

# **Skriptum zur Vorlesung**

## **Differenzierbare Mannigfaltigkeiten**

**Peter Wagner**

VO 4      SoSe 1993 und 2004  
Letzte Änderung: 22. 6. 2005



Institut für Technische Mathematik,  
Geometrie und Bauinformatik  
Baufakultät, Universität Innsbruck

# Inhaltsverzeichnis

§ 1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen . . . . .	1
§ 2	Tangentialvektoren und Vektorfelder . . . . .	16
§ 3	Tensoren auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	39
§ 4	Borelmaße, Radonmaße, $n$ -Formen und Orientierung . . . . .	53
§ 5	$d$ , $\partial$ , de Rham und Stokes . . . . .	71
§ 6	Kanonisches Volumsmaß, Sternoperator . . . . .	85
§ 7	Geodätische Kurven und Normalkoordinaten . . . . .	98
§ 8	Zusammenhang und kovariante Ableitung . . . . .	115
§ 9	Der Krümmungstensor . . . . .	130

# Kap. I: Tensorrechnung auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

## § 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen

**Def.:**  $M$  sei ein topologischer Raum.

$M$  heißt  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit:  $\iff$  (i)  $M$  hausdorffsch (d.h.  $\forall x \neq y \in M : \exists$  Umgebung  $U$  von  $x$ ,  $V$  von  $y : U \cap V = \emptyset$ )

(ii)  $M$  erfüllt 2. Abzählbarkeitsaxiom (d.h.  $\exists$  abzählbare Basis der Topologie) und

(iii)  $M$  lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  (d.h.  $\forall x \in M : \exists$  offene Umgebung  $U$  von  $x : \exists V \subset \mathbb{R}^n$  offen:  $\exists \varphi : U \xrightarrow{\sim} V$  Homöomorphismus).

**Bsp.:** 1)  $\mathbb{R}^n$  mit üblicher Topologie. Ich schreibe  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$

(„ $T$ “ = transponiert).

2)  $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  ist  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit der Spurtopologie.

Zu (iii): Für  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  sei  $U_{j,+} := \{x \in \mathbb{S}^n : x^j > 0\}$ ,  $U_{j,-} := -U_{j,+}$ ,  $\varphi_{j,\pm} : U_{j,\pm} \longrightarrow V := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} : x \longmapsto (x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^{n+1})^T$ .

$\varphi_{j,+}$  und  $\varphi_{j,-}$  sind Homöomorphismen, die Umkehrabbildungen sind

$V \longrightarrow U_{j,\pm} : x \longmapsto (x^1, \dots, x^{j-1}, \pm\sqrt{1 - |x|^2}, x^j, \dots, x^n)$ .

Da jedes  $x \in \mathbb{S}^n$  in einem  $U_{j,+}$  oder einem  $U_{j,-}$  enthalten ist, ist (iii) bewiesen.

**Bemerkung:** Es lässt sich zeigen, dass eine topologische Mannigfaltigkeit nicht zugleich  $n$  und  $p$ -dimensional sein kann, wenn  $n \neq p$ . Dies folgt aus dem nicht trivialen „invariance of domain theorem“:  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $V \subset \mathbb{R}^p$  offen,  $U$  homöomorph  $V \implies n = p$ . (Brouwer, 1911)

**Def.:**  $M$  sei  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

1) Eine Karte auf  $M$  ist ein Homöomorphismus  $\varphi : U \longrightarrow V$ , wobei  $U \subset M$  offen,  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen.

2) Eine Menge  $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$  von Karten auf  $M$  heißt Atlas von  $M$ :  
 $\iff \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

3) Ein Atlas  $\mathfrak{A}$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -Atlas,  $k \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ :  $\iff \forall \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathfrak{A} : U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \implies \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  ist  $\mathcal{C}^k$  (d.h.  $k$ -mal stetig differenzierbar).

**Bemerkung:** Jeder Atlas ist  $\mathcal{C}^0$ . Jeder  $\mathcal{C}^k$ -Atlas ist auch  $\mathcal{C}^l$  für  $l \leq k$ .

**Bsp.:** 1)  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen  $\implies \mathfrak{A} = \{\text{id} : M \rightarrow M\}$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas.

2)  $M = \mathbb{S}^n$ ;  $\mathfrak{A} := \{\varphi_{j,+}, \varphi_{j,-} : j \in \{1, \dots, n+1\}\}$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas, denn für  $j < k$  gilt  $\varphi_{j,+} \circ \varphi_{k,+}^{-1} : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x^k, \dots, x^n)^T \mapsto (x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^{k-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x^k, \dots, x^n)^T$  ist  $\mathcal{C}^\infty$  auf  $\varphi_k(U_{j,+} \cap U_{k,+}) \subset V = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  und in den Fällen  $j \geq k$  und  $-$  statt  $+$  ist es analog.

**Def.:**  $M$  sei eine topologische Mannigfaltigkeit,  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$   $\mathcal{C}^k$ -Atlanten auf  $M$ .  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  heißen  $\mathcal{C}^k$ -äquivalent:  $\iff \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$   $\mathcal{C}^k$ -Atlas.

**Hilfssatz:** 1)  $\mathcal{C}^k$ -Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der  $\mathcal{C}^k$ -Atlanten.  
2) In jeder Äquivalenzklasse  $[\mathfrak{A}]$   $\exists!$  maximaler  $\mathcal{C}^k$ -Atlas  $\mathfrak{A}_{\max}$ , d.h. einer, der jeden  $\mathcal{C}^k$ -äquivalenten Atlas enthält.

**Beweis:** 1) a)  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$   $\mathcal{C}^k$ -äquivalent  $\iff \forall (\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}_1, \forall (\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2) \in \mathfrak{A}_2 : U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \implies \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$  ist  $\mathcal{C}^k$ .

b) Es seien  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$   $\mathcal{C}^k$ -äquivalent und  $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$   $\mathcal{C}^k$ -äquivalent und  $(\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}_1, (\varphi_3 : U_3 \rightarrow V_3) \in \mathfrak{A}_3$  und  $x \in \varphi_3(U_1 \cap U_3) \subset \mathbb{R}^n$ .  $\mathfrak{A}_2$  Atlas  $\implies \exists (\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2) \in \mathfrak{A}_2$  mit  $\varphi_3^{-1}(x) \in U_2 \implies x \in \varphi_3(U_2 \cap U_3)$  und  $\varphi_2 \varphi_3^{-1}(x) \in \varphi_2(U_1 \cap U_2) \implies$  bei  $x$  ist  $\varphi_1 \varphi_3^{-1} = \varphi_1 \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \varphi_3^{-1}$  auch  $\mathcal{C}^k$ .

Somit sind auch  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3$   $\mathcal{C}^k$ -äquivalent. Also ist  $\mathcal{C}^k$ -Äquivalenz transitiv. Der Rest ist klar.

2) Wenn  $\mathfrak{A}$   $\mathcal{C}^k$ -Atlas, so ist  $\mathfrak{A}_{\max} := \bigcup \{\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}$   $\mathcal{C}^k$ -äquivalent $\}$  auch ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas.  $\mathfrak{A}_{\max}$  ist  $\mathcal{C}^k$ -äquivalent zu  $\mathfrak{A}$  und maximal mit dieser Eigenschaft.  $\square$

**Bsp.:**  $M = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{A}_1 := \{\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  und  $\mathfrak{A}_2 := \{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3\}$  sind 2  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlanten, die nicht  $\mathcal{C}^1$ -äquivalent sind.

**Def.:**  $M$   $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ .

- 1) Eine Äquivalenzklasse  $[\mathfrak{A}]$  von  $\mathcal{C}^k$ -Atlanten auf  $M$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -Struktur auf  $M$ .
- 2) Wenn  $[\mathfrak{A}]$   $\mathcal{C}^k$ -Struktur auf  $M$ , so heißt das Paar  $(M, [\mathfrak{A}])$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Oft schlampig:  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit (so wie „ $M$  topologischer Raum“).
- 3)  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Wenn  $\varphi : U \rightarrow V$  im maximalen Atlas von  $[\mathfrak{A}]$  enthalten ist, so heißt  $\varphi$  Karte auf  $(M, [\mathfrak{A}])$  oder Karte der Mannigfaltigkeit  $(M, [\mathfrak{A}])$ .

**Bemerkung:** Während es auf  $M$  nur eine  $\mathcal{C}^0$ -Struktur gibt, gibt es für  $k \geq 1$  unendlich viele verschiedene  $\mathcal{C}^k$ -Strukturen. Die Kenntnis der Topologie allein ist also nicht ausreichend für die Mannigfaltigkeitsstruktur, wenn  $k \geq 1$ .

**Notation:** Für eine Karte  $\varphi$  schreibt man  $\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$ . (Eigentlich müsste es  $x \mapsto (\varphi(x)^1, \dots, \varphi(x)^n)^T$  heißen.) Eine zweite Karte wird  $\psi : U' \rightarrow V' : x \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T$  geschrieben.

**Bsp.:** 1)  $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$  mit Atlanten wie oben sind  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Die entsprechenden  $\mathcal{C}^\infty$ -Strukturen heißen Standardstrukturen.

2)  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen.

$\mathfrak{A}|_U := \{\varphi|_{U \cap U_1} : (\varphi : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}\}$  ist  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $U$  und  $[\mathfrak{A}|_U]$  hängt nur von  $[\mathfrak{A}]$  ab.  $[\mathfrak{A}|_U]$  heißt induzierte  $\mathcal{C}^k$ -Struktur auf  $U$ .

3)  $\mathbb{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  modulo  $R$ , wobei  $xRy \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$ .  $\mathbb{P}^n$  ist der  $n$ -dimensionale projektive Raum. Ich schreibe  $[x]$  für die Äquivalenzklasse von  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Für  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  sei  $U_j := \{[x^1, \dots, x^{n+1}] \in \mathbb{P}^n : x^j \neq 0\}$  und  $\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n : [x] \mapsto \left( \frac{x^1}{x^j}, \dots, \frac{x^{j-1}}{x^j}, \frac{x^{j+1}}{x^j}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^j} \right)^T$ .

Alle  $\psi_j$  sind Karten auf  $\mathbb{P}^n$  und  $\mathfrak{A} := \{\psi_j : j \in \{1, \dots, n+1\}\}$  ist ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas von  $\mathbb{P}^n$ . Damit ist  $(\mathbb{P}^n, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

4)  $V$  endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  Koordinatenabbildung bzgl. einer Basis,  $\mathfrak{A} := \{\varphi\}$ . Dann ist  $[\mathfrak{A}]$  von der gewählten Basis unabhängig und  $[\mathfrak{A}]$  heißt wieder Standardstruktur auf  $V$ .

**Def.:**  $(M_i, [\mathfrak{A}_i])$   $n_i$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $l \leq k$ ,  $x_0 \in U \subset M_1$  offen,  $f : U \rightarrow M_2$  stetig in  $x_0$ .

1)  $f$  heißt  $\mathcal{C}^l$  in  $x_0 \iff \exists (\forall)(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i) \in \mathfrak{A}_i$  mit  $x_0 \in U_1$  und  $f(x_0) \in U_2 : \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U \cap U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \rightarrow V_2$  ist  $\mathcal{C}^l$  in  $\varphi_1(x_0)$ .

2)  $f$  heißt  $\mathcal{C}^l$   $\iff \forall x \in U : f$  stetig und  $\mathcal{C}^l$  in  $x$ .

3)  $f$   $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus  $\iff f$  bijektiv,  $f, f^{-1} \in \mathcal{C}^k$ .

**Hilfssatz:** 1)  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit  $\implies \text{id} : M \rightarrow M$  ist  $\mathcal{C}^k$ . 2)  $M_1, M_2, M_3$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $f : M_1 \rightarrow M_2$   $\mathcal{C}^k$ ,  $g : M_2 \rightarrow M_3$   $\mathcal{C}^k \implies g \circ f : M_1 \rightarrow M_3$   $\mathcal{C}^k$ .

**Beweis:** leicht.

**Bemerkung:** Die Menge der  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten bildet also eine Kategorie.

**Schreibweise und Definition:**  $M_1, M_2$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten,  $f : M_1 \rightarrow M_2$   $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$   $\mathcal{C}^k$ -Karte auf  $M_1$ ,  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 : y \mapsto (y^1, \dots, y^p)^T$   $\mathcal{C}^k$ -Karte auf  $M_2$ . Für die Abbildung  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \rightarrow V_2$  schreibe ich  $f : x \mapsto y(x)$  oder  $f : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^p)^T$ .

Dies heißt Koordinatendarstellung von  $f$  bzgl.  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Die Jacobi-Matrix ist dann  $\begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^p}{\partial x^n} \end{pmatrix}$ .

Wenn  $x \in U_1 \cap f^{-1}(U_2)$ , so heißtt  $\text{Rg}_x f := \text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}$  der Rang von  $f$  in  $x$ .

$\text{Rg}_x f$  ist von den gewählten Karten  $\varphi_1, \varphi_2$  unabhängig, denn wenn

$\psi_1 : x \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T$ ,  $\psi_2 : y \mapsto (y^{1'}, \dots, y^{p'})^T$  andere Karten sind, so ist

$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}$  (Summenkonvention!), d.h.  $\begin{pmatrix} \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^{j'}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} B$ , wobei  $A, B$  invertierbare  $p \times p$ - bzw.  $n \times n$ -Matrizen sind.

**Hilfssatz:**  $M_1, M_2 \mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $p$ ,  $k \geq 1$ ,  
 $f : M_1 \rightarrow M_2 \mathcal{C}^k$ . Äquivalent sind:

- (i)  $f$   $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus
- (ii)  $f$  bijektiv und  $\forall x \in M_1 : \text{Rg}_x f = n = p$ .

**Beweis:** a) Erinnerung

Satz über implizite Funktionen (SIF)  $U \subset \mathbb{R}^n$  sei Umgebung von 0,  $k \geq 1$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mathcal{C}^k$ ,  $\text{Rg}_0 f = n$  (d.h.  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}(0) \neq 0$ ). Dann existiert  $U_1 \subset U$  offen, sodass  $0 \in U_1$ ,  $f(U_1)$  offen,  $f_1 : U_1 \rightarrow f(U_1) : x \mapsto f(x)$  bijektiv und  $f_1^{-1} \mathcal{C}^k$ .

**Bemerkung:** Beachte, dass  $f$  in einer Umgebung von 0  $\mathcal{C}^k$  sein muss. Differenzierbar allein ist auch nicht genug, man braucht *stetig* differenzierbar.

b) (i)  $\Rightarrow$  (ii):  $x^i, y^j$  Koordinaten wie oben, d.h.

$$f : (x^i) \mapsto (y^j) \Rightarrow \text{Rg}_x f = \text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} \leq \min\{n, p\}.$$

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{M_1} \Rightarrow \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \cdot \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) = I \Rightarrow \text{Rg}_x f = \text{Rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} = \dim \text{im} \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} \geq n,$$

wobei die Matrix  $\begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}$  als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^p$  aufgefasst wird und „im“ den Bildraum bezeichnet.

Ebenso:  $f \circ f^{-1} = \text{id}_{M_2} \Rightarrow \text{Rg}_x f \geq p$ .

c) (ii)  $\Rightarrow$  (i): Es sei  $x_0 \in M_1$ .  $\text{Rg}_{x_0} f = n = p \Rightarrow$  (SIF)  $f^{-1}$  ist bei  $f(x_0)$   $\mathcal{C}^k$ .  $\square$

**Bemerkung:** Die Invarianz der Dimension ist also bei  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus,  $k \geq 1$ , relativ leicht zu zeigen; vgl. die Bemerkung in S. 1 zum Fall  $k = 0$ .

**Bsp.:** 1)  $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n : x \longmapsto [x]$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ , denn z.B. in den Karten  $\varphi_{1,+}$  von  $\mathbb{S}^n$  und  $\psi_2$  auf  $\mathbb{P}^n$  gilt:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n \\
\cup & & \cup \\
U_{1,+} & & U_2 \\
\downarrow \varphi_{1,+} & & \downarrow \psi_2 \\
\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} & & \mathbb{R}^n
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\left( \sqrt{1 - |x|^2}, x^1, \dots, x^n \right) \longmapsto \left[ \sqrt{1 - |x|^2}, x^1, \dots, x^n \right] \\
\uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
(x^1, \dots, x^n) \qquad \qquad \qquad \left( \frac{\sqrt{1 - |x|^2}}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \dots, \frac{x^n}{x^1} \right)
\end{array}$$

ist  $\mathcal{C}^\infty$  auf  $\varphi_{1,+}(U_{1,+} \cap f^{-1}(U_2))$ .

2) Die 2 Atlanten  $\mathfrak{A}_1 = \{\text{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$  und  $\mathfrak{A}_2 = \{x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$  sind zwar nicht äquivalent auf  $\mathbb{R}$ , d.h.  $(\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_1])$  und  $(\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_2])$  sind verschiedene  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, aber  $f : (\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_1]) \longrightarrow (\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_2]) : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$  ist ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus, denn  $f$  ist bijektiv und in Koordinaten gilt  $f : x \longmapsto x$ . Beachte aber, dass  $g : \mathbb{R} \longrightarrow N$  bzgl.  $[\mathfrak{A}_1]$   $\mathcal{C}^k$  sein kann und bzgl.  $[\mathfrak{A}_2]$  nicht für  $k \geq 1$ .

**Hilfssatz und Definition:**  $(M_1, [\mathfrak{A}_1]), (M_2, [\mathfrak{A}_2])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten.

$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 := \{(\varphi_1, \varphi_2) : U_1 \times U_2 \longrightarrow V_1 \times V_2 : (\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i) \in \mathfrak{A}_i\}$ . Dann ist  $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $M_1 \times M_2$  und die  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit  $(M_1 \times M_2, [\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2])$  hängt nur von  $[\mathfrak{A}_1], [\mathfrak{A}_2]$  ab. Sie heißt direktes Produkt von  $(M_1, [\mathfrak{A}_1]), (M_2, [\mathfrak{A}_2])$ .

**Beweis:** leicht.

**Bsp.:**  $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$  heißt  $n$ -dimensionaler Torus.

**Def.:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $M$  sei Gruppe.

- 1)  $M$  heißt Liegruppe  $\iff M \times M \longrightarrow M : (x, y) \longmapsto xy^{-1}$  ist  $\mathcal{C}^\infty$  (bzgl.  $[\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}]$  auf  $M \times M$  und  $[\mathfrak{A}]$  auf  $M$ ).
- 2)  $M, N$  Liegruppen,  $f : M \longrightarrow N$  heißt Liegruppenhomomorphismus  $\iff f$   $\mathcal{C}^\infty$  und Gruppenhomomorphismus.

**Bsp.:** 1)  $\mathbb{R}V$  endlich dimensionaler Vektorraum  $\implies V$  ist Liegruppe bzgl. + und Standard  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur.

- 2)  $\mathbb{R}V$  endlich dimensionaler Vektorraum,  $\text{gl}_{\mathbb{R}}(V) := \{A : V \longrightarrow V \text{ linear}\}$ .  
 $\text{Gl}_{\mathbb{R}}(V) := \{A \in \text{gl}_{\mathbb{R}}(V) : A \text{ invertierbar}\} \subset \text{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  offen  $\implies \text{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit (induziert von der Standardstruktur auf  $\text{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ ).  
 $\text{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$  mit  $\circ$  ist Liegruppe, da  $(A, B) \longmapsto A \circ B^{-1}$  in Koordinaten durch  
 $((a_j^i), (b_j^i)) \longmapsto (a_j^i) \cdot ((B^{-1})_j^i) = \frac{(a_k^i \cdot (B^{\text{ad}})_j^k)}{\det(B)}$  gegeben ist.

**Def.:**  $(M, [\mathfrak{A}])$  sei eine  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $N \subset M$ ,  $0 \leq p \leq n$ .

$N$  heißt  $p$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $M : \iff \forall x_0 \in N :$

$\exists (\varphi : U \xrightarrow{\sim} V) \in \mathfrak{A}_{\max}$  mit  $x_0 \in U$  und  $\varphi(U \cap N) = V \cap \mathbb{R}^p := \{(x^1, \dots, x^p, 0, \dots, 0)^T \in V : x^1, \dots, x^p \in \mathbb{R}\}$ .

Bild:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \cup & & \cup \\ U \cap N & \xrightarrow{\varphi|_{U \cap N}} & V \cap \mathbb{R}^p \end{array}$$

**Bemerkung:** Wenn  $M, N, x_0, \varphi$  wie in der Definition sind und  $\psi \in \mathfrak{A}_{\max}$  eine beliebige Karte bei  $x_0$  ist,  $\psi \circ \varphi^{-1} : x \mapsto y$ , so ist  $\text{Rg}(\psi \circ \varphi^{-1}) = n$  und daher  $\det \left( \frac{\partial(y^{k_1}, \dots, y^{k_p})}{\partial(x^1, \dots, x^p)} \right)(\varphi(x_0)) \neq 0$  für geeignete  $1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n$ .

Nach SIF lassen sich dann (auf  $U_1 \subset U$  offen mit  $x_0 \in U_1$ )  $y^j$  als  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen von  $y^{k_1}, \dots, y^{k_p}, x^{p+1}, \dots, x^n$  schreiben (vgl. auch den Beweis des nächsten Satzes). Speziell auf  $U_1 \cap N$  sind dann  $y^j$   $\mathcal{C}^k$ -Funktionen von  $(y^{k_1}, \dots, y^{k_p}) \in W \subset \mathbb{R}^p$  offen.

**Bsp.:**  $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}^1\} =: N$  ist eine  $\mathcal{C}^0$ -, aber keine  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ , denn wenn wir in der letzten Bemerkung die Karte  $\psi = \text{id}$  verwenden, so ist für  $x_0 = (0, 0) \in U_1 \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $U_1 \cap N$  weder von der Form  $\{(y^1, f(y^1)) : y^1 \in W\}$  noch von der Form  $\{(f(y^2), y^2) : y^2 \in W\}$  mit  $0 \in W \subset \mathbb{R}$  offen und  $f : W \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^1$ .

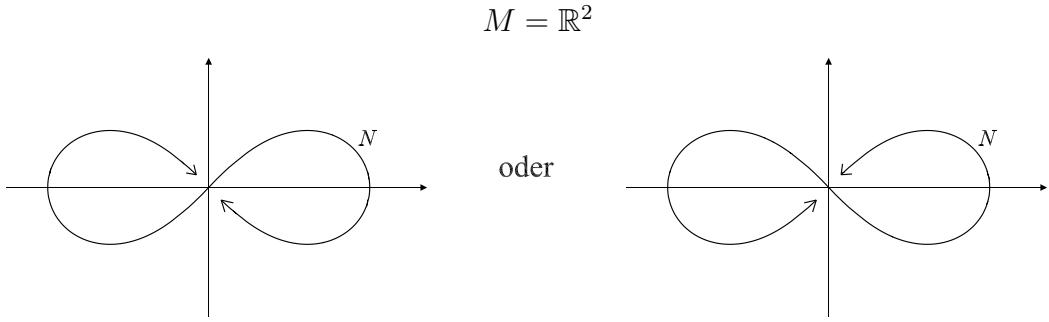
**Hilfssatz und Definition:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $N$   $p$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit. Dann gilt:

$N$  ist mit der Spurtopologie eine  $p$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{B} := \{\varphi|_{U \cap N} : U \cap N \rightarrow V \cap \mathbb{R}^p : \varphi \in \mathfrak{A}_{\max}, \varphi(U \cap N) = V \cap \mathbb{R}^p\}$  ist ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $N$ .  $[\mathfrak{A}]|_N := [\mathfrak{B}]$  heißt die auf  $N$  induzierte Mannigfaltigkeitsstruktur.

**Beweis:**  $(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i) \in \mathfrak{A}$ ,  $i = 1, 2$ , mit  $\varphi_i(U_i \cap N) = V_i \cap \mathbb{R}^p$  und  $U_1 \cap U_2 \cap N \neq \emptyset$ . Es sei  $\psi_i := \varphi_i|_{U_i \cap N} \rightarrow V_i \cap \mathbb{R}^p$ .

$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2 \cap N) \rightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2 \cap N)$  ist dann die Einschränkung von  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  auf  $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^p$  und daher auch  $\mathcal{C}^k$ .  $\square$

**Bemerkung:** Auch wenn  $N \subset M$  keine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit ist, lässt sich „mit Gewalt“ eine  $\mathcal{C}^k$ -Struktur auf  $N$  definieren. Allerdings ist diese unter Umständen nicht „kanonisch“, wie z.B. bei einer Lemniskate (Üb. 1.4):



(Hier ist  $N$  nicht einmal eine topologische Mannigfaltigkeit in der Spurtopologie.)

**Satz** ( $M, [\mathfrak{A}]$ )  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $1 \leq p \leq n$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p \mathcal{C}^k$ ,  $N := f^{-1}(0)$ ,  $\forall x \in N : \text{Rg}_x f = p$ .

Dann ist  $N$  eine  $(n-p)$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit.

**Beweis:** Es sei  $x_0 \in N$  und  $(\varphi : U \rightarrow V) \in \mathfrak{A}_{\max}$  mit  $x_0 \in U$  und  $\varphi(x_0) = 0$ .  $f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^p : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^p)^T$  hat Rang  $p$  in  $\varphi(x_0) = 0$ . OEdA sei  $\det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, p}} (0) \neq 0$  (sonst Umordnung der Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$ , d.h. Verwendung eines anderen  $\varphi$ ). Dann ist

$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^p, x^{p+1}, \dots, x^n)^T$  bei 0  $\mathcal{C}^k$  und hat Rang  $n$ . Nach SIF (S. 4) ist dann  $\psi$  bei 0 bijektiv und  $\psi^{-1}$  ist auch  $\mathcal{C}^k$  bei 0. Also ist auch  $(\psi \circ \varphi : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}_{\max}$  für ein  $U_1 \subset U$  offen mit  $x_0 \in U_1$ . Weiters gilt:

$f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} : (y^1, \dots, y^p, x^{p+1}, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^p)^T$ , d.h.  $f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  ist die Projektion auf die ersten  $p$  Koordinaten. Daher ist  $x_1 \in U_1 \cap N \iff x_1 \in U_1, f(x_1) = 0 \iff x_1 \in U_1, f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1} \circ (\psi \circ \varphi)(x_1) = 0 \iff (\psi \circ \varphi)(x_1) = (0, \dots, 0, x^{p+1}, \dots, x^n)$  mit geeigneten  $x^{p+1}, \dots, x^n \in \mathbb{R} \iff (\psi \circ \varphi)(x_1) \in V_1 \cap \mathbb{R}^{n-p}$ . (Genaugenommen müsste man noch durch eine Permutation die 0-en nach hinten bringen.) Also:  $(\psi \circ \varphi)(U_1 \cap N) = V_1 \cap \mathbb{R}^{n-p}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Für die Behauptung des Satzes genügt es auch, wenn  $N$  in der Umgebung jeden Punktes  $x \in N$  sich durch  $f_x^{-1}(0)$  darstellen lässt (für ein  $\mathcal{C}^k$   $f_x$  mit  $\text{Rg}_x f_x = p$ ).

**Bsp.:**  $M = \mathbb{R}^n$  (mit Standardstruktur),  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1 : x \mapsto |x|^2 - 1$ ,  $N = f^{-1}(0) = \mathbb{S}^{n-1} \ni x \implies \text{Rg}_x f = \text{Rg} \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) = \text{Rg}(2x^1, \dots, 2x^n) = 1$ , da  $x \neq 0$ .

Also ist  $\mathbb{S}^{n-1}$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Die induzierte  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur ist dieselbe wie in S. 1, denn wenn  $U := \{x \in \mathbb{R}^n : x^j > 0\}$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so ist  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-1, \infty) : x \mapsto (x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n, |x|^2 - 1)^T$  eine Karte auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi(U \cap N) = V \cap \mathbb{R}^{n-1}$ . Die Karte  $\varphi|_{U \cap N}$  der induzierten  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur ist gerade  $\varphi_{j,+}$  von S. 1. Analog für  $\varphi_{j,-}$ . (Vgl. auch Üb. 1.8, S. 14). Daher nennen wir diese  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  auch Standardstruktur auf  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Hilfssatz:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $N \subset M$   $p$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit (mit induzierter Struktur). Dann ist die Inklusionsabbildung  $i : N \hookrightarrow M$   $\mathcal{C}^k$  und hat überall Rang  $p$ .

**Beweis:** In Koordinaten entsprechend der Definition in S. 6 gilt  $i = (x^1, \dots, x^p)^T \mapsto (x^1, \dots, x^p, 0, \dots, 0)^T$ . Das ist  $\mathcal{C}^k$  und hat Rang  $p$ .  $\square$

**Bemerkung:** Die „Umkehrung“ gilt leider nicht, siehe unten.

**Def.:**  $M$  sei  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $N$   $p$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  
 $f : N \longrightarrow M$   $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ .

- 1)  $f$  heißt Immersion : $\iff \forall x \in N : \mathrm{Rg}_x f = p.$
  - 2)  $f$  heißt Einbettung : $\iff$  (i)  $f$  Immersion,  
(ii)  $f$  injektiv.
  - 3)  $f$  heißt reguläre Einbettung : $\iff$  (i)  $f$  Einbettung,  
(ii)  $f(N)$   $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $M.$

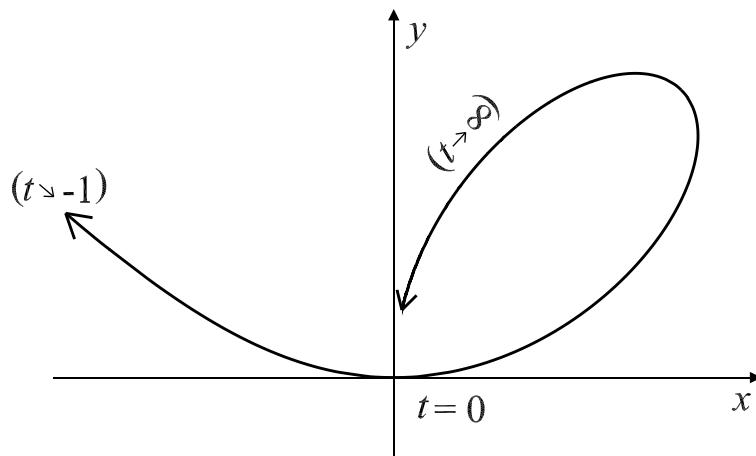
**Bemerkung:** Manche Autoren haben einen anderen Sprachgebrauch. Unsere Untermannigfaltigkeit heißt dort „reguläre Untermannigfaltigkeit“ oder „eingebettete Untermannigfaltigkeit“, während mit „Untermannigfaltigkeit“ das Bild  $f(N)$  einer Einbettung  $f : N \longrightarrow M$  bezeichnet wird.

Bsp.: 1)  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 : x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$  ist eine Immersion, aber keine Einbettung.

2) Beispiele nicht regulärer Einbettungen sind die entsprechend dem Bild in S. 7 parametrisierten Lemniskaten oder der folgende Teil eines Cartesischen Blattes:

$$f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)^T,$$

## Bild:



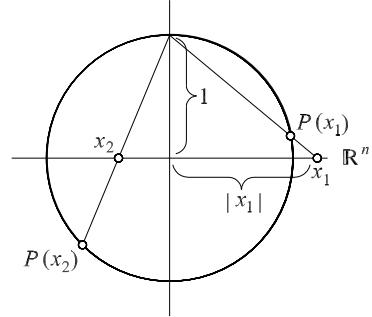
3)  $\mathfrak{A}_1 = \{\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  $\mathfrak{A}_2 = \{x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  $f : (\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_1]) \rightarrow (\mathbb{R}, [\mathfrak{A}_2]) : x \mapsto x$  ist  $C^\infty$  und bijektiv, aber keine Immersion, da  $\text{Rg}_0 f = 0$ .

4) Die stereographische Projektion

$$P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto \frac{1}{|x|^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ |x|^2 - 1 \end{pmatrix}$$

ist eine reguläre Einbettung. Bild:

$$\text{(Beachte, dass } \frac{1}{|x|} = \frac{\frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}}{|x| - \frac{2|x|}{|x|^2 + 1}}\text{.)}$$



Denn: a)  $P$  injektiv:  $P(x_1) = P(x_2) \implies |x_1| = |x_2| \implies x_1 = x_2$ .

b)  $P(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , denn:  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^1$ ,  $|u|^2 + v^2 = 1$ ,  $v \neq 1 \implies$

$$P\left(\frac{u}{1-v}\right) = \left(\frac{2u^T(1-v)}{|u|^2 + (1-v)^2}, \frac{|u|^2 - (1-v)^2}{|u|^2 + (1-v)^2}\right)^T = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Also ist  $P(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{S}^n$  offen und damit eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{S}^n$ .

c)  $P$  hat überall Rang  $n$ . Dies werde z.B. für  $|x| \neq 1$  nachgeprüft. Dann liegt  $P(x)$  in  $U_{n+1,\pm}$  und in den Karten  $\varphi_{n+1,\pm}$  (vgl. S. 1) gilt  $P : x \mapsto \frac{2x}{|x|^2 + 1} =: y$ .

$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$  muss rotationsinvariant sein (denn für  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  orthogonal, ist

$$y(Ax) = Ay(x) \implies \frac{\partial(y(Ax))^i}{\partial x^j} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(Ax) \cdot a_j^k.$$

$$\frac{\partial(Ay(x))^i}{\partial x^j} = a_k^i \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(x) \implies \frac{\partial y^i}{\partial x^l}(Ax) = b_l^j a_k^i \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(x), \text{ wobei } A^{-1} = (b_j^i) \implies$$

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)(Ax) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)(x) \text{ und folglich gilt}$$

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)(x) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)(|x|, 0, \dots, 0) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2\frac{1-|x|^2}{(|x|^2+1)^2} & 0 & & \cdots \\ 0 & 2(|x|^2+1)^{-1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 2(|x|^2+1)^{-1} \end{pmatrix} = 2^n \cdot \frac{1-|x|^2}{(|x|^2+1)^{n+1}} \neq 0.$$

Für  $|x| = 1$  wird eine Karte  $\varphi_{j,\pm}$  verwendet. Dies ist etwas mühsamer.

**Hilfssatz:**  $(M, [\mathfrak{A}]), (N, [\mathfrak{B}])$   $m$ - bzw.  $p$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $f : N \rightarrow M$  reguläre Einbettung. Dann ist  $f_1 : (N, [\mathfrak{B}]) \rightarrow (f(N), [\mathfrak{A}]|_{f(N)})$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus.

**Beweis:** Es sei  $x_0 \in N$ ,  $(\varphi : U \rightarrow V) \in \mathfrak{B}$  mit  $x_0 \in U$ ,  $(\psi : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}_{\max}$  mit  $f(x_0) \in U_1$  und  $\psi(f(N) \cap U_1) = V_1 \cap \mathbb{R}^q$ ,  $q = \dim f(N)$ . OEdA  $f(U) \subset U_1$ . In den Karten  $\varphi$  und  $\psi$  ist  $f$  gegeben durch  $f : (x^1, \dots, x^p) \mapsto (y^1, \dots, y^q, 0, \dots, 0)$ . Da  $\psi(f(N) \cap U_1) = V_1 \cap \mathbb{R}^q$ , ist  $f_1 : (x^1, \dots, x^p) \mapsto (y^1, \dots, y^q)$  bei  $\varphi(x_0)$   $\mathcal{C}^k$  und injektiv und hat Rang  $p$  (weil  $f$  Einbettung)  $\Rightarrow p \leq q$ . Weil  $N$  eine abzählbare Basis der Topologie hat, ist  $f(N) \cap U_1 = f(f^{-1}(U_1)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(W_j)$ ,  $W_j$  Kartengebiet in  $N$ .

Wäre  $p < q$ , so hätten  $\psi(f(W_j))$  und daher auch  $V_1 \cap \mathbb{R}^q = \bigcup_{j=1}^{\infty} \psi(f(W_j))$  Lebesguemaß 0. Also ist  $p = q$  und nach SIF  $f_1^{-1} \mathcal{C}^k$  bei  $\psi(f(x_0))$ . Somit ist  $f_1$  ein Diffeomorphismus.  $\square$

**Def.:**  $G$  Liegruppe,  $H \leq G$  Untergruppe.  $H$  heißt Lieuntergruppe  $\iff H$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $G$ .

**Hilfssatz:** Eine Lieuntergruppe ist mit der induzierten Mannigfaltigkeitsstruktur eine Liegruppe.

**Beweis:** Zu zeigen ist, dass  $f : H \times H \rightarrow H : (x, y) \mapsto xy^{-1} \mathcal{C}^\infty$  ist. Wenn man Koordinaten wie in der Definition in S. 6 wählt, so gilt:  $f : ((x^1, \dots, x^p), (y^1, \dots, y^p)) \mapsto (z^1, \dots, z^p)$ , wobei  $z^1(x, y), \dots, z^p(x, y)$  die ersten  $p$  Komponenten der Koordinatendarstellung von  $F : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$  sind.  $\square$

**Bsp.:**  $1_{\mathbb{R}}V$   $n$ -dimensionaler Vektorraum,  $\det : \mathrm{gl}_{\mathbb{R}}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  hat Rang 1 in jedem  $A \in \mathrm{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$ , denn in Koordinaten ( $A = (a_j^i)$ ) gilt  $\frac{\partial \det}{\partial a_j^i}(A) = (A^{\mathrm{ad}})_i^j$  und  $A^{\mathrm{ad}} = 0 \iff \mathrm{Rg}(A) \leq n-2 \Rightarrow A \notin \mathrm{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$ .

Also ist  $\mathrm{Sl}_{\mathbb{R}}(V) := \{A \in \mathrm{gl}_{\mathbb{R}}(V) : \det A = 1\}$  eine  $(n^2 - 1)$ -dimensionale Lieuntergruppe von  $\mathrm{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$ .

2)  $\mathbb{R}V$  sei  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$O_{\mathbb{R}}(V) := \{A \in \text{Gl}_{\mathbb{R}}(V) : \forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle\}$  ist eine  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Lieuntergruppe von  $\text{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$ .

**Beweis:** Wenn  $A \in \text{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ , so ist  $A^T \in \text{gl}_{\mathbb{R}}(V^*)$  definiert durch  $A^T : x^* \mapsto (x \mapsto x^*(Ax))$ . Vermöge  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wird  $V$  mit  $V^*$  identifiziert:  $V \xrightarrow{\sim} V^* : x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)$ . Dann erhalten wir  $A_{\text{neu}}^T \in \text{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  definiert durch  $\forall x, y \in V : \langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$ .

Wenn auf  $V$  und  $\text{gl}_{\mathbb{R}}(V)$  Koordinaten mit einer ONB-Basis gewählt werden, so ist  $A = (a_j^i)$ ,  $A^T = (b_j^i)$  mit  $\forall i, j : b_j^i = a_i^j$ . (Sonst  $b_j^i = a_l^k \cdot g_{kj} g^{il}$ , siehe später).  
 $A \in O_{\mathbb{R}}(V) \iff A^T A = I \iff \forall i, k : b_j^i \cdot a_k^j = \delta_k^i$ .

Es sei  $f = (f_k^i)_{1 \leq i \leq k \leq n} : \text{gl}_{\mathbb{R}}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , wobei  $\forall i \leq k : f_k^i(A) = b_j^i \cdot a_k^j - \delta_k^i = (\sum_{j=1}^n a_i^j \cdot a_k^j) - \delta_k^i$ .

Zu zeigen ist also:  $\forall A \in O_{\mathbb{R}}(V) : \text{Rg}_A f = \frac{n(n+1)}{2}$ .

$$\forall i, k, m, l : \frac{\partial f_k^i}{\partial a_l^m} = \begin{cases} 0 & : i \neq l, k \neq l, \\ a_k^m & : i = l \neq k, \\ a_i^m & : k = l \neq i, \\ 2a_l^m & : i = k = l. \end{cases}$$

$\left( \frac{\partial f_k^i}{\partial a_l^m} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \leq n \\ 1 \leq m, l \leq n}}$  ist eine  $\frac{n(n+1)}{2} \times n^2$ -Matrix.

Ihr Rang ist  $< \frac{n(n+1)}{2} \iff$  die  $\frac{n(n+1)}{2} n \times n$ -Matrizen  $\left( \frac{\partial f_k^i}{\partial a_l^m} \right)_{1 \leq m, l \leq n}$ ,  $1 \leq i \leq k \leq n$ ,

sind linear abhängig  $\iff \exists c_i^k \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k \leq n$ , nicht alle 0 :  $\forall m, l : \frac{\partial f_k^i}{\partial a_l^m} \cdot c_i^k = 0$ .

Die letzte Gleichung ergibt:  $\sum_{k=l+1}^n a_k^m \cdot c_l^k + \sum_{i=1}^{l-1} a_i^m \cdot c_i^l + 2 \underbrace{a_l^m \cdot c_l^l}_{\substack{\text{nicht} \\ \text{summieren!}}} = 0, \forall m, l \iff A \cdot D = 0$ ,

$$\text{wobei } d_l^k = \begin{cases} c_l^k & : 1 \leq l < k \leq n, \\ 2c_l^l \text{ (nicht summieren)} & : l = k, \\ c_k^l & : 1 \leq k < l \leq n. \end{cases}$$

Wenn  $A \in \text{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$ , folgt daraus  $D = 0$ , i.e.  $\forall i, k : c_i^k = 0$ .

Somit ist  $\text{Rg}_A f = \frac{n(n+1)}{2}$  für  $A \in \text{Gl}_{\mathbb{R}}(V) \supset O_{\mathbb{R}}(V)$ .  $\square$

3)  $\mathbb{R}V$  wie in 2);  $\text{SO}_{\mathbb{R}}(V) := O_{\mathbb{R}}(V) \cap \text{Sl}_{\mathbb{R}}(V) \subset O_{\mathbb{R}}(V)$  offen, da  $\det A \in \{+1, -1\}$  für  $A \in O_{\mathbb{R}}(V) \implies \text{SO}_{\mathbb{R}}(V)$  ist auch eine  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Lieuntergruppe von  $\text{Gl}_{\mathbb{R}}(V)$ .

**Bezeichnungen:** Wenn  $V = \mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt, dann schreibe ich  $\text{gl}_n(\mathbb{R})$  statt  $\text{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ , und analog sind  $\text{Gl}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Sl}_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  zu verstehen.

## Übungen

Üb. 1.1 a) Es sei  $S := \mathbb{R}^n \dot{\cup} \{\infty\}$  mit folgender Topologie:

$U \subset S$  offen:  $\iff (U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}) \vee (S \setminus U \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt})$ . Zeige, dass  $S$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.

b) Zeige, dass  $\mathfrak{A} = \{\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi : S \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n\}$  mit

$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 0 & : x = \infty \\ \frac{x}{|x|^2} & : \text{sonst} \end{cases}$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas auf  $S$  ist, und dass  $(S, [\mathfrak{A}])$  diffeomorph zu  $\mathbb{S}^n$  (mit der Standardstruktur) ist.

Hinweis: Verwende die stereographische Projektion.

Üb. 1.2 Es sei  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : x \mapsto [x]$  (vgl. S. 5) und  $g : \mathbb{P}^n \rightarrow M$ ,  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Zeige:  $g \mathcal{C}^k \iff g \circ f \mathcal{C}^k$ .

Hinweis: Zeige zuerst, dass  $f|_{U_{j,\epsilon}} : U_{j,\epsilon} \rightarrow f(U_{j,\epsilon})$  für  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  und  $\epsilon \in \{+, -\}$  Diffeomorphismen sind.

Üb. 1.3 Es sei  $X = (3, 5) \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$  und auf  $X$  die Relation  $(a, b)R(c, d) : \iff a = c > 4$  gegeben.  $X$  trage die Spurtopologie von  $\mathbb{R}^2$  und  $Y := X/R$  die Quotiententopologie. Zeige, dass  $Y$  (ii) und (iii), nicht aber (i) in der Definition einer eindimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit erfüllt.

Hinweis: Zeige, dass die Projektion  $p : X \rightarrow Y$  offen ist und dass  $p|_{(3,5) \times \{i\}}, i \in \{0, 1\}$ , Homöomorphismen auf die jeweiligen Bilder sind.

Üb. 1.4 a) Zeige, dass  $f_\pm : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left( \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \pm \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \right)^T$   $\mathcal{C}^\infty$ -Einbettungen sind, die als Bild beide die Lemniskate  $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \right\}$  haben.

b) Zeige, dass  $L$  in der Spurtopologie keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

c) Zeige, dass die durch  $f_+$  und  $f_-$  auf  $L$  übertragenen Topologien (und umso mehr die  $\mathcal{C}^\infty$ -Strukturen) untereinander verschieden sind, und dass beide Topologien von der Spurtopologie verschieden sind.

Üb. 1.5 a) Es werde  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der Standardorientierung (und damit mit dem üblichen  $\times$ -Produkt) betrachtet. Zeige, dass die Drehung  $A_{x_0, \varphi}$  im  $\mathbb{R}^3$  um die Achse  $\lambda x_0, x_0 \in \mathbb{R}^3, |x_0| = 1, \lambda > 0$ , um den Winkel  $\varphi$  im Rechtsdrehsinn durch

$$A_{x_0, \varphi} x = x_0 \langle x, x_0 \rangle (1 - \cos \varphi) + x \cos \varphi + x_0 \times x \sin \varphi$$

gegeben ist.

b)  $(M_i, [\mathfrak{A}_i]), i = 1, 2$ , seien  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten,  $k \geq 1$ ,  $N \subset M_2$  eine Untermannigfaltigkeit mit induzierter Struktur,  $f : M_1 \rightarrow N$ ,  $f_1 : M_1 \rightarrow M_2 : x \mapsto f(x)$ . Zeige:  $(f \text{ } \mathcal{C}^k \iff f_1 \text{ } \mathcal{C}^k)$  und  $(\forall x \in M_1 : \text{Rg}_x f = \text{Rg}_x f_1)$ .  
Speziell:  $f$  Immersion  $\iff f_1$  Immersion.

c) Zeige, dass  $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R}) : (x_0, y_0) \mapsto A_{x_0, \varphi}$ , wobei  $y_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ , surjektiv und  $\mathcal{C}^\infty$  ist. Wo ist  $\text{Rg } f < 3$ ?

Für welche  $x_i, y_i$  gilt  $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$ ?

Hinweis zu c): Wähle eine ONB im  $\mathbb{R}^3$ , sodass  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und betrachte  $f_1 : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{gl}_3(\mathbb{R})$  entsprechend b). Verwende bei  $x_0$  die Karte  $\varphi_{3,+}$  und auf  $\mathbb{S}^1$  den Winkel zur positiven  $x^1$ -Achse als Koordinate.

Üb. 1.6 Es soll gezeigt werden, dass eine zusammenhängende 1-dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit  $(M, [\mathfrak{A}])$  diffeomorph zu  $\mathbb{S}^1$  oder zu  $\mathbb{R}^1$  (mit den Standardstrukturen) ist.  
a) Zeige, dass es einen zu  $\mathfrak{A}$  äquivalenten Atlas  $\mathfrak{B} = \{(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i) : i \in I\}$  mit endlichem oder abzählbarem  $I$  gibt, sodass:

- (i)  $\forall i \in I : V_i \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall,
- (ii)  $\forall i \in I : \overline{U_i} \subset M$  kompakt,
- (iii)  $\forall K \subset M$  kompakt:  $\{i \in I : U_i \cap K \neq \emptyset\}$  ist endlich,
- (iv)  $\forall i \in I : \exists (\psi_i : U'_i \rightarrow V'_i) \in \mathfrak{A}_{\max}$  mit  $\overline{U_i} \subset U'_i$  und  $\varphi_i = \psi_i|_{U_i}$ .

b) Es sei  $\mathfrak{B}$  wie in a) und  $(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i), (\varphi_j : U_j \rightarrow V_j) \in \mathfrak{B}$ .

Wenn  $U := U_i \cap U_j \neq \emptyset$  und  $U_i \not\subset U_j, U_j \not\subset U_i, V_i = (a, b), V_j = (c, d) \subset \mathbb{R}$ , dann gilt entweder

(i)  $\exists a < \alpha < b, \exists c < \gamma < d : \left\{ [\varphi_i(U) = (a, \alpha) \vee \varphi_i(U) = (\alpha, b)] \wedge [\varphi_j(U) = (c, \gamma) \vee \varphi_j(U) = (\gamma, d)] \right\}$

oder (ii)  $\exists a < \alpha < \beta < b, \exists c < \gamma < \delta < d : \left\{ [\varphi_i(U) = (a, \alpha) \cup (\beta, b)] \wedge [\varphi_j(U) = (c, \gamma) \cup (\delta, d)] \right\}$ .

Hinweis: Wegen a) haben  $U_i$  und  $U_j$  jeweils 2 Randpunkte.

c) Es sei (ii) in b) erfüllt. Zeige, dass dann  $M = U_i \cup U_j$  und  $M$  zu  $\mathbb{S}^1$  diffeomorph ist.

Hinweis: Zeige, dass  $U_i \cup U_j$  abgeschlossen ist. Wähle  $a = 0, b = \frac{3\pi}{2}, c = -\pi, d = \frac{\pi}{2}$  und ändere  $\varphi_i$  so ab, dass es auf  $U_i \cap U_j$  mit  $\varphi_j$  bzw. mit  $2\pi + \varphi_j$  übereinstimmt.

Setze dann  $f : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 : x \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi_\lambda(x) \\ \sin \varphi_\lambda(x) \end{pmatrix}$  für  $x \in U_\lambda, \lambda \in \{i, j\}$ .

d) Es sei  $\mathfrak{B} = \{(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i) : i \in I\}$  wie in a) und I sei strikt geordnet, d.h.  $I = \{1, \dots, N\}$  oder  $I = \mathbb{N}$ .

Definiere  $k(1) := 1, k(2) := \min\{i \in I : U_i \neq U_i \cap U_{k(1)} \neq \emptyset\}, \dots, k(n+1) := \min\{i \in I : U_i \neq U_i \cap (U_{k(1)} \cup \dots \cup U_{k(n)}) \neq \emptyset\}, \dots$

Zeige, dass  $\mathfrak{B}' := \{(\varphi_{k(i)} : U_{k(i)} \rightarrow V_{k(i)}) : i = 1, 2, \dots\}$  ein zu  $\mathfrak{B}$  äquivalenter Atlas ist.

e) Nehme an, dass  $M$  nicht diffeomorph zu  $\mathbb{S}^1$  ist. Zeige, dass  $M$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^1$  ist.

Hinweis: Definiere  $\psi : M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^1$  rekursiv durch  $\psi|_{U_{k(1)}} := \varphi_{k(1)}, \dots, \psi|_{U_{k(n+1)}} := \varphi_{k(n+1)}$  nach Abänderung von  $\varphi_{k(n+1)}$  auf  $U_{k(n+1)} \cap (U_{k(1)} \cup \dots \cup U_{k(n)})$ . Verwende hier, dass b) (i) gilt.

Üb. 1.7 Es sei  $G_{n,k} := \{V \leq \mathbb{R}^n \text{ } k\text{-dimensionaler Untervektorraum}\}$  für  $k \in \{0, \dots, n\}$ . (Offenbar ist  $G_{n,0} = \{\{0\}\}, G_{n,1} = \mathbb{P}^{n-1}, G_{n,n} = \{\mathbb{R}^n\}$ .) Weiters sei  $F_{n,k} := \{(x_1, \dots, x_k) : \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n \text{ linear unabhängig}\}$  und

$$p : F_{n,k} \rightarrow G_{n,k} : (x_1, \dots, x_k) \mapsto \langle x_1, \dots, x_k \rangle.$$

a) Zeige, dass  $F_{n,k} \subset \mathbb{R}^{nk}$  offen ist und dass  $G_{n,k}$  mit der Finaltopologie bzgl.  $p$  eine  $k \cdot (n-k)$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.

Verwende dazu die folgenden Homöomorphismen:

Es sei  $j = (j_1, \dots, j_k) \in \mathbb{N}^k$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ ,  $1 \leq j'_1 < \dots < j'_{n-k} \leq n$ ,  $\{1, \dots, n\} = \{j_1, \dots, j_k, j'_1, \dots, j'_{n-k}\}$ ,  $U_j := \{x \in F_{n,k} : \det(x_i^{j_l})_{\substack{i=1, \dots, k \\ l=1, \dots, k}} \neq 0\}$ ,  $\varphi_j : p(U_j) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{k(n-k)} : \langle x_1, \dots, x_k \rangle \mapsto \begin{pmatrix} x_1^{j'_1} & \dots & x_k^{j'_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{j'_{n-k}} & \dots & x_k^{j'_{n-k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{j_1} & \dots & x_k^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{j_k} & \dots & x_k^{j_k} \end{pmatrix}^{-1}$ .

b) Zeige, dass durch  $\{\varphi_j : p(U_j) \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)} : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas auf  $G_{n,k}$  gegeben ist. ( $G_{n,k}$  mit dieser  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur heißt Grassmann-Mannigfaltigkeit.)

Üb. 1.8 Es sei  $N \subset M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit,  $k \geq 1$  und  $\mathfrak{A} = \{(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i) : i \in I\}$  eine Menge von Abbildungen mit (i)  $\forall i \in I : U_i \subset N$  offen,  $V_i \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi_i$  bijektiv; (ii)  $\bigcup_{i \in I} U_i = N$ ; (iii)  $\forall i \in I : \varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow M$  ist  $\mathcal{C}^k$ -Immersion.

Zeige, dass dann  $\mathfrak{A}$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $N$  ist, dessen Äquivalenzklasse die von  $M$  induzierte Struktur ist.

Hinweis: Beachte den Hilfssatz in S. 10.

Üb. 1.9 Es sei  $X := \{(\cos(2\vartheta), \sin(2\vartheta), u \cos \vartheta, u \sin \vartheta)^T \in \mathbb{R}^4 : u, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ .

a) Zeige, dass  $X$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^4$  ist.

Hinweis:  $\psi : \begin{pmatrix} r \\ v \\ u \\ \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \cos 2\vartheta \\ r \sin 2\vartheta \\ u \cos \vartheta - v \sin \vartheta \\ u \sin \vartheta + v \cos \vartheta \end{pmatrix}$  ist für  $r \neq 0$  lokal diffeomorph.

b) Zeige, dass die induzierte  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeitsstruktur die Äquivalenzklasse des  $\mathcal{C}^\infty$ -Atlas  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  ist, wobei  $\varphi_1^{-1} : (0, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{im } (\varphi_1^{-1}) \subset X$ ,  $\varphi_2^{-1} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{im } (\varphi_2^{-1}) \subset X$  mit  $\varphi_j^{-1}(\vartheta, u) = (\cos(2\vartheta), \sin(2\vartheta), u \cos \vartheta, u \sin \vartheta)^T$ . ( $X$  heißt Möbius-Band.)

