

**Skript zur Vorlesung**  
**Aerodynamik des Flugzeugs**

**Dr.-Ing. Peter R. Hakenesch**

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1	Teilgebiete der Aerodynamik.....	1
1.2	Bereiche der Luft- und Raumfahrt .....	1
1.3	Atmosphäre .....	2
1.3.1	Reale Atmosphäre.....	2
1.3.2	Hydrostatische Grundgleichung .....	4
1.3.3	Barometrische Höhenformel.....	5
1.3.4	Internationale Höhenformel.....	5
1.3.5	Internationale Standardatmosphäre (ISA) .....	5
1.3.6	Definitionen der Höhe .....	7
1.4	Flugbereichsgrenzen .....	9
1.5	Geometrische Beschreibung .....	10
1.6	Achsensysteme, Winkel, Kräfte, Momente.....	10
1.7	Dimensionslose Beiwertschreibweise.....	12
1.8	Steuerelemente des Flugzeugs .....	13
1.9	Klassifizierung von Strömungen.....	15
1.9.1	Einteilung von Strömungen als Funktion der Reibung.....	15
1.9.2	Einteilung von Strömungen als Funktion der Kompressibilität.....	16
1.9.3	Einteilung von Strömungen als Funktion der Machzahl .....	17
1.10	Übungen zum Kapitel Einleitung.....	21
<b>2</b>	<b>Strömungssimulation in Windkanälen .....</b>	<b>22</b>
2.1	Die Simulationsproblematik oder die Quadratur des Kreises .....	22
2.2	Erste Versuche: Otto Lilienthal, Gustaf Weißkopf und Gebr. Wright.....	26
2.3	Einteilung der Windkanäle .....	28
2.3.1	Unterscheidung nach Machzahl.....	28
2.3.2	Unterscheidung nach Betriebsdauer .....	28
2.4	Niedergeschwindigkeitswindkanäle ( $M < 0.3$ ) .....	29
2.5	Transsonischer Windkanal ( $0.4 < M < 1.2$ ) .....	30
2.6	Hyperschallwindkanäle ( $M > 5$ ) .....	31
2.7	Windkanalinstrumentierung .....	33
2.7.1	Kraftmessungen .....	33
2.7.2	Druckmessungen .....	35
2.7.3	Temperaturmessungen .....	37
2.8	Windkanalkorrekturen .....	38
2.9	Übungen zum Kapitel Strömungssimulation in Windkanälen.....	39
<b>3</b>	<b>Numerische Strömungssimulation .....</b>	<b>40</b>
3.1	Entwicklung von CFD als Entwicklungswerkzeug.....	40
3.2	Physikalische Grundprinzipien .....	44
3.3	Bedeutung des vollständigen Differentials .....	45
3.4	Kontinuitätsgleichung .....	46
3.4.1	Integrale Form der Kontinuitätsgleichung .....	46
3.4.2	Differentielle Form der Kontinuitätsgleichung.....	47
3.5	Impulsgleichung.....	48
3.6	Energiegleichung .....	49
3.7	Navier-Stokes- und Euler-Gleichungen .....	50
3.8	Diskretisierung.....	51
3.9	Gitter mit Transformationen .....	52
3.10	Einfache CFD Techniken.....	54
3.10.1	Lax-Wendroff Methode .....	54
3.10.2	Maccormack Methode .....	55
3.11	Panel-Verfahren .....	56

3.12	Übungen zum Kapitel Numerische Strömungssimulation .....	57
<b>4</b>	<b>Potentialströmungen.....</b>	<b>58</b>
4.1	Drehungsfreie und drehungsbehaftete Strömungen .....	58
4.1.1	Überblick .....	58
4.1.2	Drehung .....	58
4.1.3	Wirbellinie, Wirbelfaden und Wirbelröhre.....	58
4.1.4	Zirkulation .....	59
4.2	Wirbelgleichungen.....	60
4.2.1	Räumlicher Wirbelerhaltungssatz (1. Helmholtz'scher Wirbelsatz).....	60
4.2.2	Zeitlicher Wirbelerhaltungssatz (2. Helmholtz'scher Wirbelsatz).....	60
4.2.3	Zeitlicher Erhaltungssatz der Zirkulation (Thomson) .....	60
4.3	Geschwindigkeitspotentiale .....	61
4.3.1	Strom- und Potentialfunktion .....	61
4.3.2	Geschwindigkeits- und Druckfeld .....	63
4.4	Potentialgleichung.....	63
4.4.1	Vollständige Potentialgleichung .....	63
4.4.2	Linearisierte Potentialgleichung (Laplace-Gleichung).....	64
4.5	Ebene Potentialströmungen.....	64
4.5.1	Lineares Superpositions- und Vertauschungsprinzip.....	64
4.5.2	Staupunkt-, Ecken-, Translations- und Randumströmung.....	65
4.5.3	Quell- und Sinkenströmung.....	66
4.5.4	Potentialwirbel (Stabwirbel).....	66
4.5.5	Dipolströmung .....	67
4.6	Umströmung zylindrischer Körper .....	68
4.6.1	Ebener Halbkörper.....	68
4.6.2	Geschlossener ovaler Körper.....	72
4.6.3	Kreiszyylinder .....	73
4.7	Räumliche Potentialströmungen .....	76
4.7.1	Räumliche Quell- oder Sinkenströmung.....	76
4.7.2	Räumliche Dipolströmung.....	76
4.7.3	Rotationssymmetrischer Halbkörper .....	76
4.8	Potentialwirbelströmungen .....	77
4.8.1	Induzierte Geschwindigkeitsfelder (Biot-Savart) .....	77
4.8.2	Kreiszyylinder mit Zirkulation .....	78
4.8.3	Magnus-Effekt .....	80
4.9	Übungen zum Kapitel Potentialströmungen .....	82
<b>5</b>	<b>Tragflügel unendlicher Streckung in inkompressibler Strömung.....</b>	<b>85</b>
5.1	Tragflügelprofile .....	85
5.1.1	Geometrische Beschreibung .....	85
5.1.2	Göttinger Profile .....	86
5.1.3	NACA Profile .....	87
5.1.4	Druckverteilung, resultierende Kräfte und Momente am Profil .....	88
5.1.5	Gleitwinkel und Gleitzahl.....	91
5.1.6	Druckpunkt und Neutralpunkt .....	93
5.2	Grundlagen des Auftriebs .....	96
5.2.1	Zirkulation .....	96
5.2.2	Auftriebsgleichung nach Kutta-Joukowski.....	97
5.2.3	Kutta'sche Abflußbedingung .....	98
5.3	Profiltheorie nach der Methode der konformen Abbildungen .....	99
5.3.1	Komplexe Strömungsfunktion.....	99
5.3.2	Konforme Abbildung.....	99
5.3.3	Angestellte ebene Platte mit Auftrieb.....	100
5.3.4	Joukowski-Profile .....	105

5.4	Profiltheorie nach der Singularitätenmethode.....	106
5.4.1	Kennzeichen der Singularitätenmethode .....	106
5.4.2	Dünne Profile (Skelett-Theorie) .....	106
5.4.3	Stoßfreier Eintritt.....	109
5.4.4	Symmetrische Profile (Tropfen-Theorie) .....	109
5.5	Einfluß der Viskosität (Reibung) bei Profilen .....	110
5.5.1	Auftrieb, Auftriebsanstieg und Maximalauftrieb.....	110
5.5.2	Nasenradius und Ablöseverhalten .....	111
5.5.3	Profilwiderstand.....	113
5.6	Näherungsverfahren zur Bestimmung der Druckverteilung am Profil .....	118
5.7	Übungen zum Kapitel Tragflügel unendlicher Streckung in inkompressibler Strömung ..	120
<b>6</b>	<b>Tragflügel endlicher Streckung in inkompressibler Strömung .....</b>	<b>121</b>
6.1	Geometrie des Tragflügels .....	121
6.2	Entstehung der freien Wirbel am Tragflügel endlicher Spannweite .....	124
6.3	Prandtl'sche Tragflügeltheorie (Traglinientheorie) .....	127
6.3.1	Abwindfeld und induzierter Widerstand.....	127
6.3.2	Abwindfeld und Auftrieb.....	128
6.3.3	Elliptische Zirkulationsverteilung .....	130
6.3.4	Prandtl'sche Umrechnungsformel.....	132
6.4	Tragflügeltheorie nach der Methode der Wirbelbelegung (Tragflächentheorie) .....	135
6.5	Spannweitige Auftriebsverteilung.....	137
6.5.1	Lokaler Auftriebsbeiwert.....	137
6.5.2	Einfluß der Streckung auf den induzierten Widerstand.....	137
6.5.3	Überziehverhalten und Tragflügelverwindung .....	138
6.5.4	Näherungsverfahren zur Berechnung der spannweiten Auftriebsverteilung .....	142
6.6	Tragflügelpolare.....	147
6.6.1	Glauert Korrekturverfahren .....	147
6.6.2	Kombination unterschiedlicher Profile.....	149
6.6.3	Auftriebsanstieg als Funktion der Streckung.....	150
6.6.4	Auftriebsanstieg und Neutralpunktlagen von Delta- und Pfeilflügeln .....	151
6.7	Übungen zum Kapitel Tragflügel endlicher Streckung in inkompressibler Strömung .....	153
<b>7</b>	<b>Aerodynamik der Klappen und Leitwerke .....</b>	<b>154</b>
7.1	Hochauftriebshilfen.....	154
7.1.1	Aufgabe .....	154
7.1.2	Hinterkanten-Klappen.....	154
7.1.3	Vorderkanten-Klappen .....	157
7.1.4	Auswirkung auf Auftrieb und Moment .....	158
7.1.5	Aerodynamischer Ruderausgleich .....	160
7.1.6	Ruderscharniermoment.....	161
7.2	Leitwerke .....	162
7.2.1	Aufgabe .....	162
7.2.2	Geometrie .....	162
7.2.3	Höhenleitwerk .....	163
7.2.4	Seitenleitwerk .....	165
7.2.5	Querruder.....	166
7.3	Übungen zum Kapitel Aerodynamik der Klappen und Leitwerke.....	168
<b>8</b>	<b>Kompressible Strömungsmechanik (Gasdynamik).....</b>	<b>169</b>
8.1	Einleitung .....	169
8.2	Thermodynamische Grundbegriffe .....	169
8.2.1	Ideales Gas.....	169
8.2.2	Innere Energie und Enthalpie .....	170
8.2.3	Erster Hauptsatz der Thermodynamik .....	171



8.2.4	Entropie und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik .....	171
8.2.5	Zustandsänderungen .....	172
8.3	Isentrope Strömungen .....	174
8.3.1	Statische Größen und Totalgrößen .....	174
8.3.2	Kesselgleichungen .....	174
8.4	Stoßwellen.....	175
8.4.1	Mach-Kegel .....	175
8.4.2	Strömungssichtbarmachung.....	176
8.4.3	Schallgeschwindigkeit und Kompressibilität.....	178
8.4.4	Senkrechter Verdichtungsstoß.....	180
8.4.5	Schräger Verdichtungsstoß.....	184
8.4.6	Prandtl-Meyer Expansion .....	188
8.5	Messung der Strömungsgeschwindigkeit.....	190
8.5.1	Unterschallströmung, inkompressibel .....	190
8.5.2	Unterschallströmung, kompressibel .....	190
8.5.3	Überschallströmung.....	191
8.5.4	Geschwindigkeitsbezeichnungen.....	191
8.6	Eindimensionale Strömungen .....	193
8.6.1	Grundlegende Beziehungen.....	193
8.6.2	Düsenströmungen .....	195
8.6.3	Verdichtungs- und Verdünnungswellen in Überschallfreistrahlen.....	200
8.6.4	Diffusorströmungen .....	201
8.6.5	Hochgeschwindigkeits-Windkanäle .....	202
8.7	Übungen zum Kapitel Kompressible Strömungsmechanik (Gasdynamik).....	205
<b>9</b>	<b>Kompressible Aerodynamik.....</b>	<b>206</b>
9.1	Kompressible Unterschallströmung.....	206
9.1.1	Schallmauer .....	206
9.1.2	Prandtl-Glauert-Ähnlichkeitsregel.....	207
9.1.3	Kármán-Tsien- und Laitone-Regel.....	209
9.2	Transsonik-Bereich .....	210
9.2.1	Gültigkeitsbereich.....	210
9.2.2	Kritische Machzahl.....	210
9.2.3	Auftrieb, Widerstand und Auftriebsgradient .....	214
9.2.4	Transsonik-Profile .....	215
9.2.5	Flächenregel.....	218
9.2.6	Pfeilflügel .....	221
9.3	Überschall .....	226
9.3.1	Profiltheorie bei Überschallgeschwindigkeit.....	226
9.3.2	Auftrieb und Widerstand der ebenen Platte im Überschall .....	227
9.3.3	Druckverteilung an schlanken Profilen.....	229
9.3.4	Widerstand schlanker Profile im Überschall .....	231
9.3.5	Überschall/Unterschallvorderkante .....	233
9.3.6	Auftrieb und Widerstand des Flügels endlicher Spannweite im Überschall .....	235
9.3.7	Neutralpunktwanderung in Abhängigkeit des Flügelgrundrisses .....	238
9.3.8	Überschallknall.....	239
9.4	Hyperschall .....	240
9.5	Übungen zum Kapitel Kompressible Aerodynamik .....	240
<b>10</b>	<b>Stabilität und Steuerbarkeit.....</b>	<b>241</b>
10.1	Längsbewegung .....	241
10.2	Seitenbewegung .....	241
<b>11</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>242</b>

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 1-1:	Bereiche der Luft- und Raumfahrt [ 22] .....	2
Abb. 1-2:	Struktur der Atmosphäre [ 24] .....	4
Abb. 1-3:	Temperaturverteilung in der Standardatmosphäre [ 3] .....	6
Abb. 1-4:	Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von Luft .....	7
Abb. 1-5:	Flugbereichsgrenzen Mach-Höhe und Mach-Anstellwinkel .....	9
Abb. 1-6:	Geometrische Beschreibung - Hauptabmessungen .....	10
Abb. 1-7:	Körperfestes, aerodynamisches und experimentelles Achsensystem [ 10] .....	11
Abb. 1-8:	Ruder- und Klappenausschläge und entsprechende Momente .....	11
Abb. 1-9:	Steuer- und Kontrollelemente eines Flugzeugs [ 20] .....	13
Abb. 1-10:	Steuer- und Kontrollelemente eines Flugzeugs [ 9] .....	14
Abb. 1-11:	Winkel- und Vorzeichendefinition für Ruder- und Klappenausschläge [ 9] .....	14
Abb. 1-12:	Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht .....	15
Abb. 1-13:	Reibungsbehaftete Grenzschicht, reibungsfreie Außenströmung .....	15
Abb. 1-14:	Profil - Strömung mit Ablösung .....	16
Abb. 1-15:	Zylinder - Strömung mit Ablösung .....	16
Abb. 1-16:	Stömungszustände als Funktion der Machzahl [ 5] .....	20
Abb. 2-1:	NASA Ames 80 x 120 ft Niedergeschwindigkeitswindkanal .....	22
Abb. 2-2:	Erste, weniger erfolgreiche Versuche: Aerial Steamer, Thomas Moy 1875 [ 33] .....	26
Abb. 2-3:	Versuchsaufbau von O. Lilienthal zur Profiluntersuchung [ 23] .....	26
Abb. 2-4:	Otto Lilienthal und sein Doppeldecker, 1895 [ 23] .....	26
Abb. 2-5:	G. Weißkopf mit seinem Fluggerät Nr. 21 [ 33] .....	27
Abb. 2-6:	Replika des Fluggeräts Nr. 21 von G. Weißkopf in Manching .....	27
Abb. 2-7:	Windkanal und Gleiter Nr. 3 der Gebr. Wright [ 3] .....	28
Abb. 2-8:	Eiffel-Windkanal .....	29
Abb. 2-9:	Geschlossene Bauart (Göttinger Kanal), TU-München Windkanal A .....	30
Abb. 2-10:	Transsonischer Windkanal Göttingen (TWG) .....	30
Abb. 2-11:	Eurofighter-Modell (Maßstab 1:15), TWT CALSPAN Buffalo NY, USA .....	31
Abb. 2-12:	VKI hypersonic tunnel H-3 blow-down facility .....	31
Abb. 2-13:	Modell des Raumtransporters Sänger mit Oberstufe Horus, H2K DLR Köln .....	32
Abb. 2-14:	Hochenthalpie-Windkanal Göttingen (HEG) .....	32
Abb. 2-15:	Interne 6-Komponentenwaagen, TASK .....	33
Abb. 2-16:	Windkanalmodell mit interner Waage und Heckstielaufhängung .....	34
Abb. 2-17:	Externe Windkanalwaage, University of Washington .....	34
Abb. 2-18:	EADS Außenlastwaage für das Modell (1:15) einer Luft-Boden-Waffe, .....	35
Abb. 2-19:	PSI-Modul .....	36
Abb. 2-20:	Totaldruckgeber, dynamisch .....	36
Abb. 2-21:	Statische und dynamische Druckaufnehmer, Einbauskizze .....	36
Abb. 2-22:	Wanddruckaufnehmer, Druckbereich $\pm 100$ kPa, Dynamik: 1 – 1000 Hz .....	36
Abb. 2-23:	5-Lochsonde .....	37
Abb. 2-24:	5-Lochsonde .....	37
Abb. 2-25:	HERMES Hyperschallmodell zur Wärmeübergangsmessung .....	37
Abb. 3-1:	Die drei 'Dimensionen' der Fluidodynamik [ 6] .....	40
Abb. 3-2:	CFD vs. Windkanal, FX63-137, $Re = 10^5$ , $M_\infty = 0.5$ [ 6] .....	41
Abb. 3-3:	Northrop F-20 bei $M_\infty = 0.95$ und $\alpha = 8^\circ$ , $c_p$ -Verteilung [ 6] .....	41
Abb. 3-4:	Vergleich CFD mit Windkanalversuch für $c_p$ -Verteilung [ 6] .....	42
Abb. 3-5:	Wirbelstrukturen einer Northrop F-20 bei $M_\infty = 0.95$ und $\alpha = 8^\circ$ [ 6] .....	43
Abb. 3-6:	Stumpfer Körper im Überschall .....	43
Abb. 3-7:	Strömungsmodelle: Endliches Kontrollvolumen $V$ .....	44
Abb. 3-8:	Strömungsmodelle: Infinitesimales Kontrollvolumen $dV$ .....	44
Abb. 3-9:	Bedeutung des vollständigen Differentials .....	45
Abb. 3-10:	Integrale Form der Kontinuitätsgleichung .....	46
Abb. 3-11:	Im Raum fixiertes infinitesimales Volumenelementes $dx \cdot dy \cdot dz$ .....	47
Abb. 3-12:	In der Strömung mitbewegtes infinitesimales Volumenelementes $dx \cdot dy \cdot dz$ .....	48

Abb. 3-13:	In der Strömung mitbewegtes infinitesimales Element $dx \cdot dy \cdot dz$ .....	49
Abb. 3-14:	Tragflügelprofil in Rechteckgitter.....	52
Abb. 3-15:	Physikalische Ebene und Berechnungsebene.....	52
Abb. 3-16:	Gitterverengung im Bereich starker Gradienten .....	53
Abb. 3-17:	Gitterschema für Lax-Wendroff Methode.....	55
Abb. 4-1:	Drehungsbehaftete und drehungsfreie Strömung [ 34].....	58
Abb. 4-2:	Wirbelröhre [ 34].....	59
Abb. 4-3:	Zirkulation: Linienintegral der Geschwindigkeit [ 34].....	59
Abb. 4-4:	Strom- und Bahnlinie [ 34].....	62
Abb. 4-5:	Strom- und Potentiallinien bei ebener Strömung [ 34].....	62
Abb. 4-6:	Wandstromlinie bei reibungsfreier Strömung [ 34] .....	63
Abb. 4-7:	Ebene Winkel- und Eckenströmung [ 34] .....	65
Abb. 4-8:	Staupunktströmung, Translationsströmung und Randumströmung [ 34].....	65
Abb. 4-9:	Quellströmung, $E > 0$ .....	66
Abb. 4-10:	Ebener Potentialwirbel (Stabwirbel) .....	66
Abb. 4-11:	Stromlinienbild eines Quell-Sinken-Paares.....	67
Abb. 4-12:	Stromlinienbilder eines ebenen Dipols, reelle und imaginäre Lösung.....	68
Abb. 4-13:	Ebener Halbkörper .....	69
Abb. 4-14:	Druckverteilung auf einem ebenen Halbkörper [ 22].....	71
Abb. 4-15:	Superposition einer Translationsströmung mit einer Quellströmung [ 22] .....	72
Abb. 4-16:	Geschlossener ovaler Körper [ 34].....	72
Abb. 4-17:	Stromlinienbild eines in $x$ -Richtung angeströmten Kreiszylinders [ 34] .....	73
Abb. 4-18:	Rotationssymmetrischer Halbkörper [ 22].....	76
Abb. 4-19:	Wirbelelement (a) und gerades Wirbelstück (b) [ 34].....	77
Abb. 4-20:	Biot-Savart, Sonderfälle [ 22] .....	78
Abb. 4-21:	Kreiszylinders mit Zirkulation, Rechnung vs. Experiment [ 35] .....	78
Abb. 4-22:	Druckverteilung auf dem Umfang eines Zylinders mit Zirkulation [ 35] .....	79
Abb. 4-23:	Seitenkraft auf einen Zylinder mit Zirkulation.....	80
Abb. 4-24:	'Barbara', Weser-Werft Bremen, 1926 .....	80
Abb. 4-25:	'Calypso' J. Y.-Cousteau, geplant 2000 .....	81
Abb. 4-26:	Uni-Kat-Flensburg, 2006 .....	81
Abb. 5-1:	Profilgeometrie .....	85
Abb. 5-2:	Niedergeschwindigkeitskanal der AVA Göttingen .....	86
Abb. 5-3:	Göttinger Profile .....	86
Abb. 5-4:	Berechnung des Auftriebs aus der Druckverteilung [ 35] .....	88
Abb. 5-5:	Druckverteilung am Profil NACA 2412 bei $Re = 2.7 \cdot 10^6$ [ 35].....	89
Abb. 5-6:	$C_A$ , $C_W$ und $C_M$ für NACA 2412 bei $Re = 2.7 \cdot 10^6$ [ 35] .....	89
Abb. 5-7:	Kräfte am Profil.....	90
Abb. 5-8:	Gleitwinkel und Gleitzahl.....	91
Abb. 5-9:	Druckpunkt $D$ und Neutralpunkt $N$ .....	94
Abb. 5-10:	Auftriebsabhängige Druckpunktlage für das Profil NACA 2412 [ 22].....	94
Abb. 5-11:	Einfluß von $C_{m0}$ auf die Druckpunktlage .....	95
Abb. 5-12:	Entstehung der Zirkulation beim Anfahrvorgang [ 35].....	96
Abb. 5-13:	Entstehung des Anfahrwirbels [ 35].....	97
Abb. 5-14:	Strömung um ein Tragflügelprofil [ 35].....	98
Abb. 5-15:	Entstehung des gebundenen Wirbels und des Anfahrwirbels [ 35].....	98
Abb. 5-16:	Konforme Abbildung orthogonaler Kurvenscharen.....	99
Abb. 5-17:	Konforme Abbildung eines Kreiszylinders auf eine ebene Platte [ 35] .....	100
Abb. 5-18:	Angeströmte ebene Platte mit Auftrieb .....	101
Abb. 5-19:	Umströmung und Druckverteilung der ebenen Platte [ 35].....	103
Abb. 5-20:	Vergleich Theorie mit experimentellen Ergebnissen [ 35].....	104
Abb. 5-21:	Symmetrisches Profil, Kreisbogenprofil und gewölbtes Profil [ 35] .....	105
Abb. 5-22:	Prinzip der Singularitätenmethode [ 35] .....	106
Abb. 5-23:	Wirbelbelegung und Zirkulationsverteilung [ 35].....	107
Abb. 5-24:	Quell- und Senkenverteilung eines Profiltropfens [ 35].....	109

Abb. 5-25:	NACA 2412: Auftrieb und Widerstand bei unterschiedlichen Reynoldszahlen [ 35]	111
Abb. 5-26:	Maximalauftrieb bei $Re = 6 \cdot 10^6$ als Funktion des Dickenverhältnisses $d/l$ [ 35] .....	111
Abb. 5-27:	Ablöseverhalten dicker und dünner Profile [ 35] .....	112
Abb. 5-28:	Reibungswiderstand der ebenen Platte [ 35] .....	114
Abb. 5-29:	Einfluß der Rauigkeit auf Auftrieb und Widerstand [ 12] .....	115
Abb. 5-30:	Wirkung unterschiedlicher Vereisungsformen auf Auftrieb und Widerstand [ 12] ..	116
Abb. 5-31:	Minimaler Widerstand als Funktion der Reynoldszahl [ 35] .....	116
Abb. 5-32:	Dreikomponentenmessung des Laminarprofils NACA 66 <sub>2</sub> -415 .....	117
Abb. 5-33:	Schematische Darstellung der drei Anteile der Druckverteilung [ 22] .....	118
Abb. 6-1:	Aufklärer BV141 [ 33] .....	121
Abb. 6-2:	Geometrische Bezeichnungen bei Flügeln unterschiedlicher Grundrißformen .....	122
Abb. 6-3:	Entstehung der freien Wirbel am Tragflügel endlicher Spannweite [ 12] .....	124
Abb. 6-4:	Wirbelsystem des Tragflügels endlicher Spannweite .....	125
Abb. 6-5:	Sichtbarmachung der freien Wirbel an einem Landwirtschafts-Sprühflugzeug .....	125
Abb. 6-6:	Wirbelschleppe eine Boeing 747 .....	126
Abb. 6-7:	Widerstandsreduzierung im Formationsflug, a)NASA Dryden, b)[ 27] .....	126
Abb. 6-8:	Ersatzmodell des Flügels endlicher Streckung .....	127
Abb. 6-9:	Abwindfeld hinter dem Tragflügel bei $\Gamma(y) = const.$ .....	127
Abb. 6-10:	Zirkulationsverteilung am Tragflügel mit $\Gamma(y) \neq const.$ [ 36] .....	128
Abb. 6-11:	Induzierter, effektiver und geometrischer Anstellwinkel .....	129
Abb. 6-12:	Elliptische Zirkulationsverteilung und elliptischer Flügelgrundriß .....	131
Abb. 6-13:	Supermarine Spitfire mit elliptischem Tragflügel [ 33] .....	132
Abb. 6-14:	Vergleich Rechnung und Experiment NACA 2412, $\Lambda = 5$ , [ 36] .....	133
Abb. 6-15:	Vergleich der Polaren $c_A = c_A(c_W)$ für unterschiedliche Streckungen [ 36] .....	134
Abb. 6-16:	Vergleich der Polaren $c_A = c_A(\alpha)$ für unterschiedliche Streckungen [ 36] .....	134
Abb. 6-17:	Flächenhafte Wirbelbelegung [ 36] .....	135
Abb. 6-18:	Ersatz des Tragflügels durch Elementarflügel [ 36] .....	135
Abb. 6-19:	Wirbelsystem des schiebenden Pfeilflügels [ 36] .....	136
Abb. 6-20:	Lokaler Auftriebsbeiwert und Auftriebsverteilung [ 12] .....	137
Abb. 6-21:	Einfluß der Streckung auf den induzierten Widerstand [ 12] .....	138
Abb. 6-22:	Strömungsablösung im Flügelaußenbereich [ 12] .....	138
Abb. 6-23:	Einfluß des Flügelgrundrisses auf das Überziehverhalten [ 22] .....	139
Abb. 6-24:	Einfluß der Torsion auf die Ablösung .....	139
Abb. 6-25:	Abhängigkeit von $c_{a,max}$ von der Reynoldszahl .....	140
Abb. 6-26:	Einfluß des spannwitigen Druckgradienten auf die Grenzschicht .....	140
Abb. 6-27:	Grenzschichtzäune am Flügel einer MIG15 .....	141
Abb. 6-28:	Erhöhung des effektiven Anstellwinkels infolge des Vorderkantenwirbels [ 22] .....	141
Abb. 6-29:	Nicht-linearer Auftrieb infolge des Vorderkantenwirbels .....	142
Abb. 6-30:	Geometrische Verwindung .....	142
Abb. 6-31:	Aerodynamische Verwindung .....	142
Abb. 6-32:	Anteile der spannwitigen Auftriebsverteilung [ 22] .....	143
Abb. 6-33:	Bestimmung der Streckenlast am Tragflügel .....	144
Abb. 6-34:	Vergleichsflügel mit halb elliptischem Grundriß .....	144
Abb. 6-35:	Beitrag der Verwindung zur Auftriebsverteilung .....	144
Abb. 6-36:	Beitrag des Querruderausschlages zum Auftrieb [ 22] .....	145
Abb. 6-37:	Beitrag der Rollbewegung zur Auftriebsverteilung [ 22] .....	146
Abb. 6-38:	Zusatzauftrieb infolge einer Rollbewegung .....	147
Abb. 6-39:	Profilwirkungsfaktor $\eta_P$ als Funktion des Dickenverhältnisses $d/l$ [ 22] .....	148
Abb. 6-40:	Korrektur- und Abminderungsfaktoren für den (Quasi-)Trapezflügel [ 22] .....	149
Abb. 6-41:	Flügelpolare aus Profilpolaren für Profil 1 und 2, Schrägungswinkel $\delta$ .....	149
Abb. 6-42:	Abhängigkeit des Auftriebsanstiegs von der Streckung [ 22] .....	150
Abb. 6-43:	Auftriebsanstieg für den elliptischen Flügel nach Truckenbrodt .....	151
Abb. 6-44:	Auftriebsanstieg und Neutralpunktlage von Delta- und Pfeilflügeln [ 36] .....	152

Abb. 7-1:	Spaltströmung an einer Hinterkantenklappe [ 20] .....	155
Abb. 7-2:	Abhängigkeit der Druckverteilung von der Spaltbreite [ 32] .....	156
Abb. 7-3:	Bauformen von Hinterkantenklappen [ 20] .....	157
Abb. 7-4:	Wirkungsweise des Vorflügels [ 20] .....	157
Abb. 7-5:	Vorflügel mit Ausfahrmechanismus [ 20] .....	158
Abb. 7-6:	Krueger-Klappe [ 20].....	158
Abb. 7-7:	Abhängigkeit von Auftrieb und Moment vom Klappenausschlag [ 36].....	159
Abb. 7-8:	Ruderwirksamkeit unterschiedlicher Klappen [ 36] .....	159
Abb. 7-9:	Abweichung des effektiven vom geometrischen Klappenwinkel [ 36] .....	160
Abb. 7-10:	Aerodynamische Wirkung der Auftriebshilfen [ 20].....	160
Abb. 7-11:	Aerodynamischer Ruderausgleich [ 36] .....	161
Abb. 7-12:	Geometrie der Leitwerke.....	162
Abb. 7-13:	Beitrag des Höhenleitwerks zum Nickmoment.....	163
Abb. 7-14:	Einfluß eines Ruderausschlags auf den Auftriebsbeiwert .....	164
Abb. 7-15:	Höhenleitwerk im Abwindfeld [ 20] .....	164
Abb. 7-16:	Anströmrichtung und Kräfte am Höhenleitwerk [ 36] .....	164
Abb. 7-17:	Anströmrichtung des Seitenleitwerks [ 36].....	165
Abb. 8-1:	Luft als reales Gas .....	169
Abb. 8-2:	Entstehung eines Verdichtungsstoßes.....	175
Abb. 8-3:	Schlierenoptik: Durchgangs- und Koinzidenzverfahren [ 13].....	176
Abb. 8-4:	Schlierenaufnahme eines Profils [ 13] .....	177
Abb. 8-5:	Doppelspalt-Interferometer [ 13].....	177
Abb. 8-6:	Interferogramm einer Überschallströmung um ein Profil [ 13].....	177
Abb. 8-7:	Zustandsgrößen vor und hinter einer Schallwelle.....	178
Abb. 8-8:	Strömungszustände vor und hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß .....	180
Abb. 8-9:	Strömungsgrößen vor und hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß [ 2].....	182
Abb. 8-10:	Umströmung einer konkaven Ecke im Überschall.....	184
Abb. 8-11:	Geschwindigkeitskomponenten vor und hinter einem schrägen Stoß.....	184
Abb. 8-12:	Stoßwinkel als Funktion des Umlenkungswinkel, [ 25].....	186
Abb. 8-13:	Starker und schwacher Stoß .....	186
Abb. 8-14:	Anliegende und abgelöste Stöße .....	187
Abb. 8-15:	Einfluß des Umlenkungswinkels der Strömung auf die Druckerhöhung.....	187
Abb. 8-16:	Triebwerkseinlauf SR-71 .....	188
Abb. 8-17:	Gerade und schräge Stoßsysteme in Triebwerkseinläufen.....	188
Abb. 8-18:	Umströmung einer konvexen Ecke .....	188
Abb. 8-19:	Pitot-Rohr in einer Unterschallströmung .....	190
Abb. 8-20:	Messung des Totaldrucks in einer Unterschallströmung.....	190
Abb. 8-21:	Pitot-Rohr in einer Überschallströmung [ 2].....	191
Abb. 8-22:	eindimensionale und quasi-eindimensionale Strömung .....	193
Abb. 8-23:	Strömungsgeschwindigkeit in konvergenten und divergenten Kanälen.....	194
Abb. 8-24:	Isentrope Strömung in einer angepaßten Düse [ 2] .....	198
Abb. 8-25:	Düsenströmung gegen zu hohen Umgebungsdruck [ 2].....	199
Abb. 8-26:	Düse mit Überexpansion, isentroper Expansion und Unterexpansion [ 2].....	200
Abb. 8-27:	Verdünnungs- und Verdichtungsstellen hinter einer 2-dimensionalen Düse [ 13] ...	200
Abb. 8-28:	Raketentriebwerk, Austrittsquerschnitt: $T = 1500 \text{ K}$ , $u = 2200 \text{ m/s}$ , $M = 3$ [ 13] ....	201
Abb. 8-29:	Verdichtungs- und Verdünnungsstellen hinter einer 2-dimensionalen Düse [ 13] ...	201
Abb. 8-30:	Idealer Überschalldiffusor.....	202
Abb. 8-31:	Realer Überschalldiffusor .....	202
Abb. 8-32:	Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit in die freie Atmosphäre [ 2] .....	203
Abb. 8-33:	Überschalldüse mit angeschlossenem konstanten Strömungsquerschnitt [ 2] .....	203
Abb. 8-34:	Überschalldüse, Meßstrecke und Überschalldiffusor [ 2] .....	204
Abb. 9-1:	De Havilland D.H. 108 und Bell X1, [ 33] .....	206
Abb. 9-2:	Gewehrkegel im Überschall, Ernst Mach 1888, Prag [ 37].....	207
Abb. 9-3:	Ungestörte Strömung und Störgeschwindigkeiten .....	207
Abb. 9-4:	Ähnlichkeitsregeln von Prandtl-Glauert, Kármán-Tsien- und Laitone [ 2] .....	209

Abb. 9-5:	Verdichtungsstöße und Kritische Machzahl an einem Profil, [ 36], [ 13] .....	210
Abb. 9-6:	Bestimmung der kritischen Machzahl .....	211
Abb. 9-7:	Widerstandsanstieg bei Überschreiten der kritischen Machzahl, [ 2].....	212
Abb. 9-8:	Wanderung der Stoßlagen in Abhängigkeit von der Machzahl, [ 13] .....	212
Abb. 9-9:	Abhängigkeit der kritischen Machzahl von der Profildicke $\delta = d/l$ , [ 13] .....	213
Abb. 9-10:	Einfluß von Dickenrücklage und Wölbungsverhältnis auf die $M_{krit}$ , [ 13] .....	213
Abb. 9-11:	Polaren für NACA 0009, [ 13] .....	214
Abb. 9-12:	Lokale Machzahl und resultierende Druckverteilung, [ 13].....	214
Abb. 9-13:	Abhängigkeit des Auftriebsgradienten als Funktion der Machzahl, [ 13].....	215
Abb. 9-14:	Druckverteilung und Widerstand, 'konventionelles' Profil und 'peaky'-Profil, [ 13].	216
Abb. 9-15:	Druckverteilung an 'peaky'-Profilen, [ 20] .....	217
Abb. 9-16:	Druckverteilung am 'roof-top'-Profil, [ 20] .....	217
Abb. 9-17:	Patentschrift Otto Frenzl's aus dem Jahr 1944 in der Neuauflage von 1955, [ 26] ...	218
Abb. 9-18:	Interferenzwiderstand Triebwerksgondel, Variation der axialen Position, [ 26] .....	219
Abb. 9-19:	Flugerprobung des Prototypen Junkers Ju287, Sommer 1944 .....	219
Abb. 9-20:	Convair F-102: Querschnittsverteilung und Gesamtwiderstand, [ 3].....	220
Abb. 9-21:	Convair F-102, Prototyp und Serienversion.....	220
Abb. 9-22:	H. Ludwig, A. Betz, Profil Gö 623, AVA Göttingen 1939, [ 36] .....	221
Abb. 9-23:	Stromlinienverlauf und Geschwindigkeitsvektoren am schiebenden Flügel .....	221
Abb. 9-24:	Abhängigkeit der kritischen Machzahl von dem Pfeilwinkel, [ 13].....	222
Abb. 9-25:	Rückwärts ( $\varphi > 0$ ) und Vorwärts ( $\varphi < 0$ ) gepfeilter Flügel.....	222
Abb. 9-26:	Biegeverformung bei Vorwärts- und Rückwärtspfeilung, [ 26].....	223
Abb. 9-27:	Auftriebsgradient als Funktion der Pfeilung, [ 13].....	223
Abb. 9-28:	Einfluß der Pfeilung auf die Polare, [ 13] .....	224
Abb. 9-29:	Sichelflügel, Handley Page H.P.80 - Victor, [ 8] .....	224
Abb. 9-30:	Deltaflügel, Eurofighter EF2000.....	225
Abb. 9-31:	Doppel-Deltaflügel, Saab Draken .....	225
Abb. 9-32:	Profilkontur .....	226
Abb. 9-33:	Ebene Platte in einer Überschallströmung, [ 35].....	227
Abb. 9-34:	Auftriebsanstieg, Neutralpunktlage und Widerstand der ebenen Platte, [ 35] .....	228
Abb. 9-35:	Druckverteilung an einer ebenen Platte: a) Unterschall, b) Überschall .....	229
Abb. 9-36:	Überschallströmung um ein Polygonprofil, [ 35].....	229
Abb. 9-37:	Druckverteilung an Profilen bei Überschallgeschwindigkeit, [ 35] .....	230
Abb. 9-38:	Wellenwiderstand und Reibungswiderstand als Funktion der Machzahl, [ 13] .....	231
Abb. 9-39:	Reibungsbeiwert $c_f$ der ebenen Platte als Funktion der Reynoldszahl, [ 13].....	233
Abb. 9-40:	Gepfeilter Tragflügel mit Überschall- und Unterschallkanten, [ 13] .....	233
Abb. 9-41:	Kantenumströmung, [ 36] .....	234
Abb. 9-42:	Druckverteilungen als Funktion von Über- bzw. Unterschallkanten, [ 36].....	234
Abb. 9-43:	Auftriebsreduzierung bei Rechteck- und Pfeilflügel im Überschall, [ 13].....	235
Abb. 9-44:	Auftriebsgradient und Widerstand in Abhängigkeit von Form und Machzahl, [ 13]	237
Abb. 9-45:	Widerstand als Funktion der Machzahl und Flügelgrundriß, [ 22], [ 36].....	238
Abb. 9-46:	Neutralpunktwanderung in Abhängigkeit von der Machzahl, [ 36].....	238
Abb. 9-47:	Überschallknall, Druckverteilung, [ 13], [ 21] .....	239

## Tabellenverzeichnis

Tab. 1-1:	Zusammensetzung der Luft .....	3
Tab. 1-2:	Anfangswerte und Temperaturgradienten nach ISA .....	6
Tab. 1-3:	Kräfte, Momente und Drehgeschwindigkeiten .....	11
Tab. 1-4:	Transformationsmatrix flugzeugfestes - aerodynamisches System .....	11
Tab. 1-5:	Dimensionslose Beiwerte .....	12
Tab. 4-1:	Elemente ebener Potentialströmungen [ 34] .....	74
Tab. 4-2:	Geschwindigkeitskomponenten ebener Potentialströmungen [ 34] .....	75
Tab. 5-1:	Parameter der fünfziffrigen NACA-Profile .....	87
Tab. 5-2:	Korrekturfaktoren als Funktion der kritischen Reynoldszahl .....	114
Tab. 5-3:	Momentenanstieg in Abhängigkeit von der relativen Rudertiefe [ 22] .....	119
Tab. 6-1:	Geometrische Parameter des Tragflügels .....	123
Tab. 6-2:	Charakteristische Werte für Rechteck-, Trapez, Dreieck- und Ellipsenflügel .....	123
Tab. 6-3:	Ergebnisse der elliptischen Zirkulationsverteilung .....	132
Tab. 6-4:	Profilwirkungsgrade als Funktion von $d/l$ .....	148
Tab. 7-1:	Definitionen der Winkel für Ruder und Klappen .....	163
Tab. 8-1:	Werte für Luft als kalorisch perfektes Gas .....	170
Tab. 8-2:	Zusammenfassung der Zustandsänderungen .....	173
Tab. 9-1:	Aerodynamische Beiwerte eines Profils im Überschall, lineare Theorie nach Ackeret .....	226

## Nomenklatur

### Lateinische Bezeichnungen

$A$	$[m^2]$	Fläche
$a$	$[m/s^2]$	Beschleunigung
$b$	$[m]$	Breite
	$[m]$	Spannweite
	$[kg/W \cdot s]$	spez. Treibstoffverbrauch
$C$	$[-]$	Integrationskonstante
	$[-]$	dimensionsloser Beiwert
$c$	$[J/kg \cdot K]$	spez. Wärme
	$[m/s]$	Schallgeschwindigkeit
	$[-]$	dimensionsloser Beiwert
$Da$	$[-]$	Damköhler-Zahl
$d$	$[m]$	Profildicke
$E$	$[m^3/s, m^2/s]$	Quellstärke 3-dim, 2-dim
$e$	$[J/kg]$	spez. innere Energie
$F$	$[N]$	Kraft, Schub
$Fr$	$[-]$	Froude-Zahl
$Ec$	$[-]$	Eckert-Zahl
$Eu$	$[-]$	Euler-Zahl
$Fo$	$[-]$	Fourier-Zahl
$f$	$[N/kg]$	normierte Kraft
	$[m]$	Profilwölbung
$g$	$[m/s^2]$	Gravitationskonstante
$H$	$[m]$	Höhe
$h$	$[m]$	Höhe
	$[J/kg]$	spez. Enthalpie
$i$	$[-]$	$\sqrt{-1}$
$k$	$[m/s]$	spez. Zirkulationsstärke
$L$	$[Nm]$	Rollmoment
$l$	$[m]$	Länge
	$[m]$	Profiltiefe
$M$	$[Nm]$	Nickmoment
	$[m^4/s, m^3/s]$	Dipolmoment, 3-dim, 2-dim
$N$	$[Nm]$	Giermoment
$M$	$[-]$	Machzahl
$m$	$[kg]$	Masse
$n$	$[-]$	Lastvielfaches
$P$	$[W]$	Leistung
$Pe$	$[-]$	Péclet-Zahl
$p$	$[Pa]$	Druck
	$[s^{-1}]$	Rollgeschwindigkeit
$\dot{Q}$	$[J/m^2]$	Wärmestrom
$\dot{q}$	$[W/m^2]$	spez. Wärmestrom
$q$	$[s^{-1}]$	Nickgeschwindigkeit
$\bar{q}$	$[Pa]$	dynamischer Druck
$R$	$[J/kg \cdot K]$	spez. Gaskonstante
	$[m]$	Reichweite
$Re$	$[-]$	Reynoldzahl
$r$	$[m]$	Radius
	$[s^{-1}]$	Giergeschwindigkeit



$S$	[-] [m <sup>2</sup> ]	Strouhalzahl (Flügel-)Fläche
	[-]	Strouhal-Zahl
$s$	[m]	Halbspannweite, Strecke
$T$	[K]	Temperatur
$Tu$	[-]	Turbulenzgrad
$t$	[s]	Zeit
$U$	[m/s]	Geschwindigkeit
$u$	[m/s]	Geschwindigkeit
	[J/kg]	spez. Innere Energie
$V$	[m/s]	Geschwindigkeit
$v$	[m/s]	Geschwindigkeit
	[m <sup>3</sup> ]	spez. Volumen
$W$	[N]	Widerstand
$We$	[-]	Weber-Zahl
$w$	[m/s]	Geschwindigkeit
$X$	[N]	Axialkraft
$Y$	[N]	Seitenkraft
$Z$	[N]	Normalkraft
$x, y, z$	[m]	Ortskoordinaten

### Griechische Bezeichnungen

$\alpha$	[rad, Grad]	Anstellwinkel
$\beta$	[rad, Grad]	Schiebewinkel
$\delta$	[m]	Grenzschichtdicke
$\varepsilon$	[rad]	Gleitwinkel
$\Gamma$	[m <sup>2</sup> /s]	Zirkulation
$\eta$	[rad, Grad]	Höhenruderausschlag
	[rad, Grad]	Klappenausschlag, allg.
	[m]	transformierte Koordinate
	[m]	komplexe Koordinate
$\varphi$	[rad, Grad]	Winkel, Flügel­pfeilung
$\Phi$	[m <sup>2</sup> /s]	Potentialfunktion
$\kappa$	[-]	Isentopenexponent
$\Lambda$	[-]	Streckung
$\lambda$	[m]	Mittlerer freie Weglänge
$\mu$	[Pa·s]	dynamische Viskosität
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematischen Viskosität
	[rad, Grad]	V-Stellung des Flügels
$\Theta$	[-]	Winkelfunktion
$\pi$	[-]	Kreiszahl
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Dichte
$\sigma$		
$\tau$	[Pa]	Schubspannung
	[m]	transformierte Koordinaten
$\upsilon$	[rad, Grad]	Winkel
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	Drehvektor
$\xi$	[rad, Grad]	Querruderausschlag
	[m]	transformierte Koordinaten
$\Psi$	[m <sup>2</sup> /s]	Stromfunktion
$\zeta$	[rad, Grad]	Seitenruderausschlag
	[m]	komplexe Koordinate

**Indizes**

$\infty$	Größe auf die ungestörte Strömung bezogen
0	Größe auf Meeresniveau bezogen
	Totalgröße
$A$	Anfangswert
$D$	Druck
$a$	Absolutwert
	außen
$f$	Reibung
$G$	Geometrisch
$h$	Größe auf die Höhe $h$ bezogen
$i$	innen
$K$	Kapillarkraft
	Konvektion
$L$	Wärmeleitung
$p$	konstanter Druck
$Q$	Querruder
$R$	Reibung
$S$	Schwerkraft
$T$	Trägheit

**Symbole**

$\nabla$	Nabla-Operator
$\Delta$	Laplace-Operator

## 1 Einleitung

### 1.1 Teilgebiete der Aerodynamik

Die Aufgabenbereiche der Aerodynamik lassen sich je nach Anwendungsgebiet nach unterschiedlichen Kriterien klassifizieren. Eine Möglichkeit besteht in der klassischen Unterscheidung zwischen der *Entwurfsaufgabe* und der *Nachrechnungsaufgabe*. Bei der Entwurfsaufgabe wird ausgehend von einer vorgegebenen Druckverteilung die äußere Form z.B. eines Profils, definiert und die sich daraus ergebenden aerodynamischen Charakteristika berechnet. Das Ziel der Nachrechnungsaufgabe besteht darin, ausgehend von einer vorhandenen Geometrie die Druckverteilungen oder Beiwerte zu berechnen. Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal können die verwendeten Werkzeuge und Methoden sein, z.B. *theoretische Aerodynamik* (Theorie, Handbuchverfahren), *numerische Aerodynamik* (CFD) oder *experimentelle Aerodynamik* (Windkanal, Flugversuch). Zur Klassifizierung kann auch der Anwendungsbereich verwendet werden, z.B. die *äußere Aerodynamik*, welche eine Aussage über die Umströmung des Gesamtflugzeugs liefert und Gesamtbeiwerte der Konfiguration liefert, die wiederum als Eingangsgrößen für Flugmechanik und Flugregelung erforderlich sind. Die *innere Aerodynamik* untersucht alle Fragen, die mit der Integration von Triebwerken in die Zelle, insbesondere bei Kampflugzeugen zusammenhängen, d.h. Einlaufströmungen und Düsenströmungen. Gegenüber dem Triebwerkshersteller müssen seitens des Zellenherstellers Strömungsparameter, z.B. Gleichförmigkeit von Druckverhältnissen, Geschwindigkeits- und Drallvektoren in der aerodynamischen Bezugsebene im Triebwerkeinlauf garantiert werden. Eine weitere Aufgabe der Aerodynamik besteht neben der Ermittlung der Gesamtlasten auf die Konfiguration, in der Ermittlung von Lastverteilungen, z.B. am Tragflügel sowie von Teillasten auf einzelne Baugruppen als Vorgabe für die Belastungsmechanik.

### 1.2 Bereiche der Luft- und Raumfahrt

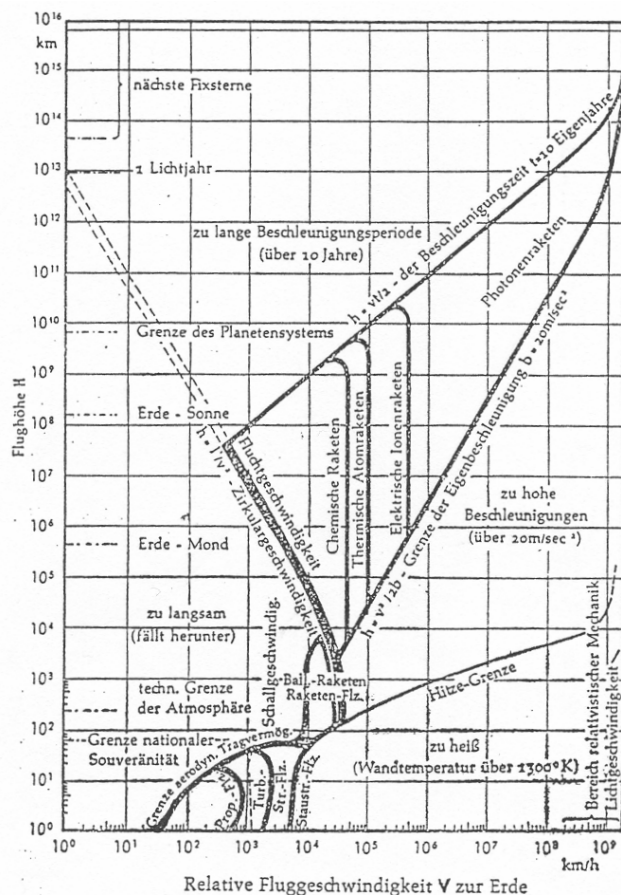
Die unterschiedlichen Bereiche der Luft- und Raumfahrt sind in Abb. 1-1 in einem Höhen-Geschwindigkeitsdiagramm skizziert. Hier wird deutlich, daß aufgrund der erforderlichen Beschleunigung und Flugzeit, Ziele außerhalb unseres Sonnensystems mit konventionellen Antrieben für bemannte Missionen in absehbarer Zeit nicht zu erreichen sind. Von besonderer Bedeutung sind hierbei die astronautischen Fluchtgeschwindigkeiten. Die *erste Astronautische Geschwindigkeit* entspricht der Orbitalgeschwindigkeit  $v_K$  eines Satelliten um einen Planeten in Abhängigkeit von seiner Bahnhöhe  $h$ . Für einen Satelliten, der sich in einer Umlaufbahn um die Erde in einer Höhe von  $h = 500$  km befindet, ergibt sich eine Kreisbahngeschwindigkeit von  $v_K = 7.6$  km/s.

$$v_K = \sqrt{g \cdot (r_E + h)} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot m_E}{r_E + h}} \quad \text{Gl. 1-1}$$

Die *zweite Astronautische Geschwindigkeit* entspricht der Geschwindigkeit  $v_F$ , auf die ein Flugkörper beschleunigt werden muß, um das Gravitationsfeld eines Planeten zu überwinden. Um das Schwerefeld der Erde zu verlassen ist eine Fluchtgeschwindigkeit von  $v_F = 11.2$  km/s erforderlich.

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot m_E}{r}} = v_K \cdot \sqrt{2} \quad \text{Gl. 1-2}$$

Die *dritte Astronautische Geschwindigkeit* schließlich entspricht der Geschwindigkeit, die erforderlich ist um das Verlassen des Sonnensystems zu ermöglichen. Für unser Sonnensystem entspricht dies einer Geschwindigkeit von  $v_F = 16$  km/s.



Auch wenn für die Belange der Flugzeugaerodynamik lediglich der untere Bereich der Atmosphäre bis zu einer Höhe von ca. 100 km von Bedeutung ist, so treten jedoch auch in größeren Höhen, d.h. 1000 km noch meßbare aerodynamische Effekte auf, die sich z.B. bei der Bahnstabilisierung von Satelliten und Raumstationen bemerkbar machen, da trotz der stark verdünnten Atmosphäre sich immer noch ein Widerstand ergibt, der Bahnkorrekturen erforderlich machen um ein Absinken des Satelliten zu verhindern. Diese Bahnkorrekturen sind letztendlich für die Begrenzung der Lebensdauer von Satelliten (ca. 7-10 Jahre), verantwortlich da die Lageregelungstriebwerke nur über einen endlichen Treibstoffvorrat verfügen. Aufgrund der hohen thermischen und mechanischen Lasten, die bei hohen Geschwindigkeiten auftreten, ist der Einsatzbereich im Reiseflug von Hyperschallfluggeräten, d.h. Fluggeräte, die für Geschwindigkeiten größer Mach 4 konzipiert sind, auf den Höhenbereich 40-50 km beschränkt.

Abb. 1-1: Bereiche der Luft- und Raumfahrt [ 22]

### 1.3 Atmosphäre

### 1.3.1 Reale Atmosphäre

Die Atmosphäre der Erde ist in ein ständigen Veränderungen unterworfenes dynamisches System, eine Art Wärmemaschine [ 24], der in den Tropen durch Absorption von Sonnenstrahlung Wärme zugeführt und in den Polarregionen Wärme durch Abstrahlung entzogen wird. Infolge der Erdrotation ändern sich die Strahlungsverhältnisse auf der Erdoberfläche permanent. Eine weitere Komplikation der Verhältnisse, im Vergleich zu einer einfachen Wärmekraftmaschine im thermodynamischen Sinn, ergibt sich aus der asymmetrischen Verteilung von Meer und Landmassen auf der Erdoberfläche, da diese auch unterschiedliche Absorptions- und Emissionseigenschaften aufweisen.

Die Atmosphäre selbst besteht aus einer Mischung unterschiedlicher Gase, deren Zusammensetzung jedoch über die Höhe relativ konstant bleibt. Hauptbestandteil bildet mit ca. 78% Stickstoff, gefolgt von ca. 21% Sauerstoff, weitere Komponenten bilden Wasserdampf, Kohlendioxid, Ozon und in sehr geringen Mengen Edelgase wie z.B. Argon und Neon, vgl. Tab. 1-1.

Gas		Volumenprozent
Stickstoff	N <sub>2</sub>	78.09
Sauerstoff	O <sub>2</sub>	20.95
Argon	Ar	0.93
Kohlendioxid	CO <sub>2</sub>	0.03 (schwankt)
Neon	Ne	0.0018
Helium	He	0.0005
Krypton	Kr	0.0001
Wasserstoff	H <sub>2</sub>	0.00005
Xenon	Xe	0.000008
Ozon	O <sub>3</sub>	0.00001 (schwankt)

Tab. 1-1: Zusammensetzung der Luft

Eine feste Grenze existiert in der Höhe nicht; stattdessen erfolgt ein kontinuierlicher Übergang in den interplanetarischen Raum. Die untersten und im Sinne der Flugzeug-aerodynamik interessantesten Schichten, bilden die Troposphäre und Stratosphäre. Der Übergang zwischen diesen beiden Schichten erfolgt vergleichsweise diskontinuierlich und die Trennungsschicht (*Tropopause*) liegt in unseren Breiten bei ca. 10 km Höhe und in den Tropen bei ca. 17 – 18 km. Veränderungen in der Atmosphäre, also das Wettergeschehen, spielen sich vorwiegend in der untersten Schicht, der Troposphäre ab. In der Troposphäre selbst spielt der Bereich in Bodennähe, die so genannte Reibungsschicht bis in 500 – 1000 m über dem Boden eine besondere Rolle, da hier die Atmosphäre von den Verhältnissen an der Erdoberfläche beeinflusst wird. Die Höhe der Tropopause ist nicht nur eine Funktion des geographischen Breitengrades, sondern unterliegt auch jahreszeitlichen Schwankungen.

Der für das Wettergeschehen relevante Anteil der Atmosphäre bildet im Vergleich zum Erddurchmesser nur ein hauchdünne Schale, d.h. alle Hauptströmungen der Luft erfolgen horizontal. Vertikalbewegungen können demgegenüber nur eine vergleichsweise geringe Geschwindigkeit aufweisen, haben jedoch eine besondere Relevanz bei Vorgängen, wie Wolkenbildung und Niederschlag in seinen unterschiedlichen Formen.

Die größten Höhenunterschiede der Tropopause treten entlang der Bänder maximaler Windgeschwindigkeiten (*jet streams*) auf. Oberhalb der Tropopause befindet sich bis zu einer Höhe von ca. 50 km die Stratosphäre. Nahm bis zum Erreichen der Tropopause die Lufttemperatur noch mit ca. 6.5 K/1000m ab, so stellt sich in der Stratosphäre anfangs eine isotherme Schicht ein um anschließend ab einer Höhe von ca. 20 km wieder anzusteigen. Der Temperaturanstieg innerhalb der oberen Stratosphäre, ist auf die starke Absorption des UV-Anteils im Sonnenlicht durch Ozon zurückzuführen. Der Ozongehalt erreicht in der Stratosphäre in einer Höhe zwischen 20 - 25 km sein Maximum.

Die Obergrenze der Stratosphäre wird durch die Stratopause gebildet. Das nun folgende Höhenband von 50 - 80 km, die Mesosphäre ist durch einen negativen Temperaturgradienten mit zunehmender Höhe gekennzeichnet und der Luftdruck hat sich auf 1 - 0.01 hPa reduziert. Nach der Mesosphäre folgt die Ionosphäre oder Thermosphäre bis in ca. 800 km Höhe, die infolge von ionisierten Schichten (*E-Schichten* oder *Heaviside-Schichten*) Radiowellen reflektieren und dadurch Überreichweiten erzeugen können. Oberhalb von 800 km erreicht man die Exosphäre, die den Übergang von der Atmosphäre zum interplanetaren Raum bildet. Von besonderem Interesse in dieser Schicht ist der so genannte *Van-Allen-Strahlungsgürtel*, der den Hauptteil der kosmischen Strahlung (Gamma-Strahlung) abschirmt. Bemannte Raumfahrtmissionen außerhalb dieses Schutzgürtels, also auch bereits kurze Missionen zu Mond oder Mars, beinhalten dadurch ein immenses Risiko der gesundheitlichen Schädigung infolge hoher Strahlungsbelastung.

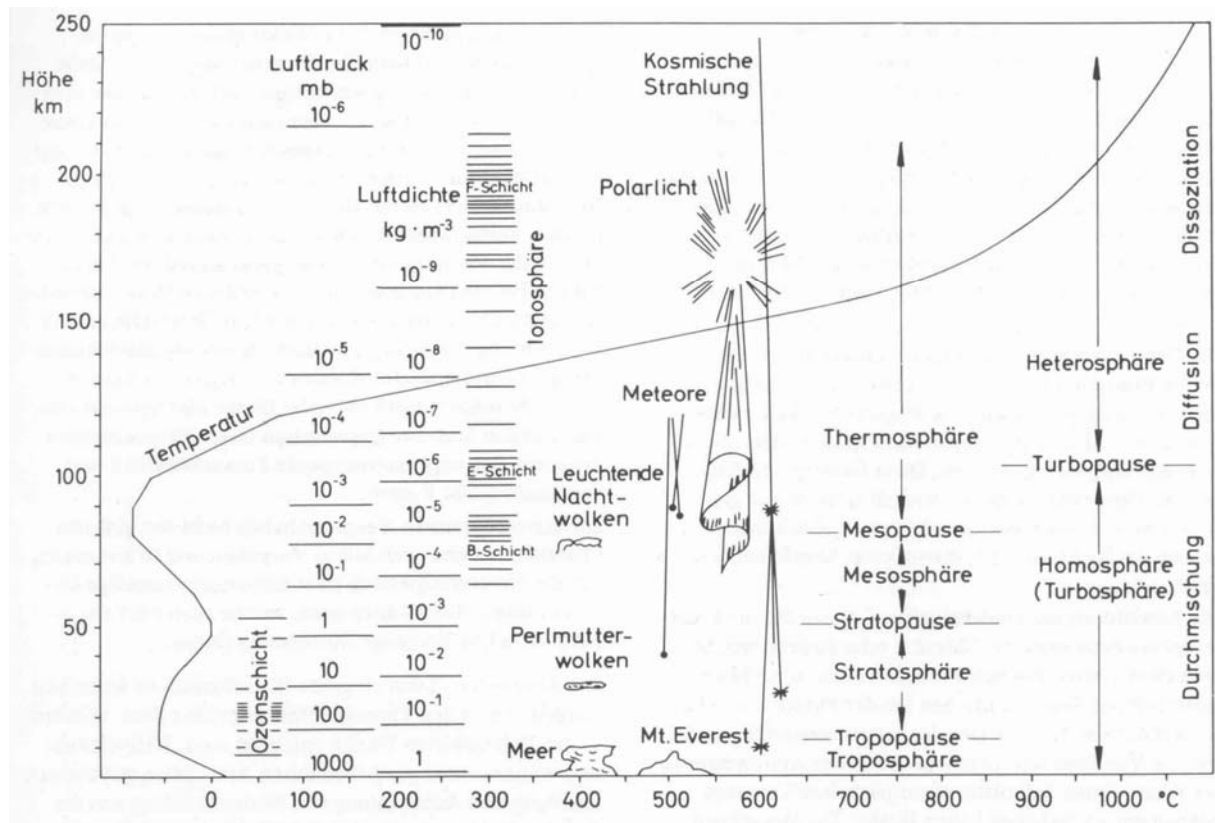


Abb. 1-2: Struktur der Atmosphäre [ 24]

### 1.3.2 Hydrostatische Grundgleichung

Im Gegensatz zu einem inkompressiblen Fluid ( $\rho = \text{const.}$ ) z.B. Wasser, bei dem der Druck sich linear mit der Höhe ändert, handelt es sich bei Luft um ein kompressibles Fluid ( $\rho \neq \text{const.}$ ) und der Luftdruck nimmt exponentiell mit der Höhe ab.

Unter dem Einfluß der Schwerkraft übt die Luft einen Druck aus, der von der Luftmenge oberhalb des betrachteten Niveaus abhängt. Betrachtet man eine dünne Luftschicht der Dicke  $dh$ , so beträgt der Druck an der Unterseite  $p$  und an der Oberseite  $p + dp$ . Für die weiteren Betrachtungen wird aus dieser Schicht mit der Dicke  $dh$  ein Volumenelement  $dV$  mit der Grundfläche  $1 \times 1 \text{ m}^2$  geschnitten. Das Gewicht des Elements  $dV$  beträgt demnach

$$F_G = g \cdot \rho \cdot dh \quad \text{Gl. 1-3}$$

Aus der Bedingung, daß sich Druck- und Volumenkräfte im Gleichgewicht befinden müssen, folgt

$$p = (p + dp) + g \cdot \rho \cdot dh \quad \text{Gl. 1-4}$$

bzw.

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dh \quad \text{Gl. 1-5}$$

Dieser Gleichung wird als *hydrostatische Grundgleichung* bezeichnet und gilt für kompressible als auch für inkompressible Fluide. Unter der vereinfachenden Annahme, Luft als ideales

Gas zu betrachten, lassen sich die statischen Größen Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und Dichte  $\rho$  an jedem Punkt der Atmosphäre über die Zustandsgleichung des idealen Gases beschreiben:

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad \text{Gl. 1-6}$$

Eingesetzt in die hydrostatische Grundgleichung folgt

$$dp = -g \cdot \frac{p}{R \cdot T} \cdot dh \quad \text{Gl. 1-7}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R \cdot T} \cdot dh \quad \text{Gl. 1-8}$$

Die Integration über die Höhe  $h$  ergibt

$$\ln p = -\frac{g}{R \cdot T} \cdot h + C \quad \text{Gl. 1-9}$$

### 1.3.3 Barometrische Höhenformel

Unter der Annahme einer konstanten Temperatur in der Atmosphäre ( $T = 273.15 \text{ K} = \text{const.}$ ) und einem Luftdruck von  $p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$  bei  $h = 0$ , ergibt sich aus der hydrostatischen Gleichung die *barometrische Höhenformel*

$$p_h = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}} \quad \text{Gl. 1-10}$$

bzw.

$$h = \frac{R \cdot T}{g} \cdot \ln \frac{p_0}{p_h} \quad \text{Gl. 1-11}$$

### 1.3.4 Internationale Höhenformel

Wird die Temperaturabnahme in der Troposphäre von  $6.5 \text{ K/1000 m}$  berücksichtigt, so erhält man die genauere *internationale Höhenformel*, die bis  $h = 11 \text{ km}$  gute Ergebnisse liefert.

$$p_h = p_0 \cdot \left(1 - \frac{6.5 \cdot h}{288 \text{ km}}\right)^{5.225} \quad \text{Gl. 1-12}$$

### 1.3.5 Internationale Standardatmosphäre (ISA)

Zur Auslegung von Fluggeräten und zum Vergleich von berechneten Flugleistungen, wurde eine *internationale Standardatmosphäre* definiert. Diese Normatmosphäre basiert auf jahreszeitlich und geographisch gemittelten Meßwerten für Druck, Dichte und Temperatur. Die dem Rechenmodell zugrunde liegende höhenabhängige Temperaturverteilung ist in Abb. 1-3 skizziert. Für die isothermen Bereiche der Atmosphäre, also die Höhenbereiche  $11 \text{ km} < h < 25 \text{ km}$ ,  $47 \text{ km} < h < 53 \text{ km}$  und  $79 \text{ km} < h < 90 \text{ km}$ , berechnen sich Druck und Dichte entsprechend

$$\frac{p_h}{p_A} = e^{-\left(\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right)(h-h_A)} \quad \text{Gl. 1-13}$$

und

$$\frac{\rho_h}{\rho_A} = e^{\left(-\frac{g_0}{R \cdot T_h}\right)(h-h_A)}$$

Gl. 1-14

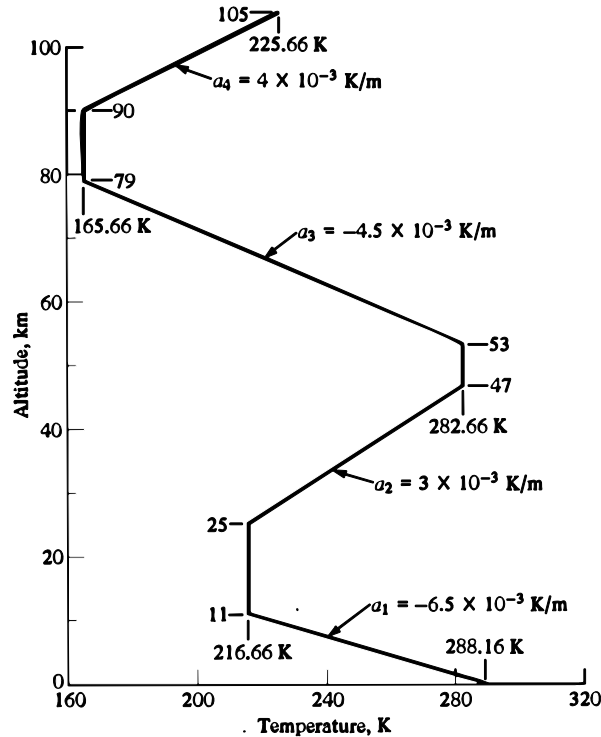


Abb. 1-3: Temperaturverteilung in der Standardatmosphäre [ 3]

In den Bereichen der Atmosphäre, die einen Temperaturgradienten mit der Höhe aufweisen erfolgt die Berechnung von Druck, Dichte und Temperatur abschnittsweise mit den in Tab. 1-2 angegebenen Temperaturgradienten und Anfangswerten, wobei  $R = 287 \text{ [J/kg}\cdot\text{K]}$  die spezifische Gaskonstante von Luft bezeichnet.

$h \text{ [m]}$	$h_A \text{ [m]}$	$T_A \text{ [K]}$	$a \text{ [K/m]}$	$p_A \text{ [Pa]}$	$\rho_A \text{ [kg/m}^3\text{]}$
0 - $11 \cdot 10^3$	0	288.15	$-6.5 \cdot 10^{-3}$	101325	1.2250
$11 \cdot 10^3$ - $25 \cdot 10^3$	$11 \cdot 10^3$	216.66	0.0	22700	0.3648
$25 \cdot 10^3$ - $47 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^3$	216.66	$+3.0 \cdot 10^{-3}$	2527	0.0406
$47 \cdot 10^3$ - $53 \cdot 10^3$	$47 \cdot 10^3$	282.66	0.0	126	0.0016
$53 \cdot 10^3$ - $79 \cdot 10^3$	$53 \cdot 10^3$	282.66	$-4.5 \cdot 10^{-3}$	58	0.0007
$79 \cdot 10^3$ - $90 \cdot 10^3$	$79 \cdot 10^3$	165.66	0.0	0.2714	$3.2 \cdot 10^{-6}$
$90 \cdot 10^3$ - $105 \cdot 10^3$	$90 \cdot 10^3$	165.66	$+4.0 \cdot 10^{-3}$	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$

Tab. 1-2: Anfangswerte und Temperaturgradienten nach ISA

$$T_h = T_A + a \cdot (h - h_A)$$

Gl. 1-15

$$p_h = p_A \cdot \left( \frac{T_h}{T_A} \right)^{\frac{-g_0}{a \cdot R}}$$

Gl. 1-16



$$\rho_h = \rho_A \cdot \left( \frac{T_h}{T_A} \right)^{-\left[ \frac{g_0}{a \cdot R} + 1 \right]} \quad \text{Gl. 1-17}$$

Insbesondere zur Berechnung der Reynoldszahl  $Re$  ist die Kenntnis der kinematischen Viskosität  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s] erforderlich. Die dynamische Viskosität  $\mu$  [Pa·s] lässt sich näherungsweise nach der *Sutherlandformel* als Funktion der Temperatur berechnen. Die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von Luft ist in Abb. 1-4 dargestellt.

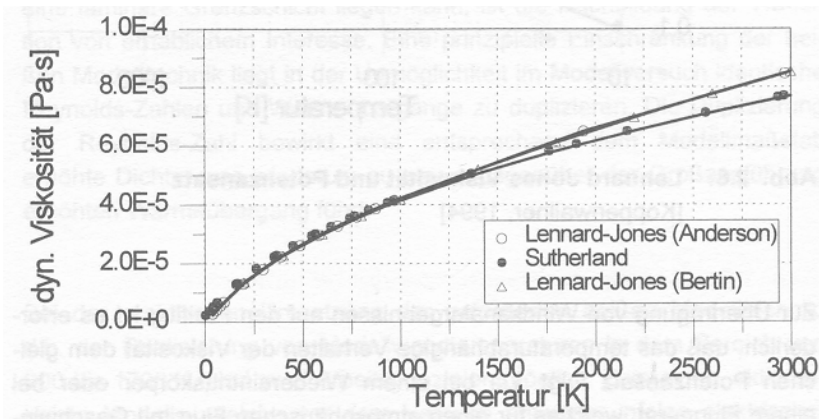


Abb. 1-4: Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von Luft

$$\mu = 1.458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{1.5}}{T + 110.4} \quad [\text{Pa} \cdot \text{s}] \quad \text{Gl. 1-18}$$

Die kinematische Viskosität  $\nu$  ergibt sich aus der dynamischen Viskosität  $\mu$  und der Dichte  $\rho$  zu

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad \text{Gl. 1-19}$$

### 1.3.6 Definitionen der Höhe

Die umgangssprachliche Bezeichnung *Höhe*, also der Abstand eines Punktes zum Boden, erfordert im Sinne der Flugphysik eine genauere Beschreibung. Unterschieden werden sechs Definitionen:

- geometrische Höhe
- absolute Höhe
- geopotentielle Höhe
- Druckhöhe
- Temperaturhöhe
- Dichtehöhe

#### Geometrische Höhe $h_G$

Abstand eines Punktes über dem Meeresspiegel. Ein Anwendungsbereich wäre z.B. Höhenangaben in Landkarten.

**Absolute Höhe  $h_a$** 

Abstand eines Punktes zum Erdmittelpunkt,  $r$  = Erdradius

$$h_a = h_G + r \quad \text{Gl. 1-20}$$

**Geopotentielle Höhe  $h$** 

Die quadratische Änderung der Gravitation mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt ist insbesondere bei der Bahnrechnungen von Satelliten zu berücksichtigen.

$$g = g_0 \cdot \left( \frac{r}{h_a} \right)^2 = g_0 \cdot \left( \frac{r}{r + h_G} \right)^2 \quad \text{Gl. 1-21}$$

Berücksichtigt man die Höhenabhängigkeit der Erdgravitation, so ergibt sich die *geopotentielle Höhe  $h$*  zu

$$h = \left( \frac{r}{r + h_G} \right) \cdot h_G \quad \text{Gl. 1-22}$$

**Druckhöhe**

Einfache Höhenmesser in Flugzeugen arbeiten in der Regel als barometrische Höhenmesser, d.h. es wird der statische Luftdruck außerhalb des Flugzeugs gemessen. Basierend auf der Standardatmosphäre wird daraus eine Höhe berechnet, die diesem gemessenen Druck entspricht. Dies ergibt die so genannte *Druckhöhe*. Obwohl die Druckhöhe in der Regel nicht der geometrischen Höhe entspricht, wird sie zur Staffelung des Flugverkehrs nach so genannten Flugflächen (*flight levels*) verwendet, z.B. FL100 entspricht einer Höhe von 10000ft = 3048m. Alle Höhenangaben werden auf den Standarddruck auf Meeresniveau (QNH) von 1013.25 hPa bezogen. Dies gewährleistet, daß Flugzeuge, insbesondere wenn sie sich der Luftdruck ändert, zwar nicht auf einer konstanten geometrischen Höhe, jedoch mit einer gleich bleibenden Höhenstaffelung relativ zueinander fliegen.

**Temperaturhöhe**

Gleichzeitig mit dem statischen Druck wird die statische Temperatur außerhalb des Flugzeugs gemessen. Bis zu einer Höhe von 11 km läßt sich dieser gemessenen Temperatur über die Standardatmosphäre ebenfalls eindeutig eine Höhe zuordnen. Das wäre die so genannte *Temperaturhöhe*.

**Dichtehöhe**

Die Dichtehöhe ergibt sich über die Zustandsgleichung des idealen Gases aus den gemessenen Werten für Druck und Temperatur. Die *Dichthöhe* wird insbesondere zur Berechnung der Flugleistungen, insbesondere der Startleistung verwendet.

### 1.4 Flugbereichsgrenzen

Der Bereich, der von einem Fluggerät erflogen werden kann, unterliegt gewissen Einschränkungen. Diese Flugbereichsgrenzen, bzw. *Flugvelope* lässt sich z.B. in einem Mach-Höhen-Diagramm oder einem Mach-Anstellwinkeldiagramm (Abb. 1-5) darstellen.

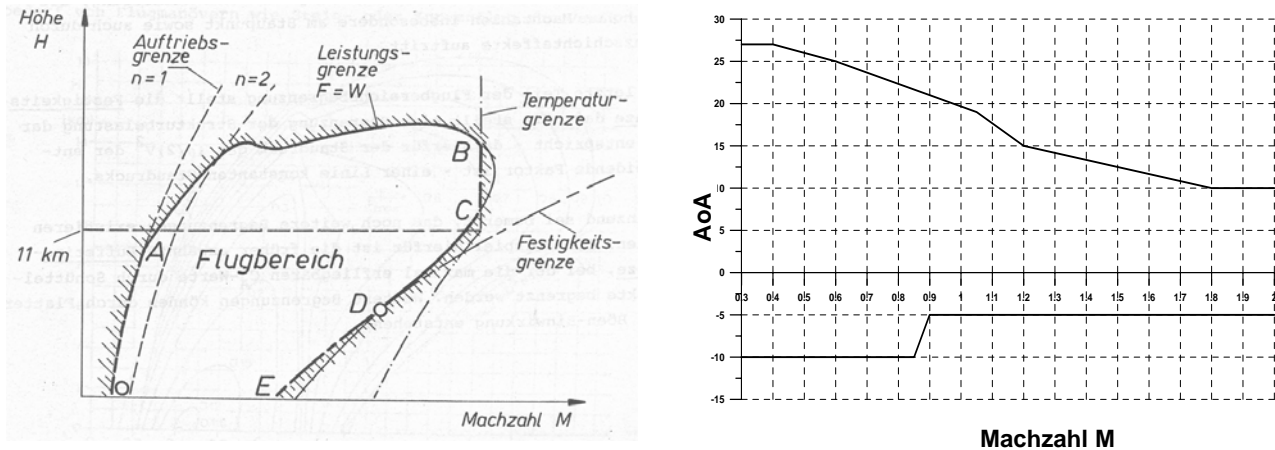


Abb. 1-5: Flugbereichsgrenzen Mach-Höhe und Mach-Anstellwinkel

Die mit A gekennzeichnete Kurve entspricht der *Auftriebsgrenze* im Horizontalflug mit  $n_z = 1$ , d.h. bei weiterer Reduzierung der Geschwindigkeit wird nicht mehr genügend Auftrieb erzeugt um einen stationären Horizontalflug zu ermöglichen, d.h. die Bedingung  $A = G$  kann nicht mehr erfüllt werden. Die Mindestgeschwindigkeit bzw. minimale Machzahl  $M_{min}$  der Auftriebsgrenze wird beschrieben durch:

$$M_{min} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot n \cdot m}{C_{A,max}}} \quad \text{Gl. 1-23}$$

In der Höhe wird die Begrenzung in der Regel durch die *Leistungsgrenze* des Triebwerks definiert:

$$F_{max} = W \quad \text{Gl. 1-24}$$

Ein weiterer Begrenzungsfaktor in der Höhe können auch physiologische Gründe sein, d.h. Lebenserhaltungssysteme, wie z.B. Sauerstoffversorgung oder die Verfügbarkeit einer Druckkabine. Die Linie B-C beschreibt die mit zunehmender Geschwindigkeit auftretende Temperaturerhöhung an der Außenhaut des Flugzeugs infolge des Aufstauvorgangs und der Reibungseffekte. Der limitierende Faktor dieser *Temperaturgrenze* stellt die Warmfestigkeit der verwendeten Werkstoffe dar. Die aerodynamische Aufheizung infolge des Aufstauvorgangs lässt sich abschätzen über

$$T_t = T_\infty + \frac{v_\infty^2}{2 \cdot c_p} \quad \text{Gl. 1-25}$$

Im unteren Höhenbereich bei großen Geschwindigkeiten, d.h. im Bereich  $D-E$ , wird infolge des hohen Staudrucks

$$\bar{q} = \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

Gl. 1-26

neben der Temperatur die mechanische Belastung zum limitierenden Faktor und die strukturelle *Festigkeitsgrenze* des Fluggeräts wird erreicht.

## 1.5 Geometrische Beschreibung

Die Hauptabmessungen eines Flugzeuges sind in Abb. 1-6 skizziert. Eine detaillierte Definition aller Größen findet sich in der Luftfahrtnorm LN9300.

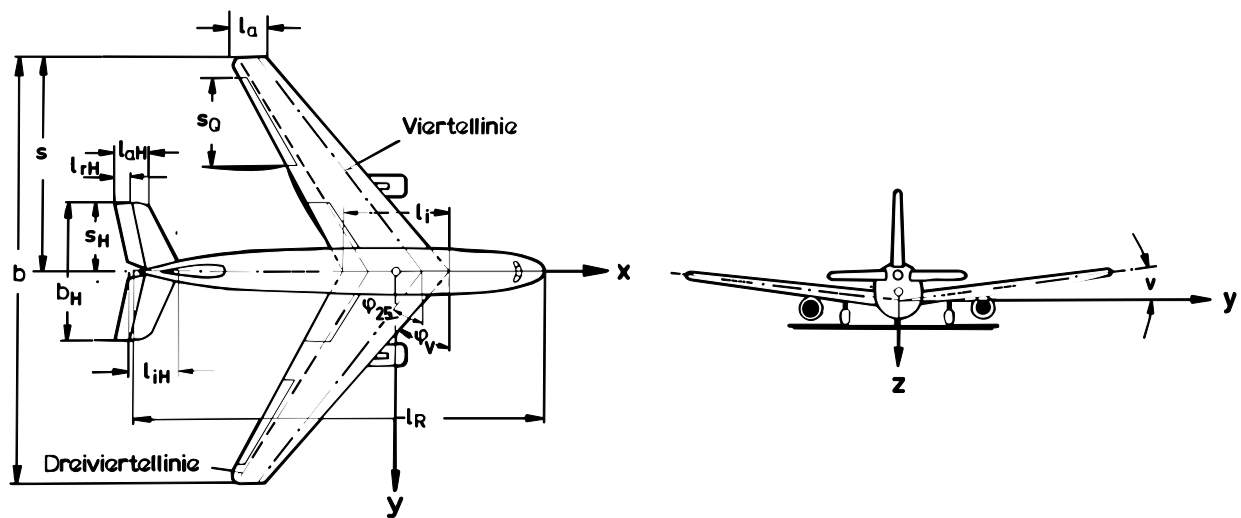


Abb. 1-6: Geometrische Beschreibung - Hauptabmessungen

## 1.6 Achsensysteme, Winkel, Kräfte, Momente

Alle Kräfte, Momente und Geschwindigkeiten am Flugzeug sind vektorielle Größen zu deren Beschreibung unterschiedliche Koordinatensysteme definiert werden können. Aerodynamische Beiwerte, mit Ausnahme von Auftrieb und Widerstand werden im körper- oder flugzeugfesten Koordinatensystem beschrieben. Das aerodynamische System ist gegenüber dem körperfesten System um den Anstellwinkel  $\alpha$  und den Schiebewinkel  $\beta$  gedreht. Der Vektor der Anströmgeschwindigkeit  $V_\infty$  entspricht der Achse  $x_a$  des aerodynamischen Systems. Das experimentelle System entspricht dem körperfesten System, das um den Anstellwinkel  $\alpha$  verdreht wurde. Zusätzlich wird noch für die Belange der Flugmechanik zur Beschreibung von Flugbahnen ein geodätisches Koordinatensystem, welches auf den Erdmittelpunkt bezogen ist, verwendet.

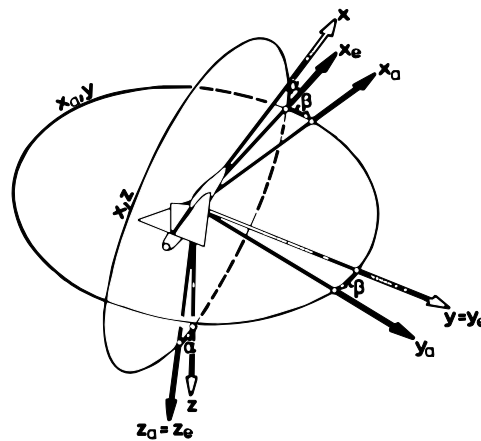


Abb. 1-7: Körperfestes, aerodynamisches und experimentelles Achsensystem [ 10]

Betrachtet man das Flugzeug als einen starren Körper, so können um die drei Achsen jeweils drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade definiert werden. Diesen sechs Freiheitsgraden entsprechen drei Kräfte und drei Momente entlang bzw. um die drei Achsen.

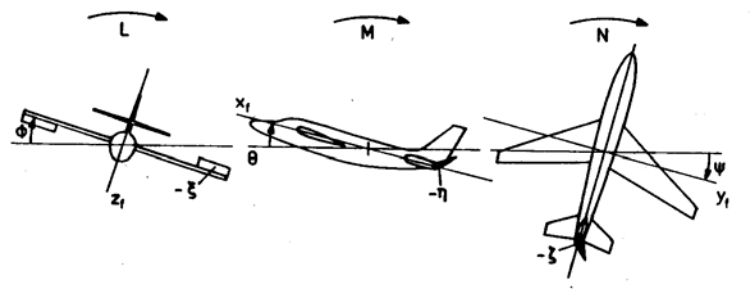


Abb. 1-8: Ruder- und Klappenausschläge und entsprechende Momente

Koordinatenachse	Kraft	Moment	Drehgeschwindigkeiten
$x$	Axialkraft $X$	Rollmoment $L$	Rollgeschwindigkeit $p$
$y$	Seitenkraft $Y$	Nickmoment $M$	Nickgeschwindigkeit $q$
$z$	Normalkraft $Z$	Giermoment $N$	Giergeschwindigkeit $r$

Tab. 1-3: Kräfte, Momente und Drehgeschwindigkeiten

Die Transformation aus dem flugzeug- oder körperfesten in das aerodynamische System ist mittels der in Tab. 1-4 angegebenen Transformationsmatrix möglich.

	$x_f$	$y_f$	$z_f$
$x_a$	$+\cos \alpha \cdot \cos \beta$	$\sin \beta$	$+\sin \alpha \cdot \cos \beta$
$y_a$	$-\cos \alpha \cdot \cos \beta$	$\cos \beta$	$-\sin \alpha \cdot \sin \beta$
$z_a$	$-\sin \alpha$	$0$	$+\cos \alpha$

Tab. 1-4: Transformationsmatrix flugzeugfestes - aerodynamisches System

Transformationsmatrizen zur Umrechnung in das geodätische oder experimentelle System finden sich in [ 10]

### 1.7 Dimensionslose Beiwertschreibweise

Der Übergang von dimensionsbehafteten Größen zu dimensionslosen Beiwerten empfiehlt sich immer dann, wenn Ergebnisse, die mit unterschiedlichen Werkzeugen und Verfahren gewonnen wurden, miteinander kombiniert werden müssen; z.B. bei der Erstellung eines aerodynamischen Datensatzes für ein Flugzeug. Im Rahmen einer Flugzeugentwicklung ist es üblich, Windkanalversuche je nach Geschwindigkeitsbereich mit Modellen unterschiedlicher Größe durchzuführen, wohingegen bei numerische Untersuchungen die Großausführung betrachtet wird. Experimentelle Untersuchungen im Niedergeschwindigkeitsbereich werden aufgrund der vergleichsweise großen Meßstrecken (z.B. 6m x 8m) mit größeren Modellen durchgeführt als z.B. Untersuchungen im Hochgeschwindigkeitsbereich mit kleineren Meßstrecken (z.B. 2.4m x 2.4m). Die mit zunehmender Geschwindigkeit kleineren Meßstrecken ergeben sich aus dem mit der Geschwindigkeit quadratisch zunehmenden Energiebedarf, der bei kontinuierlich betriebenen Transsonik-Windkanälen in der Größenordnung von 40-70 MW liegt.

Kräfte		Beiwert	Bezugssystem
Axialkraft	$X$	$C_x = \frac{X}{\bar{q} \cdot S_{ref}}$	flugzeugfest
Seitenkraft	$Y$	$C_y = \frac{Y}{\bar{q} \cdot S_{ref}}$	flugzeugfest
Normalkraft	$Z$	$C_z = \frac{Z}{\bar{q} \cdot S_{ref}}$	flugzeugfest
Auftrieb	$A$	$C_A = \frac{A}{\bar{q} \cdot S_{ref}}$	aerodynamisch
Widerstand	$W$	$C_W = \frac{W}{\bar{q} \cdot S_{ref}}$	aerodynamisch
<b>Momente</b>			
Rollmoment	$L$	$C_l = \frac{L}{\bar{q} \cdot S_{ref} \cdot s}$	flugzeugfest
Nickmoment	$M$	$C_m = \frac{M}{\bar{q} \cdot S_{ref} \cdot l_\mu}$	flugzeugfest
Giermoment	$N$	$C_n = \frac{N}{\bar{q} \cdot S_{ref} \cdot s}$	flugzeugfest

Tab. 1-5: Dimensionslose Beiwerte

Der aerodynamische Datensatz stellt eine mathematische Modellbeschreibung des flugmechanischen Verhaltens des Fluggerätes dar. Die unterschiedlichen Einflußfaktoren können in der Regel nur getrennt voneinander ermittelt werden und werden in einem aerodynamischen Modell zusammengefaßt. Das lineare Superpositionsprinzip zur Kombination der Einflußparameter und Interferenzterme soll hier am Beispiel des Nickmomentenbeiwerts  $C_m$  erläutert werden.

$C_m = C_m$ (Basiskonfiguration)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach})$
+ $\Delta C_m$ (Hinterkantenklappe 1-4)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel})$
+ $\Delta C_m$ (Vorderkantenklappe 1-4)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel})$
+ $\Delta C_m$ (Entenleitwerk)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel})$
+ $\Delta C_m$ (Bremsklappe)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel})$
+ $\Delta C_m$ (Außenlast $i=1 \dots n$ )	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach})$
+ $\Delta C_m$ (Außenlast - Außenlast)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach})$
+ $\Delta C_m$ (Interferenz Ente – LEF)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel})$
+ $\Delta C_m$ (Interferenz LEF – TEF)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel})$
+ $\Delta C_m$ (Interferenz $x_i - y_j$ )	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Klappenwinkel } x_i, y_j)$
+ $\Delta C_m$ (Aeroelastik)	$= f(\alpha, \beta, \text{Mach}, \text{Höhe})$

Es wird deutlich, daß eine vollständige Erfassung sämtlicher Einflußfaktoren und Interferenzterme aus Zeit und Kostengründen nicht möglich ist. Die Kunst des Entwurfsaerodynamikers besteht nun darin, die wesentlichen Terme zu erfassen, die für eine ausreichend genaue Modellbildung erforderlich sind. Bereiche mit starken Gradienten, z.B. der Transonikbereich, in denen keine lineare Interpolation möglich ist, sind durch eine dichtere Anzahl von Meßpunkten abzudecken.

## 1.8 Steuerelemente des Flugzeugs

Für ein konventionell gesteuertes Flugzeug sind in Abb. 1-9 und Abb. 1-10 die klassischen Steuer- und Kontrollflächen dargestellt. Die Definition von Winkeln bei Ruder- und Klappen ausschlägen ist in Abb. 1-11 skizziert.

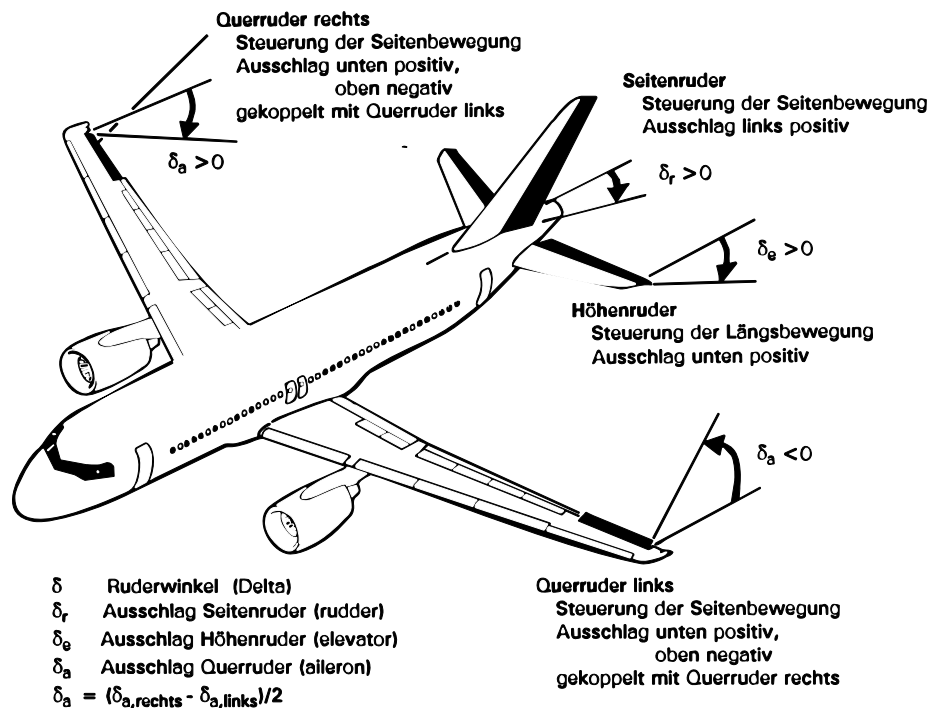


Abb. 1-9: Steuer- und Kontrollelemente eines Flugzeugs [ 20]

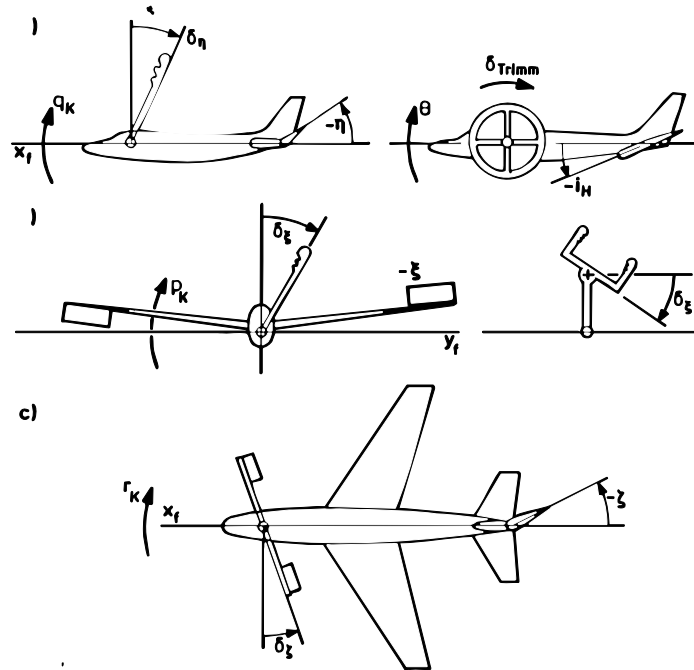


Abb. 1-10: Steuer- und Kontrollelemente eines Flugzeugs [ 9]

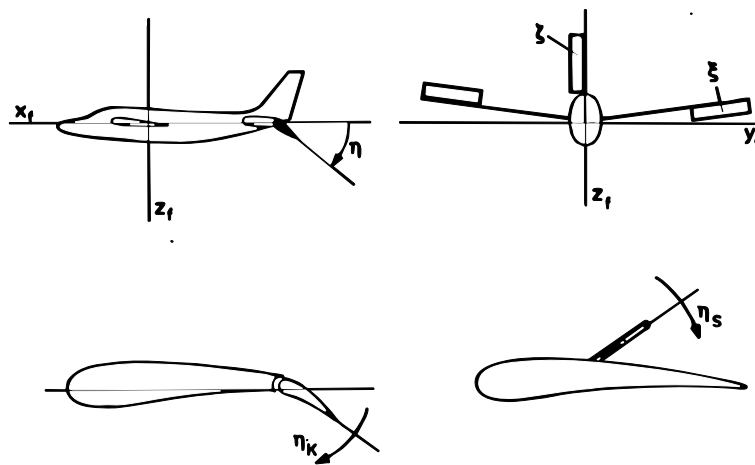


Abb. 1-11: Winkel- und Vorzeichendefinition für Ruder- und Klappenausschläge [ 9]



## 1.9 Klassifizierung von Strömungen

Die Umströmung von Flugkörpern läßt sich nach unterschiedlichen Kriterien klassifizieren. Eine Möglichkeit besteht z.B. in der Unterscheidung der Körpergeometrie, d.h. zwei- oder dreidimensionale Strömungen oder es läßt sich eine Unterscheidung in Abhängigkeit von der Stärke des Kompressibilitätseinflusses, ausgedrückt durch die Anström-Machzahl, vornehmen. Ein weiteres Unterscheidungskriterium besteht in der Berücksichtigung der Reibungseffekte (Viskosität).

### 1.9.1 Einteilung von Strömungen als Funktion der Reibung

Ein wesentliches Merkmal von realen Strömungen besteht darin, daß infolge der freien Bewegung der Moleküle Masse, Impuls und Energie von einem Ort zu einem anderen Ort in dem Fluid transportiert werden. Diese Molekularbewegung ist die physikalische Ursache für die sog. Transportvorgänge, d.h. Massestrom, Reibung und Wärmeübertragung. Solche realen, mit Reibungseffekten behafteten Strömungen werden als reibungsbehaftet oder *viskos* bezeichnet. Strömungen, bei denen der Einfluß der Transportphänomene als gering betrachtet werden kann, werden als reibungsfrei bezeichnet.

Die grundlegenden Unterschiede einer idealisierten reibungsfreien und einer realen reibungsbehafteten Strömung werden in den unterschiedlichen Geschwindigkeitsprofilen der Grenzschicht deutlich (Abb. 1-12). Während in der reibungsfreien Strömung die Geschwindigkeit auch direkt an der Wand noch identisch ist mit der Geschwindigkeit der freien Anströmung  $V_\infty$ , nimmt in der reibungsbehafteten Strömung die Geschwindigkeit an der Wand den Wert Null an (Haftungsbedingung).

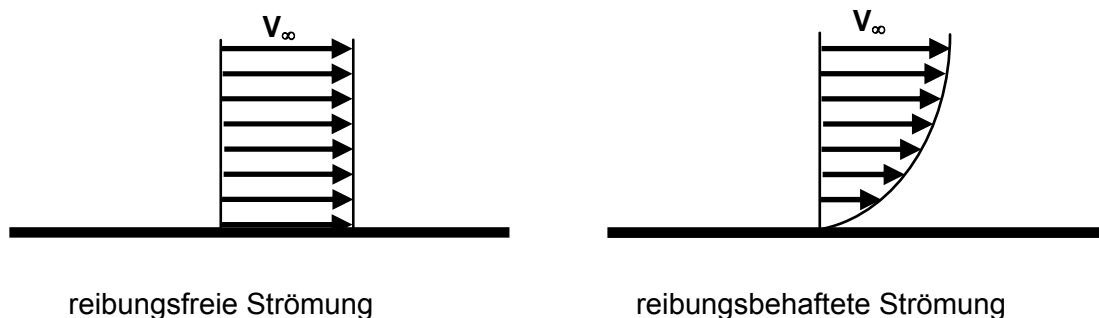


Abb. 1-12: Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht

Für praktische Anwendungen, läßt sich für viele Bereiche das Strömungsfeld in einen reibungsbehafteten Anteil in der Nähe der Körperoberfläche (Grenzschicht) und in einen reibungsfreien Anteil außerhalb der Grenzschicht aufteilen (Abb. 1-13). Für schlanke Körper oder Profile, die bei kleinen Anstellwinkeln angeströmt werden, lassen sich durch diese Vereinfachung Stromlinien und Druckverteilungen relativ gut berechnen.

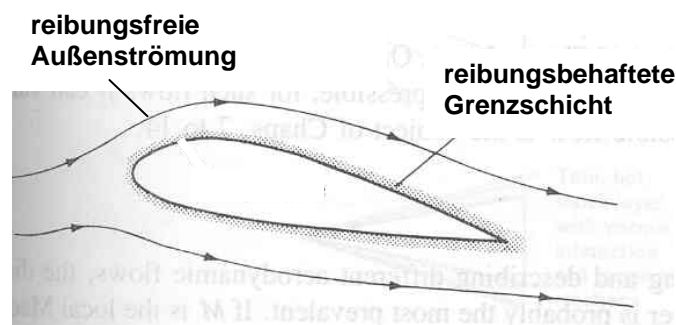


Abb. 1-13: Reibungsbehaftete Grenzschicht, reibungsfreie Außenströmung

Wird der Anstellwinkel des in Abb. 1-13 skizzierten Profils erhöht, so löst die Grenzschicht an der Oberseite des Profils ab und es bildet sich hinter der Ablösestelle ein Ablöse- oder Totwassergebiet, Abb. 1-14. Solch ein abgelöstes Strömungsgebiet läßt sich nicht mehr als reibungsfreie Strömung vereinfachen. Eine ähnliche Situation liegt z.B. hinter einem quer angeströmten Zylinder vor, Abb. 1-15.

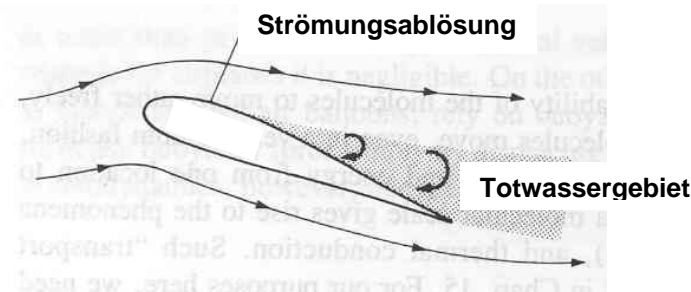


Abb. 1-14: Profil - Strömung mit Ablösung

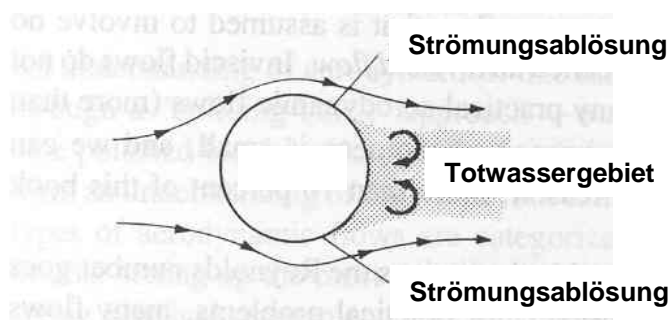


Abb. 1-15: Zylinder - Strömung mit Ablösung

### 1.9.2 Einteilung von Strömungen als Funktion der Kompressibilität

Strömungen für die die Dichte als konstant angenommen werden kann, z.B. Flüssigkeiten, werden als *inkompressibel* bezeichnet, Strömungen mit einer veränderlichen Dichte, z.B. Gase, werden als *kompressibel* bezeichnet. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Annahme einer konstanten Dichte für Flüssigkeiten lediglich eine (gute) Näherung darstellt. Wie später noch gezeigt wird, führt die Annahme einer konstanten Dichte jedoch zu einer starken Vereinfachung in der Berechnung der Strömungsparameter. Obwohl Luft in der Realität ein kompressibles Fluid darstellt, kann ohne nennenswerten Fehler bei kleineren Geschwindigkeiten, d.h. bis ca.  $M = 0.3$  die Annahme  $\rho = \text{const.}$  getroffen werden. In Bodennähe ( $H = 0$ ) entspricht dies einer Fluggeschwindigkeit von ca.  $V_\infty = 100$  [m/s] bzw. 360 [km/h], also dem Geschwindigkeitsbereich von Segelflugzeugen oder kleinere einmotorigen Sportflugzeugen. Unter der Annahme einer konstanten Dichte können die Strömungsbedingungen entlang einer Stromlinie somit mittels der Bernoulli-Gleichung ermittelt werden.

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 = \text{const.} \quad \text{Gl. 1-27}$$

Für kompressible Strömungen liefert diese einfache Gleichung jedoch keine brauchbaren Ergebnisse mehr.

Betrachtet man ein kleines Volumenelement  $v$ , so wirkt an allen Seiten der Druck  $p$ . Wird der Druck  $p$  um den Betrag  $dp$  erhöht, so wird das Volumenelement  $v$  um den Betrag  $dv$  komprimiert. Die Kompressibilität  $\tau$  wird beschrieben durch

$$\tau = -\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dp} \quad \text{Gl. 1-28}$$

In Abhängigkeit von der bei der Kompression über die Systemgrenze übertragenen Wärmemenge ändert sich jedoch die Gastemperatur. Unter der Annahme einer Kompression bei konstanter Temperatur, läßt sich die *isotherme Kompressibilität* definieren als

$$\tau_T = -\frac{1}{v} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad \text{Gl. 1-29}$$

Nimmt man jedoch einen Kompressionsprozeß an, bei dem keine Wärme über die Systemgrenze übertragen wird (adiabate Zustandsänderung) und bei dem Reibungseffekte vernachlässigt werden (isentropische Zustandsänderung), so läßt sich die *isentropische Kompressibilität* definieren als

$$\tau_s = -\frac{1}{v} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad \text{Gl. 1-30}$$

Die Kompressibilität  $\tau$  stellt eine Stoffgröße dar und beträgt z.B. für Wasser  $\tau_T = 5 \cdot 10^{-10} \text{ [m}^2/\text{N]}$  und für Luft  $\tau_T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{N]}$  bei  $p = 1 \text{ [bar]}$ .

