Contents

1 Einleitung

Von Georg Cantor wurde 1873 entdeckt, daß die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist. Wenige Wochen später konnte er zeigen, daß im Gegensatz hierzu die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist. Diese beiden inzwischen klassischen Resultate, die Bestandteil jeder Grundvorlesung zur Analysis sein sollten, bildeten den Ausgangspunkt zur Entwicklung der Mengenlehre als eigenständiger Theorie. Ausgehend von der Entdeckung, daß auch unendliche Mengen Unterschiede in ihrer Größe aufweisen, wurde von Cantor eine Theorie der unendlichen Mächtigkeiten geschaffen. Neben diesen Untersuchungen entwickelte Cantor die transfinite Ordinalzahltheorie. Hierzu wurde er durch seine Untersuchungen zu trigonometrischen Reihen inspiriert.
Von Cantor wurden die wesentlichen Begriffe bereitgestellt, die zur systematischen Untersuchung von unendlichen Mengen notwendig sind. So wurden von ihm die Begriffe "gleichmächtig", "Kardinalzahl", ördnungsisomorphünd Ördinalzahl"geschaffen.
Der nächste Schritt in der Entwicklung der Mengenlehre war die Formulierung eines geeigneten Axiomensystems. Damit wurde es möglich, die intuitiven Vorstellungen zu präzisieren.
Es zeigte sich, daß sich innerhalb des durch die Mengenlehre vorgegebenen Rahmens die gebräuchlichen mathematischen Objekte wie natürliche, ganze, rationale, reelle Zahlen geeignet repräsentieren lassen und daß ihre charakteristischen Eigenschaften beweisbar werden. In diesem Sinne liefert die Mengenlehre ein Fundament, auf dem aufbauend sich die Mathematik entwickeln läßt.
Von Cantor wurde der Begriff der Menge in einer Arbeit von 1895 wie folgt erklärt:

> *Unter einer Menge"verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Hierbei wird der Begriff der Menge auf andere Begriffe zurückgeführt, die ebenfalls nicht klar sind. Was soll eine "Zusammenfassungßein? Somit handelt es sich bei der Beschreibung von Mengen durch Cantor um keine Definition. Sie hilft uns jedoch, eine intuitive Vorstellung davon zu erlangen, was wir als Mengen bezeichnen wollen. Dabei treffen wir folgende Vereinbarung: Wenn M eine Menge und a ein Objekt ist, das zu M gehört, so drücken wir das durch $a \in M$ (gelesen ä ist Element von M") aus.
Schon bald zeigte sich, daß der Begriff "Zusammenfassungpräzisiert werden muß, wenn man nicht zu Widersprüchen gelangen will. Von B. Russel wurde 1901 die folgende Antinomie angegeben: Man betrachte alle Objekte x, die sich nicht selbst als Objekt enthalten, d.h., für die gilt $x \notin x$. Wir wollen diese Eigenschaft mit $\mathcal{E}$ bezeichnen. Wir fassen alle Objekte, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen, zu einer Menge M zusammen. Wie verhält sich nun die Menge M selbst in bezug auf die Eigenschaft $\mathcal{E}$? Angenommen, M hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$ nicht. Also ist $M \in M$. Dann ist aber sofort $M \notin M$. Analog erhalten wir aus der Annahme, daß M die Eigenschaft $\mathcal{E}$ nicht hat, daß $M \notin M$, und wir haben sofort $M \in M$. Wir erhalten also den Widerspruch, daß M die Eigenschaft $\mathcal{E}$ weder haben noch nicht haben kann.
Wie können wir diesen Widerspruch vermeiden? Am besten, indem wir präzisieren, welche Zusammenfassungen zugelassen werden und welche nicht. Wir beschreiben dazu die Mengenlehre als abstrakte Theorie in einer formalen Sprache. Dabei ist die Theorie durch eine Reihe von Axiomen gegeben. Wir vermeiden durch dieses Vorgehen, erklären zu müssen, was eigentlich Mengen sind, und der Mengenbegriff hängt nicht von der speziellen Intuition jedes Einzelnen ab. Ein solches Vorgehen ist bereits aus der Geometrie bekannt: Es wird nicht erklärt, was Punkte sind. Statt dessen wird durch Axiome festgelegt, welchen Bedingungen die Punkte genügen

sollen.
Zum Teil bedingt durch unklare Begriffsbildungen entstand in der Anfangszeit der Mengenlehre eine heftige Diskussion über ihren Sinn. Dies reichte von totaler Ablehnung bis zur euphorischen Begrüßung als Fundament der Mathematik. So äußerte sich Poincaré: SSpätere Generationen werden die Mengenlehre [Cantors] als Krankheit ansehen, von welcher man sich erholt hat."(Proc. IV. Int. Congr. Rome (1908), 167-182). Von Hilbert stammt der folgende bekannte Ausspruch: Äus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können."(Über das Unendliche, Math. Ann. 95 (1926), 161-190). Aus heutiger Sicht kann man sagen, daß die Mengenlehre ihren festen Platz in der Mathematik gefunden hat, auch wenn es immer wieder Diskussionen über die Rolle der Mengenlehre gibt. Die Mengenlehre liefert ein Fundament, auf das im Bedarfsfalle zurückgegriffen werden kann. Es sind neue Gebiete der Mathematik entstanden, wie z.B. die mengentheoretische Topologie, die Theorie der reellen Funktionen und die Funktionalanalysis, die untrennbar mit der modernen Mengenlehre verbunden sind. In anderen Gebieten der Mathematik, wie in der Maßtheorie und Teilen der Algebra, benutzt man erfolgreich Methoden der Mengenlehre. Es gibt jedoch auch Teile der Mathematik, wie z.B. große Teile der klassischen Analysis oder Algebra, in denen man kaum mit Problemen oder Methoden der Mengenlehre in Berührung kommt. Es macht keinen Sinn, einen Algebraiker oder Analytiker, der keine Verbindung zur Mengenlehre benötigt, dazu bringen zu wollen, unbedingt auf die Mengenlehre Bezug zu nehmen. Andererseits sollten aber auch Mathematiker, die nicht mit der Mengenlehre in Berührung stehen, tolerant genug sein, um zu akzeptieren, daß man in vielen Teilen der Mathematik nicht umhinkommt, auf die Mengenlehre zurückzugreifen.
Der axiomatische Standpunkt, bei dem der spezielle Charakter der einzelnen Mengen außer acht gelassen wird, ist oftmals für die praktische Arbeit ungeeignet. Jeder Analytiker hat eine ganz konkrete Vorstellung etwa von der Zahlengeraden oder der Sinusfunktion. Die Vorstellung, die man vielfach mit konkreten Mengen verbindet, ist oftmals hilfreich, mathematische Zusammenhänge zu begreifen. Dieses gesunde Herangehen an konkrete Probleme soll keinesfalls durch die Mengenlehre eingeschränkt werden. Nur muß man sich auch darüber im klaren sein, daß dieser Standpunkt ungeeignet ist, wenn man die Struktur der Mengen selbst untersuchen will.
Das am häufigsten benutzte Axiomensystem für die Mengenlehre ist das Axiomensystem von E. Zermelo und A. Fraenkel. Mit diesem System werden wir uns auch im folgenden beschäftigen. Die Mengen, die man in dieser Theorie beschreiben kann, haben mit den Mengen, mit denen der Mathematiker üblicherweise arbeitet, recht wenig gemeinsam. Auf einen Unterschied sei schon an dieser Stelle hingewiesen: Wenn man mit der Menge der reellen Zahlen arbeitet, stellt man sich üblicherweise jede einzelne reelle Zahl als ein Element der Menge aller reellen Zahlen vor. Dabei hat eine einzelne reelle Zahl keine weiteren Elemente, sondern ist eine Einheit, die nicht weiter zerlegt werden kann. Da es viele reelle Zahlen gibt, gibt es auch viele solche Einheiten. So etwas gibt es bei den Modellen der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht. Es gibt hier genau eine Menge, die keine weiteren Elemente enthält, nämlich die leere Menge.

2 Einige allgemeine Vorbemerkungen

Wir beginnen mit einem vorbereitenden Kapitel, in dem wir einige allgemeine Begriffe zusammenstellen, die wir im weiteren benötigen werden. Dies mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, da ja oft von der Mengenlehre als von dem Fundament der Mathematik gesprochen wird. Aber um dieses Fundament beschreiben zu können, werden einige Begriffe benötigt. Wir müssen unter anderem auch schon mit Mengen arbeiten. Dabei stellen wir uns zunächst auf

den Standpunkt, daß jeder eine gewisse Vorstellung davon hat, was eine Menge ist. Außerdem nehmen wir an, daß der Leser mit Begriffen wie Teilmenge, Durchschnitt, Vereinigung, Mengendifferenz und Kreuzprodukt im intuitiven Sinne vertraut ist, d.h., diese Begriffe z.B. in der Analysis anwenden kann.
Wir beginnen mit dem Begriff der *partiellen Ordnung*. Sei A eine Menge und $\leq$ eine zweistellige Relation auf A, d.h., wir können $\leq$ auffassen als Teilmenge von $A \times A$. Statt $(a, b) \in \leq$ schreiben wir $a \leq b$. Damit $\leq$ eine partielle Ordnung ist (im folgenden schreiben wir *p.o.* als Abkürzung für partial order), muß für alle x, y, z aus A gelten:

(L1) **(Reflexivität)**

$$x \leq x;$$

(L2) **(Antisymmetrie)**

$$\text{wenn } x \leq y \text{ und } y \leq x, \text{ so ist } x = y;$$

(L3) **(Transitivität)**

$$\text{wenn } x \leq y \text{ und } y \leq z, \text{ so ist } x \leq z.$$

Wenn $x \leq y$ und $x \neq y$ ist, so schreiben wir hierfür als Abkürzung $x < y$.
Wenn außerdem für alle x, y aus A gilt

(L4) **(Komparabilität)**

$$x \leq y \text{ oder } y \leq x,$$

so bezeichnen wir die *p.o.* als *lineare* Ordnung.

Wir geben jetzt einige Beispiele für *p.o.*'s an:

Beispiele: (1) Sei $\{0,1\}^*$ die Menge aller endlichen Folgen aus 0 und 1. Für $a, b \in \{0,1\}^*$ sei

$$a \leq_1 b \text{ gdw. } a \text{ ist Anfangsstück von } b.$$

(2) Auf der Menge $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ der natürlichen Zahlen größer als 0 führen wir eine partielle Ordnung $\leq_2$ ein durch

$$a \leq_2 b \text{ gdw. } a \text{ ist ein Teiler von } b.$$

(3) Auf der Menge der endlichen Teilmengen von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen führen wir eine *p.o.* $\leq_3$ ein durch

$$a \leq_3 b \;\text{ gdw. } a \subseteq b.$$

(4) Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen führen wir eine *p.o.* $\leq_4$ ein durch

$$a \leq_4 b \;\text{ gdw. } b - a \text{ ist eine nichtnegative ganze Zahl.}$$

(5) Auf der Menge $\mathbb{G}$ der ganzen Zahlen führen wir eine lineare Ordnung $\leq_5$ wie folgt ein:

$$\begin{array}{rl} a \leq_5 b \text{ gdw.} & a \cong b \ (mod\ 2) \text{ und } b - a \text{ ist nichtnegativ oder} \\ & a \cong 0 \ (mod\ 2) \text{ und } b \cong 1 \ (mod\ 2). \end{array}$$

Die Ordnung sieht wie folgt aus:

$$2 \leq_5 4 \leq_5 6 \leq_5 \cdots \leq_5 1 \leq_5 3 \leq_5 5 \cdots$$

Sei A eine Menge mit einer *p.o.* $\leq$, $a, b \in A$. a heißt *minimal*, wenn für alle $c \in A$ aus $c \leq a$ folgt $c = a$. a heißt *maximal*, wenn für alle $b \in A$ aus $a \leq c$ folgt $c = a$. a heißt *Minimum*, wenn für alle $b \in A$ gilt $a \leq b$, und a heißt *Maximum*, wenn für alle $b \in A$ gilt $b \leq a$.
Man sieht leicht, daß ein Minimum ein minimales Element und ein Maximum ein maximales Element ist. Wenn die *p.o.* A ein Maximum besitzt, so ist dieses Maximum das einzige maximale Element und wenn A ein Minimum besitzt, so ist dieses Minimum das einzige minimale Element.
Sei $(A, \leq)$ eine *p.o.*, $B \subseteq A$. B heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es ein $a \in A$ gibt mit $\forall b \in B(b \leq a)$ (bzw. $\forall b \in B(a \leq b)$). a heißt in diesem Fall *obere* (bzw. *untere*) *Schranke*. Eine Teilmenge K von A heißt *Kette*, wenn die Elemente von K paarweise vergleichbar sind.

Sei A eine Menge. Eine zweistellige Relation $\equiv$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt:

(E1) **(Reflexivität)**

$$x \equiv x;$$

(E2) **(Symmetrie)**

$$x \equiv y \;\text{ gdw. }\; y \equiv x;$$

(E3) (Transitivität)

$$\text{wenn } \ x \equiv y \text{ und } y \equiv z, \text{ so ist } \ x \equiv z.$$

Beispiel (6) Sei A die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Für $a, b \in A$ sei $a =_* b$, wenn $(a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ endlich ist. Man überzeugt sich leicht, daß $=_*$ auf der Menge A eine Äquivalenzrelation ist. Wir setzen

$$a \Delta b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$$

und bezeichnen $a \Delta b$ als *symmetrische Differenz.*
Seien A, B zwei Mengen. Wir nennen A und B *gleichmächtig* (und schreiben dafür $A \approx B$), falls es eine eineindeutige Abbildung f von A auf B gibt. Man sieht leicht, daß für beliebige Mengen A, B und C gilt:

$$A \approx A;$$

$$\text{wenn } \ A \approx B, \text{ so ist } \ B \approx A;$$

$$\text{wenn } \ A \approx B \text{ und } \ B \approx C, \text{ so ist } \ A \approx C.$$

Somit sind hier formal alle Aussagen erfüllt, die für eine Äquivalenzrelation gelten müssen. Aber es gibt hier folgendes Problem: Äquivalenzrelationen haben wir *auf* Mengen definiert, aber hier haben wir als Grundbereich *alle* Mengen vorliegen. Aber da es keine Menge gibt, die alle Mengen enthält, ist $\approx$ im oben angegebenen Sinne *keine* Äquivalenzrelation.
Entsprechend sagen wir, daß die *Mächtigkeit von A kleiner oder gleich der Mächtigkeit von B* ist (geschrieben $A \preceq B$), wenn es eine eineindeutige Abbildung von A in B gibt. Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn $A \approx \mathbb{N}$ (mit $\mathbb{N}$ bezeichneten wir die Menge der natürlichen Zahlen). Eine Menge A ist *gleichmächtig dem Kontinuum*, wenn $A \approx \mathbb{R}$ (mit $\mathbb{R}$ bezeichneten wir die Menge der reellen Zahlen).

Sei A eine Menge und $\leq$ eine lineare Ordnung auf A. Wir nennen A *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element besitzt. Dann ist $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung, während $\mathbb{G}$ und $\mathbb{R}$ keine Wohlordnungen sind.

Sowohl beim Begriff der Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge als auch beim Begriff der Wohlordnung können uns nach einigem Nachdenken Zweifel kommen, ob es sich hierbei um korrekte Begriffsbildungen handelt. Was ist, wenn verschiedene Personen unterschiedliche Vorstellungen davon haben, was alles als Teilmenge einer gegebenen Menge auftreten kann. Vielleicht weiß der eine auf Grund tieferer Einsicht von mehr Teilmengen einer gegebenen Menge als der andere. Während der erste nach seinem Kenntnisstand eine gegebene lineare Ordnung als Wohlordnung betrachtet, weiß der andere von der Existenz einer nichtleeren Teilmenge, die kein kleinstes Element besitzt. Man kann diese Schwierigkeiten nur umgehen, wenn man davon ausgeht, daß jeder die *gleichen* Mengen kennt. Wie man diesen Standpunkt rechtfertigen kann, werden wir in den folgenden Kapiteln sehen.

3 Formale Sprachen und Modelle

Es ist nicht Anliegen dieses Buches, formale Sprachen im Detail zu entwickeln. Dazu sei der Leser auf die Standardliteratur verwiesen. Wir beschreiben hier formale Sprachen und den Modellbegriff so weit, wie es für das Verständnis der folgenden Kapitel notwendig ist.
Die Grundsymbole unserer formalen Sprachen sind:

- die logischen Konnektoren $\wedge$ und $\neg$;
- der Quantor $\exists$;
- für jede natürliche Zahl i ein Variablensysmbol v_i;
- das Gleichheitszeichen $=$;
- eine Menge $\{r_i : i \in I\}$ von Relationssymbolen sowie eine Menge $\{f_j : j \in J\}$ von Funktionssymbolen;
- die Klammern $(,), [,], \{$ und $\}$ als technische Zeichen.

Weiterhin haben wir Funktionen $\tau_0 : I \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\tau_1 : J \to \mathbb{N}$, die jedem Relations- und Funktionsymbol seine Stelligkeit zuordnen.
Die Relations- und Funktionssymbole bezeichnen wir als *nichtlogische* Symbole der Sprache, die restlichen Zeichen als *logische* Symbole der Sprache. Nullstellige Funktionssymbole bezeichnen wir auch als *Konstantensymbole*. Die Sprache der Mengenlehre enthält als einziges nichtlogisches Zeichen das zweistellige Relationssymbol $\in$.
Intuitiv haben die Zeichen folgende Bedeutung: $\wedge$ bedeutet ündünd $\neg$ bedeutet nicht"; $\exists$ bedeutet ës existiert", $\in$ bedeutet ïst Element von", $=$ steht für ïst gleich". Die v_i sind Variablen für Mengen. Die Klammern sind technische Zeichen, die benötigt werden, um den Wirkungsbereich der logischen Konnektoren zu kennzeichnen.
Unter einem *Ausdruck* verstehen wir eine beliebige endliche Zeichenkette aus den obigen Zeichen, z.B. sind $\exists \wedge \neg v_4 v_3$ und $v_{12} \in v_{14}$ Ausdrücke der Sprache der Mengenlehre.
Wir definieren jetzt Terme. Mit *Term* bezeichnen wir die kleinste Klasse T, die folgendes enthält:

(i) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $v_i \in T$.
(ii) Wenn $t_0, ..., t_{n-1} \in T$, $i \in I$ und $\tau_1(i) = n$, so ist $f_i(t_0, ..., t_{n-1}) \in T$.

Wir definieren jetzt Formeln. Mit *Form* bezeichnen wir die kleinste Klasse F, die folgendes enthält:

(i) wenn $s, t \in$ *Term*, so ist $s = t \in F$;
(ii) wenn $t_0, ..., t_{n-1} \in$ *Term*, $j \in J$ und $\tau_0(j) = n$, so ist $r_j(t_0, ..., t_{n-1}) \in F$;
(iii) wenn φ und ψ Formeln sind, so sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\neg\varphi)$ und $(\exists v_i\, \varphi)$ Formeln.

Einige häufig benutzte logische Konnektoren wie $\to$ und $\forall$ fehlen unter den zur Sprache gehörenden Konnektoren. Sie lassen sich jedoch mit den bereits vorhandenen logischen Zeichen ausdrücken. So läßt sich der Quantor $\forall$ (mit der Bedeutung für alle") durch die bereits vorhandenen Zeichen ausdrücken. Statt $(\forall v_i\, \varphi)$ können wir äquivalent schreiben $(\neg(\exists v_i\, (\neg\varphi)))$. Weiterhin sehen wir, daß in der letzten Formel eine Vielzahl von Klammern vorkommen, die nicht gerade die Lesbarkeit fördern. Wir vereinbaren daher, daß wir nicht notwendige Klammern weglassen können. So schreiben wir für die letzte Formel einfach $\neg\exists v_i \neg\varphi$. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

(i) $\forall v_i\, \varphi$ steht als Abkürzung für $\neg\exists v_i \neg\varphi$
(ii) $\varphi \vee \psi$ steht als Abkürzung für $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
(iii) $\varphi \rightarrow \psi$ steht als Abkürzung für $(\neg\varphi) \vee \psi$;
(iv) $\varphi \leftrightarrow \psi$ steht als Abkürzung für $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$;
(v) $v_i \neq v_j$ steht als Abkürzung für $\neg(v_i = v_j)$.

Weiterhin benutzen wir im Fall der Sprache der Mengenlehre $v_i \notin v_j$ als Abkürzung für $\neg(v_i \in v_j)$.

Wir legen für die logischen Konnektoren die Stärke ihrer Bindung fest. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ist die Auflistung der Konnektoren in fallender Stärke ihrer Bindung. So bedeutet $\neg\varphi \wedge \phi \vee \chi$ dasselbe wie $((\neg\varphi) \wedge \phi) \vee \chi$.
Wir benutzen oftmals x, y und z als Zeichen für Variablen. Das heißt, für x, y, z usw. können beliebige Variablen eingesetzt werden. So steht z.B. $x \in y$ für $v_0 \in v_1$, $v_2 \in v_1$, $v_1 \in v_1$. Wir werden Formeln häufig nicht explizit ausschreiben. Der Grund dafür ist ganz einfach: Oftmals haben die Zeichenreihen, die eine Formel darstellen, eine sehr unübersichtliche Form. Dann ist es günstiger, die Formel verbal zu beschreiben. Es muß aber gesichert sei, daß der verbal formulierte Sachverhalt auch als Formel aufgeschrieben werden kann.
Jeder Formel wollen wir alle ihre Teilformeln zuordnen. Dazu definieren wir eine Funktion *Subform*, die jedem $\varphi \in$ *Form* alle ihre Teilformeln zuordnet. Dies geschieht wie folgt:

$Subform(t_0 = t_1) = \{t_0 = t_1\}$;
$Subform(r_i(t_o, ..., t_{n-1})) = \{r_i(t_0, ..., t_{n-1})\}$, wobei $i \in I$ und $\tau_0(i) = n$;
$Subform(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\} \cup Subform(\varphi) \cup Subform(\psi)$;
$Subform(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup Subform(\varphi)$;
$Subform(\exists v_i\, \varphi) = \{\exists v_i\, \varphi\} \cup Subform(\varphi)$.

Der *Wirkungsbereich* des Vorkommens eines Quantors $\exists v_i$ in einer Formel φ ist die eindeutige Unterformel $\exists v_i\, \psi$ von φ. So ist der Wirkungsbereich von $\exists v_3$ in $\exists v_0\, (v_0 \in v_2) \wedge \neg(\exists v_3\, (v_3 = v_1)$ $\wedge (v_1 = v_3))$ die Formel $\exists v_3\, (v_3 = v_1)$.
Das *Vorkommen* einer Variablen v_i in einer Formel φ ist *gebunden*, wenn sie im Wirkungsbereich des Vorkommens eines Quantors $\exists v_i$ liegt. Andernfalls heißt das Vorkommen von v_i *frei.* So ist in der Formel $\exists v_1\, (v_1 = v_2) \vee \forall v_0\, (v_1 = v_0)$ das erste Vorkommen von v_1 gebunden, während das zweite Vorkommen von v_1 frei ist. Man beachte, daß das Vorkommen von v_0 gebunden ist.
Eine Formel, in der es kein freies Vorkommen einer Variablen gibt, heißt *Aussage.* Wir bezeichnen mit *Sent* die Menge aller Aussagen der Sprache L.

Wir schreiben $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$, wenn wir ausdrücken wollen, daß in φ die Variablen $x_0, ..., x_{n-1}$ frei vorkommen. Wenn $y_0, ..., y_{n-1}$ andere Variable sind, so bezeichnen wir mit $\varphi(y_0, ..., y_{n-1})$ die Formel, die wir aus φ erhalten, indem wir jedes freie Vorkommen von x_i durch y_i ersetzen. Eine solche Ersetzung ist *zulässig*, wenn kein freies Vorkommen eines x_i im Wirkungsbereich von $\exists y_i$ liegt. Damit wird gesichert, daß die Formel $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ über $x_0, ..., x_{n-1}$ dasselbe aussagt

wie $\varphi(y_0, ..., y_{n-1})$ über $y_0, ..., y_{n-1}$. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß alle Ersetzungen zulässig sind. Wenn wir $\varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ schreiben, so bedeutet das weder, daß alle x_i in φ frei vorkommen, noch daß alle Variablen, die in φ frei vorkommen, unter den x_i zu finden sind.
Sei z.B. $\varphi(v_0)$ die Formel $\exists v_3\,(v_0 \in v_1)$. Dann ist $\varphi(v_2)$ die Formel $\exists v_3\,(v_2 \in v_1)$. $\varphi(v_3)$ ist die Formel $\exists v_3\,(v_3 \in v_1)$, aber die letzte Formel ist keine zulässige Ersetzung.
Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$\forall x_0 \ldots x_{n-1}\,\varphi$ steht für $\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}\,\varphi$;
$\exists x_0 \ldots x_{n-1}\,\varphi$ steht für $\exists x_0 \ldots \exists x_{n-1}\,\varphi$;
$\exists! x\,\varphi(x)$ steht für $\exists x\,[\varphi(x) \wedge \forall y\,(\varphi(y) \to x = y)]$;
$\exists x \in y\,\varphi$ steht für $\exists x\,(x \in y \wedge \varphi)$;
$\forall x \in y\,\varphi$ steht für $\forall x\,(x \in y \to \varphi)$.

Bei den Sprachen, die wir hier beschrieben haben, handelt es sich um *Sprachen erster Stufe*. Im Gegensatz zu Sprachen höherer Stufe darf nicht über Mengen quantifiziert werden.
Sei $\Sigma \subseteq$ *Form*, $\phi \in$ *Form*. Wenn ϕ aus Σ beweisbar ist (für die Definition der Beweisbarkeit sei hier wieder auf die Standardliteratur verwiesen), so schreiben wir $\Sigma \vdash \phi$. Eine Menge Σ von Formeln heißt *inkonsistent*, wenn es eine Formel ϕ gibt, so daß $\Sigma \vdash \phi$ und $\Sigma \vdash \neg\phi$. Andernfalls heißt Σ *konsistent*.
Eine Menge Σ von Aussagen wird auch als *Theorie erster Stufe* bezeichnet.

Wir kommen jetzt zu den Begriffen Modell und Erfüllbarkeit. Sei A eine Menge, für jedes $i \in I$ sei $R_i \subseteq A^{\tau_0(i)}$ und für jedes $j \in J$ sei F_j eine Funktion von $A^{\tau_1(j)}$ in A. Wir bezeichnen $(A, (R_i)_{i\in I}, (F_j)_{j\in J})$ als *Modell* der Sprache. Dabei ist A der *Grundbereich*, R_i (bzw. F_j) ist die *Interpretation* von r_i (bzw. f_j). Im Fall der Sprache der Mengenlehre besteht ein Modell aus einem Tupel (A, E) mit $E \subseteq A^2$. E ist dabei die Interpretation von $\in$. Wir benutzen oftmals auch für E das Zeichen $\in$. Wir setzen

$$\mathbf{A} = (A, (R_i)_{i\in I}, (F_j)_{j\in J}).$$

Eine *Belegung* (der Variablen) ist eine Funktion s, die jeder natürlichen Zahl ein Element aus A zuordnet. Für gegebenes s ordnen wir jedem $t \in$ *Term* ein $t^s \in A$ wie folgt zu:

$$v_i^s = s(i);$$
$$f_j^s(t_0, ..., t_{\tau_1(j)-1}) = F_j(t_0^s, ..., t_{\tau_1(j)-1}^s).$$

Induktiv über den Fomelaufbau definieren wir die Relation

$$\mathbf{A} \models_s \varphi$$

(gelesen: *φ ist in dem Modell $\mathbf{A}$ unter der Belegung s erfüllt*). Wir sagen auch: *φ ist in $\mathbf{A}$ unter der Belegung s gültig.*

$\mathbf{A} \models_s t_0 = t_1$ gdw. $t_0^s = t_1^s$;
$\mathbf{A} \models_s r_i(t_0, ..., t_{\tau_1(i)-1})$ gdw. $(t_0^s, ..., t_{\tau_1(i)-1}^s) \in R_i$;
$\mathbf{A} \models_s \neg\varphi$ gdw. nicht $\mathbf{A} \models_s \varphi$;
$\mathbf{A} \models_s \varphi \wedge \psi$ gdw. $\mathbf{A} \models_s \varphi$ und $\mathbf{A} \models_s \psi$;
$\mathbf{A} \models_s \exists v_i \, \varphi$ gdw. es eine Belegung t gibt mit $s(k) = t(k)$ für alle $k \neq i$, so daß gilt $\mathbf{A} \models_t \varphi$.

Sei $\varphi(v_0, ..., v_{n-1}) \in \mathit{Form}$, $a_0, ..., a_{n-1} \in A$, s eine Belegung. Wir schreiben

$$\mathbf{A} \models_s \varphi(a_o, ..., a_{n-1}),$$

wenn $\mathbf{A} \models_t \varphi(v_0, ..., v_{n-1})$ für diejenige Belegung t, für die gilt $t(i) = a_i$ für $i > n$ und $t(i) = s(i)$ sonst.
Wenn φ unter jeder Belegung gilt, so schreiben wir $(A, (R_i)_{i\in I}, (F_j)_{j\in J}) \models \varphi$. Wenn φ eine Aussage ist, so gilt φ für irgendeine Belegung s gdw. φ für jede Belegung gilt.
Wenn Σ eine Menge von Aussagen ist, so heißt $\mathbf{A}$ *Modell* von Σ, wenn $\mathbf{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Sigma$. Wir schreiben hierfür $\mathbf{A} \models \Sigma$.
Eine Menge Σ von Formeln heißt *konsistent* (oder *widerspruchsfrei*), wenn es ein Modell von Σ gibt.
Sei Σ eine Menge von Formeln, φ eine Formel. φ heißt *relativ konsistent* bzgl. Σ, wenn aus der Konsistenz von Σ auch die Konsistenz von $\Sigma \cup \{\varphi\}$ folgt.
Unter einer *Theorie* verstehen wir eine Menge von Aussagen. Sei $\Sigma \subseteq \mathit{Sent}$. Wir setzen

$$\Sigma^{\vdash} = \{\varphi \in \mathit{Sent} : \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Eine Theorie heißt *axiomatisierbar*, wenn es eine rekursiv aufzählbare Menge Δ von Aussagen gibt mit $\Delta^{\vdash} = \Sigma^{\vdash}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $\Sigma^{\vdash}$ rekursiv aufzählbar ist.
Eine Theorie Σ heißt *vollständig*, wenn für jede Aussage φ gilt $\Sigma \vdash \varphi$ oder $\Sigma \vdash \neg\varphi$.
Sei $\mathbf{A}$ ein Modell der Sprache L. Dann bezeichnen wir mit $Th(\mathbf{A})$ die Menge aller Aussagen φ, die in $\mathbf{A}$ gültig sind. Sei Σ eine Theorie. Wir schreiben $\mathit{Mod}(\Sigma)$ für die Klasse aller Modelle von Σ.
Sei $\varphi(v_0, ..., v_{n-1}) \in \mathit{Form}$, $\mathbf{A}$ ein Modell von L. Dann setzen wir

$$\varphi^{\mathbf{A}} = \{\vec{a} \in A^n : \mathbf{A} \models \varphi(\vec{a})\}.$$

Der Teil der mathematischen Logik, der sich mit dem Studium von Modellen von Theorien erster Stufe beschäftigt, heißt *Modelltheorie*. Zu den wichtigsten Resultaten der Modelltheorie gehören die folgenden:

(1) Vollständigkeitssatz. Eine Theorie Σ der ersten Stufe ist konsistent gdw. Σ erfüllbar ist.

(2) Kompaktheitssatz. Sei Σ eine Theorie erster Stufe. Dann ist Σ konsistent gdw. jede endliche Teilmenge von Σ konsistent ist.

(3) Erster Unvollständigkeitssatz. Wenn eine konsistente, axiomatisierbare Theorie hinreichend kompliziert ist (speziell, wenn sich die Arithmetik in Σ interpretieren läßt), so gibt es eine Aussage ϕ mit $\Sigma \not\vdash \phi$ und $\Sigma \not\vdash \neg\phi$.

(4) Zweiter Unvollständigkeitssatz. Wenn eine konsistente, axiomatisierbare Theorie hinreichend kompliziert ist, so kann man in ihr nicht ihre eigene Konsistenz zeigen.

Diese Sätze wurden von K. Gödel gezeigt.

Die beiden Unvollständigkeitssätze sind für uns von großer Bedeutung. Wir werden zeigen, daß sich in der Mengenlehre, die wir in den folgenden Kapiteln beschreiben werden, die Arithmetik interpretieren läßt. Damit haben wir keine Möglichkeit, unsere Theorie zu einer vollständigen Theorie zu erweitern.
Anders ausgedrückt, wie sehr wir uns auch anstrengen und versuchen, unser Axiomensystem zu perfektionieren, wir können immer wieder Aussagen angeben, die aus unserem System noch nicht folgen (vorausgesetzt, wir haben keine widerspruchsvolle Theorie).
Der zweite Unvollständigkeitssatz impliziert, daß wir nie wissen können, ob unser Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Falls unser System widerspruchsvoll ist, haben wir die Chance, irgendwann einmal auf einen Widerspruch zu stoßen. Wir haben keine Möglichkeit, diesen Fall auszuschließen.

Mit Sprachen erster Stufe kann man nicht alles ausdrücken, was im mathematischen Alltag verwendet wird. So hat man keine Möglichkeit, den Begriff der Wohlordnung zu charakterisieren. Sei L die Sprache, die als einziges nichtlogisches Symbol $\leq$ enthält. Σ sei die Menge, die aus folgenden vier Aussagen besteht:

$$\forall x\,(x \leq x);$$
$$\forall x\,y\,(x \leq y \wedge y \leq x \to x = y);$$
$$\forall x\,y\,z\,(x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z);$$
$$\forall x\,y\,(x \leq y \vee y \leq x).$$

Wir zeigen, daß es keine Menge Φ von Aussagen der Sprache L gibt, so daß $Mod(\Sigma \cup \Phi)$ die Klasse aller Wohlordnungen ist.
Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Sei L' die Sprache, die aus L entsteht, indem wir zu L abzählbar viele nullstellige Funktionssymbole $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ aufnehmen. Da es unendliche Wohlordnungen gibt, ist $\Sigma \cup \Phi \cup \{c_i \neq c_k : i, k \in \mathbb{N}, i \neq k\}$ konsistent. Ebenfalls konsistent ist

$$\Sigma' = \Sigma \cup \Phi \cup \{c_i \leq c_k \wedge c_i \neq c_k : i, k \in \mathbb{N}, k < i\}$$

(man sieht leicht, daß jede endliche Teilmenge von Σ' erfüllbar ist). Damit gibt es nach dem Kompaktheitssatz ein $\mathcal{A} \in Mod(\Sigma^{'})$. Aber in $\mathcal{A}$ gibt es eine unendliche absteigende Folge, also ist $\mathcal{A}$ keine Wohlordnung.

Oftmals ist es sinnvoll, eine gegebene Sprache L definitorisch zu erweitern. Das bietet sich auch in der Mengenlehre an. Erst durch Aufnahme neuer Relationen und Funktionen wird es möglich, die Komplexität vieler Formeln in vertretbaren Grenzen zu halten. Sei Σ eine Theorie in einer Sprache L, $\phi(v_0, ..., v_{n-1})$, $\psi(v_0, ..., v_m) \in \mathit{Form}$ und es gelte $\Sigma \vdash \forall v_0 \ldots v_{m-1} \exists!\, v_m\, \psi(v_0, ..., v_m)$. Dann definiert $\phi(v_o, ..., v_{n-1})$ in kanonischer Weise eine n-stellige Relation R_ϕ und $\psi(v_o, ..., v_m)$ definiert in kanonischer Weise eine m-stellige Funktion F_ψ. Insbesondere gilt: Wenn $\mathbf{A} \models \Sigma$, so ist $\phi^{\mathbf{A}}$ eine n-stellige Relation und $\psi^{\mathbf{A}}$ ist eine m-stellige Funktion.

Wir schreiben $\varphi \equiv \psi$, wenn wir φ als Abkürzung für ψ einführen.
Sei L' die Sprache, die aus der Sprache L entsteht, indem wir zu L die beiden nichtlogischen Zeichen r_ϕ und f_ψ aufnehmen. r_ϕ ist dabei ein neues n-stelliges Relationssymbol und f_ψ ein neues m-stelliges Funktionssymbol. (Die Funktionen τ_0 und τ_1 sind entsprechend für die Sprache L' zu erweitern.) Sei weiterhin

$$\phi^* \equiv \forall v_0 \ldots v_{n-1}\, (r_\phi(v_0, ..., v_{n-1}) \leftrightarrow \phi(v_0, ..., v_{n-1}));$$
$$\psi^* \equiv \forall v_0 \ldots v_m\, (f_\psi(v_0, ..., v_{m-1}) = v_m \leftrightarrow \psi(v_0, ..., v_m));$$
$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\phi^*, \psi^*\}.$$

Wir bezeichnen die beiden neuen Aussagen in Σ' als *Definitionen* der neuen Funktion bzw. Relation. Sei $\mathbf{A} \models \Sigma$. Sei

$$R = \phi^{\mathbf{A}}, \qquad F = \psi^{\mathbf{A}};$$
$$\mathbf{A}' = (A, (R_i)_{i\in I}, R, (F_j)_{j\in J}, F).$$

Dann ist

$$\mathbf{A}' \models \Sigma'.$$

Sei $\vec{x} = (x_0, ..., x_{k-1})$. Jeder Formel $\varphi'(\vec{x})$ der Sprache L' läßt sich eine Formel $\varphi(\vec{x})$ der Sprache L zuordnen derart, daß für beliebiges $\vec{a} \in A^k$ gilt

$$\mathbf{A}' \models \phi'(\vec{a}) \text{ gdw. } \mathbf{A} \models \phi(\vec{a}).$$

Somit erhöht sich die Ausdrucksstärke einer Theorie nicht, wenn man die Sprache um neue Funktions- und Relationssymbole erweitert und gleichzeitig zur Theorie die entsprechenden Definitionen hinzunimmt.

In der Mengenlehre arbeitet man mit einer Vielzahl von definierten Funktionen und Relationen. Das ist notwendig, um die benutzten Formeln einigermaßen lesbar aufschreiben zu können. Oftmals werden diese neuen Funktionen und Relationen verbal beschrieben bzw. mit Hilfe von bereits an früherer Stelle neu eingeführten Funktionen und Relationen definiert. Es ist in allen Fällen problemlos möglich, die entsprechenden Formeln in der Sprache L anzugeben. Der Leser möge das als Übung für einige der im folgenden Text vorkommenden Definitionen durchführen.

4 Das Axiomensystem

Wir kommen nun zu den Axiomen des Systems *ZFC*, der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom.
Das erste Axiom unseres Systems wird nur der Bequemlichkeit halber aufgenommen. Es besagt lediglich, daß überhaupt eine Menge existiert:

(A0) (Mengenexistenz)

$$\exists x\,(x = x).$$

Auf dieses Axiom kann verzichtet werden, da es sich aus den Axiomen der Prädikatenlogik ableiten läßt. Da wir aber auf die Angabe der formalen Regeln des logischen Schließens sowie der Axiome des Prädikatenkalküls verzichtet haben, nehmen wir (A0) einfach zu unseren Axiomen hinzu.
Das nächste Axiom, das Extensionalitätsaxiom, besagt, daß zwei Mengen gleich sind, wenn sie gleiche Elemente enthalten:

(A1) (Extensionalitätsaxiom)

$$\forall x\,y\,(x = y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

Dieses Axiom impliziert, daß es höchstens eine Menge gibt, die kein Element enthält. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an ein bereits früher erwähntes Beispiel: Seien r_0 und r_1 zwei verschiedene reelle Zahlen. Dann enthalten r_0 und r_1 keine Elemente. (Üblicherweise bezeichnet man reelle Zahlen auch nicht als Mengen.) In unserem System müßten r_0 und r_1 gleich sein. Das kann nur so gedeutet werden, daß sich reelle Zahlen in unseren Modellen nicht unmittelbar wiederfinden lassen. Wir treffen folgende Vereinbarung: Wenn eine Menge a genau die endlich vielen Mengen $b_0, \ldots, b_{n-1}$ als Elemente enthält, so schreiben wir für a auch $\{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$.
Das folgende Axiom besagt, daß wir aus zwei Mengen eine dritte Menge bilden können, die genau diese beiden Mengen als Elemente enthält:

(A2) (Paarmengenaxiom)

$$\forall x\,y\,\exists z\,\forall u\,(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Wir nennen die Menge z, die gerade x und y als Elemente enthält, das *ungeordnete Paar* von x und y und schreiben $\{x, y\}$. Als *geordnetes Paar* von x und y bezeichnen wir die Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Wir schreiben für diese Menge (x, y). Wir wollen uns überlegen, daß (x, y) tatsächlich existiert: Aus (A2) folgt zunächst, daß $\{x\}$ eine Menge ist (mit $x = y$). Ebenfalls aus (A2) folgt, daß auch $\{x, y\}$ eine Menge ist. (A2) angewandt auf $\{x\}$ und $\{x, y\}$ liefert uns schließlich, daß $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ als Menge existiert.

Man zeigt leicht, daß folgendes gilt:

Lemma 1: *Für geordnete Paare* (u_0, u_1) *und* (v_0, v_1) *gilt* $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$ *gdw.* $u_0 = v_0$ *und* $u_1 = v_1$.

Für drei gegebene Mengen a, b und c definieren wir das *geordnete Tripel* als $((a, b), c)$ und schreiben dafür (a, b, c). Entsprechend definieren wir das *geordnete* $(n+1)$-*Tupel* der Elemente $a_0, \ldots, a_n$ als $((a_0, \ldots, a_{n-1}), a_n)$ und bezeichnen es mit $(a_0, \ldots, a_n)$.

Es folgt nun ein Axiomenschema:

(A3) (Komprehensionsschema)

Für jede Formel $\varphi(x)$, in der y nicht frei vorkommt,

$$\forall z \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x)).$$

Dieses Axiomenschema wird oftmals auch als *Aussonderungsschema* bezeichnet.
Die Menge y, die aus allen x aus z besteht, die $\varphi(x)$ erfüllen, bezeichnen wir mit $\{x \in z : \varphi(x)\}$.
Wir können dieses Axiomenschema wie folgt beschreiben: Sei z eine Menge und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die sich durch eine Formel der Mengenlehre beschreiben läßt. Dann bilden alle Elemente von z, die diese Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen, wieder eine Menge.
Als Anwendung dieses Axioms zeigen wir, daß eine Menge existiert, die kein Element besitzt: Aus (A0) folgt, daß überhaupt eine Menge a existiert. Sei $\varphi(y) \equiv y \neq y$. Dann enthält die Menge $a^* = \{x \in a : \varphi(x)\}$ kein einziges Element. Wir bezeichnen diese Menge mit $\emptyset$ und nennen sie die *leere* Menge. Aus Axiom (A1) folgt, daß diese Menge eindeutig bestimmt ist und nicht von der Wahl von a abhängt.
Mit Hilfe von (A2), dem Paarmengenaxiom, können wir zeigen, daß neben der leeren Menge weitere Mengen existieren. Mit $x = y = \emptyset$ erhalten wir die Menge $\{\emptyset\}$, mit $x = \emptyset$, $y = \{\emptyset\}$ erhalten wir die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ usw.
Wir können die Mengen, die durch das Komprehensionsschema erzeugt werden, auch mit Hilfe von Funktionen beschreiben. Sei φ eine Formel, in der y nicht frei vorkommt. F_φ sei die Funktion, die jeder Menge a die Menge b zuordnet, für die gilt $\forall y \, (y \in b \leftrightarrow y \in a \wedge \varphi(y))$. Dann haben wir mit der zuvor eingeführten Schreibweise $F_\varphi(a) = \{y \in a : \varphi(y)\}$.
Wenn die Familie aller Mengen a, die eine gegebene Formel $\phi(y)$ erfüllen, in Menge b enthalten ist, so folgt aus dem Komprehensionsschema, daß wir alle Mengen, die $\phi(y)$ erfüllen, zu einer Menge zusammenfassen können. Wir schreiben dann oft einfach $\{a : \phi(a)\}$.

Analog zu Russels Paradoxon können wir zeigen, daß es keine Menge gibt, die alle Mengen enthält:

Theorem 2: $\neg \exists z \, \forall x \, (x \in z)$.

Beweis: Angenommen, es gibt eine Menge a mit $\forall x \, (x \in a)$. Sei $\varphi(y) \equiv y \notin y$. Sei $b = \{y \in a : y \notin y\}$. Dann ist $b \in a$. Aber $b \in b$ gdw. $b \notin b$. Dieser Widerspruch zeigt, daß es keine Menge geben kann, die alle Mengen enthält. □

Wir schreiben $a \subseteq b$ als Abkürzung für $\forall x\,(x \in a \to x \in b)$. $a \subseteq b$ drückt aus, daß a eine *Teilmenge* von b ist. Wir schreiben $a \subset b$ für $a \subseteq b \wedge a \neq b$, d.h., $a \subset b$ drückt aus, daß a *echte* Teilmenge von b ist.

Mit einer Menge A soll auch die Vereinigung dieser Menge existieren. Dies wird durch das nächste Axiom gesichert:

(A4) (Vereinigungsaxiom)

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists u\,(u \in x \wedge z \in u)).$$

Wir schreiben $\bigcup x$ für die Vereinigung von x, d.h., $\bigcup x$ bezeichnet die Menge $\{z : \exists u \in x\,(z \in u)\}$. Für Mengen a und b setzen wir $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$.
Für $x \neq \emptyset$ definieren wir den Durchschnitt von x als die Menge aller derjenigen z, für die gilt $\forall u\,(u \in x \to z \in u)$. Sei $a \in x$. Dann ist der Durchschnitt von x gegeben als $\{y \in a : \forall z\,(z \in x \to y \in z)\}$. Somit folgt bereits aus (A3), daß der Durchschnitt einer nichtleeren Menge existiert. Wir bezeichnen diesen Durchschnitt einer nichtleeren Menge mit $\bigcap x$ und setzen $\bigcap \emptyset = \emptyset$. Für Mengen a und b setzen wir $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$. Dabei heißen Mengen a und b *disjunkt*, wenn $a \cap b = \emptyset$ ist. Sei d eine Menge. Eine Familie D von paarweise disjunkten Mengen (d.h., wenn $a, b \in D$, $a \neq b$, so sind a und b disjunkt) heißt *Zerlegung* von d, wenn $d = \bigcup D$.

Das nächste Axiom besagt, daß mit einer Menge x auch die Familie aller Teilmengen von x eine Menge bildet:

(A5) (Potenzmengenaxiom)

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Die Menge aller Teilmengen von x nennen wir die *Potenzmenge* von x und bezeichnen sie mit $\mathcal{P}(x)$.
Das *kartesische Produkt* (oder auch *Kreuzprodukt*) $x \times y$ zweier Mengen x und y ist die Familie aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in x$, $b \in y$. Für $a \in x$, $b \in y$ ist $\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$, also ist $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$, also ist $x \times y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. Aus (A5) folgt nun, daß $x \times y$ eine Menge ist: Man sondere aus der Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$ diejenige Menge aus, die durch die Formel $\phi(y)$ beschrieben wird, die aussagt, daß "y ein geordnetes Paar (u, v) ist mit $u \in x$ und $v \in y$". Der Leser möge als Übung eine Formel mit diesem Inhalt explizit aufschreiben.
Eine Menge R heißt *(binäre) Relation*, wenn es Mengen x und y gibt mit $R \subseteq x \times y$. Wir führen die Funktionen *dom* und *rng* definitorisch durch die folgenden Formeln ein

$$dom(a) = \{x : \exists y\,((x, y) \in a)\};$$

$$rng(a) = \{x : \exists y\,((y, x) \in a)\}.$$

Falls a eine Relation ist, so sind das gerade der Definitions- und der Wertebereich von a.
Da $dom(a) \subseteq \bigcup\bigcup a$ und auch $rng(a) \subseteq \bigcup\bigcup a$ ist, folgt mit Hilfe des Komprehensionsschemas

die Existenz von $dom(a)$ und $rng(a)$. Somit können wir die Sprache der Mengenlehre um die Funktionen dom und rng erweitern.
Wir setzen für beliebige Mengen a,

$$a^{-1} = \{(y,z) : (z,y) \in a\}.$$

Aus dem Reflexionsschema folgt, daß a^{-1} existiert. Wir nehmen $^{-1}$ ebenfalls zur Sprache der Mengenlehre auf. Wenn R eine Relation ist, so ist R^{-1} die zu R *inverse* Relation.
Seien R und S Relationen. Dann bezeichnen wir als *Komposition* von R und S die Relation

$$R \circ S = \{(x,z) : \exists y\,((x,y) \in S \wedge (y,z) \in R)\}.$$

Dann ist $R \circ S \subseteq dom(S) \times rng(R)$ und aus dem Aussonderungsschema folgt, daß $R \circ S$ wieder eine Menge ist.
Eine Relation R ist eine *Funktion*, wenn sie folgendes erfüllt:

$$\forall x\, y\, y'((x,y) \in R \wedge (x,y') \in R \rightarrow y = y').$$

Sei f eine Funktion, $(a,b) \in f$. Dann schreiben wir wie allgemein üblich $f(a) = b$. Wir sagen f *ist eine Funktion von a in b*, wenn $dom(f) = a$ und $rng(f) \subseteq b$. Entsprechend heißt f *Funktion von a auf b*, wenn $rng(f) = b$ ist.
Seien F und G Funktionen mit $rng(F) \subseteq dom(G)$. Dann ist $F \circ G$ eine Funktion mit $dom(F \circ G) = dom(F)$ und $rng(f \circ G) \subseteq rng(G)$. Weiterhin ist für alle $a \in dom(F)$, $(F \circ G)(a) = F(G(a))$.
Seien a und b irgendwelche Mengen. Wir bezeichnen mit ${}^a b$ die Menge aller Funktionen von a in b.
Bemerkung: Es sind sowohl ${}^b a$ als auch a^b als Bezeichnung für die Menge aller Funktionen von b in a gebräuchlich. Wenn keine Verwechslungen mit der Kardinalzahlexponentiation auftreten kann, werden wir auch a^b für die Menge aller Funktionen von b in a benutzen.

Sei a eine beliebige Menge. Eine Funktion f heißt *endlichstellige* Funktion auf a, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $dom(f) \subseteq a^n$ und $rng(f) \subseteq a$.
Sei R eine Relation. Die *Einschränkung* von R auf eine Menge x ist die Menge $\{(a,b) : (a,b) \in R \wedge a \in x\}$. Wir bezeichenen die Einschränkung von R auf x mit $R|_x$.
Sei f eine Funktion, a eine Menge. Wir setzen

$$f''(a) = \{x : \exists u \in a\,(x = f(u))\};$$
$$f^{-1}(a) = \{x : f(x) \in a\}.$$

Wir schreiben oft $f[a]$ für $f''(a)$. Eine Funktion ist 1-1 oder *injektiv*, wenn $\forall x\, y \in dom(f)(x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$. Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt *Surjektion auf B* (oder einfach *surjektiv*), wenn $rng(f) = B$ ist. $f : A \rightarrow B$ heißt *Bijektion* von A auf B, wenn f injektiv und Surjektion auf B ist. Das ist genau dann der Fall, wenn f^{-1} eine Funktion mit $dom(f^{-1}) = B$ ist.
Seien A und B Mengen, $R \subseteq A \times A$, $S \subseteq B \times B$. Wir nennen (A,R) und (B,S) *isomorph* (geschrieben $(A,R) \cong (B,S)$), wenn es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt derart, daß $\forall x\, y \in A\,(xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$.

Es folgt wieder ein Axiomenschema:

(A6) (Ersetzungsschema)

Für jede Formel $\varphi(x,y)$, in der y nicht frei vorkommt,

$$\forall x \in a \exists! y \, \varphi(x,y) \to \exists z \forall x \in a \, \exists y \in z \, \varphi(x,y).$$

Dieses Axiomenschema wird oftmals auch als *Reflexionsschema* bezeichnet.
Dieses Axiom sichert uns, daß für jede Funktion F, die durch eine Formel repräsentiert werden kann, für jede Menge a auch $F''(a)$ eine Menge ist. Das ist sicher dann der Fall (als Folge des Komprehensionsschemas), wenn F selbst eine Menge ist. Somit kann (A6) nur dann neue Mengen liefern, wenn durch $\varphi(x,y)$ eine Funktion repräsentiert wird, die keine Menge ist.

(A7) (Fundierungsaxiom)

$$\forall x \, (x \neq \emptyset \to \exists y \in x \, \forall z \in x \, (z \notin y)).$$

Durch dieses Axiom wird gesichert, daß sich keine Menge selbst als Element enthalten kann. Weiterhin folgt aus diesem Axiom, daß es keine endliche Menge $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ geben kann mit $a_0 \in a_1 \in \cdots \in a_{n-1} \in a_0$.

Mit unseren bisherigen Axiomen können wir noch nicht garantieren, daß überhaupt eine einzige unendliche Menge existiert. Man kann leicht eine Struktur angeben, die nur aus endlichen Mengen besteht und alle bisherigen Axiome erfüllt. Da wir solche Strukturen ausschließen wollen, benötigen wir ein weiteres Axiom.
Sei a eine beliebige Menge. Mit $s(a)$ bezeichnen wir dann die Menge $a \cup \{a\}$. Nun können wir unser Axiom formulieren:

(A8) (Unendlichkeitsaxiom)

$$\exists x \, (\emptyset \in x \wedge \forall u \, (u \in x \to s(u) \in x)).$$

Wir zeigen, daß durch dieses Axiom tatsächlich die Existenz einer unendlichen Menge gesichert wird: Sei a eine nichtleere Menge derart, daß aus $b \in a$ folgt $s(b) \in a$. Sei $b \in a$. Dann sind auch $s(b)$, $s(s(b))$, ... Elemente von a und aus dem Fundierungsaxiom folgt, daß diese Elemente paarweise voneinander verschieden sind. Also muß a unendlich viele Elemente enthalten.
Wir nennen eine Menge a *induktiv*, wenn gilt

$$\emptyset \in a \wedge \forall b \in a \, (s(b) \in a).$$

Der Durchschnitt einer beliebigen nichtleeren Familie induktiver Mengen ist ebenfalls induktiv. Somit gibt es eine kleinste induktive Menge. Diese kleinste induktive Menge bezeichnen wir mit

ω.

