (251)$$

Schließlich können wir – wieder direkt aus der Definition (220) oder auch durch Differentiation von Gl. (251) nach dem Winkel zwischen \mathbf{p} und \mathbf{E} – das *Drehmoment* \mathbf{N} auf einen Dipol berechnen und erhalten

$$\mathbf{N} = \lim_{|\mathbf{a}| \rightarrow 0} \mathbf{a} \times q\mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} . \quad (252)$$

Analog dazu erfährt ein magnetischer Dipol die Kraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (253)$$

und das Drehmoment

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} . \quad (254)$$

Soweit das Magnetfeld *rotationsfrei* ist (Gebiet ohne Ströme und Verschiebungsströme), kann man dem Dipol im Feld außerdem die Energie

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (255)$$

zuordnen.

4.9 Das EARNSHAW-Theorem

Will man einen Massenpunkt durch ein konservatives Kraftfeld an einem Ort \mathbf{r}_0 im Gleichgewicht halten, so muß das Potential V bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ein *Minimum* haben. Notwendig hierfür ist $\partial V / \partial x = \partial V / \partial y = \partial V / \partial z = 0$ sowie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} < 0 .$$

Damit kann V also sicherlich *nicht* die LAPLACEgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

erfüllen³¹. Daraus folgt sofort das EARNshaw-Theorem

- Eine Ladung kann nicht durch ein elektrisches Feld im Gleichgewicht gehalten werden.

Die Aussage läßt sich leicht auf Dipole und beliebige Multipole übertragen. Da auch statische Magnetfelder und Gravitationsfelder aus einem Potential, das der LAPLACEgleichung genügt, hergeleitet werden können, folgt generell:

- Es gibt kein *statisches* Gleichgewicht, an dem ausschließlich elektrostatische, magnetostatische und Gravitationskräfte beteiligt sind.

Wenn also ein Spielzeugglobus im Magnetfeld einer Spule “schwebt”, so ist von vornherein klar, daß die Spule nicht einfach von einem konstanten Gleichstrom durchflossen wird. Aus dem selben Grund benötigt die Magnetschwebebahn “Transrapid” *dynamische* Felder, um das Gewicht des Zuges zu tragen. Und bei dem Spielzeugkreisel “Levitron” ist es ein überaus komplexes dynamisches Wechselspiel zwischen magnetostatischen Kräften und der Nutation, das ein (leicht tänzelndes!) “schwereloses” Schweben des Kreisels möglich macht.

Aus der LAPLACEgleichung folgt allerdings eine Einschränkung des Earnshaw-Theorems: Das Theorem gilt nur in strom- und raumladungsfreien Gebieten. Diese Voraussetzung ist aber im Fall des Diamagnetismus verletzt, und es ist gelingst tatsächlich, mit superstarken stationären Magnetfeldern Wassertropfen, organische Materialien und sogar kleine Lebewesen (z.B. Frösche!) im Gravitationsfeld in der Schweben zu halten (“Magnetolevitation”, mehr dazu findet sich im Internet).

³¹Man kann leicht zeigen, daß das Potential V in jedem beliebigen Punkt mit dem *Mittelwert* des Potentials auf einer Kugel um diesen Punkt übereinstimmt, wenn V die LAPLACEgleichung erfüllt.

5 Spezielle Probleme des quasistationären Feldes

Beim quasistationären Feld berücksichtigen wir die Zeitabhängigkeit, vernachlässigen aber noch den Verschiebungsstrom. Von der Elektrostatik unterscheidet sich unsere Behandlung insbesondere dadurch, daß *Ströme* fließen.

5.1 Die Relaxation des statischen Feldes

Die Ströme führen dazu, daß eine vorgegebene Raumladungsverteilung $\varrho(\mathbf{x}, t = 0)$ im Laufe der Zeit abgebaut wird. Diese Relaxation folgt der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Für homogene Medien mit linearem Response haben wir

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \varrho, \quad \text{also}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \varrho = 0. \quad (256)$$

Im homogenen linearen Medium klingen also alle Raumladungen gemäß

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho(\mathbf{x}, 0) e^{-t/\tau_s} \quad \text{mit} \quad \tau_s = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} \quad (257)$$

exponentiell ab. Dabei ist zu beachten, daß wir *nicht* vorausgesetzt haben, daß wir gleich viele positive und negative Raumladungen haben, die sich ausgleichen können. Wo bleibt dann die resultierende Gesamtladung $Q = \int \varrho d\tau$? Sie fließt zur Oberfläche – ggf. ins Unendliche – ab. Damit haben wir unser Modell des Leiters, der nur auf der Oberfläche Ladungen trägt, dynamisch begründet³².

³²Die Umverteilung der Oberflächenladung bis zur Bildung einer Äquipotentialfläche kann allerdings wegen der Induktivität auf einer langsameren Zeitskala erfolgen. Außerdem setzt die Beziehung $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ eine trageitslose Reaktion der Ladungsträger voraus!

5.2 Kondensatoren und Widerstände

Wir nehmen weiterhin lineare (nicht notwendig homogene) Medien (ε bzw. σ) an und setzen voraus, daß das betrachtete Raumgebiet frei von Quellen und Wirbeln ist.

Dann folgt das *elektrostatische Feld* den Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}) = 0 \quad (258)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} \text{ stetig} \quad \text{und} \quad D_{\text{norm}} \text{ stetig}$$

an der Grenzfläche zweier Medien.

Die *stationäre Stromverteilung* genügt den völlig analogen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (259)$$

mit den Randbedingungen

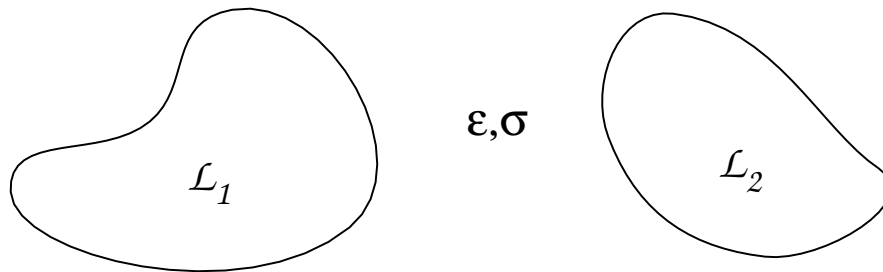
$$\mathbf{E}_{\text{tan}} \text{ stetig} \quad \text{und} \quad j_{\text{norm}} \text{ stetig}$$

an der Grenzfläche zweier Medien.

Die Probleme sind mathematisch also völlig äquivalent, und man kommt von der Elektrostatik zur stationären Stromverteilung, indem man

$$\varepsilon \varepsilon_0(\mathbf{x}) \text{ durch } \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}) \text{ durch } \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (260)$$

ersetzt. Wir wenden diese Analogie auf ein System von zwei idealen Leitern, die in ein homogenes Medium (ε bzw. σ) eingebettet sind, an:



Elektrostatistisch bilden diese Leiter einen Kondensator der Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}. \quad (261)$$

Im stationären Stromkreis definiert man das Verhältnis

$$R = \frac{U}{J} = \frac{\int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}} \quad (262)$$

als den *Widerstand* zwischen \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 . Aus der Analogie (260) lesen wir ab

$$RC = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}. \quad (263)$$

Dieser Zusammenhang läßt sich *allgemein* im Sinne der mathematischen *Ähnlichkeit* interpretieren: Aus Gl. (263) erhält man den Widerstand einer Anordnung, wenn die Kapazität des Kondensators *gleicher Geometrie* bekannt ist (und umgekehrt). So erhält man aus der Kapazität

$$C = \varepsilon_0 A/d$$

eines Plattenkondensators der Fläche A mit dem Plattenabstand d den Widerstand

$$R = \frac{d}{\sigma A} \quad (264)$$

eines Drahtes der Länge d und der Querschnittsfläche A , und aus der Kapazität [vgl. Gl. (213)]

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

einer Kugel vom Radius a folgt der "*Erdungswiderstand*"

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma a} \quad (265)$$

einer Kugel, die in ein Medium der Leitfähigkeit σ eingebettet ist.

Gl. (263) gilt *speziell* natürlich auch für einen nicht-idealen Kondensator, dessen Dielektrikum die Leitfähigkeit σ aufweist. Für einen solchen Kondensator gibt

RC die Zeitkonstante der Selbstentladung an [vgl. Gl. (284)]. Diese Zeitkonstante stimmt nach Gl. (263) mit der Relaxationszeit τ_s der statischen Raumladung [vgl. Gl. (257)] überein. Dabei sei allerdings an die Voraussetzung $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ in den Gln. (258, 259) erinnert. Die Kondensatorentladung darf nicht durch *Induktion* “behindert” werden.

5.3 Induktionskoeffizienten und Induktivität

Um die Induktion berücksichtigen zu können, interessiert uns der magnetische Fluß

$$\Phi_i = \int_{\mathcal{F}_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

durch die Leiterschleife \mathcal{L}_i . Φ_i wird durch die Ströme J_K in *allen* Leiterschleifen \mathcal{L}_k erzeugt und hängt linear von ihnen ab. Wir schreiben daher

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} J_k \quad (266)$$

und bezeichnen die Koeffizienten L_{ik} als *Induktionskoeffizienten*. Ihre Maßeinheit ist $1 \text{ Vs/A} = 1 \text{ Hy}$ (1 HENRY). Mit Hilfe der Induktionskoeffizienten – und das erklärt den Namen – erhält man für die in die Leiterschleife \mathcal{L}_i induzierte Spannung

$$U_i = - \oint_{\mathcal{L}_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \dot{\Phi}_i = \sum_k L_{ik} \dot{J}_k, \quad (267)$$

wobei der Punkt eine Ableitung nach der Zeit bezeichnet.

