Axiomatische Mengenlehre 1

Heike Mildenberger

Skript zu der
im Wintersemester 2005/2006
in Wien gehaltenen
dreistündigen Vorlesung „Axiomatische Mengenlehre 1“

Inhalt

KAPITEL 1

Die Axiome von ZFC

Literatur: Bücher: [**19**] [**21**], [**10**], [**9**], [**15**], [**16**]. Skripte: [**26**], [**2**], [**29**], Originalartikel: [**1, 3, 4, 6, 5, 8, 11, 13, 12, 17, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30**]

ZFC: Zermelo, Fraenkel, und Choice.

Duden: Axiom: als absolut richtig anerkannter Grundsatz, gültige Wahrheit, die keines Beweises bedarf.

Axiom 0: Existenz (Ex). Es gibt eine Menge.

$$\exists x(x = x).$$

Axiom 1: Extensionalität (Ext). Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind gleich.

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to y = x).$$

Axiom 2: Fundierung (Fund). Die $\in$-Relation ist fundiert, d.h., jede nicht leere Menge hat ein $\in$-minimales Element,

$$\forall x(\exists y \in x \to \exists y \in x(\neg \exists z(z \in y \wedge z \in x)))$$

Axiom 3: Aussonderungsschema (Comprehension) (Aus). Für alle $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$ mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{x, z, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ gilt folgendes

$$\forall z \forall w_1 \dots \forall w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi).$$

Axiom 4: Paarmengenaxiom (Pairing) (Paar)

$$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

Axiom 5: Vereinigungsmengenaxiom (Union) (Verein)

$$\forall F \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in F \to x \in A).$$

Axiom 6: Ersetzungsschema (Replacement) (Ers). Für alle $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$ mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{x, y, A, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ gilt folgendes

$$\forall A \forall w_1 \dots \forall w_n(\forall x \in A \exists ! y \varphi \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi).$$

Sei x eine Menge. Nach (Aus) gibt es $\emptyset = \{z \in x \mid z \neq z\}$.

Axiom 7: Unendlichkeitsaxiom (Infinity) (Inf)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x)).$$

Sei $x \subseteq y$ eine Abkürzung für $\forall z \in x(z \in y)$.

Axiom 8: Potenzmengenaxiom (Pot) powerset

$$\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y).$$

Axiom 9: Auswahlaxiom (Axiom of Choice)

$$\forall A \exists R(\langle A, R\rangle \text{ ist eine Wohlordnung}).$$

Zur Definition von Wohlordnungen kommen wir in Sektion 1 dieses Kapitels.

Teilsysteme. Etliche Folgerungen können schon aus Teilsystemen von ZFC bewiesen werden. Wichtige modelltheoretische Techniken werden für Teilsysteme von ZFC angewandt. Daher kennzeichnen wir:

ZFC: Axiome 0 – 9
ZF: Axiome 0 – 8
ZF$^-$ Axiome 0,1,3 – 8. Also ohne Fundierung.
ZF$^-$ – P: Axiome 0,1,3 – 7. Ohne Fundierung und ohne Potenzmenge.
ZF – P: Axiome 0– 7. Mit Fundierung ohne Potenzmenge.
Und ZFC$^-$, ZFC$^-$ – P, ZFC – P sind natürlich entsprechend definiert.

Wiederholung. Die Sprache der ersten Stufe mit dem zweistelligen Prädikatssymbol $\in$, $\mathcal{L}(\in)$:

Symbole $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \exists, \forall, (,), \in, =, v_i, i \in \mathbb{N}$.

Atomare Formeln $v_i = v_j$, $v_i \in v_j$.

Wenn φ und ψ Formeln sind, dann auch $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, usf., $\neg(\varphi)$, $\exists v_i(\varphi)$, $\forall v_i(\varphi)$. Zur Definition for $\mathrm{fr}(\varphi)$, der Menge der freien Variablen in φ: $\mathrm{fr}(v_i = / \in v_j) = \{v_i, v_j\}$, $\mathrm{fr}((\varphi) * (\psi)) = \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$ für jeden Boole'schen Operator $*$, $\mathrm{fr}(\exists v_i \varphi) = \mathrm{fr}(\varphi) \setminus \{v_i\}$.

Konvention: Wir schreiben statt $\forall x(x \in y \rightarrow \varphi)$ kurz $\forall x \in y\, \varphi$ und statt $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ nur $\exists x \in y\, \varphi$.

Wir schreiben $\exists! x\varphi$ als Abkürzung für "es gibt genau ein x so dass φ", $\exists x\varphi \wedge \forall y(\varphi(\frac{y}{x}) \rightarrow y = x)$

Bemerkungen. Das Existenzaxiom wird manchmal auch aus der (klassischen) Logik (der Sprache der ersten Stufe) hergeleitet: $x = x$ is allgemeingültig, und daraus wird $\exists x x = x$ abgeleitet. Leere Strukturen sind also niemals Gegenstand der Betrachtungen.

Das Existenzaxiom kann auch aus dem Unendlichkeitsaxiom hergeleitet werden. Das Axiomensystem ist also nicht minimal gewählt.

Das Extensionalitätsaxiom sagt, dass die Reihenfolge der Elemente in einer Menge und das eventuelle mehrfache Aufführen dasselben Elements keine Rolle spielen. Statt der Implikation kann auch die Äquivalenz geschrieben werden, da die Rückrichtung aus den Schlussregeln der Logik erster Stufe über die Gleichheit folgt.

Alle unsere Variablen laufen über Mengen. Wir gestatten in ZFC keine Variablennamen, die über Klassen rangieren. Alle Klassen werden definierbare Klassen des Typs $\{x \mid \varphi\}$ mit (Mengen-)Parametern in φ sein. Später werden wir jedoch auch einige Klassen schreiben, und dies soll als Abkürzung für Definitionen aufgefasst werden. Eine andere Möglichkeit ist das Axiomensysten NBG, das durch von Neumann, Bernays und Gödel aufgestellt wurde und das wie ZFC aussieht, nur dass die Schemata von Ers und Aus durch Klassenvariablen ersetzt werden. Dies ist eine konservative Erweiterung von ZFC: Aus NBG lassen sich die gleichen Folgerungen über Mengen ziehen wie aus ZFC. Im Abschnitt über transfinite Induktion und transfinite Rekursion werden die gerade eben gemachten kryptischen Bemerkungen näher erläutert.

Die Russell'sche Antinomie. Das Frege'sche Komprehensionsschema (das nicht zu ZFC gehört) sagt: Zu jedem φ mit $y \notin \mathrm{fr}(\varphi)$:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi)$$

Dieses Schema, angewandt auf die Formel $\varphi(x) = x \neq x$, führt zu einem Widerspruch, der Russell'schen Antinomie: Sei y, so dass $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$. Dann ist $y \in y$ gwd $y \notin y$. Widerspruch.

Das Aussonderungsaxiom gestattet die Bildung der Russell'schen Klasse nicht. Man betrachte die Aussage $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \notin x)$, für eine Menge z. Dann ist $y \notin y$ nach der Fundierheit, und $y = z \notin z$, und es gibt also keinen Widerspruch.

Dass es diesen einen Widerspruch in ZFC nicht gibt, garantiert natürlich nicht, dass es nicht einen anderen Widerspruch gibt. Leider kann die Widerspuchsfreiheit von ZFC nicht garantiert werden, schlimmer noch, nach dem Gödel'schen Unvollständigkeitssatz kann die Widerspruchsfreiheit von ZFC mit den Mitteln von ZFC nicht gezeigt werden.

Satz 1.1. *Es gibt keine Menge, die alle Mengen enthält* $\neg\exists x \forall z(z \in x)$.

Beweis. Sonst sei $\forall z(z \in x)$ Dann ist $\{z \in x \mid z \notin z\} = u$ eine Menge und es gibt wieder den Russell'schen Widerspruch $u \in u \leftrightarrow u \notin u$. □

Definition 1.2. Eine Zusammenfassung von Mengen heißt Klasse. Eine Klasse, die keine Menge ist, heißt echte Klasse. Eine unechte Klasse ist eine Menge.

Wir schreiben $\mathbf{V} = \{x \mid x \text{ Menge }\}$ für die Allklasse. Wir schreiben fettgedruckte Buchstaben und andere Symbole (wie $<$, $\subseteq$, usf) für Klassen und quantifizieren nur in der Metasprache über Klassen.

Wenn man nur die Axiome Ex, Aus, Fund hat, dann könnte $\mathbf{V} = \{\emptyset\}$ mit der leeren $\in$-Relation sein. Es ist also sinnvoll, mehr Mengenexistenzaxiome dazuzunehmen.

Paarmengen, Vereinigungsmengen, Bildmengen. Wir haben die Axiome 4,5,6, scheinbar schwach formuliert: Die geforderten Mengen (z, A, Y) könnten mehr Elemente enthalten, als in den Axiomen explizit gefordert war. Doch mithilfe des Aussonderungsaxioms folgt aus 4,5,6 die Existenz von Mengen, die genau die geforderten Elemente enthalten. Dies zeigt man so:

Paarmenge: Seien x, y gegeben und sei z wie in Axiom 4. Dann ist $z' = \{u \in z \mid u = x \vee u = y\} = \{x, y\}$.

Vereinigungsmenge: Sei $\mathcal{F}$ gegeben. Sei A wie in Axiom 5 zu $\mathcal{F}$. Dann ist $A' = \{x \in A \mid \exists Y \in \mathcal{F} x \in Y\} = \bigcup \mathcal{F}$.

Bildmenge: Gelte $\forall x \in A \exists! y \varphi$ Sei Y wie im Ersetzungsschema gegeben. Dann ist $Y' = \{y \in Y \mid \exists x \in A\, \varphi\} = \mathrm{rge}(\varphi \restriction A)$ die Bildmenge der Operation φ angewandt auf die Menge A.

Geordnete Paare. Nach dem Paaremengenaxiom ist zu jeder Menge x auch die Einermenge $\{x\} = \{x, x\}$ eine Menge.

Definition 1.3. Die Menge $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ heißt das geordnete Paar von x und y.

Hat das so definierte geordnete Paar die Eigenschaft, die wir von einem geordneten Paar erwarten?

Behauptung 1.4.

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y'(\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \leftrightarrow (x = x' \wedge y = y'))$$

Beweis. Wir rechnen $\rightarrow$ mithilfe des Extensionalitätsaxioms und Logik nach.

1. Fall $x = y$. Dann ist $\langle x, y\rangle = \{\{x\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$. Also ist nach Ext $\{x\} = \{x'\}$ und $\{x\} = \{x', y'\}$. Aus dem ersten folgt $x = x'$ und aus dem zweiten $x' = y'$. Also sind $x = y = x' = y'$ und insbesondere $x = x'$ und $y = y'$.

2. Fall $x \neq y$. Dann ist $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$. Dann ist $\{x, y\} = \{x', y'\}$ und $x' \neq y'$ und $\{x'\} = \{x\}$. Daher ist $x = x'$ und $y = y'$. $\square$

Große und kleine Schnitte, kleine Vereinigungen. Wir weisen die Wohldefiniertheit der genannten Operationen auf der Basis der Axiome Aus, Paar, Vereinigung nach.

Kleiner Schnitt: $x \cap y = \{u \in x \mid u \in y\}$ braucht nur das Aussonderungsschema.

Kleine Vereinigung: $x \cup y = \bigcup\{x, y\} = \{z \in \bigcup\{x, y\} \mid z \in x \vee z \in y\}$ benutzt das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsmengenaxiom.

Große Schnitte: Sei $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei $Y \in \mathcal{F}$. Dann ist $\bigcap \mathcal{F} = \{y \in Y \mid \forall Z \in \mathcal{F} y \in Z\}$ also nach dem Aussonderungsschema wohldefiniert. Für $\mathcal{F} = \emptyset$ hingegen ist $\bigcap \mathcal{F} = \mathbf{V}$ die Allklasse, oder undefiniert, auf jeden Fall keine Menge.

Differenz: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ existiert nach dem Aussonderungsschema.

Produkte endlich vieler Faktoren. Warnung: Produkte aus unendlich vielen Faktoren können nur mit dem Auswahlaxiom adäquat behandelt werden. Wir beschränken uns auf zwei Faktoren.

Behauptung 1.5. *$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$ ist eine Menge.*

Beweis: Sei $y \in B$. Wir halten y zunächst fest. Es gilt $\forall x \in A \exists! z(z = \langle x, y\rangle)$. Aus Ers und Aus folgt, dass

$$\mathrm{prod}(A, y) = \{z \mid \exists x \in A z = \langle x, y\rangle\}$$

eine Menge ist. Außerdem gilt $\forall y \in B \exists! z(z = \mathrm{prod}(A, y))$. Nun werden Aus und Ers auf diese Formel angewandt und liefern die Menge

$$\mathrm{prod}'(A, B) = \{\mathrm{prod}(A, y) \mid y \in B\}.$$

Nun verifiziert man, dass $A \times B = \bigcup \mathrm{prod}'(A, B)$.

Eine andere Beweismethode ist es, $A \times B$ aus $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, der Potenzmenge der Potenzmenge von $A \cup B$, auszusondern. Der erste, längere Beweis ist jedoch nicht umsonst, da es sehr viele nützliche Teilbereiche des Mengenuniversums gibt, in denen das Potenzmengenaxiom nicht gilt, das Ersetzungsschema für recht einfache φ's (zu denen die beiden im obigen Beweis verwendeten φ's gehören) jedoch gilt. $\square$

Relationen, Funktionen, lineare Ordnungen

Wir möchten die genannten Objekte auf der Basis der Axiome 0 bis 6 begründen.

Definition 1.6. 1. Eine Relation ist eine Menge, deren Elemente geordnete Paare sind.

2. Der Definitionsbereich (domain) von R ist $\mathrm{dom}(R) = \{x \in \bigcup\bigcup R \mid \exists y \langle x, y\rangle \in R\}$.

3. Der Bildbereich (range) von R ist $\mathrm{rge}(R) = \{y \in \bigcup\bigcup R \mid \exists x \langle x, y\rangle \in R\}$.

4. Die Umkehrrelation von R ist $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$.

Bemerkung: Der Definitionsbereich und der Bildbereich können für jede Menge R gelesen werden, aber sind nur für Relationen R gebräuchlich.

Definition 1.7. Eine Menge f ist eine Funktion gdw f eine Relation ist und folgendes gilt

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) \exists! y(\langle x, y\rangle \in f).$$

Definition 1.8. 1. Wir schreiben $f\colon A \to B$, wenn folgendes gilt: f ist eine Funktion, $\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{rge}(f) = B$.

2. Wir bezeichnen das y mit $\langle x, y\rangle \in f$ als $f(x)$.

3. Für $C \subseteq \mathrm{dom}(f)$ schreiben wir $f \restriction C = f \cap (C \times B)$.

4. Wir schreiben Bildmengen wie folgt: $f''C = f[C] = \mathrm{rge}(f \restriction C) = \{f(x) \mid x \in C\}$. Falls $\mathrm{dom}(f) \supseteq C \cup \{C\}$, kann $f(C) \neq f''(C)$ sein.

5. $f\colon A \to B$ ist injektiv, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x) = y$.

6. $f\colon A \to B$ ist surjektiv, wenn es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x) = y$.

7. $f\colon A \to B$ ist bijektiv, wenn es zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x) = y$.

Bei (zweistelligen) Relationen R schreibt man oft xRy für $\langle x, y\rangle \in R$.

Definition 1.9. Eine lineare (auch: totale) Ordnung ist ein Paar $\langle A, R\rangle$, so dass R die Menge A linear ordnet, d.h., dass R eine Relation ist, die die folgenden Eigenschaften hat

Transitivität: $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$

Irreflexivität: $\forall x \in A \neg xRx$.

Trichotomie (Linearität, Konnexität, Totalität) $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx \vee x = y)$.

Irreflexive, transitive Relationen heißen partielle Ordnungen oder Halbordnungen. Das Wort "Ordnung" wird je nach Autor und Zeit für lineare Ordnung oder für Halbordnung gebraucht.

Beachten Sie, dass wir nicht gefordert haben, dass $R \subseteq A \times A$. Daher gilt: Wenn $\langle A, R\rangle$ eine lineare Ordnung ist und $B \subseteq A$, dann ist $\langle B, R\rangle$ eine lineare Ordnung. Man spart sich also „das Herunterschneiden" der Relation.

Nun werden wir bestimmte Ordnungen bis auf Isomorphie klassifizieren.

Definition 1.10. Wir definieren den Isomorphiebegriff für Strukturen mit einer zweistelligen Relation: $\langle A, R\rangle$ ist isomorph zu $\langle B, S\rangle$, in Symbolen $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$, gdw $\exists f\colon A \to B(f \text{ bijektiv } \wedge \forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y)))$.

1. Wohlordnungen

Definition 1.11. $\langle A, R\rangle$ heißt Wohlordnung, gdw $\langle A, R\rangle$ eine Ordnung ist, in der jede nicht leere Teilmenge von A ein R-minimales Element hat. $\forall y((y \subseteq A \wedge \exists x \in y) \to \exists z \in y(\forall u \in y(\neg uRz)))$

Man überlege sich, dass die hier geforderten R-minimalen Elemente auch die R-kleinsten sind, d.h, dass man $(\neg uRz)$ durch $(u = z \vee zRu)$ ersetzen kann.

Gegenbeispiele: $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$.

Beispiele: $(\mathbb{N}, <)$, $(\{0, 1, 2\}, <)$, $(\aleph_1, <)$.

(Die letztgenannte Struktur wird später erläutert werden.)

Unser Ziel ist die Klassifikation aller Wohlordnungen bis auf Isomorphie. Man denke daran, dass in der Mathematik Klassifikationsaufgaben im Allgemeinen immense Unterfangen sind. Zum Glück wird dies bei den Wohlordnungen nicht der Fall sein.

Eine Isomorphieklasse ist eine Klasse isomorpher Strukturen. Jede Isomorphieklasse, außer die zur leeren Struktur, ist eine echte Klasse. Da man zwischen isomorphen Strukturen nicht unterscheiden möchte oder kann, tut man so, als ob sie identisch wären, und nennt das dann Arbeiten „bis auf Isomorphie" oder „modulo Isomorphie".

Definition 1.12. Sei $\langle A, R\rangle$ ein geordnetes Paar, $x \in A$. Die Vorgängermenge von x in $\langle A, R\rangle$ ist $\text{pred}(A, x, R) = \{y \in A \mid yRx\}$.

Diese Festsetzung wird besonders für Ordnungen, lineare Ordnungen und Wohlordnungen $\langle A, R\rangle$ gebraucht.

Wir erarbeiten nun (mit einem kleinen Exkurs über den Wohlordnungssatz) ein Repräsentantensystem für $(\langle A, R\rangle/\cong) = \{\langle B, S\rangle \mid \langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle\}$ (dies ist eine Klasse), $\langle A, R\rangle$ Wohlordnung. Wir werden sehen, dass es Klassen-viele Isomorphieklassen gibt.

Lemma 1.13. *Wenn $\langle A, R\rangle$ eine Wohlordnung ist, dann ist für alle $x \in A$*

$$\langle A, R\rangle \not\cong \langle \text{pred}(A, x, R), R\rangle\rangle.$$

Beweis: Angenommen, $f\colon A \to \text{pred}(A, x, R)$ wäre ein Isomorphismus. Da $x \in A \setminus \text{pred}(A, x, R)$, ist $f(x) \neq x$. Die Menge $\{y \mid f(y) \neq y\}$ ist also nicht leer und hat ein kleinstes Element z. Dann ist für alle $z'Rz$, $f(z') = z'$. Wegen der Injektivität von f ist daher $zRf(z)$. Dann gilt aber wegen der Ordnungstreue auch für alle u mit zRu, dass $f(z)Rf(u)$. Also ist $z \notin \text{rge}(f)$, im Widerspruch zur Surjektivität von f. □

Frage: Wo bricht der Beweis dieses Lemmas z.B. für $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$ und $x \in \mathbb{Q}$ zusammen?

Lemma 1.14. *Wenn $\langle A, R\rangle$ und $\langle B, S\rangle$ isomorphe Wohlordnungen sind, dann gibt es genau einen Isomorphismus von $\langle A, R\rangle$ auf $\langle B, S\rangle$.*

Beweis: Seien f, g Isomorphismen von $\langle A, R\rangle$ auf $\langle B, S\rangle$. Sei $z = \min\{u \in A \mid f(u) \neq g(u)\}$, o.b.d.A. sei $f(z)Sg(z)$. Dann zeigt man wie im vorigen Lemma, dass $f(z) \notin \text{rge}(g)$. □

Satz 1.15. *(Der Trichotomiesatz für Wohlordnungen). Seien $\langle A, R\rangle$ und $\langle B, S\rangle$ Wohlordnungen. Dann gilt*

(a) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ *oder*

(b) $(\exists x \in A)\langle \text{pred}(A, x, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ *oder*

(c) $(\exists y \in B)\langle A, R\rangle \cong \langle \text{pred}(B, y, S), S\rangle$.

Beweis: Wir setzen

$$f = \{\langle u, v\rangle \in A \times B \mid \langle \text{pred}(A, u, R), R\rangle \cong \langle \text{pred}(B, v, S), S\rangle\}.$$

1. Zu jedem $u \in \text{dom}(f)$ gibt es genau ein v mit $\langle u, v\rangle \in f$. Sonst: Sei vSv', $g\colon \langle \text{pred}(A, u, R), R\rangle \cong \langle \text{pred}(B, v, S), S\rangle$, $g'\colon \langle \text{pred}(A, u, R), R\rangle \cong \langle \text{pred}(B, v', S), S\rangle$.

Dann ist $g' \circ g^{-1}\langle \mathrm{pred}(B, v, S), S\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, v', S), S\rangle$, im Widerspruch zu Lemma 1.13.

2. $\forall u \in \mathrm{dom}(f)\forall u' Ru(u' \in \mathrm{dom}(f))$, da man die Einschränkung des Zeugen $g\colon \langle \mathrm{pred}(A, u, R), R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, v, S), S\rangle$ auf $\mathrm{pred}(A, u', R)$ nehmen kann.

3. $\forall v \in \mathrm{rge}(f)\forall v' Sv(v' \in \mathrm{rge}(f))$, da man die Einschränkung des Zeugen $g\colon \langle \mathrm{pred}(A, u, R), R\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B, v, S), S\rangle$ auf $(g^{-1})''\mathrm{pred}(B, v', S)$ nehmen kann.

4. Echte Teilmengen u von Wohlordnungen $\langle C, T\rangle$, die gegenüber Vorgängern abgeschlossen sind, sind von der Form $\mathrm{pred}(C, x, T)$ für $x = \min C \setminus u$, wobei das Minimum bezüglich T gebildet wird.

Nun gibt es also für $\mathrm{dom}(f)$ und für $\mathrm{rge}(f)$ jeweils zwei Möglichkeiten, und wir gelangen zur folgenden Fallunterscheidung:

1. Fall: $\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{rge}(f) = B$. Dann rechnet man leicht nach, dass f ein Isomorphismus von $\langle A, R\rangle$ auf $\langle B, S\rangle$ ist. Wir erhalten also Disjunktionsglied (a) des Satzes.

2. Fall: $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{pred}(A, x, R)$ für ein $x \in A$, $\mathrm{rge}(f) = B$. Dann rechnet man leicht nach, dass f ein Isomorphismus von $\langle \mathrm{pred}(A, x, R), R\rangle$ auf $\langle B, S\rangle$ ist. Wir erhalten also Disjunktionsglied (b) des Satzes.

3. Fall: $\mathrm{dom}(f) = A$ und $\mathrm{rge}(f) = \mathrm{pred}(B, y, S)$ für ein $y \in B$. Dann rechnet man leicht nach, dass f ein Isomorphismus von $\langle A, R\rangle$ auf $\langle \mathrm{pred}(B, y, S), S\rangle$ ist. Wir erhalten also Disjunktionsglied (c) des Satzes.