Eine *partielle Ordnung* ist ein Paar (a, r) derart, daß die Axiome (L1) - (L3) erfüllt sind mit r für $\leq$. Eine partielle Ordnung (a, r) ist eine *lineare Ordnung*, wenn zusätzlich noch (L4) erfüllt ist. Eine lineare Ordnung (a, r) ist eine *Wohlordnung*, wenn weiterhin gilt:

$$\forall x \subseteq a\, (x \neq \emptyset \to \exists u \in x\, \forall v \in x\, ((u, v) \in r).$$

Sei A eine Menge von nichtleeren Mengen. Eine Funktion f heißt *Auswahlfunktion auf* A, wenn $dom(f) = A$ und $\forall a \in A\, (f(a) \in a)$.

Wir formulieren nun das letzte Axiom:

(A9) (Auswahlaxiom)

$$\forall A\, (\emptyset \notin A \to \exists f\, (\text{"f ist Auswahlfunktion auf } A\text{"})).$$

Was ist nun das besondere an diesem letzten Axiom? Viele Mengen besitzen automatisch eine Auswahlfunktion. Wenn A nur aus einer einzigen nichtleeren Menge a besteht, so sei $b \in a$. Dann bildet die Menge $\{(a, b)\}$, deren Existenz aus dem Paarmengenaxiom folgt, eine Auswahlfunktion für A. Entsprechend läßt sich leicht sehen, daß jede Menge, die nur aus endlich vielen nichtleeren Mengen besteht, eine Auswahlfunktion besitzt. Sei $(A, \leq)$ eine Wohlordnung und $B \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Sei $\phi(x, y)$ die Formel, die folgendes ausdrückt: $x \subseteq A \wedge x \neq \emptyset \wedge \exists z\, (y = (x, z) \wedge z$ "ist minimales Element von " $x)$.
Dann folgt aus dem Ersetzungsschema, daß die Funktion, die jeder Menge $b \in B$ ihr kleinstes Element zuordnet, existiert. Jedoch folgt aus den ersten acht Axiomen nicht, daß für jede Menge von nichtleeren Mengen eine Auswahlfunktion existiert.
Auf Grund seiner Wichtigkeit bezeichnen wir das Auswahlaxiom mit *AC* (axiom of choice).

Die Axiome (A0) - (A9) sind die Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom. Wir bezeichnen sie mit *ZFC*. Die Axiome (A1) - (A8) sind die Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ohne Auswahlaxiom. Wir bezeichnen sie mit *ZF*.

Sei A eine Menge und R eine zweistellige Relation (in unserem naiven Sinne aus dem einleitenden Kapitel). Wir schreiben $(A, R) \in$ *Mod(ZFC)* (oder $(A, R) \models$ *ZFC*), wenn die Struktur (A, R) alle Axiome (A0) - (A9) erfüllt. Die Bemerkungen zum Auswahlaxiom zeigen, daß die *ZF*-Modelle von dem abweichen können, was wir gemeinhin erwarten. Wir haben uns daran gewöhnt, im Bedarfsfalle mit dem Auswahlaxiom zu arbeiten und akzeptieren es im allgemeinen nicht, daß das Auswahlaxiom nicht zur Verfügung steht.
Aber auch die *ZFC*-Modelle sind nicht in jedem Falle so, wie wir sie gerne hätten. Es kann folgendes passieren: Wir haben ein *ZFC*-Modell (A, R) und $a \in A$ und $r \in A$ derart, daß $(A, R) \models$ "(a, r) ist Wohlordnung ", obwohl es eine Teilmenge B von a gibt (allerdings so, daß B keine Entsprechung in A hat), die kein kleinstes Element bezüglich der Ordnung r hat.
Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes läßt sich folgendes zeigen: Sei (A, R) eine Struktur, $\phi(x)$, $\psi(x, y)$ seien Formeln, so daß $(\phi^{(A,R)}, \psi^{(A,R)})$ eine Wohlordnung ist. Dann gibt es eine elementare Erweiterung (A^*, R^*) von (A, R), so daß $(\phi^{(A^*,R^*)}, \psi^{(A^*,R^*)})$ keine Wohlordnung ist.

Wir kennen die Teilmenge B von A, da wir davon ausgehen, daß wir die Struktur (A, R) "von außen"betrachten können. Wenn wir nur Mengen berücksichtigen, die bereits in A vorkommen, so wird unser Gesichtskreis wesentlich eingeengt. Es ist günstig, sich das mit Hilfe "von Wesen, die in A leben"zu verdeutlichen. Solche Wesen glauben, daß (a, r) eine Wohlordnung ist, da alle nichtleeren Teilmengen von a, die sie erkennen können, ein kleinstes Element besitzen. Für solche Wesen ist (a, r) eine Wohlordnung, obwohl Wesen, die die ganze Struktur (A, R) erkennen können, feststellen, daß (a, r) keine Wohlordnung ist.

5 Klassen

In der Mengenlehre spielen definierbare Prädikate eine wichtige Rolle. Sie werden hier als *Klassen* bezeichnet.
Sei (A, R) ein *ZFC*-Modell, $\varphi(x)$ eine Formel der Sprache der Mengenlehre mit einer freien Variablen. Dann ist $\varphi^{(A,R)} \subseteq A$. Aber es gibt nicht notwendig ein $a \in A$ derart, daß für alle $b \in A$ gilt $(b, a) \in R$ gdw. $(A, R) \models \varphi(b)$. Wir bezeichnen Familien $B \subseteq A$, für die es eine Formel $\varphi(x)$ der Sprache der Mengenlehre gibt mit $\varphi^{(A,R)} = B$, als *Klassen*. Wir werden im folgenden Fettbuchstaben zur Bezeichnung von Klassen benutzen. Wenn $\mathbf{X}$ eine Klasse und $\phi(x)$ eine Formel der Sprache der Mengenlehre mit $\mathbf{X} = \phi^{(A,R)}$ ist, so nennen wir $\phi(x)$ eine *Repräsentation* von $\mathbf{X}$. Wir schreiben $a \in \mathbf{X}$ für $(A, R) \models \phi(a)$.
Mit $\mathbf{V}$ bezeichnen wir die Klasse, die durch die Formel $x = x$ repräsentiert wird. Damit ist $\mathbf{V}$ die Klasse aller Mengen. Man bezeichnet $\mathbf{V}$ auch oft als *Universum*.

Mit **Rel** bezeichnen wir die Klasse aller Mengen x, die repräsentiert werden durch

$$\Phi_{Rel}(x) \equiv \forall y \in x\, \exists z_0\, z_1\, (y = (z_0, z_1)).$$

Damit bezeichnet **Rel** die Klasse aller Relationen.
Wir bezeichnen mit **Func** die Klasse aller Mengen x, die repräsentiert werden durch

$$\Phi_{Func}(x) \equiv \Phi_{Rel}(x) \wedge \forall y \in dom(x)\, \exists!\, z\, ((y, z) \in x).$$

Damit ist **Func** die Klasse aller Funktionen.
Mit **Inj** bezeichnen wir die Klasse aller Mengen, die repräsentiert werden durch

$$\Phi_{Inj}(x) \equiv \Phi_{Func}(x) \wedge \Phi_{Func}(x^{-1}).$$

Damit bezeichnet **Inj** die Klasse aller Injektionen.

Lemma 1: *Wenn* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Klassen sind, so sind auch* $\bigcup \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$ *und* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *Klassen.*

Beweis: Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Repräsentationen von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$. Dann ist

$$\bigcup \mathbf{X} = (\exists y(\varphi(y) \wedge x \in y))^{(A,R)};$$

$$\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = (\varphi \vee \psi)^{(A,R)};$$

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = (\varphi \wedge \psi)^{(A,R)};$$

$$\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} = (\varphi \wedge \neg\psi)^{(A,R)};$$

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = (\exists y\, z\, (x = (y,z) \wedge \varphi(y) \wedge \psi(z))^{(A,R)}.$$

□

A selbst ist eine Klasse und die Formel $x = x$ ist eine Repräsentation von A. Seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Klassen mit Repräsentationen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Wir nennen $\mathbf{X}$ *Teilklasse* von $\mathbf{Y}$ und schreiben $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$, wenn $(A,R) \models \forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x))$. Jedes $a \in A$ ist auch eine Klasse. Die Formel $\varphi(x) \equiv x \in a$ ist eine Repräsentation von a.
Sei $\mathbf{F}$ eine Klasse und $\varphi(x)$ eine Repräsentation von $\mathbf{F}$. $\mathbf{F}$ heißt *relationale Klasse* (oder einfach *Relation*), wenn $\mathbf{F}$ nur aus geordneten Paaren besteht. Eine relationale Klasse $\mathbf{F}$ heißt *funktionale Klasse* (oder einfach *Funktion*), wenn aus $(a,b), (a,b') \in \mathbf{F}$ folgt, daß $b = b'$ ist. Formal bedeutet dies, daß

$$(A,R) \models \forall x\, \exists y\, z\, (x = (y,z)) \wedge \forall x\, y\, y'\, (\varphi((x,y)) \wedge \varphi((x,y')) \to y = y').$$

Sei $\mathbf{X}$ eine relationale Klasse und $\varphi(x)$ eine Repräsentation dieser Klasse. Mit $dom(\mathbf{X})$ bezeichnen wir die Klasse, die gegeben ist durch die Formel

$$\psi(x) \equiv \exists y\, (\varphi((x,y))),$$

und mit $rng(\mathbf{X})$ bezeichnen wir die Klasse, die gegeben ist durch

$$\psi(x) \equiv \exists y\, (\varphi((y,x))).$$

Wir nennen eine relationale Klasse $\mathbf{X}$ *Äquivalenzrelation (partielle Ordnung, lineare Ordnung)*, wenn die Struktur $(dom(\mathbf{X}), \mathbf{X})$ alle Aussagen erfüllt, die von einer Äquivalenzrelation (partiellen Ordnung, Ordnung) verlangt werden. Die Klasse $\mathbf{F}$ heißt *Wohlordnung*, wenn sie eine lineare Ordnung ist und zusätzlich gilt

$$\forall x\, (x \neq \emptyset \wedge x \subseteq dom(\mathbf{F}) \to \exists y \in x\, \forall z \in x\, (\, (y,z) \notin \mathbf{F})).$$

Sei $\mathbf{X}$ eine Klasse und $\mathbf{F}$ eine funktionale Klasse. $\mathbf{X}$ werde durch $\varphi(x)$ und $\mathbf{F}$ werde durch $\psi(x)$ repräsentiert. Mit $\mathbf{F}''(\mathbf{X})$ bezeichnen wir die Klasse, die repräsentiert wird durch die Formel

$$\phi(x) \equiv \exists y\, (\varphi(y) \wedge \psi((y,x))).$$

Mit Hilfe von Klassen lassen sich das Aussonderungsschema und das Ersetzungsschema wie folgt formulieren: Für jede Klasse $\mathbf{X}$ und jede Menge a ist $a \cap \mathbf{X}$ eine Menge. Für jede funktionale Klasse $\mathbf{F}$ und jede Menge a ist $\mathbf{F}''[a]$ eine Menge.

Sei a eine beliebige Menge. Mit $\mathbf{K}_0(a)$ bezeichnen wir die Klasse, die repräsentiert wird durch die Formel

$$\Phi_{\mathbf{K}_0}(a,x) \equiv \exists f \in \mathbf{Inj}\, (dom(f) = a \wedge rng(f) = x).$$

$\mathbf{K}_0(a)$ ist die Klasse der zu a *gleichmächtigen* Mengen. Wir schreiben

$$a \approx b,$$

wenn $(A,R) \models \Phi_{\mathbf{K}_0}(a,b)$ und nennen a und b *gleichmächtig*.
Mit $\mathbf{K}_1(a)$ bezeichnen wir die Klasse, die repräsentiert wird durch die Formel

$$\Phi_{\mathbf{K}_1}(a,x) \equiv \exists f \in \mathbf{Func}\, (dom(f) = a \wedge rng(f) = x).$$

$\mathbf{K}_1(a)$ ist die Klasse der Mengen, deren Mächtigkeit kleiner oder gleich der Mächtigkeit von a ist. Wir schreiben

$$b \preceq a$$

(bzw. $a \succeq b$), wenn $(A, R) \models \Phi_{\mathbf{K}_1}(a, b)$ und sagen, daß die Mächtigkeit von b *kleiner oder gleich* der Mächtigkeit von a ist (bzw., daß die Mächtigkeit von a *größer oder gleich* der Mächtigkeit von b ist). Wenn

$$(A, R) \models \neg\Phi_{\mathbf{K}_0}(a, b) \wedge \Phi_{\mathbf{K}_1}(a, b),$$

so schreiben wir

$$b \prec a$$

(bzw. $a \succ b$) und sagen, daß die Mächtigkeit von b *kleiner* als die Mächtigkeit von a ist (bzw. daß die Mächtigkeit von a *größer* als die Mächtigkeit von b ist).
Offenbar haben wir: Wenn $a \approx b$, $c \approx d$, $a \cap c = b \cap d = \emptyset$, so ist $a \cup c \approx b \cup d$.

Theorem 2 (Schröder-Bernstein-Theorem):
Wenn $a \preceq b$ und $b \preceq a$ ist, so ist $a \approx b$.

Beweis: Seien a und b gegeben mit $a \preceq b$ und $b \preceq a$. Es genügt, folgendes zu zeigen:
Wenn $a'' \subseteq a' \subseteq a$ und $a \approx a''$, so ist auch $a \approx a'$.
Dies läßt sich wie folgt sehen: Seien $f_1 : a \to b$ und $g_1 : b \to a$ Injektionen. Wir setzen

$$a' = g[b];$$

$$a'' = g_1[f_1[a]].$$

Dann ist $a'' \subseteq a' \subseteq a$ und $g_1 \circ f_1$ ist eine Bijektion von a auf a'', also ist $a \approx a''$. Wenn nun $a \approx a'$, so ist wegen $b \approx g_1[b] = a'$ auch $a \approx b$.
Sei nun $a'' \subseteq a' \subseteq a$ und $f : a \to a''$ eine Bijektion von a auf a''. Sei

$$N = \{x \subseteq a'' : f[x \cup (a \setminus a')] \subseteq x\}.$$

Wir nennen Mengen aus N *normal.* Offenbar ist

$$a'' \in N.$$

Sei $b \in N$. Wir setzen

$$b' = f[b \cup (a \setminus a')].$$

Dann ist

$$f[b' \cup (a \setminus a')] = f[f[b \cup (a \setminus a')] \cup (a \setminus a')] \subseteq f[b \cup (a \setminus a')] = b',$$

also

$$(1) \qquad \forall b \in N\, (f[b \cup (a \setminus a')] \in N).$$

Sei

$$b^* = \bigcap N.$$

Dann ist $f[b^* \cup (a \setminus a')] = f[\bigcap_{b \in N}(b \cup (a \setminus a'))] = \bigcap_{b \in N} f[b \cup (a \setminus a')] \subseteq \bigcap_{b \in N} b = b^*$, somit ist b^* die kleinste normale Menge.

Wegen $b^* \in N$ ist $f[b^* \cup (a \setminus a')] \subseteq b^*$. Andererseits ist aber wegen (1) auch $f[b^* \cup (a \setminus a')]$ normal, also ist $b^* \subseteq f[b^* \cup (a \setminus a')]$ und somit

$$b^* = f[b^* \cup (a \setminus a')].$$

Da f bijektiv ist, ist somit

$$b^* \approx b^* \cup (a \setminus a').$$

Nun ist $\{b^* \cup (a \setminus a'), a' \setminus b^*\}$ Zerlegung von a und $\{b^*, a' \setminus b^*\}$ Zerlegung von a'. Wegen $a' \setminus b^* \approx a' \setminus b^*$ ist damit aber auch

$$a = (b^* \cup (a \setminus a')) \cup (a' \setminus b^*) \approx b^* \cup (a' \setminus b^*) = a',$$

also ist $a \approx a'$. □

Theorem 3 (Cantor): *Für jede Menge a ist $a \prec \mathcal{P}(a)$.*

Beweis: Sei a gegeben. Wir definieren eine Funktion $g : a \to \mathcal{P}(a)$ durch

$$g(x) = \{x\}$$

für jedes $x \in a$. Dann ist g eine Injektion von a in $\mathcal{P}(a)$ und somit ist $a \approx \mathcal{P}(a)$.
Angenommen, $a \preceq \mathcal{P}(a)$. Sei $f : a \to \mathcal{P}(a)$ eine Injektion mit $rng(f) = \mathcal{P}(a)$. Wir setzen

$$b = \{x \in a : x \notin f(x)\}.$$

Da $b \subseteq a$, gibt es ein $c \in a$ mit $f(c) = b$. Wenn $c \in b$, so folgt aus der Definition von b, daß $c \notin b$. Entsprechend folgt aus $c \notin b$, daß $c \in b$ sein muß. Dieser Widerspruch zeigt, daß a und $\mathcal{P}(a)$ nicht gleichmächtig sein können. Also ist $a \prec \mathcal{P}(a)$. □

6 Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Seien $(A, <_A)$ und $(B, <_B)$ *p.o.*'s, $\pi : A \to B$ eine Injektion. π heißt *ordnungserhaltend*, wenn $\forall a\, b \in A\, (a <_A b \leftrightarrow \pi(a) <_B \pi(b))$.
Sei $(A, <)$ eine *p.o.*, $\emptyset \neq B \subseteq A$, $a \in A$. Wenn $a \in B$ und $\forall b \in B\, (a \leq b)$, so heißt a *Minimum* von B (bezeichnet mit $min(B)$). Entsprechend heißt ein $a \in B$ *Maximum* (bezeichnet mit $max(B)$), falls $\forall b \in B\, (b \leq a)$ ist. a heißt *untere Schranke* von B, wenn $\forall b \in B\, (a \leq b)$ und entsprechend heißt a *obere Schranke*, wenn $\forall b \in B\, (b \leq a)$ ist. a heißt *untere Grenze* (von B), wenn a untere Schranke von B ist und es keine untere Schranke a^* von B gibt mit $a < a^*$. Entsprechend heißt a *obere Grenze* von B, wenn a obere Schranke von B ist und es keine obere Schranke a^* gibt mit $a^* < a$. Wenn die Menge der unteren Schranken von B ein Maximum c besitzt, so heißt dieses Element c *Infimum* von B und wird mit $\inf(B)$ bezeichnet. Wenn die Menge der oberen Schranken ein Minimum besitzt, so heißt dieses Element *Supremum* von B und wird mit $sup(B)$ bezeichnet.
Sei $(A, <)$ eine *p.o.*, $B \subseteq A$. B heißt *Anfangsstück*, wenn gilt

$$\forall a \in A\, \forall b \in B\, (a < b \to a \in B)$$

und B heißt *Endstück*, wenn gilt

$$\forall a \in A\, \forall b \in B\, (b < a \to a \in B).$$

Sei $a \in A$. Wir setzen

$$\hat{a} = \{b \in A : b < a\};$$

$$\check{a} = \{b \in A : a < b\}.$$

Dann ist $\hat{a}$ Anfangsstück und $\check{a}$ ist Entstück von A.

Lemma 1: *Sei $(A, \leq)$ eine Wohlordnug, $X \subseteq A$ ein Anfangsstück von A. Dann ist $X = A$ oder es gibt ein $a \in A$ mit $X = \hat{a}$.*

Beweis: Sei $X \neq A$. Dann ist $Y = A \setminus X \neq \emptyset$, und somit enthält Y ein kleinstes Element a. Dann ist offensichtlich $X = \hat{a}$. □

Lemma 2: *Seien $(A, \leq)$ eine Wohlordnung, X ein Anfangsstück von A und $f, g : X \to A$ Funktionen, die X ordnungsisomorph auf ein Anfangsstück von A abbilden. Dann ist $f = g$.*

Beweis: Sei

$$Y = \{a \in X : f(x) \neq g(x)\}.$$

Angenommen, $Y \neq \emptyset$. Sei a^* das kleinste Element von Y. O.B.d.A. ist $f(a^*) < g(a^*)$. Sei $f(a^*) = b$. Wegen $b < g(a^*)$ ist $b \in rng(g)$. Dies ist aber nicht möglich: Wenn $c < a^*$, so ist

$$g(c) = f(c) < f(a^*) = b.$$

Wenn $a^* \leq c$, so ist

$$g(c) \geq g(a^*) > f(a^*) = b.$$

□

Theorem 3: *Seien $(A, \leq)$ und $(B, \leq)$ Wohlordnungen. Dann ist $(A, \leq)$ isomorph zu einem Anfangsstück von $(B, \leq)$ oder $(B, \leq)$ ist isomorph zu einem Anfangsstück von $(A, \leq)$.*

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen, die ein Anfangsstück von A ordnungsisomorph auf ein Anfangsstück von B abbilden. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{F}$ unter Mengeninklusion geordnet ist:
Sei $f, g \in \mathcal{F}$. O.B.d.A. sei $dom(f) \subseteq dom(g)$. Dann folgt aus Lemma 2, daß $f = g\,|_{dom(f)}$, und somit ist $f \subseteq g$.
Sei $F = \bigcup \mathcal{F}$. Dann ist F ebenfalls eine Funktion, die ein Anfangsstück von A auf ein Anfangsstück von B abbildet. Somit ist $F \in \mathcal{F}$ und F ist das größte Element in $\mathcal{F}$.
Wir zeigen, daß $dom(F) = A$ oder $rng(F) = B$:
Angenommen, das ist nicht der Fall. Sei

$$a^* = min(A \setminus dom(F)),$$

$$b^* = min(B \setminus rng(F)).$$

Sei

$$F^* = F \cup \{(a^*, b^*)\}.$$

Dann ist $F \subset F^* \in \mathcal{F}$, im Widerspruch dazu, daß F das maximale Element aus $\mathcal{F}$ ist. □

Wir bezeichnen mit **WOrd** die Klasse aller Wohlordnungen. Auf **WOrd** können wir die folgenden zweistelligen Relationen einführen:
Sei $(A, \leq_A), (B, \leq_B) \in \mathbf{WOrd}$. Dann setzen wir

$$(A, \leq_A) \preceq_{wo} (B, \leq_B)$$

gdw. sich $(A, \leq_A)$ ordnungsisomorph auf ein Anfangsstück von $(B, \leq_B)$ abbilden läßt, und wir setzen

$$(A, \leq_A) \approx_{wo} (B, \leq_B)$$

gdw. $(A, \leq_A) \preceq_{wo} (B, \leq_B)$ und $(B, \leq_B) \preceq_{wo} (A, \leq_A)$.

$\approx_{wo}$ liefert auf **WOrd** eine Äquivalenzrelation. Aus Theorem 3 folgt, daß die Elemente aus **WOrd** bezüglich $\preceq_{wo}$ paarweise vergleichbar sind. Aus Lemma 2 folgt, daß die Äquivalenzklassen von **WOrd** durch $\preceq_{wo}$ wohlgeordnet werden. Wir werden bald sehen, daß in jeder Äquivalenzklasse von **WOrd** auf natürliche Weise ein Repräsentant ausgewählt werden kann.

Wir nennen eine Menge A *transitiv*, wenn

$$\forall x \in a \, (x \subseteq a).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\forall xy \, (x \in y \wedge y \in a \rightarrow x \in a).$$

Beispiele für transitive Mengen sind $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

Sei A eine beliebige Menge. Wir setzen für $n \in \omega$,

$$A^0 = A;$$

$$A^{n+1} = \bigcup A^n.$$

Weiterhin setzen wir

$$TC(A) = \bigcup_{n<\omega} A^n.$$

Dann ist $TC(A)$ die kleinste transitive Menge, die A enthält. Wir bezeichnen $TC(A)$ als *transitiven Abschluß* von A.

Eine Menge a heißt *Ordinalzahl*, wenn a transitiv ist und $(a, \in |_a)$ eine lineare Ordnung ist. Mit dem Fundierungsaxiom folgt nun, daß für jede Ordinalzahl a, $(a, \in |_a)$ Wohlordnung ist.

Wir bezeichnen mit **On** die Klasse aller Ordinalzahlen. Wir verwenden kleine griechische Buchstaben α, β, γ, ... für Ordinalzahlen. Dabei unterscheiden wir im Folgenden nicht zwischen der Menge α und der linearen Ordnung $(\alpha, \in |_\alpha)$.
$\forall \alpha \, \varphi(\alpha)$ steht als Abkürzung für $\forall x \, (x \in \mathbf{On} \rightarrow \varphi(x))$.
Sei a eine beliebige Menge. Wir haben im Zusammenhang mit dem Unendlichkeitsaxiom die Funktion s eingeführt durch $s(a) = a \cup \{a\}$. Wir bezeichnen $s(a)$ als *Nachfolger* von a. Dann ist

$$a \subseteq s(a)$$

und

$$a \in s(a).$$

Sei α eine Ordinalzahl. Dann ist auch $s(\alpha)$ eine Ordinalzahl und es gibt keine Ordinalzahl, die zwischen α und $s(\alpha)$ liegt. Somit ist $s(\alpha)$ die kleinste Ordinalzahl, die größer als α ist. Wir bezeichnen den Nachfolger einer Ordinalzahl α auch mit α^+. Weiterhin haben wir:
Wenn α Ordinalzahl ist und $b \in \alpha$, so ist auch b Ordinalzahl und $b \subseteq \alpha$.

Lemma 4: *Seien α und β Ordinalzahlen. Dann ist $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ oder $\beta \in \alpha$.*

Beweis: α läßt sich ordnungsisomorph auf ein Anfangsstück von β abbilden oder β läßt sich ordnungsisomorph auf ein Anfangsstück von α abbilden.
O.B.d.A. lasse sich α auf ein Anfangsstück von β abbilden. Sei $\pi : \alpha \to \beta$ ein solcher Ordnungsisomorphismus.
Angenommen, für alle $\gamma \in \alpha$ ist $\pi(\gamma) = \gamma$. Dann ist $rng(\pi)$ ein Anfangsstück von β. Wenn $rng(\pi) = \beta$, so ist $\alpha = \beta$:
Andernfalls sei γ das kleinste Element von $\beta \setminus rng(\pi)$. Dann ist $\hat{\gamma} = \alpha$ und somit ist $\gamma = \alpha$, also ist $\alpha \in \beta$.
Wir zeigen nun, daß für alle $\gamma \in \alpha$, $\pi(\gamma) = \gamma$ sein muß:
Andernfalls wählen wir das kleinste $\delta \in \alpha$ mit $\pi(\delta) \neq \delta$. Sei

$$\delta_1 = min(\beta \setminus \delta).$$

Wir zeigen, daß $\delta_1 = \delta$ sein muß.
Es ist klar, daß $\delta \subseteq \delta_1$. Sei $\varepsilon \in \delta_1$. Wenn $\varepsilon \notin \delta$, so haben wir

$$\forall \gamma \in \delta \, (\delta < \varepsilon \wedge \varepsilon < \delta_1),$$

und das widerspricht der Wahl von δ_1. □

Aus Lemma 4 folgt sofort:

Theorem 5: *Die Klasse* **On** *ist unter $\in$ wohlgeordnet.*

Lemma 6: *Sei A eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist auch $\bigcup A$ eine Ordinalzahl. Weiterhin ist $sup(A) = \bigcup A$.*

Beweis: Da A eine Familie von transitiven Mengen ist, ist auch $\bigcup A$ transitiv. Aus Lemma 4 folgt, daß $\bigcup A$ bzgl. $\in$ linear geordnet ist. Damit ist $\bigcup A$ eine Ordinalzahl.
Wenn $\alpha \in A$, so ist $\alpha \subseteq A$ und somit ist $\alpha \leq \bigcup A$. Hieraus folgt

$$sup(A) \leq \bigcup A.$$

Sei nun $\beta < \bigcup A$. Dann gibt es ein $\gamma \in A$ mit $\beta \in \gamma$. Damit ist

$$sup(A) \geq \bigcup A.$$

Also ist

$$sup(A) = \bigcup A.$$

□

Sei A eine nichtleere Menge von Ordinalzahlen. Da A ein kleinstes Element besitzt, ist $inf(A) = min(A)$.

Man sieht leicht das folgende Lemma:

Lemma 7: *Seien α und β Ordinalzahlen. Wenn $\alpha \cong \beta$, so ist $\alpha = \beta$.*

Theorem 8: *Die Klasse* **On** *ist keine Menge.*

Beweis: Angenommen, **On** ist eine Menge. Dann ist auch $a = \bigcup \mathbf{On}$ eine Ordinalzahl. Aber a wäre größer als jedes $\alpha \in \mathbf{On}$, was offenbar nicht möglich ist. □

Die Tatsache, daß **On** keine Menge ist, wird auch als *Burali-Forti-Paradoxon* bezeichnet.
Eine Ordinalzahl α heißt *Nachfolgerordinalzahl*, wenn es eine Ordinalzahl β gibt mit $\beta^{'} = \alpha$. Wenn α verschieden von 0 und keine Nachfolgerordinalzahl ist, so heißt α *Limesordinalzahl.* Wir bezeichnen mit **Succ** die Klasse aller Nachfolgerordinalzahlen und mit **Lim** die Klasse aller Limesordinalzahlen. Für $\alpha \in \mathbf{Succ}$ bezeichnen wir mit α^{-} diejenige Ordinalzahl β, für die $\beta^{-} = \alpha$ ist. Falls $\alpha = 0$ oder $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so setzen wir $\alpha^{-} = \alpha$.
ω ist als kleinste induktive Menge auch die kleinste Limesordinalzahl. Die Ordinalzahlen, die unterhalb von ω liegen, heißen *natürliche Zahlen.* Wir bezeichnen $\emptyset$ mit 0, $\{\emptyset\}$ mit 1, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ mit 2 usw. Entsprechend bezeichnen wir ω als *Menge der natürlichen Zahlen.*

Theorem 9: *Für jede Wohlordnung $(A, <)$ gibt es eine Ordinalzahl α mit $(A, <) \cong \alpha$.*

Beweis: Sei B die Menge derjenigen $b \in A$, für die es eine Ordinalzahl β gibt mit

$$(b, < |_b) \cong \beta.$$

Durch das Aussonderungsschema wird gesichert, daß B eine Menge ist. B ist ein Anfangsstück von A. Aus Lemma 3 folgt, daß für jedes $b \in B$ die Ordinalzahl β mit $(b, < |_b) \cong \beta$ eindeutig bestimmt ist. Wir bezeichnen diese Ordinalzahl mit $\beta(b)$. Aus dem Reflexionsschema folgt, daß

$$B^* = \{\beta(b) : b \in B\}$$

ebenfalls eine Menge ist. Sei

$$\pi = \{(b, \beta(b)) : b \in B\}.$$

Angenommen, $B \neq A$. Sei a^* das minimale Element aus $A \setminus B$ und sei

$$\gamma = \bigcup B^*.$$

Dann läßt sich $(a^*, < |_{a^*})$ ordnungsisomorph auf die Ordinalzahl γ abbilden, und das ergibt den Widerspruch $a^* \in B$. □

Sei $(L, <)$ eine lineare Ordnung, $A \subseteq L$ eine wohlgeordnete Teilmenge. Dann bezeichnen wir mit $type(A)$ diejenige Ordinalzahl α, die zu A isomorph ist. $type(A)$ ist der *Typ* von A.

Wir haben:

Korollar 10: *Sei $(A, <)$ eine lineare Ordnung. Dann ist $(A, <)$ Wohlordnung gdw. es keine Folge $(a_i)_{i<\omega}$ gibt mit $a_i > a_k$ für $i < k < \omega$.*

Beweis: Wenn es eine solche Folge $(a_i)_{i<\omega}$ gibt, so besitzt die Menge

$$X = \{a_i : i < \omega\}$$

kein kleinstes Element, und somit ist $(A, <)$ keine Wohlordnung.
Sei nun die lineare Ordnung $(A, <)$ keine Wohlordnung. Wir geben dann in $(A, <)$ eine unendliche absteigende Folge an:
Sei α eine Ordinalzahl und $\pi : \alpha \to A$ eine Bijektion. Wir definieren eine Funktion $t : \omega \to \alpha$ durch

$$t(0) = 0;$$

$$t(i+1) = min\{\beta < \alpha : \pi(\beta) < \pi(t(i))\}.$$

Für $i < \omega$ sei

$$a_i = \pi(t(i)).$$

Dann ist $(a_i)_{i<\omega}$ eine unendliche absteigende Folge. □

7 Transfinite Rekursion und Äquivalenzen zum Auswahlaxiom

Die übliche Rekursion über natürliche Zahlen äßt sich auf die Klasse der Ordinalzahlen fortsetzen.

Theorem 1 (Transfinite Induktion): *Sei* $\mathbf{K}$ *eine nichtleere Klasse von Ordinalzahlen mit*

(i) *wenn* $\alpha \in \mathbf{K}$, *so ist* $\alpha' \in \mathbf{K}$;
(ii) *wenn* $A \subseteq \mathbf{K}$, *so ist* $\bigcup A \in \mathbf{K}$.

Dann ist $\mathbf{K} = \mathbf{On}$.

Beweis: Angenommen, $\mathbf{K} \neq \mathbf{On}$. Sei α die kleinste Ordinalzahl mit $\alpha \notin \mathbf{On}$. Aus (i) folgt, daß α keine Nachfolgerordinalzahl ist und aus (ii) folgt, daß α keine Limesordinalzahl ist. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\mathbf{K} = \mathbf{On}$ sein muß. □

Theorem 2 (Transfinite Rekursion):
Sei $\mathbf{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *eine funktionale Klasse. Dann gibt es eine funktionale Klasse* $\mathbf{G} : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ *derart, daß*

$$\forall\alpha(\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}|_\alpha)). \tag{1}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit.
Angenommen, $\mathbf{G}_0$ und $\mathbf{G}_1$ erfüllen beide (1). Wenn $\mathbf{G}_0 \neq \mathbf{G}_1$, so gibt es ein kleinstes α mit $\mathbf{G}_0(\alpha) \neq \mathbf{G}_1(\alpha)$. Da aber

$$\mathbf{G}_0|_\alpha = \mathbf{G}_1|_\alpha,$$

haben wir

$$\mathbf{G}_0(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_0|_\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_1|\alpha)) = \mathbf{G}_1(\alpha),$$

und dies widerspricht unserer Annahme.

Wir zeigen nun die Existenz von $\mathbf{G}$. Wir betrachten die Klasse $\mathbf{H}$, die gegeben ist durch alle Funktionen f mit

(i) $dom(f) = \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbf{On}$;
(ii) $\forall \beta < \alpha (f(\beta) = \mathbf{F}(f|_\beta))$.

Dann sieht man unschwer, daß

$$\forall f\, g \in \mathbf{H} (f \subseteq g \vee g \subseteq f).$$

Weiterhin gilt:

wenn $f \in \mathbf{H}$, $dom(f) = \alpha$, so ist $f \cup \{(\alpha, \mathbf{F}(f))\} \in \mathbf{H}$

und

wenn $A \subseteq \mathbf{H}$, so ist $\bigcup A \in \mathbf{H}$.

Damit sind für $dom(\mathbf{H})$ die Bedingungen zur Anwendung des Induktionsprinzips erfüllt, und somit ist $\bigcup \mathbf{H}$ die gesuchte funktionale Klasse. □

Korollar 3 (Rekursionssatz für ω):
Sei $\mathbf{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ eine funktionale Klasse und a eine Menge. Dann gibt es genau eine Funktion $g : \omega \to \mathbf{V}$ mit

$$\begin{aligned} g(0) &= a; \\ g(n') &= \mathbf{F}(g(n)) \text{ für alle } n \in \omega. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\mathbf{G}$ wie in Theorem 10. Wir betrachten die Klasse

$$\mathbf{A} = \{(n, f) \in \omega \times \mathbf{Func} : dom(f) = n', f(0) = a, \forall m < n (f(m') = \mathbf{G}(f(m))\}.$$

Dann gilt:

(*) Wenn $(n, f_0), (n, f_1) \in \mathbf{A}$, so ist $f_0 = f_1$.

Damit ist $\mathbf{A}$ eine Menge. Sei

$$g = \bigcup \{f : \exists n \in \omega\, ((n, f) \in \mathbf{A})\}.$$

Dann ist g die gewünschte Funktion und aus (*) folgt, daß g eindeutig bestimmt ist. □

Theorem 4: *Es seien* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *und* $\mathbf{G} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *funktionale Klassen,* $a \in \mathbf{V}$. *Dann gibt es genau eine funktionale Klasse* $\mathbf{H}$ *mit* $dom(\mathbf{H}) = \mathbf{On}$ *derart, daß*

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(0) &= a; \\
\mathbf{H}(\alpha') &= \mathbf{F}(\alpha, \mathbf{H}(\alpha)); \\
\mathbf{H}(\gamma) &= \mathbf{G}(\gamma, \mathbf{H}[\gamma]) \qquad \textit{für } \gamma \in \mathbf{Lim}.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen nur die Existenz einer solchen Klasse $\mathbf{H}$. Die Eindeutigkeit von $\mathbf{H}$ ergibt sich analog wie im Beweis von Theorem 10.
Wir definieren eine funktionale Klasse $\mathbf{F}^* : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ wie folgt:
Wenn $f \in \mathbf{Func}$ mit $dom(f) = \alpha$, so ist

$$\mathbf{F}^*(\alpha, f) = \begin{cases} a, \text{ wenn } \alpha = 0; \\ \mathbf{F}(\alpha^-, f(\alpha^-)), \text{ falls } \alpha \in \mathbf{Succ} \\ \mathbf{G}(\alpha, rng(f)), \text{ falls } \alpha \in \mathbf{Lim}. \end{cases}$$

In allen anderen Fällen sei $\mathbf{F}^*(b, c) = \emptyset$.
Nach Theorem 2 existiert genau eine funktionale Klasse $\mathbf{H} : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ mit

$$\mathbf{H}(\alpha) = \mathbf{F}^*(\alpha, \mathbf{H}|_\alpha)$$

für alle $\alpha \in \mathbf{On}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(0) &= \mathbf{F}^*(\alpha, \mathbf{H}|_\alpha); \\
\mathbf{H}(\alpha') &= \mathbf{F}^*(\alpha', \mathbf{H}|_{\alpha'}) = \mathbf{G}(\alpha, \mathbf{H}|_{\alpha'}(\alpha)) = \mathbf{G}(\alpha, \mathbf{H}(\alpha)); \\
\mathbf{H}(\gamma) &= \mathbf{F}^*(\gamma, \mathbf{H}|_\gamma) = \mathbf{G}(\gamma, rng(\mathbf{H}|_\gamma)) = \mathbf{G}(\gamma, \mathbf{H}[\gamma]) \text{ für } \gamma \in \mathbf{Lim}.
\end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun, wie sich die Klasse $\mathbf{V}$ aller Mengen durch transfinite Rekursion mit Hilfe der Potenzmengenbildung und der Vereinigungsmengenbildung erzeugen läßt. Sei dazu $a = \emptyset$, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ seien definiert durch

$$\mathbf{F}(a, b) = \mathcal{P}(b);$$

$$\mathbf{G}(a, b) = \bigcup b.$$

Sei $\mathbf{H} : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ die eindeutige funktionale Klasse mit den Eigenschaften wie in Theorem 4. Für $\alpha \in \mathbf{On}$ sei

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{H}(\alpha).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 &= \emptyset; \\
\mathbf{V}_{\alpha'} &= \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha); \\
\mathbf{V}_\gamma &= \textstyle\bigcup_{\beta<\gamma} \mathbf{V}_\beta \text{ für } \gamma \in \mathbf{Lim}.
\end{aligned}$$

Die Mengen $\mathbf{V}_\alpha$ bezeichnet man als die *von Neumannschen Stufen.*
Da die $\mathbf{V}_\alpha$ Mengen sind, schreiben wir oft einfach V_α.

Die ersten vier Mengen sind:

$$V_0 = \emptyset = 0;$$

$$V_1 = \{\emptyset\} = 1;$$

$$V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2;$$

$$V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \neq 3.$$

Durch transfinite Induktion läßt sich zeigen:

Lemma 5: *Für alle* $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ *mit* $\alpha < \beta$ *gilt*

(i) $\mathbf{V}_\alpha$ *ist transitiv;*
(ii) $\mathbf{V}_\alpha \subseteq \mathbf{V}_\beta$*;*
(iii) *wenn* $a \in \mathbf{V}_\alpha$*, so ist* $\bigcup a \in \mathbf{V}_\alpha$*;*
(iv) *wenn* $b \subseteq a \in \mathbf{V}_\alpha$*, so ist* $b \in \mathbf{V}_\alpha$*;*
(v) $\mathbf{V}_\alpha \cap \alpha = \alpha$*.*

Theorem 6:

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$$

Beweis: Angenommen, das ist nicht der Fall. Sei $a \in \mathbf{V} \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$. Sei nun

$$b_0 = \{b \in a : b \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha\};$$

$$b_1 = a \setminus b_0.$$

Wir definieren eine Funktion $\rho : b_0 \to \mathbf{On}$ durch

$$\rho(c) = min\{\beta : c \in \mathbf{V}_\beta\}.$$

Sei

$$\delta = \bigcup rng(\rho).$$

Dann ist $b_0 \in \mathbf{V}_{\delta'}$. Somit muß $b_1 \neq \emptyset$ sein. Aus dem Fundierungsaxiom folgt, daß es ein $c \in b_1$ gibt mit $c \cap b_1 = \emptyset$. Dann ist aber für jedes $d \in c$, $d \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$, und analog zum Nachweis von $b_0 \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$ läßt sich zeigen, daß $c \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \mathbf{V}_\alpha$, im Widerspruch zur Wahl von c. □

Die Klasse der $\mathbf{V}_\alpha$ wird auch als *kumulative Hierarchie* bezeichnet.
Aus Theorem 6 folgt, daß es für jedes $a \in \mathbf{V}$ eine kleinste Ordinalzahl ρ gibt mit $a \in \mathbf{V}_\rho$. Dieses ρ bezeichnen wir mit $rank(a)$ und nennen es *Rang* von a.

Wir behandeln nun Aussagen, die äquivalent zum Auswahlaxiom sind.

Als *Wohlordnungsprinzip* bezeichnen wir die folgende Aussage:

(WO) Für jede Menge a gibt es ein $r \subseteq a^2$ derart, daß (a, r^2) Wohlordnung ist.

Das *Zornsche Lemma* ist die folgende Aussage:

(ZL) Sei $(a, \leq)$ eine *p.o.* derart, daß jede Kette in a eine obere Schranke besitzt. Dann hat $(a, \leq)$ ein maximales Element.

Aus dem Wohlordnungsprinzip folgt sofort

Korollar 7: *Für jede Menge A gibt es eine Ordinalzahl α mit $A \approx \alpha$.*

Die natürlichen Zahlen werden auch als *endliche* Ordinalzahlen bezeichnet. Entsprechend heißen die Ordinalzahlen, die keine natürlichen Zahlen sind, *unendliche* Ordinalzahlen.
Eine Menge a ist *endlich*, wenn sie gleichmächtig zu einer endlichen Ordinalzahl ist. Andernfalls heißt a *unendlich*. Mit Korollar 7 folgt, daß für jede Menge a gilt: Wenn a nicht endlich ist, so läßt sich ω in a einbetten.
Wir haben für endliche Mengen folgende Eigenschaften, die sich durch Induktion beweisen lassen: Ist a eine endliche Menge endlicher Mengen, so ist auch $\bigcup a$ endliche Menge. a ist endlich gdw. a zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist. □

Wir treffen folgende Vereinbarung:
Eine Folge der *Länge* α ist eine Funktion f mit $dom(f) = \alpha$. Wir benutzen

$$(s_\beta)_{\beta<\alpha} \text{ bzw. } (s(\beta))_{\beta<\alpha}$$

zur Bezeichnung von Folgen der Länge α. $(s_\beta)_{\beta<\alpha}$ bezeichnet dabei die Funktion, die gegeben ist durch die Menge $\{(\beta, s_\beta) : \beta < \alpha\}$.

Sei A eine beliebige Menge. Aus Korollar 7 folgt, daß es ein $\alpha \in \mathbf{On}$ sowie eine Funktion f gibt, die A eineindeutig auf α abbildet. Somit haben wir:

Für jede Menge A gibt es eine Folge $(a_\beta)_{\beta<\alpha}$ mit

$$A = \{a_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Wir bezeichnen dann die Folge $(a_\beta)_{\beta<\alpha}$ als *Aufzählung* von A. Wir werden im folgenden oft mit Aufzählungen arbeiten. Wir verlangen von Aufzählungen im allgemeinen nicht, daß die a_α paarweise voneinander verschieden sind.

Theorem 8: *Die Aussagen AC, WO und ZL sind äquivalent.*

Beweis: Wir zeigen $AC \to WO \to ZL \to AC$.
$AC \to WO$:
Sei a eine beliebige Menge. Sei $w : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ eine Auswahlfunktion. Wir definieren eine funktionale Klasse $\mathbf{F}$ wie folgt:

$$\mathbf{F}(0) = w(a);$$

$$\mathbf{F}(\alpha) = \begin{cases} w(a \setminus \bigcup\{\mathbf{F}(\beta) : \beta < \alpha\}) \text{ falls } a \setminus \bigcup\{\mathbf{F}(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset; \\ a \text{ sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: Es gibt ein α mit $\mathbf{F}(\alpha) = a$.

Beweis der Behauptung: Wenn es kein α gibt mit $\mathbf{F}(\alpha) = a$, so ist $\mathbf{F}^{-1}$ eine Bijektion einer Teilmenge von a auf **On**. Das widerspricht aber dem Ersetzungsschema.

Sei α die kleinste Ordinalzahl mit $F(\alpha) = a$. Sei f die Einschränkung von **F** auf α. Dann liefert f eine Wohlordnung von a.

$WO \to ZL$:
Sei $(a, \leq)$ eine *p.o.* derart, daß jede Kette in $(a, \leq)$ eine obere Schranke besitzt. Wir wollen zeigen, daß $(a, \leq)$ ein maximales Element besitzt. Sei dazu $(a_i)_{i<\gamma}$ eine Wohlordnung von a. Wir definieren eine Funktion $\mathbf{h} : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ wie folgt:
Sei $\alpha \in \mathbf{On}$ und für $\beta < \alpha$ sei $\mathbf{h}(\beta)$ bereits definiert. Sei

$$b_\alpha = \{\delta < \gamma : \forall \beta < \alpha \, (a_{\mathbf{h}(\beta)} < a_\delta)\}.$$

Wir setzen

$$\mathbf{h}(\alpha) = \begin{cases} min(b_\alpha), \text{ wenn } b_\alpha \neq \emptyset; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Man macht sich leicht klar, daß es ein $\alpha > 0$ geben muß mit $\mathbf{h}(\alpha) = 0$. Sei α^* das kleinste solche α. Dann ist $(a_{\mathbf{h}(\beta)})_{\beta<\alpha^*}$ eine streng monoton wachsende Folge, also auch eine Kette, und besitzt damit eine obere Schranke. Wegen $b_{\alpha^*} = \emptyset$ ist das nur möglich, wenn α^* eine Nachfolgerzahl ist. Sei $\alpha^* = \beta + 1$. Dann ist $a_{\mathbf{h}(\beta)}$ ein maximales Element.

$ZL \to AC$:
Sei a eine Menge nichleerer Mengen. Sei F die Menge aller Funktionen f mit

(i) $dom(f) \subseteq a$;
(ii) $\forall c \in dom(f) \, (f(c) \in c)$.

Dann ist $(F, \subseteq)$ eine *p.o.* und die Vereinigung jeder Kette aus F gehört zu F. Also sind die Voraussetzungen für das Zornsche Lemma erfüllt. Sei f^* ein maximales Element von F. Dann ist f^* eine Auswahlfunktion für a. □

Man kennt eine Vielzahl von Aussagen, die äquivalent zum Auswahlaxiom sind. Wir wollen noch ein weiteres Beispiel angeben.
Ein *Gruppoid* ist eine Struktur $(A, \circ)$, wobei $\circ$ eine binäre Operation ist. Ein Gruppoid $(A, \circ)$ erfüllt die *Kürzungsregel*, wenn gilt

$$\forall abc \in A \, ((a \circ b = a \circ c \to b = c) \wedge (a \circ c = b \circ c \to a = b)).$$

Beispielsweise ist jede Gruppe ein Gruppoid, das die Kürzungsregel erfüllt. Von A. Hajnal und A. Kertesz (Some new algebraic equivalents of the Axiom of Choice, Publ. Math. Debrecen 19 (1972), 339-340) wurde die folgende Äquivalenz zum Auswahlaxiom gefunden:

Theorem 9: *Die folgende Aussage ist äquivalent zum Auswahlaxiom:*
Auf jeder nichtleeren Menge existiert ein Gruppoid, das die Kürzungsregel erfüllt.

Beweis:

($\longrightarrow$)
Sei x eine beliebige Menge. Wenn $|x| = n < \omega$, so können wir x mit n identifizieren und nehmen als Gruppoid auf x die natürlichen Zahlen modulo n.
Sei nun $|x| = \kappa \geq \omega$. Dann ist $\kappa^{<\omega} = \kappa$ und wir können x mit $[\kappa]^{<\omega}$ identifizieren. Es bezeichne Δ die symmetrische Differenz von Mengen. Dann ist $([\kappa]^{<\omega}, \Delta, \emptyset)$ eine abelsche Grupe über x und somit erst recht ein Gruppoid, das die Kürzungsregel erfüllt.

($\longleftarrow$)
Wir erinnern daran, daß für beliebige Mengen x und y, $x \preceq y$ bedeutet, daß eine Injektion von x in y existiert. Sei x eine beliebige Menge. Wir wollen für x eine Wohlordnung finden. O.B.d.A. nehmen wir an, daß x keine Ordinalzahlen enthält. Wir setzen

$$\Gamma(x) = \{\alpha \in \mathbf{On} : \alpha \preceq x\}.$$

Sei weiterhin

$$y = x \cup \Gamma(x).$$

Sei $\circ$ eine binäre Operation auf y, die $(y, \circ)$ zu einem Gruppoid macht, das die Kürzungsregel erfüllt.

Behauptung: Für jedes $a \in x$ gibt es ein $\alpha \in \Gamma(x)$ mit $a \circ \alpha \in \Gamma(x)$.

Beweis der Behauptung: Angenommen, das ist für ein $a \in x$ nicht der Fall. Wir betrachten die Funtion $f : \Gamma(x) \to y$, die gegeben ist durch

$$f(\alpha) = a \circ \alpha.$$

Dann ist f eine Injektion von $\Gamma(x)$ in x. Somit ist $\Gamma(x) \preceq x$, und das widerspricht der Definition von $\Gamma(x)$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Sei

$$z = \Gamma(x) \times \Gamma(x).$$

Auf z existiert eine Wohlordnung $<_1$. Sei für $a \in x$, $\pi(a)$ das $<_1$-kleinste Element von

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \Gamma(x), a \circ \alpha = \beta\}.$$

Dann bildet π die Menge x in z ab, und aus der Kürzungsregel folgt, daß π injektiv ist. Somit induziert π eine Wohlordnung auf x. $\square$

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Theorem, das eine typische Anwendung des Zornschen Lemmas zeigt. Dieses Theorem besagt, daß sich jede partielle Ordnung zu einer linearen Ordnung erweitern läßt.

Theorem 10 : *Sei $(A, <)$ eine p.o. Dann gibt es eine lineare Ordnung $(A, <_1)$ mit $< \subseteq <_1$.*

Beweis : Sei $(A, <)$ gegeben. Wir betrachten die Menge

$$L = \{R \subseteq A \times A : < \subseteq R, (A, R) \text{ ist } \textit{p.o.}\}.$$

L bildet bzgl. $\subseteq$ eine *p.o.*, die die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt.
Sei R^* ein maximales Element in $(L, \subseteq)$. Wir werden zeigen, daß (A, R^*) eine lineare Ordnung ist:
Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $(a, b) \notin R^*$ und $(b, a) \notin R^*$. Wir setzen

$$S = R^* \cup \{(a, b)\} \cup \{(c, b) : (c, a) \in R^*\} \cup \{(a, c) : (b, c) \in R^*\}.$$

Man rechnet unschwer nach, daß S eine *p.o.* auf A ist, die R^* echt enthält. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von R^*. □

8 Partielle Ordnungen

Sei $(A, <)$ eine *p.o.*, $a, b \in A$, $a < b$. Wenn $\neg\exists c\,(a < c \wedge c < b)$, so heißt b *Nachfolger* von a (und entsprechend heißt a *Vorgänger* von b). Falls $(A, <)$ eine lineare Ordnung ist, so besitzt jedes Element $a \in A$ höchstens einen Vorgänger und höchstens einen Nachfolger. Das ist in *p.o.*'s nicht notwendig der Fall. Sei $B, C \subseteq A$. Wir schreiben $B < C$, wenn $\forall b \in B\,\forall c \in C\,(b < c)$. Wenn etwa $B = \{b\}$, so schreiben wir einfach $b < C$ für $\{b\} < C$.
Sei $B \subseteq A$. Wenn gilt

$$\forall a\, b \in B\, \forall c\,(a < c \wedge c < b \rightarrow c \in B),$$

so bezeichnen wir B als *Segment*.
Sei $a, b \in A$, $a < b$. Wir setzen

$$I_{(a,b)} = \{c \in A : a < c \wedge c < b\}.$$

Statt $I_{(a,b)}$ schreiben wir oft (a, b). Die Menge (a, b) bezeichnen wir auch als das durch a und b erzeugte Segment. Falls $(A, <)$ eine lineare Ordnung ist, so bezeichnen wir Segmente auch als *Intervalle*.