Zur Berechnung der Induktionskoeffizienten schreiben wir

$$\Phi_i = \int_{\mathcal{F}_i} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{L}_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (268)$$

In quasistationärer Näherung gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad (269)$$

oder wenn wir mit $\mathbf{j}d^3\mathbf{x}' \rightarrow J_k d\mathbf{s}_k$ wieder zur Beschreibung durch Stromkreise übergehen

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k J_k \oint_{\mathcal{L}_k} \frac{d\mathbf{s}_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|}.$$

Setzen wir dies in die Gl. (268) ein, so erhalten wir

$$\Phi_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k J_k \oint_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_k} \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{r_{ik}}$$

mit $r_{ik} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|$. Der Vergleich mit Gl. (266) liefert schließlich die NEUMANN-Formel

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_k} \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{r_{ik}}. \quad (270)$$

Die Induktionskoeffizienten hängen also nur von der Geometrie der Stromkreise ab. Offenbar gilt $L_{ik} = L_{ki}$.

Von besonders großer Bedeutung ist der Koeffizient der *Selbstinduktion* oder kurz die „*Induktivität*“ L_{ii} des i -ten Stromkreises. Ausgerechnet hierfür ist die NEUMANN-Formel (270) jedoch *nicht* anwendbar, da sie für $r_{ik} \rightarrow 0$ divergiert. Bei der Berechnung der *Selbstinduktion* darf man also *nicht* vom Modell unendlich dünner Drähte ausgehen, denn das Magnetfeld um einen unendlich dünnen Draht wird unendlich groß und liefert einen (logarithmisch) divergenten Anteil zum Fluß Φ . Man vermeidet diese Divergenz, indem man wieder zu Volumenintegralen übergeht und mit $\mathbf{i}_\nu = \mathbf{j}_\nu/J_\nu$ die NEUMANN-Formel in der Form

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_k} \frac{\mathbf{i}_i(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{i}_k(\mathbf{x}_k)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|} d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{x}_k \quad (271)$$

anschreibt³³.

Die Auswertung der NEUMANN-Formeln (270, 271) ist meistens mühsam und schwierig. Daher berechnet man die L_{ik} häufig bequemer direkt aus der Definition (266). Als **Beispiel** bestimmen wir die Induktivität L einer langen (h) *zylindrischen Spule* vom Querschnitt πa^2 . Hat die Spule n Windungen, so ist $H = nJ/h$ und $\Phi = \mu_0 H n \pi a^2$, also

³³ L_{ii} hängt damit zwar nicht vom Strom, wohl aber von der Stromdichteverteilung ab und wird schwach frequenzabhängig (Skinneffekt). Eine bessere Begründung von Gl. (271) ergibt sich aus Gl. (273).

$$L = \mu_0 \frac{\pi a^2}{h} n^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l^2}{h}, \quad (272)$$

wobei $l = n2\pi a$ die Länge des Spulendrahtes bezeichnet.

Einen alternativen Zugang zur Definition und Berechnung der Induktionskoeffizienten bietet die magnetische Feldenergie W_m . Dabei zeigt sich auch eine gewisse Analogie zu den Kapazitätskoeffizienten C_{ik} (vgl. Abschnitt 4.5).

Bei linearem Response gilt

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\tau + \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\tau. \end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet nach dem GAUSSschen Satz, wenn wir über den ganzen Raum integrieren. Mit $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ folgt also (in Analogie zur Darstellung der elektrostatischen Feldenergie durch Gl. (205))

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} d\tau. \quad (273)$$

Geht man nun wieder zur “dünnen” Stromschleife über³⁴, so folgt

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i J_i \oint_{\mathcal{L}_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

oder mit dem STOKESchen Satz und $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i J_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k. \quad (274)$$

Speziell für *einen* Stromkreis erhält man also mit der Induktivität L die Feldenergie

$$W_m = \frac{1}{2} L J^2. \quad (275)$$

³⁴Ohne diesen Übergang wird man durch die Gln. (273) und (269) unmittelbar auf die Darstellung (271) geführt.

Wir wollen diese Darstellung nutzen, um die Induktivität einer Doppelleitung aus zwei koaxialen Zylindern der Radien a und b und der Länge h zu berechnen. Aus dem Magnetfeld

$$\mathbf{H} = \frac{J}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{für} \quad a \leq r \leq b$$

folgt die Feldenergie

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int H^2 d\tau = \frac{\mu_0}{2} \frac{J^2}{4\pi^2} \int_a^b \frac{h 2\pi r dr}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} J^2 h \ln \frac{b}{a}.$$

Als Induktivität der Doppelleitung erhalten wir also

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}. \quad (276)$$

5.4 Quasistationäre Stromkreise

Wir betrachten *einen unverzweigten* Stromkreis, in dem der quasistationäre Strom J fließt, und gehen vom Induktionsgesetz

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\dot{\Phi}_m = -L\dot{J} \quad (277)$$

aus. Wir schreiben die Stromdichte in der Form [vgl. Gl. (79)]

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_e = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e)$$

und erhalten

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}}{\sigma} - \oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{s}. \quad (278)$$

Unter Berücksichtigung des konstanten Stromes J läßt sich der Integrand des ersten Beitrags

$$\frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}}{\sigma} = J \frac{ds}{\sigma q} = J dR$$

[vgl. Gl. (264)] schreiben, wenn q den Leitungsquerschnitt bezeichnet. Damit wird

$$\oint \frac{\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}}{\sigma} = JR, \quad (279)$$

wenn R den gesamten Widerstand des Stromkreises bezeichnet. Durch das Integral

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{s} = U_{\text{EMK}} \quad (280)$$

definieren wir die “*elektromotorische Kraft*” U_{EMK} des Stromkreises. Sie beschreibt

- nicht-elektrodynamische stromtreibende Kräfte wie Konzentrationsgefälle oder Temperaturgradienten (GALVANISCHE Elemente, Thermoelemente ...).

Aber auch

- elektromagnetische Bauteile, die nicht explizit in die Berechnung einbezogen werden sollen (Netzteile, ...),

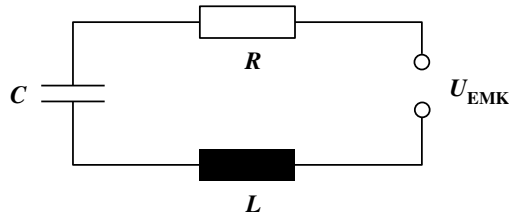
können hiermit erfaßt werden. U_{EMK} wird dabei auch als “*Klemmenspannung*” bezeichnet. Setzen wir die Gln. (278–280) in Gl. (277) ein, so folgt

$$RJ - U_{\text{EMK}} = -L\dot{J}. \quad (281)$$

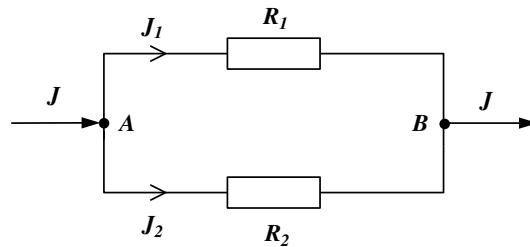
Wir haben bisher nur Elemente im Stromkreis berücksichtigt, die einen Leitungsstrom transportieren. An der grundsätzlichen Betrachtung ändert sich aber nichts, wenn der Kreis an einer Stelle unterbrochen und durch einen Kondensator “überbrückt” wird. Der Kondensator liefert dann den Beitrag $U_C = Q/C$ zum Feldstärkeintegral (277), der auf der linken Seite von Gl. (281) zu addieren ist. Damit erhalten wir schließlich die Gleichung

$$L\dot{J} + RJ + \frac{Q}{C} = U_{\text{EMK}} \quad \text{mit} \quad \dot{Q} = J \quad (282)$$

zur Beschreibung des Stromkreises. In dieser Gleichung spielt es keine Rolle, ob L und R (nicht aber C !) – wie es der Herleitung entspricht – über den Stromkreis verteilt oder an bestimmten Stellen lokalisiert wird. Wir können den Stromkreis also durch das (Ersatz-)Schaltbild



symbolisieren. Wir erwähnen hier nur am Rande, daß man in der Elektrotechnik komplexere Schaltungen durch “Netze” repräsentiert, deren einzelne “Maschen” analog zu unserem einzelnen Stromkreis beschrieben werden. Die verschiedenen Maschen sind durch die Bedingung stromloser “Knoten” (und ggf. durch die Gegeninduktions-Koeffizienten L_{ik}) gekoppelt. Wir erläutern das Prinzip an der einfachen Masche



welche die Parallelschaltung von Widerständen beschreibt. Analog zu Gl. (282) gilt dann – unter Beachtung der durch die Pfeilrichtungen symbolisierten Vorzeichen – für die Masche

$$J_1 R_1 - J_2 R_2 = 0$$

oder

$$J_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{und} \quad J_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{mit} \quad U = V_B - V_A.$$

Die Stromlosigkeit der Knoten A oder B besagt

$$J = J_1 + J_2,$$

also

$$J = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}.$$

Die “Masche” der beiden parallel geschalteten Widerstände verhält sich also wie ein Widerstand R mit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (283)$$

In der Schaltung zu Gl. (282) können wir die einzelnen Elemente des Kreises durch Grenzübergänge $R \rightarrow 0$, $L \rightarrow 0$, $C \rightarrow \infty$ bzw. $U_{\text{EMK}} \rightarrow 0$ eliminieren (“kurzschließen”). So erhalten wir die vertrauten Gleichungen

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0, \quad \text{also} \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (284)$$

für die *Kondensatorentladung* und

$$L\dot{J} + RJ = 0, \quad \text{also} \quad J = J_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (285)$$

für das *Abklingen des Stroms in einem induktiven* Stromkreis. Mit Kondensator und Induktivität erhalten wir einen *Schwingkreis*, der durch die Gleichung

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (286)$$

beschrieben wird. Als Lösung erhält man *gedämpfte Schwingungen*, deren Frequenz ω und Dämpfungsdekrement γ durch

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \gamma^2 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{R}{2L} \quad (287)$$

gegeben sind.

