Elemente der Geometrie
(Lehramt GHR/HR, Gym)

Dr. Theo Overhagen
Fachbereich 6 Mathematik
Universität Siegen

2006

Inhaltsverzeichnis

Inhalt **I**

Literatur **I**

1 Die Axiome der Elementargeometrie **1**
1.1 Das axiomatische Vorgehen 1
1.2 Punkt, Gerade, Ebene, Axiome der Verknüpfung 2
1.3 Das Parallelenaxiom 4
1.4 Anordnungsaxiome 5
1.5 Abstände von Punkten. Winkel 7
1.6 Spiegelungen 10

2 Kongruenzabbildungen - Bewegungen **15**
2.1 Die Gruppe der Bewegungen 15
2.2 Kongruenz von Winkeln und Dreiecken 16
2.3 Die Punktspiegelung 18
2.4 Die Parallelverschiebung 21
2.5 Die Drehung, Eigenschaften des Kreises 23
2.6 Zusammensetzung gleichsinniger Bewegungen, Untergruppen 25
2.7 Die Schubspiegelung 25

3 Längenmessung, Flächeninhalt, Ähnlichkeit **27**
3.1 Längenmessung von Strecken 27
3.2 Flächenbegriff und Inhaltsgleichheit 28
3.3 Strahlensätze, zentrische Streckung, Ähnlichkeit 31

Literatur

[1] Choquet,G.: Neue Elementargeometrie. Fachbuchverlag, Luzern 1969.

[2] Euklid: Die Elemente. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Akad. Verlagsanstalt, Leipzig 1933-1937.

[3] Filler,A.: Euklidische und nichteuklidische Geometrie. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1993.

[4] Hilbert,D.: Grundlagen der Geometrie. Teubner, Stuttgart.

[5] Klotzek,B.: Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1971.

[6] Kunz,E.: Ebene Geometrie. Axiomatische Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Vieweg, Braunschweig 1976.

[7] Mitschka,A., Strehl,R.: Einführung in die Geometrie. Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen in der Ebene. Herder, Freiburg 1975.

[8] Schupp,H.: Elementargeometrie. UTB 669. Schöningh, Paderborn 1977.

1 Die Axiome der Elementargeometrie

1.1 Das axiomatische Vorgehen

Die Geometrie ist der anschauliche Teil der Mathematik, d.h., hier werden Objekte und ihre Beziehungen zueinander untersucht, die uns bildhaft vor Augen stehen und die wir in der Regel auch zeichnerisch (oder plastisch) darstellen. Andererseits können diese zeichnerischen oder plastischen Darstellungen die geometrischen Objekte gar nicht exakt wiedergeben, da man nie eine Gerade auf ein Blatt zeichnen kann, sondern (bei Verwendung eines Bleistifts) höchstens eine Ansammlung von Graphit-Flecken, die innerhalb eines schmalen Streifens liegen, und man kann nie plastisch exakt eine Ebene im Raum darstellen, da jedes dieser Objekte eine gewisse Dicke haben muß. Die geometrischen Objekte sind also eigentlich Abstraktionen und existieren nur in unserem Denken.

Es könnte nun der Fall auftreten, daß zwei Menschen, die sich über eine Gerade unterhalten, zwar denselben Namen benutzen, aber etwas Verschiedenes darunter verstehen. Um also sicher zu sein, daß wir dieselben Objekte meinen, müssen wir sie zweifelsfrei beschreiben, d.h. sie **definieren**.

Nun ist aber die Definition gerade der Grundobjekte in der Mathematik äußerst schwierig, oft sogar unmöglich. Euklid (ca. 365 – 300 v.Chr.) unternahm den Versuch, in seinen um 325 v.Chr. geschriebenen Elementen (unter anderem) die damals bekannte Geometrie als geschlossenes theoretisches System darzustellen durch Erklärung (bzw. **Definition**) der auftretenden Begriffe und Aufstellen von (nicht beweisbaren) Grundaussagen (bzw. **Axiomen**).

Besonders bei den Definitionen tritt das Problem auf, daß man den zu definierenden Begriff auf andere bekannte Begriffe zurückführt. Diese müssen aber auch erst definiert werden, und so kommt man schließlich an einen Punkt, an dem man Begriffe „aus dem Nichts“ definieren müßte. Heute löst man dieses Problem dadurch, daß man solche Grundbegriffe mittels Axiome durch Beziehungen zueinander charakterisiert, und mit Hilfe dieser Grundbegriffe die weiteren definiert.

Im Grunde ist die Auswahl der Eigenschaften, die als Axiome gelten sollen, willkürlich. Allgemein stellt man drei Forderungen:

- Ein gewähltes Axiomensystem **muß widerspruchsfrei** sein, denn unter der Annahme der Richtigkeit der Axiome sollen ja die weiteren Eigenschaften abgeleitet werden, und aus falschen Annahmen kann man nach den Gesetzen der Logik beliebige Folgerungen ziehen. Im allgemeinen zeigt man die Widerspruchsfreiheit, indem man ein Modell, d.h. ein System von Objekten, angibt, das existiert und die Bedingungen des Axiomensystems erfüllt.

- Außerdem **sollen** die Axiome **voneinander unabhängig** sein, d.h. kein Axiom soll aus den anderen logisch herleitbar sein, denn sonst könnte man es im Axiomensystem wegfallen lassen.

- Natürlich bleibt die Geometrie mit der Anschauung verknüpft, und man möchte ein Axiomensystem aufstellen, das zusammen mit den abgeleiteten Sätzen alle interessierenden Aussagen aus der Anschauung widerspiegelt. Ein Axiomensystem sollte daher hinreichend viele Begriffe und Aussagen festlegen, es sollte **vollständig** sein.

Das erste logisch vollständig exakte Axiomensystem für die euklidische Geometrie, die am besten unserer Anschauung entspricht, stellte David Hilbert (1862 – 1943) im Jahr 1899 auf. Janos Bolyai

(1802 – 1860), Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 – 1856) fanden (unabhängig voneinander) heraus, daß Axiomensysteme ohne Parallelenaxiom andere Modelle von Geometrien begründen, wobei unter diesen nichteuklidischen Geometrien besonders die sphärische (Kugel-)Geometrie zur Beschreibung der Verhältnisse auf der Erdoberfläche und die hyperbolische Geometrie für die Relativitätstheorie von Bedeutung sind.

Hier wird in der Vorlesung ein Axiomensystem für die euklidische Geometrie der Ebene angegeben. Dabei wird nicht Wert darauf gelegt, daß es minimal ist, sondern daß die Axiome unmittelbar einsichtige geometrische Grundtatsachen beschreiben bzw. am Gebrauch der Zeichengeräte orientiert sind.

Aus den Axiomen werden durch logische Schlüsse weitere Aussagen hergeleitet, die man **Sätze** nennt, und die Gesamtheit der Axiome, der damit verbundenen Begriffe und der Sätze wird eine mathematische Theorie genannt.

Diese Systematik, die in der Mathematik im klassischen Griechenland entwickelt wurde, ermöglicht, zwischen Annahmen, deren Gültigkeit nicht bewiesen wird, und den daraus abgeleiteten Folgerungen zu unterscheiden. Daher hatten andere Wissenschaften das Bestreben, analog zur Geometrie vorzugehen, und zwar nicht nur die Naturwissenschaften, sondern auch z.B. die Philosophie. Descartes (1596–1650) studierte die Geometrie, um in Theologie und Philosophie eine exakte Vorgehensweise einzuführen, und die Begründung der Analytischen Geometrie durch die Einführung von Koordinaten war quasi ein Nebenergebnis.

1.2 Punkt, Gerade, Ebene, Axiome der Verknüpfung

Wir betrachten ein Zeichenblatt nach allen Seiten beliebig ausgedehnt und bezeichnen es als **Ebene**. Mit einem Stift kann man auf dieser Ebene **Punkte** zeichnen. Üblicherweise betrachtet man nun die Ebene als Menge aller solchen Punkte. Will man ausdrücken, daß ein Punkt A in der Ebene Γ liegt, dann schreibt man $A \in \Gamma$.

Mit einem Lineal kann man gerade Linien zeichnen. (Man kann solche Linien auch durch Falten eines Zeichenblattes erzeugen.) Die Punkte auf solchen Linien bilden Teilmengen der Ebene, und wir wollen sie **Geraden** nennen. Natürlich sind nicht alle Teilmengen der Ebene Geraden. Wir wollen nun die Punkte und Geraden durch Axiome charakterisieren:

Verknüpfungsaxiome 1.2.1
Gegeben sei eine Menge Γ von Punkten, die Ebene genannt wird, und gewisse Teilmengen von Γ, die Geraden heißen sollen, und für die folgende "Verknüpfungsaxiome" gelten sollen:

(V1) *Zu je zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in \Gamma$ gibt es stets genau eine Gerade g, die diese Punkte enthält.*

(V2) *Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.*

(V3) *Es gibt mindestens drei verschiedene Punkte, die nicht in ein und derselben Geraden enthalten sind.*

Statt $P \in g$ sagt man auch, „P liegt auf g“ oder „g geht durch P“ oder „P inzidiert mit g“. Daher heißen die Axiome auch **Inzidenzaxiome**.

Sind g und h zwei Geraden, dann sagt man für $g \cap h = \{P\}$, daß sich „g und h im Punkt P schneiden“ oder „P ist gemeinsamer Punkt von g und h“.
Drei Punkte, die das Axiom (V3) erfüllen, heißen “**nicht kollinear**“ und Punkte, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, heißen „**kollinear**“.

In dem bisher gewählten Axiomensystem müssen Ebene, Gerade, Punkt noch nicht die gewohnte anschauliche Bedeutung haben. Man kann sogar recht ungewohnte Modelle angeben, die die Verknüpfungsaxiome erfüllen, und damit deren Widerspruchsfreiheit zeigen. Nach Axiom (V3) muß eine Ebene mindestens 3 Punkte enthalten, aber nicht mehr, also schon gar nicht unendlich viele Punkte. Es müssen auch nicht unendlich viele Geraden existieren, und Geraden können Mengen mit endlich vielen Punkten sein.

Beispiel 1.2.2
Betrachtet man z.B. eine Menge Γ aus drei verschiedenen Punkten P, Q, R als Ebene und als Geraden die 2-elementigen Teilmengen $\{P, Q\}, \{P, R\}, \{Q, R\}$, dann sind alle Verknüpfungsaxiome erfüllt.
Es gibt kein Modell, in dem die Inzidenzaxiome gelten, das weniger Punkte oder Geraden enthält.

Man kann leicht Modelle konstruieren, in denen genau zwei der drei Verknüpfungsaxiome gelten, und damit die Unabhängigkeit der Axiome zeigen:

Beispiel 1.2.3
Sind P, Q zwei verschiedene Punkte, $\Gamma = \{P, Q\}$, $g = \Gamma$ die einzige Gerade, dann sind (V1) und (V2) erfüllt, aber nicht (V3).

Aus den Verknüpfungsaxiomen folgen sofort folgende Sätze:

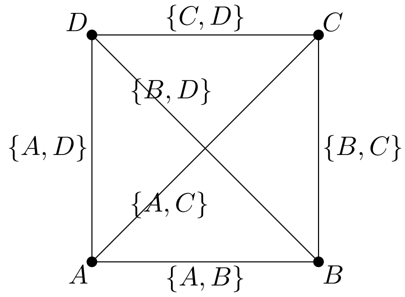
Satz 1.2.4 *Zwei verschiedene Geraden der Ebene haben genau einen oder keinen Punkt gemeinsam.*

Satz 1.2.5 *Es existieren (mindestens) drei paarweise verschiedene Geraden.*

Beispiele 1.2.6

(1) Für das Modell mit $\Gamma = \{P, Q, R, S\}$ als Ebene und als Geraden die 2-elementigen Teilmengen $\{P, Q\}, \{P, R\}, \{P, S\}, \{Q, R\}, \{Q, S\}, \{R, S\}$, dann sind alle Verknüpfungsaxiome erfüllt.

Man stellt ein solches Modell oft als Skizze dar, in der die Punkte des Modells als Punkte der Zeichenebene und die Geraden z.B. als Verbindungsstrecken der entsprechenden Punkte dargestellt werden.



(2) Ist $\Gamma := \mathbb{R}^2 := \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ die Ebene (Zeichenebene, versehen mit einem Koordinatensystem) und für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$ die Menge $\{(x, y);\ ax + by + c = 0\}$ eine Gerade. Dann sind in diesem Modell alle Verknüpfungsaxiome erfüllt.

(3) Betrachtet als Punkte von Γ alle Punkte auf der Oberfläche einer festen Kugel, und als Geraden die Großkreise (d.h. die Kreise auf der Kugeloberfläche, deren Radius mit dem Kugelradius übereinstimmt), dann schneiden sich je zwei verschiedene Großkreise in genau zwei verschiedenen Punkten, d.h. das Axiom (V1) ist nicht erfüllt.
Betrachtet man aber als Punkte von Γ alle Paare von diametralen Punkten auf der Kugeloberfläche, also der Punkte, die auf einem gemeinsamen Durchmesser liegen, und als Geraden alle solchen Punktepaare, die auf einem gemeinsamen Großkreis liegen, dann sind alle Verknüpfungsaxiome erfüllt.

1.3 Das Parallelenaxiom

Bei einer Ebene mit 4 Punkten P, Q, R, S und Geraden $\{P, Q\}$, $\{P, R\}$, $\{P, S\}$, $\{Q, R\}$, $\{Q, S\}$, $\{R, S\}$ gibt es Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben.

Definition 1.3.1 *Zwei Geraden g, h der Ebene heißen* **parallel***, wenn $g \cap h = \emptyset$ ($\emptyset$ bedeute die "leere Menge").*

Parallelität ist natürlich eine symmetrische Relation auf der Menge der Geraden.

