

Skript zur Vorlesung
Optimierung linearer Modelle
Gültig ab Sommersemester 2003

Prof. Dr. S. Dempe

25. März 2003

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Einleitung | 5 |
| 0.1 | Historische Entwicklung | 5 |
| 0.2 | Begriff des Operations Research | 6 |
| 0.3 | Einsatz der Methoden des OR | 8 |
| 1 | Lineare Optimierung | 9 |
| 1.1 | Einführung, Modell | 9 |
| 1.2 | Graphische Lösung | 11 |
| 1.3 | Normalform | 14 |
| 1.4 | Simplexalgorithmus für LOA | 16 |
| 1.4.1 | Grundlagen | 16 |
| 1.4.2 | Idee des Simplexalgorithmus | 17 |
| 1.4.3 | Der Simplexalgorithmus | 19 |
| 1.5 | Berechnung einer ersten Basislösung | 21 |
| 2 | Duale lineare Optimierung | 23 |
| 2.1 | Duale Aufgabe | 23 |
| 2.2 | Dualitätssätze | 24 |
| 2.3 | Interpretation der dualen Aufgabe | 25 |
| 3 | Sensitivitätsanalyse | 27 |
| 3.1 | Allgemeine Veränderung der Zielfunktion | 27 |
| 3.2 | Ein Parameter in der Zielfunktion | 29 |
| 3.3 | Veränderung der rechten Seite | 33 |
| 3.4 | Ein Parameter in der rechten Seite | 33 |
| 3.5 | Aufnahme einer neuen Variablen | 35 |
| 4 | Optimierung mit mehreren Zielen | 39 |
| 4.1 | Modell, Aufgabenstellung | 39 |
| 4.2 | Lösungszugang | 41 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Transportoptimierung | 43 |
| 5.1 | Einführung, Modell | 43 |
| 5.2 | Eigenschaften | 45 |
| 5.3 | Konstruktion einer Startbasislösung | 46 |
| 5.4 | Das duale Transportproblem | 48 |
| 5.5 | Verbesserungsschritt | 49 |
| 5.6 | Zweistufige Transportprobleme | 50 |
| 5.6.1 | Charakterisierung des Problems | 50 |
| 5.6.2 | Transformation auf das klassische Transportproblem . . | 52 |
| 6 | Diskrete Optimierung | 53 |
| 6.1 | Modellierung diskreter Optimierungsaufgaben | 53 |
| 6.2 | Exakte Lösungsalgorithmen | 58 |
| 6.2.1 | Schnittebenenalgorithmen | 58 |
| 6.2.2 | Branch-and-bound-Algorithmus | 59 |
| 6.3 | Näherungsalgorithmen | 63 |
| 6.3.1 | Eröffnungsverfahren | 63 |
| 6.3.2 | Verbesserungsverfahren | 64 |

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Historische Entwicklung

| | |
|--|---|
| Quesnay (1759), Walras (1874) | Anwendung quantitativer Verfahren zur Lösung wirtschaftswissenschaftlicher Probleme |
| Cournot (1838) | gewinnmaximaler Preis für ein Monopol |
| Erlang (1906) | erstes Warteschlangenmodell |
| Stefanic-Allmeyer, Andler (1915-29), Harris (1915) | Optimierung von Bestellmengen |
| Leontieff (20er Jahre 20. Jh.) | Input-Output-Analyse |
| J.v. Neumann (30er J. 20. Jh.) | Grundlagen der Spieltheorie |
| Markov (Anfang 20. Jh.) | Grundlagen der dynamischen Optimierung |
| Kantorovich (1939) | Grundlagen der linearen Optimierung |

Erste Aufgabenstellungen des OR

1. Militärische Aufgaben im 2. Weltkrieg: Verbesserung der Wirksamkeit militärischer Operationen (Radar, U-Boot-Bekämpfung, Sicherung von Transportschiffen durch Geleitzüge)

2. Nichtmilitärische Aufgaben nach dem 2. Weltkrieg:

Untersuchung der regionalen Verteilung von Feuerüberwachungsstationen in der British Patrol.

Diätenprobleme: Wie ist eine Mahlzeit zusammenzusetzen, damit sie den Heilungsprozess bestmöglich unterstützt?

Verschneiden von Benzin unterschiedlicher Qualität in Ölraffinerien.

0.2 Begriff des Operations Research

DINKELBACH (1978):

Unternehmensforschung ist die Lehre von den Verfahren zur numerischen Lösung von Entscheidungsmodellen.

MÜLLER-MERBACH (1973):

Unter dem Begriff Optimalplanung (Operations Research) wird die Anwendung von mathematischen Methoden zur Vorbereitung optimaler Entscheidungen verstanden.

OPERATIONS RESEARCH SOCIETY OF AMERICA (1976):

Operations Research befaßt sich mit wissenschaftlich fundierten Entscheidungen über die beste Gestaltung und Steuerung von Mensch-Maschine-Beziehungen, und zwar zumeist unter der Bedingung, daß die zu verwendenden Mittel knapp sind.

JOURNAL OF THE OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY (UK):

Operational Research ist die Anwendung wissenschaftlicher Methoden auf komplexe Probleme, die in der Industrie, in der Wirtschaft, in der Verwaltung und in der Verteidigung im Zusammenhang mit der Steuerung und Führung großer Systeme auftreten, in denen Menschen, Maschinen, Material und Geld zusammenwirken. Die charakteristische Vorgehensweise des Operational Research liegt in der Entwicklung eines wissenschaftlichen Modells von dem System, mit dem die Ergebnisse alternativer Entscheidungen, Strategien und Steuerungsmaßnahmen vorhergesagt und verglichen werden können. Diese Modelle umfassen auch Maßzahlen, wie etwa Chance und Risiko einschließlich deren Messungen. Die Modelle dienen dem Zweck, Führungsentscheidungen über Politik und Einzelmaßnahmen wissenschaftlich vorzubereiten.

GAL, HORST, ISERMANN, MÜLLER-MERBACH (1989):

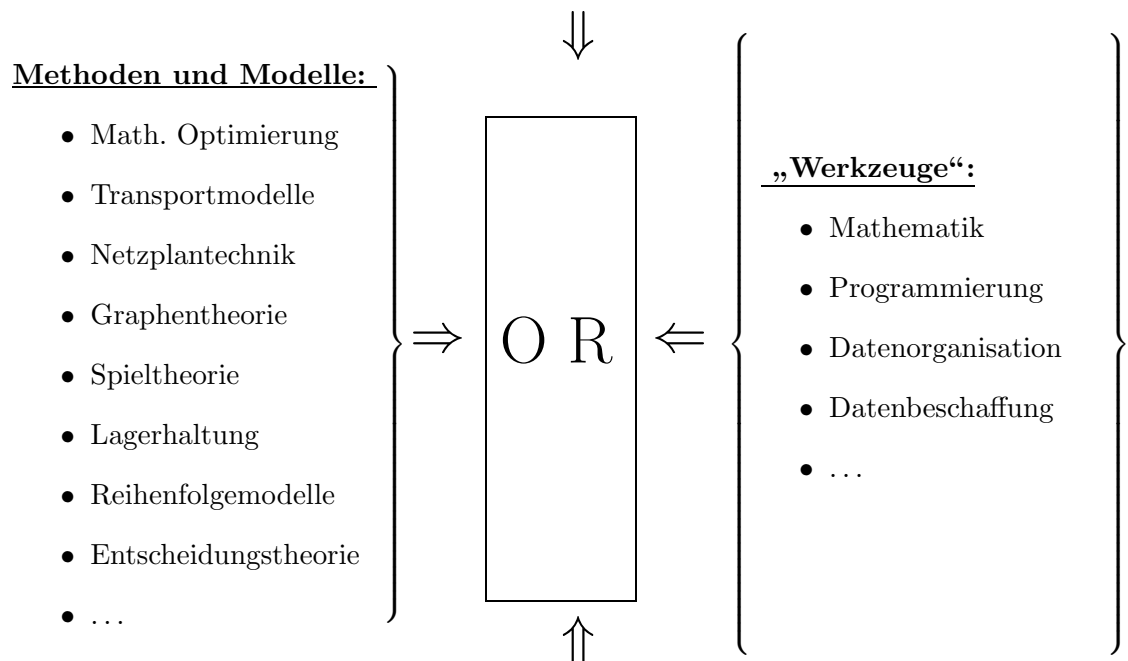
- Operations Research ist eine interdisziplinäre wissenschaftliche Disziplin.
- Operations Research ist eine Modellierungs- und Methodenlehre, die als Sammlung von Methoden (und Strukturierungsverfahren) zwischen der Mathematik, Systemtheorie, Informatik und Entscheidungstheorie steht. Sie kann jedoch zu jedem Sachgebiet zugeordnet werden, sofern sie Sachprobleme dieses Gebietes mit eigenen Methoden löst.
- Die Aufgabe des Operations Research ist es, an der Lösung von Realproblemen mitzuwirken, dabei eigene Methoden und Verfahren zur Strukturierung und zur Lösung der Modelle einzusetzen und bei der Implementierung mitzuwirken. Seine Aufgabe ist es auch, neue Methoden und Verfahren zur Lösung von entsprechenden verallgemeinerten Problemen und die dazugehörige Theorie zu entwickeln.

NEUMANN, MORLOCK:

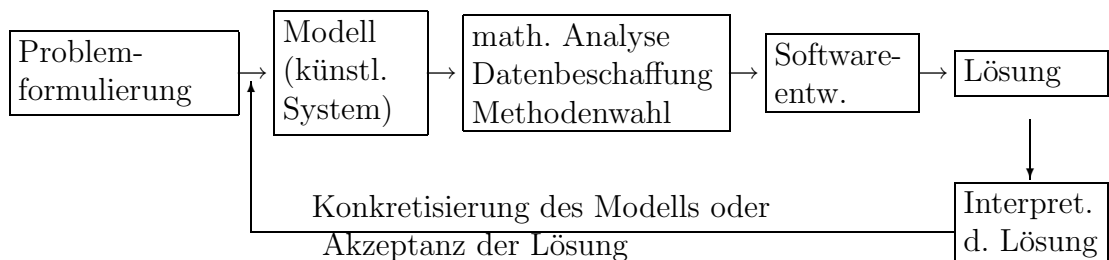
Operations Research bedeutet die Suche nach einer bestmöglichen (optimalen) Entscheidung unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen.

0.3 Einsatz der Methoden des OR

- Anwendungsgebiete :
- betrieblich-ökonomischer Bereich (Absatz, Produktion, Beschaffung,...)
 - technischer Bereich (Forschung und Entwicklung, Konstruktion, Projektierung,...)
 - Öffentliche Verwaltung, Städteplanung, Wasserwirtschaft, Gesundheitswesen,...)



Wesen des Operations Research



Kapitel 1

Lineare Optimierung

1.1 Einführung, Modell

Aufgabe der Optimierung: Gegeben seien eine Menge M von Alternativen und ein Zielkriterium. Unter Optimierung versteht man die Suche nach einem gemäß dem Zielkriterium besten Element in der Menge M .

Unter linearer Optimierung versteht man die Maximierung oder Minimierung einer linearen Funktion, bezeichnet als Zielfunktion, unter der Bedingung, daß die Variablen einem gegebenen System von linearen Ungleichungen oder Gleichungen, bezeichnet als Restriktionen oder Nebenbedingungen, genügen müssen.

Aufgabe der linearen Optimierung (LOA) in Summenschreibweise:
Maximierung/Minimierung der Funktion (bezeichnet als Zielfunktion)

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \longrightarrow \max / \min$$

unter den Restriktionen (oder Nebenbedingungen)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} b_i \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m$$

und unter den Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_j \geq 0 \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, r.$$

Hierbei ist $r \leq n$ die Anzahl der Variablen mit Nichtnegativitätsbedingung. Unter Verwendung der Matrizenrechnung schreibt man die lineare Optimierungsaufgabe kurz auch als

$$\begin{aligned}
c^\top x &= \langle c, x \rangle \rightarrow \min / \max \\
Ax &\begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b \\
x_j &\geq 0 \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, r.
\end{aligned}$$

Bezeichnungen:

| | |
|-----|--------------------------|
| A | Koeffizientenmatrix |
| b | Vektor der rechten Seite |
| c | Zielfunktionsvektor |

Zur Modellierung:

1. Wichtigstes ist die korrekte Fixierung der Variablen x_j ! Als solche kommen nur Größen in Betracht, auf die man direkten Einfluß hat, also z.B. Produktionsmengen in Produktionsplanungsproblemen, zu mischende Mengen in Mischungsproblemen, zu zerschneidende Stangen oder Platten in Zuschnittproblemen usw. Eine formale Beschreibung dieser Variablen (mit Angabe der Maßeinheit) ist anzugeben.
2. Zulässiger Bereich: Er beschreibt die Menge der Alternativen mit Hilfe von Ungleichungen und Gleichungen. In der linearen Optimierung sind das lineare Ungleichungen und Gleichungen. Zu beachten ist dabei das Relationszeichen:
 - (a) „=“: vollständige Ausnutzung gegebener Ressourcen
 - (b) „≤“: Gegebene Ressourcen sind nicht zu überschreiten
 - (c) „≥“: Sicherung gewisser Mindestgrößen, wie z.B. Mindestumsatz, untere Schranke für die Warenproduktion zur Sicherung einer effizienten Produktion usw.

Die Variablen unterliegen oftmals noch den Nichtnegativitätsbedingungen: Diese dürfen nicht vergessen werden und ergeben sich zumeist aus Vorzeichenbeschränkungen für ökonomische Größen.

3. Die Zielfunktion beschreibt das verfolgte Zielkriterium, wie z.B. maximaler Gewinn, minimale Kosten usw. In der linearen Optimierung ist die Zielfunktion eine lineare Funktion.
4. Manchmal (z.B. beim Mischungsproblem) sind noch weitere implizit gegebene Nebenbedingungen zu beachten: insgesamt zu mischende Menge.

1.2 Graphische Lösung

Die graphische Lösung von Problemen der linearen Optimierung ist anwendbar, wenn die Zahl der Variablen $n \leq 2$ ist (in speziellen Fällen auch bei $n > 2$).