Legt man eine harmonische Wechselspannung³⁵

$$U_{\text{EMK}} = U_0 e^{i\omega t} \quad (288)$$

an den Kreis, so findet man *nach* der exponentiellen Abklingphase eine *lineare Reaktion* aller Stromkreiselemente, die durch *komplexe Schein-Widerstände* repräsentiert werden kann. Mit $d/dt = i\omega$ erhält man für den Kondensator C und die Spule L die rein imaginären (*Blind*-)Widerstände

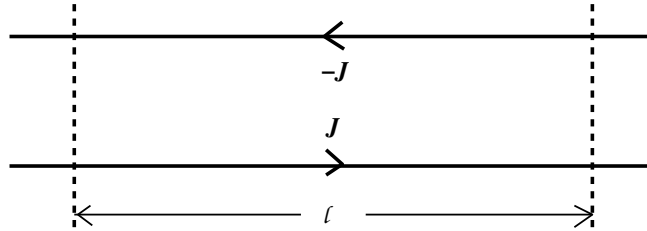
$$R_C = \frac{1}{i\omega C} \quad \text{und} \quad R_L = i\omega L. \quad (289)$$

³⁵Die komplexe Anschrift von *Spannungen* und *Strömen* dient nur der Bequemlichkeit, physikalisch relevant ist nur der Realteil. Komplexe Widerstände legen neben der *Amplitude* auch die *Phasenverschiebung* fest.

In der schaltungstechnischen Analyse werden komplexe *Scheinwiderstände* (“Impedanzen”) nach den selben Rechenregeln wie “echte” reelle Widerstände (“OHMsche” Widerstände) behandelt.

5.5 Die Telegraphengleichung

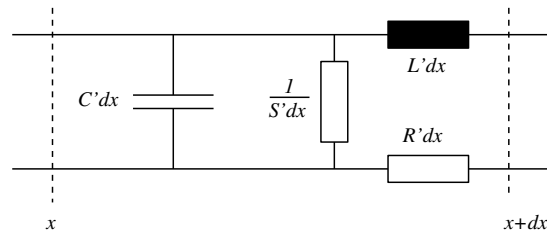
Wir betrachten die Ausbreitung eines elektrischen Signals in einer unendlich langen linearen *Doppelleitung* (“LECHER-Leitung”, vgl. Skizze):



Dabei können wir weiterhin *quasistationär* rechnen, wenn wir ein hinreichend kurzes Teilstück $l \ll \lambda$ der Doppelleitung herausgreifen³⁶. Wir charakterisieren die Doppelleitung durch

- eine Induktivität L' je Längeneinheit
- eine Kapazität C' je Längeneinheit
- einen Widerstand R' je Längeneinheit und
- einen “Leitwert” S' je Längeneinheit, der die dielektrischen Verluste beschreibt.

Das Teilstück $[x, x + dx]$ wird also durch das Ersatzschaltbild



³⁶Natürlich muß dazu auch Leitungsabstand $d \ll \lambda$ gelten

repräsentiert. Für die *äußere* Schleife (also ohne C' und S') erhalten wir entsprechend Gl. (282)

$$U(x + dx) + \dot{J}L'dx + JR'dx - U(x) = 0 \quad \text{oder}$$

$$L'\dot{J} + R'J + \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (290)$$

Die inneren Verzweigungen C' und S' berücksichtigen wir durch die *Strombilanz*

$$J(x + dx) = J(x) - \dot{U}C'dx - US'dx \quad \text{also}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} + C'\dot{U} + S'U = 0. \quad (291)$$

Wenn wir Gl. (291) nach x differenzieren und $\partial U/\partial x$ mit Gl. (290) eliminieren, erhalten wir die *Telegraphengleichung*

$$C'L'\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + (C'R' + S'L')\frac{\partial J}{\partial t} + S'R'J - \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 0. \quad (292)$$

Wir stellen die Diskussion der Verluste durch R' und S' zunächst zurück und betrachten die *ideale* LECHERleitung ($R' = S' = 0$)

$$C'L'\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 0.$$

Die ist eine eindimensionale *Wellengleichung*, die allgemeine Lösung setzt sich aus vor- und rücklaufenden Wellen

$$J_{\pm}(x, t) = f(x \mp ut) \quad \text{mit} \quad u = (L'C')^{-1/2} \quad (293)$$

zusammen. Aus Gl. (290) oder (291) erhält man die zugehörige Spannung

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{L'}{C'}} J(x, t). \quad (294)$$

U und J sind also *in Phase*, es besteht – wie bei einem OHMschen Widerstand – das von x und t unabhängige Verhältnis

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad (295)$$

das man auch als *Wellenwiderstand* bezeichnet. Eine Doppelleitung läßt sich daher durch einen OHMSchen Widerstand $R = Z$ reflexionsfrei abschließen (Antennensteckdose).

Die (dispersionsfreie) Wellengeschwindigkeit u hängt nach Gl. (293) von L' und C' ab und läßt sich durch eine künstliche³⁷ Vergrößerung von L' und/oder C' *verringern* (Verzögerungsleitung). Wie aber muß die Leitung aussehen, wenn die Wellengeschwindigkeit möglichst *groß* werden soll? Um C' klein zu halten, muß der Leitungsdurchmesser klein und der Abstand groß gewählt werden. Genau das vergrößert aber die Induktivität L' . Damit deutet sich schon eine *Grenzgeschwindigkeit* für die Signalausbreitung in Doppelleitungen an, die schon von W. THOMSON (später Lord KELVIN) *vor* Aufstellung der MAXWELLSchen Theorie erkannt wurde.

Untersuchen wir das am Beispiel des *Koaxialkabels* (konzentrische Zylinder der Radien a und b), dessen Induktivität nach Gl. (276) durch

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (296)$$

gegeben ist. Mit der Kapazität

$$C' = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (297)$$

des Zylinderkondensators folgt

$$U = (L'C')^{-1/2} = (\epsilon\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} = c_\epsilon. \quad (298)$$

Die Wellengeschwindigkeit hängt also gar nicht von den Radien a und b ab und ist gleich der Lichtgeschwindigkeit c_ϵ im isolierendem Dielektrikum. Und das gilt – wie sich zeigen läßt – für *alle* parallelen Doppelleitungen mit beliebigem Querschnitt. Die erwähnte Grenzgeschwindigkeit ist also die *Vakuum-Lichtgeschwindigkeit* c . Das Ergebnis ist besonders bemerkenswert, weil es aus der *quasistationären* Theorie folgt!

Der Kabelquerschnitt hat also keinen Einfluß auf die Wellengeschwindigkeit u , wohl aber auf den Wellenwiderstand Z . Für unser Koaxialkabel erhalten wir aus den Gln. (295)–(297)

$$Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} \ln \frac{b}{a} = 60 \Omega \frac{\ln \frac{b}{a}}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (299)$$

³⁷Man kann Spulen und/oder Kondensatoren in die Leitung einbauen, wenn der Abstand klein gegen die Wellenlänge ist.

Für das handelsübliche 60 Ω -Antennenkabel³⁸ hat man also $b = a \exp \sqrt{\varepsilon}$ zu wählen.

Leider sind sämtliche handelsüblichen Kabel nicht verlustfrei, und darum müssen wir noch einmal auf die nicht-ideale Gleichung (292) zurückkommen. Wir erwarten eine *Dämpfung* und gehen daher mit dem komplexen “*normal-mode-Ansatz*”

$$J = J_0 e^{-\alpha x} e^{i(kx - \omega t)} \quad (300)$$

(α, ω und k reell) in Gl. (292) ein und erhalten mit

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} = ik - \alpha$$

die “*Dispersionsgleichung*”

$$-C' L' \omega^2 - i\omega(C' R' + S' L') + S' R' + k^2 - \alpha^2 + 2ik\alpha = 0,$$

oder nach Real- und Imaginärteil getrennt

$$C' L' \omega^2 = k^2 - \alpha^2 + S' R' \quad (301)$$

$$(C' R' + S' L') \omega = 2k\alpha. \quad (302)$$

Die Dispersionsgleichung liefert uns k und α als Funktionen von ω . Sie sagt uns also insbesondere, wie die *Phasengeschwindigkeit*

$$u_p = \omega/k(\omega) \quad (303)$$

von der Frequenz abhängt, beschreibt also die *Dispersion*. Bei Dispersion breiten sich Anteile verschiedener Frequenz verschieden schnell aus; dadurch wird das Signal *verzerrt*. Eine *unverzerrte* Telefonübertragung setzt daher ein *dispersionsfreies* Kabel voraus, d. h. $u_p = \omega/k$ darf nicht von ω abhängen. Nach Gl. (301) ist das nur möglich, wenn

$$\alpha = (S' R')^{1/2} \quad \text{und} \quad u_p = (C' L')^{-1/2} \quad (304)$$

gilt. Im dispersionsfreien Kabel ist die Wellengeschwindigkeit also genau so groß wie im idealen Kabel, die Dämpfung nimmt mit R' und S' zu. Setzen wir Gl. (304) in Gl. (302) ein, so folgt die Bedingung

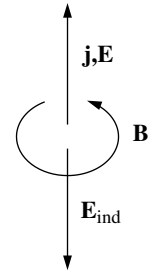
³⁸Der Innenleiter kann wegen des *Skinneffekts* (Abschnitt 5.3) auch als Hohlzylinder beschrieben werden.

$$C'R' + S'L' = 2(S'R'C'L')^{1/2} \quad \text{oder} \\ C'R' = L'S'. \quad (305)$$

Nun wird man mit einem guten Isolationsmaterial sehr kleine Werte von S' erreichen, einer Verringerung von C' und R' sind jedoch im allgemeinen praktische Grenzen gesetzt. Eine verzerrungsfreie Telefonleitung verlangt daher eine künstliche Vergrößerung der Induktivität. Praktisch erreicht man das bei analogen Telefonkabeln, indem man im Abstand von ca. 2 km ($\ll \lambda$) sogenannte PUPIN-Spulen einbaut.

5.6 Der Skineffekt

Das Magnetfeld eines Wechselstroms induziert ein elektrisches Feld, das dem angelegten Feld entgegengerichtet ist. Hierdurch wird der Wechselstrom bei hinreichend hoher Frequenz in die Nähe der Drahtoberfläche gedrängt. Man spricht von *Stromverdrängung* oder vom *Skineffekt* (Hauteffekt).