In der gewohnten Zeichenebene gibt es zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb g eine Parallele zu g durch P. Das ist für unser Modell der Ebene mit 3 Punkten nicht erfüllt, da sich dort alle Geraden schneiden. Bei einem entsprechenden Modell einer Ebene mit 5 Punkten P, Q, R, S, T gibt es zu $\overline{PQ}$ sogar zwei parallele Geraden durch R, nämlich RS und RT.

Wir legen als zusätzliches Axiom fest:

Parallelenaxiom 1.3.2

(Pa) *Ist g eine beliebige Gerade, P ein beliebiger Punkt der Ebene mit $P \notin g$, dann gibt es genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \emptyset$.*

Wie in Abschnitt 1.1 ausgeführt, haben Bolyai, Gauß und Lobatschewski erst ca 1830 die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den anderen euklidischen Axiomen gezeigt. Will man verstärkt nichteuklidische Geometrien untersuchen, dann ist es sinnvoll, das Parallelenaxiom an das Ende der Liste der Axiomen zu setzen. Hier soll mehr das Augenmerk auf die euklidische Geometrie gerichtet werden. Daher wird das Parallelenaxiom schon hier aufgeführt.

Es ergibt sich folgender Satz, wobei Aussage (a) der Transitivität der Äquivalenzrelation aus (b) entspricht.

Satz 1.3.3 *(a) Sind g, h, k drei Geraden mit $g \cap h = \{P\}$, $h \cap k = \emptyset$, dann schneidet g die Gerade k in genau einem Punkt.*

(b) Die Relation „parallel oder gleich“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden der Ebene.

1.4 Anordnungsaxiome

Liegen auf einer Geraden, wie wir sie aus der Anschauung kennen, zwei Punkte P und Q, und zieht man diese Gerade mit einem Stift nach, dann trifft man zuerst auf P und dann auf Q oder umgekehrt. Da dies für ein beliebiges Paar von Punkten gilt, sind die Punkte auf einer Geraden vollständig und streng geordnet:

Definition 1.4.1 *Sei g eine feste Gerade. Eine Relation „$\prec$“ auf der Menge der Punkte von g heißt* **lineare strenge Ordnungsrelation***, wenn für je drei Punkte $P, Q, R \in g$ gilt:*

(a) Es gilt genau einer der drei Fälle $P \prec Q$ oder $Q \prec P$ oder $P = Q$. *(Linearität)*

(b) Gilt $P \prec Q$, dann folgt $Q \not\prec P$. *(Asymmetrie)*

(c) Gilt $P \prec Q$ und $Q \prec R$, dann folgt $P \prec R$. *(Transitivität)*

Natürlich gibt es bei einer Geraden unserer Anschauung mehr als zwei Punkte auf jeder Geraden, und zwar sowohl vor, zwischen als auch hinter den beiden festgelegten Punkten. Andererseits zeigt unser Modell aus Beispiel 1.2.2, daß dies nicht aus den Verknüpfungsaxiomen folgen muß. Daher legen wir als weitere Axiome fest:

Anordnungsaxiome 1.4.2

(A1) *Die Menge der Punkte jeder Geraden ist streng linear geordnet.*

(A2) *Sind P und Q zwei verschiedene Punkte der Geraden g und gilt $P \prec Q$, dann gibt es mindestens drei weitere Punkte $R, S, T \in g$ mit $R \prec P \prec S \prec Q \prec T$.*

Für Punkte und Geraden in einer Ebene, die das Axiomensystem (V1)–(V3), (Pa), (A1)–(A2) erfüllen, lassen sich nun weitere Folgerungen herleiten:

Satz 1.4.3 *Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.*

Eine Ebene enthält nach (V3) mindestens drei (nicht kollineare) Punkte. Durch je zwei von diesen geht eine Gerade, d.h. die Ebene enthält auch mindestens drei Geraden. Aus dem eben gezeigten Satz folgt sogar:

Satz 1.4.4 *Die Ebene enthält unendlich viele Geraden.*

Wir wollen im folgenden die (eindeutig bestimmte) Gerade durch die beiden (verschiedenen) Punkte A und B mit AB bezeichnen. Mit der nächsten Definition kennzeichnen wir besondere Teilmengen einer Geraden:

Definition 1.4.5 *Seien A, B zwei verschiedene Punkte der Ebene Γ mit $A \prec B$, $g = AB$ die Gerade durch A und B.*

(a) Die Punktmenge $\{X \in g | A \prec X \prec B$ oder $A = X$ oder $X = B\}$ heißt **Strecke** *(oder Verbindungsstrecke von A und B), A und B heißen* **Endpunkte** *der Strecke. Bezeichnung: $\overline{AB}$.*

(b) Die Punktmengen

$$g_{A\rightarrow} := \{X \in g;\ A = X \text{ oder } A \prec X\}$$

bzw.

$$g_{\leftarrow A} := \{X \in g;\ A = X \text{ oder } X \prec A\}$$

heißen **Halbgerade** *oder* **Strahl** *mit* **Anfang** *A.*

Bemerkung 1.4.6
Kehrt man die Orientierung auf g um, dann folgt sofort $\overline{AB} = \overline{BA}$. Weiter setzen wir $\overline{AA} := \{A\}$.

Analog zu Satz 1.4.3 gilt

Satz 1.4.7 *(a) Jede Strecke $\overline{AB}$ mit $A \neq B$ enthält unendlich viele Punkte.*

(b) Jede Halbgerade enthält unendlich viele Punkte.

Den Namen „Halbgerade" rechtfertigt

Satz 1.4.8 *Ist g eine Gerade, $A \in g$ ein beliebiger Punkt der Geraden. Dann gilt $g = g_{\leftarrow A} \cup g_{A\rightarrow}$ und $g_{\leftarrow A} \cap g_{A\rightarrow} = \{A\}$.*

Nach unserer Anschauung zerlegt jede Gerade die Ebene in zwei verschiedene Teile. Wir wollen diesen Sachverhalt mit unseren hier definierten Begriffen beschreiben:

Definition 1.4.9 *Seien g eine Gerade, A, B zwei Punkte in der Ebene mit $A \notin g$, $B \notin g$. Man sagt,* **A und B liegen auf derselben Seite von g***, wenn $\overline{AB} \cap g = \emptyset$.*

Sei A ein fester Punkt und g eine Gerade mit $A \notin g$. Sind $B_1, B_2, B_3, \ldots \notin g$ weitere von A verschiedene Punkte und liegen alle Punktepaare (A, B_k), $k = 1, 2, ...$, auf derselben Seite von g, dann sollten nach unserer Anschauung auch alle Punkte $B_1, B_2, ...$ auf derselben Seite von g liegen, d.h. es sollte z.B. $\overline{B_1B_2} \cap g = \emptyset$ gelten. Wir werden sehen, daß dies gleichbedeutend dazu ist, daß jede Gerade, die eine Seite eines Dreiecks schneidet, mindestens eine der anderen beiden Seiten schneidet. Um dies zu sichern, reicht unser Axiomensystem aber nicht aus

Beispiel 1.4.10
Wir betrachten unser (nach allen Seiten ausgedehntes) Zeichenblatt mit einem kartesischen Koordinatensystem, und betrachten als Ebene Γ die Menge aller Punkte (x, y), für die es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ganze Zahlen $x^*, y^* \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x = x^* \cdot 2^{-k}$, $y = y^* \cdot 2^{-k}$.
Zum Beispiel ist $(\frac{3}{128}, -\frac{7}{32})$ ein Punkt der Ebene, nicht aber $(\frac{1}{3}, \frac{1}{32})$ bzw. $(\frac{3}{128}, \frac{1}{7})$.
Die Geraden seien die Durchschnitte der Geraden der Zeichenebene, die mindestens zwei Punkte von Γ enthalten, mit Γ.
Dann sind die Verknüpfungsaxiome nach Definition der Geraden erfüllt. Die strenge lineare Ordnung auf den gewöhnlichen Geraden des Zeichenblattes überträgt sich auf unsere Geraden in Γ, d.h. (A1) ist erfüllt.
Ist g eine Gerade von Γ mit Punkten $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \Gamma$, dann liegt der Mittelpunkt $S = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ der gewöhnlichen Strecke $\overline{AB}$ des Zeichenblattes in Γ, also auch auf g. Dasselbe

gilt für $R = (2x_1 - x_2, 2y_1 - y_2)$ und $T = (2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1)$. Gilt in der gewöhnlichen Zeichenebene $A \prec B$, dann folgt außerdem $R \prec A \prec S \prec B \prec T$, also das Axiom (A2).
Wir betrachten nun die Gerade $g = \{(x, y) \in \Gamma \,|\, y = -3x + 3\}$ und die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 4)$. Dann gilt $A, B, C \in \Gamma$ und $A, B, C \notin g$. g trifft die Strecke $\overline{AB}$ in $D = (1, 0)$. Die Gerade g^* der Zeichenebene, die g entspricht, trifft die Gerade BC der Zeichenebene in $(5, -12)$, die Strecke $\overline{BC}$ also auch in der Zeichenebene nicht, und damit nicht in Γ, d.h. $g \cap \overline{BC} = \emptyset$, und g trifft die Strecke $\overline{AC}$ der Zeichenebene in $E = (\frac{3}{7}, \frac{12}{7})$, aber $E \notin \Gamma$, d.h. $g \cap \overline{AC} = \emptyset$.

Wir müssen daher ein weiteres Axiom, das „Axiom von Pasch (1843–1930)“, voraussetzen:

Axiom von Pasch 1.4.11

(A3) *Seien g eine Gerade der Ebene, A, B, C drei verschiedene Punkte der Ebene außerhalb g. Schneidet g eine der drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$, dann noch eine weitere.*

Bemerkung 1.4.12
Eine Gerade g kann ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $A, B, C \notin g$ nicht in drei oder mehr Punkten der Dreiecksseiten schneiden, es gibt also nur 2 oder keinen Schnittpunkt.

Damit folgt

Satz 1.4.13 *Sei g eine beliebige Gerade. Durch „...liegt auf derselben Seite von g wie ...“ wird auf $\Gamma \setminus g$ eine Äquivalenzrelation definiert.*

Analog zur Definition 1.4.5 (b) legt man fest:

Definition 1.4.14 *Sei g eine Gerade der Ebene Γ, $A \notin g$ ein Punkt außerhalb g. Dann heißen die Punktmengen*

$$H^+ := \{X \in \Gamma\,;\ X \text{ liegt auf derselben Seite von } g \text{ wie } A\}$$

bzw.

$$H^- := \{X \in \Gamma\,;\ X \text{ liegt nicht auf derselben Seite von } g \text{ wie } A\}$$

offene Halbebenen. *$H^+ \cup g$ bzw. $H^- \cup g$ heißen* **abgeschlossene Halbebenen**.

Damit gilt:

Satz 1.4.15 *Jede Gerade zerlegt die Ebene in zwei offene Halbebenen und die Gerade selbst.*

1.5 Abstände von Punkten. Winkel

Wir wollen in der Ebene die ”Entfernung” zwischen zwei Punkten bestimmen. Dazu führt man in der Mathematik üblicherweise eine **Abstandsfunktion** oder **Metrik** ein. Die grundlegenden Eigenschaften gibt folgende

Definition 1.5.1 *Sei M eine beliebige, nichtleere Menge. Eine Funktion $f : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt* **Metrik** *auf M, wenn für alle $X, Y, Z \in M$ gilt:*

(a) $f(X,Y) \geq 0$.

(b) $f(X,Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = Y$.

(c) $f(X,Y) = f(Y,X)$. *(Symmetrie)*

(d) $f(X,Y) \leq f(X,Z) + f(Z,Y)$. *(Dreiecksungleichung)*

Diese Definition legt nur die unbedingt notwendigen Bedingungen fest, die eine Funktion erfüllen muß, um als Abstandsfunktion zu dienen. Sie ermöglicht daher viel Spielraum für sehr unterschiedliche Formen der Messung.

Beispiele 1.5.2: Wir betrachten die gewöhnliche Zeichenebene.

(1) Ist jeder Punkt beschrieben durch seine Koordinaten (x, y) bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, dann wird durch

$$f\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

eine Metrik definiert. Sie heißt „euklidische Metrik“.

(2) Ist jeder Punkt beschrieben durch seine Koordinaten (x, y) bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, dann wird durch

$$f\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

eine Metrik definiert. Sie heißt „Maximum–Metrik“.

(3) Durch

$$f(P,Q) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad P \neq Q \\ 0 & \text{für} \quad P = Q \end{cases}$$

wird eine Metrik definiert, die mißt, ob zwei Punkte verschieden sind oder nicht. Sie heißt „diskrete Metrik“.

Um unser gewünschtes geometrisches Modell der Zeichenebene ausreichend zu beschreiben und unerwünschte Abstandsmessungen auszuschließen, müssen wir mit weiteren Axiomen eine bestimmte Metrik mit speziellen Eigenschaften festlegen. Wir erweitern unser Axiomensystem:

Abstandsaxiome 1.5.3

(D1) *Je zwei beliebigen Punkten $A, B \in \Gamma$ wird eindeutig eine nichtnegative reelle Zahl $f(A,B)$ zugeordnet mit den Eigenschaften:*

(a) Für alle $A \in \Gamma$ gilt $f(A,A) = 0$.

(b) Für alle $A, B \in \Gamma$ gilt $f(A,B) = f(B,A)$.

(c) Für alle $A, B, C \in \Gamma$ mit $B \in \overline{AC}$ gilt $f(A,B) + f(B,C) = f(A,C)$.

(d) Für alle $A, B, C \in \Gamma$ mit $B \notin \overline{AC}$ gilt $f(A,B) + f(B,C) > f(A,C)$.