Beispiel:

$$5x_1 + 8x_2 \longrightarrow \max$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 24 \quad (1.1)$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 24 \quad (1.2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1.3)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (1.4)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (1.5)$$

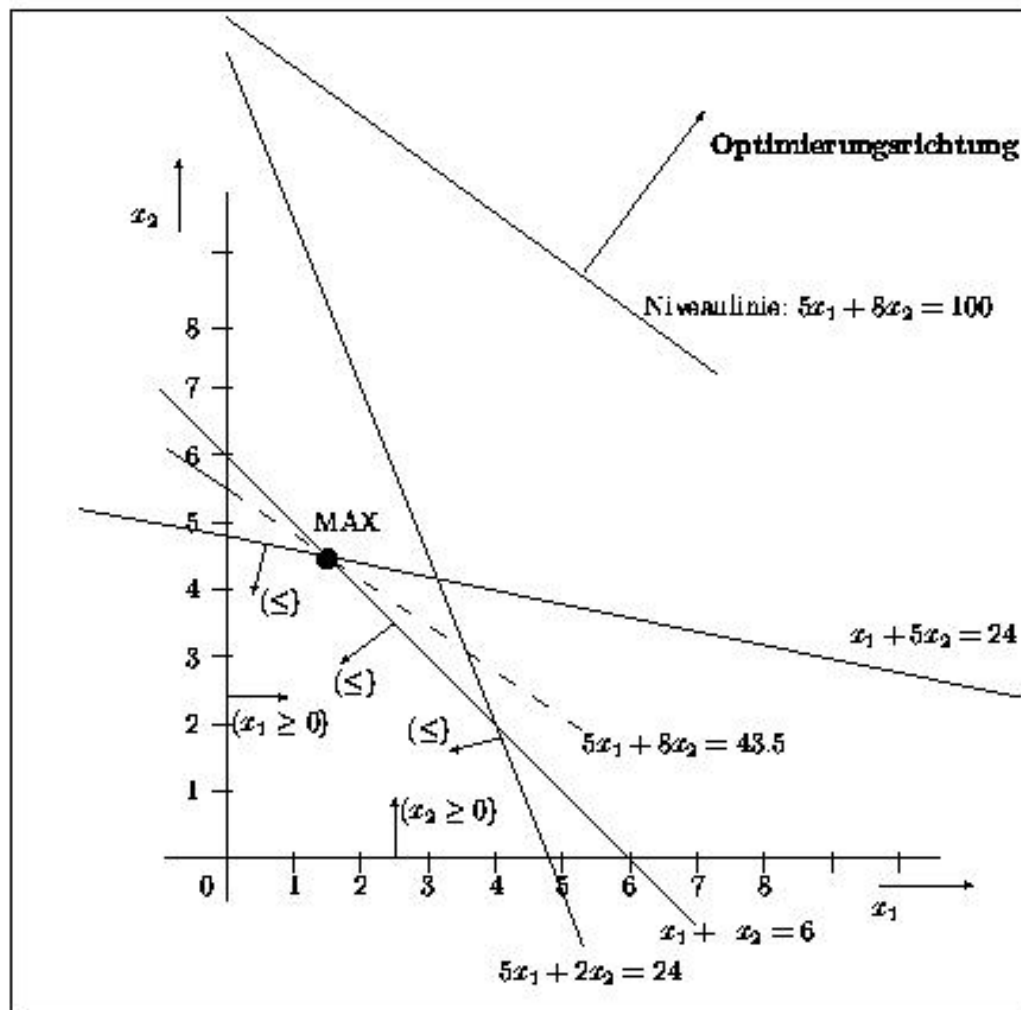
Lösungsschritte:

1. Menge der zulässigen Lösungen im Koordinatensystem einzeichnen: Zunächst werden die den zulässigen Bereich begrenzenden Geraden der Reihe nach eingezeichnet.
 - (a) Einzeichnen einer Geraden. Diese teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Der zulässige Bereich liegt in genau einem dieser Halbräume.
 - (b) Bestimmung des richtigen Halbraumes durch Einsetzen eines Punktes, der nicht auf der Geraden liegt, in die betrachtete Ungleichung. Erfüllt er diese, so liegt er im richtigen Halbraum, sonst im falschen. Markieren des richtigen Halbraumes.

Der zulässige Bereich ergibt sich als Durchschnitt aller so markierten Halbräume.

Wenn der zulässige Bereich leer ist, dann ist die LOA nicht lösbar, stopp. Ansonsten ist der zulässige Bereich zu schraffieren.

2. Optimierung: Es wird eine Niveaulinie $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ der Zielfunktion eingezeichnet. Dabei kann eine beliebige Zahl $d \geq 0$ verwendet werden, da d den Anstieg der Geraden nicht geändert, sondern lediglich die Lage durch Verschiebung bestimmt („Niveau“). Die Niveaulinie muß durch Parallelverschiebung über dem zulässigen Bereich so weit wie möglich



in Optimierungsrichtung verschoben werden. Wenn diese Verschiebung bis in das Unendliche möglich ist, so ist die LOA nicht lösbar, stopp. Ansonsten ergibt sich dabei die Niveaulinie $c_1x_1 + c_2x_2 = f^*$. Dabei ist f^* der optimale Zielfunktionswert. Jeder zulässige Punkt auf dieser Niveaulinie ist optimale Lösung der LOA.

3. Berechnung der optimalen Lösung(en): Hier sind zwei Fälle möglich:

(a) Die optimale Lösung ist eindeutig. Dann gibt es zwei den zulässigen Bereich begrenzende Geraden, deren Schnittpunkt die optimale Lösung ist. Zur Berechnung der optimalen Lösung ist das durch diese beiden Geraden bestimmte lineare Gleichungssystem zu lösen.

(b) Es gibt unendlich viele optimale Lösungen. Dann gibt es auch (mindestens) einen Schnittpunkt von zwei Geraden, der einer optimalen Lösung entspricht. Dieser Schnittpunkt wird berechnet. Wird die Menge optimaler Lösungen durch zwei solche Schnittpunkte begrenzt, so ist sie gleich der Menge aller konvexen Linearkombinationen dieser zwei Schnittpunkte.

Wenn das nicht der Fall ist, so kann die Menge aller optimaler Lösungen mit Hilfe der Punkt-Richtungsform für die Gerade, auf der die optimalen Lösungen liegen, angegeben werden. Der dabei verwendete Parameter muß im Vorzeichen beschränkt werden.

Im Beispiel sind das die Gleichungen der Nebenbedingungen (1.2) und (1.3), die sich im Punkt MAX schneiden.

$$x_1 + 5x_2 = 24 \quad (1.6)$$

$$x_1 + x_2 = 6 \quad (1.7)$$

Hier ist die optimale Lösung eindeutig:

$$\text{optimale Lösung der LOA: } x^* = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{optimaler Zielfunktionswert: } f^* = 5 \cdot 1,5 + 8 \cdot 4,5 = 43,5$$

Folgende Fälle sind möglich:

- (a) Vorhandensein einer eindeutigen optimalen Lösung.
- (b) Unendlich viele optimale Lösungen.
- (c) LOA ist nicht lösbar: zulässiger Bereich ist leer.

- (d) LOA ist nicht lösbar: Unbeschränktheit der Zielfunktion über dem zulässigen Bereich in Optimierungsrichtung.

4. Interpretation der Lösung.

1.3 Normalform

Normalform linearer Optimierungsaufgaben (NF):

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\longrightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dabei ist A vom Typ (m, n) , die Dimensionen der Vektoren b, c, x sind entsprechend gewählt. Besonderheiten der Normalform:

1. Zielfunktion ist immer zu maximieren.
2. Es gibt ausschließlich Gleichungsnebenbedingungen.
3. Vorhandensein von Nichtnegativitätsbedingungen für alle auftretenden Variablen.
4. $b \geq 0$ (rechte Seite der Beschränkung immer nichtnegativ).

Definition 1.1 *Betrachtet werde eine lineare Optimierungsaufgabe in Normalform.*

Ein Punkt \bar{x} mit $\bar{x} \geq 0$, $A\bar{x} = b$ heißt zulässige Lösung.

Die Menge $M = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ aller zulässigen Lösungen wird als zulässiger Bereich bezeichnet.

Eine zulässige Lösung x^ heißt optimale Lösung der linearen Optimierungsaufgabe, wenn für alle zulässigen Lösungen $x \in M$ die Bedingung $\langle c, x \rangle \leq \langle c, x^* \rangle$ erfüllt ist.*

Überführung von LOA in die Normalform: Gegeben sei eine lineare Optimierungsaufgabe, die nicht in Normalform gegeben ist. Es gibt also entweder eine Variable ohne Nichtnegativitätsbedingung oder die Zielfunktion ist zu minimieren oder aber eine Nebenbedingung liegt nicht in Gleichungsform vor oder ein Koeffizient der rechten Seite ist negativ. Dann ist die Aufgabe in Normalform zu transformieren, wobei die folgenden Regeln angewendet werden können.

1. Fehlende Nichtnegativitätsbedingungen für eine Variable. Dann ist diese Variable in der gesamten Aufgabe wie folgt zu ersetzen:

$$x_j = x'_j - x''_j \ ; \ x'_j, x''_j \geq 0$$

Alternativ kann bei einer fehlenden Nichtnegativitätsbedingung auch eine der folgenden Regeln angewendet werden, wenn in der Ausgangsaufgabe eine Variablenbeschränkung der angegebenen Form vorhanden ist. Eine Anwendung dieser Regeln verringert die Anzahl der neu aufzunehmenden Variablen. Die erste Formel ist dabei eine in der ursprünglichen Aufgabe vorhandene Nebenbedingung und die danach stehenden Ausdrücke geben die Formeln für ihre Substitution an:

$$\begin{aligned} x_j \geq a_j \ (a_j \neq 0) &\longrightarrow x_j = x'_j + a_j \ ; \ x'_j \geq 0 \\ x_j \leq a_j &\longrightarrow x_j = a_j - x'_j \ ; \ x'_j \geq 0 \end{aligned}$$

2. Zielfunktion ist zu minimieren
 \implies Multiplikation der Zielfunktion mit (-1) :

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min \longrightarrow -\langle c, x \rangle \rightarrow \max$$

3. Ungleichungen als Nebenbedingungen
 \implies Einführung von Schlupfvariablen u_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \implies \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + u_i = b_i \ ; \ u_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \implies \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - u_i = b_i \ ; \ u_i \geq 0$$

4. Bedingung $b \geq 0$ nicht erfüllt:

$$b_i < 0 \implies \text{Multiplikation der } i\text{-ten Nebenbedingung mit } (-1)$$

Bemerkung 1.2 Nach der Berechnung der optimalen Lösung müssen die Transformationen unbedingt wieder rückgängig gemacht werden!

1.4 Simplexalgorithmus für LOA

1.4.1 Grundlagen

Der Simplexalgorithmus löst lineare Optimierungsaufgaben in Normalform. Wir betrachten den zulässigen Bereich der Aufgabe in Normalform:

$$M = \{x \geq 0 : Ax = b\}.$$

Sei B eine Basismatrix in der Matrix A und $A = (B, N)$ eine Aufteilung der Matrix A in den Basis- und den Nichtbasisteil. Mit dem Gauß-Algorithmus wird das LGS $Ax = b$ transformiert in

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b.$$

Die allgemeine Lösung dieses LGS hat die Gestalt

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Definition 1.3 Eine spezielle Lösung des LGS $Ax = b$ der Gestalt

$$x = (x_B, x_N)^\top = (B^{-1}b, 0)^\top$$

heißt Basislösung. Wenn in einer Basislösung $B^{-1}b \geq 0$ ist, so heißt sie zulässige Basislösung. Eine Basislösung \tilde{x} heißt zu einer Basislösung x benachbart, wenn \tilde{x} aus x durch Anwendung einer Iteration des Gauß-Algorithmus entsteht.

Bemerkung 1.4 1. Im folgenden sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit stets $r(A) = m \leq n$.

2. In jeder zulässigen Basislösung der LOA gibt es höchstens m positive Komponenten.
3. Zulässige Basislösungen sind Eckpunkte des zulässigen Bereiches.
4. Die Zahl der verschiedenen zulässigen Basislösungen ist endlich. Der Simplexalgorithmus geht stets von einer zulässigen Basislösung zu einer benachbarten mit nicht schlechterem Zielfunktionswert über. Damit ist er endlich, falls keine zulässige Basislösung mehrfach betrachtet wird.

Satz 1.5 Wir betrachten die LOA in Normalform (NF). Dann gilt:

1. Der zulässige Bereich ist konvex und besitzt mindestens einen Eckpunkt, falls er nicht leer ist. Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind zulässige Basislösungen.
2. Sei $c \neq 0$. Die Optimallösungen einer LOA werden auf dem Rand angenommen, falls die Aufgabe lösbar ist. Unter den optimalen Lösungen gibt es stets auch mindestens eine zulässige Basislösung. Damit reicht es aus, zulässige Basislösungen zu betrachten.
3. Eine optimale Lösung existiert, falls der zulässige Bereich nicht leer und die Zielfunktion auf ihm nach oben beschränkt ist. Damit gibt es nur zwei Möglichkeiten für eine Unlösbarkeit der LOA:
 - (a) Der zulässige Bereich ist leer.
 - (b) Die Zielfunktion ist auf dem zulässigen Bereich nach oben unbeschränkt.
4. Sind mehrere zulässige Basislösungen (oder auch mehrere zulässige Punkte) optimal, so ist auch jede konvexe Linearkombination dieser Punkte optimal.

1.4.2 Idee des Simplexalgorithmus

Wir betrachten die LOA in Normalform

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Diese wird unter Zuhilfenahme der allgemeinen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in (1.9) umgeformt, d.h. x_B wird eliminiert durch $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Wir betrachten zunächst die Transformation der Zielfunktion:

$$\begin{aligned} c^\top x &= c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\ &= c_B^\top (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^\top x_N \\ &= c_B^\top B^{-1}b - c_B^\top B^{-1}Nx_N + c_N^\top x_N \\ &= c_B^\top B^{-1}b - (c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top) x_N. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die folgende zu (1.8) äquivalente LOA:

$$\begin{aligned} c_B^\top B^{-1}b - (c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top) x_N &\rightarrow \max_{x_N} \\ B^{-1}b - B^{-1}Nx_N &\geq 0 \\ x_N &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Aus dieser Darstellung ziehen wir die folgenden Schlüsse:

Satz 1.6 Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ eine zulässige Basislösung. Wenn

$$\Delta_j = ((c_B^\top B^{-1}N)^\top - c_N)_j \geq 0 \quad (1.11)$$

ist für alle j , so ist die vorliegende Basislösung \bar{x} optimal.

Die Zahlen $\Delta_j = ((c_B^\top B^{-1}N)^\top - c_N)_j$ heißen Optimalitätsindikatoren (der Nichtbasisvariablen).

Bemerkung 1.7 Die Optimalitätsindikatoren lassen sich auch für die Basisvariablen analog berechnen, dazu ist die Definition der Optimalitätsindikatoren in Formel (1.11) durch

$$\Delta_j = ((c_B^\top B^{-1}A)^\top - c)_j$$

zu ersetzen. Für die Optimalitätsindikatoren der Basisvariablen ergibt sich dann $\Delta_j = 0$.

