Scriptum zur Vorlesung
Komplexe Mannigfaltigkeiten

Prof. W. Hoffmann

1 Differenzierbare Abbildungen

Es sei K einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1 *Es seien X und Y endlichdimensionale K-Vektorräume und U eine offene Teilmenge von X. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt K-differenzierbar an der Stelle $a \in U$, wenn es eine Abbildung $F : U \to \mathrm{Hom}_K(X,Y)$ gibt, die an der Stelle a stetig ist, so dass gilt*

$$f(x) = f(a) + F(x)(x-a)$$

Wir können X und Y durch Wahl von Basen mit Räumen K^n bzw. K^m von Spaltenvektoren identifizieren. Homomorphismen $K^n \to K^m$ sind durch $(m \times n)$-Matrizen gegeben.

Lemma 1 *Ist f an der Stelle a differenzierbar, so ist die Ableitung $f'(a) := F(a)$ unabhängig von der Wahl von F.*

Beweis. Angenommen, $F + G$ erfüllt dieselben Bedingungen wie F. Dann gilt $G(a+v)v = 0$ für v in einer Umgebung V der Null. Wir können eine Nullumgebung W wählen, so dass $tW \subset V$ für alle $t \in K$ mit $0 < |t| \leq 1$. Ist $w \in W$, so folgt $G(a+tw)w = 0$ und durch Grenzübergang $G(a)w = 0$. Da W eine Basis von X enthält, folgt $G(a) = 0$. □

Bemerkung. Meist wird die Differenzierbarkeit definiert, indem man die Existenz einer Abbildung $L \in \mathrm{Hom}_K(X,Y)$ verlangt, so dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

wobei eine Norm auf X fixiert wurde. Natürlich ist dann $f'(a) = L$. Bezeichnen wir den Zähler mit $r(x)$, so ergibt sich aus unserer Definition

$$r(x) = (F(x) - F(a))(x-a).$$

Umgekehrt kann man z. B.

$$F(a+v)w = Lv + \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} r(v) = Lv + \left\langle w, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{r(v)}{\|v\|}$$

setzen, wobei man ein Hermitesches Skalarprodukt auf X benutzt. Beide Definitionen sind also äquivalent. Ist f an einer Stelle differenzierbar, so ist f an dieser Stelle auch stetig.

Unsere Definition eignet sich am besten zum Beweis der Differentiationsregeln (Summen- und Produktregel, Kettenregel). Die alternative Definition zeigt: Ist die Abbildung f zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen an einer Stelle $\mathbb{R}$-differenzierbar und ist $f'(a)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, so ist f an dieser Stelle $\mathbb{C}$-differenzierbar. Es ist auch offensichtlich, dass eine Abbildung $f : U \to Y$ an einer Stelle genau dann differenzierbar ist, wenn ihre Koordinaten bezüglich einer Basis von Y an dieser Stelle differenzierbar sind.

Definition 2 *Die Abbildung $f : U \to Y$ heißt null mal stetig differenzierbar, wenn sie stetig ist. Sie heißt k mal stetig differenzierbar für $k > 0$, wenn sie an jeder Stelle in U differenzierbar ist und $f' : U \to \mathrm{Hom}_K(X, Y)$ $k-1$ mal stetig differenzierbar ist.*

Die $k$te Ableitung $f^{(k)}(a)$ ist dann eine K-multilineare Abbildung $X^k \to Y$.

Der Satz über die implizite und inverse Funktion kann im komplexen Fall genau wie im reellen Fall bewiesen werden. Man kann ihn aber auch aus dem reellen Fall ableiten, weil die Ableitung der impliziten bzw. inversen Abbildung anhand ihrer Formel als $\mathbb{C}$-linear zu erkennen ist.

2 Analytische Abbildungen

Definition 3 *Es sei U eine offene Teilmenge von K^n und Y ein endlichdimensionaler normierter K-Vektorraum. Eine Abbildung $f : U \to Y$ heißt K-analytisch an der Stelle $a \in U$, wenn es für jedes $I \in \mathbb{N}^n$ ein $y_I \in Y$ gibt, so dass für x in einer Umgebung von a gilt*

$$f(x) = \sum_{I \in \mathbb{N}^n}^{\infty} y_I (x-a)^I, \tag{1}$$

wobei die Reihe absolut konvergiert.

Dabei schreiben wir für $I = (i_1, \ldots, i_n)$

$$v^I = v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n}.$$

Wegen der absoluten Konvergenz (bezüglich der Norm in Y) spielt die Reihenfolge der I keine Rolle.

Satz 1 *Konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{I \in \mathbb{N}^n} y_I x^I$$

an der Stelle $c \in K^n$, so konvergiert sie absolut gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge C von

$$D = \{x \in K^n : |x_1| < |c_1|, \ldots, |x_n| < |c_n|\}$$

gegen eine Funktion f, die in jedem Punkt von D analytisch ist, und ihre Ableitung kann durch gliedweise Differentiation bestimmt werden.

Beweis. Wir können annehmen, dass alle $|c_k| > 0$ sind, da sonst nichts zu beweisen ist. Es sei

$$r_k = \max_{x \in C} \frac{|x_k|}{|c_k|},$$

so dass $0 \leq r_k < 1$. Dann ist

$$\sum_I \|y_I x^I\| \leq \sum_I \|y_I c^I\| r^I \leq \sup_I \|y_I c^I\| \sum_I r^I,$$

wobei das Supremum wegen der absoluten Konvergenz an der Stelle c existiert, und

$$\sum_I r^I = \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=0}^\infty r_k^{i_k} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - r_k}.$$

Es folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz und somit die Stetigkeit von f.

Ist $b \in D$ und $v \in K^n$ mit $|v_k| < |c_k| - |b_k|$ für alle k, so gilt

$$\sum_I y_I (b+v)^I = \sum_I y_I \sum_{J \leq I} \binom{I}{J} b^{I-J} v^J = \sum_J \left(\sum_{I \geq J} \binom{I}{J} y_I b^{I-J} \right) v^J, \qquad (2)$$

wobei $J \leq I$ bedeutet, dass $j_k \leq i_k$ für alle k, und

$$\binom{I}{J} = \prod_{k=1}^n \binom{i_k}{j_k}.$$

Wir können nämlich den großen Umordnungssatz anwenden, denn wenn wir jeden Term durch seine Norm abschätzen, erhalten wir

$$\sum_I \|y_I\| \sum_{J \leq I} \binom{I}{J} |b^{I-J} v^J| \leq \sum_I \|y_I\| \prod_{k=1}^n (|b_k| + |v_k|)^{i_k} \leq \sum_I \|y_I c^I\|.$$

Wir beweisen die Behauptung über die Ableitung zunächst für $b = 0$. Wir klammern die Variable x_n aus allen Termen aus, in denen sie vorkommt:

$$f(x) = f(0) + x_n \sum_{I \in N_n} y_I x^{I'} + \sum_{I \in \mathbb{N}^{n-1}} y_{I,0} x^{I,0},$$

wobei

$$N_n = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \,:\, i_n > 0\}, \qquad (i_1, \ldots, i_n)' = (i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n - 1).$$

Dann verfahren wir mit dem Rest ebenso bezüglich der Variablen x_{n-1} usw.:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{I \in N_k} y_{I,0_{n-k}} x^{I',0_{n-k}},$$

wobei 0_{n-k} das $(n-k)$-Tupel aus lauter Nullen bezeichnet. Die hier vorkommenden Reihen lassen sich durch die Ausgangsreihe abschätzen, konvergieren also auf C gegen stetige Funktionen. Aus der Definition folgt nun, dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist und

$$f'(0)v = y_{1,0,\ldots,0} v_1 + \cdots + y_{0,\ldots,0,1} v_n = \sum_{|I|=1} y_I v^I,$$

wobei wir für Multiindizes definieren

$$|(i_1, \ldots, i_n)| = i_1 + \cdots + i_n.$$

Hat man eine Potenzreihe der Form (1), so kann man dieses Ergebnis auf die Funktion $f(a + v)$ anwenden.

Ist $b \in C$ beliebig, so wenden wir es auf die Formel (2) an. Wir erhalten für $f'(b)v$ die Teilsumme über alle J mit $|J| = 1$. Dies ist dieselbe Formel, die man durch gliedweise Differentiation erhält, denn ist z. B. $j_k = 1$ die nichtverschwindende Komponente von J, so gilt $\binom{I}{J} = i_k$. $\square$

Folgerung 1 *Ist f an der Stelle a K-analytisch, so ist sie in einer Umgebung von a unendlich oft K-differenzierbar, und die Koeffizienten der sie darstellenden Reihe sind eindeutig bestimmt durch*

$$f^{(k)}(a)(v, \ldots, v) = k! \sum_{|I|=k} y_I v^I.$$

(Die Reihe ist also die Taylorreihe von f.)

Beweis. Wir können den Satz wiederum auf die Ableitung anwenden usw. Die $k$te Ableitung angewendet auf k gleiche Vektoren v ist die k-fache Richtungsableitung, also die $k$te Ableitung von $f(a+tv)$ als Funktion einer Variablen $t \in K$. □

Man kann durch Abschätzungen beweisen, dass Summe, Produkt und Verkettung analytischer Abbildungen analytisch sind, und auch der Satz über die implizite und inverse Funktion gilt im Rahmen der analytischen Funktionen. Dies wird sich aber sowieso nebenbei aus Satz 4 ergeben.

Satz 2 *Ist U ein Gebiet (eine zusammenhängende offene Teilmenge) in K^n und verschwindet die analytische Funktion $f : U \to K$ auf einer offenen Teilmenge von U, so verschwindet sie auf ganz U.*

Beweis. Es sei V die Menge aller Punkte von U, in deren Umgebung f verschwindet. Dies ist eine offene und nach Voraussetzung nichtleere Menge. Alle Ableitungen von f sind stetig und verschwinden somit auf dem Abschluss von V in U. Gehört a zu diesem Abschluss, so ist die Taylorentwicklung von f um a gleich Null, also ist $a \in V$. Die Menge V ist also abgeschlossen in U. Da U zusammenhängend ist, folgt $V = U$. □

Definition 4 *Eine Abbildung von einer offenen Menge in $\mathbb{C}^n$ nach einem $\mathbb{C}$-Vektorraum Y heißt holomorph, wenn sie in jedem Punkt $\mathbb{C}$-differenzierbar ist.*

Satz 3 (Cauchysche Integralformel) *Es sei $r_1 > 0$, $\ldots$, $r_n > 0$ und*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}.$$

Ist f holomorph auf einer Umgebung von $\bar{D}$, dann gilt für $a \in D$

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_1} \cdots \int_{|z_n|=r_n} \frac{f(z)}{(z_1-a_1)\ldots(z_n-a_n)}\, dz_n \ldots dz_1.$$

Hierbei wählen wir jeweils den positiven Umlaufsinn. Da der Integrationsbereich kompakt und der Integrand stetig ist, gibt es keine Konvergenzprobleme.

Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist dieser Satz aus der Funktionentheorie bekannt. Angenommen, er gilt bereits für $n-1$ Variablen. Die Funktion $f(z_1, \ldots, z_{n-1}, a_n) = f(z', a_n)$ ist holomorph auf einer Umgebung des Abschlusses von

$$D' = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : |z_1| < r_1, \ldots, |z_{n-1}| < r_{n-1}\}.$$

Also gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{|z_1|=r_1} \dots \int_{|z_{n-1}|=r_{n-1}} \frac{f(z', a_n)}{(z_1 - a_1)\dots(z_{n-1} - a_{n-1})}\, dz_{n-1}\dots dz_1.$$

Für festes $z' \in \bar{D}'$ ist $f(z', z_n)$ in einer Umgebung von $\{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| \leq r_n\}$ holomorph, also gilt nach dem Induktionsanfang

$$f(z', a_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n|=r_n} \frac{f(z', z_n)}{z_n - a_n}\, dz_n,$$

Setzen wir dies ein, so folgt die Behauptung. □

Jetzt können wir für $K = \mathbb{C}$ die Umkehrung der ersten Aussage von Folgerung 1 beweisen.

Satz 4 *Jede holomorphe Abbildung ist analytisch.*

Beweis. Es gilt für $a \in D$

$$\frac{1}{z_k - a_k} = \frac{1}{z_k\left(1 - \frac{a_k}{z_k}\right)} = \frac{1}{z_k} \sum_{i_k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{z_k}\right)^{i_k},$$

also

$$\frac{1}{(z_1 - a_1)\dots(z_n - a_n)} = \frac{1}{z_1 \dots z_n} \sum_{I \in \mathbb{N}^n} \frac{a^I}{z^I},$$

wobei die Reihe gleichmäßig über z im Integrationsbereich konvergiert. Setzen wir dies in der Cauchyschen Integralformel ein und vertauschen Integration und Summation, so erhalten wir eine Potenzreihe in a mit den Koeffizienten

$$y_I = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r_1} \dots \int_{|z_n|=r_n} \frac{f(z)}{z^I} \frac{dz_n}{z_n} \dots \frac{dz_1}{z_1}.$$

□

Folgerung 2 *Die Verkettung von K-analytischen Abbildungen ist K-analytisch. Insbesondere kann man von K-analytischen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen sprechen, ohne eine Basis von X festzulegen.*

Beweis der Folgerung. Für $K = \mathbb{C}$ folgt sie mit Hilfe von Satz 4 aus der entsprechenden Aussage über $\mathbb{C}$-differenzierbare Abbildungen.

Angenommen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-analytisch, d. h. ihre Taylorreihe konvergiert in einer Umgebung von a in $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 1 konvergiert sie in einer Umgebung V von a in $\mathbb{C}^n$, stellt dort nach Folgerung 1 also eine holomorphe Abbildung $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ dar, und Analoges gilt für eine im Punkt $f(a)$ $\mathbb{R}$-analytische Funktion g. Die Funktion $g \circ f$ stimmt auf $U \cap V$ mit $g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$ überein, ist also nach Satz 4 durch eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten gegeben. Nach Folgerung 1 sind diese Koeffizienten als höhere partielle Ableitungen gegeben. Die partiellen Ableitungen von $f_{\mathbb{C}}$ sind aber die gleichen wie die von f, denn der reelle Differenzenquotient ist die Einschränkung des komplexen. Also sind die Koeffizienten der Potenzreihe reell. $\square$

3 Mannigfaltigkeiten

Definition 5 *(i) Für jede offene Teilmenge U eines topologischen Raumes X sei eine Menge $\mathcal{S}(U)$ von Funktionen auf U mit Werten in K gegeben. Die Zuordnung $\mathcal{S}$ heißt Funktionengarbe, wenn sie folgende Lokalitätseigenschaft hat:*

Ist $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Familie von offenen Mengen in X (indiziert durch eine beliebige Menge A), ist

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

und $f : U \to K$, so gilt $f \in \mathcal{S}(U)$ genau dann, wenn $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{S}(U_\alpha)$ für alle $\alpha \in A$.

(ii) Es sei $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X und $\mathcal{T}$ eine Funktionengarbe auf Y. Ein Morphismus von $(X, \mathcal{S})$ nach $(Y, \mathcal{T})$ ist eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ mit der Eigenschaft, dass für jede offene Menge V in Y und jedes $g \in \mathcal{T}(V)$ gilt

$$F^*(g) := g \circ F \in \mathcal{S}(F^{-1}(V)).$$

Gibt es zudem einen Morphismus G von $(Y, \mathcal{T})$ nach $(X, \mathcal{S})$, so dass $F \circ G = \mathrm{id}$ und $G \circ F = \mathrm{id}$ gilt, so heißt F ein Isomorphismus.

(iii) Es sei $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X und Z eine offene Teilmenge von X. Betrachten wir $\mathcal{S}(U)$ nur für $U \subset Z$, so erhalten wir eine Funktionengarbe auf Z, genannt Einschränkung von $\mathcal{S}$ auf Z, abgekürzt $\mathcal{S}|_Z$.

(iv) Ist $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X, so definieren wir eine Funktionengarbe $F(\mathcal{S})$ auf Y durch

$$F(\mathcal{S})(V) = \{g : Y \to K \mid F^*(g) \in \mathcal{S}(F^{-1}(V))\}.$$

Beachte, dass $F^{-1}(V)$ offen in X ist. Es ist klar, dass die Verkettung zweier Morphismen von Funktionengarben wieder ein Morphismus von Funktionengarben ist. Auch die natürliche Abbildung $Z \to X$ in (iii) ist ein Morphismus $(Z, \mathcal{S}|_Z) \to (X, \mathcal{S})$.

Beispiel 1. Besteht für jede offene Teilmenge U in X die Menge $\mathcal{S}(U)$ aus allen stetigen Funktionen auf U, so ist $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X. Ist $\mathcal{T}$ auf Y analog definiert, so ist *jede* stetige Abbildung $X \to Y$ ein Morphismus $(X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$.

Beispiel 2. Ist X eine offene Menge in K^n und besteht für jede offene Teilmenge U von X die Menge $\mathcal{S}(U)$ aus allen stetig K-differenzierbaren Funktionen auf U, so ist $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X. Ist $\mathcal{T}$ auf einer offenen Teilmenge Y von K^m analog definiert, so ist eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ genau dann ein Morphismus $(X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$, wenn sie K-differenzierbar ist. In der Tat, die Koordinatenfunktionen $g_k(y) = y_k$ gehören ja zu $\mathcal{T}(Y)$. Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus, so ist $F_k = F \circ g_k \in \mathcal{S}(F^{-1}(Y)) = \mathcal{S}(X)$, und F ist somit K-differenzierbar. Die Umkehrung ist offensichtlich.