Mit

$$\rho = \frac{1}{v} \quad \text{Gl. 1-31}$$

ergibt sich für die Kompressibilität

$$\tau = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \quad \text{Gl. 1-32}$$

d.h. eine Änderung des Drucks  $dp$  bewirkt in Abhängigkeit von der Größe der Kompressibilität  $\tau$  eine Änderung der Dichte  $d\rho$

$$d\rho = \rho \cdot \tau \cdot dp \quad \text{Gl. 1-33}$$

Als Unterscheidungskriterium zwischen kompressibler und inkompressibler Strömung ist es üblich eine relative Dichteänderung von  $\frac{d\rho}{\rho} \leq 0.05$  anzusetzen.

### 1.9.3 Einteilung von Strömungen als Funktion der Machzahl

Unterschiedliche Strömungszustände in Abhängigkeit von der Anströmmachzahl  $M_\infty$  sind in Abb. 1-16 skizziert. Die Geschwindigkeit der freien Anströmung wird mit  $V_\infty$  bezeichnet. Die skizzierten Stromlinien kennzeichnen die Tangenten an die lokalen Geschwindigkeitsvektoren im Strömungsfeld. Jedem Punkt in dem Strömungsfeld können die Größen Druck  $p$ , Temperatur  $T$ , Dichte  $\rho$  und Geschwindigkeit  $V$  zugeordnet werden. Zusätzlich kann jedem Punkt noch die lokale Schallgeschwindigkeit  $c$  zugeordnet werden. Somit ergibt sich analog zur Definition der Machzahl  $M_\infty$  der freien Anströmung

$$M_{\infty} = \frac{V_{\infty}}{c_{\infty}} \quad \text{Gl. 1-34}$$

die Definition der lokalen Machzahl  $M$  im Strömungsfeld

$$M = \frac{V}{c} \quad \text{Gl. 1-35}$$

### Unterschallströmung

Die reine Unterschallströmung ist dadurch gekennzeichnet, daß im gesamten Strömungsfeld für die lokale Machzahl  $M < 1$  gilt, vgl. Abb. 1-16a. Ein wichtiges Kriterium der reinen Unterschallströmung besteht darin, daß sich Druckänderungen auch entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten können.

### Transsonische Strömung

Der Übergang einer reinen Unterschallströmung zur transsonischen Strömung ist dadurch gekennzeichnet, daß auch bei einer freien Anströmmachzahl von  $M_{\infty} < 1$  aufgrund der Beschleunigung der Strömung, sich ein lokales Überschallgebiet mit  $M > 1$  an der Profilober- und später auch an der Profilunterseite einstellen kann, Abb. 1-16b. Die Grenze für das erste Auftreten von Überschallgebieten ist abhängig von den verwendeten Profilen und liegt bei heute üblichen Transsonikprofilen bei ca.  $M_{\infty} = 0.8$ , kann jedoch bei entsprechend dicken Profilen bereits bei  $M_{\infty} = 0.65$  liegen. Während die Beschleunigung vom Unterschall zum Überschall in einem stetigen Prozeß verläuft, erfolgt die Verzögerung vom Überschall zurück zum Unterschall in einem unstetigen Prozeß, gekennzeichnet durch einen Verdichtungsstoß. Kennzeichen eines transsonischen Strömungsgebiets ist das gleichzeitige Vorliegen von Unterschall- als auch Überschallgebieten, z.B. hinter einem abgelösten Stoß an der Profilmase, Abb. 1-16c. Generell wird der Machzahlbereich  $0.8 < M_{\infty} < 1.2$  als Transsonikbereich bezeichnet.

### Überschallströmung

Kennzeichen der reinen Überschallströmung ist, daß im gesamten Strömungsfeld für die lokale Machzahl  $M > 1$  gilt, vgl. Abb. 1-16d. Ein weiteres wichtiges Kriterium der reinen Überschallströmung besteht darin, daß sich Druckänderungen nicht mehr entgegen der Strömungsrichtung, sondern nur noch stromabwärts auswirken können.

### Hyperschallströmung

Auch für den Übergang von der Überschall- zur Hyperschallströmung existiert keine scharf definierte Grenze. Eingebürgert hat sich eine Machzahl der freien Anströmung von  $M_{\infty} > 4.5 - 5$ . Charakteristische Eigenschaften einer Hyperschallströmung sind die eng an der Körperoberfläche anliegen Stöße, Abb. 1-16e und die infolge der starken Temperaturerhöhung hinter dem Verdichtungsstoß auftretenden chemischen Prozesse, d.h. Dissoziation mit späterer Rekombination sowie die Bildung von Plasma. In diesem Geschwindigkeitsbereich läßt sich die Annahme, Luft als ideales Gas zu betrachten, nicht länger aufrecht erhalten.

Bedingt durch das hohe Temperaturniveau treten zwei Gruppen von chemisch-physikalischen Phänomenen auf. Zum einen werden mit zunehmender Temperatur die inneren Freiheitsgrade der Moleküle angeregt, Dissoziations- und Ionisationseffekte treten auf und zum anderen kommt es zu chemischen Wechselwirkungen zwischen der Grenzschicht und der Oberfläche des Flugkörpers. Die Katalyzität der Oberfläche bildet bei wiederverwendbaren Systemen, z.B. Space Shuttle, eine schwer zu quantifizierende Größe, da sich die Katalyzität des Thermalschutzsystems mit zunehmender Anzahl der Flüge erhöht.

**Strömung verdünnter Gase**

Alle bisherigen Betrachtungen gingen von der Strömung als Kontinuum aus. Insbesondere in großer Höhe (ab ca. 70 km), läßt sich diese Annahme nicht länger aufrechterhalten. Die Strömung stellt sich als freie Molekülströmung dar, die dadurch gekennzeichnet ist, daß aufgrund der geringen Dichte fast keine Kollisionen mehr zwischen den einzelnen Molekülen stattfinden. Bei einer Kontinuumströmung kann davon ausgegangen werden, daß in einem Kontrollvolumen noch genügend Molekülkollisionen möglich sind um alle chemischen Reaktionen nach einem Verdichtungsstoß wieder in ein Gleichgewicht zu bringen. Sinkt die Anzahl der Kollisionen unter eine kritische Grenze, so befindet sich die Strömung in einem chemischen Nicht-Gleichgewicht. Zur Unterscheidung der unterschiedlichen Strömungsbereiche läßt sich die Knudsen-Zahl  $Kn$  einführen, die das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Moleküle zu einer charakteristischen Länge des umströmten Körpers beschreibt. Die mittlere freie Weglänge ergibt sich zu

$$\lambda = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot m}}{2 \cdot k \cdot T} \quad \text{Gl. 1-36}$$

und somit die Knudsen-Zahl zu

$$Kn_{\infty} = \frac{\lambda_{\infty}}{l_{ref}} \quad \text{Gl. 1-37}$$

In Abhängigkeit von der Knudsen-Zahl lassen sich drei unterschiedliche Strömungsbereiche unterscheiden. Für  $Kn_{\infty} < 10^{-2}$  kann die Strömung als Kontinuum betrachtet werden. Für den Bereich  $10^{-2} < Kn_{\infty} < 5$  beginnt die Strömung vom Kontinuumsverhalten abzuweichen, d.h. Stoßwellen weisen eine endliche Dicke auf und in der Grenzschicht kommt es zu Gleitströmungen, d.h. ähnlich wie im theoretisch reibungsfreien Fall, wird an der Wand die Geschwindigkeit in der Grenzschicht nicht zu Null. Stoßwelle und Grenzschicht fallen zusammen und bilden einen viskosen 'shock layer'. Bei  $Kn_{\infty} > 5$  kommt es kaum noch zu Molekülkollisionen, Stoßwellen und Grenzschichten sind nicht mehr eindeutig definiert und es liegt eine freie Molekülströmung vor.

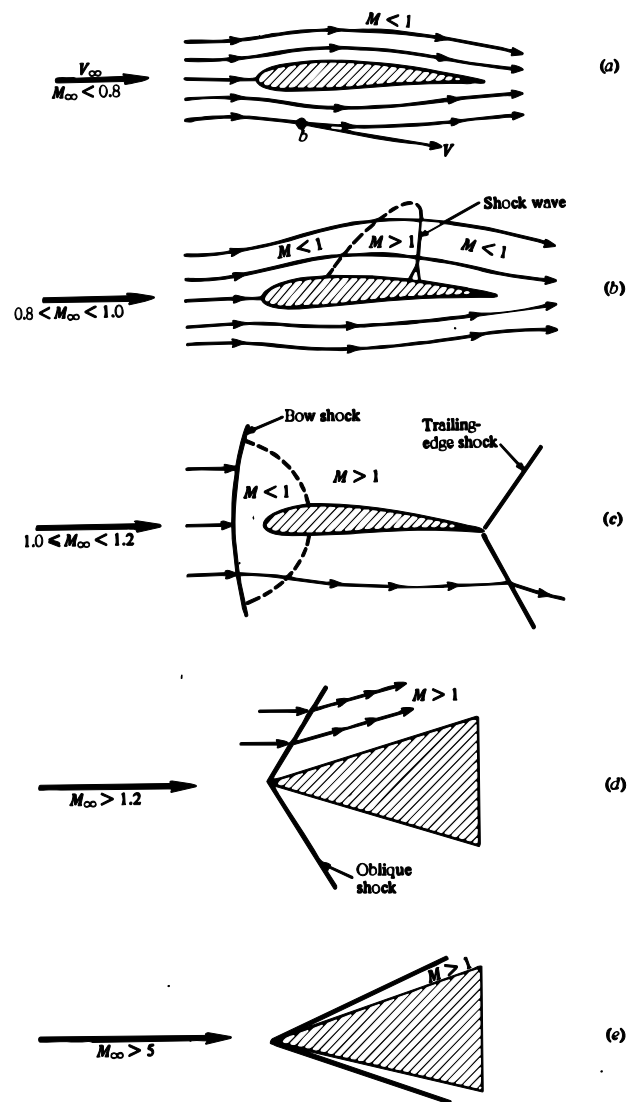


Abb. 1-16: Strömungszustände als Funktion der Machzahl [ 5]

## 1.10 Übungen zum Kapitel Einleitung

### A1.1 Astronautische Geschwindigkeiten

Berechnen Sie Bahnhöhe  $h$  und Kreisbahngeschwindigkeit  $v_K$  eines Satelliten auf einer geostationären Erdumlaufbahn.

Welchen Einfluß hat die Masse des Satelliten auf seine Umlaufgeschwindigkeit und Bahnhöhe?

### A1.2 Atmosphäre

Ein Flugzeug bewegt sich auf Flugfläche FL360 mit einer Geschwindigkeit von  $V_\infty = 486$  [kts]. Berechnen Sie unter der Annahme einer Normatmosphäre und Standardbedingungen (ISA)

- Temperatur
- Druck
- Dichte
- Reynoldszahl bei einer Bezugslänge von  $l_{ref} = 1$  [m]

### A1.3 Dimensionslose Beiwerte

Geben Sie die Bestimmungsgleichungen und die verwendeten Koordinatensysteme an für:  
Axialkraft, Seitenkraft, Normalkraft, Auftrieb, Widerstand, Rollmoment, Nickmoment, Giermoment, Druck

## 2 Strömungssimulation in Windkanälen

### 2.1 Die Simulationsproblematik oder die Quadratur des Kreises

Bei der Entwicklung von Fluggeräten ist man bereits in einer sehr frühen Phase des Entwurfsprozesses auf eine möglichst genaue mathematische Beschreibung des aerodynamischen und flugmechanischen Verhaltens des Flugzeugs angewiesen. Dies ist erforderlich sowohl zur Überprüfung der projektierten Flugleistungen als auch zur Auslegung des Flugreglers. Trotz der zunehmenden Bedeutung von numerischen Entwurfswerkzeugen (CFD), stellt der experimentelle Ansatz, d.h. die Erstellung eines aerodynamischen Modells auf der Basis von Windkanaldaten, noch das grundlegende Entwurfswerkzeug dar.

In der Regel ist es jedoch nicht möglich ein Flugzeug über seinen gesamten Geschwindigkeitsbereich in Originalgröße unter echten Flugbedingungen zu testen. Lediglich im Niedergeschwindigkeitsbereich existieren einige Versuchsanlagen, die über eine entsprechend große Meßstrecke verfügen um Flugzeuge im Originalmaßstab untersuchen zu können, z.B. NASA AMES 80 x 120 ft Niedergeschwindigkeitswindkanal mit einer maximalen Strömungsgeschwindigkeit von 80 mph bzw. 36 m/s.



Abb. 2-1: NASA Ames 80 x 120 ft Niedergeschwindigkeitswindkanal

Windkanaluntersuchungen werden daher an geometrisch ähnlichen, jedoch verkleinerten Modellen durchgeführt. Dabei spielt es prinzipiell keine Rolle ob das Modell sich durch die ruhende Luft bewegt oder ob ein Fluid sich um ein ruhendes Modell bewegt. Die grundlegende Frage besteht nun darin, unter welchen Umständen sich ein Meßergebnis, welches an einem, in der Regel maßstäblich verkleinertem Modell erzielt wurde, auf das Fluggerät in Großausführung übertragen läßt. Ausgehend von einer Dimensionsanalyse lassen sich aus den einen Strömungsvorgang beeinflussenden physikalischen Größen unterschiedliche Kennzahlen oder Ähnlichkeitszahlen herleiten. Auf die Masse normiert ergeben sich die wesentlichen Kräfteanteile als charakteristische Größen der Strömung.



Trägheitskraft

$$F_T \propto \frac{V^2}{l} \quad \text{Gl. 2-1}$$

Druckkraft

$$F_D \propto \frac{p}{\rho \cdot l} \quad \text{Gl. 2-2}$$

Reibungskraft

$$F_R \propto \frac{\nu \cdot V}{l^2} \quad \text{Gl. 2-3}$$

Schwerkraft

$$F_S \propto g \quad \text{Gl. 2-4}$$

Kapillarkraft

$$F_K \propto \frac{\sigma}{\rho \cdot l^2} \quad \text{Gl. 2-5}$$

Aus den Beiträgen dieser Kräfteanteile lassen sich vier unabhängige Verhältnisse bilden, welche wiederum vier Kennzahlen entsprechen.

Euler-Zahl

$$\frac{F_D}{F_T} \propto \frac{p}{\rho \cdot V^2} = Eu \quad \text{Gl. 2-6}$$

Reynolds-Zahl

$$\frac{F_T}{F_R} \propto \frac{V \cdot l}{\nu} = Re \quad \text{Gl. 2-7}$$

Froude-Zahl

$$\frac{F_T}{F_S} \propto \frac{V^2}{g \cdot l} = Fr \quad \text{Gl. 2-8}$$

Weber-Zahl

$$\frac{F_T}{F_K} \propto \frac{\rho \cdot V^2 \cdot l}{\sigma} = We \quad \text{Gl. 2-9}$$

Diese Kennzahlen berücksichtigen jedoch lediglich Effekte, die sich aufgrund der Kräftebilanz ergeben. Um eine vollständige physikalische Ähnlichkeit von zwei Strömungsfeldern zu erhalten müssen noch die Effekte berücksichtigt werden, die sich aufgrund der Energiezufuhr ergeben. Ausgehend von der Energiebilanz an einem Fluidelement lassen sich die wichtigsten Energieanteile als Funktion der charakteristischen Strömungsgrößen, bezogen auf die Masse, darstellen.

Wärmeleitung

$$\dot{e}_L \propto \frac{\lambda \cdot \Delta T}{\rho \cdot l^2} \quad \text{Gl. 2-10}$$

Konvektion

$$\dot{e}_K \propto \frac{c_p \cdot V \cdot \Delta T}{l} \quad \text{Gl. 2-11}$$

Reibung

$$\dot{e}_R \propto \frac{\nu \cdot V^2}{l^2} \quad \text{Gl. 2-12}$$

Quellen, Senken

$$\dot{e} \propto \dot{Q} \quad \text{Gl. 2-13}$$

Instationäre Energieanteile

$$\dot{e}_i \propto \frac{c_p \cdot \Delta T}{t} \quad \text{Gl. 2-14}$$

Aus diesen Energieanteilen lassen sich, ähnlich der Kräftebilanz, wieder vier unabhängige Energieverhältnisse definieren, denen wiederum vier Kennzahlen entsprechen.

Péclet-Zahl

$$\frac{\dot{e}_K}{\dot{e}_L} \propto \frac{V \cdot l \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} = \frac{V \cdot l}{\alpha} = Pe \quad \text{Gl. 2-15}$$

Eckert-Zahl

$$\frac{\dot{e}_R}{\dot{e}_K} \propto \frac{\nu \cdot V}{c_p \cdot l \cdot \Delta T} = \frac{V^2}{c_p \cdot \Delta T} \cdot \frac{1}{Re} = Ec \quad \text{Gl. 2-16}$$

Fourier-Zahl

$$\frac{\dot{e}_i}{\dot{e}_L} \propto \frac{\rho \cdot c_p \cdot l^2}{\lambda \cdot t} = \frac{l^2}{\alpha \cdot t} = Fo \quad \text{Gl. 2-17}$$

Zweite Damköhler-Zahl

$$\frac{\dot{e}}{\dot{e}_i} \propto \frac{\dot{Q}_{reakt.}}{c_p \cdot \Delta T} = Da_2 \quad \text{Gl. 2-18}$$

Weitere Größen, die je nach Problemstellung relevant werden können, sind

Turbulenzgrad  $Tu$

$$Tu = \sqrt{\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{3 \cdot V^2}} \quad \text{Gl. 2-19}$$

Strouhalzahl  $S$ , gebildet mit der Filterfrequenz  $f$  (Frequenzanalyse)

$$S = \frac{f \cdot l}{V} \quad \text{Gl. 2-20}$$

Machzahl  $M$ , gebildet mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  (Flugkörper)

$$M = \frac{V}{c} \quad \text{Gl. 2-21}$$

Eine vollständige physikalische Ähnlichkeit zwischen Groß- und Modellausführung besteht nur dann, wenn sämtliche Kennzahlen übereinstimmen. Es ist leicht nachzuvollziehen, daß die gleichzeitige Duplizierung aller Kennzahlen im Experiment nicht möglich ist. Die Kunst des Experimentators besteht nun darin, diejenigen Kennzahlen zu berücksichtigen, die einen maßgeblichen Einfluß auf den betrachteten Vorgang haben. Bei Untersuchungen zur Bestimmung der aerodynamischen Kräfte und Momente, haben sich die Duplizierung von Machzahl, d.h. das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit und der Reynoldszahl, d.h. das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften als dominierende Parameter herausgebildet. Wobei die Reynoldszahl insbesondere bei der Untersuchung reibungsbehafteter Vorgänge, z.B. Bestimmung des Reibungswiderstands und von Ablöseerscheinungen von Bedeutung ist.

Im Experiment stellt die korrekte Duplizierung der Machzahl in der Regel keine besondere Herausforderung dar, da als einziger Parameter die Strömungsgeschwindigkeit in der Meßstrecke angepaßt werden muß. Wesentlich schwieriger stellt sich die korrekte Duplizierung der Reynoldszahl dar. Betrachtet man die Definition der Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{V \cdot l}{\nu} = \frac{\rho \cdot V \cdot l}{\mu} \quad \text{Gl. 2-22}$$

so sieht man, daß bei bereits erfolgter Duplizierung der Machzahl, die Geschwindigkeit  $V$  festgelegt ist. Die charakteristische Länge z.B. die Flügelbezugstiefe  $l_\mu$  ist über den Modellmaßstab definiert. Dies bedeutet, daß bei einem Versuch, der in einem Niedergeschwindigkeitswindkanal mit einer offenen Meßstrecke, also bei Umgebungsdruck und -temperatur und somit auch der gleichen Viskosität wie bei der Großausführung, durchgeführt wird, die Reynoldszahl um den Faktor des Modellmaßstabs zu klein simuliert wird. Zur Duplizierung einer korrekten Reynoldszahl stehen nun zwei freie Parameter zur Verfügung. Einerseits die Dichte  $\rho$ , die über die Zustandsgleichung des idealen Gases als Funktion des Drucks dargestellt werden kann

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{Gl. 2-23}$$

und andererseits die dynamische Viskosität  $\mu$ , welche eine Funktion der Temperatur ist, Abb. 1-4. Durch eine Kombination von Temperaturabsenkung bis auf 90 [K] und einer Druckerhöhung bis zu 5 [bar], läßt sich über die Druck- und Temperaturabhängigkeit der Viskosität eine Reynoldszahl erreichen, die der korrekten Flugreynoldszahl entspricht. Diese kryogene Versuchstechnik stellt jedoch sehr hohe Anforderungen an Modellbau und Windkanal, bei einer vergleichsweise schlechten Effizienz im Versuchsbetrieb infolge der verwendeten Stickstoffatmosphäre und der erforderlichen Abkühl- und Aufheizzyklen. Ebenso stellt die Konstruktion von Modellen für höhere Druckniveaus eine Herausforderung an Entwurf und Fertigung dar.

Bei nicht korrekter Duplizierung der Reynoldszahl ist es jedoch sinnvoll, die Verteilung zwischen laminarer und turbulenter Strömung wenigstens näherungsweise nachzubilden. Dies geschieht im Experiment durch die Verwendung so genannter Transitionsstreifen, welche auf das Modell aufgeklebt werden um den Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung zu erzwingen.

## 2.2 Erste Versuche: Otto Lilienthal, Gustaf Weißkopf und Gebr. Wright

Abgesehen von einigen zwar wagemutigen, jedoch nicht zwingendermaßen einem naturwissenschaftlichen Vorgehen verpflichteten, frühen Pionieren der Luftfahrt, reifte bei vielen Flugbegeisterten sehr schnell die Erkenntnis, daß für die Entwicklung von Fluggeräten eine systematische Problemlösungsstrategie erfolgsversprechend erschien.

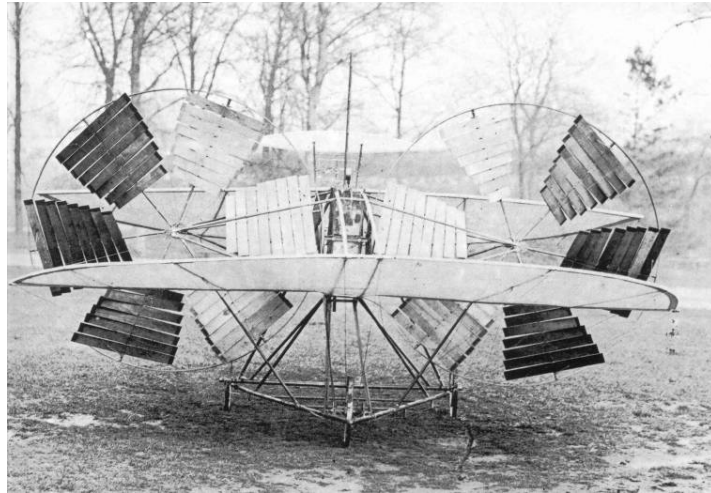


Abb. 2-2: Erste, weniger erfolgreiche Versuche: Aerial Steamer, Thomas Moy 1875 [ 33]

Als Beispiel für eine systematische Herangehensweise sind insbesondere die Arbeiten zur Untersuchung von Profilen von Otto Lilienthal [ 23] zu sehen, der mittels eines einfachen Versuchsaufbaus (Abb. 2-3) die Abhängigkeit von Anstellwinkel und resultierender Luftkraft für unterschiedliche Flügelprofile untersuchte.

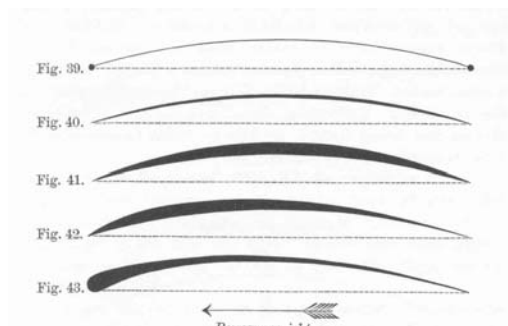
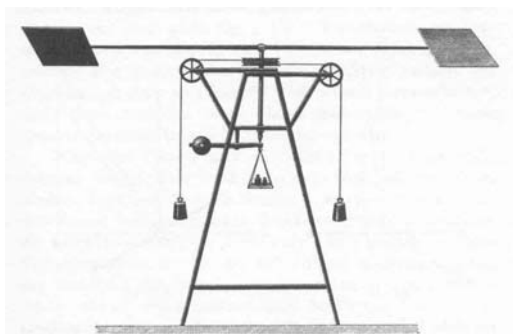


Abb. 2-3: Versuchsaufbau von O. Lilienthal zur Profiluntersuchung [ 23]

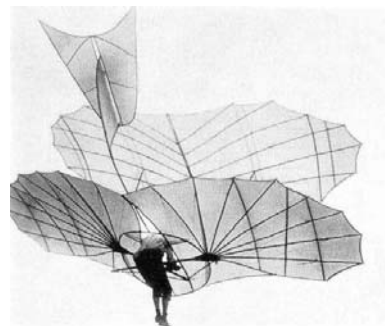


Abb. 2-4: Otto Lilienthal und sein Doppeldecker, 1895 [ 23]

Auch wenn Gustaf Weißkopf, geb. am 01. Januar 1874 in Leutershausen/Mittelfranken und Ende des 19. Jahrhunderts in die USA ausgewandert, nie der ihm gebührende historische Ruhm zuteil wurde, so gelang ihm nachweislich ein Flug mit Motorkraft bereits zwei Jahre vor den Gebr. Wright und zwar am 14. August 1901 in Bridgeport, Connecticut, USA. Ein Nachbau des von ihm konstruierten Fluggeräts konnte am 18.09.1997 erfolgreich am Flugplatz Manching geflogen werden.



Abb. 2-5: G. Weißkopf mit seinem Fluggerät Nr. 21 [ 33]



Abb. 2-6: Replika des Fluggeräts Nr. 21 von G. Weißkopf in Manching

Obwohl historisch nicht immer korrekt bewertet, so stellen die Arbeiten der Gebr. Wright neben den Arbeiten von G. Weißkopf ebenfalls das Ergebnis von systematischen Profiluntersuchungen in dem eigens von ihnen entworfenen Windkanal dar, die anknüpfend an die Ergebnisse von Lilienthal über die Entwicklung von Gleitern zu erfolgreichen motorgetriebenen Konstruktionen führten.

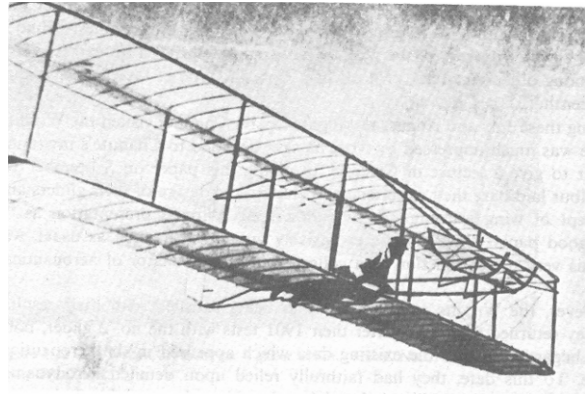
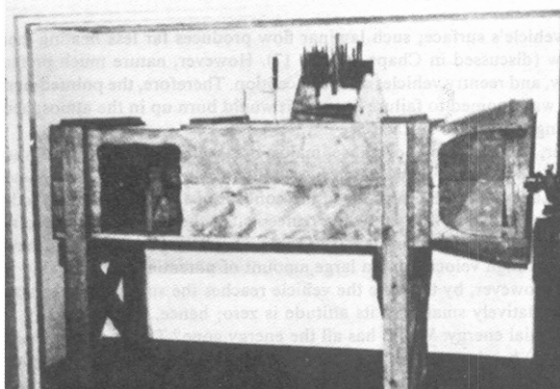


Abb. 2-7: Windkanal und Gleiter Nr. 3 der Gebr. Wright [ 3]

## 2.3 Einteilung der Windkanäle

### 2.3.1 Unterscheidung nach Machzahl

In Abhängigkeit von dem Betriebsbereich lassen sich unterschiedliche Kanaltypen spezifizieren:

- |                                     |                 |
|-------------------------------------|-----------------|
| - Unterschallkanal, inkompressibel: | $0 < M < 0.3$   |
| - Unterschallkanal, kompressibel:   | $0.3 < M < 0.7$ |
| - Transsonikkanal:                  | $0.7 < M < 1.2$ |
| - Überschallkanal:                  | $1.2 < M < 5$   |
| - Hyperschallkanal:                 | $5 < M$         |

### 2.3.2 Unterscheidung nach Betriebsdauer

In der Regel können Kanäle geschlossener Bauart mit einer Strömungsrückführung, kontinuierlich betrieben werden. Diese Ausführung findet sich bei Niedergeschwindigkeits-, Transsonik-, Überschall- und Plasmakanälen.

Insbesondere im Hyperschallbereich findet man aufgrund des hohen Energieaufwands Kanäle, die intermittierend arbeiten. Die Meßzeiten können hier von einigen Minuten ('blow-down-Kanal') bis zu weniger als einer Millisekunde (Stoßwellenkanal) liegen. Das Hauptmerkmal liegt hier in der Unterscheidung ob lediglich die Geschwindigkeit ('kalter' Hyperschall) oder die Enthalpie ('heißer' Hyperschall) dupliziert werden soll.

## 2.4 Niedergeschwindigkeitswindkanäle ( $M < 0.3$ )

Bei Niedergeschwindigkeitswindkanälen lassen sich prinzipiell zwei Konstruktionsprinzipien unterscheiden. Die offene Bauart (Abb. 2-8), benannt nach dem Konstrukteur Eiffel, hat zwar den Nachteil, daß die gesamte Strahlleistung verloren geht, dafür treten jedoch keine Störeffekte auf, die mit der Strömung umlaufen. Aufgrund des einfachen Konstruktionsprinzips sind die Kosten für diesen Kanaltyp vergleichsweise gering. Kennzeichen sind die Düse mit einem großen Kontraktionsverhältnisses von 5 - 20 wodurch sich ein gleichförmiges und turbulenzarmes Geschwindigkeitsprofil in der Meßstrecke ergibt, welches sich durch die Verwendung von Gleichrichter und Sieben vor der Düse noch weiter verbessern läßt. Das hohe Kontraktionsverhältnis bewirkt geringe Geschwindigkeiten in der Düsenvorkammer und somit geringe Verluste infolge der Einbauten zur Strömungsgleichrichtung. Zur Reduzierung der Druckverluste wird ein Diffusor zur Druckrückgewinnung zwischen Meßkammer und Gebläse gesetzt. Bei der Dimensionierung des Diffusors ist zwischen hohem Druckrückgewinn und Aufwand infolge der erforderlichen Länge, sowie den Verlusten infolge Wandreibung abzuwägen. Ein weiterer Nachteil dieses Typs besteht in der Abhängigkeit von meteorologischen Gegebenheiten (Temperatur, Feuchtigkeit), da die Luft in der Regel von der freien Atmosphäre angesaugt wird. Dies läßt sich durch die Unterbringung des Kanals z.B. in einer großen Halle vermeiden. In der Meßkammer liegt ein Unterdruck vor, d.h. daß bei einer offenen Meßstrecke eine Unterdruckkammer um die Meßstrecke erforderlich ist. Aufgrund des sehr geringen Turbulenzgrades wird diese Art von Windkanal vorzugsweise zur Untersuchung von Profilen im Niedergeschwindigkeitsbereich verwendet, z.B. TU Delft oder IAG der Universität Stuttgart. In seltenen Fällen werden sie aber auch Erzeugung von Trans- und Überschallströmungen eingesetzt (Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Berlin)

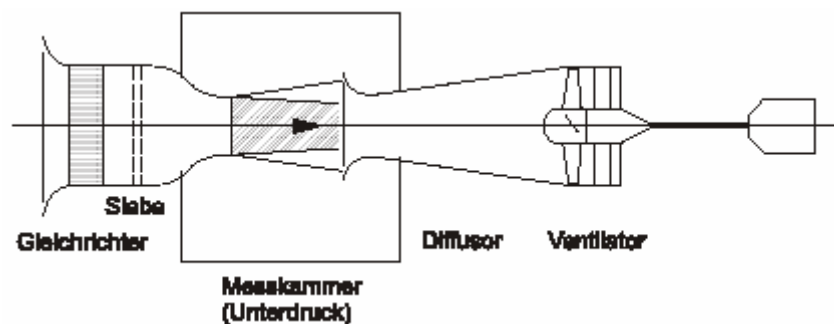


Abb. 2-8: Eiffel-Windkanal

Windkanäle, die über eine Rückführung der Luft durch Diffusoren und Umlenkgritter verfügen, werden als geschlossene Kanäle oder Göttinger Kanal (Abb. 2-9) bezeichnet. Im stationären Betrieb braucht der Verdichter lediglich die Strömungsverluste im Kreislauf auszugleichen. Die vergleichsweise großen Abmessungen ergeben sich aus dem optimalen Erweiterungswinkel der Diffusoren von  $\alpha_{opt}/2 = 3 - 4^\circ$ . Vorteile sind der hohe Gütegrad (= Verhältnis von Strahlleistung zu Gebläseleistung) und die Unabhängigkeit von meteorologischen Bedingungen. Nachteile sind das hohe Turbulenzniveau und die Verschmutzung durch Schmierstoffe, z.B. des Verdichters und durch Zugaben von Partikeln zur Strömungsichtbarmachung (*seeding*).

Bauformen mit offener als auch geschlossener Meßstrecke sind möglich. Geschlossene Meßstrecken ermöglichen den Betrieb als Druckkanal, d.h. eine Variation der Reynoldszahl durch eine Anhebung oder Absenkung des Drucks ist möglich. Ein Nachteil der geschlossenen Bauart besteht, neben dem höheren Turbulenzgrad als im Vergleich zu einem Eiffel-Kanal, in der kontinuierlichen Aufheizung der Strömung infolge der Reibung, d.h.



zur Gewährleistung konstanter Strömungsbedingungen ist ein Kühlsystem im Kreislauf vorzusehen, was sich wiederum in einer Verringerung des Gütegrades, d.h. einer höheren erforderlichen Verdichterleistung auswirkt.

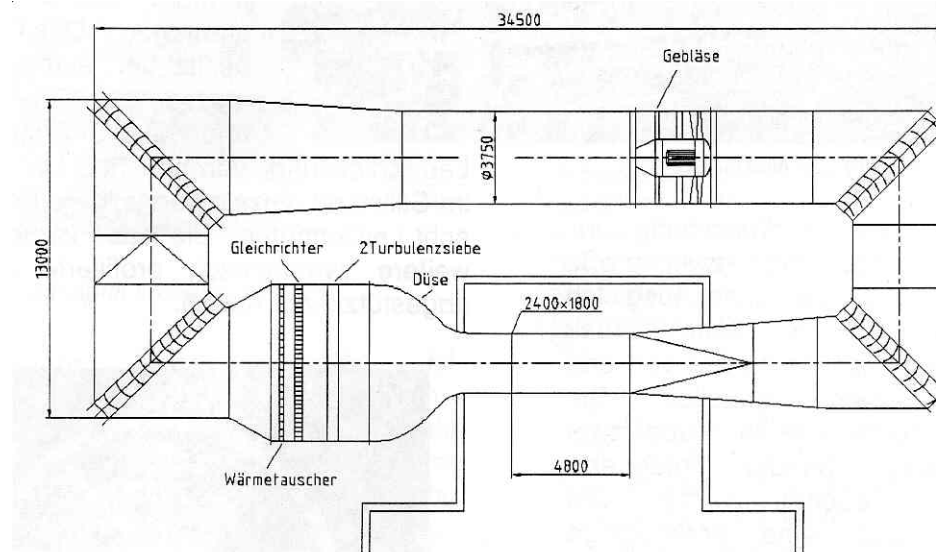


Abb. 2-9: Geschlossene Bauart (Göttinger Kanal), TU-München Windkanal A

## 2.5 Transsonischer Windkanal ( $0.4 < M < 1.2$ )

Transsonische Windkanäle werden in der Regel als geschlossene Kanäle ausgeführt. Durch den Austausch von Düse/Meßstrecke läßt sich der Betriebsbereich über den eigentlichen Transsonikbereich erweitern, z.B. bei TWG von  $M = 0.4$  auf  $M = 2.0$ . Aufgrund des hohen Energiebedarfs für einen kontinuierlichen Betrieb (bis zu 70 MW), werden die Meßstrecken häufig kleiner ausgeführt als bei Niedergeschwindigkeitswindkanälen.

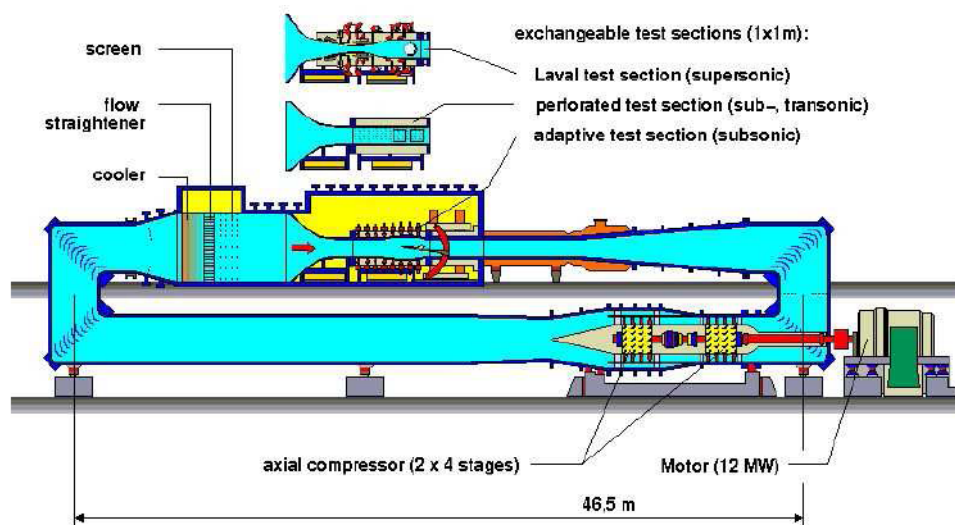


Abb. 2-10: Transsonischer Windkanal Göttingen (TWG)





Abb. 2-11: Eurofighter-Modell (Maßstab 1:15), TWT CALSPAN Buffalo NY, USA

## 2.6 Hyperschallwindkanäle ( $M > 5$ )

Ein wesentliches Kriterium zur Unterscheidung von Hyperschallwindkanälen besteht darin, ob lediglich die Geschwindigkeit ('kalter' Hyperschall) oder die Enthalpie ('heißer' Hyperschall) dupliziert werden soll. Kalte Kanäle arbeiten in der Regel als 'blow-down'-Kanal (Abb. 2-12) mit Meßzeiten von bis zu einigen Minuten. Komprimierte Luft wird aus einem Druckreservoir über eine Aufheizvorrichtung zuerst durch eine Beruhigungskammer geleitet und anschließend in einer Düse beschleunigt. Stromabwärts der Meßstrecke folgt ein Diffusor und anschließend ein Vakuumkessel. Die Aufheizung der Luft ist erforderlich, da andernfalls infolge der Expansion in der Düse und der damit verbundenen Abkühlung, die Kondensationstemperatur von Stickstoff und Sauerstoff unterschritten würde.

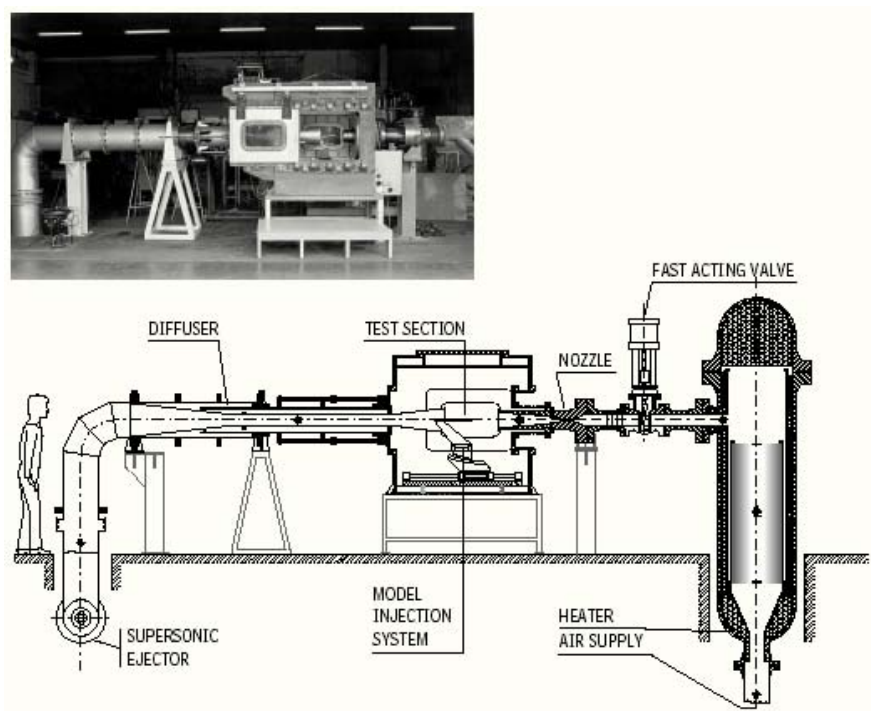


Abb. 2-12: VKI hypersonic tunnel H-3 blow-down facility

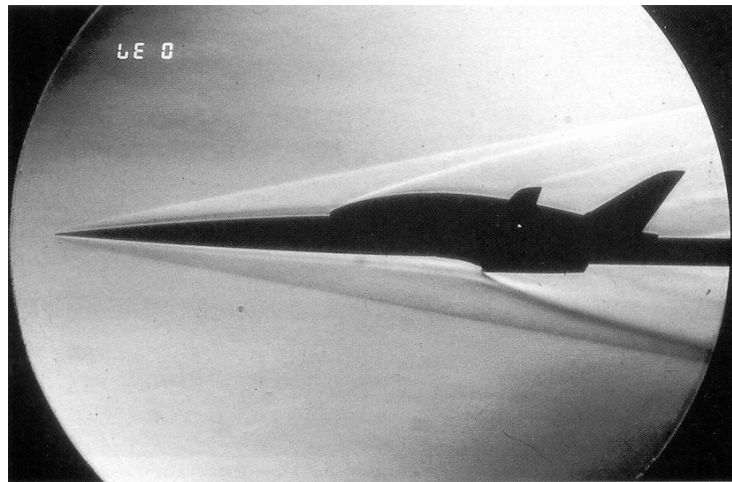


Abb. 2-13: Modell des Raumtransporters Sänger mit Oberstufe Horus, H2K DLR Köln

Ein Beispiel für einen 'heißen' Kanal, der die Duplizierung der Strömungsenthalpie ermöglicht, ist der Stoßwellenkanal des DLR-Göttingen HEG, (Abb. 2-14), mit Meßzeiten in der Größenordnung von einer Millisekunde.

Hauptkomponenten sind das Kompressionsrohr, in dem sich der Kolben befindet, das Stoßrohr, die Düse sowie ein Vakuumkessel. Kompressions- und Stoßrohr sind durch eine Membran von einander getrennt, ebenso das Stoßrohr von der evakuierten Düse und der Meßstrecke. Der schwere Kolben wird pneumatisch beschleunigt und komprimiert das Gas im Kompressionsrohr. Die erste Membran, eine ca. 20 mm starke Stahlplatte, bricht und eine Stoßwelle läuft bis zur zweiten Membran aus Kunststoff und weiter bis zum Düsenhals. Dort wird die Welle reflektiert und läuft wieder zurück in Richtung des Kolbens. Die eigentlichen Kesselbedingungen, d.h. das erforderliche hohe Druck- und Temperaturverhältnis stellt sich hinter diesem zurücklaufenden Stoß ein. Das Gas expandiert nun durch die Düse in die Meßstrecke und strömt in den Vakuumkessel. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Verdichtungsstoß durch das Stoßrohr ausbreitet, die sog. Stoßmachzahl, ist abhängig von den Druck- und Temperaturverhältnissen in Kompressions- und Stoßrohr als auch von den Isentropenexponenten der verwendeten Gase [ 28].

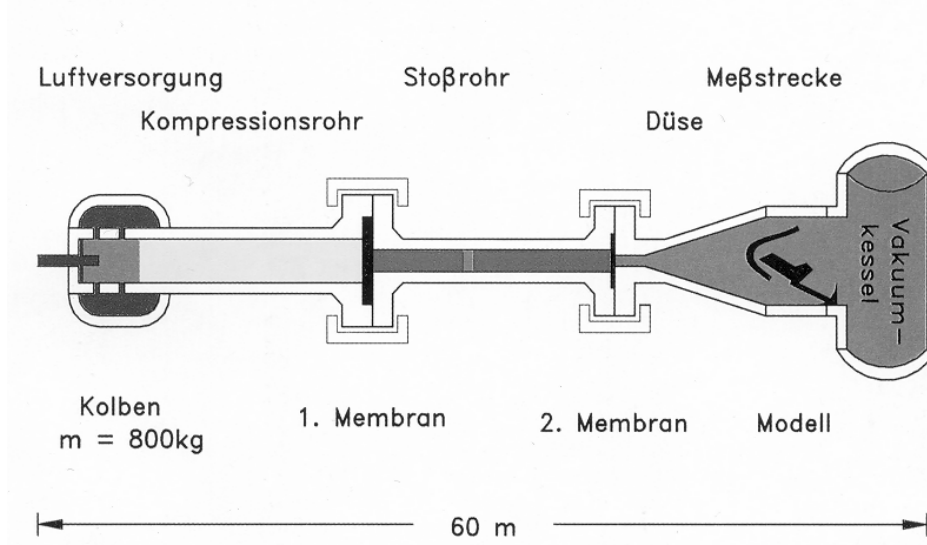


Abb. 2-14: Hochenthalpie-Windkanal Göttingen (HEG)

Einfache Bauformen verzichten auf den Kompressionskolben und erhöhen im Kompressionsrohr den Druck durch eine externe Pumpanlage und die Temperatur durch eine Heizvorrichtung. Die erste Membran wird durch eine Doppelmembran ersetzt, die durch Entlüften zum Bersten gebracht wird.

Auch wenn in solchen Hochenthalpieanlagen die Enthalpie korrekt simuliert werden kann, so unterscheidet sich die Strömung doch stark von den Strömungsverhältnissen in der realen Atmosphäre. Während sich ein Hyperschallfluggerät beim Flug durch eine ruhende Atmosphäre bewegt, die sich im chemischen Gleichgewicht befindet, so trifft das Modell in der Meßstrecke auf eine teilweise dissoziierte und sich im chemischen Nicht-Gleichgewicht befindliche Strömung. Dies hat insbesondere einen Einfluß auf die reibungsbehafteten Größen, wie z.B. die Wandschubspannung. Ebenso wird die Rekombination der Moleküle durch die Katalyzität der Oberfläche beeinflusst, welche sich ebenfalls nur sehr schwierig im Modellversuch nachbilden läßt.

## 2.7 Windkanalinstrumentierung

### 2.7.1 Kraftmessungen

Zur Bestimmung der auf das Modell wirkenden Gesamtlasten, aus denen die aerodynamischen Beiwerte ermittelt werden, kann entweder eine interne (Abb. 2-15) oder eine externe Hauptwaage (Abb. 2-17) verwendet werden. In Abhängigkeit von Modellgröße und Belastung können unterschiedlich dimensionierte Waagen eingesetzt werden, wobei der Kraftfluß von dem Modell über die Waage in die Modellaufhängung verläuft, Abb. 2-16. Besondere Schwierigkeiten bei der Verwendung von internen Waagen bestehen bei der (nominellen) kräfte- und momentenfreien Führung von Instrumentierungs-, Druckluft- oder Hydraulikleitungen zur Simulation von Triebwerksstrahlen, über die Waage.

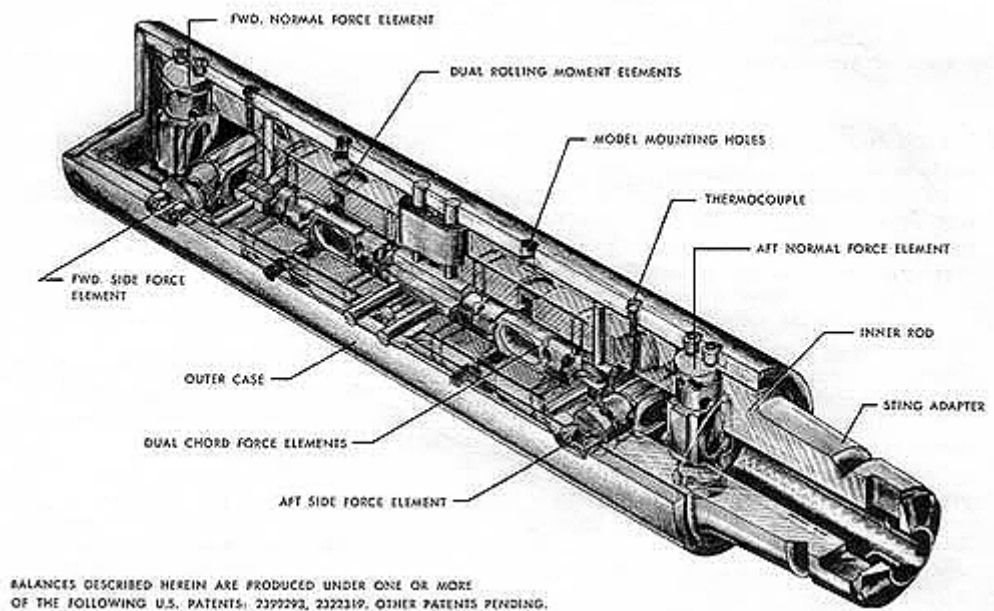


Abb. 2-15: Interne 6-Komponentenwaagen, TASK

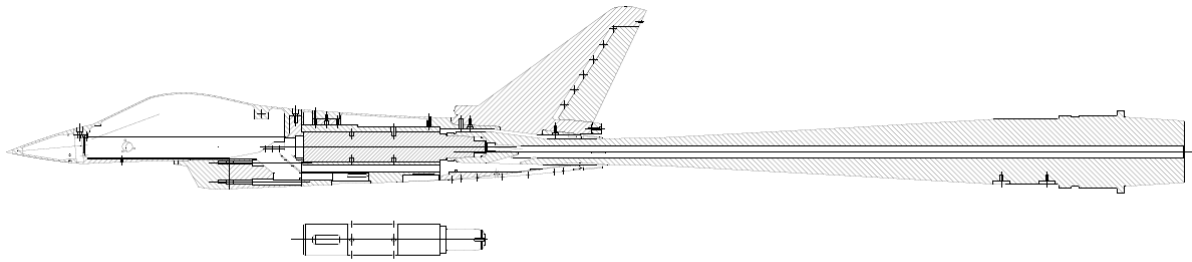


Abb. 2-16: Windkanalmodell mit interner Waage und Heckstielaufhängung

Bei sehr schweren Modellen oder insbesondere bei KFZ-Versuchen werden externe Waagen verwendet, die außerhalb der Meßstrecke untergebracht sind. Das Modell wird über eine Drahtaufhängung oder feste Streben mit der Waage verbunden. Der Hauptnachteil einer externen Waage besteht in der Beeinflussung der Strömung durch die Aufhängevorrichtung des Modells.



Abb. 2-17: Externe Windkanalwaage, University of Washington

Schnittlasten zur Dimensionierung von Pylonen oder zur Bestimmung der Anfangsbedingungen für Waffenabgangsrechnungen werden mit Außenlastwaagen ermittelt. Weitere Aufgaben bestehen z.B. die Ermittlung von Schnittlasten an Leitwerken, Rudern und Klappen.



Abb. 2-18: EADS Außenlastwaage für das Modell (1:15) einer Luft-Boden-Waffe,

### 2.7.2 Druckmessungen

Insbesondere die Belastungsmechanik erfordert nicht nur die Kenntnis der Gesamtkräfte am Modell sondern auch die Lastverteilung an einzelnen Baugruppen, z.B. am Tragflügel oder an Triebwerksgondeln. Klassische Verfahren bestehen in der Verwendung von Druckmodellen, die über eine Vielzahl von statischen und dynamischen Druckmeßstellen verfügen. Die statischen Wanddrücke werden über Druckleitungen mittels eines PSI-Model Abb. 2-19 im Inneren des Windkanalmodells in ein elektrisches Signal umgewandelt und zur Datenerfassung geführt. Dieser hohe Aufwand hinsichtlich Modellinstrumentierung läßt sich durch optische Meßverfahren, wie z.B. die Verwendung von druckempfindlicher Farbe (*pressure sensitive paint PSP*) reduzieren.

Ein weiteres Anwendungsgebiet besteht in der Analyse von Rohrströmungen, wie sie z.B. beim Triebwerkseinlauf und Düsenströmungen vorliegen. Allgemein kann zwischen statischen und Totaldruckaufnehmern unterschieden werden, wobei auch hier stationäre als auch instationäre Geber zum Einsatz kommen, Abb. 2-20 bis Abb. 2-22. Die in Abb. 2-23 und Abb. 2-24 dargestellte 5-Lochsonde wird zur Vermessung des Geschwindigkeitsvektors im Strömungsfeld verwendet.

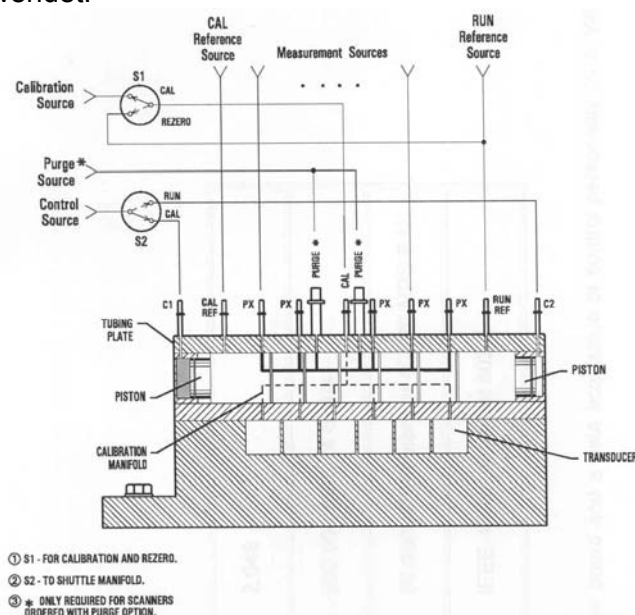


Abb. 2-19: PSI-Modul

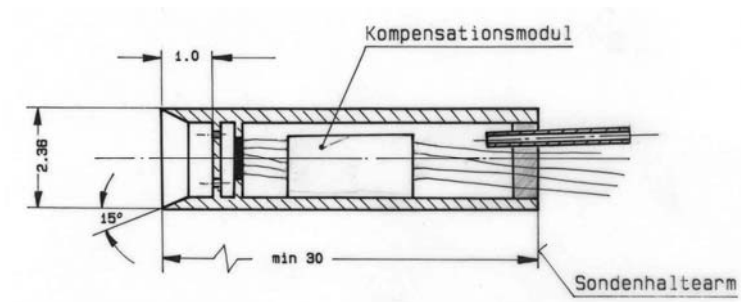


Abb. 2-20: Totaldruckgeber, dynamisch

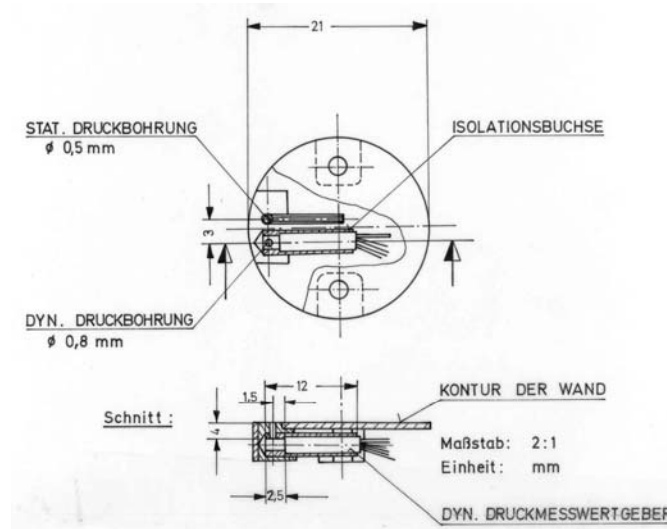
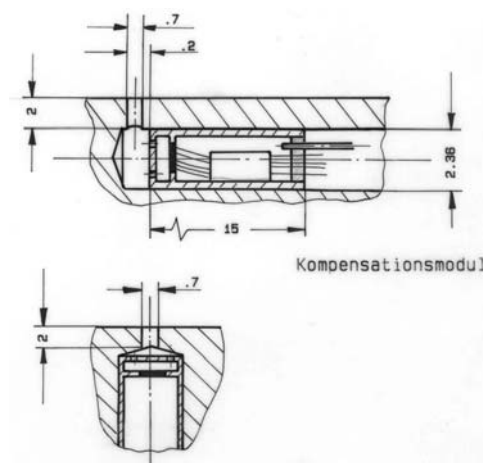


Abb. 2-21: Statische und dynamische Druckaufnehmer, Einbauskizze

Abb. 2-22: Wanddruckaufnehmer, Druckbereich  $\pm 100$  kPa, Dynamik: 1 – 1000 Hz



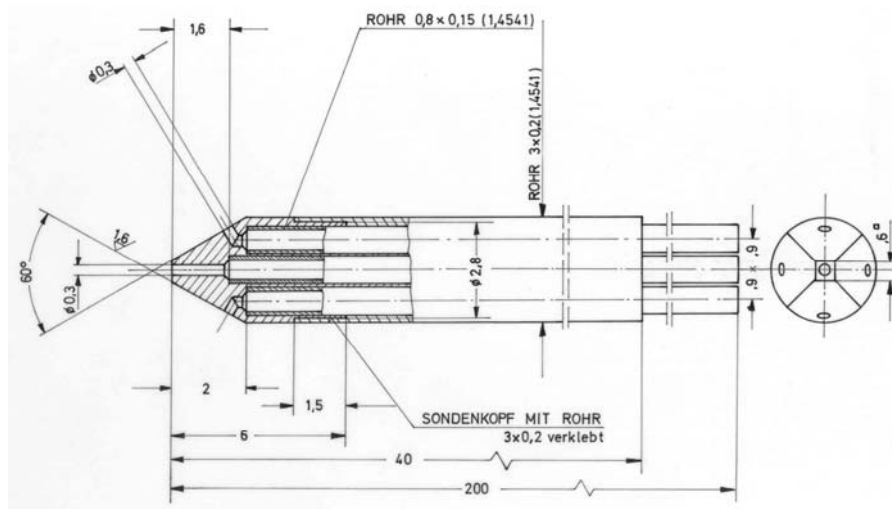


Abb. 2-23: 5-Lochsonde

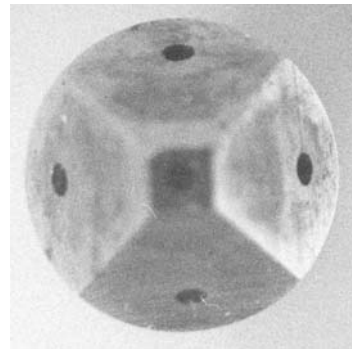
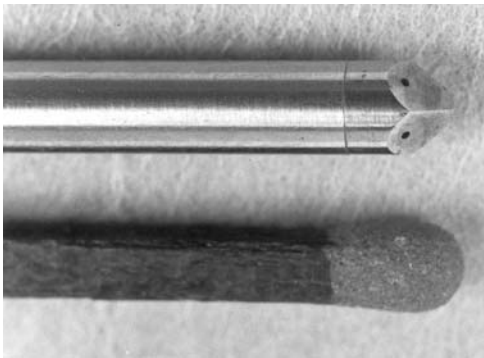


Abb. 2-24: 5-Lochsonde

### 2.7.3 Temperaturmessungen

Ebenso wie bei Druckmessungen, besteht das klassische Verfahren in der diskreten Messung der Temperaturverteilung über eine Vielzahl von Temperatursensoren, was zu einem entsprechend hohen Instrumentierungsaufwand führt (Abb. 2-25). Auch hier setzt man verstärkt auf optische Verfahren z.B. Infrarot-Verfahren [ 17] oder temperaturempfindliche Schichten (*temperature sensitive paint* TSP).

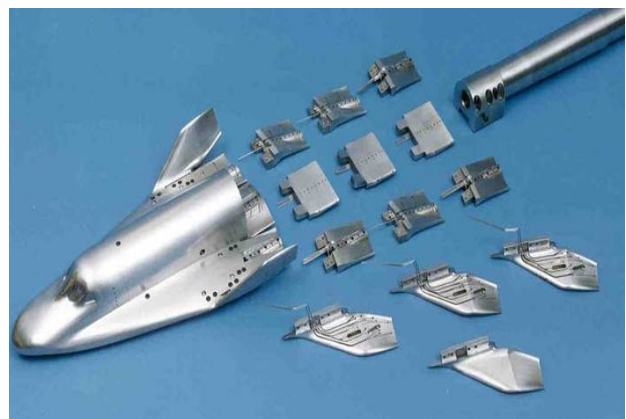
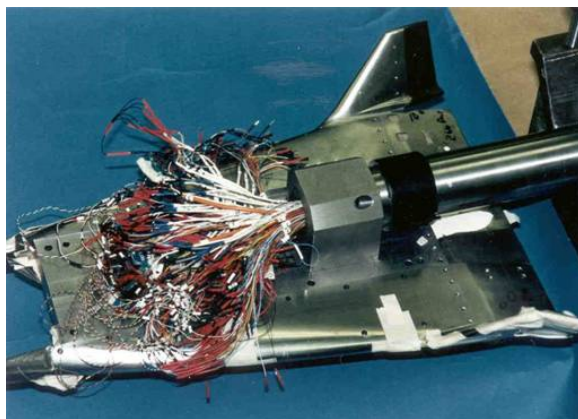


Abb. 2-25: HERMES Hyperschallmodell zur Wärmeübergangsmessung

## 2.8 Windkanalkorrekturen

Da sich das Modell im Gegensatz zur Großausführung nicht frei durch die Atmosphäre bewegt, sondern über eine Aufhänge- und Verstellvorrichtung in ein erdfestes System eingebunden ist, sind die Meßergebnisse um diese störenden Einflüsse zu korrigieren, d.h. die Veränderung der Druckverteilung in der Meßstrecke infolge der Versperrung der Modellaufhängung. Weitere Korrekturen sind erforderlich um z.B. bei einer Heckstielaufhängung die Verfälschung der Modellgeometrie im Heckbereich zu berücksichtigen (Heckwiderstand). Bei kleineren Modellen ist es in der Regel nicht möglich die Triebwerke einschließlich der Schubcharakteristik korrekt zu simulieren, es wird meist lediglich ein durchströmter Triebwerkskanal nachgebildet, der bei zu kleinen Durchmessern oft vollständig verschlossen wird. Der interne Durchflußwiderstand kann durch einen Druckmeßrechen im Düsenaustrittsquerschnitt des Triebwerks gemessen werden.

Die Erfassung der aerodynamischen Parameter der Einlaufströmung bildet eine eigenständige Kategorie von Windkanalversuchen, für die spezielle Einlaufmodellen verwendet werden.

Der Einfluß der Meßstreckenwände in Unterschallkanälen unterscheidet sich signifikant von Transschall-, Überschall- oder Hyperschallkanälen da sich Störungen in der Unterschallströmung auch stromaufwärts auswirken. Um den Wandeinfluß bei Unterschallströmungen zu korrigieren ist insbesondere die Versperrung und die Ablenkung der Stromlinien, mit entsprechender Auswirkung auf die aerodynamischen Beiwerte, z.B. Auftrieb zu berücksichtigen. Im Transsonikbereich verfügen Meßstrecken in der Regel über Entlüftungen in Form von perforierten oder geschlitzten Wänden. Im Überschallbereich bewirkt die Entlüftung eine Verringerung der Stärke der an den Wänden zu dem Modell reflektierten Stöße, welche durch die stoßinduzierte Druckverteilung die Kraftmessung verfälschen. Im Idealfall bewirkt der Druckanstieg hinter dem Stoß, daß genau so viel Luft durch die Entlüftung gepresst wird, daß der Druck auf das gleiche Niveau reduziert wird, wie es vor dem Stoß herrschte. Form und Stärke der Stoßfronten hängen jedoch von der Machzahl, der Modellgröße und dem Anstellwinkel ab. Daher wird sich in der Realität kaum ein interferenzfreier Zustand einstellen, vielmehr wird auch Luft durch die Entlüftungsöffnungen wieder in die Meßstrecke zurückströmen und das Strömungsfeld stromaufwärts beeinflussen. Zur Minimierung der Wandeinflüsse werden daher für Windkanaluntersuchungen im Transschallbereich Modelle verwendet, die lediglich eine maximale Versperrung der Meßstrecke von einem Prozent aufweisen. Bei Überschall- und Hyperschallversuchen liegen die Stoßfronten wieder näher an der Körperoberfläche an, wodurch die Möglichkeit, daß reflektierte Stöße wieder auf das Modell treffen, vernachlässigt werden kann.

Viele Hochgeschwindigkeitswindkanäle weisen aufgrund einer nicht optimal ausgelegten Düse einen Druckgradienten in axialer Richtung auf. Dieser Druckgradient wird, ebenso wie ein potentieller Gradient in der Machzahl, im Rahmen der Kalibrierung der Meßstrecke erfaßt und ist bei der Datenauswertung entsprechend zu berücksichtigen.



## 2.9    Übungen zum Kapitel Strömungssimulation in Windkanälen

### A2.1    Ähnlichkeitskennzahlen bei Windkanalversuchen

Welche Ähnlichkeitskennzahlen sollten Sie bei Windkanaluntersuchungen, insbesondere bei Profil- oder Grenzschichtuntersuchungen duplizieren? Geben Sie eine physikalische Definition der Parameter an.

### A2.2    Einteilung von Windkanälen

Nach welchen Kriterien lassen sich Windkanaltypen unterscheiden?

### A2.3    Laminarwindkanal

Sie sind bei einem Hersteller für Windkraftanlagen beschäftigt und werden mit der Entwicklung eines neuen Profils beauftragt. Welchen Typ von Windkanal wählen Sie für diese Untersuchung aus und warum?

Den ersten Teil der Messungen führen Sie im Juli, bei einer durchschnittlichen Temperatur von 35°C und einem auf Meeresniveau (MSL) bezogenen Luftdruck von 980 hPa durch. Den zweiten Teil der Messung schließen Sie im Dezember, bei einer durchschnittlichen Temperatur von -20°C und einem Luftdruck von 1020 hPa ab. Beide Versuchsreihen führen Sie mit einem Profil mit der Bezugstiefe von  $l = 1$  m bei einer Geschwindigkeit von  $V_\infty = 100$  m/s durch.

Verwundert stellen Sie fest, daß die Ergebnisse nicht zusammen passen, warum?

### 3 Numerische Strömungssimulation

#### 3.1 Entwicklung von CFD als Entwicklungswerkzeug

Betrachtet man die historische Entwicklung auf dem Gebiet der Fluidodynamik, so stellt die numerische Strömungssimulation oder CFD (*computational fluid dynamics*) einen dritten Ansatz zur Problemlösung dar. Bis zum 17. Jahrhundert wurden die wesentlichen Grundlagen der *experimentellen* Strömungsmechanik erarbeitet, gefolgt von der Entwicklung der *theoretischen* Strömungsmechanik im 18. und 19. Jahrhundert. Mit dem Aufkommen von Rechenanlagen in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts begann ab ca. 1960 die Entwicklung der *numerischen* Strömungsmechanik und hat heute seinen etablierten Platz neben Theorie und Experiment bei der Lösung strömungsmechanischer Aufgaben.

Obwohl in der anfänglichen Euphorie häufig propagiert, wird die numerische Simulation auch in absehbarer Zeit das Experiment nicht verdrängen, sondern CFD ist vielmehr als Bindeglied zwischen Experiment und Theorie zu verstehen.

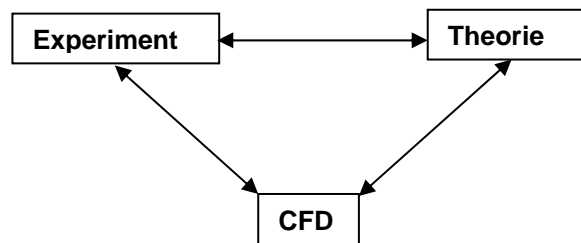


Abb. 3-1: Die drei 'Dimensionen' der Fluidodynamik [ 6]

Analog zu dem Vorgehen bei einem Windkanalexperiment, d.h. unter definierten und kontrollierbaren Randbedingungen werden (Meß-) Ergebnisse erzielt, werden bei einer numerischen Simulation (Rechen-) Ergebnisse für definierte Randbedingungen erzeugt. CFD ermöglicht somit auch ein numerisches Experiment. Als Beispiel soll die Frage untersucht werden, wie sich das Strömungsfeld um ein Profil bei vorgegebener Reynoldszahl unter der Annahme einer wahlweise laminaren und einer turbulenten Strömung verhält. Während im Windkanalexperiment die Turbulenz durch das Aufbringen von Transitionstreifen im vorderen Bereich des Profils erzwungen werden muß, da die Reynoldszahl unverändert bleiben soll, beschränkt sich der Aufwand des numerischen Experiments auf das Zuschalten (turbulente Strömung) oder Abschalten (laminare Strömung) des Turbulenzmodells. Das Ergebnis der Rechnung zeigt die grundlegenden Unterschiede der beiden Strömungstypen. Während im laminaren Fall die Strömung an der Hinterkante instationär ablöst, liegt die Strömung im turbulenten Fall an der Hinterkante an.

Der Vergleich der mittels numerischem und Windkanalexperiment ermittelten Auftriebsbeiwerte für das Wortmannprofil FX63-137 (Abb. 3-2) zeigt jedoch einen fundamentalen Unterschied zwischen beiden Ansätzen. In der Regel wird bei Kraftmessungen eine so genannte Polare, d.h. die Variation der Beiwerte in Abhängigkeit vom Anstellwinkel gemessen. Die Anzahl der Meßpunkte ist hierbei prinzipiell frei wählbar. In der Praxis hat sich eine Stufung von  $\alpha \Delta = 1^\circ$  bzw.  $2^\circ$  als ausreichend erwiesen.

Die numerische Simulation liefert pro Rechenlauf zwar das vollständige Strömungsfeld um den Körper, jedoch nur für einen einzigen Anstellwinkel. Auch hier ist prinzipiell möglich eine vollständige Polare zu berechnen, jedoch steigt der Zeitaufwand, insbesondere bei komplexen dreidimensionalen Konfiguration, stark an.

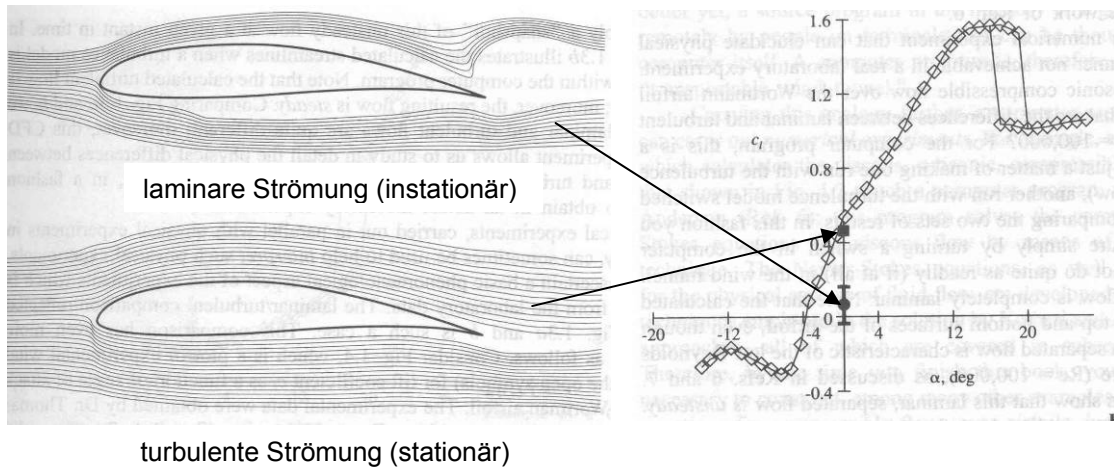


Abb. 3-2: CFD vs. Windkanal, FX63-137,  $Re = 10^5$ ,  $M_\infty = 0.5$  [ 6]

Während noch bis ca. 1970 sich die Anwendung von CFD auf die Berechnung zweidimensionaler Strömungen beschränkte, so konnten ab ca. 1990 dreidimensionale Strömungen um komplexe Geometrien vollständig berechnet werden. CFD wurde somit zu einem vollwertigen Entwurfswerkzeug.

Die Druckverteilung für eine Northrop F-20 als Ergebnis einer Eulerrechnung bei  $M_\infty = 0.95$  und  $\alpha = 8^\circ$  sind in Abb. 3-3 dargestellt. Die Linien stellen Isobaren, also Orte gleichen Drucks dar. Je enger sich die Isobaren zusammenschieben, desto größer ist der Druckgradient. Das Zusammenfallen der Isobaren an der Flügelhinterkante und auf dem Rumpf indizieren deutlich einen Verdichtungsstoß.

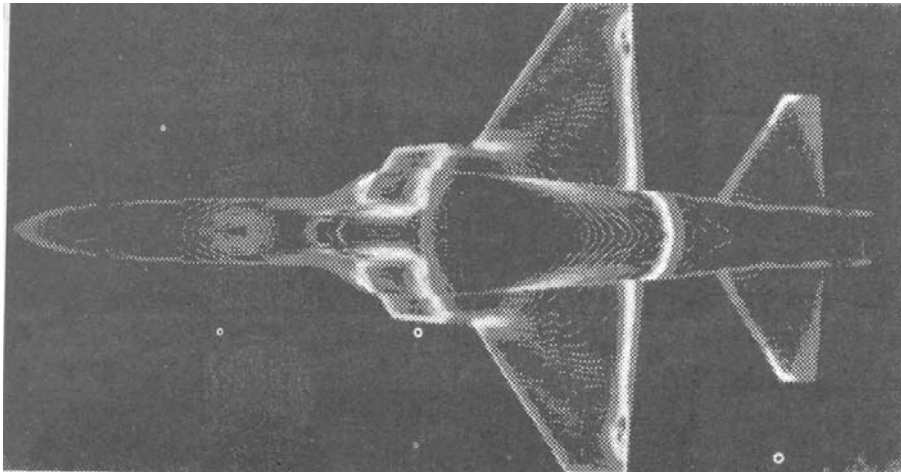


Abb. 3-3: Northrop F-20 bei  $M_\infty = 0.95$  und  $\alpha = 8^\circ$ ,  $c_p$ -Verteilung [ 6]

In Abb. 3-4 ist ein Vergleich der berechneten und gemessenen  $c_p$ -Verteilung für einige Flügelschnitte dargestellt. Bei der 'klassischen' experimentellen Vorgehensweise, d.h. der Verwendung von diskreten Druckbohrungen zeigt sich ein Vorteil von CFD, welche kontinuierliche Ergebnisse über die gesamten Flügelschnitte liefert. Abhilfe schafft hier z.B. der Einsatz optischer Druckmeßmethoden (PSP).

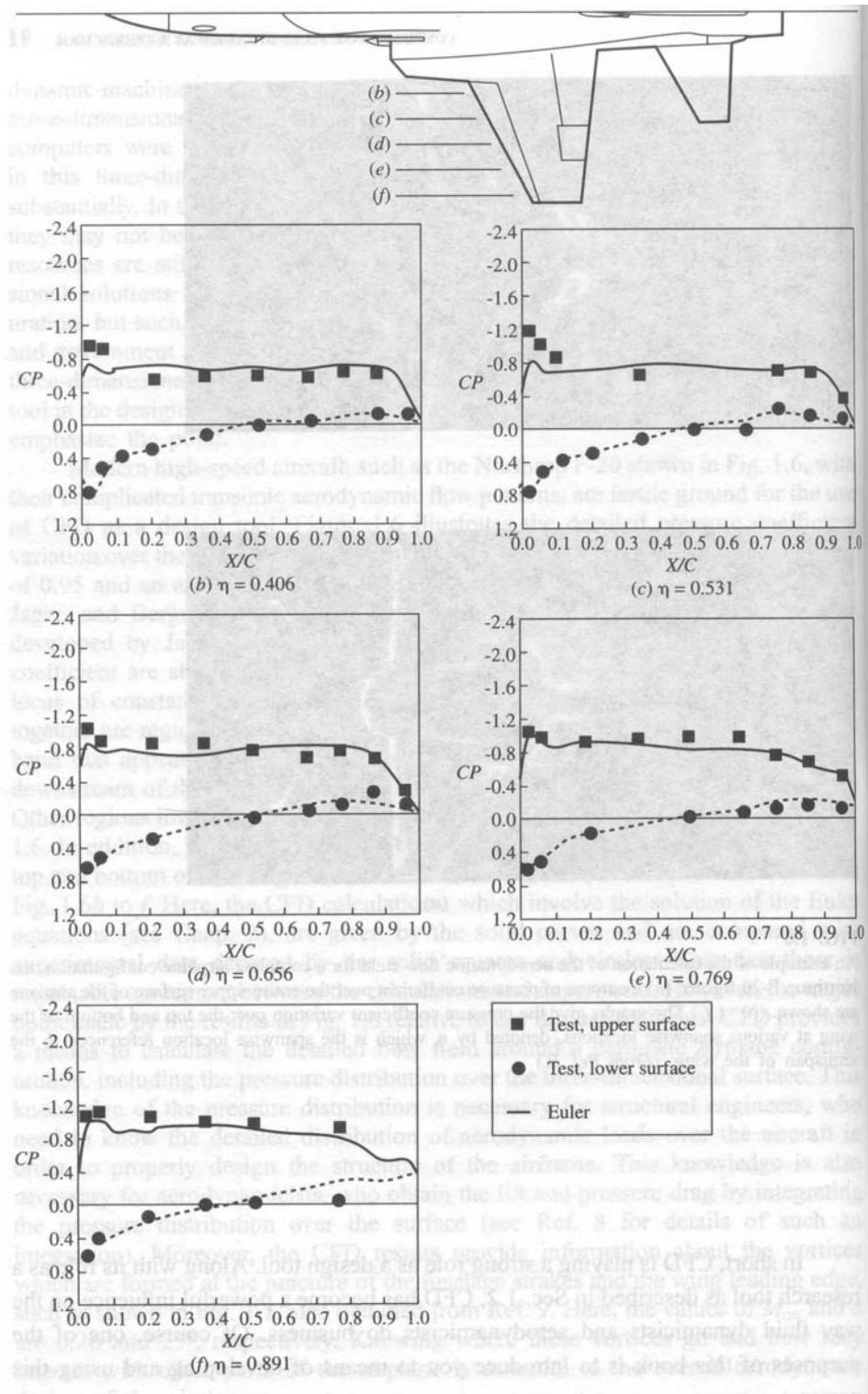
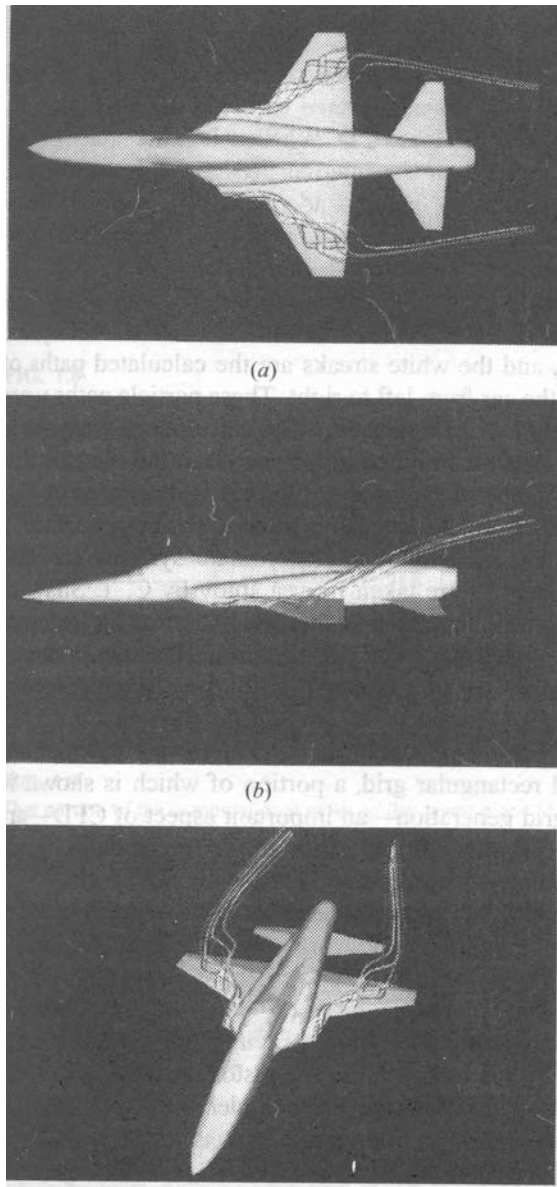


Abb. 3-4: Vergleich CFD mit Windkanalversuch für  $c_p$ -Verteilung [ 6]



Eine weitere Stärke numerischer Verfahren liegt in der Erfassung des gesamten Strömungsfeldes um den Körper. Dadurch lassen sich z.B. auch komplexe Wirbelstrukturen analysieren (Abb. 3-5). Diese Möglichkeit steht jedoch auch heute durch eine Vielzahl von optischen Verfahren zur dreidimensionalen Strömungssichtbarmachung und -vermessung im Windkanal zur Verfügung (PIV, DGV).

Die Bedeutung von CFD wird an dem Beispiel eines stumpfen Körpers, der mit Über- bzw. Hyperschall angeströmt wird, sichtbar. Bei Wiedereintrittskörpern, wie z.B. der Apollo-Kapsel, ist das Strömungsfeld zwischen dem abgelösten Stoß und dem Körper, insbesondere hinsichtlich des für die Auslegung der Thermalstruktur wichtigen Wärmeübergangs, von Interesse. Das gleichzeitige Vorliegen eines Unter- und eines Überschallgebietes hinter dem Verdichtungsstoß (Abb. 3-6), gestaltet eine analytische Lösung schwierig. Das Problem besteht in der gleichzeitigen Lösung zweier unterschiedlicher Typen von Differentialgleichungen; eine elliptische partielle DGL für  $M < 1$  und eine hyperbolische partielle DGL für  $M > 1$ . Erst 1966 konnte dieses Problem durch Moretti und Abbett numerisch gelöst werden.

Abb. 3-5: Wirbelstrukturen einer Northrop F-20 bei  $M_\infty = 0.95$  und  $\alpha = 8^\circ$  [ 6]

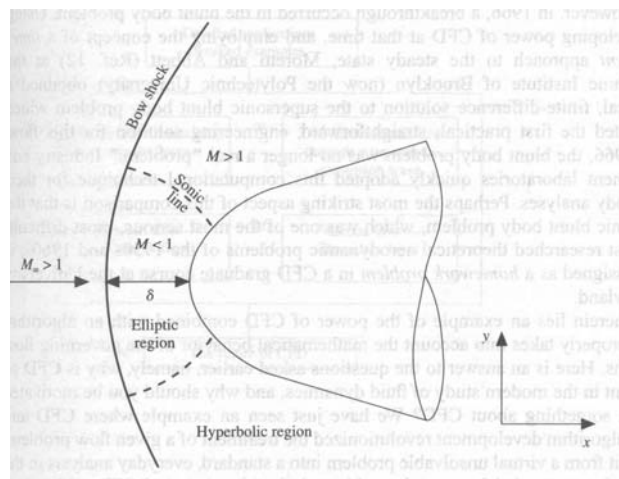


Abb. 3-6: Stumpfer Körper im Überschall

### 3.2 Physikalische Grundprinzipien

Die die Strömungsmechanik bestimmenden physikalischen Grundprinzipien sind die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Die numerische Lösung dieser drei Basisgleichungen setzt das Verständnis der physikalischen Bedeutung dieser drei Gleichungen unabdingbar voraus. Die Form dieser Gleichungen ist für einen theoretischen aerodynamischen Ansatz in der Regel völlig unerheblich, die Lösung eines Algorithmus kann jedoch stark von der Form beeinflusst werden.

In Abhängigkeit des betrachteten Kontrollvolumens führen die Erhaltungssätze zu unterschiedlichen Formen partieller Differentialgleichungen, d.h. bei der Betrachtung eines finiten Kontrollvolumens  $V$  (Abb. 3-7) ergeben sich Gleichungen in *integraler Form*.

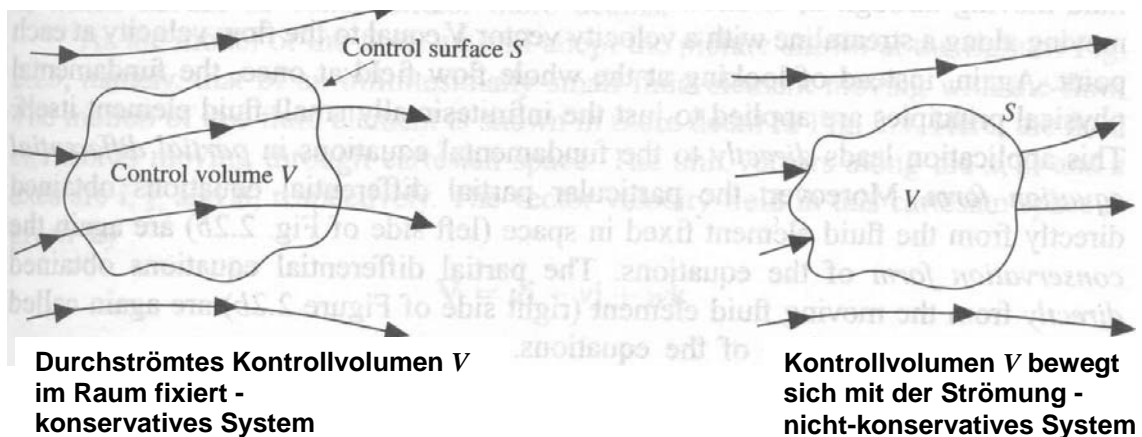


Abb. 3-7: Strömungsmodelle: Endliches Kontrollvolumen  $V$

Bei der Betrachtung eines infinitesimalen Kontrollvolumens  $dV$  (Abb. 3-8) ergeben sich die Gleichungen in der Form von *partiellen* Differentialgleichungen

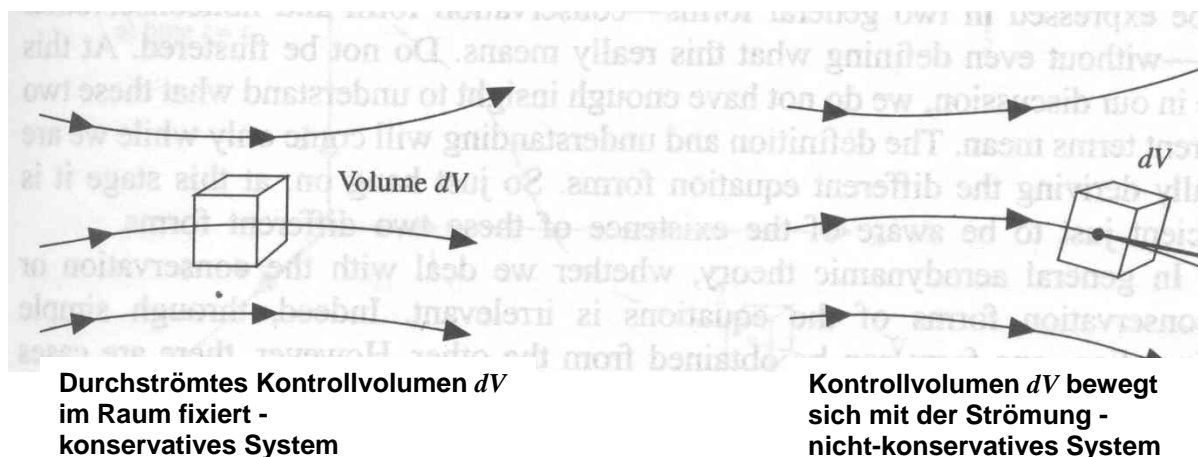


Abb. 3-8: Strömungsmodelle: Infinitesimales Kontrollvolumen  $dV$

### 3.3 Bedeutung des vollständigen Differentials

Zum Verständnis des vollständigen Differentials wird ein infinitesimales Fluidelement betrachtet, welches sich im kartesischen Raum vom Punkt 1 zum Punkt 2 bewegt. Das vorliegende instationäre Geschwindigkeitsvektorfeld  $\vec{V}$  wird beschrieben durch

$$\vec{V} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k} \quad \text{Gl. 3-1}$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$u = u(x, y, z, t) \quad \text{Gl. 3-2}$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad \text{Gl. 3-3}$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad \text{Gl. 3-4}$$

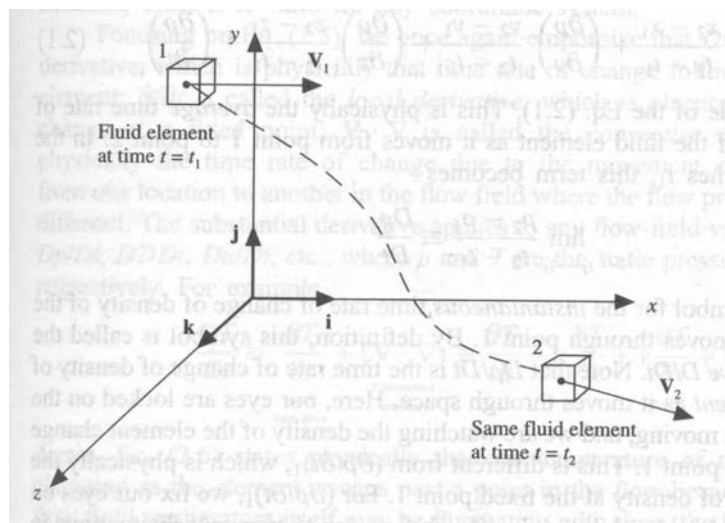


Abb. 3-9: Bedeutung des vollständigen Differentials

Zum Zeitpunkt  $t = t_1$  befindet sich das Element am Punkt 1 und seine Dichte beträgt  $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$ . Zum Zeitpunkt  $t = t_2$  befindet sich das Element am Punkt 2 und seine Dichte beträgt  $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . Die Taylorentwicklung um Punkt 1 ergibt für die Dichte

$$\rho_2 = \rho_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \cdot (x_2 - x_1) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \cdot (y_2 - y_1) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \cdot (z_2 - z_1) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 \cdot (t_2 - t_1) + \dots \quad \text{Gl. 3-5}$$

+.....Terme höherer Ordnung

Division durch  $t_2 - t_1$  ergibt die mittlere zeitliche Änderung der Dichte des Kontrollvolumens auf dem Weg von (1) nach (2)

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \cdot \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \quad \text{Gl. 3-6}$$

Der Grenzübergang

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{Gl. 3-7}$$

ergibt das *vollständige Differential*  $d\rho/dt$ , d.h. die Änderung der Dichte des Fluidelements auf dem Weg von Punkt (1) nach Punkt (2), wohingegen die partielle Ableitung  $\partial\rho/\partial t$  die zeitliche Änderung der Dichte an einem fixen Ort beschreibt.

Das vollständiges Differential der Dichte  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  ergibt sich somit zu

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\rho}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial\rho}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial\rho}{\partial t} \cdot dt \quad \text{Gl. 3-8}$$

bzw. nach Division durch  $dt$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad \text{Gl. 3-9}$$

mit

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad \text{Gl. 3-10}$$

folgt

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial\rho}{\partial z} \quad \text{Gl. 3-11}$$

### 3.4 Kontinuitätsgleichung

#### 3.4.1 Integrale Form der Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus dem physikalischen Grundprinzip der Masseerhaltung

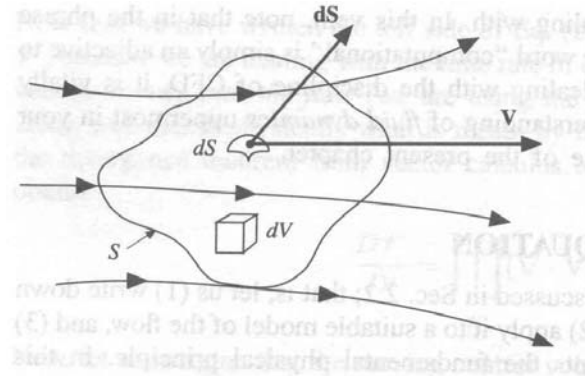


Abb. 3-10: Integrale Form der Kontinuitätsgleichung

Die Massebilanz ergibt sich aus dem Nettomassestrom aus dem Kontrollvolumen

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad \text{Gl. 3-12}$$

und der zeitlichen Änderung der Masseänderung (Abnahme) innerhalb des Kontrollvolumens

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV \quad \text{Gl. 3-13}$$



zu

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV = 0 \quad \text{Gl. 3-14}$$

### 3.4.2 Differentielle Form der Kontinuitätsgleichung

Aus der Betrachtung des in Abb. 3-11 skizzierten Volumenelementes  $dx \cdot dy \cdot dz$  ergibt sich die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form

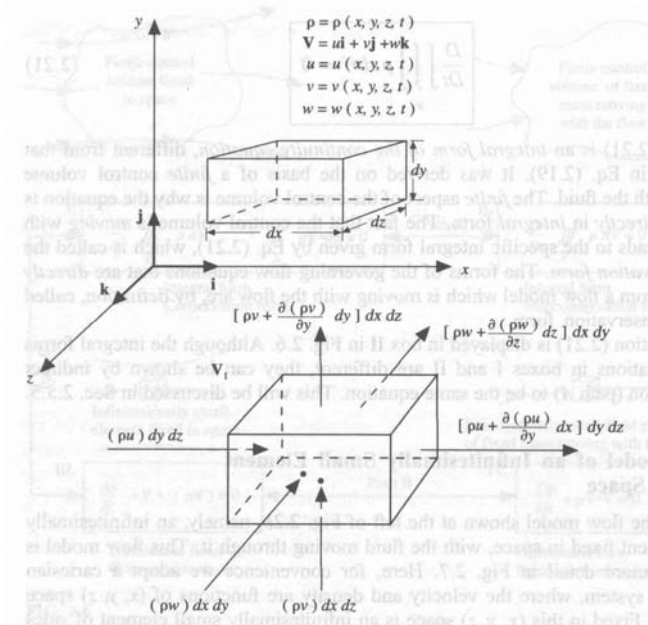


Abb. 3-11: Im Raum fixiertes infinitesimales Volumenelementes  $dx \cdot dy \cdot dz$

Aus dem Nettostrom in  $x$ -Richtung

$$\left[ \rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} dx \right] dy dz - (\rho \cdot u) dy dz = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} dx dy dz \quad \text{Gl. 3-15}$$

und analog in  $y$ - und  $z$ -Richtung ergibt sich der Gesamtnettomassetrom

$$\left[ \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad \text{Gl. 3-16}$$

Zusammen mit der zeitlichen Veränderung der Masse

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz) \quad \text{Gl. 3-17}$$

lautet die Bilanz für das im Raum fixierte Volumenelement

$$\left[ \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right] dx dy dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz) = 0 \quad \text{Gl. 3-18}$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[ \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right] = 0 \quad \text{Gl. 3-19}$$

### 3.5 Impulsgleichung

Die Impulsgleichung ergibt sich aus dem physikalischen Grundprinzip: Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung, d.h.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{Gl. 3-20}$$

Betrachtet man ein in Strömung mitbewegtes infinitesimales Element  $dx \cdot dy \cdot dz$  (Abb. 3-11) so lässt sich diese Vektorbeziehung in drei skalare Beziehungen entlang der drei Hauptachsen aufteilen. Die Komponente in  $x$ -Richtung ist demnach

$$F_x = m \cdot a_x \quad \text{Gl. 3-21}$$

Die Kraft  $F_x$  besteht wiederum aus zwei Anteilen. Den Körperkräften, die über eine Distanz wirken, d.h. Gravitation, elektrische- oder magnetische Kräfte und den Oberflächenkräften, die eine direkte Wirkung auf den Körper ausüben, d.h. Druck, Schub- und Normalspannung (Reibungskräfte).

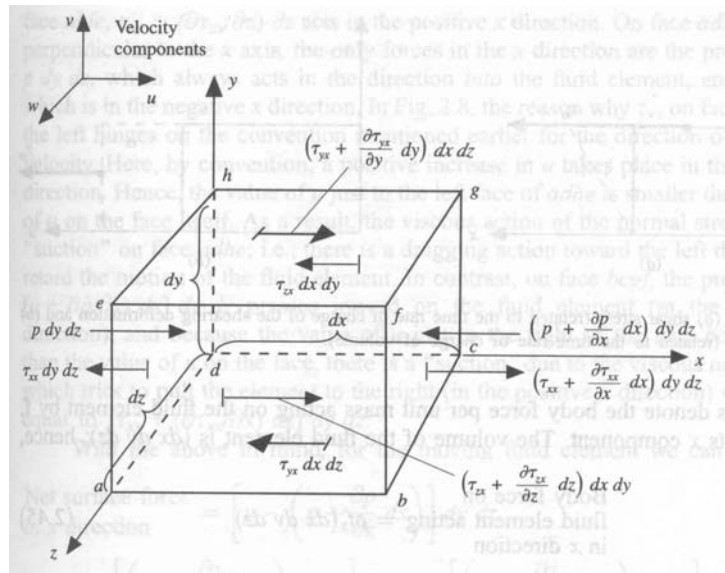


Abb. 3-12: In der Strömung mitbewegtes infinitesimales Volumenelementes  $dx \cdot dy \cdot dz$

Die Summe der Oberflächenkräfte in  $x$ -Richtung ergibt

$$\begin{aligned} & \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dydz + \left[ \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dydz + \\ & + \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz + \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-22}$$

bzw.

$$\left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad \text{Gl. 3-23}$$

Die Körperkraft in  $x$ -Richtung  $\rho \cdot f_x \cdot dx dy dz$ , mit  $f_x$  als der auf die Masse normierten Körperkraft, ergibt die Gesamtkraft in  $x$ -Richtung

$$F_x = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho \cdot f_x \cdot dx dy dz \quad \text{Gl. 3-24}$$

Mit den Definitionen für die Masse

$$m = \rho \cdot dx dy dz \quad \text{Gl. 3-25}$$

und Beschleunigung

$$a_x = \frac{du}{dx} \quad \text{Gl. 3-26}$$

ergeben sich eingesetzt in Gl. 3-24 mit

$$F_x = m \cdot a_x$$

die Navier-Stokes-Gleichung in  $x$ -Richtung

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot f_x \quad \text{Gl. 3-27}$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung ergeben sich analog zu

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho \cdot f_y \quad \text{Gl. 3-28}$$

$$\rho \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho \cdot f_z \quad \text{Gl. 3-29}$$

### 3.6 Energiegleichung

Das der Energiegleichung zugrunde liegende physikalische Prinzip ist die Energieerhaltung

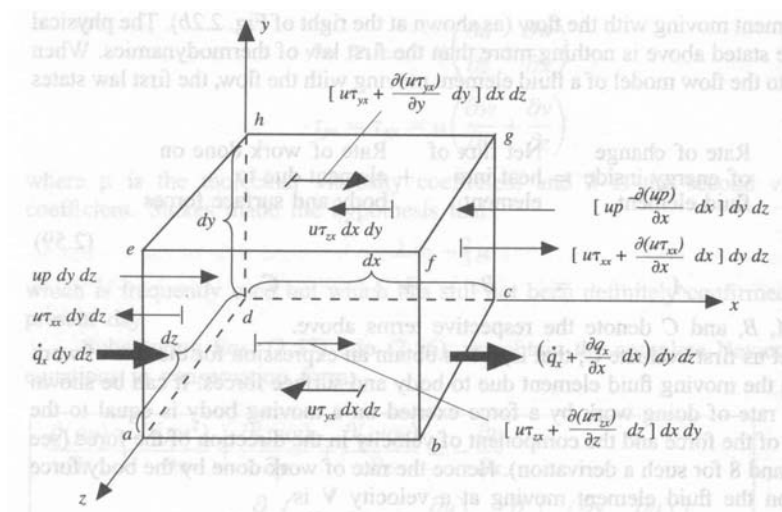


Abb. 3-13: In der Strömung mitbewegtes infinitesimales Element  $dx \cdot dy \cdot dz$

Die Energiebilanz am Fluidelement setzt sich zusammen aus der Änderung der Energie im Inneren des Elements, die gleich ist der Summe aus Nettowärmestrom in das Element hinein und der am Element durch Körper- und Oberflächenkräfte geleisteten Arbeit.

Mit der Innere Energie  $e$  und der kinetischen Energie  $\frac{V^2}{2}$  ergibt sich die Änderung der Energie im Inneren des Elements zu

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad \text{Gl. 3-30}$$

=

Der Nettowärmestrom in das Element hinein lautet

$$\left[ \rho \cdot \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad \text{Gl. 3-31}$$

+

und die am Element durch Körper- und Oberflächenkräfte geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} & - \left[ \left( \frac{\partial(u p)}{\partial x} + \frac{\partial(v p)}{\partial y} + \frac{\partial(w p)}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial(u \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u \tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v \tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w \tau_{zz})}{\partial z} \right] dx dy dz + \\ & \rho \cdot \vec{f} \cdot \vec{V} dx dy dz \end{aligned} \quad \text{Gl. 3-32}$$

### 3.7 Navier-Stokes- und Euler-Gleichungen

Obwohl streng genommen lediglich die aus der Impulserhaltung abgeleiteten Gleichungen als *Navier-Stokes-Gleichungen* gelten, ist es üblich, das System aus allen drei Gleichungen, d.h. Masseerhaltung, Impulserhaltung und Energieerhaltung als Navier-Stokes-Gleichungssystem zu bezeichnen. Dieses Gleichungssystem ermöglicht die Berechnung viskoser Strömungen, d.h.

- reibungsbehaftete Strömungen
- thermischer Energieübertragung
- instationäre Strömung
- kompressible Strömung
- dreidimensionale Strömung

Eine starke Vereinfachung, und damit eine Beschleunigung der Rechnung, stellt die Vernachlässigung aller Reibungsterme und Wärmeleitungsterme bei den Navier-Stokes-Gleichungen dar. Dieses vereinfachte Gleichungssystem wird als *Euler-Gleichungen* bezeichnet und ermöglicht die Berechnung Reibungsfreier Strömungen, d.h.

- keine Reibung
- keine thermische Energieübertragung
- instationäre Strömung
- kompressible Strömung
- dreidimensionale Strömung

### 3.8 Diskretisierung

Diskretisierung beschreibt einen Prozeß, der eine geschlossene mathematische Form, z.B. eine Integral- oder Differentialgleichung mit unendlich vielen Werten innerhalb der Berechnungsdomäne durch Funktionen annähert, denen nur an einzelnen, diskreten Punkten innerhalb der Berechnungsdomäne Werte zugewiesen werden. Analytische Lösungen partieller Differentialgleichungen bilden wieder kontinuierlich auf ein geschlossenes Gebiet ab, wohingegen numerische Lösungen nur auf diskrete Punkte im Lösungsraum, den so genannten Gitterpunkten abbilden. Die Vorgehensweise besteht darin, daß partiellen Ableitungen in den zuvor hergeleiteten Gleichungen durch algebraische Differenzenquotienten für diskrete Gitterpunkte ersetzt werden.

Die Methode der *Finiten Differenzen* basiert auf dem Ersetzen der partiellen Ableitung durch algebraische *Differenzenquotienten*.

