

# **Angewandte Optik / Holographie**

Vorlesung am Institut für Physik der Humboldt-Universität zu Berlin  
Wahlpflichtfächer Optik und Spektroskopie und Makromolekül- und Biophysik  
SS 2001

PD Dr.-Ing.habil. Günther Wernicke  
AG Photobiophysik  
Labor für Kohärenzoptik

Diese Skripte wurde erarbeitet unter Verwendung von Ausarbeitungen, die in den Jahren 1995 bis  
1998 zusammengestellt wurden, sowie einer Vorlesungsmitschrift bei Prof. Gutjahr, Köln

## Einleitung

Die Holographie ist eine Methode zur Speicherung der vollständigen Information eines Wellenfeldes und basiert auf den Effekten der Interferenz und Beugung. Interferenzen entstehen, wenn sich Lichtwellen gleicher Polarisation und Wellenlänge, die eine feste Phasenbeziehung zueinander haben, wie das bei Laserlicht der Fall ist, überlagern. Die Amplituden- und Phasenverteilung einer als Objekt- oder Signalwelle bezeichneten Welle sind in dem Interferenzmuster enthalten, das durch Überlagerung von dieser mit einer kohärenten Referenzwelle entsteht.

Das aufgezeichnete Interferenzmuster wird als das Hologramm der Signalwelle bezeichnet. Wird dieses mit einer geeigneten Lichtwelle beleuchtet, entsteht durch Beugung an der Struktur des Hologramms die Signalwelle mit ihrer gesamten Information von Amplitude und Phase. Man spricht von Rekonstruktion der Signalwelle. Insofern unterscheidet sich das holographische von allen herkömmlichen Abbildungsverfahren.

Zur Beschreibung der physikalischen Vorgänge, die bei der holographischen Rekonstruktion auftreten, wird im einfachsten Fall die auf Arbeiten von Kirchhoff basierende skalare Beugungstheorie verwendet. Den mathematischen Hintergrund des Beugungsproblems bilden lineare Transformationen, die je nach Voraussetzungen (Betrachtung des Beugungsbildes in einer sehr großen Entfernung – „Fraunhofer-Beugung“ – oder Betrachtung des Beugungsbildes in einer bestimmten Ebene – „Fresnel-Beugung“) durch Fourier- oder Fresnel-Transformationen beschrieben werden können.

Diese „optischen“ Hologramme, die dadurch gekennzeichnet sind, daß Lichtwellen gespeichert und auch wieder rekonstruiert werden können, werden in der heutigen Zeit in vielen Gebieten, von der Meßtechnik bis zu medialen Anwendungen, eingesetzt.

Eine kurze Erklärung der Holographie<sup>1</sup> bzw. deren Wirkungsweise wurde bereits in der Vorlesung *Integrierter Kurs* erhalten. Es sei hier deshalb nur noch einmal daran erinnert, daß ein Hologramm quasi ein "Speicher" der von einem Objekt reflektierten (Licht-) Strahlen und deren Wellencharakteristika Phase, Amplitude und Frequenz ist. Diese werden bei der Wiedergabe mit der gleichen Lichtquelle zur Rekonstruktion benutzt. Daraus ergibt sich aber auch, daß die Reproduktion von Objekten mit der Holographie nur im Rahmen der bei der Aufnahme verwendeten Bedingungen möglich ist, oder anders ausgedrückt: Was nicht aufgenommen wurde, kann auch nicht wiedergegeben werden! Die Formatgröße des Hologramms bestimmt also den Ausschnitt des rekonstruierbaren Objektes; es wirkt quasi wie ein Fenster, durch das wir das Objekt betrachten können - außerhalb dieses Fensters können wir das Objekt nicht betrachten.

An die Holographie stellen sich noch andere Forderungen z.B. bezüglich der Farbe des Objektes, die auf die Farbe des Lichtes (vornehmlich LASER) abgestimmt sein muß, was ohne weitere Erklärung einsichtig sein dürfte. Zudem bereitet die Farbholographie noch viele Probleme. Aber auch einige verblüffende Effekte lassen sich mit der Holographie erzielen: Wird z.B. bei der Rekonstruktion eines Hologrammes die Beleuchtungsrichtung einfach umgedreht, dann erscheint das Objekt umgestülpt, d.h. das "innere" kommt nach außen. Diese Sehweise nennt man dann *pseudoskopische Sehweise* im Gegensatz zur *orthoskopischen*, also der "normalen" Sehweise.

Das Prinzip der holographischen Bildaufzeichnung besteht in der Interferenzzeugung einer vom Objekt reflektierten Teilwelle einer Lichtquelle mit einer nicht zum Objekt gelangten weiteren Teilwelle. Das Verständnis der Interferometrie ist für das Verständnis der Holographie also unerlässlich.

## 0. Grundlagen der kohärenten Optik

Ausgegangen wird von der Fresnel-Kirchhoffschen Beziehung, die eine mathematische Fassung des Fresnel-Huygens'schen Prinzips ist:

Es wird in der  $x_i, y_i$ -Ebene das Beugungsbild  $u(x_i, y_i)$  eines Signals  $g(x_0, y_0)$ , das sich in der in der  $x_0, y_0$ -Ebene befindet, betrachtet:

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{e^{ikr}}{r} dx_0 dy_0 \quad (0.1)$$

mit

---

<sup>1</sup> Der Name Holographie stammt vom griechischen: Holos = das Ganze

$$r = \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}. \quad (0.2)$$

In Achsennähe ist

$$(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 \gg z_i^2. \quad (0.3)$$

Dann lässt sich r in eine Binomialreihe entwickeln:

$$r = z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i} - \frac{x_i x_0 + y_i y_0}{z_i} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i} - \frac{[(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2] I^2}{8z_i^3} \quad (0.4)$$

Werden nur die ersten drei Terme in Betracht gezogen, d.h. die Entfernung des Schirmes ist sehr groß gegenüber der Ausdehnung des Eingangsobjektes, spricht man von Fraunhofer-Beugung, während für Fresnel-Beugung die ersten vier Terme von Bedeutung sind. Diese Fresnel-Näherung soll im Weiteren näher behandelt werden.

Zwei Möglichkeiten für das Ausdrücken der Fresnel-Näherung gibt es in Abhängigkeit davon, ob direkt  $(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2$  eingesetzt oder dieser Term ausmultipliziert wird.

Im ersten Fall wird

$$u(x_i, y_i) = \frac{I}{i\lambda z_i} e^{ikz_i} \iint g(x_0, y_0) e^{ik \frac{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}{2z_i}} dx_0 dy_0. \quad (0.5)$$

Dies ist der mathematische Ausdruck für eine Faltung, d.h. das Beugungsbild kann ausgedrückt werden durch

$$u(x_i, y_i) = g(x_i, y_i) \otimes f_{z_i}(x_i, y_i) \quad (0.6)$$

mit

$$f_{z_i} = \frac{I}{i\lambda z_i} e^{ik(z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i})}. \quad (0.7)$$

Dies ist der gleiche Ausdruck, wie die Näherung, die sich für die Binomialentwicklung für das Feld einer Punktquelle im Koordinatenursprung ergibt. Deshalb heißt diese Funktion auch Punktbildübertragungsfunktion. Wird im Gegensatz zum Vorigen jedoch gesetzt

$$(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2(x_i x_0 + y_i y_0) + x_0^2 + y_0^2 \quad (0.8)$$

und dies eingesetzt, ergibt sich die folgende Beziehung:

$$u(x_i, y_i) = \frac{I}{i\lambda z_i} e^{ik(z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i})} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) e^{ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i} - 2ik(\frac{x_0 x_i}{\lambda z_i} + \frac{y_0 y_i}{\lambda z_i})} dx_0 dy_0. \quad (0.9)$$

Dieser Ausdruck entspricht einer zweidimensionalen Fourier-Transformation und kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) &= \frac{I}{i\lambda z_i} e^{ik(z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i})} F \{ g(x_0, y_0) e^{ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i}} \} \\ &= e^{ik \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i}} F \{ g(x_0, y_0) f_{z_i}(x_0, y_0) \} \end{aligned} \quad (0.10)$$

mit

$$f_x = \frac{x_i}{\lambda z_i} \quad und$$

$$f_y = \frac{y_i}{\lambda z_i}$$

Das heißt, das Beugungsbild ist die Fouriertransformation der Eingangsfunktion multipliziert mit der Punktbildübertragungsfunktion.

Diese Ergebnisse sollen nun auf die Informationsübertragung mit einer Konvexlinse angewendet werden.

### Fouriertransformation mit einer Linse

#### 1. Eingangsfunktion direkt vor der Linse

Das Eingangsbild sei beschrieben durch  $g(x_0, y_0)$  und mit einem Parallelbündel mit Einheitsamplitude beleuchtet. Für die Phasenverteilung direkt hinter der Linse ergibt sich:

$$g(x_0, y_0) e^{-ik\frac{x_0^2 + y_0^2}{2f} + \phi_0}. \quad (0.11)$$

Der Durchmesser der Linse sei unendlich groß, die Phase  $\phi_0$  sei identisch Null.

In der Ebene  $z = z_i$  ergibt sich dann unter der Voraussetzung von Fresnel-Beugung

$$A(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{i\lambda z_i} e^{ik(\frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i})} F\{ g(x_0, y_0) e^{-ik\frac{x_0^2 + y_0^2}{2f} + ik\frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i}} \} \quad (0.12)$$

mit

$$f_x = \frac{x_i}{\lambda z_i} \quad und$$

$$f_y = \frac{y_i}{\lambda z_i}$$

Wird die Lichtverteilung auf einem Schirm bei  $z_i = f$  betrachtet, ergibt sich

$$A(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{i\lambda f} e^{ik(f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f})} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \quad (0.13)$$

mit  $G(f_x, f_y) = F\{g(x_0, y_0)\}$

Dies ist ein sehr wichtiges Ergebnis. Das Bild auf dem Schirm in der hinteren Brennebene ist bis auf den Faktor

$$e^{ik(f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f})}$$

die Fourier-Transformation der Eingangsfunktion  $g(x_0, y_0)$ . Wird nur die Intensität in der hinteren Brennebene betrachtet, ist der Phasenfaktor ohne Belang. Durch Bewegen der Eingangsfunktion in die vordere Brennebene wird er eliminiert, wie im Folgenden gezeigt wird.

#### 2. Eingangsfunktion in der vorderen Brennebene

Die Eingangsfunktion befindet sich zunächst in der Entfernung  $d_1$  vor der Linse. In der hinteren Brennebene wird das Signal auf einem Schirm betrachtet. Die Ausbreitung des Lichts sei aufgeteilt bis zur Linse und von der Linse zum Schirm. In der Eingangsebene der Linse ergibt sich

$$g'(x, y) = g(x, y) \otimes f_{d_1} \quad (0.14)$$

mit

$$f_{d_1} = \frac{I}{i\lambda d_1} e^{ik(d_1 + \frac{x^2 + y^2}{2d_1})}. \quad (0.15)$$

Es ist

$$F\{f_{d_1}\} = e^{ikd_1 - i\pi\lambda d_1(f_x^2 + f_y^2)}. \quad (0.16)$$

In der hinteren Brennebene ist dann, wenn man  $g(x_0, y_0)$  durch  $g'(x, y)$  ersetzt,

$$A(x_i, y_i, f) = \frac{I}{i\lambda f} e^{ik(f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f})} G'\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right), \quad (0.17)$$

wobei

$$G'(f_x, f_y) = F\{g'(x, y)\} = G(f_x, f_y) F\{f_{d_1}\}. \quad (0.18)$$

Eingesetzt ergibt das

$$\begin{aligned} A(x_i, y_i, f) &= \frac{I}{i\lambda f} e^{ik(d_1 + f + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2f})} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) e^{-i\pi\lambda d_1 l(\frac{x_i}{\lambda f})^2 + (\frac{y_i}{\lambda f})^2} \\ &= \frac{I}{i\lambda f} e^{ik(f + d_1)} e^{ik\frac{x_i^2 + y_i^2}{2f}(1 - \frac{d_1}{f})} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right) \end{aligned} \quad (0.19)$$

Liegt die Eingangsfunktion in der vorderen Brennebene, wird der zweite Exponentielfaktor gleich Eins und es wird

$$A(x_i, y_i, f) = \frac{e^{2ikf}}{i\lambda f} G\left(\frac{x_i}{\lambda f}, \frac{y_i}{\lambda f}\right), \quad (0.20)$$

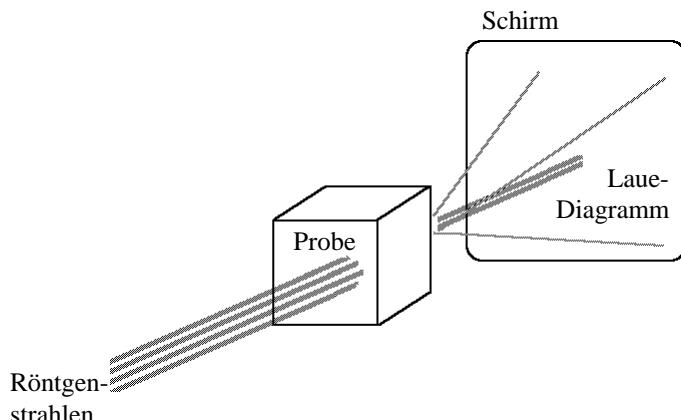
das heißt, die Feldverteilung auf dem Schirm in der hinteren Brennebene ist die Fourier-Transformation der Eingangsfunktion in der vorderen Brennebene.

## Geschichte

Die ersten Veröffentlichungen (1948) zur Holographie stammen von DENNIS GABOR (1900-1979). Problematisch waren zu diesem Zeitpunkt allerdings noch die unzureichenden Lichtquellen.

Mit dem ersten Laser (1962) erfolgte ein Aufschwung in der Holographie.

Als Vorläufer gelten BRAGG (1862-1942), und ZERNIKE, von denen erste Überlegungen zur räumlichen Strukturanalyse von Kristallen (Röntgenstrukturanalyse) stammen.

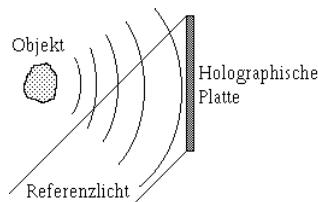


**Abbildung 0.1.:** Beugungsversuche mit Röntgenstrahlen (nach MAX VON LAUE, 1912).

BRAGG schlug vor, einen so breiten Röntgenstrahl zu verwenden, daß der abgelenkte und der direkte Strahl miteinander interferieren können, sodaß eine Information über die Phase entsteht.

## Einführung in die Holographie

Der grundsätzliche Aufbau zur Herstellung eines Hologramms sieht wie folgt aus:



**Abbildung 0.2.:** Grundsätzlicher Aufbau zur Herstellung eines Hologramms

Dabei entsteht das Hologramm durch Interferenz der Objektwelle O mit der Referenzwelle R ; wir können die für jeden Bildpunkt am Bildort entstehende Intensität daher durch die Zweistrahlerferenz beschreiben:

$$\begin{aligned} I &= |A_O + A_R|^2 = (A_O + A_R)(A_O + A_R)^* = (A_O + A_R)(A_O^* + A_R^*) \\ &= A_O A_O^* + A_R A_R^* + A_O A_R^* + A_O^* A_R \end{aligned} \quad (0.21)$$

mit

- $A_O$ : Objektwellenamplitude
- $A_R$ : Referenzwellenamplitude
- $A^*$ : konjugiert komplexer Amplitudenteil

Dabei ist der Term  $A_O A_R^* + A_O^* A_R$  der Interferenzterm, er muß eine reelle Zahl beschreiben. Die durch die Zweistrahlerferenz hervorgerufenen Intensitätsunterschiede führen bei der Belichtung zu verschiedenen Schwärzungen des photographischen Materials, die das Rekonstruktionslicht später in der **Amplitude** moduliert. Die auf der holographischen Platte festgehaltene **Amplitudentransparenz**  $T_A$  ergibt sich dann also mit der Belichtungszeit  $t$  und der Proportionalitätskonstante  $\beta$  aus:

$$T_A = \beta \cdot B = \beta \cdot t \cdot I = \beta \cdot t \cdot (A_O A_O^* + A_R A_R^* + A_O A_R^* + A_O^* A_R) \quad (0.22)$$

$I_O + I_R + 2\sqrt{I_O I_R} \cos(\varphi)$ , wobei  $I_O = A_O A_O^*$  und  $I_R = A_R A_R^*$  ist.

Bei der Rekonstruktion wird die Rekonstruktionswelle mit der Amplitude  $A_T$  durch diese Amplitudentransparenz moduliert, wodurch wir die Amplitude  $A_T$  erhalten:

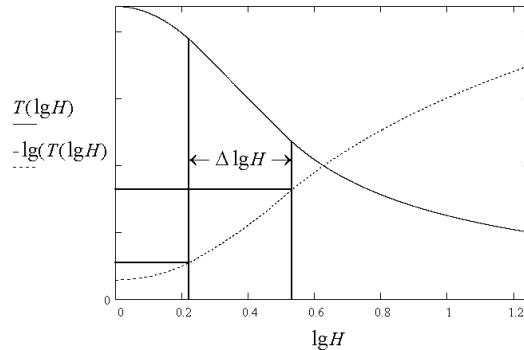
$$A_T = A_r T_A = A_r \cdot \beta \cdot t (A_O A_O^* + A_R A_R^* + A_O A_R^* + A_O^* A_R) \quad (0.23)$$

Da wir zur getreuen Rekonstruktion als Rekonstruktionswelle  $A_r$  auch eine gleichartige (gleiche Wellenlänge!) Welle wie bei der Aufnahme verwenden, d.h.  $A_r = A_R$ , ergibt sich:

$$A_T = \beta \cdot t (A_R A_O A_O^* + A_R^2 A_R^* + A_R A_O A_R^* + A_O^* A_R^2) \quad (0.24)$$

Dabei ist vor allem der Term  $A_R A_O A_R^*$  für uns interessant, da er die Modulation der Rekonstruktionsintensität  $I_R$  durch die Objektwelle beschreibt:  $A_R A_R^* A_O = I_R A_O$ . Er steht für das virtuelle Bild, während der Term  $A_O^* A_R^2$  für das reelle steht.

Da Intensitäten proportional zum Quadrat der Amplituden sind ( $I \sim A^2$ ), belichten wir so, daß sich die Belichtungen auf der holographischen Platte im Bereich des Durchhangs (Dichten von 0,6 bis 1) befinden. Dort gilt näherungsweise  $D = -\log(T_A^2)$ , d.h. die Amplitudentransparenz ist in diesem Bereich linear:



**Abbildung 0.3.:** Der lineare Teil der Transparenzkurve entspricht dem gekrümmten Teil der Dichtekurve ( $\Delta \lg H$ ).

Der Kontrast auf der Platte wird ja definiert durch:

$$K = \frac{2 \sqrt{I_R I_O} \cos(\varphi)}{I_R + I_O},$$

wobei  $\varphi$  der Winkel ist, den Referenz und Objektwelle bei der Aufnahme miteinander einschließen. Daraus ergibt sich eine Periode von

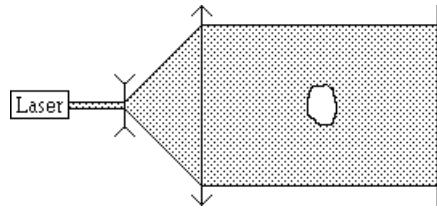
$$P = \frac{\lambda}{\sin(\varphi)}$$

und die Forderung nach Feinstkornemulsionen mit einem Auflösungsvermögen von 2.000 bis 7.000  $\frac{L}{mm}$ .

Bei der Rekonstruktion wird das Objekt durch Beugung wieder "hergestellt". Darauf werden wir bei den einzelnen Verfahren dann genau eingehen.

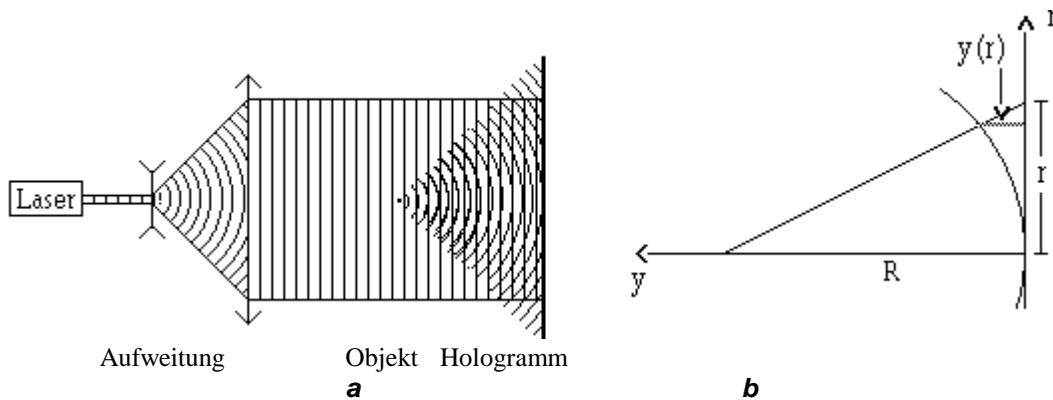
# 1. Gabor-In-line-Holographie

Bei der von GABOR entwickelten In-line-Holographie befindet sich das körperliche Objekt im Strahlengang der Referenzwelle:



**Abbildung 1.4.: Prinzip des In-line-Aufbaus**

Durch Beugung der Referenzwelle am Objekt entsteht eine Objektwelle, die mit der Referenzwelle auf der Platte interferiert. Als Objekte bieten sich für dieses Verfahren natürlich transparente Gegenstände an, da sonst nur ein Silhouettenhologramm aufgenommen wird. Zunächst wollen wir uns den einfachsten Fall des **Hologramms eines Punktes** anschauen. Dabei wird, wie wir aus der Wellenoptik wissen, am Punkt durch Beugung eine Kugelwelle als Objektwelle erzeugt, die sich mit der ebenen Referenzwelle überlagert:



**Abbildung 1.5.: Aufnahme eines Gabor -In-line-Hologramms.**

Als Referenzwelle wird hier eine ebene Welle verwendet, das Objekt ist Zentrum einer Kugelwelle (Objektwelle), auf dem Film entsteht durch Interferenz zwischen ebener Welle und Kugelwelle eine FRESNELsche Zonenplatte

Für  $r \ll 1$  können wir die Kugelwelle auf der Platte einer Parabel annähern, so daß folgt:

$$y(r) \approx \frac{r^2}{2R} \quad (1.1)$$

Für die Phasenverschiebung  $\delta$  in Abhängigkeit von  $r$  erhalten wir folglich <sup>3</sup>:

$$\delta(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r^2}{2R} = \frac{\pi r^2}{R \lambda} \quad (1.2a)$$

Für das erste Nebenmaximum ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \cos(\delta) = +1 \Rightarrow \delta(r_1) &= \frac{\pi r_1^2}{R \lambda} = 2\pi \\ \Rightarrow r_1 &= \sqrt{2R\lambda} \end{aligned} \quad (1.2b)$$

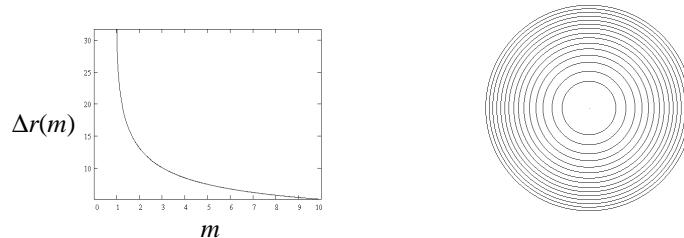
<sup>3</sup> Es gilt ja für die Intensität auf der Platte:  $I_{\text{ges}}(r) = I_R + I_0 + 2\sqrt{I_R I_0} \cdot \cos(\delta(r))$

Für einen Aufnahmeabstand von beispielsweise  $R = 0,5 \text{ m}$  und einer Laserwellenlänge von  $\lambda = 600 \text{ nm}$  errechnet sich nach Gleichung (1.2b) ein Abstand vom ersten Nebenmaximum zum Hauptmaximum von  $r_1 = 0,8 \text{ mm}$ . Diese Rechnung zeigt, daß sich durch die Holographie feinste Gitter herstellen lassen; verdeutlicht aber auch, daß dafür hochauflösende Aufnahmematerialien gebraucht werden.

Der Abstand benachbarter Nebenmaxima sinkt nach

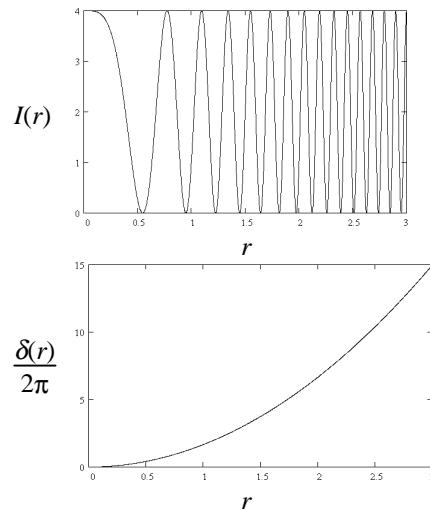
$$\Delta r(m) = \sqrt{2R} \cdot (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})$$

mit der Entfernung zur optischen Achse ab. Dieses Bild kennen wir aber bereits: Es ist die **FRESNEL<sup>4</sup>sche Zonenplatte**:



**Abbildung 1.6.:** links: Abstand benachbarter Maxima abhängig von  $r$   
rechts: Elementarhologramm eines Punktes.

Tragen wir Phasenverschiebung und Gesamtintensität der interferierenden Wellen in ein Diagramm auf, erhalten wir folgendes Bild, das die Zusammenhänge noch einmal verdeutlicht:



**Abbildung 1.7.:** links: Intensität  $I$  gegenüber  $r$ , rechts Phasenverschiebung  $\delta$  gegenüber  $r$   
Da aus dem Interferogramm die Intensitätsmaxima abgelesen werden können, lässt sich so auf die Phasendifferenz einer Welle von einer Referenzwelle schließen. Mit Hilfe der ursprünglichen Welle kann dann die Objektwelle rekonstruiert werden.

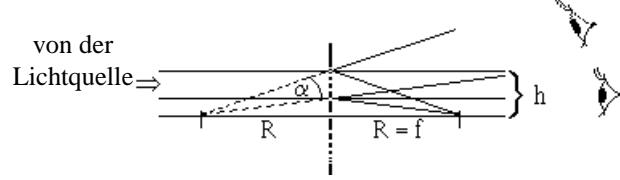
Wir kennen diese Überlegungen auch schon von der Betrachtung der NEWTON-Ringe<sup>5</sup>. Bei der Rekonstruktion des Hologramms mit parallelem, monochromatischem Licht, das zweckmäßigerweise die gleiche Wellenlänge wie das Aufnahmelight besitzen sollte<sup>6</sup>, wird das Licht an der Zonenplatte in zwei Richtungen gebeugt. Die gebeugten Lichtstrahlen "vereinigen" sich dann wieder im ursprünglichen Abstand  $R$  und erzeugen dort den reellen Punkt  $P$ . Ein Betrachter, der hinter dem Hologramm steht, sieht den virtuellen Punkt  $P'$  durch die nach außen gebeugten Strahlen, die die +1. Beugungsordnung bilden. Dieser Punkt entspricht dem bei

<sup>4</sup> AUGUSTIN FRESNEL (1788-1827)

<sup>5</sup> ISAAC NEWTON (1643-1727)

<sup>6</sup> Wir können natürlich auch monochromatisches Licht einer anderen Wellenlänge verwenden, erhalten dann aber aufgrund anderer Beugungswinkel auch eine gegenüber der Originalaufnahme verschobene Rekonstruktion des Punktes entlang der optischen Achse!

der Aufnahme vorhandenem körperlichen Punkt! Der Punkt P wird von der -1. Beugungsordnung erzeugt. Nachteilig wirkt sich dabei aus, daß der Betrachter in die Lichtquelle schauen muß (siehe Abb. 1.8.).



**Abbildung 1.8.: Rekonstruktion beim In-line-Hologramm eines Punktes. Dargestellt ist die Hälfte über der optischen Achse.**

Das Hologramm wirkt also wie eine **Linse!** Der Abstand  $R$  ist demnach die "Brennweite" der "Linse". Im Unterschied zu den bekannten Linsen wird gleichzeitig ein reeller und ein virtueller Punkt erzeugt; d.h. das Hologramm wirkt wie eine Sammel- und eine Zerstreuungslinse in einem. Die "Brennweite" hängt dabei von der Rekonstruktionswellenlänge  $\lambda$  ab:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{g}$$

Mit kleinen Winkeln  $\alpha \ll 1$  gilt dann bei beispielsweise bei Aufnahme mit  $\lambda_1$  und Rekonstruktion mit  $\lambda_2$ :

$$\alpha = \frac{\lambda}{g} = \frac{h}{f} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f_1 \quad (1.3)$$

Daraus ergibt sich aber auch, daß die Rekonstruktion mit *Weißlicht* nicht möglich ist, da wegen des zu großen Wellenlängenintervalls auch das "Brennweitenintervall"  $\Delta f_\lambda$  zu groß wäre, und der Punkt total verschmiert wiedergegeben würde. Neben der beugungsbegrenzten Auflösung zeigt unser Hologramm also ebenso wie auch eine Linse starke chromatische Aberration. Noch ein weiterer typischer Linsenfehler tritt bei unserem Elementarhologramm deutlich beobachtbar auf: Astigmatismus. Verdrehen wir das Hologramm bei der Wiedergabe nämlich leicht, z.B. um seine Hochachse, dann trifft das parallele Laserlicht in der Horizontalebene um den Winkel  $\beta$  zur ursprünglichen Richtung verdreht auf. Dadurch verkürzt sich auch die jeweilige (lokale) Gitterkonstante  $g$  um

$$g' = g \cdot \cos(\beta).$$

Ebenso verkürzen sich die effektiven Einfallshöhen  $h$  der Strahlen um

$$h' = h \cdot \cos(\beta),$$

woraus wir aus

$$f = g \cdot h / \lambda$$

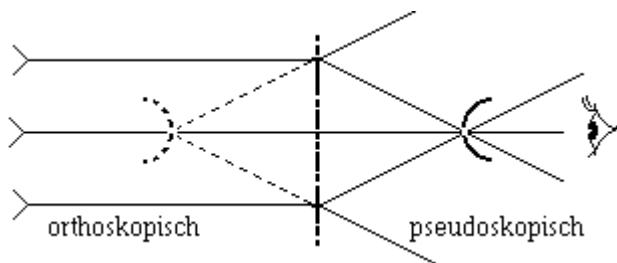
für die horizontale Brennweite  $f_\beta$  erhalten:

$$f_\beta = f_0 \cdot \cos^2(\beta).$$

Dabei ist  $f_0 = R$  nach Abbildung 1.8 die "Brennweite" für zentrierte Beleuchtung und damit der ursprüngliche Abstand bei der Aufnahme, wenn Rekonstruktions- und Aufnahmelicht identisch sind. Wird mit einer nicht ebenen Welle rekonstruiert, verschieben sich die Abstände der Bilder zum Hologramm. Bei Rekonstruktion mit einer divergenten Welle liegt das reelle Bild weiter vom Hologramm entfernt und ist größer, während es bei konvergenter Welle näher am Hologramm liegt und kleiner ist.

Nach demselben Prinzip, das wir uns hier für einen einzelnen Punkt angesehen haben, kann man Holographie natürlich auch für komplexere Objekte machen, da wir uns ein Objekt ja aus (unendlich) vielen Punkten zusammengesetzt denken können. Die Interferenzmuster auf der Platte sind dann zwar nicht mehr in der geschehenen Weise interpretierbar, an den Funktionen ändert das aber nichts!

Es ist nun leicht einzusehen, daß bei Aufnahme und Wiedergabe eines z.B. gekrümmten Objekts sich die Krümmung ändert, je nach dem, ob man die virtuelle und orthoskopische Rekonstruktion am Ort des ursprünglichen Objektes oder das pseudoskopische Bild hinter dem Hologramm sieht. Dabei muß man zum pseudoskopischen Bild allerdings etwas Abstand halten, weil ja die vom reellen Bild weitergehenden, divergenten Strahlen sich im Auge wieder vereinigen müssen. Bei der In-line-Holographie können wir pseudo- und orthoskopisches Bild sogar gleichzeitig sehen, wenn der Abstand zum Hologramm groß genug ist! Andernfalls sehen wir die Rekonstruktion, auf die unser Auge gerade akkommodiert ist. Abbildung 1.9. verdeutlicht diese Zusammenhänge schematisch:



**Abbildung 1.9.:** Beim In-line-Aufbau sind orthoskopisches und pseudoskopisches Bild gleichzeitig vorhanden. Zu beachten ist beim pseudoskopischen Bild die Umkehrung des perspektivischen Fluchtpunktes.