Sei $\Delta_{j_0} < 0$. Dann wird die vorliegende Basislösung nicht als optimal erkannt und gemäß (1.10) wird versucht, die Variable x_{j_0} zu vergrößern. Wenn alle anderen Nichtbasisvariablen den Wert Null behalten, ergibt sich aus den Nebenbedingungen der Aufgabe (1.10) folgendes Ungleichungssystem in der einzigen Variablen x_{j_0} :

$$(B^{-1}b)_i - (B^{-1}N)_{ij_0}x_{j_0} \geq 0 \quad \forall i.$$

Eine Auflösung dieses Ungleichungssystems ergibt:

$$x_{j_0} \begin{cases} \geq \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}} & \text{für } (B^{-1}N)_{ij_0} < 0 \\ \leq \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}} & \text{für } (B^{-1}N)_{ij_0} > 0 \end{cases}$$

und folglich den maximalen Wert

$$x_{j_0} \leq \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}} : (B^{-1}N)_{ij_0} > 0 \right\}.$$

Im weiteren sei

$$\theta_i = \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}} \quad \text{für } (B^{-1}N)_{ij_0} > 0$$

und

$$\theta^* = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}} : (B^{-1}N)_{ij_0} > 0 \right\}.$$

Satz 1.8 Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ eine zulässige Basislösung und sei $\Delta_{j_0} < 0$.

Wenn $(B^{-1}N)_{ij_0} \leq 0$ ist für alle i , so ist die lineare Optimierungsaufgabe nicht lösbar, die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach oben unbeschränkt.

Satz 1.9 Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$ eine zulässige Basislösung und sei $\Delta_{j_0} < 0$. Desweiteren existiere mindestens ein i , so daß $(B^{-1}N)_{ij_0} > 0$ ist. Sei

$$\theta^* = \theta_{i_0} = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}} : (B^{-1}N)_{ij_0} > 0 \right\}.$$

Dann kann durch Aufnahme der Variablen x_{j_0} in die Basis anstelle der zur i_0 -ten Zeile gehörenden Basisvariablen eine benachbarte zulässige Basislösung berechnet werden, die einen nicht schlechteren Zielfunktionswert als \bar{x} besitzt.

Bemerkung 1.10 Wenn ein Optimalitätsindikator einer Nichtbasisvariable zur optimalen Lösung Null ist, so kann es weitere optimale Lösungen geben. Um diese zu errechnen, ist diese Nichtbasisvariable in die Basis aufzunehmen. Geht das nicht, so besitzt die Optimierungsaufgabe eine unbeschränkte Kante optimaler Lösungen. Ist das möglich und ergibt die Umrechnung eine andere optimale Lösung, so sind auch alle konvexen Linearkombinationen der berechneten optimalen Lösungen optimal.

1.4.3 Der Simplexalgorithmus

Rechnung unter Verwendung der folgenden Tabelle (Simplextabelle), in der zur Vereinfachung der Schreibweise $x_B = (x_1, \dots, x_m)^\top$ angenommen wird:

| Nr. | x_B | c_B | c_1 x_1 | \dots | c_m x_m | c_{m+1} x_{m+1} | \dots | c_n x_n | \bar{b} | θ |
|----------|----------|----------|----------------|----------|----------------|------------------------|----------|----------------|----------------------------|------------|
| 1 | x_1 | c_1 | 1 | \dots | 0 | $\bar{a}_{1,m+1}$ | \dots | \bar{a}_{1n} | \bar{b}_1 | θ_1 |
| 2 | x_2 | c_2 | 0 | \dots | 0 | $\bar{a}_{2,m+1}$ | \dots | \bar{a}_{2n} | \bar{b}_2 | θ_1 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| m | x_m | c_m | 0 | \dots | 1 | $\bar{a}_{m,m+1}$ | \dots | \bar{a}_{mn} | \bar{b}_m | θ_m |
| | | | Δ_1 | \dots | Δ_m | Δ_{m+1} | \dots | Δ_n | $\langle c_B, x_B \rangle$ | |

In dieser Tabelle steht \bar{a}_{ij} für die Elemente der Matrix $B^{-1}N$ und \bar{b}_i als Abkürzung für die Komponenten in $B^{-1}b$.

Bemerkung 1.11 1. Basisvariable können auch andere Variable sein.

2. Der Wert der Basisvariablen in einer Basislösung steht in der Zeile der Basisvariablen in der Spalte \bar{b} .

3. Nicht unter den Basisvariablen vorkommende Variable sind Nichtbasisvariable. Diese haben in der Lösung den Wert Null.

4. Der aktuelle Zielfunktionswert ist $\langle c_B, x_B \rangle = c_B^\top B^{-1}b$.

Wichtige, aus dem letzten Abschnitt bekannte Rechenformeln:

$$\Delta_j = ((c_B^\top B^{-1}A)^\top - c)_j,$$

$$\theta_i = \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}N)_{ij_0}}.$$

Gegeben sei eine lineare Optimierungsaufgabe in Normalform (1.8) und es sei einfach eine Basismatrix B bestimmbar, die zu einer zulässigen Basislösung führt:

$$B^{-1}b \geq 0.$$

Simplexalgorithmus

1. Aufstellen der Simplextabelle
2. Wenn alle $\Delta_j \geq 0$ sind, dann ist die vorliegende Basislösung optimal. Sonst wähle ein j_0 mit $\Delta_{j_0} < 0$.
3. Wenn $(B^{-1}N)_{ij_0} \leq 0$ ist für alle i , dann ist die LOA nicht lösbar, die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach oben unbeschränkt. Sonst bestimme die Werte θ_i für alle i mit $(B^{-1}N)_{ij_0} > 0$ sowie

$$\theta_{i_0} = \min\{\theta_i : (B^{-1}N)_{ij_0} > 0\}.$$

4. Umrechnung der gesamten Simplextabelle: In den Spalten x_B , c_B wird die Basisvariable durch x_{j_0} und deren Zielfunktionskoeffizient durch c_{j_0} ersetzt. Der Rest der Tabelle wird mit Hilfe des Gauß-Algorithmus umgerechnet, wobei in der Spalte j_0 eine Einheitsspalte mit einer Eins in der Zeile i_0 geschaffen wird.

1.5 Berechnung einer ersten Basislösung

Sonderfall: Ausgangsaufgabe vorgegeben als

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\longrightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

mit $b \geq 0$: Einführung von Schlupfvariablen u_i , Überführung in Normalform.

Startbasislösung: Basisvariable sind u_i , $i = 1, 2, \dots, m$

Basismatrix: E (Einheitsmatrix)

Allgemeiner Fall: Aufgabe in Normalform gegeben

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\longrightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Zur Berechnung einer ersten zulässigen Basislösung wird eine künstliche Aufgabe, die sogenannte Aufgabe der ersten Phase, aufgestellt:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^m v_i &\longrightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + v_i &= b_i, \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, m \\ x, v &\geq 0 \end{aligned}$$

Hier sind v_i - künstliche Variable.

Diese Aufgabe hat die folgenden Eigenschaften:

1. Die Aufgabe besitzt immer eine sofort ablesbare zulässige Basislösung:

$$\bar{x} = (x_B, x_N)^T \text{ mit } x_B = v = b \text{ und } x_N = x = 0.$$

2. Der Zielfunktionswert jeder zulässigen Basislösung ist nichtpositiv. Damit ist die Aufgabe der ersten Phase immer lösbar. Sei f^* der optimale Zielfunktionswert. Es können also nur zwei Fälle auftreten: entweder es ist $f^* = 0$ oder $f^* < 0$.
3. Sei \bar{x} eine zulässige Basislösung für die Aufgabe in Normalform. Dann ist $(\bar{x}, 0)$ eine zulässige Basislösung für die Aufgabe der ersten Phase, deren Zielfunktionswert gleich Null ist. Damit ist diese Lösung optimal für die Aufgabe der ersten Phase.

4. Sei (\bar{x}, \bar{v}) eine optimal Basislösung für die Aufgabe der ersten Phase mit dem Zielfunktionswert Null. Dann ist $\bar{v} = 0$ und \bar{x} ist eine zulässige Lösung für die Aufgabe in Normalform.

Satz 1.12 *Die Aufgabe in Normalform hat eine zulässige Basislösung genau dann, wenn die Aufgabe der ersten Phase den optimalen Zielfunktionswert Null besitzt. Aus der optimalen Basislösung (\bar{x}, \bar{v}) der Aufgabe der ersten Phase läßt sich dann eine zulässige Basislösung der Aufgabe in Normalform konstruieren.*

Bemerkung 1.13 *Wenn eine zulässige Basislösung der Aufgabe in Normalform nicht in der optimalen Tabelle der ersten Phase ablesbar ist (d.h. es ist noch eine künstliche Variable in der Basis), so sind die in der Basis verbliebenen künstlichen Variablen durch weitere Austausschritte aus der Basis zu entfernen. Bei kleinen Aufgaben hilft oftmals eine kritische Betrachtung der optimalen Simplextabelle, um einen Weg zur Realisierung dieser Schritte zu finden.*

Damit ergibt sich der folgende Zwei-Phasen-Algorithmus zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben (in diesem Zusammenhang wird die Aufgabe in Normalform auch als Aufgabe der zweiten Phase bezeichnet):

Zwei-Phasen-Algorithmus:

1. Transformation der gegebenen Aufgabe in Normalform.
2. Wenn in A eine Einheitsmatrix vorhanden ist, gehe zu Schritt 5.
3. Konstruiere und löse die Aufgabe der ersten Phase.
 - (a) Wenn der optimale Zielfunktionswert f^* der Aufgabe der ersten Phase kleiner als Null ist, stopp, die zu lösende lineare Optimierungsaufgabe hat einen leeren zulässigen Bereich, sie ist nicht lösbar.
 - (b) Wenn $f^* = 0$ ist, so gehe zu Schritt 4.
4. Berechne die Starttabelle der Aufgabe der zweiten Phase unter Zuhilfenahme der optimalen Tabelle der ersten Phase.
5. Löse die Aufgabe der zweiten Phase.
6. Rücktransformation der erhaltenen optimalen Lösung in die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe, falls die Aufgabe der zweiten Phase lösbar war.

Kapitel 2

Duale lineare Optimierung

2.1 Duale Aufgabe

In der dualen linearen Optimierung werden Paare linearer Optimierungsaufgaben betrachtet. Ausgehend von der Gestalt der primalen linearen Optimierungsaufgabe werden die folgenden Konstruktionsprinzipien zur Konstruktion der dualen Aufgaben verwendet:

| Primale Aufgabe | Duale Aufgabe |
|--|--|
| $\langle c, x \rangle \rightarrow \max$ | $\langle b, y \rangle \rightarrow \min$ |
| ZF-Koeffizienten c_j | rechte Seite c_j |
| rechte Seite b_i | ZF-Koeffizienten b_i |
| Koeffizientenmatrix A | Koeffizientenmatrix A^\top |
| Nebenbedingung $\langle a^i, x \rangle \leq b_i$ | Vorzeichenbedingung $y_i \geq 0$ |
| Nebenbedingung $\langle a^i, x \rangle \geq b_i$ | Vorzeichenbedingung $y_i \leq 0$ |
| Nebenbedingung $\langle a^i, x \rangle = b_i$ | keine Vorzeichenbedingung für y_i |
| Vorzeichenbedingung $x_j \geq 0$ | Nebenbedingung $\langle A^j, y \rangle \geq c_j$ |
| Vorzeichenbedingung $x_j \leq 0$ | Nebenbedingung $\langle A^j, y \rangle \leq c_j$ |
| keine Vorzeichenbedingung für x_j | Nebenbedingung $\langle A^j, y \rangle = c_j$ |

Durch Anwendung dieser Prinzipien entstehen speziell die folgenden Paare dualer Aufgaben:

$$\left. \begin{array}{l} \langle c, x \rangle \rightarrow \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{NF}) \qquad \left. \begin{array}{l} \langle b, y \rangle \rightarrow \min \\ A^\top y \geq c \end{array} \right\} \quad (\text{DNF})$$

sowie

$$\left. \begin{array}{l} \langle c, x \rangle \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{PLOA}) \qquad \left. \begin{array}{l} \langle b, y \rangle \rightarrow \min \\ A^\top y \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{DLOA})$$

Definition 2.1 Die Aufgaben (DNF) und (DLOA) heißen *duale lineare Optimierungsaufgaben* zu den *primalen linearen Optimierungsaufgaben* (NF) beziehungsweise (PLOA).

Bemerkung 2.2 Wenn die eigentlich untersuchte Aufgabe eine Minimierungsaufgabe ist, wird sie besser als „duale Aufgabe“ betrachtet und mit Hilfe der obigen Konstruktionsregeln um die „primale Aufgabe“ ergänzt.

2.2 Dualitätssätze

Die folgenden Sätze sind für das Paar primal-dualer linearer Optimierungsaufgaben (NF), (DNF) aufgeschrieben. Sie gelten analog auch für alle anderen möglichen Paare.

Satz 2.3 Seien \hat{x} eine zulässige Lösung für die Aufgabe (NF) und \hat{y} eine zulässige Lösung für die Aufgabe (DNF). Dann gilt

$$\langle c, \hat{x} \rangle \leq \langle b, \hat{y} \rangle.$$

Folgerung 2.4 Für die optimalen Zielfunktionswerte f^* von (NF) und φ^* von (DNF) gilt folglich ebenfalls $f^* \leq \varphi^*$.

Satz 2.5 Seien \hat{x} eine zulässige Lösung für die Aufgabe (NF) und \hat{y} eine zulässige Lösung für die Aufgabe (DNF). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. \hat{x} ist optimal für (NF), \hat{y} ist optimal für (DNF),
2. $\langle c, \hat{x} \rangle = \langle b, \hat{y} \rangle$,
3. $\langle \hat{x}, A^\top \hat{y} - c \rangle = 0$.

Bemerkung 2.6 Die letzte Bedingung lautet äquivalent komponentenweise aufgeschrieben:

$$\hat{x}_j(A^\top \hat{y} - c)_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Satz 2.7 Folgende 5 Aussagen sind äquivalent:

1. (NF) ist lösbar,
2. (DNF) ist lösbar,
3. es gibt \hat{x}, \hat{y} mit den Eigenschaften $\hat{x} \geq 0, A\hat{x} = b, A^\top \hat{y} \geq c$,
4. es gibt \hat{x}, C mit den Eigenschaften $\hat{x} \geq 0, A\hat{x} = b$ und es ist $\langle c, x \rangle \leq C$ für alle $x \geq 0, Ax = b$,
5. es gibt \hat{y}, D mit der Eigenschaft $A^\top \hat{y} \geq c$ und es ist $\langle b, y \rangle \geq D$ für alle y mit $A^\top y \geq c$.

2.3 Interpretation der dualen Aufgabe

Wir betrachten das Paar dualer Aufgaben

$$\left. \begin{array}{l} \langle c, x \rangle \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{PLOA}) \qquad \left. \begin{array}{l} \langle b, y \rangle \rightarrow \max \\ A^\top y \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{DLOA})$$

und verwenden die folgenden Interpretationen der Daten:

1. x_j – hergestellte Mengen an Produkt j
2. c_j – Gewinn pro hergestellter Menge Produkt j
3. a_{ij} – Faktoreinsatzmenge des Faktors i zur Herstellung einer Mengeneinheit des Produktes j
4. b_i – vorhandene Menge des Faktors i (sog. Fonds)

Die Gleichheit der Maßeinheiten (und der optimalen Werte) der Zielfunktionen der primalen und der dualen Aufgabe impliziert dann die Maßeinheit $\left[\frac{\text{Geldeinheiten}}{\text{Mengeneinheit Faktor } i} \right]$ für die dualen Variablen. Diese sind damit finanzielle Bewertungen der vorhandenen (bzw. verwendeten) Mengen des Faktors i .