Üb. 1.10 Seien  $(M, [\mathfrak{A}]), (N, [\mathfrak{B}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten,  $k \geq 1$  und  $f : N \longrightarrow M$  eine Einbettung und  $f(N) \xrightarrow{f^{-1}} N$  stetig. Zeige, dass dann  $f(N)$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$  ist, d.h.  $f$  eine reguläre Einbettung ist.

## § 2 Tangentialvektoren und Vektorfelder

**Definition und Hilfssatz:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $x_0 \in M$ ,  $W \subset \mathbb{R}$  offen,  $0 \in W$ .

- 1)  $x(t) : W \rightarrow M$   $\mathcal{C}^k$  mit  $x(0) = x_0$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -Kurve durch  $x_0$ . (Zur Unterscheidung von Punkten  $x \in M$  schreibe ich  $x(t)$  für Kurven, obwohl prinzipiell das Symbol  $x$  genügen würde.)
- 2)  $x(t), y(t)$   $\mathcal{C}^k$ -Kurven bei  $x_0$ .  $x(t), y(t)$  heißen tangential in  $x_0$  : $\iff \exists(\forall)(\varphi : U \rightarrow V) \in \mathfrak{A}$  mit  $x_0 \in U$  :  $(\varphi \circ x)'(0) = (\varphi \circ y)'(0) \in \mathbb{R}^n$ . (' steht hier für  $\frac{d}{dt}$ .)
- 3) Die Menge der Äquivalenzklassen von  $\mathcal{C}^k$ -Kurven durch  $x_0$  bezüglich der Äquivalenzrelation „tangential in  $x_0$ “ heißt Tangentialraum an  $M$  in  $x_0$  bzw.  $T_{x_0}M$ . Wenn  $[-]$  wieder einmal die Äquivalenzklassen bezeichnet, so ist also  $T_{x_0}M = \{[x(t)] : x(t) \text{ } \mathcal{C}^k\text{-Kurve durch } x_0\}$ . (Wegen  $\exists \iff \forall$  in 2) hängt  $T_{x_0}M$  nur von der  $\mathcal{C}^k$ -Struktur  $[\mathfrak{A}]$ , nicht vom speziellen Atlas  $\mathfrak{A}$  ab.)

**Beweis** von  $\exists \iff \forall$  in 2):  $(\psi : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}$  mit  $x_0 \in U_1$ ,  $A :=$  Jacobi-Matrix von  $\psi \circ \varphi^{-1}$  in  $\varphi(x_0)$   $\implies$  (Kettenregel)  $(\psi \circ x)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ x)'(0) = A \cdot (\varphi \circ x)'(0) = A \cdot (\varphi \circ y)'(0) =$  (ebenso)  $= (\psi \circ y)'(0)$ , wenn  $x(t), y(t)$  tangential sind.  $\square$

**Hilfssatz und Definition:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $(\varphi : U \rightarrow V) \in \mathfrak{A}$ ,  $x_0 \in U$ .

- 1)  $T_{x_0}\varphi : T_{x_0}M \rightarrow \mathbb{R}^n : [x(t)] \rightarrow (\varphi \circ x)'(0)$  ist bijektiv.
- 2) Wir betrachten  $T_{x_0}M$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum so, dass  $\exists(\forall)(\varphi : U \rightarrow V) \in \mathfrak{A}$  mit  $x_0 \in U : T_{x_0}\varphi$   $\mathbb{R}$ -Vektorraum-Isomorphismus. (Wegen  $(\exists \iff \forall)$  ist die Vektorraumstruktur unabhängig von der Wahl von  $\varphi$ .)

**Beweis:** 1)  $T_{x_0}\varphi$  ist wohldefiniert und injektiv nach Definition. Wenn  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $x(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M : t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + \xi t)$  für ein  $\epsilon > 0$  wohldefiniert,  $\mathcal{C}^k$ , und  $T_{x_0}\varphi([x(t)]) = \xi$ . Also ist  $T_{x_0}\varphi$  auch bijektiv.

2) Wenn  $(\psi : U_1 \rightarrow V_1)$  eine weitere  $\mathcal{C}^k$ -Karte mit  $x_0 \in U_1$  ist und  $A :=$  Jacobi-Matrix von  $\psi \circ \varphi^{-1}$  in  $\varphi(x_0)$ , so gilt für eine  $\mathcal{C}^k$ -Kurve  $x(t)$  durch  $x_0$  :  $(\psi \circ x)'(0) = A \cdot (\varphi \circ x)'(0)$ , d.h.  $T_{x_0}\psi = A \circ T_{x_0}\varphi$ . Daher gilt:  $T_{x_0}\varphi$  linear  $\iff T_{x_0}\psi$  linear. Also ist die  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur von der Wahl der Karte  $\varphi$  unabhängig.  $\square$

**Notation:**  $\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  sei eine Karte (in  $\mathfrak{A}$ ) mit  $x_0 \in U$  (vgl. S. 3 für die Schreibweise).  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sei die Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$ .

Man definiert  $\frac{\partial}{\partial x^j} := (T_{x_0}\varphi)^{-1}(e_j) \in T_{x_0}M$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$ . (Manchmal schreibe ich genauer  $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0}$ .)

Nach dem letzten Hilfssatz ist  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  eine Basis in  $T_{x_0}M$ . Für  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist also  $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0}$  die Äquivalenzklasse  $[x(t)]$  aller  $\mathcal{C}^k$ -Kurven durch  $x_0$  für die  $(\varphi \circ x)'(0) = e_j$  gilt. Eine spezielle solche Kurve ist z.B. die „Koordinatenlinie“  $t \longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + te_j)$ . (Vorsicht: Das Symbol  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  hängt von der gesamten Karte  $\varphi$  ab und ändert seine Bedeutung auch dann, wenn sich nur  $x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n$  ändern. Das ist ebenso wie bei den partiellen Ableitungen, und als solche wird  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  in S. 20 interpretiert.)

Wenn  $v \in T_{x_0}M$  und  $(T_{x_0}\varphi)(v) = (v^1, \dots, v^n)^T = v^j e_j \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \left[ \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tv^j e_j) \right].$$

Wenn  $\psi : U_1 \longrightarrow V_1 : x \longmapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T$  eine zweite Karte (natürlich  $\mathcal{C}^k$ ) mit  $x_0 \in U_1$  ist, und  $A := (\text{Jacobi-Matrix von } \psi \circ \varphi^{-1}) = \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\dots,n}(\varphi(x_0))$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} &= (T_{x_0}\varphi)^{-1}(e_j) = (A^{-1}T_{x_0}\psi)^{-1}(e_j) = (T_{x_0}\psi)^{-1}(Ae_j) = \\ &= (T_{x_0}\psi)^{-1}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} e_i\right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i'}}. \end{aligned}$$

Also:  $\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$ , wie wenn man formal kürzen würde.

$$(\text{Genauer: } \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(\varphi(x_0)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right)_{x_0}).$$

$$\text{Allgemein: } v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_{x_0}M \implies v = v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = v^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \text{ mit } v^{i'} = v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

In der Physik fasst man manchmal einen Tangentialvektor  $v$  als einen von der Karte abhängigen Vektor  $(v^1, \dots, v^n)^T \in \mathbb{R}^n$  auf, so dass bei Kartenwechsel gilt  $v^{i'} = v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ . Redeweise: Der Vektor transformiert sich „kontravariant“.

**Bsp.:** 1)  $V$   $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Standardstruktur,  $x_0 \in V$ . Dann kann man  $T_{x_0}V$  mit  $V$  identifizieren:  $T_{x_0}V \xrightarrow{\sim} V : [x(t)] \mapsto x'(0) \in V$ . Bildlich wird  $v \in T_{x_0}V$  als Vektor mit Anfangspunkt in  $x_0$  dargestellt. Speziell für  $V = \mathbb{R}^n$  heißt das:  $T_{x_0}\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n : \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mapsto (v^1, \dots, v^n)^T$ . (Oder allgemeiner, in einer linearen Karte  $\varphi$  bzgl. einer Basis  $e_1, \dots, e_n \in V$ , d.h.  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n : v^i e_i \mapsto (v^1, \dots, v^n)^T$  ist dann  $T_{x_0}V \xrightarrow{\sim} V : v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto v^i e_i$ .)

2)  $N \subset M$  Untermannigfaltigkeit,  $x_0 \in N$ . Da  $\mathcal{C}^k$ -Kurven auf  $N$  durch  $x_0$  auch solche auf  $M$  sind und  $[x(t), y(t)]$  tangential in  $x_0$  auf  $N \iff$  detto auf  $M$ , erhalten wir eine injektive lineare Abbildung  $T_{x_0}N \hookrightarrow T_{x_0}M$ .

Im Fall  $x_0 \in N \subset \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeit ergibt sich der übliche Tangentialraum, wenn man  $T_{x_0}N$  parallel nach  $x_0$  verschiebt. Speziell, wenn  $x_0 \in U \subset M$  offen, so ist  $T_{x_0}U = T_{x_0}M$ .

3) Die Kugelkoordinaten  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \vartheta, \varphi)^T \mapsto \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$  liefern die  $\mathcal{C}^\infty$ -

Karte  $\psi^{-1} : U := \{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 \neq 0 \text{ oder } x^1 > 0\} \simeq (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$  auf  $M = \mathbb{R}^3$ .

Wenn  $x_0 \in U$  und  $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^3$ ,  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , so gilt bzgl.  $\psi^{-1} : v = v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + v_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

Die Umrechnung geschieht entweder mit der Jacobi-Matrix, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x^i}{\partial r}(x_0) \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{x_0^i}{r_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ etc., } v_r = v^j \frac{\partial r}{\partial x^j}(x_0) = \sum_{j=1}^3 \frac{v^j x_0^j}{r_0} \text{ etc.,}$$

oder geometrisch:  $\frac{\partial}{\partial r}$  ist die Äquivalenzklasse des Weges  $\psi(r_0+t, \vartheta_0, \varphi_0)$ , wenn  $\psi^{-1}(x_0) =$

$$(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)^T \implies \frac{\partial}{\partial r} = \left[ x_0 \left( 1 + \frac{t}{r_0} \right) \right] = \frac{x_0^i}{r_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ etc.}$$

4) Es sei  $M = \mathbb{S}^2$ ,  $x_0 \in U_{3,+} \cap U_{1,+}$ . Wir wollen die Karten  $\varphi_{3,+} : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto (x^1, x^2)^T$  und  $\varphi_{1,+} : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto (x^2, x^3)^T =: (x^{1'}, x^{2'})^T$  vergleichen. Zunächst zu  $\varphi_{3,+}$ . Dann ist  $\frac{\partial}{\partial x^1} = [x(t)] \in T_{x_0}\mathbb{S}^2$ , wobei  $x : t \mapsto (x_0^1 + t, x_0^2, \sqrt{1 - (x_0^1 + t)^2 - (x_0^2)^2})^T \in \mathbb{S}^2$ . Wenn wir  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  als Untermannigfaltigkeit auffassen und  $T_{x_0}\mathbb{S}^2 \subset T_{x_0}\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$  wie

in 1), 2) so gilt also  $\frac{\partial}{\partial x^1} = \left( 1, 0, -\frac{x_0^1}{x_0^3} \right)^T$  und ebenso  $\frac{\partial}{\partial x^2} = \left( 0, 1, -\frac{x_0^2}{x_0^3} \right)^T$ . Für die

Karte  $\varphi_{1,+}$  folgt ebenso  $\frac{\partial}{\partial x^{1'}} = \left( -\frac{x_0^2}{x_0^1}, 1, 0 \right)^T$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^{2'}} = \left( -\frac{x_0^3}{x_0^1}, 0, 1 \right)^T$ . Beachte, dass

zwar  $x^{1'} = x^2$ , aber  $\frac{\partial}{\partial x^{1'}} \neq \frac{\partial}{\partial x^2}$ , da  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  von der gesamten Karte abhängt.

**Def.:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $x_0 \in M$ ,  $x_0 \in U_1, U_2 \subset M$  offen,  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^k$ .

1)  $f_1, f_2$  stimmen bei  $x_0$  überein  $\iff \exists U \subset U_1 \cap U_2$  offen mit  $x_0 \in U : f_1|_U = f_2|_U$ .

- 2) Eine Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation in 1) heißt  $\mathcal{C}^k$ -Funktionskeim in  $x_0$  und wird (wieder einmal) mit  $[-]$  bezeichnet.  
 $\overline{\mathcal{C}}_{x_0}^k(M) := \{\mathcal{C}^k\text{-Funktionskeime in } x_0\}$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Algebra (wobei  $\lambda[f_1]^\pm\mu[f_2] = [(\lambda f_1 \mp \mu f_2)|_U]$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $U := U_1 \cap U_2$ ).
- 3)  $D : \mathcal{C}_{x_0}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Derivation (in  $x_0$ ) : $\iff$  (i)  $D$  linear,  
(ii)  $\forall [f], [g] \in \mathcal{C}_{x_0}^k(M) : D([f] \cdot [g]) = f(x_0)D([g]) + g(x_0)D([f])$ .  
 $\text{Der}_{x_0}(M) := \{D \text{ Derivation}\}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Hilfsatz:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $x_0 \in M$ .

Dann ist  $F : T_{x_0}(M) \rightarrow \text{Der}_{x_0}(M) : [x(t)] \mapsto ([f] \mapsto (f \circ x)'(0))$  ein Vektorraum-Isomorphismus.

**Beweis:** a)  $F$  ist wohldefiniert, denn in Koordinaten  $\varphi : x \mapsto (x^i)$  gilt:

$$\begin{aligned} \alpha) [f] = [g], [x_1(t)] = [x_2(t)] &\implies (f \circ x_1)'(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0)) \cdot \frac{d(\varphi \circ x_1)^i}{dt}(0) = \\ &= \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0)) \cdot \frac{d(\varphi \circ x_2)^i}{dt}(0) = (g \circ x_2)'(0) \text{ nach der Kettenregel und da} \\ &(g \circ x_1)'(0) = (g \circ x_2)'(0) = (T_{x_0}\varphi)([x_i(t)]). \text{ Für } \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0)) \text{ schreibt man} \\ &\text{(schlampigerweise) einfach } \underline{\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)}. \end{aligned}$$

Mit dieser Schreibweise gilt dann  $F\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0}\right)([f]) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)$ , denn nach S. 17 ist  $\frac{\partial}{\partial x^j} = [x(t)]$  mit  $\frac{d(\varphi \circ x)}{dt}(0) = e_j$ .

$$\beta) ((f \cdot g) \circ x)'(0) = ((f \circ x) \cdot (g \circ x))'(0) = f(x_0)(g \circ x)'(0) + g(x_0) \cdot (f \circ x)'(0) \text{ nach der Produktregel} \implies F([x(t)]) \in \text{Der}_{x_0}(M).$$

$$b) F \text{ ist linear, da } F\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)([f]) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0), \text{ vgl. a).}$$

$$\begin{aligned} c) F \text{ ist injektiv, denn speziell für } f = x^j \text{ gilt } F\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)([x^j]) = v^j \text{ und somit} \\ F\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0 \iff v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0. \end{aligned}$$

$$d) F \text{ ist surjektiv: Es sei } D \in \text{Der}_{x_0}(M), [f] \in \mathcal{C}_{x_0}^\infty(M), f : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

In Koordinaten ist  $f(x^1, \dots, x^n) =$

$$= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt =$$

$$= f(x_0) + (x^i - x_0^i) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} (x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt}_{g_i(x) \text{ } C^\infty \text{ bei } x_0}.$$

Wenn 1 die konstante Funktion ist, so ist  $D([1]) = D([1] \cdot [1]) = D([1]) + D([1]) \Rightarrow D([1]) = 0 \Rightarrow D([f]) = D([f(x_0)]) + D([x^i - x_0^i] \cdot [g_i(x)]) = 0 + g_i(x_0)D([x^i - x_0^i]) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \cdot D([x^i]) = F\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)([f]),$   
wenn  $v^i := D([x^i]) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$   $\square$

**Bemerkung:** Als Derivationen aufgefasst, haben die Tangentialvektoren  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  also ihre übliche Bedeutung einer partiellen Ableitung, vgl. die Formel in a) des Beweises. In Zukunft schreibe ich auch  $\underline{\partial_i} := \frac{\partial}{\partial x^i}.$  (Genauer:  $(\partial_i)_{x_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}.$ )

**Hilfssatz:**  $M$  Menge,  $I$  beliebige Indexmenge,  $\mathfrak{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i : i \in I\}$  erfülle

- (i)  $(\forall i \in I : U_i \subset M)$  und  $(\bigcup_{i \in I_1} U_i = M), I_1 \subset I$  abzählbar;
- (ii)  $\forall i \in I : V_i \subset \mathbb{R}^n$  offen;
- (iii)  $\forall i \in I : \varphi_i$  bijektiv;
- (iv)  $\forall x \neq y \in M : (\exists i \in I : x, y \in U_i) \vee (\exists i, j \in I : x \in U_i, y \in U_j, U_i \cap U_j = \emptyset);$
- (v)  $\forall i, j \in I : U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  ist ein Homöomorphismus von offenen Mengen.

$U_i$  trage die Initialtopologie bzgl.  $\varphi_i$  und es sei  $(U \subset M$  offen $) :\iff (\forall i \in I : U \cap U_i \subset U_i$  offen). Dann ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{A}$  ein  $C^0$ -Atlas auf  $M$ .

**Beweis:** a) Offenbar gilt  $(U_\alpha \subset M$  offen,  $\alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset M$  offen),  $(U, U' \subset M$  offen  $\iff U \cap U' \subset M$  offen) und  $(\emptyset, M \subset M$  offen). Also ist auf  $M$  eine Topologie erklärt.

b)  $U_{i, \text{Sp}}$  sei  $U_i$  mit der von  $M$  induzierten Spurtopologie,  $U_{i, \text{Ini}}$  sei  $U_i$  mit der Initialtopologie bzgl.  $\varphi_i$ . Dann ist  $U \subset U_{i, \text{Sp}}$  offen  $\iff U = W \cap U_i$ ,  $W \subset M$  offen  $\Rightarrow$  (nach Definition der Topologie auf  $M$ )  $\Rightarrow U \subset U_{i, \text{Ini}}$  offen.

Umgekehrt:  $U \subset U_{i, \text{Ini}}$  offen  $\iff U = \varphi_i^{-1}(V)$ ,  $V \subset V_i$  offen  $\Rightarrow \varphi_j(U \cap U_j) = \varphi_j \varphi_i^{-1} \varphi_i(U \cap U_j) = \varphi_j \varphi_i^{-1} \left( \underbrace{V \cap \varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\subset \mathbb{R}^n \text{ offen}} \right) \subset \varphi_j(U_i \cap U_j)$  offen  $\Rightarrow \varphi_j(U \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$

offen  $\implies U \cap U_j \subset U_{j, \text{ini}}$  offen  $\implies U \subset M$  offen  $\implies U \subset U_{i, \text{sp}}$  offen. Also ist  $U_{i, \text{sp}} = U_{i, \text{ini}}$  und  $U_i \subset M$  offen. Klarerweise ist dann  $M$  lokal euklidisch.

c)  $M$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, da  $I_1$  endlich oder abzählbar ist und  $M$  ist Hausdorffsch wegen (iv).  $\square$

**Definition und Hilfssatz:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

$TM := \{(x, v) : x \in M, v \in T_x M\}$  heißt Tangentialraum zu  $M$ . Für  $(\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^i)) \in \mathfrak{A}_{\max}$  sei  $\underline{T}\varphi : TU \rightarrow V \times \mathbb{R}^n : (x, v^i \partial_i) \mapsto (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)^T$ . Dann ist (i)–(v) oben erfüllt und damit  $TM$  eine  $2n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Weiters ist  $\mathfrak{B} := \{T\varphi : \varphi \in \mathfrak{A}\}$  ein  $C^{k-1}$ -Atlas auf  $TM$  ( $\infty - 1 := \infty$ ).

Die  $C^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit  $(TM, [\mathfrak{B}])$  hängt nur von  $[\mathfrak{A}]$ , nicht von  $\mathfrak{A}$  ab.

$p : TM \rightarrow M : (x, v) \mapsto x$  heißt Projektionsabbildung.

**Beweis:** Es gelten (i)–(v) des vorigen Hilfssatzes.

Speziell zu (v):  $\varphi_1 : x \mapsto (x^i), \varphi_2 : x \mapsto (x^{i'})$  seien 2 Karten in  $\mathfrak{A}$  mit  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Dann ist

$T\varphi_2 \circ (T\varphi_1)^{-1} : (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)^T \mapsto (x, v^i \partial_i) \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'}, v^{1'}, \dots, v^{n'})^T$ , wobei  $x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ , d.h. die Komponenten von  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ,  $C^k$  sind und

$v^{i'} = v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n)$   $C^{k-1}$  sind. Daher ist  $\mathfrak{B}$  ein  $C^{k-1}$ -Atlas.

Wenn  $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ , so ist  $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ . Also:  $[\mathfrak{A}_1] = [\mathfrak{A}_2] \implies [\mathfrak{B}_1] = [\mathfrak{B}_2]$ .  $\square$

**Bemerkung:**  $TM$  wird immer in dieser Weise als  $C^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit aufgefasst.

**Bsp.:** 1)  $V$   $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Dann ist  $TV \xrightarrow{\sim} V \times V : (x_0, [x(t)]) \mapsto (x_0, \dot{x}(0))$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. ( $V \oplus V$  als Vektorraum mit Standardstruktur ergibt übrigens dieselbe Mannigfaltigkeit wie  $V \times V$  nach S. 5.)

2)  $F : T\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : (x_0, [x(t)]) \mapsto (x_0, \det(x_0, \dot{x}(0)))$  ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. (Beachte, dass wie in S. 18  $T_{x_0}\mathbb{S}^1 \subset T_{x_0}\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2 : [x(t)] \mapsto \dot{x}(0)$ , det ist die übliche Determinante auf  $\mathbb{R}^2$ .) Denn z.B. in den Karten  $T\varphi_{2,+}$  und  $\varphi_{2,+} \times \text{id}$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} TU_{2,+} & \xrightarrow{F} & U_{2,+} \times \mathbb{R} \\ \uparrow (T\varphi_{2,+})^{-1} & & \downarrow \varphi_{2,+} \times \text{id} \\ (-1, 1) \times \mathbb{R} & & (-1, 1) \times \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left( \left( \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right), \left( -a \frac{v}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right) & \xrightarrow{F} & \left( x_0, \frac{-v}{\sqrt{1-a^2}} \right) \\ \uparrow \text{vgl. S. 18} & & \downarrow \\ (a, v) & & \left( a, \frac{-v}{\sqrt{1-a^2}} \right), \end{array}$$

wobei  $x_0 = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ . Daher ist  $F$  in dieser Karte (und ebenso in den übrigen 3 Karten)  $\mathcal{C}^\infty$  und bijektiv.

Außerdem gilt, dass  $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{F} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$  kommutiert und dass  $F$  auf den

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ p \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathbb{S}^1 & \end{array}$$

„Fasern“  $T_{x_0}\mathbb{S}^1$  linear ist. Diese Eigenschaften lassen sich mittels der Mannigfaltigkeitsstruktur von  $T\mathbb{S}^1$  allein nicht beschreiben. Daher:

**Def.:**  $M_1$  sei eine  $n_1$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit,  $(M_2, [\mathfrak{A}_2])$  eine  $n_2$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $n_1 \geq n_2$ ,  $p : M_1 \rightarrow M_2$  stetig, surjektiv.

1) Ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas  $\mathfrak{A}_1$  auf  $M_1$  heißt Vektorraum-Bündelatlas bzgl.  $p$  : $\iff$  (i)  $\forall(\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}_1 : U_1 = p^{-1}(p(U_1))$  und  $\exists(\varphi_2 : p(U_1) \rightarrow V_2) \in \mathfrak{A}_{2,\max} : V_1 = V_2 \times \mathbb{R}^{n_1-n_2}$  und

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & V_1 & (x^1, \dots, x^{n_1})^T \\ \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_1 & \downarrow \\ p(U_1) & \xrightarrow{\varphi_2} & V_2 & (x^1, \dots, x^{n_2})^T \end{array} \quad \text{kommtutiert};$$

(ii)  $\forall(\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1)$ ,  $(\psi_1 : U'_1 \rightarrow V'_1) \in \mathfrak{A}_1$  mit  $U_1 \cap U'_1 \neq \emptyset$ :  $\psi_1 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U'_1) \rightarrow \psi_1(U_1 \cap U'_1)$  ist für festes  $x^1, \dots, x^{n_2}$  linear in den hinteren  $n_1 - n_2$  Komponenten. (Beachte, dass  $\psi_1 \circ \varphi_1^{-1} : (x^1, \dots, x^{n_1}) \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'_1})$ , wobei  $x^{1'}, \dots, x^{n'_2}$  nur von  $x^1, \dots, x^{n_2}$  abhängen, da  $(x^{1'}, \dots, x^{n'_2}) = \psi_2 \circ \varphi_2^{-1}(x^1, \dots, x^{n_2})$  für  $\varphi_2, \psi_2$  wie in (i)).

2) Wenn  $\mathfrak{A}_1$  wie in 1), so heißt  $\varphi \in \mathfrak{A}_1$  Vektorraumbündelkarte.

3) Zwei Vektorraumbündelatlanten  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}'_1$  heißen äquivalent : $\iff$   $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}'_1$  Vektorraumbündelatlas.

4)  $M_1$  mit einer Äquivalenzklasse  $[[\mathfrak{A}_1]]$  von Vektorraumbündelatlanten heißt  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel bzgl.  $p$ .

5) Für  $(M_1, [[\mathfrak{A}_1]])$   $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel und  $x_0 \in M_2$  trägt die Faser  $p^{-1}(x_0)$  kanonisch die Struktur eines  $(n_1 - n_2)$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums durch Übertragung

bzgl.  $\varphi_1|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \longrightarrow \{\varphi_2(x_0)\} \times \mathbb{R}^{n_1-n_2}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  wie in 1), (i).

6)  $(M_2 \times \mathbb{R}^{n_1-n_2}, [[\mathfrak{B}]])$  mit  $\mathfrak{B} := \{\varphi \times \text{id} : \varphi \in \mathfrak{A}_2\}$  heißt triviales Vektorraumbündel über  $M_2$  mit Faser  $\mathbb{R}^{n_1-n_2}$ . (Für  $p : M_2 \times \mathbb{R}^{n_1-n_2} \longrightarrow M_2$  ist die Projektion zu nehmen.)

7)  $M_1$  bzw.  $N_1$  seien Vektorraumbündel über  $M_2$  bzw.  $N_2$ ;  $F_1 : M_1 \longrightarrow N_1$   $\mathcal{C}^k$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel-Homomorphismus : $\iff$  (i)  $\exists F_2 : M_2 \longrightarrow N_2$   $\mathcal{C}^k$  sodass

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F_1} & N_1 \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ M_2 & \xrightarrow{F_2} & N_2 \end{array} \quad \text{kommutiert;}$$

(ii)  $\forall x_0 \in M_2 : F_1|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p'^{-1}(F_2(x_0))$  ist  $\mathbb{R}$ -linear (bzgl. der Vektorraumstruktur von 5)).

**Bemerkung:** Beachte, dass wegen 1) (i)  $p$  immer  $\mathcal{C}^k$  und offen ist.

**Bsp.:** 1) Offenbar ist für eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$   $(TM, [[\mathfrak{B}]])$  (mit  $\mathfrak{B}$  wie in S. 21) ein  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündel bzgl.  $p : TM \longrightarrow M$ . Es heißt Tangentialbündel.

2) Das Bsp. 2) in S. 21 liefert einen Vektorraumbündel-Isomorphismus von  $T\mathbb{S}^1$  mit dem trivialen Bündel  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ .

3) Wenn  $p = \text{pr}_1 : M_1 = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1 = M_2$ , so sind  $\mathfrak{A}_1 = \{\text{id}_{\mathbb{R}^2}\}$  und  $\mathfrak{A}'_1 = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x^1, x^2) \longmapsto (x^1, \sinh(x^2)) \right\}$  2  $\mathcal{C}^\infty$ -Vektorraumbündelatlanzen, die nicht äquivalent sind. Dennoch ist die  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur  $[\mathfrak{A}_1] = [\mathfrak{A}'_1]$ . (Auch sind die 2 Vektorraumbündel  $(\mathbb{R}^2, [[\mathfrak{A}_1]])$  und  $(\mathbb{R}^2, [[\mathfrak{A}'_1]])$  isomorph.)

4) Wir wollen das Tangentialbündel von  $O_n(\mathbb{R})$  betrachten. Da  $O_n(\mathbb{R}) \subset \text{gl}_n(\mathbb{R})$  eine Untermannigfaltigkeit ist (vgl. S. 11), können wir für  $A \in O_n(\mathbb{R})$   $T_A O_n(\mathbb{R})$  als Unterraum von  $\text{gl}_n(\mathbb{R})$  auffassen.  $B \in T_A O_n(\mathbb{R}) \iff \exists A(t) : (-1, 1) \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$   $\mathcal{C}^\infty$  mit  $A(0) = A$ ,  $A'(0) = B$ .

$A(t) \in O_n(\mathbb{R}) \implies A(t)^T A(t) = I \implies (\frac{d}{dt} \text{ anwenden}, t = 0) \implies A^T B + B^T A = 0 \implies (A^T B)^T = -A^T B$ .

Es sei  $\text{o}_n(\mathbb{R}) := \{C \in \text{gl}_n(\mathbb{R}) : C^T = -C\}$ . Dann ist  $A^T B \in \text{o}_n$ ,  $B \in A \cdot \text{o}_n$ , d.h.  $T_A O_n(\mathbb{R}) \subset A \cdot \text{o}_n(\mathbb{R})$ . Hier gilt  $=$ , denn wenn  $C \in \text{o}_n(\mathbb{R})$ , so setze

$$e^D := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}, \quad e^{D_1} \cdot e^{D_2} = e^{D_1+D_2} \text{ falls } D_1 D_2 = D_2 D_1;$$

$A(t) := A \cdot e^{Ct} \implies A(t)^T A(t) = (e^{Ct})^T \underbrace{A^T A}_{I} e^{Ct} = e^{(C^T+C)t} = I$  und  $[A(t)] = A \cdot C \in T_A O_n(\mathbb{R})$ .

Daher ist  $F : T\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{o}_n(\mathbb{R}) : (A, B) \longmapsto (A, A^T B)$  jedenfalls wohldefiniert und bijektiv.  $F$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ , da es die Einschränkung einer ebenso definierten  $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung auf  $T\mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$  ist. Aus demselben Grunde ist auch  $F^{-1} : (A, C) \longmapsto (A, AC)$   $\mathcal{C}^\infty$ . Also ist  $F$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus. Überdies ist  $F$  offenbar ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Vektorraumbündel-Isomorphismus. Wie für  $\mathbb{S}^1$  ist auch für  $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$  das Tangentialbündel isomorph zu einem trivialen Bündel und das liegt daran, dass beide Liegruppen sind (siehe S. 36).

**Def.:** 1)  $p : M_1 \longrightarrow M_2$   $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel.

$s : M_2 \longrightarrow M_1$  heißt Schnitt : $\iff$  (i)  $s \in \mathcal{C}^k$  (ii)  $p \circ s = \mathrm{id}_{M_2}$ .

2)  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

Ein Schnitt des  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündels  $p : TM \longrightarrow M$  heißt Vektorfeld auf  $M$ .

$\mathcal{T}^1(M) := \{X \in \mathcal{C}^k \text{ Vektorfeld auf } M\}$ .

**Bemerkung:** In der Basis  $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} = (\partial_i)_{x_0}$  bzgl.  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$  gilt also für  $X \in \mathcal{T}^1(M) : X(x_0) = v^i(x_0)(\partial_i)_{x_0}$ ,  $x_0 \in U$ , wobei  $v^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^{k-1}$ . (Genaugenommen ist  $X(x_0) = (x_0, v)$  mit  $v \in T_{x_0}M$ , aber man bezeichnet schlampigerweise die 2. Komponente  $v$  ebenfalls mit  $X(x_0)$ .)

**Bsp.:** 1)  $M = \mathbb{R}^n$  als  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit.  $X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n) \iff \exists(v^1, \dots, v^n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$   $\mathcal{C}^\infty$  mit  $X(x) = v^i(x)\partial_i$ . Hier braucht man nur die eine Karte  $\mathrm{id}$  und kann daher die  $v^i(x)$  „global“ (d.h. auf ganz  $M$ ) definieren.

2)  $N \subset M$   $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit. Nach S. 18 ist für  $x_0 \in N$   $T_{x_0}N \leq T_{x_0}M$ . Daher gilt

$$\mathcal{T}^1(N) \overset{\sim}{\longrightarrow} \{X : N \longrightarrow TM \text{ } \mathcal{C}^{k-1} : \forall x_0 \in N : X(x_0) \in T_{x_0}N\}.$$

Speziell sei  $N = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{S}^n$  (mit der Standard  $\mathcal{C}^{k+1}$ -Struktur) also gegeben durch  $X : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$   $\mathcal{C}^k$  mit  $\forall x_0 \in \mathbb{S}^n : X(x_0) \perp x_0$ .

Z.B. ist  $X : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Vektorfeld. Eine andere Darstellung von  $X$  ist  $X = \frac{d}{d\vartheta}$  in den Karten

$\varphi_a : \mathbb{S}^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow (a, a + 2\pi) : \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \vartheta$  für  $\vartheta \in (a, a + 2\pi)$  denn in  $T_{x_0}\mathbb{S}^1$ ,  $x_0 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_0 \\ \sin \vartheta_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$  gilt  $\left(\frac{d}{d\vartheta}\right)_{x_0} = \varphi_a^{-1}(\vartheta_0 + t)'(0) = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_0 \\ \cos \vartheta_0 \end{pmatrix}$ .

Beachte, dass  $\forall x_0 \in \mathbb{S}^1 : X(x_0) = \left(\frac{d}{d\vartheta}\right)_{x_0} \neq 0$ .

Der Bündelisomorphismus  $F : T\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  in S. 22 lässt sich auch so interpretieren:  $F(x_0, vX(x_0)) = (x_0, v)$ . Wie wir später sehen werden, gibt es für gerades  $n$  kein  $X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^n)$  mit  $\forall x_0 \in \mathbb{S}^n : X(x_0) \neq 0$  (vgl. S. 80).

**Def.:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit.

- 1)  $\mathcal{C}^k(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}^k\}$  ist eine kommutative  $\mathbb{R}$ -Algebra mit  $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ .
- 2)  $D : \mathcal{C}^k(M) \rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(M)$  heißt Derivation (auf  $M$ ) : $\iff$  (i)  $D$   $\mathbb{R}$ -linear,  
(ii)  $\forall f, g \in \mathcal{C}^k(M) : D(fg) = fD(g) + gD(f)$ .
- 3)  $\text{Der}(M) := \{D : \mathcal{C}^k(M) \rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(M) \mid D \text{ Derivation}\}$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modul mit der Definition  $(fD)(g) := f \cdot D(g) \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ .

**Bemerkung:** So wie Tangentialvektoren Derivationen in  $x_0$  entsprechen (vgl. S. 19), so entsprechen den Vektorfeldern Derivationen auf  $M$  (zumindest für  $k = \infty$ ) :

**Hilfssatz:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$  in 1),  $k = \infty$  in 2).

- 1)  $\mathcal{T}^1(M)$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modul mit der Definition  $(f \cdot X)(x_0) := f(x_0)X(x_0) \in T_{x_0}(M)$  (für  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ ,  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $x_0 \in M$ ).
- 2)  $F : \mathcal{T}^1(M) \rightarrow \text{Der}(M) : X \mapsto (f \mapsto (x_0 \mapsto X(x_0)([f])))$  ist ein  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul-Isomorphismus. Dabei ist  $[f]$  der  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionskeim von  $f$  in  $x_0$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , und  $X(x_0) \in T_{x_0}(M) \simeq \text{Der}_{x_0}(M)$ , d.h.  $X(x_0)([f]) = (f \circ x)'(0)$  wenn  $X(x_0) = [x(t)]$ .

**Beweis:** 1) Mit Hilfe von Karten sieht man, dass für  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ ,  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  auch  $f \cdot X : M \rightarrow TM$   $\mathcal{C}^{k-1}$  ist. Der Rest ist klar.

- 2) a)  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $x_0 \in M \implies (FX(f \cdot g))(x_0) = X(x_0)([fg]) = (\text{da } X(x_0) \in \text{Der}_{x_0}(M)) = f(x_0)X(x_0)([g]) + g(x_0)X(x_0)([f]) \implies FX(f \cdot g) = f \cdot FX(g) + g \cdot FX(f) \implies F$  ist wohldefiniert. Ähnlich sieht man, dass  $F$   $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear ist.
- b)  $F$  injektiv:  $F(X) = 0 \iff \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : \forall x_0 \in M : X(x_0)([f]) = 0$ . Wenn  $x_0 \in U$  und  $(\varphi : U \rightarrow V) \in \mathfrak{A}$ , so gibt es  $\chi : V \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty$  mit  $\chi = 1$  bei  $\varphi(x_0)$  und  $\chi = 0$  außerhalb einer Kugel  $K$  um  $\varphi(x_0)$  mit  $\overline{K} \subset V$ . Dann lässt sich  $(\chi \circ \varphi) \cdot \varphi$  durch 0 außerhalb von  $U$  fortsetzen, d.h.  $(\chi \circ \varphi) \cdot \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $(\chi \circ \varphi) \cdot \varphi = \varphi$  in einer Umgebung von  $x_0$ .

Wenn  $\varphi : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ , so ist  $0 = X(x_0)\left(\underbrace{[(\chi \circ \varphi) \cdot \varphi^j]}_{\in \mathcal{C}^\infty(M)}\right) = X(x_0)([x^j]) = v^j$ ,

wenn  $X(x_0) = v^j \partial_j$ . Somit ist  $X(x_0) = 0$  für  $x_0 \in M$ , d.h.  $X = 0$ .

- c)  $F$  surjektiv: Es sei  $D \in \text{Der}(M)$  und  $[f]$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionskeim bei  $x_0 \in M$ . Mittels einer Funktion  $\chi$  wie in b) können wir  $f$  durch  $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$  ersetzen, sodass  $[f] = [f_1]$ . Definiere  $D_{x_0}$  auf  $\mathcal{C}_{x_0}^\infty(M)$  durch  $D_{x_0}([f]) := D(f_1)(x_0)$ , wobei  $[f] = [f_1]$ ,  $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Dies ist wohldefiniert, denn wenn  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$  bei  $x_0$  übereinstimmen, so ist auf  $M$

$$f_1 - f_2 = (f_1 - f_2) \cdot \chi, \text{ wobei } \chi \in \mathcal{C}^\infty(M), \chi = 2 \text{ bei } x_0, \chi = 1 \text{ wo } f_1 \neq f_2 \implies D(f_1 - f_2)(x_0) = D((f_1 - f_2)\chi)(x_0) = \underbrace{\chi(x_0)}_2 D(f_1 - f_2)(x_0) + \underbrace{(f_1 - f_2)(x_0)}_0 D(\chi)(x_0) = 2D(f_1 - f_2)(x_0) \implies D(f_1 - f_2)(x_0) = 0.$$

Weiters gilt dann  $D_{x_0}([f \cdot g]) = D(f_1 \cdot g_1)(x_0) = f_1(x_0)D(g_1)(x_0) + g_1(x_0)D(f_1)(x_0) = f(x_0)D_{x_0}([g]) + g(x_0)D_{x_0}([f]).$

Also ist  $D_{x_0} \in \text{Der}_{x_0}(M) \simeq T_{x_0}(M).$

Definiere  $X : M \longrightarrow TM : x_0 \longmapsto D_{x_0}$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $X \mathcal{C}^\infty$  ist, denn dann gilt offenbar  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  und  $F(X)(f)(x_0) = X(x_0)([f]) = D_{x_0}([f]) = D(f)(x_0)$ , d.h.  $FX = D$ .

Es sei  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$ ,  $x_0 \in U$ ,  $\chi$  wie in b). Dann ist dort wo  $\chi \circ \varphi = 1$ , d.h. für  $x$  bei  $x_0$ :

$$X(x) = v^j(x)\partial_j, \text{ wobei } v^j(x) = X(x)([x^j]) = D_x([x^j]) = D((\chi \circ \varphi) \cdot \varphi^j)(x) \in \mathcal{C}^\infty.$$

Somit ist  $X \mathcal{C}^\infty$  bei  $x_0$  und daher auch auf  $M$ .  $\square$

**Bemerkung:** Für eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $(M, [\mathfrak{A}])$  identifizierte ich  $\mathcal{T}^1(M)$  und  $\text{Der}(M)$ , d.h. ich schreibe wieder  $X$  für  $FX$ ,  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ .

**Bsp.:** 1) Für  $(\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A}$  bezeichnet man mit  $\partial_j$  das Vektorfeld in  $\mathcal{T}^1(U)$ , das durch  $x_0 \longmapsto (\partial_j)_{x_0} \in T_{x_0}U$  gegeben ist. Für  $k = \infty$  können wir  $\partial_j$  auch als Element von  $\text{Der}(U)$  auffassen und dann wirkt es wie die partielle Ableitung nach  $x^j$ , wenn  $f$  in Koordinaten geschrieben wird, d.h.

$$\partial_j : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U) : f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^j} \text{ (d.h. genaugenommen } \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \varphi, \text{ vgl. S. 19).}$$

Beachte, dass  $\partial_j$  sowohl für ein Vektorfeld in  $\mathcal{T}^1(U)$  als auch für einen speziellen Tangentialvektor in  $T_{x_0}M$  steht (weil man ungern  $(\partial_j)_{x_0}$  schreibt).

Übrigens ist (auch für  $k < \infty$ )  $\mathcal{T}^1(U)$  ein freier  $\mathcal{C}^{k-1}(U)$ -Modul mit der Basis  $\partial_1, \dots, \partial_n$ , denn  $X \in \mathcal{T}^1(U) \iff \exists v^1, \dots, v^n \in \mathcal{C}^{k-1}(U) : X = v^i \partial_i$ .

2)  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$  kann mit  $\mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^\infty : \forall \vartheta \in \mathbb{R} : f(\vartheta + 2\pi) = f(\vartheta)\}$  identifiziert werden:

$$\mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1) : f \longmapsto \left( \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto f(\vartheta) \right).$$

Wenn  $X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^1)$  wie in S. 24, so gilt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{X} & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1) \\ | \wr & & | \wr \\ \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

wenn  $X$  als Derivation aufgefasst wird.

**Bemerkung:** Wir wissen, dass die Tangentialbündel von  $\mathbb{S}^1$  und von  $O_n(\mathbb{R})$  isomorph zu den entsprechenden trivialen Bündeln sind. Diese Eigenschaft soll durch Vektorfelder charakterisiert werden.

**Hilfssatz und Definition:** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $\exists C^{k-1}$  Vektorraumbündel-Isomorphismus  $F : TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n$  (= triviales Bündel)
- (ii)  $\exists X_1, \dots, X_n \in T^1(M) : \forall x_0 \in M : X_1(x_0), \dots, X_n(x_0)$  sind in  $T_{x_0}M$  linear unabhängig;
- (iii)  $T^1(M)$  ist ein freier  $C^{k-1}(M)$ -Modul.

Wenn (i)-(iii) erfüllt sind, heißt  $M$  parallelisierbar.

**Beweis:** (i)  $\implies$  (ii): Es sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$  und  $X_j : M \longrightarrow TM : x_0 \mapsto F^{-1}(x_0, e_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann sind die  $X_j$   $C^{k-1}$  und  $p \circ X_j = \text{id}$ , d.h.  $X_j \in T^1(M)$ . Außerdem sind  $X_1(x_0), \dots, X_n(x_0)$  für  $x_0 \in M$  eine Basis in  $T_{x_0}M$ , da  $F(x_0, -) : T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}^n$  linear und invertierbar ist ( $F$  Vektorraumbündel-Isomorphismus!).

(ii)  $\implies$  (iii):  $X_1, \dots, X_n \in T^1(M)$  seien wie in (ii). Dann sind sie auch über  $C^{k-1}(M)$  linear unabhängig, denn  $f^i X_i = 0$ ,  $f^i \in C^{k-1}(M) \iff \forall x_0 : f^i(x_0) X_i(x_0) = 0 \iff \forall x_0 : \forall i : f^i(x_0) = 0 \iff \forall i : f^i = 0$ .

Um zu zeigen, dass  $X_1, \dots, X_n$  ein Erzeugendensystem des  $C^{k-1}(M)$ -Moduls  $T^1(M)$  sind, nehme  $X \in T^1(M)$ . Dann gilt:  $X(x_0) \in T_{x_0}M = \langle X_1(x_0), \dots, X_n(x_0) \rangle \implies \exists f^i : M \longrightarrow \mathbb{R} : \forall x_0 \in M : X(x_0) = f^i(x_0) X_i(x_0)$ . Noch zu zeigen ist, dass  $\forall i : f^i \in C^{k-1}(M)$ . In einer Karte  $\varphi : U \longrightarrow V$  gilt  $X_j = v_j^i \partial_i$  mit  $v_j^i : U \longrightarrow \mathbb{R} C^{k-1}$ . Da  $X_j(x_0)$  eine Basis von  $T_{x_0}M = T_{x_0}U$  ist für  $x_0 \in U$ , folgt:  $\forall x_0 \in U : \det(v_j^i(x_0)) \neq 0$ . Dann ist auch  $(v_j^i)^{-1} =: (w_j^i) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} C^{k-1}$  und  $\partial_j = w_j^i \cdot X_i$ . Wenn daher  $X = u^j \partial_j \in T^1(U)$ , so ist  $X = u^j w_j^i \cdot X_i \implies f^i = u^j w_j^i$  sind  $C^{k-1}$  auf  $U$  und daher auf ganz  $M$ .

(Dieser Beweisschritt lässt sich auch so formulieren: Wenn  $X_1, \dots, X_n$  wie in (ii), so ist  $TU \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n : (x_0, f^i(x_0) X_i) \longmapsto (\varphi(x_0), f^1(x_0), \dots, f^n(x_0))^T$  eine Vektorraumbündelkarte im maximalen Bündelatlas von  $TM$ ).

(iii)  $\implies$  (i): Es seien  $X_1, \dots, X_m \in T^1(M)$  eine Basis von  $T^1(M)$  über  $C^{k-1}(M)$ . Ich zeige zuerst, dass dann für  $x_0 \in M$  auch  $X_1(x_0), \dots, X_m(x_0)$  eine Basis in  $T_{x_0}(M)$  sind (und speziell  $m = n$  gelten muss).

Jedes  $v \in T_{x_0}M$  lässt sich als  $X(x_0)$  für  $X \in T^1(M)$  schreiben (unter Verwendung einer Abschneidefunktion wie in S. 25)  $\implies v = X(x_0) = f^i(x_0) X_i(x_0)$  für gewisse  $f^i \in C^{k-1}(M) \implies \mathbb{R} \langle X_1(x_0), \dots, X_m(x_0) \rangle = T_{x_0}M$ .

Nach eventueller Umnummerierung ist daher  $X_1(x_0), \dots, X_n(x_0)$  eine Basis in  $T_{x_0}M$ . Wenn  $X_j = v_j^i \partial_i$  wie in (ii)  $\implies$  (iii), so ist also  $\det(v_j^i)_{i,j=1,\dots,n}(x_0) \neq 0$  und folglich

auch  $\det(v_j^i)_{i,j=1,\dots,n}(x) \neq 0$  für  $x$  bei  $x_0$ .

Annahme:  $m > n \implies$  (wie in (ii)  $\implies$  (iii)) bei  $x_0$  gilt  $X_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x)X_i(x)$  mit  $f^i \in \mathcal{C}^{k-1}$ . Wenn  $\chi \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ ,  $\chi = 1$  bei  $x_0$ ,  $\chi = 0$  außerhalb einer genügend kleinen Umgebung von  $x_0$ , so wäre also  $\chi \cdot X_{n+1} \in \mathcal{T}^1(M)$  auf 2 Weisen durch  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , darstellbar  $\implies \cancel{\text{Satz}}$ .

Man definiert  $F : TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n : (x_0, v^i X_i(x_0)) \longmapsto (x_0, v^1, \dots, v^n)^T$ . Offenbar ist  $F$  bijektiv und linear in den Fasern. Dass  $F$  und  $F^{-1}$   $\mathcal{C}^{k-1}$  sind, sieht man in einer Karte wie in (ii)  $\implies$  (iii).  $\square$

**Bemerkung:** Der letzte Satz lässt sich ebenso für beliebige Vektorraumbündel formulieren und beweisen.

**Bsp.:** Wir wollen zeigen, dass  $\mathbb{S}^3$  parallelisierbar ist und  $\mathbb{S}^2$  nicht, bzw. noch schlimmer:  $\forall X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^2) : \exists x_0 \in \mathbb{S}^2 : X(x_0) = 0$  ( $= 0$ -Vektor im Vektorraum  $T_{x_0}M$ ). Beides gilt für die Standard  $\mathcal{C}^k$ -Struktur auf  $\mathbb{S}^n$  mit beliebigem  $k \geq 1$ . Wenn wir  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  als Untermannigfaltigkeit auffassen, so heißt das letztere (vgl. S. 24):  $\forall X : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  stetig und  $\forall x_0 \in \mathbb{S}^2 : X(x_0) \perp x_0 : \exists x_0 \in \mathbb{S}^2 : X(x_0) = 0$ . Volkstümlich formuliert man das auch so: „Ein Igel lässt sich nicht kämmen“.

a) Wir betrachten zunächst allgemein  $\mathbb{S}^n$  aber in der Form  $S = \mathbb{R}^n \dot{\cup} \{\infty\}$  mit den 2 Karten  $\varphi = \text{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  und  $\psi = \frac{x}{|x|^2} : S \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T = \frac{1}{|x|^2} (x^1, \dots, x^n)^T$ , vgl. Üb. 1.1, S. 12. In dieser Darstellung von  $\mathbb{S}^n$  ist  $X \in \mathcal{T}^1(S)$  gegeben durch  $X(x) = v^i(x^1, \dots, x^n) \partial_i$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $X(x) = v^{i'}(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \partial'_{i'} \quad \partial'_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$  für  $x \in S \setminus \{0\}$ .

$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} v^{1'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix}$  sind also „gewöhnliche“ Vektorfelder am  $\mathbb{R}^n$ . Für  $x \in S \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt (vgl. S. 17):  $v^{i'} = v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^n v^j \left( \frac{\delta_j^i}{|x|^2} - \frac{2x^i x^j}{|x|^4} \right) = \sum_{j=1}^n v^j (\delta_j^i |x'|^2 - 2x^{i'} x^{j'})$ . Genauer:  $v^{i'}(x^{1'}, \dots, x^{n'}) = \sum_{j=1}^n v^j \left( \frac{x^{1'}}{|x'|^2}, \dots, \frac{x^{n'}}{|x'|^2} \right) (\delta_j^i |x'|^2 - 2x^{i'} x^{j'})$  für  $x' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$X \in \mathcal{T}^1(S)$  ist offenbar durch  $v^1, \dots, v^n$  schon festgelegt (in  $\infty$  erhalten wir  $X(\infty)$  als Limes für  $x' \rightarrow 0$ .) Nach dem letzten Satz gilt also:  $\mathbb{S}^n$  ist als  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit

parallelisierbar  $\iff \exists$  Vektorfelder  $X_j = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ \vdots \\ v_j^n \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sodass:

$\alpha) \forall x \in \mathbb{R}^n : \det(v_j^i)(x) \neq 0;$

$\beta) \begin{pmatrix} v_1^{1'} \\ \vdots \\ v_n^{1'} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_1^{n'} \\ \vdots \\ v_n^{n'} \end{pmatrix}$  lassen sich zu linear unabhängigen  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorfeldern in  $x' = 0$  fortsetzen.

Wenn wir  $(X_1, \dots, X_n) =: B$  als Matrix auffassen, so heißt das also:

$\alpha) \forall x \in \mathbb{R}^n : \det B(x) \neq 0;$

$\beta) A(x')B\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right)$  ist in  $x' = 0$   $\mathcal{C}^{k-1}$  fortsetzbar und hat dort Determinante  $\neq 0$ , wobei die Matrix  $A(x') = (a_j^i)_{i,j=1,\dots,n}(x')$  durch  $a_j^i(x') = \delta_j^i |x'|^2 - 2x'^i x'^j$  gegeben ist.

b) Nun sei  $n = 3$ . Wir bestimmen die Matrix  $B(x)$  durch die lineare Abbildung  $B(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (1 - |x|^2)t + 2\langle x, t \rangle x + 2x \times t$ , d.h.  $B(x) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 + (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 & 2x^1 x^2 - 2x^3 & 2x^1 x^3 + 2x^2 \\ 2x^1 x^2 + 2x^3 & 1 + (x^2)^2 - (x^1)^2 - (x^3)^2 & 2x^2 x^3 - 2x^1 \\ 2x^1 x^3 - 2x^2 & 2x^2 x^3 + 2x^1 & 1 + (x^3)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Wenn  $t_1, t_2, t_3$  eine positiv orientierte ONB-Basis im  $\mathbb{R}^3$  mit  $t_1 = \frac{x}{|x|}$  ist, so gilt

$$\begin{aligned} B(x) : \quad t_1 &\mapsto (|x|^2 + 1)t_1, \\ t_2 &\mapsto (1 - |x|^2)t_2 + 2|x|t_3, \\ t_3 &\mapsto (1 - |x|^2)t_3 - 2|x|t_2 \end{aligned}$$

$$\implies \det B(x) = (1 + |x|^2)^3 \neq 0.$$

Wegen  $A(x') : t \mapsto |x'|^2 t - 2\langle x', t \rangle x'$  gilt außerdem

$$\begin{aligned} A(x')B\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right) : t &\mapsto \left(1 - \frac{1}{|x'|^2}\right)t + \frac{2}{|x'|^4} \langle x', t \rangle x' + \frac{2}{|x'|^2} x' \times t \mapsto \\ &\mapsto (|x'|^2 - 1)t + \cancel{\frac{2}{|x'|^2}} \langle x', t \rangle x' + 2x' \times t - 2\left(1 - \cancel{\frac{1}{|x'|^2}}\right) \langle x', t \rangle x' - \cancel{\frac{4}{|x'|^2}} \langle x', t \rangle x' = \end{aligned}$$

$$= (|x'|^2 - 1)t - 2\langle x', t \rangle x' + 2x' \times t. \text{ Daher sind } \alpha) \text{ und } \beta) \text{ in a) erfüllt.}$$

c) Schließlich werde  $n = 2$  betrachtet.