In dieser Skizze kommt die Änderung der Perspektive durch Betrachtung des pseudoskopischen Bildes nicht zum Ausdruck. Beim orthoskopischen Bild liegt der perspektivische Fluchtpunkt auf der optischen Achse, bei Betrachtung des pseudoskopischen Bildes scheint er hinter (!) dem Betrachter zu liegen, d.h. alle perspektivischen Linien, die eigentlich auf einen Fluchtpunkt zulaufen, laufen jetzt divergent auseinander. Dieser irreale Effekt lässt sich leider nur schlecht theoretisch beschreiben, man muß ihn einfach mal gesehen haben.

### Nachteile der Gabor-In-line-Holographie

Drei Nachteile haben wir bereits kennengelernt: Das ungebeugte Licht blendet den Betrachter, nur transparente Objekte können wiedergegeben werden und die holographische Platte zeigt eine ganze Reihe Abbildungsfehler. Auch bei länger ausgedehnten Objekten, mit kleineren und größeren Teilen, kann durch Schattenbildung die holographische Aufzeichnung behindert werden. Vor der Erfindung des Lasers - die In-line-Holographie wurde von GABOR bereits vorher entwickelt - schränkten die geringen Kohärenzlängen des Lichtes die Apertur und damit die Größe der Hologramme stark ein. Da der Gangunterschied zwischen Objekt- und Referenzwelle nach Gleichung (1.2a) mit dem Abstand zur optischen Achse in etwa quadratisch zunimmt<sup>7</sup>, durfte das Hologramm bei den früher üblichen Kohärenzlängen im Millimeterbereich nicht zu ausgedehnt sein. Bei den heutigen Laserkohärenzlängen von mehreren Metern ist das natürlich kaum noch ein Thema. Der Laser hat die Holographie übrigens generell revolutioniert und ihr einen riesigen Aufschwung beschert, da erst durch seine Erfindung viele bereits vorher gemachten Überlegungen praktisch verwirklicht werden konnten. Wir werden uns zu Beginn der Seitenband-Holographie kurz mit dem Laser befassen.

## 2. Seitenband-Holographie

### Laser

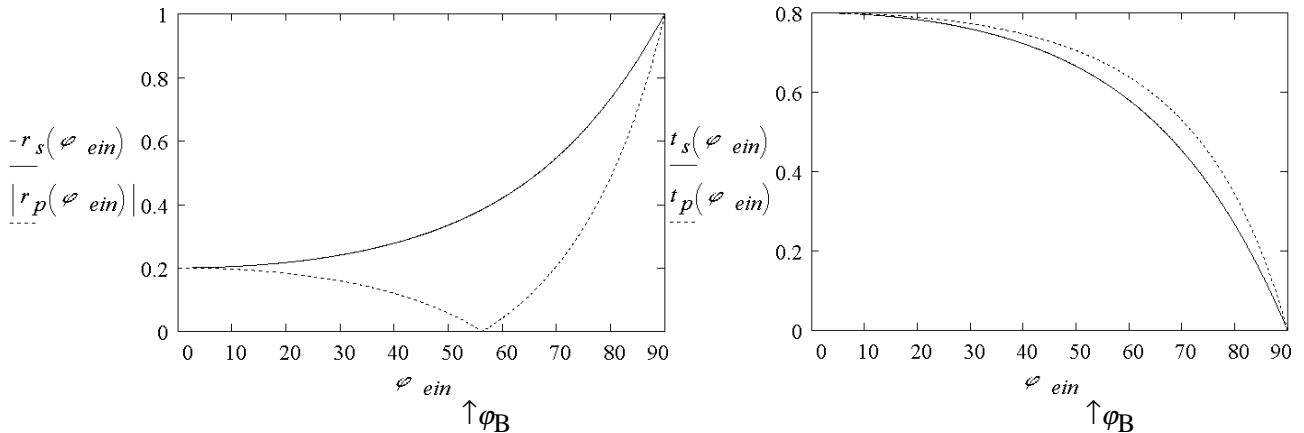
Die Erfindung des Lasers<sup>8</sup> bescherte der Holographie einen enormen Aufschwung. Der Grund dafür sind vor allem die großen Kohärenzlängen im Bereich mehrerer Meter. Für viele holographische Verfahren sind diese Kohärenzlängen unentbehrlich, wie wir bereits im ersten Kapitel, der In-Line-Holographie, gesehen haben. Der Laser hat aber noch andere Vorteile: Er sendet nahezu monochromatisches, linear polarisiertes Licht aus, das ihn als schmales, fast paralleles Bündel verlässt. Den Laser haben wir auch schon in der Physikvorlesung kennengelernt; wir wissen, daß die Kohärenz seines Lichtes durch **induzierte Emission** zu stande kommt.

Aus der Wellenoptik wissen wir, daß eine Welle, die auf ein Medium mit anderer Brechzahl unter dem Winkel  $\alpha$  zum Lot trifft, in Abhängigkeit dieses Winkels für den parallel und den orthogonal zur Einfallsebene<sup>9</sup> stehenden  $\vec{E}$ -Vektor verschiedenes Reflexionsvermögen zeigt. Der Winkel, bei dem es keine Reflexion des parallelen Anteils gibt, nennt man BREWSTER-Winkel  $\varphi_B$ :

<sup>7</sup> Tatsächlich nimmt der Gangunterschied noch viel stärker als nur quadratisch zu. Die quadratische Zunahme entwickeln wir ja aus der Näherung der Kugelwelle durch eine parabelförmige für kleine Beugungswinkel (bzw. Höhen). Wenn wir aber die Randzonen des Hologramms betrachten wollen, dürfen wir diese Näherung nicht mehr anwenden, so daß wir bei einer gegebenen Kohärenzlänge bereits viel früher an die interferometrischen Größenbegrenzungen des Hologramms kommen, als es Gleichung (1.2a) zunächst erwarten läßt.

<sup>8</sup>  Eine sehr ausführliche und verständliche Beschreibung des Lasers befindet sich bei BERGMANN-SCHÄFER: *Lehrbuch der Experimentalphysik*

<sup>9</sup> Die Einfallsebene ist die Ebene, die der einfallende Strahl mit dem Lot auf das Medium aufspannt.

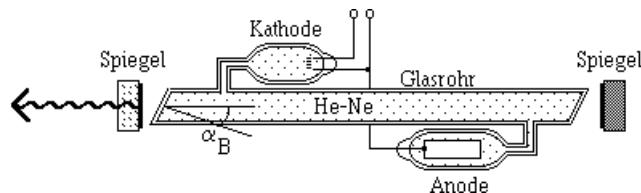


**Abbildung 2.10.:** Betrag des Reflexionsfaktors (links) und des Transmissionsfaktors (rechts) für parallele bzw. senkrechte Polarisation abhängig vom Einfallsinkel (hier für  $n = 1,5$ )

Daraus folgt, daß das in das (dichtere) Medium eintretende Licht einen entsprechend stärkeren parallelen  $\vec{E}$ -Teil besitzt, d.h. das ins das Medium gelangende Licht ist (schwach) linear polarisiert

Diese Vorgänge gelten analog auch für den Eintritt von Licht in ein optisch dünneres Medium; hier sind die Verhältnisse sogar noch deutlicher. Bei den in der Holographie üblicherweise eingesetzten Helium-Neon-Lasern spielt jedoch die Reflexion an optisch dichteren Medien die größere Rolle. Der BREWSTER-Winkel  $\alpha_B$  ist dann bekanntlich der Winkel, bei dem gebrochener und senkrechter Strahl senkrecht aufeinander stehen; die Begründung liefert die Theorie über die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen in materiellen Medien. Für den BREWSTER-Winkel gilt:  $\alpha_B = \tan(n_{rel})$ .

Bei der Herstellung von Lasern macht man sich das Phänomen dieser Polarisierung zu Nutze, indem man die Enden der **Entladungsröhre** so anwinkelt, daß die senkrecht auf die Resonatorspiegel stehenden Strahlen (Abb. 2.11.) unter dem BREWSTER-Winkel auf sie auftreffen. Dadurch können zumindest für eine Schwingungsebene Reflexionen an den Fenstern vermieden werden:



**Abbildung 2.11.:** Schema eines Helium-Neon-Lasers

Abbildung 2.11. zeigt das Schema eines Helium-Neon-Lasers. Die Spiegel sorgen dafür, daß die Strahlung zwischen ihnen durch Hin- und Herreflexion stehende Wellen aufbaut und wieder in das Verstärkersystem, also die Helium-Neon-Gasentladungsröhre, eingekoppelt wird. Die Ausbildung stehender Wellen ist deshalb wichtig, damit die induzierte Emission zu gleichphasigem, d.h. kohärentem Licht führt. Würden sich keine stehenden Wellen ausbilden, würde bei jedem Verstärkungsdurchgang, d.h. bei jedem Durchgang des reflektierten Lichtes eine andere Phase auftreten und das aus dem Spiegel austretende Licht wäre inkohärent. Daraus leiten sich zwei Anforderungen an die Spiegel, die ein FABRY-PEROT-Interferometer, wie wir es bereits aus der *Wellenoptik* kennen, darstellen, ab:

1. Die Spiegel müssen hochreflektierend sein, damit genügend Strahlung zur Verstärkung in den Resonator zurückgelangen kann; üblicherweise haben solche Spiegel einen Reflexionsgrad von nahezu 99%, wobei ein Spiegel etwas weniger stark reflektiert, damit überhaupt Strahlung austritt.
2. Der Abstand  $l$  der Spiegelflächen muß ein ganzes Vielfaches der halben induzierten Wellenlänge sein, damit sich stehende Wellen ausbilden, d.h. es muß gelten:

$$l = m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1a)$$

Daraus ergibt sich für die Frequenz der stehenden Welle:

$$v = m \cdot \frac{c}{2l} \quad (2.1b)$$

Diese Frequenz muß vom Resonator nun auch wirklich verstärkt werden. Vom Laser wird nämlich nur eine ganz bestimmte Bandbreite von Frequenzen verstärkt, alle anderen darüber oder darunter liegenden Frequenzen gehorchen nicht der Selbsterregung sondern "verpuffen" durch Reflexions- und andere Verluste! Die Bandbreite der verstärkbaren Frequenzen können wir aus der *Gigahertzkurve*<sup>10</sup> ablesen:

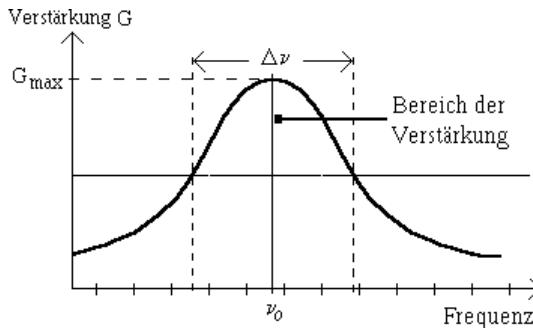


Abbildung 2.12.: Als Verstärkungsbereich wird der Bereich mit  $G(v) = \frac{1}{2} \cdot G_{\max}$  definiert.

$v_0$  ist dabei die Frequenz, die vom Resonator am besten verstärkt wird. Die auf der Frequenzachse eingeteilten Frequenzen stellen diejenigen Frequenzen dar, die sich aus Gleichung 2.1b für einen gegebenen Spiegelabstand  $l$  ergeben. Die Frequenzen, die dabei verstärkt werden können (also die Resonanzzustände), werden auch *Moden* genannt. Ihre Breite<sup>11</sup> hängt vom Reflexionsvermögen der Spiegel ab; je höher der Reflexionsgrad, desto schmäler und höher sind sie. Das Verhältnis zwischen der Breite der eigenresonanzfähigen Frequenzbreite  $\Delta v$  zu Anzahl und Halbwertsbreite  $\Delta v_{\text{mode}}$  der Moden bestimmt die Kohärenzlänge, die spektrale Bandbreite des herausgelassenen Lichtes und die Leistung des Lasers. Da diese Beziehungen äußerst komplex sind<sup>12</sup>, wollen wir uns hier nur merken, daß die Kohärenzlänge mit der Anzahl der Moden sinkt und die spektrale Bandbreite des ausgesandten Laserstrahls sich mit der Anzahl der Moden vergrößert, weshalb man versucht, möglichst nur ein Mode in die Gigahertzkurve zu legen. Dadurch verringert sich bei gleichem Spiegelabstand allerdings auch die Leistung des Lasers. Diese ist proportional zur Spiegellänge  $l$ . Noch schlimmer wird die Geschichte, wenn wir die endliche Ausdehnung der Spiegel betrachten, die zu einer Beugung des Lichtes führt und die Resonatorfunktion erheblich stört. Dieses Problem ist in der Praxis von großer Bedeutung, wir wollen es wegen seiner Komplexität allerdings nicht weiter vertiefen.

Einen Ausweg verschafft uns der Einbau des **Etalons**. Das ist ein zweiter Resonator, der nur einen Mode verstärkt. Wir betreiben dann den Laser im Mehr-Moden-Modus und "blenden" mit Hilfe des zweiten Resonators die unerwünschten Moden aus. Das Ergebnis ist ein brauchbarer Kompromiß zwischen Läserlängen im Bereich einiger Meter, schmaler Laserlichthalbwertsbreite und Leistungen von mehreren Milliwatt.

Farbstofflaser besitzen eine Halbwertsbreite von etwa 100nm, Laser-Dioden von etwa 3...5nm. Bei diesen hängt die Emissionswellenlänge vom Strom und von der Schichttemperatur ab.

## Seitenbandholographie

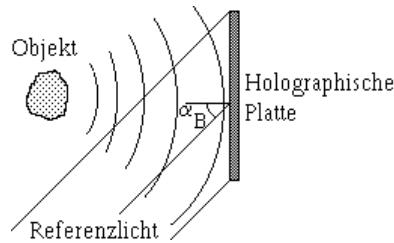
Nach den ausführlichen theoretischen Überlegungen zum Laser, der zweifelsohne für die Holographie wichtigsten Erfindung, wollen wir uns jetzt einem weiteren Verfahren, der Seitenband-Holographie (auch Off-line-Holographie), zuwenden. Der wesentliche Unterschied zur In-line-Holographie besteht in dem Winkel, der zwischen Objekt- und Referenzwelle besteht. Dabei wird die Referenzwelle so auf die holographische Platte

<sup>10</sup> Der Name der Gigahertzkurve leitet sich daraus ab, daß der Frequenzabstand  $\Delta v$  zweier sich gerade noch verstärkender Frequenzen bei den üblichen Lasern im Gigahertzbereich befindet.

<sup>11</sup> Die Moden wurden in Abbildung 2.3 der Übersichtlichkeit halber als Striche angedeutet, in Wirklichkeit besitzen diese Frequenzen natürlich auch eine bestimmte Bandbreite  $\Delta \lambda$ . Die Kohärenzlänge der Strahlung ohne Spiegel wäre mit  $\frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \approx 1000\lambda$  für holographische Zwecke viel zu kurz. Durch den Einsatz der Spiegel wird die Bandbreite erheblich verkleinert und die Kohärenzlänge größer. Der Abstand der Moden ergibt sich aus Gleichung 2.1b mit  $\frac{c}{2 \cdot l}$ .

<sup>12</sup> siehe BERGMANN-SCHÄFER: Lehrbuch der Experimentalphysik,

gesickt, daß sie unter dem BREWSTER-Winkel auftrifft. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß der zur Interferenz benötigte Polarisationsteil der Referenzwelle nicht durch Reflexion an der hinteren Schicht der holographischen Platte die ursprüngliche Interferenz stört. Dieses unerwünschte Phänomen kann natürlich auch mit einer Antihaloschicht unterbunden werden. Gegebenenfalls muß die Objektwelle durch ein Polfilter geschickt werden, um die Auswirkungen von Drehungen der Polarisationsebenen am Objekt zu vermindern. Durch die größeren Winkel werden bei der Seitenband-Holographie größere Anforderungen an das Auflösungsvermögen des Aufnahmematerials gestellt (z.B. Holotest 8E75: ca. 10.000 L/mm). Die grundsätzlichen Verhältnisse bei der Seitenband-Holographie zeigt das folgende Bild:

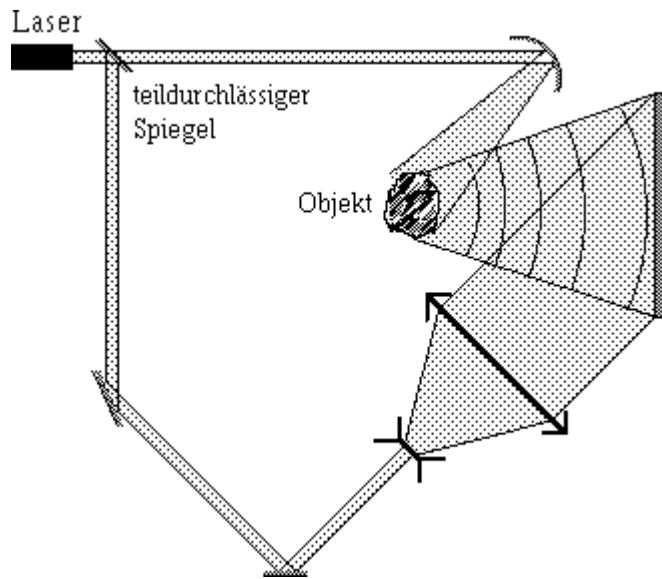


**Abbildung 2.13.: Seitenbandholographie**

Wenn wir kein Objekt in den Strahlengang der Objektwelle stellen, d.h. wenn zwei ebene Wellen auf der holographischen Platte miteinander interferieren, dann erhalten wir den bereits aus der Wellenoptik bekannten Aufbau zur Herstellung harmonischer Gitter mit der Periode  $P$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$ , den die interferierenden Strahlen miteinander einschließen (für die Gitterperiode senkrecht zur Winkelhalbierenden der einfallenden Wellen):

$$P = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha)} \quad (2.2)$$

Holographieren wir dagegen einen Punkt, erhalten wir als Interferenzbild eine Überlagerung eines Gitters mit der FRESNELSchen Zonenplatte, wie wir sie in der In-line-Holographie (Abb. 1.6) kennengelernt haben. Dabei zeigt sich, daß neben dem starken Farblängsfehler, den wir bereits aus der In-line-Technik kennen, auch ein starker Farbquerfehler auftritt. Eine Rekonstruktion des Hologramms mit Weißlicht ist in der Seitenband-Holographie somit noch weniger möglich.

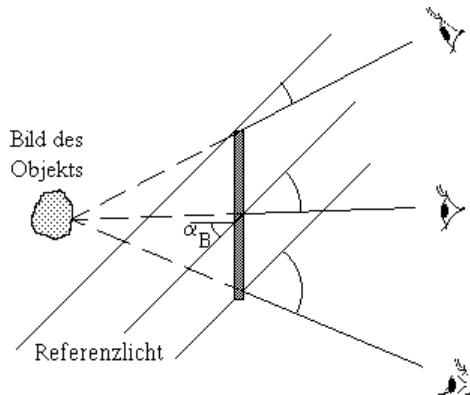


**Abbildung 2.14.: Aufbau bei der Seitenbandholographie**

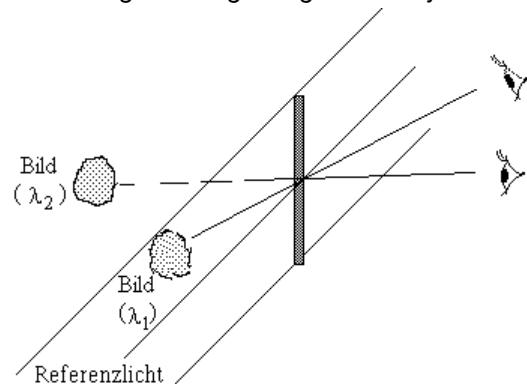
Abbildung 2.14. zeigt schematisch den Aufbau bei der Seitenbandholographie. Dabei sollte das Verhältnis von Objekt- zu Referenzlichtintensität am Ort des Hologramms 1:4 betragen. Mit Hilfe eines *Variablen Strahlenteilers* kann dies eingestellt werden. Die optischen Wege zwischen Referenzlicht und Objektlicht müssen (in etwa) gleich sein:

$$|s_1 - s_2| < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

Die Belichtungszeit und die mechanische Stabilität des Aufbaus müssen so gewählt sein, daß  $\Delta s < \frac{1}{4} \cdot \lambda$ .



**Abbildung 2.15.: Rekonstruktion:** Es wird das virtuelle orthoskopische Bild betrachtet. Das Hologramm macht den Eindruck eines Fensters, durch das das Motiv betrachtet wird. Jeder Ort des Hologrammes ist einer bestimmten Betrachtungsrichtung des ganzen Objektes zugeordnet.



**Abbildung 2.16.: Rekonstruktion:** abhängig von der Wellenlänge des Rekonstruktionslichtes verändern sich Winkel und Abstand des entstehenden Bildes.

Die Rekonstruktion eines Hologramms wird unscharf, wenn

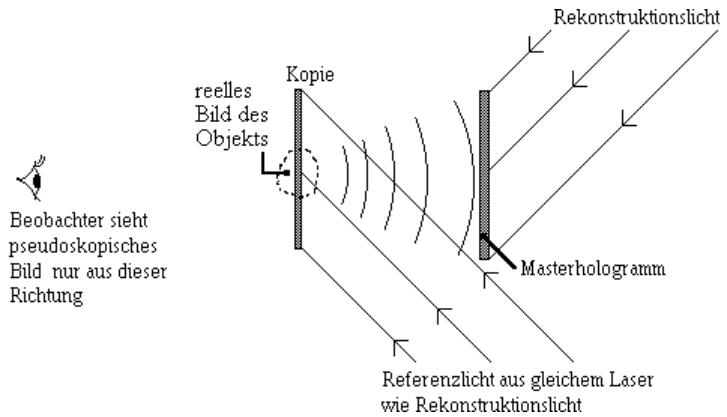
- nicht monochromatisches Licht oder
- keine hinreichend punktförmige, sondern eine ausgedehnte Lichtquelle verwendet wird.

### Herstellung von Gittern durch Kopieren

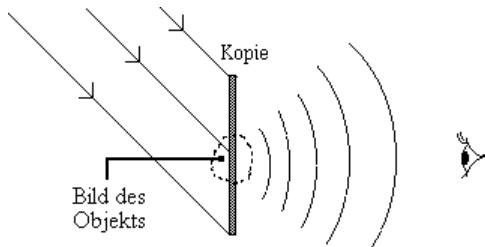
Dieser Abschnitt soll auch als Vorbereitung auf die *Display - Hographie* dienen, bei der wir uns auf die hier gemachten Überlegungen beziehen werden. Auf Gitter wird auch noch später eingegangen.

Wenn wir den in Abbildung 2.13. beschriebenen schematischen Aufbau 13 zur Herstellung eines Hologramms verwenden und das so erhaltene Hologramm kopieren wollen, müssen wir das ursprüngliche Hologramm dazu natürlich auch holographisch wiedergeben, d.h. rekonstruieren. Das ursprüngliche Hologramm nennen wir fortan *Masterhologramm*, das kopierte kurz *Kopie*. An die Rekonstruktion stellt sich aufgrund des Seitenbandaufbaus eine besondere Forderung: Damit das rekonstruierte reelle Objekt wieder genau an der Stelle des ursprünglichen, körperlichen Objektes liegt, muß es mit Laserlicht derselben Wellenlänge so rekonstruiert werden, daß die Richtung des Rekonstruktionslichtes genau entgegen ( $180^\circ$ ) der des ehemaligen Aufnahmelichtes ist. Wie wir aus der (Strahlen-) Optik wissen, können wir nur reelle Objekte photographisch aufzeichnen, so daß es uns hier auch auf das reelle Objekt ankommt. An die Stelle des rekonstruierten Objektes setzen wir nun eine holographische Platte, die aus irgendeinem Winkel mit dem gleichen Laserlicht wie das Masterhologramm beleuchtet wird. Diese Welle ist die Referenzwelle zu der Welle, die aus der Beugung am Masterhologramms stammt und als Objektwelle aufgefaßt werden kann. So erhalten wir eine Kopie. Während der Herstellung ist nur ein pseudoskopisches Bild des Objekts wahrnehmbar, weil man es nur aus der "falschen" Richtung betrachten kann. Dies hat aber auf die Kopie keinen Einfluß.

13 Diese Abbildung reduziert den in Abbildung 2.5 gezeigten schematischen Aufbau auf das für das Verständnis Wesentliche. Wir wollen daher im Folgenden auch nur diese Darstellung verwenden, soweit das Verständnis nicht eine eingehendere Darstellung verlangt. Die Probleme bei der praktischen Realisierung der Aufnahme von Hologrammen sind ein Kapitel für sich und werden im Praktikum angesprochen.



**Abbildung 2.17.: Holographische Kopie:** Trifft das Rekonstruktionslicht genau entgegengesetzt auf wie das ursprüngliche Referenzlicht, so läuft eine Kugelwelle auf den ursprünglichen Objektpunkt zu. Auf das Einzeichnen des virtuellen, orthoskopischen Objektes, das natürlich auch entsteht, wurde hier verzichtet. Es hat für unsere Betrachtungen auch keine Bedeutung.



**Abbildung 2.18.: Rekonstruktion der Kopie:** Die Fensterfunktion des Masters bleibt immer erhalten.

Wenn wir die entwickelte Kopie nun wiederum mit Laserlicht der gleichen Wellenlänge, das in seiner Richtung um 180° gegenüber dem (Kopie-) Referenzlicht gedreht ist, rekonstruieren, kann der Betrachter wieder das eigentliche Objekt, bzw. das virtuelle orthoskopische Bild davon, sehen; genauso als würde er sich das virtuelle Objekt der Masterkopie bei Rekonstruktion aus der "richtigen" Richtung anschauen. Abbildung 2.18. zeigt diese Verhältnisse.

Die **Lage** des Objekts ist dabei natürlich von der Lage der Kopie bei deren Erstellung abhängig. Wollen wir eine Kontaktkopie des Masterhologramms anfertigen, was auf den ersten Blick ja als nicht allzu schwierig erscheint, ergeben sich durch den nicht zu vermeidenden Abstand zwischen Master und Kopie doch erhebliche Probleme. Geringste Abstände, und sei es nur durch die Schichtdicke des holographischen Material machen sich aufgrund der feinen Strukturen auf dem Master und der dadurch entstehenden hohen Beugungswinkel bemerkbar! Wir wollen uns als Beispiel ein Masterhologramm mit einer Gitterstruktur mit der Gitterkonstante  $g$  denken, in der im (kleinen) Abstand  $d$  eine Kopie im "Kontakt" belichtet werden soll. Da ein harmonisches Gitter nur drei Beugungsordnungen besitzt, können wir eine 1:1 Kopie des Masters erreichen, indem wir den Abstand  $d$  so wählen, daß die 0. Beugungsordnung jeweils mit der  $\pm 1$ . Beugungsordnung benachbarter Gitterlinien zusammenfällt (Abbildung. 2.19.). Ein Problem ist die Phasendifferenz der verschiedenen Beugungsordnungen, da ihre (optischen) Wege ja unterschiedlich sind; anders als bei einer "4 f" - Anordnung haben wir hier ja keine Gläser. Für einen Abstand von  $d = \frac{1}{2} g$  ( $\Rightarrow \Delta s = \frac{1}{4} \lambda$ ) erhalten wir beispielsweise die doppelte Gitterfrequenz als auf dem Master; für  $d = g$  ( $\Rightarrow \Delta s = \frac{1}{2} \lambda$ ) bekommen wir eine 1:1 Kopie mit negativer Zuordnung gegenüber dem Master, usw.

Es gibt zudem noch weitere Gründe, die eine Kopie sehr schwierig machen: So führen z.B. bereits kleinste Krümmungen zu Verfälschungen, was sicherlich ohne weiteres zu verstehen ist. Die dadurch in der Regel entstehenden Streifenmuster werden TALBOT - Streifen genannt.

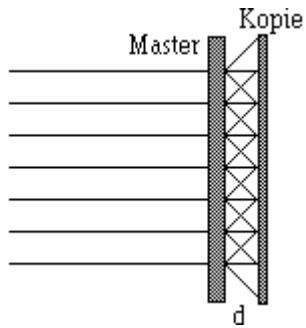


Abbildung 2.19.: Kontaktkopie eines Hologramms

### Holographisches Aufnahmematerial

An holographische Aufnahmematerialien werden hohe Ansprüche gestellt. Das gilt vor allem für das Auflösungsvermögen, das ja bis zu 5.000 Linien pro Millimeter ( $\cong 200 \text{ nm}!$ ) auflösen muß. Ein Material ist der **thermoplastische Film**, der wie folgt aufgebaut ist:



Abbildung 2.20.

Der thermoplastische Film wird vor der Belichtung elektrostatisch aufgeladen (2.21a) und während der Belichtung durch Photonen "kurzgeschlossen" (2.21b). Die Belichtung baut also ein Ladungsbild auf, das durch Wärmebehandlung (2.21c) in ein Oberflächenrelief umgewandelt wird, indem der thermoplastische Film an den belichteten Stellen abgetragen wird.

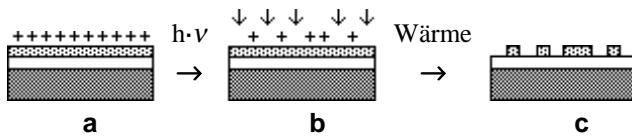


Abbildung 2.21.

Der große Vorteil dieser Methode liegt darin, daß die ganze "Entwicklung" ohne Naßchemie abläuft und an einem Ort stattfinden kann. Letzteres ist vor allem in der Meßtechnik und überall, wo es "schnell" gehen muß, von Interesse. Da das Auflösungsvermögen des thermoplastischen Films bei ca.  $900 \text{ L/mm}$  liegt, ist sein Einsatz in der Seitenband-Holographie beschränkt; in der In-line-Holographie wird er gar nicht eingesetzt.

Die zweite Möglichkeit bilden die klassischen **Silberhalogenidemulsionen**, die als hochauflösende Schwarzweißplatten immerhin bis zu 5.000  $\text{L/mm}$  schaffen! Der Nachteil hierbei ist die gegenüber herkömmlichen Silberhalogenidemulsionen stark geschwächte Empfindlichkeit.

**Dichromat-Gelatine** ist dem Auflösungsvermögen nach das holographische Aufnahmematerial schlechthin. Nachteilig wirkt sich auch hier die niedrige Allgemeinempfindlichkeit und vor allem die spektrale Empfindlichkeit aus, da dieses Material blauempfindlich ist und viele Laser mit Rotlicht arbeiten. Dichromat-Gelatine wird deshalb fast ausschließlich bei starken Argon-Lasern mit mehr als 1W Leistung eingesetzt. Auch ihre Wasserempfindlichkeit und die komplizierte Verarbeitung schreckt vor ihrem Einsatz in der Holographie ab (Entwicklung in warmem Wasser, Trocknen mit Isopropanolbädern verschiedener Konzentration, Schlußbad mit heißem Isopropanol, insgesamt 18 Verfahrensschritte). In den nicht gehärteten Stellen können Risse entstehen, Lufteinschlüsse ergeben eine starke Brechungindexmodulation, so daß die Ergebnisse schlecht reproduzierbar sind.

Als letzte Möglichkeit holographischen Aufnahmematerials seien an dieser Stelle noch **Photopolymere** erwähnt. Ihr Prinzip beruht darauf, daß monomere Substanzen durch Lichteinfluß polymerisiert und dadurch unlöslicher werden. Die verbleibenden Monomere können dann ausgewaschen werden. Mit Photopolymeren

wird allerdings z. Zt. noch viel experimentiert, so daß hier noch keine Serienreife erreicht ist. Ein Verfahren mit Sensibilisierung durch Luftfeuchtigkeit konnte sich gar nicht durchsetzen. Erprobt wird noch ein sehr elegantes Verfahren, bei dem nach der Belichtung die verbliebenen Monomere in Richtung der Polymere diffundieren, so daß anschließend zum "Entwickeln" nur noch diffus nachbelichtet werden muß. Der gemeinsame Nachteil ist, daß sie nur für blaues und grünes Licht empfindlich sind und hohe Lichtdosen ( $>1\text{mJ/cm}^2$ ) erfordern. Ihr Einsatz in der Mikrolithographie zeigt aber, daß sich dieses Material auch für die Holographie gut eignet.