Definition 2.8 *Die optimalen Lösungen der dualen Aufgabe heißen Schattenpreise.*

Die Schattenpreise stellen einen ideellen Wert (Preis) der Faktoren für die zu lösende Aufgabe dar.

Interpretation der Bedingungen der Aufgabe:

1. $A^\top y \geq c$ – Preis für die verwendeten Faktormengen zur Herstellung einer Mengeneinheit von Produkt j ist mindestens so groß wie der Gewinn pro hergestellter Mengeneinheit.
2. Bedingungen aus dem Satz über die starke Dualität:
 $x_j(A^\top y - c)_j = 0$ – Ist der Preis für die verwendeten Faktormengen größer als der Gewinn, so wird Produkt j nicht hergestellt.
3. analog:
 $y_i(Ax - b)_i = 0$ – Werden vorhandene Fonds nicht ausgenutzt, so ist deren Preis Null.

Anwendung bei der Entscheidung über den Zukauf von Faktoren:

1. Sei die optimale Lösung y^* der dualen Aufgabe eindeutig. Werden θ ME des Faktors i hinzugekauft, so ändert sich der optimale Zielfunktionswert um etwa θy_i^* Geldeinheiten. Damit wird der Zukauf realisiert, wenn der Schattenpreis y_i^* größer als der Marktpreis einer Mengeneinheit des Faktors i ist.

Achtung: Diese Aussage gilt nur für kleine Werte von $|\theta|$, allerdings analog auch für den Verkauf von Faktoren.

2. Wenn die optimale Lösung der dualen Aufgabe nicht eindeutig ist, so gilt die Aussage für den Zukauf für den kleinsten Wert von y_i^* unter allen optimalen Lösungen der dualen Aufgabe.

Berechnung der optimalen Lösung der dualen Aufgabe im Spezialfall der Aufgabe:

$$\left. \begin{array}{l} \langle c, x \rangle \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Simplexalgorithmus:

| | | | | | | | | | |
|--------------|-------|------------|------------|----------|------------|---------|----------|---------|-----------|
| | | c_1 | c_2 | \cdots | c_n | 0 | \cdots | 0 | |
| x_B | c_B | x_1 | x_2 | \cdots | x_n | u_1 | \cdots | u_m | \bar{b} |
| u | 0 | A | | | | | E | | b |
| | | $-c_1$ | $-c_2$ | \cdots | $-c_n$ | 0 | \cdots | 0 | 0 |
| \Downarrow | | | | | | | | | |
| | | $B^{-1}A$ | | | | | B^{-1} | | $B^{-1}b$ |
| | | Δ_1 | Δ_2 | \cdots | Δ_n | y_1^* | \cdots | y_m^* | f^* |

In der Tabelle sind dann B^{-1} und die Schattenpreise ablesbar. Im allgemeinen Fall kann durch Aufnahme der Einheitsmatrix in die Tabelle (ohne Beachtung der entsprechenden letzten Zeile im Simplexalgorithmus !) ein analoger Effekt erzielt werden.

Kapitel 3

Sensitivitätsanalyse

Aufgabenstellung: Sei x^* optimale Lösung der Aufgabe (NF)

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\longrightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Dann sind die folgenden Fragen von Interesse:

1. Was passiert mit der optimalen Lösung x^* und dem optimalen Zielfunktionswert f^* , wenn sich ein Zielfunktionskoeffizient oder auch die gesamte Zielfunktion ändert?
2. Die gleiche Fragestellung, wenn sich Koeffizienten der rechten Seite ändern.

3.1 Allgemeine Veränderung der Zielfunktion

Anwendung: Änderung von Kosten, Preisen, etc.

Sei x^* optimale Lösung der Aufgabe (NF). Ist x^* dann auch optimal für die Aufgabe

$$\begin{aligned} \langle \hat{c}, x \rangle &\longrightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit $\hat{c} \neq c$?

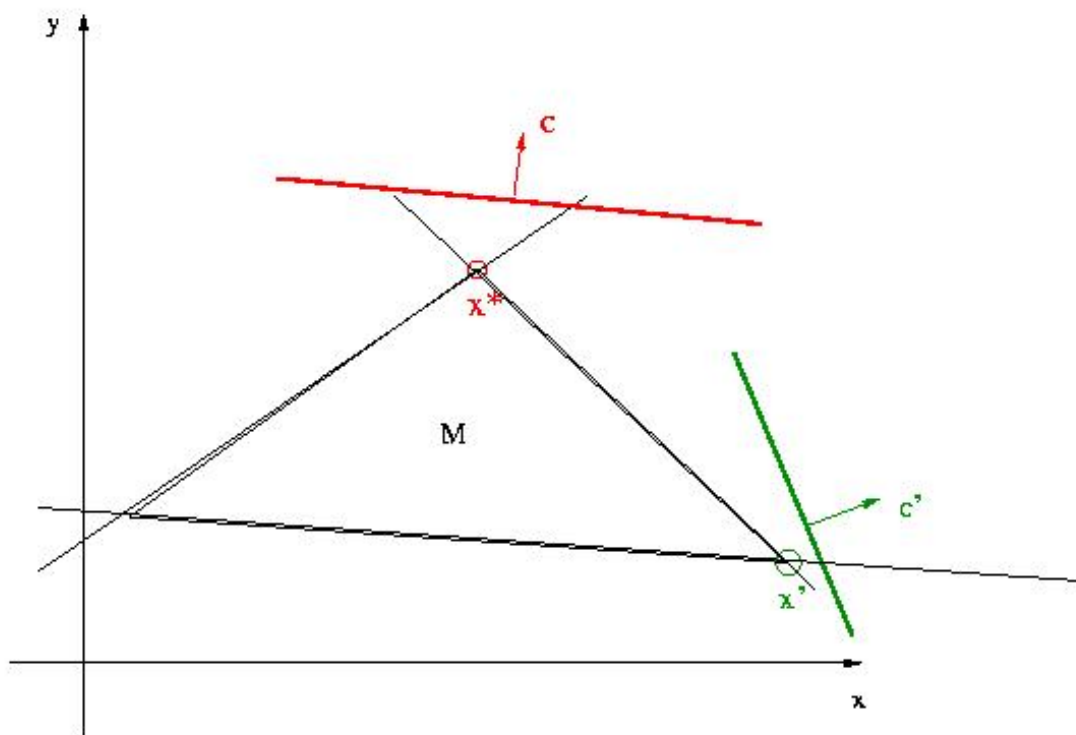


Abbildung 3.1: Sensitivität: Änderung der Zielfunktion

Offensichtlich ist x^* zulässig, da weiterhin $Ax^* = b, x^* \geq 0$ gilt. Änderung von c zu \hat{c} bewirkt eine Drehung der Zielfunktion, wie die Abbildung 3.1 illustriert.

Satz 3.1 *Sei x^* optimale Basislösung der Aufgabe (NF) zur Basismatrix B , d.h. $x = (x_B^* \ x_N^*)^\top$ mit $x_B^* = B^{-1}b, x_N^* = 0$. Dann ist x^* auch optimale Basislösung der Aufgabe (3.1), falls alle Optimalitätsindikatoren für diese Aufgabe nichtnegativ sind:*

$$\Delta_j = (\hat{c}_B^\top B^{-1}A)_j^\top - \hat{c}_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Wenn diese Eigenschaft nicht gilt, so müssen Schritte des Simplexalgorithmus ausgeführt werden, um eine neue optimale Lösung zu berechnen oder die Unlösbarkeit festzustellen.

3.2 Ein Parameter in der Zielfunktion

Wir betrachten jetzt die Aufgabe

$$\begin{aligned} \langle c + t\hat{c}, x \rangle &\longrightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

und wollen alle optimalen Lösungen für diese Aufgabe für alle Werte von t bestimmen. Wenn eine Basislösung x^* fixiert ist, kann man wie im Abschnitt 3.1 vorgehen, erhält aber anstelle der Ungleichungen in Satz 3.1 die folgenden Ungleichungen:

$$\Delta_j(t) = ((c_B + t\hat{c}_B)^\top B^{-1}A)_j^\top - (c + t\hat{c})_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

die jetzt von t abhängen. Diese Ungleichungen haben ein Intervall $[\underline{t}, \bar{t}]$ (das auch leer sein kann) als Lösungsmenge, wobei die Fälle $\underline{t} = -\infty$ beziehungsweise $\bar{t} = +\infty$ möglich sind. Für $t = \underline{t}$ oder $t = \bar{t}$ ist ein Optimalitätsindikator einer Nichtbasisvariablen Null, es gibt also eventuell eine alternative optimale Lösung. Ist dies der Fall und wird die Simplextabelle umgerechnet, um diese neue Lösung darzustellen, so ergibt sich nun analog zu obigem ein neues Intervall und so weiter. Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

$$Q = \{t : \text{Problem (3.2) ist lösbar}\}$$

bezeichnet die Menge aller Parameter t , für die die Aufgabe 3.2 eine optimale Lösung besitzt,

$$\varphi(t) = \max\{\langle c + t\hat{c}, x \rangle : Ax = b, x \geq 0\}$$

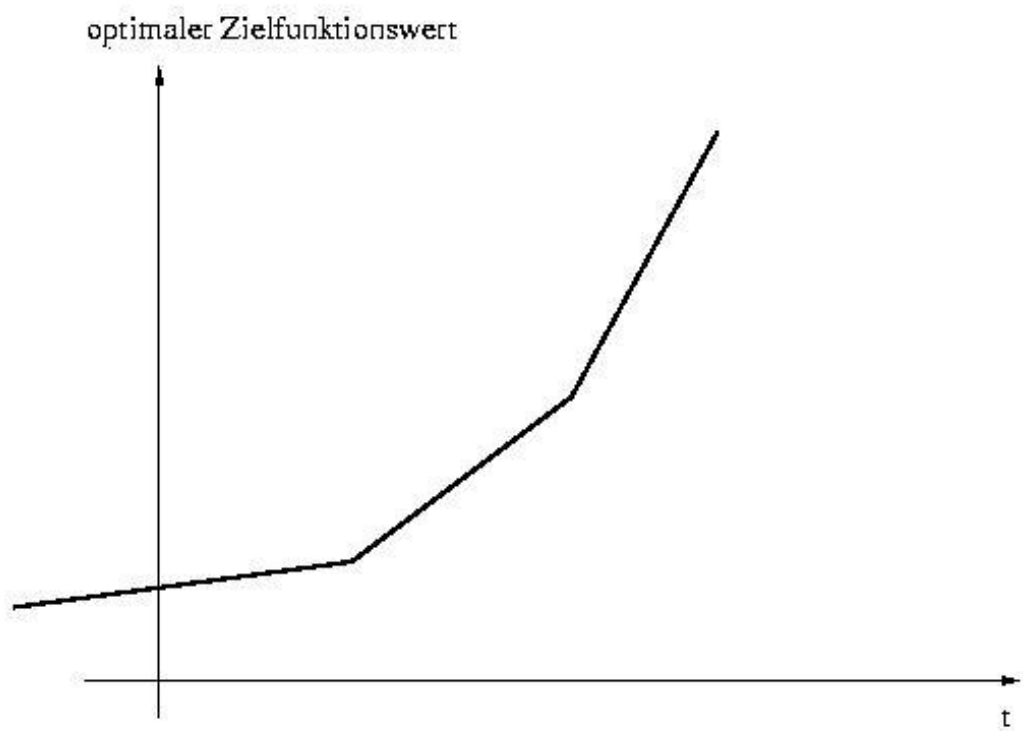


Abbildung 3.2: Sensitivität: Optimalwert-Funktion

bezeichnet den optimalen Zielfunktionswert und

$$\Psi(t) = \{x \geq 0 : Ax = b, \langle c + t\hat{c}, x \rangle = \varphi(t)\}$$

die Menge optimaler Lösungen der Aufgabe (3.2) für einen festen Wert des Parameters $t \in Q$. Dann ergibt sich

Satz 3.2 *Betrachtet werde die Aufgabe (3.2). Sei $Q \neq \emptyset$. Dann gibt es Zahlen $-\infty < t_1 < t_2 < \dots, t_p < \infty$, so daß folgendes gilt:*

1. $\varphi(t)$ ist auf $[t_i, t_{i+1}]$ (affin-) linear :

$$\varphi(t) = \langle c, \hat{x} \rangle + t \langle \hat{c}, \hat{x} \rangle$$

für eine beliebige Lösung $\hat{x} \in \Psi(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, p-1$.

2. $\Psi(t)$ ist auf (t_i, t_{i+1}) konstant, $i = 1, \dots, p-1$. Für $t = t_i$ ist $\Psi(t) \subset \Psi(t_i)$ für alle $t \in (t_{i-1}, t_i) \cup (t_i, t_{i+1})$, $i = 2, \dots, p-1$.

3. Aussagen a) und b) gelten analog auch auf $(-\infty, t_1) \cup (t_p, \infty)$, falls die Aufgabe dort lösbar ist.

4. $\varphi(t)$ ist konvex, d.h. es ist $\varphi(\lambda \underline{t} + (1-\lambda)\bar{t}) \leq \lambda \varphi(\underline{t}) + (1-\lambda)\varphi(\bar{t})$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ und für alle $\underline{t}, \bar{t} \in Q$.

5. Für $s, t \in (t_i, t_{i+1})$ ist

$$\varphi(t) = \langle c, \hat{x} \rangle + t \langle \hat{c}, \hat{x} \rangle = \langle c, \hat{x} \rangle + s \langle \hat{c}, \hat{x} \rangle + (t-s) \langle \hat{c}, \hat{x} \rangle$$

also

$$\varphi'(s) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} = \langle \hat{c}, \hat{x} \rangle$$

und für $s = t_i$ ist

$$\varphi(t) = \varphi(t_i) + \max\{(t - t_i) \langle \hat{c}, \hat{x} \rangle : \hat{x} \in \Psi(t_i)\}$$

für $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$.

Die Funktion $\varphi(t)$ ist beispielhaft in Abbildung 3.2 dargestellt.