Seien $(A, <_1)$ und $(B, <_2)$ *p.o.*'s. Als *Ordnungssumme* $(A, <_0) \oplus (B, <_1)$ (oder kürzer $A \oplus B$) bezeichnen wir die *p.o.* $(C, <)$ mit dem Grundbereich

$$C = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$$

und der Ordnungsrelation $<$, die gegeben ist durch

$$(a, b) < (c, d) \text{ gdw. } \begin{cases} b = 0 \text{ und } d = 1 \text{ oder} \\ b = d = 0 \text{ und } a <_0 c \text{ oder} \\ b = d = 1 \text{ und } a <_1 c. \end{cases}$$

Als *Ordnungsprodukt* $(A, <_0) \otimes (B, <_1)$ (oder kürzer $A \otimes B$) bezeichnen wir die *p.o.* $(C, <)$ mit dem Grundbereich

$$A \times B$$

und der Ordnungsrelation $<$, die gegeben ist durch

$$(a, b) < (c, d) \text{ gdw. } \begin{cases} b <_1 d \text{ oder} \\ b = d \text{ und } a <_0 c. \end{cases}$$

Die Ordnungssumme und das Ordnungsprodukt sind beide assoziativ, d.h., wenn $(A, <_A)$, $(B, <_B)$, $(C, <_C)$ lineare Ordnungen sind, so ist

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

und

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

Ordnungssumme und Ordnungsprodukt lassen sich wie folgt verallgemeinern: Sei $(P, <)$ eine *p.o.* und für jedes $i \in P$ sei $(A_i, <_i)$ eine *p.o.* Dann bezeichnet

$$\bigoplus_{i \in P} (A_i, <_i)$$

(bzw. kürzer $\bigoplus_{i \in P} A_i$) die *p.o.* $(C, <_c)$ mit

$$C = \bigcup \{A_i \times \{i\} : i \in P\}$$

und

$$(a, i) <_c (b, j) \quad \text{gdw.} \quad i < j \text{ oder } \; i = j \text{ und } \; a <_i b.$$

Für den Fall des Ordnungsproduktes müssen wir eine Einschränkung treffen:
Sei $(W, <)$ eine Wohlordnung und für jedes $i \in W$ sei $(A_i, <_i)$ eine *p.o.* Dann bezeichnet

$$\bigotimes_{i \in W} (A_i, <_i)$$

(bzw. kürzer $\bigotimes_{i \in W} A_i$) die *p.o.* $(D, <_d)$ mit

$$D = \prod_{i \in W} A_i$$

und

$$u <_d v \quad \text{gdw.} \quad \text{für des } W\text{-kleinste } i \text{ mit } \; u(i) \neq v(i) \text{ gilt } \; u(i) <_i v(i).$$

Man sieht leicht:

Wenn $(P, <)$ eine Wohlordnung ist und für jedes $i \in P$ ist $(A_i, <_i)$ eine Wohlordnung, so sind auch $\bigoplus_{i \in P} A_i$ und $\bigotimes_{i \in P} A_i$ Wohlordnungen.

Eine *p.o.* $(A, <)$ heißt *dicht*, wenn

$$\forall a\, b \in A\, (a < b \to \exists c \in A\, (a < c \wedge c < b)).$$

Wir bezeichnen mit η die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit ihrer natürlichen Ordnung.

Theorem 1: *Sei $(A, <)$ eine dichte lineare Ordnung ohne erstes und ohne letztes Element mit $|A| = \omega$. Dann ist $(A, <) \cong \eta$.*

Beweis: Sei $(a_i)_{i<\omega}$ eine Aufzählung von A und sei $(r_i)_{i<\omega}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$. Wir bilden eine Folge $(f_i)_{i<\omega}$ von endlichen Funktionen derart, daß für $i < k < \omega$ gilt

(i) $f_i \subseteq f_k$;
(ii) $\{a_j : j < i\} \subseteq dom(f_i) \subseteq A$;
(iii) $\{r_j : j < i\} \subseteq rng(f_i) \subseteq \mathbb{Q}$;
(iv) f_i ist eine ordnungserhaltende Abbildung.

Wir setzen

$$f_0 = \{(a_0, r_0)\}.$$

Sei f_n bereits konstruiert. Wir konstruieren zunächst ein $g_n \supseteq f_n$.
Wenn $a_n \in dom(f_n)$, so sei $g_n = f_n$.
Sei jetzt $a_n \notin dom(f_n)$. Sei $dom(f_n) = \{d_i : i < k\}$ mit $d_0 < d_1 < \cdots < d_k$. Für $i \leq k$ sei

$$I_i = (d_{i-1}, d_i)$$

mit $d_{-1} = -\infty$, $d_{k+1} = \infty$. Sei i_0 so, daß $a_n \in T_{i_0}$. Dann wählen wir ein $r \in (f(d_{i_0-1}), f(d_{i_0}))$ und setzen

$$g_n = f_n \cup \{(a_n, r)\}.$$

Wenn $r_n \in rng(g_n)$, so setzen wir

$$f_{n+1} = g_n.$$

Andernfalls sei $rng(g_n) = \{e_i : i < l\}$ mit $e_0 < e_1 < \cdots < e_l$. Für $i < l$ sei

$$J_i = (e_{i-1}, e_i)$$

mit $e_{-1} = -\infty$, $e_{l+1} = \infty$. Sei j_0 so, daß $r_n \in J_{j_0}$. Dann wählen wir ein $a \in (g_n^{-1}(e_{j_0-1}), g_n^{-1}(e_{j_0}))$ und setzen

$$f_{n+1} = g_n \cup \{(a, r_n)\}.$$

Dann ist

$$\bigcup_{n<\omega} f_n$$

ein Isomorphismus von $(A, <)$ auf η. □

Sei $(A, <)$ eine *p.o.*, $X, Y \subseteq A$. Das Paar (X, Y) ist ein *Schnitt*, wenn $X, Y \neq \emptyset$ und $X < Y$. Ein Schnitt (X, Y) ist eine *Lücke*, wenn es kein $a \in A$ gibt mit $X \leq a$ und $a \leq Y$. Eine *p.o.* $(A, <)$ heißt *vollständig*, wenn sie keine Lücken besitzt. Ein Beispiel für eine vollständige lineare Ordnung liefert die Menge der reellen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung, $(\mathbb{R}, <)$.

Sei $(A, <)$ eine lineare Ordnung, $D \subseteq A$. D heißt *dichte Teilmenge*, wenn

$$\forall a\, b \in A\, (a < b \rightarrow a \in D \vee \exists d \in D\, (a < d \wedge d < b)).$$

Lemma 2: *Seien $(A_0, <_0)$, $(A_1, <_1)$ vollständige lineare Ordnungen ohne kleinstes und ohne größtes Element, D_0 sei dichte Teilmenge von A_0 und D_1 sei dichte Teilmenge von A_1. Wenn $f : D_0 \rightarrow D_1$ eine ordnungserhaltende Abbildung ist, so läßt sich f_0 fortsetzen zu einer ordnungserhaltenden Abbildung*

$$\tilde{f} : A_0 \rightarrow A_1$$

von A_0 in A_1. Wenn f eineindeutig ist, so ist auch $\tilde{f}$ eineindeutig. Wenn $rng(f) = D_1$, so ist $rng(\tilde{f}) = A_1$.

Beweis: Sei $r \in A_0$. Wir setzen

$$X = \hat{r} \cap D_0;$$

$$Y = f[X].$$

Dann ist Y eine beschränkte Teilmenge von D_1. Wir wählen für $\tilde{f}(r)$ die kleinste obere Schranke von Y. Dann ist $\tilde{f}$ ordnungserhaltend und $f \subseteq \tilde{f}$. Man sieht leicht, daß aus der Eineindeutigkeit von f folgt, daß auch $\tilde{f}$ eineindeutig ist und daß aus $rng(f) = D_1$ folgt, daß $rng(\tilde{f}) = A_1$ ist. □

Nun bilden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine vollständige dichte lineare Ordnung ohne erstes und ohne letztes Element. Weiterhin bildet die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Aus Theorem 1 und Lemma 2 folgt nun

Theorem 3: *Jede vollständige dichte lineare Ordnung ohne erstes und ohne letztes Element, die eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, ist isomorph zu $(\mathbb{R}, <)$.*

Sei $(I, <)$ eine Wohlordnung und für jedes $i \in I$ sei $(L_i, <_i)$ eine lineare Ordnung. Auf $\prod_{i \in I} L_i$ können wir eine lineare Ordnung $<_l$ einführen durch

$$s < t \text{ gdw. } \exists i \in I\,(s(i) < t(i) \wedge \forall k < i\,(s(k) = t(k))).$$

$(\prod_{i \in I} L_i, <_l)$ heißt *lexikographische Ordnung* von $\{L_i : i \in I\}$. Wir schreiben für diese lineare Ordnung oft einfach $\prod_{i \in I} L_i$.
Wenn $\{L_i : i \in I\}$ eine Familie von Wohlordnungen ist, so ist auch $(\prod_{i \in I} L_i, <_l)$ eine Wohlordnung.
Wenn $(L_0, <_0)$ und $(L_1, <_1)$ lineare Ordnungen sind, so ist die lexikographische Ordnung $L_0 \times L_1$ isomorph zum Ordnungsprodukt $L_0 \otimes L_1$. Hieraus folgt sofort, daß auch das lexikographische Produkt assoziativ ist.

Beispiel: (1) Wir bezeichnen mit *Fin* die Menge der endlichen Teilmengen von ω. Sei $a, b \subseteq \omega$. Wir haben in Kapitel 2 $a =_* b$ definiert als "$a \triangle b$ ist endlich", wobei die symmetrische Differenz $\triangle$ definiert wurde als $a \triangle b =_{df} (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$. Damit ist $=_*$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\omega)$. Wir schreiben $\mathcal{P}(\omega)/Fin$ für die Menge dieser Äquivalenzklassen. Für $a, b \subseteq \omega$ setzen wir

$$a \subseteq_* B \text{ gdw. } a \setminus b \in \text{Fin}.$$

Wir schreiben $a \subset_* b$ für $a \subseteq_* b \wedge \neg a =_* b$.
Sei $a_0, a_1, b_0, b_1 \subseteq \omega$ mit $a_0 =_* a_1$ und $b_0 =_* b_1$. Dann ist $a_0 \subseteq_* b_0$ gdw. $a_1 \subseteq_* b_1$. Somit können wir $\subseteq_*$ als Relation auf $\mathcal{P}(\omega)/Fin$ auffassen. Man sieht unschwer, daß $(\mathcal{P}(\omega)/Fin, \subseteq_*)$ eine *p.o.* ist.
Wir wollen zeigen, daß sich in die lineare Ordnung $(\mathcal{P}(\omega)/Fin, \subseteq_*)$ die reellen Zahlen einbetten lassen und daß $(\mathcal{P}(\omega)/Fin, \subseteq_*)$ nicht vollständig ist.
Man sieht leicht, daß $(\mathcal{P}(\omega)/Fin, \subseteq_*)$ die folgende Eigenschaft besitzt:

(1) wenn $a, b \subseteq \omega$ mit $a \subset_* b$, so gibt es ein $c \subseteq \omega$ mit $a \subset_* c \subset_* b$.

Hieraus folgt leicht, daß man jeder rationalen Zahl r eine Menge $a_r \subseteq \omega$ zuordnen kann derart, daß aus $p < r$ folgt $a_p \subset_* a_r$. Jeder reellen Zahl s ordnen wir eine Menge a_s wie folgt zu:

$$a_s = \bigcup \{a_r : r \in \mathbb{Q}, r \leq s\}.$$

Dann liefert die Zuordnung $s \to a_s$ eine Einbettung von $(\mathbb{R}, <)$ in $(\mathcal{P}(\omega)/Fin, \subseteq_*)$.
Sei $(a_i)_{i<\omega}$ eine Folge von Teilmengen von ω mit $\forall i\, k < \omega (i < k \to a_i \subset_* a_k)$ und sei $b \subseteq \omega$ mit $\forall i < \omega\, (a_i \subset_* b)$. Wir zeigen, daß es ein $c \subseteq \omega$ gibt mit $c \subset_* b$ und $\forall i < \omega\, (a_i \subset_* c)$. Dazu definieren wir eine Folge $(n_i)_{i<\omega}$ von natürlichen Zahlen induktiv wie folgt:
n_i sei irgendein Element aus

$$b \setminus (\bigcup_{k<i} a_i \cup \{n_k : k < i\}).$$

Sei

$$c = b \setminus \{n_i : i < \omega\}.$$

Dann ist

$$c \subset_* b \wedge \forall i < \omega\, (a_i \subset_* c).$$

Sei $X = \{a_i : i < \omega\}$, $Y = \{c \subseteq \omega : \forall i < \omega\, (a_i \subseteq_* c)\}$. Dann ist (X, y) eine Lücke:
Angenommen, $c_0 \subseteq \omega$ ist so, daß $X \leq c_0$ und $c_0 \leq Y$. Dann ist $c_0 \in Y$, und aus den zuletzt gemachten Überlegungen folgt, daß ein $c_1 \subseteq \omega$ existiert mit $X \subset_* c_1$, $c_1 \subset_* c_0$. Damit ist aber auch $c_1 \in Y$ und somit $c_0 \subset_* c_1$, im Widerspruch zur Wahl von c_1.

Das folgende Theorem besagt, daß sich jede partielle Ordnung in eine lineare Ordnung einbetten läßt.

Theorem 4 : *Sei $(A, <)$ eine p.o. Dann gibt es eine lineare Ordnung $(A, <_1)$ mit $<\subseteq<_1$.*

Beweis : Sei $(A, <)$ gegeben. Wir betrachten die Menge

$$L = \{R \subseteq A \times A : < \subseteq R, (A, R) \text{ ist } p.o.\}.$$

L bildet bzgl. $\subseteq$ eine *p.o.*, die die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt.
Sei R^* ein maximales Element in $(L, \subseteq)$. Wir werden zeigen, daß (A, R^*) eine lineare Ordnung ist:
Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $(a, b) \notin R^*$ und $(b, a) \notin R^*$. Wir setzen

$$S = R^* \cup \{(a, b)\} \cup \{(c, b) : (c, a) \in R^*\} \cup \{(a, c) : (b, c) \in R^*\}.$$

Man rechnet unschwer nach, daß S eine *p.o.* auf A ist, die R^* echt enthält. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von R^*. □

Sei $A = (A, <)$ eine *p.o.* Als *konverse p.o.* A^* bezeichnen wir die *p.o.* $(A, <^*)$ mit

$$<^* = \{(a, b) \in A^2 : (b, a) \in <\}.$$

So bezeichnet für $\alpha \in \mathbf{Lim}$, a^* die konverse Ordnung $(\alpha, <_c)$ mit:
Wenn $\beta, \gamma \in \alpha$, so ist $\beta <_c \gamma$ gdw. $\gamma \in \beta$.

9 Die Zahlensysteme

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß es innerhalb der Modelle von *ZFC* möglich ist, die natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen, rationalen Zahlen und reellen Zahlen geeignet zu erklären, so daß sie die uns vertrauten Eigenschaften besitzen. Das ist auf den ersten Blick gar nicht so einfach, wird doch durch die Axiome von *ZFC* nur die Existenz von recht abstrakten Mengen gesichert.

Wir haben im Kapitel 8 die Menge ω der natürlichen Zahlen eingeführt. Der Beweis des folgenden Theorems sei dem Leser als Übung überlassen:

Theorem 1:

(i) *Sei a eine Menge mit $\emptyset \in a$ und $\forall b \in a\,(s(b) \in a)$. Dann ist $\omega \subseteq a$.*

(ii) *Sei f eine Funktion mit $\omega \subseteq dom(f)$. Dann gibt es genau eine Funktion g mit $dom(g) = \omega$ und $\forall n\,(g(n) = f(g|_n))$.*

Die ganzen Zahlen $\mathbb{G}$ lassen sich wie folgt einführen: Wir betrachten die Menge ω^2 aller Paare von natürlichen Zahlen. Das Paar (m,n) soll die ganze Zahl $m-n$ repräsentieren. Wir führen auf ω^2 eine Äquivalenzrelation $\equiv$ ein durch

$$(m,n) \equiv (m',n') \text{ gdw. } m+n' = m'+n.$$

Wir bezeichnen mit $[(m,n)]$ die zu (m,n) gehörende Äquivalenzklasse. Wir setzen

$$\mathbb{G} = \{[(m,n)] : m,n \in \omega\}.$$

Wir definieren auf $\mathbb{G}$ die arithmetischen Operationen $+$, $-$ und $\cdot$ durch

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+m', n+n')];$$

$$[(m,n)] - [(m',n')] = [(m,n)] + [(n',m')];$$

$$[(m,n)] \cdot [(m',n')] = [(m\cdot m' + n\cdot n', m\cdot n' + n\cdot m')].$$

Die Ordnung auf $\mathbb{G}$ läßt sich definieren durch

$$[(m,n)] < [(m',n')] \text{ gdw. } m+n' < n+m'.$$

0 entspricht der Äquivalenzklasse $[(0,0)] = \{(m,m) : m \in \omega\}$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ lassen sich als Äquivalenzklassen auf $\mathbb{G}$ wie folgt einführen: Für $a,b \in \mathbb{G}$, $b \neq 0$, soll das Paar (a,b) die rationale Zahl a/b repräsentieren. Wir führen eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $\mathbb{G}^2$ ein durch

$$(a,b) \equiv (a',b') \text{ gdw. } a\cdot b' = b\cdot a'.$$

Wir setzen

$$\mathbb{Q} = \{[(a,b)] : a,b \in \mathbb{G}, b \neq 0\}.$$

Die Operationen $+$, $-$, $\cdot$ und $^{-1}$ werden definiert durch

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)];$$

$$[(a,b)] - [(c,d)] = [(ad - bc, bd)];$$
$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)];$$

falls $a \neq 0$, so ist
$$[(a,b)]^{-1} = [(b,a)].$$

Unmittelbar aus den Definitionen folgt, daß $\mathbb{G}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar sind.

Wir kommen jetzt zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wir benötigen zunächst eine Definition. Unter einem *Dedekind-Schnitt* verstehen wir ein nichtleeres, echtes Anfangsstück A von $\mathbb{Q}$ ohne größtes Element. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge aller Dedekind-Schnitte. Dadurch, daß wir verlangen, daß die Dedekind-Schnitte kein größtes Element haben, sichern wir, daß jeder reellen Zahl genau ein Dedekind-Schnitt entspricht. Wir beschreiben, wie auf $\mathbb{R}$ die Addition definiert wird. Die anderen arithmetischen Operationen seien dem Leser zur Übung überlassen.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Wir haben gezeigt, daß sich die üblichen Zahlklassen in den Modellen von *ZFC* definieren lassen. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß sich die gewohnten Eigenschaften entsprechend übertragen. Somit können wir etwa bei den reellen Zahlen auf die übliche Vorstellung zurückgreifen und brauchen nicht in jedem Fall auf die abstrakte Definition zurückzugehen. Wir werden davon im nächsten Kapitel Gebrauch machen, wenn wir zeigen, daß $\mathbb{R}$ und die Potenzmenge von ω die gleiche Mächtigkeit haben.

10 Ordinalzahlarithmetik

Seien α und β Ordinalzahlen. Mit $\alpha + \beta$ bezeichnen wir diejenige Ordinalzahl, die isomorph zu $\alpha \oplus \beta$ ist. $\alpha + \beta$ ist die *ordinale Summe* von α und β.
Mit $\alpha \cdot \beta$ bezeichnen wir diejenige Ordinalzahl, die isomorph zu $\alpha \otimes \beta$ ist. $\alpha \cdot \beta$ ist das *ordinale Produkt* von α und β.
Während die ordinale Summe und das ordinale Produkt assoziativ sind, sind beide nicht kommutativ. So ist
$$\omega = 1 + \omega \neq \omega + 1 = s(\omega)$$
und
$$\omega = 2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega.$$

Man überzeugt sich leicht, daß folgendes gilt:

Lemma 1:

(i) *wenn* $\beta < \gamma$, *so ist* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$;
(ii) *wenn* $\gamma \in \mathbf{Lim}$, *so ist* $\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \alpha + \beta$;
(iii) *wenn* $\beta < \gamma$ *und* $\alpha > 0$, *so ist* $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$;
(iv) *wenn* $\gamma \in \mathbf{Lim}$, *so ist* $\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \alpha \cdot \beta$;
(v) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Aus (i) folgt sofort:
Wenn $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ so ist $\beta=\gamma$, d.h., es gilt die Linkskürzungsregel der Addition.
Die Rechtskürzungsregel der Addition gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$1+\omega=2+\omega,$$

aber $1\neq 2$. Entsprechend folgt aus (iii), daß gilt:
Wenn $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$ und $\alpha>0$, so ist $\beta=\gamma$.
Die Rechtskürzungsregel der Multiplikation gilt nicht:

$$2\cdot\omega=1\cdot\omega.$$

Während (v) besagt, daß die Linksdistributivität gilt, ist die Rechtsdistributivität nicht erfüllt:

$$(1+1)\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega<\omega+\omega=1\cdot\omega+1\cdot\omega.$$

Aus der Linkskürzungsregel der Addition folgt, daß es für $\alpha,\beta\in\mathbf{On}$ mit $\alpha\leq\beta$ genau ein γ gibt mit $\alpha+\gamma=\beta$. Wir bezeichnen dieses γ mit $\alpha\dot{-}\beta$. Für $\alpha>\beta$ setzen wir

$$\alpha\dot{-}\beta=0.$$

Wir bezeichnen $\alpha\dot{-}\beta$ als *ordinale Differenz* von α und β.
Seien $a=(a_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ und $b=(b_\gamma)_{\gamma<\beta}$ Folgen. Dann bezeichnen wir mit $a^\frown b$ diejenige Folge $(c_\gamma)_{\gamma<\alpha+\beta}$, für die gilt:

$$c_\gamma=\begin{cases} a_\gamma, \text{ wenn } \gamma<\alpha;\\ b_{\gamma\dot{-}\alpha}, \text{ wenn } \alpha\leq\gamma<\alpha+\beta.\end{cases}$$

Seien α, β Ordinalzahlen, $f:\alpha\to\beta$. f ist *stetig*, wenn

(i) wenn $\gamma<\delta<\alpha$, so ist $f(\gamma)\leq f(\delta)$;
(ii) wenn $\gamma<\alpha$, $\gamma\in\mathbf{Lim}$, so ist $f(\gamma)=\bigcup_{\delta<\gamma}f(\delta)$.

Eine Ordinalzahl γ heißt *Fixpunkt* von f, wenn $f(\gamma)=\gamma$ ist.

Theorem 2: *Sei* $\mathbf{F}:\mathbf{On}\to\mathbf{On}$ *stetig und streng monoton wachsend. Dann hat* $\mathbf{F}$ *beliebig große Fixpunkte.*

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß es für jedes α ein $\beta>\alpha$ gibt mit $\mathbf{F}(\beta)=\beta$.
Sei α gegeben. Wir setzen

$$\alpha_0=\alpha;$$
$$\alpha_{k+1}=\mathbf{F}(\alpha_k);$$
$$\alpha_\omega=\bigcup_{n<\omega}\alpha_n.$$

Dann ist $\alpha=\alpha_0<\cdots<\alpha_n<\alpha_{n+1}<\cdots<\alpha_\omega$, und aus der Stetigkeit von $\mathbf{F}$ folgt, daß $\mathbf{F}(\alpha_\omega)=\alpha_\omega$ ist. □

Sei α eine beliebige Ordinalzahl, $\mathbf{F}_\alpha:\mathbf{On}\to\mathbf{On}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{F}_\alpha(\beta)=\alpha+\beta.$$

Dann ist $\mathbf{F}_\alpha$ stetig.

Wir führen nun die *ordinale Exponentiation* ein. Sei dazu α eine beliebige Ordinalzahl. Wir setzen

$$\alpha^{\cdot 0} = 1;$$

$$\alpha^{\cdot \beta+1} = \alpha^{\cdot \beta} \cdot \alpha;$$

für $\gamma \in \mathbf{Lim}$ ist

$$\alpha^{\cdot \gamma} = \bigcup_{\beta<\gamma} \alpha^{\cdot \beta}.$$

Bemerkung: Wir schreiben $\alpha^{\cdot \beta}$, um $\alpha^{\cdot \beta}$ von α^{β} zu unterscheiden.

Lemma 3: *Seien α, β, γ, δ Ordinalzahlen mit $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$. Dann ist*

(i) $\alpha^{\cdot \gamma} \leq \beta^{\cdot \gamma}$;
(ii) *wenn $\alpha > 1$, so ist $\alpha^{\cdot \gamma} < \alpha^{\cdot \delta}$.*

Lemma 4: *Sei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$. Dann gilt*

(i) $\alpha^{\cdot(\beta+\gamma)} = \alpha^{\cdot \beta} \cdot \alpha^{\cdot \gamma}$;
(ii) $\alpha^{\cdot(\beta \cdot \gamma)} = (\alpha^{\cdot \beta} \cdot) \alpha^{\cdot \gamma}$.

Sei $\alpha > 1$, und $\mathbf{G}_\alpha : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{G}_\alpha(\beta) = \alpha^{\cdot \beta}.$$

Dann ist $\mathbf{G}_\alpha$ stetig.

Lemma 5: *Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, $1 \leq \alpha < \beta$. Dann gibt es $\gamma, \delta \in \mathbf{On}$ mit $\delta < \alpha$ derart, daß*

$$\beta = \alpha \cdot \gamma + \delta.$$

γ und δ sind hierbei eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei

$$\gamma = \bigcup \{\varepsilon : \alpha \cdot \varepsilon \leq \beta\}.$$

Dann ist

$$\alpha \cdot \gamma \leq \beta < \alpha \cdot (\gamma + 1).$$

Sei

$$\delta = \beta \dot{-} \alpha \cdot \gamma.$$

Dann sind γ und δ wie verlangt. □

Theorem 6 (Cantor): *Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, $\alpha < \beta$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes k sowie eindeutig bestimmte $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}$ und $\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}$ mit $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_{k-1}$, $0 < \delta_i < \alpha$ für $i < k$ mit*

$$\beta = \alpha^{\cdot\gamma_0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\cdot\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\cdot\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}. \tag{1}$$

Beweis: Wir halten α fest und führen den Beweis durch transfinite Induktion über $\beta \geq \alpha$.
Für $\beta = \alpha$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun $\beta > \alpha$ gegeben, und die Behauptung sei richtig für alle β^* mit $\alpha \leq \beta^* < \beta$. Wir zeigen die Existenz der Darstellung (1). Wir setzen

$$\gamma_0 = \bigcup\{\varepsilon : \alpha^{\cdot\varepsilon} < \beta\}.$$

Nach Lemma 5 gibt es dann eindeutig bestimmte δ_0 und β_1 mit

$$\beta = \alpha^{\cdot\gamma_o} \cdot \delta_o + \beta_1,$$

wobei $\beta_1 < \alpha^{\cdot\gamma_0}$ ist. Aus der Wahl von γ_0 folgt $\delta_0 < \alpha$. Die Induktionsbehauptung, angewandt auf β_1, liefert uns die gewünschte Darstellung von β. Unmittelbar aus der Konstruktion folgt die Eindeutigkeit der Darstellung. □

Lemma 7:

(i) *Jedes V_α ist transitiv.*
(ii) *Wenn $\alpha < \beta$, so ist $V_\alpha \subseteq V_\beta$.*

Beweis:
(i) (Durch transfinite Induktion über α):
$\alpha = 0$: V_0 ist transitiv.
$\alpha = \beta + 1$: Sei $a \in b \in V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$. Dann ist $a \in b \subseteq V_\beta$ und somit ist $a \in V_\alpha$.
$\alpha \in \mathbf{Lim}$: Dann ist V_α als Vereinigung transitiver Mengen selbst auch transitiv.

(ii) (Durch transfinite Induktion über β):
$\beta = 0$: klar.
$\beta = \gamma + 1$: Wir nehmen an, daß für alle $\alpha \leq \gamma$ gilt $V_\alpha \subseteq V_\gamma$.
Wenn $\alpha \leq \beta$, so ist $\alpha \leq \gamma$ oder $\alpha = \beta$. Dann ist $V_\alpha \subseteq V_\gamma$ oder $V_\alpha = V_\beta$. Wegen $V_\gamma \in V_\beta$ ist mit (i), $V_\gamma \subseteq V_\beta$ und somit $V_\alpha \subseteq V_\beta$.
$\beta \in \mathbf{Lim}$: Wegen $V_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma$ ist für alle $\alpha < \beta$, $V_\alpha \subseteq V_\beta$. □

Theorem 8: $\forall a \, \exists \alpha \, (a \in V_\alpha)$.

Beweis: Angenommen, es gibt ein a mit $\forall\alpha(a \notin V_\alpha)$. Dann gilt dasselbe auch für $TC(a)$, somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß a transitiv ist.

Fall 1: $\forall b \in a \, \exists \alpha \, (b \in V_\alpha)$.
Für $b \in a$ sei $\pi(b)$ das kleinste α mit $b \in \pi(b)$. Sei

$$\gamma = \bigcup_{b \in a} \pi(b).$$

(Das Ersetzungsaxiom sichert, daß $\bigcup_{b\in a} \pi(b)$ eine Menge ist.) Dann ist $a \subseteq V_\gamma$, und somit ist $a \in V_{\gamma+1}$.

Fall 2: $\exists b \in a \forall \alpha\, (b \notin V_\alpha)$.
Wir setzen

$$a^* = \{b \in a : \forall \alpha (b \notin V_\alpha)\}.$$

Dann ist $a \neq \emptyset$. Somit gibt es nach dem Fundierungsaxiom ein $b \in a^*$ mit $\forall c \in b(c \notin a^*)$. Da a transitiv ist, ist $b \subseteq a$ und $\forall c \in b \exists \alpha (c \in V_\alpha)$. Dann ist aber b wie in Fall 1, und wir erhalten ebenfalls einen Widerspruch.
Somit haben wir gezeigt, daß $\forall a \,\exists \alpha\, (a \in V_\alpha)$. □

Lemma 9: *Sei $b \in a$, $rank(a) = \alpha$. Dann ist $rank(b) < \alpha$.*

Beweis: Wir führen den Beweis durch transfinite Induktion über α.
Wenn $\alpha = 0$, so ist nichts zu zeigen.
Sei $\alpha = \beta + 1$. Dann ist $b \in a \subseteq V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$. Damit ist $b \subseteq V_\beta$ und somit ist

$$rank(b) \leq \beta < \alpha.$$

Sei $\alpha \in \mathbf{Lim}$. Wenn

$$b \in a \subseteq V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta,$$

so existiert ein $\beta < \alpha$ mit $b \in V_\beta$. Dann haben wir

$$rank(b) < \beta < \alpha.$$

□

Aus diesem Lemma läßt sich leicht das folgende Korollar ableiten:

Korollar 10:

(i) *Für jedes α ist $rank(\alpha) = \alpha$.*
(ii) *Wenn $a \in V_\alpha$, so ist $\bigcup a \in V_\alpha$.*

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir zeigen, daß sich jede abzählbare Ordinalzahl in $\mathbb{R}$ einbetten läßt.

Lemma 11: *Sei α eine abzählbare Ordinalzahl. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(\beta_i)_{i<\omega}$ mit*

$$\bigcup_{i<\omega} \beta_i = \alpha.$$

Beweis: Sei $(\alpha_i)_{i<\omega}$ eine Aufzählung von α. Induktiv definieren wir β_i wie folgt:

$$\beta_0 = 0;$$

Sei k_{n+1} das kleinste $k < \omega$ mit $\alpha_k > \beta_n$. Dann ist

$$\beta_{n+1} = \alpha_k.$$

Dann leistet die Folge $(\beta_i)_{i<\omega}$ das verlangte. $\square$

Theorem 12: *Eine Ordinalzahl α läßt sich in $\mathbb{R}$ einbetten gdw. sie höchstens abzählbar ist.*

Beweis: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $type(A) = \alpha$. Sei $(a_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine Aufzählung von A mit $a_\beta < a_\gamma$ für $\beta < \gamma < \alpha$. Wir betrachten die offenen Intervalle $(a_\beta, a_{\beta+1})$ für $\beta < \alpha$. Jedes dieser Intervalle enthält eine rationale Zahl. Da die Intervalle paarweise disjunkt sind und es nur abzählbar viele rationale Zahlen gibt, muß $|\alpha| \leq \omega$ sein.
Wir zeigen nun durch Induktion über α, daß sich jedes $\alpha < \omega_1$ in $\mathbb{R}$ einbetten läßt.
Wenn $\alpha < \omega$, so ist das klar.
Sei $\alpha < \omega_1$, und für jedes $\beta < \alpha$ sei bereits gezeigt, daß sich β in $\mathbb{R}$ einbetten läßt.
Sei $\alpha = \beta + 1$. Da sich β in $\mathbb{R}$ einbetten läßt, gibt es auch eine Einbettung $\pi : \beta \to (0, 1)$ von β in das Intervall $(0, 1)$. Sei nun

$$\pi^* = \pi \cup \{(\beta, 1)\}.$$

Dann ist π^* eine Einbettung von α in $\mathbb{R}$.
Sei $\alpha \in \mathbf{Lim}$.
Wir wählen eine streng monoton wachsende Folge $(\beta_i)_{i<\omega}$ mit $\bigcup_{i<\omega} \beta_i = \alpha$. Wir setzen

$$\gamma_0 = \beta_0,$$

$$\gamma_{n+1} = \beta_{n+1} \dot{-} \beta_n.$$

Dann ist für jedes $n < \omega$, $\gamma_n < \alpha$. Für $n < \omega$ sei π_i eine Einbettung von γ_i in das Intervall $(i, i + 1)$. Dann ist

$$\pi = \bigcup_{i<\omega} \pi_i$$

eine Einbettung von α in $\mathbb{R}$. $\square$

11 Kardinalzahlen

Eine Ordinalzahl α ist eine *Kardinalzahl*, wenn für alle $\beta < \alpha$ gilt $\beta \not\approx \alpha$, d.h., wenn es keine Bijektion von β auf α gibt.
Wir bezeichnen Kardinalzahlen mit griechischen Buchstaben. Während α, β, γ, ... sowohl Kardinal- als auch Ordinalzahlen bezeichnen, sind κ, λ, ... ausschließlich für Kardinalzahlen reserviert.
Sei X eine Menge. Dann bezeichnet $|X|$ diejenige Kardinalzahl κ, für die $X \approx \kappa$ ist. Korollar 7.7 impliziert, daß für jede Menge X genau eine solche Kardinalzahl existiert. $|X|$ heißt *Mächtigkeit* von X.
Bemerkung: Die Mächtigkeit einer Menge läßt sich nur mit Hilfe von AC auf diese Art definieren. In Kapitel 18 ist ausgeführt, welche Probleme bei der Definition der Mächtigkeit auftreten, wenn man AC nicht zur Verfügung hat.
Aus der Definition der Mächtigkeit folgt sofort, daß gilt:

Wenn $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, $\alpha < \beta$, so ist $|\alpha| \leq |\beta|$.

Sei κ eine Kardinalzahl. Aus dem Theorem von Cantor folgt, daß $\kappa < |\mathcal{P}(\kappa)|$ ist. Damit gibt es eine kleinste Kardinalzahl λ mit $\lambda > \kappa$. Diese Kardinalzahl λ bezeichnen wir mit κ^+.

Wir wollen zunächst zeigen, daß jede natürliche Zahl Kardinalzahl ist. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 1: *Sei* $f \in \mathbf{Func}$, $A = dom(f)$, $B = rng(f)$. *Dann ist* $|B| \leq |A|$.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß es eine Injektion

$$g : B \to A$$

gibt.
Sei $<_w$ eine Wohlordnung von A. Für $b \in B$ sei $g(b)$ das $<_w$-kleinste Element aus $f^{-1}(b)$. Damit ist g die gewünschte Injektion. □

Lemma 2: *Seien* A *und* B *Mengen mit* $|A| \leq |B|$, $a \in A$, $b \in B$. *Dann ist auch* $|A \setminus \{a\}| \leq |B \setminus \{b\}|$.

Beweis: Sei f eine Injektion von A in B. Wir definieren dann

$$g : A \setminus \{a\} \to B \setminus \{b\}$$

wie folgt:
Wenn $f(a) = b$, so ist $f|_{A\setminus\{a\}}$ eine Injektion von $A \setminus \{a\}$ in $B \setminus \{b\}$.
Sei nun $f(a) \neq b$. Dann definieren wir eine Funktion g mit $dom(g) = A \setminus \{a\}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ wenn } f(x) \neq b; \\ f(a), \text{ wenn } f(x) = b. \end{cases}$$

Dann ist g eine Injektion von $A \setminus \{a\}$ in $B \setminus \{b\}$ und somit ist

$$|A \setminus \{a\}| \leq |B \setminus \{b\}|.$$

□

Lemma 3: *Seien* $m, n \in \omega$, $m < n$. *Dann ist* $|m| < |n|$.

Beweis: Aus $m \subseteq n$ folgt $|m| \leq |n|$.
Angenommen, es gibt $m, n \in \omega$, $m < n$ mit $|m| = |n|$. Wir wählen das kleinste n, für das es ein $m < n$ mit $|m| = |n|$ gibt. Offensichtlich sind dann m und n von 0 verschieden. Analog zum Beweis von Lemma 2 folgt, daß dann auch $|m-1| = |n-1|$ ist, im Widerspruch zur Wahl von n. □

Mit Lemma 3 haben wir, daß jede natürliche Zahl auch Kardinalzahl ist.

Theorem 4: *Sei* A *eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist auch* $\bigcup A$ *eine Kardinalzahl.*

Beweis: Sei

$$\alpha = \bigcup A.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt in A eine größte Kardinalzahl κ.
Dann ist $\bigcup A = \kappa$, also ist $\bigcup A$ eine Kardinalzahl.

Fall 2: Für jedes $\kappa \in A$ gibt es ein $\lambda \in A$ mit $\kappa < \lambda$.
Angenommen, $\bigcup A$ ist keine Kardinalzahl. Sei

$$\kappa = |\alpha|.$$

Wegen $\kappa < \alpha$ gibt es dann ein $\lambda \in A$ mit $\kappa < \lambda$. Aber hieraus folgt sofort der Widerspruch

$$|\alpha| = \kappa < \lambda \leq |\alpha|.$$

Damit muß $\bigcup A$ eine Kardinalzahl sein. □

Wir bezeichnen mit **Card** die Klasse aller Kardinalzahlen.

Aus Theorem 4 folgt sofort, daß auch ω eine Kardinalzahl ist.

Sei A eine beliebige Menge. A heißt *abzählbar*, wenn $|A| = \omega$ ist und *überabzählbar*, wenn $|A| > \omega$ ist.

Theorem 5: *Die Klasse* **Card** *ist keine Menge.*

Beweis: Sei $\mathbf{F}$ die funktionale Klasse, die aus allen Paaren (a, b) besteht mit

$$b = \omega \cup \{|d|^+ : \exists c\,((c,d) \in a)\}$$

Sei $\mathbf{G}$ wie in Theorem 7.2 (Theorem über transfinite Rekursion) definiert. Dann ist $\mathbf{G} : \mathbf{On} \to \mathbf{Card}$. Die Funktion $\mathbf{G}$ ist bijektiv, und damit kann **Card** keine Menge sein. □

Die Funktion $\mathbf{G}$ aus dem Beweis von Theorem 5 hat als Wertebereich die Klasse aller unendlichen Kardinalzahlen. Wir setzen

$$\omega_\alpha = \mathbf{G}(\alpha).$$

Statt ω_α wird oftmals auch die Bezeichnung $\aleph_\alpha$ gewählt ($\aleph$, gesprochen *aleph*, ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets).
Wir haben nun:

Lemma 6:

(i) *Für jede unendliche Kardinalzahl κ gibt es ein α mit $\kappa = \omega_\alpha$.*
(ii) *Wenn $\alpha < \beta$, so ist $\omega_\alpha < \omega_\beta$.*

Eine Kardinalzahl κ ist *Limeskardinalzahl*, wenn $\kappa = \omega_0$ oder $\kappa = \omega_\gamma$ für eine Limesordinalzahl γ. Sei $\kappa \neq 0$ und keine Limeskardinalzahl. Dann heißt κ *Nachfolgerkardinalzahl*. Damit ist κ eine Nachfolgerkardinalzahl, wenn es eine Kardinalzahl λ gibt mit $\lambda^+ = \kappa$.

Seien a und b Mengen. In Kapitel 4 haben wir ${}^b a$ eingeführt als die Menge

$${}^b a = \{f \in \mathbf{Func} : dom(f) = b \wedge rng(f) \subseteq a\}.$$

Die *Kardinalzahlexponentiation* wird wie folgt eingeführt: Seien $\kappa, \lambda \in \mathbf{Card}$. Dann setzen wir

$$\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|.$$

Sei κ eine beliebige Kardinalzahl, $X \subseteq \kappa$. Dann ist die Menge X eindeutig durch ihre charakteristische Funktion $ch_X : \kappa \to 2$ bestimmt, die gegeben ist durch

$$ch_X(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } \alpha \in X; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort

$$|\mathcal{P}(\kappa)| = |{}^\kappa 2| = 2^\kappa.$$

Sei a eine beliebige Menge, κ eine Kardinalzahl. Dann setzen wir

$$[a]^\kappa = \{b \subseteq a : |b| = \kappa\};$$

$$[a]^{<\kappa} = \{b \subseteq a : |b| < \kappa\}$$

und

$$[a]^{\leq\kappa} = \{b \subseteq a : |b| \leq \kappa\}.$$

Weiterhin setzen wir für beliebiges $\alpha \in \mathbf{On}$

$${}^{<\alpha}a = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^\beta a.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $|\mathbb{R}| = 2^\omega$ ist:

Theorem 7:

$$|\mathbb{R}| = 2^\omega.$$

Beweis: Nach dem Theorem von Schröder-Bernstein genügt es, $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\omega)|$ und $|\mathcal{P}(\omega)| \leq \mathbb{R}$ zu zeigen.

Die Funktion $y = arctan(x)$ liefert eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$. Durch eine lineare Transformation läßt sich dieses Intervall auf das offene Intervall $(1,2)$ abbilden. Somit sind $\mathbb{R}$ und das offene Intervall $(1,2)$ gleichmächtig. Wir definieren eine Injektion

$$f : (1,2) \to \mathcal{P}(\omega)$$

durch

$$f(r) = \{[r \cdot 10^i] : i \in \omega\}$$

(wobei [x] den ganzzahligen Anteil von x bezeichnet). Eine Injektion

$$g : \mathcal{P}(\omega) \to \mathbb{R}$$

definieren wir durch

$$g(a) = \sum_{i \in a} \frac{1}{3^i}.$$

Damit muß $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\omega)|$ sein. $\square$

Korollar 8:

(i) $|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| > 2^\omega$.
(ii) *Es gibt 2^ω stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.*

Beweis:
(i) Sei $|\mathbb{R}| = \kappa$. Dann ist $|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| \geq {}^{\mathbb{R}}2 = 2^\kappa > \kappa = 2^\omega$.
(ii) Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, so ist f bereits durch $f|_{\mathbb{Q}}$ eindeutig bestimmt. Aber $|{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = (2^\omega)^\omega = 2^\omega$. □

Es stellt sich die Frage, wie groß 2^κ im Vergleich zu κ ist. Die berühmte *Kontinuum-Hypothese* ist die folgende Aussage:

(CH) $2^\omega = \omega_1$.

Sie besagt gerade, daß sich zwischen der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen keine weitere Mächtigkeit finden läßt.
Eine Verschärfung der Kontinuum-Hypothese ist die *verallgemeinerte Kontinuum-Hypothese*, die folgendes besagt:

(GCH) $\forall\alpha(2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$.

Von Gödel wurde 1938 gezeigt, daß *CH* relativ zu *ZFC* konsistent ist. Man vergleiche hierzu auch Kapitel 23.
Andererseits wurde von Cohen 1963 gezeigt, daß auch $\neg CH$ relativ zu *ZFC* konsistent ist. Er führte hierzu die sogenannte Forcing-Methode ein, die zu einer fundamentalen Methode der modernen Mengenlehre geworden ist. Als anwenderfreundlicher Extrakt hiervon läßt sich Martin's Axiom auffassen, auf das in Kapitel 23 ausführlich eingegangen wird.

12 Kardinalzahlarithmetik

Seien κ und λ Kardinalzahlen. Wir definieren die *Summe* und das *Produkt* von κ und λ wie folgt:

$$\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|;$$
$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|.$$

Es ergibt sich hieraus sofort:
Wenn A und B disjunkte Mengen sind, so ist $|A| + |B| = |A + B|$.
Für beliebige Mengen A und B ist $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Eine Ordinalzahl α heißt *gerade*, wenn $\alpha = \gamma + 2n$, wobei $\gamma \in \mathbf{Lim} \cup \{0\}$ und $n \in \omega$. Ansonsten heißt α *ungerade*. Wir haben nun

Lemma 1: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist*

$$\kappa + \kappa = \kappa.$$

Beweis: Sei

$$A = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ ist gerade } \},$$

$$B = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ ist ungerade } \}.$$

Wir definieren $f : \kappa \to A$ und $g : \kappa \to B$ wie folgt:
Sei $\alpha = \gamma + n < \kappa$, $\gamma \in \{0\} \cup \mathbf{Lim}$. Dann ist

$$f(\alpha) = \gamma + 2n;$$

$$g(\alpha) = \gamma + 2n + 1.$$

Dann ist f eine Bijektion von κ auf A, und g ist eine Bijektion von κ auf B. Damit haben wir $|A| = |B| = \kappa$, und wegen $A \cup B = \kappa$, $A \cap B = \emptyset$ folgt nun

$$\kappa + \kappa = \kappa.$$

□

Lemma 2: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist*

$$\kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch transfinite Induktion über κ.
Sei $\kappa = \aleph_0$. Die Abbildung $f : \aleph_0 \to \aleph_0 \times \aleph_0$ mit $f(n) = (n, 0)$ ist injektiv, somit ist $\aleph_0 \leq |\aleph_0 \times \aleph_0|$. Wir definieren nun eine Injektion $\pi : \aleph_0 \times \aleph_0 \to \aleph_0$ durch

$$\pi(i, j) = 2^i \cdot 3^j.$$

Somit ist $|\aleph_0 \times \aleph_0| \leq \aleph_0$. Aus dem Theorem von Schröder-Bernstein folgt nun, daß $\aleph_0 = |\aleph_0 \times \aleph_0|$ ist.
Angenommen, für alle $\lambda < \kappa$ ist $\lambda \cdot \lambda = \lambda$. Wir führen auf $\kappa \times \kappa$ eine Wohlordnung $<_w$ wie folgt ein:

$$(\alpha, \beta) <_w (\gamma, \delta) \text{ gdw. } \begin{array}{l} \alpha + \beta < \gamma + \delta \text{ oder} \\ \alpha + \beta = \gamma + \delta \text{ und } \alpha < \gamma. \end{array}$$

Man sieht leicht, daß es sich hierbei um eine lineare Ordnung handelt. Wir zeigen, daß $<_w$ eine Wohlordnung ist. Sei dazu A eine nichtleere Teilmenge von $\kappa \times \kappa$. Sei

$$\gamma = min\{\alpha + \beta : (\alpha, \beta) \in A\}.$$

Wir setzen

$$B = \{(\alpha, \beta) \in A : \alpha + \beta = \gamma\};$$

$$\delta = min\{\alpha : \exists \beta((\alpha, \beta) \in B)\}.$$

Sei (α,β) das $<_w$-kleinste Paar (α^*,β^*) mit $\alpha^*=\delta$ und $\alpha^*+\beta^*=\gamma$. Dann ist (α,β) das kleinste Element von A.
Für $\alpha<\kappa$ sei

$$A_\alpha = \{(\beta,\gamma) : \beta+\gamma<\alpha\}.$$

Dann ist nach Induktionsannahme $|A_\alpha|<\kappa$ und weiterhin ist

$$\kappa\times\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha.$$

Jedes A_α ist ein Anfangsstück von $\kappa\times\kappa$. Da $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \kappa\times\kappa$ ist, hat jedes Anfangsstück von $\kappa\times\kappa$ einen Ordnungstyp $<\kappa$. Damit ist auch $type(\kappa\times\kappa)\le\kappa$, und wegen $\kappa\le|\kappa\times\kappa|$ folgt sofort

$$type(\kappa\times\kappa)=\kappa.$$

Somit ist $|\kappa\times\kappa|=\kappa$. □

Aus Lemma 1 und Lemma 2 ergibt sich

Lemma 3: *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen. Dann ist*

$$\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda=max\{\kappa,\lambda\}.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $\kappa\le\lambda$. Dann haben wir

$$\kappa+\lambda\le\lambda+\lambda=\lambda$$

und

$$\kappa\cdot\lambda\le\lambda\cdot\lambda=\lambda.$$

□

Lemma 4: *Sei $\kappa\in$ **Card**, $\kappa\ge\omega$, $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Folge von Mengen mit $|A_\alpha|\le\kappa$ für jedes $\alpha<\kappa$. Dann ist $|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha|\le\kappa$.*

Beweis: Sei

$$A=\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha.$$

Für $\alpha<\kappa$ sei

$$B_\alpha = A_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta.$$

Sei F die Menge aller Funktionen f mit $dom(f)\subseteq A$ und $rng(f)\subseteq\kappa$. Weiterhin sei $<_F$ eine Wohlordnung von F. Für $\alpha<\kappa$ sei f_α die $<_F$-kleinste Funktion mit $dom(f_\alpha)=B_\alpha$. Sei

$$g_\alpha=\{(a,(\alpha,\gamma)) : (a,\gamma)\in f_\alpha\}.$$

Dann ist

$$g=\bigcup_{\alpha<\kappa} g_\alpha$$

eine Funktion von A in $\kappa \times \kappa$, und wegen $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ haben wir

$$|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha| \leq \kappa.$$

□

Wir haben diesen Beweis sehr ausführlich gegeben, um zu zeigen, an welchen Stellen das Auswahlaxiom benötigt wird. Ohne Auswahlaxiom läßt sich beispielsweise nicht zeigen, daß die Vereinigung einer abzählbaren Familie von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist.
Kürzer läßt sich der obige Beweis wie folgt führen: Für jedes $\alpha < \kappa$ wähle man ein $f_\alpha : A_\alpha \to \kappa$ und setze aus diesen f_α ein $g : \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \to \kappa \times \kappa$ zusammen. Dabei bleibt es dem Leser überlassen, sich zu überlegen, wie dieses g aus den f_α konstruiert wird.
Mit Hilfe von Lemma 4 läßt sich nun zeigen:

Korollar 5: *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß

$$|[\kappa]^{<\omega}| \leq |\bigcup_{n<\omega} {}^n\kappa|.$$

Mit Lemma 2 folgt, daß für alle $n < \omega$ gilt $|{}^n\kappa| = \kappa$. Somit ergibt sich mit Lemma 4 die Behauptung. □

Wir haben zu Beginn dieses Kapitels die Summe und das Produkt zweier Kardinalzahlen definiert. Diese Definition kann wie folgt auf unendliche Mengen von Kardinalzahlen erweitert werden:
Sei $(\kappa_i)_{i<\alpha}$ eine Folge von Kardinalzahlen. Dann setzen wir

$$\sum_{i<\alpha} \kappa_i = |\bigoplus_{i<\alpha} \kappa_i|;$$

$$\prod_{i<\alpha} \kappa_i = |\bigotimes_{i<\alpha} \kappa_i|.$$

Damit kann $\prod_{i<\alpha} \kappa_i$ sowohl das Kreuzprodukt der Mengen κ_i als auch das Produkt der Kardinalzahlen κ_i bezeichnen. Aus dem jeweiligen Kontext wird klar, was gerade gemeint ist.
Aus dieser Definition folgt sofort: Sei $(\kappa_i)_{i<\alpha}$ eine Folge von Kardinalzahlen und sei $(A_i)_{i<\alpha}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen. Dann ist

$$\sum_{i<\alpha} \kappa_i = |\bigcup_{i<\alpha} A_i|$$

und

$$\prod_{i<\alpha} \kappa_i = |\prod_{i<\alpha} A_i|.$$

Wir benötigen nur für die Summe, daß die A_i paarweise disjunkt sind.

Theorem 6 (König): *Seien $(\kappa_i)_{i<\alpha}$ und $(\lambda_i)_{i<\alpha}$ Folgen von Kardinalzahlen und für alle $i < \alpha$ sei $\kappa_i < \lambda_i$. Dann ist*

$$\sum_{i<\alpha} \kappa_i < \prod_{i<\alpha} \lambda_i.$$

Beweis: Sei $\{A_i : i < \alpha\}$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen mit $\forall i < \alpha\,(|A_i| = \kappa_i)$. Sei

$$A = \bigcup_{i<\alpha} A_i.$$

Für $i < \alpha$ sei π_i eine Bijektion von κ_i in $\lambda_i \setminus \{0\}$. Wir definieren eine Funktion $F : A \to \prod_{i<\alpha} \lambda_i$ durch

$$F(a)_i = \begin{cases} \pi_i(a), \text{ wenn } a \in A_i; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist F bijektiv und somit ist

$$|\sum_{i<\alpha} \kappa_i| \leq |\prod_{i<\alpha} \lambda_i|.$$

Angenommen, es ist $|\sum_{i<\alpha} \kappa_i| = |\prod_{i<\alpha} \lambda_i|$. Sei

$$\pi : A \to \prod_{i<\alpha} \lambda_i$$

eine Bijektion. Für jedes $i < \alpha$ sei

$$B_i = \{\pi(a)_i : a \in A_i\}.$$

Wegen $|B_i| \leq \kappa_i$ existiert für jedes $i < \alpha$ ein $\gamma_i \in \lambda_i \backslash B_i$. Dann ist aber $(\gamma_i)_{i<\alpha} \in \prod_{i<\alpha} \lambda_i \backslash rng(\pi)$, im Widerspruch zur Annahme. □

Wir kommen nun zum Begriff der Konfinalität. Sei $\alpha \in \mathbf{On}$, $A \subseteq \alpha$. A ist *konfinal* in α, wenn

$$\forall \beta < \alpha\, \exists \gamma \in A\, (\beta \leq \gamma).$$

Wenn α eine Nachfolgerordinalzahl ist, so ist A konfinal in α gdw. der Vorgänger $\alpha \dot{-} 1$ von α in A liegt. Die *Konfinalität* von α ist definiert als

$$cf(\alpha) = min\{\gamma : \exists A\, (type(A) = \gamma \text{ und } A \text{ ist konfinal in } \alpha)\}.$$

Wenn α eine Nachfolgerordinalzahl ist, so ist $cf(\alpha) = 1$. Aus diesem Grunde sind nur die Limesordinalzahlen für die Konfinalität von Interesse.
Sei f eine monoton wachsende Funktion mit $dom(f) \in \mathbf{On}$. f heißt *konfinal* in α, wenn $rng(f)$ konfinal in α ist. Dann haben wir:

$$cf(\alpha) = min\{dom(f) : f \text{ ist konfinal in } \alpha\}.$$

Lemma 7: *Für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$ ist $cf(\alpha)$ eine Kardinalzahl.*

Beweis: O.B.d.A. ist $\alpha \in \mathbf{Lim}$. Sei f konfinal in α, $\kappa = |dom(f)|$ und sei $\pi : \kappa \to cf(\alpha)$ eine Surjektion auf $cf(\alpha)$. Wir definieren eine Funktion $g : \kappa \to \alpha + 1$ wie folgt:

$$g(\beta) = \sup\{g(\pi(\gamma)) : \gamma < \beta\}.$$

Sei

$$\delta = min\{\gamma : g(\gamma) = \alpha\}.$$

Dann ist $g|_\delta$ konfinal in α, und wegen $\delta \leq \kappa$ folgt, daß $cf(\alpha) \in$ **Card** sein muß. □

Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *regulär*, wenn $cf(\kappa) = \kappa$ ist, und *singulär*, wenn $cf(\kappa) < \kappa$ ist.
ω ist regulär. Die Funktion $f : \omega \to \aleph_\omega$ mit $f(i) = \aleph_i$ ist konfinal in $\aleph_\omega$. Damit ist $\aleph_\omega$ singulär.

