OTMAR SPINAS

DESKRIPTIVE MENGENLEHRE

MATHEMATISCHES SEMINAR
DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT
ZU KIEL

INHALTSVERZEICHNIS

1. TOPOLOGISCHE UND METRISCHE RÄUME

DEFINITION. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, so daß folgende Axiome gelten:

(a) $\mathcal{T} \subseteq \wp(X)$ (Potenzmenge von X), d.h. $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \subseteq X$.

(b) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(c) Falls I beliebig und $U_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, so ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(d) Falls $U, V \in \mathcal{T}$, so auch $U \cap V \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ heißt *Topologie* auf X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene* Mengen, deren Komplemente heißen *abgeschlossen*.

EXTREME BEISPIELE:

(a) $\mathcal{T}_1 = \wp(X)$ heißt *diskrete Topologie*.

(b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X\}$ heißt *Klumpentopologie*.

Gegeben Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ auf X, so heißt $\mathcal{T}$ *feiner* als $\mathcal{T}'$, falls $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{T}'$ *gröber* als $\mathcal{T}$. Die diskrete Topologie $\mathcal{T}_1$ ist also die feinste Topologie, $\mathcal{T}_2$ die gröbste.

Eine Menge $U \subseteq X$, welche Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist, heißt G_δ. Dual dazu nennen wir abzählbare Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen F_σ.

Ein *Teilraum* von $(X, \mathcal{T})$ ist ein Paar $(Y, \mathcal{T}\restriction Y)$, wobei $Y \subseteq X$ und $\mathcal{T}\restriction Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$. $\mathcal{T}\restriction Y$ heißt *relative* oder *induzierte* Topologie auf Y ($\mathcal{T}\restriction Y$ ist trivialerweise eine Topologie auf Y).

Eine *Basis* für die Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft, daß jede Menge in $\mathcal{T}$ die Vereinigung von (gewissen) Mengen in $\mathcal{B}$ ist. Wir sagen auch „$\mathcal{B}$ erzeugt $\mathcal{T}$“.

BEISPIEL: Auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bildet die Gesamtzahl der offenen Intervalle (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine Topologie. Eine Basis für diese Topologie stellt die Menge der offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ dar.

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt *Subbasis* für $\mathcal{T}$, falls die Menge aller endlichen Schnitte von Mengen in $\mathcal{S}$ eine Basis für $\mathcal{T}$ ist.

Ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitskriterium*, falls er eine abzählbare Basis hat.

Gegeben $x \in X$ und $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$, so heißt U *offene Umgebung* von x. Eine *Umgebungsbasis* von x ist eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in U$.

(b) Jede offene Umgebung von x enthält ein Element in $\mathcal{U}$ (als Teilmenge).

Ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitskriterium*, falls jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

LEMMA 1.1. *Zweites Abzählbarkeitskriterium* $\Rightarrow$ *Erstes Abzählbarkeitskriterium.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X und $x \in X$. Setze $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Axiom (a) ist klarerweise erfüllt. Wir beweisen die Gültigkeit von Axiom (b). Sei V eine beliebige offene Umgebung von x, also $x \in V \in \mathcal{T}$. Es existieren $U_i \in \mathcal{B}$ für $i \in I$ mit $V = \bigcup_{i\in I} U_i$. Darüber hinaus existiert ein $i' \in I$ mit $x \in U_{i'}$. Dann ist $U_{i'} \in \mathcal{U}$. Außerdem gilt $U_{i'} \subseteq V$. $\dashv$

Man muß schon etwas suchen, um einen Raum zu finden, in dem das erste, nicht aber das zweite Abzählbarkeitskriterium gelten. In den Räumen, die im nachfolgenden behandelt werden, gelten zumeist sowohl das erste als auch das zweite Abzählbarkeitskriterium.

Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, falls für jede offene Menge $V \subseteq Y$ die Menge $f^{-1}(V) := \{x \in X\colon f(x) \in V\}$ offen ist in X. Mit anderen Worten: Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Klarerweise gilt dann für jede abgeschlossene Menge $V \subseteq Y$, daß $f^{-1}(V)$ abgeschlossen ist, da $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Die Abbildung f heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), falls für jede offene (bzw. abgeschlossene) Menge $U \subseteq X$ die Menge $f(U) := \{f(x)\colon x \in U\}$ offen (bzw. abgeschlossen) ist in Y. Falls f bijektiv ist, so ist f offen gdw. f abgeschlossen ist, da dann $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$. Anstelle von $f(U)$ schreiben wir manchmal auch $f``U$.

BEISPIELE:

(a) $f(x) = 1$ ist nicht offen.

(b) $f(x) = sin(x)$ ist nicht offen.

(c) $f(x) = ax + b$ ist offen für $a \neq 0$.

Die Abbildung f heißt *Homöomorphismus (zwischen X und Y)*, falls f bijektiv, stetig und offen ist. (Falls $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ die Topologien auf X bzw. Y sind, dann gilt $\mathcal{T}_2 = \{f(U)\colon U \in \mathcal{T}_1\}$.) Ein Homöomorphismus ist damit eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Ein Homöomorphismus bildet offene Mengen auf offene ab und abgeschlossene auf abgeschlossene.

Weiter heißt $f\colon X \to Y$ eine *Einbettung von X in Y*, falls f ein Homöomorphismus zwischen X und $f(X)$ ist, wobei $f(X)$ die relative Topologie trägt. Falls $x \in X$, so heißt f *stetig im Punkt x* (oder x Stetigkeitspunkt von f), falls $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x ist für jede offene Umgebung V von $f(x)$. (Äquivalent: Falls $V \subseteq Y$ offen und $f(x) \in V$, so ist $f^{-1}(V)$ offen.)

Sei $(Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei X eine Menge. Weiter sei $f_i\colon X \to Y_i$ für jedes $i \in I$ gegeben. Dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß alle f_i, $i \in I$, stetig werden. Man nennt $\mathcal{T}$ dann die durch $(f_i)_{i\in I}$ *erzeugte* Topologie.

Als Anwendung davon erhalten wir die *Produkttopologie* einer Familie von topologischen Räumen $(X_i)_{i\in I}$ auf $\Pi_{i\in I} X_i$ (hier ist $\Pi_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt aller X_i, d.h. die Menge aller Familien $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in X_i$). Diese ist die gröbste Topologie auf $\Pi_{i\in I} X_i$, so daß alle Projektionen $\pi_j\colon \Pi_{i\in I} X_i \to X_j$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$, $j \in I$, stetig werden. Eine Basis für die Produkttopologie bilden alle Mengen der Form $\Pi_{i\in I} U_i$, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen für alle $i \in I$ und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ (alle bis auf endlich viele). Alle π_j sind offen.

Schließlich ist die *topologische Summe* $(X, \mathcal{T}) = \oplus_{i\in I} X_i$ einer Familie $(X_i)_{i\in I}$ von topologischen Räumen wie folgt definiert: Sei $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ die disjunkte Vereinigung der X_i, z.B. $X = \bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\}$. Die Bijektion $x \mapsto (x, i)$ „verschiebt" die Topologie von X_i auf $X_i \times \{i\}$. Wir erklären, daß $V \subseteq X$ offen ist gdw. $V \cap (X_i \times \{i\})$ offen ist für alle i. Klarerweise ist $\iota_j\colon X_j \to \oplus_{i\in I} X_i$, $x \mapsto (x, j)$ eine Einbettung (im topologischen Sinn).

Das Verständnis der Produkttopologie ist für viele der nachfolgenden Anwendungen von großer Bedeutung. Die topologische Summe hingegen wird keine große Rolle spielen.

Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$. Dann definieren wir $\overline{U}$ als den *Abschluß* von U durch $\overline{U} = \bigcap\{V\colon U \subseteq V \subseteq X \wedge V \text{ abgeschlossen}\} = \bigcap_{U \subseteq V \subseteq X \wedge V \text{ abgeschlossen}} V$. Klarerweise ist $\overline{U}$ die kleinste abgeschlossene Menge (bzgl. $\subseteq$), die U enthält. Es gilt: $x \in \overline{U}$ gdw. $U \cap V \neq \emptyset$ für alle offenen Umgebungen V von x.

Darüber hinaus definieren wir für $U \subseteq X$ die Menge $U^c := X \setminus U$, das *Komplement* von U.

Ein Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*, falls $d\colon X^2 \to [0, \infty)$ eine Abbildung ist mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\forall x, y \in X\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b) $\forall x, y \in X\ d(x, y) = d(y, x)$

(c) $\forall x, y, z \in X\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Die Funktion d heißt eine *Metrik* auf X. Eine Metrik d induziert stets eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X wie folgt: Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$ setze $B^d(x, \varepsilon) = \{y \in X: d(x, y) < \varepsilon\}$.

LEMMA 1.2. *$\mathcal{B} = \{B^d(x, \varepsilon): x \in X \wedge \varepsilon > 0\}$ ist eine Basis einer Topologie auf X.*

BEWEIS. Wir verwenden Aufgabe 1.1, um zu zeigen, daß das stimmt: Seien $B(x, \varepsilon), B(y, \delta) \in \mathcal{B}$. *1. Fall*. $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta) = \emptyset$. $\emptyset$ ist die leere Vereinigung. *2. Fall*. Sei $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta)$. Setze $\rho := min\{ \varepsilon - d(x, z), \delta - d(y, z)\}$. Dann ist $z \in B(z, \rho) \subseteq B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta)$. Sei $v \in B(z, \rho)$. $d(v, x) \leqslant d(v, z) + d(z, x) < (\varepsilon - d(x, z)) + d(z, x) = \varepsilon$. Folglich $v \in B(x, \varepsilon)$. Analog zeige $v \in B(y, \delta)$. Daraus folgt, daß sich $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta)$ als Vereinigung von Elementen in $\mathcal{B}$ schreiben läßt. Wir haben (a) aus Aufgabe 1.1 nachgewiesen. (b) ist klar, da $x \in B(y, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$. $\dashv$

$\mathcal{B}$ wird in diesem Fall mit $\mathcal{T}_d$ bezeichnet. Elemente von $\mathcal{T}_d$ haben also die Gestalt $\bigcup_{i\in I} U_i$, wobei $U_i \in \mathcal{B}$ und I beliebig.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, falls eine Metrik d auf X existiert, deren induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ gleich $\mathcal{T}$ ist. Wir sagen dann, d sei *kompatibel mit* $\mathcal{T}$. Falls zwei Metriken auf X gegeben sind, so heißen diese *kompatibel*, falls beide dieselbe Topologie induzieren.

Sei d eine Metrik auf X. Dann existiert eine mit d kompatible Metrik d' mit $d' \leqslant 1$, d.h. $d'(x, y) \leqslant 1$ für alle $x, y \in X$. Nehme $d' = d / (1 + d)$.

Eine Teilmenge $D \subseteq X$ eines topologischen Raums X heißt *dicht*, falls für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ gilt $D \cap U \neq \emptyset$. Falls X eine abzählbare, dichte Teilmenge hat, so heißt X *separabel*.

LEMMA 1.3. *Alle Räume mit dem zweiten Abzählbarkeitskriterium sind separabel.*

BEWEIS. Falls $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von X ist, wähle $x_U \in U$ für alle $U \in \mathcal{B}$ mit $U \neq \emptyset$. Dann ist $\{x_U: U \in \mathcal{B}\}$ abzählbar und dicht. $\dashv$

BEISPIEL. $\mathbb{R}$ ist separabel, denn $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ und abzählbar.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist $(Y, d \restriction Y^2)$ ein metrischer Raum und $d \restriction Y^2$ ist kompatibel mit der relativen Topologie auf Y, da für $y \in Y$ gilt $B^{d \restriction Y\times Y}(y, \varepsilon) = \{z \in Y: d(y, z) < \varepsilon\} = B^d(y, \varepsilon) \cap Y$.

LEMMA 1.4. *(X, d) sei separabel und $D \subseteq X$ sei dicht und abzählbar. Weiter sei $Y \subseteq X$. Dann ist Y separabel.*

BEWEIS. Möglicherweise ist $Y \cap D = \emptyset$ (wie im Fall $X = \mathbb{R}, D = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Zu jedem $p = (x, n) \in D \times \mathbb{N}$ wähle, falls möglich, einen Punkt $y_p \in Y \cap B(x, 1 / n)$. Da $D \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, ist die Menge $D' := \{y_p: p \in D \times \mathbb{N}\}$ abzählbar. Nach Konstruktion gilt $D' \subseteq Y$. Außerdem ist D' dicht in Y: Sei $y \in Y$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir finden $y_p \in D' \cap B(y, 1 / n)$ wie folgt: Finde $x \in D$ mit $x \in B(y, 1 / (2n))$. Dann gilt $y \in B(x, 1 / (2n))$, somit $Y \cap B(x, 1 / (2n)) \neq \emptyset$. Nach Konstruktion gilt für $p = (x, 2n)$ $y_p \in Y \cap B(x, 1 / (2n))$. Es folgt $d(y, y_p) \leqslant d(y, x) + d(x, y_p) < 1 / (2n) + 1 / (2n) = 1 / n$. $\dashv$

Ähnlich zeigt man, daß ein metrischer Raum genau dann separabel ist, wenn er das zweite Abzählbarkeitskriterium erfüllt.

BEWEISSKIZZE. „$\Leftarrow$“ schon gesehen. „$\Rightarrow$“. Sei $D \subseteq X$ dicht und abzählbar. Setze $\mathcal{B} = \{B(x, 1 / (n + 1)): x \in D \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Verifiziere, daß $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

LEMMA 1.5. *Sei $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von metrischen Räumen. Wir haben bereits gesehen, daß $X := \Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$ die Produkttopologie $\mathcal{T}$ trägt. $(X, \mathcal{T})$ ist metrisierbar durch die Metrik $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\, d_n(x_n, y_n) / (2^{n+1}(1 + d_n(x_n, y_n)) = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\, d_n‘(x_n, y_n) / 2^{n+1}$.*

BEWEIS. *(1)* d ist eine Metrik auf X. *(a)* $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0 \Leftrightarrow d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(b)* Symmetrie folgt aus der Symmetrie für die d_n*’s*. *(c)* Δ - Ungleichung folgt leicht aus Δ - Ungleichung für $d_n / (1 + d_n) = d_n‘$.

(2) Zu zeigen bleibt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathrm{d}}$. Sei $\Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$ eine offene Menge in der natürlichen Basis von $\mathcal{T}$. D.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $U_n = X_n$ für alle $n \geqslant n_0$ und $U_n \subseteq X_n$ offen für alle $n < n_0$. Wir zeigen, daß zu jedem $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $B^d(x, \varepsilon) \subseteq \Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Wähle zu $n < n_0$ $\varepsilon_n > 0$, so daß $B^{dn‘}(x_n, 2^{n+1}\varepsilon_n) \subseteq U_n$. Sei $\varepsilon = min\{\varepsilon_n: n < n_0\}$. Sei $d(x, y) < \varepsilon$ für $y \in X$. Folglich $d_n‘(x_n, y_n) / 2^{n+1} < \varepsilon$, also $d_n‘(x_n, y_n) < 2^{n+1}\, \varepsilon$, also $y_n \in B^{dn‘}(x_n, 2^{n+1}\, \varepsilon)$, für alle $n < n_0$. Es folgt $y_n \in U_n$, alle $n < n_0$, somit für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Umgekehrt sei $B^d(x, \varepsilon)$, $y \in B^d(x, \varepsilon)$. Finde $\Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mit $y \in \Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq B^d(x, \varepsilon)$, so daß $U_n \subseteq X_n$ offen für fast alle $U_n = X_n$. Setze $\varepsilon‘ := \varepsilon - d(x, y)$. Finde $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug, so daß $\Sigma_{n\geqslant n0}\, 1 / 2^{n+1} < \varepsilon‘ / 2$. Wähle $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n0-1} > 0$, so daß $\Sigma_{0<i<n0-1}\, \varepsilon_i / 2^{i+1} < \varepsilon‘ / 2$. Sei $U_n = B^{dn‘}(y_n, \varepsilon_n)$ für $n < n_0$ und $U_n = X_n$ sonst. Also $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Sei $z \in \Pi_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Es folgt $d(z, y) = \Sigma_{n<n0}\, d_n‘(z_n, y_n) / 2^{n+1} + \Sigma_{n\geqslant n0}\, d_n‘(z_n, y_n) / 2^{n+1} < \Sigma_{n<n0}\, \varepsilon_n / 2^{n+1} + \varepsilon‘ / 2 = \varepsilon‘ / 2 + \varepsilon‘ / 2 = \varepsilon‘$. Folglich $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d\,(y, z) < \varepsilon$. ⊣

Die Summe einer beliebigen Familie von metrischen Räumen ist metrisierbar. Abzählbare Summen von separablen (metrischen) Räumen sind separabel. Ein Raum heißt *regulär*, wenn zu jedem $x \in X$ und zu jeder offenen Umgebung U von x eine offene Umgebung V von x existiert mit $\overline{V} \subseteq U$.

LEMMA 1.6. *Metrische Räume sind regulär.*

BEWEIS. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x. Es existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Dann gilt $\overline{B(x, \varepsilon / 2)} \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$: Sei nämlich $y \in \overline{B(x, \varepsilon / 2)}$. Dann gilt $B(y, 1 / n) \cap B(x, \varepsilon / 2) \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da sonst $y \notin B(y, 1 / n)^c \supseteq B(x, \varepsilon / 2)$, ein Widerspruch zur Definition des Abschlusses einer Menge. Wir können somit $x_n \in B(y, 1 / n) \cap B(x, \varepsilon / 2)$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon / 2 + 1 / n$. Es folgt $d(x, y) \leqslant \varepsilon / 2$. Wir haben gezeigt $\overline{B(x, \varepsilon / 2)} \subseteq \{y \in X: d(x, y) \leqslant \varepsilon / 2\}$. ⊣

$\overline{B(x, \varepsilon)} \supseteq \{y \in X: d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ gilt im allgemeinen nicht, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

GEGENBEISPIEL. Sei $(X, \mathcal{T})$ diskret, also metrisierbar durch $d(x, y) = 0$ für $x = y$ und $d(x, y) = 1$, sonst. Seien $x, y \in X$, $x \neq y$. Dann $B(x, 1) = \{x\}$; außerdem $\overline{B(x, 1)} = B(x, 1)$ und $\{z \in X: d(x, z) \leqslant 1\} = X \ni x, y$.

Außerdem erfüllen metrische Räume das *Hausdorff’sche Trennungsaxiom*

(T_1) Einpunktige Mengen sind abgeschlossen. (Äquivalent: Falls $x, y \in X$, $x \neq y$, so besitzt y eine offene Umgebung U mit $x \notin U$: Falls X durch d metrisiert wird, nehme $U = B(y, d(x, y))$.)

BEISPIEL. Ein topologischer Raum, versehen mit der Klumpentopologie, erfüllt (T_1) nicht.

SATZ 1.7. (*Satz von Urysohn*) *Falls X das zweite Abzählbarkeitskriterium erfüllt, so ist X metrisierbar gdw. X* (T_1) *erfüllt und regulär ist.*

LEMMA 1.8. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann gilt*

(a) Ist $F \subseteq X$ *abgeschlossen, so ist* F G_δ.

(b) Ist $U \subseteq X$ *offen, so ist* U F_σ.

BEWEIS. *(a)* Zu $\varepsilon > 0$ sei $U(F, \varepsilon) := \{y \in X: \exists x \in F\ d(x, y) < \varepsilon\}$. Klarerweise ist $U(F, \varepsilon) = \bigcup_{x\in F} B(x, \varepsilon)$ offen. Dann gilt $F = \bigcap\{U(F, 1/n): n \in \mathbb{N}\}$.
„$\subseteq$" ist trivial, da $F \subseteq U(F, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$.
„$\supseteq$": Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U(F, 1/n)$. Dann gilt $x \in \overline{F}$, da sonst eine offene Menge $V \subseteq X$ existiert, nämlich $V = (\overline{F})^c$, mit $x \in V$ und $V \cap F = \varnothing$. Finde $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so daß $1/n < \varepsilon$. Dann ist nach Voraussetzung $x \in U(F, 1/n)$; es existiert also $z \in F$ mit $d(x, z) < 1/n < \varepsilon$. Dann $z \in B(x, \varepsilon)$, somit $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \varnothing$, ein Widerspruch. Somit gilt $x \in \overline{F} = F$.

(b) (Beweis für (X, d) separabel) Sei $D \subseteq X$ abzählbar und dicht. Es gilt $U = \bigcup\{\overline{B(x, 1/n)} : x \in D, n \in \mathbb{N} \wedge \overline{B(x, 1/n)} \subseteq U\}$.
„$\supseteq$" ist trivial.
„$\subseteq$": Wähle $z \in D \cap B(x, 1/(3n))$. Dann ist $x \in B(z, 1/(3n))$. Und außerdem $\overline{B(z, 1/(3n))} \subseteq B(x, 1/n) \subseteq U$. Wir haben schon gesehen: $\overline{B(z, 1/(3n))} \subseteq \{y \in X: d(z, y) \subseteq 1/(3n)\}$. Sei $y \in X$ beliebig mit $d(z, y) \subseteq 1/(3n)$. Es gilt $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < 1/(3n) + 1/(3n) < 1/n$ und somit $y \in B(x, 1/n)$. ⊣

ÜBUNGEN

1.1. Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$, so daß

(a) der Durchschnitt von zwei beliebigen Mengen in $\mathcal{B}$ gleich der Vereinigung von gewissen Mengen in $\mathcal{B}$ ist, und

(b) die Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{B}$ gleich X ist.

Zeige, daß $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie auf X ist.

1.2. Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$. Dann existiert eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so daß $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$ ist. (Verwende die Konvention: $\bigcup\varnothing = \varnothing$, $\bigcap\varnothing = X$.)

1.3. Sei X eine Menge und $(Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Sei ferner $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i: X \to Y_i$. Zeige, daß eine gröbste Topologie auf X existiert, bzgl. Welcher alle f_i stetig werden.

1.4. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $\Pi\ X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Zeige, daß alle Projektionen π_j, $j \in J$, offen sind.

1.5. Sei d eine kompatible Metrik für den Raum $(X, \mathcal{T})$. Zeige, daß durch $d' := d/(1 + d)$ eine kompatible Metrik mit $d' \leqslant 1$ definiert wird.

2. BÄUME UND ORDINALZAHLEN

DEFINITION. Eine *Partialordnung* (oder auch *teilweise geordnete Menge*) ist ein Paar $(P, \leqslant)$, bestehend aus einer Menge P und einer Relation $\leqslant$ auf P, so daß folgende Axiome gelten für alle $x, y, z \in P$:

(a) (*Reflexivität*) $x \leqslant x$.

(b) (*Antisymmetrie*) Falls $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$, so $x = y$.

(c) (*Transitivität*) Falls $x \leqslant y$ und $y \leqslant z$, so $x \leqslant z$.

Eine Partialordnung (P, $\leqslant$) heißt *Totalordnung* (oder *lineare Ordnung*), falls außerdem

(d) $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x$ für alle $x, y \in P$.

Falls $(P, \leqslant)$ Partialordnung, so heißt $K \subseteq P$ *Kette*, falls die Unterordnung $(K, \leqslant)$ eine Totalordnung ist. (Äquivalent: $\forall x, y \in K\ x \leqslant y \vee y \leqslant x$.) Eine Kette $K \subseteq P$ heißt *maximal*, falls kein $K' \subseteq P$ mit $K \subset K'$ ($K \neq K'$) Kette ist. Eine Totalordnung $(P, \leqslant)$ heißt *Wohlordnung*, falls jede nichtleere Teilmenge von P ein kleinstes Element besitzt, d.h. $\forall X \subseteq P\ (X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in X\ \forall y \in X\ \neg(y < x))$, wobei $y < x$ definiert ist als $y \leqslant x \wedge y \neq x$.

BEMERKUNG. Eine Partialordnung kann mehrere kleinste Elemente besitzen.