4. Fall: $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{pred}(A, x, R)$ für ein $x \in A$, $\mathrm{rge}(f) = \mathrm{pred}(B, y, S)$ für ein $y \in B$. Dann ist aber $\langle x, y\rangle \in f$, wie durch $f \cup \{\langle x, y\rangle\}$ bezeugt wird, im Gegensatz zu $x \notin \mathrm{dom}(f) = \mathrm{pred}(A, x, R)$. Widerspruch. □

Zur Motivation der Ordinalzahlen geben wir nun einen (vorläufig noch lückenhaften) Beweis des Wohlordnungssatzes.

AC' sei die Abkürzung der folgenden Aussage:

$$\forall \mathcal{F}(\forall Y \in \mathcal{F} Y \neq \emptyset \to \exists f\colon \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \forall Y \in \mathcal{F} f(Y) \in Y).$$

Eine Funktion wie in AC' gefordert heißt Auswahlfunktion. In vielen Darstellungen wird AC' als das Auswahlaxiom bezeichnet Dies hat seine Berechtigung, denn es gilt

Satz 1.16. *Der Wohlordnungssatz, Zermelo 1904. Auf der Basis von ZF gilt:* $AC' \leftrightarrow \forall A \exists R(\langle A, R\rangle$ *Wohlordnung).*

Beweis. $\leftarrow$. Sei $\bigcup \mathcal{F}$ via R wohlgeordnet. Dann ist $f(Y) = \min_R(Y)$ eine gewünschte Auswahlfunktion.

$\to$ (vorläufig noch nicht begründet) Sei A gegeben. Sei $h\colon \mathcal{P}(A) \setminus \{0\} \to A$ eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(A)$. Nun definieren wir durch transfinite Rekursion eine Funktion $g\colon (\beta, \in) \to A$ durch $g(\alpha) = h(A \setminus g''\alpha)$, falls $g''\alpha \neq A$. g ist injektiv, und daher gibt es ein β so dass $g''\beta = A$. Nun setzen wir für $a, b \in A$, $aRb \leftrightarrow g^{-1}(a) \in g^{-1}(b)$. □

KAPITEL 2

Transfinite Induktion, Ordinalzahlen, Peano-Axiome

Definition 2.1. Eine Menge x heißt transitiv gdw $\forall y \in x(\forall z \in y(z \in x))$.

Beispiele: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
Gegenbeispiele: $\{\{\emptyset\}\}$, $x \neq \emptyset$, dann ist $\{x\}$ nicht transitiv.

Definition 2.2. Eine Menge x heißt Ordinalzahl (kurz On) gdw x transitiv ist und $\langle x, \in\rangle$ eine Wohlordnung ist.

Satz 2.3. *1. Wenn x eine Ordinalzahl ist und $y \in x$ ist, dann ist auch y eine Ordinalzahl.*

2. Wenn x und y Ordinalzahlen sind und $\langle x, \in\rangle \cong \langle y, \in\rangle$ ist, dann ist $x = y$.

3. Wenn x und y Ordinalzahlen sind, dann ist $\langle x, \in\rangle \cong \langle y, \in\rangle$ oder $x \in y$ oder $y \in x$.

4. Wenn x, y und z Ordinalzahlen sind und $x \in y$ und $y \in z$, dann ist $x \in z$.

5. Wenn C eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen ist, dann gibt es ein $x \in C$, so dass $\forall y \in x(y \notin C)$.

Beweis: 1. Da Anfangsabschnitte von Wohlordnungen (mit derselben Ordnungsrelation) wieder Wohlordnungen sind, genügt es zu zeigen, dass y auch transitiv ist. Sei hierzu $z \in y$. Wir behaupten, dass $z \subseteq y$. Da aus der Transitivität von x folgt, dass $z \in x$, haben wir $z \subseteq x$. Sei nun $u \in z$. Dann ist $u \in z \in y$ und wegen der Transitivität der linearen Ordnung $\in$ auf x daher $u \in y$. Also $z \subseteq y$, wie behauptet.

2. Sei $f\colon \langle x, \in\rangle \cong \langle y, \in\rangle$. Wir behaupten, dass $\mathrm{id}\colon \langle x, \in\rangle \cong \langle y, \in\rangle$. Das kleinste Element von x muss $\emptyset$ sein, da das kleinste Element m keine $\in$-Vorgänger in x und daher keine $\in$-Vorgänger im Universum hat: x ist transitiv, d.h., wenn $m \in x$, dann $m \subseteq x$. Also sind alle $\in$-Vorgänger von m, die es im Universum gibt, schon in x. Dasselbe gilt für y. Wir haben daher $f(\emptyset) = \emptyset$.

Da f die $\in$-Relation erhalten soll, gilt nun induktiv über die Wohlordnung $\langle x, \in\rangle$, $f(u) = \{f(w) \mid w \in u\} = \{w \mid w \in u\} = u$. Insgesamt hat man also $x = \mathrm{dom}(f) = \mathrm{rge}(f) = y$.

3. Dies folgt aus dem Trichotomiesatz für die Wohlordnungen und dem Punkt 2. dieses Satzes: Es gilt $\langle x, \in\rangle \cong \langle y, \in\rangle$ oder $(\exists z \in x\ (\langle z, \in\rangle \cong \langle y, \in\rangle))$ oder $(\exists z \in y\ (\langle x, \in\rangle \cong \langle z, \in\rangle))$. Nun ersetzen wir nach dem vorigen Punkt die Isomorphismen durch die Gleichheiten und erhalten $x = y$ oder $y = z \in x$ oder $x = z \in y$.

4. z is nach Definition transitiv.

5. Sei $y \in C$. Wenn $y \cap C \neq \emptyset$, dann nimmt man das $\in$-minimale Element x von $y \cap C$ in der Wohlordnung $\langle y, \in\rangle$. Dann $\forall y \in x(y \notin C)$. Wenn $y \cap C = \emptyset$, dann ist y selbst das gesuchte $\in$-Minimum. $\square$

Satz 2.4. *Die Antinomie von Burali-Forti 1897.* $\{z \mid z \text{ Ordinalzahl}\}$ *ist eine echte Klasse.*

Beweis: Sonst wäre $u = \{z \mid z \text{ Ordinalzahl}\}$ eine Menge. Dann wäre nach den Punkten 3., 4. und 5. des vorigen Satzes u selbst eine Ordinalzahl. Somit wäre $u \in u$, was dem Lemma 1.13 widerspricht.

□

Lemma 2.5. *Eine Menge C von Ordinalzahlen ist eine Ordinalzahl gwd* $\forall x \in C \forall y \in x(y \in C)$.

Beweis: $\rightarrow$: Ordinalzahlen sind transitiv. $\leftarrow$: C ist durch $\in$ wohlgeordnet, da Teilmengen von Wohlordnungen selbst Wohlordnungen sind. C ist nach Voraussetzung transitiv. □

Satz 2.6. *Zu jeder Wohlordnung $\langle A, R\rangle$ gibt es genau eine Ordinalzahl x, so dass $\langle A, R\rangle \cong \langle x, \in\rangle$.*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus Punkt 2. des Satzes 2.3. Wir bilden die folgende Menge:

$$B = \{a \in A \mid \exists x(xOn \wedge \langle \text{pred}(A, a, R), R\rangle \cong \langle x, \in\rangle)\},$$

und bilden eine Funktion $f\colon B \rightarrow On$ mit der Definition, dass $f(a)$ das eindeutig bestimmte x ist so dass $\langle \text{pred}(A, a, R), R\rangle \cong \langle x, \in\rangle$. Nach dem Ersetzungsaxiom ist $\text{rge}(f)$ ein Menge. Man rechnet leicht nach, dass $\forall x \in \text{rge}(f) \forall y \in x(y \in \text{rge}(f))$. Nach dem vorigen Lemma ist $\text{rge}(f)$ eine Ordinalzahl. Wir behaupten dass $B = A$. B ist eine Teilmenge von A, die gegen R-Vorgänger abgeschlossen ist. Falls $B \neq A$, dann sei b das R-minimale Element von $A \setminus B$. Dann ist aber f ein Zeuge für einen Isomorphismus $\langle \text{pred}(A, b, R), R\rangle \cong \langle z, \in\rangle$, und somit $b \in B$, Widerspruch. □

Bemerkung (ohne Beweis): In ZFC ohne (Ers) kann man Satz 2.6 nicht beweisen.

Definition 2.7. Für Wohlordnungen $\langle A, R\rangle$ sei $\text{type}(A, R)$ die Ordinalzahl x, so dass $\langle A, R\rangle \cong \langle x, \in\rangle$. $\text{type}(A, R)$ steht für Ordnungstyp von $\langle A, R\rangle$, d.h., für seinen Isomorphietyp in der Klasse aller Strukturen mit einem einzigen zweistelligen Relationssymbol.

Konventionen: Wir schreiben kleine griechische Buchstaben für Ordinalzahlen. Wir schreiben α statt $\langle \alpha, \in\rangle$, wenn dies nicht zu Missverständnissen führt. Außerdem kürzen wir Quantifizierungen über Ordinalzahlen wie folgt ab: $\forall \alpha \varphi(\alpha)$ steht für $\forall x(xOn \rightarrow \varphi(x))$. $\exists \alpha \varphi(\alpha)$ steht für $\exists x(xOn \wedge \varphi(x))$. Wir schreiben manchmal $\alpha < \beta$ für $\alpha \in \beta$ und $\alpha \leq \beta$ für $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$. Wir benützen auch die umgekehrten Ordnungssymbole.

Definition 2.8. Wenn x eine Menge von Ordinalzahlen ist, dann schreiben wir $\sup x = \bigcup x$ und, wenn $x \neq \emptyset$, dann setzen wir $\min x = \bigcap x$.

Lemma 2.9. *1.* $\forall \alpha, \beta(\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta)$.

2. Wenn x eine Menge von On ist, dann ist $\sup x$ *die kleinste On α, so dass* $\forall y \in x(y \leq \alpha)$.

3. Wenn x eine nicht leere Menge von On ist, dann ist $\min x$ *die kleinste On in x.* □

Ist $\sup x \in x$? Wir werden sehen, dass es beide Möglichkeiten gibt.

DEFINITION 2.10. Zu jeder On α definieren wir ihren ordinalen Nachfolger (successor) $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Allgemein setzen wir $S(x) = x \cup \{x\}$.

$S(\alpha)$ ist eine Ordinalzahl.

LEMMA 2.11. $\forall\alpha(\alpha < S(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta < S(\alpha) \rightarrow \beta \leq \alpha))$.

DEFINITION 2.12. 1. α heißt Nachfolgerordinalzahl gdw $\exists\beta(\alpha = S(\beta))$.
2. α heißt Limesordinalzahl gdw α keine Nachfolgerordinalzahl und nicht $\emptyset$ ist. Wir schreiben $\lim(\alpha)$ für „α ist eine Limesordinalzahl".

DEFINITION 2.13. Dies sind unendlich viele Definitionen! $0 := \emptyset$, $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, usf.

Wir haben also $1 = \{0\}$. $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, usf. Dies sind die sogenannten von Neumann'schen natürlichen Zahlen.

DEFINITION 2.14. α ist eine natürliche Zahl gdw $\forall\beta \leq \alpha(\beta = 0 \vee \beta$ Nachfolger).

Nun berufen wir uns auf das Unendlichkeitsaxiom (Inf), das sagt

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x S(y) \in x).$$

DEFINITION 2.15. Sei x wie in (Inf). Dann ist

$$\omega = \{z \in x \mid z \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

SATZ 2.16. *ω erfüllt die sogenannten Peano-Axiome, d.h.*
1. $0 \in \omega$,
2. $\forall n \in \omega(S(n) \in \omega)$,
3. $\forall n, m \in \omega(n \neq m \rightarrow S(n) \neq S(m))$,
4. $\forall x \subseteq \omega((0 \in x \wedge \forall n \in x(S(n) \in x)) \rightarrow \omega \subseteq x)$.

Beweis: 1. 0 ist eine natürliche Zahl und 2. für jede natürliche Zahl α ist auch $S(\alpha)$ eine natürliche Zahl. 3. Sei $S(n) = S(m)$ dann ist $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ und daher $n = \sup(n \cup \{n\}) = \sup(m \cup \{m\}) = m$. 4. Man nimmt an, dass $\omega \setminus x \neq \emptyset$. Dann sei $n = \min \omega \setminus x$. $n \neq 0$, da $0 \in X$, daher ist $n = S(m)$ für ein m. Dann haben wir $m \in x$, da n minimal außerhalb war. Aber nach der Voraussetzung ist dann auch $n = S(m) \in x$. Widerspruch. □

Man kann mithilfe dieser Axiome und ZFC ohne Inf die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen aufbauen, und auf diesen Mengen die bekannten Operationen $+$ und $\cdot$ definieren. Wir werden diesen Weg nicht weiter verfolgen, sondern $+$ und $\cdot$ auf allen geordneten Paaren von Ordinalzahlen definieren.

1. Addition, Multiplikation und Exponentiation auf den Ordinalzahlen

Definition 2.17. (a) $\alpha + \beta := \text{type}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R)$ mit der Relation

$$\begin{aligned} R = &\{\langle\langle \xi, 0\rangle, \langle \eta, 0\rangle\rangle \mid \xi < \eta < \alpha\} \cup \\ &\{\langle\langle \xi, 1\rangle, \langle \eta, 1\rangle\rangle \mid \xi < \eta < \beta\} \cup \\ &[(\alpha \times \{0\}) \times (\beta \times \{1\})]. \end{aligned}$$

(b) Versuch einer induktiven Definition. Für jedes α definieren wir induktiv über On:

$$\begin{aligned} &\alpha +_i 0 = \alpha, \\ &\alpha +_i (S(\beta)) = S(\alpha +_i \beta), \\ &\alpha +_i \lambda = \sup\{(\alpha +_i \beta) \mid \beta \in \lambda\}, \text{ für } \lim(\lambda). \end{aligned}$$

Ist die induktive Definition von $+_i$ wohldefiniert? Stimmen die beiden Definitionen gar überein?

Bevor wir in der Ordinalzahlarithmetik weiterfahren, schieben wir nun ein äußerst wichtiges Unterkapitel ein, das uns auch gestattet, den noch ausstehenden Beweis der schwierigen Richtung des Wohlordnungssatzes nachzutragen. Hierzu betrachten wir folgendes

2. Transfinite Induktion und Rekursion

Definition 2.18. Eine Klasse G von Paaren heißt Operation auf D gdw $\forall x \in D \exists! y(\langle x, y\rangle \in G)$. Wir schreiben $G \colon D \to \mathbf{V}$.

Satz 2.19. *Der Satz über die transfinite Induktion, hier in der Formulierung mit einer Klassenvariablen X.*

Sei $X \subseteq On$ und sei $0 \in X$ und sei für alle $\alpha \in X$ auch $S(\alpha) \in X$ und sei für alle Limesordinalzahlen $\lambda \subseteq X$ auch $\lambda \in X$. Dann ist $X = On$.

Beweis: Wir nehmen an, dass es ein $\alpha \in On \setminus X$ gäbe. Dann gibt es ein minimales Element β in der Menge $\alpha \cap (On \setminus X)$. Nach den Voraussetzungen über X ist $\beta \neq 0$. β kann auch kein Nachfolger sein, da X unter Nachfolgerbildung abgeschlossen ist. Und falls schließlich β eine Limesordinalzahl wäre, hätten wir $\beta \subseteq X$ und daher nach Voraussetzung $\beta \in X$. Also ist $X = On$. □

Definitionen über transfinite Induktion heißen transfinite Rekursion und werde nun begründet. Wieder arbeiten wir mit Klassenvariablen, die für Ausdrücke in der Sprache der ersten Stufe stehen, so dass $\forall x \exists! y \varphi$ gilt für geeignetes φ, das die Definition der Operation F ist. Ein geeignetes anderes ψ, das im Beweis erst aufgebaut wird, wird die Definition der Operation G sein.

Satz 2.20. *Der Satz über die transfinite Rekursion. Für $F \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $G \colon On \to \mathbf{V}$ so dass*

$$\forall \alpha (G(\alpha) = F(G \restriction \alpha)).$$

Beweis: Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit von G. Seien G_1, G_2 zwei Klassen, die den Rekursionsbedingungen genügen. Dann gilt $G_1(0) = F(\emptyset) = G_2(0)$, und, wenn $G_1 \restriction \alpha = G_2 \restriction \alpha$, dann ist $G_(\alpha) = F(G_1 \restriction \alpha) = F(G_2 \restriction \alpha) = G_2(\alpha)$. Nach dem Satz über die transfinite Induktion ist daher $G_1 = G_2$.

Nun zur Existenz: $g \in \mathbf{V}$ heißt δ-Approximation gdw $\mathrm{dom}(g) = \delta \in On$ und $\forall \alpha \in \delta(g(\alpha) = F(g \restriction \alpha))$. Für je zwei Approximationen, sagen wir, für eine δ-Approximation g und eine δ'-Approximation g', zeigt man durch Induktion über $\alpha < \delta \cap \delta'$, dass $g \restriction \delta \cap \delta' = g' \restriction \delta \cap \delta'$. Danach zeigt man durch transfinite Induktion, dass $\forall \delta(\exists \delta$-Approximation $g)$. Zum Schluss definiert man $G(\alpha) = g(\alpha)$ für eine beliebige δ-Approximation g, so dass $\delta > \alpha$. $\square$

Nun zurück zum Wohlordnungssatz, Satz 1.16.

Beweis: $\rightarrow$ Sei A gegeben. Sei $h\colon \mathcal{P}(A) \setminus \{0\} \to A$ eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(A)$. Nun definieren wir durch transfinite Rekursion eine Operation $G\colon On \to A \cup \{A\}$ durch

$$G(\alpha) = \begin{cases} h(A \setminus G''\alpha), & \text{falls } G''\alpha \neq A, \\ A, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$G \restriction (G^{-1})''A$ is injektiv, wie man induktiv zeigt. Es gibt daher ein β so dass $G''\beta = A$. Sonst wäre $G\colon On \to A$ injektiv, und daher $On = (G^{-1})''A$ nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge, was dem Satz von Burali-Forti widerspricht. β ist eindeutig. Nun setzen wir für $a, b \in A$, $aRb \leftrightarrow G^{-1}(a) \in G^{-1}(b)$ und erhalten eine Wohlordnung R von A, so dass $\mathrm{type}(A, R) = \beta$. $\square$

Fortsetzung der Ordinalzahlarithmetik

Nun wissen wir also, dass $+_i$ wohldefiniert ist, und können die Operation $+$ mit der Operation $+_i$ vergleichen. Zuerst beweisen wir jedoch, dass $+$ assoziativ ist, denn dies wird auch im Induktionsschritt des Vergleiches sehr nützlich sein.

Lemma 2.21. *Das Assoziativgesetz für $+$. $\forall \alpha, \beta, \gamma(\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma)$.*

Beweis: $\alpha + (\beta + \gamma)$ hat den Träger

$$\begin{aligned} &\{\langle \alpha', 0\rangle \mid \alpha' \in \alpha\} \cup \{\langle \delta, 1\rangle \mid \delta \in \beta + \gamma\} = \\ &\{\langle \alpha', 0\rangle \mid \alpha' \in \alpha\} \cup \{\langle \delta, 1\rangle \mid \delta \in (\{\langle \beta', 0\rangle \mid \beta' < \beta\} \cup \{\langle \gamma', 1\rangle \mid \gamma' < \gamma\})\} = \\ &\{\langle \alpha', 0\rangle \mid \alpha' \in \alpha\} \cup \{\langle\langle \beta', 0\rangle, 1\rangle \mid \beta' < \beta\} \cup \{\langle\langle \gamma', 1\rangle, 1\rangle \mid \gamma' < \gamma\})\}. \end{aligned}$$

und ist in der Reihenfolge des Aufschreibens angeordnet (wir interpretieren also mehr hinein, als das Extensionalitätsaxiom aussagt).

$(\alpha + \beta) + \gamma$ hat den Träger

$$\begin{aligned} &\{\langle \delta, 0\rangle \mid \delta \in \alpha + \beta\} \cup \{\langle \delta, 1\rangle \mid \delta \in \gamma\} = \\ &\{\langle \delta, 0\rangle \mid \delta \in (\{\langle \alpha', 0\rangle \mid \alpha' < \alpha\} \cup \{\langle \beta', 1\rangle \mid \beta' < \beta\})\} \cup \{\langle \delta, 1\rangle \mid \delta \in \gamma\} = \\ &\{\langle\langle \alpha', 0\rangle, 0\rangle \mid \alpha' \in \alpha\} \cup \{\langle\langle \beta', 1\rangle, 0\rangle \mid \beta' < \beta\} \cup \{\langle \gamma', 1\rangle \mid \gamma' < \gamma\})\}. \end{aligned}$$

und ist in der Reihenfolge des Aufschreibens angeordnet. Nun definieren wir f:

$$\begin{aligned} f(\langle \alpha', 0\rangle) &= \langle\langle \alpha', 0\rangle, 0\rangle \text{ für } \alpha' < \alpha, \\ f(\langle\langle \beta', 0\rangle, 1\rangle) &= \langle\langle \beta', 1\rangle, 0\rangle \text{ für } \beta' < \beta, \\ f(\langle\langle \gamma', 1\rangle, 1\rangle) &= \langle \gamma', 1\rangle \text{ für } \gamma' < \gamma. \end{aligned}$$

und sehen, dass dies ein Isomorphismus ist. $\square$

Lemma 2.22. *Das in Definition 2.17 (a) definierte + erfüllt die (eindeutig bestimmenden) Eigenschaften von $+_i$ aus der Definition (b). Die beiden Definitionen ergeben also dieselbe definierbare Operation + auf On × On (man sagt hierzu auch „zweistellige Operation auf On"). Wir schreiben dann später nur noch +. Wir haben also zu zeigen*
1. $\alpha + 0 = \alpha$,
2. $\alpha + 1 = S(\alpha)$,
3. $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$,
4. $\lim(\beta) \to \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$.

Beweis: 1. $\alpha + 0 = \alpha$ nach der Definition von + und von $+_i$.

2. $\alpha + 1 \cong S(\alpha) = \alpha +_i 1$ via f mit $f(\langle \beta, 0\rangle) = \beta$ für $\beta < \alpha$ und $f(\langle 0, 1\rangle) = \alpha$. Man liest in der Definition der Ordnung auf $\alpha + 1$ nach, dass f ordnungstreu ist.

Nun haben wir den Nachfolgerschritt: $\alpha + S(\beta) = \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 = (\alpha +_i \beta) + 1 = S(\alpha +_i \beta) = \alpha +_i S(\beta)$, da + assoziativ ist.

3. $\alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \delta \mid \delta \in \lambda\} = \bigcup\{\alpha +_i \delta \mid \delta \in \lambda\} = \alpha +_i \lambda$.

4. Sei $\lim(\beta)$. Dann ist $\bigcup \beta = \beta$ und daher $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\} = \sup\{\alpha +_i \xi \mid \xi < \beta\} = \alpha +_i \beta$ □

Ist + kommutativ? Nein. $1+\omega = \omega \neq \omega+1$. Das bekannte + auf den natürlichen Zahlen, $+ \cap (\omega \times \omega)$, hingegen ist kommutativ.

Definition 2.23. (a) $\alpha \cdot \beta := \text{type}(\beta \times \alpha, R)$ mit der Relation

$$\langle \xi, \eta\rangle R \langle \xi', \eta'\rangle \leftrightarrow (\xi < \xi' \vee (\xi = \xi' \wedge \eta < \eta')).$$

(b) Für jedes α definieren wir induktiv über On:

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot_i 0 = 0, \\ &\alpha \cdot_i (S(\beta)) = \alpha \cdot_i \beta + \alpha, \\ &\alpha \cdot_i \lambda = \sup\{(\alpha \cdot_i \beta) \mid \beta \in \lambda\}, \text{ für } \lim(\lambda). \end{aligned}$$

Lemma 2.24. *Das Assoziativgesetz für ·.* $\forall \alpha, \beta, \gamma (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$.

