OTMAR SPINAS

MENGENLEHRE I

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT
ZU KIEL

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINFÜHRUNG

MOTIVATION. Wichtige mathematische Begriffe können wie folgt als Mengen interpretiert werden:

Funktionen: $f: X \to Y$ ist $\{\langle x, f(x)\rangle: x \in X\}$,

Paare: $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

Relationen: z.B. $<_{\mathbb{N}} = \{\langle n, m\rangle: n, m \in \mathbb{N} \text{ und } n <_{\mathbb{N}} m\}$,

natürliche Zahlen: $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, $2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ..., $n + 1 := n \cup \{n\}$.

„NAIVER MENGENBEGRIFF“ VON GEORG CANTOR. „Eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Gegenständen unseres Denkens oder unserer Anschauung.“ Dieser Mengenbegriff wird wie folgt ausgelegt: Sei E eine Eigenschaft, dann existiert die Menge, die als Elemente genau die Objekte mit Eigenschaft E hat, geschrieben als $\{x: x \text{ hat } E\}$.

Dieser naive Ansatz führt zu Widersprüchen.

BEISPIELE. (a) Die Eigenschaft E sei „nicht Element von sich selbst sein“. Bilde also $M = \{x: x \notin x\}$. Frage mich: Gilt $M \in M$? Dann aber $M \notin M$. Also $M \notin M$. Aber dann hat M Eigenschaft E, also $M \in M$. Also weder $M \in M$ noch $M \notin M$. Widerspruch.

(b) Betrachte die Eigenschaft: „die kleinste natürliche Zahl sein, die mit weniger als 50 Wörtern mit je höchstens 20 Buchstaben nicht definierbar ist“.

Beispiel (b) zeigt, daß wir vorsichtig unsere Sprache wählen müssen.

SPRACHE. Wir benutzen die ***Sprache erster Stufe*** L^S mit ***Symbolmenge*** $S = \{\in\}$, wobei $\in$ ein 2-stelliges Relationszeichen ist. Genauer:

Alphabet: $\wedge$, $\neg$, $\exists$, (,), $=$, v_n (für jedes $n \in \mathbb{N}$), $\in$

Formeln sind rekursiv definiert: ***Primformeln*** sind $v_n \in v_m$, $v_n = v_m$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Rekursionsschritt: Falls φ, ψ Formeln, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $\neg\varphi$, $\exists v_n\, \varphi$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$) Formeln.

Intuition: Alle Variablen stehen für Mengen.

ABKÜRZUNGEN. Wir verwenden folgende Abkürzungen: $\forall v_n\, \varphi$ kürzt ab $\neg\exists v_n\, \neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$ kürzt ab $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $(\varphi \to \psi)$ kürzt ab $(\neg\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ kürzt ab $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, $v_i \neq v_j$ kürzt ab $\neg v_i = v_j$, $v_i \notin v_j$ kürzt ab $\neg v_i \in v_j$. Klammern werden weggelassen, wenn aus Kontext klar.

Wir verwenden im folgenden die Buchstaben x, y, ... für Variablen, α, β, ... für Formeln und F, G, ... für Relationen. Eine ***Subformel*** einer Formel φ ist ein „Intervall in φ“, welches eine Formel ist.

BEISPIEL. φ sei $(\exists v_0\, v_0 \in v_1 \wedge \exists v_1\, v_2 \in v_1)$. φ hat fünf Subformeln.

Ein ***Wirkungsbereich eines Quantors*** $\exists v_i$ ist jene Subformel, die auf $\exists v_i$ folgt. Eine Variable v_i heißt ***gebunden***, wenn sie – überall wo sie auftritt – im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists v_i$ steht. Sonst heißt die Variable ***frei***.

Definiere *frei* auf der Menge aller Formeln rekursiv, so daß $frei(\varphi)$ die Menge der freien Variablen von φ ist: $frei(v_n \in v_m) = \{v_n, v_m\}$, $frei(v_n = v_m) = \{v_n, v_m\}$, $frei(\varphi \wedge \psi) = frei(\varphi) \cup frei(\psi)$, $frei(\exists v_n\, \varphi) = frei(\varphi) \setminus \{v_n\}$, $frei(\neg\varphi) = frei(\varphi)$.

KONVENTION. Sei φ eine Formel mit $frei(\varphi) \subseteq \{v_0, ..., v_n\}$. Dann schreiben wir $\varphi(v_0, ..., v_n)$. Falls dann $y_0,..., y_n$ Variablen sind, so ist $\varphi(y_0, ..., y_n)$ die Formel, die entsteht, wenn man in φ v_i – wo immer v_i frei auftritt – durch y_i ersetzt, alle $i \leqslant n$. Solch eine Ersetzung (***Substitution***) heißt ***erlaubt***, falls – nirgends wo v_i frei auftritt – v_i im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists y_i$ steht.

BEISPIELE. $\varphi(x)$ sei $\exists y\; x \neq y$. $\varphi(z)$ ist dann $\exists y\; z \neq y$. $\varphi(y)$ ist dann $\exists y\; y \neq y$, wobei die Ersetzung unerlaubt ist.

Ein ***Satz*** ist eine Formel ohne freie Variablen. Theoreme der Mathematik sind Sätze. Die Axiome der Mengenlehre werden Sätze sein. Der ***universelle Abschluß*** von $\varphi(x_0, ..., x_n)$ ist $\forall x_0 \ldots \forall x_n\, \varphi$, ein Satz.

2. AXIOME

Wir werden gleich die ***Zermelo-Fraenkelschen Axiome*** *ZFC* einführen. Es wird $ZFC \subseteq L_0^{\{\in\}}$. Unsere Theoreme werden $\varphi \in L_0^{\{\in\}}$ sein mit $ZFC \vdash \varphi$. Als logische Axiome stehen uns u.a. $\vdash t = t$ und $\Gamma\ \varphi\frac{t}{x} \vdash \Gamma\ \exists x\ \varphi$ zur Verfügung. Mit $\Gamma := \emptyset$, $\varphi := x = x$ erhalten wir $\vdash \exists x\ x = x$.

AXIOM I. ***Extensionalitätsaxiom***. $\forall x\ \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.

In Worten: „Zwei Mengen, die die gleichen Elemente enthalten, sind gleich.“ D.h. eine Menge ist ausschließlich durch ihre Elemente bestimmt. Die Umkehrung des Extensionalitätsaxioms ($\leftarrow$) folgt aus der Substitutionsregel für die Gleichheit (vgl. [Eb96], S. 74).

AXIOM II. ***Paarmengenaxiom***. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall s\ (s \in z \leftrightarrow (s = x \vee s = y))$.

Unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms können wir beweisen, daß es genau ein solches z gibt.

SATZ 2.1. $\forall x\ \forall y\ \forall u\ \forall v\ (\forall s\ (s \in u \leftrightarrow (s = x \vee s = y)) \wedge \forall s\ (s \in v \leftrightarrow (s = x \vee s = y)) \rightarrow u = v)$.

BEWEIS. Zeige, daß u und v dann die gleichen Elemente haben und verwende das Extensionalitätsaxiom. ⊣

NOTATION. Mit $\{x, y\}$ bezeichnen wir dieses eindeutig bestimmte z. Falls $x = y$, mit $\{x\}$. Mit Extensionalitätsaxiom zeige $\{x, y\} = \{y, x\}$. Genauer: Wir führen ein neues zweistelliges Funktionszeichen F in unser Alphabet ein und fügen den universellen Abschluß des Axioms $z = F(x, y) \leftrightarrow \forall s\ (s \in z \leftrightarrow (s = x \vee s = y))$ zu unseren Axiomen. Wir schreiben dann $\{x, y\}$ statt $F(x, y)$.

DEFINITION. Setze $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

SATZ 2.2. $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Rightarrow x = u \wedge y = v$.

BEWEIS. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ ist die Voraussetzung.
Fall 1. $x = y$. Dann $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$. Dann folgt $\{u\} = \{x\}$ und $\{u, v\} = \{x\}$. Also $u = x$: Es gilt $x \in \{x\}$. Wende die Substitutionsregel für die Gleichheit an auf die Prämisse $\{u\} = \{x\}$ und die Formel $\varphi(v) = x \in v$ mit $t = \{x\}$ und $t' = \{u\}$. Damit erhalten wir $x \in \{u\}$ und mit der Definition von $\{u\}$ also $u = x$. Ebenso $u = x = v$. Also $u = x$ und $v = y$.
Fall 2. $x \neq y$. Dann muß gelten $\{x\} = \{u\}$ und $\{x, y\} = \{u, v\}$. Aus dem ersten folgt $x = u$, und damit aus der zweiten Gleichung $y = v$. ⊣

Analog können wir geordnete Tripel, Quadrupel usw. definieren: $\langle x, y, z\rangle := \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$. Zeige: $\langle x, y, z\rangle = \langle u, v, w\rangle \Rightarrow x = u, y = v, z = w$. Alternativ läßt sich ein Tupel durch $\langle x, y\rangle' := \{x, \{x, y\}\}$ definieren.

AXIOM III. *Komprehensionsaxiom oder* ***Aussonderungsaxiom***. *Axiomschema: Zu jedem* $\varphi(z, x_0, ..., x_n)$ *und allen von z, den* x_i *und untereinander verschiedenen Variablen x, y das Axiom* $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, x_1, ..., x_n)))$.

In Worten: „Zu jeder Menge x und zu jeder Eigenschaft E, die durch einen $\{\in\}$-Ausdruck φ formulierbar ist, gibt es die Menge $\{z \in x$: *z hat die Eigenschaft E*$\}$.“

Nach Axiom I ist dieses y eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen es kurz mit $\{t: t \in z \wedge \varphi\}$ oder $\{t \in z: \varphi\}$. Zu jedem φ kriegen wir ein Axiom (deshalb Axiomschema). Insgesamt abzählbar viele.

BEMERKUNG. Warum $y \notin frei(\varphi)$? Sonst gäbe es keine nichtleere Menge: Wäre z nichtleer, wähle als $\varphi := t \notin y$. Bilde $y = \{t \in z: t \notin y\}$. Falls $z \neq \varnothing$, wähle $t_0 \in z$. Dann $t_0 \in y$ und folglich $t_0 \notin y$, Widerspruch. Falls aber $t_0 \notin y$, dann, da ja $t_0 \in z$, also $t_0 \in y$, Widerspruch.

Wir haben gesehen, daß $\exists x\, x = x$ gilt. Wende Axiom III an auf die Menge z, die wir haben mit $\varphi := \neg t = t$. Erhalte $y = \{t \in z: t \neq t\}$. Dann gilt $\forall t\; t \notin y$.

KONVENTION. Wir bezeichnen dieses y mit $\varnothing$.

SATZ 2.3. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \leftrightarrow t \in x \wedge t \in y)$.

BEWEIS. Nach Axiom III existiert $\{t \in x: t \in y\}$. Bezeichne diese Menge mit $x \cap y$. ⊣

Wir definieren nun den Schnitt von Mengen etwas allgemeiner.

DEFINITION. Sei $X \neq \varnothing$. $\bigcap X = \{t: \forall x \in X\; t \in x\}$.

Warum existiert $\bigcap X$? Wähle $x \in X$. Dann gilt $\bigcap X = \{t \in x: \forall y\, (y \in X \rightarrow t \in y)\}$. Was ist wohl $\bigcap\varnothing$? $\{t: \forall x \in \varnothing: t \in x\}$. Es gilt $\forall t\, \forall x\, (x \in \varnothing \rightarrow t \in x)$, also $\bigcap\varnothing = \{t: t = t\}$. Aber dies ist keine Menge.

SATZ 2.4. *$\{t: t = t\}$ ist keine Menge. Als Formel:* $\neg\exists z\, \forall t\; t \in z$.

BEWEIS. Angenommen $\exists z\, \forall t\; t \in z$. Bilde mittels Komprehensionsaxiom $y = \{t \in z: t \notin t\}$. Dann klarerweise $y \in z$. Wir fragen uns, ob $y \in y$ gilt. Dazu muß aber $y \notin y$ gelten. Wegen $y \in z$, also $y \in y$, Widerspruch. ⊣

Trotzdem wollen wir über solche „virtuellen" Mengen sprechen. Wir nennen sie ***Klassen***.
Eine Klasse ist genaugenommen nichts weiter als eine Formel $\varphi(x, p)$, die wir als $\{x: \varphi(x, p)\}$ interpretieren. Für Klassen verwenden wir fette Großbuchstaben, z.B. ***C***, ***D***, ***V***, ***Ord***,.... Wir schreiben auch $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{D}$ usw. Im folgenden Sinn: Sei ***C*** mittels $\varphi(x, p)$ definiert, ***D*** mittels $\psi(x, q)$. Dann ist die definierende Formel von $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}$ $\varphi(x, p) \wedge \psi(x, q)$, von $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{D}$ $\varphi(x, p) \wedge \neg\psi(x, q)$. $\boldsymbol{V} = \{x: x = x\}$.

Wir sprechen auch von ***funktionalen Klassen***. Die Klasse ***F*** – definiert durch $\varphi(x, p)$ – ist funktional, falls gilt: $\forall x\, (\varphi(x, p) \rightarrow \exists u\, \exists v\; x = \langle u, v\rangle) \wedge \forall u\, \forall v\, \exists w\, (\varphi(\langle u, v\rangle, p) \wedge \varphi(\langle u, w\rangle, p) \rightarrow v = w)$. Falls $\varphi(\langle u, v\rangle, p)$ gilt, schreiben wir $\boldsymbol{F}(u) = v$. Falls ***C*** die Klasse $\{u: \exists v\, \varphi(\langle u, v\rangle, p)\}$ ist und $\boldsymbol{D} = \{v: \exists u\, \varphi(\langle u, v\rangle, p)\}$, so schreiben wir $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$. Jede Menge ist eine Klasse; wir definieren z durch $\varphi := t \in z$, $z = \{t: t \in z\}$.
Bisher können wir $x \cap y$, $x \setminus y$ aber noch nicht $x \cup y$ bilden. Dazu benötigen wir das folgende Axiom.

AXIOM IV. ***Vereinigungsaxiom***. $\forall X\, \exists y\, \forall t\, (t \in y \leftrightarrow \exists x\, (x \in X \wedge t \in x))$.

Das postulierte y ist eindeutig und wird mit $\bigcup X$ bezeichnet.

SATZ 2.5. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \leftrightarrow (t \in x \vee t \in y))$.

BEWEIS. Wähle $X = \{x, y\}$, existiert nach Paarmengenaxiom. Bilde $\bigcup X$. Es gilt: $t \in \bigcup X \leftrightarrow \exists u\, (u \in \{x, y\} \wedge t \in u) \leftrightarrow t \in x \vee t \in y$. ⊣

Anstelle von $\bigcup\{x, y\}$ schreiben wir $x \cup y$.
Als nächsten Ziel setzen wir uns die Bildung von kartesischen Produkten $(X \times Y) = \{t: \exists u \in X\, \exists v \in Y\, t = \langle u, v\rangle\}$.

AXIOM V. ***Potenzmengenaxiom***. $\forall x\, \exists y\, \forall t\, (t \in y \leftrightarrow \forall s\, (s \in t \to s \in x))$.

Dieses y ist wieder eindeutig bestimmt und wird mit $\wp(X)$ bezeichnet.

Sobald der Kardinalitätsbegriff eingeführt ist, werden wir zeigen, daß für jedes x $\wp(x)$ größere Kardinalität als x hat. Vorläufig können wir zeigen, daß $\forall x\, \wp(x) \not\subseteq x$.
Betrachte dazu die Menge $s = \{y \in x: y \notin y\}$. Also $s \subseteq x$, also $s \in \wp(x)$. Wäre $s \in x$, müßte wegen $x = s \cup (x \setminus s)$ entweder $s \in s$ oder $s \in x \setminus s$ gelten. Im ersten Fall folgt $s \notin s$. Im zweiten Fall $s \in x$ und $s \notin s$, also $s \in s$, Widerspruch. Also folgt $s \notin x$.
Jetzt können wir $x \times y$ konstruieren für alle x, y. Wir wollen ja $x \times y = \{t: \exists u\, \exists v\, (t = \langle u, v\rangle \wedge u \in x \wedge v \in y)\}$. Es gilt $t = \langle u, v\rangle = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, wobei $u, v \in x \cup y$. Weiter gilt $\{u\}, \{u, v\} \in \wp(x \cup y)$ und damit $\{\{u\}, \{u, v\}\} \in \wp(\wp(x \cup y))$. Also $x \times y = \{t \in \wp(\wp(x \cup y)): \varphi(t, x, y)\}$. $x \times y$ existiert also nach Vereinigungs-, Potenzmengen, Paarmengen- und Komprehensionsaxiom.
Wir können jetzt auch längere endliche kartesische Produkte definieren: $x \times y \times z := (x \times y) \times z$ usw.

DEFINITION. Eine Menge R heißt ***binäre Relation***, falls alle Elemente von R geordnete Paare sind.

SATZ 2.6. *Falls R binäre Relation ist, so existieren Mengen x, y mit $R \subseteq x \times y$.*

BEWEIS. Es gilt mit $\{\{u\}, \{u, v\}\} \in R$, daß $\{u\}, \{u, v\} \in \bigcup R$ und $u, v \in \bigcup\bigcup R$. Definiere $\mathbf{dom(R)} = \{u \in \bigcup\bigcup R: \exists v\, \langle u, v\rangle \in R\}$ und $\mathbf{ran(R)} = \{v \in \bigcup\bigcup R: \exists u\, \langle u, v\rangle \in R\}$. Beides sind Mengen, und es ist leicht zu zeigen, daß $R \subseteq dom(R) \times ran(R)$. Wir können also $x = dom(R)$ und $y = ran(R)$ nehmen, oder einfach $x = y = \bigcup\bigcup R$. ⊣

Ist R eine binäre Relation, so zeigt man mit Hilfe des Komprehensionsaxioms, daß auch $\boldsymbol{R^{-1}} := \{(y, x): (x, y) \in R\}$ eine Menge ist.

DEFINITION. Eine binäre Relation R heißt ***Funktion***, falls gilt $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R) \to y = z)$. „$f: x \to y$“ kürzt ab „$f$ ist eine Funktion und $dom(f) = x$ und $ran(f) \subseteq y$“.
Falls $f: x \to y$ und $z \subseteq x$, können wir $\boldsymbol{f \upharpoonright z}$, die ***Restriktion*** *von f auf z*, bilden als $f \upharpoonright z = \{t \in f: \exists u\, \exists v\, (t = \langle u, v\rangle \wedge u \in z)\}$.
Falls g eine weitere Funktion ist, so heißt g ***Fortsetzung*** *von f*, falls $f \subseteq g$.

BEMERKUNG. Falls f eine injektive Funktion ist, so ist auch f^{-1} eine injektive Funktion.

Aufgrund der Axiome I bis V können wir nicht beweisen, daß eine unendliche Menge existiert.

AXIOM VI. ***Unendlichkeitsaxiom***. $\exists X\, (\varnothing \in X \wedge \forall y\, (y \in X \to y \cup \{y\} \in X))$.

Dieses X enthält also $0 := \varnothing$, $1 := \{\varnothing\}$, $2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, ..., die natürlichen Zahlen. Dieses X ist aber nicht eindeutig bestimmt. Intuitiv ist X unendlich, aber „unendlich“ ist noch nicht definiert.

AXIOM VII. ***Ersetzungsaxiom***. *Axiomschema: Sei* $\varphi(x, y)$ *eine „funktionale Formel", d.h. es gilt* $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z)$, *und sei X eine Menge. Dann ist* $Y = \{y{:}\ \exists x\ (x \in X \wedge \varphi(x, y))\}$ *eine Menge.*

Kurzform: Falls $\boldsymbol{F}{:}\ \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ eine funktionale Klasse ist und X eine Menge, so ist $\boldsymbol{F}[x]$ eine Menge, wobei $\boldsymbol{F}[x] := \{y{:}\ \exists x\ (x \in X\ \boldsymbol{F}(x) = y)\}$.

AXIOM VIII. *Regularitätsaxiom oder* ***Fundierungsaxiom***. $\forall x\ (\exists y\ y \in x \rightarrow \exists z\ (z \in x \wedge \neg \exists u\ (u \in x \wedge u \in z))$ *oder kürzer* $\forall x\ (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists z\ (z \in x \wedge z \cap x = \emptyset))$.

In Worten: „Jede nichtleere Menge besitzt ein $\in$-minimales Element."

SATZ 2.7. $\forall x\ x \notin x$.

BEWEIS. Betrachte sonst, falls $x \in x$, $x = \{x\}$. Dann ist $x \cap x = \{x\}$. Also x hat kein $\in$-minimales Element. Allgemeiner: $x_0 \in x_1 \in x_2 \in x_0$ ist unmöglich; denn sonst hätte $\{x_0, x_1, x_2\}$ kein $\in$-minimales Element. ⊣

AXIOM IX. ***Auswahlaxiom*** *(AC).* $\forall X\ (\forall x\ (x \in X \rightarrow x \neq \emptyset) \rightarrow \exists f\ (f \text{ ist Funktion} \wedge dom(f) = X \wedge \forall x\ (x \in X \rightarrow f(x) \in x))$.

In Worten: „Jede Menge, deren Elemente alle nicht leer sind, besitzt eine Auswahlfunktion."

ÜBUNGEN

2.1. Zeige: $3 \neq 4$.

2.2. Schreibe eine formale Version des Ersetzungsaxioms.

2.3. Zeige, daß zu Mengen x, y das kartesische Produkt $x \times y$ existiert, ohne dabei das Potenzmengenaxiom zu verwenden.

2.4. Zeige, daß $\langle x, y\rangle' := \{x, \{x, y\}\}$ eine alternative Möglichkeit zur Definition des geordneten Paares von x und y ist. Tipp: Verwende das Fundierungsaxiom.

2.5. Sei $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Bestimme die folgenden Mengen durch Auflisten ihrer Elemente: $\bigcup x$, $\bigcap x$, $\wp(\{x\})$, $\wp(x) \cap \bigcup\bigcap\{x, \{x\}\}$.

2.6. Verwende die *ZFC*-Axiome, um zuzeigen, daß für alle Mengen x, y die folgenden Klassen Mengen sind: $\{\wp(y){:}\ y \in x\}$, $\{f{:}\ f{:}\ x \rightarrow y\}$.

2.7. Wird durch $[x, y] := \{x, \{y\}\}$ ein geordnetes Paar definiert?

2.8. Zeige, daß das Paarmengenaxiom aus den übrigen Axiomen folgt. Tipp: Wende das Ersetzungsaxiom an auf die ohne Paarmengenaxiom konstruierte Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.9. Sei *Ext* das Extensionalitätsaxiom. Finde eine Menge M, so daß Ext^M nicht gilt.

2.10. Sei $\boldsymbol{M}$ Modell für das Komprehensionsaxiom. Zeige:

(a) Falls $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \forall y \in \boldsymbol{M}\ \exists z \in \boldsymbol{M}\ (x \in z \wedge y \in z)$, so ist $\boldsymbol{M}$ Modell für das Paarmengenaxiom.

(b) Falls $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \exists z \in \boldsymbol{M}\ \bigcup x \subseteq z$, so ist $\boldsymbol{M}$ Modell für das Vereinigungsaxiom.

(c) Angenommen für jede Formel $\varphi(x, y, p)$ und für alle A, $p \in \boldsymbol{M}$ mit der Eigenschaft $\forall x \in A\ \exists! y \in \boldsymbol{M}\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, p)$ gelte $\exists Y \in \boldsymbol{M}\ \{y: \exists x \in A\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, p)\} \subseteq Y$. Dann ist $\boldsymbol{M}$ Modell für das Ersetzungsaxiom.

3. ORDINALZAHLEN

DEFINITION. Ein Paar $\langle P, <\rangle$ ist eine ***Partialordnung***, falls $< \subseteq P \times P$ und für alle $x, y, z \in P$ gilt

(a) $\langle x, x\rangle \notin <$ (*Irreflexivität*),

(b) $\langle x, y\rangle \in < \wedge \langle y, z\rangle \in < \Rightarrow \langle x, z\rangle \in <$ (*Transitivität*).

Es folgt

(c) $\neg(x < y \wedge y < x)$,

da sonst mit Transitivität $x < x$ folgt.

Hier und im folgenden schreiben wir $x < y$ anstelle von $\langle x, y\rangle \in <$. Außerdem verwenden wir $x \leqslant y$ anstelle von $x < y \vee x = y$ und $x > y$ anstelle von $y < x$.

Eine Partialordnung heißt ***Totalordnung*** (oder auch *lineare Ordnung*), falls $\forall x\ \forall y\ ((x \in P \wedge y \in P) \rightarrow (x = y \vee x < y \vee y < x)$ (*Trichotomie*).

Eine Menge $X \subseteq P$ heißt ***Anfangsabschnitt*** *von P*, falls ein $x \in P$ existiert, so daß $X = \{y \in P\colon y < x\}$. Dann schreiben wir $X = \boldsymbol{P(x)}$.

BEISPIELE. $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ ist eine Totalordnung.

Falls x mindestens zwei Elemente hat, ist $(\wp(x), \subseteq)$ eine Partialordnung, aber keine Totalordnung.

Sei $(P, <)$ eine Partialordnung, $A \subseteq P$, $x \in P$. Wir sagen *x ist **maximales Element** von A* $:\Leftrightarrow x \in A \wedge \forall y \in A\ \neg x < y$, *x ist **minimales Element** von A* $:\Leftrightarrow x \in A \wedge \forall y \in A\ \neg y < x$, *x ist größtes Element von A* oder *das **Maximum** von A* $:\Leftrightarrow x \in A \wedge \forall y \in A\ y \leqslant x$, *x ist kleinstes Element von A* oder *das **Minimum** von A* $:\Leftrightarrow x \in A \wedge \forall y \in A\ x \leqslant y$, *x ist **obere Schranke** von A* $:\Leftrightarrow \forall y \in A\ y \leqslant x$, *x ist **untere Schranke** von A* $:\Leftrightarrow \forall y \in A\ x \leqslant y$, *x ist **Supremum** von A* $:\Leftrightarrow$ x ist obere Schranke von A und $x \leqslant y$ für jede obere Schranke y von A, *x ist **Infimum** von A* $:\Leftrightarrow x$ ist untere Schranke von A und $y \leqslant x$ für jede untere Schranke y von A.

DEFINITION. Eine Partialordnung $(P, <)$ heißt ***Wohlordnung***, falls $(P, <)$ eine Totalordnung ist und jede nichtleere Teilmenge von P ein kleinstes Element besitzt ($\forall X\ (X \subseteq P \wedge X \neq \emptyset) \rightarrow \exists y\ (y \in X \wedge \forall z\ (z \in X \rightarrow y \leqslant z))$).

BEMERKUNG. Jede endliche Totalordnung ist eine Wohlordnung.

Gegeben seien zwei Partialordnungen $(P_1, <_1)$ und $(P_2, <_2)$. Eine Abbildung $f\colon P_1 \rightarrow P_2$ heißt ***ordnungstreu***, falls gilt: $\forall x\ \forall y\ ((x \in P_1 \wedge y \in P_1) \rightarrow (x <_1 y \leftrightarrow f(x) <_2 f(y)))$. Kurz: Für alle $x, y \in P_1$: $x <_1 y \Leftrightarrow f(x) <_2 f(y)$.

BEMERKUNG. Ein ordnungstreues f braucht nicht injektiv zu sein. f ist aber injektiv, falls $(P_1, <_1)$ eine Totalordnung ist: Falls $x \neq y$ und $x, y \in P_1$, dann entweder $x <_1 y$, also $f(x) <_2 f(y)$ und folglich $f(x) \neq f(y)$, oder $y <_1 x$, also $f(y) <_2 f(x)$, also $f(x) \neq f(y)$.

Eine bijektive ordnungstreue Abbildung $f\colon P_1 \rightarrow P_2$ heißt ***Isomorphismus***. Ein Isomorphismus zwischen P_1 und P_1 heißt ***Automorphismus***.

LEMMA 3.1. *Sei $(P, <)$ eine Wohlordnung und sei $f\colon P \rightarrow P$ ordnungstreu. Dann gilt $\forall x \in P\ f(x) \geqslant x$.*

BEWEIS. Andernfalls ist die Menge $A = \{x \in P: f(x) < x\}$ nicht leer. Da $(P, <)$ wohlgeordnet ist, existiert $min(A) =: x_0$. Also $f(x_0) < x_0$, da $x_0 \in A$. Da f ordnungstreu ist, folgt $f(f(x_0)) < f(x_0)$. Also $f(x_0) \in A$. Widerspruch zur Minimalität von x_0. $\dashv$

KOROLLAR 3.2. *Sei $(P, <)$ eine Wohlordnung und sei $f: P \to P$ ein Automorphismus. Dann gilt $f = id_P$, d.h. $f(x) = x$ für alle $x \in P$.*

BEWEIS. Angenommen es gäbe einen nichttrivialen Automorphismus $f: P \to P$, d.h. $\exists x\, f(x) \neq x$. Klarerweise ist auch $f^{-1}: P \to P$ ein Automorphismus. Falls $f(x) \neq x$, so folgt aus Lemma 3.1 $f(x) > x$. Es folgt $f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(x)$. Also $f^{-1}(x) < x$, im Widerspruch zu Lemma 3.1. $\dashv$

KOROLLAR 3.3. *Falls zwei Wohlordnungen isomorph sind, so ist der Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Seien $(P_1, <_1)$, $(P_2, <_2)$ Wohlordnungen und sei $f: P_1 \to P_2$ ein Isomorphismus und sei auch $g: P_1 \to P_2$ ein Isomorphismus. Zu zeigen ist $f = g$.

Angenommenn es gäbe $x \in P_1$ und $f(x) \neq g(x)$. Jede Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus. Also ist $g^{-1} \circ f$ ein Automorphismus von P_1. Es gilt $g^{-1}(f(x)) \neq x$, da $g^{-1}(g(x)) = x$, $g(x) \neq f(x)$ und g^{-1} injektiv ist, Widerspruch zu Korollar 3.2. $\dashv$

LEMMA 3.4. *Keine Wohlordnung ist isomorph zu einem Anfangsabschnitt von sich selbst.*

BEWEIS. Sei $(P, <)$ eine Wohlordnung, $P \neq \emptyset$. Angenommen es gäbe $x \in P$ und einen Isomorphismus $f: P \to P(x)$, wobei $P(x) = \{y \in P: y < x\}$. Definiere $f': P \to P$ durch $f'(y) = f(y)$, alle $y \in P$. f' ist immer noch ordnungstreu, aber nicht mehr surjektiv. Es gilt $f'(x) < x$, Widerspruch zu Lemma 3.1. $\dashv$

SATZ 3.5. *Seien $(P_1, <_1)$, $(P_2, <_2)$ Wohlordnungen. Dann gilt genau einer der folgenden drei Fälle:*

(a) P_1 und P_2 sind isomorph.

(b) P_1 ist isomorph zu einem Anfangsabschnitt von P_2.

(c) P_2 ist isomorph zu einem Anfangsabschnitt von P_1.

BEWEIS. Definiere $f = \{\langle x, y\rangle \in P_1 \times P_2: P_1(x) \text{ ist isomorph zu } P_2(y)\}$. f ist eine Menge nach Komprehensionsaxiom. Wegen Lemma 3.4 ist f eine Funktion.

Angenommen $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in f$, also $P_1(x) \cong P_2(y)$ und $P_1(x) \cong P_2(z)$. Dann ist $P_2(y) \cong P_2(z)$. Falls $y \neq z$, z.B. $y <_2 z$, dann gilt $P_2(y) = P_2(z)(y)$, also $P_2(z)$ wäre isomorph zu einem Anfangsabschnitt von sich selbst. Widerspruch zu Lemma 3.4. Also folgt $y = z$.

Seien $x, x' \in P_1$, $x <_1 x'$ und $x' \in dom(f)$. Wir werden zeigen, daß dann $x \in dom(f)$ und $f(x) <_2 f(x')$. Dazu wähle $y' \in P_2$, so daß $\langle x', y'\rangle \in f$. Es gibt einen Isomorphismus $h: P_1(x') \to P_2(y')$. Setze $y := h(x)$. Es gilt, daß $h \restriction P_1(x): P_1(x) \to P_2(y)$ ein Isomorphismus ist. Es folgt $\langle x, y\rangle \in f$, also $x \in dom(f)$. Nach Konstruktion $f(x) = y < y' = f(x')$.

In der obigen Situation haben wir $f(x) = h(x)$ erhalten. Da x beliebig war, folgt $f \restriction P_1(x') = h$. Also insbesondere ist $f \restriction P_1(x'): P_1(x') \to P_2(y')$ ein Isomorphismus. Da x' beliebig, folgt: $\forall \langle u, v\rangle \in f: f \restriction P_1(u): P_1(u) \to P_2(v)$ ist ein Isomorphismus.

Wir haben also gezeigt: (*) Falls $x \in dom(f)$, so gilt $P_1(x) \subseteq dom(f)$, $P_2(f(x)) \subseteq ran(f)$ und $f \restriction P_1(x)$ ist ein Isomorphismus von $P_1(x)$ auf $P_2(f(x))$.

Fall 1. $dom(f) = P_1$ und $ran(f) \neq P_2$. Behauptung: Sei $y_0 := min\{y \in P_2: y \notin ran(f)\}$. Aus (*) folgt $ran(f) = P_2(y_0)$. Warum? „$\supseteq$“ folgt aus der Minimalität von y_0. „$\subseteq$“. Sei $y \in ran(f)$, z.B. y

$= f(x)$. Wollen zeigen, daß $y < y_0$. Sonst $y > y_0$. Wegen (*) gilt $f \upharpoonright P_1(x)$: $P_1(x) \to P_2(y)$, aber $y_0 \in P_2(y)$, also doch $y_0 \in ran(f)$ und $ran(f) = P_2$, Widerspruch.

Fall 2. $dom(f) \neq P_1$ und $ran(f) = P_2$. Sei $x_0 := min\{x \in P_1\colon x \notin dom(f)\}$. Wegen (*) gilt $dom(f) = P_1(x)$.

Fall 3. $dom(f) = P_1$ und $ran(f) = P_2$. f ist injektiv und ordnungstreu: Seien $x, x' \in P_1$, $x > x'$. Sei $y = f(x)$, $y' = f(x')$. wegen (*) ist $y' \in P_2(y)$, also $y' < y$.

Fall 4. $dom(f) \neq P_1$ und $ran(f) \neq P_2$. Wir wollen zeigen, daß dies unmöglich ist. Sei $x_0 := min\{x \in P_1\colon x \notin dom(f)\}$ und $y_0 := min\{y \in P_2\colon y \notin ran(f)\}$. Mit Hilfe von (*) folgt $dom(f) = P_1(x_0)$ und $ran(f) = P_2(y_0)$. Also $f\colon P_1(x_0) \to P_2(y_0)$ surjektiv. Außerdem ist f ordnungstreu (wie oben). Also $P_1(x_0) \cong P_2(y_0)$, folglich $\langle x_0, y_0\rangle \in f$. Also $x_0 \in dom(f)$, $y_0 \in ran(f)$, Widerspruch. ⊣

DEFINITION. Eine Menge x heißt ***transitiv***, falls $\forall y\ \forall z\ ((y \in z \wedge z \in x) \to y \in x)$, kurz „Jedes Element von x ist Teilmenge von x".

BEISPIELE. $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ sind transitiv. Hingegen ist $\{\{\varnothing\}\}$ nicht transitiv.

DEFINITION. Eine Menge x heißt *ordinal* bzw. ***Ordinalzahl***, falls x transitiv ist und wohlgeordnet ist durch $\in$ auf x, d.h. die Relation $\{\langle y, z\rangle\colon y, z \in x \text{ und } y \in z\}$ eine Wohlordnung auf x ist.

Konvention: Ordinalzahlen werden meist mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Wir schreiben oft $\alpha < \beta$ statt $\alpha \in \beta$.

SATZ 3.6. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) $\varnothing$ *ist ordinal.*

(b) Falls α *ordinal und* $\beta \in \alpha$, *so ist* β *ordinal.*

(c) Falls α, β *ordinal und* $\alpha \subset \beta$, *so ist* $\alpha \in \beta$.

(d) Falls α, β *ordinal, so gilt* $\alpha \subseteq \beta$ *oder* $\beta \subseteq \alpha$.

(e) Falls α, β *ordinal, so gilt* $\alpha \in \beta$ *oder* $\alpha = \beta$ *oder* $\beta \in \alpha$.

BEWEIS. *Fall (a)* ist trivial.

Fall (b). Da α transitiv ist, gilt $\beta \subseteq \alpha$. Da $\langle \alpha, \in\rangle$ eine Wohlordnung ist, ist trivialerweise $\langle \beta, \in\rangle$ eine Wohlordnung; denn jede Teilordnung einer Wohlordnung ist Wohlordnung. Also ist nur zu zeigen, daß β transitiv ist. Seien also $\gamma \in \beta$ und $\delta \in \gamma$ beliebig. Zeige $\delta \in \beta$. Es gilt $\beta \subseteq \alpha$, also $\gamma \in \alpha$. Also $\gamma \subseteq \alpha$, also $\delta \in \alpha$. Zusammen $\delta, \gamma, \beta \in \alpha$ und $\delta \in \gamma$ und $\gamma \in \beta$. Da $\in$ eine transitive Relation auf α ist, folgt $\delta \in \beta$.

Fall (c). Setze $\gamma := min(\beta \setminus \alpha)$, wobei min bzgl. der Wohlordnung $\in$ auf β. Behauptung: $\alpha = \gamma$. „$\subseteq$": Sei $\delta \in \alpha$. Also $\delta \in \beta$. Falls $\delta \notin \gamma$, folgt $\delta = \gamma \vee \gamma \in \delta$, da $\langle \beta, \in\rangle$ linear geordnet ist. $\gamma = \delta$ ist unmöglich, da $\delta \in \alpha$, aber $\gamma \notin \alpha$. $\gamma \in \delta$ ist unmöglich, da sonst $\gamma \in \alpha$ wegen α ordinal. Es folgt $\delta \in \gamma$. „$\supseteq$": Sei $\delta \in \gamma$. Da β transitiv ist, folgt $\delta \in \beta$. Wegen Minimalität von γ folgt $\delta \in \alpha$.

Fall (d). Angenommen nicht, also $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ und $\alpha \cap \beta \subset \beta$, Setze $\gamma := \alpha \cap \beta$. Da ein Durchschnitt von zwei Ordinalzahlen trivialerweise ordinal ist, folgt, daß γ ordinal ist. Aus Fall (c) folgt $\gamma \in \alpha$ und $\gamma \in \beta$, also $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$. Also $\gamma \in \gamma$. Das widerspricht der Irreflexivität von $\in$ auf α bzw. auf β.

Fall (e). Seien α, β ordinal und $\alpha \neq \beta$. Nach Fall (d) gilt $\alpha \subset \beta$ oder $\beta \subset \alpha$, nach Fall (c) also $\alpha \in \beta$ oder $\beta \in \alpha$. ⊣

Mit ***Ord*** bezeichnen wir die Klasse aller Ordinalzahlen.

Korollar 3.7. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) *$\in$ ist eine lineare Ordnung auf* ***Ord****.*

(b) *Sei α ordinal. Dann ist $\alpha = \{\beta \in \mathbf{Ord}: \beta < \alpha\}$.*

(c) *Sei **C** eine nichtleere Klasse von Ordinalzahlen. Dann ist $\bigcap\mathbf{C}$ ordinal, $\bigcap\mathbf{C} \in \mathbf{C}$ und $\bigcap\mathbf{C} = min(\mathbf{C})$, d.h. $\forall x \in \mathbf{C}\ \bigcap\mathbf{C} \leq x$.*

(d) *Sei X eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\bigcup X$ ordinal, außerdem gilt $\bigcup X = sup(X)$. (Nicht notwendigerweise $\bigcup X \in X$).*

(e) *Falls α ordinal ist, so auch $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$, außerdem $\alpha + 1 = min\{\beta \in \mathbf{Ord}: \beta > \alpha\}$.*

(f) ***Ord*** *ist eine echte Klasse, d.h. keine Menge.*

BEWEIS. *Fall (a)*. Angenommen $\alpha \in \alpha$ für ein ordinales α. Dann $\alpha \in \alpha \in \alpha$, im Widerspruch zur Irreflexivität von $\in$ auf α. Angenommen $\gamma \in \beta \in \alpha$. α ordinal, also $\beta \subseteq \alpha$, also $\gamma \in \alpha$. (e) aus Satz 3.6 gibt die Trichotomie.

Fall (b). „$\supseteq$“ ist trivial. „$\subseteq$“ wegen (b) aus Satz 3.6.

Fall (e). $\alpha + 1$ ist klarerweise ordinal. $\alpha \in \alpha + 1$. Sei $\alpha \in \beta$ und β ordinal. Also $\alpha \subseteq \beta$. Folglich $\alpha + 1 \subseteq \beta$, also $\alpha + 1 = \beta$ oder $\alpha + 1 < \beta$ (vgl. Satz 3.6 (c)).

Fall (f). Sonst wäre ***Ord*** ordinal. Also auch $\mathbf{Ord} + 1$. Aber $\mathbf{Ord} + 1 \in \mathbf{Ord}$, Widerspruch zu Fall (e). $\dashv$

BEMERKUNG. Aus (a) und (c) des vorigen Korollars folgt: Sei $X \subseteq \mathbf{Ord}$ eine Menge. Dann ist $(X, \subseteq)$ eine Wohlordnung.

SATZ 3.8. *Jede Wohlordnung ist isomorph zu einer eindeutig bestimmten Ordinalzahl.*

BEWEIS. Die *Eindeutigkeit* folgt aus Lemma 3.4 und Satz 3.6: Sei $(P, <)$ eine Wohlordnung. Angenommen α und β wären verschiedene Ordinalzahlen, die isomorph zu P sind. Dann sind α und β isomorph. Falls z.B. $\alpha < \beta$, so ist nach Satz 3.6 (b) $\alpha = \beta(\alpha)$, der durch α bestimmte Anfangsabschnitt von β. Widerspruch zu Lemma 3.4.

Zur *Existenz*: Betrachte die Formel $\varphi(t) := \exists x\ \exists\alpha\ (t = \langle x, \alpha\rangle \wedge x \in P \wedge \alpha \text{ ordinal} \wedge \alpha \cong P(x))$.

Behauptung: Es gilt, daß zu jedem $x \in P$ genau ein α existiert derart, daß $\varphi(\langle x, \alpha\rangle)$ gilt. Mit anderen Worten φ definiert eine funktionale Klasse $\mathbf{F}: P \to \mathbf{Ord}$.

Die *Eindeutigkeit* erhalten wir wie oben.

Zur *Existenz* (ähnlich wie Satz 3.5): Zeige zuerst: (*) Falls $\mathbf{F}(x) = \alpha$, so ist $P(x) \subseteq dom(\mathbf{F})$ und $\alpha \subseteq ran(\mathbf{F})$ und $\mathbf{F} \restriction P(x): P(x) \to \alpha$ ist ein Isomorphismus.

Beweis von (*). Nach Voraussetzung existiert ein Isomorphismus $h: P(x) \to \alpha$. Sei $y \in P(x)$. Klarerweise ist $h \restriction P(y)$ ein Isomorphismus zwischen $P(y)$ und $\alpha(h(y))$. Aber $\alpha(h(y)) = h(y)$. Es folgt $\varphi(\langle y, h(y)\rangle)$. Wir haben gezeigt $\mathbf{F} \restriction P(x) = h$. Das genügt für (*).

Beweis der Behauptung: Angenommen $dom(\mathbf{F}) \subset P$. Da P wohlgeordnet ist, existiert also $x_0 := min(P \setminus dom(\mathbf{F}))$. Nach (*) folgt $dom(\mathbf{F}) = P(x_0)$. Nach Ersetzungsaxiom ist $\mathbf{F}[P(x_0)] =: \gamma$ eine Menge. Klar: $\gamma \subseteq \mathbf{Ord}$.