$f(A,B)$ heißt **Entfernung** *zwischen den beiden Punkten A und B oder* **Länge** *der Strecke $\overline{AB}$. Bezeichnung: $|\overline{AB}|$.*

(D2) *Sei $d \geq 0$ eine beliebige reelle Zahl, $g_{A\rightarrow}$ eine beliebige Halbgerade. Dann gibt es genau einen Punkt P auf der Halbgeraden mit $|\overline{AP}| = d$.*

Aus den Festlegungen von Axiom (D1) (und (D2)) folgt, daß $|\overline{AB}|$ eine Metrik auf der Ebene ist, denn es gelten alle Forderungen aus Definition 1.5.1.

Beispiele 1.5.4:

1. Die diskrete Metrik aus Beispiel 1.5.2 (3) genügt weder Axiom (D1)(c) noch (D2).
2. Die Maximum-Metrik aus Beispiel 1.5.2 (2) genügt Axiom (D2), aber nicht Axiom (D1)(d). Sei nämlich Γ der zweidimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $A = (0,0)$, $C = (2,1)$. Für beliebiges x mit $0 \leq x \leq 1$ und den Punkt $B_x = (1, x)$ gilt $d(A, B_x) = d(B_x, C) = 1$ und $d(A, C) = 2$.
3. Die Metrik aus Beispiel 1.5.2 (1) genügt Axiom (D1) und (D2).

Definition 1.5.5 *Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ heißen* **kongruent**, *wenn $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$.*

Satz 1.5.6 *(a) Die Streckenkongruenz aus Definition 1.5.5 ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strecken in der Ebene.*

(b) Sind g, h Geraden in der Ebene, A, B, C Punkte von g mit $B \in \overline{AC}$, A', B', C' Punkte von h mit $B' \in \overline{A'C'}$ und gilt $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ und $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$, dann gilt auch $|\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|$.

(c) Sind g, h Geraden in der Ebene, A, B, C Punkte von g mit $B \in \overline{AC}$, A', B', C' Punkte von h mit $B' \in \overline{A'C'}$ und gilt $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ und $|\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|$, dann gilt auch $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$.

(d) Es seien g, h Geraden in der Ebene, A, B, C Punkte von g mit $B, C \in g_{A\rightarrow}$, A', B', C' Punkte von h mit $B', C' \in h_{A'\rightarrow}$ und es gelte $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ und $|\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|$. Ist $B \in \overline{AC}$, dann auch $B' \in \overline{A'C'}$, d.h. die Streckenkongruenz erhält die Anordnung der Punkte auf den Geraden.

Betrachtet man alle Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt A einen vorgegebenen Abstand haben, dann kommt man zu

Definition 1.5.7 *Sei A ein Punkt der Ebene, $r > 0$ eine reelle Zahl. $\{X \in \Gamma\,;\ |\overline{XA}| = r\}$ heißt* **Kreis** *mit* **Mittelpunkt** *A und* **Radius** *r.*

Üblicherweise betrachtet man auch „Kreise“ mit Radius 0, die wegen Definition 1.5.1 (b) nur aus dem Mittelpunkt bestehen.

So wie man Geraden (und damit Strecken und Halbgeraden) mit dem elementaren Hilfsmittel *Lineal* zeichnen kann, können Kreise mit Hilfe einer Schnur fester Länge oder mit Hilfe eines *Zirkels* gezeichnet werden. Ein spezieller Punkt einer Strecke $\overline{AB}$, der mit ausschließlicher Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, ist der Mittelpunkt der Strecke:

Definition 1.5.8 *Sei $\overline{AB}$ eine beliebige Strecke der Ebene Γ. $M \in \overline{AB}$ heißt* **Mittelpunkt der Strecke** *$\overline{AB}$, wenn $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$.*

Satz 1.5.9 *Jede Strecke der Ebene hat genau einen Mittelpunkt.*

Mit dem Begriff *Winkel* in der Ebene werden anschaulich verschiedene Vorstellungen verbunden. Gemeinsam ist, daß immer zwei Halbgeraden mit demselben Anfangspunkt beteiligt sind. Man kann aber unter dem Winkel zwischen diesen Halbgeraden eine der beiden aus der Ebene ausgeschnittenen *Flächen* verstehen oder jeweils nur den Rand der Flächen.

Definition 1.5.10

(a) *Ein Paar von Strahlen $g_{A\rightarrow}$ und $h_{A\rightarrow}$ mit gemeinsamem Anfangspunkt A heißt* **Winkel** *mit* **Scheitel** *A und den beiden* **Schenkeln** *$g_{A\rightarrow}$ und $h_{A\rightarrow}$. Bezeichnung: $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$.*

(b) *Für $g_{A\rightarrow} = h_{A\rightarrow}$ heißt $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$* **Nullwinkel** *(bzw.* **Vollwinkel***).*

(c) *Sind $g_{A\rightarrow}$ und $h_{A\rightarrow}$ verschiedene Halbgeraden einer Geraden, d.h. $g_{A\rightarrow} = h_{\leftarrow A}$, dann heißt $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$* **gestreckter Winkel***.*

(d) *Der Winkel $\sphericalangle(g_{\leftarrow A}, h_{\leftarrow A})$ heißt* **Scheitelwinkel** *von $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$, die Winkel $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{\leftarrow A})$ und $\sphericalangle(g_{\leftarrow A}, h_{A\rightarrow})$* **Nebenwinkel** *von $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$.*

Liegt $G \neq A$ auf $g_{A\rightarrow}$ und $H \neq A$ auf $h_{A\rightarrow}$, dann beschreibt man den Winkel auch durch $\sphericalangle(GAH)$.

Ist H_g^+ die offene Halbebene bezüglich g, die $h_{A\rightarrow} \setminus \{A\}$ enthält, und H_h^+ die offene Halbebene bezüglich h, die $g_{A\rightarrow} \setminus \{A\}$ enthält, dann heißt $H_g^+ \cap H_h^+$ das **Innere** des Winkels $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$.

Wir haben einen Winkel als Paar von Halbgeraden mit gleichem Anfangspunkt bzw. als Rand der ausgeschnittenen Fläche definiert. Schon aus der Anschauung wird klar, daß es zu einem Winkel zwei verschiedene ausgeschnittene Flächen (Winkelfelder) gibt, die sog. *Komplementärwinkelfelder*. Wir beschränken uns auf Winkelfelder, die Teilmengen von abgeschlossenen Halbebenen sind.

Unterscheidet man bei zwei Halbgeraden $g_{A\rightarrow}$ und $h_{A\rightarrow}$ die beiden Paare $(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$ und $(h_{A\rightarrow}, g_{A\rightarrow})$, dann nennt man die zugehörigen Winkel **orientierte** oder **gerichtete Winkel**.

1.6 Spiegelungen

Nur mit Hilfe der bisher festgelegten Axiome können viele wichtige Aussagen der ebenen euklidischen Geometrie nicht hergeleitet werden wie z.B. viele bekannte Sätze der Schulgeometrie. Das liegt daran, daß wir den Begriff der Kongruenz (außer bei Strecken) noch nicht zur Verfügung haben.

Eng verknüpft mit dem Begriff der Kongruenz sind die Bewegungen. Das sind spezielle Abbildungen von Γ auf Γ, die Abstände von Punkten unverändert lassen. Im nächsten Kapitel wird hergeleitet, welche Arten von Bewegungen es gibt, welche Eigenschaften diese Abbildungen haben und welche speziellen geometrischen Aussagen sich daraus ergeben.

Hier betrachten wir zunächst Geradenspiegelungen.

Ein auf der Zeichenebene Γ senkrecht stehender ebener Spiegel gibt recht gut wieder, was man in der Geometrie unter einer *Geradenspiegelung* versteht. Ohne das Hilfsmittel der spiegelnden Ebene kann man die entstehende Abbildung von Γ auf sich folgendermaßen beschreiben:

Gegeben ist eine feste Gerade g der Ebene. Jedem Punkt P der Ebene wird ein Punkt P' der Ebene so zugeordnet, daß die Strecke PP' die Gerade g in einem Punkt M schneidet, M der Mittelpunkt der Strecke PP' ist, und g und $\overline{PP'}$ rechtwinklig sind.

Eine andere Möglichkeit, eine Spiegelung anschaulich darzustellen, ist, die beiden Halbebenen jeweils um die Gerade g zu klappen. Eine beliebige Urbildfigur wird zusammen mit der Bildfigur zu einer *achsensymmetrischen* Figur, g heißt daher auch *Symmetrieachse.*

Wir definieren nun Geradenspiegelungen ohne Zuhilfenahme der Anschauung mit Hilfe unserer bisher festgelegten Axiome:

Definition 1.6.1 *Seien g eine Gerade der Ebene, A und B Punkte der Ebene mit $A, B \in g$, $A \neq B$. Ist $P \notin g$, $P' \neq P$ mit $|AP| = |AP'|$ und $|BP| = |BP'|$, dann heißt P'* **Spiegelpunkt** *von P. $P \in g$ heißt Spiegelbild von sich.*

Bemerkungen 1.6.2:

1. Da das Bild von P sowohl von g als auch von den beiden fest gewählten Punkten A und B abhängen kann, müßte man eigentlich „P' Spiegelbild von P bezüglich g, A und B“ nennen. Im folgenden wird gezeigt, daß für jede Wahl von $A, B \in g$ (mit $A \neq B$) sich derselbe Spiegelpunkt, d.h. insgesamt dieselbe Abbildung ergibt.
2. Ist $P \in g$, dann gilt für $P' \in \Gamma$ nach (D1) und (D2)
$$|AP| = |AP'| \quad \text{und} \quad |BP| = |BP'| \qquad \Longleftrightarrow \qquad P' \in g.$$
3. Die vorher aufgeführten anschaulichen Beschreibungen sind ihrem Wesen nach räumliche Darstellungen. Eine entsprechende Darstellung nur mit Hilfe der abzubildenden Ebene geht nicht, da sich bei einer Geradenspiegelung der *Umlaufsinn* ändert: Ein Dreieck in der Ebene mit Ecken A, B, C gegen den Uhrzeigersinn geht über in ein Dreieck mit entsprechenden Ecken im Uhrzeigersinn.
4. Bei allen hier betrachteten Abbildungen der Ebene interessiert uns nur, welche Bildpunkte den Urbildpunkten zugeordnet werden. Welche Zwischenstationen Punkte bei der Abbildung einnehmen, ist (im Gegensatz zu einer physikalischen Deutung einer Bewegung) unwichtig. Außerdem wird jeder Punkt der Ebene abgebildet, auch wenn charakteristische Eigenschaften einer Bewegung in der Regel mit Hilfe der Abbildung spezieller Teilmengen der Ebene veranschaulicht werden.

Für unsere durch das bisher festgelegte Axiomensystem festgelegte Ebene ist nicht gewährleistet, ob jeder Punkt P überhaupt ein Spiegelbild hat. Es könnte auch passieren, daß ein Punkt mehrere verschiedene Spiegelbilder besitzt, und damit durch die Vorschrift aus Definition 1.6.1 keine Abbildung definiert ist, da die Eindeutigkeit verletzt ist.

Betrachtet man zwei beliebige verschiedene Punkte auf einem Zeichenblatt, dann kann man das Blatt so falten, daß einer der Punkte auf den anderen fällt. Es gibt also eine entsprechende Spiegelgerade. Auch das folgt nicht allgemein aus den bisher aufgestellten Axiomen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der Zusammenhang der Abbildung und der Abstände von zwei Urbildpunkten und den zugehörigen Bildpunkten.

Daher erweitern wir das Axiomensystem:

Spiegelungsaxiome 1.6.3

(S1) *Sei g eine Gerade in der Ebene (und $A, B \in g$, $A \neq B$). Dann gibt es zu jedem Punkt der Ebene genau ein Spiegelbild (bezüglich g, A, B).*

(S2) *Zu je zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in \Gamma$ gibt es stets genau eine Gerade g (und $A, B \in g$, $A \neq B$), so daß Q Spiegelbild von P (bezüglich g, A, B) ist.*

(S3) *Ist g eine beliebige Gerade (mit $A, B \in g$, $A \neq B$), und sind $P, Q \in \Gamma$ zwei beliebige Punkte mit Spiegelpunkten P' bzw. Q' (bezüglich g, A, B), dann gilt $|\overline{P'Q'}| = |\overline{PQ}|$.*

Damit erhält man aus der punktweisen Vorschrift von Definition 1.6.1 eine Abbildung der Ebene $\Gamma \to \Gamma$.

Definition 1.6.4 *Seien g eine Gerade in der Ebene Γ, $A, B \in g$ mit $A \neq B$. Die Abbildung $s_g : \Gamma \to \Gamma$, die jedem Punkt der Ebene sein Spiegelbild wie in Definition 1.6.1 zuordnet, heißt* **Spiegelung** *an der Geraden g. g heißt* **Spiegelachse** *oder* **Symmetrieachse***.*

Axiom (S1) sichert bei gegebener Spiegelachse zu jedem beliebigen Punkt $P \in \Gamma$ die Existenz genau eines Spiegelpunktes bzw. die Existenz der Spiegelung als Abbildung. (S2) legt fest, daß umgekehrt zu einem vorgegebenen Paar von Punkten $P, Q \in \Gamma$ es immer genau eine Symmetrieachse gibt bzw. eine Spiegelung, so daß Q Spiegelpunkt von P ist, und Axiom (S3), daß Spiegelungen verträglich mit der Abstandsmessung von Punkten sind.

Satz 1.6.5 *Sei g eine Gerade, s_g die zugehörige Spiegelung.*

(a) s_g ist injektiv, d.h. für alle $P, Q \in \Gamma$ mit $P \neq Q$ gilt $s_g(P) \neq s_g(Q)$.

(b) s_g ist surjektiv, d.h. zu jedem $Q \in \Gamma$ gibt es ein $P \in \Gamma$ mit $s_g(P) = Q$.

(c) Ist id die identische Abbildung der Ebene (d.h. mit $id(P) = P$ für alle $P \in \Gamma$). Dann gilt $s_g \circ s_g = id$.