Lemma 2.25. *Das in Definition 2.23 (a) definierte · erfüllt die (eindeutig bestimmenden) Eigenschaften von $\cdot_i$ aus der Definition (b). Die beiden Definitionen ergeben also dieselbe definierbare Operation · auf On × On. Wir schreiben nur noch ·. Wir haben also zu zeigen*
1. $\alpha \cdot 0 = 0$,
2. $\alpha \cdot 1 = \alpha$,
3. $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$,
4. $\lim(\beta) \to \alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta\}$.

Lemma 2.26. *Das Rechts-Distributivgesetz für ·.* $\forall \alpha, \beta, \gamma (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

Warnung: Auch · ist nicht kommutativ, und das Distributivgesetz gilt nur von rechts.

$$\begin{aligned} &2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega, \\ &(1 + 1) \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega. \end{aligned}$$

Auf den natürlichen Zahlen jedoch ist · kommutativ, und daher folgt aus dem Lemma 2.26 auch das volle Distributivgesetz.

Räume endlicher Folgen.

Definition 2.27. (a) $A^n = \{f \mid f\colon n \to A\} = \{f \in \mathcal{P}(n \cup A) \mid f\colon n \to A\}$.
(b) $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n \mid n \in \omega\}$.

Behauptung 2.28. *Die Existenz von A^n und von $A^{<\omega}$ kann auch ohne das Potenzmengenaxiom hergeleitet werden.*

Beweis: Man führt Induktion über n und braucht n Beweisschritte für die Begründung von A^n.

Wir zeigen also nun $\forall n \in \omega \exists y \forall s(y \in y \leftrightarrow s\colon n \to A)$. Wir kürzen $\forall s(y \in y \leftrightarrow s\colon n \to A)$ mit $\varphi(n, y)$ ab. Beweis: $n = 1$. $y = A$. Schritt von n nach $n + 1$: $y = A^{n+1} \cong A^n \times A$. Die Existenz von A^n und A hat man schon nachgewiesen. Das Produkt existiert nach der Argumentation von Lemma 1.5. Wir haben sogar $\forall n \in \omega \exists! y \varphi(n, y)$. Daher können wir die Existenz von $A^{<\omega}$ nun aus dem Ersetzungsaxiom folgern. □

Definition 2.29. $(x_0, \dots, x_{n-1})$ ist die Funktion $s\colon n \to \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, so dass für alle $i < n$, $s(i) = x_i$.

Bemerkung: $(x_0, x_1) \neq \langle x_0, x_1\rangle$, doch es erfüllt dieselben Zwecke. $\langle x_0, x_1\rangle = \{\{x_0\}, \{x_0, x_1\}\}$. $(x_0, x_1) = \{\langle 0, x_0\rangle, \langle 1, x_1\rangle\} = \{\{\{0\}, \{0, x_0\}\}, \{\{1\}, \{1, x_1\}\}\}$.

Definition 2.30. Für Funktionen s, t so dass $\mathrm{dom}(s) = \alpha$ und $\mathrm{dom}(t) = \beta$ defininieren wir die Zusammenhängung oder Konkatenation $s\hat{\ }t$ von s und t wie folgt: $\mathrm{dom}(s\hat{\ }t) = \alpha + \beta$, $(s\hat{\ }t) \upharpoonright \alpha = s$ und $(s\hat{\ }t)(\alpha + \xi) = t(\xi)$ für $\xi \in \beta$.

Schließlich gibt es noch eine ordinale Exponentiation, die wie die anderen Operationen auch, auf den natürlichen Zahlen mit der bekannten Exponentation übereinstimmt. Mit Behauptung 2.28 lässt sich in der Definition 2.31 auch in Teil (a) auf das Potenzmengenaxiom verzichten. In Teil (b) beruft man sich sowieso nur auf die Existenz von Kreuzprodukten.

Definition 2.31. (a) $\exp_{ord}(\alpha, \beta) := \mathrm{type}(\{f \in \mathcal{P}(\beta \times \alpha) \mid f\colon \beta \to \alpha, f(\gamma) = 0$ für alle bis auf endlich viele $\gamma\}, R)$ mit der Relation

$$fRg \leftrightarrow \exists \gamma < \beta(f \upharpoonright [\gamma + 1, \beta) = g \upharpoonright [\gamma + 1, \beta) \wedge f(\gamma) < g(\gamma))$$

(b) Für jedes α definieren wir induktiv über On:

$$\begin{aligned}
&\exp_i(\alpha, 0) = 1,\\
&\exp_i(\alpha, S(\beta)) = \exp_i(\alpha, \beta) \cdot \alpha,\\
&\exp_i(\alpha, \lambda) = \sup\{\exp_i(\alpha, \beta) \mid \beta \in \lambda\}, \text{ für } \lim(\lambda).
\end{aligned}$$

Lemma 2.32. *Das in Definition 2.31 (a) definierte $\exp_{ord}$ erfüllt die (eindeutig bestimmenden) Eigenschaften von $\exp_i$ aus der Definition (b). Die beiden Definitionen ergeben also dieselbe definierbare Operation $\exp_{ord}$ auf $On \times On$. Wir schreiben nur noch $\exp_{ord}$. Wir haben also zu zeigen*
1. $\exp_{ord}(\alpha, 0) = 1$,
2. $\exp_{ord}(\alpha, 1) = \alpha$,
3. $\exp_{ord}(\alpha, S(\beta)) = \exp_{ord}(\alpha, \beta) \cdot \alpha$,
4. $\lim(\beta) \to \exp_{ord}(\alpha, \beta) = \sup\{\exp_{ord}(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$.

Beweis: Teil 4. ist nicht ganz offensichtlich und kann mit der sogenannten Cantor'schen Normalform von Ordinalzahlen gezeigt werden: Zu jedem $\gamma < \exp_{ord}(\alpha, \beta)$ gibt es $\beta > \beta_n > \beta_{n-1} > \cdots > \beta_0$ und $x_i < \alpha$ so dass

$$\gamma = \alpha^{\beta_n} \cdot x_n + \alpha^{\beta_{n-1}} \cdot x_{n-1} + \cdots + \alpha^{\beta_0} \cdot x_0.$$

Die Abbildung, die $f\colon \beta \to \alpha$ mit $f(\beta_i) = x_i$ für $i = 0, 1, \ldots n$ und $f(\beta') = 0$ sonst, den Wert $\alpha^{\beta_n} \cdot x_n + \alpha^{\beta_{n-1}} \cdot x_{n-1} + \cdots + \alpha^{\beta_0} \cdot x_0$ zuordnet, ist ein Isomorphismus. $\square$

Lemma 2.33. *$\forall \alpha, \beta, \gamma$:*
1. $\exp_{ord}(\alpha, \beta + \gamma) = \exp_{ord}(\alpha, \beta) \cdot \exp_{ord}(\alpha, \gamma)$.
2. $\exp_{ord}(\alpha, \beta \cdot \gamma) = \exp_{ord}(\exp_{ord}(\alpha, \beta), \gamma)$.

Warnung. Beachten Sie, dass die ordinale Exponentiaton nicht das ist, was man gewöhnlich im Unendlichen unter Exponentiation versteht. Es ist $\exp(2, \omega) = \omega \neq 2^\omega$. Wir werden die Ungleichung im Kapitel über Kardinalzahlen beweisen.

Das Lemma von Zorn, Versionen des Auswahlaxioms

Nun möchten wir noch eine weitere Anwendung des Satzes von der transfiniten Rekursion vorstellen: Auch das Lemma von Zorn ist auf der Basis von ZF zum Auswahlaxiom (oder zu AC') äquivalent.

Definition 2.34. Ein geordnetes Paar $\langle P, < \rangle$ heißt Halbordnung oder partielle Ordnung (partial order), gdw $<$ eine transitive, irreflexive Relation ist.

Definition 2.35. 1. Eine Halbordnung heißt fundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge ein Minimum hat (dies ist im Allgemeinen nicht das kleinste Element und nicht eindeutig).

2. Eine Teilmenge K einer Halbordnung heißt Kette, gdw

$$\forall x, y \in K (x = y \vee x < y \vee y < x).$$

3. Eine Halbordnung heißt induktiv, wenn jede Kette eine obere Schranke hat.

Satz 2.36. *1. Das Lemma von Zorn. (ZFC). Jede nicht leere induktive Halbordnung hat ein maximales Element.*

2. Auf der Basis von ZF folgt aus dem Lemma von Zorn das Auswahlaxiom.

Beweis: 1. Sei R eine Wohlordnung auf P und sei $f : \alpha \cong \langle P, R \rangle$. Wir definieren induktiv über $\beta < \alpha$ eine Funktion $G\colon \alpha \to \mathbf{V}$. Wir setzen $G(\beta) =$ die R-kleinste obere Schranke von $\mathrm{rge}(G \restriction \mathrm{pred}(P, f(\beta), R))$ die nicht in $\mathrm{rge}((G \restriction \mathrm{pred}(P, f(\beta), R))$ ist, und wir setzen $G(\beta) = \{P\}$, falls es keine obere Schranke von $\mathrm{rge}(G \restriction \mathrm{pred}(P, f(\beta), R))$ gibt, die nicht in $\mathrm{rge}((G \restriction \mathrm{pred}(P, f(\beta), R))$ ist.

Es widerspricht $\lim(\alpha)$, $G\colon \alpha \to P$ bijektiv, immer mit dem ersten Fall in der Fallunterscheidung, der Induktivität von $\langle P, < \rangle$, denn dann wäre dies eine Kette ohne maximales Element.

Die Definition von G bricht also bei einer Nachfolgerzahl ab, weil P ausgeschöpft ist, oder es trifft bei einer Nachfolgerordinalzahl β zum ersten Mal die zweite Hälfte der Fallunterscheidung zu, denn bei Limesschritten trifft immer die erste Möglichkeit zu, da $\langle P, < \rangle$ induktiv ist und $\mathrm{rge}(G)$ und alle seine Teilmengen Ketten sind.

Sei γ der direkte $\in$-Vorgänger von β. Dann ist $G(\gamma)$ ein maximales Element.

2. Sei A gegeben. Wir setzen $P = \{\langle B, S\rangle \mid B \subseteq A, S \text{ Wohlordnung auf } B\}$, und definieren $\prec$ auf P durch

$$\langle B, S\rangle \prec \langle B', S'\rangle \leftrightarrow \exists c \in B'(\langle B, S\rangle \cong \langle \mathrm{pred}(B', c, S'), S'\rangle.$$

Man rechnet nach, dass $\langle P, \prec\rangle$ eine induktive Halbordnung ist. Das Lemma von Zorn liefert nun ein maximales Element $\langle B, S\rangle$ in $\langle P, \prec\rangle$. Falls $B \neq A$, kann man die Wohlordnung $\langle B, S\rangle$ um einen größten Punkt verlängern, und hat daher einen Widerspruch zur Maximalität. Daher ist $B = A$. □

Es gibt zahlreiche Verwandte des Auswahlaxioms, und es gibt Bücher, die sich alleine dem Auswahlaxiom widmen: [**23**] gibt äquivalente Versionen an, und [**14**] behandelt auch echt schwächere Versionen. Wir stellen noch eine Äquivalenz ohne Beweis vor:

SATZ 2.37. *1. (ZFC). Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

2. (Blass, 1984 [**1**]*) Auf der Basis von ZF: Wenn jeder Vektorraum eine Basis hat, dann gilt das Auswahlaxiom.*

KAPITEL 3

Kardinalzahlen, einfache Kardinalzahlarithmetik

Nun werden wir noch bescheidener, und möchten alle Strukturen mit keiner einzigen Relation (und keiner Funktion und keiner Konstanten) klassifizieren. Zwei solche Strukturen sind isomorph, gdw es eine Bijektion zwischen ihren Trägermengen gibt.

Definition 3.1. Seien A, B Mengen.

1. Wir sagen A ist schmächtiger als B und schreiben $A \preceq B$ gdw es eine Injektion von A nach B gibt.

2. Wir sagen A ist äquivalent zu B und schreiben $A \sim B$ gdw es eine Bijektion von A auf B gibt.

3. Wir sagen A ist echt schmächtiger als B und schreiben $A \prec B$ gdw $A \preceq B$ und $A \not\sim B$.

Satz 3.2. *(ZF^- – P). Der Satz von Cantor, Schröder, Bernstein, hier mit dem Beweis von Dedekind 1887.*

$$A \preceq B \wedge B \preceq A \rightarrow A \sim B.$$

Beweis: Dies wird mit Spiegeln gezeigt. Seien $f\colon A \rightarrow B$ and $g\colon B \rightarrow A$ beide injektiv.

Wir setzen $C_0 = A \setminus \mathrm{rge}(g)$. $C_{n+1} = g'' f'' C_n$

Nun definieren wir $h\colon A \rightarrow B$ durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bigcup_{n<\omega} C_n, \\ g^{-1}(x) & x \in A \setminus \bigcup_{n<\omega} C_n. \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert, da $x \in \mathrm{rge}(g)$, wenn $x \notin C_0$.

Nun zeigen wir: h ist injektiv. Beweis: Sei $x \neq x'$ gegeben. Wenn x' und x im selben Arm der Fallunterscheidung liegen, dann ist nichts zu zeigen, da f injektiv ist, und g funktional ist, also g^{-1} immer injektiv ist.

Sei also $x \in C_m$ and $x' \notin \bigcup_{n<\omega} C_n$. Dann ist $f(x) \in f'' C_m$. Andererseits ist $h(x') = g^{-1}(x') \notin f'' C_m$, denn sonst wäre $x' \in g'' f'' C_m = C_{m+1}$.

Nun zeigen wir: h ist surjektiv.

Sei $y \in B$. Falls $y \in \bigcup_{n<\omega} f'' C_n$. Dann ist $y \in \mathrm{rge}(h)$. Falls $y \notin \bigcup_{n<\omega} f'' C_n$. Dann ist $g(y) \notin \bigcup_{n<\omega} C_{n+1}$ und $g(y) \notin C_0$. Dann ist $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$. $\square$

Geschichte des Cantor-Schröder-Bernstein-Satzes: Vorgeschlagen wurde der Satz von Cantor, doch Cantor verwendete AC zum Beweis. Ernst Schröder kündigte den Satz 1896 an, und veröffentlichte 1898 einen unvollständigen Beweis. 1898 veröffentlichte Felix Bernstein in einem Buch von Borel den ersten vollständigen Beweis ohne Benutzung des Auswahlaxioms.

Später stellte sich heraus, dass der Satz schon 1887 von Richard Dedekind bewiesen worden war.

Definition 3.3. Wenn A wohlgeordnet werden kann, dann sei

$$|A| = \min\{\alpha \mid \alpha \sim A\}$$

die Mächtigkeit oder Kardinalität (size, cardinality) von A.

Konvention: Wir verwenden $|A|$ nur für Mengen A, die wohlgeordnet werden können. Unter AC, sind dies alle Mengen.

Frage: Wieviele α mit $\alpha \sim A$ gibt es für ein festes A?

Beispiel: $\alpha \sim \alpha + 1$, indem man aus $1 + \alpha = \alpha$ eine (natürlich nicht ordnungserhaltende) Bijektion von α und $\alpha + 1$ baut. Ähnlich zeigt man $\alpha \sim \alpha + \alpha$.

Definition 3.4. α ist eine Kardinalzahl gdw $|\alpha| = \alpha$.

Nach Definition von $|\alpha|$ ist also $\forall \beta < |\alpha| (\beta \not\sim \alpha)$.

Konventionen: κ, λ, μ, ν ... werden bevorzugt für Kardinalzahlen genommen, α, β, γ ... für Ordinalzahlen.

Lemma 3.5. $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha \to |\beta| = |\alpha|$.

Beweis: $\beta \subseteq \alpha$ also $\beta \preceq \alpha$. $\alpha \sim |\alpha| \subseteq \beta$, daher $\alpha \preceq \beta$. Nach dem Satz 3.2 ist also $\alpha \sim \beta$ und somit $|\alpha| = |\beta|$. □

Lemma 3.6. *1.* $\forall n \in \omega (n \not\sim n + 1)$.
2. $\forall n \in \omega \forall \alpha (\alpha \sim n \to \alpha = n)$.

Beweis. 1. Induktiv. $0 \not\sim 1$. Annahme, $n \sim n + 1$ mit einer Bijektion g. Dann betrachten wir $g^{-1}(n) \in n$ und wählen eine Bjektion $h\colon n \to n$, so dass $h^{-1}(g^{-1}(n)) = n - 1$. Dann ist $g \circ h\colon n \to n+1$ bijektiv und $g \circ h \restriction n-1\colon n-1 \to n$ bijektiv, im Gegensatz zur Induktionsvoraussetzung.

2. n is nach Teil 1. ein Kardinalzahl, Also folgt aus $\alpha \sim n$, dass $\alpha \geq n$. Doch wenn $\alpha \geq n + 1$ wäre, dann würde folgen $\alpha \succeq n + 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha \sim n$ und zum Teil 1: $n \not\sim n + 1$. □

Lemma 3.7. *Jeder Limes von Kardinalzahlen ist eine Kardinalzahl.*

Beweis: Sei $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\}$ und seien die α_i paarweise verschiedene Kardinalzahlen. Nach einer eventuellen Umordnung seien die α_i echt aufsteigend in der kardinalen Skala $\prec$ gewählt, und sei I selbst eine Ordinalzahl (da $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset On$ und daher wohlgeordnet ist, braucht man hierzu AC nicht). Sei also $I = \beta$, und sei $\alpha_i \prec \alpha_j$ für $i < j < \beta$. α ist eine Ordinalzahl nach Lemma 2.9 Teil 2. Da nach eben demselben Lemma α die kleinste Ordinalzahl größer als alle α_i ist, ist jedes $\alpha' < \alpha$ schon $\leq \alpha_i$ für ein $i \in \beta$. Aber dann ist $\alpha' \leq \alpha_i \prec \alpha_{i+1} \leq \alpha$, also $\alpha' \not\sim \alpha$. Daher ist α eine Kardinalzahl. □

Korollar 3.8. *ω und alle n, $n \in \omega$, sind Kardinalzahlen.*

Definition 3.9. A heißt endlich (finite) gdw $|A| < \omega$. A heißt unendlich (infinite) gdw $|A| \geq \omega$ A heißt abzählbar (countable) gdw $|A| \leq \omega$. A heißt überabzählbar (uncountable) gdw $|A| > \omega$.

Aus ZFC - P kann man die Existenz einer überabzählbaren Menge nicht herleiten. Wir werden später vielleicht sehen, dass die Menge $\mathcal{H}(\omega_1)$ der erblich abzählbaren Mengen zusammen mit der $\in$-Relation ein Modell von ZFC - P ist.

Die kardinalen Operationen $\oplus$ und $\otimes$

Definition 3.10. 1. $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$.
2. $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$.

Lemma 3.11. *1.* $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa = |\kappa + \lambda|$.
2. $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa = |\kappa \cdot \lambda|$.

Lemma 3.12. $\forall n, m < \omega \; n \oplus m = n + m < \omega$, $m \otimes n = m \cdot n < \omega$.

Beweis. Man zeigt induktiv über n, dass $\forall m < \omega (m + n < \omega)$, und, dass $\forall m < \omega (m \cdot n < \omega)$. Dann folgt der Rest aus Lemma 3.6, Teil 2. □

Lemma 3.13. *Jede unendliche Kardinalzahl ist eine Limesordinalzahl.*

Beweis: Sei α unendlich. Dann ist $\alpha \sim \alpha + 1$. Da $\alpha < \alpha + 1$, ist $\alpha + 1$ keine Kardinalzahl. □

Da Kardinalzahlen auch Ordinalzahlen sind, kann man auf der Klasse der Kardinalzahlen Induktion über $\in$ führen. Dies wird im folgenden Satz getan. Man beachte, dass zwischendurch nicht kardinale α vorkommen.

Satz 3.14. *(Hessenberg, um 1900) ZF$^-$ – P. Für jede unendliche Kardinalzahl ist* $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

Beweis: Induktiv über κ. Gelte die Behauptung schon für alle unendlichen Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$, und sei κ unendlich. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung, bzw. für endliche α nach Lemma 3.12, für alle $\alpha < \kappa$,

$$|\alpha \times \alpha| = |\alpha| \otimes |\alpha| < \kappa.$$

Nun definieren wir $\lhd$ auf $\kappa \times \kappa$ durch $\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle$ gdw

$$\begin{aligned} &\max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee \\ &(\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))) \end{aligned}$$

Jedes $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$ hat nun nach grober Abschätzung (die Identitiät als Injektion genügt, sie ist nicht ordnungstreu) wenige Vorgänger in der Ordnung $\lhd$: $|\mathrm{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \lhd)| \leq |(\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)| = |\max(\alpha, \beta) + 1| \odot |\max(\alpha, \beta) + 1| < \kappa$.

Da $\lhd$ eine Wohlordnung ist, in der alle Vorgängermengen von Mächtigkeit echt kleiner κ sind, ist $\mathrm{type}(\kappa \times \kappa, R) \leq \kappa$. Also ist $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$.

Da aber andererseits natürlich $|\kappa \times \kappa| \geq \kappa$ ist, folgt somit $\kappa \otimes \kappa = \kappa$. □

Satz 3.15. *Für unendliche* κ, λ *ist*
1. $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.
2. $|\kappa^{<\omega}| = \kappa$.

Beweis: 1. $\max(\kappa, \lambda) \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \max(\kappa, \lambda) \otimes \max(\kappa, \lambda) = \max(\kappa, \lambda)$.
2. Im Satz 3.14 wurde durch $f(\langle \alpha, \beta \rangle) = \text{type}(\text{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \lhd), \lhd)$ eine Bijektion $f \colon \kappa \times \kappa \to \kappa$ gegeben. Für $n = 0$ sei $g_0 \colon \{0\} \to \kappa$ beliebig. Für $n = 1$ sei $g_1 \colon \kappa \to \kappa$ die Identität. Wir zeigen weiter induktiv über $1 \leq n < \omega$, dass

$$\exists g_n \colon \kappa^n \to \kappa,$$

indem wir

$$g_{n+1}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = f(\langle g_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}), \alpha_n \rangle)$$

setzen.

Danach definieren wir $f \colon \bigcup_{0 \leq n < \omega} \kappa^n \to \omega \times \kappa$ injektiv durch $f(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \langle n, g_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \rangle$. Daraus folgt $|\kappa^{<\omega}| \leq \omega \otimes \kappa = \kappa$. □

Bemerkung 3.16. Wir werden später die Menge $\mathcal{H}(\omega_1)$ der erblich abzählbaren Mengen kennenlernen. ZFC -P hat $(\mathcal{H}(\omega_1), \in)$ als Modell. Hierin gibt es keine überabzählbaren Mengen.

Nun nehmen wir das Potenzmengenaxiom hinzu. $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$ sei die Potenzmenge von x.

Den folgenden Satz (für ω) zeigte Cantor am 7.12.1873, und dieser Beweis gilt als die Geburtsstunde der Mengenlehre. Die folgende allgemeine Fassung fand Cantor 1897.

Satz 3.17. *ZF*$^-$*. Der Satz von Cantor.* $x \prec \mathcal{P}(x)$.