Behauptung 2: γ ist ordinal. Wegen der Bemerkung vor Satz 3.8 ist nur zu zeigen, daß γ transitiv ist: Sei $\alpha \in \gamma$. Es existiert $x \in P(x_0)$ mit $\mathbf{F}(x) = \alpha$. Wegen (*) ist $\alpha = \mathbf{F}[P(x)] \subseteq \gamma$.

Außerdem ist $\mathbf{F} \restriction P(x_0): P(x_0) \to \gamma$ ein Isomorphismus. $y_0 < y_1 < x_0$. Also $y_1 \in dom(\mathbf{F})$. Sei $\delta_1 = \mathbf{F}(y_1)$. Nach (*) ist $\mathbf{F} \restriction P(y_1): P(y_1) \to \delta_1$ Isomorphismus. Also $\mathbf{F}(y_0) < \delta_1$. Also $\mathbf{F}$ ordnungstreu. Gezeigt ist also: $\mathbf{F}: P(x_0) \to \gamma$ ist Isomorphismus und γ ordinal. Natürlich gilt $\mathbf{F}$

$= \boldsymbol{F} \cap (P(x_0) \times \gamma)$. Also ist $\boldsymbol{F}$ eine Menge wegen Komprehensionsaxiom. Es folgt $\varphi(\langle x_0, \gamma\rangle)$, also $x_0 \in dom(\boldsymbol{F})$, ein Widerspruch. Es folgt $dom(\boldsymbol{F}) = P$.

Sei wieder $\gamma := \boldsymbol{F}[P]$. Nach Ersetzungsaxiom ist γ eine Menge. Mit den gleichen Argumenten wie oben zeigt man, daß γ ordinal, $\boldsymbol{F}$ ein Isomorphismus und eine Menge ist. γ ist also die gesuchte zu P isomorphe Ordinalzahl. ⊣

DEFINITION. Sei $(P, <)$ eine Wohlordnung. Die (nach Satz 3.8) eindeutig bestimmte zu P isomorphe Ordinalzahl nennen wir den ***Ordnungstyp*** *von* P, kurz ***o.t.(P)***.

Klar: α ordinal $\Rightarrow o.t.(\alpha) = \alpha$.

DEFINITION. Eine Ordinalzahl α heißt ***Nachfolgerordinalzahl***, falls $\alpha = \beta + 1$ für ein β gilt. Falls α nicht Nachfolgerzahl ist und $\alpha \neq \emptyset$, so heißt α ***Limes(ordinal)zahl***.

DEFINITION. Eine Ordinalzahl α heißt ***natürliche Zahl***, falls $\forall\beta \leqslant \alpha\ (\beta = 0 \vee \exists\gamma\ \beta = \gamma + 1)$.

Klar ist, daß die Klasse der natürlichen Zahlen entweder ein Anfangsabschnitt von ***Ord*** oder ganz ***Ord*** ist: Falls α natürliche Zahl und $\beta < \alpha$, so ist auch β eine natürliche Zahl.

SATZ 3.9. *Sei X eine Menge mit $0 \in X$ und der Eigenschaft $\forall y\ (y \in X \rightarrow y \cup \{y\} \in X)$. Dann enthält X alle natürlichen Zahlen.*

BEWEIS. Angenommen es gäbe eine natürliche Zahl n mit $n \notin X$. Also ist $n \neq 0$. Es gibt also ein m mit $m = m + 1$, wobei m eine natürliche Zahl ist. Es gilt $m \notin X$. Es folgt $m \setminus X \neq \emptyset$. Sei $q = min(n \setminus X)$. Es folgt $q \neq 0$, aber q ist natürliche Zahl. Es gibt also r mit $q = r + 1$. Wegen Minimalität von q folgt $r \in x$. Aber dann auch $r + 1 \in X$, Widerspruch. ⊣

KOROLLAR 3.10. *Die Klasse aller natürlichen Zahlen ist eine Menge.*

BEWEIS. Verwende das Unendlichkeits- und das Komprehensionsaxiom. ⊣

DEFINITION. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit $\boldsymbol{\omega}$ bezeichnet.

LEMMA 3.11. Sei X eine Menge von Ordinalzahlen, so daß X transitiv ist. Dann ist X ordinal.

BEWEIS: Übung. ⊣

KOROLLAR 3.12. *ω ist ordinal. Außerdem ist ω die kleinste Limeszahl.*

BEWEIS. ω ist nach Definition eine Menge von Ordinalzahlen. ω ist außerdem transitiv: Sei $n \in \omega$. Also ist n eine natürliche Zahl, d.h. $\forall m \leqslant n\ (m = 0 \vee \exists q\ m = q + 1)$. Daraus folgt unmittelbar, daß jedes $m \leqslant n$ natürliche Zahl ist und damit zu ω gehört. Nach Lemma 3.11 ist also ω ordinal. Sicher $\omega \neq 0$. Wäre $\omega = \alpha + 1$ für ein α, so ist $\alpha < \omega$ und damit α eine natürliche Zahl. Dann ist aber auch ω natürliche Zahl, also $\omega \in \omega$, Widerspruch. Also ist ω eine Limeszahl.

Klarerweise ist ω die kleinste Limeszahl. ⊣

SATZ 3.13. *ω erfüllt die **Peano-Axiome**:*

(a) $0 \in \omega$.

(b) $\forall n\ (n + 1 \in \omega)$.

(c) $\forall n\ \forall m\ (n \neq m \rightarrow n + 1 \neq m + 1)$.

(d) $\forall X\, ((X \subseteq \omega \wedge 0 \in X \wedge \forall u \in X\, (n + 1 \in X)) \rightarrow X = \omega)$

BEWEIS als Übung. ⊣

ÜBUNGEN

3.1. Sei $(P, <)$ eine Partialordnung. Sei $A \subseteq P$ und sei B die Menge aller oberen Schranken von A. Zeige, daß $x = sup(A)$ genau dann gilt, wenn $x = min(B)$. Ebenso gilt $y = inf(A)$ genau dann, wenn y das Maximum der Menge aller unteren Schranken von A ist.

3.2. Gib ein Beispiel einer Totalordnung, die

(a) einen nichttrivialen Automorphismus besitzt und

(b) isomorph zu einem Anfangsabschnitt ist.

3.3. Gib ein Beispiel einer transitiven, nichtordinalen Menge. Wieviele Elemente muß eine solche Menge mindestens haben?

3.4. Nenne zwei Funktionen f und g kompatibel, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in dom(f) \cap dom(g)$. Zeige:

(a) f und g sind kompatibel genau dann, wenn $f \upharpoonright (dom(f) \cap dom(g)) = g \upharpoonright (dom(f) \cap dom(g))$.

(b) Ist F eine Menge von paarweise kompatiblen Funktionen, so ist $G := \bigcup F$ eine Funktion mit $dom(G) = \bigcup\{dom(f) : f \in F\}$ und $ran(G) = \bigcup\{ran(f) : f \in F\}$.

3.5. Sei $\boldsymbol{C}$ eine nichtleere Klasse von Ordinalzahlen. Zeige:

(a) $\bigcap \boldsymbol{C}$ ist ordinal.

(b) $\bigcap \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}$.

(c) $\bigcap \boldsymbol{C} = min(\boldsymbol{C})$.

3.6. Sei X eine nichtleere Menge von Ordinalzahlen. Zeige:

(a) $\bigcup X$ ist ordinal.

(b) $\bigcup X = sup(X)$.

(c) Es gilt $\bigcup X = max(X)$ genau dann, wenn $\bigcup X$ eine Nachfolgerzahl ist.

3.7. Zeige, daß jede transitive Menge von Ordinalzahlen ordinal ist.

3.8. Zeige, daß jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, die wohlgeordnet ist bzgl. der üblichen Ordnung auf $\mathbb{R}$, abzählbar ist.

3.9. Beweise, daß ω ein Modell für die Peano-Axiome ist (vgl. Satz 3.13).

3.10. Zeige, daß die folgende Menge existiert: $\omega \cup \wp(\omega) \cup \wp(\wp(\omega)) \cup \wp(\wp(\wp(\omega))) \cup \ldots$

4. TRANSFINITE INDUKTION UND REKURSION

SATZ 4.1. *Sei* $\boldsymbol{C}$ *eine Klasse von Ordinalzahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:*

(a) $0 \in \boldsymbol{C}$,

(b) falls $\alpha \in \boldsymbol{C}$, *so auch* $\alpha + 1 \in \boldsymbol{C}$,

(c) falls α *Limeszahl und falls* $\beta \in \boldsymbol{C}$ *für alle* $\beta < \alpha$, *so folgt* $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

Dann ist $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ord}$.

BEWEIS. Sei $\boldsymbol{D} := \{\alpha \in \boldsymbol{Ord}\colon \alpha \notin \boldsymbol{C}\}$. Falls $\boldsymbol{D} \neq \varnothing$, so folgt aus Korollar 3.7 (c), daß $\bigcap \boldsymbol{D} = min(\boldsymbol{D})$. Setze $\alpha := \bigcap \boldsymbol{D}$. Dann ist $\alpha \neq 0$.
Wäre $\alpha = \beta + 1$ für ein β, so folgt $\beta \in \boldsymbol{C}$. Aus (b) folgt aber $\beta + 1 \in \boldsymbol{C}$, Widerspruch. Also ist α Limeszahl. Für alle $\beta < \alpha$ gilt $\beta \in \boldsymbol{C}$. Aus (c) folgt $\alpha \in \boldsymbol{C}$, Widerspruch.
Es folgt $\boldsymbol{D} = \varnothing$, also $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ord}$. ⊣

SATZ 4.2. *Sei* $\gamma \in \boldsymbol{Ord}$ *und sei* $C \subseteq \gamma$ *eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $0 \in C$,

(b) falls $\alpha \in C$ *und* $\alpha + 1 < \gamma$, *so auch* $\alpha + 1 \in C$,

(c) falls $\alpha \in \gamma$ *Limeszahl und falls* $\beta \in C$ *für alle* $\beta < \alpha$, *so folgt* $\alpha \in C$.

Dann folgt $C = \gamma$.

BEWEIS. Analog zu dem Beweis zu Satz 4.1. ⊣

Häufig werden wir „durch transfinite Induktion“ beweisen, daß eine Klasse $\boldsymbol{C}$ von Ordinalzahlen gleich $\boldsymbol{Ord}$ bzw. gleich einer Ordinalzahl γ ist, d.h. wir zeigen, daß $\boldsymbol{C}$ die Eigenschaften (a), (b) und (c) aus Satz 4.1 bzw 4.2 besitzt. Die Eigenschaften (b) und (c) können natürlich kombiniert werden zur Eigenschaft

(d) falls $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$, $\alpha \neq \varnothing$ und falls $\beta \in \boldsymbol{C}$ für alle $\beta < \alpha$, so gilt $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

LEMMA 4.3. *Falls* $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{Ord}$ *und (a) und (d) gelten, so folgt* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Ord}$.

BEWEIS. Lasse $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{Ord} \setminus \boldsymbol{C}$. Falls $\boldsymbol{D} \neq \varnothing$, sei $\alpha := min(\boldsymbol{D})$. Wegen (a) ist $\alpha \neq \varnothing$. Außerdem $\beta \in \boldsymbol{C}$ für alle $\beta < \alpha$. Nach (d) also $\alpha \in \boldsymbol{C}$, Widerspruch. ⊣

Ein analoges Lemma läßt sich in bezug auf Satz 4.2 beweisen.

DEFINITION. Sei f eine Funktion mit $dom(f) = \alpha$ ordinal. Dann heißt f eine *α-Folge*. Falls $\alpha < \omega$, heißt f ***endliche Folge***. Falls $\alpha \geqslant \omega$, heißt f ***transfinite Folge***. Falls $\alpha = \omega$, heißt f ***Folge***.

Statt f schreiben wir häufig $\langle f(\nu)\colon \nu < \alpha\rangle$; und statt $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{V}$ schreiben wir $\langle \boldsymbol{F}(\alpha)\colon \alpha \in \boldsymbol{Ord}\rangle$. Wir sagen, f sei eine ***Aufzählung*** der Menge X, falls $X = ran(f)$.
Sei f wie oben und y eine Menge. Dann bezeichnet $f^\frown\langle y\rangle$ die $(\alpha + 1)$-Folge g, die definiert ist durch $g \restriction \alpha = f$ und $g(\alpha) = y$. Mit anderen Worten $f^\frown\langle y\rangle = f \cup \{\langle \alpha, y\rangle\}$.
In der Mathematik sind wir gewohnt, rekursiv Folgen $\langle a_\nu\colon \nu < \alpha\rangle$ mindestens für $\alpha = \omega$ zu definieren, etwa so: Sage, was a_0 ist. Nehme an, $\langle a_\nu\colon \nu < \gamma\rangle$ sei für ein $\gamma < \alpha$ definiert. Nun sagen wir, was a_γ ist; dabei verwenden wir typischerweise $\langle a_\nu\colon \nu < \gamma\rangle$ und γ.

Problem: Warum rechtfertigt dies die Existenz der Folge $\langle a_\nu: \nu < \alpha\rangle$? Noch etwas konkreter: Definiere rekursiv $\langle n!: n < \omega\rangle$: Setze $0! := 1$. Angenommen $\langle u!: u < m\rangle = f$ sei definiert für ein $m < \omega$. $m! := f(m-1) \bullet m = (m-1)! \bullet m$.

SATZ 4.4. (*Satz über transfinite Rekursion*). *Zu jedem* $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *existiert ein eindeutig bestimmtes* $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{V}$ *mit der Eigenschaft, daß* $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha) = \boldsymbol{G}(\langle \boldsymbol{F}(\beta): \beta < \alpha\rangle)$.

BEWEIS. *Eindeutigkeit*: Seien $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ wie gewünscht. Durch transfinite Induktion zeigen wir: $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{F}'(\alpha)$, alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$:

Induktionsanfang: $\boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright 0) = \boldsymbol{G}(0) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}' \upharpoonright 0) = \boldsymbol{F}'(0)$.

Induktionsschritt: Sei $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$, so daß $\boldsymbol{F}(\beta) = \boldsymbol{F}'(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$. Es folgt, $\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha = \langle \boldsymbol{F}(\beta): \beta < \alpha\rangle = \langle \boldsymbol{F}'(\beta): \beta < \alpha\rangle = \boldsymbol{F}' \upharpoonright \alpha$. $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}' \upharpoonright \alpha) = \boldsymbol{F}'(\alpha)$.

Das beweist die Eindeutigkeit.

Existenz: Sei $\gamma \in Ord$. Eine γ-Folge heißt γ-***Approximation*** *zu* $\boldsymbol{F}$, falls für alle $\alpha < \gamma$ gilt: $f(\alpha) = G(f \upharpoonright \alpha)$. Es gilt (*): Falls $\gamma \leq \gamma'$, f γ-Approximation und f' γ'-Approximation ist, so gilt $f' \upharpoonright \gamma = f$.

Beweis von (*): Zeige durch transfinite Induktion $f'(\alpha) = f(\alpha)$, alle $\alpha < \gamma$. $f'(0) = \boldsymbol{G}(f' \upharpoonright 0) = \boldsymbol{G}(0) = \boldsymbol{G}(f \upharpoonright 0) = f(0)$. Es gelte $f'(\beta) = f(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$ für ein $\alpha < \gamma$. Es folgt $f'(\alpha) = \boldsymbol{G}(f' \upharpoonright \alpha) = \boldsymbol{G}(f \upharpoonright \alpha) = f(\alpha)$. Das beweist (*).

Wegen (*) genügt es zum Beweis des Satzes zu zeigen, daß zu jedem $\gamma \in \boldsymbol{Ord}$ eine γ-Approximation existiert. Warum? Wähle zu jedem $\gamma \in \boldsymbol{Ord}$ die eindeutig bestimmte γ-Approximation $f_\gamma: \gamma \to \boldsymbol{V}$ und setze $\boldsymbol{F} = \bigcup\{f_\gamma: \gamma \in Ord\}$. Was ist die $\boldsymbol{F}$ definierende Formel $\varphi(t)$? $\varphi(t) \Leftrightarrow \exists\alpha\ \exists x\ (t = \langle\alpha, x\rangle \wedge \alpha \textit{ ist ordinal} \wedge \forall f\ (f \textit{ ist } (\alpha+1)\textit{-Approximation} \to f(\alpha) = x))$. Durch transfinite Induktion zeigen wir jetzt noch, daß zu jedem $\gamma \in \boldsymbol{Ord}$ eine γ-Approximation existiert.

Sei $\gamma = 0$. Die 0-Approximation ist $\emptyset$.

Sei $\gamma = \alpha + 1$. Angenommen es existiert eine α-Approximation f. Definiere eine $(\alpha+1)$-Approximation g durch $g = f \hat{}\ \langle \boldsymbol{G}(f)\rangle$.

γ ist eine Limeszahl und für jedes $\alpha < \gamma$ existiert eine nach (*) eindeutig bestimmte α-Approximation f_α. Idee: Lasse $f = \bigcup\{f_\alpha: \alpha < \gamma\}$. Falls f existiert, so ist f wegen (*) eine γ-Approximation.

Warum existiert f? Sei $\psi(x, y)$ die Formel: x ist ordinal $\wedge$ y ist x-Approximation. Wegen (*) und Induktionsvoraussetzung gilt, daß zu jedem $\alpha < \gamma$ genau ein x (eben f_α) existiert, so daß $\psi(\alpha, x)$ gilt. Nach Ersetzungsaxiom existiert $X = \{x: \exists\alpha \in \gamma\ \psi(\alpha, x)\}$. Dann existiert auch $\bigcup X$ und dies ist die gewünschte γ-Approximation. ⊣

BEMERKUNGEN. Satz 4.4 ist ein Meta-Theorem, d.h. ein metatheoretischer Satz. Das bedeutet, er ist nicht formulierbar in unserer Sprache, da über Formeln quantifiziert wird.

„$\boldsymbol{F}$ ist eindeutig bestimmt" heißt: Falls $\boldsymbol{F}': \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{V}$ auch Eigenschaft $\forall\alpha \in \boldsymbol{Ord}\ \boldsymbol{F}'(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}' \upharpoonright \alpha)$ hat, so folgt $\forall\alpha\ \boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{F}'(\alpha)$. Das impliziert nicht, daß die Formeln, die $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}'$ definieren, identisch sind.

$\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha$ ist eine Menge: $\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha = \boldsymbol{F} \cap (\alpha \times \boldsymbol{F}[\alpha])$. Also macht es Sinn, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$ zu schreiben.

SATZ 4.5 (*AC*). *Jede Menge besitzt eine Aufzählung. Formel:* $\forall X\ \exists f\ \exists\gamma\ (\gamma \textit{ ordinal} \wedge f: \gamma \to X \textit{ surjektiv})$. *Diese kann außerdem injektiv gewählt werden.*

BEWEIS. Sei X gegeben. Falls $X = \emptyset$ lasse $f = \emptyset$. Sei also $X \neq \emptyset$. Sei $f: \wp(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ eine Auswahlfunktion, also $f(Y) \in Y$, alle $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Definiere $G: V \to V$ wie folgt: Wähle $\gamma \in \boldsymbol{Ord} \setminus X$ (γ existiert, da sonst $\boldsymbol{Ord}$ eine Menge wäre) und $\boldsymbol{G}(z) = f(X \setminus ran(z))$, falls z eine Funktion ist mit $ran(z) \subseteq X$ und $X \setminus ran(z) \neq \emptyset$, und $G(z) = \gamma$ sonst. Nach Rekursionstheorem gibt es $\mathbf{F}\colon \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$, so daß $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\alpha)$, alle $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Es gilt (*): Für alle $\alpha \in \mathbf{Ord}$, falls $\mathbf{F}(\alpha) \in X$, so ist $\mathbf{F}(\beta) \in X$, alle $\beta < \alpha$ und $\mathbf{F}(\alpha) \neq \mathbf{F}(\beta)$.

Beweis von (*): Fixiere α mit $\mathbf{F}(\alpha) \in X$. Angenommen $ran(\mathbf{F}\restriction\alpha) \not\subseteq X$, dann folgt $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\alpha) = \gamma \notin X$, Widerspruch. Es folgt $ran(\mathbf{F}\restriction\alpha) \subseteq X$.

Zeige noch $\mathbf{F}(\beta) \neq \mathbf{F}(\alpha)$ *für* $\beta < \alpha$: $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\alpha) = f(X \setminus ran(\mathbf{F}\restriction\alpha)) \neq \mathbf{F}(\beta)$, da $\mathbf{F}(\alpha) \in X \setminus \{\mathbf{F}(\beta)\}$. Das beweist (*).

Aus (*) folgt: $\exists\alpha\ \mathbf{F}(\alpha) = \gamma$, da sonst $\mathbf{F}\colon \mathbf{Ord} \to X$ injektiv wäre. Folglich wäre $\mathbf{F}[\mathbf{Ord}] \subseteq X$ eine Menge. Folglich wäre nach Ersetzungsaxiom auch $\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{F}[\mathbf{Ord}]] = \mathbf{Ord}$ eine Menge, Widerspruch.

Sei $\alpha_0 = min\{\alpha \in \mathbf{Ord}\colon \mathbf{F}(\alpha) = \gamma\}$. Dann gilt $\mathbf{F}\restriction\alpha_0$ hat range $\subseteq X$. Da $\mathbf{F}(\alpha_0) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\alpha_0) = \gamma$, folgt $X \setminus ran(\mathbf{F}\restriction\alpha_0) = \emptyset$, also $ran(\mathbf{F}\restriction\alpha_0) = X$. $\mathbf{F}\restriction\alpha_0$ ist also die gesuchte Aufzählung und außerdem injektiv nach (*). ⊣

DEFINITION. Wir sagen, daß eine Menge X ***wohlgeordnet werden kann***, falls $R \subseteq X \times X$ existiert, so daß $\langle X, R\rangle$ eine Wohlordnung ist.

KOROLLAR 4.6 (*AC*). (*Wohlordnungssatz (W)*). *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

BEWEIS. Sei X gegeben. Nach Satz 4.5 finde eine Bijektion $f\colon \alpha \to X$, wobei α ordinal. Übertrage die Wohlordnung auf α mittels f auf X: Für $x, y \in X$ setze $\langle x, y\rangle \in R :\Leftrightarrow f^{-1}(x) \in f^{-1}(y)$. Klarerweise ist $\langle X, R\rangle$ eine Wohlordnung. ⊣

Es gilt auch die Umkehrung:

SATZ 4.7. *(W)* $\Rightarrow$ *AC.*

BEWEIS. Sei X eine Menge, so daß alle $y \in X$ nichtleer sind. Nach (W) wähle $R \subseteq \bigcup X \times \bigcup X$, so daß $\langle \bigcup X, R\rangle$ eine Wohlordnung ist. Sei $\varphi(y, z, X, R)$ die Formel: $y \in X \wedge z$ ist das R-kleinste Element von y. Nach Konstruktion gilt: $\forall y\ (y \in X \to \exists! z\ \varphi(y, z, X, R))$. Setze $f = \{\langle y, z\rangle \in X \times \bigcup X\colon \varphi(y, z, X, R)\}$. ⊣

DEFINITION. Sei $(P, <)$ eine Partialordnung. Eine Teilmenge $A \subseteq P$ heißt ***Kette***, falls $\forall x, y \in A\ (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

SATZ 4.8 (*AC*). (*Lemma von Zorn (Z)*). *Sei $(P, <)$ eine nichtleere Partialordnung mit der Eigenschaft, daß jede Kette eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt P ein maximales Element.*

BEWEIS. Wähle $u \notin P$. Definiere $\mathbf{G}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ wie folgt: Sei $f\colon \wp(P) \setminus \{\emptyset\} \to P$ eine Auswahlfunktion. Dann $\mathbf{G}(z) = f(\{x \in P \setminus ran(z)\colon x \text{ ist obere Schranke von } ran(z)\})$, falls z eine Funktion ist mit $dom(z) \in \mathbf{Ord}$ und $ran(z) \subseteq P$ und falls $ran(z)$ eine obere Schranke in $P \setminus ran(z)$ besitzt; andernfalls $\mathbf{G}(z) = u$.

Mittels Satz über transfinite Rekursion erhalte $\mathbf{F}\colon \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$, so daß $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\alpha)$, alle α. Zeige jetzt: (*) Falls $\mathbf{F}(\alpha) \in P$ für ein $\alpha \in \mathbf{Ord}$, so gelten

(1) $ran(\mathbf{F}\restriction\alpha) \subseteq P$,

(2) $\mathbf{F}(\beta) < \mathbf{F}(\alpha)$, alle $\beta < \alpha$.

Beweis von (*). *Zu (1)*: Sonst gilt $\mathbf{F}(\beta) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\beta) = u$, für ein $\beta < \alpha$. O.B.d.A. sei β minimal. Dann ist $\mathbf{F}\restriction\beta$ eine Funktion, und es gilt wegen der Minimalität von β $ran(\mathbf{F}\restriction\beta) \subseteq P$. Falls außerdem $ran(\mathbf{F}\restriction\beta)$ obere Schranken in $P \setminus ran(\mathbf{F}\restriction\beta)$ hätte, folgt, daß $\mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\beta) = \mathbf{F}(\beta)$ eine obere Schranke von $ran(\mathbf{F}\restriction\beta)$ in $P \setminus ran(\mathbf{F}\restriction\beta)$ ist, Widerspruch. Es folgt, daß

$ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \beta)$ keine obere Schranke in $P \setminus ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \beta)$ hat. Umso mehr gilt, daß auch $ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$ keine obere Schranke in $P \setminus ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$ hat. Es folgt: $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha) = u$, Widerspruch. Also ist (1) bewiesen.

Zu (2): Sei $\beta < \alpha$. Wegen (1) gilt $\boldsymbol{F}(\beta) \in P$. Wegen $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$ folgt: $\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha$ ist eine Funktion mit $ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha) \subseteq P$ und $ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$ besitzt eine obere Schranke in $P \setminus ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$. Außerdem ist $\boldsymbol{F}(\alpha) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha) = f(\{x \in P \setminus ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$: *x ist obere Schranke von* $ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)$ *in* $P \setminus ran(\boldsymbol{F} \upharpoonright \alpha)\})$. Es folgt $\boldsymbol{F}(\alpha) > \boldsymbol{F}(\beta)$. Damit ist (2) und insgesamt auch (*) bewiesen.

Aus (*) folgt: $\exists \alpha\ \boldsymbol{F}(\alpha) = u$. Sonst wäre $\boldsymbol{F}$ eine injektive Einbettung von ***Ord*** in P. Sei $\alpha \in$ ***Ord*** minimal mit $\boldsymbol{F}(\alpha) = u$. Dann ist $\boldsymbol{F}[\alpha]$ eine Kette in P wegen (*). Da $\boldsymbol{F}(\alpha) = u$ hat $\boldsymbol{F}[\alpha]$ keine obere Schranke in $P \setminus \boldsymbol{F}[\alpha]$. Aber nach Voraussetzung hat $\boldsymbol{F}[\alpha]$ eine obere Schranke in P. Also hat $\boldsymbol{F}[\alpha]$ eine obere Schranke $x \in \boldsymbol{F}[\alpha]$. Dann ist klarerweise $x = max(\boldsymbol{F}[\alpha])$ eindeutig bestimmt.

Wähle $\beta < \alpha$ mit $x = \boldsymbol{F}(\beta)$. Es folgt: x ist maximales Element in P. Warum: $x = max(\boldsymbol{F}[\alpha])$ und $\boldsymbol{F}[\alpha]$ hat keine obere Schranke in $P \setminus \boldsymbol{F}[\alpha]$. Sei $y \in P$. $y \in \boldsymbol{F}[\alpha] \Rightarrow y \leqslant x$. $y \in P \setminus \boldsymbol{F}[\alpha] \Rightarrow y$ nicht obere Schranke von $\boldsymbol{F}[\alpha]$, d.h. es gibt $z \in \boldsymbol{F}[\alpha]$ mit $y < z$. Da $x \geqslant z$, folgt $y < z$. ⊣

SATZ 4.9. *(Z) $\Rightarrow$ AC, also (Z) $\Leftrightarrow$ AC.*

BEWEIS. Sei X eine Menge, so daß $\forall y \in X\ y \neq \emptyset$. Finde $f: X \to \bigcup X$ mit $f(y) \in y$, alle $y \in X$. Sei P die Menge aller partiellen Auswahlfunktionen auf X, d.h. $P = \{g$: *g ist Funktion und* $dom(g) \subseteq X$ *und* $\forall y \in dom(g)$: $g(y) \in y\}$. Als Partialordnung $<$ auf P wählen wir $\subset$, die Fortsetzung von Funktionen $g_1 < g_2 :\Leftrightarrow g_1 \subset g_2 \Leftrightarrow g_2 \upharpoonright dom(g_1) = g_1$.

Wir stellen fest: (1) $P \neq \emptyset$, da $\emptyset \in P$. (2) Sei $A \subseteq P$ eine Kette, d.h. $\forall g, h \in A$: $g \subseteq h \vee h \subseteq g$. Sei $g_0 = \bigcup A$. Es gilt g_0 ist eine Funktion und $g \subseteq g_0$, alle $g \in A$. $g_0 \in P$: Sei $y \in dom(g_0)$. Folglich existiert $g \in A$ mit $y \in dom(g)$. Also gilt $g_0(y) = g(y) \in y$.

Wir können also (Z) anwenden. Sei g_1 ein maximales Element von P. Behauptung: g_1 ist eine Auswahlfunktion für X.

Warum? Zu zeigen ist $dom(g_1) = X$. Angenommen es gäbe $y \in X \setminus dom(g_1)$. Nach Voraussetzung ist $y \neq \emptyset$. Sei $z \in y$. Lasse $g_2 = g_1 \cup \{\langle y, z\rangle\}$. Offensichtlich ist $g_2 \in P$ und $g_1 < g_2$, Widerspruch zur Maximalität von g_1. ⊣

ÜBUNGEN

4.1. Sei $\langle W_\alpha: \alpha \in \boldsymbol{Ord}\rangle$ eine funktionale Klasse auf ***Ord*** derart, daß $W_\gamma = \bigcup\{W_\nu: \nu < \gamma\}$ für alle Limeszahlen γ und $W_\alpha \subseteq W_{\alpha+1}$ für alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$ gilt. Zeige durch transfinite Induktion über β, daß $W_\alpha \subseteq W_\beta$ für alle $\alpha \in \beta \in \boldsymbol{Ord}$ gilt.

4.2. Verwende den Satz über transfinite Rekursion, um die Existenz einer funktionalen Klasse $\langle V_\alpha: \alpha \in \boldsymbol{Ord}\rangle$ mit folgenden Eigenschaften zu beweisen:

(a) $V_0 = \emptyset$,

(b) $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$ für alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$,

(c) $V_\gamma = \bigcup\{V_\nu: \nu < \gamma\}$ für alle Limeszahlen $\gamma \in \boldsymbol{Ord}$.

4.3. Zeige, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Tipp: Verwende das Lemma von Zorn.

4.4. Definiere mit Hilfe des Rekursionstheorems für alle $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Ord}$ die ordinale Summe $\alpha + \beta$, das ordinale Produkt $\alpha \bullet \beta$ und die ordinale Exponentiation α^β, so daß folgendes gilt:

(a) $\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha + (\sigma + 1) = (\alpha + \sigma) + 1$; falls β Limeszahl, so $\alpha + \beta = sup(\{\alpha + \sigma : \sigma < \beta\})$.

(b) $\alpha \bullet 0 = 0$; $\alpha \bullet (\sigma + 1) = (\alpha \bullet \sigma) + \alpha$; falls β Limeszahl, so $\alpha \bullet \beta = sup(\{\alpha \bullet \sigma : \sigma < \beta\})$.

(c) $\alpha^0 = 1$; $\alpha^{\sigma+1} = \alpha^\sigma \bullet \alpha$; falls β Limeszahl, so $\alpha^\beta = sup(\{\alpha^\sigma : \sigma < \beta\})$.

4.5. Zeige $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \bullet \gamma}$ für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathit{\mathbf{Ord}}$. Tipp: Falls $\alpha \neq 0$, verwende transfinite Induktion über γ.

4.6. Beweise die folgenden Rechengesetze für die ordinale Arithmetik (α, β, γ seien beliebige Ordinalzahlen).

(a) $0 \bullet \alpha = 0 = \alpha \bullet 0, \alpha \bullet 1 = \alpha = 1 \bullet \alpha,$

$0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \beta < \alpha \bullet \gamma,$

$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha \bullet \gamma \leqslant \beta \bullet \gamma,$

$(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma), \alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma.$

(b) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \bullet \alpha^\gamma$.

5. ORDINALZAHLARITHMETIK

DEFINITION. Sei $A = \mathbf{Ord}$ oder $A \in \mathbf{Ord}$. Eine Funktion $f: A \to \mathbf{Ord}$ heißt ***stetig***, falls für jede Limeszahl $\gamma \in A$ gilt: $f(\gamma) = sup\{f(\nu): \nu \in \gamma\}$. f heißt ***normal***, falls f stetig und streng monoton wachsend ist, d.h. für alle $\alpha, \beta \in A$, falls $\alpha < \beta$, so $f(\alpha) < f(\beta)$.

LEMMA 5.1. *Sei f: $\mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ normal. Dann hat f beliebig große Fixpunkte, d.h. $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}$ $\exists \beta \in \mathbf{Ord}$ $(\beta \geqslant \alpha \wedge f(\beta) = \beta)$.*

BEWEIS. Bemerke zuerst, daß $\forall \alpha\ f(\alpha) \geqslant \alpha$. Sonst wähle α minimal mit $f(\alpha) < \alpha$. Wegen Monotonie folgt $f(f(\alpha)) < f(\alpha)$, ein Widerspruch zur Minimalität von α. Sei $\alpha \in \mathbf{Ord}$ beliebig. Definiere rekursiv eine Folge $\langle \alpha_n: n < \omega \rangle$ wie folgt: $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$. Es gilt also $\alpha = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots$. Setze $\beta = sup\{\alpha_n: n \in \omega\}$.
Fall 1. $\beta = 0$. Also $\alpha_n = 0$, alle $n < \omega$. Also $f(\beta) = \beta$.
Fall 2. $\beta = \delta + 1$. Es existiert also $m \in \omega$, so daß $\alpha_n = \delta + 1$, alle $n \geqslant m$, also $f(\delta + 1) = f(\alpha_m) = \alpha_{m+1} = \delta + 1$, also $f(\beta) = \beta$.
Fall 3. β Limeszahl. Es gilt: $f(\beta) =^{(Stetigkeit)} sup\{f(\nu): \nu \in \beta\} =^{(*)} sup\{f(\alpha_n): n < \omega\} = sup\{\alpha_{n+1}: n < \omega\} = sup\{\alpha_n: n < \omega\} = \beta$.
Zu (*): „$\geqslant$“ trivial, da $\{f(\alpha_n): n < \omega\} \subseteq \{f(\nu): \nu < \beta\}$. „$\leqslant$“: Sei $\nu < \beta$. Finde n mit $\alpha_n \geqslant \nu$. Es folgt mit Monotonie $f(\alpha_n) \geqslant f(\nu)$. Also gilt „$\leqslant$“. ⊣

DEFINITION. Sei $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Definiere durch transfinite Rekursion über $\beta \in \mathbf{Ord}$ die ***ordinale Summe*** $\alpha + \beta$, das ***ordinale Produkt*** $\alpha \bullet \beta$ und die ***ordinale Exponentiation*** α^β, so daß gelten:

(a) $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha + (\nu + 1) = (\alpha + \nu) + 1$ für alle $\nu \in \mathbf{Ord}$, $\alpha + \beta = sup\{\alpha + \nu: \nu < \beta\}$ für alle Limeszahlen $\beta \in \mathbf{Ord}$.

(b) $\alpha \bullet 0 = 0$, $\alpha \bullet (\nu + 1) = (\alpha \bullet \nu) + \alpha$ für alle $\nu \in \mathbf{Ord}$, $\alpha \bullet \beta = sup\{\alpha \bullet \nu: \nu < \beta\}$ für alle Limeszahlen $\beta \in \mathbf{Ord}$.

(c) $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\nu+1} = \alpha^\nu \bullet \alpha$ für alle $\nu \in \mathbf{Ord}$, $\alpha^\beta = sup\{\alpha^\nu: \nu < \beta\}$ für alle Limeszahlen $\beta \in \mathbf{Ord}$.

HINWEIS zu (a). Zu jedem $\alpha \in \mathbf{Ord}$ müssen wir $\mathbf{G}_\alpha$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definieren, so daß das nach Rekursionstheorem dazu existierende $\mathbf{F}_\alpha$: $\mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$, also $\mathbf{F}_\alpha(\beta) = \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{F}_\alpha \upharpoonright \beta)$, die gewünschten Eigenschaften hat: $\mathbf{F}_\alpha(0) = \alpha$, $\mathbf{F}_\alpha(\nu + 1) = \mathbf{F}_\alpha(\nu) + 1$, $\mathbf{F}_\alpha(\beta) = sup\{\mathbf{F}_\alpha(\nu): \nu < \beta\}$, Limes β.

BEMERKUNGEN. „+“ ist nicht kommutativ: $1 + \omega = sup\{1 + n: n < \omega\} = sup\{n + 1: n < \omega\} = \omega \neq \omega + 1$.
„$\bullet$“ ist nicht kommutativ: $2 \bullet \omega = sup\{2 \bullet n: n < \omega\} = \omega < \omega + \omega = \omega \bullet 2 =^{(b)} \omega \bullet (1 + 1)$.
Linksdistributivität gilt nicht: $(1 + 1) \bullet \omega = \omega$, aber $1 \bullet \omega + 1 \bullet \omega = \omega + \omega$.
Die obigen Operationen können auch eingeführt werden als *Ordnungstypen von wohlgeordneten Mengen*: Z.B. seien $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Sei $\alpha \# \beta :\!= \alpha \cup \{\langle \nu, \gamma \rangle: \nu < \beta\}$, wobei $\gamma \notin \alpha \cup \beta$. Definiere $\prec$ auf $\alpha \# \beta$ durch: Für $\nu, \mu < \alpha$ setze $\nu \prec \mu :\Leftrightarrow \nu < \mu$. Für $\nu < \alpha$, $\mu < \beta$ setze $\nu \prec \langle \mu, \nu \rangle$. Für $\nu, \mu < \beta$ setze $\langle \nu, \gamma \rangle \prec \langle \mu, \gamma \rangle :\Leftrightarrow \nu < \mu$. Es ist leicht zu sehen, daß $\langle \alpha \# \beta, \prec \rangle$ eine Wohlordnung mit Ordnungstyp $\alpha + \beta$ ist.

LEMMA 5.2. *Es gelten folgende Rechengesetze für Ordinalzahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Ord}$:*

(a) $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$, $\beta \leqslant \alpha + \beta$, $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$, $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(b) $0 \bullet \alpha = 0 = \alpha \bullet 0$, $\alpha \bullet 1 = \alpha = 1 \bullet \alpha$, $0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \beta < \alpha \bullet \gamma$, $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha \bullet \gamma \leqslant \beta \bullet \gamma$, $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$, $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$.

(c) $\beta \neq 0 \Rightarrow 0^\beta = 0, 1^\beta = 1, 1 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma, \alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma, 1 < \alpha \Rightarrow \beta \leqslant \alpha^\beta, \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \bullet \alpha^\gamma, (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\bullet\gamma}$.

BEWEIS. (Auszugsweise). Zu $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$: Beweis durch Induktion über γ für feste α, β:
$\gamma = 0$: klar.
$\gamma = \nu + 1$: aus $\beta < \gamma$ folgt $\beta \leqslant \nu$. Es folgt $\alpha + \beta \leqslant^{(I.V.)} \alpha + \nu < (\alpha + \nu) + 1 =^{(Def.\ „+“)} \alpha + (\nu + 1) = \alpha + \gamma$.
γ Limeszahl, also $\gamma = sup(\gamma)$. Sei $\beta < \gamma$. Wähle ν mit $\beta < \nu < \gamma$, z.B. $\nu = \beta + 1$. Es folgt $\alpha + \beta <^{(I.V.)} \alpha + \nu \leqslant sup\{\alpha + \delta: \delta < \gamma\} =^{(Def.\ „+“)} \alpha + \gamma$.
Zu $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\bullet\gamma}$: Induktion über γ:
$\gamma = 0$: $\alpha^{\beta\bullet 0} = \alpha^0 = 1 = (\alpha^\beta)^0$.
$\gamma = \nu + 1$: $\alpha^{\beta\bullet(\nu+1)} =^{(Def.)} \alpha^{\beta\bullet\nu+\beta} = \alpha^{\beta\bullet\nu} \bullet \alpha^\beta =^{(I.V.)} (\alpha^\beta)^\nu \bullet \alpha^\beta =^{(Def.\ Exp.)} (\alpha^\beta)^{\nu+1} = (\alpha^\beta)^\gamma$.
γ Limes: $\alpha^{\beta\bullet\gamma} =^{(Def.)} \alpha^{sup\{\beta\bullet\nu:\ \nu < \gamma\}} =^{(*)+(Def.\ Exp.)} sup\{\alpha^{\beta\bullet\nu}: \nu < \gamma\} =^{(I.V.)} sup\{(\alpha^\beta)^\nu: \nu < \gamma\} =^{(Def.\ Exp.)} (\alpha^\beta)^\gamma$.
(*): Wir verwenden, daß $sup\{\beta \bullet \nu: \nu < \gamma\} = sup\{\sigma: \sigma < \beta \bullet \gamma\}$ und daß $\beta \bullet \gamma$ eine Limeszahl ist. $\beta \bullet \gamma$ Limeszahl folgt aus γ Limes und Definition von $\beta \bullet \gamma = sup\{\beta \bullet \nu: \nu < \gamma\}$ und $0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \beta < \alpha \bullet \gamma$. Da $\beta \bullet \gamma$ Limes, folgt aus der Definition der Exponentiation: $\alpha^{sup\{\beta\bullet\nu:\nu<\gamma\}} = sup\{\alpha^\sigma: \sigma < \beta \bullet \gamma\} = sup\{\alpha^{\beta\bullet\nu}: \nu < \gamma\}$. ⊣

BEMERKUNGEN. Für jedes $\alpha \in$ **Ord** ist die Funktion $\beta \mapsto \alpha + \beta$ normal. Für jedes $\alpha \neq 0$ ist die Funktion $\beta \mapsto \alpha \bullet \beta$ normal. Für $\alpha > 1$ ist die Funktion $\beta \mapsto \alpha^\beta$ normal. Dabei folgt die Stetigkeit aus den Definitionen von „+“, „•“ und der Exponentiation. Die Monotonie folgt aus $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$, $0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \beta < \alpha \bullet \gamma$, $1 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

LEMMA 5.3. *Seien $\alpha, \beta \in$ **Ord**.*

(a) ***Subtraktionslemma**. Falls $\alpha \leqslant \beta$, so existiert ein eindeutig bestimmte $\gamma \in$ **Ord**, so daß $\alpha + \gamma = \beta$.*

(b) ***Divisionslemma**. Falls $\beta \neq 0$, so existieren eindeutig bestimmte $\xi, \eta \in$ **Ord**, so daß $\alpha = \beta \bullet \xi + \eta$ und $\eta < \beta$.*

(c) ***Logarithmuslemma**. Falls $\alpha \neq 0$ und $\beta > 1$, so existieren eindeutig bestimmte $\sigma, \tau, \gamma \in$ **Ord** (Logarithmus, Koeffizient, Rest), so daß $\alpha = \beta^\sigma \bullet \tau + \gamma$ mit $1 \leqslant \tau < \beta$ und $\gamma < \beta^\sigma$.*

BEWEIS. *Zu (a)*: Die *Eindeutigkeit* folgt aus $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$. *Existenz*: Nach Lemma 5.2 (a) gilt $\beta \leqslant \alpha + \beta$. Also existiert ein kleinstes $\gamma \in$ **Ord**, so daß $\beta \leqslant \alpha + \gamma$. Angenommen, $\beta < \alpha + \gamma$. Es folgt $\gamma \neq 0$, da $\alpha \leqslant \beta$. γ ist nicht Limeszahl, da sonst $\alpha + \gamma = sup\{\alpha + \sigma: \sigma < \gamma\}$, also $\beta \leqslant \alpha + \sigma$ für ein $\sigma < \gamma$, Widerspruch zur minimalen Wahl von γ. Also $\gamma = \sigma + 1$ für ein σ. Es folgt: $\alpha + \sigma < \beta < \alpha + (\sigma + 1)$, Widerspruch. Also $\beta = \alpha + \gamma$.
Zu (b): *Eindeutigkeit* zur Übung. *Existenz*: Aus Lemma 5.2 (b) folgt $1 \bullet \alpha \leqslant \beta \bullet \alpha$. Sei γ minimal mit $\alpha \leqslant \beta \bullet \gamma$. Falls $\alpha = \beta \bullet \gamma$, lasse $\xi = \gamma$ und $\eta = 0$. Sei also $\alpha < \beta \bullet \gamma$. Dann ist γ ein Nachfolger, z.B. $\gamma = \xi + 1$. Es folgt $\beta \bullet \xi < \alpha < \beta \bullet (\xi + 1)$. Aus (a) folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten η mit $\beta \bullet \xi + \eta = \alpha$. Es gilt $\alpha = \beta \bullet \xi + \eta < \beta \bullet (\xi + 1) = \beta \bullet \xi + \beta$. $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$ impliziert $\eta < \beta$.
Zu (c): *Eindeutigkeit* zur Übung. *Existenz*: Es gilt $\alpha \leqslant \beta^\alpha$ nach Lemma 5.2 (c). Sei δ minimal mit $\alpha \leqslant \beta^\delta$. Falls $\alpha = \beta^\delta$, lasse $\sigma = \delta$, $\tau = 1$, $\gamma = 0$. Sonst ist $\alpha < \beta^\delta$, und es muß $\delta = \sigma + 1$ für ein $\sigma \in$ **Ord** gelten. Also $\beta^\sigma < \alpha < \beta^{\sigma+1} = \beta^\sigma \bullet \beta$. Nach (b) existieren eindeutig bestimmte τ, γ, so daß $\alpha = \beta^\sigma \bullet \tau + \gamma$ und $\gamma < \beta^\sigma$. Es folgt aus $0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \bullet \beta < \alpha \bullet \gamma$, daß $1 \leqslant \tau < \beta$: $\tau < \beta$ gilt wegen Monotonie. Wäre $\tau = 0$, so folgt $\alpha = \gamma < \beta^\sigma < \alpha$, Widerspruch. ⊣

KOROLLAR 5.4. *Seien $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Es gelten:*

(a) *α ist Limeszahl genau dann, wenn $\alpha = \omega \bullet \xi$ für ein $\xi \neq 0$.*

(b) *Die Funktion (funktionale Klasse) $\boldsymbol{F}$: **Ord** $\to$ **Ord**, $\boldsymbol{F}(\alpha) = \omega \bullet (1 + \alpha)$ ist der eindeutig bestimmte $\in$-Isomorphismus von **Ord** auf die Klasse aller Limesordinalzahlen.*

(c) *Falls α Limesordinalzahl und $1 \leqslant n < \omega$ ist, so gilt $n \bullet \alpha = \alpha$.*

(d) *Falls $n < \omega$ und $\omega \leqslant \alpha$, so $n + \alpha = \alpha$.*

(e) *$\alpha \bullet \beta$ ist Nachfolger genau dann, wenn α und β beide Nachfolger sind.*

BEWEIS. *Zu (a)*: „$\Rightarrow$“. Sei α Limeszahl. Mit Lemma 5.3 (b) finde eindeutig bestimmte ξ, η, so daß $\alpha = \omega \bullet \xi + \eta$ und $\eta < \omega$. Da α Limeszahl, folgt $\xi \neq 0$ und $\eta = 0$. Also $\alpha = \omega \bullet \xi$.