DEFINITION. Eine Menge A heißt *transitiv*, falls jedes Element von A Teilmenge von A ist, d.h. $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \subseteq A)$. (Äquivalent: $\forall x, y\ (y \in x \in A \Rightarrow y \in A)$.)

BEISPIELE.

(a) $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ sind transitiv und totalgeordnet.

(b) $\{\{\varnothing\}\}$ ist nicht transitiv, da $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$.

(c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ ist transitiv, partiell geordnet, aber nicht totalgeordnet, da $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$ und $\{\{\varnothing\}\} \notin \varnothing$.

DEFINITION. Eine Menge A heißt *ordinal* bzw. *Ordinalzahl*, falls A transitiv und das Paar $(A, \in)$ eine Wohlordnung ist.

BEISPIELE. $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ sind Ordinalzahlen.

Wir geben nun einige Eigenschaften von Ordinalzahlen an. Falls A ordinal, so auch $A + 1 := A \cup \{A\}$. Falls A eine transitive Menge von Ordinalzahlen ist, so ist A ordinal. Falls A ordinal ist und $\alpha \in A$, so ist α ordinal. Falls A und B ordinal sind, so gilt $A \in B \vee A = B \vee B \in A$. Damit erhält man, daß die Klasse $\mathbb{O}rd$ aller Ordinalzahlen wohlgeordnet ist unter $\in$. $\mathbb{O}rd$ ist eine echte Klasse, d.h. keine Menge.

Üblicherweise werden natürliche Zahlen definiert als endliche Ordinalzahlen: $0 := \varnothing$, $n + 1 := n \cup \{n\} = \{0, ..., n\}$. $\mathbb{N} = \omega$ ist die Menge aller *natürlichen* Zahlen. Dann ist ω eine transitive Menge von Ordinalzahlen, also ist ω ordinal. Es ist leicht zu sehen, daß ω die kleinste Ordinalzahl ist, die alle natürlichen Zahlen enthält. Dann sind auch $\omega + 1$, $(\omega + 1) + 1$, ... ordinal. Es gibt auch überabzählbare Ordinalzahlen. Die kleinste solche (bzgl. $\in$) wird mit ω_1 bezeichnet. Dann ist ω_1 also die Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen.

Man zeigt, daß $\mathbb{O}rd$ die Klasse aller *Isomorphietypen* von Wohlordnungen ist. D.h. zu einer beliebigen Wohlordnung $(P, <)$ existiert (genau) eine Ordinalzahl α und eine Bijektion $f: \alpha \to P$, so daß für alle $\beta, \gamma \in \alpha$ gilt: $\beta \in \gamma \Leftrightarrow f(\beta) < f(\gamma)$. Folglich sind $(\alpha, \in)$ und $(P, <)$ isomorph.

SATZ 2.1. (*Prinzip der Induktion auf Ordinalzahlen*) *Sei α eine Ordinalzahl und P eine Eigenschaft. Falls wir zeigen können, daß*

(a) $0 \in P$, und

(b) falls $\beta \in \alpha$ und alle $\gamma \in \beta$ Eigenschaft P haben, so auch β,

dann haben alle $\beta \in \alpha$ die Eigenschaft P.

BEWEIS. Angenommen $A = \{\beta \in \alpha: \beta \text{ hat nicht } P\} \neq \emptyset$. Da α wohlgeordnet ist, enthält A ein kleinstes Element β_0. Wegen (a) gilt $\beta_0 \neq 0$. Es gilt, daß β P hat für alle $\beta \in \beta_0$. Wegen (b) hat auch β_0 P, ein Widerspruch. ⊣

Zu Mengen A, B bezeichnen A^B (oder auch $\Pi_B A$) die Menge aller Funktionen $f: B \to A$. Wie in der Mengenlehre üblich identifizieren wir eine Funktion mit ihrem Graphen $f = \{(b, f(b)): b \in B\}$.

Sei nun $A \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist A^n also die Menge aller $s: n \to A$. Wir schreiben $s = \langle s(0), ..., s(n-1)\rangle$ oder auch $s = \{(0,s(0)), ..., (n-1, s(n-1))\}$. S ist also eine Folge der Länge n von Elementen in A. Wir schreiben $length(s) = n$ oder $|s| = n$. Bemerke $A^0 = \{\emptyset\}$. Darüber hinaus verwenden wir die Schreibweise $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ für die Menge aller endlichen Folgen von Elementen in A. $A^{<\mathbb{N}}$ trägt eine natürliche Partialordnung: Für $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ definiere $s \trianglelefteq t$ („s ist Anfangsstück von t“), falls $|s| \leqslant |t|$ und $t \restriction |s| = s$, wobei für $m \leqslant |t|$ gilt $t \restriction m = \langle t(0), ..., t(m-1)\rangle$ („t restringiert auf m“). Klarerweise gilt $s \trianglelefteq t$ gdw. $s \subseteq t$. Falls $s \trianglelefteq t$ oder $t \trianglelefteq s$, so heißen s und t *vergleichbar* (oder auch *kompatibel*), andernfalls *unvergleichbar* (*inkompatibel*).

Zu $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ können wir die *Konkenation* von s und t bilden, bezeichnet mit $s\,\hat{}\,t := \langle s(0), ... s(|s|-1), t(0), ..., t(|t|-1)\rangle$. Also ist $|s\,\hat{}\,t| = |s| + |t|$ und $s\,\hat{}\,t(i) = s(i)$, falls $i < |s|$ und $s\,\hat{}\,t(i) = t(i-|s|)$, falls $|s| \leqslant i < |s| + |t|$. Falls $t = \langle n\rangle$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $|t| = 1$, so schreiben wir $s\,\hat{}\,n$ statt $s\,\hat{}\,\langle n\rangle$. Wir können die unendliche Konkenation von $s_i \in A^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, bilden: $s_0\,\hat{}\,s_1\,\hat{}\,...\,\hat{}\,s_i\,\hat{}$ .... Das ist ein Element von $A^{\mathbb{N}}$ gdw. nicht von einem i an alle $s_j = \emptyset$. Falls $s_i \in A^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise kompatibel sind, insbesondere wenn $s_0 \trianglelefteq s_1 \trianglelefteq s_2 \trianglelefteq ...$, so können wir $x := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} s_i$ bilden. Dann ist $x \in A^{\mathbb{N}}$ gdw. $\lim\sup_{i\in\mathbb{N}} |s_i| = \infty$.

DEFINITION. Sei A eine nichtleere Menge. Ein *Baum* auf A ist eine Teilmenge $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$, die abgeschlossen ist gegenüber der Bildung von Anfangsstücken, d.h. $\forall s \in T\ \forall n < |s|\ s \restriction n \in T$. Elemente von T heißen *Knoten* von T. Ein *unendlicher Ast* von T ist ein Element $x \in A^{\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, daß $x \restriction n \in T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Klarerweise ist dann $\{x \restriction n: n \in \mathbb{N}\}$ eine maximale Kette von $(T, \trianglelefteq)$. Mit $[T]$ bezeichnen wir die Menge aller unendlichen Äste von T. Also $[T] = \{x \in A^{\mathbb{N}}: \forall n \in \mathbb{N}\ x \restriction n \in T\}$.

Ein Baum auf A heißt *gestutzt*, falls $(T, \trianglelefteq)$ keine maximalen endlichen Ketten besitzt (äquivalent: $T \neq \emptyset$ und jede maximale Kette von $(T, \trianglelefteq)$ ist unendlich).

BEISPIELE. Die folgenden zwei Bäume werden uns besonders interessieren.

(a) Mit $A = 2 = \{0, 1\}$ ergibt sich $2^{<\mathbb{N}}$, der *volle binäre* Baum.

(b) Mit $A = \mathbb{N}$ ensteht der Baum $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Klarerweise gilt $[2^{<\mathbb{N}}] = 2^{\mathbb{N}}$ und $[\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Beides sind gestutzte Bäume.

Sei jetzt A versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist A metrisierbar, z. B. durch die Metrik $d: A^2 \to \{0, 1\}$ mit $s(a, b) = 1$, falls $a \neq b$ und $s(a. b) = 0$, sonst. Da, wie wir gesehen haben, abzählbare Produkte von metrischen Räumen metrisierbar sind, ist $A^{\mathbb{N}}$ (versehen mit der Produkttopologie) metrisierbar. Eine kompatible Metrik erhält man z.B. folgendermaßen:

Für $x, y \in A^{\mathbb{N}}$ mit $x \neq y$ setze $\Delta(x, y) = min\{k \in \mathbb{N}: x(k) \neq y(k)\}$. Damit setze $d(x, y) = 1 / (\Delta(x, y) + 1)$, falls $x \neq y$ und $d(x, y) = 0$, sonst.

LEMMA 2.2. *Die Metrik Δ ist kompatibel mit der Produkttopologie.*

BEWEIS. Die natürliche Basis der Produkttopologie auf $A^{\mathbb{N}}$ besteht aus Mengen der Form

(a) $\Pi_{i\in\mathbb{N}}\, U_i$, wobei $U_i \subseteq A$ offen ist für alle $i \in \mathbb{N}$ und $U_i = A$, außer für endlich viele $i_0, ..., i_{n-1} \in \mathbb{N}$, und $U_i \neq \varnothing$ für alle i.

Da A diskret ist, können für $U_{i(0)}, ..., U_{i(n-1)}$ einelementige Mengen gewählt werden. Klarerweise existiert zu jeder Menge der Form (a) und jedem Punkt $x \in \Pi_{i\in\mathbb{N}}\, U_i$ eine Menge der spezielleren Form

(b) $\Pi_{i\in m}\, \{a_i\} \times \Pi_{\mathbb{N}\setminus m}\, A$, wobei $m \in \mathbb{N}$ und $a_i \in A$, so daß $x \in \Pi_{i\in m}\, \{a_i\} \times \Pi_{\mathbb{N}\setminus m}\, A \subseteq \Pi_{i\in\mathbb{N}}\, U_i$.

Setze dazu $a_i = x(i)$. Wir führen zunächst eine neue Notation ein.

DEFINITION. Falls $s := \langle a_0, ..., a_{m-1}\rangle$, so $[s] := \Pi_{i\in m}\, \{a_i\} \times \Pi_{\mathbb{N}\setminus m}\, A = \{y \in A^{\mathbb{N}}\colon \forall i < m\; y(i) = a_i\}$. Manchmal werden wir N_s anstelle von $[s]$ schreiben.

Somit ist auch $\mathscr{B} = \{[s]: s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ eine Basis der Produkttopologie auf $A^{\mathbb{N}}$. Für $x \in A^{\mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $B^d(x, 1 / (n + 1)) = \{y \in A^{\mathbb{N}}: x = y \vee \Delta(x, y) \geq n + 1\} = [x \upharpoonright \{0, ..., n\}]$. Da $\{B^d(x, 1 / (n + 1)): x \in A^{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis für die durch d induzierte Topologie ist, sind wir fertig.$\dashv$

SATZ 2.3. *Sei $A \neq \varnothing$ und diskret. Die Abbildung $T \mapsto [T]$ ist eine Bijektion zwischen der Menge aller gestutzten Bäume auf A und der Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von $A^{\mathbb{N}}$. Die Umkehrabbildung ist $F \mapsto \mathbb{T}_F := \{x \upharpoonright n: x \in F, n \in \mathbb{N}\}$, wobei $F \subseteq A^{\mathbb{N}}$ abgeschlossen ist und $F \neq \varnothing$.*

BEWEIS. (a) $[T]$ ist abgeschlossen. Klarerweise $[T] \neq \varnothing$, da T gestutzt ist. Wir zeigen $\overline{[T]} = [T]$. Sei $x \in \overline{[T]}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $N_{x\upharpoonright n}$ eine offene Umgebung von x. Somit existiert $y_n \in N_{x\upharpoonright n} \cap [T]$. Da $y_n \in [T]$, folgt $x \upharpoonright n = y_n \upharpoonright n \in T$. Da n beliebig, folgt $x \in [T]$.

(b) $\mathbb{T}_{[T]} = T$ gilt für alle gestutzten Bäume T. Es gilt $\mathbb{T}_{[T]} = \{x \upharpoonright n: x \in [T], n \in \mathbb{N}\}$ nach Definition. Wir beweisen nun $\mathbb{T}_{[T]} = T$. „$\supseteq$“: Sei $s \in \mathbb{T}_{[T]}$. Finde $x \in [T]$, $n \in \mathbb{N}$ mit $s = x \upharpoonright n$. Da $x \upharpoonright n \in T$, folgt $s \in T$. „$\subseteq$“: Sei $s \in T$. Weil T gestutzt ist, gibt es $x \in [T]$ mit $x \in N_s$. Somit $x \upharpoonright n = s$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $s \in \mathbb{T}_{[T]}$.

(c) $[\overline{T_F}] = F$ für alle abgeschlossenen nichtleeren $F \subseteq A^{\mathbb{N}}$. „$\subseteq$“: Sei $x \in [\overline{T_F}]$, d.h. $x \upharpoonright n \in \mathbb{T}_F$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es existiert $y \in F$, so daß $x \upharpoonright n = y \upharpoonright n$, also $y \in N_{x\upharpoonright n}$. Da $\{N_{x\upharpoonright n}: n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist, folgt $U \cap F \neq \varnothing$ für jede offene Menge U mit $x \in U$. Folglich $x \in \overline{F} = F$. „$\supseteq$“: Sei $x \in F$. Nach Definition ist $x \upharpoonright n \in \mathbb{T}_F$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich $x \in [\mathbb{T}_F]$. $\dashv$

ALLGEMEIN GILT: Falls $f: A \to B$ und $g: B \to A$ Abbildungen sind, so daß

(a) $\forall a \in A\; g(f(a)) = a$ und

(b) $\forall b \in B\; f(g(b)) = b$,

dann sind f und g Bijektionen und $g = f^{-1}$.

DEFINITION. Sei S ein Baum auf A und T ein Baum auf B. Eine Funktion $\varphi: S \to T$ heißt *monoton*, falls aus $s \subseteq t$ folgt $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$ für alle $s, t \in S$. Für ein monotones φ sei $D(\varphi) = \{x \in$

$[S]: \lim_{n\to\infty} |\varphi(x \upharpoonright n)| = \infty\}$. Für $x \in D(\varphi)$ setze $\varphi^*(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x \upharpoonright n)$. Bemerke $\varphi^*(x) \in [T]$, somit $\varphi^*: D(\varphi) \to [T]$. Außerdem heißt φ *total*, falls $D(\varphi) = [S]$.

SATZ 2.4. *Seien S und T weiterhin Bäume und sei $\varphi: S \to T$ monoton. Dann ist $D(\varphi)$ G_δ in $[S]$ und $\varphi^*: D(\varphi) \to [T]$ ist stetig. Falls umgekehrt $f: G \to [T]$ stetig ist und G G_δ in $[S]$ ist, so existiert ein monotones $\varphi: S \to T$ mit $f = \varphi^*$, also insbesondere $G = D(\varphi)$.*

BEWEIS. Es gilt $x \in D(\varphi)$ gdw. $\forall n\, \exists m\, |\varphi(x \upharpoonright m)| \geqslant n$. Setze $U_n := \{x \in [S]: \exists m\, |\varphi(x \upharpoonright m)| \geqslant n\}$. Klar ist, daß $D(\varphi) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Es genügt zu sehen, daß alle U_n offen sind. Sei $x \in U_n$. Es existiert $m \in \mathbb{N}$, so daß $|\varphi(x \upharpoonright m)| \geqslant n$. Es folgt $x \in N_{x\upharpoonright m} \cap [S] \subseteq U_n$: Sei $y \in N_{x\upharpoonright m} \cap [S]$. Dann ist $y \upharpoonright m = x \upharpoonright m$, und somit $|\varphi(y \upharpoonright m)| = |\varphi(x \upharpoonright m)| \geqslant n$. Also ist $D(|\varphi(x \upharpoonright m)|)$ G_δ *in* $[S]$.

Wir zeigen nun, daß φ^* stetig ist: Da $(\varphi^*)^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} (\varphi^*)^{-1}(U_i)$, genügt es zu zeigen, daß $(\varphi^*)^{-1}(U)$ offen ist für alle U aus einer Basis der Topologie auf $[T]$. Eine solche ist $\{N_t \cap [T]: t \in T\}$. Für $t \in T$ gilt $(\varphi^*)^{-1}([t] \cap [T]) = \bigcup\{[s] \cap D(\varphi): s \in S \wedge t \subseteq \varphi(s)\}$. Letztere Mengen sind offen in $D(\varphi)$.

Seien G, f wie in der Umkehrung des Satzes. Falls $G = \varnothing$, können wir $\varphi = \varnothing$ setzen. Sei also $G \neq \varnothing$ und $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ für gewisse offene $U_n \subseteq [S]$. Setze $U_0' := [S]$ und $U_{n+1}' := \bigcap_{m\leqslant n+1} U_m$. Es folgt $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n'$, U_n' ist offen und $U_0' \supseteq U_1' \supseteq U_2' \supseteq \ldots \supseteq U_n' \supseteq U_{n+1}' \supseteq \ldots$.

Zu jedem $s \in S$ sei $k(s) \in \mathbb{N}$ folgendermaßen definiert: $k(s)$ sei das größte $k \ll |s|$, $k \in \mathbb{N}$, so daß $N_s \cap [S] \subseteq U_k'$. So ein k existiert, da $N_s \cap [S] \subseteq U_0' = [S]$. Definiere nun $\varphi(s)$ für $s \in S$ durch Induktion über $|s|$. $\varphi(\varnothing) := \varnothing$. Allgemein sei $\varphi(s)$ gleich dem längsten $u \in T$ einer Länge $\leqslant k(s)$, so daß $f(N_s \cap G) \subseteq N_u$, falls $N_s \cap G \neq \varnothing$. Falls $N_s \cap G = \varnothing$, so sei $\varphi(s) = \varphi(s \upharpoonright m)$, wobei $m < |s|$ maximal ist, so daß $N_{s\upharpoonright m} \cap G \neq \varnothing$. Unmittelbar aus der Konstruktion folgt: Falls $s \subseteq s'$, wobei $s, s' \in S$, so ist $k(s) \leqslant k(s')$ und $\varphi(s) \subseteq \varphi(s')$; somit ist φ monoton.

Zu zeigen ist $D(\varphi) = G$ und $f = \varphi^*$. Seien $x \in G$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $x \in U_m'$ und U_m' offen, existiert $n \geqslant m$ mit $N_{x\upharpoonright n} \cap [S] \subseteq U_m'$. Es folgt $k(x \upharpoonright n) \geqslant m$. Folglich $\lim_{n\to\infty} k(x \upharpoonright n) = \infty$. Weiter folgt aus der Stetigkeit von f, daß zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geqslant m$ existiert, so daß $f(N_{x\upharpoonright n} \cap G) \subseteq N_{f(x)\upharpoonright m}$. Da $\lim_{n\to\infty} k(x \upharpoonright n) = \infty$, können wir annehmen, es gelte $k(x \upharpoonright n) \geqslant m$. Klarerweise $x \in N_{x\upharpoonright n} \cap G$, also $N_{x\upharpoonright n} \cap G \neq \varnothing$. Es folgt $f(x) \upharpoonright m \subseteq \varphi(x \upharpoonright n)$. Da m beliebig war, folgt $\lim_{n\to\infty} |\varphi(x \upharpoonright n)| = \infty$, somit $x \in D(\varphi)$ und auch $f(x) = \varphi^*(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x \upharpoonright n)$.

Falls umgekehrt $x \in D(\varphi)$, so ist $\lim_{n\to\infty} |\varphi(x \upharpoonright n)| = \infty$; also auch $\lim_{n\in\mathbb{N}} k(x \upharpoonright n) = \infty$, da nach Definition $|\varphi(s)| \leqslant k(s)$, alle $s \in S$. D.h. zu jedem m existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $k(x \upharpoonright n) \geqslant m$, d.h. $x \in N_{x\upharpoonright n} \cap [S] \subseteq U_m'$. Somit $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m' = G$. Also $G = D(\varphi)$. $\dashv$

DEFINITION. Eine abgeschlossene Teilmenge F eines topologischen Raums X heißt *Retrakt* von X, falls eine stetige Surjektion $f: X \to F$ existiert, so daß $f(x) = x$ für alle $x \in F$.

SATZ 2.5. *Seien F, H zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen von $A^{\mathbb{N}}$ mit $F \subseteq H$, wobei A diskret ist. Dann ist F ein Retrakt von H.*

BEWEIS. Nach Satz 2.3 existieren gestutzte Bäume S und T auf A, so daß $F = [S]$ und $H = [T]$. Im folgenden definieren wir ein monotones $\varphi: T \to S$, so daß $D(\varphi) = H$ (φ ist total) und $\varphi(s) = s$ für alle $s \in S$. Wegen Satz 2.4 ist dann $f := \varphi^*: H \to F$ stetig und klarerweise $f \upharpoonright F = id_F$. Es gilt nämlich $f(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x \upharpoonright n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x \upharpoonright n$, für $x \in [S] = F$. Wir definieren $\varphi(t)$ für $t \in T$ durch Induktion über $|t|$. Setze $\varphi(\varnothing) = \varnothing$. Falls $\varphi(t) \in S$ schon definiert ist, müssen wir $\varphi(t \,\hat{}\, a)$ definieren für alle $a \in A$ mit $t \,\hat{}\, a \in T$. Falls $t \,\hat{}\, a \in T$ für $a \in A$. so wähle $b \in A$ mit $\varphi(t) \,\hat{}\, b \in S$. So ein b existiert, da S gestutzt ist und $\varphi(t) \in S$ nach Induktionsvoraussetzung. Dann setzen wir $\varphi(t \,\hat{}\, a) = t \,\hat{}\, a$, falls $t \,\hat{}\, a \in S$ und $\varphi(t \,\hat{}\, a) = \varphi(t) \,\hat{}\, b$, falls $t \,\hat{}\, a \notin S$. $\dashv$

ÜBUNGEN

2.1. Zeige, daß die Summe einer beliebigen Familie von metrischen Räumen metrisierbar ist.

2.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subseteq X$. Zeige, daß $x \in \overline{U}$ genau dann wenn $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren, so daß $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$).

2.3. Falls A ordinal ist und $\alpha \in A$, so ist auch α ordinal.

2.4. Falls α ordinal ist, so auch $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.

2.5. Falls A eine transitive Menge von Ordinalzahlen ist, so ist A ordinal.

2.6. Zeige, daß das Produkt einer abzählbaren Familie von separablen Räumen separabel ist.

2.7. Sei A diskret und $U \subseteq A^{\mathbb{N}}$ offen. Zeige, daß eine Menge $S \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ existiert, deren Elemente paarweise inkompatibel sind, so daß $U = \bigcup_{s\in S} [s]$.

2.8. Sei $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ ein Baum mit $[T] \neq \varnothing$. Zeige, daß ein gestutzter Baum T' existiert mit $[T'] = [T]$.

2.9. Eine Metrik d auf einem Raum X heißt *Ultrametrik*, falls $d(x, y) \leqslant max\{d(x, y), d(y, z)\}$ gilt für alle $x, y, z \in X$. Zeige, daß die Standardmetrik auf $A^{\mathbb{N}}$, definiert durch $d(x, y) = 1 / (\Delta(x, y) + 1)$, falls $x \neq y$ und $d(x, y) = 0$, falls $x = y$, eine Ultrametrik ist.

3. POLNISCHE RÄUME

DEFINITION. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in X heißt *Cauchy-Folge*, falls $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geqslant n_\varepsilon\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

BEMERKUNG. Ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist, hängt ab von der Metrik d und nicht nur von der durch d induzierten Topologie.

DEFINITION. (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. es existiert $x \in X$, so daß $lim_{n\to\infty} x_n = x$, was nach Definition bedeuted $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_\varepsilon\ d(x, x_n) < \varepsilon$.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *vollständig metrisierbar*, falls eine Metrik d auf X existiert, so daß d kompatibel ist mit $\mathcal{T}$, d.h. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, und (X, d) vollständig ist.
Weiter heißt $(X, \mathcal{T})$ ein *polnischer Raum*, falls $(X, \mathcal{T})$ vollständig metrisierbar und separabel ist.

