# Einführung in die Axiomatische Mengenlehre

Thomas Streicher

SS 2005

## Inhaltsverzeichnis



## Einleitung und Motivation

Schon im ersten Teil der Vorlesung haben wir als Beispiel einer Theorie 1. Stufe die Axiome von ZFC betrachtet, ohne weiter auf ihre Relevanz und ihre Konsequenzen einzugehen. Natürlich ist die Mengenlehre rein historisch nicht auf diese Weise entstanden. Vielmehr führten Ende des 19. Jahrhunderts verschiedene mathematische Fragestellungen darauf hin, Mengen relativ allgemeiner Natur zu betrachten, die nicht mehr unmittelbar geometrischen oder algebraischen Ursprungs sind. Ein Beispiel dafür ist die Menge aller reellen Zahlen, für die die Fourierentwicklung einer Funktion $f$ entweder nicht konvergiert oder mit dem Wert von f nicht übereinstimmt. Dies war für Georg Cantor, den Begründer der Mengenlehre, der Auslöser, beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu betrachten. Ein anderes Motiv für die Betrachtung beliebiger Teilmengen (von $\mathbb{Q}$) war Richard Dedekinds Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Sein Ausgangspunkt war, ein reelle Zahl $x$ mit der Menge $\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$ zu identifizieren und Mengen dieser Art folgendermaßen zu axiomatisieren:

Eine reelle Zahl ist eine Teilmenge $x$ von $\mathbb{Q}$, so daß

**(D1)** $x$ ist nichtleer

**(D2)** $x$ ist beschränkt, d. h. $\exists p \in \mathbb{Q}. \forall q \in x.\ q < p$

**(D3)** $x$ ist nach unten abgeschlossen, d. h. $q' < q \in x$ impliziert $q' \in x$

**(D4)** $\forall q \in x. \exists p \in x.\ q < p$, d. h. x besitzt kein größtes Element.

Ein weiteres Motiv für Cantor war die Fragestellung, ob es unendliche Mengen unterschiedlicher Größe gibt. Er hat zuerst bewiesen, daß $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ alle gleichmächtig sind, d. h. daß es eine Bijektion zwischen jeder dieser Mengen gibt. Nachdem Cantor lange Zeit versucht hat nachzuweisen, daß alle unendlichen Mengen gleichmächtig sind (was ja auf den ersten Blick nicht unbedingt als absurd erscheint!), und daran (natürlich!) gescheitert ist, kam er auf die glorreiche Idee zu zeigen, daß für jede Menge $X$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ nicht gleichmächtig zu $X$ sein kann, sondern echt mehr Element enthält.

Wir rekapitulieren Cantors Beweis: Sei $e : X \to \mathcal{P}(X)$ surjektiv. Wir betrachten die Menge $A := \{x \in X \mid x \notin e(x)\}$. Weil $e$ surjektiv ist, gibt es ein $x_0 \in X$ mit $A = e(x_0)$. Es gilt nun $x_0 \notin A \Leftrightarrow x_0 \notin e(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in A$, was nicht der Fall sein kann. Also gibt es keine Surjektion von $X$ nach $\mathcal{P}(X)$. $\square$

Dieses Beweismuster der „Diagonalisierung“ kommt häufig in der Logik vor, wie wir vor allem in Math. Logik II sehen werden (nämlich in der Rekursionstheorie und den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen!).

Wir nennen einen Beweis ein „Diagonalisierungsargument“, wenn er sich auf folgende prädikationlogische Tautologie beruft

$$\neg\exists x(\forall y(R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))) \tag{1}$$

In obigem Argument haben wir $R(x,y)$ als $y \in e(x)$ gewählt und aus (1) folgt mit dieser Setzung, daß

$$\neg\exists x(\forall y(y \in e(x) \leftrightarrow \neg y \in e(y)))$$

d. h. es gibt kein $x \in X$ mit $e(x) = \{y \in X \mid y \notin e(y)\}$.

Aus Cantors Theorem, daß es keine Surjektion von $X$ nach $\mathcal{P}(X)$ gibt, folgt insbesondere auch, daß es keine Injektion $i : \mathcal{P}(X) \to X$ gibt, da man ja sonst eine Surjektion $e : X \to \mathcal{P}(X)$ wie folgt definieren könnte

$$e(x) := \{y \in X \mid \exists a \in \mathcal{P}(X).\ y \in a \wedge i(a) = x\}$$

Andererseits gibt es aber eine Injektion von $X$ nach $\mathcal{P}(X)$, die $x$ auf $\{x\}$ abbildet. Also ist $\mathcal{P}(X)$ immer „größer“ als $X$. Somit gibt es eine Folge immer größerer unendlicher Mengen

$$\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}^2(\mathbb{N}), \ldots, \mathcal{P}^n(\mathbb{N}), \ldots$$

Eine genauere Untersuchung dieser unterschiedlichen „Unendlichkeiten“ werden wir später im Rahmen der Mengenlehre unter dem Namen „Kardinalzahlarithmetik“ vornehmen.

Wir haben nun eine Anzahl historischer Gründe für die Entstehung der Mengenlehre kennengelernt. Ihre Zielsetzung ist es, einen *einheitlichen axiomatischen Rahmen* bereitzustellen, in dem *sämtliche Begriffe und Argumentationsweisen der Mathematik ausgedrückt* werden können. Da bei einem solchen Vorgehen jegliche mathematische Begriffsbildung auf den Begriff der Menge und die Elementbeziehung $\in$ reduziert wird, mag es nicht verwunderlich erscheinen, daß manche intuitiven und wohlvertrauten Begriffe wie „natürliche Zahl" oder „geordnetes Paar" nur in etwas „gehackter" Weise in der Sprache der Mengenlehre ausgedrückt werden können.[1]

# 1 Sprache der Mengenlehre und ihre Axiome

Die axiomatische Mengenlehre ist eine spezielle Theorie 1. Stufe über folgender, sehr reduzierter Sprache. Es gibt nur zwei 2-stellige Relationssymbole

$$= \text{ (Gleichheit)} \quad \text{und} \quad \in \text{ (Elementbeziehung)},$$

wobei $=$ als reflexiv, symmetrisch und transitiv angenommen wird. Außerdem postulieren wir, daß $=$ eine Kongruenz bzgl. $\in$ ist, d.h.

$$\forall x, x', y, y'.\, x = x' \wedge y = y' \wedge x \in y \to x' \in y'$$

woraus für beliebige Formeln $A$ (in dieser Sprache) hergeleitet werden kann, daß

$$A(x) \wedge x = y \to A(y)$$

Man beachte, daß – auf den ersten Blick – die Ontologie der Mengenlehre äußerst reduktionistisch erscheint: es gibt nichts anderes als Mengen, selbst die Elemente von Mengen sind auch wieder Mengen. Insbesondere werden auch die natürlichen Zahlen als Mengen aufgefaßt bzw. kodiert: die Zahl $n$ wird aufgefaßt als die Menge der Zahlen, die echt kleiner als $n$ sind, somit ergibt sich zwangsläufig, daß

$$0 = \emptyset \text{ und } n + 1 = n \cup \{n\},$$

ein „Hack", der auf John v. Neumann zurückgeht. Es sei auch nochmal in Erinnerung gerufen, daß die einzigen grundlegenden Beziehungen zwischen Mengen die Gleichheit und die Elementbeziehung sind, alle anderen Eigenschaften von und Relationen zwischen Mengen müssen aus den Basisrelationen $=$ und $\in$ mithilfe der prädikatenlogischen Sprachmittel definiert werden.

Aufgrund der Absenz jedweder Funktionssymbole in der Sprache der Mengenlehre sind die einzigen Terme die Variablen. Es ist jedoch oft so, daß wir beweisen können, daß

$$\exists! y.\, A(\vec{x}, y)$$

[1] Im Jargon der Informatik könnte man sagen, daß die axiomatische, d.h. formalisierte, Mengenlehre eine „Assembler- bzw. Maschinensprache" für die Mathematik bereitstellt, allerdings mit der „wesentlichen" Einschränkung, daß sie nicht „ausführbar" (*executable*) ist! Bekanntlich programmiert es sich aber in so einer „Assembler- bzw. Maschinensprache" nicht so bequem, was der Grund dafür ist, daß man i.a. Mathematik nicht in der Sprache der formaliserten Mengenlehre formuliert.

d. h. $\exists y(A(\vec{x},y) \wedge \forall z(A(\vec{x},z) \rightarrow y = z))$, d.h. es gibt genau ein $y$, so daß $A(\vec{x},y)$. Für dieses eindeutig bestimmte $y$ erweist es sich als zweckmäßig, einen Term $t(\vec{x})$ einzuführen, der dem definierenden Axiom

$$A(\vec{x},t[\vec{x}])$$

genügt. Eine Formel $B(t(\vec{x}))$ verstehen wir dann als abkürzende Schreibweise für

$$\exists y(A(\vec{x},y) \wedge B(y))$$

wobei natürlich $y$ eine frische Variable ist.

Wir werden nun der Reihe nach die einzelnen Axiome der Mengenlehre erläutern und ihre ersten unmittelbaren Konsequenzen diskutieren.

**Extensionalität (Extensionality)**

Das *Extensionalitätsaxiom*

$$(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow x = y$$

besagt, daß Mengen $x$ und $y$ gleich sind, falls sie dieselben Elemente beinhalten. (Die Umkehrung gilt trivialerweise aufgrund der Gleichheitsaxiome.) Das Extensionalitätsaxiom besagt also, daß Mengen einfach Kollektionen von Mengen seien, die genau dann als gleich zu erachten sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

**Aussonderungsschema (Separation Scheme)**

Das *Separations*- oder *Aussonderungs*schema besagt, daß für jede beliebige Formel $A(z)$ in der Sprache der Mengenlehre

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$$

gilt, wobei $x$ und $y$ nicht frei in $A$ sind. Also ist für jede Menge $x$ und jede in der Sprache der Mengenlehre formulierbare Eigenschaft $A(z)$ die Gesamtheit aller $z \in x$ mit $A(z)$ eine Menge. Diese ist aufgrund des Extensionalitätsaxioms eindeutig bestimmt ist und wird mit dem Term

$$\{z \in x \mid A(z)\}$$

bezeichnet. (Dies ist das erste Beispiel für die auf Seite 3 diskutierte Konvention, für eindeutig definierte Objekte Terme als Namen einzuführen, um das Sprechen über sie zu erleichtern.)

Man wäre vielleicht versucht, so wie Gottlob Frege Ende des 19. Jahrhunderts, statt des Separationsschemas das sogenannte *Komprehension*schema zu postulieren

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow A(y))$$

wobei $x$ in $A(y)$ nicht frei vorkommt. Allerdings würde durch die Hinzunahme dieses so harmlos erscheinenden Komprehensionsschemas ein Widerspruch herleitbar, wie Bertrand RUSSEL Anfang des 20. Jahrhunderts gezeigt hat: Sei $R = \{x \mid x \notin x\}$, dann gilt offensichtlich

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

was offensichtlich aus rein logischen Gründen unmöglich ist.
Man beachte, daß Russels Argument nichts anderes als der übliche prädikatenlogische Beweis von

$$\neg\exists x.\forall y.\ A(x,y) \leftrightarrow \neg A(y,y) \tag{2}$$

ist, wobei $A(x,y) \equiv y \in x$ gesetzt wurde. Die Widersprüchlichkeit des Komprehensionsschemas ergibt sich nun daraus, dass es zu beweisen gestattet, daß

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \neg y \in y)$$

was im Widerspruch zu (2) steht. Das Problem ist allerdings nicht, daß für eine Menge $x$ die Menge aller $y \in x$ mit $A(y)$ existiert, wie es das Separations- bzw. Aussonderungsschema fordert, sondern die Annahme einer Menge $V$ aller Mengen. Wenn diese nämlich existierte, so gäbe es aufgrund des Separationsschemas die Menge $R = \{x \in V \mid x \notin x\}$ was, wie Russel gezeigt hat, zu dem Widerspruch $R \in R \leftrightarrow \neg R \in R$ führt, da ja $R \in V$. Wir haben also bewiesen, daß $\neg\exists x \forall y\ y \in x$, d. h. $\forall x \exists y\ \neg y \in x$.

Dies erscheint auf den ersten Blick verwirrend, da man sich ja Gesamtheiten (von Mengen) wie $V$ oder $R$ durchaus vorstellen kann und sie *per se* gar nicht als widersprüchlich erscheinen. Sind sie auch nicht: widersprüchlich ist bloß die Annahme, daß solche Gesamtheiten auch immer Mengen sind. Die Gesamtheiten $V$ und $R$ können auch nicht in einer Menge als Teilmengen enthalten sein, da ja sonst aufgrund des Separationsschemas $V$ bzw. $R$ als Mengen existieren würden. Solche großen Kollektionen von Mengen werden üblicherweise als (eigentliche) *Klassen* bezeichnet, haben jedoch in der Mengenlehre *à la* Zermelo-Fraenkel keinen ontologischen Status, was ja auch ganz unnötig ist, da sie durch Prädikate in der Sprache der Mengenlehre ausgedrückt werden können. Es gibt jedoch eine zur Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre $\mathsf{ZF}$ equikonsistente auf Gödel, Bernays und v. Neumann zurückgehende *Klassentheorie* $\mathsf{GBN}$, auf die wir hier nicht näher eingehen, in der Klassen einen ontologischen Status haben (d. h. als existierend angenommen werden) und Mengen als diejenigen Klassen definiert werden, die selbst in einer Klasse als Elemente enthalten sind. Selbstverständlich wäre es widersprüchlich, die Existenz einer Klasse aller Klassen anzunehmen, was aber in $\mathsf{GBN}$ nicht geschieht.