Wird die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit am Punkt  $(i,j)$  mit  $u_{i,j}$  und am Punkt  $(i+1,j)$  mit  $u_{i+1,j}$  bezeichnet, so lautet die Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt  $(i,j)$ :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \cdot \Delta x + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \cdot \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad \text{Gl. 3-33}$$

Die erste partielle Ableitung der Geschwindigkeit läßt sich als finite Differenz darstellen

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \underbrace{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}}_{\text{finite Differenz}} - \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \cdot \frac{\Delta x}{2} + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \cdot \frac{\Delta x^2}{6} + \dots}_{\text{Fehler}} \quad \text{Gl. 3-34}$$

Information 'rechts' von dem Punkt: Vorwärts-Differenz mit Genauigkeit erster Ordnung

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + F(\Delta x) \quad \text{Gl. 3-35}$$

Information 'links' von dem Punkt: Rückwärts-Differenz mit Genauigkeit erster Ordnung

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + F(\Delta x) \quad \text{Gl. 3-36}$$

Die Subtraktion der Taylorentwicklung aus 'rechter' und 'linker' Betrachtung liefert eine Genauigkeit mit zweiter Ordnung

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + F(\Delta x)^2 \quad \text{Gl. 3-37}$$

Analoges Vorgehen für die zweiten partiellen Ableitungen liefert

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + F(\Delta x)^2 \quad \text{Gl. 3-38}$$

Eine weitere Verbesserung der Genauigkeit ist durch Einbeziehung weiterer Gitterpunkte möglich

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{-u_{i+2,j} + 16 \cdot u_{i+1,j} - 30 \cdot u_{i,j} + 16 \cdot u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12 \cdot (\Delta x)^2} + F(\Delta x)^4 \quad \text{Gl. 3-39}$$

### 3.9 Gitter mit Transformationen

Numerische Verfahren berechnen lediglich für diskrete Punkte, so genannte Gitterpunkte, eine Lösung. Es ist offensichtlich, daß die Verteilung der Gitterpunkte der Körpergeometrie angepaßt werden muß, da andernfalls zwar Lösungen im Raum oder im Inneren des Körpers errechnet werden, aber keine an der Oberfläche (Abb. 3-14).

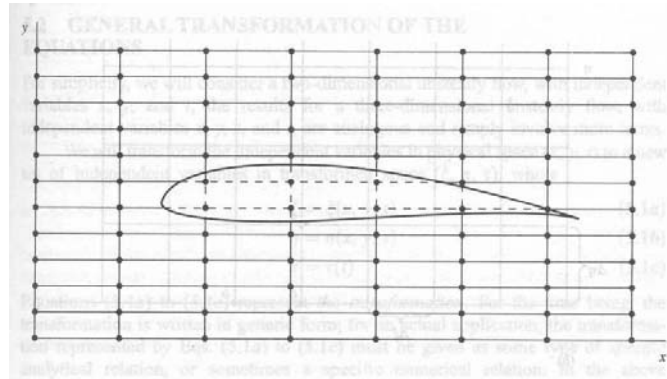


Abb. 3-14: Tragflügelprofil in Rechteckgitter

Es werden daher in der physikalischen Ebene Gitter mit gekrümmten Koordinaten  $(\eta, \xi)$  verwendet, die an die Profilgeometrie  $(x, y)$  angepaßt sind. Die Berechnungsebene stellt ein transformiertes rechtwinkliges System  $(\eta, \xi)$  dar. Dies bedeutet, daß die grundlegenden Gleichungen von  $(x, y)$  nach  $(\eta, \xi)$  als unabhängige Variable transformiert werden müssen. Die Transformationen von  $(x, y)$  nach  $(\eta, \xi)$  erfolgt über

$$\xi = \xi(x, y, t)$$

$$\eta = \eta(x, y, t)$$

$$\tau = \tau(t)$$

Gl. 3-40

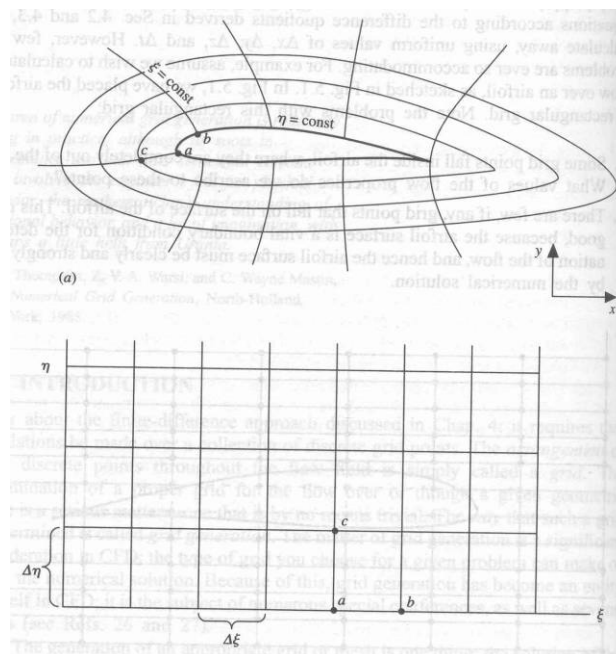


Abb. 3-15: Physikalische Ebene und Berechnungsebene

Zur Erfassung von Gradienten, z.B. im Grenzschichtbereich, ist es sinnvoll die Gitterpunkte enger zu setzen und das Gitter im Außenbereich zu dehnen. In Abb. 3-16 ist das berechnete Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht bei konstanter und bei veränderlicher Dichte der Gitterpunkte skizziert. Es wird deutlich, daß bei einer konstanten räumlichen Verteilung der Gitterpunkte lediglich ein Punkt in der Grenzschicht liegt und somit weder das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht noch im Nahbereich der Außenströmung korrekt erfaßt wird, Abb. 3-16a. Wesentlich besser sieht die Lösung für den Fall der komprimierten Punkteverteilung in der Nähe der Wand aus. Geschwindigkeitsverteilung in Grenzschicht und dem Nahbereich werden deutlich besser erfaßt, Abb. 3-16b.

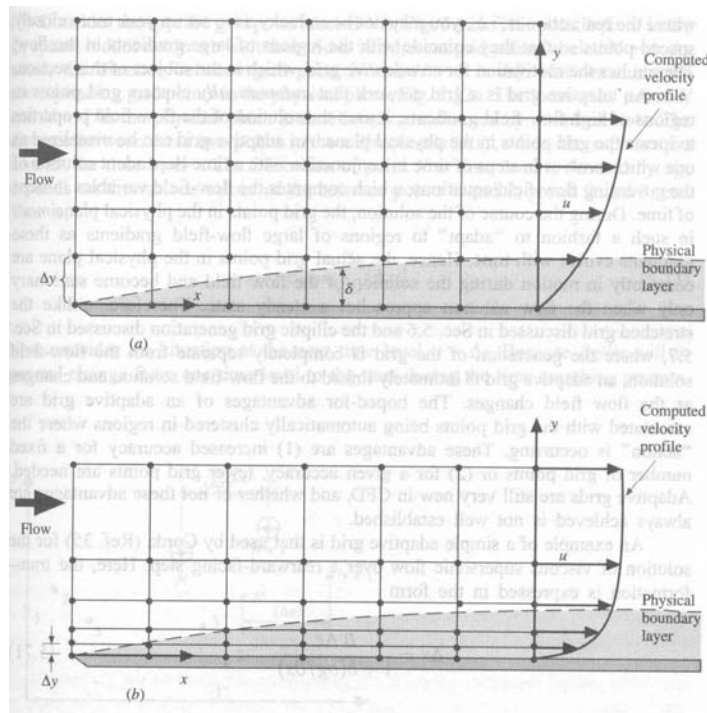


Abb. 3-16: Gitterverengung im Bereich starker Gradienten

### 3.10 Einfache CFD Techniken

#### 3.10.1 Lax-Wendroff Methode

Bei der Lax-Wendroff Methode handelt es sich um eine finite-Differenzen-Methode. Als Beispiel sollen die Eulergleichungen für eine instationäre zweidimensionale Strömung gelöst werden, d.h. es erfolgt keine Berücksichtigung von Reibung und Wärmezufuhr.

$$\begin{aligned}
 \text{Kontinuitätsgleichung} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \\
 \text{Impulsgleichung } x\text{-Richtung} \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= - \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\
 \text{Impulsgleichung } y\text{-Richtung} \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= - \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\
 \text{Energiegleichung} \quad \frac{\partial e}{\partial t} &= - \left( u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{Gl. 3-41}$$

Die Gleichungen sind bereits dergestalt umgeformt, daß die zeitabhängigen Terme auf der linken und die ortsabhängigen Terme auf der rechten Seite stehen. Zur Verdeutlichung des Verfahrens wird eine abhängige Strömungsgröße, z.B. die Dichte  $\rho$  betrachtet. Wenn  $\rho_{i,j}^t$  die Dichte an dem Gitterpunkt  $(i,j)$  zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt, dann ergibt sich unter der Annahme, daß das Strömungsfeld für den Zeitpunkt  $t$  bereits berechnet wurde, die Dichte  $\rho_{i,j}^{t+\Delta t}$  an dem gleichen Gitterpunkt  $(i,j)$ , jedoch zu dem Zeitpunkt  $t+\Delta t$  aus der Taylor-Entwicklung

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t \cdot \Delta t + \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right)_{i,j}^t \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \tag{Gl. 3-42}$$

Die Berechnung der ersten partiellen Ableitung der Taylor-Entwicklung erfolgt durch finite Zentral-Differenzen

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t = - \left( \rho_{i,j}^t \cdot \frac{u_{i+1,j}^t - u_{i-1,j}^t}{2\Delta x} + u_{i,j}^t \cdot \frac{\rho_{i+1,j}^t - \rho_{i-1,j}^t}{2\Delta x} + \rho_{i,j}^t \cdot \frac{v_{i+1,j}^t - v_{i-1,j}^t}{2\Delta x} + v_{i,j}^t \cdot \frac{\rho_{i+1,j}^t - \rho_{i-1,j}^t}{2\Delta x} \right) \tag{Gl. 3-43}$$

Alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung sind bekannt, da sie sich auf den Zeitpunkt  $t$  beziehen, zu welchem das Strömungsfeld gemäß Angabe bereits berechnet wurde. Die Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen ist mit etwas höherem Aufwand verbunden und kann ebenfalls über finite Differenzen erfolgen.



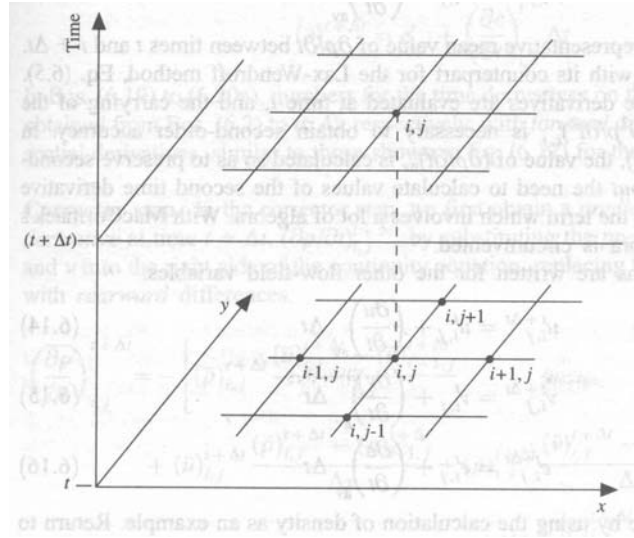


Abb. 3-17: Gitterschema für Lax-Wendroff Methode

### 3.10.2 Maccormack Methode

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die Problematik der Berechnung der zweiten Ableitungen umgangen wird. Im ersten Schritt erfolgt eine erste Abschätzung der Werte für  $t + \Delta t$  aus den beiden ersten Gliedern der Taylorentwicklung. Für die Dichte lautet diese

$$(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t \cdot \Delta t \quad \text{Gl. 3-44}$$

Die erste Ableitung wird aus Vorwärts-Differenzen berechnet

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t = - \left( \rho_{i,j}^t \cdot \frac{u_{i+1,j}^t - u_{i,j}^t}{\Delta x} + u_{i,j}^t \cdot \frac{\rho_{i+1,j}^t - \rho_{i,j}^t}{\Delta x} + \rho_{i,j}^t \cdot \frac{v_{i+1,j}^t - v_{i,j}^t}{\Delta x} + v_{i,j}^t \cdot \frac{\rho_{i+1,j}^t - \rho_{i,j}^t}{\Delta x} \right) \quad \text{Gl. 3-45}$$

Für die restlichen Strömungsparameter erfolgt ein analoges Vorgehen

$$(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^t + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^t \cdot \Delta t \quad \text{Gl. 3-46}$$

$$(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^t + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^t \cdot \Delta t \quad \text{Gl. 3-47}$$

$$(\bar{e})_{i,j}^{t+\Delta t} = e_{i,j}^t + \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right)_{i,j}^t \cdot \Delta t \quad \text{Gl. 3-48}$$

In einem zweiten Schritt erfolgt der so genannte Korrekturschritt. Es wird zuerst ein geschätzter Wert der zeitlichen Ableitung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ , also  $\left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right)_{i,j}^{t+\Delta t}$  ermittelt und

zwar durch Einsetzen der geschätzten Werte für  $\rho$ ,  $u$  und  $v$  und Ersetzen der räumlichen Ableitungen durch Rückwärts-Differenzen

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = - \left[ \begin{aligned} &(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{u})_{i-1,j}^t}{\Delta x} + (\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{\rho})_{i-1,j}^t}{\Delta x} + \\ &(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{v})_{i-1,j}^t}{\Delta y} + (\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{\rho})_{i-1,j}^t}{\Delta y} \end{aligned} \right] \quad \text{Gl. 3-49}$$

Berechnung des arithmetischen Mittelwertes

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{gemittelt}} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} \right] \quad \text{Gl. 3-50}$$

Korrigierte Dichte zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{gemittelt}} \cdot \Delta t \quad \text{Gl. 3-51}$$

### 3.11 Panel-Verfahren

Die Generierung von dreidimensionalen Gitternetzen ist, trotz Verwendung von Netzgeneratoren, auch heute noch mit einem erheblichen Aufwand verbunden. Insbesondere für schnelle Abschätzungen zur Bewertung von Vorentwurfsgeometrien sind daher einfache Verfahren, gekennzeichnet durch geringen Aufwand bei Netzgenerierung und bei Berechnung, erforderlich. Diese Anforderungen werden von so genannten *Panel*-Verfahren erfüllt. Hierbei wird nicht mehr ein vollständiges Gitternetz des gesamten Strömungsraums erstellt, sondern lediglich die Oberfläche des betrachteten Körpers wird in Flächenelemente (*panel*) diskretisiert. In einem Kontrollpunkt, in der Regel der Flächenschwerpunkt eines jeden Elements werden die Potentialgleichungen gelöst und daraus die Geschwindigkeitsverteilungen ermittelt, aus denen sich wiederum die Druckverteilung an der Körperfläche berechnen läßt. Die aerodynamischen Charakteristika ergeben sich aus der Integration der Druckverteilung über die Körperoberfläche. Die Anwendbarkeit von Panel-Verfahren setzt eine reibungsfreie, drehungsfreie und stationäre Strömung voraus. Die Linearisierung des kompressiblen Geschwindigkeitspotentials setzt voraus, daß die Störgeschwindigkeiten klein sind im Verhältnis zur freien Anströmung und nicht in der Nähe von  $M = 1$  liegen. Diese Forderung wird insbesondere in Staupunktgebieten und im Transschall nicht erfüllt und das Einsatzspektrum wird limitiert auf Strömungen außerhalb des Transsonikbereichs und auf anliegende Strömungen, d.h. auf moderate Anstellwinkel, bei denen noch keine Ablösung zu erwarten ist.

Ein bei MBB Ottobrunn in den 80er Jahren entwickeltes Verfahren ist das so genannte HISSS (higher order subsonic supersonic singularity method) Verfahren [ 16].

Die partielle Laplace-Differentialgleichung (siehe Kapitel 4.4.2), die das Geschwindigkeitspotential in einer inkompressiblen Strömung beschreibt

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0 \quad \text{Gl. 3-52}$$

wird mittels des Green'schen Theorems in eine integrale Form überführt

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iint \left[ -\frac{\sigma}{|r|} + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS \quad \text{Gl. 3-53}$$

wobei  $\sigma$  und  $\mu$  die Quell- und Dipolverteilung über die Fläche  $S$  beschreiben und  $r$  die Entfernung von dem Punkt  $P(x,y,z)$  zum Flächenschwerpunkt  $Q$  des Flächenelements  $S$  darstellt,  $\delta/\delta n$  ist der Normalenvektor von  $S$  im Punkt  $Q$ . Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich durch Differenzierung von  $\Phi$  nach den Koordinaten von  $P$ , d.h.

$$v(x,y,z) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \iint \left[ -\sigma \cdot \text{grad} \frac{1}{|r|} + \mu \cdot \text{grad} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS \quad \text{Gl. 3-54}$$

### 3.12 Übungen zum Kapitel Numerische Strömungssimulation

#### A3.1 Physikalische Grundprinzipien

Nennen Sie die die Strömungsmechanik bestimmenden physikalischen Grundprinzipien.

#### A3.2 Vollständiges Differential

Was verstehen Sie unter einem vollständigen Differential, z.B. der Dichte  $\rho$  und worin besteht der Unterschied zu einer partiellen Ableitung?

#### A3.3 Navier-Stokes und Euler Gleichungen

Welche Strömungsarten können Sie mit einer Navier-Stokes-Rechnung erfassen?

Wodurch unterscheidet sich eine Euler-Rechnung von einer Navier-Stokes-Rechnung?

#### A3.4 Euler-Verfahren

Sie verwenden für eine Vorentwurfsrechnung ein Euler-Verfahren. Welche Aussage können Sie zum Ergebnis bezüglich Widerstand und der Abbildung der Grenzschicht treffen?

#### A3.5 Panel-Verfahren

Welche Randbedingungen sollten Sie bei der Verwendung eines auf der Potentialtheorie basierenden 'Panel-Verfahrens' berücksichtigen?

## 4 Potentialströmungen

### 4.1 Drehungsfreie und drehungsbehaftete Strömungen

#### 4.1.1 Überblick

Jede Strömung lässt sich in einen drehungsfreien und einen drehungsbehafteten Anteil zerlegen. Der Begriff der Drehung oder Rotation einer Strömung lässt sich an dem in Abb. 4-1 skizzierten Beispiel verdeutlichen. Auf der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit bewegt sich ein mit einem Pfeil markierter Korken. In der linken Abbildung ändert sich die Richtung des Pfeils mit der Zeit, d.h. es gilt  $dl/dt \neq 0$  (drehungsbehaftet), während in der rechten Abbildung die Orientierung der Pfeile in dem bewegten Fluid konstant bleibt, d.h. es gilt  $dl/dt = 0$  (drehungsfrei).

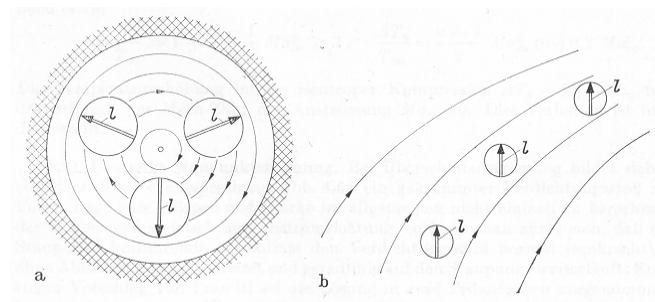


Abb. 4-1: Drehungsbehaftete und drehungsfreie Strömung [ 34]

Drehungsfreie Strömungen werden auch als Potentialströmungen und drehungsbehaftete Strömungen als Potentialwirbelströmungen bezeichnet.

#### 4.1.2 Drehung

Zwischen dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  und Drehvektor  $\vec{\omega}$  besteht der Zusammenhang

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad \text{Gl. 4-1}$$

mit den Komponenten

$$\omega_x = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad \text{Gl. 4-2}$$

Im ebenen Fall, d.h. bei 2-dimensionalen Strömungen, verbleibt nur die letzte Gleichung. Mit  $\omega_x = \omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \omega$  und  $v_x = u$ ,  $v_y = v$  vereinfacht sich die Schreibweise zu

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{Gl. 4-3}$$

#### 4.1.3 Wirbellinie, Wirbelfaden und Wirbelröhre

In Analogie zur Stromlinie kann man in einem drehungsbehafteten (=wirbelbehafteten) Strömungsfeld eine Kurve definieren, die zu einem betrachteten Zeitpunkt an jeder Stelle mit der Richtung des Drehvektors (Wirbelvektors) übereinstimmt. Diese Kurve wird als *Wirbellinie* bezeichnet.

Ebenso kann man in Analogie zum Stromfaden alle Wirbellinien, die durch eine Fläche  $A$  hindurchtreten (Abb. 4-2), zu einem *Wirbelfaden* zusammenfassen, wobei  $\vec{\omega}$  über den Querschnitt konstant gesetzt wird. Die Hüllkurve wird analog zur Stromröhre als *Wirbelröhre* bezeichnet.

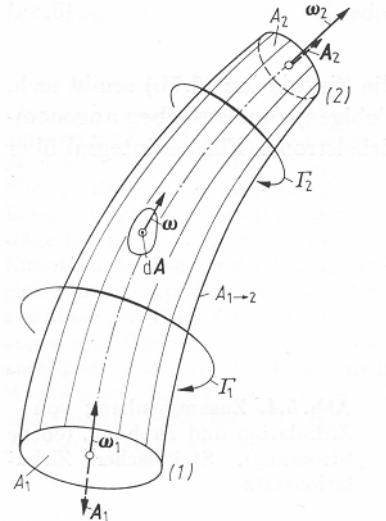


Abb. 4-2: Wirbelröhre [ 34]

#### 4.1.4 Zirkulation

Der Begriff der Zirkulation wird später bei der Berechnung des Auftriebs eine wichtige Rolle spielen. Die Grundannahme besteht in der Kenntnis der momentanen lokalen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  an jeder Stelle einer drehungsbehafteten (wirbelbehafteten) Strömung. Ist diese Annahme erfüllt, was in der Praxis nicht ohne weiteres möglich ist, kann man eine beliebige, geschlossene Kurve bilden, z.B. längs eines Profils und bei festgehaltener Zeit  $t$  über die Kurve die Geschwindigkeit integrieren. Das Linienintegral der Geschwindigkeit längs dieser geschlossenen Kurve liefert die Zirkulation  $\Gamma$ .

$$\Gamma = \oint_{(L)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma = \oint_{(L)} v \cdot dl = \Gamma = \oint_{(L)} v \cdot \cos \alpha \cdot dl \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad \text{Gl. 4-4}$$

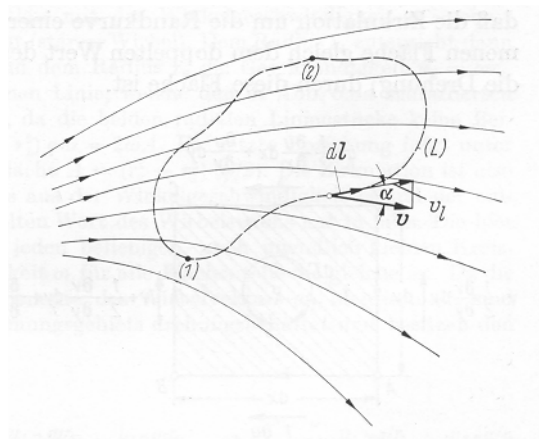


Abb. 4-3: Zirkulation: Linienintegral der Geschwindigkeit [ 34]

Aufgrund der Winkelbeziehung in dem Linienintegral zeigt sich, daß falls ein Linienelement senkrecht zur Stromlinie verläuft, der Beitrag zum Integral verschwindet, d.h.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow d\Gamma = \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

Verläuft das Linienelement parallel einer Stromlinie, ist der Beitrag zum Integral

$$\alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow d\Gamma = \vec{v} \cdot d\vec{l} = v \cdot dl$$

Der Zusammenhang zwischen Drehung und Zirkulation läßt sich über den *Stoke'schen Zirkulationssatz* beschreiben, welcher besagt, daß die Zirkulation um die Randkurve einer räumlichen Fläche gleich ist dem doppelten Wert des Wirbelstroms durch diese Fläche.

$$\Gamma = \oint_{(L)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2 \cdot \int_{(A)} \vec{\omega} \cdot d\vec{A} \quad \text{Gl. 4-5}$$

## 4.2 Wirbelgleichungen

### 4.2.1 Räumlicher Wirbelerhaltungssatz (1. Helmholtz'scher Wirbelsatz)

Der räumliche Wirbelerhaltungssatz beschreibt die Quellfreiheit eines Wirbelfelds, d.h. eine Wirbellinie kann in einem Strömungsfeld weder beginnen noch enden, sondern sie bildet entweder einen geschlossenen Wirbelring oder reicht von einer Grenze des Strömungsbereichs an eine andere.

#### Differentielle Form

$$\text{div } \vec{\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \quad \text{Gl. 4-6}$$

#### Integrale Form

$$\int_V \text{div } \vec{\omega} dV = \oint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \Gamma = 0 \quad \text{Gl. 4-7}$$

### 4.2.2 Zeitlicher Wirbelerhaltungssatz (2. Helmholtz'scher Wirbelsatz)

Der zeitliche Wirbelerhaltungssatz besagt, daß kein Fluidelement in Drehung kommt, welches sich nicht von Anfang an bereits in Drehung befindet. Für den ebenen Fall mit  $v_x = u$  und  $v_y = v$  und  $\omega_z = \omega$  gilt

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \text{Gl. 4-8}$$

### 4.2.3 Zeitlicher Erhaltungssatz der Zirkulation (Thomson)

Der Thomson'sche Satz besagt, daß die Zirkulation in einer reibungsfreien Strömung konstant ist, d.h.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \Gamma(t) = \text{const.} \quad \text{Gl. 4-9}$$

### 4.3 Geschwindigkeitspotentiale

Ausgehend von den in Kapitel 4.1 eingeführten Begriffen läßt sich ein Strömungsfeld  $\vec{v}$  in einen *drehungsfreien*  $\vec{v}_1$  ( $rot \vec{v}=0$ ) und *drehungsbehafteten*  $\vec{v}_2$  ( $div \vec{v}=0$ ) Anteil zerlegen, d.h.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{Gl. 4-10}$$

Zusätzlich sei der drehungsfreie Anteil  $\vec{v}_1$  quellbehaftet und der drehungsbehaftete Anteil  $\vec{v}_2$  quellfrei. Unter dem Begriff eines quellfreien Strömungsfeldes ist nichts anderes als eine weitere Form der Kontinuitätsgleichung zu verstehen, d.h. dem betrachteten Kontrollvolumen wird weder ein Massestrom zu- noch abgeführt. Für inkompressible Strömungen gilt somit für die beiden Anteile

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 : \quad rot \vec{v}_1 &= 0, \quad div \vec{v}_1 \neq 0 \\ \vec{v}_2 : \quad rot \vec{v}_2 &\neq 0, \quad div \vec{v}_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 4-11}$$

Diese Bedingungen lassen sich durch die Einführung eines skalaren Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  und eines vektoriellen Geschwindigkeitspotentials  $\vec{\Psi}$ , welches auch als Wirbelpotential bezeichnet wird, erfüllen.

$$\vec{v}_1 = grad \Phi, \quad \vec{v}_2 = rot \vec{\Psi} \quad \text{Gl. 4-12}$$

Bei einer zweidimensionalen Strömung vereinfacht sich das Geschwindigkeitspotential  $\vec{\Psi} = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$  zu  $\vec{\Psi} = \Psi_z = \Psi$  und wird als Stromfunktion bezeichnet. Für ein drehungsfreies ( $rot \vec{v}=0$ ) und quellfreies ( $div \vec{v}=0$ ) Strömungsfeld gilt

$$\vec{v} = grad \Phi = rot \vec{\Psi} \quad \text{Gl. 4-13}$$

Im ebenen Fall lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten aus der Potentialfunktion  $\Phi$  als auch aus der Stromfunktion  $\Psi$  berechnen.

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v \quad \text{Gl. 4-14}$$

#### 4.3.1 Strom- und Potentialfunktion

Linien gleicher Stromfunktion  $\Psi(x, y)$ , d.h.  $\Psi = const.$  werden als Stromlinien und Linien gleicher Potentialfunktion  $\Phi(x, y)$ , d.h.  $\Phi = const.$  werden als Potentiallinien bezeichnet. Physikalisch versteht man unter einer Stromlinie diejenige Kurve in einem Strömungsfeld, welche zu einer bestimmten Zeit an jeder Stelle mit der dort vorhandenen Richtung des Geschwindigkeitsvektors übereinstimmt. Die zu einer Stromlinie gehörenden Geschwindigkeitsvektoren bilden somit die Tangenten an die Stromlinie. Die Stromlinie ist nicht zu verwechseln mit der Bahnlinie. Die Bahnlinie stellt die Verbindungslinie aller Orte dar, die das gleiche Fluidelement zu verschiedenen Zeitpunkten durchläuft. Die Stromlinie hingegen ist die Verbindungslinie der Orte, an denen sich zur gleichen Zeit verschiedene Fluidelemente mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  befinden. Bei stationären Strömungen fallen Stromlinie und Bahnlinie zusammen. Stromlinien können keine Unstetigkeitsstelle (Knick) haben und sich auch nicht überschneiden, da in diesem Fall an dem gleichen Punkt zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten vorliegen würden.

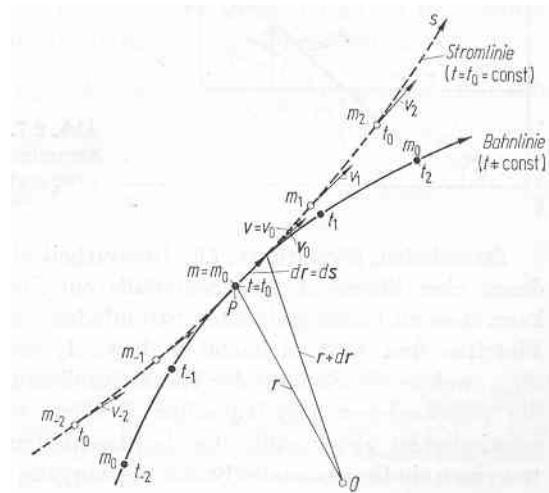


Abb. 4-4: Strom- und Bahnlinie [ 34]

Potentiallinien sind z.B. Höhenlinien in einer Landkarte, d.h. Linien gleicher Höhe und somit gleicher potentieller Energie.

Aus den Bedingungen für Strom- und Potentialfunktionen  $\Psi = \Phi = \text{const.}$  folgt  $d\Phi = d\Psi = 0$  und somit

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy = u \cdot dx + v \cdot dy = 0 \\ d\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot dy = -v \cdot dx + u \cdot dy = 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 4-15}$$

bzw.

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Phi=\text{const.}} = -\frac{u}{v}, \quad \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\Psi=\text{const.}} = \frac{v}{u} \quad \text{Gl. 4-16}$$

Strom- und Potentiallinien bilden im ebenen Fall zwei Kurvenscharen, die senkrecht aufeinander stehen, Abb. 4-5.

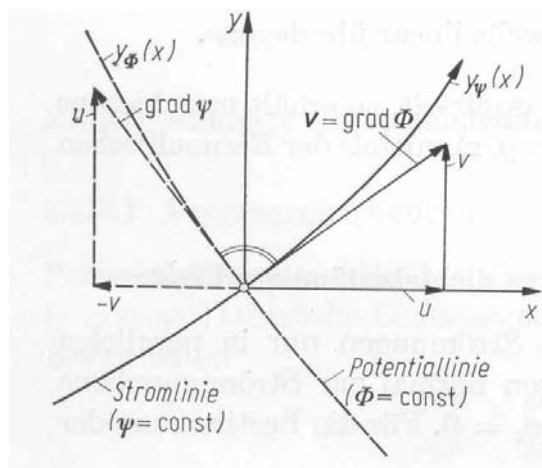


Abb. 4-5: Strom- und Potentiallinien bei ebener Strömung [ 34]



### 4.3.2 Geschwindigkeits- und Druckfeld

Aus der Bedingung für die Drehungsfreiheit für das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r})$

$$\text{rot}(\vec{v})=0 \quad \text{Gl. 4-17}$$

lassen sich durch die Potentialfunktion, d.h. das skalare Geschwindigkeitspotential  $\Phi(\vec{r})$  wegen

$$\vec{v} = \text{grad } \Phi \quad \text{Gl. 4-18}$$

die Geschwindigkeitskomponenten berechnen

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{Gl. 4-19}$$

Für inkompressible Strömungen ergibt sich über die Bernoulli'sche Druckgleichung aus dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r})$  das Druckfeld  $p(\vec{r})$ .

$$p + \rho \cdot g \cdot z + \frac{\rho}{2} \cdot \vec{v}^2 = \text{const.}, \quad \vec{v} = \text{grad } \Phi \quad \text{Gl. 4-20}$$

Unter der Annahme einer reibungsfreien Strömung läßt sich jede Stromlinie auch als Wandstromlinie definieren, d.h. die Kontur eines Körpers kann durch jede beliebige Stromlinie abgebildet werden. Es besteht kein Unterschied zwischen einer Stromlinie und der realen Wand, dies bedeutet, daß Geschwindigkeiten und Drücke, die für eine Stromlinie berechnet werden ebenso als Geschwindigkeiten und Drücke direkt an der Wand gelten, sofern die Stromlinie der Körperkontur entspricht.

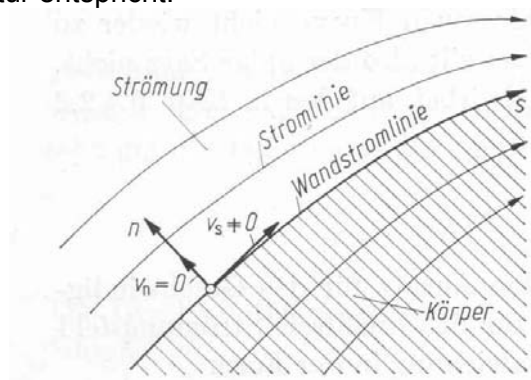


Abb. 4-6: Wandstromlinie bei reibungsfreier Strömung [ 34

## 4.4 Potentialgleichung

### 4.4.1 Vollständige Potentialgleichung

Für eine drehungsfreie, reibungsfreie und kompressible Strömung läßt sich das Strömungsfeld durch eine einzige Gleichung mit einer abhängigen Variable beschreiben, dem Geschwindigkeitspotential  $\Phi$ , definiert durch

$$\nabla \Phi = \vec{v} \quad \text{Gl. 4-21}$$

Das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  stellt somit das Gradientenfeld von  $\Phi$  dar. Weitere Grundannahmen sind neben der Rotationsfreiheit, die Annahme konstanter Enthalpie und konstanter Entropie, und zwar im gesamten Strömungsfeld und nicht nur entlang der Stromlinien. Die Annahme konstanter Entropie zeigt auch den eingeschränkten Geltungsbereich der

Potentialgleichung auf, da in diesem Fall keine oder lediglich sehr schwache Stöße vorliegen dürfen. Strömungszustände in der Nähe von  $M = 1$  sind somit ausgeschlossen. Die vollständige Potentialgleichung für stationäre Strömungen, eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, lautet

$$\left(1 - \frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{\partial \Phi^2}{\partial z^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial z} - \frac{2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \cdot \partial z} = 0 \quad \text{Gl. 4-22}$$

#### 4.4.2 Linearisierte Potentialgleichung (Laplace-Gleichung)

Die Linearisierung der vollständigen Potentialgleichung, die auch die Erfassung kompressibler Effekte ermöglicht, führt zur *linearisierten Theorie* oder der *Theorie der schwachen Störungen* und wird durch die *Laplace-Gleichung* beschrieben.

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Gl. 4-23}$$

Der physikalische Hintergrund der Linearisierung besteht in der Annahme, daß die von dem umströmten Körper hervorgerufenen Störgeschwindigkeiten im Strömungsfeld klein sind im Vergleich zur Anströmgeschwindigkeit. Diese Annahme wird z.B. sehr gut von schlanken Körpern oder dünnen Tragflügelprofilen erfüllt. Wie in den folgenden Kapiteln (Skelett-Theorie und Tragflügeltheorie) noch gezeigt wird, ermöglichen diese einfachen Theorien lediglich die Berechnung stationärer, reibungsfreier und *inkompressibler* Strömungen.

### 4.5 Ebene Potentialströmungen

#### 4.5.1 Lineares Superpositions- und Vertauschungsprinzip

Ein großer Vorteil, der sich aus der Linearisierung der Potentialgleichung ergibt, besteht in der sich daraus ergebenden Möglichkeit mehrere Elementarlösungen linear zu überlagern.

$$\Phi = a_1 \cdot \Phi_1 + a_2 \cdot \Phi_2 + a_3 \cdot \Phi_3 + \dots + a_n \cdot \Phi_n \quad \text{Gl. 4-24}$$

Komplexe Strömungen lassen sich durch die Überlagerung von einfachen Strömungen, für die bereits Elementarlösungen existieren, darstellen und berechnen. Elementarlösungen für zweidimensionale Strömungen sind in Tab. 4-1 und Tab. 4-2 aufgelistet.

#### 4.5.2 Staupunkt-, Ecken-, Translations- und Randumströmung

Die allgemeine Potential- und Stromfunktion für eine Strömung um ebene Winkel oder Ecken lautet

$$\Phi = \frac{a}{n} \cdot r^n \cdot \cos(n \cdot \varphi), \quad \Psi = \frac{a}{n} \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi) \quad \text{Gl. 4-25}$$

Für Werte von  $n \geq 2$  ergibt sich das Strömungsbild von Abb. 4-7a. Für  $2 > n > 1$  entstehen Strömungen in konkaven Ecken mit Umlenkewinkeln  $\vartheta > 0$  (Abb. 4-7b) und für  $1 > n > 0.5$  entstehen Strömungen um konvexe Ecken mit Umlenkewinkeln  $\vartheta < 0$  (Abb. 4-7c). Für  $n = 2$  erhält man eine ebene Staupunktströmung (Abb. 4-8a). Aus  $n = 1$  ergibt sich wieder eine ebene Translationsströmung (Abb. 4-8b). Die in Abb. 4-8c skizzierte Elementarströmung (Randumströmung) ergibt sich für  $n = 1/2$  und liefert das später noch zu vertiefende Ergebnis, daß, sofern die Dicke der Hinterkante z.B. eines Profils, gegen Null geht diese Kante mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt wird.

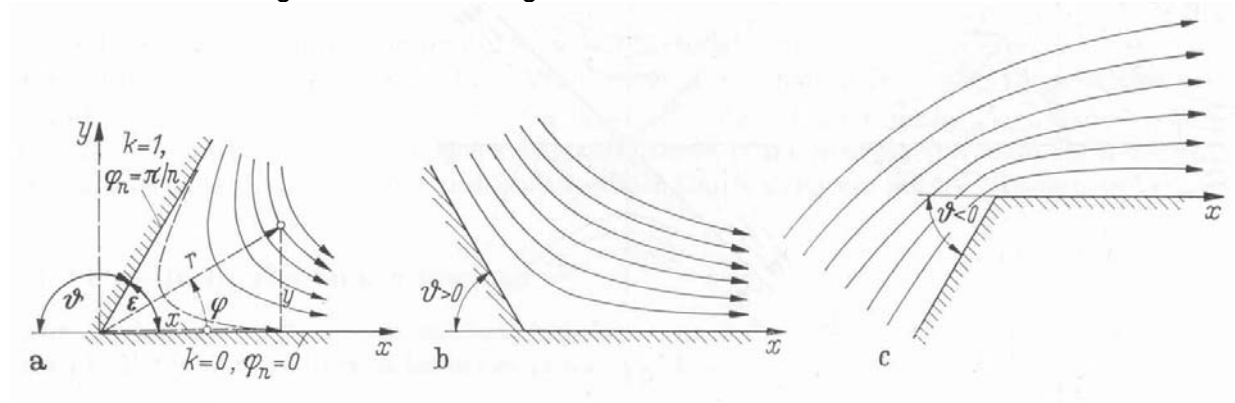


Abb. 4-7: Ebene Winkel- und Eckenströmung [ 34]

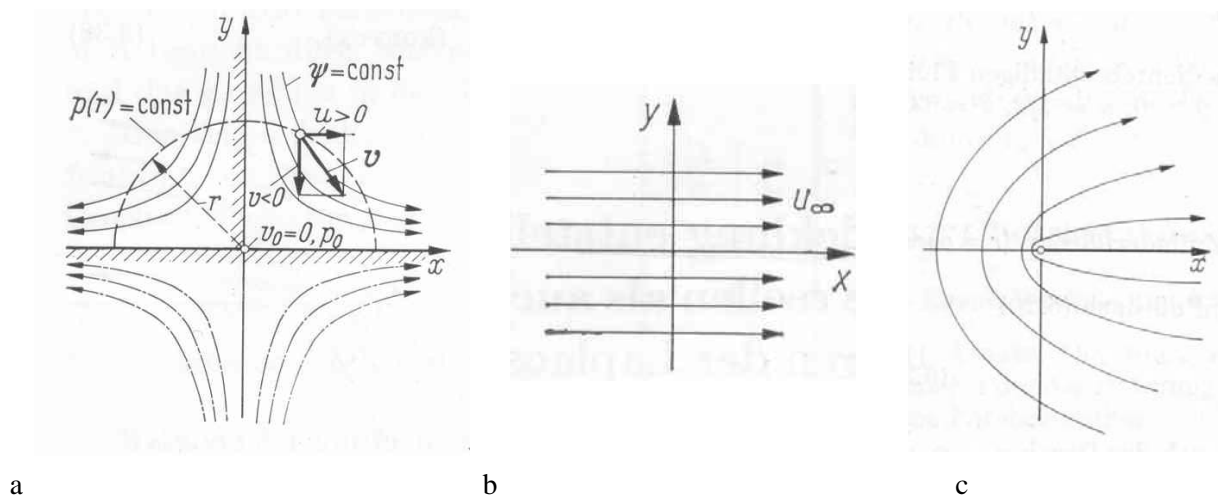


Abb. 4-8: Staupunktströmung, Translationsströmung und Randumströmung [ 34]

### 4.5.3 Quell- und Sinkenströmung

Unter einer Quelle ist eine sich radial ausbreitende Strömung zu verstehen, bei der die Stromlinien ( $\Psi = \text{const.}$ ) vom Ursprung ausgehende Strahlen darstellen und die Potentiallinien ( $\Phi = \text{const.}$ ) konzentrische Kreise um den Ursprung bilden. Die Potential- und Stromfunktionen lauten

$$\Phi = a \cdot \ln r, \quad \Psi = a \cdot \varphi \quad \text{Gl. 4-26}$$

Bei einer Senke verlaufen die Stromlinien nach innen. Die Stärke der Quelle oder Senke hängt linear von dem Faktor  $a$  ab. Die Ergiebigkeit  $E = 2 \cdot \pi \cdot a$  bezeichnet den aus der Quelle der Breite  $b$  austretenden Volumenstrom. In Abhängigkeit davon ob  $E > 0$  oder  $E < 0$  ist, wird diese Strömung als Quelle oder Senke bezeichnet.

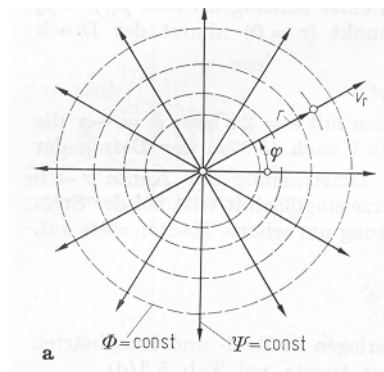


Abb. 4-9: Quellströmung,  $E > 0$

### 4.5.4 Potentialwirbel (Stabwirbel)

Durch Vertauschen der Potential- und Stromlinien einer Quell- bzw. Sinkenströmung ergibt sich eine Strömung, bei der die Stromlinien konzentrische Kreise um den Ursprung bilden und die Potentiallinien radial nach außen verlaufen. Die Potential- und Stromfunktionen lauten in Polarkoordinaten

$$\Phi = c \cdot \varphi, \quad \Psi = c \cdot \ln r \quad \text{Gl. 4-27}$$

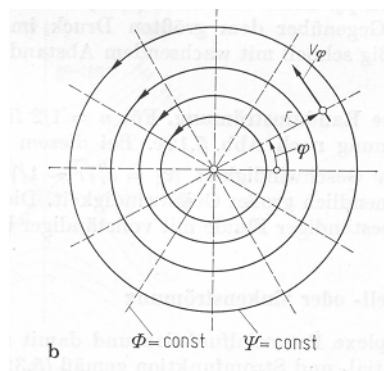


Abb. 4-10: Ebener Potentialwirbel (Stabwirbel)

Die Konstante  $c$  ist ein Maß für die Stärke der Drehbewegung und lässt sich über die Berechnung der Zirkulation  $\Gamma$  bestimmen, d.h. über ein Linienintegral längs einer Kurve ( $L$ ) welche einen Kreis mit dem Radius  $r$  darstellt. Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich daraus zu

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad \text{Gl. 4-28}$$

Aus diesen Geschwindigkeitskomponenten läßt sich die Drehung senkrecht zur Strömungsebene berechnen

$$\omega = \omega_z = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{v})_z = \frac{1}{2 \cdot r} \cdot \left( \frac{\partial(r \cdot v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{d(r \cdot v_\varphi)}{dr} \quad \text{Gl. 4-29}$$

Aus der Geschwindigkeitskomponente  $v_\varphi$ , d.h

$$r \cdot v_\varphi = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} = \text{const.} \quad \text{Gl. 4-30}$$

ergibt sich, daß für alle Werte von  $r \neq 0$  die Drehung  $\omega_z$  zu Null wird. Lediglich für  $r = 0$  ergibt sich ein Wert für die Drehung  $\omega_z \neq 0$ , d.h. es liegt ein Wirbelfaden mit infinitesimalem Querschnitt im Ursprung vor, daher die Bezeichnung *Stabwirbel*.

#### 4.5.5 Dipolströmung

Die Kombination einer Quelle mit einer Senke in einem endlichen Abstand  $l$  ist in Abb. 4-11 skizziert. Die Stromfunktionen ergibt sich nach dem Prinzip der linearen Überlagerung zu

$$\Psi = \Psi_{\text{Quelle}} + \Psi_{\text{Senke}} = \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{Gl. 4-31}$$

Die Stromfunktion  $\Psi = \text{const.}$  stellt eine Schar von Kreisen dar, die alle durch den Quell- und Sinkenpunkt verlaufen.

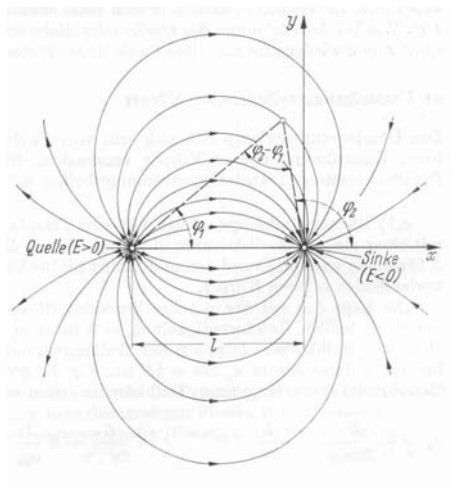


Abb. 4-11: Stromlinienbild eines Quell-Sinken-Paares

Analog ergibt sich die Potentialfunktion zu

$$\Phi = \Phi_{\text{Quelle}} + \Phi_{\text{Senke}} = \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) \quad \text{Gl. 4-32}$$

Verringert man den Abstand  $l$  zwischen Quelle und Senke auf den Wert Null und erhöht die Ergiebigkeit  $E$  umgekehrt proportional zum Abstand  $l$ , ergibt sich eine sogenannte *Dipolströmung* mit dem *Dipolmoment*  $M$ .

$$M = E \cdot l \quad \text{Gl. 4-33}$$

Die Potential- und Stromfunktion der Dipolströmung ergeben sich aus dem Grenzübergang für einen verschwindenden Abstand  $l$  zwischen Quelle und Senke.

$$\Phi(x, y) = \frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln \sqrt{(x+l)^2 + y^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2}}{l} \right) \quad \text{Gl. 4-34}$$

Die Potentialfunktion lautet in kartesischen und Polarkoordinaten

$$\Rightarrow \quad \Phi(x, y) = \frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(x, y) = \frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2} \quad \text{Gl. 4-35}$$

Die Stromfunktion lautet in kartesischen und Polarkoordinaten

$$\Rightarrow \quad \Psi(x, y) = -\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \Psi(x, y) = -\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2} \quad \text{Gl. 4-36}$$

Die Stromlinienbilder sind in Abb. 4-12 für die reelle Lösung mit dem Dipolmoment  $M$  (Abb. 4-12a) und die imaginäre Lösung  $i \cdot M$  (Abb. 4-12b) skizziert.

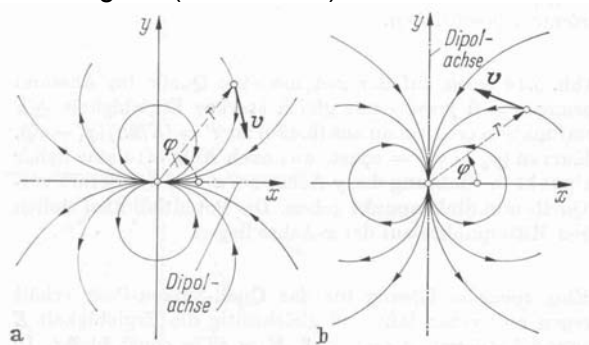


Abb. 4-12: Stromlinienbilder eines ebenen Dipols, reelle und imaginäre Lösung

## 4.6 Umströmung zylindrischer Körper

### 4.6.1 Ebener Halbkörper

Der große Vorteil des Überlagerungsprinzips der Potentialtheorie zeigt sich bei der Möglichkeit die Umströmung von ebenen Körpern, die sich in einer ebenen Parallelströmung befinden, zu berechnen. Durch die Kombination einer Translationsströmung (Kapitel 4.5.2) mit einer Quellströmung der Ergiebigkeit  $E$  (Kapitel 4.5.3) ergibt sich das in Abb. 4-13 skizzierte Strömungsbild.

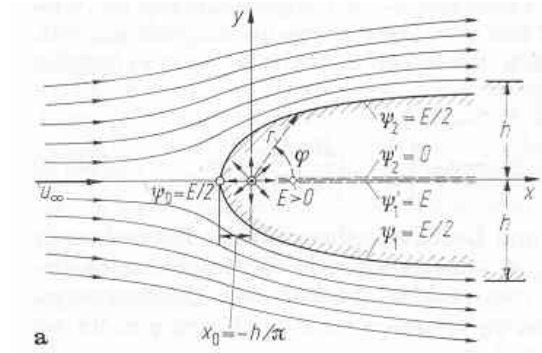


Abb. 4-13: Ebener Halbkörper

Die Strom- und Potentialfunktionen ergeben sich in kartesischen Koordinaten zu

$$\Psi = \Psi_{Translation} + \Psi_{Quelle} = u_{\infty} \cdot y + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Gl. 4-37}$$

$$\Phi = \Phi_{Translation} + \Phi_{Quelle} = u_{\infty} \cdot x + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Gl. 4-38}$$

bzw. in Polarkoordinaten zu

$$\Psi = \Psi_{Translation} + \Psi_{Quelle} = u_{\infty} \cdot r \cdot \sin \varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi \quad \text{Gl. 4-39}$$

$$\Phi = \Phi_{Translation} + \Phi_{Quelle} = u_{\infty} \cdot r \cdot \cos \varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r \quad \text{Gl. 4-40}$$

Aus der Stromfunktion  $\Psi$  berechnen sich die Geschwindigkeiten in kartesischen Koordinaten zu

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_{\infty} + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{Gl. 4-41}$$

bzw. in Polarkoordinaten zu

$$v_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = u_{\infty} \cdot \cos \varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r}, \quad v_{\varphi} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = u_{\infty} \cdot \sin \varphi + 0 \quad \text{Gl. 4-42}$$

Zu dem gleichen Ergebnis für die Geschwindigkeiten gelangt man auch über die Berechnung aus der Potentialfunktion  $\Phi$

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{Gl. 4-43}$$

bzw. in Polarkoordinaten zu

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_{\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad \text{Gl. 4-44}$$

Die Ergiebigkeit  $E$  der Quelle ergibt sich aus der Bedingung, daß sehr weit stromabwärts von der Quelle, d.h.  $x \rightarrow \infty$ , sich die Höhe  $h$  des Halbkörpers einem konstanten Wert annähert und die Wände parallel verlaufen. Da sich Stromlinien nicht überschneiden, kann zusätzlich angenommen werden, daß der gesamte Volumenstrom innerhalb des Halbkörpers abfließt, d.h. der aus der Quelle der Breite  $b$  austretende Volumenstrom entspricht

$$b \cdot E = u_{\infty} \cdot 2 \cdot b \cdot h \quad \text{Gl. 4-45}$$

und es ergibt sich der Zusammenhang zwischen Höhe  $h$  des Halbkörpers im Unendlichen und der Ergiebigkeit  $E$  der Quelle

$$E = 2 \cdot h \cdot u_{\infty} \quad \text{Gl. 4-46}$$

Von besonderem Interesse sind in der Regel die Kenntnis der Geschwindigkeiten und der Drücke an der Oberfläche eines umströmten Körpers. Die Kontur, d.h. die Wandstromlinie des ebenen Halbkörpers läßt sich aus der Strom- oder Potentialfunktion berechnen.

Die Staupunktkoordinaten ergeben sich wegen der Bedingung, daß die Geschwindigkeit im Staupunkt zu Null wird, d.h.  $u_0 = v_x = 0$ ,  $x_0 = x$  und  $y_0 = 0$

$$\begin{aligned} v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= u_{\infty} + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow u_{\infty} + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{x_0} = 0 \\ \Leftrightarrow x_0 &= -\frac{E}{2 \cdot \pi \cdot u_{\infty}} = -\frac{h}{\pi} < 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 4-47}$$

Die Stromlinie, die durch den Staupunkt führt, d.h.  $r = r_{HK}$ ,  $\varphi = \pi$  berechnet sich zu

$$\Psi = u_{\infty} \cdot r \cdot \sin \varphi + \frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi \Rightarrow \Psi_{HK} = \frac{E}{2} \quad \text{Gl. 4-48}$$

Mit

$$u_{\infty} = \frac{E}{2 \cdot h} \quad \text{Gl. 4-49}$$

ergibt sich die Kontur des Halbkörpers somit zu

$$\Psi_{HK} = \frac{E}{2} = \frac{E}{2 \cdot h} \cdot r \cdot \sin \varphi + \frac{E}{2\pi} \cdot \varphi \quad \text{Gl. 4-50}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_{HK} \cdot \sin \varphi}{2 \cdot h} = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\pi - \varphi}{2\pi} \quad \text{Gl. 4-51}$$

$$\Leftrightarrow r_{HK}(\varphi) = \frac{h}{\pi} \cdot \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{Gl. 4-52}$$

bzw. in kartesischen Koordinaten mit

$$x_{HK} = r_{HK} \cdot \cos \varphi = \frac{h}{\pi} \cdot \frac{\pi - \varphi}{\tan \varphi} \quad \text{Gl. 4-53}$$

$$y_{HK} = r_{HK} \cdot \sin \varphi = \frac{h}{\pi} \cdot (\pi - \varphi) \quad \text{Gl. 4-54}$$



Die Berechnung der Druckverteilung auf der Halbkörperkontur erfolgt aus der Geschwindigkeitsverteilung auf der Kontur. Die Gesamtgeschwindigkeit  $w$  setzt sich zusammen aus den Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung  $u$  und der Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung  $v$ .

$$w_{HK}^2 = u_{HK}^2 + v_{HK}^2 = U_\infty^2 + U_\infty \cdot \frac{E}{\pi} \cdot \frac{x}{r_{HK}^2} + \left( \frac{E}{2\pi} - \frac{1}{r_{HK}^2} \right)^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad \text{Gl. 4-55}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{w_{HK}}{U_\infty} \right)^2 = 1 + \frac{2 \cdot h}{\pi \cdot r_{HK}} \cdot \cos \varphi + \left( \frac{h}{\pi \cdot r_{HK}} \right)^2 = 1 + \frac{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\pi - \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{(\pi - \varphi)^2} \quad \text{Gl. 4-56}$$

Die Bernoulli Gleichung lautet bei Vernachlässigung der potentiellen Energie

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 = p_{HK} + \frac{\rho}{2} \cdot w_{HK}^2 \quad \text{Gl. 4-57}$$

Der dimensionslose Druckbeiwert  $c_p$  ergibt sich mit der Gesamtgeschwindigkeit  $w$  zu

$$c_p = \frac{p_{HK} - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} = 1 - \left( \frac{w_{HK}}{U_\infty} \right)^2 \quad \text{Gl. 4-58}$$

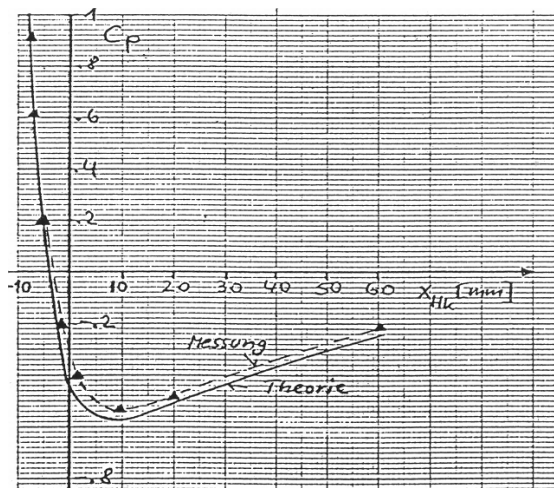
bzw.

$$c_p = -\frac{\sin 2\varphi}{\pi - \varphi} - \frac{\sin^2 \varphi}{(\pi - \varphi)^2} \quad \text{Gl. 4-59}$$

Eine Grenzwertbetrachtung für den Staupunkt liefert

$$\phi \rightarrow \pi \Rightarrow c_p = 1 \quad \text{Gl. 4-60}$$

Ein Vergleich zwischen dem theoretischen und experimentellen Ergebnis ist in Abb. 4-14 dargestellt



$D = 49.5 \text{ [mm]}$  bei  $x_{HK} = 300 \text{ [mm]}$

$D(x \rightarrow \infty) = 50 \text{ [mm]}$

Imaginäre Quelle bei  $7.96 \text{ [mm]}$

Abb. 4-14: Druckverteilung auf einem ebenen Halbkörper [22]

Auch wenn die bisherigen Überlegungen etwas theoretisch erscheinen mögen, so lassen sich die gleichen Ergebnisse auch im Experiment, z.B. in einem ebenen Wasserkanalversuch nachvollziehen. Die ebene Translationsströmung wird durch die Einfärbung einzelner Stromlinien im Wasser sichtbar gemacht und die Kontur des Halbkörpers wird

durch eine feste Wand nachgebildet. Erwartungsgemäß stellt sich das in Abb. 4-15 dargestellte Strömungsbild ein. Die Quellströmung wird durch einen Zulauf (Quelle) nachgebildet und der gesamte über die Quelle zugeführte Volumenstrom fließt gezwungenermaßen innerhalb der festen Randbegrenzung ab.

Entfernt man nun diese feste Randbegrenzung, so verändert sich das Strömungsbild nicht und es bleibt bei dem dargestellten Strömungsverlauf. Die Ursache für dieses Verhalten liegt darin, daß bei Potentialströmungen jede beliebige Stromlinie auch als Wandstromlinie definiert werden kann, unabhängig davon ob es sich um eine reale Körperbegrenzung handelt oder nicht.

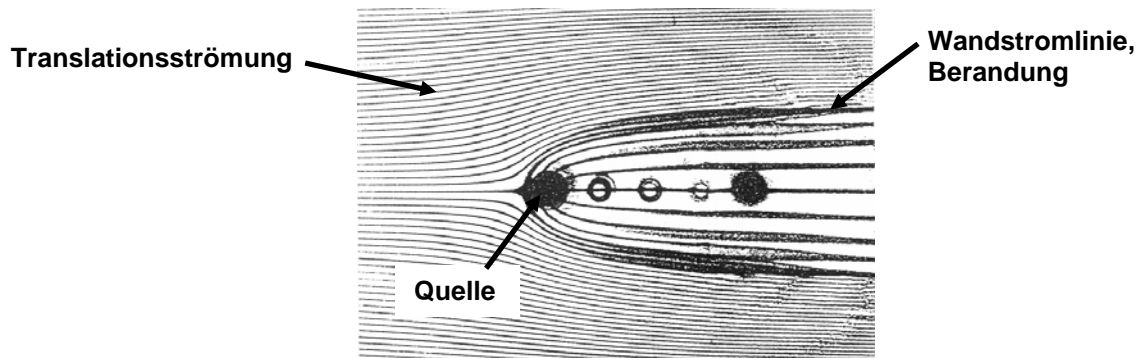


Abb. 4-15: Superposition einer Translationsströmung mit einer Quellströmung [ 22]

#### 4.6.2 Geschlossener ovaler Körper

Ordnet man stromabwärts der Quelle ( $E > 0$ ) auf der Symmetrielinie des ebenen Halbkörpers noch zusätzlich eine Senke ( $E < 0$ ) an, so ergibt sich ein geschlossener ovaler Körper, Abb. 4-16. Die Strom- und Potentialfunktionen ergeben sich durch lineare Superposition.

$$\Psi = \Psi_{\text{Translation}} + \Psi_{\text{Quelle } (E > 0)} + \Psi_{\text{Senke } (E < 0)} \quad \text{Gl. 4-61}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{Translation}} + \Phi_{\text{Quelle } (E > 0)} + \Phi_{\text{Senke } (E < 0)} \quad \text{Gl. 4-62}$$

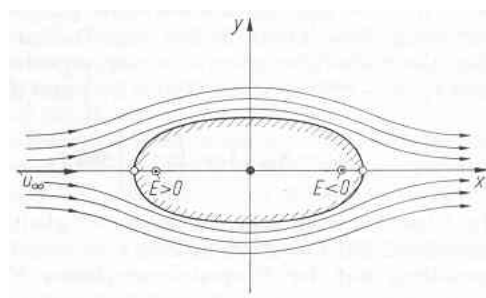


Abb. 4-16: Geschlossener ovaler Körper [ 34]

Bemerkenswert ist, daß sich in der Potentialströmung auch stromabwärts ein Staupunkt an dem ovalen Körper bildet, da die Strömung der Kontur folgt und nicht wie in der Realität ablöst.

### 4.6.3 Kreiszyylinder

Durch Zusammenschieben von Quelle und Senke bildet sich ein Dipol mit dem Dipolmoment  $M$  und aus dem ovalen Körper entsteht ein Kreiszyylinder. Mit den Strom- und Potentialfunktionen

$$\Psi = \Psi_{\text{Translation}} + \Psi_{\text{Dipol}} \quad \text{Gl. 4-63}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{Translation}} + \Phi_{\text{Dipol}} \quad \text{Gl. 4-64}$$

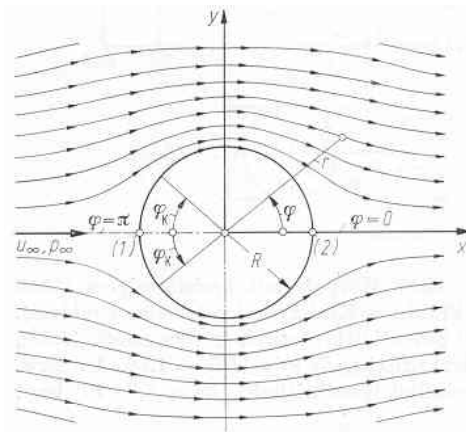
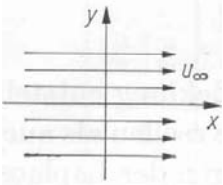
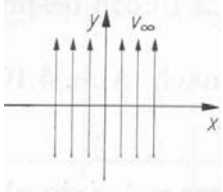
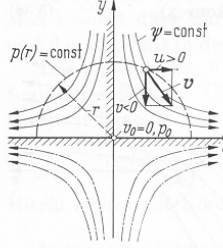
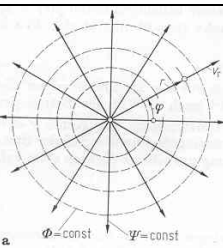
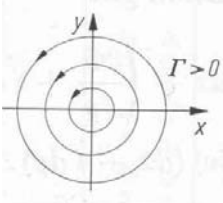
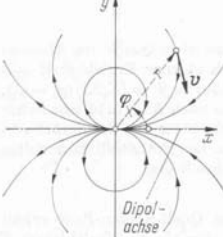
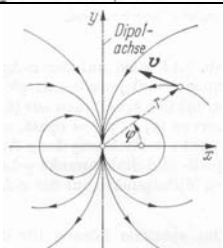


Abb. 4-17: Stromlinienbild eines in  $x$ -Richtung angeströmten Kreiszyinders [ 34]

Die Berechnung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung auf der Kontur des Zylinders erfolgt in analoger Weise zum Vorgehen beim ebenen Halbkörper.

	Bezeichnung	Stromlinienbild	Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ $\Phi(r, \varphi)$	Stromfunktion $\Psi(x, y)$ $\Psi(r, \varphi)$
1	Translationsströmung in x-Richtung		$u_\infty \cdot x$ $u_\infty \cdot r \cdot \cos \varphi$	$u_\infty \cdot y$ $u_\infty \cdot r \cdot \sin \varphi$
2	Translationsströmung in y-Richtung		$v_\infty \cdot y$ $v_\infty \cdot r \cdot \sin \varphi$	$-v_\infty \cdot x$ $-v_\infty \cdot r \cdot \cos \varphi$
3	Staupunktströmung		$\frac{a}{2} \cdot (x^2 - y^2)$ $\frac{a}{2} \cdot r^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)$	$a \cdot x \cdot y$ $\frac{a}{2} \cdot r^2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi)$
4	Quelle, Senke $E > 0, E < 0$		$\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ $\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r$	$\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi$
5	Potentialwirbel, Zirkulation $\Gamma > 0, \Gamma < 0$		$\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi$	$-\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ $-\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r$
6	Dipol, Dipolachse: x-Achse Dipolmoment $M > 0, M < 0$		$\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$ $\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$
7	Dipol, Dipolachse: y-Achse		$\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$ $\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$	$\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$ $\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$

Tab. 4-1: Elemente ebener Potentialströmungen [ 34]

	Bezeichnung	Geschwindigkeitskomponenten			
		$v_x(x, y)$ $v_x(r, \varphi)$	$v_y(x, y)$ $v_y(r, \varphi)$	$v_r(x, y)$ $v_r(r, \varphi)$	$v_\varphi(x, y)$ $v_\varphi(r, \varphi)$
1	Translationsströmung in x-Richtung	$u_\infty$ $u_\infty$	0 0	$u_\infty \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $u_\infty \cdot \cos \varphi$	$-u_\infty \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $-u_\infty \cdot \sin \varphi$
2	Translationsströmung in y-Richtung	0 0	$v_\infty$ $v_\infty$	$v_\infty \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $v_\infty \cdot \sin \varphi$	$v_\infty \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $v_\infty \cdot \cos \varphi$
3	Staupunktströmung	$a \cdot x$ $a \cdot r \cdot \cos \varphi$	$-a \cdot y$ $-a \cdot r \cdot \sin \varphi$	$a \cdot \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a \cdot r \cdot \cos(2 \cdot \varphi)$	$-a \cdot \frac{2 \cdot x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $-a \cdot r \cdot \sin(2 \cdot \varphi)$
4	Quelle, Senke $E > 0, E < 0$	$\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$ $\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$	$\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$ $\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$	$\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\frac{E}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r}$	0 0
5	Potentialwirbel, Zirkulation $\Gamma > 0, \Gamma < 0$	$-\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$ $-\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}$	$\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$ $\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}$	0 0	$\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r}$
6	Dipol, Dipolachse: x-Achse Dipolmoment $M > 0, M < 0$	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos(2 \cdot \varphi)}{r^2}$	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot y}{(x^2 - y^2)^2}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \varphi)}{r^2}$	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2}$	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2}$
7	Dipol, Dipolachse: y-Achse	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot y}{(x^2 - y^2)^2}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \varphi)}{r^2}$	$\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2}$ $\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos(2 \cdot \varphi)}{r^2}$	$-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$ $-\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2}$	$\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$ $\frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2}$

Tab. 4-2: Geschwindigkeitskomponenten ebener Potentialströmungen [ 34]

## 4.7 Räumliche Potentialströmungen

### 4.7.1 Räumliche Quell- oder Sinkenströmung

Das Potential einer räumlichen Quell- oder Sinkenströmung mit der Ergiebigkeit  $E$  [m³/s] lautet

$$\Phi = -\frac{E}{4 \cdot \pi \cdot r_0} \quad \text{Gl. 4-65}$$

### 4.7.2 Räumliche Dipolströmung

Das Potential eines räumlichen Dipols mit dem Dipolmoment  $M$  lautet

$$\Phi = \frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{x}{r_0^3} \quad \text{Gl. 4-66}$$

### 4.7.3 Rotationssymmetrischer Halbkörper

Aus der Überlagerung einer Translationsströmung mit einer räumlichen Quelle ergibt sich der in Abb. 4-18 skizzierte rotationssymmetrische Halbkörper, dessen Außendurchmesser im Unendlichen ( $x \rightarrow \infty$ ) den Wert  $R$  annimmt, mit dem Gesamtpotential

$$\Phi = \Phi_{\text{Translation}} + \Phi_{\text{Quelle}} = U_{\infty} \cdot x - \frac{E}{4\pi \cdot r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{Gl. 4-67}$$

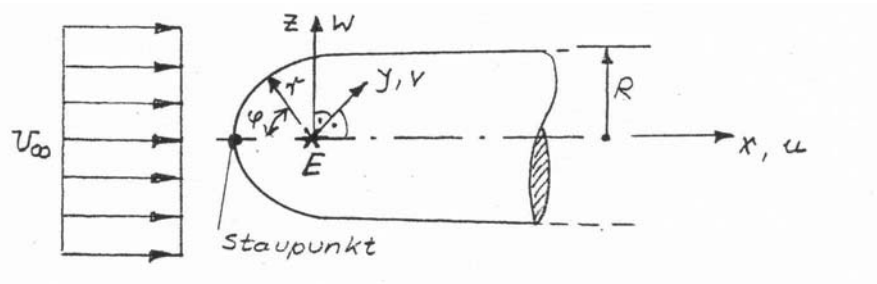


Abb. 4-18: Rotationssymmetrischer Halbkörper [22]

Die Kontur wird beschrieben durch

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \varphi} \quad \text{Gl. 4-68}$$

Mit der Ergiebigkeit  $E$  der Quelle

$$E = \pi \cdot r^2 \cdot U_{\infty} \left[ \frac{m^3}{s} \right] \quad \text{Gl. 4-69}$$

ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten zu

$$u = \frac{E}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^3}, \quad v = \frac{E}{4\pi} \cdot \frac{y}{r^3}, \quad w = \frac{E}{4\pi} \cdot \frac{z}{r^3} \quad \text{Gl. 4-70}$$

Die dimensionslose Druckverteilung berechnet sich zu

$$c_p = 1 - 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 3 \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad c_{p,min} = -0.33 \quad \text{Gl. 4-71}$$

und für den Staupunkt gilt

$$\varphi = 0 \Rightarrow c_p = 1, \quad x_{Stpkt} = \sqrt{\frac{E}{4\pi \cdot U_\infty}} = \frac{R}{2} \quad \text{Gl. 4-72}$$

## 4.8 Potentialwirbelströmungen

### 4.8.1 Induzierte Geschwindigkeitsfelder (Biot-Savart)

Die von einem Wirbelfaden mit der Zirkulation  $\Gamma$  in einem Aufpunkt induzierte Geschwindigkeit berechnet sich aus

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \oint_{(l)} \frac{\vec{a} \times d\vec{s}'}{a^3} \quad \text{Gl. 4-73}$$

wobei  $a = |\vec{a}|$  den Abstand des Aufpunktes vom Linienelement  $d\vec{s}'$  und  $l$  die Länge des Wirbelfadens bezeichnet. Der Geschwindigkeitsanteil  $v$ , den ein gerades Wirbelstück der Länge  $s'$  als Beitrag zu dem (theoretisch) im Raum geschlossenen Wirbelring liefert lautet

$$v = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad \text{Gl. 4-74}$$

Damit lassen sich durch Wirbel induzierte Geschwindigkeiten an beliebigen Punkten im Raum berechnen, z.B. Abwindgeschwindigkeiten im Nachlauf von Tragflügeln.

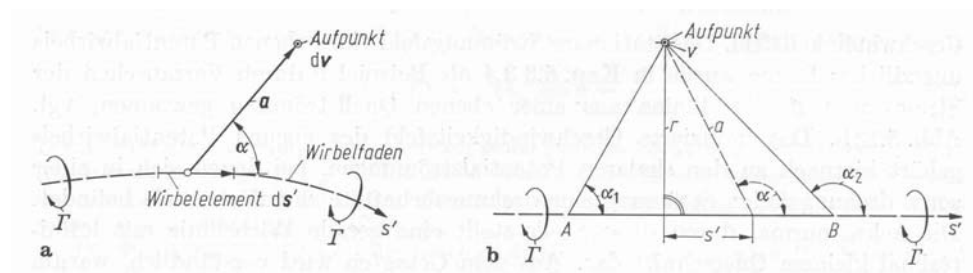
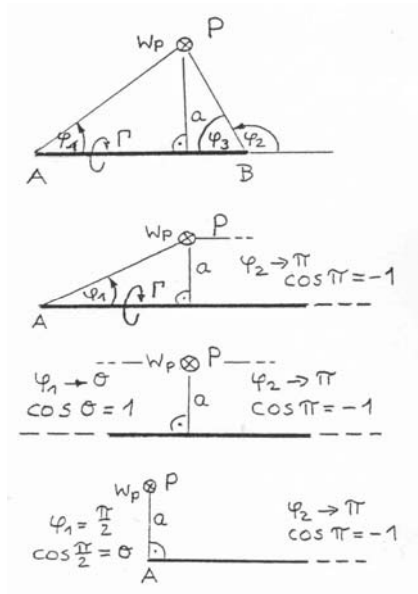


Abb. 4-19: Wirbelement (a) und gerades Wirbelstück (b) [ 34]

Ausgehend von der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten für ein gerades Wirbelstück, lassen sich vier einfache Sonderfälle unterscheiden



Endlicher gerader Wirbelfaden

$$\omega_P = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

Halbunendlicher gerader Wirbelfaden

$$\omega_P = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot (\cos \varphi_1 + 1)$$

Beidseitig unendlicher gerader Wirbelfaden

$$\omega_P = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

Aufpunkt  $P$  querab vom einseitigen Wirbelfaden

$$\omega_P = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot a}$$

Abb. 4-20: Biot-Savart, Sonderfälle [ 22]

#### 4.8.2 Kreiszylinder mit Zirkulation

Überlagert man dem in Abb. 4-17 dargestellten symmetrisch angeströmten Zylinder noch einen Potentialwirbel, d.h. eine Zirkulation  $\Gamma$ , wobei definitionsgemäß einem linksdrehenden Wirbel eine positive Zirkulation zugeordnet wird, so entsteht das in Abb. 4-21 skizzierte Strömungsbild.

$$\Psi = \Psi_{\text{Translation}} + \Psi_{\text{Dipol}} + \Psi_{\text{Potentialwirbel}} \quad \text{Gl. 4-75}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{Translation}} + \Phi_{\text{Dipol}} + \Phi_{\text{Potentialwirbel}} \quad \text{Gl. 4-76}$$

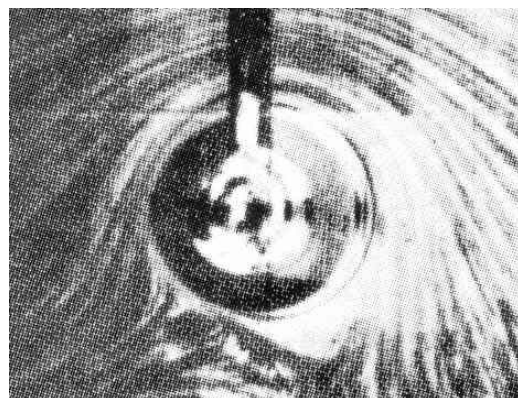
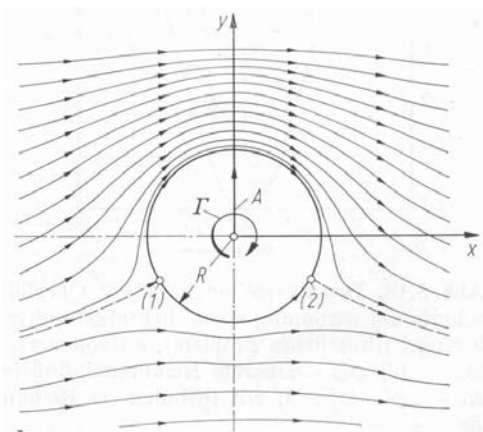


Abb. 4-21: Kreiszylinder mit Zirkulation, Rechnung vs. Experiment [ 35]



Bemerkenswert ist, daß analog zum ovalen Körper, sich als Ergebnis der potentialtheoretischen Berechnung auch im Abströmbereich ein Staupunkt (2) ergibt (Abb. 4-21a), wohingegen bei einer realen Strömung infolge der Ablösung dieser zweite Staupunkt nicht auftritt und sich lediglich im Zuströmbereich ein Staupunkt (1) bildet (Abb. 4-21b).

Die Geschwindigkeitsverteilung auf der Kontur des Zylinders ergibt sich zu:

$$v_{\varphi}(r=R) = -2 \cdot u_{\infty} \cdot \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi \cdot R} \quad \text{Gl. 4-77}$$

Die Lage der Staupunkte (1) und (2) ergeben sich in Abhängigkeit von der Zirkulation  $\Gamma$  mit  $v_{\varphi}=0$  zu

$$\varphi_{1,2} = \frac{-\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot u_{\infty}} \quad \text{Gl. 4-78}$$

Die daraus resultierende Druckverteilung berechnet sich unter Anwendung der Bernoulli-Gleichung zu

$$c_p = \frac{p_K - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} \cdot U_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{v_{\varphi}(r=R)}{U_{\infty}} \right)^2 = 1 - 4 \cdot \sin^2 \varphi - \frac{2 \cdot \Gamma}{\pi \cdot R \cdot U_{\infty}} \cdot \sin \varphi - \left( \frac{\Gamma}{2\pi \cdot R \cdot U_{\infty}} \right)^2 \quad \text{Gl. 4-79}$$

In Abb. 4-22 sind für unterschiedliche Zirkulationsstärken die Druckverteilungen dargestellt. Staupunkte (1) und (2) rutschen mit zunehmender Zirkulationsstärke nach unten, bis beide Punkte zusammen fallen.

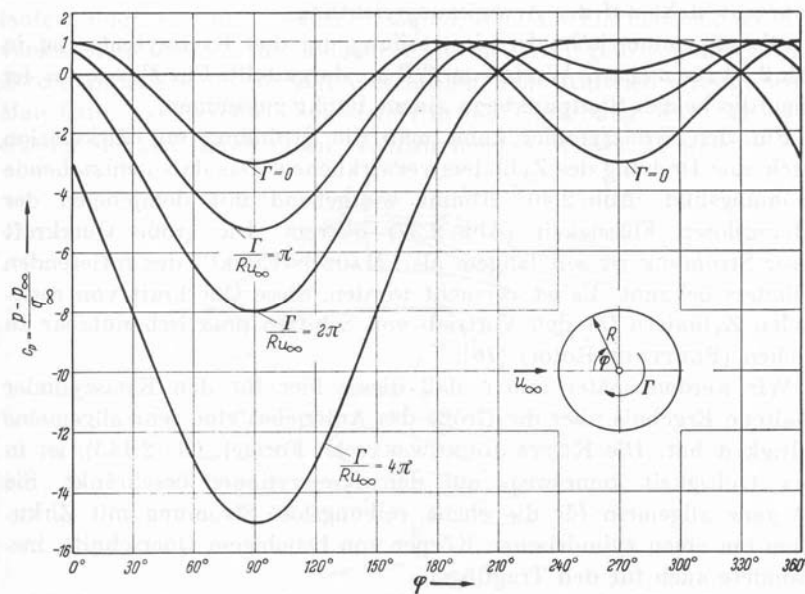


Abb. 4-22: Druckverteilung auf dem Umfang eines Zylinders mit Zirkulation [ 35]

### 4.8.3 Magnus-Effekt

Die Integration der Druckverteilung nach Kapitel 4.8.2 über den Umfang liefert für einen quer angeströmten Zylinder der Breite  $b$  den Auftrieb  $A$  nach der Auftriebsgleichung von *Kutta-Joukowski*, die in Kapitel 5.2.2 noch näher erläutert wird.

$$A = \rho \cdot b \cdot V_{\infty} \cdot \Gamma \quad \text{Gl. 4-80}$$

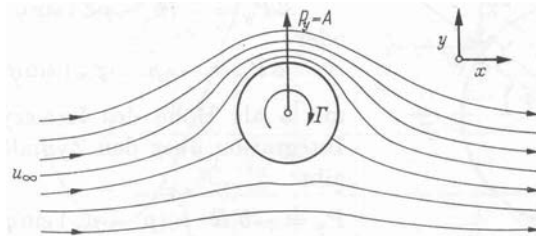


Abb. 4-23: Seitenkraft auf einen Zylinder mit Zirkulation

Diese Seitenkraft  $A$  auf einen Zylinder infolge einer Queranströmung  $V_{\infty}$  wird nach dem Berliner Professor Magnus (Berlin 1852) als *Magnuseffekt* bezeichnet. Versuche diesen Effekt praktisch zu nutzen wurden ab 1924 von Flettner mit dem sog. *Flettner-Rotor* als Anwendung für Schiffsantriebe erfolgreich durchgeführt. Mit seinem Rotorschiff, 'Buckau', später umbenannt in 'Baden-Baden', bewerkstelligte er im Mai 1926 eine erfolgreiche Atlantiküberquerung und demonstrierte damit die technische Machbarkeit dieses Antriebsprinzips. Im Juli 1926 wurde das Frachtschiff 'Barbara' in Dienst gestellt, welches mit drei Flettner-Rotoren als Zusatzantrieb ausgerüstet war. Trotz des kurzfristigen Erfolges, konnte sich dieser Antrieb, ebenso wie der 'klassische' Segelantrieb, sich langfristig nicht gegen die aufkommenden Schiffsdieselantriebe durchsetzen.



Abb. 4-24: 'Barbara', Weser-Werft Bremen, 1926



Abb. 4-25: 'Calypso' J. Y.-Cousteau, geplant 2000

Neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet stammen von dem Meeresforscher J. Y.-Cousteau, der ein Schiff ('Calypso') mit einem Flettner-Rotor als Zusatzantrieb plante, welches jedoch nicht mehr realisiert wurde. Im Jahr 2006 wurde von der Universität Flensburg im Rahmen des Projekts 'Uni-Kat-Flensburg' ein Schiff mit einem solchen Antriebskonzept realisiert.



Abb. 4-26: Uni-Kat-Flensburg, 2006

Ebenfalls 2006 beauftragte der Windenergieanlagenhersteller Enercon bei der Kieler Lindenau-Werft ein 130 m langes Frachtschiff, welches neben dieselektrischem Hauptantrieb über vier Flettner-Rotoren verfügen soll, die von dem Windkraftunternehmen selbst entwickelt werden und dessen Indienststellung für September 2008 geplant ist.

## 4.9 Übungen zum Kapitel Potentialströmungen

### A4.1 Vektoranalysis

Definieren bzw. berechnen Sie folgende Größen und erklären Sie die Bedeutung:

1 **Skalarfeld**

2 **Vektorfeld**

3 **Gradient eines Skalarfeldes**  $f = f(x, y, z)$

$$f = 3 \cdot x + x \cdot e^y + x \cdot y \cdot e^z$$

4 **Divergenz eines Vektorfeldes**  $\vec{v} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$

$$\vec{v} = (x + y^2, \sin y, x \cdot y \cdot z)$$

5 **Rotor (oder Rotation) eines Vektorfeldes**  $\vec{v} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$

$$\vec{v} = (x + y, e^{x+y} + z, z + \sin x)$$

6 **Nabla-Operator**

7 **Laplace Operator**

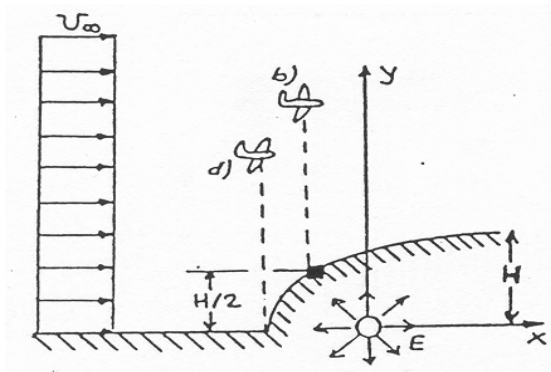
8 **Linienintegral**

Berechnen Sie das Linienintegral im Vektorfeld  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$  längs der Kurve

$$C: \vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b \text{ für}$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = (2y + 3, xz, yz - x) \text{ und } C: \vec{r} = (2t^2, t, t^3), 0 \leq t \leq 1$$

### A4.2 Ebener Halbkörper



Ein Höhenzug besitzt die Form eines ebenen Halbkörpers und wird mit der Geschwindigkeit  $U_\infty$  angeströmt. Bei  $H/2$  befindet sich eine Wetterstation.

Die Strömung stelle sich als Potentialströmung ein

$$U_\infty = 30 \text{ [m/s]}$$

$$H = 50 \text{ [m]}$$

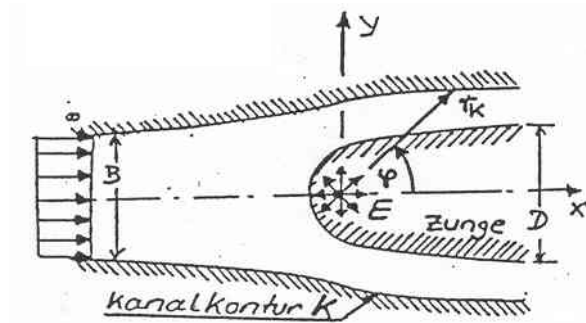
$$p_\infty = 800 \text{ [hPa]}$$

$$\rho = 1.0 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

- Wie groß ist die imaginäre Quellstärke  $E$ ?
- In welcher Höhe muß sich ein Segelflugzeug über der Wetterstation aufhalten, damit es keine Höhe verliert? Das Eigensinken des Flugzeugs beträgt  $v_s = 0.7 \text{ m/s}$
- Wie groß ist die Druckabweichung  $p$  und  $\Delta p/p_\infty$  in % und der Druckbeiwert an der Wetterstation?
- In welcher Höhe muß das Flugzeug am Fuß des Höhenzugs fliegen, damit es nicht sinkt?

### A4.3 Ebener Halbkörper

In einem zweidimensionalen Kanal soll die Strömung in zwei gleich große Teilströme aufgeteilt werden. Dazu befindet sich an der Stelle, an der sich der Kanalquerschnitt erweitert, eine zweidimensionale Zunge. Die Kanalkontur ist so auszulegen, daß die Strömung als Überlagerung einer ebenen Translationsströmung mit einer Quellströmung, definiert werden kann.



geg.:

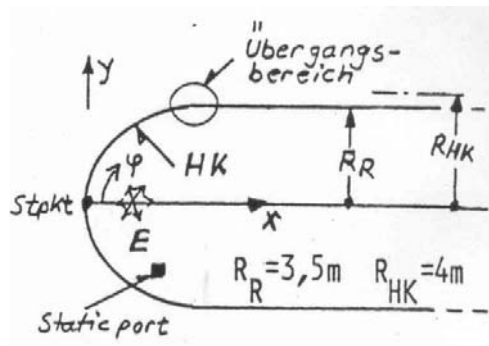
$$D = B = 0.04 \text{ m}$$

$$U_\infty = 25 \text{ m/s}$$

ges.:

- Quellstärke  $E$
- Potential- und Stromfunktion in Polarkoordinaten
- $y(\varphi \rightarrow \pi)$
- Wie groß ist für  $\varphi = \pi$  der Wert der Stromlinie der Kanalwand?
- Gleichung der Kanalkontur  $K$  in der Form  $r_K = f(\varphi)$
- Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld  $w/U_\infty = f(r/D, \varphi)$
- Druckbeiwert  $c_p$  auf der  $x$ -Achse bei  $x/D = -0.16, -0.5, -1.0$

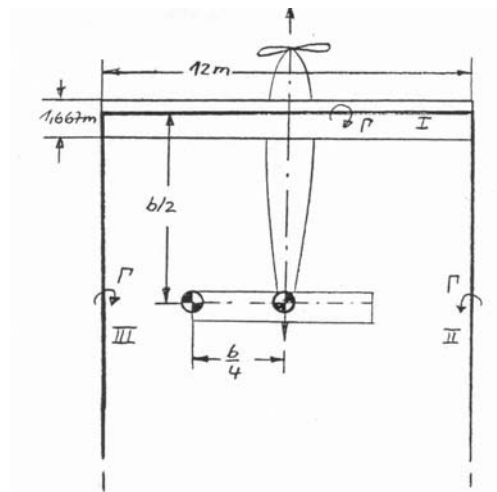
### A4.4 Rotationssymmetrischer Halbkörper



Vorderteil eines Flugzeugumpfes (Radius  $R_R = 3.5 \text{ [m]}$ ) wird bis zum Übergangsbereich durch einen rotationssymmetrischen Halbkörper (Radius  $R_{HK} = 4 \text{ [m]}$ ) angenähert

ges.:

- HK-Kontur ( $\Delta\varphi = 20^\circ$ )
- Bestimmung einer geeigneten Stelle zur Messung des statischen Drucks
- Wert und  $x$ -Position von  $c_{p,min}$

**A4.5 Induzierter Abwind (Biot-Savart)**

Bestimmen Sie den Abwind und den induzierten Abwindwinkel in der Mitte und am Ende des Höhenleitwerks

Gewicht:  $m \cdot g = 1.2 \cdot 10^4 \text{ [N]}$

Luftdichte:  $\rho = 1.0 \text{ [kg/m}^3\text{]}$

Fluggeschwindigkeit:  $V = 100 \text{ [m/s]}$

Flügelfläche:  $S = 12 \cdot 1.667 = 20 \text{ [m}^2\text{]}$

**A4.6 Berechnung der Druckverteilung an einen quer angeströmten Zylinder**

Berechnen Sie die Druckverteilung an der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius  $R = 1 \text{ [m]}$ , der sich in einer ebenen Translationsströmung mit  $u_\infty = 1 \text{ [m/s]}$  befindet und dem eine Zirkulation der Stärke  $\Gamma = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot u_\infty \text{ [m}^2\text{/s]}$  überlagert wurde.

## 5 Tragflügel unendlicher Streckung in inkompressibler Strömung (Profiltheorie)

### 5.1 Tragflügelprofile

#### 5.1.1 Geometrische Beschreibung

Das Profil eines Tragflügels entsteht durch den Schnitt in der  $x$ - $z$ -Ebene an einer Spannweitenposition in  $y$ -Richtung<sup>1</sup>. Die Hüllkurve, der auf der Mittellinie oder *Skelettlinie* angeordneten Kreise ergibt die Profilform. Die Verbindungslinie von Anfangs- und Endpunkt der Skelettlinie bildet die Profilsehne mit der Länge  $l$ , welche als *Profiltiefe* bezeichnet wird. Eine Ausnahme bilden sehr stark gewölbte Profile, wie z.B. bei Verdichterschaufeln; hier wird die maximale Ausdehnung in  $x$ -Richtung als Profiltiefe angenommen. Der Maximale Durchmesser des Profils wird als Profildicke  $d$  bezeichnet. Der maximale Abstand zwischen Sehne und Skelettlinie kennzeichnet die *Wölbung*  $f$ . Die  $x$ -Position der maximalen Dicke und maximalen Wölbung werden als Dickenrücklage  $x_d$  bzw. als Wölbungsrücklage  $x_f$  bezeichnet. Eine weitere wichtige Größe ist der (doppelte) Hinterkantenwinkel des Profils  $2\tau$  und der Nasenradius  $r_n$ .

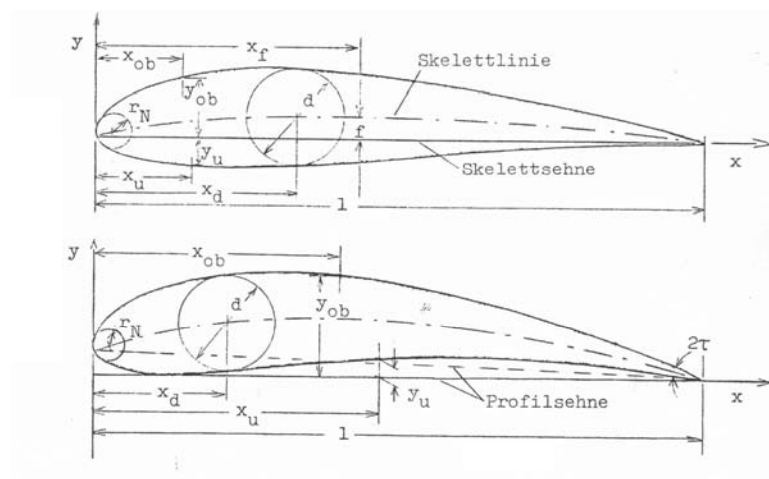


Abb. 5-1: Profilgeometrie

Aus diesen geometrischen Größen lassen sich dimensionslose Profilparameter bilden

$\frac{d}{l}$	relative Dicke (Dickenverhältnis)
$\frac{f}{l}$	relative Wölbung (Wölbungsverhältnis)
$\frac{x_d}{l}$	relative Dickenrücklage
$\frac{x_f}{l}$	relative Wölbungsrücklage
$\frac{r_N}{l}$	relativer Nasenradius

<sup>1</sup> Bei zweidimensionalen Betrachtungen wird in der Regel die  $z$ -Achse mit der  $y$ -Achse vertauscht, so daß das Profil in einer  $x$ - $y$ -Ebene dargestellt werden kann

Beliebige Profilformen können dadurch gebildet werden, daß einer Skelettlinie  $z^{(s)}(x)$  eine Dickenverteilung oder *Profiltropfen*  $z^{(t)}(x)$  überlagert wird und für das Profil gilt

$$z_{o,u}(x) = z^{(s)}(x) \pm z^{(t)}(x) \quad \text{Gl. 5-1}$$

### 5.1.2 Göttinger Profile

In den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts wurden in der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen (AVA), welche nach 1945 in das Deutsche Forschungs- und Versuchszentrum für Luft- und Raumfahrt (DFVLR) und zu Beginn der 90er Jahre in Deutsches Forschungszentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) umbenannt wurde, systematische Profiluntersuchungen durchgeführt. Untersucht wurden hauptsächlich sogenannte *Joukowski*-Profile, gekennzeichnet durch einen Hinterkantenwinkel, der (theoretisch) gegen Null geht. Die Numerierung in der Göttinger Profilsystematik kennzeichnet keine aerodynamischen Charakteristika, sondern stellt im wesentlichen eine chronologische Reihenfolge der untersuchten Profile dar.

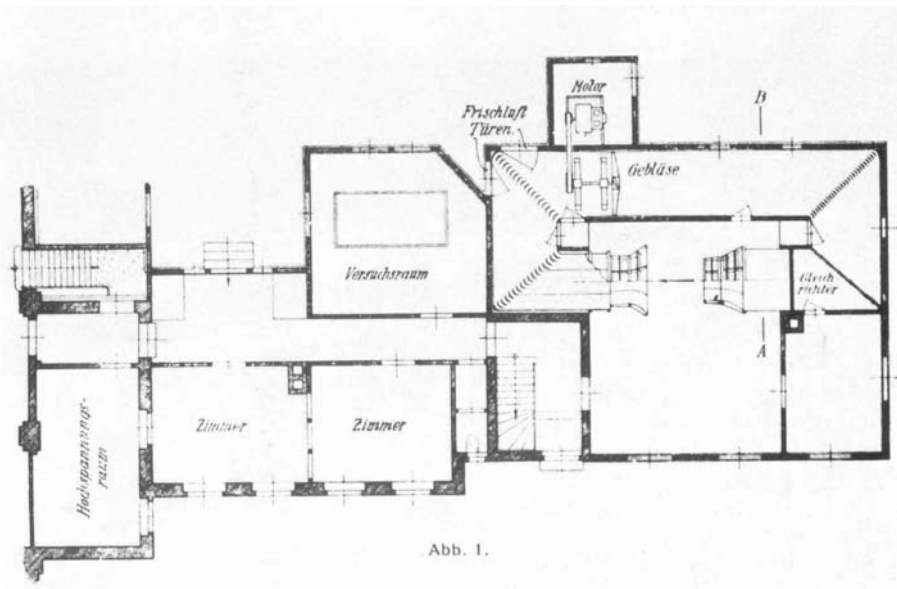


Abb. 5-2: Niedergeschwindigkeitskanal der AVA Göttingen

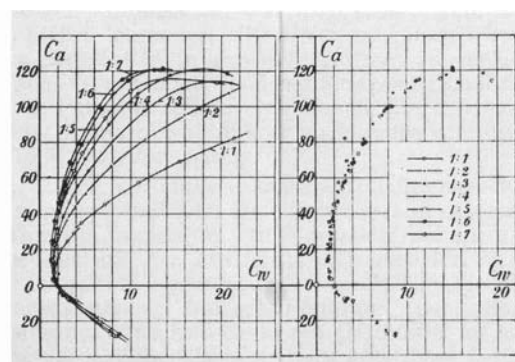
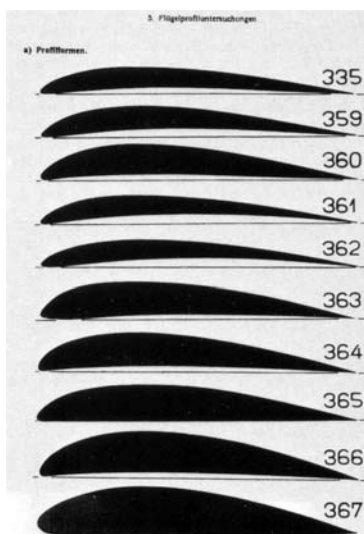


Abb. 5-3: Göttinger Profile



### 5.1.3 NACA Profile

Zu Beginn der 30er Jahre wurde in den USA bei NACA (National Advisory Committee for Aeronautics, später NASA) eine umfangreiche Profilsystematik entwickelt.

#### Vierziffrige NACA-Profile

- 1. Ziffer: Wölbung in Prozent der Profiltiefe
- 2. Ziffer: Wölbungsrücklage in Zehnteln der Profiltiefe
- 3. und 4. Ziffer: Dicke in Prozent der Profiltiefe

Allen Profilen dieser Reihe ist eine Dickenrücklage von  $x_d/l = 0.3$  gemeinsam. Der relative Nasenradius  $r_N/l$  ergibt sich aus dem relativen Dickenverhältnis  $x_d/l$  über

$$\frac{r_N}{l} = 1.1 \cdot \left( \frac{d}{l} \right)^2 \quad \text{Gl. 5-2}$$

Mit den dimensionslosen Koordinaten  $X = \frac{x}{l}$  und  $Z = \frac{z}{l}$  und den Konstanten

$$a_0 = 1.4845, \quad a_1 = -0.63, \quad a_2 = -1.758, \quad a_3 = 1.4215, \quad a_4 = -0.5075$$

läßt sich der Profiltropfen (Dickenverteilung) analytisch beschreiben durch

$$Z^{(t)} = \frac{d}{l} \cdot \left( a_0 \cdot \sqrt{X} + \sum_1^4 a_n \cdot X^n \right) \quad \text{Gl. 5-3}$$

#### Fünzfiffrige NACA-Profile

- 1. Ziffer: Auftriebsbeiwert bei stoßfreiem Eintritt  $c_{a,opt} \cdot 3/20$
- 2. Ziffer: Doppelter Wert der Wölbungsrücklage in Zehnteln der Profiltiefe
- 3. Ziffer: Form der Skelettlinie (0: kein Wendepunkt, 1: mit Wendepunkt)
- 4. und 5 Ziffer: Dicke in Prozent der Profiltiefe

Skelettlinien ohne Wendepunkt bestehen im vorderen Bereich aus einer Parabel dritten Grades, an die an einer Stelle  $m$  eine Gerade anschließt. Der Profiltropfen entspricht dem der vierziffrigen Reihe.

2. und 3. Ziffer		10	20	30	40	50
$\frac{x_f}{l}$		0.050	0.100	0.1500	0.20	0.250
$m$		0.058	0.126	0.2025	0.29	0.391
$100 \cdot \frac{f}{l}$	1. Ziffer	1.11	1.53	1.84	2.08	2.26
	2					
	3					
	4					
			4.60	5.5	6.20	

Tab. 5-1: Parameter der fünzfiffrigen NACA-Profile

#### Sechsziffrige NACA-Profile

Aus der Vorgabe der Geschwindigkeits- und damit Druckverteilung an der Profilober- und -unterseite, wurde die NACA-6-Profilreihe entwickelt.

- 1. Ziffer: Angabe der Serie, hier: 6
- 2. Ziffer: Lage der Geschwindigkeitsmaximums in Zehnteln der Profiltiefe
- Index: Halbe Breite der Laminardelle (vgl. Kapitel 5.5.3)

hinter dem Bindestrich

1. Ziffer: Zehnfacher Betrag des Auftriebsbeiwertes bei stoßfreiem Eintritt, (siehe Kapitel 5.4.3), Maß für die Wölbungshöhe
2. und 3 Ziffer: Dicke in Prozent der Profiltiefe

Für praktische Anwendungen empfiehlt sich die Verwendung des Stuttgarter Profilkatalogs [ 1] oder das frei verfügbare Programm XFOIL von Mark Drela, MIT [ 11]

#### 5.1.4 Druckverteilung, resultierende Kräfte und Momente am Profil

Aus der Geschwindigkeitsverteilung am Profil, die entweder experimentell, analytisch oder über ein numerisches Verfahren gewonnen werden kann, läßt sich die örtliche Druckverteilung an der ProfiOber- und -unterseite berechnen. Die Differenz der Drücke an Ober- und Unterseite

$$\Delta p = p_u - p_o \quad \text{Gl. 5-4}$$

ergibt die Normalkraft  $dZ = \Delta p \cdot b \cdot dx$  welche auf das Flächenelement  $dA = b \cdot dx$  des Tragflügels wirkt.