In Definition 1.6.1 wurden die Spiegelpunkte über den Abstand von zwei festen Punkten $A, B \in g$ festgelegt. Ersetzt man diese Punkte durch zwei beliebige andere verschiedene Punkte auf g, dann erhält man dieselbe Spiegelung:

Satz 1.6.6 *Sei g eine Gerade, s_g die zugehörige Spiegelung, $P \notin g$ beliebig und $P' := s_g(P)$. Dann gilt $|\overline{PC}| = |\overline{P'C}|$ genau dann, wenn $C \in g$.*

Bemerkungen 1.6.7:

(1) Die Punkte $A, B \in g$ aus Definition 1.6.4 der Spiegelung an g sind also frei auf g wählbar, d.h. die Spiegelung hängt nur von g ab. Wir werden sie im folgenden oft mit s_g bezeichnen.

(2) Liegt der Punkt P aus dem vorigen Satz auf der Spiegelachse g, dann gilt wegen $P = P'$ $|\overline{PC}| = |\overline{P'C}|$ für jedes $C \in \Gamma$, nicht nur für Punkte $C \in g$.

(3) Ist $P \notin g$, dann gilt auch $P' \notin g$.

Der folgende Satz zeigt, daß eine Spiegelung Geraden in Geraden überführt.

Satz 1.6.8 *Seien g eine Gerade, s_g die zugehörige Spiegelung, P, Q, R Punkte einer Geraden h, und $P' := s_g(P)$, $Q' := s_g(Q)$, $R' := s_g(R)$. Dann liegen P', Q', R' auch auf einer Geraden h'. Jeder Punkt auf h' hat einen Urbildpunkt auf h.*

Abbildungen werden in der Mathematik oft durch die Punkte bzw. Mengen charakterisiert, die bei der Abbildung nicht verändert werden, d.h. auf sich abgebildet werden:

Definition 1.6.9 *Sei s_g die Spiegelung an g. P mit $P' := s_g(P) = P$ heißt* **Fixpunkt** *der Spiegelung. Ist h eine Gerade mit $P' := s_g(P) \in h$ für jedes $P \in h$, dann heißt h* **Fixgerade**.

Bemerkung 1.6.10: Ist h Fixgerade der Spiegelung s_g, $P \in h$, dann ist P nicht unbedingt Fixpunkt von s_g.

Aus Definition 1.6.1 folgt, daß ein Punkt P der Ebene nur dann Fixpunkt einer Geradenspiegelung s_g sein kann, wenn $P \in g$. g ist damit auch Fixgerade von s_g, aber nicht die einzige, wie die folgenden Sätze zeigen.

Satz 1.6.11 *Sei g eine beliebige Gerade, s_g die zugehörige Spiegelung.*

(a) Sind P, Q zwei beliebige Punkte der Ebene, $P' := s_g(P)$, $Q' := s_g(Q)$, dann gilt $s_g(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$, d.h. Strecken werden auf Strecken abgebildet.

(b) Sind h, k zwei parallele Geraden, dann sind $s_g(h)$ und $s_g(k)$ auch parallel.

(c) Ist $P \notin g$ ein beliebiger Punkt mit Bildpunkt $P' := s_g(P)$, dann ist PP' Fixgerade von s_g.

Aus der Anschauung wissen wir, daß die Verbindungsgeraden von Urbild- und Bildpunkt senkrecht zur Spiegelachse sind. Außerdem gehen diese Geraden bei Spiegelung wieder in sich selbst über, sie sind also Fixgeraden. Wir nutzen diese Beobachtungen aus, um über den Begriff der Fixgeraden die Orthogonalität von Geraden zu definieren:

Definition 1.6.12 *Sei g eine beliebige Gerade mit zugehöriger Spiegelung s_g. Eine weitere Gerade $h \neq g$ heißt* **Senkrechte** *(oder senkrecht oder orthogonal) zu g, wenn h Fixgerade der Spiegelung s_g ist. Bezeichnung: $h \perp g$.*

Damit ergibt sich

Satz 1.6.13 *(a) Die Relation „$\perp$“ ist symmetrisch, d.h. für je zwei Geraden g, h gilt:*

$$g \perp h \quad \Leftrightarrow \quad h \perp g.$$

(b) Ist g eine beliebige Gerade, dann existiert durch jeden Punkt P genau eine zu g senkrechte Gerade h. Die Gerade heißt **Lot** *auf g von P bzw. in P.*

(c) Ist g eine beliebige Gerade und sind h, k zu g senkrecht, dann sind h und k zueinander parallel oder gleich.

(d) Ist g senkrecht zu h, dann auch zu jeder Parallelen von h.

Bis jetzt haben wir vom Bild eines Punktes $P \notin g$ bei Spiegelung an g nur gefordert, daß es verschieden von P ist. Wir können jetzt zeigen:

Satz 1.6.14 *Ist g eine beliebige Gerade mit zugehöriger Spiegelung s_g, $P \notin g$, $P' := s_g(P)$. Dann liegen P und P' in verschiedenen Halbebenen bezüglich g, d.h. es gilt $PP' \cap g \neq \emptyset$.*

Zum Schluß untersuchen wir die Bilder von Figuren in der Ebene mit bestimmten Eigenschaften:

Satz 1.6.15 *(a) Seien P, Q beliebige verschiedene Punkte mit Symmetrieachse g, h eine beliebige Gerade mit zugehöriger Spiegelung s_h. Dann ist $s_h(g)$ Symmetrieachse der Bildpunkte $s_h(P)$ und $s_h(Q)$.*

(b) Sind g und h zueinander senkrechte Geraden, k eine beliebige Gerade mit zugehöriger Spiegelung s_k. Dann gilt $s_k(g) \perp s_k(h)$.

(c) Sind g und h zwei beliebige Geraden. Dann gilt:

- *Ist $g = h$, dann gibt es unendlich viele Symmetrieachsen k mit $s_k(g) = h$.*
- *Sind g und h parallel, dann gibt es genau eine Symmetrieachse k mit $s_k(g) = h$.*
- *Ist $g \cap h = \{S\}$, dann gibt es genau zwei Symmetrieachsen k mit $s_k(g) = h$. Sie stehen aufeinander senkrecht.*

2 Kongruenzabbildungen - Bewegungen

2.1 Die Gruppe der Bewegungen

Bei der Untersuchung der Geradenspiegelungen hat sich ergeben, daß eine Geradenspiegelung, zweimal ausgeführt, die identische Abbildung ergibt - man sagt, „das Produkt einer Geradenspiegelung mit sich selbst“ ist die identische Abbildung. Wir wollen nun mehrere verschiedene Geradenspiegelungen nacheinander ausführen:

Definition 2.1.1 *Ein Produkt von endlich vielen Geradenspiegelungen heißt* **Kongruenzabbildung** *oder* **Bewegung**.

Bemerkungen 2.1.2:

(1) Eine solche Abbildung „Bewegung“ zu nennen, ist natürlich reine Definitionssache. Wir werden im folgenden zeigen, daß dies gerade die Abbildungen sind, die man anschaulich als Bewegung bezeichnen würde, nämlich zum Beispiel Verschiebungen oder Drehungen. Dabei wird eine Bewegung nicht als dynamischer Prozeß aufgefaßt, sondern als Abbildung, bei der dem Anfangszustand der Ebene der Endzustand nach der Bewegung gegenübergestellt wird.

(2) Da jede Geradenspiegelungen Geraden auf Geraden abbildet („geradentreu“ ist) und Strecken auf kongruente, d.h. gleichlange Strecken („streckentreu“), gelten diese Eigenschaften auch für Produkte endlich vieler Geradenspiegelungen. Wir werden zeigen, daß diese Eigenschaften sogar charakteristisch für Kongruenzabbildungen sind.

(3) Eine Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung, aber nicht jede Kongruenzabbildung ist Geradenspiegelung, wie das Beispiel der Identität zeigt.

Für die Menge der Kongruenzabbildungen gelten bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen Rechenregeln:

Satz 2.1.3 *Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Kongruenzabbildungen. Dann ist $(\mathcal{B}, \circ)$ eine nichtkommutative Gruppe, d.h. für beliebige Kongruenzabbildungen $f, g, h \in \mathcal{B}$ gilt*

(a) $g \circ h \in \mathcal{B}$ *(Abgeschlossenheit bzgl. $\circ$)*

(b) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(Assoziativgesetz)*

(c) $f \circ id = id \circ f = f$ *(id ist neutrales Element)*

(d) Es existiert ein $f^* \in \mathcal{B}$ mit $f \circ f^* = f^* \circ f = id$. *(Existenz der inversen Abbildung)*

(e) Es gibt $f^*, g^* \in \mathcal{B}$ mit $f^* \circ g^* \neq g^* \circ f^*$ *(Kommutativgesetz gilt nicht allgemein)*

Die Definition der Kongruenzabbildungen erscheint so allgemein, daß es möglicherweise eine unübersehbare Menge verschiedenartiger solcher Abbildungen geben könnte. Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es nur sehr wenige verschiedene Typen von Bewegungen gibt. Dazu untersuchen wir zuerst, wieviele Punkte man zusammen mit ihren Bildpunkten kennen muß, damit eine Bewegung festgelegt ist.

Satz 2.1.4 *Eine geraden- und streckentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich ist festgelegt durch die Bilder dreier nicht kollinearer Punkte.*

Korollar 2.1.4.1 *Ist f eine geraden- und streckentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich mit drei nicht kollinearen Fixpunkten, dann ist $f = id$.*

Satz 2.1.4 sagt nichts darüber aus, ob eine geraden- und streckentreue Abbildung existiert, die die vorgegebenen Punkte in die gewünschten Bildpunkte überführt. Für die Sicherung der Existenz müssen Urbild- und Bildpunkte sicher zusätzliche Voraussetzungen erfüllen, z.B. muß $|\overline{f(P)f(Q)}| = |\overline{PQ}|$ gelten. Wir betrachten zuerst den Fall zweier Punkte:

Satz 2.1.5 *Seien $P, Q, P', Q' \in \Gamma$ mit $P \neq Q$ und $|\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}|$. Dann gibt es genau zwei Bewegungen f_1, und f_2, die P auf P' und Q auf Q' abbilden. Die beiden Bewegungen unterscheiden sich nur durch eine Geradenspiegelung, d.h. es gibt eine Geradenspiegelung s_g mit $f_1 = f_2 \circ s_g$.*

Damit ergibt sich folgender wichtiger Satz, durch den die Gruppe $\mathcal{B}$ der Bewegungen erheblich übersichtlicher wird:

Satz 2.1.6 *(a) Jede geraden- und streckentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich ist eine Bewegung.*

(b) Jede Bewegung läßt sich als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellen.

Bemerkungen 2.1.7: Der letzte Satz zeigt nur, daß man jede Bewegung als Produkt von *höchstens* drei Geradenspiegelungen schreiben kann, nicht, daß es wirklich Bewegungen gibt, die man nicht als Produkt von zwei Geradenspiegelungen schreiben kann und die selbst nicht Geradenspiegelungen sind. Wir werden dies zeigen, indem wir die möglichen Fixpunkte von Bewegungen untersuchen.

2.2 Kongruenz von Winkeln und Dreiecken

Zwei Strecken haben wir kongruent genannt, wenn sie gleich lang waren. Ist eine Strecke Bild einer zweiten unter einer Bewegung, dann sind beide wegen der Streckentreue der Bewegung kongruent. Andererseits haben wir gezeigt, daß es zu je zwei kongruenten Strecken eine Bewegung gibt, die die eine auf die andere abbildet. Das ergibt eine Möglichkeit zur Verallgemeinerung des Begriffs der Kongruenz:

Definition 2.2.1 *(a) Eine Punktmenge oder ein System von Punktmengen der Ebene nennen wir* **geometrische Figur***.*

(b) Zwei geometrische Figuren M_1 und M_2 heißen **kongruent***, wenn es eine Bewegung f gibt mit $f(M_1) = M_2$.*

Bemerkungen 2.2.2:

(1) Die erweiterte Kongruenz ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation.

(2) Wir werden uns im wesentlichen mit der Kongruenz von Winkeln und von Dreiecken befassen.

(3) Sind g, h zwei verschiedene Geraden mit $\{A\} = g \cap h$, ist k die nach Satz 1.6.15 eindeutig bestimmte Symmetrieachse mit $s_k(g_{A\to}) = h_{A\to}$, und ist $k_{A\to}$ die Halbgerade, die in derselben von g erzeugten Halbebene liegt wie $h_{A\to}$, dann gilt

$$s_k\big(\sphericalangle(g_{A\to}, k_{A\to})\big) = \sphericalangle(k_{A\to}, h_{A\to}),$$

d.h. $k_{A\to}$ zerlegt den Winkel $\sphericalangle(g_{A\to}, h_{A\to})$ in zwei kongruente Winkel. $k_{A\to}$ heißt **Winkelhalbierende** des Winkels $\sphericalangle(g_{A\to}, h_{A\to})$.

Auf einer gegebenen Geraden konnte man von einem festen Punkt nach Axiom (D2) auf genau zwei verschiedene Arten eine Strecke fester Länge abtragen. Für Winkel gilt entsprechendes:

Satz 2.2.3 *Sind g, h zwei verschiedene Geraden mit $\{A\} = g \cap h$, A' ein beliebiger Punkt, g' eine beliebige Gerade mit $A' \in g'$, dann gibt es in jeder durch g' bestimmten Halbebene genau eine Halbgerade $h'_{A'\to}$, so daß $\sphericalangle(g_{A\to}, h_{A\to})$ kongruent ist zu $\sphericalangle(g'_{A'\to}, h'_{A'\to})$.*

Bemerkungen 2.2.4:

(1) Sind zwei Winkel kongruent, dann auch ihre Nebenwinkel.

(2) Scheitelwinkel sind zueinander kongruent.