BEISPIELE.

(a) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{I} = [0, 1], \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{I}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ sind polnische Räume.

(b) Das offene Intervall $(0, 1)$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist polnisch. Die Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$ ist nicht vollständig; denn z.B. ist $(1 / n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy bzgl. d, aber nicht konvergent. Das gleiche gilt für die Folge $(1 - 1 / (n + 1))_{n\in\mathbb{N}}$. Eine vollständige Metrik ist $\underline{d}(x, y) = |x - y| + |1 / min\{x, 1 - x\} - 1 / min\{y, 1 - y\}|$.

(c) Jeder diskrete Raum ist vollständig metrisierbar. Jeder abzählbare, diskrete Raum ist polnisch.

(d) $\mathcal{N} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist polnisch. Dieser Raum heißt *Baire-Raum*.

(e) $\mathcal{C} := 2^{\mathbb{N}}\ (= \{0, 1\}^{\mathbb{N}})$ ist polnisch und heißt *Cantor-Raum*.

(f) Sei A eine beliebige Menge versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist $A^{\mathbb{N}}$ (versehen mit der Produkttopologie) vollständig metrisierbar. Wir hatten eine Metrik d folgendermaßen definiert: Für $x, y \in A^{\mathbb{N}}$ mit $x \neq y$ setze $\Delta(x, y) = min\{k \in \mathbb{N}: x(k) \neq y(k)\}$. Damit setze $d(x, y) = 1 / (\Delta(x, y) +1)$, falls $x \neq y$ und $d(x, y) = 0$, sonst. Schon gezeigt, daß d kompatibel ist.

BEHAUPTUNG. *$(A^{\mathbb{N}}, d)$ ist vollständig.*

BEWEIS. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $A^{\mathbb{N}}$. Wähle induktiv zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, so daß $n_k > n_{k-1}$ und $d(x_n, x_m) < 1 / (k + 1)$ für alle $n, m \geqslant n_k$, da $\Delta(x_n, x_m) > k$. Setze $s_k := x_{n(k)} \upharpoonright k + 1$. Da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton ist, folgt $s_k = s_l \upharpoonright k + 1$ für alle $k < l$. Somit ist $x := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} s_k \in A^{\mathbb{N}}$. Klarerweise gilt $x = lim_{n\to\infty} x_n$. ⊣

BEHAUPTUNG. *Falls A abzählbar ist, so ist $A^{\mathbb{N}}$ separabel und somit polnisch.*

BEWEIS. Sei $a \in A$ beliebig. Zu beliebigem $s \in A^{<\mathbb{N}}$ sei $x_s \in A^{\mathbb{N}}$ definiert durch $x_s(n) = s(n)$, falls $n < |s|$ und $x_s(n) = a$, falls $n \geqslant |s|$. Es gibt also ein $x_s \in N_s$; somit ist $D := \{x_s: s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ dicht. Da A^n abzählbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt, daß $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ ebenfalls abzählbar ist. Folglich ist D abzählbar. ⊣

SATZ 3.1. *$\mathcal{N}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

BEWEIS. Klarerweise ist $\mathcal{N}$ homöomorph zu $A^{\mathbb{N}}$, sofern A abzählbar unendlich ist. Falls nämlich $f\colon \mathbb{N} \to A$ bijektiv ist, so ist $h\colon \mathcal{N} \to A^{\mathbb{N}}$, $h(x)(n) = f(x(n))$, ein Homöomorphismus. (Oder einfacher: Zwei abzählbare unendliche diskrete Räume, z.B. $\mathbb{N}$ und A, sind homöomorph. Folglich auch deren Produkträume.)

Es genügt somit zu zeigen, daß $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ homöomorph ist zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dazu konstruieren wir eine Familie $\mathcal{I} = \langle I_s\colon s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\rangle$ von offenen nichtleeren Intervallen aus $\mathbb{R}$. Wir konstruieren $\mathcal{I}$ rekursiv in abzählbar vielen Schritten, wobei im n-ten Schritt $\langle I_s\colon s \in \mathbb{Z}^n\rangle$ konstruiert wird. Für $n = 0$ sei $I_\varnothing = \mathbb{R}$. Angenommen $\langle I_s\colon s \in \mathbb{Z}^n\rangle$ sei schon konstruiert. Wir konstruieren $\langle I_s\colon s \in \mathbb{Z}^{n+1}\rangle = \langle I_{s\,^\wedge k}\colon s \in \mathbb{Z}^n, k \in \mathbb{Z}\rangle$. Sei $s \in \mathbb{Z}^n$ beliebig fixiert. Sei $I_s = (a_s, b_s)$ mit $a_s < b_s$ und $a_s, b_s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$. Setze $m_s = a_s + (b_s - a_s) / 2$. Falls $s = \varnothing$, ist $a_s = -\infty$, $b_s = \infty$ und $m_s = 0$. Sei $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Bijektion und $q_m := \pi(m)$. Also $\mathbb{Q} = \{q_m\colon m \in \mathbb{N}\}$. Wähle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge von Elementen aus I_s mit folgenden Eigenschaften:

(1) $x_0 = m_s$

(2) $x_1 = q_l$, wobei $l = min\{l' \in \mathbb{N}\colon q_{l'} \in (m_s, b_s)\}$

(3) $x_k \in \mathbb{Q}$, alle $k \geqslant 2$

(4) $lim_{k\to\infty}\, x_k = b_s$.

Fast symmetrisch wähle eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen in I_s, die streng monoton fällt und folgende Eigenschaften hat:

(1) $y_0 = m_s$

(2) $y_1 = q_u$, wobei $u = min\{u' \in \mathbb{N}\colon q_{u'} \in (a_s, m_s)\}$

(3) $y_k \in \mathbb{Q}$, alle $k \geqslant 2$

(4) $lim_{k\to\infty}\, y_k = a_s$.

Damit definiere $I_{s\,^\wedge k} = (x_k, x_{k+1})$, falls $k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 0$, und $I_{s\,^\wedge k} = (y_k, y_{k+1})$, falls $k \in \mathbb{Z} \wedge k < 0$. Damit ist die rekursive Konstruktion von $\langle I_s\colon s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\rangle$ beendet.

Zeige leicht durch Induktion über $|s|$:

(a) $a_s, b_s \in \mathbb{Q}$

(b) Es gilt $\overline{I_{s\wedge k}} \subseteq I_s$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(c) diam $I_{s\,^\wedge k} < 1 / 2 * diam\ I_s$. Mit *diam I* bezeichnen wir die Länge des Intervalls *I*.

Darüber hinaus zeigen wir $\mathbb{Q} = \{a_s, b_s\colon s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}, s \neq \varnothing\}$: Angenommen es gäbe $q \in \mathbb{Q} \setminus \{a_s, b_s\colon s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$. Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $q = q_m$. Zu jedem n existiert ein eindeutig bestimmtes $s(q, n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $q \in I_{s(q,n)}$. Es folgt $I_{s(q,1)} \supseteq I_{s(q,2)} \supseteq \ldots \supseteq I_{s(q,n)} \supseteq \ldots$. Im Schritt $n \mapsto n + 1$ wurde $I_{s(q,n+1)}$ entweder links oder rechts von $m_{s(q,n)}$ in $I_{s(q,n)}$ gewählt. Dazu wurden die Folgen (x_k), (y_k) in $I_{s(q,n)}$ gewählt. Insbesondere $x_1 = q_{l(n)}$, wobei $l(n) = min\{l \in \mathbb{N}\colon q_l \in (m_s, b_s)\}$, und $y_1 = q_{n(k)}$, wobei $u(n) = min\{u \in \mathbb{N}\colon q_u \in (m_s, b_s)\}$. Falls $I_{s(q,n+1)}$ links von $m_{s(q,n)}$ liegt, muß $m > u(n)$ gelten, falls $I_{s(q,n+1)}$ rechts von $m_{s(q,n)}$ liegt, gilt $m > l(n)$. Klarerweise ist $n \mapsto l(n)$ injektiv, ebenso $n \mapsto u(n)$. O.B.d.A. können wir annehmen, es gäbe unendlich viele n, so daß $I_{s(q,n+1)}$ links von $m_{s(q,n)}$ liegt (sonst „rechts“ für unendlich viele n). Es folgt $m > u(n)$ für diese unendlich vielen n. Widerspruch.

Definiere jetzt $h\colon \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{Z}^n$. Es gilt $I_\varnothing \supseteq I_{x\restriction 1} \supseteq \ldots \supseteq I_{x\restriction n} \supseteq \ldots$, $\overline{I_{x\restriction k+1}} \subseteq I_{x\restriction k}$ und $lim_{k\to\infty}\, diam\ I_{x\restriction k} = 0$. Folglich enthält $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{x\restriction n}$ genau einen Punkt, den wir mit r_x bezeichnen. Setze $h(x) = r_x$. Wir haben schon gezeigt, daß $h[\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da $\mathbb{Q} = \{a_s, b_s\colon s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\}\}$.

h ist injektiv: Seien $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $x \neq y$. Sei $s := x \upharpoonright \Delta(x, y)$, das längste gemeinsame Anfangsstück von x und y. Dann ist $h(x) \in I_{s^\frown x(\Delta(x, y))}$ und $h(y) \in I_{s^\frown y(\Delta(x, y))}$. Da $x(\Delta(x, y)) \neq y(\Delta(x, y))$, ist $I_{s^\frown x(\Delta(x, y))} \cap I_{s^\frown y(\Delta(x, y))} = \varnothing$. Folglich $h(x) \neq h(y)$.

$h[\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}] = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Schon gesehen, daß „$\subseteq$" gilt. Sei umgekehrt $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nach Konstruktion existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $s(n, r) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ mit $r \in I_{s(n, r)}$. Es gilt $s(n, r) \leqslant s(n + 1, r)$, alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n, r)$. Es folgt $h(x) = r$.

h ist stetig und offen: Für jedes $s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$ gilt $h[N_s] = I_s \setminus \mathbb{Q} = I_s \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Da $\{N_s: s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$ eine Basis der Topologie auf $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\{I_s \setminus \mathbb{Q}: s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$ eine Basis der Topologie auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. Seien dazu $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$ und $r \in (r_1, r_2) \setminus \mathbb{Q}$. Wie gesehen gilt $\{r\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{s(n, r)}$. Folglich $\lim_{n\to\infty} a_{s(n, r)} = \lim_{n\to\infty} b_{s(n, r)} = r$. Somit existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $r_1 < a_{s(n, r)} < b_{s(n, r)} < r_2$. Somit $r \in I_{s(n, r)} \setminus \mathbb{Q} \subseteq (r_1, r_2)$. ⊣

BEMERKUNG. Sei $H \subseteq \mathbb{R}$ dicht und abzählbar. Dann sind $\mathcal{N}$ und $\mathbb{R} \setminus H$ homöomorph. Somit auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus H$.

DEFINITION. Die *Cantormenge* $E_{1/3} \subseteq [0, 1]$ ist definiert als $E_{1/3} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\neq 1 \text{ mod } 3 \,\wedge\, i<3 \text{ hoch } n} [i / 3^n, (i + 1) / 3^n]$.

SATZ 3.2. *$\mathcal{C}$ ist homöomorph zu $E_{1/3}$.*

BEMERKUNGEN.

(1) $E_{1/3}$ ist abgeschlossen und *nirgens dicht*, d.h. jede nichtleere offene Menge enthält eine nichtleere offene Teilmenge, die disjunkt zu $E_{1/3}$ ist.

(2) $E_{1/3}$ ist eine Menge mit Lebesgue-Maß 0.

SATZ 3.3 (*Satz von Cantor-Bernstein*). *$E_{1/3}$ hat dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$.*

BEWEIS. $|E_{1/3}| = |\mathcal{C}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\wp(\mathbb{N})| = |\wp(\mathbb{Q})| \geqslant |\mathbb{R}|$, da $\mathbb{R} \subseteq \wp(\mathbb{Q})$. $|E_{1/3}| \leqslant |\mathbb{R}|$. Zusammen folgt die Behauptung. ⊣

DEFINITION. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, falls zu jeder Familie $\langle U_i: i \in I\rangle$ von offenen Mengen $U_i \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliches $F \subseteq I$ mit $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ existiert.

Ein Unterraum $Y \subseteq X$ heißt *kompakt*, falls Y mit der relativen Topologie kompakt ist.

Ferner heißt X *σ-kompakt*, falls eine abzählbare Familie $\langle Y_n: n \in \mathbb{N}\rangle$ von kompakten Unterräumen $Y_n \subseteq X$ existiert, so daß $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.

Ein topologischer Raum X heißt *separiert* oder *Hausdorff'sch*, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ disjunkte offene $U, V \subseteq X$ existieren mit $x \in U$ und $y \in V$.

LEMMA 3.4. *In der allgemeinen Topologie beweist man leicht folgende Eigenschaften:*

(a) Kompakte Teilmengen von separierten Räumen sind abgeschlossen.

(b) Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen sind kompakt.

(c) Endliche Vereinigungen von kompakten Mengen sind kompakt.

(d) Stetige Bilder von kompakten Mengen sind kompakt.

(e) Metrische Räume sind stets separiert.

LEMMA 3.5 (*Satz von Tychonoff*). *Beliebige Produkte von kompakten Räumen sind kompakt.*

LEMMA 3.6. *Falls (X, d) metrisch ist, so sind äquivalent:*

(a) X ist kompakt.

(b) Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

BEWEIS. (a) ⇒ (b): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Setze $U_n := X \setminus \overline{\{x_m : m \geq n\}}$. Folglich ist U_n offen und $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq U_{n+1} \subseteq \ldots$. Klarerweise ist $U_n \neq X$. Folglich existieren keine endlich vielen U_n, welche X überdecken. Wegen Kompaktheit von X gilt $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, wähle $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Nach Definition der U_n folgt $x \in \overline{\{x_m : m \geq n\}}$ für alle n. D.h. daß zu jedem n ist also $B(x, 1/n) \cap \{x_m : m \geqslant n\} \neq \emptyset$, wähle $k_n \geqslant n$ mit X_{kn} in diesem Durchschnitt. Klarerweise gilt $\lim_{n\to\infty} x_{kn} = x$.
(b) ⇒ (a) ist etwas schwieriger. ⊣

DEFINITION. Sei $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ ein Baum. Dann heißt T *endlich spaltend*, falls für alle $t \in T$ die Menge $\{a \in A : t\,\hat{}\,a \in T\}$ endlich ist.

BEISPIELE.

(a) $2^{<\mathbb{N}}$ ist endlich spaltend.

(b) $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ist nicht endlich spaltend.

SATZ 3.7 *(Lemma von König). Sei $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ ein endlich spaltender Baum. Falls T unendlich ist, so ist $[T]$ nichtleer.*

BEWEIS. Konstruiere $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $t_n \in A^n \cap T$,

(2) $t_n \subseteq t_{n+1}$,

(3) $T_{tn} := \{s \in T : s \subseteq t_n \text{ oder } t_n \subseteq s\}$ sei unendlich.

Setze $t_0 = \emptyset$. Dann $T_\emptyset = T$. Sei t_n konstruiert mit (3). Es folgt $T_{tn} = \bigcup\{T_{tn\,\hat{}\,a} : a \in A \wedge t_n\,\hat{}\,a \in T\}$. Da T endlich spaltend ist, existieren nur endlich viele $a \in A$ mit $t_n\,\hat{}\,a \in T$. Finde folglich $a \in A$, so daß $t_n\,\hat{}\,a \in T$ und $T_{t\,\hat{}\,a}$ unendlich ist. Setze $t_{n+1} := t_n\,\hat{}\,a$. Es gelten (1) bis (3). Setze $x := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} t_n$. Folglich $x \in [T]$. ⊣

SATZ 3.8. *Sei $F \subseteq A^{\mathbb{N}}$ eine nichtleere abgeschlossene Menge. Dann ist F kompakt gdw. der eindeutig bestimmte gestutzte Baum T mit $[T] = F$ endlich spaltend ist.*

BEWEIS. „⇒" durch Kontraposition. Angenommen T ist nicht endlich spaltend, es existiert also $t \in T$, so daß $B = \{a \in A : t\,\hat{}\,a \in T\}$ unendlich ist. Sei U die Menge $\{N_s \cap [T] : s \in T$ *und s ist kompatibel mit t*$\} \cup \{N_{t\,\hat{}\,a} \cap [T] : a \in A$ *und* $t\,\hat{}\,a \in T\}$. Dann ist U eine offene Überdeckung von $F = [T]$. Sei $x \in [T]$. Falls $t \subseteq x$, so gilt $x \in N_{t\,\hat{}\,x(|t|)} \cap [T]$. Falls $t \not\subseteq x$, so existiert ein n, so daß t und $x \restriction n \in T$ inkompatibel sind. Folglich $x \in N_{x\restriction n} \cap [T]$. Falls $U_0 \subseteq U$ endlich ist, so ist U_0 keine Überdeckung von F, da U_0 nur endlich viele der $N_{t\,\hat{}\,a} \cap [T]$ enthält.
„⇐". Sei T endlich spaltend. Seien U_i, $i \in I$, offen mit $F \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Für $t \in T$ sei $T_t = \{s \in T : s \subseteq t \vee t \subseteq s\}$. Sei $S = \{t \in T : \nexists i \in I\ N_t \cap F \subseteq U_i\}$. Dann ist S ein Baum und $S \subseteq T$; denn falls $N_t \cap F \not\subseteq U_i$ und $t' \subseteq t$, so $N_{t'} \cap F \not\subseteq U_i$.
1. Fall: S ist endlich. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß $S \subseteq \bigcup_{i<n} A^i$. Zu jedem $s \in A^n \cap T$ existiert, da dann $s \notin S$, somit $i(s) \in T$ mit $N_s \cap F \subseteq U_{i(s)}$. Klarerweise gilt $[T] = \bigcup_{s\in A^n \cap T} [T_s]$, somit $[T] \subseteq \bigcup_{s\in A^n\cap T} U_{i(s)}$, da $[T_s] = N_s \cap F$. Da T endlich spaltend ist, ist $A^n \cap T$ endlich (Beweis durch Induktion über n).

2. Fall: S ist unendlich. S ist als Teilraum von T endlich spaltend. Nach dem Lemma von König existiert ein $x \in [S] \subseteq F$. Es existiert $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß $x \in N_{x \upharpoonright n} \subseteq U_i$. Es folgt $x \upharpoonright n \notin S$, ein Widerspruch zu $x \in [S]$. ⊣

KOROLLAR 3.9. *Es gelten die folgenden Resultate:*

(a) $\mathcal{C}$ *ist kompakt.*

(b) $\mathcal{N}$ *ist nicht* σ *– kompakt.*

BEWEIS. (a) $\mathcal{C} = [2^{<\mathbb{N}}]$. Klarerweise ist $2^{<\mathbb{N}}$ endlich spaltend.

(b) $\mathcal{N} = [\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}]$, $\mathcal{N}$ ist klarerweise nicht kompakt. Seien $F_n \subseteq \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$, abzählbar viele kompakte nichtleere Teilmengen. Zu zeigen ist $\mathcal{N} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Wähle gestutzte Bäume T_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $F_n = [T_n]$. Da F_n kompakt ist, ist nach Satz 3.8 T_n endlich spaltend. Konstruiere jetzt $x \in \mathcal{N} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [T_n]$ rekursiv: $x(0) = min\{k \in \mathbb{N}: \langle k \rangle \notin T_0\}$. Allgemein sei $x(n + 1) = min\{k \in \mathbb{N}: x \upharpoonright (n + 1) \,\hat{}\, k \notin T_{n+1}\}$. Klar ist: $x \notin [T_n]$, alle $n \in \mathbb{N}$. ⊣

BEMERKUNG. Der *Satz von Hurewicz* besagt: Falls X ein nicht σ – kompakter, polnischer Raum ist, so enthält X einen abgeschlossenen Unterraum, der homöomorph ist zu $\mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ ist in diesem Sinne damit der kleinste nicht σ – kompakte Raum.
Achtung: $\mathcal{N}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ σ – kompakt. Es folgt allerdings kein Widerspruch zum Satz von Hurewicz, da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen ist.

Sei X ein ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $f: A \to Y$.

DEFINITION. Zu beliebiger Teilmenge $B \subseteq Y$ sei $diam(B) = sup\{d(x, y): x, y \in B\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, wobei $diam(\emptyset) := 0$.
Definiere die *Oszillation* von f an der Stelle $x \in X$ als $osc_f(x) = inf\{diam(f(U \cap A)): U$ *ist eine offene Umgebung von* $x\}$.

BEMERKUNG. Wir verlangen nicht $x \in A$ in der Definition der Oszillation.

LEMMA 3.10. *Es gelten*

(a) Falls $x \in A$, *so gilt:* f *ist stetig an der Stelle* x *gdw.* $osc_f(x) = 0$.

(b) Zu $\varepsilon > 0$ *sei* $A_\varepsilon := \{x \in X: osc_f(x) < \varepsilon\}$. *Dann ist* A_ε *offen.*

BEWEIS. (a) „⇒“. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit bei x existiert eine offene Umgebung U von x, so daß $f(U \cap A) \subseteq B^d(f(x), \varepsilon)$. Folglich $diam\, f(U \cap A) \leqslant 2\varepsilon$ und somit $osc_f(x) = 0$, da ε beliebig.
„⇐“. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, daß $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ eine (bzgl. A) offene Umgebung enthält. Wegen $osc_f(x) = 0$ existiert eine offene Umgebung U von x mit $diam\, f(U \cap A) < \varepsilon$. Es folgt $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, für alle $y \in A \cap U$, da $x \in A \cap U$, und somit $f(U \cap A) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.
(b) Sei $x \in A_\varepsilon$. Es existiert eine offene Umgebung U von x, so daß $diam\, f(U \cap A) < \varepsilon$. Es folgt $osc_f(y) < \varepsilon$ für alle $y \in U$. Folglich $U \subseteq A_\varepsilon$. ⊣

SATZ 3.11. *Sei* X *ein topologischer Raum und* (Y, d) *ein metrischer Raum. Sei* $f: X \to Y$. *Dann ist* $A = \{x \in X: f$ *ist stetig an der Stelle* $x\}$ G_δ.

BEWEIS. Es gilt $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n}$ wegen (a) von Lemma 3.10. Wegen (b) des gleichen Lemmas ist $A_{1/n}$ offen, somit A G_δ.

SATZ 3.12. (*Erweiterungssatz von Kuratowski*). *Sei X metrisierbar, Y vollständig metrisierbar und $A \subseteq X$ und $f\colon A \to Y$ stetig. Dann existiert eine G_δ Menge G mit $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ und eine stetige Erweiterung $g\colon G \to Y$ von f, d.h. g ist stetig und $f = g \upharpoonright A$.*

BEWEIS. Sei d_X eine kompatible Metrik auf X, d_Y eine vollständige, kompatible Metrik auf Y. Setze $G = \overline{A} \cap \{x \in X\colon osc_f(x) = 0\}$. Wir haben schon gesehen: Jede abgeschlossene Menge in einem metrischen Raum ist G_δ. $\{x \in X\colon osc_f(x) = 0\}$ ist G_δ nach (b) von Lemma 3.10. Folglich ist G G_δ. Da f stetig ist auf A, gilt $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$ wegen (a) von Lemma 3.10.

Sei $x \in G$. Da $x \in \overline{A}$, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $lim_{n\to\infty}\, x_n = x$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $d(x, x_n) < 1 / n$. Es gilt $0 = osc_f(x) = lim_{n\to\infty}\, diam(f(A \cap B(x, 1 / n)))$. Somit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $diam\ f(A \cap B(x, 1 / n_\varepsilon)) < \varepsilon$. Es gilt $x_n \in B(x, 1 / n_\varepsilon)$ für alle $n \geqslant n_\varepsilon$. Zusammen folgt daraus: $d_Y(f(x_i), f(x_j)) < \varepsilon$ für alle i, $j \geqslant n_\varepsilon$. Somit ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. Da d_Y vollständig ist, existiert $lim_{n\to\infty}\, f(x_n)$. Setze $g(x) = lim_{n\to\infty}\, f(x_n)$.