Beispiel 3. Im vorigen Beispiel können wir überall das Wort „stetig K-differenzierbar“ durch „r mal stetig K-differenzierbar“ oder „unendlich oft K-differenzierbar“ oder „K-analytisch“ ersetzen.

Definition 6 *Ist X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_X$ die Garbe der glatten (d. h. unendlich oft $\mathbb{R}$-differenzierbaren) Funktionen und mit $\mathcal{A}_X$ die Garbe der $\mathbb{R}$-analytischen Funktionen auf X. Ist $X \subset \mathbb{C}^n$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf X. Wir lassen den Index weg, wenn er aus dem Zusammenhang klar ist.*

Definition 7 *Es sei $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X und $\mathcal{T}$ eine Funktionengarbe auf Y. Wir sagen, dass $(X, \mathcal{S})$ lokal isomorph zu $(Y, \mathcal{T})$ ist, wenn es zu jedem $a \in X$ eine Umgebung U, eine offene Menge V in Y und einen Isomorphismus $\varphi : (U, \mathcal{S}|_U) \to (V, \mathcal{T}|_V)$ gibt.*

Das Paar $(X, \mathcal{S})$ heißt n-dimensionale glatte (bzw. reell-analytische, bzw. holomorphe) Mannigfaltigkeit, wenn es lokal isomorph zu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ (bzw. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$) ist.

Die in der Definition auftretenden lokalen Isomorphismen (genauer, die Paare (U, φ)) heißen Karten von $(X, \mathcal{S})$.

Beispiel 4 (projektiver Raum). Es sei H eine Divisionsalgebra über K (also $H = K$ oder $K = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{H}$) und X ein rechter H-Vektorraum. Wir bezeichnen mit $P(X)$ die Menge aller eindimensionalen Unterräume von X. Ordnen wir einem $x \in X$, $x \neq 0$, den Unterraum $xH = \{xq : q \in H\}$ zu, so erhalten wir eine surjektive Abbildung $\pi : X \setminus \{0\} \to P(X)$. Wir nennen eine Menge $V \subset P(X)$ offen, wenn $\pi^{-1}(V)$ offen ist. Dann ist π stetig. Es sei $\mathcal{T}$ eine der Funktionengarben $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{O}$ auf der offenen Menge $X \setminus \{0\}$ im K-Vektorraum X, und es sei $\mathcal{S} = \pi(\mathcal{T})$ im Sinne von Definition 5(iv). Wir behaupten, dass $(P(X), \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Wir definieren für jedes $h \in \mathrm{Hom}_H(X, H)$ eine sogenannte affine Karte $\varphi : U \to A$, wobei

$$U = \{L \in P(X) \,:\, h|_L \neq 0\}$$

offen in $P(X)$ und

$$A = \{x \in X : h(x) = 1\}$$

ein affiner Unterraum von X ist, den wir auf naheliegender Weise mit einer Funktionengarbe $\mathcal{T}_A$ versehen. (Man kann A mit einem affinen Raum der Form K^n identifizieren, indem man einen Korrdinatenursprung in A und eine Basis von $\operatorname{Ker} h$ wählt.) Und zwar ist

$$\varphi(xH) = xh(x)^{-1}, \qquad \varphi^{-1}(x) = xH.$$

Wegen $\pi^{-1}(U) = \{x \in X \,:\, h(x) \neq 0\}$ und $h(xq) = h(x)q$ ist dies wohldefiniert. Wir behaupten, dass (U, φ) eine Karte von $(P(X), \mathcal{S})$ ist.

Es sei V eine offene Menge in U. Ist $f \in \mathcal{S}(V)$, so $f \circ \pi \in \mathcal{T}(\pi^{-1}(V))$, und wegen $f \circ \varphi^{-1}(x) = f \circ \pi(x)$ ist $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{T}_A(\varphi(V))$. Ist hingegen $g \in \mathcal{T}_A(\varphi(V))$, so ist $\pi \circ g \circ \varphi(x) = g(xh(x)^{-1})$, also $\pi \circ g \circ \varphi \in \mathcal{T}(\pi^{-1}(V))$ und $g \circ \varphi \in \mathcal{S}(V)$. Somit ist unsere affine Karte tatsächlich eine Karte von $(P(X), \mathcal{S})$, und da der projektive Raum $P(X)$ von affinen Karten überdeckt wird, ist er eine Mannigfaltigkeit.

Wir schreiben insbesondere $P_n(H) = P(H^{n+1})$ und

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = \{(x_0 q, x_1 q, \ldots, x_n q) \,:\, q \in H\} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)H.$$

Zu den Standardlinearformen

$$h_j(x_0, \ldots, x_n) = x_j.$$

gehören die affinen Karten $\varphi_j : U_j \to A_j$, die gegeben sind durch

$$\varphi_j(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0 x_j^{-1}, \ldots, x_n x_j^{-1}).$$

Man identifiziert $A_j = \{x \in H^{n+1} \,:\, x_j = 1\}$ mit H^n, indem man die j-te Koordinate weglässt.

Eine Familie von Karten, die X überdeckt, heißt Atlas. Um zu zeigen, dass die traditionelle Definition von Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Atlanten zu unserer Definition äquivalent ist, brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 2 *Es sei X ein topologischer Raum und $\{X_\beta : \beta \in B\}$ eine offene Überdeckung von X. Auf jedem X_β sei eine Funktionengarbe $\mathcal{S}_\beta$ mit Werten in K gegeben, und für alle β, $\gamma \in B$ gelte*

$$\mathcal{S}_\beta|_{X_\beta \cap X_\gamma} = \mathcal{S}_\gamma|_{X_\beta \cap X_\gamma}. \tag{3}$$

Dann gibt es genau eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ auf X, so dass $\mathcal{S}|_{X_\beta} = \mathcal{S}_\beta$ für alle $\beta \in B$.

Beweis. Für jede offene Menge U von X ist

$$U = \bigcup_{\beta \in B} (U \cap X_\beta).$$

Wenn es also eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ wie behauptet gibt, so muss gelten

$$\mathcal{S}(U) = \{f : U \to K \mid f_{U \cap X_\beta} \in \mathcal{S}_\beta(U \cap X_\beta) \quad \forall \beta \in B\}.$$

Um zu beweisen, dass für gegebene $\mathcal{S}_\beta$ eine solche Funktionengarbe $\mathcal{S}$ existiert, müssen wir $\mathcal{S}(U)$ auf diese Weise definieren.

Nun prüfen wir, dass $\mathcal{S}$ eine Garbe ist. Sei also

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \text{und} \quad f : U \to K.$$

Nach Definition von $\mathcal{S}$ ist $f \in \mathcal{S}(U)$ genau dann, wenn

$$f|_{U \cap X_\beta} \in \mathcal{S}_\beta(U \cap X_\beta) \quad \text{für alle } \beta \in B.$$

Wegen

$$U \cap X_\beta = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap X_\beta)$$

und der Garbeneigenschaft der $\mathcal{S}_\beta$ ist dies äquivalent zu

$$f|_{U_\alpha \cap X_\beta} \in \mathcal{S}_\beta(U_\alpha \cap X_\beta) \quad \text{für alle } \alpha \in A \text{ und } \beta \in B,$$

und nach der Definition von $\mathcal{S}$ ist letzteres genau dann der Fall, wenn

$$f|_{U_\alpha} \in \mathcal{S}(U_\alpha) \quad \text{für alle } \alpha \in A.$$

Schließlich prüfen wir nach, dass für ein beliebiges $\beta \in B$ gilt $\mathcal{S}|_{X_\beta} = \mathcal{S}_\beta$. Sei also U offen in X_β (und somit in X) und $f : U \to K$. Ist $f \in \mathcal{S}(U)$, so folgt $f \in \mathcal{S}_\beta(U)$ aus der Definition von $\mathcal{S}$. Umgekehrt sei $f \in \mathcal{S}_\beta(U)$. Dann gilt für jeses $\gamma \in B$, da $\mathcal{S}_\beta$ eine Funktionengarbe ist,

$$f|_{U \cap X_\gamma} \in \mathcal{S}_\beta(U \cap X_\gamma),$$

und wegen (3) folgt

$$f|_{U \cap X_\gamma} \in \mathcal{S}_\gamma(U \cap X_\gamma).$$

Somit ist $f \in \mathcal{S}(U)$. □

Satz 5 *(i) Ist* $(X, \mathcal{S})$ *eine glatte (bzw. reell-analytische bzw. holomorphe) Mannigfaltigkeit, so ist für beliebige Karten* (U_1, φ_1) *und* (U_2, φ_2) *die Abbildung*

$$(\varphi_1|_{U_1 \cap U_2})^{-1} \circ (\varphi_2|_{U_1 \cap U_2}) : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Diffeomorphismus (bzw. reell-analytischer Isomorphismus bzw. biholomorph).
(ii) Umgekehrt sei X *ein topologischer Raum und* $\mathfrak{A}$ *eine Familie von Paaren* (U, φ)*, wobei* U *eine offene Menge in* X *und* φ *ein Homöomorphismus auf eine offene Menge in* K^n *ist, so dass* X *von den Mengen* U *überdeckt wird und für beliebige* (U_1, φ_1) *und* $(U_2, \varphi_2) \in \mathfrak{A}$ *obige Eigenschaft gilt. Dann gibt es genau eine Funktionengarbe* $\mathcal{S}$ *auf* X*, so dass* $(X, \mathcal{S})$ *eine Mannigfaltigkeit und* $\mathfrak{A}$ *ihr Atlas ist.*

Beweis.
(i) Wir beschränken uns der Kürze halber auf den holomorphen Fall. Sind (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) Karten von $(X, \mathcal{S})$, so ist $\varphi_1|_{U_1 \cap U_2}$ ein Isomorphismus von $(U_1 \cap U_2, \mathcal{S}|_{U_1 \cap U_2})$ auf $(\varphi_1(U_1 \cap U_2), \mathcal{O})$. Analoges für $\varphi_2|_{U_1 \cap U_2}$. Verketten wir den zweiten dieser Isomorphismen mit dem Inversen des ersten, so sehen wir, dass die fragliche Abbildung ein Isomorphismus

$$(\varphi_1(U_1 \cap U_2), \mathcal{O}) \to (\varphi_2(U_1 \cap U_2), \mathcal{O})$$

ist. Nach Beispiel 3 ist ein solcher Morphismus eine holomorphe Abbildung. Dasselbe gilt für sein Inverses.
(ii) Durch jedes $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ wird eine Funktionengarbe auf U definiert, so dass φ ein Isomorphismus ist. Die Bedingung an die Übergangsabbildungen ist äquivalent zu Bedingung (3), und nach Lemma 2 existiert dann eine Funktionengarbe $\mathcal{S}$ auf X mit den vorgegebenen Einschränkungen auf die Karten. □

Die Bezeichnung $(X, \mathcal{S})$ für eine Mannigfaltigkeit ist etwas schwerfällig. Häufig lässt man die Funktionengarbe $\mathcal{S}$ der Kürze halber weg, wie wir es ja auch schon mit der Topologie getan haben. Wird sie wieder benötigt, so schreibt man oft $\mathcal{E}_X$, $\mathcal{A}_X$ oder $\mathcal{O}_X$ in Abhängigkeit vom Typ der Mannigfaltigkeit (glatt, reell-analytisch oder holomorph).

Sind $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ zwei Mannigfaltigkeiten desselben Typs mit Atlanten $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so kann man jedem Paar von Karten $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ und $(V, \psi) \in \mathfrak{B}$ eine Abbildung

$$\varphi \times \psi : U \times V \to K^m \times K^n$$

zuordnen, und die Menge der Paare $(U \times V, \varphi \times \psi)$ bildet dann bekanntlich einen Atlas für die Struktur einer Mannigfaltigkeit auf dem kartesischen

Produkt $X \times Y$. Die Projektionen

$$P : X \times Y \to X, \qquad Q : X \times Y \to Y$$

sind dann Morphismen von Mannigfaltigkeiten. Die Definition der entsprechenden Funktionengarbe auf $X \times Y$ nach Satz 5 ist etwas umständlich. Jedenfalls hat die Produktmannigfaltigkeit folgende Eigenschaft.

Satz 6 *Ist Z eine Mannigfaltigkeit desselben Typs wie X und Y und sind $F : Z \to X$ und $G : Z \to Y$ Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus $H : Z \to X \times Y$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "Q"] & \\
X & & Y \\
& Z \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[uu, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Angenommen, es gibt es einen solchen Morphismus H, und für einen gegebenen Punkt $z \in Z$ sei $H(z) = (x, y)$. Dann ist $P(H(z)) = P(x, y)$, also $F(z) = x$, und analog $G(z) = y$. Es folgt

$$H(z) = (F(x), G(x)),$$

also ist H eindeutig bestimt.

Umgekehrt seien F und G gegeben. Definieren wir H durch obige Gleichung, so prüft man leicht mit Hilfe von Übungsaufgabe 4, dass H ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten ist. $\square$

Folgerung 3 *Ist $(X \times Y, \mathcal{U})$ die Produktmannigfaltigkeit von $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$, so ist $\mathcal{U}$ die kleinste Funktionengarbe auf $X \times Y$, für die P und Q Morphismen von Mannigfaltigkeiten sind.*

Hat nämlich auch $(X \times Y, \mathcal{U}')$ diese Eigenschaft, so gibt es einen Morphismus $H : (X \times Y, \mathcal{U}') \to (X \times Y, \mathcal{U})$ mit $H(x, y) = (x, y)$, also $\mathcal{U}(W) \subset \mathcal{U}'(W)$ für alle offenen W in $X \times Y$.

4 Tangentialvektoren

Definition 8 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Wir führen auf der Menge von Paaren (U, f), wobei U eine Umgebung von a und $f \in \mathcal{S}(U)$*

ist, eine Äquivalenzrelation ein. Die Paare (U_1, f_1) und (U_2, f_2) heißen äquivalent, wenn es eine Umgebung $U \subset U_1 \cap U_2$ von a gibt, so dass $f_1|_U = f_2|_U$. Die Äquivalenzklassen heißen Funktionenkeime an der Stelle a, die Menge der Keime bezeichnen wir als Halm $\mathcal{S}_a$ von $\mathcal{S}$ an der Stelle a. Wir bezeichnen den Keim einer Funktion $f : U \to K$ an der Stelle a mit f_a. Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so bezeichnen wir mit $F_a^* : \mathcal{T}_{f(a)} \to \mathcal{S}_a$ die von F^* induzierte Abbildung.

Im analytischen Fall ist f_a durch die Gesamtheit der höheren Ableitungen von f an der Stelle a bestimmt.

Da die Mengen $\mathcal{S}(U)$ K-Vektorräume und die Einschränkungsabbildungen linear sind, ist auch $\mathcal{S}_a$ ein Vektorraum. Die Multiplikation von Funktionen induziert eine Multiplikation von Keimen und verwandelt $\mathcal{S}_a$ in eine kommutative K-Algebra mit dem Augmentationshomomorphismus $f_a \mapsto f(a)$. Die einem Morphismus F zugeordnete Abbildung F_a^* ist ein Homomorphismus von K-Algebren und verträglich mit den Augmentationsabbildungen.

Definition 9 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Ein Tangentialvektor an X im Punkt a ist eine Derivation $v : \mathcal{S}_a \to K$, d. h. eine K-lineare Abbildung mit der Eigenschaft*

$$v(f_a g_a) = v(f_a)g(a) + f(a)v(g_a).$$

Der Vektorraum der Tangentialvektoren an der Stelle a heißt Tangentialraum $T_a(X, \mathcal{S})$ oder kurz $T_a(X)$.

Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus, so definieren wir $F'(a) : T_a(X) \to T_{f(a)}(Y)$ durch

$$F'(a)v = v \circ F_a^*.$$

Erklärt man $v(f) = v(f_a)$ für $f : U \to K$, so erhält man eine Derivation $\mathcal{S}(U) \to K$.

Ist U eine offene Teilmenge eines Vektorraums X, so kann man jedem Vektor $v \in X$ einen Tangentialvektor $v_a \in T_a(U)$ zuordnen: $v_a(f)$ ist die Richtungsableitung von f nach v an der Stelle a. Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, dass dies einen Isomorphismus $X \cong T_a(U)$ definiert.

Die Abbildung $f'(a)$, auch mit $T_a(F)$ oder $d_a(f)$ bezeichnet, ist K-linear. Für Morphismen gilt die Kettenregel $(F \circ G)'(a) = F'(G(a))G'(a)$. Ist F ein Isomorphismus, so also auch $F'(a)$. Folglich ist $\dim T_a(X) = \dim X$.