Beweis: Sei $f \colon x \to \mathcal{P}(x)$. Wir zeigen, dass f nicht surjektiv ist. Dies genügt, denn es ist $x \preceq \mathcal{P}(x)$, und wenn auch $\mathcal{P}(x) \preceq x$ wäre, dann gäbe es nach dem Satz von Cantor Schröder Bernstein 3.2 eine Bijektion, also zumindest eine Surjektion von x auf $\mathcal{P}(x)$. Wir bilden

$$u = \{y \in x \mid y \notin f(y)\} \in \mathcal{P}(x).$$

Dann gibt es kein $y \in x$, so dass $f(y) = u$: Denn wäre $f(y) = u$, dann hätte man $y \in u \leftrightarrow y \notin f(y) = u$. □

Nun folgert man (mit AC), dass $|\mathcal{P}(x)| > |x|$. Es gibt also insbesondere überabzählbare Kardinalzahlen.

Dieses kann man jedoch auch ohne AC, aber nun natürlich mit dem Potenzmengenaxiom, wie folgt herleiten:

Satz 3.18. *(Hartogs, 1906) ZF*$^-$*.* $\forall \alpha \exists \kappa (\kappa > \alpha, \kappa$ *Kard.z.*$)$

Beweis: Sei $\alpha \geq \omega$, denn für endliche α gilt der Satz schon nach Lemma 3.6. Wir bilden die Menge

$$W = \{R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) \mid \langle \alpha, R \rangle \text{ ist eine Wohlordnung}\}.$$

Nach dem Ersetzungsaxiom ist dann auch

$$S = \{\text{type}(A, R) \mid \langle A, R \rangle \in W\}$$

eine Menge. S ist eine Menge von Ordinalzahlen, und hat daher ein Supremum $\sup S$, das eine Ordinalzahl ist.

Zunächst ist $\sup(S) \notin S$, da $\forall \beta \in S, (\beta + 1 \in S)$. Außerdem folgt aus dieser Argumentation, dass $\sup S > \alpha$.

Wir behaupten nun, dass $\sup S$ eine Kardinalzahl ist:

Wenn $\sup S$ keine Kardinalzahl wäre, gäbe es ein $\beta < \sup S$ mit $\beta \sim \sup S$. Sei β minimal gewählt. Dann ist β eine Kardinalzahl. Da $\beta < \sup S$, gibt es eine Wohlordnung R auf α so dass $\beta \leq \mathrm{type}(\alpha, R)$. Also ist $|\beta| \leq |\alpha|$.

Wir wählen eine Bijektion $f\colon \beta \to \sup S$ und definieren $R_\beta \subseteq \beta \times \beta$ durch $\gamma R_\beta \gamma' \leftrightarrow f(\gamma) <_{\sup(S)} f(\gamma')$. Doch dann kann β durch (und natürlich auch das eventuell längere α durch noch einen längeren Typ) vom Typ $\mathrm{type}(\beta, R_\beta) = \sup(S)$ wohlgeordnet werden, im Widerspruch zu ($\sup S \notin S$ und der Definition von $\sup S$). $\square$

Definition 3.19. ZF$^-$. 1. $\alpha^+ = |\alpha|^+$ ist die kleinste Kardinalzahl $> \alpha$.
2. κ heißt Nachfolgerkardinalzahl gdw $\exists \alpha < \kappa (\kappa = \alpha^+)$.
3. κ heißt Limeskardinalzahl, gdw $\kappa \neq \omega$ und κ keine Nachfolgerkardinalzahl ist.

Definition 3.20. $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ wird durch transfinite Induktion über α definiert:
1. $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$,
2. $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$,
3. $\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ für $\lim(\lambda)$.

Lemma 3.21. *1. Jedes ω_α ist eine Kardinalzahl.*
2. Jede unendliche Kardinalzahl ist ein $\aleph_\alpha$ für ein α.
3. $\alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
4. $\aleph_\alpha$ ist eine Limeskardinalzahl $\leftrightarrow$ α is eine Limesordinalzahl.
$\aleph_\alpha$ ist eine Nachfolgerkardinalzahl $\leftrightarrow$ α is eine Nachfolgerordinalzahl.

Beweis: Man zeigt 1. und 3. zusammen durch Induktion über α. Für den Limesschritt hat man dann schon Lemma 3.7, wenn man die Induktionsvoraussetzung von den Aussagen 1. und 3. unterhalb des Limes hat. Außerdem liefert jenes Lemma auch, dass die Limeskardinalzahl größer als alle früheren ist.

2. Zeigt man durch transfinite Induktion entlang On. Die Aussage folgt dann unmittelbar aus der Definition der $\aleph$-Operation.

4. Die Aussage stimmt auch für die dritte Klasse in der Trichotomie (Limes, Nachfolger, 0): $\aleph_0$ und 0 sind auf beiden Seiten die einzigen Elemente der dritten Klasse. Induktiv folgt nun die Behauptung für die Nachfolgerordinalzahlen aus $(\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$. Ebenso folgt die Behauptung für die Limesordinalzahlen aus Teil 3. und der Rekursionsbedingung $\aleph_\delta = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ für $\lim(\delta)$. $\square$

Lemma 3.22. *ZFC$^-$. Aus Surjektionen kann man Umkehrungen auswählen (die dann, wie alle Umkehrungen, injektiv sind). Formal: $\exists f\colon x \to y$ surjektiv, impliziert $\exists g\colon y \to x$ injektiv.*

Beweis: Seien $\langle x, r\rangle$ eine Wohlordnung auf x. Dann definieren wir $g(y) = \min_r((f^{-1})''\{y\})$. $\square$

Bemerkung 3.23. Es gilt (ohne AC) $\exists f\colon \mathcal{P}(\omega) \to \omega_1$ surjektiv. Aber (mit Forcing kann man dies zeigen) es gilt: Wenn ZF widerspruchsfrei ist, dann gibt es Modelle von ZF, in denen es keine injektive Funktion von ω_1 nach $\mathcal{P}(\omega)$ gibt.

Lemma 3.24. *ZFC$^-$. Sei $\kappa \geq \omega$. Gelte für alle $\alpha < \kappa$, $|X_\alpha| \leq \kappa$. Dann ist $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.*

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{\{f \mid f\colon X_\alpha \to \kappa \text{ injektiv}\} \mid \alpha < \kappa\}$. Wegen der Annahme von AC können wir uns $\mathcal{F}$ in der Form $h = \{\langle \alpha, \{f \mid f\colon X_\alpha \to \kappa \text{ injektiv}\}\rangle \mid \alpha < \kappa\}$, also wohlgeordnet vom Typ κ, aufschreiben.

Nun gibt es wieder nach AC' eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{F}$, also, zusammengesetzt mit h, ein $g\colon \kappa \to \bigcup \mathcal{F}$ so dass für $\alpha < \kappa$

$$g(\alpha) : X_\alpha \to \kappa \text{ injektiv.}$$

Dann gibt es folgende Injektion:

$$\hat{g}\colon \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \to \kappa \times \kappa,$$

die durch

$$\hat{g}(x) = (\alpha, g(\alpha)(x))$$

definiert ist, wobei $\alpha = \min\{\beta < \kappa \mid x \in X_\beta\}$. Schließlich kann man nach $\hat{g}$ noch eine Injektion $h\colon \kappa \times \kappa \to \kappa$ (nach Satz 3.14) anwenden. □

Eine wichtige Anwendung des Lemmas 3.24 in der Logik, Algebra, Topologie und Modelltheorie ist der sogenannte „absteigende Satz von Löwenheim und Skolem" (zweistöckiger Hausbesitzer).

Hierzu definieren wir

Definition 3.25. Eine n-stellige Funktion auf A ist $f\colon A^n \to A$ für $n > 0$ und $f \in A$ für $n = 0$. $B \subseteq A$ heißt unter f abgeschlossen gdw $f''B^n \subseteq B$ für $n > 0$ und $f \in B$ für $n = 0$. Eine endlichstellige Funktion ist eine n-stellige Funktion für ein $n < \omega$.

Wenn $\mathcal{S}$ eine Menge endlich-stelliger Funktionen auf A ist, und $B \subseteq A$ ist, dann ist der Abschluss von B unter $\mathcal{S}$ die $\subseteq$-kleinste (wir müssen uns in diesem Fall überlegen, dass das Minimum existiert und auch das kleinste Element ist) Obermenge von B, die unter allen $f \in \mathcal{S}$ abgeschlossen ist.

Man mache sich klar; $C = \bigcap\{D \mid B \subseteq D \subseteq A \wedge D\ \mathcal{S}\text{-abgeschlossen}\}$ ist selbst $\mathcal{S}$-abgeschlossen, daher existiert der Abschluss. Es wird ja, da A selbst $\mathcal{S}$-abgeschlossen ist, nicht der Durchschnitt über eine leere Familie gebildet.

Wie klein können Abschlüsse sein?

Satz 3.26. *ZFC$^-$. Der Satz von Löwenheim und Skolem. Sei $B \subseteq A$, $|B| = \kappa$ unendlich. Sei $\mathcal{S}$ eine Menge endlich-stelliger Funktionen auf A, und sei $|\mathcal{S}| \leq \kappa$. Dann hat der Abschluss von B unter $\mathcal{S}$ auch Mächtigkeit $\leq \kappa$.*

Beweis: Für $f \in \mathcal{S}$ und $D \subseteq A$ definieren wir

$$f * D = \begin{cases} f''D, & \text{wenn } f \text{ } n\text{-stellig, } n > 0, \\ \{f\}, & \text{wenn } f \text{ 0-stellig.} \end{cases}$$

Wenn nun $|D| \leq \kappa$, dann ist $|f * D| \leq \kappa$, da $|\kappa^n| = \kappa$ nach dem Lemma 3.24

Nun definieren wir induktiv über $n < \omega$ Mengen C_n durch

$$\begin{aligned} C_0 &= B, \\ C_{n+1} &= C_n \cup \bigcup\{f * C_n \mid f \in \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Induktiv über n folgt $|C_n| \leq \kappa$.

Nun rechnet man nach, das $C_\omega := \bigcup_{n\in\omega} C_n$ gegen $\mathcal{S}$ abgeschlossen ist.

Nun zieht man noch ein Mal AC und das Lemma 3.24 heran, um $|C_\omega| \leq \kappa$ herzuleiten. (Selbst wenn alle bis auf ω der X_α's im Lemma 3.24 leer sind, braucht man zu dessen Beweis AC.) □

Nun kommen wir zu einem Untergebiet, das bis heute zahlreiche ungelöste Probleme birgt:

Kardinale Exponentiation

DEFINITION 3.27. ZF$^-$. $(A^B =)^B A = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f : B \to A\}$. ist die Menge aller Funktionen von B nach A.

DEFINITION 3.28. ZFC$^-$. $\kappa^\lambda = |^\lambda \kappa|$.

Der eingeklammerte Teil der ersten Definition führt also zu einer doppelten Definition von κ^λ und zu Widersprüchen. Wir werden daher die Schreibweise $^B A$ bevorzugen. Aber in der Literatur ist die andere ebenso gebräuchlich.

LEMMA 3.29. *ZF$^-$.* $\forall \lambda \geq \omega \forall \kappa (2 \leq \kappa \leq \lambda \to {}^\lambda\kappa \sim {}^\lambda 2 \sim \mathcal{P}(\lambda))$

Beweis: Mit charakteristischen Funktionen zeigt man ${}^\lambda 2 \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
${}^\lambda 2 \preceq {}^\lambda\kappa \preceq {}^\lambda\lambda \preceq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \sim \mathcal{P}(\lambda) \sim {}^\lambda 2$, wobei in der Mitte der Satz 3.14 benutzt wurde. □

LEMMA 3.30. *(ZFC$^-$) Seine κ, λ, σ Kardinalzahlen. Dann ist*
1. $\kappa^{\lambda \oplus \sigma} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\sigma$.
2. $(\kappa^\lambda)^\sigma = \kappa^{\lambda \otimes \sigma}$.

Beweis: Ohne AC ist für $B \cap C = \emptyset$

$$\begin{aligned} {}^{B \cup C}A &\sim {}^B A \times {}^C A, \\ {}^C({}^B A) &\sim {}^{C \times B}A. \end{aligned}$$

□

DEFINITION 3.31. AC. $2^\omega = \omega_1$ ist die Kontinuumshypothese, CH - continuum hypothesis. $\forall \alpha (2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$ heißt die allgemeine Kontinuumshypothese, GCH – generalized continuum hypothesis.

Gödel zeigte 1938: Wenn ZFC konsistent ist, dann auch ZFC + CH. Cohen zeigte 1963: Wenn ZFC konsistent ist, dann auch ZFC + ¬ CH. Die Kontinuumshypothese ist also unabhängig von ZFC. Wir werden vielleicht in einer Fortsetzung dieser Vorlesung im kommenden Semester einen dieser Sätze beweisen.

Konfinalitäten (cofinalities).

DEFINITION 3.32. f heißt konfinale Abbildung von α nach β gdw $f : \alpha \to \beta$ und $\forall \beta' < \beta \exists \alpha' < \alpha f(\alpha') \geq \beta'$. Wir schreiben $f : \alpha \overset{\text{konf}}{\to} \beta$.

DEFINITION 3.33. $\mathrm{cf}(\beta) = \min\{\alpha [\leq \beta] \mid \exists f : \alpha \to \beta, \text{ konfinal}\}$ heißt die Konfinalität von β.

Für $\beta = \alpha + 1$ ist $f : \{0\} \to \beta$, mit $f(0) = \alpha$ konfinal. Also ist $\mathrm{cf}(\beta) = 1$.

LEMMA 3.34. $\forall \beta \exists f : \mathrm{cf}(\beta) \overset{konf}{\to} \beta \forall \xi < \eta < \mathrm{cf}(\beta)(f(\xi) < f(\eta))$.

Sei $g\colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$ eine konfinale Abbildung. Induktiv definieren wir $f\colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$ durch

$$f(\eta) = \sup(\{g(\eta)\} \cup \sup\{f(\xi) + 1 \mid \xi < \eta\}) < \beta.$$

Da $\operatorname{cf}(\beta)$ minimal ist, wird das Supremum nicht vor $\operatorname{cf}(\beta)$ den Bildbereich β ausschöpfen. (Dies stimmt sogar für den degenerierten Fall $\operatorname{cf}(\beta) = 1$.) □

Lemma 3.35. *Sei* $\lim(\alpha)$ *und sei* $f\colon \alpha \stackrel{\text{konf}}{\to} \beta$ *streng monoton (so wie im vorigen Lemma). Dann ist* $\operatorname{cf}(\alpha) = \operatorname{cf}(\beta)$.

Beweis: $\operatorname{cf}(\beta) \leq \operatorname{cf}(\alpha)$, da es $h\colon \operatorname{cf}(\alpha) \to \alpha$ konfinal gibt, und $f \circ h\colon \operatorname{cf}(\alpha) \stackrel{\text{konf}}{\to} \alpha \stackrel{\text{konf}}{\to} \beta$.

Sei $g\colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$ konfinal. Dann ist $h\colon \beta \to \alpha$ definiert durch $h(\xi) = \min\{\eta \mid f(\eta) > g(\xi)\}$ konfinal, da f streng monoton und konfinal ist. Also ist $h \circ g\colon \operatorname{cf}(\beta) \to \alpha$ ein Zeuge für $\operatorname{cf}(\alpha) \leq \operatorname{cf}(\beta)$. □

Korollar 3.36. $\operatorname{cf}(\operatorname{cf}(\beta)) = \operatorname{cf}(\beta)$.

Beweis: Nach dem vorigen Lemma, da es nach dem vorvorigen Lemma ein $f\colon \operatorname{cf}(\beta) \to \beta$, das streng monoton und konfinal ist, existiert. □

Definition 3.37. β heißt regulär gdw $\lim(\beta)$ und $\operatorname{cf}(\beta) = \beta$. β heißt singulär gdw $\lim(\beta)$ und $\operatorname{cf}(\beta) < \beta$.

Lemma 3.38. *Wenn* β *regulär ist, dann ist* β *eine Kardinalzahl.*

Beweis: Annahme $\exists \alpha < \beta \exists f : \alpha \stackrel{\text{auf}}{\to} \beta$. Dann wäre $\operatorname{cf}(\beta) \leq \alpha < \beta$, also β singulär. □

Lemma 3.39. ω *und alle* $\operatorname{cf}(\beta)$ *sind regulär.*

Lemma 3.40. *ZFC*$^-$. *Für jedes* κ *ist* κ^+ *regulär.*

Beweis: Annahme: $\operatorname{cf}(\kappa^+) \leq \kappa$. Dann sei $f\colon \kappa \to \kappa^+$ konfinal. Dann ist $\kappa^+ = \bigcup\{f(\xi) \mid \xi < \kappa\}$. Da für alle $\xi < \kappa$, $|f(\xi)| = \kappa$, ist also nach dem Lemma 3.24 $|\bigcup\{f(\xi) \mid \xi < \kappa\}| \leq \kappa$, also ist $\bigcup\{f(\xi) \mid \xi < \kappa\} \neq \kappa^+$, im Widerspruch zur vorigen Zeile. □

Bemerkung 3.41. $Con(ZF) \to Con(ZF + \operatorname{cf}(\omega_1) = \omega)$.
Offen: $Con(ZF) \to Con(ZF +$ alle Kardinalzahlen haben Kof. $\leq \omega)$?

Lemma 3.42. *Wenn* $\lim(\alpha)$ *dann ist* $\operatorname{cf}(\aleph_\alpha) = \operatorname{cf}(\alpha)$.

Gibt es reguläre Limeskardinalzahlen $\aleph_\alpha$? Für diese muss $\aleph_\alpha = \alpha$ sein.

Man kann also mit einer Iteration probieren, zu einem Fixpunkt der $\aleph$-Operation zu gelangen:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \aleph_0, \\ \sigma_{n+1} &= \aleph_{\sigma_n}, \\ \sigma_\omega &= \sup\{\aleph_{\sigma_n} \mid n < \omega\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\sigma_\omega = \aleph_{\sigma_\omega}$. Aber nun ist $\mathrm{cf}(\sigma_\omega) = \omega$. Pech. Da reguläre Limeskardinalzahlen trotz des fehlenden Existenznachweises (sie gehören zu den sogenannten „großen Kardinalzahlen" [**16**]) dennoch eine ungeheuer wichtige Rolle spielen, definiert man:

Definition 3.43. 1. κ heißt schwach unerreichbar (weakly inaccessible) gdw κ eine reguläre Limeskardinalzahl ist.
2. AC. κ heißt stark unerreichbar (strongly inaccessible) gdw $\kappa > \omega$ regulär ist und

$$\forall \lambda < \kappa (2^\lambda < \kappa).$$

Lemma 3.44. *„Das Lemma von König". Julius König, 1905. ZFC$^-$. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Sei* $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$. *Dann ist*

$$\kappa^\lambda > \kappa.$$

Beweis: Sei $f\colon \lambda \to \kappa$ konfinal. Sei $g\colon \kappa \to {}^\lambda\kappa$. Wir zeigen, dass g nicht surjektiv ist. Sei $h\colon \lambda \to \kappa$ gegeben durch

$$h(\alpha) = \min(\kappa \setminus \{g(\mu)(\alpha) \mid \mu < f(\alpha)\}).$$

Dann ist $h \notin \mathrm{rge}(g)$. Denn, angenommen $h = g(\mu)$. Dann nehmen wir α, so dass $f(\alpha) > \mu$. Dann ist $g(\mu)(\alpha) \neq h(\alpha)$, also $h \neq g(\mu)$. $\square$

Korollar 3.45. *AC.* $\forall \lambda \geq \omega (\mathrm{cf}(2^\lambda) > \lambda)$.

Beweis: Denn $(2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$. Wenn $\lambda \geq \mathrm{cf}(2^\lambda)$ wäre, wäre die rechte Seite echt größer als die linke. $\square$

Lemma 3.46. *ZFC$^-$ + GCH. Seien $\kappa, \lambda \geq 2$,und sei λ unendlich.*
1. $\kappa \leq \lambda \to \kappa^\lambda = \lambda^+$.
2. $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \to \kappa^\lambda = \kappa^+$.
3. $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \to ({}^\lambda\kappa = \bigcup\{{}^\lambda\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ *und* $|{}^\lambda\alpha| \overset{GCH}{=} (\max(\alpha, \lambda))^+ \leq \kappa)$.

Definition 3.47. ZFC$^-$. 1. $(A^{<\beta} =)^{<\beta}A = {}^{\beta>}A = \bigcup\{{}^\alpha A \mid \alpha < \beta\}$.
2. $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa|$.

Definition 3.48. AC. Durch transfinite Rekursion über On wird die $\beth$-Operation (Beth-Operation) definiert:
1. $\beth_0 = \omega$.
2. $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$.
3. $\beth_\delta = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ für $\lim(\delta)$.

GCH ist also $\forall \alpha (\aleph_\alpha = \beth_\alpha)$.

KAPITEL 4

Clubs und stationäre Mengen. Sätze von Fodor, Solovay und von Silver

Für den folgenden Abschnitt sei eine Kardinalzahl κ festgehalten, so dass $\kappa > \omega$ und $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Alles in ZFC$^-$.

Definition 4.1. 1. $C \subseteq \kappa$ heißt abgeschlossen (in κ) gdw $\forall \alpha < \kappa \sup(C \cap \alpha) \in C$, falls $C \cap \alpha \neq \emptyset$.
2. $C \subseteq \kappa$ heißt unbeschränkt (in κ) gdw $\forall \alpha < \kappa \exists \beta \in C(\beta \geq \alpha)$.
3. $C \subseteq \kappa$ heißt club (von closed und unbounded) (in κ) gdw C abgeschlossen und unbeschränkt ist.

Jeder Endabschnitt von κ ist ein club. Wenn $A \subseteq \kappa$ unbeschränkt ist, dann ist die Menge der Häufungspunkte von A, $\mathrm{acc}(A) = \{\alpha < \kappa \mid \alpha = \sup(A \cap \alpha)\}$ in club. Man zeigt die Unbeschränktheit durch eine aufsteigende ω-Folge und nutzt $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$.

Wenn κ eine Limeskardinalzahl ist, dann ist $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ Kard.}\}$ ein club nach den Lemmata 3.18 und 3.24.

Lemma 4.2. *Der Durchschnitt zweier clubs ist ein club.*

Beweis: Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Seinen C, D clubs sei $\gamma < \kappa$. Wir wählen für $i < \omega$, $\alpha_i \in C, \beta_i \in D$, so dass $\gamma \leq \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 \dots$. Dann ist $\sup\{\alpha_i \mid i < \omega\} = \sup\{\beta_i \mid i < \omega\} \in C \cap D$. $\square$

Lemma 4.3. *Der Durchschnitt von weniger als* $\mathrm{cf}(\kappa)$ *(vielen) clubs ist ein club.*

Beweis: Induktiv über $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$. Für endliche μ folgt die Behauptung aus dem vorigen Lemma. Sei nun μ unendliche Limesordinalzahl. Das Lemma sei schon für alle $\alpha < \mu$ gezeigt. Sei $\gamma < \kappa$ vorgegeben. Wir definieren $f\colon \mu \to \kappa$ durch

$$f(\alpha) = \min\{\varepsilon \in \bigcap_{\xi < \alpha} C_\xi \mid \varepsilon \geq \gamma, \varepsilon \geq \sup f''\alpha\}.$$

Dann ist $\gamma \leq \sup\{f(\alpha) \mid \alpha < \mu\} = \sup\{f(\alpha) \mid \beta < \alpha < \mu\} \in C_\beta$ (da $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$) für alle $\beta < \mu$, das Supremum liegt also in $\bigcap_{\beta<\mu} C_\beta$.

Fall $\mu = \beta + 1$, folgt der Induktionsschritt aus dem vorigen Lemma. $\square$

Definition 4.4. Sei $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa\mathcal{P}(\kappa)$. Dann heißt

$$\triangle(A_\alpha)_{\alpha<\kappa} := \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta\}$$

der Diagonalschnitt (the diagonal intersection) von $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$.