Wir müssen prüfen, daß $g(x)$ wohldefiniert ist, d.h. unabhängig ist von der Wahl von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige dazu: Falls $(x_n‘)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in A ist mit $lim_{n\to\infty}\, x_n‘ = x$, so ist die Folge $(x_0, x_0‘, x_1, x_1‘, ..., x_n, x_n‘, ...)$ Cauchy. Es folgt $lim_{n\to\infty}\, x_n = lim_{n\to\infty}\, x_n‘$. Klarerweise gilt $g \upharpoonright A = f$, da wir für $x \in A$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = X$ wählen können. Somit $g(x) = lim_{n\to\infty}\, f(x_n) = lim_{n\to\infty}\, f(x) = f(x)$.

Schließlich ist g stetig: Wegen der vorangegangenen Bemerkung genügt es, $osc_f(x) = 0$ für alle $x \in G$ zu zeigen. Sei $x \in G$ und $U \subseteq X$ offen mit $x \in U$. Nach Konstruktion von g gilt $g(G \cap U) \subseteq f(A \cap U)$. Es folgt $diam(g(G \cap U)) \leqslant diam\ \overline{f(A \cap U)} = diam\ f(A \cap U)$. Da $x \in G$, folgt $osc_f(x) = 0$ und somit $osc_g(x) = 0$. Folglich ist g stetig bei x. ⊣

DEFINITION. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ und $x \in X$. Setze $d(A, x) = inf\{d(x, y)\colon y \in A\}$.

SATZ 3.13. *Sei X metrisierbar und $Y \subseteq X$ vollständig metrisierbar. Dann ist Y G_δ in X. Umgekehrt, falls X vollständig metrisierbar ist und $Y \subseteq X$ G_δ ist, so ist Y vollständig metrisierbar.*

BEWEIS. Sei $Y \subseteq X$ vollständig metrisierbar. Betrachte $id_Y\colon Y \to Y$. id_Y ist offensichtlich stetig. Nach Satz 3.12 existiert eine G_δ Menge G mit $Y \subseteq G \subseteq \overline{Y}$ und eine stetige Erweiterung $g\colon G \to Y$ von id_Y.

Da $G \subseteq \overline{Y}$, existiert zu einem beliebigen $x \in G$ eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in Y$ und $lim_{n\to\infty}\, y_n = x$. Aus der Stetigkeit von g folgt $g(x) = lim_{n\to\infty}\, g(y_n) = lim_{n\to\infty}\, id_Y(y_n) = lim_{n\to\infty}\, y_n = x$. Da $g(x) \in Y$, folgt $x \in Y$ und somit $G = Y$ und $g = id_Y$.

Sei umgekehrt X vollständig metrisierbar und $Y \subseteq X$ G_δ. Schreibe $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ für gewisse offene $U_n \subseteq X$. Setze $F_n = X \setminus U_n$. Also ist F_n abgeschlossen für alle n. Sei d eine vollständige kompatible Metrik auf X.

Ziel: Definiere eine kompatible Metrik $d‘$ auf Y, so daß für jede Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in Y gilt: Falls $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist bzgl. $d‘$, so

(i) ist $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy bzgl. d, und

(ii) $(d(y_i, F_n))_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Limes $\neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Für x, $y \in Y$ setze $d‘(x, y) = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\, min\{1 / 2^{n+1}, |1 / d(x, F_n) - 1 / d(y, F_n)|\}$. Das ist wohldefiniert, da $d(x, F_n) > 0$ für alle $x \in Y$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige leicht, daß $d‘$ eine Metrik ist.

$d‘$ ist kompatibel: Da $d \leqslant d‘$, folgt $Y \cap B^{d‘}(x, \varepsilon) \subseteq Y \cap B^d(x, \varepsilon)$, somit ist $\mathcal{T}_{d‘}$ feiner als $\mathcal{T}_d$. Umgekehrt finde zu beliebigen $x \in Y$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $Y \cap B^d(x, \delta) \subseteq Y \cap B^{d‘}(x, \varepsilon)$ wie folgt: Wähle n_ε, so daß $\Sigma_{i \geqslant n\varepsilon} 1 / 2^{i+1} < \varepsilon / 4$. Wähle $\delta' > 0$, so daß für alle $y \in B^d(x, \delta') \cap Y$ für alle $i < n_\varepsilon$ gilt $|1 / d(y, F_i) - 1 / d(x, F_i)| < \varepsilon / (4n_\varepsilon)$. Setze $\delta = min\{\delta', \varepsilon / 2\}$. Es gilt für $y \in B^d(x, \delta)$: $d'(x, y) = d(x, y) + \Sigma_{n<n\varepsilon} min\{1 / 2^{n+1}, |1 / d(x, F_n) - 1 / d(y, F_n)|\} + \Sigma_{n \geqslant n\varepsilon} min\{1 / 2^{n+1}, |1 / d(x, F_n) - 1 / d(y, F_n)|\} < \varepsilon / 2 + n_\varepsilon \varepsilon / (4n_\varepsilon) + \varepsilon / 4 = \varepsilon$.

Sei nun $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ Cauchy bzgl. d'. Dann gilt (i) wegen $d \leqslant d'$.

Außerdem gilt (ii): Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle i_n, so daß $d'(y_i, y_j) < 1 / 2^{n+1}$ für alle $i, j \geqslant i_n$. Für solche i, j gilt: $1 / 2^{n+1} > d'(y_i, y_j) \geqslant min\{1 / 2^{n+1}, |1 / d(y_i, F_n) - 1 / d(y_j, F_n)|\} = |1 / d(y_i, F_n) - 1 / d(y_j, F_n)|$. Daraus folgt, daß $(1 / d(y_i, F_n))_{i \in \mathbb{N}}$ Cauchy ist in $\mathbb{R}$ und somit konvergiert. Folglich konvergiert $(d(y_i, F_n))_{i \in \mathbb{N}}$ mit Limes $\neq 0$. Das beweist (ii).

Wegen Vollständigkeit von X und (i) existiert $x \in X$ mit $lim_{i \to \infty} y_i = x$. Es folgt $lim_{i \to \infty} d(y_i, F_n) = d(x, F_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich wegen (ii) ist $d(x, F_n) \neq 0$. Es folgt $x \notin F_n$, alle n. Somit $x \in \bigcap U_n = Y$. Somit (Y, d') vollständig. ⊣

KOROLLAR 3.14. *Ein Teilraum eines polnischen Raums ist polnisch genau dann, wenn er G_δ ist.*

ÜBUNGEN

3.1. Zeige, daß $\mathcal{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph sind.

3.2. Zeige, daß $h: \mathcal{C} \to E_{1/3}$, definiert durch $h(x) = \Sigma_{n \in \mathbb{N}} 2x(n) / 3^{n+1}$ ein Homöomorphismus ist.

3.3. Zeige, daß $E_{1/3}$ abgeschlossen und nirgends dicht ist und außerdem Lebesgue-Maß Null hat.

3.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Zeige, daß (X, d) kompakt ist.

3.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, daß $diam(A) = diam(\overline{A})$ für alle $A \subseteq X$.

3.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, daß $d(A, x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$ und $x \in X$.

3.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige:

(a) $d(A, x) = d(\overline{A}, x)$ für alle $A \subseteq X$ und $x \in X$.

(b) Sei $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $lim_{i \to \infty} y_i = y$ für ein $y \in X$ mit $A \subseteq X$. Dann gilt $lim_{i \to \infty} d(A, y_i) = d(A, y)$.

3.8. (*Satz von Baire*) Sei X vollständig metrisierbar. Zeige, daß der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten, offenen Mengen in X dicht ist.

3.9. Zeige, daß $\mathbb{Q}$ (oder allgemeiner jede abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$) nicht G_δ ist in $\mathbb{R}$. (Tipp: Verwende Aufgabe 3.8)

3.10. Zeige, daß die Summe zweier polnischer Räume polnisch ist.

4. BORELMENGEN

Sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ heißt *Algebra*, falls

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(b) $a \in \mathcal{A} \Rightarrow a^c := X \setminus a \in \mathcal{A}$,

(c) $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i<n} a_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Komplementen und endlichen Vereinigungen. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra*, falls $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist unter abzählbaren Vereinigungen.

(d) $a_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathcal{A}$.

Gegeben $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$, so existiert eine kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{B}$ enthält. Sie wird mit $\sigma(\mathcal{B})$ bezeichnet und heißt *die von* $\mathcal{B}$ *erzeugte* σ-Algebra. $\mathcal{B}$ heißt auch *Erzeugendensystem* von $\sigma(\mathcal{B})$. Eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *abzählbar erzeugt*, falls $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ für ein abzählbares $\mathcal{B}$.

Warum existiert $\sigma(\mathcal{B})$? Es gilt $\sigma(\mathcal{B}) = \bigcap\{\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \textit{ ist σ-Algebra auf } X \textit{ und } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$. Weiter gilt -$\wp(X) \in \{\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \textit{ ist σ-Algebra auf } X \textit{ und } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$ und -$\{\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \textit{ ist σ-Algebra auf } X \textit{ und } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$ ist σ-Algebra.

„Externe“ Beschreibung von σ-Algebren: Für $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ setze $\mathcal{E}_\sigma := \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\colon A_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}\}$, $-\mathcal{E} := \{A^c\colon A \in \mathcal{E}\}$. Definiere die folgende Hierachie: $\Sigma_1(\mathcal{B}, X) = \mathcal{B}$, $\Pi_1(\mathcal{B}, X) = -\Sigma_1(\mathcal{B}, X)$. Für α eine beliebige Ordinalzahl sei $\Sigma_\alpha(\mathcal{B}, X) = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\colon A_n \in \Sigma_{\alpha(n)}(\mathcal{B}, X) \cup \Pi_{\alpha(n)}(\mathcal{B}, X), \alpha(n) < \alpha, n \in \mathbb{N}\} = (\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta(\mathcal{B}, X) \cup \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi_\beta(\mathcal{B}, X))_\sigma$ und $\Pi_\alpha(\mathcal{B}, X) = -\Sigma_\alpha(\mathcal{B}, X)$.

LEMMA 4.1. *Es gelten*

(a) $\Sigma_\alpha(\mathcal{B}, X) \cup \Pi_\alpha(\mathcal{B}, X) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(b) $\sigma(\mathcal{B}) = \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X) = \Pi_{\omega_1}(\mathcal{B}, X) = \Sigma_\beta(\mathcal{B}, X) = \Pi_\beta(\mathcal{B}, X)$ *für alle* $\beta > \omega_1$.

BEWEIS. (a) Induktion über α: Angenommen (a) gelte für alle $\beta < \alpha$. Dann gilt $\Sigma_\alpha(\mathcal{B}, X) \subseteq \sigma(\mathcal{B})_\sigma = \sigma(\mathcal{B})$. Ebenso $\Pi_\alpha(\mathcal{B}, X) \subseteq -\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B})$.

Wegen (a) genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{B} \subseteq \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$ und daß $\Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$ eine σ-Algebra ist. Das erste ist klar, da $\Sigma_\beta(\mathcal{B}, X) \subseteq \Sigma_\alpha(\mathcal{B}, X)$ für alle $\beta < \alpha$.

Zum zweiten: Seien $A_n \in \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition existiert zu jedem n ein $\alpha(n, m) < \omega_1$ und $A_{nm} \in \Sigma_{\alpha(n,m)}(\mathcal{B}, X) \cup \Pi_{\alpha(n,m)}(\mathcal{B}, X)$, so daß $A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{nm}$. Dann ist $\gamma := \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \alpha(n, m)$ eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, somit ist γ abzählbar. Außerdem ist γ eine transitive Menge von Ordinalzahlen, somit γ ordinal. Folglich $\gamma < \omega_1$. Nach Definition gilt $\alpha(n, m) \leqslant \gamma$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Folglich $A_{nm} \in \Sigma_\gamma(\mathcal{B}, X) \cup \Pi_\gamma(\mathcal{B}, X)$, alle n, m, somit $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_{\gamma+1}(\mathcal{B}, X)$. Aber $\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{nm} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\gamma + 1 < \omega_1$. Somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$.

Zeige analog: Falls $A \in \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$, so $A^c \in \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$: Finde $\alpha(n) < \omega_1$, $A_n \in \Sigma_{\alpha(n)}(\mathcal{B}, X) \cup \Pi_{\alpha(n)}(\mathcal{B}, X)$ mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sei $\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha(n)$. Also $\gamma + 1 < \omega_1$ und $A \in \Sigma_{\gamma+1}(\mathcal{B}, X)$. Dann $A^c \in \Pi_{\gamma+1}(\mathcal{B}, X) \subseteq \Sigma_{\gamma+2}(\mathcal{B}, X) \subseteq \Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X)$.

Wir haben gezeigt: $\Sigma_{\omega_1}(\mathcal{B}, X) = \sigma(\mathcal{B})$, (tatsächlich sogar $\sigma(\mathcal{B}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha(\mathcal{B}, X)$). Es folgt $\Pi_{\omega_1}(\mathcal{B}, X) = -\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B})$ usw. ⊣

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\sigma(\mathcal{T})$ die σ-Algebra der *Borelmengen* in X. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *Borel* gdw. $Y \in \sigma(\mathcal{T})$. Statt $\sigma(\mathcal{T})$ schreiben wir $B(X, \mathcal{T})$ oder nur $B(X)$, falls $\mathcal{T}$ klar.

Sei jetzt (X, d) ein metrischer Raum. Wir wissen schon, daß jede abgeschlossene Menge $F \subseteq X$ G_δ ist: Es gilt $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(F, 1 / n)$, wobei $B(F, \varepsilon) = \{x \in X: d(x, F) < \varepsilon\}$ offen. Mit den Regeln von de Morgan folgt: Jede offene Menge $U \subseteq X$ ist F_σ: Schreibe $U^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$, V_n offen. Folglich $U = U^{cc} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_n)^c$.

DEFINITION. Wir definieren $B(X)$ intern wie folgt: $\Sigma_1^0(X) = \{U \subseteq X: U \text{ offen}\}$, $\Pi_1^0(X) = \neg\Sigma_1^0(X) = \{F \subseteq X: F \text{ abgeschlossen}\}$.

Für $\alpha \in \mathbb{O}rd$, $\alpha > 1$, setze $\Sigma_\alpha^0(X) = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n: \alpha(n) < \alpha,\ n \in \mathbb{N}, A_n \in \Pi_{\alpha(n)}^0(X)\}$, $\Pi_\alpha^0(X) = \neg\Sigma_\alpha^0(X)$. Für $\alpha \in \mathbb{O}rd$ sei ferner $\Delta_\alpha^0(X) = \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X)$.

BEMERKUNG. Klarerweise gilt $\Sigma_2^0(X) = \{F \subseteq X: F \text{ ist } F_\sigma\}$ und $\Pi_2^0(X) = \{F \subseteq X: F \text{ ist } G_\delta\}$.

LEMMA 4.2. *Es gelten*

(a) $\Sigma_\alpha^0(X) \cup \Pi_\alpha^0(X) \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0(X)$ *für alle* $\alpha \geqslant 1$.

(b) $\Sigma_{\alpha+1}^0(X) = (\Pi_\alpha^0(X))_\sigma$ *für alle* $\alpha \geqslant 1$.

(c) $B(X) = \bigcup_{\alpha<\omega 1} \Delta_\alpha^0(X)$, *genauer:* $\Delta_\alpha^0(X) \subseteq \Sigma_\alpha^0(X), \Pi_\alpha^0(X)$ *für alle* $\alpha \geqslant 1$.

BEWEIS. (a) Durch transfinite Induktion über α:
$\alpha = 1$: Sei $U \in \Sigma_1^0(X)$, also U offen. Wie gesehen ist U F_σ, alle $U \in \Sigma_2^0(X)$. Trivialerweise ist U G_δ, also $U \in \Pi_2^0(X)$, somit $U \in \Delta_2^0(X)$. Dualer Beweis für $F \in \Pi_1^0(X)$.
Sei nun (a) bewiesen für alle $\beta < \alpha$, für ein $\alpha > 1$. Sei $U \in \Sigma_\alpha^0(X)$. Finde $\alpha(n) < \alpha$, $A_n \in \Pi_{\alpha(n)}^0(X)$ mit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $A_n \in \Pi_\alpha^0(X)$, somit $U \in \Sigma_{\alpha+1}^0(X)$. Ferner gilt $U^c \in \Pi_\alpha^0(X)$, folglich $U^c \in \Sigma_{\alpha+1}^0(X)$, also $U = U^{cc} \in \Pi_{\alpha+1}^0(X)$. Also $U \in \Delta_{\alpha+1}^0(X)$. Dual für $F \in \Pi_\alpha^0(X)$.
(b) folgt unmittelbar aus (a).
(c) folgt mit denselben Argumenten wie am Anfang dieses Kapitels ($\Sigma_{\omega 1}(\mathcal{B}, X) = \sigma(\mathcal{B})$). ⊣

BEISPIELE.

(a) $\mathbb{Q}$ ist eine Borelmenge in $\mathbb{R}$. Sei $\mathbb{Q} = \{q_n: n \in \mathbb{N}\}$. Setze $U_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$. Klar: U_n offen. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus U_n) \in \Pi_2^0(\mathbb{R})$. $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus U_n \in \Sigma_2^0(\mathbb{R})$.

(b) $A = \{x \in \mathcal{N}: x(n) = 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathcal{N}: \forall k \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\, (n \geqslant k \wedge x(n) = 0)\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant k} \{x \in \mathcal{N}: x(n) = 0\}$. $\{x \in \mathcal{N}: x(n) = 0\}$ ist offen für alle n. Somit $\bigcup_{n\geqslant k} \{x \in \mathcal{N}: x(n) = 0\}$ offen für alle k. Folglich ist A G_δ, also $A \in \Pi_2^0(\mathcal{N})$.

X polnisch. $A \in B(X)$. Finde polnische Topologie $\mathcal{T}_A$ auf X, so daß $A \in \mathcal{T}_A$ und $A^c \in \mathcal{T}_A$ und $B(X) = B(X, \mathcal{T}_A)$. Dazu beweisen wir zunächst zwei Lemmas.

LEMMA 4.3. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein polnischer Raum und* $F \subseteq X$ *abgeschlossen. Sei* $\mathcal{T}_F$ *die gröbste Topologie mit* $\mathcal{T} \cup \{F\} \subseteq \mathcal{T}_F$ *(*$\mathcal{T} \cup \{F\}$ *ist also eine Subbasis von* $\mathcal{T}_F$*, bzw.* $\mathcal{T} \cup \{F \cap U: U \in \mathcal{T}\}$ *ist eine Basis von* $\mathcal{T}_F$*). Dann ist* $(X, \mathcal{T}_F)$ *polnisch,* F *ist offen und abgeschlossen bzgl.* $\mathcal{T}_F$ *und* $B(X, \mathcal{T}) = B(X, \mathcal{T}_F)$.

BEWEIS. Bemerke zuerst, daß $(X, \mathcal{T}_F)$ die topologische Summe ist von $(F, \mathcal{T} \upharpoonright F)$ und $(F^c, \mathcal{T} \upharpoonright F^c)$, da $U \in \mathcal{T}_F \Leftrightarrow U \cap F \in \mathcal{T} \upharpoonright F$ und $U \cap F^c \in \mathcal{T} \upharpoonright F^c$:

„⇒“: $U \in \mathcal{T}_F \Leftrightarrow U = \bigcup_{i\in I} U_i \cup \bigcup_{j\in J} F \cap V_j$ mit $U_i, V_j \in \mathcal{T}$. Folglich $U \cap F = (\bigcup_{i\in I} U_i \cup \bigcup_{j\in J} V_j) \cap F$ und $U \cap F^c = \bigcup_{i\in I} U_i \cap F^c$.

„⇐“: Sei $U \cap F \in \mathcal{T} \upharpoonright F$. Es existiert $U_0 \in \mathcal{T}$ mit $U \cap F = U_0 \cap F$. Falls zudem $U \cap F^c \in \mathcal{T} \upharpoonright F^c$, existiert $U_1 \in \mathcal{T}$ mit $U \cap F^c = U_1 \cap F^c$. Zusammen $U = (U \cap F) \cup (U \cap F^c) = (U_0 \cap F) \cup (U_1 \cap F^c) \in \mathcal{T}_F$.

Da offene und abgeschlossene Mengen in einem metrischen Raum G_δ sind, sind nach Korollar 3.14 beide Räume $(F, \mathcal{T} \upharpoonright F)$ und $(F^c, \mathcal{T} \upharpoonright F^c)$ polnisch. Die topologische Summe zweier polnischer Räume ist aber stets polnisch. Die erste Behauptung folgt.

Da $F \in \mathcal{T}_F$, ist F offen bzgl. $\mathcal{T}_F$. Da $F^c \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_F$, ist F abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_F$. Klarerweise ist $\mathcal{T}_F \subseteq B(X, \mathcal{T})$, da jedes Element von $\mathcal{T}_F$ von der Form $U \cup (F \cap V)$ für $U, V \in \mathcal{T}$ ist. Folglich $B(X, \mathcal{T}_F) \subseteq B(X, \mathcal{T})$. Aber $B(X, \mathcal{T}) \subseteq B(X, \mathcal{T}_F)$ ist trivial, da $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_F$. $\dashv$

LEMMA 4.4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein polnischer Raum und sei $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von polnischen Topologien auf X mit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n$. Sei $\mathcal{T}_\infty$ die gröbste Topologie mit $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ($\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ ist also eine Subbasis von $\mathcal{T}_\infty$). Dann ist $\mathcal{T}_\infty$ polnisch. Falls $\mathcal{T}_n \subseteq B(X, \mathcal{T})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $B(X, \mathcal{T}) = B(X, \mathcal{T}_\infty)$.*

BEWEIS. Betrachte die Abbildung $\varphi\colon X \to X^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (x, x, ..., x, ...)$. Bemerke, daß $\varphi(X)$ abgeschlossen ist in $\prod_{n\in\mathbb{N}} (X, \mathcal{T}_n)$:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \setminus \varphi(X)$. Es existieren $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, so daß $x_i \neq x_j$. Sei d eine bzgl. $\mathcal{T}$ kompatible Metrik auf X und $\varepsilon = d(x_i, x_j)$. Setze $U = B^d(x_i, \varepsilon / 2)$, $V = B^d(x_j, \varepsilon / 2)$. Also $U, V \in \mathcal{T}$, $x_i \in U$, $x_j \in V$ und $U \cap V = \varnothing$. Folglich $U \in \mathcal{T}_i$ und $V \in \mathcal{T}_j$. Dann gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \times ... \times X \times U \times X \times ... \times X \times V \times X \times ...$ und die rechte Seite ist offen in $\prod_{n\in\mathbb{N}} (X, \mathcal{T}_n)$ und disjunkt zu $\varphi(X)$. (Sie enthält keine konstante Folge wegen $U \cap V = \varnothing$.) Der Raum $\prod_{n\in\mathbb{N}} (X, \mathcal{T}_n)$ ist als abzählbares Produkt von polnischen Räumen polnisch. Wegen Korollar 3.14 ist $\varphi(X)$ polnisch. Für die erste Behauptung genügt es zu zeigen, daß φ ein Homöomorphismus zwischen $(X, \mathcal{T}_\infty)$ und $\varphi(X)$ ist. Klarerweise ist φ eine Bijektion zwischen diesen Räumen. Folglich genügt es zu zeigen, daß

(a) $\varphi(U)$ offen ist für alle $U \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ und

(b) $\varphi^{-1}(X \times ... \times X \times U \times X \times ...) \in \mathcal{T}_\infty$ für alle $U \in \mathcal{T}_n$ und $n \in \mathbb{N}$.

Zu (a): Sei $U \in \mathcal{T}_n$ für ein n. $\varphi(U) = \{(x)_{n\in\mathbb{N}}\colon x \in U\} = (X \times ... \times X \times U \times X \times ...) \cap \varphi(X)$.