Definition 10 *Ein Morphismus F von Mannigfaltigkeiten heißt Immersion (bzw. Submersion), wenn $F'(a)$ für alle a injektiv (bzw. surjektiv) ist.*

Satz 7 (Rangsatz) *Ist $F(X,\mathcal{S}) \to (Y,\mathcal{T})$ ein Morphismus und hat F' konstanten Rang r, so gibt es für beliebiges $a \in X$ Karten $\varphi : U \to K^m$ von X und $\psi : V \to K^n$ von Y mit $\varphi(a) = 0$, $\psi(F(a)) = 0$ und*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass X und Y offene Teilmengen in K^m bzw. K^n sind und $a = 0$, $F(a) = 0$. Wir schreiben als Zeilenvektor[1] $F(x) = (G(x), H(x))$ mit $G(x) \in K^r$ und $H(x) \in K^{n-r}$ sowie $x = (u, v)$ mit $u \in K^r$, $v \in K^{m-r}$. Durch Vertauschen der Koordinaten können wir erreichen, dass $\det \partial_u G(0)$ nicht verschwindet. Die Abbildung

$$\varphi(u, v) = (G(u, v), v)$$

hat die Jacobimatrix

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \partial_u G & \partial_v G \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

die an der Stelle $0 \in K^m$ umkehrbar ist. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist der Morphismus φ in einer Umgebung dieser Stelle umkehrbar. Mit der Bezeichnung $P(u, v) = u$ ist

$$P \circ F = G = P \circ \varphi,$$

also gibt es einen Morphismus N, so dass

$$F \circ \varphi^{-1}(u, v) = (u, N(u, v)).$$

Die Jacobimatrix von $F \circ \varphi^{-1}(u, v)$ ist

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \partial_u N & \partial_v N \end{pmatrix}.$$

Da sie den Rang r hat, muss $\partial_v N = 0$ sein. Also hängt $N(u, v)$ in einer konvexen Umgebung von 0 nicht von der Komponente v ab. Setzen wir für $u \in K^r$ und $w \in K^{n-r}$

$$\psi(u, w) = (u, w - N(u)),$$

so ist ψ in der Umgebung von $0 \in K^n$ ein umkehrbarer Morphismus, und

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u, v) = (u, 0).$$

□

Um Pathologien zu vermeiden, verwendet man das den Begriff „Mannigfaltigkeit“ meist im Sinne von „Hausdorffsche Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie“.

[1] Eigentlich müssten wir mit Spaltenvektoren arbeiten, wann immer Jacobimatrizen auftauchen.

5 Untermannigfaltigkeiten

Definition 11 *Für jede offene Teilmenge U eines topologischen Raumes X sei eine Menge $\mathcal{P}$ von Funktionen auf U mit Werten in K gegeben. Die Zuordnung $\mathcal{P}$ heißt Funktionenprägarbe, wenn für beliebige offene Mengen $V \subset U$ in X gilt: Ist $f \in \mathcal{P}(U)$, so ist $f|_V \in \mathcal{P}(V)$.*

Morphismen und Bilder von Funktionenprägarben sind wie für Funktionengarben definiert.

Ist $\mathcal{P}$ eine Funktionenprägarbe auf X und Z eine beliebige Teilmenge von X, so definieren wir eine Prägarbe $\mathcal{Q} = \mathcal{P}|_Z$ auf Z (mit der induzierten Topologie) wie folgt. Für eine offene Menge W in Z besteht $\mathcal{Q}(W)$ aus allen Funktionen $h : W \to K$, für die es eine offene Menge U in X und eine Funktion $f \in \mathcal{P}(U)$ gibt, so dass $U \cap Z = W$ und $f|_W = h$.

Man überzeugt sich leicht, dass $\mathcal{P}|_Z$ wieder eine Funktionenprägarbe ist.

Lemma 3 *Es sei $\mathcal{P}$ eine Funktionenprägarbe auf X. Für jede offene Menge U sei $\mathcal{S}(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \to K$, für die eine Familie offener Mengen $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ existiert, so dass*

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

und $f|_{U_\alpha} \in \mathcal{P}(U_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ ist. Dann ist $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe, und zwar die kleinste Funktionengarbe, die $\mathcal{P}$ enthält.

Beweis als Aufgabe 7.

Definition 12 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge Z von X heißt Untermannigfaltigkeit, wenn Z mit der induzierten Topologie und der Funktionengarbe $\mathcal{U}$, welche der Funktionenprägarbe $\mathcal{S}|_Z$ zugeordnet ist, eine Mannigfaltigkeit ist.*

Beispiel. Z offen in X, $\mathcal{U} = \mathcal{S}|_Z$.

Satz 8 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge Z von X ist genau dann m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $a \in Z$ eine Karte $\varphi : U \to K^n$ von $(X, \mathcal{S})$ gibt, so dass $a \in U$ und*

$$\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap K^m$$

ist, wobei wir die Standardeinbettung von K^m in K^n benutzen.

Beweis. Es sei $(Z,\mathcal{U})$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in Z$. Für einen gegebenen Keim $h_a \in \mathcal{U}_a$ wählen wir einen Repräsentanten $h \in \mathcal{U}(W)$. Die Funktionengarbe $\mathcal{U}$ ergibt sich aus $\mathcal{S}|_Z$ nach der Konstruktion in Lemma 3. Nach Verkleinerung von W können wir darum annehmen, dass $h \in \mathcal{S}|_Z(W)$. Nach der Definition dieser Funktionenprägarbe gibt es ein mit offenes U in X mit $U \cap Z = W$ und ein $f \in \mathcal{S}(U)$ mit $f|_W = h$. Nach Definition ist $i^*(f) = h$ und darum $i^*(f_a) = h_a$. Also ist $i_a^* : \mathcal{S}_a \to \mathcal{U}_a$ surjektiv, und die Abbildung $i'(a) : T_a(Z) \to T_a(X)$ ist injektiv. Dies gilt für alle Punkte von Z, d. h. i ist eine Immersion.

Nach Satz 7 gibt es Karten $\varphi : U \to K^n$ von X und $\psi : W \to K^m$, so dass $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ und

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

für $x \in \psi(W)$. Wir halten W fest und verkleinern U, so dass $\varphi(U) \subset \psi(W) \times K^{n-m}$ und $U \cap Z = W$, was möglich ist, weil φ stetig und W in der induzierten Topologie von Z offen ist. Dann hat die Karte (U, φ) die geforderte Eigenschaft.

Die Umkehrung ist leicht zu beweisen. $\square$

Satz 9 *Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus mit konstantem Rang und $b \in F(X)$, so ist $F^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $(X, \mathcal{S})$.*

Dies folgt leicht aus den Sätzen 7 und 8.

6 Die Grassmann-Algebra

Definition 13 *Es sei V ein K-Vektorraum. Eine multilineare p-Form $V^p \to K$ heißt alternierend, wenn sich ihr Wert bei der Vertauschung zweier beliebiger Argumente mit -1 multipliziert.*

Null-Formen (Elemente von K) und Eins-Formen (Linearformen) sind automatisch alternierend.

(Alternierende) Multilinearformen hängen eng mit folgenden Begriffen zusammen.

Definition 14 *Die Tensoralgebra eines Vektorraums ist die direkte Summe*

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V),$$

wobei

$$T^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ mal}}.$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so ist

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \mid (i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p\}$$

eine Basis von $T^p(V)$. Dieselbe Konstruktion ist auf den Dualraum von V anwendbar. Elemente $l \in V^* = T^1(V^*)$ sind Linearformen auf V, und allgemeiner kann man jedes Element von $T^p(V^*)$ als multilineare p-Form auf V auffassen, so dass

$$\tau \otimes \tau''(v_1, \ldots, v_{p'+p''}) = \tau'(v_1, \ldots, v_{p'})\tau''(v_{p'+1}, \ldots, v_{p'+p''}). \tag{4}$$

Ist V endlichdimensional, so erhält man alle Multilinearformen auf diese Weise.

Definition 15 *Die Grassmann-Algebra eines Vektorraums ist*

$$\bigwedge(V) = T(V)/I,$$

wobei I das von den Elementen der Form $x \otimes x$ erzeugte zweiseitige Ideal ist. Die Multiplikation in dieser Algebra wird mit $\wedge$ bezeichnet.

Satz 10 *(i) Die Graduierung von $T(V)$ induziert eine Graduierung*

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p(V).$$

(ii) Für $\omega \in \bigwedge^p(V^*)$ und $\psi \in \bigwedge^q(V^*)$ gilt

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{pq}\psi \wedge \omega.$$

(iii) Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so bilden die Elemente $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ mit $i_1 < \cdots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p(V)$. Insbesondere ist $\bigwedge^p(V) = \{0\}$ für $p > n$.

Beweis. (i) Setzen wir $I^p = I \cap T^p(V)$, so gilt $I = \bigoplus_{p=0}^{\infty} I^p$, weil die erzeugenden Elemente homogen sind. Also gilt unsere Behauptung mit $\bigwedge^p(V) = T^p(V)/I^p$.

(ii) Für $v, w \in V$ gilt

$$v \otimes w + w \otimes v = (v + w) \otimes (v + w) - v \otimes v - w \otimes w \in I,$$

also $v \wedge w + w \wedge v = 0$. Der allgemeine Fall folgt durch Induktion.

(iii) Die Bilder der o. g. Basiselemente von $T(V)$ in $\bigwedge(V)$ verschwinden oder stimmen bis auf das Vorzeichen mit den angegebenen Elementen überein, welche somit $\bigwedge(V)$ aufspannen. Ihre lineare Unabhängigkeit werden wir im Zusammenhang mit dem nächsten Satz beweisen. □

Satz 11 *Für $\tau \in T^p(V^*)$ sei*

$$\tau_{\text{alt}} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi) \tau^\pi,$$

wobei

$$\tau^\pi(v_1, \ldots, v_p) = \tau(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)})$$

(i) *Für endlichdimensionales V definiert dies einen Isomorphismus von $\bigwedge(V^*)$ auf den Vektorraum der alternierenden Multilinearform auf V. (Wir werden darum Elemente der Grassmannalgebra mit alternierenden Multilinearformen identifizieren.)*

(ii) *Für $\tau' \in T^{p'}(V^*)$ und $\tau'' \in T^{p''}(V^*)$ gilt*

$$\tau' \wedge \tau'' = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p'} \times \mathfrak{S}_{p''} \setminus \mathfrak{S}_{p'+p''}} \operatorname{sgn}(\pi)(\tau'_{\text{alt}} \otimes \tau''_{\text{alt}})^\pi.$$

(Genaugenommen sind auf der linken Seite die Äquivalenzklassen $[\tau'] \in \bigwedge^{p'}(V^*)$ und $[\tau''] \in \bigwedge^{p''}(V^*)$ gemeint, während die rechte Seite im Sinne von Gleichung (4) zu verstehen ist.)

(iii) *Für $l_1, \ldots, l_p \in V^*$ und $v_1, \ldots, v_p \in V$ ist*

$$l_1 \wedge \cdots \wedge l_p(v_1, \ldots, v_p) = \det A,$$

wobei die Matrix A die Einträge $a_{ij} = l_i(v_j)$ hat.

Beweis. (i) Es gilt $(\tau^\sigma)^\pi = \tau^{\sigma\tau}$ für beliebige σ, $\pi \in \mathfrak{S}_p$, also ist $\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \tau^\pi$ eine alternierende p-Form. Das Ideal I wird offensichtlich auf Null abgebildet. Ist $l_1, \ldots, l_n$ die duale Basis zu $e_1, \ldots, e_n$, so stellt man durch Einsetzen fest, dass die Elemente $l_{i_1} \wedge \cdots \wedge l_{i_p}$ für $i_1 < \cdots < i_p$ linear unabhängig sind. Dies vervollständigt auch den Beweis von Satz 10(iii), wo wir gesehen haben, dass diese Elemente die Grassmann-Algebra aufspannen.

(ii) Setzen wir auf der rechten Seite die Definition von τ'_{alt} und τ''_{alt} ein, beachten $\operatorname{sgn}(\pi', \pi'') = \operatorname{sgn}(\pi') \operatorname{sgn}(\pi'')$ und vereinigen die Summationen, so folgt die Behauptung.

(iii) Nach der Verallgemeinerung von (ii) auf p Faktoren ist die linke Seite gleich

$$\sum_{\pi \in \mathcal{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^p l_i(v_{\pi(i)}),$$

und nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz ist dies gleich der rechten Seite. □

Wir werden identifizieren. Für solche können wir

7 Vektorfelder und Differentialformen

Definition 16 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld v auf einer offenen Menge U in X ist eine Familie von Derivationen $v : \mathcal{S}(U') \to \mathcal{S}(U')$ für alle offenen Teilmengen U' von U, so dass $v(f|_{U''}) = v(f)|_{U''}$ gilt für $f \in \mathcal{S}(U')$ und U'' offen in U'.*

Wir erinnern daran, dass die Derivationseigenschaft bedeutet, dass

$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

Berechnen wir beide Seiten an einer Stelle $a \in U$, so sehen wir, dass $v_a : f_a \mapsto v(f)(a)$ ein Tangentialvektor ist. Es ist klar, dass ein Vektorfeld v auf U durch die Familie der Tangentialvektoren v_a mit $a \in U$ eindeutig bestimmt ist. Wir erinnern, dass der Kommutator $[v, w] = v \circ w - w \circ v$ zweier Vektorfelder wieder ein Vektorfeld ist.

Beispiel. Ist X ein affiner Raum, V der Vektorraum der Translationen von X und U offen in X, so definiert jede glatte (bzw. holomorphe) Abbildung $U \to V$, $a \mapsto v_a$, ein glattes (bzw. holomorphes) Vektorfeld auf U, nämlich $v(f)(a) = \partial_{v_a} f(a)$. Jedes Vektorfeld auf U entsteht auf diese Weise.

Definition 17 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit, U offen in X und $p \in \mathbb{N}$. Eine alternierende Differentialform der Stufe p ist eine Familie von multilinearen Abbildungen*

$$\omega_a : T_a(X)^p \to K, \qquad a \in U,$$

so dass für jede offene Teilmenge U' von U und Vektorfelder $v_1, \ldots, v_p$ auf U' die Funktion

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) : a \mapsto \omega_a((v_1)_a, \ldots, (v_p)_a)$$

zu $\mathcal{S}(U')$ gehört. Wir bezeichnen den $\mathcal{S}(U)$-Modul der alternierenden Differentialformen der Stufe p auf U mit $\mathcal{S}^p(U)$ und führen die $\mathcal{S}(U)$-Algebra $\mathcal{S}^\bullet(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim X} \mathcal{S}^p(U)$ ein.

Beispiel 1. Natürlich ist $\mathcal{S}^0(U) = \mathcal{S}(U)$. Eine Differentialform $\omega \in \mathcal{S}^1(U)$ heißt auch Pfaffsche Form oder Kovektorfeld, denn ω_a ist ein Kotangentialvektor, d. h. ein Element des Dualraums $T_a^*(X)$ von $T_a(X)$. Für jede Funktion $f \in \mathcal{S}(U)$ ist durch $df(v) = v(f)$ eine Pfaffsche Form $df \in \mathcal{S}^1(U)$ definiert. Aus Definition 16 folgt

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg \tag{5}$$

für $f,\, g \in \mathcal{S}(U)$. Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so gilt für $g \in \mathcal{T}(V)$ und $v \in T_a(X)$, dass

$$d(F^*(g))_a(v) = v(F^*(g)_a) = (F'(a)v)g_{F(a)} = dg_{F(a)}(F'(a)v) = F^*(dg)_{F(a)}(v),$$

also

$$d(F^*(g)) = F^*(dg). \tag{6}$$

Lemma 4 *Ist (U, φ) eine Karte von $(X, \mathcal{S})$ und sind die lokalen Koordinaten $x_i : U \to K$ definiert durch $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, so ist jedes $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ von der Form*

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{7}$$

mit $f_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathcal{S}(U)$. Ist umgekehrt eine Familie $\omega_a \in T_a(X)^p \to K$ für a in einer offenen Teilmenge V von X gegeben und ist für jede Karte (U, φ) eines Atlasses von $(V, \mathcal{S}|_V)$ die Einschränkung $\omega|_U$ von der angegebenen Form, so ist $\omega \in \mathcal{S}^p(V)$.

Beweis. Es sei $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$. Wir können annehmen, dass $X = K^n$. Da die Kovektoren $(dx_1)_a,\ \ldots,\ (dx_n)_a$ eine Basis von $T_a^*(X)$ bilden, können wir Satz 10(iii) anwenden. Wegen

$$\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = f_{i_1,\ldots,i_p}$$

folgt die Glattheit der Koeffizienten.

Umgekehrt habe ω in jeder Karte eines Atlasses von $(V, \mathcal{S}|_V)$ die angegebene Form. Sind $v_1,\ \ldots,\ v_p$ Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge V' von V, so ist $\omega(v_1, \ldots, v_p)|_{V' \cap U} \in \mathcal{S}(V' \cap U)$ für jede Karte (U, φ) des Atlasses. Aufgrund der Garbeneigenschaft von $\mathcal{S}$ folgt $\omega(v_1, \ldots, v_p) \in \mathcal{S}(V)$. □

Beispiel 2. Eine Differentialform μ der Stufe $n = \dim X$ heißt Volumenform. Für jedes $B \in \operatorname{End}(T_a(X))$ folgt aus Satz 11(iii), dass

$$\mu_a(Bv_1, \ldots, Bv_n) = \det(B)\mu_a(v_1, \ldots, v_n)$$

Ist $\mu \in \mathcal{S}^n(U)$ eine nichtverschwindende Volumenform, so ist jede andere Volumenform auf U von der Form $f\mu$ für ein $f \in \mathcal{S}(U)$, und im reellen Fall ist dann $|\mu|$ eine nichtverschwindende glatte Dichte. In einer Karte (U, φ) ist nämlich

$$\mu|_U = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

und für nichtverschwindendes $f \in \mathcal{E}(U)$ ist $|f| \in \mathcal{E}(U)$.