Satz 4.5. *Wenn* $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ *und* C_α, $\alpha < \kappa$ *alle club sind, dann ist* $\triangle(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *club.*

Beweis: Sei $D = \triangle(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$. Zuerst zeigen wir, dass D abgeschlossen ist. Sei $\beta < \alpha$ beliebig. Sei

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup(D \cap \alpha) \\ &= \sup(D \cap (\beta, \alpha) \cap \alpha) \\ &= \sup(D \cap C_\beta \cap (\beta, \alpha)) \in C_\beta. \end{aligned}$$

Nun liest man dies für alle β gemeinsam.

Nun zeigen wir, dass D unbeschränkt ist. Wegen Lemma 4.3 ist $\bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta$ club für jedes $\alpha < \kappa$. Sei $\gamma < \kappa$ gegeben. Wir definieren durch Rekursion über ω, $f\colon \omega \to \kappa$ durch $f(0) = \gamma$, $f(n+1) = \min(\bigcap_{\beta<f(n)} C_\beta \cap (f(n), \kappa))$. Dann ist $\sup\{f(n) \mid n \in \omega\} \in D$. □

Definition 4.6. Eine Teilmenge S von κ, die jeden club schneidet, heißt stationär (in κ).

Satz 4.7. *Der Satz von Fodor, oder das pressing down lemma, 1956. Sei* $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. *Sei* $S \subseteq \kappa$ *stationär. Sei* $f\colon S \to \kappa$ *regressiv, d.h.,* $\forall \alpha \in S(f(\alpha) < \alpha)$. *Dann ist* f *auf einer stationären Teilmenge (in* κ*) von* S *konstant.*

Beweis: Die Vereinigung von $< \mathrm{cf}(\kappa)$ (vielen) nicht stationären Mengen ist nicht stationär. nach Lemma 4.3. Der vorige Satz sagt also aus, dass die Diagonalvereinigung von nicht stationärem Mengen nicht stationär ist, wobei die Diagonalvereinigung durch

$$\nabla(N_\alpha)_{\alpha<\kappa} = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta\}$$

definiert ist. Wenn also jedes $(N_\beta)^c$ Obermenge eines club ist, dann ist $(\nabla(N_\alpha)_{\alpha<\kappa})^c = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta\} = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta<\alpha}(N_\beta)^c\}$ nach dem vorigen Satz Obermenge eines club.

Nun ist aber $S = \nabla(A_\alpha)_{\alpha<\kappa} = \{\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha\}$ für $A_\alpha = \{\beta \in S \mid f(\beta) = \alpha\}$ stationär. Also muss ein A_α stationär sein. □

Beispiel: Der Satz von Fodor ist scharf. Sei $N \subseteq \kappa$ nicht stationär, und sei C ein club, so dass $C \cap N = \emptyset$. Dann definieren wir $f\colon N \to \kappa$ durch $f(\alpha) = \sup(\alpha \cap C) < \alpha$, da $\sup(\alpha \cap C) \in C \setminus N$, also $< \alpha$ sein muss, da $\alpha \in N$ ist.

Satz 4.8. *Solovay (1971). Sei* $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. *Dann lässt sich* κ *in* κ *(viele) disjunkte stationäre Mengen zerlegen.*

Beweis: Sei $S = \{\alpha \in \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$. S ist stationär in κ.

Nun wählen wir mit AC zu jedem $\alpha \in S$ eine aufsteigende Folge $(\delta_i^\alpha)_{i<\omega}$, die gegen α konvergiert.

Sei $\omega < \beta$ beliebig. Dann gibt es zu $\alpha \in S \setminus (\beta + 1)$ ein $n(\alpha) < \omega$, so dass $\delta^\alpha_{n(\alpha)} > \beta$ ist. Nun nehmen wir den Satz von Fodor für die regressive Funktion, die jedem $\alpha \in S \setminus \beta$, $n(\alpha) < \omega$ zuordnet, und erhalten ein n_β so dass

$$R_\beta = \{\alpha \in S \setminus \beta \mid n(\alpha) = n_\beta\}$$

stationär ist.

Doch nun ist auch die auf R_β definierte Funktion $\alpha \mapsto \delta^\alpha_{n_\beta}$ regressiv, und es gibt daher ein δ^β und $S_\beta \subset R_\beta$, S_β stationär in κ, so dass für $\alpha \in S_\beta$, $\delta^\alpha_{n_\beta} = \delta^\beta$ ist.

Da $\delta^\beta > \beta$ ist, kann man diesen Prozess nun mit $\beta_1 = \delta^\beta$ statt β wiederholen und erhält $\delta^{\beta_1} > \beta_1$ und so weiter. Man startet immer mit S, nicht mit einem der R_β oder S_β. Man iteriert den Prozess für $i < \kappa$. $\beta_{i+1} \geq \delta^{\beta_i}$. Bei den Limesschritten nimmt man Suprema der β_i. Man iteriert diesen Prozess κ-mal. Alle β_i bleiben unterhalb κ, da man ja bei Schrittnummer $i < \kappa$ in der Iteration ist und $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ ist.

Man hat also nun $\{\beta_i \mid i < \kappa\}$ für eine Menge I der Mächtigkeit κ. Nach dem Schubfachprinzip 3.24 gibt es daher ein $n < \omega$ und ein $J \subseteq \kappa$, so dass $|J| = \kappa$ und ein n, so dass für alle $\beta_i \in J$, $n_{\beta_i} = n$ ist. Dann gilt für $\beta \neq \gamma \in J$ für alle $\alpha \in S_\beta$ und $\alpha' \in S_\gamma$ da $\delta^\beta \neq \delta^\gamma$ und da $n_\beta = n_\gamma = n$:

$$\delta^\beta = \delta^\alpha_{n_\beta} = \delta^\alpha_n \neq \delta^{\alpha'}_n = \delta^{\alpha'}_{n_\gamma} = \delta^\gamma.$$

Daher sind $S_\beta \cap S_\gamma = \emptyset$.

Schließlich vervollständigt man die Zerlegung durch Hinzufügen der Menge $S_{rest} = \kappa \setminus (\bigcup_{\beta \in I \setminus J} S_\beta)$ zu $S_{\min(J)}$. Dann ergibt die Vereinigung aller S_β, $\beta \in J$, ganz κ. Also sind die stationären Mengen paarweise disjunkt und ergeben vereinigt ganz κ, und dies sind gerade die Eigenschaften einer Zerlegung. □

Bemerkung 4.9. Man kann auch jede stationäre Teilmenge S von κ ihrerseits in κ stationäre Teilmengen zerlegen unter denselben Voraussetzungen. Dies werden wir hier nicht beweisen.

Korollar 4.10. *Jedes κ von überabzählbarer Konfinalität lässt sich in* $\mathrm{cf}(\kappa)$ *disjunkte stationäre Mengen zerlegen.*

Beweis: Sei $f\colon \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ konfinal, stetig und monoton. Seien S_α, $\alpha < \kappa$, wie im vorigen Satz ein Zerlegung von $\mathrm{cf}(\kappa)$ in disjunkte stationäre Teilmengen von $\mathrm{cf}(\kappa)$. Dann ist für jedes α, $f''S_\alpha$ stationär in κ: Denn sei D ein club in κ. Dann ist wegen der Monotonie und der Stetigkeit von f auch $f^{-1\prime\prime}D$ ein club in $\mathrm{cf}(\kappa)$. Aber da $f^{-1\prime\prime}D \cap S_\alpha \neq \emptyset$ ist, ist auch $D \cap f''S_\alpha \neq \emptyset$. □

Der Satz von Silver

In diesem Unterabschnitt beweisen wir zum ersten Mal einen Satz, dessen Beweis nicht ganz so kurz ist. Jack Silver veröffentlichte diesen Satz 1974, und dieses ZFC-Ergebnis war ein Durchbruch. Denn in jener Zeit großer Forcing-Euphorie war eher das Gegenteil vermutet worden: dass man im Rahmen des Lemmas von König und der Monotonie die Kardinalzahlexponentiation durch Forcing „frei einrichten" kann. Für 2^κ, κ regulär, zeigt man mit Easton-Forcing, dass jeder Verlauf der Exponentiationsfunktion in diesem Rahmen in einem Modell von ZFC realisiert werden kann.

Satz 4.11. *Silver* [**24**]. *Sei κ eine singuläre Kardinalzahl und sei* $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. *Sei $E = \{\mu < \kappa \mid 2^\mu = \mu^+\}$ stationär in κ. Dann ist $2^\kappa = \kappa^+$.*

Beweis: Sei $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < cf(\kappa)\}$, und sei $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ stetig und monoton wachsend und konfinal in κ. Dann ist $S = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \mid \kappa_\alpha \in E\}$ eine stationäre

Teilmenge von $\mathrm{cf}(\kappa)$, da sie das Urbild einer stationären Menge unter einer stetigen wachsenden Funktion ist: Angenommen, es gäbe $C \subseteq \mathrm{cf}(\kappa)$ club in $\mathrm{cf}(\kappa$ so dass $C \cap S = \emptyset$. Dann ist $C' = \{\kappa_\alpha \,|\, \alpha \in C\}$ ein club is κ, und $C' \cap E = \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung über E.

Für $A \subseteq \kappa$ definieren wir

$$f_A = \langle A \cap \kappa_\alpha \,|\, \alpha \in S\rangle \in \prod_{\alpha \in S} \mathcal{P}(\kappa_\alpha).$$

Die Familie $\{f_A \,|\, A \subseteq \kappa\}$ ist fast disjunkt (almost disjoint), d.h., für $A \neq B$ gibt es $\alpha_0 < \kappa \forall \alpha \geq \alpha_0 (f_A(\alpha) \neq f_B(\alpha))$. Der Satz von Silver folgt daher aus dem folgenden Satz über fast disjunkte Teilmengen:

Satz 4.12. *Sei $\lambda > \omega$ und $\mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$. Sei $e \colon \lambda \to \kappa$, $e(\alpha) = \kappa_\alpha$ eine normale (d.h.: streng monotone, konfinale, stetige) Funktion. Sei $\lambda < \kappa = 2^{<\kappa}$. Sei $S_0 \subseteq \lambda$ stationär und sei $\forall \alpha \in S_0 |A_\alpha| \leq \kappa_\alpha^+$. Dann hat jede fast disjunkte Teilmenge von $\prod_{\alpha \in S_0} A_\alpha$ höchstens die Mächtigkeit κ^+.*

Beweis:

Lemma 4.13. *Sei S stationär in λ, und sei für $\alpha \in S$, $|B_\alpha| \leq \kappa_\alpha$. Dann hat jede fast disjunkte Teilmenge von $\prod_{\alpha \in S} B_\alpha$ die Mächtigkeit $\leq \kappa$.*

Beweis: Sei F fast disjunkt. Da $C = \{\alpha < \lambda \,|\, \lim(\alpha)\}$ club in λ ist, ist auch $\lim(S) := S \cap C \subseteq S$ stationär in λ. Dann ist $\{f \restriction \lim(S) \,|\, f \in F\}$ auch fast disjunkt und gleich groß wie F, da die Einschränkung eine injektive Operation auf der fast disjunkten Familie ist. Daher bestehe ohne Einschränkung der Allgemeinheit S nur aus Limesordinalzahlen. Außerdem sei $B_\alpha = \kappa_\alpha$, was man durch Bijektionen erreichen kann. Sei $f \in F$. Dann ist $f(\alpha) < \kappa_\alpha$, und, da $\lim(\alpha)$ und e normal, $f(\alpha) < \kappa_{\beta_\alpha}$ für ein $\beta_\alpha < \alpha$. Wir setzen $g(\alpha) = \beta_\alpha < \alpha$. Fodors Lemma, angewandt auf g liefert ein $S_f \subseteq S$, S_f stationär in λ und ein β, so dass für alle $\alpha \in S_f$ $f(\alpha) < \kappa_\beta$. $f \restriction S_f$ bestimmt f innerhalb der fast disjunkten Familie immer noch eindeutig.

$f \restriction S_f \in \bigcup \{{}^T\mu \,|\, T \subseteq \lambda, \mu < \kappa\}$. $|{}^T\mu| = \mu^{|T|} \leq \mu^\lambda \leq 2^{\max(\mu,\lambda)} \leq 2^{<\kappa} = \kappa$. $|F| \leq \kappa \otimes 2^\lambda \otimes \kappa = \kappa$. $\square_{4.13}$

Wir setzen nun des Beweis des Satzes 4.12 fort: Wir nehmen an, dass $A_\alpha = \kappa_\alpha^+$. Sei F_0 eine fast disjunkte Teilmenge von $\prod_{\alpha \in S_0} A_\alpha$. Wir definieren $<_{\text{club}}$ auf F_0:

$$f <_{\text{club}} g \leftrightarrow \exists C \text{ club } \forall \alpha \in S_0 \cap C (f(\alpha) < g(\alpha)).$$

1. $<_{\text{club}}$ ist eine Halbordnung. Irreflexiv: $S_0 \cap C \neq \emptyset$. Transitiv: Der Schnitt zweier clubs ist ein club.

2.$\forall g \in F_0 |\{f \,|\, g \not<_{\text{club}} f\}| \leq \kappa$. Wenn $g \not<_{\text{club}} f$, dann ist $\{\alpha \in S_0 \,|\, g(\alpha) < f(\alpha)\} \cup (\lambda \setminus S_0)$ nicht die Obermenge eines club. Also ist $S = \{\alpha \in S_0 \,|\, f(\alpha) \leq g(\alpha)\}$ stationär. Da F_0 fast disjunkt ist, sind $f \in F_0$ schon durch $f \restriction S$ eindeutig bestimmt. Sei $F_S = \{f \in F_0 \,|\, f \restriction S \in \prod_{\alpha \in S} g(\alpha)\}$.

Nach dem vorigen Lemma ist $|F_S| \leq \kappa$. Also ist $\{f \,|\, g \not<_{\text{club}} f\} = \bigcup \{F_S \,|\, S \subseteq S_0, S \text{ stationär}\}$. Daher ist $|\{f \,|\, g \not<_{\text{club}} f\}| \leq 2^\lambda \otimes \kappa = \kappa$. Der Satz von Silver und der Satz 4.12 folgen nun aus unserem abschließenden Lemma:

Lemma 4.14. *Sei $\langle P, <_P \rangle$ eine Halbordnung auf P so dass*

$$\forall p \in P |\{q \in P \,|\, p \not<_P q\}| \leq \kappa.$$

Dann ist $|P| \leq \kappa^+$.

Beweis: Wir schreiben $P_p = \{q \in P \mid p \not<_P q\}$. Wir wenden Zorns Lemma an auf die induktive Halbordnung

$$\langle \{f \colon \langle \delta, \in \rangle \to \langle P, <_P \rangle \mid \delta\, On, f \text{ streng monoton}\}, \subset \rangle$$

mit der Erweiterung von Funktionen als Halbordnungsrelation $\subset$.

Sei $f_0 \colon \delta_0 \to P$ maximal. Dann gilt:

$$\forall q \in P \exists \alpha < \delta_0 f_0(\alpha) \not<_P q.$$

Also ist $P = \bigcup_{\alpha < \delta_0} P_{f_0(\alpha)}$. Es ist $f_0[\alpha] \subseteq P_{f_0(\alpha)}$ for $\alpha < \delta_0$. Also $|f[\alpha]| \leq \kappa$. daher ist $|\alpha| \leq \kappa$. Daher ist $|\delta_0| \leq \kappa^+$. Insgesamt ist

$$|P| \leq |\delta_0| \cdot \kappa \leq \kappa^+.$$

$\Box_{4.11, 4.12, 4.14}$

KAPITEL 5

Fundierung, von Neumann Hierarchie, Mostowski-Kollaps

Erinnerung: Das Fundierungsaxiom (Axiom of Foundation, Axiom of regularity) sagt:

$$\forall x(\exists y \in x \to \exists y \in x \forall z \in y z \notin x).$$

Satz 5.1. *ZF. Es gibt keine unendlich absteigenden $\in$-Ketten.*

Beweis: Angenommen $\langle a_i \mid i \in \omega \rangle$ wäre eine absteigende $\in$-Kette, d.h., für $i \in \omega$ ist $a_{i+1} \in a_i$. Dann widerspricht die Menge $\{a_i \mid i \in \omega\}$ dem Fundierungsaxiom. $\square$

Erinnerung: x heißt transitiv gdw $(\forall y \in x)(\forall z \in y)(z \in x)$.

Definition 5.2. Die transitive Hülle von a, $\text{th}(a) = \bigcap\{b \supseteq a \mid b \text{ transitiv}\}$.

Ist dieser Schnitt wohldefiniert? D.h., gibt es überhaupt eine transitive Obermenge von a?

Lemma 5.3. *ZF^- – P. Jede Menge a ist Teilmenge einer transitiven Menge b.*

Beweis. Wir definieren durch Rekursion über ω eine Funktion $f \colon \omega \to \mathbf{V}$ durch $f(0) = a$, $f(n+1) = \bigcup f(n)$. Dann ist $b = \bigcup_{i<\omega} f(i)$ transitiv. $\square$

Lemma 5.4. *Sei b wie im Beweis des vorigen Lemma konstruiert. Dann ist $b = \text{th}(a)$.*

Lemma 5.5. *AC. Für jede Menge a sind folgende äquivalent:*
(a) Es gibt keine unendlich abteigende Kette, die bei a beginnt.
(b) Jedes Element von $\text{th}(a)$ enthält ein $\in$-minimales Element.

Beweis: (a) $\to$ (b) verwendet AC: Annahme nicht (b), dann baut man eine Kette mit ω vielen Auswahlen.

(b) $\to$ (a): Wenn es eine solche gäbe, dann müsste sie zu $\text{th}(a)$ als Element gehören. $\square$

Definition 5.6. a heißt fundiert, wenn (b) des Lemmas zutrifft.

Definition 5.7. ZF^-. Die von Neumann Hierarchie.
$V_0 = \emptyset$.
$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ für $\lim(\lambda)$.
$\mathbf{WF} = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha\ On\}$.

LEMMA 5.8. *1. Alle V_α sind transitiv und fundiert.*
2. $\alpha < \beta \to V_\alpha \subseteq V_\beta$.

Beweis: 1. Induktiv über α. Für $\alpha = 0$ und für den Limesschritt ist nichts zu zeigen für die Transitivität. Sei $\beta = \alpha + 1$, und sei $x \in \mathcal{P}(V_\alpha)$. Sei $y \in x$. Dann ist $y \in x \subseteq V_\alpha$. Da V_α transitiv ist, ist $y \subseteq V_\alpha$. Also ist $y \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$.

Für die Fundiertheit: Man hat also $\mathrm{th}(V_\alpha) = V_\alpha$, und $\emptyset$ als $\in$-minimales Element.

2. Bei festem α induktiv über β. Der Fall $\beta = \alpha$ und der Fall $\lim(\beta)$ sind klar. Sei $\beta = \gamma + 1$. $V_\alpha \subseteq V_\gamma \in V_\beta$. Da V_β transitiv ist, ist $V_\alpha \subseteq V_\beta$. □

SATZ 5.9. *ZF. Prinzip der $\in$-Induktion.*

$$(\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x((\forall y \in x\varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall z\varphi(z).$$

Beweis: Sei z ein $\in$-minimales Element von $\{u \mid \neg\varphi(u)\}$. Wenn dies eine Klasse sein sollte, dann schneide man erst in eine Menge hinein: Man nehme u_0 so dass $\neg\varphi(u_0)$ und suche mit dem Fundierungsaxiom ein $\in$-Minimum in $\{u \in u_0 \cup \{u_0\} \mid \neg\varphi(u)\}$. Dann gilt $\forall y \in x\varphi(y)$. Also gilt $\varphi(z)$. Widerspruch. □

SATZ 5.10. *ZF^-. Fund* $\leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{WF}$.

Beweis: $\to$: Durch $\in$-Induktion über $x \in \mathbf{V}$. Sei $\forall y \in x\exists\alpha_y y \in V_{\alpha_y}$. Dann ist $\forall y \in xy \in V_{\sup\{\alpha_y \mid y \in x\}}$ nach dem Lemma über das Aufsteigen der V_α. Also ist $x \subseteq V_{\sup\{\alpha_y \mid y \in x\}}$ und somit $x \in V_{\sup\{\alpha_y \mid y\in x\}+1}$.
$\leftarrow$: Lemma 5.8. □

DEFINITION 5.11. Für $x \in \mathbf{WF}$, sie $\mathrm{rk}(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$.

Wenn also $\alpha = \mathrm{rk}(x)$. dann $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ und $x \subseteq V_\alpha$.

LEMMA 5.12. $\forall\alpha V_\alpha = \{x \in \mathbf{WF} \mid \mathrm{rk}(x) < \alpha\}$.

Beweis: $\mathrm{rk}(x) < \alpha \leftrightarrow \exists\beta < \alpha(x \in V_{\beta+1}) \leftrightarrow x \in V_\alpha$. □

LEMMA 5.13. *Sei* $y \in \mathbf{WF}$.
1. $\forall x \in y(x \in \mathbf{WF} \wedge \mathrm{rk}(x) < \mathrm{rk}(y)$.
2. $\mathrm{rk}(y) = \sup\{\mathrm{rk}(x) + 1 \mid x \in y\}$.

Beweis: 1. Sei $\alpha = \mathrm{rk}(y)$. $y \in V_{\alpha+1}$. Dann ist $x \in y \subseteq V_\alpha$. Also ist $\mathrm{rk}(x) < \alpha$.

2. Nach dem ersten Teil ist $\mathrm{rk}(x) \geq \sup\{\mathrm{rk}(y) + 1 \mid y \in x\}$. Sei $y \in x$. Dann ist $\mathrm{rk}(y) < \mathrm{rk}(x)$. Also gilt auch die umgekehrte Ungleichung. □

LEMMA 5.14. *1.* $\forall\alpha(\alpha \in \mathbf{WF} \wedge \mathrm{rk}(\alpha) = \alpha)$.
2. $\forall\alpha(V_\alpha \cap On = \alpha)$.

Beweis: 1. Induktiv über α. Sei $\forall\beta < \alpha(\beta \in \mathbf{WF} \wedge \mathrm{rk}(\beta) = \beta)$. Dann ist $\forall\beta < \alpha\beta \in V_\alpha$ Also $\alpha \subseteq V_\alpha$ Somit $\alpha \in V_{\alpha+1}$ und α ist minimal mit dieser Eigenschaft. Daher ist $\mathrm{rk}(\alpha) = \alpha$.

Nach dem Teil 2. des vorigen Lemmas ist $\mathrm{rk}(\alpha) = \alpha$.

Teil 2. folgt nun aus Teil 1 und dem Lemma 5.12. □

LEMMA 5.15. *1.* $x \in \mathbf{WF} \to \bigcup x, \{x\}, \mathcal{P}(x) \in \mathbf{WF}$.
2. $x, y \in \mathbf{WF} \to x \times y, x \cap y, x \cup y, \{x, y\}, \langle x, y\rangle, {}^y x \in \mathbf{WF}$.

Beweis 1. Sei $\mathrm{rk}(x) = \alpha$. Dann ist $x \in V_{\alpha+1}$. $x \subseteq V_\alpha$ also $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+2}$, $\{x\} \in V_{\alpha+2}$, $\bigcup x \in V_{\alpha+1}$.

2.Sei $\alpha = \max(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y))$. Then $\{x, y\} \in V_{\alpha+2}$, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in V_{\alpha+3}$, ${}^y x \subseteq V_{\alpha+3}$, ${}^y x \in V_{\alpha+4}$.

LEMMA 5.16. *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Elemente von $V_{\omega+\omega}$.*

Man kann also die gängigen mathematischen Strukturen in **WF** finden, oder zumindest isomorphe Kopien in **WF** finden. Die Einschränkung auf fundierte Mengen ist für die Mathematik nicht gravierend.

LEMMA 5.17. $\forall x(x \in \mathbf{WF} \leftrightarrow x \subseteq \mathbf{WF})$.