Lemma 8: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist $cf(\kappa)$ regulär.*

Beweis: Sei $f : \alpha \to \kappa$ konfinal in κ und α minimal. Wenn α keine reguläre Kardinalzahl ist, so gibt es ein $\beta < \alpha$ sowie eine Funktion $g : \beta \to \alpha$, die konfinal in α ist. Dann ist aber auch $f \circ g : \beta \to \kappa$ konfinal in κ, und dies widerspricht der Minimalität von α. □

Lemma 9: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist κ^+ regulär.*

Beweis: Angenommen, $f : \alpha \to \kappa^+$ ist konfinal. Dann ist

$$\kappa^+ = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta).$$

Dann ist für jedes $\beta < \alpha$, $|f(\beta)| \leq \kappa$. Mit Lemma 4 folgt nun, daß $\alpha \geq \kappa^+$ sein muß. □

Hieraus folgt: Wenn κ nicht regulär ist, so ist κ Limeskardinalzahl. Wenn κ eine Limeskardinalzahl ist, so gibt es eine Folge $(\kappa_i)_{i<cf(\kappa)}$ von Kardinalzahlen mit $\forall i < cf(\kappa)(\kappa_i < \kappa)$ und $\sup\{\kappa_i : i < cf(\kappa)\} = \kappa$.

Sei $(\beta_i)_{i<\alpha}$ eine streng monoton wachsende Folge von Ordinalzahlen. Dieser Folge entspricht eine Funktion f mit $dom(f) = \alpha$. Damit ist $(\beta_i)_{i<\alpha}$ stetig, die zugehörende Funktion f ist stetig, und das ist der Fall gdw. wenn für jede Limesordinalzahl $\gamma < \alpha$ gilt $\beta_\gamma = \bigcup_{i<\gamma} \beta_i$.
Man sieht leicht, daß folgendes gilt:

Lemma 10: Sei $(\beta_i)_{i<\alpha}$ eine stetige, streng monoton wachsende Folge von Ordinalzahlen. Dann ist für jede Limesordinalzahl $\gamma < \alpha$, $cf(\gamma) = cf(\beta_\gamma)$.

Wir kommen nun zur Kardinalzahlexponentiation. Seien κ und λ beliebige Kardinalzahlen. Wie bereits in Kapitel 11 erwähnt, bezeichnen wir mit κ^λ die Mächtigkeit von ${}^\lambda\kappa$, d.h. die Mächtigkeit der Menge aller Funktionen von λ in κ. Dann folgt unmittelbar aus der Definition:

Lemma 11: *Seien κ, λ und μ Kardinalzahlen. Dann gilt*

(i) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$;
(ii) *wenn $\kappa \leq \lambda$, so ist $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$;*
(iii) *wenn $\lambda \leq \mu$, so ist $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.*

Theorem 12: *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist*

(i) $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$;
(ii) $cf(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Beweis:
(i) Sei $f : cf(\kappa) \to \kappa$ konfinal. Dann folgt aus dem Theorem von König

$$\kappa = |\bigcup_{\alpha < cf(\kappa)} f(\alpha)| \leq \sum_{\alpha < cf(\kappa)} |f(\alpha)| < \kappa^{cf(\kappa)}.$$

(ii) Wenn $(\kappa_i)_{i<\lambda}$ eine Folge von Kardinalzahlen ist mit $\forall i < \lambda\, (\kappa_i < \kappa^\lambda)$, so ist

$$\sum_{i<\lambda} \kappa_i < \prod_{i<\lambda} \kappa^\lambda = (\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda.$$

Somit muß $cf(\kappa^\lambda) > \lambda$ sein. □

Seien κ und λ Kardinalzahlen mit $\lambda < cf(\kappa)$ und sei $f \in^\lambda \kappa$. Dann ist $\sup(rng(f)) < \kappa$. Somit haben wir

Lemma 13: *Sei $\kappa, \lambda \in$ **Card** mit $\lambda < cf(\kappa)$. Dann ist*

$${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\lambda\alpha.$$

Aus diesem Lemma folgt sofort

Lemma 14: *Sei $\kappa, \lambda \in$ **Card**. Dann ist*

(i) $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$;
(ii) *wenn $\lambda < cf(\kappa)$ und $\kappa \in$ **Lim**, so ist $\kappa^\lambda = \sum_{\mu<\kappa} \mu^\lambda$.*

Weiterhin haben wir

Lemma 15: *Seien $\kappa, \lambda \in$ **Card**. Wenn $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, so ist*

$$\kappa^\lambda = (\sum_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{cf(\kappa)}.$$

Beweis: Wir haben zunächst

$$(\sum_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{cf(\kappa)} \leq (\kappa^\lambda)^{cf(\kappa)} = \kappa^\lambda.$$

Um zu zeigen, daß $\kappa^\lambda \leq (\sum_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{cf(\kappa)}$ ist, konstruieren wir eine Injektion

$$F : {}^\lambda\kappa \to [\bigcup_{\mu<\kappa} {}^\lambda\mu]^{cf(\kappa)}$$

wie folgt: Sei $(\beta_i)_{i<cf(\kappa)}$ eine Folge, die konfinal in κ liegt. Sei $f \in {}^\lambda\kappa$. Für $i < cf(\kappa)$ definieren wir $f_i \in {}^\lambda\beta_i$ wie folgt:

$$f_i(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha), \text{ wenn } f(\alpha) < \beta_i; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sei
$$F(f) = \{f_i : i < cf(\kappa)\}.$$
Dann ist F die gewünschte Injektion. □

Theorem 16: *Sei κ eine singuläre Limeskardinalzahl, und es existiere ein $\mu < \kappa$ mit*
$$\forall \nu(\mu \leq \nu < \kappa \rightarrow 2^\mu = 2^\nu).$$
Dann ist
$$2^\kappa = 2^\mu.$$

Beweis: Da κ eine Limeskardinalzahl ist, gibt es ein $\gamma < \kappa$ sowie eine Folge $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ mit $\forall \alpha < \gamma(\kappa_\alpha < \kappa)$ und $\sup\{\kappa_\alpha : \alpha < \gamma\} = \kappa$. Wegen $\kappa = \sum_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha$ haben wir
$$2^\kappa = \prod_{\alpha<\gamma} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha<\gamma} 2^\mu = (2^\mu)^{|\gamma|} = 2^{\mu\cdot|\gamma|} = 2^\mu.$$
□

Theorem 17 (GCH): *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen. Dann ist*
$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa, \text{ wenn } \lambda < cf(\kappa); \\ \kappa^+, \text{ wenn } cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa; \\ \lambda^+, \text{ wenn } \lambda \geq \kappa. \end{cases}$$

Beweis: Wenn $\lambda < cf(\kappa)$, so ist
$$|{}^\lambda\kappa| = |\bigcup_{\gamma<\kappa} {}^\lambda\gamma| \leq \kappa \cdot \sup\{\mu^\lambda : \mu < \kappa\} \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa.$$
Wenn $cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa$, so ist nach Theorem 11(i), $\kappa^\lambda > \kappa$. Wegen $\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^\kappa$ folgt dann $\kappa^\lambda = \kappa^+$.
Wenn $\lambda \geq \kappa$, so ist
$$\lambda^+ \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda = \lambda^+.$$
□

Die beiden folgenden Definitionen sind oftmals nützlich. Sei A eine Menge, $\alpha \in \mathbf{On}$. Wir setzen
$${}^{<\alpha}A = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^\beta A.$$
Für $\kappa, \lambda \in \mathbf{Card}$ setzen wir
$$\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa|.$$

Eine Kardinalzahl κ heißt *schwach unerreichbar*, wenn κ regulär und Limeskardinalzahl ist. κ heißt *stark unerreichbar*, wenn κ schwach unerreichbar ist und außerdem gilt $\forall \lambda < \kappa\,(2^\lambda < \kappa)$. Statt stark unerreichbar sagt man oftmals einfach unerreichbar. Eine Limeskardinalzahl λ heißt *strenge Limeskardinalzahl*, wenn $\forall\kappa < \lambda\,(2^\kappa < \lambda)$. Somit ist eine Kardinalzahl unerreichbar, wenn sie regulär und strenge Limeskardinalzahl ist.

Es entsteht die Frage, ob unerreichbare Kardinalzahlen existieren, und wie groß sie sind. Zunächst sehen wir, daß aus *GCH* folgt, daß jede schwach unerreichbare Kardinalzahl auch stark unerreichbar ist. Es läßt sich in *ZFC* nicht zeigen, daß unerreichbare Kardinalzahlen existieren:

Theorem 18: *Wenn ZFC konsistent ist, so ist auch ZFC + ës gibt keine unerreichbare Kardinalzahl"konsistent.*

Beweis: Sei $(V, \in)$ ein Modell von *ZFC*. Wenn in $(V, \in)$ keine unerreichbare Kardinalzahl existiert, so sind wir fertig. Wir nehmen also an, daß es in $(V, \in)$ unerreichbare Kardinalzahlen gibt, und es sei κ die kleinste unter ihnen.
Wir zeigen, daß $(V_\kappa, \in)$ ein Modell für *ZFC* + ës gibt keine unerreichbare Kardinalzahl"ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß in $(V_\kappa, \in)$ alle Axiome von *ZFC* erfüllt sind.
Mengenexistenz ist trivialerweise erfüllt, die Extensionalität folgt aus der Transitivität von V_κ, ebenso wie das Fundierungsaxiom. $(V_\kappa, \in)$ ist abgeschlossen unter Vereinigung, Paarbildung und Potenzmengenbildung. Somit sind Vereinigungsaxiom, Paarmengenaxiom und Potenzmengenaxiom erfüllt. Sei $a \in V_\kappa$, $rank(a) = \beta$. Dann ist $\mathcal{P}(a) \subseteq V_{\beta+1}$, und somit ist das Komprehensionsschema erfüllt. Analog folgt das Auswahlaxiom. Aus $V_\omega \in V_\kappa$ folgt $\omega \in V_\kappa$. Damit ist das Unendlichkeitsaxiom erfüllt. Wir kommen nun zum Ersetzungsschema. Sei $a \in V_\kappa$, $\varphi(x, y)$ eine Formel, in der y nicht frei vorkommt, und es gelte

$$\forall x \in a \exists ! y \in V_\kappa\, \varphi(x, y).$$

Wie betrachten die Menge

$$B = \{b : \exists c \in a\, \varphi(c, b)\}.$$

Sei

$$B' = \{rank(b) : b \in B\}.$$

Da $|a| < \kappa$ und $rank(b) < \kappa$ für jedes $b \in B$, ist $\sup B' < \kappa$, und hieraus folgt $B \in V_\kappa$. Damit ist auch das Ersetzungsschema erfüllt. Somit ist $(V_\kappa, \in)$ ein Modell von *ZFC*. Wir müssen noch zeigen, daß es in $(V_\kappa, \in)$ keine unerreichbaren Kardinalzahlen gibt. Zunächst sehen wir, daß ein $\alpha < \kappa$ in $(V, \in)$ Kardinalzahl ist gdw. α in $(V_\kappa, \in)$ Kardinalzahl ist. Weiterhin stimmen für $\alpha < \kappa$, $cf(\lambda)^{V_\kappa}$ und $cf(\lambda)^V$ sowie $\mathcal{P}(\alpha)^{V_\kappa}$ und $\mathcal{P}(\alpha)^V$ überein. Damit ist für jedes $\lambda < \kappa$, $|2^\lambda|^{V_\kappa} = |2^\lambda|^V$. Somit kann es in $(V_\kappa, \in)$ keine unerreichbaren Kardinalzahlen geben. □

13 Cub-Filter

Wir beginnen mit der Definition von Ideal und Filter.

Definition 1: Sei a eine beliebige, nichtleere Menge, $F \subseteq P(a)$. F ist ein *Filter* über a, wenn

(i) $a \in F$;
(ii) $\forall b\, c \in F\, (b \cap c \in F)$;
(iii) $\forall b \in F\, \forall c\, (b \subseteq c \subseteq a \to c \in F)$.

F heißt *echter* Filter, wenn $\emptyset \notin F$.

Wenn $\{F_i : i \in I\}$ eine Menge von Filtern über a ist, so ist auch $\bigcap_{i\in I} F_i$ ein Filter über a.

Definition 2: Sei a eine beliebige, nichtleere Menge, $I \subseteq P(a)$. I ist ein *Ideal* über a, wenn

(i)	$\emptyset \in I$;
(ii)	$\forall b\, c \in I\, (b \cup c \in I)$;
(iii)	$\forall b \in I\, \forall c\, (c \subseteq b \to c \in I)$.

I heißt *echtes* Ideal, wenn $a \notin I$.

Wir haben es im folgenden nur mit echten Filtern bzw. echten Idealen zu tun. Wenn wir in Zukunft von Filtern oder Idealen sprechen, so meinen wir stets echte Filter bzw. echte Ideale.

Wenn $\{J_i : i \in I\}$ eine Menge von Idealen über a ist, so ist $\bigcap_{i\in I} J_i$ ebenfalls ein Ideal über a. Sei F ein Filter über a. Wir setzen

$$F^* = \{a \setminus b : b \in F\}.$$

Dann ist F^* ein Ideal, das *duale* Ideal von F. Entsprechend setzen wir, wenn I ein Ideal ist,

$$I^* = \{a \setminus b : b \in I\}.$$

Dann ist I^* ein Filter, der *duale* Filter von I.
Wenn F ein Filter über a ist, so ist $F^{**} = F$, und entsprechend, wenn I ein Ideal ist, so ist $I^{**} = I$.

Beispiel: (1) Sei a eine beliebige Menge; $\mathit{Fin}(a)$ sei die Menge der endlichen Teilmengen von a. Dann ist $\mathit{Fin}(a)$ ein Ideal. Wenn a unendlich ist, so ist $\mathit{Fin}(a)$ ein echtes Ideal. Wir setzen

$$\mathit{Cofin}(a) = \mathit{Fin}^*(a)$$

und bezeichnen $\mathit{Cofin}(a)$ als Filter der koendlichen Teilmengen von a. Damit ist $\mathit{Fin} = \mathit{Fin}(\omega)$. Entsprechend setzen wir $\mathit{Cofin} = \mathit{Cofin}(\omega)$.
(2) Sei a eine beliebige, nichtleere Menge, $s \in a$. Wir setzen

$$F_s = \{b \subseteq a : s \in b\}.$$

Dann ist F_s ein Filter. Wir nennen ihn den durch s erzeugten *Hauptfilter*. F_s^* heißt das durch s erzeugte *Hauptideal.*
(3) Sei I die Menge der nirgends dichten Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($a \subseteq \mathbb{R}$ ist nirgends dicht, wenn für jedes Intervall (r, s) mit $r < s$ ein Intervall (r', s') existiert mit $s < s' < r' < r$ derart, daß $a \cap (r', s') = \emptyset$). Dann ist I ein Ideal über $\mathbb{R}$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ sei $U_\epsilon(r) = \{s \in \mathbb{R} : |s - r| < \epsilon\}$. Wir setzen

$$F_r = \{a \subseteq \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 (U_\epsilon(r) \subseteq a)\}.$$

Dann ist F_r ein Filter.
(5) Sei $I = \{a \subseteq \omega_1 : |a| \le \omega\}$. Dann ist I ein Ideal über ω_1.

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Ein Ideal I heißt *κ-vollständig*, wenn

$$\forall A \subseteq I(|A| < \kappa \to \bigcup A \in I).$$

Entsprechend heißt ein Filter F *κ-vollständig*, wenn

$$\forall A \subseteq F(|A| < \kappa \to \bigcap A \in F).$$

Das Ideal aus Beispiel (2) ist κ-vollständig für jedes κ. Das Ideal aus Beispiel (5) ist ω_1-vollständig, aber nicht ω_2-vollständig.

Beispiel: (6) Seien κ, λ Kardinalzahlen, $\kappa < \lambda$ und κ regulär. Sei

$$F = \{A \subseteq \lambda : |A| < \kappa\}.$$

Dann ist F ein κ-vollständiger Filter.

Ein Filter F über einer Menge a heißt *freier* Filter, wenn $\mathit{Cofin}(a) \subseteq F$. Damit ist ein Hauptfilter nicht frei und $\mathit{Cofin}(a)$ ist frei. Ein Filter U über a heißt *Ultrafilter*, wenn

$$\forall b \in \mathcal{P}(a)(b \in U \vee a \setminus b \in U).$$

Offenbar ist jeder Hauptfilter auch Ultrafilter. Bevor wir zum Existenznachweis von freien Ultrafiltern kommen, benötigen wir ein paar weitere Begriffe: Sei a eine Menge, $X \subseteq \mathcal{P}(a)$. X hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn

$$\forall A \in [X]^{<\omega}(A \neq \emptyset \to \bigcap A \neq \emptyset),$$

und X hat die *starke endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn

$$\forall A \in [X]^{<\omega}(A \neq \emptyset \to |\bigcap A| \geq \aleph_0).$$

Wir bezeichnen die endliche Durchschnittseigenschaft mit *fip* (finite intersection property) und die starke endliche Durschschnittseigenschaft mit *sfip* (strong finite intersection property).
Offenbar hat X die *sfip* gdw. $X \cup$ $\mathit{Cofin}(a)$ die *fip* hat.
Sei $X \subseteq \mathcal{P}(a)$. Dann setzen wir

$$\mathit{Fil}(X) = \bigcap\{F \subseteq \mathcal{P}(a) : X \subseteq F, F \text{ ist Filter über } a\}.$$

Offenbar ist $\mathit{Fil}(X)$ der kleinste Filter über a, der X enthält.
Sei F ein Filter, $X \subseteq \mathcal{P}(a)$ mit $F = \mathit{Fil}(X)$. Dann heißt X *Filterbasis* von F
Entsprechend setzen wir

$$\mathit{Id}(X) = \bigcup\{J \subseteq \mathcal{P}(a) : X \subseteq J, J \text{ ist Ideal über } a\}.$$

Wenn X die *fip* hat, so ist $\mathit{Fil}(X)$ ein echter Filter. Wenn X die *sfip* hat, so ist $\mathit{Fil}(X)$ in einem freien Filter enthalten.

Theorem 1 (Ultrafiltertheorem): *Sei a eine unendliche Menge, $X \subseteq \mathcal{P}(a)$ und X habe die sfip. Dann gibt es einen freien Ultrafilter U über a mit $X \subseteq U$.*

Beweis: Sei $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Aufzählung von $\mathcal{P}(a)$. Wir konstruieren eine Folge $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Teilmengen von $\mathcal{P}(a)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $X_0 = X \cup \mathit{Cofin}(a)$;
(ii) wenn $\alpha < \beta < \kappa$, so ist $X_\alpha \subseteq X_\beta$;
(iii) X_α hat die *sfip*.

Sei $\alpha < \kappa$, und für $\beta < \alpha$ sei X_β bereits konstruiert. Wenn $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so setzen wir

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta,$$

und es ist leicht zu sehen, daß X_α die *fip* hat. Sei $\alpha = \beta + 1$. Dann hat $X_\beta \cup \{a_\beta\}$ oder $X_\beta \cup \{a \setminus a_\beta\}$ die *fip*: Andernfalls gibt es $A, B \in [X_\beta]^{<\omega}$ mit $\bigcap A \cap a_\beta = \bigcap B \cap (a \setminus a_\beta) = \emptyset$. Dann ist aber $\bigcap A \cap \bigcap B \subseteq (a \setminus a_\beta) \cap a_\beta = \emptyset$, im Widerspruch dazu, daß X_β die *fip* hat. Wir setzen nun $X_\alpha = X_\beta \cup \{a_\beta\}$, falls $X_\beta \cup \{a_\beta\}$ die *fip* hat und $X_\alpha = X_\beta \cup \{a \setminus a_\beta\}$ sonst. Damit sind (i), (ii) und (iii) erfüllt, und

$$U = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$$

ist ein Ultrafilter über a, der X enthält. $\square$

Bemerkung: Aus Theorem 1 folgt sofort, daß über jeder unendlichen Menge a ein freier Ultrafilter existiert. Man setze einfach $X = \mathit{Cofin}(a)$ und wende Theorem 1 an. Wenn a eine endliche Menge ist, so läßt sich jeder Filter zu einem Hauptfilter fortsetzen. Somit gilt: Wenn a eine beliebige Menge ist und F ist ein Filter über a, so läßt sich F zu einem Ultrafilter U fortsetzen.

Sei γ eine Limesordinalzahl, $C \subseteq \gamma$. C ist *beschränkt* in γ, wenn es ein $\beta < \gamma$ gibt mit $C \subseteq \beta$. Andernfalls heißt C *unbeschränkt* in γ.
C ist *abgeschlossen* in γ, wenn für jedes $\beta < \gamma$, $\mathit{sup}\{C \cap \beta\} \in C$.
C ist abgeschlossen, wenn C abgeschlossen in $\mathit{sup}(C)$ ist.
C ist *cub* (von *closed and unbounded*), wenn C abgeschlossen und unbeschränkt ist.
Bemerkung: C ist abgeschlossen in γ, wenn C bezüglich der Ordnungstopologie auf γ abgeschlossen ist.

Sei $\gamma \in \mathbf{Lim}$, $\mathit{cf}(\gamma) > \omega$ und $\beta < \gamma$. Dann ist die Menge $\{\alpha : \beta < \alpha < \gamma\}$ abgeschlossen ebenso wie die Menge $\{\alpha : \beta < \alpha < \gamma,\ \alpha \text{ ist Limeszahl}\}$. Beide Mengen sind auch unbeschränkt.
Wenn γ eine Ordinalzahl mit $\mathit{cf}(\gamma) = \omega$ ist, so ist jede konfinale ω-Folge auch *cub*.

Sei $\gamma \in \mathbf{On}$. Wir setzen

$$\mathit{Cub}\,(\gamma) = \{A \subseteq \gamma : \exists C \subseteq A(C \text{ ist } \mathit{cub} \text{ in } \gamma)\}.$$

Sei $A = \omega \cup \{\beta < \omega_1 : \omega < \beta \text{ und } \beta \text{ ist Limeszahl}\}$. Dann ist $A \in \mathit{Cub}(\omega_1)$, aber A ist nicht *cub*, da $\omega \subseteq A$, $\mathit{sup}(\omega) = \omega$, aber $\omega \notin A$.

Beispiele: (7) Sei κ eine Kardinalzahl mit $\mathit{cf}(\kappa) > \omega$, A eine unbeschränkte Teilmenge von κ. Wir setzen

$$A' = \{\alpha < \kappa : \alpha = \mathit{sup}(A \cap \alpha)\}.$$

Dann ist A' *cub*. Wenn A *cub* ist, so ist $A' \subseteq A$. Wir bezeichnen A' als *Ableitung* von A.
(8) Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl mit $\mathit{cf}(\kappa) > \omega$. Sei $f : \kappa \to \kappa$ eine Funktion mit

(i) wenn $\alpha < \beta < \kappa$, so ist $f(\alpha) < f(\beta)$;
(ii) wenn $\gamma < \kappa$ eine Limeszahl ist, so ist $f(\gamma) = sup\{f(\alpha) : \alpha < \gamma\}$.

Dann ist die Menge
$$C = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \alpha\}$$
cub.
Die Abgeschlossenheit von C läßt sich leicht sehen. Wir zeigen deshalb nur, daß C unbeschränkt ist:
Für $n < \omega$ definieren wir $f^n : \kappa \to \kappa$ wie folgt:
$$f^0(\alpha) = \alpha;$$
$$f^{n+1}(\alpha) = f(f^n(\alpha)).$$
Weiterhin sei $F : \kappa \to \kappa$ gegeben durch
$$F(\alpha) = sup\{f^n(\alpha) : n < \omega\}.$$
Sei $\alpha < \kappa$. Angenommen, $\alpha < f(\alpha)$ (sonst ist bereits $\alpha \in C$). Damit ist $\alpha < f(\alpha) < \cdots < f^n(\alpha) \cdots$. Wenn $\beta < F(\alpha)$ ist, so gibt es ein $n < \omega$ mit $\beta < f^n(\alpha)$. Damit ist $f(\beta) < f^{n+1}(\alpha) < F(\alpha)$ und aus (ii) folgt, daß $f(F(\alpha)) = F(\alpha)$ ist.
Bemerkung: Sei $f : \alpha \to \beta$, wobei α und β beliebige Ordinalzahlen sind. f heißt *Normalfunktion*, wenn sie den beiden obigen Bedingungen (i) und (ii) genügt.
(9) Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl. Dann ist die Menge
$$D = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ ist starke Limeskardinalzahl}\}$$
cub. Dies läßt sich wie folgt sehen: Sei $\omega \leq \lambda < \kappa$. Wir setzen
$$\lambda_0 = \lambda,$$
und für $n < \omega$ sei
$$\lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}.$$
Schließlich sei
$$\lambda_\omega = \bigcup_{n<\omega} \lambda_n.$$
Da κ unerreichbar ist, ist für jedes $n < \omega$, $\lambda_n < \kappa$. Damit ist $\lambda_\omega \leq \kappa$. Da $cf(\lambda_\omega) = \omega < \kappa = cf(\kappa)$, ist $\lambda_\omega < \kappa$. Somit ist D unbeschränkt. Die Abgeschlossenheit von D ist leicht zu sehen.

Theorem 2: *Sei $\gamma \in \mathbf{On}$, $cf(\gamma) = \lambda > \omega$, $\kappa < \lambda$, $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von cub-Mengen. Dann ist*
$$C = \bigcap_{\alpha<\kappa} C_\alpha$$
eine cub-Menge.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß C abgeschlossen ist. Wir zeigen, daß C unbeschränkt ist. Für jedes $\alpha < \kappa$ sei $f_\alpha : \gamma \to \gamma$ gegeben durch
$$f_\alpha(\beta) = min(C_\alpha \setminus \beta).$$

Wir definieren $g : \gamma \to \gamma$ durch

$$g(\beta) = sup\{f_\alpha(\beta) : \alpha < \kappa\}.$$

Für $\delta \leq \omega$ definieren wir $g^\delta : \gamma \to \gamma$ durch

$$g^0(\beta) = \beta;$$

$$g^{n+1}(\beta) = g(g^n(\beta));$$

$$g^\omega(\beta) = sup\{g^n(\beta) : n < \omega\}.$$

Dann ist für jedes $\beta < \gamma$, $\beta < g^\omega(\beta) \in C$. Damit ist C unbeschränkt. □

Aus diesem Theorem folgt

Korollar 3: *Sei $\gamma \in$ **On**, $\lambda = cf(\gamma) > \omega$. Dann ist $Cub(\gamma)$ λ-vollständig.*

Beweis: Sei $\kappa < \lambda$, $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq Cub(\gamma)$. Für jedes $\alpha < \kappa$ wählen wir eine *cub*-Menge $C_\alpha \subseteq A_\alpha$. Dann ist

$$C = \bigcap_{\alpha<\kappa} C_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} A_\alpha,$$

also enthält $\bigcap_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ eine *cub*-Menge und ist somit aus $Cub(\gamma)$. □

Wir kommen nun zum Begriff der stationären Menge.

Definition 3: Sei $\gamma \in$ **On**, $cf(\gamma) > \omega$, $S \subseteq \gamma$. S heißt *stationär* in γ, wenn

$$\forall A \in \gamma(A \subseteq Cub(\gamma) \to S \cap A \neq \emptyset).$$

Somit ist S stationär in γ, wenn $S \notin Cub^*(\gamma)$.

Beispiel: (10) Sei $S = \{\beta < \omega_2 : cf(\beta) = \omega\}$. Wir zeigen, daß S stationär ist. Sei dazu A eine *cub*-Menge in ω_2. Sei $(a_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ eine Aufzählung von A in streng monoton wachsender Folge. Dann ist $cf(a_\omega) = \omega$, also ist $a_\omega \in S$ und somit $S \cap A \neq \emptyset$. Andererseits ist S nicht abgeschlossen: Sei $(s_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ eine Aufzählung von S in streng monoton wachsender Folge. Sei $\gamma = sup\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Dann ist $cf(\gamma) = \omega_1$, und somit ist $\gamma \notin S$.

Das Beispiel läßt sich wie folgt verallgemeinern: Sei γ eine Limesordinalzahl, $\omega \leq \kappa < \lambda = cf(\gamma)$. Dann ist $S = \{\beta < \gamma : cf(\beta) = \kappa\}$ stationär.

Sei $\gamma \in$ **On**, $\kappa = cf(\gamma) > \omega$. Da $Cub(\gamma)$ κ-vollständig ist, ist $Cub^*(\gamma)$ ebenfalls κ-vollständig. Hieraus folgt

Lemma 4: *Sei $\gamma \in$ **On**, $\kappa < \lambda = cf(\gamma)$, $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(\gamma)$ derart, daß $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ stationär ist. Dann gibt es ein $\alpha < \kappa$ derart, daß A_α stationär ist.*

Sei A eine Menge von Ordinalzahlen. Wir erinnern daran, daß wir mit *type*(A) diejenige Ordinalzahl bezeichnen, für die gilt $(A, \epsilon|_A) \cong \alpha$.

Wir zeigen jetzt eine interessante Eigenschaft der stationären Teilmengen von ω_1. Sei dazu S eine stationäre Teilmenge von ω_1. Wir setzen

$$C(S,\alpha) = \{\beta < \omega_1 : (\forall\gamma < \beta)(\exists A \subseteq (S \cap \beta) \setminus \gamma)(A \text{ ist closed und } type(A) = \alpha)\}.$$

Theorem 5: *Sei S stationäre Teilmenge von ω_1, $\alpha < \omega_1$. Dann ist $C(S,\alpha)$ stationär.*

Beweis: Es ist klar, daß $C(S,\alpha)$ abgeschlossen ist. Wir zeigen deshalb nur, daß $C(S,\alpha)$ unbeschränkt ist.
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über α. Wenn $\alpha = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei α eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha = \beta + 1$. Dann ist

$$C(S,\alpha) \subseteq C^{'}(S,\beta)$$

(wobei $C^{'}(S,\beta)$ die Ableitung von $C(S,\beta)$ bezeichnet). Damit ist in diesem Fall $C(S,\alpha)$ unbeschränkt.
Sei nun α eine Limesordinalzahl. Wir wählen eine streng monoton wachsende Folge $(\alpha_n)_{n<\omega}$ mit $sup\{\alpha_n : n < \omega\} = \alpha$. Sei

$$C = \bigcap_{\beta<\alpha} C(S,\beta).$$

Dann ist C als Durchschnitt von abzählbar vielen *cub* Mengen ebenfalls *cub*.
Wir werden zeigen, daß

$$C \subseteq C(S,\alpha)$$

ist. Sei dazu $\beta \in C$, $\gamma < \beta$. Wir können induktiv über n eine Folge $(A_n)_{n<\omega}$ von Teilmengen von $(S \cap \beta) \setminus \gamma$ wählen derart, daß für alle $n < \omega$ gilt

(i) A_n ist abgeschlossen und $type(A_n) = \alpha_n$;
(ii) $sup\ A_n < min\ A_{n+1}$.

Sei $n < \omega$ und für $k < n$ sei A_k bereits konstruiert. Wegen $sup(\{\gamma\} \cup \bigcup_{k<n} A_k) < \beta$ und $\beta \in C(S, \alpha_n + 1)$ läßt sich die Konstruktion fortführen. Sei

$$A = \bigcup_{n<\omega} A_n.$$

Dann ist $A \subseteq (S \cap \beta) \setminus \gamma$ und $type(A) = \Sigma_{n<\omega}(\alpha_n + 1) \geq \beta$, also ist $\beta \in C(S,\alpha)$ und somit $C \subseteq C(S,\alpha)$. □

Theorem 6: *Sei $\kappa > \omega$ regulär, $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von cub-Mengen in κ. Dann ist*

$$D = \{\alpha : \forall\beta < \alpha(\alpha \in C_\beta)\}$$

cub in κ.

Beweis: Es ist wieder leicht zu sehen, daß D abgeschlossen ist. Wir zeigen nun, daß D unbeschränkt ist. Sei dazu $g : \gamma \to \gamma$ eine Funktion mit

$$\forall\alpha < \kappa\,(\alpha < g(\alpha));$$

$$\forall \alpha < \kappa \forall \beta < \alpha \, (g(\alpha) \in C_\beta).$$

g^ω sei mit Hilfe von g wie im Beweis von Theorem 2 definiert. Dann ist für jedes $\alpha < \kappa$, $\alpha < g(\alpha) \in D$, und damit ist D unbeschränkt. □

D heißt *Diagonalschnitt* von $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Für *cub*-Mengen gilt das folgende Transfer-Prinzip:
Sei $\alpha \in \mathbf{Lim}$, $D = \{\aleph_i : i < \alpha\}$. Die Funktion $\pi : \alpha \to D$ sei gegeben durch

$$\pi(i) = \aleph_i.$$

Dann ist $C \subseteq \alpha$ *cub* in α gdw. $\pi[C]$ *cub* in $\aleph_\alpha$ ist. Entsprechend ist eine Teilmenge S von α stationär in α gdw. $\pi[S]$ stationär in $\aleph_\alpha$ ist.

Theorem 7 (Ulam): *Es gibt eine Familie $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ von paarweise disjunkten stationären Teilmengen von ω_1.*

Beweis: Für jedes $\delta < \omega_1$ sei f_δ eine Surjektion von ω auf δ. Für $n < \omega$, $\alpha < \omega_1$ sei

$$X_\alpha^n = \{\beta > \alpha : f_\beta(n) = \alpha\}.$$

Für $\alpha \neq \beta$ ist dann $X_\alpha^n \cap X_\beta^n = \emptyset$. Für $\alpha < \omega_1$ ist

$$\bigcup_{n<\omega} X_\alpha^n = \{\beta < \omega_1 : \alpha < \beta\}$$

und damit *cub*. Damit folgt aus Lemma 4, daß eine der Mengen X_α^n stationär ist. Für jedes $\alpha < \omega_1$ sei n_α so, daß $X_\alpha^{n_\alpha}$ stationär ist. Sei n_0 so, daß $|\{\alpha < \omega_1 : n_\alpha = n_0\}| = \omega_1$. Dann ist

$$\{X_\alpha^{n_0} : n_0 = n_\alpha\}$$

eine Familie von ω_1 paarweise disjunkten stationären Teilmengen von ω_1. □

Die $(\omega \times \omega_1)$-Matrix der Mengen X_α^n heißt *Ulam-Matrix.* Der Beweis des Theorems läßt sich leicht so abändern, daß man erhält:
Für jede unendliche Kardinalzahl κ gibt es κ^+ paarweise disjunkte stationäre Teilmengen von κ^+.

Korollar 8: *Für jedes reguläre $\kappa > \omega$ gibt es eine Familie von κ disjunkten, stationären Teilmengen auf κ.*

Beweis: Wir haben nur noch den Fall zu betrachten, daß κ eine überabzählbare reguläre Limeskardinalzahl ist. Für jedes reguläre $\lambda < \kappa$ sei

$$S_\lambda = \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \lambda\}.$$

Dann ist S_λ stationär. Damit ist

$$\{S_\lambda : \lambda < \kappa, \lambda \text{ regulär}\}$$

eine Familie von κ paarweise disjunkten, stationären Teilmengen von κ. □

Lemma 9: *Sei $\kappa > \omega$ regulär, F eine Menge von endlichstelligen Funktionen auf κ mit $|F| < \kappa$. Dann ist*

$$C = \{\gamma < \kappa : \gamma \textit{ ist abgeschlossen unter } F\}$$

eine cub-Menge auf κ.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß C abgeschlossen ist. Der Nachweis der Unbeschränktheit von C ist ähnlich wie im Beweis von Theorem 2. Für $\alpha < \kappa$ sei $G(\alpha)$ der Abschluß von α unter F. Sei $g(\alpha) = sup(G(\alpha))$. Wir setzen

$$g^0(\alpha) = \alpha;$$

$$g^{n+1}(\alpha) = g(g^n(\alpha));$$

$$g^\omega(\alpha) = sup\,\{g^n(\alpha) : \alpha < \omega\}.$$

Dann ist $g^\omega \in C$ und damit ist C unbeschränkt. □

Beispiel: (11) Sei $\kappa > \omega$ regulär, und sei $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Folge von Teilmengen von κ mit $A_\alpha \subseteq \alpha$ für alle $\alpha < \kappa$ und so, daß für $\alpha < \beta < \kappa$ gilt $A_\alpha \subseteq A_\beta$. Sei

$$C = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \kappa\,(\alpha < \beta \rightarrow A_\alpha = A_\beta \cap \alpha)\}.$$

Sei $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$. O.B.d.A. sei $A \neq \emptyset$. Wir definieren eine Funktion $f : \kappa \rightarrow \kappa$ durch

$$f(\alpha) = \begin{cases} min\,A, \text{ wenn } \alpha \notin A; \\ min\,\{\beta < \kappa : \alpha \in A_\beta\} \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$C = \{\alpha < \kappa : f[A_\alpha] \subseteq A_\alpha\},$$

und mit Lemma 9 folgt, daß C *cub* ist.

Sei f eine Funktion mit $dom(f) \cup rng(f) \subseteq \mathbf{On}$. f heißt *regressiv*, wenn

$$\forall \alpha \in dom(f)(f(\alpha) < \alpha).$$

Mit Hilfe von Lemma 9 läßt sich das folgende interessante und für die Anwendung wichtige Theorem zeigen:

Theorem 10 (Fodor): *Sei κ regulär, S eine stationäre Teilmenge von κ und $f : S \rightarrow \kappa$ eine regressive Funktion. Dann gibt es ein $\alpha < \kappa$ derart, daß $f^{-1}(\alpha)$ stationär ist.*

Beweis: Angenommen, das ist nicht der Fall. Für jedes $\alpha < \kappa$ sei C_α eine *cub*-Menge in κ mit $C_\alpha \cap f^{-1}(\alpha) = \emptyset$. Sei D der Diagonalschnitt von $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Wenn $\gamma \in D$, so ist $f(\gamma) \neq \alpha$ für alle $\alpha < \gamma$, also kann nicht $f(\gamma) < \gamma$ gelten. Somit muß eine der Mengen $f^{-1}(\alpha)$ stationär sein. □

Wir geben eine Anwendung dieses Theorems.
Wir benötigen zunächst einige Definitionen. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. (X, τ) heißt *normal*, wenn für beliebige disjunkte abgeschlossene Mengen A, B offene disjunkte Mengen U, V existieren mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.
Sei $(M, <)$ eine lineare Ordnung, $a \in L$. Wir setzen

$$L_a = \{b \in M : b < a\}, \qquad R_a = \{b \in M : a < b\}.$$

$\tau_<$ sei die Topologie auf M, die erzeugt wird durch die Menge

$$\{L_a : a \in M\} \cup \{R_a : a \in M\}.$$

Wir bezeichnen den entsprechenden topologischen Raum mit $\Gamma((M,<))$. Falls $(M,<) = (\alpha, \epsilon)$, so schreiben wir einfach $\Gamma(\alpha)$.
Es ist bekannt, daß für jede lineare Ordnung $(M,<)$ der topologische Raum $\Gamma((M,<))$ normal ist.
Hier zeigen wir

Beispiel: (12) Der Raum $\Gamma(\omega_1) \times \Gamma(\omega_1 + 1)$ ist nicht normal.
Sei

$$A = \{(\alpha, \alpha) : \alpha < \omega_1\}, \quad B = \{(\alpha, \omega_1) : \alpha < \omega_1).$$

Dann sind A und B abgeschlossen. Sei U eine offene Menge, die A enthält. Dann gibt es für jedes β mit $0 < \beta < \omega_1$ eine Ordinalzahl $f(\beta) < \beta$ mit $(f(\beta), \beta+1) \times (f(\beta), \beta+1) \subseteq U$. Nach Fodors Theorem gibt es ein $\beta_0 < \omega_1$ und eine stationäre Menge $S \subseteq \omega_1$ mit $f(\gamma) = \beta_0$ für jedes $\gamma \in S$. Da S unbeschränkt in ω_1 ist, ist somit

$$C = (\beta_0, \omega_1) \times (\beta_0, \omega_1) \subseteq U.$$

Sei V eine offene Menge mit $V \supseteq B$. Dann gibt es ein α mit $\beta_0 < \alpha < \omega_1$, so daß $(\alpha, \beta_0 + 1) \in V$. Damit ist $U \cap V \neq \emptyset$, also ist $\Gamma(\omega_1) \times \Gamma(\omega_1 + 1)$ nicht normal.

14 Bäume

Ein *Baum* ist eine partielle Ordnung $(T,<)$ mit einem kleinsten Element derart, daß für jedes $t \in T$ die Menge

$$\hat{t} = \{s \in T : s < t\}$$

wohlgeordnet ist. Das kleinste Element von T heißt *Wurzel*.
Sei $t \in T$; mit $ht(t)$, der *Höhe* von t, bezeichnen wir den Ordnungstyp von $\hat{t}$. Wir setzen

$$ht(T) = sup\{ht(t) + 1 : t \in T\}.$$

Für $\alpha \in \mathbf{On}$ setzen wir

$$T(\alpha) = \{t \in T : ht(t) = \alpha\};$$

$$T_\alpha = \{t \in T : ht(t) < \alpha\}.$$

Dann ist

$$T = \bigcup_{\alpha < ht(T)} T(\alpha).$$

$T(\alpha)$ heißt *Stufe* der Höhe α von T und T_α heißt *Anfangsstück* der Höhe α von T. Wir setzen

$$wd(T) = sup\{|T(\alpha)| : \alpha < ht(T)\}$$

und bezeichnen $wd(T)$ als *Breite* von T (engl.; width).
Sei $a \in T$. a heißt *hoch*, wenn für jedes $\beta < ht(T)$ ein $b \in T$ existiert mit $a < b$ und $ht(b) \geq \beta$.

Sei a nicht hoch, $\beta < ht(T)$. β heißt *Höhenschranke* von a, wenn es kein $b \in T$ gibt mit $a \leq b$ und $ht\ (b) \geq \beta$. Ein Baum heißt hoch, wenn jedes seiner Elemente hoch ist.
Seien S und T Bäume, $S \subseteq T$. T heißt *Enderweiterung* von S, wenn für alle $a \in T \setminus S$ gilt $ht(a) \geq ht\ (S)$.
Sei $W \subseteq A$; W heißt *Weg*, wenn W eine linear geordnete Teilmenge von T ist derart, daß für jedes $t \in W$, $\hat{t} \subseteq W$ ist. Ein *Zweig* ist ein maximaler Weg. Ein Zweig W ist *konfinal* in T, wenn für jedes $\alpha < ht(T)$ ein $s \in W$ existiert mit $ht(s) = \alpha$.

Beispiel: (1) Seien κ und λ Kardinalzahlen, $\kappa, \lambda > 0$. Sei

$$X = \bigcup \{{}^{\alpha}\lambda : \alpha < \kappa\}.$$

Für $s, t \in X$ sei $s < t$ gdw. ein $\alpha < \kappa$ existiert mit $t|_{\alpha} = s$. Dann ist $(X, <)$ ein Baum mit $\lambda^{<\kappa}$ vielen Elementen und λ^{κ} vielen Zweigen. Wenn $\kappa = \omega$ und $\lambda = 2$, so bezeichnet man den entsprechenden Baum auch als *binären* Baum der Höhe ω.

Sei $(T, <)$ ein Baum, $A \subseteq T$. A heißt *Antikette*, wenn die Elemente von A paarweise unvergleichbar sind.

Lemma 1 (König): *Sei $(T, <)$ ein unendlicher Baum mit $|T(\alpha)| < \omega$ für alle $\alpha < ht(T)$. Dann besitzt T einen unendlichen Weg.*

Beweis: Wir konstruieren induktiv eine Folge $(a_n)_{n<\omega}$ von Elementen aus T derart, daß für alle $n < \omega$ gilt

(i) $a_n < a_{n+1}$;
(ii) $a_n \in T(n)$;
(iii) $|\{b \in T : a_n < b\}| \geq \omega$.

a_0 sei die Wurzel von T.
Sei a_n konstruiert derart, daß (iii) erfüllt ist. Da $|T(n)| < \omega$, gibt es ein $b \in T(n+1)$ mit $a_n < b$ derart, daß $|\{c \in T : b < c\}| \geq \omega$. Wir setzen

$$a_{n+1} = b.$$

Dann bildet die Menge

$$W = \{a_n : n < \omega\}$$

einen unendlichen Weg. □

Wir zeigen nun, daß es für jede Limesordinalzahl γ einen Baum $(T, <)$ gibt mit $ht(T) = \gamma$ derart, daß $(T, <)$ keinen Weg der Länge γ enthält:

Beispiel: (2) Sei γ eine Limesordinalzahl. Für $\beta < \gamma$ sei $L_{\beta} = \{(\alpha, \beta) : \alpha < \beta\}$. Sei T derjenige Baum, den wir erhalten, indem wir die kleinsten Elemente der L_{β} identifizieren. Wir können den Baum T wie folgt beschreiben: Wir setzen

$$T = \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < \beta < \gamma\} \cup \{(0, 0)\};$$

wir ordnen T durch

$$(\alpha,\beta) < (\gamma,\delta) \ \text{ gdw. } \ \begin{array}{l} \alpha = \beta = 0 \text{ oder} \\ \alpha < \gamma \text{ und } \beta = \delta. \end{array}$$

Dann ist für $0 < \beta < \gamma$,

$$W_\beta = \{(\alpha,\beta) : 0 < \alpha < \beta\} \cup \{(0,0)\}$$

ein Weg der Länge β, und $(T,<)$ enthält keinen Weg der Länge γ.

Ein Baum $(T,<)$ heißt *Aronszajn-Baum*, wenn $ht(T) = \omega_1$, $(T,<)$ enthält keine überabzählbaren Wege, und $wd(T) \leq \omega$.

Sei α eine Ordinalzahl. Ein Baum $(T,<)$ der Höhe α wird auch als *α-Baum* bezeichnet. Somit ist $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum gdw. er ein ω_1-Baum abzählbarer Breite ohne überabzählbare Wege ist.

Theorem 2: *Es gibt einen Aronszajn-Baum.*

Beweis: Sei F die Menge aller streng wachsenden Folgen s von rationalen Zahlen derart, daß für jedes $\gamma < lh(s)$, $sup(s|_\gamma) \in \mathbb{Q}$ ist. Für $s,t \in F$ sei $s < t$, wenn s ein Anfangsstück von t ist, d.h., wenn $t|_{lh(s)} = s$ ist.
Wenn W ein Weg in $(F,<)$ ist, so ist $\bigcup W$ eine streng monoton wachsende Folge von rationalen Zahlen, und somit ist $lh(W) < \omega_1$.
Wir werden einen Teilbaum T von F konstruieren, der ein Aronszajn-Baum ist. Wir konstruieren eine Folge $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ derart, daß für $\beta < \alpha < \omega_1$ gilt :

(i) $|T_\beta| \leq \omega$;
(ii) T_α ist Enderweiterung von T_β;
(iii) wenn $s \in T_\beta$, $r \in \mathbb{Q}$ und $sup(s) < r$, so gibt es ein $t \in T_\alpha$ mit $sup(t) = r$ und $t|_\beta = s$.

T_0 bestehe gerade aus der leeren Folge.
Angenommen, für $\beta < \alpha$ sei T_β bereits konstruiert.
Wenn α eine Nachfolgerzahl ist, $\alpha = \beta + 1$, so setzen wir

$$T_\alpha = \{s^\frown r : s \in T_\beta, r \in \mathbb{Q}, sup(s) < r\}.$$

Sei nun α eine Limeszahl. Wir setzen

$$P = \{(s,r) : s \in \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta, r \in \mathbb{Q}, sup(s) < r\}.$$

Wir wählen eine streng monoton wachsende Folge $(\alpha_i)_{i<\omega}$ von Ordinalzahlen mit $lh(s) < \alpha_0$, $sup\{\alpha_i : i < \omega\} = \alpha$ sowie eine streng monoton wachsende Folge $(r_i)_{i<\omega}$ von rationalen Zahlen mit $sup(s) < r_0$, $sup\{r_i : i < \omega\} = r$. Nun wählen wir eine Folge $(t_i)_{i<\omega}$ von Elementen aus $\bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ derart, daß für alle $i < \omega$ gilt:

$$lh(t_i) = \alpha_i, \qquad sup(t_i) = r_i.$$

Sei

$$t_{(s,r)} = \bigcup_{i<\omega} t_i.$$

Dann ist $lh(t_{(s,r)}) = \alpha$, $\forall \beta < \alpha\, (t_{(s,r)}|_\beta \in T_\beta)$ und $sup(t_{(s,r)}) = r$. Sei

$$T_\alpha = \{t_{(s,r)} : s \in \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta,\ r \in \mathbb{Q},\ sup(t_{(s,r)}) < r\}.$$

Dann erfüllt T_α (i), (ii) und (iii). Damit ist

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$$

ein Aronszajn-Baum. □

Lemma 3: *Sei $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum, $a \in T$. Wenn a hoch ist, so gibt es für jedes $\beta < \omega_1$ ein hohes $b \geq a$ mit $ht(b) \geq \beta$.*

Beweis: Angenommen, $a \in T$ ist hoch und $\beta < \omega_1$ mit $ht\,(a) < \beta$ ist so, daß jedes $b \in T(\beta)$ mit $a < b$ nicht hoch ist. Wegen $wd(T) = \omega$ ist

$$B = \{b \in T(\beta) : a < b\}$$

abzählbar. Für $b \in B$ sei $\beta(b) < \omega_1$ eine Höhenschranke von b. Dann ist

$$\beta = sup\{\beta(b) : b \in B\} < \omega_1.$$

Aber β ist auch Höhenschranke von a, im Widerspruch zur Annahme, daß a hoch ist. □

Lemma 4: *Jeder Aronszajn-Baum enthält einen hohen Teilbaum der Höhe ω_1.*

Beweis: Sei $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum. Wir betrachten die Menge

$$B = \{b \in T : b \text{ ist nicht hoch}\}.$$

Aus Lemma 3 folgt, daß $T \setminus B$ Teilbaum der Höhe ω_1 ist, in dem jedes Element hoch ist. □

Wir werden im folgenden Kapitel zeigen, wie sich Aronszajn-Bäume auf Kadinalzahlen größer als ω_1 verallgemeinern lassen.

Sei $(T,<)$ ein Baum, $a \in T$. *a spaltet sich auf*, wenn es unvergleichbare Elemente $b, c \in T$ gibt mit $a < b, c$. Wenn sich jedes $a \in T$ aufspaltet, so sagen wir, daß sich der Baum $(T,<)$ aufspaltet.

Lemma 5: *Sei κ regulär, $(T,<)$ ein aufspaltender Baum der Höhe κ, der einen konfinalen Weg enthält. Dann besitzt $(T,<)$ eine Antikette der Mächtigkeit κ.*

Beweis: Sei $W = \{w_\alpha : \alpha < \kappa\}$ ein konfinaler Weg mit $ht(w_\alpha) = \alpha$ für jedes $\alpha < \kappa$. Wir definieren eine Folge $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von paarweise unvergleichbaren Elementen wie folgt:
b_0 sei irgendein Element aus T, das nicht auf W liegt.
Angenommen, $\alpha < \kappa$ und für $\beta < \alpha$ ist b_β bereits definiert. Sei

$$\delta = sup\{ht(b_\beta) : \beta < \alpha\}.$$

Wir wählen dann für b_α ein solches $b \in T$, für das gilt

$$b > w_\delta \text{ und } b \notin W.$$

Dann ist $B = \{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Antikette der Mächtigkeit κ. □

Wenn $(T, <)$ ein hoher Aronszajn-Baum ist, so muß sich $(T, <)$ aufspalten:
Angenommen, $a \in T$ spaltet sich nicht auf. Dann ist

$$W = \{b \in T : b < a \text{ oder } b = a \text{ oder } a < b\}$$

ein Weg der Länge ω_1, da $(T, <)$ hoch ist. Das steht im Widerspruch zur Definition der Aronszajn-Bäume.