Annahme:  $\exists \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^2)$  mit  $\alpha) \forall x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} v^1(x) \\ v^2(x) \end{pmatrix} \neq 0$ ;

$\beta) \lim_{x' \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (x'^2)^2 - (x'^1)^2 & -2x'^1 x'^2 \\ -2x'^1 x'^2 & (x'^1)^2 - (x'^2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right) \\ v^2\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right) \end{pmatrix}$  existiert und ist  $\neq 0$ .

$\alpha)$  ist natürlich ohne weiters erfüllbar, das Problem ist  $\beta)$ . Zur Abkürzung sei  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} :$

$(x'^1, x'^2)^T \mapsto z := x'^1 + ix'^2$  und  $w(z) := v^1\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right) - iv^2\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right)$ ,  $z^2 = z \cdot z!$

$\beta)$  bedeutet dann, dass  $\lim_{z \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(z^2) & -\operatorname{Im}(z^2) \\ -\operatorname{Im}(z^2) & \operatorname{Re}(z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w(z) \\ -\operatorname{Im} w(z) \end{pmatrix}$  existiert und ist  $\neq 0$ ,

bzw.  $0 \neq a := \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot w(z)$  existiert.

Es sei  $s : (0, 1) \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : (t, z) \longmapsto \frac{w\left(\frac{tz}{1-t}\right)}{\left|w\left(\frac{tz}{1-t}\right)\right|}$ .

Wegen  $\alpha$ ) ist  $s$  wohldefiniert und stetig. Für  $t \nearrow 1$  geht  $s(t, z)$  gleichmäßig (bzgl.  $z \in \mathbb{S}^1$ ) gegen  $\frac{b}{|b|}$ , wobei  $b := v^1(0) - iv^2(0)$ , für  $t \searrow 0$  gilt

$$\lim_{t \searrow 0} s(t, z) = \lim_{t \searrow 0} \left( \frac{w(tz)(tz)^2}{|w(tz)| |tz|^2} \cdot \frac{1}{z^2} \right) = \frac{a}{|a|} \cdot \frac{1}{z^2}, \text{ gleichmäßig bzgl. } z \in \mathbb{S}^1.$$

Also können wir  $s$  stetig auf  $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$  fortsetzen und  $s$  ist eine Homotopie der geschlossenen Wege  $s(0, -)$  und  $s(1, -)$ . Die Wege  $s(0, -) : z \longmapsto \frac{a}{|a|z^2}$  und  $s(1, -) : z \longmapsto \frac{b}{|b|}$  sind aber nicht homotop, da  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} : [s(0, -)] \longmapsto \pm 2, [s(1, -)] \longmapsto 0$ .

Daher Widerspruch zur Annahme.

(Wenn man  $s$  durch  $\tilde{s}(t, z) := s(t, z)/s(t, 1)$  ersetzt, so erhält man Wege mit festem Anfangs- und Endpunkt 1, d.h. man ist in  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ).

Wenn man  $X \in \mathcal{C}^1$  voraussetzt, so kann die topologische Betrachtung am Schluss überhaupt vermieden werden, indem man setzt  $\nu(t) := \int \limits_{s(t, -)} \frac{d\zeta}{2\pi i \zeta} =$  Umlaufzahl von  $s(t, -)$

und beachtet, dass  $\nu(t) \in \mathbb{Z}, \nu(t)$  stetig,  $\nu(0) = -2, \nu(1) = 0 \implies \not\hookrightarrow$ )

**Hilfsatz und Definition:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

- 1)  $\text{Der}(M)$  (und damit  $\mathcal{T}^1(M)$ ) wird durch  $[-, -] : \text{Der}(M) \times \text{Der}(M) \longrightarrow \text{Der}(M) : (X_1, X_2) \longmapsto X_1 \circ X_2 - X_2 \circ X_1 =: [X_1, X_2] : (f \longmapsto X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)))$  eine Liealgebra über  $\mathbb{R}$ , d.h.
  - (i)  $[-, -]$  ist  $\mathbb{R}$ -bilinear,
  - (ii)  $\forall X_i \in \text{Der}(M) : [X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$  und  $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$ . (Das letztere heißt Jacobi-Identität.)

- 2) In einer Karte  $\varphi \in \mathfrak{A}$  gilt:

$$[v_1^i \partial_i, v_2^j \partial_j] = (v_1^i \partial_i(v_2^j) - v_2^i \partial_i(v_1^j)) \partial_j.$$

- 3) Für  $X_1, X_2 \in \mathcal{T}^1(M)$  heißt  $[X_1, X_2]$  Lieklammer von  $X_1, X_2$ .

**Beweis:** a)  $[-, -]$  ist wohldefiniert: In einer Karte  $\varphi \in \mathfrak{A}$  gilt

$$\begin{aligned} X_i &= v_i^j \partial_j, i = 1, 2, v_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U) \implies \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : \forall x_0 \in U : \\ (X_1 \circ X_2 - X_2 \circ X_1)(f)(x_0) &= X_1(v_2^j \partial_j f)(x_0) - X_2(v_1^j \partial_j f)(x_0) = \\ &= (v_1^i \partial_i(v_2^j \partial_j f))(x_0) - (v_2^i \partial_i(v_1^j \partial_j f))(x_0) = \end{aligned}$$

$$= (v_1^i \partial_i(v_2^j)(\partial_j f))(x_0) + (\cancel{v_1^i v_2^j}(\partial_i \partial_j f))(x_0) - (\cancel{v_2^i v_1^j}(\partial_i \partial_j f))(x_0) - (v_2^i \partial_i(v_1^j)\partial_j f)(x_0) = \\ = (X_3 f)(x_0), \text{ wobei } X_3 = (v_1^i \partial_i(v_2^j) - v_2^i \partial_i(v_1^j))\partial_j.$$

$X_3$  ist offenbar wieder eine Derivation. Damit ist auch 2) gezeigt.

b)  $[-, -]$  ist klarerweise  $\mathbb{R}$ -bilinear und schiefsymmetrisch. Die Jacobi-Identität gilt allgemein für Homomorphismen einer Gruppe  $G$  in sich, d.h. wenn  $f_1, f_2 : G \rightarrow G$  und  $[f_1, f_2] := f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1$  definiert wird. (Hier ist  $G = \mathcal{C}^\infty(M)$  mit der Addition.)  $\square$

**Bsp.:** 1) Wenn  $X = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \in T^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $[X, Y] = \begin{pmatrix} v^i \partial_i w^1 - w^i \partial_i v^1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ .

$$\text{Z.B. } \left[ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (x^1)^2 \\ (x^2)^2 \\ (x^3)^2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} (x^1)^2 \\ (x^2)^2 \\ (x^3)^2 \end{pmatrix}.$$

2) Wir wollen z.B.  $[X, Y]$  für  $X = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x^1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \\ -x^1 \end{pmatrix} \in T^1(\mathbb{S}^2)$  berechnen.

In der Karte  $\varphi_{3,+} : U_{3,+} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 1\} : (x^1, x^2, x^3)^T \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ , vgl. S. 1, gilt:

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_0^1/x_0^3 \end{pmatrix}, \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -x_0^2/x_0^3 \end{pmatrix} \in T_{x_0} \mathbb{S}^2, \quad x_0 \in U_{3,+} \implies \\ \implies X = x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2, \quad Y = x^3 \partial_1 = \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \partial_1 \implies \\ [X, Y] = (x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2)(x^3) \partial_1 - (x^3 \partial_1)(x^2) \partial_1 + (x^3 \partial_1)(x^1) \partial_2 = \\ = \left( x^2 \left( -\frac{x^1}{x^3} \right) - x^1 \left( -\frac{x^2}{x^3} \right) \right) \partial_1 - 0 + x^3 \partial_2 = x^3 \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Das gibt dasselbe, wie wenn man  $[X, Y]$  in  $T^1(\mathbb{R}^3)$  ausrechnet und keineswegs aus Zufall, vgl. Üb. 2.8, S. 37.

**Definition und Hilfssatz:**  $(M_i, [\mathfrak{A}_i])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $f : M_1 \rightarrow M_2$   $\mathcal{C}^k$ .

$Tf : TM_1 \rightarrow TM_2 : (x_0, [x(t)]) \mapsto (f(x_0), [f(x(t))])$  ist wohldefiniert und heißt Tangentialabbildung zu  $f$ .  $T_{x_0} f := Tf|_{T_{x_0} M_1} : T_{x_0} M_1 \rightarrow T_{f(x_0)} M_2$  heißt Differential von  $f$  in  $x_0$  (und wird manchmal mit  $d_{x_0} f$  bezeichnet). Es gilt:

- 1)  $Tf$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündel-Homomorphismus;
- 2) wenn  $k = \infty$  und  $v \in T_{x_0} M_1 \simeq \text{Der}_{x_0}(M_1)$ , so ist  $(T_{x_0} f)(v)([g]) = v([g \circ f])$  für  $[g] \in \mathcal{C}_{f(x)}^\infty(M_2)$ ;

- 3) in Koordinaten  $f : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^m)^T$  (vgl. S. 3) gilt  
 $(T_{x_0}f)\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial y^j} \in T_{f(x_0)}M_2$ . Speziell ist  $\text{Rg}_{x_0}f = \text{Rg}(T_{x_0}f)$ ;
- 4)  $T$  ist ein Funktor von der Kategorie der  $C^k$ -Mannigfaltigkeit, in die der  $C^{k-1}$ -Vektorraumbündel, d.h.
- (i)  $T\text{id}_M = \text{id}_{TM}$ ,
  - (ii)  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$  für  $g : M_2 \rightarrow M_3$ ,  $f : M_1 \rightarrow M_2$ .

**Bemerkung:** Beachte, dass die Bezeichnungen  $T_{x_0}\varphi$  in S. 16 und  $T\varphi$  in S. 21 bereits entsprechend gewählt wurden. Auch für  $i : N \hookrightarrow M$  Untermannigfaltigkeit wurde (und wird) vermöge  $Ti : TN \hookrightarrow TM$  identifiziert.

**Beweis:** a) In Koordinaten  $(\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A}_1$ ,  $(\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 : y \mapsto (y^1, \dots, y^m)^T) \in \mathfrak{A}_2$  gilt für  $[x(t)] = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{x_0}M_1$ :  
 $Tf\left(x_0, [x(t)]\right) = \left(f(x_0), T_{x_0}f([x(t)])\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} \left(f(x_0), [f \circ x(t)]\right) =$   
 $\left(f(x_0), (T_{f(x_0)}\varphi_2)^{-1}\left(\underbrace{(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(x(t)))'}_{(y^1(\varphi_1(x(t))), \dots, y^m(\varphi_1(x(t))))}^T(0)\right)\right) =$   
 $\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left(f(x_0), (T_{f(x_0)}\varphi_2)^{-1}\left(e_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi_1(x_0)) v^i\right)\right) =$   
 $= \left(f(x_0), v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi_1(x_0)) \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ . Daher ist  $Tf$  wohldefiniert, ein Bündelhomomorphismus und gilt 3). 4) folgt aus  $Tg \circ Tf\left(x_0, [x(t)]\right) = \left(g(f(x_0)), [g(f(x(t)))]\right) =$   
 $= T(g \circ f)\left(x_0, [x(t)]\right)$ .  
b) Zu 2): Wenn  $v = [x(t)] \in T_{x_0}M_1$  und  $[g] \in C_{f(x_0)}^\infty(M_2)$ , so gilt  $(T_{x_0}f)(v)([g]) =$   
 $= [f(x(t))](g) = (g \circ f \circ x)'(0) = v([g \circ f])$ .  $\square$

**Bsp.:** Wir wollen  $TP$  für die stereographische Projektion  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  (vgl. S. 9) berechnen. Wenn z.B.  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x_0| > 1$ , so können wir die Karten id auf  $\mathbb{R}^n$ , und  $\varphi_{n+1,+}$  von  $\mathbb{S}^n$  verwenden. In diesen Karten ist  $P : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^n)^T = \frac{2}{|x|^2 + 1} (x^1, \dots, x^n)^T$ ,  $(T_{x_0}P)\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{i=1}^n v^i \left( \frac{2\delta^{ij}}{|x_0|^2 + 1} - \frac{4x_0^i x_0^j}{(|x_0|^2 + 1)^2} \right) \frac{\partial}{\partial y^j} =$   
 $= \sum_{i=1}^n v^i \left( (1 - y_0^{n+1}) \frac{\partial}{\partial y^i} - y_0^i y_0^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right)$ .  
Wenn wir  $T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1}$  auffassen, so ist  $\frac{\partial}{\partial y^i} = [\varphi_{n+1,+}^{-1}(y_0^1, \dots, y_0^i + t, \dots, y_0^n)] =$

$$\begin{aligned}
&= \left[ (y_0^1, \dots, y_0^i + t, \dots, y_0^n, \sqrt{1 - (y_0^1)^2 - \dots - (y_0^i + t)^2 - \dots - (y_0^n)^2})^T \right] = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -y_0^i/y_0^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{i-te Stelle} \\
&\in T_{y_0} \mathbb{S}^n, \text{ d.h. mit } \langle v, \vec{y}_0 \rangle := \sum_{i=1}^n v^i y_0^i \text{ gilt:} \\
(T_{x_0} P)(v^i \partial_i) &= \begin{pmatrix} v^1(1 - y_0^{n+1}) \\ \vdots \\ v^n(1 - y_0^{n+1}) \\ \langle v, \vec{y}_0 \rangle \left(1 - \frac{1}{y_0^{n+1}}\right) \end{pmatrix} - \langle v, \vec{y}_0 \rangle \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^n \\ \underbrace{-[(y_0^1)^2 + \dots + (y_0^n)^2]/y_0^{n+1}}_{\frac{(y_0^{n+1})^2 - 1}{y_0^{n+1}}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} v^1(1 - y_0^{n+1}) - y_0^1 \langle v, \vec{y}_0 \rangle \\ \vdots \\ v^n(1 - y_0^{n+1}) - y_0^n \langle v, \vec{y}_0 \rangle \\ (1 - y_0^{n+1}) \langle v, \vec{y}_0 \rangle \end{pmatrix} \in T_{y_0} \mathbb{S}^n \subset T_{y_0} \mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Das war zur Übung im Rechnen in Karten. Man kommt natürlich schneller ans Ziel, wenn man gleich die Tangentialabbildung von

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[P]{} \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto \left( \frac{2x}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),$$

d.h. die Jacobi-Matrix berechnet.

Unser Ergebnis zeigt auch neuerlich, dass  $P$  eine Immersion ist, denn dies heißt:  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n : T_{x_0} P$  ist injektiv. Wegen  $y_0^{n+1} < 1$  auf  $P(\mathbb{R}^n)$  ist aber  $T_{x_0} P(v^i \partial_i) = 0 \implies \langle v, \vec{y}_0 \rangle = 0 \implies \vec{v} = 0$ .

**Definition und Hilfssatz:**  $(G, [\mathfrak{A}], \cdot)$  Liegruppe,  $I :=$  Einselement von  $G$ ,  $x_0 \in G$ ,  $l^{x_0} : G \longrightarrow G : x \mapsto x_0 \cdot x$ ,  $r^{x_0} : G \longrightarrow G : x \mapsto x \cdot x_0$ .

1)  $X \in \mathcal{T}^1(G)$  heißt links- (bzw. rechts-) invariant : $\iff \forall x_0 \in G :$

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{l^{x_0}} & G \\
\downarrow X & & \downarrow X \\
TG & \xrightarrow{Tl^{x_0}} & TG
\end{array}
\quad \text{kommutiert,}$$

d.h.  $\forall x_0, x_1 \in G : X(x_0 x_1) = (Tl^{x_0})(X(x_1))$  (bzw.  $Tr^{x_0} \circ X = X \circ r^{x_0}$ ).

- 2) Die links- bzw. rechts- invarianten Vektorfelder bilden Untervektorräume  $\underline{\mathcal{T}}_l^1(G)$  bzw.  $\underline{\mathcal{T}}_r^1(G)$  von  $\mathcal{T}^1(G)$  und die Abbildungen  
 $L : T_I G \longrightarrow \mathcal{T}_l^1(G) : v \longmapsto (x_0 \longmapsto Tl^{x_0}(v) = T_I l^{x_0}(v))$  und  $R : T_I G \longrightarrow \mathcal{T}_r^1(G) : v \longmapsto (x_0 \longmapsto Tr^{x_0}(v))$  sind wohldefiniert und Vektorraum-Isomorphismen.
- 3)  $\mathcal{T}_l^1(G)$  und  $\mathcal{T}_r^1(G)$  sind jeweils unter  $[ , ]$  invariant (d.h. Lieunteralgebren von  $\mathcal{T}^1(G)$ ). Vermöge  $L$  bzw.  $R$  wird dann  $T_I G$  eine Liealgebra mit  $[v_1, v_2]_L := L^{-1}([Lv_1, Lv_2])$  und ähnlich bzgl.  $R$ . Wenn  $J : G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$ , so ist  $T_I J : T_I G \longrightarrow T_I G$  ein Liealgebra-Isomorphismus von  $T_I G$  mit  $[ , ]_L$  auf  $T_I G$  mit  $[ , ]_R$ .

**Beweis:** 1) Beachte, dass  $l^{x_0}$  und  $r^{x_0} \mathcal{C}^\infty$  sind, da  $l^{x_0} : G \longrightarrow G \times G \longrightarrow G : x \longmapsto (x_0, x) \longmapsto x_0 \cdot x$  und ähnlich  $r^{x_0}$ . Wegen  $(l^{x_0})^{-1} = l^{x_0^{-1}}$ ,  $(r^{x_0})^{-1} = r^{x_0^{-1}}$  sind  $l^{x_0}, r^{x_0}$  Diffeomorphismen.

- 2) a)  $\mathcal{T}_l^1(G)$  und  $\mathcal{T}_r^1(G)$  sind Vektorräume, da  $Tl^{x_0}, Tr^{x_0}$  in den Fasern linear sind und daher  $(Tl^{x_0} \circ \lambda^i X_i)(x_1) = \lambda^i Tl^{x_0}(X_i(x_1)) = \lambda^i X_i(x_0 \cdot x_1) = (\lambda^i X_i) \circ l^{x_0}(x_1)$ .  
b)  $L$  ist wohldefiniert:

Die Multiplikationsabbildung  $m : G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto x \cdot y$  sei in Koordinaten durch  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)^T \longmapsto (z^1, \dots, z^n)^T$  gegeben. Dann ist  $l^{x_0} :$

$$(y^1, \dots, y^n)^T \longmapsto (z^1(x_0, y), \dots, z^n(x_0, y))^T \text{ und } Tl^{x_0} : (y^1, \dots, y^n, v^1, \dots, v^n)^T \longmapsto \left( z^1(x_0, y), \dots, z^n(x_0, y), \frac{\partial z^1}{\partial y^j}(x_0, y)v^j, \dots \right)^T \text{ und folglich } L(v) \in \mathcal{C}^\infty \text{ und } L \text{ linear.}$$

$L$  bildet  $T_I(G)$  in  $\mathcal{T}_l^1(G)$  ab, da  $(Tl^{x_0} \circ L(v))(x_1) = Tl^{x_0} \circ Tl^{x_1}(v) = (T \text{ Funktor}) = Tl^{x_0 \cdot x_1}(v) = L(v)(x_0 x_1)$ . Weil  $L(v)(I) = v$ , ist  $L$  injektiv.

$L$  ist surjektiv: Es sei  $X \in \mathcal{T}_l^1(G)$ ,  $v := X(I) \implies \forall x_0 \in G : X(x_0) = (Tl^{x_0})(v) \implies X = L(v)$ . Ebenso für  $R$ .

- 3) a) Allgemein, wenn  $X \in \mathcal{T}^1(G)$ ,  $x_0, x_1 \in G$  und  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ , so ist  
 $\underbrace{(Tl^{x_0} \circ X)(x_1)}_{\in \text{Der}_{x_0 x_1}(G)} \underbrace{([f])}_{\in \mathcal{C}_{x_0 x_1}^\infty(G)} = (\text{S. 31, 2}) = \underbrace{X(x_1)}_{\in \text{Der}_{x_1}(G)} \underbrace{([f \circ l^{x_0}])}_{\in \mathcal{C}_{x_1}^\infty(G)} = \underbrace{X(f \circ l^{x_0})(x_1)}_{\in \mathcal{C}^\infty(G)}$  und  
 $\underbrace{(X \circ l^{x_0})(x_1)}_{\in \text{Der}_{x_0 x_1}(G)} \underbrace{([f])}_{\in \mathcal{C}_{x_0 x_1}^\infty(G)} = X(x_0 x_1)([f]) = X(f)(x_0 x_1) = \underbrace{(X(f) \circ l^{x_0})(x_1)}_{\in \mathcal{C}^\infty(G)}$ .

Daher ist  $X \in \mathcal{T}_l^1(G) \iff \forall x_1 : (Tl^{x_0} \circ X)(x_1) = (X \circ l^{x_0})(x_1) \iff \forall f \in \mathcal{C}^\infty(G) : X(f \circ l^{x_0}) = X(f) \circ l^{x_0}$  in  $\mathcal{C}^\infty(G)$ .

Speziell, wenn  $X, Y \in \mathcal{T}_l^1(G)$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ ,  $x_0 \in G$ , so ist  $[X, Y](f \circ l^{x_0}) = X(Y(f \circ l^{x_0})) - Y(X(f \circ l^{x_0})) = X(Y(f) \circ l^{x_0}) - Y(X(f) \circ l^{x_0}) = [X, Y](f) \circ l^{x_0}$ , d.h.  $[X, Y] \in \mathcal{T}_l^1(G)$ . Daher ist  $\mathcal{T}_l^1(G)$  (und analog  $\mathcal{T}_r^1(G)$ ) eine Lieunteralgebra von  $\mathcal{T}^1(G)$ .

- b) Wenn  $X \in \mathcal{T}_l^1(G)$ , so ist  $J(X) := TJ \circ X \circ J \in \mathcal{T}_r^1(G)$ , denn  $Tr^{x_0} \circ TJ \circ X \circ J = T(\underbrace{r^{x_0} \circ J}_{J \circ l^{x_0^{-1}}}) \circ X \circ J = TJ \circ Tr^{x_0^{-1}} \circ X \circ J = TJ \circ X \circ l^{x_0^{-1}} \circ J = TJ \circ X \circ J \circ r^{x_0}$ .

Außerdem ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_I(G) & \xrightarrow{L} & \mathcal{T}_l^1(G) : X \\ \downarrow T_I J & & \downarrow \\ T_I(G) & \xrightarrow{R} & \mathcal{T}_r^1(G) : J(X) \end{array}$$

kommutativ, da  $(TJ \circ L(v) \circ J)(x_0) = TJ \circ Tl^{x_0^{-1}}(v) = T(J \circ l^{x_0^{-1}})(v) = Tr^{x_0}T_I J(v) = R((T_I J)(v))(x_0)$  für  $v \in T_I G$ .

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $[J(X), J(Y)] = J([X, Y])$  für  $X, Y \in \mathcal{T}^1(G)$ . Dies gilt etwas allgemeiner, vgl. das folgende Lemma.  $\square$

**Lemma:**  $M, N$   $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten,  $f : M \longrightarrow N$  Diffeomorphismus.

Dann ist  $\mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(N) : X \longmapsto Tf \circ X \circ f^{-1} =: f(X)$  ein Liealgebren-Isomorphismus.

**Beweis:** Wegen  $f(X) : y_0 \longmapsto f^{-1}(y_0) \longmapsto X(f^{-1}(y_0)) \longmapsto T_{f^{-1}(y_0)}f(X(f^{-1}(y_0))) \in T_{y_0}N$  ist  $f(X) \in \mathcal{T}^1(N)$ . Offenbar ist  $f$  bijektiv. Ähnlich wie im Beweis 3) a) oben gilt für  $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ , dass  $f(X)(g) = X(g \circ f) \circ f^{-1}$  [denn:  $f(X)(g)(y_0) = (Tf \circ X \circ f^{-1})(y_0)([g]) = X(f^{-1}(y_0))([g \circ f]) = X(g \circ f)(f^{-1}(y_0))$ ] und daher:

$$\begin{aligned} [f(X), f(Y)](g) &= f(X)(f(Y)(g)) - f(Y)(f(X)(g)) = \\ &= X(Y(g \circ f)) \circ f^{-1} - Y(X(g \circ f)) \circ f^{-1} = f([X, Y])(g). \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung:** Beachte, dass es für allgemeine, nicht invertierbare  $f : M \longrightarrow N$  keine Möglichkeit gibt, kanonisch eine zugehörige Abbildung  $\mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(N)$  zu konstruieren.

**Bsp.:** Es sei  $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ . Wir wollen die Liealgebrastruktur auf  $T_I(G) \cong \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$  bestimmen. Wenn  $L$  wie in S. 34 und  $B \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}) \simeq T_I(G)$ , so ist das linksinvariante Vektorfeld  $L(B) \in \mathcal{T}_l^1(G)$  gegeben durch  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow T\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}) : A \longmapsto Tl^A([I + tB]) = [A \cdot (I + tB)] \longmapsto (A, A \cdot B)$ .

In der Karte  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}^{n \times n} : A \longmapsto (a_j^i)$  ist also

$$L(B) = (A \cdot B)_j^i \frac{\partial}{\partial a_j^i} \text{ für } B \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}) \simeq T_I G.$$

Nach S. 30, 2) folgt dann

$$\begin{aligned} [L(B_1), L(B_2)] &= (AB_1)_j^i \frac{\partial}{\partial a_j^i} ((A \cdot B_2)_l^k) \frac{\partial}{\partial a_l^k} - (AB_2)_j^i \frac{\partial}{\partial a_j^i} ((A \cdot B_1)_l^k) \frac{\partial}{\partial a_l^k} = \\ &= (AB_1)_j^i \frac{\partial}{\partial a_j^i} (a_r^k (B_2)_r^l) \frac{\partial}{\partial a_l^k} - \dots = (AB_1)_j^i \delta_i^k (B_2)_l^j \frac{\partial}{\partial a_l^k} - \dots = \\ &= (AB_1 B_2)_l^i \frac{\partial}{\partial a_l^i} - (AB_2 B_1)_l^i \frac{\partial}{\partial a_l^i}, \text{ d.h. } [L(B_1), L(B_2)] = L(B_1 B_2 - B_2 B_1) \text{ bzw.} \end{aligned}$$

$$[B_1, B_2]_L = B_1 B_2 - B_2 B_1.$$

Ebenso sieht man, dass  $[B_1, B_2]_R = -[B_1, B_2]_L$  (vgl. Üb. 2.9).

**Folgerung:** Jede Liegruppe  $G$  ist parallelisierbar.

**Beweis:**  $e_1, \dots, e_n$  sei eine Basis in  $T_I G$ ,  $X_i := L(e_i) \in \mathcal{T}_I^1(G)$ , d.h.  $X_i(x_0) = T_I l^{x_0}(e_i)$ .  $T_I l^{x_0}$  ist ein Vektorraum-Isomorphismus mit Inverser  $T_{x_0} l^{x_0^{-1}} \implies \forall x_0 : X_1(x_0), \dots, X_n(x_0)$  ist eine Basis in  $T_{x_0} G \implies G$  parallelisierbar.  $\square$

**Bemerkung:** Entsprechend S. 28 wäre  $F : TG \xrightarrow{\sim} G \times \mathbb{R}^n : (x_0, v^i X_i(x_0)) \mapsto (x_0, (v^1, \dots, v^n)^T)$ . Der Bündel-Isomorphismus  $TG \xrightarrow{\sim} G \times T_I G : (x_0, v) \mapsto (x_0, T_{x_0} l^{x_0^{-1}}(v))$  ist sogar von der Wahl der Basis  $e_1, \dots, e_n$  unabhängig.

**Bsp.:** Wenn  $G = O_n(\mathbb{R})$ ,  $T_I G = o_n(\mathbb{R})$  und wir erhalten  $TO_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times o_n(\mathbb{R}) : (A, B) \mapsto (A, T_A l^{A^{-1}}(B)) = (A, A^{-1}B) = (A, A^T B)$  wie in S. 23.

## Übungen

Üb. 2.1 a) Stelle für Kugelkoordinaten wie in S. 18

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ durch } \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, 2, 3, \text{ dar.}$$

b) Was ist  $v_r, v_\vartheta, v_\varphi$  für  $v = v^i \partial_i \in T\mathbb{R}^3$ ?

c) Spezialisiere auf  $x_0 = (1, 2, 2)^T$ ,  $v = 4\partial_1 - 2\partial_2 \in T_{x_0}\mathbb{R}^3$  und gib eine  $C^\infty$ -Kurve bei  $x_0$  an, deren Äquivalenzklasse  $v$  ist.

Üb. 2.2 a)  $(M_i \xrightarrow{p_i} N_i, [[\mathfrak{B}_i]])$  seien  $C^k$ -Vektorraumbündel,  $i = 1, 2$ . Zeige, dass

$(M_1 \times M_2 \xrightarrow{p_1 \times p_2} N_1 \times N_2, [[\{\varphi_1 \times \varphi_2 : \varphi_i \in \mathfrak{B}_i, i = 1, 2\}]])$  ebenfalls ein  $C^k$ -Vektorraumbündel ist.

b)  $M, N$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten,  $k \geq 1$ . Zeige, dass  $T(M \times N) \rightarrow TM \times TN : ((x_0, y_0), [(x(t), y(t))]) \mapsto ((x_0, [x(t)]), (y_0, [y(t)]))$  ein  $C^{k-1}$ -Vektorraumbündel-Isomorphismus ist.

Üb. 2.3 Es sei  $\mathrm{sl}_n(\mathbb{R}) := \{C \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} C = 0\}$ . Zeige ähnlich wie in Bsp. 4, S. 23, dass  $T\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{sl}_n(\mathbb{R}) : (A, B) \mapsto (A, A^{-1}B)$  ein  $C^\infty$ -Vektorraumbündel-Isomorphismus ist.

Hinweis: „ $\mathrm{tr}$ “ = Spur. Verwende und zeige, dass für eine  $C^1$ -Kurve  $A(t)$  in  $\mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$  gilt  $(\det A(t))' = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{ad}}(t) \cdot A'(t))$ .

Üb. 2.4 Zeige, dass  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g) \cdot Y - gY(f) \cdot X$  für  $X, Y \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $M$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Üb. 2.5 Es seien  $X_1 = \partial_x + \partial_y$ ,  $X_2 = (x)^2\partial_x + (y)^2\partial_y \in \mathcal{T}^1(\mathbb{R}^2)$ .

a) In welchen Punkten  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  sind  $X_1, X_2(x_0, y_0)$  eine Basis von  $T_{(x_0, y_0)}\mathbb{R}^2$ ?

b) Drücke  $[X_1, X_2]$  für  $x_0 + y_0 \neq 0$  durch  $X_1$  und  $X_2$  aus.

Üb. 2.6 Es seien  $v^1, \dots, v^{n+1}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$  mit  $\forall x \in \mathbb{S}^n : \sum_{i=1}^{n+1} x^i v^i(x) = 0$ . Wenn, wie üblich,  $T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1}$ , so ist also  $(X : \mathbb{S}^n \longrightarrow T\mathbb{S}^n : x \longmapsto (v^1(x), \dots, v^{n+1}(x))^T) \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^n)$ .

a) Was ergibt  $X(f)$ , wenn man  $X \in \text{Der}(\mathbb{S}^n)$  auffasst?

Hinweis: Drücke  $X(f)$  mittels  $\left(g : x \longmapsto f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  aus.

b) Was ist speziell  $(x^1\partial_2 - x^2\partial_1)(x^3)$ ?

(Bzw. genauer: Was ist  $X(x^3)$  für  $X \hat{=} (-x^2, x^1, 0, \dots, 0)^T$ ?)

Üb. 2.7  $N \subset M$  sei eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit und  $X_1 \in \mathcal{T}^1(M)$  mit  $\forall x_0 \in N : X_1(x_0) \in T_{x_0}N (\subset T_{x_0}M)$ . Es sei  $g \in C^\infty(M)$ ,  $f := g|_N$ .

Zeige, dass  $X(f) = X_1(g)|_N$ , wenn  $(X : N \longrightarrow TN : x \longmapsto X_1(x)) \in \mathcal{T}^1(N)$ .

Was hat dies mit Üb. 2.6 zu tun?

Üb. 2.8  $N \subset M$  sei eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit,  $X_1, Y_1 \in \mathcal{T}^1(M)$  mit  $X_1(N), Y_1(N) \subset TN (\subset TM)$ .  $X := X_1|_N$ ,  $Y := Y_1|_N$ .

a) Zeige, dass  $X, Y \in \mathcal{T}^1(N)$ .

b) Zeige, dass  $[X_1, Y_1](N) \subset TN$  und  $[X, Y] = [X_1, Y_1]|_N$ .

c) Folgere, dass sich für eine Lieuntergruppe  $H \leq G$  die Liealgebra  $T_I H$  bzgl.  $L_H : T_I H \tilde{\longrightarrow} \mathcal{T}_l^1(H)$  als Lieunteralgebra von  $T_I G$  bzgl.  $L_G : T_I G \tilde{\longrightarrow} \mathcal{T}_l^1(G)$  ergibt. Was bedeutet dies speziell für  $O_n(\mathbb{R})$  und  $Sl_n(\mathbb{R})$ ?

Üb. 2.9  $G$  sei eine Liegruppe,  $J : G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$ .

a) Zeige, dass für  $x \in G : T_x J = -T_I l^{x^{-1}} \circ T_x r^{x^{-1}}$ .

b) Folgere, dass  $T_I J = -\text{id} : T_I G \longrightarrow T_I G$  und dass

$\forall v_1, v_2 \in T_I G : [v_1, v_2]_R = [v_2, v_1]_L$ .

Üb. 2.10 Wenn  $\mathbb{R}V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist, so auch  $gl_{\mathbb{R}}V$ . Daher ist kanonisch  $T gl_{\mathbb{R}}(V) \tilde{\longrightarrow} gl_{\mathbb{R}}(V) \times gl_{\mathbb{R}}(V) : (A, [A(t)]) \longmapsto (A, A'(0))$ .

Weil  $Gl_{\mathbb{R}}(V) \subset gl_{\mathbb{R}}(V)$  offen ist, ist auch

$T Gl_{\mathbb{R}}V \tilde{\longrightarrow} Gl_{\mathbb{R}}(V) \times gl_{\mathbb{R}}(V) : (A, [A(t)]) \longmapsto (A, A'(0))$ .

Andererseits liefert die Parallelisierung in S. 36

$T Gl_{\mathbb{R}}V \tilde{\longrightarrow} Gl_{\mathbb{R}}V \times T_I Gl_{\mathbb{R}}V \tilde{\longrightarrow} Gl_{\mathbb{R}}V \times gl_{\mathbb{R}}V :$

$$(A, [A(t)]) \longmapsto \left( A, T_A l^{A^{-1}}([A(t)]) \right) \longmapsto (A, A^{-1} A'(0)).$$

Überlege warum, und ob dieses Phänomen bei  $O_{\mathbb{R}}(V)$  und  $Sl_{\mathbb{R}}(V)$  auch auftritt!

- Üb. 2.11 Bestimme die Gestalt der 3 Vektorfelder, welche in den Spalten von  $B(x)$  in S. 29 stehen, in der üblichen Darstellung von  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ , d.h. berechne  $P(X_j)$ , wenn  $B = (X_1, X_2, X_3), P : S \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$  wie in S. 9 und Üb. 1.1, S. 12 und  $P(X_j)$  wie im Lemma in S. 35.  
Hinweis: Berechne die lineare Abbildung  $T_{P^{-1}(y)} P \cdot B(P^{-1}y)$  für  $y \in \mathbb{S}^3$  mittels der Formel für  $TP$  in S. 33.

- Üb. 2.12 Gib ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf  $\mathbb{S}^n$ ,  $n$  ungerade, an.  
Hinweis: Betrachte entweder eine Spalte von  $B(x)$  in S. 29 oder die Vektorfelder  $P(X_j)$  in Üb. 2.11.

- Üb. 2.13 Zeige, dass  $\mathbb{S}^7$  parallelisierbar ist.

Hinweis: Betrachte die folgenden 7 Vektorfelder  $\mathbb{S}^7 \longrightarrow T\mathbb{S}^7 : y \longmapsto$

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ -y^1 \\ y^4 \\ -y^3 \\ y^6 \\ -y^5 \\ y^8 \\ -y^7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ -y^4 \\ -y^1 \\ y^2 \\ y^7 \\ -y^8 \\ -y^5 \\ y^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^4 \\ y^3 \\ -y^2 \\ -y^1 \\ y^8 \\ -y^7 \\ -y^6 \\ y^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^5 \\ -y^6 \\ -y^7 \\ y^8 \\ y^1 \\ -y^2 \\ -y^3 \\ -y^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^6 \\ y^5 \\ y^8 \\ y^7 \\ y^2 \\ -y^1 \\ -y^3 \\ -y^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^7 \\ -y^8 \\ y^5 \\ -y^6 \\ -y^3 \\ y^4 \\ y^2 \\ -y^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^8 \\ y^7 \\ -y^6 \\ -y^5 \\ y^4 \\ y^3 \\ -y^2 \\ -y^1 \end{pmatrix} \in T_y \mathbb{S}^7 \subset T_y \mathbb{R}^8.$$

- Üb. 2.14 Betrachte  $(\mathbb{R}, [\{\text{id}\}])$  als  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

Es sei  $\{[|x|^{3/2}], [f_\lambda] : \lambda \in \Lambda\}$  eine Basis von  $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ , sodass  $\mathbb{R}\langle[f_\lambda] : \lambda \in \Lambda\rangle \subset \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$  enthält. (Mittels des Zornschen Lemmas lässt sich eine solche Basis finden.) Für  $[f] \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$  sei  $D([f])$  der Koeffizient von  $[f]$  bezüglich des Basiselementes  $[|x|^{3/2}]$ . Zeige, dass  $D$  eine Derivation ist! Lässt sich  $D$  durch einen Tangentialvektor darstellen?

- Üb. 2.15 Es sei  $M := [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  und  $\mathfrak{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ , wobei  
 $\varphi_1 = \text{id} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  und  $\varphi_2 : ([0, 2\pi) \setminus \{\pi\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} :$   
 $(t, u) \longmapsto \begin{cases} (t, u) & : 0 \leq t < \pi \\ (t - 2\pi, -u) & : \pi < t < 2\pi. \end{cases}$  a) Zeige, dass  $\mathfrak{A}$  die Bedingungen (i), (ii), (iii), (v) in S. 20 erfüllt und dass  $(M, [\mathfrak{A}])$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist.  
b) Zeige, dass  $M \longrightarrow \mathbb{S}^1 : (t, u) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Vektorraumbündel ist.  
c)  $X$  sei das Möbiusband aus Üb. 1.9, S. 15. Zeige, dass  $M \longrightarrow X : (t, u) \longmapsto (\cos t, \sin t, u \cos \frac{t}{2}, u \sin \frac{t}{2})^T$  ein Diffeomorphismus ist.

### § 3 Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

**Hilfssatz und Definition:**  $p : (M_1, [\mathfrak{A}_1]) \rightarrow (M_2, [\mathfrak{A}_2])$   $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel. Dann hat  $p^{-1}(x)$  für  $x \in M_2$  die Struktur eines  $\mathbb{R}$ -Vektorraums (vgl. S. 22).  $p^{-1}(x)^*$  sei der Dualraum. Dann ist  $M_1^* := \{(x, \omega) : x \in M_2, \omega \in p^{-1}(x)^*\}$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel mit der Projektion  $p^* : (x, \omega) \mapsto x$  und dem Vektorraumbündelatlas  $\tilde{\mathfrak{A}}_1 := \{\tilde{\varphi}_1 : \varphi_1 \in \mathfrak{A}_1\}$ , wobei für  $(\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1) \in \mathfrak{A}_1$ , mit  $(\varphi_2 : p(U_1) \rightarrow V_2) \in \mathfrak{A}_2$  und

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & V_1 = V_2 \times \mathbb{R}^{n_1-n_2} \\ \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_1 \\ p(U_1) & \xrightarrow{\varphi_2} & V_2 \end{array}$$

(vgl. S. 22) definiert wird:  $\tilde{U}_1 := \{(x, \omega) \in M_1^* : x \in p(U_1)\}$ ,  $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow V_1 : (x, \omega) \mapsto (\varphi_2(x), (\varphi_1|_{p^{-1}(x)})^{T^{-1}}(\omega))$ . (Dabei ist  $\varphi_1|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1-n_2}$  ein Vektorraum-Isomorphismus und daher  $(\varphi_1|_{p^{-1}(x)})^{T^{-1}} : p^{-1}(x)^* \rightarrow (\mathbb{R}^{n_1-n_2})^* \simeq \mathbb{R}^{n_1-n_2}$  ebenfalls.)  $[\tilde{\mathfrak{A}}_1]$  hängt nur von  $[\mathfrak{A}_1]$  ab und  $p^* : M_1^* \rightarrow M_2$  heißt das duale Bündel zu  $p : M_1 \rightarrow M_2$ .

**Beweis:**  $M_1^*$  wird eine topologische Mannigfaltigkeit nach dem Hilfssatz in S. 20. Nachzuprüfen ist nur, dass  $\tilde{\mathfrak{A}}_1$  ein Vektorraumbündelatlas ist.

(Dann folgt auch  $[\mathfrak{A}_1] = [\mathfrak{A}'_1] \implies [\tilde{\mathfrak{A}}_1] = [\widetilde{\mathfrak{A}}_1]$ .)

(i) und (ii) in S. 22 sind offenbar erfüllt. Dass  $\tilde{\mathfrak{A}}_1$   $\mathcal{C}^k$  ist, sieht man in Koordinaten:  $\psi_1 \varphi_1^{-1} : (x^1, \dots, x^{n_1})^T \mapsto (y^1, \dots, y^{n_2}, a_j^1 x^{n_2+j}, \dots, a_j^{n_1-n_2} x^{n_2+j})^T$ , wobei  $y^1, \dots, y^{n_2}, a_j^1, \dots, a_j^{n_1-n_2}$  von  $x^1, \dots, x^{n_1}$  abhängige  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen sind. Dann ist  $\tilde{\psi}_1 \tilde{\varphi}_1^{-1} : (x^1, \dots, x^{n_1})^T \mapsto (y^1, \dots, y^{n_2}, b_j^1 x^{n_2+j}, \dots, b_j^{n_1-n_2} x^{n_2+j})^T$  mit  $B = A^{T^{-1}}$  ebenfalls  $\mathcal{C}^k$ , wenn  $A = (a_j^i) \in \mathbb{R}^{(n_1-n_2) \times (n_1-n_2)}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Wie sich später zeigen wird, gibt es immer einen (allerdings nicht kanonischen) Vektorraumbündel-Isomorphismus:  $F : M_1 \rightarrow M_1^*$  (vgl. S. 89).

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

1)  $(TM)^* =: \underline{T^*M}$  heißt Cotangentialraum zu  $M$ .

Es ist also  $T^*M = \{(x, \omega) : x \in M, \omega \in (T_x M)^* =: \underline{T_x^*M}\}$ .

2) Ein Schnitt in  $T^*M$  heißt lineare Differentialform oder 1-Form.

$\mathcal{T}_1 M := \{\text{1-Formen}\} = \{\Omega : M \rightarrow T^*M \text{ } \mathcal{C}^{k-1} : p^* \circ \Omega = \text{id}_M\}$ .

**Notation:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

Wenn  $(\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A}$ , so ist  $T\varphi : TU \rightarrow V \times \mathbb{R}^n :$

$(x_0, v^i \partial_i) \mapsto (x_0^1, \dots, x_0^n, v^1, \dots, v^n)^T$  im Bündelatlas von  $TM$ . Dann ist  $\widetilde{T\varphi} : \widetilde{TU} = p^{*-1}(U) = T^*U \rightarrow V \times \mathbb{R}^n : (x_0, \omega) \mapsto (x_0^1, \dots, x_0^n, (T_{x_0}\varphi)^{T-1}(\omega))$ . Wenn  $e_1, \dots, e_n$  wieder die Standardbasis in  $\mathbb{R}^n \simeq (\mathbb{R}^n)^*$  ist, so definiert man  $\underline{dx^i} := (T_{x_0}\varphi)^T(e_i)$  (manchmal schreibe ich genauer  $d_{x_0}x^i$ ).

Dann gilt also  $\widetilde{T\varphi} : (x_0, \omega_i dx^i) \mapsto (x_0^1, \dots, x_0^n, \omega_1, \dots, \omega_n)^T$ .  $d_{x_0}x^1, \dots, d_{x_0}x^n \in T_{x_0}^*M$  ist also die duale Basis zu  $(\partial_1)_{x_0}, \dots, (\partial_n)_{x_0}$ , d.h.  $\langle \partial_j, dx^i \rangle = \delta_j^i$ . (Wenn  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  die Auswertung.)

Daher gilt bei Kartenwechsel:  $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$  (als ob man kürzen würde, vgl. S. 17).

Aus dieser Gleichung folgt, dass  $d_{x_0}x^j = d_{x_0}\tilde{x}^j$ , wenn  $x^j = \tilde{x}^j$  bei  $x_0$ . Im Unterschied zu  $\partial_j$  (vgl. S. 17, 18) hängt  $dx^j$  also nur von der Funktion  $x^j$  selber, nicht von  $x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n$  ab.

Für die Koordinaten gilt  $\omega = \omega_j dx^j = \omega'_i dx^{i'} \in T_{x_0}^*U \implies \omega'_i = \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$ . Der Vektor  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  transformiert sich „kovariant“.

In der Karte  $\widetilde{T\varphi}$  ist  $\Omega \in \mathcal{T}_1 M$  gegeben durch eine  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$ , d.h.  $\Omega(x) = \omega_i(x) dx^i$  (eigentlich genaugenommen  $\Omega(x) = (x, \omega_i(x) dx^i)$ , vgl. S. 24). Wenn wieder  $\mathcal{T}_1(M)$  als  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modul aufgefasst wird (s.u.), so ist also  $\mathcal{T}_1(U)$  ein freier  $\mathcal{C}^{k-1}(U)$ -Modul mit der Basis  $dx^1, \dots, dx^n$ .

**Bsp.:** 1)  $V$   $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Standardstruktur.

Dann ist  $T^*V \simeq V \times V^*$ , wenn wie in S. 18  $T_{x_0}V$  mit  $V$  identifiziert wird. Speziell für  $V = \mathbb{R}^n$  identifizieren wir weiters  $\mathbb{R}^{n*}$  mit  $\mathbb{R}^n$  und folglich ist  $T^*U \simeq U \times \mathbb{R}^n$  für  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.

2) Wenn  $N \subset M$  Untermannigfaltigkeit, so ist nicht  $T^*N \subset T^*M$  wie beim Tangentialraum, sondern wir erhalten einen kanonischen Bündelepimorphismus

$$\{(x, \omega) \in T^*M : x \in N\} \rightarrow T^*N : (x, \omega) \mapsto (x, \omega|_{T_x N}).$$

3) Für Kugelkoordinaten  $U \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (r, \vartheta, \varphi)$  wie in S. 18 ist

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 x^i dx^i, \quad \omega_r = \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial r} = \frac{1}{r} \omega_j x^j \text{ etc.}$$

4) Man kann  $T^*\mathbb{S}^n$  nach 2) zwar nicht kanonisch, aber dennoch in folgender Weise in  $T^*\mathbb{R}^{n+1}$  einbetten:

Für  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  sei  $F : T_{x_0}^*\mathbb{S}^n \hookrightarrow T_{x_0}^*\mathbb{R}^{n+1}$  die duale Abbildung zu

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}\mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & T_{x_0}\mathbb{S}^n \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \{w \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x_0, w \rangle = 0\} : v \mapsto v - x_0 \langle x_0, v \rangle \end{array}$$

(wobei  $\langle x_0, v \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_0^i v^i$ ).

Wir wollen sehen, was in den Karten  $\varphi_{n+1,+} : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  auf  $\mathbb{S}^n$  und  $\text{id}$  auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  passiert. Wenn  $x_0 \in U_{n+1,+}$ , d.h.  $x_0^{n+1} > 0$ , so identifizieren wir  $w = \sum_{i=1}^n w^i \partial_i$  mit

$$\left( w^1, \dots, w^n, -\frac{1}{x_0^{n+1}}(w^1 x_0^1 + \dots + w^n x_0^n) \right)^T \in T_{x_0} \mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1} \quad (\text{vgl. etwa S. 18}), \text{ d.h.}$$

$$\{w \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x_0, w \rangle = 0\} \simeq T_{x_0} \mathbb{S}^n : w \mapsto \sum_{i=1}^n w^i \partial_i.$$

Wenn daher  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ , so ist

$$\underbrace{\langle F(\mathrm{d}x^i),}_{\in T_{x_0}^* \mathbb{R}^{n+1}} \underbrace{v}_{\in T_{x_0} \mathbb{R}^{n+1}} \rangle = \langle \mathrm{d}x^i, \underbrace{v - x_0 \langle x_0, v \rangle}_{= w \in T_{x_0} \mathbb{S}^n} \rangle = w^i = v^i - x_0^i \langle x_0, v \rangle,$$

$$\text{d.h. } F(\mathrm{d}_{x_0} x^i) = \mathrm{d}_{x_0} x^i - x_0^i \sum_{j=1}^{n+1} x_0^j \mathrm{d}_{x_0} x^j \in T_{x_0}^* \mathbb{R}^{n+1}.$$

Mit den gleich folgenden Definitionen kann man schreiben:

$$F : T^* \mathbb{S}^n \hookrightarrow T^* \mathbb{R}^{n+1} : (x_0, \mathrm{d}_{x_0} g) \mapsto \left( x_0, \mathrm{d}_{x_0} g \left( \frac{x}{|x|} \right) \right).$$

**Hilfssatz und Definition:**  $M$  sei  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

1)  $\mathcal{T}_1(M)$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modul, wenn  $(f \cdot \Omega)(x_0) := f(x_0) \Omega(x_0)$  für  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ ,  $\Omega \in \mathcal{T}_1(M)$  gesetzt wird.

(Allgemeiner ist der Vektorraum der Schnitte eines  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündels  $p : M_1 \rightarrow M_2$  ein  $\mathcal{C}^k(M_2)$ -Modul.)

2)  $\underline{\mathrm{d}} : \mathcal{C}^k(M) \rightarrow \mathcal{T}_1(M) : f \mapsto (x_0 \mapsto \mathrm{d}_{x_0} f = Tf|_{T_{x_0} M} : T_{x_0} M \rightarrow T_{f(x_0)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R})$   
 $[x(t)] \mapsto (f \circ x)'(0)$

ist  $\mathbb{R}$ -linear und erfüllt  $\mathrm{d}(f \cdot g) = f \cdot \mathrm{d}g + g \cdot \mathrm{d}f$ . In Koordinaten gilt  $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$ .

(Speziell sind die früheren Bezeichnungen  $\mathrm{d}x^i$ ,  $\mathrm{d}_{x_0} x^i$  konsistent.)

3) Allgemeiner, wenn auch  $N \mathcal{C}^k$  und  $f : M \rightarrow N \mathcal{C}^k$ , so ist  $\underline{f^*} : \mathcal{T}_1(N) \rightarrow \mathcal{T}_1(M) :$

$\Omega \mapsto (x_0 \mapsto \left( \underset{\in T_{x_0} M}{v} \mapsto \left( \underset{\in T_{f(x_0)} N}{\langle (T_{x_0} f)(v), \Omega(f(x_0)) \rangle} \right) \right)$  (oder anders geschrieben

$(f^* \Omega)(x_0) = (T_{x_0} f)^T \left( \Omega(f(x_0)) \right)$ ) wohldefiniert und linear. Es gilt:

(i)  $g \in \mathcal{C}^{k-1}(N)$ ,  $\Omega \in \mathcal{T}_1(N) \implies f^*(g \cdot \Omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\Omega)$ ;

(ii)  $g \in \mathcal{C}^k(N) \implies f^*(\mathrm{d}g) = \mathrm{d}(g \circ f)$ .

Speziell gilt in Koordinaten, wenn  $f : (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto (y^1, \dots, y^p)^T$ :  $f^*(\omega_i \mathrm{d}y^i)$

$= (\omega_i \circ f)d(y^i \circ f) = (\omega_i \circ f)\frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$ . 2) ergibt sich folgendermaßen als Spezialfall:  
 $df = f^*(dt)$ , wenn  $t$  die Koordinate auf  $\mathbb{R}^1$  bezeichnet, d.h.  
 $dt \in \mathcal{T}_1(\mathbb{R})$ ,  $dt : \mathbb{R} \longrightarrow T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \longmapsto (t, 1)$ .

**Beweis:** In Koordinaten ist 1) klar.

- 2) Für  $f \in \mathcal{C}^k(M)$ ,  $x_0 \in M$ ,  $[x(t)] \in T_{x_0}M$  und Koordinaten  $x^1, \dots, x^n$  bei  $x_0$  gilt:  
 $\underbrace{(df)(x_0)}_{\in T_{x_0}^*M} \underbrace{[x(t)]}_{\in T_{x_0}M} = (f \circ x)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(x^i)'(0)$  und  $dx^i([x(t)]) = (\text{nach S. 40}) = (T_{x_0}\varphi)([x(t)])^i = (x^i)'(0)$ . Also:  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ .
- 3) (i)  $f^*(g \cdot \Omega)(x_0)(v) = \langle (Tf)(v), (g \cdot \Omega)(f(x_0)) \rangle = g(f(x_0)) \cdot f^*(\Omega)(x_0)(v) \implies f^*(g \cdot \Omega) = (g \circ f) \cdot f^*\Omega$ .
- (ii)  $f^*(dg)(x_0)[x(t)] = \underbrace{\langle (Tf)[x(t)], (dg)(f(x_0)) \rangle}_{[f \circ x(t)]} = (g \circ f \circ x)'(0) = d(g \circ f)(x_0)([x(t)])$   
 $\implies f^*(dg) = d(g \circ f)$ .