Satz 12 *Es sei $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten. Für $\omega \in \mathcal{T}^p(V)$ definieren wir $F^*(\omega)$ durch*

$$F^*(\omega)_a(v_1, \ldots, v_p) = \omega_{F(a)}(F'(a)v_1, \ldots, F'(a)v_p).$$

Dann erhalten wir eine Familie von Ringhomomorphismen $F^* : \mathcal{T}^\bullet(V) \to \mathcal{S}^\bullet(F^{-1}(V))$, welche den Rücktransport $F^* : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{S}(V)$ fortsetzt und die Eigenschaft $F^*(\omega|_{V'}) = F^*(\omega)|_{V'}$ für $V' \subset V$ hat.

Beweis. Die Abbildung F^* ist durch eine Familie von Abbildungen $F_a^* : \bigwedge^p(T^*_{F(a)}(Y) \to \bigwedge^p(T_a(X))$ gegeben, die nach Satz 11(ii) verträglich mit dem äußeren Produkt ist.

Es bleibt zu prüfen, dass für Vektorfelder $v_1, \ldots, v_p$ auf $F^{-1}(V)$ die Funktion $\omega(v_1, \ldots, v_p)$ zu $\mathcal{S}^p(F^{-1}(V))$ gehört. Ist $\omega = dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_p$ mit $g_j \in \mathcal{T}(V)$, so folgt dies aus Gleichung (6) und der Tatsache, dass F^* ein Ringhomomorphismus ist. Jede Differentialform ist lokal eine Linearkombination von Produkten dieser Art, also folgt die Behauptung aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{S}$. □

Satz 13 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine Mannigfaltigkeit. Die Familie von linearen Abbildungen $d : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}^1(U)$ für U offen in X setzt sich auf eindeutige Weise zu einer Familie von linearen Abbildungen $d : \mathcal{S}^\bullet(U) \to \mathcal{S}^\bullet(U)$ mit folgenden Eigenschaften fort:*

(a) Für offene $V \subset U$ und $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(U)$ gilt $d(\omega|_V) = d\omega|_V$,

(b) für offene U gilt $d(\mathcal{S}^p(U)) \subset \mathcal{S}^{p+1}(U)$,

(c) $d \circ d = 0$,

(d) für offene U und $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$, $\psi \in \mathcal{S}^q(U)$ gilt

$$d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi.$$

Ist $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so gilt

$$d \circ F^* = F^* \circ d. \tag{8}$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass die Menge U zu einer Karte (U, φ) gehört. Dann hat $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ die Form (7). Falls d existiert, so folgt aus der Linearität und den Eigenschaften (c) und (d), dass

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, \tag{9}$$

wobei wir $\sum_I$ für die Summe über die Multiindizes $I = (i_1, \ldots, i_p)$ mit $i_1 < \cdots < i_p$ schreiben. Somit ist d eindeutig bestimmt. Wir nehmen also Gleichung (9) als Definition. Die Eigenschaften (a) und (b) sowie die Linearität sind dann offensichtlich erfüllt.

Um (c) nachzuprüfen, müssen wir zunächst (9) in der Form (7) schreiben, nämlich

$$d\omega = \sum_I \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} \, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

(Die partiellen Ableitungen sind so gemeint, dass f_I mittels φ als Funktion auf $\varphi(U) \subset K^n$ interpretiert wird.) Um hierauf wiederum die Definition (9) anwenden zu können, müssen die Indizes der Differentiale aufsteigend geordnet sein. Unter Verwendung von Satz 10(ii) können wir den Faktor dx_j an der richtigen Stelle einordnen. Machen wir nach Anwendung von (9) die Vertauschung rückgängig, so verschwindet der Faktor ± 1 wieder, und wir erhalten

$$d(d\omega) = \sum_I \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_k \partial x_j} \, dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Fassen wir jeweils zwei Terme der inneren Doppelsumme mit vertauschten j und k zusammen, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_j,$$

was nach dem Satz von Schwartz verschwindet.

Um Eigenschaft (d) nachzuprüfen, schreiben wir auch $\psi \in \mathcal{S}^q(U)$ in der Form (7), d. h.

$$\psi = \sum_J g_J dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

Nach Definition (9) und der Identität (5) gilt

$$d(\omega \wedge \psi) = \sum_{I,J} (df_I g_J + f_I \wedge dg_J) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

Nach Ausmultiplizieren der inneren Klammer können wir im ersten Term den skalaren Faktor g_J hinter die Faktoren dx_{i_k} schreiben, während im zweiten Term die 1-Form dg_J bei Vertauschung mit jedem dieser p Faktoren nach Satz 10(ii) einen Vorzeichenwechsel hervorruft. Dadurch ergibt sich Eigenschaft (d).

Wir sehen also, dass für eine Karte (U, φ) genau eine Familie $d = d_\varphi$ von Abbildungen mit den angegebenen Eigenschaften existiert. Ist U' offen in U, so erhalten wir durch Einschränkung von d_φ die entsprechende Familie für $\varphi|_{U'}$. Ist also $a \in X$ und $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(V)$, so hängt

$$(d\omega)_a = (d_\varphi \omega)_a$$

nicht von der Wahl der Karte (U, φ) mit $a \in U \subset V$ ab. Mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{S}$ beweist man leicht, dass $d\omega \in \mathcal{S}^\bullet(V)$, und die Eigenschaften (a)–(d) übertragen sich.

Nun sei $F : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ein Morphismus, V offen in Y und $F(a) \in V$. Gleichung (8) gilt nach Gleichung (6) bereits auf $\mathcal{T}^0(V)$. Da die Behauptung lokal ist, können wir die Umgebung V von $F(a)$ verkleinern, so dass jedes Element von $\mathcal{T}^q(V)$ eine Linearkombination von Elementen der Form $\psi \wedge dg$ ist. Aus dem Bewiesenen und Satz 12 folgt

$$d(F^*(\psi \wedge dg)) = d(F^*(\psi) \wedge F^*(dg)) = d(F^*(\psi) \wedge d(F^*(g))) = d(F^*(\psi) \wedge d(F^*(g)).$$

Andererseits ist

$$F^*(d(\psi \wedge dg)) = F^*(d\psi \wedge dg) = F^*(d\psi) \wedge F^*(dg).$$

Da wir induktiv annehmen können, dass (8) für ψ bereits gilt, folgt die Gleichheit beider Ausdrücke. $\square$

Satz 14 *Sind $v_0, \ldots, v_p$ Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge U einer Mannigfaltigkeit und ist $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$, so gilt*

$$d\omega(v_0, \ldots, v_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_i(\omega(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_p),$$

wobei Argumente mit einem Dach wegzulassen sind.

Beweis. Wir behaupten, dass beide Seiten $\mathcal{S}(U)$-multilinear von den $p+1$ Argumenten abhängen. Die Additivität ist klar. Ersetzen wir nun z. B. v_0 durch fv_0 mit $f \in \mathcal{S}(U)$, so multipliziert sich die linke Seite mit f. Auf der rechten Seite entstehen wegen der Leibnizregel und der Formel

$$[fv, gw] = fg\,[v, w] + f\,v(g)\,w - g\,w(f)\,v$$

zusätzlich die Terme

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^i v_i(f)\,\omega(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p)) - \sum_{j=1}^{p} (-1)^j v_j(f)\,\omega(v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p)),$$

die sich aber wegkürzen.

Da es genügt, die behauptete Gleichung in einer beliebigen Karte zu beweisen, können wir uns zudem auf den Fall beschränken, dass die Vektorfelder v_k gleich $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$ sind. In diesem Fall verschwinden die Kommutatoren $[v_i, v_j]$. Man kann auch leicht nachprüfen, dass beide Seiten der Gleichung alternierend in den v_k sind, also können wir annehmen, dass $i_0 < \cdots < i_p$. Schreiben wir ω in der Form (7), so sind beide Seiten gleich $\sum_{k=0}^{p} \partial_{i_k} f_{i_0,\ldots,\widehat{i_k},\ldots,i_p}$. □

8 Lie-Ableitungen und der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt betrachten wir nur reelle Mannigfaltigkeiten. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen benötigen wir folgenden Satz.

Satz 15 *Es sei U offen in der reellen Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$ und v ein Vektorfeld auf U.*

(i) Es gibt eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R} \times U$ und einen Morphismus $\varphi : W \to U$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $a \in U$ ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, a) \in W\}$ ein offenes Intervall, das 0 enthält, und auf diesem Intervall gilt für jedes $f \in \mathcal{S}(U)$

$$\frac{\partial f(\varphi(t, a))}{\partial t} = v(f)(\varphi(t, a)). \qquad (10)$$

(ii) Hat $(\tilde{W}, \tilde{\varphi})$ dieselben Eigenschaften wie (W, φ), so stimmen φ und $\tilde{\varphi}$ auf $W \cap \tilde{W}$ überein.

(iii) Bezeichnen wir $W_t = \{x \in U \mid (x, t) \in W\}$ und $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, so ist $\varphi_t : W_t \to U$ eine offene Einbettung.

(iv) Für s, $t \in \mathbb{R}$ gilt auf $\varphi_t^{-1}(W_s) \cap W_{s+t}$

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}.$$

Man nennt die Familie der offenen Einbettungen φ_t den Fluss mit dem Geschwindigkeitsfeld v. Werten wir die Gleichung (10) an der Stelle $t = 0$ aus, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(f)|_{t=0} = v(f).$$

Definition 18 *Ist v ein Vektorfeld auf U, so ist die Lie-Ableitung von $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(U)$ bezüglich v gegeben durch*

$$\mathcal{L}_v\omega = \frac{d}{dt}\varphi_t^*(\omega)|_{t=0},$$

wobei φ den Fluss mit dem Geschwindigkeitsfeld v bezeichnet. Ist w ein weiteres Vektorfeld auf U, so ist seine Lie-Ableitung bezüglich v gegeben durch

$$\mathcal{L}_v w = \frac{d}{dt}(\varphi_t')^{-1}w|_{t=0}.$$

Man beachte, dass $\varphi_t'(a) : T_a(X) \to T_{\varphi_t(a)}(X)$ invertierbar ist, da φ_t eine offene Einbettung ist. Man kann die Grenzwerte auf der rechten Seite in einem gegebenen Punkt $a \in U$ jeweils in einem endlichdimensionalen Raum berechnen. Aus der Leibnizregel folgt unmittelbar, dass

$$\mathcal{L}_v(\omega \wedge \psi) = \mathcal{L}_v\omega \wedge \psi + \omega \wedge \mathcal{L}_v\psi.$$

Lemma 5 *Für Vektorfelder v, w auf U gilt*

$$\mathcal{L}_v w = [v, w].$$

Beweis. Nach Definition des Pullback ist

$$\varphi^*(w(f)) = \big((\varphi_t')^{-1}w\big)\big(\varphi_t^*(f)\big).$$

Differentiation ergibt mit der Leibnizregel

$$\mathcal{L}_v(w(f)) = (\mathcal{L}_v w)(f) + w(\mathcal{L}_v f),$$

woraus die Behauptung sofort folgt. □

Satz 16 *Sind v_1, …, v_p und v Vektorfelder auf U und $\omega \in \mathcal{S}^\bullet(U)$, so gilt*

$$(\mathcal{L}_v\omega)(v_1, \ldots, v_p) = v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) - \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p).$$

Beweis. Nach Definition des Pullback ist

$$\varphi_t^*(\omega(v_1, \ldots, v_p)) = \varphi_t^*(\omega)((\varphi_t')^{-1}v_1, \ldots, (\varphi_t')^{-1}v_p).$$

Differentiation ergibt mit der Leibnizregel

$$\mathcal{L}_v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) = (\mathcal{L}_v\omega)(v_1, \ldots, v_p) + \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \ldots, \mathcal{L}_v v_i, \ldots, v_p),$$

woraus die Behauptung mit Lemma 5 sofort folgt. □

Definition 19 *Für ein Vektorfeld v auf U und $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ definieren wir $\iota_v\omega \in \mathcal{S}^{p-1}(U)$ durch*

$$\iota_v\omega(v_2, \ldots, v_p) = \omega(v, v_2, \ldots, v_p).$$

Natürlich ist $\iota_v f = 0$ für $f \in \mathcal{S}^0(U)$. Man prüft leicht nach, dass für $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$ und $\psi \in \mathcal{S}^q(U)$ gilt

$$\iota_v(\omega \wedge \psi) = \iota_v\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge \iota_v\psi.$$

Satz 17 (Cartan-Formeln) *Für Vektorfelder v und w auf U gilt*

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_v \circ \iota_w - \iota_w \circ \mathcal{L}_v = \iota_{[v,w]},\\ \mathcal{L}_v = \iota_v \circ d + d \circ \iota_v.\end{gathered}$$

Beweis. Sind $v_1, \ldots, v_p$ weitere Vektorfelder auf U und ist $\omega \in \mathcal{S}^p(U)$, $p > 0$, so gilt nach Satz 16

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v(\iota_{v_1}\omega)(v_2, \ldots, v_p)) &= v(\iota_{v_1}\omega(v_2, \ldots, v_p)) - \sum_{i=2}^{p} (\iota_{v_1}\omega)(v_2, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p)\\ &= v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) - \sum_{i=2}^{p} \omega(v_1, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p).\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}(\iota_{v_1}(\mathcal{L}_v\omega))(v_2, \ldots, v_p) &= (\mathcal{L}_v\omega)(v_1, \ldots, v_p)\\ &= v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) - \sum_{i=1}^{p} \omega(v_1, \ldots, [v, v_i], \ldots, v_p).\end{aligned}$$

Daraus folgt Behauptung (i). Nach Satz 14 gilt

$$\begin{aligned}(\iota_v d\omega)(v_1, \ldots, v_p) &= d\omega(v, v_1, \ldots, v_p)\\ &= v(\omega(v_1, \ldots, v_p)) + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i v_i(\omega(v, v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p))\\ &\quad + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \omega([v, v_j], v_1, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_p)\\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_p)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(d\iota_v\omega)(v_1,\dots,v_p) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}v_i(\iota_v\omega(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p))\\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\iota_v\omega([v_i,v_j],v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_p)\\ &= -\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}v_i(\omega(v,v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p))\\ &\quad-\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([v_i,v_j],v,v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_p).\end{aligned}$$

Addieren wir beide Ausdrücke und bringen wir in der verbleibenden Summe über j das Argument $[v,v_j]$ an die $j$te Stelle, so erhalten wir genau die rechte Seite der Formel in Satz 16. □

Wir erinnern an den Begriff einer Dichte auf einer offenen Teilmenge U einer reellen Mannigfaltigkeit $(X,\mathcal{S})$. Für jedes $a\in U$ sei ein nichtverschwindendes translationsinvariantes Maß μ_a auf $T_a(X)$ gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\mu_a(v_1,\dots,v_n)$ das Volumen des von Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_n\in T_a(X)$ aufgespannten Parallelepipeds. Für $A\in\mathrm{End}(T_a(X))$ gilt dann

$$\mu_a(Av_1,\dots,Av_n)=|\det A|\,\mu_a(v_1,\dots,v_n).$$

Wir nennen die Familie μ eine stetige Dichte, wenn für Vektorfelder $v_1, \dots, v_n$ auf U die Funktion $\mu(v_1,\dots,v_n)$ stetig ist. Analog definiert man glatte bzw. analytische nichtverschwindende Dichten. Ist μ eine Dichte auf X mit kompaktem Träger, so wird das Integral

$$\int_X \mu$$

wie in der Analysis-Vorlesung definiert.

Eine Orientierung auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung o von der Menge der Basen von V in die Menge $\{1,-1\}$, so dass für $A\in\mathrm{GL}(V)$ gilt

$$o(Av_1,\dots,Av_n)=\mathrm{sgn}(\det A)o(v_1,\dots,v_n).$$

Eine Orientierung o auf einer Mannigfaltigkeit ist eine Familie von Orientierungen o_a auf den $T_a(X)$, so dass für Vektorfelder $v_1, \dots, v_n$ auf einer beliebigen offenen Teilmenge U die Funktion $o(v_1,\dots,v_n)$ stetig (also lokal konstant) ist.

Ist o eine Orientierung und $f: X\to\{\pm1\}$ lokal konstant, so ist auch fo eine Orientierung. Ist ω eine nichtverschwindende Volumenform, so ist $|\omega|$

eine Dichte. Ist ω zudem nichtverschwindend, so ist $\operatorname{sgn}\omega$ eine Orientierung. Ist ω eine Volumenform und o eine Orientierung, so ist $o\omega$ eine Dichte, und wir definieren

$$\int_{(X,o)} \omega = \int_X o\omega.$$

Auch für glatte Dichten kann man die Lie-Ableitung genau wie für Differentialformen definieren. Sie erfüllt das Analogon von Satz 12, und für nichtverschwindende Volumenformen ω gilt

$$\mathcal{L}_v(o\omega) = o\mathcal{L}_v\omega.$$

Definition 20 *Eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein Paar $(X, \mathcal{S})$, wobei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Funktionengarbe auf X ist, die lokal isomorph zu $(H, \mathcal{T})$ ist, wobei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$ und $\mathcal{T}$ die zu $\mathcal{E}|_H$ assoziierte Funktionengarbe ist.*

Satz 18 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und ∂X die Menge aller Punkte in X, die keine Umgebung U besitzen, so dass $(U, \mathcal{S}|_U)$ lokal isomorph zu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ ist. Dann ist ∂X eine abgeschlossene Teilmenge, und wenn wir mit ∂S die zu $\mathcal{S}|_{\partial X}$ assoziierte Garbe bezeichnen, so ist $(\partial X, \partial S)$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand).*

Man kann alle bisher für glatte Mannigfaltigkeiten gegebenen Konstruktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Eine Orientierung o auf X induziert eine Orientierung ∂o auf ∂X wie folgt. Ist $v \in T_a(X)$ ein äußerer Tangentialvektor im Punkt $a \in \partial X$, d. h. zeigt $\varphi'(a)v$ für eine Karte (U, φ) aus dem Halbraum H heraus, so ist ∂o_a die Einschränkung von $\iota_v o_a$ auf $T_a(\partial X)$.