Beispiel: (3) Sei κ eine singuläre Kardinalzahl mit $cf(\kappa) > \omega$. Wir zeigen, daß es dann einen κ-Aronszajn-Baum gibt.
Die Idee ist wie folgt: Sei $\lambda = cf(\kappa)$, und sei $(\lambda_i)_{i<\lambda}$ eine streng monoton wachsende Folge von Kardinalzahlen mit $\bigcup_{i<\lambda} \lambda_i = \kappa$. Wir wählen für jedes $i < \lambda$ eine lineare Ordnung M_i mit $type(M_i) = \lambda_i$. $(T_0, <_0)$ sei der Baum, den wir erhalten, indem wir die kleinsten Elemente der linearen Ordnungen M_i miteinander identifizieren. Somit können wir setzen

$$T_0 = \{0\} \cup \{(\alpha, i) : 0 < \alpha < \lambda_i, i < \lambda\}$$

und

$$x <_0 y \quad \text{gdw.} \quad \begin{array}{l} x = 0 \text{ und } y \neq 0 \text{ oder} \\ \exists i\, \alpha\, \beta\, (x = (\alpha, i) \wedge y = (\beta, i) \wedge \alpha < \beta). \end{array}$$

T_1 sei der Baum, der aus T_0 entsteht, indem an jeden Punkt a von T_0 ein isomorphes Bild von T_0 angehängt wird, T_2 entstehe aus T_1, indem an jeden Punkt von T_1 ein isomorphes Bild von T_0 angehängt wird, usw. T_ω sei die Vereinigung aller T_n, $(n < \omega)$. T_ω läßt sich beschreiben als Menge aller endlichen Folgen $s = ((\alpha_0, i_0), \dots, (\alpha_{n-1}, i_{n-1}))$ mit

$$\forall i < n\, (\alpha_i < \lambda_i).$$

Sei $s, t \in T_\omega$, $s = ((\alpha_0, i_0), \dots, (\alpha_{n-1}, i_{n-1}))$, $t = ((\beta_0, j_0), \dots, (\beta_{m-1}, j_{m-1}))$ und $n \leq m$. Dann ist

$$s \prec t \quad \text{gdw.} \quad \begin{array}{l} s = t|_{lh(s)} \text{ oder} \\ m = n,\ s|_{m-2} = t|_{m-2},\ i_{m-1} = j_{m-1} \text{ und } \alpha_{m-1} < \beta_{m-1}. \end{array}$$

Wir müssen noch zeigen, daß es in T_ω keinen Weg der Länge κ gibt.
Sei $s, t \in T_\omega$, $s = ((\alpha_0, i_0), \dots, (\alpha_{n-1}, i_{n-1}))$, $t = ((\beta_0, i_0), \dots, (\beta_{m-1}, j_{m-1}))$. Wenn $s \prec t$, so ist $n \leq m$ und $\forall k < n\, (i_k = j_k)$. Weiterhin ist $ht(s) = \sum_{k<n} \alpha_k$.
Sei $(s_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine streng monoton wachsende Folge von Elementen von T_ω. Dann gibt es ein $\delta \leq \omega$ sowie eine Folge $(k_i)_{i<\delta}$ mit

(i) $sup\, \{lh(s_\beta : \beta < \kappa\} = \delta$;
(ii) wenn $s_\beta = ((\alpha_0, i_0), \dots, (\alpha_{n-1}, i_{n-1}))$, so ist $\forall j < n\, (i_j = k_j)$.

Dann ist für alle $\alpha < \kappa$,

$$ht(s_\alpha) \leq \sum_{i<\delta} \lambda_{k_i}.$$

Somit ist $(s_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ ab einem $\beta_0 < \kappa$ konstant, und somit kann es in T_ω keinen Weg der Länge κ geben.

Sei $(T, <_T)$ der im Beweis von Theorem 2 konstruierte Aronszajn-Baum. Dann können wir auf natürliche Weise eine Funktion $f : T \to \mathbb{Q}$ definieren durch $f(s) = sup(s)$. Dann hat f folgende Eigenschaft:

$$\forall s\, t \in T\, (s <_T t \to f(s) < f(t)). \tag{1}$$

Dies führt zu folgender Definition:
Sei $(T, <_T)$ ein Baum mit $ht(T) = \omega_1$. $(T, <_T)$ ist $\mathbb{Q}$-*einbettbar*, wenn es eine Funktion $f : T \to \mathbb{Q}$ gibt, die (1) erfüllt.
Es entsteht die Frage, ob alle Aronszajn-Bäume $\mathbb{Q}$-einbettbar sind. Diese Frage läßt sich in *ZFC* nicht entscheiden. In Kapitel 23 werden wir zeigen, daß aus Martin's Axiom folgt, daß alle Aronszajn-Bäume $\mathbb{Q}$-einbettbar sind. Am Ende dieses Kapitels werden wir sehen, daß es relativ konsistent bzgl. *ZFC* ist, daß es Aronszajn-Bäume gibt, die nicht $\mathbb{Q}$-einbettbar sind.

In Beispiel 1 haben wir binäre Bäume der Höhe ω eingeführt. Allgemeiner verstehen wir unter einem binären Baum einen Baum $(T, <)$ mit (i) es gibt ein $\kappa \in \mathbf{Card}$ mit $T \subseteq {}^{<\kappa}2$; (ii) die Ordnung $<$ ist die Mengeninklusion. Der Leser zeige als Übung, daß es für jeden Baum $(T, <)$ eine Einbettung $\pi : (T, <) \to ({}^{<\kappa}2, \subseteq)$ für ein geeignetes $\kappa \in \mathbf{Card}$ gibt. Hinweis: Man führe den Beweis durch Induktion über $ht(T)$.
Die Einbettung kann so gewählt werden, daß für jedes $s \in T$ und jede Kardinalzahl κ gilt: Wenn $\alpha = ht(s)$ und $|T_{\alpha+1}| < \kappa$, so ist $lh(\pi(s)) < \kappa$. Wir benötigen im Beweis von Theorem 16.11 solche Einbettungen in binäre Bäume.

Wir führen jetzt eine weitere Klasse von Bäumen ein. Ein Baum $(T, <)$ mit $ht(T) = \omega_1$, der keine überabzählbaren Wege und keine überabzählbaren Antiketten enthält, heißt *Souslin-Baum*. Da für jedes $\alpha < \omega_1$, $T(\alpha)$ eine Antikette von T ist, ist jeder Souslin-Baum ein Aronszajn-Baum. Während jedoch die Existenz von Aronszajn-Bäumen gezeigt werden kann, ist das bei Souslin-Bäumen nicht möglich. Wir werden in Kapitel 24 sehen, daß es ein geeignetes kombinatorisches Prinzip gibt (das relativ konsistent bzgl. *ZFC* ist), aus dem die Existenz von Souslin-Bäumen folgt. Andererseits werden wir in Kapitel 23 sehen, daß Martin's Axiom impliziert, daß keine Souslin-Bäume existieren.
Wir bezeichnen mit *SH* die *Souslin-Hypothese:*

(SH) Es gibt keine Souslin-Bäume.

Sei $(T, <)$ ein Souslin-Baum. Da jede Antikette von T höchstens abzählbar ist, kann $(T, <)$ nicht $\mathbb{Q}$-einbettbar sein. Somit folgt aus der Existenz von Souslin-Bäumen sofort, daß es Bäume der Höhe ω_1 gibt, die nicht $\mathbb{Q}$-einbettbar sind.

Wenn $(T, <)$ ein Souslin-Baum ist, und $S \subseteq T$ ist eine überabzählbare Teilmenge, so ist auch $(S, < |_T)$ ein Souslin-Baum: Da jede Antikette A von S auch Antikette von T ist, kann S keine überabzählbaren Antiketten besitzen.

Wir nennen einen Aronszajn-Baum $(T,<)$ *speziell*, wenn es eine Funktion $\pi : T \to \omega$ gibt mit

$$\forall a,b \in T\,(a<b \to \pi(a) \neq \pi(b)) \tag{2}$$

Lemma 6 : *Sei $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *T ist speziell;*
(ii) *T ist Vereinigung von abzählbar vielen Antiketten;*
(iii) *T ist $\mathbb{Q}$-einbettbar.*

Beweis : (i) $\longrightarrow$ (ii)
Sei $\pi : T \to \omega$ eine Funktion, die (2) erfüllt. Für $i<\omega$ sei

$$A_i = \pi^{-1}(i).$$

Dann ist für jedes $i<\omega$, A_i Antikette und

$$\bigcup_{i<\omega} A_i = T.$$

(ii) $\longrightarrow$ (iii)
Sei $\pi : T \to \omega$ eine Funktion, die (2) erfüllt. Wir konstruieren eine Funktion $f : T \to {}^{\omega}2$ derart, daß (1) erfüllt ist und außerdem $|rng(f)| \leq \omega$ ist. Dann läßt sich $rng(f)$ ordnungsisomorph in $\mathbb{Q}$ einbetten und somit ist T $\mathbb{Q}$-einbettbar.
f ist wie folgt definiert:
Sei $a \in T$; $s = f(a)$. Dann ist

$$s(a) = 1 \text{ gdw. } \ n \leq \pi(a) \wedge \exists b \in T\,(\pi(b) = n \wedge b < a).$$

Dann ist $|\{i<\omega : s(i)=1\}| < \omega$ und somit ist $|rng(f)| \leq \omega$. Sei $a,b \in T$, $a<b$, $s=f(a)$, $t=f(b)$, $n = min\{\pi(a),\pi(b)\}$. Dann ist $s(i)=t(i)$ für $i<n$, $s(n)=0$, $t(i)=1$. Also ist f ordnungserhaltend.

(iii) $\longrightarrow$ (i) ist unmittelbar klar.

□

Ein Baum $(T,<)$ heißt *normal*, wenn er hoch ist und jedes $a \in T$ mindestens zwei verschiedene Nachfolger besitzt.

Lemma 7: *Jeder Souslin-Baum enthält einen normalen Teilbaum.*

Beweis: Sei $(T,<)$ ein Souslin-Baum. Nach Lemma 4 können wir annehmen, daß $(T,<)$ hoch ist. Für jedes $a \in T$ bezeichne $\phi(a)$ die kleinste Ordinalzahl β, so daß es $b,c \in T(\beta)$ gibt mit $b \neq c$, $a<b$, $a<c$. Für $a \in T$ sei

$$N(a) = \{b \in T(\phi(a)) : a < b\}.$$

Wir konstruieren einen normalen Teilbaum $S \subseteq T$.
Zunächst sei $S(0) = T(0)$, d.h., die Wurzel von T wird auch die Wurzel von S.

Sei nun $\alpha < \omega_1$, und für alle $\beta < \alpha$ sei $S(\beta)$ bereits konstruiert.
Wenn α eine Nachfolgerordinalzahl ist, $\alpha = \beta + 1$, so setzen wir

$$S(\alpha) = \bigcup\{N(a) : a \in S(\beta)\}.$$

Sei nun α eine Limesordinalzahl. Sei U die Menge aller Wege w der Länge α in $\bigcup_{\beta<\alpha} S(\beta)$, die eine obere Schranke (in T) besitzen. Für jedes $w \in U$ sei $g(w)$ eine minimale obere Schranke. Wir setzen

$$S(\alpha) = \{g(w) : w \in U\}.$$

Sei nun

$$S = \bigcup_{\alpha<\omega_1} S(\alpha).$$

Aus Lemma 3 folgt, daß S hoch ist. Aus der Konstruktion folgt, daß jedes $a \in S$ mindestens zwei Nachfolger hat. Da jede Antikette in S auch Antikette in T ist, existieren in S keine überabzählbaren Antiketten. Somit ist S ein normaler Souslin-Baum. □

Bemerkung: Aus der Konstruktion folgt, daß S weiterhin folgende Eigenschaft hat: Wenn γ eine Limesordinalzahl ist und $a, b \in T(\gamma)$ mit $\hat{a} = \hat{b}$, so ist $a = b$.
Eine lineare Ordnung heißt *Souslin-Kontinuum*, wenn in L jede Familie von paarweise disjunkten Intervallen höchstens abzählbar ist, aber L keine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.
Wir wollen im folgenden zeigen, daß in einem *ZFC*-Modell ein Souslin-Baum existiert gdw. ein Souslin-Kontinuum existiert.

Lemma 8: *Wenn es ein Souslin-Kontinuum $(L, <)$ gibt, so gibt es auch ein Souslin-Kontinuum $(L', <)$, das dicht und ordnungsvollständig ist sowie weder ein kleinstes noch ein größtes Element enthält.*

Beweis: Sei $(L, <)$ ein Souslin-Kontinum. $a \in L$ heißt *isoliert*, wenn a einen Vorgänger b und einen Nachfolger c hat. Weiterhin heißt a auch dann isoliert, wenn a das kleinste Element von L ist und einen Nachfolger besitzt bzw. wenn a das größte Element von L ist und einen Vorgänger besitzt. Sei a weder größtes noch kleinstes Element von L und besitze einen Vorgänger b und einen Nachfolger c. Dann enthält das Intervall $I = (b, c)$ genau den Punkt a. Somit kann es höchstens abzählbar viele isolierte Punkte in L geben. Sei L_1 die Teilmenge von L, die wir erhalten, indem wir zunächst die isolierten Punkte entfernen und anschließend, falls vorhanden, noch das größte und das kleinste Element entfernen. Dann besitzt die Ordnung $(L_1, <)$ kein größtes und kein kleinstes Element. Da $|L \setminus L_1| \leq \omega$ ist, kann auch L_1 keine abzählbare dichte Teilmenge besitzen. Weiterhin sieht man leicht, daß L_1 als Teilmenge von L keine überabzählbare Familie von paarweise disjunkten Intervallen besitzen kann.
Sei $a, b \in L_1$, $a < b$. Das Paar (a, b) heißt *Lücke*, wenn a Vorgänger von b ist. Sei

$$\{(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha < \kappa\}$$

die Menge aller Lücken von L_1. Sei

$$B = \{b_\alpha : \alpha < \kappa\};$$

$$L_2 = L_1 \setminus B.$$

Wir überlegen uns, daß auch $(L_2, <)$ ein Souslin-Kontinuum ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß jede Teilmenge A von L_2, die dicht in L_2 ist, auch dicht in L_1 ist. Sei dazu (c_0, c_1) ein nichtleeres Intervall. Sei $c_i^{'}$ $(i < 2)$ der Vorgänger von c_i, falls c_i einen Vorgänger hat, und $c_i^{'} = c_i$ sonst. Da L_2 keine isolierten Punkte hat, ist $(c_0^{'}, c_1^{'}) \cap L_2 \neq \emptyset$. Wegen $(c_0^{'}, c_1^{'}) \cap L_2 \subseteq (c_0, c_1) \cap L_1$ ist somit $A \cap (c_0, c_1) \neq \emptyset$ (in L_1), und somit ist A dicht in L_1. □

Bemerkung: Man überlegt sich leicht, daß mit jeder dichten Souslin-Ordung $(L, <)$ auch das Produkt $(L, <) \times (\{0, 1\}, <)$ mit der lexikographischen Ordnung eine Souslin-Ordnung ist.Weiterhin überlegt man sich leicht, daß für jede überabzählbare lineare Ordnung $(L, <)$, $L \times \{0, 1, 2\}$ mit der lexikographischen Ordnung keine Souslin-Ordnung ist.

Theorem 9: *Es gibt ein Souslin-Kontinuum gdw. es einen Souslin-Baum gibt.*

Beweis: $(\longrightarrow)$
Sei $(L, <)$ ein Souslin-Kontinuum. Auf Grund des vorhergehenden Lemmas können wir annehmen, daß $(L, <)$ eine dichte lineare Ordnung ohne erstes und ohne letztes Element ist. Mit $Int(L)$ bezeichnen wir die Menge aller Intervalle von L. Dann ist $(Int(L), \subseteq)$ eine partielle Ordnung.
Sei A eine abzählbare Teilmenge von $Int(L)$, die bzgl. $\subseteq$ einen Baum bildet. Da $(L, <)$ dicht ist, gibt es eine abzählbare Menge $A_1 \supseteq A$, $A \neq A_1$, die einen aufspaltenden Baum bildet.

Behauptung 1: Sei $(L, <)$ ein dichtes Souslin-Kontinuum, $A \subseteq Int(L)$ ein aufspaltender, abzählbarer Baum. Dann gibt es ein $B \subseteq Int(L)$, $A \subseteq B$, $A \neq B$ derart, daß B ebenfalls ein abzählbarer, aufspaltender Baum ist.

Beweis von Behauptung 1: Sei

$$A = \{(a_i, b_i) : i < \omega\},$$

$$M = \{a_i : i < \omega\} \cup \{b_i : i < \omega\}.$$

Da M abzählbar ist, ist M nicht dicht. Somit gibt es in L ein Intervall $I = (c, d)$ mit $I \cap M = \emptyset$. Man erweitere $A \cup \{I\}$ zu einem abzählbaren, aufspaltenden Baum.

Wir können nun eine streng monoton wachsende Folge $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ von abzählbaren, aufspaltenden Bäumen in $Int(L)$ finden. Dann hat

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$$

keine überabzählbare Antikette, und somit ist T ein Souslin-Baum.

$(\longleftarrow)$
Sei $(T, <)$ ein aufspaltender Souslin-Baum. Sei W die Menge aller Zweige von $(T, <)$. Für jedes $\alpha < \omega_1$ sei $<_\alpha$ eine lineare Ordnung von $T(\alpha)$. Für $u, v \in W$ sei

$$\Delta(u, v) = min\{\alpha : u(\alpha) \neq v(\alpha)\}.$$

Wir führen auf W eine lineare Ordnung $<$ ein durch

$$u < v \text{ gdw. } u(\Delta(u, v)) <_{\Delta(u,v)} v(\Delta(u, v)).$$

Für $a \in T$ setzen wir

$$X_a = \{w \in W : a \in w\}.$$

Dann gilt:

(i) $|X_a| \geq \omega$;
(ii) wenn $u, v \in X_a$, so ist $(u,v) \subseteq X_a$.

Aus (i) und (ii) folgt, daß es für jedes $a \in T$ Zweige $u, v \in X_a$ gibt mit $(u,v) \neq \emptyset$.

Behauptung 2: Sei $u, v \in W$, $(u,v) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $a \in T$ mit $X_a \subseteq (u,v)$.

Beweis von Behauptung 2: Sei $w \in W$ mit $u < w < v$. Sei weiter

$$\alpha = max\{\Delta(u,w), \Delta(w,v)\}.$$

Dann ist $X_{w(\alpha+1)} \subseteq (u,v)$.

Wir zeigen, daß es in $(W,<)$ keine abzählbare dichte Teilmenge gibt:
Sei $A \subseteq W$, $|A| \leq \omega$. Sei

$$\alpha = sup\{lh(u) : u \in A\}.$$

Sei $a \in T(\alpha+1)$. Wir wählen $u, v \in X_a$ mit $(u,v) \neq \emptyset$. Wegen (ii) ist $(u,v) \cap A = \emptyset$, und somit ist A nicht dicht in W.

Wir zeigen nun, daß es in $(W,<)$ keine Familie von ω_1 vielen paarweise disjunkten Intervallen gibt:
Sei dazu

$$M = \{(u_i, v_i) : i < \omega_1\}$$

eine überabzählbare Familie von nichtleeren Intervallen von W. Für jedes $i < \omega_1$ wählen wir ein $a_i \in T$ derart, daß

$$X_{a_i} \subseteq (u_i, v_i).$$

Sei

$$A = \{a_i : i < \omega_1\}.$$

Da es in $(T,<)$ keine überabzählbaren Antiketten gibt, finden wir $\alpha, \beta < \omega_1$, $\alpha \neq \beta$ mit $a_\alpha \leq a_\beta$. Dann ist aber

$$X_{a_\alpha} \cap X_{a_\beta} \neq \emptyset,$$

also sind die Intervalle aus M nicht paarweise disjunkt. □

Indem man den zweiten Teil des Beweises von Theorem 9 ändert, erhält man

Lemma 10: *Sei $(T,<_T)$ ein Baum. Dann gibt es ein $<^* \subseteq T^2$ mit $<_T \subseteq <^*$ derart, daß $(T,<^*)$ eine lineare Ordnung ist mit folgender Eigenschaft:*

$$\forall abcd\,((d <_T a \wedge d <_T c \wedge a <^* b <^* c \rightarrow d <_T b),$$

d.h., für jedes $a \in T$ ist die Menge $\{b \in T : a <_T b\}$ ein Segment von $(T,<^*)$.

Beweis: Sei für jedes $\alpha < ht(T)$, $<_\alpha$ eine lineare Ordnung von $T(\alpha)$. Sei W die Menge aller Zweige von $(T,<_T)$, sei für $u, v \in W$, wie im Beweis von Lemma 9 sei

$$\Delta(u,v) = min\{\alpha : u(\alpha) \neq v(\alpha)\},$$

und sei

$$u \prec v \text{ gdw. } u(\Delta(u,v)) <_{\Delta(u,v)} v(\Delta(u,v)).$$

Für $a, b \in T$ sei $a <^* b$ gdw. (i) $a <_T b$ oder (ii) a und b sind nicht $<_T$-vergleichbar, und es gibt Zweige $u, v \in W$ mit $a \in u$, $b \in v$ und $u \prec v$.
Man rechnet unschwer nach, daß $<^*$ nicht von der Wahl von u und v abhängt und das Verlangte leistet. □

15 Ramseys Theorem

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Beispiel.

Angenommen, auf einer Party kommen zufällig 6 Personen in einem Raum zusammen. Wir wollen uns überlegen, daß sich unter diesen 6 Personen drei finden lassen, die sich gegenseitig alle kennen oder von denen keine eine der anderen beiden Personen kennt. (Dabei wollen wir die Relation ßich kennenäls reflexiv ansehen, d.h., wenn Krause den Meyer kennt, so kennt auch Meyer den Krause.)
Wir wählen willkürlich eine der 6 Personen aus, etwa den Hinze. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1: Hinze kennt von den restlichen 5 Personen mindestens drei.
Fall 2: Hinze kennt von den restlichen 5 Personen mindestens drei nicht.
Betrachten wir Fall 1. Angenommen, Hinze kennt von den restlichen drei Personen den Krause, den Müller und den Schulze. Wenn sich von den drei Personen Krause, Müller und Schulze zwei untereinander kennen (etwa Krause und Müller), so sind Hinze, Kause und Müller drei Personen, die sich gegenseitig kennen. Andernfalls sind Krause, Müller und Schulze drei Personen, die sich untereinander nicht kennen.
Fall 2 geht völlig analog.

Sei X eine beliebige Menge, ν eine Kardinalzahl, $\mathcal{P} = \{P_i : i \in \mu\}$ eine Zerlegung von $[X]^\nu$. Der Zerlegung $\mathcal{P}$ können wir auf kanonische Weise eine Funktion $f_{\mathcal{P}} : [X]^\nu \to \mu$ zuordnen durch $f_{\mathcal{P}}(a) = i$ gdw. $a \in P_i$. Diese Funktion nennen wir die zu $\mathcal{P}$ gehörende *charakteristische* Funktion. Eine Menge Y ist *homogen* für die Zerlegung $\mathcal{P}$ wenn es ein $i_0 \in I$ gibt mit $[Y]^\nu \subseteq P_{i_0}$.
Seien κ, λ, μ, ν Kardinalzahlen.

$$\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$$

steht als Abkürzung für folgende Aussage:

Wenn X eine Menge ist mit $|X| = \kappa$ und $\mathcal{P} = \{P_i : i \in \mu\}$ ist eine Zerlegung von $[X]^\nu$, so gibt es eine Menge $Y \subseteq X$ mit $|Y| = \lambda$, die homogen für $\mathcal{P}$ ist.
Mit dieser Schreibweise ergibt sich aus dem obigen Beispiel die Gültigkeit von $6 \to (3)^2_2$.

Aussagen dieser Form bezeichnen wir als *Zerlegungsaussagen.*

Theorem 1 (Ramsey): *Für alle natürlichen Zahlen m, n gilt*

$$\omega \to (\omega)^n_m.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n.
Sei $n = 1$, $\mathcal{P} = \{P_i : i < m\}$ eine Zerlegung von ω in die endlich vielen Mengen $P_0, \ldots, P_{m-1}$. Dann muß eine dieser Mengen, etwa P_{i_0}, unendlich sein. Damit ist P_{i_0} homogen für $\mathcal{P}$ und $|P_{i_0}| = \omega$.
Sei die Behauptung für n gezeigt, und sei $\mathcal{P} = \{P_i : i < m\}$ eine Zerlegung von $[\omega]^{n+1}$. f sei die zu $\mathcal{P}$ gehörende charakteristische Funktion. Wir definieren eine streng monoton wachsende Folge $(n_i)_{i<\omega}$ von natürlichen Zahlen sowie eine fallende Folge $(A_i)_{i<\omega}$ von unendlichen Teilmengen von ω derart, daß für alle $i < \omega$ gilt

(i) $\forall n \in A_i (n_i < n)$;
(ii) $\forall a, b \in [A_i]^n (f(\{n_i\} \cup a) = f(\{n_i\} \cup b)$.

Wir setzen

$$k_0 = 0.$$

Für $a \in [\omega \setminus \{0\}]^n$ sei $f^*(a) = f(\{0\} \cup a)$. Sei $\mathcal{P}_0 = \{P_0^i : i < m\}$ mit

$$P_0^i = \{a \in [\omega \setminus \{0\}]^n : f(\{0\} \cup a) = i\}.$$

Sei A_0 eine unendliche Teilmenge von ω, die homogen für f^* ist. Dann sind (i) und (ii) erfüllt.
Seien nun n_i, A_i für $i < k$ konstruiert. Wir setzen

$$n_k = min\ A_{k-1}.$$

$\mathcal{P}_k = \{P_k^i : i < m\}$ sei die Zerlegung von $[A_{k-1} \setminus \{n_k\}]^n$, die gegeben ist durch

$$P_k^i = \{a \in [A_{k-1} \setminus \{n_k\}]^n : f(\{n_k\} \cup a) = i\}.$$

Sei A_k eine unendliche Teilmenge von $A_{k-1} \setminus \{n_k\}$, die homogen ist für $\mathcal{P}_k$. Damit ist die Konstruktion der n_i und der A_i beschrieben.
Wir betrachten nun die Menge

$$K = \{n_i : i < \omega\}.$$

Aus der Konstruktion der n_i und der A_i folgt, daß dann gilt:

Wenn $k \in K$, $a, b \in [K \setminus k]^n$, so ist $f(\{k\} \cup a) = f(\{k\} \cup b)$.

Sei $g : K \to \omega$ diejenige Funktion, die jedem $i \in K$ dasjenige $i_0 < m$ zuordnet, für das gilt

$$\forall a \in [K \setminus i]^n\ (f(\{i\} \cup a) = i_0).$$

Sei nun $i_0 < m$ so, daß $Y = g^{-1}(i_0)$ unendlich ist. Wir wollen zeigen, daß Y homogen für $\mathcal{P}$ ist.
Sei dazu $a \in [Y]^{n+1}$, $m = min\ a$. Dann ist

$$f(a) = f(\{m\} \cup (a \setminus \{m\})) = g(m) = i_0.$$

Also ist Y homogen für A. □

Wir zeigen jetzt eine interessante Anwendung des Kompaktheitssatzes.

Theorem 2: *Seien m, k, l natürliche Zahlen. Dann gibt es eine natürliche Zahl n mit*

$$n \to (m)^k_l.$$

Beweis: Aus Theorem 1 folgt, daß

$$\omega \to (m)^k_l.$$

Wenn $n \not\to (m)^k_l$, so gibt es eine Zerlegung $\mathcal{P}_n = \{P^n_0, \ldots, P^n_{l-1}\}$ von $[n]^k$ derart, daß keine homogene Menge X für $\mathcal{P}_n$ existiert mit $|X| \geq m$.
Sei L eine Sprache, die die k-stelligen Relationen $R_0, \ldots, R_{l-1}$ enthält.
Ψ sei eine Formel, die folgendes ausdrückt:
- wenn $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ irgendein k-tupel ist und $i < l$, so gilt $R_i(a_0, \ldots, a_{k-1})$ gdw. $R_i(a_{s(0)}, \ldots, a_{s(k-1)})$ für jede Permutation s von k;
- wenn $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ ein k-tupel von paarweise verschiedenen Elementen ist, so trifft genau eine der Relationen R_i $(i < l)$ zu.

Für $j < l$ sei Φ^j_n eine Formel die ausdrückt, daß es keine m Elemente gibt, so daß für beliebige k paarweise verschiedene Elemente von ihnen P_j zutrifft.
Sei Ψ_n eine Formel die ausdrückt, daß mindestens n Elemente existieren. Sei

$$\Sigma = \{\Psi\} \cup \{\Phi^j_n : j < l, n < \omega\} \cup \{\Psi_n : n < \omega\}.$$

Dann ist jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar, also ist auch Σ erfüllbar. Aber eine Struktur, die Σ erfüllt, ist ein Modell für $\omega \not\to (m)^k_l$, im Widerspruch zur Gültigkeit von $\omega \to (m)^k_l$. $\square$

Es entsteht die Frage, ob man die Gültigkeit weiterer Aussagen der Form $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ zeigen oder widerlegen kann. Es ist klar, daß aus $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ folgt, daß $\lambda \leq \kappa$ sein muß. Wenn $\nu > \kappa$, so ist $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ gültig, da $[\kappa]^\nu = \emptyset$ ist. Für $\nu = 1$ sind die Aussagen $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ uninteressant.
Wir haben zunächst das folgende einfache Lemma:

Lemma 3: *Seien $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \kappa', \lambda', \mu', \nu'$ Kardinalzahlen mit $\nu \leq \kappa$, $\kappa' \geq \kappa$, $\lambda' \leq \lambda$, $\mu' \leq \mu$, $\nu' \leq \nu$ und es gelte $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$. Dann gilt auch*

$$\kappa' \to (\lambda')^{\nu'}_{\mu'}.$$

Wir betrachten wir ab jetzt nur noch den Fall, daß κ und λ unendlich sind. Das nächste Resultat zeigt, daß wir uns auf endliches ν beschränken können:

Theorem 4: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist*

$$\kappa \not\to (\omega)^\omega_2.$$

Beweis: Sei $\prec$ eine Wohlordnung von $[\kappa]^\omega$. Sei $F : [\kappa]^\omega \to 2$ gegeben durch

$$F(X) = 0 \text{ gdw. } \forall Y \in [\kappa]^\omega\, (Y \subseteq X \to X \prec Y).$$

Angenommen, $X \in [\kappa]^\omega$ ist homogen für F. Sei X^* das $\prec$-kleinste Element Y mit $Y \in [X]^\omega$. Dann ist $F(X^*) = 0$ und aus der Homogenität von X folgt, daß auch $F(X) = 0$ sein muß.

Damit folgt insbesondere, daß $X^* = X$ ist. Wir wählen eine Folge $(X_i)_{i<\omega}$ mit $X_i \in [X]^\omega$ und $X_i \subset X_{i+1}$ für alle $i < \omega$. Aus $F(X_i) = 0$ folgt $X_{i+1} \prec X_i$. Damit ist aber $(X_i)_{i<\omega}$ eine unendliche absteigende $\prec$-Folge, im Widerspruch dazu, daß $\prec$ Wohlordnung ist. □

Besonders interessant ist die Frage, ob es überabzählbare Kardinalzahlen κ geben kann, für die $\kappa \to (\kappa)^\nu_\mu$ gilt (wobei $2 \leq \mu, \nu$ und $\nu < \omega$) ist. Wir nennen eine überabzählbare Kardinalzahl κ *schwach kompakt*, wenn gilt $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Zunächst haben wir:

Lemma 5: *Wenn $\kappa \to (\kappa)^2_2$, so ist für jedes $n < \omega$*

$$\kappa \to (\kappa)^2_n.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion über n. Sei $n \geq 3$ und sei $\kappa \to (\kappa)^2_{n-1}$. Sei $F : [\kappa]^2 \to n$. Wir definieren eine Funktion $G : [\kappa]^2 \to 2$ durch

$$G(\{\alpha, \beta\}) = 0 \text{ gdw. } \ F(\{\alpha, \beta\}) = 0.$$

Sei X eine G-homogene Teilmenge von κ mit $|X| = \kappa$. Wenn $\forall \alpha \beta \in G\ (\alpha \neq \beta \to F(\{\alpha, \beta\}) = 0)$, so ist X bereits G-homogen mit $|X| = \kappa$. Andernfalls wenden wir auf X die Induktionshypothese an für die Einschränkung von F auf $[X]^2$. □

Wir zeigen nun, daß schwach kompakte Kardinalzahlen regulär sind:

Lemma 6: *Sei $\kappa > \omega$ mit $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Dann ist κ regulär.*

Beweis: Sei $cf(\kappa) = \lambda < \kappa$ und sei $(\kappa_i)_{i<\lambda}$ eine Folge von Kardinalzahlen $< \kappa$ mit $sup\{\kappa_i : i < \lambda\} = \kappa$. Sei $F : [\kappa]^2 \to 2$ gegeben durch

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 0 \text{ gdw. } \ \forall i < \lambda\, (\alpha < \kappa_i \leftrightarrow \beta < \kappa_i).$$

Sei X eine Teilmenge von κ, die homogen für F ist, $|X| \geq 2$. Wenn $\forall \alpha, \beta \in X\ (\alpha \neq y \to F(\{\alpha, \beta\}) = 1)$, so muß $|X| \leq \lambda$ sein.
Wenn $\forall \alpha, \beta \in X\ (\alpha \neq \beta \to F(\{\alpha, \beta\}) = 0$, so gibt es ein $i < \lambda$ mit $\forall \alpha \in X\ (\alpha < \kappa_i)$. Damit ist in jedem Falle $|X| < \kappa$ und κ besitzt keine F-homogene Teilmenge der Mächtigkeit κ. □

Die nächsten Resultate werden zeigen, daß schwach kompakte Kardinalzahlen Limeszahlen sind. Seien α und β Ordinalzahlen. Auf ${}^\beta\alpha$ ist die lexikographische Ordnung $<_l$ wie folgt gegeben (siehe auch Kapitel 6): Für $f, g \in^\beta \alpha$ ist $f <_l g$ gdw. es ein $\gamma < \beta$ gibt mit $\forall \delta < \gamma (f(\delta) = g(\delta))$ und $f(\gamma) < g(\gamma)$.

Lema 7: *In $({}^\kappa 2, <_l)$ gibt es keine streng monoton wachsende Folge vom Typ κ^+ und keine streng fallende Folge von Typ κ^+.*

Beweis: Wir zeigen, daß es in $({}^\kappa 2, <_l)$ keine streng monoton wachsende Folge vom Typ κ^+ gibt.
Angenommen, $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ ist eine Folge in ${}^\kappa 2$ mit $f_\alpha <_l f_\beta$ für $\alpha < \beta < \kappa^+$. Für $\alpha < \beta < \kappa^+$ sei

$$c(\alpha, \beta) = min\{\delta : f_\alpha(\delta) \neq f_\beta(\delta)\};$$

und

$$d(\alpha) = min\{c(\alpha,\beta) : \alpha < \beta < \kappa^+\}.$$

Damit ist d eine Funktion von κ^+ in κ. Weiterhin ist für alle $\alpha < \kappa^+$, $f_\alpha(d(\alpha)) = 0$. Sei

$$F(\alpha) = \{\beta < \kappa^+ : d(\beta) = \alpha\}.$$

Wir zeigen, daß $F(\alpha)$ in κ^+ beschränkt ist.
Sei $\beta < \gamma < \kappa^+$ und $c(\beta,\gamma) = d(\beta)$. Dann ist $f_\gamma(d(\beta)) = 1$ und aus $\gamma < \delta < \kappa^+$ folgt

$$f_\delta(d(\beta)) = 1 \vee \exists \varepsilon < d(\beta)(f_\gamma(\varepsilon) < f_\delta(\varepsilon)).$$

Also ist $\delta \notin F(\alpha)$ und somit ist γ eine obere Schranke für $F(\alpha)$. Somit ist γ eine obere Schranke. Damit ist $|F_\beta| \leq \kappa$ für jedes $\beta < \kappa$. Dies steht im Widerspruch zu $\bigcup_{\beta<\kappa} F_\beta = \kappa^+$. □

Theorem 8: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ ist*

$$2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)^2_2.$$

Beweis: Sei $(f_\alpha)_{\alpha<2^\kappa}$ eine Aufzählung von ${}^\kappa 2$, $<_l$ sei die lexikographische Ordnung von ${}^\kappa 2$. Wir setzen

$$P_0 = \{\{\alpha,\beta\} : f_\alpha <_l f_\beta \text{ und } \alpha < \beta\};$$
$$P_1 = [2^\kappa]^2 \setminus P_0;$$
$$\mathcal{P} = \{P_0, P_1\}.$$

Wenn Y homogen für $\mathcal{P}$ ist, so liefert Y eine streng monoton wachsende bzw. streng monoton fallende Folge der Länge κ^+ in ${}^\kappa 2$, und das ist nach Lemma 2 nicht möglich. □

Theorem 9: *Wenn κ eine überabzählbare Kardinalzahl mit $\kappa \rightarrow (\kappa)^2_2$ ist, so ist κ unerreichbar.*

Beweis: Wir haben bereits in Lemma 6 gezeigt, daß κ regulär ist. Wir haben noch zu zeigen, daß für jedes $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$ ist.
Angenommen, das ist nicht der Fall und sei $\lambda < \kappa$ so, daß $2^\lambda \geq \kappa$ ist. Mit Lemma 1 haben wir: Aus $\kappa \rightarrow (\kappa)^2_2$ folgt $\kappa \rightarrow (\lambda^+)^2_2$ und aus $2^\lambda \geq \kappa$ folgt $2^\lambda \rightarrow (\lambda^+)^2_2$. Dies steht im Widerspruch zu Theorem 8. □

Aus Theorem 9 erhalten wir, daß mit *ZFC* auch *ZFC* + *"es gibt keine schwach kompakte Kardinalzahl"* konsistent ist.
Wir kommen jetzt zu einem Resultat, das eine Verallgemeinerung des Theorems von Ramsey für geeignete überabzählbare Kardinalzahlen darstellt. Zunächst zeigen wir in Lemma 10, daß man in Theorem 8, 2^κ lediglich durch seine Nachfolgerkardinalzahl $(2^\kappa)^+$ zu ersetzen braucht, um zu einer gültigen Zerlegungsaussage zu kommen. Dabei ist der Beweis dieses Theorems ähnlich dem Beweis des Theorems von Ramsey.

Lemma 10: *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt*

$$(2^\kappa)^+ \rightarrow (\kappa^+)^2_\kappa.$$

Beweis: Sei $F : [(2^\kappa)^+]^2 \to \kappa$ gegeben. Wir suchen ein $\alpha < \kappa$ sowie ein $B \subseteq (2^\kappa)^+$ mit $|B| = \kappa^+$ und $F(\{a,b\}) = \alpha$ für alle $a, b \in B$, $a \neq b$.
Sei S die Menge aller Folgen s mit $lh(s) \leq \kappa^+$, $rng(s) \subseteq \kappa$. Auf S erklären wir eine *p.o.* $\prec$ durch

$$s \prec t \text{ gdw. } \quad s \subseteq t.$$

Damit wird S ein Baum. Induktiv definieren wir für jedes $s \in S$ eine Menge $A_s \subseteq (2^\kappa)^+$ sowie ein $h(s) \in (2^\kappa)^+$:

$$A_\emptyset = (2^\kappa)^+;$$

$$h(s) = \begin{cases} min\, A(s), \text{ wenn } A(s) \neq \emptyset; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wenn $lh(s) \in \mathbf{Lim}$, so ist

$$A_s = \bigcap_{\beta < lh(s)} A_{s|_\beta}.$$

Für $\alpha < \kappa$ ist

$$A_{s^\frown\alpha} = \{\beta \in A_s : h(s) < \beta, F(\{h(s), \beta\}) = \alpha\}.$$

Sei

$$T = \{s \in S : A_s \neq \emptyset\}.$$

Dann ist $h[T] = (2^\kappa)^+$ und somit ist $|T| = (2^\kappa)^+$. Wir zeigen nun, daß es ein $s \in T$ gibt mit $lh(s) = \kappa^+$:
Für jedes $\alpha < \kappa^+$ ist

$$(2^\kappa)^+ = h[T_\alpha] \cup \bigcup \{A_s : lh(s) = \alpha\}.$$

Wegen $|T_\alpha| \leq |{}^{<\alpha}\kappa| \leq \kappa \cdot \kappa^\kappa = 2^\kappa$ folgt

$$|T_\alpha| = |\bigcup_{\alpha < \kappa^+} T_\alpha| \leq \kappa^+ \cdot |T_\alpha| \leq 2^\kappa.$$

Damit gibt es ein $s \in S$ mit $lh(s) = \kappa^+$ derart, daß $A_s \neq \emptyset$ ist.
Sei

$$B = \{h(s|_\alpha) : \alpha < \kappa^+\}.$$

Dann ist $|B| = \kappa^+$. Wenn $\alpha, \beta, \gamma \in B$, $\alpha < \beta, \gamma$, so ist

$$F(\{\alpha, \beta\}) = F(\{\alpha, \gamma\}).$$

Wir definieren eine Funktion $\pi : B \to \kappa$ durch

$$\pi(\alpha) = \gamma \text{ gdw. } \quad \exists \beta \in B\, (\beta > \alpha \wedge F(\{\alpha, \beta\}) = \gamma).$$

Dann gibt es ein γ mit $|\pi^{-1}(\gamma)| = \kappa^+$ und somit ist $\pi^{-1}(\gamma)$ eine für F homogene Menge von der Mächtigkeit κ^+. □

Sei κ eine beliebige Kardinalzahl. Induktiv definieren wir $exp_n(\kappa)$ durch

$$exp_0(\kappa) = \kappa,$$

$$exp_{n+1}(\kappa) = 2^{exp_n(\kappa)}.$$

Theorem 11 (Erdös-Rado): *Für jede unendliche Kardinalzahl κ und jedes $n \in \omega$ gilt*

$$(exp_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Behauptung äquivalent dazu, daß sich κ^+ nicht in κ viele Mengen zerlegen läßt, die sämtlich eine Mächtigkeit $< \kappa^+$ haben. Dies ist offensichtlich richtig.
Sei $n > 0$ und sei die Behauptung für $k < n$ gezeigt. Sei $F : [(exp_n(\kappa))^+]^{n+1} \to \kappa$ gegeben. Wir verfahren analog zum Beweis von Lemma 10:
Sei S die Menge aller Funktionen $s : [\alpha]^n \to \kappa$ für ein $\alpha \leq (exp_{n-1}(\kappa))^+$. Für $s \in S$, $dom(s) = [\alpha]^n$, $\beta \leq \alpha$ bezeichnen wir mit $s|_\beta$ die Einschränkung von s auf $[\beta]^n$.
Induktiv definieren wir für jedes $s \in S$ eine Menge $A_s \subseteq (exp_n(\kappa))^+$ sowie ein $h(s) \in (exp_n(\kappa))^+$:

$$A_\emptyset = (exp_n(\kappa))^+.$$

$$h(s) = \begin{cases} min\, A_s, \text{ wenn } A_s \neq \emptyset; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wenn $dom(s) = [\alpha]^n$ für ein $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so ist

$$A_s = \bigcap_{\beta<\alpha} A_{s|_\beta}.$$

Wenn $dom(s) = [\alpha+1]^n$, $t = s|_\alpha$, so ist

$$A_s = \{\beta \in A_t : h(t) < \beta, \text{ wenn } \alpha_0 < \cdots < \alpha_{n-1} < \beta, \text{ so ist } \\ F(h(t|_{\alpha_0}), \ldots, h(t|_{\alpha_{n-1}}), \beta) = s(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha)\}.$$

Sei

$$T = \{s \in S : A_s \neq \emptyset\}.$$

Analog zum Beweis in Lemma 10 folgt, daß es ein $s \in T$ gibt mit

$$dom(s) = (exp_{n-1}(\kappa))^+.$$

Sei

$$B = \{h(s|_\alpha) : \alpha < (exp_{n-1}(\kappa))^+\}.$$

Dann haben wir: Wenn $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta, \gamma \in B$, $\alpha_0 < \cdots < \alpha_{n-1} < \beta < \gamma$, so ist $F(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta\}) = F(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma\})$. Sei $\pi : [B]^n \to \kappa$ gegeben durch

$$\pi(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}) = \beta, \text{ gdw. } \exists \gamma \in B\, (\gamma > \alpha_{n-1} \wedge F(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma\}) = \beta).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Menge C mit $|C| = \kappa^+$, die homogen für π ist. Diese Menge C ist aber auch homogen für F. □

Das folgende Resultat benötigen wir an späterer Stelle.

Lemma 12: *Sei $\kappa \geq \omega$. Wenn $\kappa \to (\lambda)^2_2$, so besitzt jede lineare Ordnung $(A,<)$ mit $|A| \geq \kappa$ eine Teilmenge B mit $(B,<) \cong \lambda$ oder $(B,>) \cong \lambda$.*

Beweis: Sei $(A,<)$ eine linare Ordnung mit $|A| = \kappa$. Sei $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Wir definieren $F : [A]^2 \to 2$ durch:
Wenn $\alpha < \beta < \kappa$, so ist

$$F(\{\alpha,\beta\}) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } a_\alpha < a_\beta; \\ 1, \text{ wenn } a_\beta < a_\alpha. \end{cases}$$

Sei B eine F-homogene Teilmenge von A mit $|B| = \lambda$. Wenn $a_\alpha, a_\beta \in B$, $\alpha < \beta$ und $F(\{a_\alpha, a_\beta\}) = 0$, so ist $(B,<) \cong \lambda$, andernfalls ist $(B,>) \cong \lambda$. □

Seien κ, λ_i $(i < \mu)$ Kadinalzahlen und $n < \omega$. Dann steht

$$\kappa \to (\lambda_i)^n_{i<\mu}$$

als Abkürzung für die folgende Aussage:
Wenn X eine Menge ist mit $|X| = \kappa$ und $\mathcal{P} = \{P_i : i < \mu\}$ ist eine Zerlegung von $[X]^n$, so gibt es ein $i < \mu$ sowie eine Menge Y mit $|Y| = \lambda_i$ und $[Y_i]^2 \subseteq P_i$.

Theorem 13 (Erdös-Dushnik-Miller): *Für jede unendliche Kardinalzahl κ gilt*

$$\kappa \to (\kappa, \omega)^2.$$

Beweis: Sei $\mathcal{P} = (P_0, P_1)$ eine Zerlegung von κ. Für $\alpha < \kappa$ setzen wir

$$B(\alpha) = \{\beta < \kappa : \alpha < \beta, \{\alpha,\beta\} \in P_1\}.$$

Behauptung: Wenn es für jedes $A \in [\kappa]^\kappa$ ein $\alpha \in A$ gibt mit $|B(\alpha) \cap A| = \kappa$, so gibt es ein $C \in [\kappa]^\omega$ mit $[C]^2 \subseteq P_1$.

Beweis der Behauptung: Sei $F : [\kappa]^\kappa \to \kappa$ eine Funktion, die jedem $A \in [\kappa]^\kappa$ ein $\alpha \in A$ zuordnet mit $|B(\alpha) \cap A| = \kappa$. Wir setzen

$$C_0 = \kappa;$$

$$C_{n+1} = \{\alpha \in C_n : F(C_n) < \alpha, \{F(C_n), \alpha)\} \in P_1\}.$$

Dann leistet die Menge

$$C = \{F(C_n) : n < \omega\}$$

das Verlangte.

Wir kommmen nun zum eigentlichen Beweis des Theorems.
Angenommen, es gibt keine unendliche homogene Menge A mit $[A]^2 \subseteq P_1$. Aus der eben gezeigten Behauptung folgt, daß es ein $A \in [\kappa]^\kappa$ gibt mit $|B(\alpha) \cap A| < \kappa$ für alle $\alpha \in A$.

Fall 1: κ ist regulär.
Wir konstruieren eine streng monoton wachsende Folge $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ wie folgt: Für $\alpha < \kappa$ sei

$$\gamma_\alpha = min(A \setminus sup(\bigcup_{\beta<\alpha} B(\gamma_\beta))).$$

Aus der Regularität von κ folgt die Existenz einer solchen Folge. Sei

$$C = \{\gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

Aus der Definition der γ_α ergibt sich $|C| = \kappa$ und $[C]^2 \subseteq P_0$.

Fall 2: κ ist singulär.
Sei $(\kappa_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ eine Folge von regulären Kardinalzahlen mit $cf(\kappa) < \kappa_0$ und $\bigcup_{\alpha<cf(\kappa)} \kappa_\alpha = \kappa$. Sei weiterhin $(X_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ eine Zerlegung von A mit $|X_\alpha| = \kappa_\alpha$ für alle $\alpha < cf(\kappa)$. Da die κ_α regulär sind, gibt es für jedes $\alpha < cf(\kappa)$ ein $C_\alpha \subseteq X_\alpha$ mit $|C_\alpha| = \kappa_\alpha$ und $[C_\alpha]^2 \subseteq P_0$.
Für $\alpha, \beta < cf(\kappa)$ setzen wir

$$C_{\alpha,\beta} = \{\alpha \in C_\alpha : |B(\alpha) \cap A| < \kappa_\beta\}.$$

Dann ist

$$C_\alpha = \bigcup_{\beta<cf(\kappa)} C_{\alpha,\beta}.$$

Da κ_α regulär und $\kappa_\alpha > cf(\kappa)$ ist, gibt es ein $\delta(\alpha)$ mit $\alpha < \delta(\alpha) < cf(\kappa)$ und $|C_{\alpha,\delta(\alpha)}| = \kappa_\alpha$. Sei

$$D_\alpha = C_{\alpha,\delta(\alpha)}$$

und sei $E \subseteq cf(\kappa)$ in $cf(\kappa)$ konfinal und derart, daß gilt

$$\forall \alpha\, \beta \in E(\beta < \alpha \to \delta(\beta) < \alpha).$$

Für $\alpha \in E$ setzen wir

$$S_\alpha = D_\alpha \setminus \bigcup \{B(\gamma) : \exists \beta < \alpha(\beta \in E \wedge \gamma \in D_\beta)\}.$$

Sei

$$S = \bigcup_{\alpha \in E} S_\alpha.$$

Dann ist $|S| = \kappa$ und $[S]^2 \subseteq P_0$. $\square$

Bei den bisherigen Zerlegungsaussagen handelte es sich um Aussagen, bei denen es um die Existenz von homogenen Mengen einer bestimmten Mächtigkeit ging. Man kann nun auch Zerlegungsaussagen betrachten, bei denen es um die Existenz von homogenen Mengen eines bestimmten Ordnungstyps geht:
Seien α und β_i für $i < \gamma$ Ordinalzahlen. Dann steht

$$\alpha \to (\beta_i)^n_{i<\gamma}$$

als Abkürzung für die folgende Aussage: Wenn A eine geordnete Menge mit $type(A) = \alpha$ und $\mathcal{P} = (P_i)_{i<\gamma}$ eine Zerlegung von A^n ist, so gibt es ein $i < \gamma$ sowie eine Menge $B \subseteq A$ mit $type(B) = \beta_i$ mit $[B]^n \subseteq P_i$.
Wir schreiben entsprechend $\alpha \to (\beta)^m_\gamma$, wenn $\beta_i = \beta$ für alle $i < \gamma$.
Unmittelbar aus dem Theorem von Ramsey folgt, daß für alle $m, n < \omega$ gilt:

$$\omega \to (\omega)^m_n.$$

Theorem 14 (Specker): *Für alle $m < \omega$ gilt*

$$\omega^2 \to (\omega^2, m).$$

Beweis: Sei $W = \omega \times \omega$ und $<_l$ die lexikographische Ordnung auf W. Dann ist $type(W) = \omega^2$ und es genügt, Zerlegungen von W zu betrachten. Sei $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1)$ eine Zerlegung von $[W]^2$. Wir definieren eine Zerlegung von $[\omega]^4$ in 16 Klassen: Sei $i_0, i_1, i_2, i_3 < 2$. Für $a, b, c, d \in \omega$, $a < b < c < d$ ist

$$\begin{aligned} \{a,b,c,d\} \in P(i_0,i_1,i_2,i_3) \text{ gdw. } & \{(a,b),(c,d)\} \in Q_{i_0} \text{ und} \\ & \{(a,c),(b,d)\} \in Q_{i_1} \text{ und} \\ & \{(a,d),(b,c)\} \in Q_{i_2} \text{ und} \\ & \{(a,b),(a,c)\} \in Q_{i_3}. \end{aligned}$$

Nach dem Theorem von Ramsey gibt es ein $k < 4$ sowie ein $H \in [\omega]^\omega$, das homogen für die Partitionierung $\mathcal{P} = \{P(i_0, i_1, i_2, i_3) : i_0, i_1, i_2, i_3 < 2\}$ ist. Sei nun $[H]^4 \subseteq P(i_0, i_1, i_2, i_3)$ und sei $(h_i)_{i<\omega}$ die Aufzählung von H in streng monoton wachsender Folge.
Angenommen, es gibt ein $k < 4$ mit $i_k = 1$. Dann finden wir eine Menge $I \subseteq W$ mit $|I| = m$ und $[I]^2 \subseteq Q_1$. Für I können wir eine der folgenden Mengen wählen:

$$\begin{aligned} &\{(h_{2k}, h_{2k+1}) : k < m\}, \text{ wenn } i_0 = 1; \\ &\{(h_k, h_{m+k}) : k < m\}, \text{ wenn } i_1 = 1; \\ &\{(h_k, h_{2m-k}) : k < m\}, \text{ wenn } i_2 = 1; \\ &\{(h_0, h_{1+k}) : k < m\}, \text{ wenn } i_3 = 1. \end{aligned}$$

Angenommen, $i_k = 0$ für alle $k < 4$. Sei $(H_k)_{k<\omega}$ eine Zerlegung von H in unendliche Teilmengen. Wir setzen

$$I = \{(h, h') : h \in H_0, h' \in H_{h+1}, h < h'\}.$$

Dann ist offensichtlich, daß $type(I) = \omega^2$. Wir zeigen noch, daß $[I]^2 \subseteq Q_0$ ist. Sei dazu $\{(h_0, h_1), (h_2, , h_3)\} \in [I]^2$ mit $(h_0, h_1) <_l (h_2, h_3)$. Dann sind $h_0, h_2 \in H_0$ und $h_1 \neq h_3$. Somit sind für die h_i folgende Lagebeziehungen möglich: $h_0 < h_1 < h_2 < h_3$ oder $h_0 < h_2 < h_1 < h_3$ oder $h_0 < h_3 < h_1 < h_2$ oder $h_0 = h_2 < h_1 < h_3$. Aber in allen vier Fällen ergibt sich aus der Definition von $P(0,0,0,0)$, daß $\{(h_0, h_1), (h_2, h_3)\} \in Q_0$ ist. □

Bemerkung: Von Chang wurde gezeigt, daß für alle $m < \omega$ gilt $\omega^\omega \to (\omega^\omega, m)$. Weiterhin ist bekannt, daß für alle k mit $3 \leq k < \omega$ gilt $\omega^k \not\to (\omega^k, 3)$.

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Resultat über die Zerlegung von Ordinalzahlen.