Daher ist  $f^*(\omega_i dy^i) = (\omega_i \circ f)d(y^i \circ f) = (\omega_i \circ f)\frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$ .

(Vorsicht: In der letzten Formel steht  $y^i$  für  $y^i \circ f$  bzw. genaugenommen für  $(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})^i$ , vgl. S. 3.)

Aus der Darstellung in Koordinaten sehen wir, dass  $f^*(\Omega) \in \mathcal{T}_1(M)$  für  $\Omega \in \mathcal{T}_1(N)$ .  $\square$

**Bemerkung:** Für  $f \in \mathcal{C}^k(M)$ ,  $v \in T_{x_0}M$  kann man  $d_{x_0}f(v)$  als Richtungsableitung von  $f$  entlang  $v$  bezeichnen.  $d_{x_0}f \in T_{x_0}^*M$  hat die Bedeutung des Gradienten von  $f$  in  $x_0$ . (Im  $\mathbb{R}^n$  schreibt man  $\nabla f$  als Spaltenvektor, weil man  $T\mathbb{R}^n$  und  $T^*\mathbb{R}^n$  identifiziert, vgl. § 6.)

**Bsp.:** Nochmals zu  $T^*\mathbb{S}^n$ . Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n : x \longmapsto \frac{x}{|x|}$  liefert  
 $f^* : \mathcal{T}_1(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \mathcal{T}_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) : h \circ g \longmapsto h\left(\frac{x}{|x|}\right) d\left(g\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$ .

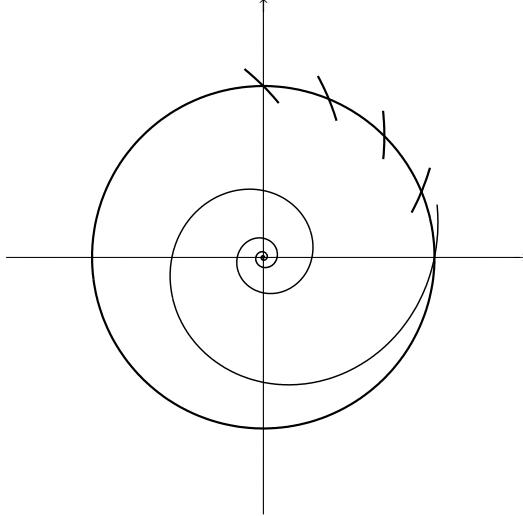
Vorsicht: Das gibt nicht unmittelbar das  $F$  von S. 40.  $\mathcal{T}_1(\mathbb{S}^n)$  und  $T^*\mathbb{S}^n$  sind ganz verschiedene Dinge. Im allgemeinen gibt es auch kein  $T^*f : T^*N \longrightarrow T^*M$ . Hier haben wir noch zusätzlich die Abbildung  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $f \circ i = \text{id}$  zur Verfügung und damit kann man definieren  $G : T^*\mathbb{S}^n \longrightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1} : (x_0, \omega) \longmapsto \left(i(x_0), (T_{i(x_0)}f)^T(\omega(i(x_0)))\right)$ .

Das liefert (mit (ii), S. 41, und wenn wir wieder  $i(x_0) = x_0$  setzen):

$$G(x_0, d_{x_0}g) = \left(x_0, d_{x_0}g\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) \text{ für } x_0 \in \mathbb{S}^n, g \in \mathcal{C}_{x_0}^k(\mathbb{S}^n).$$

Speziell  $G(x_0, d_{x_0}x^i) = d_{x_0}\left(\frac{x^i}{|x|}\right) = d_{x_0}x^i - x_0^i \sum_{j=1}^{n+1} x_0^j d_{x_0}x^j = F(d_{x_0}x^i)$ , d.h.  $F = G$ .

$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^1 : e^\varphi \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$  liefert eine andere Einbettung von  $T^*\mathbb{S}^1$  in  $T^*\mathbb{R}^2$  (vgl. Üb. 3.2, S. 51).



$G = F : T^*\mathbb{S}^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1}$  wie oben ergibt sich jedoch kanonisch, wenn wir zusätzlich die übliche Riemannsche Metrik auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  zugrunde legen (siehe S. 89).

**Hilfssatz:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .  $\mathcal{T}^1(M)^*$  sei der zu  $\mathcal{T}^1(M)$  duale  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modul, d.h.  $\mathcal{T}^1(M)^* := \{h : \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(M) \text{ linear}\}$ . Dann ist

$$F : \mathcal{T}_1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M)^* : \Omega \longmapsto \left( \underset{\in \mathcal{T}^1(M)}{V} \longmapsto \left( \underset{\in T_x M}{x} \longmapsto \underbrace{\left( \underset{\in T_x^* M}{\underbrace{\langle V(x), \Omega(x) \rangle}} \right)}_{\in \mathbb{R}} \right) \right) \underset{\in \mathcal{C}^{k-1}(M)}{\overbrace{\quad}}$$

ein  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modulisomorphismus.

**Beweis:** a)  $V(x) = v^i(x)\partial_i$ ,  $\Omega(x) = \omega_i(x)dx^i$  (lokal in einer Karte)  $\implies \langle V(x), \Omega(x) \rangle = v^i(x)\omega_i(x)$  ist  $\mathcal{C}^{k-1}$   $\implies F$  ist wohldefiniert und offenbar ein  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modulhomomorphismus.

b)  $F$  ist injektiv: Wie Abschnitt b) in S. 25.

c)  $F$  ist surjektiv: Wie Abschnitt c) in S. 25, 26.  $\square$

**Bsp.:** 1) Da der duale Modul eines freien Moduls wieder frei ist, existiert eine Basis in  $\mathcal{T}_1(\mathbb{S}^n)$  genau dann, wenn  $\mathbb{S}^n$  parallelisierbar ist (wie man zeigen kann für  $n \in \{1, 3, 7\}$ ). Z.B. für  $n = 1$  ist  $d\vartheta$  eine Basis, vgl. S. 24, für  $n = 3$  siehe Üb. 3.4, S. 52.

Wegen  $f^* : \mathcal{T}_1(\mathbb{S}^n) \hookrightarrow \mathcal{T}_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  ist aber jedenfalls (vgl. S. 42)  $\Omega \in \mathcal{T}_1(\mathbb{S}^n) \implies f^*(\Omega) = \omega_i(x)dx^i$ ,  $\Omega = i^*f^*(\Omega) = \omega_i(x)dx^i$ , d.h.  $dx^1, \dots, dx^{n+1}$  ist ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{T}_1(\mathbb{S}^n)$  über  $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{S}^n)$ . Es gilt  $0 = d\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} x^j dx^j$ .

2) Für  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  gilt  $\langle X, df \rangle = X(f)$ , wenn rechts  $X$  als Derivation aufgefasst wird, denn in Koordinaten ist  $X = v^i \partial_i \implies \langle X, df \rangle = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X(f)$ . (Auch für  $k < \infty$  ist  $F : \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \text{Der}(M) : X \mapsto (f \mapsto X(f))$  wohldefiniert und injektiv, aber nicht mehr surjektiv, vgl. Üb. 2.14, S. 38).

## Operationen mit endlichdimensionalen Vektorräumen

$V, W, V_1, \dots, V_m$  seien endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper  $K$ . Dann lassen sich folgende neue Vektorräume und folgende kanonische Abbildungen definieren:

- 1)  $V_1 \times \dots \times V_m =: V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ .
- 2)  $\text{Hom}_K(V_1, V_2) := \{f : V_1 \longrightarrow V_2 \text{ K-linear}\}$ ,  
speziell:  $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$ .
- 3)  $\text{Hom}_K(V_1, V_2) \simeq \text{Hom}_K(V_2^*, V_1^*) : f \mapsto f^T : v_2^* \longmapsto (v_1 \mapsto \langle f(v_1), v_2^* \rangle)$ ,  
speziell:  $V \simeq \text{Hom}_K(K, V) \simeq \text{Hom}_K(V^*, K^*) \simeq V^{**}$   
 $v \longmapsto (v^* \mapsto \langle v, v^* \rangle)$ .
- 4)  $\text{Mul}_K(V_1, \dots, V_m | W) := \{f : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow W \text{ K-multilinear}\}$ ,  
speziell:  $\text{Mul}_K(V_1, \dots, V_m) := \text{Mul}_K(V_1, \dots, V_m | K)$  und  
 $\text{Mul}_K(V_1, \dots, V_m | W) \simeq \text{Mul}_K(V_1, \dots, V_m, W^*)$   
 $f \longmapsto ((v_1, \dots, v_m, w^*) \mapsto \langle f(v_1, \dots, v_m), w^* \rangle)$   
und  $\text{Hom}_K(V_1, V_2) = \text{Mul}_K(V_1 | V_2) \simeq \text{Mul}_K(V_1, V_2^*)$ .
- 5)  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m := \text{Mul}_K(V_1^*, \dots, V_m^*)$ ,  
 $i : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_m : (v_1, \dots, v_m) \mapsto ((v_1^*, \dots, v_m^*) \mapsto \prod_{j=1}^m \langle v_j, v_j^* \rangle)$   
ist  $K$ -multilinear.  
*i*( $v_1, \dots, v_m$ ) wird mit  $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$  bezeichnet. Da  $i(V_1 \times \dots \times V_m)$  den Vektorraum  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$  aufspannt, ist ein Homomorphismus von  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$  nach  $W$  schon durch Angabe der Bilder von  $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$ ,  $v_i \in V_i$ , bestimmt. (Da die Menge der  $v_1 \otimes \dots \otimes v_m$  nicht linear unabhängig ist, muss man allerdings separat zeigen, dass so ein Homomorphismus wohldefiniert ist.) Speziell nach 4):  $V_1^* \otimes V_2 \simeq \text{Hom}_K(V_1, V_2) : v_1^* \otimes v_2 \mapsto (v_1 \mapsto v_2 \langle v_1, v_1^* \rangle)$ . 3) entspricht  $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1 : v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ .

6) Universelle Eigenschaft von  $\otimes$ :

$$\text{Mul}_K(V_1, \dots, V_m | W) \simeq \text{Hom}_K(V_1 \otimes \dots \otimes V_m, W)$$

$$f \longmapsto (v_1 \otimes \dots \otimes v_m \mapsto f(v_1, \dots, v_m))$$

7) Assoziativitat:

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_k) \otimes (V_{k+1} \otimes \dots \otimes V_m) \simeq V_1 \otimes \dots \otimes V_m$$

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) \otimes (v_{k+1} \otimes \dots \otimes v_m) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_m$$

8) Verjungung:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_m \otimes V_m^* \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_{m-1}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_m \otimes v_m^* \mapsto \langle v_m, v_m^* \rangle v_1 \otimes \dots \otimes v_{m-1},$$

speziell:  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_m^* \simeq (V_1 \otimes \dots \otimes V_m)^*$

$$v_1^* \otimes \dots \otimes v_m^* \mapsto (v_1 \otimes \dots \otimes v_m \mapsto \prod_{j=1}^m \langle v_j, v_j^* \rangle)$$

9) Kommutativitat:

$$\sigma \in S_m := \text{Permutationen von } \{1, \dots, m\}$$

$$\sigma : V_1 \otimes \dots \otimes V_m \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes V_{\sigma(m)} : v_1 \otimes \dots \otimes v_m \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}.$$

10) Tensorpotenzen, symmetrische und schiefsymmetrische Tensoren:

Ab hier sei  $\text{char } K = 0$ .  $V^{\otimes 0} := K$ ,  $V^{\otimes m} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_m$ ,

$$S^m(V) := \{w \in V^{\otimes m} : \forall \sigma \in S_m : \sigma(w) = w\},$$

$$\Lambda^m(V) := \{w \in V^{\otimes m} : \forall \sigma \in S_m : \sigma(w) = \text{sign}(\sigma)w\}$$

$$S : V^{\otimes m} \longrightarrow S^m(V) : w \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma(w).$$

$$A : V^{\otimes m} \longrightarrow \Lambda^m(V) : w \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\sigma) \sigma(w).$$

$$\text{Es ist } S|_{S^m(V)} = \text{id}_{S^m(V)}, A|_{\Lambda^m(V)} = \text{id}_{\Lambda^m(V)}.$$

$$\text{Man schreibt } v_1 \wedge \dots \wedge v_m := m! A(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}.$$

Wenn  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis in  $V$  ist, so ist  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$

eine Basis in  $\Lambda^m(V)$  und daher gilt  $\dim \Lambda^m(V) = \begin{cases} \binom{n}{m} & : 0 \leq m \leq n \\ 0 & : m > n. \end{cases}$

In  $S^m(V)$  ist hingegen  $\{S(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}) : 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n\}$  eine Basis und

daher  $\dim S^m(V) = \binom{n+m-1}{m}$ .

Speziell:  $m = 0 : S^0(V) = \Lambda^0(V) = K,$

$$m = 1 : S^1(V) = \Lambda^1(V) = V,$$

$$m = 2 : S^2(V) \oplus \Lambda^2(V) \simeq V^{\otimes 2}$$

$$(S(w), A(w)) \longleftrightarrow w$$

(Für  $m \geq 3$  zerfällt  $V^{\otimes m}$  in  $S_m$ -invariante Unterräume entsprechend den Young-tableaus.)

- 11) Die Algebra der schiefsymmetrischen Tensoren:

Wir wollen  $\wedge : \Lambda^{m_1}(V) \times \Lambda^{m_2}(V) \xrightarrow{\text{bilinear}} \Lambda^{m_1+m_2}(V)$  so definieren, dass für  $v_i \in V$  gilt  $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m_1}) \wedge (v_{m_1+1} \wedge \cdots \wedge v_{m_1+m_2}) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m_1+m_2}$ . (Dann ist  $\wedge$  automatisch assoziativ, d.h.  $(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3)$  für  $w_i \in \Lambda^{m_i}(V)$ .

Dazu sei  $w_1 \wedge w_2 := c_{m_1, m_2} A(w_1 \otimes w_2)$  für  $w_i \in \Lambda^{m_i}(V)$  mit  $c_{m_1, m_2} \in K$ ,  $A$  wie in S. 45, 10). Dann gilt für  $w_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m_1}$ ,  $w_2 = v_{m_1+1} \wedge \cdots \wedge v_{m_1+m_2}$ :  $w_1 \wedge w_2 = c_{m_1, m_2} \cdot \sum_{\substack{\sigma \in S_{m_1} \\ \tau \in S_{m_2}}} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \cdot A(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m_1)} \otimes v_{m_1+\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{m_1+\tau(m_2)}) =$

$$= (\text{wegen } A\sigma(w) = \text{sign}(\sigma)A(w)) = c_{m_1, m_2} m_1! m_2! A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m_1+m_2}) = c_{m_1, m_2} \frac{m_1! m_2!}{(m_1 + m_2)!} \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m_1+m_2}. \text{ Daher: } w_1 \wedge w_2 := \binom{m_1 + m_2}{m_1}^{-1} A(w_1 \otimes w_2).$$

**Vorsicht:** Manchmal wird statt  $\wedge$  auch  $w_1 \tilde{\wedge} w_2 := \binom{m_1 + m_2}{m_1}^{-1} \cdot w_1 \wedge w_2$  genommen. Dann ist also z.B. für  $v_1, v_2 \in V$   $v_1 \wedge v_2 = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$  aber  $v_1 \tilde{\wedge} v_2 = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1) = A(v_1 \otimes v_2)$ .

In beiden Fällen ist  $\wedge$  assoziativ und es gilt für  $w_1 \in \Lambda^{m_1}(V)$ ,  $w_2 \in \Lambda^{m_2}(V)$ :  $w_1 \wedge w_2 = (-1)^{m_1 m_2} w_2 \wedge w_1$ .

$\Lambda(V) := \bigoplus_{m=0}^{n=\dim(V)} \Lambda^m(V)$  ist also eine assoziative Algebra. (Die obige Definition von  $\wedge$  hat folgenden Vorteil: Wenn  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ ,  $e^1, \dots, e^n$  die duale Basis in  $V^*$  ist, so gilt  $e^1 \wedge \cdots \wedge e^n \in \Lambda^n V^* \subset \text{Mul}_K(V, \dots, V)$  mit  $(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n \langle e^i, e_{\sigma(i)} \rangle = 1$ , d.h.  $e^1 \wedge \cdots \wedge e^n : V \times \cdots \times V \longrightarrow K$  ist die zur Basis  $e_1, \dots, e_n$  gehörende Determinantenabbildung.)

**Hilfssatz und Definition:**  $p : M \longrightarrow N$ ,  $p_i : M_i \longrightarrow N$  seien  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel,  $i = 1, \dots, m$ .  $\mathcal{T}(M)$  bezeichne den  $\mathcal{C}^k(N)$ -Modul der Schnitte von  $p$ .

- 1) Den obigen Vektorraumbildungen entsprechen  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel über  $N$ , indem man für  $x \in N$   $V_i := p_i^{-1}(x)$  setzt. Diese Bündel werden mit  $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ ,  $M^*$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(M_1, M_2)$ ,  $M_1 \otimes \cdots \otimes M_m$ ,  $\text{Mul}(M_1, \dots, M_{m-1} | M_m)$ ,  $M^{\otimes m}$ ,  $S^m(M)$ ,  $\Lambda^m(M)$ ,  $\Lambda(M)$  bezeichnet. (Vorsicht:  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(M_1, M_2)$  ist ein Vektorraumbündel, kein Bündelhomomorphismus!)
- 2) Den obigen linearen Abbildungen entsprechen Bündelhomomorphismen, den multilinearen Abbildungen „multilineare Bündelmorphismen“ (die also in den Fasern

multilinear sind), z.B.

$$M_1 \otimes M_2 \underset{F}{\simeq} M_2 \otimes M_1 : (x_0, v_1 \otimes v_2) \mapsto (x_0, v_2 \otimes v_1)$$

$$G : M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \longrightarrow M_1 \otimes \cdots \otimes M_m : (x_0, (v_1, \dots, v_m)) \mapsto (x_0, v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)$$

$$H : \Lambda(M) \oplus \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M) : (x_0, (w_1, w_2)) \mapsto (x_0, w_1 \wedge w_2)$$

( $F$  ist linear,  $G, H$  sind multilinear.)

- 3) Die obigen linearen Abbildungen liefern durch Zusammensetzung Abbildungen der Schnitte, z.B.

$$\mathcal{T}(M_1 \otimes M_2) \simeq \mathcal{T}(M_2 \otimes M_1) : X \mapsto F \circ X,$$

$$\mathcal{T}(M_1) \times \cdots \times \mathcal{T}(M_m) \simeq \mathcal{T}(M_1 \oplus \cdots \oplus M_m) \longrightarrow \mathcal{T}(M_1 \otimes \cdots \otimes M_m)$$

$$(X_1, \dots, X_m) \mapsto X_1 \otimes \cdots \otimes X_m : x_0 \mapsto X_1(x_0) \otimes \cdots \otimes X_m(x_0) \\ \in p_1^{-1}(x_0) \quad \quad \quad \in p_m^{-1}(x_0)$$

$$\mathcal{T}(\Lambda(M)) \times \mathcal{T}(\Lambda(M)) \longrightarrow \mathcal{T}(\Lambda(M)) : (X_1, X_2) \mapsto X_1 \wedge X_2 : x_0 \mapsto X_1(x_0) \wedge X_2(x_0)$$

**Beweis:** Wie für  $M^*$  in S. 39.

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $m, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

- 1) Das Vektorraumbündel  $T_q^m M := (TM)^{\otimes m} \otimes (T^*M)^{\otimes q} = \{(x, t) : x \in M, t \in T_x M^{\otimes m} \otimes T_x^* M^{\otimes q}\}$  heißt Bündel der Tensoren vom Typ  $(m, q)$  bzw. der  $m$ -fach kontra- und  $q$ -fach kovarianten Tensoren.
- 2)  $\mathcal{T}_q^m(M) := \mathcal{T}(T_q^m M) \ni X$  heißt Tensorfeld vom Typ  $(m, q)$ .  
 $\Omega^q(M) := \mathcal{T}(\Lambda^q(T^*M)) \ni \Omega$  heißt  $q$ -Form,  $\Omega(M) := \mathcal{T}(\Lambda(T^*M)) = \prod_{q=0}^{\dim M} \Omega^q(M)$  heißt Raum der Differentialformen.

**Notation:** Es sei  $p : T_q^m M \longrightarrow M$  das Tensorbündel vom Typ  $(m, q)$ .

Wenn  $\varphi : U \longrightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  eine Karte auf  $M$  ist und  $x_0 \in U$ , so ist

$\{(\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_m} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q})_{x_0} : i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis von  $T_{x_0} M^{\otimes m} \otimes T_{x_0}^* M^{\otimes q}$ . Daher schreibt sich  $t \in p^{-1}(x_0)$  so:

$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m} (\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_m} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q})_{x_0}$  mit  $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{R}$ , die sich bei Basiswechsel

so transformieren:  $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m} = t_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{l_q}}$ , vgl. S. 17 und S. 40.

Im folgenden wird, wie in der Physik üblich, die Basis oft weggelassen, d.h. ich schreibe  $t = (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m})$ . Wenn  $X \in \mathcal{T}_q^m(M)$ , so heißt das, dass für  $x_0 \in U$  gilt:  $X(x_0) = (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}(x_0))$  mit  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Funktionen  $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}$ . Wenn  $x_0 \in U$  und  $\omega \in \Lambda^q(T_{x_0}^* M)$ , so ist

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n \\ \sigma \in S_q}} \text{sign } (\sigma) \omega_{j_1 \dots j_q} dx^{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_{\sigma(q)}} = \omega_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q} \end{aligned}$$

wobei  $\omega_{j_1 \dots j_q}$  alternierend ist, d.h.  $\omega_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}} = \text{sign}(\sigma) \omega_{j_1 \dots j_q}$  für  $\sigma \in S_q$ .

Man kann also  $\omega \in \Lambda^q(T_{x_0}^* M)$  bzw.  $\Omega \in \Omega^q(M)$  entweder durch beliebige  $\omega_{j_1 \dots j_q}$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$  (in  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathcal{C}^{k-1}(U)$ ) oder durch seine alternierenden Tensorkoordinaten  $\omega_{j_1 \dots j_q}$  angeben. Z.B. für  $q = 2$ :  $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = \omega_{ij} dx^i \otimes dx^j$  mit  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ .

**Bsp.:** 1) Wegen  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \simeq V \otimes V^*$  (vgl. S. 44) gilt

$$T_1^1 M \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM, TM) = \{(x, f) : x \in M, f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x M, T_x M)\} :$$

$$(x, t_j^i \partial_i \otimes dx^j) \longmapsto (x, v^j \partial_j \longmapsto t_j^i v^j \partial_i)$$

Ein spezieller Schnitt von  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(TM, TM)$  ist  $\delta : x \longmapsto \text{id}_{T_x M}$ . In einer Karte gilt  $\delta = \delta_j^i \partial_i \otimes dx^j$  mit dem üblichen Kroneckersymbol  $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ .

Beachte, dass  $\delta \in \mathcal{T}_1^1(M)$  eines der wenigen Tensorfelder ist, dessen Koordinaten a) von der Karte und b) vom Punkt  $x$  unabhängig sind. (Vgl. auch Üb. 3.6, S. 52).

2) Die Abbildungen 7) und 9) in S. 45 liefern:

$$\begin{aligned} T_{q_1}^{m_1}(M) \otimes T_{q_2}^{m_2}(M) &\xrightarrow{\sim} T_{q_1+q_2}^{m_1+m_2}(M) \\ \left(x, (s_{j_1 \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots i_{m_1}}) \otimes (t_{j_1 \dots j_{q_2}}^{i_1 \dots i_{m_2}})\right) &\longmapsto \left(x, (s_{j_1 \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots i_{m_1}} t_{j_{q_1+1} \dots j_{q_1+q_2}}^{i_{m_1+1} \dots i_{m_1+m_2}})\right) \text{ und entsprechend} \\ T_{q_1}^{m_1}(M) \times T_{q_2}^{m_2}(M) &\longrightarrow \mathcal{T}_{q_1+q_2}^{m_1+m_2}(M) : (S, T) \longmapsto S \otimes T. \end{aligned}$$

3) Für  $1 \leq a \leq m$ ,  $1 \leq b \leq q$  geben 7), 8), 9) in S. 45 eine Verjüngungsabbildung

$$\begin{aligned} T_q^m(M) &\longrightarrow T_{q-1}^{m-1}(M) : \left(x, (t_{q_1 \dots q_m}^{i_1 \dots i_m})\right) \longmapsto \left(x, (t_{j_1 \dots j_{b-1} \dots j_b \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{a-1} \dots i_a \dots i_{m-1}})\right) \text{ und entsprechend} \\ T_q^m(M) &\longrightarrow T_{q-1}^{m-1}(M), \text{ vgl. S. 47.} \end{aligned}$$

4) Wenn  $M = V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, so ist kanonisch  $T_q^m V \simeq V \times (V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes q})$ . Man könnte sogar  $T_q^m V$  wieder als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffassen, d.h.  $T_q^m V \simeq V \oplus (V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes q})$ . Es ist aber nicht sehr sinnvoll, da damit zwei verschiedene Additionsarten entstehen:

- a) in der Faser:  $(x_0, s) + (x_0, t) = (x_0, s + t)$  (Vektorraumbündel)
- b) als Vektorraum:  $(x_0, s) + (x_1, t) = (x_0 + x_1, s + t)$ .

5) Es sei  $\mathbb{R}V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $0 \neq \det \in \Lambda^n(V^*)$  gegeben.  $e_1, \dots, e_n$  sei eine Basis von  $V$  mit  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$  und  $V \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  seien die Koordinaten bzgl.  $e_1, \dots, e_n$ . Die Volumsform  $D := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \mathcal{T}_n(V)$  ist von der Wahl der Koordinaten unabhängig, denn wenn  $e'_i = a_i^j e_j$  eine zweite Basis mit  $\det(e'_1, \dots, e'_n) = 1$ , d.h.  $\det(a_i^j) = 1$ , so gilt  $x^j = x^{i'} a_i^j$ ,  $dx^j = a_i^j dx^{i'} \implies dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = a_{i_1}^1 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n}^n dx^{i_n} = \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(n)}^n dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'}}_{\det(a_i^j)}$

$dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'}$ . (Eine andere Begündung ist, dass, wenn wir  $T_{x_0} V^{*\otimes n} \simeq V^{*\otimes n} = \text{Mul}(\underbrace{V, \dots, V}_n)$  identifizieren,  $D(x_0)$  durch  $\det$  gegeben ist.) Ebenso zeigt sich, dass

$X := x^j \partial_j \in \mathcal{T}^1(V)$  basisunabhängig ist. Wir definieren (vgl. 3) oben)  $L :=$  Verjüngung

$$(X \otimes D) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) x^{\sigma(1)} dx^{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma(n)} = \sum_{j=1}^n x^j \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=j} \text{sign}(\sigma) dx^{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma(n)}.$$

$$\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j\} \simeq \{\text{Permutationen von } \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}\} =: S_{n-1}^{(j)} : \\ \sigma \longmapsto \tau : k \longmapsto \begin{cases} \sigma(k+1) & : k < j \\ \sigma(k) & : k > j. \end{cases}$$

$$\text{Dann ist } \tau = \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 \cdots j-1 & j & j+1 \cdots n \\ 2 \cdots j & 1 & j+1 \cdots n \end{pmatrix} \text{ (eingeschränkt auf } \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}) \Rightarrow$$

$$\text{sign}(\tau) = (-1)^{j-1} \text{sign}(\sigma) \Rightarrow L = \sum_{j=1}^n x^j \sum_{\tau \in S_{n-1}^{(j)}} (-1)^{j-1} \text{sign}(\tau) dx^{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes dx^{\hat{\tau}(j)} \otimes \cdots \otimes dx^{\tau(n)} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

$L$  heißt Leray'sche Differentialform und hängt also nur von der Festlegung von  $\det$  ab. Offenbar ist  $L(x) \neq 0$  für  $x \neq 0$ .

**Definition und Hilfssatz:** Für eine Tensorbildung mit nachfolgender Verjüngung (vgl. Bsp. 5) oben) schreibe ich  $\langle , \rangle$  (man nennt dies auch manchmal „Überschiebung“). Man erhält also so für  $0 \leq q' \leq m$ ,  $0 \leq m' \leq q$ :

$$T_q^m(M) \oplus T_{q'}^{m'}(M) \xrightarrow[\text{Bündelmorphismus}]{} \text{bilinearer } T_{q-m'}^{m-q'}(M)$$

$$\left( x_0, \underbrace{(s_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_m})}_{s}, \underbrace{(t_{j_1 \cdots j_{q'}}^{i_1 \cdots i_{m'}})}_{t} \right) \longmapsto \left( x_0, (s_{j_1 \cdots j_{q-m'}, l_1 \cdots l_{m'}}^{i_1 \cdots i_{m-q'} k_1 \cdots k_{q'}} \cdot t_{k_1 \cdots k_{q'}}^{l_1 \cdots l_{m'}}) \right) =: (x_0, \langle s, t \rangle)$$

und analog  $T_q^m(M) \times T_{q'}^{m'}(M) \longrightarrow T_{q-m'}^{m-q'}(M) : (S, T) \longmapsto \left( x_0 \longmapsto \langle S(x_0), T(x_0) \rangle \right) =: \langle S, T \rangle$ . Speziell ergibt sich so:

$$T_q^m(M) \simeq \{ h : T^1(M)^q \times T_1(M)^m \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(M)\text{-multilinear} \} :$$

$$T \longmapsto ((X_1, \dots, X_q, \Omega^1, \dots, \Omega^m) \longmapsto \langle T, X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \otimes \Omega^1 \otimes \cdots \otimes \Omega^m \rangle \text{ und } \Omega^q(M) \simeq \{ h : T^1(M)^q \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(M) \text{ } \mathcal{C}^{k-1}(M)\text{-multilinear und alternierend} \}).$$

**Beweis:** Analog zu S. 43.

**Hilfssatz und Definition:** (vgl. S. 31 und 41)  $M_i$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $f : M_1 \longrightarrow M_2$   $\mathcal{C}^k$ . ( $T^m M_i := T_0^m M_i$ ,  $T_q M_i := T_q^0 M_i$ )

- 1)  $T^m f : T^m M_1 \longrightarrow T^m M_2 : (x_0, \underbrace{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m}_v) \longmapsto$   

$$(f(x_0), \underbrace{(T_{x_0} f)(v_1) \otimes \cdots \otimes (T_{x_0} f)(v_m)}_{=: (T_{x_0}^m f)(v)})$$
 ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündel-Homomorphismus bzgl.  $f : M_1 \longrightarrow M_2$ .

2)  $f^* : \mathcal{T}_q M_2 \longrightarrow \mathcal{T}_q M_1 : \Omega \longmapsto \left( x_0 \longmapsto (T_{x_0}^q f)^T(\Omega(f(x_0))) \right)$  ist wohldefiniert und erfüllt  $f^*(g \cdot \Omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\Omega)$ . Weiters gilt  $f^* : \Omega^q M_2 \longrightarrow \Omega^q M_1$  und in Koordinaten ist  $f^*(\omega_{i_1 \dots i_q} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_q}) = (\omega_{i_1 \dots i_q} \circ f) d(y^{i_1} \circ f) \otimes \dots \otimes d(y^{i_q} \circ f) = (\omega_{i_1 \dots i_q} \circ f) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_q}}{\partial x^{j_q}} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$ .

Ganz präzise ausgedrückt heißt das: Wenn  $\Omega = \omega_{i_1 \dots i_q} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_q}$  in einer Umgebung von  $y_0 = f(x_0)$ , so ist  $f^*(\Omega)$  wie oben bei  $x_0$ .)

Weiters gilt:  $f^*(\Omega_1 \otimes \Omega_2) = f^*(\Omega_1) \otimes f^*(\Omega_2)$  für  $\Omega_i \in \mathcal{T}_{q_i}(M_2)$  und  $f^*(\Omega_1 \wedge \Omega_2) = f^*(\Omega_1) \wedge f^*(\Omega_2)$ ,  $\Omega_i \in \Omega^{q_i}(M_2)$

3)  $f : M_1 \longrightarrow M_2, g : M_2 \longrightarrow M_3 \mathcal{C}^k \implies (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .

**Beweis:** Analog zu S. 32, 42.

**Bemerkung:** Rein kovariante Tensorfelder lassen sich also „zurückziehen“. Für kontravariante Tensorfelder ist es nur bei Diffeomorphismen ebenso einfach, siehe unten.

**Bsp.:** 1) Wenn  $i : N \hookrightarrow M$  Untermannigfaltigkeit, so erhalten wir also  $i^* : \mathcal{T}_q M \longrightarrow \mathcal{T}_q N$ . Speziell, wenn  $g_1, \dots, g_q : M \longrightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^k$ , so ist  $dg_1 \otimes \dots \otimes dg_q \in \mathcal{T}_q M$  und  $i^*(dg_1 \otimes \dots \otimes dg_q) = d(g_1 \circ i) \otimes \dots \otimes d(g_q \circ i) = d(g_1|_N) \otimes \dots \otimes d(g_q|_N)$ . Allerdings schreibt man für  $g_j|_N$  meistens wieder  $g_j$ , sodass sich in dieser schlampigen Schreibweise  $i^*(dg_1 \otimes \dots \otimes dg_q) = dg_1 \otimes \dots \otimes dg_q \in \mathcal{T}_q(N)$  ergibt. Dieses Schreibungsproblem tritt auch manchmal bei anderen Abbildungen  $f$  statt  $i$  auf. Ebenso:  $dg_1 \wedge \dots \wedge dg_q \in \Omega^q N$ .

2) Speziell für  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ist  $i^*(L) = (\text{schlampig}) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$ .  $i^*(L)$  ist rotationsinvariant, denn wenn  $A \in \text{SO}_{n+1}$ , so ist  $(A|_{\mathbb{S}^n})^* i^*(L) = (i \circ A|_{\mathbb{S}^n})^* L = (A \circ i)^* L = i^* A^* L = i^* L$  nach S. 49. Um zu zeigen, dass  $i^* L \neq 0$ , können wir etwa  $x_0 = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{S}^n$  betrachten:  $i^*(L)(x_0) = (-1)^m d_{x_0} x^1 \wedge \dots \wedge d_{x_0} x^n \neq 0$ . Da es  $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{S}^n$  ein  $A \in \text{SO}_{n+1}$  mit  $Ax_0 = x_1$  gibt, sind alle rotationsinvarianten Volumsformen auf  $\mathbb{S}^n$  folglich durch  $c \cdot i^*(L), c \in \mathbb{R}$ , gegeben.

Eine ähnliche Situation herrscht bei Liegruppen:

**Hilfssatz und Definition:** 1) (Vgl. S. 35)  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  sei ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus,  $k \geq 1$ . Dann induziert dies

$T_q^m f : T_q^m M_1 \xrightarrow{\sim, \text{Bündeliso.}} T_q^m M_2 : (x_0, t) \longmapsto (f(x_0), (T_{x_0} f)^{\otimes m} \otimes (T_{f(x_0)} f^{-1})^{\otimes qT} t)$  und

$f : \mathcal{T}_q^m M_1 \xrightarrow{\sim, \text{VR-Iso.}} \mathcal{T}_q^m M_2 : X \longmapsto (T_q^m f) \circ X \circ f^{-1} =: \underline{f(X)}$ .

2) (Vgl. S. 33)  $G$  sei eine Liegruppe.  $X \in \mathcal{T}_q^m(G)$  heißt links- (bzw. rechts-) invariant:  $\iff \forall x_0 \in G : l^{x_0}(X) = X$  (bzw.  $r^{x_0}(X) = X$ ). Wenn  $I = 1_G$  und  $\mathcal{T}_{q,l}^m$  bzw.  $\mathcal{T}_{q,r}^m$  und  $\Omega_l^q$  bzw.  $\Omega_r^q$  die Vektorräume der links- bzw. rechtsinvarianten Tensorfelder und Formen sind, so sind

$T_{q,I}^m(G) \simeq T_{q,l \text{ bzw. } r}^m(G) : t \longmapsto (x_0 \longmapsto (T_q^m l^{x_0})(t) \text{ bzw. } (T_q^m r^{x_0})(t))$  und  $\Lambda^q(T_I^*G) \simeq \Omega_{l \text{ bzw. } r}^q$  Isomorphismen von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen.

**Beweis:** Analog S. 34–35.

**Bemerkung:** Speziell für  $m = 0$ ,  $q = 1$ ,  $\omega = d_I g$ ,  $g \in C^\infty(U)$ ,  $U$  Umgebung von  $I$ , folgt  $T_{1,I}^0(G) \simeq T_{1,l}^0(G) = \Omega_l^1(G) : \omega = d_I g \longmapsto [x_0 \longmapsto T_1^0 l^{x_0}(\omega) = (T_{x_0} l^{x_0^{-1}})^T(d_I g) = {}_{=T_I^*G} = (l^{x_0^{-1}})^*(dg)(x_0) = d_{x_0}(g(x_0^{-1}x))]$ .

**Bsp.:** Wenn  $G$   $p$ -dimensional ist, so sind also  $\Omega_l^p(G)$  und  $\Omega_r^p(G)$  eindimensional. Wir wollen ein Basiselement in  $\Omega_l^{n^2}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$  ausrechnen. Dazu nehmen wir die Karte  $\mathrm{id} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} : A \longmapsto (a_j^i)$  und  $\omega = da_1^1 \wedge \cdots \wedge da_1^n \wedge da_2^1 \wedge \cdots \cdots \wedge da_n^1 \wedge \cdots \wedge da_n^n \in \Lambda^{n^2}(T_I^*\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ . Diesem ist nach dem Hilfssatz  $\Omega \in \Omega_l^{n^2}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$  zugeordnet, wobei für  $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  (entspricht dem  $x_0$  oben) mit  $A_0^{-1} = (b_i^j)$  gilt:  
 $\Omega(A_0) = (\text{vgl. die Bemerkung}) = d(A_0^{-1}A)_1^1 \wedge \cdots \wedge d(A_0^{-1}A)_n^n = (b_{j_1}^1 da_1^{j_1}) \wedge \cdots \wedge (b_{j_n}^n da_1^{j_n}) \wedge (b_{j_{n+1}}^1 da_2^{j_{n+1}}) \wedge \cdots \cdots \wedge (b_{j_n}^n da_n^{j_n}) = \underbrace{\left( \sum_{\sigma_1 \in S_n} b_{\sigma_1(1)}^1 \cdots b_{\sigma_1(n)}^n \text{sign}(\sigma_1) da_1^1 \wedge \cdots \wedge da_1^n \right)}_{\det(A_0^{-1})} \wedge \cdots \wedge \underbrace{\left( \sum_{\sigma_n \in S_n} b_{\sigma_n(1)}^1 \cdots b_{\sigma_n(n)}^n \text{sign}(\sigma_n) da_n^1 \wedge \cdots \wedge da_n^n \right)}_{\det(A_0^{-1})} = \det(A_0)^{-n} da_1^1 \wedge \cdots \wedge da_1^n \wedge da_2^1 \wedge \cdots \cdots \wedge da_n^n.$

Zu  $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$  vgl. Üb. 3.5, S. 52.

## Übungen

Üb. 3.1 Betrache die  $C^\infty$ -Karte auf  $\mathbb{R}^2 : \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)^T : x \leq 0\} \longrightarrow (0, \infty) \times (-\pi, \pi) : r \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix}$ . Stelle  $dx^1$ ,  $dx^2$  durch  $dr$ ,  $d\vartheta$  und umgekehrt dar.

Üb. 3.2 Bestimme die Form der Einbettung  $T^*\mathbb{S}^1 \subset T^*\mathbb{R}^2$ , welche sich aus der Abbildung  $\tilde{f}$  in S. 43 ergibt.

Hinweis: Berechne  $H(x_0, d\vartheta|_{\mathbb{S}^1})$ , wenn  $\vartheta$  wie in Üb. 3.1 und  $H : T^*\mathbb{S}^1 \longrightarrow T^*\mathbb{R}^2 : (x_0, \omega) \longmapsto (i(x_0), (T_{i(x_0)} \tilde{f})^T(\omega(i(x_0))))$ .

Üb. 3.3 ( $M, [\mathfrak{A}]$ )  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p} \mathcal{C}^k$ ,  $N = f^{-1}(0)$ ,  $\forall x \in N : \mathrm{Rg}_x f = n-p$  ( $\implies N \subset M$  Untermannigfaltigkeit). Es sei weiters  $(\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A}$  und bzgl.  $\varphi$  sei  $f : (x^1, \dots, x^n)^T \longmapsto (y^1, \dots, y^{n-p})^T$ . Schließlich sei  $x_0 \in U \cap N$  und  $\det \left( \frac{\partial(y^1, \dots, y^{n-p})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-p}})} \right)(x_0) \neq 0$ .  
a) Zeige, dass  $d_{x_0}(x^{j_1}|_N), \dots, d_{x_0}(x^{j_p}|_N)$  eine Basis in  $T_{x_0}^*N$  ist, wenn

$$\{i_1, \dots, i_{n-p}, j_1, \dots, j_p\} = \{1, \dots, n\}.$$

b) Was bedeutet das z.B. für  $M = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $N = \mathbb{S}^n$ ?

Üb. 3.4 a) Bestimme eine Basis des freien  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^3)$ -Moduls  $\mathcal{T}_1(\mathbb{S}^3)$ , vgl. S. 43.

b) Stelle  $d(x^1|_{\mathbb{S}^3}), \dots, d(x^4|_{\mathbb{S}^3})$  durch diese Basis dar, wenn

$$\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto (x^1, \dots, x^4)^T.$$

Hinweis zu a): Verwende die in Üb. 2.11, S. 38 bestimmte Basis von  $\mathcal{T}^1(\mathbb{S}^3)$  und den folgenden Vektorraumbündelisomorphismus  $T\mathbb{S}^3 \simeq T^*\mathbb{S}^3$ : Für  $x_0 \in \mathbb{S}^3$  sei

$$T_{x_0}\mathbb{S}^3 \hookrightarrow T_{x_0}\mathbb{R}^4 \simeq T_{x_0}^*\mathbb{R}^4 \longrightarrow T_{x_0}^*\mathbb{S}^3$$

$\partial_j \longrightarrow dx^j \mapsto d(x^j|_{\mathbb{S}^3})$ . (Dies ist die Einschränkung der Riemannschen Standardmetrik von  $\mathbb{R}^4$  auf  $\mathbb{S}^3$ .)

Üb. 3.5 a) Zeige, dass  $da_1^1, \dots, da_1^n, da_2^1, \dots, da_n^1, \dots, da_n^{n-1}$  eine Basis in  $T_I^*\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$  ist.

b) Zeige, dass  $\Omega(A) = \frac{1}{(A^{\mathrm{ad}})_n^n} da_1^1 \wedge \dots \wedge da_n^1 \wedge da_2^1 \wedge \dots \wedge da_n^1 \wedge \dots \wedge da_n^{n-1} \in \Omega_l^{n^2-1}(\mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}))$  für  $(A^{\mathrm{ad}})_n^n \neq 0$ . Ist  $\Omega$  auch rechtsinvariant?

Üb. 3.6 Zeige, dass  $\varepsilon_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} := \begin{cases} \text{sign } (\sigma) & : j_1 = i_{\sigma(1)}, \dots, j_m = i_{\sigma(m)}; \\ 0 & : j_1, \dots, j_m \text{ sind paarweise verschieden, } \sigma \in S_m; \\ & \text{sonst} \end{cases}$

ein Tensorfeld in  $\mathcal{T}_m^m(M)$  definiert (dessen Koordinaten also vom Punkt und von der Karte unabhängig sind).

Welche lineare Abbildung entspricht

$$\varepsilon \in T_x(M)^{\otimes m} \otimes T_x^*(M)^{\otimes m} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x(M)^{\otimes m}, T_x(M)^{\otimes m}) \text{ für } x \in M?$$

Was ergibt sich für  $m = 1$  und für  $m = 2$ ?

Üb. 3.7 a) Zeige, dass  $da_2^1, da_2^2, da_1^3$  eine Basis in  $T_I^*\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  bildet.

b) Es sei  $\Omega \in \Omega_l^3(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$  mit  $\Omega(I) = da_2^1 \wedge da_2^2 \wedge da_1^3$  und  $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  wie in Üb. 1.5 c), S. 13. Zeige, dass  $f^*(\Omega) \in \Omega^3(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$  die Form  $g(\varphi) L \wedge d\varphi$  haben muss, wobei  $L = x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$  und  $\varphi$  die Winkelvariable in  $\mathbb{S}^1$  ist.

Hinweis: Für  $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \\ \downarrow A \times \mathrm{id} & & \downarrow B \\ \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) ABA^{-1} \end{array}$$

Verwende, dass  $\Omega_l^3(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = \Omega_r^3(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$  (s. Üb. 7.5, S. 113).

c) Berechne  $g$ !

Hinweis: Nach b) können wir  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$  setzen. In  $T_{x_0}^*\mathbb{S}^2$  gilt  $dx^3 = d(x^1 x^2) = d(x^2 x^2) = 0$ .

# Kap. II: Integration auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

## § 4 Borelmaße, Radonmaße, $n$ -Formen und Orientierung

**Def.:**  $X$  Menge,  $\mathcal{P}(X) :=$  Potenzmenge von  $X$

- 1)  $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$  heißt  $\sigma$ -Algebra : $\iff$  (i)  $\emptyset \in \Sigma$  (ii)  $A \in \Sigma \implies X \setminus A \in \Sigma$   
 (iii)  $A_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ .
- 2)  $\Sigma$   $\sigma$ -Algebra;  $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$  heißt Maß : $\iff$  (i)  $\mu(\emptyset) = 0$  (ii)  $A_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  (wobei  $\infty + a := \infty$ ).

**Bemerkung:** Wenn  $X$  ein topologischer Raum ist, möchte man, dass  $\Sigma$  alle offenen Mengen enthält. Außerdem sollen Maße durch ihre Integrale über stetige Funktionen mit kompaktem Träger festgelegt sein. Schließlich will man noch, dass die Menge der Maße einen Vektorraum bildet. All das funktioniert für einen lokalkompakten topologischen Hausdorff-Raum (=: LCH).

**Def.:**  $X$  LCH.

- 1)  $\mathcal{B}(X) :=$  kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\{U \subset X : U$  offen $\}$  enthält.  $\mathcal{B}(X)$  heißt Borel  $\sigma$ -Algebra.
- 2)  $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$  heißt (lokalendliches) Borelmaß : $\iff \mu$  Maß  $\wedge \forall K \subset X$  kompakt:  $\mu(K) < \infty$ .
- 3)  $\mu : \{A \in \mathcal{B}(X) : \overline{A}$  kompakt $\} \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt signiertes Borelmaß : $\iff \exists \mu_1, \mu_2$  Borelmaße:  $\mu = (\mu_1 - \mu_2)|_{\{A \in \mathcal{B}(X) : \overline{A}$  kompakt $\}}$ .
- 4)  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}; \text{supp } f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$  heißt Träger von  $f$ .
- 5)  $\mathcal{K}(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) : \text{supp } f$  kompakt $\}$ .
- 6)  $\lambda : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$  heißt Radonmaß : $\iff$  (i)  $\lambda$  linear; (ii)  $\forall K \subset X$  kompakt:  $\exists C > 0 : \forall f \in \mathcal{K}(X)$  mit  $\text{supp } f \subset K : |\lambda(f)| \leq C \max_{x \in X} |f(x)|$ .
- 7)  $\mathcal{K}'(X) := \{\lambda : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$  Radonmaß $\}$ .

8)  $\lambda \in \mathcal{K}'(X)$  heißt positiv : $\iff \forall f \in \mathcal{K}(X)$  mit  $(\forall x \in X : f(x) \geq 0) : \lambda(f) \geq 0$ .

9)  $\mathcal{K}'(X)_+ := \{\lambda \in \mathcal{K}'(X) : \lambda \text{ positiv}\}$ .

**Bemerkung:** 1) Die Eigenschaft (ii) in 6) bedeutet, dass  $\lambda$  stetig ist bzgl. einer gewissen lokalkonvexen Topologie auf  $\mathcal{K}(X)$ .

2) Aus 6) (i) und der Positivität 8) folgt die Stetigkeit 6) (ii), vgl. Üb. 4.1, S. 67.

**Bsp.:** 1) Wenn  $x_0 \in X$ , so ist  $\underline{\delta}_{x_0} : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty) : B \longmapsto \begin{cases} 1 : x_0 \in B \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$  ein Borelmaß.

Das zugehörige Radonmaß (vgl. nächster Satz) ist  $\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto f(x_0)$ .

2) Wenn  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , d.h.  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  messbar und  $\int_K |g(x)| dx < \infty$  für alle  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, so ist  $\mu : \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \overline{A} \text{ kompakt}\} \longrightarrow \mathbb{R} : A \longmapsto \int_A g(x) dx$  das signierte Borelmaß „ $g dx$ “. Das zugehörige Radonmaß ist  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx$ .

3)  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \longrightarrow [0, \infty] : B \longmapsto \int_B \frac{dx}{|x|}$  ist ein Maß auf der Borel  $\sigma$ -Algebra von  $\mathbb{R}$ , aber kein Borelmaß, da  $\mu([0, 1]) = \infty$  und  $[0, 1]$  kompakt ist.

**Satz** (Version des Darstellungssatzes von F. Riesz, 1909)

$X$  lokalkompakter Hausdorffraum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (d.h. abzählbare Basis der Topologie). Dann gilt:

$$\{\text{Borelmaße auf } X\} \simeq \mathcal{K}'(X)_+ : \mu \longmapsto (f \longmapsto \int f(x) \mu(x)) \text{ und} \\ \{\text{signierte Borelmaße auf } X\} \simeq \mathcal{K}'(X) : \mu \longmapsto (f \longmapsto \int f(x) \mu(x)).$$

**Beweise:** Berberian: Measure and Integration, Th. 1, p. 227;

Weir: General Integration & Measure, Th. 4, p. 181, Ex. 8, p. 183;

Janssen & Steen: Integration Theory, p. 138, Ex. 5, p. 144;

Dieudonné (13.3.6);

Rudin:  $\mathbb{R} & \mathbb{C}$  Analysis, 2.14/18, p. 40, 48;

Malliavin: Int. et probabilités, 2.2., p. 62 und 5.3.3, p. 86. □

Ab nun sei  $X$  LCH und erfülle das 2. Abzählbarkeitsaxiom, z.B.  $X$  Mannigfaltigkeit. Wir unterscheiden nicht mehr zwischen Borel- und Radonmaßen.

**Def.:** 1)  $X$  topologische Gruppe.  $\lambda \in \mathcal{K}'(X)_+$  heißt (links-)Haarmaß : $\iff$  (\*)  $\forall x_0 \in X : \forall f \in \mathcal{K}(X) : \lambda(f(x_0 \cdot x)) = \lambda(f)$ .

Wenn  $\lambda \in \mathcal{K}'(X)$  (\*) erfüllt, so heiße es signiertes (links-)Haarmaß.

2) Wenn  $X = V$   $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so wird „Haar“ durch „Lebesgue“ ersetzt. (Da  $V$  kommutativ, ist „links“ bzw. „rechts“ hier überflüssig.)

$L(V)_+ := \{\lambda \in \mathcal{K}'(V)_+ : \text{Lebesguemaß}\}$ ,  $L(V) := \{\lambda \in \mathcal{K}'(V) : \text{signiertes Lebesguemaß}\}$ .

**Bsp.:**  $V = \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\lambda : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int f(x) dx^1 \cdots dx^n$  in  $L(\mathbb{R}^n)_+$  und  $L(\mathbb{R}^n) = \{c \cdot \lambda : c \in \mathbb{R}\}$ , denn wenn  $\lambda_1 \in L(\mathbb{R}^n)$  mit  $\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^i < 1\}) =: c$ , dann ist für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}$  wegen der Verschiebungsinvarianz  $\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^n : a^i \leq x^i < a^i + \frac{1}{k}\}) = ck^{-n}$ . Da sich jede offene Menge als disjunkte Vereinigung solcher Mengen schreiben lässt, ist  $\lambda_1 = c \cdot \lambda$ . (Allgemein ist  $L(X)$  1-dimensional für lokalkompakte hausdorffsche topologische Gruppen, vgl. Berberian Ch. 9, Dieudonné XIV.1.) In einem beliebigen (endlichdimensionalen)  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  erhalten wir einen Isomorphismus von  $L(V)$  auf  $\mathbb{R}$  erst nach Wahl einer Basis. Da  $T_x M$ ,  $M$  Mannigfaltigkeit, keine kanonische Basis hat, sucht man eine basisfreie Darstellung.

**Hilfssatz:**  $V$   $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $e_1, \dots, e_n$  Basis in  $V$ . Dann ist

$$|\cdot| : \Lambda^n(V^*) \rightarrow L(V)_+ \\ D \mapsto |D| : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(e_i x^i) |D(e_1, \dots, e_n)| dx^1 \cdots dx^n$$

von der Wahl der Basis unabhängig.

**Beweis:**  $e'_1, \dots, e'_n$  sei eine zweite Basis mit  $e'_i = a_i^j e_j \implies$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^n} f(e'_i x^{i'}) |D(e'_1, \dots, e'_n)| dx^{1'} \cdots dx^{n'} = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f(e_j \underbrace{a_i^j x^{i'}}_{=:x^j}) |D(e_1, \dots, e_n)| \cdot \underbrace{|\det(a_i^j)|}_{=dx^1 \cdots dx^n} dx^{1'} \cdots dx^{n'} = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f(e_j x^j) |D(e_1, \dots, e_n)| dx^1 \cdots dx^n.$$
□

**Bemerkung:** 1)  $|\cdot|$  kann auch so geschrieben werden:

Wenn  $D \in \Lambda^n(V^*)$ , so ist  $|D|$  das Borelmaß  $\mu$  mit:

$$\forall v_1, \dots, v_n \in V : \mu(\{x^i v_i : 0 \leq x^i < 1\}) = |D(v_1, \dots, v_n)|.$$

2) Leider gibt es keine Möglichkeit basisunabhängig  $\Lambda^n(V^*) \simeq L(V)$  zu definieren. Das führt zur

**Def.:**  $V$   $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- 1) Für  $D_1, D_2 \in \Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$  sei  $D_1 \sim D_2 : \iff \exists c > 0 : D_1 = c \cdot D_2$ . Eine Äquivalenzklasse  $[D] \in \mathcal{O}(V) := (\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}) / \sim$  heißt Orientierung auf  $V$ . Weil  $\Lambda^n(V^*)$  eindimensional ist, hat  $\mathcal{O}(V)$  genau 2 Elemente.  $[-D] := [D]$ .
- 2)  $\mathcal{O}(V) \xrightarrow{F} \mathcal{O}(V^*) : [D] \mapsto [\underbrace{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n}_{\in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}}]$ , wobei  $D(e_1, \dots, e_n) > 0$ . Eine Orientierung auf  $V$  ist daher auch durch eine angeordnete Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  bestimmt.