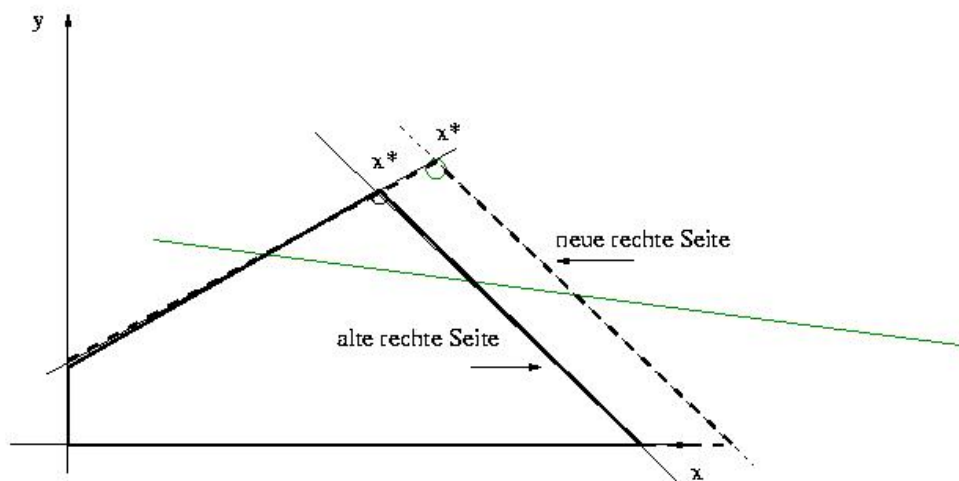


Abbildung 3.3: Sensitivität: Variation rechte Seite

3.3 Veränderung der rechten Seite

Sei die Aufgabe (1.8) gelöst worden. Sei x^* die optimale Lösung und \overline{B} die entsprechende Basismatrix. Nach einer Änderung des Vektors der rechten Seite sei die neue Aufgabe

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max \\ Ax &= \hat{b} \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

zu lösen. Zur Veranschaulichung der Situation dient Bild 3.3.

Dann ist x^* keine optimale Lösung der Aufgabe (3.4), da x^* nicht mehr zulässig ist. Sei

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_B = \overline{B}^{-1}\hat{b}, \quad \hat{x}_N = 0. \quad (3.5)$$

Wenn dieser Punkt zulässig ist, d.h. wenn $\overline{B}^{-1}\hat{b} \geq 0$ ist, so ist \hat{x} optimal für (3.4), da sich die Optimalitätsindikatoren

$$\Delta_j = (c_B^\top \overline{B}^{-1} A)_j^\top - c_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

nicht geändert haben. Damit gilt

Satz 3.3 Die Lösung $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{pmatrix}$ mit $\hat{x}_B = \overline{B}^{-1}\hat{b}, \hat{x}_N = 0$ ist auch optimal für die neue Aufgabe (3.4), wenn sie zulässig ist: $\overline{B}^{-1}\hat{b} \geq 0$.

3.4 Ein Parameter in der rechten Seite

Sei jetzt die Aufgabe (3.4) konkretisiert zu

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max \\ Ax &= b + t\hat{b} \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Dann betrachten wir anstelle von (3.5) die parameterabhängige Lösung

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_B = \overline{B}^{-1}(b + t\hat{b}), \quad \hat{x}_N = 0. \quad (3.7)$$

Diese Lösung ist zulässig (und damit optimal), wenn $\overline{B}^{-1}(b + t\hat{b}) \geq 0$ gilt. Dieses ist ein Ungleichungssystem in einer Variablen t , welches wie folgt nach

t aufgelöst werden kann:

$$t \geq -\frac{(\overline{B}^{-1}b)_j}{(\overline{B}^{-1}\hat{b})_j}, \text{ falls } (\overline{B}^{-1}\hat{b})_j > 0,$$

$$t \leq -\frac{(\overline{B}^{-1}b)_j}{(\overline{B}^{-1}\hat{b})_j}, \text{ falls } (\overline{B}^{-1}\hat{b})_j < 0,$$

ist. Die rechten Seiten dieser Ungleichungen bestimmen Grenzen eines Intervalls, in dem t variieren kann ohne Änderung der optimalen Basismatrix. Allgemein ergibt sich der folgende Satz, wobei wiederum $\varphi(t)$ den optimalen Zielfunktionswert

$$\varphi(t) = \max\{\langle c, x \rangle : Ax = b + t\hat{b}, x \geq 0\}$$

und $\Psi(t)$ die Menge optimaler Lösungen

$$\Psi(t) = \{x \geq 0 : Ax = b + t\hat{b}, \langle c, x \rangle = \varphi(t)\}$$

der Aufgabe (3.6) für ein festes

$$t \in Q = \{t : \text{Aufgabe (3.6) ist lösbar}\}$$

bezeichnet.

Satz 3.4 *Zu lösen sei die Aufgabe (3.6). Sei $Q \neq \emptyset$. Dann gibt es Zahlen $-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Funktion $\varphi(t)$ ist über jedem der Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $t = 1, \dots, k-1$, (affin-) linear:*

$$\varphi(t) = \langle c_B, B_i^{-1}(b + t\hat{b}) \rangle = \langle b + t\hat{b}, y^i \rangle,$$

wobei B_i eine Basismatrix und y^i eine optimale Lösung der dualen Aufgabe sind.

2. *Für jedes Intervall (t_i, t_{i+1}) gibt es eine Basismatrix B_i , so daß $\hat{x} = (\hat{x}_B, \hat{x}_N)^\top$ mit $\hat{x}_B = B_i^{-1}(b + t\hat{b})$, $\hat{x}_N = 0$ für alle $t \in (t_i, t_{i+1})$ optimal ist. Für $t = t_i$ gibt es mehrere optimale Basismatrizen.*
3. *Wenn die Aufgabe (3.6) über dem Intervall $(-\infty, t_1)$ bzw. (t_k, ∞) lösbar ist, dann ist $\varphi(t)$ auch dort (affin-) linear.*

4. Die Funktion $\varphi(t)$ ist konkav, d.h. es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}, |\varphi(a)| < \infty, |\varphi(b)| < \infty, \lambda \in [0, 1]$ stets

$$\varphi(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda \varphi(a) + (1 - \lambda)\varphi(b).$$

5. Im Intervall (t_i, t_{i+1}) ist die Funktion $\varphi(t)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(t) = \langle \hat{b}, y^i \rangle, \quad t \in (t_i, t_{i+1})$$

In den Punkten t_i ist

$$\varphi(t) = \varphi(t_i) + \min\{\langle \hat{b}, y^* \rangle(t - t_i) : y^* \text{ löst die duale Aufgabe für } t_i\}$$

für $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$.

Die Funktion $\varphi(t)$ ist beispielhaft in Abbildung 3.4 dargestellt.

3.5 Aufnahme einer neuen Variablen

Sei $x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix}$, $x_B^* = B^{-1}b$, $x_N^* = 0$ eine optimale Basislösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Es sei jetzt die neue Aufgabe

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j + c_{n+1} x_{n+1} &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i,n+1} x_{n+1} &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_{n+1} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

zu lösen. Ist dann der Punkt $\hat{x} = \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$ optimal für diese Aufgabe? Sei dazu

$$\hat{A} = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n+1}$$

die aus A entstehende Matrix mit nun $n + 1$ Spalten. Diese entsteht aus der Koeffizientenmatrix von (3.8) durch Hinzufügung der zur neuen Variablen x_{n+1} gehörenden Spalte in (3.9).

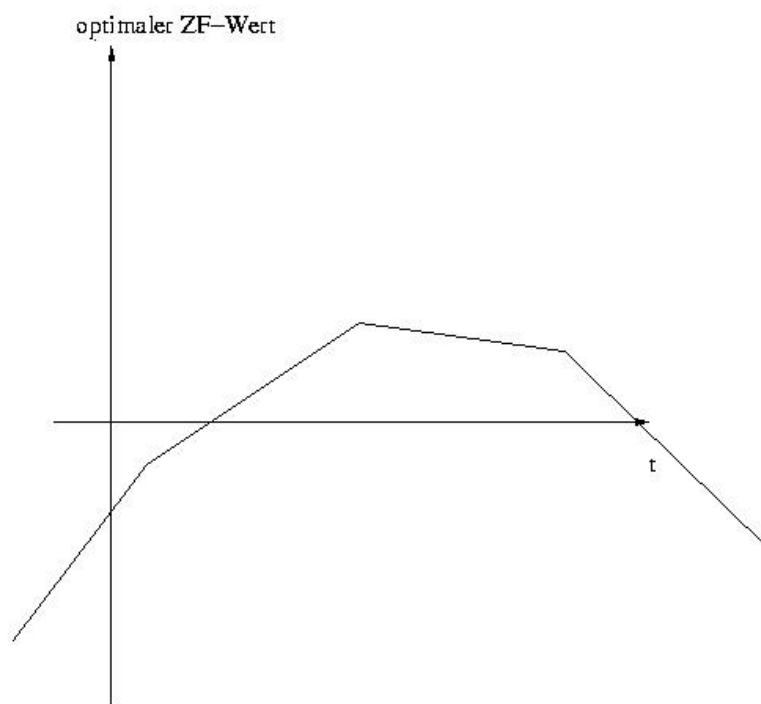


Abbildung 3.4: Sensitivität: Optimalwert-Funktion

Satz 3.5 *Wenn der $n + 1$ -te Optimalitätsindikator*

$$\Delta_{n+1} = (c_B^\top B^{-1} \hat{A})_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$$

ist, so ist die Lösung \hat{x} optimal für die Aufgabe (3.9). Andernfalls ist mit dem Simplexalgorithmus eine optimale Lösung zu berechnen.

Dieser Satz gibt eine obere Schranke für die Größe des Zielfunktionskoeffizienten c_{n+1} an, bei deren Einhaltung sich eine Aufnahme der Variablen x_{n+1} in die Basis nicht lohnt. Erst wenn

$$c_{n+1} > (c_B^\top B^{-1} \hat{A})_{n+1} = (y^{*\top} \hat{A})_{n+1}$$

ist, so kann eine Aufnahme der Variablen x_{n+1} in die Basis einen größeren optimalen Zielfunktionswert in der Aufgabe (3.8) als $c^\top \hat{x}$ erzeugen. Dabei ist y^* die (der Einfachheit halber als eindeutig angenommene; vgl. die Ausführungen im Abschnitt 2.3) optimale Lösung der dualen Aufgabe zu (3.8). Die rechte Seite $(y^{*\top} \hat{A})_{n+1}$ in dieser Ungleichung kann als Schattenpreis der für die Herstellung einer Mengeneinheit des $(n+1)$ ten Produktes verwendeten Faktormengen interpretiert werden.

Kapitel 4

Optimierung mit mehreren Zielen

Dieses Problem wird oft auch als Vektoroptimierungsaufgabe bezeichnet.

4.1 Modell, Aufgabenstellung

Betrachtet sei hier die Aufgabe

$$\left. \begin{array}{l} \langle c^1, x \rangle \\ \langle c^2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle c^k, x \rangle \end{array} \right\} \rightarrow \text{„max“} \quad (4.1)$$
$$\begin{array}{lcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0. \end{array}$$

Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{lcl} Cx & \rightarrow & \max \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \quad (4.2)$$

In dieser Aufgabe geht es darum, eine solche zulässige Lösung \bar{x} zu finden, die einen besten Kompromiß zwischen den einzelnen Zielfunktionen darstellt.

Definition 4.1 Ein Punkt $\bar{x} \geq 0$ mit $A\bar{x} = b$ heißt Pareto optimal (effizient) für die Aufgabe (4.1), wenn es keinen Punkt $\hat{x} \geq 0$ mit $A\hat{x} = b$ gibt, für den $C\hat{x} \geq C\bar{x}$ und $C\hat{x} \neq C\bar{x}$ gelten.

Es ergeben sich damit drei Aufgaben:

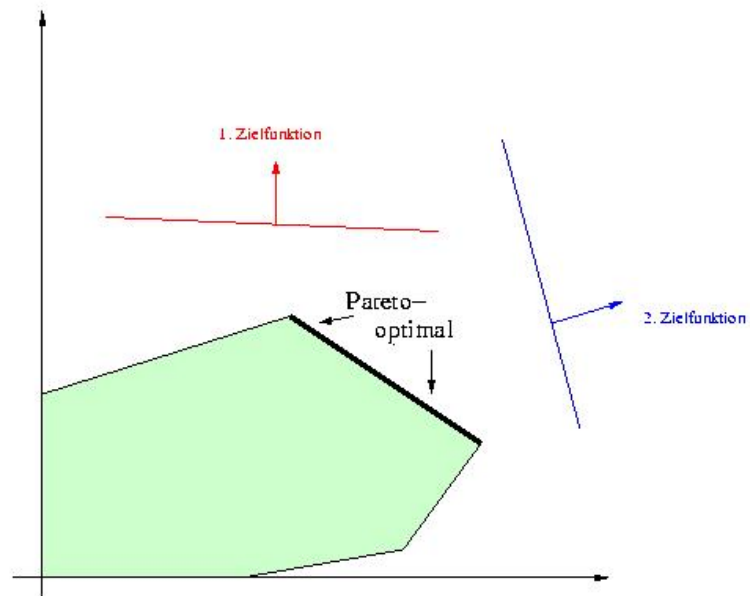


Abbildung 4.1: Lineare Vektroptimierungsaufgabe

1. Es ist eine Pareto-optimale Lösung zu berechnen.
2. Es sind alle Pareto-optimalen Lösungen zu berechnen.
3. Es ist eine, bezüglich eines bestimmten (weiteren) Kriteriums, beste Pareto-optimale Lösung zu konstruieren. Dazu ist zunächst die Menge aller Pareto-optimalen Punkte zu berechnen, aus der dann interaktiv oder durch Anwendung eines Optimierungsalgorithmus eine beste Lösung ausgewählt wird.

4.2 Lösungszugang

Zur Lösung der Aufgabe (4.1) wird durch Linearkombination der Zielfunktionen aus (4.1) zu einer einzigen Zielfunktion eine neue lineare Optimierungsaufgabe konstruiert, die dann gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, Cx \rangle &\rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dann gilt folgende Aussage:

Satz 4.2 *Betrachtet seien die Aufgaben (4.1) und (4.3). Dann gilt:*

1. *Sei \bar{x} eine optimale Lösung der Aufgabe (4.3) für einen Vektor λ mit $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Dann ist \bar{x} Pareto-optimal für die Aufgabe (4.1).*
2. *Sei \bar{x} Pareto optimal für die Aufgabe (4.1), dann gibt es einen Vektor λ mit $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, so daß \bar{x} eine optimale Lösung der Aufgabe (4.3) ist.*

Damit lassen sich obige Aufgaben umformulieren:

1. Wähle ein λ mit $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und löse die Aufgabe (4.3).
2. Bestimme alle optimalen Lösungen der Aufgabe (4.3) für alle $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.
3. Wähle ein $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ so, daß das zusätzliche Kriterium einen bestmöglichen Wert annimmt.

Bei zwei Zielfunktionen ist dabei eine optimale Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} \lambda \langle c^1, x \rangle + (1 - \lambda) \langle c^2, x \rangle &\rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

für ein $\lambda \in (0, 1)$ oder für alle $\lambda \in (0, 1)$ gesucht.