Zu (b): Sei $U \in \mathcal{T}_n$: $\varphi^{-1}(X \times ... \times X \times U \times X \times ...) = U \in \mathcal{T}_\infty$.

Für die zweite Behauptung: Sei $\mathcal{B}_n$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}_n$. Dann ist $\mathcal{S} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ eine Subbasis von $\mathcal{T}_\infty$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{S} \subseteq B(X, \mathcal{T})$. Folglich ist, da $\mathcal{S}$ abzählbar ist, $B(X, \mathcal{T}_\infty) = \sigma(\mathcal{S}) \subseteq B(X, \mathcal{T}) \subseteq B(X, \mathcal{T}_\infty)$. Also Gleichheit überall. $\dashv$

SATZ 4.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein polnischer Raum und $A \in B(X, \mathcal{T})$. Es existiert eine polnische Topologie $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$, so daß $B(\mathcal{T}_A) = B(\mathcal{T})$ sowie $A \in \mathcal{T}_A$ und $A^c \in \mathcal{T}_A$, also A offen und abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_A$.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller $A \subseteq X$, für welche die Aussage des Satzes gilt. Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Dann folgt nämlich $B(X, \mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Aber $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ folgt nach Lemma 4.3: Falls $A \in \mathcal{T}$, so $F = A^c$ abgeschlossen. Nach Lemma 4.3 ist $(X, \mathcal{T}_F)$ polnisch, F offen, abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_F$, somit auch A offen und abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_F$ und $B(X, \mathcal{T}) = B(X, \mathcal{T}_F)$. Klarerweise folgt aus $A \in \mathcal{S}$ auch $A^c \in \mathcal{S}$.

Sei schließlich $\{A_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$. Wir zeigen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$: Wähle $\mathcal{T}_n$ polnisch mit $A_n, A_n^c \in \mathcal{T}_n$ und $B(\mathcal{T}) = B(\mathcal{T}_n)$. Sei $\mathcal{T}_\infty$ definiert wie in Lemma 4.4. Somit $A_n \in \mathcal{T}_\infty$, somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_\infty$. Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n \subseteq B(X, \mathcal{T})$, folgt mit Lemma 4.4 $B(X, \mathcal{T}_\infty) = B(X, \mathcal{T})$. Wende nochmals

Lemma 4.3 mit $F = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$ an und erhalte polnisches $\mathcal{T}'$ mit $F \in \mathcal{T}'$, $F^c \in \mathcal{T}'$, $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}'$, $B(X, \mathcal{T}') = B(X, \mathcal{T}_\infty) = B(X, \mathcal{T})$. ⊣

ÜBUNGEN

4.1. Es gelte $B = \sigma(E)$ und $C = \sigma(F)$ und $E \subseteq C$ und $F \subseteq B$. Zeige $B = C$.

4.2. Sei $\mathcal{S}$ eine abzählbare Subbasis des topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$. Zeige $B(X, \mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{S})$.

4.3. Zeige, daß folgende Teilmenge von $\mathcal{C}$ Borel ist: $\{x \in \mathcal{C}: \limsup_{n\in\mathbb{N}} |\{i < n: x(i) = 1\}| / n = 0\}$.

4.4. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, daß die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so daß f differenzierbar ist bei x, Borel ist. (Verwende das Resultat, daß die Menge aller Stetigkeitspunkte von f Borel ist.)

4.5. Seien X, Y metrische Räume und $f: X \to Y$ stetig. Zeige:

(a) Die Klassen $\Sigma_\alpha^0(X)$, $\Pi_\alpha^0(X)$, $\Delta_\alpha^0(X)$ sind abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen, für alle Ordinalzahlen α.

(b) $\{f^{-1}(A): A \in \Sigma_\alpha^0(Y)\} \subseteq \Sigma_\alpha^0(X)$, $\{f^{-1}(A): A \in \Pi_\alpha^0(Y)\} \subseteq \Pi_\alpha^0(X)$, $\{f^{-1}(A): A \in \Delta_\alpha^0(Y)\} \subseteq \Delta_\alpha^0(X)$.

(c) $\Sigma_\alpha^0(X)$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen, $\Pi_\alpha^0(X)$ unter abzählbaren Durchschnitten, $\Delta_\alpha^0(X)$ unter Komplementen.

4.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ polnisch und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Borel-Mengen. Zeige, daß eine polnische Topologie $\mathcal{T}'$ auf X existiert, so daß $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, $B(\mathcal{T}) = B(\mathcal{T}')$ und A_n offen und abgeschlossen ist bzgl. $\mathcal{T}'$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5. ANALYTISCHE MENGEN

DEFINITION. Ein *Lusin-Schema* auf einer Menge X ist eine Familie $(A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A_{s^\frown i} \cap A_{s^\frown j} = \emptyset$ für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ und $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$,

(b) $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$ für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ und $i \in \mathbb{N}$.

Sei nun (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{A} = (A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ ein Lusin-Schema auf X. Dann hat A *verschwindenden Durchmesser*, falls $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_{x\restriction n} = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Dann hat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x\restriction n}$ also höchstens ein Element. In diesem Fall definiere $D = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\colon \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x\restriction n} \neq \emptyset\}$ und $f\colon D \to X$, so daß $f(x)$ *für* $x \in D$ das eindeutig bestimmte Element ist von $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x\restriction n}$. Dann heißt f die zu $\mathcal{A}$ *assoziierte Abbildung*.

SATZ 5.1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\mathcal{A} = (A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ ein Lusin-Schema auf X mit verschwindendem Durchmesser und sei $f\colon D \to X$ die assoziierte Abbildung. Dann gelten:*

(a) f ist injektiv und stetig.

(b) Falls jedes A_s offen ist, so ist f eine Einbettung.

(c) Falls (X, d) vollständig ist und jedes A_s abgeschlossen ist, so ist D abgeschlossen.

BEWEIS. (a) Seien $x, y \in D$, $x \neq y$. Dann gilt $f(x) \in A_{x\restriction\Delta(x,y)+1}$, $f(y) \in A_{y\restriction\Delta(x,y)+1}$. Aber $A_{x\restriction\Delta(x,y)+1} \cap A_{y\restriction\Delta(x,y)+1} = \emptyset$, da $x \restriction \Delta(x, y) = y \restriction \Delta(x, y)$, aber $x(\Delta(x, y)) \neq y(\Delta(x, y))$.
Zur Stetigkeit: Seien $x, x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zeige $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Finde $n(\varepsilon)$, so daß $\operatorname{diam}(A_{x\restriction n(\varepsilon)}) < \varepsilon$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, finde $m(\varepsilon)$, so daß $x_n \restriction n(\varepsilon) = x \restriction n(\varepsilon)$ für alle $n \geqslant m(\varepsilon)$. Es folgt $f(x_n) \in A_{x\restriction n(\varepsilon)}$ für alle $n \geqslant m(\varepsilon)$ und somit $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geqslant m(\varepsilon)$.
(b) Für jedes $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ gilt: $f(N_s \cap D) = f(D) \cap A_s$.
(c) Übung. ⊣

LEMMA 5.2. *Sei X polnisch und sei $F \subseteq X$ F_σ und $\varepsilon > 0$. Es existieren paarweise disjunkte F_σ-Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, so daß $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\operatorname{diam}(A_n) < \varepsilon$ und $\overline{A_n} \subseteq F$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS. Wir zeigen: 1) F läßt sich schreiben als Vereinigung von paarweise disjunkten F_σ-Mengen B_n, $n \in \mathbb{N}$, so daß $\overline{B_n} \subseteq F$. 2) F läßt sich schreiben als Vereinigung von paarweise disjunkten F_σ-Mengen C_n, $n \in \mathbb{N}$, so daß $\operatorname{diam}(C_n) < \varepsilon$, alle $n \in \mathbb{N}$.
Zu 1): Sei $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, wobei alle F_n abgeschlossen sind. Setze $F_n^* = \bigcup_{i\leqslant n} F_i$; also F_n^* abgeschlossen und $F_n^* \subseteq F_{n+1}^*$, alle $n \in \mathbb{N}$. Nach einer Bemerkung in der Einleitung (offene Mengen sind F_σ), ist $(F_n^*)^c$ F_σ, für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(F_n^*)^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i^n$, mit abgeschlossenen H_i^n. Folglich gilt $F_{n+1}^* \setminus F_n^* = F_{n+1}^* \cap (F_n^*)^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (F_{n+1}^* \cap H_i^n)$, somit ist $F_{n+1}^* \setminus F_n^*$ F_σ. Setze $B_0 = F_0^*$, $B_{n+1} = F_{n+1}^* \setminus F_n^*$. Somit sind die B_n paarweise disjunkt, F_σ, und $\overline{B_{n+1}} \subseteq \overline{F_{n+1}}^* = F_{n+1}^* \subseteq F$.
Zu 2): Sei $Q \subseteq X$ abzählbar und dicht. Sei $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, wobei alle F_n abgeschlossen sind. Klarerweise gilt: $X = \bigcup_{q\in Q} B(q, \varepsilon / 3)$, und folglich $F_n = \bigcup_{q\in Q} (\overline{B(q,\varepsilon/3)} \cap F_n)$. Setze $B_{(q,n)} := \overline{B(q,\varepsilon/3)} \cap F_n$. Klarerweise ist $B_{(q,n)}$ abgeschlossen und $\operatorname{diam}(B_{(q,n)}) \leqslant 2\varepsilon / 3 < \varepsilon$. Wähle eine Bijektion $b\colon \mathbb{N} \to Q \times \mathbb{N}$. Setze $C_n := B_{b(n)} \setminus \bigcup_{i<n} B_{b(i)} = B_{b(n)} \cap_{i<n} B_{b(i)}{}^c$. Wie in 1) zeigt man, daß C_n (als Differenz zweier abgeschlossener Mengen) F_σ ist. Offensichtlich sind die C_n paarweise disjunkt und $\operatorname{diam}(C_n) \leqslant \operatorname{diam}(B_{b(n)}) < \varepsilon$. ⊣

SATZ 5.3. *Sei X ein polnischer Raum. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathcal{N}$ und eine stetige Bijektion $f\colon F \to X$. Wegen Satz 2.5 (F ist Retrakt von $\mathcal{N}$) existiert eine stetige Surjektion $g\colon \mathcal{N} \to X$.*

BEWEIS. Sei d eine kompatible, vollständige Metrik auf X. Wir konstruieren ein Lusin-Schema $(A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ auf X mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A_\varnothing = X$,

(b) A_s ist F_σ für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

(c) $A_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{s^\frown i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_{s^\frown i}}$ für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

(d) $diam(A_s) \leqslant 1 / 2^{|s|}$.

Aufgrund von Lemma 5.2 ist die Konstruktion klar. Sei $f\colon D \to X$ die assoziierte Abbildung. Nach Satz 5.1 ist f stetig und injektiv.

Wegen (c) ist f außerdem surjektiv: Sei $x \in X$. Finde $y \in D$ mit $f(y) = x$, d.h. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{y\restriction n}$. Konstruiere $y(n)$ rekursiv: Wähle $y(0)$, so daß $x \in A_{\langle y(0)\rangle}$. Sei $\langle y(i)\colon i \leqslant n\rangle$ konstruiert, so $x \in A_{y\restriction n+1}$. Wegen $A_{y\restriction n+1} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{y\restriction n+1^\frown i}$ existiert $y(n+1) \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{y\restriction n+1^\frown y(n+1)}$. Erhalte so $y \in D$ wie gewünscht.

Es bleibt noch zu zeigen, daß D abgeschlossen ist: Seien $x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ mit $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zeige $x \in D$. Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ finde n_N so daß $\forall i \geqslant n_N\ x_i \restriction N = x \restriction N$. Folglich

(+) $\forall i \geqslant n_N\ f(x_i) \in A_{x\restriction N}$.

Wegen (d) erhalten wir $\forall i > j \geqslant n_N\ d(f(x_i), f(x_j)) \leqslant 1 / 2^N$. Da N beliebig war, ist $(f(x_i)\colon i \in \mathbb{N})$ Cauchy. Es existiert also $y \in X$, so daß $lim_{i\to\infty} f(x_i) = y$. Aus (+) und (c) folgt $y \in \overline{A_{x\restriction N}} \subseteq A_{x\restriction N-1}$ für alle $N \in \mathbb{N}$, also $y \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} A_{x\restriction N}$. Folglich $x \in D$. $\dashv$

DEFINITION. Sei X ein topologischer Raum. Ein $x \in X$ heißt *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist. Falls $x \in X$ nicht isoliert ist, heißt x *Häufungspunkt* (dann enthält jede offene Umgebung von x mindestens 2 Punkte).

Der Raum X heißt *perfekt*, falls alle Punkte Häufungspunkte sind. Eine Teilmenge $P \subseteq X$ heißt *perfekt*, falls P abgeschlossen und P perfekt ist in der relativen Topologie.

DEFINITION. Sei X eine Menge. Ein *Cantor-Schema* auf X ist eine Familie $(A_s\colon s \in 2^{<\mathbb{N}})$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A_{s^\frown 0} \cap A_{s^\frown 1} = \varnothing$ für alle $s \in 2^{<\mathbb{N}}$,

(b) $A_{s^\frown i} \subseteq A_s$ für alle $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i < 2$.

SATZ 5.4. *Sei X ein perfekter polnischer Raum. Dann existiert eine Einbettung von $\mathcal{C}$ in X. Wegen Kompaktheit von $\mathcal{C}$ enthält X somit eine homöomorphe Kopie von $\mathcal{C}$ als abgeschlossenen Unterraum.*

BEWEIS. Wir definieren ein Cantor-Schema $(A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ auf X, so daß zusätzlich:

(c) A_s ist offen und $A_s \neq \varnothing$ für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

(d) $diam(A_s) \leqslant 2^{-|s|}$,

(e) $\overline{A_{s^\frown i}} \subseteq A_s$.

Angenommen, wir hätten $(A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ schon konstruiert. Sei dann $f\colon \mathcal{C} \to X$ die assoziierte Abbildung. Sei $x \in \mathcal{C}$. Es gelten $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x\restriction n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_{x\restriction n}}$ wegen (e) und $lim_{n\to\infty} diam(A_{x\restriction n}) = 0$

wegen (d) und alle $A_{x \upharpoonright n} \neq \emptyset$ wegen (c). Da X vollständig ist, enthält folglich $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{x \upharpoonright n}$ genau einen Punkt, den wir als $f(x)$ definieren. Wie in Satz 5.1 zeigt man, daß f stetig und injektiv ist. Da $\mathcal{C}$ kompakt ist, ist jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathcal{C}$ kompakt, und folglich ist auch $f(A)$ kompakt und damit abgeschlossen in X. Also ist f abgeschlossen und somit auch offen, da injektiv. Zusammen erhalten wir, daß f eine Einbettung ist.

Konstruiere nun ein Cantor-Schema wie gewünscht. Definiere A_s durch Induktion über $|s|$: $A_\emptyset$ sei beliebig mit (c) und (d), z.B. $A_\emptyset = B(x, 1/2)$ für $x \in X$ beliebig. Sei A_s definiert. Nach Induktionsvoraussetzung ist A_s offen und nichtleer. Sei $x \in A_s$. Da X perfekt ist, ist x nicht isoliert, und deshalb existiert $y \in A_s$ mit $y \neq x$. Wähle $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so daß $B(x, \varepsilon_1), B(y, \varepsilon_2) \subseteq A_s$ und $max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} < min\{1/2 * d(x, y), 1/2^{|s|+2}\}$. Setze $A_{s \frown 0} = B(x, \varepsilon_1/2), A_{s \frown 1} = B(y, \varepsilon_2/2)$. Prüfe leicht, daß die verlangten Eigenschaften gelten. ⊣

SATZ 5.5. *Sei X ein perfekter polnischer Raum. Dann läßt sich $\mathcal{N}$ in X einbetten.*

BEWEIS. Wegen Satz 5.4 genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{N}$ in $\mathcal{C}$ eingebettet werden kann. Definiere $\varphi: \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \rightarrow 2^{<\mathbb{N}}$ wie folgt durch Induktion über $|s|$: $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi(s \frown n) = \varphi(s) \frown \langle 0, ..., 0, 1\rangle$ (n Nullen); z.B. $\varphi(\langle 2, 0, 4\rangle) = \langle 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1\rangle$. Definiere jetzt $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ durch $f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x \upharpoonright n)$. Zeige leicht, daß f eine Einbettung ist. Bemerke dazu, daß $f(\mathcal{N}) = \{y \in \mathcal{C}: y(n) = 1$ *für unendlich viele* $n\}$. Also $f(\mathcal{N})$ ist G_δ in $\mathcal{C}$. ⊣

SATZ 5.6. (*Cantor-Bendixson*). *Sei X ein polnischer Raum. Dann kann X auf eindeutige Weise zerlegt werden als $X = P \cup C$, wobei $P \cap C = \emptyset$, P eine perfekte Teilmenge und C abzählbar.*

BEWEIS. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Kondensationspunkt* von X, falls jede offene Umgebung von x überabzählbar ist. Definiere $P = \{x \in X$: *x ist Kondensationspunkt*$\}$, $C = X \setminus P$. Sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie auf X. Offensichtlich ist $C = \bigcup\{U_n: n \in \mathbb{N}$ *und* U_n *ist abzählbar*$\}$.

Warum? Sei $x \in C$, also ist x nicht Kondensationspunkt. Es existiert eine offene abzählbare Umgebung U von x. Da $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Basis ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_n \subseteq U$. Dann ist U_n abzählbar. Sei umgekehrt U_n abzählbar und $x \in U_n$. Dann ist x nicht Kondensationspunkt, also $x \in C$. Es folgt, daß C offen ist und abzählbar. Somit ist P abgeschlossen.

Warum ist P perfekt? Sei $x \in P$ und U eine offene Umgebung von x. Zu zeigen ist, daß $U \cap P$ unendlich ist. Da x Kondensationspunkt ist von X, ist U überabzählbar. Da C abzählbar ist, folgt daß $U \cap P = U \setminus C$ überabzählbar, also unendlich ist.

Zur Eindeutigkeit: Sei Y polnisch. Setze $Y^* = \{y \in Y$: *y ist Kondensationspunkt*$\}$. Bemerke: Falls Y perfekt, so $Y^* = Y$: Sei $y \in Y$. Sei U eine offene Umgebung von y. Für jedes $z \in U$ und jedes offene V mit $z \in V$ ist $U \cap V$ eine offene Umgebung von z, und somit ist $U \cap V$ unendlich, da z nicht isoliert ist. Es folgt, daß U versehen mit der relativen Topologie ein perfekter Raum ist, obwohl U i.a. nicht perfekte Teilmenge von Y ist, da nicht abgeschlossen. Nach Korollar 3.14 ist U auch polnisch. Nach Satz 5.4 läßt sich $\mathcal{C}$ in U einbetten. Somit ist U überabzählbar. Da U eine beliebige offene Umgebung von y war, ist $y \in Y^*$.

Wäre nun $X = P' \cup C'$ eine weitere Cantor-Bendixson-Zerlegung, so folgt mit der Bemerkung $(P')^* = P'$. Aber $(P')^* \subseteq X^* = P$; letzteres folgt nach Konstruktion zur Existenz. Also $P' \subseteq P$. Sei nun $x \in C'$. Da C' abzählbar und offen ist, ist $x \in C$. Nach Konstruktion ist $C = \bigcup\{U_n: U_n$ *abzählbar*$\}$, wobei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Basis von X. Es folgt $C' \subseteq C$. Somit $P = P'$ und $C = C'$. ⊣

KOROLLAR 5.7. *Jeder polnische Raum ist entweder abzählbar oder er hat dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$ (oder $\mathcal{C}$).*

BEWEIS. Sei X ein polnischer Raum. Sei $X = P \cup C$ die Cantor-Bendixson-Zerlegung von X nach Satz 5.6. Falls $P = \varnothing$, so ist $X = C$ abzählbar. Andernfalls läßt sich $\mathcal{C}$ in P einbetten (Satz 5.4), somit $|\mathcal{C}| \leqslant |P| = |X|$. Umgekehrt sei $Q \subseteq X$ abzählbar und dicht. Zu jedem $x \in X$ existiert eine Folge $(q_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in Q^{\mathbb{N}}$ mit $lim_{n\to\infty}\, q_n^* = x$. Klarerweise ist die Abbildung $X \to Q^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (q_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ injektiv. Es folgt $|X| \leqslant |Q^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{C}|$. Aus dem Satz von Schröder-Bernstein (Mengenlehre) folgt $|X| = |\mathcal{C}|$. ⊣

BEISPIEL. Sei $X = \{x_0, ..., x_n, ...\} \cup \{x_\infty\}$, so daß alle $\{x_n\}$ offen sind und außerdem $\{x_n\colon n \geqslant m\} \cup \{x_\infty\}$ offen für alle m. Es gibt also $lim_{n\to\infty}\, x_n = x_\infty$. Also sind alle x_n isoliert, aber x_∞ ist Häufungspunkt. Aber x_∞ ist nicht Kondensationspunkt.

Cantor-Bendixson-Analyse: $X' = \{x \in X\colon x \text{ ist Häufungspunkt}\} = \{x_\infty\}$. $X'' = \varnothing$.

Sei X beliebig polnisch. $X' = \{x \in X\colon x \text{ ist Häufungspunkt}\}$. Definiere mit transfiniter Rekursion: $X_0 = X$, $X_{\alpha+1} = X_\alpha'$, $X_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ für λ eine Limeszahl.

Zeige: Es existiert $\alpha < \omega_1$ mit $X_{\alpha+1} = X_\alpha$. Dann ist $X = X_{\alpha+1} \cup \{X \setminus X_{\alpha+1}\}$ die Cantor-Bendixson-Zerlegung.

SATZ 5.8. *Sei X ein polnischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Borelmenge. Es existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathcal{N}$ und eine stetige Bijektion $f\colon F \to A$. Falls $A \neq \varnothing$, gibt es wegen Satz 2.5 auch eine stetige Surjektion $g\colon \mathcal{N} \to A$, welche f fortsetzt.*

BEWEIS. Nach Satz 4.5 finde eine polnische Topologie $\mathcal{T}_A \supseteq \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ ist die Topologie auf X), bzgl. welcher A offen und abgeschlossen ist. Nach Satz 3.13 ist somit $(A, \mathcal{T}_A \upharpoonright A)$ polnisch. Nach Satz 5.3 existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathcal{N}$ und eine stetige Bijektion $f\colon F \to A$, die stetig ist bzgl. $\mathcal{T}_A \upharpoonright A$ auf A. Da $\mathcal{T} \upharpoonright A \subseteq \mathcal{T}_A \upharpoonright A$ folgt: f ist auch stetig bzgl. $\mathcal{T} \upharpoonright A$. ⊣

DEFINITION. Sei X ein polnischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *analytisch*, falls ein polnischer Raum Y und eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ existieren, so daß $f(Y) = A$.

BEMERKUNGEN.

(a) Wegen Satz 5.3 können wir in der Definition von „analytisch" Y durch $\mathcal{N}$ ersetzen, falls $A \neq \varnothing$. Außerdem ist $\varnothing$ analytisch, da wir $Y = \varnothing$ wählen können. Wir bezeichen die Menge aller analytischen Teilmengen von X mit $\Sigma_1^1(X)$.

(b) Es gilt $B(X) \subseteq \Sigma_1^1(X)$, d.h. Borelmengen sind analytisch (s. unten).

(c) Falls in der Definition von „analytisch" f injektiv ist, so ist $A = f(Y)$ Borel. Es gibt aber stets, falls X überabzählbar, analytische Mengen, die nicht Borel sind (s. unten).

SATZ 5.9. *Sei X polnisch und $A \subseteq X$. Es sind äquivalent:*

(a) A ist analytisch.

(b) Es existiert ein polnischer Raum Y und eine Borelmenge $B \subseteq X \times Y$ mit $A = proj_X(B)$, wobei $proj_X\colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$.

(c) Es existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq X \times \mathcal{N}$ mit $A = proj_X(F)$.