Zwischen der Kongruenz von Strecken und Winkeln und der Kongruenz von Dreiecken besteht ein enger Zusammenhang:

Satz 2.2.5 *Gegeben seien die beiden Dreiecke mit den Ecken A, B, C bzw. A', B', C'.*

(a) Sind jeweils die drei Paare entsprechender Seiten kongruent, d.h. gilt

$$|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|, \quad |\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|, \quad |\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|,$$

dann sind die Dreiecke kongruent. (sss)

(b) Sind zwei Paare entsprechender Seiten und die von den beiden Seiten jeweils eingeschlossenen Winkel kongruent, dann sind die Dreiecke kongruent. (sws)

(c) Ist ein Paar entsprechender Seiten und die Paare der jeweils anliegenden Winkel kongruent, dann sind die Dreiecke kongruent. (wsw)

Ein Dreieck mit zwei zueinander kongruenten (gleichlangen) Seiten heißt **gleichschenklig**. Die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel heißen **Basiswinkel**, die dritte Seite **Basis** des gleichschenkligen Dreiecks. Ein Dreieck, in dem alle Seiten kongruent sind, heißt **gleichseitig**.

Korollar 2.2.5.1 *(a) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind kongruent.*

(b) Hat ein Dreieck zwei kongruente Innenwinkel, dann ist es gleichschenklig und die Winkel sind die Basiswinkel.

(c) Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Innenwinkel kongruent sind.

2.3 Die Punktspiegelung

Wir wollen nun in den nächsten Abschnitten die verschiedenen Arten von Bewegungen untersuchen. Nach Satz 2.1.6 läßt sich jede Bewegung als Komposition höchstens dreier Spiegelungen schreiben. Wir haben also Bewegungen zu untersuchen, die aus zwei oder aus drei Spiegelungen zusammengesetzt sind.

Definition 2.3.1 *Eine Bewegung heißt* **gleichsinnig***, wenn sie als Komposition von zwei Spiegelungen darstellbar ist, und sonst* **ungleichsinnig***.*

Bemerkungen 2.3.2:

(1) Zeichnet man ein Dreieck auf den Fußboden, schreitet seine Seiten so ab, daß das Innere des Dreiecks immer links liegt, und bezeichnet die Ecken in der Reihenfolge ihres Durchlaufens mit A, B und C, dann hat man dem Dreieck einen **Umlaufsinn** bzw. eine **Orientierung** gegeben. Spiegelt man dieses Dreieck an einer beliebigen Geraden, dann liegt beim Durchlaufen der entsprechenden Ecken A', B', C' des Bilddreiecks das Innere dieses Dreiecks rechts. Das gespiegelte Dreieck hat also einen anderen Umlaufsinn als das ursprüngliche.
Spiegelt man das Bilddreieck mit den Ecken A', B', C' nochmals an einer beliebigen Geraden, dann hat das dritte Dreieck denselben Umlaufsinn wie das ursprüngliche erste Dreieck. Anschaulich gilt also: Das Produkt einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen ändert den Umlaufsinn eines Dreiecks nicht, Produkte einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ändern den Umlaufsinn.
Die verwendeten Begriffe „links“ und „rechts“ haben bei alleiniger Betrachtung der Ebene keinen Sinn (- sie sind eng mit der zusätzlichen räumlichen Dimension verbunden). Daher definieren wir entsprechende Abbildungen als gleichsinnig bzw. ungleichsinnig.

(2) Man kann zeigen, daß jedes Produkt aus einer geraden Anzahl von Spiegelungen sich als Produkt von genau zwei Spiegelungen darstellen läßt. Eine Bewegung ist daher genau dann gleichsinnig, wenn sie als Produkt einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen darstellbar ist.

Satz 2.3.3 *Die Menge der gleichsinnigen Bewegungen bildet eine Untergruppe der Gruppe der Bewegungen.*

Zur Untersuchung der möglichen gleichsinnigen Bewegungen betrachten wir die gegenseitige Lage der Symmetrieachsen zueinander. Sie können parallel zueinander sein oder sich schneiden. Zuerst nehmen wir an, daß sich die Symmetrieachsen schneiden und zueinander senkrecht sind.

Satz 2.3.4 *Seien g, h zueinander senkrechte Geraden der Ebene mit Schnittpunkt M, $b := s_g \circ s_h$ die aus den zugehörigen Spiegelungen zusammengesetzte Bewegung. Dann gilt:*

(a) b hat genau einen Fixpunkt, nämlich M.

(b) Jedem Punkt P der Ebene wird ein Bildpunkt $P'' := b(P)$ so zugeordnet, daß M Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP''}$ ist.

(c) Die Geradenspiegelungen sind vertauschbar, d.h. es gilt $s_g \circ s_h = s_h \circ s_g = b$.

(d) $b \circ b = id$.

(e) Ist i eine beliebige Gerade durch M, k die zu i senkrechte Gerade durch M, dann gilt auch $b = s_i \circ s_k$, d.h. die Bewegung b ist von der speziellen Auswahl der zueinander senkrechten Geraden durch M nicht abhängig.

Definition 2.3.5 *Seien g, h zueinander senkrechte Geraden der Ebene mit Schnittpunkt M. Dann heißt $b := s_g \circ s_h$* **Punktspiegelung** *an M.*

Bemerkungen 2.3.6:

(1) Der Name Punktspiegelung rührt daher, daß die Strecke $\overline{PP'}$ bei einer Geradenspiegelung durch die Symmetrieachse und bei einer Punktspiegelung durch den Punkt halbiert wird.

(2) Die Identität und die Punktspiegelungen sind die einzigen gleichsinnigen Bewegungen, für die $b \circ b = id$ gilt.

Nach dem obigen Satz ist eine Punktspiegelung allein durch den Punkt M bestimmt. Eine beliebige Bewegung ist durch die Vorgabe von drei nicht kollinearen Punkten und ihren Bildern eindeutig bestimmt. Für eine Punktspiegelung gilt:

Satz 2.3.7 *Zu je zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Punktspiegelung, die P auf Q abbildet, nämlich die Punktspiegelung am Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$.*

Wir wollen nun untersuchen, welche Bilder geometrischer Figuren bei einer Punktspiegelung entstehen. Speziell interessieren Figuren, die auf sich abgebildet werden:

Definition 2.3.8 *Eine Figur heißt* **achsensymmetrisch**, *wenn es eine Geradenspiegelung gibt, die die Figur auf sich abbildet, und* **punktsymmetrisch**, *wenn es eine Punktspiegelung gibt, die die Figur auf sich abbildet.*

Beispiele: Gleichschenklige Dreiecke, Parallelenpaare, Rechtecke und Kreise sind achsensymmetrisch, Rechtecke und Kreise sind punktsymmetrisch.

Satz 2.3.9 *Sei M ein beliebiger Punkt, b_M die Punktspiegelung an M.*

(a) Ist k eine beliebige Gerade mit $M \notin k$, $k' := b_M(k)$, dann ist k' parallel zu k. M hat zu k und k' denselben Abstand, d.h. für die Senkrechte i zu k durch M mit Schnittpunkten P von k und i bzw. Q von k' und i gilt $|\overline{MP}| = |\overline{MQ}|$.

(b) Ist k eine beliebige Gerade mit $M \in k$, dann ist $k' := b_M(k) = k$, d.h. k ist Fixgerade von b_M.

Eine Verallgemeinerung des Rechtecks gibt

Definition 2.3.10 *Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils zueinander parallel sind, heißt* **Parallelogramm**.

Parallelogramme sind typische punktsymmetrische Figuren, wie sich aus dem folgenden Satz ergibt:

Satz 2.3.11 *(a) Ist b_M die Punktspiegelung an M, und sind A und B beliebige verschiedene Punkte mit $M \notin \overline{AB}$, $A' := b_M(A)$, $B' := b_M(B)$. Dann ist das Viereck mit den Ecken A, B, A', B' ein Parallelogramm.*

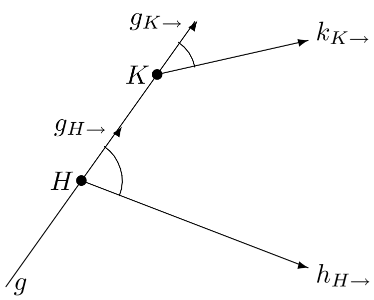
(b) Seien A, B, C und D Ecken eines Parallelogramms, M der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann ist das Parallelogramm punktsymmetrisch bezüglich M, gegenüberliegende Seiten sind kongruent und M ist der Mittelpunkt beider Diagonalen.

Aus der Untersuchung der Bilder von Winkeln unter einer Punktspiegelung ergeben sich wichtige Folgerungen. Zuerst einige Benennungen:

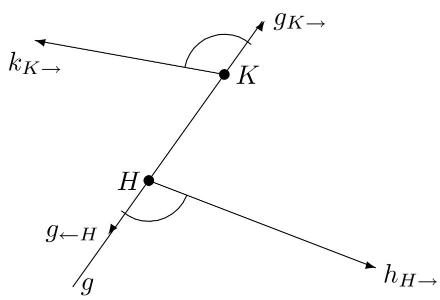
Definition 2.3.12 *Gegeben seien die Geraden h und k, die von der Geraden g in H bzw. K geschnitten werden. Die Orientierung auf g sei so gewählt, daß $H \prec K$ und damit $g_{K\rightarrow} \subset g_{H\rightarrow}$ gilt.*

(a) Liegen $h_{H\rightarrow}$ und $k_{K\rightarrow}$ in derselben Halbebene bezüglich g, dann heißen die Winkel $\sphericalangle(g_{H\rightarrow}, h_{H\rightarrow})$ und $\sphericalangle(g_{K\rightarrow}, k_{K\rightarrow})$ **Stufenwinkel***.*

(b) Liegen $h_{H\rightarrow}$ und $k_{K\rightarrow}$ in verschiedenen Halbebenen bezüglich g, dann heißen die Winkel $\sphericalangle(g_{\leftarrow H}, h_{H\rightarrow})$ und $\sphericalangle(g_{K\rightarrow}, k_{K\rightarrow})$ **Wechselwinkel***.*



Stufenwinkel



Wechselwinkel

Mit Hilfe der Punktspiegelungen folgt

Satz 2.3.13 (Wechsel-/Stufenwinkelsatz mit Umkehrung)
Werden die Geraden h und k von der Geraden g in H bzw. K geschnitten, dann gilt:
Die entstehenden Wechselwinkel sind genau dann kongruent, wenn k und h parallel sind.
Dasselbe gilt für die entstehenden Stufenwinkel.

Damit folgen einige wichtige elementargeometrische Aussagen:

Satz 2.3.14 *(a) Seien α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks. Dann ist die Summe der drei Winkel ein gestreckter Winkel. (Winkelsumme im Dreieck)*

(b) Ein Außenwinkel im Dreieck (d.h. ein Nebenwinkel eines Innenwinkels) ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. (2. Außenwinkelsatz)

(c) *Eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Seite eines Dreiecks halbiert genau dann eine zweite Seite, wenn sie zu der dritten Seite parallel ist. In diesem Fall heißt die von dem Dreieck aus dieser Geraden herausgeschnittene Strecke* **Mittelparallele** *des Dreiecks und ist halb so lang wie die dritte Seite.* *(Satz von der Mittelparallelen)*

(d) *Seien g eine Gerade und $p_1, p_2, p_3, \cdots$ parallele Geraden, die aus g kongruente Strecken herausschneiden. Ist h eine beliebige, nicht zu p_1 parallele Gerade, dann schneiden die Parallelen auch aus h kongruente Strecken heraus.*

Bemerkung 2.3.15:

1. Liegt die Halbgerade $k_{A\rightarrow}$ im Inneren des Winkels $\alpha := \sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$, dann kann man α als Summe der Winkel $\beta := \sphericalangle(g_{A\rightarrow}, k_{A\rightarrow})$ und $\gamma := (k_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$ auffassen. Für zwei Winkel β und γ, deren Scheitel nicht übereinstimmen oder die nicht einen Schenkel gemeinsam haben, kann man eine Winkelsumme definieren, indem man zu β einen geeigneten zu γ kongruenten Winkel γ' addiert. γ' ist nach Satz 2.2.3 eindeutig bestimmt. Allerdings geht das nur für Winkel, für die die Vereinigung der Winkelfelder Teilmenge einer Halbebene ist. Für diese Winkel ist die Winkelsumme eindeutig bestimmt bis auf Kongruenz.

2. Mit Hilfe der letzten Aussage kann man eine vorgegebene Strecke in n gleich lange Teile zerlegen.

2.4 Die Parallelverschiebung

Wir betrachten nun Verknüpfungen von zwei Spiegelungen an parallelen Spiegelgeraden:

Definition 2.4.1 *Seien g und h parallele Geraden. Dann heißt $t := s_h \circ s_g$* **Parallelverschiebung** *oder* **Translation**.

Satz 2.4.2 *Seien g und h parallele Geraden, $t := s_h \circ s_g$ die zugehörige Parallelverschiebung, P und Q beliebige verschiedene Punkte, $P' := t(P)$, $Q' := t(Q)$. Dann sind $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ kongruente Strecken, die senkrecht zu g und doppelt so lang wie der Abstand der Geraden g und h sind, und P' und Q' liegen in derselben Halbebene bezüglich PQ, falls $Q \notin PP'$, und sonst gilt $P', Q \in \overline{PQ'}$ oder $P, Q' \in \overline{P'Q}$.*

Sind g und h parallele Geraden, k eine zu g (und damit auch zu h) senkrechte Gerade, M der Schnittpunkt von g und k, N der Schnittpunkt von h und k, dann gilt

$$t = s_h \circ s_g = s_h \circ id \circ s_g = s_h \circ s_k \circ s_k \circ s_g = b_N \circ b_M,$$

d.h. die Translation t läßt sich als Produkt der zwei Punktspiegelungen b_N und b_M darstellen. Umgekehrt gilt

Satz 2.4.3 *Seien M und N beliebige verschiedene Punkte. Dann ist $t := b_N \circ b_M$ eine Parallelverschiebung. Ist P ein beliebiger Punkt, $P' := t(P)$, dann ist $\overline{PP'}$ parallel zu $\overline{MN}$ und doppelt so lang wie $\overline{MN}$, und P' und N liegen in derselben Halbebene bezüglich PM, falls $P \notin MN$, und sonst gilt $M, P' \in \overline{s_h(M)P}$ oder $P, s_h(M) \in \overline{MP'}$.*

Bemerkung 2.4.4: Es ist sinnvoll, die Identität auch als Parallelverschiebung aufzufassen. Sie ist ja als Produkt von zwei Geradenspiegelungen an derselben Geraden bzw. als Produkt von zwei Punktspiegelungen an demselben Punkt darstellbar. Bei der Identität wird jeder Punkt der Ebene um eine Strecke der Länge 0 verschoben.