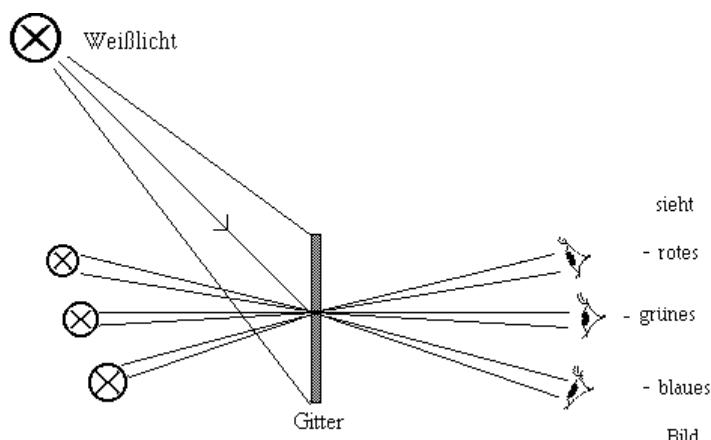
### 3. Display - Holographie

Die Display - Holographie versucht holographische Effekte durch Weißlichtrekonstruktion möglich zu machen. Dazu muß das "Hologramm", das rekonstruiert werden soll, nach den bisherigen Überlegungen zwei Bedingungen erfüllen:

1. Es muß eine spektrale Filterwirkung haben, d. h. es muß aus dem weißen Beleuchtungslicht ein schmales Spektralband zur Rekonstruktion herausfiltern, da wir ja nicht mit Weißlicht rekonstruieren können.
2. Es muß wirklich ein holographisches Bild entstehen, daß heißt die Perspektive muß sich in Abhängigkeit des Betrachtungsortes wirklich ändern; ein wesentlicher Unterschied zu den üblichen 3 D - Effekten, die nur die Stereoskopie des visuellen Systems ausnutzen. Das Bild einer holographischen Rekonstruktion dagegen ist ja wirklich "räumlich" vorhanden.

Diese zunächst miteinander unvereinbar erscheinenden Voraussetzungen an unser "Weißlicht-Hologramm" können wir auch nur durch Kompromisse unter einen Hut bringen. So werden wir Einbußen in der Schärfe, der Perspektive und der Räumlichkeit des rekonstruierten Objekts in Kauf nehmen müssen.

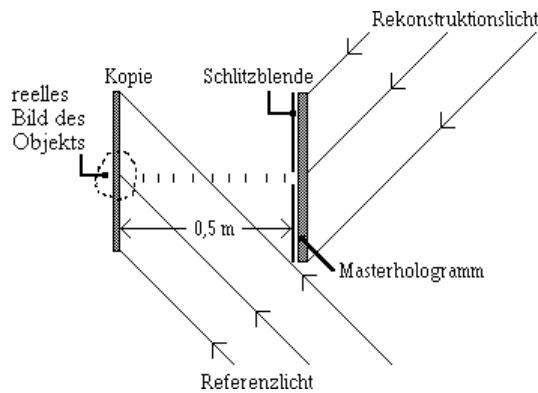
#### 3.1. Regenbogenrekonstruktion



**Abbildung 3.22.** Zerlegung der Farben mit einem Gitter

Die von BENTON entwickelte Regenbogenholographie verwendet zur Aufnahme dieselbe Anordnung, wie wir sie bereits bei der Herstellung von Gittern im letzten Kapitel kennengelernt haben. Es wird also mit einem Seitenbandaufbau zunächst ein Masterhologramm des Objekts aufgenommen, und dieses unter den bekannten Bedingungen rekonstruiert und kopiert. Die Kopie wird dabei jedoch nicht im Kontakt mit dem Master gemacht, sondern in das rekonstruierte Objekt (reell, pseudoskopisch) gebracht. Damit sind die grundlegenden Probleme der Weißlichtrekonstruktion jedoch noch nicht gelöst. Erst durch den Einsatz eines schmalen **Schlitzes** (ca. 7mm), der horizontal vor das Masterhologramm gesetzt wird, können wir diese Probleme umgehen. Der Trick beruht darauf, daß durch diese Blende die Strahlen des Masterhologramms, die das Objekt rekonstruieren, auf ein schmales Band reduziert werden. Wir haben somit also nur noch ein "halbes" Hologramm, d.h. wir haben nur noch in horizontale Richtung eine holographische Wirkung, da auch nur in diese Richtung alle Strahlen des Masters zur Rekonstruktion beitragen. Der Beitrag aller Strahlen ist

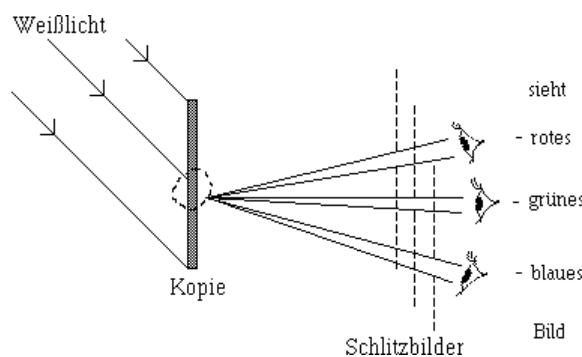
aber eine Voraussetzung für eine echte Rekonstruktion<sup>14</sup>. In der Praxis verwendet man anstelle der Schlitzblende auch einfach ein entsprechend schmales Masterhologramm. Abbildung 3.23. zeigt den Aufbau bei der Aufnahme der Kopie; sie entspricht im Wesentlichen Abbildung 2.17. Die Schlitzbreite der Blende oder die Höhe des Masters sollte dabei dem Pupillendurchmesser des Auges entsprechen; d.h. sie sind in der Praxis ca. 7 mm groß.



**Abbildung 3.23.:** Das pseudoskopische, reelle Bild entsteht an dem Ort des ursprünglichen Objektes.

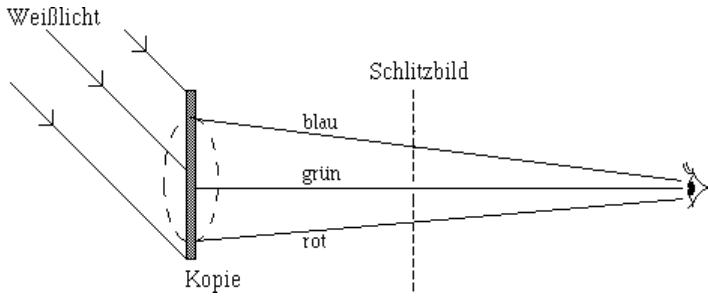
Bei der Rekonstruktion einer so belichteten Kopie wird natürlich nach den bekannten Regeln auch der Schlitz wieder abgebildet, und zwar wegen der starken chromatischen Aberration in Abhängigkeit von der Wellenlänge in verschiedenen Entfernungen und verschiedenen Höhen; entsprechend Farblängs- und Farbquerfehler. Bei der von uns angestrebten Weißlichtrekonstruktion werden also (unendlich) viele Schlitze abgebildet, durch die der Betrachter das Objekt sehen kann. Die Farbe, in der er das Objekt sieht, ist aufgrund des Farbquerfehlers von der Betrachtungshöhe abhängig; schaut er durch den "blauen" Schlitz, sieht er das Objekt blau, etc. Die Übergänge von Farbe zu Farbe sind bei homogenem Licht fließend. Die Perspektive ändert sich dabei natürlich **nicht**, da wir ja ein so kleines Band des Masterhologramms bei der Kopie verwendet haben, daß quasi nur eine Perspektive in der Kopie "gespeichert" wurde. Durch die unterschiedliche Beugung für verschiedene Wellenlängen ändert sich neben der Farbe nur die Größe des Bildes etwas; d.h. das blaue Bild erscheint etwas kleiner als das rote. Ein holographischer Effekt stellt sich aber doch ein, und zwar in vertikaler Richtung, denn dort haben wir das Masterhologramm ja in seiner vollen Breite ausgenutzt. Die Abbildung 3.24. zeigt die Verhältnisse bei der Weißlichtrekonstruktion schematisch für drei Wellenlängen.

Diese Technik, von der wir uns nun auch denken können, woher sie ihren Namen hat, macht also davon Gebrauch, daß eine Person eher horizontal als vertikal ihren Standpunkt und damit ihre Perspektive ändert. Man kann dies noch durch die Verwendung breitformatiger Hologramme unterstützen. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist die große Helligkeit.



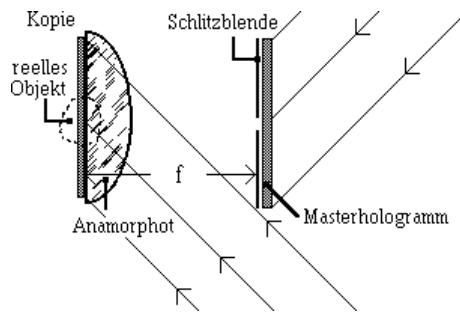
**Abbildung 3.24.:** Weißlichtrekonstruktion der Schlitzbilde eines BENTON-Hologramms, exemplarisch dargestellt für drei Farben. Bei Rekonstruktion mit Weißlicht entsteht an den verschiedenen Spaltpositionen jeweils ein Bild unterschiedlicher Farbe.

<sup>14</sup> Es sei an dieser Stelle nochmals an die Einleitung erinnert, wo wir uns mit den grundsätzlichen Voraussetzungen der Holographie beschäftigt hatten (→ Stichwort Fensterwirkung).



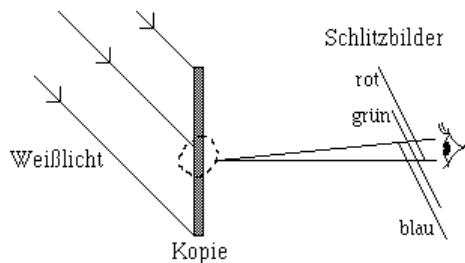
**Abbildung 3.25.:** Das Auge muß den Abstand haben, den bei der Aufnahme der Spalt hatte. Ein größerer Betrachtungsabstand zeigt das Objekt regenbogenfarbig.

Die Regenbogenerscheinung, d.h. die Tatsache, daß das Bild bei Weißlichtrekonstruktion in allen möglichen Farben erscheint, können wir durch einen Trick umgehen: Bei der Rekonstruktion des Masters setzen wir auf die Kopie einfach eine große **Zylinderlinse** (Anamorphot), und zwar so, daß die wirksame Brechrichtung vertikal ist (wenn die Schlitzblende vor dem Masterhologramm horizontal angeordnet ist). Abbildung 3.26. zeigt den schematischen Aufbau einer solchen Aufnahme. Das Master befindet sich dann im Brennpunkt des Anamorphoten, so daß der Schlitz in's Unendliche abgebildet wird. Während sich die für die holographische Wirkung wichtige horizontale Abbildung bis auf eine geringe Schnittweitenverkürzung gegenüber dem oben besprochenen Verfahren also nicht verändert, wird der Schlitz bei der Rekonstruktion, die natürlich ohne Linse stattfindet, entsprechend der Aufnahme unendlich entfernt abgebildet, und zwar für jede Wellenlänge - es wird in vertikaler Richtung kein Licht gebrochen. Dadurch bilden wir also einen Schlitz ab, der so groß ist, wie das bei der Rekonstruktion ausgeleuchtete Feld. Die Farbe, mit der wir das Objekt durch dieses große Fenster sehen, ist also ein Gemisch aus allen Wellenlängen, da ja alle Schlitzbilder übereinander liegen. In der Praxis bedeutet das, daß wir das Objekt in der Farbe des Rekonstruktionslichtes sehen.



**Abbildung 3.26.:** Durch den Anamorphoten kann der Regenbogeneffekt vermieden werden.

Auch eine weiße Rekonstruktion des Objekts ist möglich, allerdings nur mit erheblichem Aufwand. Dabei wird das Objekt mit drei gleichen Lasern aus verschiedenen Richtungen holographiert, wobei jeder Laser genau die Richtung haben muß, daß die entstehenden Gitterkonstanten folgende Eigenschaften erfüllen müssen: Bei der Weißlichtrekonstruktion entstehen wieder die Schlitzbilder, die wir aus Abbildung 3.24 kennen, wobei alle Farben von Rot bis Blau entsprechend der jeweiligen Beugung auftreten. Die drei Gitter müssen also genau solche Beugungen liefern, daß der rote Bereich des ersten mit dem grünen Bereich des zweiten und dem blauen Bereich des dritten Gitters örtlich zusammenfallen. Durch additive Farbmischung führt die Rekonstruktion dann an einem bestimmten Ort zu einem mehr oder weniger weißen Objektbild.



**Abbildung 3.27.:** Echtfarbenhologramm durch dreifarbiges Belichtung

Anwendung findet die Regenbogenholographie z.B. in der Herstellung fälschungssicherer Zeichen auf Scheckkarten o.ä.

### Herstellung von Prägehologrammen

Um holographische Aufnahmen (nach BENTON) in der Massenproduktion zu vervielfältigen, muß nicht unbedingt jedesmal eine Kopie des Masters hergestellt werden. Es reicht vielmehr, das Master einmal auf einen **Photoresist** aufzubelichten, der nach der Entwicklung ein Oberflächenreliefbild in Abhängigkeit von der Belichtung besitzt (Abb. 3.28b). Dieses Reliefbild wird mit Silberdampf (Schichtdicke ca. 50nm) überzogen und damit elektrisch leitend gemacht (Abb. 3.28c), um in einem Galvanisierungsbad mit einer relativ dicken Nickelschicht (100 - 200µm) überzogen werden zu können (Abb. 3.28d). Anschließend wird der Nickelbezug vom Resist getrennt, wodurch man einen **Nickelstempel** erhält, der alle Informationen über das Hologramm als Oberflächenrelief enthält. Mit diesem Stempel können dann in Serienproduktion Kunststoffe heiß geprägt werden (Abb. 3.28f), die dann die Weißlichthologramme darstellen.

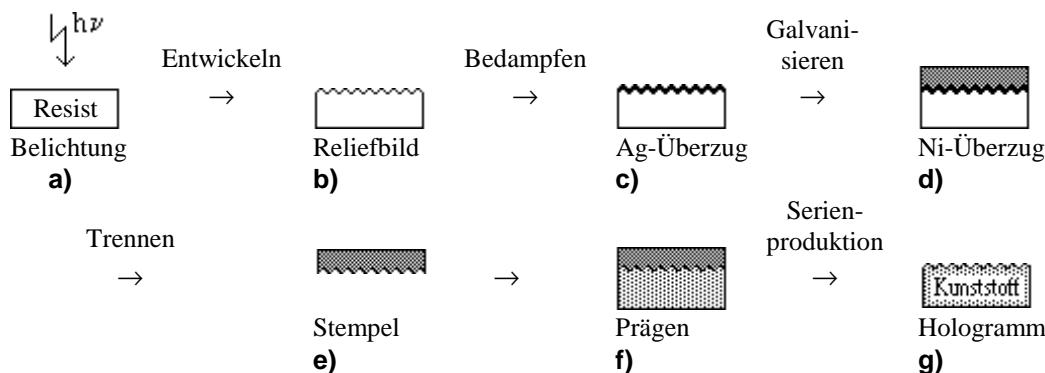


Abbildung 3.28.: Hologramm-Vervielfältigung durch Prägung.

### Multiplex - Holographie

Bei dieser Abwandlung der Regenbogenholographie können bewegte Objekte oder Rundumsichten aufgenommen werden. Dazu wird zunächst ein Objekt mit einer Filmkamera gefilmt, wobei das Objekt durch einen Drehteller bewegt wird (Rundumansicht), oder sich selbst bewegt (Abbildung 3.29.).

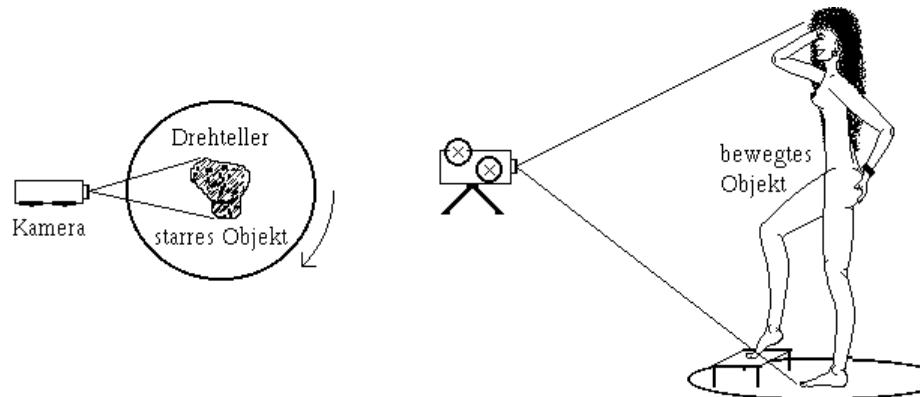


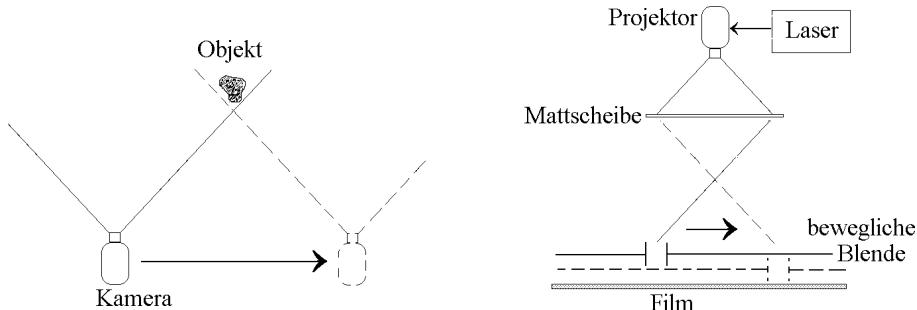
Abbildung 3.29.

Bei der Wiedergabe muß ein Filmprojektor verwendet werden, der mit Laserlicht betrieben werden kann, Einzelbildschaltung und einen guten Bildstand besitzt. Mit ihm werden die Einzelbilder auf eine Mattscheibe projiziert. Das Mattscheibenbild ist dann das "räumliche" Objekt, das nach den bekannten Regeln der Regenbogenholographie aufgenommen werden kann. Üblicherweise wird jetzt jedoch anstelle eines horizontalen ein vertikaler Schlitz verwendet, so daß sich der gesamte Film (bis zu 360 Einzelbilder) nebeneinander auf dem Hologramm befindet. Bei Rundumaufnahmen ändert sich die Perspektive in horizontaler Richtung, da das Auge durch zwei verschiedene "Fenster" zwei verschiedene Einzelbilder auf dem Hologramm sieht. In vertikaler Richtung verändert sich die Perspektive nicht, da bei der Stereoaufnahme ja nur eine Perspektive (pro Bild) aufgenommen werden kann, und sich der Drehteller nur horizontal dreht. Nur den üblichen 3D-Effekt haben wir bei der Filmaufnahme eines bewegten Objekts. Der Grundgedanke ist hier der, daß wir die

Bewegung dann nachvollziehen können, wenn wir uns horizontal am "Hologramm" vorbeibewegen und dieser Effekt dreidimensional wirkt. Mit Holographie im ursprünglichen Sinne hat das allerdings nur noch wenig zu tun.

## Stereogramme

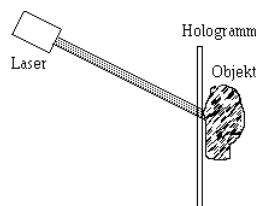
Ähnlich wie die Multiplex-Holographie funktionieren Stereogramme, die von BENTON entwickelt wurden. Auch hier werden Objekte mit herkömmlichen Filmkameras aufgenommen und anschließend nebeneinander auf ein Masterhologramm kopiert. Die Informationen über die Perspektive liegt dann wieder in den bis zu 150 Einzelbildern. Der große Vorteil gegenüber der "normalen" Holographie liegt darin, daß Objekte überall einfach aufgenommen werden können und die schwierigen, mit vielen Einschränkungen verbundenen Bedingungen für Hologramme umgangen werden. Der Film kann dann anschließend in aller Ruhe im Labor holographiert werden. Auch Vergrößerungen und Verkleinerungen sind hier möglich. Denkbar ist auch, daß die Hilfsbilder nicht photographisch aufgenommen, sondern von einem Rechner generiert werden und dann ein (mit einem Laser beleuchteter) LCD-Monitor holographisch aufgenommen wird.



**Abbildung 3.30.: Stereogramme: links Aufnahme der Hilfsbilder, rechts Aufnahme des Hologrammes.**  
Der Projektor projiziert das Objekt paßgenau auf die Mattscheibe, sodaß es von Aufnahme zu Aufnahme über die Mattscheibe wandert und verschiedene Blickwinkel zeigt. Die Einzelhologramme der Einzelbilder werden unter dem gleichen Winkel aufgenommen, wie das Objekt von der Kamera gesehen wurde.

## 3.2. Lippmann - Bragg - Technik

Bei der LIPPmann - BRAGG - Holographie, die auch nach ihrem Erfinder DENISYUK benannt wird, nutzen wir den Dichromatismus aus, der durch stehende Wellen erzeugt wird. Wenn wir uns den in Abbildung 3.31. schematisch angedeuteten Aufbau anschauen und eine holographische Emulsion ohne Antihaloschicht verwenden, dann läuft die am Objekt reflektierte Welle der Referenzwelle entgegen, was zu stehenden Wellen führt<sup>15</sup>.



**Abbildung 3.31.: Aufbau für die LIPPMANN-BRAGG-Holographie**

Zur Erklärung der Vorgänge wollen wir uns zunächst einen idealen Spiegel als Objekt vorstellen. Wir haben dann die Situation der Farbphotographie nach LIPPmann, die wir bereits aus der Optik kennen. Die sich ausbildenden stehenden Wellen sorgen für **Intensitätslamellen** mit einem Abstand von  $\frac{\lambda}{2n}$ , wobei  $n$  die Brechzahl der Emulsion ist<sup>16</sup>. Das so erhaltene Bild wird dann wie üblich entwickelt, **nicht** fixiert, dafür aber **gebleicht**. Dadurch erhalten wir Schichten mit und ohne Silberbromid; da wo sich die "Bäuche" der stehenden

<sup>15</sup> Da ein Volumengitter entsteht, ist die Winkelung des Hologramms bei der Aufnahme eigentlich beliebig. Ist die Platte aber bei der Aufnahme schräggestellt, kann der Betrachter allerdings bei der Rekonstruktion senkrecht auf die Platte schauen, während das Rekonstruktionslicht in der ursprünglichen Winkellage und damit schräg auf das Hologramm fällt.

<sup>16</sup> Daraus ergeben sich hohe Anforderungen an das Auflösungsvermögen der Emulsion. Verwenden wir beispielsweise einen Argonlaser ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ) bei einer Emulsionsbrechzahl von  $n = 1,5$ , ergibt sich ein notwendiges Auflösungsvermögen von rund  $5.000 \text{ L/mm}^2$ !

den Welle befanden, hat unsere Schicht kein Silberbromid mehr. Wir nutzen hier die hohe Brechzahl von Silberbromid aus, sodaß wir ein harmonisches Phasengitter hergestellen, da die Brechzahl ja mit der Silberbromidkonzentration steigt. Wenn wir diese Schicht zur Rekonstruktion wieder mit Licht bestrahlen, findet an den äquidistanten Schichten Vielstrahlinterferenz statt. Die Gesamtamplitude  $A_g$  der Interferenz ergibt sich dann aus der Summe der eingestrahlten Amplitude  $\hat{A}_0$  multipliziert mit den entsprechenden Reflexionsgraden  $r^m$  der Schichten.  $m$  zeigt dabei an, an wievielen Stellen die entsprechende Teilwelle reflektiert wurde. Die durch Absorption zusätzlich eintretende Schwächung der Amplituden wollen wir hier einmal vernachlässigen. Zusätzlich tritt natürlich eine Phasenverschiebung  $\varphi_0$  auf, da die Strahlen durch die Reflexionen ja unterschiedliche Wege durchlaufen. Wir können für die Gesamtamplitude also schreiben:

$$A_g = \hat{A}_0 + \hat{A}_0 \cdot r \cdot e^{-i\varphi_0} + \hat{A}_0 \cdot r^2 \cdot e^{-i2\varphi_0} + \hat{A}_0 \cdot r^3 \cdot e^{-i3\varphi_0} + \dots + \hat{A}_0 \cdot r^m \cdot e^{-im\varphi_0} \quad (3.1)$$

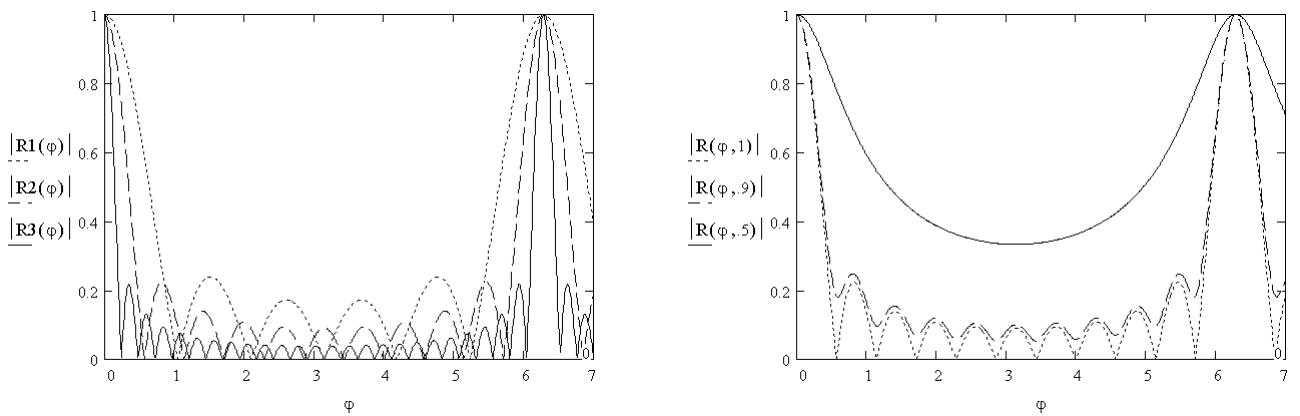
Die Anzahl der Glieder (= Anzahl der interferierenden Wellen) hängt dabei von der Anzahl der Schichten, d.h. der Dicke der Emulsion ab. Wenn wir davon ausgehen, daß diese Anzahl sehr groß ist, können wir Gleichung 3.1 als geometrische Reihe auffassen, deren Summenwert sich folgendermaßen ergibt 17:

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{\hat{A}_0}{1 - r e^{-i\varphi_0}} \quad \text{mit} \quad \sum_{a=1}^{\infty} q^a = \frac{1}{1-q} \\ \Rightarrow I_g \sim A_g^2 &= A_g \cdot A_g^* = \frac{\hat{A}_0}{1 - r e^{-i\varphi_0}} \cdot \frac{\hat{A}_0}{1 - r e^{+i\varphi_0}} = \frac{\hat{A}_0^2}{1 + r^2 - r e^{-i\varphi_0} - r e^{+i\varphi_0}} \\ &= \frac{\hat{A}_0^2}{1 + r^2 - r \cdot 2 \cos(\varphi_0)} \end{aligned}$$

Für den einfachsten Fall  $r = 1$  folgt daraus

$$I_g = \frac{I_0}{2 - 2 \cdot \cos(\varphi_0)} \quad (3.2)$$

Wie wir aus der Optik bereits wissen, hängt die Schärfe der Vielstrahlinterferenz von der Anzahl der miteinander interferierenden Strahlen bei möglichst gleicher Amplitude ab:

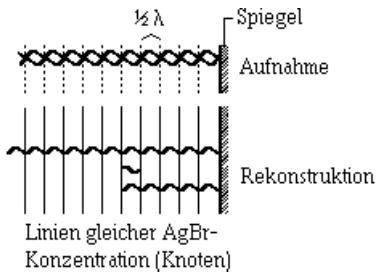


**Abbildung 3.31.: Vielstrahlinterferenz**

links: für 5; 10 bzw. 25 Reflexionen ( $r = 1$ ), rechts: Für Reflexionsgrad  $r = 1; r = 0,9; r = 0,5$

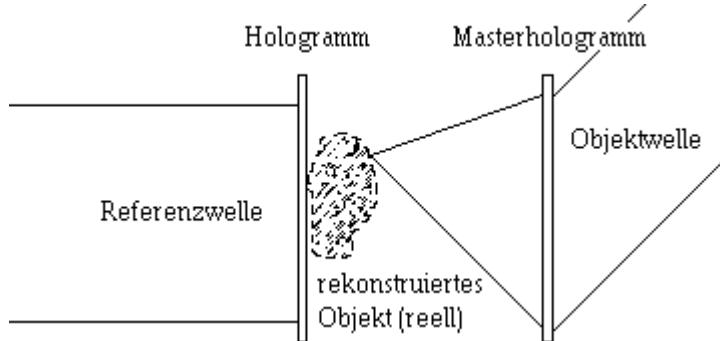
Wenn wir unsere LIPPMANN - Schicht mit weißem Licht beleuchten, wird also, bei genügend starker Schichtdicke, gerade die Wellenlänge durch konstruktive Interferenz verstärkt, die der Aufnahmewellenlänge entspricht, da gerade bei dieser Wellenlänge die Phasenverschiebung  $\lambda$  ist. Der Grund dafür liegt darin, daß die Welle reflektiert wird und damit zweifach die halbe Wellenlänge, was ja der Abstand der Knoten und Bäuche und damit der Schichten ist, durchläuft. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.32. schematisch für eine Welle dargestellt, wobei bei der Rekonstruktion der Übersichtlichkeit halber rücklaufende und reflektierte Welle gegenüber der einfallenden Welle versetzt gezeichnet wurden.

17 Zur mathematisch korrekten Herleitung der Vielstrahlinterferenz siehe auch BERGMANN-SCHÄFER: Lehrbuch der Experimentalphysik,



**Abbildung 3.32.:** Entstehung stehender Wellen bei der Aufnahme und konstruktive Vielstrahlinterferenz der Aufnahmewellenlänge bei der Rekonstruktion. Die senkrechten Linien stellen die Orte gleicher Silberbromidkonzentration dar, hier die Knoten der stehenden Wellen bei der Aufnahme.

Probleme bereiten die mögliche Schichtquellung während der Verarbeitung, weshalb die Gelatine gehärtet werden sollte, und vor allem die **Schrumpfungen** der Schichten beim Bleichen (Hologramme) oder Fixieren (LIPPmannsche Farbphotographie)<sup>18</sup>. Diese führen zu einer Wellenlängenverschiebung, d.h. wenn eine Schrumpfung der Schicht stattgefunden hat, interferiert eine kürzere Wellenlänge konstruktiv. Dieser Effekt kann natürlich auch positiv ausgenutzt werden: Nehmen wir ein Hologramm mit einem Rubin-Laser (rote Wellenlänge 694 nm) auf, wird es nach Schrumpfung grün wiedergegeben, dafür ist das menschliche Auge aber wesentlich empfindlicher. Bei der Holographie verwenden wir statt eines Spiegels natürlich ein Objekt, das spiegelt; da dieses allerdings kaum ideal spiegelnd ist, sinkt der Kontrast unseres Hologramms erheblich, denn dieser ist ja von der "Qualität" der stehenden Welle abhängig. Abhilfe schafft der alte Trick, statt des Objektes ein Masterhologramm des Objektes zu verwenden, das von hinten mit demselben Laserlicht wie die Kopie beleuchtet wird.



**Abbildung 3.33.**

Bei der Rekonstruktion hängt die Helligkeitsempfindung natürlich auch von der spektralen Zusammensetzung der Rekonstruktionslampe ab, die Hauptwellenlänge des Hologramms bei der Rekonstruktion sollte auch mit einem entsprechend hohen Anteil in der Lampenstrahlung vorhanden sein. Halogenlampen haben sich bei der Rekonstruktion der meistens mit roten Lasern aufgenommenen Hologramme am geeignetsten erwiesen.