Zur quantitativen Beschreibung gehen wir vom AMPÈRESchen Gesetz (quasistationär)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{j}$$

und vom Induktionsgesetz

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

aus und erhalten

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Mit $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ und $\text{div } \mathbf{E} = 0$ folgt

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (306)$$

oder auch

$$\Delta \mathbf{j} - \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0. \quad (307)$$

Die Kombination des LAPLACEoperators mit der *ersten* Zeitableitung in den Gln. (306) und (307) ist ein typisches Kennzeichen von *Diffusionsgleichungen* (Ausgleichsvorgänge wie Diffusion, Wärmeleitung etc.). In dem Sinne beschreibt Gl. (306), wie das elektrische Feld außerhalb des Leiters in den Leiter “eindiffundiert”. Nach Anlegen eines Gleichfeldes dauert es daher eine *Diffusionszeit*

$$\tau_D \sim \frac{\mu\mu_0\sigma}{a^2},$$

bis das Feld und die Stromdichte den gesamten Querschnitt eines Drahtes vom Radius a ausfüllt. Ein Wechselfeld einer Frequenz $\omega > 1/\tau_D$ kann dagegen ebenso schlecht in das Innere des Leiters eindringen, wie die täglichen oder jahreszeitlichen Temperaturschwankungen ins Erdinnere.

Für einen zylindrischen Draht (z -Richtung), der von Wechselstrom

$$\mathbf{j} = j(r)e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z$$

durchflossen wird, gilt nach Gl. (307)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dj}{dr} + i\mu_0\mu\sigma\omega j = 0. \quad (308)$$

Daß diese Gleichung *komplex* ist, bedeutet, daß die Stromdichte j nicht nur im *Betrag*, sondern auch in der *Phase* radial variiert. (Entsprechendes gilt ja auch für eine Temperaturschwankung bei der Wärmeleitung). Gl. (308) ist eine BESSELSche Differentialgleichung, die wir nicht allgemein lösen wollen. Wir interessieren uns vielmehr für den Grenzfall einer sehr starken radialen Variation mit

$$\frac{d}{dr} r \frac{dj}{dr} \approx r \frac{d^2 j}{dr^2}$$

und erhalten

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + i\mu_0\mu\tau\omega j = 0 \quad (309)$$

mit der Lösung

$$j = j_a e^{\sqrt{i\mu_0\mu\sigma\omega}(r-a)},$$

wenn a den Radius des Drahtes bezeichnet. Das Wurzelvorzeichen haben wir dabei so gewählt, daß der Strom im Inneren des Drahtes exponentiell abklingt. Mit $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$ können wir schreiben

$$j = j_a e^{(1+i)\frac{r-a}{d}} \quad \text{mit} \quad d = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}}. \quad (310)$$

d gibt die charakteristische Eindringtiefe des Stromes an und wird als *Skintiefe* bezeichnet. Zahlenwerte für Cu ($\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$, $\mu = 1$) und Fe ($\sigma = 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$, $\mu = 100$) sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Skintiefe d in mm:

| $\omega/2\pi$ | 50 Hz | 1 kHz | 20 kHz | 0.5 MHz | 10 MHz | 200 MHz |
|---------------|-------|-------|--------|---------|--------|---------|
| Cu | 9.4 | 2.1 | 0.47 | 0.094 | 0.021 | 0.0047 |
| Fe | 2.3 | 0.50 | 0.11 | 0.023 | 0.005 | 0.0011 |

Die Tabelle zeigt, daß der Effekt schon bei der niedrigen Frequenz technischen Wechselstromes deutlich einsetzt. Bei den hohen Frequenzen der Fernsehtechnik fließt der Strom tatsächlich nur noch in einer dünnen "*Haut*" unter der Oberfläche.

Hierdurch erhöht sich natürlich auch der Widerstand des Drahtes: Wenn wir Gl. (306) über den Drahtquerschnitt ($dS = 2\pi r dr$) integrieren, erhalten wir

$$2\pi \int_0^a dr \frac{d}{dr} r \frac{dj}{dr} + i\mu\mu_0\sigma\omega \int_0^a 2\pi r j dr = 0 \quad \text{oder}$$

$$2\pi a \left. \frac{dj}{dr} \right|_a + i\mu\mu_0\sigma\omega J = 0.$$

Mit [vgl. Gl. (310)]

$$\left. \frac{dj}{dr} \right|_a = \frac{1+i}{d} j_a = \frac{1+i}{d} \sigma E_a$$

folgt daraus

$$\frac{1+i}{d} \sigma E_a = i \frac{\mu\mu_0\sigma\omega}{2\pi a} J = i \frac{2}{2\pi a d^2} J \quad \text{oder}$$

$$J = \frac{1+i}{2} 2\pi a d \sigma E_a.$$

Für ein Drahtstück der Länge l schreiben wir $E_a = U/l$. Mit $1/(1+i) = (1-i)/2$ folgt also schließlich $J = U/Z$ mit der *Wechselstromimpedanz*

$$Z = \frac{l}{2\pi ad\sigma}(1 - i) \quad (311)$$

eines Drahtes der Länge l vom Radius a . Diese Impedanz entspricht der *Parallel-schaltung* eines OHMSchen Widerstandes

$$R = \frac{l}{2\pi ad\sigma} \quad (312)$$

und einer “Induktanz”

$$i\omega L_i = iR. \quad (313)$$

Bei der Berechnung des OHMSchen Widerstandes ist also der Drahtquerschnitt πa^2 durch den Querschnitt $2\pi ad$ eines stromführenden Ringes der Breite d zu ersetzen. Der Wechselstromwiderstand eines Drahtes ist also wesentlich größer als der Gleichstromwiderstand³⁹. Der induktive Anteil hat den selben Betrag wie der OHMsche Anteil. $L_i = R/\omega$ wird als “innere” Induktivität bezeichnet. Sie ist im allgemeinen sehr klein im Vergleich zur “äußeren” Induktivität. Für den Innenleiter eines Koaxialkabels ($\mu = 1$) erhalten wir beispielsweise nach Gl. (296) das Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_i} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} 2\pi ad\sigma\omega = \mu_0\sigma\omega ad \ln \frac{b}{a} \\ &= 2\frac{a}{d} \ln \frac{b}{a} \gg 1 \quad \text{für} \quad d \ll a. \end{aligned}$$

³⁹Massive Drähte werden deshalb in der Hochfrequenztechnik durch Rohre oder “Hochfrequenzlitze” (ein Bündel von dünnen isolierten Drähten) ersetzt.

6 Elektromagnetische Wellen

6.1 Rückblick

Mit elektromagnetischen Wellen im Vakuum haben wir uns im Rahmen dieser Vorlesung bereits mehrfach beschäftigt. Schon im Abschnitt 2.6 haben wir festgestellt, daß die elektrische Feldstärke einer *Wellengleichung* [Gl. (47)] mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ genügt. Im Abschnitt 2.9 haben wir gezeigt [Gln. (100, 101)], daß die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} einer ebenen Welle aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung senkrecht stehen: Elektromagnetische Wellen sind *transversal*. Dabei sind \mathbf{E} und \mathbf{B} in Phase, und für die Beiträge gilt $E = cB$. Die Energiedichte w_{el} einer elektromagnetischen Welle setzt sich je zur Hälfte aus elektrischer und magnetischer Feldenergie zusammen [Gl. (102)]. Der zugehörige POYNTINGvektor beschreibt einen Energiefluß $|\mathcal{S}| = cw_{\text{el}}$ in Ausbreitungsrichtung [Gl. (103)].

Im Abschnitt 3.4 haben wir dann gesehen, daß die Potentiale Φ und \mathbf{A} bei LORENTZscheidung den selben Wellengleichungen wie die Felder genügen. Daraus haben wir im Abschnitt 3.5 die *retardierten Potentiale* als Lösungen der *inhomogenen Wellengleichung* konstruiert. Mit Hilfe dieser retardierten Potentiale konnten wir schließlich im Abschnitt 3.6 die Strahlung eines HERTZschen *Dipols* bzw. einer beschleunigten Ladung berechnen.

Wenn wir uns in diesem Kapitel noch einmal systematisch mit elektromagnetischen Wellen befassen, so wollen wir dabei insbesondere der Reaktion der Materie durch Koeffizienten ε , μ und σ Rechnung tragen und Randbedingungen an ebenen Grenzflächen berücksichtigen. Dabei werden wir uns allerdings auf die Untersuchung ebener Wellen beschränken.

6.2 Die Wellengleichung im Medium mit endlicher Leitfähigkeit

Wir gehen von den *raumladungsfreien* MAXWELLgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (314)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (315)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{und} \quad (316)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (317)$$

aus und nehmen lineare “Verknüpfungsgleichungen”

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/(\mu\mu_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \quad (318)$$

an. Mit $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ oder $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ erhalten wir daraus nach dem Schema

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F} = -\Delta \mathbf{F}$$

die allgemeine *Wellengleichung*

$$\Delta \mathbf{F} - \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = 0. \quad (319)$$

In dieser Gleichung konkurriert ein Term mit $\partial \mathbf{F}/\partial t$, der auf dem Leitfähigkeitsstrom $\sigma\mathbf{E}$ beruht, mit der zweiten Ableitung $\partial^2 \mathbf{F}/\partial t^2$ aus dem Verschiebungsstrom $\partial \mathbf{D}/\partial t$. Dominiert der *Leitfähigkeitsstrom* (quasistationärer Fall), so geht Gl. (319) in die “Diffusionsgleichung” (307) des Skineffekts über. Im Medium mit guter Leitfähigkeit können sich also keine elektromagnetischen Wellen ausbreiten, die Felder “diffundieren” lediglich eine Skintiefe d [siehe Gl. (309)] ins Material ein (FARADAYSche Käfig). Im entgegengesetzten Grenzfall dominierenden *Verschiebungsstroms* geht Gl. (319) in die vertraute Wellengleichung [vgl. Gl. (47)]

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{mit} \\ u &= (\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)^{-1/2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \end{aligned} \quad (320)$$

über. Elektromagnetische Wellen im Vakuum und im homogenen verlustfreien Medium unterscheiden sich also nur durch eine veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit u . Das Verhältnis

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (321)$$

wird auch als der “*Brechungsindex*” des Mediums bezeichnet (vgl. Abschnitt 6.4).