Aus den Eigenschaften der Geraden- und Punktspiegelungen folgt:

Satz 2.4.5 *(a) Eine Parallelverschiebung, die nicht die Identität ist, besitzt keinen Fixpunkt.*

(b) Eine Gerade ist genau dann Fixgerade bei einer Parallelverschiebung, wenn sie senkrecht zu den Spiegelgeraden bzw. parallel zur Verbindungsgeraden der Spiegelpunkte ist. Alle anderen Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet.

(c) Winkel, von denen ein Schenkel senkrecht zu den Spiegelgeraden bzw. parallel zur Verbindungsgeraden der Spiegelpunkte ist, werden auf kongruente Stufenwinkel abgebildet.

(d) Ist t eine Translation, dann ist die inverse Bewegung t^{-1} ebenfalls eine Translation. Ist P ein beliebiger Punkt, $P' := t(P)$, $P'' := t^{-1}(P)$, dann ist P Mittelpunkt der Strecke $\overline{P'P''}$.

Analog zu den Geradenspiegelungen ist eine Parallelverschiebung schon durch die Angabe eines Punktes und seines Bildpunktes festgelegt:

Satz 2.4.6 *Seien P, Q beliebige Punkte der Ebene. Dann gibt es genau eine Parallelverschiebung t mit $t(P) = Q$.*

Wie Punktspiegelungen aus zwei Geradenspiegelungen an beliebigen zueinander senkrechten Geraden durch den Spiegelpunkt darstellbar sind, kann man auch die beiden Geradenspiegelungen bzw. die Punktspiegelungen, durch die eine vorgegebene Translation dargestellt wird, unter gewissen Einschränkungen frei wählen:

Satz 2.4.7 *Sei t eine Translation, P ein beliebiger Punkt, $P' := t(P)$, $k := PP'$.*

(a) Es seien g und h zwei beliebige parallele Geraden mit Abstand $\frac{1}{2}|\overline{PP'}|$, die zu PP' senkrecht sind. Weiter sei M der Schnittpunkt von g und k, N der Schnittpunkt von h und k, und $R \in k$ so gewählt, daß $P, P', M, N \in k_{R\rightarrow}$ und $P \in \overline{RP'}$ gilt, und es gelte $M \in \overline{RN}$. Dann gilt $t = s_h \circ s_g$.

(b) Seien M und N zwei beliebige Punkte mit Abstand $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{PP'}|$, so daß für die zu MN senkrechten Geraden g durch M und h durch N die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und seien b_M und b_N die Punktspiegelungen an M bzw. N. Dann gilt $t = b_N \circ b_M$.

Translationen werden schon durch die ersten beiden Eigenschaften aus Satz 2.4.5 charakterisiert:

Satz 2.4.8 *Jede geradentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich, die jede Gerade der Ebene auf sich oder auf eine Parallele abbildet und keinen Fixpunkt besitzt, ist eine Parallelverschiebung.*

2.5 Die Drehung, Eigenschaften des Kreises

Die exakte Einführung des Begriffs der Orientierung von Dreiecken und Winkeln der Ebene würde den zeitlichen Rahmen der Vorlesung sprengen. Wir wollen daher - in Anlehnung an die Bemerkungen zu Beginn des Abschnitts 2.3 - anschaulich ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Ecken A, B und C **positiv orientiert** nennen, wenn man beim Durchlaufen der Ecken in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn läuft, und sonst **negativ orientiert**.

Definition 2.5.1 *(a) Seien g, h zwei beliebige Geraden mit Schnittpunkt D, $A \neq D$ ein beliebiger Punkt auf $g_{D\rightarrow}$, $B \neq D$ auf $h_{D\rightarrow}$. Der Winkel $\sphericalangle(g_{D\rightarrow}, h_{D\rightarrow})$ heißt* **positiv orientiert**, *wenn das Dreieck $\triangle DAB$ positiv orientiert ist und im zugehörigen Winkelfeld liegt. Im folgenden bezeichnen wir einen solchen Winkel auch durch $\sphericalangle(\overrightarrow{DAB})$ oder $\sphericalangle(\overrightarrow{g_{D\rightarrow}, h_{D\rightarrow}})$.*

(b) Eine Abbildung f der Ebene auf sich heißt **Drehung** *oder* **Rotation**, *wenn sie genau einen Fixpunkt D besitzt, und für je zwei Punkte P, Q der Ebene mit Bildpunkten $P' := f(P)$ und $Q' := f(Q)$ die Strecken $\overline{DP}$ und $\overline{DP'}$ kongruent sind und die Winkel $\sphericalangle(\overrightarrow{DPP'})$ und $\sphericalangle(\overrightarrow{DQQ'})$ kongruent und gleichorientiert sind. D heißt* **Drehpunkt**, *$\sphericalangle(\overrightarrow{DPP'})$* **Drehwinkel**.

Beispiele: Ist der Drehwinkel ein gestreckter Winkel, d.h. ist D wegen $D \in \overline{PP'}$ und $|\overline{DP}| = |\overline{DP'}|$ Mittelpunkt von $\overline{PP'}$ für jedes P, dann ist die Drehung gleich der Punktspiegelung an D.
Die Identität ist eigentlich keine Drehung, da sie mehr als einen Fixpunkt besitzt. Wir wollen sie aber als Drehung mit Nullwinkel als Drehwinkel (und mit beliebig wählbarem Drehpunkt) auffassen.

Eine Punktspiegelung, die ja eine spezielle Drehung ist, haben wir als Verknüpfung von zwei Geradenspiegelungen definiert. Wir zeigen nun für beliebige Drehungen den Zusammenhang zu den Geradenspiegelungen:

Satz 2.5.2 *Seien g und h zwei Geraden mit Schnittpunkt D, $g_{D\rightarrow}$ eine der Halbgeraden von g und die Halbgerade $h_{D\rightarrow}$ so gewählt, daß sie in dem Winkelfeld des gestreckten Winkels $\sphericalangle(\overrightarrow{g_{D\rightarrow}, g_{\leftarrow D}})$ liegt. Dann ist die Bewegung $b := s_h \circ s_g$ eine Drehung um D mit Drehwinkel $2 \sphericalangle(\overrightarrow{g_{D\rightarrow}, h_{D\rightarrow}})$.*

Im Gegensatz zu Geradenspiegelung, Punktspiegelung und Parallelverschiebung ist eine Drehung nicht durch die Angabe eines Punktes und seines Bildpunktes festgelegt. Wegen der Kongruenzbedingung $|\overline{PD}| = |\overline{QD}|$ muß der Drehpunkt D auf der Mittelsenkrechten von $\overline{PQ}$, d.h. der Senkrechten zu PQ durch den Mittelpunkt von $\overline{PQ}$, liegen, ist aber dort auch beliebig wählbar (d.h. es gibt zu jedem solchen D eine entsprechende Drehung). Gibt man auch D vor, dann ist die Drehung festgelegt:

Satz 2.5.3 *Jede Drehung um D mit Drehwinkel α läßt sich als Produkt $s_h \circ s_g$ zweier Geradenspiegelungen darstellen, wobei g und h sich in D schneiden und den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ einschließen.*

Damit kann man auch die zu einer Drehung inverse Abbildung charakterisieren:

Satz 2.5.4 *Sei b die Drehung um D mit Drehwinkel α. Dann ist die Drehung um D mit zu α komplementärem Drehwinkel die inverse Abbildung zu b.*

Kreise haben eine besondere Verbindung zu Drehungen. Ist nämlich b eine Drehung um D, dann wird jeder Kreis mit Mittelpunkt D auf sich abgebildet. Wir wollen einige wichtige Eigenschaften der Kreise zusammenstellen:

Definition 2.5.5 *(a) Schneidet eine Gerade g einen Kreis mit Mittelpunkt M in zwei verschiedenen Punkten P und Q, dann heißt sie* **Sekante** *und die Strecke $\overline{PQ}$* **Sehne**. *Liegt M auf der Sehne, dann heißt sie* **Durchmesser**.

(b) Schneidet eine Gerade g einen Kreis mit Mittelpunkt M in genau einem Punkt P, dann heißt sie **Tangente** *und der Punkt* **Berührpunkt**.

(c) Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M, und sind P, Q und R drei nicht kollineare Punkte auf k, dann heißt $\sphericalangle(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$ **Mittelpunktswinkel** *und $\sphericalangle(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})$ zugehöriger* **Umfangswinkel**.

Satz 2.5.6 *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M. Dann gilt:*

(a) Jede Gerade durch M ist Symmetrieachse des Kreises.

(b) k wird durch jede Drehung um M auf sich abgebildet.

(c) Ist $\overline{PQ}$ eine beliebige Sehne des Kreises, dann geht die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ durch M.

(d) Sind P, Q und R drei nicht kollineare Punkte, dann gibt es genau einen Kreis, der diese Punkte enthält. Er heißt **Umkreis** *des Dreiecks $\triangle PQR$.*

(e) Zwei verschiedene Kreise schneiden sich in höchstens zwei Punkten. Die Mittelpunkte der beiden Kreise, die sich in den Punkten P und Q schneiden, liegen auf der Mittelsenkrechten von PQ.

(f) Eine Gerade schneidet einen Kreis in höchstens zwei Punkten.

(g) Ist g eine Gerade, P ein gemeinsamer Punkt von g und k. Dann gilt: g ist Tangente an k mit Berührpunkt P genau dann, wenn MP senkrecht zu g ist.

Für Dreiecke folgt daraus:

Satz 2.5.7 *(a) Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

(b) Die Höhen (Lote von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Für die Winkel im Kreis gilt:

Satz 2.5.8 *(a) Alle Umfangswinkel, die zum gleichen Mittelpunktswinkel gehören, sind zueinander kongruent und halb so groß wie der Mittelpunktswinkel.* *(Umfangswinkelsatz)*

(b) Jeder Umfangswinkel im Halbkreis (d.h. mit einem Durchmesser als Sehne) ist ein rechter Winkel. *(Satz des Thales, ca.624-547 v.Chr.)*

2.6 Zusammensetzung gleichsinniger Bewegungen, Untergruppen

Jede Bewegung kann man als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellen und jede gleichsinnige Bewegung als Produkt von genau zwei Geradenspiegelungen, die gleichsinnigen Bewegungen bilden also eine Untergruppe der Bewegungsgruppe, die ungleichsinnigen nicht. Wir haben in den letzten Abschnitten alle möglichen Formen gleichsinniger Bewegungen untersucht und die Translationen und Drehungen (und die Punktspiegelungen als spezielle Drehungen) gefunden.
Verknüpft man zwei Drehungen um verschiedene Drehpunkte miteinander, dann erhält man i.a. keine Drehung, wie das Beispiel von zwei Punktspiegelungen an verschiedenen Punkten zeigt, deren Verknüpfung eine Translation ergibt. Die Menge der Punktspiegelungen sowie die Menge der Drehungen bilden also keine Untergruppe der Bewegungsgruppe.

Für die Translationen gilt aber

Satz 2.6.1 *Sind t_1 und t_2 zwei Translationen, A, B und C beliebige Punkte mit $A \neq B$, $B \neq C$ und $B = t_1(A)$, $C = t_2(B)$. Dann ist $t := t_2 \circ t_1$ eine Translation mit $t(A) = C$. Die Translationen bilden also eine Untergruppe der Bewegungsgruppe.*

Mit Hilfe der Translationen kann man **Vektoren** als Äquivalenzklasse aller Verbindungsstrecken von Urbild und Bild definieren und erhält aus dem obigen Satz die **Summation** von Vektoren.

Für die Drehungen gilt

Satz 2.6.2 *Sind d_1 und d_2 Drehungen mit Drehpunkt M_1 bzw. M_2 und Drehwinkel α_1 bzw. α_2, $b := d_2 \circ d_1$, dann gilt:*

(a) Ist $M_1 = M_2$, dann ist b eine Drehung um M_1 mit Drehwinkel $\alpha_1 + \alpha_2$, die Drehungen um einen festen Punkt bilden also eine (sogar kommutative) Untergruppe der Bewegungsgruppe.

(b) Ist $M_1 \neq M_2$ und sind die Drehwinkel komplementär, dann ist b eine Translation.

(c) Sonst ist b eine Drehung um einen neuen Drehpunkt mit Drehwinkel $\alpha_1 + \alpha_2$.

2.7 Die Schubspiegelung

Wir untersuchen in diesem Abschnitt Produkte von drei Geradenspiegelungen. Für spezielle Lagen der Spiegelgeraden zueinander ergibt sich keine neue Art von Bewegung:

Satz 2.7.1 *Seien g, h und k beliebige Geraden, s_g, s_h, s_k die zugehörigen Geradenspiegelungen und $b := s_k \circ s_h \circ s_g$. Sind entweder mindestens zwei der Geraden gleich oder alle zueinander parallel oder haben alle drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt, dann ist b eine Geradenspiegelung.*

Ein analoger Satz gilt auch für alle Punktspiegelungen:

Satz 2.7.2 *Das Produkt von drei Punktspiegelungen ist wieder eine Punktspiegelung.*

Die restlichen Fälle von Produkten von drei Geradenspiegelungen behandelt

Satz 2.7.3 *Seien g, h und k beliebige Geraden mit insgesamt mindestens zwei Schnittpunkten, s_g, s_h, s_k die zugehörigen Geradenspiegelungen. Dann läßt sich $b := s_k \circ s_h \circ s_g$ als Produkt einer Geradenspiegelung an einer Geraden l und einer Translation in Richtung l darstellen.*

Wir haben also eine Art von Bewegung gefunden, die mit den bisher bekannten nicht übereinstimmt.