### Beugungseffizienz - Volumengitter - BRAGG-Effekt

Bei nach LIPPMANN hergestellten Amplitudengittern ergibt sich folgendes Problem: Je dicker die Schicht ist, desto schwächer wird die Helligkeit des Hologramms. Bei dünnen Gittern dagegen nimmt die Unschärfe zu, da ja bekanntlich weniger Strahlen miteinander interferieren. Wir würden eine schärfere Abbildung also mit Helligkeitseinbußen bezahlen. Um aus diesem Dilemma zu kommen, werden *Volumengitter*, das sind dicke Phasengitter, eingesetzt. Zunächst wollen wir uns jedoch noch einmal die Verhältnisse an Amplitudengittern verdeutlichen: Die Amplitudentransmissionsfunktion eines (Cosinus-) Gitters mit der Gitterkonstante  $g$  lautet ja allgemein:

<sup>18</sup> Wir haben zu Beginn des Abschnittes gesagt, daß wir anstelle der Fixage nur bleichen, um ein Phasengitter herzustellen. Die Farbphotographie nach LIPPMANN funktioniert natürlich auch mit Bildsilber in der Schicht, d.h. wir besitzen ein Amplitudengitter, an dessen Schichten das Licht reflektiert wird. Der Kontrast des Phasengitters ist allerdings wesentlich besser, weil das Licht nicht so stark geschwächt wird. Wir werden etwas später noch auf die Einzelheiten eingehen.

$$T_A(x) = a + b \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{g}x\right) \quad \text{mit } a + b < 1 \text{ und } a > b \quad (3.3)$$

Die FOURIER-Transformierte hierzu, die ja auch die Beugungsfigur beschreibt, ist bekanntlich 19

$$\mathcal{F}\{T_A(x)\} = a \cdot \delta(u) + \frac{b}{2} \left( \delta\left(u - \frac{\lambda \cdot f}{g}\right) + \delta\left(u + \frac{\lambda \cdot f}{g}\right) \right) \quad (3.4)$$

Wir erhalten somit die bekannten drei Beugungsrichtungen (Bei ideal harmonischen Transmissionsgittern sind nur drei Beugungsordnungen vorhanden!). Da uns die Helligkeit des Hologramms interessiert und sich diese durch die Helligkeit der ersten Beugungsordnung im Verhältnis zur eingestrahlten Helligkeit ergibt 20, definieren wir als *Beugungswirkungsgrad* oder *Beugungseffizienz*:

$$\eta = \frac{(\frac{1}{2} \cdot b)^2}{(a+b)^2} \quad (3.5)$$

Da die Amplitudentransmissionsfunktion  $T_A$  nur Werte aus dem Intervall [0;1] annehmen kann, erhalten wir für die maximale Beugungseffizienz mit  $a = b = \frac{1}{2}$ :  $\eta_{\max} \approx 0,06 = 6\%$ .

Die Effizienz von dünnen Phasengittern ist da schon wesentlich größer. Ein Phasengitter erhalten wir, wenn wir statt der Fixage unser LIPPMANN - Hologramm (mit sehr dünner Schicht) bleichen. Beschrieben wird ein dünnes Phasengitter durch

$$\begin{aligned} T_{Ph}(x) &= e^{i\varphi_0} \cos\left(\frac{2\pi}{g}x\right) \quad \text{mit } \varphi_0 = \text{Amplitude der Phasenänderung} \quad (3.6) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\varphi_0) \cdot e^{i \cdot m \cdot \frac{2\pi}{g} x} \\ &\quad \text{mit} \quad i^m = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } m \text{ gerade} \\ \pm i & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases} \\ &\quad \text{und} \quad e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \quad \text{folgt schließlich 21:} \\ &= J_0(\varphi_0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\varphi_0) \cdot \cos\left(2m \frac{2\pi}{g} x\right) + 2i \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\varphi_0) \cdot \cos\left[\left(2m+1\right) \frac{2\pi}{g} x\right] \end{aligned}$$

Dabei sind  $J_n$  die BESSEL-Funktionen  $n$ -ter Ordnung 22. Das 1. Maximum der BESSEL-Funktion erster Ord-

---


$$\begin{aligned} 19 \quad T_A(x) &= a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left( e^{i \cdot \frac{2\pi}{g} x} + e^{-i \cdot \frac{2\pi}{g} x} \right) \\ \text{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot \left( \frac{2\pi}{g} x + \frac{2\pi}{\lambda \cdot f} x \cdot u \right)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 2\pi \cdot x \cdot \left( \frac{1}{g} + \frac{u}{\lambda \cdot f} \right)} dx \text{ immer null ist außer für } \frac{1}{g} + \frac{u}{\lambda \cdot f} = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{\lambda \cdot f}{g} \text{ folgt:} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} T_A(x) \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{\lambda \cdot f} x \cdot u} dx &= a \cdot \delta(u) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left[ \delta\left(u - \frac{\lambda \cdot f}{g}\right) - \delta\left(u + \frac{\lambda \cdot f}{g}\right) \right] \quad (\text{FRAUNHOFERscher Bereich}) \end{aligned}$$

20 Aus Gleichung 3.3 können wir für die eingestrahlte Intensität als Quadrat der maximalen Amplitude, d.h. für den Fall  $\cos\left(\frac{2\pi}{g}x\right) = 1$ , eine zu  $(a+b)^2$  proportionale Intensität zurückrechnen. Die Intensität des ersten Beugungsmaximums ist nach Gleichung 3.4 ja proportional zu  $(\frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}b^2$ .

21 Beim harmonischen Phasengitter sind also alle Beugungsordnungen vorhanden.

22 Die BESSEL-Funktion ergibt sich als Lösung der BESSELSchen Differentialgleichung zu

$$J_m(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{m! \cdot \Gamma(m+\mu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\mu}$$

 Weitere Angaben zur BESSEL-Funktion findet man bei SAUER SZABO: *Mathematische Hilfsmittel für Ingenieure* und BRONSTEIN: *Mathematische Formelsammlung*

nung ist höher als die Maxima aller BESSEL-Funktionen höherer Ordnung. Keine der höheren Beugungsordnungen kann also mehr Energie enthalten als die erste Beugungsordnung bei  $\varphi_0 = 1,8412$  enthält. Bei allen anderen Phasengitteramplituden ist in jeder einzelnen Beugungsordnung weniger Energie enthalten als im Maximum der ersten. Wir wollen uns auf die Feststellung beschränken, daß sich die Amplitude der für uns wichtigen ersten Beugungsordnung (entspricht also BESSEL-Funktion erster Ordnung) maximal 0,5819 sein kann, d.h. die maximale Beugungseffizienz des dünnen Phasengitters ist  $\eta_{\max} = 0,3386$ .

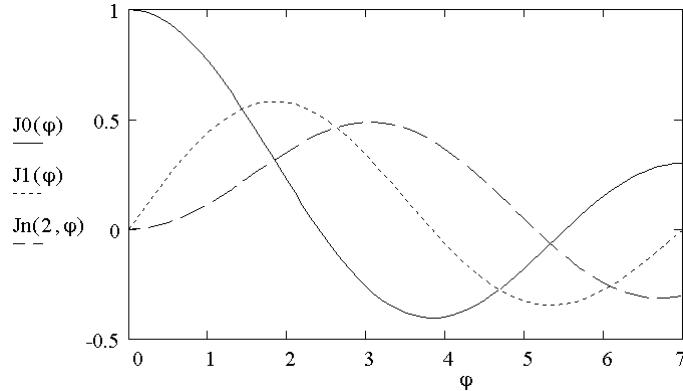


Abbildung 3.34.: BESSEL-Funktion nullter, erster und zweiter Ordnung

In der LIPPMANN - BRAGGSchen Holographie haben wir es mit räumlichen Phasengittern zu tun. Sie liefern Beugungseffizienzen von über 90%. Während dünne Gitter die charakteristischen symmetrischen Beugungsfiguren liefern, erhalten wir bei Volumengittern im Wesentlichen nur eine Beugungsrichtung. Dieses Phänomen wird BRAGG - Effekt genannt; wir wollen ihn hier näher untersuchen.

Zunächst schauen wir uns die Reflexion von (Röntgen-) Strahlung an Kristallen an. Trifft eine ebene Welle auf ein Kristall, so entsteht an jedem Atom, das ein Streuzentrum darstellt, eine HUYGENSSche<sup>23</sup> Elementarwelle. Wenn wir nur eine Kristallebene, nämlich die oberste, betrachten, stellen wir fest, daß sich die von den Kristallpunkten ausgehenden Wellen genau in eine Richtung konstruktiv addieren. Diese Richtung ist die durch das gewöhnliche Reflexionsgesetz bestimmte Richtung, d.h. Einfallswinkel ist Ausfallwinkel. Damit sich nun die Elementarwellen der zweiten, dritten, usw. Kristallebene ebenfalls dazu addieren<sup>24</sup>, muß die sogenannte BRAGG - Bedingung erfüllt sein:

$$\cos(\alpha) = n \frac{\lambda}{2 \cdot d} \quad (3.7)$$

Dabei ist  $\alpha$  der Einfallswinkel zum Lot auf die Lamellen (= BRAGGSche Ebenen),  $d$  der senkrechte Abstand zwischen den Lamellen und  $n$  eine natürliche Zahl, die sich aus der Periodizität der Wellenfunktion ergibt<sup>25</sup>. Neben der Wellenlänge  $\lambda$  interferieren natürlich auch alle Wellen der Länge  $1/n \cdot \lambda$  konstruktiv in diese Richtung. Aus Gleichung 3.7 erkennen wir aber auch, daß das Reflexionsgesetz bei der (räumlichen) Reflexion in Kristallen nur bei einer bestimmten Einfallswinkel - Wellenlängen Kombination gilt und das umso stärker, je dicker der Kristall ist, d.h. je mehr reflektierte Strahlen zur Interferenz beitragen.

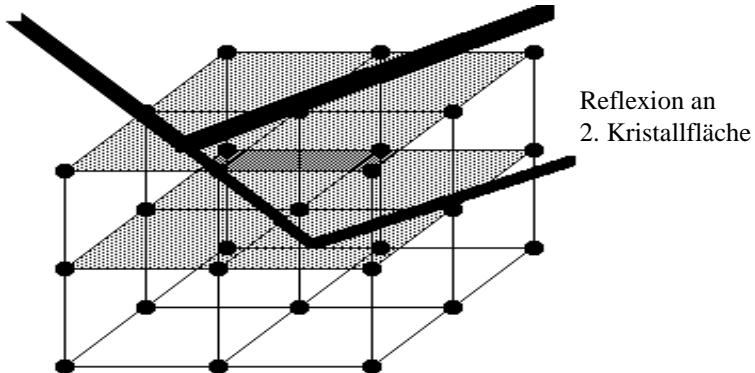
<sup>23</sup> CHRISTIAN HUYGENS (1629-95)

<sup>24</sup> Betrachten wir die Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen, dann brauchen wir uns nicht um die Brechzahlen zu kümmern, da fast alle Stoffe für hochenergetische Strahlung einen Brechungsindex von nahezu 1 haben.

<sup>25</sup> Wenn  $1/2\alpha$  der Einfallswinkel auf die Lamellen, dann erhalten wir die BRAGG-Beziehung in folgender Form:  $\sin(1/2\alpha) = n \frac{\lambda}{2 \cdot d}$ . Dies entspricht der Berechnung der Periode eines Gitters, das durch zwei ebene Wellen (in deren Winkelhalbierender) entsteht, die unter dem Winkel  $\alpha$  aufeinandertreffen. Das Flächengitter, das senkrecht zu einer der beiden Wellen entsteht, hat die Gitterkonstante  $g = \frac{d}{\cos 1/2\alpha}$ . Der Beugungswinkel dieses flachen Gitters ist dann  $\sin\alpha = \frac{\lambda}{g} = \frac{\cos 1/2\alpha}{d} \cdot \lambda \Rightarrow \frac{\lambda}{2d} = \frac{\sin\alpha}{2\cos 1/2\alpha} = \sin 1/2\alpha$ . Für den einen Winkel, für den also das Volumengitter zur Beugung führt, ist der Beugungswinkel der gleiche wie im entsprechenden flachen Gitter!

Reflexion an  
1.Kristallfläche

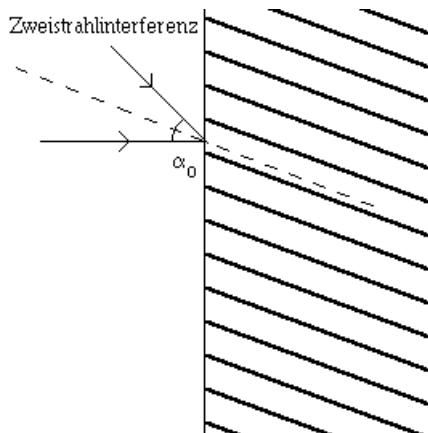
Reflexion an  
2. Kristallfläche



**Abbildung 3.35.: Reflexionen am Volumengitter**

Umgekehrt kann aus den Beugungseigenschaften unbekannter Kristalle auf deren Strukturen rückgeschlossen werden.

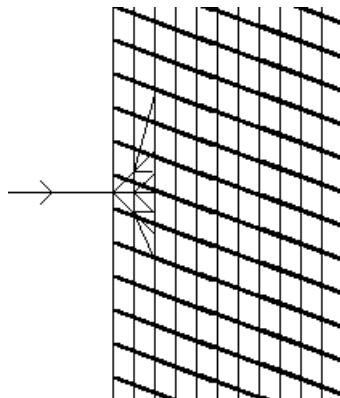
Ähnliche Verhältnisse haben wir bei den holographischen Gittern. Bei der Aufnahme entstehen ja Intensitätsslamellen durch stehende Wellen, die wir übrigens auch wie in Abbildung 3.36. und in Abschnitt 2 beschrieben herstellen können, wobei sich die Gitterkonstante aus Gleichung 2.2 ergibt. Wie wir bereits gesagt haben, besteht der Hauptunterschied zwischen dünnen und Volumengittern darin, daß letztere nur eine Beugungsordnung haben. Wir wollen die Begründung hierfür in einem Gedankenexperiment nachvollziehen.



**Abbildung 3.36.: Intensitätsslamellen im Hologramm**

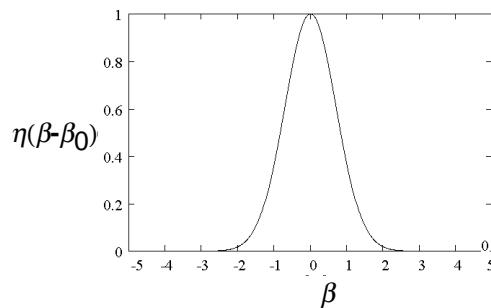
Stellen wir uns ein Volumengitter wie in Abbildung 3.36. dargestellt in dünne Scheiben zerlegt vor, die wir ihrerseits als dünne Gitter ansehen können, dann tritt beim Auftreffen einer ebenen Welle auf das erste "dünne Teilgitter" die schon beschriebene Beugung auf: drei diskrete Beugungsordnungen, die 0. und die  $\pm 1$ . Beugungsordnung. Jede dieser Beugungen trifft als Strahl auf das nächste dünne Teilgitter unseres zerschnittenen Gitters und führt dabei zu je weiteren drei Beugungsordnungen, so daß wir hier schon 9 Beugungsordnungen haben. Dabei treten aber nicht 9 verschiedene Beugungsrichtungen auf, sondern einige Beugungsordnungen haben die gleiche Richtung. Da die Wellen aber verschieden lange Wege zurückgelegt haben, interferieren sie je nach Phasendifferenz konstruktiv oder destruktiv. Ähnlich den Verhältnissen bei der Beugung von (Röntgen-) Strahlung an Kristallen, hängt die Art der Interferenz - Auslöschung oder Verstärkung - von der Beugungsrichtung, d.h vom Winkel ab. Je dicker die Schicht des Gitters wird, d.h. je mehr "dünne Teilgitter" einbezogen werden, desto mehr Beugungsordnungen gibt es, und desto mehr Strahlen können miteinander interferieren. Dadurch verstärken sich gemäß den Gesetzen der Vielstrahlinterferenz auch die Intensitäten. Das Besondere bei den Volumengittern ist, daß die Richtung, in der sich die Strahlen verstärken, periodisch mit der Schichtdicke ändert! Das ist verständlich, da sich ja auch die (optischen) Wege und damit die Phasendifferenzen mit der Schichtdicke ändern. Die maximale Intensität schwankt also je nach Schichtdicke zwischen den drei (und nur diesen dreien!) Beugungsordnungen, bzw. deren Richtungen hin und her, die sich aus der Beugung an einem einzigen, dünnen Gitter der gleichen Periode

ergäbe. Die Gesamtintensität, die sich bei einem dünnen Gitter also auf die drei Beugungsordnungen aufteilt, steckt beim Volumengitter fast ganz in nur einer dieser Beugungsrichtungen, und zwar auf Kosten der jeweils anderen beiden. Die Absorption, die sich auch bei Phasengittern in der Praxis nicht vermeiden lässt, sei hier einmal vernachlässigt. Da die Intensitätskonzentration auf eine Beugungsordnung mit der Wellenausbreitung im Gitter und den jeweiligen Phasenbeziehungen der "inneren Beugungsrichtungen" zusammenhängt, wird diese Theorie auch *coupled - wavefront theorie* genannt.



**Abbildung 3.37.: Beugung beim Raumgitter**

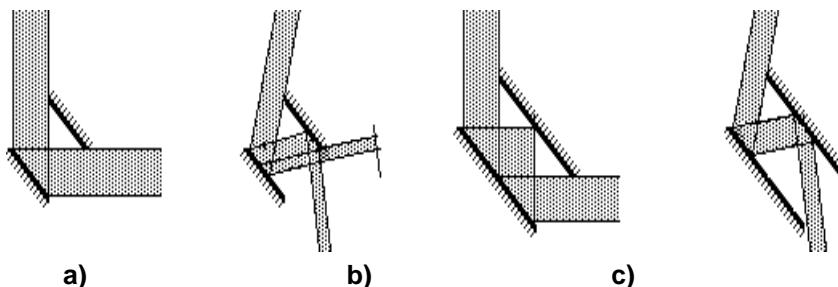
Wie wir aus Gleichung 3.7 (BRAGG - Bedingung) und den Überlegungen hierzu erkennen können, hängt die Richtung der Hauptintensität bei Vielstrahlinterferenz in Gittern von der Einfallsrichtung ab. Tragen wir die Beugungseffizienz gegen den Einstrahlwinkel für die Richtung, die dem Aufnahmewinkel  $\beta_0$ <sup>26</sup> nach Abbildung 3.36. entspricht, dann erhalten wir folgende Kurve:



**Abbildung 3.38.: Beugungseffizienz abhängig vom Einstrahlwinkel**

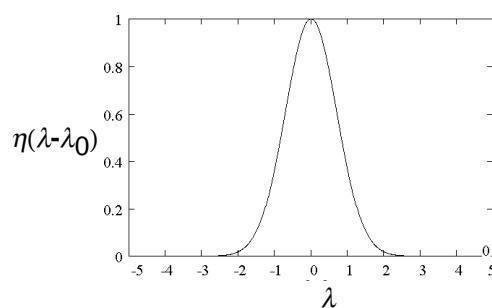
Die Halbwertsbreite der Kurve hängt dabei von der Schichtdicke ab, d.h. je dicker unser Gitter, desto genauer muß der Winkel des eingestrahlten Lichts dem Winkel der Brechungsindexschichten zum Lot der Emulsion entsprechen. Anders ausgedrückt: Helle Hologramme mit hoher Effizienz besitzen geringe Winkeltoleranzen! Wir können uns diesen Sachverhalt auch mit folgender Modellvorstellung klar machen: Wenn wir zwei Spiegel gemäß Abbildung 3.39.a anordnen und diese mit einem Lichtbündel beleuchten, dann ist dessen Ablenkung in eine um  $90^\circ$  zur Einfallsrichtung gedrehte Richtung für die gezeigten Verhältnisse maximal. Bei Abweichungen von diesem Winkel wird ein Teil des Lichtes nach unten reflektiert, und zwar umso mehr, je stärker der Winkel ist (Abbildung 3.39.b). Wenn wir die Spiegel auf das Doppelte verlängern, bleiben die Verhältnisse für den optimalen Winkel im Endeffekt gleich (Abbildung 3.39.c), nur daß wir jetzt drei Reflexionen haben. Wenn wir nun wieder vom Optimalwinkel abweichend einstrahlen, nimmt die Reflexion nach unten mit wachsender Abweichung wesentlich stärker zu, als in Abbildung 3.39.b. Dieser Fall entspricht einer dickeren Schicht bei Volumengittern. Zwar ist die Theorie hier anders, die Praxis läßt sich jedoch durch die gemachten Überlegungen gut veranschaulichen.

<sup>26</sup>  $\beta_0$  stellt den Winkel der in Abbildung 3.15 gestrichelt gezeichneten Linie (= Gitterausrichtung) mit dem Lot auf die Emulsion dar. Das Lot ist in dieser Abbildung zufällig mit einem der beiden Strahlen identisch, so daß  $\beta_0 = \frac{1}{2} \alpha_0$  ist.



**Abbildung 3.39.:** zum Vergleich: Reflexionsverhältnisse am Spiegelpaar

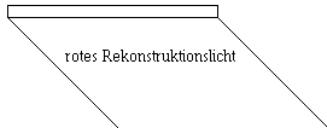
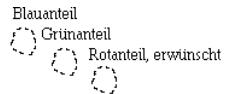
Tragen wir die Effizienz eines Volumengitters gegenüber der eingestrahlten Rekonstruktionswellenlänge auf (Abbildung 3.40.), dann erhalten wir eine ähnliche Kurve wie in Abbildung 3.38. für die Winkelabhängigkeit. Die Maximalwellenlänge  $\lambda_0$  ist gleich der Aufnahmewellenlänge, wenn wir die gleiche Rekonstruktionsrichtung wählen, wie bei der Aufnahme ( $\alpha_0$  in Abbildung 3.15). Aus der Kurve erkennen wir, daß für einen bestimmten Winkel auch nur ein bestimmter Wellenlängenbereich durchgelassen wird; die Halbwertsbreite ist ebenfalls wieder von der Gitterdicke abhängig. Volumengitter haben also filternde Wirkung.



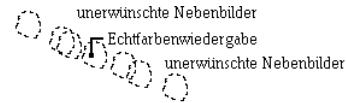
**Abbildung 3.40.:** Beugungseffizienz abhängig von der Wellenlänge

### Echtfarben - Seitenbandhologramm

Mit der bekannten Seitenbandhogrammanordnung ist mit erheblichem Aufwand auch eine Echtfarbenholographie möglich, bei der das Objekt mit allen holographischen Effekten in seinen ursprünglichen Farben erscheint. Als Vorüberlegung wollen wir uns zunächst den üblichen Hologrammaufbau (Abbildung 2.14.) vorstellen, wobei das Objekt jedoch mit einem Laser beleuchtet werden soll, der drei verschiedene Wellenlängen im roten, grünen und blauen Bereich besitzt (solch einen Laser gibt es natürlich nicht). Vom Objekt wird dann nur von den roten Objektteilen das rote Licht reflektiert, entsprechend von den grünen Objektteilen das grüne Licht und von den blauen Objektteilen das blaue Licht. Auf der holographischen Platte entstehen dann entsprechende Gitter, die Rot-, Grün- und Blauauszug darstellen. Würde eine solche Aufnahme mit der roten Laserwellenlänge, und nur mit dieser, nach den bekannten Bedingungen rekonstruiert, würden, wie in Abbildung 3.41. verdeutlicht, die roten Teile des Objekts in Rot rekonstruiert. Daneben entstehen durch die beiden anderen Gitter, die das rote Licht natürlich ebenfalls beugen, noch verzerrt die blauen und grünen Objektteile in Rot. Diese Bilder sind natürlich unerwünscht. Rekonstruieren wir wieder mit unserem "Dreifarbenlaser" entstehen pro Wellenlänge also drei Bilder, d.h. insgesamt neun. Von diesen befinden sich die drei erwünschten ortsrichtig übereinander, so daß sie durch additive Farbmischung das Objekt holographisch rekonstruieren (Abbildung 3.42.). Gestört wird diese Rekonstruktion jedoch massiv durch die  $3 \times 2 = 6$  unerwünschten Bilder, die durch Beugung jeder Wellenlänge auch an den jeweils anderen Gittern entstehen.



**Abbildung 3.41.**



**Abbildung 3.42.**

Diese Überlegungen sind natürlich rein hypothetisch, da es sowieso keinen Laser gibt, der drei Wellenlängen emittiert. Es gibt aber leistungsfähige Laser im roten, grünen und sogar blauen Bereich, mit denen wir unsere Echtfarbenholographie unter Ausnutzung des BRAGG - Effektes doch noch machen können. Da ein Volumengitter nach den Abbildungen 3.40 und 3.38 eine starke Richtungs- bzw. Wellenlängenabhängigkeit zeigt, werden bei der Aufnahme drei Laser mit roter, grüner und blauer Wellenlänge so angeordnet, daß die entstehenden Gitter bei der Rekonstruktion mit ähnlicher Laseranordnung sich nicht gegenseitig beeinflussen können. Für jede der drei Wellenlängen entsteht somit ein Gitter in eine ganz bestimmte Richtung, in die bei der Rekonstruktion auch wieder die jeweilige Wellenlänge eingestrahlt wird. Die Wellenlänge kann dann aufgrund des BRAGG - Effektes nicht von den anderen beiden Gittern gebeugt werden. Auch hier gilt, daß enge Winkeltoleranzen einzuhalten sind.

## 4. Holographische Meßtechnik

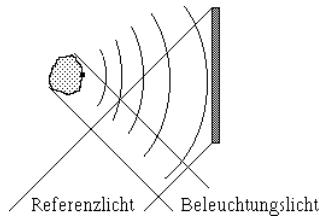
### 4.1. Doppelbelichtungsmethode

Die Doppelbelichtungsmethode wird vor allem zur *Verschiebung*- oder *Verformungsmessung* eingesetzt. Dabei wird im Wesentlichen wieder der Seitenbandaufbau verwendet, der in Abbildung 2.14. dargestellt ist. Das Objekt wird zweimal auf die holographische Platte belichtet: vor und nach der Verschiebung oder Verformung. Diese darf nicht allzu groß sein, sie sollte sogar unter dem Auflösungsvermögen des menschlichen Auges liegen und nur einen Teil und nicht das ganze Objekt betreffen. Abhängig von der Verschiebung oder Verformung entsteht dann eine Phasendifferenz zwischen den Belichtungen, die ausgewertet wird. Dadurch gelingt es also, zwei nicht gleichzeitig vorhandene Lichtwellen zur Interferenz zu bringen. Dies ist offensichtlich ohne Holographie unmöglich.

In der gewöhnlichen, nichtholographischen Meßtechnik muß ja bekanntlich das Meßobjekt eine absolut plangeschliffene Oberfläche besitzen, damit problemlos eine vollständig gleiche Wellenfront als Vergleichsmaßstab hergestellt werden kann. In der holographischen Interferometrie braucht dagegen die sehr komplizierte Objektwelle gar nicht bekannt zu sein, da die Vergleichswelle ja vom Objekt selbst erzeugt wird. Solange sich die Feinstruktur der Objektoberfläche nicht ändert, kann die Verschiebung jedes einzelnen Oberflächenpunktes nachvollzogen werden. Während die Feinstruktur bei elastischen Verformungen annähernd unverändert bleibt, ändert sich normalerweise bei plastischen Verformungen die Oberfläche des Objekts, sodaß hier eine holographische Vermessung nicht möglich ist.

Schauen wir uns zunächst die Verhältnisse bei der ersten Belichtung an:

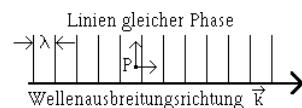
Jeder Punkt des beleuchteten Objekts ist das Zentrum einer Kugelwelle, die mit dem Referenzlicht auf der Platte interferiert (Abbildung 4.43.). Dieses Interferogramm ist eine Funktion der Phasenverschiebung  $\delta_1$  zwischen Objektwelle und Referenzwelle.



**Abbildung 4.43.**

Bei der zweiten Belichtung erhalten wir auf dem Hologramm eine zweites Interferogramm, das ebenfalls eine Funktion der Phasenverschiebung  $\delta_2$  zwischen Objekt- und Referenzwelle ist. Dieses Interferogramm unterscheidet sich immer dort vom ersten, wo eine Verschiebung des Objektes stattgefunden hat.

Bei der Rekonstruktion der entwickelten Platte beobachten wir **auf** dem rekonstruierten Objekt ein Interferogramm entsprechend der Verschiebung . Ist diese jedoch größer als das menschliche Auflösungsvermögen, wird das Objekt selbst unscharf wiedergegeben. Wird dagegen das ganze Objekt um eine kleine Strecke verschoben, dann wird das Objekt ohne Interferogramm wiedergegeben. Es können so also Verformungen unabhängig von zeitlichen Kohärenzbedingungen gemessen werden, da die Aufnahmen ja hintereinander gemacht werden. Die Holographie kann praktisch Wellen zur Interferenz bringen, die gar nicht zum gleichen Zeitpunkt vorgelegen haben! Wichtig ist dabei die **Richtung**, in die sich die Verschiebung ereignet hat. Stellen wir uns einen sich verschiebenden Punkt in einem ebenen Wellenfeld nach Abbildung 4.44. vor, dann erkennen wir, daß nur der Verschiebungsanteil parallel zum Wellenvektor  $\vec{k}$  zu einer Änderung der Phasendifferenz führt, während eine Verschiebung senkrecht zu  $\vec{k}$  die Phase nicht ändert.



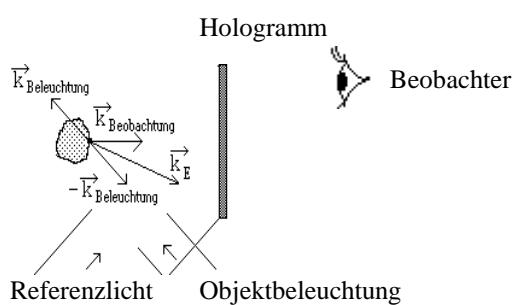
**Abbildung 4.44.**

Bewegt sich der Punkt P um die Strecke  $\vec{s}$ , dann ist die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  das Skalarprodukt aus dem Streckenvektor mit dem Wellenvektor:  $\Delta\varphi = \vec{s} \cdot \vec{k}$ .

Diesen Fall haben wir bei unserer Seitenbandanordnung gleich doppelt vorliegen: einmal als Phasenverschiebung bezüglich des Beleuchtungslichtes und einmal als Phasenverschiebung bezüglich des Beobachtungslichtes, also des vom Objekt reflektierten Lichtes. Für die Differenz der Phasenunterschiede gilt somit:

$$\begin{aligned}\delta_2 - \delta_1 &= \Delta\varphi_{\text{Beleuchtung}} - \Delta\varphi_{\text{Beobachtung}} = \vec{s} \cdot \vec{k}_{\text{Beleuchtung}} - \vec{s} \cdot \vec{k}_{\text{Beobachtung}} \\ &= \vec{s} \cdot (\vec{k}_{\text{Beleuchtung}} - \vec{k}_{\text{Beobachtung}}) = \vec{s} \cdot \vec{k}_E\end{aligned}\quad (4.1)$$

Dabei stellt  $\vec{k}_E$  den sogenannten *Empfindlichkeitsvektor* dar, der auf der Winkelhalbierenden von Beleuchtungs- und negativer Beobachtungsrichtung liegt, da deren Wellenvektoren ja wegen  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und gleicher Wellenlängen (aus dem gleichen Laser) auch gleich lang sind. Abbildung 4.46. verdeutlicht diese Zusammenhänge.



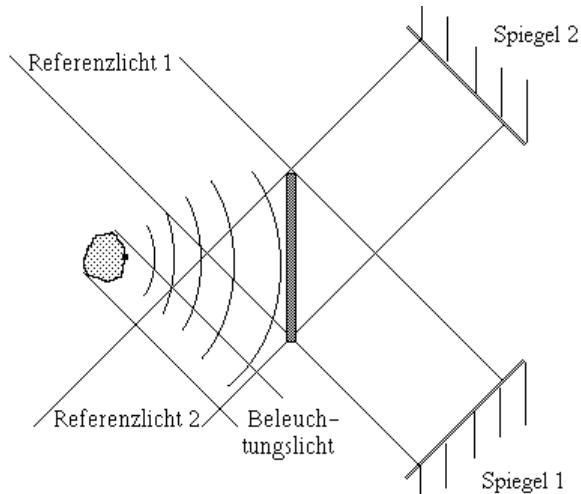
**Abbildung 4.45.: Lage des Empfindlichkeitsvektors in einem Hologramm** 27

<sup>27</sup> Die Orientierung von  $\vec{k}_E$  ist im Prinzip unerheblich, da der Empfindlichkeitsvektor ohnehin nur im Argument des Kosinus (gerade Funktion) erscheint.