Man beachte, daß das Separationsschema die Existenz der leeren Menge gewährleistet. Man kann ja beweisen, daß

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \neq z)$$

also auch $\forall x \exists y \forall z (z \in y \to z \neq z)$, d.h. $\forall x \exists y \forall z\ z \notin y$, da ja $z \neq z$ aufgrund der Gleichheitsaxiome immer falsch ist. Die Behauptung

$$\exists y \forall z\ z \notin y$$

folgt daraus rein logisch (nämlich mit $(\forall E)$). Dieses $y$ ist eindeutig bestimmt und wird (wie üblich) mit $\emptyset$ bezeichnet.

**Bemerkung** Extensionalität und Separation gestatten uns noch nicht, außer der leeren Menge irgendwelche anderen Mengen als existent nachzuweisen. Dies sieht man daran, daß in der Struktur $\mathcal{M}$ mit

$$|\mathcal{M}| = \{*\} \quad =^{\mathcal{M}} = \{(*, *)\} \quad \in^{\mathcal{M}} = \emptyset$$

das Extensionalitätsaxiom und das Separationschema gelten.

### Paarmengenaxiom (Pairing)

Das *Paarmengenaxiom* (engl. *pairing*)

$$\forall x, y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

besagt, daß es für beliebige Mengen $x$ und $y$ gibt eine Menge $z$ gibt, die gerade $x$ und $y$ als Elemente enthält; diese eindeutig bestimmte Menge wird (wie üblich) mit

$$\{x, y\}$$

bezeichnet. Wenn $x = y$, dann schreiben wir $\{x\}$ (anstatt $\{x, x\}$) für die *Singleton*menge, die $x$ als einziges Element enthält. Für $\{x\}$ gilt offenbar

$$\forall y (y \in \{x\} \leftrightarrow y = x)$$

Man kann nun die Paarmengenbildung iterieren und aus $x$ und $y$ die Menge

$$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

bilden, die als „geordnetes Paar von $x$ und $y$" bezeichnet wird. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

was den Namen „geordnetes Paar" rechtfertig. Diese auf K. Kuratowski zurückgehende Codierung geordneter Paare entbehrt nicht einer gewissen Willkürlichkeit, weil man ja $\langle x, y\rangle$ genauso gut als $\{\{x, y\}, \{y\}\}$ hätte definieren können oder als

$$\{\{\{\{x\}\}\}, \{\{\{x\}\}, y\}\}$$

d. h. als $\langle\langle x, x\rangle, y\rangle$, wobei $\langle -, -\rangle$ wie ursprünglich definiert ist).
Es sei bemerkt, dass wir $n$-Tupel induktiv wie folgt definieren können

$$\langle\rangle := \emptyset \qquad \langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle := \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle, a_{n+1}\rangle$$

wobei allerdings $\langle x, y\rangle$ eine andere als die ursprüngliche Bedeutung erhält. Es wäre jedoch übertrieben, dies notationell zu unterscheiden!

**Vereinigungsaxiom (Union)**

Das *Vereinigungs*axiom (engl. *union*)

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u))$$

besagt, daß es für jede Menge $x$ eine Menge $y$ gibt, die genau diejenigen Mengen $z$ als Elemente enthält, die in irgendeiner Menge $u \in x$ als Element enthalten sind. Diese aufgrund des Extensionalitätsaxioms eindeutig bestimmte Menge $y$ wird wie üblich mit $\bigcup x$ bezeichnet.

Wenn wir für Mengen $x$ und $y$ die Menge $x \cup y$ definieren als

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}$$

dann können wir leicht nachweisen, daß

$$\forall z (z \in x \cup y \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y))$$

Es sei hier bemerkt, daß wir bereits ohne Paarmengen- und Vereinigungsaxiom Durchschnitt und Differenz von Mengen folgendermaßen definieren können als

$$\begin{aligned} x \cap y &:= \{z \in x \mid z \in y\} \\ x - y &:= \{z \in x \mid z \notin y\} \end{aligned}$$

Also bilden die Teilmengen einer Menge $x$ einen booleschen Verband bzgl. der Mengeninklusion

$$u \subseteq v \equiv \forall x (x \in u \to x \in v)$$

Offensichtlich gilt aufgrund des Extensionalitätsaxioms, daß

$$u = v \leftrightarrow u \subseteq v \wedge v \subseteq u$$

Es sei bemerkt, daß wir mithilfe von Pairing und Union beliebige endliche Mengen definieren können, nämlich als

$$\{\} := \emptyset \qquad \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\} := \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$$

vermittels (externer) Induktion.

**Notation** Wir schreiben oft abkürzend

$$\begin{aligned} \forall y \in x.\, A \quad &\text{für} \quad \forall y (y \in x \to A) \\ \exists y \in x.\, A \quad &\text{für} \quad \exists y (y \in x \wedge A) \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Notation kann man das Vereinigungsaxiom folgendermaßen formulieren: für jede Menge $x$ ist die Klasse $\{y \mid \exists u \in x.\, y \in u\}$ selbst wieder eine Menge.

**Bemerkung**
Folgendes Modell zeigt, daß Union nicht aus Extensionality, Separation und Pairing folgt. Sei $\phi : \mathbb{N} \to \{\emptyset\} \cup \{\{n, m\} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ eine Bijektion. Sei $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$, $=^{\mathcal{M}}$ die Gleichheit auf $\mathbb{N}$ und $n \in^{\mathcal{M}} m \equiv n \in \phi(m)$. Man zeigt leicht, daß $\mathcal{M}$ Extensionality, Separation und Pairing erfüllt. Da aber in $\mathcal{M}$ die Menge $\{0, 1, 2\} = \bigcup\{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ nicht existiert, erfüllt $\mathcal{M}$ das Axiom Union nicht.

**Potenzmengenaxiom (Power Set)**

Das *Potenzmengen*axiom (engl. *power set*)

$$\forall x \exists y \forall u \, (u \in y \leftrightarrow u \subseteq x)$$

besagt, daß die Klasse $\{u \mid u \subseteq x\}$ aller Teilmengen einer vorgegebenen Menge $x$ selbst wieder eine Menge ist, die wir (wie üblich) mit $\mathcal{P}(x)$ bezeichnen und *Potenzmenge von* $x$ nennen. Im Falle einer unendlichen Menge $x$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$ etwas unbestimmter Natur, da es etwas unklar ist, was eine beliebige Teilmenge von $x$ eigentlich sein soll (vgl. das Skolemsche Paradox aus Teil I der Vorlesung, das besagt, daß jede konsistente Theorie in der Sprache der Mengenlehre insbesondere auch ein abzählbares Modell besitzt!). Vermittels des Separationschemas wird ja bloß die Existenz definierbarer Teilmengen von $x$ sichergestellt. Es hängt also vom (implizit) zugrundegelegten Modell ab, welche Teilmengen von $x$ darüber hinaus im Modell auch existieren. Der etwas vage Charakter von $\mathcal{P}(x)$ wird insbesondere deswegen als problematisch (vom philosophisch-grundlagentheoretischen Gesichtpunkt!) erachtet, weil Teilmengen von $x$ durch Quantifikation über $\mathcal{P}(x)$ definiert werden können ohne daß man genau weiß, welche Elemente $\mathcal{P}(x)$ denn nun enthält. Dieses Phänomen wird als *Imprädikativität*[2] bezeichnet.
Als erste Anwendung des Potenzmengenaxioms zeigen wir, daß für Mengen $u, v$ die Klasse $u \times v = \{\langle x,y \rangle \mid x \in u \wedge y \in v\} = \{z \mid \exists x \in u. \exists y \in v. z = \langle x,y \rangle\}$ tatsächlich auch eine Menge ist. Zu diesem Zweck beobachten wir, daß für $x \in u$ und $y \in v$ das Paar $\langle x,y \rangle = \{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}(u \cup v)$, weil $\{x\},\{x,y\} \in \mathcal{P}(u \cup v)$ und somit $\langle x,y \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(u \cup v))$. Also ist

$$u \times v = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(u \cup v)) \mid \exists x \in u. \exists y \in v. \; z = \langle x,y \rangle\}$$

aufgrund des Separationsschemas eine Menge.
Natürlich können wir für $n \geq 1$ auch $n$-fache kartesische Produkte folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 \\ A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1} &= (A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} A_1 \times \ldots \times A_n &= \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\} = \\ &= \{z \mid \exists x_1 \in A_1. \ldots \exists x_n \in A_n. \, z = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle\} \end{aligned}$$

Die Elemente von $\mathcal{P}(A_1 \times \ldots \times A_n)$ heißen $n$-stellige Relationen zwischen den Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Offensichtlich ist es in der Sprache der Mengenlehre ausdrückbar, daß eine Menge $z$ ein Paar ist, nämlich durch $\exists x, y(z = \langle x,y \rangle)$. Eine Menge $R$ heißt *2-stellige Relation* genau dann, wenn

$$\forall z \in R. \exists x, y. \; z = \langle x,y \rangle$$

[2] Beachte, daß man Teilmengen von $x$ auch durch Quantifikation über die noch vagere Gesamtheit *aller* Mengen definieren kann.

Für 2-stellige Relationen $R$ sei ihr Definitions- und Wertebereich definiert als

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{dom}(R) & = & \{x \mid \exists y.\, \langle x,y\rangle \in R\} \\ \mathsf{rng}(R) & = & \{y \mid \exists x.\, \langle x,y\rangle \in R\} \end{array}$$

welches beides Mengen sind, da $\mathsf{dom}(R))$ und $\mathsf{rng}(R)$ beides Teilmengen von $\bigcup\bigcup R$ sind. Eine zweistellige Relation $f$ heißt *Funktion* genau dann, wenn

$$\forall x,y,z\,(\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f \to y = z)$$

Wie üblich schreiben wir meist $y = f(x)$ anstatt $\langle x,y\rangle \in f$. Wenn $f$ eine Funktion und $X$ eine Menge ist, so sind

$$\begin{array}{rcl} f[X] & := & \{y \mid \exists x \in X.\, \langle x,y\rangle \in f\} \\ f^{-1}[X] & := & \{x \mid \exists y \in X.\, \langle x,y\rangle \in f\} \end{array}$$

beides Mengen, da $f[X] \subseteq \mathsf{rng}(f)$ und $f^{-1}[X] \subseteq \mathsf{dom}(f)$, und heißen *Bild* bzw. *Urbild von* $X$ *unter* $f$. Es sei bemerkt, daß diese Begriffe auch für Klassen Sinn machen. In diesem Fall reden wir von „Klassenfunktionen" bzw. 2-stelligen „Klassenrelationen".
Wie üblich schreiben wir $f : X \to Y$, wenn $f$ eine Funktion ist, $X = \mathsf{dom}(f)$ und $Y$ und $\mathsf{rng}(f) \subseteq Y$. Wenn $f : X \to Y$, dann $f \in \mathcal{P}(X \times Y)$. Somit ist für gegebene Mengen $X, Y$

$$Y^X = [X \to Y] := \{f \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid f : X \to Y\}$$

selbst eine Menge. Mehrstellige Funktionen werden wie üblich dadurch erfaßt, daß man $X$ von der Gestalt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ wählt.
Die bisherigen Axiome stellen sicher, daß Mengen unter den üblichen Operationen wie $\times$, $\to$, $\mathcal{P}$ etc. abgeschlossen sind. Jedoch können wir mit den bisherigen Axiomen noch nicht die Existenz unendlicher Mengen sicherstellen. Und das mit gutem Grund, da man die Menge der natürlichen Zahlen irgendwie „erschaffen"[3] muß. Es sei darauf hingewiesen, daß man die Existenz der einzelnen natürlichen Zahlen

$$0 = \emptyset \qquad n + 1 = n \cup \{n\}$$

durchaus mithilfe unserer Axiome nachweisen kann, nicht jedoch die Existenz einer Menge, die *alle* natürlichen Zahlen umfaßt. Diese „erschaffen" wir nicht (wie der von Kronecker zuhilfe gerufene „liebe Gott"), sondern postulieren sie (ganz „säkular") mithilfe des

[3]vgl. den merkwürdigen Ausspruch von L. Kronecker:

> „Der liebe Gott hat die natürlichen Zahlen erschaffen,
> der Rest ist Menschenwerk."

**Unendlichkeitsaxiom (Infinity)**

welches besagt, daß

$$\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x.\, y \cup \{y\} \in x)$$

Statt $y \cup \{y\}$ schreiben wir im folgenden $\mathsf{Sc}(y)$, sprich „Successor von $y$“. Wir nennen eine Menge $x$ *induktiv*, wenn

(1) $\emptyset \in x$ und

(2) $\mathsf{Sc}(y) \in x$ für alle $y \in x$.

Das Unendlichkeitsaxiom postuliert also die Existenz einer induktiven Menge. Es läßt sich leicht zeigen, daß induktive Mengen unter beliebigen nichtleeren Durchschnitten abgeschlossen sind. Somit existiert eine *kleinste induktive Menge*, die sogenannte *Menge der natürlichen Zahlen*, die wir wie üblich mit $\mathbb{N}$ bezeichnen.[4] Da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist, gilt für $P \subseteq \mathbb{N}$, daß $P = \mathbb{N}$ genau dann, wenn $P$ induktiv ist, d. h.

$$\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\big((\emptyset \in P \wedge \forall x \in P.\, \mathsf{Sc}(x)(x) \in P) \to \forall x \in \mathbb{N}.\, x \in P\big)$$

worin wir das wohlvertraute „Induktionsaxiom“ für die natürlichen Zahlen erkennen, das wir allerdings hergeleitet haben (und zwar ziemlich unmittelbar aus der Definition von $\mathbb{N}$ !).
Wir weisen nun noch zwei weitere Eigenschaften von $\mathbb{N}$ nach:

(1) $\forall x \in \mathbb{N}.\ \emptyset \neq \mathsf{Sc}(x)$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{N}.\ \mathsf{Sc}(x) = \mathsf{Sc}(y) \to x = y$.

(1) ist trivial, da $x \in x \cup \{x\} = \mathsf{Sc}(x)$, aber $x \notin \emptyset$. Für (2) müssen wir ein paar Vorarbeiten leisten.