„$\Leftarrow$“. Sei $\alpha = \omega \bullet \xi$, $\xi \neq 0$. Falls ξ Limeszahl, so ist $\alpha = sup\{\omega \bullet \nu\colon \nu < \xi\}$ eine Limeszahl wegen Monotonie: Denn wäre $\alpha = \mu + 1$, also $\mu < \alpha$, so existiert ein $\nu < \xi$ mit $\mu < \omega \bullet \nu$. Da ξ Limeszahl, gilt $\nu + 1 < \xi$. Also $\alpha \geqslant \omega \bullet (\nu + 1) = \omega \bullet \nu + \omega > \omega \bullet \nu \geqslant \mu + 1$, Widerspruch. Sei jetzt $\xi = \sigma + 1$ für ein σ. Es folgt $\alpha = \omega \bullet (\sigma + 1) = \omega \bullet \sigma + \omega = sup\{\omega \bullet \sigma + n\colon n < \omega\}$. Also ist α Limeszahl.

Zu (b): Wegen (a) ist $\boldsymbol{F}(\alpha)$, alle α, eine Limeszahl. Wegen Lemma 5.2 (a) ist $\boldsymbol{F}$ streng monoton. Schließlich ist $\boldsymbol{F}$ surjektiv auf die Klasse aller Limeszahlen: Sei τ eine Limeszahl. Finde $\alpha \in$ **Ord** mit $\boldsymbol{F}(\alpha) = \tau$. Wegen (a) existiert $\alpha \neq 0$, so daß $\tau = \omega \bullet \alpha$. Falls $\alpha \geqslant \omega$, so ist $1 + \alpha = \alpha$ nach (d), also $\boldsymbol{F}(\alpha) = \omega \bullet (1 + \alpha) = \omega \bullet \alpha = \tau$. Falls $\alpha < \omega$, also $\alpha = \sigma + 1$ für ein $\sigma < \omega$, gilt $\boldsymbol{F}(\sigma) = \omega \bullet (1 + \sigma) = \omega \bullet (\sigma + 1) = \omega \bullet \alpha = \tau$.

Zu (c): Wegen (a) gilt $\alpha = \omega \bullet \xi$ für ein $\xi \neq 0$. Es gilt $n \bullet \omega = sup\{n \bullet m\colon m < \omega\} = \omega$, da $\omega > n \geqslant 1$. Also $n \bullet \alpha = n \bullet (\omega \bullet \xi) =^{(Ass.)} (n \bullet \omega) \bullet \xi = \omega \bullet \xi = \alpha$.

Zu (d): Analog zu (c).

Zu (e): „$\Leftarrow$“. Folgt aus der Definition der Multiplikation: Sei $\alpha = \nu + 1, \beta = \mu + 1$. $\alpha \bullet \beta = (\nu + 1) \bullet (\mu + 1) = (\nu + 1) \bullet \mu + (\nu + 1) =^{(Ass.)} ((\nu + 1) \bullet \mu + \nu) + 1$.

„$\Rightarrow$“. Sei $\alpha \bullet \beta = \gamma + 1$ für ein γ. Nach Lemma 5.2 (b) gilt $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$. Nach Lemma 5.3 gilt $\gamma = \alpha \bullet \xi + \eta$ mit eindeutig bestimmten ξ und $\eta < \alpha$. Folglich $\alpha \bullet \beta = \gamma + 1 = \alpha \bullet \xi + \eta + 1$.

Wir dividieren $\gamma + 1$ durch α: Nach Divisionslemma existieren eindeutig bestimmte ρ, τ mit $\rho < \alpha$, so daß $\gamma + 1 = \alpha \bullet \tau + \rho$. Es gilt $\gamma + 1 = \alpha \bullet \beta$, also $\tau = \beta$ und $\rho = 0$. Aber auch: $\gamma + 1 = \alpha \bullet \xi + (\eta + 1)$. Da $\eta + 1 \neq 0$, hätten wir im Fall, daß $\eta + 1 < \alpha$ eine zweite Darstellung.

Aus der Eindeutigkeit folgt, daß $\eta + 1 < \alpha$ unmöglich ist. Es folgt $\alpha = \eta + 1$ und folglich $\alpha \bullet \beta = \gamma + 1 = \alpha \bullet \xi + \alpha = \alpha \bullet (\xi + 1)$. Aus der Monotonie folgt $\beta = \xi + 1$. ⊣

SATZ 5.5. *Seien $\alpha, \beta \in$ **Ord** mit $\alpha \neq 0$ und $\beta > 1$. Dann existieren eindeutig bestimmte Ordinalzahlen n mit $1 \leqslant n < \omega$ und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, so daß*

$$\alpha = \beta^{\sigma_1} \bullet \tau_1 + \ldots + \beta^{\sigma_n} \bullet \tau_n,\ \sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_n \text{ und } 1 \leqslant \tau_i < \beta$$

*gilt. Diese Darstellung heißt die **Cantor-Normalform** von α zur Basis β.*

*Falls außerdem $\beta = \omega$, so existieren eindeutig bestimmte $1 \leqslant n < \omega$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in$ **Ord**, so daß*

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n} \text{ und } \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n.$$

BEWEIS. Transfinite Induktion über α:

$\alpha = 1$: $n = 1, \sigma_1 = 0, \tau_1 = 1$: $1 = \beta^0 \bullet 1$.

Angenommen, die Behauptung sei bewiesen für alle $\delta < \alpha$. Nach Logarithmuslemma existieren eindeutig bestimmte $\sigma_1, \tau_1, \gamma \in$ **Ord**, so daß $1 \leqslant \tau_1 < \beta$, $\gamma < \beta^{\sigma_1}$ und $\alpha = \beta^{\sigma_1} \bullet \tau_1 + \gamma$. Es folgt $\gamma < \beta^{\sigma_1} \leqslant \alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren also eindeutig bestimmte $1 \leqslant m < \omega$ und $\tau_1', \ldots, \tau_m'$ und $\sigma_1' > \ldots > \sigma_m'$, so daß $1 \leqslant \tau_i' < \beta$, alle $1 \leqslant i \leqslant m$, und $\gamma = \beta^{\sigma_1'} \bullet \tau_1' + \ldots + \beta^{\sigma_m'} \bullet \tau_m'$. Wir erhalten die Cantor-Normalform von α zur Basis β wie folgt: Setze $n := m +$

1, $\tau_{i+1} := \tau_i{}'$,$\sigma_{i+1} := \sigma_i{}'$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$. Es gilt $\beta^{\sigma_2} \leqslant \gamma < \beta^{\sigma_1}$. Aus Monotonie der Exponentiation $\beta^{\sigma_1{}'}$ folgt $\sigma_1 > \sigma_2$.

Falls $\beta = \omega$, so gilt $\tau_i < \omega$, alle i, und $\omega^{\sigma_i} \bullet \tau_i = \omega^{\sigma_i} + ... + \omega^{\sigma_i}$ (τ_i-mal). ⊣

DEFINITION. Eine Ordinalzahl γ heißt ***Hauptzahl für die Addition***, falls $\gamma \neq 0$ und $\alpha + \gamma = \gamma$ gilt für alle $\alpha < \gamma$. Außerdem heißt γ ***additiv zerlegbar***, falls es Ordinalzahlen $\alpha, \beta < \gamma$ gibt, so daß $\alpha + \beta = \gamma$; andernfalls heißt γ ***additiv unzerlegbar***.

SATZ 5.6. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Eine Ordinalzahl $\gamma \neq 0$ ist Hauptzahl für die Addition genau dann, wenn γ additiv unzerlegbar ist.

*(b) Die Hauptzahlen für die Addition sind genau die Ordinalzahlen von der Form ω^α für ein $\alpha \in$ **Ord**.*

*(c) $\langle \omega^\alpha : \alpha \in$ **Ord**$\rangle$ ist der eindeutig bestimmte $\in$-Isomorphismus von **Ord** auf die Klasse aller Hauptzahlen für die Addition.*

BEWEIS. *Zu (a)*: Sei γ Hauptzahl für die Addition (HZA) und seien $\alpha, \beta < \gamma$. Wegen Lemma 5.1 (a) gilt $\alpha + \beta < \alpha + \gamma = \gamma$. Also ist γ additiv unzerlegbar. Sei umgekehrt γ additiv unzerlegbar und $\gamma \neq 0$. Sei $\alpha < \gamma$. Nach Lemma 5.3 (a) (Subtraktionslemma) finde $\beta < \gamma$, so daß $\alpha + \beta = \gamma$. Es folgt $\beta = \gamma$. Es folgt $\alpha + \gamma = \gamma$.

Zu (b): Sei $\alpha \in$ ***Ord***. Klarerweise ist $\omega^\alpha \neq 0$. Sei $0 < \beta < \omega^\alpha$. Sei $\beta = \omega^{\beta_1} + ... + \omega^{\beta_n}$ die Cantor-Normalform von β zur Basis ω, also $\beta_1 \geqslant ... > \beta_n$. Da $\omega^{\beta_i} \leqslant \beta < \omega^\alpha$, alle i, folgt $\beta_i < \alpha$. Wir wollen $\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$ zeigen, dann ist ω^α HZA.

Dazu genügt es jetzt zu zeigen, daß $\omega^\sigma + \omega^\tau = \omega^\tau$ für alle $\sigma, \tau \in$ ***Ord*** mit $\sigma < \tau$. Warum? Daraus folgt $\omega^{\beta_n} + \omega^\alpha = \omega^\alpha$, $\omega^{\beta_{n-1}} + (\omega^{\beta_n} + \omega^\alpha) = \omega^{\beta_{n-1}} + \omega^\alpha = \omega^\alpha$, ..., $\omega^{\beta_1} + ... + \omega^{\beta_n} + \omega^\alpha = ... = \omega^\alpha$. Sei also $\sigma < \tau$. Nach Subtraktionslemma existiert $\gamma \neq 0$ mit $\tau = \sigma + \gamma$. Dann $\omega^\gamma \geqslant \omega$ und $1 + \omega^\gamma = \omega^\gamma$ nach Korollar 5.4 (d). Mit Lemma 5.2 (b) erhalten wir $\omega^\sigma + \omega^\tau = \omega^\sigma + \omega^{\sigma+\gamma} = \omega^\sigma + (\omega^\sigma \bullet \omega^\gamma) = \omega^\sigma \bullet (1 + w^\gamma) = \omega^\sigma \bullet \omega^\gamma = \omega^{\sigma+\gamma} = \omega^\tau$.

Umgekehrt, sei $\gamma \neq 0$ nicht von der Form ω^α für ein $\alpha \in$ ***Ord***. Zu zeigen ist, daß γ nicht HZA. Sei $\gamma = \omega^{\gamma_1} + ... + \omega^{\gamma_n}$ die Cantor-Normalform von γ zur Basis ω. Es gilt $n \geqslant 2$ und folglich $\omega^{\gamma_1} < \gamma$. Aus der Eindeutigkeit der Cantor-Normalform folgt $\omega^{\gamma_1} + \gamma \neq \gamma$. Es folgt, daß γ nicht HZA ist.

Zu (c): Die Abbildung $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ ist normal nach Lemma 5.2 (c) und surjektiv auf die Klasse aller HZA nach (b). ⊣

ÜBUNGEN

5.1. Berechne die Cantor-Normalform von $\omega^\omega + \omega$ bezüglich der Basis β, wobei

(a) $\beta = n$ für ein $1 < n < \omega$.

(b) $\beta = \omega$.

(c) $\beta = \omega + 1$.

5.2. Sei $\langle \eta(\xi) : \xi \in$ ***Ord***$\rangle$ eine normale Funktion. Dann gilt $\eta(\xi) + \sigma \leqslant \eta(\xi + \sigma)$ für alle $\xi, \sigma \in$ ***Ord***.

5.3. Beweise die Eindeutigkeit der im Subtraktions-, Divisions- und Logarithmuslemma gezeigten Darstellungen.

5.4. Eine Ordinalzahl α heißt ***Hauptzahl für die Multiplikation*** (*HZM*), falls $\alpha > 1$ und $\beta \bullet \alpha = \alpha$ für alle β mit $1 \leqslant \beta < \alpha$. Beweise:

(a) 2 und ω sind HZM. Falls $2 < n < \omega$, so ist n nicht HZM.

(b) Falls $\tau \neq 0$, so ist ω^{ω^τ} HZM.

(c) Falls $\gamma \neq 0$ und γ nicht Hauptzahl für die Addition (HZA) ist, so ist ω^γ nicht HZM.

(d) Falls $\alpha_1 \neq 0$, $n > 1$ und $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$ mit $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, so ist α nicht HZM.

(e) Die Klasse aller HZM ist genau $\{2\} \cup \{\omega^{\omega^\tau} : \tau \in \boldsymbol{Ord}\}$.

5.5. Sei $\varepsilon \in$ ***Ord Hauptzahl für die Exponentiation*** (*HZE*), falls $\varepsilon > 2$ und $\alpha^\varepsilon = \varepsilon$ für alle $2 \leqslant \alpha < \varepsilon$. Zeige:

(a) Falls $2^\gamma = \gamma$, so ist γ HZE. Tipp: Zeige nacheinander, daß γ Limeszahl, HZA und HZM ist.

(b) Die Klasse aller HZE ist genau $\{\omega\} \cup \{\alpha : \omega^\alpha = \alpha\}$.

(c) Zeige, daß es in ***Ord*** unbeschränkt viele HZE gibt.

6. KARDINALZAHLEN

DEFINITION. Für Mengen A, B schreiben wir $\boldsymbol{A \preccurlyeq B}$, falls es eine Injektion $f: A \to B$ gibt; wir schreiben $\boldsymbol{A \approx B}$ („A ist ***gleichmächtig*** *zu* B“), falls es eine Bijektion $f: A \to B$ gibt. Schließlich $\boldsymbol{A \prec B} :\Leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge A \not\approx B$.

SATZ 6.1. (*Satz von Cantor-Bernstein oder Schröder-Bernstein*). *Für alle A, B gilt: Falls $A \preccurlyeq B$ und $B \preccurlyeq A$, so gilt $A \approx B$.*

BEWEIS. Seien $f: A \to B$ injektiv, $g: B \to A$ injektiv. Definiere rekursiv Mengen A_n, B_n, alle $n < \omega$: $A_0 = A$, $B_0 = g[B]$, $A_{n+1} = g \circ f[A_n]$, $B_{n+1} = g \circ f[B_n]$. Es gilt $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq \ldots$.

Beweis durch Induktion: Offensichtlich ist $A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1$. Sei jetzt $A_{n-1} \supseteq B_{n-1} \supseteq A_n \supseteq B_n$ bewiesen für ein $n \geqslant 1$. Nach Definition $A_n = g \circ f[A_{n-1}]$ und $B_n = g \circ f[B_{n-1}]$. Also $A_{n-1} \supseteq B_{n-1} \supseteq g \circ f[A_{n-1}] \supseteq g \circ f[B_{n-1}]$. Es folgt $g \circ f[g \circ f[A_{n-1}]] \supseteq g \circ f[g \circ f[B_{n-1}]]$.

Sei $z \in$ rechte Seite. Also existiert $y \in g \circ f[B_{n-1}]$ mit $g \circ f(y) = z$. Es folgt $y \in g \circ f[A_{n-1}]$. Also $z = g \circ f(y) \in g \circ f[g \circ f[A_{n-1}]]$. Außerdem $A_{n+1} \subseteq B_n$: Sei $z \in A_{n+1} = g \circ f[A_n]$. Also existiert $y \in A_n$ mit $z = g \circ f(y)$. Also $y \in B_{n-1}$. Es folgt $z = g \circ f(y) \in g \circ f[B_{n-1}] = B_n$.

Wir definieren eine Bijektion $h: A_0 \to B_0$. Das genügt, da dann $g^{-1} \circ h: A \to B$ eine Bijektion ist. Definition von h: Sei $x \in A$. Dann $h(x) = g \circ f(x)$, falls ein $n < \omega$ existiert, so daß $x \in A_n \setminus B_n$; und $h(x) = x$, sonst.

h ist injektiv: Seien $x, y \in A_0$, $x \neq y$.

Fall 1. Seien $x, y \in \bigcup_{n\in\omega} A_n \setminus B_n$. Nach Definition von h gilt: $h(x) = g \circ f(x) \neq^{(Komposition)} g \circ f(y) = h(y)$.

Fall 2. Seien $x \in A_n \setminus B_n$ für ein n, aber $y \notin A_m \setminus B_m$ für alle $m < \omega$. Dann ist $h(x) = g \circ f(x) \in g \circ f[A_n \setminus B_n] =^{(g\circ f\text{ injektiv})} g \circ f[A_n] \setminus g \circ f[B_n] = A_{n+1} \setminus B_{n+1}$. Es folgt $h(x) \neq h(y)$.

Fall 3. Seien $x, y \notin A_n \setminus B_n$, alle $n < \omega$. Es folgt $h(x) = x \neq y = h(y)$.

h ist surjektiv: Sei $y \in B_0$.

Fall 1. Es existiert $n < \omega$, so daß $y \in A_n \setminus B_n$. Dann ist $n > 0$, Es gilt $A_n \setminus B_n = g \circ f[A_{n-1}] \setminus g \circ f[B_{n-1}] = g \circ f[A_{n-1} \setminus B_{n-1}]$. Also existiert $x \in A_{n-1} \setminus B_{n-1}$ mit $g \circ f(x) = y$.

Fall 2. Es existiert kein $n < \omega$, so daß $y \in A_n \setminus B_n$. Dann gilt $y = h(y)$. ⊣

DEFINITION. Die ***Kardinalität*** einer Menge X ist definiert als das kleinste $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$ mit der Eigenschaft $\alpha \approx X$, falls es so ein α gibt. Dieses α wird dann durch ***card(X)*** oder $\boldsymbol{|X|}$ bezeichnet.

BEMERKUNGEN. *AC* impliziert, daß $|X|$ existiert für alle X (Satz 4.5). Falls *AC* nicht gilt, so gibt es Mengen deren Kardinalität nicht definiert ist ($(W) \Leftrightarrow AC$).

Klarerweise gilt $A \approx B \Rightarrow |A| = |B|$. Außerdem gilt stets: $A \approx |A|$.

DEFINITION. Eine Ordinalzahl α heißt ***Kardinalzahl***, falls $\alpha = |\alpha|$. Also $\forall \beta < \alpha\ \alpha \not\approx \beta$. $\boldsymbol{Card} = \{\alpha \in Ord: \alpha \text{ ist eine Kardinalzahl}\}$.

Also ***Card*** ist eine Klasse. Wir werden zeigen, daß ***Card*** keine Menge ist.

LEMMA 6.2. *Seien $\alpha, \beta \in Ord$ und sei $|\alpha| \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Dann $|\beta| = |\alpha|$.*

BEWEIS. Aus $\beta \leqslant \alpha \Rightarrow \beta \preccurlyeq \alpha$. Umgekehrt gilt $\alpha \approx |\alpha| \subseteq \beta$, folglich $\alpha \preccurlyeq \beta$. Nach Cantor-Bernstein folgt $\alpha \approx \beta$. ⊣

LEMMA 6.3. *Sei $n \in \omega$. Es gilt:*

(a) $n \not\approx n + 1$.

(b) $\forall \alpha\, ((\alpha \in Ord \wedge \alpha \approx n) \Rightarrow \alpha = n)$.

BEWEIS. *Zu (a)*: Induktion über n: $0 \not\approx 1$. Es gelte $n \not\approx n + 1$. Zeige $n + 1 \not\approx n + 2$: Angenommen $f: n + 1 \to n + 2$ wäre bijektiv.

Fall 1. $f(n) = n + 1$, dann ist $f \upharpoonright n$ eine Bijektion zwischen n und $n + 1$, Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Fall 2. $f(n) \neq n + 1$. Definiere $g: n + 2 \to n + 2$ durch $g(i) = n + 1$, falls $i = f(n)$; $g(i) = f(n)$, falls $i = n + 1$; $g(i) = i$, sonst. So ist g bijektiv und $g \circ f: n + 1 \to n + 2$ bijektiv mit $g \circ f(n) = n + 1$, also Widerspruch wie im Fall 1.

Zu (b): Sei $\alpha \approx n$.

Fall 1. $\alpha < n$. Also ist $\alpha \in \omega$ und $|\alpha| \leqslant \alpha < \alpha + 1 \leqslant n$. Aus Lemma 6.2 folgt $|\alpha + 1| = |\alpha|$, also $\alpha + 1 \approx \alpha$, im Widerspruch zu (a).

Fall 2. $n < \alpha$. Wieder: $|\alpha| = |n| \leqslant n < n + 1 \leqslant \alpha$. Aus Lemma 6.2 folgt $|n + 1| = |n|$, also $n + 1 \approx n$, Widerspruch zu (a). ⊣

KOROLLAR 6.4. *Jedes $n \in \omega$ ist eine Kardinalzahl und ebenso ist ω eine Kardinalzahl.*

DEFINITION. Eine Menge A heißt ***endlich***, falls $|A| < \omega$. Eine Menge A heißt ***abzählbar***, falls $|A| \leqslant \omega$. Eine Menge A heißt ***unendlich***, falls A nicht endlich, d.h. $|A| \geqslant \omega$. Eine Menge A heißt ***überabzählbar***, falls $\omega < |A|$.

LEMMA 6.5. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Falls k eine unendliche Kardinalzahl ist, so ist k eine Limesordinalzahl.

(b) A ist unendlich $\Leftrightarrow$ Es existiert $B \subset A$ mit $A \approx B$.

BEWEIS. *Zu (a)*: Sei $\alpha \in \mathbf{Ord}$, $\alpha \geqslant \omega$. Finde Bijektion $f: \alpha + 1 \to \alpha$ wie folgt: $f(\alpha) = 0$; $f(n) = n + 1$, alle $n < \omega$; $f(\beta) = \beta$, alle $\omega \leqslant \beta < \alpha$. Klar: f ist bijektiv.

Zu (b): Es genügt dies für $A \in \mathbf{Ord}$ zu beweisen. Sei $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Sei zuerst $\alpha \geqslant \omega$. Definiere $g: \alpha \to \alpha \setminus \{0\}$ durch $g(\beta) = \beta + 1$, falls $\beta < \omega$, und $g(\beta) = \beta$, falls $\omega \leqslant \beta < \alpha$. g ist bijektiv. Die Umkehrung liefert im wesentlichen Lemma 6.3 (b). Zeige: Kein $n \in \omega$ ist gleichmächtig zu einem $A \subset n$. ⊣

SATZ 6.6. (C*antor*) $\forall x\, (x \prec \wp(x))$.

BEWEIS. Klarerweise ist $f: x \to \wp(x), y \mapsto \{y\}$ injektiv. Somit gilt $x \preccurlyeq \wp(x)$.

Angenommen es gäbe eine Injektion $f: \wp(x) \to x$. Betrachte die Menge $Z = \{y \in \wp(x): f(y) \notin y\}$. Setze $w = f[Z]$. Wir fragen uns: Gilt $f(w) \notin w$? Angenommen ja. Dann ist $w \in Z$, also $f(w) \in f[Z] = w$, Widerspruch. Folglich gilt $f(w) \notin w = f[Z]$. Es gibt also $y \in Z$ mit $f(y) = f(w)$. Es folgt $y \neq w$. Also ist f nicht injektiv. ⊣

SATZ 6.7. *Zu jedem $\alpha \in$* **Ord** *existiert $k \in$* **Card** *mit $k > \alpha$.*

BEWEIS. Mit AC: Sei $\alpha \in \mathbf{Ord}$ gegeben. Unter AC existiert $|\wp(\alpha)|$. Wegen Satz 6.6 gilt $\alpha < |\wp(\alpha)|$.

Ohne AC: Sei $\alpha \in \mathbf{Ord}$ mit $\alpha \geqslant \omega$ gegeben. Setze $W = \{R \in \wp(\alpha \times \alpha): \langle \alpha, R \rangle \text{ ist eine Wohlordnung}\}$. Sei $\varphi(x, y)$ die Formel, die besagt, daß x eine Wohlordnung auf α ist und $y = o.t.(\langle \alpha, x \rangle)$. Es gilt dann: Zu jedem $x \in W$ existiert genau ein y mit $\varphi(x, y)$. Nach Ersetzungsaxiom existiert also $T := \{o.t.(\langle \alpha, R \rangle): R \in W\}$. $T \subseteq \mathbf{Ord}$. Sei $k = sup(T)$. Da $\alpha \in T$, gilt $k \geqslant \alpha$. Wir werden zeigen: (1) $k \notin T$ und (2) $k \in \mathbf{Card}$.

Zu (1): Sonst $k \in T$, also existiert $R \in W$ mit $o.t.(\langle\alpha, R\rangle) = k$. Insbesondere wäre $\alpha \approx k$. Da $\alpha \geqslant \omega$, folgt $k \geqslant \omega$ und somit $k \approx k + 1$. Es gibt also eine Bijektion $g\colon \alpha \to k + 1$. Definiere $R_0 \in W$ durch: Für $\nu, \mu \in \alpha$: $\langle\nu, \mu\rangle \in R_0 \Leftrightarrow g(\nu) \in g(\mu)$. Klarerweise $o.t.(\langle\alpha, R_0\rangle) = k + 1$. Folglich $k + 1 \in T$, Widerspruch. Also $k \notin T$.

Zu (2): Angenommen $|k| < k$. Wähle $\gamma \in T$ mit $|k| \leqslant \gamma < k$. Nach Lemma 6.2 gilt $\gamma \approx k$. Außerdem $\alpha \approx \gamma$. Folglich $k \approx \alpha$. Sei $f\colon \alpha \to k$ bijektiv. Definiere $R_2 \subseteq \alpha \times \alpha$ durch $(\mu, \nu) \in R_2 \Leftrightarrow f(\mu) \in f(\nu)$. Es folgt $o.t.(\langle\alpha, R_2\rangle) = k$, also $k \in T$, Widerspruch zur Behauptung (1). ⊣

BEMERKUNG. Es folgt, daß ***Card*** eine echte Klasse ist, weil $\bigcup$***Card*** = ***Ord***.

DEFINITION. Sei $\alpha \in$ ***Ord***. Mit α^+ bezeichnen wir das kleinste $\gamma \in$ ***Card*** mit $\gamma > \alpha$.

SATZ 6.8. *Sei $X \subseteq$ **Card** eine Menge. Dann gilt $\bigcup X \in$ **Card**.*

BEWEIS. Falls $sup(X) = max(X)$, klar.

Nehme an, daß $max(X)$ nicht existiert, also $sup(X) \notin X$. Sei $k = sup(X)$. Angenommen $|k| < k$, also auch $|k| + 1 < k$. Wähle $\alpha \in X$ mit $|k| + 1 \leqslant \alpha < k$. Nach Lemma 6.2 gilt $\alpha \approx |k|$. Folglich $|\alpha| < \alpha$. Aber $\alpha \in X \subseteq$ ***Card***, ein Widerspruch. ⊣

DEFINITION. Mittels transfiniter Rekursion können wir ***Card*** durchnummerieren. $\boldsymbol{\omega_0} := \omega$, $\boldsymbol{\omega_{\alpha+1}} := (\omega_\alpha)^+$, $\boldsymbol{\omega_\lambda} = sup\{\omega_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, falls λ eine Limesordinal ist.

Genauer: Definiere $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ wie folgt: $\boldsymbol{G}(a) := a(\alpha)^+$, falls a eine Funktion ist mit Domain $\alpha + 1$, $\alpha \in$ ***Ord***, und $a(\alpha) \in$ ***Ord***; $\boldsymbol{G}(a) := sup(ran(a))$, falls a eine Funktion ist, die als Domain eine Limesordinalzahl hat; $\boldsymbol{G}(a) := \omega$, sonst.

Erhalte $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{V}$. Setze $\omega_\alpha := \boldsymbol{F}(\alpha)$ und zeige die drei Eigenschaften oben. Klarerweise ist ***F*** surjektiv auf ***Card*** $\upharpoonright \omega$ und außerdem normal.

BEMERKUNG. Statt ω_α schreibt man oft $\aleph_\alpha$ (sprich: Aleph Alpha).

Eine Kardinalzahl ω_α heißt ***Nachfolgerkardinalzahl***, falls $\alpha = \beta + 1$ für ein β, und ***Limeskardinalzahl***, falls α eine Limesordinalzahl ist.

DEFINITION. Definiere die ***kardinale Addition***, ***Multiplikation*** und ***Exponentiation*** wie folgt: Seien dazu $\kappa, \lambda \in$ ***Card***. Wir setzen $\kappa \oplus \lambda := |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$, $\kappa \otimes \lambda := |\kappa \times \lambda|$ und $\kappa^\lambda := |{}^\lambda\kappa|$, wobei ${}^BA := \{f\colon f\colon B \to A\}$ für Mengen A, B sei.

Es ist klar, daß $\oplus$ und $\otimes$ kommutativ sind. Es gilt $\omega \oplus 1 = \omega \neq \omega + 1$ und $\omega \otimes \omega = \omega \neq \omega \bullet \omega$, *da* $|\omega \times \omega| = \omega$.

Warum gilt $|\omega \times \omega| = \omega$? Verwende den Satz von Cantor-Bernstein. Betrachte $\omega \to \omega \times \omega$, $n \mapsto \langle n, 0\rangle$ und $\omega \times \omega \to \omega$, $\langle n, m\rangle \mapsto 2^n \bullet 3^m$ injektiv. Betrachte auch die Bijektion $\omega \times \omega \to \omega$, $\langle n, m\rangle \mapsto \frac{1}{2} \bullet (n + m)(n + m + 1) + n$.

Allgemein werden wir zeigen, daß $\omega_\alpha \otimes \omega_\alpha = \omega_\alpha$ für alle α.

SATZ 6.9. *Es gilt $2^\kappa = |\wp(\kappa)|$ für alle $\kappa \in$ **Card**.*

BEWEIS. Betrachte $F\colon {}^\kappa 2 \to \wp(\kappa)$ mit $x \mapsto \{\alpha\colon x(\alpha) = 1\}$. Zeige als Übung, daß F ist bijektiv ist. ⊣

SATZ 6.10. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Es gilt $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.*

Beweis. Definiere $\ll$ auf $\boldsymbol{Ord}^2$ wie folgt: $\langle\alpha, \beta\rangle \ll \langle\gamma, \delta\rangle :\Leftrightarrow (max(\{\alpha, \beta\}) < max(\{\gamma, \delta\})) \vee (max(\{\alpha, \beta\}) = max(\{\gamma, \delta\}) \wedge \alpha < \gamma) \vee (max(\{\alpha, \beta\}) = max(\{\gamma, \delta\}) \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta)$.

$\ll$ ist eine Wohlordnung auf $\boldsymbol{Ord} \times \boldsymbol{Ord}$. Sei dazu $X \subseteq \boldsymbol{Ord}^2$, $X \neq \varnothing$, X Klasse. Betrachte zuerst $Y_0 = \{max(\{\alpha, \beta\}): \langle\alpha, \beta\rangle \in X\}$. Also $Y_0 \subseteq \boldsymbol{Ord}$, $Y_0 \neq \varnothing$. Sei $\gamma_0 = min(Y_0)$. Setze $Y_1 = \{\alpha: \langle\alpha, \beta\rangle \in X \wedge max(\{\alpha, \beta\}) = \gamma_0\}$. Es gilt $Y_1 \neq \varnothing$. Sei $\alpha_0 = min(Y_1)$. Setze $Y_2 = \{\beta: \langle\alpha, \beta\rangle \in X \wedge max(\{\alpha, \beta\}) = \gamma_0 \wedge \alpha = \alpha_0\}$. Es gilt $Y_2 \neq \varnothing$. Sei $\beta_0 = min(Y_2)$. Prüfe: $\langle\alpha_0, \beta_0\rangle = min(X)$. Bemerke: $\delta \times \delta$ ist Anfangsabschnitt von $\boldsymbol{Ord}^2$ für alle $\delta \in \boldsymbol{Ord}$.

Definiere $\Gamma: \boldsymbol{Ord}^2 \to \boldsymbol{Ord}$, $\langle\alpha, \beta\rangle \mapsto o.t.(\boldsymbol{Ord}^2(\langle\alpha, \beta\rangle))$, wobei $\boldsymbol{Ord}^2(\langle\alpha, \beta\rangle) = \{\langle\nu, \mu\rangle \in \boldsymbol{Ord}^2: \langle\nu, \mu\rangle \ll \langle\alpha, \beta\rangle\}$. Es folgt: Γ ist ordnungstreu und surjektiv. Also ist Γ ein Isomorphismus zwischen Klassen. Γ ist also bijektiv.

Klar ist, daß $\Gamma[\omega \times \omega] = \omega$; denn für alle $\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega$ ist $\boldsymbol{Ord}^2(\langle n, m\rangle)$ endlich und jeder endliche Anfangsabschnitt von $\boldsymbol{Ord}^2$ ist gleich $\boldsymbol{Ord}^2(\langle n, m\rangle)$ für ein $\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega$. Allgemein werden wir zeigen: $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \omega_\alpha$ gilt für alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$.

Wir haben das eben schon für $\alpha = 0$ gesehen. Beweis indirekt: Wähle α minimal, so daß $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] \neq \omega_\alpha$. Da $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ ein Anfangsabschnitt von $\boldsymbol{Ord}^2$ ist, ist $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] \in \boldsymbol{Ord}$.

Entweder $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] < \omega_\alpha$ oder $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] > \omega_\alpha$. Das erste ist unmöglich, da $\omega_\alpha \preccurlyeq \omega_\alpha \times \omega_\alpha \approx \Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] < \omega_\alpha$. Dann wäre ω_α aber keine Kardinalzahl, ein Widerspruch. Also gilt $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] > \omega_\alpha$. Also existiert $\langle\beta, \gamma\rangle \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha$, so daß $\Gamma(\langle\beta, \gamma\rangle) = \omega_\alpha$. Da ω_α eine Limeszahl ist, können wir $\delta < \omega_\alpha$ wählen mit $\beta < \delta$ und $\gamma < \delta$. Also gilt $\langle\beta, \gamma\rangle \in \delta \times \delta$, und wegen Definition von $\ll$ $\boldsymbol{Ord}^2(\langle\beta, \gamma\rangle) \subseteq \delta \times \delta$. Es folgt $\Gamma^{-1}[\omega_\alpha] = \boldsymbol{Ord}^2(\langle\beta, \gamma\rangle) \subseteq \delta \times \delta$. Also haben wir, da Γ^{-1} injektiv, (*) $\omega_\alpha \preccurlyeq \delta \times \delta \approx |\delta| \times |\delta|$. Da $\delta < \omega_\alpha$, folgt $|\delta| \leqslant \delta < \omega_\alpha$ und somit $|\delta| = \omega_h$ für ein $h < \alpha$. Wegen Minimalität von α folgt $\Gamma[\omega_h \times \omega_h] = \omega_h$, also insbesondere $\omega_h \times \omega_h \approx \omega_h$. Wir erhalten aus (*) $\omega_\alpha \preccurlyeq \omega_h \times \omega_h \approx \omega_h$. Zusammen $\omega_\alpha \preccurlyeq \omega_h$ ein Widerspruch zu $h < \alpha$.

Wir erhalten also, daß $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \omega_\alpha$ gilt für alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$, insbesondere $|\omega_\alpha \times \omega_\alpha| = \omega_\alpha$, alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$. ⊣

KOROLLAR 6.11. *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen. Dann gilt $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = max(\{\kappa, \lambda\})$.*

BEWEIS. Sei z.B. $\kappa = max(\{\kappa, \lambda\})$. Es gilt $\kappa \otimes \lambda =^{(Def.)} |\kappa \times \lambda| \approx \kappa \times \lambda \preccurlyeq \kappa \times \kappa \approx \kappa \preccurlyeq \kappa \times \lambda \approx \kappa \otimes \lambda$. Aus dem Satz von Cantor-Bernstein folgt $\kappa \otimes \lambda = \kappa$.

Auch gilt $\kappa \oplus \lambda =^{(Def.)} |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}| \approx \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \preccurlyeq \kappa \times \lambda \preccurlyeq \kappa \times \kappa \approx \kappa \preccurlyeq \kappa \oplus \lambda$. Also wieder mit Cantor-Bernstein $\kappa \oplus \lambda = \kappa$. ⊣

SATZ 6.12 (*AC*). *Sei $\kappa \geqslant \omega$ eine Kardinalzahl, und sei $\langle X_\alpha: \alpha < \kappa\rangle$ eine κ-Folge, so daß $|X_\alpha| \leqslant \kappa$ für alle $\alpha < \kappa$. Dann gilt $|\bigcup\{X_\alpha: \alpha < \kappa\}| \leqslant \kappa$. Falls $\kappa = \omega$ folgt also: Eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

BEWEIS. Zu jedem $\alpha < \kappa$ sei $Z_\alpha = \{f: f: X_\alpha \to \kappa \text{ ist injektiv}\}$. Da $|X_\alpha| \leqslant \kappa$, folgt $Z_\alpha \neq \varnothing$. Wegen Ersetzungsaxiom existiert $W = \{Z_\alpha: \alpha < \kappa\}$. Nach *AC* existiert $g: W \to \bigcup W$, so daß $g(Z) \in Z$, alle $Z \in W$. Es ist also $g(Z_\alpha): X_\alpha \to \kappa$ injektiv. Definiere $h: \bigcup\{X_\alpha: \alpha < \kappa\} \to \kappa \times \kappa$ wie folgt: Für $x \in \bigcup\{X_\alpha: \alpha < \kappa\}$ setze $h(x) = (g(Z_\beta)(x), \beta)$, wobei $\beta < \kappa$ minimal ist mit $x \in X_\beta$. Dann ist h injektiv: Seien $x, y \in \bigcup\{X_\alpha: \alpha < \kappa\}$ und $x \neq y$. Sei $\beta_x < \kappa$ minimal mit $x \in X_{\beta_x}$ und sei $\beta_y \in \kappa$ mit $y \in X_{\beta_y}$.

Fall 1. $\beta_x = \beta_y$. Also $h(x) = (g(Z_\beta)(x), \beta)$, $h(y) = (g(Z_\beta)(y), \beta)$. Da $g(Z_\beta)$ injektiv ist, folgt $g(Z_\beta)(x) \neq g(Z_\beta)(y)$, also $h(x) \neq h(y)$.

Fall 2. $\beta_x \neq \beta_y$. Also $h(x) = (g(Z_{\beta_x})(x), \beta_x)$, $h(y) = (g(Z_{\beta_y})(y), \beta_y)$; also haben wir $\bigcup\{X_\alpha: \alpha < \kappa\} \preccurlyeq \kappa \times \kappa \approx \kappa$. ⊣

Wir haben also gezeigt: Falls $\kappa \in \boldsymbol{Card}$, $\kappa \geqslant \omega$ und $\langle A_\nu: \nu < \kappa\rangle$, wobei $|A_\nu| \leqslant \kappa$, dann gilt $|\bigcup\{A_\nu: \nu < \kappa\}| \leqslant \kappa$. Also $\bigcup_{\nu<\kappa} A_\nu \preccurlyeq \kappa \times \kappa \approx \kappa$.

BEMERKUNGEN. Es gilt folgende Verallgemeinerung: Sei $\langle A_i: i \in I\rangle$ eine Mengenfamilie. Es gilt: $|\bigcup\{A_i: i \in I\}| \leqslant |I| \otimes sup(\{|A_i|: i \in I\})$.

Aus Satz 6.9 und Satz 6.6 (Satz von Cantor) folgt trivialerweise: $\forall\kappa \in \mathbf{Card}\ 2^\kappa > \kappa$ und $2^\kappa =^{(Def.)} |{}^\kappa 2| \approx |\wp(\kappa)| > \kappa$. Insbesondere gilt: $2^\omega \geqslant \omega_1$, allgemein $2^{\aleph_\alpha} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$. Die ***Kontinuumshypothese*** (*CH*) besagt: $2^\omega = \omega_1$. Die ***verallgemeinerte Kontinuumshypothese*** (*GCH*) besagt: $\forall\alpha \in Ord: 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Sowohl *CH* als auch *GCH* sind unabhängig von *ZFC*. Genauer: Gödel hat gezeigt: Falls *ZFC* konsistent ist, so ist auch $ZFC + GCH = ZFC \cup \{GCH\}$ konsistent. Cohen hat gezeigt: Falls *ZFC* konsistent, so ist auch $ZFC + \neg CH$ konsistent.