Kapitel 5

Transportoptimierung

5.1 Einführung, Modell

Gegeben seien m Angebotsorte eines homogenen Produktes mit den Angebotsmengen a_i , $i = 1, \dots, m$, welches zu n Bedarfsorten mit den Bedarfsmengen b_j , $j = 1, \dots, n$ geliefert werden soll. Desweiteren seien die Transportkosten c_{ij} für den Transport einer Mengeneinheit des Gutes vom Angebotsort i zum Bedarfsort j bekannt.

Damit ist folgende Aufgabe zu lösen:

Gesucht sind die Transportmengen x_{ij} so, daß

1. aus den Angebotsorten nicht mehr als a_i Mengeneinheiten wegtransportiert,
2. in die Bedarfsorte nicht weniger als b_j Mengeneinheiten hineintransportiert werden und
3. die gesamten Transportkosten minimal sind.

Eine graphische Darstellung der Transportbeziehungen ist in Bild 5.1 dargestellt. Transportproblem (TP):

x_{ij} - transportierte Mengen vom Angebotsort i zum Bedarfsort j

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \tag{5.1}$$

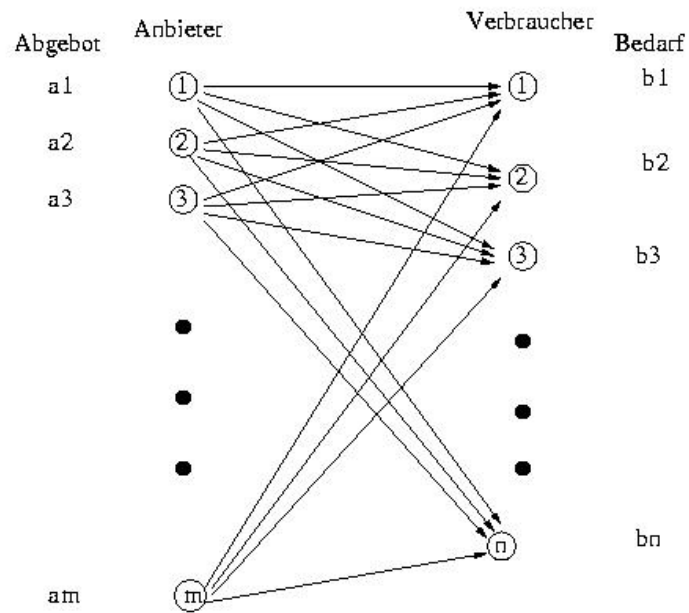


Abbildung 5.1: Graphische Darstellung des Transportproblems

5.2 Eigenschaften

Durch Einsetzen einer zulässigen Lösung der Aufgabe (5.1) erkennt man leicht die folgende Aussage:

Satz 5.1 *Das Problem (5.1) besitzt zulässige (und bei $a_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n$, $b_j < \infty, j = 1, 2, \dots, m$ auch optimale) Lösungen genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j, \quad a_i \geq 0, b_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

gelten.

Satz 5.2 *Seien $c_{ij} \geq 0$ für alle i, j . Dann gibt es eine optimale Lösung \bar{x} von (5.1), in der*

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

gilt.

Folgerung 5.3 *Wenn o. E. d. A. $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n$ gefordert wird, so kann die Aufgabe durch Einführung von Schlupfvariablen $x_{i,n+1}$ in eine lineare Optimierungsaufgabe mit Gleichungsnebenbedingungen überführt werden. Für die rechte Seite b_{n+1} ist dann*

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

zu fordern.

Damit erzeugt man die Normalform des Transportproblems, das sogenannte Klassische Transportproblem (KTP):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\longrightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \tag{5.2}$$

Satz 5.4 *Das klassische Transportproblem (5.2) ist genau dann lösbar, wenn*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad a_i \geq 0, b_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

gilt.

Satz 5.5 *Wenn im klassischen Transportproblem (5.2) alle Zahlen $a_i, i = 1, \dots, m$ und $b_j, j = 1, \dots, n$ ganzzahlig sind, so gibt es eine optimale Lösung mit ganzzahligen Komponenten.*

Damit kann also eine eventuelle Ganzzahligkeitsforderung an die Lösung des Transportproblems vernachlässigt werden.

Definition 5.6 *Wenn im klassischen Transportproblem alle Zahlen $a_i = 1, i = 1, \dots, m$ und $b_j = 1, j = 1, \dots, n$ sind, so nennt man das entstehende Problem auch Lineares Zuordnungsproblem.*

Das lineare Zuordnungsproblem ist lösbar genau dann, wenn $m = n$ ist. Im weiteren werden wir, insbesondere bei der Lösung des klassischen Transportproblems, auf die Tabellenschreibweise der Daten zurückgreifen:

| | Bedarfsort | | | | Angebot |
|-----------------|------------|----------|-----|----------|----------|
| | 1 | 2 | ... | n | |
| Angebotsort 1 | c_{11} | c_{12} | ... | c_{1n} | a_1 |
| Angebotsort 2 | c_{21} | c_{22} | ... | c_{2n} | a_2 |
| \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots |
| Angebotsort m | c_{m1} | c_{m2} | ... | c_{mn} | a_n |
| | b_1 | b_2 | ... | b_m | |

Die Matrix C ist die Matrix der Transportkosten $C = (c_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$.

5.3 Konstruktion einer Startbasislösung

Die Konstruktion einer Startbasislösung kann mit verschiedenen heuristischen Methoden erfolgen. Beschrieben sei nur die Methode des minimalen Elementes.

Algorithmus

Schritt 1: Alle Zeilen und Spalten der Matrix C sind ungestrichen.

Schritt 2: Bestimme ein Indexpaar (k, l) mit minimalem Wert c_{kl} in allen ungestrichenen Zeilen und Spalten der Matrix C .

Setze $x_{kl} = \min\{a_k, b_l\}$, $a_k := a_k - x_{kl}$, $b_l := b_l - x_{kl}$.

Streiche die Zeile k , falls $a_k = 0$ und Zeile k nicht die letzte ungestrichene Zeile ist bei noch mehr als einer ungestrichenen Spalte. Sonst streiche die Spalte l .

Falls noch nicht $m + n - 1$ Variable x_{kl} fixiert wurden, wiederhole Schritt 2.

Die mit diesem Algorithmus mit Werten belegten $m + n - 1$ Variable sind die Basisvariablen. Die anderen Variable sind Nichtbasisvariable und erhalten den Wert Null.

Satz 5.7 *Die Methode des minimalen Elementes konstruiert eine erste zulässige Basislösung für das klassische Transportproblem. Dabei werden $m + n - 1$ Variable mit nichtnegativen Werten belegt.*

Um den Rang der Koeffizientenmatrix zu untersuchen, schreiben wir die Variablen in der Reihenfolge

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}.$$

Dann ergibt sich eine Koeffizientenmatrix mit der folgenden Struktur, bei der die Spalten den Variablen in dieser Reihenfolge entsprechen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Dabei entsprechen die Zeilen im oberen Teil den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

und die Zeilen im unteren Teil den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \text{ für alle } j = 1, 2, \dots, m.$$

Da die Summe der Zeilen im oberen Teil gleich der Summe der Zeilen im unteren Teil ist, ist der Rang kleiner als $m + n$.

Satz 5.8 *Die Koeffizientenmatrix des Transportproblems hat den Rang $m + n - 1$.*

Es gibt weitere Methoden zur Konstruktion erster zulässiger Basislösungen: Nord-West-Eckenregel, Methode der minimalen Spaltensummen, Vogel-sche Approximationsmethode, um nur einige zu nennen.

5.4 Das duale Transportproblem

Das duale klassische Transportproblem (DKTP) ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j &\rightarrow \max \\ u_i + v_j &\leq c_{ij} \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Damit ergibt sich aus der Anwendung der Theorie der dualen linearen Optimierung (Satz 2.5):

Satz 5.9 *Sei \bar{x} eine zulässige Basislösung der Aufgabe (KTP) und sei I die Indexmenge der Basisvariablen von \bar{x} . Sei weiter \bar{u}, \bar{v} eine Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ für alle } (i, j) \in I. \quad (5.4)$$

Wenn dann die Optimalitätsindikatoren

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j \quad (5.5)$$

für alle $i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, m$ nichtnegativ sind, so ist \bar{x} eine optimale Lösung des klassischen Transportproblems (KTP).

Das lineare Gleichungssystem (5.4) besteht aus $m + n - 1$ Gleichungen, $m + n$ Variablen und hat eine Koeffizientenmatrix vom Rang $m + n - 1$. Damit gibt es genau einen Parameter in seiner allgemeinen Lösung, ist er fixiert, ist die Lösung eindeutig. Wir fixieren deshalb $u_1 = 0$ und bestimmen die nun eindeutige Lösung von (5.4) gleich an der Matrix C .

Danach wird die Matrix der Optimalitätsindikatoren Δ nach (5.5) aufgestellt.

5.5 Verbesserungsschritt

Sei einer der Optimalitätsindikatoren $\Delta_{i_0j_0} < 0$, es kann also die Optimalität der vorliegenden Basislösung nicht nachgewiesen werden. Wie im Simplexalgorithmus soll die Variable $x_{i_0j_0}$ einen positiven Wert θ erhalten. Damit die Gleichungsnebenbedingungen des Transportproblems (5.2) auch weiterhin erfüllt sind, muß es eine andere Variable $x_{i_0j_1}$ in der i_0 -ten Zeile geben, die um θ verringert wird, geben. Aus dem gleichen Grund muß dann in der j_1 -ten Spalte eine Variable $x_{i_1j_1}$ um θ vergrößert werden und so weiter. Unter Verwendung von Eigenschaften von Bäumen in Graphen kann gezeigt werden, daß dieser Prozeß letztendlich einen eindeutig bestimmten „Kreis (Austauschzyklus)“ von Elementen der Matrix X erzeugt, deren Elemente abwechselnd um θ vergrößert und verkleinert werden. Die Berechnung dieses Kreises erfolgt mit dem folgenden Algorithmus:

Algorithmus zur Konstruktion des Kreises:

1. Wähle ein (kleinstes) Element $\Delta_{i_0j_0}$ mit $\Delta_{i_0j_0} < 0$ aus. Markiere $x_{i_0j_0}$ sowie alle Basisvariable in der aktuellen Lösung.
2. Streiche solange Zeilen bzw. Spalten in der Matrix X , in denen nur ein markiertes Element existiert, solange dies möglich ist. Übrig bleibt der Kreis.

Der maximale Wert für θ ist gleich dem minimalen Wert einer Variable, die um θ verkleinert wird. Um diesen Wert zu ermitteln markiert man die Kreiselemente abwechselnd mit „+“ und „-“. Dann ist

$$\theta = \min\{x_{ij} : x_{ij} \text{ wurde mit „-“ markiert}\}.$$

Die neue zulässige Basislösung ergibt sich nun als

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & ; \text{ falls } x_{ij} \text{ nicht Element des Kreises ist} \\ x_{ij} + \theta & ; \text{ falls } x_{ij} \text{ mit „+“ markiert wurde} \\ x_{ij} - \theta & ; \text{ falls } x_{ij} \text{ mit „-“ markiert wurde} \end{cases}$$

Um die Optimalität dieser Lösung zu überprüfen, führe den Optimalitätstest wiederum durch. Dabei kann die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.4) in der Matrix Δ der Optimalitätsindikatoren der letzten Iteration berechnet werden.

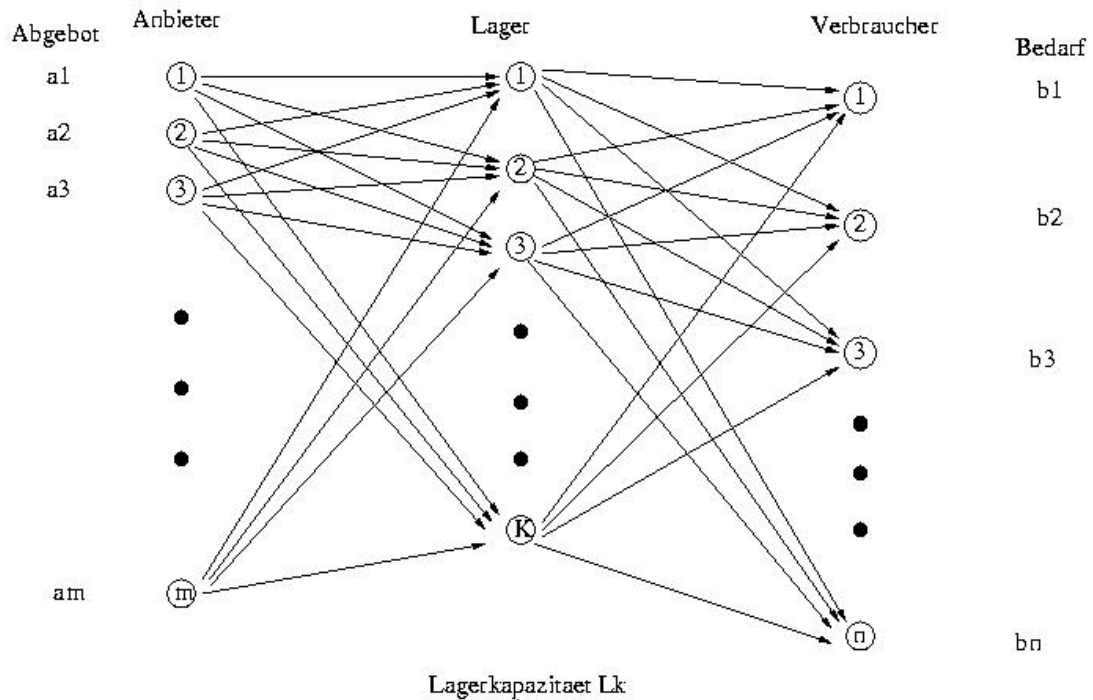


Abbildung 5.2: Graphische Darstellung des zweistufigen Transportproblems

5.6 Zweistufige Transportprobleme

5.6.1 Charakterisierung des Problems

Im Gegensatz zum klassischen Transportproblem erfolgen hier keine Direkttransporte vom Anbieter zum Verbraucher, sondern alle Transporte werden über Zwischenlager realisiert. Damit ergibt sich ein Transportgraph, wie er im Bild 5.2 illustriert wird. Neben den Angebotsmengen a_i in den Angebotsorten $i = 1, \dots, m$ und den Bedarfsmengen b_j in den Verbrauchsorten $j = 1, \dots, n$ sind noch K Lager, $k = 1, \dots, K$ mit den Lagerkapazitäten L_k gegeben. Die Kosten für den Transport einer Mengeneinheit vom Anbieter i zum k -ten Lager seien c_{ik} und die entsprechenden Kosten für den Transport einer Mengeneinheit vom Lager k zum Verbraucher j werde mit d_{kj}

bezeichnet. Wenn x_{ik} Mengeneinheiten vom Anbieter i zum k -ten Lager und y_{kj} Mengeneinheiten vom Lager k zum Verbraucher j transportiert werden sollen, so ergibt sich das folgende Modell (ZTP):

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n d_{kj} y_{kj} \rightarrow \min \quad (\text{kostenminimaler Transport})$$

$$\sum_{k=1}^K y_{kj} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{Bedarf})$$

$$\sum_{k=1}^K x_{ik} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Angebot})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^n y_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{Leeren der Lager})$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \leq L_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{Einhaltung der Lagerkapazität})$$

$$x_{ik}, y_{kl} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Hier ist wie im klassischen Transportproblem angenommen worden, daß

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

gilt.