**Definition 1.1** *Eine Menge $x$ heißt* transitiv, *wenn $\forall y \in x. \forall z \in y.\, z \in x$, d.h. $\forall y \in x.\, y \subseteq x$.* $\Diamond$

**Lemma 1.1** *Die Menge $\mathbb{N}$ ist transitiv.*

*Beweis:* Wir zeigen, daß die Menge $M := \{x \in \mathbb{N} \mid x \subseteq \mathbb{N}\}$ induktiv ist. Es gilt $\emptyset \in M$, da $\emptyset \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$. Angenommen $x \in M$, d.h. $x \in \mathbb{N}$ und $x \subseteq \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathsf{Sc}(x) = x \cup \{x\} \subseteq \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist, gilt auch $\mathsf{Sc}(x) = x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$. Somit ist $\mathsf{Sc}(x)$ auch Element von $M$.

[4] Die Existenz von $\mathbb{N}$ wird folgendermaßen nachgewiesen. Sei $x$ eine durch das Unendlichkeitsaxiom postulierte induktive Menge. Dann ist

$$\mathbb{N} = \{y \in x \mid \forall z (z \text{ induktiv} \to y \in z)\}$$

selbst wieder induktiv. Wenn $a$ induktiv ist, dann ist auch $a \cap x$ induktiv und somit $\mathbb{N} \subseteq a \cap x \subseteq a$. Also ist $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge.

Weil $M$ induktiv ist, gilt nun $\mathbb{N} \subseteq M$ (und auch $\mathbb{N} = M$, da ja $M \subseteq \mathbb{N}$). Also gilt ür alle $x \in \mathbb{N}$, daß $x \in M$ und somit $x \subseteq \mathbb{N}$. Also ist $\mathbb{N}$ transitiv. $\square$

Daraus folgt, daß für $x \in \mathbb{N}$ gilt $x = \{y \in \mathbb{N} \mid y \in x\}$, d.h. $x = \{y \in \mathbb{N} \mid y < x\}$, wenn man $<$ als $\in$ definiert.

**Lemma 1.2** *Alle Elemente von* $\mathbb{N}$ *sind transitiv.*

*Beweis:* Wir zeigen, daß $M := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ transitiv}\}$ induktiv ist, woraus folgt, daß $\mathbb{N} \subseteq M$ und somit all Elemente von $\mathbb{N}$ transitiv sind.
Offensichtlich ist $\emptyset$ transitiv, da $\forall y \in \emptyset . y \subseteq \emptyset$. Angenommen $x \in \mathbb{N}$ sei transitiv. Wenn $y \in x$, so $y \subseteq x$ (weil $x$ als transitiv angenommen wurde), also $y \subseteq x \cup \{x\}$. Außerdem ist $x \subseteq x \cup \{x\}$. Somit gilt $\forall y \in x \cup \{x\} . y \subseteq x \cup \{x\}$, d.h. $\mathsf{Sc}(x)$ ist transitiv. $\square$

**Lemma 1.3** *Es gilt* $x \notin x$ *für alle* $x \in \mathbb{N}$.

*Beweis:* Wir zeigen, daß $M := \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin x\}$ induktiv ist. woraus folgt, daß $\mathbb{N} \subseteq M$ und somit $x \notin x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
Offenbar $\emptyset \notin \emptyset$, also $\emptyset \in M$. Sei $x \in M$. Angenommen $\mathsf{Sc}(x) \in \mathsf{Sc}(x)$. Wenn $\mathsf{Sc}(x) \in x$, dann $x \in \mathsf{Sc}(x) \in x$ und somit $x \in x$ (da $x$ transitiv ist) im Widerspruch zu $x \notin x$ (wegen $x \in M$). Wenn $\mathsf{Sc}(x) = x$, dann $x = x \cup \{x\}$ und somit $x \in x$, im Widerspruch zu $x \notin x$ (da $x \in M$). Also haben wir gezeigt, daß $\mathsf{Sc}(x) \notin \mathsf{Sc}(x)$, da $\mathsf{Sc}(x) \in \mathsf{Sc}(x)$ genau dann, wenn $\mathsf{Sc}(x) \in x$ oder $\mathsf{Sc}(x) = x$. $\square$

Nun können wir (2) zeigen.

**Lemma 1.4** *Wenn* $x, y \in \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{Sc}(x) = \mathrm{Sc}(y)$, *dann* $x = y$.

*Beweis:* Wenn $\mathsf{Sc}(x) \subseteq \mathrm{Sc}(y)$, dann $x \in y$ oder $x = y$. Wenn $\mathsf{Sc}(y) \subseteq \mathsf{Sc}(x)$, dann $y \in x$ oder $y = x$. Wenn also $\mathsf{Sc}(x) = \mathsf{Sc}(y)$ und $x \neq y$, dann $x \in y$ und $y \in x$ und somit $x \in x$ (weil $x$ transitiv ist). Das ist aber wegen Lemma 1.3 nicht möglich. $\square$

**Übung** Zeige, daß für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, daß jede nichtleere Teilmenge $z \subseteq x$ ein $y$ enthält mit $y \cap z = \emptyset$.

### Ersetzungsschema (Replacement)

Das *Ersetzungsschema* (engl. *replacement scheme*) besagt, daß

$$\big(\forall x{\in}u . \exists! y\, A(x, y)\big) \to \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x \in u . A(x, y))$$

wobei $A$ eine beliebige Formel in der Sprache der Mengenlehre ist. Informell heißt dies, daß das Bild einer Menge $u$ unter einer Relation $A(x,y)$, die in der Sprache der Mengenlehre (mithilfe von Parametern) definierbar ist, selbst wieder eine Menge ist, sofern $A$ eingeschränkt auf $u$ total und rechtseindeutig ist. Insbesondere ist dann

$$\{z \in u \times v \mid \exists x, y\; z = \langle x, y\rangle \wedge A(x,y)\}$$

eine Funktion im mengentheoretischen Sinn.
Man zeigt leicht (Übung!), daß aus dem Ersetzungsschema folgt, daß

$$\big(\forall x, y, z(A(x,y) \wedge A(x,z) \to y = z)\big) \to \forall u \exists v \forall z(z \in v \leftrightarrow \exists x{\in}u. A(x,z))$$

Aus diesem Schema folgt unmittelbar das Aussonderungsschema, indem man $A(x,y)$ als $x = y$ wählt. Jedoch läßt sich das Aussonderungsschema schon direkt aus dem Ersetzungsschema beweisen (Übung!). Außerdem läßt sich das Paarmengenaxiom aus dem Ersetzungsschema herleiten (Übung!).

### Regularitätsaxiom (Regularity)

Das *Regularitätsaxiom* besagt, daß

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y{\in}x.\, y \cap x = \emptyset)$$

d.h. jede nichtleere Menge $x$ besitzt ein „$\in$-minimales" Element $y$, d.h. $y \in x$ und $\forall z \in y.\, z \notin x$. Weite Teile der Mengenlehre, insbesondere die für die „normale" Mathematik relevanten solchen, lassen sich ohne Regularitätsaxiom entwickeln (übrigens auch die im übernächsten Abschnitt behandelte Theorie der Ordinalzahlen). Jedoch ist das Regularitätsaxiom in der axiomatischen Mengenlehre selbst von großem Nutzen, da es folgendes Prinzip der $\in$-*Induktion*

$$\forall x\big((\forall y{\in}x. A(y)) \to A(x)\big) \to \forall x\, A(x)$$

für beliebige in der Sprache der Mengenlehre ausdrückbare Prädikate $A(x)$ bereitstellt. Andererseits erlaubt das Schema der $\in$-Induktion, das Regularitätsaxiom herzuleiten (Übung!) und ist somit zu ihm äquivalent.

Um das Schema der $\in$-Induktion herzuleiten, brauchen wir folgenden Hilfssatz, dessen Beweis eine interessante (und typische) Anwendung des Ersetzungsschemas beinhaltet.

**Lemma 1.5** *Für jede Menge $x$ gibt es eine kleinste transitive Menge $\mathsf{TC}(x)$, die $x$ als Teilmenge enthält.*

*Beweis:* Sei

$$\begin{aligned} F(y,z) \;\equiv\; \exists f\; \big(&f \text{ ist Funktion}) \wedge f(y) = z \wedge f(\emptyset) = x \wedge \\ &\forall u, v(\langle \mathsf{Sc}(u), v\rangle \in f \to \exists w(\langle u, w\rangle \in f \wedge v = \textstyle\bigcup w))\big) \end{aligned}$$

Durch Induktion über $\mathbb{N}$ zeigt man leicht, daß

(1) $\forall n{\in}\mathbb{N}.\, \exists! z\, F(n,z)$

(2) $F(\emptyset, x)$

(3) $\forall n{\in}\mathbb{N}.\forall u, v\big(F(n,u) \wedge F(\mathsf{Sc}(n), v) \to v = \bigcup u\big)$.

Aufgrund des Ersetzungsschemas existiert nun

$$M = \{F(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

als Menge und aufgrund des Vereinigungsaxioms existiert die Menge

$$\mathsf{TC}(x) = \bigcup M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(n)$$

Offensichtlich ist $\mathsf{TC}(x)$ transitiv: wenn $y \in \mathsf{TC}(x)$, dann $y \in F(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$; wenn nun $z \in y \in F(n)$, dann $z \in \bigcup F(n) = F(\mathsf{Sc}(n))$, also $z \in \mathrm{TC}(x)$.
Sei $u$ eine transitive Menge mit $u \supseteq x$. Dann zeigt man leicht mit Induktion, daß $F(n) \subseteq u$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathsf{TC}(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(n) \subseteq u$. Somit ist $\mathsf{TC}(x)$ die kleinste transitive Menge, die $x$ als Teilmenge enthält (da ja auch gilt, daß $x = F(\emptyset) \subseteq \mathsf{TC}(x)$). $\square$

**Satz 1.1** *Sei $A(x)$ ein in der Sprache der Mengenlehre definierbares Prädikat. Dann gilt*

$$\forall x\big((\forall y \in x.A(y)) \to A(x)\big) \to \forall x A(x)$$

*Beweis:* Angenommen, es gelte

$$\forall x\big((\forall y \in x.A(y)) \to A(x)\big) \tag{3}$$

und es gebe eine Menge $x$ mit $\neg A(x)$. Dann gibt es ein $y \in x$ mit $\neg A(y)$ wegen (der Kontraposition von) (3). Sei $M := \{y \in \mathsf{TC}(x) \mid \neg A(y)\}$. Da $M$ nichtleer ist, gibt es wegen des Regularitätsaxioms ein $y \in M$ mit $y \cap M = \emptyset$, d.h. $\forall z{\in}y.\, z \notin M$. Aufgrund der Transitivität von $\mathsf{TC}(x)$ und $y \in \mathsf{TC}(x)$ gilt $\forall z{\in}y.\, z \in \mathsf{TC}(x)$ und somit $\forall z{\in}y.\, A(z)$, woraus mit (3) folgt, daß $A(y)$ im Widerspruch zu $y \in M$. Also haben wir bewiesen, daß $\forall x A(x)$. $\square$

Umgekehrt folgt aus dem Schema der $\in$-Induktion das Regularitätsaxiom, indem man für beliebige Mengen $a$ in dem $\in$-Induktionsschema das Prädikat $A(x)$ durch $x \notin a$ ersetzt. Mit Kontraposition ergibt sich

$$(\exists x\, x \in a) \to \exists x\ ((\forall y{\in}x.\, y \notin a) \wedge x \in a)$$

also das Regularitätsaxiom.

### Auswahlaxiom (Axiom of Choice)

Das *Auswahlaxiom* (engl. *Axiom of Choice*) besagt, daß

$$\forall x\ \big(\emptyset \notin x \to \exists f\ (f : x \to \bigcup x\ \wedge\ \forall y{\in}x.\ f(y) \in y)\big)$$

d.h. für jede Menge $x$ nichtleerer Mengen gibt es eine Funktion $f$ mit Definitionsbereich $x$, die aus jeder Menge $y \in x$ ein Element $f(y) \in y$ auswählt.
Das Auswahlaxiom hat in der Mathematik einen umstrittenen Status, da es außer seinen vielen nützlichen Konsequenzen auch viele nicht-intuitive Konsequenzen nach sich zieht. Das Auswahlaxiom ist allerdings oft äquivalent zu seinen nützlichen Konsequenzen, z.B. daß jeder Vektorraum eine Basis hat. Somit muß man die nicht-intuitiven Konsequenzen des Auswahlaxioms hinnehmen, sofern man sich seiner nützlichen äquivalenten Konsequenzen erfreuen will.

### Grothendieck Universen

Manchmal ist es nützlich (z.B. in der Kategorientheorie), die Existenz sogenannter *Grothendieck Universen* zu postulieren.

**Definition 1.2** *Ein* Grothendieck Universum *ist eine Menge $U$, die die folgenden Bedingungen*

(U1) *$U$ ist transitiv, d.h., wenn $x \in a \in U$, dann $x \in U$*
(U2) *wenn $a, b \in U$, dann sind auch $\{a, b\}$ und $a \times b$ Elemente von $U$*
(U3) *wenn $a \in U$, dann sind auch $\bigcup a$ und $\mathcal{P}(a)$ Elemente von $U$*
(U4) *$\omega \in U$, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen ist ein Element von $U$*
(U5) *wenn $f : a \to b$ surjektiv ist mit $a \in U$ und $b \subseteq U$, dann $b \in U$.*

*erfüllt* $\Diamond$

Insbesondere gilt dann, daß $U$ mit $\in$ eingeschränkt auf $U$ auch wieder die Axiome der Mengenlehre erfüllt. Also läßt sich aus ZFC und der Annahme eines Grothendieck Universums die Konsistenz von ZFC beweisen. Aufgrund des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes folgt dann, daß sich aus ZFC nicht die Existenz einer Grothendieck Universums herleiten läßt.