CH heißt „Kontinuumshypothese“, weil das Kontinuum = $\mathbb{R}$ und (*) $|\mathbb{R}| = 2^\omega$ ist. Also $CH \Leftrightarrow |\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Warum gilt (*)? „$\geqslant$“: Betrachte $f: {}^\omega\{0, 2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \Sigma_{n<\omega}\ x(n) / 3^{n+1}$. Leichte Übung: f ist injektiv, es gilt also ${}^\omega 2 \approx {}^\omega\{0, 2\} \preccurlyeq \mathbb{R}$. Übrigens ist $f[{}^\omega\{0, 2\}]$ die sogenannte ***Cantormenge***.

„$\leqslant$“: Wir haben $|\mathbb{Q}| = \omega$. $\mathbb{R}$ ist die Menge aller Dedekind-Schnitte von $\mathbb{Q}$, also $r \in \mathbb{R}$ gdw. $r \subseteq \mathbb{Q} \wedge \forall x \in r\ \forall y \in \mathbb{Q}\ (y \leqslant x \Rightarrow y \in r)$, d.h. r ist Anfangsabschnitt von $\mathbb{Q}$. Folglich $\mathbb{R} \subseteq \wp(\mathbb{Q})$, also $\mathbb{R} \preccurlyeq \wp(\mathbb{Q}) \approx \wp(\omega) \approx 2^\omega$.

LEMMA 6.13. *Seien A, B, C Mengen.*

(a) Es gilt $|{}^A({}^B C)| = |{}^{A\times B}C|$.

(b) Es gilt $|{}^C(A \times B)| = |{}^C A \times {}^C B|$.

(c) Falls $B \cap C = \varnothing$, *so gilt* $|{}^{B\cup C}A| = |{}^B A \times {}^C A|$.

SATZ 6.14. *Falls* $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ *und* $\alpha \leqslant \beta$, *so gilt* $\omega_\alpha^{\omega_\beta} = 2^{\omega_\beta}$.

BEWEIS. Es gilt ${}^{\omega_\beta}2 \preccurlyeq {}^{\omega_\beta}\omega_\alpha \preccurlyeq^{(Satz\ 6.6\ und\ 6.9)} {}^{\omega_\beta}({}^{\omega_\alpha}2) \approx^{(Lemma\ 6.13\ (a))} {}^{\omega_\beta\times\omega_\alpha}2 \approx^{(Korollar\ 6.11)} {}^{\omega_\beta}2$. Verwende dann Cantor-Bernstein. ⊣

Insbesondere haben wir $\omega_\alpha^{\omega_\alpha} = 2^{\omega_\alpha}$, alle α. Also $|R| = 2^\omega = \omega^\omega$.

DEFINITON. Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Eine Funktion $f: \alpha \to \beta$ heißt ***kofinal***, falls $ran(f)$ unbeschränkt ist in β, d.h. $\forall\nu < \beta\ \exists\xi < \alpha: f(\xi) \geqslant \nu$.

Die ***Kofinalität*** oder der *Kofinalitätstyp von* β, abgekürzt $cf(\beta)$, ist die kleinste Ordinalzahl α, so daß ein kofinales $f: \alpha \to \beta$ existiert.

BEMERKUNGEN. Es gilt $\forall\beta\ cf(\beta) \leqslant \beta$. Nehme $f: \beta \to \beta, f(\nu) = \nu$.

Falls $\beta = \gamma + 1$ für ein γ, so ist $cf(\beta) = 1$.

$cf(0)$ = kleinstes β, so daß kofinales $g: \beta \to 0$ existiert, also $cf(0) = 0$.

$cf(\omega) = \omega$, da für jedes $f: n \to \omega$ mit $n < \omega$ $ran(f)$ beschränkt ist in ω. Weiter gilt $cf(\omega + \omega) = \omega$ und $cf(\omega \bullet \omega) = \omega$.

LEMMA 6.15. *Für jedes* $\beta \in \mathbf{Ord}$ *gibt es ein kofinales* $f: cf(\beta) \to \beta$, *welches ordnungstreu ist.*

BEWEIS. O.B.d.A. sei β Limeszahl. Sei $g: cf(\beta) \to \beta$ kofinal. Definiere $f: cf(\beta) \to \beta$ rekursiv wie folgt: Für $\nu < cf(\beta)$ setze $f(\nu) = max(\{g(\nu), sup(\{f(\xi) + 1: \xi < \nu\})\})$. Klar ist: $\forall\nu\ f(\nu) \geqslant g(\nu)$, also falls $ran(f) \subseteq \beta$, so ist f kofinal in β. Außerdem ist f ordnungstreu nach Definition. Aber warum ist $f(\nu) < \beta$, alls $\nu < \beta$?

Sei $\nu = 0$: $g(0) < \beta$, $sup(\varnothing) = 0$, also $f(0) = max(\{g(0), 0\}) < \beta$. Angenommen es gäbe $\nu < cf(\beta)$ mit $f(\nu) \geqslant \beta$, sei ν minimal mit dieser Eigenschaft. Also $\nu \neq 0$. Aus der Definition von $f(\nu)$ folgt $f(\nu) = sup(\{f(\xi) + 1: \xi < \nu\})$, da je $g(\nu) < \beta$. Aus der Minimalität von ν folgt $f(\xi) < \beta$, alle $\xi < \nu$. Da β Limesordinalzahl ist, ist auch $f(\xi) + 1 < \beta$. Es folgt $f(\nu) = \beta$ und $\{f(\xi) + 1: \xi < \nu\}$ ist unbeschränkt in β. Betrachte $f': \nu \to \beta, \xi \mapsto f(\xi) + 1$. Also ist f' kofinal. Da $\nu < cf(\beta)$, ist dies ein Widerspruch. ⊣

DEFINITION. Sei $\beta \in$ ***Ord***. β heißt ***regulär***, falls $cf(\beta) = \beta$. Sonst, falls $cf(\beta) < \beta$, heißt β ***singulär***.

BEMERKUNG. Falls β regulär ist, so $\beta \in$ ***Card***. Es gibt aber singuläre Kardinalzahlen.

BEISPIELE. Alle $n \in \omega$ sind regulär. Auch ω ist regulär. Wir werden sehen: Alle Nachfolgerkardinalzahlen sind regulär, also $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ regulär.
Aber ω_ω ist singulär. Betrachte dazu $f: \omega \to \omega_\omega, n \mapsto \omega_n$ kofinal.

LEMMA 6.16. *Angenommen $\alpha, \beta \in$ **Ord** und $f: \alpha \to \beta$ sei kofinal mit der Eigenschaft $\xi \leqslant \nu \Rightarrow f(\xi) \leqslant f(\nu)$. Dann gilt $cf(\alpha) = cf(\beta)$.*

BEWEIS. Bemerke, daß gilt: α Limeszahl $\Leftrightarrow \beta$ Limeszahl.
„$\Rightarrow$": Sei $\nu < \beta$. Finde $\mu < \alpha$, so daß $f(\mu) \geqslant \nu$, da f kofinal. Da α Limeszahl ist, folgt $\mu + 1 < \alpha$. Da f ordnungstreu ist, folgt $f(\mu + 1) > f(\mu) \geqslant \nu$. Es folgt $\nu + 1 < \beta$.
„$\Leftarrow$" ähnlich.
O.B.d.A. nehmen wir an, α sei Limeszahl und somit auch β. Wir zeigen zuerst $cf(\beta) \leqslant cf(\alpha)$. Wähle $g: cf(\alpha) \to \alpha$ kofinal. Dann ist $f \circ g: cf(\alpha) \to \beta$ kofinal.
Warum? Sei $\nu < \beta$. Wähle $\mu < \alpha$, so daß $f(\mu) \geqslant \nu$. Wähle jetzt $\xi < cf(\alpha)$ mit $g(\xi) \geqslant \mu$. Aus der Ordnungstreue von f folgt $f(g(\xi)) \geqslant f(\mu) \geqslant \nu$. Also ist $f \circ g$ kofinal.
Nun zeigen wir $cf(\alpha) \leqslant cf(\beta)$: Sei $g: cf(\beta) \to \beta$ kofinal. Definiere $h: cf(\beta) \to \alpha$ wie folgt: Für $\nu < cf(\beta)$ sei $h(\nu)$ das kleinste $\xi < \alpha$ mit $f(\xi) \geqslant g(\nu)$. Wir zeigen, daß h kofinal ist (dann folgt $cf(\alpha) < cf(\beta)$): Sei $\gamma < \alpha$ beliebig. Finde $\nu < cf(\beta)$ mit $g(\nu) \geqslant f(\gamma)$, wegen der Kofinalität von g. Nach Definition von h gilt $f(h(\nu)) \geqslant g(\nu)$.
Behauptung: $h(\nu) \geqslant \gamma$. Dies folgt aus der Ordnungstreue von f und $f(h(\nu)) \geqslant g(\nu) \geqslant f(\gamma)$. ⊣

KOROLLAR 6.17. *$\forall\beta\ cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$, d.h. Kofinalitätstypen sind regulär.*

BEWEIS. „$\leqslant$" ist trivial.
„$\geqslant$": Nach Lemma 6.15 existiert ein kofinales und ordnungstreues $f: cf(\beta) \to \beta$. Aus Lemma 6.16 folgt dann $cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$. ⊣

LEMMA 6.18. Seien $\alpha, \beta \in$ ***Ord*** mit $\alpha < \beta$. Es existiert keine ordnungstreue Abbildung $f: \beta \to \alpha$.

BEWEIS. Induktion über α als Übung.

SATZ 6.19. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:*

(a) *κ ist singulär.*

(b) *Es existiert eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ und eine λ-Folge $\langle S_\xi: \xi < \lambda\rangle$ von Teilmengen $S_\xi \subset \kappa$, so daß $|S_\xi| < \kappa$, alle $\xi \in \lambda$, und $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$.*

(c) *Wie unter (b), aber mit dem Zusatz, daß $S_\xi \cap S_{\xi'} = \varnothing$ für alle $\xi, \xi' < \lambda$ mit $\xi \neq \xi'$.*

BEWEIS. Zu *(a) $\Rightarrow$ (b)*: Falls κ singulär ist, so ist $cf(\kappa) < \kappa$. Es existiert also ein kofinales $f: cf(\kappa) \to \kappa$. Setze $\lambda := cf(\kappa)$ und $S_\xi = f(\xi)$, alle $\xi < \lambda$. Da f kofinal ist, folgt $\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi = \kappa$. Da $f(\xi) < \kappa$ und $\kappa \in$ ***Card***, gilt $|f(\xi)| < \kappa$. Es gilt also (b).

Zu *(b)* $\Rightarrow$ *(c)*. Sei $\langle S_\xi : \xi < \lambda\rangle$ wie in (b) gegeben. Zu $\xi < \lambda$ sei $S'_\xi := S_\xi \setminus \bigcup_{\nu<\xi} S_\nu$. Klarerweise ist $S'_\xi \cap S'_{\xi'} = \emptyset$, alle $\xi \neq \xi'$, da $S'_\xi \subseteq S_\xi$. Weiter $\bigcup_{\xi<\lambda} S'_\xi = \kappa$ und $|S'_\xi| \leqslant |S_\xi| < \kappa$.

Zu *(c)* $\Rightarrow$ *(a)*. Sei $\lambda < \kappa$ die kleinste Kardinalzahl, für welche (c) gilt, d.h. es existiert eine disjunkte λ-Folge $\langle S_\xi : \xi < \lambda\rangle$ mit $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$ und $|S_\xi| < \kappa$, alle $\xi < \lambda$. Für jedes $\xi < \lambda$ setze $\beta_\xi :=$ *o.t.* $\bigcup_{\nu<\xi} S_\nu$. Wegen Lemma 6.18 gilt $\beta_\xi \leqslant \beta_{\xi'}$, alle $\xi < \xi'$: Sonst $\alpha :=$ *o.t.* $\bigcup_{\nu<\xi} S_\nu >$ *o.t.* $\bigcup_{\nu<\xi'} S_\nu =: \beta$ für ein Paar $\xi < \xi' < \lambda$. Klarerweise ist die Injektion $i: \bigcup_{\nu<\xi} S_\nu \to \bigcup_{\nu<\xi'} S_\nu$ (mit $j_0 : \bigcup_{\nu<\xi} S_\nu \to \alpha$ und $j_1 : \bigcup_{\nu<\xi'} S_\nu \to \beta$) ordnungstreu. Dann wäre aber $j_1 \circ i \circ j_0^{-1} : \alpha \to \beta$ ordnungstreu, ein Wiederspruch zu Lemma 6.18. Aus der Minimalität von λ folgt weiter $\beta_\xi < \kappa$, alle $\xi < \lambda$: Sonst für ein $\xi < \lambda$ $\beta_\xi \geqslant \kappa$, also $\beta_\xi = \kappa$, da $\bigcup_{\nu<\xi} S_\nu \subseteq \kappa$. Wähle eine Bijektion $\pi: \bigcup_{\nu<\xi} S_\nu \to \kappa$, und setze $S'_\nu := \pi[S_\nu]$, alle $\nu < \xi$. Es folgt $|S'_\nu| = |S_\nu| < \kappa$, alle $\nu < \kappa$, und $\kappa = \bigcup_{\nu<\xi} S'_\nu$. Da ja $\xi < \lambda$, haben wir einen Widerspruch zur Minimalität von λ. Es folgt $\beta_\xi < \kappa$, alle $\xi < \lambda$. Wir wollen zeigen, daß $\sup_{\xi<\lambda} \beta_\xi = \kappa$. Dann ist $\langle \beta_\xi : \xi < \lambda\rangle$ kofinal in κ, somit $cf(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa$, also ist κ singulär. Setze $\beta := \sup_{\xi<\lambda} \beta_\xi$. Also $\beta \leqslant \kappa$. Betrachte die Abbildung $f: \kappa = \bigcup_{\nu<\lambda} S_\nu \to \lambda \times \beta$, $\alpha \mapsto (\xi, \gamma)$, wobei $\xi = \min\{\nu < \lambda : \alpha \in S_\nu\}$ und $\gamma =$ *o.t.* $S_\xi \cap \alpha$. Bemerke, daß f injektiv ist: Sei $\alpha_0 < \alpha_1 < \kappa$. Sei $f(\alpha_0) = (\xi_0, \gamma_0)$ und $f(\alpha_1) = (\xi_1, \gamma_1)$. Falls $\xi_0 \neq \xi_1$, fertig. Sei also $\xi_0 = \xi_1 =: \xi$. Dann ist $S_\xi \cap \alpha_0$ ein echter Anfangsabschnitt von $S_\xi \cap \alpha_1$: Anfangsabschnitt ist klar. „Echt", da $\alpha_0 \notin S_\xi \cap \alpha_0$, aber $\alpha_0 \in S_\xi \cap \alpha_1$. Es folgt $\gamma_0 < \gamma_1$, somit $f(\alpha_0) \neq f(\alpha_1)$. Es folgt $\kappa \leqslant |\lambda \times \beta| = \lambda \otimes |\beta| = \max\{\lambda, |\beta|\} =_{\lambda<\kappa} |\beta|$. Da $\beta \leqslant \kappa$, folgt $\beta = \kappa$. ⊣

SATZ 6.20 (AC). *(Unendliche) Nachfolgerkardinalzahlen sind stets regulär.*

BEWEIS. Angenommen, nicht. Dann existiert also ein unendliches $\kappa \in$ ***Card*** und $\gamma < \kappa^+$ und eine kofinale Funktion $f: \gamma \to \kappa^+$. Dann gilt $\bigcup\{f(\nu): \nu < \gamma\} = \kappa^+$. Da $\gamma < \kappa^+$. folgt $|\gamma| \leqslant \kappa$, ebenso $|f(\nu)| \leqslant \kappa$. Aus Satz 6.12 folgt $|\bigcup\{f(\nu): \nu < \gamma\}| \leqslant \kappa$, ein Widerspruch. ⊣

BEMERKUNG. Falls α Limeszahl ist, gilt $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$, da $\alpha \to \aleph_\alpha$, $\beta \to \aleph_\beta$ kofinal und ordnungstreu ist. Verwende also Lemma 6.16.

Wir stellen uns im folgenden die Frage, ob es reguläre Limeskardinalzahlen gibt.

DEFINITION. Reguläre Limeskardinalzahlen ($> \omega$) heißen ***schwach unerreichbare Kardinalzahlen***.
$\kappa \in$ ***Card*** heißt ***stark unerreichbar***, falls $\kappa > \omega$, κ regulär und $\forall \lambda < \kappa\ 2^\lambda < \kappa$.

BEMERKUNGEN. Wir bemerken folgende Eigenschaften zur obigen Definition:

(a) κ stark unerreichbar $\Rightarrow \kappa$ schwach unerreichbar.

(b) Sei ω_α schwach unerreichbar. Dann gilt $\alpha \leqslant \omega_\alpha = cf(\omega_\alpha) =^* cf(\alpha) \leqslant \alpha$. Also $\omega_\alpha = \alpha$. Umgekehrt impliziert $\omega_\alpha = \alpha$ noch nicht, daß ω_α schwach unerreichbar ist. Betrachte den ersten Fixpunkt von $\alpha \mapsto \omega_\alpha$. Sei β definiert über $\omega_\beta := \sup(\{\omega, \omega_\omega, ...\})$. Dann gilt $\omega_\beta = \beta$, also $cf(\omega_\beta) = \omega$.

(c) In *ZFC* ist die Existenz von schwach unerreichbaren Kardinalzahlen nicht beweisbar. Es gilt sogar: Falls *ZFC* konsistent ist, so ist in *ZFC* nicht die Konsistenz von „*ZFC* + $\exists\kappa$ κ schwach unerreichbar" beweisbar. (Denkbar, aber unwahrscheinlich ist, daß *ZFC* die Existenz solcher „großen" Kardinalzahlen verwirft.) Warum nicht? Da aus der Existenz einer solchen Kardinalzahl die Konsistenz von ZFC folgt.

BEWEIS. Zu *(a)*: Sei $\gamma < \kappa$ eine Kardinalzahl. Dann ist nach Cantor $\gamma^+ \leqslant 2^\gamma$. Da $2^\gamma < \kappa$, folgt $\gamma^+ < \kappa$. Folglich κ Limeskardinalzahl.

Zu *(b)*: Zu (*): α ist Limes. Deshalb ist $f: \alpha \to \omega_\alpha$, $\beta \mapsto \omega_\alpha$ kofinal und ordnungstreu. Mit Lemma 6.16 folgt (*). ⊣

SATZ 6.21. (*Satz von König*) $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$ *für alle unendlichen* $\kappa \in \mathbf{Card}$.

BEWEIS. Sei $f\colon cf(\kappa) \to \kappa$ kofinal. Sei $F\colon \kappa \to {}^{cf(\kappa)}\kappa$ beliebig. Wir werden zeigen, daß F nicht surjektiv ist. Das impliziert natürlich $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$, da $\kappa \leqslant \kappa^{cf(\kappa)}$ trivial ist.
Wir definieren $h\colon cf(\kappa) \to \kappa$, also $h \in {}^{cf(\kappa)}\kappa$ mit $h \notin ran(F)$, wie folgt: Sei $\nu \in cf(\kappa)$. Sei $h(\nu) = min(\kappa \setminus \{F(\alpha)(\nu)\colon \alpha < f(\nu)\})$. Es existiert, da $|\{F(\alpha)(\nu)\colon \alpha < f(\nu)\}| < \kappa$.
Warum gilt $h \notin ran(F)$? Angenommen doch. Es gäbe also $\alpha_0 < \kappa$ mit $h = F(\alpha_0)$. Da f kofinal ist, existiert $\nu < cf(\kappa)$ mit $f(\nu) \geqslant \alpha_0 + 1$. Es folgt $F(\alpha_0)(\nu) \in \{F(\alpha)(\nu)\colon \alpha < f(\nu)\}$. Somit $h(\nu) \neq F(\alpha_0)(\nu)$, also $h \neq F(\alpha_0)$, Widerspruch. ⊣

KOROLLAR 6.22. $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ cf(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

BEWEIS. Wäre, für ein α, $cf(2^{\aleph_\alpha}) \leqslant \aleph_\alpha$. Setze $\aleph_\beta := cf(2^{\aleph_\alpha})$. Es folgt $(2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha}$. Lasse $\kappa := 2^{\aleph_\alpha}$. So haben wir $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa$, Widerspruch zu Satz 6.21. ⊣

Die ***Kontinuumsfunktion*** $\mathbf{F}\colon \mathbf{Card} \to \mathbf{Card}$, $\kappa \mapsto 2^\kappa$ erfüllt also folgende Eigenschaften:

(a) $\kappa \leqslant \lambda \Rightarrow \mathbf{F}(\kappa) \leqslant \mathbf{F}(\lambda)$,

(b) $\mathbf{F}(\kappa) > \kappa$ (Cantor),

(c) $cf(\mathbf{F}(\kappa)) > \kappa$ (König).

Dies sind die einzigen beweisbaren Restriktionen auf $\mathbf{F} \restriction \{\kappa \in \mathbf{Card}\colon \kappa \geqslant \omega \wedge \kappa \text{ regulär}\}$. Genauer: Sei $\mathbf{H}\colon \{\kappa \in \mathbf{Card}\colon \kappa \geqslant \omega \wedge \kappa \text{ regulär}\} \to \mathbf{Card}$ beliebig mit (a), (b) und (c), dann existiert ein Modell $(\mathbf{M}, \in)$ von ZFC, in welchem $\mathbf{H}$ die Kontinuumsfunktion ist (Satz von Easton).
Die Kontinuumsfunktion auf singulären Kardinalzahlen erfüllt mehr beweisbare Restriktionen.

ÜBUNGEN

6.1. Seien A, B, C Mengen. Finde natürliche Bijektionen zwischen folgenden Mengen:

(a) ${}^C({}^BA)$ und ${}^{B\times C}A$;

(b) ${}^C(A \times B)$ und ${}^CA \times {}^CB$;

(c) ${}^{B\cup C}A$ und ${}^BA \times {}^CA$, falls $B \cap C = \varnothing$.

6.2. Sei $\langle A_i\colon i \in I\rangle$ eine Familie von Mengen und sei A eine unendliche Menge. Zeige:

(a) $|\bigcup\{A_i\colon i \in I\}| \leqslant |I| \cdot sup(\{|A_i|\colon i \in I\})$;

(b) $\wp_{fin}(A)$, die Menge aller endlichen Teilmengen von A, hat die gleiche Kardinalität wie A.

6.3. Eine reelle Zahl r heißt ***algebraisch***, falls r Nullstelle eine Polynoms in $\mathbb{Z}[X]$ ist. Sonst heißt r ***transzendent***. Zeige, daß es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

6.4. Sei k ein Körper und E ein k-Vektorraum. Zeige, daß die Kardinalität jeder Basis von E dieselbe ist (diese heißt die ***Dimension*** von E). Zeige ferner:

(a) $|E| = |k| \cdot dim(E)$, falls $dim(E) \geqslant \omega$,

(b) $|E^*| = |k|^{dim(E)}$, wobei $E^* = Hom_k(E, k)$.

6.5. Zeige, daß die Abbildung $f\colon {}^{\omega}\{0, 2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Sigma_{i<\omega}\, x(i)\, 3^{-i-1}$ injektiv ist. Die Menge $f[{}^{\omega}\{0, 2\}]$ ist die Cantormenge.

6.6. Zeige, daß die Cantor-Menge

(a) Lebesgue-Maß Null hat;

(b) abgeschlossen und ***nirgends dicht*** ist, d.h. jede nichtleere offene Intervall enthält ein nichtleeres offenes Intervall, das disjunkt zur Cantor-Menge ist.

6.7. Zeige, daß die Kardinalität der Menge aller stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ 2^{ω} ist; verwende dabei $|\mathbb{R}| = 2^{\omega}$. Tipp: Eine stetige Funktion ist bestimmt durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$.

6.8. Zeige, daß die Kontinuumshypothese die Existenz einer Partition $\mathbb{R}^2 = X \cup Y$ impliziert derart, daß jede horizontale Gerade nur abzählbar viele Punkte aus X enthält und jede vertikale Gerade nur abzählbar viele Punkte aus Y enthält. Tipp: Verwende eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$ vom Ordnungstyp $\aleph_1$.

6.9. Seien κ, λ Kardinalzahlen mit $\lambda \leqslant \kappa$. Zeige, daß die Kardinalität der Menge aller injektiven Funktionen von λ nach κ gleich κ^{λ} ist.

7. KARDINALE ARITHMETIK

Wir schreiben stets statt $\kappa \oplus \lambda$, $\kappa \otimes \lambda$ nur noch $\kappa + \lambda$, $\kappa \bullet \lambda$.

DEFINITION. Sei A eine Menge und $\kappa \in \mathbf{Card}$.

$[A]^\kappa = \{X\colon X \subseteq A \text{ und } |X| = \kappa\}$

$[A]^{<\kappa} = \{X\colon X \subseteq A \text{ und } |X| < \kappa\}$

$[A]^{\leqslant\kappa} = \{X\colon X \subseteq A \text{ und } |X| \leqslant \kappa\}$.

LEMMA 7.1. *Sei $\kappa \in \mathbf{Card}$ und $\alpha \in \mathbf{Ord}$ mit $\kappa \leqslant \aleph_\alpha$. Es gilt $[\omega_\alpha]^\kappa = \aleph_\alpha{}^\kappa$.*

BEWEIS. Für jede Funktion $f\colon \kappa \to \omega_\alpha$ gilt $f \subseteq \kappa \times \omega_\alpha$ und $|f| = \kappa$. Es folgt $\aleph_\alpha{}^\kappa = |{}^\kappa\omega_\alpha| \leqslant |[\kappa \times \omega_\alpha]^\kappa| = |[|\kappa \times \omega_\alpha|]^\kappa| = |[\omega_\alpha]^\kappa|$, da $|\kappa \times \omega_\alpha| = \kappa \bullet \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Umgekehrt erhalten wir eine Injektion $F\colon [\omega_\alpha]^\kappa \to {}^\kappa\omega_\alpha$ wie folgt: Zu $X \in [\omega_\alpha]^\kappa$ wähle eine surjektive Funktion $f_X\colon \kappa \to X$. Setze $F(X) = f_X$. Offensichtlich ist dann F injektiv. ⊣

DEFINITION. (*Unendliche (kardinale) Summen bzw. Produkte von Kardinalzahlen*) Sei $\{\kappa_i\colon i \in I\}$ eine Menge von Kardinalzahlen (I ist eine beliebige Indexmenge). Setze $\boldsymbol{\Sigma_{i\in I}\, \kappa_i} = |\bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}|$ und $\boldsymbol{\Pi_{i\in I}\, \kappa_i} = |\Pi_{i\in I}\, \kappa_i|$, wobei $\Pi_{i\in I}\, \kappa_i = \{f\colon f\colon I \to \bigcup_{i\in I} \kappa_i \text{ mit } f(i) \in \kappa_i, \text{ alle } i \in I\}$.

BEMERKUNG. Wir verwenden dabei das Zeichen Π sowohl für das Produkt von Kardinalzahlen als auch für das kartesische Produkt von Mengen. Welche Bedeutung das Zeichen im folgenden hat, wird aus dem Zusammenhang hervorgehen.

LEMMA 7.2. *Sei λ eine unendliche Kardinalzahl und seien $\kappa_i > 0$ Kardinalzahlen für $i < \lambda$. Es gilt $\Sigma_{i<\lambda}\, \kappa_i = \lambda \bullet sup_{i<\lambda}\, \kappa_i$.*

BEWEIS. Setze $\kappa = sup_{i<\lambda}\, \kappa_i$, $\sigma = \Sigma_{i\varepsilon\lambda}\, \kappa_i$. Da $\kappa_i \leqslant \kappa$ für alle $i < \lambda$, folgt $\sigma \leqslant \Sigma_{i<\lambda}\, \kappa = \lambda \bullet \kappa$. Umgekehrt: Da $\kappa_i \geqslant 1$, alle $i < \lambda$, ist $\lambda = \Sigma_{i<\lambda}\, 1 \leqslant \Sigma_{i<\lambda}\, \kappa_i = \sigma$. Da $\kappa_i \leqslant \sigma$, alle i, folgt $\sigma \geqslant sup_{i<\lambda}\, \kappa_i = \kappa$. Es folgt $\sigma \geqslant max\{\lambda, \kappa\} = \kappa \bullet \lambda$. ⊣

BEMERKUNG. Sei κ eine Limeskardinalzahl. Dann existiert eine Folge $\langle \kappa_i\colon i < cf(\kappa)\rangle$, so daß $\kappa_i \in \mathbf{Card}$, $\kappa_i < \kappa$, alle $i < cf(\kappa)$, und $sup_{i<cf(\kappa)}\, \kappa_i = \kappa$ (die Folge also kofinal in κ): Dann ist $\kappa = \Sigma_{i\in cf(\kappa)}\, \kappa_i$: Aus Lemma 7.2 folgt: $\Sigma_{i<cf(\kappa)}\, \kappa_i = cf(\kappa) \bullet \kappa = \kappa$.

BEMERKUNG. Zu $\Pi_{i\in I}\, \kappa_i$: Falls $\kappa_i = \kappa$, alle $i \in I$ und $I = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{Card}$, so folgt $\Pi_{i\in\lambda}\, \kappa = |{}^\lambda\kappa| = \kappa^\lambda$. Es gelten auch die folgenden Rechenregeln: $\Pi_{i\in I}\, \kappa_i{}^\lambda = (\Pi_{i\in I}\, \kappa_i)^\lambda$ und $\Pi_{i\in I}\, \kappa^{\lambda_i} = \kappa^s$ mit $s = \Sigma_{i\in I}\, \lambda_i$. Dies ist leicht einzusehen.

LEMMA 7.3. *(Assoziativgesetz) Sei $I = \bigcup_{j\in J} A_j$ mit $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$ für alle $j, j' \in J$, $j \neq j'$. Seien κ_i, $i \in I$, Kardinalzahlen. Es gilt: $\Pi_{i\in I}\, \kappa_i = \Pi_{j\varepsilon J}\, (\Pi_{i\in Aj}\, \kappa_i)$.*

LEMMA 7.4. *Sei λ eine unendliche Kardinalzahl und $\langle \kappa_i\colon i < \lambda\rangle$ eine nichtfallende Folge von Kardinalzahlen $\kappa_i \neq 0$ ($i < j < \lambda \Rightarrow \kappa_i \leqslant \kappa_j$). Es gilt $\Pi_{i<\lambda}\, \kappa_i = (sup_{i<\lambda}\, \kappa_i)^\lambda$.*

BEWEIS. Setze $\kappa := sup_{i<\lambda}\, \kappa_i$. Es gilt $\Pi_{i<\lambda}\, \kappa_i \leqslant \Pi_{i<\lambda}\, \kappa = \kappa^\lambda$. Umgekehrt sei $\pi\colon \lambda \times \lambda \to \lambda$ eine Bijektion. Setze $A_j = \pi[\{j\} \times \lambda]$. Somit $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$ für alle $j < j' < \lambda$. Außerdem $|A_j| = \lambda$. Folglich ist A_j unbeschränkt in λ (wäre $A_j \subseteq \alpha < \lambda$, so $|A_j| \leqslant |\alpha| < \lambda$). Da $\langle \kappa_i\colon i < \lambda\rangle$ nichtfallend ist, folgt $sup_{i\in Aj}\, \kappa_i = \kappa$. Außerdem ist $\Pi_{i\in Aj}\, \kappa_i \geqslant sup_{i\in Aj}\, \kappa_i$, alle $j \in \lambda$, da stets $\kappa_i \neq 0$. Es folgt: $\Pi_{i<\lambda}\, \kappa_i =_{(Lemma\ 7.3)} = \Pi_{j\in\lambda}\, (\Pi_{i\in Aj}\, \kappa_i) \geqslant \Pi_{j\in\lambda}\, \kappa = \kappa^\lambda$. ⊣

SATZ 7.5. *(Satz von König) Seien κ_i, λ_i Kardinalzahlen mit $\kappa_i < \lambda_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt $\Sigma_{i\in I}\, \kappa_i < \Pi_{i\in I}\, \lambda_i$.*

BEWEIS. Seien T_i, $i \in I$, Mengen mit $|T_i| = \lambda_i$. Sei weiter $Z_i \subseteq \Pi_{j\in I}\, T_j$, mit $|Z_i| \leqslant \kappa_i$, alle $i \in I$. Es genügt zu zeigen, daß $\bigcup_{i\in I} Z_i \neq \Pi_{i\in I}\, T_i$. Sei dazu $S_i = \{f(i)\colon f \in Z_i\}$, alle $i \in I$. Dann ist natürlich $|S_i| \leqslant |Z_i| = \kappa_i$. Da $S_i \subseteq T_i$, folgt $S_i \subset T_i$, da $|T_i| = \lambda_i > \kappa_i$. Wir können also einen Punkt $t_i \in T_i \setminus S_i$ wählen. Dann ist $t_F = (t_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}\, T_i$. Es gilt nun $t_F \notin \bigcup_{i\in I} Z_i$: Falls $i \in I$, $f \in Z_i$, so ist $f(i) \neq t_i$ und folglich $f \neq t_F$. ⊣

BEMERKUNG. Der Satz von Cantor ($\kappa < 2^\kappa$) ist ein Korollar des Satzes von König.

BEWEIS. $\kappa = \Sigma_{i<\kappa}\, 1 <_{(König)} \Pi_{i<\kappa}\, 2 = 2^\kappa$. ⊣

KOROLLAR 7.6. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Für alle $\alpha \in \mathbf{Ord}$ gilt $cf(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

(b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ gilt $cf(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$.

(c) Für alle $\alpha \in \mathbf{Ord}$ gilt $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} > \aleph_\alpha$.

BEWEIS. *Zu (a)*: Sei $\theta = \omega_\alpha$. Sei $\langle \kappa_i\colon i < \omega_\alpha \rangle$ eine Folge von Kardinalzahlen κ_i mit $\kappa_i < 2^{\aleph_\alpha}$, alle $i < \theta$. Es genügt zu zeigen, daß dann $\Sigma_{i<\theta}\, \kappa_i < 2^{\aleph_\alpha}$. Aber mit $\lambda_i = 2^{\aleph_\alpha}$, alle $i < \theta$, folgt: $\Sigma_{i<\theta}\, \kappa_i <_{(König)} \Pi_{i<\theta}\, 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.
Zu (b): Sei $\theta = \omega_\beta$. Sei $\langle \kappa_i\colon i < \omega_\beta \rangle$ eine Folge von Kardinalzahlen $\kappa_i < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Es folgt mit $\lambda_i = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$: $\Sigma_{i<\theta}\, \kappa_i <_{(König)} \Pi_{i<\theta}\, \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.
Zu (c): Sei $\theta = \aleph_\alpha$. Fallunterscheidung: Fall 1. $\aleph_\alpha$ ist Nachfolgerkardinalzahl, also regulär, also $cf\, \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Es folgt $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} =_{(Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\alpha} >_{(Cantor)} \aleph_\alpha$. Fall 2. $\aleph_\alpha$ ist Limeskardinalzahl. Seien $\kappa_i < \aleph_\alpha$, $i < cf(\aleph_\alpha)$, Kardinalzahlen mit $\Sigma_{i<cf(\theta)}\, \kappa_i = \aleph_\alpha$. Dann gilt $\aleph_\alpha = \Sigma_{i<cf(\theta)} <_{(König)} \Pi_{i<cf(\theta)}\, \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$. ⊣

BEMERKUNG zu (c) in Korollar 7.6: Aus Satz 6.14 folgt $\aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Betrachte die sogenannte ***Kontinuumsfunktion*** $\mathbf{Cont}\colon \mathbf{Card} \setminus \omega \to \mathbf{Ord}$, $\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}$. $\mathbf{Cont}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(a) $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta \Rightarrow \mathbf{Cont}(\aleph_\alpha) \leqslant Cont(\aleph_\beta)$ (trivial),

(b) $\aleph_\alpha < \mathbf{Cont}(\aleph_\alpha)$ (Cantor),

(c) $\aleph_\alpha < cf(\mathbf{Cont}(\aleph_\alpha))$ (Satz 7.6 (a)).

Diese drei Eigenschaften sind die einzigen in *ZFC* beweisbaren Restriktionen an die Kontinuumsfunktion auf regulären Kardinalzahlen. Es gilt der folgende ***Satz von Easton***: Sei $\boldsymbol{F}\colon \{\aleph_\alpha\colon \alpha \in \mathbf{Ord}$ *und* $\aleph_\alpha$ *regulär*$\} \to \mathbf{Card}$ eine beliebige Funktion, welche Eigenschaften (a) – (c) erfüllt. Dann existiert eine Klasse $\boldsymbol{M}$ mit $(\boldsymbol{M}, \in) \models ZFC$, so daß $\boldsymbol{M} \models \boldsymbol{F} = \mathbf{Cont}$. Für die Kontinuumsfunktion auf singulären Kardinalzahlen sind weitere Restriktionen beweisbar (siehe Satz von Bukovsky-Hechler oder Satz von Galvin-Hajnal weiter unten).
Aus dem Satz von Galvin-Hajnal folgt: $\forall \alpha < \omega_1\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow 2^{\aleph_\eta} = \aleph_\theta$ mit $\eta = \omega_1$, $\theta = \omega_{1+1}$.
Der ***Satz von Jensen*** besagt: Falls 0^F („zero sharp“, kleine „große Kardinalzahl“) nicht existiert, dann ist $\mathbf{Cont}$ 1 *{singuläre Kardinalzahlen}* bestimmt durch $\mathbf{Cont}$ 1 *{reguläre Kardinalzahlen}*.
Galvin-Hajnal spricht nur über $2^{\aleph_\alpha}$ mit $cf(\aleph_\alpha) \geqslant \omega_1$. *Shelah* hat etwas ähnliches gezeigt für $2^{\aleph_\alpha}$ mit $cf(\aleph_\alpha) = \omega$. Insbesondere gilt (Shelah) $\forall n < \omega\ 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} \Rightarrow 2^{\aleph_\omega} \leqslant \aleph_{\omega+4}$.

SATZ 7.7. *(Bukovsky-Hechler) Sei κ eine singuläre Kardinalzahl, so daß* ***Cont*** *unter κ schließlich konstant ist, d.h. es existiert $\gamma_0 < \kappa$ mit $2^\gamma = 2^{\gamma_0}$ für alle $\gamma_0 \leqslant \gamma < \kappa$. Dann ist $2^\kappa = 2^{\gamma_0}$.*

DEFINITION. Setze $\mathbf{2^{<\kappa}} := sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa\}$. (Klar: $2^{<\kappa} \leqslant 2^\kappa$).

LEMMA 7.8. *Falls κ eine Limeskardinalzahl ist, so ist $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$.*

BEWEIS. Sei $\langle \kappa_i : i < cf(\kappa) \rangle$ eine in κ kofinale Folge von Kardinalzahlen $\kappa_i < \kappa$. Dann gilt $\kappa = \Sigma_{i<cf(\kappa)}\, \kappa_i$ nach Lemma 7.2. Es folgt $2^\kappa = \Pi_{i<cf(\kappa)}\, 2^{\kappa_i} \leqslant \Pi_{i<cf(\kappa)}\, 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} \leqslant (2^\kappa)^{cf(\kappa)} = 2^{\kappa \cdot cf(\kappa)} = 2^\kappa$. ⊣

BEWEIS des Satzes von Bukovsky-Hechler. Finde $\gamma_0 < \kappa$ mit $cf(\kappa) \leqslant \gamma_0$ und außerdem $2^\gamma = 2^{\gamma_0}$ für alle $\gamma_0 \leqslant \gamma < \kappa$. Somit $2^{<\kappa} = 2^{\gamma_0}$. Mit Lemma 7.8 folgt außerdem $2^\kappa =_{(Lemma\ 7.8)} (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = 2^{\gamma_0 \cdot cf(\kappa)} = 2^{\gamma_0}$. ⊣

DEFINITION. $\gimel$ (gimel) ist das kleine hebräische g. Die ***Gimel-Funktion*** ist definiert durch $\gimel(\aleph_\alpha) := \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$.

SATZ 7.9. *(Erster Teil) (Bukovsky) Die Kontinuumsfunktion kann durch die Gimel-Funktion definiert werden.*

BEWEIS. Sei zuerst $\aleph_\alpha$ regulär, also $cf(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$. Dann gilt $2^{\aleph_\alpha} =_{(Satz\ 6.14)} \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \gimel(\aleph_\alpha)$. Sei nun $\aleph_\alpha$ singulär, also Limeskardinalzahl. Es gelte zusätzlich, daß ***Cont*** schließlich konstant ist unter $\aleph_\alpha$, also ein $\gamma_0 < \aleph_\alpha$ existiert mit $2^\gamma = 2^{\gamma_0}$ für alle $\gamma_0 \leqslant \gamma < \aleph_\alpha$. Nach Satz 7.7 gilt $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\gamma 0} = 2^{\gamma_0+}$. Aber γ_0^+ ist regulär, somit nach erstem Fall gilt $2^{\aleph_\alpha} = 2^{(\gamma_0+)} = \gimel(\gamma_0^+)$. Schließlich sei $\aleph_\alpha$ singulär, aber ***Cont*** nicht schließlich konstant unterhalb von $\aleph_\alpha$. Setze $\lambda := 2^{<\aleph_\alpha}$. Dann ist die Funktion $f: \aleph_\alpha \to \lambda,\ \xi \mapsto 2^{|\xi|}$ kofinal in λ und klarerweise gilt $\xi < \nu \Rightarrow f(\xi) \leqslant f(\nu)$. Nach Lemma 6.16 folgt $cf(\lambda) = cf(\aleph_\alpha)$. Aus Lemma 7.8 folgt $2^{\aleph_\alpha} = (2^{<\aleph_\alpha})^{cf(\aleph_\alpha)} = \lambda^{cf(\aleph_\alpha)} = \lambda^{cf(\lambda)} = \gimel(\lambda)$. ⊣

Zur Exponentiationsfunktion $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$: Falls $\alpha \leqslant \beta$, so gilt nach Satz 6.14 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. Was aber, wenn $\alpha > \beta$?

LEMMA 7.10. *Sei κ eine unendliche reguläre Kardinalzahl und sei $\lambda < \kappa$ eine beliebige unendliche Kardinalzahl. Dann gilt $\kappa^\lambda = \Sigma_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda$.*

BEWEIS. Nach Voraussetzungen ist jede Funktion $f: \lambda \to \kappa$ beschränkt, d.h. es existiert $\alpha < \kappa$ mit $ran(f) \subseteq \alpha$. Es folgt ${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\lambda\alpha$ (*). Es folgt $\kappa^\lambda = \Sigma_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda$. „$\leqslant$" klar mit (*). „$\geqslant$": $\Sigma_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda =_{(Lemma\ 7.8)} \kappa \cdot sup_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda \leqslant \kappa \cdot \kappa^\lambda = \kappa^\lambda$. ⊣

KOROLLAR 7.11. ***(Hausdorff-Formel)*** *Für alle $\alpha < \beta \in Ord$ gilt $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.*

BEWEIS. *Fall 1*: $\beta > \alpha$. Dann $\beta \geqslant \alpha + 1$ und folglich $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} =_{(Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\beta}$. Aber auch $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} =_{(Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\beta} \geqslant_{(Cantor)} \aleph_{\beta+1} > \aleph_{\alpha+1}$. Folglich $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. Damit $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.
Fall 2: $\beta \leqslant \alpha$. Sei $\theta = \aleph_{\alpha+1}$. Da $\aleph_{\alpha+1}$ regulär ist, folgt aus Lemma 7.10 $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \Sigma_{\gamma<\theta}\, |\gamma|^{\aleph_\beta}$. Aber $\Sigma_{\gamma<\theta}\, |\gamma|^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$: $\Sigma_{\gamma<\theta}\, |\gamma|^{\aleph_\beta} \leqslant \Sigma_{\gamma<\theta}\, \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. Umgekehrt gilt: $\Sigma_{\gamma<\theta}\, |\gamma|^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ und $\Sigma_{\gamma<\theta}\, |\gamma|^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$. ⊣

LEMMA 7.12. *Sei κ eine Limeskardinalzahl und $\lambda \geqslant cf(\kappa)$ eine Kardinalzahl. Es gilt $\kappa^\lambda = (sup_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda)^{cf(\kappa)}$.*

BEWEIS. Wähle Kardinalzahlen $0 < \kappa_i < \kappa$ für alle $i < cf(\kappa)$, so daß $\kappa = \Sigma_{i<cf(\kappa)}\, \kappa_i$. Es folgt $\kappa^\lambda \leqslant (\Pi_{i<cf(\kappa)}\, \kappa_i)^\lambda = \Pi_{i<cf(\kappa)}\, \kappa_i^\lambda \leqslant \Pi_{i<cf(\kappa)}\, sup_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda = (sup_{\alpha<\kappa}\, |\alpha|^\lambda)^{cf(\kappa)} \leqslant (\kappa^\lambda)^{cf(\kappa)} = \kappa^{\lambda \cdot cf(\kappa)} =_{(cf(\kappa) \leqslant \lambda)} \kappa^\lambda$. ⊣

SATZ 7.13. *(Rekursive Berechnung von $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$) Sei $\aleph_\beta$ fixiert. Dann läßt sich $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ folgendermaßen berechnen:*

(a) Falls $\alpha \leqslant \beta$, so ist $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(b) Falls $\gamma < \alpha$ existiert mit $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha$, so ist $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.