Satz 19 (Gauß-Ostrogradski) *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine glatte Hausdorffsche Mannigfaltigkeit mit Rand, v ein glattes Vektorfeld und μ eine glatte Dichte auf X mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_X \mathcal{L}_v\mu = \int_{\partial X} \operatorname{sgn}_X(v)\iota_v\mu,$$

wobei

$$(\operatorname{sgn}_X v)(a) = \begin{cases} \pm 1, & \textit{wenn } \pm v_a \textit{ äußerer Vektor ist,} \\ 0, & \textit{wenn } v_a \in T_a(\partial X). \end{cases}$$

Dieser Satz ist im Fall von Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ aus der Analysis-Vorlesung bekannt. Der Beweis im allgemeinen Fall ist analog: Man reduziert die Behauptung mit Hilfe einer Zerlegung der Eins auf den Fall eines Halbraums.

Satz 20 (Stokes) *Es sei $(X, \mathcal{S})$ eine glatte n-dimensionale Hausdorffsche Mannigfaltigkeit mit Rand, $\omega \in \mathcal{S}^{n-1}(X)$ mit kompaktem Träger und o eine Orientierung auf X. Dann gilt*

$$\int_{(X,o)} d\omega = \int_{(\partial X, \partial o)} \omega.$$

Auch diesen Satz kann man beweisen, indem man ihn mittels einer Zerlegung der Eins auf den Fall eines Halbraums zurückführt. Im Falle einer Mannigfaltigkeit mit Orientierung o ist Satz 19 eine Folgerung aus Satz 20. Setzen wir nämlich

$$\omega = \iota_v(o\mu) = \iota_v o \cdot \iota_v \mu,$$

so folgt wegen $d(o\mu) \in \mathcal{S}^{n+1}(X) = \{0\}$ aus Satz 17

$$d\omega = \mathcal{L}_v(o\mu) = o\mathcal{L}_v\mu,$$

und die Einschränkung von $\iota_v o$ auf ∂X ist $\mathrm{sgn}_X(v)\partial o$.

9 Faserbündel

Definition 21 *Eine stetige Abbildung $\pi : E \to X$ zwischen topologischen Räumen heißt Faserung*[2] *(und E mit dieser Struktur heißt Faserbündel*[2] *über X), wenn es einen topologischen Raum Z mit folgender Eigenschaft gibt: Für jeden Punkt $a \in X$ gibt es eine Umgebung U von a und einen Homöomorphismus $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$, so dass $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = p \circ h$, wobei $p : U \times Z \to U$ die natürliche Projektion bezeichnet.*

Man nennt X die Basis, E den Totalraum, $E_a = \pi^{-1}(\{a\})$ die Faser über a, Z die typische Faser und h eine lokale Trivialisierung. Es folgt aus der Definition, dass π surjektiv ist. Natürlich ist Z zu E_a für jedes $a \in X$ isomorph, also durch die Faserung bis auf Isomorphie bestimmt. Man könnte für jede lokale Trivialisierung eine eigene typische Faser Z wählen, vorausgesetzt, sie sind alle homöomorph.

Beispiel 1. Die natürliche Projektion $p : X \times Z \to X$ ist eine Faserung, genannt die triviale Faserung.

Angenommen, (U_α, h_α) und $U_\beta, h_\beta)$ sind Trivialisierungen. Dann ist

$$h_{\alpha\beta} = (h_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}) \circ (h_\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)})^{-1}$$

[2]genauer: lokal-triviale Faserung bzw. lokal-triviales Faserbündel

ein Homöomorphismus von $(U_\alpha \cap U_\beta) \times Z$ auf sich selbst mit $p \circ h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} \circ p$, also gibt es für jedes $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ einen Homöomorphismus $g_{\alpha\beta}(x) : Z \to Z$, so dass

$$h_{\alpha\beta}(x, z) = (x, g_{\alpha\beta}(x)z).$$

Offensichtlich gilt $g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}_Z$, und ist (U_γ, h_γ) eine weitere Trivialisierung, so gilt für $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{id}_Z \,.$$

Aus beiden Eigenschaften folgt

$$g_{\alpha\beta}(x)^{-1} = g_{\beta\alpha}(x), \qquad g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x).$$

Definition 22 *Ist $\pi : E \to X$ eine Faserung und gleichzeitig ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, und gibt es eine Mannigfaltigkeit Z, so dass es in einer Umgebung eines jeden Punktes von X eine lokale Trivialisierung gibt, die ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist, so heißt E glattes bzw. analytisches bzw. holomorphes Faserbündel (je nach der Klasse der Morphismen).*

Beispiel 2. Es sei G eine Liesche Gruppe, H ihre abgeschlossene Liesche Untergruppe und $\pi : G \to X = G/H$ die natürliche Projektion. Wir versehen X mit der Quotiententopologie und der Funktionengarbe aller Funktionen, deren Pullback unter π zur Strukturgarbe von G gehört. Dann ist X bekanntlich eine Mannigfaltigkeit derselben Klasse wie G. Wir behaupten, dass π eine Faserung ebendieser Klasse ist. Für $a \in G$ können wir nämlich eine eine Untermannigfaltigkeit $V \subset G$ finden, so dass

$$T_a(G) = T_a(V) \dotplus T_a(aH).$$

Dann ist die Produktabbildung

$$V \times H \to G$$

nach eventueller Verkleinerung von V eine offene Einbettung. Bezeichnen wir ihr Inverses mit h und das Bild von V in X mit U, so ist h eine lokale Trivialisierung über U.

Beispiel 3. Es sei V ein n-dimensionaler rechter H-Vektorraum, wobei H eine Divisionsalgebra über K ist, also $H \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Weiter sei S die Stiefelmannigfaltigkeit der linear unabhängigen k-Tupel in V sowie G die Grassmannmannigfaltigkeit der k-dimensionalen H-Unterräume in V. Wir bezeichnen mit $\pi : S \to G$ die Abbildung

$$\pi(v_1, \ldots, v_k) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Die Mannigfaltigkeitsstruktur auf G haben wir in Aufgabe 8 gerade so definiert, dass π ein K-analytischer Morphismus ist. Wir behaupten, dass π eine K-analytische Faserung ist. Zur Konstruktion einer lokalen Trivialisierung halten wir einen $(n-k)$-dimensionalen H-Unterraum V_0 fest, betrachten

$$U := \{W \in G \mid W \cap V_0 = \{0\}\}$$

und bezeichnen mit Z die Menge aller Basen von V/V_0. Die Gruppe $\mathrm{GL}_k(H) = \mathrm{GL}_H(H^k)$ wirkt transitiv und frei auf Z und verwandelt Z in eine analytische K-Mannigfaltigkeit. Wir definieren h durch

$$h(v_1, \ldots, v_k) = (\langle v_1, \ldots, v_k \rangle, v_1 \bmod V_0, \ldots, v_k \bmod V_0).$$

Dann ist h eine lokale Trivialisierung.

Definition 23 *Ein K-Vektorbündel ist ein Faserbündel E mit der Struktur eines K-Vektorraums auf jeder Faser, für das es einen K-Vektorraum Z gibt, so dass es in der Umgebung eines beliebigen Punktes der Basis X eine lokale Trivialisierung gibt, die faserweise K-linear ist. Ist außerdem E ein glattes, analytisches bzw. holomorphes Faserbündel und kann man die linearen lokalen Trivialisierungen von der entsprechenden Klasse wählen, so spricht man von einem glatten, analytischen bzw. holomorphen Vektorbündel. Die Dimension von Z heißt Rang des Vektorbündels. Ein Vektorbündel vom Rang 1 heißt auch Geradenbündel.*

In diesem Fall sind die Übergangsfunktionen

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_K(Z)$$

stetige, glatte, analytische bzw. holomorphe Morphismen.

Beispiel 4. Das Tangentialbündel einer K-Mannigfaltigkeit X ist

$$T(X) = \bigsqcup_{a \in X} T_a(X).$$

Für jede offene Teilmenge U von X und Vektorfelder $v_1, \ldots, v_k$ auf U erhalten wir eine Abbildung $H : U \times K^k \to T(U)$,

$$H(a, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \lambda_1 \cdot (v_1)_a + \cdots + \lambda_k \cdot (v_k)_a.$$

Wir nennen eine Teilmenge U von $T(X)$ offen, wenn ihre Urbilder unter allen solchen Abbildungen H offen sind, und wir bezeichnen mit $\mathcal{T}(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \to K$, so dass $H^*(f)$ für alle H wie oben zur Strukturgarbe der Produktmannigfaltigkeit $U \times K^k$ gehört.

Lemma 6 *Mit dieser Topologie und der Funktionengarbe $\mathcal{T}$ ist $T(X)$ ein K-Vektorbündel über X von derselben Klasse wie X, und die Abbildungen $h = H^{-1}$ für Vektorfelder $v_1, \ldots, v_n$, die in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes bilden, sind lokale Trivialisierungen.*

Trivialisierungen wie im Lemma kann man sich mit Hilfe von Karten verschaffen. Sind (U, φ) und (V, ψ) Karten von X und schreiben wir $\varphi(a) = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\psi(a) = (y_1, \ldots, y_n)$, so können wir $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $w_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ als punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf U bzw. V betrachten. Für die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von $T(X)$ erhalten wir die Übergangsfunktionen $g : U \cap V \to \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$g_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

Beispiel 5. Wie in Beispiel 3 sei G die Grassmannmannigfaltigkeit der k-dimensionalen Unterräume im H-Vektorraum V. Wir definieren

$$E = \{(W, v) \in G \times V \mid v \in W\}$$

und bezeichnen mit $\pi : E \to G$ die natürliche Abbildung $\pi(W, v) = W$. Dann ist die Faser E_W natürlich isomorph zu W. Wir behaupten, dass E ein K-analytisches Vektorbündel über G ist, genannt das universelle Bündel über G. Wie in Beispiel 3 halten wir den $(n-k)$-dimensionalen Unterraum V_0 von V fest, setzen $U = \{W \in G \mid W \cap V_0 = \{0\}\}$ und definieren die Abbildung $h : \pi^{-1}(U) \to U \times (V/V_0)$ durch

$$h(W, v) = v \bmod V_0.$$

Dann ist h eine lokale Trivialisierung.

Definition 24 *Ein Morphismus von Faserbündeln (bzw. Faserungen) $(E, X) \to (F, Y)$ ist eine stetige Abbildung $E \to F$, so dass eine stetige Abbildung $X \to Y$ existiert, die das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

kommutativ macht.

Man erhält die Definition eines Morphismus von glatten, analytischen bzw. holomorphen Faserbündeln, indem man „stetige Abbildung“ durch „Morphismus von Mannigfaltigkeiten“ ersetzt.

Ein Morphismus $(E, X) \to (F, X)$ von Faserbündeln über X ist ein Morphismus von Faserbündeln, bei dem obiges Diagramm durch die Abbildung id_X kommutativ gemacht wird.

Ein Morphismus von Vektorbündeln ist ein Morphismus von Faserbündeln, der faserweise linear ist.

Wenn sich X aus dem Zusammenhang ergibt, sagt man statt „Morphismus von Vektorbündeln über X" auch kurz „Homomorphismus von Vektorbündeln".

Ist $f : E \to F$ ein Morphismus von Faserbündeln, so ist die unterliegende Abbildung $g : X \to Y$ eindeutig bestimmt, weil die Projektion $E \to X$ surjektiv ist. Ausserdem folgt

$$f(E_a) \subset F_{g(a)}.$$

Beispiel 6. Ist $g : X \to Y$ ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten, so erhalten wir einen Morphismus $T(g) : T(X) \to T(Y)$, dessen Einschränkung auf einen Tangentialraum durch $f'(a)$ gegeben ist. Damit wird T zu einem Funktor aus der Kategorie der glatten, analytischen bzw. holomorphen Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der glatten, analytischen bzw. holomorphen Vektorbündel.

Satz 21 *Es sei $\rho : F \to Y$ eine Faserung und $g : X \to Y$ stetig. Dann gibt es eine Faserung $\pi_0 : E_0 \to X$ und einen Morphismus $f_0 : (E_0, X) \to (F, Y)$ von Faserungen mit der Eigenschaft*

$$\rho \circ f_0 = g \circ \pi_0,$$

so dass für jede Faserung $\pi : E \to X$ und jeden Morphismus $(E, X) \to (F, Y)$ von Faserungen mit der Eigenschaft

$$\rho \circ f = g \circ \pi$$

genau ein Morphismus $e : (E, X) \to (E_0, Y)$ von Faserungen über X existiert, so dass

$$f = e \circ f_0.$$

Eine analoge Aussage gilt für glatte, analytische bzw. holomorphe Faserungen und einen Morphismus g von Mannigfaltigkeiten sowie für Vektorbündel, wobei sich dasselbe E_0 und f_0 ergibt.

Beweis. Um eine Idee zu bekommen, nehmen wir für einen Augenblick an, $\pi_0 : E_0 \to X$ und f_0 existieren. Dann gibt es nach der Charakterisierung des

Produktraumes eine stetige Abbildung $e_0 : E_0 \to X \times F$, so dass $\pi_0 = p \circ e_0$ und $f_0 = q \circ e_0$ ist, wobei $p : X \times F \to X$ und $q : X \times F \to F$ die kanonischen Projektionen bezeichnen. Für $(x, w) = e_0(v)$ gilt dann $g(x) = \rho(w)$.

Um die Existenz zu beweisen, definieren wir also

$$E_0 = \{(x, w) \in X \times F \mid g(x) = \rho(w)\},$$
$$\pi_0(x, w) = x, \qquad f_0(x, w) = w.$$

Dann ist E_0 eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times F$. Ist $k : \rho^{-1}(V) \to V \times Z$ eine lokale Trivialisierung von F, so betrachten wir $U = g^{-1}(V)$. Für $(x, w) \in \pi_0^{-1}(U)$ gilt dann $\rho(w) = g(x) \in V$, also können wir eine fasertreue Abbildung $h : \pi_0^{-1}(U) \to U \times Z$ durch

$$h(x, w) = (x, r(k(w)))$$

definieren, wobei $r : V \times Z$ die natürliche Projektion bezeichnet. Unter Benutzung von $\rho(k^{-1}(y, z)) = y$ prüft man leicht nach, dass die durch

$$(x, z) \mapsto (x, k^{-1}(g(x), z))$$

definierte Abbildung $U \times Z \to U \times F$ ihr Bild in E_0 hat und das Inverse zu h ist. Damit ist h eine lokale Trivialisierung. Im Fall von Mannigfaltigkeiten sind h und ihr Inverses Morphismen bezüglich der Einschränkung der Strukturgarbe von $X \times F$ auf E_0. Variieren wir (V, k), so sehen wir, dass E_0 eine Untermannigfaltigkeit ist, und dann sind π_0 und f_0 Morphismen.

Ist $e : (E, X) \to (E_0, X_0)$ ein Morphismus von Faserungen über X mit $\rho \circ f = g \circ \pi$, und ist $f = f_0 \circ e$, so gilt offenbar

$$\pi = p \circ e, \qquad f = q \circ e.$$

Umgekehrt sei ein Morphismus $f : (E, X) \to (F, Y)$ von Faserungen mit $\rho \circ f = g \circ \pi$ gegeben. Dann gibt es nach der Charakterisierung von Produkträumen bzw. Produktmannigfaltigkeiten (s. Satz 6) genau eine stetige Abbildung bzw. einen Morphismus $e : E \to X \times F$ mit den obigen Eigenschaften. Aus $\rho \circ f = g \circ \pi$ folgt $f(E) \subset E_0$, und aus der Definition von Untermannigfaltigkeiten folgt, dass f ein Morphismus $E \to E_0$ ist. Man prüft leicht, dass $\pi = \pi_0 \circ e$ (dass also e ein Morphismus von Faserbündeln über X ist) und $f = f_0 \circ e$.

Im Fall eines Vektorbündels F ist auch E_0 auf natürliche Weise ein Vektorbündel, und die mit Hilfe einer faserweise linearen lokalen Trivialisierung k von F konstruierte lokale Trivialisierung h von E_0 ist ebenfalls faserweise linear. $\square$

Ähnlich wie im Falle von Produktmannigfaltigkeiten folgt, dass E_0 durch g bis auf kanonische Isomorphismen bestimmt ist. Mann nennt es das induzierte Faser- bzw. Vektorbündel und schreibt $E_0 = g^*(F)$.