Offenbar ist die Eigenschaft, ein Grothendieck Universum zu sein, in der Sprache der Mengenlehre ausdrückbar. Sei $\mathrm{Univ}(x)$ ein solches Prädikat. Dann kann man auch das Axiom

$$\forall x \exists u\, (\mathrm{Univ}(u) \wedge x \in u)$$

betrachten, das besagt, daß jede Menge als Element eines Grothendieck Universums ist. Die Theorie ZFC zusammen mit diesem Axiom stellt einen für so gut wie alle Belange ausreichenden Rahmen dar.

# 2 Mächtigkeitsbegriff und der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

Wie schon in der Einleitung erwähnt war für Cantor ein wesentlicher Impuls für sein Studium des Mengenbegriffs die Frage des Größenvergleichs unendlicher Mengen.

**Definition 2.1** *Mengen $X$ und $Y$ heißen* gleichmächtig *(engl.* equipollent*), wenn eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ existiert, wofür wir $X \approx Y$ schreiben.* $\Diamond$

Diese Definition von „gleichmächtig“, d.h. „gleich viele Elemente enthaltend“, ist bloß eine Verallgemeinerung des üblichen intuitiven Anzahlbegriffs von endlichen auf unendliche Mengen. Es ist allerdings nützlich und wünschenswert, auch nicht gleichmächtige Mengen bzgl. ihrer Größe vergleichen zu können.

**Definition 2.2** *Für Mengen $X, Y$ schreiben wir $X \preceq Y$ (sprich: „$X$ enthält höchstens so viele Elemente wie $Y$“), wenn eine injektive Funktion $f : X \to Y$ existiert.* $\Diamond$

Offensichtlich ist $\preceq$ eine reflexive und transitive Relation auf der Klasse aller Mengen. Offenbar folgt aus $X \approx Y$, dass $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$. Die Umkehrung ist nicht trivial, gilt aber aufgrund eines berühmten Satzes von Cantor, Schröder und Bernstein, dessen Beweis sich auf folgenden Satz abstützt, der selber von eigenständigem Interesse ist.

**Satz 2.1 (Knaster, Tarski)**
*Sei $X$ eine Menge und $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Funktion, die bzgl. $\subseteq$ monoton ist, d.h. aus $A \subseteq B$ folgt $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$. Dann besitzt $\Phi$ einen kleinsten Fixpunkt, d.h. es gibt ein $A \in \mathcal{P}(X)$ mit $A = \Phi(A)$, sodaß $A \subseteq B$, falls $\Phi(B) = B$.*

*Beweis:* Sei $\mathcal{PF}(\Phi) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \Phi(A) \subseteq A\}$ die Menge der sogenannten *Präfixpunkte von* $\Phi$ und $A = \bigcap \mathcal{PF}(\Phi) = \{x \in X \mid \forall A {\in} \mathcal{PF}(\Phi).\ x \in A\}$ ihr Durchschnitt. Offenbar gilt für alle $B \in \mathcal{PF}(\Phi)$, daß $A \subseteq B$ und somit $\Phi(A) \subseteq \Phi(B) \subseteq B$. Also ist $\Phi(A) \subseteq A$ und somit $A \in \mathcal{PF}(\Phi)$. Wegen der Monotonie von $\Phi$ gilt auch $\Phi(\Phi(A)) \subseteq \Phi(A)$, d.h. $\Phi(A) \in \mathcal{PF}(\Phi)$ und somit $A \subseteq \Phi(A)$. Also gilt $A = \Phi(A)$. Wenn $\Phi(B) = B$, dann $B \in \mathcal{PF}(\Phi)$, und somit $A \subseteq B$. $\Box$

**Bemerkung** Aus dem Beweis ergibt sich offensichtlich, daß der kleinste Fixpunkt von $\Phi$ auch gleichzeitig der kleinste Präfixpunkt von $\Phi$ ist. Ähnlich zeigt man (Übung!), daß $\bigcup\{B \in \mathcal{P}(X) \mid B \subseteq \Phi(B)\}$ der größte (Post-)Fixpunkt von $\Phi$ ist.

**Satz 2.2 (Cantor, Schröder, Berstein)**
*Für Mengen $X$, $Y$ folgt aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$, daß $X \approx Y$.*

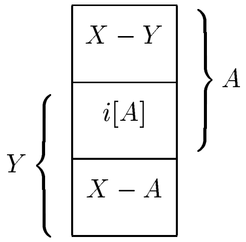
*Beweis:* Seien $i : X \to Y$ und $j : Y \to X$ injektive Funktionen. O.B.d.A. sei $Y \subseteq X$ und $j$ die Inklusionsabbildung, d.h. $j(y) = y$ für $y \in Y$. Wir definieren die Abbildung $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ als

$$\Phi(A) = (X - Y) \cup i[A]$$

für $A \in \mathcal{P}(X)$. Offensichtlich ist $\Phi$ monoton bzgl. $\subseteq$. Wegen Satz 2.1 gibt es ein $A \in \mathcal{P}(X)$ mit $A = (X - Y) \cup i[A]$. Also läßt sich die Menge $X$ zerlegen als

$$X = (X - A) \mathbin{\dot\cup} A = (X - A) \mathbin{\dot\cup} i[A] \mathbin{\dot\cup} (X - Y)$$

(wobei wir $\dot\cup$ für disjunkte Vereinigung schreiben) wie in folgendem Bild veranschaulicht




Wir definieren die Funktion $f : X \to Y$ als

$$f(x) = \begin{cases} i(x) & \text{falls } x \in A \\ x & \text{falls } x \in X - A \end{cases}$$

Offenbar ist $f$ surjektiv und injektiv (letzteres, da $i[A] \cap (X - A) = \emptyset$) und somit bijektiv.

Also gilt $X \approx Y$, da wir eine Bijektion zwischen $X$ und $Y$ konstruiert haben. $\square$

Wir werden später zeigen, daß für beliebige Mengen $X$ und $Y$ gilt, daß $X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$. Allerdings werden wir dazu das Auswahlaxiom benötigen.

# 3 Induktive Definitionen

Eine weitere nützliche Konsequenz des Satzes 2.1 von Knaster und Tarski ist die Existenz *induktiv definierter* Teilmengen einer Menge $X$.

**Definition 3.1** *Sei $X$ eine Menge. Ein* Regelsystem *auf $X$ ist eine Teilmenge $R$ von $\mathcal{P}(X) \times X$. Ein solches Regelsystem $R$ induziert eine Funktion*

$$\Phi_R : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) : A \mapsto \{x \in X \mid \exists H \subseteq A\ (H, x) \in R\}$$

*welche offenbar monoton bzgl. $\subseteq$ ist.*[5] *Den aufgrund von Satz 2.1 existierenden kleinsten Fixpunkt von $\Phi_R$ bezeichnen wir mit* $\mathrm{Ind}(R)$. $\Diamond$

Man zeigt leicht (Übung!), daß $\Phi_R(A) \subseteq A$ genau dann gilt, wenn $\forall (H, x) \in R\ (H \subseteq A \to x \in A)$. Solche $A$ nennen wir $R$ abgeschlossen. Dem Beweis von Satz 2.1 entnehmen wir, daß $\mathrm{Ind}(R)$ der Durchschnitt aller $R$-abgeschlossenen Teilmengen von $X$ ist. Aus diesen Beobachtungen ergeben sich folgende beiden nützlichen Eigenschaften von $\mathrm{Ind}(R)$

(1) für alle $A \subseteq X$ folgt aus $\Phi_R(A) \subseteq A$, daß $\mathrm{Ind}(R) \subseteq A$

(2) $x \in \mathrm{Ind}(R)$ genau dann, wenn ein $H \subseteq \mathrm{Ind}(R)$ existiert mit $(H, x) \in R$.

[5] Alle monotonen $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sind von der Form $\Phi_R$, indem man $R$ gleich der Menge $\{(H, x) \in \mathcal{P}(X) \times X \mid x \in \Phi(H)\}$ setzt.

Aus (1) ergibt sich insbesondere, daß für alle $A \subseteq \mathrm{Ind}(R)$ gilt, daß $\Phi_R(A) \subseteq A$ genau dann, wenn $A = \mathrm{Ind}(R)$. Um also nachzuweisen, daß eine Eigenschaft $P$ von $\mathrm{Ind}(R)$, d.h. $P \subseteq \mathrm{Ind}(R)$, für alle Elemente von $\mathrm{Ind}(R)$ gilt, ist es hinreichend und notwendig zu zeigen, daß $P$ $R$-abgeschlossen ist, d.h. daß für alle Regeln $(H, x) \in R$ aus $\forall x{\in}H.P(x)$ folgt, daß $P(x)$.

Dieses *Regelinduktion* genannte Beweisprinzip findet vielfältige Anwendung in der Logik und theoretischen Informatik, aber auch in der klassischen Mathematik, z.B. wenn man über Borelmengen räsoniert, die ja induktiv definiert sind (Übung!).

# 4 Ordinalzahlen

Bekanntlich haben natürliche Zahlen zwei Aspekte, nämlich

(1) den einer *Kardinal*zahl, der den Begriff der „Anzahl" erfaßt, und

(2) den einer Ordinalzahl, der den Begriff der „Anordnung" erfaßt.

Wir verallgemeinern die Begriffe Kardinal- und Ordinalzahl auf unendliche Gesamtheiten, wobei Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen erscheinen werden. Deshalb betrachten wir letztere zuerst.

**Definition 4.1** *Eine* strikte partielle Ordnung *ist eine Menge $P$ zusammen mit einer 2-stelligen Relation $<$ auf $P$, sodaß für alle $x, y, z \in P$ gilt*

| | |
|---|---|
| (reflexiv) | $x \not< x$ |
| (transitiv) | $x < y \wedge y < z \to x < z$. |

*Eine strikte partielle Ordnung (s.p.o.) $(P, <)$ heißt* linear*, falls*

$$x < y \vee x = y \vee y < x$$

*für alle $x, y \in P$. Eine lineare Ordnung $(W, <)$ heißt* Wohlordnung*, falls*

$$\forall A \subseteq W \big(A \neq \emptyset \to \exists x \in A. \forall y < x.\, y \notin A\big)$$

*d.h. jede nichtleere Teilmenge $A$ von $W$ ein $<$-minimales Element besitzt.*

*Eine Funktion $f : P_1 \to P_2$ zwischen linearen Ordnungen $(P_1, <_1)$ und $(P_2, <_2)$ heißt* aufsteigend *bzw.* monoton*, falls aus $x <_1 y$ immer folgt, daß $f(x) <_2 f(y)$.* $\Diamond$

Offenbar sind solche monotonen Funktionen injektiv und reflektieren die Ordnung, d.h. $x <_1 y$ folgt aus $f(x) <_2 f(y)$.

Wir betrachten nun monotone Funktionen zwischen Wohlordnungen.

**Lemma 4.1** *Sei $(W, <)$ eine Wohlordnung und $f : W \to W$ monoton. Dann gilt $x \leq f(x)$ für alle $x \in W$.*

*Beweis:* Angenommen $A = \{x \in W \mid f(x) < x\}$ sei nichtleer. Da $<$ eine Wohlordnung ist, gibt es ein kleinstes Element $z \in A$. Da $f(z) < z$ und $f$ monoton ist, gilt auch $f^2(z) < f(z)$, also $f(z) \in A$. Dies steht aber im Widerspruch dazu, daß $z$ das kleinste Element von $A$ ist. □

**Definition 4.2** *Eine monotone Funktion zwischen linearen Ordnungen heißt* Isomorphismus*, wenn sie surjektiv ist.*

Offenbar(Übung!) ist $f$ genau dann ein Isomorphismus linearer Ordnungen, wenn $f$ eine monotone Umkehrabbildung besitzt.

**Lemma 4.2** *Sei $(W, <)$ eine Wohlordnung und $f : W \to W$ ein Ordnungsisomorphismus. Dann ist $f = \mathrm{id}_W$.*

*Beweis:* Für alle $x \in W$ gilt wegen Lemma 4.1, daß (1) $x \leq f(x)$ und (2) $x \leq f^{-1}(x)$. Aber aus (2) folgt $f(x) \leq x$, also $x = f(x)$. □

**Korollar 4.1** *Seien $(W_1, <_1)$ und $(W_2, <_2)$ Wohlordnungen. Dann gibt es zwischen $(W_1, <_1)$ und $(W_2, <_2)$ höchstens einen Isomorphismus.*

*Beweis:* Seien $f$ und $g$ Ordnungsisomorphismen von $W_1$ nach $W_2$. Dann gilt wegen Lemma 4.2, daß $g^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{W_1}$ und somit $g = g \circ g^{-1} \circ f = f$. □

**Lemma 4.3** *Sei $(W, <)$ eine Wohlordnung. Dann ist $(W, <)$ zu keinem echten Anfangsstück $W(x) = \{y \in W \mid y < x\}$ isomorph.*

*Beweis:* Sei $f$ ein Isomorphismus von $W$ nach $W(x) := \{y \in W \mid y < x\}$. Dann gilt $f(x) < x$ im Widerspruch zu Lemma 4.1 (da $f$ ja insbesondere eine monotone Funktion von $W$ nach $W$ ist). □

**Satz 4.1** *Für beliebige Wohlordnungen $W_1, W_2$ tritt genau einer der folgenden Fälle ein*

(1) *$W_1$ und $W_2$ sind isomorph*

(2) *$W_1$ ist isomorph zu einem Anfangsstück von $W_2$*

(3) *$W_2$ ist isomorph zu einem Anfangsstück von $W_1$*

*Beweis:* Wir betrachten die Menge

$$f := \{\langle x, y\rangle \mid x \in W_1, y \in W_2, W_1(x) \cong W_2(y)\}$$

$f$ ist eine rechtseindeutige Relation, da aus $W_1(x) \cong W_2(y)$ und $W_1(x) \cong W_2(y')$ folgt, daß $W_2(y) \cong W_2(y')$ und somit $y = y'$ (wegen Lemma 4.3). Analog zeigt man die Linkseindeutigkeit von $f$. Somit ist $f$ eine injektive Funktion.