(c) Falls $\alpha > \beta$ und $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ für alle $\gamma < \alpha$, so gilt: Falls $cf(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta$ (also insbesondere falls $\aleph_\alpha$ regulär ist), so $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Falls $cf(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta$ ($< \aleph_\alpha$), so $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$.

BEWEIS. *Zu (a)*: Ist Satz 6.14.
Zu (b): Es gilt dann: $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.
Zu (c): Falls $\alpha = \nu + 1$ für ein ν, folgt mit der Hausdorff-Formel: $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\nu+1}^{\aleph_\beta} =_{(Hausdorff)} \aleph_\nu^{\aleph_\beta} \bullet \aleph_{\nu+1} =_{(Voraussetzung)} \aleph_{\nu+1} = \aleph_\alpha$. Sei nun $\aleph_\alpha$ Limeskardinalzahl. Wegen der Voraussetzung von (c) gilt dann (*) $\aleph_\alpha = sup_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$ ($\gamma < \alpha \Rightarrow \aleph_\gamma \leqslant \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} <_{(Voraussetzung)} \aleph_\alpha$). Sei nun $\aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha)$ (Voraussetzung des ersten Teils). Dann ist jede Funktion $f\colon \omega_\beta \to \omega_\alpha$ beschränkt, d.h. es existiert ein $\nu < \omega_\alpha$ mit $ran(f) \subseteq \nu$. Folglich ist ${}^{\omega_\beta}\omega_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} {}^{\omega_\beta}\omega_\gamma$ und somit $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \Sigma_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} =_{(Lemma\ 7.2)} |\alpha| \bullet sup_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} =_{(*)} |\alpha| \bullet \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Schließlich sei $cf(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta$. Mit Lemma 7.12 erhalten wir $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (sup_{\gamma<\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{cf(\aleph_\alpha)} =_{(*)} \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$. ⊣

KOROLLAR 7.14. *Für alle $\alpha, \beta \in$ **Ord** ist der Wert von $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ entweder*

(a) $2^{\aleph_\beta}$ oder

(b) $\aleph_\alpha$ oder

(c) $\aleph_\gamma^{cf(\aleph_\gamma)}$ für ein $\gamma \leqslant \alpha$, wobei $cf(\aleph_\gamma) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\gamma$.

BEWEIS. Angenommen, es gelte weder (a) noch (b). Sei $\aleph_\gamma$ die kleinste Kardinalzahl κ mit $\kappa^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Nach Voraussetzung (daß $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq 2^{\aleph_\beta}$) ist dann $\gamma > \beta$ (da sonst $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} =_{(Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\beta}$) und zudem (wegen Minimalität von γ) $\aleph_\delta^{\aleph_\beta} < \aleph_\gamma$ für alle $\delta < \gamma$ (da sonst $\aleph_\delta^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant (\aleph_\delta^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\delta^{\aleph_\beta}$). Da $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > \aleph_\alpha \geqslant \aleph_\gamma$ (nach Voraussetzung) gilt, muß $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \neq \aleph_\gamma$ gelten. Der erste Fall von Satz 7.13 (c) trifft also nicht zu, folglich muß der zweite Fall von (c) gelten: Nämlich muß gelten $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{cf(\aleph_\gamma)}$ und außerdem $cf(\aleph_\gamma) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\gamma$. ⊣

KOROLLAR 7.15. *(GCH) Seien $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Dann ist der Wert von $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ gleich*

(a) $\aleph_\alpha$, falls $\aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha)$,

(b) $\aleph_{\alpha+1}$, falls $cf(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$,

(c) $\aleph_{\beta+1}$, falls $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta$.

BEWEIS. Falls $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$ für alle $\gamma < \alpha$ und $\aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha)$, also insbesondere $\beta < \alpha$, gilt $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$ wegen des ersten Falls von Satz 7.13 (c). Warum gilt $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$, alle $\gamma < \alpha$? Es gilt nur, falls $\aleph_\alpha$ Limeskardinalzahl ist: Dann gilt wegen *GCH* für alle $\beta \leqslant \gamma < \alpha$: $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\gamma^{\aleph_\gamma} = 2^{\aleph_\gamma} =_{(GCH)} \aleph_{\gamma+1} < \aleph_\alpha$. Für $\gamma < \beta$ folgt daraus $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\beta^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. Falls $\aleph_\alpha = \aleph_{\nu+1}$, folgt $\aleph_{\nu+1}^{\aleph_\beta} =_{(Hausdorff)} \aleph_\nu^{\aleph_\beta} \bullet \aleph_{\nu+1}$. Aber $\aleph_\nu^{\aleph_\beta} \leqslant_{(\beta\leqslant\nu)} \aleph_\nu^{\aleph_\nu} =_{(Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\nu} =_{(GCH)} \aleph_{\nu+1} = \aleph_\alpha$. Es folgt $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.
Falls $cf(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$: $\aleph_{\alpha+1} \leqslant_{(Satz\ 7.6\ (c))} \aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} =_{(Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\alpha} =_{(GCH)} \aleph_{\alpha+1}$.
Falls $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta$, gilt $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} =_{(Satz\ 7.13\ (a)\ \&\ Satz\ 6.14)} 2^{\aleph_\beta} =_{(GCH)} \aleph_{\beta+1}$. ⊣

SATZ 7.9. *(Zweiter Teil) Die Exponentiationsfunktion $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ kann durch die Gimel-Funktion ($\kappa \mapsto \kappa^{cf(\kappa)}$) und die Kofinalitätsfunktion ($\kappa \mapsto cf(\kappa)$) definiert werden.*

BEWEIS. Folgt aus Satz 7.13. ⊣

ÜBUNGEN

7.1. Sei $\langle \kappa_i: i \in I \rangle$ eine Familie von Kardinalzahlen und sei $I = \bigcup_{j\in J} A_j$, wobei $A_j \cap A_{j'} = \varnothing$ für alle $j \neq j'$ in J. Es gilt $\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} (\prod_{i\in A_j} \kappa_i)$.

7.2. Seien $\langle X_i: i \in I \rangle$, $\langle Y_i: i \in I \rangle$ Mengenfamilien, so daß $|X_i| = |Y_i|$ für alle $i \in I$. Verwende das Auswahlaxiom, um $|\prod_{i\in I} X_i| = |\prod_{i\in I} Y_i|$ zu zeigen.

7.3. Zeige

(a) $\prod_{0<n<\omega} n = 2^{\aleph_0}$,

(b) $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$,

(c) $\prod_{\alpha<\omega+\omega} \aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$.

7.4. Es sei $\beta \in \boldsymbol{Ord}$, so daß $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}$ für alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$. Zeige, daß dann $\beta < \omega$. (Verwende den Satz von Bukovsky-Hechler.)

7.5. Es gilt: $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \bullet 2^{\aleph_1}$.

7.6. Beweise folgende Aussagen:

(a) Für jedes $\alpha < \omega_1$ ist $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\alpha^{\aleph_0} \bullet 2^{\aleph_1}$.

(b) Für jedes $\alpha < \omega_2$ ist $\aleph_\alpha^{\aleph_2} = \aleph_\alpha^{\aleph_1} \bullet 2^{\aleph_2}$.

8. FILTER UND CLUBS

DEFINITION. Sei S eine Menge. Dann heißt die Menge $F \subseteq \wp(S)$ ***Filter** auf S*, falls

(F1) $S \in F$, $\varnothing \notin F$.

(F2) Falls $X \in F$, $Y \in F$, so ist $X \cap Y \in F$.

(F3) Falls $X, Y \in \wp(S)$, $X \in F$ und $X \subseteq Y$, so ist $Y \in F$.

Eine Menge $I \subseteq \wp(S)$ heißt ***Ideal** auf S*, falls $I^C := \{S \setminus X: X \in I\}$ ein Filter auf S ist. Es gelten also die zu (a) bis (c) dualen Eigenschaften:

(I1) $\varnothing \in I$, $S \notin I$;

(I2) falls $X \in I$ und $Y \in I$, so ist $X \cup Y \in I$;

(I3) falls $X, Y \in \wp(S)$, $X \in I$ und $Y \subseteq X$, so ist $Y \in I$.

Klarerweise ist $I^{CC} = I$. I^C heißt der zu I ***duale Filter***. Falls F Filter, so heißt F^C das zu F ***duale Ideal***.

BEISPIELE. Wir geben die folgenden Beispiele für Filter und Ideale an:

(a) $F = \{S\}$ heißt der ***triviale Filter*** auf S.

(b) Sei $X_0 \subseteq S$, $X_0 \neq \varnothing$. Dann ist $F = \{Y \subseteq S: X_0 \subseteq Y\}$ ein Filter auf S. Filter dieser Gestalt heißen ***Hauptfilter*** bzw. F^C heißt ***Hauptideal***.

(c) Sei S unendlich. Sei I die Menge aller endlichen Teilmengen von S. Dann ist I ein Ideal, das sogenannte ***Frèchet-Ideal***. I^C heißt ***Frèchetfilter***. Klarerweise ist I nicht Hauptideal bzw. I^C nicht Hauptfilter: Sei $X_0 \subseteq S$ beliebig, $X_0 \neq \varnothing$. I^C ist die Menge aller $X \subseteq S$, wobei $S \setminus X$ endlich (X ist koendlich). Wähle $s \in X_0$. Dann ist $S \setminus \{s\} \in I^C$, aber $X_0 \not\subseteq S \setminus \{s\}$.

(d) Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Sei $x \in X$. Sei N_x die Menge aller Umgebungen von x. Dann ist N_x Filter.

(e) Sei λ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Sei $N = \{X \subseteq [0, 1]: \lambda(X) = 0\}$. N ist Ideal. N^C ist der Filter aller Mengen $X \subseteq [0, 1]$ mit $\lambda(X) = 1$.

DEFINITION. Seien A_i, $i \in I$, Mengen, sei $P = \Pi_{i\in I} A_i$. Sei F ein Filter auf I. Definiere auf P eine Relation $=_F$ durch: $f =_F g :\Leftrightarrow \{i \in I: f(i) = g(i)\} \in F$ (für $f, g \in P$).

Zeige leicht, daß $=_F$ eine Äquivalenzrelation ist: Reflexivität: $f =_F f$, da $I \in F$. Symmetrie: trivial. Transitivität: Sei $f =_F g$ und $g =_F h$. Setze $A = \{i \in I: f(i) = g(i)\}$, $B = \{i \in I: g(i) = h(i)\}$, $C = \{i \in I: f(i) = h(i)\}$. Nach Voraussetzung ist $A, B \in F$. Da F Filter, ist $A \cap B \in F$. Klarerweise ist $A \cap B \subseteq C$. Folglich $C \in F$.

DEFINITION. Seien A_i, $i \in I$, Mengen, sei $P = \Pi_{i\in I} A_i$. Sei F ein Filter auf I. Die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen von P heißt das ***reduzierte Produkt*** der Mengen A_i, $i \in I$, modulo F und werden mit $\Pi_F A_i$ oder $P / =_F$ bezeichnet. Also $\Pi_F A_i = \{\{f \in P: f =_F g\}: g \in P\}$.

DEFINITION. Eine Menge A hat die ***endliche Durchschnittseigenschaft*** (***eDE***), falls für jede endliche Menge $B \subseteq A$ gilt, daß $\bigcap B \neq \varnothing$ (hier $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$).

BEMERKUNG. Ein Filter hat stets die endliche Durchschnittseigenschaft.

LEMMA 8.1. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Sei Y eine nichtleere Menge von Filtern auf der Menge S. Dann ist auch $\bigcap Y$ ein Filter auf S.

(b) Sei C eine nichtleere $\subseteq$-Kette (Kette bzgl. Inklusion) von Filtern auf S, d.h. für alle F, $G \in C$ ist $F \subseteq G$ oder $G \subseteq F$. Dann ist $\bigcup C$ ein Filter auf S.

(c) Falls $G \subseteq \wp(S)$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat, so existiert ein Filter F auf S mit $G \subseteq F$ (natürlich ist $S \neq \varnothing$ vorausgesetzt).

BEWEIS. *Zu (a)*: Es ist $\varnothing \notin F$ und $S \in F$ für alle $F \in Y$. Es folgt $\varnothing \notin \bigcap Y$ und $S \in \bigcap Y$. Seien $X, Y \in \bigcap Y$. Dann $X, Y \in F$ für alle $F \in Y$. Da alle $F \in Y$ Filter sind, folgt $X \cap Y \in F$, alle $F \in Y$. Folglich $X \cap Y \in \bigcap Y$. Analog beweist man das dritte Filteraxiom.

Zu (b): Wir verifizieren nur das zweite Filteraxiom: Seien also $X, Y \subseteq \bigcup C$. Es existieren somit $F, G \in C$ mit $X \in F$ und $Y \in G$. Falls z.B. $F \subseteq G$, folgt $X, Y \in G$. Da G Filter, ist $X \cap Y \in G$. Folglich $X \cap Y \in \bigcup C$.

Zu (c): F sei die Menge aller $X \subseteq S$, so daß eine endliche nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ existiert mit $\bigcap H \subseteq X$. Dann ist F ein Filter: (F1) Wegen *eDE* von G ist $\varnothing \notin F$. Wähle $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$. Dann ist $\bigcap H \subseteq S$. Es folgt $S \in F$. (F2) Seien $X, Y \in F$; somit existieren endliche nichtleere $H_1, H_2 \subseteq G$ mit $\bigcap H_1 \subseteq X$ und $\bigcap H_2 \subseteq Y$. Dann ist $H_1 \cup H_2$ endliche nichtleere Teilmenge von G und $\bigcap(H_1 \cup H_2) = (\bigcap H_1) \cap (\bigcap H_2) \subseteq X \cap Y \Rightarrow X \cap Y \in F$. (F3) trivial. ⊣

BEMERKUNG. Klarerweise ist der in (c) konstruierte Filter F der kleinste Filter auf S mit $G \subseteq F$; somit $F = \bigcap\{D\colon D \text{ ist Filter auf } S \text{ und } G \subseteq D\}$.

DEFINITION. Ein Filter U auf S heißt ***Ultrafilter***, falls für jede Teilmenge $X \subseteq S$ entweder $X \in U$ oder $S \setminus X \in U$. Ein Ideal I auf S heißt ***Primideal***, falls I^C ein Ultrafilter auf S ist.

Ein Filter F auf S heißt ***maximal***, falls kein Filter F' auf S existiert mit $F \subset F'$.

LEMMA 8.2. *Ein Filter F auf S ist Ultrafilter genau dann, wenn F maximal ist.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$". Sei F ein Ultrafilter auf S. Falls $X \subseteq S$ mit $X \notin F$, so ist nach Definition $S \setminus X \in F$. Wäre nun F' ein Filter auf S mit $F \subseteq F'$ und $X \in F'$, so folgt $X \cap (S \setminus X) \in F'$, ein Widerspruch.

„$\Leftarrow$". Sei F ein Filter auf S, der nicht Ultrafilter ist. Wir zeigen, daß F dann nicht maximal ist: Es existiert also $Y \subseteq S$ mit $Y \notin F$ und $S \setminus Y \notin F$. Setze $G := F \cup \{Y\}$. Wir wollen zeigen, daß G *eDE* hat. Sei $X \in F$ beliebig. Da nicht $S \setminus Y \in F$, folgt $X \nsubseteq S \setminus Y$ und somit $X \cap Y \neq \varnothing$. Sei nun $H \subseteq F$ endlich, nichtleer. Da $\bigcap H \in F$, folgt $Y \cap (\bigcap H) \neq \varnothing$. Es folgt, daß G die *eDE* hat. Nach Lemma 8.1 existiert ein Filter F' auf S mit $G \subseteq F'$. Somit ist $F \subset F'$ und F nicht maximal. ⊣

SATZ 8.3. *(AC) (Tarski) Zu jedem Filter F auf einer Menge S existiert ein Ultrafilter U auf S mit $F \subseteq U$.*

BEWEIS. Sei F_0 ein Filter auf S. Sei P die Menge aller Filter F auf S mit $F_0 \subseteq F$. Somit $F_0 \in P$. Dann ist $\langle P, \subset \rangle$ eine Partialordnung. Die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn sind erfüllt: Falls $C \subseteq P$ eine nichtleere Kette ist ($F_1 \subset F_2$ oder $F_2 \subset F_1$ für alle $F_1, F_2 \in P$, $F_1 \neq F_2$), dann ist nach Lemma 8.1 auch $\bigcup C$ ein Filter auf S. Natürlich gilt $F_0 \subseteq \bigcup C$, also $\bigcup C \in P$ und $\bigcup C$ ist obere Schranke von C. Nach dem Lemma von Zorn (Satz 4.8) besitzt $\langle P, \subset \rangle$ ein maximales Element von U. Wegen Lemma 8.2 ist U ein Ultrafilter. Da $U \in P$, $F_0 \subseteq U$. ⊣

BEISPIELE. Wir geben zwei Beispiele für Ultrafilter:

(a) Sei $a \in S$. Dann ist der ***Hauptfilter*** $F_a = \{X \subseteq S: a \in X\}$ ein Ultrafilter.

(b) Sei S unendlich und sei F_r der Frèchet-Filter auf S. Nach Satz 8.3 existiert ein Ultrafilter U auf S mit $F_r \subseteq U$. Klarerweise ist U nicht Hauptfilter.

DEFINITION. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und sei F ein Filter auf einer Menge S. Dann heißt F (bzw. F^C) ***κ-vollständig***, falls für jede Teilmenge $H \subseteq F$ mit $|H| < \kappa$ gilt, daß $\bigcap H \in F$ (bzw. für jedes $H \subseteq F^C$ mit $|H| < \kappa$ gilt $\bigcup H \in F^C$).

BEMERKUNGEN. Zum Begriff der κ-Vollständigkeit bemerken wir vier Eigenschaften:

(a) Per definitionem ist jeder Filter bzw. jedes Ideal $\aleph_0$-vollständig.

(b) Statt „$\aleph_1$-vollständig“ sagt man in der Regel „***σ-vollständig***“.

(c) Klarerweise ist F κ-vollständig genau dann, wenn F^C κ-vollständig ist.

(d) Angenommen, κ sei singulär und F κ-vollständig. Dann ist F sogar κ^+-vollständig: Sei $H \subseteq F$ mit $|H| = \kappa$. Nach Satz 6.19 existiert eine Familie $\langle S_\xi: \xi < \lambda\rangle$, so daß $\lambda < \kappa$, $|S_\xi| < \kappa$ und $\bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi = H$. Da F κ-vollständig ist, gilt $\bigcap S_\xi \in F$, alle $\xi < \lambda$. Dann aber auch $\bigcap_{\xi<\lambda} (\bigcap S_\xi) \in F$, da $\lambda < \kappa$. Klar: $\bigcap_{\xi<\lambda} (\bigcap S_\xi) = \bigcap H$. Deshalb wird der Begriff der κ-Vollständigkeit nur für reguläre κ verwendet.

Sei nun κ stets eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl (z.B. $\kappa = \aleph_1$).

DEFINITION. Eine Teilmenge $C \subseteq \kappa$ heißt ***Club*** (für closed unbounded) auf κ, falls

(C1) (Abgeschlossenheit) Für jede Menge $A \subseteq C$ mit $|A| < \kappa$ gilt $sup\ A \in C$. Äquivalent dazu ist: Für jede Folge $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_\xi < ...$ $(\xi < \gamma)$ einer Länge $\gamma < \kappa$ von Elementen in C gilt $sup_{\xi<\gamma}\ \alpha_\xi \in C$.

(C2) (Unbeschränktheit) Zu jedem $\alpha < \kappa$ existiert $\beta > \alpha$ mit $\beta \in C$.

LEMMA 8.4. *Falls C und D Clubs sind auf κ, so auch $C \cap D$.*

BEWEIS. Die Abgeschlossenheit von $C \cap D$ ist trivial: Sei $A \subseteq C \cap D$, $|A| < \kappa$. Dann gilt $sup(A) \in C, D$, also $sup\ A \in C \cap D$.
Zur Unbeschränktheit: Sei $\alpha < \kappa$ vorgegeben. Wegen der Unbeschränktheit von C und D können wir $\alpha_{2n} \in C$ und $\alpha_{2n+1} \in D$, alle $n < \omega$, wählen, so daß $\alpha < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{2n} < \alpha_{2n+1} < ...$ (*). Die Folge (*) hat Länge ω. Nach Konstruktion gilt $\beta = sup_{n<\omega}\ \alpha_n = sup_{n<\omega}\ \alpha_{2n} = sup_{n<\omega}\ \alpha_{2n+1}$. Aber $sup_{n<\omega}\ \alpha_{2n} \in C$ und $sup_{n<\omega}\ \alpha_{2n+1} \in D$. Folglich $\beta \in C \cap D$ und $\beta > \alpha$. $C \cap D$ ist also unbeschränkt. ⊣

Mit Induktion folgt aus Lemma 8.4, daß die Menge aller Clubs auf κ die *eDE* hat. Nach Lemma 8.1 (c) (Beweis) ist $\boldsymbol{CLUB_\kappa} = \{X \subseteq \kappa: \text{es existiert ein Club } C \subseteq \kappa \text{ mit } C \subseteq X\}$ ein Filter auf κ, der sogenannte ***Club-Filter*** auf κ.

BEISPIELE. Wir geben im folgenden drei Beispiele für Clubs an:

(a) Die Menge aller Limeszahlen in κ ($lim(\kappa)$) ist ein Club. Sei $A \subseteq lim(\kappa)$, $|A| < \kappa$. Falls $sup(A) = max(A) \in A \subseteq lim(\kappa)$. Falls $max(A)$ nicht existiert, so ist $sup(A)$ eine Limeszahl. Da $|A| < \kappa$, ist $sup(A) < \kappa$, also $sup(A) \in lim(\kappa)$. Sei $\alpha \in \kappa$. Dann ist $\alpha < \kappa + \omega \in lim(\kappa)$.
Auch die Menge aller $\alpha \in \kappa$, welche Supremum einer Folge $\langle\lambda_\nu: \nu < \gamma\rangle$ sind, wobei $\lambda_\nu \in lim(\kappa)$ und $\gamma < \kappa$ Limeszahl ist, ist Club. Bezeichnung: $lim(lim(\kappa))$. Analog ist $lim(lim(lim(\kappa)))$ Club etc.

(b) Sei $A \subseteq \kappa$ und $\alpha \in \kappa$, wobei $0 < \alpha$ und $\alpha = sup(A \cap \alpha)$. Nicht notwendigerweise $\alpha \in A$. Dann heißt α ***Limespunkt*** von A. Falls $A \subseteq \kappa$ unbeschränkt, so ist die Menge aller Limespunkte von A Club. $lim(lim(\kappa))$ ist die Menge aller Limespunkte von $lim(\kappa)$.

(c) Eine Funktion $f\colon \kappa \to \kappa$ heißt ***normal***, falls f ordnungstreu und stetig ist ($lim(\lambda) \Rightarrow f(\lambda) = sup_{\nu<\lambda} f(\nu)$). Die Clubs auf κ sind genau die Wertebereiche von normalen Funktionen von κ nach κ.

Das folgende Lemma impliziert, daß $CLUB_\kappa$ κ-vollständig ist.

LEMMA 8.5. *Der Durchschnitt von weniger als κ vielen Clubs ist Club.*

BEWEIS. Sei $\langle C_\alpha\colon \alpha < \gamma\rangle$ eine Folge von Clubs auf κ, wobei $\gamma < \kappa$. Wir beweisen durch Induktion über $0 < \gamma' \leqslant \gamma$, daß $\bigcap_{\alpha<\gamma'} C_\alpha$ Club ist.
Sei $\gamma' = 1$. $\bigcap_{\alpha<1} C_\alpha = C_0$ Club.
Sei $\gamma' = \nu + 1$. Dann ist $\bigcap_{\alpha<\nu+1} C_\alpha = C_\nu \cap (\bigcap_{\alpha<\nu} C_\alpha)$, wobei C_ν und $\bigcap_{\alpha<\nu} C_\alpha$ Clubs sind. Nach Lemma 8.4 Club.
Sei γ' Limesordinalzahl und die Behauptung bewiesen für $\gamma'' < \gamma'$. Für $\alpha < \gamma'$ setze $C_\alpha' = \bigcap_{\xi\leqslant\alpha} C_\xi$ $(= \bigcap_{\xi<\alpha+1} C_\xi)$. Da $\alpha + 1 < \gamma'$, ist C_α' Club nach Induktionsvoraussetzung. Klarerweise gilt: $C_0' \supseteq C_1' \supseteq \ldots \supseteq C_\alpha' \supseteq \ldots$ $(\alpha < \gamma')$ und $\bigcap_{\alpha<\gamma'} C_\alpha = \bigcap_{\alpha<\gamma'} C_\alpha' =: C$. C ist trivialerweise abgeschlossen. Sei $A \subseteq C$, $|A| < \kappa$. Dann $A \subseteq C_\alpha'$, alle $\alpha < \gamma'$. Somit $sup(A) \in C_\alpha'$, alle $\alpha < \gamma'$, also $sup(A) \in C$.
C ist unbeschränkt (in κ): Sei $\alpha < \kappa$ beliebig. Wir konstruieren eine Folge $\langle\beta_\xi\colon \xi < \gamma'\rangle$ mit $\beta_\xi \in C_\xi'$ und $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_\xi < \ldots$ $(< \kappa)$ wie folgt: Wähle $\beta_0 \in C_0'$ mit $\beta_0 > \alpha$. Sei $\nu < \gamma'$ und $\langle\beta_\xi\colon \xi < \nu\rangle$ konstruiert. Da κ regulär ist und $\nu < \gamma' < \kappa$, ist $\beta^* := sup_{\xi<\nu} \beta_\xi < \kappa$. Da C_ν' unbeschränkt ist, existiert $\beta_\nu \in C_\nu'$ mit $\beta_\nu > \beta^*$. Wiederum ist $\beta := sup_{\xi<\gamma'} \beta_\xi < \kappa$, da $\gamma' < \kappa$. Sei nun $\xi < \gamma'$ beliebig. Nach Konstruktion ist $\beta_\nu \in C_\nu' \subseteq C_\xi'$, alle $\xi \leqslant \nu$ mit $\nu < \gamma'$. Somit gehört ein Endabschnitt der Folge $\langle\beta_j\colon j < \gamma'\rangle$ (nämlich $\langle\beta_j\colon \xi \leqslant j < \gamma'\rangle$) zu C_ξ'. Da C_ξ' Club ist und $sup_{j\geqslant\xi} \beta_j = \beta$, folgt $\beta \in C_\xi'$. Da $\xi < \gamma'$ beliebig war, gilt $\beta \in \bigcap_{\xi<\gamma'} C_\xi' = C$. Also C unbeschränkt. ⊣

Es folgt unmittelbar die κ-Vollständigkeit von $CLUB_\kappa$.

DEFINITION. Sei $\langle X_\alpha\colon \alpha < \kappa\rangle$ eine Folge von Teilmengen von κ. Der *diagonale Durchschnitt* der X_α, $\alpha < \kappa$, ist definiert als $\Delta\, \{X_\alpha\colon \alpha < \kappa\} = \Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\xi < \kappa\colon \xi \in \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha\}$.

Es gilt $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \Delta\, \{\xi \in X_\alpha\colon \xi > \alpha\} = \bigcap X_\alpha \cup \{\xi\colon \xi \leqslant \alpha\}$. Klarerweise ist $CLUB_\kappa$ nicht κ^+-vollständig: $C_\alpha := \kappa \setminus \{\alpha\}$, $\alpha < \kappa$, ist Club. Aber $\bigcap_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \emptyset$.

LEMMA 8.6. *Sei $\langle C_\alpha\colon \alpha < \kappa\rangle$ eine κ-Folge von Clubs auf κ. Dann ist $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ ein Club.*

BEWEIS. Setze $C_\alpha' := \bigcap_{\xi\leqslant\alpha} C_\xi$. Wegen Lemma 8.5 ist C_α' Club, alle $\alpha < \kappa$. Aus der Definition von Δ folgt $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha'$. Schließlich gilt (*) $C_0' \supseteq C_1' \supseteq \ldots \supseteq C_\alpha' \supseteq \ldots$ $(\alpha < \kappa)$. Setze $C := \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$.
C ist abgeschlossen: Sei $A \subseteq C$ mit $|A| < \kappa$ gegeben. Setze $\alpha := sup(A)$. Zu zeigen ist $\alpha \in C$, d.h. $\alpha \in C_\xi'$, alle $\xi < \alpha$. Sei $\xi < \alpha$ beliebig. Sei $A' = \{\nu \in A\colon \xi < \nu\}$. Wegen $A' \subseteq A \subseteq C$ gilt $\nu \in C_\mu$, alle $\nu \in A'$ und alle $\mu < \nu$; somit $\nu \in C_\xi$, alle $\nu \in A'$. Da C_ξ abgeschlossen ist und $\alpha = sup(A')$, folgt $\alpha \in C_\xi$. Da $\xi < \alpha$ beliebig war, folgt $\alpha \in C$.
C ist unbeschränkt (in κ): Sei $\alpha < \kappa$. Konstruiere rekursiv eine Folge $\langle\beta_n\colon n < \omega\rangle$, so daß $\beta_0 > \alpha$, $\beta_0 \in C_0'$, und außerdem für jedes n, $\beta_{n+1} > \beta_n$ und $\beta_{n+1} \in C_{\beta(n)}'$. Setze $\beta := sup_{n<\omega} \beta_n$. Wegen Regularität von κ ist $\beta < \kappa$. Wir wollen zeigen, daß $\beta \in C$. Klarerweise ist $\alpha < \beta_0 < \beta$. Sei $\xi < \beta$ beliebig. Wir wollen $\beta \in C_\xi'$ zeigen. Finde $n < \omega$ mit $\xi < \beta_n$. Nach Konstruktion ist

$\beta_k \in C_{\beta(n)}$' für alle $k > n$, da $\beta_k \in C_{\beta(k-1)}' \subseteq C_{\beta(n)}'$. Da $C_{\beta(n)}'$ Club und $\beta = sup_{k>n}\, \beta_k$, folgt $\beta \in C_{\beta(n)}'$. Wegen (*) folgt $\beta \in C_\xi'$. Es folgt $\beta \in C$. ⊣

KOROLLAR 8.7. *$CLUB_\kappa$ ist abgeschlossen unter diagonalen Durchschnitten, d.h. für jede Folge $\langle X_\alpha : \alpha \in \kappa\rangle$ mit $X_\alpha \in CLUB_\kappa$, alle $\alpha < \kappa$, ist $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in CLUB_\kappa$.*

BEWEIS. Wähle Club $C_\alpha \subseteq X_\alpha$. Dann $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha \subseteq \Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. ⊣

DEFINITION. Eine Teilmenge $S \subseteq \kappa$ heißt ***stationär***, falls $S \cap C \neq \emptyset$ für jedes Club $C \subseteq \kappa$. Äquivalent dazu ist: $S \notin (CLUB_\kappa)^C$.
$(CLUB_\kappa)^C$ heißt das Ideal der ***nichtstationären*** Mengen.

BEISPIEL. Sei $\gamma < \kappa$ eine reguläre unendliche Kardinalzahl. Die Menge $S_\gamma := \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \gamma\}$ ist stationär: Sei $C \subseteq \kappa$ Club. Konstruiere rekursiv eine γ-Folge $\langle \alpha_\nu : \nu < \gamma\rangle$ mit $\alpha_\nu \in C$ und $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots$ ($\nu < \gamma$). Sei $\alpha := sup_{\nu<\gamma}\, \alpha_\nu$. Dann ist $\alpha \in C$ und $cf(\alpha) =_{(Lemma\ 6.16)} cf(\gamma) = \gamma$. Also $\alpha \in C \cap S_\gamma$. Falls $\kappa > \omega_1$, enthält κ somit mindestens zwei disjunkte stationäre Mengen, nämlich $S_{\omega,k}$ und $S_{\delta,k}$ mit $\delta = \omega_1$. Es folgt, daß $CLUB_\kappa$ für $\kappa > \omega_1$ nicht Ultrafilter ist: $\kappa \setminus S_\omega \notin CLUB_\kappa$, da $S_\omega \notin (CLUB_\kappa)^C$. $\kappa \setminus S_\delta \notin CLUB_\kappa$, da $S_\delta \notin (CLUB_\kappa)^C$. Wäre $CLUB_\kappa$ Ultrafilter, müßten S_ω und S_δ beide zu $CLUB_\kappa$ gehören, aber $S_\omega \cap S_\delta = \emptyset$. Wir werden später sehen, daß auch $CLUB_\delta$ kein Ultrafilter ist. (Falls $\kappa = \omega_1$, ist $S_{\omega,\delta} = lim(\omega_1)$ Club.)

DEFINITION. Sei $S \subseteq$ ***Ord*** eine Menge und f eine Funktion mit $dom(f) = S$. Dann heißt f ***regressiv***, falls $f(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in S$ mit $\alpha \neq 0$.

SATZ 8.8. *(Satz von Fodor) Sei f eine regressive Funktion auf einer stationären Menge $S \subseteq \kappa$. Dann existiert eine stationäre Menge $S_0 \subseteq S$ und $\gamma < \kappa$, so daß $f(\alpha) = \gamma$ für alle $\alpha \in S_0$.*

BEWEIS. Angenommen, für jedes $\gamma < \kappa$ wäre die Menge $\Gamma_\gamma := \{\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\}$ nichtstationär. Es existieren also Clubs C_γ, $\gamma < \kappa$, so daß $C_\gamma \cap \Gamma_\gamma = \emptyset$, d.h. für alle $\alpha \in S \cap C_\gamma$ ist $f(\alpha) \neq \gamma$. Setze $C := \Delta_{\gamma<\kappa} C_\gamma$. Nach Lemma 8.6 ist C ein Club. Folglich ist $C \cap S$ stationär (sonst $C' \cap (C \cap S) = \emptyset$ für ein Club $C' \subseteq \kappa$; also $(C' \cap C) \cap S = \emptyset$ und $C' \cap C$ Club, somit S nichtstationär, ein Widerspruch). Sei $\alpha \in C \cap S$ beliebig, also $\alpha \in S$ und $\alpha \in C_\gamma$, alle $\gamma < \alpha$. Es folgt $f(\alpha) \neq \gamma$, alle $\gamma < \alpha$; somit $f(\alpha) \geqslant \alpha$, ein Widerspruch zur Regressivität von f. ⊣

LEMMA 8.9. *Jede reguläre überabzählbare Kardinalzahl κ ist die Vereinigung von κ vielen disjunkten stationären Mengen.*

BEWEIS. Sei $S_\omega = \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \omega\}$ (S_ω stationär wie gehabt). Zu jedem $\alpha \in S_\omega$ wähle eine Folge $\langle \beta^\alpha{}_n : n < \omega\rangle$ mit $sup_{n<\omega}\, \beta^\alpha{}_n = \alpha$ und $\beta^\alpha{}_0 < \beta^\alpha{}_1 < \ldots < \beta^\alpha{}_n < \ldots$.
Wir behaupten, daß ein $n < \omega$ existiert mit der Eigenschaft, daß zu jedem $\nu < \kappa$ die Menge $\{\alpha \in S_\omega : \beta^\alpha{}_n \geqslant \nu\}$ stationär ist. Andernfalls gäbe es zu jedem $n < \omega$ ein $\nu_n < \kappa$, so daß $\{\alpha \in S_\omega : \beta^\alpha{}_n \geqslant \nu_n\}$ nichtstationär ist. Setze $\nu := sup_{n<\omega}\, \nu_n$. Also $\kappa > \nu$. Wähle zu jedem $n < \omega$ ein Club C_n mit $C_n \cap \{\alpha \in S_\omega : \beta^\alpha{}_n \geqslant \nu_n\} = \emptyset$. Setze $C := \bigcap_{n<\omega} C_n$. Also ist C Club nach Lemma 8.5, somit $S_\omega \cap C$ stationär, also insbesondere unbeschränkt, da alle Endabschnitte von κ Clubs sind. Wähle $\alpha \in S_\omega \cap C$ mit $\alpha > \nu$. Es folgt $\beta^\alpha{}_n < \nu_n < \nu < \alpha$, alle $n < \omega$. Somit $sup_{n<\omega}\, \beta^\alpha{}_n \leqslant \nu < \alpha$, ein Widerspruch.
Wie behauptet existiert also $n < \omega$ mit der gewünschten Eigenschaft. Betrachte die Funktion f auf S_ω definiert durch $f(\alpha) = \beta^\alpha{}_n$. Dann ist f regressiv. Zu beliebigem $\nu < \kappa$ sei $S_{\omega,\nu} = \{\alpha \in S_\omega : \beta^\alpha{}_n \geqslant \nu\}$. Also ist $S_{\omega,\nu}$ stationär, alle $\nu < \kappa$. Mit dem Satz von Fodor finde stationäre Mengen $S_\nu' \subseteq S_{\omega,\nu}$ und $\gamma_\nu < \kappa$, so daß $\beta^\alpha{}_n = \gamma_\nu$ für alle $\alpha \in S_\nu'$; dies für alle $\nu < \kappa$. Nach Konstruktion gilt $\gamma_\nu \geqslant \nu$. Folglich ist die Menge $\{\gamma_\nu : \nu < \kappa\}$ unbeschränkt in κ und hat somit die Kardinalität

κ (κ regulär!). Klarerweise ist $S_\nu' \cap S_\delta' = \emptyset$ für $\gamma_\nu \neq \gamma_\delta$. Folglich $|\{S_\nu': \nu < \kappa\}| = |\{\gamma_\nu: \nu < \kappa\}| = \kappa$. Die Behauptung folgt.

Oder direkt: Konstruiere wachsende Teilfolge $\langle \gamma_{\nu,\delta}: \delta < \kappa \rangle$. Dann ist $\langle S_{\nu,\delta}: \delta < \kappa \rangle$ paarweise disjunkt. ⊣

$\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} S_\xi$, $S_\xi \cap S_\nu = \emptyset$, alle $\xi \neq \nu$, alle S_ξ stationär. Also kein S_ξ gehört zu $(CLUB_\kappa)^C$, also kein $\kappa \setminus S_\xi$ gehört zu $CLUB_\kappa$. Aber höchstens ein S_ξ gehört zu $CLUB_\kappa$. Tatsächlich gehört kein S_ξ zu $CLUB_\kappa$, da sonst ja $S_\nu \in (CLUB_\kappa)^C$, alle $\nu \neq \xi$. (Aber alle S_ν stationär.)

DEFINITION. Ein Filter F auf κ heißt ***normal***, falls F abgeschlossen ist unter diagonalen Durchschnitten.

Ein Ideal I auf κ heißt ***normal***, falls I^C normal ist.

Nach Korollar 8.7 ist $CLUB_\kappa$ normal.

LEMMA 8.10. *Falls F ein normaler Filter auf κ ist, der alle Endabschnitte von κ enthält, d.h. alle $\{\alpha: \alpha_0 < \alpha < \kappa\}$ für ein $\alpha_0 < \kappa$, dann gilt $CLUB_\kappa \subseteq F$.*

BEWEIS. Sei $Lim(\kappa) = \{\lambda \in \kappa: lim(\lambda)\}$. Es gilt $Lim(\kappa) = \Delta_{\alpha<\kappa} \{\xi: \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$: „$\subseteq$“: Sei $\lambda \in Lim(\kappa)$ und $\alpha < \lambda$. Es folgt $\alpha + 1 < \lambda$. Somit $\lambda \in \{\xi: \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$. „$\supseteq$“: Sei $\lambda \in \{\xi: \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$. Sei $\alpha < \lambda$. Nach Voraussetzung $\lambda \in \{\xi: \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$. Also $\alpha + 1 < \kappa$.

Nach Voraussetzung folgt $Lim(\kappa) \in F$. Sei C ein Club auf κ. Sei $f: \kappa \to \kappa$ die normale Funktion mit $C = ran(f)$. Setze $\beta_\alpha := f(\alpha)$. Also $C = \{\beta_\alpha: \alpha < \kappa\}$. Es gilt $C \supseteq Lim(\kappa) \cap \Delta_{\alpha<\kappa} \{\xi: \beta_\alpha < \xi < \kappa\}$. Daraus folgt $C \in F$. Warum gilt die Inklusion? Sei $\lambda \in Lim(\kappa) \cap \Delta_{\alpha<\kappa} \{\xi: \beta_\alpha < \xi < \kappa\}$. Es gilt also $lim(\lambda)$ und $\beta_\alpha < \lambda$ für alle $\alpha < \lambda$. Sei $\beta := sup_{\alpha<\lambda} \beta_\alpha$. Dann gilt also $\beta \leqslant \lambda$. Da f normal und $lim(\lambda)$, gilt $\beta = \beta_\lambda$. Es gilt $\alpha \leqslant \beta_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Folglich $\beta_\lambda = \lambda$. Aber $\beta_\lambda \in C$. ⊣

ÜBUNGEN

8.1. Jeder Filter auf einer endlichen Menge ist Hauptfilter.

8.2. Sei F ein Filter und $X \in F$. Dann ist $F \cap \wp(X)$ ein Filter auf X.

8.3. Sei U ein Ultrafilter und $X \cup Y \in U$. Zeige, daß dann $X \in U$ oder $Y \in U$.

8.4. Falls ω_α singulär ist, so existiert kein ω_α-vollständiges Ideal auf ω_α, das nicht Hauptideal ist.

8.5. Zeige, daß die Clubs auf einer regulären überabzählbaren Kardinalzahl κ genau die Wertebereiche aller normalen Funktionen von κ nach κ sind.

8.6. Sei I ein κ-vollständiges Ideal auf κ. Zeige, daß I normal ist, genau dann wenn für jedes $S \subseteq \kappa$ mit $S \notin I$ und jede regressive Funktion f auf S ein $S_0 \subseteq S$ mit $S_0 \notin I$ existiert, so daß f konstant ist auf S_0.

9. SINGULÄRE KARDINALZAHLEN

SATZ 9.1. *(Silver) Sei κ eine singuläre Kardinalzahl mit überabzählbarer Kofinalität ($\aleph_1 \leqslant cf(\kappa) < \kappa$). Falls GCH unterhalb κ gilt, so gilt sie an der Stelle κ, d.h. falls $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ für alle $\aleph_\alpha < \kappa$, so $2^\kappa = \kappa^+$.*

DEFINITION. Eine Kardinalzahl κ heißt ***starker Limes*** (oder ***starke Limeskardinalzahl***), falls $2^{\aleph_\alpha} < \kappa$ gilt für alle $\aleph_\alpha < \kappa$. (Insbesondere ist dann κ Limeskardinalzahl: Wäre $\kappa = \lambda^+$, so $2^\lambda \geqslant \lambda^+ \geqslant \kappa$.)