Beweis: $\to$ Transitivität. $\leftarrow$: $x \subseteq \mathbf{WF}$, dann ist $\alpha = \sup\{\mathrm{rk}(y) + 1 \mid y \in x\}$ eine On. Dann ist nach Lemma 5.12 $x \subseteq V_\alpha$ und daher $x \in V_{\alpha+1}$.

□

LEMMA 5.18. $\forall n \in \omega |V_n| < \omega$.

LEMMA 5.19. $|V_\omega| = \omega$.

Beweis: $\omega \subseteq V_\omega$ Daher ist V_ω unendlich. Aber wegen des vorigen Lemmas und der Definition $V_\omega = \bigcup\{V_n \mid n < \omega\}$ ist V_ω auch nicht größer.

LEMMA 5.20. *ZFC$^-$. Für α On ist $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.*

LEMMA 5.21. *1. ZFC$^-$. Jede Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe in* **WF**.
2. Jeder topologische Raum ist homöomorph zu einem topologischen Raum in **WF**.

Beweis 1. Sei $\langle G, \cdot\rangle$ eine Gruppe. Nach dem Lemma über das Kreuzprodukt und die Potenzmenge ist $\langle G, \cdot\rangle \in \mathbf{WF}$ gdw $G \in \mathbf{WF}$. Sei $|G| = \alpha$ und sei $f \colon G \to \alpha$ bijektiv. Dann definieren wir $\circ$ auf α durch

$$\beta \circ \gamma = f(f^{-1}(\beta) \cdot f^{-1}(\gamma)).$$

Dann ist $\langle G, \cdot\rangle$ isomorph zu $\langle \alpha, \circ\rangle$.

2. Sei $\mathcal{X} = \langle X, \tau\rangle$ ein topologischer Raum. Wieder haben wir nach dem Lemma $\mathcal{X} \in \mathbf{WF} \leftrightarrow X \in \mathbf{WF}$. Sei $|X| = \alpha$ und sei $f \colon X \to \alpha$ bijektiv. Nun definieren wir eine Topologie τ_α auf α durch

$$a \in \tau_\alpha \leftrightarrow f^{-1\prime\prime} a \in \tau.$$

Dann ist $\langle X, \tau\rangle$ homöomorph zu $\langle \alpha, \tau_\alpha\rangle$. □

Man kann also die gängigen mathematischen Strukturen in **WF** finden, oder zumindest isomorphe Kopien in **WF** finden. Die Einschränkung auf fundierte Mengen ist für die Mathematik nicht gravierend. Wir zeigten diese metamathematische Behauptung an zwei Beispielen.

Aber wie man sich denken kann, gibt es gerade auch ein Schule, die die nicht fundierten Mengen untersucht, Aczel.

Fund und Ers sind übrigens die jüngsten ZFC Axiome.

SATZ 5.22. *ZFC$^-$. Die Klasse aller Mengen, deren transitive Hülle fundiert ist, ist ein Modell von ZFC.*

Beweis: So, nun geht man ZFC ohne Fund durch. Man verlässt den Bereich der fundierten Mengen nicht. Beim Ersetzungsschema ist zu beachten, dass nur Ausdrücke der Form

$$\forall x \in A(x \text{ fundiert} \rightarrow \exists! y \text{ fundiert } \varphi(x, y))$$

als Prämisse des Schemas beachtet werden müssen. □

Induktion und Rekursion über fundierte mengenähnliche Relationen

Nun werden wir wie oben schon auf der Grundlage von $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$ und ZFC^- weiterschließen, um mehr über den Charakter der fundierten Ausschnitte des Universums zu erfahren. In diesem Abschnitt werden die stärksten Rekursiontheoreme vorgestellt, die es in ZFC gibt.

Zuerst rufen wir eine schon einmal gefallene wichtige Definition in Erinnerung Definition 2.35 Teil 1:

Definition 5.23. ZF^-–P Sei R eine Relation auf A. R heißt fundiert (auf A) gdw

$$\forall x \subseteq A(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(\neg z \in xzRy)).$$

y heißt ein R-minimales Element von x.

Lemma 5.24. *ZF⁻* $A \in \mathbf{WF} \rightarrow \langle A, \in \rangle$ *fundiert.*

Lemma 5.25. *ZF⁻ Sei A transitiv. Dann ist $\langle A, \in \rangle$ fundiert gdw $A \in \mathbf{WF}$.*

Satz 5.26. *ZF^-. Äquivalent sind:*
1. $x \in \mathbf{WF}$.
2. $\mathrm{th}(x) \in \mathbf{WF}$.
3. $\langle \mathrm{th}(x), \in \rangle$ *ist fundiert.*

Satz 5.27. *ZF. $a \in On$ gdw a transitiv ist und $\langle a, \in \rangle$ eine lineare Ordnung ist. (die Konnexitätsforderung astelle der drei Eigenschaften für lineare Ordnung reicht).*

n

Definition 5.28. ZF^-–P Sei $\mathbf{R}$ eine Relation auf $\mathbf{A}$. $\mathbf{R}$ und $\mathbf{A}$ können echte Klassen sein. $\mathbf{R}$ heißt fundiert (auf $\mathbf{A}$) gdw

$$\forall x \subseteq \mathbf{A}(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(\neg z \in xz\mathbf{R}y)).$$

y heißt ein $\mathbf{R}$-minimales Element von x.

Dies ist wörtlich Definition 5.23, aber mit Klassenvariablen. Wenn wir nun das Rekursionstheorem für eine Eigenschaft φ nachmachen möchten, dann stoßen wir auf die Klasse

$$\{x \in \mathbf{A} \mid \neg\varphi(x)\}.$$

Hat diese ein minimales Element? Oben rangiert x nur über Teilmengen von $\mathbf{A}$.

Definition 5.29. $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$. $\mathbf{R}$ heißt mengenähnlich (Kunen: set-like, Levy: left-narrow, Ziegler: vorgängerklein, Spinas: mengenartig) auf $\mathbf{A}$ gdw $\forall x \in A\{y \in \mathbf{A} \mid yRx\}$ eine Menge ist.

Beispiele: $\in$ ist auf jeder Klasse mengenartig. Jede Relation auf einer Menge ist mengenartig.

Gegenbeispiel: $(On + On, <)$.

Definition 5.30. ZF$^-$ – P. Wenn $\mathbf{R}$ mengenähnlich auf $\mathbf{A}$ ist und $x \in \mathbf{A}$ ist, dann definieren wir
1. $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A} \mid y\mathbf{R}x\}$.
2. $\mathrm{pred}^0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{x\}$.
$\mathrm{pred}^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup\{\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \mid y \in \mathrm{pred}^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\}$.
3. $\mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup\{\mathrm{pred}^n(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \mid n < \omega\}$.

Lemma 5.31. *ZF$^-$ – P. Wenn $\mathbf{R}$ mengenähnlich auf $\mathbf{A}$ ist und $x \in \mathbf{A}$ ist, dann* $y \in \mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \to \mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$.

Satz 5.32. *ZF$^-$ – P. Wenn $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert auf $\mathbf{A}$ ist dann hat jede nicht leere Teilklasse $\mathbf{X}$ von $\mathbf{A}$ ein $\mathbf{R}$-minimales Element.*

Beweis: Nehme irgendein $x \in \mathbf{X}$. dann ist $\mathbf{X} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbf{A}$ und hat daher nach der Definition von Fundiertheit ein $\mathbf{R}$-minimales Elemnt. $\square$

Satz 5.33. *ZF$^-$ – P. Satz von der transfiniten Induktion über fundierte mengenartige Relationen. Sei $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert auf $\mathbf{A}$ und sei φ eine Eigenschaft in der Sprache der ersten Stufe. Dann*

$$(\forall x \in \mathbf{A}(\forall y\mathbf{R}x\varphi(y) \to \varphi(x))) \to \forall x \in \mathbf{A}\varphi(x). \tag{5.1}$$

Beweis: Wenn nicht, hat $\{x \in \mathbf{A} \mid \neg\varphi(x)\}$ ein $\mathbf{R}$-minimales Element und dies widerspricht der Prämisse der Gleichung (5.1). $\square$

Satz 5.34. *ZF$^-$ – P. Satz von der transfiniten Rekursion über fundierte mengenartige Relationen. Sei $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert auf $\mathbf{A}$ und sei $\mathbf{F}\colon \mathbf{A} \times V \to V$. Dann gibt es genau eine Operation $\mathbf{G}\colon \mathbf{A} \to V$ so dass*

$$\forall x \in \mathbf{A}(\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))).$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt leicht aus dem Induktionssatz. Wieder ist die Existenz der interessante Teil: Wir sagen d ist abgeschlossen wenn $(\forall x \in d)(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq d)$. Dann ist x ein Element einer abgeschlossenen Menge, nämlich von $\mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ Wir schreiben kurz $\mathrm{cl}(x)$ für $\mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. g heißt d Approximation, wenn d abgeschlossen ist und $\forall x \in d$,

$$g(x) = \mathbf{F}(x, g \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})).$$

Nun zeigt man induktiv über $\mathbf{R}$, $\forall x \exists \mathrm{cl}(x)$-Approximation.

Induktionsschritt: Seine g_y schon $\mathrm{cl}(y)$-Approximationen für $y\mathbf{R}x$. Dann ist

$$\bigcup\{g_y \mid y\mathbf{R}x\} \cup \{\langle x, \mathbf{F}(x, \bigcup\{g_y \mid y\mathbf{R}x\})\rangle\}$$

eine $\mathrm{cl}(x)$-Approximation.

Zum Schluss definiert man $\mathbf{G}(x) = g(x)$ für eine (=jede) $\mathrm{cl}(x)$-Approximation g. $\square$

Definition 5.35. $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$. Sei $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert auf $\mathbf{A}$. Dann definieren wir durch transfinite Rekursion über $\mathbf{R}$

$$\mathrm{rk}(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \sup\{\mathrm{rk}(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 \mid y\mathbf{R}x, y \in \mathbf{A}\}.$$

Definition 5.36. $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$. Sei $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert auf $\mathbf{A}$. Dann definieren wir durch transfinite Rekursion über $\mathbf{R}$ die Mostowski-Operation $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}(x) = \{\mathbf{G}(y) \mid y\mathbf{R}x, y \in \mathbf{A}\}.$$

Die Bildstruktur $(\mathbf{G}''\mathbf{A}, \in)$ heißt der Mostowski-Kollaps von $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}\rangle$.

Bewermung: $\mathbf{G}$ braucht nicht injektiv zu sein. Zum Beispiel, wenn $R = \emptyset$ ist, dann ist $\mathbf{G}(x) = \emptyset$ für alle $x \in \mathbf{A}$.

Lemma 5.37. *ZF^- –P. 1.* $\forall x, y, \in \mathbf{A} x\mathbf{R}y \to \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)$.
2. M ist transitiv.
3. ZF^- $M \subseteq \mathbf{WF}$.
4. ZF^- $x \in \mathbf{A}\, \mathrm{rk}(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \mathrm{rk}(\mathbf{G}(x))$.

Wann ist $\mathbf{G}$ ein Isomorphismus? Wann ist $\mathbf{G}$ injektiv?

Definition 5.38. $\mathrm{ZF}^- - \mathrm{P}$. Sei $\mathbf{R}$ eine Relation auf $\mathbf{A}$. Dann heißt $\mathbf{R}$ extensional auf $\mathbf{A}$ gdw

$$\forall x, y \in \mathbf{A}(\forall z \in \mathbf{A}(z\mathbf{R}y \leftrightarrow z\mathbf{R}x) \to x = y).$$

Lemma 5.39. *ZF^- –P. Wenn $\mathbf{N}$ transitiv ist, dann ist $\in$ extensional auf $\mathbf{N}$.*

Beweis: $\mathrm{pred}(\mathbf{N}, x, \in) = x$ für alle $x \in \mathbf{N}$. □

Lemma 5.40. *ZF^- – P. Sei $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert und extensional auf $\mathbf{A}$, dann ist $\mathbf{G}$ ein Isomorphismus on $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R}\rangle$ auf $\langle \mathrm{rge}\, \mathbf{G}, \in\rangle$, d.h.,*

$$\forall x, y \in \mathbf{A}(x\mathbf{R}y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)).$$

Beweis: $\mathbf{G}$ ist injektiv. Sonst sei x ein $\mathbf{R}$-minimales Element von $\{x \in \mathbf{A} \mid \exists y \in \mathbf{A}(x \neq y \land \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y) \land \mathrm{rk}(y) \leq \mathrm{rk}(x))\}$.

1. Fall $\exists z \in \mathbf{A}(z\mathbf{R}x \land \neg z\mathbf{R}y)$. Dann ist $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$. und es gibt es w, so dass $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$, da $\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$, Dieses w ist wRy. Also ist also $w \neq z$. Also ist (w, z) ein kleineres Gegenbeispiel, im Widerspruch zur Minimalität von x.

2. Fall $\exists z \in \mathbf{A}(\neg z\mathbf{R}x \land z\mathbf{R}y)$. Dann ist $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$. und es gibt es w, so dass $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$, da $\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$, Dieses w ist $w\mathbf{R}x$. Also ist $w \neq z$. Also ist (w, z) ein kleineres Gegenbeispiel, im Widerspruch zur Minimalität von x.

□

Satz 5.41. *ZF^- – P. Sei $\mathbf{R}$ mengenähnlich und fundiert und extensional auf $\mathbf{A}$, dann gibt es eine genau transitive Klasse $\mathbf{M}$ und genau eine Abbildung $\mathbf{G} \colon \mathbf{A} \to \mathbf{M}$, so dass $\mathbf{G} \colon \langle \mathbf{A}, \mathbf{R}\rangle \cong \langle \mathbf{M}, \in\rangle$.*

Korollar 5.42. *ZF –P. Wenn $\in$ extensional auf $\mathbf{A}$ ist, dann eine genau transitive Klasse $\mathbf{M}$ und genau eine Abbildung $\mathbf{G} \colon \mathbf{A} \to \mathbf{M}$, so dass $\mathbf{G} \colon \langle \mathbf{A}, \in\rangle \cong \langle \mathbf{M}, \in \rangle$.*

KAPITEL 6

Das Universum L der konstruktiblen Mengen

1. Definierbarkeit

Wir stellen nun das Gödel'sche Universum L der konstruktiblen Mengen vor. Wir folgen Devlins Buch [**7**]. Dieses wird wie folgt definiert:

Definition 6.1. $X \subseteq (M, \in)$ heißt definierbar in $(M, \in)$ mit Parametern in M gdw es eine Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathscr{L}(\in)$ und $a_1, \ldots, a_n \in M$ gibt, so dass

$$X = \{a_0 \in M \mid (M, \in) \models \varphi[(v_i|a_i)_{0 \leq i \leq n}]\}.$$

$\mathrm{Def}(M) = \mathrm{Def}(M, \in) = \{X \subseteq M \mid X$ definierbar in $(M, \in)$ mit Parametern in $M\}$.

Definition 6.2. $L_0 = \emptyset$
$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$,
$L_\lambda = \bigcup\{L_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$,
$\mathbf{L} = \bigcup\{L_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$.

Wir möchten zeigen, dass diese Hierarchie im folgenden Sinne absolut definierbar ist: Sei ZF^- die Teiltheorie von ZFC, bei der das Ersetzungsschema und das Aussonderungsschema auf Formeln mit höchstens 1000 Zeichen beschränkt wird. Wie möchten die folgende Eigenschaft garantieren:

Wenn M und N transitive Mengen sind und sowohl $(M, \in)$ und $(N, \in)$ Modelle von ZF^- sind, dann für alle $\alpha \in M \cap N$, $L_\alpha^M = L_\alpha^N$. Hierbei ist L_α^M die Interpretation der Definition von L_α in M. Diese sogenannte Relativierung von V auf einen kleineren Träger werden wir auch präzisieren.

Dies führt uns zu den Themen Definierbarkeit und Absolutheit.

Zuerst zeigen wir, dass die Relation $y = \mathrm{Def}(x)$ eine spezielle syntaktische Form hat.

2. Die Lévy-Hierarchie

Die Menge der Δ_0-Formeln ist die kleinste Formelmenge die die atomaren Formeln $x \in y$ und $x = y$ (x und y freie Variablen) enthält und unter $\neg$, $\wedge$ und eingeschränkter Quantifikation $\forall x \in y$ abgeschlossen ist. Wir definieren

Definition 6.3. Die Lévy Hierarchie der $\mathcal{L}(\in)$-Formeln. $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$. Eine Σ_{n+1}-Formel ist eine Formel von der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_m \varphi$ mit einer Π_n-Formel φ. Eine Π_{n+1}-Formel ist eine Formel von der Form $\forall x_1 \ldots \forall x_m \varphi$ mit einer Σ_n-Formel φ.

Proposition 6.4. *Seien M, N transitive Mengen, sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Δ_0-Formel und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M \cap N$. Dann gilt*

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ gdw } N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Beweis: Durch Induktion über den Aufbau von φ. Der interessanteste Fall ist $\varphi = \forall x \in y\psi$. Wenn $M \models \forall x \in a\psi$, dann gilt wegen der Transitivität von M, $M \models \psi(b)$ für alle $b \in a$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $N \models \psi(b)$ für alle $b \in a$, und daher $N \models \forall x \in a\psi(x)$. Die Umkehrung folgt aus der Symmetrie von N und M. $\square$

Wir möchten nun eine Formel konstruieren, die die Eigenschaft "x ist transitiv und $y = \mathrm{Def}(x)$" ausdrückt. Dies verlangt eine Kodierung in der Mengenlehre analog zur Kodierung in der Arithmetik, die wir im ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz gesehen haben. Zunächst kodieren wir $\mathcal{L}(\in)$-Formeln durch natürliche Zahlen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\ulcorner(v_i \in v_j)\urcorner &= \langle 0, i, j\rangle \\
\ulcorner(v_i = v_j)\urcorner &= \langle 1, i, j\rangle \\
\ulcorner(\varphi \wedge \psi)\urcorner &= \langle 2, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle \\
\ulcorner(\neg\varphi)\urcorner &= \langle 3, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle \\
\ulcorner(\forall v_i \varphi)\urcorner &= \langle 4, i, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle
\end{aligned}$$

Hierbei nehmen wir wieder injektive berechenbare Funktionen $\langle \dots \rangle$, z.B. $\langle a, b\rangle = 2^{a+1} \cdot 3^{b+1}$ und $\langle a, b, c\rangle = 2^{a+1} \cdot 3^{b+1} \cdot 5^{c+1}$.

Nun definieren wir eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, diejenigen i, die Codes für eine Formel sind:

$\varphi_{\text{Formel}}(i) \leftrightarrow \exists f[f \colon i+1 \to 2 \wedge f(i) = 1 \wedge \forall j \leq i$
$(f(j) = 1 \to \exists k, \ell < j$
$(j \in \{\langle 0, k, \ell\rangle, \langle 1, k, \ell\rangle, \langle 2, k, \ell\rangle, \langle 3, k\rangle, \langle 4, k, l\rangle\} \wedge \forall k, \ell < j$
$((j = \langle 0, k, \ell\rangle \to f(j) = 1) \wedge$
$(j = \langle 1, k, \ell\rangle \to f(j) = 1) \wedge$
$(j = \langle 2, k, \ell\rangle \to (f(j) = 1 \leftrightarrow f(k) = 1 \wedge f(\ell) = 1)) \wedge$
$(j = \langle 3, k\rangle \to (f(j) = 1 \leftrightarrow f(k) = 1)) \wedge$
$(j = \langle 4, k, \ell\rangle \to (f(j) = 1 \leftrightarrow f(\ell) = 1)))))]$

Wir schreiben $\varphi_{\text{Formel}}(i)$ als $\exists f(\psi(f) \wedge f(i) = 1)$ dann ist $\varphi^*_{\text{Formel}}$ die Formel $\forall f(\psi(f) \to f(i) = 1)$.

Wir haben: φ_{Formel} ist Σ_1 und $\varphi^*_{\text{Formel}} \in \Pi_1$ und $ZF^- \vdash \varphi_{\text{Formel}} \to \varphi^*_{\text{Formel}}$.

Wir erwähnen eine für Anwendungen nützliche Folge des Ersetzungsaxiomes und des Satzes über die von Neumann'sche Hierarchie:

Satz 6.5. *Das Kollektionsprinzip. Wenn $\varphi(x, y)$ eine totale Relation definiert, dann gibt es für jedes a ein b, so dass $\{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}$ ein totale Relation auf a ist. In Symbolen*

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \to \forall a \exists b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y).$$

Hierbei sollen die Variablen a und b nicht als freie Variablen in φ vorkommen.

Beweis: Angenommen, $\forall x \exists y \varphi(x, y)$. Wir definieren $f(x) = \min\{\alpha \mid \exists y \in V_\alpha V \models \varphi(x, y)\}$ Nach dem Ersetzungsschema und dem Satz von von Neumann gibt es eine Ordinalzahl β, so dass für alle $x \in af(x) < \beta$. Also $\forall x \in a \exists y \in V_\beta \varphi((x, y))$, wie gewünscht. $\square$

Nun möchten wie eine Formel konstruieren, die die folgenden Relation ausdrückt

$$(x, \in) \models \varphi(f(0), \dots, f(n))$$

für Formeln $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ mit Code i und $f\colon i \to x$, die die Belegungen beschreiben. In einer Formel mit Code i kommen höchstens die Variablen $v_0, \dots, v_{i-1}$ vor, und $f(i)$ steht für die Belegung $s(v_i)$. Für jedes x sei $\mathrm{Seq}(x)$ die Menge der endlichen Folgen von Elemente aus x.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\mathrm{erf}}(i, x, f) \leftrightarrow \varphi_{\mathrm{Formel}}(i) \wedge f\colon i \to x \wedge \exists g\colon i+1 \times \mathrm{Seq}(x) \to 2 \wedge \forall j \le i, \forall s \in \mathrm{Seq}(x)\\
&(g(j,s) = 1 \to \varphi_{\mathrm{Formel}}(j) \wedge \forall k, \ell < j\\
&((j = \langle 0, k, \ell\rangle \to (g(j,s) = 1 \leftrightarrow s(k) \in s(\ell))) \wedge\\
&(j = \langle 1, k, \ell\rangle \to (g(j,s) = 1 \leftrightarrow s(k) = s(\ell))) \wedge\\
&(j = \langle 2, k, \ell\rangle \to (g(j,s) = 1 \leftrightarrow g(k,s) = 1 \wedge g(\ell, s) = 1)) \wedge\\
&(j = \langle 3, k\rangle \to (g(j,s) = 1 \leftrightarrow g(k,s) = 0)) \wedge\\
&(j = \langle 4, k, \ell\rangle \to (g(j,s) = 1 \leftrightarrow \forall s'(\forall m(m \ne k \to s'(m) = s(m)) \to g(\ell, s') = 1))))\\
&\wedge g(i,f) = 1]
\end{aligned}$$

Wir schreiben $\varphi_{\mathrm{erf}}(i,x,f)$ als $\varphi_{\mathrm{Formel}}(i) \wedge f\colon i \to x \wedge \exists g(\psi(g) \wedge g(i,f) = 1)$. Dann setzen wir $\varphi^*_{\mathrm{erf}}(i,x,f)$ als $\varphi_{\mathrm{Formel}}(i) \wedge f\colon i \to x \wedge \forall g(\psi(g) \to g(i,f) = 1)$. φ_{erf} ist in Σ_1 und $\varphi^*_{\mathrm{erf}} \in \Pi_1$ und $ZF^- \vdash \varphi_{\mathrm{erf}} \leftrightarrow \varphi^*_{\mathrm{erf}}$.

$\mathrm{Def}(x,y) \leftrightarrow \forall z \in y \exists i \in \omega \exists s \in \mathrm{Seq}(x) \forall w \in x(w \in z \leftrightarrow \varphi_{\mathrm{erf}}(i, x, \langle w\rangle * s) \wedge \forall i \forall s \in \mathrm{Seq}(x) \exists z \in y \forall w \in x(w \in z \leftrightarrow \varphi_{\mathrm{erf}}(i, x, \langle w\rangle * s)) \wedge y \subseteq \mathcal{P}(x))$,

hierbei haben wir die Konkatenation benutzt: $(\langle w\rangle * s)(i) = w$ für $i = 0$ und $s(i-1)$ sonst.