Aus dem Skalarprodukt  $\vec{s} \cdot \vec{k}_E$  kann nicht eindeutig auf  $\vec{s}$  zurückgeschlossen werden, sondern immer nur auf die Projektion von  $\vec{s}$  auf  $\vec{k}_E$ . Es gibt ja unendlich viele Skalarprodukte von  $\vec{s} \cdot \vec{k}_E$ , die alle auf ein und denselben Wert führen<sup>28</sup>. Die räumliche Richtung der Punktverschiebung können wir also nicht feststellen, da wir ja nur die Projektion der Bewegungsrichtung auf die Ebene, die Beleuchtungs- und Beobachtungsrichtung aufspannen, sehen. Abhilfe schaffen zwei Spiegel, die so aufgestellt sein müssen, daß uns zwei weitere Beobachtungsrichtungen zur Verfügung stehen, so daß sich insgesamt drei verschiedene Empfindlichkeitsvektoren als Basis eines dreidimensionalen Raumes ergeben. Da das Skalarprodukt  $\vec{s} \cdot \vec{k}_E$  im Argument des Kosinus steht, kann auch nicht auf das Vorzeichen der Bewegung geschlossen werden (gerade Funktion!).

## Heterodyn - Verfahren

Herkömmliche Auswertungen von Doppelbelichtungshologrammen beruhen alle auf einer visuellen Beurteilung des Hologramms und der entstandenen Interferenzstreifen. Das Heterodyn-Verfahren war die erste Methode zur automatischen Auswertung mit einer sehr hohen Genauigkeit. Heute wird es allerdings fast nicht mehr praktiziert.



**Abbildung 4.46.: Aufbau zum Heterodyn-Verfahren**

Es wird ein Aufbau ähnlich dem herkömmlichen Seitenbandaufbau verwendet. Man verwendet allerdings zwei Referenzwellen, deren Frequenzen um ca. 1 kHz verschoben sind. Um bei der Rekonstruktion ein reelles Bild des Objekts zu erhalten, werden die Referenzwellen mit Spiegeln in sich reflektiert (siehe Abb. 4.46.). Mit Photoempfängern, die an den Bildort der Objektoberfläche gebracht werden, kann die Intensität für jeden Oberflächenpunkt gemessen werden. Durch die Frequenzdifferenz der beiden Referenzwellen ist die Intensität bei der Rekonstruktion zeitabhängig; Sie schwankt periodisch mit der Differenzfrequenz:

$$I_{\text{gesP1}}(t) = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(2\pi(f_1-f_2)t - \delta_{\text{Verschiebung}})$$

Werden nun die Signale von zwei Photoempfängern wechselstromverstärkt (d.h. über RC-Koppelglieder), so fällt jeweils der konstante Anteil im elektrischen Signal weg und wir erhalten folgendes:

$$\begin{aligned} U_{P1}(t) &= U_0 \cos(\omega t - \delta_1) \\ U_{P2}(t) &= U_0 \cos(\omega t - \delta_2) \end{aligned}$$

Mit einem Leistungsmeßgerät kann der Phasenwinkel gemessen werden, da der Quotient aus Scheinleistung und Wirkleistung gleich dem Kosinus der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ist ( $P_{\text{wirk}} =$

<sup>28</sup> Eine Folgerung aus der Definition des  $\vec{k}_E$ -Vektors ist die Tatsache, daß eine bestimmte Richtung von  $\vec{k}_E$  durch unterschiedlichste Beleuchtungs- und Betrachtungsrichtungen realisiert werden kann!

$U \cdot I \cdot \cos\varphi$  und  $P_{\text{schein}} = U \cdot I$ ). Durch das Abscannen der Objektoberfläche ergibt sich ein Phasenbild. Da der Phasenwinkel so auf  $1^\circ$  genau gemessen werden kann, erhalten wir eine Genauigkeit für den Ort von  $\Delta x = 1/360 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda < 1\text{nm}$ ! Weicht man während des Abscannens von dem Bildort der Objektoberfläche ab, so erkennt man das durch eine Verringerung der Modulation des Signals. Am einfachsten realisiert man dieses Abscannen allerdings bei Objekten mit sehr ebener Oberfläche.

Die für diese Methode notwendige Frequenzverschiebung erreicht man durch den ZEEMAN-Effekt. Von Zucker-Lösungen und anderen optisch aktiven Stoffen ist bekannt, daß sie die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht drehen. Diese Erscheinung folgt aus der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen für unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen (anisotrop). Denselben Effekt erhält man bei einigen isotropen Stoffen unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes (KERR-Effekt<sup>29</sup>) oder eines magnetischen Feldes (FARADAY-Effekt<sup>30</sup>). Das kann so veranschaulicht werden, daß die Elektronen, die in Resonanz mit der Polarisationsrichtung des Lichtes mitschwingen, durch die LORENTZ-Kraft senkrecht zur Schwingungsebene abgelenkt werden.

PIETER ZEEMAN (1865-1943) entdeckte 1896 zudem eine Aufspaltung der Spektrallinien in zwei oder mehrere Komponenten, wenn die emittierenden Atome sich in einem (homogenen, mittelstarken ( $\approx 0,5\text{T}$ )) Magnetfeld der Feldstärke  $H$  befanden. Die Drehimpulse der emittierenden Atome richten sich im Magnetfeld aus. Sie haben dazu  $2j+1$  Ausrichtungsmöglichkeiten (mit  $j = \text{Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl}$ ). Dadurch teilen sich die möglichen Energiezustände der Atome auf in jeweils  $2j+1$  verschiedene Energieniveaus. Daraus resultiert die Aufteilung in jeweils  $2j+1$  Spektrallinien.<sup>31</sup>

## Auswertung durch Phasenshiftverfahren

Bei der Auswertung der Doppelbelichtungshologramme tritt natürlich das bei der Interferometrie typische Problem der Periodizität auf; d.h. wir können die Phasenverschiebung nur modulo  $2\pi$  bestimmen. Durch die Doppelbelichtungsmethode, die mit zwei Referenzwellen arbeitet, wird diese schon wesentlich erleichtert, zumal die Rechnerauswertung einfacher ist. Aufgenommen wird das Objekt zunächst wie üblich mit einer Referenzwelle, danach wird die Verschiebung durchgeführt und anschließend eine zweite Aufnahme mit einer anderen Referenzwelle aus einer **anderen Richtung** gemacht. Die Beleuchtungsrichtung zur Erzeugung der Objektwelle kommt nur aus einer Richtung. Bei der gleichzeitigen Rekonstruktion mit beiden Referenzwellen führt dann das Muster auf dem Hologramm zur Rekonstruktion jedes Punktes auf dem Objekt. Ein solcher ergibt sich jeweils aus der Überlagerung des Punktes aus der ersten Aufnahme und dem aus der zweiten Aufnahme. Dabei dürfen die Verschiebungen wieder nur sehr klein sein. Die Helligkeit eines Objektpunktes hängt nun von der Phasenbeziehung der beiden Rekonstruktionswellen untereinander ab, da die Rekonstruktionswellen natürlich ihrerseits wieder am Bildort des Punktes miteinander interferieren! Durch den Einbau einer *Phasenplatte* in den Strahlengang einer Referenzwelle, mit der die Phase kontinuierlich verschoben werden kann, können wir die Phasenbeziehung der Referenzwellen untereinander und damit die Helligkeit des Punktes beeinflussen. Bei der Aufnahme gestaltet sich das natürlich schwierig, bei der Rekonstruktion jedoch geht das relativ einfach über eine Photodiode, auf die ein Objektpunkt abgebildet wird. Abbildung 4.47 zeigt das Prinzip und Abbildung 4.48 die Stromstärke- bzw. Intensitätsfunktion für einen nicht

<sup>29</sup> JOHN KERR (1824-1907)

<sup>30</sup> MICHAEL FARADAY (1791-1867)

<sup>31</sup> Ursache ist die Richtungsquantelung des Gesamtdrehimpulses der Elektronen in den Atomen bei seiner räumlichen Einstellung zur Magnetfeldrichtung und die dadurch bewirkte Aufspaltung ihrer Energieterme. Die Komponentenzahl hängt von der Beobachtungsrichtung sowie von bestimmten Eigenschaften der an dem betreffenden Übergang beteiligten Atomkerne ab.

Bei Übergängen zwischen Singulett-Termen (d.h. Gesamt-Spin  $S = 0$ , außerdem beim Wasserstoff) beobachtet man den sogenannten *normalen ZEEMAN-Effekt*: steht die Beobachtungsrichtung senkrecht auf der Richtung des Magnetfeldes (sog. *Quereffekt*), so sind *drei* Komponenten feststellbar (LORENTZ-Triplett): eine gegenüber der Beobachtung ohne Magnetfeld *unverschobene*, mittlere Linie und zwei weitere Linien, von denen die Frequenz der einen um ebensoviel *oberhalb* liegt wie die der anderen *unterhalb*. Die mittlere Komponente ist dabei parallel zum Magnetfeld linear polarisiert ( $\pi$ -Komponente), während die beiden anderen senkrecht zum Magnetfeld linear polarisiert sind ( $\sigma$ -Komponenten). Wenn man dagegen genau in Richtung des Magnetfeldes beobachtet (*Längseffekt*), fehlt die mittlere Komponente. Man sieht dann also nur die zur höheren bzw. zur niedrigeren Frequenz verschobenen beiden Komponenten. Die eine ist rechtszirkular polarisiert ( $\sigma^+$ ), die andere linkszirkular ( $\sigma^-$ ). Diese Linien entsprechen Übergängen zwischen Termen, die gegenüber den ungestörten Termen um die Energie  $\Delta E = \pm \mu_B \cdot H$  verschoben sind ( $\mu_B$  BOHRSCHEs Magneton = Das magnet. Moment, das durch den Kreisstrom des Elektrons um den Atomkern erzeugt wird) und bei denen für die magnetische Quantenzahl  $m$  die Auswahlregeln  $\Delta m = 0$  bzw.  $\Delta m = \pm 1$  gelten. Dieser normale ZEEMAN-Effekt wird durch die von HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853-1928) aufgestellte klassische Theorie eines schwingenden Dipols beschrieben. Der allgemeinere Fall bei Atomen ohne Singulett-Terme (abgesehen vom Wasserstoff), d.h. der Übergang zwischen Duplett-, Triplet-, Quartett- usw. Termen führt zum Auftreten von i.a. mehr als drei verschiedenen Linienkomponenten. Da dieser Fall nur quantenmechanisch erklärbar ist, wird er aus lediglich historischen Gründen als *anomaler ZEEMAN-Effekt* bezeichnet. Seit der Entwicklung der Quantenmechanik weiß man allerdings, daß eigentlich der normale ZEEMAN-Effekt den Spezialfall und der anomale den Normalfall darstellt. In diesen Atomen wird jeder Term im Magnetfeld nunmehr infolge Richtungsquantelung des Gesamtdrehimpulses ebenfalls in mehrere Niveaus aufgespalten, deren Energieänderung aber wegen der magnetomechanischen Anomalie (gyromagnetisches Verhältnis)  $\Delta E_{J,m} = mg\mu_B H$  ist (mit  $g$  als LANDÉ-Faktor). Da der Spin- $g$ -Faktor des Elektrons etwa doppelt so groß ist wie der Bahn- $g$ -Faktor des Elektrons ist, ergeben sich recht umfangreiche Multiplettstrukturen. Mit wachsender Magnetfeldstärke geht der ZEEMAN-Effekt stetig in den PASCHEN-BACK-Effekt über.

verschobenen und einen um  $\delta$  verschobenen Punkt.  $\phi$  ist die Phasenverschiebung der beiden Referenz-, bzw. Rekonstruktionswellen untereinander.

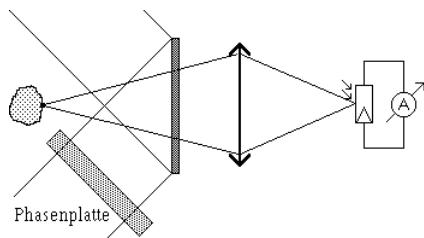


Abbildung 4.47.

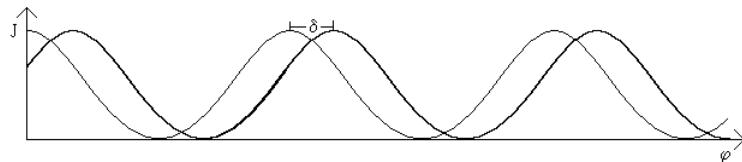


Abbildung 4.48.

Die Phasenverschiebung kann über eine drehbare, planparallele Platte oder durch ein MICHELSON - Interferometer erreicht werden. Bei letzterem wird einfach ein Spiegel mit einem Piezokristall verschoben. Legt man an den Piezokristall eine Sägezahnnspannung, die solange steigt, bis der Spiegel eine Phasenverschiebung von  $2\pi$  erzeugt, und anschließend wieder auf 0 Volt zurückgeht und so weiter, können wir eine kontinuierliche Phasenverschiebung simulieren.

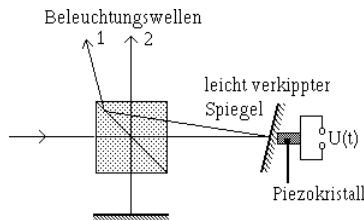


Abbildung 4.49.

Mit diesem Verfahren lassen sich auch Phasenbilder in Rechenanlagen herstellen. Dazu wird das holographierte Objekt auf einen CCD - Chip abgebildet und in einen Rechner eingelesen. Durch Zweistrahlinterferenz erhalten wir für jeden Bildpunkt (Pixel) eine bestimmte Intensität:

$$I_{\text{res}1} = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta)$$

Das Intensitätsbild aus dem CCD - Chip wird in den Speicher des Rechners geladen. Anschließend wird die Phase der Beleuchtungswelle um  $\pi/2$  verschoben und das Bild in einen zweiten Speicher eingelesen. Dieses wird noch zweimal wiederholt, und zwar mit einer jeweils weiteren Phasenverschiebung um  $\pi/2$ . Daraus erhalten wir also noch folgende drei Intensitäten für jedes Pixel:

$$I_{\text{res}2} = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta + \pi/2) = I_1 + I_2 - 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \sin(\delta)$$

$$I_{\text{res}3} = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta + \pi) = I_1 + I_2 - 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta)$$

$$I_{\text{res}4} = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta + 3\pi/2) = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \sin(\delta)$$

Damit haben wir vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Uns interessiert das Phasenbild des Objekts, so daß wir die Phase an jedem Bildort ausrechnen müssen. Erreicht werden kann das durch folgenden sogenannten Phasenshift-Algorithmus:

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{l_{\text{res}4} - l_{\text{res}2}}{l_{\text{res}1} - l_{\text{res}3}} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{l_{\text{res}4} - l_{\text{res}2}}{l_{\text{res}1} - l_{\text{res}3}}\right)$$

## Messung von Verdrehungen

Neben Verschiebungen und Verformungen können wir mit der Doppelbelichtungsmethode auch *Verdrehungen* holographisch messen. Eine Verdrehung entspricht ja auch einer Verschiebung von Objektpunkten:

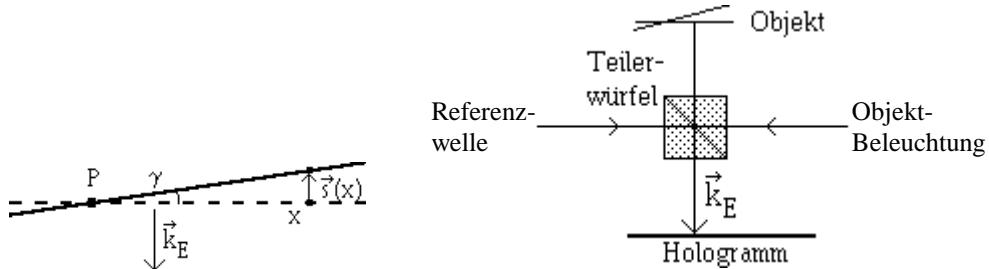


Abbildung 4.50.: Messung von Verdrehungen

P ist der Drehpunkt,  $\gamma$  der Drehwinkel, x die Entfernung eines Punktes vom Drehpunkt,  $\vec{s}(x)$  dessen Verschiebungsvektor und  $\vec{k}_E$  der Empfindlichkeitsvektor nach Gleichung 4.1. Der Einfachheit halber sollte der Empfindlichkeitsvektor orthogonal auf die holographische Platte sein; der Aufbau hierfür wird durch die rechte Skizze in Abbildung 4.50. verdeutlicht. Nach Gleichung 4.1. werden nur Punktverschiebungen in Richtung des Empfindlichkeitsvektors (Skalarprodukt  $\vec{s} \cdot \vec{k}_E$ !) holographisch erfaßt. Bei einer Drehung um eine orthogonale zur optischen Achse stehenden Drehachse um äußerst kleine Winkel können wir näherungsweise davon ausgehen, daß die Objektpunkte sich nicht auf einer Kreisbahn, sondern auf einer Geraden in Richtung des Empfindlichkeitsvektors (oder in entgegengesetzter Richtung) bewegen. Für den Drehwinkel gilt dann:

$$\gamma \approx \tan(\gamma) = \frac{|\vec{s}(x)|}{x} \quad \Rightarrow \quad s(x) = \gamma \cdot x \quad (4.2)$$

Beispiel: Für einen Streifen, d.h. eine Verdrehung von einer Periode ( $2\pi$ ) über die Länge  $x_0$ , muß die Verschiebung des Punktes in der Entfernung  $x_0$  von der Drehachse  $\lambda/2$  betragen, da die Objektwelle diese Verschiebungsstrecke ja doppelt durchläuft <sup>32</sup>. Der Drehwinkel errechnet sich dann mit

$$\gamma = \frac{\lambda}{2 \cdot x_0}.$$

Für die praktische Durchführung gilt auch hier: Das Objekt wird wie üblich aufgenommen, verdreht und anschließend das zweite Mal belichtet. Die Rekonstruktion zeigt dann das Objekt, bei genügend kleinen Drehwinkeln, von Interferenzstreifen überzogen.

Anwendung findet die Doppelbelichtungsmethode z.B. bei der Prüfung von Fahrzeugreifen auf Delamination, das sind Lufteinschlüsse zwischen den auflaminierten Schichten. Wenn eine Aufnahme bei normalem Druck und eine bei Unterdruck gemacht wird, so wölbt sich die Stelle mit dem Lufteinschluß bei der zweiten Aufnahme auf, so daß diese Orte an den höhenschichtlinienartigen Interferenzstreifen erkannt werden können.

## 4.2. Real-Time-Holographie

Die Real-Time-Holographie entspricht im optischen Prinzip der Doppelbelichtungsmethode, nur werden hier die Verschiebungen und Verdrehungen im zeitlichen Verlauf sichtbar und können notfalls sogar gefilmt werden. Das ruhende Objekt wird hier wieder wie üblich aufgenommen, und zwar auf **thermoplastischen Film**,

<sup>32</sup> Hier liegen die gleichen Verhältnisse wie beim MICHELSON-Interferometer und der Auflicht-Interferenzmikroskopie vor.

dessen Wirkungsweise wir ja schon im zweiten Abschnitt unter Aufnahmematerialien besprochen haben. Dadurch kann das Hologramm direkt vor Ort ohne Naßchemie "entwickelt" werden, d.h. die Holographieanordnung kann unverändert bleiben, was natürlich sehr wichtig ist. Das Objekt wird dann im unveränderten Aufbau weiter beleuchtet und bewegt, verdreht, o.ä. Bei der Rekonstruktion des Referenzhologramms entsteht nun das Bild des Gegenstandes am Orte des Gegenstandes selbst. Der Betrachter sieht also durch das Hologramm hindurch sowohl das ursprüngliche Objekt als Rekonstruktion in seiner Referenzlage und das wirkliche Objekt, das sich für das Auge unsichtbar klein verändert hat, aber mit der Rekonstruktion in bekannter Weise interferiert. Die Interferenzstreifen bewegen sich nun entsprechend der Objektbewegung, was ja die Real-Time-Holographie ausmacht. Für dieses Verfahren ist es, genauso wie für das Doppelbelichtungsverfahren üblicherweise auch, enorm wichtig, daß der Aufbau absolut unverändert bleibt.

### 4.3. Time-Average-Holographie

Bei den bisher besprochenen Verfahren mußte man bei der Aufnahme immer besonders darauf achten, daß sich das Objekt während der Belichtung nicht bewegt. In diesem Kapitel wird beschrieben, was eine Objektbewegung während der Aufnahme zur Folge hat.

Wenn zwei ebene Wellen unter einem bestimmten Winkel miteinander interferieren, entsteht ja ein harmonisches Gitter (Abbildung 3.36.). Verändert man die Phasenbeziehung der Wellen untereinander, ohne den Winkel zu verändern, den sie miteinander einschließen, dann wird das Gitter versetzt; die Gitterkonstante bleibt aber gleich. Eine kontinuierliche Veränderung der Phasenbeziehung führt also zu einem Wandern des Gitters. Wird währenddessen belichtet, dann führt dies zu einer Verwaschung der ursprünglichen Gitterstruktur, d.h. die Beugungseffizienz und damit die Helligkeit in den Beugungsordnungen nimmt ab. Das gilt natürlich nicht nur für ebene Wellen, sondern für alle irgendwie geartete kohärente Wellen. Im Klartext heißt das, daß ein rekonstruiertes Objekt dunkler wird und bei zu starker Objektbewegung<sup>33</sup> gar nicht mehr rekonstruiert werden kann. Dieser an sich unerwünschte Effekt läßt sich aber auch ausnützen, z.B. in der Schwingungsanalyse.

#### Lineare Bewegung

Der einfachste Fall eines bewegten Objektpunktes ist eine **lineare Bewegung** in Richtung des Empfindlichkeitsvektors.

Die Phasendifferenz  $\delta$  zwischen Objekt- und Referenzwelle, deren Intensitäten man zur Vereinfachung gleich groß ( $I_{Obj} = I_{Ref} = \frac{1}{2}I$ ) annehmen kann, ist also zeitabhängig:

$$\begin{aligned} I_{ges} &= I_{Obj} + I_{Ref} + 2\sqrt{I_{Obj} \cdot I_{Ref}} \cdot \cos(\delta(t, x, y, z)) \\ \Rightarrow I_{ges} &= I[1 + \cos(\delta(t, x, y, z))] \end{aligned}$$

Entsprechend für einen bestimmten Punkt in der Hologramm-Ebene:

$$I_{ges} = I[1 + \cos(\delta(t))] \quad (4.3)$$

Die Belichtung  $H$  des Hologramms ergibt sich, wenn man von 0 sec. bis zur Belichtungszeit  $t_0$  integriert:

$$H = \int_0^{t_0} I_{ges} dt = I \cdot t_0 + I \cdot \int_0^{t_0} \cos(\delta(t)) dt \quad (4.4)$$

Dabei ist allgemein:

---

<sup>33</sup> Das Adjektiv *stark* ist hier natürlich relativ und bezieht sich auf die üblichen, für das Auge nicht wahrnehmbaren kleinen Objektveränderungen im Wellenlängenbereich.  
Die Tatsache, daß die Helligkeit der Rekonstruktion mit der Modulation wächst, ist bereits von Gittern bekannt: Für ein Amplitudengitter mit der Transmissionsfunktion  $t_A(x) = a + b \cdot \cos \omega x$  ist bekanntlich die Amplitude des Beugungslichtes  $\frac{1}{2} \cdot b \cdot A$ .

$$\delta(t) = \vec{k}_E \cdot \vec{s}(t) \quad 34$$

Zur Vereinfachung soll hier folgendes gelten:

$$\begin{aligned} \vec{k}_E &\text{ verläuft parallel zu } \vec{s}(t) \text{ mit} & |\vec{k}_E| &= \frac{2\pi}{\lambda}; \\ && \vec{s}(t) &= \vec{v} \cdot t \\ \text{und} && \vec{s}(t) \cdot \vec{k}_E &= |\vec{s}(t)| \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \delta(t) &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t & (4.5) \\ \Rightarrow \quad H &= \int_0^{t_0} I_{\text{ges}} dt = I \cdot t_0 + I \cdot \int_0^{t_0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t\right) dt \end{aligned}$$

Die Stammfunktion des Cosinus ist der Sinus:

$$\begin{aligned} H &= I \cdot t_0 + I \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v} \Big|_{t=0}^{t_0} \\ H &= I \cdot t_0 + I \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t_0\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v} = I \cdot t_0 + I \cdot t_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot t_0\right)}{t_0 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v} \\ H &= I \cdot t_0 + I \cdot t_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot v \cdot t_0\right) & (4.6) \end{aligned}$$

bzw. allgemein:

$$H = (I_{\text{Obj}} + I_{\text{Ref}}) \cdot t_0 + 2 \cdot \sqrt{I_{\text{Obj}} \cdot I_{\text{Ref}}} \cdot t_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot v \cdot t_0\right)$$

Der **Kontrast** in der Hologramm-Ebene (oder: die Modulation des entstehenden Gitters) bei einer **linearen Bewegung** während der Aufnahme berechnet sich dann allgemein zu:

<sup>34</sup> Bekanntlich ist die Belichtung auf dem Hologramm ortsabhängig. Dieser Ausdruck gilt für alle diejenigen Orte, bei denen zu Anfang der Belichtung die Phasendifferenz zwischen Objekt- und Referenzwelle null ist.

<sup>35</sup> Dies ist hier ein willkürlich gewählter Spezialfall.

Allgemeiner: Wenn das Koordinatensystem so gewählt ist, daß der Empfindlichkeitsvektor in  $\vec{x}$ -Richtung das Hologramm in  $\vec{y}/\vec{z}$ -Richtung liegt, folgt:

Damit  $\vec{k}_E \parallel \vec{x}$ ; muß gelten (mit  $\alpha$  = Winkel zwischen  $\vec{x}$ -Richtung und  $\vec{k}_{\text{Bel}}$  bzw.  $\vec{x}$ -Richtung und  $\vec{k}_{\text{Beob}}$ ):

$$\vec{k}_{\text{Bel}} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{k}_{\text{Beob}} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Dann folgt nämlich für  $\vec{k}_E$ :

$$\vec{k}_E = \vec{k}_{\text{Bel}} - \vec{k}_{\text{Beob}} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für  $|\vec{k}_E|$ :

$$|\vec{k}_E| = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\cos\alpha$$

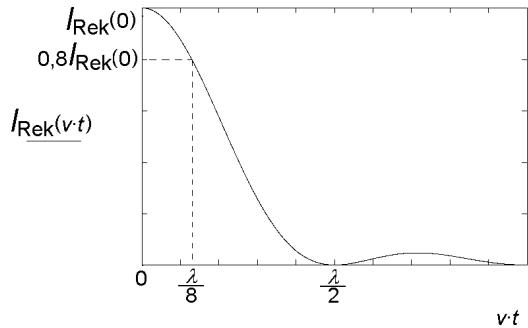
Folglich wird  $\vec{k}_E$  maximal für  $\alpha = 0$ . Es ist aber nur der  $\vec{x}$ -Anteil von  $\vec{s}$  wirksam:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{k}_E = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2s_x \cos\alpha$$

$$K(v) = \frac{2\sqrt{I_{\text{Obj}} \cdot I_{\text{Ref}}}}{I_{\text{Obj}} + I_{\text{Ref}}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot v \cdot t_0\right) = K_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot v \cdot t_0\right) \quad ^{36} \quad \text{mit } K_0 = K(0)$$

Nach Gleichung 0.1.b ist die Amplitudentransparenz proportional zur Belichtung. Weil die Intensität der Beugung mit dem Quadrat des Kontrastes im Gitter steigt (Gleichung 3.5), ist die Rekonstruktionsintensität proportional zum **Quadrat der Sinc-Funktion**:

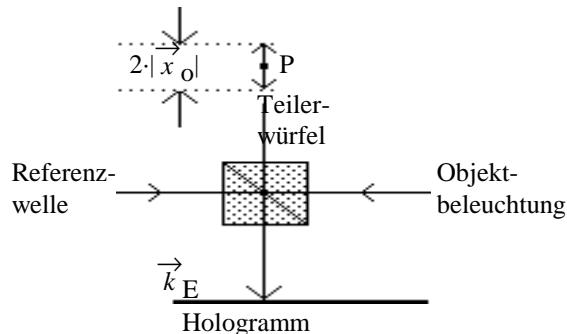
$$I_{\text{Rek}} \sim \text{sinc}^2\left(\frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot v \cdot t_0\right) \quad (4.7)$$



**Abbildung 4.51.:** Die Rekonstruktions-Intensität verläuft sinc<sup>2</sup>-förmig. Will man eine Verminderung der Intensität um mehr als 20% verhindern, so darf der Aufbau während der Belichtung nicht um mehr als  $\lambda/8$  bewegt werden (mit Lage des Empfindlichkeitsvektors wie oben).

### Harmonische Schwingung

Als weiterer Fall von bewegten Objektpunkten soll jetzt eine **harmonische Schwingung** betrachtet werden. Der holographisch aufzunehmende Punkt schwingt also mit der Amplitude  $x_0$  und einer gegenüber der Belichtungszeit relativ hohen Frequenz  $v$  in Richtung des Empfindlichkeitsvektors.



**Abbildung 4.52.:** Schematische Anordnung zur holographischen Schwingungsanalyse. Dieser Aufbau hat den Vorteil, daß der Empfindlichkeitsvektor  $\vec{k}_E$  parallel zur Beobachtungs- und zur Schwingungsrichtung ist, vorausgesetzt, der Beobachter schaut später orthogonal auf das Hologramm. Die Berechnung der Schwingungsamplitude wird so einfacher.

Zu beachten ist bei einem solchen Aufbau mit Teilerspiegel, daß der Betrag des Empfindlichkeitsvektors doppelt so groß ist wie der der Objekt- bzw. Referenzwelle:

$$|\vec{k}_E| = |\vec{k}_{\text{Bel}} - \vec{k}_{\text{Beob}}| = |\vec{k}_{\text{Bel}} + \vec{k}_{\text{Beob}}| = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda}$$

Für die Phasendifferenz  $\delta$  zwischen Objekt- und Referenzwelle in Gl. 4.3 gilt hier:

<sup>36</sup> Dieses Verhältnis beschreibt in der Tat auch den ortsabhängigen Kontrast des entstandenen Gitters.

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \vec{k}_E \cdot \vec{x}(t) \quad \text{mit } \vec{x}(t) = x_0 \cdot \cos(2\pi v \cdot t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \delta(t) &= \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Für die Belichtung  $H$  des Hologramms muß wieder über die Belichtungszeit  $t_0$  integriert werden:

$$H = \int_0^{t_0} I_{\text{ges}} dt = I \cdot t_0 + I \cdot \int_0^{t_0} \cos \left[ \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \right] dt\tag{4.9}$$

Die Integration über den zweiten Summanden kann durch folgende Beziehung vereinfacht werden:

$$\cos [c \cdot \cos(\alpha)] = J_0(c) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot J_{2m}(c) \cdot \cos(2m\alpha)$$

Dabei stellen  $J_i$  die BESSEL-Funktionen  $i$ -ter Ordnung dar, die schon im Zusammenhang mit dem BRAGG-Effekt benutzt wurden (Abbildung 3.34., siehe Seite 26)<sup>37</sup>. Es ergibt sich somit:

$$H = I \cdot t_0 + I \cdot J_0 \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) \cdot t_0 + I \cdot 2 \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot J_{2m} \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) \cdot \cos(2m\omega \cdot t) dt$$

Beim letzten Summand wird jedoch über sehr viele Perioden des Kosinusterms integriert, so daß mit der bereits zu Beginn geforderten langen Belichtungszeit gegenüber der Schwingungsdauer gilt:

$$\int_0^{t_0} \cos(2m\omega \cdot t) dt = 0 \quad \text{für } t_0 \gg \frac{1}{v}$$

Daraus folgt aber, daß das gesamte Integral zu Null wird:

$$H = I \cdot t_0 + I \cdot J_0 \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) \cdot t_0\tag{4.10}$$

Und allgemein, d.h. bei verschiedenen Intensitäten von Objekt- ( $I_{\text{Obj}}$ ) und Rekonstruktionslicht ( $I_{\text{Ref}}$ ) gilt analog:

$$H = I_{\text{Obj}} \cdot t_0 + I_{\text{Ref}} \cdot t_0 + 2 \cdot \sqrt{I_{\text{Obj}} \cdot I_{\text{Ref}}} \cdot J_0 \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) \cdot t_0$$

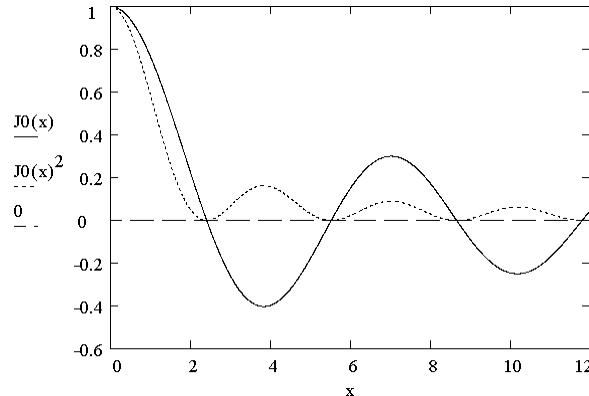
Der **Kontrast** auf dem Hologramm bei einer **harmonischen Schwingung** während der Aufnahme berechnet sich dann zu:

$$\begin{aligned}K(v) &= \frac{2 \sqrt{I_{\text{Obj}} \cdot I_{\text{Ref}}}}{t_0 \cdot I_{\text{Obj}} + t_0 \cdot I_{\text{Ref}}} \cdot \int_0^{t_0} \cos(\delta(t)) dt \\ K(v) &= \frac{2 \sqrt{I_{\text{Obj}} \cdot I_{\text{Ref}}}}{I_{\text{Obj}} + I_{\text{Ref}}} \cdot J_0 \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) = K_0 \cdot J_0 \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) \quad \text{mit } K_0 = K(0)\end{aligned}$$

<sup>37</sup> Mit Hilfe dieses Zusammenhangs kann übrigens die Bandbreite eines frequenzmodulierten Signals ( $U(t) = \hat{U} \cdot \cos[(\omega_{\text{Träger}} + \Delta\omega \cdot \cos \omega_{\text{Signal}} \cdot t) \cdot t]$  mit  $\Delta\omega$  = Frequenzhub) errechnet werden.