Wann dominiert der Leitfähigkeitsstrom und wann der Verschiebungsstrom? Nehmen wir eine Zeitabhängigkeit der Felder $\sim e^{i\omega t}$ an, so lesen wir aus Gl. (319) für die Grenzfrequenz

$$\omega_G = 2\pi\nu_G = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (322)$$

ab. Die Grenzfrequenz entspricht also der Zeitkonstanten τ_s der Relaxation elektrostatischer Felder [Abschnitt 5.1, Gl. (257)]. Mit $\varepsilon \sim 1$ und $\sigma \approx 5.7 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ (Cu) erhält man $\nu_G \sim 10^{18}$ Hz. Vergleichen wir das mit der Frequenz $\nu \approx 6 \cdot 10^{14}$ Hz sichtbaren Lichts ($\lambda = 500$ nm), so finden wir, daß in *Metallen* bis über den optischen Bereich hinaus die *Leitfähigkeit* dominiert: Elektromagnetische Wellen dringen praktisch nicht in Metalle ein (sondern werden an der Oberfläche reflektiert).

Typische *Isolatoren* weisen dagegen eine Leitfähigkeit auf, die $10^{15} \dots 10^{20}$ mal kleiner ist als die der Metalle. In Isolatoren überwiegt daher für fast alle technisch interessanten Frequenzen der Verschiebungsstrom. Wenn trotzdem nicht alle Isolatoren “durchsichtig” sind, so liegt das an der Absorption durch dielektrische Verluste (Dissipation bei der Polarisierung), die durch eine reelle Konstante ε nicht erfaßt werden.

6.3 Ebene Wellen im homogenen Medium

Wir lassen weiter eine geringe Leitfähigkeit des Mediums zu, nehmen aber an, daß der Verschiebungsstrom dominiert. Dann sind in dem Medium ebene Wellen möglich, die wir nun genauer untersuchen wollen. Dazu gehen wir von dem “normal-mode-Ansatz” [vgl. Gl. (300)]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (323)$$

aus. Der *Wellenvektor* \mathbf{k} zeigt dabei in die Ausbreitungsrichtung der Welle, sein Betrag $k = 2\pi/\lambda$ legt die Wellenlänge λ fest. Mit $\nabla = i\mathbf{k}$ und $\partial/\partial t = -i\omega$ erhalten wir aus den MAXWELLGleichungen (314–318)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (324)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (325)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (326)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \omega \mathbf{E} - i \mu \mu_0 \sigma \mathbf{E}. \quad (327)$$

Die Gleichungen (324) und (325) sagen zunächst einmal aus, daß \mathbf{E} und \mathbf{B} senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} stehen. Diese Folgerung gilt für das *Magnetfeld* \mathbf{B} *immer*. Beim *elektrischen Feld* \mathbf{E} beruht sie auf der *Voraussetzung* $\varrho = 0$.

[Wenn wir diese Voraussetzung versuchsweise aufheben, so folgt für longitudinale Feldanteile ($\mathbf{E}_{\text{long}} \parallel \mathbf{k}$) aus Gl. (326) $\mathbf{B}_{\text{long}} = 0$. Dabei handelt es sich also um rein *statische* Felder, die nach Abschnitt 5.1 auf der Zeitskala $\tau_s = \varepsilon \varepsilon_0 / \sigma$ relaxieren. (Dies läßt sich

auch aus Gl. (327) ablesen). Wir schließen nun also die statischen Felder endgültig aus und stellen fest, daß elektromagnetische Wellen *transversal* sind.]

Aus den Gln. (326) und (327) oder direkt aus der Wellengleichung (319) lesen wir die **Dispersionsgleichung**

$$k^2 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\omega^2 + i\mu\mu_0\sigma\omega = \frac{n^2}{c^2}\omega^2 \left(1 + \frac{i}{\omega\tau_s}\right) \quad (328)$$

mit $\tau_s = \varepsilon\varepsilon_0/\sigma$ ab. Diese Gleichung ist für $\sigma \neq 0$ *komplex* und verlangt, daß k oder ω einen Imaginärteil besitzen: Die Wellen sind räumlich oder zeitlich *gedämpft*. Meistens gibt man eine *reelle Frequenz* ω vor (Generator) und betrachtet räumlich gedämpfte Wellen mit

$$k = k_r + i\alpha,$$

wobei α die räumliche Dämpfungskonstante bedeutet. Im Fall schwacher Dämpfung ($\omega\tau_s \gg 1$) erhält man aus Gl. (328)

$$k = \frac{n\omega}{c} \left(1 + \frac{i}{2\omega\tau_s}\right), \quad \text{also} \quad k_r = \frac{n\omega}{c} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{n}{2c\tau_s} = \frac{n\sigma}{2c\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (329)$$

Als *Phasengeschwindigkeit*⁴⁰ erhält man also wieder [vgl. Gln. (320, 321)]

$$u = \frac{\omega}{k_r} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (330)$$

Aus Gl. (326) liest man den Zusammenhang

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{k_r + i\alpha}{\omega} \mathbf{k}^0 \times \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}^0 = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (331)$$

ab. \mathbf{B} und \mathbf{E} stehen also *senkrecht* aufeinander, sind bei endlicher Leitfähigkeit ($\alpha \neq 0$) aber *phasenverschoben*.

Im *verlustfreien* Medium verschwindet die Phasenverschiebung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} und die Beträge weisen das konstante Verhältnis

⁴⁰Wenn n von ω abhängt [vgl. Gl. (76)], ist u von der *Gruppengeschwindigkeit* $u_G = \partial\omega/\partial k_r$ zu unterscheiden.

$$\frac{E}{B} = u = (\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)^{-1/2} \quad (332)$$

auf⁴¹. Das entspricht gerade dem Zusammenhang, den wir in den Gln. (100) und (101) für das Vakuum angegeben haben. Generell kann man – wie man sofort an den MAXWELLgleichungen sieht – alle Vakuumbeziehungen auf das verlustfreie Medium übertragen, indem man ε_0 durch $\varepsilon\varepsilon_0$ und μ_0 durch $\mu\mu_0$ ersetzt. Entsprechend Gl. (102) besitzt die Welle also eine Energiedichte

$$w_{\text{el}} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0}, \quad (333)$$

die sich zu gleichen Teilen aus elektrischer und magnetischer Feldenergie zusammensetzt. Und für den POYNTINGvektor erhält man analog zu Gl. (103)

$$\vec{S} = uw_{\text{el}}\mathbf{k}^0 = \frac{c}{n}w_{\text{el}}\mathbf{k}^0 \quad (334)$$

6.4 Linear und zirkular polarisierte Wellen

Unsere *komplexe* Anschrift

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (335)$$

dient nur der Bequemlichkeit: Physikalisch signifikant ist nur der *Realteil*. Wenn etwa \mathbf{E}_0 reell ist, repräsentiert die komplexe Exponentialfunktion lediglich den Kosinus. \mathbf{E}_0 kann aber auch komplexe *Phasenfaktoren* enthalten. Um das deutlich zu machen, legen wir die z -Achse in die Ausbreitungsrichtung der Welle und schreiben wegen der Transversalität

$$\mathbf{E} = (E_1 e^{-i\varphi}\mathbf{e}_x + E_2 e^{-i\chi}\mathbf{e}_y) e^{i(kz-\omega t)} \quad (336)$$

mit *reellen* Konstanten E_1 und E_2 . Entsprechend der oben angegebenen Interpretation bedeutet das für die Komponenten von \mathbf{E} explizit

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(kz - \omega t - \varphi) & \text{und} \\ E_y &= E_2 \cos(kz - \omega t - \chi). \end{aligned}$$

⁴¹Das entsprechende Verhältnis $E/H = (\mu\mu_0/\varepsilon\varepsilon_0)^{1/2}$ hat die Dimensionen eines Widerstandes und wird als *Wellenwiderstand* des Mediums (bzw. für $\varepsilon = \mu = 1$ des Vakuums) bezeichnet. Zahlenmäßig gilt $E/H = 376.7 \, \Omega (\mu/\varepsilon)^{1/2}$.

Sind φ und χ gleich, so oszilliert der Feldstärkevektor räumlich und zeitlich in einer *festen Richtung*: Man sagt, die ebene Welle

$$\mathbf{E} = (E_1 \mathbf{e}_x + E_2 \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t - \varphi)} \quad (337)$$

sei *linear polarisiert* und man bezeichnet die durch $E_1 \mathbf{e}_x + E_2 \mathbf{e}_y$ gekennzeichnete Richtung als die *Polarisationsrichtung*. Senkrecht dazu – ebenfalls in der $x - y$ -Ebene – oszilliert der Vektor der magnetischen Feldstärke.

Für $\varphi \neq \chi$ beschreibt der Feldstärkevektor dagegen eine Ellipse in der $x - y$ -Ebene und die Welle heißt *elliptisch polarisiert*. Speziell für

$$E_1 = E_2 \quad \text{und} \quad \chi = \varphi \mp \pi/2$$

geht die Ellipse in einen Kreis

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(kz - \omega t - \varphi) \\ E_y &= \mp E_1 \sin(kz - \omega t - \varphi) \end{aligned}$$

über. Die ebenen Wellen der Form

$$\mathbf{E}_{\pm} = E(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t - \varphi)} \quad (338)$$

mit reellem E heißen daher *zirkular polarisiert*. \mathbf{E}_+ rotiert aus positiver z -Richtung gesehen – also so, wie uns das Licht ins Auge fällt – im mathematisch positiven Drehsinn und wird *rechts*-zirkular genannt, \mathbf{E}_- entsprechend *links*-zirkular⁴². Aus der Diskussion und der Anschrift (338) ist klar, daß sich jede zirkular polarisierte Welle in zwei um $\pi/2$ phasenverschobene linear polarisierte Wellen zerlegen läßt. Umgekehrt läßt sich aber auch jede linear polarisierte Welle aus zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen zusammensetzen, denn es gilt

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-) = E\mathbf{e}_x e^{i(kz - \omega t - \varphi)} \quad \text{und} \quad (339)$$

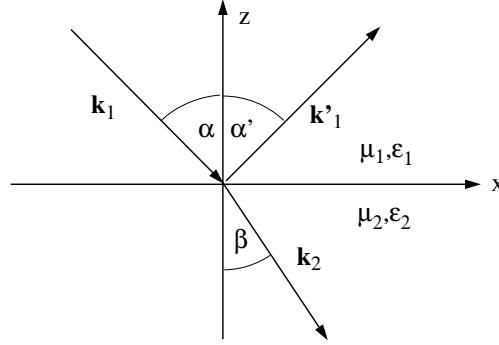
$$\frac{1}{2i}(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = E\mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t - \varphi)}. \quad (340)$$

Bleibt abschließend festzustellen, daß wir bei unserer Betrachtung keine unpolarisierten Wellen gefunden haben: *Unpolarisiertes Licht* ist ein *statisches* Gemisch verschiedener Polarisationsrichtungen.