SATZ 9.2. *(Galvin-Hajnal) Sei κ eine singuläre starke Limeskardinalzahl von überabzählbarer Kofinalität, so daß $\kappa < \aleph_\kappa$. Dann gilt $2^\kappa < \aleph_\kappa$.*
Präzisere Schranke: Falls $\kappa = \aleph_\eta$, so ist $2^{\aleph_\eta} < \aleph_\gamma$, wobei $\gamma = (2^{|\eta|})^+$.

Für den Beweis von Satz 9.1 und Satz 9.2 nehmen wir zur Vereinfachung der Notation stets $\kappa = \aleph_\alpha$ mit $\alpha = \omega_1$ an, also $cf(\kappa) = \aleph_1$. Der allgemeine Fall geht genau gleich.

DEFINITION. Zwei Funktionen f und g mit $dom(f) = dom(g) = \omega_1$ heißen ***fast disjunkt***, falls $\alpha_0 < \omega_1$ existiert, so daß $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, alle $\alpha_0 \leqslant \alpha < \omega_1$. Oder äquivalent: $f \cap g$ ist abzählbar.
Die Menge F von Funktionen auf ω_1 heißt ***fast disjunkt***, falls je zwei Elemente in F fast disjunkt sind.

LEMMA 9.3. *Sei $\eta = \omega_1$. Es gelte $\aleph_\alpha{}^\eta < \aleph_\eta$ für alle $\alpha < \eta$. Sei F eine fast disjunkte Menge von Funktionen auf η, wobei $F \subseteq \Pi_{\alpha<\eta} A_\alpha$ für gewisse Mengen A_α, $\alpha < \eta$, so daß die Menge $\{\alpha < \eta: |A_\alpha| \leqslant \aleph_\alpha\}$ stationär ist in η. Dann gilt $|F| \leqslant \aleph_\eta$.*

BEWEIS. Sei $\eta = \omega_1$. Sei $S^* = \{\alpha < \eta: |A_\alpha| \leqslant \aleph_\alpha\}$. Zu jedem $\alpha \in S^*$ wähle eine Injektion $\pi_\alpha: A_\alpha \to \omega_\alpha$ und setze $A_\alpha^* := \pi_\alpha[A_\alpha]$. Zu jedem $\alpha \in \eta \setminus S^*$ sei $A_\alpha^* = A_\alpha$ und $\pi_\alpha = id_{A\alpha}$. Sei nun $f \in F$. Definiere $f^* \in \Pi_{\alpha<\eta} A_\alpha^*$ durch $f^*(\alpha) = \pi_\alpha(f(\alpha))$. Klarerweise ist dann $F^* := \{f^*: f \in F\}$ fast disjunkt und $|F^*| = |F|$. Für $\alpha \in S^*$ ist außerdem $A_\alpha^* \subseteq \omega_\alpha$, also $|A_\alpha^*| \leqslant \aleph_\alpha$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, es gelte schon $A_\alpha \subseteq \omega_\alpha$ und somit $|A_\alpha| \subseteq \aleph_\alpha$ für alle $\alpha \in S^*$. Da $Lim(\eta)$ ein Club ist, ist die Menge $S_0 := \{\alpha < \eta: lim(\alpha) \text{ und } A_\alpha \subseteq \omega_\alpha\}$ ($= Lim(\kappa) \cap S^*$) stationär. Für jedes $\alpha \in S_0$ und $f \in F$ ist $f(\alpha) < \omega_\alpha$. Da S_0 nur Limesordinalzahlen enthält, existiert $\beta < \alpha$ mit $f(\alpha) < \omega_\beta$. Bezeichne das kleinste solche β mit $g^f(\alpha)$. Wir erhalten so eine regressive Funktion g^f auf S_0 mit der Eigenschaft $f(\alpha) < \omega_\nu$ mit $\nu = g^f(\alpha)$ für alle $\alpha \in S_0$. Nach dem Satz von Fodor existiert eine stationäre Menge $S^f \subseteq S_0$ und $\gamma^f < \eta$, so daß $g^f(\alpha) = \gamma^f$ für alle $\alpha \in S^f$. Es folgt $f(\alpha) < \omega_\nu$ mit $\nu = \gamma^f$ für alle $\alpha \in S^f$. Da F fast disjunkt ist, gilt für jede unbeschränkte Menge $S \subseteq \eta$ und alle $f, g \in F$: Falls $f \upharpoonright S = g \upharpoonright S$, so $g = f$.
Da stationäre Mengen unbeschränkt sind, ist folglich die Funktion auf F definiert durch $f \mapsto (S^f, f \upharpoonright S^f)$ injektiv. Sei $S \subseteq \eta$ unbeschränkt. Die Menge aller beschränkten Funktionen $h: S \to \omega_\eta$ hat Kardinalität $|\bigcup_{\gamma<\eta} {}^S(\omega_\gamma)|$ und $|\bigcup_{\gamma<\eta} {}^S(\omega_\gamma)| = \Sigma_{\gamma<\eta} \aleph_\gamma{}^{|S|} = sup_{\gamma<\eta} \aleph_\gamma{}^\eta =_{(Voraussetzung)} \aleph_\eta$. Nach Konstruktion ist $f \upharpoonright S^f: S^f \to \omega_\eta$ beschränkt (durch ω_ν mit $\nu = \gamma^f$) für jedes $f \in F$. Da $|\wp(\eta)| = 2^\eta <_{(Voraussetzung)} \aleph_\eta$, folgt, daß die Menge $\{(S^f, f \upharpoonright S^f): f \in F\}$ Kardinalität höchstens $2^\eta \cdot \aleph_\eta = \aleph_\eta$ hat. Es folgt $|F| \leqslant \aleph_\eta$. ⊣

LEMMA 9.4. *Sei $\eta = \omega_1$. Es gelte $\aleph_\alpha{}^\eta < \aleph_\eta$, alle $\alpha < \eta$. Sei F eine fast disjunkte Menge von Funktionen. Es gelte $F \subseteq \Pi_{\alpha<\eta} A_\alpha$, so daß die Menge $\{\alpha < \eta: |A_\alpha| \leqslant \aleph_{\alpha+1}\}$ stationär ist. Dann gilt $|F| \leqslant \aleph_{\eta+1}$.*

BEWEIS. Wie im Beweis von Lemma 9.3 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, die Menge $S_0 := \{\alpha < \eta: A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}\}$ sei stationär. Weiter dürfen wir annehmen, daß für jedes $\alpha < \eta$ $A_\alpha \subseteq \mathbf{Ord}$, also $f: \eta \to \mathbf{Ord}$, alle $f \in F$. Für $f \in F$ sei $F_f = \{g \in F$: *es existiert ein stationäres* $S \subseteq S_0$, *so daß* $g(\alpha) \leqslant f(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in S\}$. Zu beliebigem $S \subseteq S_0$ sei weiter $F_{f,S} = \{g \in F: \forall\alpha \in S\ g(\alpha) \leqslant f(\alpha)\}$. Offensichtlich gilt $F_f = \bigcup_{S \subseteq S_0\ \&\ S \text{ stationär}} F_{f,S}$. Da $F_{f,S} \subseteq F$, ist $F_{f,S}$ fast disjunkt. Sei $S \subseteq S_0$ stationär und $f \in F$. Sei $B_\alpha = f(\alpha) + 1$, falls $\alpha \in S$, und $B_\alpha = \alpha$, falls $\alpha \in \eta \setminus S$. Dann gilt $F_{f,S} \subseteq \Pi_{\alpha\in\eta} B_\alpha$. Für $\alpha \in S \subseteq S_0$ gilt $f(\alpha) < \omega_{\alpha+1}$, somit $|f(\alpha) + 1| = |f(\alpha)| \leqslant \aleph_\alpha$, falls zudem $f(\alpha) \geqslant \omega$. Folglich $|B_\alpha| \leqslant \aleph_\alpha$, alle $\alpha \in S$. Wir sind in der Situation von Lemma 9.3 und erhalten somit (*) $|F_{f,S}| \leqslant \aleph_\eta$. Es folgt $|F_f| = |\bigcup_{S\subseteq S_0 \text{ stationär}} F_{f,S}| \leqslant 2^\eta \cdot \aleph_\eta =_{(\text{Voraussetzung})} \aleph_\eta$, alle $f \in F$.

Um zu zeigen, daß $|F| \leqslant \aleph_{\eta+1}$ gilt, konstruieren wir eine Folge $\langle f_\xi: \xi < \nu\rangle$ von Funktionen $f_\xi \in F$, so daß $\nu \leqslant \aleph_{\eta+1}$ und $F = \bigcup_{\xi<\nu} F_{f(\xi)}$. Daraus folgt dann natürlich $|F| \leqslant |\nu| \cdot \aleph_\eta \leqslant \aleph_{\eta+1}$. Zur Konstruktion: Rekursiv: Sei $f_0 \in F$ beliebig. Sei $\langle f_\nu: \nu < \xi\rangle$ für ein ordinales ξ schon konstruiert. Falls schon $F = \bigcup_{\nu<\xi} F_{f(\nu)}$, setze $\varphi := \xi$. Andernfalls existiert $f \in F$, so daß für jedes $\nu < \xi$ die Menge $\{\alpha \in S_0: f(\alpha) \leqslant f_\nu(\alpha)\}$ nicht stationär ist. Dann ist natürlich $\{\alpha \in S_0: f(\alpha) > f_\nu(\alpha)\}$ stationär für alle $\nu < \xi$, d.h. $f_\nu \in F_f$. Setze $f_\xi := f$. Nach Konstruktion ist also $f_\xi \notin \bigcup_{\nu<\xi} F_{f(\nu)}$, und $f_\nu \in F_{f(\xi)}$, alle $\nu < \xi$. Das beendet die Konstruktion von $\langle f_\xi: \xi < \nu\rangle$. Nach Konstruktion gilt $f_\xi \neq f_\nu$ für alle $\nu < \xi < \varphi$. (Da $f_\nu \in F_{f(\nu)}$, aber $f_\xi \notin F_{f(\nu)}$.)

Wegen (*) gilt $|F_{f(\xi)}| \leqslant \aleph_\eta$ und $\{f_\nu: \nu < \xi\} \subseteq F_{f(\xi)}$. Daraus folgt $|\xi| \leqslant \aleph_\eta$, alle $\xi < \nu$, mit anderen Worten $\nu \leqslant \aleph_{\eta+1}$. ⊣

Das folgende Lemma ist offensichtlich stärker als Satz 9.1.

LEMMA 9.5. *Sei κ eine singuläre Kardinalzahl mit $cf(\kappa) \geqslant \omega_1$. Falls eine normale (streng monoton wachsen und stetig) Folge $\langle\kappa_\alpha: \alpha < cf(\alpha)\rangle$ von Kardinalzahlen existiert, so daß $sup_{\alpha<cf(\kappa)} \kappa_\alpha = \kappa$ und $\{\alpha < cf(\kappa): 2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+\}$ stationär ist, so gilt $2^\kappa = \kappa^+$.*

BEMERKUNG. Nach Voraussetzung ist $cf(\kappa)$ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl. Wir haben also $CLUB_{cf(\kappa)}$. Normale $\langle\kappa_\alpha: \alpha < cf(\kappa)\rangle$ existieren stets: Sei $\langle\beta_\nu: \nu < cf(\kappa)\rangle$ beliebig kofinal, wachsend in κ. Sei κ_ν = *(kleinste Kardinalzahl* $\geqslant max\{sup_{\mu<\nu} \kappa_\mu, \beta_\nu\})$, falls ν Nachfolger. $\kappa_\lambda = sup_{\nu<\lambda} \kappa_\nu$, falls λ Limeskardinalzahl.

BEWEIS von Lemma 9.5. Sei $\eta = \omega_1$. Wieder nur im Fall $\kappa = \aleph_\eta$, also $cf(\kappa) = \eta$. Sei $\langle\kappa_\alpha: \alpha < \eta\rangle$ eine beliebige normale Folge von Kardinalzahlen $\kappa_\alpha < \aleph_\eta$ mit $sup_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha = \aleph_\eta$ (also z.B. $\kappa_\alpha = \aleph_\alpha$) und so, daß $S := \{\alpha < \eta: 2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+\}$ stationär ist. Setze $C := \{\alpha < \eta: \kappa_\alpha = \aleph_\alpha\}$. Dann ist C ein Club: C abgeschlossen: Sei $A \subseteq C$, $|A| < \eta$. Setze $\alpha := sup(A)$. Es gilt $\kappa_\alpha = sup_{\nu\in A} \kappa_\nu =_{(A\subseteq S)} sup_{\nu\in A} \aleph_\nu =_{(\text{Definition})} \aleph_\alpha$. C unbeschränkt: Sei $\alpha < \eta$. Definiere rekursiv eine wachsende Folge $\langle\beta_n: n < \omega\rangle$ in η, so daß $\alpha < \beta_0$ und $\kappa_{\beta(0)} < \aleph_{\beta(1)} < \kappa_{\beta(2)} < \aleph_{\beta(3)} < \ldots$. Setze $\beta := sup_{n<\omega} \beta_n$ und $\kappa := sup_{n<\omega} \kappa_{\beta(2n)} = sup_{n<\omega} \aleph_{\beta(2n+1)}$. Dann ist $\kappa = \kappa_\beta$ und $\kappa = \aleph_\beta$, also $\beta \in C$. Da C Club ist, ist auch $S_0 := S \cap C$ stationär. Klar: $S_0 \subseteq \{\alpha < \eta: 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\}$. Zu jeder Teilmenge $X \subseteq \aleph_\eta$ setze $f_X = \langle X_\alpha: \alpha < \eta\rangle$, wobei $X_\alpha := X \cap \omega_\alpha$. Sei $F = \{f_X: X \subseteq \aleph_\eta\}$. Klarerweise ist F fast disjunkt: Seien $X, Y \subseteq \aleph_\eta$, $X \neq Y$. Wähle $\nu \in X \mathbin{\Delta} Y$ $(= X \setminus Y \cup Y \setminus X)$. Wähle $\alpha_0 < \eta$ mit $\nu < \aleph_{\alpha(0)}$. Es folgt $X \cap \aleph_\alpha \neq Y \cap \aleph_\alpha$, alle $\alpha \geqslant \alpha_0$. Folglich f_X, f_Y fast disjunkt. Nach Definition von F gilt $F \subseteq \Pi_{\alpha<\eta} \wp(\omega_\alpha)$. Es gilt $|\wp(\omega_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$ für alle $\alpha \in S_0$. Es gilt $\aleph_\alpha^\eta < \aleph_\eta$, alle $\alpha < \eta$: Sei $\alpha < \eta$ beliebig. Wähle $\beta \in S_0$, $\beta > \alpha$. Es gilt $\aleph_\alpha^\eta \leqslant \aleph_\beta^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} < \aleph_\eta$. Nach Lemma 9.4 ist also $|F| \leqslant \aleph_{\eta+1}$. Da $X \mapsto f_X$ injektiv ist, folgt $\wp(\aleph_\eta) \leqslant \aleph_{\eta+1}$. ⊣

BEMERKUNG. Wir bemerken zu Satz 9.1 von Silver: „Falls $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ ...“. Man weiß nicht, ob das gilt. Möglicherweise schon $2^{\aleph_1} > \kappa$; dann aber sagt der Satz von Silver nichts aus, da die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllt sind. Aber es ist konsistent, daß $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, alle $\aleph_\alpha < \kappa$. In solchen Modellen muß nach dem Satz von Silver auch $2^\kappa = \kappa^+$ gelten.

Zum Beweis von Satz 9.2 benötigen wir ein weiteres Lemma:

LEMMA 9.6. *Sei $\eta = \omega_1$. Es gelte $\aleph_\alpha{}^\eta < \aleph_\eta$ für alle $\alpha < \eta$. Sei F eine fast disjunkte Menge von Funktionen $F \subseteq \Pi_{\alpha<\eta} A_\alpha$, so daß $|A_\alpha| < \aleph_\eta$ für alle $\alpha < \eta$. Dann gilt $|F| < \aleph_\gamma$, wobei $\gamma = (2^\eta)^+$, also $\aleph_\eta < \aleph_\gamma$.*

BEWEIS von Satz 9.2 aus Lemma 9.6. Sei $\eta = \omega_1$. Zu $X \subseteq \aleph_\eta$ definiere $f_X = \langle X_\alpha\colon \alpha < \eta \rangle$ durch $X_\alpha := X \cap \aleph_\alpha$. Setze $F := \{f_X\colon X \subseteq \aleph_\eta\}$. Wie im Beweis von Lemma 9.5 zeigt man, daß F fast disjunkt ist und somit $|F| = 2^{\aleph_\eta}$. Nach Definition ist $F \subseteq \Pi_{\alpha<\eta} \wp(\aleph_\alpha)$ und nach Voraussetzung gilt $|\wp(\aleph_\alpha)| = 2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\eta$. ($\aleph_\eta$ ist starker Limes.) Außerdem gilt aus demselben $\aleph_\alpha{}^\eta \leqslant \aleph_\alpha{}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\eta$, alle $\alpha < \eta$. Aus Lemma 9.6 folgt $2^{\aleph_\eta} = |F| < \aleph_\varphi$ mit $\varphi = (2^\eta)^+$. Nach Voraussetzung ist $(2^\eta)^+ < \aleph_\eta$. ⊣

Zum Beweis von Lemma 9.6 brauchen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Wohlordnung.

DEFINITION. Eine binäre Relation E über einer Menge P (also $E \subseteq P^2$) heißt ***wohlfundiert***, falls jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq P$ ein E-minimales Element enthält, d.h. es existiert $a \in X$, so daß wir für kein $x \in X$ haben $x\ E\ a$ (dabei steht $x\ E\ a$ für $(x, a) \in E$).

BEMERKUNGEN. Zum Begriff der Wohlfundiertheit bemerken wir:

(a) Das Fundierungsaxiom besagt, daß $\in$ wohlfundiert ist über jeder Menge.

(b) Falls (P, E) wohlfundiert ist, so existiert keine Folge $\langle a_n\colon n < \omega\rangle$ von Elementen $a_n \in P$ mit $a_{n+1}\ E\ a_n$ für alle $n < \omega$. Andernfalls hätte $\{a_n\colon n < \omega\}$ kein E-minimales Element. Mit AC gilt auch die Umkehrung: Falls (P, E) keine unendliche E-absteigende Folge besitzt, so ist (P, E) wohlfundiert: Sei $X \subseteq P$, $X \neq \varnothing$. Wähle a_n rekursiv: $a_0 \in X$, $a_1 \in X \setminus \{a_0\}$, $a_1\ E\ a_0$, $a_2 \in X \setminus \{a_0, a_1\}$, $a_2\ E\ a_1$ usw., so lange dies möglich ist. Nach Voraussetzung können wir so nur endlich viele a_n konstruieren. Das letzte a_n ist dann E-minimal in X.

SATZ 9.7. *Falls E eine wohlfundierte Relation über der Menge P ist, so existiert eine Funktion $f\colon P \to \mathbf{Ord}$, so daß für alle $x, y \in P$ gilt: $x\ E\ y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*

*Etwas präziser: Es existiert sogar eine eindeutige Funktion $\rho_E(x) = sup\{\rho_E(y) + 1\colon y \in P \wedge y\ E\ x\}$. Zudem ist $ran(\rho_E)$ eine Anfangsabschnitt von **Ord**, somit $ran(\rho_E) \in \mathbf{Ord}$. Diese Ordinalzahl heißt die **Länge** von E, bezeichnet mit $\mathbf{l(E)}$. Somit ist $l(E) = sup\{\rho_E(x) + 1\colon x \in P\}$.*

BEWEIS. Zur Definition von ρ_E auf P definiere erst eine Folge $\langle P_\alpha\colon \alpha \in \mathbf{Ord}\rangle$: $P_0 := \varnothing$; $P_{\alpha+1} := \{x \in P\colon \forall y \in P\ (y\ E\ x \Rightarrow y \in P_\alpha)\}$; $P_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} P_\alpha$, falls $lim(\lambda)$. Zeige durch Induktion über α, daß $P_\alpha \subseteq P_{\alpha+1}$ (und folglich $P_\alpha \subseteq P_\beta$, alle $\alpha < \beta$): $\alpha = 0$ klar. $\alpha = \nu + 1$: Sei $x \in P_\alpha$. Sei $y \in P$ mit $y\ E\ x$. Zeige $y \in P_\alpha$. Da $x \in P_{\nu+1}$, folgt nach Definition von $P_{\nu+1}$ $y \in P_\nu$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $P_\nu \subseteq P_{\nu+1} = P_\alpha$. $lim(\alpha)$ als Übung.

Mit Ersetzungsaxiom folgt, daß nicht $P_\alpha \subset P_{\alpha+1}$ für alle $\alpha \in \mathbf{Ord}$, sonst finde Injektion von **Ord** auf P. Sei $\theta \in \mathbf{Ord}$ minimal mit $P_\theta = P_{\nu+1}$. Dann gilt $P_\theta = P$: Andernfalls ($P \setminus P_\theta \neq \varnothing$) wähle E-minimales Element $a \in P \setminus P_\theta$. Für jedes $x \in P$ mit $x\ E\ a$ folgt $x \in P_\theta$. Nach Definition von $P_{\theta+1}$ somit $a \in P_{\theta+1}$, also $P_{\theta+1} \setminus P_\theta \neq \varnothing$, ein Widerspruch.

Definiere für $x \in P$: $\rho_E(x) = min\{\alpha \in \mathbf{Ord}\colon x \in P_{\alpha+1}\}$. Ordnungstreue von ρ_E folgt aus der Definition: Sei $x\ E\ y$. Sei $\alpha = \rho_E(y)$, also α das kleinste ν mit $y \in P_{\nu+1}$. Nach Definition von $P_{\nu+1}$ folgt $x \in P_\nu$, somit $\rho_E(x) < \nu$.

Zu (*): Sei $r(y) = sup\{\rho_E(x) + 1\colon x\ E\ y\}$. Behauptung: $r(y) = \rho_E(y)$: Aus der Definition folgt „$\leqslant$“, aber auch „$\geqslant$“: α = *kleinstes* ν *mit* $y \in P_{\nu+1}$. Es folgt: Zu jedem $\beta < \alpha$ existiert $x \in P$ mit $x\ E\ y$ und $x \in P_\alpha \setminus P_\beta$ (somit $\rho_E(x) \geqslant \beta$). Somit wären alle $x \in P$ mit $x\ E\ y$ Element von P_β für ein $\beta < \alpha$. Daraus folgt $y \in P_{\beta+1}$, ein Widerspruch zur Minimalität von α.

Wir haben gezeigt: Zu jedem $\beta < \alpha$ existiert $x \in P$ mit $x\ E\ y$, so daß $\rho_E(x) \geqslant \beta$. Es folgt ($\rho_E(y)$ =) $\alpha \leqslant sup\{\rho_E(x) + 1: x\ E\ y\}$ (= $r(y)$). Nach Konstruktion ist $\theta = ran(\rho_E)$: ($\alpha \in ran(\rho_E) \Leftrightarrow P_{\alpha+1} \setminus P_\alpha \neq \varnothing$). ⊣

Sei $\eta = \omega_1$ und $\nu = CLUB_\eta$. Wir kennen schon $\equiv_\nu$ auf η: Für $f, g \in {}^\eta\eta$ wurde definiert: $f \equiv_\nu g :\Leftrightarrow \{\alpha < \eta: f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \nu$. Betrachte nun die folgende Relation $<$ auf ${}^\eta\eta$: Für $\varphi, \psi \in {}^\eta\eta$ setze $\varphi < \psi :\Leftrightarrow \{\alpha < \eta: \varphi(\alpha) \geqslant \psi(\alpha)\}$ *nichtstationär* (d.h. $\in (CLUB_\eta)^C$) $\Leftrightarrow \{\alpha < \eta: \varphi(\alpha) < \psi(\alpha)\} \in CLUB_\eta$.
$({}^\eta\eta, <)$ ist eine Partialordnung: $\varphi \not< \varphi$, $\varphi < \psi < \chi$, da $CLUB_\eta$ Filter. $({}^\eta\eta, <)$ ist keine Totalordnung: Seien $S, T \subseteq \eta$ stationär, disjunkt. Setze $\psi \upharpoonright S$ konstant 1, $\psi \upharpoonright (\eta \setminus S)$ konstant 0, $\varphi \upharpoonright T$ konstant 1 und $\varphi \upharpoonright (\eta \setminus T)$ konstant 0. Wichtig: $({}^\eta\eta, <)$ ist wohlfundiert: Angenommen $\langle \varphi_n: n < \omega \rangle$ wäre eine absteigende Kette: $\varphi_{n+1} < \varphi_n$, alle $n < \omega$. Setze $C_n := \{\alpha < \eta: \varphi_{n+1}(\alpha) < \varphi_n(\alpha)\}$. Dann ist $C_n \in CLUB_\eta$, alle $n < \omega$. Da $CLUB_\eta$ η-vollständig ist, existiert $\alpha \in \bigcap_{n<\omega} C_n$. Dann ist aber $\langle \varphi_n(\alpha): n < \eta \rangle$ eine unendliche absteigende Folge von Ordinalzahlen. Ein Widerspruch zur Wohlgeordnetheit von ***Ord***.
Mit Satz 9.7 erhalten wir also eine Rangfunktion $||\bullet||: {}^\eta\eta \to \textbf{Ord}$ mit $||\varphi|| = sup\{||\psi|| + 1: \psi \in {}^\eta\eta \wedge \psi < \varphi\}$. Nun verallgemeinern wir die obige Definition von $<$, $||\bullet||$: Sei $S \subseteq \eta$ stationär. Definiere $<_S$ auf ${}^\eta\eta$: Für $\varphi, \psi \in {}^\eta\eta$ sei $\varphi <_S \psi :\Leftrightarrow \{\alpha \in S: \varphi(\alpha) \geqslant \psi(\alpha)\}$ *nicht stationär*. Wie oben zeigt man, daß $({}^\eta\eta, <_S)$ eine wohlfundierte Partialordnung ist. Somit existiert eine Rangfunktion $||\bullet||_S: {}^\eta\eta \to \textbf{Ord}$ mit $||\varphi||_S = sup\{||\psi||_S + 1: \psi <_S \varphi\}$.

LEMMA 9.8. *Sei $\eta = \omega_1$. Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Seien $S, T \subseteq \eta$ stationär mit $S \subseteq T$. Dann gilt $||\varphi||_T \leqslant ||\varphi||_S$, alle $\varphi \in {}^\eta\eta$.*

(b) $||\varphi||_{S\cup T} = min\{||\varphi||_S, ||\varphi||_T\}$.

(c) *Sei S stationär und $X \subseteq \eta$ nichtstationär. Dann gilt $||\varphi||_S = ||\varphi||_{X\cup S}$, alle φ.*

(d) *Zu $\varphi \in {}^\eta\eta$ sei $I_\varphi := (CLUB_\eta)^C \cup \{S \subseteq \eta$: S stationär und $||\varphi|| < ||\varphi||_S\}$. Dann ist I_φ ein Ideal auf η.*

(e) *Falls $||\varphi||$ Limeszahl ist, so ist $S_0 := \{\alpha < \eta: \varphi(\alpha)$ Nachfolgerordinalzahl$\} \in I_\varphi$. Falls $||\varphi||$ Nachfolgerordinalzahl ist, so ist $S_1 := \{\alpha < \eta: \varphi(\alpha)$ Limesordinalzahl$\} \in I_\varphi$.*

BEWEIS. *Zu (a)*: Sei $\eta = \omega_1$. Seien $S \subseteq T \subseteq \eta$ stationär. Trivialerweise gilt: $\psi <_T \varphi \Rightarrow \psi <_S \varphi$ (+). Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über $||\varphi||_S$: $||\varphi||_S = 0$. Also φ $<_S$-minimal. Aus (+) folgt, daß φ auch ein $<_T$-minimales Element ist, also $||\varphi||_T = 0$. Sei nun $||\varphi||_S > 0$. Es gilt $||\varphi||_S = sup\{||\psi||_S + 1: \psi <_S \varphi\} \geqslant_{(+)} sup\{||\psi||_S + 1: \psi <_T \varphi\} \geqslant_{(\text{Induktionsvoraussetzung})} sup\{||\psi||_T + 1: \psi <_T \varphi\} = ||\varphi||_T$. Insbesondere folgt $||\varphi|| \leqslant ||\varphi||_S$, alle stationären S.
Zu (b): Angenommen (b) gelte für disjunkte S, T. Seien nun S, T beliebig. $||\varphi||_{S\cup T} = ||\varphi||_{S\cup(T\setminus S)} = min\{||\varphi||_S, ||\varphi||_{T\setminus S}\} = ||\varphi||_{T\cup(S\setminus T)} = min\{||\varphi||_T, ||\varphi||_{S\setminus T}\}$. Seien nun o.B.d.A. $S \cap T = \varnothing$. Es gilt stets: $\psi <_{S\cup T} \varphi \Leftrightarrow \psi <_S \varphi \wedge \psi <_T \varphi$ (++). „$\Rightarrow$“ wegen (+). „$\Leftarrow$“, da $(CLUB_\eta)^C$ Ideal. Induktion über $||\varphi||_{S\cup T}$: $||\varphi||_{S\cup T} = sup\{||\psi||_{S\cup T} + 1: \psi <_{S\cup T} \varphi\} =_{(++)} sup\{||\psi||_{S\cup T} + 1: \psi <_S \varphi \wedge \psi <_T \varphi\} =_{(\text{Induktionsvoraussetzung})} sup\{min\{||\psi||_S + 1, ||\psi||_T + 1\}: \psi <_S \varphi \wedge \psi <_T \varphi\} =_{(S\cap T=\varnothing)} sup\{min\{||\psi_0||_S + 1, ||\psi_1||_T + 1\}: \psi_0 <_S \varphi \wedge \psi_1 <_T \varphi\} =_{(*)} min\{sup\{||\psi_0||_S + 1: \psi_0 <_S \varphi\}, sup\{||\psi_1||_T + 1: \psi_1 <_T \varphi\}\} = min\{||\varphi||_S, ||\varphi||_T\}$. Zu (*): „$\leqslant$“ klar. „$\geqslant$“: Sei z.B. $sup\{||\psi_0||_S + 1: \psi_0 <_S \varphi\} = min\{sup\{||\psi_0||_S + 1: \psi_0 <_S \varphi\}, sup\{||\psi_1||_T + 1: \psi_1 <_T \varphi\}\}$. Sei $\psi_0 <_S \varphi$. Finde $\psi_1 <_T \varphi$ mit $||\psi_0|| \leqslant ||\psi_1||_T$. Somit $min\{||\psi_0||_S + 1, ||\psi_1||_T + 1\} = ||\psi_0||_S + 1$.
Zu (c): Leicht, da $<_{X\cup S}$ gleich $<_S$ ist. Folglich $||\bullet||_{X\cup S} = ||\bullet||_S$.
Zu (d): Seien $A, B \in I_\varphi$. Falls $A, B \in M_1$, so $A \cup B \in M_1$. Falls $A \in M_1$, $B \in M_2$, so $||\varphi|| < ||\varphi||_B =_{(c)} ||\varphi||_{B\cup A}$; somit $B \cup A \in M_2$. Falls $A, B \in M_2$, $||\varphi||_{A\cup B} =_{(b)} min\{||\varphi||_A, ||\varphi||_B\} > ||\varphi|| \Rightarrow A \cup B \in M_2$.

Zu (e): Sei $M = S_0$. Sei $lim(||\varphi||)$. Wäre $M \notin I_\varphi$. Es folgt $||\varphi|| = ||\varphi||_M$. Definiere $\psi\colon \omega_1 \to \omega_1$ mit $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1$, falls $\alpha \in M$, und $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, sonst. Dann ist $\psi <_M \varphi$ und: Falls $\chi <_M \varphi$, so ist $\chi \equiv_M \psi$ oder $\chi <_M \psi$. Es folgt $||\varphi||_M = ||\psi||_M + 1$, ein Widerspruch. Also $M \in I_\varphi$. Ganz ähnlich zeige $S_1 \in I_\varphi$. ⊣

BEWEIS von Lemma 9.6 aus Lemma 9.8. Sei $\eta = \omega_1$. Wähle $\varphi\colon \eta \to \eta$, so daß $|A_\alpha| < \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$. Sei $\theta = l({}^\eta\eta, <)$ die Länge. Da $||\bullet||$ surjektiv von ${}^\eta\eta$ auf θ ist, gilt $|\theta| \leqslant |{}^\eta\eta| = 2^\eta$. Es folgt $\theta < (2^\eta)^+$. Folglich $\eta + ||\varphi|| < (2^\eta)^+$. Wir haben $|F| < \aleph_\nu$ mit $\nu = (2^\eta)^+$. ⊣

LEMMA 9.9. *Sei $\eta = \omega_1$. Es gelte $\aleph_\alpha{}^\eta < \aleph_\eta$, alle $\alpha < \eta$. Sei $\varphi\colon \eta \to \eta$ und sei F eine fast disjunkte Menge, so daß $F \subseteq \Pi_{\alpha<\eta} A_\alpha$ und $|A_\alpha| \leqslant \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$. Dann gilt $|F| \leqslant \aleph_{\eta+||\varphi||}$.*

BEWEIS. Sei $\eta = \omega_1$. Induktion über $||\varphi||$.

$||\varphi|| = 0$. Also φ minimal in $({}^\eta\eta, <)$, folglich ist $S = \{\alpha < \eta\colon \varphi(\alpha) = 0\}$ stationär. Dann ist Lemma 9.9 genau Lemma 9.3. Zur Erinnerung: Zu $\varphi \in {}^\eta\eta$ wurde definiert $I_\varphi = (CLUB_\eta)^C \cup \{S \subseteq \eta\colon S \text{ stationär und } ||\varphi|| < ||\varphi||_S\}$.

Sei nun $||\varphi|| > 0$. Fall 1: $||\varphi||$ ist Limesordinalzahl. Setze $S := \{\alpha < \eta\colon \varphi(\alpha) \text{ Limesordinalzahl}\}$, somit $\varphi(\alpha) > 0$. Wegen $||\varphi|| > 0$ ist $T := \{\alpha < \eta\colon \varphi(\alpha) = 0\}$ nichtstationär, also $T \in I_\varphi$. Wegen Lemma 9.8 (e) ist $S_0 := \{\alpha < \eta\colon \varphi(\alpha) \text{ ist Nachfolgerordinalzahl}\} \in I_\varphi$. Da $\eta = S \cup T \cup S_0$ und I_φ Ideal, ist $S \notin I_\varphi$. Nach Voraussetzung ist $|A_\alpha| \leqslant \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$, deshalb dürfen wir o.B.d.A. annehmen, es gelte $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+\varphi(\alpha)}$. Folglich $f(\alpha) < \omega_{\alpha+\varphi(\alpha)}$, alle $f \in F$ und $\alpha < \eta$. Zu $f \in F$ und $\alpha \in S$ finde zudem ein minimales $\beta < \varphi(\alpha)$, so daß $f(\alpha) < \omega_{\alpha+\beta}$; setze $\beta =: \psi_f(\alpha)$. Für $\alpha \in \eta \setminus S$ setze $\psi_f(\alpha) = \varphi(\alpha)$. Dann also $\psi_f \in {}^\eta\eta$. Also $\psi <_S \varphi$. Da $S \notin I_\varphi$, folgt mit Lemma 9.8 (a): $||\psi|| \leqslant_{(9.8\ (a))} ||\psi||_S < ||\varphi||_S = ||\varphi||$. Setze weiter $F_\psi := \{f' \in F\colon f'(\alpha) < \omega_{\alpha+\varphi(\alpha)}, \text{ alle } \alpha < \eta\}$. Natürlich gilt $f \in F_\psi$. Da f beliebig war, folgt $F = \bigcup\{F_\psi\colon ||\psi|| < ||\varphi||\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|F_\psi| \leqslant \aleph_{\eta+||\psi||}$ $(< \aleph_{\eta+||\varphi||})$ für alle $\psi \in {}^\eta\eta$ mit $||\psi|| < ||\varphi||$. Da $|{}^\eta\eta| = 2^\eta$ und $2^\eta <_{(Voraussetzung)} \aleph_\eta$, folgt $|F| \leqslant 2^\eta \bullet \aleph_{\eta+||\varphi||}$.

Fall 2: $||\varphi||$ Nachfolgerordinalzahl, $||\varphi|| = \gamma + 1$. Setze $S_0 := \{\alpha < \eta\colon \varphi(\alpha) \text{ Nachfolgerordinalzahl}\}$. Seien wieder T und S wie im 1. Fall. Wieder $T \in I_\varphi$, da $||\varphi|| > 0$, und nach Lemma 9.8 (e) ist $S \in I_\varphi$. Es folgt $S_0 \notin I_\varphi$. Wieder dürfen wir annehmen, es gelte $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+\varphi(\alpha)}$, alle $\alpha < \eta$. Für $f \in F$ sei $F_f := \{g \in F\colon \exists S \subseteq S_0\ (S \notin I_\varphi \wedge \forall\alpha \in S\ (g(\alpha) \leqslant f(\alpha)))\}$. Für $S \subseteq S_0$ mit $S \notin I_\varphi$ sei weiter $F_{f,S} := \{g \in F\colon \forall\alpha \in S\ (g(\alpha) \leqslant f(\alpha))\}$. Dann gilt $F_f = \bigcup\{F_{f,S}\colon S \subseteq S_0 \wedge S \notin I_\varphi\}$. Sei $S \subseteq S_0$, $S \notin I_\varphi$. Definiere $\psi\colon \eta \to \eta$ durch $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1$, falls $\alpha \in S_0$, und $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, falls $\alpha \notin S_0$. Es folgt $||\psi|| \leqslant_{(9.8\ (e))} ||\psi||_S <_{(Def.\ \psi)} ||\varphi||_S = ||\varphi||$. (Tatsächlich ist $||\psi|| = \gamma$.) Sei $g \in F_{f,S}$. Falls $\alpha \in S$, gilt $f(\alpha) < \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ und $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) + 1$. Folglich $|f(\alpha)| \leqslant \aleph_{\alpha+\psi(\alpha)}$. Weiter ist $g(\alpha) \leqslant f(\alpha)$. Falls $\alpha \notin S$ ist ja $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$. Setze $A_\alpha{}' = f(\alpha) + 1$, falls $\alpha \in S$, und $A_\alpha{}' = A_\alpha$, sonst. Es folgt $|A_\alpha{}'| \leqslant \aleph_{\alpha+\psi(\alpha)}$, alle α. Und $F_{f,S} \leqslant \Pi_{\alpha<\eta} A_\alpha{}'$. Da $||\psi|| < ||\varphi||$, folgt nach Induktionsvoraussetzung $|F_{f,S}| \leqslant \aleph_{\eta+||\psi||} \leqslant \aleph_{\eta+\gamma}$. Wegen $F_f = \bigcup_{S\subseteq S(0) \wedge S\notin I\varphi} F_{f,S}$, folgt $|F_f| \leqslant 2^\eta \bullet \aleph_{\eta+\gamma} = \aleph_{\eta+\gamma}$. Nun konstruieren wir eine Folge $\langle f_\xi\colon \xi < \theta\rangle$ mit $\theta \leqslant \aleph_{\eta+\gamma+1}$ und $F = \bigcup\{F_{f,S}\colon \xi < \theta\}$: Angenommen $\langle f_\nu\colon \nu < \xi\rangle$ sei schon konstruiert. Wähle (falls möglich) $f_\xi \in F \setminus \bigcup_{\nu<\xi} F_{f(\nu)}$. Für jedes $\nu < \xi$ ist folglich $S^\nu := \{\alpha \in S_0\colon f_\xi(\alpha) \leqslant f_\nu(\alpha)\} \in I_\varphi$. Sei $g := f_\xi$. Es folgt $\{\alpha \in S_0\colon f_\nu(\alpha) < f_\xi(\alpha)\} \notin I_\varphi$ (sonst $S_0 \in I_\varphi$) und somit $f_\nu \in F_g$, alle $\nu < \xi$. Da $|F_g| \leqslant \aleph_{\eta+\gamma}$, erhalten wir $\xi < \aleph_{\eta+\gamma+1}$, falls f_ξ existiert. Folglich endet die Konstruktion spätestens mit $\theta = \aleph_{\eta+\gamma+1}$, da f_θ nicht mehr existieren kann. ⊣

10. WOHLFUNDIERTHEIT

DEFINITION. Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Dann heißt R ***wohlfundiert***, falls jede nichtleere Teilmenge von A ein R-minimales Element besitzt, d.h. $\forall X \subseteq A\ (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in X\ \neg\exists z \in X\ \langle x, y\rangle \in R)$. (Unter Verwendung von ZF^-.)

BEMERKUNG. ZF ist ZF ohne AC. ZF^-, ZFC^- ist das ZF bzw. ZFC ohne Fundierungsaxiom. ZFC-P, ZF-P, ZFC^--P, ZF^--P bezeichnet die entsprechenden Axiomensysteme ohne das Potenzmengenaxiom.

DEFINITION. Definiere $\langle \boldsymbol{V_\alpha}\colon \alpha \in \boldsymbol{Ord}\rangle$ durch transfinite Induktion wie folgt: $V_0 = \emptyset$; $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$; $V_\lambda = \bigcup\{V_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, falls λ Limeszahl. Setze $\boldsymbol{WF} = \bigcup\{V_\alpha\colon \alpha \in \boldsymbol{Ord}\}$.

Also gilt: $x \in WF \Leftrightarrow \exists\alpha \in Ord\ x \in V_\alpha$. Wir nennen $\boldsymbol{WF}$ die *Klasse der wohlfundierten Mengen*. Es ist $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $V_2 = \wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $V_3 = \wp(V_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Also gilt $|V_0| = 1$, $|V_1| = 2^0$, $|V_2| = 2^1$, $|V_3| = 2^2$, ..., $|V_n| = 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}$ („2 hoch 2 hoch 2...“, $n-1$-mal). $|V_\omega| = \aleph_0$, $V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n$, $|V_{\omega+1}| = |\wp(V_\omega)| = 2^{\aleph_0}$.

DEFINITION. Definiere $\langle \boldsymbol{\beth_\alpha}\colon \alpha \in \boldsymbol{Ord}\rangle$ wie folgt: $\beth_0 = \aleph_0$, ($\beth_1 = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ unter GCH), $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = sup(\{\beth_\alpha\colon \alpha < \lambda\})$ für λ Limeszahl.

BEMERKUNGEN. Es gilt $GCH \Rightarrow \forall\alpha\ \beth_\alpha = \aleph_\alpha$ und $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$. Beides beweist man leicht durch Induktion über α.

LEMMA 10.1. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) $\forall\alpha\ V_\alpha$ *ist transitiv.*

(b) $\beta < \alpha \Rightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha$.

BEWEIS. Simultane Induktion bzw. wir beweisen (a) und (b) durch Induktion über α.
$\alpha = 0$: Zu (a): $V_0 = \emptyset$ transitiv. Zu (b): $\forall\beta < 0$ gilt $V_\beta \subseteq V_\alpha$.
Sei (a) und (b) bewiesen für alle $\alpha < \gamma$.
Fall 1. γ Limeszahl. Zu (a): V_γ transitiv; denn: Sei $x \in V_\gamma$. Es existiert also $\alpha < \gamma$ mit $x \in V_\alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung ist V_α transitiv, also $x \subseteq V_\alpha$. Da $V_\alpha \subseteq V_\gamma$, also auch $x \subseteq V_\gamma$. Zu (b): Sei $\beta < \gamma$. Nach Definition von V_γ gilt $V_\beta \subseteq V_\gamma$.
Fall 2. $\gamma = \beta + 1$. Zu (a): V_γ transitiv: Sei $x \in V_\gamma = \wp(V_\beta)$. Also $x \subseteq V_\beta$. Sei $y \in X$. Also $y \in V_\beta$. Nach Induktionsvoraussetzung ist V_β transitiv, also $y \subseteq V_\beta$. Somit haben wir $y \in \wp(V_\beta) = V_\gamma$. Zu (b): Sei $\alpha < \gamma$ und $x \in V_\alpha$. Also $\alpha \leqslant \beta$ und somit nach Induktionsvoraussetzung $x \in V_\alpha \subseteq V_\beta$. Also $x \in V_\beta$. Da V_β transitiv ist nach Induktionsvoraussetzung, folgt $x \subseteq V_\beta$. Somit $x \in \wp(V_\beta) = V_\gamma$. ⊣

DEFINITION. Für $x \in \boldsymbol{WF}$ setze $\boldsymbol{rk(x)} = min(\{\alpha \in \boldsymbol{Ord}\colon x \in V_{\alpha+1}\})$ den ***Rang*** *von x*.