Außerdem sind $\mathsf{dom}(f)$ und $\mathsf{rng}(f)$ Anfangsstücke von $W_1$ bzw. $W_2$. Wenn $h : W_1(x) \to W_2(y)$ ein Isomorphismus ist, so sind für $x' < x$ auch $W_1(x')$ und

$W_2(h(x'))$ isomorph. Also ist $\mathsf{dom}(f)$ ein Anfangsstück von $W_1$. Analog zeigt man, daß $\mathsf{rng}(f)$ ein Anfangsstück von $W_2$ ist.

Sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ sind monoton. Wenn $x' < x$ und $f(x)$ definiert ist, dann gibt es einen Isomorphismus $h : W_1(x) \to W_2(f(x))$. Dann sind aber auch $W_1(x')$ und $W_2(h(x'))$ isomorph. Es gilt also $f(x') = h(x') < f(x)$. Analog zeigt man die Aussage für $f^{-1}$.

Wenn $\mathsf{dom}(f) = W_1$, dann tritt entweder Fall (1) ein oder $\mathsf{rng}(f) \neq W_2$. In zweiterem Fall hat $W_2 - \mathsf{rng}(f)$ ein kleinstes Element $y$ und es gilt $W_1 \cong W_2(y)$, also tritt Fall (2) ein.

Wenn $\mathsf{dom}(f) \neq W_1$, so gibt es ein kleinstes Element $x \in W_1 - \mathsf{dom}(f)$. Dann ist aber $\mathsf{rng}(f) = W_2$, weil andernfalls für das kleinste Element $y$ von $W_2 - \mathsf{rng}(f)$ gälte, daß $W_1(x) \cong W_2(y)$ und somit $x \in \mathsf{dom}(f)$. Wenn aber $\mathsf{rng}(f) = W_2$, dann tritt Fall (1) oder Fall (3) ein. $\square$

Für nichtisomorphe Wohlordnungen ist also immer eine isomorph zu einem echten Anfangsstück der anderen, d.h. es ist immer eine echt größer als die andere.

Als nächstes führen wir den Begriff der Ordinalzahl ein, der es uns gestattet, aus jeder Isomorphieklasse(!) von Wohlordnungen einen kanonischen Repräsentanten auszuwählen.

**Definition 4.3** *Eine* Ordinalzahl *ist eine transitive Menge $\alpha$, die durch $\in$ wohlgeordnet wird. Die Klasse der Ordinalzahlen bezeichnen wir mit* $\mathsf{Ord}$. $\Diamond$

Ordinalzahlen sind also spezielle Wohlordnungen. Für Ordinalzahlen $\alpha, \beta$ schreiben wir auch $\alpha < \beta$ anstatt $\alpha \in \beta$. Diese Notation ist im Einklang mit der Forderung, daß eine Ordinalzahl durch $\in$ wohlgeordnet wird.

Als nächstes geben wir eine etwas konzisere Charakterisierung von Ordinalzahlen.

**Satz 4.2** *Eine Menge $\alpha$ ist genau dann eine Ordinalzahl, wenn $\alpha$ eine transitive Menge transitiver Mengen ist und überdies gilt, daß*

$$\forall x \subseteq \alpha\, (x \neq \emptyset \to \exists y{\in}x.\, x \cap y = \emptyset) \tag{4}$$

*Unter der Annahme des Regularitätsaxioms besteht* $\mathsf{Ord}$ *also genau aus den transitiven Mengen transitiver Mengen.*

*Beweis:*
„$\Rightarrow$“: Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl. Dann ist $\alpha$ nach Definition insbesondere auch transitiv. Wir zeigen nun, daß auch jedes Element von $\alpha$ transitiv ist. Sei $x \in \alpha$ und $z \in y \in x$. Dann gilt $y, z \in \alpha$, weil $\alpha$ transitiv ist. Da die Einschränkung der Relation $\in$ auf $\alpha$ definitionsgemäß transitiv ist, folgt $z \in x$. Also ist $x$ transitiv. Eigenschaft (4) ist unmittelbare Konsequenz der Annahme, daß $\alpha$ durch $\in$ wohlgeordnet wird.
„$\Leftarrow$“: Sei $\alpha$ eine transitive Menge transitiver Mengen, die (4) erfüllt.

Seien $x, y, z \in \alpha$ und $z \in y \in x$. Da $x \in \alpha$ transitiv ist, gilt $z \in x$. Somit ist die Einschränkung der Relation $\in$ auf $\alpha$ transitiv.
Als nächstes zeigen wir, daß $x \notin x$ für alle $x \in \alpha$. Sei $x \in \alpha$ und $x \in x$. Dann ist $\{x\}$ eine nichtleere Teilmenge von $\alpha$. Also gibt es aufgrund von (4) ein $y \in \{x\}$ mit $y \cap \{x\} = \emptyset$. Aus $y \in \{x\}$ folgt aber $y = x$. Somit gilt $x \in y$ und $x \in \{x\}$, also $x \in y \cap \{x\}$ im Widerspruch zu $y \cap \{x\} = \emptyset$.
Wenn $\in$ auf $\alpha$ linear ist, dann wird aufgrund von (4) die Menge $\alpha$ durch $\in$ wohlgeordnet. Also genügt es, die Linearität von $\in$ auf $\alpha$ zu zeigen.

Sei $M := \{x \in \alpha \mid \forall y{\in}\alpha.\ x \in y \vee x = y \vee y \in x\}$. Wir zeigen, daß $M = \alpha$, woraus natürlich die Linearität von $\in$ auf $\alpha$ folgt. Angenommen $A := \alpha - M$ ist nichtleer. Wegen (4) gibt es dann ein $x \in A$, sodaß $u \notin A$ für alle $u \in x$. Also gilt $u \in M$ für alle $u \in x$ (da $x \subseteq \alpha$), d.h.

$$\forall u \in x. \forall y \in \alpha.\ u \in y \vee u = y \vee y \in u \tag{5}$$

Weil $x \notin M$, ist die Menge $\{y \in \alpha \mid \neg(x \in y \vee x = y \vee y \in x)\}$ nichtleer. Also gibt es wegen (4) ein $y \in \alpha$, sodaß

$$\neg(x \in y \vee x = y \vee y \in x) \tag{6}$$

aber

$$\forall v \in y.\ x \in v \vee x = v \vee v \in x \tag{7}$$

Wir zeigen nun, daß (6) nicht gilt, woraus dann folgt, daß $\alpha - M$ leer ist, also $\alpha = M$ wie behauptet.
Wenn $x = y$, so ist (6) falsch. Wenn $x \neq y$, dann $x - y \neq \emptyset$ oder $y - x \neq \emptyset$.
Falls $x - y \neq \emptyset$, dann gibt es ein $u \in x$ mit $u \notin y$. Wegen (5) gilt dann, daß $u = y \vee y \in u$, woraus $y \in x$ folgt. Also ist (6) falsch.
Falls $y - x \neq \emptyset$, gibt es ein $v \in y$ mit $v \notin x$. Wegen (7) gilt dann $x \in v \vee x = v$, woraus $x \in y$ folgt. Also ist (6) falsch.
Wir haben also gezeigt, daß $\mathsf{Ord}$ genau aus den transitiven Mengen transitiver Mengen besteht, die die Bedingung (4) erfüllen, welche allerdings unter Annahme des Regularitätsaxioms immer gilt. $\square$

Als nächstes zeigen wir ein paar einfache, aber grundlegende Eigenschaften von Ordinalzahlen.

**Lemma 4.4**

(1) *$\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.*

(2) *Elemente von Ordinalzahlen sind wieder Ordinalzahlen.*

(3) *Für $\alpha, \beta \in \mathsf{Ord}$ gilt*

   (a) *$\alpha \subseteq \beta$ genau dann, wenn $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$*

   (b) *$\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$*

   (c) *genau eine der folgenden Beziehungen $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta < \alpha$.*

*Beweis:* Behauptungen (1) und (2) sind aufgrund von Satz 4.2 leicht einzusehen. Für (3) seien $\alpha$ und $\beta$ als Ordinalzahlen angenommen.
Da $\beta$ transitiv ist, folgt aus $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$, daß $\alpha \subseteq \beta$. Angenommen $\alpha \subseteq \beta$. Wenn $\alpha = \beta$, dann gilt trivialerweise auch $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$. Wenn $\beta - \alpha \neq \emptyset$, dann gibt es ein $\gamma \in \beta$ mit $\gamma \notin \alpha$, aber $\delta \in \alpha$ für alle $\delta \in \gamma$. Wenn andererseits $\delta \in \alpha$, dann $\delta \in \gamma$, da $\delta \neq \gamma$ (weil $\gamma \notin \alpha$, aber $\delta \in \alpha$) und $\gamma \notin \delta$ (weil andernfalls $\gamma \in \delta$ und $\delta \in \alpha$ und somit $\gamma \in \alpha$). Also gilt $\alpha = \{\delta \in \beta \mid \delta \in \gamma\} = \gamma \in \beta$ und somit $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$. Also haben wir (3)(a) gezeigt.
Für (3)(b) betrachten wir $\gamma = \alpha \cap \beta$, welches aufgrund von Satz 4.2 selbst wieder eine Ordinalzahl ist. Weil $\gamma \subseteq \alpha$, gilt wegen (3)(a), daß $\gamma = \alpha \vee \gamma \in \alpha$. Wenn $\gamma = \alpha$, dann $\alpha = \gamma \subseteq \beta$. Nehmen wir also an, daß $\gamma \in \alpha$. Wegen $\gamma \subseteq \beta$ gilt aufgrund von (3)(a), daß $\gamma = \beta \vee \gamma \in \beta$. Wenn $\gamma = \beta$, dann $\beta = \gamma \in \alpha$ und somit $\beta \subseteq \alpha$ (da $\alpha$ transitiv ist). Wenn aber $\gamma \in \beta$, dann $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$ im Widerspruch dazu, daß $\gamma \in \alpha$ und $\alpha$ durch $\in$ wohlgeordnet wird.
Aus (a) und (b) folgt unmittelbar, daß eine der drei Beziehungen gelten muß. Man überprüft leicht (Übung!), daß nicht zwei davon gleichzeitig auftreten können. $\square$

Folgende Eigenschaften von $\mathsf{Ord}$ erweisen sich im weiteren als wichtig.

**Satz 4.3**

(1) *Die Relation $\in$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathsf{Ord}$, die wir fürderhin mit $<$ bezeichnen, d.h. wir schreiben $\alpha < \beta$ als Abkürzung für $\alpha \in \beta \in \mathsf{Ord}$.*

(2) *Für $\alpha \in \mathsf{Ord}$ gilt $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.*

(3) *Wenn $C$ eine nichtleere Klasse von Ordinalzahlen ist, so ist $\bigcap C$ auch eine Ordinalzahl.*

(4) *Die Vereinigung einer Menge $A$ von Ordinalzahlen ist wieder eine Ordinalzahl und außerdem gilt $\sup(A) = \bigcup A$.*

(5) *Wenn $\alpha$ eine Ordinalzahl ist, so ist auch $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ eine Ordinalzahl und zwar das kleinste Element der Klasse $\{\beta \in \mathsf{Ord} \mid \alpha < \beta\}$.*

*Beweis:*
(1) folgt aus Lemma 4.4(3)(c) und der Transitivität von $\in$ auf Ordinalzahlen.
(2) ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Begriffs Ordinalzahl und der Identifikation von $\in$ und $<$.
*ad* (3): Sei $C$ eine nichtleere Klasse von Ordinalzahlen und $\alpha \in C$. Dann ist $\bigcap C = \{\gamma \in \alpha \mid \forall \beta \in C.\ \gamma \in \beta\}$ und somit eine Menge (aufgrund des Aussonderungsschemas). Wir zeigen, daß $\bigcap C$ überdies transitiv ist. Sei $x \in \bigcap C$ und $y \in x$. Dann gilt für alle $\beta \in C$, daß $y \in x \in \beta$ und somit $y \subseteq \beta$. Also ist $y \subseteq \bigcap C$. Wegen (1) wird $\bigcap C$ durch $\in$ linear geordnet. Sei $A \subseteq \bigcap C$ und nichtleer. Weil $A \subseteq \alpha$, besitzt $A$ ein kleinstes Element bzgl. $\in$.
*ad* (4): Sei $X$ eine Menge von Ordinalzahlen. Da alle Elemente von $X$ transitiv sind, ist auch die Menge $\bigcup X$ selbst transitiv. Da $\bigcup X$ eine Menge von Ordinalzahlen ist, wird sie durch $\in$ linear geordnet. Sei $A$ eine nichtleere Teilmenge

von $\bigcup X$. Dann gibt es ein $\alpha \in A$. Wenn $\alpha \cap A = \emptyset$, dann ist $\alpha$ das kleinste Element von $A$. Andernfalls sei $\beta$ das kleinste Element von $\alpha \cap A$. Offenbar ist dann $\beta$ auch das kleinste Element von $A$, da für $\gamma \in A{-}\alpha$ ohnedies $\alpha \leq \gamma$ gilt.
Offenbar gilt $\alpha \subseteq \bigcup A$ für alle $\alpha \in A$. Wenn $\alpha \subseteq \beta$ für alle $\alpha \in A$, dann folgt $\bigcup A \subseteq A$. Da auf Ordinalzahlen die Relationen $\leq$ und $\subseteq$ koinzidieren, ist somit $\bigcup A$ Supremum von $A$.
*ad* (5): Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl. Dann ist $\alpha \cup \{\alpha\}$ transitiv, weil $\alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ und $\alpha$ transitiv ist. Da $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{Ord}$, wird $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ wegen (1) durch $\in$ linear geordnet. Außerdem ist $\alpha$ das größte Element von $\alpha \cup \{\alpha\}$. Deshalb besitzt jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \alpha^+$ ein kleinstes Element: das von $A \cap \alpha$, falls $A \cap \alpha$ nichtleer ist, und andernfalls $\alpha$. Also ist $\alpha^+$ eine Ordinalzahl.
Es bleibt zu zeigen, daß $\alpha^+$ das Infimum der Klasse $\{\beta \in \mathsf{Ord} \mid \alpha < \beta\}$ ist. Angenommen $\alpha < \beta$, d.h. $\alpha \in \beta$, dann auch $\alpha \subseteq \beta$ und somit $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$, also $\alpha^+ \leq \beta$. Da $\alpha < \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha^+$, ist $\alpha^+$ das kleinste Element der Klasse $\{\beta \in \mathsf{Ord} \mid \alpha < \beta\}$. □

Ordinalzahlen der Gestalt $\alpha^+$ nennen wir *Sukzessorordinale* und schreiben auch $\mathsf{Sc}(\alpha)$ für $\alpha^+$. Alle anderen Ordinale heißen *Limesordinale*. Offenbar ist $\alpha$ genau dann ein Limesordinal, wenn $\beta^+ < \alpha$ für alle $\beta < \alpha$. Also ist insbesondere $0 = \emptyset$ ein Limesordinal. In der Übung haben wir gezeigt, daß alle natürlichen Zahlen Ordinalzahlen sind und auch $\omega = \mathbb{N}$ selbst eine Ordinalzahl ist. Da alle natürlichen Zahlen außer 0 Sukzessorordinale sind, ist $\omega$ das erste Limesordinal nach 0.