3)  $\hat{V} := (V \times \mathcal{O}(V)) / \sim$ , wobei  $(v_1, o_1) \sim (v_2, o_2) \iff (v_1, o_1) = \pm(v_2, o_2)$ , heißt Raum der Pseudovektoren (oder axialen Vektoren) zu  $V$ .

$\hat{V}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $\alpha[v_1, o] + \beta[v_2, o] := [\alpha v_1 + \beta v_2, o]$ . Es gilt  $\widehat{V^*} \simeq \hat{V}^* : [v^*, o^*] \mapsto ([v, F^{-1}(o^*)] \mapsto \langle v, v^* \rangle)$ , wobei  $F$  wie in 2).

4) Ähnlich definiert man zu  $V$ :

$\hat{\mathbb{R}} := (\mathbb{R} \times \mathcal{O}(V)) / \sim$ ,  $V^{\widehat{\otimes m}} := (V^{\otimes m} \times \mathcal{O}(V)) / \sim$  und

$\widehat{\Lambda^m(V)} := (\Lambda^m(V) \times \mathcal{O}(V)) / \sim$  (Pseudoskalare, Pseudotensoren etc.)

Beachte, dass  $V^{\widehat{\otimes m}} \neq \widehat{V^{\otimes m}}$  etc.

Wenn  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$  ist, so nennt man  $v^{i_1 \dots i_m}$  die Koordinaten von  $[v^{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}, F^{-1}([e_1 \wedge \dots \wedge e_n])] \in V^{\widehat{\otimes m}}$  bzgl. der geordneten Basis  $e_1, \dots, e_n$ .

**Bsp.:** 1)  $[x^1_{\in(\mathbb{R}^n)^*} \wedge \dots \wedge x^n]$  nennt man Standardorientierung auf  $\mathbb{R}^n$ . Beachte, dass es auf  $\mathbb{R}V$  keine Standardorientierung gibt.

$$2) \widehat{\Lambda^n(V^*)} \simeq L(V) : [D, o] \mapsto \begin{cases} |D| & : o = [D], D \neq 0 \\ -|D| & : o = -[D], D \neq 0 \\ 0 & : D = 0 \end{cases}$$

In Worten:

Den signierten Lebesguemaßen entsprechen die schiefsymmetrischen  $n$ -fach kovarianten Pseudotensoren (kurz: Pseudo- $n$ -kovektoren). Der Abbildung  $|\cdot|$  in S. 55 entspricht dann  $|\cdot| : \Lambda^n(V^*) \longrightarrow \widehat{\Lambda^n(V^*)} : D \mapsto [D, [D]]$ .

3) Wenn  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis in  $V$ ,  $e^1, \dots, e^n$  die duale Basis in  $V^*$ ,  $o := [e^1 \wedge \dots \wedge e^n] \in \mathcal{O}(V)$  und  $v = v^i e_i \in V$ , so hat  $w := [v, o] \in \hat{V}$  bzgl.  $e_1, \dots, e_n$  die Koordinaten  $v^i$ .

Bei Basiswechsel gilt  $e_i = a_i^j e_j$ ,  $v = a_i^j v^i e_j = v^{j'} e_{j'} \implies v^{j'} = a_i^j v^i$ ,  $o' = \text{sign}(\det(a_l^k)) o \implies w = [v^{j'} e_{j'}, o] = [v^{j'} \text{sign}(\det(a_l^k)), o']$ , d.h. die Koordinaten von  $w \in \hat{V}$  bzgl. der angeordneten Basis  $e'_1, \dots, e'_n$  sind  $a_i^j v^i \text{sign}(\det(a_l^k))$ .

Beachte, dass  $e_1, \dots, e_n$  und  $e'_1, \dots, e'_n$  keine Basen in  $\hat{V}$  sind! Bezuglich Basen in  $\hat{V}$  gilt natürlich die übliche Formel.

4) Für eine gewählte Orientierung  $o$  auf  $V$  erhält man  $V \xrightarrow{\sim} \hat{V} : v \mapsto [v, o]$ . Das Paar  $(V, o)$  heißt orientierter Vektorraum.

5)  $\mathbb{R}V$  sei ein 3-dimensionaler euklidischer Raum, d.h.  $\langle \cdot, \cdot \rangle \in S^2(V^*)$  positiv definit sei gegeben.  $e_1, e_2, e_3$  sei eine ONB und  $e^1, e^2, e^3$  die duale Basis in  $V^*$ ,  $D := e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \in \Lambda^3(V^*)$ . Dann ist  $D$  bis auf das Vorzeichen eindeutig (da  $A \in O_{\mathbb{R}}(V) \implies \det A = \pm 1$ ) und folglich das Kreuzprodukt  $V \times V \longrightarrow \hat{V} : (u, v) \mapsto [w, [D]] =: u \times v$  wohldefiniert, wobei  $D(x, u, v) = \langle w, x \rangle, \forall x \in V$ .

6) Allgemeiner sei  $\mathbb{R}V$  ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Raum,  $e_1, \dots, e_n$  ONB,  $e^1, \dots, e^n$  duale Basis,  $D := e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ . Dann ist wiederum  $[D, [D]] \in \widehat{\Lambda^n(V^*)}$  unabhängig von der Wahl der ONB. Es entspricht dem Lebesguemaß  $\mu = |D| \in L(V)$  (vgl. 2), oben). Wenn  $v_1, \dots, v_n$  beliebige Vektoren in  $V$  sind, so ist (vgl. S. 55)

$\mu(\{x^i v_i : 0 \leq x^i < 1\}) = |D(v_1, \dots, v_n)| = |\det(\langle v_i, e_j \rangle)| = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}.$  Wie in 5) ergibt sich auch ein Kreuzprodukt  $\underbrace{V \times \dots \times V}_{n-1} \longrightarrow \hat{V}.$

So wie den Lebesguemaßen  $L(V)$  der Raum  $\widehat{\Lambda^n}(V^*)$  entspricht, so entsprechen den Radonmaßen auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  Schnitte von  $\widehat{\Lambda^n}(T^*M).$  Die nächste Definition bereitet dies vor und entspricht S. 39 bzgl. der Tensoren.

**Hilfssatz und Definition:**  $p : M_1 \longrightarrow M_2$  sei ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel. Dann ist  $\hat{M}_1 := \bigcup_{x \in M_2} \widehat{p^{-1}(x)} = \bigcup_{x \in M_2} \{[v, o] : v \in p^{-1}(x), o \in \mathcal{O}(p^{-1}(x))\}$  wieder ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel mit folgenden Karten:

$$\text{Für } \begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & V_1 = V_2 \times \mathbb{R}^{n_1-n_2} \\ \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_1 \\ p(U_1) & \xrightarrow{\varphi_2} & V_2 \end{array}$$

wie in S. 22 sei

$$\hat{U}_1 := \{[v, o] : v \in U_1\} \subset \hat{M}_1 \text{ und } \hat{\varphi}_1 : \hat{U}_1 \longrightarrow V_1$$

$$[v, o] \longmapsto \varphi_1(v)$$

wenn  $x = p(v)$  und  $o$  vermöge  $\varphi_1|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n_1-n_2}$  der Standardorientierung auf  $\mathbb{R}^{n_1-n_2}$  entspricht.

**Beweis:**  $\varphi_1, \varphi_2$  seien wie oben und  $\psi_1 : U'_1 \longrightarrow V'_1$  eine 2. Karte. Für  $x \in p(U_1) \cap p(U'_1)$  seien  $o(x)$  bzw.  $o'(x)$  jeweils die Orientierungen, die sich aus  $p^{-1}(x) \xrightarrow[\varphi_1 \text{ bzw. } \psi_1]{\sim} \mathbb{R}^{n_1-n_2}$  ergeben. Wenn  $e_1, \dots, e_{n_1-n_2}$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^{n_1-n_2}$  ist, so ist z.B.  $o(x)$  durch die geordnete Basis  $\varphi_1^{-1}(\varphi_2(x), e_1), \dots, \varphi_1^{-1}(\varphi_2(x), e_{n_1-n_2})$  von  $p^{-1}(x)$  gegeben. Da  $M$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Vektorraumbündel ist, gilt  $\psi_1^{-1}(\varphi_2(x), e_i) = a_i^j(x) \varphi_1^{-1}(\varphi_2(x), e_j)$  mit  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen  $a_i^j$  auf  $p(U_1 \cap U'_1)$ . Daher:  $o'(x) = \text{sign}(\det(a_i^j(x))) o(x) \implies$  auf jeder Zusammenhangskomponente von  $p(U_1 \cap U'_1)$  ist entweder  $o = o'$  oder  $o = -o'$ . Wenn  $\psi_1 \circ \varphi_1^{-1} : (y^1, \dots, y^{n_1})^T \longmapsto (y^{1'}, \dots, y^{n_1'})^T$ , so ist also  $\hat{\psi}_1 \circ \hat{\varphi}_1^{-1} : (y^1, \dots, y^{n_1})^T \longmapsto (y^{1'}, \dots, y^{n_2'}, \epsilon y^{n_2+1'}, \dots, \epsilon y^{n_1'})^T$  mit  $\epsilon := \text{sign}(\det(a_i^j(\varphi_2^{-1}(y^1, \dots, y^{n_2}))))$  wieder  $\mathcal{C}^k$ .

□

**Bemerkung:** Analog zu S. 55, 56 gilt  $\hat{M}_1^* \simeq \widehat{M}_1^*$  und werden  $M_1^{\otimes m}, \widehat{\Lambda}^m(M_1)$  definiert.

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .  $\widehat{\Lambda}^q(T^*M) = \bigcup_{x \in M} \{(x, [\omega, o]) : [\omega, o] \in \widehat{\Lambda}^q(T_x^*M),$

d.h.  $\omega \in \Lambda^q(T_x^*M)$ ,  $o \in \mathcal{O}(T_x M)\}$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündel (analog dem Hilfssatz in S. 57).

$\hat{\Omega}^q(M) := \mathcal{T}(\widehat{\Lambda^q}(T^*M)) \ni \hat{\Omega}$  heißt Pseudo- $q$ -Form oder ungerade  $q$ -Form (vgl. S. 66).

**Bemerkung:** In Koordinaten hat  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^q(M)$  die Darstellung  $\hat{\Omega}(x) = [\omega_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}, [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]]$  mit in den Indices schiefsymmetrischen  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Funktionen  $\omega_{i_1 \dots i_q}(x)$  bzw. (vgl. S. 47)

$$\hat{\Omega}(x) = \left[ \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \underbrace{[dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]}_{\in \mathcal{O}(T_x M)} \right].$$

Bei Kartenwechsel gilt dann

$$\omega_{i_1 \dots i_q}' = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{i_q}} \text{sign} \left( \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \right) \right) \omega_{j_1 \dots j_q}.$$

Um das einem  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^n(M)$ ,  $n = \dim M$ , entsprechende Radonmaß zu definieren, müssen wir lokalisieren.

Dazu: **Hilfssatz:**  $M$  Mannigfaltigkeit,  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \subset M$  offen.

- 1)  $\lambda \in \mathcal{K}'(M) \implies \lambda|_{U_i} := \lambda|_{\mathcal{K}(U_i)} \in \mathcal{K}'(U_i).$
- 2)  $\forall i \in I : \lambda_i \in \mathcal{K}'(U_i)$  und  $\forall i, j \in I : \lambda_i|_{U_i \cap U_j} = \lambda_j|_{U_i \cap U_j} \implies \exists! \lambda \in \mathcal{K}'(M) : \forall i \in I : \lambda|_{U_i} = \lambda_i.$

(Anders ausgedrückt:  $U \longmapsto \mathcal{K}'(U)$  ist eine Garbe.)

**Beweis:** 1) klar; 2)  $\chi_i$  sei eine lokalendliche  $\mathcal{C}^0$ -Zerlegung der 1 zu  $U_i$  (vgl. nächstes Lemma). Für  $f \in \mathcal{K}(M)$  ist  $I(f) := \{i \in I : \chi_i|_{\text{supp } f} \neq 0\}$  endlich und daher existiert höchstens ein  $\lambda \in \mathcal{K}'(M) : \forall i \in I : \lambda|_{U_i} = \lambda_i$ , denn für  $\lambda$  muss gelten

$$\lambda(f) = \sum_{i \in I(f)} \lambda(f \cdot \chi_i) = \sum_{i \in I(f)} \lambda_i(f \chi_i).$$

Wenn umgekehrt  $\lambda$  so definiert ist, so ist  $\lambda$  linear und für  $K \subset M$  kompakt ist  $I(K) := \{i \in I : \chi_i|_K \neq 0\}$  endlich und daher für  $\text{supp } f \subset K$ :

$$\begin{aligned} |\lambda(f)| &\leq \sum_{i \in I(K)} |\lambda_i(f \cdot \chi_i)| \leq \sum_{i \in I(K)} C_i \max_{x \in U_i} |(f \cdot \chi_i)(x)| \\ &\leq C \cdot \max_{x \in M} |f(x)|. \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda \in \mathcal{K}'(M)$ . Schließlich, für  $f \in \mathcal{K}(U_j)$  ist  $f \cdot \chi_i \in \mathcal{K}(U_i \cap U_j) \implies \lambda_i(f \cdot \chi_i) = \lambda_j(f \cdot \chi_i) \implies \lambda(f) = \sum_{i \in I(f)} \lambda_i(f \chi_i) = \lambda_j(f)$ , d.h.  $f|_{U_j} = f_j$ .  $\square$

**Zerlegung der 1-Lemma:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \subset M$  offen. Dann existieren  $\chi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , mit

- (i)  $\chi_i \not\equiv 0$  für höchstens abzählbar viele  $i \in I$ ;
- (ii)  $\forall K \subset M$  kompakt:  $\chi_i|_K \equiv 0$  für fast alle  $i \in I$  (impliziert (i));
- (iii)  $\forall i \in I : [\chi_i \in \mathcal{C}^k(M)]$  und  $[\forall x \in M : \chi_i(x) \geq 0]$  und  $[\text{supp } \chi_i \subset U_i]$ ;
- (iv)  $\forall x \in M : \sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$ .

$\{\chi_i : i \in I\}$  heißt lokale Zerlegung der 1 zu  $U_i$ .

**Beweis:** Wenn  $U_i = \bigcup_{j \in J_i} V_{i,j}$  mit  $V_{i,j} \subset M$  offen,  $\overline{V_{i,j}}$  kompakt und  $\chi_{i,j}$  (i)–(iv) bzgl.  $V_{i,j}$  erfüllt, so erfüllt  $\chi_i := \sum_{j \in J_i} \chi_{i,j}$  (i)–(iv) bzgl.  $U_i$  (da nur endlich viele  $\text{supp } \chi_{i,j}$  eine vorgegebene kompakte Menge treffen). Also können wir OEdA  $\overline{U}_i \subset M$  kompakt annehmen.

a)  $M$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom  $\Rightarrow \exists$  endliche oder abzählbare Teilmenge  $I_1 \subset I : \bigcup_{i \in I_1} U_i = M$ .

Setze  $\chi_i = 0$  für  $i \notin I_1$ . Dann ist (i) erfüllt. Also sei OEdA  $I = \mathbb{N}$ . (Falls  $I$  endlich ist, setze  $U_i := \emptyset$  für fast alle  $i$ .)

b) Definiere induktiv  $V_1 := U_1$ ,  $V_{n+1} := U_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \{\overline{U}_i : \overline{U}_i \subset \bigcup_{j=1}^n V_j\}$ . Dann ist  $V_1 \cup \dots \cup V_n = U_1 \cup \dots \cup U_n$  (induktiv) und  $V_n \subset M$  offen,  $\overline{V}_n \subset M$  kompakt.  $\forall i \in \mathbb{N} : \exists N : \overline{U}_i \subset \bigcup_{j=1}^N U_j = \bigcup_{j=1}^N V_j \Rightarrow \forall n > N : \overline{U}_i \cap V_n = \emptyset$ .

$K \subset M$  kompakt  $\Rightarrow \exists n : K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \Rightarrow \exists N : \forall n > N : K \cap V_n = \emptyset$ . Wenn wir  $V_i$  statt  $U_i$  nehmen, so folgt also wegen  $\text{supp } \chi_i \subset U_i$  (ii) aus (iii). OEdA sei daher im folgenden  $U_i$  durch  $V_i$  ersetzt, d.h.  $U_i$  so, dass  $\forall K \subset M$  kompakt:  $\exists N : \forall n > N : K \cap U_n = \emptyset$ .

c)  $\forall x \in M : \exists (\varphi_x : W_x \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}) \in \mathfrak{A}_{\max}$  mit  $x \in W_x$ ,  $\varphi_x(x) = 0$  und  $W_x \subset U_i$  für ein  $i \in I = \mathbb{N}$ .

Es sei  $\tilde{W}_x := \varphi_x^{-1}(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\})$  und  $\chi : \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\} \xrightarrow{c^\infty} [0, \infty)$  mit  $\chi(y) = 1$  für  $|y| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\chi(y) = 0$  für  $|y| \geq \frac{3}{4}$ .

$\overline{U}_k$  kompakt  $\Rightarrow \exists x_{k,1}, \dots, x_{k,n_k} \in \overline{U}_k$  so, dass  $\overline{U}_k \subset \bigcup_{l=1}^{n_k} \tilde{W}_{x_{k,l}}$ .

Es sei  $\psi_i := \sum_{W_{x_{k,l}} \subset U_i} \chi \circ \varphi_{x_{k,l}}$ .

Diese Summen sind endlich, denn  $W_{x_{k,l}} \subset U_i \implies U_i \cap U_k \neq \emptyset$  (da  $x_{k,l} \in W_{x_{k,l}} \cap \overline{U}_k \subset U_i \cap \overline{U}_k$ )  $\implies k$  beschränkt nach b). Daher ist  $\psi_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$  mit  $\text{supp } \psi_i \subset U_i$  kompakt. Weiters ist die Summe  $\psi(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)$  lokalendlich nach b) und daher auch  $\mathcal{C}^k$ . Wegen

$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{n_k} \tilde{W}_{x_{k,l}}$  ist auch:  $\forall x \in M : \exists k, l : x \in \tilde{W}_{x_{k,l}}$ . Wenn  $W_{x_{k,l}} \subset U_i$ , so ist also  $\psi_i(x) \geq 1$ . Also ist  $\forall x \in M : \psi(x) \geq 1$  und  $\chi_i := \psi_i / \psi$  erfüllt alle Bedingungen des Lemmas.  $\square$

Im nächsten Satz sehen wir, dass  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^n(M)$ ,  $n = \dim M$ , einem Radonmaß auf  $M$  mit  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Dichte entspricht.

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $l \leq k$ .  $\mathcal{K}'_l(M) := \{ \lambda \in \mathcal{K}'(M) : \forall (\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A} : \exists g \in \mathcal{C}^l(V) : \forall f \in \mathcal{K}(U) : \lambda(f) = \int_V g(x)(f \circ \varphi^{-1})(x) dx \}$  heißt Raum der Radonmaße mit  $\mathcal{C}^l$ -Dichte.

**Bsp.:** 1) Für  $x_0 \in M$  ist  $\delta_{x_0} \in \mathcal{K}'(M) \setminus \mathcal{K}'_0(M)$ .  
2)  $\mathcal{C}'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}'_l(\mathbb{R}^n) : g \longmapsto (f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx)$ .

**Satz**  $M$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ . Dann gilt:

$\hat{\Omega}^n(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}'_{k-1}(M) : \hat{\Omega} \longmapsto \lambda$ , wobei

$\forall (\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A} : \forall f \in \mathcal{K}(U) : \hat{\Omega}(x) = [g(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]]$  auf  $U$

$$\implies \lambda(f) = \int_V g(x^1, \dots, x^n) f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

(Beachte:  $g(x^1, \dots, x^n)$  ist kurz für  $g \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$  etc., vgl. S. 3)

**Beweis:** 1) Das oben definierte  $\lambda$  ist offenbar in  $\mathcal{K}'_{k-1}(U)$  (denn  $g \in \mathcal{C}^{k-1}(U)$ ). Wenn  $\psi : U' \longrightarrow V' : x \longmapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T$  eine 2. Karte ist und  $f \in \mathcal{K}(U \cap U')$ , so ist

$$g'(x) dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'} = \text{sign} \left( \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \right) \right) g(x) \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}_{=\det \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \right) dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'}} \implies$$

$$\implies g'(x) = g(x) \left| \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \right) \right| \quad (\text{vgl. auch S. 58})$$

$\implies \int_{V'} g'(x^{1'}, \dots, x^{n'}) f(x^{1'}, \dots, x^{n'}) dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'} = (\text{Transformationssatz für mehrfa-})$

che Integrale)  $= \int_V g(x^1, \dots, x^n) f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

Also ist  $\lambda$  nach dem Hilfssatz in S. 58 in  $\mathcal{K}'_{k-1}(M)$ .

2) Umgekehrt, wenn  $\lambda \in \mathcal{K}'_{k-1}(M)$ , so lässt sich seine Einschränkung auf das Kartengebiet  $U$  mittels eines  $g \in C^{k-1}(U)$  wie oben ausdrücken.  $g$  ist eindeutig, denn wenn  $\forall f \in \mathcal{K}(U) : \int_V (g_1 - g_2) \cdot f \, dx = 0$  und etwa  $(g_1 - g_2)(x_0) > 0$ , so gäbe es eine Umgebung von  $x_0$ , wo  $g_1 - g_2 > 0$  und  $0 \not\equiv f \geq 0$  mit Träger in dieser Umgebung  $\Rightarrow \int(g_1 - g_2) \cdot f \, dx > 0$ .

Die Rechnung in 1) zeigt, dass dann  $\hat{\Omega}(x) := [g(x) \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]]$  von der gewählten Karte unabhängig ist. Offenbar ist  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^n(M)$  und entspricht  $\lambda$ .  $\square$

**Bsp.:** 1) Das Lebesguemaß  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  auf  $\mathbb{R}^n = M$  korrespondiert also der Pseudo- $n$ -Form  $[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]]$ . Beachte, dass hier, im Gegensatz zu  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , die Reihenfolge der Koordinaten keine Rolle spielt!

2) Ähnlich wie in S. 55 lässt sich einer  $n$ -Form immer der Betrag zuordnen:

$$|\cdot| : \Omega^n(M) \longrightarrow \mathcal{K}'_0(M) : \Omega \longmapsto |\Omega| : \left( f \longmapsto \int_V |g(x)| f(x) \, dx \right),$$

wobei  $\Omega(x) = g(x) \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  bzgl.  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$ . Allerdings ist  $|\Omega|$  i.A. nicht mehr differenzierbar. Das Lebesguemaß  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  auf  $\mathbb{R}^n$  könnte also auch als  $|dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$  geschrieben werden. (Wenn wir  $M$  als  $C^1$ -Mannigfaltigkeit betrachten und  $\hat{\Omega}^n(M)$  und  $\mathcal{K}'_0(M)$  identifizieren, so ist  $|\cdot|$  oben so gegeben:

$$|\cdot| : \Omega^n(M) \longrightarrow \hat{\Omega}^n(M) : \Omega \longmapsto (x \longmapsto \begin{cases} 0 & : \Omega(x) = 0 \\ [\Omega(x), [\Omega(x)]] & : \Omega(x) \neq 0 \end{cases})$$

3) Es sei  $L = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x^j \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$  (der Kürze halber  $L$  statt  $i^*(L)$ , vgl. S. 49, 50). Wir wollen  $|L| \in \hat{\Omega}^n(\mathbb{S}^n)$  über  $\mathbb{S}^n$  integrieren, d.h.  $|L|(1) = \int_{\mathbb{S}^n} |L|$  berechnen. In der Karte  $\varphi_{n+1,+}$  ist  $x^{n+1} = \sqrt{1 - |x'|^2}$ ,  $x' := (x^1, \dots, x^n)^T \Rightarrow L = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge \left( -\frac{x^j}{x^{n+1}} \, dx^j \right) + (-1)^n x^{n+1} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = (-1)^n \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(x^j)^2}{x^{n+1}} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \Rightarrow |L|(\{x \in \mathbb{S}^n : x^{n+1} > 0\}) = \int_{\{x' \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1\}} \frac{dx'}{\sqrt{1 - |x'|^2}}$  und  $|L|(1)$  wäre das Doppelte.

Damit hätten wir  $\int |L|$  entsprechend dem letzten Satz (S. 60) als übliches Integral im  $\mathbb{R}^n$  angeschrieben. Zur Berechnung würde man jedenfalls Kugelkoordinaten verwenden. Dazu allgemein:

$$\begin{aligned}
4) \text{ Es sei } r := |x|, \quad y^i := \frac{x^i}{|x|} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \implies dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1} = \\
= d(ry^1) \wedge \cdots \wedge d(ry^{n+1}) = (y^1 dr + r dy^1) \wedge \cdots = r^n dr \wedge \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} y^j dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^j} \wedge \\
\cdots \wedge dy^{n+1} + r^{n+1} \underbrace{dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n+1}}_{=0}, \text{ denn } d_{x_0} y^1, \dots, d_{x_0} y^{n+1} \perp [x_0 + tx_0] \in T_{x_0} \mathbb{R}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Die obige Gleichung gilt in  $\Omega^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ . Wenn wir darauf den Diffeomorphismus  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq (0, \infty) \times \mathbb{S}^n$

$$x \mapsto (|x|, x/|x|)$$

anwenden, so geht daher  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$  über in  $r^n dr \wedge L \in \Omega^{n+1}((0, \infty) \times \mathbb{S}^n)$ , vgl. den Hilfssatz unten. Als Betrag ergibt sich (vgl. S. 63):

$$\underbrace{dx^1 \cdots dx^{n+1}}_{\in \mathcal{K}'(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})} = \text{Lebesguemaß auf } \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \underbrace{r^n dr}_{\in \mathcal{K}'((0, \infty))} \otimes \underbrace{|L|}_{\in \mathcal{K}'(\mathbb{S}^n)}.$$

Nun können wir  $\int_{\mathbb{S}^n} |L|$  eleganter so berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-(x^1)^2 - \cdots - (x^{n+1})^2} dx^1 \cdots dx^{n+1} &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}} \\
&\parallel \\
&\int_0^{\infty} r^n e^{-r^2} dr \cdot \int_{\mathbb{S}^n} |L| \underset{(u=r^2)}{=} \int_{\mathbb{S}^n} |L| \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} u^{n/2} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}}}_{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \implies \int_{\mathbb{S}^n} |L| = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Für  $|L|$  schreibt man meistens  $d\omega$  oder  $d\sigma$ . (Vorsicht: Dieses  $d$  hat nicht direkt mit der äußeren Ableitung zu tun. Ähnlich ist ja auch das Symbol  $dx$  für das Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}^n$  nicht ganz korrekt, vgl. 1), 2)). In S. 92, 3) werden wir sehen, dass  $|L|$  auf  $\mathbb{S}^n$ , aber nicht allgemein auf Hyperflächen, mit dem durch die Standardmetrik induzierten Oberflächenmaß übereinstimmt.

**Hilfssatz und Definition:**  $M_1, M_2$  Mannigfaltigkeiten,  $M := M_1 \times M_2$ .

1)  $\Omega_i \in \Omega^{q_i}(M_i)$ ,  $q = q_1 + q_2$ . Dann sei

$$\Omega_1 \wedge \Omega_2 := (\text{pr}_1)^* \Omega_1 \wedge (\text{pr}_2)^* \Omega_2 \in \Omega^q(M), \text{ wobei}$$

$$\text{pr}_1 : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \text{ und}$$

$$\text{pr}_2 : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

2)  $V_i$  Vektorraum. Dann ist  $\mathcal{O}(V_1) \times \mathcal{O}(V_2) \longrightarrow \mathcal{O}(V_1 \oplus V_2)$

$$([D_1], [D_2]) \mapsto [D_1 \wedge D_2] =: [D_1] \wedge [D_2]$$

wohldefiniert und liefert mit 1):

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}^{q_1}(M_1) \times \hat{\Omega}^{q_2}(M_2) &\longrightarrow \hat{\Omega}^q(M) \\
(\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2) &\mapsto \hat{\Omega}_1 \wedge \hat{\Omega}_2.
\end{aligned}$$

Wenn  $q_i = \dim M_i$  und  $\hat{\Omega}_i$  den Radonmaßen  $\lambda_i$  entsprechen, so entspricht  $\hat{\Omega}_1 \wedge \hat{\Omega}_2$  dem Produktmaß

$$\lambda_1 \otimes \lambda_2 : f(x_1, x_2) \longmapsto \lambda_1 \left( x_1 \longmapsto \lambda_2(x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)) \right).$$

**Beweis:** Zum letzten:  $\lambda$  entspreche  $\hat{\Omega}_1 \wedge \hat{\Omega}_2$ .

In Karten  $\varphi_i$  auf  $M_i$  gilt  $\hat{\Omega}_i(x_i) = [g_i(x_i) dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^{q_i}, [dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^{q_i}]]$ ,  $i = 1, 2$ ,  
 $\Rightarrow \hat{\Omega}_1 \wedge \hat{\Omega}_2(x_1, x_2) = [g_1(x_1)g_2(x_2) dx_1^1 \wedge \cdots \wedge dx_1^{q_1} \wedge dx_2^1 \wedge \cdots \wedge dx_2^{q_2}, [dx_1^1 \wedge \cdots \wedge dx_1^{q_1} \wedge dx_2^1 \wedge \cdots \wedge dx_2^{q_2}]] \Rightarrow \lambda$  hat die Dichte  $g_1(x_1)g_2(x_2)$  des Produktmaßes.  $\square$

**Bsp.:** Es sei  $\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R$  wie in S. 3 der projektive Raum.

Dann ist  $P : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  surjektiv,  $C^\infty$  (vgl. S. 5) und  $P^{-1}(P(x)) = \{x, -x\}$  für  $x \in \mathbb{S}^n$ . Für  $\Omega \in \mathcal{T}_q(\mathbb{P}^n)$  ist also  $P^*(\Omega) \in \mathcal{T}_q(\mathbb{S}^n)$ . Wenn  $J : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto -x$ , so ist  $P \circ J = P$  und daher  $J^*P^*(\Omega) = P^*(\Omega)$ .

Umgekehrt, wenn  $\tilde{\Omega} \in \mathcal{T}_q(\mathbb{S}^n)$  mit  $J^*(\tilde{\Omega}) = \tilde{\Omega}$ , so ist  $\tilde{\Omega} = P^*(\Omega)$  für ein  $\Omega \in \mathcal{T}_q(\mathbb{P}^n)$ .

**(Beweis davon:**  $x \in \mathbb{S}^n$ ,  $U := \{y \in \mathbb{S}^n : \langle x, y \rangle > 0\} \Rightarrow P|_U : U \rightarrow V := P(U)$  Diffeomorphismus  $\Rightarrow \Omega_V := (P|_U)^*(\tilde{\Omega}|_U) \in \mathcal{T}_q(V)$ . Wenn  $z \in \mathbb{P}^n$ ,  $z \in V_1 \cap V_2$ ,  $V_i = P(U_i)$  und  $y_i \in U_i$  mit  $z = P(y_i)$ , so ist entweder  $y_1 = y_2$  und stimmen dann  $P|_{U_i}$  lokal bei  $y_1 = y_2$  überein ( $\Rightarrow \Omega_{V_1}(z) = \Omega_{V_2}(z)$ ) oder  $y_1 = -y_2 \Rightarrow P|_{U_1} = P|_{U_2} \circ J$  bei  $y_1 \Rightarrow (P|_{U_1})^*(\tilde{\Omega}|_{U_1}) = (J \circ P|_{U_2})^*(\tilde{\Omega}|_{U_1}) = (P|_{U_2})^*(\tilde{\Omega}|_{U_2})$  bei  $z$ , da  $J^*\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}$  ( $\Rightarrow$  wieder  $\Omega_{V_1}(z) = \Omega_{V_2}(z)$ ). Also ist  $\Omega_{V_1}|_{V_1 \cap V_2} = \Omega_{V_2}|_{V_1 \cap V_2} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{T}_q(\mathbb{P}^n)$  wohldefiniert und  $\tilde{\Omega} = P^*\Omega$ .  $\square$ )

Speziell folgt:  $\Omega^n(\mathbb{P}^n) \simeq \{\tilde{\Omega} \in \Omega^n(\mathbb{S}^n) : J^*\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}\}$ .  
 $\Omega \longmapsto P^*(\Omega)$ .

Da  $L \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$  nirgends verschwindet (vgl. S. 50), ist  $\Omega^n(\mathbb{S}^n) = \{f \cdot L : f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)\}$ .

$J^*L = J^*\left(\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}\right) = (-1)^{n+1} L$ . Daher gilt:

$$\Omega^n(\mathbb{P}^n) \simeq \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{S}^n) : f \begin{cases} \text{gerade} & : n \text{ ungerade} \\ \text{ungerade} & : n \text{ gerade} \end{cases} \right\}, \text{ d.h. } f \circ J = (-1)^{n+1} f,$$

$$\Omega \longmapsto f \text{ mit } P^*(\Omega) = f \cdot L.$$

Für ungerades  $n$  existiert also  $\Omega_L \in \Omega^n(\mathbb{P}^n)$  mit  $P^*\Omega_L := L$ . Da  $\forall x \in \mathbb{S}^n : L(x) \neq 0$  gilt auch  $\forall z \in \mathbb{P}^n : \Omega_L(z) \neq 0$ .

Für gerades  $n$  hingegen gilt:  $\forall \Omega \in \Omega^n(\mathbb{P}^n) : \exists z \in \mathbb{P}^n : \Omega(z) = 0$ , denn wenn  $P^*\Omega = f \cdot L$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$  ungerade  $\Rightarrow \max_{x \in \mathbb{S}^n} f(x) = -\min_{x \in \mathbb{S}^n} f(x) \Rightarrow 0 \in f(\mathbb{S}^n)$ ; wenn  $x \in \mathbb{S}^n : f(x) = 0 \Rightarrow P^*(\Omega)(x) = 0 \Rightarrow$  (da  $P$  lokal diffeomorph)  $\Rightarrow \Omega(P(x)) = 0$ . Somit:  $\mathbb{P}^n$  orientierbar  $\iff n$  ungerade, vgl. nächste Definition.

**Definition und Hilfsatz:**  $M$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

- 1)  $M$  heißt orientierbar : $\iff \exists \Omega \in \Omega^n(M) : \forall x \in M : \Omega(x) \neq 0$
- 2)  $M$  sei orientierbar. Wenn  $\Omega_i$  wie in 1), so sei  $\Omega_1 \sim \Omega_2 : \iff \forall x \in M : \exists c > 0 : \Omega_1(x) = c \Omega_2(x)$ . Eine Äquivalenzklasse bzgl.  $\sim$ , d.h. ein Element von  $\mathcal{O}(M) := \{\Omega \in \Omega^n(M) : \forall x \in M : \Omega(x) \neq 0\} / \sim$  heißt Orientierung von  $M$ . Ein Paar  $(M, O)$ ,  $O \in \mathcal{O}(M)$  heißt orientierte Mannigfaltigkeit.
- 3)  $M$  sei orientierbar. Für  $[\Omega] \in \mathcal{O}(M)$  sei  $-[\Omega] := [-\Omega]$  und  $[\Omega](x) := [\Omega(x)] \in \mathcal{O}(T_x M)$  für  $x \in M$ .
- 4) Wenn  $M$  zusammenhängend und orientierbar ist, so besteht  $\mathcal{O}(M)$  aus zwei Elementen.

**Beweis:** von 4): Wenn  $\Omega_i$  wie in 1) und  $\forall x \in M : \Omega_1(x) = c(x)\Omega_2(x)$ , so ist  $c \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$  und  $c(M) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $M$  zusammenhängend  $\implies c(M) \subset (0, \infty)$  oder  $\subset (-\infty, 0) \implies [\Omega_1] = \pm[\Omega_2]$ .  $\square$

**Bemerkung:** 1) Wenn  $V$  Vektorraum, so ist  $\mathcal{O}(V)$  nun auf 2 verschiedene Weisen definiert (für  $V$  Vektorraum bzw. für  $V$  Mannigfaltigkeit), die aber identifiziert werden können:

$$\mathcal{O}(V)_{S. 55} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)_{S. 64} : [x^1 \wedge \cdots \wedge x^n] \underset{\in \Lambda^n(V^*)}{\longmapsto} [\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n] \underset{\in \Omega^n(V)}{\longmapsto}$$

- 2) Mit Zerlegung der 1 lässt sich zeigen, dass Orientierbarkeit von  $l$  unabhängig ist, wenn  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und damit auch  $\mathcal{C}^l$ -Mannigfaltigkeit,  $1 \leq l \leq k$ . Orientierbarkeit lässt sich sogar (allerdings nicht so) für topologische Mannigfaltigkeiten definieren.

Für eine orientierte Mannigfaltigkeit können wir  $\Omega^q(M)$  und  $\hat{\Omega}^q(M)$  identifizieren. Speziell für  $q = n = \dim M$ :

**Satz**  $(M, O)$  orientierte  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ . Dann ist  $\Omega^n(M) \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}^n(M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}'_{k-1}(M)$

$$\Omega \longmapsto (x \longmapsto [\Omega(x), O(x)]) \longmapsto (f \longmapsto \int_V g(x)f(x) \mathrm{d}x),$$

wobei  $(\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A}_{\max}$  mit  $O(x) = [\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n] \in \mathcal{O}(T_x M)$ ,  $x \in U$  und  $f \in \mathcal{K}(U)$  und  $\Omega(x) = g(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ .

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass  $F : \Omega^n(M) \longrightarrow \hat{\Omega}^n(M)$  wie oben wohldefiniert ist. In einer Karte  $\varphi : U \longrightarrow V$  mit zusammenhängendem  $U$   $\exists \epsilon \in \{+1, -1\} : O(x) = \epsilon [\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n]$  (vgl. den Beweis oben). Wenn  $\Omega(x) = g(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ ,  $g \in \mathcal{C}^{k-1}(U)$ , so ist in der  $T\varphi$  entsprechenden Karte von  $\widehat{\Lambda}^n(T^*U)$  (vgl. S. 57):

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{F(\Omega)} & \widehat{\Lambda}^n(T^*U) \ (x, [g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \epsilon[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]]) \\
\varphi \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
V & \longrightarrow & V \times \mathbb{R} \\
& & \downarrow \wr \\
& & (\varphi(x), \epsilon g(x))
\end{array}$$

und daher  $F(\Omega) \in \mathcal{C}^{k-1}$ , d.h.  $F(\Omega) \in \hat{\Omega}^n(M)$ . Die Bijektivität ist klar.  $\square$

**Def.:**  $(M, O)$  orientierte  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ ,  $\Omega \in \Omega^n(M)$ . Für das zu  $\Omega$  gehörige Radonmaß  $\lambda \in \mathcal{K}'_{k-1}(M)$  schreibt man  $\int_M f(x)\Omega(x) =$  (genauer)  $\int_{(M, O)} f(x)\Omega(x) := \lambda(f)$ ,  $f \in L^1(M, \lambda)$ .

- Bsp.:**
- 1) Da  $\forall x \in \mathbb{S}^n : L(x) \neq 0$ , ist  $\mathbb{S}^n$  orientierbar.
  - 2) Wenn  $\Omega \in \Omega^n(M)$  und  $\forall x \in M : \Omega(x) \neq 0$ , so ist  $(M, [\Omega])$  eine orientierte Mannigfaltigkeit. Das dann zu  $\Omega$  gehörige Radonmaß ist  $|\Omega|$ . Hingegen ist  $-|\Omega|$  das zu  $\Omega$  bzgl. der Orientierung  $-[\Omega]$  gehörige Radonmaß.
  - 3) Wenn  $M$  parallelisierbar ist (speziell  $M$  Liegruppe), so ist  $M$  auch orientierbar. Denn wenn  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{T}^1(M)$  wie in S. 26,  $\Omega_1, \dots, \Omega_n \in \mathcal{T}_1(M)$  die duale Basis (vgl. S. 43), so verschwindet  $\Omega_1 \wedge \cdots \wedge \Omega_n \in \Omega^n(M)$  nirgends.
  - 4) Nochmals  $\mathbb{P}^n$ . Für  $n$  ungerade und eine gewählte Orientierung auf  $\mathbb{P}^n$  ist  $\Omega^n(\mathbb{P}^n) \simeq \mathcal{K}'_{k-1}(\mathbb{P}^n)$  ( $\mathbb{P}^n$  als  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit betrachtet). Für gerades  $n$  ist  $\mathbb{P}^n$  nicht orientierbar und erhält man die Radonmaße nur durch  $\hat{\Omega}^n(\mathbb{P}^n)$ . (Man kann zwar einem  $\Omega \in \Omega^n(\mathbb{P}^n)$  das positive Radonmaß  $|\Omega| \in \mathcal{K}'_0(\mathbb{P}^n)$  zuordnen, aber so würde man z.B. kein nirgends verschwindendes Radonmaß erhalten.) Wir wollen daher  $\hat{\Omega}^n(\mathbb{P}^n)$  auch durch  $\Omega^n(\mathbb{S}^n) \simeq \hat{\Omega}^n(\mathbb{S}^n)$  charakterisieren, so wie das für  $\Omega^n(\mathbb{P}^n)$  in S. 63 geschehen ist.
- Dazu allgemeiner:

**Definition und Hilfssatz:**  $(M, [\mathfrak{A}])$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

- 1)  $M^o := \{(x, o) : x \in M, o \in \mathcal{O}(T_x M)\}$  ist wieder eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit folgendem Atlas: Für  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$  sei  
 $\tilde{U}_\pm := \{(x, \pm[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]) : x \in U\}$  und  
 $\tilde{\varphi}_\pm : \tilde{U}_\pm \longrightarrow V : (x, \pm[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]) \longmapsto \varphi(x)$ .
- 2)  $P : M^o \longrightarrow M : (x, o) \longmapsto x$  und  $J : M^o \longrightarrow M^o : (x, o) \longmapsto (x, -o)$  sind  $\mathcal{C}^k$ . ( $P : M^o \longrightarrow M$  heißt orientierte Überlagerung von  $M$ .)
- 3)  $M^o$  ist orientierbar und es existiert eine kanonische Orientierung auf  $M^o$ .

- 4)  $0 \leq q \leq n$ .  $\Omega^q(M) \simeq \{\tilde{\Omega} \in \Omega^q(M^o) : J^*\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}\} : \Omega \longmapsto P^*\Omega$ ,  
 $\hat{\Omega}^q(M) \simeq \{\tilde{\Omega} \in \Omega^q(M^o) : J^*\tilde{\Omega} = -\tilde{\Omega}\} : \hat{\Omega} \longmapsto \tilde{\Omega} : (x, o) \longmapsto \begin{cases} \omega(x, o) \\ \in \Lambda^q(T_{(x,o)}^*M^o) \end{cases}$ , wobei  
 $T_{(x,o)}M^o \simeq T_x M : [x(t), o(t)] \longmapsto [x(t)], T_{(x,o)}^*M^o \simeq T_x^*M$ , und  
 $\hat{\Omega}(x) = [\omega(x, o), o]$ .

**Bemerkung:** Der Ausdruck „ungerade  $q$ -Form“ für  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^q(M)$  ist durch die Aussage in 4) motiviert.

**Beweis:** 1)  $\tilde{\psi}_\pm \circ \tilde{\varphi}_\pm^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \mathcal{C}^k$ .

2) In Koordinaten sind  $P$  und  $J$  die identische Abbildung.

3)  $M = \bigcup U_i$  sei eine Überdeckung durch Kartengebiete  $U_i$  und  $\chi_i$  eine zugehörige lokalendliche  $\mathcal{C}^k$ -Zerlegung der 1. Für  $U_i$  sei ein  $\Omega_i \in \Omega^n(U_i)$  mit  $\forall x \in U_i : \Omega_i(x) \neq 0$  gewählt. Setze

$$\tilde{\Omega}(x, o) := \sum_{x \in U_i} \chi_i(x) \cdot \begin{cases} \Omega_i(x) & : [\Omega_i(x)] = o \\ -\Omega_i(x) & : [\Omega_i(x)] = -o \end{cases} \quad (\in \Lambda^n(T_x^*M) \simeq \Lambda^n(T_{(x,o)}^*M^o))$$

In einer Karte  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$  gilt dann für  $x \in U \cap U_i : \Omega_i(x) = g_i(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  mit nicht verschwindenden  $g_i \in \mathcal{C}^{k-1}(U \cap U_i) \implies$  in den Karten  $\tilde{\varphi}_\pm$  ist  $\tilde{\Omega}(x, o) = \tilde{\Omega}(x, \pm[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]) = \pm \sum_{x \in U_i} \chi_i(x) |g_i(x)| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \mathcal{C}^{k-1}$  und  $\neq 0$ . Offenbar ist

$[\tilde{\Omega}] \in \mathcal{O}(M^o)$  von der Wahl der  $U_i$  und  $\Omega_i$  unabhängig, da  $[\tilde{\Omega}](x, o) = o$ .

4) Dass  $\Omega^q(M) \simeq \{\tilde{\Omega} \in \Omega^q(M^o) : J^*\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}\}$  wird ebenso wie in S. 63 für  $P : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$  gezeigt.

Zu  $\hat{\Omega}^q(M)$ : In einer Karte  $\varphi : U \longrightarrow V$  ist  $\hat{\Omega}(x) = [g_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q}, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]] \implies$  bzgl.  $\tilde{\varphi}_\pm$  ist  $\tilde{\Omega}(x, o) = \tilde{\Omega}(x, \pm[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]) = \pm g_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q} \implies \tilde{\Omega} \in \Omega^q(M^o)$  und  $J^*\tilde{\Omega} = -\tilde{\Omega}$ .  $\square$

**Bsp.:** 1) Wenn  $M$  orientierbar ist, so ist

$$M^o \simeq M \times \{0, 1\} : (x, o) \longmapsto \begin{cases} (x, 0) : o = O(x) \\ (x, 1) : o = -O(x), \end{cases}$$

wenn  $O \in \mathcal{O}(M)$  fest gewählt wird.

2) Noch einmal  $\mathbb{P}^n$ . Wenn  $n$  gerade ist, so können wir  $P : (\mathbb{P}^n)^o \longrightarrow \mathbb{P}^n$  mit  $P : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$  identifizieren:

$I : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}^n)^o : x \longmapsto ([x]_{\in \mathbb{P}^n}, \underbrace{[(Q^*L)[x]]}_{\in \mathcal{O}(T_{[x]} \mathbb{P}^n)})$ , wobei  $Q = P|_U^{-1}$ ,  $x \in U \subset \mathbb{S}^n$  offen,  $P|_U$

bijektiv.

(Dass  $I \mathcal{C}^\infty$ , sieht man in Karten.  $I$  ist injektiv, denn  $I(-x) = ([x], [(J \circ Q)^*L[x]]) =$

$([x], -[(Q^*L)[x]])$  nach S. 63 und da  $n$  gerade ist.)

Also folgt  $\hat{\Omega}^q(\mathbb{P}^n) \simeq \{\tilde{\Omega} \in \Omega^q(\mathbb{S}^n) : J^*\tilde{\Omega} = -\tilde{\Omega}\}$ . Speziell liefert  $L$  ein positives, nirgends verschwindendes Radonmaß (mit  $C^\infty$ -Dichte)  $\lambda$  auf  $\mathbb{P}^n$ . Für ungerades  $n$  setze man  $\lambda = |\Omega_L|$ ,  $\Omega_L$  wie in S. 63. Dann ist

$\forall n \in \mathbb{N} : (\{x \in \mathbb{S}^n : x^{n+1} > 0\}, |L|) \xrightarrow{P} (\{[x] \in \mathbb{P}^n : x^{n+1} \neq 0\}, \lambda)$  ein maßtheoretischer Isomorphismus.  $\{[x] \in \mathbb{P}^n : x^{n+1} = 0\}$  hat Maß 0  $\implies \int_{\mathbb{P}^n} \lambda = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ .

## Übungen

Üb. 4.1  $X$  LCH. Zeige, dass für  $\lambda : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$  linear und positiv (d.h.  $\forall f \in \mathcal{K}(X)$  mit  $(\forall x \in X : f(x) \geq 0) : \lambda(f) \geq 0$ ) gilt, dass  $\lambda \in \mathcal{K}'(X)$ , d.h. 6) (ii), S. 53.

Hinweis: Für  $K \subset X$  kompakt:  $\exists U, V$  offen:  $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$  und  $\overline{V}$  ist kompakt.  $\overline{V}$  normal  $\implies$  (Urysohn)  $\exists \chi \in \mathcal{C}(\overline{V})$  mit  $\chi|_K \equiv 1$ ,  $\chi|_{\overline{V} \setminus U} \equiv 0$  und  $\forall x \in \overline{V} : \chi(x) \geq 0$ . Setze  $\chi$  durch 0 auf  $X$  fort und schätze  $|\lambda(f)| = |\lambda(\chi \cdot f)|$ ,  $f \in \mathcal{K}(X)$ ,  $\text{supp } f \subset K$ , ab.

Üb. 4.2 Es sei

$$\psi : (0, \pi)^{n-1} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{S}^n : (\vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1}, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \sin \vartheta^1 \cdots \sin \vartheta^{n-1} \cos \varphi \\ \sin \vartheta^1 \cdots \sin \vartheta^{n-1} \sin \varphi \\ \sin \vartheta^1 \cdots \cos \vartheta^{n-1} \\ \vdots \\ \sin \vartheta^1 \cos \vartheta^2 \\ \cos \vartheta^1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\psi^{-1}$  eine Karte auf  $\mathbb{S}^n$  (=Kugelkoordinaten).

a) Drücke  $L$  durch diese Koordinaten aus.

$$\text{b) Berechne damit } \int_{\mathbb{S}^n} |L| = |L|(1) = \int_{(\mathbb{S}^n, L)} L(x).$$

Hinweis: Für  $x^1 \neq 0$  ist  $L = \frac{1}{x^1} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$  (vgl. S. 61).

$$\int_0^\pi \sin^\alpha \vartheta d\vartheta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2})}, \quad \alpha > -1.$$

Üb. 4.3  $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$  sei die stereographische Projektion wie in S. 9.

a) Berechne  $P^*(L) \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ .

b) Berechne damit  $\int_{\mathbb{S}^n} |L| = \int_{\mathbb{R}^n} |P^*(L)|$ .

$$\text{Hinweis: } \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(1+r^2)^n} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})}{2^n \Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Üb. 4.4 Drücke  $\lambda \in \hat{\Omega}^n(\mathbb{P}^n)$  wie in S. 66 in den Koordinaten

$$\{[z] \in \mathbb{P}^n : z^{n+1} \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : [z] \longmapsto \left( \frac{z^1}{z^{n+1}}, \dots, \frac{z^n}{z^{n+1}} \right)^T = (x^1, \dots, x^n)^T$$

aus und berechne so  $\int_{\mathbb{P}^n} \lambda$ .

Hinweis:  $P : \{[z] \in \mathbb{P}^n : z^{n+1} > 0\} \simeq \{y \in \mathbb{S}^n : y^{n+1} > 0\} : [z] \longmapsto \frac{z}{|z|}$  und

$$\lambda = |P^* L| \cdot \int_0^\infty r^{n-1} (1+r^2)^{-(n+1)/2} dr = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})}{2 \Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Üb. 4.5 Es sei  $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  und  $\lambda = |\Omega|$ ,  $\Omega \in \Omega_l^3(G)$  mit  $\Omega(I) = da_2^1 \wedge da_3^2 \wedge da_1^3$  und  $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow G$  wie in S. 13. Nach Üb. 3.7, S. 52 ist  $f^*(\Omega) = -2(1-\cos \varphi)L \wedge d\varphi \in \Omega^3(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ .

a) Berechne  $\lambda(1) = \int_G \lambda$ .

Hinweis:  $f|_{\mathbb{S}^2 \times \{x \in \mathbb{S}^1 : x^2 > 0\}}$  ist injektiv.

b) Es sei  $\lambda_1 := \lambda/\lambda(1)$  (= normalisiertes Haarmaß). Begründe theoretisch und verifiziere durch Rechnung, dass  $\lambda_1(A \longmapsto a_1^1) = 0$ ,  $\lambda_1(A \longmapsto (a_1^1)^2) = \frac{1}{3}$ .

c) Berechne  $\lambda_1(A \longmapsto e^{tA})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , und – durch Differenzieren –  $\lambda_1(A \longmapsto A^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Hinweis: Berechne  $\lambda_1(A \longmapsto e^{tA}y) \in \mathbb{R}^3$  für  $y \in \mathbb{R}^3$  mittels der Formel  $e^{tA_{x,\varphi}}y = x\langle y, x \rangle (e^t - \operatorname{Re}(e^{t e^{i\varphi}})) + y \operatorname{Re}(e^{t e^{i\varphi}}) + (x \times y) \operatorname{Im}(e^{t e^{i\varphi}})$ . Verwende die Substitution  $z = e^{i\varphi}$  und den Residuensatz zur Berechnung des  $\varphi$ -Integrals.

Üb. 4.6 Es sei  $M := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < \pi\}$  und  $h : M \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

$$x \longmapsto \begin{cases} A_{\frac{x}{|x|}, |x|} & : x \neq 1 \\ I & : x = 1 \end{cases}$$

wobei  $A_{y,\varphi}$ ,  $y \in \mathbb{S}^2$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , wie in S. 13.

a) Zeige, dass  $h \in \mathcal{C}^\infty$  und injektiv und dass  $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \setminus h(M)$  Maß 0 bzgl.  $\lambda$  hat.

b) Bestimme das Maß auf  $M$ , das  $\lambda_1|_{h(M)}$  entspricht.