Theorem 15 (Miller-Rado): *Für jede unendliche Kardinalzahl κ und jedes $\alpha < \kappa^+$ gibt es eine Zerlegung $(A_n)_{n<\omega}$ von α mit $type(A_n) \leq \kappa^n$ für jedes $n < \omega$.*

Beweis: Durch Induktion über α. Dabei ist o.B.d.A. $\alpha \geq \kappa$.
Fall 1: α ist zerlegbar, d.h., es gibt $\beta, \gamma < \alpha$ mit $\alpha = \beta + \gamma$.

Dann gibt es kein $\delta \in \mathbf{On}$ mit $\alpha = \omega^\delta$. Sei $(B_n)_{n<\omega}$ eine Zerlegung von β und $(C_n)_{n<\omega}$ eine Zerlegung von γ mit $type(B_n) \leq \kappa^n$, $type(C_n) \leq \kappa^n$ für jedes $n < \omega$. Wir setzen

$$A_0 = \emptyset, \qquad A_{n+1} = B_n \cup C_n^*$$

mit $C_n^* = \{\beta + \nu : \nu \in C_n\}$.
Dann leistet $(A_n)_{n<\omega}$ das Verlangte.
Fall 2: $\alpha = \omega^\delta$ für ein $\delta \in \mathbf{On}$.
Fall 2.1: δ ist eine Nachfolgerzahl.
Sei $\delta = \beta + 1$. Dann gibt es eine Zerlegung $(B_n)_{n<\omega}$ von ω^β mit $type(B_n) \leq \kappa^n$ für jedes $n < \omega$. Wir setzen

$$A_0 = \emptyset, \qquad A_{n+1} = \{m \cdot \omega^\beta + \nu : \nu \in B_n, m \in \omega\}.$$

Dann ist $type(A_{n+1}) \leq \omega \cdot \kappa^n = \kappa^{n+1}$.
Fall 2.2: δ ist eine Limeszahl.
Dann ist $\gamma = cf(\delta) \leq \kappa$. Somit gibt es eine stetige, streng monoton wachsende Folge $(\beta_\nu)_{\nu<\gamma}$ mit $\sup\{\omega^{\beta_\nu} : \nu < \gamma\} = \omega^\delta$. Für $\nu < \gamma$ sei $I_\nu = [\omega^{\beta_\nu}, \omega^{\beta_{\nu+1}})$. Dann ist $\bigcup_{\nu<\gamma} I_\nu = \alpha$, $type(I_\nu) = \omega^{\beta_\nu}$ für jedes $\nu < \gamma$.Für jedes $\nu < \gamma$ wählen wir eine Zerlegung$\{B_\nu^n : n < \omega\}$ von I_ν mit $type(B_\nu^n) \leq \kappa^n$. Sei

$$A_0 = \emptyset, \qquad A_{n+1} = \bigcup_{\nu<\gamma} B_\nu^n.$$

Dann ist $\text{type}(A_n) \leq \kappa^n$ für jedes $n < \omega$. □

16 Die Baum-Eigenschaft

Eine Kardinalzahl κ hat die *Baum-Eigenschaft*, wenn jeder Baum $(T, <_T)$ mit $|T| = \kappa$ und $\forall \alpha < \kappa\, (|T_\alpha| < \kappa)$ einen Weg der Länge κ besitzt. Aus König's Lemma (Lemma 14.1) folgt, daß ω die Baum-Eigenschaft hat. Aus der Existenz von Aronszajn-Bäumen (Theorem 15.2) folgt, daß $\aleph_1$ nicht die Baum-Eigenschaft hat.
Wir zeigen zunächst, wie sich die Konstruktion aus dem Beweis von Theorem 15.2 auf Kardinalzahlen $> \aleph_1$ erweitern läßt.
Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl. Ein Baum $(T, <_T)$ heißt *κ-Aronszajn-Baum*, wenn $ht(T) = \kappa$, $\forall \alpha < \kappa\, (|T_\alpha| < \kappa)$ und T besitzt keinen Weg der Länge κ. Damit sind die Aronszajn-Bäume gerade die $\aleph_1$-Aronszajn-Bäume.
Bei der Konstruktion von Aronszajn-Bäumen spielte die Ordnung der rationalen Zahlen eine wesentliche Rolle. Wir stellen zuerst Ordnungen bereit, die die Rolle der rationalen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung übernehmen werden:

Lemma 1: *Für jede unendliche Kardinalzahl κ existiert eine geordnete Menge $(L, <)$ derart, daß*

(i) *$|L| = \kappa$;*
(ii) *jedes $\alpha < \kappa^+$ kann in jedes Intervall von L eingebettet werden, d.h., für alle $u, v \in L$ mit $u < v$ existiert eine Menge $B \subseteq (u, v) = \{w \in L : u < w < v\}$ mit $type(B) = \alpha$.*

Beweis: Wenn $\kappa = \omega$, so können wir für $(L, <)$ die Menge der rationalen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung nehmen.

Für den allgemeinen Fall sei L die Menge aller Folgen s aus ${}^{\omega}\kappa$ mit $\exists k < \omega\, \forall i < \omega\, (k < i \rightarrow s_i = 0)$. Dann ist $|L| = \kappa$. Sei $<_l$ die lexikographische Ordnung von L. Wir zeigen, daß folgendes gilt:

Behauptung: *Für jedes $s, t \in L$ mit $s <_l t$ gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(s_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ mit $s \leq_l s_0$ und $\forall \alpha < \kappa\, (s_\alpha <_l t)$.*

Beweis der Behauptung: Sei $s, t \in L$, $s <_l t$. Dann gibt es ein $n < \omega$ mit $s(n) < t(n) \wedge \forall i < n\, (s(i) = t(i))$. Für $\alpha < \kappa$ definieren wir s_α durch:

$$s_\alpha(k) = \begin{cases} s(k), \text{ wenn } k \leq n; \\ s(n+1) + 1 + \alpha, \text{ wenn } k = n+1; \\ 0, \text{ wenn } k > n+1. \end{cases}$$

Dann ist die Folge $(s_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ wie verlangt.

Wir zeigen nun (ii) durch Induktion über α. Sei dazu $s, t \in L$, $s < t$. Wir zeigen, daß sich jedes $\alpha < \kappa^+$ in (s, t) einbetten läßt.
Wenn $\alpha = 0$, so ist nichts zu zeigen.
Sei α eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha = \beta + 1$. Wir wählen ein $s_0 \in L$ mit $s <_l s_0 <_l t$. Sei $B \subseteq (s, s_0)$ eine Teilmenge von L mit $type(B) = \beta$. Dann ist $B' = B \cup \{s_0\}$ eine Teilmenge von (s, t) mit $type(B') = \alpha$.
Sei nun $\alpha \in$ **Lim**. Wegen $\alpha < \kappa^+$ ist $cf\,(\alpha) \leq \kappa$. Sei $(\beta_\gamma)_{\gamma<cf\,(\alpha)}$ eine Folge von Ordinalzahlen mit $\sum_{\gamma<cf\,(\alpha)} \beta_\gamma = \alpha$. Wir wählen eine streng monoton wachsende Folge $(s_\beta)_{\beta<cf\,(\alpha)}$ mit $s \leq_l s_0$ und $\forall \gamma < cf\,(\alpha)\, (\beta_\gamma < t)$. Für jedes $\gamma < cf(\alpha)$ wählen wir eine Menge $B_\gamma \subseteq (s_\gamma, s_{\gamma+1})$ mit $type(B_\gamma) = \beta_\gamma$. Sei

$$B = \bigcup_{\gamma<cf\,(\alpha)} B_\gamma.$$

Dann ist $B \subseteq (s, t)$ und $type(B) = \alpha$, also ist α in (s, t) einbettbar. □

Theorem 2: *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa^{<\kappa} = \kappa$. Dann gibt es einen κ^+-Aronszajn-Baum.*

Beweis: Die Konstruktion ist ähnlich zur Konstruktion im Beweis von Theorem 14.2.
Sei $(L, <)$ die Ordnung aus Lemma 1. Sei S die Menge aller streng monoton wachsenden L-Folgen. Wir bezeichnen die Einschränkung von $<$ auf S mit $<_S$. Für $s, t \in S$ sei $s <_S t$ gdw. $s = t|_{lh(s)}$, d.h., wenn s Anfangsstück von t ist. Wir zeigen, daß es ein $T \subseteq S$ gibt, das einen κ^+-Aronszajn-Baum bildet. Wir konstruieren T induktiv über seine Stufen $T(\alpha)$. Wir sichern, daß folgendes gilt:

- (i) $|T(\alpha)| \leq \kappa$; wenn $s \in T(\alpha)$, so ist $lh(s) = \alpha$;
- (ii) wenn $s \in T(\alpha)$, $\beta < \alpha$, so ist $s|_\beta \in T(\beta)$;
- (iii) wenn $s \in T_\alpha$, $r \in L$ und r ist größer als eine obere Schranke von s, so gibt es ein $t \in T(\alpha)$ mit $s <_S t$ derart, daß r eine obere Schranke von t ist.
- (iv) für jede Limesordinalzahl $\alpha < \kappa^+$ mit $cf\,(\alpha) < \kappa$ und jedes $s \in S$ mit $lh(s) = \alpha$ gilt: wenn $\forall \beta < \alpha\, (s|_\beta \in T(\beta))$, so ist $s \in T(\alpha)$.

Sei

$$T_0 = \{\emptyset\}.$$

Sei α eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha = \beta + 1$.
Dann setzen wir
$$T(\alpha) = \{s \in S : lh(s) = \alpha, s|_\beta \in T(\beta)\}.$$
Mit $|T(\beta)| \leq \kappa$ ist wegen $|L| = \kappa$ auch $|T(\alpha)| \leq \kappa$. Damit ist (i) erfüllt. (ii) und (iv) sind sofort klar. Wir zeigen (ii). Sei $s \in T_\alpha$, $r \in L$ sei größer als eine obere Schranke von s. Dann gibt es $r_1, r_2, r_3 \in L$ mit $r_1 < r_2 < r_3 < r$ derart, daß r_1 eine obere Schranke von s ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $s_1 \in T(\beta)$ mit $s \leq_S s_1$ derart, daß r_2 obere Schranke von s_1 ist. Dann ist $s_1{}^\frown r_2$ wie verlangt.
Sei $\alpha \in \mathbf{Lim}$, $cf(\alpha) < \kappa$.
Dann bestehe $T(\alpha)$ aus allen $s \in S$ mit $\forall \beta < \alpha\, (s|_\beta \in T(\beta))$.
Sei $\lambda = cf(\alpha)$. Wir zeigen (i). Sei dazu $(\beta_i)_{i<\lambda}$ eine streng monoton wachsende, stetige Folge mit $sup(\{\beta_i : i < \lambda\}) = \alpha$. Für $s \in T(\alpha)$ sei $F(s) = (s|_{\beta_i})_{i<\lambda}$. Damit ist $F : T(\alpha) \to \prod_{i<\lambda} T(\beta_i)$ injektiv und wegen
$$|T(\alpha)| \leq \prod_{i<\lambda} |T(\beta_i)| \leq \kappa^\lambda = \kappa$$
ist (i) erfüllt.
(ii) und (iv) sind klar. Wir zeigen nun (iii). Sei $s \in T_\alpha$ und $r_1, r \in L$ seien obere Schranken von s mit $r_1 < r$. Sei $(\beta_i)_{i<\lambda}$ eine streng monoton wachsende, stetige Folge mit $\beta_0 = lh(s)$ und $sup(\{\beta_i : i < \lambda\}) = \alpha$. Sei $\pi : \lambda \to (r_1, r)$ eine ordnungserhaltende Abbildung. Aus Lemma 1 folgt, daß ein solches π existiert. Wir definieren induktiv eine Folge $(t_i)_{i<\lambda}$ derart, daß gilt: $t_0 = s$, $\forall i\, j \in \lambda\, (i < j \to t_i <_S t_j)$, für alle $i < \lambda$ ist $lh(t_i) = \beta_i$, und $\pi(i)$ ist obere Schranke von t_i.
Wenn i eine Nachfolgerordinalzahl ist, $i = k + 1$, so ist $\pi(k)$ eine obere Schranke von t_k und $\pi(k) < \pi(i)$; somit gibt es ein $t_i \in T(\beta_i)$ mit $t_k <_S t_i$ derart, daß $\pi(i)$ obere Schranke von t_i ist. Sei i eine Limesordinalzahl. Wir setzen dann $t_i = \bigcup_{k<i} t_k$. Wegen $cf(i) = cf(\beta_i) < \kappa$ ist $t_i \in T(\beta_i)$, und $\pi(i)$ ist obere Schranke von t_i. Sei
$$t = \bigcup_{i<\lambda} t_i.$$
Dann leistet t das Verlangte.
Sei $\alpha \in \mathbf{Lim}$, $cf(\alpha) = \kappa$.
Sei $s \in T_\alpha$, $r_1, r \in L$ seien obere Schranken von s mit $r_1 < r$. Analog wie im Fall für $cf(\alpha) < \kappa$ können wir ein $t(s,r) \in S$ finden derart, daß $\forall \beta < \alpha\, (t(s,r)|_\beta \in T(\beta))$, $s <_S t(s,r)$ und r ist obere Schranke von $t(s,r)$. Sei P die Menge aller Paare $(s,r) \in S \times L$ derart, daß r größer als eine obere Schranke von s ist. Sei
$$T(\alpha) = \{t(s,r) : (s,r) \in P\}.$$
Dann ist $|T(\alpha)| = |P| \leq |T_\alpha| \cdot |L| \leq \kappa \cdot |\alpha| \cdot \kappa = \kappa$. Damit ist (i) gezeigt. (ii), (iii) und (iv) sind leicht zu sehen.
Damit ist
$$T = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} T(\alpha)$$
ein κ^+-Aronszajn-Baum. $\square$

Bemerkung: Sei $\kappa^{<\kappa} = \kappa$. Man überlege sich, wie der Beweis von Theorem 2 verändert werden muß, um einen binären κ^+-Aronszajn-Baum zu erhalten.

Lemma 3: *Wenn κ unerreichbar ist und die Baum-Eigenschaft besitzt, so ist $\kappa \to (\kappa)^m_\lambda$ für jedes $m < \omega$ und jedes $\lambda < \kappa$.*

Beweis: Sei κ unerreichbar, und jeder Baum $(T, <_T)$ mit $|T| = \kappa$ und $\forall \alpha < ht(T)\,(|T_\alpha| < \kappa)$ besitze einen Weg der Länge κ. Sei $\lambda < \kappa$ fest. Wir zeigen $\kappa \to (\kappa)^m_\lambda$ durch Induktion über m. Für $m = 1$ ist die Aussage trivial.
Wir nehmen nun an, daß $m > 1$ ist und $\kappa \to (\kappa)^{m-1}_\lambda$ gilt. Sei $F : [\kappa]^m \to \lambda$ gegeben. Wir konstruieren wie im Beweis von Theorem 15.11 einen Baum $(T, \prec)$. Dann besitzt T einen Weg W der Länge κ. Mit $\kappa \to (\kappa)^{m-1}_\lambda$ erhalten wir, daß es eine F-homogene Teilmenge X von W gibt mit $|X| = \kappa$. $\square$

Theorem 4: *Sei κ eine Kardinalzahl mit $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Dann besitzt κ die Baum-Eigenschaft.*

Beweis: Sei $(T, <_T)$ ein Baum mit $T = \kappa$ und $\forall \alpha < ht(T)\,(|T_\alpha| < \kappa)$. Wir müssen zeigen, daß es in T einen Zweig Z gibt mit $|Z| = \kappa$.
Sei $<_1$ eine Erweiterung von $<_T$ derart, daß $(T, <_1)$ eine lineare Ordnung ist mit: Für alle $a \in T$ ist die Menge $\check{a} = \{b \in T : a <_T b\}$ ein Segment von $(T, <_1)$. (Aus Lemma 14.10 folgt, daß eine solche lineare Ordnung existiert.)
Sei $F : [T]^2 \to 2$ gegeben durch:

$$F(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \alpha < \beta \text{ und } \alpha <_1 \beta; \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sei X eine F-homogene Menge mit $|X| = \kappa$. Dann ist $(X, <_1) \cong \kappa$ oder $(X, <_1) \cong \kappa^*$ (wobei κ^* die zu κ konverse lineare Ordnung bezeichnet). O.B.d.A. sei $(X, <_1) \cong \kappa$. Für $a \in X$ sei

$$X_a = \{b \in X : a <_1 b\}.$$

Sei

$$C = \{a \in T : |\check{a} \cap X| = \kappa\}.$$

Wir wollen zeigen, daß C eine Kette in $(T, <_T)$ ist.

Behauptung: Wenn $a \in T$, $b \in X$ und $|\check{a} \cap X_b| = \kappa$, so gibt es ein $c \in X$ mit $X_c \subseteq \check{a}$.

Beweis der Behauptung: Wenn $|\check{a} \cap X_b| = \kappa$, so ist $\check{a} \cap X_b$ konfinal in X. Sei $c \in \check{a} \cap X_b$. Dann gibt es für jedes $d \in X$ mit $c <_1 d$ ein $e \in X \cap \check{a}$ mit $d <_1 e$. Da $\check{a}$ ein Segment von $(T, <_1)$ ist, ist $d \in \check{a} \cap X_b$, und somit ist $X_c \subseteq \check{a}$.

Sei $a, b \in C$. Dann gibt es $a_1, b_1 \in X$ mit $X_{a_1} \subseteq \check{a}$ und $X_{b_1} \subseteq \check{b}$. Sei $d \in X_{a_1} \cap X_{b_1}$. Dann ist $a <_T d$ und $b <_T d$. Damit sind a und b $<_T$-vergleichbar.
Wir zeigen nun, daß es für jedes $\alpha < \kappa$ ein $c \in C$ gibt mit $ht(c) \geq \alpha$:
Für jedes $\alpha < \kappa$ ist $T = T_{\alpha+1} \cup \{\check{a} : a \in T(\alpha)\}$. Wegen $|T_{\alpha+1}| < \kappa$ und $|T(\alpha)| < \kappa$ gibt es ein $a \in T(\alpha)$ sowie ein $c \in X$ mit $X_c \subseteq \check{a}$. Damit ist aber $c \in C$ und $ht(c) \geq \alpha$.
Sei

$$Z = \{a \in T : \exists b \in C\,(a <_T b)\}.$$

Dann ist Z ein Zweig in T mit $|Z| = \kappa$. $\square$

Wir können jetzt Lemma 15.5 verschärfen zu

Theorem 5: *Wenn $\kappa \to (\kappa)^2_2$, so ist $\kappa \to (\kappa)^m_\lambda$ für alle $m < \omega$ und $\lambda < \kappa$.*

Beweis: Sei $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Mit Theorem 15.9 haben wir, daß κ unerreichbar ist. Weiterhin folgt aus Theorem 4, daß κ die Baum-Eigenschaft hat. Somit folgt aus Lemma 3, daß $\kappa \to (\kappa)^m_\lambda$ für alle $m < \omega$ und alle $\lambda < \kappa$. □

Wir wollen jetzt zeigen, wie sich der Begriff der Baumeigenschaft weiter verschärfen läßt.
Sei X eine Menge von Ordinalzahlen, $(A_\alpha)_{\alpha \in X}$ eine Folge von Mengen mit $A_\alpha \subseteq \alpha$ für alle $\alpha \in X$. Die Folge $(A_\alpha)_{\alpha \in X}$ heißt *kohärent*, wenn für alle $\alpha, \beta \in X$ mit $\alpha < \beta$ gilt $A_\alpha \subseteq A_\beta$.
Sei $(A_\alpha)_{\alpha \in X}$ kohärent. Wir setzen $A = \bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha$. Dann ist für alle $\alpha \in X$, $A_\alpha = A \cap \alpha$.

Wir können den Begriff der kohärenten Folge auf Funktionen erweitern. Sei X eine Menge von Ordinalzahlen und sei $(f_\alpha)_{\alpha \in X}$ eine Folge von Funktionen mit $\forall \beta \in X\, (dom(f) = \beta \wedge rng(f) \subseteq 2)$. $(f_\alpha)_{\alpha \in X}$ ist *kohärent*, wenn $\forall \alpha, \beta \in X\, (\alpha < \beta \to f_\alpha \subseteq f_\beta)$.

Lemma 6: *Sei $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl, S eine stationäre Teilmenge von κ und $(A_\alpha)_{\alpha \in S}$ eine kohärente Folge. Für $\alpha \in S$ sei $f_\alpha : \alpha \to 2$ gegeben durch*

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} \textit{1, wenn } \beta \in A_\alpha; \\ \textit{0 sonst.} \end{cases}$$

Dann gibt es eine stationäre Menge $S_1 \subseteq S$ derart, daß $(f_\alpha)_{\alpha \in S_1}$ kohärent ist.

Beweis: Sei $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$. Für $\alpha < \kappa$ sei

$$F(\alpha) = \begin{cases} min\,\{\beta \in S : \alpha \in A_\alpha\}, \text{ wenn } \alpha \in A; \\ \alpha \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sei

$$C = \{\beta < \kappa : F[\beta] = \beta\}.$$

Dann ist C *cub*. Sei

$$S_1 = S \cap C.$$

Dann ist S_1 stationär. Wir zeigen, daß $(f_\alpha)_{\alpha \in S_1}$ kohärent ist. Sei dazu $\alpha, \beta \in S_1$, $\alpha < \beta$. Sei $\gamma \in \alpha$. Wenn $\gamma \notin A_\alpha$, so ist wegen $\alpha \in C$, $\gamma \notin A_\delta$ für alle $\delta \in S$, also folgt aus $f_\alpha(\gamma) = 0$, daß auch $f_\beta(\gamma) = 0$ ist. Wenn $\gamma \in A_\alpha$, so folgt aus $A_\alpha \subseteq A_\beta$, daß mit $f_\alpha(\gamma) = 1$ auch $f_\beta(\gamma) = 1$ ist. □

Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl. κ heißt *unbeschreibbar* (im englischen *ineffable*), wenn für jede Folge $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ mit $\forall \alpha < \kappa\, A_\alpha \subseteq \alpha$ eine stationäre Menge S existiert derart, daß $(A_\alpha)_{\alpha \in S}$ kohärent ist.
Aus Lemma 6 folgt, daß κ unbeschreibbar ist gdw. für jede Folge $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Funktionen mit $\forall \alpha < \kappa\, (dom(f_\alpha) = \alpha \wedge rng(f_\alpha) \subseteq 2)$ eine stationäre Menge S existiert derart, daß $(f_\alpha)_{\alpha \in S}$ kohärent ist.

Lemma 7: *Sei κ unbeschreibbar und sei $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Folge von Funktionen mit $\forall \alpha < \kappa\, (dom(f) = \alpha \wedge rng(f) \subseteq \alpha)$. Dann gibt es eine stationäre Teilmenge S von κ derart, daß $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ kohärent ist.*

Beweis: Sei $\pi : \kappa \times \kappa \to \kappa$ bijektiv. Sei

$$C = \{\beta < \kappa : \pi[\beta \times \beta] = \beta\}.$$

Dann ist C *cub*. Für $\alpha \in C$ sei $A_\alpha = \pi[f_\alpha]$ und f^*_α die charakteristische Fuinktion von A_α. Sei $S \subseteq C$ eine stationäre Menge von κ derart, daß $(f^*_\alpha)_{\alpha\in S}$ kohärent ist. Dann ist $(f_\alpha)_{\alpha\in S}$ kohärent. □

Lemma 8: *Wenn κ unbeschreibbar ist, so ist κ regulär.*

Beweis: Sei $\kappa > \omega$ eine singuläre Kardinalzahl. Sei $\lambda = cf(\kappa) < \kappa$. Sei $(\beta_i)_{i<\lambda}$ eine streng monoton wachsende Folge von Ordinalzahlen mit $\lambda \leq \beta_0$, $sup\{\beta_i : i < \lambda\} = \kappa$. Für jedes $\alpha < \kappa$ sei

$$h(\alpha) = min\,\{i < \lambda : \alpha < \beta_i\}.$$

Sei $A_0 = \emptyset$ und für alle i mit $0 < i < \kappa$ sei $A_i = \{h(i)\}$. Dann ist $\forall i < \kappa\,(A_i \subseteq i)$, aber wenn $X \subseteq \kappa$ und $(A_\alpha)_{\alpha\in X}$ ist kohärent, so ist X beschränkte Teilmenge von κ, kann also nicht in κ stationär sein. □

Lemma 9: *Wenn κ die Baum-Eigenschaft hat, so gilt: Wenn $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Folge von Funktionen ist mit $dom(f_\alpha) = \alpha$, $rng(f_\alpha) \subseteq 2$ für alle $\alpha < \kappa$, so gibt es eine Menge $X \subseteq \kappa$ mit $|X| = \kappa$ derart, daß $(f_\alpha)_{\alpha\in X}$ kohärent ist.*

Beweis: Sei $T = \{f_\alpha|_\beta : \beta < \alpha < \kappa\}$. Dann ist T ein Baum (unter $\subseteq$) mit $T(\alpha) < \kappa$ für alle $\alpha < \kappa$ (da κ die Baumeigenschaft hat). Somit existiert in T ein Weg W der Länge κ. Sei

$$F = \bigcup W,$$

und sei

$$X = \{\alpha < \kappa : F|_\alpha = f_\alpha\}.$$

Dann ist $|X| = \kappa$, und $(f_\alpha)_{\alpha\in X}$ ist kohärent. □

Seien κ und λ Kardinalzahlen, $n < \omega$. Wir schreiben

$$\kappa \to (\text{stationär})^n_\lambda,$$

wenn für jede Funktion $F : [\kappa]^n \to \lambda$ eine stationäre Teilmenge S von κ existiert, die homogen für F ist.

Theorem 10: *Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *κ ist unbeschreibbar;*
(ii) *$\kappa \to (stationär)^2_2$.*

Beweis: (i) $\to$ (ii)
Sei κ unbeschreibbar, und sei $F : [\kappa]^2 \to 2$ gegeben. Für $\alpha < \kappa$ sei $f_\alpha : \alpha \to 2$ gegeben durch

$$f_\alpha(\beta) = F(\beta, \alpha).$$

Sei S eine stationäre Teilmenge von κ derart, daß $(f_\alpha)_{\alpha\in S}$ kohärent ist. Sei

$$f = \bigcup_{\alpha\in S} f_\alpha.$$

f hat folgende Eigenschaft: Wenn $\alpha, \beta \in S$, $\alpha < \beta$, so ist $f(\alpha) = F(\alpha, \beta)$.
Für $i < 2$ sei

$$S_i = S \cap f^{-1}(i).$$

Dann ist S_0 oder S_1 stationär und zusätzlich F-homogen.

(ii) $\to$ (i)
Es gelte $\kappa \to (\text{stationär})^2_2$. Wir wollen zeigen, daß κ unbeschreibbar ist.
Da κ regulär ist, folgt aus $\kappa \to (\text{stationär})^2_2$ sofort, daß $\kappa \to (\kappa)^2_2$ gilt, somit ist κ schwach kompakt. Sei $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Folge von Funktionen mit $\forall\alpha < \kappa\,(dom(f_\alpha) = \alpha \wedge rng(f_\alpha) \subseteq 2)$. Für $f, g \in \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^{\alpha}2$ sei $f \leq_l g$ gdw. $f \subseteq g$ oder $\exists\alpha\,(\alpha \in dom(f) \cap dom(g) \wedge f(\alpha) < g(\alpha) \wedge \forall\beta < \alpha\,(f(\beta) = g(\beta)))$.
Wir definieren eine Funktion $F : [\kappa]^2 \to 2$ durch:
Für $\alpha < \beta < \kappa$ ist

$$F(\{\alpha, \beta\}) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } f_\alpha \leq_l f_\beta; \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sei S eine F-homogene, stationäre Teilmenge von κ.
Wir nehmen an, daß für alle $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha < \beta$ gilt $F(\{\alpha, \beta\}) = 0$. Wir definieren rekursiv eine Normalfunktion $\pi : \kappa \to \kappa$ derart, daß für alle $\alpha < \kappa$ gilt:

$$\text{(1)} \qquad \text{wenn } \beta, \gamma \in S,\ \beta, \gamma \geq \pi(\alpha), \text{ so ist } f_\beta|_\alpha = f_\gamma|_\alpha.$$

Wir setzen $\pi(0) = 0$ und damit ist (1) trivialerweise erfüllt.
Sei $\alpha < \kappa$ und für alle $\delta < \alpha$ sei $\pi(\beta)$ bereits definiert.
Wenn α eine Limesordinalzahl ist, so setzen wir

$$\pi(\alpha) = sup\{\pi(\beta) : \beta < \alpha\}.$$

Da κ regulär ist, folgt aus $\alpha < \kappa$, daß auch $\pi(\alpha) < \kappa$ ist. Damit ist (1) automatisch erfüllt.
Sei α eine Nachfolgerordinalzahl, $\alpha = \beta + 1$. Wenn es ein $\gamma \in S$ gibt mit $\gamma > \pi(\beta)$ und $f_\gamma(\alpha) = 1$, so sei $\pi(\alpha)$ das kleinste solche γ.
Wenn $\delta > \pi(\alpha)$, so haben wir $f_{\pi(\alpha)}|_\alpha = f_\delta|_\alpha$. Aus $f_{\pi(\alpha)} \leq_l f_\delta$ folgt dann $f_\delta(\pi(\alpha)) = 1$.
Wenn es kein solches γ gibt, so setzen wir $\pi(\alpha) = \pi(\beta) + 1$. Damit ist (1) erfüllt.
Sei

$$C = \{\alpha : \pi(\alpha) = \alpha\}.$$

Da π Normalfunktion ist, ist C *cub*. Sei

$$S_1 = S \cap C.$$

Für $\alpha, \beta \in S_1$, $\alpha < \beta$ folgt aus $\pi(\alpha) = \alpha$, daß $f_\beta|_\alpha = f_\alpha|_\alpha = f_\alpha$ und somit ist die Folge $(f_\alpha)_{\alpha\in S_1}$ kohärent.
Wir zeigen nun, daß der Fall $F[[S]^2] = 1$ nicht eintreten kann.
Angenommen, es wäre $F[[S]^2] = 1$. Dann sei π wie im vorhergehenden Fall definiert, wobei lediglich die Rolle von 0 und 1 vertauscht wird. Sei C ebenfalls wie im vorhergehenden Fall

definiert. Wenn $\alpha, \beta \in S \cap C$, so ist $f_\alpha \subseteq f_\beta$, und somit ist $F(\{\alpha, \beta\}) = 0$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme $F[[S]^2] = 1$. □

Aus Theorem 9 folgt, daß jede unbeschreibbare Kardinalzahl schwach kompakt ist.

Von Baumgartner (Ineffability properties of Cardinals I. Infinite and finite sets, vol. I (Hajnal, Rado, Sos, editors), 109-130) wurde gezeigt, daß aus $\kappa \to (\text{stationär})_2^2$ nicht folgt, daß $\kappa \to (\text{stationär})_2^3$ gilt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß aus $\kappa \to (\text{stationär})_2^2$ nicht die Regularität von κ folgt. Somit kann in Theorem 10 nicht auf die Regularität von κ verzichtet werden.

Beispiel (1) Sei κ gegeben mit $\kappa \to (\text{stationär})_2^2$. Wir setzen

$$\lambda = \aleph_{\kappa+\kappa}.$$

Wegen $cf(\lambda) \leq cf(\kappa) \leq \kappa < \lambda$ ist λ singulär.
Wir zeigen, daß mit κ auch λ unbeschreibbar ist:
Sei

$$C = \{\aleph_{\kappa+\alpha} : \alpha < \kappa\}.$$

C ist *cub* in λ. Wenn $X \subseteq \lambda$, so ist X stationär in λ gdw. die Menge

$$X^* = \{\alpha < \kappa : \aleph_{\kappa+\alpha} \in X\}$$

stationär in κ ist.
Sei $F : [\lambda]^2 \to 2$ gegeben. Wir definieren eine Funktion $g : [\kappa]^2 \to 2$ durch

$$g(\{\alpha, \beta\}) = F(\{\aleph_{\kappa+\alpha}, \aleph_{\kappa+\beta}\}).$$

Aus $\kappa \to (\text{stationär})_2^2$ folgt, daß es eine g-homogene stationäre Teilmenge S von κ gibt. Sei

$$S^* = \{\aleph_{\kappa+\alpha} : \alpha \in S\}.$$

Dann ist S^* eine F-homogene stationäre Teilmenge von λ. Somit ist λ singuläre Kardinalzahl mit $\lambda \to (\text{stationär})_2^2$.

Das folgende Resultat von Shelah zeigt, daß unbeschreibbare Kardinalzahlen sehr groß sind. So werden wir zeigen, daß unbeschreibbare Kardinalzahlen nicht nur schwach kompakt sind, sondern daß die schwach kompakten Kardinalzahlen, die kleiner als eine gegebene unbeschreibbare Kardinalzahl sind, eine stationäre Menge bilden.

Theorem 11: *Sei κ eine unbeschreibbare Kardinalzahl und sei S die Menge der schwach kompakten Kardinalzahlen, die kleiner als κ sind. Dann ist S stationär. Außerdem gibt es für jede Folge $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Mengen mit $\forall \alpha < \kappa\, (A_\alpha \subseteq \alpha)$ eine stationäre Teilmenge S_1 von S derart, daß $(A_\alpha)_{\alpha \in S_1}$ kohärent ist.*

Beweis: Sei $(A_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Folge von Mengen mit $\forall \alpha < \kappa\, (A_\alpha \subseteq \alpha)$. Wir definieren Mengen $Z_0, \ldots, Z_4$ wie folgt:
Z_0 bestehe aus 0 sowie allen Nachfolgerordinalzahlen $< \kappa$.
Z_1 sei die Menge aller singulären Kardinalzahlen $< \kappa$.

Z_2 sei die Menge aller regulären Kardinalzahlen $< \kappa$, die nicht unerreichbar sind.
Z_3 sei die Menge aller unerreichbaren Kardinalzahlen $< \kappa$, die nicht schwach kompakt sind.
Z_4 sei die Menge aller Kardinalzahlen $< \kappa$, die schwach kompakt sind.
Damit ist $\{Z_i : i < 5\}$ eine Zerlegung von κ.
Sei $\pi : \kappa \to {}^{<\kappa}2$ eine Bijektion derart, daß für jede starke Limeskardinalzahl $\lambda < \kappa$ gilt

$$\pi[\lambda] = {}^{<\lambda}2.$$

Wir definieren nun eine Folge $(B_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ wie folgt:
Wenn $\alpha \in Z_0$, so sei $B_\alpha = \emptyset$
Wenn $\alpha \in Z_1$, so sei B_α eine konfinale Teilmenge von α mit *type*$(B_\alpha) =$*cf*(α).
Wenn $\alpha \in Z_2$, so sei $B_\alpha = \emptyset$.
Wenn $\alpha \in Z_3$, so folgt aus Theorem 2, daß ein α-Aronszajn-Baum existiert. Wir wählen nun einen binären α-Aronszajn-Baum $T^\alpha \subseteq {}^{<\alpha}2$ mit $\forall s \in T^\alpha\, (lh(s) = ht(s))$. Wir setzen dann

$$B_\alpha = \pi^{-1}[T^\alpha].$$

Wenn $\alpha \in Z_4$, so setzen wir

$$B_\alpha = A_\alpha.$$

Sei X eine stationäre Teilmenge von κ derart, daß $(B_\alpha)_{\alpha\in X}$ kohärent ist. Wir wollen zeigen, daß $X \setminus (Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)$ stationär ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes $i < 4$ die Menge $X \cap Z_i$ nicht stationär ist.
Zunächst ist Z_0 nicht stationär, also auch nicht $X \cap Z_0$.
Angenommen, $X \cap Z_1$ ist stationär. Sei $f : X \cap Z_1 \to \kappa$ gegeben durch

$$f(\alpha) = cf(\alpha).$$

Dann ist f regressiv und aus dem Theorem von Fodor folgt, daß es eine stationäre Menge $S^* \subseteq X \cap Z_1$ gibt, auf der f konstant ist. Für $\alpha, \beta \in S^*$, $\alpha < \beta$ folgt, daß $B_\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, also ist *cf*$(\beta) =$*type* $(B_\beta) >$*type*$(B_\alpha) =$*cf*(α), im Widerspruch zur Wahl von S^*. Also ist $X \cap Z_1$ nicht stationär.
Da κ schwach kompakt ist, wissen wir aus Beispiel 13.7, daß die Menge der starken Limeszahlen $< \kappa$ eine *cub* Menge bilden. Somit ist Z_2 und also auch $X \cap Z_2$ nicht stationär.
Wir zeigen nun, daß $|X \cap Z_3| \leq 1$ ist: Angenommen, es ist $\alpha, \beta \in Z_3$, $\alpha < \beta$. Dann folgt aus $B_\alpha \subseteq B_\beta$, daß T^α Teilbaum von T^β ist. Damit hat aber T^α einen Weg der Länge α, im Widerspruch zur Wahl von T^α als α-Aronszajn-Baum. Somit ist also $|X \cap Z_3| \leq 1$, also ist $X \cap Z_3$ nicht stationär.
Sei nun

$$S = X \setminus (Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3).$$

Da $\{Z_i : i < 5\}$ Zerlegung von κ ist, ist $S = X \cap Z_4$. Dann ist S stationär und wegen $B_\alpha = A_\alpha$ für $\alpha \in Z_4$ ist $(A_\alpha)_{\alpha\in S}$ kohärent. □

17 Konstruktionen unter CH

In diesem Abschnitt führen wir verschiedene Konstruktionen unter *CH* durch. In den folgenden Kapiteln wird gezeigt, daß bei einigen dieser Konstruktionen *CH* durch Martin's Axiom ersetzt

werden kann. Andererseits werden wir Aussagen ϕ angeben, die aus *CH* folgen, für die aber $\neg\phi$ aus Martin's Axiom folgt.
Sei $a, b \in [\omega]^\omega$. Wir sagen *a ist fast enthalten in b*, wenn $|a \setminus b| < \omega$. Wir schreiben hierfür $a \subseteq_* b$. a heißt *fast disjunkt* zu b wenn $a \Delta b$ endlich ist. Sei $f, g \in {}^\omega\omega$. *f ist fast überall größer oder gleich g*, wenn $\exists n \forall k > n\,(g(k) \leq f(k))$. Sei $F \subseteq {}^{<\omega}\omega$. F ist *dominierend*, wenn $\forall g \in {}^\omega\omega\, \exists f \in F\,(g \leq_* f)$. *$F$ wird dominiert*, wenn $\exists g \in {}^\omega\omega \forall f \in F(f \leq_* g)$. Sei $A \subseteq [\omega]^\omega$, $a \in [\omega]^\omega$. a heißt *untere Schranke von A*, wenn $\forall b \in A(a \subseteq_* b)$.

Lemma 1: *Sei $A \subseteq [\omega]^\omega$ mit $|A| \leq \omega$, A habe die sfip. Dann hat A eine untere Schranke.*

Beweis: Wenn $|A| < \omega$, so ist bereits $\bigcup A$ eine untere Schranke von A.
Sei jetzt $A = \{a_i : i < \omega\}$. Wir wählen induktiv Elemente e_i (für $i < \omega$) mit $e_i \in \bigcup_{j<i} a_i \setminus \{e_j : j < i\}$. Sei $a = \{e_i : i < \omega\}$. Dann ist $|a| = \omega$ und für jedes $i < \omega$ ist $a \setminus a_i \subseteq \{e_k : k \leq i\}$, also ist $a \subseteq_* a_i$ für jedes $i < \omega$. □

Lemma 2: *Sei $F \subseteq {}^\omega\omega$ mit $|F| \leq \omega$. Dann wird F dominiert.*

Beweis: Wenn $|F| < \omega$, so definieren wir eine dominierende Funktion f durch $f(i) = max\{g(i) : g \in F\}$.
Sei jetzt $F = \{f_i : i < \omega\}$. Wir definieren eine dominierende Funktion f durch $f(i) = max\{f_k(i) : k < i\}$. □

Sei $A \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir setzen
$$A^\Delta = \{\cap X : X \in [\mathcal{P}(X)]^{<\omega} \setminus \emptyset\}.$$
Wenn $|A| \geq \omega$, so ist $|A| = |A^\Delta|$. Wenn A Filterbasis eines Nichthauptultrafilters ist, so hat A^Δ die *sfip*.
Mit Hilfe der beiden vorhergehenden Lemmata können wir nun zeigen:

Theorem 3: (i) *Jede Filterbasis eines Nichthauptultrafilters über ω hat die Mächtigkeit 2^ω.*
(ii) *Jede dominierende Familie hat die Mächtigkeit 2^ω.*

Beweis:(i) Sei $F \subseteq [\omega]^\omega$ die Basis eines Nichthauptultrafilters. Dann hat F^Δ die *sfip*. Angenommen, $|F| \leq \omega$. Dann besitzt F^Δ eine untere Schranke a. Sei nun $a_0 \subseteq a$ derart, daß a_0 und $a \setminus a_0$ beide unendlich sind. Dann ist der durch $F \cup \{a_0\}$ erzeugte Filter ein echter Filter, der den durch F erzeugten Filter enthält und von diesem verschieden ist, im Widerspruch zur Annahme.
(ii) folgt sofort aus Lemma 2. □

Zur Vorbereitung des nächsten Theorem zeigen wir das folgende Lemma:

Lemma 4: *Sei $A \subseteq [\omega]^\omega$ mit $|A| \leq \omega$. Dann gibt es disjunkte Mengen $b, c \in [\omega]^\omega$ derart, daß $\forall a \in A(|a \cap b| = \omega \wedge |a \cap c| = \omega)$.*

Beweis: Sei $(a_i)_{i<\omega}$ eine Aufzählung von A, bei der jedes $a \in A$ unendlich oft vorkommt. Induktiv wählen wir Elemente $e_i, f_i \in \omega$ mit

(i) $e_i \in a_i \setminus (\{e_k : k < i\} \cup \{f_k : k < i\})$,
(ii) $f_i \in a_i \setminus (\{e_k : k \leq i\} \cup \{f_k : k < i\})$.

Sei $b = \{e_i : i \in \omega\}$, $c = \{f_i : i < \omega\}$. Dann leisten b und c das Verlangte. $\Box$

Wir kommen jetzt zu einer Aussage, die unter *CH* gezeigt werden kann und deren Negation aus *MA* folgt:

Theorem 5 (Erdös-Rado) (CH): *Es gibt Mengen H und K mit $H \cup K \subseteq \omega \times \omega_1$ derart, daß $\forall A \in [\omega]^\omega \, \forall B \in [\omega_1]^{\omega_1} \, ((A \times B \not\subseteq H) \wedge (A \times B \not\subseteq K))$.*

Beweis: Sei $(a_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine Aufzählung von $[\omega]^\omega$. Wir konstruieren eine Folge $((b_\alpha, c_\alpha))_{\alpha<\omega_1}$ von Paaren disjunkter Teilmengen von ω wie folgt: Wenn $\alpha < \omega$, so ist $a_\alpha = \omega$, $b_\alpha = \emptyset$. Sei nun $\omega < \alpha < \omega_1$. Dann wählen wir (Lemma 4) disjunkte Teilmengen b_α, c_α von ω derart, daß gilt: $\forall \beta < \alpha \, (b_\alpha \cap a_\beta \neq \emptyset \wedge c_\alpha \cap a_\beta \neq \emptyset)$.
Wir setzen $H = \bigcup_{\alpha<\omega_1} b_\alpha \times \{\alpha\}$, $K = \omega \times \omega_1 \setminus H$ und zeigen, daß H und K das Verlangte leisten: Sei $A \in [\omega]^\omega$, $B \in [\omega_1]^{\omega_1}$. Dann gibt es ein $\alpha < \omega_1$ mit $A = a_\alpha$. Sei $\beta \in B$ mit $\alpha < \beta$. Damit ist $b_\beta \cap A \neq \emptyset$ und somit $A \times B \not\subseteq K$. Entsprechend folgt aus $c_\beta \cap A \neq \emptyset$, $A \times B \not\subseteq H$. $\Box$

18 Mengenlehre ohne Auswahlaxiom

Heutzutage wird das Auswahlaxiom in der Mathematik mehr oder weniger vorbehaltlos akzeptiert. Es hat sich gezeigt, daß das Auswahlaxiom für den axiomatischen Aufbau der meisten mathematischen Theorien unumgänglich ist. Die Gründe für die Akzeptanz von *AC* sind die folgenden: Man hat sich daran gewöhnt, mit dem Auswahlaxiom zu arbeiten. In dem Maße, wie man lernte, mit diesem Axiom umzugehen, wurden auch die möglichen Vorstellungen über das Universum aller Mengen stark geprägt, so daß man nun auf das Auswahlaxiom nicht mehr verzichten möchte. Insbesondere spielt das Auswahlaxiom eine tragende Rolle bei der Begründung der Algebra, der Topologie und der Analysis. Alternativen zum Auswahlaxiom, die sich ähnlich wirkunsvoll einsetzen lassen, sind nicht bekannt. Mögliche Alternativen wären etwa Abschwächungen von *AC* wie das abzählbare Auswahlaxiom (*axiom of countable choice*) oder das Axiom der abhängigen Auswahl (*axiom of dependent choice*). Diese beiden Axiome werden hier nicht behandelt. Eine weitere Alternative wäre das Determiniertheitsaxiom, das in Kapitel 19 behandelt wird.
Wir wollen in diesem Abschnitt keine Mengenlehre ohne Auswahlaxiom entwickeln, sondern lediglich einige Beispiele und Probleme anführen, die sich aus dem Verzicht auf *AC* ergeben. Für weiterführende Literatur sei auf das Buch von Th. Jech, The Axiom of Choice, Amsterdam 1973, verwiesen.
Von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis des Auswahlaxioms waren die Untersuchungen von Gödel und Cohen. So zeigte Gödel 1938, daß aus der Widerspruchsfreiheit von *ZF* auch die Widerspruchsfreiheit von *ZFC* folgt. Dieses Resultat rechtfertigt den Gebrauch des Auswahlaxioms: Wenn man die *ZF*-Axiome akzeptiert, so ergeben sich keine Widersprüche aus der Akzeptanz von *ZFC*. Cohen konnte 1963 zeigen, daß aus der Widerspruchsfreiheit von *ZF* auch die Widerspruchsfreiheit von $ZF + \neg AC$ folgt.
Ein Problem, das sich aus dem Verzicht auf das Auswahlaxioms ergibt, ist das Finden einer geeigneten Kardinalzahldefinition. In *ZFC* wurden Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen definiert. Diese Möglichkeit hat man in *ZF* nicht mehr. Man kann jedoch für jede Menge a die Klasse $\mathbf{K}_0(a)$ aller zu a gleichmächtigen Mengen b bilden (wie wir dies im Kapitel über

Klassen getan haben). Dabei ist es allerdings weniger schön, daß diese Klassen keine Objekte unseres Universums sind. Es wäre für das Arbeiten mit Kardinalzahlen praktischer, wenn es sich um Mengen handeln würde, d.h., wenn man aus jeder Klasse $\mathbf{K}_0(a)$ eine geeignete Menge als Repräsentanten auswählen könnte. Unter AC konnten wir einfach die kleinste Ordinalzahl auswählen, die in dieser Klasse liegt. Andererseits folgt aus der Tatsache, daß jede dieser Klassen eine Ordinalzahl enthält, daß sich jede Menge wohlordnen läßt. Und das ist, wie wir bereits gezeigt haben, äquivalent zu AC.
Man kann zeigen, daß folgende Aussage relativ konsistent zu *ZF* ist: Es gibt keine Funktion $\mathbf{C} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ mit (i) $\mathbf{C}(a) = \mathbf{C}(b)$ gbw. $a \approx b$ und (ii) $\mathbf{C}(a) \approx a$. Somit ist es im allgemeinen nicht möglich, aus jeder der Klassen $\mathbf{K}_0(a)$ genau ein Element als Repräsentanten auszuwählen.
Von Scott wurde 1955 ein geeigneter Repäsentant für jede der Klassen $\mathbf{K}_0(a)$ angegeben: Sei a eine beliebige Menge. Dann ist die zu a gehörende Kardinalzahl die Menge

$$card(a) = \{b \in \mathbf{V} : a \approx b \wedge \forall c \in \mathbf{V}(a \approx c \to \rho(b) \leq \rho(c))\}.$$

Wir werden hier folgende Kardinalzahldefinition benutzen:

$$|a| = \begin{cases} min\{\alpha \in \mathbf{On} : \alpha \approx a\}, \text{ wenn es ein } \alpha \text{ mit } \alpha \approx a \text{ gibt;} \\ card(a) \text{ sonst.} \end{cases}$$

Eine Menge x ist eine *Kardinalzahl*, wenn es ein a gibt mit $|a| = x$. Auf Kardinalzahlen läßt sich kanonisch eine *p.o.* einführen: Sei etwa $|a| = card(a)$, $|b| = \beta$. Dann ist $|a| \leq |b|$ gdw. es ein $x \in card(a)$ gibt mit $x \preceq \beta$, d.h., wenn es eine Injektion $f : x \to \beta$ gibt. Die anderen Fälle sind analog.
Wir werden zeigen, daß AC äquivalent dazu ist, daß diese *p.o.* eine lineare Ordnung ist. Somit handelt es sich bei dieser *p.o.* in jedem Modell von $ZF{+}\neg AC$ um eine *p.o.*, die keine lineare Ordnung ist.
Bei der Definition induktiver Mengen wurde kein Gebrauch vom AC gemacht. Somit kann die Definition der natürlichen Zahlen in *ZF* sofort übernommen werden. Doch wie sieht es mit dem Begriff der endlichen Menge aus? In *ZFC* haben wir die endlichen Mengen als solche Mengen definiert, die gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl sind. Wir wollen diese Definition auch in *ZF*-Modellen beibehalten.
Mit dem Auswahlaxiom haben wir: Wenn a nicht endlich ist, so ist $\omega \preceq a$. In *ZF* kann man dies nicht zeigen, d.h., es ist möglich, daß eine Menge nicht endlich ist aber sich mit ω nicht vergleichen läßt. Wir nennen eine Menge a *Dedekind-endlich*, wenn sich ω nicht in a einbetten läßt. Von J. Truss (Classes of Dedekind finite cardinals, Fund. Math. 84 (1974), 187 - 208) wurden zahlreiche verschiedene Endlichkeitsdefinitionen untersucht.
Eine Kardinalzahl $|a|$ heiß *Aleph*, wenn es ein $\alpha \in \mathbf{On}$ gibt mit $a \approx \aleph_\alpha$. Somit ist $|a|$ ein Aleph, wenn a nicht endlich ist und sich wohlordnen läßt.
Wir können auf den Kardinalzahlen die üblichen Operationen einführen. So setzen wir

$$|a| + |b| = |a \times \{0\} \cup b \times \{1\}|;$$

$$|a| \cdot |b| = |a \times b|;$$

$$2^{|a|} = |\mathcal{P}(a)|.$$

Lemma 1: *Für jede Menge a bilden die $\alpha \in \mathbf{On}$ mit $\alpha \preceq a$ eine Menge.*

Beweis: Sei

$$R = \{A \subseteq a^2 : A \text{ ist Wohlordnung}\}.$$

Zwischen den Elementen von R und den Funktionen, die ein $\alpha \in \mathbf{On}$ in a einbetten, besteht eine eineindeutige Zuordnung. Somit folgt aus dem Reflexionsaxiom, daß die $\alpha \in \mathbf{On}$, die in a einbettbar sind, eine Menge bilden. □

Sei a eine beliebige Menge. Wir setzen

$$H(a) = \{\alpha \in \mathbf{On} : \alpha \preceq a\}.$$

$H(a)$ heißt *Hartog-Menge* von a.
Dann ist offenbar $H(a) \not\preceq a$ und für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$ ist $H(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha^+$.

Unter der Voraussetzung von AC ist die Kontinuum-Hypothese äquivalent zu $2^\omega = \omega_1$. In ZF müssen wir CH formulieren als

$$\forall a(\omega \leq |a| \leq |\mathcal{P}(\omega)| \to \omega = |a| \vee |a| = |\mathcal{P}(\omega)|$$

und die GCH nimmt die folgende Form an:

$$\forall a\, b(|a| \leq |b| \leq |\mathcal{P}(a)| \to |a| = |b| \vee |b| = |\mathcal{P}(a)|).$$

Theorem 2: *AC ist äquivalent zu der folgenden Aussage:*
(*) *Je zwei Kardinalzahlen sind vergleichbar.*

Beweis: Wir zeigen, daß (*) äquivalent dazu ist, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.
($\to$) Wenn sich jede Menge wohlordnen läßt, so ist jede Menge gleichmächtig zu einer Ordinalzahl, und hieraus folgt leicht (*).
($\leftarrow$) Angenommen, (*) gilt. Sei a eine beliebige Menge. Dann ist $\alpha = H(a) \not\preceq a$. Somit ist aber $\alpha \preceq H(a)$ und folglich existiert eine Injektion$j : a \to \alpha$. Diese Injektion liefert eine Wohlordnung auf a. □

Von A. Tarski (Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, Fund. Math. 5 (1924), 147-154) wurde gezeigt, daß aus $|b|^2 = |b|$ für alle nicht endlichen Mengen b das Auswahlaxiom folgt. Wir beginnen mit einem Lemma.