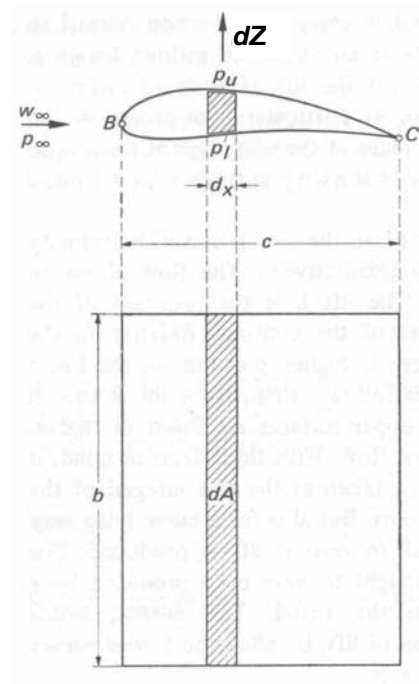
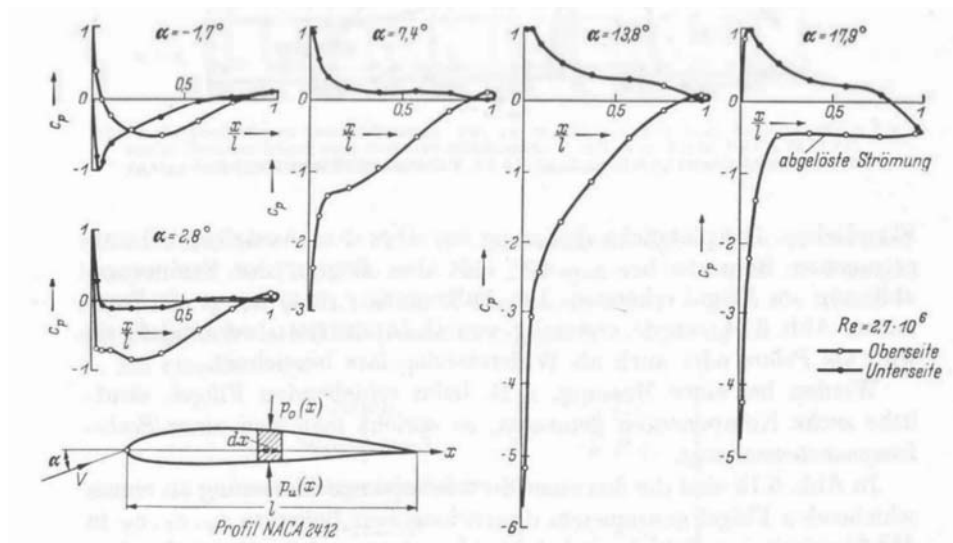
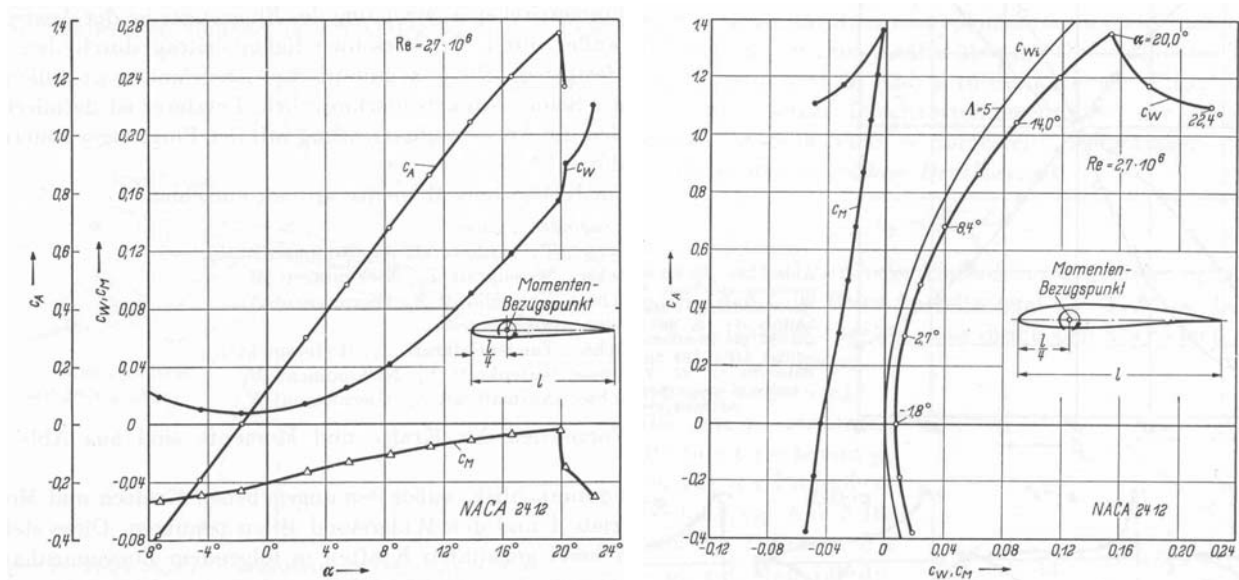


Abb. 5-4: Berechnung des Auftriebs aus der Druckverteilung [ 35]

In der Regel wird der Druck in der dimensionslosen Form

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho \cdot V_\infty^2} = 1 - \left( \frac{V}{V_\infty} \right)^2 \quad \text{Gl. 5-5}$$

verwendet. In Abb. 5-5 ist die Druckverteilung für unterschiedliche Anstellwinkel für das NACA-Profil 2412 dargestellt. Die Integration dieser Druckverteilung über das gesamte Profil ergibt eine resultierende Luftkraft  $R$ , die sich wiederum vektoriell in eine Komponente parallel zur Anströmrichtung, den Auftrieb  $C_A$  und eine Komponente senkrecht zur Anströmrichtung, den Widerstand  $C_W$  zerlegen läßt. In Abb. 5-6 ist die Abhängigkeit dieser drei Größen vom Anstellwinkel  $\alpha$  bzw. die Abhängigkeit des Auftriebs von Widerstand und Moment skizziert.

Abb. 5-5: Druckverteilung am Profil NACA 2412 bei  $Re = 2.7 \cdot 10^6$  [35]Abb. 5-6:  $C_A$ ,  $C_W$  und  $C_M$  für NACA 2412 bei  $Re = 2.7 \cdot 10^6$  [35]

Das den weiteren Betrachtungen zugrunde liegende mechanische Ersatzmodell besteht aus der resultierenden Kraft und einem bezugspunktabhängigen Nickmoment, Abb. 5-9.

### Auftrieb

Bis kurz vor dem Erreichen des *Maximalauftriebs*  $C_{Amax}$ , erfolgt der *Auftriebsanstieg*  $dC_A/d\alpha$  nahezu konstant, Abb. 5-6a.

$$c_A = (\alpha - \alpha_0) \cdot \frac{dc_A}{d\alpha} \quad \text{Gl. 5-6}$$

### Widerstand

Für den gleichen Anstellwinkelbereich läßt sich der Widerstand  $C_W$  in einen auftriebsunabhängigen Anteil  $C_{W0}$  und einen auftriebsabhängigen Anteil zerlegen.

$$c_w(c_A = 0) = c_{w0} \quad \text{Gl. 5-7}$$

Allgemein gilt mit den geometrieabhängigen Konstanten  $k_1$  und  $k_2$

$$c_w = c_{w0} + k_1 \cdot c_A + k_2 \cdot c_A^2 \quad \text{Gl. 5-8}$$

und für symmetrische Profile gilt der einfache Parabelansatz für den Widerstand

$$c_w = c_{w0} + k_2 \cdot c_A^2 \quad \text{Gl. 5-9}$$

### Resultierende-, Tangential- und Normalkraft

Wie aus Abb. 5-9 ersichtlich ist, ergeben die Größen Auftrieb  $A$  und Widerstand  $W$ , die parallel bzw. senkrecht zur Anströmrichtung  $V_\infty$  stehen, die resultierende Luftkraft  $R$ , die sich wiederum in die Komponenten Tangential-  $T$  und Axialkraft  $N$  zerlegen läßt. Bei großen Anstellwinkeln kann die Tangentialkraft auch nach vorne zeigen. Im zweidimensionalen Fall lautet die Transformation

$$\begin{aligned} C_N &= C_A \cdot \cos \alpha + C_W \cdot \sin \alpha, & C_N &\approx C_A \quad (\text{für kleine } \alpha) \\ C_T &= -C_A \cdot \sin \alpha + C_W \cdot \cos \alpha, & C_T &\approx -C_A \cdot \alpha + C_W \end{aligned} \quad \text{Gl. 5-10}$$

und die Resultierende  $R$

$$R = \sqrt{N^2 + T^2} = \sqrt{A^2 + W^2} \quad \text{Gl. 5-11}$$

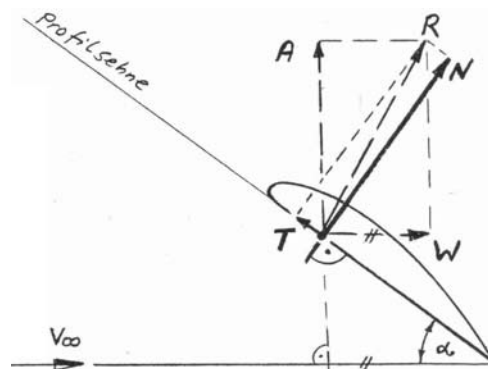


Abb. 5-7: Kräfte am Profil

### Nickmoment

Aus dem ebenfalls näherungsweise linearen Verlauf des Nickmoments  $c_m$  als Funktion des Anstellwinkels  $\alpha$  bzw. des Auftriebs  $c_A$  (Abb. 5-6) ist ersichtlich, daß sich das Moment in einen auftriebsabhängigen und einen auftriebsunabhängigen Anteil, das sog. *Nullmoment*  $c_{m0}$ , d.h. das Moment, das entsteht, wenn das Profil angeströmt wird, jedoch keinen Auftrieb liefert, zerlegen läßt.

$$c_m(c_A = 0) = c_{m0} \quad \text{Gl. 5-12}$$

$$c_m = c_{m0} + \frac{dc_m}{d\alpha} \cdot \alpha \quad \text{Gl. 5-13}$$

Aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Auftrieb und Anstellwinkel läßt sich das Nickmoment auch darstellen als

$$c_m = c_{m0} + \frac{dc_m}{dc_A} \cdot c_A \quad \text{Gl. 5-14}$$

Der Gradient  $dc_m/dc_A$  des Nickmoments wird als *Nickmomentenanstieg* bezeichnet. Für symmetrische Profile verschwindet das Nullmoment, während für gewölbte Profile im allgemeinen  $c_{m0} \neq 0$  gilt. Die Größe des Nullmoments ist unabhängig von der Lage des Bezugspunktes, wohingegen die Größe des Momentenanstiegs  $dc_m/dc_A$  sehr stark bezugspunktabhängig ist. Der Gradient  $dc_m/dc_A$  hat eine besondere Bedeutung für die statische Stabilität des Flugzeugs und wird auch als *Stabilitätsmaß der Längsbewegung* bezeichnet.

### 5.1.5 Gleitwinkel und Gleitzahl

Bei einem stationären antriebslosen Gleitflug in ruhiger Atmosphäre (Segelflugzeug) muß der nach unten gerichteten Gewichtskraft  $G = m \cdot g$  eine gleich große Kraft entgegenwirken, dies ist die aus Auftrieb  $A$  und Widerstand  $W$  resultierende Luftkraft  $R$ . Da das Segelflugzeug über keinen eigenen Antrieb verfügt, muß sich das Flugzeug in einem Bahnneigungsflug befinden um die erforderliche Kraftkomponente zur Kompensation des in Richtung der Anströmung wirkenden Widerstands zu ermöglichen. Dieser Neigungswinkel ergibt sich aus dem Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand und wird als *Gleitwinkel*  $\varepsilon$  bezeichnet. Häufiger wird jedoch der Kehrwert, die sog. *Gleitzahl*  $E$  verwendet.

$$\tan \varepsilon = \frac{W}{A} = \frac{c_W}{c_A} = \frac{1}{E} \quad \text{Gl. 5-15}$$

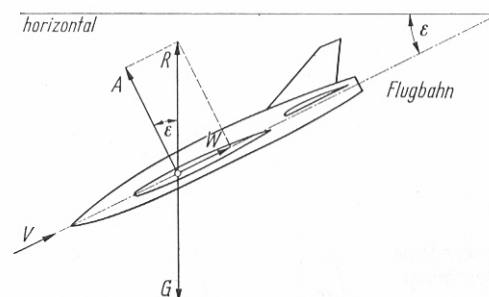
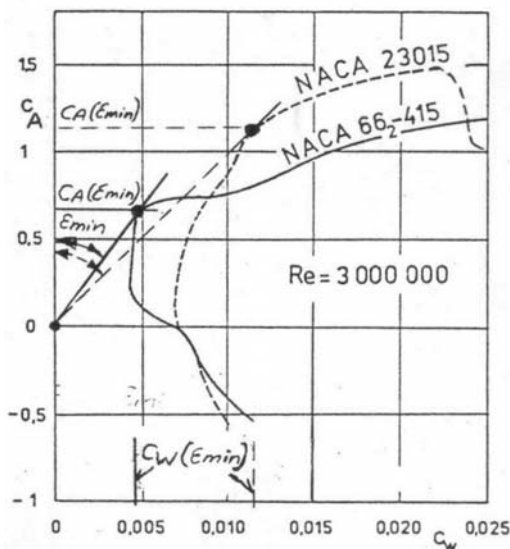


Abb. 5-8: Gleitwinkel und Gleitzahl

Graphisch läßt sich der Gleitwinkel aus der Tangente an die Polare durch den Ursprung bestimmen. Bei der Profilauswahl ist der optimale Gleitwinkel zwar ein wichtiges, jedoch nicht das einzige zu berücksichtigende Kriterium. Wie aus Abb. 5-8a ersichtlich ist, weist das NACA-Profil der 6er Reihe einen deutlich besseren maximalen Gleitwinkel auf als das Profil der 5er-Reihe, jedoch tritt beim Abweichen von diesem optimierten Punkt eine deutliche Verschlechterung ein. Dieses Profil wäre z.B. für Verkehrsflugzeuge geeignet, die auf einen einzigen Punkt der Envelope (Reiseflug) optimiert sind. Das Profil der 5er-Reihe weist zwar eine deutlich schlechtere maximale Gleitzahl auf als der Konkurrent der 6er-Reihe, ist jedoch wesentlich toleranter bei Abweichungen von dem Optimum und liegt dann deutlich über dem Profil der 6er-Reihe. Solch ein Profil wäre z.B. für Kampfflugzeuge, die eine sehr große

Envelope abdecken müssen geeignet. Das Profil NACA 23015 wurde z.B. bei der Focke-Wulf FW190 und der Vought F4U Corsair verwendet.

Diese für antriebslose Segelflugzeuge angestellte Betrachtung gilt jedoch auch für Motorflugzeuge, da durch die Gleitzahl die aerodynamische Güte eines Profils oder auch eines Gesamtflugzeugs beschrieben wird. Heutige Segelflugzeuge weisen Gleitzahlen von über 40 (LS4) bis zu 75 (Eta) auf, d.h. bei einer Gleitzahl von 75 kann z.B. aus einer Höhe von 1000 m eine Strecke von 75 km zurückgelegt werden, ohne in einem Aufwind wieder Höhe zu gewinnen. Moderne Verkehrsflugzeuge weisen Gleitzahlen in der Größenordnung von 20 bis 25 auf. In diesem Zusammenhang sei die sog. Breguet-Reichweitenformel aufgeführt, die bei Vernachlässigung der Start- und Landephase näherungsweise den Zusammenhang zwischen maximaler Reichweite und Gleitzahl liefert. Mit dem spezifischen Treibstoffverbrauch  $b$

$$b = \frac{\dot{m}_T}{P} = \frac{\dot{m}_T}{F \cdot V_\infty} \quad \text{Gl. 5-16}$$

gilt für die Masseabnahme  $dm$ , d.h. der Treibstoffverbrauch im stationären Geradeausflug

$$dm = -b \cdot F \cdot V_\infty \frac{dt}{ds} \cdot ds \quad \text{Gl. 5-17}$$

Mit  $V_\infty = ds/dt$  folgt

$$ds = -\frac{1}{g \cdot b} \cdot \frac{m \cdot g}{F} \cdot \frac{dm}{m} = -\frac{1}{g \cdot b} \cdot \frac{A}{W} \cdot \frac{dm}{m} = -\frac{1}{g \cdot b} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dm}{m} \quad \text{Gl. 5-18}$$

$$\Leftrightarrow \int_{s, \text{Start}}^{s, \text{Landung}} ds = \int_{m, \text{Start}}^{m, \text{Landung}} -\frac{1}{g \cdot b} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dm}{m} \quad \text{Gl. 5-19}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{g \cdot b} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{m, \text{Start}}^{m, \text{Landung}} \frac{1}{m} \cdot dm \quad \text{Gl. 5-20}$$

die Breguet-Reichweitenformel

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{g \cdot b} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{m_{\text{Start}}}{m_{\text{Landung}}} \quad \text{Gl. 5-21}$$

### 5.1.6 Druckpunkt und Neutralpunkt

Der Angriffspunkt der sich aus der Integration der Druckverteilung am Profil ergebenden Kraft  $R$  wird als Druckpunkt  $D$  des Profils bezeichnet. Wie aus Abb. 5-10 ersichtlich ist verändert sich die Druckverteilung am Profil mit einer Änderung des Anstellwinkels, somit verschiebt sich auch der Angriffspunkt der Resultierenden  $R$ . Dieser (variable) Abstand des Druckpunkts zum Momentenbezugspunkt  $O$ , wird mit  $x_A$  bezeichnet. Bei kleinen Anstellwinkeln gilt näherungsweise, daß die Resultierende  $R$  der Normalkraft in  $z$ -Richtung  $Z$  bzw. dem negativen Wert des Auftriebs  $A$  entspricht,  $R = -Z \approx A$ , d.h. für das Moment um den Bezugspunkt gilt

$$M = x_A \cdot Z \quad \text{Gl. 5-22}$$

bzw. in dimensionsloser Schreibweise mit der Flügelbezugstiefe  $l_\mu$  und der Bezugsfläche  $S_{ref}$

$$c_m \cdot \bar{q} \cdot S_{ref} \cdot l_\mu = x_A \cdot c_z \cdot \bar{q} \cdot S_{ref} \quad \text{Gl. 5-23}$$

$$\frac{x_A}{l_\mu} = \frac{c_m}{c_z} \approx -\frac{c_m}{c_A} \quad \text{Gl. 5-24}$$

Aus der linearen Näherung für das Nickmoment ergibt sich

$$\frac{c_m}{c_A} = \frac{c_{m0}}{c_A} + \frac{dc_m}{dc_A} \quad \text{Gl. 5-25}$$

Eingesetzt in Gl. 5-24 folgt für die dimensionslose Druckpunktlage

$$\frac{x_A}{l_\mu} = -\frac{c_{m0}}{c_A} - \frac{dc_m}{dc_A} \quad \text{Gl. 5-26}$$

Die Änderung der Druckpunktlage in Abhängigkeit vom Auftrieb wird aus dem ersten Term von Gl. 5-26 deutlich, d.h.  $x_A$  ändert sich proportional  $1/c_A$ .

Wie in Kapitel 5.1.4 ausgeführt, läßt sich das Nickmoment  $M$  in einen auftriebsunabhängigen ( $M_0$ ) und einen auftriebsabhängigen Anteil ( $x_N \cdot A$ ) zerlegen. Für den Momentenbezugspunkt  $O$  läßt sich somit schreiben,

$$M = M_0 - x_N \cdot A \quad \text{Gl. 5-27}$$

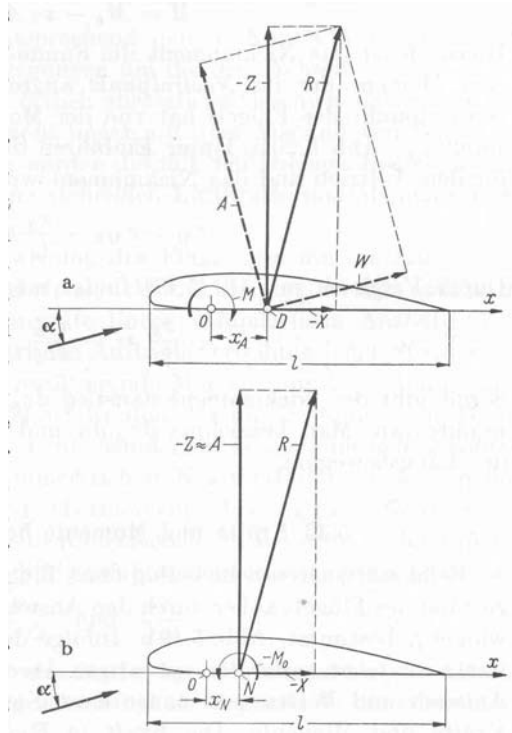
bzw. in dimensionsloser Schreibweise

$$c_m = c_{m0} - \frac{x_N}{l_\mu} \cdot c_A \quad \text{Gl. 5-28}$$

Aus dem linearen Ansatz für das Nickmoment (Gl. 5-27) folgt

$$\frac{x_N}{l_\mu} = -\frac{dc_m}{dc_A} \quad \text{Gl. 5-29}$$

Im Gegensatz zur Lage des Druckpunktes ändert sich die Lage des Neutralpunktes bei einer Änderung des Anstellwinkels bzw. des Auftriebs nicht, da der Gradient  $dc_m/dc_A$  konstant ist und der auftriebsabhängige Term, d.h.  $c_{m0}/c_A$  wie beim Druckpunkt fehlt.

Abb. 5-9: Druckpunkt  $D$  und Neutralpunkt  $N$ 

### Druckpunktwanderung

Am Beispiel des Profils NACA 2412 soll die variable Druckpunktlage in Abhängigkeit vom Anstellwinkel bzw. Auftriebsbeiwert verdeutlicht werden, Abb. 5-10. Für kleine Auftriebswerte kann der Druckpunkt auch außerhalb des Profils liegen.

$$C_{m0} = -0.05, \frac{dC_m}{dC_A} = -0.25 \Rightarrow \frac{x_D}{l_\mu} = \frac{0.05}{C_A} + 0.25 \text{ (Hyperbel)}, \quad C_A \rightarrow \infty: \frac{x_D}{l_\mu} = 0.25$$

$C_A$	$0.05/C_A$	$x_D/l_\mu$
1.40	0.036	0.286
1.00	0.050	0.300
0.50	0.100	0.350
0.25	0.200	0.450
0.10	0.500	0.750
0.05	1.000	1.250
0.00	$\pm \infty$	$\pm \infty$
-0.10	-0.500	-0.250
-0.25	-0.200	0.050
-0.50	-0.100	0.150
-1.00	-0.050	0.200

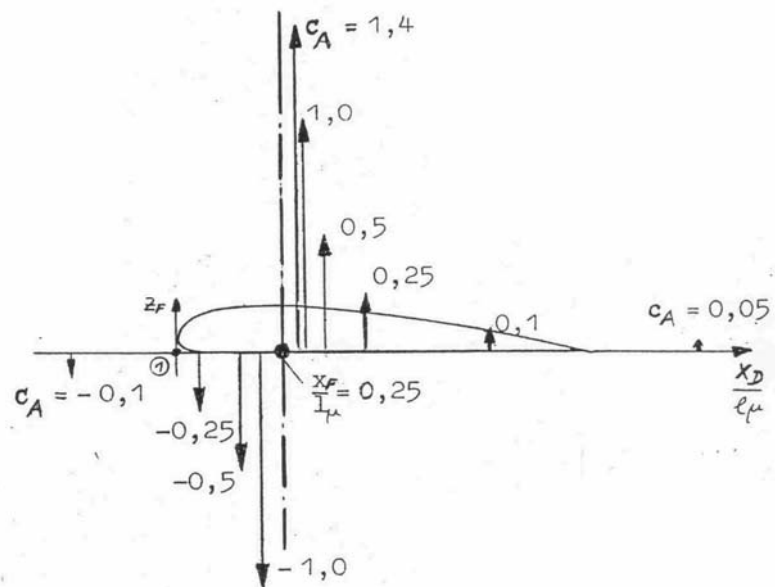


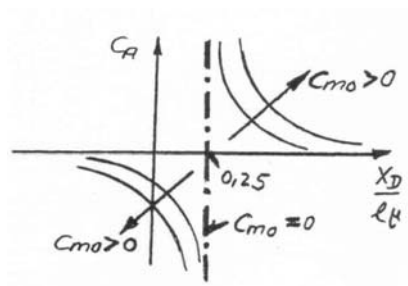
Abb. 5-10: Auftriebsabhängige Druckpunktlage für das Profil NACA 2412 [ 22]



Der Auftrieb als Funktion der Druckpunktlage bildet eine Hyperbelschar mit dem Nullmoment  $C_{m0}$  als Parameter, die gegen den Grenzwert von  $x_D/l_\mu = 0.25$  streben, Abb. 5-11. Profile, für welche das Nullmoment verschwindet, d.h.

$$C_{m0}=0 \Rightarrow \frac{x_D}{l_\mu} \approx 0.25$$

werden als Druckpunktfeste Profile bezeichnet. Dies gilt z.B. für die ebene Platte, symmetrische Profile und Profile mit S-Schlag in der Skelettlinie.



$$\frac{x_D}{l_\mu} = -\frac{C_{m0}}{C_A} - \frac{dC_m}{dC_A} \quad (\text{Hyperbel})$$

$$\lim_{C_A \rightarrow \infty} \frac{x_D}{l_\mu} = -\frac{dC_m}{dC_A} \approx 0.25$$

Abb. 5-11: Einfluß von  $C_{m0}$  auf die Druckpunktlage

## 5.2 Grundlagen des Auftriebs

### 5.2.1 Zirkulation

Gemäß dem Wirbelsatz von Thomson (Kapitel 4.2.3) ändert sich die Zirkulation in einer reibungsfreien Strömung nicht, es gilt  $d\Gamma/dt = 0$  bzw.  $\Gamma = \text{const.}$  Befindet sich der Tragflügel in Ruhe, z.B. wenn das Flugzeug am Boden steht, so wird kein Auftrieb erzeugt und es liegt auch keine Zirkulation am Tragflügel vor, d.h. es gilt  $\Gamma = 0$ . Befindet sich das Flugzeug jedoch in einem stationären Flugzustand, so ist dazu Auftrieb erforderlich und demzufolge muß eine Strömung mit Zirkulation um das Profil vorliegen d.h. es gilt  $\Gamma \neq 0$ . Dies scheint im Widerspruch zu dem Satz von Thomson zu stehen. Zur Erklärung soll das in Abb. 5-12 skizzierte Profil dienen.

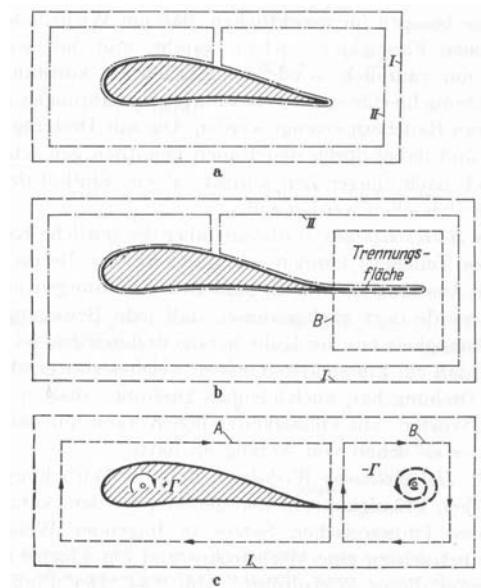


Abb. 5-12: Entstehung der Zirkulation beim Anfahrvorgang [ 35]

Das Profil wird von den Kontrolllinien  $I$  und  $II$  umschlossen, wobei die Linie  $I$  die Geschwindigkeitsverteilung im Fernfeld darstellt und die Linie  $II$  das Geschwindigkeitsfeld in der Nähe des Profils umschließt. Im Ruhezustand ergibt die Integration der Geschwindigkeiten entlang der beiden Linien Null, es liegt somit keine Zirkulation vor. Setzt sich das Flugzeug in Bewegung, so bildet sich hinter dem Profil eine Trennungsfläche, die jedoch außerhalb des Kontrollraums  $II$  liegt und für die somit der Thomson'sche Satz nicht gilt. Der Vorgang des Zusammenfließens der Strömungsanteile, die durch das Profil getrennt waren, ist in Abb. 5-13 für die Phase Anfahrvorgangs skizziert. Die Unstetigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung, d.h. die Trennungsfläche innerhalb des Kontrollraums  $B$  ist gleichbedeutend mit dem Vorhandensein eines Wirbels. Ersetzt man die Kontrolllinie  $I$ , mit der Zirkulation  $\Gamma = 0$ , durch die beiden Kontrolllinien  $A$  und  $B$ , so muß die Summe der Wirbelstärke in beiden Kontrollräumen ebenfalls gleich Null sein. Da sich aber im Zuge des Anfahrvorgangs im Kontrollraum  $B$  ein linksdrehender Wirbel der Stärke  $-\Gamma$  gebildet hat, muß im Kontrollraum  $A$  ein rechtsdrehender Wirbel der Stärke  $+\Gamma$  vorliegen um die Forderung nach einer konstanten Gesamtzirkulation der Stärke  $\Gamma = 0$  zu erfüllen. Dieser im Inneren des Kontrollraums  $A$  liegende Wirbel wird als *gebundener Wirbel* bezeichnet und bewegt sich mit dem Profil, während der Anfahrwirbel an seiner Stelle verharrt. Dieser Vorgang läßt sich auch im Experiment nachvollziehen, Abb. 5-13.

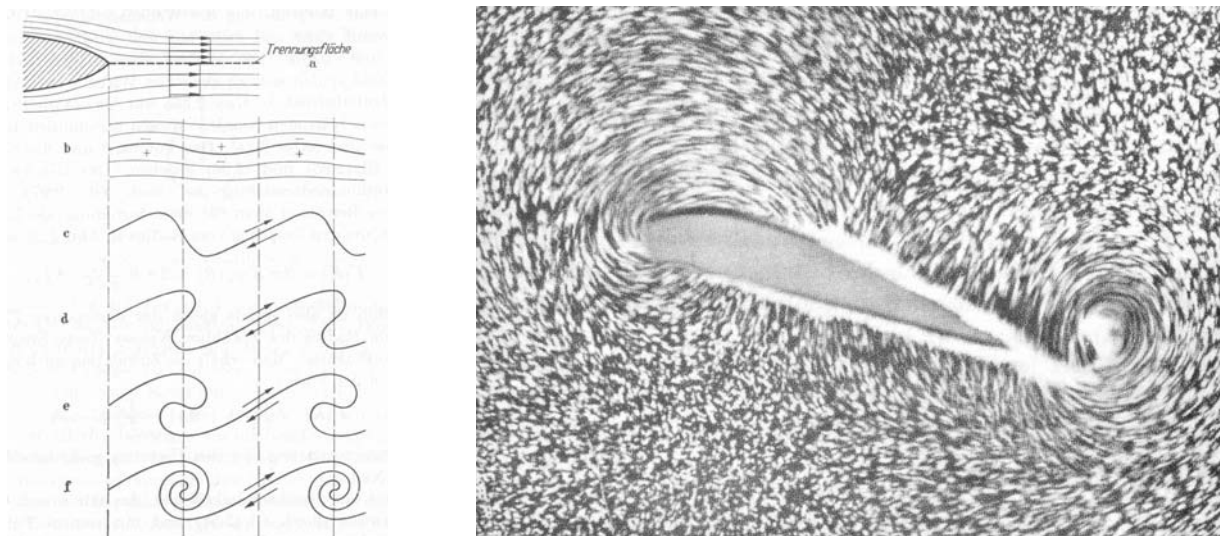


Abb. 5-13: Entstehung des Anfahrwirbels [ 35]

### 5.2.2 Auftriebsgleichung nach Kutta-Joukowski

Im Gegensatz zur Berechnung des Widerstands eines umströmten Körpers, der die Berücksichtigung der Viskosität der Strömung erfordert, läßt sich der Auftrieb näherungsweise unter der Annahme einer reibungsfreien Strömung gut berechnen. Im folgenden soll ein Tragflügel mit unendlicher Spannweite betrachtet werden (*Profiltheorie*), d.h. es wird eine rein zweidimensionale Strömung angenommen. In Kapitel 4.8.2 wurde der Einfluß der Zirkulation auf einen quer angeströmten Zylinder aufgezeigt, d.h. die Erzeugung einer Kraft quer zur Anströmrichtung. Ähnliche Verhältnisse liegen auch an einem angeströmten Tragflügel vor, Abb. 5-14. Um in dem das Profil umschließende Kontrollvolumen  $K$  die Kontinuitätsgleichung erfüllen zu können, muß bei dem gewölbten Profil an der Oberseite eine Geschwindigkeitserhöhung  $V_\infty + \Delta V$  und an der Unterseite eine Verzögerung  $V_\infty - \Delta V$  der Strömung erfolgen. Dadurch herrscht entsprechend der Gleichung von Bernoulli ein Gesamtdruck von

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot V_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} \cdot V^2 = \text{const.} \quad \text{Gl. 5-30}$$

im Vergleich zu dem Druck im Strömungsfernfeld  $p_\infty$ , an der Profiloberseite ein Unter- und an der Profilunterseite ein Überdruck, d.h.

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot V_\infty^2 = p_u + \frac{\rho}{2} \cdot (V_\infty - \Delta V)^2 = p_o + \frac{\rho}{2} \cdot (V_\infty + \Delta V)^2 \quad \text{Gl. 5-31}$$

Der Gesamtauftrieb  $A$  ergibt sich aus der Integration über das Profil von der Vorderkante ( $B$ ) bis zur Hinterkante ( $C$ ), Abb. 5-4.

$$A = \int_{(F)} (p_u - p_o) \cdot dF = b \cdot \int_B^C (p_u - p_o) \cdot dx \quad \text{Gl. 5-32}$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \rho \cdot b \cdot V_\infty \cdot \int_B^C \Delta V \cdot dx \quad \text{Gl. 5-33}$$

Für die Zirkulation gilt

$$\Gamma = \int_{B,o}^C \Delta V \cdot dx - \int_{C,u}^B \Delta V \cdot dx = 2 \cdot \int_B^C \Delta V \cdot dx \quad \text{Gl. 5-34}$$

Damit ergibt sich für den Auftrieb  $A$  eines Tragflügels der Breite  $b$  nach Kutta-Joukowsky zu

$$A = \rho \cdot b \cdot V_{\infty} \cdot \Gamma \quad \text{Gl. 5-35}$$

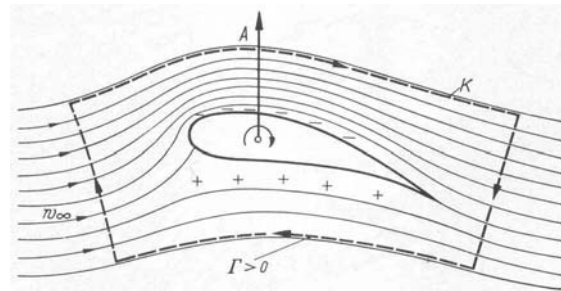


Abb. 5-14: Strömung um ein Tragflügelprofil [ 35]

Das Geschwindigkeitsfeld um den Tragflügel kann entsprechend der Betrachtung bei einem quer angeströmten Zylinder mit Zirkulation, durch die Überlagerung einer translatorischen Strömung der Geschwindigkeit  $V_{\infty}$  mit einem im Inneren des Profils gebunden, rechtsdrehenden Wirbel der Zirkulationsstärke  $\Gamma$  gebildet werden.

### 5.2.3 Kutta'sche Abflußbedingung

Ein angestelltes Profil welches sich in einer reibungsfreien Strömung befindet und keinen Auftrieb liefert, d.h. für welches die Zirkulation Null ( $\Gamma = 0$ ) ist, hätte einen hinteren Staupunkt, der sich an der Oberseite des Profils befindet. Die Hinterkante müßte mit einer (theoretisch) unendlich großen Geschwindigkeit umströmt werden. In der Realität liegt der hintere Staupunkt jedoch genau an der Hinterkante und legt dadurch die Stärke der Zirkulation fest. Diese Kutta'sche Abflußbedingung läßt sich ebenfalls zur Erklärung des Anfahrwirbels heranziehen. Während zu allen Zeiten die Zirkulation im Fernfeld, also weit ab von dem Profil,  $\Gamma = 0$  ist, bildet sich während dem Anfahrvorgang infolge der Umströmung der Hinterkante ein linksdrehender Wirbel der Stärke  $-\Gamma$ . Aus der Forderung nach einer konstanten Gesamtzirkulation ( $\Gamma = 0$ ) im Kontrollraum ergibt sich der rechtsdrehende gebundene Wirbel im Inneren des Profils der Stärke  $+\Gamma$ , Abb. 5-15.

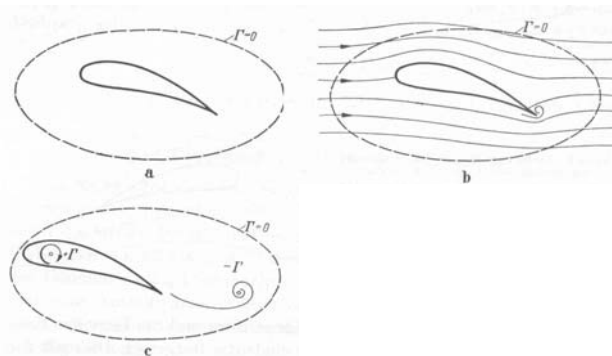


Abb. 5-15: Entstehung des gebundenen Wirbels und des Anfahrwirbels [ 35]

### 5.3 Profiltheorie nach der Methode der konformen Abbildungen

#### 5.3.1 Komplexe Strömungsfunktion

Die in dem Kapitel Potentialströmungen hergeleiteten Begriffe der Potentialfunktion  $\Phi(x, y)$  und Stromfunktion  $\Psi(x, y)$  für ebene Strömungen lassen sich auch durch Zerlegen einer analytischen Funktion  $F(z)$  der komplexen Variablen  $z = x + i \cdot y$  in ihren Real- und Imaginärteil herleiten.

$$F(z) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y) \quad \text{Gl. 5-36}$$

Das Geschwindigkeitsfeld  $u, v$  erhält man wieder durch Differenzieren der Potential- und Stromfunktion im Reellen, ebenso läßt sich das Geschwindigkeitsfeld aus der komplexen Strömungsfunktion  $F(x + i \cdot y)$  durch Differenzieren im Komplexen herleiten.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy \quad \text{Gl. 5-37}$$

$$\Rightarrow dF = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \cdot dx + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \cdot dy \quad \text{Gl. 5-38}$$

$$\Leftrightarrow dF = (u - i \cdot v) \cdot dx + (v + i \cdot u) \cdot dy \quad \text{Gl. 5-39}$$

$$\Leftrightarrow dF = (u - i \cdot v) \cdot dz \quad \text{Gl. 5-40}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dF}{dz} = u - i \cdot v = w(z) = \bar{w} \quad \text{Gl. 5-41}$$

Die Ableitung der komplexen Strömungsfunktion nach dem Argument entspricht dem an der reellen Achse gespiegelten Geschwindigkeitsvektor.

#### 5.3.2 Konforme Abbildung

Im Rahmen der Potentialtheorie wurde gezeigt, daß jede beliebige Stromlinie als Wand aufgefaßt werden kann und die benachbarten Stromlinien das Strömungsfeld um diesen 'Körper' beschreiben. Die umgekehrte Aufgabe, d.h. daß eine Körperform vorgegeben ist und die dazugehörige Stromfunktion ermittelt werden soll, gestaltet sich etwas komplizierter. Eine Eigenschaft der analytischen Funktion einer komplexen Variablen besteht darin, daß bei der Abbildung orthogonaler Kurvenscharen (z.B. Strom- und Potentiallinien) diese wieder in orthogonale Kurvenscharen überführt werden. Die Winkel der einen Ebene werden in gleiche Winkel der anderen Ebene abgebildet. Das Gleiche gilt auch für das Verhältnis zweier Strecken, Abb. 5-16.

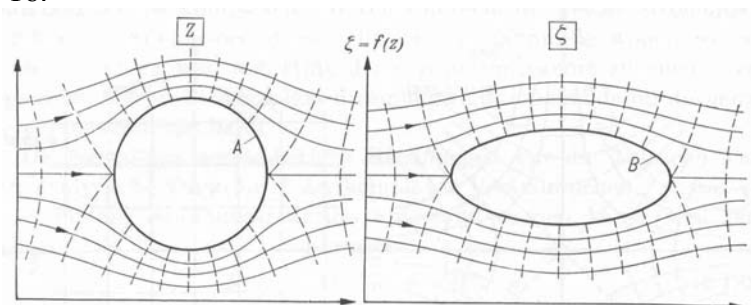


Abb. 5-16: Konforme Abbildung orthogonaler Kurvenscharen

Die Anwendung der konformen Abbildung zur Berechnung einer Strömung um einen vorgegebenen Körper basiert darauf, daß ausgehend von einer bereits bekannten Strömung um eine Kontur  $A$  in der  $z$ -Ebene für welche die Strömungsfunktion  $F(z)$  bekannt ist über eine *Abbildungsfunktion*

$$\zeta = f(z) \quad \text{Gl. 5-42}$$

die Kontur  $A$  in der  $z$ -Ebene abgebildet wird auf die Kontur  $B$  in der  $\zeta$ -Ebene. Als Ausgangskontur  $A$  läßt sich z.B. eine Strömung um einen Kreiszylinder verwenden, dessen Strom- und Potentiallinien bekannt sind. Das gesuchte Geschwindigkeitsfeld um den Körper  $B$  in der  $\zeta$ -Ebene ergibt sich aus

$$w(\zeta) = \frac{dF}{d\zeta} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \quad \text{Gl. 5-43}$$

Bedauerlicherweise erfordert die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung die Kenntnis der Abbildungsfunktion  $\zeta = f(z)$ , die zwar entsprechend dem *Riemannschen Abbildungssatz* generell existiert um jeden zusammenhängenden Bereich, also jedes beliebige Profil auf einen Kreis abzubilden, dennoch besteht in der Praxis das Problem darin eben jene Abbildungsfunktion zu finden.

### 5.3.3 Angestellte ebene Platte mit Auftrieb

Die konforme Abbildung einer ebenen Translationsströmung um einen Kreiszylinder mit dem Radius  $R = a$  hat in der  $z$ -Ebene die Strömungsfunktion

$$F(z) = u_{\infty} \cdot \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad \text{Gl. 5-44}$$

Mit Hilfe der *Joukowski-Abbildungsfunktion* zur Abbildung der komplexen  $z$ -Ebene in die komplexe  $\zeta$ -Ebene

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\zeta - 2 \cdot a}{\zeta + 2 \cdot a} = \left( \frac{z - a}{z + a} \right)^2 \quad \text{Gl. 5-45}$$

wird der Kreis mit dem Radius  $R = a$  um den Nullpunkt in der  $z$ -Ebene auf eine doppelt durchlaufene Strecke von  $-2a$  bis  $+2a$  in der  $\zeta$ -Ebene abgebildet.

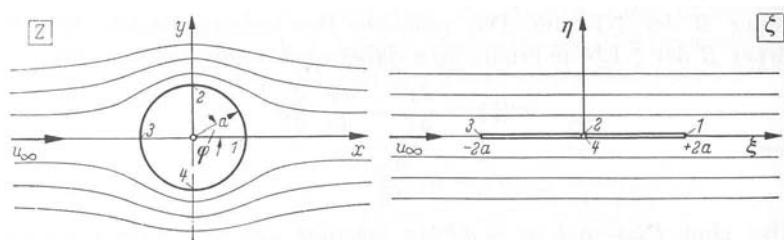


Abb. 5-17: Konforme Abbildung eines Kreiszylinders auf eine ebene Platte [ 35]

Für die Strömung in der  $\zeta$ -Ebene ergibt sich daraus

$$F(\zeta) = u_{\infty} \cdot \zeta \quad \text{Gl. 5-46}$$

d.h. es wurde die Translationsströmung in der  $z$ -Ebene mit  $u_{\infty}$  längs der reellen Achse in der  $\zeta$ -Ebene abgebildet.

Die Abbildung des Kreises auf eine senkrecht angeströmte Platte ergibt sich analog, jedoch wird nun der Kreis in Richtung der  $y$ -Achse umströmt. Die Strömungsfunktion ergibt sich zu

$$F(z) = i \cdot v_{\infty} \cdot \left( -z + \frac{a^2}{z} \right) \quad \text{Gl. 5-47}$$

Die Geschwindigkeit in der  $z$ -Ebene lautet

$$\frac{dF}{dz} = w_z = -i \cdot v_{\infty} \cdot \left( 1 + \frac{a^2}{z^2} \right) \quad \text{Gl. 5-48}$$

und die Geschwindigkeit in der  $\zeta$ -Ebene

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{z^2 - a^2}{z^2}, \quad w_{\zeta} = -i \cdot v_{\infty} \cdot \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} \quad \text{Gl. 5-49}$$

Durch Überlagerung der längs und der senkrecht angeströmten ebenen Platte ergibt sich die Strömung, die unter einem Anstellwinkel angeströmt wird, jedoch noch keinen Auftrieb erzeugt, d.h. ein schräg angeströmter Zylinder (ohne Zirkulation) wird von der  $z$ -Ebene in die  $\zeta$ -Ebene abgebildet. Der vordere Staupunkt liegt an der Plattenunterseite und der hintere Staupunkt befindet sich an der Plattenoberseite. Zur Erzeugung eines Auftriebs muß dem quer angeströmten Zylinder noch eine Zirkulation  $\Gamma$  überlagert werden.

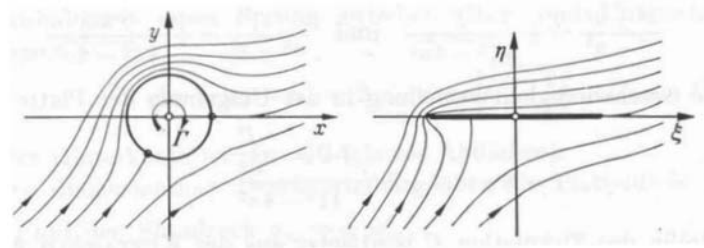


Abb. 5-18: Angeströmte ebene Platte mit Auftrieb

Die komplexen Strömungsfunktionen in der  $z$ -Ebene lauten

waagerechte Platte:

$$F_{wp}(z) = u_{\infty} \cdot \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

senkrechte Platte:

$$F_{sp}(z) = i \cdot v_{\infty} \cdot \left( -z + \frac{a^2}{z} \right)$$

Zirkulation:

$$F_z(z) = \frac{i \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln z$$

und somit die Strömungsfunktion der Gesamtströmung

$$F(z) = u_{\infty} \cdot \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + i \cdot v_{\infty} \cdot \left( -z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln z \quad \text{Gl. 5-50}$$

bzw.

$$F(z) = (u_{\infty} - i \cdot v_{\infty}) \cdot z + (u_{\infty} + i \cdot v_{\infty}) \frac{a^2}{z} + \frac{i \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln z \quad \text{Gl. 5-51}$$

Die Geschwindigkeit in der  $z$ -Ebene ergibt sich durch Differenzieren der Strömungsfunktion

$$w_z = \frac{dF}{dz} = (u_\infty - i \cdot v_\infty) - (u_\infty + i \cdot v_\infty) \cdot \frac{a^2}{z^2} + \frac{i \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{z} \quad \text{Gl. 5-52}$$

Mit der Joukowski'schen Abbildungsfunktion, bei der ein Kreis mit dem Radius  $R = a$  auf eine ebene Platte der Länge  $l = 4 \cdot a$  abgebildet wird, ergibt sich die Geschwindigkeit in der  $\zeta$ -Ebene zu

$$w_\zeta = \frac{z^2}{z^2 - a^2} \cdot w_z \quad \text{Gl. 5-53}$$

Eingesetzt in Gl. 5-52 folgt

$$w_\zeta = u_\infty - i \cdot v_\infty \cdot \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} + i \cdot \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{z}{z^2 - a^2} \quad \text{Gl. 5-54}$$

bzw.

$$w_\zeta = u_\infty \mp i \cdot \frac{v_\infty \cdot \zeta - \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi}}{\sqrt{\zeta^2 - 4 \cdot a^2}} \quad \text{Gl. 5-55}$$

Aufgrund der Kutta'schen Abflußbedingung, d.h. die Hinterkante wird nicht mit einer unendlich großen sondern mit einer endlichen Geschwindigkeit umströmt, d.h.  $w_\zeta$  hat an der Stelle  $\zeta = 2 \cdot a$  einen endlichen Wert, muß der Imaginärteil in Gl. 5-55 zu Null werden. Damit ergibt sich für die Zirkulation bei  $\zeta = 2 \cdot a$  mit  $4 \cdot a = l$

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot v_\infty \cdot 2 \cdot a = \pi \cdot v_\infty \cdot l \quad \text{Gl. 5-56}$$

Dies ergibt für die Geschwindigkeitsverteilung um die Platte

$$w_\zeta = u_\infty \mp i \cdot v_\infty \cdot \sqrt{\frac{\zeta - \frac{l}{2}}{\zeta + \frac{l}{2}}} \quad \text{Gl. 5-57}$$

Allgemein gilt für die komplexe Strömungsfunktion

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = \zeta = \xi(x, y) + i \cdot \eta(x, y) \quad \text{Gl. 5-58}$$

An der Platte gilt  $\zeta = \xi$  und  $|\xi| < l/2$  und damit für die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = u_\infty \pm v_\infty \cdot \sqrt{\frac{l - 2 \cdot \xi}{l + 2 \cdot \xi}} \quad \text{Gl. 5-59}$$

Mit der resultierenden Anströmgeschwindigkeit der Platte

$$w_\infty^2 = u_\infty^2 + v_\infty^2 \quad \text{Gl. 5-60}$$

ergibt sich für einen Anstellwinkel  $\alpha$

$$u_\infty = w_\infty \cdot \cos \alpha, \quad v_\infty = w_\infty \cdot \sin \alpha \quad \text{Gl. 5-61}$$

die Geschwindigkeitsverteilung an der Platte zu

$$u = w_\infty \cdot \left( \cos \alpha \pm \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{l - 2 \cdot \xi}{l + 2 \cdot \xi}} \right) \quad \text{Gl. 5-62}$$

(+ : Oberseite, - : Unterseite der Platte)



Die Vorderkante der Platte bei  $\xi = -l/2$  wird mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt, während an der Hinterkante bei  $\xi = +l/2$  die Kutta'sche Abströmbedingung erfüllt wird und die Tangentialgeschwindigkeit  $u = w_\infty \cdot \cos \alpha$  vorliegt. Die Druckverteilung ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung zu

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\bar{q}_\infty} = 1 - \left( \frac{u}{w_\infty} \right)^2 \quad \text{Gl. 5-63}$$

Die Integration der Druckverteilung liefert die resultierende Auftriebskraft  $A$  auf die Platte, die nicht senkrecht auf der Platte sondern senkrecht zur Anströmung  $u_\infty$  steht. Dieses Ergebnis entspricht auch dem Ergebnis eines quer angeströmten Zylinders mit Zirkulation aus dessen konformer Abbildung die Strömung um die ebene Platte hervorging. Die (theoretisch) unendlich große Umströmungsgeschwindigkeit der Vorderkante führt zu dem ebenfalls (theoretisch) unendlich hohen Druckanstieg an der Vorderkante der Platte.

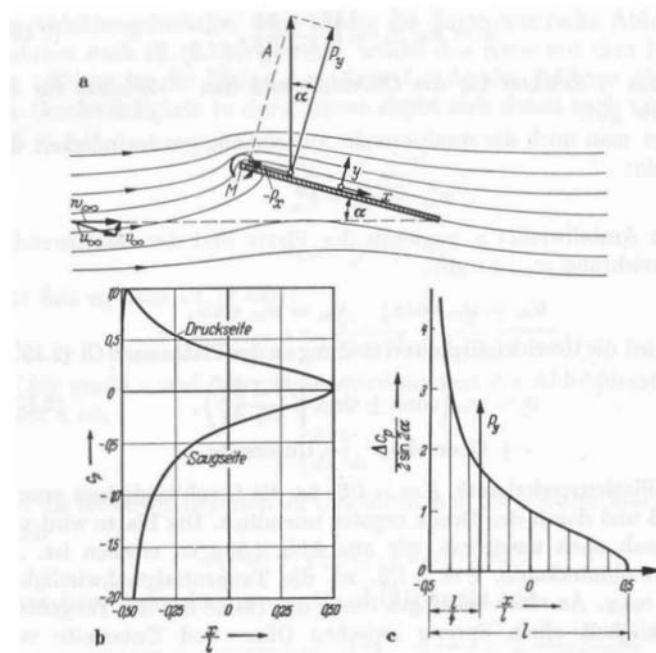


Abb. 5-19: Umströmung und Druckverteilung der ebenen Platte [ 35]

Diese recht abstrakte Herleitung der Druckverteilung an der ebenen Platte führt jedoch zu sehr brauchbaren Ergebnissen für reale Strömungen und zeigt auch maximal mögliche Grenzwerte für reale Profile auf.

### Auftrieb

Der Auftrieb der ebenen Platte ergibt sich aus den Komponenten in x- und y-Richtung

$$c_x = -2 \cdot \pi \cdot \sin^2 \alpha \quad \text{Gl. 5-64}$$

$$c_y = 2 \cdot \pi \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{Gl. 5-65}$$

zu

$$c_A = 2 \cdot \pi \cdot \sin \alpha \quad \text{Gl. 5-66}$$

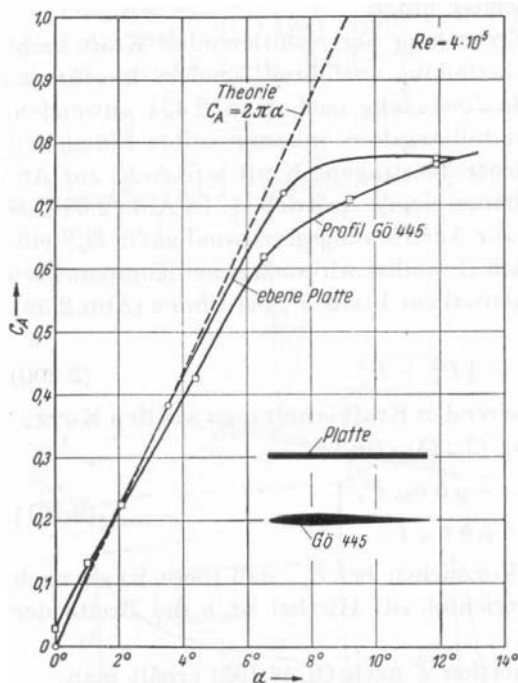
bzw. für kleine Anstellwinkel  $\alpha$

$$c_A = 2 \cdot \pi \cdot \alpha \quad \text{Gl. 5-67}$$

**Auftriebsanstieg**

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = c_{A\alpha} = 2 \cdot \pi$$

Gl. 5-68



Die Relevanz dieser Ergebnisse ist in Abb. 5-20 dargestellt, d.h. der theoretisch maximal mögliche Auftrieb einer ebenen Platte in reibungsfreier Strömung stellt den Grenzwert für real ausgeführte Profile dar.

Abb. 5-20: Vergleich Theorie mit experimentellen Ergebnissen [ 35]

**Nickmoment**

Das Moment um die Plattenvorderkante als Bezugspunkt ergibt sich zu

$$M = -\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi \cdot b \cdot l^2 \cdot w_\infty^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Gl. 5-69

bzw.

$$M = -\frac{1}{4} \cdot l \cdot P_y$$

Gl. 5-70

d.h. die resultierende Kraft greift in einem Abstand von  $l/4$  von der Plattenvorderkante an. Für den dimensionslosen Beiwert ergibt sich somit

$$c_m = \frac{M}{b \cdot l^2 \cdot \bar{q}_\infty}$$

Gl. 5-71

bzw.

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\pi}{4} \cdot \sin 2\alpha$$

Gl. 5-72

**Saugkraft und Widerstand (d'Alembert'sches Paradoxon)**

Betrachtet man diese Ergebnisse, so ergeben sich zwei recht überraschende Besonderheiten. Die erste beruht darauf, daß die Auftriebskraft der Platte senkrecht zur Anströmrichtung steht, Abb. 5-19. Dies hat zur Folge, daß bei der vektoriellen Zerlegung des Auftriebs in eine Tangentialkomponente  $P_x$  und Normalkomponente  $P_y$ , die Tangentialkomponente entgegen der Strömungsrichtung zeigt und demzufolge eine *Saugkraft* darstellt.

Da die resultierende Kraft, also der Auftrieb, senkrecht zur Strömungsrichtung wirkt, kann es keine Komponente tangential zur Strömungsrichtung (Widerstand) geben. Dies bedeutet allgemein, daß ein beliebiger Körper in einer zweidimensionalen reibungsfreien Strömung zwar einen Auftrieb, jedoch keinen Widerstand erzeugen kann.

### 5.3.4 Joukowski-Profil

Mit Hilfe der *Joukowski-Abbildungsfunktion* zur Abbildung der komplexen  $z$ -Ebene in die komplexe  $\zeta$ -Ebene

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\zeta - 2 \cdot a}{\zeta + 2 \cdot a} = \left( \frac{z - a}{z + a} \right)^2 \quad \text{Gl. 5-73}$$

lassen sich über die Methode der konformen Abbildung Profile mit Dicke und Wölbung erzeugen. Diese Abbildungsfunktion bildet einen Kreis mit dem Radius  $R = a$  um den Nullpunkt in der  $z$ -Ebene auf eine doppelt durchlaufene Strecke von  $-2a$  bis  $+2a$  in der  $\zeta$ -Ebene ab.

Wird der Bildkreis gegenüber dem Einheitskreis um  $x_0$  auf der negativen Achse verschoben, so daß beide durch den Punkt  $z = a$  verlaufen, so ergibt die Abbildung in der  $\zeta$ -Ebene ein symmetrisches Joukowski-Profil, (Abb. 5-21a) dessen Dicke  $d$  von  $x_0$  abhängt und dessen Hinterkante auf die Dicke Null ausläuft. Liegt der Mittelpunkt des Bildkreises auf der imaginären Achse bei  $iy_0$ , dann ergibt die Abbildungsfunktion in der  $\zeta$ -Ebene einen doppelt durchlaufenen Kreisbogen, dessen Wölbungshöhe  $f$  von der Verschiebung  $y_0$  abhängt (Abb. 5-21b). Das gewölbte Joukowski-Profil (Abb. 5-21c) ergibt sich durch eine Verschiebung um  $x_0$  und  $y_0$ .

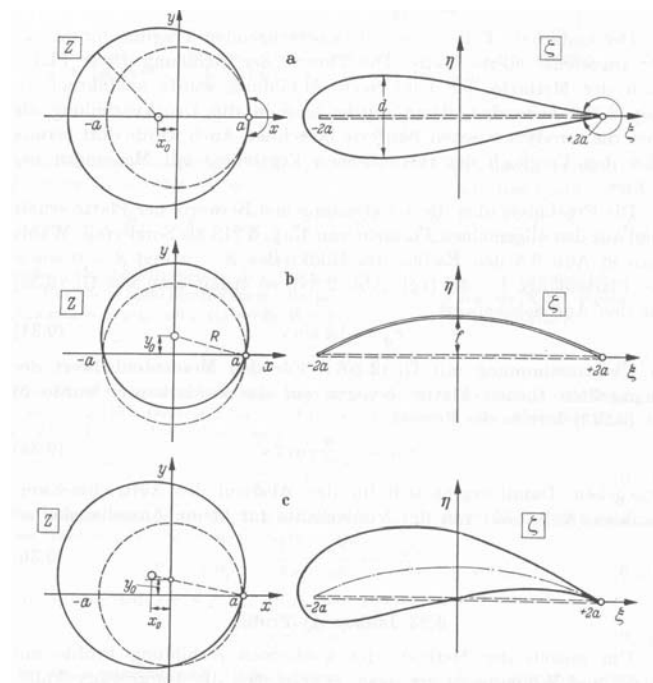


Abb. 5-21: Symmetrisches Profil, Kreisbogenprofil und gewölbtes Profil [ 35]

## 5.4 Profiltheorie nach der Singularitätenmethode

### 5.4.1 Kennzeichen der Singularitätenmethode

Die in Kapitel 5.3 beschriebene Methode der konformen Abbildungen ermöglicht zwar theoretisch die Erzeugung eines beliebigen Profils, jedoch besteht die Schwierigkeit in der Definition einer geeigneten Abbildungsfunktion. Dieses Problem wird mit der Singularitätenmethode umgangen. Der Grundgedanke dieses Verfahrens wurde bereits in Kapitel 4 beschrieben, d.h. durch Überlagerung einer ebenen Translationsströmung mit einer oder mehrerer Singularitäten lassen sich ebenfalls beliebige Körperkonturen erzeugen, z.B. ein ebener Halbkörper. Kennzeichnend für dieses Vorgehen ist, daß die Strömung innerhalb der Körperkontur, bzw. der Stromlinie, die als Wand definiert wurde, physikalisch ohne Belang ist. Symmetrische Profile bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 0$  lassen sich durch Überlagerung einer ebenen Translationsströmung mit einer Kombination von Quellen und Senken auf der Symmetrielinie erzeugen. Die Profilwölbung (Skelett) erfordert noch zusätzlich das Vorhandensein von Wirbeln. Die Überlagerung dieser drei Komponenten führt schließlich zu gewölbten Profilen bei einem Anstellwinkel  $\alpha \neq 0$ .

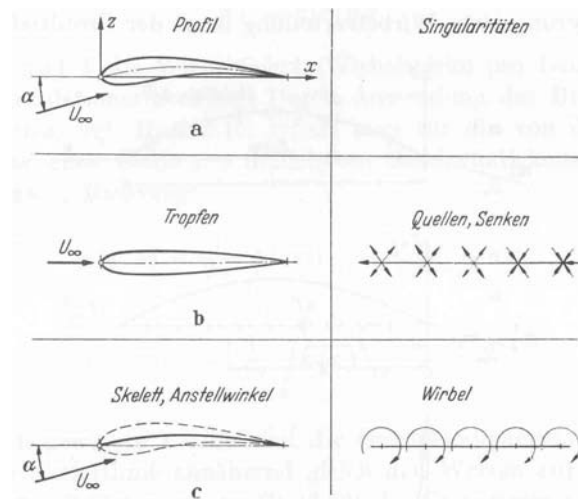


Abb. 5-22: Prinzip der Singularitätenmethode [ 35]

### 5.4.2 Dünne Profile (Skelett-Theorie)

Sehr dünne Profile lassen sich durch die Überlagerung einer Translationsströmung mit einer Wirbelverteilung auf der Skelettlinie erzeugen. Dieses von *Birnbaum*, *Ackermann* und *Glauert* angegebene Verfahren wird als *Skelett-Theorie* oder auch *Theorie der tragenden Wirbelfläche* bezeichnet. Für schwach gewölbte Profile können die Wirbel anstelle auf der Skelettlinie auch auf der Profilschneide angeordnet werden, Abb. 5-23b. Die Wirbelstärke (Zirkulationsstärke)  $k$  eines Streifens der Breite  $dx$  beträgt

$$d\Gamma = k(x) \cdot dx \quad \text{Gl. 5-74}$$

Die durch die Wirbel auf der Profilschneide induzierten Geschwindigkeiten ergeben sich über die Beziehungen von Biot-Savart, vgl. Kapitel 4.8.1.

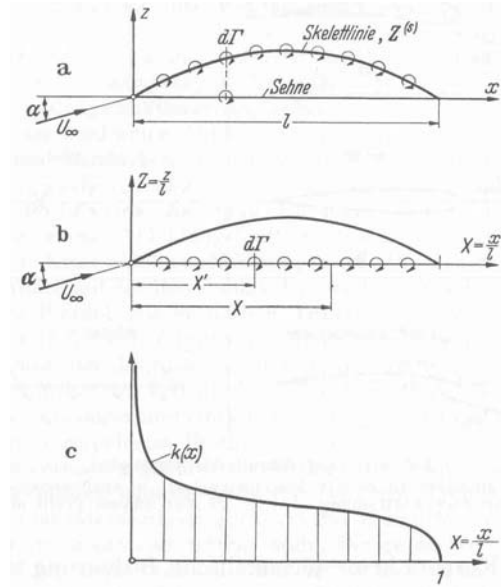


Abb. 5-23: Wirbelbelegung und Zirkulationsverteilung [ 35]

### 1. Hauptaufgabe der Skelett-Theorie

Berechnung der Skelettlinie  $Z^{(s)}$  und des Anstellwinkels  $\alpha$  aus der Zirkulationsverteilung  $k(x)$ . Da die Skelettlinie ebenfalls eine Stromlinie darstellt, muß die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Skelettlinie zu Null werden. Aus dieser Bedingung und der Integration der über die Wirbelverteilung induzierten Geschwindigkeiten  $w(X)$  ergibt sich mit den dimensionslosen Größen

$$X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(s)} = \frac{z^{(s)}}{l} \quad \text{Gl. 5-75}$$

die Form der Skelettlinie zu

$$Z^{(s)}(X) = \alpha \cdot X + \int_0^X \frac{w(X')}{U_\infty} \cdot dX' + C \quad \text{Gl. 5-76}$$

bzw.

$$Z^{(s)}(X) = \alpha \cdot X - \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^1 \frac{k(X')}{U_\infty} \cdot \ln \left| \frac{X - X'}{X'} \right| \cdot dX' \quad \text{Gl. 5-77}$$

und für den Anstellwinkel  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^1 \frac{k(X')}{U_\infty} \cdot \ln \frac{1 - X'}{X'} \cdot dX' \quad \text{Gl. 5-78}$$

Die Zirkulationsverteilung läßt sich nach *Glauert* aus der Fourier-Reihe berechnen

$$k(\varphi) = 2 \cdot U_\infty \cdot \left( A_0 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin n \cdot \varphi \right) \quad \text{Gl. 5-79}$$

Bei vorgegebener Skelettlinie ergeben sich die Koeffizienten der Zirkulationsverteilung aus

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{dZ^{(s)}}{dX} \cdot \cos n \cdot \varphi \cdot d\varphi \quad (n=1,2,\dots,N) \quad \text{Gl. 5-80}$$

Für die Skelettlinie ergibt sich daraus der Auftrieb zu

$$c_A = \pi \cdot (2 \cdot A_0 + A_1) \quad \text{Gl. 5-81}$$

und das Moment um die Profilvorderkante

$$c_m = -\frac{\pi}{4} \cdot (2 \cdot A_0 + 2 \cdot A_1 + A_2) \quad \text{Gl. 5-82}$$

### Birnbaum-Ackermann'sche Normalverteilung

Aus den beiden ersten Gliedern der in Gl. 5-79 angegebenen Fourier-Reihe zur Berechnung der Zirkulationsverteilung entlang der Skelettlinie, lassen sich die sog. *Birnbaum'schen Normalverteilungen* der Zirkulation angeben, d.h. Gl. 5-79 vereinfacht sich zu

$$k = A_0 \cdot k_I = 2 \cdot V_\infty \cdot A_0 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = 2 \cdot V_\infty \cdot A_0 \cdot \sqrt{\frac{1-X}{X}} \quad \text{Gl. 5-83}$$

Dies beschreibt die Strömung um die ebene angestellte Platte (*erste Normalverteilung*) und liefert die gleichen Ergebnisse für Auftrieb und Moment wie die Methode der konformen Abbildung für kleine Anstellwinkel, d.h.

$$c_A = 2 \cdot \pi \cdot \alpha \quad \text{Gl. 5-84}$$

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \cdot \alpha = -\frac{1}{4} \cdot c_A \quad \text{Gl. 5-85}$$

Die sog. *zweite Normalverteilung* beschreibt die elliptische Zirkulationsverteilung für das Parabelskelett

$$k = A_1 \cdot k_{II} = 2 \cdot V_\infty \cdot A_1 \cdot \sin \varphi = 4 \cdot V_\infty \cdot A_1 \cdot \sqrt{X \cdot (1-X)} \quad \text{Gl. 5-86}$$

Die Skelettlinie selbst wird beschrieben durch

$$Z^{(s)} = A_1 \cdot X \cdot (1-X) = 4 \cdot \frac{f}{l} \cdot X \cdot (1-X) \quad \text{Gl. 5-87}$$

Auftrieb und Moment ergeben sich zu

$$c_A = \pi \cdot A_1 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{f}{l} \quad \text{Gl. 5-88}$$

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \cdot A_1 = -2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{l} \quad \text{Gl. 5-89}$$

## 2. Hauptaufgabe der Skelett-Theorie

Berechnung der Zirkulationsverteilung  $k(x)$  bzw. der Geschwindigkeitsverteilung  $V(X)$  aus der Skelettlinie  $Z^{(s)}$  und dem Anstellwinkels  $\alpha$ . Für das Skelettprofil ergibt sich

$$\frac{V(\varphi)}{V_\infty} = 1 \pm \left( \alpha \cdot \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{v=1}^n v \cdot a_v \cdot \frac{\cos v \cdot \varphi - 1}{\sin \varphi} \right) \quad \text{Gl. 5-90}$$

Der erste Term in dem Klammerausdruck beschreibt die Geschwindigkeitsverteilung der ebenen Platte.

### 5.4.3 Stoßfreier Eintritt

An der Profilvorderkante, d.h.  $X = 0$ ,  $\varphi = \pi$ , ist die Wirbeldichte und somit die Geschwindigkeit (theoretisch) unendlich groß. Der Anstellwinkel, bei dem die Geschwindigkeit einen endlichen Wert erreicht wird als *Anstellwinkel des stoßfreien Eintritts* bezeichnet. Dies ist der einzige Anstellwinkel, bei dem die Umströmung der Vorderkante keine Saugkraft liefert. Für symmetrische Profile entspricht dies dem Nullauftriebswinkel  $\alpha_0$ , d.h. dem trivialen Ergebnis, daß die vektorielle Zerlegung der Auftriebskraft keinen Beitrag in  $x$ -Richtung (Saugkraft) liefert.

### 5.4.4 Symmetrische Profile (Tropfen-Theorie)

Ein *Profil tropfen* beschreibt ein symmetrisches Profil endlicher Dicke, der aus der Überlagerung einer Translationsströmung mit einer Verteilung  $q(x)$  von Quellen und Senken entsteht. Hierbei bewirken Quellen eine 'Aufweitung' der Profilkontur, während Senken eine 'Einschnürung' der Profilkontur bewirken.

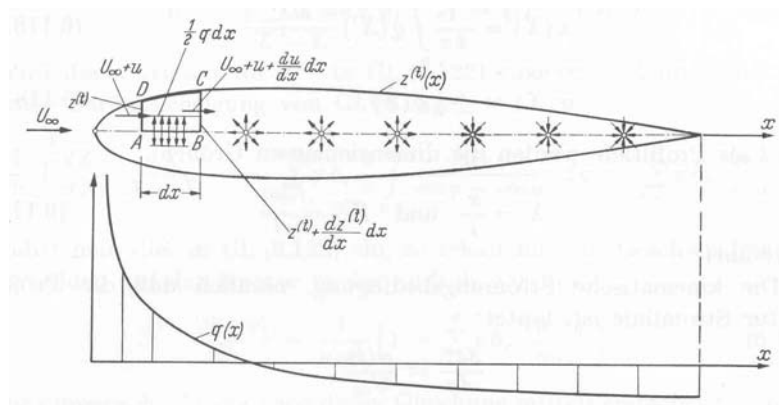


Abb. 5-24: Quell- und Senkenverteilung eines Profiltropfens [ 35]

Die Geschwindigkeitsverteilung auf der Kontur berechnet sich aus

$$\frac{V_K(\varphi)}{V_\infty} = \frac{1}{\kappa(\varphi)} \cdot \left( 1 + \sum_{v=1}^n v \cdot b_v \cdot \frac{\sin v \cdot \varphi}{\sin \varphi} \right) \quad \text{Gl. 5-91}$$

mit dem sog. Riegels-Faktor

$$\kappa(X) = \sqrt{1 + \left( \frac{dZ^{(t)}}{dX} \right)^2} \quad \text{Gl. 5-92}$$

### Ergebnisse der Tropfen-Theorie für Profile endlicher Dicke

Auftriebsanstieg

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = 2 \cdot \pi \cdot \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{Z^{(t)}}{\sin \varphi} \cdot d\varphi \right) \quad \text{Gl. 5-93}$$

Nullauftriebswinkel

$$\alpha_0 = -\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{Z^{(s)}}{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi \quad \text{Gl. 5-94}$$

Neutralpunktlage

$$\frac{x_N}{l} = \frac{1}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{1 + 2 \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \cos 2\varphi}{\sin \varphi} \cdot Z^{(t)} \cdot d\varphi \right) \quad \text{Gl. 5-95}$$

Nickmomentenanstieg

$$\frac{dc_m}{d\alpha} = - \int_0^\pi \frac{2 \cdot \cos \varphi - \cos 2\varphi}{\sin \varphi} \cdot Z^{(t)}(\varphi) \cdot d\varphi \quad \text{Gl. 5-96}$$

Nullmoment

$$c_{m0} = - \int_0^\pi \frac{2 \cdot \cos \varphi - \cos 2\varphi}{1 - \cos \varphi} \cdot Z^{(t)}(\varphi) \cdot d\varphi \quad \text{Gl. 5-97}$$

Anstellwinkel des stoßfreien Eintritts

$$\alpha_s = - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot Z^{(s)} d\varphi \quad \text{Gl. 5-98}$$

Auftriebsbeiwert des stoßfreien Eintritts

$$c_{As} = 4 \cdot \int_0^\pi \frac{Z^{(s)}}{\sin^2 \varphi} \cdot d\varphi \quad \text{Gl. 5-99}$$

## 5.5 Einfluß der Viskosität (Reibung) bei Profilen

### 5.5.1 Auftrieb, Auftriebsanstieg und Maximalauftrieb

Die maßgebliche Kenngröße zur Beschreibung des Reibungseinflusses ist die Reynoldszahl, welche entsprechend Kapitel 2.1 das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften in einer Strömung beschreibt. Bis zu Reynoldszahlen von ca.  $Re = 10^5$  liefert die (reibungsfreie) Potentialtheorie brauchbare Ergebnisse. In diesen Reynoldszahlbereich fallen jedoch lediglich Insekten, Vögel und Modellflugzeuge. Selbst Segelflugzeuge und einmotorige Sportflugzeuge bewegen sich in einem Reynoldszahlbereich, der um eine Größenordnung darüber liegt, d.h.  $Re > 10^6$ . Da die Reynoldszahl unter anderem ein wichtiges Kriterium für das Ablöseverhalten der Grenzschicht darstellt, wird dadurch auch die Grenze des maximalen Auftriebs bestimmt. Wie aus Abb. 5-25a ersichtlich ist, ist der Auftriebsanstieg  $dc_A/d\alpha$  für kleine Anstellwinkel fast unabhängig von der Reynoldszahl. Erst kurz vor Erreichen von  $c_{Amax}$  erfolgt eine Abweichung von dem linearen Verhalten. Die Auftriebsgrenze  $c_{Amax}$  hingegen zeigt eine direkte Abhängigkeit von der Reynoldszahl.

Unabhängig von der Reynoldszahl bewirkt eine Vergrößerung des Hinterkantenwinkels  $2 \cdot \tau$  eine Verringerung des Auftriebsanstiegs. Die stärkere Aufdickung der Grenzschicht an der Saugseite im Verhältnis zur Druckseite wirkt wie eine zusätzliche Wölbung und die Kutta'sche Abflußbedingung kann nicht mehr erfüllt werden, d.h. der hintere Staupunkt verschiebt sich von der Hinterkante an die Profiloberseite.

Sobald an der Saugseite des Profils infolge des starken Druckanstiegs die Strömung abzulösen beginnt vermindert sich auch der Auftriebsanstieg, bis der Auftrieb bei vollständiger Ablösung zusammenbricht.



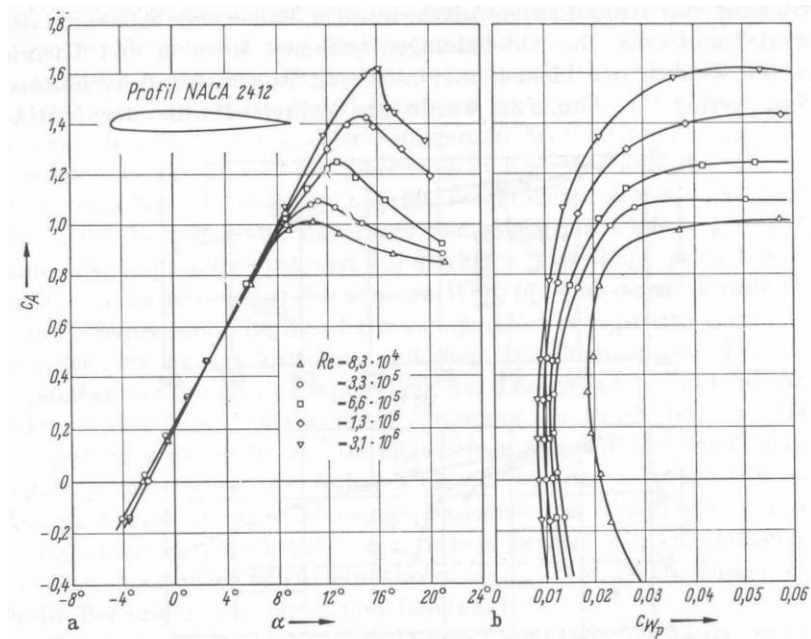


Abb. 5-25: NACA 2412: Auftrieb und Widerstand bei unterschiedlichen Reynoldszahlen [ 35]

### 5.5.2 Nasenradius und Ablöseverhalten

Bei kleineren  $Re$ -Zahlen kann es bereits in der Nähe der Profilnase zu einem Ablösen der laminaren Grenzschicht kommen, die dann im abgelösten Zustand turbulent wird und etwas weiter stromabwärts sich wieder an die Profilkontur anlegen kann. Es handelt sich hierbei um eine *laminare Ablöseblase*. Mit zunehmender  $Re$ -Zahl wandert die Stelle des turbulenten Wiederanlegens stromaufwärts bis die Ablöseblase verschwindet und bereits vor der laminaren Ablösung eine Transition, d.h. ein Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung stattfindet. Dies hat zur Folge, daß die Grenzschichtdicke wächst und die Stärke der Zirkulation und damit der Auftrieb verringert werden. Bei großen Reynoldszahlen beginnt die Strömung von der Hinterkante abzulösen, d.h. es liegt eine turbulente Ablösung vor. Der das Ablöseverhalten bei großen Anstellwinkeln dominierende Parameter, und damit die bestimmende Größe für den Maximalauftrieb  $c_{Amax}$ , ist der Nasenradius des Profils  $r_N$ . In Abb. 5-26 ist der Maximalauftrieb aufgetragen über dem Dickenverhältnis  $d/l$  mit dem Nasenradius als Parameter, ausgedrückt durch die dimensionslose Koordinate  $z_1/l$  mit  $z_1 = z(x/l=0.05)$ .

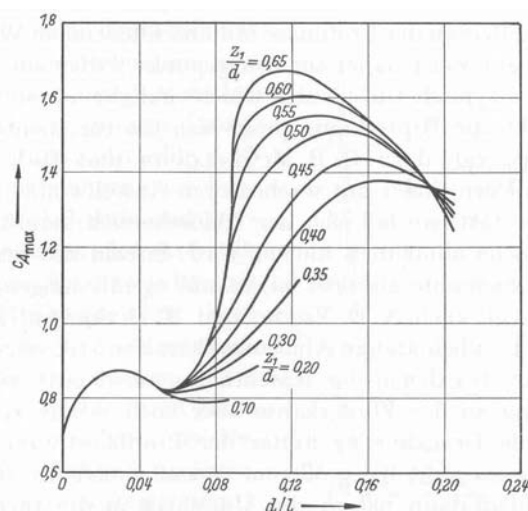


Abb. 5-26: Maximalauftrieb bei  $Re = 6 \cdot 10^6$  als Funktion des Dickenverhältnisses  $d/l$  [ 35]

Die Ablösecharakteristik von sehr dünnen Profilen unterscheidet sich grundlegend von dem dickeren Profile. Aufgrund der scharfen Vorderkante, d.h. extrem kleine Nasenradien, wie sie bei Überschallprofilen auftreten (z.B. Starfighter F104), erfolgt bereits bei sehr kleinen Anstellwinkeln infolge der erzwungenen hohen Umströmungsgeschwindigkeit an der Nase eine Ablösung der Strömung, die jedoch wenig später wieder anliegt, Abb. 5-27(1). Mit zunehmendem Anstellwinkel verschiebt sich der Wiederanlegepunkt immer weiter stromabwärts, bis die Saugseite komplett abgelöst ist und der Auftrieb zusammenbricht, Abb. 5-27(2).

Bei Profilen mittlerer Dicke erfolgt die Ablösung der laminaren Grenzschicht etwas hinter der Profilnase erst bei größeren Anstellwinkeln, die im abgelösten Zustand turbulent wird und sich im turbulenten Zustand wieder anlegt. Mit zunehmendem Anstellwinkel verschiebt sich der Wiederanlegepunkt immer weiter stromaufwärts, wodurch sich die *laminare Ablöseblase* verkleinert. Hat die Ablösestelle die Profilvorderkante erreicht, kann die Strömung sich nicht mehr anlegen und es kommt zu einem sprunghaften Auftriebsverlust, Abb. 5-27(3).

Bei sehr dicken Profilen ( $d/l > 0.5$ ), wie sie z.B. bei Flugzeugen für die Anfangsschulung im Segelflug verwendet werden, legt sich die Strömung auch bei sehr großen Anstellwinkeln hinter der laminaren Ablösestelle wieder an. Das Ablöseverhalten wird hier von zwei unterschiedlichen Prozessen beeinflusst. Einerseits der Ausdehnung der laminaren Ablöseblase an der Nase und andererseits die mit zunehmendem Anstellwinkel von der Hinterkante stromaufwärts wandernde turbulente Ablösung. Je nach  $Re$ -Zahl und Profildicke können diese Effekte sich unterschiedlich stark auswirken. Bei sehr großen Reynoldszahlen kann die laminare Ablöseblase vollkommen verschwinden, da aufgrund der hohen  $Re$ -Zahl bereits vor dem starken Druckanstieg ein natürlicher Umschlag zur turbulenten Grenzschicht erfolgt und erst gar keine laminare Strömung mehr diese Stelle erreicht. Ein charakteristisches Kennzeichen einer turbulenten im Vergleich zu einer laminaren Grenzschicht besteht neben der größeren Dicke in der Fähigkeit erst bei höheren Anstellwinkeln abzulösen, d.h. in diesem Fall löst die turbulente Grenzschicht erst in der Nähe der Profilhinterkante ab und der Ablösepunkt wandert mit zunehmendem Anstellwinkel nach vorne. Dies bewirkt ein gutmütiges Abreißverhalten da sich der Auftrieb nicht sprunghaft, sondern allmählich verringert, was insgesamt zu einem für Anfänger leichter zu beherrschenden Flugzustand führt, Abb. 5-27(4).

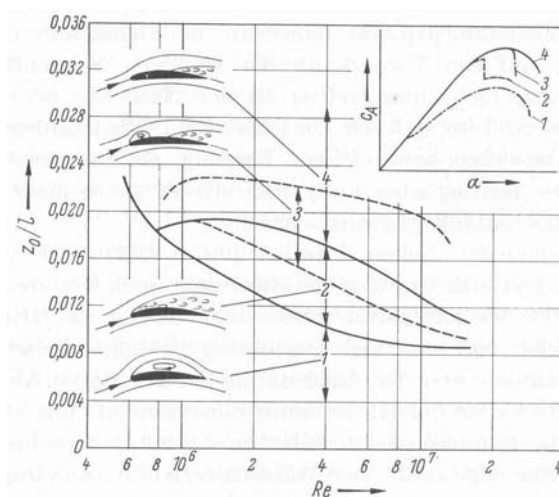


Abb. 5-27: Ablöseverhalten dicker und dünner Profile [ 35]

### 5.5.3 Profilwiderstand

Der Profilwiderstand hängt im wesentlichen von dem Umschlagpunkt von einer laminaren zu einer turbulenten Grenzschicht, d.h. von dem Verhältnis der laminaren zur turbulenten Laufstrecke ab. Die grundlegenden Verhältnisse in der Grenzschicht sollen zunächst an einer ebenen Platte betrachtet werden.

#### Grenzschichtdicke bei laminarer Strömung

Außerhalb der Grenzschicht können die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften vernachlässigt werden. Innerhalb der Grenzschicht können beide Kräfte jedoch von gleicher Größenordnung sein. Die Trägheitskraft pro Volumeneinheit beträgt

$$F_T \propto \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{Gl. 5-100}$$

Für eine Platte der Länge  $l$  ist der Gradient  $\partial u / \partial x$  proportional der Geschwindigkeit der Außenströmung  $V_\infty$  bezogen auf die Länge  $l$ . Somit gilt für die Trägheitskraft

$$F_T \propto \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{l} \quad \text{Gl. 5-101}$$

Für die Reibungskraft pro Volumeneinheit gilt

$$F_R \propto \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{Gl. 5-102}$$

Der Geschwindigkeitsgradient quer zur Wand  $\partial u / \partial y$  ist proportional der Geschwindigkeit der Außenströmung  $V_\infty$  bezogen auf die Grenzschichtdicke  $\delta$ , d.h.

$$F_R \propto \mu \cdot \frac{V_\infty}{\delta^2} \quad \text{Gl. 5-103}$$

Somit ergibt sich die Grenzschichtdicke zu

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\mu \cdot l}{\rho \cdot V_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu \cdot l}{V_\infty}} \quad \text{Gl. 5-104}$$

Der Proportionalitätsfaktor ergibt sich aus der Prandtl<sup>2</sup>schen Grenzschichtgleichung und die Lösung für die Dicke einer laminaren Grenzschicht an der ebenen Platte lautet

$$\frac{\delta}{l} = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu}{V_\infty \cdot l}} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{Gl. 5-105}$$

Der dimensionslose Beiwert des Reibungswiderstands der ebenen Platte ergibt sich zu

$$c_f \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho \cdot V_\infty \cdot l}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{Gl. 5-106}$$

bzw.

$$c_f = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{Gl. 5-107}$$

<sup>2</sup> Ludwig Prandtl (1875 - 1953): Deutscher Physiker, Begründer der modernen Strömungslehre, Erbauer des ersten deutschen Windkanals in Göttingen 1908

Für die ebene Platte kann bis zu einer Re-Zahl von ca.  $Re = 5 \cdot 10^5 - 10^6$  von einer laminaren Grenzschicht ausgegangen werden.

### Grenzschichtdicke bei turbulenter Strömung

Die Lage der Umschlagstelle  $x_u$  von laminarer zu turbulenter Strömung hängt einerseits von der Geschwindigkeit der freien Anströmung und andererseits von dem vorliegenden Turbulenzniveau in der Strömung ab. Über die Position der Umschlagstelle  $x_u$  lässt sich die sog. *kritische Reynoldszahl*  $Re_{krit}$  definieren.

$$Re_{krit} = \frac{V_\infty \cdot x_u}{\nu} \quad \text{Gl. 5-108}$$

Für die Anfangsbedingung  $\delta=0$  ergibt sich die Dicke der turbulenten Grenzschicht in Abhängigkeit von der Lauflänge  $x$  zu

$$\delta(x) = 0.37 \cdot x \cdot \left( \frac{V_\infty \cdot x}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}} \quad \text{Gl. 5-109}$$

In Abhängigkeit von der kritischen Reynoldszahl ergibt sich für den Reibungswiderstand der ebenen Platte

$$c_f = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}} - \frac{A}{Re} \quad \text{Gl. 5-110}$$

wobei der Faktor  $A$  die Widerstandsverringerng infolge einer laminaren Anlaufstrecke berücksichtigt

$Re_{krit}$	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$3 \cdot 10^6$
$A$	1050	1700	3300	8700

Tab. 5-2: Korrekturfaktoren als Funktion der kritischen Reynoldszahl

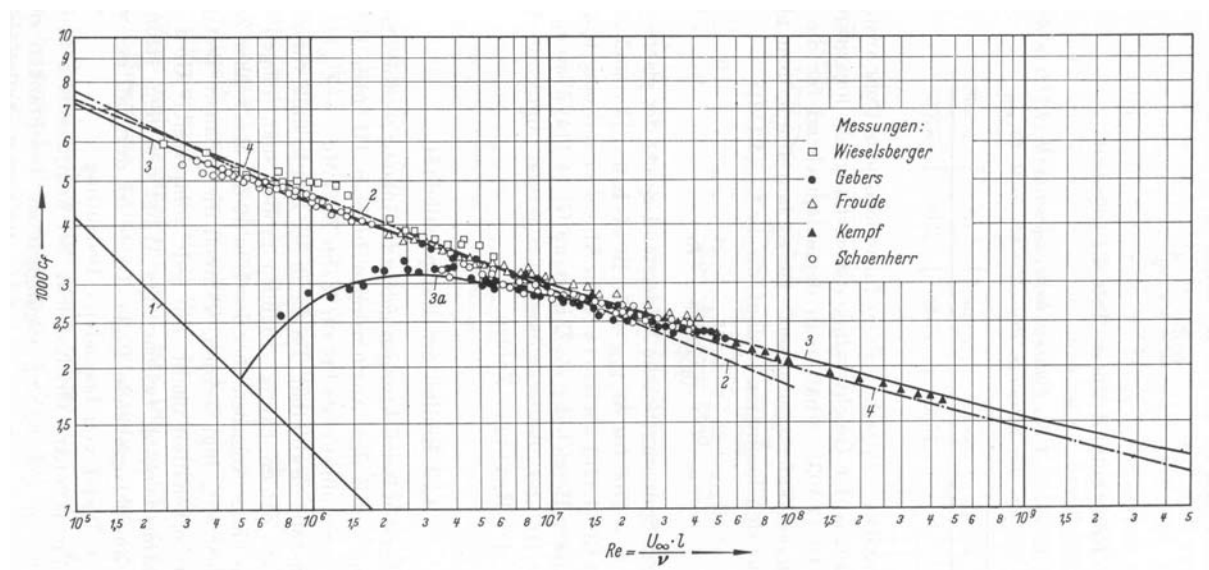


Abb. 5-28: Reibungswiderstand der ebenen Platte [ 35]

- (1) laminar (Blasius)
- (2) turbulent (Prandtl)
- (3) turbulent (Prandtl-Schlichting)

- (3a) Übergang laminar-turbulent  
 (4) turbulent (Schultz-Grunow)

### Einfluß der Rauigkeit

Der Umschlag von einer laminaren zu einer turbulenten Grenzschicht läßt sich durch künstliche Hindernisse, sog. Stolperfallen, erzwingen. Dieses Verfahren wird insbesondere bei Windkanalversuchen angewendet, bei denen aufgrund der Größenverhältnisse keine Flugreynoldszahlen im Experiment dupliziert werden können. Da jedoch der Reibungswiderstand stark von der Verteilung der laminaren zur turbulenten Lauflänge abhängt, werden an dem Windkanalmodell, insbesondere an Rumpf und Tragflügel, sogenannte Transitionsstreifen angebracht um den Umschlag der laminaren in eine turbulente Grenzschicht zu erzwingen. Die Höhe solcher Transitionsstreifen ergibt sich aus der Berechnung der zulässigen Rauigkeit, ab der gerade noch keine Widerstandszunahme gegenüber der hydraulisch glatten Wand erfolgt.

$$k_{zul} < 100 \cdot \frac{\nu}{V_\infty} \quad \text{bzw.} \quad \frac{k_{zul}}{l} < \frac{100}{Re} \quad \text{Gl. 5-111}$$

Die Profileigenschaften, insbesondere die Strömungsverhältnisse auf der Saugseite können von der Qualität der Oberfläche stark beeinflusst werden. Störung wirken sich hier wesentlich stärker aus als z.B. auf der Profilunterseite.

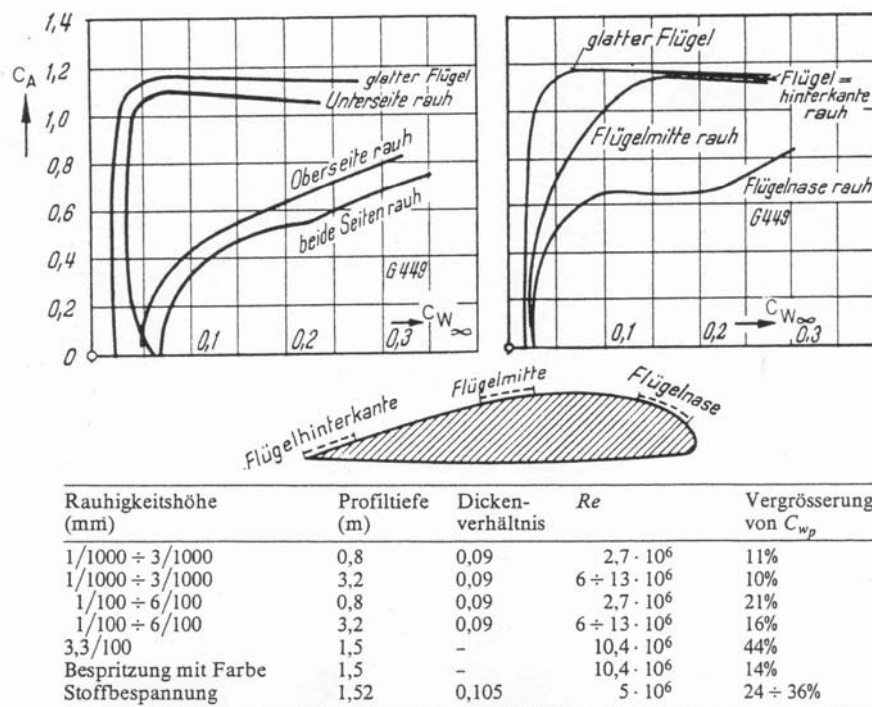


Abb. 5-29: Einfluß der Rauigkeit auf Auftrieb und Widerstand [ 12]

Besonders gefährlich gestalten sich Flüge unter Vereisungsbedingungen, d.h. bei hoher relativer Luftfeuchte können auch bei Temperaturen über Null aufgrund der Abkühlung infolge der Strömungsbeschleunigung im Vergaser oder am Profil Vereisungserscheinungen auftreten. Bei dem Fehlen von Kondensationskernen kann Wasser auch bei negativen Temperaturen (bis zu  $-40^\circ\text{C}$ ) im flüssigen Aggregatzustand verbleiben und erst beim Auftreffen auf die Flugzeugstruktur in den festen Aggregatzustand wechseln. Infolge der Vereisung erhöht sich die Gesamtmasse des Flugzeugs und zusätzlich verändert sich das

Profil des Tragflügels, in der Regel nicht zum Besseren. Die Auswirkung unterschiedlicher Vereisungsformen auf Auftrieb und Widerstand sind in Abb. 5-30 dargestellt.

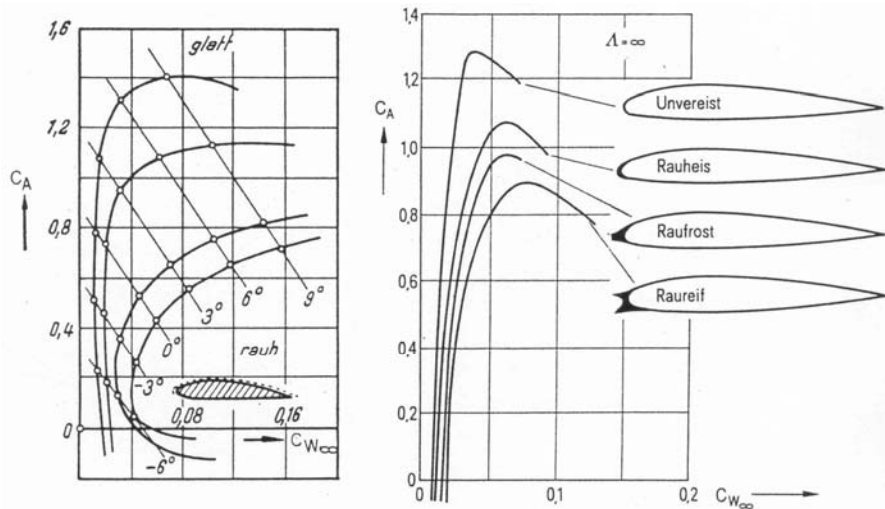


Abb. 5-30: Wirkung unterschiedlicher Vereisungsformen auf Auftrieb und Widerstand [ 12]

Allgemein lassen sich drei Arten von Rauigkeitseinflüssen unterscheiden. *Einzelstörungen*, z.B. nicht sauber versenkte Nietköpfe, erzeugen in der laminaren Anlaufstrecke einen Turbulenzkeil, der sich z.B. mittels einer Infrarotkamera sichtbar machen läßt. *Welligkeiten*, wie sie nach Überschreiten der zulässigen Strukturbelastungsgrenzen an der Tragflächenoberseite auftreten können, z.B. nach Kunstflugversuchen mit nicht dafür ausgelegtem Fluggerät, bewirken bei laminaren Grenzschichten Ablöseerscheinungen, die zu einem Widerstandsanstieg führen. Das gleiche gilt für *Krümmungssprünge*, also Unstetigkeitsstellen, auf der Profiloberseite. Generell führt ein Druckanstieg in der Grenzschicht zu Ablösung, wohingegen ein Druckabfall in der Regel folgenlos bleibt.

### Einfluß der Reynoldszahl

Die Abhängigkeit des minimalen Profilwiderstands  $c_{Wmin}$  von der Reynoldszahl ist in Abb. 5-31a für symmetrische NACA-Profile und in Abb. 5-31b für gewölbte NACA-Profile dargestellt.

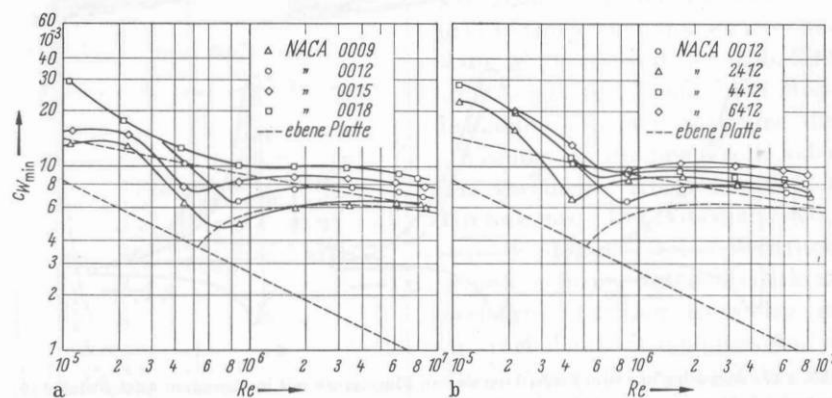


Abb. 5-31: Minimaler Widerstand als Funktion der Reynoldszahl [ 35]

Interessant ist auch das Widerstandsverhalten von *Laminarprofilen*. In Abb. 5-32 sind die Ergebnisse einer Dreikomponentenmessung, d.h. Auftrieb, Moment und Widerstand, für ein NACA-Profil der 6er-Serie dargestellt. In einem eng begrenzten Anstellwinkelbereich verläuft

der Profilwiderstand  $c_{WP}$  senkrecht, also unabhängig vom Anstellwinkel  $\alpha$ . Mit zunehmender Reynoldszahl verringert sich der Profilwiderstand, während die sog. *Laminardelle* immer kleiner wird. Eine Reduzierung der Laminardelle bedeutet, daß der Bereich, innerhalb dessen der Widerstand unabhängig vom Anstellwinkel verläuft, sich ebenfalls verringert. Der Anwendungsbereich solcher Laminarprofile liegt bei Verkehrsflugzeugen, die hinsichtlich ihrer Flugleistung im wesentlichen auf den Reiseflug ausgelegt sind, d.h. ein schmales Höhenband (konstante Reynoldszahl) und eine konstante Reisegeschwindigkeit (konstanter Anstellwinkel). Für Kampfflugzeuge sind solche Profile denkbar ungeeignet, da hier eine Envelope abgedeckt werden muß, welche sich stark von der eines zivilen Verkehrsflugzeugs unterscheidet, d.h. ein sehr viel größerer Anstellwinkel- und Geschwindigkeitsbereich, vgl. Kapitel 1.4, Abb. 1-5.

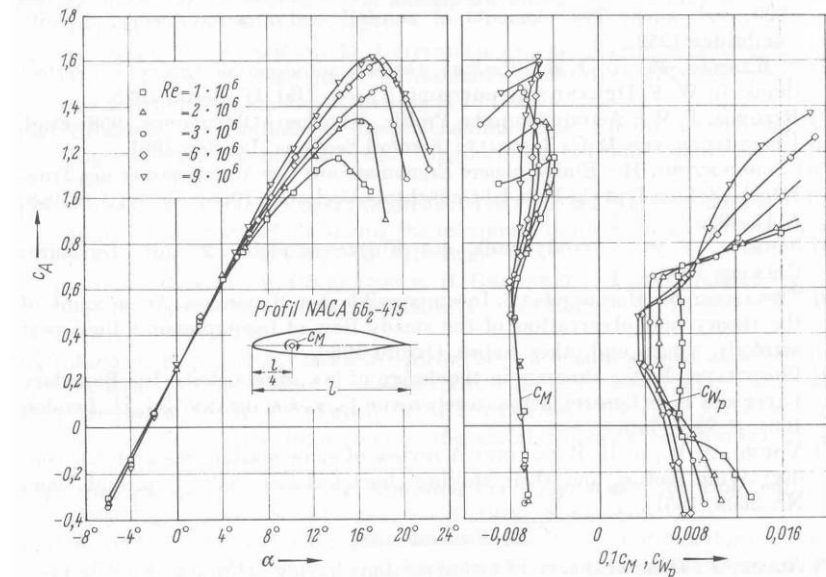


Abb. 5-32: Dreikomponentenmessung des Laminarprofils NACA 662-415

Der Profilwiderstand einer Profilseite ergibt sich aus der Lösung für die Grenzschicht zu

$$c_{WP} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}} \cdot \left\{ \int_{\frac{x_u}{l}}^1 \left( \frac{u}{V_\infty} \right)^{3.5} \cdot d \cdot \frac{x}{l} + C \right\}^{0.8} \quad \text{Gl. 5-112}$$

Der Faktor  $C$  berechnet sich aus der Forderung einer gleichen Impulsverlustdicke  $\delta_2$  beim Übergang von laminarer zu turbulenter Grenzschicht

$$C = 62.5 \cdot \left( \frac{\delta_2}{l} \right)^{1.25} \cdot Re^{0.25} \cdot \left( \frac{u}{V_\infty} \right)^{3.75} \quad \text{Gl. 5-113}$$

Die Impulsverlustdicke  $\delta_2(x)$  berechnet sich aus

$$\delta_2(x)^2 = \frac{0.47 \cdot \nu}{V_\infty^6} \cdot \int_{x=0}^x V_\infty^5 \cdot dx \quad \text{Gl. 5-114}$$

Der Profilwiderstand bei turbulenter Grenzschicht läßt sich auch in Abhängigkeit vom Dickenverhältnis  $d/l$  angeben, wobei der Faktor  $c$  in dem Wertebereich  $c = 2$  bis  $2.5$  liegt.

$$c_{WP} = 2 \cdot c_{f,t} \cdot \left( 1 + c \cdot \frac{d}{l} \right) \quad \text{Gl. 5-115}$$

### 5.6 Näherungsverfahren zur Bestimmung der Druckverteilung am Profil

Dieses von *Hartmann* auf der Basis des Singularitäten-Verfahrens entwickelte Näherungsverfahren, ermöglicht die Bestimmung der Lastverteilung über die Profiltiefe, die sich aus der Druckverteilung an ProfiOber- und -unterseite ergibt. Eine getrennte Berechnung der Druckverteilung an Ober- und Unterseite ist mittels dieses Verfahrens nicht möglich. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, daß der Gesamtauftrieb des Profils bekannt ist. Die resultierende Druckverteilung läßt sich aus drei Anteilen zusammensetzen. Einem sog. *Streckenprofil* werden die Einflüsse infolge Wölbung und Klappenausschlag überlagert. Das Streckenprofil liefert die Druckverteilung eines symmetrischen Profils, welches den gleichen Auftriebsbeiwert wie das vorliegende Profil mit Wölbung und Klappenausschlag aufweist. Wölbung und Klappenausschlag liefern keinen Beitrag zum Auftrieb, beeinflussen jedoch die Druckverteilung. Es handelt sich um sog. *Nullverteilungen*.