BEMERKUNGEN. Wir bemerken folgende Eigenschaften zur Definition des Rangs:

(a) Sei $x \in \boldsymbol{WF}$ und sei $\gamma \in \boldsymbol{Ord}$ minimal, so daß $x \in V_\gamma$. Dann ist γ eine Nachfolgerzahl.

(b) Falls $rk(x) = \alpha$, so folgt $x \subseteq V_\alpha$ und $x \notin V_\alpha$.

(c) Es gilt $V_\alpha = \{x \in \boldsymbol{WF}\colon rk(x) < \alpha\}$. Beweis: „$\subseteq$“: Sei $x \in V_\alpha$. Es folgt $rk(x) < \alpha$ nach der Definition des Rangs. „$\supseteq$“: Sei $x \in \boldsymbol{WF}$ und $rk(x) < \alpha$. Also $x \in V_{rk(x)+1}$ und $rk(x) + 1 \leqslant \alpha$. Nach Lemma 7.1 (b) folgt $x \in V_\alpha$.

LEMMA 10.2. *Sei* $y \in \boldsymbol{WF}$. *Es gelten:*

(a) Falls $x \in y$, *so folgt* $x \in \boldsymbol{WF}$ *und* $rk(x) < rk(y)$.

(b) $rk(y) = sup(\{rk(x) + 1: x \in y\})$.

BEWEIS. *Zu (a)*: Sei $\alpha = rk(y)$. Also $y \subseteq V_\alpha$, $y \notin V_\alpha$. Folglich $x \in V_\alpha \subseteq \boldsymbol{WF}$. Wegen der obigen Bemerkung (c) folgt $rk(x) < \alpha$.
Zu (b): „$\geqslant$“ folgt aus (a): $x \in y \Rightarrow rk(x) + 1 \leqslant rk(y)$, also $sup(\{rk(x) + 1: x \in y\}) \leqslant rk(y)$.
„$\leqslant$“: Setze $\beta := sup(\{rk(x) + 1: x \in y\})$. Es folgt $y \subseteq V_\beta$. Dann $x \in y \Rightarrow x \in V_{rk(x)+1} \subseteq V_\beta$ nach Lemma 7.1 (b). Folglich $y \in V_{\beta+1}$. Somit $rk(y) \leqslant \beta$. ⊣

BEMERKUNGEN. $\boldsymbol{WF}$ ist eine transitive Klasse.
Falls $x \in \boldsymbol{WF}$, so folgt $x \notin x$ (in ZF^-), da sonst $rk(x) < rk(x)$.

Wir werden sehen, daß $ZF \vdash \boldsymbol{V} = \boldsymbol{WF}$. Es gilt $\boldsymbol{Ord} \subseteq \boldsymbol{WF}$ nach folgendem Lemma:

LEMMA 10.3. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) $\alpha \in \boldsymbol{Ord} \Rightarrow \alpha \in \boldsymbol{WF} \wedge rk(\alpha) = \alpha$.

(b) $\alpha \in \boldsymbol{Ord} \Rightarrow V_\alpha \cap \boldsymbol{Ord} = \alpha$.

BEWEIS. *Zu (a)*: Zeige (a) durch transfinite Induktion über α: $0 \in V_1$ und $rk(0) = 1$.
Sei $\alpha \in \beta + 1$ und $\beta \in \boldsymbol{WF}$ und $rk(\beta) = \beta$. Also $\beta \subseteq V_\beta$ und $\beta \notin V_\beta$, somit $\beta \in V_{\beta+1}$. Es folgt $\alpha = \beta \cup \{\beta\} \subseteq V_{\beta+1}$, da $\beta \subseteq V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$ und $\beta \in V_{\beta+1}$; somit $\alpha \in V_{\beta+2} \subseteq \boldsymbol{WF}$. Wäre $\alpha \in V_{\beta+1} = \wp(V_\beta)$, würde folgen, daß $\alpha = \beta \cup \{\beta\} \subseteq V_\beta$. Also $\beta \in V_\beta$, Widerspruch.
Zu (b): „$\subseteq$“: Falls $\beta \in V_\alpha \cap \boldsymbol{Ord}$, folgt nach der obigen Bemerkung (c) $rk(\beta) < \alpha$. Aber $rk(\beta) = \beta$, also $\beta < \alpha$.
„$\supseteq$“: Sei $\beta < \alpha$. Dann $b \in \boldsymbol{WF}$ und $rk(\beta) = \beta < \alpha$. Es folgt mit der obigen Bemerkung (c) $\beta \in V_\alpha$. ⊣

LEMMA 10.4. ***WF*** *ist abgeschlossen unter allen mengentheoretischen Operationen:*

(a) Falls $x \in \boldsymbol{WF}$, *so folgt* $\bigcup x$, $\wp(x)$, $\{x\} \in \boldsymbol{WF}$.

(b) Falls $x, y \in \boldsymbol{WF}$, *so folgt* $x \times y$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{x, y\}$, $\langle x, y\rangle$, ${}^yx \in \boldsymbol{WF}$.

BEWEIS als Übung. ⊣

LEMMA 10.5. $\forall x\ (x \in \boldsymbol{WF} \Leftrightarrow x \subseteq \boldsymbol{WF})$.

BEWEIS. „$\Rightarrow$“: Sei $x \in \boldsymbol{WF}$. Es folgt $x \subseteq \boldsymbol{WF}$ wegen der Transitivität von $\boldsymbol{WF}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $x \subseteq \boldsymbol{WF}$, x eine Menge. Lasse $\alpha = sup(\{rk(y) + 1: y \in x\})$. Es folgt $x \subseteq V_\alpha$ und somit $x \in V_{\alpha+1} \subseteq \boldsymbol{WF}$. ⊣

BEMERKUNG. Alle Objekte der Mathematik können in $\boldsymbol{WF}$ nachgebildet werden.
Sei z.B. $\langle G, \bullet\rangle$ eine Gruppe. Sei $\alpha = |G|$. Sei $f: G \to \alpha$ eine Bijektion und definiere die Funktion $*$ auf α^2 wie folgt: Für $\mu, \nu \in \alpha$: $\mu * \nu := f(f^{-1}(\mu) \bullet f^{-1}(\nu))$. Also ist $* \subseteq \alpha^3$. Es gilt $\alpha \in \boldsymbol{WF}$, genauer $\alpha \in V_{\alpha+1}$. Außerdem $\alpha^3 \in V_{\alpha+13}$, folglich $* \in V_{\alpha+14}$. Somit gilt $\langle \alpha, *\rangle \in V_{\alpha+20}$, also $\langle \alpha, *\rangle \in \boldsymbol{WF}$. Natürlich gilt $\langle \alpha, *\rangle \cong \langle G, \bullet\rangle$.
Ähnlich zeige: Zu jedem topologischen Raum existiert ein homöomorpher Raum in $\boldsymbol{WF}$. Jeder Vektorraum besitzt eine isomorphe Kopie in $\boldsymbol{WF}$ usw.

LEMMA 10.6 (ZF^-). *Falls* $A \in \boldsymbol{WF}$ *gilt, so ist* $\langle A, \in\rangle$ *wohlfundiert.*

BEWEIS. Sei $X \subseteq A$ mir $X \neq \emptyset$. Wegen der Transitivität von $\boldsymbol{WF}$ folgt $X \subseteq \boldsymbol{WF}$. Sei $\alpha = min(\{rk(x)\colon x \in X\})$. Wähle $x \in X$ mit $rk(x) = \alpha$. Dann ist x $\in$-minimal: Wäre $y \in X$, $y \in x$, so folgt nach Lemma 10.2 (a) $rk(y) < rk(x)$, Widerspruch zur Minimalität von α. ⊣

Die Umkehrung von Lemma 10.6 braucht nicht zu gelten.

BEISPIEL. Es ist möglich (in ZF^-), folgende Situation zu haben: Es existieren $x \neq y$, so daß $x = \{y\}$ und $y = \{x\}$ gilt. Klarerweise ist $\langle x, \in \rangle$ wohlfundiert ($\langle y, \in \rangle$ auch). Aber es gilt $x \notin \boldsymbol{WF}$, da sonst $rk(x) < rk(y) < rk(x)$ gilt.

LEMMA 10.7 (ZF^-). *Falls A transitiv ist und* $\langle A, \in \rangle$ *wohlfundiert ist, so folgt* $A \in \boldsymbol{WF}$.

BEWEIS. Nach Lemma 10.5 genügt es, $A \subseteq \boldsymbol{WF}$ zu zeigen. Wäre $A \not\subseteq \boldsymbol{WF}$, so ist $X := A \setminus \boldsymbol{WF} \neq \emptyset$. Sei y $\in$-minimales Element von X. Wegen der Transitivität von A gilt $y \subseteq A$. Wegen der Minimalität von y gilt $y \cap X = \emptyset$. Es folgt $y \subseteq \boldsymbol{WF}$, also $y \in \boldsymbol{WF}$ nach Lemma 10.5, Widerspruch zur Wahl von y. ⊣

DEFINITION (ZF^--P). Zu einer Menge A definieren wir rekursiv: $\bigcup^0 A = A$, $\bigcup^1 A = \bigcup A$. Allgemein sei $\bigcup^{n+1} A = \bigcup \bigcup^n A$ für $n \in \omega$.
Der ***transitive Abschluß*** von A, geschrieben ***trcl(A)***, ist definiert als $\bigcup\{\bigcup^n A\colon n \in \omega\}$.

Sei A' transitiv und $A \subseteq A'$. Es folgt $\bigcup A \subseteq A'$. Weiterhin folgt $\bigcup(\bigcup A) \subseteq A'$.

LEMMA 10.8 (ZF^--P). *Für alle Mengen A gilt:*

(a) $A \subseteq trcl(A)$.

(b) *trcl(A) ist transitiv.*

(c) *Falls* $A \subseteq T$ *und T transitiv ist, so folgt* $trcl(A) \subseteq T$.

(d) *Falls A transitiv ist, so gilt* $trcl(A) = A$.

(e) *Falls* $x \in A$ *ist, so folgt* $trcl(x) \subseteq trcl(A)$.

(f) $trcl(A) = A \cup \bigcup\{trcl(x)\colon x \in A\}$.

BEWEIS als Übung.

SATZ 10.9. *Für jede Menge A sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A \in \boldsymbol{WF}$.

(b) $trcl(A) \in \boldsymbol{WF}$.

(c) $\langle trcl(A), \in \rangle$ *ist wohlfundiert.*

BEWEIS. Zu (a) ⇒ (b): Sei $A \in \boldsymbol{WF}$. Zeige durch Induktion über n, daß $\bigcup^n A \in \boldsymbol{WF}$ gilt. Es folgt aus Lemma 10.5, daß $\bigcup^n A \subseteq \boldsymbol{WF}$ für all en ist und somit $trcl(A) \subseteq \boldsymbol{WF}$, also $trcl(A) \in \boldsymbol{WF}$ gilt.
Zu (b) ⇒ (c): siehe Lemma 10.6.
Zu (c) ⇒ (a): Nach Lemma 10.7 und Lemma 10.8 (b) folgt $trcl(A) \in \boldsymbol{WF}$. Es folgt $A \subseteq trcl(A) \subseteq \boldsymbol{WF}$, also $A \in \boldsymbol{WF}$ (Lemma 10.5).

SATZ 10.10 (ZF^-). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *das Fundierungsaxiom.*

(b) $V = \boldsymbol{WF}$ ($\forall x\, x \in \boldsymbol{WF}$).

BEWEIS. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei x als Menge beliebig. Aus (a) folgt, daß $\langle trcl(x), \in\rangle$ wohlfundiert ist. Aus Satz 10.9 folgt $x \in \boldsymbol{WF}$.

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Sei x beliebig. Aus (b) folgt $x \in \boldsymbol{WF}$. Aus Lemma 10.6 folgt, daß $\langle x, \in\rangle$ wohlfundiert ist. $\dashv$

DEFINITION (ZF^{-}-P). Seinen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ Klassen, so daß $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A}^2$. Wir sagen, daß $\boldsymbol{R}$ ***wohlfundiert*** ist auf $\boldsymbol{A}$, falls jede nichtleere Teilmenge von $\boldsymbol{A}$ ein $\boldsymbol{R}$-minimales Element besitzt, d.h. $\forall X\ ((X \subseteq \boldsymbol{A} \wedge X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists x \in X\ \forall y \in X\ \neg\langle y, x\rangle \in \boldsymbol{R})$. Statt $\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}$ schreiben wir $x\ \boldsymbol{R}\ y$.

$\boldsymbol{R}$ heißt ***mengenähnlich*** auf $\boldsymbol{A}$, falls für alle $x \in \boldsymbol{A}$ die Klasse $\{y \in \boldsymbol{A}\colon y\ \boldsymbol{R}\ x\}$ eine Menge ist.

BEISPIEL. Sei $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{R} = \in$. Dann ist $\boldsymbol{R}$ mengenähnlich auf $\boldsymbol{V}$.

DEFINITION. Sei $\boldsymbol{R}$ mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$ und sei $x \in \boldsymbol{A}$. Setze $\boldsymbol{pred(A, x, R)} = \{y \in \boldsymbol{A}\colon y\ \boldsymbol{R}\ x\}$. Allgemein definiere $\boldsymbol{pred^n(A, x, R)}$, alle $n \in \omega$: $pred^0(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$, $pred^{n+1}(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = \bigcup\{pred(\boldsymbol{A}, y, \boldsymbol{R})\colon y \in pred^n(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})\}$.

Zusätzlich definiere $\boldsymbol{cl(A, x, R)} = \bigcup\{pred^n(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})\colon n \in \omega\}$.

BEISPIEL. Sei $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{R} = \in$. Dann ist $cl(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = trcl(x)$.

Falls $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ klar aus dem Zusammenhang, schreibe $cl(x)$, $pred(x)$ statt $cl(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$, $pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$.

SATZ 10.11. *Sei $\boldsymbol{R}$ wohlfundiert und mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$. Dann besitzt jede nichtleere Klasse $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ein $\boldsymbol{R}$-minimales Element.*

BEWEIS. Sei $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C} \neq \emptyset$. Wähle $x \in \boldsymbol{C}$. Falls x schon $\boldsymbol{R}$-minimal ist in $\boldsymbol{C}$, sind wir fertig. Andernfalls ist $\boldsymbol{C} \cap cl(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$ nicht leer und außerdem eine Menge – eine Teilmenge von $\boldsymbol{A}$. Es gilt sogar $\boldsymbol{C} \cap pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) \neq \emptyset$ und $pred(x) \subseteq cl(x)$. Sei y ein $\boldsymbol{R}$-minimales Element von $\boldsymbol{C} \cap cl(x)$. Wir behaupten, daß y ein minimales Element von $\boldsymbol{C}$ ist. Andernfalls gäbe es $z \in \boldsymbol{C}$ mit $z\ \boldsymbol{R}\ y$. Aus $y \in cl(x) = \bigcup\{pred^n(x)\colon n \in \omega\}$ folgt $y \in pred^n(x)$ für ein $n \in \omega$. Folglich $z \in pred^{n+1}(x) \subseteq cl(x)$, also $z \in \boldsymbol{C} \cap cl(x)$, ein Widerspruch zur Minimalität von y *in* $\boldsymbol{C} \cap cl(x)$. $\dashv$

Wir können Beweise führen durch Induktion über wohlfundierte, mengenähnliche Relationen $\boldsymbol{R}$ auf $\boldsymbol{A}$.

LEMMA 10.12. *Sei $\boldsymbol{R}$ wohlfundiert und mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$ und $\varphi(x)$ eine Formel. Angenommen es gelten die folgenden beiden Eigenschaften für $\varphi(x)$:*

(a) $\varphi(x)$ gilt für alle $\boldsymbol{R}$-minimalen Elemente $x \in \boldsymbol{A}$.

(b) Falls $x \in \boldsymbol{A}$ und $\varphi(y)$ gilt für alle $y \in pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$, so gilt $\varphi(x)$, dann gilt $\varphi(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{A}$.

Dann gilt $\varphi(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{A}$.

BEWEIS. Betrachte $\boldsymbol{C} = \{x \in \boldsymbol{A}\colon \neg\varphi(x)\}$. Wäre $\boldsymbol{C} \neq \emptyset$, so hat $\boldsymbol{C}$ nach Satz 10.11 ein $\boldsymbol{R}$-minimales Element x. Also $\neg\varphi(x)$. x ist nicht $\boldsymbol{R}$-minimal in $\boldsymbol{A}$ wegen (a). Es gilt $\varphi(y)$ für alle $y \in pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$ wegen Minimalität von x. Aus (b) folgt $\varphi(x)$, ein Widerspruch. Also $\boldsymbol{C} = \emptyset$. $\dashv$

SATZ 10.13 (ZF^{-}-P). (*Verallgemeinerte transfinite Rekursion*) *Sei $\boldsymbol{R}$ wohlfundiert und mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$ und sei $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Es existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$, so daß $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}))$ gilt für alle $x \in \boldsymbol{A}$.*

BEWEIS. Analog zum Spezialfall mit $\boldsymbol{R} = \in$ als Übung. $\dashv$

DEFINITION (ZF^{-}-P). Sei $\boldsymbol{R}$ wohlfundiert und mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$. Definiere durch transfinite Rekursion $\boldsymbol{rk}\colon \boldsymbol{A} \to \mathbf{Ord}$, so daß $rk_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}(x) = sup(\{rk_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}(y) + 1\colon y \in pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})\})$.

Zur obigen Definition verwende $\boldsymbol{G}(h) = sup(\{\alpha + 1\colon \alpha \in ran(h)\}$, falls h eine Funktion ist mit $ran(h) \subseteq \mathbf{Ord}$ und $\boldsymbol{G}(h) = 0$, sonst. Zeige: Das zugehörige $\boldsymbol{F}$ ist $rk_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}$.

DEFINITION (ZF^{-}-P). Sei $\boldsymbol{R}$ wohlfundiert und mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$. Die ***Mostowski-Kollaps-Funktion F*** von $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ ist durch transfinite Rekursion definiert, so daß $dom(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y)\colon y \in pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})\}$.

Das zugehörige $\boldsymbol{G}$ ist folgendermaßen definiert: $\boldsymbol{G}(x) = ran(x)$, falls x Funktion; $\boldsymbol{G}(x) = 0$, sonst. Erhalte $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$ nach Satz 10.13. Sei $x \in \boldsymbol{A}$. Es gilt $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \restriction pred(x)) = ran(\boldsymbol{F} \restriction pred(x)) = \{\boldsymbol{F}(y)\colon y \in pred(x)\}$.

Unterschied zwischen einer wohlfundierten Relation $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}\rangle$ und einer Wohlordnung $\langle W, <\rangle$: Bei der Wohlfundiertheit verlangen wir nicht die Irreflexivität, die Transitivität und die Trichotomie. Wohlordnungen sind stets wohlfundierte Relationen.

Sei $\langle W, <\rangle$ eine Wohlordnung. Wir haben gesehen, daß eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl α existiert, so daß $\langle W, <\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$.

BEWEIS (schnell). Definiere mittels Satz 10.13 $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$, so daß $\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y)\colon y < x\}$ für alle $x \in \boldsymbol{W}$ ist. Zugehöriges $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ ist $\boldsymbol{G}(x) = ran(x)$, falls x Funktion, und $\boldsymbol{G}(x) = 0$, sonst. Erhalte $\boldsymbol{F}\colon W \to \boldsymbol{V}$ wie gewünscht. $\boldsymbol{F}$ ist eine Menge, schreibe $\boldsymbol{F} = F$.

Behauptung: $F[W] \in \mathbf{Ord}$ und $\langle F[W], \in\rangle \cong \langle W, <\rangle$.

Beweis. Setze $\alpha := F[W]$.

α ist transitiv: Sei $\beta \in \alpha$. Also existiert $x \in W$ mit $\beta = F(x) = \{F(y)\colon y \in W \wedge y < x\} \subseteq F[W]$.

Es gilt: $\forall x, y \in W\ x < y \Leftrightarrow F(x) \in F(y)$. „$\Rightarrow$“: $F(y) = \{F(z)\colon z < y\} \ni F(x)$. „$\Leftarrow$“: Sei $F(x) \in F(y) = \{F(z)\colon z < y\}$, also gilt $x < y$.

Folglich ist F ein Isomorphismus zwischen $\langle W, <\rangle$ und $\langle \alpha, \in\rangle$. Folglich ist $\langle \alpha, \in\rangle$ wohlgeordnet. ⊣

LEMMA 10.14. *Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}$ wie in der Definition des Mostowski-Kollaps, und sei $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{A}]$. Dann gelten:*

(a) $\forall x, y \in \boldsymbol{A}\ (x\ \boldsymbol{R}\ y \Rightarrow \boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{F}(y))$,

(b) $\boldsymbol{M}$ ist transitiv,

(c) $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{WF}$,

(d) $\forall x \in \boldsymbol{A}\ (rk(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) = rk(\boldsymbol{F}(x)))$.

Beweis. Zu (a): Seien $x, y \in \boldsymbol{A}$ mit $x\ \boldsymbol{R}\ y$. Nach Definition von $\boldsymbol{F}$ gilt $\boldsymbol{F}(y) = \{\boldsymbol{F}(z)\colon z \in \boldsymbol{A} \wedge z\ \boldsymbol{R}\ y\}$. Folglich gilt $\boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{F}(y)$.

Zu (b): Sei $a \in \boldsymbol{M}$. Also existiert $x \in \boldsymbol{A}$ mit $a = \boldsymbol{F}(x)$. Folglich ist $a = \{\boldsymbol{F}(y)\colon y \in \boldsymbol{A} \wedge y\ \boldsymbol{R}\ x\} \subseteq M$.

Zu (c): Beweise durch Induktion (verallgemeinert), daß $\boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{WF}$ für alle $x \in \boldsymbol{A}$: 1) Sei $x \in \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{R}$-minimal. Es gilt dann $\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y)\colon y \in \boldsymbol{A} \wedge y\ \boldsymbol{R}\ x\} = \emptyset$. 2) Sei $x \in \boldsymbol{A}$, so daß $\boldsymbol{F}(y) \in \boldsymbol{WF}$ für alle $y \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$ gilt. Es folgt $\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y)\colon y \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})\} \subseteq \boldsymbol{WF}$. Außerdem ist $\boldsymbol{F}(x)$ eine Menge (Ersetzungsaxiom). Es folgt $\boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{WF}$ nach Lemma 10.5.

Zu (d): Induktion: 1) Sei $x \in \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{R}$-minimal. Dann gilt: $rk(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) = sup\{rk(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) + 1\colon y \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})\} = 0$. Aus (c) folgt $\boldsymbol{F}(x) = \emptyset$. Also gilt $rk(\boldsymbol{F}(x)) = 0$. 2) Sei $x \in \boldsymbol{A}$, so daß $\boldsymbol{F}(y) \in \boldsymbol{WF}$ für alle $y \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$ gilt. Dann gilt: $rk(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) = sup\{rk(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) + 1\colon y \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})\} =^{(IV)} sup\{rk(\boldsymbol{F}(y)) + 1\colon y \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})\} = sup\{rk(b) + 1\colon b \in \boldsymbol{F}(x)\} = rk(\boldsymbol{F}(x))$. ⊣

DEFINITION. Sei $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A}^2$. R heißt ***extensional*** auf $\boldsymbol{A}$, falls $\forall x, y \in \boldsymbol{A}\ (\forall z \in \boldsymbol{A}\ (z\ \boldsymbol{R}\ x \Leftrightarrow z\ \boldsymbol{R}\ y) \Rightarrow x = y)$. Kurz: Falls $pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) = pred(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$ gilt, so folgt $x = y$.

BEISPIELE.

(a) Das Extensionalitätsaxiom besagt, daß $\in$ extensional auf $\boldsymbol{V}$ ist.

(b) Sei $A = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ und $R = \in$. Frage: Ist R extensional auf A? Antwort: $pred(\{\{\varnothing\}\}, A, R) = \{y: y \in A \wedge y \in \{\{\varnothing\}\}\}$. Da $\{\varnothing\} \notin A$ ist, gilt $pred(\{\{\varnothing\}\}, A, R) = \varnothing$. $pred(\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}, A, R) = \{y: y \in A \wedge y \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \varnothing$. Also ist $\in$ nicht extensional auf A. Berechnung des Mostowski-Kollaps: $F_2(\{\{\varnothing\}\}) = \{F_2(y): y \in A \wedge y \in \{\{\varnothing\}\}\} = \varnothing$, $F_2(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \varnothing$. Also ist F_2 nicht injektiv, weil R nicht extensional ist.

(c) Sei $A = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $R = \in$. A ist nicht extensional, da $pred(\{\{\varnothing\}\}) = pred(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$, aber $\{\{\varnothing\}\} \neq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Berechnung des Mostowski-Kollaps: $F_3(\{\varnothing\}) = \varnothing$, $F_3(\{\{\varnothing\}\}) = \{F_3(y): y \in A \wedge y \in \{\{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing\}\ (=\{F_3(\{\varnothing\})\})$, $F_3(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing\}$. Also ist F_3 nicht injektiv.

(d) Sei $A = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}\}$ und $R = \in$. Dann ist A extensional. Berechnung des Mostowski-Kollaps: Finde $F_4(\{\varnothing\}) = \varnothing$, $F_4(\{\{\varnothing\}\}) = \{\varnothing\}$, $F_4(\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

SATZ 10.15. (ZF^--P) (*Mostowski-Kollaps-Theorem*) *Sei* $\boldsymbol{R}$ *wohlfundiert, mengenähnlich und extensional auf* $\boldsymbol{A}$*. Dann existiert eine transitive Klasse* $\boldsymbol{M}$ *und eine bijektive Funktion* $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$*, so daß* $\boldsymbol{F}$ *ein Isomorphismus zwischen* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}$ *und* $\boldsymbol{M}, \in$ *ist. Außerdem sind* $\boldsymbol{M}$ *und* $\boldsymbol{F}$ *eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Sei $\boldsymbol{F}$ die Mostowski-Kollaps-Funktion ($\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y): y \in pred(x)\}$) und $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{A}]$ wie gehabt. Zu zeigen ist nur noch Injektivität und Eindeutigkeit.
Injektivität: Angenommen $\boldsymbol{F}$ ist nicht injektiv. Also ist $\boldsymbol{C} = \{x \in \boldsymbol{A}: \exists y \in \boldsymbol{A}\ (x \neq y \wedge \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y))\} \neq \varnothing$. Wähle x $\boldsymbol{R}$-minimal in dieser Klasse $\boldsymbol{C}$: Fixiere $y \in \boldsymbol{A}$, so daß $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y)$. Nach Extensionalität gilt $pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}) \neq pred(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$. Es gilt entweder:
Fall 1: $\exists z \in \boldsymbol{A}\ (z\ \boldsymbol{R}\ x \wedge \neg z\ \boldsymbol{R}\ y)$. Es folgt $\boldsymbol{F}(z) \in \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y) = \{\boldsymbol{F}(w): w \in pred(y)\}$. Es existiert also $w \in pred(y, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$ mit $\boldsymbol{F}(w) = \boldsymbol{F}(z)$. Da $z \notin pred(y)$, folgt $w \neq z$. Folglich ist $z \in \boldsymbol{C}$. Widerspruch zur Minimalität von x.
Fall 2: $\exists z \in \boldsymbol{A}\ (z\ \boldsymbol{R}\ y \wedge \neg z\ \boldsymbol{R}\ x)$. Es folgt $\boldsymbol{F}(z) \in \boldsymbol{F}(y) = \boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(w): w \in pred(x)\}$. Es existiert also $w \in pred(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$ mit $\boldsymbol{F}(w) = \boldsymbol{F}(z)$. Da $z \notin pred(x)$, folgt $w \neq z$. Folglich ist $w \in \boldsymbol{C}$. Widerspruch zur Minimalität von x.
Eindeutigkeit: Angenommen wir hätten neben $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ noch $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{M}'$ wie im Satz. Wir zeigen $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}'(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{A}$ durch Induktion: 1) Sei $x \in \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{R}$-minimal. $\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y): y \in pred(x)\} = \varnothing = ... = \boldsymbol{F}'(x)$. 2) Sei $x \in \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{F}(y) = \boldsymbol{F}'(y)$ bewiesen für alle $y \in pred(x)$. Es folgt $\boldsymbol{F}(x) = \{\boldsymbol{F}(y): y \in pred(x)\} =^{(IV)} \{\boldsymbol{F}'(y): y \in pred(x)\} = \boldsymbol{F}'(x)$. Also gilt $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Weil $\boldsymbol{M} = ran(\boldsymbol{F})$ und $\boldsymbol{M}' = ran(\boldsymbol{F}')$ sind, folgt $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'$. ⊣

KOROLLAR 10.16. (ZF-P) *Angenommen* $\in$ *sei extensional auf einer Klasse* $\boldsymbol{A}$*. Dann existieren eindeutig bestimmte* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{F}$*, so daß gilt:*

(a) $\boldsymbol{M}$ *ist transitiv,*

(b) $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ *ist bijektiv,*

(c) $\boldsymbol{F}$ *ist ein Isomorphismus zwischen* $\langle \boldsymbol{A}, \in \rangle$ *und* $\langle \boldsymbol{M}, \in \rangle$*, d.h.* $\forall x, y \in \boldsymbol{A}\ x \in y \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{F}(y)$*.*

ÜBUNGEN

10.1. Es gelte $x, y \in \boldsymbol{WF}$. Zeige, daß dann auch die folgenden Mengen zu $\boldsymbol{WF}$ gehören und berechne deren Rang in Abhängigkeit von $rk(x)$ und $rk(y)$:

(a) $\bigcup x$, $\wp(x)$, $\{x\}$.

(b) $x \times y$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{x, y\}$, $\langle x, y\rangle$, ${}^{y}x$.

10.2. Berechne den Rang von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

10.3. Seien x, A und T Mengen. Beweise:

(a) $A \subseteq trcl(A)$.

(b) $trcl(A)$ ist transitiv.

(c) Falls $A \subseteq T$ und T transitiv ist, so gilt $trcl(A) \subseteq T$.

(d) Falls A transitiv ist, so gilt $trcl(A) = A$.

(e) Falls $x \in A$, so gilt $trcl(x) \subseteq trcl(A)$.

(f) $trcl(A) = A \cup \bigcup\{trcl(x) : x \in A\}$.

10.4. Beweise das verallgemeinerte Rekursionstheorem (Satz 7.13).

10.5. Zeige in ZFC^{-}-P: Eine Relation R ist wohlfundiert auf einer Menge A genau dann, wenn keine Folge $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ in A existiert derart, daß $x_{n+1}\ R\ x_n$ für alle $n \in \omega$.

10.6. Definiere eine Relation $E \subseteq \omega^2$ wie folgt: $n\ E\ m$ genau dann, wenn an der Stelle n (von rechts gezählt) der binären Darstellung von m eine 1 steht. Zeige $\langle \omega, E\rangle \cong \langle V_\omega, \in\rangle$.

10.7. Definiere die relationale Klasse $\boldsymbol{R}$ auf $\boldsymbol{WF}$ durch $x\ \boldsymbol{R}\ y$ genau dann, wenn $x \in trcl(y)$. Zeige, daß $\boldsymbol{R}$ wohldefiniert und mengenähnlich ist auf $\boldsymbol{WF}$. Sei $\boldsymbol{F}$ die Mostowski-Kollaps-Funktion von $\boldsymbol{WF}$, $\boldsymbol{R}$. Zeige $\boldsymbol{F}(x) = rk(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{WF}$.

11. RELATIVIERUNG UND ABSOLUTHEIT

Wir wollen definieren, wann eine Klasse $\langle \mathbf{M}, \in\rangle$ Modell ist für eine Formel $\varphi \in L^{\{\in\}}$.

DEFINITION. Sei $\mathbf{M}$ eine Klasse. Zu jedem $\varphi \in L^{\{\in\}}$ definieren wir $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{M}} \in L^{\{\in\}}$ durch Rekursion über den Formelaufbau wie folgt:

(a) $(x = y)^{\mathbf{M}}$ ist $x = y$,

(b) $(x \in y)^{\mathbf{M}}$ ist $x \in y$,

(c) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathbf{M}}$ ist $\varphi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}}$,

(d) $(\neg\varphi)^{\mathbf{M}}$ ist $\neg\varphi^{\mathbf{M}}$,

(e) $(\exists x\, \varphi)^{\mathbf{M}}$ ist $\exists x\, (x \in \mathbf{M} \wedge \varphi^{\mathbf{M}})$.

Statt $\varphi^{\mathbf{M}}$ schreiben wir auch $\mathbf{M} \vDash \varphi$ und sagen dafür „*φ gilt in $\mathbf{M}$*“ oder „*$\mathbf{M}$ ist Modell für φ*“. Falls $\Phi \subseteq L^{\{\in\}}$ ist, setze $\Phi^{M} = \{\varphi^{M} : \varphi \in \Phi\}$, außerdem $\mathbf{M} \vDash \Phi$ soll heißen $\vdash \varphi^{\mathbf{M}}$ für alle $\varphi \in \Phi$.

BEMERKUNG. Die Korrektheit der Schlußregeln des Sequenzenkalküls impliziert: Falls $\varphi \vdash \psi$, $\vdash \varphi^{\mathbf{M}}$ und $\vdash \mathbf{M} \neq \varnothing$ gilt, so folgt $\vdash \psi^{\mathbf{M}}$. Etwas allgemeiner folgt: Falls $\varphi \vdash \psi$ und $T \vdash \mathbf{M} \neq \varnothing \wedge \varphi^{\mathbf{M}}$ gilt, so folgt $T \vdash \psi^{\mathbf{M}}$.
Warum müssen wir $\vdash \mathbf{M} \neq \varnothing$ fordern? Weil gilt $\vdash \exists x\, x = x$. Lasse $\psi = \exists x\, x = x$. Es gilt also $\varphi \vdash \psi$ für alle φ. Z.B. sei $\varphi = \forall x\, \neg x = x$. Es gilt mit $\mathbf{M} = \varnothing$ $\mathbf{M} \vdash \varphi$, aber nicht $\mathbf{M} \vDash \psi$.

LEMMA 11.1. *Seien $S, T \subseteq L_0^{\{\in\}}$ und $\mathbf{M}$ eine Klasse. Angenommen es gelte $T \vdash \mathbf{M} \neq \varnothing$ und $T \vdash \varphi^{\mathbf{M}}$ für alle $\varphi \in S$. Dann impliziert die Konsistenz von T die Konsistenz von S.*

BEWEIS. Angenommen S wäre nicht konsistent, also existiert $\psi \in L^{\{\in\}}$, so daß $S \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Es existieren $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in S$, so daß $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$ und folglich auch $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Nach Voraussetzung gilt: $T \vDash \mathbf{M} \neq \varnothing$ und $T \vdash (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})^{\mathbf{M}}$ bzw. $T \vdash \varphi_0^{\mathbf{M}} \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}^{\mathbf{M}}$. Nach Korrektheit gilt: $T \vdash (\psi \wedge \neg\psi)^{\mathbf{M}}$, also $T \vdash \psi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\psi^{\mathbf{M}}$. Folglich ist T nicht konsistent, also inkonsistent. ⊣

Im folgenden werden wir viel Anwendungen dieses wichtigen Lemmas sehen, z.B. T ist ZF^- oder ZF, S ist z.B. ZFC, $ZFC + GCH$, $ZF + \neg AC$ oder $ZFC + \neg CH$. Wir nehmen immer an, ZF gelte. D.h. $\mathbf{V} \vDash ZF$. Wir wollen $\mathbf{M}$ herstellen, so daß $ZF \vdash \varphi^{\mathbf{M}}$ gilt für gewisse φ. Die Frage, die sich stellt, ist: Gibt es einen Zusammenhang zwischen $\mathbf{V} \vDash \varphi$ und $\mathbf{M} \vDash \varphi$?

LEMMA 11.2. *Sei $\mathbf{M}$ eine transitive Klasse. Dann gilt $\mathbf{M} \vDash Ext$, wobei Ext das Extensionalitätsaxiom ist.*

BEWEIS. $Ext = \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$. $Ext^{\mathbf{M}} = \forall x\, \forall y\, ((x \in \mathbf{M} \wedge y \in \mathbf{M}) \Rightarrow (\forall z\, (z \in \mathbf{M} \Rightarrow (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y))$. $(\exists x\, \varphi)^{\mathbf{M}}$ ist $\exists x\, (x \in \mathbf{M} \wedge \varphi^{\mathbf{M}})$. $(\forall x\, \varphi)^{\mathbf{M}}$ ist $(\neg\exists x\, \neg\varphi)^{\mathbf{M}}$, also $\exists x\, (x \in \mathbf{M} \wedge \neg\varphi^{\mathbf{M}})$ und somit $\forall x\, (\neg x \in \mathbf{M} \vee \varphi^{\mathbf{M}})$, folglich $\forall x\, (x \in \mathbf{M} \Rightarrow \varphi^{\mathbf{M}})$. Wir beweisen $Ext^{\mathbf{M}}$ unter der Annahme, daß Ext gilt.
Seien x, y beliebig. Es gelte $x \in \mathbf{M}$ und $y \in \mathbf{M}$. Es gelte, daß für alle $z \in \mathbf{M}$ gilt: $z \in x \Leftrightarrow z \in y$. $\mathbf{M}$ ist transitiv. Folglich ist $x \subseteq \mathbf{M}$ und $y \subseteq \mathbf{M}$. Es folgt, daß für alle z gilt: $z \in x \Leftrightarrow z \in y$. Wir können Ext anwenden und auf $x = y$ schließen. ⊣

LEMMA 11.3. *Sei $\mathbf{M}$ eine beliebige Klasse. Angenommen zu jeder Formel $\varphi(x, z, p)$ gelte $\{x \in z : \varphi^{\mathbf{M}}(x, z, p)\} \in \mathbf{M}$ für alle $z, p \in \mathbf{M}$. Dann gilt $\mathbf{M} \vDash$ Komprehensionsaxiom.*

BEWEIS. Die Menge $\{x \in z: \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, z, p)\}$ existiert in $\boldsymbol{V}$ nach Komprehensionsaxiom. Wir müssen zeigen, daß für jedes $\varphi(x, z, p)$ folgendes gilt: $\forall z \in \boldsymbol{M}\ \forall p \in \boldsymbol{M}\ \exists y \in \boldsymbol{M}\ \forall x \in \boldsymbol{M}\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, p))$. Es genügt zu zeigen, daß folgendes gilt: $\forall z \in \boldsymbol{M}\ \forall p \in \boldsymbol{M}\ \exists y \in \boldsymbol{M}\ \forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, p))$. Seien dazu $z, p \in \boldsymbol{M}$ beliebig. Setze $y = \{x \in z: \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, z, p)\}$. Existiert in $\boldsymbol{V}$. Unsere Voraussetzung besagt: $y \in \boldsymbol{M}$. Dann ist y wie gewünscht. ⊣

KOROLLAR 11.4. *Falls* $\forall z \in \boldsymbol{M}\ \wp(z) \subseteq \boldsymbol{M}$ *gilt, so ist* $\boldsymbol{M}$ *Modell für das Komprehensionsaxiom.*

$\boldsymbol{WF}$ hat diese Eigenschaft, daß $\forall z \in \boldsymbol{WF}\ \wp(z) \subseteq \boldsymbol{WF}$.

SATZ 11.5. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) *(ZF^-) Falls $M = \{0\}$ ist, so ist M Modell für das Extensionalitätsaxiom, für das Komprehensionsaxiom und für $\forall x\ x = 0$.*

(b) *$Con(ZF^-) \Rightarrow Con$(Extensionalitätsaxiom + Komprehensionsaxiom + $\forall x\ x = 0$)*

BEWEIS. Zu (a): *Ext*: M ist transitiv. Der Rest folgt mit Lemma 11.2. Komprehensionsaxiom: $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\} \subseteq M$ mit Korollar 11.4. $\forall x\ x = 0$: $(\neg\exists x\ \exists y\ y \in x)^{M} = \neg\exists x \in M\ \exists y \in M\ y \in x$, sonst $x = 0 \wedge y = 0 \wedge 0 \in 0$, Widerspruch.

Zu (b): Paarmengenaxiom: $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u\ (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$. Paarmengenaxiom‘: $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x \in z \wedge y \in z)$. Paarmengenaxiom‘ + Komprehensionsaxiom ⇒ Paarmengenaxiom. Vereinigungsaxiom‘: $\forall x\ \exists y\ \bigcup x \subseteq y$. Vereinigungsaxiom‘ + Komprehensionsaxiom ⇒ Vereinigungsaxiom. ⊣

LEMMA 11.6. *Sei* $\boldsymbol{M}$ *eine transitive Klasse.* $\boldsymbol{M}$ *ist Modell für das Potenzmengenaxiom genau dann, wenn* $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \exists y \in \boldsymbol{M}\ \wp(x) \cap \boldsymbol{M} = y$ *gilt.*

BEWEIS. Sei P das Potenzmengenaxiom $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$.

Bemerke zuerst, daß für alle $u, v \in \boldsymbol{M}$ gilt: $u \subseteq v \Leftrightarrow (u \subseteq v)^{\boldsymbol{M}}$. Warum? $u \subseteq v$ kürzt ab: $\forall w\ (w \in u \Rightarrow w \in v)$. Also $(u \subseteq v)^{\boldsymbol{M}} = \forall w \in \boldsymbol{M}\ (w \in u \Rightarrow w \in v)$. „⇒“: Es gelte $\forall w\ (w \in u \Rightarrow w \in v)$. Trivialerweise gilt dann $(u \subseteq v)^{\boldsymbol{M}}$. „⇐“: Es gelte $\forall w \in \boldsymbol{M}\ (w \in u \Rightarrow w \in v)$. Da $u \in \boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{M}$ transitiv ist, gilt $u \subseteq \boldsymbol{M}$. Es folgt $u \subseteq v$.

„⇒“. Es gelte $P^{\boldsymbol{M}}$, also $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \exists y \in \boldsymbol{M}\ \forall z \in \boldsymbol{M}\ (z \in y \Leftrightarrow (z \subseteq x)^{\boldsymbol{M}})$. Sei $x \in \boldsymbol{M}$. Sei dazu y wie in $P^{\boldsymbol{M}}$. Wir zeigen: $y = \wp(x) \cap \boldsymbol{M}$. „⊆“: Sei $z \in y$. Folglich gilt $(z \subseteq x)^{\boldsymbol{M}}$. Nach der obigen Bemerkung und weil $z \in \boldsymbol{M}$ gilt wegen der Transitivität von $\boldsymbol{M}$, folgt $z \subseteq x$. Zusammen gilt $z \in \wp(x) \cap \boldsymbol{M}$. „⊇“: Sei $z \in \wp(x) \cap \boldsymbol{M}$. Also gilt $z \subseteq x$. Nach Bemerkung folgt $(z \subseteq x)^{\boldsymbol{M}}$. Da $z \in \boldsymbol{M}$ gilt, folgt $z \in y$.