(d) Es existiert eine G_δ Menge $G \subseteq X \times \mathcal{C}$ mit $A = proj_X(G)$.

BEWEIS. (a) ⇒ (c). Sei $f\colon \mathcal{N} \to X$ mit $A = f(\mathcal{N})$. Setze $F := graph^{-1}(f) := \{(f(x), x)\colon x \in \mathcal{N}\}$. Da f stetig ist, ist F abgeschlossen in $X \times \mathcal{N}$. Klarerweise gilt $A = proj_X(F)$.

(c) ⇒ (b) ist trivial.

(b) ⇒ (a). Nach Satz 5.8 existiert eine stetige Funktion $f\colon \mathcal{N} \to X \times Y$ mit $B = f(\mathcal{N})$. Es folgt $A = (proj_X \circ f)(B)$. Also A analytisch.

Als Übung zeige (d) $\Leftrightarrow$ (c). Verwende die konstruierte Einbettung von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{C}$. ⊣

DEFINITION. Sei Γ eine Klasse von Teilmenge von beliebigen polnischen Räumen (Γ gegeben als Definition). Sei X ein polnischer Raum. Dann bezeichnen wir mit $\Gamma(X)$ die Menge aller Teilmengen von X, die zu Γ gehören, d.h. die Definition Γ erfüllen. Eine Menge $U \subseteq \mathcal{N} \times X$ heißt *$\mathcal{N}$-universell* für $\Gamma(X)$, falls $U \in \Gamma(\mathcal{N} \times X)$ und außerdem $\Gamma(X) = \{U_y : y \in \mathcal{N}\}$, wobei $U_y = \{x \in X : (y, x) \in U\}$.

BEISPIEL. Sei Γ die Klasse aller offenen Mengen. Dann ist $\Gamma(X) = \{Y \subseteq X : Y \text{ offen}\}$.

LEMMA 5.10. *$\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}^2$ sind homöomorph.*

BEWEIS. Definiere $h: \mathcal{N} \to \mathcal{N}^2$ durch $h(x) = (x_0, x_1)$, wobei $x_0(n) = x(2n)$ und $x_1(n) = x(2n + 1)$, alle $n \in \mathbb{N}$. ⊣

LEMMA 5.11. *Es existiert eine $\mathcal{N}$-universelle Menge für $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$.*

BEWEIS. Zuerst zeigen wir, daß eine $\mathcal{N}$-universelle Menge für $\Sigma_1^0(\mathcal{N})$ (alle offenen) existiert. Sei dazu $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ eine Bijektion. Definiere $U \subseteq \mathcal{N}^2$ folgendermaßen: $(y, x) \in U :\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N} \wedge y(i)=0} N_{s(i)}$. Sei $V \in \Sigma_1^0(\mathcal{N})$. Es existiert $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $V = \bigcup_{i \in A} N_{s(i)}$. Definiere $y \in \mathcal{N}$ durch $y(i) = 0$, falls $i \in A$, und $y(i) = 1$, sonst. Es folgt $U_y = \{x \in \mathcal{N} : (y, x) \in U\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \wedge y(i)=0} N_{s(i)} = \bigcup_{i \in A} N_{s(i)} = V$. Ferner ist U offen in $\mathcal{N}^2$: Sei $(y, x) \in U$. Es existiert also $i \in \mathbb{N}$ mit $y(i) = 0$ und $x \in N_{s(i)}$. Es folgt $(y, x) \in N_{y \restriction (i+1)} \times N_{s(i)} \subseteq U$. Klar ist, daß $U_y \in \Sigma_1^0(\mathcal{N})$, alle y.

Da $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}^2$ homöomorph sind, existiert auch eine $\mathcal{N}$-universelle Menge U' für $\Sigma_1^0(\mathcal{N}^2)$. Setze $U' = (id_{\mathcal{N}} \times h)(U) = \{(y, h(x)) : (y, x) \in U\}$. $id_{\mathcal{N}} \times h$ ist ein Homöomorphismus. Sei $V \subseteq \mathcal{N}^2$ offen. Finde y mit $h^{-1}(V) = U_y$. Dann gilt $V = (U')_y$. Setze $F := \mathcal{N}^3 \setminus U'$. Also $F \in \Pi_1^0(\mathcal{N}^3)$. Es folgt sofort, daß F $\mathcal{N}$-universell ist für $\Pi_1^0(\mathcal{N}^2)$: Sei $H \in \Pi_1^0(\mathcal{N}^2)$, also $V := \mathcal{N}^2 \setminus H \in \Sigma_1^0(\mathcal{N}^2)$. Finde y mit $V = (U')_y$. Folglich $H = \mathcal{N}^2 \setminus V = (\mathcal{N}^3 \setminus U')_y = F_y$.

Wir wollen zeigen, daß die Menge $A = \{(y, x) \in \mathcal{N}^2 : \exists z \in \mathcal{N}\, (y, x, z) \in F\}$ $\mathcal{N}$-universell ist für $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$. Projektionen sind stetig. Wegen (b) von Satz 5.9 ist A analytisch und folglich auch A_y für alle $y \in \mathcal{N}$.

Sei jetzt $B \in \Sigma_1^1(\mathcal{N})$. Finde y mit $B = A_y$. Nach Bemerkung (a) weiter oben existiert ein abgeschlossenes $H \subseteq \mathcal{N}$, wobei $H = \mathcal{N}$, falls $B \neq \varnothing$ oder $H = \varnothing$ sonst, und eine stetige Surjektion $f: H \to B$. Sei $G := graph(f)^{-1} = \{(x, z) \in \mathcal{N}^2 : z \in H \wedge x = f(z)\}$. Da f stetig, ist G abgeschlossen in $\mathcal{N}^2$. Da F $\mathcal{N}$-universell für $\Pi_1^0(\mathcal{N}^2)$, existiert ein $y \in \mathcal{N}$ mit $G = F_y$. Es folgt $x \in B \Leftrightarrow \exists z\, (x, z) \in G \Leftrightarrow \exists z\, (y, x, z) \in F \Leftrightarrow (y, x) \in A \Leftrightarrow x \in A_y$. ⊣

SATZ 5.12. *Sei X ein überabzählbarer polnischer Raum. Es gilt $B(X) \subset \Sigma_1^1(X)$, d.h. es existieren analytische Mengen, die nicht Borel sind.*

BEWEIS. Zuerst für $X = \mathcal{N}$: Sei $A \subseteq \mathcal{N}^2$ $\mathcal{N}$-universell für $\Sigma_1^1(X)$ (Lemma 5.11). Also insbesondere $A \in \Sigma_1^1(\mathcal{N}^2)$. Wir zeigen, daß A nicht Borel ist. Angenommen A wäre doch Borel. Dann ist auch $A^c = \mathcal{N}^2 \setminus A$ Borel. Die Diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in \mathcal{N}\}$ ist klarerweise abgeschlossen; folglich ist $\Delta \cap A^c = \{(x, x) : x \in \mathcal{N} \wedge (x, x) \notin A\}$ Borel. Trivialerweise ist $g: \Delta \to \mathcal{N}$, $(x, x) \mapsto x$ ein Homöomorphismus. Folglich ist $B := g(\Delta \cap A^c)$ eine Borelmenge in $\mathcal{N}$. Also (**) $B = \{x \in \mathcal{N} : (x, x) \notin A\}$ und B ist analytisch. Da A $\mathcal{N}$-universell ist für $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$, existiert $y \in \mathcal{N}$, so daß (*) $B = A_y = \{x \in \mathcal{N} : (y, x) \in A\}$. Wir fragen uns: Ist $y \in B$ oder nicht? Falls $y \in B$, folgt $(y, y) \in A$ wegen (*). Dann aber $y \notin B$ wegen (**). Falls $y \notin B$, folgt $(y, y) \notin A$ wegen (*). Dann aber $y \in B$ wegen (**). Wir erhalten einen Widerspruch und folglich ist A nicht Borel. Sei $h: \mathcal{N} \to \mathcal{N}^2$ ein Homöomorphismus (Lemma 5.10). Dann ist $h^{-1}(A)$ analytisch und nicht Borel in $\mathcal{N}$.

Sei nun X ein beliebiger, überabzählbarer polnischer Raum. Nach Satz 5.6 existiert eine Einbettung $i: \mathcal{N} \to X$. Sei nun $B \subseteq \mathcal{N}$ analytisch, nicht Borel. Dann ist $i(B) \subseteq X$ analytisch. Wäre $i(B)$ Borel, so auch $i^{-1}(i(B)) = B$, da i injektiv. Ein Widerspruch. ⊣

SATZ 5.13 (*Trennungssatz von Lusin*). *Sei X polnisch und A, $B \subseteq X$ disjunkte analytische Mengen. Dann existiert eine Borelmenge $C \subseteq X$, welche A und B trennt, d.h. $A \subseteq C$ und $C \cap B = \emptyset$.*

Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma.

LEMMA 5.14. *Seien $P = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m$ und $Q = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m$ Teilmengen von X, so daß zu jedem n und m eine Borelmenge existiert, die P_n und Q_m trennt. Dann existiert eine Borelmenge, welche P und Q trennt.*

BEWEIS. Sei $R_{m,n} \subseteq X$ Borel mit $P_m \subseteq R_{m,n} \subseteq (Q_n)^c$. Setze $R := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}$. Offensichtlich ist R Borel. Außerdem trennt R P und Q:

(i) Es gilt $P \subseteq R$: Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt $P_m \subseteq R_{m,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich $P_m \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}$. Somit $P_m \subseteq R$. Da m beliebig, gilt $P = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m \subseteq R$.

(ii) Es gilt $R \subseteq Q^c$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt $Q_n \cap R_{m,n}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Umso mehr haben wir $Q_n \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_{m,k} = \emptyset$ für alle m. Folglich $Q_n \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_{m,k} = \emptyset$. Da n beliebig war, folgt $Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \subseteq R^c$.

Das beweist das Lemma. ⊣

BEWEIS (Satz 5.13). Falls A oder B schon Borel, ist die Aussage trivial. Also dürfen wir insbesondere annehmen, A und B seien nicht leer. Es existieren also nach Bemerkung (a) stetige Surjektionen $f: \mathcal{N} \to A$ und $g: \mathcal{N} \to B$. Setze $A_s := f(N_s)$ und $B_s := g(N_s)$, für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Da $N_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{s^\frown i}$, gilt $A_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{s^\frown i}$ und $B_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{s^\frown i}$. Angenommen, A und B lassen sich nicht durch eine Borelmenge trennen. Da $A = f(\mathcal{N}) = f(N_\emptyset) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(N_{\langle i\rangle}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{\langle i\rangle}$ und analog $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{\langle i\rangle}$, folgt aus Lemma 5.14, daß $x(0) \in \mathbb{N}$, $y(0) \in \mathbb{N}$ existieren, so daß $A_{\langle x(0)\rangle}$ und $B_{\langle y(0)\rangle}$ nicht durch eine Borelmenge getrennt werden können. Wieder gilt $A_{\langle x(0)\rangle} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{\langle x(0),i\rangle}$ und $B_{\langle y(0)\rangle} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{\langle y(0),i\rangle}$. Mit dem gleichen Argument erhalten wir $x(1)$, $y(1) \in \mathbb{N}$, so daß $A_{\langle x(0),x(1)\rangle}$ und $B_{\langle y(0),y(1)\rangle}$ nicht durch eine Borelmenge getrennt werden können. So weiterfahrend konstruieren wir $x, y \in \mathcal{N}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$, $A_{x\restriction m}$ und $B_{y\restriction m}$ nicht durch eine Borelmenge getrennt werden können. Aus $f(x) \in A$ und $g(y) \in B$ und $A \cap B = \emptyset$ folgt $f(x) \neq g(y)$. Finde disjunkte offene U, $V \subseteq X$ mit $f(x) \in U$ und $g(y) \in V$. Wegen der Stetigkeit von f und g finde $n \in \mathbb{N}$, so daß $A_{x\restriction n} = f(N_{x\restriction n}) \subseteq U$ und $B_{y\restriction n} = g(N_{y\restriction n}) \subseteq V$. Dann trennt aber das offene U die Mengen $A_{x\restriction n}$ und $B_{y\restriction n}$, ein Widerspruch zur Konstruktion. ⊣

DEFINITION. Sei X ein polnischer Raum. Definiere rekursiv $\Sigma_n^1(X)$, $\Pi_n^1(X)$, $\Delta_n^1(X)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\Sigma_1^1(X) = \{A \subseteq X\text{: } A \text{ analytisch}\}$, $\Pi_1^1(X) = -\Sigma_1^1(X) = \{A^c\text{: } A \in \Sigma_1^1(X)\}$, $\Delta_1^1(X) = \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X)$. $\Sigma_{n+1}^1(X) = \{f(A)\text{: } Y \text{ polnisch, } f\text{: } Y \to X \text{ stetig, } A \in \Pi_n^1(Y)\}$, $\Pi_{n+1}^1(X) = -\Sigma_{n+1}^1(X)$, $\Delta_{n+1}^1(X) = \Sigma_{n+1}^1(X) \cap \Pi_{n+1}^1(X)$.

KOROLLAR 5.15 (*Suslin*). *Sei X ein polnischer Raum. Es gilt $B(X) = \Delta_1^1(X)$.*

Beweis. Sei $A \in \Delta_1^1(X)$. Also $A \in \Sigma_1^1(X)$, $A^c \in \Sigma_1^1(X)$. Nach Satz 5.13 existiert eine Borelmenge $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B \subseteq (A^c)^c = A$. Also $A = B$.

Umkehrung: Sei $A \in B(X)$. Dann auch $A^c \in B(X)$. Folglich A, $A^c \in \Sigma_1^1(X)$. Dann aber A^c, $A \in \Pi_1^1(X)$. Also $A \in \Delta_1^1(X)$. ⊣

SATZ 5.16. *Seien X, Y polnische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Falls $A \subseteq X$ Borel und $f \restriction A$ injektiv ist, so ist $f(A)$ Borel.*

BEWEIS. Nach Satz 5.10 existiert eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathcal{N}$ und eine stetige Bijektion $f'\colon F \to A$. Wir dürfen also annehmen, es gelte $X = \mathcal{N}$ und A sei abgeschlossen, da $f(A) = f \circ f'(F)$. Setze $B_s = f(A \cap N_s)$ für $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Da $f \restriction A$ injektiv ist, folgt, daß $(B_s)_s$ ein Lusin-Schema ist. Ferner $B_\emptyset = f(A)$, $B_s = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{s^\frown n}$ und B_s ist analytisch für alle s. Mit Hilfe der Aufgabe 5.1 finden wir leicht ein Lusin-Schema $(B_s')_s$, so daß alle B_s' Borel sind und $B_\emptyset' = Y$ und $B_s \subseteq B_s'$. Schließlich definieren wir durch Induktion über $|s|$ Borelmengen B_s^*, so daß $(B_s^*)_s$ ein Lusin-Schema ist, wie folgt: $B_\emptyset^* = B_\emptyset' = Y$ und $B_{\langle n\rangle}^* = B_{\langle n\rangle}' \cap \overline{B_{\langle n\rangle}}$, $n \in \mathbb{N}$. Allgemein: $B_{\langle n(0),\dots,n(k)\rangle}^* = B_{\langle n(0),\dots,n(k)\rangle}' \cap B_{\langle n(0),\dots,n(k-1)\rangle}^* \ \overline{B_{\langle n(0),\dots,n(k)\rangle}}$. Durch Induktion über k zeige $B_{\langle n(0),\dots,n(k)\rangle} \subseteq B_{\langle n(0),\dots,n(k)\rangle}^* \subseteq \overline{B_{\langle n(0),\dots,n(k)\rangle}}$ (*). Wir behaupten $f(A) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_s B_s^* =: C$. Dann ist $f(A)$ offensichtlich Borel.

„$\subseteq$". Sei $x \in f(A)$. Finde $a \in A$ mit $x = f(a)$. Folglich gilt nach Konstruktion $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{a\restriction n} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{a\restriction n}^* \subseteq C$.

„$\supseteq$". Sei $x \in C$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $a \in \mathcal{N}$ mit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{a\restriction n}^*$. Folglich (*) $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{a\restriction n}}$. Insbesondere folgt $B_{a\restriction n} \neq \emptyset$, alle n, somit $A \cap N_{a\restriction n} \neq \emptyset$, alle n. Es folgt $a \in \overline{A} = A$, da A abgeschlossen. Klarerweise folgt $f(a) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{a\restriction n}$. Wir behaupten $f(a) = x$. Andernfalls existieren disjunkte offene Umgebungen U, V von $f(a)$ bzw. x. Wegen der Stetigkeit von f finde $n(0)$ mit $f(N_{a\restriction n(0)}) \subseteq U$. Da $x \notin \overline{U}$ ist, gilt $x \notin \overline{f(N_{a\restriction n(0)})}$. Aber $\overline{B_{a\restriction n(0)}} \subseteq \overline{f(N_{a\restriction n(0)})}$. Also $x \notin \overline{B_{a\restriction n(0)}}$, ein Widerspruch. ⊣

ÜBUNGEN

5.1. Sei X polnisch und seien $A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, analytisch und paarweise disjunkt. Dann existieren paarweise disjunkte Borelmengen B_n, $n \in \mathbb{N}$, so daß $A_n \subseteq B_n$.

5.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(A_s\colon s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ ein Lusin-Schema mit verschwindendem Durchmesser auf X. Sei $f\colon D \to X$ die assoziierte Abbildung. Zeige, daß D abgeschlossen ist, falls (X, d) vollständig und jedes A_s abgeschlossen.

5.3. Ein Baum T auf A heißt *perfekt*, falls $T \neq \emptyset$ und zu jedem $s \in T$ ein $t \in T$ und $a_0, a_1 \in A$ existieren, so daß $a_0 \neq a_1$, $s \subseteq t$ und $t^\frown a_0, t^\frown a_1 \in T$. Zeige, daß $F \subseteq A^{\mathbb{N}}$ perfekt ist genau dann, wenn ein perfekter Baum $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ existiert mit $F = [T]$.

5.4. Sei $\varphi\colon \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to 2^{<\mathbb{N}}$ definiert, so daß $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ und $\varphi(s^\frown n) = \varphi(s)^\frown 0^{n\frown} 1$ für alle $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei 0^n die Folge von n Nullen sei. Definiere $f\colon \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ durch $f(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x \restriction n)$.

(a) Zeige, daß f eine Einbettung ist.

(b) Zeige, daß $f(\mathcal{N})$ G_δ ist in $\mathcal{C}$.

5.5. Seien X und Y metrische Räume. Zeige, daß f: $X \to Y$ stetig ist genau dann, wenn *graph(f)* abgeschlossen ist in $X \times Y$.

5.6. Sei X ein polnischer Raum und seien $A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, analytisch. Zeige, daß $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ analytisch sind.

5.7. Sei X ein polnischer Raum und seien $A_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, analytisch und paarweise disjunkt. Zeige, daß paarweise disjunkte Borelmengen $B_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \subseteq B_n$ existieren. (Verwende Lusin's Trennungssatz.)

5.8. Seien X, Y polnische Räume und $f: X \to Y$ Borel-meßbar, d.h. $f^{-1}(B)$ ist Borel für jede Borelmenge $B \subseteq Y$. Dann gilt für jede analytische Menge $A \subseteq X$ bzw. $B \subseteq Y$, daß $f(A)$ bzw. $f^{-1}(B)$ analytisch ist.

6. UNENDLICHE SPIELE-DETERMINIERTHEIT

Wir betrachten unendliche Spiele wie folgt: Gegeben $A \neq \emptyset$ und $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$, so betrachten wir das *Spiel* $G(A, X)$ (= $G(X)$) mit folgendem *Spielverlauf*: Spieler I (Er) und Spielerin II (Sie) spielen abwechselnd Elemente von A:

Spieler I (Er)	a_0		a_2		...
Spieler II (Sie)		a_1		a_3	...

Also $a_i \in A$, alle $i \in \mathbb{N}$. Es wird vereinbart, daß Er gewinnt, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Also ist X die *Gewinnmenge (für Ihn)*.

DEFINITION. Eine *Strategie für I* ist eine Abbildung $\varphi\colon A^{<\mathbb{N}} \to A^{<\mathbb{N}}$, so daß gelten:

(a) $\forall s \in A^{<\mathbb{N}}\ |\varphi(s)| = |s| + 1$,

(b) $\forall s, t \in A^{<\mathbb{N}}\ (s \subseteq t \Rightarrow \varphi(s) \subseteq \varphi(t))$.

Das ist wie folgt zu verstehen: Falls Er gemäß Strategie φ spielt und Sie $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ spielt, so spielt Er $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\langle a_0\rangle = \varphi(\emptyset)$, $\langle a_0, a_2\rangle = \varphi(\langle a_1\rangle)$, $\langle a_0, a_2, a_4\rangle = \varphi(\langle a_1, a_3\rangle)$, usw.
Zwei äquivalente Definitionen sind die folgenden:
Zum einen eine Abbildung $\varphi\colon A^{<\mathbb{N}} \to A$. Er spielt dann $a_0 = \varphi(\emptyset)$, $a_2 = \varphi(\langle a_1\rangle)$, $a_4 = \varphi(\langle a_1, a_3\rangle)$.
Zum anderen ein Baum $\sigma \subseteq A^{<\mathbb{N}}$, so daß

(a) σ ist nichtleer und gestutzt.

(b) Falls $\langle a_0, ..., a_{2n}\rangle \in \sigma$, so $\langle a_0, ..., a_{2n}, a\rangle \in \sigma$ für alle $a \in A$. (Sie darf spielen, was Sie will.)

(c) Falls $\langle a_0, ..., a_{2n-1}\rangle \in \sigma$, so existiert genau ein $a \in A$ mit $\langle a_0, ..., a_{2n-1}, a\rangle \in \sigma$.

Analog definieren wir, was eine *Strategie für Sie* ist.
Eine Strategie σ für Ihn heißt *Gewinnstrategie für Ihn* im Spiel $G(A, X)$, falls für jeden Spielverlauf $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei welchem Er die Strategie σ befolgt (also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\sigma]$, falls σ als Baum aufgefaßt wird), gilt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Analog wird *Gewinnstrategie für Sie* definiert: Falls σ Strategie Für Sie und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\sigma]$, so folgt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \setminus X$.
Das Spiel $G(A, X)$ oder auch nur die Menge X heißt *determiniert*, falls (mindestens) einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt. (Klarerweise besitzt höchstens ein Spieler eine Gewinnstrategie.)

BEMERKUNG. Falls $|A| \geqslant 2$, so kann man mit Hilfe des Auswahlaxioms eine Menge $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ konstruieren, welche nicht determiniert ist. Der Satz von Martin (siehe unten) besagt, daß alle Borelmengen $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$ determiniert sind.

Oft stellen wir bei einem Spiel *Regeln* auf, d.h. wir beschränken die Spielfreiheit von I und/oder II: D.h. wir haben $A \neq \emptyset$, aber zusätzlich einen nichtleeren gestutzten Baum $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$, welcher die erlaubten Züge festlegt. Zu beliebiger Gewinnmenge $X \subseteq [T]$ betrachten wir das Spiel $G(T, X)$. Wir verlangen zusätzlich, daß $(a_0, ..., a_n) \in T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wiederum setzen wir fest, daß Er gewinnt, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Dies ist kein allgemeinerer Spielbegriff: Zu $X \subseteq [T]$ setze $X' = \{x \in A^{\mathbb{N}}\colon (\exists n\ x \restriction n \notin T) \wedge \text{das kleinste solche } n \text{ mit } x \restriction n \notin T \text{ ist gerade}\} \cup X$.

BEISPIEL. Wir definieren das **-Spiel*. Sei X ein (nichtleerer) polnischer Raum mit kompatibler, vollständiger Metrik d. Sei $\mathcal{B} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von X, bestehend aus nichtleeren (offenen) Mengen. Sei $A \subseteq X$. Das Spiel $G^*(A)$ ist folgendermaßen definiert:

Spieler I (Er)	$(U_0^{(0)}, U_1^{(0)})$	$(U_0^{(1)}, U_1^{(1)})$	...
Spieler II (Sie)	$i(0)$	$i(1)$	...