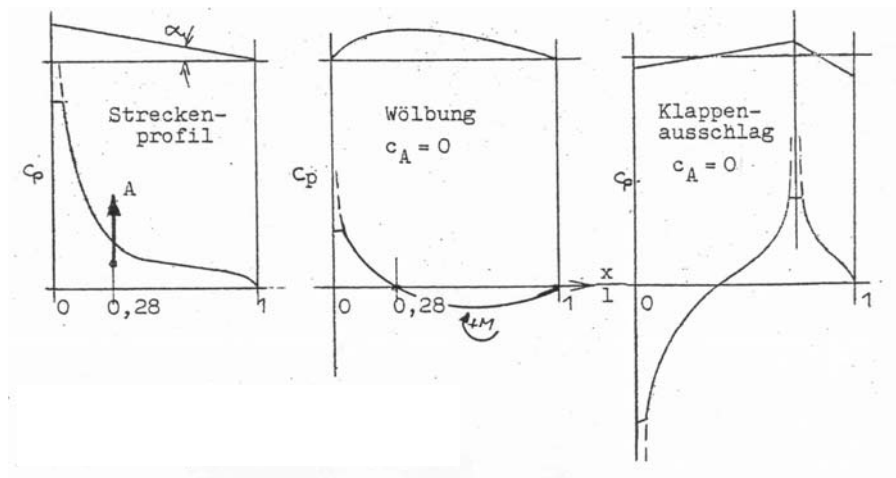


Abb. 5-33: Schematische Darstellung der drei Anteile der Druckverteilung [ 22]

#### Druckverteilung für ein symmetrische Profil ohne Ruderausschlag

$$-\Delta c_{p(\text{sym. Profil})} = c_A \cdot f_A(\Theta) \quad \text{Gl. 5-116}$$

mit 
$$f_A(\Theta) = 0.716 \cdot \cot \frac{\Theta}{2}, \quad \Theta = \arctan \left( 1 - \frac{2 \cdot x}{L} \right) \quad \text{Gl. 5-117}$$

und 
$$c_A = c_A(\eta = 0) + \frac{dc_A}{d\eta} \cdot \eta_{\text{eff}} \quad \text{Gl. 5-118}$$

Gl. 5-116 liefert die Druckverteilung für ein symmetrisches Profil ohne Ruderausschlag, welches den gleichen Auftrieb liefert wie das Profil mit Wölbung und Klappenausschlag. Die resultierende Luftkraft greift bei 28% der Profiltiefe an. Der Winkel  $\eta$  beschreibt einen generellen Winkel, d.h. je nach Anwendungsfall einen Anstellwinkel, Klappen- oder Ruderausschlag.

#### Nullverteilung infolge der Profilwölbung

$$-\Delta c_{p(\text{Wölbung})} = \bar{c}_m \cdot f_m(\Theta) \quad \text{Gl. 5-119}$$

mit 
$$f_m(\Theta) = 5.80 \cdot \sin \Theta - 3.26 \cdot \cot \frac{\Theta}{2}, \quad \Theta = \arctan \left( 1 - \frac{2 \cdot x}{L} \right) \quad \text{Gl. 5-120}$$



und 
$$\bar{c}_m = c_m(\eta = 0) + 0.28 \cdot c_A(\eta = 0) \quad \text{Gl. 5-121}$$

$$c_m(\eta = 0) = c_{m0} - 0.25 \cdot c_A \quad \text{Gl. 5-122}$$

$\Rightarrow$  
$$\bar{c}_m = c_{m0} + 0.03 \cdot c_A(\eta = 0) \quad \text{Gl. 5-123}$$

Gl. 5-119 liefert keinen Beitrag zum Auftrieb sondern berücksichtigt lediglich den Einfluß der Wölbung auf die Druckverteilung. Der Momentenbeiwert des Profils bei nicht ausgeschlagenem Ruder  $\bar{c}_m$  ist auf die Profilhöhe bei  $x=0.28 \cdot l$  bezogen.

### Nullverteilung infolge Ruderausschlag

$$-\Delta c_{p(\text{Ruderausschlag})} = \eta_{\text{eff}} \cdot f_n(\Theta, \Phi) \quad \text{Gl. 5-124}$$

$$f_n(\Theta, \Phi) = 1.30 \cdot \log \frac{1 - \cos(\Theta + \Phi)}{1 - \cos(\Theta - \Phi)} + (0.024 - 1.273 \cdot \sin \Phi) \cdot \cot \frac{\Theta}{2} \quad \text{Gl. 5-125}$$

mit 
$$\Phi = \arccos\left(\frac{2 \cdot l_R}{L} - 1\right), \quad \Theta = \arctan\left(1 - \frac{2 \cdot x}{L}\right) \quad \text{Gl. 5-126}$$

Gl. 5-124 liefert ebenfalls eine Nullverteilung, d.h. sie beschreibt den Einfluß eines Ruder- oder Klappenausschlags  $\eta$  auf die Druckverteilung.

Die Druckverteilung  $p^*(x)$  bzw. der dimensionslose Druckbeiwert  $\Delta c_p$  ergeben sich aus den drei Anteilen Streckenlast, Nullverteilung infolge Wölbung und Nullverteilung infolge Klappenausschlag zu

$$-\Delta c_p = \frac{p^*(x)}{\bar{q}} = c_A \cdot f_A(\Theta) + \bar{c}_m \cdot f_m(\Theta) + \eta_{\text{eff}} \cdot f_n(\Theta, \Phi) \quad \text{Gl. 5-127}$$

Das Moment mit der Profilhöhe als Bezugspunkt läßt sich mit den Werten für den Momentenanstieg aus Tab. 5-3 berechnen zu

$$M_N = \bar{q} \cdot l^2 \cdot \left( \bar{c}_m - 0.28 \cdot c_A + \eta_{\text{eff}} \cdot \frac{dc_m}{d\eta} \right) \quad \text{Gl. 5-128}$$

$\frac{l_R}{L}$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$\frac{dc_m}{d\eta}$	-0.32	-0.43	-0.48	-0.51	-0.51	-0.51	-0.49	-0.46	-0.42	-0.38

Tab. 5-3: Momentenanstieg in Abhängigkeit von der relativen Rudertiefe [ 22 ]

## 5.7 Übungen zum Kapitel Tragflügel unendlicher Streckung in inkompressibler Strömung

### A5.1 Druckpunkt und Neutralpunkt

Definieren Sie Begriffe Druck- und Neutralpunkt und treffen Sie eine Aussage bezüglich der Ortsfestigkeit dieser beiden Punkte.

### A5.2 Zirkulation

1. Erläutern Sie den Begriff 'Zirkulation'
2. Welche Aussage können Sie über das Verhältnis der Geschwindigkeiten an der Ober- und Unterseite eines Profils treffen, wenn die Zirkulation gleich Null ist? Nennen Sie ein Beispiel.
3. Geben Sie die Auftriebsgleichung von Joukowski, sowie die Definition des Auftriebs als Funktion des dimensionslosen Auftriebsbeiwerts an.

### A5.3 Ergebnisse für die ebene Platte

1. Geben Sie für kleine Anstellwinkel  $\alpha$  den theoretischen Auftriebsbeiwert, Auftriebsanstieg und das Nickmoment für eine ebene Platte in einer reibungsfreien Strömung an.
2. Welche Bedeutung haben die Ergebnisse der ebenen Platte für real ausgeführte Profile?
3. Was verstehen Sie unter dem d'Alembert'schen Paradoxon?

### A5.4 Näherungsverfahren zur Berechnung der Druckverteilung in Profilrichtung

Ein Flugzeug bewegt sich mit  $V_\infty = 360 [km/h]$  bei einem Staudruck von  $\bar{q}_\infty = 6128 [N/m^2]$ .  
Die Profiltiefe beträgt  $l = 1.3 [m]$  und das Tiefenverhältnis des Querruders beträgt  $l_R/l = 0.2$ .

geg.:  $C_A(\xi = 0) = 0.44$ ,  $C_{m_0} = -0.01$

$$\xi_{r,eff} = +9^\circ, C_{A,r} = 0.64$$

$$\xi_{l,eff} = -13^\circ, C_{A,l} = 0.16$$

Für einen Flügelschnitt im Querruderbereich soll für beide Querruderausschläge die Druckverteilung über die Profiltiefe für folgende Stützstellen berechnet werden:

$$x/l = 0, 0.03, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.785, 0.815, 0.9, 1.0$$

## 6    Tragflügel endlicher Streckung in inkompressibler Strömung

### 6.1    Geometrie des Tragflügels

Die Hauptaufgabe des Tragflügels besteht in der Erzeugung des erforderlichen Auftriebs, der jedoch zu einem gewissen Anteil auch vom Flugzeugrumpf geliefert wird. Weitere Aufgaben bestehen in der Aufnahme von Treibstoff in internen Tanks oder Wasserballast (Segelflugzeuge), der externen Aufnahme von Triebwerksgondeln und Außenlasten, d.h. Waffen und externen Tanks oder dem Hauptfahrwerk. Tragflügel werden in der Regel symmetrisch ausgelegt, was jedoch nicht unbedingt zwingend erforderlich ist, wie der von Blohm&Voss zu Beginn der 40er-Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelte Aufklärer BV141 zeigt.

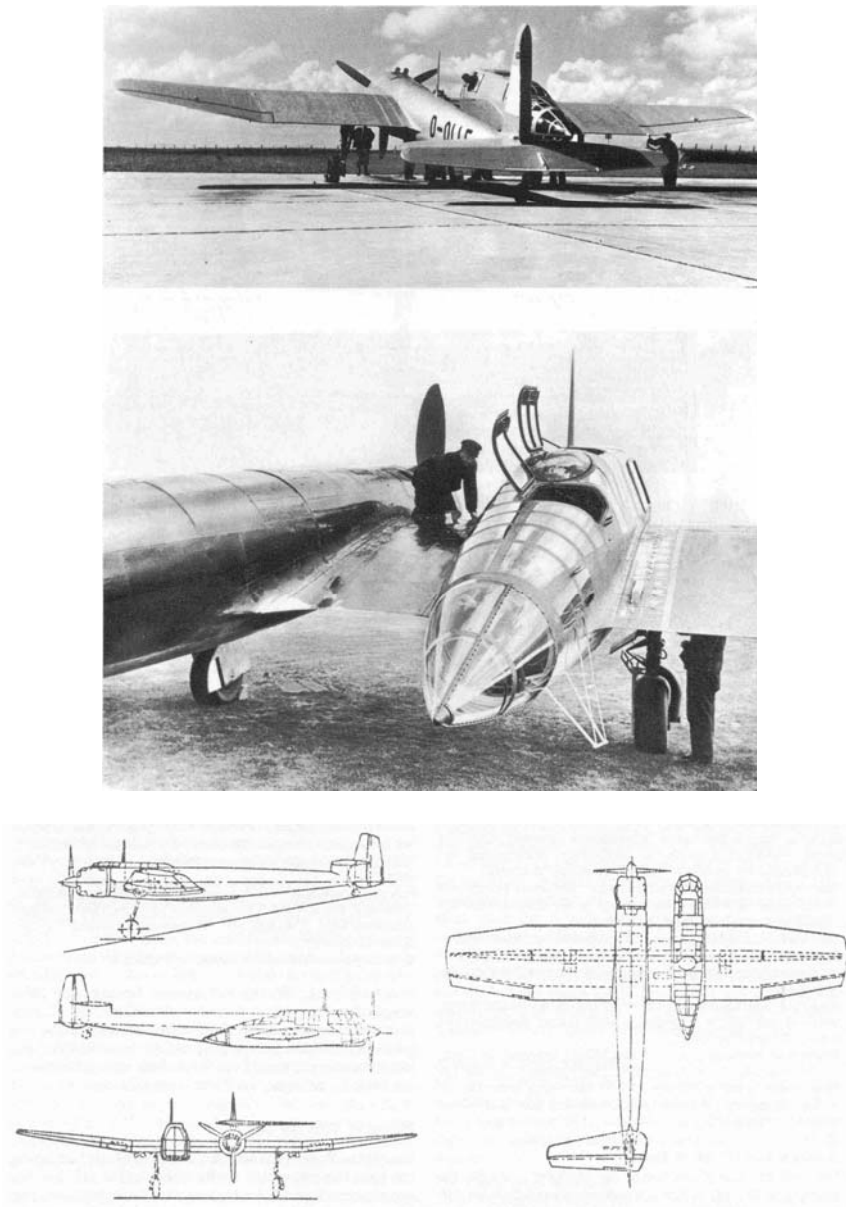
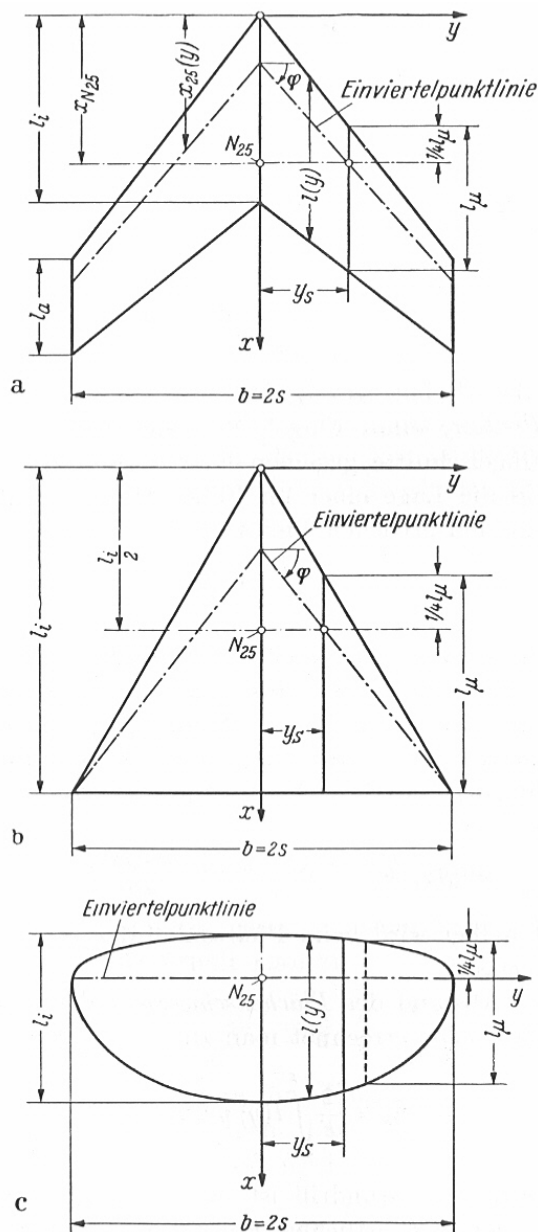


Abb. 6-1:    Aufklärer BV141 [ 33]



Wesentlich Beschreibungsmerkmale der geometrischen Form des Tragflügels sind

- Grundriß (Spannweite, Pfeilung, Zuspitzung, Verteilung der Flügeltiefe)
- Flügelprofil (Dicke, Dickenrücklage, Wölbung, Wölbungsrücklage)
- Verwindung (geometrisch, aerodynamisch)
- V-Stellung

Auf den Einfluß der Tragflügelgeometrie auf die statische Stabilität, insbesondere bei der Seitenbewegung, wird noch in Kapitel 1 näher eingegangen.

Die allgemein üblichen Bezeichnungen zur geometrischen Beschreibung eines Tragflügels sind in Tab. 6-1 zusammengefaßt.

Abb. 6-2: Geometrische Bezeichnungen bei Flügeln unterschiedlicher Grundrißformen

$\xi = \frac{x}{s}, \quad \eta = \frac{y}{s}, \quad \zeta = \frac{z}{s}$	dimensionslose Koordinaten
$s$	Halbspannweite
$b = 2 \cdot s$	Spannweite
$\lambda = \frac{l_a}{l_i}$	Flügelzuspitzung, Verhältnis äußerer zu innerer Flügeltiefe
$S = \int_{-s}^{+s} l(y) dy$	Flügelfläche, einschließlich dem überdeckten Rumpfteil
$\Lambda = \frac{b^2}{S}$	Streckung oder Seitenverhältnis

$l_m = \frac{S}{b}$	mittlere Flügeltiefe
$l_\mu = \frac{1}{S} \cdot \int_{-s}^{+s} l^2(y) \cdot dy = l(y_s)$	Flügelbezugstiefe, gleich Flügeltiefe im Flächenschwerpunkt
$\varphi(y) = \arctan\left(\frac{dx(y)}{dy}\right)$	Pfeilung
$\varphi_{25}(y) = \arctan\left(\frac{dx_{25}(y)}{dy}\right)$	Pfeilung der 1/4-Linie
$\nu$	V-Stellung
$y_s = \frac{2}{S} \cdot \int_0^s l(y) \cdot y \cdot dy$	Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte
$x_{N25} = \frac{1}{S} \cdot \int_{-s}^{+s} l(y) \cdot x_{25}(y) \cdot dy$	Geometrischer Neutralpunkt, entspricht dem Flächenschwerpunkt des Gesamtflügels, sofern dieser auf der 1/4-Linie mit einer der örtlichen Flügeltiefe proportionalen Gewichtsverteilung belegt ist

Tab. 6-1: Geometrische Parameter des Tragflügels

Häufig werden geometrisch einfache Grundformen verwendet, was weniger auf aerodynamische als auf fertigungstechnische Gründe zurückzuführen ist. Dies gilt insbesondere für kleinere einmotorige Flugzeuge, bei denen Rechteckflügel in Metallbauweise zum Einsatz kommen. Die charakteristischen Werte für Rechteck-, Trapez-, Dreieck- und Ellipsenflügel sind in Tab. 6-2 zusammengefasst, wobei für die Zuspitzung  $\lambda = l_a/l_i$  gilt und  $\eta = y/s$  die dimensionslose Koordinate in Spannweitenrichtung beschreibt.

	Rechteck	Trapez	Dreieck	Ellipse
Flügel-tiefe $l$	$l = l_a = l_i$	$[1 - (1 - \lambda) \cdot \eta] \cdot l_i$	$(1 - \eta) \cdot l_i$	$\sqrt{1 - \eta^2} \cdot l_i$
Flügel-fläche $S$	$b \cdot l$	$\frac{1 + \lambda}{2} \cdot b \cdot l_i$	$\frac{1}{2} \cdot b \cdot l_i$	$\frac{\pi}{4} \cdot b \cdot l_i$
Seiten-verhältnis $\Lambda$	$\frac{b}{l}$	$\frac{2}{1 + \lambda} \cdot \frac{b}{l_i}$	$2 \cdot \frac{b}{l_i}$	$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{b}{l_i}$
Mittlere Flügeltiefe $l_m$	$l_m = l_a = l_i$	$\frac{1 + \lambda}{2} \cdot l_i$	$\frac{1}{2} \cdot l_i$	$\frac{\pi}{4} \cdot l_i$
Bezugs-flügeltiefe $l_\mu$	$l_\mu = l_a = l_i$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda} \cdot l_i$	$\frac{2}{3} \cdot l_i$	$\frac{8}{3 \cdot \pi} \cdot l_i$
Flächen-schwerpunkt $\eta_s = \frac{y_s}{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \lambda}{1 + \lambda}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3 \cdot \pi}$
Neutral-punkt $x_{N25}$	$\left(\frac{1}{4} + \frac{\Lambda}{4} \cdot \tan \varphi\right) \cdot l_i$	$\left[\frac{1}{4} + \frac{\Lambda}{12} \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) \cdot \tan \varphi\right] \cdot l_i$	$\left(\frac{1}{4} + \frac{\Lambda}{12} \cdot \tan \varphi\right) \cdot l_i$	$\left(\frac{1}{4} + \frac{\Lambda}{6} \cdot \tan \varphi\right) \cdot l_i$

Tab. 6-2: Charakteristische Werte für Rechteck-, Trapez-, Dreieck- und Ellipsenflügel

## 6.2 Entstehung der freien Wirbel am Tragflügel endlicher Spannweite

Die Umströmung eines Tragflügels mit einer (theoretisch) unendlichen Spannweite läßt sich als ebenes Problem, d.h. durch eine zweidimensionale Strömung beschreiben, da die Strömungsverhältnisse in jedem beliebigen Profilschnitt in Spannweitenrichtung identisch sind. Etwas anders gestalten sich die Strömungsverhältnisse bei der Umströmung eines Tragflügels endlicher Spannweite. Infolge des Druckunterschieds von der Flügelunter- zur – oberseite werden die Flügelenden umströmt und es bildet sich an der Unterseite eine Strömung mit einer nach außen weisenden Geschwindigkeitskomponente und an der Oberseite mit einer nach innen gerichteten Geschwindigkeitskomponente. Direkt stromabwärts des Flügelaußenbereichs bildet sich eine Scherschicht, die sich zu einem Wirbel aufrollt. Diese beiden von den Flügelenden ausgehenden, in Strömungsrichtung verlaufenden Wirbel, werden als *freie Wirbel* bezeichnet und bilden zusammen mit dem *gebundenen Wirbel* des Flügels des Tragflügels (vgl. Kapitel 5.2.1) einen *Hufeisenwirbel*. Der ebenfalls in Abb. 6-4 dargestellte *Anfahrwirbel* bildet sich lediglich bei der Beschleunigung des Tragflügels aus der Ruhe und verbleibt (theoretisch) an der Stelle, an der er gebildet wurde.

Eine bedeutsame Konsequenz, die sich aus der Entstehung der freien Wirbel ergibt besteht darin, daß zur Erzeugung dieser Wirbel, d.h. zur Beschleunigung der ruhenden Luft in eine Drehbewegung, permanent Arbeit verrichtet werden muß. Diese Arbeit muß dem System in Form von Triebwerksschub zugeführt werden, obwohl diese zusätzliche Triebwerksleistung keinen Beitrag zum Auftrieb liefert. Somit erfährt der Tragflügel endlicher Streckung, im Gegensatz zum Tragflügel unendlicher Streckung, auch in einer reibungsfreien Strömung einen Widerstand. Dieser Anteil am Gesamtwiderstand wird als *induzierter Widerstand* bezeichnet.

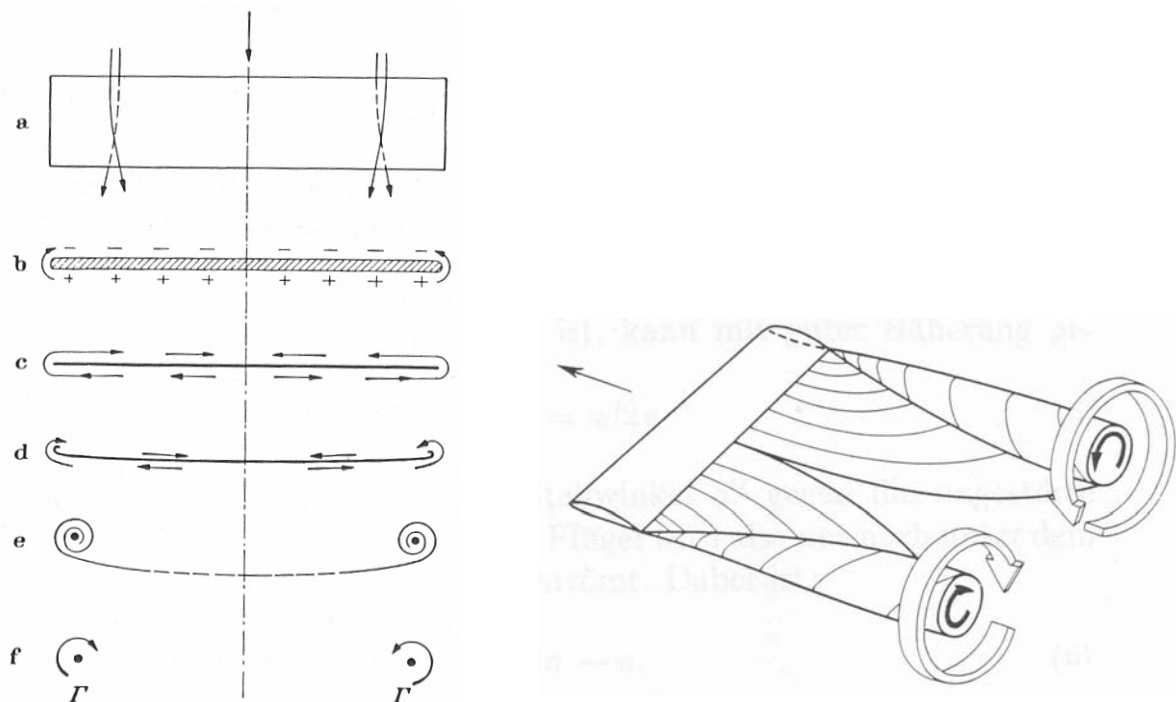


Abb. 6-3: Entstehung der freien Wirbel am Tragflügel endlicher Spannweite [ 12]

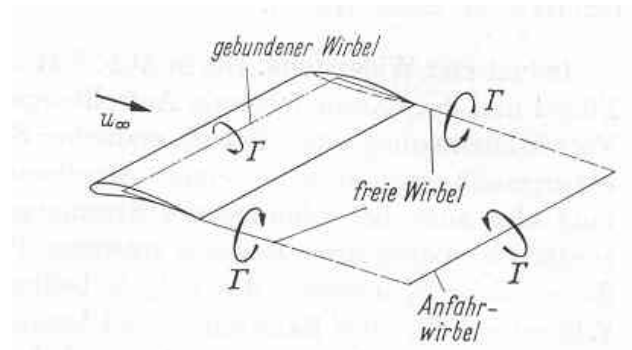


Abb. 6-4:    Wirbelsystem des Tragflügels endlicher Spannweite

Die freien Wirbel lassen sich problemlos bei feinem Regen, durch Zugabe von Rauch oder auch durch am Boden verteiltes Farbpulver sichtbar machen, Abb. 6-5.



Abb. 6-5:    Sichtbarmachung der freien Wirbel an einem Landwirtschafts-Sprühflugzeug

Ihre Stärke hängt, wie später noch gezeigt wird, quadratisch von der Stärke des Auftriebs ab, was für die Staffelung des startenden und landenden Flugverkehrs (in Hochauftriebskonfiguration) problematisch werden kann, insbesondere für kleinere Maschinen, die in kurzem Abstand einer größeren Maschine folgen. Zur Klassifizierung hinsichtlich der Gefährdung durch Wirbelschleppen werden Flugzeuge in unterschiedliche Gewichtskategorien eingeteilt (leicht, mittel und schwer), wonach sich die zeitliche Staffelung orientiert. Das Abklingverhalten und die Versetzung infolge von Seitenwind einer Wirbelschleppe ist in Abb. 6-6 dargestellt.

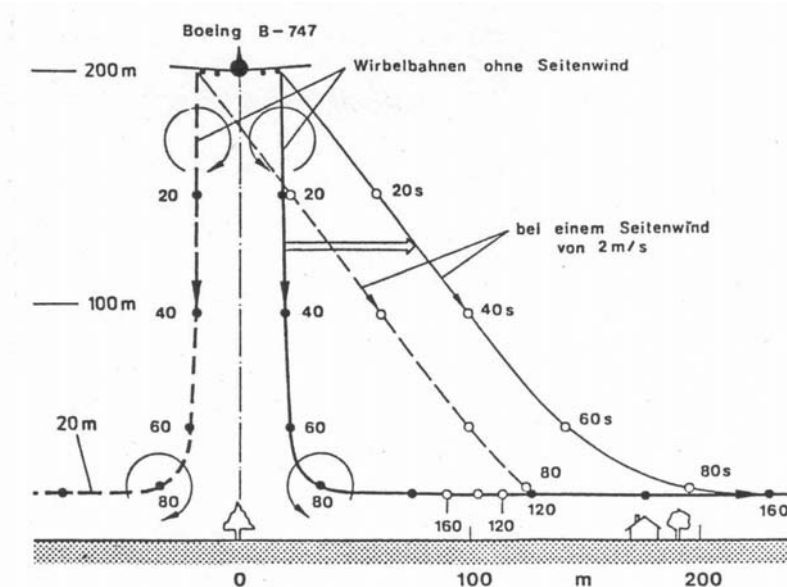


Abb. 6-6: Wirbelschleppung einer Boeing 747

Das durch die Wirbel induzierte Abwindfeld hat jedoch auch einen positiven Nebeneffekt und lässt sich zur Widerstandsminimierung nutzen. Wird bei einem engen Formationsflug der Flügel der Folgemaschine in den aufwärts drehenden Bereich des von der Führungsmaschine erzeugten Wirbels plaziert (Abb. 6-7a), so bewirkt diese zusätzliche Anströmung eine Erhöhung des effektiven Anstellwinkels am Flügel der Folgemaschine und somit eine Widerstandsreduzierung. In der Vogelwelt, insbesondere bei Zugvögeln, hat sich diese Methode zur Widerstandsreduzierung bzw. Reichweitenerhöhung allerdings schon lange herum gesprochen, Abb. 6-7b.



NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection  
<http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/index.html>  
 NASA Photo: EC01-0328-4 Date: November 9, 2001 Photo by: Carla Thomas  
 This unique view, looking directly up at two NASA Dryden F/A-18's used in the Autonomous Formation Flight (AFF) program, was captured by Carla Thomas from another F-18 flying safety/chase.



Abb. 6-7: Widerstandsreduzierung im Formationsflug, a) NASA Dryden, b) [27]



### 6.3 Prandtl'sche Tragflügeltheorie (Traglinientheorie)

#### 6.3.1 Abwindfeld und induzierter Widerstand

Die Vorstellung, die der Prandtl'schen Traglinientheorie zugrunde liegt, besteht darin, einen Flügel endlicher Streckung durch einen gebundenen Wirbel zu ersetzen, der im Gegensatz zu den freien Wirbeln, wie sie an den Tragflächenenden entstehen, sich mit dem Flügel mitbewegt. Dieser gebundene Wirbel wird auf der sogenannten *tragenden Linie* angesetzt.

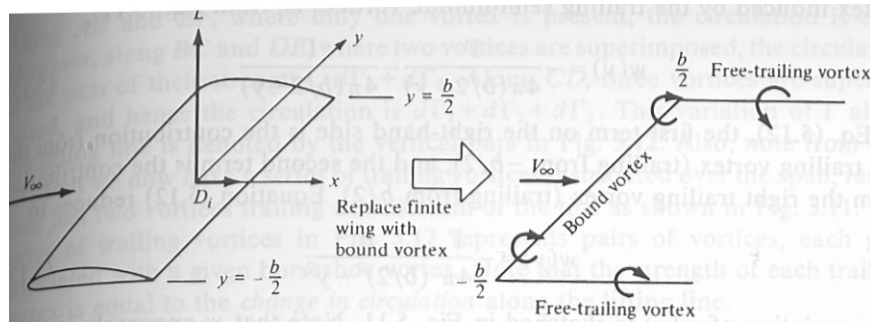


Abb. 6-8: Ersatzmodell des Flügels endlicher Streckung

Das durch die freien Wirbel induzierte Abwindfeld um den Tragflügel lässt sich mittels des in Kapitel 4.8.1 (Biot-Savart) gezeigten Verfahrens berechnen. Bei einer über die gesamte Spannweite als konstant angenommenen Zirkulationsverteilung  $\Gamma(y)$  stellt sich die induzierte Geschwindigkeitsverteilung  $w_i(y)$  ein, Abb. 6-9.

$$w_i(y) = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \quad \text{Gl. 6-1}$$

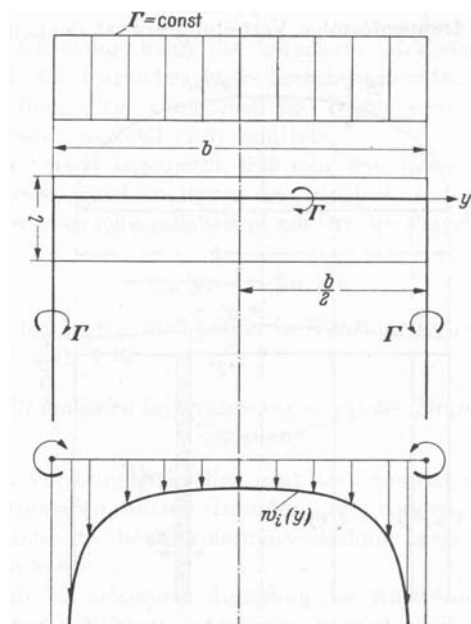


Abb. 6-9: Abwindfeld hinter dem Tragflügel bei  $\Gamma(y) = \text{const.}$

Die in Abb. 6-9 über die Spannweite als konstant angenommene Zirkulationsverteilung kann lediglich als grobe Vereinfachung zur Erläuterung des prinzipiellen Sachverhalts gelten. Aufgrund des Druckausgleichs und des damit verschwindenden Auftriebs an den Tragflächenenden stellt sich in Wirklichkeit die in Abb. 6-10 dargestellte Zirkulationsverteilung ein.

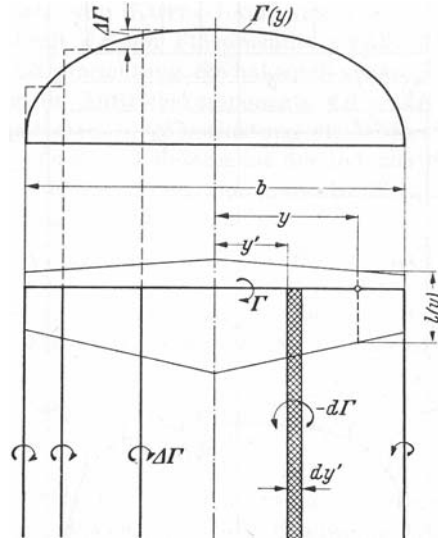


Abb. 6-10: Zirkulationsverteilung am Tragflügel mit  $\Gamma(y) \neq \text{const.}$  [ 36]

Das Abwindfeld am Flügel berechnet sich aus der flächenhaften Verteilung der Wirbel, der sogenannten *Wirbelfläche*.

$$w_i(y) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \cdot \frac{dy'}{y - y'} \quad \text{Gl. 6-2}$$

Sofern die Zirkulationsverteilung  $\Gamma(y)$  bekannt ist, läßt sich die induzierte Abwindgeschwindigkeit an der tragenden Linie berechnen und der induzierte Widerstand  $W_i$  ergibt sich zu

$$W_i = \rho \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(y) \cdot w_i(y) \cdot dy \quad \text{Gl. 6-3}$$

### 6.3.2 Abwindfeld und Auftrieb

Der durch die freien Wirbel induzierten Abwindgeschwindigkeit  $w_i(y)$  entspricht ein induzierter Anstellwinkel  $\alpha_i(y)$

$$\alpha_i(y) = \frac{w_i(y)}{V_\infty} \quad \text{Gl. 6-4}$$

um den Tragflügel, welcher bewirkt, daß die für den Auftrieb maßgebliche Anströmrichtung  $\alpha_{eff}(y)$  um den induzierten Anstellwinkel  $\alpha_i(y)$  gegenüber der ungestörten Anströmrichtung  $\alpha_g(y)$  verringert wird.

$$\alpha_{eff}(y) = \alpha_g(y) - \alpha_i(y) \quad \text{Gl. 6-5}$$

Ein Tragflügel endlicher Streckung erfährt somit beim gleichen geometrischen Anstellwinkel  $\alpha_g$  einen geringeren effektiven Anstellwinkel  $\alpha_{eff}$  wie ein Tragflügel unendlicher Streckung.

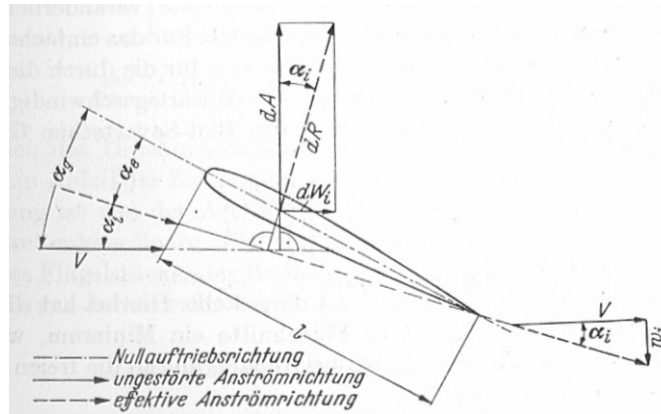


Abb. 6-11: Induzierter, effektiver und geometrischer Anstellwinkel

Der verringerte effektive Anstellwinkel bewirkt eine Verringerung des Auftriebs. Ein Flächenelement  $dS$  eines Tragflügels endlicher Spannweite erfährt den Auftrieb  $dA$

$$dA = \frac{\rho}{2} \cdot V^2 \cdot l(y) \cdot dy \cdot c_a(y) = \frac{\rho}{2} \cdot V^2 \cdot l(y) \cdot dy \cdot c'_{a,\infty} \cdot \alpha_{eff}(y) \quad \text{Gl. 6-6}$$

wobei  $c_a(y) = c'_{a,\infty} \cdot \alpha_{eff}(y)$  den lokalen Auftriebsbeiwert des Flächenelements  $dS$  und  $c'_{a,\infty} = (dc_a/d\alpha)_{\infty}$  den Auftriebanstieg des Tragflügels unendlicher Streckung bezeichnet. Für sehr dünne Profile kann der Auftriebsanstieg der ebenen Platte verwendet werden, d.h.  $c'_{a,\infty} = (dc_a/d\alpha)_{\infty} = 2 \cdot \pi$ .

$$dA = \rho \cdot V \cdot \Gamma(y) \cdot dy \quad \text{Gl. 6-7}$$

Eingesetzt in Gl. 6-6 und aufgelöst nach dem effektiven Anstellwinkel  $\alpha_{eff}$  folgt

$$\alpha_{eff}(y) = \frac{2 \cdot \Gamma(y)}{V \cdot l(y) \cdot c'_{a,\infty}} \quad \text{Gl. 6-8}$$

Aus Gl. 6-2 ergibt sich wegen  $\alpha_i(y) = w_i(y)/V_{\infty}$  für den induzierten Anstellwinkel  $\alpha_i$

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot V} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \cdot \frac{dy'}{y - y'} \quad \text{Gl. 6-9}$$

Einsetzen der Gleichungen Gl. 6-8 und Gl. 6-9 in Gl. 6-5, d.h.  $\alpha_{eff}(y) = \alpha_g(y) - \alpha_i(y)$  ergibt

$$\alpha_g(y) = \frac{2 \cdot \Gamma(y)}{V \cdot l(y) \cdot c'_{a,\infty}} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot V} \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \cdot \frac{dy'}{y - y'} \quad \text{Gl. 6-10}$$

Diese lineare Integralgleichung wird als *Prandtl'sche Integralgleichung* für die Zirkulationsverteilung des Tragflügels bezeichnet und ermöglicht die Lösung der beiden sog. Hauptaufgaben der Tragflügeltheorie.

### Entwurfsaufgabe (1. Hauptaufgabe)

Bei einer vorgegebenen Zirkulationsverteilung  $\Gamma(y)$  ist entweder die Anstellwinkelverteilung  $\alpha_g(y)$  aus einer vorgegebenen Flügeltiefenverteilung  $l(y)$  oder umgekehrt aus einer vorgegebenen Anstellwinkelverteilung  $\alpha_g(y)$  ist die Flügeltiefenverteilung  $l(y)$  zu berechnen.

### Nachrechnungssaufgabe (2. Hauptaufgabe)

Bei vorgegebener Flügelgeometrie, d.h. vorgegebener Tiefenverteilung  $l(y)$  und Anstellwinkelverteilung  $\alpha_g(y)$  ist die Zirkulationsverteilung  $\Gamma(y)$  zu berechnen.

### 6.3.3 Elliptische Zirkulationsverteilung

Mit Hilfe der Prandtl'schen Integralgleichung (Gl. 6-10) lassen sich zwar prinzipiell beliebige Flügelgrundrißformen berechnen, jedoch soll hier, aufgrund seiner besonderen Bedeutung für praktische Anwendungen, auf die Lösung für den Sonderfall einer elliptischen Auftriebsverteilung eingegangen werden. Wird eine elliptische Zirkulationsverteilung entsprechend Abb. 6-12 angenommen,

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot y}{b}\right)^2} \quad \text{Gl. 6-11}$$

ergibt sich der Auftrieb  $A$  aus der Kutta-Joukowski'schen Auftriebsgleichung

$$A = \rho \cdot V \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(y) \cdot dy \quad \text{Gl. 6-12}$$

$$\text{zu} \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot \rho \cdot b \cdot V \cdot \Gamma_0 \quad \text{Gl. 6-13}$$

Die induzierte Abwindgeschwindigkeit  $w_i(y)$  ergibt sich aus Gl. 6-2 zu

$$w_i(y) = \frac{\Gamma_0}{2 \cdot b} = \text{const.} \quad \text{Gl. 6-14}$$

Aufgrund der konstanten Abwindgeschwindigkeit ist auch der induzierte Anstellwinkel  $\alpha_i(y)$  längs der Spannweite konstant

$$\text{Aus} \quad \alpha_i(y) = \frac{w_i(y)}{V} = \text{const.} \quad \text{Gl. 6-15}$$

folgt mit Gl. 6-13, Gl. 6-14 und  $\Lambda = b^2/S$

$$\alpha_i(y) = \frac{A}{\pi \cdot q \cdot b} = \frac{A}{\pi \cdot \Lambda} \quad \text{Gl. 6-16}$$

Der induzierte Widerstand  $W_i$  ergibt sich aus Gl. 6-3 zu

$$W_i = \frac{\pi}{8} \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 = \frac{A^2}{\pi \cdot q \cdot b^2} \quad \text{Gl. 6-17}$$

mit dem Beiwert des induzierten Widerstands  $c_{Wi}$

$$c_{Wi} = \frac{A^2}{\pi \cdot \Lambda} \quad \text{Gl. 6-18}$$

Für einen unverwundenen Flügel ist der geometrische Anstellwinkel konstant,  $\alpha_g(y) = \text{const.}$  Da der induzierte Anstellwinkel  $\alpha_i(y)$  ebenfalls konstant ist, muß auch der effektive Anstellwinkel  $\alpha_{eff}(y)$  über die gesamte Spannweite konstant sein. Ein konstanter effektiver Anstellwinkel bedeutet jedoch, daß auch der lokale Auftriebsbeiwert konstant bleibt, d.h.  $c_a(y) = \text{const.}$

Aus dem konstanten effektiven Anstellwinkel folgt, daß bei einer elliptischen Zirkulationsverteilung die Flügeltiefe  $l(y)$  ebenfalls einer elliptischen Verteilung folgen muß

$$l(y) = l_i \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot y}{b}\right)^2} \quad \text{Gl. 6-19}$$

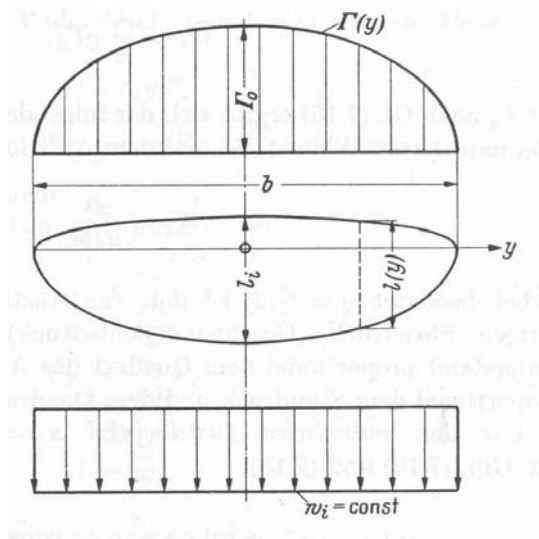


Abb. 6-12: Elliptische Zirkulationsverteilung und elliptischer Flügelgrundriß

Eine bedeutsame Eigenschaft der elliptischen Zirkulationsverteilung besteht darin, daß die elliptische Verteilung, im Vergleich zu einer nicht-elliptischen Verteilung, den minimalen induzierten Widerstand aufweist. Ein historisches Beispiel für ein Flugzeug mit elliptischem Flügelgrundriß stellt die in Abb. 6-13 dargestellte Supermarine Spitfire dar. Aus fertigungstechnischen Gründen verzichtet man heute jedoch in der Regel auf diesen widerstandsoptimalen Grundriß.



Abb. 6-13: Supermarine Spitfire mit elliptischem Tragflügel [ 33]

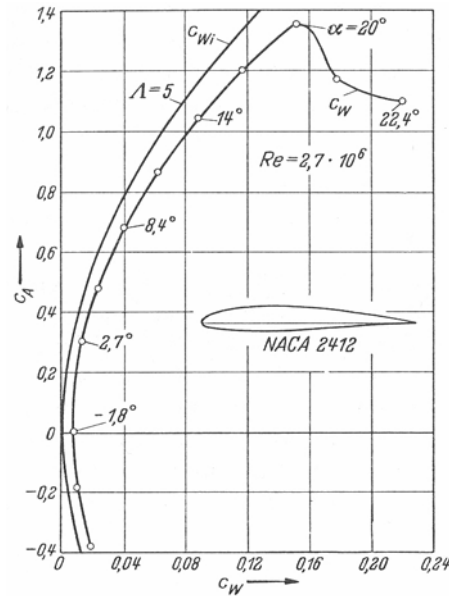
Die Ergebnisse für den elliptischen Flügel mit elliptische Zirkulationsverteilung sind in Tab. 6-3 zusammengefaßt.

Zirkulation	$\Gamma(y) = \Gamma_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot y}{b}\right)^2}$
Flügeltiefe	$l(y) = l_i \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot y}{b}\right)^2}$
Auftrieb	$A = \frac{\pi}{4} \cdot \rho \cdot b \cdot V \cdot \Gamma_0 = c_A \cdot q \cdot S$
lokaler Auftriebsbeiwert	$c_a(y) = const.$
induzierter Widerstand	$W_i = \frac{\pi}{8} \cdot \rho \cdot \Gamma_0^2 = \frac{A^2}{\pi \cdot q \cdot b^2} = c_{wi} \cdot q \cdot S$
Beiwert des induzierten Widerstands	$c_{wi} = \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda}, \quad \Lambda = \frac{b^2}{S}$
induzierter Anstellwinkel	$\alpha_i(y) = \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda} = \frac{w_i(y)}{V} = const.$
geometrischer Anstellwinkel	$\alpha_g(y) = const.$
effektiver Anstellwinkel	$\alpha_{eff}(y) = const.$

Tab. 6-3: Ergebnisse der elliptischen Zirkulationsverteilung

### 6.3.4 Prandtl'sche Umrechnungsformel

Die für die elliptische Auftriebsverteilung berechneten Ergebnisse lassen sich in erster Näherung auch auf nicht-elliptische Flügelgrundrißformen, insbesondere Rechteckflügel, anwenden. In Abb. 6-14 ist der Vergleich der berechneten mit der im Windkanal vermessenen Polare für einen Flügel mit einer Streckung von  $\Lambda = 5$  und dem Profil NACA 2412 dargestellt.

Abb. 6-14: Vergleich Rechnung und Experiment NACA 2412,  $\Lambda = 5$ , [ 36]

Der Versatz der beiden Kurven ist auf die Vernachlässigung der Reibung bei der berechneten Polare zurückzuführen. Da dieser Versatz bedingt durch den Reibungsanteil über den gesamten  $c_A$ -Bereich, also auch über den gesamten Anstellwinkelbereich, nahezu konstant ist, läßt sich der Gesamtwiderstand  $c_W$  in zwei Anteile aufteilen. Einen Anteil, der anstellwinkelunabhängig ist, den sogenannten *Profilwiderstand*  $c_{WP}$ , welcher den Einfluß der Reibung beinhaltet und einen auftriebsabhängigen Anteil, den bereits berechneten *induzierten Widerstand*  $c_{Wi}$ .

$$c_W = c_{WP} + c_{Wi} \quad \text{Gl. 6-20}$$

Bei elliptischer Verteilung läßt sich der induzierte Widerstand ersetzen durch  $c_{Wi} = c_A^2 / \pi \cdot \Lambda$

$$c_W = c_{WP} + \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda} \quad \text{Gl. 6-21}$$

Für den geometrischen Anstellwinkel  $\alpha_g$  gilt

$$\alpha_g = \alpha_{eff} + \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda} \quad \text{Gl. 6-22}$$

Unter der Annahme, daß der Reibungsbeiwert bei zwei Flügeln unterschiedlicher Streckung gleich ist, d.h.  $c_{WP1} = c_{WP2}$ , so gilt für den Gesamtwiderstand

$$c_{W2} = c_{W1} + \frac{c_A^2}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\Lambda_2} - \frac{1}{\Lambda_1} \right) \quad \text{Gl. 6-23}$$

In Abb. 6-15a sind die experimentellen Ergebnisse für Rechteckflügel mit Streckungen von  $\Lambda = 1$  bis 7 dargestellt. Die Polaren, die sich aus der Umrechnung mittels Gl. 6-22 auf ein Seitenverhältnis von  $\Lambda = 5$  ergeben, sind zusammen mit dem induzierten Widerstand  $c_{Wi}$  (durchgezogene Kurve) in Abb. 6-15b aufgetragen.

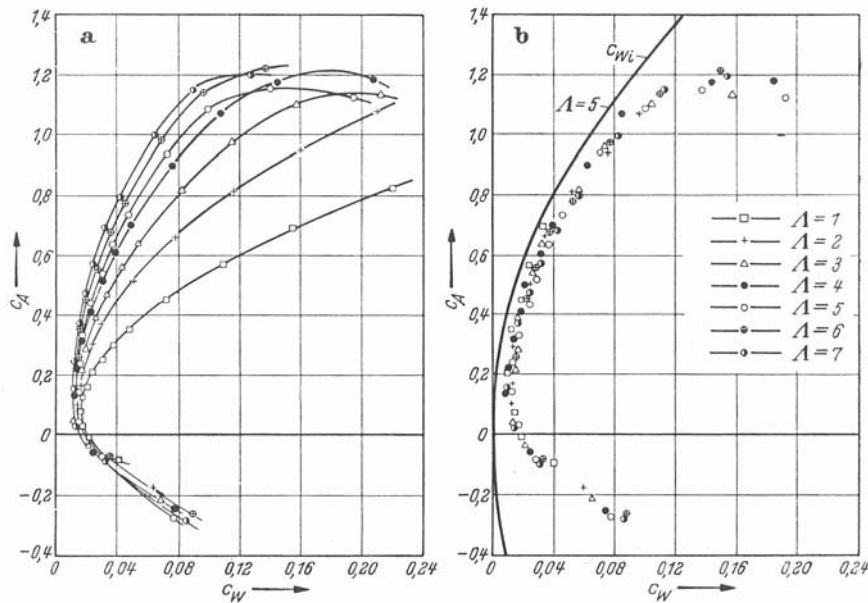


Abb. 6-15: Vergleich der Polaren  $c_A = c_A(c_W)$  für unterschiedliche Streckungen [ 36]

Sind die Auftriebsbeiwerte der beiden Flügel gleich ( $c_{A1} = c_{A2}$ ), d.h. beide Flügel verwenden das gleiche Profil, so gilt für den geometrischen Anstellwinkel

$$\alpha_{g2} = \alpha_{g1} + \frac{c_A}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\Lambda_2} - \frac{1}{\Lambda_1} \right)$$

Analog zu den Widerstandspolaren sind in Abb. 6-16a die Meßergebnisse für die unterschiedlichen Streckungen dargestellt und in Abb. 6-16b sind die auf eine Streckung von  $\Lambda = 5$  umgerechneten Auftriebskurven aufgetragen.

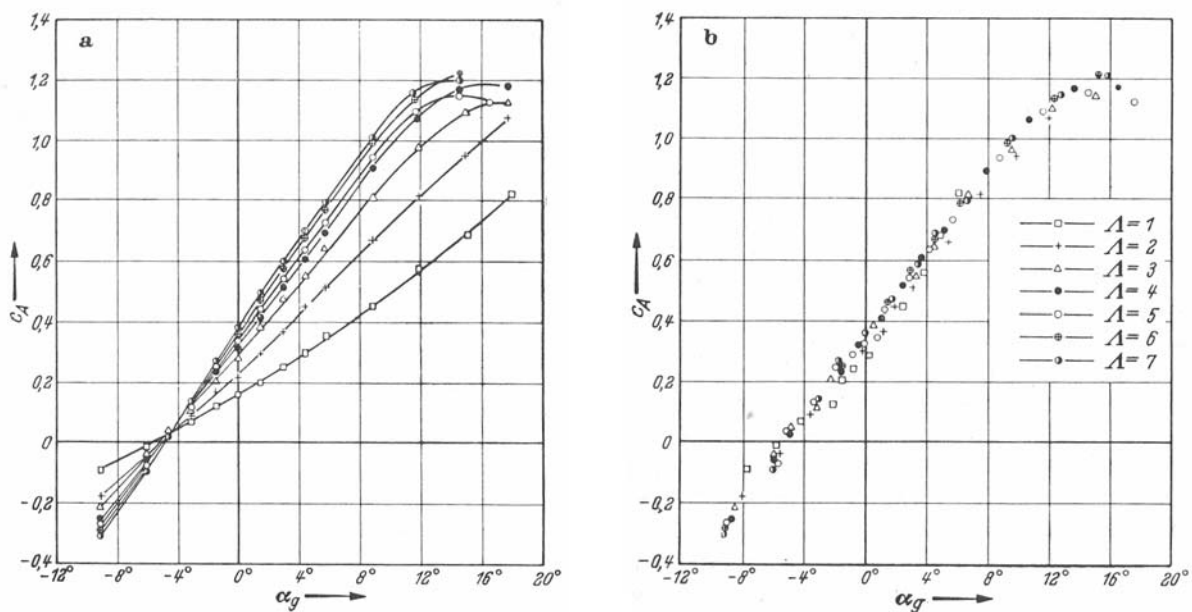


Abb. 6-16: Vergleich der Polaren  $c_A = c_A(\alpha)$  für unterschiedliche Streckungen [ 36]



#### 6.4 Tragflügeltheorie nach der Methode der Wirbelbelegung (Tragflächentheorie)

Die Grundannahme der Traglinientheorie, daß die Zirkulation auf einer einzigen Linie, der sog. tragenden Linie konzentriert ist, ist nur dann zu halten, solange es sich um Flügel großer Streckung handelt. Bei Flügeln kleiner Streckung, z.B. Deltaflügeln und beim schiebenden Flügel, ist diese Annahme nicht mehr zulässig. Hier ist eine flächenhafte Wirbelbelegung in Spannweiten- und Flügeltiefenrichtung anzusetzen. Der in Abb. 6-17 skizzierte Tragflügel wird durch zwei Wirbelverteilungen ersetzt. Die Verteilung  $k_x(x, y)$  beschreibt die Verteilung in  $x$ -Richtung und  $k_y(x, y)$  beschreibt die Verteilung in  $y$ -Richtung.

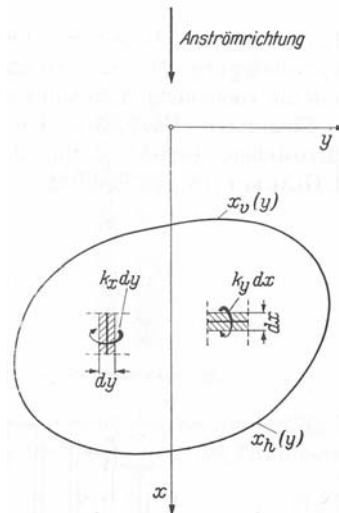


Abb. 6-17: Flächenhafte Wirbelbelegung [ 36]

Eine weitere Möglichkeit der Wirbelbelegung geht auf Glauert zurück, der den Flügel durch sog. Elementarflügel der Breite  $dy$  mit der Flügeltiefe  $l(y)$  ersetzt, die in der Summe wieder den Gesamtflügel abbilden. Jeder Elementarflügel wird durch eine Reihe in  $y$ -Richtung hintereinander liegender Hufeisenwirbel ersetzt, wobei die in Strömungsrichtung ( $x$ -Richtung) verlaufenden freien Wirbel übereinander liegen.

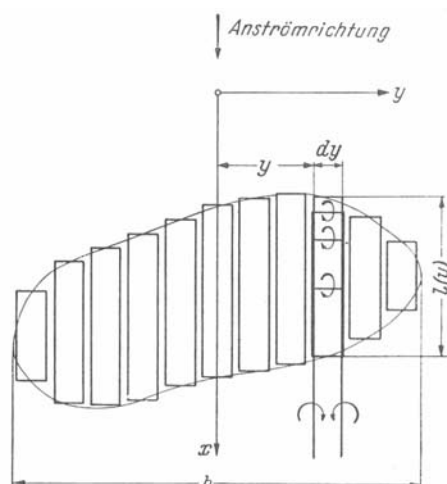


Abb. 6-18: Ersatz des Tragflügels durch Elementarflügel [ 36]

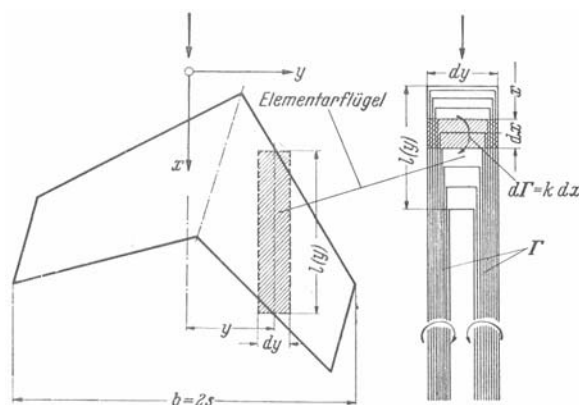


Abb. 6-19: Wirbelsystem des schiebenden Pfeilflügels [ 36]

In Richtung der Flügeltiefe ( $x$ -Richtung) weist der Elementarflügel eine Zirkulationsverteilung  $k(x)$  auf. Ein Flächenelement  $dS = dx \cdot dy$  besitzt somit die Zirkulation

$$d\Gamma(x, y) = k(x, y) \cdot dx \quad \text{Gl. 6-24}$$

Die Gesamtzirkulation eines Elementarflügels beträgt dann

$$\Gamma(y) = \int_{xv(y)}^{xh(y)} k(x, y) \cdot dx \quad \text{Gl. 6-25}$$

## 6.5 Spannweite Auftriebsverteilung

### 6.5.1 Lokaler Auftriebsbeiwert

Bei der Betrachtung der spannweiten Auftriebsverteilung ist prinzipiell zwischen dem lokalen Auftriebsbeiwert

$$c_a(y) = \frac{A(y)}{\bar{q}_\infty \cdot \Delta S} [-] \quad \text{Gl. 6-26}$$

und dem dimensionsbehafteten lokalen Wert der Auftriebsverteilung  $\Delta A/\Delta y [N/m^2]$  zu unterscheiden. Der Verlauf des lokalen Auftriebsbeiwerts und der Auftriebsverteilung wird wesentlich vom Flügelgrundriß bestimmt.

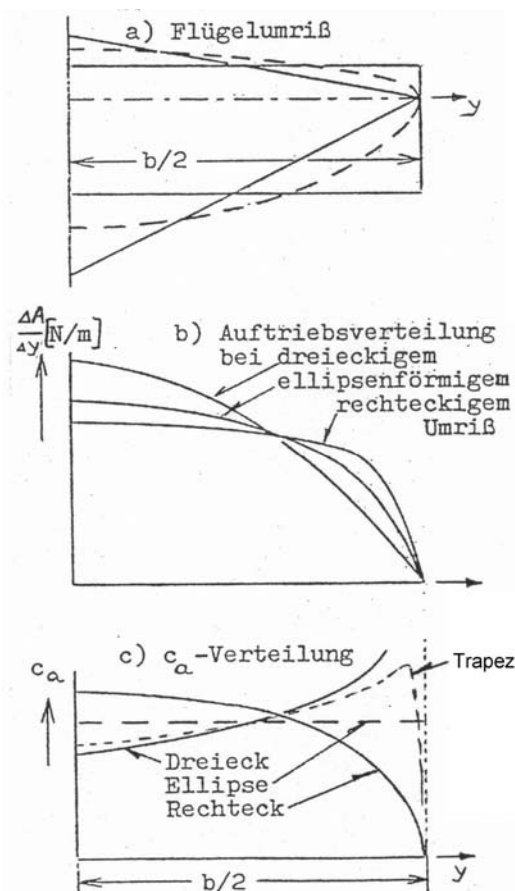


Abb. 6-20: Lokaler Auftriebsbeiwert und Auftriebsverteilung [ 12]

### 6.5.2 Einfluß der Streckung auf den induzierten Widerstand

Neben dem Auftrieb, der quadratisch in den induzierten Widerstand eingeht, ist die Streckung  $\Lambda = b^2/S$  ein weiterer bestimmender Faktor, Abb. 6-21. Tragflügel, wie sie bei Flugzeugen Verwendung finden, die auf hohe Gleitzahlen ausgelegt sind, z.B. Segel- oder Verkehrsflugzeuge, weisen immer auch eine hohe Flügelstreckung auf. Mit zunehmender Streckung verläuft der Druckgradient in Spannweitenrichtung immer flacher, wodurch der Druckausgleich an den Tragflächenenden schwächer wird und somit die erzeugten freien Wirbel ebenfalls an Stärke verlieren.

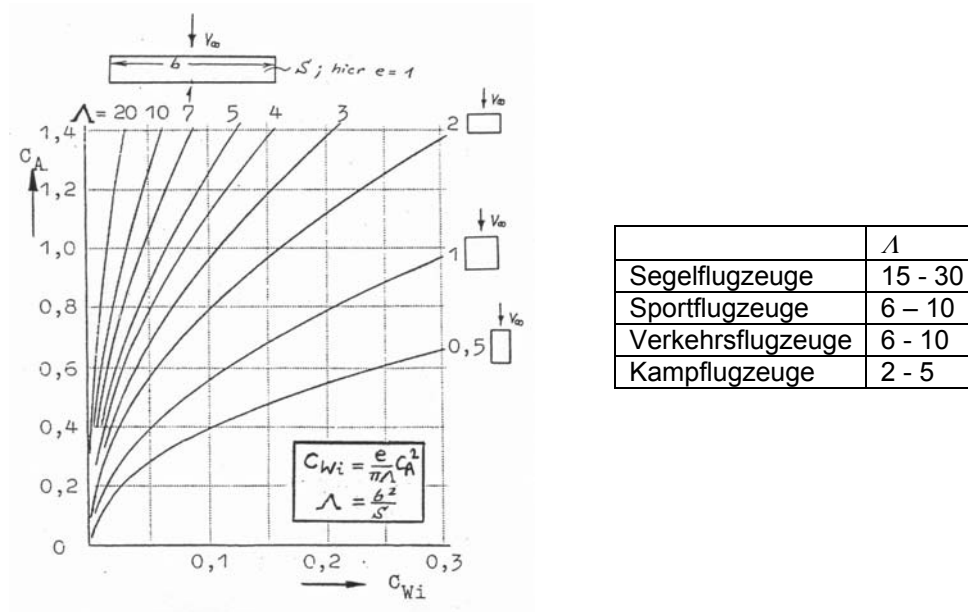


Abb. 6-21: Einfluß der Streckung auf den induzierten Widerstand [ 12]

### 6.5.3 Überziehverhalten und Tragflügelverwindung

Der Verlauf der Auftriebsverteilung in Spannweitenrichtung hat einen maßgeblichen Einfluß auf das Verhalten des Flugzeugs im überzogenen Flugzustand (Abkippsverhalten). Der mit dem Überschreiten des maximalen Anstellwinkels einhergehende Auftriebsverlust kann relativ plötzlich eintreten und stellt, sofern dies nicht gerade in Bodennähe eintritt, zunächst kein Problem dar. Problematisch wird dieses Verhalten erst, wenn die Strömung zuerst im Flügelaußenbereich ablöst und dadurch die Querruder ihre Wirkung verlieren und die Möglichkeit zur Rollsteuerung verloren geht. Infolge der Querströmung durch den Propeller oder durch einen leichten Schiebewinkel erfolgt aus dieser instabilen Fluglage ein seitliches Abkippen über die Tragfläche. Ohne Gegenmaßnahmen des Piloten, insbesondere bei hinterer Schwerpunktlage, stellt die sich daraus ergebende Trudelbewegung eine flugmechanisch sehr stabile Bewegungsform dar, in der das Flugzeug verbleibt bis sich die Bahnkurve mit der Erdoberfläche schneidet. Im Flugversuch läßt sich der Zusammenhang zwischen Anstellwinkel und Strömungsablösung z.B. durch angeklebte Wollfäden sichtbar machen.

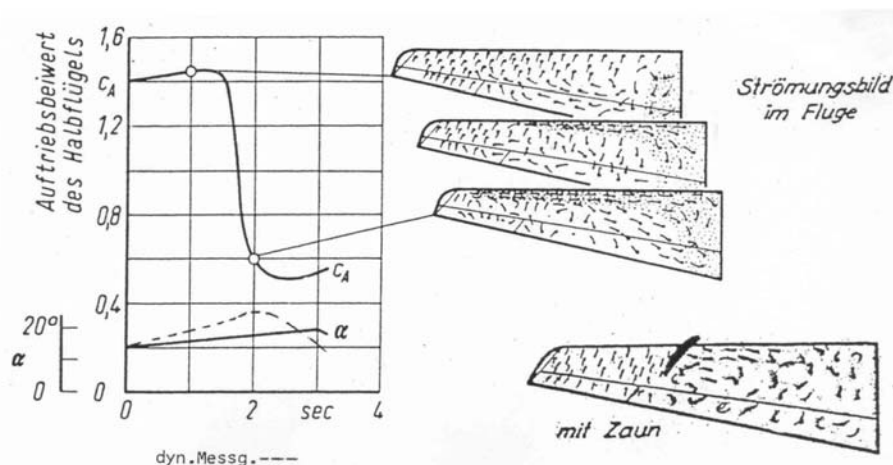


Abb. 6-22: Strömungsablösung im Flügelaußenbereich [ 12]

Der Einfluß des lokalen Auftriebsbeiwertes  $c_a(y)$  auf das Überziehverhalten ist in Abb. 6-23 dargestellt. Auch wenn der Rechteckflügel einen deutlich höheren induzierten Widerstand aufweist als z.B. ein Trapez- oder Rechteckflügel, so bietet er hinsichtlich des Überziehverhaltens deutliche Vorteile, da beim elliptischen Flügel, dem spitz zulaufenden Trapez- oder Deltaflügel die Strömung zuerst im Außenbereich ablöst. Beim Rechteckflügel hingegen löst die Strömung zuerst in der Flügelmitte ab, wodurch der Flügel kaum zum Abkippen neigt sondern beim Überziehen durchsackt und die Querruderwirksamkeit erhalten bleibt. Dieser Aspekt ist insbesondere bei Flugzeugen, die zur Anfängerschulung eingesetzt werden zu beachten.

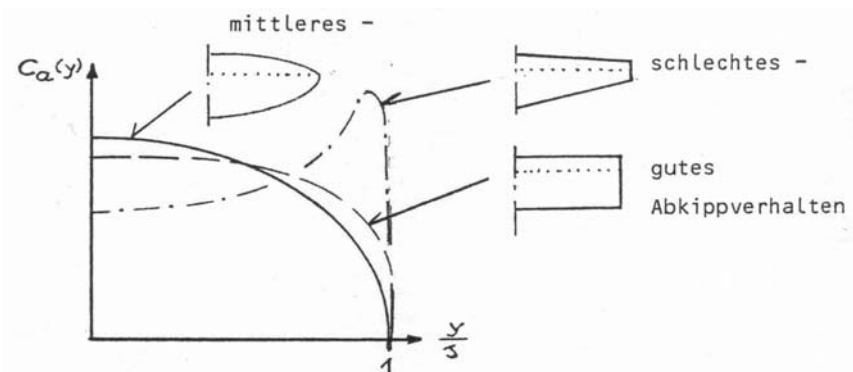


Abb. 6-23: Einfluß des Flügelgrundrisses auf das Überziehverhalten [ 22]

### Einfluß der Torsion auf die Ablösung

Liegt der Druckpunkt vor dem Schubmittelpunkt, so bewirkt die Torsion des Flügels eine Vergrößerung des Anstellwinkels im Flügelaußenbereich wodurch die  $c_{a,max}$  – Grenze überschritten werden kann.

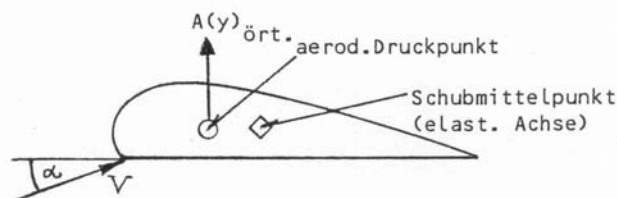


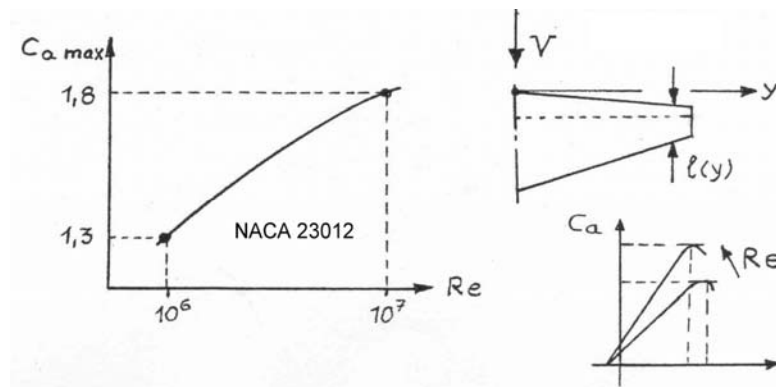
Abb. 6-24: Einfluß der Torsion auf die Ablösung

### Einfluß der Reynoldszahl auf die Ablösung

Ablöseerscheinungen werden stark von der vorliegenden lokalen Reynoldszahl beeinflusst (vgl. Kapitel 5.5). Eine geringere Flügeltiefe  $l(y)$  im Außen- als im Flügelinnenbereich bedingt wegen

$$Re = \frac{V \cdot l}{\nu} \quad \text{Gl. 6-27}$$

außen kleinere Reynoldszahlen als innen, wodurch sich der örtliche Maximalauftrieb in diesem Bereich verringert.

Abb. 6-25: Abhängigkeit von  $c_{a,max}$  von der Reynoldszahl

Ein ähnliches Verhalten hinsichtlich der Ablösung im Flügelaußenbereich zeigt sich auch bei Verringerung der Flügelstreckung  $\lambda$ .

### Einfluß der Pfeilung auf die Ablösung

Insbesondere bei positiv gepfeilten Flügeln bewirkt das Druckgefälle in Spannweitenrichtung ein Abwandern der Grenzschicht nach außen, was zu vorzeitigem Ablösen der Strömung im Flügelaußenbereich führt. Abhilfe können hier z.B. Grenzschichtzäune schaffen, Abb. 6-27.

Ein negativ (nach vorne) gepfeilter Flügel weist hinsichtlich der Grenzschichtwanderung ein umgekehrtes Verhalten auf, hier wandert die Grenzschicht nach innen.

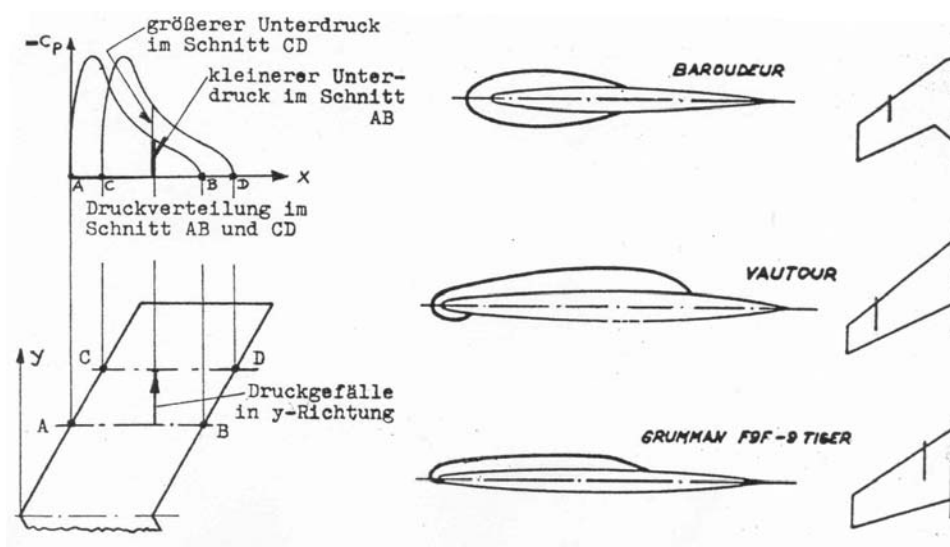


Abb. 6-26: Einfluß des spannwitigen Druckgradienten auf die Grenzschicht



Abb. 6-27: Grenzschichtzäune am Flügel einer MIG15

Zusätzlich bewirkt die Pfeilung eine Vorderkantenablösung der Strömung wodurch sich ein Vorderkantenwirbel bildet, der eine Zusatzgeschwindigkeit am Flügel induziert, der den effektiven Anstellwinkel und somit den Auftrieb erhöht. Dieser zusätzliche Auftrieb infolge des Vorderkantenwirbels wird als *nicht-linearer Auftrieb* bezeichnet und nimmt bei positiver Pfeilung von innen nach außen zu. Der Maximalauftrieb  $c_{a,max}$  wird zuerst am Außenflügel erreicht.

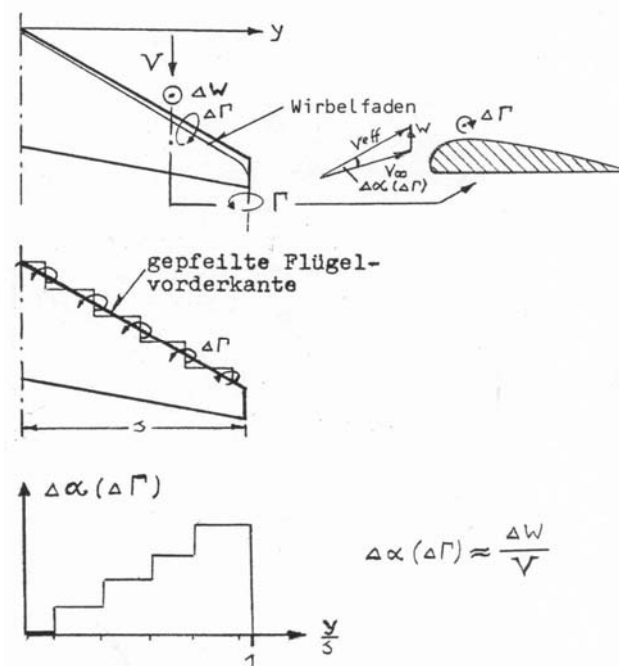


Abb. 6-28: Erhöhung des effektiven Anstellwinkels infolge des Vorderkantenwirbels [ 22]

Der wesentliche Einfluß der Pfeilung auf Auftriebsanstieg und Maximalauftrieb ist aus Abb. 6-29 ersichtlich. Der ungepfeilte Flügel weist zwar einen deutlich steileren Auftriebsanstieg auf als der gepfeilte Flügel, dafür wird jedoch die Grenze des Maximalauftriebs erst bei einem wesentlich höheren Anstellwinkel erreicht. Die schraffierte Fläche kennzeichnet den Beitrag den der Vorderkantenwirbel zum Auftrieb, den sog. nicht-linearen Auftrieb liefert.

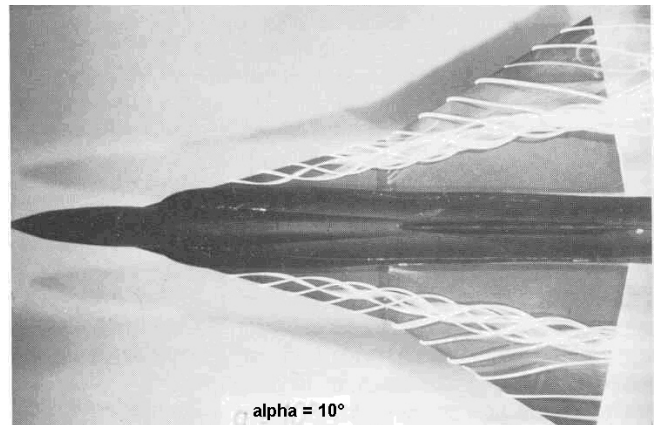
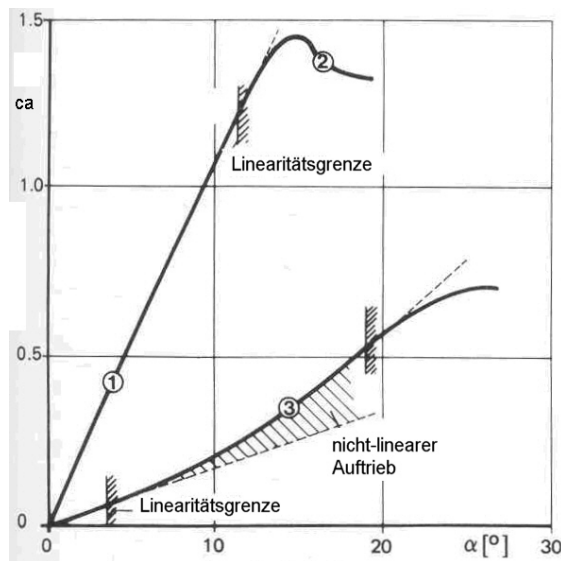


Abb. 6-29: Nicht-linearer Auftrieb infolge des Vorderkantenwirbels

### Geometrische und aerodynamische Verwindung

Zur Reduzierung des effektiven Anstellwinkels im Flügelaußenbereich bieten sich prinzipiell zwei unterschiedliche Maßnahmen an, die auch miteinander kombiniert werden können. Eine Möglichkeit besteht in der *geometrischen Verwindung*, d.h. die Profilform bleibt über die Spannweite unverändert, die Profilschneide wird jedoch nach unten gedreht.

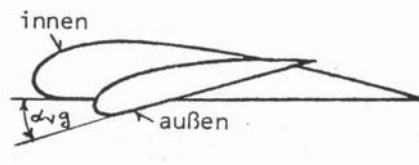


Abb. 6-30: Geometrische Verwindung

Bei der *aerodynamischen Verwindung* werden unterschiedliche Profile, in der Regel unterschiedliche Wölbung, miteinander kombiniert. Das Profil im Flügelaußenbereich weist immer einen kleineren Auftriebsanstieg  $c_{a\alpha}$  als das Profil im Innenbereich auf. Damit soll erreicht werden, daß die Strömung immer zuerst im Flügelinnenbereich ablöst.

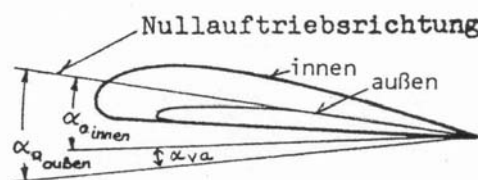


Abb. 6-31: Aerodynamische Verwindung

### 6.5.4 Näherungsverfahren zur Berechnung der spannweiten Auftriebsverteilung

Zur Abschätzung der spannweiten Auftriebsverteilung im Unterschall läßt sich ein auf Schrenk zurückgehendes Näherungsverfahren verwenden, welches ausgehend von einer



Grundlast-Auftriebsverteilung durch Überlagerung der einzelnen infolge von Verwindung, Querruderausschlag, Rolldämpfung und Korrekturen (Rumpf, Pfeilung, Schieben, Randumströmung) die Auftriebsverteilung ergibt. Mit Ausnahme der Auftriebserhöhung infolge Klappenaußschlag liefern die restlichen Anteile, keinen eigenen Beitrag zum Auftrieb, sondern beeinflussen lediglich die Verteilung. Der Anstellwinkel ergibt sich mittels dieses Superpositionsprinzips zu

$$\alpha(y) = \alpha_0 + \alpha_g + \alpha_v + \alpha_K + \alpha_Q + \alpha_R + \Delta\alpha_i \quad \text{Gl. 6-28}$$

und der lokale Auftriebsbeiwert lautet

$$c_a(y) = c_{a,G} + c_{a,v} + c_{a,K} + c_{a,Q} + c_{a,R} + \Delta c_{a,i} \quad \text{Gl. 6-29}$$

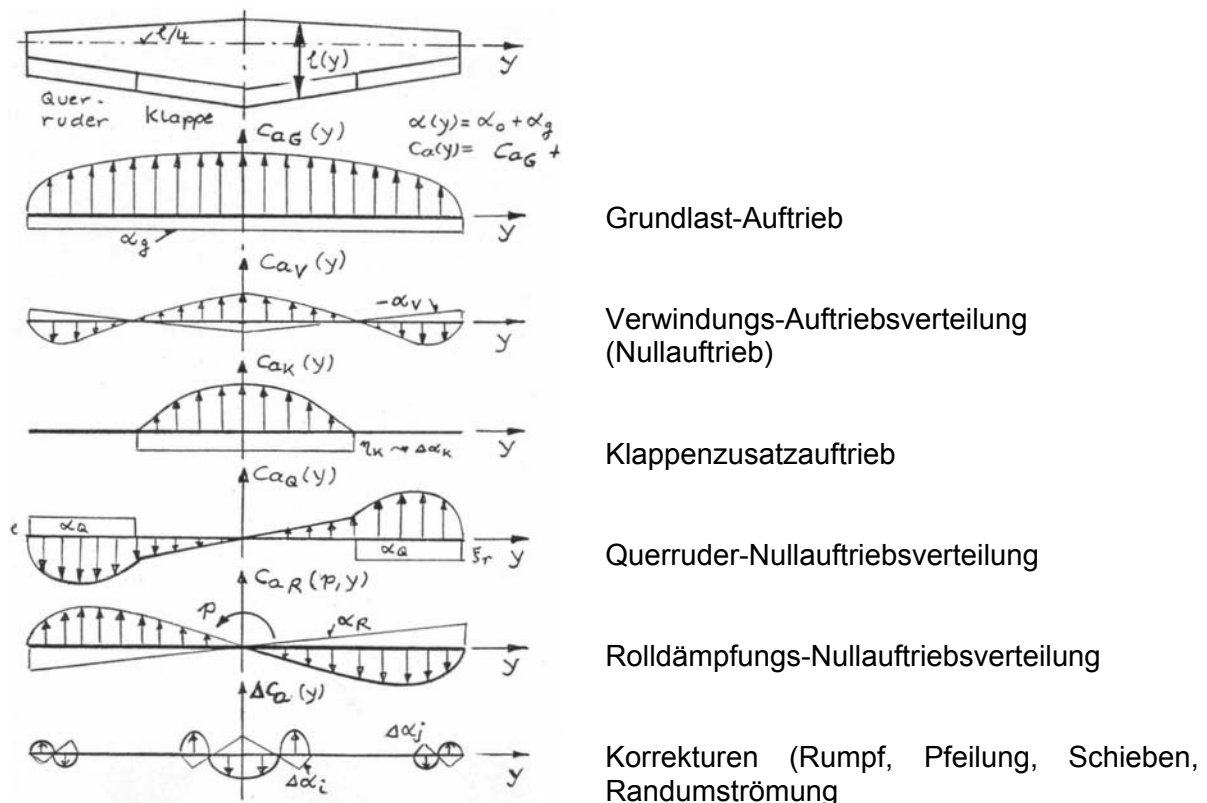


Abb. 6-32: Anteile der spannweiten Auftriebsverteilung [ 22]

Zur Berechnung der spannweiten Auftriebsverteilung  $A(y)$  bzw. der Streckenlast  $dA/dy [N/m]$  oder  $dA/\bar{q}_\infty \cdot dy [m]$  wird der Tragflügel in Flächenelemente der Breite  $\Delta y$  aufgeteilt. Für den Auftrieb  $\Delta A$  eines Flächenelements gilt

$$\Delta A = \bar{q}_\infty \cdot c_a(y) \cdot \bar{l}(y) \cdot \Delta y \quad \text{Gl. 6-30}$$

mit

$$\bar{l}(y) = \frac{l_i(y) + l_{i+1}(y)}{2} \quad \text{Gl. 6-31}$$

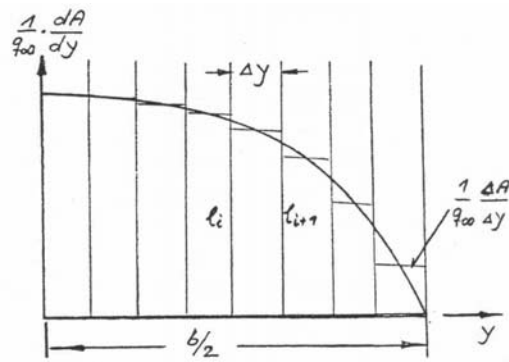
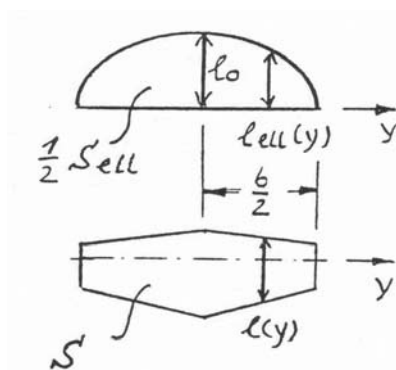


Abb. 6-33: Bestimmung der Streckenlast am Tragflügel

**Grundlastauftriebsverteilung des unverwundenen Tragflügels**

Die Grundlastverteilung ergibt sich aus der Auftriebsverteilung einer flächengleichen Halbellipse mit

$$c_{a,G}(y) = c_A \cdot \frac{l'(y)}{l(y)} \quad \text{Gl. 6-32}$$



$$c_A = \frac{n \cdot m \cdot g}{\bar{q}_\infty \cdot S} = \frac{dc_A}{d\alpha} \cdot \alpha \quad \text{Gl. 6-33}$$

$$\bar{l}(y) = \frac{l(y) + l_{ell}(y)}{2} \quad \text{Gl. 6-34}$$

$$l_{ell}(y) = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2} \quad \text{Gl. 6-35}$$

$$l_0 = \frac{4 \cdot S}{\pi \cdot b} \quad \text{Gl. 6-36}$$

Abb. 6-34: Vergleichsflügel mit halbelliptischem Grundriß

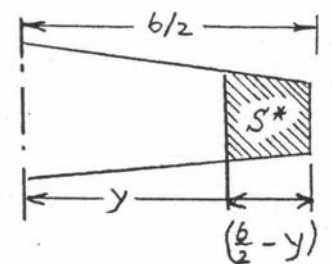
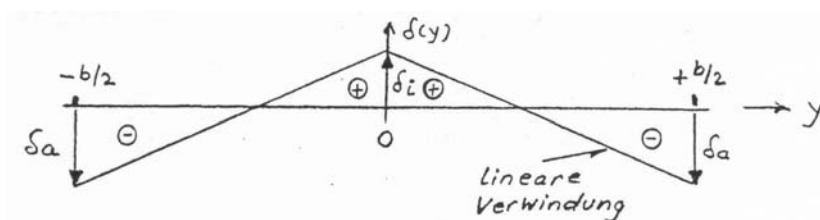
**Auftriebsverteilung infolge Verwindung des Flügels**

Abb. 6-35: Beitrag der Verwindung zur Auftriebsverteilung

Die Verwindung des Flügels

$$\delta(y) = \delta_i + \frac{\delta_a - \delta_i}{b/2} \quad \text{Gl. 6-37}$$

wird über die Halbspannweite als linear angenommen und ergibt eine zusätzliche Anstellwinkelverteilung

$$\delta(y) \propto \Delta\alpha_v(y) \quad \text{Gl. 6-38}$$

Der Zusatzauftrieb  $c_{a,v}(y)$  infolge des zusätzlichen Anstellwinkels soll dabei eine Nullauftriebsverteilung ergeben, andernfalls ist eine Korrektur der Grundlast erforderlich

$$c_{a,v}(y) = c_{A,\alpha_{\text{eff}}} \cdot \delta(y) \quad \text{Gl. 6-39}$$

$$c_{A,\alpha_{\text{eff}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \eta_P}{1 + 2 \cdot \lambda \cdot \eta_P}, \quad \eta_P = f(\text{Pröfil}, \text{Re}) \quad \text{Gl. 6-40}$$

$$\lambda(y) = \frac{1}{2} \cdot \Lambda(y) \cdot \frac{2 \cdot \lambda_0 + \Lambda(y)}{\lambda_0 + \Lambda(y)}, \quad \lambda_0 = \frac{S}{b^2} \quad \text{Gl. 6-41}$$

$$\Lambda(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{S^*(y)}{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2} \begin{cases} y = 0: S^* = S/2 \\ y = b/2 = 0 \end{cases} \quad \text{Gl. 6-42}$$

### Auftriebsverteilung infolge Querruderausschlag

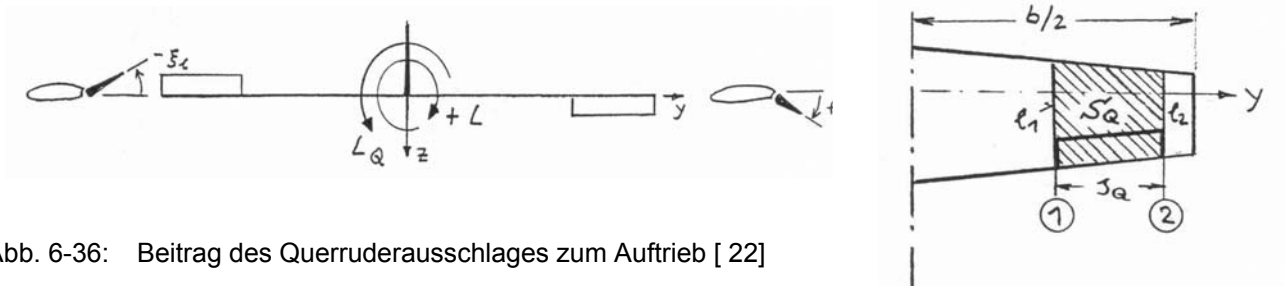


Abb. 6-36: Beitrag des Querruderausschlages zum Auftrieb [ 22]

Auch hier soll die Auftriebsverteilung  $c_{a,Q}(y)$  eine Nullauftriebs-Verteilung ergeben, was genau genommen lediglich bei symmetrischem Ruderausschlag, d.h.  $\xi_r = \xi_l$  gilt. In der Regel liegt jedoch ein differenzierter Querruderausschlag vor und der verbleibende Auf-/Abtrieb muß von der Grundlast abgezogen werden.

$$c_A(\xi, y) = \frac{dc_A}{d\xi} \cdot \xi_{\text{eff}}, \quad \frac{dc_A}{d\xi} = -c_{A,\alpha_{\text{eff}}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \quad \text{Gl. 6-43}$$

$$c_{A,\alpha_{\text{eff}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \eta_P}{1 + \frac{2 \cdot \eta_P}{\Lambda_Q}}, \quad \Lambda_Q = \frac{S_Q^2}{S_Q} \quad \text{Gl. 6-44}$$

$$A_{Q,r} = A_{Q,l} = \bar{q}_\infty \cdot c_{a_Q}(y) \cdot \bar{l}(y) \cdot \Delta y \quad \text{Gl. 6-45}$$

$$L_{Q,r} = L_{Q,l} = y_{S,r} \cdot A_{Q,r} + y_{S,l} \cdot A_{Q,l} \quad \text{Gl. 6-46}$$

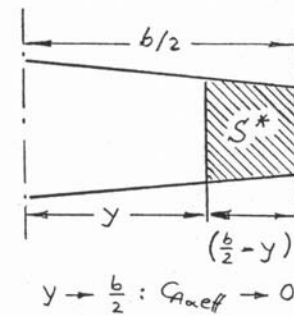
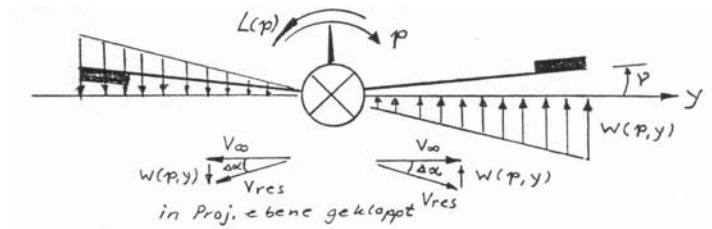
**Auftriebsverteilung infolge Rollen (Rolldämpfung)**

Abb. 6-37: Beitrag der Rollbewegung zur Auftriebsverteilung [ 22]

Eine Rollbewegung  $p$  [rad/s] induziert eine Auftriebsverteilung, die bei kleinen Anstellwinkeln der Rollbewegung entgegenwirkt und dadurch dämpfend wirkt (Rolldämpfung). In erster Näherung entspricht die zusätzliche Auftriebsverteilung einer Nullverteilung. Der Beiwert der Rolldämpfung  $c_{lp}$  beschreibt die Abhängigkeit des Rollmoments von der Drehrate um die Flugzeuglängsachse und ist ein wichtiger Beiwert der Seitenbewegung (vgl. Kapitel 1) eines Flugzeugs.

$$\tan \Delta\alpha(p, y) \approx \Delta\alpha(p, y) = \frac{w(p, y)}{V_\infty} \quad \text{Gl. 6-47}$$

$$w(p, y) = p \cdot y \quad \text{Gl. 6-48}$$

$$\Delta\alpha = \frac{p \cdot y}{V_\infty}, \quad \frac{d\alpha}{dp} = \frac{y}{V_\infty} \quad \text{Gl. 6-49}$$

$$c_{a,R}(y) = c_{A_{\alpha, \text{eff}}} \cdot \Delta\alpha(p, y) \quad \text{Gl. 6-50}$$

$$c_{a,R}(y) = c_{A_{\alpha, \text{eff}}} \cdot \frac{d\alpha}{dp} \cdot p \quad \text{Gl. 6-51}$$

$$c_{a,R}(y) = c_{A_{\alpha, \text{eff}}} \cdot \frac{y}{V_\infty} \cdot p, \quad c_{A_{\alpha, \text{eff}}} = f(y) \quad \text{Gl. 6-52}$$

$$c_{A_{\alpha, \text{eff}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \eta_p}{1 + 2 \cdot \lambda \cdot \eta_p}, \quad \eta_p = f(\text{Pr ofil}, \text{Re}) \quad \text{Gl. 6-53}$$

$$\lambda(y) = \frac{1}{2} \cdot A(y) \cdot \frac{2 \cdot \lambda_0 + A(y)}{\lambda_0 + A(y)}, \quad \lambda_0 = \frac{S}{b^2} \quad \text{Gl. 6-54}$$

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{S^*(y)}{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2} \quad \text{Gl. 6-55}$$

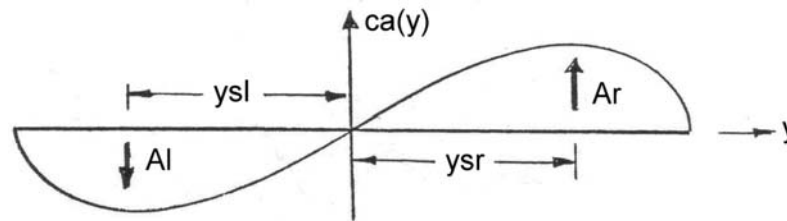


Abb. 6-38: Zusatzauftrieb infolge einer Rollbewegung

## 6.6 Tragflügelpolare

### 6.6.1 Glauert Korrekturverfahren

Für den elliptischen Tragflügel mit einer elliptischen Auftriebsverteilung wurde in Kapitel 6.3.3 der Einfluß der endlichen Spannweite im Vergleich zum Flügel unendlicher Streckung in Form des induzierten Anstellwinkels und des daraus resultierenden induzierten Widerstands hergeleitet

$$\text{induzierter Anstellwinkel} \quad \alpha_i = \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda}$$

$$\text{induzierter Widerstand} \quad c_{w_i} = \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda}$$

In der Regel läßt sich diese widerstandsminimale Auftriebsverteilung nicht realisieren. Zur näherungsweise Erfassung der Abweichung von der elliptischen Verteilung können die von Glauert eingeführten Korrekturfaktoren verwendet werden.

$$\text{induzierter Anstellwinkel} \quad \alpha_i = \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda} \cdot (1 + \tau_G)$$

$$\text{induzierter Widerstand} \quad c_{w_i} = \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda} \cdot (1 + \delta_G)$$

Die Umrechnung der für den Flügel unendlicher Streckung ermittelten oder einem Profilkatalog entnommenen Profilbeiwerte, auf den Flügel endlicher Streckung erfolgt durch Korrektur des geometrischen Anstellwinkels des zweidimensionalen Profils durch den induzierten Anstellwinkel

$$\alpha_{\Lambda \neq \infty} = \alpha_g = \alpha_{\Lambda = \infty} + \alpha_i \quad \text{Gl. 6-56}$$

Für den Widerstand folgt

$$c_{w_{\Lambda \neq \infty}} = c_{w_{\Lambda = \infty}} + c_{w_i}, \quad c_{w_i} = \frac{e \cdot c_A^2}{\pi \cdot \Lambda} \quad \text{Gl. 6-57}$$

Aus dem Auftriebsbeiwert der nicht-elliptischen Verteilung läßt sich ein Profilwirkungsgrad  $\eta_P$  definieren

$$\frac{\Lambda}{\eta_P} = 5.95 \cdot \left( \frac{\Lambda}{c_{A\alpha, ne}} - 0.31 \right) \quad \text{Gl. 6-58}$$

wobei die nicht-elliptische Auftriebsverteilung z.B. aus Windkanalergebnissen bestimmt werden kann

$$c_{A\alpha,ne} = c_{A\alpha,ell} \cdot \left( 1 - \frac{\tau_G}{1 + \frac{\Lambda}{2 \cdot \eta_p}} \right) \quad \text{Gl. 6-59}$$

Der Profilwirkungsgrad beschreibt die Abweichung des Auftriebsanstiegs des Profils als relative Größe zum theoretischen Auftriebsanstieg der ebenen Platte, d.h. der theoretische Maximalwert für den reibungsfreien Fall beträgt  $c_{A\alpha\infty} = 2 \cdot \pi \approx 6.3$  und für Messungen, die naturgemäß einen Reibungsanteil beinhalten  $c_{A\alpha\infty} \approx 5.7$ . Allgemein lässt sich schreiben

$$C_{A\alpha\infty} = 2 \cdot \pi \cdot \eta_p(\text{Parameter}) \quad \text{Gl. 6-60}$$

Wobei der Parameter, von dem der Profilwirkungsgrad abhängt z.B. das Dickenverhältnis sein kann

$$\eta_p = \eta_p\left(\frac{d}{l}\right) \quad \text{Gl. 6-61}$$

In Tab. 6-4 sind für NACA- und Göttinger Profile Profilwirkungsgrade in Abhängigkeit des Dickenverhältnisses angegeben.

$d/l$	[%]	6	10	14	18
NACA	$\eta_p$	0.95	0.945	0.93	0.90
Gö	$\eta_p$	0.92	0.905	0.885	0.862

Tab. 6-4: Profilwirkungsgrade als Funktion von  $d/l$

Der Profilwirkungsgrad  $\eta_p$  ist in Abb. 6-39 für unterschiedliche Profile als Funktion des Dickenverhältnisses aufgetragen.

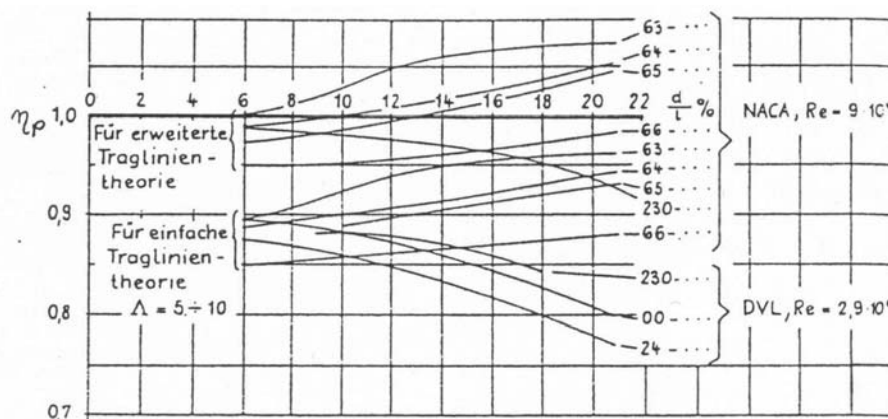


Abb. 6-39: Profilwirkungsgrad  $\eta_p$  als Funktion des Dickenverhältnisses  $d/l$  [22]

Für Trapez- bzw. aus Rechteck- und Trapezflügel zusammengesetzte Grundrisse können die Glauert-Korrekturfaktoren, bzw. deren Abminderung als Funktion der Flügelzuspitzung  $l_a/l_i$  aus Abb. 6-40 entnommen werden. Für die Abminderung infolge zusammengesetzter Grundrisse können die Glauert-Faktoren reduziert werden.

$$\tau_{G,QT} = k \cdot \tau_{G,T} \quad \text{Gl. 6-62}$$

$$\delta_{G,QT} = k \cdot \delta_{G,T} \quad \text{Gl. 6-63}$$

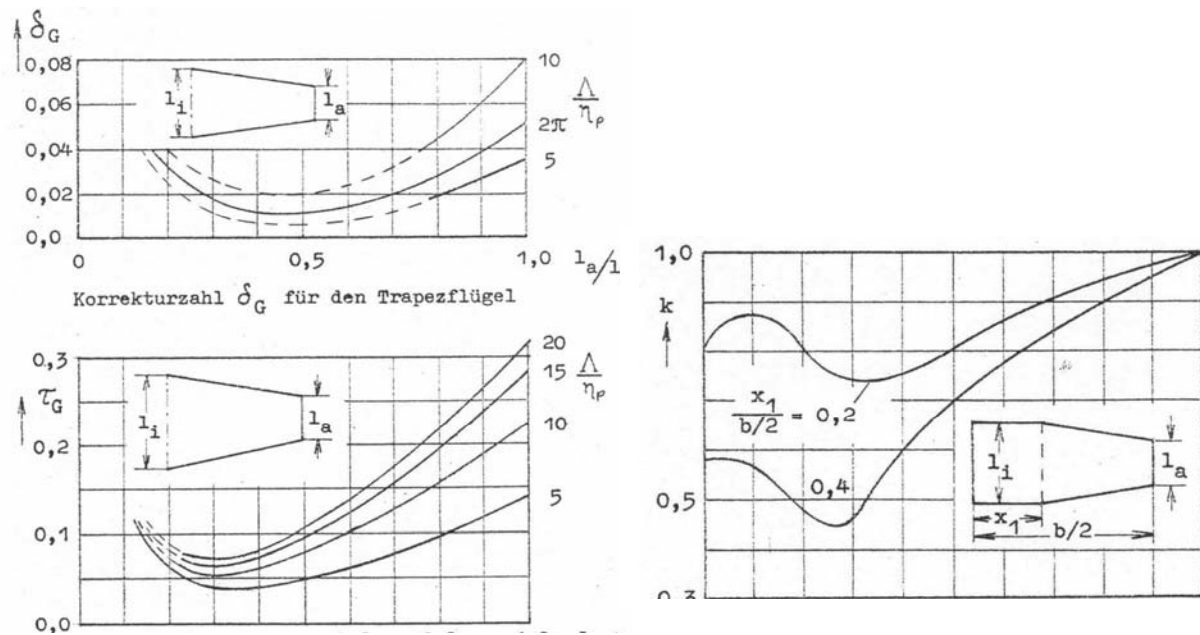
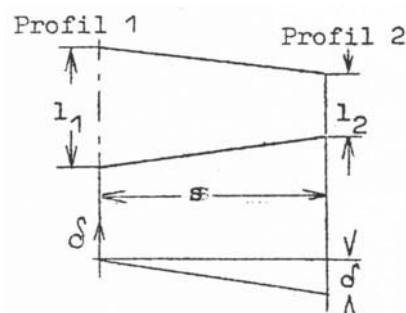


Abb. 6-40: Korrektur- und Abminderungsfaktoren für den (Quasi-)Trapezflügel [ 22]

### 6.6.2 Kombination unterschiedlicher Profile

Werden bei der aerodynamischen Verwindung (vgl. Kapitel 6.5.3) unterschiedliche Profile an einem Tragflügel verwendet, so lässt sich die daraus resultierende Tragflügelpolare durch lineare Interpolation zwischen den Profilen ermitteln. Dieses Näherungsverfahren zur Berechnung der Flügelpolare basiert auf der Grundlage der Profilpolare für  $\lambda = \infty$ . Im Folgenden soll ein Trapezflügel mit linearer Schränkungsverteilung zwischen Profil 1 und 2 betrachtet werden.