Dann gibt es Σ_1- bzw Π_1-Formeln φ und ψ, so dass $\mathrm{ZF}^- \vdash \mathrm{Def}(x,y) \leftrightarrow \varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y)$. Dies ist der Fall, da aufgrund des aus ZF^- beweisbaren Kollektionsprinzips 6.5 für Σ_1-Formeln die Formel $\forall x \in y \varphi$ mit φ Σ_1 äquivalent zu einer Σ_1-Formel ist. Dehalb haben wir sowohl eine Σ_1 als auch eine Π_1-Definition für $\mathrm{Def}(x) = y$.

Aus dieser Diskussion ergibt sich folgender

Satz 6.6. *Definierbarkeit der Σ_n-Erfüllung. Für jedes n gibt es eine Formel $\varphi^n_{\mathrm{erf}}(i,s)$, so dass, wenn $i = \ulcorner\varphi\urcorner$ und φ eine Σ_n-Formel und s eine Funktion auf $i+1$ sind, gilt:*

$$\mathrm{ZF}^- \vdash \varphi^n_{\mathrm{erf}}(i,s) \leftrightarrow \varphi(s(0), \dots, s(i)).$$

Beweis: Sei zunächst $n = 1$. Wir definieren $\varphi^1_{\mathrm{erf}}(i,s)$ als

$$\exists T(T \text{ transitiv } \wedge s\colon i+1 \to T \wedge \varphi_{\mathrm{erf}}(i,T,s)).$$

Wenn $(T, \in) \models \varphi(s(0), \dots, s(i))$ und φ eine Σ_1-Formel ist, dann ist $\varphi(s(0), \dots, s(n))$ wahr in V wegen der Transitivität von T. Umgekehrt, wenn $\varphi(s(0), \dots, s(n))$ wahr ist, dann gibt es, da es sich um eine Σ_1-Formel handelt, ein V_α mit einem Existenzbeispiel. Und V_α ist transitiv, kann also als ein T mit $(T, \in) \models \varphi(s(0), \dots, s(i))$ dienen, das nun $\varphi^1_{\mathrm{erf}}(i,s)$ bezeugt. Der allgemeine Fall folgt nun durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke (die ja in i kodiert sind). $\varphi^2_{\mathrm{erf}}(i,s)$ wird für $i = \ulcorner\exists w_0 \cdots \exists w_j \neg\varphi(v_0, \dots, v_i, w_0, \dots, w_j)\urcorner$ und φ Σ_1, dann $i' = \ulcorner\varphi(v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+j+1})\urcorner$ und

$$\varphi^2_{\mathrm{erf}}(i,s) = \exists t \neg\varphi^1_{\mathrm{erf}}(i', s * t).$$

□

Der Satz gilt stufenweise für jedes n, und es können nicht alle n zusammen in einem Satz beschrieben werden, wie folgender Satz zeigt:

Satz 6.7. *Tarski. Es gibt keine Formel $\varphi_{\mathrm{erf}}(i)$, so dass für jeden Satz φ gilt*

$$\mathrm{ZF}^- \vdash \varphi_{\mathrm{erf}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi.$$

Beweis: Andernfalls betrachte man die Formel $\varphi(i,j) = \neg\varphi_{\mathrm{erf}}(\ulcorner\varphi_i(j)\urcorner)$ mit der Indizierung φ_i, so dass $\ulcorner\varphi_i(v_0)\urcorner = i$, wenn i Gödelnummer einer Formel ist, sonst setze $\varphi(i,j) = \neg\varphi_{\mathrm{erf}}(0)$. Sei nun $i_0 = \ulcorner\varphi(v_0,v_0)\urcorner$ und $\psi = \varphi(i_0,i_0)$. Dann haben wir

$$\mathrm{ZF}^- \vdash \varphi_{\mathrm{erf}}(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \varphi(i_0,i_0) \leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{erf}}(\ulcorner\varphi_{i_0}(i_0)\urcorner) \leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{erf}}(\ulcorner\varphi(i_0,i_0)\urcorner) \leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{erf}}(\ulcorner\psi\urcorner).$$

Widerspruch.

Dasselbe Argument kann auf jede rekursive Theorie, die ZF^- umfasst, angewendet werden. □

Die Definierbarkeit der Σ_n Erfüllbarkeit führt nun zu Reflexionsprinzipen.

Definition 6.8. $M \prec_n V$ und in Worten "M ist ein Σ_n-elementares Submodell" von V gdw für jede Σ_n-Formel $\varphi(v_0,\dots,v_n)$ und alle $a_0,\dots,a_n \in M$

$$M \models \varphi(a_0,\dots,a_n) \leftrightarrow V \models \varphi(a_0,\dots,a_n).$$

Satz 6.9. *Der Reflexionssatz. Für jedes n gilt:*

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall\alpha\exists\beta > \alpha V_\beta \prec_n V.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar, da Σ_0-Formeln absolut sind. Angenommen, die Behauptung gelte für n und α sei eine Ordinalzahl. Wir möchten ein $\beta > \alpha$ finden, so dass $V_\beta \prec_{n+1} V$. Nach IV. können wie ein $\beta > \alpha$ wählen, so dass $V_\beta \prec_n V$. Wenn nicht $V_\beta \prec_{n+1} V$, dann gibt es eine Π_n-Formel $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ und ein $\vec{a} \in V_\beta$ so dass $\exists\vec{y}\varphi(\vec{a},\vec{y})$ aber nicht $\exists\vec{y} \in V_\beta\varphi(\vec{a},\vec{y})$.

Nach der Definierbarkeit der Σ_n-Erfüllung und nach dem Ersetzungsschema können wir nun $\alpha < \beta_0 < \beta_1 \cdots$ definieren, so dass gilt: Wenn $\exists\vec{y}\varphi(\vec{a},\vec{y})$ und $\vec{a} \in V_{\beta_k}$ und φ ein Π_n-Formel ist, dann $\exists\vec{y} \in V_{\beta_{k+1}}\varphi(\vec{a},\vec{y})$. Sei nun β das Supremum der β_n, dann ist $V_\beta \prec_{n+1} V$. □

3. Absolutheit

Definition 6.10. Eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ heißt absolut gdw für alle transitiven ZF^--Modelle $M \subseteq N$ und $x_,\dots,x_n \in M$ gilt:

$$M \models \varphi(x_1,\dots,x_n) \text{ gdw } N \models \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ist Δ_1 in ZF^-, geschrieben $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$ gdw es Σ_1 und Π_1 Formeln ψ und χ gibt, so dass

$$\mathrm{ZF}^- \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi.$$

Proposition 6.11. *Jede $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$-Formel ist absolut für transitive ZF^--Modelle.*

Beweis: Sei $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ eine $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$-Formel. Wir wählen Σ_1- und Π_1-Formeln, die dies bezeugen: $\mathrm{ZF}^- \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$. Wenn $M \subseteq N$ transitive ZF^--Modelle sind und $x_1,\dots,x_n \in M$, dann impliziert $M \models \psi(x_1,\dots,x_n)$ $N \models \psi(x_1,\dots,x_n)$, da ψ Σ_1 ist. Außerdem impliziert $N \models \chi(x_1,\dots,x_n)$ auch $M \models \chi(x_1,\dots,x_n)$, da χ Π_1 ist. Da in beiden Modellen φ äquivalent zu ψ und zu χ ist, gelten also beide

Implikationen auch für φ. $\square$

Die folgenden Formeln sind absolut: $x \in y$, $x = y$, $x \subseteq y$, x ist transitiv, $y = \bigcup x$ und $w = y \times z$, denn diese sind Δ_0.

Die Eigenschaft "$(x, \leq)$ ist eine Wohlordnung" ist auch absolut: $(x, \leq)$ ist eine Wohlordnung gdw

$$\exists f\colon (x, <) \cong (\alpha, \in) \text{ für eine Ordinalzahl } \alpha,$$

$$\text{gdw } \neg\exists y \subseteq x(y \neq \emptyset \wedge y \text{ hat kein } \leq\text{- minimales Element}),$$

und so ist diese Eigenschaft $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$.

Wir möchten jetzt zeigen, dass die Definition der L-Hierarchie absolut ist. Dies folgt aus dem folgenden allgemeinen Resultat: Eine partielle Ordnung ist eine Struktur $(X, \leq)$ mit einem reflexiven, antisymmetrischen und transitiven $\leq$. Sie ist fundiert gdw wenn jedes nicht leere $Y \subseteq X$ eine $\leq$-minimales Element enthält.

$\Sigma_1^{\mathrm{ZF}^-}$-definierbare *Funktionen* sind schon $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$-definierbar, da auch $f(x) \neq y$ $\Sigma_1^{\mathrm{ZF}^-}$-definierbar ist durch $\exists z(z \neq y \wedge f(x) = z)$. Deshalb kann man im folgenden Satz die Voraussetzung über die Definierbarkeit von g scheinbar abschwächen zu "g ist definierbar durch eine $\Sigma_1^{\mathrm{ZF}^-}$-Formel."

Satz 6.12. Δ_1-*Induktionsprinzip. Angenommen, $(X, \leq)$ ist eine fundierte partielle Ordnung g ist eine totale Funktion und $\{y \mid y \leq x\}$ ist eine Menge für jedes $x \in X$. Wir nehmen an, dass $(X, \leq)$ und die Funktion $x \mapsto \{y \mid y \leq x\}$ und die Funktion g definierbar durch $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$-Formeln sind. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion f auf X, so dass f $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$-definierbar ist und für jedes $x \in X$ gilt*

$$f(x) = g(f \restriction \{y \mid y < x\}).$$

Beweis: Wir zeigen, dass es für jedes x eine eindeutig bestimmte Funktion f_x auf $\{y \mid y < x\}$, so dass $f_x(y) = g(f_x \restriction \{z \mid z < y\})$ für $y \leq x$ gibt. Wenn nicht, dann gibt es ein $\leq$-minimales $x \in X$, für das dies scheitert. Wie bekommen dann wie folgt einen Widerpruch: $f_x(y) = f_y(y)$ für jedes $y < x$ und $f_x(x) = g(\bigcup\{f_y \mid y < x\})$. Nun definiere $f(x) = f_x(x)$. Dies ist die eindeutig bestimmte Funktion auf X, so dass für jedes $x \in X$, $f(x) = g(f \restriction \{y \mid y < x\})$. Und f ist Δ_1 in ZF^-:

$$\begin{gathered} f(x) = w \text{ gdw} \\ \exists h(\forall y \leq x h(y) = g(h \restriction \{z \mid z < y\}) \wedge h(x) = w) gdw \\ \forall h(\forall y \leq x h(y) = g(h \restriction \{z \mid z < y\}) \rightarrow h(x) = w). \end{gathered}$$

$\square$

Korollar 6.13. *Die folgenden Ausdrücke sind $\Delta_1^{\mathrm{ZF}^-}$ und sind absolut:* $\mathrm{rk}(x) = \alpha$, $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha \cdot \beta = \gamma$ *und* $y = L_\alpha$.

4. Das Universum der konstruktiblen Mengen

Wir wiederholen die Definition der L-Hierarchie.

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= \mathrm{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha, \\ \mathbf{L} &= \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha. \end{aligned}$$

x ist konstruktibel gdw $x \in L_\alpha$ für eine Ordinalzahl α- Dies wird durch "$x \in L$" abgekürzt. **L** ist keine Menge, sondern eine "echte Klasse". Unsere Untersuchungen der Absolutheit zeigt, dass die Funktion $\alpha \mapsto L_\alpha$ absolut ist: Wenn M und N transitive ZF^--Modelle sind, dann sind $\mathbf{L}_\alpha^N = \mathbf{L}_\alpha^N$.

Wir zeigen nun, dass L in einem gewissen Sinne ein Modell von ZF ist: Wenn V ein Modell von ZF ist, dann ist $L^V = L$ ein Modell von ZF. Für jede Formel φ definieren wir φ^M, die Relativierung von φ auf M, wie folgt:

$$\begin{aligned} (x \in y)^M &= (x \in y) \\ (x = y)^M &= (x = y) \\ (\varphi \wedge \psi)^M &= (\varphi^M \wedge \psi^M) \\ (\neg\varphi)^M &= \neg\varphi^M \\ (\forall x\varphi)^M &= \forall x(x \in M \to \varphi^M). \end{aligned}$$

Dann drückt φ^M die Eigenschaft "φ ist wahr in M" aus. Wir haben

Satz 6.14. $\mathrm{ZF} \vdash \varphi^{\mathbf{L}}$ *für jedes Axiom* φ *in ZF.*

Beweis: φ^L ist einfach zu überprüfen, wenn φ ein Axiom von ZF außer dem Potenzmengenaxiom oder dem Ersetzungsschema ist.

Protenzmengenaxiom: Sei $x \in L_\alpha$ und wir definieren $\mathcal{P}^L(x)$ als $\{y \in L \mid y \subseteq x\}$. Wie müssen zeigen, dass $\mathcal{P}^L(x)$ Element von L_β für ein β ist. Definiere die Funktion $f\colon \mathcal{P}(x) \to \mathrm{ORD}$ wie folgt $f(x) =$ die kleinste Ordinalzahl γ, so dass $x \in L_\gamma$, 0, falls $y \notin L$. Nach dem Ersetzungsschema gibt es eine Ordinalzahl β, so dass $\mathcal{P}^L(x) \subseteq L_\beta$ und deshalb $\mathcal{P}^L(x) \in \mathrm{Def}(L_\beta)) = L_{\beta+1}$.

Ersetzungsschema: Sei $x \in L$ und $f\colon x \to L$ eine L-definierbare Funktion. Wir müssen zeigen, dass es eine Ordinalzahl α gibt, so dass $\mathrm{rge}(f) \in L_\alpha$, wenn g Σ_n-definierbar in L ist. Dann genügt es eine Ordinalzahl α zu finden, so dass $L_\alpha \prec_n L$, $\mathrm{rge}(f) \subseteq L_\alpha$ und die Parameter in der Formel, die f definiert, Elemente von L_α sind. Nach dem Reflektionsprinzip können wir ein solches α wählen, wenn $L_\alpha \prec_n L$ durch $V_\alpha \prec_m V$ für beliebiges m ersetzt wird. Wenn wir nun m hinreichend groß wählen, erhalten wir $L^{V_\alpha} \prec_n L$ und deshalb nach der Absolutheit $L_\alpha \prec_n L$. □

Korollar 6.15. *Sei* $V = L$ *der Satz* $\forall x(x \in L)$. *Wenn ZF konsistent, dann auch ZF* $+V = L$.

Beweis: Angenommen ZF $+\ V = L$ sei inkonsistent. Dann ZF$\vdash \neg V = L$, da ZF konsistent ist. Nach dem Satz, dass ZF $\vdash \varphi^L$ für jedes Axiom φ beweist die

Relativierung des Beweises von $ZF \vdash \neg V = L$ auf L, dass $ZF \vdash \neg(V = L)^L$. Wir haben aber

$$(\neg(V = L))^L = \neg(V = L)^L = \neg(\forall x(x \in L))^L = \neg\forall x(x \in L \to x \in L^L).$$

was wegen $L^L = L$ die Negation eines gültigen Satzes ist. Widerspruch. □

Nun zeigen wir ein wichtiges Ergebnis. Die Hinzunahme des Auswahlaxioms ändert die Konsistenz nicht:

SATZ 6.16. *(Gödel, 1938) Wenn ZF konsistent ist, dann auch ZFC.*

Da ZF $+V = L$ relativ konsistent zu ZF ist, folgt der Gödel'sche Satz aus

SATZ 6.17. *ZF* $+V = L \vdash AC$

Beweis: Es genügt, zu zeigen. dass es für jedes α eine Δ_1Wohlordnung $(L_\alpha, <_\alpha)$ mit $<_\alpha$ in L gibt. Wir benützen wieder den Satz von der Δ_1-Definition durch Rekursion. Wir definieren $<_\alpha$ wie folgt
$<_0 = \emptyset$
$<_\alpha = \bigcup\{<_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ für Limes λ

Für Nachfolgerordinalzahlen $\beta+1$ betrachen wir zunächst die folgende Ordnung auf $\omega \times \mathrm{Seq}(L_\beta)$:
$\langle i, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \ll \langle j, \langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$
gdw $(i < j)$ oder $(i = j \wedge n < m$ oder $(i = j \wedge n = m \wedge \exists k \leq n \forall i < k a_i = b_i \wedge a_k <_\beta b_k)))$

Für $x \in L_\beta$ sei Code(x) das $\ll$-kleinste $\langle i, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$, so dass $x = \{z \in L_\beta \mid L_\beta \models \varphi_i(z, a_1, \ldots, a_n)\}$, wobei φ_i die Formel mit Gödelnummer i ist und φ $n+1$ freie Variablen hat. Nun definieren wir $x <_{b+1} y$
gdw $(x <_\beta y)$ oder $(x \in L_\beta$ und$y \notin L_\beta)$ oder $(x, y \notin L_\beta \wedge \mathrm{Code}(x) \ll \mathrm{Code}(y))$.

Nach der Definierbarkeit von Erf in L ist $<_\alpha$ konstruktibel für jedes α.

Scharfes Anschauen des Schrittes von β auf $\beta + 1$ in der Definition von $<_{\beta+1}$ liefert mit dem Δ_1-Rekursionssatz: $<$ ist $(\Delta_1)^{ZF^-}$-definierbar. □

Nun folgt die relative Konsistenz der Kontinuumshypothese.

SATZ 6.18. *(Gödel, 1938) ZF* $+V = L \vdash GCH$

Beweis: (auf der Basis der beiden folgenden Lemmata) Gegeben die beiden Lemmata haben wir $2^\kappa = \mathrm{Kard}(\mathcal{P}(\kappa)) \leq \mathrm{Kard}(L_{\kappa^+}) = \kappa^+$, also den Satz von Gödel über die Konsistenz der Kontinuumshypothese. $\square_{\mathrm{Kont}}$

Es genügt zu zeigen

LEMMA 6.19. *Für unendlich Ordinalzahlen* α*,* $\mathrm{Kard}(L_\alpha) = \mathrm{Kard}(\alpha)$.

Beweis des ersten Lemmas. Per Induktion über α. $\mathrm{Kard}(L_\omega) = \omega$, da L_n endlich ist für jedes endliche n. Wenn $\alpha = \beta + 1$, dann $\mathrm{Kard}(L_\alpha) = \mathrm{Kard}(\mathrm{Def}(L_\alpha) \leq \mathrm{Kard}(\omega \times \mathrm{Seq}(L_\beta))$, da $\kappa \times \kappa = \kappa$ für unendliche κ. Daher folgt, dass $\mathrm{Seq}(\kappa)$ die Kardinalität höchstens κ hat. Also $\mathrm{Kard}(L_\alpha) \leq \omega \times \mathrm{Kard}(L_\beta) = \mathrm{Kard}(L_\beta) = \mathrm{Kard}(L_{\beta+1})$.

Für Limeszahlen ist $\mathrm{Kard}(L_\lambda) = \mathrm{Kard} \bigcup\{L_\beta \mid \beta < \lambda\}) \leq \mathrm{Kard}(\lambda) \otimes \mathrm{Kard}(\lambda) = \mathrm{Kard}(\lambda)$. □

LEMMA 6.20. *$V = L$ und κ unendliche Kardinalzahl, dann $\mathcal{P}(L_\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$.*

Um Lemma 6.20 zu beweisen, brauchen wir zwei Sätze: Den Satz von Löwenheim und Skolem, und den Mostowski'schen Kollabierungssatz.

Beweis des Lemmas 6.20 aus den beiden Sätzen: Angenommen x sei eine Teilmenge der unendlichen Kardinalzahl κ. Wir wählen ein $\alpha \in On$, so dass $x \in L_\alpha$ und L_α ein Modell von ZF^- ist. Letztes ist wegen des Reflexionsprinzips möglich. Nach dem Satz von Löwenheim und Skolen wählen wir nun $(M, \in) \prec (L_\alpha, \in)$, so dass $\kappa + 1 \cup \{x\} \subseteq M$ und M die Kardinalität κ hat. Nach dem Kollabierungssatz ist $\pi \colon (M, \in) \cong (T, \in)$ für eine transitives T das ZF^- und $V = L$ erfüllt. Nach der Absolutheit gibt es ein β, so dass $T = L_\beta$. Da T die Mächtigkeit κ hat, ist $\beta < \kappa^+$.

x ist aber ein Element von M und daher ist $\pi(x) \in L_\beta$ definiert für den Isomorphismus $\pi \colon (M, \in) \to (L_\beta, \in)$. Da π die Identität auf $\kappa + 2$ ist, haben wir $\pi(x) = x$. Es folgt, dass x Element von $L_\beta \subseteq L_{\kappa^+}$ ist. $\square$

Zum ersten Satz:

DEFINITION 6.21. $\mathfrak{B}$ ist eine elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$, in Zeichen $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ gdw $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{B}$ Strukturen für dieselbe Sprache mit Universen $B \subseteq A$ sind, so dass für jede Formel φ und alle $a_1, \ldots, a_n \in B$

$$\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)) \text{ gdw } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_)).$$

SATZ 6.22. *Satz von Löwenheim und Skolem. Angenommen $\mathfrak{A}$ ist eine unendliche Struktur mit Univerum A in eine abzählbaren Sprache und x ist eine unendliche Teilmenge von A, dann gibt es $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ mit Universum B, so dass $x \subseteq B$ und* $\mathrm{Kard}(B) = \mathrm{Kard}(x)$.

Beweis des Satzes von Löwenheim und Skolen: Für jede Formel $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ wählen wir eine Funktion $f_\varphi \colon A^n \to A$, so dass für alle $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(y, a_1, \ldots, a_n) \to \varphi(f_\varphi((a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n)).$$

Dies ist nach AC möglich. Jede Funktion mit obigen Eigenschaften heißt Skolemfunktion. Nun definieren wir
$x_0 = x$
$x_{k+1} = \bigcup\{\mathrm{rge}(f_\varphi) \restriction [x_k]^n \mid \varphi \text{ wie oben}\}$.

Dann ist die Mächtigkeit von x_k höchstens $\omega \otimes \mathrm{Kard}(x)$ für jedes k, und dasselbe ist wahr für die Vereinigung der x_k. Definiere nun $\mathfrak{B}$ als die Substruktur von $\mathfrak{A}$ mit Universum B. Wir zeigen, dass für jede Formel φ und alle $b_1, \ldots b_n$ aus B gilt:

$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n) \text{ gdw } \mathfrak{A} \models (a_1, \ldots, b_n).$$

Dies wird durch Induktion über φ bewiesen. Der atomare Fall ist klar und die Fälle $\varphi = \sim \psi$ und $\psi \wedge \chi$ folgen leicht aus der Induktionsvorsaussetzung. Angenomen $\varphi = \exists y \varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$. Wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$ dann $\mathfrak{A} \models \varphi$ für ein $b \in B$ und $\mathfrak{A} \models \varphi$ nach der Induktionsannahme, daher $\mathfrak{A} \models \varphi$. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $f_\psi(b_1, \ldots, b_n) = b$, dann $\mathfrak{B} \models \psi(b, b_1, \ldots, b_n)$ nach Induktionsannahme. Es folgt, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$. $\square$

Eine gerade eben im Beweis des zweiten Lemmas erwähnte Tatsache möchten wir noch einmal getrennt aufschreiben, da sie ungeheuer viele Anwendnungen in der kombinatorischen Untersuchung von L hat:

Satz 6.72. *Kondensationspinzip. Sei* $(M, \in) \prec_1 (L_\alpha, \in)$. *Dann gibt es ein* $\beta \leq \alpha$, *so dass* $(M, \in) \cong (L_\beta \in)$. *Wenn* M *transitiv ist, dann* $M = L_\beta$.