Da die Rekonstruktionsintensität immer noch proportional zum Quadrat der Modulation ist, ist sie proportional zum **Quadrat der BESSEL-Funktion 0-ter Ordnung**:

$$I_{\text{Rek}} \sim J_0^2\left(\frac{4\pi}{\lambda}x_0\right) \quad (4.11)$$



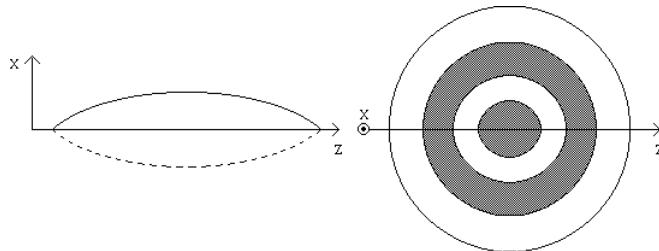
**Abbildung 4.53.: BESSEL-Funktion nullter Ordnung und deren Quadrat**

Aus Abb. 4.53. ist ersichtlich, daß mit wachsender Schwingungsamplitude  $x_0$  die Helligkeit der Rekonstruktion zunächst stark abnimmt und ein Minimum erreicht (1. Nullstelle der BESSEL-Funktion) bei:

$$\frac{4\pi}{\lambda}x_0 = 2,4 \quad \Rightarrow \quad x_0 \approx \lambda/5$$

Anschließend steigt die Helligkeit wieder, um bei  $x_0 = 0,44 \cdot \lambda$  wiederum ein Minimum zu durchlaufen, usw. Auf diese Art und Weise läßt sich anhand der Helligkeitsverteilung auf dem Hologramm die Schwingungsamplitude auf Bruchteile der Wellenlänge berechnen.

Abbildung 4.54. zeigt eine schwingende Membrane mit ortsabhängiger Amplitude ( $x = f(z)$ ) und die zugehörige Helligkeitsverteilung.



**Abbildung 4.54.: links: schwingende Membrane  
rechts: zugehörige Helligkeitsverteilung**

Die Abstände der Nullstellen der BESSEL-Funktion 0-ter Ordnung sind zunächst ungleichmäßig. Sie pendeln um den Wert  $\pi$ , dem sie sich mit zunehmendem Argument aber schnell nähern. Die Time - Average - Holographie läßt nur lineare oder harmonische Bewegungen zu; andere Bewegungsformen lassen sich nicht berechnen. Auch die Isolierung der Schwingung bereitet in der Praxis Probleme, da sich die Schwingung natürlich nicht auf den Aufbau übertragen darf. Das Problem des absolut ruhenden Aufbaus gilt ja für die gesamte Holographie; als Faustregel beträgt die Schwingungs- bzw. Bewegungstoleranz des Aufbaus  $\lambda/10$ .

Zum Schluß sei noch auf eine verbreitete, aber dennoch falsche Methode zur Erklärung der Time-average-Holographie bei Objektpunktbewegung hingewiesen: Ein harmonischer Oszillator hat an den Umkehrpunkten die geringste Geschwindigkeit. Daher ist die Wahrscheinlichkeit am größten, einen Außenpunkt zu holographieren. Erklärt wird nun, daß die Time-Average-Holographie so einer Doppelbelichtung beider Außenpunkte entspreche. Hierdurch kann aber z.B. nicht erklärt werden, warum der Kontrast mit der Amplitude abnimmt.

## **4.4. Realtime Time-Average Holographie**

Diese Art der Holographie erlaubt es, Schwingungsamplituden während des Schwingungsvorganges (Real-Time) mit dem Time-Average-Verfahren zu erkennen. Dazu wird zunächst eine Aufnahme des ruhenden Objektes gemacht (auch "Nullhologramm" genannt) und dieses anschließend nach den üblichen Real-Time Bedingungen (→ siehe Abschnitt 4.2.) in das nun in Schwingung versetzte Objekt zurückrekonstruiert. Durch den unterschiedlichen Kontrast kann man dann wieder die Schwingungsamplitude erkennen. Voraussetzung hierfür ist natürlich, daß sich das Objekt wieder mit entsprechend hoher Frequenz bewegt, damit das Auge durch seine Trägheit die Intensität nach dem TALBOTSchen Gesetz mitteln kann. Auch hier gelten wieder die Gleichungen 4.9 bis 4.11, wobei  $t_0$  jetzt der Beobachtungszeit, bzw. dem Reziprokwert der Verschmelzungsfrequenz (ca. 0,05 sec), entspricht.

In der Praxis wird die Realtime Time-Average Holographie durchgeführt, um die Resonanzschwingungen eines zu untersuchenden Objektes zu bestimmen. Dazu wird das Objekt zunächst mit einer relativ niedrigen Frequenz angeregt. Der Kontrast eines Schwingungspunktes wird dann mit zunehmender Frequenz kleiner, bis er am Resonanzpunkt ein Minimum durchläuft, um anschließend wieder zu wachsen. Dabei muß zwischen den Nulldurchgängen der Besselfunktion 0-ter Ordnung und dem Grenzwert dieser Funktion für große Schwingungsamplituden sorgfältig unterschieden werden<sup>38</sup>! Die so ermittelten Resonanzfrequenzen werden dann als Anregungsfrequenz für die herkömmliche Time-Average Holographie zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens benutzt (bei der ja für jede zu untersuchende Frequenz je eine Aufnahme gemacht werden muß). Die Realtime Time-Average Holographie dient also nur der (Vor-) Auswahl von Schwingungsfrequenzen bei Körpern mit unbekannten Resonanzfrequenzen (Motoren, Generatoren, etc.).

## **Real-Time-Verfahren mit stroboskopischer Rekonstruktion**

Für die Schwingungsanalyse ist ein Aufbau möglich, bei dem, nachdem zuerst wie üblich ein Referenzhologramm vom feststehenden Objekt angefertigt wurde, bei der Rekonstruktion das Objekt durch Anregung von außen zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird. Der Rekonstruktions-Laser wird nun mit gleicher Frequenz stroboskopisch getaktet. So werden immer dieselben Auslenkungszustände (Elongationen) beleuchtet und es ergibt sich in der Beobachtung ein feststehendes, zeitunabhängiges Interferogramm. Man kann allerdings nicht direkt auf die Schwingungsamplitude der einzelnen Objektpunkte schließen, da zwar alle Objektpunkte die gleiche Frequenz, möglicherweise jedoch unterschiedliche Phasenlagen zur Anregungsschwingung haben. Durch Verschieben des Auslösezeitpunktes für den Lichtimpuls kann aber festgestellt werden, ob sich die Auslenkung vergrößert oder vermindert (→ Phasenshiftverfahren).

Zur visuellen Beurteilung kann man einen Zeitlupeneffekt durch eine gegenüber der Anregungsschwingung leicht veränderten Lichtimpulsfrequenz erzielen. Für den Beobachter ergibt sich so eine kontinuierliche Phasenverschiebung von Lichtimpuls- und Anregungsfrequenz.

## **5. Weitere Anwendungen**

### **5.1. Light in Flight Holographie**

Im folgenden wollen wir noch zwei spezielle holographische Verfahren besprechen. Den Anfang bildet die Light in Flight Holographie, die das "Beobachten der Ausbreitung von Licht" ermöglicht ("Lichtzeitlupe").

Stellen wir uns dazu einen Impuls-Laser mit der hypothetisch kurzen Impulsdauer von 10 ps vor. In dieser Zeit würde das Licht ungefähr  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-11} \text{ s} = 3 \text{ mm}$  zurücklegen. Wir würden also Lichtimpulse von 3 mm Länge erzeugen. Diese sollen nach Abbildung 5.55. durch eine Linse divergent gemacht und auf der einen Seite an einem Schirm und auf der anderen Seite durch ein Spiegelsystem an einer holographischen Platte vorbeigeführt werden. Während der Lichtimpuls am Schirm entlang wandert, wird er von diesem gestreut, d.h. es entstehen Streuungskugelwellen. Diese Wellen treffen genau an einem bestimmten Ort P auf der holographischen Platte wieder auf den anderen Teil des ursprünglichen Lichtimpulses. Dieser Bereich P ist genau der Bereich, in dem beide (Teil-) Wellen den gleichen Weg zurückgelegt haben. Wegen des kurzen Impulses ist dieser Bereich auch äußerst klein und in Abbildung 5.55. sogar nur als Punkt P angedeutet. In Wirklichkeit hängt seine Größe natürlich von der Länge des Lichtimpulses und damit von der Kohärenzlänge ab. Nur in diesem Bereich können die Wellen also miteinander (konstruktiv) interferieren und ein "holographisches Bild" von dem Flächenelement des Schirmes erzeugen, das von dem Lichtimpuls eben zu einer bestimmten Zeit gestreift wird. Bei der Rekonstruktion sieht der Beobachter, der sich am Ort P hinter der

<sup>38</sup> Beobachtet wird ja:  $\int I \cdot dt = I \cdot t_0 + I \cdot J_0 \left( \frac{4\pi}{\lambda} x_0 \right) \cdot t_0 = a + b J_0(c x_0)$  mit Schwingungsamplitude  $x_0$ .

holographischen Platte befindet, nun auch nur das Flächenelement des Schirms, das am Ort P zum Hologramm beitrug.

Da der Lichtimpuls bei der Aufnahme weiter am Schirm entlangwandert, werden natürlich auch andere Flächenelemente des Schirms auf andere Stellen der holographischen Platte entsprechend abgebildet. Wenn der Beobachter also am entwickelten Hologramm vorbeigeht, sieht er immer nur bestimmte Flächenelemente des Schirms und gewinnt damit den Eindruck, daß das Licht am Schirm entlangwandert. Durch geeignete Anordnungen können auf diese Art und Weise die Dynamik von Lichtbrechung, -reflexion und -versatz verdeutlicht werden.

In der Praxis gibt es jedoch keine Laser mit Impulszeiten im Pikosekundenbereich. Diese könnten mit den kurzen Zeiten auch keine photographischen Platten schwärzen. Es kommen vielmehr herkömmliche Laser zum Einsatz, bei denen die Kohärenzlänge gesteuert werden kann. Durch entsprechend kurze Kohärenzlängen von wenigen Millimetern wird der gleiche Effekt erreicht.

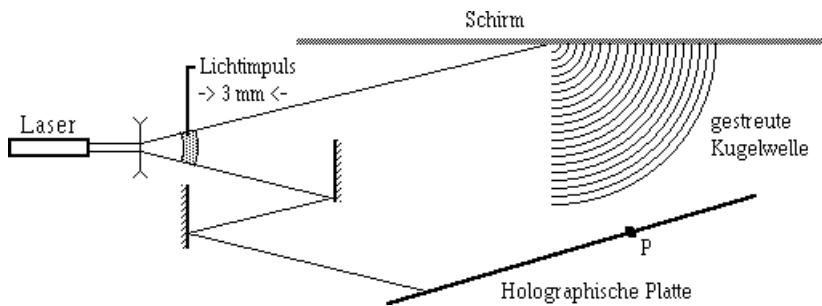


Abbildung 5.55.: Light in Flight Holographie

## 5.2. Konturenmessung

Bei der holographischen Konturenmessung werden Objekte mit "Höhenlinien" versehen, die einen Rückschluß auf die Kontur des Objektes zulassen. Verwendet wird der übliche Seitenbandaufbau und die Doppelbelichtungsmethode. Zunächst wird das Objekt wie üblich holographisch abgebildet und bei der zweiten Aufnahme die Beleuchtungswelle um einen Winkel  $\alpha$  verkippt (Abbildung 5.56.). Dadurch verändert sich die Phasenbeziehung zwischen Objekt und Referenzwelle. Wie wir aus Abschnitt 4.1. bereits wissen, können wir durch die Doppelbelichtungsmethode zeitlich nacheinander vorhandene Wellen zur Interferenz bringen. Genau das geschieht hier auch: Bei der Rekonstruktion wird neben dem Objekt auch das Gitter gesehen, das die beiden nacheinander vorhandenen ebenen Beleuchtungswellen durch Interferenz entsprechend Abbildung 3.36. und Gleichung 2.2 auf dem Objekt ergeben: Das Objekt sieht aus, als würde es durch einen Lattenzaun beleuchtet. Diese Linien sind ja parallel zur Winkelhalbierenden des Winkels, den die beiden Beleuchtungswellen miteinander einschließen und markieren je nach Winkel eine bestimmte Höhe des Objekts. Durch die schräge Betrachtung des Objekts bei der Rekonstruktion tritt eine geometrische Verzerrung ein, die die Auswertung u.U. etwas erschwert.

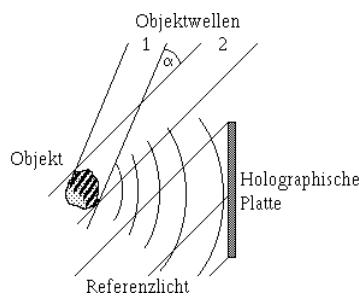


Abbildung 5.56.: Konturenmessung

Ein Nachteil dieses Verfahrens ist die "Schattenseite" des Objekts, daß heißt bei der Rekonstruktion sehen wir nur die Seite mit Höhenschichtlinien durchzogen, die der Beleuchtungswelle zugewandt war. In Abbildung 5.56. wäre das die rechte Seite (vom Hologramm aus gesehen), während die linke die Schattenseite wäre, auf der keine Höhenschichtlinien sind. Es gibt aber noch zwei weitere Möglichkeiten, Höhenschichtlinien zu erzeugen, nämlich durch Änderung der **Brechzahl** des Mediums, in dem sich das Objekt befindet, und durch Änderung der **Wellenlänge** des Beleuchtungslichtes.

Abbildung 5.65. zeigt einen möglichen Aufbau für eine Höhenschichtlinienerzeugung durch Änderung der Brechzahl. Er kann durch einen Teilerwürfel ähnlich Abbildung 4.51. realisiert werden. Die resultierende

Phase  $\delta_1$ , die eine reflektierte Welle eines beliebigen Punktes des Objekts nach Interferenz mit der Referenzwelle auf dem Hologramm hat, berechnet sich ja nach

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_1 \cdot 2 \cdot d = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot n_1 \cdot d \quad (5.1)$$

Ebenso gilt für die Phase  $\delta_2$  der zweiten Belichtung bei unverändertem Aufbau, aber veränderter Brechzahl  $n_2$ :

$$\delta_2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot n_2 \cdot d$$

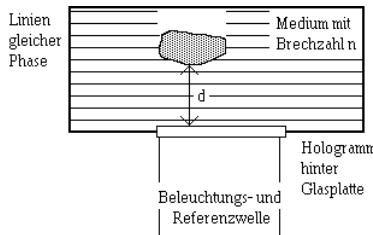
Die resultierende Phase am doppelbelichteten Punkt ist damit also bei der Rekonstruktion

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot (n_1 - n_2) \quad (5.2)$$

Diese Phase findet sich natürlich in den Abständen  $2\pi$  periodisch wieder, so daß sich die in Abbildung 5.65. eingezeichneten Linien gleicher Phase ergeben, die das Objekt überziehen. Der Vorteil gegenüber dem vorher besprochenen Verfahren liegt vor allem darin, daß das Objekt jetzt keine "Schattenseite" mehr hat. Der Abstand  $\Delta d$  zwischen den Linien gleicher Phase berechnet sich aus Gleichung 5.2:

$$\delta_1 - \delta_2 = N \cdot 2 \cdot \pi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot (n_1 - n_2) \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Leftrightarrow \Delta d = \frac{d}{N} = \frac{\lambda}{2 \cdot (n_1 - n_2)}$$



**Abbildung 5.57.: Formanalyse durch Brechzahländerung:** In den meisten Fällen kann die Brechzahl des Motivs nicht geändert werden. Für unsere Zwecke reicht es jedoch, wenn man den Brechzahlunterschied zur Umgebung ändert. So kann das Motiv z.B. bei der ersten Aufnahme sich unter Wasser befinden und während der zweiten in einer wässrigen Lösung von Zucker, Alkohol, Schwefelsäure o.ä..

Bei der dritten Möglichkeit der Erzeugung von Höhenschichtlinien verändern wir die Wellenlänge des Beleuchtungslichts. Aus Gleichung 5.1 erhalten wir durch Umformung

$$\delta_1 - \delta_2 = 4\pi \cdot d \cdot n \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (5.3)$$

Der Höhenunterschied  $\Delta d$  zweier aufeinanderfolgender Höhenschichtlinien errechnet sich wieder aus  $\delta_1 - \delta_2 = 2\pi$  zu:

$$\Delta d = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{2 \cdot n \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \quad 39.$$

<sup>39</sup> Mit  $n = 1$ ,  $\lambda_1 \approx \lambda_2 = \lambda$  und  $\lambda_1 - \lambda_2 = \Delta\lambda$  ergibt sich damit die Formel für die Kohärenzlänge, die wir ja aus der Wellenoptik schon kennen:

$$2 \cdot \Delta d = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

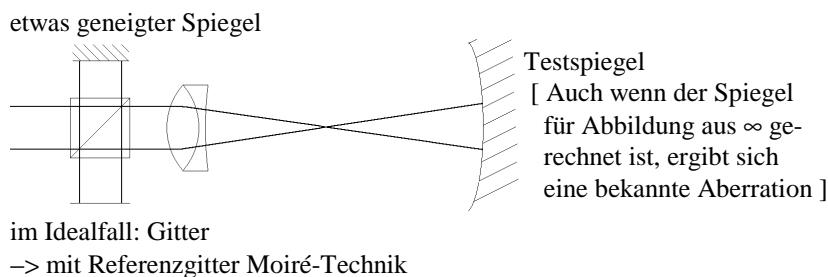
### **5.3. Computergenerierte Hologramme, diffraktive optische Elemente**

Es ist nicht immer möglich oder sinnvoll, Hologramme mit einem normalen praktischen Aufbau herzustellen. Aus den bisherigen Bemerkungen läßt sich aber ableiten, daß man bei der mathematischen Behandlung des „inversen Beugungsproblems“ eine beugende Struktur berechnen kann, die eine gewünschte Lichtwelle erzeugt, wenn man deren Parameter vorgeben kann. Diese Struktur, die als synthetisches Hologramm oder auch als diffraktives optisches Element (DOE) bezeichnet wird, setzt lediglich ein mathematisches Modell eines Wellenfeldes voraus.

Die entsprechenden Grundlagen gehen auf Arbeiten von Lohmann et al. (Detour-Verfahren) und Lee aus den Jahren 1967 bis 1970 zurück.

Werden einem Rechner die Oberflächendaten eines Gegenstandes (der gar nicht real existieren muß) eingegeben, so ist es möglich, für einen gedachten Aufnahmeaufbau die Belichtungsdaten für jeden Punkt des Hologrammes zu errechnen. Für die Ausgabe kann dann ein Plotter und eine anschließende 1:100 - Verkleinerung, Belichtung mit einem Scanner-ähnlichen Aufbau oder "Belichtung" des Films durch Elektronenstrahl verwendet werden.

Bei der Prüfung optischer Komponenten kann so ein Referenzinterferogramm erzeugt werden, mit dem die realen Prüflinge verglichen werden: In dem in Abbildung 5.58. dargestellten Aufbau ergibt sich für einen speziellen Kippwinkel des oberen Spiegels im Idealfall am Systemausgang ein Gitter. Reflektiert der zu testende Spiegel nicht in sich selbst, so ergibt sich ein anderes Muster. Die Abweichung vom Idealgitter lässt sich durch Vergleich mit einem Referenzgitter bestimmen, das man in dieselbe Ebene bringt. Auch wenn der Prüfling z.B. für parallelen Lichteinfall gerechnet ist, so weiß man doch, wie die Wellenfronten bei abweichendem Einsatz aussehen werden.



**Abbildung 5.58.: Beispiel für die Anwendung rechnergenerierter Hologramme bei der Prüfung von Spiegeln oder Linsen.**

Zur Minimalisierung des Rechenaufwandes wird für die Berechnung die Hologrammfläche in kleine Flächenelemente geteilt, die einzeln berechnet werden. Kurze Rechenzeiten werden durch möglichst geringe Elementanzahlen erreicht, sodaß eine Reduzierung der Anzahl der Flächenelemente erforderlich ist:

Es wird ein bestimmter Aufbau simuliert, z.B. FOURIER-Aufbau. Die erste (endlich begrenzte) Linse ergibt dann eine Objektfeldbegrenzung. Die erste Linse ergibt ohne Motiv für die Amplitude(Ort)-Funktion wie bekannt die Airy-Funktion. Aus den geometrischen Gegebenheiten führt das Auflösungsvermögen der ersten Linse schon zu einer Einschränkung der Größe eines Flächenelements in der FOURIER-Ebene. Der Abstand der ersten beiden Nullstellen (-1. und +1.) gibt die Rasterung vor. Innerhalb jedes Rasterpunkts wird die Phase als konstant angesehen und eine mittlere Amplitude angegeben. Für  $d = 50\text{mm}$  und  $f = 300\text{mm}$  entstehen so  $r = 1,22 \cdot \lambda \cdot k_{\text{eff}} \approx 4\mu\text{m}$  große Elemente. Für die sich ergebenden  $10^8$  Elemente mit jeweils  $10^8$  Beiträgen wären  $10^{16}$  Berechnungen erforderlich. Offensichtlich ist diese Anzahl zu groß. Das Motiv wird daher ebenfalls aufgerastert in  $n \cdot m$  Elemente. Die Anzahl Rasterelemente wird für das Objekt und das Hologramm gleich groß gewählt. Um negative Amplituden darstellen zu können, wird eine Konstante addiert und wir erhalten nur positive Ergebnisse, die z.B. mit Grauwerten darstellbar sind.

Im Ergebnis müssen Amplitude und Phase dargestellt werden. Dazu können verschiedene Verfahren angewendet werden:

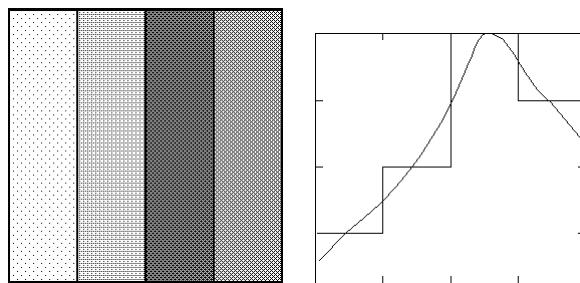
1. Detour-Verfahren:

**Abbildung 5.59.: Ein Flächenelement beim Detour-Verfahren**

Die Größe der nichttransparenten Fläche ergibt die Amplitudentransparenz. Durch die Lage des Feldes kann die Phase beeinflußt werden: Bei Beugung am Spalt wird durch die Lage des Spaltes ja nur die Phase und

nicht die Amplitude geändert<sup>40</sup>. Durch die fehlende Präzision des Plotters sind aber nur eine beschränkte Anzahl Stufen darstellbar.

## 2. Lee-Verfahren



**Abbildung 5.60.: Darstellung durch das Lee-Verfahren**

Hier wird ein Plotter benötigt, der Grauwerte darstellen kann. Es werden dann vier verschiedene Grauwerte ausgedruckt. Ähnlich wie beim Vierer-Phasenshiftverfahren kann die Phase so codiert und wieder ermittelt werden.

## 3. Kinoform-Verfahren

Man geht hier davon aus, daß man, wenn man ohnehin Einschränkungen machen muß, in jedem Fall die Phase übertragen will. Bei reinen Phasengittern ist ja bekanntlich eine höhere Beugungseffizienz möglich als bei reinen Amplitudengittern<sup>41</sup>. Es wird eine Photoemulsion im gewünschten Raster belichtet und anschließend an die Bleichung eine Reliefbildung vorgenommen, sodaß ein reines Phasenhologramm übrigbleibt. Dadurch sind besonders hohe Auflösungen möglich (< 1000 L/mm).

## 4. Moderne Verfahren

Durch die Entwicklung von neuen Berechnungsalgorithmen und der Methoden zur Herstellung von Mikrostrukturen haben sich neue Möglichkeiten für DOE eröffnet [3]. Im Labor für Kohärenzoptik des Instituts für Physik wurden hierzu einige interessante Anwendungen untersucht.

Diffraktive optische Elemente lassen sich grob in Strahlteilungs- und Strahlformungselemente klassifizieren. Beide liegen unterschiedliche Approximationen der Wellenausbreitung bzw. mathematische Beschreibungen zu Grunde. Bei der *Strahlteilung* ist die Fernfeldbeugung (Fraunhoferbeugung), die Beugungsmuster im Unendlichen beschreibt, Grundlage und kann durch eine Fouriertransformation beschrieben werden. Hier wird ein Laserstrahl in eine Schar von Strahlen bestimmter Intensität (Amplitude) und Richtung geteilt, die auf einer ebenen Projektionsfläche ein bestimmtes Muster erzeugen. Damit können nahezu beliebige zweidimensionale Muster erzeugt werden. Die *Strahlformung* bedeutet, daß das gebeugte Licht in einer bestimmten Position hinter der beugenden Struktur konvergiert. Hierzu können auch klassische Hologramme gezählt werden, da auch hier das rekonstruierte Bild eines Objektes in einem bestimmten Abstand entsprechend der Aufnahmeanordnung rekonstruiert wird. Im Falle der Rekonstruktion einer dreidimensionalen Struktur muß es sich also immer um ein Strahlformungselement handeln.

### Herstellung von diffraktiven Elementen

Das Ergebnis der Berechnung ist im Allgemeinen eine kontinuierliche komplexwertige Funktion, die die beugende Struktur beschreibt und die die Grundlage für ein diffraktives Element bilden soll.

Durch die Fabrikationstechnologien der Mikrolithographie lassen diese sich (allerdings nur begrenzt) umsetzen. Es werden hauptsächlich pixelierte Matrizen (diskrete Funktionen) mit einer begrenzten Zahl von Quantisierungsstufen, z.B. 2 oder 8 Höhenstufen in einem transparenten Material, realisiert, um eine Phasenmodulation zu erzeugen. Man reduziert hier also den Informationsgehalt einer kontinuierlichen komplexwertigen Funktion auf zwei oder acht Phasenstufen. Man könnte meinen, daß damit kaum noch ein komplexes Beugungsmuster zu realisieren sei. Darin liegt nun die Hauptarbeit beim Entwurf einer diffraktiven Struktur. In einem Iterationsprozeß wird unter Berücksichtigung aller Randbedingungen die optimale Struktur zur Erzeugung des Beugungsmusters bestimmt.

<sup>40</sup> Für einen um  $d$  verschobenen Spalt der Breite  $b$  gilt:

$$\frac{A(u)}{A_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x+d}{b}\right) \cdot e^{-i \cdot k_f u x} dx = \frac{2f}{k_f u} \cdot e^{-i \cdot k_f u \cdot \frac{1}{2} \cdot d} \sin(k_f u \cdot \frac{1}{2} \cdot b) = e^{i \cdot k_f u \cdot \frac{1}{2} \cdot d} \cdot b \cdot \text{sinc}\left(\frac{ub}{\lambda f}\right)$$

Dabei ist der erste Faktor ausschließlich für die Phase und der zweite ausschließlich für die Amplitude zuständig.

<sup>41</sup> ↗ zu Beugungseffizienz vgl. Seite 26

Schließlich können selbst mit nur zwei Phasen- (Höhen-) stufen eines diffraktiven Elements erstaunlich differenzierte Wellenfronten realisiert werden.

#### Anwendung von berechneten holographischen Strukturen

Als Beispiel wollen wir hier zuerst einen Strahlteiler für technische Anwendungen vorstellen. Die Aufgabe dieser optischen Komponente ist es, einen Laserstrahl in 40 Teilstrahlen auf einem Kegelmantel aufzuteilen. Hier sollte ein Öffnungswinkel des Kegels von  $17^\circ$  und eine hohe Positionsgenauigkeit sowie eine geringe Abweichung der Intensitäten in den Einzelstrahlen voneinander erreicht werden. Die theoretischen Parameter dieser Struktur wurden berechnet. Sie ergaben eine Beugungseffizienz, also ein Verhältnis von Intensität im gebeugten Licht zur Intensität im ungebeugten Licht, von 66%, eine entsprechend dem vorgegebenen Raster exakte Positionierung der Teilstrahlen sowie eine Intensitätshomogenität von  $\pm 1,5\%$ . In Abbildung 5.61 ist eine Aufnahme der realisierten Struktur unter dem Rasterelektronenmikroskop zu sehen, welche die kleinsten Strukturen von 500 nm auflösen kann.

**Abbildung 5.61:** Rasterelektronen-mikroskopische Aufnahme einer binären diffraktiven Struktur

Die Effizienzmaße und Strukturtiefen können bei Messungen mit verschiedenen Wellenlängen rekursiv bestimmt werden. Der Phasenhub wird bei einem solchen diffraktiven Element durch die Änderung der optischen Weglänge erreicht, welche durch Höhe und Brechungsindex des Materials bestimmt wird. Diese optische Weglängenänderung (Phasenhub) ist natürlich nur an eine bestimmte Wellenlänge angepaßt, d.h. das diffraktive Element zeigt nur bei der speziellen Entwurfswellenlänge die optimale Effizienz. Die einmal hergestellte Strukturtiefe lässt sich nicht mehr variieren. Wird diese Struktur aber als Master für nachträgliche Kopien genutzt, kann das Material und damit der Brechungsindex der kopierten Strukturen in gewissen Grenzen gewählt werden. An unserem Labor wurden Replikationen von Mikrostrukturen realisiert, mit denen bei ausgewählten Brechungsindizes optimale Beugungseffizienzen für andere Wellenlängen erreicht wurden. Es können damit auch Herstellungsabweichungen nachträglich korrigiert werden, denn Varianzen im Bereich von 20 nm sind technisch nicht zu vermeiden, verursachen aber schon eine deutliche Verringerung der Effizienz. Da die Herstellung der „Master-Mikrostrukturen“ sehr teuer ist, liegt ein großes Interesse an der Entwicklung von Replikationstechnologien hoher Qualität und der Variationsmöglichkeit bezüglich der Wellenlänge. Mit Polymeren, deren Brechungsindizes von 1,41 bis 1,64 variiert, sind wir zur Zeit schon in der Lage in Laserwellenlängenbereichen von 488 nm bis 532 nm bzw. 532 nm bis 670 nm Replikate anzupassen. Die Auflösung bzw. die Größe der Signalinformation ist letztlich nur von den Entwurfsparametern bzw. der Matrixgröße abhängig.

#### Erweiterungen auf mehrfarbige und dynamische Rekonstruktionen

Nun stellt sich schnell die Frage der begrenzten Variabilität der Beugungsbilder. Sie sind monochromatisch und statisch. Natürlich kann man auch mehrfarbige Beugungsbilder erzeugen, der technische Aufwand ist jedoch enorm. Wie bei einem digitalen RGB-Bild muß man für die Anteile des roten, grünen und blauen Lichts entsprechende Elemente berechnen und herstellen. Weiterhin müßte die Helligkeit wie beim Monitor an das Helligkeitsempfinden des Auges angepaßt und wegen der Wellenlängenabhängigkeit der Beugung die unterschiedlichen Beugungswinkel durch eine geeignete geometrische Anordnung ausgeglichen werden. Prinzipiell ist dies realisierbar. Erste Versuche hierzu haben wir bereits erfolgreich durchgeführt.