Lemma 3: *Sei b eine Menge, $\alpha \in \mathbf{On}$. Wenn $|b| + \omega_\alpha = |b| \cdot \omega_\alpha$, so ist $|b|$ mit ω_α vergleichbar. Wenn $\omega_\alpha = H(b)$, so ist b ein Aleph.*

Beweis: Wenn b endlich oder wohlordenbar ist, so ist die Richtigkeit der Behauptung leicht zu sehen. Sei also b nicht endlich und nicht wohlordenbar. Seien b_1, a_1 disjunkte Mengen mit $b \times \omega_\alpha = b_1 \cup a_1$, $b_1 \approx b$, $a_1 \approx \omega_\alpha$.
Angenommen, es gibt ein $p \in b$ mit $(p, c) \in b_1$ für jedes $c \in \omega_\alpha$. Dann ist $\omega_\alpha \leq |b_1| = |b|$. Andernfalls sei für jedes $p \in b$, α_p die kleinste Ordinalzahl mit $(p, \alpha_p) \in a_1$. Dann ist aber $|b| \leq \omega_\alpha$. □

Theorem 4: *AC ist dazu äquivalent, daß für jede nicht endliche Menge b gilt $|b|^2 = |b|$.*

Beweis: ($\rightarrow$) ist klar.
($\leftarrow$) Wir zeigen, daß für jede nicht endliche Menge b, $|b|$ ein Aleph ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß

$$|b| + H(b) = |b| \cdot H(b)$$

gilt. Wegen

$$|b| + H(b) \leq |b| \cdot H(b)$$

reicht es,

$$|b| + H(b) \geq |b| \cdot H(b)$$

zu zeigen. Dies ist wie folgt zu sehen:

$$|b| + H(b) = (|b| + H(b))^2 = |b|^2 + 2 \cdot |b| \cdot H(b) + (H(b))^2 \geq |b| \cdot H(b).$$

□

Von W. Sierpiński (L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome de choix, Fund. Math. 34 (1947), 1-5) wurde gezeigt, daß aus der verallgemeinerten Kontinuum-Hypothese das Auswahlaxiom folgt. Wir beginnen mit einer Definition: Sei a eine beliebige Menge. Wir setzen

$$\mathcal{P}_0(a) = a;$$

$$\mathcal{P}_{n+1}(a) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_n(a)).$$

Lemma 5: *Für jede Menge a gibt es eine wohlordenbare Menge w mit $w \subseteq \mathcal{P}_4(a)$ und $w \not\preceq a$.*

Beweis: Wir betrachten die Menge R aller Mengen $r \subseteq a^2$, die eine Wohlordnung von a oder einer Teilmenge von a darstellen. Ein solches r ist eine Menge von geordneten Paaren und gehört somit zu $\mathcal{P}_3(a)$. Wir betrachten auf R eine Äquivalenzrelation $=_1$, die gegeben ist durch $r =_1 s$ gdw. $r \cong s$. Sei w die Menge aller Äquivalenzklassen, die so entstehen. Die Elemente von w bilden eine wohlgeordnete Menge. Weiterhin ist $w \cong H(a)$. Mit $H(a) \not\preceq a$ folgt somit $w \not\preceq a$. □

Lemma 6: *Seien a und b Mengen mit*

$$|a| + |b| = 2 \cdot |\mathcal{P}(a)|.$$

Dann ist $|b| \geq |\mathcal{P}(a)|$.

Beweis: Wir setzen a und b als disjunkt voraus. Sei $a_0 = \{0\} \times a$, $a_1 = \{1\} \times a$. Sei weiterhin $f : a \cup b \rightarrow \mathcal{P}(a_0) \times \mathcal{P}(a_1)$ eine Bijektion. Für $i < 2$ sei π_i die Projektion von $\mathcal{P}(a_0) \times \mathcal{P}(a_1)$ auf $\mathcal{P}(a_i)$. Dann ist $\pi_0[f[a]] \neq \mathcal{P}(a_0)$. Wegen $|a| < |\mathcal{P}(a)|$ gibt es ein $c \in \mathcal{P}(a_0) \setminus \pi_0[f_0[a]]$. Dann ist $b \supseteq f^{-1}[\{c\} \times \mathcal{P}(a_1)]$ und somit ist $|\mathcal{P}(a_1)| = |\mathcal{P}(a)| \leq |b|$. □

Lemma 7: *Sei a eine Menge mit*

$$2 \cdot |\mathcal{P}_i(a)| = |\mathcal{P}_i(a)|$$

für alle $i < 5$.
Dann kann a wohlgeordnet werden.

Beweis: Sei w wie in Lemma 3 definiert. Dann ist

$$|\mathcal{P}_3(a)| \leq |w| + |\mathcal{P}_3(a)| \leq |\mathcal{P}_4(a)| + |\mathcal{P}_3(a)| = |\mathcal{P}_4(a)|.$$

Nach *GCH* ist

(i) $|w| + |\mathcal{P}_3(a)| = |\mathcal{P}_4(a)|$ oder
(ii) $|w| + |\mathcal{P}_3(a)| = |\mathcal{P}_3(a)|$.

Wenn (i) zutrifft, so ist $|w| + |\mathcal{P}_3(a)| = |\mathcal{P}_4(a)| = |\mathcal{P}(2 \times \mathcal{P}_3(a))|$ und mit Lemma 6 folgt $|w| \geq |\mathcal{P}_4(a)|$. Wegen $w \subseteq \mathcal{P}_4(a)$ haben wir dann $|w| = |\mathcal{P}_4(a)|$, und somit ist $\mathcal{P}_4(a)$ wohlordenbar. Da a in $\mathcal{P}_4(a)$ eingebettet werden kann, ist auch a wohlordenbar.
Wenn (ii) zutrifft, so haben wir $|w| \leq |\mathcal{P}_3(a)|$ und mit den gleichen Überlegungen wie in (i) erhalten wir, daß a wohlgeordnet werden kann, oder daß $|w| \leq |\mathcal{P}_2(a)|$ ist. Erneute Anwendung der obigen Überlegungen reduziert das Problem auf den Fall $|w| \leq |\mathcal{P}_1(a)|$. Wegen $|w| = |\mathcal{P}_1(a)| \not\leq |a|$ erhalten wir $|w| = |\mathcal{P}_1(a)|$, und somit ist a wohlordenbar. □

Theorem 8: *Aus GCH folgt AC.*

Beweis: Sei a gegeben. O.B.d.A. sei $a \cap \omega = \emptyset$. Wir setzen

$$b = \mathcal{P}(a \cup \omega).$$

Wir wollen zeigen, daß für $i < 5$, $2 \cdot |\mathcal{P}_i(b)| = |\mathcal{P}_i(b)|$ gilt.
Es ist $2 \cdot |b| = |\mathcal{P}(a + \omega + 1)| = |\mathcal{P}(a + \omega)| = |b|$. Wegen $|b| = |b| + 1$ ist $2 \cdot 2^{|b|} = 2^{|b|+1} = 2^{|b|}$, also $2 \cdot |\mathcal{P}(b)| = |\mathcal{P}(b)|$.
Analog ist für alle $i < 5$, $2 \cdot |\mathcal{P}_i(b)| = |\mathcal{P}_i(b)|$. Damit läßt sich Lemma 5 auf b anwenden. Da a in b eingebettet werden kann, ergibt sich hieraus, daß a wohlgeordnet werden kann. □

Wir beenden dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen zum Ultrafiltertheorem. Beim Beweis dieses Theorems wurde wesentlich das Auswahlaxiom benutzt. So entsteht auf natürliche Weise die Frage, ob nicht vielleicht auch das Ultrafiltertheorem zum Auswahlaxiom äquivalent ist. Daß dies nicht der Fall ist, wurde von J. D. Halpern und A. Levy gezeigt (The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice, in: Axiomatic Set Theory, Proc. Symp. Pure Math., Univ. of California, Los Angeles, D. Scott ed., 13(1), 1967, 83 - 134). Von A. Blass wurde gezeigt, daß man in *ZF* nur die Existenz der Hauptultrafilter nachweisen kann (A model without ultrafilters, Bull. Acad. Polon. Sci. vol 25 (1977), 329 - 331).

19 Das Determiniertheitsaxiom

Von Mycielski und Steinhaus wurde ein Axiom vorgeschlagen, aus dem die Negation des Auswahlaxioms folgt. Dieses Axiom erlaubt verschiedene interessante Folgerungen. Es wird in Form von Spielen beschrieben.
Sei $A \subseteq \omega^\omega$. Das Spiel G_A wird von zwei Personen, I und II gespielt, die abwechselnd natürliche Zahlen wählen. I beginnt und wählt ein $a_0 \in \omega$; dann wählt II ein $b_0 \in \omega$; dann wählt I ein $a_1 \in \omega$; danach II ein $b_1 \in \omega$ usw. Wenn die so entstehende Folge $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ in A liegt, so hat I gewonnen, andernfalls II. Die Folge $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ ist das *Ergebnis* des Spiels. Für $s \in \omega^\omega$ setzen wir $s^I = (s_{2n})_{n<\omega}$ und $s^{II} = (s_{2n+1})_{n<\omega}$. Wenn s das Ergebnis eines Spiels ist, so ist s^I die Folge der Elemente, die von I gewählt wurde, und s^{II} ist die Folge der Elemente, die

von II gewählt wurde.
Eine *Strategie* (für I oder II) ist eine Regel, die dem Spieler sagt, welches Element er wählen soll. Dabei hängt der Zugvorschlag davon ab, welche Elemente zuvor vom jeweils anderen Spieler gewählt wurden. Eine Strategie ist eine *Gewinnstrategie*, wenn der Spieler, der nach ihr spielt, stets gewinnt. Das Spiel G_A ist *determiniert*, wenn einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.
Das *Determiniertheitsaxiom* besagt nun folgendes:

(AD) Für jedes $A \subseteq \omega^\omega$ ist G_A determiniert.

Unter einer Strategie für I verstehen wir im folgenden eine Funktion $F : \bigcup_{n\in\omega} \omega^n \to \omega$. Spieler I spielt nach dieser Strategie, wenn er für a_n das Element $F(b_0, \ldots, b_{n-1})$ wählt. Entsprechend ist eine Strategie für II eine Funktion $G : \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} \omega^n \to \omega$, und Spieler II spielt nach dieser Strategie, wenn er für b_n das Element $G(a_0, \ldots, a_n)$ wählt.

Beispiele: (1) Sei A eine abzählbare Teilmenge von ω, $A = \{s_i : i \in \omega\}$. Dann hat II eine Gewinnstrategie: Bei der Wahl von a_i muß II nur sichern, daß $a_i \neq s_i(2i)$ ist.
(2) Sei $A = \{s \in \omega^\omega : \forall n < \omega(s_{2n+1} + s_{2n+2} \text{ ist gerade})\}$. Wie man leicht sieht, besitzt I in diesem Spiel eine Gewinnstrategie.
Sei $s \in \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$, $A \subseteq \omega^\omega$. Dann setzen wir

$$A_s = \{t \in A : s \subseteq t\}.$$

Wenn I nach der Strategie F spielt, so ist das Spiel bestimmt durch F und die Folge $b = (b_n)_{n<\omega}$ der von II gewählten Elemente. Wir bezeichnen das Ergebnis dieses Spiels mit $F * b$. Wenn II nach der Strategie G spielt, so ist das Spiel durch G und die Folge $a = (a_n)_{n<\omega}$ der von I gewählten Elemente bestimmt, und wir bezeichnen das Ergebnis dieses Spiels mit $a * G$. Wenn schließlich I nach der Strategie F und II nach der Strategie G spielen, so bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Ergebnis des Spiels mit $F * G$.

Lemma 1 (AC): *Es gibt ein $X \subseteq \omega^\omega$ derart, daß das Spiel G_X nicht determiniert ist.*

Beweis: Seien $(F_\alpha : \alpha < 2^\omega)$ und $(G_\alpha : \alpha < 2^\omega)$ Aufzählungen aller Strategien für I und II. Wir konstruieren disjunkte Mengen $A = \{a_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ und $B = \{b_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ wie folgt:
Angenommen, $\alpha < 2^\omega$ und für alle $\beta < \alpha$ sind a_β und b_β bereits konstruiert. Wir wählen ein b_α derart, daß $b_\alpha = F_\alpha * b$ für ein $b \in \omega^\omega$ und $b_\alpha \notin \{a_\beta : \beta < \alpha\}$ ist. Weiterhin wählen wir ein a_α derart, daß $a_\alpha = a * G_\alpha$ für ein $a \in \omega^\omega$ und $a_\alpha \notin \{b_\beta : \beta \leq \alpha\}$ ist.
Wir zeigen, daß das Spiel G_A nicht determiniert ist: Angenommen, einer der beiden Spieler, etwa I, besitzt eine Gewinnstrategie F. Dann gibt es ein $\alpha < 2^\omega$ mit $F = F_\alpha$. Damit gibt es ein $b \in \omega^\omega$ mit $b_\alpha = F_\alpha * b \notin A$. Wenn I nach der Strategie F spielt, so gibt es für II eine Spielmöglichkeit, so daß das Ergebnis (nämlich b_α) nicht in A liegt. Dieser Widerspruch zeigt, daß I keine Gewinnstrategie im Spiel G_A besitzen kann. Analog zeigt man, daß auch II keine Gewinnstrategie besitzen kann. □

Lemma 1 zeigt, daß AD mit AC unverträglich ist. Jedoch läßt sich aus AD eine schwache Form des Auswahlaxioms herleiten:

Lemma 2 (AD): *Sei $A = \{A_i : i < \omega\}$ eine Familie von Mengen mit $\emptyset \neq A_i \subseteq \omega^\omega$ für jedes $i < \omega$. Dann besitzt A eine Auswahlfunktion.*

Beweis: X bestehe aus allen $s \subseteq \omega^\omega$ mit $s^{II} \in A_{s(0)}$. Sei $Y = \omega^\omega \setminus X$. Wir betrachten das Spiel G_Y. I kann in diesem Spiel keine Gewinnstrategie haben: Sei F eine Strategie für I, und I beginne, wenn er nach dieser Strategie spielt, mit a_0. Sei $b \in A_{a_0}$. Wenn II nun $(b_0, b_1, \ldots)$ wählt, so liegt das Ergebnis des Spiels in X, und somit gewinnt II.
Also hat II eine Gewinnstrategie G. Wir definieren eine Auswahlfunktion f auf A durch

$$f(A_i) = ((i, 0, 0, \ldots) * G)^{II}.$$

□

Sei $A \subseteq \omega^\omega$, $n < \omega$ und $t \in \omega^n$. Wir setzen

$$U_t = \{s \in \omega^\omega : t \subseteq s\}.$$

Die Familie

$$\mathcal{B} = \{U_t : t \in \bigcup \omega^n\}$$

ist die Basis einer Topologie τ auf ω^ω. Dabei ist eine Menge $X \subseteq \tau$ offen, wenn sie Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Das ist äquivalent zu

$$X = \bigcup \{A \in \mathcal{B} : A \subseteq X\}.$$

Sei $s \in \omega^\omega$, $n \in \omega$. Wir setzen

$$s \dot{-} n = (s(n), s(n+1), \ldots).$$

Sei $A \subseteq \omega^\omega$, $t \in \omega^n$. Wir setzen

$$A^t = \{s \dot{-} lh(t) : s \in \omega^\omega, t \subseteq s\}.$$

Sei $n < \omega$, $t \in \omega^{2n}$, $A \subseteq \omega^\omega$. Mit G_A^t bezeichnen wir das Spiel G_X mit $X = A^t$.

Theorem 3 (AC): *Sei A eine offene Teilmenge von ω^ω. Dann ist das Spiel G_A determiniert.*

Beweis: Sei $A \subseteq \omega^\omega$ offen. Angenommen, I hat im Spiel G_A keine Gewinnstrategie. Wir zeigen, daß dann II eine Gewinnstrategie hat. Die Strategie für II ist wie folgt: Angenommen, I beginnt mit a_0. Da I keine Gewinnstrategie hat, gibt es ein b_0, so daß I auch im Spiel $G_A^{(a_0,b_0)}$ keine Gewinnstrategie hat. II wählt ein solches b_0. Angenommen, II setzt mit a_1 fort. Dann gibt es erneut ein b_1 derart, daß I auch im Spiel $G_A^{(a_0,b_0,a_1,b_1)}$ keine Gewinnstrategie hat. II wählt ein solches b_1 usw.
Wir zeigen, daß diese Spielweise für II eine Gewinnstrategie liefert: Sei $s = (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ das Ergebnis eines Spiels, bei dem II nach der obigen Strategie spielt. Wir haben zu zeigen, daß $s \notin A$ ist. Wenn $s \in A$ ist, so gibt es ein $t = (a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n) \subseteq s$ derart, daß $U_t \subseteq A$ ist. Aber dann ist das Spiel für II bereits verloren, wenn die Konfiguration $(a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n)$ erreicht wird, im Widerspruch zur Annahme. □

Entsprechend läßt sich zeigen, daß auch für jede abgeschlossene Menge A das Spiel G_A determiniert ist.

Theorem 4 (AD): *Es gibt keinen freien Ultrafilter über ω.*

Beweis: Angenommen, $U \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ ist ein freier Ultrafilter über ω. Wir werden das zu einem Widerspruch führen.
Wir setzen
$$A = \{s \in \omega^\omega : s^I \in U \wedge \forall n \forall i < n(s(2n) \neq s(2i+1))\}.$$
Das heißt, in dem Spiel G_A versucht Spieler I, mit seinen Elementen eine Menge aus dem Ultrafilter zu generieren, wobei er nur Elemente wählen darf, die von den von II gewählten Elementen verschieden sind. Wir zeigen zunächst folgendes: Wenn I eine Gewinnstrategie F hat, so hat I auch eine Gewinnstrategie, bei der er kein Element mehrmals wählt.
Wir setzen
$$F'(b_0, \ldots, b_{n-1}) = \begin{cases} F(b_0, \ldots, b_{n-1}), \text{ wenn } F(b_0, \ldots, b_{n-1}) \neq F'(b_0, \ldots, b_{i-1}) \\ \qquad \text{für alle } i < n-1; \\ min(\omega \setminus (\{b_i : i < n\} \cup \{F'(b_0, \ldots, b_i) : i < n-1\}) \text{ sonst.} \end{cases}$$
Dann ist für jedes $b \in \omega^\omega$, $(F' * b)^I \supseteq (F * b)^I \in U$ und somit ist auch F' eine Gewinnstrategie. Bei dieser Strategie wählt I kein Element mehrmals.
Sei nun F eine Strategie für I, bei der I kein Element mehrmals wählt. Wir definieren eine Strategie G für II durch
$$G(t_0, \ldots, t_n) = F(t_1, \ldots, t_n).$$
Wenn $a \in \omega^\omega$, $s = a * G$, so ist $\{s_{2n+1} : n < \omega\} \in U$.
Sei $s = F * G$. Dann ist $\{s_{2n} : n < \omega\} \in U$ und $\{s_{2n+1} : n < \omega\} \in U$. Aus der Wahl von F folgt, daß $\{s_{2n} : n < \omega\} \cap \{s_{2n+1} : n < \omega\} \subseteq \{s_0\}$ ist. Hieraus folgt $\{s_0\} \in U$, und damit wäre U kein freier Ultrafilter, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Korollar 5: $AD \rightarrow \neg AC$

Beweis: Aus AC folgt, daß freie Ultrafilter über ω existieren. □

20 Vom Rasiowa-Sikorski-Lemma zu Martin's Axiom

Martin's Axiom wurde von Martin und Solovay (Internal Cohen extensions, Ann. Math. Logic 2 (1970), 143-178) als Äxiom Aëingeführt. Sie benutzten dieses Axiom, um verschiedene Aussagen in $ZFC + \neg\ CH$ entscheiden zu können, die in ZFC allein nicht zu entscheiden waren. Es zeigte sich, daß es sich bei ihrem Axiom um eine sehr interessante und mächtige Aussage handelt, die viele Fragen in ZFC entscheidet, und man kennt erst einige wenige kombinatorische Aussagen, die sich mit Martin's Axiom nicht entscheiden lassen.
Martin's Axiom ist eine Aussage über partielle Ordnungen, die sich als Extrakt verschiedener Forcing-Konstruktionen ergeben hat. Insbesondere hat die Methode des iterierten Forcing hierin Eingang gefunden. Der Nachweis der relativen Konsistenz von Martin's Axiom setzt die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl voraus.
Erfahrungsgemäß haben Anfänger Schwierigkeiten bei der Anwendung von Martin's Axiom. Wir werden deshalb versuchen, schrittweise in den Gebrauch dieses Werkzeugs einzuführen. Betrachten wir das folgende einfache Theorem:

Theorem 1: *Sei A eine abzählbare, fast disjunkte Familie von unendlichen Teilmengen von ω. Dann gibt es eine unendliche Teilmende d von ω mit $|d \cap a| < \omega$ für alle $a \in A$.*

Der Beweis läßt sich wie folgt führen:

Beweis 1: Sei $A = \{a_i : i < \omega\}$. Man konstruiere induktiv eine Folge $(x_i)_{i<\omega}$ von Elementen von ω derart, daß für jedes $i < \omega$ gilt

$$x_i \in \omega \setminus (\bigcup_{k<i} a_k \cup \{x_k : k < i\}).$$

Da die auf der rechten Seite stehende Menge unendlich ist, existiert eine solche Folge. Wir setzen

$$d = \{x_i : i < \omega\}$$

und haben so die gewünschte Menge d. □

Der eben gegebene Beweis hängt wesentlich von der Aufzählung von A ab. Wir wollen jetzt ein Hilfsmittel bereitstellen, das es gestattet, den Beweis zu führen, ohne explizit auf eine solche Aufzählung Bezug zu nehmen. Dazu benötigen wir zuerst einige Definitionen.

Sei $(P, \leq)$ eine *p.o.*, $p, q \in P$ und $A \subseteq P$. p und q sind *verträglich* (geschrieben $p|q$), wenn es ein $r \in P$ gibt mit $r \leq p$ und $r \leq q$. Andernfalls heißen p und q *unverträglich* (geschrieben $p \perp q$). A ist *Antikette*, wenn die Elemente von A paarweise unverträglich sind. A ist *dicht* in P, wenn für jedes $p \in P$ ein $q \in A$ existiert mit $q \leq p$. A ist *offen-dicht* in P, wenn A dicht in P ist und gilt $\forall p \in P \, \forall q \in A \, (p \leq q \rightarrow p \in A)$. Wenn A dichte Teilmenge von P ist, so ist die Menge $A^u = \{p \in P : \exists q \in A \, (p \leq q)\}$ offen-dicht. Wir bezeichnen sie als *offen-dichten Abschluß* von D. A ist *gerichtete* Teilmenge von P, wenn $\forall p \, q \in A \, (\, p|q\,)$. Sei A gerichtet. Wenn außerdem gilt $\forall p \in P \, \forall q \in A \, (q \leq p \rightarrow p \in A)$, so heißt A *Filter*. Sei $\mathcal{D}$ eine Familie von dichten Teilmengen von P. Ein Filter G in P heißt *$\mathcal{D}$-generisch*, wenn gilt $\forall D \in \mathcal{D} \, (D \cap G \neq \emptyset)$.

Man sieht leicht, daß folgendes gilt:
(1) Wenn G ein Filter auf einer *p.o.* $(P, \leq)$ ist und $F \in [G]^{<\omega}$, so gibt es ein $r \in P$ mit $\forall q \in F \, (r \leq q)$.
(2) Wenn $A = \{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von Filtern ist mit $\forall \alpha \, \beta < \kappa \, (\alpha < \beta \rightarrow G_\alpha \subseteq G_\beta)$, so ist auch $\bigcup_{\alpha<\kappa} G_\alpha$ ein Filter.
(3) Sei $(P, \leq)$ eine *p.o.*, $A \subseteq P$ derart, daß $\forall F \in [A]^{<\omega} \, \exists r \in A \, \forall q \in F \, (r \leq q)$. Dann ist $\bigcap\{G \subseteq P : A \subseteq G, G \text{ ist Filter}\}$ ebenfalls ein Filter. Wir bezeichnen ihn mit $\langle A \rangle$ und nennen ihn *den durch A in P erzeugten Filter.*
(4) Sei $(P, \leq)$ eine *p.o.*, $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von dichten Teilmengen von P, G ein Filter auf P. Dann ist G $\mathcal{D}$-generisch gdw. G $\{D^u_\alpha : \alpha < \kappa\}$-generisch ist.

Beispiel: (1) Sei $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$, P werde geordnet durch $\subseteq$. Sei $A = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$. Dann besitzen je zwei Elemente aus A eine untere Schranke in P, aber A selbst besitzt keine untere Schranke in P.

Es gilt jedoch, wie man leicht sieht:

Lemma 2: *Sei $(P, \leq)$ eine p.o., $A \subseteq P$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Je zwei Elemente aus A besitzen eine untere Schranke in A.*
(ii) *Jede endliche Teilmenge von A besitzt eine untere Schranke in A.*
(iii) *Die Menge $\{p \in P : \exists q \in A(q \leq p)\}$ ist ein Filter.*

Der Beweis von Theorem 1 läßt sich nun wie folgt ändern:

Beweis 2: Sei $(n_i)_{i<\omega}$ eine unbeschränkte monotone Folge von natürlichen Zahlen, und sei $(F_i)_{i<\omega}$ eine monotone Folge endlicher Teilmengen von A mit $\bigcup_{i<\omega} F_i = A$. Wir konstruieren eine Folge $(s_i)_{i<\omega}$ von endlichen Teilmengen von ω derart, daß für jedes $i < \omega$ gilt

$$|s_i| = n_{i+1} - n_i,$$

$$s_i \subseteq \omega \setminus (\bigcup F_i \cup \bigcup_{k<i} s_k).$$

Dann leistet

$$d = \bigcup_{i<\omega} s_i$$

das verlangte. □

Bei diesem Beweis haben wir die Aufzählung der a_i durch eine geeignete Folge $(F_i)_{i<\omega}$ ersetzt. Indem wir auf die Vorgabe der Folgen $(n_i)_{i<\omega}$ und $(F_i)_{i<\omega}$ verzichten, können wir den Beweis folgendermaßen führen:

Beweis 3: Man konstruiere eine Folge $((s_i, F_i))_{i<\omega}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $s_i \in [\omega]^{<\omega}$, $F_i \in [\omega]^{<\omega}$;
(ii) wenn $i < k < \omega$, so ist $s_i \subseteq s_k$, $F_i \subseteq F_k$ und $(s_k \setminus s_i) \cap \bigcup F_i = \emptyset$;
(iii) $(|s_i|)_{i<\omega}$ ist unbeschränkt und $\bigcup_{i<\omega} F_i = A$.

Dann leistet

$$d = \bigcup_{i<\omega} s_i$$

das verlangte. □

Das folgende Lemma erlaubt es uns, den Beweis von Theorem 1 noch weiter zu verändern:

Lemma 3 (Rasiowa-Sikorski): *Seien $(P, \leq)$ eine p.o. und $\mathcal{D}$ eine abzählbare Familie von dichten Teilmengen von P. Dann existiert ein $\mathcal{D}$-generischer Filter.*

Beweis: Sei $\mathcal{D} = \{D_i : i < \omega\}$. Wir konstruieren eine Folge $(a_i)_{i<\omega}$ von Elementen aus P, die folgende Eigenschaften hat:

(i) $i < j < \omega$, so ist $a_j \leq a_i$;
(ii) für alle $i < \omega$ gibt es ein $q_i \in D_i$ mit $a_i \leq q_i$.

Für a_0 wählen wir irgendein beliebiges Element aus D_0. Sei jetzt $0 < n < \omega$ und für $i < n$ sei a_i bereits konstruiert. Da D_n dicht in P ist, gibt es ein $b \in D_n$ mit $b \leq a_{n-1}$. Wir wählen für a_n ein solches b. Der durch $\{a_i : i < \omega\}$ erzeugte Filter leistet das verlangte. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich der Beweis von Theorem 1 wie folgt ändern:

Beweis 4: Sei
$$P = \{(s,F) : s \in [\omega]^{<\omega}, F \in [A]^{<\omega}\}.$$
Auf P führen wir eine *p.o.* $\leq$ wie folgt ein:

$$(s,F) \leq (s_1,F_1) \text{ gdw. } \; s_1 \subseteq s, F_1 \subseteq F \;\text{ und }\; (s \setminus s_1) \cap \bigcup F_1 = \emptyset.$$

Überzeugen wir uns davon, daß $\leq$ tatsächlich eine partielle Ordnung ist. Dafür reicht es, die Transitivität zu zeigen. Sei $(s_0,F_0) \leq (s_1,F_1)$ und $(s_1,F_1) \leq (s_2,F_2)$. Wegen $s_1 \subseteq s_0$ und $s_2 \subseteq s_1$ ist $s_2 \subseteq s_0$ und entsprechend ist $F_2 \subseteq F_0$. Wegen $s_0 \setminus s_2 = (s_0 \setminus s_1) \cup (s_1 \setminus s_2)$ und $(s_1 \setminus s_2) \cap \bigcup F_2 = \emptyset$ sowie $(s_0 \setminus s_1) \cap \bigcup F_2 \subseteq (s_0 \setminus s_1) \cap \bigcup F_1 = \emptyset$ ist

$$(s_0 \setminus s_2) \cap \bigcup F_2 = [(s_0 \setminus s_1) \cap \bigcup F_2] \cup [(s_1 \setminus s_2) \cap \bigcup F_2] = \emptyset,$$

also ist $(s_0,F_0) \leq (s_2,F_2)$.
Für $n < \omega$ sei
$$D_n = \{(s,F) \in P : |s| \geq n\}.$$
Wir zeigen, daß für jedes $n < \omega$, D_n dicht in P ist.
Sei $(s,F) \in P$. Wegen $|\omega \setminus \bigcup F| = \omega$ gibt es eine endliche Menge $t \subseteq \omega \setminus \bigcup F$ mit $|t| = n$. Dann ist $(s \cup t, F) \in D_n$ und $(s \cup t, F) \leq (s,F)$.
Für $a \in A$ sei
$$D_a = \{(s,F) \in P : a \in F\}.$$
Für jedes $a \in A$ ist D_a dicht: Sei $(s,F) \in P$. Dann ist $(s, F \cup \{a\}) \in D_a$ und $(s, F \cup \{a\}) \leq (s,F)$.
Sei jetzt
$$\mathcal{D} = \{D_n : n < \omega\} \cup \{D_a : a \in A\}.$$
Dann ist $\mathcal{D}$ eine abzählbare Familie von dichten Teilmengen von P. Somit gibt es einen $\mathcal{D}$-generischen Filter G. Sei
$$d = \bigcup \{s : \exists F((s,F) \in G)\}.$$
Wir zeigen, daß d das verlangte leistet:
Für jedes $n \in \omega$ ist $|d| > n$:
Sei $(s,F) \in G \cap D_n$. Dann ist $|s| \geq n$, und wegen $s \subseteq d$ ist $|d| \geq n$.
Für jedes $a \in A$ ist $|a \cap d| < \omega$:
Sei $(s_0,F_0) \in G \cap D_a$. Dann gibt es für jedes $(s,F) \in G$ ein $(s_1,F_1) \in G$ mit $(s_1,F_1) \leq (s,F)$ und $(s_1,F_1) \leq (s_0,F_0)$. Wegen $(s_1 \setminus s_0) \cap \bigcup F_0 = \emptyset$ ist auch $(s_1 \setminus s_0) \cap a = \emptyset$ und das ist äquivalent zu $s_1 \cap a \subseteq s_0$. Wegen $s \subseteq s_1$ ist somit $s \cap a \subseteq s_0$. Da s beliebig gewählt war, ist somit $d \cap a \subseteq s_0$, also $|d \cap a| < \omega$. $\square$

Bei dieser letzten Beweisversion haben wir lediglich einen Filter in P benutzt, um unsere Menge d zu konstruieren. Ein großer Teil der Konstruktion ist dabei im Lemma von Rasiowa und Sikorski verschlüsselt worden. Es ist nun interessant herauszufinden, ob sich das Lemma von

Rasiowa und Sikorski verallgemeinern läßt. Eine solche Verallgemeinerung stellt Martin's Axiom dar. Dabei handelt es sich um eine Aussage, die relativ zu ZFC + ës gibt eine unerreichbare Kardinalzahl"konsistent ist. Bevor wir diese Aussage formulieren können, müssen wir einen weiteren Begriff einführen:
Sei $(P, \leq)$ eine *p.o.*, κ eine überabzählbare Kardinalzahl. $(P, \leq)$ hat die *κ-Antikettenbedingung*, (abgekürzt mit κ-ac für "κ-antichain condition"), wenn für jede Antikette A von P gilt $|A| < \kappa$. Es hat sich inzwischen eingeschliffen, das Änti"wegzulassen und einfach (aber falsch) von der κ-Kettenbedingung zu sprechen (κ-*cc* steht hierbei als Abkürzung von κ-chain condition). Weiterhin hat es sich eingeschliffen, statt von der "ω_1-Antikettenbedingung"von der äbzählbaren Kettenbedingung"(*ccc*, countable chain condition) zu sprechen. Da es sich hierbei inzwischen um die gängigen Abkürzungen handelt, wollen wir uns im folgenden diesem schlechten Stil beugen und gleichfalls diese Bezeichnungen benutzen.
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. $MA(\kappa)$ (Martin's Axiom für κ) ist die folgende Aussage:

(MA(κ)) Sei $(P, \leq)$ eine *p.o.* mit der *ccc*, und sei $\mathcal{D}$ eine Familie von dichten Teilmengen von P mit $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Dann gibt es einen $\mathcal{D}$-generischen Filter.

Es ist sofort zu sehen, daß $MA(\omega)$ eine Folge des Rasiowa-Sikorski-Lemma ist.

Unter MA (Martin's Axiom) verstehen wir die folgende Aussage:

(MA) $2^\omega > \omega_1$ und für alle $\kappa < 2^\omega$ gilt $MA(\kappa)$.

Mit diesem Axiom wird ein Hilfsmittel bereitgestellt, das vielfältige Anwendungen erlaubt. Statt umständliche Forcing-Konstruktionen zu erstellen ist es möglich, mit einfachen partiellen Ordnungen zu arbeiten. Damit ist es auch ohne tiefere mengentheoretische Kenntnisse möglich, Unabhängigkeitsbeweise zu führen.
Wir wollen am Schluß dieses Kapitels zeigen, daß bei MA weder auf die *ccc* noch auf die Einschränkung $|\mathcal{D}| < 2^\omega$ verzichtet werden kann.

Beispiele: (2) Seien I, J nicht leere Mengen. Mit $Fn(I, J)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen f mit $|f| < \omega$, $dom(f) \subseteq I$, $rng(f) \subseteq J$. Wir ordnen $Fn(I, J)$ durch $\supseteq$. Wir betrachten $Fn(\omega, \omega_1)$. $Fn(\omega, \omega_1)$ erfüllt die *ccc*: Sei für $\alpha < \omega_1$, $p_\alpha = \{(0, \alpha)\}$. Dann ist

$$A = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

Antikette mit $|A| = \omega_1$. Für $\alpha < \omega_1$ sei

$$D_\alpha = \{f \in Fn(\omega, \omega_1) : \alpha \in rng(F)\}.$$

Dann ist D_α dichte Teilmenge von $Fn(\omega, \omega_1)$. Sei

$$\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Dann kann es keinen $\mathcal{D}$-generischen Filter geben: Angenommen, G ist $\mathcal{D}$-generisch. Dann ist $\bigcup G$ eine Funktion mit $dom(\bigcup G) \subseteq \omega$ und $rng(\bigcup G) = \omega_1$, was offensichtlich nicht sein kann.

(3) Wir betrachten $Fn(\omega, 2)$. Für $f \in {}^{\omega}2$ sei

$$D_f = \{p \in Fn(\omega, 2) : p \not\subseteq f\}.$$

Dann ist D_f dichte Teilmenge von $Fn(\omega, 2)$. Sei

$$\mathcal{D} = \{D_f : f \in {}^{\omega}2\}.$$

Dann kann es keinen $\mathcal{D}$-generischen Filter geben:
Sei $F = \bigcup G$. Dann ist $F \in {}^{\omega}2$, aber wegen $G \cap D_f \neq \emptyset$ folgt der Widerspruch $F \notin {}^{\omega}2$.

21 Filter

Wir haben bereits gezeigt, daß sich jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitern läßt. Wir kennen bisher keine Eigenschaften, in denen sich freie Ultrafilter unterscheiden können. Wir werden hier verschiedene Typen von Ultrafiltern über ω kennenlernen. Dabei sind alle in diesem Kapitel auftretenden Ultrafilter frei und über ω.
Eine Funktion $f : a \to b$ heißt *endlich-zu-eins*, wenn für jedes $x \in b$ gilt $|f^{-1}(x)| < \omega$.
Ein Ultrafilter U über ω heißt *P-Punkt*, wenn gilt

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \exists a \in U (f|_a \text{ ist endlich-zu-eins oder konstant}).$$

Ein Ultrafilter U über ω heißt *selektiv*, wenn schärfer gilt

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \exists a \in U (f|_a \text{ ist bijektiv oder konstant}).$$

Man macht sich leicht klar, daß ein Ultrafilter U über ω ein P-Punkt ist gdw. folgendes gilt:
Für jede Zerlegung $(a_i)_{i<\omega}$ von ω gibt es ein $a \in U$ mit $a = a_i$ für ein $i < \omega$ oder $\forall i < \omega\, (|a \cap a_i| < \omega)$.
Ein Ultrafilter über ω ist selektiv gdw. für jede Zerlegung $(a_i)_{i<\omega}$ von ω ein $a \in U$ existiert mit $a = a_i$ für ein $i < \omega$ oder $|a \cap a_i| \leq 1$ für alle $i < \omega$.

Theorem 1 (MA): *Es gibt selektive Ultrafilter.*

Beweis: Wir zeigen zunächst
Behauptung: Sei $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, F habe die *sfip*, $|F| < 2^{\omega}$. Weiterhin sei $f \in {}^{\omega}\omega$. Dann gibt es ein $a \in \mathcal{P}(\omega)$, so daß $F \cup \{a\}$ die *sfip* hat und $f|_a$ ist bijektiv oder konstant.

Beweis der Behauptung: Für $i < \omega$ sei

$$b_i = \{n \in \omega : f(n) = i\};$$

$$c_i = \{n \in \omega : f(n) > i\}.$$

Fall 1: Für ein $i_0 < \omega$ hat $F \cup \{b_{i_0}\}$ die *sfip*.
Dann ist $f|_{b_{i_0}}$ konstant und b_{i_0} leistet das verlangte.

Fall 2: Für alle $i < \omega$ hat $F \cup \{b_i\}$ nicht die *sfip*.
Dann hat für alle $i < \omega$, $F \cup \{c_i\}$ die *sfip*. P sei die Menge aller endlichen Teilmengen x von ω, so daß $f|_x$ bijektiv ist. Wir ordnen P durch

$$x < y \text{ gdw. } y \subseteq x.$$

Für $n < \omega$, $a \in F$ sei

$$E_a^n = \{x \in P : |a \cap x| \geq n\}.$$

Wir zeigen, daß für alle $n < \omega$ und alle $a \in F$ die Menge E_a^n dicht in P ist. Sei dazu $x \in P$ gegeben. Sei

$$i_0 = min\{k : x \subseteq \bigcup_{j<k} b_j\}.$$

Da $F \cup \{c_{i_0}\}$ die *sfip* hat, ist $|a \cap c_{i_0}| = \omega$ und somit gibt es ein $z \subseteq a \cap c_{i_0}$ mit $|z| \geq n$ und $|b_j \cap z| \leq 1$ für jedes $j < \omega$. Sei

$$y = x \cup z.$$

Dann ist $y \leq x$ und $y \in E_a^n$, also ist E_a^n dicht in P.
Wir setzen

$$\mathcal{D} = \{E_a^n : n < \omega,\ a \in F\}.$$

Da $|\mathcal{D}| < 2^\omega$ ist, gibt es ein $\mathcal{D}$-generisches $G \subseteq P$. Sei

$$a = \bigcup G.$$

Dann leistet a das verlangte. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei $(f_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ eine Aufzählung von ${}^\omega\omega$. Induktiv konstruieren wir eine Folge $(a_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ derart, daß für alle $\alpha < 2^\omega$, $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$ die *sfip* hat und $f_\alpha|_{a_\alpha}$ konstant oder bijektiv ist. Dann ist jeder Ultrafilter U, der $\{a_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ enthält, ein selektiver Ultrafilter. □

Bemerkung: Man macht sich leicht klar, daß das Theorem auch aus *CH* folgt.In den folgenden Theoremen 2, 3 und 4 kann *MA* ebenfalls durch *CH* ersetzt werden.

Theorem 2 (MA): *Es gibt P-Punkte, die nicht selektiv sind.*

Beweis: Sei $(b_i)_{i<\omega}$ eine Zerlegung von ω mit $|b_i| = i$ für alle $i < \omega$. Analog zum Beweis von Theorem 1 werden wir eine Folge $(a_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ konstruieren mit $f_\alpha|_{a_\alpha}$ ist endlich-zu-eins oder konstant für alle $\alpha < 2^\omega$ und der zusätzlichen Eigenschaft, daß für jedes $\alpha < 2^\omega$ die Menge $\{|b_i \cap a_\alpha| : i < \omega\}$ unbeschränkt ist. Damit wird gesichert, daß jeder Ultrafilter, der $\{a_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ enthält, nicht selektiv ist.

Behauptung: Sei $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, F habe die *sfip*, $|F| < 2^\omega$ und für jedes $a \in F$ sei $\{|a \cap b_i| : i < \omega\}$ unbeschränkt. Sei $f \in {}^\omega\omega$. Dann gibt es ein $a \subseteq \omega$ derart, daß $F \cup \{a\}$ die *sfip* hat, $f|_a$ ist endlich-zu-eins oder konstant, und $\{|b_i \cap a| : i < \omega\}$ ist unbeschränkt.

Beweis der Behauptung: O.B.d.A. können wir annehmen, daß F unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und daß aus $a \in F$ folgt, daß auch jedes $b \subseteq \omega$ mit $|a \Delta b| < \omega$ zu F gehört.
Für $i < \omega$ sei

$$c_i = \{n \in \omega : f(n) = i\}.$$

Fall 1: Für ein $i_0 < \omega$ hat $F \cup \{c_{i_0}\}$ die *sfip* und $\{|c_{i_0} \cap b_k| : k < \omega\}$ ist unbeschränkt. Dann ist $f|_{c_{i_0}}$ konstant, und c_{i_0} leistet das verlangte.

Fall 2: Für jedes $j < \omega$ gilt: $\{|c_j \cap b_i| : i < \omega\}$ ist beschränkt, oder $F \cup \{c_j\}$ hat nicht die *sfip*. Es sei P die Menge aller endlichen Teilmengen von ω. Wir ordnen P durch

$$x \leq y \text{ gdw. } y \subseteq x \wedge \exists i < \omega\, (y \cap d_i = \emptyset \wedge (x \setminus y) \subseteq d_i).$$

Für $n < \omega$, $a \in F$ sei

$$E_a^n = \{x \in P : \exists i < \omega\, (|a \cap x \cap b_i| \geq n)\}.$$

Wir zeigen, daß daß für jedes $n < \omega$ und $a \in F$ die Menge E_a^n dicht in P ist. Sei $x \in P$. Wir setzen

$$X = f[x];$$

$$X_0 = \{i \in X : F \cup \{c_i\} \text{ hat die } \textit{sfip}\};$$

$$X_1 = X \setminus X_0.$$

Für jedes $j \in X_1$ hat $F \cup \{c_j\}$ nicht die *sfip*. Somit gibt es ein $e_j \in F$ derart, daß $|e_j \cap c_j| < \omega$ ist. Da F unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist und mit jedem e auch jedes e^* enthält, für das $e \Delta e^*$ endlich ist, gibt es ein $e' \in F$ mit $e' \cap c_j = \emptyset$ für jedes $j \in X_1$. Sei

$$e = e' \cap a.$$

Für jedes $j \in X_0$ ist $\{|e \cap c_j \cap b_i| : i < \omega\}$ beschränkt. Sei m eine obere Schranke von $|e \cap c_j \cap b_i| : j \in X_0, i < \omega\}$. Sei $i_0 \in \omega \setminus X$ so, daß $|e \cap b_{i_0}| \geq m \cdot |X| + n$ ist. Sei

$$z = b_{i_0} \setminus \bigcup \{c_i : i \in X\},$$

$$y = x \cup z.$$

Dann ist $|z| \geq n$, $y \leq x$ und $y \in E_a^n$. Damit ist gezeigt, daß E_a^n in P dicht liegt.
Sei

$$\mathcal{D} = \{E_a^n : n < \omega, a \in F\}.$$

Da $|\mathcal{D}| < 2^\omega$, gibt es ein $\mathcal{D}$-generisches $G \subseteq P$. Sei

$$a = \bigcup G.$$

Dann hat $F \cup \{a\}$ die *sfip* und $\{|b_i \cap a| : i < \omega\}$ ist unbeschränkt. Weiterhin sieht man leicht aus der Definition der Ordnung auf P, daß $f|_a$ endlich-zu-eins ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Induktiv konstruieren wir eine Folge $(a_\alpha)_{\alpha < 2^\omega}$ derart, daß für alle $\alpha < 2^\omega$, $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$ die *sfip* hat, $\{|a_\alpha \cap b_i| : i < \omega\}$ unbeschränkt ist, und $f_\alpha|_{a_\alpha}$ endlich-zu-eins oder konstant ist.
Sei U ein Ultrafilter, der $\{a_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ enthält. Wir müssen noch zeigen, daß für jedes $a \in U$ die Menge $\{|a \cap b_i| : i < \omega\}$ unbeschränkt ist: Sei dazu $f_a \in {}^\omega\omega$ gegeben durch

$$f_a(i) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i \in a; \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann gibt es ein $\alpha < 2^\omega$ mit $f_a = f_\alpha$. Nun folgt aus der Konstruktion, daß $a_\alpha \subseteq a$ oder $a_\alpha \cap a = \emptyset$. Wegen $a \in U$ muß $a_\alpha \subseteq a$ sein. Damit ist $\{|a \cap b_i| : i < \omega\}$ unbeschränkt. $\square$

Ein Ultrafilter U über ω heißt *Q-Punkt*, wenn es für jedes $f \in {}^\omega\omega$, das endlich-zu-eins ist, ein $a \in U$ gibt, für das $f|_a$ bijektiv ist.

Man macht sich leicht klar, daß ein Ultrafilter U ein Q-Punkt ist gdw. folgendes gilt:
Für jede Zerlegung $\{b_i : i < \omega\}$ von ω in endliche Teilmengen gibt es ein $a \in U$ mit $|b_i \cap a| \leq 1$ für jedes $i < \omega$.

Theorem 3 (MA): *Es gibt Q-Punkte, die nicht P-Punkte sind.*

Beweis: Sei $(b_i)_{i<\omega}$ eine Zerlegung von ω in unendliche Teilmengen, $B = \{b_i : i < \omega\}$. Eine Menge $a \subseteq \omega$ heiße *B-gut*, wenn $|\{i < \omega : |b_i \cap a| = \omega\}| = \omega$. Eine Menge $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ heiße $B-gut$, wenn jedes $a \in F$ B-gut ist.

Behauptung 1: Sei $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, $|F| < 2^\omega$, abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und B-gut. Dann gibt es ein $a \subseteq \omega$ derart, daß $f|_a$ bijektiv ist und für jedes $c \in F$ ist $a \cap c$ B-gut.

Beweis der Behauptung: Für jedes $c \in F$ sei

$$X_c = \{i \in \omega : |c \cap b_i| = \omega\}.$$

Es sei P die Menge aller endlichen Teilmengen x von ω, so daß $f|_x$ bijektiv ist. Wir ordnen P durch

$$x \leq y \text{ gdw. } y \subseteq x.$$

Für $c \in F$, $i \in X_c$, $n \in \omega$ sei

$$E_{c,i,n} = \{x \in P : |c \cap b_i \cap x| \geq n\}.$$

Dann ist für jedes $c \in F$, $i \in X_c$, $n \in \omega$, die Menge $E_{c,i,n}$ dicht in P. Wir setzen

$$\mathcal{D} = \{E_{c,i,n} : c \in F, i \in X_c, n \in \omega\}.$$

Da $|\mathcal{D}| < 2^\omega$, gibt es eine $\mathcal{D}$-generische Menge G. $\bigcup G$ leistet das verlangte, und damit ist Behauptung 1 gezeigt.

Behauptung 2: Sei $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und B-gut. Sei $d \subseteq \omega$. Dann gilt

(i) für jedes $c \in F$ ist $c \cap d$ B-gut

oder

(ii) für jedes $c \in F$ ist $c \setminus d$ B-gut.

Beweis der Behauptung: Seien F und d wie in der Behauptung. Angenommen, weder (i) noch (ii) trifft zu. Dann gibt es $c_0, c_1 \in F$, so daß

$$|\{i < \omega : |c_0 \cap b_i \cap d| = \omega\}| < \omega$$

und

$$|\{i < \omega : |c_1 \cap b_i \setminus d| = \omega\}| < \omega.$$

Sei

$$c_2 = c_0 \cap c_1.$$

Dann ist $c_2 \in F$. Sei
$$X = \{i < \omega : |c_2 \cap b_i| = \omega\}.$$
Wegen
$$\{i < \omega : |c_2 \cap b_i| = \omega\} = \{i < \omega : |c_2 \cap b_i \cap d| = \omega\} \cup \{i < \omega : |c_2 \cap b_i \setminus d| = \omega\}$$
ist dann X endlich, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Sei $(f_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ eine Aufzählung aller $f \in {}^\omega\omega$, die endlich-zu-eins sind und sei $(c_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ eine Aufzählung von $\mathcal{P}(\omega)$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(F_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ von B-guten Mengen mit $|F_\alpha| < 2^\omega$ für jedes $\alpha < 2^\omega$. Sei
$$F_0 = \mathit{Cofin}.$$
Sei $\alpha < 2^\omega$ und für $\beta < \alpha$ sei F_β bereits konstruiert.
Wenn $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so setzen wir
$$F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta.$$
Sei $\alpha = \beta+1$. Wir wenden Behauptung 1 auf F_β und f_β an und erhalten eine Menge $a_\beta \subseteq \omega$, so daß $f_\beta|_{a_\beta}$ bijektiv ist und derart, daß für jedes $b \in F_\beta$, $a_\beta \cap b$ B-gut ist. Sei F_β' der Abschluß von $F_\beta \cup \{a_\beta\}$ unter endlichen Durchschnitten. Sei F_α der Abschluß von $F_\beta' \cup \{c_\beta\}$ unter endlichen Durchschnitten, wenn diese Familie B-gut ist, und der Abschluß von $F_\beta' \cup \{\omega \setminus c_\beta\}$ unter endlichen Durchschnitten sonst. Aus der Behauptung 2 folgt, daß F_α B-gut ist.
Sei
$$U = \bigcup_{\alpha<2^\omega} F_\alpha.$$
Aus der Konstruktion folgt, daß U Q-Punkt, aber nicht P-Punkt ist. □

Ein Ultrafilter U über ω heißt *Semi-Q-Punkt*, wenn für jedes $f \in {}^\omega\omega$, das endlich-zu-eins ist, ein $a \in U$ existiert mit $|a \cap f^{-1}\{a\}| \leq n$ für alle $n < \omega$.
Man macht sich leicht klar, daß ein Ultrafilter U über ω ein Semi-Q-Punkt ist gdw. folgendes gilt:
Für jede Zerlegung $(b_i)_{i<\omega}$ von ω in endliche Teilmengen gibt es ein $a \in U$ mit $|a \cap \bigcup_{i<n} b_i| \leq n$ für alle $n < \omega$.

Theorem 4 (MA): *Es gibt Semi-Q-Punkte, die nicht Q-Punkte sind.*

Beweis: Sei $(b_i)_{i<\omega}$ eine Zerlegung von ω mit $|b_i| = i$ für alle $i < \omega$. Sei $B = \{b_i : i < \omega\}$, $a \subseteq \omega$. a heißt *B-gut*, wenn $\{|a \cap b_i| : i < \omega\}$ unbeschränkt ist. Entsprechend heißt $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ $B-\mathit{gut}$, wenn jedes $c \in F$ B-gut ist.

Behauptung 1: Sei $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ B-gut mit $|F| < 2^\omega$. Sei $f \in {}^\omega\omega$ endlich-zu-eins. Dann gibt es ein $a \subseteq \omega$ derart, daß für jedes $n < \omega$, $|a \cap f^{-1}\{n\}| \leq n$ ist und für jedes $c \in F$ ist $a \cap c$ B-gut.

Beweis der Behauptung: Es sei P die Menge aller endlichen Teilmengen x von ω derart, daß für alle $n < \omega$, $|x \cap \bigcup_{i<n} b_i| \leq n$ ist. Wir ordnen P durch
$$x \leq y \text{ gdw. } y \subseteq x.$$

Für $c \in F$, $n < \omega$ sei

$$E_{c,n} = \{x \in P : \exists i\, (|x \cap c \cap b_i| \geq n)\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß für jedes $c \in F$ und jedes $n < \omega$ die Menge $E_{c,n}$ dicht in P ist. Sei

$$\mathcal{D} = \{E_{c,n} : c \in F, n < \omega\}.$$

Dann ist $|\mathcal{D}| < 2^\omega$. Sei G $\mathcal{D}$-generisch. Wir setzen

$$a = \bigcup G.$$

Dann leistet a das verlangte, und damit ist die Behauptung gezeigt.

Behauptung 2: Sei $F \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, abgeschlossen unter endlichen Durschnitten und B-gut. Sei $d \subseteq \omega$. Dann gilt

(i) für jedes $c \in F$ ist $c \cap d$ B-gut

oder

(ii) für jedes $c \in F$ ist $c \setminus d$ B-gut.

Der Beweis ist analog zum Beweis von Behauptuzng 2 in Theorem 3.

Sei $(f_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ eine Aufzählung aller $f \in {}^\omega\omega$, die endlich-zu-eins sind. Sei $(d_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ eine Aufzählung von $\mathcal{P}(\omega)$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(F_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ von B-guten Mengen mit $|F_\alpha| < 2^\omega$ für jedes $\alpha < 2^\omega$. Sei

$$F_0 = Cofin.$$

Sei $\alpha < 2^\omega$, und für $\beta < \alpha$ sei F_β bereits konstruiert.
Wenn $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so setzen wir

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta.$$

Sei $\alpha = \beta + 1$. Wir wenden Behauptung 1 auf F_β und f_β an und erhalten eine Menge $a_\beta \subseteq \omega$, so daß für jedes $n < \omega$, $|a_\beta \cap f^{-1}\{n\}| \leq n$ ist und für jedes $c \in F_\beta$, $a_\beta \cap c$ B-gut ist. Der weitere Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 3. □

Bemerkung: Dem Leser sei als Übung empfohlen, folgendes zu zeigen:

(MA) Es gibt P-Punkte, die keine Semi-Q-Punkte sind.

Hinweis: Man beginne mit einer Zerlegung $(b_i)_{i<\omega}$ von ω mit $|b_i| = i^2$ für jedes $i < \omega$. Sei $B = \{b_i : i < \omega\}$. Eine Menge $a \subseteq \omega$ heiße B-gut, wenn $\{|a \cap b_i| : i < \omega\}$ unbeschränkt ist.