Satz 22 *Sind Faserbündel (E, X) und (F, Y) gegeben, so ist $E \times F$ mit der Produktabbildung $E \times F \to X \times Y$ ein Faserbündel mit folgender Eigenschaft. Für beliebige Morphismen $(G, Z) \to (E, X)$ und $(G, Z) \to (F, Y)$ von K-Vektorbündeln gibt es genau einen Morphismus $(G, Z) \to (E \times F, X \times Y)$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
& E \times F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
E & & F \\
& G \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Dies ist leicht zu beweisen. Im Fall von Vektorbündeln ist $E \times F$ wieder ein Vektorbündel mit den Fasern $(E \times F)_{(a,b)} = E_a \oplus F_b$, darum schreibt man es auch als $E \boxplus F$.

Satz 23 *Sind Vektorbündel E und F über X gegeben, so gibt es genau ein Vektorbündel G_0 über X und Homomorphismen $G_0 \to E$ und $G_0 \to F$ mit folgender Eigenschaft. Für beliebige Vektorbündel G über X und Homomorphismen $G \to E$ und $G \to F$ gibt es genau einen Homomorphismus $G \to G_0$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
& G_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
E & & F \\
& G \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis. Wir setzen

$$G_0 = \{(v, w) \in E \times F \mid \pi(v) = \rho(w)\},$$

wobei $\pi : E \to X$ und $\rho : F \to Y$ die Projektionen der Vektorbündel bezeichnen. Nun folgt die Behauptung leicht aus der Universalität des Produktraumes bzw. der Produktmannigfaltigkeit. $\square$

Man schreibt $G_0 = E \oplus F$, denn dieses Bündel hat die Fasern

$$(E \oplus F)_a = E_a \oplus F_a.$$

Bezeichnen wir mit $\Delta : X \to X \times X$ die Diagonaleinbettung $\Delta(x) = (x, x)$, so gilt

$$E \oplus F = \Delta^*(E \boxplus F).$$

Natürlich ist auch diese Konstruktion für beliebige Faserbündel möglich, hat aber dann keine Standardbezeichnung.

Lemma 7 *Gegeben sei ein topologischer Raum bzw. eine Mannigfaltigkeit X und für jedes $a \in X$ ein Vektorraum E_a. Es sei*

$$E = \bigsqcup_{a \in X} E_a$$

und $\pi : E \to X$ die natürliche Projektion. Weiter sei ein Vektorraum Z und eine Familie von Paaren (U, h) gegeben, wobei die U eine Überdeckung von X bilden und $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$ jeweils bijektiv und fasertreu ist und für jedes $a \in X$ die durch $h(v) = (a, h_a(v))$ definierte Abbildung $h_a : E_a \to Z$ linear ist.

Ist für beliebige (U, h) und (U', h') aus der Familie die Abbildung $h' \circ h^{-1}$ ein Automorphismus von $(U \cap U') \times Z$, so kann man E auf eindeutige Weise mit einer Topologie bzw. auch mit einer Funktionengarbe versehen, so dass $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel in der jeweiligen Kategorie ist.

Beweis. Wir versehen E mit der kleinsten Topologie, für die alle Abbildungen h stetig sind, und im Falle von Mannigfaltigkeiten mit der kleinsten Funktionengarbe, für die alle Abbildungen h Morphismen von Funktionengarben sind. Wie in Satz 5(ii) zeigt man, dass dann X eine Mannigfaltigkeit ist und die h Morphismen von Mannigfaltigkeiten sind. $\square$

Folgerung 4 *Für Vektorbündel E und F über X existieren Vektorbündel*

$$E \otimes F, \quad \mathrm{Hom}(E, F), \quad \bigwedge^k(E),$$

deren Fasern über einem Punkt $a \in X$ durch

$$E_a \otimes F_a, \qquad \mathrm{Hom}(E_a, F_a) \quad \textit{bzw.} \quad \bigwedge^k(E_a)$$

gegeben sind.

Bemerkung. Dies beruht im Wesentlichen darauf, dass $\otimes$, Hom und $\bigwedge^k$ Funktoren sind. Haben wir z. B. Morphismen $f : V_1 \to V_2$ und $g : W_1 \to W_2$ von Vektorräumen, so erhalten wir einen Morphismus $f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ von Vektorräumen. Ist nämlich $b_2 : V_2 \times W_2 \to V_2 \otimes W_2$ die kanonische bilineare Abbildung, so ist auch die Abbildung $b_2 \circ (f, g) : V_1 \times W_1 \to V_2 \otimes W_2$ bilinear, und nach der Charakterisierung des Vektorprodukts gibt es einen Morphismus, den man $g \otimes f$ nennt, so dass $b_2 \circ (f, g) = (f \otimes g) \circ b_1$. Schreiben wir $b_1(v, w) = v \otimes w$, so gilt $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$.

Beweis der Folgerung. Sind Trivialisierungen $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$ von E und $k : \rho^{-1}(U) \to U \times T$ von F gegeben, so fügen sich die Abbildungen $l_a := h_a \otimes k_a : E_a \otimes F_a \to Z \otimes T$ zu einer bijektiven Abbildung

$$l : \bigsqcup_{a \in U} E_a \otimes F_a \to U \times (Z \otimes T)$$

zusammen. Man kann nachprüfen, dass die Familie der (U, l) die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt. Im Fall von Hom und $\bigwedge^k$ geht man analog vor. $\square$

Man kann auch $E \oplus F$ und $E \boxplus F$ wie in der Folgerung beschreiben, aber unsere fühere Definition ist unabhängig von der Wahl von Trivialisierungen. Um die Definition von $E \otimes F$ usw. von der Wahl von Trivialisierungen unabhängig zu machen, müsste man die Familie aller Trivialisierungen betrachten (analog zu einem maximalen Atlas). Es entsteht die Frage, ob man auch $E \otimes F$ usw. durch eine Universalitätseigenschaft charakterisieren und ob man ein Bündel $E \boxtimes F$ definieren kann.

Satz 24 *Gegeben seien Vektorbündel (E, X) und (F, Y). Dann gibt es ein Vektorbündel (G_0, Z_0) und einen faserweise bilinearen Morphismus $f_0 : (E \times F, X \times Y) \to (G_0, Z_0)$ von Faserbündeln, so dass für ein beliebiges Vektorbündel (G, Z) und einen beliebigen faserweise bilinearen Morphismus $f : (E \times F, X \times Y) \to (G, Z)$ von Faserbündeln ein Morphismus von Vektorbündeln $e : (G_0, Z_0) \to (G, Z)$ mit der Eigenschaft $f = e \circ f_0$ existiert.*

Bezeichnung: $G_0 = E \boxtimes F$.

Beweis. Wir setzen $Z_0 = X \times Y$,

$$G_0 = \bigsqcup_{(a,b) \in Z_0} E_a \otimes F_b,$$

und f_0 sei die Abbildung, deren Einschränkung auf $E_a \times F_b$ gerade die kanonische Abbildung aus der obigen Bemerkung ist. Sind Trivialisierungen $h : \pi^{-1}(U) \to U \times Z$ von E und $k : \rho^{-1}(V) \to V \times T$ von F gegeben, so fügen sich die Abbildungen $l_{a,b} := h_a \otimes k_b : E_a \otimes F_b \to Z \otimes T$ zu einer bijektiven Abbildung

$$l : \bigsqcup_{(a,b)\in U\times V} E_a \otimes F_b \to U \times (Z \otimes T)$$

zusammen. Man kann nachprüfen, dass die Familie der $(U \times V, l)$ die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt, so dass G_0 zu einem Vektorbündel wird.

Ist nun (G, Z) ein Vektorbündel und $f : (E \times F, X \times Y) \to (G, Z)$ ein faserweise bilinearer Morphismus von Faserbündeln, ist also für jedes $(a, b) \in X \times Y$ die Einschränkung von f auf die Faser $E_a \times F_b$ eine bilineare Abbildung nach einer Faser G_z von G, so gibt es wegen der Universalität des Tensorprodukts von Vektorräumen genau eine Abbildung $e_{a,b} : E_a \otimes F_b \to G_z$, so dass $f|_{E_a\times F_b} = e_{a,b} \circ f_0|_{E_a\times F_b}$ ist. Wenn die gesuchte Abbildung e also existiert, so müssen ihre Enschränkungen auf die Fasern durch die $e_{a,b}$ gegeben sein. Um die Existenz zu beweisen, müssen wir prüfen, dass die $e_{a,b}$ sich zu einem Morphismus topologischer Räume bzw. Mannigfaltigkeiten zusammenfügen. Mit Hilfe der Trivialisierungen läuft das auf dieselbe Frage für triviale Vektorbündel hinaus. Aber die natürliche Abbildung aus dem Raum der bilinearen Abbildungen $Z \times T \to S$ in den Raum der linearen Abbildungen $Z \otimes T \to S$ ist linear und somit analytisch. □

Analog beweist man

Satz 25 *Es seien E und F stetige oder glatte Vektorbündel über X. Dann gibt es ein Vektorbündel G_0 über X und einen faserweise bilinearen Morphismus $f_0 : E \times F \to G_0$ von Faserbündeln über X, so dass für ein beliebiges Vektorbündel G und einen beliebigen faserweise bilinearen Morphismus $f : E \times F \to G$ von Faserbündeln über X ein Homomorphismus von Vektorbündeln $e : G_0 \to G$ mit der Eigenschaft $f = e \circ f_0$ existiert.*

Dieses Vektorbündel G_0 ist natürlich $E \otimes F$.

Als Spezialfall von $\mathrm{Hom}(E, F)$ erhalten wir im Fall des trivialen Bündels $F = X \times K$ das duale Bündel E^*. Ist E ein Geradenbündel, so ist für ganze Zahlen $k > 0$

$$E^k = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{k}$$

wieder ein Geradenbündel. (Manchmal wird es zur Unterscheidung vom k-fachen Kartesischen Produkt auch mit $E^{\otimes k}$ bezeichnet.) Wir setzen E^0 gleich dem trivialen Geradenbündel $X \times K \to X$. Die Abbildung

$$E \otimes E^* \to E^0,$$

deren Einschränkung auf die Fasern die natürliche Paarung $E_a \otimes E_a^* \to K$ ist, ist ein Isomorphismus von Geradenbündeln. Definieren wir also für $k > 0$

$$E^{-k} = \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{k},$$

so folgt für alle $k,\, l \in \mathbb{Z}$

$$E^k \otimes E^l \cong E^{k+l}.$$

Ein Beispiel für ein Geradenbündel ist das kanonische Bündel

$$K_X = \bigwedge\nolimits^n (T^*(X))$$

einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X. Im Fall $K = \mathbb{R}$ sind seine Schnitte gerade die Volumenformen auf X.

Definition 25 *Ein Unterbündel eines Vektorbündels $\pi : E \to X$ ist ein Vektorbündel $\rho : F \to X$ mit folgenden Eigenschaften: F ist ein topologischer Unterraum bzw. eine Untermannigfaltigkeit von E, ρ ist die Einschränkung von π und für jedes $a \in X$ ist F_a mit seiner Vektorraumstruktur ein linearer Unterraum von E_a.*

Ist $f : E \to F$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln über X, so definieren wir

$$\operatorname{Ker} f = \bigsqcup_{a\in X} \operatorname{Ker} f_a, \qquad \operatorname{Im} f = \bigsqcup_{a\in X} \operatorname{Im} f_a.$$

Dieser Begriff von Unterbündel ist angepasst an die Kategorie der Vektorbündel über X. Man müsste einen analogen Begriff in der Kategorie aller Vektorbündel definieren, um z. B. das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit als Unterbündel des Tangentialbündels der umgebenden Mannigfaltigkeit zu bezeichnen.

Satz 26 *Ist $f : E \to F$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln über X und ist der Rang von f_a unabhängig von a, so sind* $\operatorname{Ker} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *Unterbündel.*

Beweis. Mit Hilfe von lokalen Trivialisierungen kann der Beweis leicht auf den Fall von trivialen Bündel $E = X \times Z$ und $F = X \times T$ zurčkgeführt werden. Wir halten $a \in X$ fest und wählen ein Komplement Z_0 zu $\operatorname{Ker} f_a$ in Z und ein Komplement T_0 zu $\operatorname{Im} f_a$ in T. Es sei $i : Z_0 \to Z$ die Einbettung und $p : T \to T/T_0$ die Projektion. Nun hängt die lineare Abbildung $p \circ f_x \circ i : Z_0 \to T/T_0$ glatt von x ab, und die Menge U der $x \in X$, für die diese Abildung ein Isomorphismus ist, ist eine offene Umbegung von a. Wir bezeichnen ihr Inverses mit g_x.

Für $x \in U$ ist $f \circ i$ injektiv, und wegen der Konstanz des Ranges ist ihr Bild gleich $\operatorname{Im} f_a$. Also hat die durch $(x, z) \mapsto (x, f_x(z))$gegebene Abbildung $U \times Z_0 \to \operatorname{Im} f|_U$ das Inverse $(x, t) \mapsto (x, g_x(p(t)))$, welches eine lokale Trivialisierung von $\operatorname{Im} f$ ist.

Es sei $q : Z \to Z/Z_0$ die Projektion und $h_x : Z \to Z$ gegeben durch $h_x = \mathrm{id} - g_x \circ p \circ f_x$. Für $z \in Z_0$ gilt $h_x(z) = 0$, so dass wir $h_x = \tilde{h}_x \circ q$ für eine Abbildung $\tilde{h}_x : Z/Z_0 \to \operatorname{Ker} f_x$ mit schreiben können. Für $z \in \operatorname{Ker} f_x$ gilt $h_x(z) = z$, so dass $\tilde{h}_x \circ q_x = \mathrm{id}$, wenn q_x die Einschränkung von q auf $\operatorname{Ker} f_x$ bezeichnet. Wegen der Konstanz des Ranges von f_x ist $\tilde{h}_x$ das Inverse von q_x. Somit ist die durch $(x, z) \mapsto (x + Z_0, \tilde{h}_x(z))$ gegebene Abbildung $U \times Z/Z_0 \to \operatorname{Ker} f|_U$ eine lokale Trivialisierung von $\operatorname{Ker} f_x$.

Kombinieren wir die erhaltenen lokalen Trivialisierungen mit Kartenabbildungen für (Teilmengen von) U, so sehen wir, dass die besagten Unterbündel glatt sind. □

Definition 26 *Ein Schnitt einer Faserung $\pi : E \to X$ ist ein Morphismus $s : X \to E$, so dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$. Ist E ein Vektorbündel, so definieren wir für zwei Schnitte s und t und eine Funktion $f \in \mathcal{S}(X)$*

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x), \qquad (fs)(x) = f(x)s(x).$$

Damit wird der Raum der Schnitte zu einem $\mathcal{S}(X)$-Modul, den man häufig mit $\Gamma(E)$ bezeichnet. Sein Nullelement nennt man Nullschnitt 0_E. Ein Schnitt s ist eindeutig durch sein Bild $s(X)$ bestimmt und wird manchmal mit ihm identifiziert. Letzteres ist eine Untermannigfaltigkeit, die jede Faser transversal schneidet und durch π isomorph auf X abgebildet wird.

Die Schitte der oben konstruierten Bündel haben oft eine konkrete Interpretation. Die Schnitte von $T(X)$ sind Vektorfelder, die Schnitte von $\bigwedge^k(T^*(X))$ sind alternierende Differentialformen auf X. Jedem Schnitt s von $\operatorname{Hom}(E, F)$ kann man einen Homomorphismus $f : E \to F$ von Vektorbündeln zuordnen, indem man $f|_{E_a} = s(a)$ setzt. Damit erhalten wir eine Bijektion von $\Gamma(\operatorname{Hom}(E, F))$ auf die Menge der Homomorphismen $E \to F$ von Vektorbündeln (über X). Um das Bündel $\operatorname{Hom}(E, F)$ nicht mit dieser Menge von Homomorphismen zu verwechseln, wird es von manchen Autoren mit $\operatorname{HOM}(E, F)$ bezeichnet.

Man kann glatte Vektorbündel auch über Manigfaltigkeiten mit Rand auf naheliegende Weise definieren.

Lemma 8 *Ist X eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist jedes glatte Vektorbündel E über $X \times [0, 1]$ isomorph zu $p^*(F)$ für ein glattes Vektorbündel F über X, wobei $p : X \times [0, 1]$ die natürliche Projektion bezeichnet.*

Beweisskizze. Wir definieren $p_t : X \times [0,1] \to X \times \{t\}$ durch $p_t(x,u) = (x,t)$ und setzen $E_t = p_t^*(E|_{X\times\{t\}})$. Jeder glatte Schnitt von $\mathrm{Hom}(E, E_t)|_{X\times\{t\}}$ lässt sich mit Hilfe einer Zerlegung der Eins glatt auf $X \times [0,1]$ fortsetzen. Für den Schnitt id ist die Fortsetzung noch in einer Umgebung U invertierbar, und wir erhalten einen Isomorphismus $E_U \to p_t^*(E_t)$. Wegen der Kompaktheit von X enthält diese Umgebung eine Menge der Form $X \times I$, wobei I eine Umgebung von t ist. Aus der Überdeckung von $[0,1]$ durch solche I können wir eine endliche Teilüberdeckung auswählen und durch Verkettung einen glatten Isomorphismus $E \to p^*(E)$ gewinnen. □

Folgerung 5 *Jedes glatte Vektorbündel über* $[0,1]^n$ *ist trivial.*

Dies folgt einfach durch Induktion.