Interessanter ist allerdings die Realisierung dynamischer Beugungsbilder, also von bewegten holographischen Rekonstruktionen. Erforderlich ist hierfür ein Medium, welches elektronisch ansteuerbar und mit hoher Auflösung Amplituden und/oder Phasen einer Lichtwellenfront modulieren kann. Auf Grund verschiedener elektro-, akusto- und magneto-optischer Effekte gibt es bereits diverse Systeme die eine derartige Modulation von Wellenfronten zulassen. Die am weitesten entwickelte Technologie hierfür ist die der Flüssigkristalldisplays (Liquid Crystal Displays, LCD), die durch einen elektro-optischen Effekt als doppelbrechendes Medium wirken. Wichtig ist hier die genaue Kenntnis ihrer optischen Eigenschaften hinsichtlich der Umsetzung der angesteuerten Grauwerte in Parameter, die die Amplitude oder die Phase des Lichtes beeinflussen. Wir haben uns in der letzten Zeit ausführlich damit beschäftigt und sind nun in der Lage, diffraktive Elemente und sogar Hologramme, die von einem realen Lichtwellenfeld aufgenommen wurden, durch Ansteuern eines Displays aus dem Computer optisch mit guter Beugungseffektivität zu rekonstruieren.

So können mit dem LCD dynamisch Beugungsmuster mit der Wiederholfrequenz der Graphikkarte vom Computer angesteuert werden, so daß man, ähnlich den ersten Kinofilmen, Animationen erzeugen kann. Prinzipiell sind mit den 256 Graustufen, die 256 Spannungswerten an den Flüssigkristallzellen entsprechen, hier

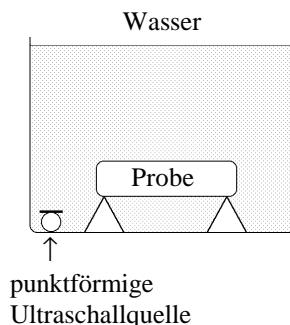
relativ leicht 256 Phasenstufen realisierbar. Die Informationstiefe, also die Auflösung der Beugungsbilder, ist natürlich durch die begrenzte Pixelanzahl eines solchen Displays limitiert. Dennoch können Gitter, Strahlteiler und Fourierhologramme rekonstruiert werden

Zur Zeit werden mit diesem System auch digital aufgenommene Hologramme rekonstruiert. In diesem Fall werden Wellenfelder erzeugt, die an einem bestimmten Punkt im Raum zu einem dreidimensionalen Objekt konvergieren. Damit ergeben sich neue Möglichkeiten für hologramm-interferometrische Meßverfahren, die nun durch die Lichtmodulation mittels LCD eine digitale Schnittstelle besitzen.

Durch die Entwicklung der Mikrostrukturierungs- und Displaytechnologie in der Richtung zu Displays mit reduzierter Pixelgröße und größerer Pixelanzahl sind auch für deren Anwendung in dynamischen phasenmodulierenden Systemen weitere Möglichkeiten bzw. eine erhöhte Leistungsfähigkeit zu erwarten. Es werden zur Zeit schon transmittive Displays mit bis hinab zu 10 µm Pixelgröße und 1280 x 1024 Bildpunkten hergestellt, die im Falle guter phasenmodulierender Eigenschaften eine erhebliche Steigerung der Informationstiefe gegenüber unseren derzeitigen Systemen zulassen würden. Die Untersuchung der Eigenschaften dieser Displays für unsere Zwecke steht allerdings noch aus.

## **5.4. Akustische Holographie (Ultraschallholographie)**

Mit Hilfe der Holographie können akustische Felder sichtbar gemacht werden. Durch die unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien (z.B. Luft:  $c = 330 \text{ m/s}$ ; Wasser  $c = 1500 \text{ m/s}$ ; Stahl  $c = 5000 \text{ m/s}$ ) ergeben sich die Brechzahlunterschiede.



**Abbildung 5.612.: Beispiel eines Aufbaus für Ultraschallholographie**

Im Beispiel in Abbildung 5.652. wird an der Wasseroberfläche gemessen, indem die Oberfläche mit einem sehr kleinen Piezomikrofon abgescannt wird. Dabei wird Amplitude und Phasenlage gegenüber dem Sender an jedem Punkt der Wasseroberfläche registriert. Da Phase und Amplitude der direkten Welle bekannt sind, kann die durch das Objekt gegangene Welle aus diesen Daten zurückgerechnet werden. Für jede beliebige andere direkte Welle ist daher das Interferogramm nachträglich ausrechenbar. Auch die Rekonstruktion des Hologramms ist durch den Rechner möglich. Von den gemessenen Daten kann auch anschließend ein optisches Hologramm erzeugt werden. Es sind Auflösungen bzgl. des Objekts in der Größenordnung von mm möglich.

Die Herstellung eines optischen Hologrammes ist aber auch direkt möglich: Die schallbestrahlte Wasseroberfläche stellt für reflektiertes Licht ein Phasenobjekt dar. Trifft das reflektierte Licht auf eine Linse, so entsteht in deren Brennebene ein FOURIER-Spektrum, das zusammen mit einer optischen Referenzwelle ein FOURIER-Hologramm ergibt.

Will man nicht an der Oberfläche, sondern an einer beliebigen Stelle das Hologramm aufnehmen, so kann das Wasser mit Fixiermittel versetzt werden und ein optisch diffus belichtetes Photopapier verwendet werden. Durch die örtlich unterschiedliche Bewegung ergibt sich dann eine unterschiedliche Fixage des Materials.

## 5.5. FRAUNHOFER Holographie <sup>42</sup>

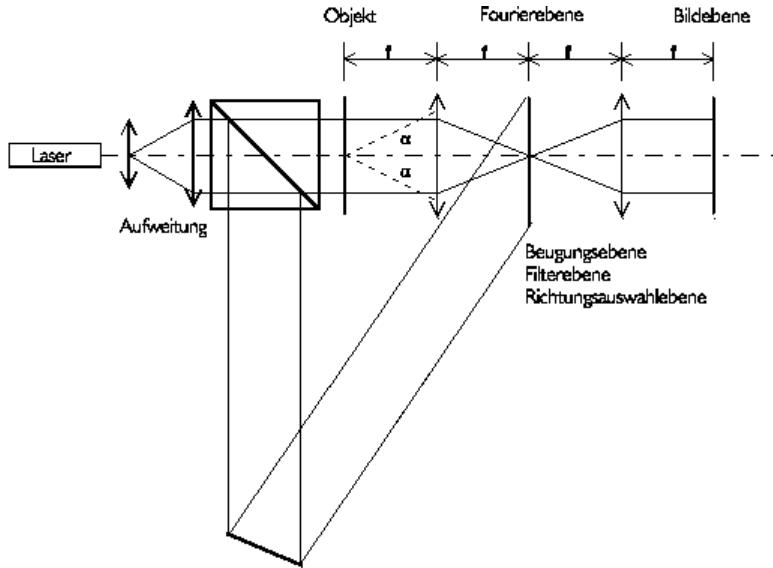


Abbildung 5.62.: FRAUNHOFER-Holographie

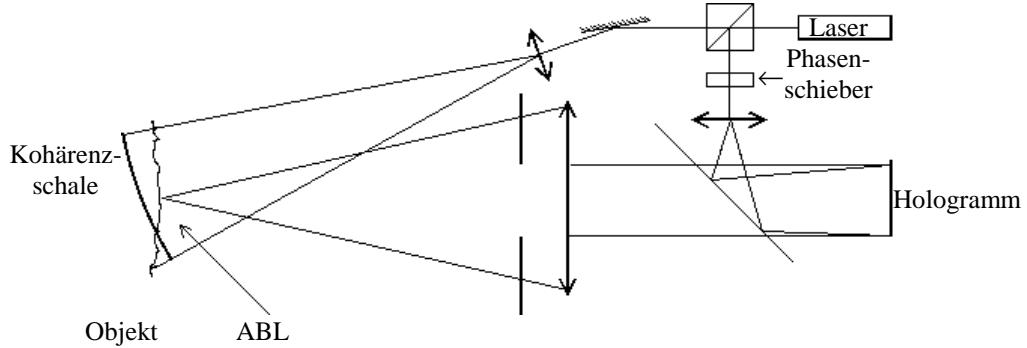
Wird ein Hologramm von der FOURIER-Ebene des Objekts angefertigt, so wird das FOURIER-Spektrum sowohl mit Amplitude als auch Phase aufgezeichnet. Dies ist zum Beispiel bei der Zeichenerkennung durch optische Filterung wichtig: Grundsätzlich ist es ja auch denkbar, daß das FOURIER-Spektrum zum Beispiel des Buchstabens "E" durch herkömmliche Photographie in der FOURIER-Ebene aufgezeichnet wird. Mit Hilfe des so entstandenen Frequenzfilters können wir aus einem beliebigen Motiv, etwa einer Buchseite, alles herausfiltern bis auf eben den Buchstaben "E". In der Bildebene des 4-f-Aufbaus werden dann nur die Stellen hell erscheinen, die dem jeweiligen Zeichen des entsprechenden Filters, der sich gerade in der FOURIER-Ebene befindet, entsprechen. Da sich bei einer Drehung eines Objektes auch sein Spektrum mitdrehen und bei einer Maßstabsveränderung sich das Spektrum gegenläufig vergrößert bzw. verkleinert, werden mit dieser Methode auch gedrehte bzw. in der Größe verschiedene Objekte voneinander unterscheiden. Dieses Verfahren arbeitet um so zuverlässiger, je komplizierter die Strukturen sind. Allerdings enthalten die so hergestellten Ortsfrequenzfilter ja nur die Information über die Amplitude und nicht über die Phase, so daß das Licht am Systemausgang fehlerhafte Komponenten enthält, die dem Bild überlagert sind und so der Interpretation hinderlich sind. Diese Fehler treten nicht auf, wenn das Ortsfrequenzfilter holographisch aufgenommen wird.

Objektlicht und Referenzlicht sind ja vom Wesen her nicht voneinander unterscheidbar. Genauso wie es möglich ist, die Objektwelle zu rekonstruieren, indem man das Hologramm mit der unveränderten Referenzwelle beleuchtet, kann das Referenzlicht rekonstruiert werden, indem man mit der Objektwelle beleuchtet. Auch hier wird nur dann das Referenzlicht richtig rekonstruiert, wenn das richtige Objektlicht vorhanden ist. Wenn allerdings mit einem senkrecht zur Achse verschobenen Objektpunkt beleuchtet wird, ändert sich der Winkel der rekonstruierten Referenzwelle. Von der Lage des rekonstruierten Referenzlichtes kann also auf die Lage des beleuchtenden Objektpunktes geschlossen werden.

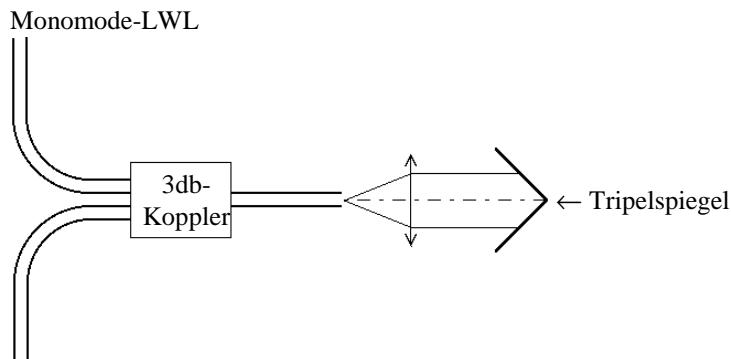
Außer zur Zeichenerkennung kann diese Anordnung auch dafür verwendet werden, um die (bekannte) Übertragungsfunktion eines Systems zu kompensieren, indem mit der inversen Übertragungsfunktion gefiltert wird.

<sup>42</sup> JOSEPH FRAUNHOFER (1787-1826)

## 5.7. Einäugige Verfahren

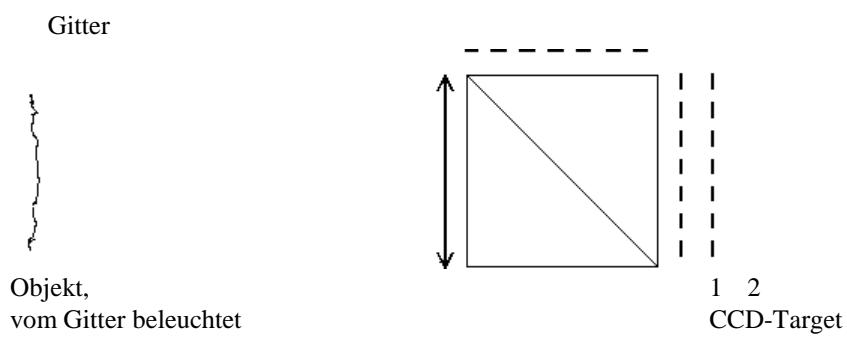


**Abbildung 5.63.:** Bei kurzer Kohärenzlänge ist die Kohärenzbedingung nur für eine schmale Bild-Schale gegeben. Die Aperturblende wird so gewählt, daß ein Speckle auf ein Pixel abgebildet wird.



**Abbildung 5.64.:** Phasenschieber: Durch Verschieben des Tripelspiegels kann die Bild-Schale verschoben werden.

Die Apertur wird so gewählt, daß die Punktbildfunktion gerade der Größe eines Pixels entspricht. Ein Interferogramm ergibt sich nur für die Stellen des Objekts, für die die Kohärenzbedingung erfüllt ist. Wird der Tripelspiegel zuerst ganz weit nach rechts geschoben, so ergibt sich kein Bild. Dann wird der Spiegel langsam herangeschoben, bis sich eine Änderung des Bildes ergibt. Diese muß dann durch das Objekt hervorgerufen sein. (-> Kohärenzabgleich). Wird ein Laser mit geringer Kohärenzlänge verwendet, kann so die Oberflächenbeschaffenheit des Objektes ermittelt werden. Von Vorteil ist bei diesem Verfahren (wie bei allen nur-optischen Verfahren), daß es ohne Rechnung auskommt und daher sehr schnell ist.



(In Stellung 1 opt. gleicher Ort wie Gitter)

**Abbildung 5.65.:** Konturmessung durch Aufprojektion eines Gitters

In einem anderen einäugigen Verfahren wird auf das Objekt ein Gitter aufprojiziert (siehe Abbildung 5.65.). Für die erste Position des CCD-Targets wird (mit Hilfe des Phasenshifts des Gitters) das Kontrastbild des Objekts hergestellt. Ebenso wird mit der zweiten Position des Targets verfahren. Aus der Kontrastdifferenz für jeden Punkt läßt sich der Abstand vorzeichenrichtig schließen und man erhält dann die Kontur des Objekts. (Wird die Kontrastfunktion wieder abgebildet, so ergibt sich eine Quadrierung der Kontrastfunktion und damit eine höhere Genauigkeit.)

## **6. physikalische Grundlagen der Aufzeichnung holografischer Gitter**

### 6.1. Klassifizierung der Hologrammtypen

-Ddünne- und dicke Hologramme

Die Beschreibung der Lichtbeugung an Gittern unterscheidet zwischen der Beugung an dünnen- und dicken-/oder Volumengittern. Im ersten Fall wird das einfallende Wellenfeld an einer zweidimensionalen Struktur gebeugt, bei Volumengittern hingegen wird von einem weiteren, dritten, elektromagnetischen Feld, im Medium, ausgegangen. Für beide Gittertypen definiert das Verhältnis der Intensität des gebeugten, zur Bildentstehung beitragenden Lichtes zur Gesamtintensität des einfallenden Lichtes, die Beugungseffektivität:

$$\eta = \frac{I_R}{I_0}$$

In der Praxis ist der Übergang zwischen "dünnen" und "dicken" Hologrammen fließend. Eine Einteilung erfolgt über den Dickenparameter Q:

$$Q = \frac{2\pi\lambda d}{n_0 \Lambda^2}$$

wobei: d - Schichtdicke

$n_0$  - Brechzahl des Aufzeichnungsmediums

$\Lambda$  - Streifenabstand

Für Volumenhologramme ist  $Q \geq 10$ , für dünne Hologramme  $Q \approx 1$ . Dazwischen liegt eine Mischform vor.

#### - Reflexions- und Transmissionshologramme

Bei der Aufzeichnung eines Hologramms werden im Medium Materialparameter je nach Profil des aufzeichnenden Interferenzmusters moduliert. Bereiche ähnlicher Modulationsstärke stellt man sich als reflektierende Schichten (größer: Streifen) vor.

Bezogen auf die Lage der reflektierenden Streifen im Gitter gibt es zwei grundsätzliche Fälle:

Im Reflexionsgitter verlaufen die Streifen parallel zur Hologrammoberfläche, im Transmissionsgitter senkrecht; bzw. hinsichtlich ihrer Wirkung formuliert: Beim Reflexionsgitter liegen einfallender und intensitätsreichster, gebeugter Strahl auf der gleichen Hologrammseite; beim Transmissionsgitter entgegengesetzt.

Dementsprechend ergibt sich der Streifenabstand: Betrachten wir zwei ebene Wellen  $A_1$  und  $A_2$  die auf das Medium einfallen und dort ein Reflexionsgitter modulieren. Streifen entstehen an Orten konstruktiver Interferenz, d.h. der optische Wegunterschied zwischen  $A_1$  und  $A_2$  muß ein Vielfaches von  $\lambda$  sein:

$$\Delta s = \overline{AB} + \overline{BC} = m\lambda$$

$$\frac{d}{n}(\cos \alpha' + \cos \beta') = m\lambda$$

$$\Lambda = \frac{d}{K} = \frac{\lambda}{\cos \alpha' + \cos \beta'}$$

Für Reflexionsgitter:

Analog für Transmissionsgitter:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sin \alpha' + \sin \beta'}$$

### Amplituden- und Phasenhologramme

Je nachdem ob im Aufzeichnungsmedium Absorptions- oder Brechzahl moduliert sind, wird weiterhin zwischen Amplituden- bzw. Phasenhologrammen unterschieden. Die Amplitudentransmission,  $T_A$ , beschreibt die Veränderungen von Amplitude und Phase einer einfallenden Welle infolge der Transmission durch das Material. Die einfallende Welle werde durch:

$$A_0(r) = a_0(r) \exp[i\phi_0(r)]$$

beschrieben. Die transmittierte Welle sei:

$$A_t(r) = a_t(r) \exp[i\phi_t(r)]$$

Somit ergibt sich die Amplitudentransmission:

$$T_A = \frac{A_t}{A_0} = \frac{a_t}{a_0} \exp[i(\phi_t - \phi_0)]$$

wobei  $A_0$  zumeist als konstant vorausgesetzt werden kann:

$$T_A = a_t(r) \exp(i\phi_t)$$

Ein Phasenhologramm liegt dann vor, wenn:  $a_t = \text{const.}$  und  $\phi_t \neq \text{const.}$ ; ein Amplitudenhologramm, wenn:  $a_t \neq \text{const.}$  und  $\phi_t = \text{const.}$ . Praktisch absorbiert natürlich jedes Phasenhologramm auch. Eine Phasenänderung entsteht durch eine Änderung der optischen Weglänge im Medium:

$$\Delta\phi = \phi_t - \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda \cos \Theta} [d\Delta n + (n - 1)\Delta d]$$

(n-1) bezieht sich dabei auf Luft als Umgebung. Im Extremfall eines dünnen Phasenhologramms ist die Brechzahlmodulation vernachlässigbar, dann liegt ein sogenanntes Oberflächenhologramm vor (Beispiel: Hologramme in Photoresist; wobei hier die Oberfläche noch verspiegelt wird; Thermoplastmaterialien).

Ist die Amplitudentransmission der Belichtung ( $H$ ) proportional, so wird vom linearen Bereich des Aufzeichnungsmediums gesprochen; es gilt hier also:

$$T_A = \beta t E = \beta H$$

wobei  $\beta$  im Fall eines Amplitudenhologramms als Steilheit bezeichnet wird.

-Zur Beugungstheorie ebener dielektrischer Volumengitter

Seit 1930 wurden über 400 Arbeiten auf diesem Gebiet veröffentlicht. Anwendungsgebiete dieser periodischen Strukturen sind die Akusto-Optik, die Holografie, die Integrierte Optik.

Zur Analyse des elektromagnetischen Feldes innerhalb des Volumengitters gibt es zwei prinzipielle Näherungen: Die Modaltheorie und die Theorie gekoppelter Wellen. Sie sind alternative Methoden zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes im Medium. In ihrer allgemeinen Form, der exakten Beschreibung des Problems ohne Näherungen, sind sie äquivalent.

Bei der Lösung der Wellengleichungen werden, je nach konkreter Fragestellung, Randbedingungen gewählt und Näherungen gemacht, z.B. Vernachlässigung von Beugungsordnungen oder der zweiten Ableitung in der Wellengleichung, Annahmen zur Modulationsstärke des Gitters, Grenzflächeneffekte.

Eine ausgezeichnete Grundlage für das Verständnis der theoretischen Beschreibungen von Volumengittern bietet die, in jeder Hinsicht lesenswerte, Arbeit von Kogelnik. Seine "Coupled Wave Theory" (CWT) zweier Wellen beschreibt grundlegende Fälle der Beugung an Reflexions-/Transmissions- Amplituden- bzw. Phasengittern.

Folgende Einschränkungen bzw. Voraussetzungen liegen der CWT nach Kogelnik zugrunde:

- es liege ein dickes Hologramm vor
- das einfallende Licht sei linear polarisiert- damit ist die Wellengleichung skalar formulierbar
- es werden nur zwei Wellen (einfallende Welle S und gebeugte Welle R) betrachtet
- zur Vereinfachung sei Brechungsindex Umgebung/Medium gleich
- Die Gitterstreifen seien eine räumliche Modulation von  $\varepsilon$  (Amplitudengitter)bzw.  $\sigma$  (Phasengitter):

$$\underline{\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\overline{K} \cdot \overline{r})}$$

$$\underline{\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\overline{K} \cdot \overline{r})}$$

Die relativen Änderungen des Materialparameters seien klein, das gilt in allen praktischen Fällen.

- Die Ausdehnung des Gitters sei groß gegenüber der Schichtdicke.

Wir erhalten eine skalare Braggbedingung:

$$\underline{\cos(\phi - \Theta) = \frac{K}{2\beta}}$$

Diese Formulierung finden wir auch im reziproken Gitter der Festkörpertheorie. Sie bildet die Grundlage für die sog. Ewaldkonstruktion, mit deren Hilfe bei der Röntgenbeugung an Kristallen Rückschlüsse über deren Struktur gezogen werden. Abstand und Lage der Netzebenen des Kristalls im Raum lassen nur für Strahlen bestimmter Ausbreitungsrichtung konstruktive Interferenz zu. Aus dem Wellenvektor des einfallenden Primärstrahls und der räumlichen Lage der Beugungsreflexe lassen sich diese Parameter ermitteln. In Analogie dazu können z.B. Volumengitter für eine von der Aufnahme abweichende Rekonstruktionswellenlänge dimensioniert werden. Aus der Kenntnis von rekonstruierender Wellenlänge, Braggwinkel und Raumfrequenz des gewünschten Gitters (z.B. für den Infrarotbereich), ergibt sich die Aufnahmegerometrie bei einer anderer Wellenlänge.

Kogelnik gelangte schließlich erstmalig zu Aussagen über die mögliche Beugungseffektivität von Volumengittern, die praktisch Bestätigung fanden. Angegeben seien hier nur die Ausdrücke für verlustlose, ungeneigte (Phasen-) Transmissionsgitter:

$$\underline{\eta = \sin^2\left(\frac{\pi\Delta n d}{\lambda \cos\Theta_0}\right)}$$

und Reflexionsgitter:

$$\underline{\eta = \tanh^2\left(\frac{\pi\Delta n d}{\lambda \cos\theta_0}\right)}$$

Maximale Beugungseffektivitäten von 100% ergeben sich für die Fälle:  $\Delta n d = (\lambda \cos\Theta_0)/2\pi$  (Transmission), bzw.:  $\pi\Delta n d / \lambda \cos\Theta_0 \rightarrow \infty$  (Reflexion). Bemerkenswert ist die Oszillation der Beugungseffektivität für Transmissionsgitter. Praktisch ist eine Übermodulierung der Brechungzahl über den ersten Peak hinaus nur schwer erreichbar. Absorption wird durch einen weiteren Faktor, in bekannter Form, berücksichtigt:

$$\exp\left(-\frac{\alpha d}{\cos \Theta_0}\right)$$

Weiterhin wird die Beugungseffektivität auch in Abhängigkeit von der Gitterneigung, bei Rekonstruktion außerhalb des Braggwinkels, ebenfalls für dicke Amplitudengitter, angegeben. Somit ergibt sich folgender Überblick über maximal erreichbare Werte der Beugungseffektivitten:

Amplitudenhologramme:		Phasenhologramme:		
	dünn	dick	dünn	dick
Transmission	0,0625	0,037	0,339	1
Reflexion		0,072		1

Phasenhologramme diffus reflektierender Objekte können jeweils ca. 2/3 davon erreichen.

## Holografische Informationsverarbeitung

Die Entwicklung der Holographie wurde stimuliert durch die Anwendung der Informationstheorie auf die Optik. Umgekehrt sind holographische Techniken eingegangen in die Synthese von komplexen Filtern für die Bildverstärkung und Bildwiederherstellung sowie für die Zeichenerkennung.

Ein Hologramm ist die Aufnahme eines Interferenzmusters, das gebildet wird aus zwei Wellenfeldern. Ist der Aufnahmeprozess linear, gilt

$$T_A(x, y) = T_o + \beta T_b [ A_o^2(x, y) + A_R^2(x, y) + A_o A_R^* + A_o^* A_R ]$$

Normalerweise wird im Rekonstruktionsprozess das Hologramm mit der Referenzwelle beleuchtet und dabei die Objektwelle rekonstruiert. Der umgekehrte Vorgang ist jedoch genauso möglich. Insofern ist die holographische Speicherung eine assoziative Speicherung.

In einem optischen System mit zwei gleichen Linsen, die sich in einem Abstand von  $2f$  befinden, liege die Eingangsebene  $P_1$  im Abstand  $f$  vor der ersten Linse und die Ausgangsebene  $P_3$  im Abstand  $f$  hinter der zweiten Linse. Die gemeinsame Brennebene beider Linsen sei  $P_2$ . Zwei transparente Objekte mögen in der Ebene  $P_1(x, y)$  mit den Amplitudentransmissionen  $f_1(x, y)$  und  $f_2(x, y+a)$  von einer ebenen Welle beleuchtet werden. Die resultierende komplexe Amplitude in der Ebene  $P_2(\xi, \eta)$  ergibt sich dann als

$$G(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta) + F_2(\xi, \eta) e^{i2\pi\eta a}$$

mit

$$F_1(\xi, \eta) = F\{f_1(x, y)\}$$

und

$$F_2(\xi, \eta) = F\{f_2(x, y)\}.$$

Wird diese Amplitudenverteilung in einem Medium linear aufgezeichnet, erhalten wir ein Hologramm mit der folgenden Amplitudentransmission:

$$\begin{aligned} T_A(\xi, \eta) &= T_o + \beta t_b G(\xi, \eta)^2 \\ &= T_o + \beta t_b [ F_1(\xi, \eta)^2 + F_2(\xi, \eta)^2 \\ &\quad + F_1(\xi, \eta) F_2^*(\xi, \eta) e^{2\pi i \eta a} \\ &\quad + F_1^*(\xi, \eta) F_2(\xi, \eta) e^{-2\pi i \eta a} ] \end{aligned}$$

Wird dieses in die Aufnahmeposition zurückgebracht und mit  $f_2(x, y+a)$  allein beleuchtet, ergibt sich für die komplexe Amplitude des durch diese Transmissionsverteilung hindurchtretenden Lichtes

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= T_A(\xi, \eta) F_2(\xi, \eta) e^{i2\pi i \eta a} \\ &= T_o F_2(\xi, \eta) e^{-2\pi i \eta a} \\ &\quad + \beta t_b [ F_1(\xi, \eta)^2 + F_2(\xi, \eta)^2 ] F_2(\xi, \eta) e^{-2\pi i \eta a} \\ &\quad + \beta t_b F_2(\xi, \eta)^2 F_1(\xi, \eta) \\ &\quad + \beta t_b F_2(\xi, \eta)^2 F_1^*(\xi, \eta) e^{-4\pi i \eta a} \end{aligned}$$

Die komplexe Amplitude in der rückwärtigen Brennebene der zweiten Linse ist gegeben durch

$$h(x, y) = F \{ H(\xi, \eta) \}.$$

Der Term, der von Interesse ist, da er der einzige ist, der auf der Achse liegt, ist das primäre rekonstruierte Bild, das gegeben ist durch die Fourier-Transformation des dritten Terms

$$\begin{aligned} h_3(x, y) &= F \{ F_2(\xi, \eta)^2 F_1(\xi, \eta) \} \\ &= [f_2(x, y)^* f_2(x, y)] \otimes f_1(x, y) \end{aligned}$$

wobei durch \* die Korrelation und durch  $\otimes$  die Faltung symbolisiert sind.

Als Schlußfolgerung daraus ergibt sich, daß ein perfektes Bild von  $f_1$  rekonstruiert wird, wenn die Autokorrelation von  $f_2$  eine Delta-Funktion ist. Das ist der Fall, wenn  $f_2$  eine Punktquelle ist. Jedoch auch im Falle, daß  $f_2$  eine zufällig veränderliche Transmissionsfunktion ist, ergibt sich ein Bild. Dann ist die Autokorrelation von  $f_2$  eine schmale Spitze über einem relativ schwachen Untergrund, dessen Ausdehnung die doppelte Größe von  $f_2$  hat. Es ist jedoch von wesentlicher Bedeutung, die Geometrie der Aufnahme bei der Rekonstruktion einzuhalten. Dies folgt aus der Herleitung, aus der hervorgeht, daß das Bild verschwindet, wenn sich die Rekonstruktionsquelle um die Breite des Autokorrelationspeaks verschiebt. Insofern ist allein diese Aufnahmegerometrie zu Korrelationsuntersuchungen nicht geeignet.

### Holografische Zeichenerkennung

Die Eigenschaft der Assoziativspeicherung macht es möglich, ein Hologramm zur Zeichenerkennung zu nutzen. Dies ist im Wesentlichen eine räumliche Filterung, bei der das Hologramm als angepaßtes Filter wirkt. Zur Herstellung des angepaßten Filters wird ein Objekt mit der Gruppe von Zeichen, die identifiziert werden sollen, in die Eingangsebene gebracht und ein Hologramm des Objektes in der Fourier-Ebene mit einer Punkt-Referenzquelle aufgenommen. Zur Vereinfachung werde angenommen, daß die komplexe Amplitude in der Eingangsebene eine eindimensionale Verteilung ist:

$$f(y) = \sum_{j=1}^N f_j(y - c_j)$$

mit  $f_j(y - c_j)$  der komplexen Amplitude eines typischen Zeichens an der Stelle  $c_j$ . Die komplexe Amplitude der Referenzwelle sei  $\delta(y + b)$ .

Es wird wieder die lineare Aufzeichnung angenommen. Dann ergibt sich in der Fourier-Ebene

$$T_A(\eta) = T_0 + \beta t_b [1 + F(\eta)^2 + F^*(\eta) e^{-2\pi i \eta b} + F(\eta) e^{2\pi i \eta b}]$$

mit

$$F(\eta) = F \{ f(y) \}.$$

Dieses Hologramm wird in die Aufnahmeposition gebracht und mit einem einzelnen Zeichen der Gruppe auf der Achse beleuchtet. Wenn die Amplitude dieses Zeichens in der Eingangsebene  $f_1(y)$  ist, wird die Amplitude nach dem Hologramm

$$\begin{aligned}
H(\eta) &= F_l(\eta) T_A(\eta) \\
&= (T_0 + \beta_{tb}) F_l(\eta) + \beta_{tb} F_l(\eta) F(\eta)^2 \\
&\quad + \beta_{tb} F_l(\eta) F^*(\eta) e^{-2\pi i \eta b} \\
&\quad + \beta_{tb} F_l(\eta) F(\eta) e^{2\pi i \eta b}
\end{aligned}$$

Die komplexe Amplitude in der Ausgangsebene ist dann die Fourier-Transformierte dieser Funktion

Der einzige Term von Interesse ist der Term, der der Korrelation von  $f_l(y)$  mit allen Zeichen der Gruppe

$$\begin{aligned}
h(y) &= (T_0 + \beta_{tb}) f_l(y) + \beta_{tb} f_l(y) \otimes [f(y)^* f(y)] \\
&\quad f_l(y)^* f(y) \otimes \delta(y - b) = [f_l(y)^* f_l(y)] \otimes \sum_{j=1}^N (f_j^* f_j)_{c_j} \otimes \delta(y + b) \\
&\quad + \beta_{tb} f_l(y) \otimes f(y) \otimes \delta(y - b). \\
&= [f_l(y)^* f_l(y)] \otimes \delta(y + c_l + b) \\
&\quad + [f_l(y)^* \sum_{j=1, j \neq l}^N f_j(y - c_j)] \otimes \delta(y + b).
\end{aligned}$$

entspricht. Für diesen lässt sich schreiben:

Wenn die Autokorrelationsfunktion des angezeigten Zeichens eine scharfe Spitze hat, stellt der erste Term einen hellen Lichtfleck dar, der das rekonstruierte Bild der Referenzwelle ist, gelegen bei  $y = -c_l - b$ . Das Vorhandensein des hellen Fleckes in der Ausgangsebene entspricht der Erkennung des Zeichens als eines aus der Originalgruppe. Die Lage des Bildes bei  $-c_l$  identifiziert das Zeichen als  $f_l(y - c_l)$ . Diese grundlegende Zeichenerkennungstechnik lässt sich auch erweitern für die simultane Erkennung aller Zeichen auf einer Seite.