Definition 2.7.4 *Die Verknüpfung einer Spiegelung an einer Geraden g mit einer Translation in Richtung g heißt* **Schubspiegelung** *oder* **Gleitspiegelung**, *g heißt* **Schubspiegelachse**.

Als Eigenschaften von Schubspiegelungen ergibt sich

Satz 2.7.5 *(a) In einer Schubspiegelung sind die Spiegelung an der Schubspiegelachse und die Translation in Richtung der Schubspiegelachse vertauschbar.*

(b) Jede Schubspiegelung kann man als Produkt von drei Geradenspiegelungen darstellen, so daß zwei der Spiegelgeraden zueinander parallel und die dritte senkrecht dazu ist.

(c) Jede ungleichsinnige Bewegung ist eine Spiegelung oder eine Schubspiegelung.

(d) Eine Schubspiegelung hat keinen Fixpunkt. Die Schubspiegelachse ist die einzige Fixgerade.

(e) Sei b eine Schubspiegelung mit Achse g. Ist die Gerade h parallel zu g, dann ist $h' := b(h)$ auch parallel zu g und g ist Mittelparallele zu h und h'. Ist h senkrecht zu g, dann ist h' die durch die Translation in Richtung g entstehende Parallele zu h.

(f) Sei P ein beliebiger Punkt, der nicht auf der Schubspiegelachse liegt, P' der Bildpunkt, dann wird $\overline{PP'}$ durch die Achse halbiert.

3 Längenmessung, Flächeninhalt, Ähnlichkeit

3.1 Längenmessung von Strecken

Durch das Axiom (D1) haben wir jeder (nicht zu einem Punkt entarteten) Strecke eine positive reelle Zahl zugewiesen, die wir Länge der Strecke nannten. Zwischen Strecken auf einer gemeinsamen Trägergeraden mit einem gemeinsamen Endpunkt hat sich sofort eine Beziehung zwischen der Größer-Relation in der Menge der reellen Zahlen und der Inklusion der Strecken (als Punktmengen) ergeben.

Längen zu messen bedeutet nun, die Länge einer beliebigen Strecke mit der Länge einer festen Strecke zu vergleichen.

Die feste Strecke wird **Maßeinheit** genannt. Ihre Auswahl ist willkürlich (natürlich darf sie nicht die Länge 0 haben).
Beispiele für Maßeinheiten sind Elle, Fuß, Zoll, die sich an durchschnittlichen menschlichen Körpermaßen orientierten, oder Meter, das ursprünglich als (ungefähr) 1:40.000.000-ter Teil des Erdumfangs gewählt wurde.

Der Maßeinheit wird nun die Zahl 1 als Länge zugeordnet.

Ist n eine natürliche Zahl, und trägt man auf der Trägergeraden einer Strecke der Länge 1 (also einer zur Maßeinheit kongruenten Strecke) n-mal fortgesetzt entlang der Orientierung auf der Trägergeraden dazu kongruente Strecken ab, dann erhält man wegen (D1) eine Strecke der Länge $n + 1$, d.h. jede natürliche Zahl kommt als Streckenmaß vor.

Sei nun $r = \dfrac{p}{q}$ eine beliebige positive rationale Zahl mit positivem Zähler p und positivem Nenner q. Wegen Satz 2.3.14 (d) kann man die Maßeinheit in q gleichlange Teile zerlegen, und durch Abtragen von p Strecken der Länge $\dfrac{1}{q}$ auf einer gemeinsamen Geraden erhält man eine Strecke der Länge r.

Für reelle Zahlen gilt dasselbe, der Beweis ist aber nicht mehr elementar, sondern benötigt eine genaue Kenntnis der Eigenschaften der reellen Zahlen.
Die Art der Einführung der reellen Zahlen (z.B. durch Intervallschachtelungen oder Cauchy-Folgen oder Dedekindsche Schnitte) erfordert entsprechend verschiedene Beweise.

Eine direkte Beziehung zu den Streckenlängen hat das

Axiom von Archimedes 3.1.1

(Ar) *Sei a eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gibt es (genau) eine natürliche Zahl n mit $n \leq a < n + 1$.*

Sind nun zwei Strecken der Längen $a > 0$, $b > 0$ gegeben, dann kann man die zweite Strecke als Maßeinheit nehmen, und erhält:

Satz 3.1.2 *Seien s_1, s_2 zwei Strecken positiver Länge. Dann kann man auf der Trägergeraden von s_1 eine Strecke s_3 konstruieren mit*

$$n \cdot |s_2| \leq |s_1| < |s_3| = (n+1) \cdot |s_2|,$$

indem man auf der Trägergeraden von s_1, ausgehend von einem Endpunkt, endlich oft (n-mal) zu s_2 kongruente Strecken abträgt.

Bemerkung 3.1.3: Mit dem Archimedischen Axiom und mit Hilfe von Intervallschachtelung kann man zu jeder beliebig gewählten Maßeinheit s_2 jeder Strecke s_1 eine Maßzahl zuordnen.

3.2 Flächenbegriff und Inhaltsgleichheit

Unter einer Fläche versteht man anschaulich eine zweidimensionale Punktmenge. Da wir ohne den Begriff der Dimension arbeiten, benutzen wir den Begriff der Kreisfläche zur Abgrenzung gegen Linien:

Definition 3.2.1 *Sei $F \subset \Gamma$ eine Punktmenge der Ebene.*

(a) Sei M ein Punkt der Ebene, $r > 0$ eine reelle Zahl. Die Menge der Punkte P der Ebene mit $|\overline{PM}| \leq r$ heißt **Kreisfläche***.*

(b) Sei $A \in F$ ein Punkt. Gibt es ein $r > 0$, so daß die Kreisfläche mit Mittelpunkt A und Radius r Teilmenge von F ist, dann heißt A **innerer Punkt** *von F. Die Gesamtheit aller inneren Punkte von F heißt* **offener Kern** *von F.*

(c) F heißt **Fläche***, wenn F mindestens einen inneren Punkt enthält.*

(d) Ist $A \in \Gamma$ weder innerer Punkt von F noch von $\Gamma \setminus F$, dann heißt A **Randpunkt** *von F. Die Gesamtheit aller Randpunkte von F heißt* **Rand** *von F.*

Die obigen Definitionen stimmen natürlich mit der Anschauung überein.

Man will nun analog zur Längenmessung jeder Fläche F eine nichtnegative reelle Zahl $|F|$ als Flächeninhalt zuordnen. Der Flächenbegriff ist aber dafür zu allgemein. (Innerhalb der Maß– und Integrationstheorie wird die Frage untersucht, wann dies möglich ist. Auch für sehr allgemeine Maßdefinitionen ergeben sich nicht meßbare Mengen.) Wir beschränken uns daher hier auf elementargeometrische Figuren wie z.B. konvexe Polygone (Dreiecke, Rechtecke, Parallelogramme usw.). Die Vorgehensweise ist aber typisch auch für die Integrationstheorie und beruht auf folgenden Axiomen:

Flächeninhaltsaxiome 3.2.2

(F1) *Kongruente Flächen haben denselben Flächeninhalt.*

(F2) *Ist eine Fläche F in n Teilflächen $F_1, \ldots, F_n$* **zerlegt**, *d.h. (mit einer natürlichen Zahl n) gilt*

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \qquad \text{und} \qquad F_l \cap F_k \text{ enthält für } l \neq k \text{ keinen inneren Punkt,}$$

dann folgt

$$|F| = |F_1| + |F_2| + \ldots + |F_n|.$$

(F3) *Jedes Quadrat mit der Seitenlänge 1 hat den Flächeninhalt 1.*

Definition 3.2.3 *Zwei Flächen F und F' heißen* **zerlegungsgleich**, *wenn es Zerlegungen von F in $F_1, \ldots, F_n$ und von F' in $F'_1, \ldots, F'_n$ gibt, so daß jeweils F_k und F'_k kongruent sind.*

Aus den Axiomen (F1) und (F2) folgt damit

Satz 3.2.4 *Zwei zerlegungsgleiche Flächen haben denselben Flächeninhalt.*

Für Rechtecke, deren Seiten rationale Länge haben, kann man analog zu den Längenberechnung bei Strecken den Flächeninhalt berechnen, indem man sie in kongruente Quadrate zerlegt, deren Seitenlänge gleich 1/(Hauptnenner der Seitenlängen) ist. Für Seiten mit nichtrationaler Länge sind wieder die Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen zu berücksichtigen. Es gilt allgemein:

Satz 3.2.5 *Ein Rechteck mit Seiten der Länge a und b hat den Flächeninhalt $a \cdot b$.*

Für Parallelogramme und Dreiecke folgt:

Satz 3.2.6 *(a) Sind $ABCD$ und $ABEF$ zwei Parallelogramme mit gleicher Seite $\overline{AB}$ und liegen die dazu parallelen Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ auf derselben Geraden, dann haben beide Parallelogramme denselben Flächeninhalt. Er ist gleich dem Produkt der Länge $|\overline{AB}|$ von $\overline{AB}$ mit dem Abstand der Parallelen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, der Länge der zugehörigen Höhe.*

(b) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, E der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$. Dann hat das Dreieck denselben Flächeninhalt wie ein Parallelogramm mit Seite $\overline{AB}$ und gegenüberliegender Seite auf einer Parallelen zu $\overline{AB}$ durch E. Ist $a = |\overline{AB}|$, h die Länge der Dreieckshöhe durch C, dann ist der Flächeninhalt $\dfrac{a \cdot h}{2}$.

Damit folgt speziell, daß zwei Dreiecke mit gleicher Grundseite, deren Spitzen auf einer (gemeinsamen) Parallelen zu der Grundseite liegen, denselben Flächeninhalt haben.

Manchmal ist es einfacher, Flächeninhalte durch Hinzufügen anderer Flächen zu bestimmen.

Definition 3.2.7 *Zwei Flächen F und F' heißen* **ergänzungsgleich**, *wenn es zerlegungsgleiche Flächen G und G' mit Zerlegungen von G in F und $F_1, \ldots, F_n$ und von G' in F' und $F'_1, \ldots, F'_n$ gibt, so daß jeweils G und G' und F_k und F'_k, $1 \le k \le n$, kongruent sind.*

Es folgt wie bei zerlegungsgleichen Flächen, daß ergänzungsgleiche Flächen denselben Flächeninhalt haben. Man kann sogar zeigen, daß zwei ergänzungsgleiche Vielecke auch immer zerlegungsgleich sind.

Als Folgerung ergibt sich z.B.:

Satz 3.2.8 *(a) Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, S ein innerer Punkt der Diagonalen $\overline{AC}$. Weiter seien EG die Parallele zu BC durch S (mit $E \in \overline{AB}$ und $G \in \overline{CD}$) und FH die Parallele zu AB durch S (mit $F \in \overline{BC}$ und $H \in \overline{AD}$). Dann haben die Parallelogramme $HSGD$ und $EBFS$ denselben Flächeninhalt.*

(b) Ein Trapez $ABCD$ mit parallelen Seiten $\overline{AB}$ der Länge a und $\overline{CD}$ der Länge c und zugehöriger Höhe mit Länge h (gleich Abstand der Parallelen) hat den Flächeninhalt $\frac{a+c}{2} \cdot h$.

Mit denselben Überlegungen kann man den Satz von Pythagoras und den damit verwandten Katheten– und Höhensatz zeigen. Dabei sei wie üblich die Hypothenuse die Dreiecksseite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, und die Katheten die anderen beiden Seiten.

Satz 3.2.9 (Kathetensatz (Euklid)) *In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit Hypothenuse $\overline{AB}$ sei D der Fußpunkt der Höhe auf AB. Dann gilt*

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AD}| \cdot |\overline{AB}| \qquad \text{und} \qquad |\overline{BC}|^2 = |\overline{BD}| \cdot |\overline{AB}|.$$

Satz 3.2.10 (Pythagoras) *In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten der Länge a und b und Hypothenuse der Länge c gilt* $\quad a^2 + b^2 = c^2.$

Bemerkungen 3.2.11:

1. Im Bereich der Zahlentheorie untersucht man, ob es natürliche Zahlen a, b, c gibt, für die die Gleichung aus dem Satz des Pythagoras gilt. Ein solches Zahlentripel heißt **pythagoräisches Tripel**. Man kann zeigen, daß es unendlich viele solcher (sogar teilerfremder) Tripel gibt.

   Von Pierre Fermat (1601–1655) stammt die Behauptung, daß keine der Gleichungen

   $$x^n + y^n = z^n, \qquad x, y, z, n \in \mathbb{N}, \quad n > 2,$$

   lösbar ist. Diese Aussage heißt **Großer** oder **(letzter) Fermatscher Satz** und wurde erst 1997 durch Andrew Wiles bewiesen.

2. Die herausragende Bedeutung des Satzes von Pythagoras (und der damit verbundenen Sätze wie Katheten- und Höhensatz) kann man daran erkennen, daß zahlreiche im Grundansatz verschiedene Beweise entwickelt wurden.

3. Die Aussagen des Kathetensatzes und des Satzes von Pythagoras sind äquivalent, d.h. man kann sie jeweils aus dem andern herleiten.

4. Katheten- und Höhensatz ergeben die Möglichkeit, nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Rechteck ein flächeninhaltsgleiches Quadrat zu konstruieren. Eine solche Aufgabenstellung nennt man eine Quadratur. Eines der großen antiken (erst in der Neuzeit gelösten) Probleme war die Quadratur des Kreises. Der Nachweis, daß dies nicht möglich ist, gelang erst Ende des 19. Jahrhunderts.