Abb. 6-41: Flügelpolare aus Profilpolaren für Profil 1 und 2, Schrängungswinkel  $\delta$ 

Auftrieb und Widerstand ergeben sich aus der Interpolation der beiden Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte der beiden Profile zu

$$c_A = k_1 \cdot c_{A_1} + k_2 \cdot c_{A_2} \quad \text{Gl. 6-64}$$

$$c_W = k_1 \cdot c_{W_1} + k_2 \cdot c_{W_2} \quad \text{Gl. 6-65}$$

mit den Faktoren

$$k_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot l_1 + l_2}{l_1 + l_2}, \quad k_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1 + 2 \cdot l_2}{l_1 + l_2}, \quad k_1 + k_2 = 1 \quad \text{Gl. 6-66}$$

Das Nickmoment berechnet sich analog zu

$$c_m = k_3 \cdot c_{m_1} + k_4 \cdot c_{m_2} \quad \text{Gl. 6-67}$$

mit

$$k_3 = \frac{\frac{3}{4} \cdot l_1^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 + \frac{1}{4} \cdot l_2^2}{l_1^2 + l_1 \cdot l_2 + l_2^2}, \quad k_4 = \frac{\frac{1}{4} \cdot l_1^2 + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 + \frac{3}{4} \cdot l_2^2}{l_1^2 + l_1 \cdot l_2 + l_2^2}, \quad k_3 + k_4 = 1 \quad \text{Gl. 6-68}$$

Liegt wie in dem oben angeführten Beispiel am Flügelaußenbreich eine andere Flügeltiefe vor als im Flügelinnenbereich, so ist bei der jeweiligen Profilpolare die auf diese Flügeltiefe bezogene Reynoldszahl zu verwenden. Nach Berechnung der  $k$ -Werte ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $k_4$ ) können  $c_A$ ,  $c_W$  und  $c_m$  durch Interpolation der Werte von Profil 1 und 2 für die gemittelte Profilpolare für  $\Lambda = \infty$  berechnet werden. Die Umrechnung von  $\alpha$  und  $c_W$  auf die korrekte Flügelstreckung (induzierter Widerstand bei nicht-elliptischer Auftriebsverteilung) erfolgt über das Korrekturverfahren von Glauert (Kapitel 6.6.1).

### 6.6.3 Auftriebsanstieg als Funktion der Streckung

Einflußfaktoren des Auftriebsanstiegs  $c_{A\alpha} = dc_A/d\alpha$  von Profilen sind im wesentlichen

- Reynoldszahl
- Profildicke
- Profilwölbung
- Dickenrücklage
- Wölbungsrücklage
- Hinterkantenwinkel
- Nasenform
- Rauigkeit

Bei dem endlichen Tragflügel ist zusätzlich noch die Streckung  $\Lambda = b^2/S$  zu berücksichtigen

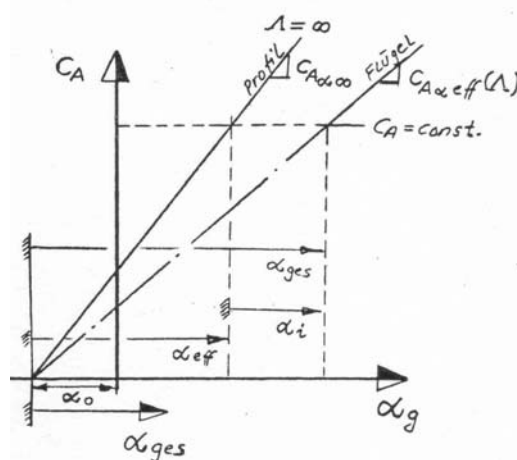


Abb. 6-42: Abhängigkeit des Auftriebsanstiegs von der Streckung [ 22]



Für  $c_A = \text{const.}$  gilt:

Profil 
$$c_A = c_{A, \alpha_\infty} \cdot \alpha_{\text{eff}} \quad \text{Gl. 6-69}$$

Tragflügel 
$$c_A = c_{A, \alpha_{\text{eff}}} \cdot (\alpha_{\text{eff}} + \alpha_i) \quad \text{Gl. 6-70}$$

$\Rightarrow$  
$$c_{A, \alpha_{\text{eff}}} = \frac{c_{A, \alpha_\infty}}{1 + \frac{\alpha_i}{\alpha_{\text{eff}}}} \quad \text{Gl. 6-71}$$

Traglinientheorie 
$$\alpha_i = \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda} \quad \text{Gl. 6-72}$$

$\Rightarrow$  
$$c_{A, \alpha_{\text{eff}}} = \frac{c_{A, \alpha_\infty}}{1 + \frac{c_{A, \alpha_\infty}}{\pi \cdot \Lambda}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \eta_p}{1 + \frac{2 \cdot \eta_p}{\Lambda}} \cdot \eta_F \quad \text{Gl. 6-73}$$

mit  $\eta_F$  = Flügeltwirkungsfaktor

Für Pfeilflügel kann die Näherungsformel nach Truckenbrodt angewandt werden

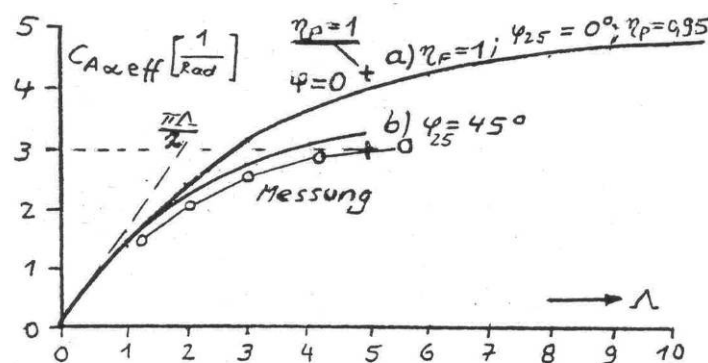


Abb. 6-43: Auftriebsanstieg für den elliptischen Flügel nach Truckenbrodt

$$c_{A, \alpha_{\text{eff}}} = \eta_F \cdot \frac{\pi \cdot \Lambda \cdot \eta_p \cdot \cos \varphi_{25}}{\sqrt{\left(\frac{\Lambda}{2 \cdot \eta_p}\right)^2 + 1} + 1} \quad \text{Gl. 6-74}$$

#### 6.6.4 Auftriebsanstieg und Neutralpunktlagen von Delta- und Pfeilflügeln

Die Traglinientheorie ermöglicht nicht die Bestimmung der aerodynamischen Neutralpunktlage. Hier wird der Neutralpunkt auf die  $l/4$ -Linie gelegt. Erst die Tragflächentheorie ermöglicht eine Berechnung der Lage des aerodynamischen Neutralpunktes. In Abb. 6-44 sind die Abhängigkeit des Auftriebsanstiegs und die Neutralpunktlagen von der Flügelstreckung für Delta- und Pfeilflügel dargestellt. Insbesondere beim Deltaflügel zeigt sich eine große Differenz zwischen aerodynamischer und geometrischer Neutralpunktlage. Während der geometrische Neutralpunkt  $N_{25}$  dem Flächenschwerpunkt des Tragflügels entspricht, sofern dieser auf der  $l/4$ -Linie mit einer der örtlichen Flügeltiefe proportionalen Gewichtsverteilung belegt ist,

$$x_{N25} = \frac{1}{S} \cdot \int_{-s}^{+s} l(y) \cdot x_{25}(y) \cdot dy, \quad y_{N25} = 0 \quad \text{Gl. 6-75}$$

so ist die Lage des aerodynamischen Neutralpunktes  $N$  definiert durch

$$\frac{x_N}{l_\mu} = -\frac{dc_m}{dc_A}, \quad y_N = 0 \quad \text{Gl. 6-76}$$

Im Gegensatz zum Druckpunkt ist der Neutralpunkt anstellwinkelunabhängig, vgl. Kapitel 5.1.6

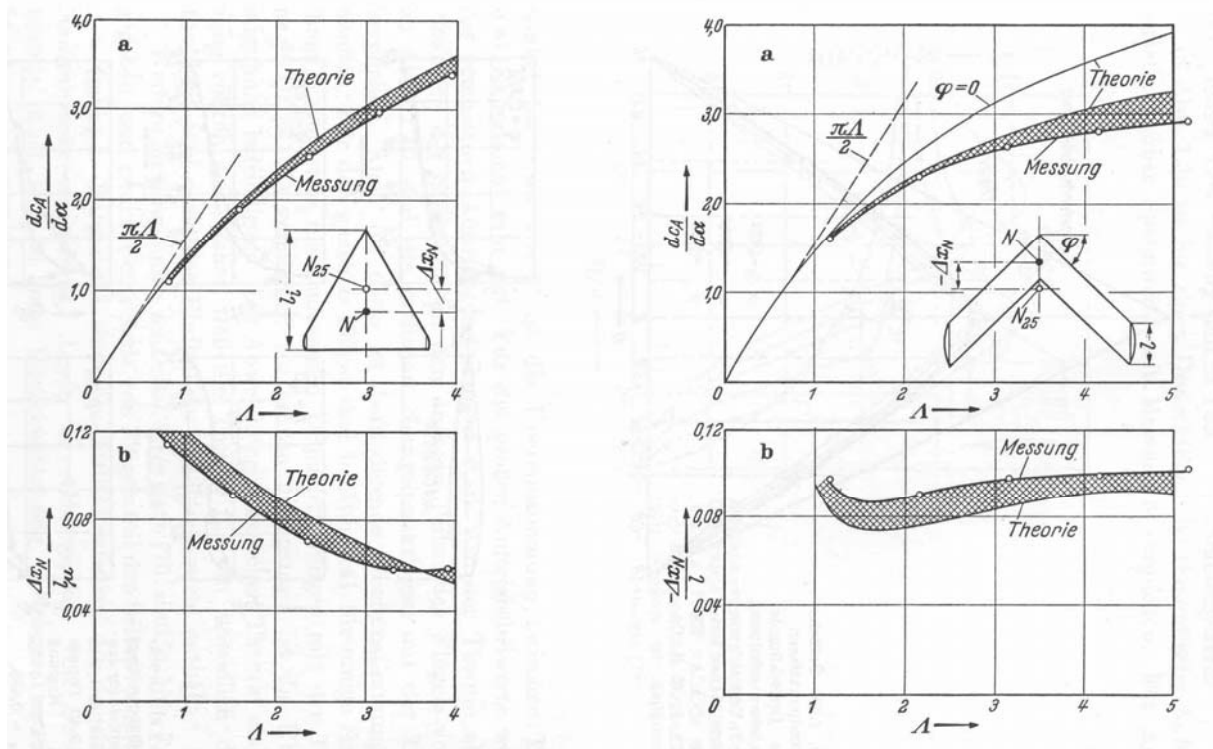


Abb. 6-44: Auftriebsanstieg und Neutralpunktlage von Delta- und Pfeilflügeln [ 36]

## 6.7 Übungen zum Kapitel Tragflügel endlicher Streckung in inkompressibler Strömung

### A6.1 Geometrische Parameter des Tragflügels

Geben Sie die Bezeichnungen und Definitionen der geometrischen Parameter eines Tragflügels an

- Halbspannweite
- Spannweite
- Flügelzuspitzung
- Flügelfläche
- Streckung
- mittlere Flügeltiefe
- Flügelbezugstiefe
- Pfeilung
- Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte
- Geometrischer Neutralpunkt

### A6.2 Wirbelsystem des Tragflügels endlicher Streckung

Skizzieren Sie das Wirbelsystem eines Tragflügels endlicher Streckung.

Welche Wirbel sind ortsfest, welche Wirbel bewegen sich mit dem Tragflügel und welche Wirbel können einen direkten Einfluß auf nachfolgende Luftfahrzeuge haben?

Wie lassen sich die durch Wirbel induzierten Geschwindigkeiten berechnen?

### A6.3 Prandtl'schen Traglinientheorie

Beschreiben Sie den Grundgedanken der Prandtl'schen Traglinientheorie. Welche Funktion hat die sog. tragende Linie? Skizzieren Sie das Ersatzmodell für einen Flügel endlicher Streckung.

### A6.4 Auftriebs- und Abwindverteilung nach der einfachen Traglinientheorie

Skizzieren Sie die Auftriebs- und Abwindverteilung eines Rechteckflügels und eines elliptischen Flügels mit elliptischer Auftriebsverteilung nach der einfachen Traglinientheorie. Welcher der beiden Tragflügel hat einen geringeren induzierten Widerstand?

### A6.5 Abwindfeld und Auftrieb

Welche Auswirkung hat die durch die freien Wirbel induzierte Abwindgeschwindigkeit auf den effektiven Anstellwinkel und den Auftrieb?

### A6.6 Induzierter Widerstand

Erläutern Sie das d'Alembert'sche Paradoxon. Aus welcher Modellbetrachtung läßt sich dieses Ergebnis ableiten? Warum erfährt ein Tragflügel endlicher Streckung auch in einer reibungsfreien Strömung einen Widerstand? Geben Sie die Definition des induzierten Widerstands und Anstellwinkels bei elliptischer Auftriebsverteilung an.

### A6.7 Lokaler Auftriebsbeiwert und Auftriebsverteilung

Erläutern Sie den Unterschied zwischen lokalem Auftriebsbeiwert und Auftriebsverteilung. Skizzieren Sie für einen Deltaflügel, Rechteckflügel und für einen Flügel mit elliptischem Grundriß die spannweite Verteilung des Auftriebs und des lokalen Auftriebsbeiwertes.

### A6.8 Geometrische und aerodynamische Verwindung

Erläutern Sie den Unterschied zwischen geometrischer und aerodynamischer Verwindung eines Tragflügels. Welchen Zweck hat die Verwindung?

## 7 Aerodynamik der Klappen und Leitwerke

### 7.1 Hochauftriebshilfen

#### 7.1.1 Aufgabe

Die Reisefluggeschwindigkeit heutiger Verkehrsflugzeuge liegt deutlich über ihrer Start- bzw. Landegeschwindigkeit. Insbesondere im Landeanflug ist man jedoch bestrebt die Anfluggeschwindigkeit möglichst klein zu halten, um mit einer geringen kinetischen Energie aufzusetzen und dadurch die Landerollstrecke zu minimieren. Aus der Auftriebsgleichung

$$A = m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S_{ref} \cdot C_A \quad \text{Gl. 7-1}$$

wird ersichtlich, daß bei einer gegenüber dem Reiseflug (z.B.  $M=0.85$ , d.h. 284 m/s bei  $H=0$ ) stark verringerten Anfluggeschwindigkeit (z.B. 140 kts = 72 m/s) entweder die Flügelfläche oder der Auftriebsbeiwert erhöht werden müssen um die Gleichgewichtsforderung  $A=m \cdot g$  zu erfüllen. Eine weitere Möglichkeit zur Auftriebserhöhung besteht in den unterschiedlichen Formen der Grenzschichtbeeinflussung, in der Regel durch Energiezufuhr bei Spaltklappen um Ablöseerscheinungen zu verzögern.

Die Anforderungen an die Landegeschwindigkeiten ergeben sich aus dem erforderlichen Maximalauftrieb, welcher durch das maximal zulässige Landegewicht definiert wird. Ein fiktives 15m-Hindernis an der Schwelle zur Landbahn muß mit  $V=1.3 \cdot V_s$  überflogen werden, wobei  $V_s$  die Geschwindigkeit beschreibt, bei der der Auftrieb zusammenbricht (*stall*). Beim Abfangen, also kurz vor dem Aufsetzen darf eine Geschwindigkeit von  $V=1.1 \cdot V_s$  nicht unterschritten werden. Zur Reduzierung der Fahrwerksbelastung sollte die vertikale Sinkgeschwindigkeit idealerweise bei Null, jedoch immer unter 2.6 m/s liegen. Ein weiteres Kriterium ist der zulässige Anstellwinkel, bei dem das Heck noch genügend Bodenfreiheit beim Aufsetzen hat. Gestreckte Versionen, die aus kürzeren Mustern abgeleitet wurden, z.B. A321 aus der kürzeren A320, benötigen daher unter Umständen ein leistungsfähigeres Hochauftriebssystem als das ursprüngliche Muster.

Die Geschwindigkeit in der Startphase unmittelbar nach dem Abheben wird definiert durch den erforderlichen Steigflugwinkel bei einem Triebwerksausfall, bzw. beim Durchstarten mit Triebwerksausfall. Hier müssen in der Anflugkonfiguration noch  $V=1.3-1.5 \cdot V_s$  bei einem Steigwinkel von 2.1% (zweimotorig), 2.4% (dreimotorig) bzw. 2.7% (vierstrahlig) erreicht werden. Für eine detaillierte Definition der vorgeschriebenen Start- und Landegeschwindigkeiten bzw. Steig- und Sinkwinkel siehe JAR/FAR 25.

#### 7.1.2 Hinterkanten-Klappen

##### Wölbklappe

Unabhängig von der jeweiligen Bauform ist allen Hinterkantenklappen gemeinsam, daß bei ihrem Ausfahren die Wölbung des Profils erhöht wird und somit auch der Auftrieb größer wird. Die konstruktiv einfachste Ausführung einer Hinterkantenklappe ist die *Wölbklappe*. Der hintere Bereich des Profils wird einfach um eine Drehachse im Flügel gekippt. Bei Klappen ausschlagen von ca. 15° beginnt die Strömung an der Klappe abzulösen, was zu einer erheblichen Widerstandszunahme führt. Auftriebserhöhung bei gleichzeitiger Widerstandszunahme ist vor allem bei Segelflugzeugen erwünscht, um beim Landeanflug auf kurze Außenlandefelder einen steilen Anflug (zum Überfliegen von Hindernissen) mit möglichst geringer Geschwindigkeit durchführen zu können. Für Verkehrsflugzeuge ist dieses

Verhalten problematisch, da beim Durchstarten ein Triebwerkausfall mit abgedeckt werden muß und in der Regel in diesem Fehlerfall keine hohen Schubreserven vorhanden sind. Aufgrund des hohen Schubüberschusses bei Kampfflugzeugen findet diese Bauform wegen der konstruktiv einfachen Ausführung hier häufig Verwendung. Eine Erhöhung des Auftriebs um  $\Delta C_A \approx 1.0$  ist mit einfachen Wölbklappen möglich.

### Spaltklappe

Wesentlich günstiger im Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand gestalteten sich Spaltklappen, deren Wirkungsweise auf einer Kombination von Wölbungserhöhung und Grenzschichtbeeinflussung infolge Zuführung energiereicher Strömung von der Flügelunterseite durch einen Spalt beruht. Ein wesentliches Kriterium der Spaltströmung besteht darin, daß der Querschnitt des Spalts sich zunehmend verjüngt und dadurch die Strömung im Spalt beschleunigt wird. Diese beschleunigte Strömung wird der Grenzschicht an der Oberseite der Klappe zugeführt, wodurch sich die Ablösung verzögert. Die Strömungsverhältnisse an einer Spaltklappe sind in Abb. 7-1 skizziert.

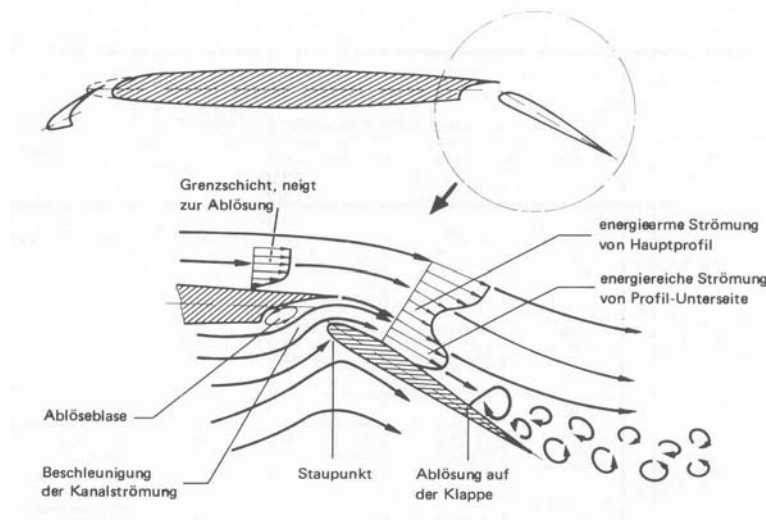


Abb. 7-1: Spaltströmung an einer Hinterkantenklappe [ 20]

Spaltklappen finden aufgrund ihrer konstruktiv einfachen Ausführung im wesentlichen bei Sportflugzeugen Verwendung. Die Druckverteilung, die sich an dem Flügel und der Klappe einstellt und der daraus resultierende Auftrieb ist nicht nur abhängig von dem Klappenanschlag, sondern auch von der Breite des Spalts, Abb. 7-2.

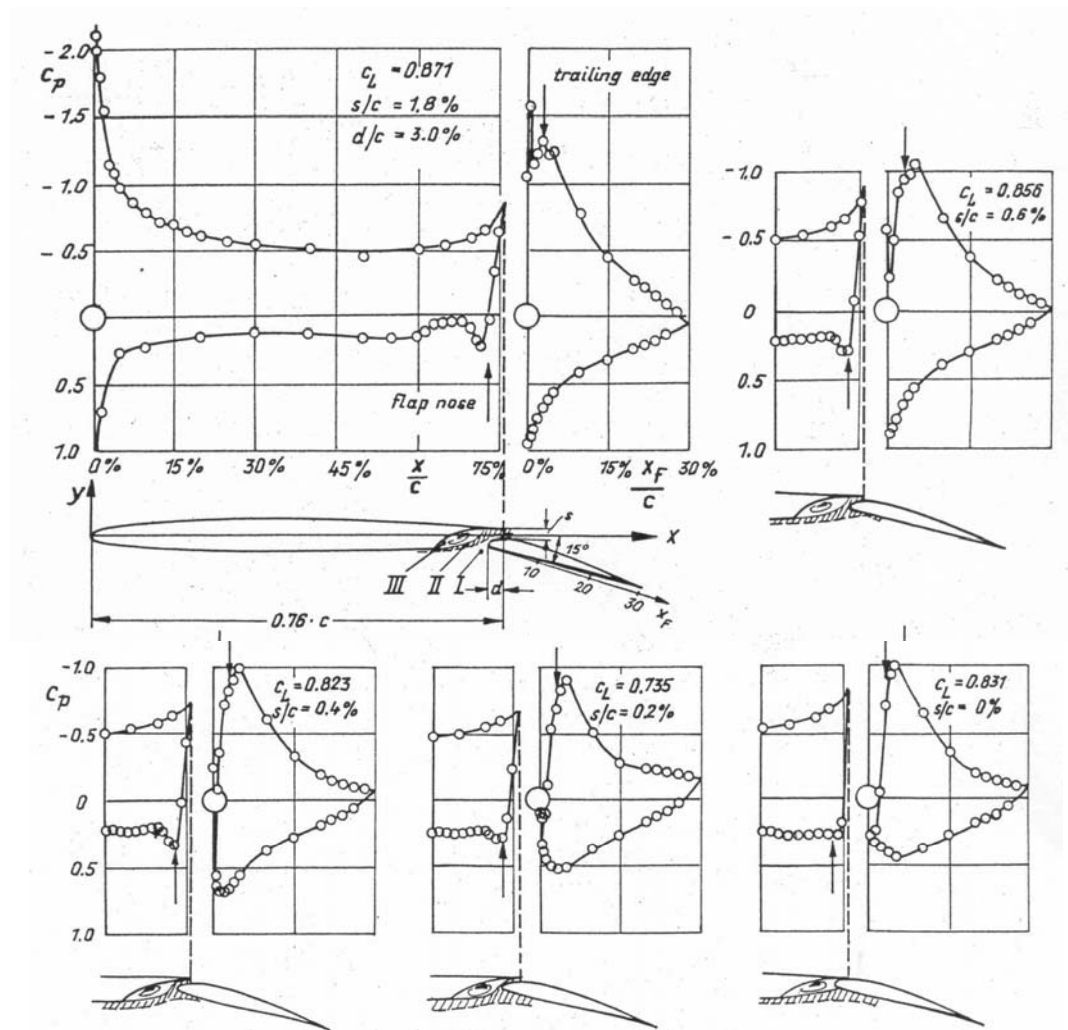


Abb. 7-2: Abhängigkeit der Druckverteilung von der Spaltbreite [ 32]

### Fowler-Klappe

Die Fowler-Klappe stellt eine Spaltklappe dar, die über Führungsschienen nach hinten ausgefahren wird. Hier werden drei Möglichkeiten zur Auftriebserhöhung kombiniert. Zusätzlich zur Wölbungserhöhung und Grenzschichtbeeinflussung infolge der Spaltströmung wird noch die Flügelfläche erheblich vergrößert. Das bereits sehr gute Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand bei der einfachen Fowler-Klappe lässt sich durch Mehrfachspaltklappen noch weiter verbessern. Unterschieden werden Doppelspaltklappen mit einem vorgeschalteten Hilfsflügel (*vane flap*) oder einer nachgeschalteten Hilfsklappe (*flap tab*) bzw. einer Kombination aus beiden, der Dreifachspaltklappe. Trotz eines hohen Auftriebszuwachses finden Dreifachspaltklappen heute kaum noch Verwendung, da aufgrund der hohen Komplexität das Gewicht und der Aufwand für Konstruktion, Fertigung und Wartung ebenfalls überproportional steigen.

Eine Übersicht über unterschiedliche Bauformen von Hinterkantenklappen ist in Abb. 7-3 dargestellt.

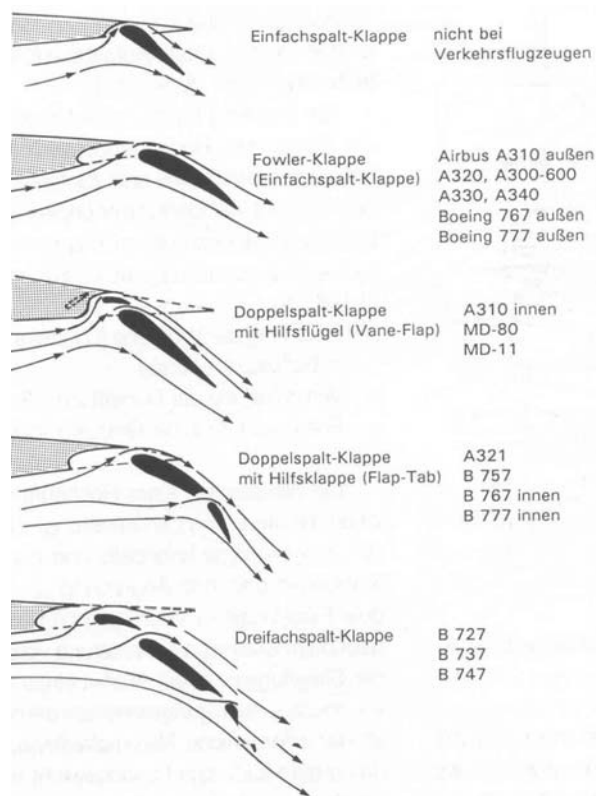


Abb. 7-3: Bauformen von Hinterkantenklappen [ 20]

### 7.1.3 Vorderkanten-Klappen

Die Auftriebserhöhung der Hinterkantenklappe, d.h. eine stärkere Zirkulation um den Gesamtflügel, bewirkt auch eine höhere Saugspitze an der Flügelnase, gefolgt von einem starken Druckanstieg, den die Grenzschicht überwinden muß, was wiederum zu einer Strömungsablösung führen kann. Die Aufgabe der Vorderkantenklappe besteht darin, diese Ablösung zu verhindern, indem die Saugspitze an der Flügelnase abgebaut wird und auf den Vorflügel verlagert wird. Dadurch ergeben sich vergleichsweise hohe Lasten auf den Vorflügel. In der konstruktiven Ausführung können mehrere Bauformen unterschieden werden.

#### Vorflügel (slat)

Vorflügel werden auf einer Kreisbahn ausgefahren, wobei die Endposition für die Landung optimiert ist und die Startposition mit weniger Widerstand auf einer Zwischenstellung liegt.

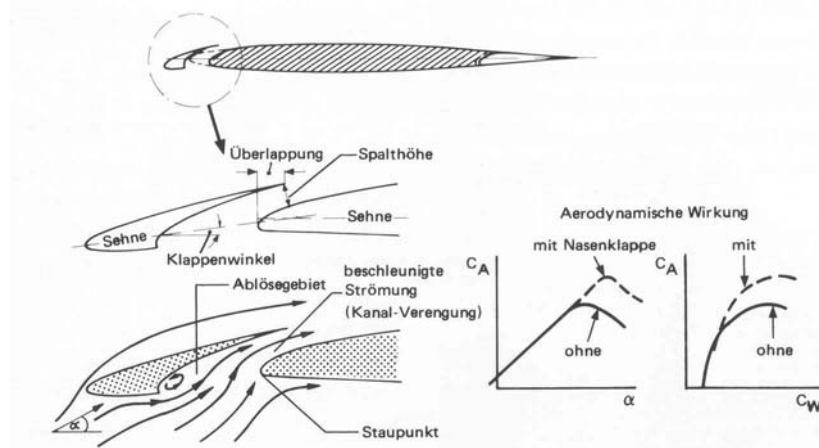


Abb. 7-4: Wirkungsweise des Vorflügels [ 20]

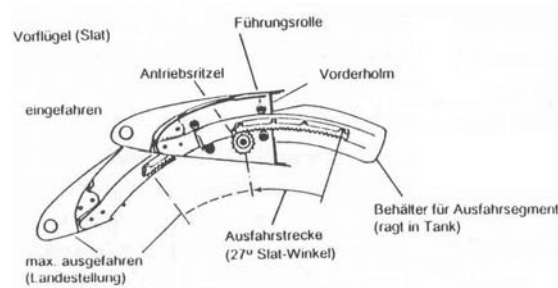


Abb. 7-5: Vorflügel mit Ausfahrmechanismus [ 20]

### Krueger-Klappe

Die Krueger-Klappe (*Krueger-flap*) ermöglicht nicht wie der Vorflügel eine Grenzschichtbeeinflussung durch eine Spaltströmung, sondern wird von der Flügelunterseite um eine Drehachse nach vorne geklappt und ist zum Hauptflügel abgedichtet. Modifizierte Versionen ermöglichen jedoch auch eine Spaltströmung (*Krueger-slat*).

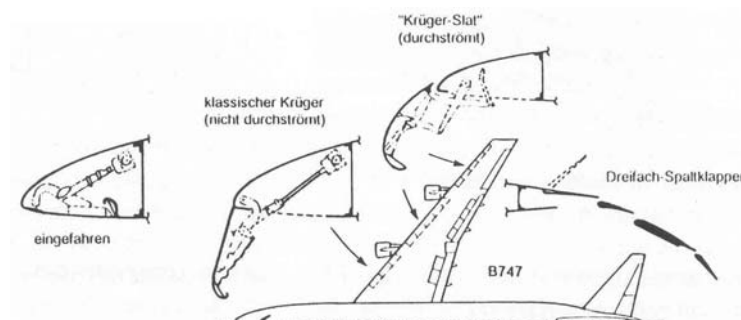


Abb. 7-6: Krueger-Klappe [ 20]

#### 7.1.4 Auswirkung auf Auftrieb und Moment

Der Auftriebsbeiwert eines einfachen Flügels mit einer Wölbklappe lässt sich zusammensetzen aus dem Auftriebsanstieg ohne Klappenausschlag  $dc_a/d\alpha$  und der Auftriebserhöhung infolge der Vergrößerung der Profilwölbung durch einen Klappenausschlag  $(dc_a/d\eta_K) \cdot \eta_K$

$$c_A = \frac{dc_A}{d\alpha} \cdot \alpha + \frac{dc_A}{d\eta_K} \cdot \eta_K \quad \text{Gl. 7-2}$$

bzw.

$$c_A = \frac{dc_A}{d\alpha} \cdot \left( \alpha + \frac{d\alpha}{d\eta_K} \cdot \eta_K \right) \quad \text{Gl. 7-3}$$

Ebenso lässt sich der Momentbeiwert zusammensetzen aus dem Beiwert ohne Klappenausschlag und dem Zusatzmoment infolge des Klappenausschlags

$$c_M = \frac{dc_M}{dc_A} \cdot c_A + \frac{dc_M}{d\eta_K} \cdot \eta_K \quad \text{Gl. 7-4}$$

Der Klappenausschlag bewirkt eine Parallelverschiebung der Auftriebs- und Momentenkurven. Diese lineare Überlagerung der beiden Anteile lässt sich auch im Experiment



nachweisen, wie die in Abb. 7-7 dargestellten Ergebnisse für einen Rechteckflügel mit  $\lambda = 3.5$  und einem Rudertiefenverhältnis von  $\lambda_K = l_K / l = 0.5$ , Profil Gö 409, zeigen.

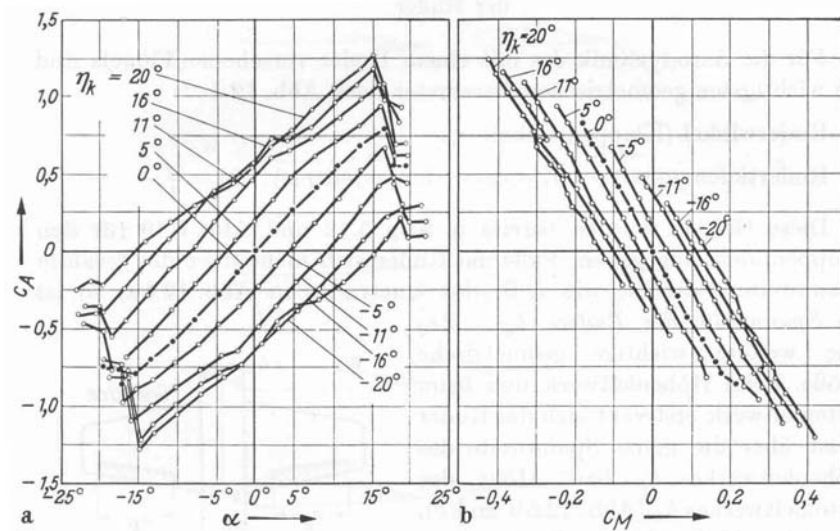


Abb. 7-7: Abhängigkeit von Auftrieb und Moment vom Klappenausschlag [ 36]

Die Ruderwirkung, d.h. die Änderung der Nullauftriebsrichtung infolge eines Klappenausschlags

$$\frac{d\alpha}{d\eta_K} = \frac{\frac{dc_A}{d\eta_K}}{\frac{dc_A}{d\alpha}} \quad \text{Gl. 7-5}$$

hängt im wesentlichen von dem Rudertiefenverhältnis  $\lambda_K = l_K / l$  ab, Abb. 7-8.

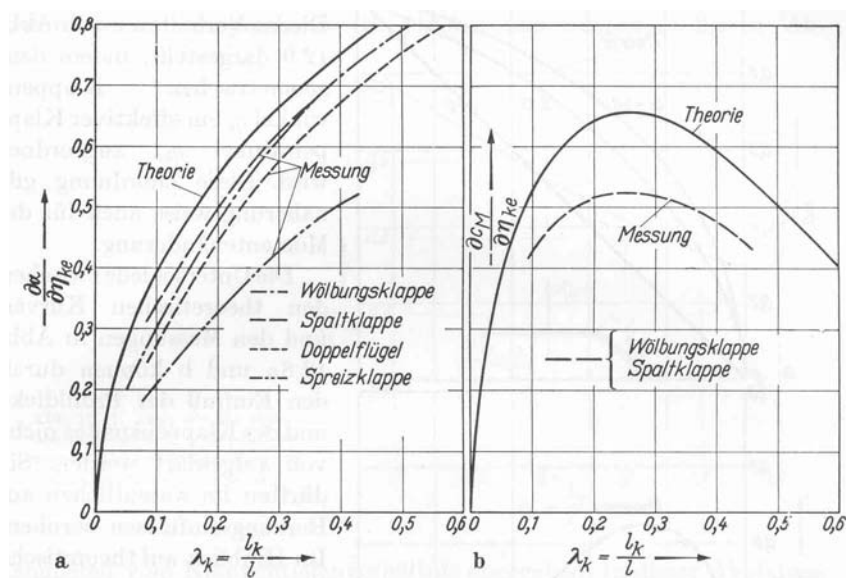


Abb. 7-8: Ruderwirksamkeit unterschiedlicher Klappen [ 36]

Je nach verwendeter Klappenform kann der effektive Ruderwinkel  $\eta_{K,eff}$  stark von dem geometrischen Ruderwinkel  $\eta_K$  abweichen, Abb. 7-9.

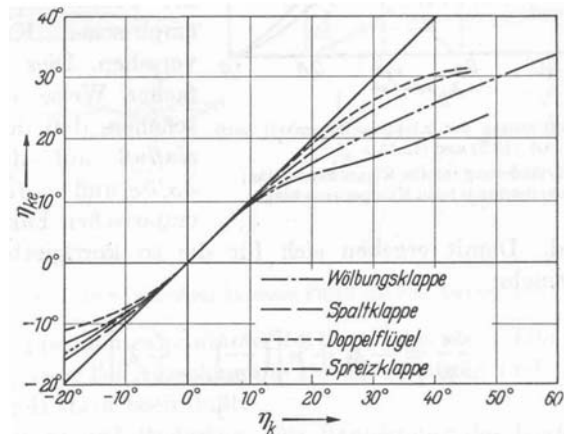


Abb. 7-9: Abweichung des effektiven vom geometrischen Klappenwinkel [ 36]

Der kombinierte Einfluß der von Vorder- und Hinterkantenklappen auf den Verlauf der Auftriebskurve ist exemplarisch in Abb. 7-10 dargestellt. Die untere Kurve stellt den Verlauf von  $C_A = C_A(\alpha)$  des Flügels mit eingefahrenen Klappen (*clean wing*) dar. Die Nasenklappe alleine bewirkt eine Verschiebung der  $C_{A,max}$ -Grenze zu höheren Anstellwinkeln, während die Hinterkantenklappe eine Parallelverschiebung der Auftriebskurve nach oben bewirkt. Erst die Kombination der Vorder- mit der Hinterkantenklappe bewirkt einen höheren Gesamtauftrieb bei einer zusätzlich höheren  $C_{A,max}$ -Grenze.

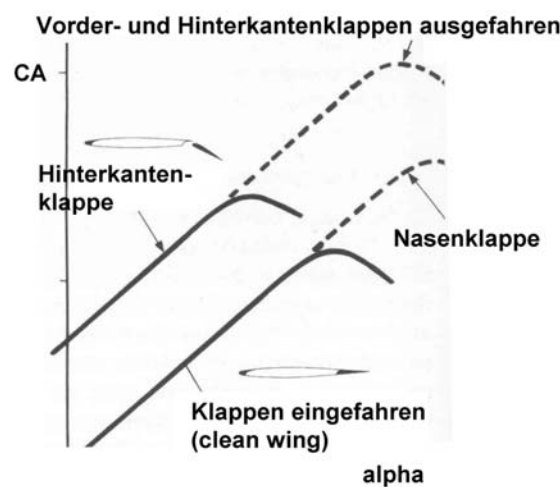


Abb. 7-10: Aerodynamische Wirkung der Auftriebshilfen [ 20]

### 7.1.5 Aerodynamischer Ruderausgleich

In den Anfangsjahren der Fliegerei war man aufgrund des Fehlens von elektrischen oder hydraulischen Unterstützungssystemen zur Reduzierung der erforderlichen Steuerkräfte durch den Piloten bestrebt diese Steuerkräfte durch aerodynamische Maßnahmen zu reduzieren. Die wichtigsten Varianten sind in Abb. 7-11 skizziert. Unterschieden werden Bauformen, bei denen der Drehpunkt so gelegt wird, daß ein Teil des ausgeschlagenen Ruders auf der gegenüberliegenden Seite des Profils in die Strömung ragt (Nasenausgleich) oder ein gegensinnig ausgeschlagenes Hilfsruder verwendet wird. Allen Bauformen ist gemeinsam, daß durch den Ruderausgleich die Ruderwirkung nur unwesentlich beeinträchtigt wird.

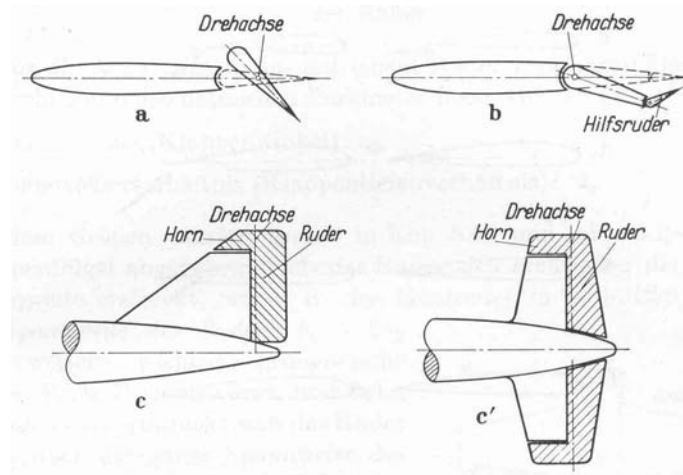


Abb. 7-11: Aerodynamischer Ruderausgleich [ 36]

### 7.1.6 Ruderscharniermoment

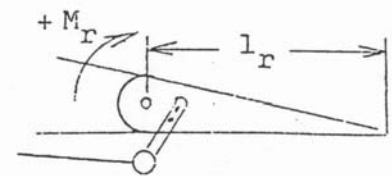
Allgemein lässt sich für jedes Ruder oder eine Klappe ein Ruderscharniermoment  $M_r$  definieren.

$$M_r = C_r \cdot \bar{q}_\infty \cdot S_r \cdot l_r \quad \text{Gl. 7-6}$$

Die Kenntnis dieses Moments ist erforderlich zur Auslegung der Aktuatoren zur Ruderbetätigung und zur strukturellen Auslegung des Ruders. Die jeweils betrachtete Steuerfläche wird über den entsprechenden Index bezeichnet.

Index des Scharniermomentenbeiwertes:

Höhenruder	$C_{rH}$
Querruder	$C_{rQ}$
Seitenruder	$C_{rS}$
Landeklappen	$C_{rK}$



Der dimensionslose Beiwert des Ruderscharniermoments lässt sich in erster Näherung wieder über eine lineare Überlagerung der beiden Anteile, Momentenanstieg infolge Änderung des Anstellwinkels und Momentanstieg infolge Klappenausschlag zusammensetzen.

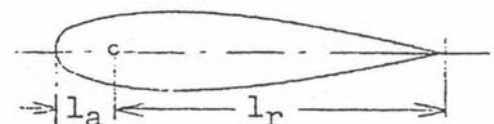
$$C_r = f(c_A, \eta) \quad \text{bzw.} \quad C_r = f(\alpha, \eta) \quad \text{Gl. 7-7}$$

$$C_r = \frac{\partial C_r}{\partial C_A} \cdot C_A + \frac{\partial C_r}{\partial \eta} \cdot \eta + C_{r,0} \quad \text{Gl. 7-8}$$

bzw.

$$C_r = \frac{\partial C_r}{\partial \alpha} \cdot \alpha + \frac{\partial C_r}{\partial \eta} \cdot \eta + C_{r,0} \quad \text{Gl. 7-9}$$

wobei für symmetrische Profile  $C_{r,0} = 0$  gilt. Das Ruderscharniermoment  $C_r$  wird in der Regel durch Experiment oder CFD ermittelt. Wesentliche Einflußgrößen sind das Rudertiefenverhältnis  $l_r/l$  und das Ruderausgleichsverhältnis  $l_a/l$ .



## 7.2 Leitwerke

### 7.2.1 Aufgabe

Die Hauptaufgabe der Leitwerke besteht darin, die zur *Steuerung* um die drei Hauptachsen des Flugzeugs erforderlichen Momente zu erzeugen, d.h. das Höhenleitwerk zur Steuerung um die Nickachse ( $y$ -Achse), das Seitenleitwerk zur Steuerung um die Hochachse ( $z$ -Achse) und die Querruder zur Rollsteuerung um die Flugzeuglängsachse ( $x$ -Achse). Darüber hinaus dienen die Leitwerke der *Stabilisierung* der Flugbewegung. Unter einem statisch eigenstabilen Verhalten versteht man die Fähigkeit eines Systems nach der Auslenkung aus der Ruhelage infolge einer Störung, also im Falle eines Flugzeugs infolge einer Böe oder einer unbeabsichtigten Steuereingabe, durch selbständiges Erzeugen von der Störung entgegenwirkenden Kräften und Momenten, wieder von selbst in die Ausgangslage zurückzukehren. Dabei dient das Höhenleitwerk der Stabilisierung der *Längsbewegung* und das Seitenleitwerk der Stabilisierung der *Seitenbewegung*.

### 7.2.2 Geometrie

Prinzipiell kann die Geometrie der Leitwerke analog zu der eines Tragflügels beschrieben werden. Der feststehende Teil wird als Flosse mit der Profiltiefe  $l$  und der bewegliche Teil als Ruder mit der Profiltiefe  $l_r$  bezeichnet. Insbesondere beim Höhenruder kann die Flosse häufig zu Trimmzwecken verstellt werden oder aber auch vollständig fehlen und wird dann als Pendelruder bezeichnet. Diese Bauform findet sich z.B. im Segelflugzeugbau oder auch bei Kampflugzeugen (Phantom F4). Die wichtigsten Abmessungen sind in Abb. 7-12 dargestellt. Von besonderer Bedeutung ist das sog. Leitwerksvolumen, d.h. das Produkt aus Leitwerksfläche und –hebelarm.

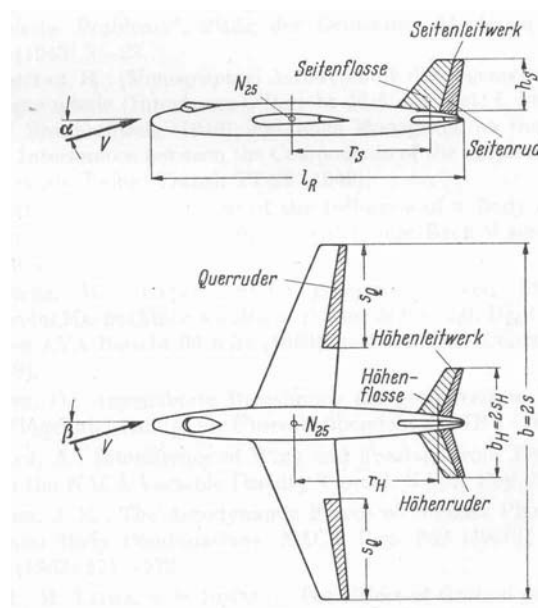


Abb. 7-12: Geometrie der Leitwerke

Die Winkel und Vorzeichendefinitionen der Klappen und Ruder sind in Tab. 7-1 zusammengefaßt

Ruder, Klappe	Winkel	Definition
Querruder, rechts, links	$\xi_r, \xi_l$ $\xi = (\xi_r + \xi_l)/2$	positiv, wenn Ruder nach unten dreht
Höhenruder	$\eta$	positiv, wenn Ruder nach unten dreht
Seitenruder	$\zeta$	wenn Ruder in Flugrichtung nach links dreht
Landeklappe	$\eta_K$	positiv, wenn Ruder nach unten dreht

Tab. 7-1: Definitionen der Winkel für Ruder und Klappen

### 7.2.3 Höhenleitwerk

Der Beitrag des Höhenleitwerks zum Nickmoment des Flugzeugs ist aus Abb. 7-13 ersichtlich. In erster Näherung kann der Beitrag der Tangentialkraft vernachlässigt werden, was jedoch bei T-Leitwerken nicht mehr zulässig ist.

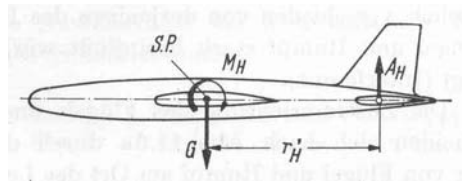


Abb. 7-13: Beitrag des Höhenleitwerks zum Nickmoment

Der am Leitwerk herrschende Staudruck ist infolge des Flügel-Rumpf-Einflusses geringer, als der Staudruck in der ungestörten Strömung, d.h.  $q_H < q_\infty$ . Der Auftrieb und das Moment ergeben sich analog zum Tragflügel zu

$$A_H = c_{a,H} \cdot q_H \cdot S_H \quad \text{Gl. 7-10}$$

mit dem auf die Referenzgrößen des Flügels  $l_\mu$  und  $S_{ref}$  bezogenen Momentenbeiwert des Leitwerks

$$c_{M,H} = -c_{a,H} \cdot \frac{q_H}{q_\infty} \cdot \frac{S_H}{S_{ref}} \cdot \frac{r'_H}{l_\mu} \quad \text{Gl. 7-11}$$

lautet der Beitrag Höhenleitwerks zum Nickmoment

$$M_H = c_{M,H} \cdot q_\infty \cdot S_H \cdot l_\mu \quad \text{Gl. 7-12}$$

Der Auftriebsbeiwert des Höhenruders setzt sich zusammen aus dem Auftriebsanstieg des Leitwerks ohne Ruderausschlag  $dc_{a,H}/d\alpha_H$  und der Änderung der Nullauftriebsrichtung infolge eines Ruderausschlags  $(d\alpha_H/d\eta_H) \cdot \eta_H$ .

$$c_{a,H} = \frac{dc_{a,H}}{d\alpha_H} \cdot \left( \alpha_H - \frac{d\alpha_H}{d\eta_H} \cdot \eta_H \right) \quad \text{Gl. 7-13}$$

Das lineare Superpositionsprinzip dieser beiden Anteile wird auch aus Abb. 7-14 ersichtlich. Ein Ruderausschlag bewirkt im wesentlichen eine Parallelverschiebung der Auftriebskurve.

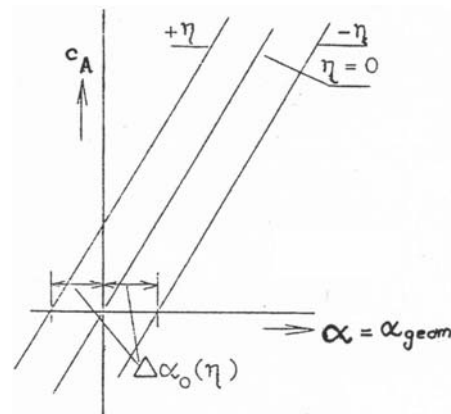


Abb. 7-14: Einfluß eines Ruderausschlags auf den Auftriebsbeiwert

Da sich das Höhenleitwerk in der Regel hinter dem Tragflügel befindet, erfährt es auch eine Änderung des effektiven Anstellwinkels infolge des durch den Tragflügel induzierten Abwinds  $w_i$ , also  $\alpha_w = w_i / V_\infty$ .

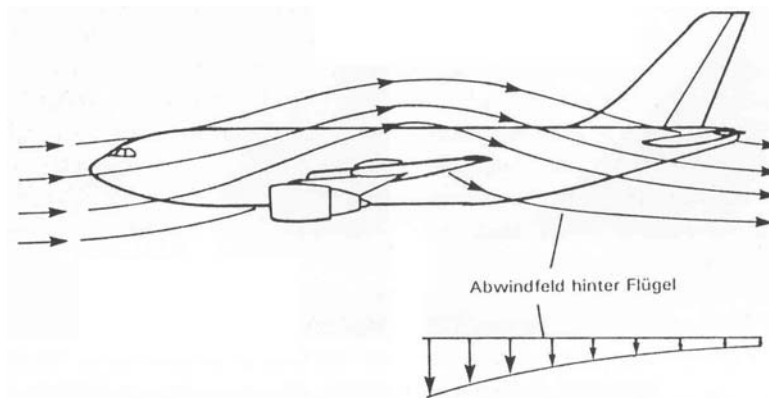


Abb. 7-15: Höhenleitwerk im Abwindfeld [ 20]

Zusammen mit dem Einstellwinkel  $\varepsilon_H$ , d.h. der Verdrehung des Höhenleitwerks gegenüber der Symmetrieebene, setzt sich der Anstellwinkel des Höhenleitwerks zusammen zu

$$\alpha_H = \alpha + \varepsilon_H + \alpha_w$$

Gl. 7-14

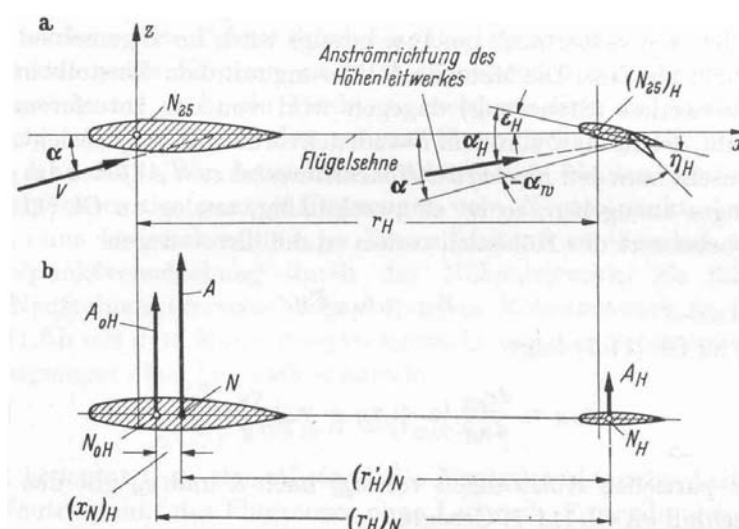


Abb. 7-16: Anströmrichtung und Kräfte am Höhenleitwerk [ 36]

Die Größe

$$\frac{d\alpha_H}{d\alpha} = 1 + \frac{d\alpha_w}{d\alpha} \quad \text{Gl. 7-15}$$

bezeichnet den *Wirkungsfaktor des Höhenleitwerks*.

### Auslegungskriterium

Auslegungspunkt für das Höhenleitwerk ist die Startphase bei vorderer Schwerpunktlage. Bei der Kombination von ungünstigstem Hebelarm und geringer Geschwindigkeit  $V_r$  (= Rotationsgeschwindigkeit) ist noch ein ausreichendes Moment zu erzeugen um die Rotation um die Nickachse ( $y$ -Achse) zu ermöglichen und den Anstellwinkel zu erhöhen. Zusätzlich wird die Anströmung und damit die Wirksamkeit des Höhenleitwerks durch das infolge des Tragflügels erzeugte Abwindfeldes, sowie durch den Ausschlag der Hinterkantenklappen weiter verschlechtert.

### 7.2.4 Seitenleitwerk

Das Seitenleitwerk entspricht einem Tragflügel mit symmetrischem Profil mit einer Wölbklappe, der in die  $x$ - $z$ -Ebene gedreht wurde. Die Hauptaufgabe besteht in der Gewährleistung einer ausreichenden *Richtungsstabilität* (vgl. Kapitel *Seitenbewegung*) und der Erzeugung des erforderlichen Moments zur Steuerung des Flugzeugs um die Gierachse ( $z$ -Achse). Da das Seitenleitwerk in der Regel in Strömungsrichtung hinter dem Schwerpunkt des Flugzeugs angeordnet ist, wird bei asymmetrischer Anströmung, also bei einem Schiebewinkel, eine Seitenkraft am Leitwerk und dadurch ein rückstellendes Moment um die Hochachse erzeugt, die das Flugzeug wieder in seine Ausgangslage zurückdreht. Dieses Verhalten wird als *Windfahnenstabilität* bezeichnet. Zusätzlich wird durch die Anordnung des Seitenleitwerks über der  $x$ -Achse noch ein Rollmoment um die Flugzeuglängsachse ( $x$ -Achse), das sog. *Schieberollmoment* erzeugt.

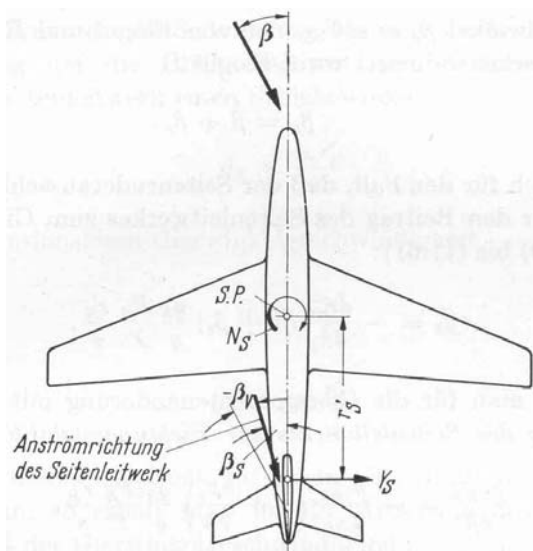


Abb. 7-17: Anströmrichtung des Seitenleitwerks [ 36]

Die am Leitwerk angreifende Seitenkraft  $Y_S$  liefert einen Beitrag  $N_S$  zum Giermoment  $N$  des Gesamtflugzeugs infolge des Seitenleitwerks

$$N_S = -r'_S \cdot Y_S \quad \text{Gl. 7-16}$$

Infolge des Flügel-Rumpfeinflusses ist auch am Seitenleitwerk, analog zum Höhenleitwerk, der Staudruck  $q_s$  geringer als in der ungestörten Anströmung  $q_\infty$ . Damit läßt sich unter Verwendung der dimensionslosen Beiwerte für Seitenkraft und Moment schreiben

$$Y_s = c_{as} \cdot S_s \cdot q_s \quad \text{Gl. 7-17}$$

$$N_s = c_{NS} \cdot S_{ref} \cdot s \cdot q_\infty \quad \text{Gl. 7-18}$$

Der Giermomentenbeitrag des Seitenleitwerks ergibt sich somit zu

$$c_{NS} = -c_{as} \cdot \frac{q_s}{q_\infty} \cdot \frac{S_s}{S_{ref}} \cdot \frac{r_s'}{s} \quad \text{Gl. 7-19}$$

In Anlehnung an den Auftriebsbeiwert des Tragflügels wird auch für das Seitenleitwerk ein 'Auftriebsbeiwert' definiert, der von dem Schiebewinkel am Ort des Seitenleitwerks  $\beta_s$  (= 'Anstellwinkel') und dem Ruderausschlag  $\zeta$  abhängt.

$$c_{as} = \frac{dc_{as}}{d\beta_s} \cdot \left( \beta_s - \frac{d\alpha_s}{d\zeta} \cdot \zeta \right) \quad \text{Gl. 7-20}$$

Infolge der Flügel-Rumpf-Interferenz unterscheidet sich der am Ort des Seitenleitwerks vorliegende Anströmwinkel  $\beta_s$  von dem geometrischen Schiebewinkel des Flugzeugs  $\beta$  um den induzierten Schiebewinkel  $\beta_v$ .

$$\beta_s = \beta + \beta_v \quad \text{Gl. 7-21}$$

Die Größe

$$\frac{d\beta_s}{d\beta} = 1 + \frac{d\beta_v}{d\beta} \quad \text{Gl. 7-22}$$

bezeichnet den *Wirkungsfaktor des Seitenleitwerks*.

### Auslegungskriterium

Der Auslegungsfall für das Seitenleitwerk ist wie beim Höhenleitwerk der Start mit asymmetrischem Triebwerksausfall und Seitenwind (z.B. A320: Maximaler Seitenwind 30 kts). Aufgrund der noch geringen Geschwindigkeit in der Startphase ist die Wirksamkeit des Seitenleitwerks sehr begrenzt und wird dadurch zum limitierenden Faktor.

### 7.2.5 Querruder

Die Aufgabe der Querruder besteht in der Rollsteuerung um die Flugzeuglängsachse ( $x$ -Achse). Querruder sind in der Regel an der Flügelhinterkante im Außenbereich angeordnet. Zusätzlich findet man aber auch sog. Hochgeschwindigkeitsruder im Flügelinnenbereich.

Infolge eines Querruderausschlags  $\xi$  ergibt sich an der Übergangsstelle an der Flügelhinterkante ein Sprung in der Zirkulationsverteilung. Die Änderung in der resultierenden Auftriebsverteilung kann näherungsweise erfaßt werden durch

$$\left( \frac{\partial c_A}{\partial \xi} \right)_{eff} = - \left( \frac{\partial c_A}{\partial \alpha} \right)_{eff} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \quad \text{Gl. 7-23}$$



mit

$$\left( \frac{\partial c_A}{\partial \alpha} \right)_{eff} = \frac{c_{A\alpha,\infty}}{1 + \frac{c_{A\alpha,\infty}}{\pi \cdot \Lambda_Q}} \quad \text{Gl. 7-24}$$

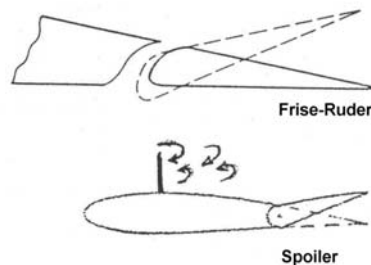
und

$$\Lambda_Q = \frac{s_Q^2}{S_Q} \quad \text{Gl. 7-25}$$

$$c_{A\alpha,\infty} = 2 \cdot \pi \cdot \eta_P \quad \text{Gl. 7-26}$$

### Querrudergegengiermoment (Schieberollmoment)

Generell gilt, daß jede Rotation um eine der drei Hauptachsen des Flugzeugs immer zwei weitere Momente um die beiden anderen Hauptachsen induziert, sogenannte *Koppelmomente*. Ein Querruderausschlag erzeugt ein Rollmoment um die Flugzeuglängsachse und induziert ein zusätzliches Giermoment um die Flugzeughochachse, das sog. *Schieberollmoment* oder auch *negative Wendemoment*. In einer Linkskurve z.B. erfolgt ein Klappenausschlag am rechten Flügel nach unten zur Auftriebserhöhung, während am linken Flügel das Querruder nach oben ausgeschlagen wird und der Auftrieb auf dieser Seite verringert wird. Da der induzierte Widerstand quadratisch vom Auftrieb abhängt, wird auf der Seite mit erhöhtem Auftrieb, in diesem Fall auf der rechten Seite, ein größerer induzierter Widerstand erzeugt, während auf der linken Seite der induzierte Widerstand sinkt. Gegenmaßnahmen bestehen in einem *differenzierten Querruderausschlag*, d.h. es erfolgt ein kleinerer Klappenausschlag nach unten als nach oben im Verhältnis von (1 : 1.5 - 2.5). Zusätzlich kann eine Widerstandserhöhung und Auftriebsverringern an der Seite an der die Klappe nach oben ausgeschlagen wird, z.B. durch Spoiler oder sog. 'Frise-Querruder' erfolgen.



## 7.3 Übungen zum Kapitel Aerodynamik der Klappen und Leitwerke

### A7.1 Hochauftriebshilfen

1. Welche Effekte können zur Auftriebserhöhung genutzt werden? Nennen Sie je ein Beispiel.
2. Was sollte bei der Geometrie eines Klappenspaltes beachtet werden?
3. Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer Hinterkantenklappe mit Spalt
4. Benennen und skizzieren Sie unterschiedliche Bauformen von Hochauftriebshilfen an der Flügelhinterkante mit zunehmender Wirksamkeit
5. Wie wirkt sich der Ausschlag einer Hinterkantenklappe auf den Verlauf der Auftriebskurve aus?
6. Benennen und skizzieren Sie zwei Bauformen von Vorderkantenklappen
7. Skizzieren Sie den Einfluß von Vorder- und Hinterkantenklappe auf den Verlauf der Auftriebskurve

### A7.2 Leitwerke

1. Worin bestehen die Aufgaben der Leitwerke?
2. Erläutern Sie den Begriff 'eigenstables Verhalten'

### A7.3 Höhenleitwerk

1. Skizzieren Sie die Strömungsverhältnisse an einem Höhenleitwerk, welches am Flugzeugheck angebracht ist.
2. Aus welchen Anteilen setzt sich der effektive Anströmwinkel am Höhenleitwerk zusammen?
3. Was ist das Auslegungskriterium für ein Höhenleitwerk?

### A7.4 Seitenleitwerk

1. Erläutern Sie die Begriffe 'Windfahnenstabilität' und 'Schieberollmoment'
2. Was ist das Auslegungskriterium für ein Seitenleitwerk?

### A7.5 Querruder

1. Erläutern Sie den Begriff Querrudergegengiermoment (Schieberollmoment)  
Generell gilt, daß jede Rotation um eine der drei Hauptachsen des Flugzeugs immer zwei weitere
2. Beschreiben Sie mögliche Maßnahmen zur Reduzierung des Schieberollmoments.

## 8 Kompressible Strömungsmechanik (Gasdynamik)

### 8.1 Einleitung

Im September 1935, noch Jahre vor der erfolgreichen Flugerprobung der ersten Strahltriebwerke, stellte Adolf Busemann auf der fünften Volta<sup>3</sup> Konferenz in Italien das Konzept des Pfeilflügels und die damit verbundene Widerstandsreduzierung bei transsonischen Geschwindigkeiten vor. Eines der wichtigsten Themen dieser Konferenz war die Auswirkung der Kompressibilität bei höheren Geschwindigkeiten, obwohl Fluggeräte zu dieser Zeit sich noch im wesentlichen bei geringen Unterschallgeschwindigkeiten bewegten und deren Umströmung als inkompressibel betrachtet werden konnte. Neben der variablen Dichte stellt die mit der Geschwindigkeit quadratisch zunehmende Energie einen weiteren wichtigen Parameter dar, da infolge der hohen Energie auch Temperatureffekte und damit thermodynamische Prozesse an Bedeutung gewinnen. Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung für das Verständnis kompressibler Strömungen, sollen im Folgenden kurz die wichtigsten thermodynamischen Grundbegriffe erörtert werden.

### 8.2 Thermodynamische Grundbegriffe

#### 8.2.1 Ideales Gas

Die drei Zustandsgrößen eines Gases, Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und Dichte  $\rho$  lassen sich zusammen mit der spezifischen Gaskonstante  $R$  für ein ideales oder auch perfektes Gas durch folgende Zustandsgleichung beschreiben

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad \text{Gl. 8-1}$$

bzw. mit dem spezifischen Volumen  $v = 1/\rho$

$$p \cdot v = R \cdot T \quad \text{Gl. 8-2}$$

Luft lässt sich für die meisten technischen Anwendungen als ideales Gas beschreiben und weicht erst bei sehr hohen Temperaturen und Drücken, wie sie z.B. bei Hyperschallflugbedingungen auftreten, von dem Verhalten eines idealen Gases ab. In Abb. 8-1 ist der Realgasfaktor  $Z$ , der die Abweichung vom Verhalten des idealen Gases, d.h.  $Z = 1$  beschreibt, als Funktion der Temperatur für unterschiedliche Drücke aufgetragen.

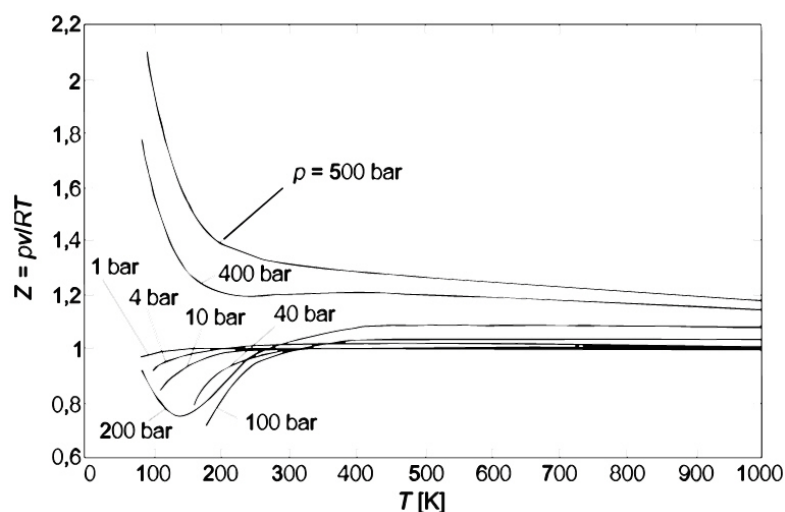


Abb. 8-1: Luft als reales Gas

<sup>3</sup> Alessandro Volta: Italienischer Physiker, 1745 - 1827

### 8.2.2 Innere Energie und Enthalpie

Die innere Energie  $U$  eines Gasvolumens  $V$  beschreibt die Summe der kinetischen, d.h. translatorischen, rotatorischen und vibratorischen Energien aller im Volumen enthaltenen Moleküle. Die unterschiedlichen Energiearten ergeben sich aus den Bewegungsmöglichkeiten der Moleküle entsprechend der inneren Freiheitsgrade. In der Regel wird die auf die Masse  $m$  des Volumens  $V$  bezogene, die sog. spezifische innere Energie  $u$  verwendet. Addiert man zur inneren Energie noch das Produkt aus Druck  $p$  und spezifischem Volumen  $v$ , so ergibt sich die spezifische Enthalpie  $h$ .

$$h = u + p \cdot v \quad \text{Gl. 8-3}$$

Für ein ideales oder auch perfektes Gas sind innere Energie und Enthalpie nur von der Temperatur abhängig, d.h. es gilt

$$u = u(T) \quad \text{und} \quad h = h(T) \quad \text{Gl. 8-4}$$

Durch Differenzieren ergeben sich aus der inneren Energie und der Enthalpie die spezifische Wärme bei konstantem Volumen  $c_v$  und bei konstantem Druck  $c_p$ , die beide wiederum von der Temperatur abhängen

$$c_p = c_p(T) \quad \text{und} \quad c_v = c_v(T) \quad \text{Gl. 8-5}$$

Da die Temperaturabhängigkeit für beide Größen gleich ist, ergibt sich die spezifische Gaskonstante  $R$  aus deren Differenz zu einer stoffspezifischen Konstante

$$R = c_p(T) - c_v(T) \quad \text{Gl. 8-6}$$

Gase, bei denen diese Temperaturabhängigkeit entfällt werden als *kalorisch perfekt* bezeichnet, d.h. die spezifischen Wärmen können als konstant betrachtet werden und es gilt

$$u = c_v \cdot T \quad \text{und} \quad h = c_p \cdot T \quad \text{Gl. 8-7}$$

Durch Einführung des *Isentropenexponenten*  $\kappa$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{Gl. 8-8}$$

läßt sich für die spezifischen Wärmen auch schreiben

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \quad \text{Gl. 8-9}$$

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad \text{Gl. 8-10}$$

Erfreulicherweise verhält sich Luft bis zu ca. 1000 K in erster Näherung als ein kalorisch perfektes Gas, vgl. Abb. 8-1 und die Werte für die spezifischen Wärmen, Gaskonstante und Isentropenexponent lauten

spez. Wärme bei konstantem Druck	$c_p$	1004.5	[J/kg·K]
spez. Wärme bei konstantem Volumen	$c_v$	717.5	[J/kg·K]
spez. Gaskonstante	$R$	287	[J/kg·K]
Isentropenexponent	$\kappa$	1.4	[ - ]

Tab. 8-1: Werte für Luft als kalorisch perfektes Gas

### 8.2.3 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich aus einer einfachen Energiebilanz an der Systemgrenze eines Volumens für ein offenes, stationär durchströmtes, adiabates System. Auf der linken Seite stehen die dem System zugeführte spez. Wärme  $q_{12}$  und spez. technischen Arbeit  $w_{t,12}$  während auf der rechten Seite die Änderung der spez. Enthalpie  $h_2 - h_1$ , der spez. kinetischen Energie  $\frac{1}{2} \cdot V^2$  und der spez. potentiellen Energie  $g \cdot z$  stehen. Spezifisch bedeutet, daß die Größen auf die Masse  $m$  des Systems bezogen sind und die Indizes 1,2 kennzeichnen Anfang und Ende der betrachteten Zustandsänderung.

$$q_{12} + w_{t,12} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \cdot (V_2^2 - V_1^2) + g \cdot (z_2 - z_1) \quad \text{Gl. 8-11}$$

### 8.2.4 Entropie und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ermöglicht lediglich eine Aussage darüber, welche Energien in einem Prozeß auftreten, er trifft jedoch keine Aussage ob ein Prozeß überhaupt möglich ist oder nicht. Betrachtet man z.B. ein Flugzeugbauteil, welches aufgrund mangelnder Wartung sich im Flug löst und aus großer Höhe auf die Erde trifft, so wird es sich bei der Begegnung mit einem unnachgiebigen Untergrund wahlweise verformen, d.h. die vollständige kinetische Energie, die sich aus der Umsetzung der potentiellen Energie ergibt, wird in Verformungsenergie umgesetzt oder aber das Flugzeugbauteil ist ebenso unnachgiebig wie der Untergrund, wodurch die kinetische Energie in thermische Energie umgesetzt wird, d.h. das Bauteil wird sehr heiß werden. Diese Betrachtung wird vollständig durch eine Energiebilanz entsprechend dem ersten Hauptsatz abgedeckt. Versucht man jedoch, das inzwischen erkaltete Bauteil durch Zuführen von thermischer Energie auf diese ursprünglich hohe Temperatur zu bringen, was problemlos möglich ist und hofft, daß sich das Bauteil anschließend aus eigener Kraft erhebt um in großer Höhe wieder Anschluß an das Flugzeug zu finden, so ist diese Betrachtung zwar ebenfalls durch den ersten Hauptsatz abgedeckt, die Lebenserfahrung zeigt jedoch, daß dieser umgekehrte Vorgang eher unwahrscheinlich ist.

Zur Beschreibung der Ablauffrichtung einer Zustandsänderung wird die Entropie  $S$ , bzw. die spez. Entropie  $s$  eingeführt

$$ds = \frac{dq_{rev}}{T} = \frac{dq}{T} + ds_{irrev} \quad \text{Gl. 8-12}$$

Dies ist der sog. *zweite Hauptsatz der Thermodynamik*. Die Änderung der Entropie entspricht der Änderung der reversibel (=verlustfrei) zugeführten Wärme bzw. der zugeführten Wärme zusätzlich einer Erhöhung der Entropie. Reale, also reibungsbehaftete Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß  $ds_{irrev} > 0$  gilt, d.h. die Entropie nimmt immer zu. Die einzige Möglichkeit die Entropie in einem System zu verringern, besteht in dem Entzug von Wärme.

Das vollständige Differential der spez. Enthalpie  $h = u + p \cdot v$  lautet

$$dh = du + p \cdot dv + v \cdot dp \quad \text{Gl. 8-13}$$

Eingesetzt in die differentielle Form des ersten Hauptsatzes ergibt sich folgende Beziehung für die Entropie

$$ds = c_p \cdot \frac{dT}{T} - R \cdot \frac{dp}{p} \quad \text{Gl. 8-14}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert zwei Schreibweisen, die sich später bei der Berechnung der Entropiezunahme infolge eines Verdichtungsstoßes noch als sehr nützlich erweisen werden.

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \text{Gl. 8-15}$$

bzw.

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \quad \text{Gl. 8-16}$$

### 8.2.5 Zustandsänderungen

Zustandsänderungen lassen sich unterteilen in

- isochore Zustandsänderung, d.h. das Volumen bleibt konstant
- isobare Zustandsänderung, d.h. der Druck bleibt konstant
- isotherme Zustandsänderung, d.h. die Temperatur bleibt konstant
- adiabate Zustandsänderung, d.h. dem System wird weder Wärme zugeführt noch entzogen, es gilt also  $q_{12} = 0$
- reversible Zustandsänderung, d.h. ideale Prozesse, bei denen keinen Reibungsverluste auftreten
- isentrope Zustandsänderung, d.h. Prozesse, die sowohl reversibel als auch adiabat sind
- polytrope Zustandsänderung, allgemeine Form der Zustandsänderung zur Beschreibung realer Prozesse

Für eine Vielzahl von strömungstechnischen Anwendungen kann die Strömung durch isentrope Zustandsänderungen beschrieben werden. Lediglich in Wandnähe, z.B. an einer Düse oder einem Tragflügelprofil bildet sich eine vergleichsweise dünne Grenzschicht aus, in der reibungsbehaftete Transportvorgänge auftreten. Die Bezeichnung isentrop beinhaltet, daß keine Reibungseffekte auftreten und keine Wärmeaustauschvorgänge stattfinden und somit die Entropie konstant bleibt, d.h. es gilt  $dq = 0$  (adiabate Zustandsänderung) und  $ds = 0$  (reversible Zustandsänderung). Somit ergeben sich aus der Bestimmungsgleichung für die Entropie

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \quad \text{Gl. 8-17}$$

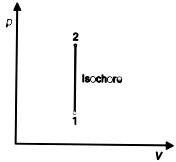
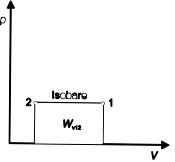
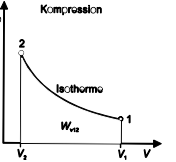
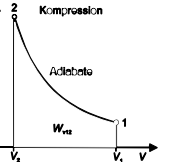
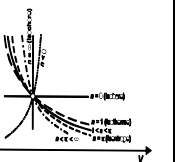
die Gleichungen für isentrope Zustandsänderungen

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 8-18}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{-1}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 8-19}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 8-20}$$

Eine Zusammenfassung der Zustandsänderungen ist in Tab. 8-2 angegeben.

Zustandsänderung	isochor	isobar	isotherm	isentrop	polytrop
Bedingung	$dV = 0$ $\Delta V = 0$	$dp = 0$ $\Delta p = 0$	$dT = 0$ $\Delta T = 0$	$dQ = 0$ $\Delta Q = 0$	
1. Hauptsatz	$dQ = dU$ $Q = \Delta U$	$dQ = dU + dW$ $Q = \Delta U + W$	$dQ = dW$ $Q = W$	$0 = dU + dW$ $0 = \Delta U + W$	$0 = dU + dW$ $0 = \Delta U + W$
Beziehungen zwischen $p, T, V$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ $\frac{p}{T} = \text{const.}$	$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2}$ $\frac{V}{T} = \text{const.}$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$ $p \cdot V = \text{const.}$	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa$ $p \cdot V^\kappa = \text{const.}$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$ $T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ $\frac{T^\kappa}{p^{\kappa-1}} = \text{const.}$	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$ $p \cdot V^n = \text{const.}$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$ $T \cdot V^{n-1} = \text{const.}$ $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ $\frac{T^n}{p^{n-1}} = \text{const.}$
Wärmeenergie	$dQ = c_v \cdot m \cdot dT$ $Q = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$	$dQ = c_p \cdot m \cdot dT$ $Q = c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$	$dQ = dW$ $Q = W$	$dQ = 0$ $Q = 0$	$dQ =$ $c_v \cdot m \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot dT$ $Q =$ $c_v \cdot m \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot (T_1 - T_2)$
Arbeit	$dW = 0$ $W = 0$	$dW = p \cdot dV$ $W = p \cdot (V_2 - V_1)$ $W = m \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$	$dW = p \cdot dV$ $W = m \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $W = m \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ $W = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $W = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ $W = p_2 \cdot V_2 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $W = p_2 \cdot V_2 \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$	$dW = -dU$ $dW = -c_v \cdot m \cdot dT$ $W = -\Delta U$ $W = -c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_2)$ $W = \frac{m \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_1 - T_2)$	$dW = \frac{m \cdot R}{n-1} \cdot dT$ $W = \frac{m \cdot R}{n-1} \cdot (T_1 - T_2)$
Änderung der inneren Energie	$dU = c_v \cdot m \cdot dT$ $U = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$	$dU = c_v \cdot m \cdot dT$ $U = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$dU = c_v \cdot m \cdot dT = -dW$ $\Delta U = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$ $\Delta U = -W$ $\Delta U = \frac{m \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1)$	$dU = c_v \cdot m \cdot dT$ $\Delta U = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$
Änderung der Entropie	$dS = c_v \cdot m \cdot \frac{dT}{T}$ $dS = c_v \cdot m \cdot \frac{dp}{p}$ $\Delta S = c_v \cdot m \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ $\Delta S = c_v \cdot m \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$	$dS = c_p \cdot m \cdot \frac{dT}{T}$ $dS = c_p \cdot m \cdot \frac{dV}{V}$ $\Delta S = c_p \cdot m \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ $\Delta S = c_p \cdot m \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$dS = m \cdot R \cdot \frac{dV}{V}$ $dS = -m \cdot R \cdot \frac{dp}{p}$ $\Delta S = m \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ $\Delta S = -m \cdot R \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$	$dS = 0$ $\Delta S = 0$	$dS =$ $c_v \cdot m \cdot \frac{\kappa - n}{n-1} \cdot \frac{dT}{T}$ $\Delta S =$ $c_v \cdot m \cdot \frac{\kappa - n}{n-1} \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$
$p, V$ -Diagramm					

Tab. 8-2: Zusammenfassung der Zustandsänderungen

### 8.3 Isentrope Strömungen

#### 8.3.1 Statische Größen und Totalgrößen

*Statische Größen* in einem Strömungsfeld entsprechen den Größen, z.B. Druck  $p$ , Temperatur  $T$ , Dichte  $\rho$  oder Enthalpie  $h$  die ein Beobachter spüren würde, sofern er sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Moleküle selbst mit Strömung mitbewegte. Wird die Strömung isentrop, also reibungsfrei und ohne Wärmeaustausch, von einer endlichen Geschwindigkeit auf die Geschwindigkeit Null abgebremst, z.B. im Staupunkt, so werden diese statischen Größen sich verändern und zwar je stärker um so höher die Geschwindigkeit ist, von der sie abgebremst werden. Die Größen, die sich nach der Verzögerung bis zum Stillstand der Strömung ergeben, werden als sog. *Totalgrößen* bezeichnet, z.B. die Totaltemperatur  $T_0$ , der Totaldruck  $p_0$  oder die Totalenthalpie  $h_0$ . Aus der Energiegleichung folgt für isentrope Strömungen, daß die Summe aus spez. Enthalpie  $h$  und spez. kinetischer Energie an jedem Punkt im Strömungsfeld konstant ist und der spez. Totalenthalpie  $h_0$  entspricht, d.h.

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = \text{const.} \quad \text{Gl. 8-21}$$

Für ein kalorisch perfektes Gas ist die Enthalpie lediglich eine Funktion der Temperatur, d.h.

$$h_0 = c_p \cdot T_0 \quad \text{Gl. 8-22}$$

Somit gilt wie für die konstante Totalenthalpie auch für die Totaltemperatur entlang einer Stromlinie

$$T_0 = \text{const.} \quad \text{Gl. 8-23}$$

#### 8.3.2 Kesselgleichungen

Aus der Bedingung konstanter Totalenthalpie bzw. konstanter Totaltemperatur entlang einer Stromlinie in einer isentropen Strömung lassen sich die sog. *Kesselgleichungen* herleiten, die den Zusammenhang zwischen statischen Größen und Totalgrößen als Funktion der Machzahl entlang einer Stromlinie beschreiben. Damit läßt sich z.B. das Ausströmen eines Gases aus einer Brennkammer (Zustand 0, Geschwindigkeit  $V_0 = 0$ ) durch eine Düse in die freie Umgebung (Geschwindigkeit  $V > 0$ ) bestimmen, wobei die Machzahl  $M$  durch das Flächenverhältnis der Düse bestimmt wird (vgl. Kapitel 8.6.2).

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \quad \text{Gl. 8-24}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad \text{Gl. 8-25}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad \text{Gl. 8-26}$$



## 8.4 Stoßwellen

### 8.4.1 Mach-Kegel

Strömungen bei denen die lokale Schallgeschwindigkeit erreicht wird, unterscheiden sich fundamental von reinen Unterschallströmungen. Während in einer Unterschallströmung Druckänderungen sich auch stromaufwärts bemerkbar machen, z.B. infolge der Verdrängungswirkung eines Körpers, so ahnt die Strömung vor einem Körper in einer Überschallströmung nichts von dem bevorstehenden Zusammentreffen mit selbigem, bis sie, völlig überrascht, dem vor dem Körper liegenden Verdichtungsstoß begegnet. Ein für das Fluidteilchen im wahrsten Sinn des Wortes schockierendes Ereignis, was sich auch in der englischen oder französischen Übersetzung des Begriffs 'Stoß' widerspiegelt<sup>4</sup>. Solche Stoßwellen weisen eine relativ geringe Dicke auf, die in einer Größenordnung von  $10^{-7}$  m liegen. Das Zustandekommen solcher Verdichtungsstöße läßt sich aus Abb. 8-2 ersehen. Befindet sich eine Schallquelle oder auch Störungsquelle in Ruhe (a) so breiten sich die Schallwellen in konzentrischen Kreisen aus. Mit zunehmender Geschwindigkeit der Quelle (b) schieben sich die Wellenfronten in Strömungsrichtung zusammen, bis sie sich schließlich bei einer Geschwindigkeit der Quelle, die gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen ist, alle im Punkt A tangential berühren (c). Bewegt sich die Quelle mit einer Geschwindigkeit, die größer ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, so werden alle Wellen von einer Hüllkurve, dem sog. *Mach-Kegel*<sup>5</sup> mit dem Öffnungswinkel  $\mu$ .

$$\sin \mu = \frac{1}{M} \quad \text{Gl. 8-27}$$

umschlossen. Dies bedeutet, daß sich Druckänderungen nur noch innerhalb des Mach-Kegels, also stromabwärts auswirken können. Stromaufwärts, außerhalb des Kegels liegt die sog. 'Zone des Schweigens'.

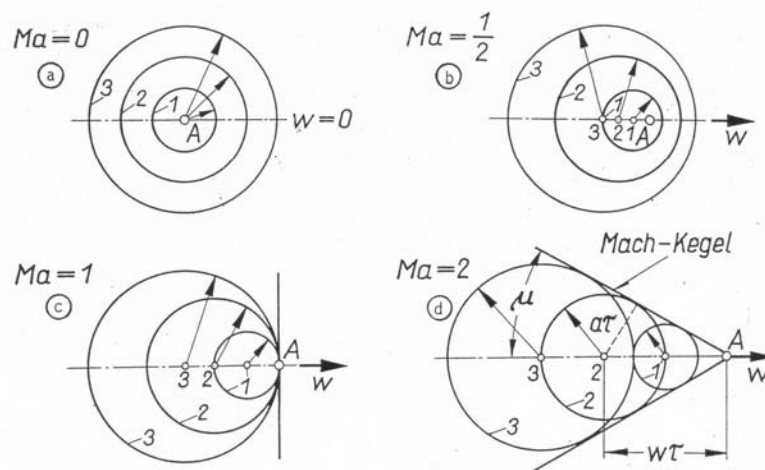


Abb. 8-2: Entstehung eines Verdichtungsstoßes

Eng verknüpft mit diesem Vorgang ist der sog. *Doppler-Effekt*<sup>6</sup>, der die von einem externen Beobachter wahrgenommene Frequenzverschiebung einer bewegten Schallquelle beschreibt. Die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenzänderung ist aus Abb. 8-2b ersichtlich. Die unterschiedlichen Abstände der Wellenfronten (= Frequenz) in Abhängigkeit

<sup>4</sup> engl.: shock, frz.: choc

<sup>5</sup> Ernst Mach, österreichischer Physiker, 1838 - 1916

<sup>6</sup> Christian Doppler, österreichischer Physiker, 1803- 1853

davon ob sich die Quelle auf den Beobachter zu bewegt oder entfernt, werden als unterschiedliche Frequenzen wahrgenommen. Ist  $f$  die von der Quelle, die sich mit der Geschwindigkeit  $w$  bewegt, ausgesandte Frequenz und  $c$  die lokale Schallgeschwindigkeit, so nimmt der Beobachter die verschobene Frequenz  $f'$  wahr.

$$f' = \frac{f}{1 \pm \frac{w}{c}} \quad \text{Gl. 8-28}$$

Ist die Frequenz mit der die Quelle sendet bekannt, so lässt sich aus der Doppler-Verschiebung die Geschwindigkeit der Quelle bestimmen.

$$w = \pm c \cdot \left( \frac{f}{f'} - 1 \right) \quad \text{Gl. 8-29}$$

Diese Erkenntnis gilt nicht nur für Schallwellen, sondern für alle Formen der Wellenbewegung, z.B. auch bei Licht in seiner Form als elektromagnetische Welle. Bewegen Sie sich z.B. beim einem Raumflug mit großer Geschwindigkeit, wobei groß im astronomischen Sinne zu verstehen ist, d.h. näherungsweise mit Lichtgeschwindigkeit, auf eine rote Lichtquelle zu, so werden Sie bei der Lichtquelle eine Verschiebung ins blaue Farbspektrum, also eine höhere Frequenz wahrnehmen.

#### 8.4.2 Strömungssichtbarmachung

Aufgrund der Dichteabhängigkeit der Lichtbrechung lassen sich Verdichtungsstöße z.B. mit einer Schlierenoptik oder einem Interferometer sichtbar machen. Bei einer Schlierenoptik kann ein *Durchgangungsverfahren* oder ein sog. *Koinzidenzverfahren* angewendet werden. Eine Lichtquelle  $L$  befindet sich im Brennpunkt einer Linse  $K$ . Der Strahl wird über ein Prisma  $R$  auf einen Hohlspiegel  $S$  geleitet, der im Koinzidenzverfahren die Funktion der zweiten Linse  $A_2$  im Durchgangungsverfahren erfüllt und wird von dort auf den Schirm  $P$  projiziert. Im Brennpunkt des Hohlspiegels (oder der zweiten Linse  $A_2$ ) befindet sich die Schlierenblende  $B$ . In Abhängigkeit davon ob die Schlierenblende außerhalb des Brennpunktes liegt oder ihn verdeckt, erscheint die Abbildung heller oder dunkler. Dichteänderungen im Strömungskanal bewirken eine Ablenkung des Lichtstrahls in Richtung des Dichtegradienten. Ist die Schneide der Schlierenblende senkrecht zum Dichtegradienten gedreht, so treten auf dem Schirm  $P$  Helligkeitsunterschiede in Abhängigkeit von der Dichteänderung auf.

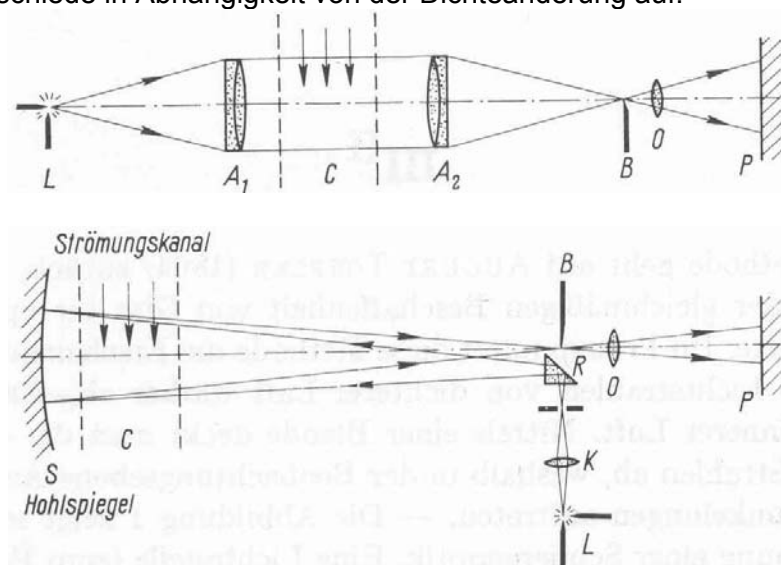


Abb. 8-3: Schlierenoptik: Durchgangs- und Koinzidenzverfahren [ 13]

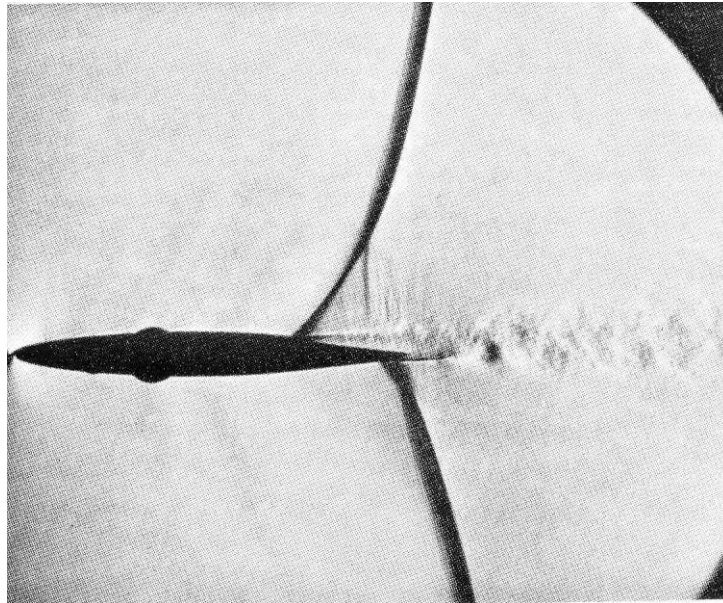


Abb. 8-4: Schlierenaufnahme eines Profils [ 13]

Ein weiteres einfaches Verfahren stellt die sog. *Interferenzmethode* dar, welches sich die Eigenschaft des Lichts, neben der Teilchenbewegung auch als Wellenbewegung aufzutreten, zu Nutze macht. Treffen zwei Wellen gleicher Frequenz, jedoch mit entgegengesetzter Phase aufeinander, so tritt Auslöschung, also Dunkelheit ein. Diese Stellen werden als dunkle Interferenzstreifen abgebildet. Bei einem Doppelspalt-Interferometer wird kohärentes Licht in zwei Teilstrahlen aufgespalten und anschließend ein Teilstrahl durch die ungestörte Luft und der zweite Strahl durch den Beobachtungsraum  $C$ , also die Meßstrecke geschickt. Nach dem Zusammenführen der beiden Strahlen treten auf dem Beobachtungsschirm Interferenzstreifen auf, wobei sich aus der Verschiebung der Streifen die Dichteänderung bestimmen läßt.

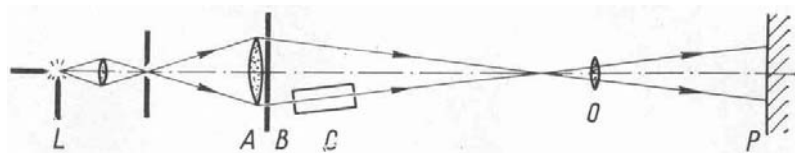


Abb. 8-5: Doppelspalt-Interferometer [ 13]



Abb. 8-6: Interferogramm einer Überschallströmung um ein Profil [ 13]

### 8.4.3 Schallgeschwindigkeit und Kompressibilität

Aus der Beobachtung von mit der Erzeugung von Geräuschen verknüpften Ereignissen, z.B. die Kombination einer elektrischen Entladung (Blitz) mit dem darauffolgenden Donner (Druckänderung) wird deutlich, daß sich Druckwellen mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten. Die Leuchterscheinung infolge der Entladung breitet sich mit einer Geschwindigkeit von ca.  $3 \cdot 10^5$  km/s aus, wohingegen die akustische Wahrnehmung des Donners mit einer deutlich spürbaren Verzögerung eintrifft.

Betrachtet man die in Abb. 8-7 skizzierte Schallwelle, die sich mit der Geschwindigkeit  $c$  von rechts nach links bewegt, so läßt sich der Zustand der Luft vor dem Eintreffen der Welle durch die Zustandsgrößen  $p$ ,  $T$  und  $\rho$  beschreiben und hinter der Welle mit  $p+dp$ ,  $T+dT$  und  $\rho+d\rho$ .

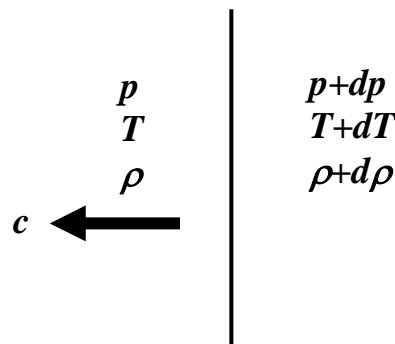


Abb. 8-7: Zustandsgrößen vor und hinter einer Schallwelle

Mit der Kontinuitäts- und Impulsgleichung läßt sich daraus die Beziehung für die Schallgeschwindigkeit  $c$  herleiten.

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad \text{Gl. 8-30}$$

Unter der Annahme einer isentropen Strömung folgt daraus für ein kalorisch perfektes Gas

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}} \quad \text{Gl. 8-31}$$

bzw.

$$c = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} \quad \text{Gl. 8-32}$$

Dies bedeutet, daß sich die Schallgeschwindigkeit eines idealen Gases als reine Temperaturfunktion darstellen läßt. Aus der thermodynamischen Betrachtung (Gaskinetik), d.h. aus der Analyse der Molekularbewegungen in einem Gas folgt, daß die Gastemperatur ein Maß für die Geschwindigkeit der freien Moleküle darstellt und somit die Schallgeschwindigkeit mit der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle  $\bar{c}$  über die Temperatur korreliert.

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi}} \quad \text{Gl. 8-33}$$

Bei Standardtemperaturen, d.h. auf Meeresniveau  $H = 0$ ,  $p = 101325$  Pa und  $T = 288.15$  K ergibt sich eine Schallgeschwindigkeit von  $c = 340.3$  m/s und eine mittlere Molekülgeschwindigkeit von  $\bar{c} = 458.9$  m/s.

Aus der Definition der Kompressibilität  $\tau$  (vgl. Kapitel 1.9.2)

$$\tau_s = -\frac{1}{v} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s \quad \text{Gl. 8-34}$$

folgt mit  $v=1/\rho$  und  $dv=-d\rho/\rho^2$

$$\tau_s = -\rho \cdot \left[ -\frac{1}{\rho^2} \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \right] = \frac{1}{\rho \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad \text{Gl. 8-35}$$

Wegen  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$  folgt daraus

$$\tau_s = \frac{1}{\rho \cdot c^2} \quad \text{Gl. 8-36}$$

bzw.

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \tau_s}} \quad \text{Gl. 8-37}$$

Aus Gl. 8-37 wird deutlich, daß für ein inkompressibles Fluid ( $\tau_s = 0$ ) die Schallgeschwindigkeit gegen unendlich geht.

Die physikalische Bedeutung der Machzahl  $M$

$$M = \frac{V}{c} \quad \text{Gl. 8-38}$$

ergibt sich aus dem Verhältnis der kinetischen Energie  $V^2/2$  und inneren Energie  $e$  eines Fluidelements entlang einer Stromlinie, d.h. dem Verhältnis der kinetischen Energie zu der thermischen Bewegung der Moleküle (innere Energie).

$$\frac{\frac{V^2}{2}}{e} = \frac{\frac{V^2}{2}}{c_v \cdot T} = \frac{\frac{V^2}{2}}{\frac{R \cdot T}{\kappa - 1}} = \frac{\left( \frac{\kappa}{2} \right) \cdot V^2}{\frac{c^2}{\kappa - 1}} = \frac{\kappa \cdot (\kappa - 1)}{2} \cdot M^2 \quad \text{Gl. 8-39}$$

Analog zu den Überlegungen von Kapitel 8.3.2 d.h. der isentropen Verzögerung eines Fluidelements auf die Geschwindigkeit Null, kann man auch die Beschleunigung eines Elements von einer Unterschallgeschwindigkeit, bzw. die Verzögerung eines Elements von einer Überschallgeschwindigkeit genau auf Schallgeschwindigkeit betrachten. Die Temperatur, die es dabei erreichen würde, wird mit der charakteristischen Temperatur  $T^*$  bezeichnet und die dazugehörige Schallgeschwindigkeit

$$c^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T^*} \quad \text{Gl. 8-40}$$

Analog läßt sich eine charakteristische Machzahl  $M^*$  definieren

$$M^* = \frac{V}{c^*} \quad \text{Gl. 8-41}$$

Der Zusammenhang zwischen Strömungsmachzahl  $M$  und der charakteristischen Machzahl  $M^*$  lautet

$$M^* = \sqrt{\frac{(\kappa + 1) \cdot M^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot M^2}} \quad \text{Gl. 8-42}$$

Daraus wird ersichtlich, daß für  $M^* = 1$  Strömungsmachzahl und charakteristische Machzahl übereinstimmen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} M = 1 & \Rightarrow M^* = 1 \\ M < 1 & \Rightarrow M^* < 1 \\ M > 1 & \Rightarrow M^* > 1 \\ M \rightarrow \infty & \Rightarrow M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \end{aligned}$$

#### 8.4.4 Senkrechter Verdichtungsstoß

Zur Analyse der Strömungszustände vor und hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß soll das in Abb. 8-8 skizzierte Kontrollvolumen  $a-b-c-d$  betrachtet werden. Der Zustand der Strömung vor dem Stoß ( $p_1, \rho_1, T_1, M_1, u_1, p_{0,1}, h_{0,1}, T_{0,1}, s_{0,1}$ ) wird als bekannt vorausgesetzt, der Strömungszustand hinter dem Stoß ( $p_2, \rho_2, T_2, M_2, u_2, p_{0,2}, h_{0,2}, T_{0,2}, s_{0,2}$ ) soll berechnet werden. Der Stoß selbst liegt innerhalb des Kontrollvolumens. Es lassen sich folgende Annahmen treffen:

- Die Strömung ist stationär, d.h. alle zeitabhängigen Derivativa verschwinden,  $\partial/\partial t=0$
- Die Strömung ist adiabat, d.h. es findet kein Wärmeaustausch statt,  $\dot{q}=0$
- Die Strömung ist reibungsfrei, es treten keine viskosen Effekte auf, zumindest nicht außerhalb des Kontrollvolumens

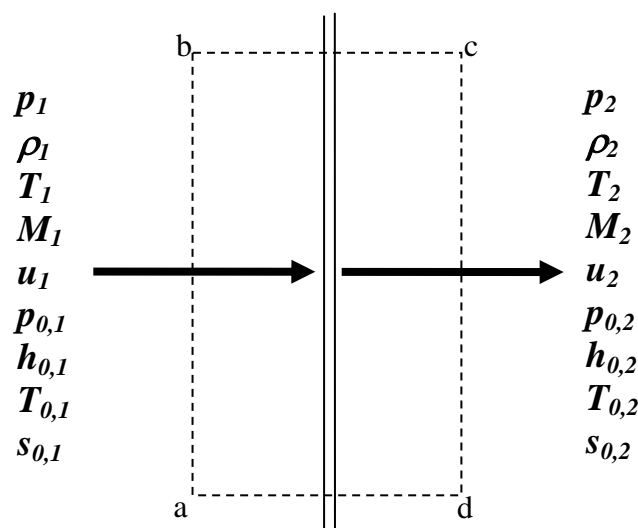


Abb. 8-8: Strömungszustände vor und hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$-\rho_1 \cdot u_1 \cdot A + \rho_2 \cdot u_2 \cdot A = 0 \quad \text{Gl. 8-43}$$

also

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2 \quad \text{Gl. 8-44}$$

Aus der Impulsgleichung folgt

$$\rho_1 \cdot (-u_1 \cdot A) \cdot u_1 + \rho_2 \cdot (-u_2 \cdot A) \cdot u_2 = -(-p_1 \cdot A + p_2 \cdot A) \quad \text{Gl. 8-45}$$

also

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2 \quad \text{Gl. 8-46}$$

Aus der Energiegleichung folgt

$$-\rho_1 \cdot \left( e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \cdot u_1 \cdot A + \rho_2 \cdot \left( e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) \cdot u_2 \cdot A = -(-p_1 \cdot u_1 \cdot A + p_2 \cdot u_2 \cdot A) \quad \text{Gl. 8-47}$$

Zusammen mit der Definition für die spez. Enthalpie

$$h = e + p \cdot v = e + \frac{p}{\rho} \quad \text{Gl. 8-48}$$

ergibt sich für die Energiegleichung

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \text{Gl. 8-49}$$

Zusätzlich gilt bei einem kalorisch perfekten Gas für die spez. Enthalpie  $h$

$$h_2 = c_p \cdot T_2 \quad \text{Gl. 8-50}$$

und die Zustandsgleichung

$$p_2 = \rho_2 \cdot R \cdot T_2 \quad \text{Gl. 8-51}$$

Mit diesem System aus fünf Gleichungen lassen sich die fünf Zustandsgrößen hinter dem Stoß ( $p_2, \rho_2, T_2, u_2, h_2$ ) aus den Zustandsgrößen vor dem Stoß ( $p_1, \rho_1, T_1, u_1, h_1$ ) berechnen.

Über die in Kapitel 8.4.3 hergeleitete Definition der charakteristischen Machzahl  $M^*$  lassen sich diese Beziehungen als Funktionen der Zuströmmachzahl  $M_1$  vor dem Stoß darstellen.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\kappa + 1) \cdot M_1^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot M_1^2} \quad \text{Gl. 8-52}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (M_1^2 - 1) \quad \text{Gl. 8-53}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \cdot \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{Gl. 8-54}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[ 1 + \frac{2 \cdot \kappa \cdot (M_1^2 - 1)}{\kappa + 1} \right] \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot M_1^2}{(\kappa + 1) \cdot M_1^2} \quad \text{Gl. 8-55}$$

Die Machzahl  $M_2$  hinter dem senkrechten Stoß ist lediglich eine Funktion des Isentropenexponenten  $\kappa$  und der Zuströmmachzahl vor dem Stoß  $M_1$

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M_1^2}{\kappa \cdot M_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}}} \quad \text{Gl. 8-56}$$

Während die Totaltemperatur  $T_0$  sich über den Stoß nicht ändert, d.h. es gilt

$$T_{0,1} = T_{0,2} \quad \text{Gl. 8-57}$$

so erfolgt über den Stoß eine Zunahme der Entropie, d.h.  $s_2 - s_1 > 0$ , die sich als Funktion der Zuströmmachzahl  $M_1$  darstellen läßt

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (M_1^2 - 1) \right] \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot M_1^2}{(\kappa + 1) \cdot M_1^2} \right\} - R \cdot \ln \left[ 1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (M_1^2 - 1) \right] \quad \text{Gl. 8-58}$$

Die Bestimmungsgleichung der Entropieänderung

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} - R \cdot \ln \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \quad \text{Gl. 8-59}$$

vereinfacht sich  $T_0 = \text{const.}$  zu

$$s_2 - s_1 = -R \cdot \ln \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \quad \text{Gl. 8-60}$$

Für den Totaldruckverlust läßt sich somit schreiben

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = e^{\frac{-(s_2 - s_1)}{R}} \quad \text{Gl. 8-61}$$

Die Abhängigkeit der Strömungsgrößen hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß als Funktion der Zuströmmachzahl  $M_1$  ist in Abb. 8-9 dargestellt.