Regeln: Die $U_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, 1\}$, sind offene Mengen in $\mathcal{B}$ mit $diam(U_i^{(n)}) < 2^{-n}$, $\overline{U_0^{(n)}} \cap \overline{U_1^{(n)}} = \varnothing$, $i(n) \in \{0, 1\}$, $\overline{U_0^{(n+1)} \cup U_1^{(n+1)}} \subseteq U_{i(n)}^{(n)}$. Wer gewinnt? Sei $(U_{i(n)}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gewonnen aus einem Spielverlauf von $G^*(A)$.

Aus den Regln folgt, daß $x \in X$ existiert mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{i(n)}^{(n)} = \{x\}$. Wir setzen fest, daß Er gewinnt, falls $x \in A$.

$G^*(A)$ von der Form $G(T, X)$: $X' = \{((U_0^{(n)}, U_1^{(n)}), i(n))_{n\in\mathbb{N}} \in [T]\colon \exists\, x \in A\ \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{i(n)}^{(n)}\}$.

Satz 6.1. *Sei X ein (nichtleerer) perfekter polnischer Raum und $A \subseteq X$. Es gelten:*

(a) Er hat eine Gewinnstrategie in $G^*(A)$ gdw. sich $\mathcal{C}$ in A einbetten läßt.

(b) Sie hat eine Gewinnstrategie in $G^*(A)$ gdw. A abzählbar ist.

BEMERKUNG. Aus dem Satz von Martin (siehe unten) wird damit folgen: Eine beliebige Borelmenge $A \subseteq X$ ist entweder abzählbar oder enthält eine homöomorphe Kopie von $\mathcal{C}$ (und hat deshalb Kardinalität $|\mathcal{C}| = |X|$.)

BEWEIS (Satz 6.1). (a) „$\Rightarrow$". Sei σ eine Gewinnstrategie für Ihn (σ ein Baum auf T). Durch Weglassen in σ Ihrer Züge, d.h. aller Werte $s(2i + 1)$ für $s \in \sigma$ und $2i + 1 < |s|$, erhalten wir ein Cantor-Schema $(U_s)_s$, $s \neq \varnothing$, so daß gelten: U_s offen, nichtleer, $\overline{U_{s^\wedge 0} \cup U_{s^\wedge 1}} \subseteq U_s$, $diam(U_s) < 2^{-|s|+1}$. Außerdem, da σ Gewinnstrategie für Ihn ist, folgt für alle $y \in 2^{\mathbb{N}}$: Falls $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{y\restriction n}$, so gilt $x \in A$. Wie im Beweis von Satz 5.4 zeigt man, daß die Zuordnung (die assoziierte Funktion) $y \mapsto x$ eine Einbettung von $\mathcal{C}$ in A ist.

„$\Leftarrow$". Sei umgekehrt $i\colon \mathcal{C} \to A$ eine Einbettung und $C := i(\mathcal{C})$. Dann ist C eine perfekte Teilmenge von A. Wir definieren eine Gewinnstrategie σ für Ihn wie folgt: Er spielt in seinem ersten Zug ein erlaubtes Paar $(U_0^{(0)}, U_1^{(0)})$, d.h. $U_i^{(0)} \in \mathcal{B}$, $diam\ U_i^{(0)} < 1$, $\overline{U_0^{(0)}} \cap \overline{U_1^{(0)}} = \varnothing$, so daß zusätzlich $U_i^{(0)} \cap C \neq \varnothing$ für $i < 2$. Sie antwortet mit einem Spielzug $i(0) < 2$. Da C perfekt ist, $U_{i(0)}^{(0)} \cap C \neq \varnothing$ und somit $U_{i(0)}^{(0)} \cap C$ unendlich, kann Er ein erlaubtes Paar $(U_0^{(1)}, U_1^{(1)})$ wählen, so daß $U_i^{(1)} \cap C \neq \varnothing$ für $i < 2$. Gemäß σ soll er so ein Paar spielen, etc.

Wir behaupten, daß σ eine Gewinnstrategie für Ihn ist: Sei $(U_{i(n)}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ das Ergebnis eines Spielverlaufs, bei dem Er gemäß σ gespielt hat. Es gilt somit $U_{i(n)}^{(n)} \cap C \neq \varnothing$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x \in X$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{i(n)}^{(n)}$. Dann gilt $x \in \overline{C} = C \subseteq A$. Also gewinnt Er.

(b) „$\Leftarrow$". Sei A abzählbar, z.B. $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Sei σ die folgende Strategie für Sie: In ihrem n-ten Spielzug sieht Sie Seinen n-ten Spielzug $(U_0^{(n)}, U_1^{(n)})$. Sie wählt gemäß σ $i(n) \in \{0, 1\}$, so daß $x_n \notin U_{i(n)}^{(n)}$ und spielt $i(n)$. Sei $(U_{i(n)}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ der resultierende Spielverlauf und $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{i(n)}^{(n)}$. Es folgt $x \neq x_n$, alle $n \in \mathbb{N}$.

„$\Rightarrow$". Sei umgekehrt σ eine Gewinnstrategie für Sie. Sei $x \in A$. Wir nennen eine Spielposition $p = ((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots, (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1})$ kompatibel mit x, falls sie gemäß σ gespielt wurde, also $p \in \sigma$, und $x \in U_{i(n-1)}^{(n-1)}$ gilt. Die leere Spielposition sei per definitionem auch kompatibel mit x. Bemerke nun folgende Trivialität: Falls jede Position p, die kompatibel ist mit x, eine echte Verlängerung besitzt, die auch kompatibel mit x ist, so existiert ein Spielverlauf $(U_{i(n)}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, bei welchem Sie σ befolgt, dessen Ergebnis y mit $\{y\} =$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{i(n)}^{(n)}$ aber gleich x ist. Somit hätte Er gegen σ gewonnen, ein Widerspruch, da σ Gewinnstrategie für Sie ist. Aus der Trivialität folgt: Zu jedem $x \in A$ existiert eine längste Position, die kompatibel mit x ist. Sei nun $p = ((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, ..., (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1})$ eine beliebige Spielposition, bei der Sie gemäß σ gespielt hat. Sei $p \in \sigma$ und A_p die Menge aller $x \in A$, für welche p die längste mit x kompatible Spielposition ist, also $A_p = \{x \in U_{i(n-1)}^{(n-1)}$: *Für jeden Ihm in der Position p erlaubten Spielzug* $(U_0^{(n)}, U_1^{(n)})$ *gilt: Falls* σ *darauf mit* $i(n)$ *antwortet, so ist* $x \notin U_{i(n)}^{(n)}\}$. Aus der Trivialität folgt $A \subseteq \bigcup_{p\in\sigma\wedge p \text{ hat gerade Länge}} A_p$. Sei $p \in \sigma$ von gerader Länge $2n$. Klarerweise enthält A_p höchstens ein Element: Angenommen $x_0, x_1 \in A_p$, $x_0 \neq x_1$. Dann könnte Er in seinem nächsten n-ten Zug ein erlaubtes Paar $(U_0^{(n)}, U_1^{(n)})$ spielen, so daß $x_0 \in U_0^{(n)}$, $x_1 \in U_1^{(n)}$. Falls Sie gemäß σ mit $i(n)$ antwortet, gilt $x_{i(n)} \in U_{i(n)}^{(n)}$. Dann wäre $p\ \hat{}\ ((U_0^{(n)}, U_1^{(n)}), i_n)$ kompatibel mit $x_{i(n)}$, ein Widerspruch zu $x_{i(n)} \in A_p$. ⊣

Sei $A \subseteq X$, $G^*(A)$. Wir haben schon gesehen: Es existiert ein Baum T und $A' \subseteq [T]$, so daß $G^*(A)$ äquivalent zu $G(T, A')$ ist. Sei $f \in [T]$, $f = \langle(U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}), i_1, ...\rangle$. Es existiert $x_f \in X$, so daß $\{x_f\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{i(n)}^{(n)}$. Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung $F : [T] \to X$, $f \mapsto x_f$ stetig ist. Es gilt $A' = F^{-1}(A)$. Der Satz von Martin besagt: Falls $B \subseteq [T]$ Borel, so ist $G(T, B)$ determiniert. Als Korollar daraus und aus Satz 6.1 werden wir erhalten:

Sei X ein polnischer Raum, $A \subseteq X$ Borel. Entweder existiert eine Einbettung $i: \mathcal{C} \to A$ oder A ist abzählbar.

SATZ 6.2. (*Gale-Stewart*) *Sei* $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ *ein nichtleerer gestutzter Baum und* $X \subseteq [T]$ *abgeschlossen oder offen. Dann ist das Spiel* $G(T, X)$ *determiniert.*

BEWEIS. Sei zuerst X abgeschlossen. Wir nehmen an, Sie hätte keine Gewinnstrategie für $G(T, X)$, und wollen zeigen, daß dann Er eine Gewinnstrategie hat. Eine Spielstellung $p = \langle a_0, ..., a_{2n-1}\rangle \in T$, in welcher Er am Zug ist, heißt *nicht verloren für Ihn*, falls Sie in dieser Stellung keine Gewinnstrategie hat, d.h. Sie hat keine Gewinnstrategie im Spiel $G(T_p, X_p)$, wobei $T_p = \{s \in A^{<\mathbb{N}}: p\ \hat{}\ s \in T\}$ und $X_p = \{x \in A^{\mathbb{N}}: p\ \hat{}\ x \in X\}$. Unsere Voraussetzung, daß Sie keine Gewinnstrategie in $G(T, X)$ hat, bedeutet, daß die leere Spielposition $\langle\rangle$ nicht verloren ist für Ihn. Nun gilt klarerweise folgendes: Falls $p = \langle a_0, ..., a_{2n-1}\rangle$ nicht verloren ist für Ihn, so existiert $a_{2n} \in A$ mit $\langle a_{2n}\rangle \in T_p$, d.h. $p\ \hat{}\ a_{2n} \in T$, so daß für alle $a_{2n+1} \in A$ mit $\langle a_{2n}, a_{2n+1}\rangle \in T_p$ die Stellung $p\ \hat{}\ \langle a_{2n}, a_{2n+1}\rangle$ nicht verloren ist für Ihn. Damit beschreiben wir eine Strategie $\varphi: A^{<\mathbb{N}} \to A$ für Ihn wie folgt: Wähle $\varphi(\langle\rangle) = a_0 \in A$, so daß für kein $a_1 \in A$ mit $\langle a_0, a_1\rangle \in T$ die Stellung $\langle a_0, a_1\rangle$ verloren ist für Ihn. Falls allgemein $\langle a_0, ..., a_{2n+1}\rangle$ nicht verloren ist für Ihn, so wähle $\varphi(\langle a_0, a_3, ..., a_{2n+1}\rangle) = a_{2n+2} \in A$, so daß $\langle a_0, ..., a_{2n+2}\rangle \in T$ und für kein $a_{2n+3} \in A$ mit $\langle a_0, ..., a_{2n+3}\rangle \in T$ die Stellung $\langle a_0, ..., a_{2n+3}\rangle$ verloren ist für Ihn. (Falls $\langle a_0, ..., a_{2n+1}\rangle$ verloren ist für Ihn, definiere $\varphi(\langle a_1, ..., a_{2n+1}\rangle)$ beliebig, erlaubt.)

Wir behaupten, daß φ eine Gewinnstrategie ist für Ihn: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Spielverlauf, bei welchem Er gemäß φ gespielt hat. Zeige leicht durch Induktion über n, daß dann $\langle a_0, ..., a_{2n-1}\rangle$ nicht verloren ist für Ihn, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wähle jetzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin X$, also φ nicht Gewinnstrategie, so existiert, da $[T] \setminus X$ offen ist, ein $k \in \mathbb{N}$ mit $N_{\langle a(0), ..., a(k)\rangle} \cap [T] \subseteq X^c$. Dies gilt auch für alle $l \geqslant k$, also auch für ein $l = 2n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. $N_{\langle a(0), ..., a(2n-1)\rangle} \cap [T] \subseteq X^c$. Dann wäre aber die Stellung $\langle a_0, ..., a_{2n-1}\rangle$ verloren für Ihn, ein Widerspruch.

Ein symmetrisches Argument beweist den Fall, daß X offen ist. ⊣

DEFINITION. Sei wieder T ein nichtleerer gestutzter Baum auf A. Eine *Quasistrategie für Ihn* in T ist ein gestutzter nichtleerer Baum $\Sigma \subseteq T$ mit der Eigenschaft, daß für jede Position $\langle a_0, ..., a_{2n}\rangle \in \Sigma$, in der also Sie am Zug ist, für alle $a_{2n+1} \in A$ mit $\langle a_0, ..., a_{2n+1}\rangle \in T$ gilt $\langle a_0, ..., a_{2n+1}\rangle \in \Sigma$. Klarerweise enthält jede Quasistrategie Σ für Ihn eine Strategie σ für Ihn, also $\sigma \subseteq \Sigma$. Analog definieren wir *Quasistrategie für Sie*.

Sei $X \subseteq [T]$ gegeben. Eine Quasistrategie Σ für Ihn im Spiel $G(T, X)$ heißt *Gewinnquasistrategie für Ihn*, falls $[\Sigma] \subseteq X$.

BEMERKUNG ZUM BEWEIS VON GALE-STEWART. Sei nun $X \subseteq [T]$ abgeschlossen, so daß Sie in $G(T, X)$ keine Gewinnstrategie hat. Dann existiert eine kanonische Gewinnquasistrategie Σ für Ihn. Σ wird bestimmt durch die für Ihn nicht verlorenen Positionen in $G(T, X)$: Für alle $a_0, \ldots, a_{2n} \in A$, $n \in \mathbb{N}$:

$\langle a_0, \ldots, a_{2n-1}\rangle \in \Sigma \Leftrightarrow \langle a_0, \ldots, a_{2n-1}\rangle$ nicht verloren für Ihn.

$\langle a_0, \ldots, a_{2n}\rangle \in \Sigma \Leftrightarrow \langle a_0, \ldots, a_{2n-1}\rangle \in \Sigma$.

Der obige Beweis von Gale-Stewart zeigt: $[\Sigma] \subseteq X$. Analog gilt: Falls $X \subseteq [T]$ offen ist und Er keine Gewinnstrategie in $G(T, X)$ hat, so existiert eine kanonische Gewinnquasistrategie für Sie.

SATZ 6.3. (*D. A. Martin*) *Sei T ein nichtleerer gestutzter Baum auf A und sei $X \subseteq [T]$ Borel. Dann ist $G(T, X)$ determiniert.*

Wir werden zu $G(T, X)$ ein anderes Spiel $G(T', X')$ assoziieren, so daß $X' \subseteq [T']$ abgeschlossen – $G(T', X')$ nach Gale-Stewart also determiniert – ist und aus einer Gewinnstrategie für einen der Spieler in $G(T', X')$ eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler in $G(T, X)$ erhalten werden kann. Dazu folgende Definition.

DEFINITION. Sei T ein nichtleerer gestutzter Baum auf A. Eine *Überlagerung von T* ist ein Tripel (T', π, φ), so daß folgende Dinge gelten:

(a) T' ist ein nichtleerer gestutzter Baum auf einer Menge A'.

(b) $\pi\colon T' \to T$ ist monoton mit $|\pi(s)| = s$ für alle $s \in T'$; π induziert somit eine stetige Funktion $\pi'\colon [T'] \to [T]$, $\pi'(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi(x \upharpoonright n)$. Schreibe $\pi' = \pi$.

(c) φ ist eine Abbildung, welche Strategien für Ihn (bzw. Sie) in T' abbildet auf Strategien für Ihn (bzw. Sie), so daß $\varphi(\sigma')$ eingeschränkt auf Stellungen einer Länge $\leqslant n$ nur abhängt von σ' eingeschränkt auf Stellungen einer Länge $\leqslant n$, für alle n; d.h. falls wir Strategien als Bäume auffassen und zu einem Baum $\sigma \subseteq T'$ $\sigma \upharpoonright n := \{s \in \sigma\colon |s| = n\}$, so folgt aus $\sigma' \upharpoonright n = \sigma'' \upharpoonright n$ $\varphi(\sigma') \upharpoonright n = \varphi(\sigma'') \upharpoonright n$ für alle Strategien σ', σ'' für Ihn (bzw. Sie) in T'.

(d) Falls σ' eine Strategie für Sie (bzw. Ihn) ist in T' und $x \in [T]$ ein Spielverlauf ist, bei welchem Sie (bzw. Er) $\varphi(\sigma')$ verwendet, also $x \in [\varphi(\sigma')]$, so existiert $x' \in [\sigma']$, so daß $\pi(x') = x$. Kurz: $\pi([\sigma']) \supseteq [\varphi(\sigma')]$.

Sei nun (T', π, φ) eine Überlagerung von T und $X \subseteq [T]$. Setze $X' := \pi^{-1}(X)$. Dann „simuliert“ $G(T', X')$ das Spiel $G(T, X)$ im folgenden Sinn: Ein Spielverlauf $x \in [T']$ simuliert $\pi(x) \in [T]$. Falls σ' eine Gewinnstrategie für Ihn (bzw. für Sie) im Spiel $G(T', X')$ ist, so ist $\varphi(\sigma')$ eine Gewinnstrategie für Ihn (bzw. Sie) in $G(T, X)$: Angenommen nicht, so gäbe es $x \in [\varphi(\sigma')]$ mit $x \notin X$ (bzw. $x \in X$). Wegen (d) existiert $x' \in [\sigma']$ mit $\pi(x') = x$. Nach Voraussetzung gilt $x' \in X'$ (bzw. $x' \notin X'$) und damit $x = \pi(x') \in X$ (bzw. $x = \pi(x') \notin X$), ein Widerspruch.

DEFINITION. Sei (T', π, φ) eine Überlagerung von T.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt (T', π, φ) *k-Überlagerung*, falls $T \upharpoonright 2k = T' \upharpoonright 2k$ und $\pi \upharpoonright (T' \upharpoonright 2k)$ ist die Identität. Klarerweise folgt dann $T \upharpoonright i = T' \upharpoonright i$ und $\pi \upharpoonright (T' \upharpoonright i) = id$ für alle $i < 2k$.

(b) Sei $X \subseteq [T]$. Wir sagen, daß (T', π, φ) die Menge X oder auch das Spiel $G(T, X)$ *entwirrt*, falls $\pi^{-1}(X)$ offen und abgeschlossen ist in $[T']$. Klarerweise wird dann auch X^c entwirrt, da $\pi^{-1}(X^c) = \pi^{-1}(X)^c$.

BEMERKUNG. Falls also (T', π, φ) das Spiel $G(T, X)$ entwirrt und $X' := \pi^{-1}(X)$, so ist wegen Gale-Stewart $G(T', X')$ determiniert und somit auch $G(T, X)$.

Somit folgt Satz 6.3 aus dem folgenden Satz.

SATZ 6.4. (*Martin*) *Sei T ein nichtleerer gestutzter Baum und $X \subseteq [T]$ Borel. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine k-Überlagerung von T, welche X entwirrt.*

Satz 6.4 folgt aus den folgenden zwei Lemmas.

LEMMA 6.5. *Sei T ein nichtleerer gestutzter Baum auf A und $X \subseteq [T]$ abgeschlossen. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine k-Überlagerung, die X entwirrt.*

BEWEIS. Falls X schon offen-abgeschlossen, also insbesondere, falls $X = \varnothing$, nehme die triviale Überlagerung (T, id, id). Falls $X \neq \varnothing$, sei $T_X \subseteq T$ der nichtleere gestutzte Baum mit $[T_X] = X$. Wir haben das Spiel $G(T, X)$

Er(T)	$x(0)$		$x(2)$		...
Sie(T)		$x(1)$		$x(3)$	...,

wobei $(x(0), ..., x(l)) \in T$ für alle l, und Er(T) gewinnt genau dann, wenn $(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wir werden eine k-Überlagerung (T', π, φ) von T definieren. Zur Definition von T' betrachten wir das folgende modifizierte Spiel, dessen erlaubte Positionen die Elemente von T' sein werden. Der Beginn ist wie bei $G(T, X)$

Er(T')	$x(0)$		$x(2)$		...	$x(2k-2)$	
Sie(T')		$x(1)$		$x(3)$	...		$x(2k-1)$.

Hier wieder $(x(0), ..., x(i)) \in T$ für alle $i \leqslant 2k-1$. In seinem nächsten (($k + 1$)-ten) Zug spielt Er(T') ein Paar $(x(2k), \Sigma_I)$, so daß $(x(0), ..., x(2k)) \in T$ und Σ_I eine Quasistrategie für Ihn(T) – also sich selbst – in $T_{(x(0),...,x(2k))}$ ($:= \{p\colon (x(0), ..., x(2k))\,\hat{}\,p \in T\}$) für Spiele, in welchem Sie(T) beginnt. D.h. also $\Sigma_I \subseteq T_{(x(0),...,x(2k))}$ ist ein nichtleerer gestutzter Baum, und für alle Positionen $(a(0), ..., a(2n-1)) \in \Sigma_I$ gerader Länge gilt $(a(0), ..., a(2n-1), a(2n)) \in \Sigma_I$ für alle $a(2n)$ mit $(a(0), ..., a(2n)) \in T_{(x(0),...,x(2k))}$. Im Spielstand

Er(T')	$x(0)$		...	$x(2k-2)$		$(x(2k), \Sigma_I)$
Sie(T')		$x(1)$	...		$x(2k-1)$	

ist Sie(T') am Zug. Sie(T') hat zwei Optionen.

Option 1. Sie(T') spielt $(x(2k+1), u)$, so daß $(x(0), ..., x(2k+1)) \in T$ und u eine Folge gerader Länge ist, so daß $u \in (\Sigma_I)_{x(2k+1)} \setminus (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$, also insbesondere $u \in T_{(x(0),...,x(2k+1))}$. Falls Sie($T'$) Option 1 wählen kann und auch wählt, also Spielstand

Er(T')	$x(0)$		...	$x(2k-2)$	$(x(2k), \Sigma_I)$	
Sie(T')		$x(1)$	...	$x(2k-1)$		$(x(2k+1), u)$

eintritt, so spielen im weiteren Verlauf die Spieler Er(T'), Sie(T') $x(2k+2), x(2k+3),...$ usw., so daß $(x(0), ..., x(j)) \in T$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und außerdem $u \subseteq (x(2k+2), x(2k+3), x(2k+4), ...)$. Es folgt dann $(x(i))_{i\in\mathbb{N}} \notin [T_X] = X$.

Option 2. Sie(T') spielt $(x(2k+1), \Sigma_{II})$, wobei $(x(0), ..., x(2k+1)) \in T$ und Σ_{II} eine Quasistrategie für Sie(T) im Baum $(\Sigma_I)_{(x(2k+1))}$, so daß $\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$. Falls Option 2 gewählt wird, so spielen Er(T'), Sie(T') im weiteren Verlauf $x(2k + 2), x(2k + 3), ...$, so daß $(x(2k + 2), x(2k + 3), ..., l) \in \Sigma_{II}$ für alle $l \geqslant 2k + 2$. Dann $(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in [T_X] = X$. Klarerweise hat Sie($T'$) in ihrem ($k + 1$)-ten Zug immer mind. eine der beiden Optionen: Falls Option 1 nicht gegeben ist, gilt also $(\Sigma_I)_{(x(2k+1))} \subseteq (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$ für alle erlaubten $x(2k + 1)$. Dann existiert eine Quasistrategie Σ_{II} für Sie(T) in $(\Sigma_I)_{(x(2k+1))}$ mit $\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$, z.B. $\Sigma_{II} = (\Sigma_I)_{(x(2k+1)}$.