Wir kommen jetzt zu einer weiteren Charakterisierung von P-Punkten. Wir stellen zunächst ein Lemma bereit:

Lemma 5: *Sei $(A, <)$ eine abzählbare, lineare Ordnung, U ein Ultrafilter über A. Dann läßt sich A in abzählbar viele Intervalle zerlegen, die sämtlich nicht in U liegen, und die vom Ordnungstyp ω, $\omega + 1$, ω^*, $1 + \omega^*$ oder $\omega + \omega^*$ geordnet sind.*

Beweis: Wir erweitern A um zwei neue Elemente a_- und a_+, wobei a_- das kleinste und a_+ das größte Element von A^+ ist. Sei $A = \{a_i : i < \omega\}$. Wir setzen

$$b_0 = a_-, \quad c_0 = a_+, \quad d_0 = a_0.$$

Sei $n < \omega$. Für $j < n$ und $k \leq n$ seien I_j sowie b_k, c_k und d_k bereits konstruiert.
Wenn $(b_n, d_n] \notin U$, so setzen wir

$$I_n = (b_n, d_n],\ b_{n+1} = d_n,\ c_{n+1} = c_n.$$

Andernfalls setzen wir

$$I_n = [d_n, c_n),\ b_{n+1} = b_n,\ c_{n+1} = d_n.$$

d_{n+1} ist dasjenige $a_{n_0} \in A \setminus \bigcup_{k \leq n} I_k$, für das gilt $\forall m < n_0\, (a_m \in \bigcup_{k \leq n} I_k)$.
Aus der Konstruktion folgt, daß $\{I_k : k < \omega\}$ vom Ordnungstyp $\omega + n$, $n + \omega^*$ oder $\omega + \omega^*$ für ein geeignetes $n < \omega$ ist. Indem wir für $n > 1$ die kleinsten n bzw. die größten n Intervalle zu einem Intervall zusammenfassen, erhalten wir die gewünschte Zerlegung. $\square$

Theorem 6: *Sei U ein freier Ultrafiulter über ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *U ist P-Punkt.*
(ii) *Für jede lineare Ordnung $(\omega, \prec)$ gibt es ein $a \in U$, so daß $(a, \prec \cap a^2)$ den Ordnungstyp ω oder ω^* hat.*

Beweis: (i) $\rightarrow$ (ii):
Wir zerlegen $(\omega, \prec)$ in abzählbar viele Intervalle $\{I_k : k < \omega\}$, so daß sie vom Ordnungstyp ω, $\omega + 1$, ω^*, $1 + \omega^*$ oder $\omega + \omega^*$ geordnet sind und so, daß für alle $i < \omega$, $I_i \notin U$ ist.
Sei $a \in U$ so, daß $|a \cap I_i| < \omega$ für jedes $i < \omega$. Dann läßt sich a in zwei Mengen b_0, b_1 zerlegen derart, daß für $i \leq 1$ gilt: b_i ist endlich oder vom Ordnungstyp ω oder ω^*. Da $b_0 \in U$ oder $b_1 \in U$ und U keine endlichen Mengen enthält, folgt hiermit die Behauptung.

(ii) $\rightarrow$ (i)
Sei $\{a_i : i < \omega\}$ eine Zerlegung von ω. O.B.d.A. sei $|a_i| = \omega$ für alle $i < \omega$. Für $i < \omega$ wählen wir ein $<_i \subseteq {a_i}^2$ derart, daß $(a_i, <_i)$ eine lineare Ordnung vom Ordnungstyp ω ist. Sei

$$\prec = \bigcup_{i<\omega} <_i \cup \bigcup_{i<j<\omega} a_i \times a_j.$$

Damit hat $(\omega, \prec)$ den Ordnungstyp ω^2. Sei $a \in U$ so, daß $(a, \prec \cap a^2)$ den Ordnungstyp ω hat. Dann gilt: $\exists i < \omega\, (|a \setminus a_i| < \omega)$ (und somit ist für ein $i < \omega$, $a_i \in U$) oder $\forall i < \omega\, (|a \cap a_i| < \omega)$. Damit ist das Theorem gezeigt. $\square$

Wir gehen jetzt auf einen Zusammenhang zur Topologie ein. Wir bezeichnen mit $\beta\omega$ die Menge aller Ultrafilter über ω. Auf $\beta\omega$ können wir wie folgt eine Topologie einführen: Für $a \subseteq \omega$ sei

$$B_a = \{p \in \beta\omega : a \in p\}.$$

Dann bildet

$$\mathcal{B} = \{B_a : a \subseteq \omega\}$$

die Basis einer Topologie auf $\beta\omega$. Dabei enthält B_a einen freien Ultrafilter gdw. a unendlich ist. Ein Ultrafilter $p \in \beta\omega$ ist Hauptultrafilter gdw. es ein $i < \omega$ gibt mit $p = \{a \subseteq \omega : i \in a\}$. Somit können wir die Hauptultrafilter mit ω identifizieren. Offenbar bildet ω eine dichte Teilmenge in $\beta\omega$. Wir schreiben $\beta\omega \setminus \omega$ für den Teilraum von $\beta\omega$, der durch die freien Ultrafilter gebildet wird. Die P-Punkte besitzen nun folgende topologische Charakterisierung:
$p \in \beta\omega \setminus \omega$ ist P-Punkt gdw. für jede abzählbare Familie $\{U_i : i < \omega\}$ von offenen Mengen in $\beta\omega \setminus \omega$ mit $p \in \bigcap_{i<\omega} U_i$ ein $a \in [\omega]^\omega$ existiert mit $B_a \subseteq \bigcap_{i<\omega} U_i$. Damit bleiben P-Punkte unter Homöomorphismen erhalten. Nach Theorem 3 gibt es unter MA freie Ultrafilter, die keine P-Punkte sind. Somit folgt aus MA, daß $\beta\omega\setminus\omega$ nicht homogen ist. Dies wurde von Frolik gezeigt.

22 Das Δ-Lemma

Eine Menge A heißt *Δ-System mit der Wurzel* r, wenn gilt: $\forall a\, b \in A(a \neq b \to a \cap b = r)$. Eine Menge A heißt *Δ-System*, wenn A für eine Menge r ein Δ-System mit der Wurzel r ist.
Bevor wir das Δ-Lemma in seiner allgemeinen Form beweisen, zeigen wir einen Spezialfall:
Sei dazu A eine Familie endlicher Mengen mit $|A| \geq \omega_1$. Dann gibt es ein $B \subseteq A$ mit $|B| = \omega_1$, das ein Δ-System bildet.
Wir nehmen an, daß $|A| = \omega_1$ und $\bigcup A \subseteq \omega_1$. Für $n < \omega$ sei $A_n = \{a \in A : |a| = n\}$. Dann ist für ein $n < \omega$, $|A_n| = \omega_1$. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß für ein $n < \omega$ gilt $\forall a \in A(|a| = n)$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über n.
Wenn $n = 1$, so ist a eine Familie von paarweise disjunkten Mengen, also ist A ein Δ-System mit der Wurzel $\emptyset$.
Sei $n > 1$ und die Behauptung sei richtig für alle $k < n$. Sei $a = \{a_i : i < \omega_1\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1: Für alle $\alpha < \omega_1$ ist $|\{a \in A : \alpha \in a\}| \leq \omega$.
Dann ist auch für jede abzählbare Menge $C \subseteq \omega_1$, $|\{\alpha < \omega_1 : a_\alpha \cap \bigcup_{\gamma \in C} a_\gamma \neq \emptyset\}| \leq \omega$.
Wir definieren eine Funktion $h : \omega_1 \to \omega_1$ wie folgt: $h(0) = 0$; $h(\alpha) = min\{\beta : a_\beta \cap \bigcup_{\gamma<\alpha} a_{h(\gamma)} = \emptyset\}$. Dann bildet $B = \{a_{h(\alpha)} : \alpha < \omega_1\}$ ein Δ-System mit der Wurzel $\emptyset$.
Fall 2: Es gibt ein $\alpha < \omega_1$ mit $|\{a \in A : \alpha \in a\}| = \omega_1$.
Sei $B = \{a \in A : \alpha \in a\}$ und $B' = \{a \setminus \{\alpha\} : a \in B\}$. Wir wenden auf B' die Induktionsvoraussetzung an und erhalten ein $C' \in [B']^{\omega_1}$ sowie ein r, für das C' ein Δ-System mit der Wurzel r bildet. Sei $C = \{a \cup \{\alpha\} : a \in C'\}$. Dann ist $C \subseteq A$ mit $|C| = \omega_1$ und C bildet ein Δ -System mit der Wurzel $r \cup \{\alpha\}$.

Diese Idee läßt sich auf Mengensysteme verallgemeinern, die nicht notwendig nur aus endlichen Mengen bestehen:

Theorem 1 (Δ-Lemma): *Seien κ und λ reguläre Kardinalzahlen mit $\forall \alpha < \lambda\, (\alpha \in$ **Card** $\to \alpha^{<\kappa} < \lambda)$. Wenn A eine Menge ist mit $|A| \geq \lambda$ und $\forall a \in A(|a| < \kappa)$, so gibt es ein $B \subseteq A$ mit $|B| = \lambda$ und B bildet ein Δ-System.*

Beweis : O.B.d.A. ist $|A| = \lambda$. Da $\forall a \in A(|a| < \kappa)$, ist $|\bigcup A| \leq \lambda$. Somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\bigcup A \subseteq \lambda$.
Für jedes $a \in A$ ist damit $type(a) < \kappa$. Da λ regulär ist und $\kappa < \lambda$, gibt es ein $\rho < \kappa$ sowie ein $B \subseteq A$ mit $|B| = \lambda$ derart, daß für jedes $b \in B$, $type(b) = \rho$ ist.
Da für jedes $\alpha < \kappa$ gilt $\alpha^{<\kappa} < \lambda$, ist $\bigcup B$ in λ unbeschränkt. Sei $B = \{b_i : i < \lambda\}$. Für $\zeta < \rho$, $b \in B$ sei $b(\zeta)$ das ζ-te Element von b. Da λ regulär ist, gibt es ein $\zeta < \rho$, so daß $\{b(\zeta) : b \in B\}$

in λ unbeschränkt ist. Sei ζ_0 das kleinste solche ζ. Wir setzen

$$\alpha_0 = sup\{b(\eta) + 1 : b \in B, \eta < \zeta_0\}.$$

Dann ist $\alpha_0 < \lambda$ und $b(\eta) < \alpha_0$ für alle $b \in B$, $\eta < \zeta_0$.
Wir definieren $h : \lambda \to \lambda$ durch $h(0) = min\{\beta : b_\beta(\zeta_0) > \alpha_0\}$, $h(\alpha) = min\{\beta : b_\beta(\zeta_0) > \bigcup\{b_{h(\gamma)}(\delta) : \gamma < \alpha, \delta < \rho\}$. Dann ist h streng monoton wachsend. Sei $C = \{b_{h(i)} : i < \lambda\}$. Da $|{\alpha_0}^{<\kappa}| < \lambda$, gibt es eine Menge $D \subseteq C$ mit $|D| = \lambda$ sowie eine Menge r mit $\forall a\, b \in D(a \neq b \to a \cap b = r\}$. Damit ist D eine Δ-System mit der Wurzel r. □

Als unmittelbare Folgerung aus Theorem 1 ergibt sich

Korollar 2 (CH): *Sei $(s_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ eine Folge von paarweise verschiedenen abzählbaren Mengen. Dann gibt es ein s und ein $I \subseteq \omega_2$ mit $|I| = \aleph_2$ derart, daß für alle $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha \neq \beta$ gilt $s_\alpha \cap s_\beta = s$.*

23 Martin's Axiom

Wir haben im Kapitel *CH* das Theorem von Erdös-Rado gezeigt. Hier zeigen wir, daß sich mit *MA* die Negation der entsprechenden Aussage zeigen läßt. Somit haben wir hier ein Beispiel für eine Aussagen ϕ mit $ZFC + CH \models \phi$ und $ZFC + MA \not\models \phi$.

Theorem 1 (Baumgartner-Hajnal) (MA($\aleph_1$)):
Sei $\omega \times \omega_1 = H \cup K$. Dann gibt es eine unendliche Menge A sowie eine überabzählbare Menge B mit $A \times B \subseteq H$ oder $A \times B \subseteq K$.

Beweis: Für jedes $\alpha < \omega_1$ sei

$$A_\alpha = \{n : (n, \alpha) \in H\},$$
$$B_\alpha = \omega \setminus A_\alpha.$$

Sei F ein Nichthauptultrafilter über ω. Für jedes $\alpha < \omega_1$ ist $A_\alpha \in F$ oder $B_\alpha \in F$.
Somit ist

$$|\{\alpha < \omega_1 : A_\alpha \in F\}| = \omega_1$$

oder

$$|\{\alpha < \omega_1 : B_\alpha \in F\}| = \omega_1.$$

O.B.d.A. sei

$$E = \{\alpha < \omega_1 : A_\alpha \in F\}$$

überabzählbar. Die Menge $\{A_\alpha : \alpha \in E\}$ hat eine untere Schranke A (bezüglich der *p.o.* $<_*$).
Für $\alpha \in E$ sei n_α das kleinste n mit $A \setminus A_\alpha \subseteq n$. Dann gibt es eine überabzählbare Teilmenge B von E sowie ein $n \in \omega$ derart, daß für alle $\alpha \in B$ gilt $n = n_\alpha$. Aber dann ist

$$(A \setminus n) \times B \subseteq H,$$

was zu zeigen war. □

Wir zeigen nun, daß aus Martin's Axiom *SH* folgt (es reicht bereits *MA*($\aleph_1$) aus):

Theorem 2 (MA($\aleph_1$)): *Es gibt keinen Souslin-Baum.*

Beweis :
Sei $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum. Wir zeigen, daß $(T,<)$ dann eine überabzählbare Antikette besitzt.
Nach Lemma 14.4 können wir annehmen, daß $(T,<)$ hoch ist. Wir betrachten die *p.o.* $(T,>)$. Da $(T,>)$ ein ümgekehrter"Baum ist, ist jeder Filter in $(T,>)$ eine linear geordnete Teilmenge von $(T,>)$. Für $\alpha < \omega_1$ sei

$$D_\alpha = \{a \in T : ht(a) = \alpha\}.$$

Da $(T,<)$ hoch ist, ist D_α dicht in $(T,>)$. Sei

$$\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}$ eine Familie von dichten Teilmengen von $(T,>)$ der Mächtigkeit ω_1.
Angenommen, $(T,<)$ besitzt keine überabzählbaren Antiketten. Dann sind die Voraussetzungen von $MA(\aleph_1)$ erfüllt. Sei nun G ein $\mathcal{D}$-generischer Filter. Dann ist G eine überabzählbare linear geordnete Teilmenge von T, und somit müßte $(T,>)$ überabzählbare Wege besitzen, im Widerspruch zur Annahme, daß $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum ist.
Somit muß $(T,<)$ überabzählbare Antiketten besitzen, kann also kein Souslin-Baum sein. $\square$

Wir verschärfen jetzt dieses Theorem. Und zwar werden wir zeigen, daß aus $MA(\aleph_1)$ nicht nur SH folgt, sondern daß jeder Aronszajn-Baum speziell ist, d.h., sich als Vereinigung von abzählbar vielen Antiketten darstellen läßt.

Wir benötigen zuerst ein Lemma:

Lemma 3: *Sei $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum, A eine überabzählbare Familie von paarweise disjunkten, endlichen Teilmengen von T. Dann gibt es $s, s' \in A$, $s \neq s'$, so daß jedes $a \in s$ mit jedem $b \in s'$ unvergleichbar ist.*

Beweis: Angenommen, das Lemma ist falsch. Sei $(T,<)$ ein Aronszajn-Baum und $A \subseteq [T]^{<\omega}$ mit $|A| = \omega_1$ eine Familie von paarweise disjunkten endlichen Teilmengen von T derart, daß für alle $s, t \in A$ Zahlen $i < lh(s)$ und $k < lh(t)$ existieren, so daß $s(i)$ und $t(k)$ vergleichbar sind.
O.B.d.A. können wir annehmen, daß alle $s \in A$ die gleiche Mächtigkeit n haben. Für jedes $s \in A$ wählen wir eine Aufzählung $(s(0), s(1), \ldots, s(n-1))$ von s. Sei weiter D ein uniformer Ultrafilter über A.
Für $a \in T$, $k < n$ setzen wir

$$B(a,k) = \{s \in A : a \text{ ist mit } s(k) \text{ vergleichbar}\}.$$

Da alle $s, s' \in A$ vergleichbare Elemente haben, ist für jedes $s \in A$,

$$A = \bigcup \{B(s(i),k) : i,k < n\}.$$

Somit gibt es für jedes $s \in A$ natürliche Zahlen $i_s, k_s < n$ mit $B(s(i_s), k_s) \in D$. Damit gibt es ein $k^* < n$ derart, daß

$$C = \{s \in A : k_s = k^*\}$$

überabzählbar ist. Wir setzen

$$W = \{s(i_s) : s \in C\}$$

und zeigen, daß die Elemente aus W paarweise vergleichbar sind:
Sei $s, s' \in C$. Wir setzen

$$X = B(s(i_s), k^*) \cap B(s'(i_{s'}), k^*).$$

Wegen $X \in D$ ist $|X| > \omega$. Sei

$$Y = \{s(k^*) : s \in X\}.$$

Da A aus paarweise disjunkten Mengen besteht, ist $|Y| > \omega$. Somit gibt es ein $t \in Y$ mit $s(i_s), s'(i_{s'}) < t(k^*)$. Damit muß aber $s(i_s)$ mit $s'(i_{s'})$ vergleichbar sein. Damit ist W eine überabzählbare Teilmenge von$T$, die aus paarweise vergleichbaren Elementen besteht. Das steht im Widerspruch dazu, daß $(T, <)$ ein Aronszajn-Baum ist. □

Theorem 4 ($MA(\aleph_1)$): *Jeder Aronszajn-Baum ist speziell.*

Beweis: Sei $(T, <)$ ein Aronszajn-Baum. P bezeichne die Menge aller Funktionen p mit

(i) $dom(p) \in [T]^{<\omega}$;
(ii) $rng(p) \subseteq \omega$;
(iii) wenn $a\, b \in dom(p)$, $a < b$, so ist $p(a) \neq p(b)$.

Auf P erklären wir eine partielle Ordnung $<_P$ wie folgt:

$$p <_P q \text{ gdw. } \; q \subseteq p.$$

Behauptung: $(P, <_P)$ *erfüllt die ccc.*

Beweis der Behauptung: Sei A eine überabzählbare Teilmenge von P. Nach dem Δ-Lemma gibt es ein endliches $s \subseteq T$ sowie ein überabzählbares $B \subseteq A$ derart, daß für alle $p, q \in B$, $p \neq q$ gilt

$$dom(p) \cap dom(q) = s.$$

Weiterhin gibt es ein überabzählbares $C \subseteq B$ mit $p|_s = q|_s$ für alle $p, q \in C$. Nach Lemma 3 gibt es $p, q \in C$, so daß jedes $a \in dom(p) \setminus s$ mit jedem $b \in dom(q) \setminus s$ unvergleichbar ist. Dann ist $p \cup q \in P$ und $p \cup q \leq p, q$. Somit sind p und q verträglich und $(P, <_P)$ erfüllt die *ccc*. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Für jedes $a \in T$ sei

$$D_a = \{p \in P : a \in dom(p)\}.$$

D_a ist dicht in P. Wir setzen

$$\mathcal{D} = \{D_a : a \in T\}.$$

Da die Voraussetzungen für $MA(\aleph_1)$ erfüllt sind, existiert ein $\mathcal{D}$-generischer Filter G. Sei

$$g = \bigcup G.$$

Dann ist g eine Funktion von T in ω und für jedes $n < \omega$ ist $g^{-1}(n)$ eine Antikette. Damit ist T Vereinigung von abzählbar vielen Antiketten, und somit ist T speziell. □

Lemma 5 (Solovay's Lemma):
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega$, $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| < 2^\omega$, und für jedes $a \in \mathcal{A}$ sowie jede endliche Teilmenge C von $\mathcal{B}$

sei $|a \setminus \bigcup C| = \omega$. *Dann gibt es eine Menge* $d \subseteq \omega$ *mit*

$$|a \cap d| = \omega \text{ für jedes } a \in \mathcal{A} \text{ und}$$
$$|b \cap d| < \omega \text{ für jedes } b \in \mathcal{B}.$$

Beweis:
Sei

$$P = \{(s,E) : s \in [\omega]^{<\omega}, E \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\},$$
$$(s,E) \leq (t,F) \text{ gdw. } t \subseteq s, F \subseteq E \text{ und } (s \setminus t) \cap \bigcup F = \emptyset.$$

Wir zeigen, daß $\leq$ transitiv ist:
Sei $(s,E) \leq (t,F)$ und $(t,F) \leq (u,G)$. Dann ist $u \subseteq s$, $G \subseteq E$. Weiterhin folgt aus $s \setminus u \subseteq (s \setminus t) \cup (t \setminus u)$ und $(s \setminus t) \cap \bigcup F = \emptyset$ die Gültigkeit von $(t \setminus u) \cap \bigcup G = \emptyset$ und aus $F \supseteq G$ folgt $(s \setminus t) \cap \bigcup G = \emptyset$. Somit ist $(s \setminus u) \cap \bigcup G \subseteq [(s \setminus t) \cup (t \setminus u)] \cap \bigcup G = ((s \setminus t) \cap \bigcup G) \cup ((t \setminus u) \cap \bigcup G) = \emptyset$.
Damit ist $(P,<)$ eine *po*. Wir zeigen nun, daß $(P,<)$ die *ccc* hat.
Sei dazu $A = \{(s_\alpha, T_\alpha) : \alpha < \omega_1\} \subseteq P$. Wegen $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$ gibt es $\alpha < \beta < \omega_1$ mit $s_\alpha = s_\beta$. Dann ist aber $(s_\alpha, T_\alpha \cup T_\beta) < (s_\alpha, T_\alpha)$ und $(s_\alpha, T_\alpha \cup T_\beta) < (s_\beta, T_\beta)$, also gibt es keine überabzählbare Teilmenge von P, die aus paarweise unverträglichen Elementen besteht.
Für $n < \omega$, $a \in \mathcal{A}$ setzen wir

$$D_{n,a} = \{(s,E) \in P : |a \cap s| \geq n\}.$$

Da für jedes $E \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ gilt $|a \setminus \bigcup E| = \omega$, ist $D_{n,a}$ dicht in P.
Für $b \in \mathcal{B}$ sei

$$D_b = \{(s,E) \in P : b \in E\}.$$

D_b ist ebenfalls dicht.
Sei $\mathcal{D} = \{D_{n,a} : n < \omega, a \in \mathcal{A}\} \cup \{D_b : b \in \mathcal{B}\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ eine Familie von dichten Teilmengen von P mit $|\mathcal{D}| < 2^\omega$. Sei G ein $\mathcal{D}$-generischer Filter. Wir setzen

$$d = \bigcup\{s : \exists E((s,E) \in G)\}$$

und zeigen, daß d das verlangte leistet.
Sei $a \in \mathcal{A}$ gegeben, $n < \omega$. Wenn $(s,E) \in G \cap D_{n,a}$, so ist $d \cap a \supseteq s \cap a$ und wegen $|s \cap a| \geq n$ ist $|d \cap a| \geq n$. Somit ist für alle $n < \omega$, $|d \cap a| \geq n$, also ist $|d \cap a| = \omega$.
Sei $b \in \mathcal{B}$ gegeben, $(s,E) \in G \cap D_b$. Sei $(t,F) \in G$. Dann gibt es eine gemeinsame untere Schranke (s',E') von (s,E) und (t,F). Damit ist $t \cap b \subseteq s' \cap b$. Wegen $(s' \setminus s) \cap \bigcup E = \emptyset$ und $b \in E$ ist auch $(s' \setminus s) \cap b = \emptyset$, also $s \cap b = s' \cap b$. Hieraus folgt $d \cap b = s \cap b$ und somit ist $|d \cap b| < \omega$. □

Mit Hilfe von Solovay's Lemma läßt sich folgende Aussage über die Kardinalzahlexponentiation zeigen:

Theorem 6 (MA): $\forall \kappa < 2^\omega (2^\kappa = 2^\omega)$.

Beweis: Sei A eine fast disjunkte Familie über ω mit $|A| = \kappa$. Für jedes $B \subseteq A$ sei $d_B \subseteq \omega$ mit $|d_B \cap a| = \omega$ für $a \in A \setminus B$ und $|d_B \cap a| < \omega$ für $a \in B$. Nach Solovay's Lemma existiert eine solche Menge d_B.

Für B, $B' \subseteq A$ mit $B \neq B'$ ist $d_B \neq d_{B'}$:
Da $B \neq B'$ ist, existiert ein $a \in A$, das genau einer der beiden Mengen B, B' angehört. Sei etwa $a \in B \setminus B'$. Dann ist $|d_B \cap a| < \omega$ aber $|d_{B'} \cap a| = \omega$, also ist $d_B \neq d_{B'}$. Da $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$, ist somit auch $|\{d_B : B \subseteq A\}| = 2^\kappa$, also ist $2^\kappa \leq 2^\omega$ und somit folgt $2^\kappa = 2^\omega$. □

24 Das Prinzip $\diamond$

Wir haben im Kapitel "Kardinalzahlarithmetik" gesehen, daß die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl von *ZFC* unabhängig ist. Dies ließ sich zeigen, indem das Universum **V** auf die Mengen eingeschränkt wurde, die innerhalb von V_κ lagen, wobei κ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl bezeichnete. Das legt die Frage nahe, ob das Universum **V** auch auf andere Weise eingeschränkt werden kann derart, daß die Axiome von *ZFC* weiterhin gültig bleiben.
Von Gödel stammt die Idee, nur die Mengen von **V** zu betrachten, die sich auf geeignete Weise innerhalb von **V** definieren lassen. Er erhielt auf diese Weise eine Klasse von Mengen, die ein Modell von *ZFC* bildeten. Dabei konnte er von dieser Klasse zeigen, daß nicht nur die Axiome von *ZFC* erfüllt sind, sondern daß außerdem *GCH* gilt. Weiterhin läßt sich für seine Klasse definitorisch eine Wohlordnung angeben. Dies bedeutete, daß unabhängig davon, ob das Auswahlaxiom im Universum **V** gilt oder nicht, in seiner Teilklasse das Auswahlaxiom erfüllt ist. Dieses Resultat stammt aus dem Jahre 1938.
Wir beschränken uns im folgenden darauf, die konstruktiblen Mengen zu definieren sowie das Prinzip $\diamond$ (sprich *Karo*, im Englischen *diamond*) einzuführen. Dieses kombinatorische Prinzip wurde von Jensen gefunden und spielt bei Anwendungen der Mengenlehre eine sehr wichtige Rolle.
Wir führen zunächst die Operationen $F_1, \ldots, F_8$ ein, die auch als *Gödel-Operationen* bezeichnet werden:

$$\begin{array}{lcl}
F_1(u) & = & dom(u); \\
F_2(u) & = & \{(x,y) \in u : x \in y\}; \\
F_3(u) & = & \{(y,x) : (x,y) \in u\}; \\
F_4(u) & = & \{((x,z),y) : ((x,y),z) \in u\}; \\
F_5(u) & = & \{((z,x),y) : ((x,y),z) \in u\}; \\
F_6(u,v) & = & u \times v; \\
F_7(u,v) & = & \{u,v\}; \\
F_8(u,v) & = & u \setminus v.
\end{array}$$

Sei a eine beliebige Menge. Dann bezeichnen wir mit $D(a)$ den Abschluß von a unter $F_1, \cdots, F_8$. $D(a)$ läßt sich induktiv wie folgt definieren:

$$a_0 = a;$$
$$a_{n+1} = a_n \cup \Big\{ b : \exists c\, d \in a \Big(\bigvee_{1 \leq i \leq 5} (b = F_i(c)) \vee \bigvee_{6 \leq i \leq 8} (b = F_i(c,d)) \Big) \Big\}.$$

Dann ist $D(a) = \bigcup_{i<\omega} a_i$.
Wir setzen nun

$$Def(a) = D(a \cup \{a\}) \cap \mathcal{P}(a).$$

Man kann zeigen, daß eine Menge b zu $Def(a)$ gehört gdw. es eine Formel $\varphi_b(x)$ gibt mit $b = \{c \in a : \varphi_b(c)\}$. Dabei darf die Formel $\varphi_b(x)$ als Parameter Elemente aus a enthalten.

Diesen Sachverhalt, den wir hier ohne Beweis angeben, werden wir im folgenden benutzen. Durch transfinite Induktion definieren wir nun die Mengen L_α:

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset; \\ L_{\alpha+1} &= Def(L_\alpha); \\ L_\gamma &= \textstyle\bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha, \text{ wenn } \gamma \in \mathbf{Lim}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} L_\alpha.$$

Wir bezeichnen die Klasse $\mathbf{L}$ als Klasse der *konstruktiblen Mengen.*

Lemma 1: *Für jede unendliche Menge a ist $|Def(a)| = |a|$.*

Beweis: Die Menge der Formeln mit Parametern aus a hat die gleiche Mächtigkeit wie a. Hieraus folgt sofort $|Def(a)| = |a|$. □

Lemma 2: *Für jedes $\alpha \in \mathbf{On}$ gilt :*

(i) L_α *ist transitiv;*
(ii) $L_\alpha \subseteq V_\alpha$*;*
(iii) $\alpha \in L_{\alpha+1}$.

Beweis: (i) Sei $\alpha \in \mathbf{On}$, und für jedes $\beta < \alpha$ sei L_β transitiv. Wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so ist nichts zu zeigen.
Sei nun $\alpha = \beta + 1$ für ein $\beta \in \mathbf{On}$. Durch Induktion über n sieht man leicht, daß L_α^n transitiv ist für jedes $n < \omega$. Damit ist auch $L_\alpha = \bigcup_{n<\omega} L_\beta^n$ transitiv.
(ii) folgt leicht durch transfinite Induktion über α.
(iii) Es genügt zu zeigen, daß $\alpha \subseteq L_\alpha$ ist: Angenommen, das ist gezeigt. Sei $\varphi(x)$ eine Formel, die ausdrückt, daß x transitiv und unter $\in$ linear geordnet ist. Dann wird durch $\varphi(x)$ in L_α gerade α ausgesondert und ist somit ein Element von $L_{\alpha+1}$.
Sei $\alpha \in \mathbf{On}$ gegeben, und für alle $\beta < \alpha$ sei $\beta \subseteq L_\beta$. Wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha \in \mathbf{Lim}$, so ist auch $\alpha \subseteq L_\alpha$. Sei nun $\alpha = \beta + 1$. Dann ist $\beta \subseteq L_\beta$ und somit ist $\beta \in L_\alpha$. Aber damit ist $\alpha \subseteq L_\alpha$. □

Aus der Konstruktion von $\mathbf{L}$ ergibt sich, daß es eine Formel $\Phi(x)$ gibt, so daß $\Phi(a)$ gilt gdw. a konstruktibel ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}$$

die Aussage

$$\forall x \Phi(x).$$

Das Resultat von Gödel besagt dann, daß mit *ZFC* auch *ZFC* $+\mathbf{V} = \mathbf{L}$ konsistent ist.
1963 konnte Cohen unter Annahme der Konsistenz von *ZFC* zeigen, daß auch *ZFC* $+\neg$ *CH* konsistent ist. Da aus *ZFC* $+\mathbf{V} = \mathbf{L}$ die Kontinuum-Hypothese folgt, bedeutet dies, daß $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ unabhängig von *ZFC* ist.

Wir kommen nun zum kombinatorischen Prinzip $\diamond$. Jensen konnte zeigen, daß in $\mathbf{L}$ Souslin-Bäume existieren. Als Extrakt der zum Beweis notwendigen Techniken entstand das Prinzip $\diamond$.

Es besagt folgendes:

($\diamond$) Es gibt eine Folge $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ mit $A_\alpha \subseteq \alpha$ für alle $\alpha < \omega_1$ derart, daß für jedes $X \subseteq \omega_1$ die Menge $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ stationär ist.

Die Folge $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ heißt *$\diamond$-Folge*, und wir sagen, daß sie jedes $A \subseteq \omega_1$ auf einer stationären Menge trifft.

Lemma 3: $\diamond \to CH$

Beweis: Sei $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine $\diamond$-Folge. Dann gibt es für jedes $A \subseteq \omega$ ein $\alpha < \omega_1$ mit $A = A_\alpha$. Damit ist aber $|\mathcal{P}(\omega)| \leq \omega_1$, und somit folgt CH. $\square$

Wir kommen nun zu einer interessanten Anwendung von $\diamond$:

Theorem 4 ($\diamond$): *Es gibt einen Souslin-Baum.*

Beweis: Sei $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine $\diamond$-Folge. Sei weiterhin $(B_i)_{i<\omega}$ eine Zerlegung von ω in abzählbar viele unendliche Mengen. Für $1 \leq \beta < \omega_1$, $n < \omega$ setzen wir

$$K_{\beta\cdot\omega+n} = \{\omega \cdot \beta + i : i \in B_n\}.$$

Wir konstruieren einen Baum $(T, \prec)$ induktiv.
Zunächst wählen wir für T_ω irgendeinen binären Baum der Höhe ω, der als Grundbereich die Menge der natürlichen Zahlen besitzt. Die folgenden Stufen T_α, $(\omega \leq \alpha < \omega_1)$ werden so konstruiert, daß gilt:

$$T(\alpha) = K_\alpha.$$

Damit wird erreicht, daß für jede abzählbare Limesordinalzahl γ gilt

$$T_\gamma = \gamma.$$

Weiterhin führen wir die Konstruktion so, daß für jedes $\alpha < \omega_1$ gilt: wenn $a \in T_\alpha$, so gibt es einen Zweig w_a, der a enthält und der die Länge α hat.
Sei $\omega \leq \alpha < \omega_1$ und für alle $\beta < \alpha$ sei $T(\beta)$ bereits konstruiert. Sei $\alpha = \omega \cdot \beta + n$ mit $n < \omega$. Sei $n \geq 1$. Dann setzen wir die Ordnung $\prec$ auf $T(\alpha)$ $(= K_\alpha)$ so fort, daß jedes Element aus $T(\alpha \dot{-} 1)$ genau zwei unmittelbare Nachfolger hat.
Sei nun $n = 0$, d.h., $\alpha \in \mathbf{Lim}$.
Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1: A_α ist keine maximale Antikette von T_α.
Fall 2: A_α ist eine maximale Antikette von T_α.
Im Fall 1 verfahren wir wie folgt: Für jedes $a \in T_\alpha$ wählen wir einen Zweig z_a mit $a \in z_a$. Da T_α abzählbar ist, erhalten wir so abzählbar viele Zweige. Für jedes $a \in T_\alpha$ wählen wir ein $b_a \in K_\alpha$ und setzen die Ordnung so fort, daß für jedes $b \in z_a$ gilt $b \prec b_a$.
Im Fall 2 verfahren wir analog, wählen jedoch z_a so, daß $z_a \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Dies ist möglich, da A_α maximale Antikette von T_α ist.
Damit ist die Konstruktion beendet, und wir haben einen hohen Baum $(T, \prec)$ der Höhe ω_1. Wir müssen noch zeigen, daß dieser Baum keine überabzählbare Antikette besitzt.

Angenommen $(T, \prec)$ besitzt eine überabzählbare Antikette A. O.B.d.A. ist A maximal. Wir betrachten die Menge

$$C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \in \mathbf{Lim}, A \cap T_\alpha \text{ ist maximale Antikette von } T_\alpha\}.$$

Wir zeigen, daß C *cub* ist. Es ist klar, daß C abgeschlossen ist. Wir müssen noch zeigen, daß C unbeschränkt ist.
Sei $\alpha < \omega_1$ gegeben. Für jedes $a \in T(\alpha)$ wählen wir ein $b_a \in A$ so, daß a und b_a vergleichbar sind. (Da T_α hoch ist, ist damit jedes $c \in T_{\alpha+1}$ mit einem Element aus $\{b_a : a \in T(\alpha)\}$ vergleichbar.) Sei

$$\alpha_0 = sup\{\alpha + 1 \cup \{ht(b_a) : a \in T(\alpha)\}\}.$$

Nun wählen wir für jedes $a \in T(\alpha_0)$ ein $b_a \in A$, so daß a und b_a vergleichbar sind. Wie setzen

$$\alpha_1 = sup\{\alpha_0 + 1 \cup \{ht(b_a) : a \in T(\alpha_0)\}\}.$$

Auf diese Weise fahren wir fort. Wir setzen

$$\beta = sup\{\alpha_i : i < \omega\}.$$

Dann ist $\beta \in C$ und $\beta > \alpha$, also ist C unbeschränkt.
Da $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine $\diamondsuit$-Folge war, gibt es ein $\gamma \in C$ mit $A \cap \gamma = A_\gamma$. Aus $\gamma \in C$ folgt, daß A_γ maximale Antikette von T_γ ist. Aus der Konstruktion folgt, daß jedes Element aus $T(\gamma)$ mit einem Element aus A_γ vergleichbar ist. Hieraus folgt, daß A_γ maximale Antikette von T ist. Damit ist $A = A_\gamma$, im Widerspruch zur Annahme, daß A überabzählbar ist. $\square$

Definition 1: Unter dem Prinzip $\clubsuit$ (sprich *Kreuz*, im Englischen *clubsuit*) verstehen wir die folgende Aussage:
Es gibt eine streng monoton wachsende Folge von abzählbaren Limesordinalzahlen $(\lambda_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1)$ und eine Folge $(s(\lambda_\alpha) : \omega \leq \alpha < \omega_1)$ mit:

(i) $type(s(\lambda_\alpha)) = \omega$ und $sup(s(\lambda_\alpha)) = \lambda_\alpha$;
(ii) jede überabzählbare Teilmenge von ω_1 enthält ein $s(\lambda_\alpha)$.

Mit $\clubsuit^+$ bezeichnen wir die Aussage, die wir aus $\clubsuit$ erhalten, indem wir fordern, daß $(\lambda_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1)$ die streng monoton wachsende Folge aller abzählbaren Limesordinalzahlen ist. Man zeige als Übung, daß $\clubsuit$ und $\clubsuit^+$ äquivalent sind.

Zwischen $\diamondsuit$ und $\clubsuit$ besteht der folgende Zusammenhang:

Theorem 5: *CH* + $\clubsuit \Longleftrightarrow \diamondsuit$.

Beweis. Sei $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine Aufzählung aller abzählbaren Teilmengen von ω_1, wobei jede dieser Mengen ω_1 oft vorkommt. Sei $(s(\lambda_\alpha) : \omega \leq \alpha < \omega_1)$ eine $\clubsuit^+$-Folge. Für $\omega \leq \alpha < \omega_1$ setzen wir

$$D_\alpha = \bigcup_{\gamma \in s(\lambda_\alpha)} A_\gamma$$

(und für $n < \omega$ sei $D_n = \emptyset$).
Wir zeigen, daß $(D_\alpha : \alpha < \omega_1)$ eine $\diamondsuit$-Folge ist.
Sei dazu $X \subseteq \omega_1$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß für jede *cub*-Menge C ein $\gamma \in C$ existiert

mit $\gamma \cap X = D_\gamma$.
Sei C eine *cub*-Menge. Da $\{\delta < \omega_1 : \lambda_\delta = \delta\}$ ebenfalls eine *cub*-Menge ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß für alle $\gamma \in C$ gilt $\lambda_\gamma = \gamma$.
Wir definieren induktiv eine streng monoton wachsende Folge $(\delta_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ durch

$$\delta_0 = \omega,$$

$$\delta_{\alpha+1} = min\{\delta \in \omega_1 : \exists\gamma(\delta_\alpha \leq \gamma < \delta \wedge X \cap \delta_\alpha)\},$$
$$\delta_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \delta_\beta, \text{ wenn } \gamma \in \mathbf{Lim}.$$

Sei

$$D = \{\delta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

und

$$D' = \{\delta_\gamma : \gamma \in \mathbf{Lim} \cap \omega_1\}.$$

Dann folgt aus der Konstruktion, daß D und D' *cub* sind und daß $D' \subseteq C$.
Sei α so, daß $s(\lambda_\alpha) \subseteq D'$. Dann ist, da $s(\lambda_\alpha)$ konfinal in λ_α und D' *cub* ist, $\lambda_\alpha \in D'$. Weiterhin gilt $D_\alpha = \bigcup_{\gamma \in s(\lambda_\alpha)} A_\gamma = \bigcup_{n<\omega}(X \cap s(\lambda_\alpha)(n)) = X \cap \lambda_\alpha = X \cap \alpha$. $\square$

Theorem 6: $MA + \neg\, CH \Longrightarrow \neg\clubsuit$.

Beweis. Sei $(s(\lambda_\alpha) : \omega \leq \omega_1)$ eine $\clubsuit^+$-Folge. Wir definieren eine *p.o.* $(P, \leq)$ wie folgt:

$$P = \{(s,t) : s,t \in [\omega_1]^{<\omega}, s \cap t = \emptyset\};$$

$$(s,t) \leq (s',t') \text{ gdw. } s' \subseteq s, t' \subseteq t$$

$(P, \leq)$ hat die *ccc*:
Sei $A \subseteq P, |A| = \omega_1$. O.B.d.A. gibt es $m, n < \omega$ mit $|s| = m$ und $|t| = n$ für alle $(s,t) \in A$.
Aus dem Δ-Lemma folgt, daß es eine überabzählbare Teilmenge B von A sowie eine Menge r gibt derart, daß für alle $(s,t), (s',t') \in B$, $(s \cup t) \cap (s' \cup t') = r$. Indem wir die Menge B ausdünnen, können wir eine überabzählbare Teilmenge C von B erhalten derart, daß für geeignete Mengen r_0 und r_1 gilt: wenn $(s,t), (s',t') \in C, (s,t) \neq (s',t')$ so ist $s \cap s' = r_0, t \cap t' = r_1$. Damit sind die Elemente aus C paarweise verträglich und somit hat $(P, \leq)$ die *ccc*.
Für $\omega \leq \alpha < \omega_1$ sei

$$D_\alpha = \{(s,t) \in P : t \cap s_\alpha \neq \emptyset\},$$

$$E_\alpha = \{(s,t) \in P : s \setminus \alpha \neq \emptyset\}.$$

Dann sind für jedes $\alpha < \omega_1$, D_α und E_α dichte Teilmengen von P. Sei $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{E_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ und sei G ein $\mathcal{D}$-generischer Filter. Sei

$$a = \bigcup\{s : \exists t((s,t) \in F)\}.$$

Dann ist $a \subseteq \omega_1, |a| = \omega_1$, und für alle α mit $\omega \leq \alpha < \omega_1$ ist $s_\alpha \not\subseteq G$. $\square$

25 Mengenabbildungen und unabhängige Familien

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Menge $A \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ heißt *unabhängig*, wenn für alle $k, n < \omega$ mit $k \leq n$ sowie paarweise verschiedene Mengen $a_0, \cdots, a_n \in A$ die Menge

$$c = \bigcap_{i \leq k} a_i \cap \bigcap_{k < i \leq n} (\kappa \setminus a_i)$$

von der leeren Menge verschieden ist. A heißt *stark unabhängig*, wenn $|c| = \kappa$.

Als Übung möge der Leser zeigen, daß unter *MA* folgendes gilt: Jede maximale, stark unabhängige Familie über ω hat die Mächtigkeit 2^ω.
Man kann dieses Resultat jedoch bereits in *ZFC* zeigen.

Theorem 1 (Fichtenholz-Kantorovitch-Hausdorff): *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gibt es eine stark unabhängige Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ mit $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$.*

Beweis: Sei

$$I = [\kappa]^{<\omega};$$

$$J = [I]^{<\omega}.$$

Dann ist $|I \times J| = \kappa$, und wir können $I \times J$ mit κ identifizieren. Für $a \subseteq \kappa$ setzen wir

$$F_a = \{(s, A) \in I \times J : s \cap a \in A\}.$$

Es seien $k, n < \omega$ mit $k \leq n$ und $a_0, \ldots a_n$ seien paarweise verschiedene Teilmengen von κ. Wir zeigen, daß

$$C = \bigcap_{i \leq k} F_{a_i} \cap \bigcap_{k < i \leq n} (I \times J \setminus F_{a_i})$$

die Mächtigkeit κ hat.
Für $i < j \leq n$ wählen wir $x_{i,j} \in a_i \Delta a_j$ und setzen

$$d = \{x_{i,j} : i < j \leq n\};$$

$$D = \{d \cap a_i : i \leq k\}.$$

Wir zeigen:

Behauptung. Wenn $D \subseteq B$ und $d \cap a_i \notin B$ für alle i mit $k < i \leq n$, so ist $(d, B) \in C$.

Beweis der Behauptung: Für $i \leq k$ ist

$$d \cap a_i \in D \subseteq B,$$

also $(d, B) \in F_a$.
Sei jetzt $k < i \leq n$. Angenommen, $(d, B) \in F_{a_i}$. Dann ist $d \cap a_i \in B$, im Widerspruch zur Voraussetzung an B und, somit ist die Behauptung gezeigt.

Aus der Behauptung ergibt sich sofort das Theorem: Es gibt κ viele B, die den Bedingungen aus der Behauptung genügen. Damit ist $|C| = \kappa$. $\square$

Der Leser zeige als Übung folgendes:
Im Beweis des Theorems definieren wir für $a \subseteq \kappa$,

$$G_a = \{(s, A) \in I \times J : A \subseteq \mathcal{P}(s) \wedge s \cap a \in A\}.$$

Man zeige, daß $\{G_a : a \subseteq \kappa\}$ eine streng unabhängige Familie ist.

Sei A eine Menge. Eine Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ heißt *Mengenabbildung auf* A, wenn für alle $x \in A$ gilt $x \notin f(x)$. Eine Teilmenge C von A heißt *frei bzgl.* f, wenn $C \cap f[C] = \emptyset$. Wir beschäftigen uns hier mit einem hinreichenden Kriterium an f, das die Existenz einer freien Menge der Mächtigkeit $|A|$ sichert.
Man sieht leicht folgendes: Wenn $|A| \geq \omega$ und für alle $x \in A$ ist $|f(x)| = 1$, so gibt es eine freie Teilmenge der Mächtigkeit $|A|$. Das folgende Beispiel zeigt, daß man die Bedingung $|f(x)| = 1$ nicht durch $|f(x)| < |A|$ ersetzen kann:

Beispiel: (1) Sei κ eine beliebige Kardinalzahl und $f : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa)$ sei gegeben durch $f(\alpha) = \alpha$. Dann besitzt κ keine freie Menge mit mehr als einem Element. Sei $\alpha < \beta < \kappa$. Dann ist $\alpha \in f(\beta)$, also ist $\{\alpha, \beta\}$ nicht frei.

Wir geben eine kleine Anwendung von Theorem 1. Seien U_0 und U_1 Ultrafilter (nicht notwendig frei) über einer unendlichen Kardinalzahl κ. Wir nennen U_0 und U_1 *isomorph*, wenn es eine Bijektion $f \in {}^{\kappa}\kappa$ gibt mit $f[U_0] = U_1$.
Dann haben wir:

Korollar 2: *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gibt es 2^{2^κ} paarweise nichtisomorphe Ultrafilter über κ.*

Beweis: Sei A eine unabhängige Teilmenge über κ mit $|A| = 2^\kappa$. Für $B \subseteq A$ sei

$$X_B = B \cup \{\kappa \setminus a : a \in A \setminus B\}.$$

X_B hat die *sfip*. Damit gibt es einen freien Ultrafilter $U_B \supset X_B$. Für $B_0, B_1 \subseteq A$ mit $B_0 \neq B_1$ sind U_{B_0} und U_{B_1} voneinander verschieden. Somit ist

$$\mathcal{U} = \{U_B : B \subseteq A\}$$

eine Familie von 2^{2^κ} paarweise verschiedenen Ultrafiltern. Da es nur 2^κ Bijektionen von κ gibt, muß es 2^{2^κ} paarweise nichtisomorphe Ultrafilter in $\mathcal{U}$ geben. □

Von Hajnal wurde das folgende Theorem bewiesen:

Theorem 3 (Hajnal): *Seien κ und λ Kardinalzahlen, κ unendlich, $\lambda < \kappa$, und sei f eine Mengenabbildung auf κ mit $|f(x)| < \lambda$ für alle $x \in \kappa$. Dann gibt es eine Menge C der Mächtigkeit κ, die frei bzgl. f ist.*

Beweis:
Fall 1: κ ist regulär.
Angenommen, κ enthält keine freie Teilmenge der Mächtigkeit κ. Durch transfinite Induktion wählen wir Mengen A_α für $\alpha < \lambda$ derart, daß A_α maximale freie Teilmenge von $\kappa \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\beta$ ist.

Da $|A_\alpha| < \kappa$, $\lambda < \kappa$ und κ regulär ist, ist für alle $\alpha < \lambda$, $A_\alpha \neq \emptyset$. Sei

$$A = \bigcup_{\alpha<\lambda} (A_\alpha \cup \bigcup f[A_\alpha]).$$

Dann ist $|A| < \kappa$ und somit $\kappa \setminus A \neq \emptyset$. Sei $x \in \kappa \setminus A$. Für jedes $\alpha < \lambda$ ist dann $f(x) \cap A_\alpha \neq \emptyset$, andernfalls wäre $x \cup A_\alpha$ frei bzgl. f, im Widerspruch zur Maximalität von A_α. Für jedes $\alpha < \lambda$ sei $x_\alpha \in f(x) \cap A_\alpha$. Dann sind die x_α paarweise verschieden, somit ist $|f(x)| \geq \lambda$, im Widerspruch zur Voraussetzung an f.

Fall 2: κ ist singulär.
O.B.d.A. nehmen wir an, daß λ regulär und $\lambda > cf(\kappa)$ ist (wenn das nicht der Fall ist, ersetzen wir λ durch ein geeignetes $\lambda' > \lambda$ mit den geforderten Eigenschaften). Sei $(\kappa_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ eine streng monoton wachsende Folge von regulären Kardinalzahlen mit $\bigcup_{\alpha<cf(\kappa)} \kappa_\alpha = \kappa$ und $\kappa_0 > \lambda$. Aus den Betrachtungen in Fall 1 folgt sofort, daß für jedes $\alpha < cf(\kappa)$ eine freie Familie $A_\alpha \subseteq \kappa$ mit $|A_\alpha| = \kappa_\alpha$ existiert. Wir setzen

(1) $\qquad B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha}(A_\beta \cup \bigcup f[A_\beta]).$

Aus der Wahl der Folge $(\kappa_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ folgt, daß $|B_\alpha| = \kappa_\alpha$ für alle $\alpha < cf(\kappa)$ gilt. Durch transfinite Induktion über $\alpha < cf(\kappa)$ definieren wir eine Matrix $(C_{\alpha,\beta})_{\alpha<cf(\kappa),\beta<\lambda}$ und eine Folge $(\gamma_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ derart, daß für jedes $\alpha < cf(\kappa)$ gilt:

(2) $\qquad C_{\alpha,\beta} \subseteq B_\alpha$, $|C_{\alpha,\beta}| = \kappa_\alpha$ für alle $\beta < \lambda$,

(3) $\qquad C_{\alpha,\beta} \cap C_{\alpha,\gamma} = \emptyset$ für alle β, $\gamma < \lambda$ mit $\beta \neq \gamma$;

(4) $\qquad f(x) \cap \bigcup\{C_{\beta,\gamma} : \gamma_\alpha \leq \gamma < \lambda\} = \emptyset$ für alle $\beta < \alpha$ und alle $x \in \bigcup_{\gamma<\lambda} C_{\alpha,\gamma}$.

Sei $\alpha < cf(\lambda)$, und für alle $\delta < \alpha$ sei $(C_{\delta,\gamma})_{\gamma<\lambda}$ sowie γ_δ bereits konstruiert, so daß (2) - (4) gelten mit δ für α.
Wir wollen jetzt $(C_{\alpha,\gamma})_{\gamma<\lambda}$ sowie γ_α definieren. Dazu setzen wir für $\delta < \lambda$

$$B_\alpha^\delta = \{x \in B_\alpha : f(x) \cap \bigcup\{C_{\beta,\gamma} : \beta < \alpha, \delta \leq \gamma < \lambda\} = \emptyset\}.$$

Sei für $\gamma < \lambda$

$$D_\gamma = \bigcup_{\beta<\alpha} C_{\beta,\gamma}.$$

Die D_γ's sind paarweise disjunkt. Hieraus folgt mit $|f(x)| < \lambda$ sowie aus der Regularität von λ, daß für jedes $x \in B_\alpha$ ein $\delta < \lambda$ existiert mit $x \in B_\alpha^\delta$. Somit ist $B_\alpha = \bigcup_{\delta<\lambda} B_\alpha^\delta$.
Aus $|B_\alpha| = \kappa_\alpha$, $\kappa_\alpha > \lambda$ und der Regularität von κ_α folgt, daß es ein $\delta^* < \lambda$ mit $|B_\alpha^{\delta^*}| = \kappa_\alpha$ gibt. Sei $\gamma_\alpha = \delta^*$. Sei $(C_{\alpha,\gamma})_{\gamma<\lambda}$ eine Zerlegung von $B_\alpha^{\gamma_\alpha}$ in λ viele paarweise disjunkte Mengen der Mächtigkeit κ_α. Dann ist klar, daß (2) - (4) erfüllt sind.
Mit Hilfe von $(C_{\alpha,\gamma})_{\alpha<cf(\kappa),\gamma<\lambda}$ sowie $(\gamma_\alpha)_{\alpha<cf(\kappa)}$ läßt sich eine freie Menge der Mächtigkeit κ

finden:
Da $\lambda > cf(\kappa)$ und λ regulär ist, muß es ein $\gamma < \lambda$ geben mit $\gamma_\alpha < \gamma$ für alle $\alpha < cf(\kappa)$. Sei

$$C = \bigcup_{\alpha < cf(\kappa)} C_{\alpha,\gamma}.$$

Dann folgt aus (1), (4) sowie daraus, daß jedes $C_{\alpha,\gamma}$ frei ist, daß auch C frei ist. Weiterhin ist $|C| = \sum_{\alpha < cf(\kappa)} \kappa_\alpha = \kappa$. Damit ist das Theorem gezeigt. $\square$