Als nächstes weisen wir nach, daß jede Wohlordnung zu einer Ordinalzahl isomorph ist.

**Satz 4.4** *Für jede Wohlordnung* $(W, <)$ *gibt es eine dazu (ordnungs)isomorphe Ordinalzahl.*

*Beweis:* Die Relation

$$F(x, \alpha) \;\equiv\; x \in W \wedge \alpha \in \mathsf{Ord} \wedge W(x) \cong \alpha$$

ist rechtseindeutig, da isomorphe Ordinale gleich sind (andernfalls wäre ja eine Ordinalzahl isomorph zu einem echten Anfangsstück, was ja nach Lemma 4.3 ausgeschlossen ist). Wir zeigen, daß es zu jedem $x \in W$ ein $\alpha \in \mathsf{Ord}$ mit $F(x, \alpha)$ gibt. Andernfalls sei $x$ das kleinste Element von $W$ mit $\neg \exists \alpha \in \mathsf{Ord}.\ F(x, \alpha)$. Wegen des Replacementschemas ist $\{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid \exists y < x.\ F(y, \alpha)\}$ eine Menge von Ordinalzahlen, die nach unten abgeschlossen ist. Sei $\gamma$ die kleinste Ordinalzahl, die in dieser Menge nicht enthalten ist. Es gilt dann $F(x, \gamma)$. Also ist $F$ für alle $x \in W$ definiert. Wegen des Replacementschemas ist

$$\gamma := \{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid \exists x \in W.\ F(x, \alpha)\}$$

eine Menge und somit die gesuchte Ordinalzahl, zu der $(W, <)$ isomorph ist. □

# 5 Transfinite Induktion und Rekursion

Sei $(W, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Dann gilt definitionsgemäß für alle Teilmengen $P \subseteq W$, daß

$$(\exists x \in W.\, x \notin P) \to \exists x \in W.\, (\forall y < x.\, y \in P) \land x \notin P$$

was rein logisch äquivalent ist zu

$$\big(\forall x \in W.\, (\forall y < x.\, y \in P) \to x \in P\big) \to \forall x \in W.\, x \in P$$

welch letztere Aussage wir mit $\mathsf{TI}_<(P)$ abkürzen und als Prinzip der „transfinite Induktion für $P$ bzgl. $<$“ bezeichnen. Eine Ordnung $(W, <)$ ist also genau dann eine Wohlordnung, wenn $\mathsf{TI}_<(P)$ für alle $P \subseteq W$ gilt. Insbesondere ist also transfinite Induktion für alle Ordinalzahlen ein zulässiges Beweisprinzip, welches sich aufgrund folgenden Satzes auf ganz $\mathsf{Ord}$ ausdehnen läßt.

**Satz 5.1** *Sei $C$ eine Klasse von Ordinalzahlen. Dann gilt*

$$\big(\forall \alpha {\in} \mathsf{Ord}.\, (\forall \beta {<} \alpha.\, \beta \in C) \to \alpha \in C\big) \to \forall \alpha {\in} \mathsf{Ord}.\, \alpha \in C$$

*Beweis:* Angenommen es gilt die Prämisse der Implikation, aber $\alpha \notin C$. Dann ist die Menge $\alpha - C \subseteq \alpha$ nichtleer, weil ja sonst $\alpha \in C$. Sei $\beta$ das kleinste Element der Menge $\alpha - C$. Dann gilt $\forall \gamma {<} \beta.\, \gamma \in C$ und somit $\beta \in C$ im Widerspruch zu $\beta \in \alpha - C$. Also $C = \mathsf{Ord}$ wie behauptet. □

Satz 5.1 ist äquivalent zur Aussage, daß jede nichtleere Klasse von Ordinalzahlen ein bzgl. der $\in$-Relation kleinstes Element besitzt. Oft wird das Schema der transfiniten Induktion über Ordinalzahlen auch folgendermaßen formuliert.

**Satz 5.2** *Sei $C$ eine Klasse von Ordinalzahlen mit den Eigenschaften*

(1) $0 \in C$

(2) $\alpha^+ \in C$ *für alle* $\alpha \in C$

(3) *wenn $\lambda$ eine Limesordinalzahl ist und $\beta \in C$ für alle $\beta < \lambda$, dann $\lambda \in C$*

*dann gilt $C = \mathsf{Ord}$.*

*Beweis:* Angenommen $C \neq \mathsf{Ord}$. Dann gibt es eine kleinste Ordinalzahl $\alpha$ mit $\alpha \notin C$, deren Existenz jedoch aufgrund der Bedingungen (1)-(3) ausgeschlossen ist! □

Satz 5.1 folgt unmittelbar aus Satz 5.2. Die umgekehrte Richtung argumentiert man folgendermaßen. Wenn eine Klasse $C$ von Ordinalzahlen die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt, dann erfüllt die Klasse

$$C' := \{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid \forall \beta < \alpha.\, \beta \in C\}$$

die Voraussetzungen von Satz 5.1 und somit $C' = \mathsf{Ord}$. Weil aber $C' \subseteq C$, gilt auch $C = \mathsf{Ord}$.

Aufgrund der Bemerkung unmittelbar nach Satz 5.1 macht folgende Definition Sinn.

**Definition 5.1** (Kardinalzahl)
*Für* $\alpha \in \mathsf{Ord}$ *bezeichne* $|\alpha|$ *das kleinste Element von* $\{\beta \in \mathsf{Ord} \mid \alpha \approx \beta\}$. *Eine* Kardinalzahl *ist eine Ordinalzahl* $\alpha$ *mit* $\alpha = |\alpha|$. *Wenn eine Menge* $X$ *wohlgeordnet werden kann, dann bezeichne* $|X|$ *die kleinste Ordinalzahl* $\alpha$ *mit* $X \approx \alpha$. $\Diamond$

Offenbar kann man einer Mengen genau dann eine Kardinalität zuordnen, wenn diese Menge wohlgeordnet werden kann. Denn wegen Satz 4.4 ist jede Menge, die wohlgeordnet werden kann, in Bijektion zu einer Ordinalzahl und wenn $i : X \to \alpha$ eine Bijektion ist, so definiert $x < y$ gdw $i(x) < i(y)$ eine Wohlordnung auf $X$. In Abschnitt 6 werden wir jedoch sehen, daß genau dann jede Menge wohlgeordnet werden kann, wenn das Auswahlaxiom gilt. Es sei jedoch bemerkt, daß man auch ohne Auswahlaxiom für eine Menge $a$ die Klasse(!) $\{b \mid a \approx b\}$ betrachten kann, allerdings ohne ein kanonisches Element daraus zur Verfügung zu haben. Aus diesem Grund wird i.a. bei Betrachtungen zur Kardinalzahlarithmetik das Auswahlaxiom zugrunde gelegt.

Als nächstes betrachten wir rekursive Definitionen von Funktionen auf Ordinalzahlen mithilfe des Schemas der *transfiniten Rekursion*.

**Satz 5.3** (transfinite Rekursion)
*Sei* $G$ *eine Klassenfunktion, die auf allen Mengen definiert ist. Dann gibt es genau eine auf* $\mathsf{Ord}$ *definierte Klassenfunktion* $F$, *sodaß für alle* $\alpha \in \mathsf{Ord}$ *gilt*

$$F(\alpha) = G(F{\restriction}\alpha)$$

*wobei* $F{\restriction}\alpha = \{\langle\beta, F(\beta)\rangle \mid \beta \in \alpha\}$.

*Beweis:* Die Eindeutigkeit von $F$ zeigt man leicht durch transfinite Induktion. Für die Relation

$$\begin{aligned} F(\alpha,x) \;\equiv\;& \alpha \in \mathsf{Ord} \wedge \\ & \exists f\ \big(f \text{ Funktion} \wedge \mathsf{dom}(f) = \alpha \wedge x = G(f) \wedge \forall\beta \in \alpha.\, f(\beta) = G(f{\restriction}\beta)\big) \end{aligned}$$

beweist man leicht (Übung!) mit transfiniter Induktion, daß

$$\forall\alpha{\in}\mathsf{Ord}.\exists!f.\ f \text{ Funktion} \wedge \mathsf{dom}(f) = \alpha \wedge \forall\beta \in \alpha.f(\beta) = G(f{\restriction}\beta)$$

woraus unmittelbar folgt, daß $\forall\alpha{\in}\mathsf{Ord}.\exists!x.F(\alpha,x)$ und $F(\alpha) = G(F{\restriction}\alpha)$ für alle $\alpha \in$ Ord. $\Box$

Eine typische Anwendung des Prinzips der transfiniten Rekursion ist folgende Definition der Operationen der Addition, Multiplikation und Exponentiation auf $\mathsf{Ord}$, die auf den natürlichen Zahlen mit den üblichen gleichnamigen Operationen übereinstimmen.[6]

[6] Beachte, daß hierbei die (implizit gelassenen) Klassenfunktionen $G$ durch eine Fallunterscheidung definiert werden, nämlich ob das Argument auf 0, auf einem Sukzessorordinal oder auf einem Limesordinal definiert ist.

*Addition*

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 = \alpha\\
&\alpha + \mathsf{Sc}(\beta) = \mathsf{Sc}(\alpha + \beta)\\
&\alpha + \lambda = \sup\nolimits_{\beta<\lambda} \alpha + \beta \qquad (\lambda \text{ Limesordinal})
\end{aligned}$$

*Multiplikation*

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot 0 = 0\\
&\alpha \cdot \mathsf{Sc}(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha\\
&\alpha \cdot \lambda = \sup\nolimits_{\beta<\lambda} \alpha \cdot \beta \qquad (\lambda \text{ Limesordinal})
\end{aligned}$$

*Exponentiation*

$$\begin{aligned}
&\alpha^0 = 1 = \mathsf{Sc}(0)\\
&\alpha^{\mathsf{Sc}(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha\\
&\alpha^\lambda = \sup\nolimits_{\beta<\lambda} \alpha^\beta \qquad (\lambda \text{ Limesordinal})
\end{aligned}$$

Man beachte allerdings die mangelnde Kommutativität von $+$ und $\cdot$ im transfiniten Fall. Es gilt nämlich

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1 \text{ und}$$

$$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2.$$

Eine weitere wichtige Anwendung des Prinzips der transfiniten Rekursion ist folgende Konstruktion der sogenannten „kumulativen Hierarchie".

**Definition 5.2** (kumulative Hierarchie)
*Mithilfe transfiniter Rekursion definieren wir die Klassenfunktion $V$ als*

$$V_\alpha = \mathcal{P}(\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta)$$

*für $\alpha \in \mathsf{Ord}$.* $\Diamond$

Eine äquivalente (Übung!) und (vielleicht weniger kryptische) Definition von $V$ ist

$$V_0 = \emptyset \qquad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \qquad V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$$

wobei $\lambda$ ein Limesordinal ist. Offenbar (Übung!) gilt für $\alpha < \beta$, daß sowohl $V_\alpha \in V_\beta$ („Hierarchie") als auch $V_\alpha \subseteq V_\beta$ („kumulativ"). Unter Annahme des Regularitätsaxioms und des Ersetzungsschemas kann man zeigen, daß die kumulative Hierachie die Allklasse $V = \{x \mid x = x\}$ auschöpft, d.h. es gilt

$$V = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{Ord}} V_\alpha$$

**Satz 5.4** *Für alle Mengen $x$ gibt es eine Ordinalzahl $\alpha$ mit $x \in V_\alpha$.*

*Beweis:* Wir beweisen die Aussage mit $\in$-Induktion über $x$ (d.h. wir verwenden ganz wesentlich das Regularitätsaxiom!). Angenommen für alle $y \in x$ existiert ein Ordinal $\alpha$ mit $y \in V_\alpha$. Aufgrund des Replacementschemas gibt es eine Funktion $f$ mit $\mathsf{dom}(f) = x$ und $f(y) = \min\{\alpha \mid y \in V_\alpha\}$ für $y \in x$. Für $\alpha := \sup\{f(y) \mid y \in x\}$ gilt offenbar, daß $y \in V_\alpha$ für alle $y \in x$, d.h. $x \subseteq V_\alpha$ und somit $x \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. □

Man zeigt leicht (Übung!), daß alle $V_\alpha$ transitiv sind. Wenn also $x \in V_\alpha$, dann auch $x \subseteq V_\alpha$ (aber i.a. nicht umgekehrt[7]).