Definition 27 *Zwei stetige Abbildungen* g_0, $g_1 : X \to Y$ *heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung* $g : X \times [0,1] \to Y$ *gibt, so dass* $g(x,0) = g_0(x)$ *und* $g(x,1) = g_1(x)$ *für alle* $x \in X$. *Sind* g_0 *und* g_1 *Morphismen glatter Mannigfaltigkeiten, so heißen sie glatt homotop, wenn es eine Abbildung* g *wie oben gibt, die ein Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten mit Rand ist.*

Folgerung 6 *Sind die glatten Morphismen* g_0, $g_1 : X \to Y$ *glatt homotop und ist* F *ein glattes Vektorbündel, so sind* $g_0^*(F)$ *und* $g_1^*(F)$ *als glatte Vektorbündel isomorph.*

Dies folgt durch Anwendung von Lemma 8 auf $E = g^*(F)$, wobei $g(x,t) = g_t(x)$ die Homotopie bezeichnet.

Satz 27 *Es sei* X *eine Hausdorffsche glatte Mannigfaltigkeit mit endlicher Basis und* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum* V *mit folgender Eigenschaft. Für jedes glatte Vektorbündel* E *über* X *vom Rang* k *gibt es einen Morphismus* g *von* X *in die Grassmannmannigfaltigkeit* G *der* k*-dimensionalen Unterräume von* V, *so dass*

$$E \cong g^*(E_0),$$

wobei E_0 *das universelle Vektorbündel über* G *bezeichnet (daher der Name).*

Beweis für kompaktes X. Es sei $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine endliche Überdeckung von X durch offene Mengen, deren Bilder unter geeigneten Kartenabbildung kompakt sind, und $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Zerlegung der Eins mit $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$. Weiter sei Z ein k-dimensionaler Vektorraum und $V = Z^A = \{(z_\alpha)_{\alpha\in A} \mid z_\alpha \in Z\}$. Wir bezeichnen mit $p_\alpha : V \to Z$ die Projektion auf die α-Komponente.

Für jedes $\alpha \in A$ gibt es nach der Folgerung aus Lemma 8 eine lokale Trivialisierung $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times Z$, die wir als $h_\alpha(v) = (\pi(v), h'_\alpha(v))$ schreiben. Wir definieren eine glatte Abbildung $f : E \to V$ durch

$$f(v) = \big(\varphi_\alpha(\pi(v))h'_\alpha(v)\big)_{\alpha \in A}.$$

Dann ist $f|_{E_a}$ linear, und für $\varphi_\alpha(a) \neq 0$ ist $p_\alpha \circ f|_{E_a} = \varphi(a)h'_\alpha|_{E_a}$ ein Isomorphismus. Da für jedes $a \in X$ ein solches α existiert, ist $f|_{E_a}$ injektiv. Wir setzen

$$g(a) = f(E_a) \in G.$$

Um die Glattheit von g zu beweisen, können wir uns auf eine der Mengen U_α einschränken. Eine Basis von Z liefert mittels h'_α glatte Schnitte $s_1, \ldots, s_k$ von $E|_{U_\alpha}$, die faserweise linear unabhängig sind. Setzen wir

$$F_\alpha(a) = \big(f(s_1(a)), \ldots, f(s_k(a))\big).$$

so erhalten wir eine glatte Abbildung F_α von U_α in die Stiefelmannigfaltigkeit S der linear unabhängigen k-Tupel in V. Eine Funktion auf einer offenen Teilmenge von G ist nach Definition genau dann glatt, wenn ihr Pullback unter der natürlichen Projektion $\rho : S \to G$ glatt ist. Wegen $g|_{U_\alpha} = \rho \circ F_\alpha$ ist dann auch ihr Pullback unter g glatt auf U_α. Somit ist g ein Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten.

Setzen wir $f_0(v) = (g(\pi(v)), f(v))$, so ist $f(v) \in g(\pi(v))$, also $f_0(v) \in E_0$. Da E_0 eine Untermannigfaltigkeit von $G \times V$ ist, ist auch $f_0 : E \to E_0$ ein Morphismus glatter Mannigfaltigkeiten, er hat die Eigenschaft

$$\pi_0 \circ f_0 = g \circ \pi,$$

und seine Einschränkung auf die Fasern von E ist linear. Mit anderen Worten, f_0 ist ein Morphismus glatter Vektorbündel.

Nun sei E_1 ein weiteres Vektorbündel über X und $f_1 : E_1 \to E_0$ ein Morphismus glatter Vektorbündel mit der Eigenschaft

$$\pi_0 \circ f_1 = g \circ \pi_1.$$

Für $v_1 \in E_1$ mit $\pi_1(v_1) = a$ gilt $f_1(v) \in g(a)$, d. h. $f_1(v) = f(v)$ für ein eindeutig bestimmtes Element $v \in E_a$. Es gibt also eine eindeutig bestimmte fasertreue Abbildung $b : E_1 \to E$ mit $f_1 = f_0 \circ b$, und ihre Einschränkung auf jede Faser ist linear. □

10 Fast komplexe Mannigfaltigkeiten

Jeden komplexen Vektorraum V können wir auch als reellen Vektorraum auffassen. Die Multiplikation mit der imaginären Einheit i ist dann ein $\mathbb{R}$-linearer Endomorphismus J, so dass $J^2 = -I$. Umgekehrt kann man jeden reellen Vektorraum V, der mit einem Endomorphismus J mit der Eigenschaft $J^2 = -I$ ausgestattet ist, in einen komplexen Vektorrauum verwandeln, indem man für a, $b \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ setzt

$$(a + ib)v = av + bJv.$$

Die Komplexifizierung eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V kann man definieren als die additive Gruppe

$$V_{\mathbb{C}} = V \oplus V,$$

deren Elemente (x, y) wir nach der Vorschrift

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

mit komplexen Zahlen $a + ib$ multiplizieren und in den V mittels $x \mapsto (x, 0)$ eingebettet ist. Damit wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, und jede $\mathbb{R}$-Basis von V ist eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$. Die Komplexifizierung ist wie folgt charakterisiert: Jeder $\mathbb{R}$-lineare Homomorphismus von V in einen $\mathbb{C}$-Vektorraum W (aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum) lässt sich als Verkettung der Einbettung $V \to V_{\mathbb{C}}$ mit einem eindeutig bestimmten Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $V_{\mathbb{C}} \to W$ darstellen. Letzterer ist nichts anderes als die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung. Wir definieren die komplexe Konjugation auf $V_{\mathbb{C}}$ durch $\overline{(x, y)} = (x, -y)$. Man kann $V_{\mathbb{C}}$ auch als $V \otimes \mathbb{C}$ definieren, dann ist $\overline{v \otimes z} = v \otimes \bar{z}$.

Ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V, so ist $v_1, \ldots, v_m, iv_1, \ldots, iv_m$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist ein $\mathbb{C}$-linearen Homomorphismus $f : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_m$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W durch eine Matrix $C = A + iB$ dargestellt, wobei A und B reelle Einträge haben, so wird f in den entsprechenden Basen von V und W als reelle Vektorräume durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Hat der reelle Vektorraum V bereits eine komplexe Struktur J, so erfüllt die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von J auf $V_{\mathbb{C}}$ die Gleichung $(J - iI)(J + iI) = 0$. Darum zerfällt $V_{\mathbb{C}}$ in die direkte Summe des Eigenunterraums $V^{1,0}$ zum Eigenwert i und des Eigenunterraums $V^{0,1}$ zum Eigenwert $-i$. Offensichtlich gilt $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. Die identische Abbildung $I : V \to V$, bei der wir den ersten

Raum als reellen und den zweiten als komplexen Vektorraum betrachten, hat eine $\mathbb{C}$-linearen Fortsetzung $V_{\mathbb{C}} \to V$, deren Kern gleich $V^{0,1}$ ist, während $V^{1,0}$ bijektiv auf V abgebildet wird.

Die Räume $\bigwedge^p(V^{1,0})$ und $\bigwedge^p(V^{0,1})$ sind auf natürliche Weise in $\bigwedge^p(V)$ eingebettet. Es sei

$$\bigwedge^{p,q}(V) = \langle \omega \wedge \psi \mid \omega \in \bigwedge^p(V^{1,0}),\ \psi \in \bigwedge^q(V^{0,1})\rangle_{\mathbb{C}}$$

($\mathbb{C}$-lineare Hülle). Dies definiert eine $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-Graduierung auf $\bigwedge(V_{\mathbb{C}})$, es gilt $\overline{\bigwedge^{p,q}(V)} = \bigwedge^{q,p}(V)$ und

$$\bigwedge^r(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=r} \bigwedge^{p,q}(V).$$

Wir wollen auf jeder holomorphen Mannigfaltigkeit die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit definieren. Dies ist klar im Fall eines komplexen Vektorraums V, der nicht nur die Funktionengarbe $\mathcal{O}$ trägt, sondern, wenn wir ihn als reellen Vektorraum auffassen, auch die Funktionengarbe $\mathcal{E}$. Für eine holomorphe Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{S})$ sei $\mathcal{T}$ die kleinste Funktionengarbe auf X derart, dass für jeden komplexen Vektorraum V und jede offene Menge U in X ein beliebiger Morphismus $(U, \mathcal{S}|_U) \to (V, \mathcal{O})$ auch ein Morphismus $(U, \mathcal{T}|_U) \to (V, \mathcal{E})$ ist. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ eine glatte Mannigfaltigkeit, und jede Karte von $(X, \mathcal{S})$ ist auch eine Karte von $(X, \mathcal{T})$. Auf ähnliche Weise kann man jeder reell-analytischen Mannigfaltigkeit eine glatte Mannigfaltigkeit zuordnen.

Wir werden einem allgemeinen Brauch folgen und die Garbe der holomorphen Funktionen auf einer beliebigen komplexen Mannigfaltigkeit X mit $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}_X$ sowie die Garbe der glatten Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit X mit $\mathcal{E}$ oder $\mathcal{E}_X$ bezeichnen.

Häufig ist es nützlich, die Garbe $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ der $\mathbb{C}$-wertigen glatten Funktionen zu betrachten. Jede Derivation $v : \mathcal{E}_a \to \mathbb{R}$ des Halmes in einem Punkt $a \in X$ setzt sich zu einer $\mathbb{C}$-linearen Derivation $v : (\mathcal{E}_{\mathbb{C}})_a \to \mathbb{C}$ fort und schränkt sich zu einer Derivation $\mathcal{O}_a \to \mathbb{C}$ ein. Auf diese Weise erhalten wir eine lineare Abbildung $T_a(X, \mathcal{E}) \to T_a(X, \mathcal{O})$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Im Fall $X = \mathbb{C}^n$ folgt aus der Definition, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_j} = i\frac{\partial f}{\partial z_j}.$$

Dies zeigt, dass die $\mathbb{R}$-Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a(\mathbb{C}^n, \mathcal{E})$ auf die $\mathbb{R}$-Basis $\{\frac{\partial}{\partial z_j}, i\frac{\partial}{\partial z_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ abgebildet wird. Da jede holomorphe Mannigfaltigkeit lokal zu $\mathbb{C}^n$ isomorph ist, erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $T_a(X, \mathcal{E}) \to T_a(X, \mathcal{O})$, so dass wir nur noch $T_a(X)$

schreiben, worauf wir eine komplexe Struktur J_a haben. Im Fall von $\mathbb{C}^n$ ist natürlich $J(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \frac{\partial f}{\partial y_j}$, $J(\frac{\partial f}{\partial y_j}) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Unter Benutzung von Trivialisierungen sieht man, dass sich die Endomorphismen J_a zu einem glatten Schnitt J von $\mathrm{End}(T(X))$ zusammenfügen.

Wie schon im Fall eines abstrakten Vektorraums hat die identische Abbildung von $T_a(X)$ eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung $\alpha_a : T_a(X)_{\mathbb{C}} \to T_a(X)$, welche $T_a^{1,0}(X)$ mit $T_a(X)$ identifiziert und $T_a^{0,1}(X)$ auf 0 abbildet. Im Fall $X = \mathbb{C}^n$ wird die Projektion von $\frac{\partial}{\partial x_j} \in T_a(X)$ auf $T_a^{1,0}(X)$ durch α_a auf den Vektor $\frac{\partial}{\partial z_j} \in T_a(X)$ abgebildet und darum ebenfalls mit $\frac{\partial}{\partial z_j}$ bezeichnet, während die komplexen Konjugation die beiden Projektionen vertauscht, so dass man die andere Projektion von $\frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ bezeichnet. Man findet leicht die expliziten Formeln

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Bekanntlich ist eine glatte Funktion f auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}^n$ genau dann holomorph, wenn sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ für alle j erfüllt. Es folgt, dass eine Funktion $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U)$ für eine offene Menge U in einer holomorphen Mannigfaltigkeit X genau dann zu $\mathcal{O}(U)$ gehört, wenn sie von allen Tangentialvektoren $v \in T^{0,1}(U)$ annulliert wird.

Die Aufspaltung $T_a(X)_{\mathbb{C}} = T^{1,0}(X) \oplus T^{0,1}(X)$ induziert eine Aufspaltung $T_a^*(X)_{\mathbb{C}} = T^{*,1,0}(X) \oplus T^{*,0,1}(X)$ des komplexifizierten Kotangentialraums. Ist $U \subset \mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U)$, so ist df ein Schnitt von $T^*(U)_{\mathbb{C}}$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial z_j} &= \delta_{jk}, & \frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} &= 0, & \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial \bar{z}_j} &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

ist $\{dz_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ die duale Basis von $T_a^{*,1,0}(U)$ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial z_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a^{1,0}(U)$, während $\{d\bar{z}_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ die duale Basis von $T_a^{*,1,0}(U)$ zur Basis $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ von $T_a^{1,0}(U)$ ist. Man rechnet leicht nach, dass

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Allgemeiner sei ω ein Schnitt von $\bigwedge^{p,q} T^*(U)$. Dann haben wir eine Darstellung

$$\omega = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p \\ j_1 < \cdots < j_q}} f_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

oder abgekürzt

$$\omega = \sum_{I,J} f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Nun gilt $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$, wobei

$$\partial\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$
$$\bar{\partial}\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Definition 28 *Eine fast komplexe Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{E})$ mit einem glatten Schnitt J von $\operatorname{End} T(X, \mathcal{E})$), der faserweise die Eigenschaft $J^2 = -I$ hat.*

Auch für fast komplexe Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{E}, J)$ haben wir die Aufspaltung $T_a(X)_{\mathbb{C}} = T^{1,0}(X) \oplus T^{0,1}(X)$ in glatte $\mathbb{C}$-lineare Unterbündel und die $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-Graduierung von $\bigwedge(T^*(X))$. Wir bezeichnen den Raum der Schnitte $U \to \bigwedge^{p,q}(T(X))$ mit $\mathcal{E}^{p,q}(X)$, so dass

$$\mathcal{E}^r(X) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}(X).$$

Wir definieren ∂, $\bar{\partial} : \mathcal{E}^\bullet(X) \to \mathcal{E}^\bullet(X)$, indem wir für $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(X)$ setzen

$$\partial\omega = \pi^{p+1,q}(d\omega), \qquad \bar{\partial}\omega = \pi^{p,q+1}(d\omega),$$

wobei $\pi^{p,q}$ die Projektion $\mathcal{E}^\bullet(X)_{\mathbb{C}} \to \mathcal{E}^{p,q}(X)$ bezeichnet. Im Allgemeinen kann $d\omega$ Komponenten in $\mathcal{E}^{p',q'}(X)$ für beliebige p', q' mit $p' + q' = p + q + 1$ haben. Es ist offensichtlich, dass

$$\overline{\mathcal{E}^{p,q}(X)} = \mathcal{E}^{q,p}(X), \qquad \overline{\partial\omega} = \bar{\partial}\bar{\omega}.$$

Aus der Definition von d folgt für $\omega \in \mathcal{E}^r_{\mathbb{C}}(X)$ und $\psi \in \mathcal{E}^\bullet_{\mathbb{C}}(X)$

$$\partial(\omega \wedge \psi) = \partial\omega \wedge \psi + (-1)^r \omega \wedge \partial\psi,$$
$$\bar{\partial}(\omega \wedge \psi) = \bar{\partial}\omega \wedge \psi + (-1)^r \omega \wedge \bar{\partial}\psi.$$

Satz 28 (Newlander-Nirenberg) *Es sei $(X, \mathcal{E}, J)$ eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) Das Unterbündel $T^{1,0}(X)$ (oder $T^{0,1}(X)$) von $T(X)_{\mathbb{C}}$ ist involutiv, d. h. der Kommutator von zweien seiner Schnitte liegt wieder in diesem Unterbündel.