Der Baum T' besteht nun aus allen erlaubten Spielständen im eben beschriebenen Spiel: T' enthält genau die endlichen Folgen einer der beiden folgenden Gestalten:

(1) $(x(0), ..., x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k + 1), u), x(2k + 2), ..., x(l)$

(2) $(x(0), ..., x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k + 1), \Sigma_{II}), x(2k + 2), ..., x(l),$

wobei $(x(0), ..., x(i)) \in T$ für alle $i \leqslant l$; Σ_I ist eine Quasistrategie für Ihn(T) in $T_{(x(0), ...,x(2k))}$ und bei (1) ist $u \in T_{(x(0), ...,x(2k+1))}$, $u \in (\Sigma_I)_{(x(2k+1))} \setminus (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$, $|u|$ ist gerade, $u \subseteq (x(2k +2), ..., x(l))$ oder $(x(2k + 2), ..., x(l)) \subseteq u$; und bei (2) ist Σ_{II} eine Quasistrategie für Sie(T) in $(\Sigma_I)_{(x(2k+1))}$ mit $\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$ und $(x(2k + 2), ..., x(l)) \in \Sigma_{II}$.

Die Funktion $\pi\colon T' \to T$ ist definiert durch $\pi(x(0), ..., x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k + 1), ...), x(2k + 2), ..., x(l)) = (x(0), x(1), ..., x(l))$. Somit gilt für alle $x' \in [T']$: $\pi(x') \in X \Leftrightarrow x'(2k + 1)$ hat die Form $(x(2k + 1), \Sigma_{II})$. Folglich ist $\pi^{-1}(x) = \bigcup\{N_{(x(0),...,x(2k-1),(x(2k),\Sigma I),(x(2k+1),\Sigma II))} \cap [T']\colon (x(0), ..., x(2k + 1)) \in T \wedge \Sigma_I, \Sigma_{II}$ *Quasistrategien wie beschrieben*$\}$ offen und abgeschlossen.

Als nächstes definieren wir φ. Sei σ' eine Strategie auf T'. Wir müssen $\sigma := \varphi(\sigma')$, eine Strategie auf T, so definieren, daß für alle $x \in [\sigma]$ ein $x' \in [\sigma']$ existiert mit $\pi(x') = x$. Außerdem soll $\sigma \upharpoonright n$ nur von $\sigma' \upharpoonright n$ abhängen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Fall 1. σ' ist eine Strategie für Ihn(T'). Beschreibe σ: Für die ersten $2k$ Züge befolgt σ σ', d.h. $\sigma \upharpoonright 2k = \sigma \upharpoonright 2k$. Dann schreibt σ' Ihm(T') einen Zug $(x(2k), \Sigma_I)$ vor. Wir setzen fest, daß σ Ihm(T) den Zug $x(2k)$ vorschreibt. Sie(T) antwortet mit $x(2k + 1)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Unterfall 1. Er(T) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $G((\Sigma_I)_{(x(2k+1))}, [(\Sigma_I)_{(x(2k+1))} \setminus X_{(x(0),...,x(2k+1))}])$. Dann schreibt σ Ihm(T) vor, solange diese Gewinnstrategie zu verwenden, bis zum ersten Mal ein Spielstand $u = (x(2k + 2), ..., x(2l-1))$ gerader Länge erreicht ist mit $u \notin (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$. Dann ist $(x(0), ..., x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k + 1), u), x(2k + 2), ..., x(2l-1))$ ein erlaubter Spielstand in T' bzw. Element von T', der kompatibel mit σ' ist. Nun setzen wir fest, daß für alle weiteren Züge in T Er(T) laut σ die Strategie σ' verwendet. Klarerweise gilt: Falls $(x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in [\sigma]$ und dafür Unterfall 1 gilt, also insbesondere Σ_I wie oben existiert, so existiert ein l, so daß mit $u = (x(2k + 2), ..., x(2l-1))$ gilt: $x' := (x(0), ..., x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k + 1), u), x(2k + 2), ...) \in [\sigma']$ und $\pi(x') = x$.

Unterfall 2. Sie hat eine Gewinnstrategie in $G((\Sigma_I)_{(x(2k+1))}, [(\Sigma_I)_{(x(2k+1))} \setminus X_{(x(0),...,x(2k+1))}])$. Sei Σ_{II} Ihre kanonische Gewinnquasistrategie in diesem Spiel. Diese existiert, da $X_{(x(0),...,x(2k+1))}$ abgeschlossen ist (siehe Beweis von Gale-Stewart). Dann gilt $\Sigma_{II} \subseteq (\Sigma_I)_{(x(2k+1))}$ und $\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x(0),...,x(2k+1))}$. Wir setzen nun fest, daß Er(T) laut σ (in weiteren Zügen $x(2k+2), x(2k+4)$ etc.) die Strategie σ' verwendet, wobei wir annehmen, daß Sie(T') auf T' $(x(2k+1), \Sigma_{II})$ gespielt hat. Diese Festsetzung gilt allerdings nur, solange wie Sie(T) ihre weiteren Züge $x(2l-1)$ so wählt, daß stets $(x(2k + 2), ..., x(2l-1)) \in \Sigma_{II}$ gilt. Denn falls Sie(T) „aus Σ_{II} hinausspielt“, kann σ' nicht mehr angewendet werden, da jener Spielstand nicht zu T' gehört. Falls dies aber geschieht, also ein kleinstes l mit $2l-1 > 2k + 2$ existiert mit $(x(2k + 2), ..., x(2l-1)) \notin \Sigma_{II}$, so folgt aus der Definition von Σ_{II}, daß Er im Spiel $G((\Sigma_I)_{(x(2k+1),...,x(2l-1))}, [(\Sigma_I)_{(x(2k+1),...,x(2l-1))} \setminus X_{(x(0),...,x(2l-1))}])$ eine Gewinnstrategie hat. In diesem Fall definieren wir σ gemäß Unterfall 1: Setze $u := (x(2k + 1), ..., x(2l-1))$ und setze fest, daß Strategie σ Ihm(T) die gleichen Züge $x(2l), x(2l + 2), ...$ vorschreibt wie σ', wobei wir annehmen, daß Sie(T') $(x(2k + 2), u)$ gespielt hat. Somit haben wir σ'auch für Unterfall 2 definiert.

Falls jetzt $x := (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in [\sigma]$ ein Spielverlauf ist wie im Unterfall 2, existieren also Quasistrategien Σ_I und Σ_{II} wie in der Definition von σ beschrieben. Falls $(x(2k+2), \ldots, x(2l-1)) \in \Sigma_{II}$ für alle l, folgt aus der Definition von σ, daß $x' := (x(0), \ldots, x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k+2), \Sigma_{II}), x(2k+2), \ldots) \in [\sigma']$. Nach Definition von π gilt $\pi(x') = \pi(x)$. Falls Sie(T) aus Σ_{II} „hinausspielt", haben wir die Situation von Unterfall 1.

Fall 2. σ' ist eine Strategie für Sie(T') auf T': Wieder haben wir $\sigma := \varphi(\sigma')$ zu definieren. Wiederum muß $\sigma \upharpoonright 2k = \sigma' \upharpoonright 2k$. Falls $(x(0), \ldots, x(2k-1))$ gespielt wird, spielt Er(T) einen Zug $x(2k)$. Betrachte folgende drei Mengen: $S = \{\Sigma_I$: *Σ_I ist eine Quasistrategie für Sie in* $T_{(x(0),\ldots,x(2k))}\}$, $U = \{(x(2k+1)\,\hat{}\,u \in T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$: $|u|$ *ist gerade und es existiert* $\Sigma_I \in S$, *so daß* σ' *Ihr*(T') *den Zug* $(x(2k+1), u)$ *vorschreibt, falls Er*(T') $(x(2k), \Sigma_I)$ *gespielt hat*$\}$, $V = \{x \in [T_{(x(0),\ldots,x(2k))}]$: $\exists\, (x(2k+1))\,\hat{}\,u \in U\ (x(2k+1))\,\hat{}\,u \subseteq x\}$. Klarerweise ist V offen. Wir betrachten folgendes Spiel auf $T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$:

Er($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$)		$x(2k+2)$		$x(2k+4)$	...
Sie($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$)	$x(2k+1)$		$x(2k+3)$		...

Die Gewinnmenge für Sie($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$) sei V.

Unterfall 1. Sie($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$) hat eine Gewinnstrategie in diesem Spiel. Wir setzen fest, daß Sie(T) laut σ eben diese Gewinnstrategie verwendet, bis zum ersten Mal $(x(2k+1), x(2k+2), \ldots, x(2l-1)) \in U$ gilt. Sei $u := (x(2k+2), \ldots, x(2l-1))$. Wähle nun Σ_I wie in der Definition von $(x(2k+1))\,\hat{}\,u \in U$. Wir setzen fest, daß Sie(T) laut σ für ihre weiteren Züge $x(2l+1), x(2l+3), \ldots$ die Strategie σ' befolgt, wobei wir annehmen, auf T' sei schon $(x(0), \ldots, x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k+1), u), x(2k+2), \ldots, x(2l-1))$ gespielt worden.

Unterfall 2. Er($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$) hat eine Gewinnstrategie auf $T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$. Nach Gale-Stewart sei Σ_I die kanonische Gewinnquasistrategie für Ihn($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$). Nehme mal an, daß Er(T') im Spielstand

Er(T')	$x(0)$		...	$x(2k-2)$	
Sie(T')		$x(1)$	...		$x(2k-1)$

den Zug $(x(2k), \Sigma_I)$ tut. Bemerke, daß dann σ' Ihr(T') keinen Zug der Form $(x(2k+1), u)$ vorschreiben kann, da sonst $(x(2k+1))\,\hat{}\,u \in U$ wäre; aber auch $(x(2k+1))\,\hat{}\,u \in \Sigma_I$ nach Definition von T'. Ein Widerspruch dazu, daß $\Sigma_I \cap U = \emptyset$, da Σ_I Gewinnquasistrategie ist. Zur Definition von σ nehmen wir an, Er(T') hat $(x(2k), \Sigma_I)$ gespielt. Wegen der Bemerkung von eben antwortet σ' mit einem Zug der Form $(x(2k+1), \Sigma_{II})$ (Option 2). Wir setzen fest, daß Sie(T) laut σ $x(2k+1)$ und in ihren weiteren Zügen σ' befolgt, wobei wir annehmen, auf T' sei $(x(0), \ldots, x(2k-1), (x(2k), \Sigma_I), (x(2k+1), \Sigma_{II}))$ gespielt worden. Dies allerdings nur solange wie Er(T) „in Σ_{II} bleibt", d.h. $(x(2k+2), \ldots, x(2l)) \in \Sigma_{II}$. Falls aber für ein (erstes) $l \geqslant k+1$ Er(T) ein $x(2l)$ spielt mit $(x(2k+2), \ldots, x(2l)) \notin \Sigma_{II}$, so ist sogar $(x(2k+2), \ldots, x(2l)) \notin (\Sigma_I)_{(x(2k+1))}$, da Σ_{II} eine Quasistrategie für Sie in $(\Sigma_I)_{(x(2k+1))}$ ist, also die Züge für Ihn nicht eingeschränkt werden. Nach Definition von Σ_I ist die Position $(x(2k+1), \ldots, x(2l))$ verloren für Ihn($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$), d.h. Sie($T_{(x(0),\ldots,x(2k))}$) hat eine Gewinnstrategie in dieser Position. Dann setzen wir fest, daß σ Ihn(T) vorschreibt, diese Gewinnstrategie zu verwenden, bis zum ersten Mal eine Position $u := (x(2k+2), \ldots, x(2l-1)) \in U$ erreicht ist. Definiere dann σ im weiteren Spielverlauf wie im Unterfall 1.

Die Verifikation, daß zu jedem $x \in [\sigma]$ ein $x' \in [\sigma']$ existiert mit $\pi(x') = x$, ist ähnlich wie im Fall 1. Schließlich ist klar, daß $\sigma \upharpoonright n$ nur von $\sigma' \upharpoonright n$ abhängt, für alle $n \in \mathbb{N}$. $\dashv$

LEMMA 6.6. *Sei* $k \in \mathbb{N}$ *und sei* $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ *eine* $(k+i)$*-Überlagerung von* T_i *für alle* $i \in \mathbb{N}$. *Dann existiert ein nichtleerer gestutzter Baum* T_∞ *und Abbildungen* $\pi_{\infty i}$, $\varphi_{\infty i}$, *so daß* $(T_\infty$,

$\pi_{\infty i}$, $\varphi_{\infty i}$) eine $(k + i)$-Überlagerung von T_i ist und außerdem $\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty i+1} = \pi_{\infty i}$ und $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty i+1} = \varphi_{\infty i}$. Folglich mit Induktion gilt: $\pi_{\infty 0} = \pi_1 \circ \pi_{\infty 1} = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_{\infty 2} = \ldots = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_{i+1} \circ \pi_{\infty i+1}$.

BEWEIS. Es gilt nach Voraussetzung $T_j \upharpoonright 2(k + i) = T_i \upharpoonright 2(k + i)$ für alle $j > i$. Wir können T_∞ somit folgendermaßen definieren: $s \in T_\infty :\Leftrightarrow s \in T_i$ für alle i mit $|s| \leq 2(k + i)$. Definiere $\pi_{\infty i}$: $T_\infty \to T_i$ wie folgt: Falls $s \in T_\infty$ und $|s| \leq 2(k + i)$, so setze $\pi_{\infty i}(s) = s$. Falls $|s| > 2(k + i)$, so wähle j minimal mit $2(k + j) \geq |s|$ und setze $\pi_{\infty i}(s) = \pi_{i+1} \circ \ldots \circ \pi_{j-1} \circ \pi_j(s)$. Prüfe $\pi_{\infty i} = \pi_{i+1} \circ \pi_{\infty i+1}$.

Zur Definition der $\varphi_{\infty i}$: Wir verwenden folgende Terminologie: Gegeben eine Strategie σ auf einem Baum T und $n \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir $\sigma \upharpoonright n$ eine partielle Strategie auf T. Bemerke folgendes: Für beliebiges j gilt $\varphi_{j+1}(\sigma) \upharpoonright 2(k + j) = \sigma \upharpoonright 2(k + j)$ für jede Strategie σ auf T_{j+1}:

Sei z.B. σ eine Strategie für Ihn. Angenommen es gilt Ungleichheit. Falls z.B. $t \in \sigma \upharpoonright 2(k + j) \setminus \varphi_{j+1}(\sigma) \upharpoonright 2(k + j)$, finde kleinstes gerades $n < 2(k + j)$ mit $t \upharpoonright n + 1 \notin \varphi_{j+1}(\sigma) \upharpoonright n + 1$, aber $t \upharpoonright n \in \varphi_{j+1}(\sigma) \upharpoonright n$. Falls also $s \in \varphi_{j+1}(\sigma) \upharpoonright 2(k + j)$ mit $t \upharpoonright n \subseteq s$, so $s \notin \sigma \upharpoonright 2(k + j)$. Wähle $x \in [\varphi(\sigma)]$ mit $s \subseteq x$. Nach Axiom (d) von Überlagerung existiert $x' \in [\sigma]$, so daß $\pi_{j+1}(x') = x$. Aber $\pi_{j+1} \upharpoonright (T_{j+1} \upharpoonright 2(k + j)) = id$, somit $x' \upharpoonright 2(k + j) = x \upharpoonright 2(k + j) = s$. Also doch $s \in \sigma \upharpoonright 2(k + j)$, ein Widerspruch.

Sei σ_∞ eine Strategie auf T_∞. Wir müssen $\varphi_{\infty i}(\sigma_\infty)$ als Strategie auf T_i definieren. Setze $\varphi_{\infty i}(\sigma_\infty) \upharpoonright 2(k + i) = \sigma_\infty \upharpoonright 2(k + i)$. Falls $j > i$, setze $\varphi_{\infty i}(\sigma_\infty) \upharpoonright 2(k + j) = \varphi_{i+1} \circ \ldots \circ \varphi_{j-1} \circ \varphi_j(\sigma_\infty \upharpoonright 2(k + j))$. Verifiziere $\varphi_{\infty i} = \varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty i+1}$.

Verifiziere, daß $(T_\infty, \pi_{\infty i}, \varphi_{\infty i})$ eine $(k + i)$-Überlagerung von T_i ist. Zum Axiom (d): Sei dazu σ_∞ eine Strategie auf T_∞ und $x_i \in [\varphi_{\infty i}(\sigma_\infty)]$ beliebig. Wir müssen $x_\infty \in [\sigma_\infty]$ finden mit $\pi_{\infty i}(x_\infty) = x_i$. Da $\varphi_{\infty i}(\sigma_\infty) = \varphi_{i+1}(\varphi_{\infty i+1}(\sigma_\infty))$, und da Axiom (d) für $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ gilt, finde $x_{i+1} \in [\varphi_{\infty i+1}(\sigma_\infty)]$, so daß $\pi_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$. In gleicher Weise fortfahrend finde so x_j für alle $j > i$, so daß $\pi_{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ und $x_{j+1} \in [\varphi_{\infty j+1}(\sigma_\infty)]$. Da $\pi_{i+1} \upharpoonright (T_{i+1} \upharpoonright 2(k + i)) = id$, folgt $x_{i+1} \upharpoonright 2(k + i) = x_i \upharpoonright 2(k + i)$. So fortfahrend erhalte $x_{j+1} \upharpoonright 2(k + j) = x_i \upharpoonright 2(k + i) \,\hat{}\, x_{i+1} \upharpoonright [2(k + i), 2(k + i + 1)) \,\hat{}\, \ldots \,\hat{}\, x_j \upharpoonright [2(k + j - 1), 2(k + j))$. Definiere $x_\infty = x_i \upharpoonright 2(k + i) \,\hat{}\, x_{i+1} \upharpoonright [2(k + i), 2(k + i + 1)) \,\hat{}\, \ldots \,\hat{}\, x_j \upharpoonright [2(k + j - 1), 2(k + j)) \,\hat{}\, \ldots$. Nach Konstruktion ist $x_\infty \in T_\infty$, und sogar $x_\infty \in [\sigma_\infty]$, da $\sigma_\infty \upharpoonright 2(k + j) = \varphi_{\infty j}(\sigma) \upharpoonright 2(k + j)$ und $x_j \in [\varphi_{\infty j}(\sigma_\infty)]$, somit $x_j \upharpoonright 2(k + j) \in \sigma_\infty$, alle $j > i$. Auch nach Konstruktion gilt $\pi_{\infty i}(x_\infty) = x_i$. ⊣

BEWEIS von Satz 6.4 aus den Lemmas 6.5 und 6.6. Gegeben ist $T \neq \varnothing$, T gestutzt und $X \subseteq [T]$ Borel. Wir beweisen die Behauptung (Existenz einer k-Überlagerung von T, die X entwirrt) durch Induktion über die Komplexität von X, d.h. über $\xi := \min\{\alpha \in \mathbb{O}rd\colon X \in \Sigma_\alpha^0([T])\}$.

Falls $\xi = 1$, ist X offen. Lemma 6.5 gibt die Behauptung für X^c, somit auch für X.

Angenommen, die Behauptung gelte für alle $\eta < \xi$. Nach Definition von $\Sigma_\xi^0([T])$ existieren $X_i \in \Pi_{\xi(i)}^0([T])$ für gewisse $\xi(i) < \xi$, alle $i \in \mathbb{N}$, so daß $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Da $X_i^c \in \Sigma_{\xi(i)}^0([T])$, gilt die Behauptung für X_i^c und somit auch für X_i für alle k'. Sei (T_1, π_1, φ_1) eine k-Überlagerung von $T_0 := T$, welche X_0 entwirrt. Da $\Pi_\alpha^0([T_0])$ abgeschlossen ist unter stetigen Urbildern, ist $\pi_1^{-1}(X_1) \in \Pi_{\xi(i)}^0([T_1])$, alle $i \geq 1$. Folglich existiert eine $(k + 1)$-Überlagerung (T_2, π_2, φ_2) von T_1, welche $\pi_1^{-1}(X_1)$ entwirrt. Bemerke, daß dann $(T_2, \pi_1 \circ \pi_2, \varphi_1 \circ \varphi_2)$ eine k-Überlagerung von T_0 ist, welche X_0 und X_1 entwirrt.

Allgemein finde eine $(k + i)$-Überlagerung $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ von T_i, welche $\pi_i^{-1}(\pi_{i-1}^{-1}(\ldots\pi_1^{-1}(X_i)\ldots))$ entwirrt. Klarerweise ist dann $(T_{i+1}, \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_{i+1}, \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_{i+1})$ eine k-Überlagerung von T_0, welche die Mengen $X_0, \ldots, X_i$ entwirrt. Mit Lemma 6.6 erhalten wir $(T_\infty, \pi_{\infty i}, \varphi_{\infty i})$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wie dort. Es gilt somit, daß $\pi_{\infty 0}^{-1}(X_i) = (\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_{i+1} \circ \pi_{\infty i+1})^{-1}(X_i) = \pi_{\infty i+1}^{-1}(\pi_{i+1}^{-1}(\ldots\pi_1^{-1}(X_i)\ldots))$ also offen und abgeschlossen ist in $[T_\infty]$. Somit entwirrt $(T_\infty, \pi_{\infty 0}, \varphi_{\infty 0})$ jedes X_i, $i \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\pi_{\infty 0}^{-1}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_{\infty 0}^{-1}(X_i)$ offen in $[T_\infty]$. Mit Lemma 6.5 finde schließlich eine k-Überlagerung (T', π, φ) von T_∞, welche $\pi_{\infty 0}^{-1}(X)$ entwirrt. Dann ist $(T', \pi_{\infty 0} \circ \pi, \varphi_{\infty 0} \circ \varphi)$ eine k-Überlagerung von T, welche X entwirrt. ⊣

ÜBUNGEN

6.1. Zeige, daß die drei in der Vorlesung gegebenen Definitionen einer Strategie äquivalent sind, d.h. es gibt kanonische Bijektionen zwischen den Mengen aller Strategien in einem Sinne.

6.2. Zeige, daß in jedem Spiel höchstens ein Spieler eine Gewinnstrategie hat.

6.3. Konstruiere mithilfe einer transfiniten Rekursion eine nichtdeterminierte Menge $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.

6.4. Sei $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ ein Baum und $X \subseteq [T]$. Zeige, daß $X' \subseteq A^{\mathbb{N}}$ existiert, so daß die beiden Spiele $G(T, X)$ und $G(A, X')$ äquivalent sind.

6.5. Zeige, daß das *-Spiel $G^*(A)$ äquivalent ist zu einem Spiel $G(T, X)$, wobei T ein nichtleerer gestutzter Baum und $X \subseteq [T]$ ist. Zeige unter Verwendung des Satzes von Martin, daß $G^*(A)$ determiniert ist, falls A Borel ist.

6.6. Sei T ein nichtleerer gestutzter Baum auf A und sei $X \subseteq [T]$ abgeschlossen, somit $X = [S]$ für einen Baum $S \subseteq T$. Definiere $\langle S_\xi : \xi \in \mathit{Ord} \rangle$ mittels transfiniter Rekursion wie folgt:

$p \in S_0 \Leftrightarrow p = (a_0, ..., a_{2n-1}) \in T \setminus S$,

$p \in S_{\xi+1} \Leftrightarrow p = (a_0, ..., a_{2n-1}) \in T \wedge \forall a_{2n}\, [p \,\hat{}\, a_{2n} \in T \Rightarrow \exists a_{2n+1}\, (p \,\hat{}\, a_{2n} \,\hat{}\, a_{2n+1} \in S_\xi)]$,

$S_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$, falls λ Limesordinalzahl.

Zeige, daß Er eine Gewinnstrategie im Spiel $G(T, X)$ hat genau dann, wenn $\emptyset \in \bigcup_{\xi \in \mathit{Ord}} S_\xi$.

A. LITERATUR

[Ke95] KECHRIS, A. S.: *Classical Descriptive Set Theory*, **Springer-Verlag Berlin,** 1995

[Ku80] KUNEN, K.: *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs*, **Elsevier Science B. V.,** 1980

MATHEMATISCHES SEMINAR
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
24098 KIEL, GERMANY
E-Mail: spinas@math.uni-kiel.de

Stand: Oktober 2001

B. INDEX