Schon seit der vorgriechischen Antike wird die Umkehrung des Satzes von Pythagoras benutzt, um ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren:

Satz 3.2.12 *Es seien a, b, c reelle Zahlen, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, und $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{AC}| = b$, $|\overline{BC}| = a$. Dann ist das Dreieck rechtwinklig.*

Satz 3.2.13 (Höhensatz (Euklid)) *In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit Hypothenuse $\overline{AB}$ sei D der Fußpunkt der Höhe auf AB. Dann gilt*

$$|\overline{DC}|^2 = |\overline{AD}| \cdot |\overline{DB}|.$$

3.3 Strahlensätze, zentrische Streckung, Ähnlichkeit

Aus den Kongruenzsätzen und der Flächenformel für Dreiecke erhält man

Satz 3.3.1 (1. Strahlensatz) *Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfang A von zwei Parallelen geschnitten, die beide nicht durch A laufen, dann verhalten sich die Längen von irgend zwei (der durch die Parallelen erzeugten) Abschnitte auf dem einen Strahl wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem zweiten.*

Satz 3.3.2 (2. Strahlensatz) *Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfang A von zwei Parallelen geschnitten, die beide nicht durch A laufen, dann verhalten sich die Längen der Abschnitte auf den Parallelen wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf einem der Strahlen.*

Bemerkung 3.3.3: Beide Strahlensätze lassen sich auch auf die Situation verallgemeinern, daß zwei sich in A schneidende Geraden durch ein Parallelenpaar geschnitten wird.

Der 1. Strahlensatz ist auch umkehrbar (im Gegensatz zum 2.):

Satz 3.3.4 (Umkehrung des 1. Strahlensatz) *Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfang A von zwei Geraden geschnitten, die beide nicht durch A laufen, und verhalten sich die Längen von irgend zwei (der durch die Geraden erzeugten) Abschnitte auf dem einen Strahl wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem zweiten, dann sind die beiden Geraden parallel.*

Bemerkung 3.3.5: Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes gilt nicht.

Wir betrachten nun surjektive Abbildungen der Ebene, die die Abstände der Punkte verändern, also im allgemeinen keine Bewegung sind.

Definition 3.3.6 *Eine Abbildung der Ebene auf sich heißt* **zentrische Streckung**, *wenn es eine positive reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, und einen Fixpunkt $S \in \Gamma$ gibt, so daß für jeden Punkt P und sein Bild P' gilt:*

(a) P' liegt auf der von S ausgehenden Halbgeraden durch P.

(b) $|\overline{P'S}| = k \cdot |\overline{PS}|$.

S heißt **Streckzentrum**, *k* **Streckfaktor**. *Bild und Urbild einer zentrischen Streckung heißen* **zentrisch ähnlich**.

Bemerkungen 3.3.7:

(1) Eine zentrische Streckung ist durch Streckzentrum und Streckfaktor eindeutig festgelegt.

(2) Für $k = 1$ ist jede entsprechende zentrische Streckung gleich der Identität.

(3) Jede zentrische Streckung ist bijektiv, d.h. jeder Punkt der Ebene hat insbesondere genau einen Urbildpunkt. Die zentrische Ähnlichkeit ist eine symmetrische Relation.

(4) Unter einer **Dilatation** mit Zentrum S und Faktor $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, versteht man für $k > 0$ die entsprechende zentrische Streckung und für $k < 0$ eine zentrische Streckung mit Faktor $|k|$ und anschließender Punktspiegelung an S.

Für die Abbildung von Geraden, Strecken und Winkel gilt:

Satz 3.3.8 *Sei f eine zentrische Streckung mit Streckzentrum S und Streckfaktor k.*

(a) Jede Gerade durch S ist Fixgerade von f.

(b) Jede Gerade, die S nicht enthält, wird auf eine dazu parallele Gerade abgebildet.

(c) Eine Strecke wird auf eine Strecke k-facher Länge abgebildet.

(d) Jeder Winkel wird auf einen kongruenten Winkel abgebildet.

(e) Ein Dreieck wird auf ein anderes Dreieck mit zum Urbild paarweise parallelen Seiten k-facher Länge, paarweise kongruenten Winkeln und demselben Umlaufsinn abgebildet.

(f) Ein Kreis mit Radius r wird auf einen Kreis mit Radius $k \cdot r$ abgebildet.

Für je zwei Dreiecke und allgemeiner je zwei n-Ecke kann man aus bestimmten Eigenschaften die zentrische Ähnlichkeit erkennen:

Satz 3.3.9 *(a) Zwei Dreiecke, bei denen je zwei Seiten paarweise parallel sind und die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden, sind zentrisch ähnlich. Insbesondere sind auch die dritten Seiten zueinander parallel.* *(Desargues)*

(b) *Zwei inkongruente Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten sind zentrisch ähnlich.*

(c) *Zwei n-Ecke, deren Seiten paarweise parallel sind und bei denen parallele Seiten konstantes Längenverhältnis $k \neq 1$ haben, sind zentrisch ähnlich.*

Bemerkung 3.3.10: Sind bei zwei n-Ecken, $n > 3$, nur alle entsprechenden Seiten parallel, dann müssen sie nicht zentrisch ähnlich sein, wie man am Beispiel von einem Quadrat und einem geeigneten Rechteck erkennt.

Satz 3.3.11 *Ist F eine Fläche mit Flächeninhalt $|F|$, f eine zentrische Streckung mit Streckfaktor k und $F' = f(F)$. Dann hat F' den Flächeninhalt $|F'| = k^2|F|$.*

Im folgenden wird gezeigt, daß die Dilatationen (mit Faktor $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, genau die Abbildungen der Ebene auf sich sind, die die Eigenschaften von Satz 3.3.8 (a) und (b) haben.

Nach Satz 2.4.8 ist jede dieser Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen, eine Translation. Andererseits kann eine solche Abbildung höchstens einen Fixpunkt haben, wenn sie nicht die identische Abbildung ist:

Satz 3.3.12 *Sei $f \neq id$ eine Abbildung der Ebene auf sich, die jede Gerade auf sich oder eine Parallele abbildet. Dann gilt:*

(a) *Ist S Fixpunkt, dann ist jede Gerade durch S Fixgerade von f.*

(b) *f hat höchstens einen Fixpunkt.*

Damit ergibt sich für derartige Abbildungen mit genau einem Fixpunkt:

Satz 3.3.13 *Sei f eine Abbildung der Ebene auf sich, die jede Gerade auf sich oder eine Parallele abbildet und genau einen Fixpunkt S hat (d.h. f ist weder die Identität noch eine Translation). Dann gilt:*

(a) *Für jeden Punkt $P \in \Gamma$ mit $P' := f(P)$ sind die Punkte P, P' und S kollinear.*

(b) *Eine Gerade g ist genau dann Fixgerade von f, wenn $S \in g$.*

(c) *Durch Vorgabe des Fixpunktes S und des Bildpunktes A' zu einem festen Punkt $A \neq S$ ist f eindeutig festgelegt.*

(d) *Sei $A \neq S$ beliebig, $A' = f(A)$ und*

$$k := \begin{cases} -\dfrac{|SA'|}{|SA|} & \text{für} \quad S \in AA' \\[2ex] \dfrac{|SA'|}{|SA|} & \text{für} \quad S \notin AA' \end{cases}.$$

Für $k > 0$ ist f eine zentrische Streckung mit Zentrum S und Faktor k und für $k < 0$ eine zentrische Streckung mit Zentrum S und Faktor $|k|$ und anschließender Punktspiegelung an S.

Wir verknüpfen nun Dilatationen und Bewegungen:

Definition 3.3.14 *Die Verknüpfung von endlich vielen Dilatationen mit endlich vielen Bewegungen heißt* **Ähnlichkeitsabbildung**. *Zwei geometrische Figuren, die durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abgebildet werden, heißen* **ähnlich**.

Bemerkungen 3.3.15:

(1) Dilatationen mit Faktor $k < 0$ kann man als zentrische Streckung mit anschließender Punktspiegelung auffassen. Daher betrachten wir hier nur Verknüpfungen von zentrischen Streckungen mit Bewegungen.

(2) Da zentrische Streckungen und gleichsinnige Bewegungen die Orientierung (eines Dreiecks) nicht ändern, ändert sich die Orientierung bei einer Ähnlichkeitsabbildung genau dann, wenn eine ungerade Anzahl ungleichsinniger Bewegungen auftritt.

Satz 3.3.16 *Ähnlichkeitsabbildungen sind geraden-, winkel-, parallelen- und verhältnistreu.*

Das Bild eines Dreiecks unter einer Ähnlichkeitsabbildung ist also ein Dreieck, dessen Winkel paarweise kongruent zu den Winkeln des Urbildes sind, und deren Seitenlänge jeweils zu der Länge der entsprechenden Seite des Urbildes dasselbe Verhältnis hat. Umgekehrt gilt

Satz 3.3.17 *Gegeben seien zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$, und entsprechende Innenwinkel seien zueinander kongruent. Dann gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung f mit $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ und $C' = f(C)$.*

Korollar 3.3.17.1 *Sind zwei Winkel eines Dreiecks kongruent zu den entsprechenden Winkeln eines anderen Dreiecks, dann sind die Längenverhältnisse entsprechender Seiten gleich.*

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 3.3.18 *Stimmen bei zwei Dreiecken die Längenverhältnisse entsprechender Seiten überein, dann sind sie ähnlich, d.h. entsprechende Winkel sind kongruent.*

Index

AB, 6
$\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$, 10
$\perp$, 14
$\overline{AB}$, 6
$\prec$, 5
$g_{A\rightarrow}$, 6
$g_{\leftarrow A}$, 6
id, 12
Ähnlichkeitsabbildung, 33
ähnlich, 33

Abstand, 9
Abstandsaxiome, 9
achsensymmetrisch, 19
Anordnungsaxiome, 5
Archimedes, 27
    Axiom des, 27
Außenwinkel, 20
Außenwinkelsatz, 20
Axiom, 1
Axiom von Pasch, 7
Axiomensystem
    minimales, 1
    vollständiges, 1
    widerspruchsfreies, 1

Basis, 17
Basiswinkel, 17
Berührpunkt, 24
Bewegung, 15
    gleichsinnige, 18
    ungleichsinnige, 18
Bewegungsgruppe, 25
Bolyai, 2

Definition, 1
Dilatation, 31
Drehpunkt, 23
Drehung, 23
Drehwinkel, 23
Durchmesser, 24

Ebene, 2
Entfernung, 9
ergänzungsgleich, 29

Euklid, 1

Fermat, 30
Fermatsche Vermutung, 30
Fixgerade, 13
Fixpunkt, 13
Fläche, 28

Gauß, 2
geometrische Figur, 16
Gerade, 2
Geradenspiegelung, 12
geradentreu, 15
gleichschenklig, 17
gleichseitig, 17
Gleitspiegelung, 26

Höhe, 24
Höhensatz, 30
Halbebene, 7
Halbgerade, 6
Hilbert, 1
Hypothenuse, 29

identische Abbildung, 12
Identität, 12
injektiv, 12
innerer Punkt, 28
Inzidenzaxiome, 2
inzidiert, 2

Kathete, 29
Kathetensatz, 30
kollinear, 3
Kongruenz, 16
    Strecken-, 9
Kongruenzabbildung, 15
Kongruenzsatz sss, 17
Kongruenzsatz sws, 17
Kongruenzsatz wsw, 17
Kreis, 9
Kreisfläche, 28
Kreisradius, 9

Länge, 9
liegt auf derselben Seite, 6

Lobatschewski, 2
Lot, 14

Maßeinheit, 27
Metrik, 8
  euklidische, 8
  Maximum-, 8
Mittelparallele, 21
Mittelpunkt
  einer Strecke, 10
  eines Kreises, 9
Mittelpunktswinkel, 24
Mittelsenkrechte, 23

Nebenwinkel, 10

offener Kern, 28
orthogonal, 14

parallel, 4
Parallelenaxiom, 4
Parallelogramm, 20
Parallelverschiebung, 21
Pasch, 7
  Axiom von, 7
positiv orientiert, 23
Punkt, 2
  innerer, 28
  Rand-, 28
Punktspiegelung, 19
punktsymmetrisch, 19
pythagoräisches Tripel, 30
Pythagoras
  Satz des, 30

Quadratur des Kreises, 30

Rand, 28
Randpunkt, 28

Satz, 2
Satz des Pythagoras, 30
Scheitel, 10
Scheitelwinkel, 10
Schenkel, 10
Schubspiegelachse, 26
Schubspiegelung, 26
Sehne, 24
Sekante, 24
senkrecht, 14
Spiegelachse, 12
Spiegelbild, 11
Spiegelung, 12
Spiegelungsaxiome, 12
Strahl, 6
Strahlensatz
  Erster, 31
  Umkehrung des ersten, 31
  Zweiter, 31
Strecke, 6
streckentreu, 15
Streckfaktor, 31
Streckung
  zentrische, 31
Streckzentrum, 31
Stufenwinkel, 20
surjektiv, 12
Symmetrieachse, 11, 12

Tangente, 24
Thales, 24
  Satz des, 24
Translation, 21
Translationsgruppe, 25

Umfangswinkel, 24
Umfangswinkelsatz, 24
Umkreis, 24

Vektor, 25
Verknüpfungsaxiome, 2

Wechselwinkel, 20
Winkel, 10
  gerichteter, 10
  gestreckter, 10
  Inneres eines, 10
  Null-, 10
  orientierter, 10
  Voll-, 10
Winkelfeld, 10
Winkelhalbierende, 17
Winkelsumme im Dreieck, 20

zentrisch ähnlich, 31
zentrische Streckung, 31
Zentrum der Streckung, 31
zerlegungsgleich, 28