⁴²Einige ältere Darstellungen benutzen leider die umgekehrte Bezeichnung.

6.5 Reflexion und Brechung

Wir betrachten eine ebene Welle, die unter einem Winkel α auf die ebene Grenzfläche zweier verlustfreier Medien (ε_1, μ_1 bzw. ε_2, μ_2) fällt. Neben der *einfallenden* Welle im Medium 1 und der *gebrochenen* (durchgehenden) Welle im Medium 2 erwarten wir aufgrund der Stetigkeitsbedingungen an der Oberfläche noch eine *reflektierte* Welle im Medium 1 (siehe Skizze).



Wir orientieren die z -Achse senkrecht zur Grenzfläche der Medien und die y -Achse in der Grenzfläche senkrecht zum Wellenvektor \mathbf{k}_1 der einfallenden Welle. Die x, z -Ebene, in der \mathbf{k}_1 liegt, wird *Einfallsebene* genannt.

Wir haben insgesamt drei ebene Wellen der selben Frequenz ω aber mit unterschiedlichem Wellenvektor \mathbf{k} zu betrachten:

- Die einfallende Welle

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1, \quad (341)$$

- die reflektierte Welle

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}'_1 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}'_1 \quad \text{und} \quad (342)$$

- die gebrochene (durchgelassene) Welle

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_d e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2. \quad (343)$$

In der Grenzfläche haben wir wie gesagt gewisse Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen, und zwar zu allen Zeiten – das haben wir durch die gleichen Frequenzen bereits berücksichtigt – und *überall*. Es gilt also für $z = 0$

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}. \quad (344)$$

Nun hat \mathbf{k}_1 keine y -Komponente. Soll Gl. (344) für alle \mathbf{x} gelten, so müssen auch die y -Komponenten von \mathbf{k}'_1 und \mathbf{k}_2 verschwinden: Die drei Wellenvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1$ und \mathbf{k}_2 liegen – wie bereits von der Skizze suggeriert – *koplanar* in der $x-z$ -Ebene. Aus der Gültigkeit von Gl. (344) für alle \mathbf{x} folgt dann weiter $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$ oder

$$k_1 \sin \alpha = k'_1 \sin \alpha' = k_2 \sin \beta, \quad (345)$$

wenn wir von den Beträgen $k = |\mathbf{k}|$ der Wellenvektoren ausgehen. Nun ist $u = \omega/k$ die Phasengeschwindigkeit der Wellen im entsprechenden Medium. Es gilt also

$$k'_1 = k_1 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{n_2}{n_1} k_1, \quad (346)$$

wenn wir wieder den Brechungsindex [vgl. (321)]

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

benutzen. Aus den Gln. (345) und (346) lesen wir das *Reflexionsgesetz*

$$\alpha = \alpha' \quad (347)$$

und das *SNELLIUSSche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (348)$$

ab⁴³. Dabei ist bemerkenswert, daß wir bisher nur ausgenutzt haben, *daß* in der Grenzfläche Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen sind, aber nicht spezifiziert haben, *welche*. Entsprechend weit ist der Gültigkeitsbereich des Reflexions- und des Brechungsgesetzes: Sie sind nicht auf Elektrodynamik beschränkt, sondern gelten ebenso für Schall- oder Wasserwellen, kurz für *alle* Wellenphänomene..

Als *spezielle* Stetigkeitbedingungen der Elektrodynamik können wir mit dem Normalenvektor $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ notieren

- D_{norm} ist stetig oder $\mathbf{n} \cdot [\varepsilon_1(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_r) - \varepsilon_2 \mathbf{E}_d] = 0$
- B_{norm} ist stetig oder $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r - \mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_d] = 0$
- \mathbf{E}_{tan} ist stetig oder $\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_d] = 0$

⁴³Wenn Gl. (348) für kein β erfüllbar ist [$n_2 > n_1, \alpha > \arcsin(n_1/n_2)$], tritt *Totalreflexion* auf.

- \mathbf{H}_{tan} ist stetig oder $\mathbf{n} \times \left[\frac{1}{\mu_1}(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{E}_r) - \frac{1}{\mu_2}(\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_d) \right] = 0$

Durch das Reflexions- und Brechungsgesetz sind die \mathbf{k} -Vektoren bekannt. Unter Berücksichtigung der Transversalität entsprechen sowohl die normalen als auch die tangentialen Stetigkeitsbedingungen jeweils *einer* linearen Gleichung. Insgesamt haben wir also vier lineare Gleichungen, um die vier transversalen Komponenten von \mathbf{E}_r und \mathbf{E}_d aus \mathbf{E}_0 zu berechnen. Diese Rechnung wird allerdings nicht nur mühsam, sondern auch völlig unübersichtlich. Zu einer wesentlichen Vereinfachung gelangt man, wenn man annimmt, daß die einfallende Welle entweder

- senkrecht zur Einfallsebene, also mit $\mathbf{E}_1 = E_0 \mathbf{e}_y$
- parallel zur Einfallsebene, also mit $\mathbf{H}_1 = H_0 \mathbf{e}_y$

linear polarisiert ist. Die Annahme bedeutet keine Einschränkung, da jede beliebige Welle durch Superposition aus diesen beiden Spezialfällen dargestellt werden kann. Wegen der Analogie der Randbedingungen in \mathbf{E} und \mathbf{H} führen beide Spezialfälle auf die selbe formale Rechnung, bei der \mathbf{E} oder \mathbf{H} nur eine y -Komponente besitzt. Da nun außerdem sämtliche Richtungen festliegen, reicht es, die Beträge der Felder zu betrachten. Man erhält auf diese Weise die elektrischen Feldstärken⁴⁴

- bei Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\mu_2 \tan \beta - \mu_1 \tan \alpha}{\mu_2 \tan \beta + \mu_1 \tan \alpha}, \quad \frac{E_d}{E_0} = \frac{2\mu_2 \tan \beta}{\mu_2 \tan \beta + \mu_1 \tan \alpha} \quad (349)$$

- bei Polarisation parallel zur Einfallsebene

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\mu_1 \sin(2\alpha) - \mu_2 \sin(2\beta)}{\mu_1 \sin(2\alpha) + \mu_2 \sin(2\beta)}, \quad \frac{E_d}{E_0} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}} \frac{2\mu_2 \sin(2\alpha)}{\mu_1 \sin(2\alpha) + \mu_2 \sin(2\beta)}. \quad (350)$$

Ein negatives Vorzeichen bei der reflektierten Welle E_r bedeutet dabei eine Phasenumkehr. Bemerkenswerterweise hängen die Intensitätsverhältnisse also im allgemeinen *nicht* allein vom Brechungsindex ab. Meist kann man aber in sehr guter Näherung $\mu_1 = \mu_2 (= 1)$ annehmen und erhält aus den Gln. (349) und (350) sowie dem Brechungsgesetz (352) die *FRESNELformeln*

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \frac{E_d}{E_0} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (351)$$

bei Polarisation *senkrecht* zur Einfallsebene sowie

⁴⁴Die Ergebnisse sind dem Lehrbuch von J. D. JACKSON entnommen.

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \frac{E_d}{E_0} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (352)$$

bei Polarisation *parallel* zur Einfallsebene. Bei *senkrechtem* Einfall ($\alpha = \beta = 0$) lassen sich die Polarisationsrichtungen natürlich nicht unterscheiden, und man erhält aus Gl. (351) oder Gl. (352)

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{und} \quad \frac{E_d}{E_0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (353)$$

Zum Abschluß sei noch eine Besonderheit der Reflexion von Licht, das parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, erwähnt: Nach Gl. (352) verschwindet die Amplitude der reflektierten Welle für $\alpha + \beta = \pi/2$, d. h. wenn der gebrochene und der reflektierte Strahl senkrecht aufeinander stehen. Der entsprechende Einfallswinkel

$$\alpha_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad (354)$$

wird als BREWSTERwinkel bezeichnet.

7 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

7.1 LORENTZtransformationen und MINKOWSKIraum

Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sind invariant gegen GALILEItransformation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad (355)$$

zwischen einem Koordinatensystem K und einem Koordinatensystem K' , das sich von K aus gesehen mit der gleichförmigen Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Aus der GALILEItransformation (355) folgt aber, daß die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen verschieden und im allgemeinen nicht isotrop ist. Diese Konsequenz wurde in verschiedenen Schlüsselexperimenten sehr sorgfältig überprüft und stellte sich eindeutig als *falsch* heraus. Vielmehr ergab sich, daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum⁴⁵ in jedem Inertialsystem unabhängig von der Richtung durch $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ gegeben ist. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zwang dazu, die NEWTONsche Vorstellung der *absoluten Zeit* aufzugeben und die GALILEItransformation (355) durch eine LORENTZtransformation

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (356)$$

zu ersetzen⁴⁶. Dabei ist angenommen, daß \mathbf{v} in z -Richtung zeigt. Weiter soll – wie schon bei Gl. (355) – der Ursprung von K und K' für $t = 0$ zusammenfallen. Die x - und y -Koordinate bleiben bei dieser Transformation unverändert.