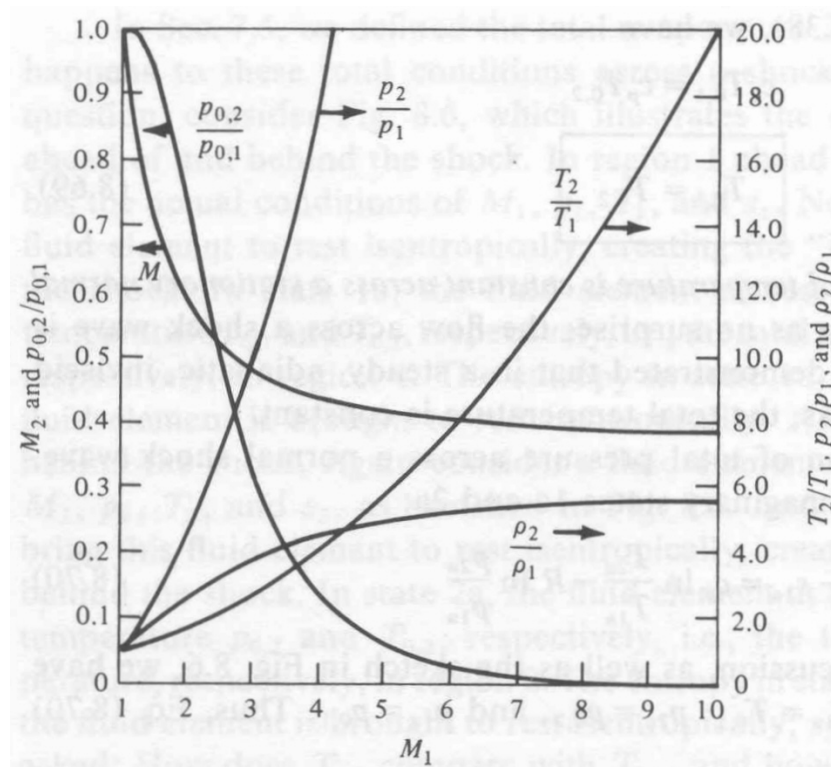


Abb. 8-9: Strömungsgrößen vor und hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß [ 2]



**Hugoniot-Gleichung**

Im Fall eines senkrechten Verdichtungsstoßes ergibt sich für die Strömungsgrößen vor und hinter dem Stoß aus der Kontinuitätsgleichung

$$u_2 = u_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{Gl. 8-62}$$

eingesetzt in die die Impulsgleichung folgt

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot \left( u_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \quad \text{Gl. 8-63}$$

bzw.

$$u_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{Gl. 8-64}$$

und

$$u_2^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{Gl. 8-65}$$

Aus der Energiegleichung

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \text{Gl. 8-66}$$

folgt mit der Definition der spezifischen Enthalpie  $h = e + p \cdot v = e + \frac{p}{\rho}$

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad \text{Gl. 8-67}$$

Eliminieren der Geschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$  ergibt die *Hugoniot-Gleichung*

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad \text{Gl. 8-68}$$

bzw.

$$e_2 - e_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad \text{Gl. 8-69}$$

bzw. für ein kalorisch perfektes Gas

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{Gl. 8-70}$$

### 8.4.5 Schräger Verdichtungsstoß

Die in Kapitel 8.4.4 hergeleiteten Beziehungen für den senkrechten Verdichtungsstoß beschreiben lediglich einen wichtigen Sonderfall von Stoßwellen. Häufig liegen bei Überschallströmungen jedoch keine senkrechten Stöße, sondern schräge Verdichtungsstöße vor. Bei der Umströmung einer konkaven Ecke, Abb. 8-10 wird die Strömung in sich selbst gedreht und verdichtet wodurch ein *schräger Verdichtungsstoß* entsteht.

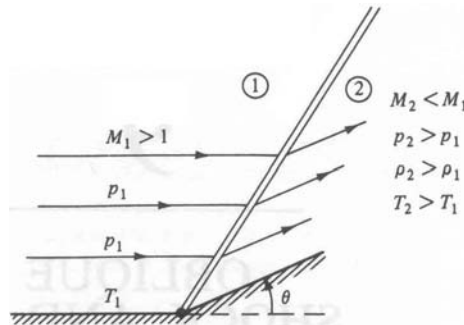


Abb. 8-10: Umströmung einer konkaven Ecke im Überschall

Die Geschwindigkeiten und Winkel bei einem schrägen Stoß sind aus Abb. 8-11 ersichtlich. Die Krümmung der Körperoberfläche entspricht dem Rampenwinkel  $\theta$  und die daraus resultierende Änderung der Strömungsrichtung vor und hinter dem Stoß dem Winkel  $\beta$ .

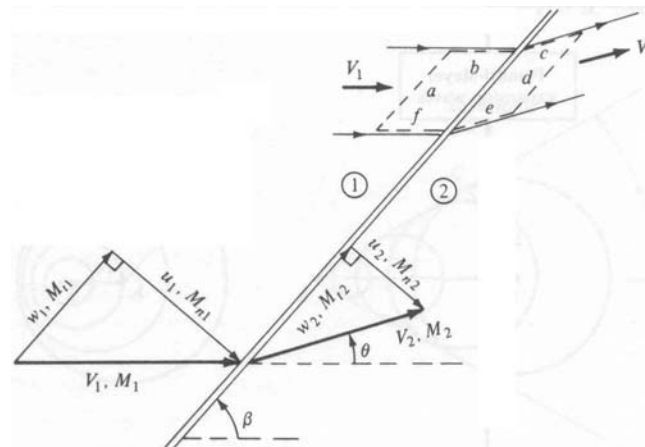


Abb. 8-11: Geschwindigkeitskomponenten vor und hinter einem schrägen Stoß

Auffallend ist, daß sich durch den Stoß lediglich die Normalkomponente  $u$  der Geschwindigkeit ändert, während die Tangentialkomponente  $w$  konstant bleibt, d.h.  $w_1 = w_2$ . Dies bedeutet, daß bei allen weiteren Betrachtungen lediglich die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Stoß berücksichtigt werden und die Beziehungen für den schrägen Stoß aus den Beziehungen für den senkrechten Stoß abgeleitet werden können.

Die Kontinuitätsgleichung für den schrägen Stoß lautet demnach analog zum senkrechten Stoß

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

Gl. 8-71

Die Impulsgleichung

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2 \quad \text{Gl. 8-72}$$

Analog zum senkrechten Verdichtungsstoß bleiben bei einem kalorisch perfekten Gas Totaltemperatur und Totalenthalpie über den Stoß konstant,  $h_0 = c_p \cdot T_0 = \text{const.}$ , d.h. für die Gesamtenthalpie gilt

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \text{Gl. 8-73}$$

Die Beziehungen für Druck, Dichte und Temperatur hinter einem schrägen Stoß können, analog zum senkrechten Stoß aus der Normalkomponente der Zuströmmachzahl  $M_{n,1}$  berechnet werden

$$M_{n,1} = M_1 \cdot \sin \beta \quad \text{Gl. 8-74}$$

$$M_{n,2} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\kappa-1}{2}\right) \cdot M_{n,1}^2}{\kappa \cdot M_{n,1}^2 - \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)}} \quad \text{Gl. 8-75}$$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} \quad \text{Gl. 8-76}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) \cdot M_{n,1}^2}{2 + (\kappa-1) \cdot M_{n,1}^2} \quad \text{Gl. 8-77}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa+1} \cdot (M_{n,1}^2 - 1) \quad \text{Gl. 8-78}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{Gl. 8-79}$$

Der Zusammenhang zwischen Krümmungsänderung der Kontur  $\theta$  und Stoßwinkel  $\beta$  ist kann durch die implizite Funktion

$$\tan \theta = 2 \cdot \cot \beta \cdot \frac{M_1^2 \cdot \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 \cdot (\kappa + \cos 2\beta) + 2} \quad \text{Gl. 8-80}$$

beschrieben werden. Ergebnisse für diese Funktion sind in dem  $\theta$  -  $\beta$  -  $M$  - Diagramm in Abb. 8-12 dargestellt.

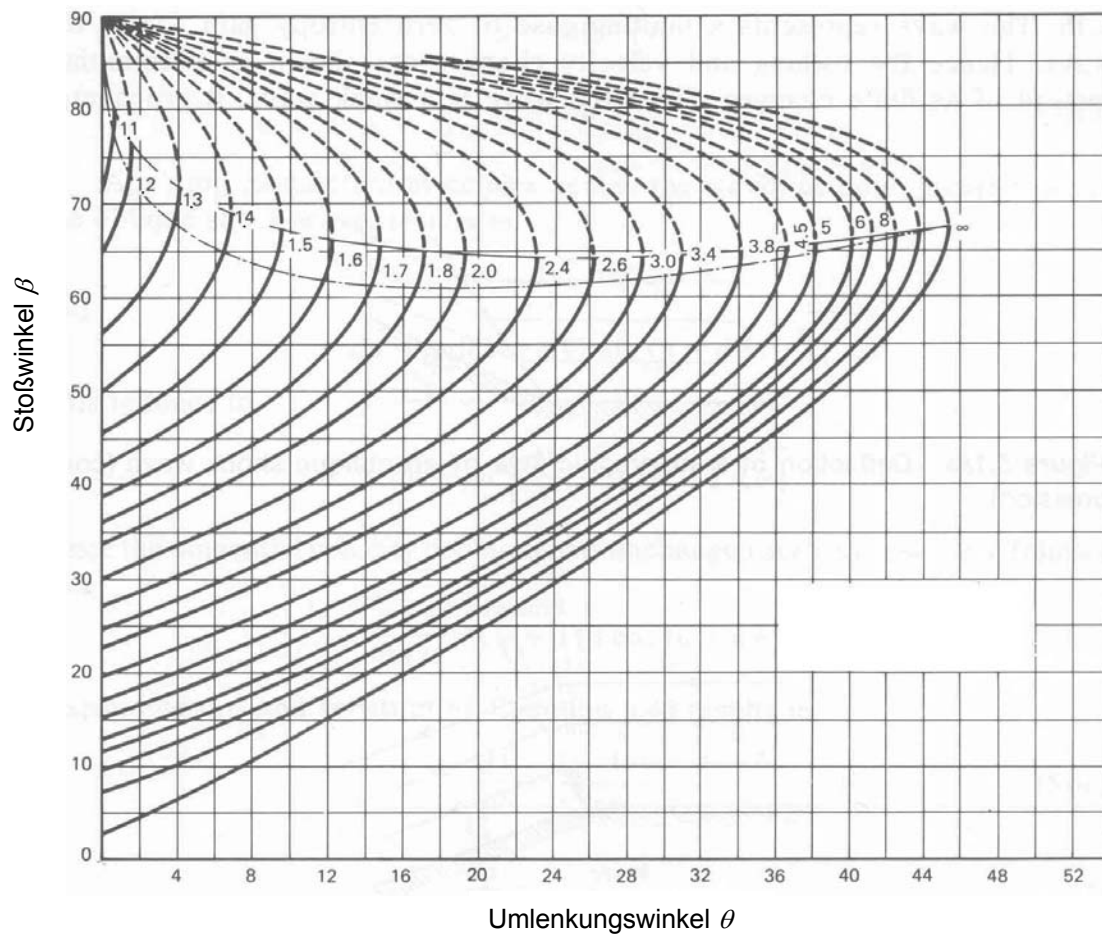


Abb. 8-12: Stoßwinkel als Funktion des Umlenkungswinkels, [ 25]

Aus diesem Diagramm werden einige bedeutsame Eigenschaften schräger Verdichtungsstöße deutlich.

- (1) Für jede Zuströmmachzahl  $M_1$  gibt es einen maximalen Umlenkungswinkel  $\theta_{max}$  bei dem für  $\theta > \theta_{max}$  keine Lösung von Gl. 8-71 mehr existiert. Eine gerade Stoßfront bildet sich hier nicht mehr aus, sondern es legt ein gekrümmter Stoß vor, der von dem Körper abgelöst ist und vor dem Körper liegt, Abb. 8-14b.
- (2) Für alle Winkel  $\theta < \theta_{max}$  liefert Gl. 8-71 zwei Lösungen, z.B. für  $M_1 = 2.0$  ergeben sich bei einem Umlenkungswinkel von  $\theta = 15^\circ$  die Stoßwinkel  $\beta = 45.3^\circ$  und  $\beta = 79.8^\circ$ . Der kleinere Winkel entspricht dem *schwachen Stoß* und der größere Winkel dem *starken Stoß*.

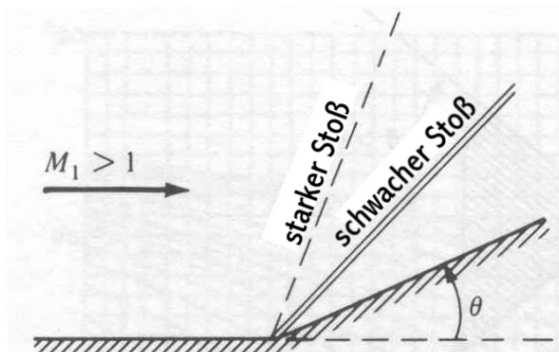


Abb. 8-13: Starker und schwacher Stoß

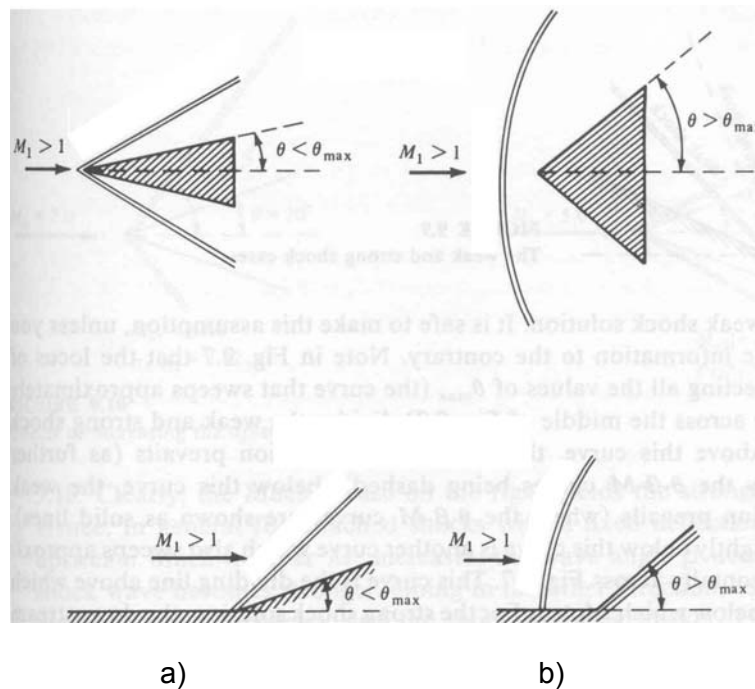


Abb. 8-14: Anliegende und abgelöste Stöße

Je größer der Stoßwinkel ist, d.h. je mehr sich der Stoßwinkel dem senkrechten Stoß annähert, um so stärker wird der Druckanstieg  $p_2/p_1$  über den Stoß. Aus der Lösung für den starken Stoß ergibt sich immer eine Machzahl hinter dem Stoß  $M_2 < 1$ , während aus der Lösung für den schwachen Stoß die Machzahl hinter dem Stoß fast immer im Überschall liegt,  $M_2 > 1$ . In der Natur stellt sich hinter schrägen Stößen fast immer eine Machzahl  $M_2 > 1$  ein.

Ein wichtiger Anwendungsfall schräger Stoßsysteme besteht in der Auslegung von Triebwerkseinläufen im Überschall. Der Verdichter konventioneller Turboluftstrahltriebwerke ist auf eine Zuströmmachzahl von ca.  $M = 0.6$  ausgelegt, d.h. bei einem Flugzustand im Überschall muß die Strömung im Triebwerkseinlauf über einen oder mehrere Verdichtungsstöße von einer Überschall-Machzahl auf eine Unterschall-Machzahl verzögert werden. Dabei ist der infolge der Stöße auftretende Totaldruckverlust zu minimieren. In Abb. 8-15 ist der Einfluß des Umlenkungswinkels, also bei einem Triebwerkseinlauf der Rampenwinkel, auf das Druckverhältnis bei gleicher Zuströmmachzahl dargestellt. Infolge der stärkeren Umlenkung erhöht sich auch das resultierende Druckverhältnis, d.h. die Kompression wird stärker

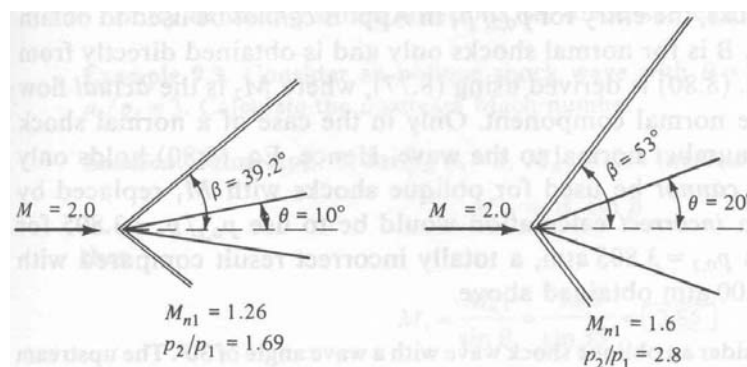


Abb. 8-15: Einfluß des Umlenkungswinkels der Strömung auf die Druckerhöhung

In der Praxis werden daher Triebwerkseinläufe für den Überschall so ausgelegt, daß die Strömung nicht über einen einzigen senkrechten Stoß, sondern über eine Kombination von mehreren schrägen und evtl. auch später schwachen senkrechten Stößen auf die erforderliche Unterschallgeschwindigkeit vor dem Verdichter verzögert wird (vgl. auch Berechnungsbeispiel 'Totaldruckverlust bei Triebwerkseinläufen' im Übungsteil).

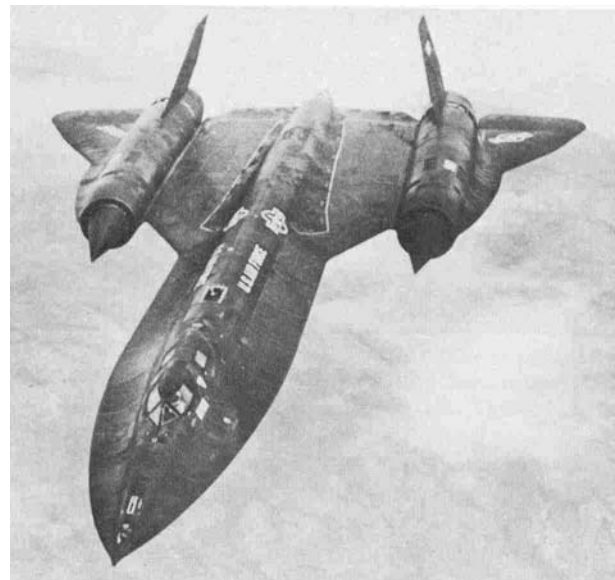
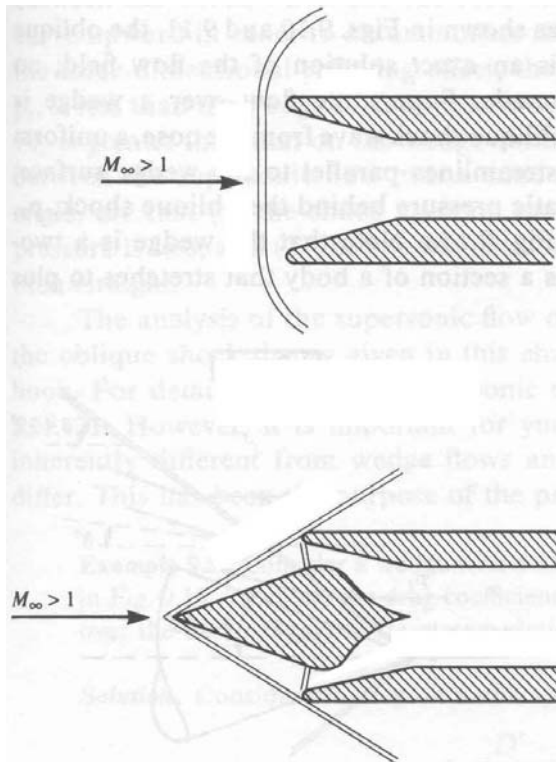


Abb. 8-16: Triebwerkseinlauf SR-71

Abb. 8-17: Gerade und schräge Stoßsysteme in Triebwerkseinläufen

#### 8.4.6 Prandtl-Meyer Expansion

Die Entstehung schräger Verdichtungsstöße ergibt sich aus der Umströmung konkaver Ecken, d.h. die Strömung wird in sich hineingedreht und somit komprimiert. Bei der Umströmung konvexer Ecken wird die Strömung aus sich herausgedreht, d.h. der Strömungsquerschnitt wird vergrößert und es erfolgt somit eine Entspannung. Im Gegensatz zum Verdichtungsstoß, dessen Dicke gegen Null geht erfolgt die Entspannung kontinuierlich in einem Verdünnungsfächer.

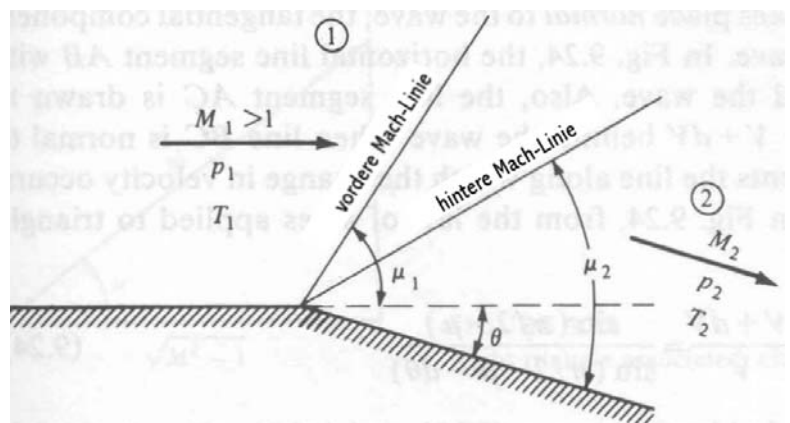
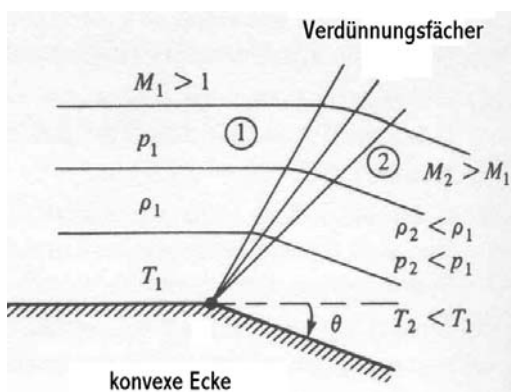


Abb. 8-18: Umströmung einer konvexen Ecke

Dieser Verdünnungsfächer entspricht einer unendlichen Anzahl von Mach-Linien, die mit der lokalen Strömung den Machwinkel  $\mu$  bilden. Die Begrenzung bilden die vordere und hintere Machlinie, die mit der Strömung die Winkel  $\mu_1$  und  $\mu_2$  bilden.

$$\mu_1 = \arcsin \frac{1}{M_1}, \quad \mu_2 = \arcsin \frac{1}{M_2} \quad \text{Gl. 8-81}$$

Aufgrund der kontinuierlichen Entspannung in dem Verdünnungsfächer erfolgt keine Entropiezunahme und somit kein Totaldruckverlust, d.h. die Entspannung verläuft isentrop. Im Gegensatz zu der stetigen Änderung der Strömungsbedingungen bei der Entspannung erfolgt die Änderung der Bedingungen bei einem Verdichtungsstoß unstetig und ist mit einer Entropiezunahme und dadurch mit einem Totaldruckverlust verbunden.

Der Zusammenhang zwischen den Machzahlen  $M_1$ ,  $M_2$  und dem Umlenkungswinkel  $\theta$  wird durch die *Prandtl-Meyer-Funktion* beschrieben.

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad \text{Gl. 8-82}$$

mit

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \cdot \arctan \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cdot (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \quad \text{Gl. 8-83}$$

In der Regel sind die Zuströmmachzahl  $M_1$  und der Umlenkungswinkel  $\theta$  bekannt, d.h. die Abströmmachzahl  $M_2$  kann implizit aus Gl. 8-74 bestimmt werden. Da keine Zunahme der Entropie erfolgt und Totaltemperatur und Totaldruck konstant bleiben, lassen sich Druck und Temperatur über die Gleichungen für isentrope Zustandsänderungen berechnen.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_0}{p_0} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_2^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 8-84}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0}{T_0} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_2^2} \quad \text{Gl. 8-85}$$

Sind Druck und Temperatur bekannt, ergibt sich die Dichte aus der Zustandsgleichung des idealen Gases  $\rho = p / R \cdot T$ .

## 8.5 Messung der Strömungsgeschwindigkeit

### 8.5.1 Unterschallströmung, inkompressibel

Bei Unterschallströmungen im inkompressiblen Bereich, d.h. bei  $M < 0.3$  läßt sich die Strömungsgeschwindigkeit über ein einfaches Pitot<sup>7</sup>-Rohr (Abb. 8-19) messen

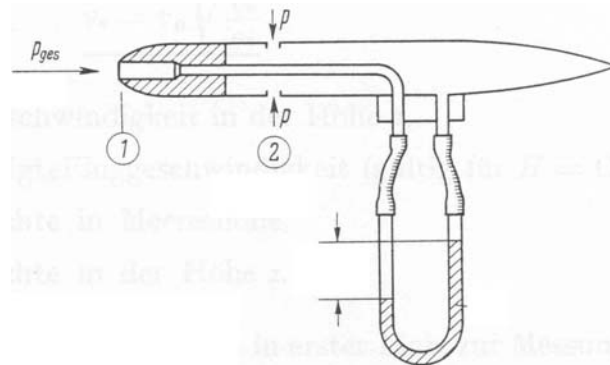


Abb. 8-19: Pitot-Rohr in einer Unterschallströmung

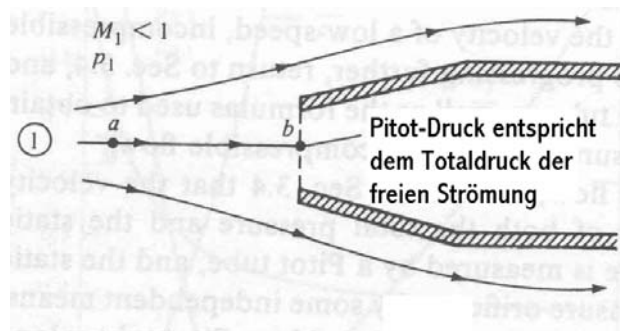


Abb. 8-20: Messung des Totaldrucks in einer Unterschallströmung

Aufgrund der Annahme einer inkompressiblen Strömung läßt sich aus der Messung des Staudrucks und des statischen Drucks über die Bernoulli-Gleichung die Geschwindigkeit berechnen

$$p_{0,1} = \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot V_1^2 + p_1 = \text{const.} \quad \text{Gl. 8-86}$$

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_{0,1} - p_1)}{\rho_1}} \quad \text{Gl. 8-87}$$

### 8.5.2 Unterschallströmung, kompressibel

Bei höheren Geschwindigkeiten, d.h.  $M > 0.3$  ist der Einfluß der Kompressibilität zu berücksichtigen. Unter der Annahme einer isentropen Strömung kann die Geschwindigkeit mit den in Kapitel 8.3.2 hergeleiteten Kesselgleichungen bestimmt werden, sofern der statische Druck und der Totaldruck über ein Pitot-Rohr gemessen wurden. Der Zusammenhang zwischen Totaldruck und statischem Druck als Funktion der Machzahl lautet

<sup>7</sup> Henri Pitot: Französischer Ingenieur und Physiker, 1695 - 1771, bestimmte mit seiner Pitot-Sonde die Strömungsgeschwindigkeit der Seine



$$\frac{p_{0,1}}{p_1} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot M_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 8-88}$$

Aufgelöst nach der Machzahl und mit der lokalen Schallgeschwindigkeit  $c$  ergibt sich für die Geschwindigkeit  $V$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1^2}{\kappa-1} \cdot \left[ \left( \frac{p_{0,1}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} \quad \text{Gl. 8-89}$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, daß für eine korrekte Geschwindigkeitsbestimmung zusätzlich noch die Messung der statischen Temperatur zur Ermittlung der Schallgeschwindigkeit  $c = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$  erforderlich ist.

### 8.5.3 Überschallströmung

Wird ein Pitot-Rohr in einer Überschallströmung zur Geschwindigkeitsmessung eingesetzt, so bildet sich vor dem Rohr näherungsweise ein senkrechter Stoß, Abb. 8-21. In diesem Fall sind über die Beziehungen für den senkrechten Verdichtungsstoß aus den Zustandsgrößen vor dem Stoß die Zustandsgrößen hinter dem Stoß zu berechnen. Hinter dem senkrechten Stoß liegt immer eine Unterschallströmung vor. Als Meßwerte liefert das Pitot-Rohr den Totaldruck hinter dem Stoß  $p_{0,2}$ . Aufgrund der Entropiezunahme über den Stoß sinkt der Totaldruck, d.h. es gilt  $p_{0,2} < p_{0,1}$ . Die Zuströmmachzahl  $M_1$ , aus der sich über die Schallgeschwindigkeit  $c_1$  wieder die Geschwindigkeit berechnen läßt, kann implizit aus der sog. *Rayleigh-Gleichung* bestimmt werden.

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left( \frac{(\kappa+1)^2 \cdot M_1^2}{4 \cdot \kappa \cdot M_1^2 - 2 \cdot (\kappa-1)} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot \left( \frac{1 - \kappa + 2 \cdot \kappa \cdot M_1^2}{\kappa+1} \right) \quad \text{Gl. 8-90}$$

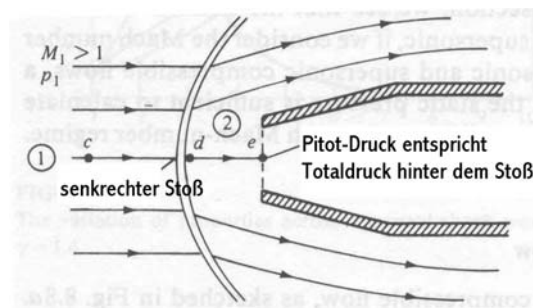


Abb. 8-21: Pitot-Rohr in einer Überschallströmung [ 2]

### 8.5.4 Geschwindigkeitsbezeichnungen

#### True Airspeed (TAS)

Entspricht der Geschwindigkeit, die sich aus der Annahme einer isentropen, kompressiblen Strömung aus den Kesselgleichungen ergibt. Problematisch gestaltet sich die korrekte Erfassung des statischen Drucks und der statischen Temperatur zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

$$V_{TAS} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1^2}{\kappa - 1} \cdot \left[ \left( \frac{p_{0,1}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} \quad \text{Gl. 8-91}$$

**Calibrated Airspeed (CAS)**

Meßgröße des Fahrtmessers ist die Druckdifferenz  $p_{0,1} - p_\infty$  (kompressibler dynamischer Druck). Die Kalibrierung des Fahrtmessers erfolgt unter der Annahme von Standardwerten für Schallgeschwindigkeit  $c$  und statischem Druck  $p$  bei Höhe  $H = 0$  ( $SL = \text{sea level}$ )

$$V_{CAS} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{SL}^2}{\kappa - 1} \cdot \left[ \left( \frac{p_{0,1} - p_1}{\rho_{SL}} + 1 \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} \quad \text{Gl. 8-92}$$

das Verhältnis von TAS zu CAS ergibt sich aus dem statischen Druckverhältnis

$$\delta = \frac{p_H}{p_{SL}} \quad \text{Gl. 8-93}$$

dem statischen Temperaturverhältnis

$$\Theta = \frac{T_H}{T_{SL}} \quad \text{Gl. 8-94}$$

und mit

$$f(V_{CAS}) = \frac{p_{0,1} - p_\infty}{p_{SL}} \quad \text{Gl. 8-95}$$

zu

$$\frac{V_{TAS}}{V_{CAS}} = \sqrt{\Theta \cdot \frac{\left( \frac{f(V_{CAS})}{\delta} + 1 \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{(f(V_{CAS}) + 1)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}} \quad \text{Gl. 8-96}$$

**Equivalent Airspeed (EAS)**

Bei Vernachlässigung der Kompressibilität, d.h.  $M < 0.3$  wird die angezeigte Geschwindigkeit mit der Dichte auf Meereshöhe  $\rho_{SL}$  korrigiert

$$V_{EAS} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_{0,1} - p_\infty)}{\rho_{SL}}} \quad \text{Gl. 8-97}$$

das Verhältnis von TAS zu EAS ergibt sich zu

$$\frac{V_{TAS}}{V_{EAS}} = \left( \frac{\delta}{\theta} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sigma^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Gl. 8-98}$$

**Indicated Airspeed (IAS)**

Angezeigte Geschwindigkeit, korrigiert um den Einbaufehler der statischen Drucksonde und der mechanischen Instrumentenfehler, sind diese beiden Fehler Null, gilt:

$$IAS = CAS$$

Und bei kleinen Machzahlen ( $M < 0.3$ ), d.h. bei inkompressibler Strömung:

$$IAS = CAS = EAS$$

### Ground Speed (GS)

Geschwindigkeit über Grund, d.h. die Geschwindigkeit, die sich aus der Projektion des Flugwegs auf den Boden bzw. aus der Messung mittels GPS oder einer Radar-Erfassung ergeben würde und entspricht der Fluggeschwindigkeit, die bereits um den Windeinfluß korrigiert ist.

## 8.6 Eindimensionale Strömungen

### 8.6.1 Grundlegende Beziehungen

Die Annahme, die hier zur Vereinfachung eines Strömungsfeldes getroffen wird, geht davon aus, daß die Strömung durch eine Stromröhre geführt wird, die im wesentlichen einen konstanten Querschnitt aufweist. Die Strömungsgrößen sind also Variable, die lediglich von einem Parameter abhängen, der Ortskoordinate in Strömungsrichtung  $x$ , also z.B.  $p = p(x)$ ,  $T = T(x)$  oder  $u = u(x)$ . Auch bei moderaten Querschnittsänderungen (*quasi-eindimensionale Strömung*) kann davon ausgegangen werden, daß die Zustandsgrößen gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind, die Änderungen quer zur Strömungsrichtung, also in  $y$ - oder  $z$ -Richtung marginal sind und sich die Größen lediglich in Strömungsrichtung verändern.

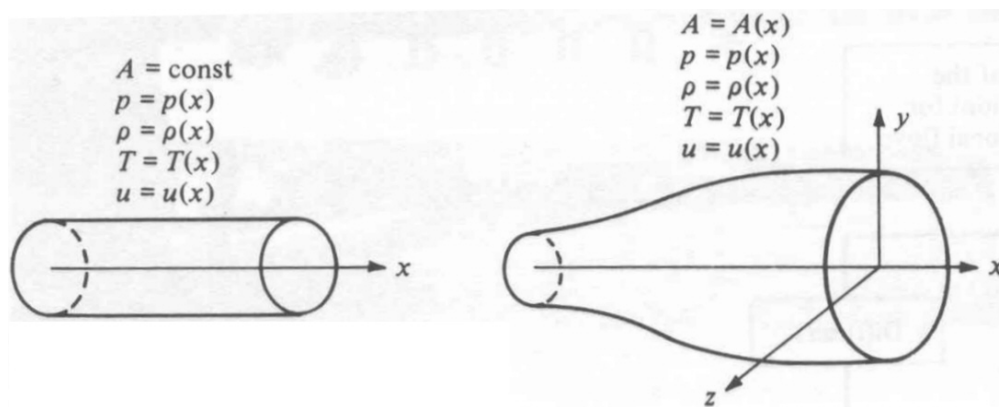


Abb. 8-22: eindimensionale und quasi-eindimensionale Strömung

In beiden Fällen, also eindimensional und quasi-eindimensional, ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

$$\rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 8-99}$$

Die Integration der Druckkräfte über das Kontrollvolumen ergibt für die Impulsgleichung

$$p_1 \cdot A_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 \cdot A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p \cdot dA = p_2 \cdot A_2 + \rho_2 \cdot u_2^2 \cdot A_2 \quad \text{Gl. 8-100}$$

Die Gesamtenthalpie bleibt ebenfalls konstant

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 = \text{const.} \quad \text{Gl. 8-101}$$

Eine weitere Annahme, die getroffen wird, besteht darin, daß die Strömung reibungsfrei und adiabatisch ist und, daß keine Stöße auftreten. Somit liegt eine isentrope Strömung vor, d.h. Druckänderungen in Abhängigkeit von der Dichte verlaufen isentrop.

$$\frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad \text{Gl. 8-102}$$

Zusammen mit der *Laplace-Gleichung* für die Schallgeschwindigkeit  $c^2 = dp/d\rho$  folgt daraus

$$c^2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = -u \cdot du \quad \text{Gl. 8-103}$$

bzw. 
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-u \cdot du}{c^2} = \frac{-u^2 \cdot du}{c^2 \cdot u} = -M^2 \cdot \frac{du}{u} \quad \text{Gl. 8-104}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\boxed{\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \cdot \frac{du}{u}} \quad \text{Gl. 8-105}$$

Diese Gleichung, die den Zusammenhang zwischen Querschnittsänderung  $dA$  und Geschwindigkeitsänderung  $du$  beschreibt, wird als *Querschnitts-Geschwindigkeits-Beziehung* bezeichnet. Aus ihr läßt sich das grundsätzliche Verhalten der Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von einer Querschnittserweiterung oder -verengung bestimmen, Abb. 8-23.

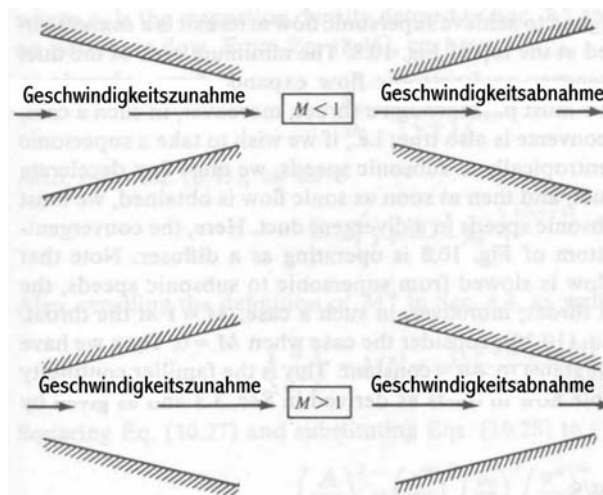


Abb. 8-23: Strömungsgeschwindigkeit in konvergenten und divergenten Kanälen

### (1) Unterschallströmung, $M < 1$

In diesem Fall wird der Term in der Klammer von Gl. 8-96 negativ. Eine Geschwindigkeitserhöhung ( $du > 0$ ) bedingt eine Querschnittsverengung ( $dA < 0$ ), also einen *konvergenten* Strömungskanal. Eine Geschwindigkeitsverringerung ( $du < 0$ ) ist demnach mit einer Querschnittserweiterung ( $dA > 0$ ), also einem *divergenten* Strömungskanal verbunden.

### (2) Überschallströmung, $M > 1$

In diesem Fall wird der Term in der Klammer von Gl. 8-96 positiv. Eine Geschwindigkeitserhöhung ( $du > 0$ ) bedingt eine Querschnittserweiterung ( $dA > 0$ ), also einen *divergenten* Strömungskanal. Eine Geschwindigkeitsverringerung ( $du < 0$ ) ist demnach mit einer Querschnittsverengung ( $dA < 0$ ), also einem *konvergenten* Strömungskanal verbunden.

### (3) Schallgeschwindigkeit, $M = 1$

In diesem Fall wird der Term in der Klammer von Gl. 8-96 zu Null. Dies beschreibt den Zustand im engsten Querschnitt des Strömungskanals, d.h. im Düsenhals und es gilt  $M = 1$ .

### 8.6.2 Düsenströmungen

Die Strömungszustände im Düsenhals werden in der Regel mit einem (\*) gekennzeichnet, z.B.  $A^*$ ,  $M^* = 1$ ,  $u^* = c^*$ . Die Kontinuitätsgleichung lautet für den Düsenhals und einen beliebigen weiteren Querschnitt

$$\rho^* \cdot u^* \cdot A^* = \rho \cdot u \cdot A \quad \text{Gl. 8-106}$$

mit  $u^* = c^*$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \cdot \frac{c^*}{u} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{c^*}{u} \quad \text{Gl. 8-107}$$

Aus den Kesselgleichungen (Kapitel 8.3.2) folgt für  $M = M^* = 1$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad \text{Gl. 8-108}$$

Zusammen mit der Definition für die kritische Machzahl  $M^*$

$$\left( \frac{u}{c^*} \right)^2 = M^{*2} = \frac{\frac{\kappa + 1}{2} \cdot M^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2} \quad \text{Gl. 8-109}$$

ergibt sich die *Querschnittsflächen-Mach-Beziehung*

$$\left( \frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \cdot \left[ \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \right) \right]^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \quad \text{Gl. 8-110}$$

Diese für Düsenströmungen fundamentale Beziehung besagt, daß die Machzahl an einer beliebigen Stelle in einer Düse einzig und allein von dem Verhältnis des lokalen Querschnitts zu dem Querschnitt im Düsenhals abhängt.

### Ausströmgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit, mit der das Gas isentrop aus einer Düse ausströmt, läßt sich über die in Kapitel 8.3.2 hergeleiteten *Kesselgleichungen* bestimmen, d.h. aus dem Verhältnis der Zustandsgrößen vor der Expansion und der Machzahl im Austrittsquerschnitt. In der Regel sind Totaldruck und Totaltemperatur vor der Expansion bekannt. Bei einer Rakete mit Flüssigtriebwerk entspricht dies z.B. dem Zustand in der Brennkammer, d.h. Brennkammerdruck  $p_0$  und Brennkammertemperatur  $T_0$ , bzw. den Totalgrößen der Strömung hinter der Turbine. Aus dem Verhältnis der beiden Kesselgleichungen Gl. 8-102 und 8-103

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad \text{Gl. 8-111}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad \text{Gl. 8-112}$$

folgt

$$\frac{p_0}{p} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2 \quad \text{Gl. 8-113}$$

bzw.

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot \frac{p}{\rho} \quad \text{Gl. 8-114}$$

Mit der Zustandsgleichung des idealen Gases  $p/\rho = R \cdot T$  und der Definition der Schallgeschwindigkeit  $c^2 = \kappa \cdot R \cdot T$  folgt daraus

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} + \frac{\kappa-1}{2 \cdot \kappa} \cdot V^2 \quad \text{Gl. 8-115}$$

bzw.

$$V^2 = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa-1} \cdot \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \quad \text{Gl. 8-116}$$

oder auch

$$V^2 = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad \text{Gl. 8-117}$$

Gl. 8-108 wird auch als Formel von *B. de Saint-Venant und Wantzel* bezeichnet.

Die theoretisch maximale Ausströmgeschwindigkeit  $V_{\max}$  ergibt sich beim Ausströmen gegen den minimalen Gegendruck, d.h. gegen Vakuum, also  $p=0$ .

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} \quad \text{Gl. 8-118}$$

Das Verhältnis der Ausströmgeschwindigkeit  $V$  zur maximalen Ausströmgeschwindigkeit  $V_{\max}$  wird als *Crocco-Zahl* bezeichnet.

$$Cr = \frac{V}{V_{\max}} = \sqrt{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad \text{Gl. 8-119}$$

Die Ausströmgeschwindigkeit lässt sich auch aus der Integration der Euler'schen Bewegungsgleichung herleiten, wobei der Term für die potentielle Energie  $g \cdot dz$  vernachlässigt werden kann.

$$V \cdot dV + g \cdot dz + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \text{Gl. 8-120}$$

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p, T)} = 0 \quad \text{Gl. 8-121}$$

Die Integration von Gl. 8-112 ergibt zusammen mit der Adiabatengleichung und Zustandsgleichung des idealen Gases, die sog. *Bernoulli-Gleichung für eindimensionale isentrope kompressible Strömungen*

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2}} \quad \text{Gl. 8-122}$$

Die Ausströmgeschwindigkeit  $V_2$  läßt aus Gl. 8-113 bestimmen, indem die Kesselbedingungen (Totalgrößen) dem Zustand (1) gleich gesetzt werden, also  $V_1 = V_0 = 0$ ,  $p_1 = p_0$  und  $\rho_1 = \rho_0$ . Damit ergeben sich wieder Gl. 8-107 bzw. 8-108.

### Schubkraft

Der Schub  $S$ , der sich mittels einer Düse erzielen läßt ergibt sich über den Impulssatz aus dem Massestrom  $\dot{m}$  und der Austrittsgeschwindigkeit  $V$

$$\boxed{S = \dot{m} \cdot V} \quad \text{Gl. 8-123}$$

wobei der Massestrom  $\dot{m}$  aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 = \text{const.} \quad \text{Gl. 8-124}$$

an jedem beliebigen Querschnitt  $A$  der Düse bestimmt werden kann.

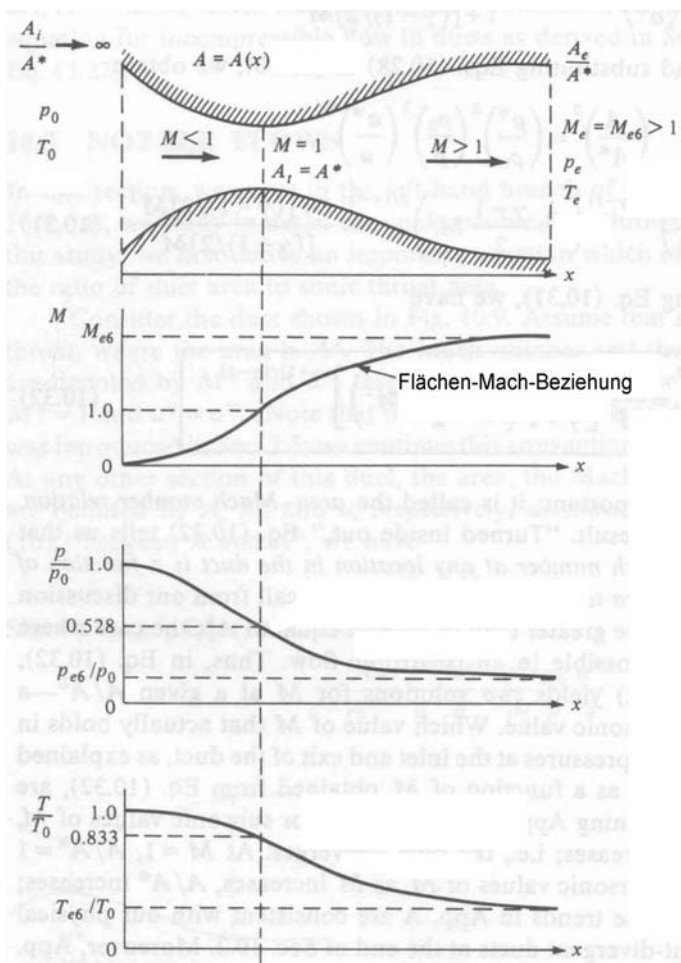
### Angepaßte Düse

Die sog. angepaßte Düse beschreibt die Strömung durch eine konvergent-divergente Düse (Laval<sup>8</sup>-Düse), in der die Strömung isentrop auf den Umgebungsdruck entspannt und die Strömung parallel aus der Düse ausströmt. Die Geschwindigkeitsverteilung über den Strahlquerschnitt sollte möglichst konstant sein, was sich durch eine entsprechende Konturierung der Düsenwand erreichen läßt. Dadurch läßt sich die Düsenströmung durch eine eindimensionale bzw. quasi-eindimensionale Strömung vereinfachen. Die Auslegung einer Schubdüsenkontur erfolgt über die sog. *Methode der Charakteristiken*.

Die Zuströmmachzahl am Eintrittsquerschnitt der Düse ist sehr klein, also  $M \approx 0$ , was z.B. im Falle einer Brennkammer vor der Düse der Realität nahe kommt. Der Querschnittsverlauf in Strömungsrichtung  $A = A(x)$  ist bekannt. Wegen der gegen Null gehenden Zuströmgeschwindigkeit am Düseneintrittsquerschnitt entsprechen die Strömungsgrößen dort den Kesselbedingungen oder Totalgrößen  $p_0$ ,  $T_0$  und  $\rho_0$ . Im engsten Querschnitt, dem Düsenhals  $A = A^*$  gilt  $M=1$ . Bei einer Machzahl von  $M=1$  folgt, daß die Entropieänderung zu Null wird, erst bei Machzahlen größer Eins erhöht sich die Entropie. Somit kann die Strömung durch die Laval-Düse als eine isentrope eindimensionale Strömung angenommen werden und durch die Kesselgleichungen beschrieben werden, Abb. 8-24.

Aus der Bedingung  $M=1$  im engsten Querschnitt bei  $A = A^*$  ergeben sich aus den Kesselgleichungen feste Verhältnisse für Temperatur, Druck und Dichte im Düsenhals bei  $A^*$ .

<sup>8</sup> Gustaf de Laval: Schwedischer Ingenieur 1845 - 1913, Erfinder der Axialturbine und Laval-Düse



$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \cdot \left[ \frac{2}{\kappa+1} \cdot \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2 \right) \right]^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \Rightarrow \frac{p^*}{p_0} = 0.528$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2 \Rightarrow \frac{T^*}{T_0} = 0.833$$

Abb. 8-24: Isentrope Strömung in einer angepassten Düse [ 2]

### Nicht-angepasste Düse

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Düsenströmung verändert, wenn die Strömung nicht isentrop auf den Umgebungsdruck entspannt. Liegt am Eintrittsquerschnitt der Düse der gleiche Druck an wie am Düsenaustrittsquerschnitt, also Umgebungsdruck, so führt dies zu dem trivialen Ergebnis, daß die Düse überhaupt nicht durchströmt wird. Wird der Umgebungsdruck etwas abgesenkt, so wird sich eine schwache Unterschallströmung einstellen, die im konvergenten Teil der Düse etwas beschleunigt und im divergenten Teil wieder etwas verzögert wird. Erst wenn der Umgebungsdruck so weit abgesenkt wird, daß die Machzahl im Halsquerschnitt Eins erreicht, dann entspricht dies dem kritischen Druckverhältnis  $p^*/p_0 = 0.528$ . Wird der Druck am Düsenaustrittsquerschnitt abgesenkt, so erhöht sich der Massestrom durch die Düse bis das kritische Druckverhältnis erreicht ist. Da ab diesem Moment im Düsenhals Schallgeschwindigkeit vorliegt, kann sich eine weitere Druckabsenkung am Düsenaustrittsquerschnitt nicht mehr auf den Massestrom auswirken, da sich Druckänderungen nicht mehr durch den Düsenhals stromaufwärts bemerkbar machen können. Die Strömung vom Düsen Eintrittsquerschnitt bis zum Düsenhals ist aufgrund der Bedingung  $M=1$  bei  $A=A^*$  völlig unbeeindruckt von dem weiteren Geschehen im Austrittsquerschnitt der Düse.

Spektakulärer gestalten sich die Ereignisse stromabwärts des Düsenhalses bei einer weiteren Absenkung des Umgebungsdrucks. Liegt der Umgebungsdruck noch deutlich über dem Druck, der sich infolge einer isentropen Entspannung im Austrittsquerschnitt ergeben



würde, so bildet sich ein senkrechter Stoß im divergenten Teil der Düse, Abb. 8-25. Zwischen Düsenhals und Stoß herrscht eine isentrope Überschallströmung, während hinter dem Stoß wieder eine isentrope Unterschallströmung vorliegt. Lediglich am Stoß selbst erfolgt eine Entropieerhöhung.

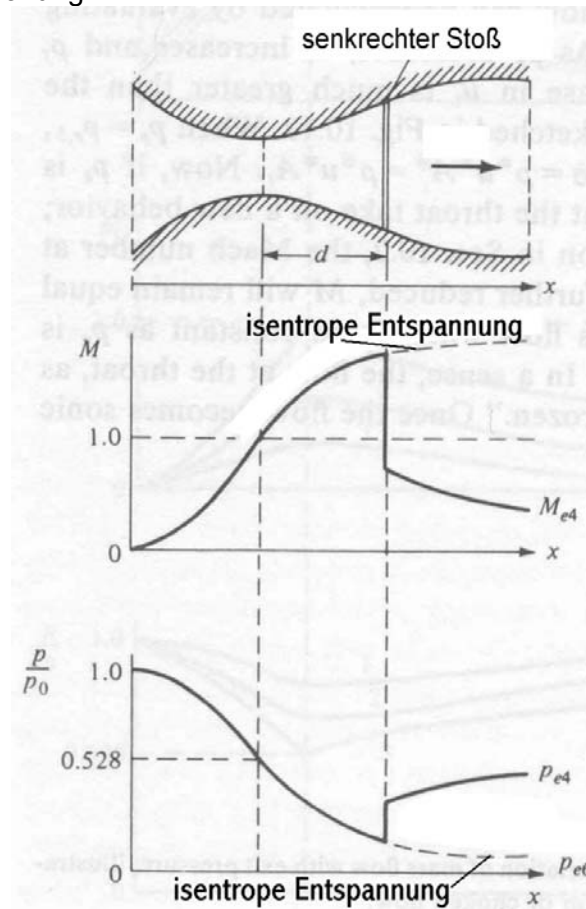
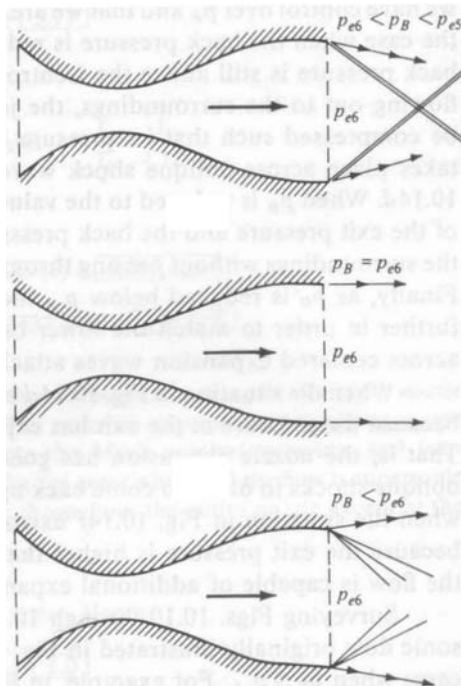


Abb. 8-25: Düsenströmung gegen zu hohen Umgebungsdruck [ 2]

Eine weitere Absenkung des Umgebungsdrucks bewirkt, daß der senkrechte Stoß im divergenten Teil der Düse stromabwärts in Richtung des Austrittsquerschnitts wandert. Ab einem bestimmten Druck, der jedoch immer noch über dem der isentropen Entspannung liegt, steht der Stoß genau im Austrittsquerschnitt, Abb. 8-26. Innerhalb der Düse liegt jetzt bis zum Erreichen des Stoßes eine vollständig isentrope Strömung vor.

Hat die Strömung isentrop auf einen Druck im Austrittsquerschnitt entspannt, der unter dem Umgebungsdruck liegt (*Überexpansion*), so muß die Strömung wieder soweit komprimiert werden, daß der Druck auf Umgebungsdruck angehoben wird. Dies geschieht durch eine Reihe von schrägen Stößen und der Strahl wird eingeschnürt, Abb. 8-26a. Der umgekehrte Fall, d.h. die Strömung wurde isentrop auf einen Druck entspannt, der noch über dem Umgebungsdruck liegt (*Unterexpansion*) bewirkt, daß sich die Strömung nach Verlassen der Düse noch weiter entspannen kann und der Strahl wird aufgeweitet, Abb. 8-26c.

**Überexpansion**

Druck im Austrittsquerschnitt kleiner als Umgebungsdruck

**Isentrope Expansion**

Druck im Austrittsquerschnitt kleiner als Umgebungsdruck

**Unterexpansion**

Druck im Austrittsquerschnitt größer als Umgebungsdruck

Abb. 8-26: Düse mit Überexpansion, isentroper Expansion und Unterexpansion [ 2]

### 8.6.3 Verdichtungs- und Verdünnungswellen in Überschallfreistrahlen

Während bei Unterschallgeschwindigkeit der Strömung im Austrittsquerschnitt der Umgebungsdruck aufgeprägt wird, ist dies bei Ausströmgeschwindigkeiten im Überschall nicht möglich, da die Druckinformation nicht entgegen der Strömungsrichtung übermittelt werden kann. In dem Strahl der die Düse mit Überschall verläßt treten je nach Umgebungsdruck Verdichtungs- bzw. Verdünnungswellen auf, die sich störungsfrei gegenseitig durchdringen können.

**Ausströmen gegen Unterdruck**

Beim Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit gegen Unterdruck (Unterexpansion) bilden sich ausgehend von der Düsenhinterkante Verdünnungswellen und der Strahl paßt sich durch Expansion dem Umgebungsdruck an. An den Strahlgrenzen, an denen Umgebungsdruck herrscht, werden die Verdünnungswellen als Verdichtungswellen reflektiert. Die Beschleunigung der Fluidteilchen nach außen erzeugt im Inneren des Strahls wieder einen Unterdruck. Die Verdünnungswellen, gefolgt von Verdichtungswellen hinter einer ebenen Paralleldüse sind in Abb. 8-27 skizziert.

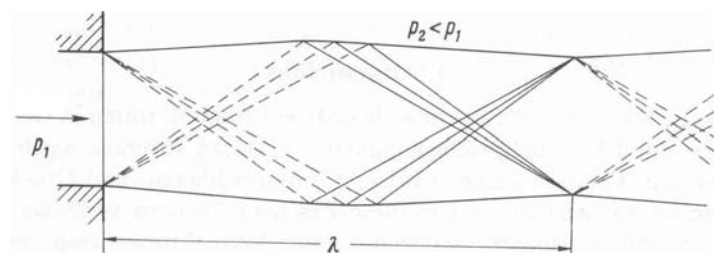


Abb. 8-27: Verdünnungs- und Verdichtungswellen hinter einer 2-dimensionalen Düse [ 13]

Bei rotationssymmetrischen Düsen durchdringen sich die Wellen in Kegelschnitten, Abb. 8-28.

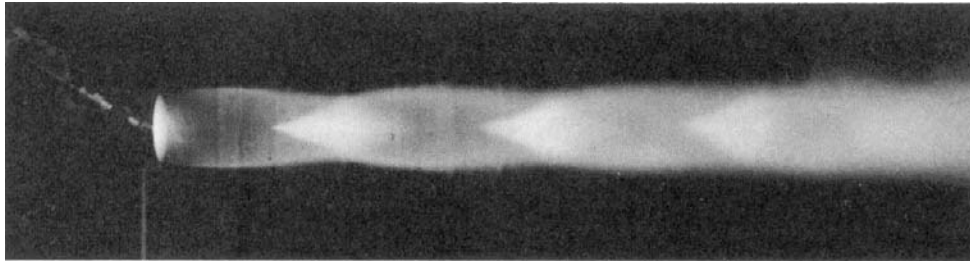


Abb. 8-28: Raketentriebwerk, Austrittsquerschnitt:  $T = 1500 \text{ K}$ ,  $u = 2200 \text{ m/s}$ ,  $M = 3$  [ 13]

### Ausströmen gegen Überdruckdruck

Beim Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit gegen Überdruck (Überexpansion) bilden sich ausgehend von der Düsenhinterkante Verdichtungswellen, die am Strahlrand als Verdünnungswellen wieder reflektiert werden, Abb. 8-29.

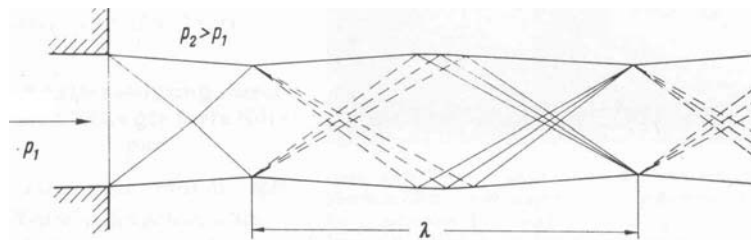


Abb. 8-29: Verdichtungs- und Verdünnungswellen hinter einer 2-dimensionalen Düse [ 13]

Bei den Verdichtungs- und Verdünnungswellen handelt es sich um stehende Wellen, deren Wellenlänge  $\lambda$  bei Austrittsgeschwindigkeiten, die im Überschall liegen, von dem mittleren Strahldurchmesser  $d_m$  und der mittleren Machzahl  $M_m$  des Strahls abhängt.

$$\lambda = 2 \cdot d_m \cdot \sqrt{M_m^2 - 1} \quad \text{Gl. 8-125}$$

Beträgt die Austrittsgeschwindigkeit genau Schallgeschwindigkeit, so ergibt sich die Wellenlänge mit dem Düsendurchmesser  $d$  zu

$$\lambda = 0.89 \cdot d \cdot \sqrt{\frac{p_{\text{Austrittsquerschnitt}}}{p_{\text{Umgebungsdruck}}} - 1.9} \quad \text{Gl. 8-126}$$

### 8.6.4 Diffusorströmungen

Die Aufgabe eines Diffusors besteht ganz allgemein darin, die Strömungsgeschwindigkeit herabzusetzen, unabhängig davon ob es sich um einen Unterschall- oder einen Überschalldiffusor handelt. Bei der Verringerung der Strömungsgeschwindigkeit ist jedoch darauf zu achten, daß der Totaldruckverlust so gering als möglich ausfällt, da der Totaldruck auch immer das Potential einer Strömung beschreibt, Arbeit zu leisten. Zustandsänderungen oder Prozesse, die mit hohen Totaldruckverlusten verbunden sind, z.B. senkrechte Stöße, die ohne weiteres auch zur Geschwindigkeitsverringerung in einer Überschallströmung eingesetzt werden könnten, sind demnach ineffizient und sollten vermieden werden. Idealerweise würde daher ein Diffusor isentrop durchströmt werden, d.h. ohne Entropiezunahme und somit ohne Totaldruckverlust. Für Überschallströmungen würde der ideale Diffusor daher

aus einem konvergenten Segment bestehen, in dem die Strömung isentrop komprimiert und die Strömungsgeschwindigkeit soweit herabgesetzt wird, daß an der engsten Stelle  $A = A^*$  genau  $M = 1$  vorliegt. Im darauf folgenden divergenten Segment wird die Strömung weiter isentrop auf eine geringe Unterschallmachzahl  $M < 1$  verzögert und dabei weiter komprimiert. Da am engsten Querschnitt genau Schallgeschwindigkeit vorliegt und bei  $M = 1$  noch keine Entropiezunahme erfolgt, beträgt der Totaldruckverlust Null, d.h. es gilt  $p_{0,1} = p_{0,2}$ , Abb. 8-30.

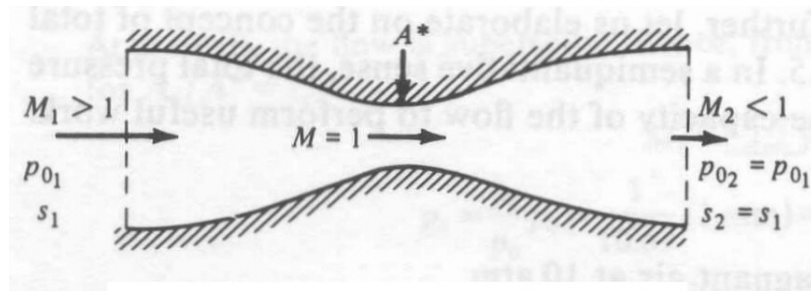


Abb. 8-30: Idealer Überschalldiffusor

Bedauerlicherweise ist es in realen Strömung sehr schwierig die Geschwindigkeit herabzusetzen ohne dabei Stoßwellen zu generieren. Da bei dem konvergierenden Segment des Diffusors die Strömung in sich selbst hinein gedreht wird, bilden sich unvermeidlich schräge Stöße. Zusätzlich sind reale Strömungen reibungsbehaftet, d.h. infolge der reibungsbehafteten Grenzschicht erfolgt eine Entropiezunahme. Der ideale Diffusor ist somit technisch nicht zu realisieren. Ein realer Diffusor ist in Abb. 8-31 skizziert. Durch eine Sequenz von schrägen Stößen, die durch die Interaktion mit der reibungsbehafteten Grenzschicht immer schwächer werden, wird die Strömungsgeschwindigkeit herabgesetzt. Dies ist natürlich mit einer Entropiezunahme  $s_2 > s_1$  und einem Totaldruckverlust  $p_{0,2} < p_{0,1}$  verbunden.

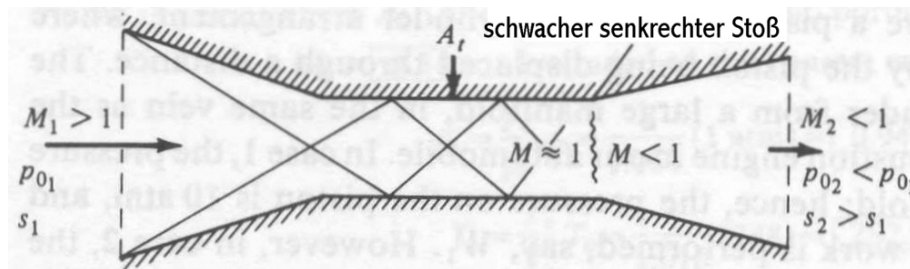


Abb. 8-31: Realer Überschalldiffusor

### 8.6.5 Hochgeschwindigkeits-Windkanäle

Die zuvor diskutierten Elemente 'Überschalldüse' und 'Überschalldiffusor' stellen zwei wesentliche Komponenten eines Überschallwindkanals dar. Beabsichtigt man z.B. eine Überschallströmung mit  $M = 2.5$  zu erzeugen, so würde es eigentlich genügen eine Düse mit einem Flächenverhältnis von Austrittsquerschnitt zu Halsquerschnitt  $A_e/A^* = 2.637$  zu wählen um bei einem Totaldruck in der Düseneintrittsebene von  $p_0 = 17.09 \text{ bar}$  auf Umgebungsdruck  $p_e = 1.0 \text{ bar}$  in einem parallelen Freistrahle zu entspannen. Da das Strömungsmedium, in der Regel Luft, von Umgebungsdruck auf den Totaldruck durch einen Kompressor komprimiert und zusätzlich getrocknet werden muß, steigt der

erforderliche Energieaufwand und somit die anfallenden Kosten, mit zunehmendem Totaldruck. Diese Lösung wäre zwar teuer, würde aber funktionieren, Abb. 8-32

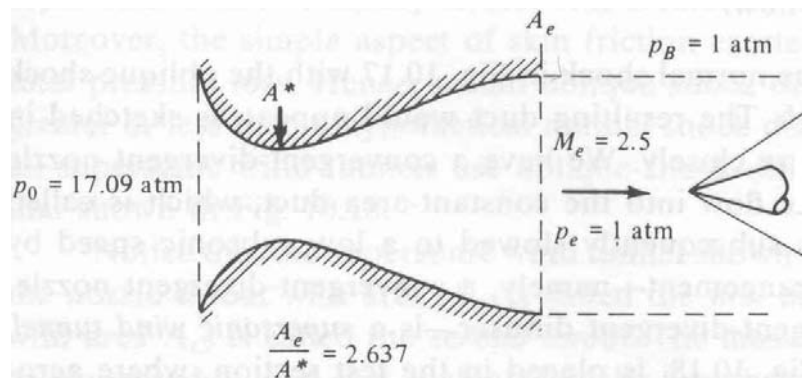


Abb. 8-32: Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit in die freie Atmosphäre [ 2 ]

Günstiger würde sich eine Lösung gestalten, wie sie in Abb. 8-33 skizziert ist. Am Düsenende schließt sich eine Röhre mit einem konstanten Querschnitt an, an dessen Ende ein senkrechter Stoß steht. Dieser senkrechte Stoß wirkt als Diffusor, um die Strömungsgeschwindigkeit von  $M = 2.5$  auf  $M = 0.513$  herabzusetzen. Beträgt der Druck hinter dem senkrechten Druck Umgebungsdruck, also  $p_2 = 1.0 \text{ bar}$  so kann der Druck vor dem senkrechten Druck lediglich  $p_1 = 0.14 \text{ bar}$  betragen, da bei einem senkrechten Stoß bei einer Zuströmmachzahl von  $M = 2.5$  das Druckverhältnis  $p_2/p_1 = 7.125$  beträgt. Wenn der Druck nach der Entspannung in der Düse lediglich  $p_1 = 0.14 \text{ bar}$  anstelle von  $p_1 = 1.0 \text{ bar}$  beträgt, so ist vor der Düse ebenfalls ein geringerer Totaldruck erforderlich. Bei einem für  $M = 2.5$  erforderlichen Druckverhältnis von  $p_0/p_e = 17.09$  ergibt sich daraus ein Totaldruck vor der Düse von  $p_0 = 2.4 \text{ bar}$ . Der Strömungskanal mit konstantem Querschnitt entspricht in diesem Fall der Meßstrecke, in der das Modell plaziert wird.

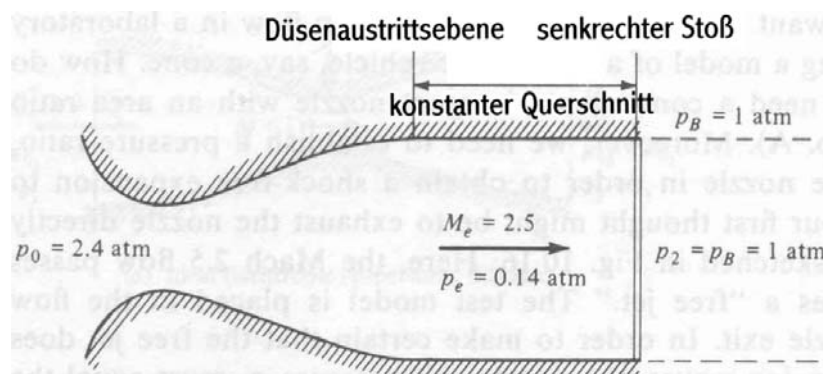


Abb. 8-33: Überschalldüse mit angeschlossenem konstantem Strömungsquerschnitt [ 2 ]

In der Praxis ist es nicht leicht einen senkrechten Stoß ortsfest zu fixieren. Kleine Störungen in der Strömung, wie sie z.B. durch das Verstellen des Anstellwinkels des Modells erzeugt werden, bewirken ein hin- und herwandern der Stoßlage und somit eine Unsicherheit der Strömungsqualität in der Meßstrecke. Darüber hinaus hat die vorherige Diskussion gezeigt, daß ein senkrechter Stoß mit größeren Totaldruckverlusten behaftet ist, als eine Kombination von schrägen Stößen. Überschallkanäle werden häufig als geschlossene Umlaufkanäle konstruiert (vgl. Kapitel 2.5), d.h. Totaldruckverluste müssen permanent durch zusätzliche

Arbeit, d.h. zusätzliche Kompressorleistung ausgeglichen werden. Zur Minimierung der Verluste empfiehlt es sich daher den Diffusor so auszulegen, daß die Strömung nicht durch einen einzigen senkrechten Stoß, sondern durch ein System von schrägen Verdichtungsstößen auf Unterschallgeschwindigkeit verzögert wird, Abb. 8-34.

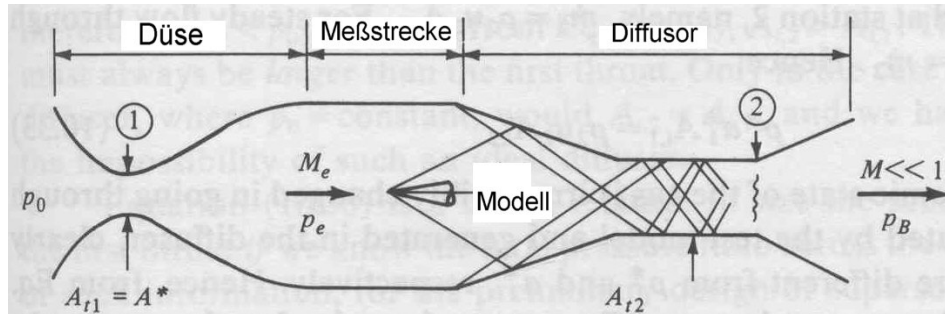
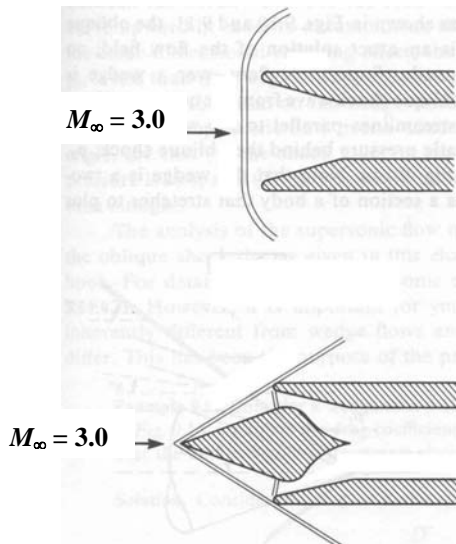


Abb. 8-34: Überschalldüse, Meßstrecke und Überschalldiffusor [ 2]

Aufgrund der Entropiezunahme infolge der schrägen Stöße im Diffusor und der Wandgrenzschicht ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung das erforderliche Flächenverhältnis zwischen Düsenhals  $A_{t1}$  und engster Stelle im Diffusor  $A_{t2}$ . Wird der Halsquerschnitt des Diffusors zu klein ausgelegt, so blockiert der Windkanal und es kann sich nur noch eine Unterschallströmung einstellen.

## 8.7 Übungen zum Kapitel Kompressible Strömungsmechanik (Gasdynamik)

### A8.1 Totaldruckverlust bei Überschalleinläufen



Ein Überschalleinlauf soll für eine Fluggeschwindigkeit von  $M_\infty = 3.0$  so ausgelegt werden, daß die Machzahl vor dem Verdichter bei  $M < 0.6$  liegt. Dabei ist zu untersuchen ob dies mit einem einfachen senkrechten Stoß (1) oder über die Kombination eines schrägen Stoßes ( $\beta = 40^\circ$ ) mit einem senkrechten Stoß (2) zu erreichen ist.

Welche Form des Einlaufs würden Sie auswählen?

## 9 Kompressible Aerodynamik

### 9.1 Kompressible Unterschallströmung

#### 9.1.1 Schallmauer

Mit der Einführung operationeller Strahltriebwerke zu Beginn der 40er Jahre des 20. Jahrhunderts näherten sich die erreichbaren Maximalgeschwindigkeiten von Flugzeugen allmählich der Schallgeschwindigkeit. Versuche, diese zu überschreiten scheiterten entweder aufgrund des stark zunehmenden Widerstands und nicht ausreichender Triebwerksleistung bereits im Vorfeld oder endeten häufig aufgrund von zunehmenden Kompressibilitäts-effekten, die bis dato nicht wirklich vollständig erforscht waren, in einem für Maschine und Pilot finalen Ereignis. So endete z.B. der Versuch von Goeffrey de Havilland am 27.09.1946 in einer strahlgetriebenen De Havilland D.H. 108 (Abb. 9-1a) die Schallmauer zu durchbrechen, tödlich. Der Begriff 'Schallmauer' wurde seit Beginn der 30er-Jahre aus dem starken Widerstandsanstiegs bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit abgeleitet und galt lange Zeit als die für Flugzeuge theoretisch erreichbare maximale Geschwindigkeit. Diese Annahme wurde spätestens durch den ersten (nachweisbaren) erfolgreichen Überschallflug von Charles Yeager am 14.10.1947 mit einer aus der Luft von einer B-29 gestarteten und mit Raketenantrieb ausgerüsteten Bell X1 (Abb. 9-1b) widerlegt, war faktisch aber auch zuvor schon nicht haltbar, da Ernst Mach bereits im Jahre 1888(!) die ersten Schlierenaufnahmen einer Gewehrkugel im Überschall gelangen, Abb. 9-2.

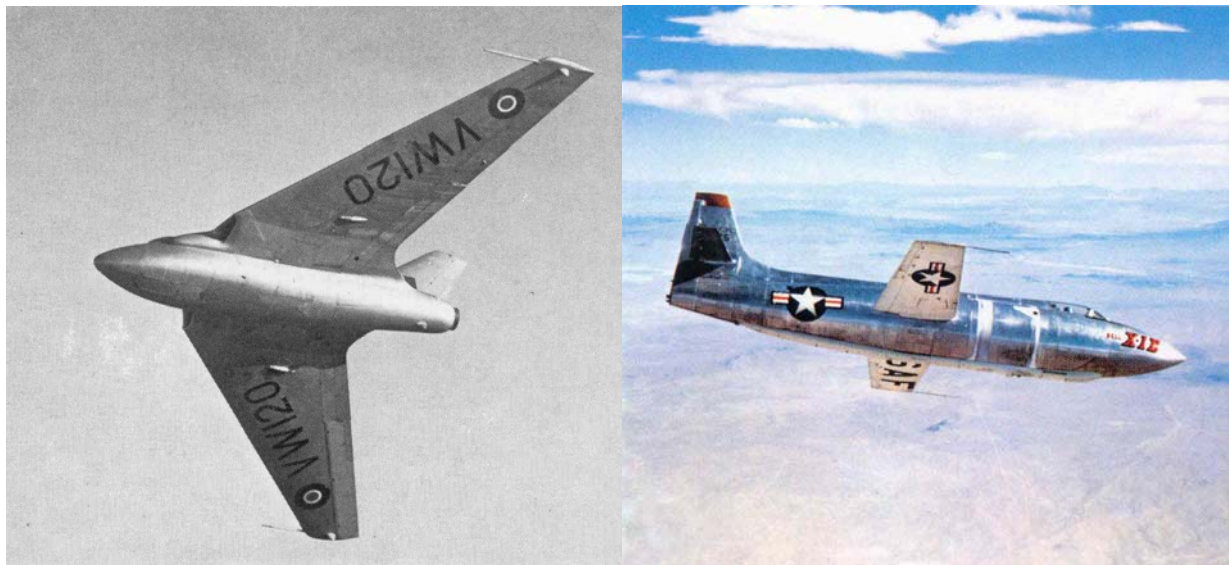


Abb. 9-1: De Havilland D.H. 108 und Bell X1, [ 33]



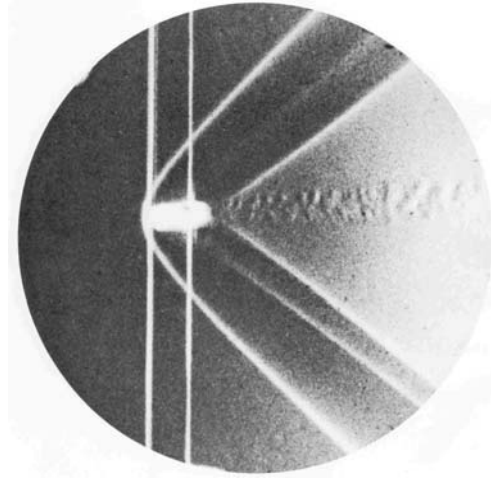


Abb. 9-2: Gewehrkugel im Überschall, Ernst Mach 1888, Prag [ 37]

Bei den in Abb. 9-2 sichtbaren senkrechten weißen Linien handelt es sich um fest gespannte Drähte in der Meßstrecke.

### 9.1.2 Prandtl-Glauert-Ähnlichkeitsregel

Zur Übertragung der für den inkompressiblen Strömungsbereich bereits existierenden Lösungen, war man bestrebt diese Ergebnisse mit einfachen Verfahren an den kompressiblen Bereich anzupassen. Einen solchen Ansatz stellen die folgenden Ähnlichkeitsregeln dar. Aus der in Kapitel 4.4 diskutierten vollständigen Potentialgleichung

$$\left(1 - \frac{\frac{\partial \Phi^2}{\partial x}}{a^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\frac{\partial \Phi^2}{\partial y}}{a^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{\frac{\partial \Phi^2}{\partial z}}{a^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial z} - \frac{2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \cdot \partial z} = 0 \quad \text{Gl. 9-1}$$

läßt sich unter Einführung der sog. *Störgeschwindigkeiten*  $\hat{u}, \hat{v}$ , d.h. den Abweichungen der Strömung von der Hauptströmungsrichtung  $V_\infty$ , ein Störpotential  $\hat{\Phi}$  definieren. Im zweidimensionalen Fall entsprechen die Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  den Geschwindigkeiten in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung.

$$u = V_\infty + \hat{u} \quad \text{Gl. 9-2}$$

$$v = \hat{v} \quad \text{Gl. 9-3}$$

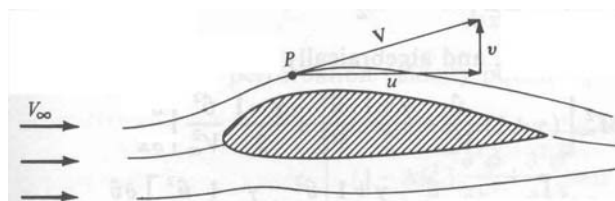


Abb. 9-3: Ungestörte Strömung und Störgeschwindigkeiten

$$\Phi = V_\infty \cdot x + \hat{\Phi} \quad \text{Gl. 9-4}$$

mit  $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} = \hat{u} \quad \text{Gl. 9-5}$

und  $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = \hat{v} \quad \text{Gl. 9-6}$

Unter der Annahme, daß die Störgeschwindigkeiten klein sind im Verhältnis zur Geschwindigkeit der freien Anströmung, d.h. es werden lediglich schlanke Körper oder schlanke Profile betrachtet, läßt sich daraus das linearisierte Potential der Störgeschwindigkeiten für eine zweidimensionale Strömung ableiten

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Gl. 9-7}$$

Mit der Transformation

$$\beta^2 = 1 - M_\infty^2 \quad \text{Gl. 9-8}$$

$$\xi = x \quad \text{Gl. 9-9}$$

$$\eta = \beta \cdot y \quad \text{Gl. 9-10}$$

ergibt sich das transformierte Geschwindigkeitspotential  $\bar{\Phi}$

$$\bar{\Phi}(\xi, \eta) = \beta \cdot \hat{\Phi}(x, y) \quad \text{Gl. 9-11}$$

bzw.  $\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{Gl. 9-12}$

Dies entspricht der in Kapitel 4.4.2 aus der vollständigen Potentialgleichung hergeleiteten Laplace-Gleichung für inkompressible Strömungen, d.h. durch die mittels Gl. 9-8 bis Gl. 9-10 beschriebene Transformation läßt sich die kompressible Strömung um ein Profil durch eine inkompressible Strömung über den *Prandtl-Glauert-Ähnlichkeitsfaktor* beschreiben

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2} \quad \text{Gl. 9-13}$$

Für den kompressiblen Druckbeiwert gilt

$$c_{p,k} = \frac{c_{p,ik}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad \text{Gl. 9-14}$$

kompressibler Auftriebsbeiwert

$$c_{A,k} = \frac{c_{A,ik}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad \text{Gl. 9-15}$$

kompressibler Auftriebsanstieg

$$\frac{dc_{A,k}}{d\alpha} = c_{A\alpha,k} = \frac{c_{A\alpha,ik}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad \text{Gl. 9-16}$$

kompressibler Nullmomentenbeiwert

$$c_{M,k} = \frac{c_{M,ik}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

Gl. 9-17

### 9.1.3 Kármán-Tsien- und Laitone-Regel

Verbesserungen gegenüber der bereits 1922 von Prandtl und 1928 von dem britischen Aerodynamiker Glauert veröffentlichten Korrektur wurden von Tsien (1939) und Kármán (1941) vorgeschlagen

$$c_{p,k} = \frac{c_{p,ik}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \frac{c_{p,ik}}{2}}$$

Gl. 9-18

Weiter entwickelt wurde diese Korrektur von Laitone im Jahre 1951 zu

$$c_{p,k} = \frac{c_{p,ik}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2 \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot M_\infty^2\right)}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \frac{c_{p,ik}}{2}}$$

Gl. 9-19

In Abb. 9-4 sind die unterschiedlichen Korrekturverfahren des Druckbeiwerts bei 30% Profiltiefe nach Prandtl-Glauert, Kármán-Tsien- und Laitone für ein NACA 4412-Profil bei einem Anstellwinkel von  $\alpha = 1^\circ 53'$  skizziert.

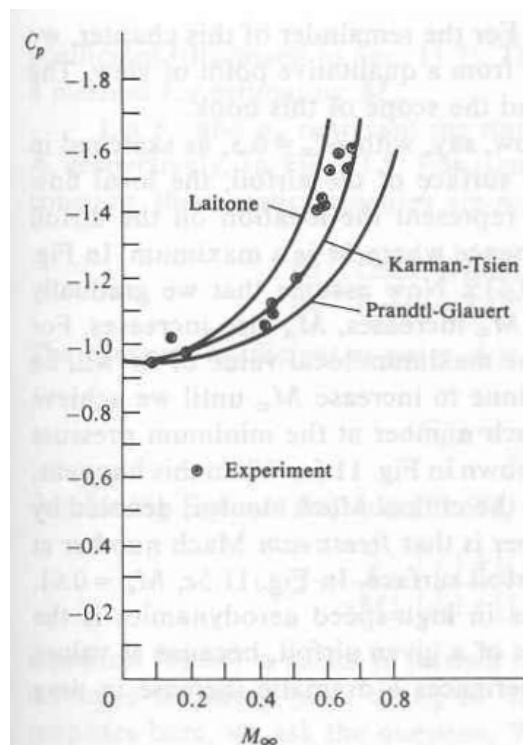


Abb. 9-4: Ähnlichkeitsregeln von Prandtl-Glauert, Kármán-Tsien- und Laitone [ 2]

## 9.2 Transsonik-Bereich

### 9.2.1 Gültigkeitsbereich

Bei der Herleitung der Korrekturverfahren für kompressible Strömungen aus der vollständigen Potentialgleichung ist zu beachten, daß die dabei vorgenommene Linearisierung lediglich kleine Änderungen der Strömungsgrößen voraussetzt. Diese Annahme ist jedoch für den Machzahlbereich von ca.  $0.8 \leq M \leq 1.2$  aufgrund der zunehmenden Nicht-Linearitäten nicht mehr zulässig. Dieser Bereich, der durch das gleichzeitige Vorliegen einer Unterschall- und einer Überschallströmung gekennzeichnet ist, wird als *Transschall-* oder auch *Transsonik-Bereich* bezeichnet und soll im Folgenden betrachtet werden.

### 9.2.2 Kritische Machzahl

Wird ein Profil, mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten angeströmt, so stellt sich auf der Profilerseite an einem Punkt ein lokales Druckminimum bzw. ein Geschwindigkeitsmaximum ein. Bei zunehmender Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit wird ab einer bestimmten Machzahl an dem Punkt des Druckminimums die Schallgeschwindigkeit erreicht, obwohl die Anströmmachzahl  $M_\infty$  noch deutlich im Unterschallbereich liegt, Abb. 9-5. Die zu diesem Zustand korrelierende Anströmmachzahl  $M_\infty$  wird dann als kritische Machzahl  $M_{krit}$  bezeichnet. Bei weiterer Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit über die kritische Machzahl hinaus, bildet sich zuerst auf der Profilerseite ein lokales Überschallgebiet aus, welches stromabwärts durch einen Verdichtungsstoß abgeschlossen und die Strömung im Folgenden wieder auf Unterschallgeschwindigkeit verzögert wird.

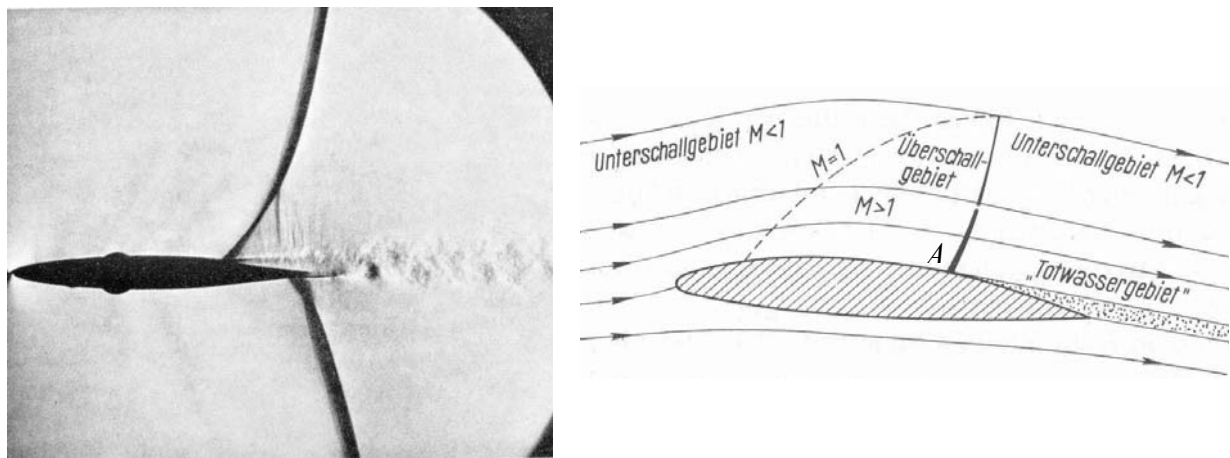


Abb. 9-5: Verdichtungsstöße und Kritische Machzahl an einem Profil, [ 36], [ 13]

Der Druckbeiwert an der Stelle  $A$ , an der die kritische Machzahl auftritt läßt sich aus den Beziehungen für eine isentrope Strömung (Kesselgleichung) berechnen.

$$\frac{p_A}{p_\infty} = \frac{p_0}{p_\infty} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_A^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 9-20}$$

Mit der Definition des dimensionslosen Druckbeiwerts als Funktion der Machzahl folgt

$$c_{p,A} = \frac{2}{\kappa \cdot M_\infty^2} \cdot \left( \frac{p_A}{p_\infty} - 1 \right) \quad \text{Gl. 9-21}$$

Einsetzen des statischen Druckverhältnisses ergibt

$$c_{p,A} = \frac{2}{\kappa \cdot M_\infty^2} \cdot \left[ \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_A^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right] \quad \text{Gl. 9-22}$$

Die kritische Machzahl  $M_{krit}$  wurde als diejenige Machzahl bezeichnet, bei der an dem Profil die Schallgeschwindigkeit erreicht wird, d.h. es gilt  $M_A = 1$ . Der zugehörige Druckbeiwert entspricht somit dem *kritischen Druckbeiwert*  $c_{p,krit}$

$$c_{p,krit} = \frac{2}{\kappa \cdot M_\infty^2} \cdot \left[ \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right] \quad \text{Gl. 9-23}$$

Diese Gleichung stellt, ausgehend von einer isentropen Strömung, eine allgemeine Beziehung zwischen kritischer Machzahl und kritischem Druckbeiwert her. Die kritische Machzahl ergibt sich näherungsweise aus dem Schnittpunkt der Funktion  $c_{p,krit} = f(M_{krit})$  mit dem für die Kompressibilitätseinflüsse korrigierten Druckbeiwert aus der inkompressiblen Strömung  $c_{p,k} = f(c_{p,k}, M_\infty)$ , Abb. 9-6.

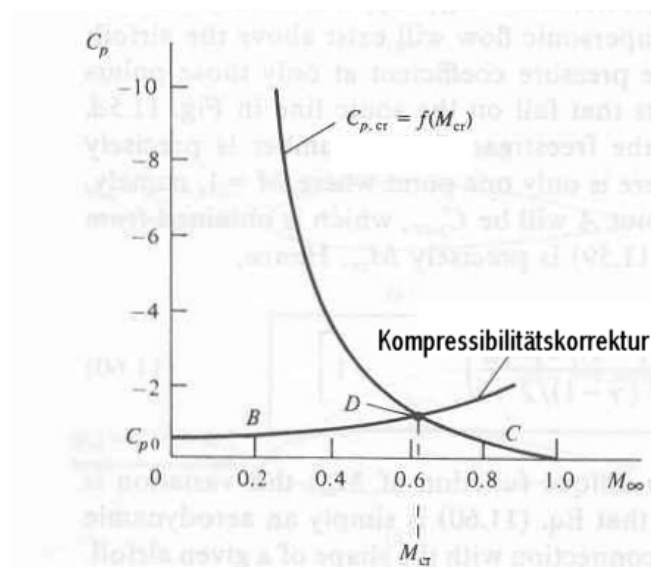


Abb. 9-6: Bestimmung der kritischen Machzahl

Die Bedeutung der kritischen Machzahl als die zentrale Größe der Kompressibilität wird aus Abb. 9-7 ersichtlich. Infolge des Erreichens der Schallgeschwindigkeit treten lokale Verdichtungsstöße auf, die durch stoß-induzierte Ablösungen mit einer sehr starken Zunahme des Widerstands verbunden sind. Da diese beiden Effekte durch die lineare Theorie nicht erfaßt werden, gibt die kritische Machzahl somit die Grenze des Gültigkeitsbereichs der linearen Profiltheorie an.

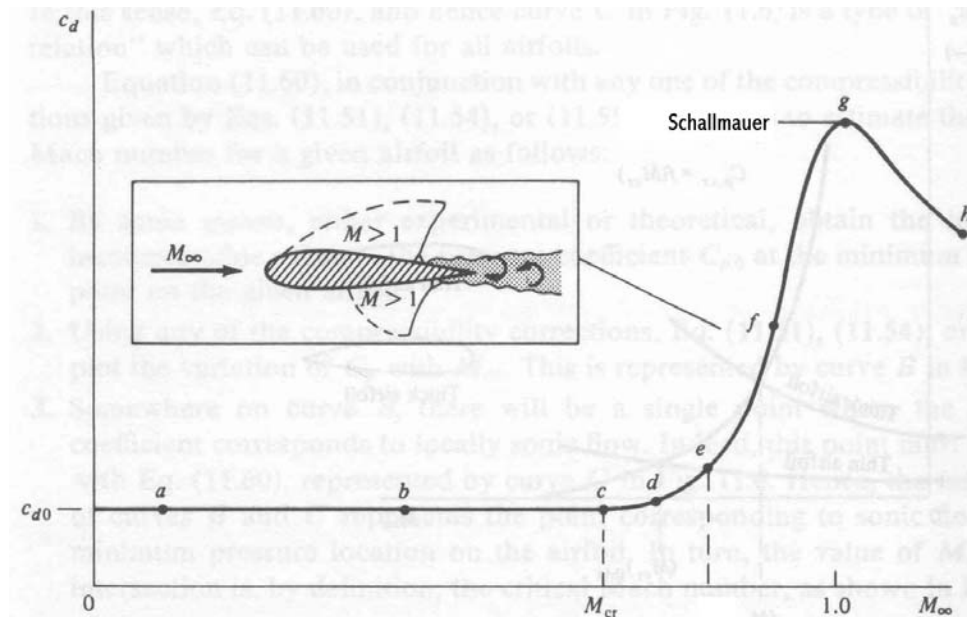
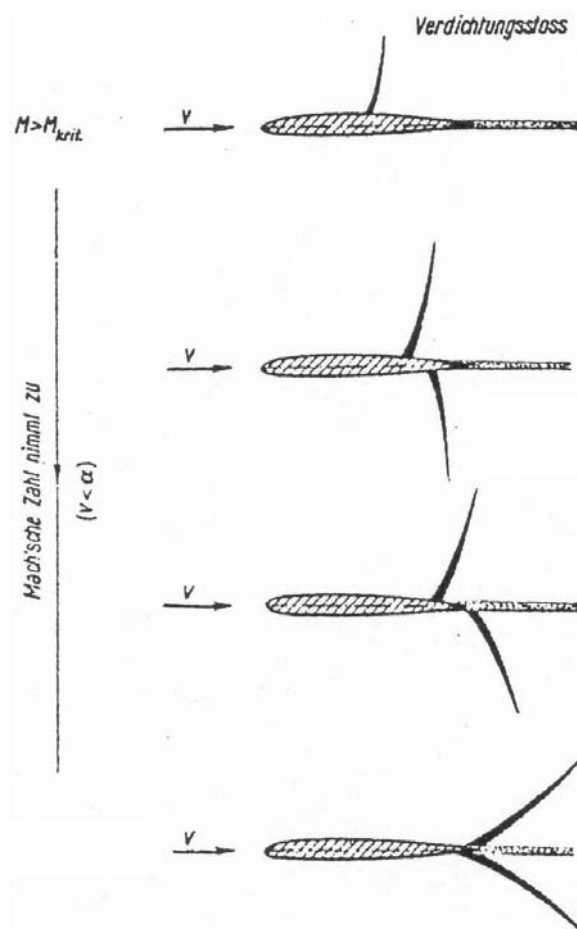


Abb. 9-7: Widerstandsanstieg bei Überschreiten der kritischen Machzahl, [ 2]



Neben dem starken Widerstandsanstieg (Schallmauer) infolge der stoß-induzierten Ablösungen kommt den Verdichtungsstößen, die in Abhängigkeit von der Machzahl ihre Lage verändern, (Abb. 9-8), eine besondere Bedeutung hinsichtlich der Ruderwirksamkeit zu. Bei ungünstiger Lage der Stöße kann sich an den Rudern eine Druckverteilung einstellen, die die Ruderwirksamkeit stark herabsetzt oder sogar die Wirkungsrichtung umkehren kann (Ruder-Umkehrwirkung). Generell wird die Ruderwirksamkeit durch das Ablösegebiet hinter dem Stoß ('Totwassergebiet') deutlich herabgesetzt.

Ähnliche Effekte hinsichtlich der Ruderwirksamkeit können auch bereits im Unterschall bei ungünstiger Druckpunktlage infolge der Aeroelastik, d.h. der aerodynamisch bedingten Verwindung von Tragflügel und Querruder auftreten.

Abb. 9-8: Wanderung der Stoßlagen in Abhängigkeit von der Machzahl, [ 13]

Die kritische Machzahl unterliegt unterschiedlichen Einflußfaktoren. Während bis zum Erreichen von  $M_{krit}$  der Profilwiderstand  $c_{wp}$  nahezu unabhängig von der Machzahl verläuft, so erfolgt der starke Widerstandsanstieg mit abnehmender Profildicke bei einer höheren kritischen Machzahl, Abb. 9-9a. Ähnlich wirkt sich auch eine Erhöhung des Anstellwinkels, d.h. Erhöhung des Auftriebs aus. Mit Vergrößerung des Anstellwinkels erfolgt der starke Widerstandsanstieg bereits bei kleineren Machzahlen, Abb. 9-9b.

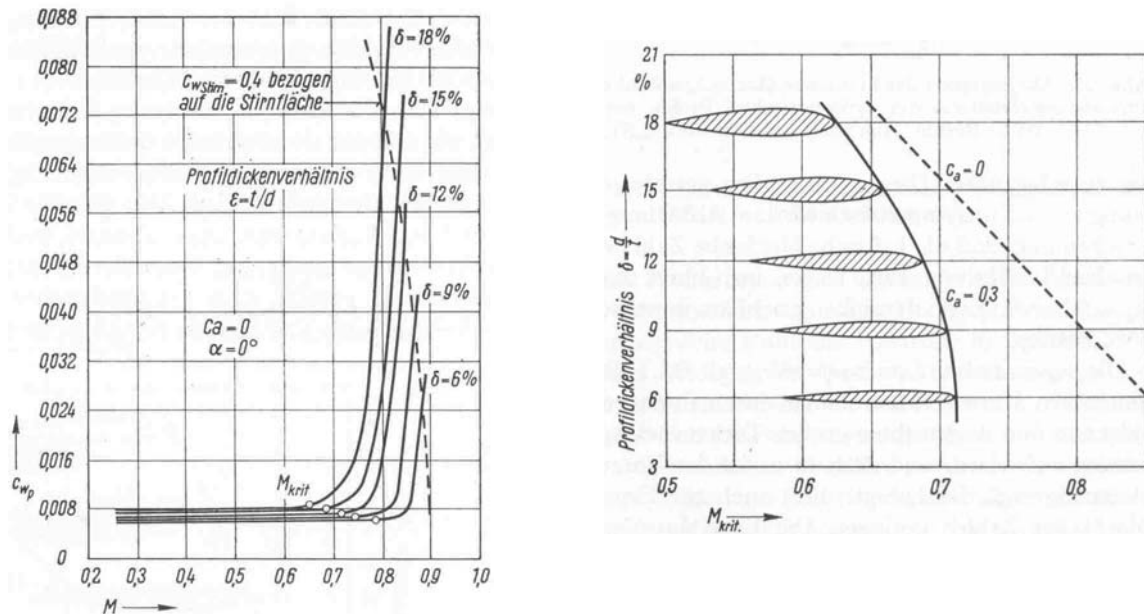


Abb. 9-9: Abhängigkeit der kritischen Machzahl von der Profildicke  $\delta = d/l$ , [ 13]

Weitere Einflußfaktoren auf die kritische Machzahl sind die Dickenrücklage  $x_d/l$  und das Wölbungsverhältnis  $f/l$ . Ist das Dickenverhältnis eines Profils vorgegeben, z.B. um ein bestimmtes Tankvolumen zur Erfüllung einer Reichweitenforderung im Tragflügel integrieren zu können, so läßt sich die kritische Machzahl zu höheren Werten verschieben, indem die Dickenrücklage stromabwärts verschoben wird, was zu einer flacheren Druckverteilung führt, Abb. 9-10a. Ähnliche Auswirkungen zeigt eine Verringerung der Profilwölbung. Die höchste kritische Machzahl weisen ungewölbte, also symmetrische Profile auf, Abb. 9-10b.

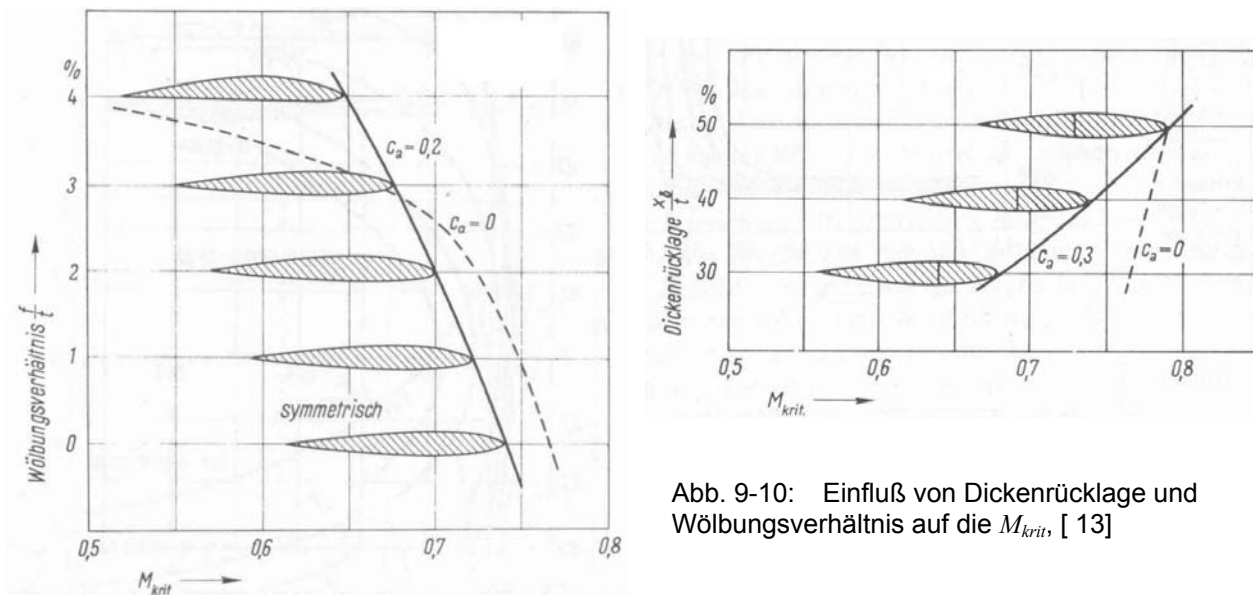


Abb. 9-10: Einfluß von Dickenrücklage und Wölbungsverhältnis auf die  $M_{krit}$ , [ 13]

### 9.2.3 Auftrieb, Widerstand und Auftriebsgradient

Auch bei relativ dicken Profilen verhalten sich Profilpolaren bis zu einer Machzahl von ca.  $M = 0.6$  nahezu unabhängig von der Machzahl (siehe auch Abb. 9-9a). Bei Annäherung an  $M_{krit}$  erfolgt eine immer stärkere Zunahme des Widerstands bei gleichzeitiger Verringerung des maximalen Auftriebs  $C_{A,max}$ , Abb. 9-11. Spätestens beim Überschreiten der kritischen Machzahl bewirken die Verdichtungsstöße auf der Profiloberseite eine Verringerung der Saugkraft. Bei höheren Machzahlen bilden sich auch auf der Profilunterseite lokale Überschallgebiete, die den Überdruck an der Unterseite reduzieren. Die resultierende Druckdifferenz wird somit insgesamt verringert, Abb. 9-12.