„⇐“. Es gelte $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \exists y \in \boldsymbol{M}\ \wp(x) \cap \boldsymbol{M} = y$. Zu zeigen: $P^{\boldsymbol{M}}$. Sei $x \in \boldsymbol{M}$. Sei $y \in \boldsymbol{M}$ mit $y = \wp(x) \cap \boldsymbol{M}$. Sei $z \in \boldsymbol{M}$. Angenommen $z \in y$. Also gilt $z \in \boldsymbol{M}$ und $z \subseteq x$. Nach Bemerkung gilt $(z \subseteq x)^{\boldsymbol{M}}$. Umgekehrt sei $(z \subseteq x)^{\boldsymbol{M}}$. Nach Bemerkung folgt $z \subseteq x$. Daraus folgt $z \in y$. ⊣

Für alle $x \in \boldsymbol{WF}$ ist $\wp(x) \cap \boldsymbol{WF} = \wp(x) \in \boldsymbol{WF}$. Also gilt $\boldsymbol{WF} \vDash P$. Außerdem gilt: $V_\omega \vDash Ext$, Komprehensionsaxiom, P. Z.B. Beweis von $V_\omega \vDash P$: Sei $x \in V_\omega$. Es gibt also $n < \omega$ mit $x \in V_\omega$. Da V_n transitiv ist, folgt $x \subseteq V_n$. Also gilt $\wp(x) \subseteq \wp(V_n) = V_{n+1}$. Folglich gilt $\wp(x) \in \wp(V_{n+1}) = V_{n+2} \subseteq V_\omega$. Es folgt $\wp(x) \cap V_\omega = \wp(x) \in V_\omega$.

LEMMA 11.7. *Angenommen* $\boldsymbol{M}$ *sei Modell für das Komprehensionsaxiom.*

(a) *Falls* $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \forall y \in \boldsymbol{M}\ \exists z \in \boldsymbol{M}\ (x \in z \wedge y \in z)$ *gilt, so ist* $\boldsymbol{M}$ *Modell für das Paarmengenaxiom.*

(b) *Angenommen es gelte* $\forall x \in \boldsymbol{M}\ \exists z \in \boldsymbol{M}\ \bigcup x \subseteq z$, *dann ist* $\boldsymbol{M}$ *Modell für das Vereinigungsaxiom.*

BEWEIS. Übung. ⊣

Wieder ist leicht zu testen, daß $\boldsymbol{WF}$ und V_ω Modell sind für das Paarmengen- und das Vereinigungsaxiom.

Ersetzungsaxiom: Sei $\varphi(x, y, p)$, so daß $\forall x\ \exists! y\ \varphi(x, y, p)$ gilt. Dann gilt: $\forall p\ \forall X\ \exists Y\ \forall y\ (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X\ \varphi(x, y, p))$.

LEMMA 11.8. *Sei* $\boldsymbol{M}$ *Modell für das Komprehensionsaxiom. Angenommen für jede Formel* $\varphi(x, y, p)$ *und für jedes* $X \in \boldsymbol{M}$ *und* $p \in \boldsymbol{M}$ *mit der Eigenschaft, daß* $\forall x \in X\ \exists! y \in \boldsymbol{M}\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, p)$ *gilt, gilt* $\exists Y \in \boldsymbol{M}\ \{y\colon \exists x \in X\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, p)\} \subseteq Y$. *Dann gilt das Ersetzungsaxiom in* $\boldsymbol{M}$.

BEWEIS. Übung. ⊣

Es folgt: Das Ersetzungsaxiom gilt in V_ω und in $\boldsymbol{WF}$. Aber: Das Ersetzungsaxiom gilt nicht in $V_{\omega+\omega}$, obwohl *Ext*, Komprehensionsaxiom, *P*, Paarmengen-, Vereinigungs-, Fundierungsaxiom, *Inf* in $V_{\omega+\omega}$ gelten. Tipp: $\omega + \omega \notin V_{\omega+\omega}$, aber alle Relationen $R \subseteq \omega + \omega$, $R \in V_{\omega+\omega}$, so daß $\langle \omega, R \rangle$ eine Wohlordnung mit Ordnungstyp $\omega + \omega$ ist. Also ist in $V_{\omega+\omega}$ der Satz „Jede Wohlordnung ist isomorph zu einer Ordinalzahl." falsch.

Fundierungsaxiom: $\forall x\ (\exists y\ y \in X \Rightarrow \exists y\ (y \in X \wedge \neg\exists z\ (z \in x \wedge z \in y)))$. $F^{\boldsymbol{M}}$: $\forall x \in \boldsymbol{M}\ (\exists y \in \boldsymbol{M}\ y \in x \Rightarrow \exists y \in \boldsymbol{M}\ (y \in x \wedge \neg\exists z \in \boldsymbol{M}\ (z \in x \wedge z \in y)))$.

LEMMA 11.9. *Das Fundierungsaxiom gilt in jedem* $\boldsymbol{M}$ *mit* $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{WF}$.

BEWEIS. Sei $x \in \boldsymbol{M}$ mit $(x \neq \emptyset)^{\boldsymbol{M}}$. Wähle $y \in x \cap \boldsymbol{M}$ von minimalem Rang. Falls $z \in \boldsymbol{M}$, $z \in x$ und $z \in y$ gilt, so folgt $rk(z) < rk(y)$. Widerspruch zur Minimalität des Rangs von y. ⊣

Folglich gilt: $\boldsymbol{WF} \vDash ZF - Inf$ und $V_\omega \vDash ZF - Inf$. Außerdem gilt: $\boldsymbol{WF} \vDash Inf$, aber nicht $V_\omega \vDash Inf$.

DEFINITION. Seien $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ Klassen mit $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$, und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L^{\{\in\}}$.

(a) φ ist ***absolut für M, N*** gdw. gilt $\forall x_1 \in \boldsymbol{M} \ldots \forall x_n \in \boldsymbol{M}\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{N}}(x_1, \ldots, x_n)$.

(b) φ ist ***absolut für M***, falls φ absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$ im Sinne von (a) ist.

(c) φ ist ***aufwärts absolut für M, N***, falls gilt $\forall x_1 \in \boldsymbol{M} \ldots \forall x_n \in \boldsymbol{M}\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \varphi^{\boldsymbol{N}}(x_1, \ldots, x_n)$.

(d) φ heißt ***abwärts absolut für M, N***, falls gilt $\forall x_1 \in \boldsymbol{M} \ldots \forall x_n \in \boldsymbol{M}\ \varphi^{\boldsymbol{N}}(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \ldots, x_n)$.

BEMERKUNG. Falls φ absolut für $\boldsymbol{M}$ und absolut für $\boldsymbol{N}$ ist und $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$ gilt, so folgt, φ ist absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$: Seien $x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{M}$. Es $\varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{V}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{N}}(x_1, \ldots, x_n)$.

$\exists x \in y\ \varphi$ ist eine Abkürzung für $\exists x\ (x \in y \wedge \varphi)$. Wir nennen $\exists x \in y$ einen *gebundenen Quantor*.

LEMMA 11.10. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) *Falls* $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$ *und die Formeln* φ *und* ψ *absolut für* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *sind, so sind auch* $\neg\varphi$ *und* $\varphi \wedge \psi$ *absolut für* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$.

(b) *Falls* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *transitiv sind und* $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$ *und* φ *absolut für* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *ist, so ist auch die Formel* $\exists x \in y\ \varphi$ *absolut für* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *(für alle Variablen* x, y*).*

BEWEIS. Zu (a): trivial.
Zu (b): Sei φ $\varphi(x, y, z_1, ..., z_n)$. Seien $y, z_1, ..., z_n \in \boldsymbol{M}$. Es gilt: $(\exists x \in y\ \varphi)^{\boldsymbol{M}} \Leftrightarrow \exists x\ (x \in \boldsymbol{M} \wedge x \in y \wedge \varphi^{\boldsymbol{M}}) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in y \wedge \varphi^{\boldsymbol{M}}) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in y \wedge \varphi^{\boldsymbol{N}}) \Leftrightarrow \exists x\ (x \in \boldsymbol{N} \wedge x \in y \wedge \varphi^{\boldsymbol{N}}) \Leftrightarrow (\exists x \in y\ \varphi)^{\boldsymbol{N}}$. ⊣

DEFINITION. Wir definieren die ***Δ_0*- Formeln** rekursiv wie folgt:

(a) $x \in y$ und $x = y$ sind Δ_0.

(b) Falls φ und ψ Δ_0 sind, so auch $\neg\varphi$ und $\varphi \wedge \psi$.

(c) Falls φ Δ_0 ist, so auch $\exists x \in y\ \varphi$ für alle Variablen x, y.

KOROLLAR 11.11. *Sei φ eine Δ_0-Formel, und seien **M**, **N** transitive Klassen mit $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$. Dann ist φ absolut für **M**, **N**.*

LEMMA 11.12. *Seien **M**, **N** nichtleere Klassen mit $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$. Sei $S \subseteq L_0^{\{\in\}}$, und seien $\varphi(x_1, ..., x_n)$, $\psi(x_1, ..., x_n) \in L^{\{\in\}}$, so daß $s \vdash \forall x_1 ... \forall x_n\ \varphi(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n)$. Außerdem gelte $\boldsymbol{M} \models S$ und $\boldsymbol{N} \models S$. Dann ist φ absolut für **M**, **N** gdw. ψ absolut für **M**, **N** ist.*

BEWEIS. Aus der Korrektheit der Schlußregeln folgen: $\forall x_1 ... \forall x_n \in \boldsymbol{M}\ \varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \psi^{\boldsymbol{N}}(x_1, ..., x_n)$ und $\forall x_1 ... \forall x_n \in \boldsymbol{N}\ \varphi^{\boldsymbol{N}}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \psi^{\boldsymbol{N}}(x_1, ..., x_n)$. Angenommen ψ sei absolut für **M**, **N**. Seien $x_1, ..., x_n \in \boldsymbol{M}$. Es gilt $\varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \psi^{\boldsymbol{M}}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \psi^{\boldsymbol{N}}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{N}}(x_1, ..., x_n)$. ⊣

BEMERKUNG. Sei $\varphi \in L^{\{\in\}}$ und $S \subseteq L_0^{\{\in\}}$, so daß S die Äquivalenz von φ zu einer Δ_0-Formel beweist. Dann ist φ absolut für transitive Klassen **M**, **N** mit $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M} \models S$ und $\boldsymbol{N} \models S$.

Zu definierten Funktionen: $\boldsymbol{F}(x, y) = \{x, y\}$, also $\varphi(x, y, z) \Leftrightarrow z = \{x, y\}$. Es gilt $ZF^- \vdash \forall x\ \forall y\ \exists! z\ \varphi(x, y, z)$. φ definiert die Funktion **F** durch $\boldsymbol{F}(x, y) = z \Leftrightarrow \varphi(x, y, z)$.
Sei jetzt **M** eine Klasse. Falls $\boldsymbol{M} \models \forall x\ \forall y\ \exists! z\ \varphi(x, y, z)$ gilt, so ist es möglich $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}$ zu betrachten: Für $x, y \in \boldsymbol{M}$ gilt $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}(x, y) = z \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{M}}(x, y, z)$. Es stellt sich die Frage, ob **F** absolut ist, d.h. ob für alle $x, y \in \boldsymbol{M}$ $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}(x, y) = \boldsymbol{F}(x, y)$ gilt.

DEFINITION. Sei $S \subseteq L_0^{\{\in\}}$, $\varphi(x_1, ..., x_n, y) \in L^{\{\in\}}$. Es gelte $s \vdash \forall x_1 ... \forall x_n\ \exists! y\ \varphi(x_1, ..., x_n, y)$. Sei **F** die durch φ definierte Funktion, also $\boldsymbol{F}(x_1, ..., x_n) = y$ ist $\varphi(x_1, ..., x_n, y)$. **F** ist die ***in S durch φ definierte Funktion***. Falls $\boldsymbol{M} \models S$ gilt erhalten wir die Funktion $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}$. Für $x_1, ..., x_n \in \boldsymbol{M}$ gilt $\boldsymbol{F}(x_1, ..., x_n) = y \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{M}}(x_1, ..., x_n, y)$.
Sei jetzt $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M} \models S$ und $\boldsymbol{N} \models S$. Wir nennen ***F* absolut für *M*, *N***, falls die Formel $\boldsymbol{F}(x_1, ..., x_n) = y$ absolut für **M**, **N** ist. Äquivalent dazu: $\forall x_1, ..., x_n \in \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}(x_1, ..., x_n) = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{N}}(x_1, ..., x_n)$.

SATZ 11.13. *Die folgenden Relationen und Funktionen sind in ZF^--P-Inf definiert durch Formeln, die in ZF^--P-Inf äquivalent zu Δ_0-Formeln sind. Sie sind folglich absolut für beliebige transitive Modelle für ZF^--P-Inf.*

(a) $x \in y$

(b) $x = y$

(c) $x \subseteq y$

(d) $\{x, y\}$

(e) $\{x\}$

(f) $\langle x, y \rangle$

(g) 0

(h) $x \cup y$

(i) $x \cap y$

(j) $x \setminus y$

(k) $s(x) = x \cup \{x\}$

(l) *x ist transitiv*

(m) $\bigcup x$

(n) $\bigcap x$ *für* $x \neq 0$.

BEWEIS. Zu (c): $x \subseteq y$ definiert durch $\forall z\ (z \in x \Rightarrow z \in y)$, also $\neg\exists z\ (z \in x \wedge \neg z \in y)$ und somit $\neg\exists z \in x\ \neg z \in y$, also Δ_0.
Zu (d): $z = \{x, y\} \Rightarrow x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z\ (w = x \vee w = y)$ ist Δ_0.
Zu (g): $z = \varnothing \Leftrightarrow \forall x \in z\ (x \neq x)$ ist Δ_0.
Zu (m): $z = \bigcup x \Leftrightarrow \forall w \in z\ (w \subseteq z) \wedge \forall w \in z\ \exists v \in x\ w \in v$ ist Δ_0. ⊣

LEMMA 11.14. *Absolute Formeln und Funktionen sind abgeschlossen unter Komposition, d.h. folgendes: Falls $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ und die Formel $\varphi(x_1, ..., x_n)$, die Funktionen $\mathbf{F}(x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{G}_i(x_1, ..., x_m)$ für $i = 1, ..., n$ absolut für $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ sind, so sind auch die Formel $\varphi(\mathbf{G}_1(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G}_n(y_1, ..., y_m))$ und die Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{G}_1(y_1, ..., y_m), ..., \mathbf{G}_n(y_1, ..., y_m))$ absolut für $\mathbf{M}, \mathbf{N}$.*

BEWEIS. ObdA. sei $n = m = 1$. Zur Erklärung: $\varphi(\mathbf{G}(y))$ kürzt ab: entweder $\exists x\ (x = \mathbf{G}(y) \wedge \varphi(x))$ oder $\forall x\ (x = \mathbf{G}(y) \Rightarrow \varphi(x))$. Dies sind äquivalente Formeln.
Sei $y \in \mathbf{M}$. Es gilt dann: $\varphi(\mathbf{G}(y))^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{M}(\ x = \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(y) \Rightarrow \varphi^{\mathbf{M}}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{N}\ (x = \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(y) \Rightarrow \varphi^{\mathbf{M}}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{N}\ (x = \mathbf{G}^{\mathbf{N}}(y) \Rightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{G}(y))^{\mathbf{N}}$. $\mathbf{F}(\mathbf{G}(y))^{\mathbf{M}} = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(y)) = \mathbf{F}^{\mathbf{N}}(\mathbf{G}^{\mathbf{N}}(y)) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(y))^{\mathbf{N}}$. ⊣

BEISPIEL einer Anwendung von Lemma 11.14. $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Setze $\mathbf{F}(x, y) = \{x, y\}$, $\mathbf{G}(x, y) = \{x\}$. $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ werden definiert durch eine Δ_0-Formel, sie sind also absolut. Nach Lemma 11.14 ist also auch $\mathbf{H}(x, y) = \langle x, y\rangle = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x, y), \mathbf{F}(x, y))$ absolut.

Mehr Beispiele:

SATZ 11.15. *Die folgenden Relationen und Funktionen sind absolut für beliebige transitive Modelle von ZF^--P-Inf:*

(a) z ist ein geordnetes Paar,

(b) $A \times B$,

(c) R ist Relation,

(d) dom(R), ran(R),

(e) R ist eine Funktion,

(f) R(x) (falls R eine Funktion ist und $x \in dom(R)$),

(g) R ist injektiv (falls R eine Funktion ist).

BEWEIS. Zu (a): z ist ein geordnetes Paar $\Leftrightarrow \exists x \in \bigcup z\ \exists y \in \bigcup z\ z = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{G}_1(z), \mathbf{G}_2(z), \mathbf{G}_3(z))$, wobei $\mathbf{G}_1(z) = \mathbf{G}_2(z) = \bigcup z$, $\mathbf{G}_3(z) = z$ und $\varphi(a, b, c) = \exists x \in a\ \exists y \in b\ c = \langle x, y\rangle$. Nach Lemma 11.14 ist $\varphi(\mathbf{G}_1(z), \mathbf{G}_2(z), \mathbf{G}_3(z))$ absolut.
Zu (b): $C = A \times B \Leftrightarrow \forall y \in B\ \langle x, y\rangle \in C \wedge \forall z \in C\ \exists x \in A\ \exists y \in B\ z = \langle x, y\rangle$ absolut nach Lemma 11.14.
Zu (c): R ist eine Relation $\Leftrightarrow$ ($\forall z \in R$) z ist ein geordnetes Paar. ⊣

LEMMA 11.16. *Sei $\mathbf{M}$ transitiv mit $\mathbf{M} \vDash ZF^-$-P-Inf. Falls $\omega \in \mathbf{M}$ ist, so gilt $\mathbf{M} \vDash Inf$.*

BEWEIS. *Inf*: $\exists x\ (\varnothing \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$. $Inf^{\mathbf{M}}$: $\exists x \in \mathbf{M}\ (\varnothing^{\mathbf{M}} \in x \wedge \forall y \in \mathbf{M}\ (y \in x \Rightarrow s^{\mathbf{M}}(y) \in x)) = \exists x \in \mathbf{M}\ (\varnothing \in x \wedge \forall y \in x\ s(y) \in x)$, wobei $s(x) = x \cup \{x\}$. Es gilt $\omega \in \mathbf{M}$ und $\varnothing \in \omega \wedge \forall y \in \omega\ s(y) \in \omega$. Also gilt $Inf^{\mathbf{M}}$. ⊣

SATZ 11.17. (ZF^-) *V_ω ist ein Modell für ZFC-Inf+¬Inf. Folglich gilt $Con(ZF^-) \Rightarrow Con(ZFC\text{-}Inf+\neg Inf)$.*

BEWEIS. Schon gesehen: $V_\omega \vDash ZF\text{-}Inf$. (1) $V_\omega \vDash \neg Inf$. Angenommen es gäbe $x \in V_\omega$ mit $\varnothing \in x \wedge \forall y \in x\ s(y) \in x$. Also gilt $\varnothing \in x$, $1 \in x$ usw., $n \in x$ für alle $n \in \omega$. Also ist $\omega \subseteq x$. Dann gilt $rk(x) = sup\{rk(y) + 1\colon y \in x\} \geqslant sup\{rk(n) + 1\colon n \in \omega\} = sup\{n + 1\colon n \in \omega\} = \omega$. Aber es gilt $V_\omega = \{y \in WF\colon rk(y) < \omega\}$. Also gilt (*) $V_\omega \vDash$ jede Menge ist endlich. (2) $V_\omega \vDash AC$. Da wegen (*) gilt: $V_\omega \vDash$ jedes x ist gleichmächtig zu einem $n \in \omega$. Folglich gilt: $V_\omega \vDash$ jedes x läßt sich wohlordnen. Verwende $(W) \Leftrightarrow (AC)$. $\dashv$

LEMMA 11.18. *Sei $\boldsymbol{M}$ ein transitives Modell für ZF^--P-Inf. Sei $A, R \in \boldsymbol{M}$.*

(a) Falls $\langle A, R\rangle$ eine Wohlordnung ist, so gilt: $\boldsymbol{M} \vDash \langle A, R\rangle$ ist eine Wohlordnung.

(b) Falls $\langle A, R\rangle$ wohlfundiert ist, so gilt: $\boldsymbol{M} \vDash \langle A, R\rangle$ ist wohlfundiert.

BEWEIS. Zu (a): (1) zu zeigen: $\boldsymbol{M} \vDash \langle A, R\rangle$ ist totalgeordnet. Es gilt $(T)\ \forall x, y \in A\ ((x, y) \in R \vee x = y \vee (y, x) \in R)$. $(T)^{\boldsymbol{M}} = (T)$, ebenso Transitivität und Irreflexivität.
(2): Sei $\varphi(X, A, R)$ die Formel $(X \subseteq A \wedge X \neq \varnothing) \Rightarrow \exists y \in X\ \forall z \in X\ (z, y) \notin R$. $\varphi(X, A, R)$ ist Δ_0. Also gilt $\varphi \Leftrightarrow \varphi^{\boldsymbol{M}}$ für alle $X, A, R \in \boldsymbol{M}$. Nach Voraussetzung gilt $\forall X \subseteq A\ \varphi(X, A, R)$. Also auch $\forall x \in \boldsymbol{M}\ (X \subseteq A \Rightarrow \varphi(X, A, R))$. Folglich gilt $\forall X \in \boldsymbol{M}\ ((X \subseteq A)^{\boldsymbol{M}} \Rightarrow \varphi^{\boldsymbol{M}}(X, A, R))$.
Zu (b): Analog. $\dashv$

BEMERKUNG. Sei $\boldsymbol{M}$ transitiv. Falls φ Δ_0 ist, so ist $\forall x\ \varphi$ abwärts absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$, und $\exists x\ \varphi$ ist aufwärts absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$.

LEMMA 11.19. *Sei $A \in \boldsymbol{WF}$. Dann kann A wohlgeordnet werden gdw. $\boldsymbol{WF} \vDash A$ wohlgeordnet werden kann.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$". Sei $\langle A, R\rangle$ eine Wohlordnung. Es gilt $R \subseteq A^2$. Dann gilt: $A \in \boldsymbol{WF} \Rightarrow A^2 \in \boldsymbol{WF} \Rightarrow \wp(A^2) \subseteq \boldsymbol{WF}$. Also ist $R \in \boldsymbol{WF}$. Nach Lemma 11.18 gilt $\boldsymbol{WF} \vDash \langle A, R\rangle$ ist eine Wohlordnung.
„$\Leftarrow$". Sei $R \in \boldsymbol{WF}$, so daß $\boldsymbol{WF} \vDash \langle A, R\rangle$ ist eine Wohlordnung gilt. Leicht zeigt man $V \vDash \langle A, R\rangle$ ist Totalordnung, da diese Axiome Δ_0 sind. Es gilt unter Verwendung der im Beweis von Lemma 11.18 definierten Formel φ: $\boldsymbol{WF} \vDash \forall X \subseteq A\ \varphi(X, A, R)$. Es gilt $\wp(A) \subseteq \boldsymbol{WF}$, also gilt $\forall X \subseteq A\ \varphi(X, A, R)^{\boldsymbol{WF}}$, folglich gilt $\forall X \subseteq A\ \varphi(X, A, R)$. $\dashv$

KOROLLAR 11.20. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) $ZF^- \vdash AC \Rightarrow (AC)^{\boldsymbol{WF}}$

(b) $Con(ZF^-) \Rightarrow Con(ZF)$ und $Con(ZFC^-) \Rightarrow Con(ZFC)$

BEWEIS. Zu (a): Lemma 11.19.
Zu (b): Geht über Konstruktion von $\boldsymbol{WF}$, erster Teil schon gezeigt. $\dashv$

Von jetzt an arbeiten wir in ZF oder ZFC, d.h. wir nehmen das Fundierungsaxiom hinzu. Damit erhalten wir stärkere Absolutheitsresultate.

SATZ 11.21. *Die folgenden Relationen und Funktionen wurden in ZF-P durch Formeln definiert, die beweisbar in ZF-P äquivalent zu Δ_0-Formeln sind. Sie sind folglich absolut für transitive Modelle von ZF-P.*

(a) x ist Ordinalzahl,

(b) x ist eine Limesordinalzahl,

(c) x ist eine Nachfolgerordinalzahl,

(d) x ist eine endliche Ordinalzahl,

(e) ω,

(f) $0, 1, 2, 3, \ldots$.

BEWEIS. Zu (a): In *ZF-P* gilt: x ordinal $\Leftrightarrow x$ transitiv $\wedge \langle x, \in\rangle$ ist totalgeordnet.
Zu (b): x ist Limesordinalzahl $\Leftrightarrow x$ ordinal $\wedge \forall y \in x\ \exists z \in x\ y \in z \wedge x \neq 0$.
Zu (c): x ist ordinal $\wedge\ x \neq 0 \wedge x$ ist nicht Limesordinalzahl.
Zu (d): x ist ordinal $\wedge\ \forall y \in x$ (y ist $0 \vee y$ ist Nachfolgerordinalzahl) $\wedge\ x$ ist Nachfolgerordinalzahl.
Zu (e): $x = \omega \Leftrightarrow x$ ist Limesordinalzahl $\wedge\ \forall y \in x$ (y ist nicht Limesordinalzahl).
Zu (f): Per Induktion über n: Zeige $x = n$ hat eine Δ_0-Definition, z.B. $x = 1001 \Leftrightarrow \exists y \in x\ (y = 1000 \wedge x = s(y))$. ⊣

LEMMA 11.22. *Sei* $\boldsymbol{M}$ *transitiv mit* $\boldsymbol{M} \models$ *ZF-P. Sei* x *eine endliche Teilmenge von* $\boldsymbol{M}$*. Dann gilt* $x \in \boldsymbol{M}$.

BEWEIS. Durch Induktion über die Kardinalität von x. (1) Sei zuerst $|x| = 0$, also gilt $x = \emptyset$. Also ist $x = \emptyset = \emptyset^{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}$. (2) Sei die Behauptung bewiesen für n. x habe $n + 1$ Elemente. Wähle $y \in x$. Wegen Transitivität gilt $y \in \boldsymbol{M}$. Wegen IV gilt $x \setminus \{y\} \in \boldsymbol{M}$. Wegen Absolutheit von $\cup, \{y\}$ und $\setminus$ gilt $x = \{y\} \cup (x \setminus \{y\}) = \{y\}^{\boldsymbol{M}} \cup^{\boldsymbol{M}} (x \setminus \{y\})^{\boldsymbol{M}} = (\{y\} \cup (x \setminus \{y\}))^{\boldsymbol{M}} \in \boldsymbol{M}$. ⊣

SATZ 11.23. *Folgende Relationen und Funktionen sind absolut für transitive* $M \models$ *ZF-P:*

(a) x *ist endlich,*

(b) A^n *für* $n < \omega$,

(c) $A^{<\omega} := \bigcup\{A^n : n < \omega\}$.

SATZ 11.24. *Die folgenden Aussagen sind absolut für beliebige transitive Modelle von ZF-P:*

(a) R *ist eine Wohlordnung auf* A,

(b) R *ist wohlfundiert auf* A.

BEWEIS. Zu (b): Falls $\boldsymbol{M}$ transitiv und $\boldsymbol{M} \models$ *ZF-P* ist, so gilt für alle $A, R \in \boldsymbol{M}$: $\langle A, R\rangle$ ist wohlfundiert $\Leftrightarrow \boldsymbol{M} \models \langle A, R\rangle$ ist wohlfundiert.
„$\Rightarrow$“ schon bewiesen.
„$\Leftarrow$“. $\boldsymbol{M} \models$ „Es existiert $F: A \to \boldsymbol{Ord}$, so daß $\forall x, y \in A\ x\ R\ y \Leftrightarrow F(x) \in F(y)$.“ (mit F Mostowski-Kollaps von $\langle A, R\rangle$ im Sinne von $\boldsymbol{M}$). Wegen Transitivität von $\boldsymbol{M}$ ist $A \subseteq \boldsymbol{M}$, und wegen Absolutheit des Ordinalzahl-Seins gilt $\boldsymbol{Ord}^{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{Ord} \cap \boldsymbol{M}$. Es folgt, daß $F: A \to \boldsymbol{Ord}$ eine Funktion ist in $\boldsymbol{V}$. Es gilt natürlich in $\boldsymbol{V}$, daß $\forall x, y \in A\ x\ R\ y \Leftrightarrow F(x) \in F(y)$ (in $\boldsymbol{V}$). Wir zeigen jetzt, daß $\langle A, R\rangle$ wohlfundiert in $\boldsymbol{V}$ ist: Sei $X \subseteq A$ mit $X \neq \emptyset$. Sei $\alpha_0 = min\{F(x): x \in X\}$. wähle $x_0 \in X$ mit $F(x_0) = \alpha_0$. Dann ist x_0 R-minimales Element von X: Sonst gäbe es $y \in X$ mit $y\ R\ x_0$, also $F(y) \in F(x_0)$, also $F(y) < \alpha_0$. Widerspruch zur Minimalität von α_0. ⊣

Zur Absolutheit von Funktionen, welche durch transfinite Rekursion definiert werden: Wir hatten folgenden Satz: Falls $\boldsymbol{R}$ wohlfundiert und mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$ ist und $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ geht, so existiert $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$, so daß $\forall x \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}))$ gilt.

BEMERKUNG zur Relativierung von Klassen: Sei $\boldsymbol{A}$ eine Klasse definiert durch die Formel $\varphi(x)$. Sei $\boldsymbol{M}$ eine Klasse. Dann ist per Definition $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}} = \{x \in \boldsymbol{M}: \varphi^{\boldsymbol{M}}(x)\}$. Wir sagen, $\boldsymbol{A}$ sei *absolut für* $\boldsymbol{M}$, falls $\varphi(x)$ absolut ist für $\boldsymbol{M}$, d.h. $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{M}$.

BEISPIELE. $\boldsymbol{V}$ ist absolut für jedes $\boldsymbol{M}$. $\boldsymbol{Ord}$ ist absolut für transitive Modelle von $ZF\text{-}P$.

Wir schreiben ja: $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, falls $ZFC \vdash \forall x\ \exists! y\ \boldsymbol{G}(x, y)$ gilt. Wir relativieren $\boldsymbol{G}$ auf $\boldsymbol{M}$ nur dann, wenn gilt: $\boldsymbol{M} \vDash \forall x\ \exists! y\ \boldsymbol{G}(x, y)$. Aber wenn das gilt, haben wir $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{M}}\colon \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$. Dann ist $\boldsymbol{G}$ absolut für $\boldsymbol{M}$, d.h. $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{M}$ gdw. $\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{G} \upharpoonright \boldsymbol{M}$ ist.

SATZ 11.25. *Sei $\boldsymbol{R}$ eine wohlfundierte, mengenähnliche Relation auf $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Sei $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$ mittels transfiniter Rekursion definiert, so daß $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright pred(x))$ für alle $x \in \boldsymbol{A}$ ist. Sei $\boldsymbol{M}$ eine transitive Klasse mit $\boldsymbol{M} \vDash ZF\text{-}P$. Außerdem gelte*

(a) $\boldsymbol{G}$ ist absolut für $\boldsymbol{M}$,

(b) $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{A}$ sind absolut für $\boldsymbol{M}$, ($\boldsymbol{R}$ ist mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$)$^{\boldsymbol{M}}$ und $\forall x \in \boldsymbol{M}\ pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) \subseteq \boldsymbol{M}$.

Dann ist $\boldsymbol{F}$ absolut für $\boldsymbol{M}$.

BEWEIS. Es gilt $\boldsymbol{M} \vDash$ „$\boldsymbol{R}$ ist wohlfundiert auf $\boldsymbol{A}$“. Und nach Voraussetzung haben wir $\boldsymbol{M} \vDash$ „$\boldsymbol{R}$ ist mengenähnlich auf $\boldsymbol{A}$“. Nach dem Satz über transfinite Rekursion angewendet in $\boldsymbol{M}$ erhalten wir $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}\colon \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{M}$, so daß gilt: $\forall x \in \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}}\ \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}(x) = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}} \upharpoonright pred^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}}, x, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{M}}))$. Die Behauptung ist: $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{F} \upharpoonright \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}}$. Falls dies falsch ist, sei x_0 ein $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{M}}$-minimales Element von $\{x \in \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}}\colon \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}(x) \neq \boldsymbol{F}(x)\}$. Es gilt $x_0 \in \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{M}$. Weiter gilt (*): $pred^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}}, x_0, \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{M}}) = \{y \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{M}\colon y\ \boldsymbol{R}\ x_0\} = \{y \in \boldsymbol{A}\colon y\ \boldsymbol{R}\ x_0\} = pred(\boldsymbol{A}, x_0, \boldsymbol{R})$. Wegen Absolutheit von $\boldsymbol{G}$ und Minimalität von x_0 folgt dann $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}}(x_0) = \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{M}} \upharpoonright pred^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{M}}, x_0, \boldsymbol{R})) =^{(*)} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F} \upharpoonright pred(\boldsymbol{A}, x_0, \boldsymbol{R})) = \boldsymbol{F}(x_0)$. Widerspruch zur Wahl von x_0 (minimal!). $\dashv$

ANWENDUNG. $\boldsymbol{R}$ sei $\in$, $\boldsymbol{A}$ sei $\boldsymbol{V}$ oder $\boldsymbol{Ord}$. (b) gilt dann für alle transitiven Modelle von $ZF\text{-}P$.

SATZ 11.26. *Die folgenden über transfinite Rekursion definierten Funktionen sind absolut für alle transitiven Modelle von $ZF\text{-}P$:*

(a) $rk(x)$,

(b) $trcl(x)$.

BEWEIS. Zu (a): Rekursion: $rk(x) = sup\{rk(y) + 1 : y \in x\}$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{R} = \in$, $\boldsymbol{G}(z) = sup\{z(y) + 1\colon y \in dom(z)\}$, falls z Funktion und $ran(z) \subseteq \boldsymbol{Ord}$, und $\boldsymbol{G}(z) = 0$, sonst.
Zu (b): Rekursion: $trcl(x) = x \cup \bigcup\{trcl(y)\colon y \in x\}$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{R} = \in$, $\boldsymbol{G}(z) = dom(z) \cup \bigcup ran(z)$, falls z Funktion, und $\boldsymbol{G}(z) = 0$, sonst. $\dashv$

LEMMA 11.27. *Sei $\boldsymbol{M}$ ein transitives Modell für ZF. Es gelten*

(a) $Pot(x)^{\boldsymbol{M}} = Pot(x) \cap \boldsymbol{M}$ für alle $x \in \boldsymbol{M}$.

(b) $V_\alpha^{\boldsymbol{M}} = V_\alpha \cap \boldsymbol{M}$ für alle $\alpha \in \boldsymbol{Ord} \cap \boldsymbol{M}$.

ÜBUNGEN

11.1. Zeige, daß $V_{\omega+\omega}$ nicht Modell für das Ersetzungsaxiom ist.

12. REFLEXIONSARGUMENTE

DEFINITION. Eine Liste von Formeln $\varphi_1, ..., \varphi_n \in L^{\{\in\}}$ heißt ***abgeschlossen unter Subformeln***, falls folgendes gilt: Falls $1 \leqslant i \leqslant n$ und ψ eine Subformel von φ_i ist, so gilt $\psi = \varphi_j$ für ein $1 \leqslant j \leqslant n$.

LEMMA 12.1. (*Kriterium von Tarski-Vaught*) *Seien $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ Klassen mit $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$. Sei $\varphi_1, ..., \varphi_n$ eine Liste von Formeln, die unter Subformeln abgeschlossen ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Alle Formeln $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sind absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$.

(b) Falls $\varphi_i = \exists x\, \psi(x, y_1, ..., y_l)$ (also $frei(\psi) \subseteq \{x, y_1, ..., y_l\}$ und $\psi = \varphi_j$ für ein $1 \leqslant j \leqslant n$) so gilt: $\forall y_1, ..., y_l \in \boldsymbol{M}\, (\exists x \in \boldsymbol{N}\, \psi^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, ..., y_l) \Rightarrow \exists x \in \boldsymbol{M}\, \psi^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, ..., y_l))$.

BEWEIS. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei φ_i wie in (b). Sei $\psi = \varphi_j$. Seien $y_1, ..., y_l \in \boldsymbol{M}$, so daß $\exists x \in \boldsymbol{N}\, \psi^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, ..., y_l)$ gilt. Es gilt also $\varphi_i^{\boldsymbol{N}}(y_1, ..., y_l)$. Wegen (a) (Absolutheit von φ_i) gilt $\varphi_i^{\boldsymbol{M}}(y_1, ..., y_l)$, d.h. $\exists x \in \boldsymbol{M}\, \varphi_i^{\boldsymbol{M}}(x, y_1, ..., y_l)$. Wegen Absolutheit von φ_i folgt daraus $\exists x \in \boldsymbol{M}\, \varphi_i^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, ..., y_l)$.

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Durch Induktion über die Komplexität von φ_i zeigen wir, daß alle φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, absolut sind für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$:

Induktionsanfang: Falls φ_i eine Primformel ist, gilt $\varphi_i^{\boldsymbol{M}} = \varphi_i = \varphi_i^{\boldsymbol{N}}$, also ist klarerweise φ_i absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$.

Induktionsschluß: Falls $\varphi_i = (\psi_1 \wedge \psi_2)$, also $\psi_1 = \varphi_k$ und $\psi_2 = \varphi_j$ für gewisse $1 \leqslant k, j \leqslant n$, so sind nach IV ψ_1 und ψ_2 absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$. Es folgt leicht, daß auch φ_i absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ ist.

Ebenso leicht, wenn $\varphi_i = \neg\psi$ ist.

Sei jetzt $\varphi_i = \exists x\, \psi(x, y_1, ..., y_l)$. Also ist $\psi = \varphi_j$ für eine $1 \leqslant j \leqslant n$. Nach IV ist φ_j absolut für $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$. Seien $y_1, ..., y_l \in \boldsymbol{M}$ beliebig. Es gilt $\varphi_i^{\boldsymbol{M}}(y_1,..., y_l) \Leftrightarrow \exists x \in \boldsymbol{M}\, \varphi_j^{\boldsymbol{M}}(x, y_1,..., y_l) \overset{(IV)}{\Leftrightarrow} \exists x \in \boldsymbol{M}\, \varphi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1,..., y_l) \Leftrightarrow \exists x \in \boldsymbol{N}\, \varphi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1,..., y_l) \Leftrightarrow \varphi_i^{\boldsymbol{N}}(y_1, ..., y_l)$. ⊣

SATZ 12.2. *Sei $\boldsymbol{Z}$ eine Klasse, und sei $\langle Z_\alpha : \alpha \in \boldsymbol{Ord}\rangle$ eine funktionale Klasse, so daß gilt:*

(a) $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{Ord}\, (\alpha < \beta \Rightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta)$,

(b) Falls γ Limeszahl ist, so ist $Z_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha$,

(c) $\boldsymbol{Z} = \bigcup_{\alpha\in Ord} Z_\alpha$, d.h. $\forall x\, (x \in Z \Leftrightarrow \exists \alpha \in \boldsymbol{Ord}\; x \in Z_\alpha)$.

Seien außerdem $\varphi_1, ..., \varphi_n \in L^{\{\in\}}$. Dann existiert zu jedem $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$ ein $\beta \in \boldsymbol{Ord}$, so daß $\beta > \alpha$ und alle φ_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ sind absolut für Z_β, $\boldsymbol{Z}$.

BEWEIS. Wir wollen Lemma 12.1 anwenden mit $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{M} = Z_\beta$ für ein noch zu bestimmendes β. Falls nötig, verlängere die Liste $\varphi_1, ..., \varphi_n$ zuerst zu einer Liste $\varphi_1, ..., \varphi_m$ mit $n \leqslant m$, die unter Subformeln abgeschlossen ist. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ definiere die Funktion $\boldsymbol{F}_i$: $\boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{Ord}$ wie folgt: Falls $\varphi_i = \exists x\, \varphi_j(x, y_1, ..., y_l)$ ist, definiere zuerst die Funktion $\boldsymbol{G}_i$: $Z^l \to \boldsymbol{Ord}$ wie folgt:

Für $\langle y_1, ..., y_l\rangle \in \boldsymbol{Z}^l$ gelte:

Falls $\neg\exists x \in \boldsymbol{Z}\, \varphi_j^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$ gelte, setze $\boldsymbol{G}_i(\langle y_1, ..., y_l\rangle) = 0$.

Falls $\exists x \in \boldsymbol{Z}\, \varphi_j^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$ gilt, sei $\boldsymbol{G}(y_1, ..., y_l)$ das kleinste $\beta \in \boldsymbol{Ord}$, so daß gilt: $\exists x \in Z_\beta\, \varphi_j^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$: $\exists x \in Z_\beta\, \varphi_j^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$.

Für $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$ setze jetzt $\boldsymbol{F}_i(\alpha) = sup\{\boldsymbol{G}_i(\langle y_1, ..., y_l\rangle) : \langle y_1, ..., y_l\rangle \in Z_\alpha{}^l\}$. Falls φ_i nicht existentiell ist, so sei $\boldsymbol{F}_i$ konstant 0.

Bemerke folgendes: Angenommen β ist eine Limesordinalzahl, so daß (*) $\forall 1 \leqslant i \leqslant m\; \forall \xi \leqslant \beta\; \boldsymbol{F}_i(\xi) < \beta$, Dann sind alle φ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, absolut für Z_β, $\boldsymbol{Z}$.

Beweis der Bemerkung: Sei $1 \leqslant i \leqslant n$ beliebig, und sei $\varphi_i = \varphi_i(y_1, ..., y_l)$. Seien $y_1, ..., y_l \in Z_\beta$. Außerdem gelte $\varphi_i = \exists x\ \psi(y_1, ..., y_l)$. Wegen Lemma 12.1 brauchen wir nur zu prüfen, daß folgendes gilt: $\exists x \in \boldsymbol{Z}\ \psi^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l) \Rightarrow \exists x \in Z_\beta\ \psi^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Es gelte also $\exists x \in \boldsymbol{Z}\ \psi^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Da β Limeszahl ist, existiert $\xi < \beta$, so daß $y_i \in Z_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Es folgt $\exists x \in Z_{G(y1,...,yl)}\ \psi^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Da aber $\boldsymbol{G}(y_1, ..., y_l) \leqslant \boldsymbol{F}_i(\xi) < \beta$ gilt, folgt daraus $\exists x \in Z_\beta\ \psi^{\boldsymbol{Z}}(x, y_1, ..., y_l)$. Das beweist die Bemerkung.

Sei jetzt $\alpha \in \boldsymbol{Ord}$. Wir konstruieren $\beta > \alpha$ wie in (*) wie folgt: Setze $\beta_0 = \alpha$. Falls β_k schon definiert ist, setzte $\beta_{k+1} = max\{\beta_k + 1, \boldsymbol{F}_1(\beta_k), \boldsymbol{F}_2(\beta_k), ..., \boldsymbol{F}_m(\beta_k)\}$. Dann ist $\langle\beta_k\text{: } k < \omega\rangle$ eine wachsende Folge von Ordinalzahlen, folglich ist $\beta = sup\{\beta_k\text{: } k < \omega\}$ eine Limeszahl $> \alpha$. Außerdem hat β Eigenschaft (*): Sei $1 \leqslant i \leqslant m$ und $\xi < \beta$. Wähle $k < \omega$, so daß $\xi < \beta_k$ gilt. Es folgt $\boldsymbol{F}_i(\xi) \leqslant \boldsymbol{F}_i(\beta_k) \leqslant \beta_{k+1} < \beta$. Also ist Satz 12.2 bewiesen. ⊣

A. LITERATUR

[Eb96] EBBINGHAUS, H.-D.; FLUM, J.; THOMAS, W.: *Einführung in die mathematische Logik*, ***Spektrum Akademischer Verlag***, 1996

[Ke95] KECHRIS, A. S.: *Classical Descriptive Set Theory,* ***Springer-Verlag Berlin,*** 1995

[Ku80] KUNEN, K.: *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs,* ***Elsevier Science B. V.,*** 1980

MATHEMATISCHES SEMINAR
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
24098 KIEL, GERMANY
E-Mail: spinas@math.uni-kiel.de

Stand: Februar 2002

B. INDEX