Üb. 4.7 a) Zeige, dass  $da_j^i$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , eine Basis in  $T_I^*\text{SO}_n(\mathbb{R})$  bildet. Es sei  $\Omega^{(n)} \in \Omega_l^{n(n-1)/2}(\text{SO}_n(\mathbb{R}))$  mit  $\Omega^{(n)}(I) = da_2^1 \wedge da_3^1 \wedge da_3^2 \wedge da_4^1 \wedge da_4^2 \wedge da_4^3 \wedge \cdots \wedge da_n^1 \wedge \cdots \wedge da_n^{n-1}$  und  $\lambda^{(n)} := |\Omega^{(n)}| \in \mathcal{K}'(\text{SO}_n(\mathbb{R}))$ .

b) Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sei  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$  und für  $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$  mit  $x + y \neq 0$  sei  $A_{x,y}u := u + \langle u, x \rangle \left( y + \frac{\langle x, y \rangle y - x}{\langle x, y \rangle + 1} \right) - \langle u, y \rangle \frac{x + y}{\langle x, y \rangle + 1}$ . Zeige, dass  $A_{x,y} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  mit  $A_{x,y}x = y$ .

c) Für  $x \in \mathbb{R}^n$  sei  $x = \begin{pmatrix} x' \\ x^n \end{pmatrix}$ ,  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ;  $e := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  und

$$\text{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R}) : B \longmapsto \left( \begin{pmatrix} x' \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Bx' \\ x^n \end{pmatrix} \right).$$

Zeige, dass  $f : (\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-e\}) \times \text{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R}) : (x, B) \longmapsto A_{e,x} \cdot B$   $\mathcal{C}^\infty$  und injektiv ist und dass  $\text{SO}_n(\mathbb{R}) \setminus \text{im}(f)$  eine Nullmenge bzgl.  $\lambda$  ist.

d) Zeige, dass  $f^*(\Omega^{(n)}) = (-1)^{n-1} \Omega^{(n-1)} \wedge L$ ,  $L \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  (S. 62).

Hinweis:  $f^{-1} : \text{im}(f) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-e\} \times \text{SO}_{n-1}(\mathbb{R}) : C \longmapsto (C_n, A_{e,C_n}^{-1} C)$ , wobei  $C_n := \begin{pmatrix} c_n^1 \\ \vdots \\ c_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $(f^{-1})^*(\Omega^{(n-1)} \wedge L)$  linksinvariant ist.

e) Berechne  $\lambda^{(n)}(1) = \int_{\text{SO}_n(\mathbb{R})} \lambda^{(n)} !$  Es sei  $\lambda_1^{(n)} := \lambda^{(n)} / \lambda^{(n)}(1)$ .

Berechne  $\lambda_1^{(n)}(A \longmapsto (a_j^i)^k)$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Hinweis:  $\int_0^\pi \cos^{2l} \vartheta \sin^{n-2} \vartheta d\vartheta = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \Gamma(l + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + l)}$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, n \geq 2$ .

Üb. 4.8 Es sei  $\Omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$  und  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit Orientierung  $O \in \mathcal{O}(M)$ . Schreibe  $I := \int_{(U,O|_U)} i^* \Omega$  als Integral über  $V$  an, wenn  $\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  eine Karte

auf  $M$  ist. Wie lässt sich  $I$  als Durchflussintegral interpretieren?

Üb. 4.9 a) Zeige, dass eine Mannigfaltigkeit genau dann orientierbar ist, wenn es einen Atlas  $\mathfrak{A}$  gibt, sodass  $\forall (\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T), (\psi : U' \rightarrow V' : x \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T) \in \mathfrak{A} : \forall x \in U \cap U' : \det \left( \frac{\partial(x^{1'}, \dots, x^{n'})}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \right) > 0$ .

b) Zeige, dass  $\mathbb{P}^n$ ,  $n$  ungerade, orientierbar ist mittels a).

Hinweis: Berechne die Funktionaldeterminante von

$$\psi_j \psi_{n+1}^{-1} : (y^1, \dots, y^n)^T \mapsto \left( \frac{y^1}{y^j}, \dots, \frac{\widehat{y_j}}{y^j}, \dots, \frac{y^n}{y^j}, \frac{1}{y^j} \right)^T$$

und setze  $\mathfrak{A} := \{(-1)^{j-1} \psi_j : j = 1, \dots, n+1\}$ , wobei  $\psi_j$  wie in S. 3.

c) Zeige, dass eine Mannigfaltigkeit genau dann nicht orientierbar ist, wenn es  $N \in \mathbb{N}$  und Karten  $(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i : x \mapsto (x_i^1, \dots, x_i^n)^T)$ ,  $i = 1, \dots, N+1$  gibt und mit  $\varphi_1 = \varphi_{N+1}$ ;  $\forall i : U_i$  zusammenhängend;  $\forall i \in \{1, \dots, N\} : U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ ;

$$\forall x \in U_i \cap U_{i+1} : \det \left( \frac{\partial(x_{i+1}^1, \dots, x_{i+1}^n)}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^n)} \right) \begin{cases} > 0 : i = 1, \dots, N-1, \\ < 0 : i = N. \end{cases}$$

d) Zeige mittels c), dass  $\mathbb{P}^n$ ,  $n$  gerade, nicht orientierbar ist.

Hinweis: Setze  $\varphi_1 = \psi_{n+1}$ ,  $\varphi_2 = \psi_n|_{\{x^n < 0\}}$ ,  $\varphi_3 = \psi_n$ ,  $\varphi_4 = \psi_n|_{\{x^n > 0\}}$ .

e) Zeige, dass das Möbiusband (vgl. S. 15, 38) nicht orientierbar ist.

Üb. 4.10 Zeige, dass für jede Mannigfaltigkeit  $(M, [\mathfrak{A}])$  die Mannigfaltigkeiten  $T^*M$  und  $TM$  kanonisch orientierbar sind.

Hinweis: a) Es seien  $(\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T) \in \mathfrak{A}$  und

$$\widetilde{T}\varphi : T^*U \rightarrow V \times \mathbb{R}^n : (x, \omega) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \omega_1, \dots, \omega_n)^T$$

Zeige, dass  $\Omega := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_n$  von der Karte unabhängig ist.

b) Definiere  $O \in \mathcal{O}(TM)$  lokal durch  $O|_{TU} = [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^n]$ , wenn  $T\varphi : TU \rightarrow V \times \mathbb{R}^n : (x, \xi) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)^T$ , und konstruiere  $O$  wie in S. 66, 3).

## § 5 d, $\partial$ , de Rham und Stokes

Für  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  ist  $df \in \mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$  in Koordinaten durch  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$  gegeben (vgl. S. 41). Wir könnten allgemeiner für  $X = (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}) \in \mathcal{T}_q^m(M)$  versuchen,  $dX$  durch  $\frac{\partial t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{j_0}} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_m} \otimes dx^{j_0} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$  zu definieren. Wenn dies ein Tensorfeld in  $\mathcal{T}_{q+1}^m(M)$  wäre, so müsste bei Kartenwechsel gelten (vgl. S. 47):

$$\frac{\partial t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{j_0}}' = \frac{\partial t_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_m}}{\partial x^{l_0}} \cdot \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_0}}{\partial x^{j_0}} \dots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x^{j_q}} =: a.$$

In Wahrheit ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{j_0}}' &= \frac{\partial x^{l_0}}{\partial x^{j_0}} \cdot \frac{\partial (t_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x^{j_q}})}{\partial x^{l_0}} = \\ &= a + \underbrace{t_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_m} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{j_0}} \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \right)}_b. \end{aligned}$$

Der Term  $b$  sollte verschwinden, worauf wir später allgemein zurückkommen. Nun sei speziell  $X \in \mathcal{T}_q(M)$ , d.h. rein kovariant. Dann ist

$$b = b_{j_0 \dots j_q} = t_{l_1 \dots l_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_0}} \left( \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \right).$$

Der schiefsymmetrische Anteil von  $b$  verschwindet, d.h.  $\sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign}(\sigma) b_{j_{\sigma(0)} \dots j_{\sigma(q)}} = 0$ .

(Hier  $S_{q+1}$  = Permutationsgruppe von  $\{0, \dots, q\}$ .) Denn wenn  $f^1, \dots, f^q$   $\mathcal{C}^2$ -Funktionen von  $y^0, \dots, y^q$  sind, so tritt in der Summe

$S = \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign}(\sigma) \frac{\partial}{\partial y^{\sigma(0)}} \left( \frac{\partial f^1}{\partial y^{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial f^q}{\partial y^{\sigma(q)}} \right)$  der Term  $\frac{\partial f^1}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial^2 f^i}{\partial y^{k_0} \partial y^{k_i}} \dots \frac{\partial f^q}{\partial y^{k_q}}$  mit

$k_1 = \sigma(1), \dots, k_i = \widehat{\sigma(i)}, \dots, k_q = \sigma(q)$  zweimal auf, und zwar multipliziert mit

$\text{sign} \binom{0 \dots q}{k_0 \dots k_q}$  bzw. mit  $\text{sign} \binom{0 & 1 & \dots & i & \dots & q}{k_i & k_1 & \dots & k_0 & \dots & k_q}$  und kürzt sich also weg.

Daher ist  $S = 0$ .

Also ist auch für  $X = (t_{j_1 \dots j_q}) \in \mathcal{T}_q(M)$  und  $x_0 \in M$

$$\begin{aligned} d_{x_0} X := dX &:= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign}(\sigma) \frac{\partial t_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}}{\partial x^{j_{\sigma(0)}}} dx^{j_0} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign}(\sigma) \frac{\partial t_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^{j_0}} dx^{j_{\sigma(0)}} \otimes \dots \otimes dx^{j_{\sigma(q)}} \\ &= \frac{1}{q!} \frac{\partial t_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^{j_0}} dx^{j_0} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \frac{1}{q!} dt_{j_1 \dots j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \in \end{aligned}$$

$\in \Lambda^{q+1}(T_{x_0}^*M)$  unabhängig von den gewählten Koordinaten. Bei der Summenbildung bzgl.  $j$  bleibt nur der schiefsymmetrische Anteil von  $X$  erhalten. Wir können daher gleich mit  $\Omega \in \Omega^q(M)$  starten:

$$\Omega = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \omega_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}$$

mit schiefsymmetrischen  $\omega_{i_1 \dots i_q}$  (vgl. S. 47)  $\implies$

$$d\Omega = \frac{1}{q!} d\omega_{i_1 \dots i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \sum_{i_1 < \dots < i_q} d\omega_{i_1 \dots i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \quad (*)$$

**Definition und Hilfssatz:**  $M$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $\Omega^0(M) := \mathcal{C}^\infty(M)$ .

- 1)  $0 \leq q \leq n$ . Die äußere Ableitung  $d : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M)$  ist durch die in jeder Karte gültige Formel  $(*)$  definiert. Sie erfüllt:
  - a)  $\Omega_i \in \Omega^{q_i}(M) \implies d(\Omega_1 \wedge \Omega_2) = (d\Omega_1) \wedge \Omega_2 + (-1)^{q_1} \Omega_1 \wedge d\Omega_2$ . (Beachte, dass  $\Omega_1 \wedge \Omega_2 = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ , wenn  $q_1 = 0$  oder  $q_2 = 0$ .)
  - b) Für  $f : M \longrightarrow N$   $\mathcal{C}^\infty$  und  $\Omega \in \Omega^q(N)$  ist  $f^*(d\Omega) = df^*(\Omega) \in \Omega^{q+1}(M)$ .
- 2)  $0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$  ist ein „Komplex“, d.h.  $d \circ d = 0$ .
- 3) Für beliebige  $f_0, \dots, f_q \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gilt  $d(f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_q) = df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_q$ .

**Beweis:** 1) Nach dem obigen ist  $d$  durch  $(*)$  wohldefiniert und linear. Nach Umordnung folgt aus  $(*)$  für  $1 \leq i_1, \dots, i_q \leq n$ :  $d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$ .

a) Wegen der Linearität von  $d$  genügt es  $\Omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q_1}}$ ,  $\Omega_2 = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{q_2}}$  zu betrachten.

$$\begin{aligned} d(\Omega_1 \wedge \Omega_2) &= d(fg dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q_1}} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{q_2}}) \\ &= (fdg + gdf) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q_1}} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{q_2}} \\ &= g df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q_1}} + (-1)^{q_1} f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{q_1}} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{q_2}} = \\ &= (d\Omega_1) \wedge \Omega_2 + (-1)^{q_1} \Omega_1 \wedge d\Omega_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f^*(d(g dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q})) &= f^*(dg \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}) = \\ &= d(g \circ f) \wedge d(x^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_q} \circ f) = d(g \circ f d(x^{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x^{i_q} \circ f)) = \\ &= df^*(g dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) dd(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i < j} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}} \right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} = 0.$$

3) folgt aus 1)a) und 2) durch Induktion.  $\square$

**Bemerkung:** Natürlich kann man  $d$  auch auf Formen  $\Omega \in \Omega^q(M)$  einer  $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 2$ , anwenden (d.h.  $\Omega$  hat  $C^{k-1}$ -Koeffizienten in einer Karte) und erhält  $d\Omega$  mit  $C^{k-2}$ -Koeffizienten, d.h.  $d\Omega \in \Omega^{q+1}(M)$  als  $C^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit). Dies werde ich z.B. beim Satz von Stokes verwenden.

**Bsp.:** 1)  $L = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n) \implies dL = n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$

2) Für  $M = \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3 \hat{=} \text{ „grad } f“$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) : \omega_i dx^i \mapsto \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \hat{=} \text{ „rot } \omega“.$$

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3) : \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2 \mapsto$$

$$\left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \hat{=} \text{ „div } \omega“.$$

$d \circ d = 0$  heißt  $\text{rot grad} = 0$ ,  $\text{div rot} = 0$ .

Die Zuordnung von Vektorfeldern bzw. Funktionen zu diesen Differentialformen ist erst mit Riemannscher Metrik möglich, vgl. § 6.

Man kann  $d$  auch, obwohl umständlich, koordinatenfrei definieren:

**Hilfssatz:**  $M$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $\Omega \in \Omega^q(M)$ ,  $X_0, \dots, X_q \in T^1(M)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wie in S. 49. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle d\Omega, X_0 \otimes \cdots \otimes X_q \rangle &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \underbrace{X_i}_{\in \text{Der}(M)} \left( \underbrace{\langle \Omega, X_0 \otimes \cdots \otimes \widehat{X}_i \otimes \cdots \otimes X_q \rangle}_{\in C^\infty(M)} \right) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \langle \Omega, [X_i, X_j] \otimes X_0 \otimes \cdots \otimes \widehat{X}_i \otimes \cdots \otimes \widehat{X}_j \otimes \cdots \otimes X_q \rangle. \end{aligned}$$

Speziell:  $q = 0 : \langle df, X \rangle = X(f)$  (vgl. S. 44),  
 $q = 1 : \langle d\Omega, X \otimes Y \rangle = X(\langle \Omega, Y \rangle) - Y(\langle \Omega, X \rangle) - \langle \Omega, [X, Y] \rangle$

**Beweis:** Üb. 5.1, S. 82.

Aus der Physik ist bekannt, dass ein Kraftfeld im  $\mathbb{R}^3$  genau dann ein Potential hat, wenn seine Rotation verschwindet. (In nicht einfach zusammenhängenden Gebieten ist es anders.) Wir formulieren diesen Sachverhalt in der Sprache der Differentialformen.

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit

- 1)  $\Omega \in \Omega^q(M)$  heißt geschlossen (oder Cozykel):  $\iff d\Omega = 0$ .
- 2)  $\Omega \in \Omega^q(M)$  heißt exakt (oder Corand):  $\iff \exists \Omega_1 \in \Omega^{q-1}(M) : d\Omega_1 = \Omega$ .

**Bemerkung:** Offenbar gilt immer: exakt  $\implies$  geschlossen.

Im  $\mathbb{R}^n$  gilt auch die Umkehrung:

**Poincarésches Lemma:** Wenn die  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  zu  $\mathbb{R}^n$  diffeomorph ist, so ist für  $q > 0$  jede geschlossene  $q$ -Form auch exakt.

**Beweis:** OEdA  $M = \mathbb{R}^n$ . Wir halten  $q$  fest und verwenden Induktion nach  $n - q$ .

*Induktionsbeginn:*  $n = q$ .

Es sei  $\Omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  (dann ist automatisch  $d\Omega = 0$ )  $\implies \Omega = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Setze  $\Omega_1 := g(x) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$  mit  $g(x) := \int_0^{x^1} f(t, x^2, \dots, x^n) dt \implies \Omega = d\Omega_1$ .

*Induktionsannahme:* Das Lemma ist gültig für  $\Omega^q(\mathbb{R}^{n-1})$ .

*Induktionsschluss:* Es sei  $\Omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$  geschlossen  
 $\iff \sum_{j_1 < \cdots < j_q} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} = 0 \iff \forall j_0 < j_1 < \cdots < j_q \text{ gilt:}$   
der Koeffizient von  $dx^{j_0} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}$  ist 0, d.h.

$$\frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^{j_0}} - \frac{\partial \omega_{j_0 j_2 \dots j_q}}{\partial x^{j_1}} + \cdots + (-1)^q \frac{\partial \omega_{j_0 \dots j_{q-1}}}{\partial x^{j_q}} = 0. \quad (*)$$

Es sei für  $1 < k_2 < \cdots < k_q \leq n$ :

$$\eta_{k_2 \dots k_q} := \int_0^{x^1} \omega_{1k_2 \dots k_q}(t, x^2, \dots, x^n) dt$$

und  $\Omega_1 := \sum_{1 < k_2 < \cdots < k_q \leq n} \eta_{k_2 \dots k_q} dx^{k_2} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q}$ . Dann ist

$$d\Omega_1 = \sum_{1 < k_2 < \cdots < k_q \leq n} \omega_{1k_2 \dots k_q} dx^1 \wedge dx^{k_2} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q} +$$

$$+ \sum_{1 < k_2 < \dots < k_q \leq n} \sum_{i=2}^n \left( \int_{t=0}^{x^1} \frac{\partial \omega_{1k_2 \dots k_q}}{\partial x^i} (t, x^2, \dots, x^n) dt \right) dx^i \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{k_q}.$$

Für  $1 < j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$  ist der Koeffizient von  $dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$  im zweiten Teil von  $d\Omega_1$  das Integral über

$$\frac{\partial \omega_{1j_2 \dots j_q}}{\partial x^{j_1}} - \frac{\partial \omega_{1j_1 j_2 j_3 \dots j_q}}{\partial x^{j_2}} + \dots = (\text{nach } (*)) = \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } d\Omega_1 &= \sum_{1 < k_2 < \dots < k_q \leq n} \omega_{1k_2 \dots k_q} dx^1 \wedge dx^{k_2} \wedge \dots \wedge dx^{k_q} + \\ &+ \sum_{1 < j_1 < \dots < j_q \leq n} [\omega_{j_1 \dots j_q}(x) - \omega_{j_1 \dots j_q}(0, x^2, \dots, x^n)] dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\ &= \Omega - \underbrace{\sum_{1 < j_1 < \dots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \dots j_q}(0, x^2, \dots, x^n) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}}_{=: \Omega_2}. \end{aligned}$$

Es gilt  $d\Omega_2 = d\Omega - dd\Omega_1 = 0$  und  $\Omega_2 \in \Omega^q(\mathbb{R}_{x^2, \dots, x^n}^{n-1}) \implies$  (Induktionsannahme)  $\implies$   
 $\implies \Omega_2 = d\Omega_3, \Omega_3 \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}_{x^2, \dots, x^n}^{n-1}) \implies \Omega = d(\Omega_1 + \Omega_3)$

(wobei  $P^* : \Omega^q(\mathbb{R}_{x^2, \dots, x^n}^{n-1}) \hookrightarrow \Omega^q(\mathbb{R}^n), P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} : x \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ ).  $\square$

Das Poincarésche Lemma lässt sich auch so formulieren: Die de Rhamschen Cohomologiegruppen von  $\mathbb{R}^n$  verschwinden.

### Definition und Hilfssatz:

- 1)  $M$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .  
Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $H^q(M) :=$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{f \in \mathcal{C}^\infty(M) : df = 0\} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ lokalkonstant}\} & : q = 0 \\ \{\Omega \in \Omega^q(M) : d\Omega = 0\} / \{d\Omega : \Omega \in \Omega^{q-1}(M)\} & : 0 < q \leq n \\ \{0\} & : q > n \end{array} \right.$$

heißt de Rhamsche Cohomologiegruppe der Ordnung  $q$ .

- 2)  $f : M \longrightarrow N$   $\mathcal{C}^\infty$ . Dann ist  $H^q(f) : H^q(N) \longrightarrow H^q(M) : [\Omega] \mapsto [f^*\Omega]$  wohldefiniert und linear.  $H^q$  ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit in die der  $\mathbb{R}$ -Vektorräume, d.h.  
 $H^q(\text{id}) = \text{id}, H^q(f \circ g) = H^q(g) \circ H^q(f)$ .

**Beweis:**  $[\Omega] = [\tilde{\Omega}] \in H^q(N) \implies \Omega - \tilde{\Omega} = d\Omega_1, \Omega_1 \in \Omega^{q-1}(N) \implies$   
 $\implies f^*\Omega - f^*\tilde{\Omega} = f^*d\Omega_1 = df^*\Omega_1 \implies [f^*\Omega] = [f^*\tilde{\Omega}]$ .  $\square$

**Bsp.:** 1)  $H^0(M) \simeq \mathbb{R}^Z$ ,  $Z =$  Menge der Zusammenhangskomponenten von  $M$ .

2) Wir bestimmen  $H^1(\mathbb{S}^1)$ .

$\mathcal{T}^1(\mathbb{S}^1)$  hat als  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ -Modul die Basis  $\frac{d}{d\vartheta}$  (vgl. S. 24).

Die duale Basis von  $\mathcal{T}_1(\mathbb{S}^1) = \Omega^1(\mathbb{S}^1)$  werde mit  $d\vartheta$  bezeichnet. Für festes  $a \in \mathbb{R}$  und

$$\varphi_a : \mathbb{S}^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow (a, a + 2\pi) : \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \vartheta$$

ist  $d\vartheta|_{\mathbb{S}^1 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \right\}} = d\varphi_a$ . (Beachte aber, dass das „d“ in  $d\vartheta$  nur symbolisch ist, da  $\vartheta \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ .) Es ist also  $\Omega^1(\mathbb{S}^1) = \{f \cdot d\vartheta : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)\}$ .

Wenn wir die „universelle Überlagerung“  $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 : \vartheta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$  verwenden, so kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{S}^1) & f(x) d\vartheta \\ \downarrow & \downarrow U^* & & \downarrow U^* & \downarrow \\ f\left(\begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}\right) & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}) : g \longmapsto g' d\vartheta & \left\| f\left(\begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}\right) d\vartheta \right\| \end{array}$$

Offenbar ist  $U^*$  injektiv und hat das Bild  $\mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)$  bzw.  $\Omega^{1,\text{per}}(\mathbb{R}^1) = \{f d\vartheta : f \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)\}$  (vgl. auch S. 26). Also erhalten wir

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{S}^1) &\simeq \{f d\vartheta : f \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)\} / \{g'(\vartheta) d\vartheta : g \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)\} \\ &\simeq \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) / \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)'. \end{aligned}$$

Für  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)$  gilt:  $(\exists g : f = g') \iff \int_0^\vartheta f(t) dt \in \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) \iff \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ .

Das liefert

$$\mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1) / \mathcal{C}_{\text{per}}^\infty(\mathbb{R}^1)' \simeq \mathbb{R} : [f] \longmapsto \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

Wenn wir wieder rückwärts gehen, ergibt sich

$$H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R} : [\Omega] \longmapsto \int_{(\mathbb{S}^1, [d\vartheta])} \Omega.$$

3) Allgemeiner, wenn  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierbare, kompakte  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist, so ist  $H^n(M) \neq 0$ , denn für  $O \in \mathcal{O}(M)$  ist  $F : H^n(M) \longrightarrow \mathbb{R} : [\Omega] \longmapsto \int_{(M, O)} \Omega$  wohldefiniert, linear und surjektiv.

Beweis dafür: a) Wir zeigen zuerst, dass  $\int_{(M, O)} d\Omega_1 = 0$  für  $\Omega_1 \in \Omega^{n-1}(M)$ .

(Dann ist  $F$  wohldefiniert.)

Da  $M$  kompakt ist, existiert eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Zerlegung  $\chi_1, \dots, \chi_N$  der 1 mit  $\text{supp } \chi_i \subset U_i$  wobei  $(\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n) \in \mathfrak{A}_{\max}$ .

Es ist  $d\Omega_1 = \sum_{i=1}^N d(\chi_i \Omega_1)$ . Wenn  $(\varphi_i^{-1})^*(\chi_i \Omega_1) = f_{ij} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n$ , so ist

$$\begin{aligned} \int_{(M,O)} d(\chi_i \Omega_1) &= \int_{(U_i, O|_{U_i})} d(\chi_i \Omega_1) \stackrel{\chi_i \in \mathcal{K}(U_i)}{=} \sum_{j=1}^n \pm \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^j} dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \pm \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [f_{ij}(x^1, \dots, x^n)]_{x^j=-\infty}^{+\infty} dx^1 \dots \widehat{dx^j} \dots dx^n = 0, \text{ da } \text{supp } f_{ij} \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt.} \end{aligned}$$

Also ist  $\int_{(M,O)} d\Omega_1 = 0$ .

b) Wenn man ein  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$  und  $f \in \mathcal{K}(V)$  mit  $(\forall x \in V : f(x) \geq 0)$  und  $f \not\equiv 0$  nimmt, so ist  $\int_{(M,O)} \varphi^*(f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \neq 0$  und daher  $F$  surjektiv.

Unser nächstes Ziel ist der Satz von Stokes. Es gibt im wesentlichen zwei Versionen davon.

- 1) Die de Rhamsche Version baut darauf auf, dass in einer Karte  $\varphi : U \longrightarrow V$  für  $\Omega \in \Omega^n(U)$  ( $n = \dim U$ ) und  $f \in \mathcal{K}(U)$  gilt:

$$\int_{(U, [\varphi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)])} f \cdot \Omega = \int_V \varphi^{-1*}(f \cdot \Omega) dx, \quad \text{vgl. S. 64.}$$

Man benötigt also für die Berechnung von  $\int f \cdot \Omega$  nicht eine Karte  $\varphi$ , sondern eine „Parametrisierung“  $\psi = \varphi^{-1}$ . Man integriert dann über „Ketten“ = Linearkombinationen von „Kettenelementen“  $\psi : \Delta \longrightarrow M \mathcal{C}^1$ , wobei  $\Delta$  ein Simplex, oder allgemeiner ein Polyeder ist.

Vorteil: Unmittelbarer Zusammenhang mit den „Homologiegruppen“  $H_q(M)$  der algebraischen Topologie.

Nachteil: Man kann nicht über eine Mannigfaltigkeit integrieren (wie  $U$  oder  $\partial U$ ), sondern benötigt immer eine „Triangulierung“ (d.h. Linearkombinationen von  $\psi$  wie oben).

- 2) Die allgemeinste Variante der 2. Version beruht auf dem Begriff „Mannigfaltigkeit mit Rand“. Ich wähle ein etwas spezielleres Konzept, das für die meisten Fälle genügt.

Es sei  $(M, [\mathfrak{A}])$  eine  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen,  $N := \partial U = \overline{U} \setminus U$  sei eine  $(n-1)$ -dimensionale  $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$  und es gelte:

$$(*) \quad \forall x_0 \in N : \exists (\varphi : W \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}_{\max} : x_0 \in W, \varphi(W \cap N) = \{(0, x^2, \dots, x^n)^T \in V\}$$

(vgl. S. 6) und  $\varphi(W \cap U) = \{(x^1, \dots, x^n)^T \in V : x^1 < 0\}$ .

a) Allgemein, wenn  $N$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ ,  $x \in N$ ,  $o_M \in \mathcal{O}(T_x M)$ ,  $v \in T_x M \setminus T_x N$ , so kann man  $o_M$  und  $v$  folgendermaßen ein  $o_N^v \in \mathcal{O}(T_x N)$  zuordnen:

Wenn  $o_M = [D]$ ,  $D \in \Lambda^n(T_x^* M)$ , so sei  $o_N^v := [\langle v, D \rangle] \in \mathcal{O}(T_x N)$ , wobei  $\langle v, D \rangle \in \Lambda^{n-1}(T_x^* N)$ ,  $\langle v, D \rangle : T_x N^{\otimes(n-1)} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$w_1 \otimes \dots \otimes w_{n-1} \longmapsto D(v, w_1, \dots, w_{n-1}).$$

$o_N^v$  hängt nur davon ab, in welcher Zusammenhangskomponente von  $T_x M \setminus T_x N$   $v$  liegt.

Denn wenn  $\tilde{v} = \lambda v + w$ ,  $w \in T_x N$ ,  $\lambda > 0$ , so ist  $\langle \tilde{v}, D \rangle = \lambda \langle v, D \rangle \implies [\langle \tilde{v}, D \rangle] = [\langle v, D \rangle] \in \mathcal{O}(T_x N)$ .

Man kann die Abbildung  $\mathcal{O}(T_x M) \times (T_x M \setminus T_x N) \longrightarrow \mathcal{O}(T_x N)$  auch so formulieren: Wenn  $o_N^v$  durch die angeordnete Basis  $w_1, \dots, w_{n-1}$  von  $T_x N$  definiert ist, so  $o_M$  durch  $v, w_1, \dots, w_{n-1}$ .

b) Speziell, wenn  $N = \partial U$  wie oben, so wählen wir  $v$  so, dass es „von  $U$  nach außen“

$$\text{weist, d.h. in einer Karte } \varphi \text{ wie in } (*) \text{ sei } v = \frac{\partial}{\partial x^1} = \left[ \varphi^{-1} \left( \varphi(x) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \right].$$

Die Zuordnung  $\mathcal{O}(T_x M) \longrightarrow \mathcal{O}(T_x N) : o_M \longmapsto o_N^a$  ist dann unabhängig von der Karte  $\varphi$ , da für 2 Karten  $\varphi, \varphi'$

$$T\varphi(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ und } T\varphi(v') = \left[ \varphi \left( \varphi'^{-1} \left( \varphi'(x) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \right) \right] \text{ beide im Halbraum}$$

$x_1 > 0$  liegen und daher  $v, v'$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $T_x M \setminus T_x N$ . Wenn  $o_M = [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]$ , so ist also  $o_N^a = [dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n]$ .

Mit  $i : N = \partial U \hookrightarrow M$  ist also  $i_*^a : \hat{\Omega}^q(M) \longrightarrow \hat{\Omega}^q(N)$  wohldefiniert, wenn man in Karten  $\varphi$  wie in  $(*)$  setzt:

$$[\Omega(x), [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]] \longmapsto [i^*\Omega, [dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n]].$$

(„ $a$ “ steht für „von  $U$  nach außen“).

c) Noch spezieller, wenn  $M$  durch  $O \in \mathcal{O}(M)$  orientiert ist, so erhalten wir eine Orientierung  $O|_{\partial U}^a$  auf  $N = \partial U$ : Wenn  $\varphi : W \longrightarrow V$  wie in  $(*)$  oben, und  $W$  zusammenhängend, so ist  $O|_W = \epsilon [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n]$  und  $O|_{W \cap \partial U}^a = \epsilon [dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n]$ ,  $\epsilon \in \{\pm 1\}$ . (Um ein

$\Omega \in \Omega^{n-1}(N)$  mit  $[\Omega] = O|_N^a$  zu finden, nimmt man eine Zerlegung der 1  $\chi_i \in \mathcal{K}(N)$  bzgl.  $W \cap N$ ,  $W$  wie in (\*), und setzt  $\Omega := \sum \chi_i \epsilon_i dx_i^2 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$ , vgl. S. 66.)

**Satz von Stokes:**  $M$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen,  $\partial U = \overline{U} \setminus U$  sei eine  $(n-1)$ -dimensionale  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit von  $M$  oder leer und es gelte (\*), S. 78.

- 1)  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^{n-1}(M)$  habe kompakten Träger.  $d\hat{\Omega}(x) := [d\Omega(x), [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]]$ , wenn in einer Karte  $\hat{\Omega}(x) := [\Omega(x), [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]]$ .  $i_*^a \hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^{n-1}(\partial U)$  sei wie oben.

$$\text{Dann gilt: } \int_U d\hat{\Omega} = \int_{\partial U} i_*^a \hat{\Omega}.$$

- 2) Speziell sei  $(M, O)$  orientiert und  $O|_{\partial U}^a$  wie oben definiert.  $\Omega \in \Omega^{n-1}(M)$  habe kompakten Träger. Dann ist

$$\int_{(U, O|_U)} d\Omega = \int_{(\partial U, O|_{\partial U}^a)} i^* \Omega.$$

**Bemerkung:**  $\int_U d\hat{\Omega} = \mu(U)$ , wenn  $d\hat{\Omega}$  dem Borelmaß  $\mu$  entspricht.

**Beweis:** 2) folgt aus 1), denn wenn  $\hat{\Omega}(x) = [\Omega(x), O(x)]$ , so ist  $d\hat{\Omega}(x) = [d\Omega(x), O(x)]$  und  $i_*^a \hat{\Omega}(x) = [i^* \Omega(x), O|_{\partial U}^a(x)]$ .

Zu 1): Wir überdecken  $M$  mit Kartengebieten  $W$ , sodass entweder (\*) in der dritten Zeile in S. 78 gilt oder  $W \subset U$  oder  $W \subset M \setminus \overline{U}$ .  $\chi_i$  sei eine zugehörige lokalendliche  $\mathcal{C}^2$ -Zerlegung der 1 nach S. 59. Da  $\hat{\Omega}$  kompakten Träger hat, ist  $\hat{\Omega} = \sum_{\text{endlich}} \chi_i \hat{\Omega}$  und es genügt daher, anstelle von  $\hat{\Omega}$  ein  $\chi_i \hat{\Omega}$  zu betrachten. Es sei also oEdA  $\text{supp } \hat{\Omega} \subset W$ . Wenn  $W \subset M \setminus \overline{U}$ , so ist alles 0. Wenn  $W \subset U$ , so ist  $i_*^a(\hat{\Omega}) = 0$  und  $\int_U d\hat{\Omega} = \int_W d\hat{\Omega} = 0$ , vgl. 3)a) in S. 76. Wenn schließlich  $W$  wie in (\*), S. 78, 3. Zeile, und in der Karte  $\varphi : W \longrightarrow V$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= [g_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]], \text{ so ist} \\ \int_U d\hat{\Omega} &= \int_{\substack{(x^1, \dots, x^n)^T \in V \\ x^1 < 0}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(x^1, \dots, x^n) \Big|_{x^1=-\infty}^0 dx^2 \cdots dx^n + \\ &+ \sum_{j=2}^n \int_{\substack{(x^1, \dots, \widehat{x^j}, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \\ x^1 < 0}} \underbrace{(-1)^{j-1} g_j(x^1, \dots, x^n)}_{0 \text{ (da } \text{supp } g_j \text{ kompakt ist)}} \Big|_{x^j=-\infty}^\infty dx^1 \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n \end{aligned}$$

und andererseits  $i_*^a \hat{\Omega} = \left[ \sum_{j=1}^n i^*(g_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n), [dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n] \right] = [g_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n, [dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n]]$  wegen  $i^*(dx^1) = 0$ .

Also ergibt  $\int_{\partial U} i_*^a \hat{\Omega}$  ebenfalls  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n$ .  $\square$

**Bemerkungen:** 1) Der Satz von Stokes ist also im Wesentlichen der Hauptsatz der Integralrechnung.

2) In gewissen Fällen, wie z.B. bei der Oberfläche einer Halbkugel, sind noch Zusatzüberlegungen nötig.

3) Wenn  $U \subset M$  beschränkt ist (d.h.  $\overline{U}$  kompakt), so kann die Voraussetzung, dass  $\hat{\Omega}$  bzw.  $\Omega$  kompakten Träger haben, fallengelassen werden. (Man setzt  $\tilde{\hat{\Omega}} := \hat{\Omega} \cdot \chi$ , wobei  $\chi \in \mathcal{K}(M)$ ,  $\chi = 1$  auf  $\overline{U}$ , und erhält  $\int_U d\hat{\Omega} = \int_U d\tilde{\hat{\Omega}} = \int_{\partial U} i_*^a(\tilde{\hat{\Omega}}) = \int_{\partial U} i_*^a(\hat{\Omega})$ .)

**Bsp.:** 1) Wenn  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ , so ist  $\partial U = \mathbb{S}^{n-1}$  und für  $O = [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n] \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $O|_{\mathbb{S}^{n-1}}^a = [\langle x^i \partial_i, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \rangle] = [L]$ , vgl. S. 49. (Als Vektor  $v$  entsprechend S. 78 a) nehmen wir also  $x^i \partial_i = [x + tx] \in T_x \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .)

Der Satz von Stokes ergibt

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |L| = \int_{(\mathbb{S}^{n-1}, [L])} L = \int_{(U, O|_U)} n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = n \int_U dx = n \cdot \text{Vol}(U).$$

( $L$  steht hier für  $i^* L$ , vgl. S. 61.)

Allgemeiner, wenn  $U \subset \mathbb{R}^n$  wie im Satz von Stokes vorausgesetzt und außerdem beschränkt ist, so ist  $\text{Vol}(U)$  (=Lebesguemaß von  $U$ )  $= \frac{1}{n} \int_{(\partial U, O|_{\partial U}^a)} L$ .

Beachte, dass  $\partial U$  zwar orientierbar ist,  $L$  i.A. aber keine Orientierung auf  $\partial U$  liefert.

2) Wenn  $U \subset \mathbb{R}^n$  wie im Satz von Stokes und beschränkt ist,  $V$  sein Volumen und  $S \in \mathbb{R}^n$  sein Schwerpunkt, und  $a_{ij}^k = a_{ji}^k \in \mathbb{R}$ ,  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ , so gilt

$$\int_{(\partial U, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]|_{\partial U}^a)} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_{ij}^k x^i x^j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_U 2a_{kj}^k x^j dx = 2V a_{kj}^k S^j.$$

3)  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  werde als  $\mathcal{C}^3$ -Mannigfaltigkeit betrachtet,  $X \in \mathcal{T}^1(\mathbb{S}^n)$  sei so, dass  $\forall x \in \mathbb{S}^n : X(x) \neq 0$ . Wir zeigen, dass dann  $n$  ungerade sein muss (vgl. S. 28).

Wegen  $T\mathbb{S}^n \subset T\mathbb{R}^{n+1}$  können wir  $X : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$   $\mathcal{C}^2$  mit  $\forall x \in \mathbb{S}^n : X(x) \perp x$  schreiben. Dann ist

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n : (t, x) \mapsto \frac{tx + (1-t^2)X(x)}{|tx + (1-t^2)X(x)|}$$

wohldefiniert und  $\mathcal{C}^2$ , denn  $tx + (1-t^2)X(x) = 0 \implies 1-t^2 = 0 \implies x=0$ .

Daher ist  $\Omega := F^*(L) \in \Omega^n(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n)$  als  $\mathcal{C}^2$ -Mannigfaltigkeit, wenn  $L \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$  wie in S. 61.

Es sei  $U = (-1, 1) \times \mathbb{S}^n \subset M := \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \implies \partial U = \{-1, +1\} \times \mathbb{S}^n$ .

$d\Omega = F^*(dL) = F^*(0) = 0$ . Wie immer sei  $i : \partial U \hookrightarrow M$ .

Der Satz von Stokes liefert dann:  $\int_{\partial U, [dt \wedge L] \Big|_{\partial U}^a} i^*\Omega = 0$ .

$$\left( \partial U, [dt \wedge L] \Big|_{\partial U}^a \right)$$

Es gilt  $i^*\Omega = i^*F^*(L) = (F \circ i)^*L$ , wobei  $F \circ i : \{-1, 1\} \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n : (\epsilon, x) \mapsto \epsilon x \implies (F \circ i)^*L(\epsilon, x) : \begin{cases} L(x) & : \epsilon = 1 \\ (J^*L)(x) = (-1)^{n+1}L(x) & : \epsilon = -1, \end{cases}$  vgl. S. 63.

Schließlich ist  $[dt \wedge L] \Big|_{\partial U}^a = [\langle \pm \frac{\partial}{\partial t}, dt \wedge L \rangle] = \pm [L]$  auf  $\{\pm 1\} \times \mathbb{S}^n \implies \implies 0 = (1 + (-1)^n) \int_{\mathbb{S}^n} |L| \implies n$  ungerade.

Wenn  $X$  nur ein stetiges Vektorfeld ist, so kann man es durch  $\tilde{X}$  mit  $\mathcal{C}^2$ -Koeffizienten approximieren und erhält daher ebenfalls, dass  $n$  ungerade ist.

4) Der Satz von Gauß im  $\mathbb{R}^n$ .

$U \subset \mathbb{R}^n$  sei wie im Satz von Stokes,  $v^j \mathcal{C}^1$  und mit kompaktem Träger. Dann gilt also:

$$\int_{\partial U, [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n] \Big|_{\partial U}^a} i^* \left( \sum_{j=1}^n v^j (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \right) = \int_U \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial v^j}{\partial x^j}}_{=: \text{"div } X\text{"}} dx.$$

$$(X = (v^1, \dots, v^n)^T).$$

Wenn  $W \subset \partial U$ ,  $W$  zusammenhängend mittels  $\psi : V \xrightarrow{\sim} W : \xi \mapsto x$  parametrisiert ist,  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , so ist  $i^*((-1)^{j-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n) = (-1)^{j-1} \left( \frac{\partial x^1}{\partial \xi^k} d\xi^k \right) \wedge \dots \wedge$

$$\left( \frac{\partial x^n}{\partial \xi^l} d\xi^l \right) = \underbrace{(-1)^{j-1} \det \left( \frac{\partial (x^1, \dots, \widehat{x^j}, \dots, x^n)}{\partial (\xi^1, \dots, \dots, \xi^{n-1})} \right)}_{=: D^j} d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{n-1} \text{ und daher}$$

$$\begin{aligned} \int_{W, [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n] \Big|_W^a} i^* \left( \sum_{j=1}^n v^j (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \right) &= \\ &= \pm \int_V \sum_{j=1}^n v^j(\xi) D^j(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

wobei  $+$  bzw.  $-$  zu wählen ist, je nachdem ob  $\psi$  die Orientierung erhält. ( $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ist dabei durch  $[d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{n-1}]$  orientiert,  $W \subset \partial U$  durch  $[dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n] \Big|_W^a$ .)

$y = \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}}$  ist definiert durch  $\det \left( z, \frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right) = \langle z, y \rangle$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ .  
(Da wir  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardorientierung versehen, ist  $y$  ein Vektor, kein Pseudovektor, vgl. S. 56).

Speziell ist  $y \perp \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi^i} : i = 1, \dots, n-1 \right\rangle = T_x(\partial U)$  und  $\det \left( y, \frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right) > 0$ , d.h.  
 $\epsilon [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n] \Big|_W^a$  ist durch die geordnete Basis  $\frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}}$  von  $T_x(\partial U)$  gegeben,  
wenn  $\epsilon := \begin{cases} 1 & : y \text{ weist aus } U \text{ heraus} \\ -1 & : \text{sonst.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Außerdem ist } y^j &= \left[ \text{Koeffizient vom } z^j \text{ in } \det \left( z, \frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right) \right] = \\ &= (-1)^{j-1} \det \left( \frac{\partial(x^1, \dots, \widehat{x^j}, \dots, x^n)}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{n-1})} \right) = D^j \\ \implies &\int_{\substack{(W, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]) \\ W}} i^* \left( \sum_{j=1}^n v^j (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \right) = \\ &= \epsilon \int_V \langle X, \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \rangle d\xi, \text{ wobei } X = (v^1, \dots, v^n)^T. \end{aligned}$$

Oft schreibt man dafür noch  $\int_V \langle X, n \rangle d\sigma$ , wobei

$$\begin{aligned} n &:= \text{Außeneinheitsnormale} = \frac{\epsilon \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}}}{\left| \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right|} \text{ und} \\ d\sigma &:= \left| \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \cdots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right| d\xi = \text{Oberflächenmaß auf } W. \text{ Dazu siehe § 6.} \end{aligned}$$

## Übungen

Üb. 5.1 Beweise den Hilfssatz in S. 73.

Hinweis: Es genügt  $\Omega = f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^q$  zu betrachten.

Verwende  $\langle d\Omega, X_0 \otimes \cdots \otimes X_q \rangle = \det(X_k(f^l))_{k,l=0,\dots,q}$ .

Üb. 5.2 Die Maxwellschen Gleichungen sind

$$(*) \text{ rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{ rot } H = j + \frac{\partial D}{\partial t}, \text{ div } D = \varrho, \text{ div } B = 0$$

( $E/H$  = elektrische/magnetische Feldstärke,  $D/B$  = elektrische/magnetische Induktion,  $\varrho$  = Ladung,  $j$  = Strom.)

Es sei  $F := (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dt + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2$  und  $G := -(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3) \wedge dt + D_1 dx^2 \wedge dx^3 + D_2 dx^3 \wedge dx^1 + D_3 dx^1 \wedge$

$\mathrm{d}x^2$  sowie  $\gamma := (j_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + j_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + j_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2) \wedge \mathrm{d}t - \varrho \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ .

a) Zeige, dass  $(*)$  äquivalent zu  $\mathrm{d}F = 0$ ,  $\mathrm{d}G = -\gamma$  ist.

b) Folgere  $\mathrm{d}\gamma = 0$ . Was bedeutet das klassisch?

c) Folgere, dass in einem zu  $\mathbb{R}^4$  diffeomorphen Gebiet  $U$  gilt  $F = \mathrm{d}\varphi$ ,  $\varphi \in \Omega^1(U)$  (elektromagnetisches Vektorpotential). Was bedeutet das klassisch?

Üb. 5.3  $M = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  sei das Möbiusband in S. 38 und

$\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i : (t, u) \longmapsto (x_i^1, x_i^2)^T$ ,  $i = 1, 2$ , seien wie dort.

a) Zeige, dass  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}^2(M)$  durch  $\hat{\Omega}(t, u) := [\mathrm{d}x_i^1 \wedge \mathrm{d}x_i^2, [\mathrm{d}x_i^1 \wedge \mathrm{d}x_i^2]]$ ,  $(t, u) \in U_i$ , wohldefiniert ist.

b) Warum ist  $\hat{\Omega}$  eine Basis von  $\hat{\Omega}^2(M)$  (über  $C^\infty(M)$ )?

c) Setze  $U := [0, 2\pi) \times (-1, 1) \subset M$  und wende den Satz von Stokes an.

Hinweis:  $\hat{\Omega} = -\mathrm{d}\hat{\Omega}_1$ ,  $\hat{\Omega}_1 := [x_i^2 \mathrm{d}x_i^1, [\mathrm{d}x_i^1 \wedge \mathrm{d}x_i^2]]$ .

Üb. 5.4 Es sei  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  und  $f_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 : z \longmapsto z^n$ .

a) Bestimme  $H^1(f_n) : H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1)$ .

b) Zeige, dass gilt:  $\forall f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 C^\infty : \exists n \in \mathbb{Z} : \forall [\Omega] \in H^1(\mathbb{S}^1) : H^1(f)[\Omega] = n[\Omega]$ .

Hinweis: Verwende, dass  $\tilde{f} : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$  existiert mit  $f \circ U = U \circ \tilde{f}$ ,  $U$  wie in S. 76.

Üb. 5.5 Es sei  $L = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  und

$p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} : x \longmapsto \frac{x}{|x|}$ .

a) Zeige, dass  $p^*(L) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x^j}{|x|^n} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

Hinweis:  $L$  und  $p^*(L)$  sind rotationsinvariant.

b) Warum ist  $\mathrm{d}p^*(L) = 0$ ?

c)  $U \subset \mathbb{R}^n$  erfülle die Voraussetzungen an den Satz von Stokes, sei beschränkt und  $0 \notin \partial U$ . Zeige, dass

$$\int_{(\partial U, [\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n]) \overset{a}{\underset{\partial U}{\mid}}} i^* p^*(L) = \begin{cases} 0 & : 0 \notin U \\ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |L| & : 0 \in U. \end{cases}$$

Hinweis: Falls  $0 \in U$ , integriere  $p^*(L)$  über  $\partial K$ , wobei  $K \subset U$  eine Kugel mit Mittelpunkt in 0 ist.

d) Warum ist  $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \neq \{0\}$ ?

Üb. 5.6 Der Satz von Stokes des  $\mathbb{R}^3$ . Es sei  $\Omega = \omega_i \mathrm{d}x^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $(M, O) \subset \mathbb{R}^3$  2-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit,  $U \subset M$  wie im Satz von Stokes und beschränkt.

a) Zeige, dass  $\int_{(\partial U, O|_{\partial U})}^a i^* \Omega = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \dot{x} \right\rangle dt$ , wenn  $x : [a, b] \xrightarrow{\sim} \partial U$  eine Parametrisierung ist, sodass die Orientierung von  $T_{x(t)} M$  durch die angeordnete Basis  $n_1, \dot{x}(t)$  gegeben ist,  $n_1 :=$  Außen normale zu  $\partial U$  in  $T_x M$ .

b) Zeige, dass  $\int_{(U, O|_U)} d\Omega = \int_U \left\langle \text{rot} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, n_2 \right\rangle d\sigma$ , wenn

$|n_2| = 1$ ,  $n_2 \perp T_x U$ ,  $O(x) = [dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3]_M^{n_2}$  in der Notation von S. 78,  
 $d\sigma = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \right| \cdot |d\xi^1 \wedge d\xi^2|$ , vgl. S. 82.

c) Formuliere die Koppelung von  $\dot{x}(t), n_1, n_2$  anschaulich.

# Kap. III: Riemannsche Mannigfaltigkeiten

## § 6 Kanonisches Volumsmaß, Sternoperator

Eine Methode der Differentialgeometrie besteht darin, Begriffe der linearen Algebra auf die Vektorräume  $T_x M$  anzuwenden. In § 3 wurden so der Dualraum (S. 39) und das Tensorprodukt (S. 44 ff.), in § 4 die Determinante behandelt. (d in § 5 ist hingegen ein Begriff der Analysis.) Nun betrachten wir innere Produkte, d.h.  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear und symmetrisch.

Nach S. 44 ist  $\text{Mul}(V, V) \simeq \text{Hom}(V, V^*) \simeq V^* \otimes V^*$ .

$$\begin{aligned} g &\longmapsto [\tilde{g} : v \mapsto (w \mapsto g(v, w))] \longmapsto \tilde{g} \\ &\quad (v \mapsto \langle v, v^* \rangle w^*) \longleftarrow v^* \otimes w^* \end{aligned}$$

$g$  symmetrisch bedeutet  $\tilde{g} = \tilde{g}^T$  bzw.  $\tilde{g} \in S^2(V^*)$ , s. S. 45.

Ein symmetrisches  $g$  ist durch seine Werte auf der Diagonale festgelegt, d.h.

$$\begin{aligned} \{g \in \text{Mul}(V, V) \text{ symmetrisch}\} &\simeq \{g_1 : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ quadratische Form}\} \\ g &\longmapsto g_1 : v \mapsto g(v, v) \end{aligned}$$

Speziell gilt:  $g$  nicht ausgeartet (d.h.  $\forall 0 \neq v \in V : \exists w \in V : g(v, w) \neq 0$ )  $\iff$   $\iff \tilde{g} : V \rightarrow V^*$  ist ein Isomorphismus.

### Koordinatendarstellung:

$e_1, \dots, e_n$  sei eine Basis in  $V$ ,  $e^1, \dots, e^n$  die duale Basis in  $V^*$ . Dann hat  $V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes q}$  die Basis  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_q \leq n$ .

Wenn  $g$  die Koordinaten  $g_{ij}$  hat, d.h.  $g(e_i, e_j) = g_{ij}$ , so ist  $\tilde{g}(e_i) = g_{ij}e^j$ . Wenn  $g$  nicht ausgeartet ist, so erhält man für  $1 \leq k \leq m$  Isomorphismen

$$\begin{aligned} V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes q} &\xrightarrow[\text{id} \otimes \dots \otimes \tilde{g} \otimes \text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}]{} V \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V \otimes V^{*\otimes q} \simeq \\ &\quad (\text{k-te Stelle}) \qquad \qquad \qquad (\text{k-te Stelle}) \qquad \qquad \simeq V^{\otimes(m-1)} \otimes V^{*\otimes(q+1)}. \end{aligned}$$

Das ist eine Überschiebung mit  $\tilde{g}$  (vgl. S. 49), d.h.

$$(t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}) \longmapsto (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{k-1} l i_k \dots i_{m-1}} \cdot g_{l j_{q+1}}) \in V^{\otimes(m-1)} \otimes V^{*\otimes(q+1)}.$$

Manchmal schreibt man dafür

$(t^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_q}) \longmapsto (t^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_m}_{l j_1 \dots j_q})$ , wobei  $t^{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_m}_{l j_1 \dots j_q} := t^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_q} g_{ikl}$ , und nennt dies „Senken des  $k$ -ten kontravarianten Index“. Ebenso lässt sich „ein kovarianter Index heben“ ( $1 \leq k \leq q$ ):

$$V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes q} \xrightarrow{\text{id} \otimes \dots \otimes \tilde{g}^{-1} \otimes \text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}} V^{\otimes m} \otimes V^{*\otimes k-1} \otimes V \otimes V^{*\otimes(q-k)}$$

$$((m+k)\text{-te Stelle}) \quad \simeq V^{\otimes(m+1)} \otimes V^{*\otimes(q-1)}$$

liefert  $(t^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_q}) \longmapsto (t^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_q} := t^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_q} g^{j_k l})$ .

$g^{ij}$  ist dabei die Matrix der Abbildung  $\tilde{g}^{-1} : V^* \longrightarrow V$ . Es ist also  $(g^{ij})$  die inverse Matrix zu  $(g_{ij})$ . Beachte, dass man beim Heben und Senken der Indices diese nebeneinander schreiben muss, damit keine Zweideutigkeit entsteht. In dieser Schreibweise ist z.B.  $g^i_j = g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j = g_j^i$ . Ich werde von dieser Notation nur  $g^{ij}$  für die inverse Matrix von  $g_{ij}$  verwenden.

Ein Paar  $(V, g)$  heiße innerer Produktraum (IPR), wenn

- (i)  $V$  endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum;
- (ii)  $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  bilinear und symmetrisch ( $g \in S^2(V^*)$ ).

$f : (V, g) \longrightarrow (V', g')$  heiße Homomorphismus von IPR:  $\iff$

- (i)  $f : V \longrightarrow V'$  linear (ii)  $\forall v_i \in V : g(v_1, v_2) = g'(f(v_1), f(v_2))$ .