## Anhang

### Übungsaufgaben

66.

Von einem Objekt geringer Ausdehnung soll in 30cm Entfernung ein GABOR-in-line-Hologramm der Größe 50mm mit Licht der Wellenlänge 600nm angefertigt werden. Welche Auflösung muß das Aufnahmematerial haben und welche Kohärenzlänge ist notwendig?

$\alpha$  sei der maximale Ablenkwinkel durch das Objekt, der vom Hologramm noch aufgenommen wird, dann ist  $\vec{k}_1$  der Wellenvektor in der Richtung der maximalen Ablenkung, also am Rand des Hologramms, und  $\vec{k}_2$  der Wellenvektor senkrecht zum Hologramm in Richtung des Referenzlichtes.

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\delta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot y \cdot \sin\alpha$$

Maximum für  $\delta$  ist  $\delta = 2\pi$ :

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot y \cdot \sin\alpha \Rightarrow y = \frac{\lambda}{\sin\alpha}$$

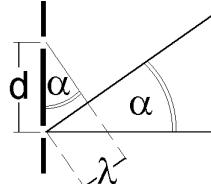
$$\text{mit } \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{1/2 \cdot 50\text{mm}}{300\text{mm}} = \frac{1}{12} :$$

$$y = 12 \cdot \lambda = 7,2\mu\text{m} \Rightarrow v = \frac{1}{7,2\mu\text{m}} = 140/\text{mm}$$

67.

Sie haben ein In-line-Hologramm von einem Objekt aufgenommen, das 20cm von der Hologrammplatte entfernt war. Die Wellenlänge des Lasers bei der Aufnahme war 600nm. Wie weit erscheint das Objekt entfernt, wenn mit einer Wellenlänge von 500nm rekonstruiert wird?

Von einem Gitter wird Licht in alle Richtungen gebrochen. Zur konstruktiven Interferenz gelangen allerdings nur diejenigen Lichtstrahlen, die untereinander einen Wegunterschied von  $\lambda$  haben (bzw.  $n \cdot \lambda$ ).



Der Winkel, in dem die erste Beugungsordnung sichtbar wird, hängt also von der Gitterkonstanten  $d$  und der

Wellenlänge  $\lambda$  ab:

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\lambda_2}{\sin\alpha_2}$$

Für kleine Winkel ist aber  $\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha$ :

$$\frac{\lambda_1}{\tan\alpha_1} = \frac{\lambda_2}{\tan\alpha_2}$$

Mit  $\tan\alpha = \frac{h}{s}$  mit  $h$  als Höhe über der optischen Achse und  $s$  als Entfernung zum Hologramm folgt:

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{h} = \frac{\lambda_2}{s_1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot s_1 = \lambda_2 \cdot s_2$$

$$\Rightarrow s_2 = \frac{\lambda_1 \cdot s_1}{\lambda_2} = 20\text{cm} \cdot \frac{600\text{nm}}{500\text{nm}} = 24\text{cm}.$$

68.

Es wird bei 600nm ein Seitenbandhologramm eines Objektpunktes gemacht. Der Objektpunkt hat einen Abstand von 30cm von der Hologrammplatte und die ebene Referenzwelle fällt unter  $30^\circ$  zur Plattennormalen ein. Berechnen Sie die Verschiebung des Objektpunktes, wenn die Rekonstruktion unter Erhalt der Geometrie mit Licht von 500nm erfolgt.

$$\text{Abstand von der Platte in } \vec{k}_{\text{Bel.}}\text{-Richtung: } \cos 30^\circ = \frac{x}{x_k} \Rightarrow x_k = \frac{x}{\cos 30^\circ}$$

$$\text{Verschiebung in } \vec{k}_{\text{Bel.}}\text{-Richtung: } \Delta x_k = \left( \frac{600\text{nm}}{500\text{nm}} - 1 \right) \cdot x_k = 6,93\text{cm}$$

69.

Ein In-line-Hologramm eines Punktes ist bei 30cm Abstand mit  $\lambda = 600\text{nm}$  mit ebener Referenzwelle aufgenommen worden. Berechnen Sie die Rekonstruktion für eine Referenzwelle, deren Quellpunkt 60cm vor dem Hologramm angeordnet ist und eine Wellenlänge von 500nm hat.

Der im Einfallswinkel  $\varepsilon$  eintreffende Strahl wird um  $\beta$  gebeugt und hat den Ausfallswinkel  $\alpha$ :

$$\alpha + \varepsilon = \beta$$

Für kleine Winkel gilt  $\tan x = x$ :

$$\Rightarrow \tan \alpha + \tan \varepsilon = \tan \beta$$

$$\Rightarrow \frac{h}{b} + \frac{h}{g} = \frac{h}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

Bei kleinen Öffnungswinkeln gilt also die von Linsen bekannte Abbildungsgleichung. Die neue Brennweite errechnet sich:

$$f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f_1 = \frac{600\text{nm}}{500\text{nm}} \cdot \pm 30\text{cm} = \pm 36\text{cm}$$

Die neue Bildweite folgt dann aus:

$$b = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{\pm 36\text{cm}} - \frac{1}{60\text{cm}} \right)^{-1} = 90\text{cm bzw. } -22,5\text{cm}$$

70.

Bei der Herstellung eines Regenbogenhologramms werden 2 Referenzwellen von 600nm verwendet, die jeweils einen Winkel von  $30^\circ$  und  $35^\circ$  mit der Plattennormalen bilden. In welchen Farben sieht man das Objekt, wenn die Rekonstruktion mit weißem Licht unter  $30^\circ$  erfolgt und das Augenpaar sich in Höhe des ursprünglichen Masterschlitzes befindet?

Es sei hier ein Koordinatensystem so gewählt, daß die Wellenvektoren sich in der x-z-Ebene ausbreiten. Dabei

$$\text{liege das entstehende Gitter in } x\text{-Richtung; die Referenzwelle in } z\text{-Richtung: } \vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die in  $30^\circ$  einfallende Referenzwelle ist  $\vec{k}_2$ :

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \sin 30^\circ \\ 0 \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

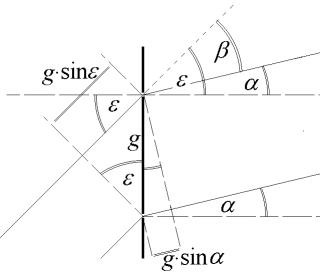
Der Phasenunterschied zwischen den beiden interferierenden Wellen ist dann

$$\delta(\vec{r}) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \sin 30^\circ \\ 0 \\ 1-\cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin 30^\circ \cdot x$$

Für die Gitterkonstante  $g$  gilt:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin 30^\circ \cdot g = 2\pi$$

$$\Rightarrow g = \frac{\lambda}{\sin 30^\circ} \quad \Rightarrow \quad g_1 = \frac{\lambda}{\sin 30^\circ} \quad \Rightarrow \quad g_2 = \frac{\lambda}{\sin 35^\circ}$$



Trifft eine ebene Welle unter dem Einfallwinkel  $\varepsilon$  auf ein Gitter, so gilt für das  $n$ -te Maximum der Ausfallswinkel  $\alpha$ :  

$$g \cdot \sin \varepsilon \cdot g \cdot \sin \alpha = n \cdot \lambda \quad 43$$
 mit  $n \in \mathbb{Z}$

Für den Beugungswinkel  $\beta$  gilt:

$$\beta + \alpha = \varepsilon$$

$$\Rightarrow g \cdot (\sin \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon - \beta)) = g \cdot (\sin \varepsilon \cdot (\sin \varepsilon \cos \beta - \sin \beta \cos \varepsilon)) = n \cdot \lambda \quad 43$$

Für diejenigen Objektpunkte, die sich auf der Senkrechten (bezogen auf Master bzw. Kopie) durch den Schlitzblendenort befinden<sup>44</sup>, ist der Ausfallswinkel  $\alpha$  null und damit  $\beta = \varepsilon = 30^\circ$ . Erwartungsgemäß ist die eine im Schlitzblendenbild sichtbare Wellenlänge  $\lambda_1$  nun (Referenzwellenwinkel  $30^\circ$  und Rekonstruktionswinkel  $30^\circ$ ):

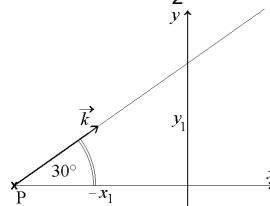
$$\lambda_1 = g_1 \cdot (\sin 30^\circ \cdot \sin(30^\circ - 30^\circ)) = g_1 \cdot (\sin 30^\circ) = \frac{\lambda}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 30^\circ = \lambda$$

Das mit der  $35^\circ$  geneigten Referenzwelle aufgenommene Bild hat für einen Einfallwinkel von  $30^\circ$  und einen Ausfallwinkel von  $0^\circ$  (d.h. einem Beugungswinkel von  $30^\circ$ ) die Wellenlänge  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 = g_2 \cdot (\sin 30^\circ \cdot \sin(30^\circ - 30^\circ)) = g_2 \cdot (\sin 30^\circ) = \frac{\lambda}{\sin 35^\circ} \cdot \sin 30^\circ = 0,8717 \cdot \lambda$$

71.

Ein Seitenbandhologramm steht in der  $y$ - $z$ -Ebene. Der Punkt, der holographiert wurde, hat die Koordinaten  $P(-300,0,0)$ . Die Referenzwelle hat den Ausbreitungsvektor  $\vec{k} = k \cdot (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ, 0)$ . Die Aufnahme erfolgte mit  $\lambda_1 = 600\text{nm}$ . Welche Koordinaten hat  $P'$  bei Rekonstruktion mit  $\lambda_2 = 650\text{nm}$ ?



$$\Rightarrow f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f_1$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot y_1 \quad \Rightarrow y = y_1 - y_2 = (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \cdot y_1 = (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \cdot \tan 30^\circ \cdot x_1$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot x_1$$

72.

Ein LIPPMANN-BRAGG-Hologramm wird mit Laserlicht von  $600\text{nm}$  Wellenlänge aufgenommen. Bei Beleuchtung mit weißem Licht wird das Objekt in grünem Licht von  $500\text{nm}$  rekonstruiert. Berechnen Sie die Dickenänderung der Emulsion.

$$\frac{d_{\text{Rekonstruktion}}}{d_{\text{Aufnahme}}} = \frac{\lambda_{\text{Rekonstruktion}}}{\lambda_{\text{Aufnahme}}} = \frac{500\text{nm}}{600\text{nm}} = 83,3\%$$

73.

Ein Gitter ist mit zwei ebenen Wellen mit  $\lambda = 600\text{nm}$  hergestellt worden. Eine Welle fiel senkrecht auf die Hologrammplatte, die zweite unter  $45^\circ$  dazu. Die Emulsion ist nach der Verarbeitung um 20% geschrumpft. Unter welchem Winkel hat dieses Gitter seine optimalen Rekonstruktionswinkel?

Für Volumengitter gilt die BRAGG-Bedingung für die Rekonstruktionswinkel:

43 Nur für kleine (!!) Beugungswinkel  $\beta$  folgt dann:

$\Rightarrow g \cdot (\sin \varepsilon \cdot (\sin \varepsilon - \sin \beta \cos \varepsilon)) = g \sin \beta \cos \varepsilon = n \cdot \lambda$

$\Rightarrow \sin \beta = \frac{n \cdot \lambda}{g \cos \varepsilon}$

44 siehe z.B. Abb. 3.24., Seite 19: Schlitzbild für grünes Licht

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\lambda}{2d}$$

Dann gilt für konstante Wellenlänge:

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha_1}{\sin \frac{1}{2}\alpha_2} = \frac{d_2}{d_1} = 0,8$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 2\arcsin(\text{Fehler!}) = 57,2^\circ \Rightarrow \Delta\alpha = 28,6^\circ - 22,5^\circ = 6,08^\circ$$

Das Volumengitter muß also um  $6,1^\circ$  geneigt werden, um überhaupt bei der ursprünglichen Wellenlänge Beugung zu erzeugen.

(Für ein um  $\varepsilon = 6,1^\circ$  schrägstehendes flaches Gitter würde ebenso gelten:

$$g_2(\sin \varepsilon - \sin \alpha_2) = N\lambda \text{ und } g_1 \cdot \sin \alpha_1 = N\lambda \text{ und } \frac{g_2}{g_1} = 0,8$$

$$\Rightarrow g_2(\sin \varepsilon - \sin \alpha_2) = g_1 \cdot \sin \alpha_1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_2 = \sin \varepsilon - \text{Fehler!}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \arcsin(\sin \varepsilon - \text{Fehler!}) = \arcsin(\sin 6,1^\circ - \text{Fehler!}) = 51,08^\circ \text{ bezogen auf das gekippte Gitter}$$

$$\Rightarrow \beta = 51,08^\circ + 6,08^\circ = 57,2^\circ$$

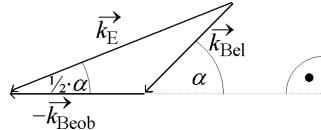
### Meßtechnik:

74.

Ein ebenes Objekt wird unter  $60^\circ$  zur Normalen beleuchtet und in Richtung der Normalen beobachtet.

a) Geben Sie den Empfindlichkeitsvektor an.

b) Welche Verschiebungsdifferenz in Beobachtungsrichtung erzeugt einen Interferenzstreifen ?



$$a) \frac{\frac{1}{2} \cdot |\vec{k}_E|}{|\vec{k}_{\text{Beob.}}|} = \cos(\frac{1}{2} \cdot \alpha) \Rightarrow |\vec{k}_E| = 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot |\vec{k}_{\text{Beob.}}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{k}_{\text{Beob.}}|$$

Der Empfindlichkeitsvektor hat die Länge  $\sqrt{3}k$ ; ist  $30^\circ$  zur Hologramm-Normalen geneigt und entgegen dem Beobachtungsvektor orientiert.

$$b) \delta = 2\pi$$

$$\Rightarrow \delta = \vec{k}_E \cdot \vec{s} = \sqrt{3}k \cdot s \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot \alpha) = \frac{2\sqrt{3}\pi \cdot s \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot \alpha)}{\lambda} = 2\pi$$

$$\Rightarrow s = \frac{\lambda}{\sqrt{3} \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot \alpha)}$$

$$\Rightarrow s = \frac{2}{3} \cdot \lambda$$

75.

Bei der Doppelbelichtungsethode erfolgt zwischen den Belichtungen eine Verschiebung  $\vec{s} = (0.3 / 1 / 0) \mu\text{m}$ . Es ist  $\vec{k}_{\text{Bel}} = (0.5 / 0.866 / 0) / \mu\text{m}$  und  $\vec{k}_{\text{Beob}} = (-0.5 / 0.866 / 0) / \mu\text{m}$ . Geben Sie die Phase an.

$$\delta = (\vec{k}_{\text{Bel}} - \vec{k}_{\text{Beob}}) \cdot \vec{s} = \left( \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\mu\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu\text{m} = 0,3$$

76.

Was geschieht bei der Drehung eines Zylinders um den geometrischen Mittelpunkt seiner Grundfläche? (Der Empfindlichkeitsvektor liege in  $x$ -Richtung, zwischen den zwei Belichtungen erfolge eine Drehung um die  $y$ -Achse.)

Die Flächenelemente sind, da er eine streuende Oberfläche hat, derart unterschiedlich, daß das Licht von jedem Flächenelement nur mit dem Licht desselben verschobenen Flächenelements der 2. Aufnahme interferieren kann. Es sind also Streifen sichtbar.

Der Radius des Zylinders sei  $r$ ,  $\varphi$  der Winkel zwischen dem jeweiligen Objektpunkt und der  $\vec{z}$ -Achse (nach der Drehung) und  $\psi$  der Drehwinkel zwischen den Aufnahmen. Da wir nur den Anteil in  $\vec{x}$ -Richtung messen, ist der Abstand des Objektpunktes von der  $\vec{z}$ -Achse in  $x$ -Richtung vor der Drehung  $r \sin(\psi + \varphi)$  und nach der Drehung  $r \sin \psi$ . Jeder Objektpunkt bewegt sich also in  $x$ -Richtung um

$$\Delta r_x = r(\sin \psi - \sin(\psi + \varphi))$$

Mit  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$  folgt:

$$r \sin(\psi + \varphi) = r \sin \psi - r \cos \psi \cdot \varphi$$

Mit  $r \cos \psi = z$  ist  $z$  der Abstand des jeweiligen Bildpunktes vom Drehpunkt in  $z$ -Richtung:

$$\Rightarrow \Delta r_x = r \cos \psi \cdot \varphi = z \cdot \varphi$$

Auf dem Hologramm sind also äquidistante Streifen zu sehen.

77.

Was geschieht bei der Radiusvergrößerung eines Zylinders zwischen den zwei Belichtungen?

Der Radius des Zylinders sei  $r$ , die Radiusdifferenz  $\Delta r$ , der Winkel zwischen Objektpunkt und  $\vec{E}$  sei  $\alpha$ ; die  $x$ -Achse stehe senkrecht auf  $\vec{E}$ . Dann folgt für die Ausdehnungskomponente in  $\vec{E}$ -Richtung:

$$ds(\alpha) = dr \cdot \cos \alpha$$

$$\text{und } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad \text{mit } \sin \alpha = \frac{x}{r}$$

78.

Der Empfindlichkeitsvektor liege in  $x$ -Richtung, zwischen zwei Belichtungen erfolge eine Drehung des Körpers um die  $y$ -Achse. Wieviel Interferenzstreifen beobachtet man pro cm in  $z$ -Richtung (Drehwinkel 0,01rad,  $\lambda=600\text{nm}$ )?

$\vec{s}$  beschreibe die Verschiebung der Objektpunkte in  $\vec{x}$ -Richtung.  $|\vec{s}|$  hängt dann von  $z$ , also dem Abstand vom Drehpunkt ab:

$$s_x = z \cdot \tan \beta \approx z \cdot \beta$$

Damit  $\vec{k}_E \parallel \vec{x}$ ; muß gelten (mit  $\alpha$  = Winkel zwischen  $\vec{x}$ -Richtung und  $\vec{k}_{\text{Bel}}$  bzw.  $\vec{x}$ -Richtung und  $\vec{k}_{\text{Beob}}$ ):

$$\vec{k}_{\text{Bel}} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{k}_{\text{Beob}} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Dann folgt nämlich für  $\vec{k}_E$ :

$$\vec{k}_E = \vec{k}_{\text{Bel}} - \vec{k}_{\text{Beob}} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 2\cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich wird  $|\vec{k}_E|$  maximal für  $\alpha = 0$ .

$$N \cdot 2\pi = \delta_{1\text{cm}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\cos \alpha \cdot 1\text{cm} \cdot 0,01\text{rad} \Rightarrow N = \text{Fehler!}$$

79.

Ein Körper bewegt sich mit  $v = 1 \text{ cm/s}$  in Richtung des Empfindlichkeitsvektors. Wie lang darf die Belichtungszeit sein, damit er noch mit der halben Helligkeit des ruhenden Körpers rekonstruiert werden kann?

Wir nehmen den maximalen Betrag des Empfindlichkeitsvektors  $|\vec{k}_E| = 2k$  an: Dann folgt für die Belichtung des bewegten Punktes:

$$H = \int_0^{t_0} 2I(1 + \cos(\delta(t))) dt = 2It_0 + 2I \int_0^{t_0} \cos(2kvt) dt = 2It_0 \left(1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{4vt}{\lambda}\right)\right)$$

Die Belichtungen sind proportional zu den Amplitudentransmissionen, die Modulation der Amplitudentransmission bestimmt die Beugung, die Intensität der Beugung ist also proportional zum Quadrat der Gittermodulation:

$$\frac{K(v)}{K(0)} = \left( \frac{2It_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{4vt}{\lambda}\right)}{2It_0} \right)^2 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{4vt}{\lambda}\right)$$

Dieses Kontrastverhältnis soll  $\frac{1}{2}$  sein:

$$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{4vt}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sinc}\left(\frac{4vt}{\lambda}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Diese Gleichung hat zwar (mind.) eine Lösung, die Ermittlung ist aber praktisch nur numerisch zu ermitteln. Näherungsweise kann man sich mit der TAYLOR-Reihe für den Sinus behelfen:

$$\sin x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\Rightarrow \text{sinc}x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{(\pi x)^2}{3!} + \frac{(\pi x)^4}{5!} - \dots$$

Wenn man sich näherungsweise auf die ersten drei Summanden beschränkt, heißt das:

$$1 - \frac{(\pi x)^2}{6} + \frac{(\pi x)^4}{120} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (\pi x)^4 - 20(\pi x)^2 + 120(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow (\pi x)^2 = 10 \pm \sqrt{100 - 120 \cdot (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})}$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{1}{\pi} \sqrt{10 - \sqrt{100 - 120 \cdot (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})}} = 0,444..$$

( Da die verwendete Näherung nur für kleine Argumentwerte anwendbar ist, führt nur die Differenz zu einer sinnvollen Lösung. )

Durch Einsetzen kann bestätigt werden:

$$\text{sinc}^2(0,444..) = 0,4979$$

$$\Rightarrow \frac{4vt}{\lambda} = 0,444$$

$$\Rightarrow t = 0,444 \cdot \frac{\lambda}{4v} = 0,444 \cdot \frac{500\text{nm}}{4\text{cm/s}} = 5,55\mu\text{s}$$

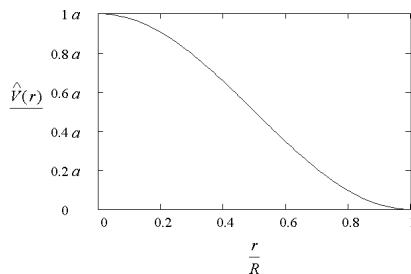
## 80.

Eine schwingende kreisförmige Membrane mit dem Radius  $R$  ist mit der time-average-Technik aufgenommen worden. Die Verformungsfunktion soll in radialer Richtung die Form  $V(r,t) = a_0 \cos(2\pi \frac{r}{R}) \cos \omega t$  haben ( mit  $|r| \leq R$  ).

Der Empfindlichkeitsvektor liege parallel zum Lot der Membrane. Beschreiben Sie die Helligkeitsverteilung auf dem holographischen Bild der Membrane.

Die Amplitude  $\hat{V}(r)$  der Verformung ist folgendermaßen von  $r$  abhängig:

$$V(r,t) = a_0 \cos(2\pi \frac{r}{R}) \cos \omega t = \hat{V}(r) \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(r) = a_0 \cos(2\pi \frac{r}{R})$$



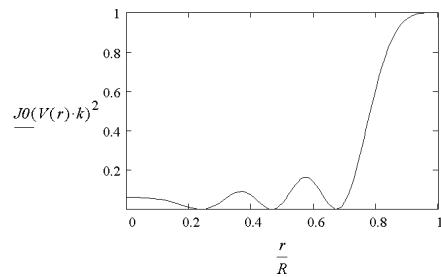
Die Graphik zeigt die Amplitude (d.h. die maximal mögliche Auslenkung) abhängig vom Ort. Die Rekonstruktionsintensität verhält sich nach dem Quadrat der BESSEL-Funktion nullter Ordnung:

$$I_{\text{Rek}}(r) \sim J_0^2(\vec{k}_E \cdot \vec{\hat{V}}(r))$$

Für ruhende Punkte, hier also für  $r = R$  ist die Besselfunktion eins und damit das Bild der Membrane am hellsten. Der Rand wird also als heller Ring rekonstruiert. Mit steigender Amplitude sinkt die Helligkeit bis zur ersten

Nullstelle der BESSEL-Funktion (d.h. bis  $\vec{k}_E \cdot \vec{\hat{V}}(r) = 2,4$ ). Dort ist also ein dunkler Ring auf der Membrane zu sehen.

Mit weiter steigender Amplitude nimmt die Helligkeit wieder (schwach) zu und sinkt dann wieder, um bei  $\vec{k}_E \cdot \vec{\hat{V}}(r) = 5,5$  die nächste Nullstelle zu erreichen. Dort ist dann der nächste dunkle Ring sichtbar. Wie viele Hell-Dunkel-Wechsel sichtbar sind, hängt von der größten Amplitude, hier also von dem Wert für  $a$  ( und vom Betrag von  $\vec{k}_E$  ) ab.



Diese Graphik zeigt die Intensität abhängig vom Ort (hier z.B. für  $\vec{k}_E \cdot \vec{a} = 10$ ).

81.

Eine 100mm lange Blattfeder ist in schwingendem Zustand im time-average-Verfahren holographiert worden ( $\lambda = 500\text{nm}$ ). Bei 7cm und 10cm von der Einspannstelle treten Nullstellen der Intensität auf.

Unter welchen Bedingungen reichen diese Angaben, um den Graphen der Amplitude in Abhängigkeit von der Einspannung punktweise zu zeichnen? Geben Sie für diese Bedingungen den Graphen an.

Die Rekonstruktionsintensität ist proportional zum Quadrat der BESSEL-Funktion:

$$I_{\text{Rek}}(l) \sim J_0^2(\vec{k}_E \cdot \hat{\vec{x}}(l))$$

Vorausgesetzt ist hier eine Belichtungszeit, die lang ist im Vergleich zur Schwingungsdauer. Es kann ja eigentlich nicht die Schwingungsamplitude  $\hat{\vec{x}}(l)$ , sondern nur deren Projektion auf den Empfindlichkeitsvektor errechnet werden. Wenn man aber davon ausgeht, daß  $\hat{\vec{x}}(l)$  und  $\vec{k}_E$  parallel sind und nimmt man außerdem die Länge des Empfindlichkeitsvektors als maximal möglich an ( $|\vec{k}_E| = \frac{4\pi}{\lambda}$ ); so ergibt sich:

$$\hat{x}(0) = 0 \text{ nm}$$

$$\vec{k}_E \cdot \hat{\vec{x}}(7\text{cm}) = |\vec{k}_E| \cdot |\hat{\vec{x}}(7\text{cm})| = \frac{4\pi}{500\text{nm}} \cdot \hat{x}(7\text{cm}) = 2,4 \Rightarrow \hat{x}(7\text{cm}) = \mathbf{Fehler!} = 95,51 \text{ nm}$$

$$\vec{k}_E \cdot \hat{\vec{x}}(10\text{cm}) = |\vec{k}_E| \cdot |\hat{\vec{x}}(10\text{cm})| = \frac{4\pi}{500\text{nm}} \cdot \hat{x}(10\text{cm}) = 5,5 \Rightarrow \hat{x}(10\text{cm}) = \mathbf{Fehler!} = 218,88 \text{ nm}$$

# Index

- A Höhenlinien 42  
Akustische Holographie 46  
Anamorphot 17  
Astigmatismus 7  
B BENTON 15  
BESSEL 54  
Bessel-Funktion 24; 39; 55  
Beugungseffizienz 23  
Beugungswirkungsgrad 23  
BRAGG 3; 20  
Bragg-Effekt 24; 29  
Brewster-Winkel 9; 11  
C chromatische Aberration 7; 16  
*coupled - wavefront theorie* 26  
D DENISYUK 20  
Detour-Verfahren 45  
**Dichromat-Gelatine** 14  
Display-Holographie 15  
Doppelbelichtungsmethode 29  
E Echtfarbenholographie 28  
*Empfindlichkeitsvektor* 30  
**Etalon** 10  
F Faraday-Effekt 32  
FOURIER 23  
Frauenhofer Holographie 47  
**FRESNEL** 6  
G GABOR 3; 5  
Gamma-Funktion 24  
**Gigahertzkurve** 10  
H Heterodyn - Verfahren 31  
I Höhengradienten 42  
HYUGENS 24  
K induzierte Emission 8  
In-line-Holographie 5  
Intensität 4  
K Kerr-Effekt 32  
Kinoform-Verfahren 46  
Kohärenzlänge 8  
Kontrast 4  
Konturenmessung 42  
L Landé-Faktor 32  
Längseffekt 32  
Laser 3; 8  
**LAUE** 3  
**LAUE-DIAGRAMM** 3  
Lee-Verfahren 45  
Light in Flight Holographie 41  
LIPPmann 20  
Lorentz-Kraft 32  
Lorentz-Triplett 32  
M Masterhologramm 12  
**Moiré** 45  
Multiplex-Holographie 19  
N NEWTON 6  
O Objektwelle 3  
*orthoskopisch* 2  
P Paschen-Back-Effekt 32  
Phasengitter 22  
Phasenshiftverfahren 33  
**Photopolymere** 15  
**Photoresist** 18  
Prägehologramm 18  
*pseudoskopisch* 2  
Q Querreffekt 32  
R Real-Time 41  
Realtime Time-Average 41  
Real-Time-Holographie 35  
Referenzwelle 3  
Regenbogenholographie 15  
Röntgenstrahl 3  
Röntgenstrukturanalyse 3  
S **Sinc-Funktion** 38  
**Speckle** 48  
Stereogramme 19  
Stroboskop 41  
T Talbot-Streifen 13  
**thermoplastischer Film** 14  
Time-Average-Holographie 36  
U Ultraschallholographie 46  
V Verdrehung 34  
**Volumengitter** 22  
W Weißlichtrekonstruktion 15  
Z ZEEMAN-Effekt 32  
Zeichenerkennung 47  
ZERNICKE 3  
**Zonenplatte** 5

# Literatur

-  BERGMANN-SCHÄFER: Lehrbuch der Experimentalphysik
-  HECHT: Optics
-  STOESSEL: Fourier-Optik
-  Lauterborn, Kurz, Wiesenfeldt: Kohärente Optik
-  Young: Laser, Optik, Wellenleiter
-  HARIHARAN: Optical Holography
-  OSTROWSKI, Ju. I.: Dreidimensionale Bilder durch Holographie
-  WERNICKE, OSTEN: Holografische Interferometrie
-  FRANÇON, M: Holographie
-  ROEHLER, RAINER: Informationstheorie in der Optik

## Verwendete Symbole und ihre Einheiten

$\alpha$	(Beugungs-) Winkel	[rad]
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit (des Lichtes)	[m·s <sup>-1</sup> ]
$d$	mechanische Weglänge, Abstand	[mm], [m]
$\delta$	Phase, Phasendifferenz	[rad]
$f$	Brennweite	[mm], [m]
$g$	Gitterkonstante	[μm], [m]
$h$	(Einfalls-) Höhe	[mm], [m]
$H$	Bestrahlung bzw. Belichtung	[kg·s <sup>-1</sup> ] bzw. [lx·s], [cd·s·m <sup>-2</sup> ]
$I$	Intensität bzw. Beleuchtungsstärke	[W·m <sup>-2</sup> ], [kg·s <sup>-2</sup> ] bzw. [lx], [cd·m <sup>-2</sup> ]
$\varphi$	Phase	[rad]
$J_i$	Besselfunktion $i$ -ter Ordnung	
$k_{\text{eff}}$	effektive Blendenöffnung	
$k, \vec{k}$	Wellenzahl, -vektor	[rad·nm <sup>-1</sup> ], [rad·m <sup>-1</sup> ]
$\vec{k}_E$	Empfindlichkeitsvektor	[rad·nm <sup>-1</sup> ], [rad·m <sup>-1</sup> ]
$\lambda$	Wellenlänge	[nm], [m]
$n$	Brechzahl	
$v$	Frequenz	[Hz od. s <sup>-1</sup> ]
$N$	natürliche Zahl	
$P$	Punkt	
$r$	Reflexionsgrad	
$R$	Abstand	[mm], [m]
$s$	Strecke	[μm], [m]
$t$	Zeit	[s]
$v$	Geschwindigkeit	[m·s <sup>-1</sup> ]
$\omega$	Kreisfrequenz	[rad·s <sup>-1</sup> ]
$x, x_0$	Strecke, Amplitude	[μm], [m]

Ende