(ii) Es gilt $d = \partial + \bar\partial$ *auf* $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ *(oder auf* $\mathcal{E}^{0,1}(X)$*).*

(iii) Es gilt $d = \partial + \bar\partial$*.*

(iv) Die Krümmung S *von* J *(siehe Aufgabe 24) ist identisch gleich Null.*

(v) Auf X *existiert eine Struktur* $\mathcal{O}$ *einer komplexen Mannigfaltigkeit, welche* $\mathcal{E}$ *und* J *induziert.*

Bemerkung. Eine fast komplexe Struktur J, die eine der äquivalenten Bedingungen (i)–(iv) erfüllt, heißt integrabel. Für $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$ ist jede fast komplexe Struktur integrabel, denn dann ist (ii) wegen $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E}^{2,0} \oplus \mathcal{E}^{1,1} \oplus \mathcal{E}^{0,2}$ erfüllt, und (i) ist wegen $\operatorname{rk} T^{0,1}(X) = 1$ erfüllt, denn

$$[fv, gv] = \big(fv(g) - gv(f)\big)v.$$

für Funktionen f und g.

Falls die Funktionengarbe $\mathcal{O}$ wie in (iv) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt, denn

$$\mathcal{O}(U) = \{f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U) \mid v(f) = 0 \;\forall\, v \in T^{0,1}(U)\} = \{f \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(U) \mid \bar\partial f = 0\}.$$

Aus der Eigenschaft (iii) folgt

$$0 = d^2 = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$$

und, wenn wir die Komponenten beider Seiten bezüglich der Graduierung vergleichen,

$$\partial^2 = 0, \qquad \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0, \qquad \bar\partial^2 = 0.$$

Beweis, dass aus (v) alle anderen Bedingungen folgen. Es genügt, den Fall $X = \mathbb{C}^n$ zu betrachten. Jeden Schnitt von $T^{0,1}(U)$ kann man in der Form

$$v = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial \bar z_j}$$

mit $f_j \in \mathcal{E}(X)$ schreiben, und die Involutivität folgt durch Nachrechnen. Dass (iii) erfüllt ist, haben wir bereits vor der Definition fast komplexer Mannigfaltigkeiten nachgeprüft, und (ii) ist ein Spezialfall von (iii). Aussage (iv) bleibt als Hausaufgabe. □

Beweis der Äquivalenz von (i)–(iii). Es ist natürlich gleichgültig, ob wir in (i) bzw. (ii) den Bigrad (1,0) oder (0,1) betrachten, denn beide werden durch die komplexe Konjugation vertauscht. Nun seien v und w glatte

Schnitte von $T^{0,1}(U)$ und $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$. Nach Satz 17 ($\mathbb{C}$-linear fortgesetzt) gilt

$$\omega([v,w]) = \mathcal{L}_v(\omega(w)) - \iota_w(\mathcal{L}_v(\omega)) = -\iota_w(d(\omega(v)) + \iota_v(d\omega)) = -d\omega(v,w).$$

Gilt (i), so verschwindet an jeder Stelle $a \in X$ die Einschränkung von $d\omega$ auf $T_a^{0,1}(X) \times T_a^{0,1}(X)$, denn jeder Tangentialvektor lässt sich zu einem Vektorfeld auf einer Umgebung U ausdehnen. Somit ist $\pi^{0,2}(d\omega) = 0$, und (ii) folgt.

Gilt (ii), so wird der Kommutator zweier Schnitte v, w von $T^{0,1}(U)$ von jedem $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ annulliert. Da man zu jedem Vektor in $u \in T_a^{1,0}(U)$ ein $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ mit $\omega(u) \neq 0$ finden kann, hat $[v,w]$ keine Komponente in $T^{1,0}(U)$, also folgt (i).

Aus (ii) folgt (iii) auf $\mathcal{E}^r_{\mathbb{C}}(X)$ durch Induktion, da jede r-Form eine Linearkombination von Produkten von Formen kleineren Grades ist. □

11 Grundbegriffe der Homologie und Kohomologie

Es sei $(X, \mathcal{E})$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine glatte singuläre p-Kette in X ist ein Paar (Y, c) bestehend aus einer disjunkten Vereinigung Y von p-dimensionalen orientierten kompakten Polyedern und einem glatten Morphismus $c : Y \to X$. Man definiert die Summe zweier p-Ketten (Y_1, c_1) und (Y_2, c_2) als die p-Kette $(Y_1 \sqcup Y_2, c)$ mit $c|_{Y_1} = c_1$ und $c|_{Y_2} = c_2$. Die Menge der glatten singulären p-Ketten ist ein Monoid mit der p-Kette $\emptyset \to X$ als Nullobjekt. Wir faktorisieren nach dem von allen Summen $(Y, c) + (-Y, c)$ erzeugten Ideal aus und erhalten eine abelsche Gruppe[3] $C_p(X)$.

Der Rand einer p-Kette (Y, c) ist $(\partial Y, \partial c)$, wobei ∂Y die disjunkte Vereinigung der maximalen Seiten von Y mit der Randorientierung ist und $\partial c = c|_{\partial Y}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$. Wir schreiben meist nur c statt (Y, c). Eine Kette heißt Zykel, wenn ihr Rand gleich Null ist. Zwei glatte p-Zykel heißen homolog, wenn ihre Differenz ein Rand ist. Wir bezeichnen die Gruppe der p-Zykel mit $Z_p(X)$ und die Gruppe der p-Ränder mit[4] $B_p(X)$. Die Homologieklassen der Dimension p bilden dann eine Gruppe

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X).$$

Eine alternierende p-Form $\omega \in \mathcal{E}^p(X)$ heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$, und sie heißt exakt, wenn es ein $\psi \in \mathcal{E}^{p-1}(X)$ gibt, so dass $d\psi = \omega$. Zwei

[3] C steht für “chain”.

[4] B steht für “boundary”.

geschlossene p-Formen heißen kohomolog, wenn ihre Differenz exakt ist. Wir bezeichnen den Vektorraum der geschlossenen p-Formen mit $Z^p(X,\mathbb{R})$ und den der exakten p-Formen mit $B^p(X,\mathbb{R})$. Die Kohomologieklassen vom Grad p bilden dann einen Vektorraum

$$H^p(X,\mathbb{R}) = Z^p(X,\mathbb{R})/B^p(X,\mathbb{R}).$$

Die Gruppen der glatten singulären Ketten mit dem Randoperator ∂ bilden eine Folge von linearen Abbildungen

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0,$$

mit der Eigenschaft $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. Eine solche Folge von abelschen Gruppen und Homomorphismen, bei der die Verkettung von je zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen gleich Null ist, nennt man Komplex. Es ist klar, dass

$$Z_p(X) = \operatorname{Ker} \partial_p, \qquad B_p(X) = \operatorname{Im} \partial_{p+1}.$$

Auch die Vektorräume der äußeren Differentialformen mit dem äußeren Differential d bilden einen Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(X) \xrightarrow{d_0} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d_1} \mathcal{E}^2(X) \xrightarrow{d_2} \ldots,$$

denn $d_{p+1} \circ d_p = 0$. Natürlich gilt wieder

$$Z^p(X,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d_p, \qquad B^p(X,\mathbb{R}) = \operatorname{Im} d_{p-1}.$$

Es ist nützlich, die Vektorräume $\mathcal{E}^p(X)$, $Z^p(X,\mathbb{R})$ bzw. $B^p(X,\mathbb{R})$ zur Algebra $\mathcal{E}^\bullet(X)$ und ihren Unterräumen

$$Z^\bullet(X,\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d \qquad \text{und} \qquad B^\bullet(X,\mathbb{R}) = \operatorname{Im} d$$

zusammenzufassen.

Lemma 9 *Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$ eine graduierte Unteralgebra in $\mathcal{E}^\bullet(X)$ und $B^\bullet(X,\mathbb{R})$ ein graduiertes zweiseitiges Ideal in $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$. Folglich ist auch*

$$H^\bullet(X,\mathbb{R}) = Z^\bullet(X,\mathbb{R})/B^\bullet(X,\mathbb{R}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} H^p(X,\mathbb{R})$$

eine graduierte Algebra.

Das Pullback unter einem glatten Morphismus $f : X \to X'$ induziert einen Homomorphismus von Algebren $f^* : H^\bullet(X',\mathbb{R}) \to H^\bullet(X,\mathbb{R})$.

Beweis. Da d eine Derivation vom Grad 1 ist, gehört ω genau dann zu $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$, wenn das für jede homogene Komponente von ω gilt, also ist $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$ ein graduierter Unterraum. Analoges gilt für $B^\bullet(X,\mathbb{R})$.

Für $\omega \in Z^p(X,\mathbb{R})$ und $\psi \in Z^q(X,\mathbb{R})$ folgt aus Satz 9(d) sofort $d(\omega\wedge\psi) = 0$, also $\omega\wedge\psi \in Z^{p+q}(X,\mathbb{R})$. Somit ist $Z^\bullet(X,\mathbb{R})$ eine graduierte Unteralgebra. Ist $\omega \in B^p(X,\mathbb{R})$, also $\omega = d\omega_0$, so gilt nach derselben Formel wegen $d\psi = 0$

$$d(\omega_0 \wedge \psi) = \omega \wedge \psi.$$

Also ist $B(X,\mathbb{R})$ ein Rechtsideal, und wegen Satz 10(ii) auch ein Linksideal.

Für einen glatten Morphismus $f : X \to X'$ ist das Pullback $f^* : \mathcal{E}^\bullet(X') \to \mathcal{E}^\bullet(X)$ nach Satz 12 ein Homomorphismus von graduierten Algebren, und nach Satz 9 gilt $d\circ f^* = f^*\circ d$. Eine Abbildung zwischen Komplexen mit diesen Eigenschaften nennt man Kettenabbildung. Sie bildet geschlossene Formen auf geschlossene Formen und exakte Formen auf exakte Formen ab und induziert somit einen Homomorphismus zwischen den Kohomologiealgebren. □

Auf den Homologiegruppen gibt es keine natürliche Algebrenstruktur, obwohl der Randoperator von Polyedern die Eigenschaft

$$\partial(W \times Y) = \partial W \times Y \sqcup (-1)^{\dim W} W \times \partial Y$$

hat. Trotzdem fasst man auch die Gruppen der Ketten zu einer graduierten Gruppe $C_\bullet(X)$ zusammen und erhält daraus die totale Homologiegruppe

$$H_\bullet(X) = Z_\bullet(X)/B_\bullet(X) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} H_p(X).$$

Ein glatter Morphismus $f : X \to X'$ induziert auch eine Abbildung $f_* : C(X) \to C(X')$ durch $f_*(c) = f\circ c$. Dies ist ebenfalls eine Kettenabbildung, d. h. sie erhält die Graduierung und erfüllt

$$f_*\circ\partial = \partial\circ f_*.$$

Somit induziert f_* eine Abbildung zwischen den entsprechenden Homologiegruppen.

Lemma 10 *Wir definieren eine Paarung*

$$\mathcal{E}^p(X) \times C_p(X) \to \mathbb{R}$$

durch

$$\langle\omega, c\rangle = \int_Y c^*(\omega).$$

(i) Die Einschränkung dieser Paarung auf $Z^p(X,\mathbb{R})\times Z_p(X)$ hängt nur von Kohomologie- bzw. Homologieklassen ab, wir erhalten also eine Paarung

$$H^p(X,\mathbb{R}) \times H_p(X) \to \mathbb{R}.$$

(ii) Ist $f : X_1 \to X_2$ ein glatter Morphismus, so gilt

$$\langle f^*(\omega), c\rangle = \langle \omega, f_*(c)\rangle.$$

Beweis. (i) Sind c_1 und c_2 homolog, also $c_1 - c_2 = \partial b$ für eine $(p+1)$-Kette $b : W \to X$, so ist

$$\begin{aligned}\langle \omega, c_1 - c_2\rangle &= \int_{Y_1} c_1^*(\omega) - \int_{Y_2} c_2^*(\omega)\\ &= \int_{\partial W} b^*(\omega) = \int_W d(b^*(\omega)) = \int_W b^*(d\omega) = 0,\end{aligned}$$

weil $d\omega = 0$, wobei wir die Verallgemeinerung von Satz 20 auf Polyeder und Satz 9 benutzt haben. Sind hingegen ω_1 und ω_2 kohomolog, also $\omega_1 - \omega_2 = d\psi$ mit $\psi \in \mathcal{E}^{p-1}(X)$, so ist

$$\langle \omega_1 - \omega_2, c\rangle = \int_Y c^*(d\psi) = \int_Y d(c^*(\psi)) = \int_{\partial Y} c^*(\psi) = 0,$$

weil $\partial Y = \emptyset$, wobei wir wieder Satz 9 und die Verallgemeinerung von Satz 20 benutzt haben.

(ii) folgt unmittelbar aus $c^* \circ f^* = (f \circ c)^*$. □

Ein glatter p-Zykel ist ein Paar (Y, c) bestehend aus einer glatten kompakten p-dimensionalen Mannigfaltigkeit Y ohne Rand und einem glatten Morphismus $c : Y \to X$. Bekanntlich existiert eine Triangulierung von Y, d. h. ein Homöomorphismus von Y mit einem endlichen Simplizialkomplex. Sind $Y_1, \ldots, Y_r$ die Simplexe maximaler Dimension und ist $c_i = c|_{Y_i}$, so ist $\tilde{c} = c_1 + \cdots + c_r \in Z_p(X)$, da sich die Terme von ∂c_i gegenseitig wegkürzen. Der singuläre Zykel $\tilde{c}$ hängt zwar von der Wahl der Triangulierung ab, aber man kann zeigen, dass seine Klasse in $H_p(X)$ eindeutig durch c bestimmt ist.

Ist X kompakt und orientiert, so erhalten wir aus dem glatten Zykel (X, id) die fundamentale Klasse von X. Weitere Beispiele von glatten Zykeln in projektiven Räumen sind die natürlichen Einbettungen $P(W) \to P(V)$, wobei W ein Unterraum des reellen, komplexen oder quaternionischen Vektorraums V ist. Im reellen Fall muss die Dimension von W gerade sein, denn sonst ist $P(W)$ nicht orientierbar. Man kann allerdings auch nichtorientierte

Ketten betrachten und so eine andere Version von Homologiegruppen definieren.

Homotope glatte Zykel $c_0,\ c_1 : Y \to X$ sind homolog. Sei nämlich $b : [0,1] \times Y \to X$ die Homotopie. Dann gilt

$$\partial([0,1] \times Y) = \{1\} \times Y \sqcup \{0\} \times (-Y),$$

und durch Triangulierung dieser Mannigfaltigkeit mit Rand erhalten wir eine singuläre Kette $\tilde{b}$ mit $\partial\tilde{b} = \tilde{c}_1 - \tilde{c}_0$. Für glatte singuläre Zykel ist der Begriff einer Homotopie nicht erklärt, statt dessen hat man folgendes Resultat.

Lemma 11 *Sind $f_0,\ f_1 : X \to X'$ glatt homotope Morphismen, so gibt es Abbildungen*

$$\Phi_p : C_p(X) \to C_{p+1}(X'),$$

die sich zu einer Abbildung Φ mit der Eigenschaft

$$\partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial = f_{1,*} - f_{0,*}$$

zusammenfügen, und es gibt Abbildungen

$$\Psi^p : \mathcal{E}^p(X', \mathbb{R}) \to \mathcal{E}^{p-1}(X, \mathbb{R}),$$

die sich zu einer Abbildung Ψ mit der Eigenschaft

$$d \circ \Psi + \Psi \circ d = f_1^* - f_0^*$$

zusammenfügen. Für $c \in Z_p(X)$ sind $f_{0,*}(c)$ und $f_{1,*}(c)$ homolog, und für $\omega \in Z^p(X', \mathbb{R})$ sind $f_0^*(\omega)$ und $f_1^*(\omega)$ kohomolog.

Abbildungen Φ und Ψ mit den angegebenen Eigenschaften nennt man Kettenhomotopien.

Beweis. Es sei $F : [0,1] \times X \to X'$ die Homotopie. Ist c eine glatter Zykel, so ist die Homotopie $b : [0,1] \times Y \to X'$ zwischen $f_{0,*}(c)$ und $f_{1,*}(c)$ gegeben durch

$$b(y,t) = F(t, c(y)).$$

Diese Formel definiert sogar für eine p-Kette c eine $(p+1)$-Kette $b = \Phi(c)$. Wegen

$$\partial([0,1] \times Y) = \{1\} \times Y \ \sqcup\ \{0\} \times (-Y)\ \sqcup\ [0,1] \times \partial(-Y)$$

folgt

$$\partial(b) = f_{1,*}(c) - f_{0,*}(c) - \Phi(\partial(c))$$

Ist c ein Zykel, so verschwindet der zweite Term auf der linken Seite.

Zur Definition von Ψ betrachten wir die Einbettung $i_t : X \to [0,1] \times X$ und das Vektorfeld v auf $X \to [0,1]$, die gegebene sind durch

$$i_t(x) = (t, x), \qquad v(f) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Wir definieren Ψ durch

$$\Psi(\omega) = \int_0^1 i_t^*(\iota_v F^*(\omega))\, dt,$$

Dann gilt nach den Sätzen 9 und 17

$$\begin{aligned} d(\Psi(\omega)) + \Psi(d\omega) &= \int_0^1 i_t^*\big((d \circ \iota_v + \iota_v \circ d)F^*(\omega)\big) dt \\ &= \int_0^1 i_t^*(\mathcal{L}_v F^*(\omega))\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\, i_t^*(F^*(\omega))\, dt \\ &= i_1^*(F^*(\omega)) - i_0^*(F^*(\omega)) = f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega). \end{aligned}$$

Ist ω geschlossen, so verschwindet der zweite Term auf der linken Seite. □