Der Satz von Sylvester (lineare Algebra) besagt, dass eine Isomorphiekasse von IPR durch 3 Zahlen  $n = \dim(V)$ ,  $r = \text{rg}(g)$ ,  $s = \text{sign}(g)$  gegeben ist, und zwar  $\exists$  Basis  $e_1, \dots, e_n$  in  $V$  mit  $g(x^i e_i, y^j e_j) = \sum_{i=1}^k x^i y^i - \sum_{i=1}^l x^{i+k} y^{i+k}$ , wobei  $r = k + l$ ,  $s = k - l$ .

Speziell gilt:  $g$  nicht ausgeartet  $\iff r = n$ ;

$g$  positiv definit (d.h.  $\forall v \neq 0 : g(v, v) > 0$ )  $\iff k = n \iff r = s = n$ .

**Def.:**  $M$   $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

- 1)  $g \in \mathcal{T}_2(M)$  heißt Pseudo-Riemannsche Metrik :  $\iff \forall x \in M : g(x) \in T_x^* M^{\otimes 2} \simeq \text{Hom}(T_x M, T_x^* M) \simeq \text{Mul}(T_x M, T_x M)$  ist symmetrisch und nicht ausgeartet.
- 2)  $g \in \mathcal{T}_2(M)$  heißt Riemannsche Metrik :  $\iff \forall x \in M : g(x)$  symmetrisch und positiv definit.
- 3)  $g \in \mathcal{T}_2(M)$  heißt Lorentz-Metrik (oder hyperbolische Metrik) :  $\iff \forall x \in M : g(x)$  symmetrisch,  $\text{rg } g(x) = n$ ,  $\text{sign } g(x) = 2 - n$ .

- 4) Ein Paar  $(M, g)$  mit  $g$  wie in 1), 2) bzw. 3) heißt  $\mathcal{C}^k$ -(Pseudo-)Riemannscher bzw. Lorentz-Raum.

**Bemerkung:** In Koordinaten gilt also  $g(x) = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$  mit  $g_{ij} = g_{ji}$ . 1) heißt  $\det g_{ij}(x) \neq 0$ ; 2) heißt  $g_{ij}(x)$  ist positiv definit; 3) heißt:  $\exists$  Basis  $e_0, \dots, e_{n-1}$  in  $T_x M$ :  $g(x)(v^i e_i, w^j e_j) = v^0 w^0 - \sum_{i=1}^{n-1} v^i w^i$ .

**Bsp.:** 1) Wenn  $V$  ein IPR mit nicht ausgeartetem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist, so ist die Mannigfaltigkeit  $V$  ein Pseudo-Riemannscher Raum, indem man für  $x \in V$  setzt

$g(x) : T_x V \times T_x V \simeq V \times V \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathbb{R}$ . Wenn  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$  ist,  $x^1, \dots, x^n$  die Koordinaten dazu (=duale Basis) und  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ , so ist  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \in \mathcal{T}_2(V)$ .

Diese Metrik heißt Standardmetrik auf  $V$ . Speziell für  $V = \mathbb{R}^n$  ist also  $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$  die Standardmetrik.

2)  $i : N \longrightarrow M$   $\mathcal{C}^k$ ,  $g$  Metrik auf  $M$ . Falls  $i^*g$  wieder eine Metrik ist, so heißt sie von  $i$  induzierte Metrik. In jedem Fall ist  $i^*g \in \mathcal{T}_2(N)$  symmetrisch.  $i^*g$  ist z.B. eine Riemannsche Metrik, wenn  $g$  eine solche ist und  $i$  eine Immersion ist, denn dann ist  $T_x i : T_x N \longrightarrow T_{i(x)} M$  injektiv. Bei einer Pseudo-Riemannschen Metrik  $g$  kann  $i^*g$  ausgeartet sein, auch wenn  $i$  eine Immersion ist.

In Koordinaten:  $\varphi : U \longrightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  sei eine Karte auf  $M$ ,  $\psi : U' \longrightarrow V' : \xi \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$  eine auf  $N$  mit  $i(U') \subset U$  und  $i : \xi \mapsto x(\xi)$ , vgl. S. 3. Dann ist  $(i^*g)(\xi) = i^*(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^l} d\xi^k \otimes d\xi^l$ .

Wenn  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $g$  wie in 1) und  $N \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit, so bezeichnet man oft das innere Produkt  $(\psi^{-1*}i^*g)(\xi)$  auf  $T_\xi V' \simeq \mathbb{R}^p$ , das also durch die  $p \times p$ -Matrix  $\left( g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^l} \right)_{k,l} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi^k}, \frac{\partial x}{\partial \xi^l} \right\rangle_{k,l}$  gegeben ist, als 1. Fundamentalform. Dies ist die Koordinatendarstellung von  $i^*g$ .

3) Für  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  heißt  $i^*\left(\sum_{i=1}^{n+1} dx^i \otimes dx^i\right)$  die Standardmetrik auf  $\mathbb{S}^n$ . Speziell für  $\mathbb{S}^2$  erhalten wir in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} i^*g &= i^*\left(\sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i\right) = d(\sin \vartheta \cos \varphi)^{\otimes 2} + d(\sin \vartheta \sin \varphi)^{\otimes 2} + d(\cos \vartheta)^{\otimes 2} = \\ &= (\cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi)^{\otimes 2} + (\cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi)^{\otimes 2} + \sin^2 \vartheta d\vartheta \otimes d\vartheta = \\ &= d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi. \end{aligned}$$

Dass keine gemischten Glieder  $d\vartheta \otimes d\varphi$  auftauchen, liegt an der Orthogonalität der Koordinaten:  $(i^*g)_{\vartheta\varphi} = (i^*g)\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$ .

4)  $G$  Liegruppe. Die linksinvarianten Pseudo-Riemannschen Metriken entsprechen bijektiv den nicht ausgearteten inneren Produkten auf  $T_I G$ , vgl. S. 50, 51. Ein Bsp. ist

1) oben. Auf  $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  ist eine linksinvariante Riemannsche Metrik  $g$  z.B. durch  $g(I) = \sum_{i,j} \mathrm{d}a_j^i \otimes \mathrm{d}a_j^i$  bestimmt. Mit  $A_0^{-1} = (b_j^i)$  ergibt sich wie in S. 51:

$$g(A_0) = \sum_{i,j} \mathrm{d}(A_0^{-1} A)_j^i \otimes \mathrm{d}(A_0^{-1} A)_j^i = \sum_{i,j} b_k^i b_l^i \mathrm{d}a_j^k \otimes \mathrm{d}a_j^l.$$

**Hilfsatz und Definition:**  $(M, g)$  Pseudo-Riemannscher Raum. Es sei wie in S. 85 für  $x \in M$   $\widetilde{g(x)} : T_x M \xrightarrow{\sim} T_x^* M : v \mapsto (w \mapsto g(x)(v, w))$ .

1)  $\tilde{g} : TM \longrightarrow T^* M : (x, v) \mapsto (x, \widetilde{g(x)}v)$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündelisomorphismus.

2)  $g^{-1} \in \mathcal{T}^2(M)$  ist wohldefiniert durch  $T_x M^{\otimes 2} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x^* M, T_x M)$

$$g^{-1}(x) \mapsto \widetilde{g(x)}^{-1}.$$

Für die Koordinaten von  $g^{-1}$  wird  $g^{ij}$  geschrieben.

3) Durch Zusammensetzung mit  $\tilde{g}$  und  $\tilde{g}^{-1}$  erhält man  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Modulisomorphismen von  $\mathcal{T}_{q_1}^{m_1}(M)$  mit  $\mathcal{T}_{q_2}^{m_2}(M)$ ,  $m_1 + q_1 = m_2 + q_2$  (vgl. S. 85, 86). In Koordinaten gilt also:

$$(t_{j_1 \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots i_{m_1}}) \mapsto (t_{j_1 \dots j_{q_1}}^{i_1 \dots i_{m_1}} g_{i_{\alpha_1} l_1} \dots g_{i_{\alpha_r} l_r} g^{j_{\beta_1} p_1} \dots g^{j_{\beta_s} p_s}),$$

für feste  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq m_1$ ,  $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_s \leq q_1$ ,  $m_2 = m_1 - r + s$ ,  $q_2 = q_1 - s + r$ .

**Beweis:** In einer Karte ist  $\tilde{g} : (x, v^i) \mapsto (x, g_{ij}(x)v^j)$ . Da  $g_{ij}$   $\mathcal{C}^{k-1}$ -Funktionen sind, ist dies ein  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Vektorraumbündelhomomorphismus.  $\widetilde{g(x)}^{-1} \in \mathrm{Hom}(T_x^* M, T_x M) \simeq T_x M^{\otimes 2}$  hat ebenfalls  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Koordinaten  $g^{ij} \implies \tilde{g}$  ist ein Isomorphismus und  $g^{-1} \in \mathcal{T}^2(M)$ .  $\square$

**Bsp.:** 1) Für  $M = \mathbb{R}^n$  liefert die Standardmetrik

$$T\mathbb{R}^n \simeq T^*\mathbb{R}^n : (x, v^i \partial_i) \mapsto (x, \sum_{i=1}^n v^i \mathrm{d}x^i).$$

2) Wenn  $(M, g)$  RR,  $N \subset M$  Untermannigfaltigkeit mit Metrik  $i^*g$  und  $TN \subset TM$  wie üblich, so ist für  $v \in T_x N : i^*g(x)(v) = i^*g(x)(v, -) = g(x)(v, -)|_{T_x N} = \widetilde{g(x)}(v)|_{T_x N} \in T_x^* N$ .

Speziell für  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  erhalten wir  $T\mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} T^*\mathbb{S}^n$

$$(x, v) \mapsto (x, \sum_{i=1}^{n+1} v^i \mathrm{d}x^i)$$

und  $\mathcal{T}^1\mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_1\mathbb{S}^n : X \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} X^i \mathrm{d}x^i$ .

Die Umkehrabbildung liefert  $d_{x_0}x^i \mapsto e_i - x_0^i x_0 \in T_{x_0}\mathbb{S}^n$  und damit die in S. 40, 41 so mühsam konstruierte Einbettung  $F : T^*\mathbb{S}^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$F : T^*\mathbb{S}^n \simeq T\mathbb{S}^n \hookrightarrow T\mathbb{R}^{n+1} \simeq T^*\mathbb{R}^{n+1}$$

$$d_{x_0}x^i \mapsto e_i - x_0^i x_0 \mapsto e_i - x_0^i x_0 \mapsto d_{x_0}x^i - x_0^i \sum_{j=1}^{n+1} x_0^j d_{x_0}x^j.$$

Ebenso:  $\mathcal{T}_1\mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^1\mathbb{S}^n : \omega_i(x) dx^i \mapsto \left( x \mapsto \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} - \langle x, \omega \rangle \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \right)$ .

3) Auf  $\mathbb{S}^n$ ,  $n$  gerade, existiert keine Lorentz-Metrik.

Denn wäre  $h$  eine solche Metrik, so ließe es sich bzgl. der Standardmetrik  $g$  „diagonalisieren“, d.h.  $\widetilde{g(x)}^{-1} \circ \widetilde{h(x)} : T_x\mathbb{S}^n \rightarrow T_x\mathbb{S}^n$  ist linear und symmetrisch bzgl. des inneren Produkts  $g$ . Dann gibt es einen 1-dimensionalen Eigenraum zum einzigen positiven Eigenwert. Das liefert  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  stetig, wobei

$$f(x) = \{v \in T_x\mathbb{S}^n : \exists \lambda > 0 : \widetilde{h(x)}v = \lambda \widetilde{g(x)}v\}.$$

Da  $P : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : x \mapsto [x]$  die universelle Überlagerung von  $\mathbb{P}^n$  ist, lässt sich  $f$  zu  $f_1 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  mit  $f = P \circ f_1$  liften (Topologie). Dies ist aber im Widerspruch zu Bsp. 3) in S. 80.

Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es aber eine Riemannsche Metrik:

**Lemma**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

Dann existiert eine Riemannsche Metrik auf  $M$ .

**Beweis:**  $U_i$ ,  $i \in I$ , sei eine Überdeckung von  $M$  durch Kartengebiete und  $(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i : x \mapsto (x_i^1, \dots, x_i^n)^T) \in \mathfrak{A}_{\max}$  Karten,  $\chi_i$  eine lokalendliche  $\mathcal{C}^k$ -Zerlegung der 1 zu  $U_i$  (S. 59). Dann ist  $g := \sum_{i \in I} \chi_i \cdot \sum_{j=1}^n dx_i^j \otimes dx_i^j \in \mathcal{T}_2(M)$  wohldefiniert und symmetrisch.

$g$  ist positiv definit, denn  $\forall x \in M : \forall v \in T_x M : g(x)(v, v) = \sum_{i \in I} \chi_i(x) \sum_{j=1}^n (v_i^j)^2 > 0$ , wenn

$$v = v_i^j \frac{\partial}{\partial x_i^j} \neq 0.$$

□

**Bemerkung:** Es existiert also immer ein Vektorraumbündelisomorphismus  $TM \simeq T^*M$ . Ebenso zeigt man, dass  $M_1 \simeq M_1^*$  für beliebige Vektorraumbündel  $M_1 \xrightarrow{p} M_2$ .

Nach S. 56 existiert in einem euklidischen Vektorraum  $V$  ein kanonisches positives Haarmäß:  $e_1, \dots, e_n$  ONB in  $V$ ,  $e^1, \dots, e^n$  duale Basis,  $\hat{D} := |e^1 \wedge \dots \wedge e^n| = [e^1 \wedge \dots \wedge e^n, [e^1 \wedge \dots \wedge e^n, \dots]]$

$$\cdots \wedge e^n] \in \widehat{\Lambda}^n(V^*)_+ \simeq L(V)_+.$$

Nun sei  $g$  allgemeiner ein inneres Produkt auf  $V$ , d.h.  $g \in S^2(V^*)$ .

$g$  induziert innere Produkte auf  $V^{\otimes m}$

$$(g^{\otimes m} : V^{\otimes m} \times V^{\otimes m} \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_m) \longmapsto \prod_{i=1}^m g(v_i, v'_i))$$

und damit auch auf  $\Lambda^m(V) \leq V^{\otimes m}$ . Dabei gilt:

$$\Lambda^m g = g^{\otimes m}|_{\Lambda^m(V) \times \Lambda^m(V)} : \Lambda^m(V) \times \Lambda^m(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \Lambda^m g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m, v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_m) &= \sum_{\sigma, \tau \in S_m} \text{sign}(\sigma\tau) \prod_{i=1}^m g(v_{\sigma(i)}, v'_{\tau(i)}) = \\ &= m! \sum_{\sigma \in S_m} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^m g(v_{\sigma(i)}, v'_i) = m! \det(g(v_i, v'_j)). \end{aligned}$$

Wenn  $n = \dim V$ , so ist  $\Lambda^n(V)$  eindimensional. Wenn allgemein  $W$  ein 1-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so lässt sich  $S^2(W^*)$  kanonisch (d.h. basisunabhängig) identifizieren mit  $\widehat{W^*}$ :

$$\widehat{W^*} \xrightarrow[\text{NICHT linear}]{}^{\text{bijektiv}} S^2(W^*) : \left[ \underbrace{w_1^*}_{\in W^*}, \underbrace{[w_2^*]}_{\in \mathcal{O}(W^*) \cong \mathcal{O}(W^*)} \right] \longmapsto \begin{cases} w_1^* \otimes w_1^* & : w_1^* = \lambda w_2^*, \lambda \geq 0 \\ -w_1^* \otimes w_1^* & : w_1^* = \lambda w_2^*, \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Daher gilt also:  $\exists! \hat{D} \in \widehat{\Lambda^n(V)^*} \simeq \widehat{\Lambda^n(V^*)} \simeq \widehat{\Lambda^n(V^*)}$ , das  $\Lambda^n g$  entspricht, und zwar ist dann  $\hat{D} = [D, o]$ ,  $D \in \Lambda^n(V^*)$ ,  $o \in \mathcal{O}(V)$  mit

$$\Lambda^n g = \begin{cases} D \otimes D & : D = 0 \text{ oder } o = [D] \\ -D \otimes D & : D = 0 \text{ oder } o = -[D]. \end{cases}$$

Wenn wir den Faktor  $n!$  weglassen und  $v_i = v'_i$  setzen, so ergibt sich:  
 $\exists! \hat{D} = [D, o] \in \widehat{\Lambda^n(V^*)} : \forall v_1, \dots, v_n \in V :$

$$\det(g(v_i, v_j)) = D(v_1, \dots, v_n)^2 \cdot \begin{cases} +1 & : o = [D] \\ -1 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist  $(\hat{D} = 0 \iff \text{rg}(g) < n)$  und  $(o = [D], \text{d.h. } \hat{D} \in \widehat{\Lambda^n(V^*)}_+ \iff l \text{ in S. 86 ist gerade})$ . Da  $D \in \Lambda^n(V^*)$  schon durch seinen Wert auf einer Basis festgelegt ist, gilt: Wenn  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis in  $V$ ,  $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ ,  $v^1, \dots, v^n$  die duale Basis in  $V^*$ , so ist  $\hat{D} = [D, o]$ ,  $D = \sqrt{|\det(g_{ij})|} v^1 \wedge \cdots \wedge v^n \in \Lambda^n(V^*)$ ,

$$o = \begin{cases} \text{sign}(\det(g_{ij})) [v^1 \wedge \cdots \wedge v^n] & : \det(g_{ij}) \neq 0 \\ \text{beliebig} & : \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{O}(V).$$

### Definition und Hilfssatz:

- 1)  $(V, g)$  IPR.  $\hat{D}_g \in \widehat{\Lambda}^n(V^*)$  sei wie oben definiert.
- 2)  $(M, g)$  Pseudo-Riemannscher Raum. Dann heißt  
 $(\hat{\Omega}_g : x \mapsto \hat{D}_{g(x)} \in \widehat{\Lambda}^n(T_x^* M)) \in \hat{\Omega}^n(M) \simeq \mathcal{K}'_{k-1}(M)$   
das kanonische Volumsmaß in  $M$ . In Koordinaten gilt:  
 $\hat{\Omega}_g(x) = [\sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, [\epsilon_g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]],$  wobei  
 $\det g := \det(g_{ij}(x))$  und  $\epsilon_g := \text{sign}(\det g).$
- 3)  $(M, g)$  Pseudo-Riemannscher Raum,  $i : N \hookrightarrow M$   $p$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.  $\hat{\Omega}_{i^*g} \in \hat{\Omega}^p(N)$  heißt Oberflächenmaß auf  $N$  (bzgl.  $g$ ) und wird manchmal mit  $d\sigma$  bezeichnet. (Vorsicht: In Punkten, in denen  $i^*g$  ausgeartet ist, ist  $\hat{\Omega}_{i^*g}$  nur ein stetiges Maß, d.h.  $\hat{\Omega}_{i^*g} \in \hat{\Omega}^p(N$  als  $\mathcal{C}^1$ -Mannigfaltigkeit).)

**Beweis zu 2):** Da  $g$  nicht ausgeartet ist, ist  $\det g \neq 0$  und daher  $\hat{\Omega}_g \in \mathcal{C}^{k-1}$ .  $\square$

**Bemerkung:**  $\hat{\Omega}_g$  wird oft als „ $\epsilon$ -Pseudo-Tensor“ und in der Relativitätstheorie als „Levi-Civit-Symbol“ bezeichnet.

**Bsp.:** 1) Das Oberflächenmaß in Koordinaten:

$i : N \hookrightarrow M$  Untermannigfaltigkeit,  $\varphi : U \longrightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  Karte auf  $M$ ,  $\psi : U' \longrightarrow V' : x \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$  Karte auf  $N$ . Dann ist

$$\hat{\Omega}_{i^*g} = [\sqrt{|\det i^*g|} d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^p, [\epsilon_{i^*g} d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^p]] = \epsilon_{i^*g} \sqrt{|\det(g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^l})_{k,l}|} d\xi,$$

vgl. S. 87.

Z.B. auf  $\mathbb{S}^2$  ergibt sich das Oberflächenmaß  $d\sigma = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Wenn  $N$  eine Kurve ist, d.h.  $p = 1$ , so erhalten wir in einer Parametrisierung  $(a, b) \longrightarrow N : t \mapsto x$  als

Kurvenlänge  $\int_N^b \hat{\Omega}_{i^*g} = \int_a^b \sqrt{|g_{ij}(x(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t)|} \cdot \text{sign}(g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) dt$ . Z.B. ergibt sich für die Kurvenlänge von raumartigen Kurven etwas Negatives im Minkowskiraum  $(\mathbb{R}^4, dx^0 \otimes dx^0 - \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i)$ .

2) Im Fall einer  $(n-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit kann  $\hat{\Omega}_{i^*g}$  durch das Kreuzprodukt ausgedrkt werden. Dazu sei zunächst  $(V, g)$  ein IPR,  $g$  nicht ausgeartet. Es sei  $\hat{D}_g = [D, o]$  und

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow \hat{V} : (v_1, \dots, v_{n-1}) \mapsto [v_0, o] =: v_1 \times \cdots \times v_{n-1},$$

wobei  $v_0 := \tilde{g}^{-1}\left(\underbrace{D(x, v_1, \dots, v_{n-1})}_{\in V^*}\right)$ , d.h.  $\forall x \in V : D(x, v_1, \dots, v_{n-1}) = g(x, v_0)$ ,  
vgl. auch S. 56.

Es seien  $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$  linear unabhängig,  $W := \mathbb{R}\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ . Wenn  $v^1, \dots, v^{n-1} \in W^*$  die duale Basis ist und  $i^*g := g|_{W \times W}$ , so ist

$$\hat{D}_{i^*g} = \left[ \sqrt{\det(g(v_i, v_j))_{i,j=1,\dots,n-1}} \mid v^1 \wedge \dots \wedge v^{n-1}, [\epsilon_{i^*g} v^1 \wedge \dots \wedge v^{n-1}] \right].$$

Andererseits ist  $g(v_0, v_0)^2 = D(v_0, \dots, v_{n-1})^2 = \epsilon_g \det(g(v_i, v_j)_{i,j=0,\dots,n-1}) = (\text{weil } g(v_0, v_i) = 0, i = 1, \dots, n-1) = \epsilon_g g(v_0, v_0) \det(g(v_i, v_j)_{i,j=1,\dots,n-1}) = \epsilon_g \epsilon_{i^*g} \text{sign}(g(v_0, v_0)) |g(v_0, v_0)| \cdot |\det(g(v_i, v_j)_{i,j=1,\dots,n-1})|$   
 $\implies \hat{D}_{i^*g} = \left[ \sqrt{|g(v_0, v_0)|} \mid v^1 \wedge \dots \wedge v^{n-1}, [\epsilon_g \text{sign}(g(v_0, v_0)) v^1 \wedge \dots \wedge v^{n-1}] \right].$

Auf der  $(n-1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $N$  eines Pseudo-Riemannschen Raumes  $M$  gilt also in einer Karte  $\psi : x \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^{n-1})^T$  mit

$v_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \in T_x N =: W : d\sigma = \hat{\Omega}_{i^*g} = \left| \frac{\partial}{\partial \xi^1} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}} \right| \epsilon_g d\xi$ , wobei  
 $\frac{\partial}{\partial \xi^1} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}}$  das Kreuzprodukt bzgl.  $g(x)$  ist und

$$|\cdot| : \widehat{T_x M} \longrightarrow \mathbb{R} : [v, o] \mapsto \text{sign}(g(v, v)) \sqrt{|g(v, v)|}.$$

Für  $M = \mathbb{R}^n$  entfallen natürlich alle Signa und ergibt sich  $d\sigma$  wie in S. 82.

3) Wir wollen untersuchen, für welche  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten  $N$  von  $\mathbb{R}^n$   $|i^*L|$  mit  $d\sigma$  übereinstimmt. In einer Karte  $\psi$  wie oben gilt:

$$\begin{aligned} |i^*L| &= \left| \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \right| = (\text{vgl. S. 82}) \\ &= \left| \left\langle x, \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \dots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right\rangle \right| d\xi \text{ und } d\sigma = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \times \dots \times \frac{\partial x}{\partial \xi^{n-1}} \right| d\xi, \text{ d.h. } |i^*L|(x) = d\sigma(x) \iff \\ &\quad |x| \sin(\angle(x, T_x N)) = 1. \text{ Das gilt z.B. für } N = \mathbb{S}^{n-1}. \end{aligned}$$

Das  $\times$ -Produkt kann als Spezialfall des  $*$ -Operators angesehen werden. Es sei wieder  $(V, g)$  ein  $n$ -dimensionaler nicht ausgearteter IPR,  $\hat{D}_g \in \widehat{\Lambda^n(V^*)}$  wie oben.  $\tilde{g} : V \xrightarrow{\sim} V^*$  liefert für  $0 \leq p \leq n : * : \Lambda^p(V^*) \xrightarrow[\Lambda^p(\tilde{g}^{-1})]{\sim} \Lambda^p(V) \xrightarrow[\langle \cdot, \hat{D}_g \rangle]{\cong} \hat{\Lambda}^{n-p}(V^*)$ .

$$\text{Genauer: } \hat{D}_g = [D, o] \implies * (v_1^* \wedge \dots \wedge v_p^*) = \underbrace{\left[ \underbrace{\langle \tilde{g}^{-1}(v_1^*) \wedge \dots \wedge \tilde{g}^{-1}(v_p^*), \underbrace{D}_{\in V^{*\otimes n}} \rangle}_{\in V^{\otimes p}}, \underbrace{o}_{\in V^{*\otimes(n-p)}} \right]}_{\in V^{*\otimes(n-p)}}$$

wobei  $\langle \tilde{g}^{-1}(v_1^*) \wedge \dots \wedge \tilde{g}^{-1}(v_p^*), D \rangle : V^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(v_1, \dots, v_{n-p}) \mapsto D(\tilde{g}^{-1}(v_1^*), \dots, \tilde{g}^{-1}(v_p^*), v_1, \dots, v_{n-p})$   
(und genau genommen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{hier}} = p!^{-1} \langle \cdot, \cdot \rangle$  von S. 49).

In Koordinaten:  $e_1, \dots, e_n$  Basis in  $V$ ,  $e^1, \dots, e^n$  duale Basis,  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ ,  
 $\det g = \det(g_{ij})$ ,  $\epsilon_g = \text{sign}(\det g)$ ,  $D = \sqrt{|\det g|} e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ ,  $o = [\epsilon_g e^1 \wedge \dots \wedge e^n] \implies$

$$\begin{aligned} * (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}) &= [\eta, o], \quad \eta \in V^{*\otimes(n-p)} \text{ mit } \eta(e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}}) = \\ &= \sqrt{|\det g|} (e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(g^{i_1 k_1} e_{k_1}, \dots, g^{i_p k_p} e_{k_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}}) = \\ &= \sqrt{|\det g|} g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_p k_p} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 \cdots k_p & j_1 \cdots j_{n-p} \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

(Beachte:  $\operatorname{sign} = 0$ , wenn in der unteren Zeile gleiche Indices vorkommen; über  $1 \leq k_1, \dots, k_p \leq n$  ist zu summieren.)

Wenn also  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_p} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \in \Lambda^p(V^*)$ , so ist

$$*\omega = \left[ \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-p} \leq n} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-p}} \sqrt{|\det g|} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_p} g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_p k_p} \right. \\ \left. \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 \cdots k_p & j_1 \cdots j_{n-p} \end{smallmatrix}\right), o \right].$$

Weiters definiert man  $* : \widehat{\Lambda}^p(V^*) \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-p}(V^*)$   
 $[\omega, o] \longmapsto \epsilon_g \langle \Lambda^p(\tilde{g}^{-1})\omega, D \rangle$ ,

d.h.  $[*[\omega, o], o] = \epsilon_g * \omega$ .

Es soll noch  $**$  berechnet werden. Dazu sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ , in der  $g(x^i e_i, y^j e_j) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x^i y^i$ ,  $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & : i \leq k \\ -1 & : i > k, \end{cases}$ , vgl. S. 86. Dann gilt

$$*e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = \left[ \begin{array}{c} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-p}} \epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_p} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 \cdots i_p & j_1 \cdots j_{n-p} \end{smallmatrix}\right), o \\ \downarrow \\ \text{nicht summieren} \\ \text{über } j! \end{array} \right], \text{ wobei}$$

$1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-p} \leq n$  und  $\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p}\}$ .

Daher folgt  $**e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = \epsilon_g \epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_p} \epsilon_{j_1} \cdots \epsilon_{j_{n-p}} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 \cdots i_p & j_1 \cdots j_{n-p} \end{smallmatrix}\right)$ .

$\cdot \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 \cdots j_{n-p} & i_1 \cdots i_p \end{smallmatrix}\right) e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = (-1)^{p(n-p)} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$ , d.h.  $** = (-1)^{p(n-p)}$  id.

**Def.:**  $(M, g)$   $n$ -dimensionaler  $\mathcal{C}^k$ -Pseudo-Riemannscher Raum,  $0 \leq p \leq n$ .

1)  $* : \Omega^p(M) \longrightarrow \hat{\Omega}^{n-p}(M)$  und  $* : \hat{\Omega}^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$  sind entsprechend dem obigen wohldefiniert. In Koordinaten und mit  $O = [\epsilon_g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]$  gilt:

a)  $\Omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \in \Omega^p(M) \implies *\Omega \in \hat{\Omega}^{n-p}(M)$  mit

$$*\Omega = \left[ \sqrt{|\det g|} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-p} \leq n \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \omega_{i_1 \cdots i_p} g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_p k_p} \operatorname{sign}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 \cdots k_p & j_1 \cdots j_{n-p} \end{smallmatrix}\right) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}, O \right]$$

b)  $\hat{\Omega} = [\Omega, O] \in \hat{\Omega}^p(M) \implies *\hat{\Omega} \in \Omega^{n-p}(M)$  mit  $*\Omega = \epsilon_g [*\hat{\Omega}, O]$ .

Es gilt:  $** = (-1)^{p(n-p)}$  id.

2)  $d : \hat{\Omega}^p(M) \longrightarrow \hat{\Omega}^{p+1}(M)$  sei lokal durch  $d[\Omega, O] = [d\Omega, O]$  definiert (vgl. auch S. 79) und ähnlich  $\tilde{g} : \tilde{T}^1(M) \longrightarrow \hat{\Omega}^1(M)$ .

a)  $\operatorname{grad} : \mathcal{C}^k(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M) : f \longmapsto \tilde{g}^{-1} df$ ;

b)  $J : \mathcal{T}^1(M) \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}^{n-1}(M) : X \longmapsto *\tilde{g}X$ ;

c)  $k \geq 2$ ;  $\operatorname{div} : \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-2}(M) : X \longmapsto *d JX$ ;

- d)  $k = \infty$ ;  $\delta : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M) : \Omega \longmapsto (-1)^{n(p+1)} * d * \Omega$ ;  
e)  $k = \infty$ ;  $\Delta := d\delta + \delta d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M)$ ;  
f)  $k = \infty$ ;  $n = 3$ ;  $\text{rot} : \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \hat{\mathcal{T}}^1(M) : X \longmapsto \tilde{g}^{-1} * d\tilde{g}X$ .

**Bsp.:** 1)  $*1 = \hat{\Omega}_g$ ,  $*\hat{\Omega}_g = **1 = 1$ .

2) In Koordinaten und mit  $O = [\epsilon_g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]$  gilt:

$$\text{a) } \text{grad } f = \tilde{g}^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{T}^1(M).$$

$$\text{b) } J(v^l \partial_l) = *(v^l g_{li} dx^i)$$

$$= \left[ \sqrt{|\det g|} v^l g_{li} g^{ik} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n, O \right]$$

$$= \left[ \sqrt{|\det g|} \sum_{k=1}^n v^k (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n, O \right].$$

(Z.B. im  $\mathbb{R}^n$ :  $J(x^l \partial_l) = [L, [dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]]$ )

$$\text{c) } \text{div}(v^l \partial_l) = *dJ(v^l \partial_l) = *d \left[ \sqrt{|\det g|} \sum_{k=1}^n v^k (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n, O \right]$$

$$= * \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\sqrt{|\det g|} v^k)}{\partial x^k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, O \right] = * \left( \hat{\Omega}_g \cdot \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\sqrt{|\det g|} v^k)}{\partial x^k} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{|\det g|} v^k)}{\partial x^k}.$$

d), e) Für  $p = 0$  ist offenbar  $\delta = 0$ . Für  $p = 1$  ist  $\delta : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) : \Omega \longmapsto *d*\Omega = \text{div } \tilde{g}^{-1}\Omega \implies$  für  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gilt  $\Delta f = \delta df = \text{div } \tilde{g}^{-1} df = \text{div grad } f$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|\det g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

(Vorsicht:  $\delta$  wird oft mit einem anderen Vorzeichen definiert.)

$$\text{f) Es sei } \dim M = 3, X = v^l \partial_l, \Omega = \tilde{g}X = \omega_i dx^i, \text{ d.h. } \omega_i = v^l g_{li}. \text{ Dann ist}$$

$$\text{rot}(X) = \tilde{g}^{-1} * d\tilde{g}X = \tilde{g}^{-1} * d(\omega_i dx^i) = \tilde{g}^{-1} * \left( \frac{\partial \omega_{i_2}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \right)$$

$$= \tilde{g}^{-1} \left[ \sqrt{|\det g|} \frac{\partial \omega_{i_2}}{\partial x^{i_1}} g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k_1 & k_2 & j \end{pmatrix} dx^j, O \right]$$

$$= \left[ \sqrt{|\det g|} \frac{\partial \omega_{i_2}}{\partial x^{i_1}} \underbrace{g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} g^{i_3 j} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k_1 & k_2 & j \end{pmatrix}}_{= \frac{1}{\det g} \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}} \frac{\partial}{\partial x^{i_3}}, \underbrace{O}_{= \text{sign}(\det g)[dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3]} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left[ \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \frac{\partial \omega_{i_2}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_3}}, [dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3] \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left[ \text{"det} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \omega \\ \partial/\partial x \end{pmatrix} ", [dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3] \right].$$

3) Es sei z.B.  $M = \mathbb{S}^2$  mit Kugelkoordinaten  $\varphi, \vartheta$ . Dann ist also  $g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \vartheta$ ,

$g_{\varphi\vartheta} = 0$ ,  $g_{\vartheta\vartheta} = 1$ ,  $g^{\varphi\varphi} = (\sin \vartheta)^{-2}$ ,  $g^{\varphi\vartheta} = 0$ ,  $g^{\vartheta\vartheta} = 1$  (wenn der Deutlichkeit halber  $\varphi, \vartheta$  statt 1,2 geschrieben wird). Es ergibt sich:

$$\text{grad } f(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta};$$

$$J(X^\varphi \partial_\varphi + X^\vartheta \partial_\vartheta) = \sin \vartheta [X^\varphi d\vartheta - X^\vartheta d\varphi, [d\varphi \wedge d\vartheta]];$$

$$\text{div } (X^\varphi \partial_\varphi + X^\vartheta \partial_\vartheta) = \frac{1}{\sin \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial X^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (\sin \vartheta X^\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = \frac{\partial X^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X^\vartheta}{\partial \vartheta} + \text{ctg } \vartheta X^\vartheta;$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg } \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

4) Auf einem Pseudo-Riemannschen Raum kann der Stokes'sche Satz umformuliert werden.  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  habe kompakten Träger,  $U$  sei wie im Satz von Stokes. Dann ist

$$\int_{\partial U} i_*^a JX \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \int_U dJX = \int_U ** dJX = \int_U \text{div}(X) \cdot \hat{\Omega}_g.$$

Weiters ist in einer Karte und mit  $O = [\epsilon_g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n] : X = v^l \partial_l$ ,

$$JX = \left[ \sqrt{|\det g|} \sum_{k=1}^n v^k (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n, O \right].$$

Wenn, wie früher  $W \subset \partial U$  und  $\psi : W \longrightarrow V : x \longmapsto \xi$  eine Karte auf  $\partial U$  ist,  $\epsilon = \pm 1$  je nachdem, ob  $\psi$  die Orientierung (d.h.  $O|_W^a$  und die kanonische auf  $V$ ) erhält oder nicht, und  $D = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ ,  $\frac{\partial}{\partial \xi^1} \times \cdots \times \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}} = [y, O]$  (vgl. Bsp. 2, S. 91), so folgt

$$g(X, y) = D \left( X, \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}} \right) = \sqrt{|\det g|} \sum_{k=1}^n v^k (-1)^{k-1} \det \left( \frac{\partial(x^1, \dots, \widehat{x^k}, \dots, x^n)}{\partial(\xi^1, \dots, \dots, \xi^{n-1})} \right).$$

Wie in S. 82 gilt (für  $i : W \hookrightarrow M$ ) :  $i^* \left( \sum_{k=1}^n v^k (-1)^{k-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n \right)$

$$= \sum_{k=1}^n v^k (-1)^{k-1} \det \left( \frac{\partial(x^1, \dots, \widehat{x^k}, \dots, x^n)}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{n-1})} \right) d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{n-1}$$

$$\implies i_*^a JX = \epsilon [g(X, y) d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{n-1}, [d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{n-1}]] = \epsilon g(X, y) d\xi.$$

Wenn speziell  $M$  ein Riemannscher Raum ist, d.h.  $g$  positiv definit ist, so ist

$0 < g(y, y) = D \left( y, \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{n-1}} \right)$ , d.h.  $[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]_W^y = [d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{n-1}]$  in der Notation von S. 78.

Andererseits ist  $[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n]_W^a = \epsilon [d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^{n-1}]$  und daher gilt  $n = \frac{\epsilon y}{\sqrt{g(y, y)}}$ ,

wenn  $n : \partial U \longrightarrow TM$  die Außeneinheitsnormale ist, d.h. (i)  $\forall \eta \in T_x \partial U : g(\eta, n(x)) = 0$ , (ii)  $g(n(x), n(x)) = 1$ , (iii)  $n$  weist von  $U$  nach außen, d.h.  $T\varphi(n(x)) = v^i \partial_i$  mit  $v^1 > 0$

in einer Karte  $\varphi$  wie in (\*), S. 78, 3. Zeile.

Mit  $\hat{\Omega}_{i^*g} = d\sigma = \sqrt{g(y,y)} d\xi$  (vgl. S. 92) folgt schließlich:

$$\int_{\partial U} g(X, n) \cdot \hat{\Omega}_{i^*g} = \int_U \operatorname{div}(X) \cdot \hat{\Omega}_g$$

(Auf einem Pseudo-Riemannschen Raum kann  $g(y,y)$  und damit  $\hat{\Omega}_{i^*g}$  in manchen Punkten oder auch auf ganz  $\partial U$  verschwinden und ist daher die obige Formulierung des Satzes von Gauß nicht möglich.  $i_*^a J X$  kann dann nur in einem Kartengebiet durch  $\epsilon g(X, y) d\xi$  (wie in S. 95) ausgedrückt werden.)

## Übungen

Üb. 6.1  $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$  sei die stereographische Projektion (S. 9). Bestimme die Metrik auf  $\mathbb{R}^n$ , die von der Standardmetrik auf  $\mathbb{S}^n$  induziert wird (vgl. S. 87).

Hinweis: Betrachte  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  statt  $P$ . Nütze die Rotationssymmetrie aus!

Üb. 6.2 Die Poincarésche Metrik auf der Kreisscheibe  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ist durch  $g(z) = (1 - |z|^2)^{-2} [dx \otimes dx + dy \otimes dy] \in T_z^* D^{\otimes 2}$  gegeben.

- a) Berechne die Kurvenlänge  $R_r$  von  $(0, r) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  für  $0 < r < 1$ .
- b) Berechne die Oberfläche  $F_r$  von  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  für  $0 < r < 1$ .
- c) Berechne die Kurvenlänge  $U_r$  von  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  für  $0 < r < 1$ .
- d) Was passiert für  $r \nearrow 1$ ?

e) Berechne  $\lim_{r \searrow 0} \frac{F_r}{R_r^2}, \quad \lim_{r \searrow 0} \frac{U_r}{R_r}, \quad \lim_{r \searrow 0} \frac{F_r - \pi R_r^2}{R_r^4}, \quad \lim_{r \searrow 0} \frac{U_r - 2\pi R_r}{R_r^3}$ .

Üb. 6.3 Berechne  $g$ ,  $\hat{\Omega}_g$ ,  $\operatorname{grad}$ ,  $J$ ,  $\operatorname{div}$ ,  $\Delta$ , und  $\operatorname{rot}$  in Kugelkoordinaten am  $\mathbb{R}^3$ .

Üb. 6.4 Die Metrik  $g$  auf  $\operatorname{Gl}_n(\mathbb{R})$  sei wie in S. 88.

- a) Zeige, dass  $\hat{\Omega}_g = |\det A|^{-n} |da_1^1 \wedge \cdots \wedge da_n^n|$ .

Hinweis: Verwende entweder, dass  $g$  linksinvariant ist und daher  $\hat{\Omega}_g$  ein Haarmass ist, oder schreibe  $g = g_{kl}^{ij} da_i^k \otimes da_j^l$  und berechne  $\det(\bar{g})$ ,

$\bar{g} : (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^* : (x_i) \otimes (y^k) \longmapsto (g_{kl}^{ij} x_i y^k)_l^j$   
unter Beachtung von  $\bar{g} = \operatorname{id} \otimes A^{-1}(A^{-1})^T$ .

- b) Zeige, dass  $\Delta f(A) = (2 - n)a_j^i \frac{\partial f}{\partial a_j^i} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_j^k a_j^l \frac{\partial^2 f}{\partial a_i^k \partial a_i^l}$  und berechne  $\Delta \det$  und  $\Delta \operatorname{tr}$ .

Üb. 6.5 a) Zeige, dass eine linksinvariante Metrik  $g$  auf einer Liegruppe auch rechtsinvariant ist  $\iff J^* g = g$ , wobei  $J : G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$ .

Hinweis:  $T_x J = -T_I l^{x^{-1}} \circ T_x r^{x^{-1}}$ .

b) Es sei  $g \in \mathcal{T}_2(\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}))$  linksinvariant und symmetrisch, d.h.

$$g(A_0) = c_{rs}^{ij} d(A_0^{-1} A)_i^r \otimes d(A_0^{-1} A)_j^s \text{ mit } c_{rs}^{ij} = c_{sr}^{ji}.$$

Zeige, dass  $g$  rechtsinvariant  $\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : c_{rs}^{ij} = \alpha \delta_r^i \delta_s^j + \beta \delta_s^i \delta_r^j$ . Folgere, dass es auf  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 2$ , keine links- und rechtsinvariante Riemannsche Metrik gibt. Wie sind  $\alpha, \beta$  zu wählen, dass  $g$  eine Pseudo-Riemannsche Metrik ist? Was ist speziell die Signatur von  $g = d(A_0^{-1} A)_i^i \otimes d(A_0^{-1} A)_i^i$ ?

Üb. 6.6  $g$  sei die linksinvariante Metrik auf  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  von S. 88.

a) Zeige, dass  $i^* g = \sum_{1 \leq j, k \leq n} da_j^k \otimes da_j^k$ , wenn  $i : \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  und folgere, dass  $i^* g$  auch rechtsinvariant ist.

b) Zeige, dass  $\hat{\Omega}_{i^* g} = 2^{n(n-1)/4} \lambda^{(n)}$  wenn  $\lambda^{(n)}$  wie in Üb. 4.7, S. 69.

c)  $f : \mathbb{S}^2 \otimes \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) : (x, (\begin{smallmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{smallmatrix})) \longmapsto A_{x, \varphi}$  sei wie in Üb. 1.5, S. 13.

Zeige, dass  $g_1 := f^* \left( \sum_{1 \leq j, k \leq 3} da_j^k \otimes da_j^k \right) = 2 d\varphi \otimes d\varphi + 4(1 - \cos \varphi) \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$ .

Hinweis: Berechne  $f^*(da_j^i)$  für  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , vgl. Üb. 3.7, b), c), S. 52.

d) Berechne  $\hat{\Omega}_{g_1} \in \hat{\Omega}^3(\mathbb{S}^3 \otimes \mathbb{S}^1)$  und vergleiche es mit der in Üb. 4.5, S. 68, angegebenen Formel für  $f^*(\Omega)$ .

e) Es sei  $N := \{A_{x, \varphi} : x \in \mathbb{S}^2, \varphi \in (0, \pi)\}$  und  $\varphi : N \longrightarrow (0, \pi) : A_{x, \varphi} \longmapsto \varphi$ . Berechne  $\Delta(h(\varphi))$  (bzgl. der Metrik  $g_1$ ) für  $h : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^2$ .

## § 7 Geodätische Kurven und Normalkoordinaten

**Def.:**  $(M, g)$  Riemannscher Raum =: RR.

- 1)  $i : N \hookrightarrow M$  sei eine Untermannigfaltigkeit.

$$|N| := \underline{\text{Volumen von } N} := \int_N \hat{\Omega}_{i^*g} \in [0, \infty].$$

- 2)  $x, y \in M$ .  $d(x, y) := \inf \{|N| : N \subset M \text{ 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit } \{x, y\} = \partial N\}$ . ( $\inf \{\} := \infty$ ;  $\partial N := \overline{N} \setminus N$ )  
 $d(x, y)$  heißt Abstand von  $x, y$  (bzgl.  $g$ ).

- 3)  $N \subset M$  zusammenhängende 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.  $N$  heißt Minimallinie  $\iff |N| = \min \{|N_1| : \partial N = \partial N_1, N_1 \subset M \text{ 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit}\}$ .

**Bemerkung:** 1) Wenn  $N \subset M$  eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist und durch  $x : (a, b) \longrightarrow \mathbb{N} : t \mapsto x(t)$  parametrisiert ist (d.h.  $x$  Immersion) und

$$\dot{x}(t_0) := [x(t_0 + t)] = T_{t_0}x(\frac{d}{dt}) \in T_{x(t_0)}M, \text{ so ist } \hat{\Omega}_{i^*g}(x(t)) = \sqrt{g(x(t))(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} \cdot |dt|$$

und daher  $|N| = \int_a^b \sqrt{g(x(t))(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt$  bzw., falls  $N$  in einer Karte  $x \mapsto x^i$  liegt,

$$|N| = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)} dt, \text{ vgl. S. 91.}$$

2) Das „inf“ in 2) der Definition lässt sich i.A. nicht durch ein „min“ ersetzen. Z.B. ist für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = M$   $d(x, -x) = 2|x|$ , es gibt aber kein  $N$  mit  $|N| = 2|x|$  und  $\partial N = \{x, -x\}$ .

3) Wenn man in 3) der Definition z.B. 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten betrachtet, erhält man „Minimalflächen“.

**Hilfssatz:**  $(M, g)$  zusammenhängender RR. Dann ist  $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik auf  $M$ , die die Topologie von  $M$  erzeugt.

**Beweis:** a)  $M$  zusammenhängend  $\implies M$  wegzusammenhängend  $\implies \forall x, y \in M : \exists \mathcal{C}^0$ -Kurve von  $x$  nach  $y$ . Diese  $\mathcal{C}^0$ -Kurve wird von endlich vielen Kartengebieten überdeckt; dort kann man sie  $\mathcal{C}^k$  machen  $\implies \exists N \subset M$  1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit  $\partial N = \{x, y\} \implies d(x, y) < \infty$ .

b)  $d(x, x) = 0$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  sind klar.

Es sei  $x_0 \neq x_1 \in M$  und  $\varphi : U \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2\}$  eine Karte mit  $x_0 \in U$ ,  $\varphi(x_0) = 0$ ,  $x_1 \notin U$ ;  $A := \varphi^{-1}(\{x : |x| \leq 1\})$ ,

$$a := \min \left\{ \sqrt{g_{ij}(x)\xi^i\xi^j} : \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1, x \in A \right\}.$$

Da  $g$  stetig und positiv definit ist, ist  $a > 0$ .

Wenn  $x_2 \in \partial A$  und  $x : [0, 1] \rightarrow M$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Weg mit  $x(0) = x_0, x(1) = x_2$ , so ist  $\int_0^1 \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} dt \geq a \int_0^1 |(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)| dt \geq a$  und daher  $d(x_0, x_2) \geq a$ . Jeder  $\mathcal{C}^1$ -Weg von  $x_0$  nach  $x_1$  schneidet  $\partial A$  (da  $M \setminus \partial A$  nicht zusammenhängend)  $\Rightarrow d(x_0, x_1) \geq a$ .

Also ist  $d(x_0, x_1) = 0 \iff x_0 = x_1$ , d.h.  $d$  ist Metrik.

c) Außerdem folgt, dass  $\{x : d(x_0, x) < a\} \subset A$ , d.h. die durch die Metrik erzeugte Topologie ist feiner als die ursprüngliche. Umgekehrt, wenn

$$b := \max \left\{ \sqrt{g_{ij}(x)\xi^i\xi^j} : \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1, x \in A \right\},$$

so ist  $d(x_0, x_1) \leq b|\varphi(x_1)|$  für  $x_1 \in A$  und somit  $\{x \in U : |\varphi(x)| < \epsilon/b\} \subset \{x : d(x_0, x) < \epsilon\}$  für  $0 < \epsilon < b$ , d.h. die ursprüngliche Topologie ist feiner als die von  $d$  erzeugte.  $\square$

**Bsp.:** Für  $M = \mathbb{S}^n$  sind die Minimallinien Teile von Großhalbkreisen (s. S. 107) und daher ist  $d(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$ , wobei  $x, y \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x^i y^i$ .

Nach dem letzten Satz ist  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  für zusammenhängende  $M$  stetig. Auf der Diagonale  $\{(x, x) : x \in M\}$  ist  $d$  aber nicht  $\mathcal{C}^1$ , da es sich lokal wie im  $\mathbb{R}^n$  verhält (vgl. den obigen Beweis), d.h.  $\exists 0 < a < b :$

$$a|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y) \leq b|\varphi(x) - \varphi(y)|$$

für eine Karte  $\varphi$  bei  $x$  und  $y$  bei  $x$ .

Auf  $\mathbb{S}^n$  ist  $d(x, y)$  außerdem in den Punkten  $x = -y$  nicht  $\mathcal{C}^1$ . In S. 106 e) werden wir sehen, dass  $d(x, y)$  zumindest für  $y$  genügend nahe bei  $x$ ,  $y \neq x$ ,  $\mathcal{C}^{k-2}$  sein muss.

**Def.:**  $(M_i, g_i)$  RR,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  heißt Isometrie : $\iff$  (i)  $f$  Diffeomorphismus  
(ii)  $f^*g_2 = g_1$ .

**Bemerkung:** Eine Isometrie  $f$  erhält natürlich Minimallinien und d. Für zusammenhängende  $M_i$  ist  $f$  also auch eine Isometrie der metrischen Räume  $(M_i, d_i)$ . Das Umgekehrte (d.h.  $\forall x_i : d_1(x_1, x_2) = d_2(f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow$  (ii)) werden wir in S. 108 sehen.

**Bsp.:** Wenn  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  die stereographische Projektion ist und  $g$  die Standardmetrik auf  $\mathbb{S}^n$ , so ist  $P : (\mathbb{R}^n, P^*g) \rightarrow \left( \mathbb{S}^n \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, g \right)$  eine Isometrie.

Nach Üb. 6.1, S. 96 gilt  $P^*g = 4(|x|^2 + 1)^{-2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ .

**Notation:** Obwohl oft  $q$  verwendet wird, schreibe ich weiter  $x$ . Für einen Tangentialvektor  $v$  wird  $\dot{x}$  geschrieben. Wenn  $\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  eine Karte ist, so ist dann  $T\varphi : TU \rightarrow V \times \mathbb{R}^n : (x, \dot{x}) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ .

Für eine  $C^1$ -Kurve  $(a, b) \rightarrow M : t \mapsto x(t)$  setzt man (wie schon oben)

$$\dot{x}(t_0) := [x(t + t_0)] = T_{t_0}x\left(\frac{d}{dt}\right) \in T_{x(t_0)}M \text{ für } t_0 \in (a, b).$$

Dann sind die Koordinaten  $\dot{x}^i$  von  $\dot{x}(t_0)$  gerade die üblichen Ableitungen  $\frac{dx^i}{dt}(t_0)$ .

**Def.:**

- 1)  $M, N C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $1 \leq l \leq k$ ,  $A \subset M$ .  $f : A \rightarrow N$  heißt  $C^l$  : $\iff \exists U \supset A$  offen:  $\exists f_1 : U \rightarrow N C^l : f = f_1|_A$ .
- 2)  $M C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 3$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $F : [a, b] \times TM \rightarrow \mathbb{R} C^2$ .  
 $x_0(t) : [a, b] \rightarrow M C^2$  heißt stationär bzgl.  $F : \iff \forall x_s(t) : [-1, 1] \times [a, b] \rightarrow M C^2$  mit  $\forall s : x_s(a) = x_0(a)$ ,  $x_s(b) = x_0(b)$   
 $(s, t) \mapsto x_s(t)$   
gilt: 
$$\frac{d}{ds} \left( \int_a^b F(t, x_s(t), \dot{x}_s(t)) dt \right) \Big|_{s=0} = 0.$$

**Bsp.:**  $t \mapsto x(t)$  sei eine parametrisierte Minimallinie mit  $\forall t : \dot{x}(t) \neq 0$ . Dann ist  $x(t)$  stationär bzgl.  $F : TM \rightarrow \mathbb{R} : (x, \dot{x}) \mapsto \sqrt{g(x)(\dot{x}, \dot{x})}$ , denn  $\int_a^b F(x(t), \dot{x}(t)) dt$  ist ja sogar minimal. (Genau genommen ist  $F C^2$  nur auf  $\{(x, \dot{x}) \in TM : \dot{x} \neq 0\}$ ; das macht aber nichts, wenn wir  $\forall t : \dot{x}(t) \neq 0$  voraussetzen.)

**Satz von Euler und Definition:** In der Situation der letzten Definition gilt:

- 1)  $x(t)$  stationär bzgl.  $F \iff \forall t \in [a, b] : \forall (\exists) \text{ Karte bei } x(t) : \forall i = 1, \dots, n : \frac{\partial F}{\partial x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right)$ .
- 2)  $E : [a, b] \times TM \rightarrow \mathbb{R} C^1$  ist durch  $E(t, x, \dot{x}) := \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - F$  wohldefiniert (d.h. kartensunabhängig) und heißt Energiefunktion zu  $F$ . Auf einer stationären Kurve  $x(t)$  gilt:  $\frac{d}{dt} (E(t, x(t), \dot{x}(t))) = -\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), \dot{x}(t))$ . (Speziell:  $E(x(t), \dot{x}(t))$  konstant, wenn  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ .)