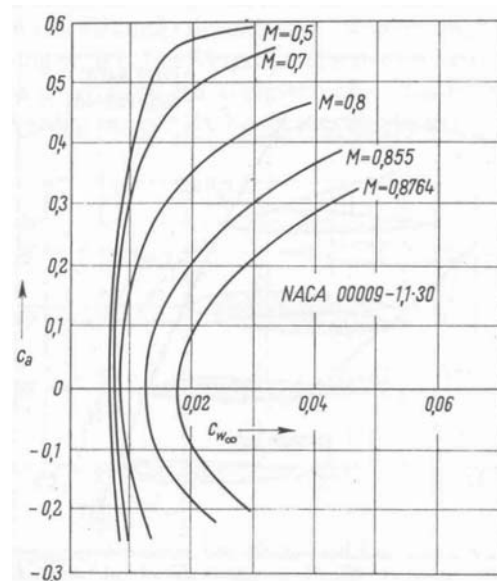
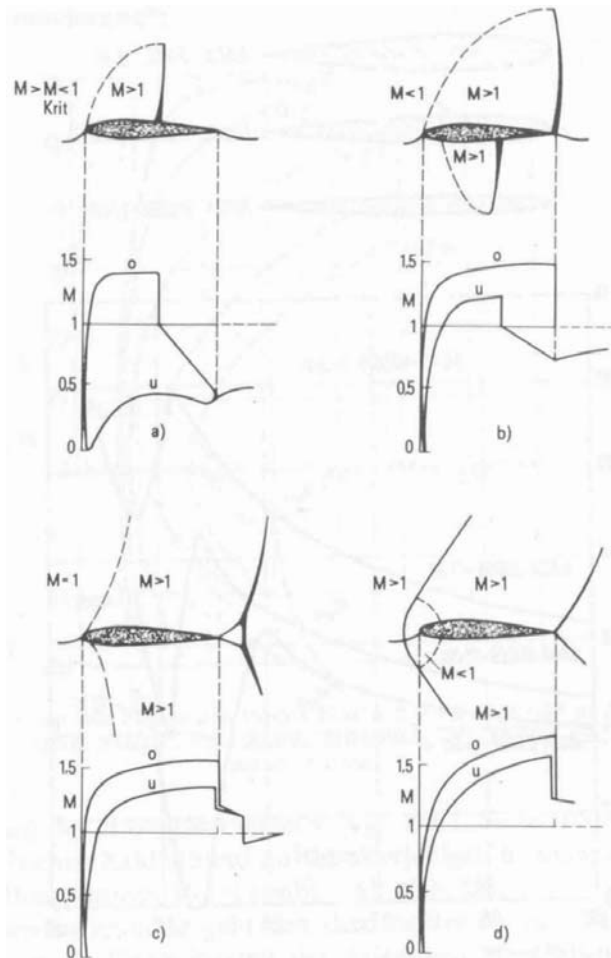


Abb. 9-11: Polaren für NACA 0009, [ 13]

Abb. 9-12: Lokale Machzahl und resultierende Druckverteilung, [ 13]

Der Verlauf des Auftriebsgradienten  $c_{a,\alpha} = dc_a/d\alpha$  ist in Abb. 9-13 für symmetrische Profile unterschiedlicher Dicke ( $\delta = 6, 9$  und  $12\%$ ) dargestellt. Auch bei Überschreiten der kritischen Machzahl nimmt der Auftriebsgradient zunächst noch zu bevor er stark einbricht. Bemerkenswert ist hier, daß der Einbruch bei dünnen Profilen wesentlich später erfolgt als bei dicken Profilen und, daß die Spanne zwischen kritischer Machzahl und Einbruch des Auftriebsgradienten mit zunehmender Profildicke immer kleiner wird. Mit zunehmender Machzahl liegt an dem gesamten Profil eine Überschallströmung vor ( Abb. 9-12c, d) und der Auftriebsgradient nimmt wieder zu.



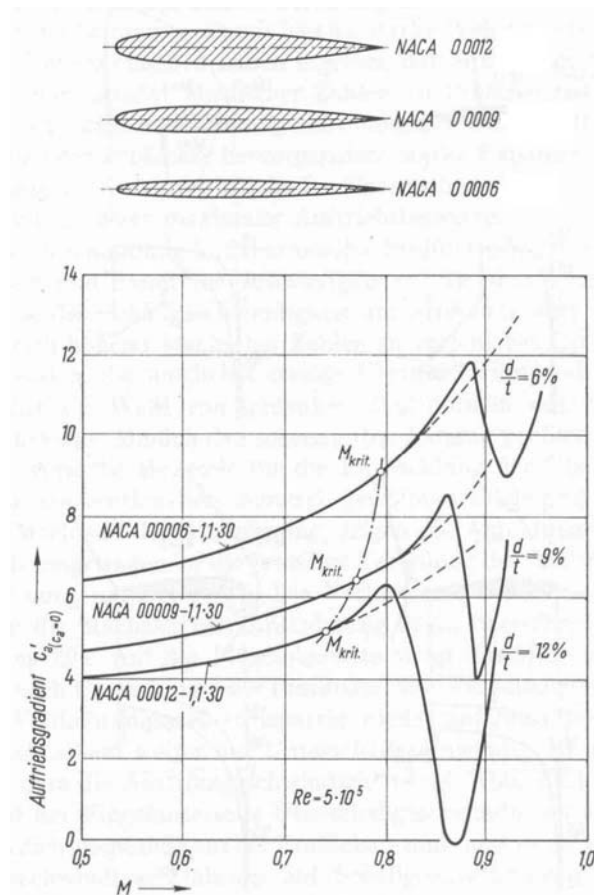


Abb. 9-13: Abhängigkeit des Auftriebsgradienten als Funktion der Machzahl, [ 13]

### 9.2.4 Transsonik-Profile

Der Auslegungspunkt für Profile heutiger Verkehrsflugzeuge liegt in dem Bereich um  $M = 0.85$ . Weiterhin kann davon ausgegangen werden, daß im Gegensatz zu Profilen für Kampfflugzeuge, lediglich positive Auftriebsbeiwerte erzeugt werden müssen. Unter diesen Randbedingungen wurden im Hinblick auf eine Widerstandsminimierung im Transsonik-Bereich sog. *überkritische* oder auch *superkritische Profile* entwickelt. Zielrichtung war stets die Verschiebung der kritischen Machzahl zu höheren Geschwindigkeiten ohne dabei das Auftriebsverhalten wesentlich zu beeinträchtigen. Ursprünglich versuchte man, insbesondere in den USA, ausgehend von symmetrischen NACA-Profilen, z.B. NACA 0012, Transsonik-Profile abzuleiten. Die Entwicklung in den 60er Jahren in Großbritannien zielte hingegen darauf ab, Profile zu entwickeln, die ein ausgeprägtes Überschallgebiet aufweisen. Unmittelbar an der Profilnase wird die Strömung auf Überschall beschleunigt um anschließend durch einen schwachen Verdichtungsstoß wieder auf Unterschallgeschwindigkeit zu verzögern. Die starke Strömungsbeschleunigung direkt an der Profilnase führt zu einer ausgeprägten Saugspitze (engl. 'peak'), was zu der Bezeichnung 'peaky'-Profil führt. Der prinzipielle Unterschied zwischen einem 'konventionellen' und einem 'peaky'-Profil ist exemplarisch in Abb. 9-14 dargestellt. Während bei dem konventionellen Profil bei einer Anströmmachzahl von  $M_\infty = 0.77$  bei ca. 53% ein Verdichtungsstoß entsteht, wird bei dem 'peaky'-Profil bereits an der Profilnase infolge der starken Beschleunigung ein lokales Überschallgebiet erzeugt. Durch die anschließend sehr geringe Profilwölbung erfolgt eine näherungsweise konstante Expansion, die durch einen schwachen Verdichtungsstoß abgeschlossen wird, Abb. 9-14a. Der starke Verdichtungsstoß entsteht in diesem Fall erst bei höheren Machzahlen. Nachteilig ist jedoch der höhere Widerstand bei kleinen Machzahlen, also im Start- und Landefall, Abb. 9-14b.

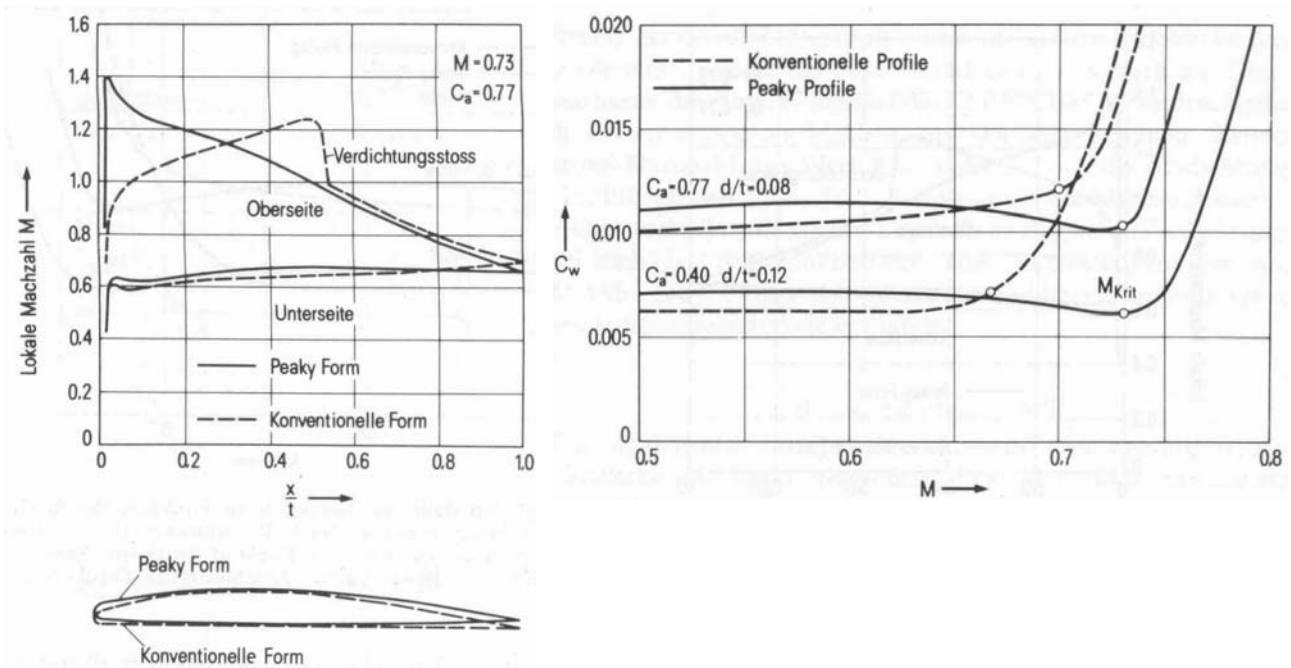


Abb. 9-14: Druckverteilung und Widerstand, 'konventionelles' Profil und 'peaky'-Profil, [ 13]

Obwohl die 'peaky'-Profile vergleichsweise günstige Widerstandswerte im Auslegungspunkt aufweisen, besteht ihr Hauptnachteil in der sehr geringen Toleranz bei Abweichungen vom Auslegungspunkt, d.h. bei Änderungen der Machzahl oder des Anstellwinkels entstehen Verdichtungsstöße, die infolge stoß-induzierter Ablösung einen hohen Widerstandsanstieg bedingen. Eine Weiterentwicklung dieser Profile stellt das sog. 'rear-loading' dar, d.h. im hinteren (engl. 'rear') Teil der Profilunterseite wird eine Überdruckzone erzeugt, die einen zusätzlichen Beitrag zum Auftrieb liefert, Abb. 9-15. Dieses Verfahren stellt jedoch infolge der Belastung im hinteren Bereich des Profils hohe Anforderungen an Festigkeit und Torsionssteifigkeit des Tragflügels.

Ein anderer überkritischer Profiltyp wurde in den 70er Jahren von der NASA in den USA entwickelt. Kennzeichnend ist das ausgeprägte Überschallgebiet auf der abgeflachten Oberseite, welches sich fast über die gesamte Profiloberseite erstreckt und die im hinteren Bereich nach innen gewölbte Profilunterseite ('rear-loading'), was zu einer spürbaren Auftriebserhöhung führt. Nachteilig ist jedoch der starke Verdichtungsstoß, der das Überschallgebiet abschließt und dadurch den Profilwiderstand erhöht. Aufgrund der großen Profildicke ( $\delta > 10\%$ ) sind große Tankvolumina und leichte Bauweisen für die Flügelstruktur möglich. Die Langsamflugeigenschaften werden durch den großen Nasenradius ebenfalls verbessert. Aufgrund der flachen Druckverteilung an der Oberseite wird dieser Typ als 'roof-top'-Profil (engl.: roof = Dach) bezeichnet, Abb. 9-16.

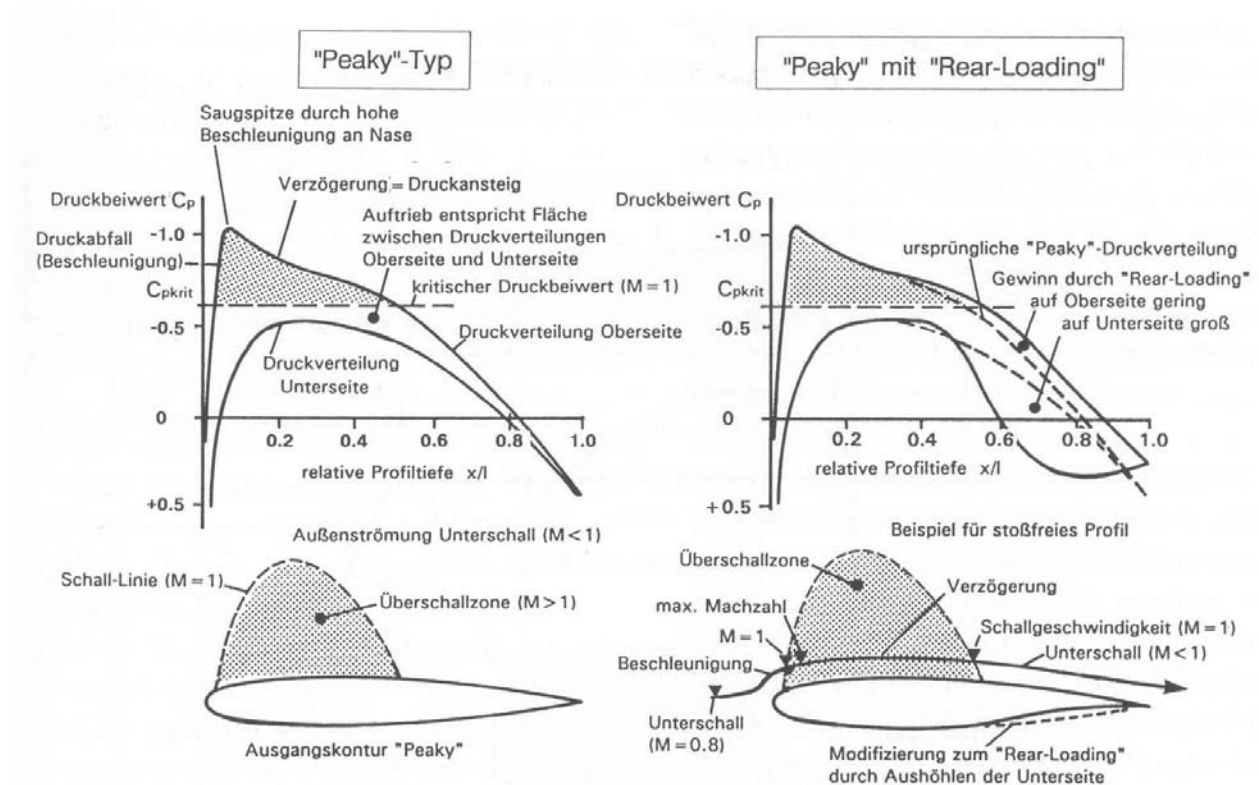


Abb. 9-15: Druckverteilung an 'peaky'-Profilen, [ 20]

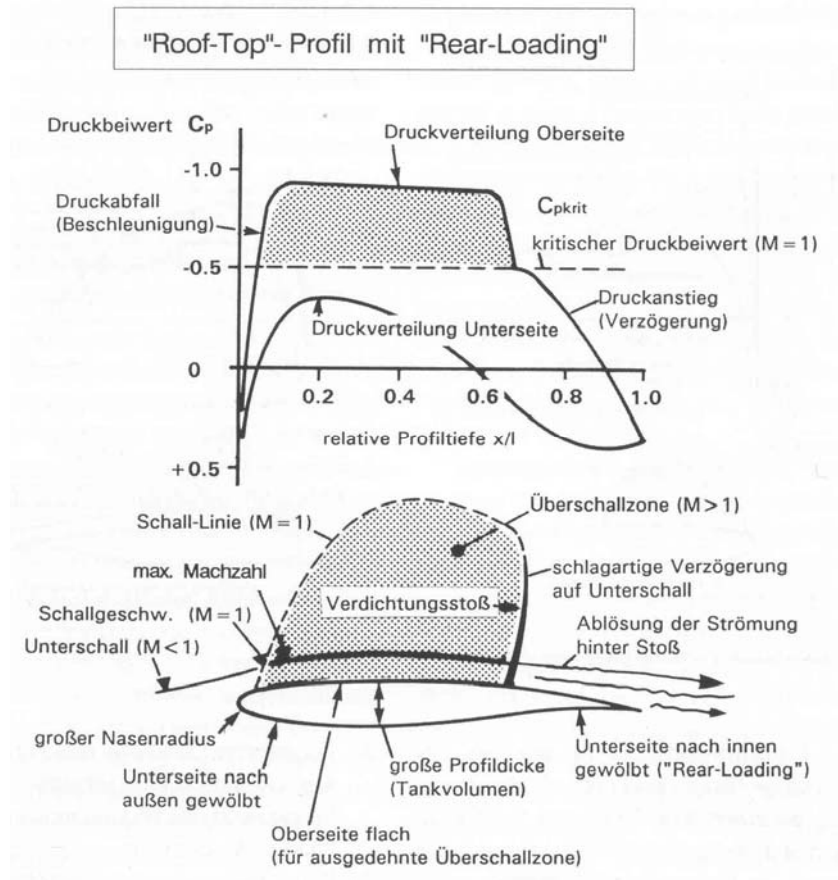


Abb. 9-16: Druckverteilung am 'roof-top'-Profil, [ 20]

### 9.2.5 Flächenregel

Zur Verringerung des hohen Widerstands bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit griff man zu Beginn der 40er Jahre in Deutschland auf ein Entwurfskonzept zurück, welches bei Ballistikern bereits seit langem bekannt war; nämlich, daß die Geschwindigkeit eines Geschosses im Überschall deutlich höher liegt, wenn die Querschnittsverteilung in Längsrichtung einen kontinuierlichen, sanften Verlauf hat und keine Unstetigkeitsstellen aufweist. Dieses Konzept wurde bereits im Jahr 1943 im Rahmen von Windkanaluntersuchungen zur Entwicklung der Junkers Ju287 von *Otto Frenzl*<sup>9</sup> formuliert und von den Junkers-Werken zum Patent angemeldet, Abb. 9-17. Der Amerikaner *R.T. Whitcomb* (NACA) entdeckte unabhängig(?) von Frenzl die Flächenregel im Jahr 1952 zum zweiten Mal, die er 1955 veröffentlichte, wobei ihm ungerechtfertigterweise in der Literatur der Entdeckerruhm eingeräumt wurde.

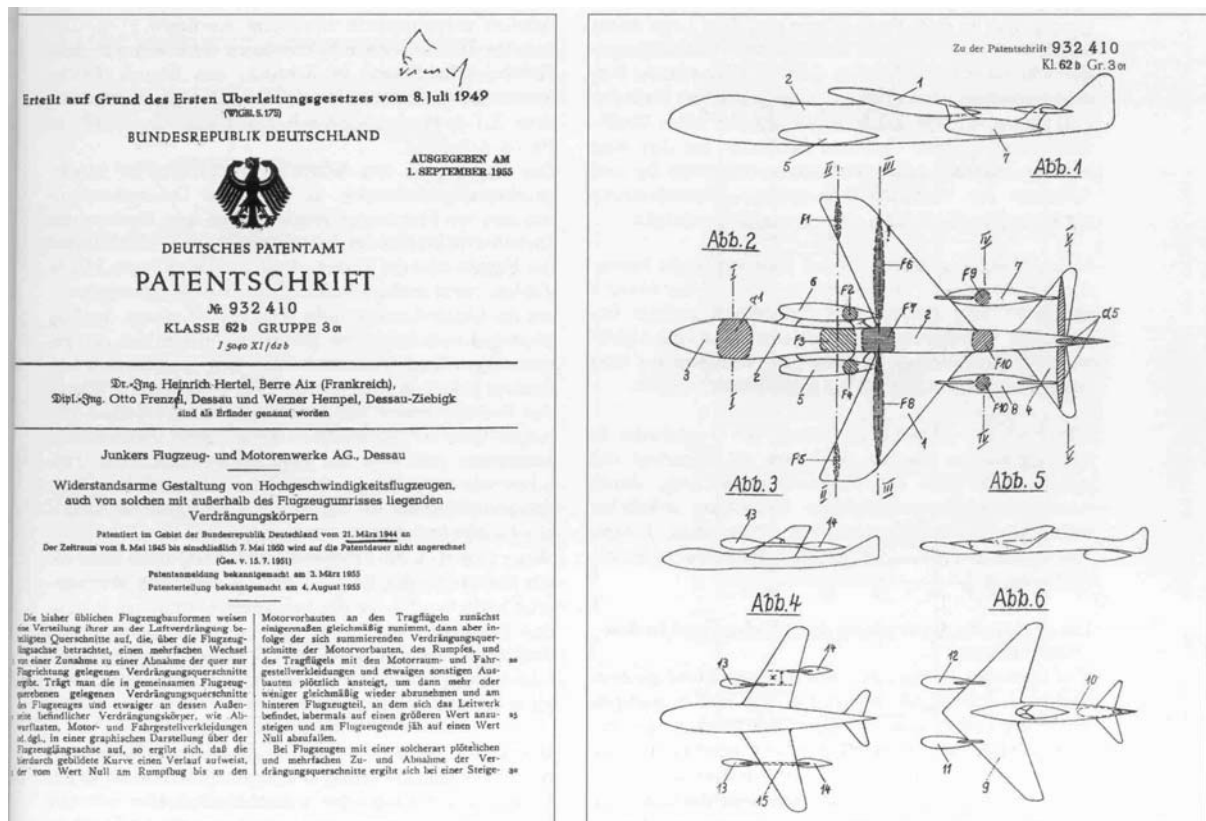


Abb. 9-17: Patentschrift Otto Frenzl's aus dem Jahr 1944 in der Neuauflage von 1955, [ 26]

Der Grundgedanke, der diesem Entwurfskonzept zugrunde liegt, besteht in der Tatsache, daß sich Störungen im Transsonik-Bereich hauptsächlich quer zur Strömungsrichtung ausbreiten. Bei der Anwendung der Flächenregel wird der gesamte Flugzeugquerschnitt, also einschließlich Rumpf, Flügel und Triebwerksgondeln betrachtet. Die Summe aller Querschnitte in axialer Richtung soll möglichst stetig und absteigend verlaufen und der maximale Querschnitt möglichst klein ausfallen. Dieser stetige Verlauf läßt sich durch Einschnürungen im Rumpfbereich oder aber auch durch das Anbringen von zusätzlichen Verdrängungskörpern erreichen. Die Anwendung der Flächenregel wird insbesondere durch die Verwendung des Pfeilflügelkonzepts begünstigt, da sich infolge der Pfeilung der anzugleichende Querschnitt des Flügels über eine größere axiale Strecke verteilt. Erstmals berücksichtigt wurde dieses Entwurfsprinzip bei dem vierstrahligen Bomber Junkers Ju 287.

<sup>9</sup> Otto Frenzl (geb. 1906) ; Österr. Elektroingenieur, maßgebliche Beteiligung an der Entwicklung von Hochgeschwindigkeits-Windkanälen bei Junkers, Dessau, nach 1945 u.a. bei S.N.E.C.M.A, Frankreich

Die vorne am Rumpf angebrachten Triebwerksgondeln enden näherungsweise auf gleicher Höhe, auf der sich die Spitzen der nach vorne gepfeilten Tragflügel befinden. Die an den Tragflächen angebrachten Triebwerksgondeln sind soweit als möglich über die Flügelhinterkante nach hinten verschoben. Durch Verschiebung der Triebwerksgondel nach hinten konnte in diesem Fall die kritische Machzahl von  $M = 0.72$  auf  $M = 0.77$  erhöht werden, bei  $M = 0.8$  betrug die Widerstandsreduzierung infolge der Verschiebung noch ca. 33%.

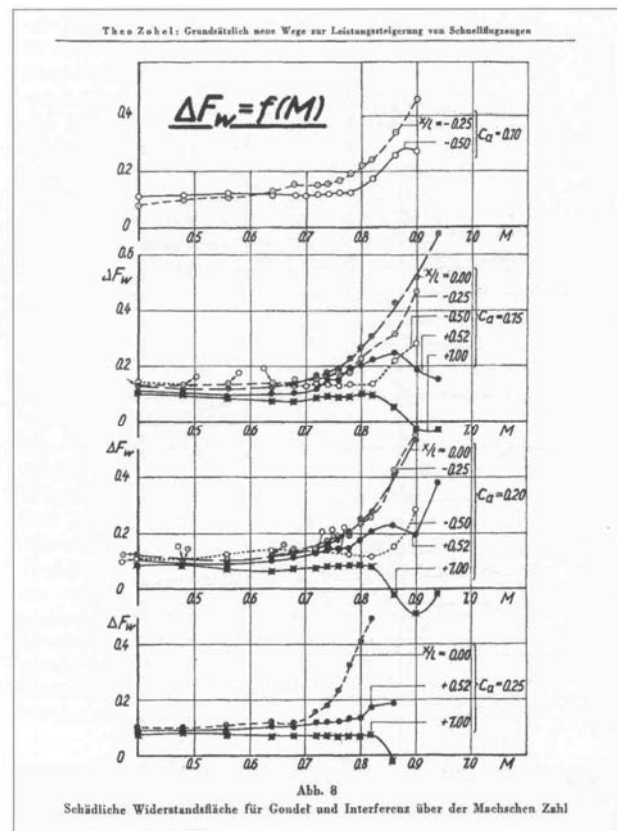
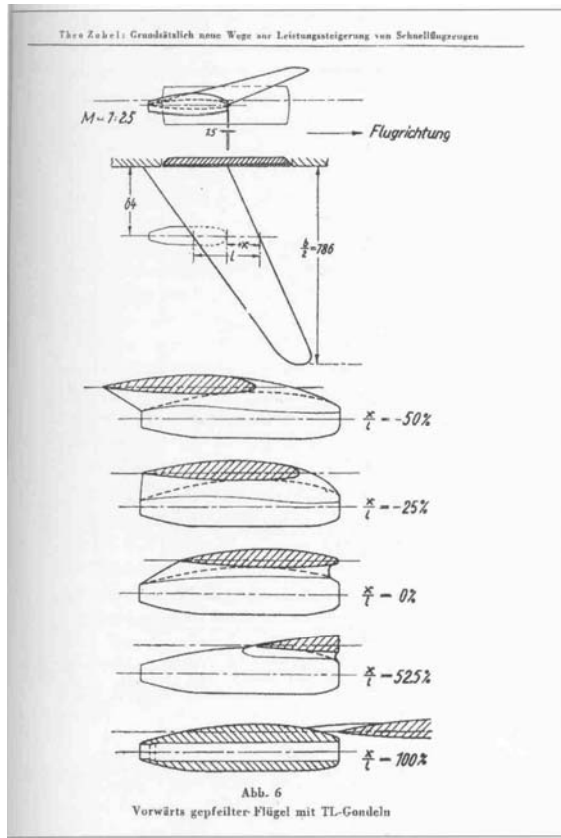


Abb. 9-18: Interferenzwiderstand Triebwerksgondel, Variation der axialen Position, [ 26]



Abb. 9-19: Flugerprobung des Prototypen Junkers Ju287, Sommer 1944

Ein weiteres historisches Beispiel für diese Vorgehensweise ist die ursprünglich für den Überschall ausgelegt Convair F-102. Im Laufe der Flugerprobung zeigte sich, daß der erste Prototyp nicht in die Lage war, die projektierte Überschalleistung zu erreichen. Erst nach Anwendung der Flächenregel, d.h. eine möglichst konstante Querschnittsverteilung in Längsrichtung, die zu der markanten Einschnürung im Flügel-Rumpfbereich führte, konnten die erwarteten Flugleistungen erzielt werden.

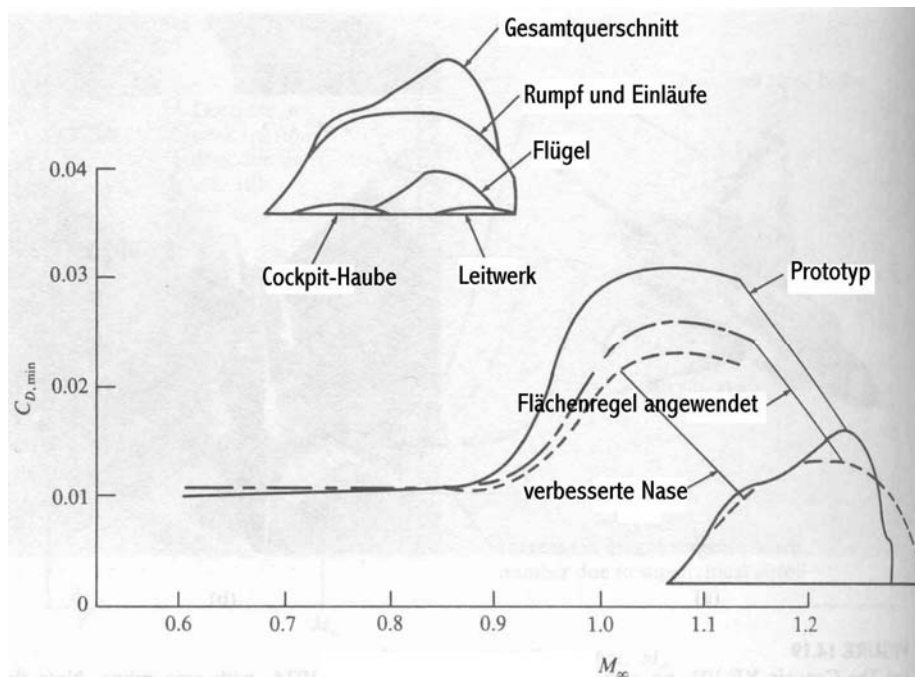


Abb. 9-20: Convair F-102: Querschnittsverteilung und Gesamtwiderstand, [ 3]



Abb. 9-21: Convair F-102, Prototyp und Serienversion

### 9.2.6 Pfeilflügel

Das bereits 1935 von A. Busemann auf der Volta-Konferenz vorgestellte Konzept des Pfeilflügels für Hochgeschwindigkeitsflüge wurde zwar als wissenschaftlich interessant, jedoch aufgrund des allgemeinen Stands der Flugzeug- und Triebwerksentwicklung als nicht weiter beachtenswert eingestuft. Dennoch gilt es als unstrittig, daß die Arbeiten in Deutschland zur Hochgeschwindigkeitsaerodynamik zu Beginn der vierziger Jahre die Grundlage für die spätere weltweite Entwicklung auf diesem Gebiet darstellen.

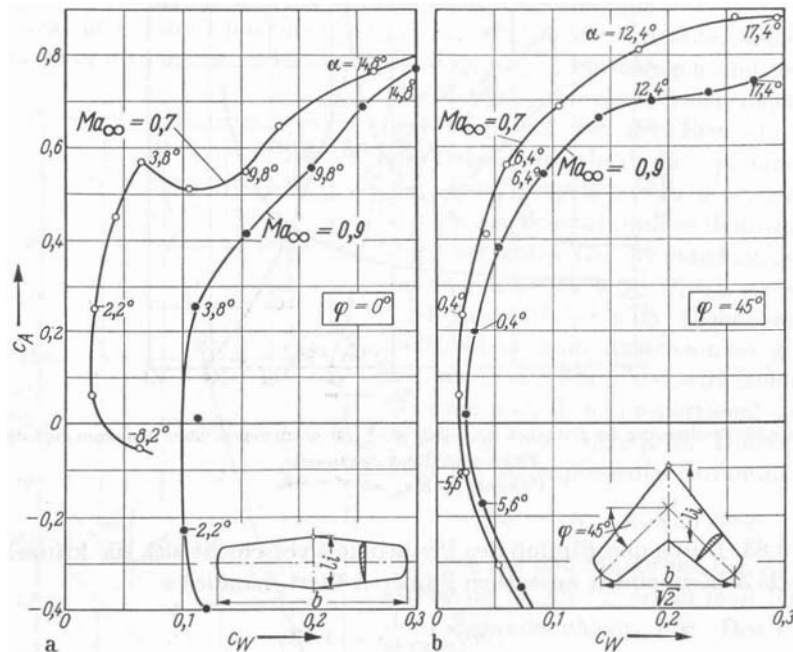


Abb. 9-22: H. Ludwieg, A. Betz, Profil Gö 623, AVA Göttingen 1939, [ 36]

### Einfluß auf die kritische Machzahl

Bei der Betrachtung des Pfeilflügels kann man von einem schiebenden Flügel unendlicher Streckung ausgehen. Zerlegt man die Anströmgeschwindigkeit  $v$  in eine tangentiale Komponente  $v_t$  und eine Normalkomponente  $v_n$  zur  $l/4$ -Linie, so wird die profilbedingte Übergeschwindigkeit, die für die Kompressibilitätseffekte verantwortlich ist, lediglich von der Normalkomponente beeinflusst, während die Tangentialkomponente keinen Beitrag liefert, Abb. 9-23.

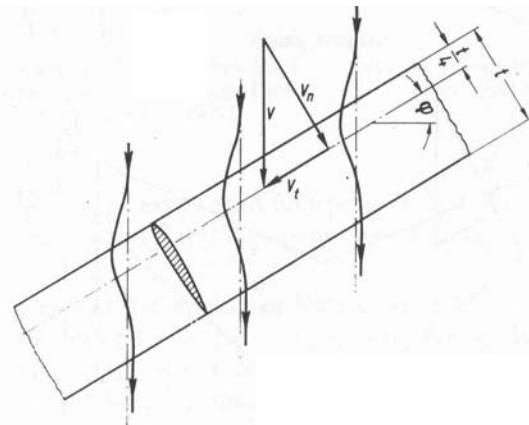


Abb. 9-23: Stromlinienverlauf und Geschwindigkeitsvektoren am schiebenden Flügel

Aus der vektoriellen Zerlegung der Anströmgeschwindigkeit  $v$  ergibt sich für die Normalkomponente  $v_n$

$$v_n = v \cdot \cos \varphi \quad \text{Gl. 9-24}$$

Die effektive Machzahl  $M_\varphi$  ergibt sich entsprechend der Pfeilung  $\varphi$  zu

$$M_\varphi = \frac{v_n}{c} = \frac{v \cdot \cos \varphi}{c} = M_\infty \cdot \cos \varphi \quad \text{Gl. 9-25}$$

d.h. die effektive Machzahl wird entsprechend der Pfeilung gegenüber der Machzahl der ungestörten Anströmung, bzw. des ungepfeilten Flügels, um den Faktor  $\cos \varphi$  verringert. Dadurch wird jedoch auch die kritische Machzahl  $M_{krit}$  zu höheren Anströmmachzahlen  $M_\infty$  verschoben. Infolge der Umströmung im Randbereich und Wanderung der Grenzschicht reduziert sich dieser Effekt jedoch beim Flügel endlicher Streckung gegenüber dem unendlichen, schiebenden Flügel. Die Verschiebung der kritischen Machzahl bei einem mit  $\varphi = 45^\circ$  gepfeilten Flügel gegenüber einem ungepfeilten Flügel ist Abb. 9-24 skizziert. Das Dickenverhältnis beträgt  $\delta = 12\%$

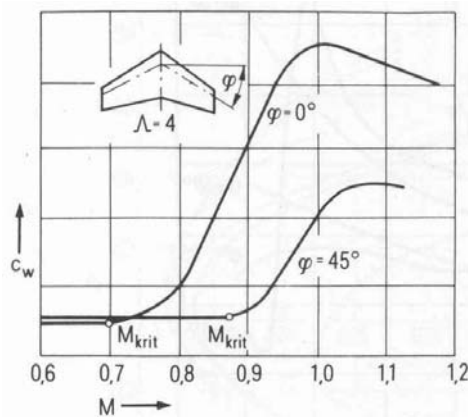


Abb. 9-24: Abhängigkeit der kritischen Machzahl von dem Pfeilwinkel, [ 13]

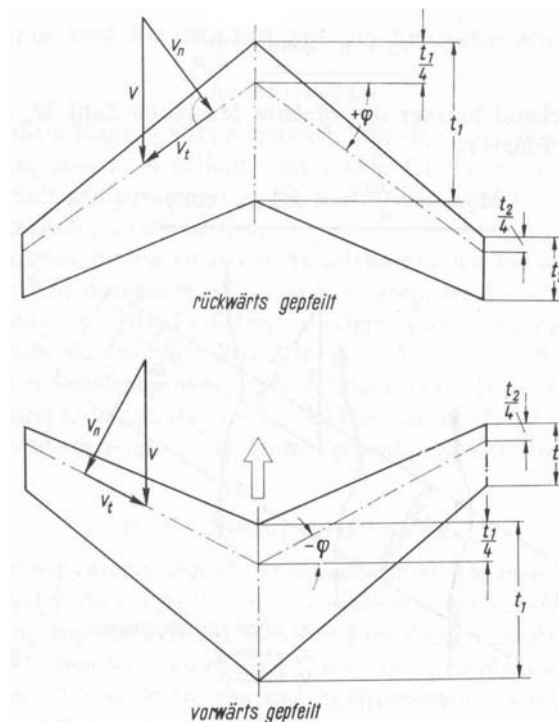


Abb. 9-25: Rückwärts ( $\varphi > 0$ ) und Vorwärts ( $\varphi < 0$ ) gepfeilter Flügel



Die Erhöhung der kritischen Machzahl ist unabhängig davon ob der Flügel nach vorne oder nach hinten gepfeilt ist. Ausschlaggebend ist lediglich der Betrag des Pfeilwinkels  $\varphi$ . Unterschiede bei Vorwärts- bzw. Rückwärtspfeilung ergeben sich jedoch hinsichtlich der Flugeigenschaften. Rückwärtspfeilung bewirkt aufgrund des spannweiten Druckgefälles ein Abwandern der Grenzschicht nach außen, wodurch im Flügelaußenbereich zuerst  $C_{A,max}$  erreicht wird und dort die Strömung zuerst abreißt. Hinsichtlich des verfrühten Querruderwirksamkeitsverlusts ist dies ein eher unerwünschtes Verhalten. Vorwärtspfeilung schafft in diesem Punkt Abhilfe, da in diesem Fall die Grenzschicht nach innen wandert und die Wirksamkeit der außen liegenden Querruder länger aufrecht erhalten werden kann. Dies gilt jedoch nur für einen steifen Flügel. Die Verhältnisse an einem elastischen Flügel sind in Abb. 9-26 dargestellt. Infolge einer Punktlast im Punkt  $P$  erfährt der rückwärts gepfeilte Flügel eine Anstellwinkelverringerung um den Betrag  $-\theta(y)$  und der vorwärts gepfeilte Flügel eine Anstellwinkelverhöhung um den Betrag  $+\theta(y)$ , d.h. der effektive Anstellwinkel, insbesondere im Flügelaußenbereich, wird bei Rückwärtspfeilung reduziert und bei Vorwärtspfeilung erhöht. Das günstige Überziehverhalten aufgrund der nach innen wandernden Grenzschicht beim vorwärts gepfeilten Flügel wird aufgrund seines elastischen Verhaltens somit wieder aufgehoben.

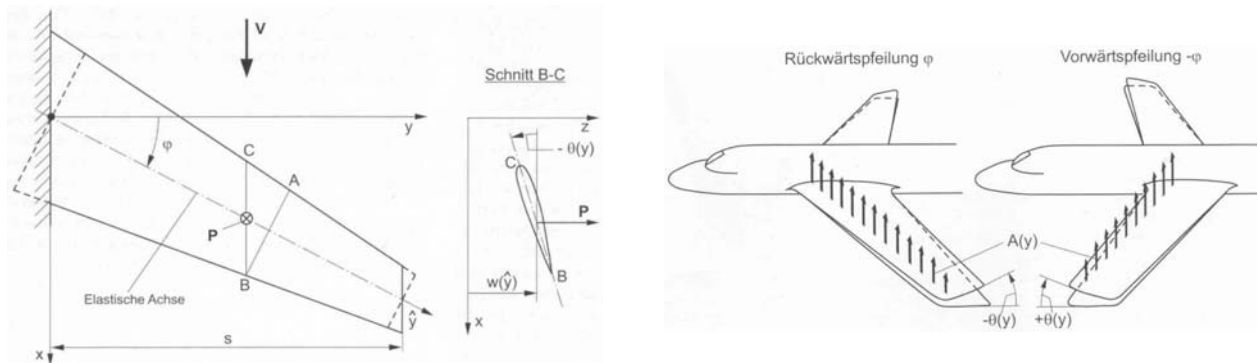


Abb. 9-26: Biegeverformung bei Vorwärts- und Rückwärtspfeilung, [ 26]

### Einfluß auf den Auftriebsgradienten

Der bereits in Kapitel 9.2.3 diskutierte starke Einbruch des Auftriebsgradienten bei Überschreiten der kritischen Machzahl tritt insbesondere bei positiv (rückwärts) gepfeilten Flügel nicht oder erst später auf, Abb. 9-26

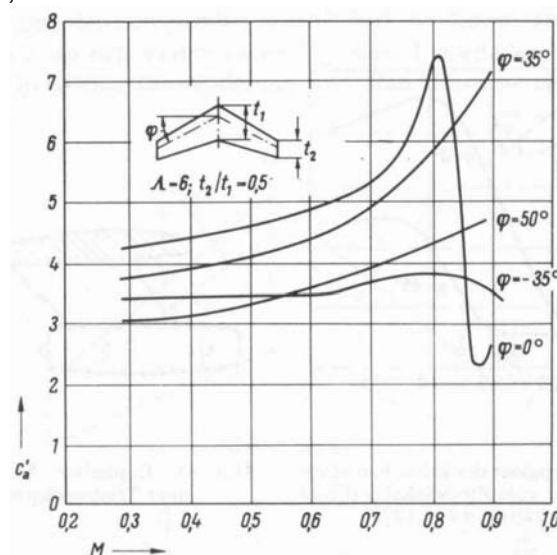


Abb. 9-27: Auftriebsgradient als Funktion der Pfeilung, [ 13]

### Einfluß auf die Polare

Die Auswirkung der Pfeilung auf den Verlauf der Polare ist exemplarisch für  $M = 0.5$  und  $M = 0.85$  für einen Tragflügel mit unterschiedlichen Pfeilungen und einem Profil mit  $\delta = 11.3\%$  in Abb. 9-28 dargestellt. Es zeigt sich prinzipiell das gleiche Verhalten, das bereits von H. Ludwieg und A. Betz erstmalig bei Pfeilflügelmessungen bei der AVA in Göttingen 1939 ermittelt wurde, Abb. 9-22.

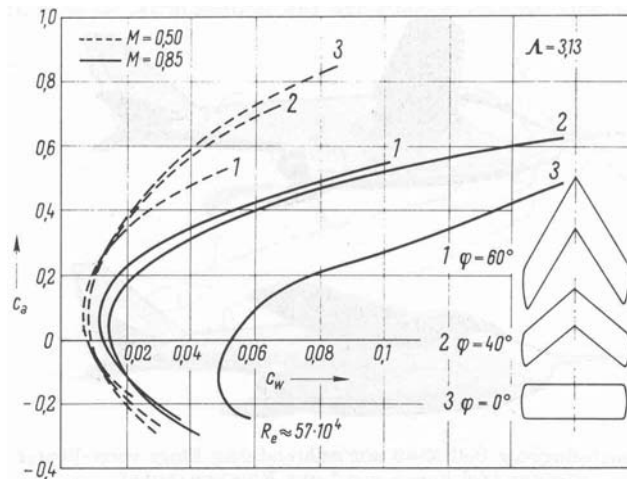


Abb. 9-28: Einfluß der Pfeilung auf die Polare, [ 13]

### Sichelflügel

Eine variable, nach außen hin abnehmende Pfeilung bei gleichzeitiger Verringerung der Profildicke bewirkt, daß die kritische Machzahl über die gesamte Spannweite konstant verläuft. Zusätzlich wird die Grenzschichtwanderung nach außen aufgrund der im Außenbereich abnehmenden Pfeilung abgeschwächt und verbessert dadurch die Querruderwirkung bei hohen Anstellwinkeln.

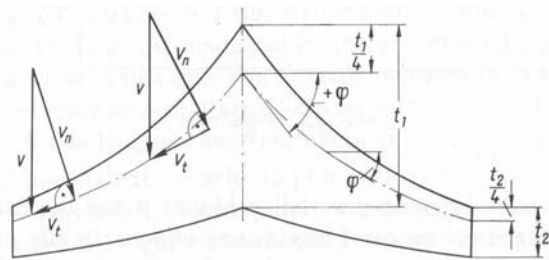


Abb. 9-29: Sichelflügel, Handley Page H.P.80 - Victor, [ 8]

### Deltaflügel

Deltaflügel stellen einen Sonderfall des Pfeilflügels dar bei dem die Pfeilung der Hinterkante auf Null gesetzt wurde. Realisiert wurde diese Flügelform häufig bei Nurflügelkonzepten, oder auch bei modernen Kampfflugzeugen wie EF2000. Konstruktive Vorteile bestehen insbesondere in der Steifigkeit aufgrund der starken Verjüngung, d.h. aeroelastische Effekte, die die Ruderwirksamkeit beeinträchtigen wirken sich hier weniger stark aus.

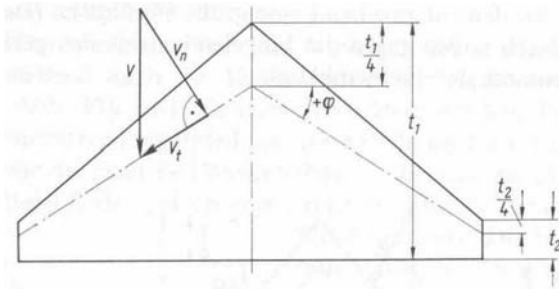


Abb. 9-30: Deltaflügel, Eurofighter EF2000

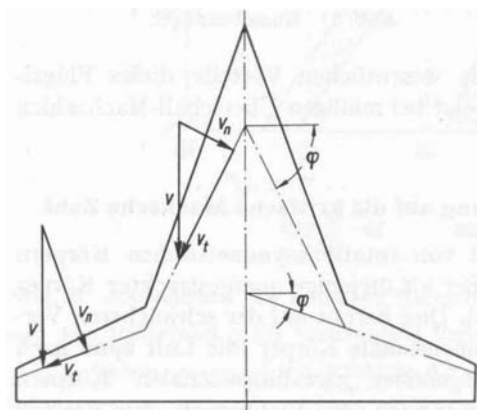


Abb. 9-31: Doppel-Deltaflügel, Saab Draken

## 9.3 Überschall

### 9.3.1 Profiltheorie bei Überschallgeschwindigkeit

Ähnlich wie bei der kompressiblen Unterschallgeschwindigkeit gilt die linearisierte Potentialgleichung unter der Annahme kleiner Störgeschwindigkeiten, also für schlanke Profile oder die ebene Platte auch für den Überschall. Diese lineare Theorie wurde zuerst von *J. Ackeret* angegeben. Die Störgeschwindigkeiten  $u$  in Strömungsrichtung ( $x$ -Richtung) und  $w$  in  $z$ -Richtung hängen demnach lediglich von der lokalen Neigung der Profilkontur  $\vartheta$ , der Geschwindigkeit der freien Anströmung  $V_\infty$  und der Machzahl  $M_\infty$  ab.

$$u(x) = \frac{\vartheta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot V_\infty \quad \text{Gl. 9-26}$$

$$w(x) = -\vartheta \cdot V_\infty \quad \text{Gl. 9-27}$$

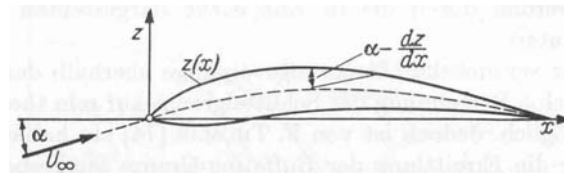


Abb. 9-32: Profilkontur

Die Profilkontur lässt sich in einen Profiltropfen<sup>(t)</sup> und eine Skelettlinie<sup>(s)</sup> aufspalten. Die dimensionslosen Koordinaten lauten

$$Z = \frac{z}{l} = Z^{(s)} \pm Z^{(t)}, \quad X = \frac{x}{l} \quad \text{Gl. 9-28}$$

Für schlanke Profile im Überschall ergeben sich daraus folgende Beiwerte

Druckverteilung	$c_p(x) = \frac{p(x) - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} \cdot V_\infty^2} = \mp \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \left( \alpha - \frac{dZ}{dX} \right)$
Auftriebsanstieg	$\frac{dc_A}{d\alpha} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$
Neutralpunktlage	$\frac{x_N}{l} = \frac{1}{2}$
Nullauftriebswinkel	$\alpha_0 = 0$
Nullmoment	$c_{M0} = -\frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \int_0^1 Z^{(s)} dX$
Wellenwiderstand	$c_{w0} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \int_0^1 \left[ \left( \frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 + \left( \frac{dZ^{(t)}}{dX} \right)^2 \right] dX$
Widerstand	$c_w = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1} \cdot c_A^2 + \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \int_0^1 \left[ \left( \frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 + \left( \frac{dZ^{(t)}}{dX} \right)^2 \right] dX$

Tab. 9-1: Aerodynamische Beiwerte eines Profils im Überschall, lineare Theorie nach Ackeret

### 9.3.2 Auftrieb und Widerstand der ebenen Platte im Überschall

Eine starke Vereinfachung ergibt sich, wenn die Profildicke gegen Null geht. Die Umströmung einer ebenen Platte im Überschall lässt sich dann aus der Kombination von schrägen Verdichtungsstößen und Verdünnungswellen zusammensetzen. Dieses Verfahren wurde erstmals von J. Ackeret vorgestellt.

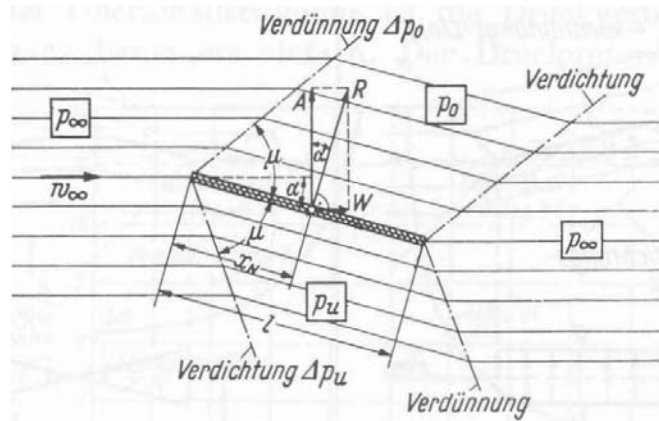


Abb. 9-33: Ebene Platte in einer Überschallströmung, [ 35]

Der Druck an der Plattenoberseite ergibt sich zu

$$p_o = p_\infty - 2 \cdot q_\infty \cdot \alpha \cdot \tan \mu \quad \text{Gl. 9-29}$$

und an der Unterseite zu

$$p_u = p_\infty + 2 \cdot q_\infty \cdot \alpha \cdot \tan \mu \quad \text{Gl. 9-30}$$

Die resultierende Druckdifferenz lautet

$$\Delta p = p_u - p_o = 4 \cdot q_\infty \cdot \alpha \cdot \tan \mu = 4 \cdot q_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \alpha \quad \text{Gl. 9-31}$$

Daraus ergibt sich für eine Platte der Breite  $b$  eine resultierende Luftkraft  $R$ ,

$$R = b \cdot l \cdot (p_u - p_o) = 4 \cdot b \cdot l \cdot q_\infty \cdot \alpha \cdot \tan \mu \quad \text{Gl. 9-32}$$

die sich wieder vektoriell in die Komponenten Auftrieb  $A$  und Widerstand  $W$  zerlegen lässt

$$A = R \cdot \cos \alpha \approx R \quad \text{Gl. 9-33}$$

$$W = R \cdot \sin \alpha \approx R \cdot \alpha \approx A \cdot \alpha \quad \text{Gl. 9-34}$$

Die dimensionslosen Beiwerte lauten entsprechend

$$c_A = \frac{A}{l \cdot b \cdot q_\infty} = 4 \cdot \tan \mu \cdot \alpha \quad \text{Gl. 9-35}$$

$$c_W = \frac{W}{l \cdot b \cdot q_\infty} = 4 \cdot \tan \mu \cdot \alpha^2 = c_A \cdot \alpha \quad \text{Gl. 9-36}$$

Auftriebsanstieg im Überschall (Ackeret)

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = 4 \cdot \tan \mu = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad \text{Gl. 9-37}$$

Zum Vergleich: Auftriebsanstieg im Unterschall (Prandtl-Glauert)

$$\frac{dc_A}{d\alpha} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

Gl. 9-38

In Abb. 9-34 sind die Verläufe für Auftriebsanstieg, Neutralpunktlage und Widerstand der ebenen Platte in reibungsfreier Strömung in einer Unterschall- und einer Überschallströmung dargestellt. Zu beachten ist, daß die in beiden Fällen getroffenen Annahmen zur Linearisierung der Potentialgleichung bei  $M = 1$  nicht mehr zutreffen und die lineare Theorie in der Umgebung der Schallgrenze keine sinnvolle Lösungen mehr liefert.

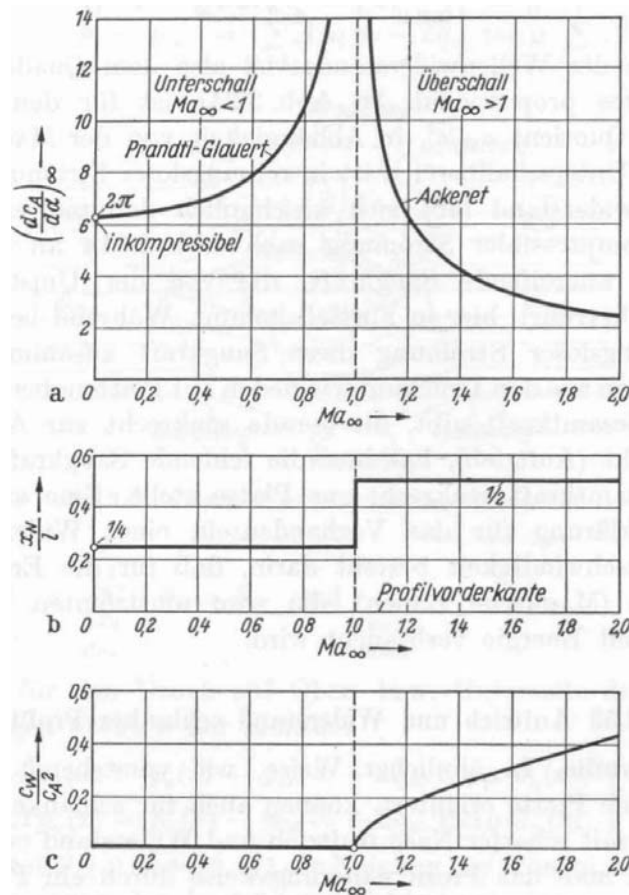


Abb. 9-34: Auftriebsanstieg, Neutralpunktlage und Widerstand der ebenen Platte, [ 35]

Die in Abb. 9-35 dargestellte konstante Druckverteilung im Überschall im Vergleich zur Druckverteilung an einer ebenen Platte im Unterschall führt zu einer sprunghaften Verschiebung der Neutralpunktlage von  $x_N/l=0.25$  auf  $x_N/l=0.5$ .

Problematisch gestaltet sich das Flugverhalten bei einer raschen Verzögerung vom Überschallflug zu Unterschallgeschwindigkeiten, da durch den plötzlichen Sprung des Neutralpunkts nach vorne ein starkes aufnickendes Moment (*transonic pitch-up*) entsteht, das der Flugregler durch entsprechende Klappenausschläge wieder korrigieren muß und wodurch das Flugzeug in diesem Geschwindigkeitsbereich in seiner Agilität eingeschränkt wird.

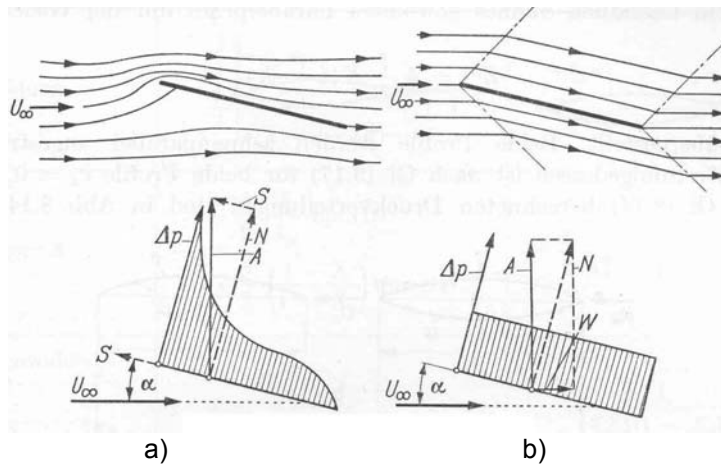


Abb. 9-35: Druckverteilung an einer ebenen Platte: a) Unterschall, b) Überschall

### 9.3.3 Druckverteilung an schlanken Profilen

Ausgehend von den Ergebnissen für die ebene Platte sowie die Umströmung von Ecken im Überschall lassen sich so für schlanke Profile mit einer scharfen Vorderkante näherungsweise Auftrieb und Widerstand bestimmen.

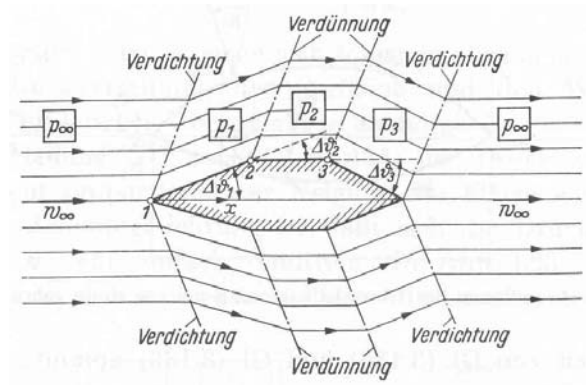


Abb. 9-36: Überschallströmung um ein Polygonprofil, [ 35]

Die Druckverteilung ergibt sich aus den Drücken der einzelnen Flächen, aus denen das Polygonprofil aufgebaut wurde, Abb. 9-36.

$$p_1 - p_\infty = \Delta p_1 = -2 \cdot q_\infty \cdot \tan \mu \cdot \Delta \vartheta_1$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p_2 = -2 \cdot q_\infty \cdot \tan \mu \cdot \Delta \vartheta_2$$

.....

$$p_i - p_{i-1} = \Delta p_i = -2 \cdot q_\infty \cdot \tan \mu \cdot \Delta \vartheta_i$$

$$p_i - p_\infty = \sum_{v=1}^i \Delta p_v = -2 \cdot q_\infty \cdot \tan \mu \cdot \sum_{v=1}^i \Delta \vartheta_v$$

mit

$$\vartheta_0 = \underbrace{\sum_{v=1}^i \Delta \vartheta_v}_{\text{oben}} \quad \text{und} \quad \vartheta_u = \underbrace{\sum_{v=1}^i \Delta \vartheta_v}_{\text{unten}}$$

Gl. 9-39

ergibt sich an einer beliebigen Stelle  $x$  der Kontur des Profils der Druck an der Ober- bzw. Unterseite zu

$$\Delta p_o(x) = p_o(x) - p_\infty = -2 \cdot q_\infty \cdot \tan \mu \cdot \mathcal{G}_o(x) \quad \text{Gl. 9-40}$$

$$\Delta p_u(x) = p_u(x) - p_\infty = -2 \cdot q_\infty \cdot \tan \mu \cdot \mathcal{G}_u(x) \quad \text{Gl. 9-41}$$

Die Resultierende Luftkraft  $R$ , die sich dann wieder vektoriell in Auftrieb  $A$  und Widerstand  $W$  zerlegen lässt, ergibt sich aus der Integration der Einzelkräfte an den einzelnen Polygonflächen.

Qualitative Druckverteilungen für ebene Platte, gewölbte Platte, konvexes und bikonvexes Profil:

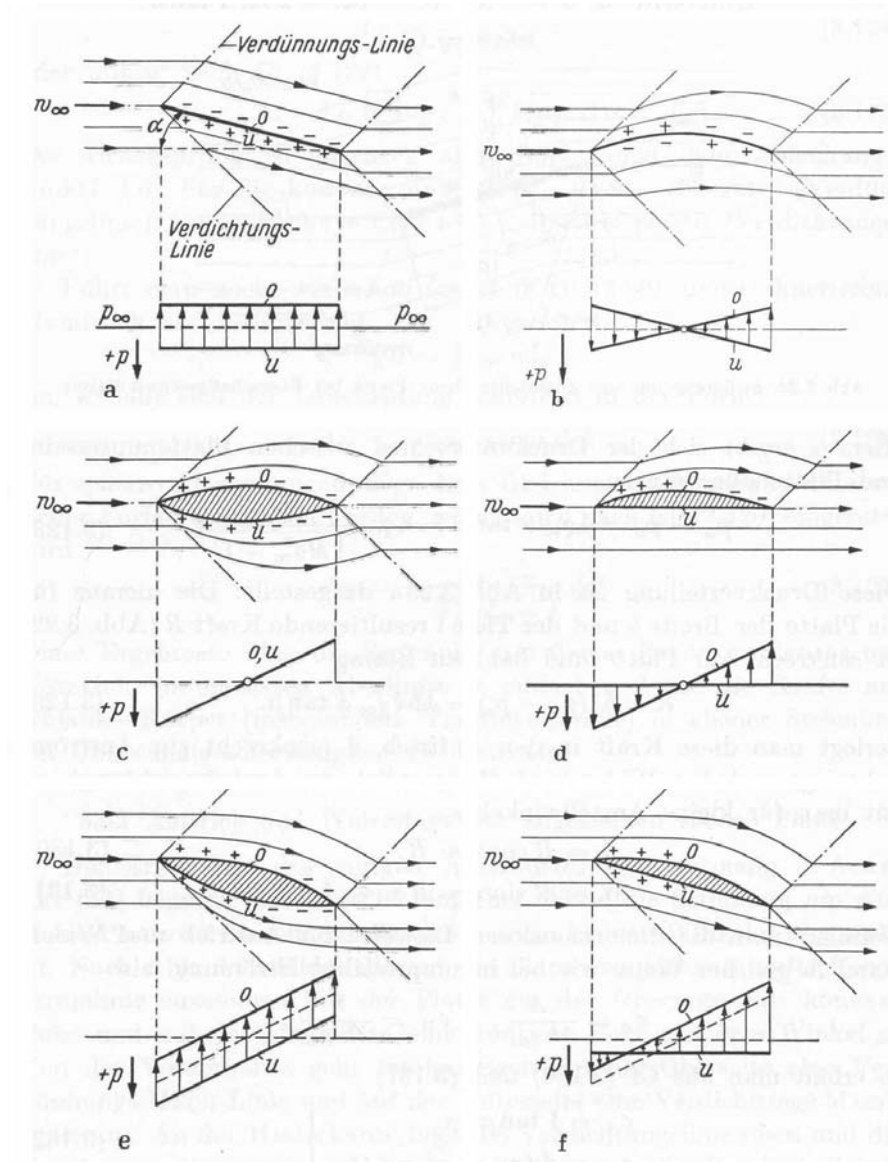


Abb. 9-37: Druckverteilung an Profilen bei Überschallgeschwindigkeit, [ 35]



### 9.3.4 Widerstand schlanker Profile im Überschall

Der Widerstand einer angestellten ebenen Platte oder eines schlanken Profils im Überschall setzt sich analog zu den Verhältnissen im Unterschall aus dem Widerstand bei Nullauftrieb  $c_{W,0}$  und einem auftriebsabhängigen Anteil  $\Delta c_W$  zusammen.

$$c_W = c_{W,0} + \Delta c_W \quad \text{Gl. 9-42}$$

Aufgrund des mit dem Auftrieb quadratisch zunehmenden Widerstands

$$\Delta c_W \propto c_A^2 \quad \text{Gl. 9-43}$$

gilt

$$c_W = c_{W,0} + K \cdot c_A^2 \quad \text{Gl. 9-44}$$

Der Widerstand bei Nullauftrieb  $c_{W,0}$  setzt sich zusammen aus einem reibungsbedingten Anteil  $c_{W,r0}$  und dem *Wellenwiderstand*  $c_{W,w0}$ , d.h.

$$c_{W,0} = c_{W,r0} + c_{w,w0} \quad \text{Gl. 9-45}$$

#### Wellenwiderstand

Bemerkenswert ist, daß eine ebene Platte im Überschall auch bei reibungsfreier Betrachtung einen Widerstand aufweist, den sog. Wellenwiderstand, obwohl die ebene Platte bei reibungsfreier Unterschallströmung keinen Widerstand aufweist. Infolge der Mach'schen Linien, die an der Vorder- und Hinterkante gebildet werden erfolgt eine Entropieerhöhung, was sich wieder in einem Widerstand niederschlägt. Der Verlauf des Wellenwiderstands eines Flügels bei  $c_a = 0$  als Funktion der Machzahl ist qualitativ in Abb. 9-38 skizziert.

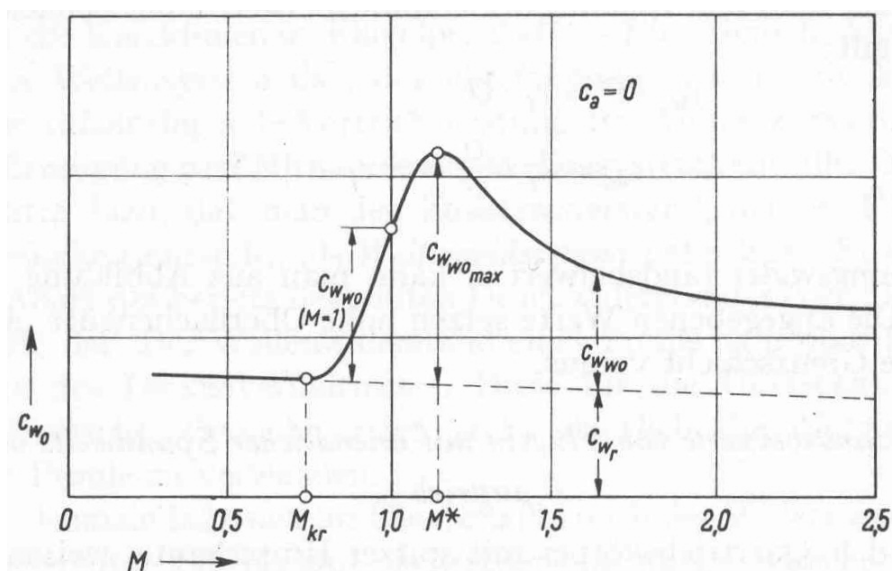


Abb. 9-38: Wellenwiderstand und Reibungswiderstand als Funktion der Machzahl, [ 13]

Der gesamte Wellenwiderstand  $c_{W,w}$  setzt sich wieder aus einem auftriebsunabhängigen und einen auftriebsabhängigen Anteil zusammen

$$c_{W,w} = c_{W,w0} + K \cdot c_A^2 \quad \text{Gl. 9-46}$$

Der Faktor  $K$  ergibt sich nach der linearen Theorie zu

$$K = \frac{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}{4} \quad \text{Gl. 9-47}$$

und der auftriebsunabhängige Anteil des Wellenwiderstands  $c_{W,w0}$ , berechnet sich aus der relativen Profildicke  $\delta = d/l$  und dem Formparameter  $k$  zu

$$c_{W,w0} = k \cdot \frac{\delta^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \quad \text{Gl. 9-48}$$

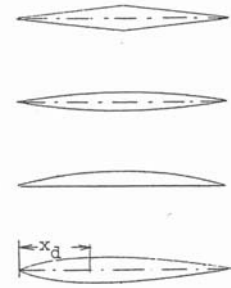
In Abhängigkeit von dem verwendeten Profil sind folgende Formparameter  $k$  zu verwenden

- Rhombus  $k = 4 \quad = 12/3$

- Kreisbogen  $k = 5.33 \quad = 16/3$

- Plankonvex  $k = 10.67 \quad = 32/3$

- Doppelparabel  $k = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x_d \cdot \left(1 - \frac{x_d}{l}\right)}$



Damit ergibt sich für den Wellenwiderstand  $c_{W,w}$

$$c_{W,w} = \underbrace{k \cdot \frac{\delta^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}}_{\text{Profildicke}} + \underbrace{\frac{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}{4} \cdot c_A^2}_{\text{Auftriebsabhängigkeit des Wellenwiderstands für die ebene Platte}} \quad \text{Gl. 9-49}$$

Für kleine Anstellwinkel gilt für den Auftriebsbeiwert

$$c_A = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \quad \text{Gl. 9-50}$$

und somit für den Beiwert des Wellenwiderstands

$$c_{W,w} = k \cdot \frac{\delta^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} + \frac{4 \cdot \alpha^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} = \frac{k \cdot \delta^2 + 4 \cdot \alpha^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \quad \text{Gl. 9-51}$$

Zur Bestimmung des Gesamtwiderstands  $c_W$  ist neben dem Wellenwiderstand  $c_{W,w}$  noch der Reibungswiderstand  $c_{W,r}$  erforderlich, d.h.

$$c_W = c_{W,r} + c_{W,w} \quad \text{Gl. 9-52}$$

Näherungsweise lässt sich der Reibungswiderstand aus dem Reibungsbeiwert  $c_f$  der ebenen Platte bestimmen

$$c_{W,r} = 2 \cdot c_f \quad \text{Gl. 9-53}$$

Wie aus Abb. 9-39 ersichtlich ist, verhält sich der Reibungsbeiwert der ebenen Platte reynoldszahlabhängig.

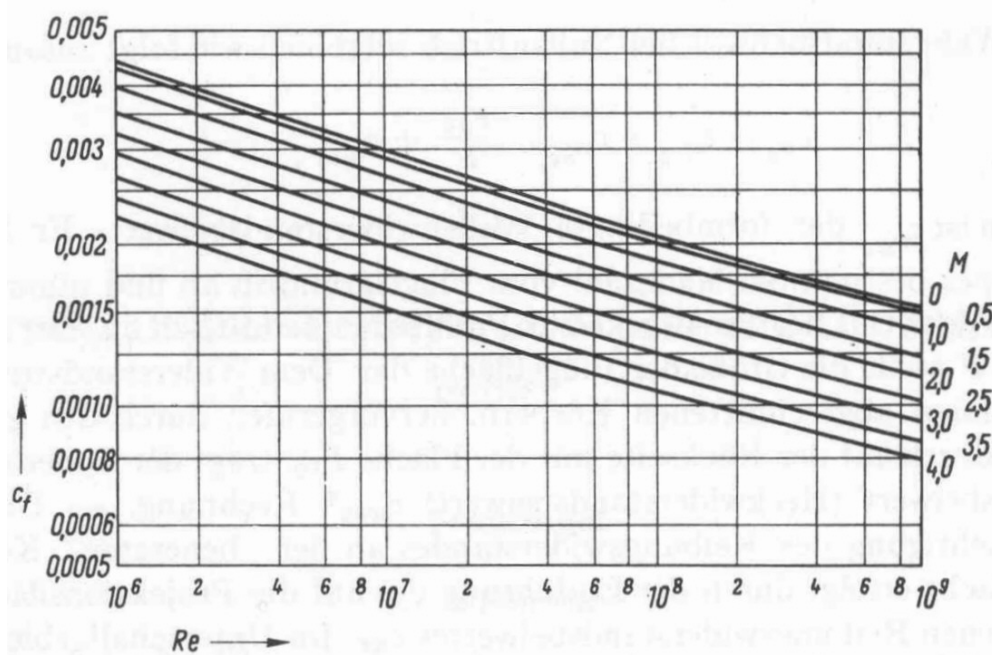


Abb. 9-39: Reibungsbeiwert  $c_f$  der ebenen Platte als Funktion der Reynoldszahl, [ 13]

### 9.3.5 Überschall/Unterschallvorderkante

In Abhängigkeit davon, ob die Flügelvorderkante vor oder hinter der Mach'schen Linie liegt, spricht man von einer Überschall- oder einer Unterschallvorderkante. Dies hängt lediglich von dem Verhältnis der Pfeilung  $\varphi$  (bzw. dem Komplementärwinkel  $\gamma$ ) und dem Winkel der Mach'schen Linie  $\mu$  ab.

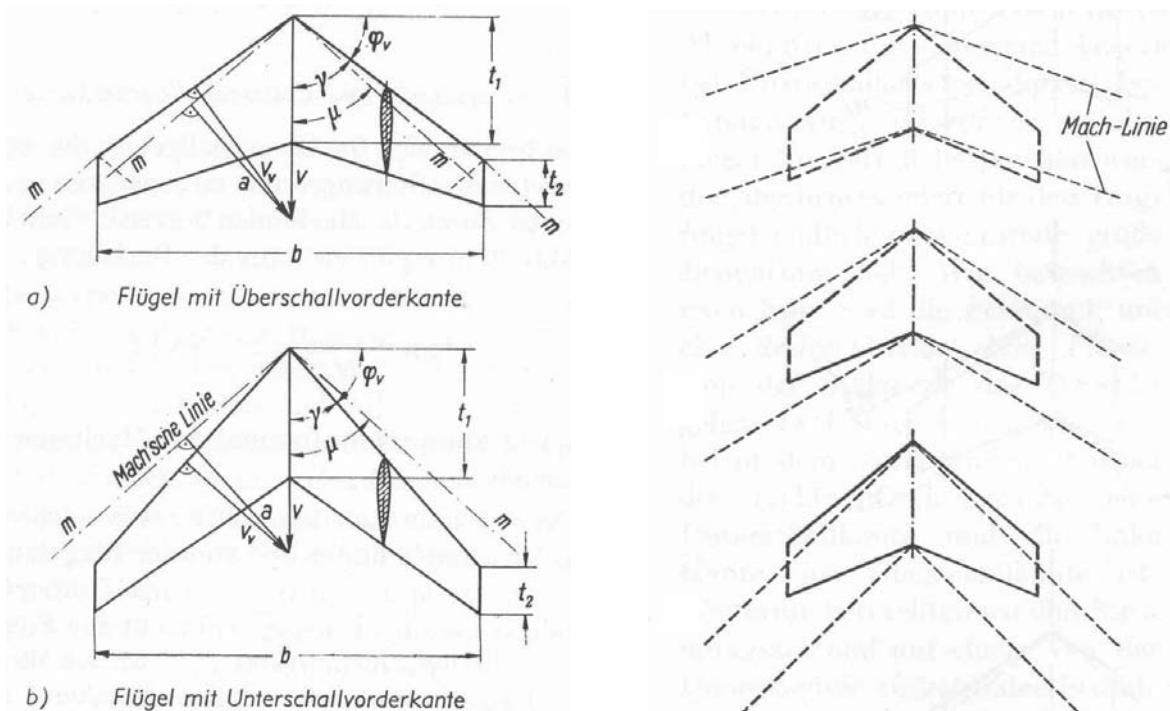
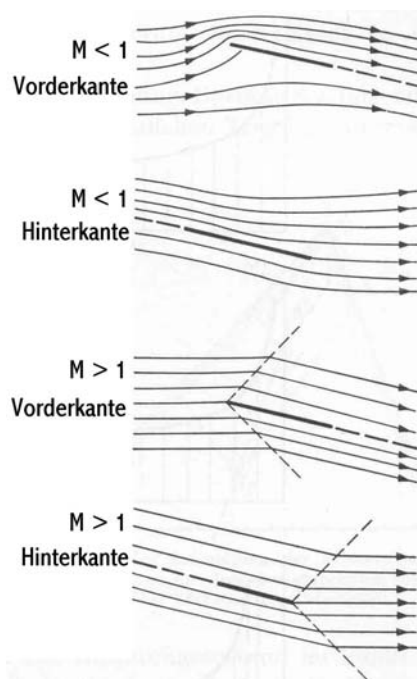


Abb. 9-40: Gepfeilter Tragflügel mit Überschall- und Unterschallkanten, [ 13]

$$n = \frac{\tan \gamma}{\tan \mu}$$

Gl. 9-54

Unterschallvorderkante:  $n < 1$   
 Überschallvorderkante:  $n > 1$



Die Definition Unter- bzw. Überschallvorderkante gilt sinngemäß auch für die Flügelhinter- und Seitenkanten. Grundlegende Unterschiede ergeben sich bei der Umströmung der Kanten in Abhängigkeit von dem Verhältnis  $n$ . Die mit  $M < 1$  angeströmte Vorderkante wird von unten nach oben umströmt und eine nach vorne gerichtete (widerstandsverringende) Saugkraft erzeugt. Bei der Unterschallhinterkante fließt die Strömung entsprechend der Kutta'schen Abflußbedingung glatt ab, d.h. es stellt sich ein Druckausgleich zwischen Ober- und Unterseite ein.

Bei  $M > 1$  wird die Vorderkante nicht umströmt und es erfolgt an der Hinterkante auch kein glattes Abströmen, statt dessen entstehen an den Kanten Mach'sche Linien.

Abb. 9-41 Kantenströmung, [ 36]

Die Druckverteilung, die sich bei unterschiedlichen Kombinationen von Über- bzw. Unterschallkanten an einem Flügelschnitt ergeben sind Abb. 9-42 skizziert.

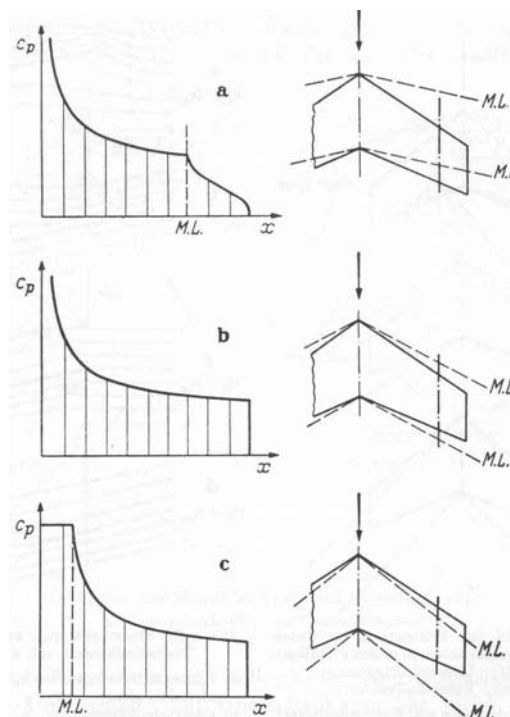


Abb. 9-42: Druckverteilungen als Funktion von Über- bzw. Unterschallkanten, [ 36]

### 9.3.6 Auftrieb und Widerstand des Flügels endlicher Spannweite im Überschall

Die Auftriebsbeiwerte des Tragflügels endlicher Spannweite in einer Überschallströmung können, sofern die für die lineare Theorie getroffenen Annahmen zutreffen, d.h. kleine Anstellwinkel und bei Verwendung dünner Profile, nach folgenden Näherungsverfahren berechnet werden. Infolge der endlichen Spannweite bildet sich bei einem Rechteckflügel auch an der Flügelaußenkante ein Mach'scher Kegel. Im Gegensatz zur ebenen Strömung, die sich bei Überschallgeschwindigkeit auf dem Flügel ausbildet, entsteht im Flügelaußenbereich eine dreidimensionale Strömung, wodurch der Gesamtauftrieb verringert wird. Allgemein läßt sich die Verringerung des Auftriebs im Vergleich zum unendlichen Flügel durch einen Abminderungsfaktor  $\zeta$  beschreiben.

$$c_a = c_{a,\infty} \cdot \zeta \quad \text{Gl. 9-55}$$

Für sehr schlanke Profile läßt sich der Auftriebsbeiwert  $c_{a,\infty}$  durch den Auftriebsbeiwert der ebenen Platte ersetzen

$$c_a = \frac{4 \cdot \alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \cdot \zeta \quad \text{Gl. 9-56}$$

Im Gegensatz zur Unterschallströmung wirkt sich im Überschall der Einfluß der Umströmung, die sich an den Außenkanten, bzw. an der Rumpf- oder Flügelspitze bilden, lediglich innerhalb der Mach'schen Kegel aus. Die Auftriebsverringerng bleibt somit auf ein relativ kleines Gebiet begrenzt.

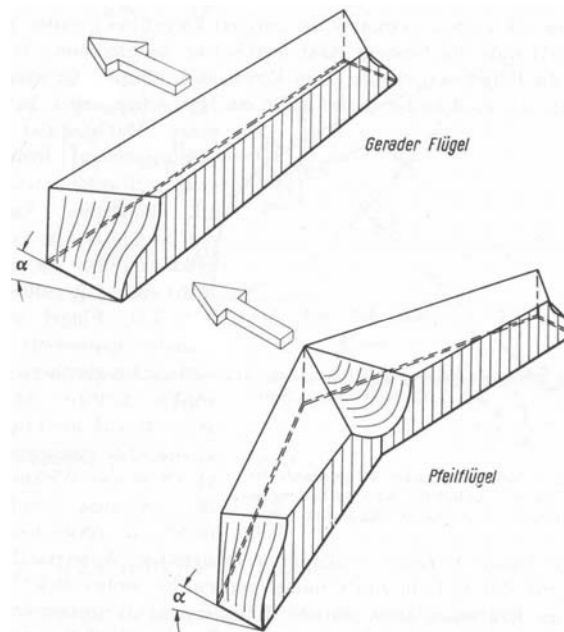
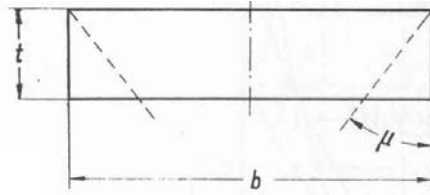
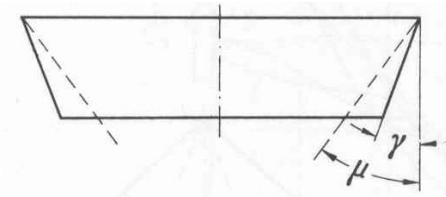


Abb. 9-43: Auftriebsreduzierung bei Rechteck- und Pfeilflügel im Überschall, [ 13]

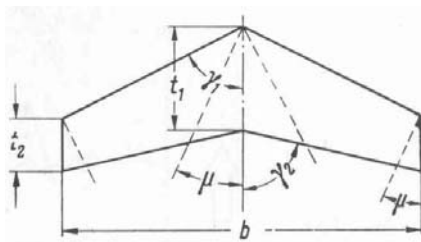
Der Abminderungsfaktor  $\zeta$  ist eine Funktion des Flügelgrundrisses und berechnet sich näherungsweise wie folgt:

**Rechteckflügel**

$$\zeta = 1 - \frac{t}{2 \cdot b \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad \text{Gl. 9-57}$$

**Gerader Flügel mit schräger Außenkante**

$$\zeta = \frac{b - 0.5 \cdot t \cdot \tan \gamma - \frac{t}{2 \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}}}{b - t \cdot \tan \gamma} \quad \text{Gl. 9-58}$$

**Pfeilflügel**

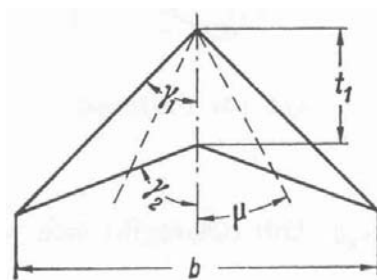
mit

$$n = \tan \gamma_1 \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$$m = \tan \gamma_2 \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$$\zeta = \frac{t^2}{(n+m) \cdot (t_1^2 + t_2^2)} \cdot \left[ \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot \left( 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{1}{n} \right) + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{1}{m} \right) \right]$$

$$- \frac{t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} \cdot \sqrt{\frac{m^2 \cdot n}{(m+1) \cdot (n+1)}} \quad \text{Gl. 9-59}$$

**Schmetterlingsflügel**

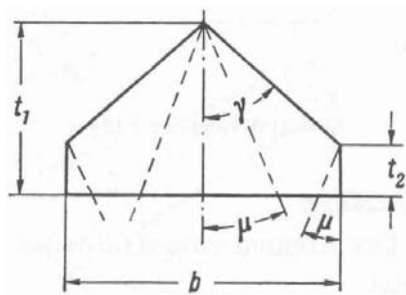
mit

$$n = \tan \gamma_1 \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$$m = \frac{b \cdot \tan \gamma_2 \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}}{b + 2 \cdot t_1 \cdot \tan \gamma_2}$$

$$\zeta = \frac{1}{n+m} \cdot \left[ \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot \left( 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{1}{n} \right) + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{1}{m} \right) \right] \quad \text{Gl. 9-60}$$

## Deltaflügel



mit

$$n = \tan \gamma \cdot \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

$$\zeta = \frac{t_1^2}{t_1^2 - t_2^2} \cdot \left( 1 - \frac{t_2^2}{t_1^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right) \quad \text{Gl. 9-61}$$

Für Tragflügel unterschiedlichen Grundrisses jedoch mit gleicher Streckung ( $\Lambda = 2.31$ ) ist der Verlauf von Auftriebsgradient- und Widerstandsbeiwert als Funktion der Machzahl in Abb. 9-44 skizziert.

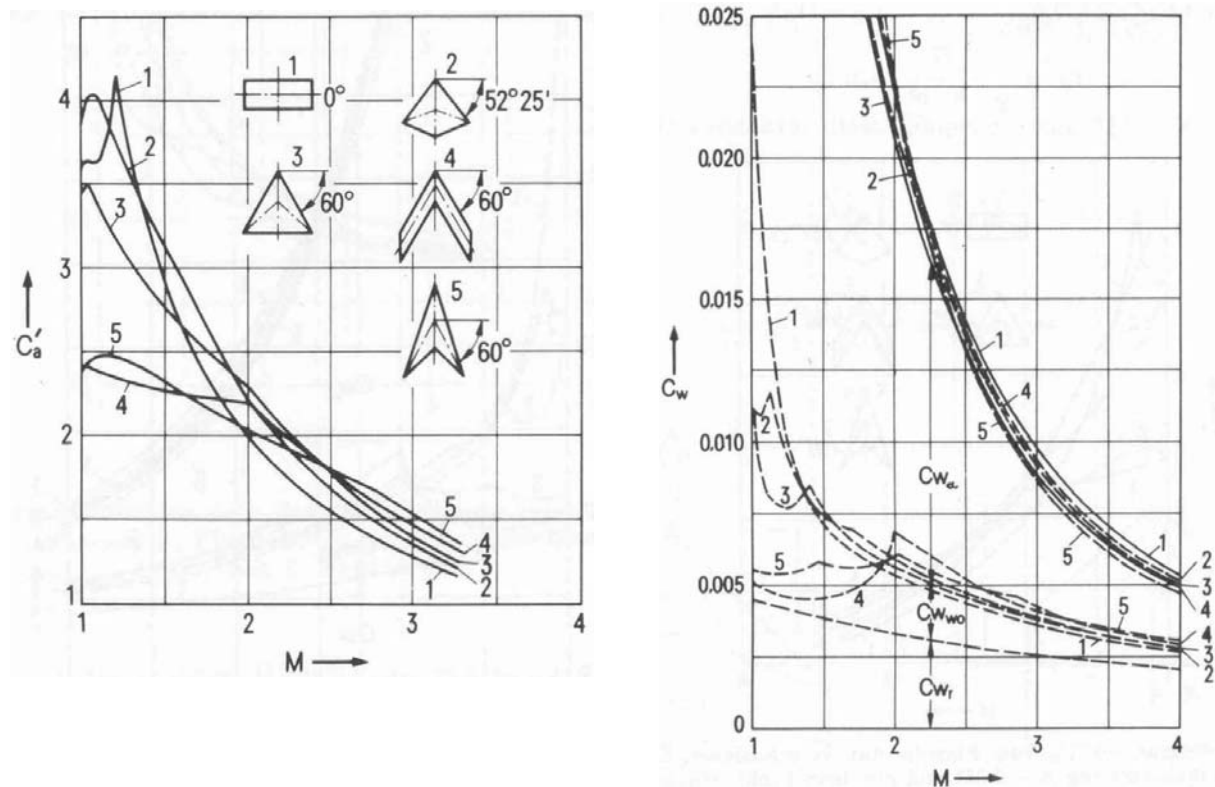


Abb. 9-44: Auftriebsgradient und Widerstand in Abhängigkeit von Form und Machzahl, [ 13]

Der mit zunehmender Machzahl abnehmende Gesamtwiderstand ist im wesentlichen auf den sich abschwächenden Wellenwiderstand, aber auch auf den abnehmenden Reibungswiderstand zurückzuführen. Interessant ist auch, daß der im Transsonik-Bereich dominierende Pfeilungseffekt zur Widerstandsreduzierung bei größeren Machzahlen verschwindet und der gerade Flügel wieder widerstandsoptimal wird.

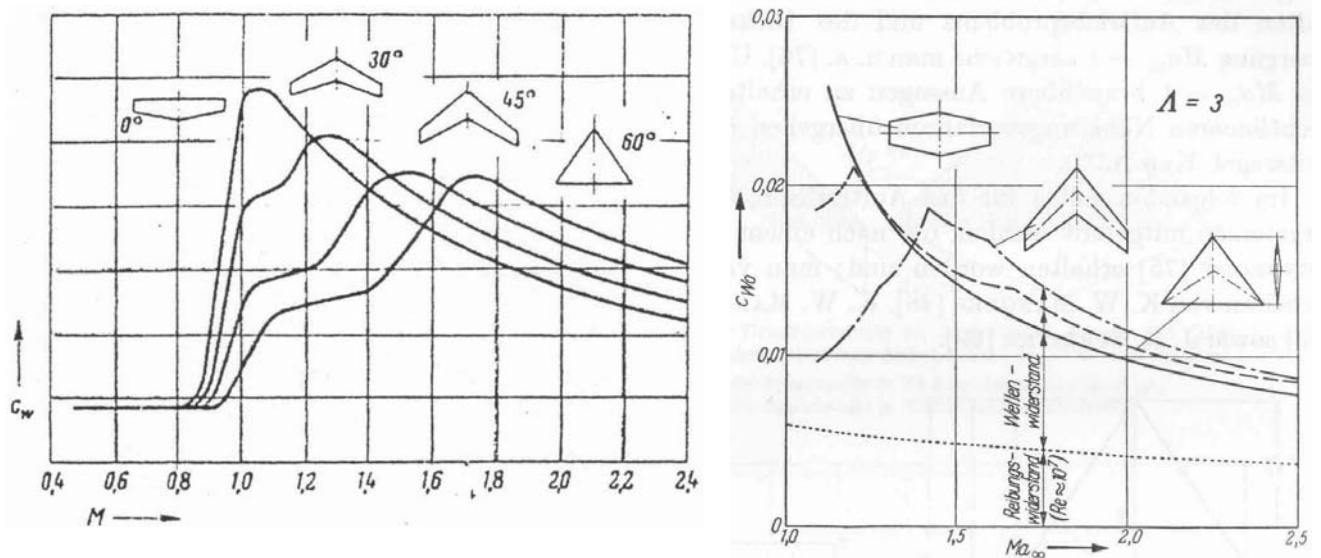


Abb. 9-45: Widerstand als Funktion der Machzahl und Flügelgrundriß, [ 22], [ 36]

### 9.3.7 Neutralpunktwanderung in Abhängigkeit des Flügelgrundrisses

Die Lage des Neutralpunktes ist zwar unabhängig vom Anstellwinkel, verschiebt sich jedoch, je nach Flügelgrundriß in Abhängigkeit von der Machzahl nach vorne (destabilisierend) oder nach hinten (stabilisierend). Die prinzipielle Abhängigkeit für einen Trapez-, Pfeil- und Deltaflügel ist in Abb. 9-46 dargestellt. Auffallend ist die generelle Stabilisierung beim Übergang vom Unterschall- zum Überschallflug. Insbesondere Deltaflügel neigen beim Überschallflug zur *Überstabilisierung*, d.h. einer deutlichen Verschlechterung der Steuerbarkeit der Längsbewegung.

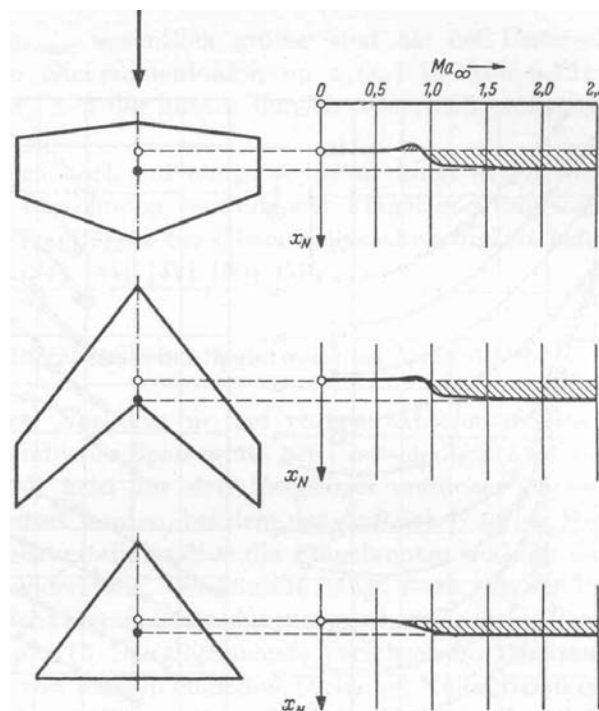


Abb. 9-46: Neutralpunktwanderung in Abhängigkeit von der Machzahl, [ 36]



### 9.3.8 Überschallknall

Die von dem Flugzeug, welches sich mit Überschallgeschwindigkeit bewegt, ausgehenden Stoßwellen werden von einem Beobachter am Boden als Überschallknall wahrgenommen. Die von dem Bug- und Heckverdichtungsstoß erzeugten Drucksprünge ergeben genau genommen zwei Drucksprünge, die von dem menschlichen Ohr aufgrund der kurzen zeitlichen Abfolge meist nur als einziges akustisches Ereignis wahrgenommen werden. Infolge des Temperaturgradienten in der Atmosphäre (vgl. Kapitel 1.3) nimmt die Schallgeschwindigkeit mit abnehmender Höhe zu und die Stoßfronten werden nach vorne aufgebogen. Einflußfaktoren für die Stärke des Überschallknalls sind die Flugzeuggeometrie, d.h. maximaler Querschnitt und axiale Querschnittsverteilung, Masse und Flughöhe. Insbesondere für den zivilen Überschall-Passagierverkehr stellt die Lärmbelastung ein entscheidendes Kriterium für die allgemeine Akzeptanz dar. Drucksprünge am Boden in der Größenordnung von 0.5 HPa (= 130 dB) sind infolge eines in 11 km Höhe fliegenden Flugzeugs ohne weiteres möglich, jedoch kaum akzeptabel.

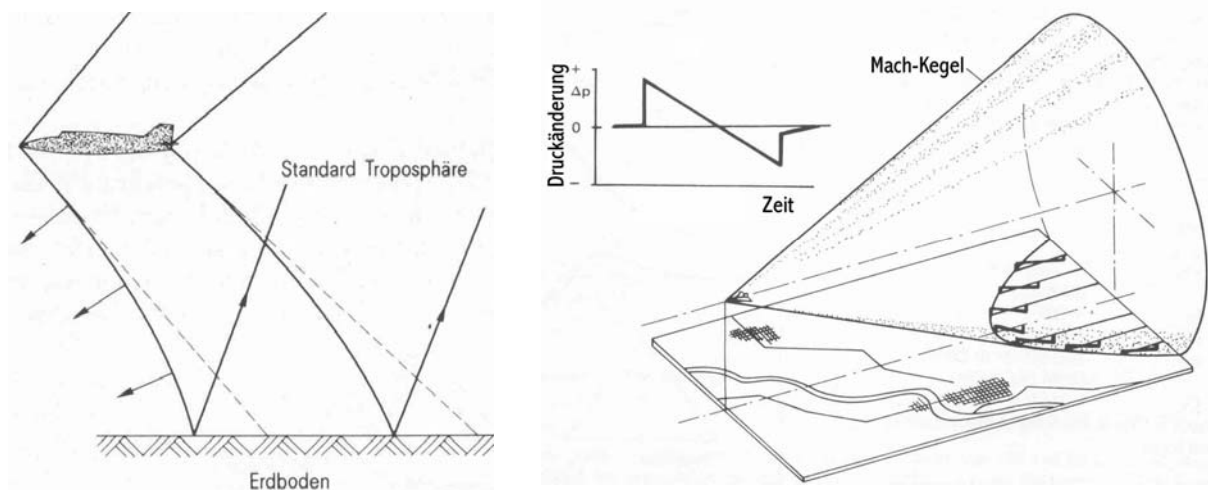


Abb. 9-47: Überschallknall, Druckverteilung, [ 13], [ 21]

## **9.4 Hyperschall**

## **9.5 Übungen zum Kapitel Kompressible Aerodynamik**

## **10 Stabilität und Steuerbarkeit**

### **10.1 Längsbewegung**

Statische Längsstabilität

Dynamische Längsstabilität

### **10.2 Seitenbewegung**

Einfluß von

Pfeilung

Flügelhochlage

V-Stellung

## 11 Literatur

- [ 1] Althaus D., Wortmann F.X. '*Stuttgarter Profilkatalog I*', Vieweg Verlag, Braunschweig, 1981
- [ 2] Anderson J. D.: '*Fundamentals of Aerodynamics*', McGraw-Hill Book Company, 1985
- [ 3] Anderson J. D.: '*Introduction to Flight*', McGraw-Hill Book Company, 1985
- [ 4] Anderson J. D.: '*Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*', McGraw-Hill Book Company, 1989
- [ 5] Anderson J. D.: '*Modern Compressible Flow*', McGraw-Hill Book Company, 1990
- [ 6] Anderson J. D.: '*Computational Fluid Dynamics*', McGraw-Hill Book Company, 1995
- [ 7] Bachmann P. (Hrsg.): '*Wetterhandbuch für Piloten*', Motorbuchverlag, 1978
- [ 8] Bölkow L. (Hrsg.): '*Ein Jahrhundert Flugzeuge*', VDI-Verlag 1990
- [ 9] Brockhaus R.: '*Flugregelung*', Springer Verlag 1994
- [ 10] Brüning G., Hafer X., Sachs G.: '*Flugleistungen*', Springer Verlag, 3. Auflage, 1993
- [ 11] Drela, M.: '*XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils*', Conference on Low Reynolds Number Airfoils Aerodynamics, University of Notre Dame, June 1989
- [ 12] Dubs F.: '*Aerodynamik der reinen Unterschallströmung*', Birkhäuser Verlag Basel, Stuttgart 1966
- [ 13] Dubs F.: '*Hochgeschwindigkeits-Aerodynamik*', Birkhäuser Verlag Basel, Stuttgart 1966
- [ 14] Eichenberger W.: '*Flugwetterkunde*', Motorbuchverlag, 8. Auflage 1995
- [ 15] Frenzl O.: '*Widerstandsarme Gestaltung von Hochgeschwindigkeitsflugzeugen*', Patentschrift Nr. 932410, Deutsches Patentamt 21. März 1944
- [ 16] Fornasier L.: '*HISST - A Higher Order Subsonic/Supersonic Singularity Method for Calculating Linearized Potential flow*', AIAA-84-1646, 1984
- [ 17] Hakenesch P.: '*Thin Layer Thermography - A New Heat Transfer Measurement Technique*', Experiments in Fluids 26 (1999), pp. 257-265, Springer Verlag Berlin 1999
- [ 18] Hörner S.F.: '*Fluid-Dynamic Lift*', Hoerner Fluid dynamics, Brick Town NJ, 08723, 1975
- [ 19] Hörner S.F.: '*Fluid-Dynamic Drag*', Hoerner Fluid dynamics, Bakersfield CA 93390, 1965
- [ 20] Hünecke K.: '*Die Technik des modernen Verkehrsflugzeugs*', Motorbuchverlag, 1. Auflage 1998
- [ 21] Hünecke K.: '*Modern Combat Aircraft Design*', Naval Institute Press, Annapolis, Maryland 1987
- [ 22] Kloster M.: '*Skript zur Vorlesung Aerodynamik*', FH-München
- [ 23] Lilienthal O.: '*Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*', 1889, Harenberg Edition, Nachdruck
- [ 24] Liljequist G. H.: '*Allgemeine Meteorologie*', Vieweg Verlag Braunschweig, 1974

- 
- [ 25] McCormick B.W.: *'Aerodynmaics, Aeronautics and Flight Mechanics'*, John Wiley & sons, inc., New York, 1979
  - [ 26] Meier H.U (Hrsg.): *'Die Pfeilflügelentwicklung in Deutschland bis 1945'*, Bernard & Graefe Verlag, Bonn 2006
  - [ 27] Moullec C.: *'Mit den wilden Gänsen fliegen'*, Frankh-Kosmos Verlag, Stuttgart, 2001
  - [ 28] Oertel H: *'Stoßrohre'*, Springer-Verlag, 1966
  - [ 29] Pope Alan: *'Wind-Tunnel Testing'*, John Wiley & sons, inc., New York, 1964
  - [ 30] Pope, A., Goin K. L.: *'High-Speed Wind Tunnel Testing'*, John Wiley & sons, inc., New York, 1965
  - [ 31] Shapiro, A. H.: *'The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow'*, The Ronald Press Company, New York, 1953 (Vol I), 1954 (Vol II)
  - [ 32] Steinheuer: *'Boundary Layer Calculation to Aerodynamic Problems'*, AGARD LS 67, 1974
  - [ 33] Streit, K.W.: *'Geschichte der Luftfahrt'*, Sigloch Edition
  - [ 34] Truckenbrodt, E.: *'Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik'*, Springer-Verlag, 1983
  - [ 35] Truckenbrodt, E.: *'Aerodynamik des Flugzeugs'*, 1. Band, 2. Auflage, Springer-Verlag 1967
  - [ 36] Truckenbrodt, E.: *'Aerodynamik des Flugzeugs'*, 2. Band, 2. Auflage, Springer-Verlag 1969
  - [ 37] Van Dyke, M: *'An Album of Fluid Motion'*, The Parabolioic Press, Stanford CA, 1982