Satz 5.10 *Das zweistufige Transportproblem ist lösbar genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{k=1}^K L_k$$

ist und $a_i, b_j, L_k \geq 0$ sind für $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, K$.

Wenn die Lagerkapazitäten alle hinreichend groß sind ($L_k \geq \sum_{i=1}^m a_i$), so läßt sich das zweistufige Transportproblem auf ein einstufiges reduzieren: Die Kostenkoeffizienten sind dann $c_{ij} = \min\{c_{ik} + d_{kj} : k = 1, \dots, K\}$. Ist $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{k=1}^K L_k$, so läßt sich das zweistufige Transportproblem entkoppeln und es sind nur zwei klassische Transportprobleme zu lösen.

Wenn im zweistufigen Transportproblem anstelle der Gleichheiten bei den Angebotsmengen und/oder den Bedarfsmengen Ungleichungen stehen, so läßt sich das Problem durch Einführung von Schlupfvariablen in obiges Modell überführen, wenn geklärt ist, an welchen Orten die überschüssigen Mengen verbleiben sollen und die Zielfunktionskoeffizienten nichtnegativ sind.

5.6.2 Transformation auf das klassische Transportproblem

Das zweistufige Transportproblem kann durch Einführung weiterer Variabler in ein klassisches Transportproblem mit verbotenen Wegen transformiert werden. Die neuen Variablen x_{kk} stehen für die ungenutzte Lagerkapazität:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n d_{kj} y_{kj} \rightarrow \min && \text{(kostenminimaler Transport)} \\
 & \sum_{k=1}^K y_{kj} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m && \text{(Bedarf)} \\
 & \sum_{k=1}^K x_{ik} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n && \text{(Angebot)} \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ik} + x_{kk} = L_k, \quad k = 1, 2, \dots, K && \text{(Einhaltung der Lagerkapazität)} \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} + x_{kk} = L_k, \quad k = 1, 2, \dots, K && \text{(Einhaltung der Lagerkapazität)} \\
 & x_{ik}, y_{kl}, x_{kk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, p
 \end{aligned}$$

Damit kann das Problem mit den oben angeführten Algorithmen gelöst werden. Die Kostenmatrix hat die folgende Gestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1K} & \infty & \infty & \dots & \infty \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2K} & \infty & \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nK} & \infty & \infty & \dots & \infty \\ \hline 0 & \infty & \dots & \infty & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1K} \\ \infty & 0 & \dots & \infty & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \infty & \infty & \dots & 0 & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mK} \end{array} \right)$$

Zur Berechnung einer zulässigen Startbasislösung kann die Methode des minimalen Elementes oder eine andere Heuristik verwendet werden. Damit dabei keine Variable mit unendlich großem Zielfunktionskoeffizient belegt werden muß, sind sinnvoller Weise erst die Elemente im linken oberen Block, dann die Elemente im linken unteren Block und zum Schluß die Elemente im rechten unteren Block zu belegen.

Kapitel 6

Diskrete Optimierung

6.1 Modellierung diskreter Optimierungsaufgaben

Die Modellierung diskreter Optimierungsaufgaben soll am Beispiel des Rundreiseproblems erläutert werden.

Das Rundreiseproblem hat die folgende Interpretation:

Ein Handelsreisender soll nacheinander $n - 1$ Städte besuchen und erst dann in seine Ausgangsstadt Nr. 1 zurückkehren. Er besucht natürlich jede Stadt genau einmal. Wie lang ist sein Reiseweg mindestens ?

Bezeichne c_{ij} die Entfernung von Stadt i und Stadt j . Die Aufgabenstellung soll anhand der Bilder (6.1), (6.2) und (6.3) erläutert werden. Gegeben sind Orte und ihre Verbindungen wie im Bild (6.1). Der Handelsreisende bewegt sich entlang der Linien zwischen den Orten. Bild (6.2) gibt eine der möglichen Fahrtrouten des Handelsreisenden an. Bild (6.3) zeigt keine mögliche Fahrtroute des Handelsreisenden, da er dann beim Start im Ort 1 keinen der Orte 3, 5, 6 und 7 erreicht. Es ist also unter allen möglichen Fahrtrouten eine solche mit minimalen Gesamtkosten (Länge, Fahrtzeiten, Reisekosten, etc.) zu suchen.

Dieses Problem läßt sich mit unterschiedlichen Mitteln modellieren. Zwei solche Mittel sollen im weiteren vorgestellt werden.

1. Modellierung mit ganzzahligen Variablen:

Wir führen Variable x_{ij} ein mit:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls der Ort } j \text{ nach dem Ort } i \text{ besucht wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

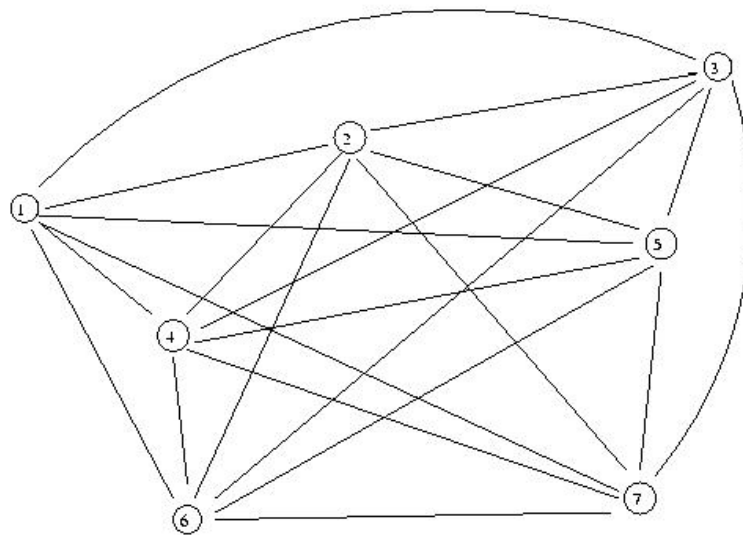


Abbildung 6.1: Aufgabenstellung Rundreiseproblem

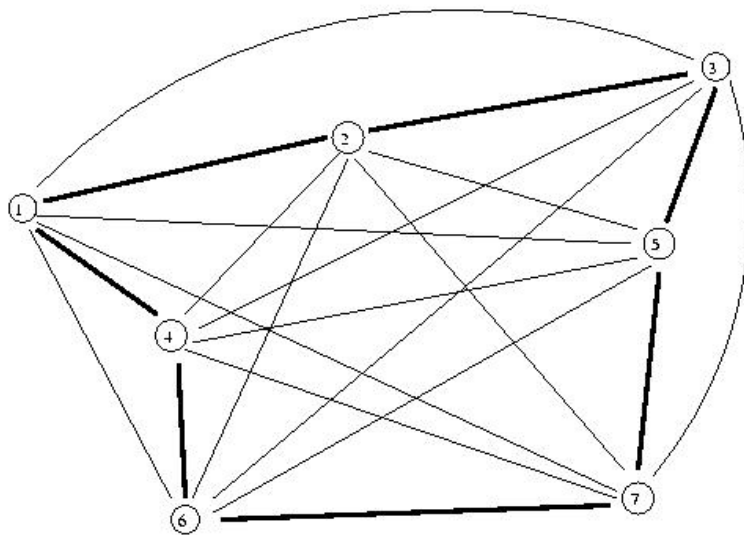


Abbildung 6.2: Mögliche Rundreise

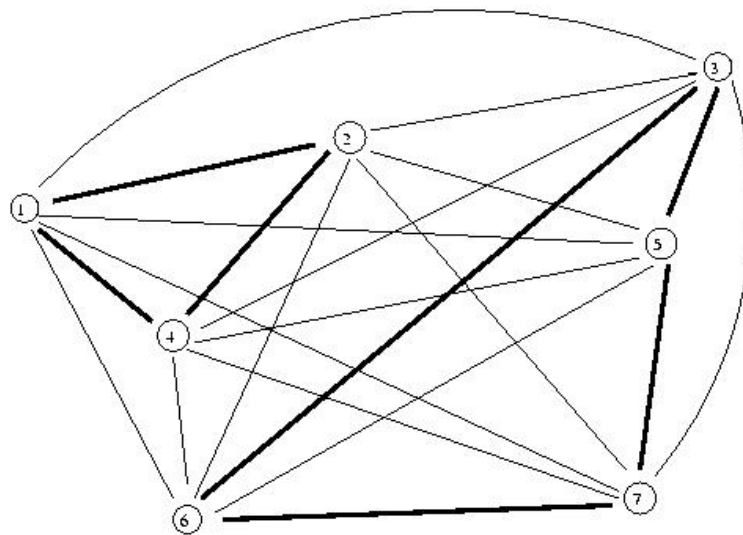


Abbildung 6.3: Keine Rundreise

Mit diesen Variablen ergibt sich das folgende Problem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (\text{Die Gesamtlänge der Tour soll minimiert werden})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{Jeder Ort soll erreicht werden})$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{Jeder Ort soll verlassen werden})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \notin U} x_{ij} \geq 1 \quad \forall U \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ mit } 2 \leq |U| \leq n-2$$

(Kurzzyklenverbote)

Die Notwendigkeit der letzten Ungleichungen sieht man in Bild (6.3) mit der Menge $U = \{3, 5, 6, 7\}$.

Problematisch ist hier die Anzahl der Nebenbedingungen, die von der Größenordnung $O(n!)$ ist.

2. Modellierung mit Permutation

Eine Permutation von $\{1, 2, \dots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung dieser Menge auf sich selbst: $\pi : \{1 \dots n\} \longrightarrow \{1 \dots n\}$

Um Permutationen zur Modellierung des Rundreiseproblems anzuwenden, bezeichne $\pi(i) = j$, daß unmittelbar nach der Stadt i die Stadt j besucht wird.

Man kann eine Permutation in einer Tabelle schreiben, in deren zweiter Zeile die Funktionswerte von $\pi(i)$ für die Argumente in der ersten Zeile stehen. Dann ergibt sich für die in der Abbildung (6.2) dargestellte Rundreise die folgende Tabelle:

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi(i)$ | 2 | 3 | 5 | 1 | 7 | 4 | 6 |

Zu erkennen ist, daß für eine Permutation jede der Zahlen in $\{1, 2, \dots, n\}$ genau einmal in der zweiten Zeile der Tabelle steht. Mathematisch kann man das wie folgt ausdrücken:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \pi(i) = j$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \pi(i) = j.$$

Unter Verwendung der Permutationen ergibt sich das folgende Modell des Rundreiseproblems:

$$\sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)} \rightarrow \min$$

unter den Bedingungen:

π ist Permutation

$$\pi(1) \neq 1 \quad (\text{der Nachfolger von 1 ist nicht 1})$$

$$\pi(\pi(1)) = \pi^2(1) \neq 1, \dots, \pi^{n-1}(1) \neq 1$$

$$\pi^n(1) = 1 \quad (\text{der } n\text{-te Nachfolger ist 1})$$

Andere Modellierungszugänge für diskrete Optimierungsaufgaben verwenden graphentheoretische Mittel.

Bemerkung 6.1 1. *Es gibt eine große Vielfalt von Problemen der diskreten Optimierung. Die besten Modellierungszugänge sind problemabhängig.*

2. *In der diskreten Optimierung gibt es eine eigenständige Theorie, die sich gerade in den letzten Jahren stürmisch entwickelt hat.*

3. *Sehr viele Anwendungsaufgaben verwenden wesentlich die diskrete Optimierung.*

6.2 Exakte Lösungsalgorithmen

6.2.1 Schnittebenenalgorithmen

Hier soll nur die grundlegende Idee der Schnittebenenalgorithmen angegeben werden.

Betrachtet werde eine ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe

$$\max\{\langle c, x \rangle : Ax \leq b, x \geq 0, \text{ ganzzahlig}\}. \quad (6.1)$$

Diesem Problem wird eine „einfach“ lösbare Optimierungsaufgabe (eine Relaxation) zugeordnet. Der Einfachheit halber entstehe diese Aufgabe durch

Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingungen. Die Relaxation ist also die lineare Optimierungsaufgabe

$$\max\{\langle c, x \rangle : Ax \leq b, x \geq 0\}. \quad (6.2)$$

Schnittebenenalgorithmus: (vgl. Abbildung 6.4)

1. Löse die Aufgabe (6.2). Eine optimale Lösung sei \bar{x} .
2. Wenn \bar{x} zulässig für die Aufgabe (6.1) ist, so ist sie optimal. Der Algorithmus bricht ab.
3. Wenn \bar{x} nicht zulässig für die Aufgabe (6.1) ist, so bestimmt man eine neue Nebenbedingung

$$\langle a, x \rangle \leq b_1$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $\langle a, \bar{x} \rangle > b_1$
- (b) für alle zulässigen Lösungen \hat{x} der Aufgabe (6.1) gilt die Ungleichung $\langle a, \hat{x} \rangle \leq b_1$.

Füge diese Ungleichung zu dem System $Ax \leq b$ hinzu (das neue System wird wieder mit $Ax \leq b$ bezeichnet) und gehe zu Schritt 1.

Problematisch ist natürlich der Schritt 3. Ansatzpunkte, um eine solche Ungleichung zu finden, stehen in der Literatur unter den Stichworten „Gomory-Schnitt“, „Chvatal-Gomory-Schnitt“, „valid cut“. Eng verbunden damit sind Untersuchungen zur „Polyedertheorie“. Hier soll nicht weiter darauf eingegangen, sondern nur auf die Literatur verwiesen werden (z.B. G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, 1988).