Die Komplexität einer Menge $x$ wird gemessen durch die kleinste Ordinalzahl $\alpha$, sodaß alle Elemente von $x$ in $V_\alpha$ liegen.

**Definition 5.3** (Rang einer Menge)
*Der* Rang einer Menge *$x$ ist die kleinste Ordinalzahl $\alpha$ mit $x \in V_{\alpha+1}$. Wir bezeichnen den Rang von $x$ mit $\mathsf{rk}(x)$.* ◊

Offenbar gilt $x \in V_{\alpha+1}$ genau dann, wenn $x \subseteq V_\alpha$.

**Definition 5.4** (Zermelo Universum)
*Eine Menge $U$ heißt* Zermelo Universum*, wenn $U$ transitiv ist und unter den Operationen Pairing $(x, y \mapsto \{x, y\})$, $\bigcup$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen ist.* ◊

Offenbar (Übung!) ist eine transitive Menge $U$ genau dann ein Zermelo Universum, wenn $U$ zusammen mit der Einschränkung von $\in$ auf $U$ ein Modell von Z(C), d.h. ZF(C) ohne Replacementschema, ist. Man zeigt leicht (Übung!), daß $V_\alpha$ genau dann ein Zermelo Universum ist, wenn $\alpha$ ein Limesordinal $> \omega$ ist. Es gibt also mindestens so viele Zermelo Universen wie Ordinalzahlen (Übung!).

# 6 Zum Auswahlaxiom äquivalente Prinzipien

Wir betrachten im folgenden einige Aussagen, die (relativ zu den $\mathsf{ZF}$-Axiomen) zum Auswahlaxiom (AC) äquivalent sind.

Wir haben bereits gesehen, daß man jede Menge wohlordnen können muß, um jeder Menge eine gleichmächtige Kardinalzahl (die dann natürlich eindeutig bestimmt ist) zuordnen zu können. Wir zeigen nun, daß diese Anforderung zu AC äquivalent ist.

**Satz 6.1** *Unter Annahme der $\mathsf{ZF}$-Axiome ist das Auswahlaxiom äquivalent zum Wohlordnungssatz, der besagt, daß man jede Menge wohlordnen kann.*

*Beweis:* „$\Leftarrow$“: Nehmen wir also den Wohlordnungssatz an. Für eine beliebige Menge $A$ gibt es somit eine Wohlordnung $<$ auf $A$. Eine Auswahlfunktion für $\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$ wird durch folgende Relation gegeben

$$F(a, x) \;\equiv\; a \neq \emptyset \;\wedge\; a \subseteq A \;\wedge\; x \in a \;\wedge\; \forall y \in A.\, y < x \to y \notin a$$

[7] Beispielsweise ist $\omega \subseteq V_\omega$, aber nicht $\omega \in V_\omega$. Ganz allgemein gilt für Ordinalzahlen $\alpha$, daß $\alpha \subseteq V_\alpha$, aber nicht $\alpha \in V_\alpha$.

Wenn nun $X$ eine Menge nichtleerer Mengen ist, dann gilt $X \subseteq \mathcal{P}(\bigcup X)$. Somit liefert eine Auswahlfunktion für $\mathcal{P}(\bigcup X) - \{\emptyset\}$ durch Einschränkung auf $X$ eine Auswahlfunktion für $X$.
„$\Rightarrow$": Nehmen wir AC an und sei $X$ eine Menge. Sei $a_0$ eine Menge mit $a_0 \notin X$. Dann gibt es eine Funktion $f : \mathcal{P}(X) \to X \cup \{a_0\}$ mit $f(A) \in A$ für nichtleere $A \in \mathcal{P}(X)$ und $f(\emptyset) = a_0$. Mithilfe transfiniter Rekursion definieren wir nun eine Klassenfunktion $F : \mathsf{Ord} \to X \cup \{a_0\}$ mit

$$F(\alpha) = f(X - \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\})$$

für alle $\alpha \in$ Ord. Wir schreiben $F[\alpha]$ für die Menge $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$. Für $\alpha$ mit $X - F[\alpha] \neq \emptyset$ gilt offenbar $F(\alpha) \notin F[\alpha]$, d.h. $F(\alpha) \neq F(\beta)$ für alle $\beta < \alpha$. Also ist die Einschränkung von $F$ auf $\{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid X - F[\alpha] \neq \emptyset\}$ injektiv und ihr Bild ist eine Teilmenge von $X$. Also ist die Klasse $\{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid X - F[\alpha] \neq \emptyset\}$ aufgrund des Replacementschemas selbst eine Menge, die wir mit $I$ bezeichnen. Sei $\alpha$ die kleinste Ordinalzahl, die nicht in $I$ enthalten ist, d.h. $I = \alpha$, und $h = F \restriction I$. Offenbar ist $h$ eine injektive Funktion von $\alpha$ nach $X$. Wir zeigen, daß $h : \alpha \to X$ auch surjektiv ist. Wenn nicht, dann gibt es ein $x \in X - h[\alpha] = X - F[\alpha]$, woraus folgt, daß $X - F[\alpha] \neq \emptyset$ und somit $\alpha \in I$ im Widerspruch zu $\alpha \notin \alpha = I$.

Also ist $h : \alpha \to X$ eine Bijektion, die auf $X$ eine Wohlordnung induziert. □

Eine weitere Aussage, die zu AC äquivalent ist, ist das sogenannte *Zorn'sche Lemma*, welches man beispielsweise verwendet, um zu zeigen, daß jeder Vektorraum eine Basis hat. Im 1. Teil der Vorlesung haben wir das Zorn'sche Lemma verwendet, um die Kompaktheit der klassischen Aussagenlogik zu zeigen. Auch der Satz von Hahn-Banach wird üblicherweise mit dem Zorn'schen Lemma bewiesen.

Das Zorn'sche Lemma besagt, daß eine partiell geordnete Menge $P$ ein maximales Element besitzt, wenn jede linear geordnete Teilmenge von $P$ eine obere Schranke in $P$ besitzt.

**Satz 6.2** *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Zorn'schen Lemma unter Annahme der restlichen* $\mathsf{ZF}$*-Axiome.*

*Beweis:* „$\Rightarrow$": Wir nehmen an, es gelte das Auswahlaxiom. Sei $P$ eine nichtleere, partiell geordnete Menge, in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Sei $a_0$ eine beliebige Menge mit $a_0 \notin P$. Aufgrund des Auswahlaxioms gibt es eine Funktion $f : \mathcal{P}(P) \to P \cup \{a_0\}$ mit $f(A) \in A$ für nichtleere $A \subseteq P$ und $f(\emptyset) = a_0$. Mithilfe transfiniter Rekursion kann man eine auf den Ordinalzahlen definierte Klassenfunktion $F$ konstruieren, sodaß

$$F(\alpha) = f\big(\{x \in P \mid \forall \beta < \alpha.\, F(\beta) < x\}\big)$$

für $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Wenn $F(\alpha) \neq a_0$, dann gilt $F(\beta) < F(\alpha)$ für alle $\beta < \alpha$. Also ist $F$ auf $I := \{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid F(\alpha) \neq a_0\}$ injektiv und $F[I]$ ist eine Teilmenge von $P$, die überdies linear geordnet ist. Also ist $I$ eine Menge. Sei $\alpha$ die kleinste nicht in $I$ enthaltenen Ordinalzahl, d.h. $\alpha = I$. Sei $x_0$ eine obere Schranke von $F[I]$ (die existiert, weil $F[I]$ linear geordnet ist!), d.h.

$$\forall \beta < \alpha.\, F(\beta) \leq x_0 \;.$$

Wir zeigen nun, daß $x_0$ in $P$ maximal ist. Wenn es ein $z \in P$ gäbe mit $z > x_0$, dann wäre die Menge $\{x \in P \mid \forall \beta < \alpha. F(\beta) < x\}$ nichtleer, also $F(\alpha) \neq a_0$ und somit $\alpha \in I = \alpha$.

„$\Leftarrow$": Wir nehmen an, daß das Zorn'sche Lemma gilt. Sei $X$ eine Menge nichtleerer Mengen. Wir definieren $P$ als die Menge aller Funktionen $f$, sodaß $\mathsf{dom}(f) \subseteq X$ und $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathsf{dom}(f)$, d.h. $P$ ist die Menge aller Auswahlfunktionen auf Teilmengen von $X$. Wenn wir $P$ durch $\subseteq$ partiell ordnen, so erfüllt $(P, \subseteq)$ die Voraussetzungen des Zorn'schen Lemmas, weil für jede (bzgl. $\subseteq$) linear geordnete Menge $C \subseteq P$ die Funktion $\bigcup C \in P$ eine obere Schranke von $C$ ist. Also besitzt $P$ ein maximales Element $f$ aufgrund des postulierten Zorn'schen Lemmas. Wenn $\mathsf{dom}(f)$ eine echte Teilmenge von $X$ wäre, so gäbe es $a \in A \in X - \mathsf{dom}(f)$ und $f \cup \{\langle A, a \rangle\} \in P$ wäre echt größer als $f$ im Widerspruch zur Maximalität von $f$ in $P$. Also ist $f$ eine Auswahlfunktion für $X$, da $f$ auf ganz $X$ definiert ist. $\square$

Man sieht, daß die Beweise des Wohlordnungssatzes bzw. des Zorn'schen Lemmas aus dem Auswahlaxiom schwieriger sind als die viel einfacheren Rückrichtungen. Insbesondere kann man den Wohlordnungssatz relativ leicht direkt aus dem Zorn'schen Lemma beweisen (Übung!). Dies erklärt vielleicht, warum man in der Mathematik gern Beweise vermittels des Zorn'schen Lemmas führt, obwohl dieses im Vergleich zum Auswahlaxiom nicht als intuitiv einsichtig erscheint. Die Einsicht, daß das Auswahlaxiom zu etwas merkwürdigen Aussagen *äquivalent* ist, hat *a posteriori* das Auswahlaxiom selbst als etwas fragwürdig erscheinen lassen. Erst in den 60er Jahren (1963/64) konnte P. Cohen [Coh] mithilfe der von ihm entwickelten Methode des *forcing* zeigen, daß das Auswahlaxiom tatsächlich von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, obwohl dies schon lange vorher vermutet wurde!

Wie auch immer, es hat sich eingebürgert, die Verwendung des Auswahlaxioms in mathematischen Beweisen explizit zu deklarieren, um seinem problematischen Status Rechnung zu tragen. Man beachte jedoch, daß es für den Großteil insbesondere der angewandten Mathematik absolut unnötig ist.

# 7 Kardinalzahlarithmetik

In Abschnitt 4 haben wir Kardinalzahlen als spezielle Ordinalzahlen definiert, nämlich als solche $\alpha \in \mathsf{Ord}$, sodaß es für alle $\beta < \alpha$ keine Injektion von $\alpha$ nach $\beta$ gibt, d.h. daß $\alpha$ und $\beta$ nicht gleichmächtig sind. Unter Annahme des Auswahlaxioms gibt es zu jeder Menge $X$ eine eindeutig bestimmte Kardinalzahl $|X| \approx X$, indem man für $|X|$ das kleinste Element von $\{\alpha \in \mathsf{Ord} \mid X \approx \alpha\}$ nimmt. Man beachte, daß diese Klasse eine Menge ist, da die Menge der Wohlordnungen von $X$ in $\mathcal{P}(X \times X)$ enthalten ist. Um zu garantieren, daß die Menge nicht leer ist, benötigt man das Auswahlaxiom, da dieses garantiert, daß es zumindest eine Wohlordnung von $X$ gibt.

Man sieht leicht, daß die Klasse $\mathsf{Card}$ aller Kardinalzahlen durch $\in$ wohlgeordnet wird und man Aussagen über $\mathsf{Card}$ durch transfinite Induktion beweisen kann.

Zunächst einmal betrachten wir einige „arithmetische“ Operationen auf $\mathsf{Card}$.

**Definition 7.1** *Für Kardinalzahlen $\kappa$, $\lambda$ sei*

$$\kappa + \lambda = |\kappa + \lambda|$$

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

$$\kappa^\lambda = \big|\{f \in \mathcal{P}(\lambda \times \kappa) \mid f : \lambda \to \kappa\}\big|$$

*wobei die disjunkte Vereinigung $+$ wie üblich als $A + B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ definiert ist.* $\Diamond$

Zur Definition von $\kappa^\lambda$ setzen wir das Auswahlaxiom voraus, da andernfalls nicht garantiert ist, daß man die Menge der Funktionen von $\lambda$ nach $\kappa$ wohlordnen kann. Für Summe und Produkt ist dies kein Problem, da man hierfür Summe und Produkt von Ordinalzahlen verwenden kann.

Es ist eine leichte Übung(!) zu zeigen, daß der Klasse $\mathsf{Card}$ durch Summe und Produkt zwei verschiedene ein kommutative Monoidstrukturen aufgeprägt werden. Diese beiden Monoidstrukturen sind durch das wohlbekannte Distributivgesetz

$$(\kappa_1 + \kappa_2) \cdot \lambda = (\kappa_1 \cdot \lambda) + (\kappa_2 \cdot \lambda)$$

miteinander verbunden. Für die Exponentiation gelten die Gesetze

$$\kappa^0 = 1 \qquad \kappa^1 = \kappa \qquad \lambda^{\kappa_1 + \kappa_2} = \lambda^{\kappa_1} \cdot \lambda^{\kappa_2} \qquad (\kappa_1 \cdot \kappa_2)^\lambda = \kappa_1^\lambda \cdot \kappa_2^\lambda$$

welche auch von den natürlichen Zahlen her vertraut sind. Außerdem gilt (sofern $2^\kappa$ existiert), daß $\kappa < 2^\kappa$, weil ja $\kappa$ und $\mathcal{P}(\kappa)$ nicht gleichmächtig sind.

Im Rest des Abschnitts setzen wir das Auswahlaxiom voraus.