Bei der mathematischen Analyse der LORENTZtransformation erweist es sich als zweckmäßig, einen *vierdimensionalen* MINKOWSKIraum mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= x & x_2 &= y \\ x_3 &= z & x_4 &= ict \end{aligned} \quad (357)$$

einzuführen. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit drückt sich dann einfach in der Form

⁴⁵Wir beschränken uns auf das Vakuum, da in Materie *ein* Inertialsystem vor allen anderen ausgezeichnet ist.

⁴⁶Für nähere Details verweisen wir auf das Kapitel “Spezielle Relativitätstheorie” in der Mechanik-Vorlesung.

$$\sum_{\nu=1}^4 x_{\nu}^2 = \sum_{\nu=1}^4 x'_{\nu}{}^2 = 0 \quad (358)$$

aus⁴⁷. Befremdlich ist, daß wir eine *imaginäre* Koordinate $x_4 = ict$ verwenden, welche mit der ungewohnten (d. h. nicht-EUKLIDischen) *Metrik* des MINKOWSKIRAUMS zusammenhängt. So kann das Quadrat

$$x^2 = \sum_{\nu=1}^4 x'_{\nu}{}^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - |x|_4^2 \quad (359)$$

eines von Null verschiedenen “*Vierervektors*”

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (360)$$

wie in Gl. (358) verschwinden oder sogar negativ werden. Vierervektoren mit positivem Quadrat heißen *raumartig*, solche mit negativem Quadrat *zeitartig*.

Die *spezielle* LORENTZtransformation der Gl. (356) läßt sich nun als lineare Transformation

$$x'_{\nu} = \sum_{\mu} a_{\nu\mu} x_{\mu} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (361)$$

im MINKOWSKIRAUM mit der Matrix

$$\mathbf{A} = (a_{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (362)$$

notieren, wobei wir – auch für das folgende – die Abkürzungen

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (363)$$

eingeführt haben. Die *allgemeine* LORENTZtransformation erhält man durch Kombination von zwei *räumlichen* Drehungen (eine in K und eine in K') mit einer

⁴⁷Wir folgen in diesem Kapitel dem üblichen Brauch, im *vierdimensionalen* Raum *griechische*, im *dreidimensionalen* Ortsraum dagegen lateinische Indizes zu benutzen.

speziellen LORENTZtransformation. Man weist leicht nach, daß die *Gruppe* der LORENTZtransformationen genau aus den *orthogonalen*⁴⁸ Transformationen des MINKOWSKIraumes besteht. Die zu Gl. (361) *inverse* LORENTZtransformation

$$x = A^{-1}x' \quad \text{oder} \quad x_\nu = \sum b_{\nu\mu} x'_\mu \quad (364)$$

wird daher mit der *transponierten* Matrix

$$A^{-1} = A^T \quad \text{oder} \quad b_{\nu\mu} = a_{\mu\nu} \quad (365)$$

gebildet. Daraus kann man insbesondere die Umkehrtransformation

$$z = \frac{z' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{t' + vz'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (366)$$

ablesen und erkennt die Symmetrie zwischen den Koordinatensystemen K und K' . Zur Diskussion weiterer Eigenschaften wie der *Längenkontraktion*, der *Zeitdilatation* und der *Gruppeneigenschaft* verweisen wir auf die Mechanik-Vorlesung.

Da alle Naturgesetze in gleicher Form in den Inertialsystemen K und K' gelten sollen, müssen sie *invariant* gegen LORENTZtransformation sein. Woran erkennt man die LORENTZinvarianz? Da die LORENTZtransformationen gerade die orthogonalen Transformationen des MINKOWSKIraumes sind, können wir das Problem zur Stützung unserer Anschauung mit der Frage nach der Invarianz von Beziehungen gegen räumliche Drehungen im R_3 vergleichen. Diese Frage erledigt sich aber von selbst, wenn wir die Beziehungen konsistent als Gleichungen zwischen skalaren Größen, z. B. $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, oder als Gleichungen zwischen Vektoren, z. B. $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, schreiben. Denn skalare Größen sind gegen Drehungen (orthogonale Transformationen) invariant, und bei vektoriellen Gleichungen transformieren sich die Komponenten beider Seiten gleich⁴⁹, nämlich wie die Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r} . Wir stellen entsprechend fest:

- Die LORENTZtransformationen lassen *skalare* Größen (wie Skalarprodukte, reine Zahlen, Naturkonstanten, ...) invariant. (Beachte: Eine Komponente eines Vektors ist *kein* Skalar!).
- Ein Vierervektor $y = (y_\nu)$ des MINKOWSKIraums transformiert sich nach dem selben Schema

$$y'_\nu = \sum_\mu a_{\nu\mu} y_\mu \quad \text{bzw.} \quad y' = Ay$$

⁴⁸Wir benutzen imaginäre Zahlen nur als formales Hilfsmittel zur Darstellung der Metrik. Daher meinen wir wirklich "orthogonal" und *nicht* "unitär".

⁴⁹*Nicht* invariant sind Beziehungen zwischen Skalaren und einzelnen Vektorkomponenten wie $\varphi = kz - \omega t$; die koordinateninvariante Schreibweise lautet $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$.

wie der Vierer-Orstvektor \mathbf{x} , seine Komponenten y_ν ändern sich *kovariant* mit den Komponenten x_ν .

Die LORENTZinvarianz einer Beziehung ist also automatisch sichergestellt, wenn die Beziehung konsistent als Gleichung

$$a = b$$

zwischen *skalaren* Größen a und b des MINKOWSKIRAUMS oder als Gleichung

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

zwischen *Vektoren* des MINKOWSKIRAUMS formuliert ist. Eine solche Formulierung heißt **kovariant**, die Elemente nennt man *Viererskalare* oder *LORENTZskalare* und *Vierervektoren*. Und da man gelegentlich zwei oder mehr Indizes benötigt, kann man analog *Vierertensoren* definieren und kovariant in Beziehung setzen.

Nun bildet nicht jedes Schema von vier Zahlen einen Vierervektor und nicht jeder Vektor des R_3 läßt sich zu einem Vierervektor ergänzen. Wie findet man dann Vierervektoren und Viererskalare? Eine Möglichkeit besteht darin, aus hinreichend abgesicherten Naturgesetzen invariante Größen zu *postulieren*. Das Postulat, daß die Lichtgeschwindigkeit c ein LORENTZskalar ist, bildet ja gerade den Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie. Zweitens erhält man aus bekannten Vierervektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aber auch neue Vierervektoren

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} \quad \text{und} \quad c \mathbf{a},$$

wenn c ein Skalar ist. Für uns besonders wichtig ist weiter, daß die Ableitungen $(\partial g / \partial x_\nu)$ einer skalaren Funktion g nach einem Vierervektor (x_ν) wieder einen Vierervektor bilden. Denn nach der Kettenregel gilt [vgl. (364, 365)]

$$\frac{\partial g}{\partial x'_\nu} = \sum_\mu \frac{\partial g}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} = \sum_\mu b_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial x_\mu} = \sum_\mu a_{\nu\mu} \frac{\partial g}{\partial x_\mu}.$$

Wir können dies symbolisch festhalten, indem wir den *vierdimensionalen Nabla-operator*

$$\diamond = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^\top \quad (367)$$

als Vierervektor betrachten. Durch das Skalarprodukt

$$\diamond \cdot \mathbf{b} = \sum_{\nu} \frac{\partial b_{\nu}}{\partial x_{\nu}} \quad (368)$$

mit einem Vierervektor \mathbf{b} entsteht ein Skalar (die vierdimensionale Divergenz), und durch zweimalige Anwendung von \diamond erkennen wir den *vierdimensionalen LAPLACEoperator*

$$\square = \diamond^2 = \sum_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (369)$$

als skalaren Differentialoperator des MINKOWSKIRAUMS.

7.2 Viererpotential und Viererstromdichte

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (in Verbindung mit EINSTEINS Relativitätsprinzip) hat uns in der *Mechanik* gezwungen, die GALILEIinvarianten NEWTONschen Bewegungsgleichungen so *abzuändern*, daß sie LORENTZinvariant werden. Eine entsprechende Korrektur ist in der Elektrodynamik *nicht* erforderlich:

- “Die MAXWELLSchen Gleichungen genügen von Hause aus dem Relativitätspostulat” (SOMMERFELD)

In der Tat kommt die Lichtgeschwindigkeit c ja aus der MAXWELLtheorie, und LORENTZ und POINCARÉ haben schon *vor* EINSTEINS Relativitätstheorie gezeigt, daß die MAXWELLgleichungen bei geeigneter Transformation der Felder gegen LORENTZtransformationen (356) invariant sind. Wenn wir uns in diesem Kapitel mit relativistischen Aspekten befassen, so geht es also nicht darum, eine relativistische Elektrodynamik zu entwickeln – die haben wir ja bereits – sondern um die *kovariante Formulierung*, welche die LORENTZinvarianz deutlich macht und den Zugang zu den Transformationsgesetzen erleichtert. Der Weg deutet sich bereits an, wenn wir Gl. (369) mit den inhomogenen Wellengleichungen (144) und (145) vergleichen:

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad \text{und} \quad (370)$$

$$\square \Phi = -\varrho / \varepsilon_0 = -\mu_0 c^2 \varrho. \quad (371)$$

Es erscheint zunächst verlockend, Gl. (371) direkt als kovariante Gleichung zwischen Skalaren ϱ und Φ zu betrachten. Abgesehen von der Schwierigkeit, die wir dann mit Gl. (370) erhielten, scheitert das aber an der LORENTZkontraktion, die

ϱ vom Koordinatensystem abhängig macht. Wir müssen jedoch verlangen, daß die *Kontinuitätsgleichung*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial j_i}{\partial x_i} + ic \frac{\partial \varrho}{\partial x_4} = 0 \quad (372)$$

wegen der Ladungserhaltung in *jedem* Koordinatensystem gültig bleibt. Gl. (372) ist *automatisch* LORENTZinvariant, wenn wir sie als vierdimensionale Divergenz eines Vierervektors Γ formulieren:

$$\diamond \cdot \Gamma = \sum_{\nu} \frac{\partial \Gamma_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad \text{mit} \quad \Gamma = (j_1, j_2, j_3, ic\varrho)^{\top}. \quad (373)$$

Der Vektor Γ wird „*Viererstromdichte*“ genannt. Mit seiner Hilfe lassen sich die Gln. (370) und (371) in der Form

$$\square \Omega = -\mu_0 \Gamma \quad (374)$$

zusammenfassen, wenn wir das „*Viererpotential*“

$$\Omega = (A_1, A_2, A_3, \frac{i}{c}\Phi)^{\top} \quad (375)$$

eingeführen. Die kovariante Formulierung der Grundgleichungen der Elektrodynamik ist mit den Gln. (373)–(375) also bereits erledigt, wenn die Interpretation von Ω als Vierervektor nicht zu Widersprüchen führt. Dazu müssen wir nachweisen, daß die LORENTZgleichung (143), welche den Wellengleichungen zugrunde liegt, bei einer LORENTZtransformation erhalten bleibt. Mit dem Viererpotential schreibt sich die LORENTZgleichung aber automatisch in der LORENTZvarianten Form

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{\nu} \frac{\partial \Omega_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = \diamond \cdot \Omega = 0 \quad (376)$$

einer vierdimensionalen Divergenz. Damit schließt sich der Kreis.