Da $\exists \beta x = L_\beta$ eine Σ_1-Formel ist, kann man mit dem Mostowksikollaps zu einer transitiven isomorphen Kopie von M übergehen, und dann für diese die Absolutheit von Δ_1-Formeln anwenden.

□

Für L sind die Lévy Hierarchie und die projektive Hierarchie miteinander ein bisschen verwandt.

nicht vorgetragen

Satz 6.73. *Gödel.* $\mathbb{R}^L$ *ist* Σ^1_2. *Die Wohlordnung* $<_L$ *ist eine* Σ^1_2 *Relation über* $\mathbb{R}^L$.

Lemma 6.74. [**15**, Lemma 41.1] *Wenn* $A \subseteq \omega^\omega$ Σ_1 *über* $HC = (H(\aleph_1), \in)$ *ist, dann ist* A *eine* Σ^1_2*-Menge in* ω^ω.

Beweis: Wenn A Σ_1 über HC ist, dann gibt es eine Σ_0-Formel φ, so dass

$$x \in A \leftrightarrow HC \models \exists u \varphi(u, x) \leftrightarrow (\exists u \in HC)(HC \models \varphi[u, x]).$$

Da φ Σ_0 und somit absolut für transitive Modelle ist, haben wir

$$x \in A \leftrightarrow (\exists M \in HC)(\exists u \in M)(M \text{ ist transitiv und } M \models \varphi[u, x]).$$

(Z.B.: $M = \mathrm{th}(\{u, x\})$.) Nach dem Auswahlaxiom oder auch nur nach dem principle of dependent choices ist jedes $M \in HC$ abzählbar, und wir haben daher

$$\begin{aligned} x \in A \leftrightarrow & \exists M \exists u \in M (M \models \varphi[u, x] \text{ und } M \text{ ist transitiv und abzählbar}) \\ \leftrightarrow & \exists E \subseteq \omega \exists n \exists m (\pi_E(m) = x \\ & \qquad \wedge (\omega, E) \models \varphi[n, m] \wedge E \text{ ist eine fundierte Relation}) \end{aligned}$$

mit dem transitiven Kollaps $\pi_E \colon (\omega, E) \cong (M, \in)$.

Wir nehmen die Kodierung E_z für $z \in \omega^\omega$:

$$x E_z y \leftrightarrow z(\langle x, y \rangle) = 1.$$

Dann

$$\begin{aligned} x \in A \leftrightarrow & \exists z \in \omega^\omega (z \text{ WF und } (\omega, E_z) \models \text{ Extensionalität und} \\ & \exists n \exists m (\pi_{E_z}(m) = x \wedge (\omega, E_z) \models \varphi[n, m])). \end{aligned}$$

Wir verifizieren, dass dieses eine Σ^1_2-Definition von A gibt. Da WF Π^1_1 ist, reicht es zu zeigen, dass die Relationen $(\omega, E_z) \models \varphi[n_1, \dots, n_m]$ und $\pi_E(x) = m$ arithmetisch in E sind. Der Mostowki-Kollaps ist arithmetisch, denn

$$\begin{aligned} \pi_E(m) = k \leftrightarrow & \exists \langle r_0, \dots r_k \rangle, \text{ so dass} \\ & m = r_k \wedge (\omega, E) \models r_0 = \emptyset \wedge \forall i < k (\omega, E) \models r_{i+1} = r_i \cup \{r_i\}). \end{aligned}$$

Dann haben wir für $x \subseteq \omega, \pi_E(m) = x \leftrightarrow \forall n (n E m \leftrightarrow \pi_E(n) = x)$, und eine ähnliche Formel, die arithmetisch in E ist, definiert $\pi_E(m) = x$ für $x \in \omega^\omega$. Daher ist A Σ^1_2 □

Die Untersuchung von L erhielt dann durch Jensen ab Ende der 1960er Jahre einen neuen Aufschwung. Wir werden jetzt einige dieser Ergebnisse vorstellen. Hierzu stellen wir zunächst Ergebnisse aus der 1930er und den 1950er Jahren vor.

Karo.

Definition 6.75. $\diamondsuit_\kappa(E)$ ("Karo") ist die folgende Aussage: Es gibt eine Folge $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E\rangle$, so dass $S_\alpha \subseteq \alpha$ und so dass für alle $X \subseteq \kappa$ gilt:

$$\{\alpha \in E \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

ist stationär.

Wir schreiben $\diamondsuit_\kappa(\kappa)$ einfach als $\diamondsuit_\kappa$. Aussagen wir $\diamondsuit$ werde "kombinatorische Prinzipien" genannt.

Wir möchten nun zeigen, dass in L das Prinzip $\diamondsuit_\kappa(E)$ für jedes reguläre überabzählbare κ und E stationär in κ gilt. Hierzu zunächst ein Lemma:

Lemma 6.76. *Sei κ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl, und sei $\lambda \geq \kappa$ eine Ordinalzahl. Sei $X \subseteq L_\lambda$, $|X| < \kappa$. Dann gibt es ein $N \prec L_\lambda$, so dass $X \subseteq N$, $|N| < \kappa$ und $N \cap \kappa \in \kappa$.*

Beweis: Sei N_0 das $\leq_L$-kleinste $N \prec L_\lambda$ so dass $X \subseteq N$ und wir setzen $\alpha_0 = \sup(N_0 \cap \kappa)$. Da $|N_0| = \max(|X|, \omega) < \kappa$ und κ regulär ist, erhalten wir $\alpha_0 < \kappa$. Nun wählen wir iterativ über n N_{n+1} als das kleinste $N \prec L_\lambda$, so dass $N_n \cup \alpha_n \subseteq N$ und wir setzen $\alpha_{n+1} = \sup(N_{n+1} \cap \kappa)$. Wenn $|N_n| < \kappa$ und $\alpha_n < \kappa$, dann ist $|N_{n+1}| = \max(|N_n|, |\alpha_n|) < \kappa$ und wegen der Regularität von κ ist $\alpha_{n+1} < \kappa$. Nun setzen wir $N = \bigcup_n N_n$. Dann ist $X \subseteq N \prec L_\alpha$ und $N \cap \kappa = \bigcup_n N_n \cap \kappa = \sup \alpha_n =: \alpha$, da $\alpha_{n-1} \subseteq N_n \cap \kappa \subseteq \alpha_n$. Da κ regulär ist. Und $|N| < \kappa$ und $\alpha < \kappa$. Also sind alle Forderungen an N erfüllt. $\square$

Beachten Sie: dieser Beweis des Analogons zu Lemma 6.76 funktioniert auch für andere Strukturen statt L_λ. Aber die Wahl der aufsteigenden ω-Kette, die hier mithilfe der $\leq_L$-Wohlordnung durchgeführt wurde, ist dann womöglich weniger konstruktiv.

Satz 6.77. *Jensen. Sei $V = L$ und sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl. Sei E eine stationäre Teilmenge von κ. Dann gilt $\diamondsuit_\kappa(E)$.*

Beweis: Induktiv über $\alpha \in E$ definieren wir (S_α, C_α) als das $<_L$-kleinste Paar von Teilmenge von α, so dass C_α club in α ist und

$$\forall \gamma(\gamma \in C_\alpha \cap E \to S_\alpha \cap \gamma \neq S_\gamma),$$

wenn so ein Paar existiert, anderenfalls setzen wir $S_\alpha = C_\alpha = \emptyset$. Wir zeigen, dass $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E\rangle$ eine $\diamondsuit_\kappa(E)$-Folge ist.

Annahme: $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E\rangle$ ist keine $\diamondsuit_\kappa(E)$-Folge. Sei (S, C) das $<_L$-kleinste Paar von Teilmengen von κ, so dass C club in κ ist und

$$\forall \gamma(\gamma \in C \cap E \to S \cap \gamma \neq S_\gamma).$$

Die Folge $\langle (S_\alpha, C_\alpha) \mid \alpha \in E\rangle$ ist in L_{κ^+} mit E als Parameter definierbar, denn die gegebene Definition ist absolut für L_{κ^+}. Also ist (S, C) auch definierbar mit E als Parameter in L_{κ^+}. Wir benützen das vorige Lemma, um eine Folge von Substrukuren $N_\nu \prec L_{\kappa^+}$ für $\nu < \kappa$ wie folgt rekursiv zu definieren:

$$\begin{aligned}
N_0 &= \text{das } <_L\text{-kleinste } N \prec L_{\kappa^+}, \text{ so dass } |N| < \kappa \text{ und } N \cap \kappa \in \kappa \text{ und } E \in N,\\
N_{\nu+1} &= \text{das } <_L\text{-kleinste } N \prec L_{\kappa^+}, \text{ so dass } |N| < \kappa \text{ und } N \cap \kappa \subseteq \kappa\\
&\qquad \text{und } N_\nu \cup \{N_\nu\} \in N,\\
N_\lambda &= \bigcup N_\nu \text{ für Limes } \lambda.
\end{aligned}$$

Also ist $|N_\lambda| < \kappa$ und $N_\lambda \cap \kappa \in \kappa$. Nun setzen wir $\alpha_\nu = N_\nu \cap \kappa$. Dann ist $\langle \alpha_\nu \,|\, \nu < \kappa \rangle$ eine normale Folge und die Menge $Z = \{\alpha_\nu \,|\, \nu < \kappa\}$ ist ein club in κ. Dann ist $E \cap Z \cap C \neq \emptyset$. Für $\alpha_\nu \in E \cap Z \cap C$ sei $\pi \colon N_\nu \cong L_\beta$. Hier verwendeteten wir das Kondensationsprinzip 6.72. Dann ist $\pi \restriction L_\nu = \mathrm{id} \restriction L_\nu$ und $\pi(\kappa) = \nu$ und $\pi(E) = E \cap \nu$ und $\pi(\langle (S_\alpha, C_\alpha) \,|\, \alpha \in E \rangle) = \langle (S_\alpha, C_\alpha) \,|\, \alpha \in E \cap \nu) \rangle$. $\pi(S, C) = (S \cap \nu, C \cap \nu)$.

Da $\pi^{-1} \colon L_\beta \prec L_{\kappa^+}$, ist $(S \cap \nu, C \cap \nu)$ das $<_L$-kleinste Paar von Teilmengen von ν, so dass $C \cap \nu$ ein club in ν ist und $\forall \gamma (\gamma \in C \cap \nu \cap S \cap \nu \to S \cap \nu \cap \gamma \neq S_\gamma)$. Daher ist $(S \cap \nu, C \cap \nu) = (S_\nu, C_\nu)$ und also $S \cap \nu = S_\nu$. Aber da $\nu \in C \cap E$, widerspricht dieses der Wahl von (S, C). $\square$

Definition 6.78. Sei κ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl. Ein κ-Souslinbaum ist ein Baum der Höhe κ ohne κ-Antiketten und ohne κ-Äste.

Wenn κ singulär ist, gibt es auch κ^+-Souslinbäume in L. Doch um dies zu zeigen, verwendet man ein weiteres kombinatorisches Prinzip: Square, Box, Quadrat, ist nicht klar, ob das schon in das Deutsche eingebürgert ist.

Definition 6.79. $\square_\kappa(E)$ ist die folgende Aussage:
Es gibt eine Folge $\langle C_\alpha \,|\, \alpha < \kappa^+ \wedge \lim(\alpha) \rangle$ mit folgenden drei Eigenschaften:

(i) C_α ist club in α,

(ii) $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa \to \mathrm{otp}(C_\alpha) < \kappa$.

(iii) wenn $\gamma < \kappa$ und $\gamma \in \lim(C_\alpha)$, dann $\gamma \notin E$ und $C_\gamma = C_\alpha \cap \gamma$.

E taucht in der Definition negativ auf. Diesmal steht $\square_\kappa$ für $\square_\kappa(\emptyset)$. Beachten Sie, dass $\square_\kappa$ über κ^+ spricht.

Satz 6.80. *Sei $V = L$. Dann gilt $\square_\kappa$ für alle unendliche Kardinalzahlen κ.*

10 Seiten Devlin und viel Vorbereitung.

Satz 6.81. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Es gebe ein $E \subseteq \kappa^+$ stationär, so dass $\square_\kappa(E)$ und $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$ gelten. Dann gibt es einen κ^+-Souslinbaum.*

Beweis: Sei E stationär und sei $\langle C_\alpha \,|\, \alpha < \kappa^+ \wedge \lim(\alpha) \rangle$ eine $\square_\kappa(E)$-Folge, und sei $\langle C_\alpha \,|\, \alpha < \kappa^+ \wedge \lim(\alpha) \rangle$ eine $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$-Folge. Wir konstruieren einen κ^+ Souslinbaum rekursiv über die Ebenen, so dass für alle $\alpha < \kappa^+$ $T \restriction \alpha$ ein normaler (α, α^+) Baum ist. Die Elemente von T sind Ordinalzahlen in κ^+ und wir werden $<_T$ bauen, dass $\alpha <_T \beta \to \alpha < \beta$. Wir setzen $T_0 = \{0\}$.

$T \restriction \alpha + 1$ sei definiert. Dann nehmen wir in $T_{\alpha+1}$ so, dass mindestens zwei Nachfolger von jedem Element von T_α enthält.

Nun kommen wir zum Fall $\lim(\alpha)$.

Für jedes $x \in T \restriction \alpha$ werden wir einen α-Ast b^x_α durch $T \restriction \alpha$ wählen. Sei $\langle \gamma_\alpha(\nu) \,|\, \nu < \lambda_\alpha \rangle$ eine monotone Aufzählung von C_α. Für $x \in T \restriction \alpha$ sei $\nu_\alpha(x)$ das kleinste ν, so dass $x \in T \restriction \gamma_\alpha(\nu)$. Wie definieren eine Folge $\langle p^x_\alpha(\nu) \,|\, \nu_\alpha(x) \leq \nu < \lambda_\alpha \rangle$ von Elementen aus $T \restriction \alpha$ wie folgt

$$\begin{array}{rcl}
p^x_\alpha(\nu_\alpha) &=& \text{die kleinste On } y \text{ in } T_{\gamma_\alpha(\nu_\alpha(x))}, \text{ so dass } x <_T y, \\
p^x_\alpha(\alpha+1) &=& \text{das kleinste } y \in T_{\gamma_\alpha(\nu+1)}, \text{ so dass } p^x_\alpha(\nu) <_T y, \\
p^x_\alpha(\eta) &=& \text{das einzige } y \in T_{\gamma_\alpha(\eta)}, \text{ so dass } \forall \nu < \eta (\nu \geq \nu_\alpha(x) \to p^x_\alpha(\nu) <_T y), \\
&& \text{wenn so ein } y \text{ existiert, wenn nicht, sei } p^x_\alpha(\eta) \text{ nicht definiert.}
\end{array}$$

Wenn die obige Konstruktion abbricht, dann bricht die gesamte Konstruktion von T zusammen. Wir nehmen vorerst an, dass dies nicht der Fall ist, später werden wir zeigen, dass dies tatsächlich niemals der Fall ist.

Wir setzen

$$b^x_\alpha = \{y \in T \restriction \alpha \,|\, (\exists \nu < \lambda_\alpha)(y \leq_T p^x_\alpha(\nu))\}.$$

b^x_α ist ein α-Ast durch $T \restriction \alpha$, der x enthält und die Punkte $p^x_\alpha(\nu)$ für $\nu_\alpha(x) \leq \nu < \lambda_\alpha$ enthält. Wir definieren nun T_α.

Falls $\alpha \notin E$, nehmen wir neue Ordinalzahlen aus κ^+ in T_α auf, so dass jedes b^x_α, $x \in T \restriction \alpha$, eine Fortsetzung in T_α hat.

Wenn $\alpha \in E$ und S_α keine Antikette in $T \restriction \alpha$ ist, dann wählen wir $T \restriction \alpha$ wie gerade eben.

Wenn $\alpha \in E$ und S_α eine maximale Antikette in $T \restriction \alpha$ ist, dann nehmen wir neue Ordinalzahlen von κ^+ in T_α, so dass jeder Ast b^x_α für jedes $x \in T \restriction \alpha$ ein Element in T_α hat, das oberhalb eines Elements in S_α liegt. Nun ist die Definition beendet, und wir zeigen, dass T ein κ^+-Souslinbaum ist. Es ist ein κ^+-Baum. Sei A eine Antikette. Wir müssen zeigen, dass $|A| \leq \kappa$.

Sei

$$C = \{\alpha \in \kappa^+ \,|\, T \restriction \alpha \subseteq \alpha \wedge A \cap \alpha \text{ ist eine maximale Antikette in } T \restriction \alpha\}.$$

C ist club in κ^+. So ist $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$ ist eine $\alpha \in C \cap E$, so, dass $A \cap \alpha = S_\alpha$. Insbesondes ist S_α eine maximale Antikette in $T \restriction \alpha$. Aber da $\alpha \in E$ sind daher ist nach unserer Konstruktion jedes Element von T_α (und daher alle höheren Elemente) oberhalb von $S_\alpha = A \cap \alpha$. Also ist $A \cap \alpha$ maximal in T. Also $A = A \cap \alpha$ und daher ist A klein.

Nun müssen wir noch prüfen, dass unsere Konstruktion von T niemals abbrach. Nehmen wir das Gegenteil an. Sei α die kleinste Ordinalzahl, so dass wir nicht alle Äste b^x_α wählen können. Nehmen wir $x \in T \restriction \alpha$, so dass wir b^x_α nicht wählen können.

Also gibt es eine Limesordinalzahl η so, dass $\nu_\alpha(x) < \eta < \lambda_\alpha$ und so dass es keinen Punkt in $T_{\gamma_\alpha(\eta)}$ gibt, der alle Punkte $p^x_\alpha(\nu)$, $\nu_\alpha \leq \nu < \eta$ enthält. Da $\lim(\eta)$, ist $\gamma_\alpha(\eta)$ ein Limes von C_α. Dann ist wegen $\square_\kappa(E)$ und $\gamma_\alpha(\eta) \notin E$,

$$C_{\gamma_\alpha(\eta)} = \gamma_\alpha(\eta) \cap C_\alpha = \{\gamma_\alpha(\nu) \,|\, \nu < \eta\}.$$

Nach dieser letzten Gleichung enthält $T^x_{\gamma_\alpha(\eta)}$ alle Punkte $p^x_\alpha(\nu)$ für $\nu_\alpha(x) \leq \nu < \eta$. Da $\gamma_\alpha \notin E$, hat $b^x_{\gamma_\alpha(\eta)}$ eine Erweiterung in T_α. Doch diese Erweiterung sollte gerade nicht existieren. Widerspruch. $\square$

Lemma 6.82. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und sei $E \subseteq \kappa^+$ stationär. Dann ist $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$ äquivalent zu dem Prinzip $\diamondsuit'_{\kappa^+}(E)$, das besagt, dass es ein Folge $\langle S_\alpha \,|\, \alpha \in E\rangle$ gibt, so dass $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, $|S_\alpha| \leq \kappa$ und dass für alle $X \subseteq \kappa^+$ die Menge $\{\alpha \in E \,|\, X \cap \alpha \in S_\alpha\}$ stationär in κ^+ ist.*

Lemma 6.83. *Gelte CGH. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und sei $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Sei $W \subseteq \kappa^+$ eine stationäre Menge und sei $W = \{\alpha \in \kappa^+ \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$. Dann gilt $\diamondsuit_{\kappa^+}(W)$.*

Gibt es κ-Souslinbäume zu singulären κ?

Sei $\mathrm{sat}(T)$ das kleinste κ, so dass es in T keine Antikette der Mächtigkeit κ gibt.

Lemma 6.84. $\mathrm{sat}(T)$ *ist regulär.*

Beweis: Wenn $\mathrm{sat}(T)$ unendlich ist, dann $\mathrm{sat}(T) \geq \aleph_1$. Für $s \in T$, betrachten wir $T_s = T \upharpoonright \{t \in T \mid t \geq_T s\}$. $s \in T$ heißt stabil, wenn $\mathrm{sat}(T_s) = \mathrm{sat}(T_u)$ für alle $u \geq_T s$. Die Menge der stabilen Elemente ist dicht in T, d.h. über jedem Element gibt es ein $>_T$-größeres stabiles Element.

Sei A eine maximale Antikette in T. Wir zeigen dass $\sup\{\mathrm{sat}(T_s) \mid s \in A\} = \kappa$. Sei $\lambda \in (|A|, \mathrm{sat}(T))$ und sei B eine Antikette, der Mächtigkeit λ, λ regulär. Dann gibt es über einem $a \in A$ λ Elemente in B.

Fall 1: Es gibt ein $a \in A$ mit $\mathrm{sat}(T_a) = \kappa$.

Fall 2: Für alle $a \in A$ $\mathrm{sat}(T_a) < \kappa$. Dann nehmen wir $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ konfinal in κ und bauen die Antiketten der Mächtigkeiten κ_α zusammen über A. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Andreas Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. In James Baumgartner, Donald Martin, and Saharon Shelah, editors, *Axiomatic set theory*, volume 31 of *Contemporary Math.*, pages 31–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[2] Manfred Burghardt. *Mengenlehre.* http://www.math.uni-bonn.de/people/logic. Universität Bonn, 1995.

[3] Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Crelles Journal f. Mathematik*, 77:258–262, 1874.

[4] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten V. *Mathematische Annalen*, 21:545 – 591, 1883.

[5] Georg Cantor. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Mathematica*, 4:381 – 392, 1884.

[6] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten VI. *Mathematische Annalen*, 23:453 – 488, 1884.

[7] Keith Devlin. *Constructibility.* Omega Series. Springer, 1980.

[8] William Easton. Powers of regular cardinals. *Annals of Math. Logic*, 1:39–78, 1970.

[9] H.-D. Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre.* Hochschultaschenbuch, 4 edition, 2003.

[10] Herbert Enderton. *Elements of Set Theory.* Accademic Press, 1977.

[11] Géza Fodor. Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. *Acta Sciencia Math. Szeged*, 17:139–142, 1956.

[12] Kurt Gödel. The consistency of the Axiom of Choice and the General Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24:556–557, 1938.

[13] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik*, 38:173–198, 1938.

[14] Thomas Jech. *The Axiom of Choice.* North Holland, 1973.

[15] Thomas Jech. *Set Theory.* Addison Wesley, 1978.

[16] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite.* Springer, 2 edition, 1998.

[17] Denés König. Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta Litter. Acad. Sci. Hung.*, 3:121 –130, 1927.

[18] Julius König. Zum Kontinuumproblem. *Math. Ann.*, 60:177 –180, 1905.

[19] Kenneth Kunen. *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland, 1980.

[20] Duro Kurepa. Ensembles ordonnés et ramifiés. *Publ. Math. Univ. Belgrade*, 4:1–138, 1935.

[21] Azriel Levy. *Basic Set Theory.* Springer, 1979.

[22] Frank P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 30:264–286, 1930.

[23] H. Rubin and Jean Rubin. *Equivalents of the Axioms of Choice.* North Holland, 1963.

[24] Jack Silver. On the singular cardinal problem. In *Proc. Int. Congr. Math. Vancouver*, volume 35, pages 60–64, 1970.

[25] Ernst Specker. Sur un problème de Sikorski. *Colloq. Math.*, 2:9–12, 1951.

[26] Otmar Spinas. *Mengenlehre.* http://www-computerlabor.math.uni-kiel.de/spinas. Universität Kiel, 2002.

[27] Ernst Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Math. Ann.*, 59:514–516, 1904.

[28] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Math. Ann.*, 65:261–681, 1908.

[29] Martin Ziegler. *Mengenlehre.* http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler. Universität Freiburg, 1996.

[30] Max Zorn. A remark on a method in transfinite algebra. *Bull. Amer. Math. Soc. N.S.*, 41:667–670, 1935.