**Lemma 7.1** *Sei $C$ eine Menge von Kardinalzahlen. Dann gibt es eine Kardinalzahl, die echt größer als alle Kardinalzahlen in $C$ ist.*

*Beweis:* Offenbar gilt $\left|\bigcup C\right| \geq \kappa$ für alle $\kappa \in C$. Also ist $2^{|\mathcal{P}(\bigcup C)|} > \kappa$ für alle $\kappa \in C$. $\Box$

**Korollar 7.1** *Jede Menge von Kardinalzahlen besitzt ein Supremum in* $\mathsf{Card}$. *Außerdem besitzt jede nichtleere Menge von Kardinalzahlen ein Infimum.*

*Beweis:* Leichte Übung unter Verwendung von Lemma 7.1. $\Box$

**Korollar 7.2** *Für jede Kardinalzahl $\kappa$ gibt es eine kleinste Kardinalzahl $\kappa^+$ mit $\kappa^+ > \kappa$.*

*Beweis:* Es gibt eine Kardinalzahl $\lambda > \kappa$. Dann ist $\kappa^+$ das kleinste Element der Menge $\{\alpha \in \lambda \mid \kappa < \alpha\,,\ \alpha \in \mathsf{Card}\} \cup \{\lambda\}$. $\Box$

Da es für jede Menge $C$ von Kardinalzahlen eine Kardinalzahl gibt, die echt größer als alle Elemente von $C$ ist, folgt, daß $\mathsf{Card}$ eine echte Klasse ist, weil es ja andernfalls wegen Korollar 7.2 eine nicht in Card enthaltene Kardinalzahl gäbe.

Wir beobachten noch, daß Suprema von Kardinalzahlen durch Vereinigung gegeben sind.

**Lemma 7.2** *Sei $C$ eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist $\bigcup C$ das Supremum von $C$ in* Card.

*Beweis:* Wenn $C$ ein größtes Element besitzt, ist die Aussage trivialerweise wahr. Nehmen wir also an, $C$ habe kein größtes Element. Bekanntlich ist die Vereinigung $\bigcup C$ das Supremum von $C$ in Ord. Wenn nun $\alpha < \bigcup C$, dann gibt es ein $\kappa \in C$ mit $\alpha \leq \kappa$. Weil $C$ kein größtes Element besitzt, gibt es eine Kardinalzahl $\kappa' > \kappa$ mit $\kappa' \in C$. Also ist $\alpha$ von echt kleinerer Kardinalität als $\kappa'$ und somit auch von echt kleinerer Kardinalität als $\bigcup C$. Also ist $\bigcup C$ eine Kardinalzahl und somit das Supremum von $C$ in Card. □

Bekanntlich ist $\omega = \omega \cdot \omega$. Dies läßt sich auf beliebige unendliche Kardinalzahlen erweitern.

**Satz 7.1** *Für unendliche Kardinalzahlen $\kappa$ gilt $\kappa = \kappa \cdot \kappa$.*

*Beweis:* Wir nehmen an, es gebe eine kleinste unendliche Kardinalzahl $\kappa$ mit $\kappa < \kappa \cdot \kappa$ und führen diese Annahme auf einen Widerspruch.
Weil $\kappa$ die kleinste unendliche Kardinalzahl mit $\kappa < \kappa \cdot \kappa$ ist, gilt für alle Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$, daß $\lambda = \lambda \cdot \lambda$, sofern $\lambda$ unendlich ist. Also gilt für alle unendlichen Ordinalzahlen $\alpha < \kappa$, daß $\alpha \times \alpha \approx \alpha$. Wir definieren nun auf $\kappa \times \kappa$ eine Wohlordnung $\lhd$ wie folgt: $(\alpha_1, \alpha_2) \lhd (\beta_1, \beta_2)$ genau dann, wenn $\max(\alpha_1, \alpha_2) < \max(\beta_1, \beta_2)$ oder

$$\max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(\beta_1, \beta_2) \quad \text{und} \quad \alpha_1 < \beta_1 \vee (\alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 < \beta_2)$$

d.h. Paare mit gleichem Maximum werden *lexikographisch* gordnet. Da $\kappa$ eine Limesordinalzahl ist, gibt es für alle $\alpha, \beta < \kappa$ ein $\gamma < \kappa$ mit $\alpha, \beta < \gamma$. Also ist für jedes $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$ die Menge $\{(\alpha', \beta') \mid (\alpha', \beta') \lhd (\alpha, \beta)\}$ in einer Menge $\gamma \times \gamma \subseteq \kappa \times \kappa$ als Teilmenge enthalten, wobei $\alpha, \beta < \gamma < \kappa$. Aufgrund der Induktionshypothese gilt nun, daß $|\gamma \times \gamma| = |\gamma| < \kappa$, wenn $\gamma$ unendlich ist. Also hat jedes echte Anfangsstück der Wohlordnung $(\kappa \times \kappa, \lhd)$ eine Kardinalität $< \kappa$. Sei nun $\lambda$ die zu $(\kappa \times \kappa, \lhd)$ isomorphe Ordinalzahl. Für jedes $\alpha < \lambda$ gilt nun aufgrund obiger Betrachtung, daß $|\alpha| < \kappa$. Also ist $\lambda \leq \kappa$, d.h. $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. □

**Korollar 7.3** *Für unendliche Mengen $X$ gilt*

(1) $X \cong X \times X$

(2) $X \cong X + X$

(3) $X \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$

*Beweis:* Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Satz 7.1. Die zweite Aussage folgt aus $X + X \preceq X \times X$ (da $X$ unendlich ist und somit mindestens 2 Elemente enthält) und $X \times X \cong X$ wegen (1). Mit Induktion zeigt man leicht, daß alle $X^n \cong X$. Weil aber $\mathbb{N} \preceq X$, gilt auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \cong \mathbb{N} \times X \preceq X \times X \cong X$. □

Um größere Kardinalitäten als $\omega$ zu erreichen, muß man sich also der Potenzierung bedienen, was allerdings nur unter der Annahme des Auswahlaxioms Sinn macht.

Für Potenzen von Kardinalzahlen läßt sich folgende Abschätzung angeben.

**Lemma 7.3** *Für Kardinalzahlen $\kappa$, $\lambda$ gilt $\lambda^\kappa \leq 2^{\kappa \cdot \lambda}$ und, wenn $\kappa$ oder $\lambda$ unendlich ist, gilt überdies $\lambda^\kappa \leq 2^{\max\{\kappa,\lambda\}}$.*

*Beweis:* Für beliebige Menge $A$ und $B$ gilt

$$B^A \subseteq \mathcal{P}(A \times B) \cong 2^{A \times B}$$

woraus die erste Behauptung folgt. Wenn $\kappa$ oder $\lambda$ unendlich ist, so gilt $\kappa \cdot \lambda \leq \max\{\kappa, \lambda\} \cdot \max\{\kappa, \lambda\} = \max\{\kappa, \lambda\}$, woraus die zweite Behauptung folgt. □

**Korollar 7.4** *Wenn $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl ist, dann gilt*

$$2^\kappa = \lambda^\kappa$$

*für alle Kardinalzahlen $\lambda$ mit $2 \leq \lambda \leq \kappa$.*

*Beweis:* Für $2 \leq \lambda \leq \kappa \geq \omega$

$$2^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq 2^{\max\{\kappa,\lambda\}} = 2^\kappa$$

wobei die zweite Abschätzung wegen Lemma 7.3 gilt. □

**Korollar 7.5** *Wenn $\kappa^\mu \geq \lambda$ und $\kappa \leq \lambda$, dann ist $\kappa^\mu = \lambda^\mu$, falls $\mu$ unendlich ist.*

*Beweis:* Es gilt $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu \leq (\kappa^\mu)^\mu = \kappa^{\mu \cdot \mu} = \kappa^\mu$. □

Insbesondere gilt also für unendliche Kardinalzahlen $\kappa$, daß $2^\kappa = \lambda^\kappa$ für alle Kardinalzahlen $\lambda$ mit $2 \leq \lambda \leq 2^\kappa$.

Da $\mathsf{Card}$ eine Klasse ist und durch $\in$ wohlgeordnet wird, kann man die unendlichen Kardinalzahlen mit $\mathsf{Ord}$ bijektiv wie folgt in Beziehung setzen.

**Definition 7.2** *Die Funktion $\aleph : \mathsf{Ord} \overset{\cong}{\to} \mathsf{Card} - \omega$ sei durch transfinite Rekursion wie folgt definiert*

$$\aleph_0 = \omega \qquad \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$$

$$\aleph_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \quad (\lambda \text{ Limesordinal}).$$ ◊

Für unendliche Kardinalzahlen $\kappa$ ist die einzige naheliegende *explizite* Konstruktion einer echt größeren Kardinalzahl die Potenz $2^\kappa$. Dies bewegte G. Cantor zu der kühnen Vermutung, daß

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

für alle Ordinalzahlen $\alpha$ gilt, d.h., daß es für unendliche $\kappa$ kein $\lambda$ gibt mit

$$\kappa < \lambda < 2^\kappa$$

Diese Vermutung Cantors hat unter dem Namen *verallgemeinerte Continuumshypothese* Berühmtheit erlangt. Die *spezielle Continuumshypothese* ist der Spezialfall für $\alpha = 0$, d.h. die Behauptung, daß jede unendliche Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ entweder zu $\mathbb{N}$ oder zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist.[8] In den 60er Jahren des 20. Jhd. gelang es Paul Cohen [Coh] zu zeigen, daß sogar die spezielle Continuumshypothese von ZFC unabhängig ist. Mit der zu diesem Zweck entwickelten Methode des sog. *forcing* konnte man viele weitere Unabhängigkeitsresultate dieser Art erzielen, insbesondere aber auch die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den ZF-Axiomen.

Da die Kontinuumshypothese von ZFC unabhängig ist, macht es Sinn folgende Hierarchie von Kardinalzahlen mit transfiniter Induktion zu definieren

$$\beth_0 = \omega \qquad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$$

$$\beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \quad (\lambda \text{ Limesordinal}).$$

Die Cantorsche Coninuumshypothese besagt dann, daß $\aleph_1 = \beth_1$, und die verallgemeinerte Continuumshypothese besagt, daß

$$\aleph_\alpha = \beth_\alpha$$

für alle Ordinalzahlen $\alpha$.

# 8 Endlichkeitsbegriffe

Wenn man die natürlichen Zahlen zur Verfügung hat, wird jeder vernünftige Mensch diesen Begriff folgendermaßen definieren.

**Definition 8.1** *Eine Menge $X$ heißt* endlich*, wenn $\exists n{\in}\omega.\, n \approx X$.* $\Diamond$

Vielfach findet sich aber folgender alternativer, auf Richard Dedekind zurückgehende Begriff.

**Definition 8.2** *Eine Menge $X$ heißt D-*endlich*, wenn $X$ zu keiner echten Teilmenge von $X$ gleichmächtig ist.* $\Diamond$

In ZF (d.h. ohne Auswahlaxiom) kann man zeigen, daß

[8] da man zeigen kann, daß $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind

**Lemma 8.1** *Eine Menge $X$ ist genau dann nicht nicht $D$-endlich, wenn eine injektive Funktion von $\omega$ nach $x$ existiert.*

*Beweis:*

$\square$

Also ist $X$ genau dann $D$-endlich, wenn es keine injektive Funktion von $\omega$ nach $X$ gibt. Darauf basierend kann man mithilfe des Auswahlaxioms (in Form des Zornschen Lemmas) zeigen, daß

**Satz 8.1** *Eine Menge $X$ ist genau dann $D$-endlich ist, wenn $X$ endlich (d.h. zu einem $n \in \omega$ gleichmächtig) ist.*

*Beweis:*

$\square$

In [Coh, Jen] finden sich Beweise, daß Satz 8.1 in $\mathsf{ZF}$ nicht beweisbar ist, da Modelle von $\mathsf{ZF}$ existieren, in denen es Mengen gibt, die $D$-endlich, aber nicht endlich sind.

Alternativ hat Kazimierz Kuratowski folgende Charakterisierung des Endlichkeitsbegriffs vorgeschlagen, die in ihrer Formulierung nicht auf die natürlichen Zahlen bezug nimmt.

**Definition 8.3** *Für eine Menge $X$ sei $\mathcal{K}(X)$ die kleinste Teilmenge $K$ von $\mathcal{P}(X)$, sodaß*

(1) $\emptyset \in K$ *und*

(2) $A \cup \{x\}$, *falls* $A \in K$ *und* $x \in X$.

*Eine Menge $X$ heißt $K$-*endlich*, wenn $X \in \mathcal{K}(X)$.* $\diamondsuit$

Man kann nun relativ leicht in $\mathsf{ZF}$ (d.h. ohne Auswahlaxiom!) zeigen, daß

**Satz 8.2** *Eine Menge $X$ ist genau dann endlich, wenn sie $K$-endlich ist.*

*Beweis:*

$\square$

## Danksagung

Dieses Skript wurde basierend auf einer von Herrn Tobias Mann geTEXten Version meiner handschriftlichen Vorlesungsunterlagen erstellt. Ich möchte mich an dieser Stelle bei ihm für seine Mühe recht herzlich bedanken.

# Literatur


[Le1] A. Levy *The independence of various definitions of finiteness.* Fund. Math. 46, pp.1-13, 1958.

[Le2] A. Levy *Basic Set Theory* Springer, 1979.

[Ba] J. Barwise (ed.) *Handbook of Mathematical Logic* North-Holland, 1977.

[Coh] P. Cohen *Set Theory and the Continuum Hypothesis* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1966.

[Dei] O. Deiser *Einführung in die Mengenlehre* Springer Lehrbuch, Springer 2004.

[Dev] K. Devlin *The Joy of Sets* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1993.

[Jech] T. Jech *Set Theory* Springer, 2003.

[Jen] R.B. Jensen *Modelle der Mengenlehre.* Springer, 1967.

[Mo] Y. Moschovakis *Notes on Set Theory* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1994.

[Sh] J. Shoenfield Axioms of Set Theory pp.321-344 in [Ba].