7.3 Der Feldstärketensor

Die elektrischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} erhalten wir nach den Gln. (135) und (136) durch die entsprechenden Ableitungen der Potentiale. Da die Potentiale bereits einen Vierervektor bilden, benötigen wir zur kovarianten Anschrift der Felder zwei Indizes. So erhalten wir das magnetische Feld in der Form

$$B_i = (\text{rot } \mathbf{A})_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \quad \text{oder}$$

$$B_i = \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k} = F_{jk}, \quad (377)$$

wenn $\{i, j, k\}$ eine zyklische Vertauschung von $\{1, 2, 3\}$ bezeichnet. Entsprechend folgt für das elektrische Feld

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad \text{oder}$$

$$E_i = ic \left(\frac{\partial \Omega_4}{\partial x_i} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_4} \right) = ic F_{i4}, \quad (378)$$

wobei

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial x_\mu} \quad (379)$$

die sechs Komponenten des *Feldstärketensors* bezeichnet. Sie lassen sich als Komponenten der vierdimensionalen Rotation⁵⁰ auffassen. Explizit ergibt sich daraus die Anschrift

$$(F_{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (380)$$

des Feldstärketensors. Gehen wir wieder von der Überlegung aus, daß wir aus \mathbf{j} und $ic\rho$ einen Vierervektor bilden können, so sollte es möglich sein, die beiden MAXWELLgleichungen

$$\text{div } \mathbf{E} = \mu_0 c^2 \rho \quad \text{und} \quad \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$$

kovariant zusammenzufassen. Mit Hilfe des Feldstärketensors erhält man so die kovariante Beziehung

⁵⁰Die Rotation – oder allgemeiner das \times -Produkt – hat im n -dimensionalen Raum $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ Komponenten.

$$\sum_{\mu} \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{\mu}} = \mu_0 \Gamma_{\nu}. \quad (381)$$

Die entsprechende Formulierung für die homogenen MAXWELLgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

lautet

$$\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad (382)$$

wobei $\{\nu, \mu, \lambda\}$ alle Tripel aus den vier Indizes $\{1, 2, 3, 4\}$ durchläuft.

7.4 Die Transformation der Felder

Eine wichtige Nutzanwendung der kovarianten Formulierung liegt in der Berechnung der Transformationseigenschaften elektrischer und magnetischer Felder. Da die Komponenten der Felder Elemente des Feldstärketensors sind, folgen die Transformationsgleichungen grundsätzlich aus den Beziehungen

$$F'_{\nu\mu} = \sum_{\kappa\lambda} a_{\nu\kappa} a_{\mu\lambda} F_{\kappa\lambda}. \quad (383)$$

Wir kommen aber auch ohne diese Anleihe bei der Tensorrechnung aus, wenn wir beachten, daß sowohl Ω als auch \diamond Vierervektoren sind, die sich mit der selben Matrix \mathbf{A} – also *kovariant* – transformieren wie der vierdimensionale Ortsvektor \mathbf{x} . Gehen wir wieder von der speziellen LORENTZtransformation (356) mit der Matrix (362) aus, so folgt

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= \Omega_1, & \Omega'_2 &= \Omega_2, \\ \Omega'_3 &= \gamma(\Omega_3 + i\beta\Omega_4), \\ \Omega'_4 &= \gamma(-i\beta\Omega_3 + \Omega_4) \end{aligned} \quad (384)$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x'_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x'_3} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \end{aligned} \quad (385)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_4} = \gamma \left(-i\beta \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right).$$

Damit erhält man z. B.

$$\begin{aligned} E'_1 &= ic \left[\frac{\partial \Omega'_4}{\partial x'_1} - \frac{\partial \Omega'_1}{\partial x'_4} \right] = ic\gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\Omega_4 - i\beta \Omega_3) + i\beta \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_4} \right] \\ &= ic\gamma \left(\frac{\partial \Omega_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_4} \right) + c\beta\gamma \left(\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3} \right) = \gamma E_1 - v\gamma B_2. \end{aligned}$$

Führt man alle entsprechenden Rechnungen durch, erhält man das vollständige Transformationsschema

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma(E_1 - vB_2), & B'_1 &= \gamma(B_1 + \frac{v}{c^2}E_2), \\ E'_2 &= \gamma(E_2 + vB_1), & B'_2 &= \gamma(B_2 - \frac{v}{c^2}E_1), \\ E'_3 &= E_3, & B'_3 &= B_3. \end{aligned} \tag{386}$$

Hierin erkennen wir die (*dreidimensionalen*) Vektorgleichungen

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \tag{387}$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \tag{388}$$

wenn wir die Komponenten parallel bzw. senkrecht zu \mathbf{v} mit dem Index \parallel bzw. \perp kennzeichnen. Die Transformationsgleichungen zeigen, daß \mathbf{E} und \mathbf{B} keine unabhängigen Phänomene beschreiben, sondern innerlich – als verschiedene Aspekte der selben Sache – zusammengehören. Ein ähnlicher Zusammenhang, nämlich

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad (v \ll c) \tag{389}$$

ergibt sich ja auch bereits, wenn man fordert, daß die LORENTZkraft GALILEIinvariant ist. Die GALILEIinvarianz dieser Kraft wird durch die Gln. (387), 388 zur LORENTZinvarianz korrigiert. Damit hat man ein *Modell* für die Transformation irgendwelcher Kräfte, wenn man postuliert, daß das Kräftegleichgewicht LORENTZinvariant ist. Auf diesem Modell beruht die Formulierung der MINKOWSKIKraft und der Bewegungsgleichungen der relativistischen Mechanik.

Wenn elektrische und magnetische Felder auch nur verschiedene Aspekte der selben Erscheinung sind, so gibt es doch Einschränkungen bei einer Uminterpretation durch verschiedene Inertialsysteme. Diese Einschränkungen ergeben sich aus den *Invarianten*

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad \text{und} \quad E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2, \quad (390)$$

die man durch direktes Einsetzen aus den Transformationsgleichungen verifizieren kann. Ein reines elektrisches Feld in K kann damit nie zu einem reinen Magnetfeld in K' werden, und eine elektro-magnetische Welle bleibt immer elektro-magnetisch, ja sie behält sogar ihre grundsätzliche Struktur, die durch verschwindende Invarianten (390) gekennzeichnet ist: \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen in *jedem* Koordinatensystem senkrecht aufeinander und der Betrag des Magnetfeldes ist in *jedem* Koordinatensystem durch $B = E/c$ mit dem Betrag des elektrischen Feldes verknüpft.

Literaturhinweise

Alle üblichen Lehrbücher gehen im Umfang wesentlich über den Inhalt der Vorlesung hinaus, eignen sich aber, einzelne Probleme nachzulesen und zu vertiefen. Dabei ist die optimale Darstellung eine Frage des persönlichen Geschmacks. Die folgende Aufstellung ist daher nicht als spezielle Empfehlung zu verstehen, sondern nennt die Quellen, die ich bei der Ausarbeitung der Vorlesung vornehmlich benutzt habe.

- a) **W. K. H. Panofsky and M. Phillips:** Classical Electricity and Magnetism, Addison–Wesley Publishing Company
- b) **J. D. Jackson:** Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc.
- c) **R. Becker/F. Sauter:** Theorie der Elektrizität, B. G. Teubner, Stuttgart, Bd. 1–3
- d) **A. Sommerfeld:** Elektrodynamik (Bd. III der Vorlesungen über Theoretische Physik), VAG Leipzig bzw. Teubner.

a) und besonders b) sind umfassende Standardlehrbücher der Elektrodynamik in englischer Sprache; dabei verwendet b) leider das cgs-System. c) und d) sind sehr gute deutschsprachige Lehrbücher, die kompetent die physikalischen Grundideen herausarbeiten und diskutieren. Von d) – das mich auch wegen des verständlichen und eleganten Umgangs mit der Mathematik besticht – habe ich den deduktiven Aufbau, der von den Maxwellgleichungen ausgeht, für diese Vorlesung übernommen. Leider ist Sommerfelds Darstellung zu unsystematisch, um die ganze Vorlesung daran auszurichten.

Schließlich möchte ich noch auf die ausgezeichneten Feynman Lectures

Feynman/Leighton/Sands: Vorlesungen über Physik, Bd. 1 und 2, R. Oldenbourg Verlag München

hinweisen. Diese Darstellung der gesamten Physik weicht stark von der üblichen Gliederung in Teilgebiete ab. Sie legt großen Wert auf die Didaktik und vermittelt ein tiefes Verständnis der Grundlagen. Wegen der Gliederung ist das Werk zur direkten Begleitung der Vorlesung weniger geeignet, ich empfehle aber einzelne Kapitel daraus zur Ergänzung und Vertiefung.