6.2.2 Branch-and-bound-Algorithmus

Der Vollenumerationsalgorithmus zur Lösung des linearen 0-1 Optimierungsproblems

$$\max\{\langle c, x \rangle : Ax \leq b, x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n\} \quad (6.3)$$

berechnet eine optimale Lösung nach folgendem Schema: Es werden alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$ konstruiert, diese auf Zulässigkeit überprüft und danach eine solche mit einem besten Zielfunktionswert ausgewählt. Zur Konstruktion aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$ kann man nach dem Schema in Abbildung (6.5)

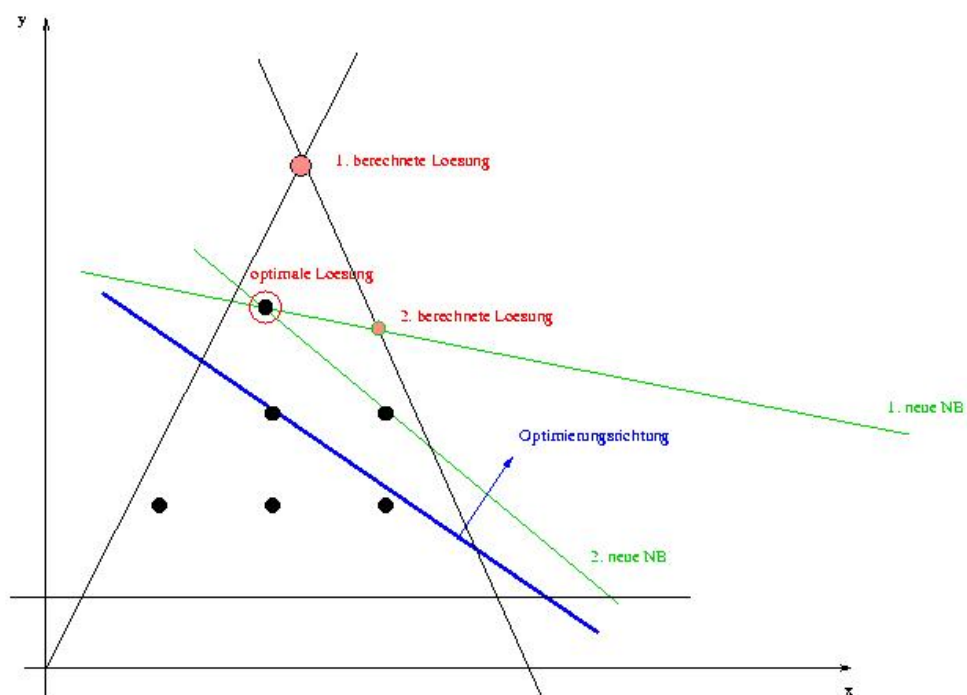


Abbildung 6.4: Der Schnittebenenalgorithmus


$$I = \{i : x_i = 0\}, J = \{i : x_i = 1\}.$$

Die Vollenumeration ist aufgrund ihres gewaltigen Rechenaufwandes allerdings nicht zur Lösung des Problems (6.3) geeignet. Eine erste Idee, diesen

Zugang in einen geeigneten Lösungsalgorithmus zumindest für kleine Aufgaben zu transformieren besteht darin, daß Äste des Verzweigungsbaumes möglichst frühzeitig abgeschnitten werden und somit möglichst frühzeitig erkannt wird, daß aus Knoten (I, J) nicht verzweigt werden muß. Zur Realisierung dieser Idee dient die Schrankenfunktion $\varphi(I, J)$, die den Knoten den optimalen Zielfunktionswert von Schrankenaufgaben zuweist. Diese Schrankenaufgaben

$$\max\{\langle c, x \rangle : Ax \leq b, x_i = 0, i \in I, x_i = 1, i \in J, 0 \leq x_i \leq 1, i \notin I \cup J\} \quad (6.4)$$

sind lineare Relaxationen der in den Knoten zu lösenden Aufgaben

$$\max\{\langle c, x \rangle : Ax \leq b, x_i = 0, i \in I, x_i = 1, i \in J, x_i \in \{0, 1\}, i \notin I \cup J\}. \quad (6.5)$$

Da die zulässigen Bereiche der Schrankenaufgaben durch weitere Fixierung von Variablen immer weiter eingeschränkt werden, gilt

$$\varphi(I, J) \geq \varphi(I', J') \text{ falls } I \subseteq I', J \subseteq J'$$

gilt. Insbesondere gilt diese Ungleichung auch, wenn $I' \cup J' = \{1, 2, \dots, n\}$ ist. Damit erhalten wir den folgenden

Satz 6.2 *Sei \bar{x} eine zulässige Lösung des Problems (6.3) und*

$$\varphi(I, J) \leq \langle c, \bar{x} \rangle.$$

Dann ist auch

$$\varphi(I', J') \leq \langle c, \bar{x} \rangle \text{ für alle } I \subseteq I', J \subseteq J'.$$

Damit muß aus dem Knoten (I, J) nicht verzweigt werden, die entsprechenden Zweige des Verzweigungsbaumes können gestrichen werden.

Branch-and-bound Algorithmus

1. $M = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ (M enthält alle noch zu lösenden Aufgaben (6.4))
 $f^* = -\infty$ (f^* ist der aktuell beste Zielfunktionswert)
2. Wenn $M = \emptyset$ ist, stopp. Wähle ein $(I, J) \in M$, setze $M := M \setminus \{(I, J)\}$ und berechne $\varphi(I, J)$. Sei \bar{x} eine sich bei der Berechnung von $\varphi(I, J)$ ergebende optimale Lösung der Aufgabe (6.4).
3. Wenn $\varphi(I, J) \leq f^*$ ist gehe zu Schritt 2.
 Sonst, wenn $\bar{x}_i \in \{0, 1\}$ für alle i ist, so setze $f^* = \langle c, \bar{x} \rangle$ und gehe zu Schritt 2. (Hier ist $\varphi(I, J) > f^*$.)

4. (Jetzt ist $\varphi(I, J) > f^*$ und es gibt i_0 mit $\bar{x}_{i_0} \in (0, 1)$, also nicht ganzzahlig.)

Wähle ein i_0 mit $\bar{x}_{i_0} \in (0, 1)$ und füge zwei neue Probleme zu M hinzu:

$$M := M \cup \{(I \cup \{i_0\}, J), (I, J \cup \{i_0\})\}.$$

Gehe zu Schritt 2.

6.3 Näherungsalgorithmen

Näherungsalgorithmen unterscheidet man in Eröffnungs- und Verbesserungsverfahren. Beide sollen am Beispiel des Rundreiseproblems

$$\sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)} \rightarrow \min$$

unter den Bedingungen:

π ist Permutation

$$\pi(1) \neq 1 \quad (\text{der Nachfolger von 1 ist nicht 1})$$

$$\pi(\pi(1)) = \pi^2(1) \neq 1, \dots, \pi^{n-1}(1) \neq 1$$

$$\pi^n(1) = 1 \quad (\text{der } n\text{-te Nachfolger ist 1})$$

exemplarisch beschrieben werden.

6.3.1 Eröffnungsverfahren

Eröffnungsverfahren konstruieren zulässige Lösungen, die möglichst gut sind. Sie sollten verbunden werden mit einer Abschätzung ihrer Güte, die wiederum nach den Prinzipien des schlechtesten Falles (worst-case analysis, die angegebene Güteschranke gilt für alle Aufgaben des untersuchten Problems) oder des wahrscheinlichen Falles (average-case analysis, die angegebene Güteschranke gilt im Mittel für alle Aufgaben des untersuchten Problems, wobei eine passende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Daten zugrunde gelegt werden muß).

Für das Rundreiseproblem werde die folgende Heuristik verwendet:

Einfügungsalgorithmus

1. Setze $V = \{1, 2, \dots, n\}$ (V ist die Menge der noch nicht besuchten Orte)

2. Wähle ein $i \in V$, $V := V \setminus \{i\}$ sowie ein $j \in V$ mit

$$c_{ij} = \max\{c_{ik} : k \in V\}.$$

Setze $V := V \setminus \{j\}$, $\pi(i) = j$, $\pi(j) = i$.

3. Wähle ein $q \in V$ mit

$$c_{pq} = \max_{j \in V} \min_{i \notin V} c_{ij}.$$

(q hat größte Entfernung zu den schon besuchten Orten)

4. Wähle ein $i_0 \notin V$ mit

$$i_0 \in \underset{i}{\operatorname{Argmin}} \{c_{iq} + c_{q\pi(i)} - c_{i\pi(i)}\}$$

(kürzester Umweg bei Einfügung des Ortes q nach dem Ort i_0)

5. Setze

$$\pi(i) = \begin{cases} \pi(i), & \text{falls } i \notin \{i_0, q\} \\ \pi(i_0), & \text{falls } i = q \\ q, & \text{falls } i = i_0 \end{cases}$$

$V := V \setminus \{q\}$, gehe zu Schritt 3, falls $V \neq \emptyset$.

Satz 6.3 Sei π^* eine optimale und $\bar{\pi}$ die mit dem Einsetzungsverfahren berechnete Lösung. Sei weiter

$$c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik} \quad \text{für alle } i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^n c_{i\bar{\pi}(i)} \leq 2 \sum_{i=1}^n c_{i\pi^*(i)}$$

Der Rechenaufwand des Algorithmus ist $O(n^2)$.

6.3.2 Verbesserungsverfahren

Verbesserungsverfahren starten mit einer zulässigen Lösung und versuchen, eine bessere zu berechnen. Die meisten dieser Verfahren beruhen auf der Beschreibung von Umgebungen einer zulässigen Lösung. Solche Umgebungen können für das Rundreiseproblem wie folgt beschrieben werden:

1. 2-opt: Die Menge der Umgebungen bei diesem Zugang besteht aus allen Rundreisen, die aus der gegebenen Rundreise π durch Ersetzung von genau 2 Nachfolgerbeziehungen durch 2 neue entstehen. Das Prinzip ist in Abbildung (6.6) beschrieben.

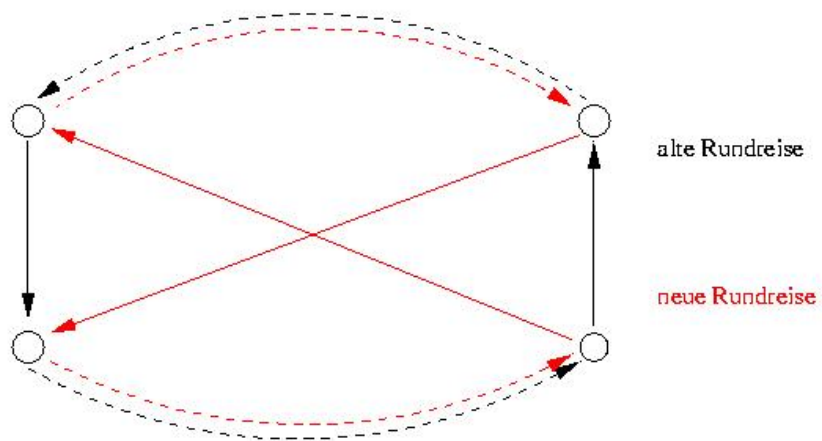


Abbildung 6.6: Rundreisebildung im 2-opt-Verfahren

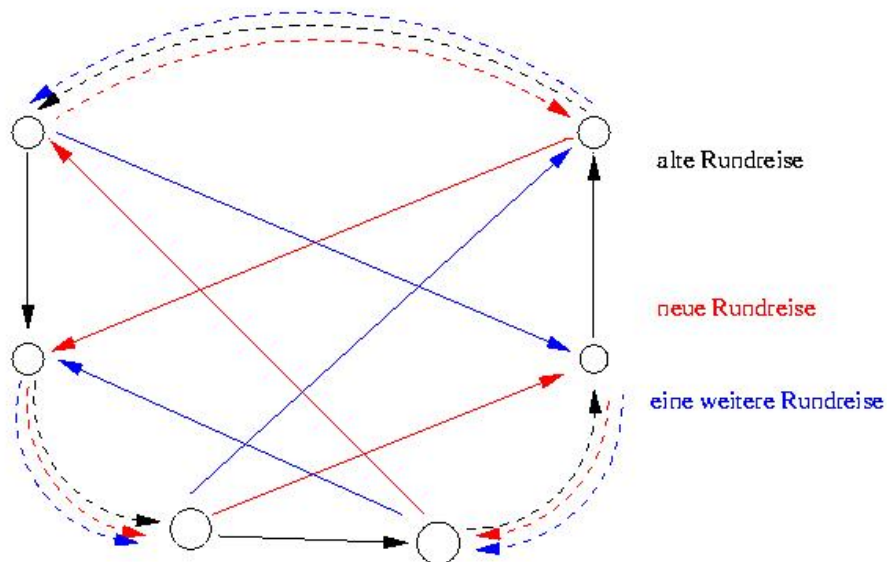


Abbildung 6.7: Rundreisebildung im 3-opt-Verfahren

2. 3-opt: Die Menge der Umgebungen bei diesem Zugang besteht aus allen Rundreisen, die aus der gegebenen Rundreise π durch Ersetzung von 2 oder 3 Nachfolgerbeziehungen durch 2 oder 3 neue entstehen. Das Prinzip ist in Abbildung (6.7) zu erkennen.

Diese Umgebungen können nun zur Konstruktion von Verbesserungsalgorithmen verwendet werden. In diesen Verbesserungsalgorithmen geht man wie folgt vor:

1. Start mit einer ersten zulässigen Lösung π und einer entsprechenden Umgebung $U(\pi)$.
2. Wähle ein $\bar{\pi} \in U(\pi)$.

3. Ersetze unter gewissen Voraussetzungen π durch $\bar{\pi}$. Kehre zu Schritt 2 zurück.

Für die Wahl von $\bar{\pi} \in U(\pi)$ in Schritt 2 gibt es mehrere Möglichkeiten, u.a.:

1. Wahl der besten Lösung $\bar{\pi}$ in dieser Umgebung.
2. Wahl einer besseren Lösung $\bar{\pi}$ in dieser Umgebung.
3. Wahl einer beliebigen Lösung $\bar{\pi}$ in dieser Umgebung.

Für die Entscheidung in Schritt 3 des Algorithmus gibt es ebenfalls mehrere Möglichkeiten, u.a.:

1. Übergang zu $\bar{\pi}$, wenn der Zielfunktionswert von $\bar{\pi}$ besser als der von π ist.
2. Übergang zu $\bar{\pi}$ auch dann, wenn der Zielfunktionswert von $\bar{\pi}$ nicht besser als der von π ist. Dann aber nur, wenn der Zielfunktionswert um nicht mehr als einen vorgegebenen Wert schlechter wird, wobei diese Schranke im Laufe der Rechnung immer einschränkender wird.

Mit dieser Herangehensweise kann man zu verschiedenen Algorithmen kommen:

1. Methoden des steilsten Abstieges benutzen bei der ersten Entscheidung die erste und bei der zweiten Entscheidung ebenfalls die erste Möglichkeit.
2. Lokale Suchmethoden verwenden bei der ersten Entscheidung die erste, zweite oder dritte und bei der zweiten Entscheidung die erste Möglichkeit.
3. Monte-Carlo Methoden verwenden bei der ersten Entscheidung die dritte und bei der zweiten Entscheidung die erste Möglichkeit.
4. Simulated Annealing verwendet bei der ersten Entscheidung die dritte und bei der zweiten Entscheidung die zweite Möglichkeit.

Ergänzende Literatur

1. K. Neumann, K. Morlock: Operations Research, Carl Hanser, 1993.
2. T. Gal u. Koll.: Grundlagen des Operations Research, Bd. 1-3, Springer Verlag, 1992
3. K.G. Murty: Operations Research. Deterministic optimization models. Prentice Hall, 1995.
4. G.B. Dantzig, M.N. Thapa: Linear Programming. Bd.I: Introduction, Springer 1997
5. D. Bertsimas, J.N. Tsitsiklis: Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific, 1997
6. K. Marti, D. Gröger: Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000