**Beweis:** 1) Zunächst sei  $x(t) = x_0(t)$  stationär,  $x_s(t)$  wie in der Definition und  $x_s(t) \neq x(t)$  nur wenn  $x(t)$  in einem festen Kartengebiet liegt.

Wenn  $y(t) := \left( \frac{\partial}{\partial s} x_s(t) \right) \Big|_{s=0}$ , so gilt in den entsprechenden Koordinaten:

$$0 = \frac{d}{ds} \left( \int_a^b F(t, x_s(t), \dot{x}_s(t)) dt \right) \Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x^i} y^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \dot{y}^i dt =$$

$$(\text{partiell integrieren, } y(a) = y(b) = 0) = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) y^i dt.$$

(In  $\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$  ist dabei immer  $t, x(t), \dot{x}(t)$  einzusetzen.) Damit erhalten wir „ $\Rightarrow$ “ in 1). Umgekehrt, wenn die Eulerschen Differentialgleichungen gelten und  $x_s(t)$  wie in der Definition, so kann  $\frac{d}{ds} \left( \int_a^b F(t, x_s(t), \dot{x}_s(t)) dt \right) \Big|_{s=0}$  abschnittweise wie oben berechnet werden. Es treten zusätzlich von der partiellen Integration Randterme  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} y^i$  auf. Diese sind kartensunabhängig, da  $y^i(t)$  die Koordinaten von  $y(t) = [s \mapsto x_s(t)] \in T_{x(t)} M =: V$  sind und  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$  die Koordinaten von  $df \in T_{\dot{x}(t)}^* V \simeq V^*$ , wobei  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$v \mapsto F(t, x(t), v).$$

Daher heben sich die Randterme weg und  $x(t) = x_0(t)$  ist stationär.

2) Für  $f$  wie oben ist  $E = {}_V \langle \dot{x}, df \rangle_{V^*} - F$  und folglich kartensunabhängig.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \cancel{\dot{x}^i} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i} \cancel{\ddot{x}^i} - \frac{\partial F}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \cancel{\dot{x}^i} - \cancel{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}} \cancel{\ddot{x}^i} \right) = - \frac{\partial F}{\partial t}$$

□

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 3$ .

$L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (zeitunabhängige) Lagrangefunktion : $\iff \exists g \in \mathcal{T}_2(M)$  Riemannsche Metrik:  $\exists U : M \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^2 : L(x, \dot{x}) = g(x)(\dot{x}, \dot{x}) - U(x)$ .  
 $g$  heißt kinetische Energie,  $U$  potentielle Energie.

**Bemerkung:** Es wird also vorausgesetzt, dass die kinetische Energie eine quadratische, positiv definite Funktion der Geschwindigkeit ist.  $g$  und  $U$  sind durch  $L$  eindeutig bestimmt, da  $U(x) = -L(x, 0)$ . Ab nun sei der Einfachheit halber auf die explizite Zeitabhängigkeit verzichtet.

**Hilfssatz:**  $L = g - U$  sei eine Lagrangefunktion.

- 1)  $E(x, \dot{x}) = g(x)(\dot{x}, \dot{x}) + U(x)$ .
- 2) Es sei speziell  $U = 0$  und  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^2$ .
  - a)  $x(t)$  sei bzgl.  $L = g$  stationär und es sei  $\forall t : \dot{x}(t) \neq 0$ .  
 Dann ist  $x(t)$  auch bzgl.  $f(L)$  stationär.

b)  $x(t)$  sei bzgl.  $f(L)$  stationär und nach einem Vielfachen der Bogenlänge parametrisiert (d.h.  $g(x(t))(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = \text{const}$ ). Weiters sei  $\forall t > 0 : f'(t) \neq 0$ . Dann ist  $x(t)$  auch bzgl.  $L$  stationär.

**Beweis:** 1) In einer Karte gilt:  $g = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$ ,  $L(x, \dot{x}) = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - U(x) \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 2g_{ij}\dot{x}^j \implies E(x, \dot{x}) = 2g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - L = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j + U(x) = g(x)(\dot{x}, \dot{x}) + U(x)$ .  
 2) a)  $\frac{\partial f(L)}{\partial x^i} = f'(L)\frac{\partial L}{\partial x^i}$ ,  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(L)}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(f'(L)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = f''(L)\frac{d}{dt}(L)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + f'(L)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)$ , wobei wie immer überall  $x(t), \dot{x}(t)$  einzusetzen ist. Wenn  $x(t)$  bzgl.  $L$  stationär ist, so ist nach 1)  $E = L = \text{const}$ , d.h.  $\frac{d}{dt}(L) = 0$ . Dann erfüllt auch  $f(L)$  die Eulerschen Gleichungen und es folgt a). ( $\forall t : \dot{x}(t) \neq 0$  wird vorausgesetzt, damit  $L \neq 0$  und  $f(L)$  definiert ist.)  
 b) Umgekehrt, wenn  $x(t)$  bzgl.  $f(L)$  stationär ist und nach einem Vielfachen der Bogenlänge parametrisiert (d.h.  $\frac{d}{dt}(L) = 0$ ), so folgt aus dem Obigen wegen  $f'(L) \neq 0$ , dass  $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)$ , d.h. dass  $x(t)$  bzgl.  $L$  stationär ist.  $\square$

**Anwendung:** Minimallinien sind bzgl.  $\sqrt{g(x)(\dot{x}, \dot{x})}$  stationär. Wenn wir eine Minimallinie nach der Bogenlänge parametrisieren, ist sie nach 2)b) auch bzgl.  $L = g(x)(\dot{x}, \dot{x})$  stationär. Die Eulerschen Gleichungen ergeben dann:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{\partial L}{\partial x^m} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m}\right) = \frac{d}{dt}(2g_{mk}\dot{x}^k) = 2 \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} \dot{x}^j \dot{x}^k + 2g_{mk}\ddot{x}^k.$$

Multiplikation mit  $\frac{1}{2}g^{im}$  ergibt:

$$\underbrace{\forall i : \ddot{x}^i + g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right) \dot{x}^j \dot{x}^k}_{=: A_{jk}^i} = 0.$$

Wenn wir für festes  $i$  anstelle der Matrix  $A^i = (A_{jk}^i)_{j,k}$  die symmetrische Matrix  $\Gamma_{jk}^i := \frac{1}{2}(A_{jk}^i + A_{kj}^i)$  nehmen, ändert sich die quadratische Form  $A_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k$  nicht.  
 Wir erhalten also

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \text{ mit } \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right)$$

**Def.:**  $(M, g)$   $C^3$ -Riemannscher Raum. Die stationären Kurven von  $L(x, \dot{x}) = g(x)(\dot{x}, \dot{x})$  heißen geodätische Kurven oder Geodäten.  $\Gamma_{jk}^i$  heißen Christoffel-Symbole.

**Folgerung:**  $(M, g)$   $\mathcal{C}^3$ -Riemannscher Raum. Dann sind die Geodäten die  $\mathcal{C}^2$ -Kurven, die in jedem Punkt und in einer (jeder) Karte  $\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$  erfüllen. Auf Geodäten gilt  $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \text{konstant}$ .  $\square$

**Bemerkungen:** 1) Nach S. 101 2)a) sind geodätische Kurven (GK) stationär bzgl.  $F(x, \dot{x}) = \sqrt{g(x)(\dot{x}, \dot{x})}$ . Nach 2)b) sind nach (einem Vielfachen) der Bogenlänge parametrisierte Minimallinien (BM) geodätisch.

Vorsicht: Anders parametrisierte Minimallinien sind zwar stationär bzgl.  $F$  nicht aber bzgl.  $g(x)(\dot{x}, \dot{x})$ , d.h. nicht geodätisch.

Es ist also  $\text{BM} \subset \text{GK}$ . Die Umkehrung gilt zwar nicht global, wie ein Großkreis auf der Kugel zeigt, aber lokal, vgl. das Lemma in S. 106.

2) Vom physikalischen Standpunkt sind Geodäten die Bahnkurven von freien Teilchen, wenn die kinetische Energie auf  $M$  durch  $g$  gegeben ist.

3)  $\Gamma_{jk}^i$  ist i.A. kein Tensor, d.h.  $(\Gamma_{jk}^i) \notin \mathcal{T}_2^1(M)$ , vgl. § 8.

**Bsp.:** 1)  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i) \Rightarrow \Gamma_{jk}^i = 0$ .

Geodäten:  $\ddot{x}^i = 0$ ,  $x(t) = x_0 + tx_1$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$ .

$x(t)$  Minimallinie  $\Rightarrow F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}^i \dot{x}^i}$  stationär  $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} \right) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = \text{const} = c_i \Rightarrow \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \text{const} \Rightarrow x(t)$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist geodätisch.

2) a) Die Poincarésche Metrik auf der Kreisscheibe

$D = \{z = x^1 + ix^2 \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  (vgl. Üb. 6.2, S. 96) ist gegeben durch  $g_{11} = g_{22} = (1 - (x^1)^2 - (x^2)^2)^{-2} =: h(x^1, x^2)$ ,  $g_{12} = 0$ . Dann ist  $g^{11} = g^{22} = \frac{1}{h}$ ,  $g^{12} = 0$  und

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2h} \delta^{im} [\partial_j(\delta_{mk}h) + \partial_k(\delta_{mj}h) - \partial_m(\delta_{jk}h)] \\ &= \frac{1}{2h} [\delta_k^i \partial_j h + \delta_j^i \partial_k h - \delta_{jk} \partial_i h] \\ &= (\delta_k^i \partial_j + \delta_j^i \partial_k - \delta_{jk} \partial_i) \ln \sqrt{h}; \end{aligned}$$

$$\partial_i \ln \sqrt{h} = -\partial_i \ln (1 - (x^1)^2 - (x^2)^2) = \frac{2x^i}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{2x^1}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{2x^2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}.$$

Die Geodäten erfüllen daher:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^1 + \frac{2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} [x^1(\dot{x}^1)^2 + 2x^2\dot{x}^1\dot{x}^2 - x^1(\dot{x}^2)^2] &= 0, \\ \ddot{x}^2 + \frac{2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} [x^2(\dot{x}^2)^2 + 2x^1\dot{x}^1\dot{x}^2 - x^2(\dot{x}^1)^2] &= 0.\end{aligned}$$

Wenn man  $x^2 = 0$  setzt, so ergibt sich eine spezielle Geodäte mit  $\ddot{x}^1 + \frac{2x^1(\dot{x}^1)^2}{1 - (x^1)^2} = 0$  mit der Lösung  $x^1 = \operatorname{th}(at + b)$ . (Lösung der letzten Differentialgleichung mittels Ansatz  $\dot{x}^1 = f(x^1)$ .) Dann ist  $\dot{x}^1 = \frac{a}{\operatorname{ch}^2(at + b)}$  und daher tatsächlich

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{(1 - \operatorname{th}^2(at + b))^2} \cdot \frac{a^2}{\operatorname{ch}^4(at + b)} = a^2 = \text{const} \quad (\text{vgl. S. 103 oben}).$$

Wenn wir noch  $x(0) = 0$  fordern und die Geodäte nach der Bogenlänge parametrisieren, folgt  $x(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} t \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b) Das Intervall  $N = (0, a)$  ist für  $0 < a < 1$  auch eine Minimallinie, denn wenn  $N_1$  eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $D$  ist mit Endpunkten  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ , und parametrisiert durch  $(\alpha, \beta) \rightarrow D : t \mapsto x(t)$ , so ist

$$|N_1| = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\dot{x}(t)| dt}{1 - x^1(t)^2 - x^2(t)^2} \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\dot{x}^1(t)| dt}{1 - x^1(t)^2} \geq |N| = \int_0^a \frac{dt}{1 - t^2} = \operatorname{arth} a.$$

Dies zeigt neuerlich (und schneller), dass  $t \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{th} t \\ 0 \end{pmatrix}$  eine Geodäte ist (da  $\text{BM} \subset \text{GK}$ , vgl. S. 103, Bemerkung 2)).

c) Weitere Geodäten und Minimallinien erhält man durch Anwendung von „Möbiustransformationen“  $f_{\varrho, z_0} : D \rightarrow D : z \mapsto \varrho \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$  mit  $\varrho, z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $|\varrho| = 1$ ,  $|z_0| < 1$ .

$f_{\varrho, z_0}$  ist eine Isometrie (vgl. Üb. 7.1, S. 111). Daher ist auch  $(-1, 1) \rightarrow D : t \mapsto f_{\varrho, z_0}(\operatorname{arth} t)$  eine Geodäte. Als Minimallinien erhalten wir Teile von Kreisen, welche den Einheitskreis senkrecht schneiden.

Speziell gilt  $d(z_0, z_1) = d(f_{\varrho, z_0}(z_0), f_{\varrho, z_0}(z_1)) = d\left(0, \varrho \frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0}z_1}\right) = \operatorname{artanh}\left(\left|\frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0}z_1}\right|\right)$ , wenn  $\varrho = \frac{1 - \overline{z_0}z_1}{z_1 - z_0} \cdot \left|\frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0}z_1}\right|$  gewählt wird.

Aus dem nächsten Lemma folgt, dass eine Geodäte  $x(t)$  durch  $x(0), \dot{x}(0)$  eindeutig bestimmt ist. Daher erhalten wir so schon alle Geodäten. In diesem Beispiel gilt also sogar  $\text{GK} = \text{BM}$ .

**Hilfssatz und Definition:**  $(M, g)$   $\mathcal{C}^k$ -RR,  $k \geq 3$ .

- 1) Eine Geodäte  $x(t) : I \rightarrow M$  heißt maximal : $\iff \nexists x_1(t) : I_1 \subset I \rightarrow M$  Geodäte mit  $I_1 \not\supseteq I$  und  $x = x_1|_I$ .
- 2) Es gilt:  $\forall x_0 \in M : \forall v \in T_{x_0}M : \exists!$  maximale Geodäte  $x_v(t)$  mit  $v = [x_v(t)]$ , d.h.  $x_v(0) = x_0, \dot{x}_v(0) = v$ .
- 3)  $\forall x_0 \in M : \exists \epsilon > 0 : \forall v \in T_{x_0}M$  mit  $g(x_0)(v, v) < \epsilon : x_v$  wie in 2) ist definiert auf  $[-1, 1]$ .
- 4)  $\forall x_0 \in M : \exists \epsilon > 0 : \exists U \subset M$  offen mit  $x_0 \in U :$   
 $\exp_{x_0} : \{v \in T_{x_0}M : g(x_0)(v, v) < \epsilon\} \rightarrow U : v \mapsto x_v(1) =: \exp_{x_0}(v)$  ist wohldefiniert und ein  $\mathcal{C}^{k-2}$ -Diffeomorphismus.  $\exp_{x_0}$  heißt Exponentialabbildung (bei  $x_0$  bzgl.  $g$ ).

**Beweis:** a) Erinnerung

Satz über die lokale Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen (SLLD)

$U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow V$   $\mathcal{C}^l$ ,  $l \geq 1$ ,  $\xi_0 \in U$ . Dann gilt:

$\exists \epsilon > 0 : \forall \xi \in U$  mit  $|\xi - \xi_0| < \epsilon : \exists! x_\xi(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$   $\mathcal{C}^l$ , sodass

$\forall |t| < \epsilon : \dot{x}_\xi(t) = f(x_\xi(t))$  und  $x_\xi(0) = \xi$ .

Außerdem ist auch  $(-\epsilon, \epsilon) \times \{\xi \in U : |\xi_0 - \xi| < \epsilon\} \rightarrow U$   $\mathcal{C}^l$   
 $(t, \xi) \mapsto x_\xi(t)$ .

Wenn weiters  $f$   $\mathcal{C}^l$  von  $\eta \in W \subset \mathbb{R}^m$  abhängt und  $\eta_0 \in W$ , so kann  $\epsilon > 0$  so gewählt werden, dass

$(-\epsilon, \epsilon) \times \{\xi \in U : |\xi - \xi_0| < \epsilon\} \times \{\eta \in W : |\eta - \eta_0| < \epsilon\} \rightarrow U : (t, \xi, \eta) \mapsto x_{\xi, \eta}(t)$   $\mathcal{C}^l$   
mit  $\dot{x}_{\xi, \eta}(t) = f(x_\xi(t), \eta)$ ,  $x_{\xi, \eta}(0) = \xi$ .

**Bemerkung:** Lipschitzstetigkeit, d.h.  $\exists c > 0 : |f(\xi_1) - f(\xi_2)| < c|\xi_1 - \xi_2|$  für  $\xi_i$  bei  $\xi_0$ , anstelle von  $f$   $\mathcal{C}^l$ ,  $l \geq 1$ , würde genügen. Stetigkeit von  $f$  wäre zu wenig, um Eindeutigkeit ( $\exists! x_\xi$ ) zu erreichen:  $\frac{1}{4}t^2 \operatorname{sign}(t)$  und 0 sind beides Lösungen zu  $f = \sqrt{|x|}$  mit Anfangswert 0.

b)  $(M, g)$   $\mathcal{C}^k \implies g$   $\mathcal{C}^{k-1} \implies \Gamma$   $\mathcal{C}^{k-2}$ . Das Gleichungssystem  $\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$  ist äquivalent zu  $\dot{y} = f(y)$ , wobei  $y = (x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)^T$ ,  $f(y^1, \dots, y^{2n}) = (y^{n+1}, \dots, y^{2n}, -\Gamma_{jk}^1 y^{n+j} y^{n+k}, \dots, -\Gamma_{jk}^n y^{n+j} y^{n+k})^T$  und ist nach a) lokal eindeutig lösbar. Wenn für  $|v| < \delta$  und  $|t| \leq \delta$   $x_v(t)$  die eindeutige Lösung mit  $x_v(0) = x_0, \dot{x}_v(0) = v$  ist, so gilt  $x_{\delta v}(t) = x_v(\delta t)$ , da auch  $x_v(\delta t)$  eine Geodäte ist und  $x_v(\delta t)'(0) = \delta v$ . Daher ist  $x_{\delta v}(t)$  für  $|t| \leq 1$  definiert für  $|v| < \delta$  und  $\exp_{x_0}$  für  $|v| < \delta^2$ . Wenn man von den Koordinaten zurück geht auf  $M$ , ergibt sich 2) und 3).

c) Nach a) b) ist  $\exp_{x_0}$  wohldefiniert und  $\mathcal{C}^{k-2}$  für genügend kleines  $\epsilon$ .

Um 4) zu zeigen, müssen wir (nach SIF, S. 4)  $\operatorname{Rg}_0(\exp_{x_0}) = n$  nachweisen.

Wenn  $U_1 := \{v \in T_{x_0}M : g(x_0)(v, v) < \epsilon\}$ , so ist  $T_0 U_1 \simeq T_{x_0}M$  (vgl. Bsp. 1, S. 18).

Für  $w \in T_{x_0}M \simeq T_0U_1$  ist  $T_0 \exp_{x_0}(w) = T_0 \exp_{x_0}([tw]) = [\exp_{x_0}(tw)] = [x_{tw}(1)] \stackrel{\text{b)}{=} [x_w(t)] = w$ , d.h.  $T_0 \exp_{x_0} = \text{id}$ .  $\square$

**Def.:**  $(M, g)$   $C^k$ -RR,  $k \geq 3$ ,  $x_0 \in M$ ,  $\psi : T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}^n$  seien Koordinaten bzgl. einer ONB auf  $T_{x_0}M$ ,  $\epsilon$ ,  $U$  wie in 4), S. 105. Dann nennt man die  $C^{k-2}$ -Karte

$$\varphi : U \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 < \epsilon\} : x \longmapsto \psi(\exp_{x_0}^{-1}(x))$$

(geodätische) Normalkoordinaten bei  $x_0$ .

**Lemma (Gauß)** Wenn  $\varphi : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  Normalkoordinaten bei  $x_0$  sind, so gilt:

- a)  $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ ;
- b) die Geodäten in  $U$  durch  $x_0$  sind durch  $x^i(t) = v^i \cdot t$  gegeben,  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v| \cdot |t| < \epsilon$ ;
- c)  $\Gamma_{jk}^i(x_0) = 0$  und  $\Gamma_{jk}^i(x)x^j x^k = 0$  für  $x \in U$ ;
- d)  $g_{ij}(x)x^i w^j = \sum_{i=1}^n x^i w^i$  für  $x \in U$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ ;
- e) für  $x_1 \in U$  mit  $x_1 \neq x_0$  ist  $\{\varphi^{-1}(\varphi(x_1)t) : 0 < t < 1\}$  eine Minimallinie und ist die einzige in  $M$  von  $x_0$  nach  $x_1$ . Es gilt  $d(x_0, x_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i)^2}$ .

**Beweis:** a) b) folgen aus der Definition.

c) Für die Geodäte  $x^i(t) = v^i t$  gilt  $\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$ , d.h.  $\Gamma_{jk}^i(x(t)) v^j v^k = 0$ . Das liefert c).

d) Auf den Geodäten  $x^i(t) = v^i t$  ist  $g$  konstant, d.h.  $g_{ij}(x(t)) v^i v^j = g_{ij}(x_0) v^i v^j = \sum_{i=1}^n (v^i)^2$ . Also ist jedenfalls  $g_{ij}(x)x^i x^j = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$ .

Es seien nun  $v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(t)$  die Geodäte mit  $x^i(t) = v^i t$  und  $f(t) := w^i g_{ij}(x(t)) v^j$ . Es ist zu zeigen, dass  $f$  konstant ist.

$$f' = w^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} (x(t)) \dot{x}^k v^j = w^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} (x(t)) v^j v^k.$$

Aus c) folgt:  $\Gamma_{jk}^i(x(t)) v^j v^k = 0 \implies \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) v^j v^k = 0 \implies$

$$f' = \frac{1}{2} w^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} (x(t)) v^j v^k.$$

Zu Beginn wurde festgestellt, dass  $g_{jk}(x)x^j x^k = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$ . Ableiten nach  $x^i$  ergibt:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} x^j x^k = 2x^i - 2g_{ik}x^k$$

$$\implies f' = \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^n w^i v^i - g_{ik} w^i v^k \right) = \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^n w^i v^i - f \right), \quad t f' + f = \sum_{i=1}^n w^i v^i, \quad f = \frac{C}{t} + \sum_{i=1}^n v^i w^i.$$

Da  $f$  in 0 stetig ist, folgt  $f = \sum_{i=1}^n v^i w^i$ .

e) Die Linie  $\varphi^{-1}(\varphi(x_1)t)$  ist die Geodäte  $x_1^i \cdot t$  und hat daher Länge  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i)^2} =: l$ .  
 $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , sei eine weitere  $\mathcal{C}^1$ -Kurve von  $x_0$  nach  $x_1$  zunächst in  $U$ . OEdA  $x(t) \neq x_0$  für  $t \in (0, 1]$ . Die Länge dieser Kurve ist  $l_1 = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(x(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t)} dt$ .

Wenn  $x \in U$  und  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $v^i = ax^i + w^i$ , und  $\sum_{i=1}^n x^i w^i = 0$ , so ist nach d)

$$g_{ij}(x)v^i v^j = g_{ij}(x)(a^2 x^i x^j + w^i w^j) \geq a^2 g_{ij}(x)x^i x^j = a^2 \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n x^i v^i \right)^2 / \sum_{i=1}^n (x^i)^2.$$

Also ist  $l_1 \geq \int_0^1 \frac{|\sum_{i=1}^n \dot{x}^i(t) x^i(t)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x^i(t)^2}} dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i=1}^n x^i(t)^2} dt = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i)^2} = l$ .

Wenn  $x(t)$  eine nicht nur in  $U$  verlaufende Kurve ist, so gibt es ein minimales  $t_0$  mit  $\sum_{i=1}^n x^i(t_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_1^i)^2$ . Dann hat das Kurvenstück  $x(t)$ ,  $0 < t < t_0$ , bereits mindestens Länge  $l$ .

Damit ist gezeigt, dass  $\varphi^{-1}(\varphi(x_1)t)$  eine Minimallinie ist. Dies ist die einzige mit Endpunkten  $x_0, x_1$ , da sonst in der obigen Abschätzung  $w = 0$  und damit  $\dot{x}^i = ax^i$  sein muss.  $\square$

**Bsp.:** 1)  $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit induzierter Metrik. Wenn  $N$  eine Minimallinie von  $x_0$  nach  $x_1$  ist (d.h.  $\partial N = \{x_0, x_1\}$ ) und  $\tilde{N}$  ihre Spiegelung an einer Hyperebene durch  $x_0, x_1$ , so hat  $\tilde{N}$  gleiche Länge. Da nach dem letzten Lemma Minimallinien lokal eindeutig sind, muss für  $x_0$  bei  $x_1$   $N = \tilde{N}$  sein, d.h.  $N$  besteht aus Stücken von Großkreisen. Da  $N$  Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{S}^n$ , liegt  $N$  zur Gänze auf einem Großkreis. Die geodätischen Kurven sind nach dem Lemma lokal Minimallinien und daher ebenfalls Teile von Großkreisen. Wenn  $x_0 = (0, \dots, 0, 1)^T$ ,  $v \in T_{x_0} \mathbb{S}^n = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} : w^{n+1} = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$ , so ist also  $x_v(t) = \sin(|v|t) \frac{v}{|v|} + \cos(|v|t) x_0$  und  $\exp_{x_0}(v) = \begin{pmatrix} \frac{v}{|v|} \sin(|v|) \\ \cos(|v|) \end{pmatrix}$ .

$\exp_{x_0} : \{v \in T_{x_0} \mathbb{S}^n : g(x_0)(v, v) < \pi^2\} \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{-x_0\}$  ist ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus.

2) Wenn  $\varphi : U \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 < \epsilon\}$  geodätische Normalkoordinaten sind und  $r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1} = \varphi$  Kugelkoordinaten auf  $\mathbb{R}^n$  sind (vgl. Üb. 4.2, S. 67), so ist nach d) des Lemmas in S. 106  $g_{rr} = 1$  und  $g_{r\vartheta^i} = 0$ . In diesen „geodätischen Polarkoordinaten“ ist also  $g = dr \otimes dr + g_{\vartheta^i \vartheta^j}(r, \vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1}) d\vartheta^i \otimes d\vartheta^j$ . Z.B. auf  $\mathbb{S}^2$  sind  $r := \vartheta$ ,  $\vartheta^1 := \varphi$ ,  $g_{\vartheta^1 \vartheta^1} = \sin^2(r)$  geodätische Polarkoordinaten.

3) Es seien  $(M_i, g_i)$   $\mathcal{C}^k$ -RR,  $k \geq 3$ ,  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  ein Diffeomorphismus und es gelte:

$\forall x_i \in M_1 : d_2(f(x_1), f(x_2)) = d_1(x_1, x_2)$ . Wenn  $x_0 \in M_1$ ,  $v \in T_{x_0}M_1$  und  $x(t)$  eine  $C^k$ -Kurve mit  $x_0 = x(0)$ ,  $v = \dot{x}(0) = [x(t)]$  ist, so ist in Normalkoordinaten um  $x_0$ :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{d_1(x(t), x_0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n x^i(t)^2}}{t} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2} = \sqrt{g_1(x_0)(v, v)}.$$

Daher ist  $(f^*g_2)(x_0)(v, v) = g_2(f(x_0))(Tf(v), Tf(v)) = \lim_{t \searrow 0} \frac{d_2(f(x(t)), f(x_0))^2}{t^2} = \lim_{t \searrow 0} \frac{d_1(x(t), x_0)^2}{t^2} = g_1(x_0)(v, v)$ , d.h. da  $x_0, v$  beliebig sind,  $f^*g_2 = g_1$ , d.h.  $f$  ist eine Isometrie.

Schließlich soll  $\exp$  mit der Exponentialabbildung bei Liegruppen verglichen werden.

**Def.:**  $M$   $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ .

- 1)  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  offen.  $x(t) : I \longrightarrow M$   $C^k$  heißt Integralkurve zu  $X$  : $\iff \forall t \in I : \dot{x}(t) = X(x(t))$ .
- 2)  $F : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  heißt globaler Fluss auf  $M$  : $\iff$ 
  - (i)  $F \in C^{k-1}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial t} : \mathbb{R} \times M \longrightarrow TM$   $C^{k-1}$
  - (ii)  $\forall x \in M : F(0, x) = x$
  - (iii)  $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall x \in M : F(s, F(t, x)) = F(s + t, x)$ .
- 3)  $U \subset \mathbb{R} \times M$  offen,  $U \supset \{0\} \times M$ .  
 $F : U \longrightarrow M$  heißt multiplikativ : $\iff$ 
  - (i)  $F, \frac{\partial F}{\partial t} \in C^{k-1}$
  - (ii)  $\forall x \in M : F(0, x) = x$
  - (iii)  $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall x \in M$  mit  $(t, x), (s, F(t, x)), (s + t, x) \in U : F(s, F(t, x)) = F(s + t, x)$ .
- 4)  $F_i : U_i \longrightarrow M$  seien multiplikativ.  $F_1 \sim F_2 : \iff \exists U_3 \subset \mathbb{R} \times M$  offen:  $U_3 \supset \{0\} \times M$  und  $F_1|_{U_3} = F_2|_{U_3}$ . Eine Äquivalenzklasse bzgl.  $\sim$  heißt lokaler Fluss auf  $M$ .  
 $\mathcal{F}_l(M) := \{[F] : F \text{ multiplikativ}\}$ ,  $\mathcal{F}_g(M) := \{F : F \text{ globaler Fluss}\}$ .

**Hilfssatz:**  $M$   $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 2$ .

- 1)  $F \in \mathcal{F}_g(M)$ ,  $t \in \mathbb{R} \implies F(t, -) : M \longrightarrow M$  ist ein  $C^{k-1}$ -Diffeomorphismus.  
(Deshalb nennt man  $F$  auch „einparametrische Transformationsgruppe“.)
- 2)  $i : \mathcal{F}_l(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M) : [F] \longmapsto (X : x \longmapsto [F(t, x)] \in T_x M)$  ist bijektiv. Für festes  $x$  ist dabei  $t \longmapsto F(t, x)$  eine Integralkurve zu  $X$  für  $|t|$  klein.
- 3) Wenn  $M$  kompakt ist, so ist  $\mathcal{F}_g(M) \longrightarrow \mathcal{F}_l(M) : F \longmapsto [F]$  bijektiv.

- 4) Wenn  $M = G$  eine Liegruppe und  $X \in \mathcal{T}_l^1(G)$  oder  $\mathcal{T}_r^1(G)$  so existiert ein globaler Fluss mit  $\forall x \in G : X(x) = [F(t, x)]$ . Dann ist  $\mathbb{R} \longrightarrow G : t \longmapsto F(t, I)$  ein Liegruppenhomomorphismus.

**Beweis:** 1)  $F(\pm t, -) \circ F(\mp t, -) = \text{id}$ .

2) Zunächst sei  $[F] \in \mathcal{F}_l(M)$ ,  $x \in M$ . Dann ist  $[F(t, x)] \in T_x M$ . In Koordinaten ist  $[F(t, x)] = \frac{\partial F(t, x)^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$  und folglich  $X : M \longrightarrow TM : x \longmapsto [F(t, x)] \in \mathcal{C}^{k-1}$ , d.h.  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ .

Umgekehrt gibt es nach SLLD (S. 105) zu  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  ein  $F : U \longrightarrow M \in \mathcal{C}^{k-1}$  mit  $U \subset \mathbb{R} \times M$  offen,  $U \supset \{0\} \times M$ ,  $\forall x \in M : F(0, x) = x$  und  $\forall (t, x) \in U : \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = X(F(t, x))$ . Dann ist auch  $\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{C}^{k-1}$ .  $F$  ist (bis auf die Größe des Definitionsbereiches  $U$ ) eindeutig (hier braucht man  $k \geq 2$ , d.h.  $X \in \mathcal{C}^1$ ). Daher ist  $F$  multiplikativ, denn  $F(t + t_0, x)$  und  $F(t, F(t_0, x))$  sind Lösungen derselben Differentialgleichung mit dem gleichen Anfangswert. Also ist  $[F] \in \mathcal{F}_l(M)$  und  $\forall x \in M : [F(t, x)] = \frac{\partial F}{\partial t}(0, x) = X(F(0, x)) = X(x) \in T_x M$ . Es ist also  $j : \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{F}_l(M) : X \longmapsto [F]$  wohldefiniert und  $i \circ j = \text{id}$ .

Schließlich gilt für  $F \in \mathcal{F}_l(M)$  mit  $X := i([F]) \in \mathcal{T}^1(M) : t_0$  bei  $0$ ,  $x \in M \implies \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x) = [F(t + t_0, x)] = [F(t, F(t_0, x))] = X(F(t_0, x))$ , d.h.  $F(t, x)$  ist für festes  $x$  eine Integralkurve zu  $X$ . Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage im SLLD ist daher  $[F]$  durch  $X$  bestimmt, d.h.  $j \circ i = \text{id}$ .

3) Wenn  $M$  kompakt ist und  $U \subset \mathbb{R} \times M$  offen und  $U \supset \{0\} \times M$ , so  $\exists \epsilon > 0 : U \supset (-2\epsilon, 2\epsilon) \times M$ . OEdA sei also  $F : (-2\epsilon, 2\epsilon) \times M \longrightarrow M$  multiplikativ.

$$\text{Es sei } F_1(t, x) := \begin{cases} F(t, x) & : |t| < 2\epsilon, \\ F(t - \epsilon, F(\epsilon, x)) & : 0 < t < 3\epsilon, \\ F(t + \epsilon, F(-\epsilon, x)) & : -3\epsilon < t < 0. \end{cases}$$

$F$  multiplikativ  $\implies F_1$  wohldefiniert und  $\mathcal{C}^{k-1}$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial t} \in \mathcal{C}^{k-1}$ . Für festes  $x$  ist  $t \longmapsto F_1(t, x)$  eine Integralkurve zu  $X := i([F]) \in \mathcal{T}^1(M)$ . Daher ist  $F_1$  wieder multiplikativ. Durch Induktion folgt, dass sich  $F$  zu  $F_\infty \in \mathcal{F}_g(M)$  fortsetzen lässt.

4) Es sei  $X \in \mathcal{T}_l^1(G)$  und  $x(t) : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$  eine Integralkurve zu  $X$  mit  $x(0) = I$ . Da  $X$  linksinvariant ist, ist für  $x_1 \in G$  auch  $t \longmapsto x_1 x(t)$  eine Integralkurve zu  $X$ , denn:  $[x_1 x(t_0 + t)] = Tl^{x_1} X(x(t_0)) = X(x_1 x(t_0))$ . Also ist

$F : (-\epsilon, \epsilon) \times G \longrightarrow G : (t, x_1) \longmapsto x_1 x(t)$  ein lokaler Fluss zu  $X$ . Wie in 3) lässt sich  $F$  dann zu einem globalen Fluss fortsetzen.

Speziell gilt  $F(s + t, I) = F(t, \underbrace{F(s, I)}_{x_1}) = F(s, I)F(t, I)$ .  $\square$

**Bsp.:** Wenn  $M = \mathbb{R}$ , so ist  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  durch  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto X(x) \in T_x \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  gegeben. Für festes  $x_0$  ist  $x(t) := F(t, x_0)$  die Lösung der Differentialgleichung  $\dot{x} = X(x)$  mit Anfangswert  $x(0) = x_0$ . Wenn  $X(x_0) = 0$ , so ist die Lösung  $x(t) = \text{const} = x_0$ , ansonsten gilt für die Umkehrfunktion  $t(x) : t = \frac{1}{\dot{x}} = X(x)^{-1}$  und  $t(x) = \int_{x_0}^x \frac{du}{X(u)}$ .

Somit ist  $F(-, x_0)$  die Umkehrfunktion von  $x \mapsto \int_{x_0}^x \frac{du}{X(u)}$ .

Wenn z.B.  $\forall x : X(x) = 1$ , so ist  $t(x) = x - x_0$ ,  $F(t, x_0) = x_0 + t$ , d.h.  $F$  ist sogar ein globaler Fluss.

Wenn wir jedoch  $M = (-1, 1)$  anstatt  $\mathbb{R}$  nehmen, so ergibt sich nur mehr ein lokaler Fluss:

$$F : U = \{(x_0, t) \in \mathbb{R}^2 : |x_0| < 1, |x_0 + t| < 1\} \rightarrow (-1, 1) : (x_0, t) \mapsto x_0 + t$$

$F$  ist hier lokal, da  $F$   $M$  „verlässt“. Aber auch im Fall  $M = \mathbb{R}$  kann der Fluss unter Umständen nur lokal sein, wenn nämlich  $|F(t, x_0)| \rightarrow \infty$  für endliches  $t$  (“blow-up”).

Für  $X(x) = x^2$  ist z.B.  $t(x) = \int_{x_0}^x \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$ ,  $F(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$  (gilt nachträglich auch für  $x_0 = 0$ )  $\Rightarrow F : U = \{(x_0, t) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x_0 t > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition und Hilfssatz:**  $G$  Liegruppe. Für  $v \in T_I G$  sei  $F_v \in \mathcal{F}_g(G)$  der globale Fluss (nach Hilfssatz, 4), S. 109) zu  $X_v \in \mathcal{T}_I^1(G)$  mit  $X_v(I) = v$  (vgl. S. 34).

$\text{Exp} : T_I G \rightarrow G : v \mapsto F_v(1, I)$  heißt Exponentialabbildung (der Liegruppe  $G$ ). Es gilt:

- a)  $\text{Exp}$  ist  $\mathcal{C}^\infty$ ;
- b)  $\forall v \in T_I G : \mathbb{R} \rightarrow G : t \mapsto \text{Exp}(tv)$  ist ein Liegruppenhomomorphismus;
- c)  $T_0 \text{Exp} = \text{id} : T_0 T_I G \simeq T_I G \rightarrow T_I G$ . Speziell ist  $\text{Exp}$  bei 0 ein Diffeomorphismus.

**Beweis:** a)  $t \mapsto F_v(t, I)$  ist eine Integralkurve zu  $X_v$  und  $X_v(x) = Tl^x(v)$  hängt  $\mathcal{C}^\infty$  von  $v$  ab  $\Rightarrow$  (nach SLLOD, S. 105)  $(t, v) \mapsto F_v(t, I)$   $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow \text{Exp} \mathcal{C}^\infty$ .

b) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $F_v(\lambda t, x)$  der Fluss zu  $\lambda X_v = X_{\lambda v} \Rightarrow \text{Exp}(tv) = F_{tv}(1, I) = F_v(t, I)$ . Also folgt b) aus 4) des Hilfssatzes in S. 109.

c)  $(T_0 \text{Exp})(v) = [\text{Exp}(tv)] = [F_{tv}(1, I)] = [F_v(t, I)] = X_v(I) = v$ .  $\square$

**Bsp.:** 1)  $G = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ ,  $T_I G \simeq \text{gl}_n(\mathbb{R}) \ni B \Rightarrow$  (vgl. S. 35)  $X_B(A) = AB \in T_A \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \simeq \text{gl}_n(\mathbb{R})$ .

Für festes  $B$  ist  $t \mapsto F_B(t, I) =: A(t)$  die Integralkurve der Differentialgleichung

$$\dot{A}(t) = X_B(A(t)) = A(t)B, \quad A(0) = I.$$

$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!}$  löst diese Differentialgleichung, da  $\det(e^{tB}) = e^{t \operatorname{tr} B} \neq 0$  und  $(e^{tB})' = Be^{tB}$ . Also ist  $A(t) = e^{tB}$ ,  $\operatorname{Exp}(B) = e^B$ .

2)  $H \leq G$  sei eine Lieuntergruppe,  $v \in T_I H \leq T_I G$ ,  $X_v^H \in \mathcal{T}^1(H)$ ,  $F_v^H \in \mathcal{F}_g(H)$ ,  $X_v^G \in \mathcal{T}^1(G)$ ,  $F_v^G \in \mathcal{F}_g(G)$  wie oben und bzgl.  $H$  bzw.  $G$ . Für  $x \in H$  ist  $X_v^G(x) = Tl^x(v) = X_v^H(x)$  und daher  $F_v^G|_{\mathbb{R} \times H} = F_v^H$ . Daher ist auch  $\operatorname{Exp}_G|_{T_I H} = \operatorname{Exp}_H$ . Speziell gilt z.B. für  $H = \operatorname{Sl}_n(\mathbb{R})$   $\operatorname{Exp} : \operatorname{sl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Sl}_n(\mathbb{R}) : B \longmapsto e^B$  (vgl. Üb. 2.3, S. 36).

**Def.:**  $G$  Liegruppe. Eine links- und rechtsinvariante Riemannsche Metrik heißt biinvariant.

**Bsp.:** In  $\operatorname{SO}_n(\mathbb{R})$  ist  $\sum_{1 \leq j, k \leq n} da_j^k \otimes da_j^k$  biinvariant (vgl. Üb. 6.6, S. 97), in  $\operatorname{Gl}_n(\mathbb{R})$  gibt es hingegen keine biinvariante Metrik (vgl. Üb. 6.5, S. 96).

**Satz**  $G$  sei eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik  $g$ ,  $\exp_I$  zu  $g$  wie in S. 105,  $\operatorname{Exp}$  wie in S. 110. Dann gilt  $\exp_I = \operatorname{Exp}$ .

**Beweis:** Für  $v \in T_I(G)$  sei  $(-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G : t \longmapsto x_v(t)$  die Geodäte mit  $v = [x_v(t)]$  (vgl. S. 105). Wenn  $g$  biinvariant ist, so gilt  $J^*g = g$  (vgl. Üb. 6.5, S. 96) für  $J : G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$ . Daher ist auch für  $|t_0| < \epsilon$   $t \longmapsto x_v(t_0)x_v(t_0 - t)^{-1}$  eine Geodäte. Für kleines  $t_0$  sind daher nach dem Lemma in S. 106  $\{x_v(t) : 0 < t < t_0\}$  und  $\{x_v(t_0)x_v(t_0 - t)^{-1} : 0 < t < t_0\}$  Minimallinien mit denselben Randpunkten und stimmen also überein. Da beides Geodäten sind (und also nach einem Vielfachen der Bogenlänge parametrisiert), folgt  $x_v(t) = x_v(t_0)x_v(t_0 - t)^{-1}$  bzw.  $x_v(t + s) = x_v(s)x_v(t)$  für kleines  $s, t$ . Daher ist  $[x_v(t + s)] = Tl^{x_v(s)}[x_v(t)] = Tl^{x_v(s)}v = X_v(x_v(s))$ , wenn  $X_v \in \mathcal{T}_l^1(G)$ ,  $X_v(I) = v$  und somit  $t \longmapsto x_v(t)$  eine Integralkurve zu  $X_v$ . Wegen der Eindeutigkeit (SLLD, S. 105) folgt  $x_v(t) = F_v(t, I)$  für kleines  $t$ . Wegen  $F_v(t + s, I) = F_v(t, I)F_v(s, I)$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{R}$  und wegen der Linksinvarianz von  $g$  ist dann  $\mathbb{R} \longrightarrow G : t \longmapsto F_v(t, I)$  die maximale Geodäte zu  $x_v$  und folgt  $\operatorname{Exp}(v) = F_v(1, I) = \exp_I(v)$ .  $\square$

## Übungen

Üb. 7.1 ( $D, g$ ) sei wie in Üb. 6.2, S. 96, bzw. in Bsp. 2, S. 103. Zeige, dass

$$f_{\varrho, z_0} : D \longrightarrow D : z \longmapsto \varrho \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad \varrho \in \mathbb{C}, \quad |\varrho| = 1, \quad z_0 \in D, \quad \text{eine Isometrie ist.}$$

Hinweis:  $\sum_{j=1}^2 dx^j \otimes dx^j = \operatorname{Re}(dz \otimes d\bar{z}) \in \mathcal{T}_2(D)$ , wobei  $dz \in \mathcal{T}_1^c(D) := \mathcal{T}_1(D) \oplus i\mathcal{T}_1(D)$   $\implies f^*(\sum_{j=1}^2 dx^j \otimes dx^j) = \operatorname{Re}(df \otimes d\bar{f}) = |f'|^2 \sum_{j=1}^2 dx^j \otimes dx^j$  für holomorphes  $f$ .

Üb. 7.2 Es sei  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  mit der Metrik  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ ,  $g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{1 - |x|^2}$ .

- a) Bestimme  $d(x_1, x_2)$  für  $x_i \in M$  und die Geodäten.
- b) Berechne  $\exp_0(v)$  für  $v \in T_0 M \simeq \mathbb{R}^n$ ,  $|v| < \pi$ .

Hinweis: Zeige, dass  $M \longrightarrow \{x \in \mathbb{S}^n : x^{n+1} > 0\} : x \longmapsto (\sqrt{\frac{x}{1-|x|^2}})$  eine Isometrie ist, wenn  $\mathbb{S}^n$  mit der Standardmetrik versehen wird.

Üb. 7.3  $g$  sei die linksinvariante Riemannsche Metrik auf  $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  von Bsp. 4, S. 87, d.h.  $g(A)(B, C) = \langle A^{-1}B, A^{-1}C \rangle$ , wobei  $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ,  $B, C \in T_A \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ ,  $\langle D, E \rangle := \sum_{i,j} d_j^i e_j^i$  für  $D, E \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ .

- a) Zeige, dass die Differentialgleichung der Geodäten durch  $\ddot{A} = \dot{A}A^{-1}\dot{A} + A\dot{A}^T A^{-1T} A^{-1}\dot{A} - \dot{A}\dot{A}^T A^{-1T}$  gegeben ist.

Hinweis: Bestimme die Eulersche Differentialgleichung zu  $L(A, \dot{A}) = \langle A^{-1}\dot{A}, A^{-1}\dot{A} \rangle$ . Beachte, dass  $dL(A, C) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial A}, dA \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial C}, dC \right\rangle$  (wobei  $\left( \frac{\partial L}{\partial A} \right)_j := \frac{\partial L}{\partial a_j^i}$ ) und dass  $dA^{-1} = -A^{-1} \cdot dA \cdot A^{-1}$ .

- b) Folgere, dass für  $B \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$  mit  $B \cdot B^T = B^T \cdot B$  (d.h.  $B$  normal) die Geodäte  $A(t)$  mit  $[A(t)] = B \in T_I \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  durch  $A(t) = e^{tB}$  gegeben ist.

- c) Zeige, dass  $d(I, A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \ln^2(\lambda_i)}$ , wenn  $A$  symmetrisch ist,  $\lambda_i$  die Eigenwerte von  $A$  sind und  $A - I$  klein genug ist.

Üb. 7.4 Wir betrachten  $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  mit der biinvarianten Metrik  $g = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq 3} da_j^k \otimes da_j^k$  (vgl. Üb. 6.6, S. 97).

$h : M = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < \pi\} \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  sei wie in Üb. 4.6, S. 68.

Für  $x \in \mathbb{R}^3$  sei  $B(x) := \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{o}_3(\mathbb{R})$ .

- a) Zeige  $e^{B(x)} = A_{\frac{x}{|x|}, |x|}$  für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$  und  $A_{x,\varphi}$  wie in Üb. 1.5, S. 12.

Hinweis:  $Bt = x \times t$  für  $t \in \mathbb{R}^3$ .

- b) Zeige, dass  $h^{-1}$  geodätische Normalkoordinaten bzgl.  $g$  sind.

- c) Zeige, dass  $d(A, C) = \arccos\left(\frac{\langle A, C \rangle - 1}{2}\right)$  für  $A, C \in \mathrm{SO}_3$ ,  $\langle A, C \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_j^i c_j^i$ .

Hinweis:  $\mathrm{tr}(A_{x,\varphi}) = 1 + 2 \cos \varphi$ .

- d) Zeige, dass für  $h^*g \in \mathcal{T}_2(M)$  in den geodätischen Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  auf  $M$  (vgl. Üb. 6.6 c), S. 97 und Bsp. 3, S. 87) gilt:  

$$h^*g = dr \otimes dr + 2(1 - \cos r)[d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi].$$
- e) Zeige, dass bzgl.  $h^*g$  für  $x, y \in M \setminus \{0\}$  gilt  

$$d(x, y) = \arccos \left[ 2\langle x, y \rangle^2 \frac{\sin^2(\frac{|x|}{2})}{|x|^2} \cdot \frac{\sin^2(\frac{|y|}{2})}{|y|^2} + \langle x, y \rangle \frac{\sin |x|}{|x|} \cdot \frac{\sin |y|}{|y|} + 2 \cos^2 \frac{|x|}{2} \cos^2 \frac{|y|}{2} - 1 \right],$$
 wobei  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x^i y^i.$

Üb. 7.5  $G$  sei eine  $n$ -dimensionale zusammenhängende kompakte Liegruppe.

- a) Zeige, dass  $\Omega_l^n(G) = \Omega_r^n(G).$   
Hinweis:  $\Omega \in \Omega_l^n(G)$ ,  $x \in G \implies (r^x)^*\Omega \in \Omega_l^n(G).$
- b) Zeige, dass es auf  $G$  eine biinvariante Metrik gibt.  
Hinweis: Definiere  $g$  durch

$$g(x)(v, w) = \int_G ((r^u)^* g_1)(x)(v, w) \lambda(u),$$

wobei  $x \in G$ ,  $v, w \in T_x G$ ,  $\lambda = |\Omega| \in \mathcal{K}'(G)$ ,  $0 \neq \Omega \in \Omega_l^n(G)$  und  $0 \neq g_1$  eine linksinvariante Riemannsche Metrik ist.

Üb. 7.6 Es sei  $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  mit der Metrik  $g_B := (1 - |x|^2)^{-2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$   
 $B^n$  heißt  $n$ -dimensionaler hyperbolischer Raum.

- a) Bestimme wie in Bsp. 1, S. 107, mittels Bsp. 2, S. 103, die Minimallinien in  $B^n$ .
- b) Zeige, dass für  $0 \neq x, y \in B^n : d(x, y) = \operatorname{arth} \left( \frac{|x - y|}{\left| \frac{x}{|x|} - |x| y \right|} \right).$
- c) Bestimme die Normalkoordinaten  $\exp_0^{-1} : B^n \rightarrow T_0 B^n \simeq \mathbb{R}^n$  und stelle  $(\exp_0)^* g_B$  in der Form  $d|x| \otimes d|x| + h(|x|) \sum_{i=1}^n d\left(\frac{x^i}{|x|}\right) \otimes d\left(\frac{x^i}{|x|}\right)$  dar (vgl. auch S. 107, 2).
- d) Es sei  $[x, y] = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^n x^i y^i$  für  $x = (x^0, \dots, x^n)^T$ ,  $y = (y^0, \dots, y^n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : [x, x] = 1, x^0 > 0\}.$   
Zeige, dass  $-dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$  eine Riemannsche Metrik  $g_H$  auf  $H$

induziert und dass

$$f : \left( H^n, \frac{1}{4}g_H \right) \longrightarrow (B^n, g_B) : \begin{pmatrix} x^0 \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \frac{u}{x^0 + 1}$$

eine Isometrie ist.

- e) Zeige, dass  $d(x, y) = \operatorname{arcosh}([x, y])$  für  $x, y \in H^n$  bzgl.  $g_H$ .

Hinweis: Da  $g_H$  unter Lorentztransformationen invariant ist, kann man

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ setzen.}$$

Üb. 7.7 Der Zustandsraum eines Kreisels ist  $G = \operatorname{SO}_3(\mathbb{R})$ , wenn  $A \in G$  aufgefasst wird als die orthogonale Abbildung, die einem Referenzkoordinatensystem ein fest mit dem Kreisel verbundenes Koordinatensystem zuordnet. Die Trägheitsmomente geben in dieser Interpretation eine linksinvariante Riemannsche Metrik  $g$ : Für  $A \in G$  ist  $\frac{1}{2}g(A)(\dot{A}, \dot{A})$  die kinetische Energie, wenn der Kreisel Position  $A$  und Geschwindigkeit  $\dot{A}$  hat. Für  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $|x| = 1$ , ist  $g(I)(B(x), B(x))$  (mit  $B(x)$  wie in Üb. 7.4, S. 112) das klassische Trägheitsmoment um die Achse  $\mathbb{R}x$  im Kreiselkoordinatensystem.

- a) Welcher Kreiseltyp entspricht Üb. 7.4?  
 b) Was sind die Bahnlinien dieses Kreiseltyps?

## § 8 Zusammenhang und kovariante Ableitung

Wenn  $x(t)$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve in der  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$ ,  $k \geq 2$ , ist, so ist  $t \mapsto \dot{x}(t)$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve in  $TM$  und  $t \mapsto \ddot{x}(t)$  eine in  $T(TM)$ . Das Newton'sche Axiom „Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung“ würde aber bei Vorliegen eines Kraftvektorfeldes  $f \in \mathcal{T}^1(M)$  verlangen, dass  $f(x(t_0)) = \ddot{x}(t_0)$ , d.h. dass  $\ddot{x}(t_0) \in T_{x(t_0)}M$ .

In einem Vektorraum  $V$  ist die Vorgangsweise so:

$$\ddot{x}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\dot{x}(t_0 + h) - \dot{x}(t_0)].$$

Eigentlich ist aber  $\dot{x}(t_0 + h) \in T_{x(t_0+h)}V$  und  $\dot{x}(t_0 + h) - \dot{x}(t_0)$  kann nur gebildet werden, weil wir  $T_{x(t_0+h)}V \simeq V \simeq T_{x(t_0)}V$  identifizieren. Wir brauchen also eine lineare Abbildung  $F_x : T_x M \longrightarrow T_{x_0} M$  für  $x$  bei  $x_0$ , sodass  $F_{x_0} = \text{id}$ .

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 2$ ,  $x_0 \in U \subset M$  offen.

- 1)  $F : TU \longrightarrow T_{x_0} M$   $\mathcal{C}^{k-1}$  heiße Tangentialtransport bei  $x_0$  : $\iff$ 
  - (i)  $\forall x \in U : F|_{T_x M} : T_x M \longrightarrow T_{x_0} M$  linear, (ii)  $F|_{T_{x_0} M} = \text{id}_{T_{x_0} M}$ .
- 2) Für eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve  $x(t)$  mit  $x(t_0) = x_0$  und  $F$  wie in 1) sei  $\ddot{x}_F(t_0) := \frac{d(F \circ \dot{x})}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\dot{x}(t_0 + h)) - \dot{x}(t_0)}{h} \in T_{x_0} M$ .

**Notation:**  $F$  sei ein Tangentialtransport bei  $x_0$ .

In einer Karte  $x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  gilt dann:  $F\left(x, \underbrace{v^i(\partial_i)_x}_{\in T_x M}\right) = a_k^i(x)v^k(\partial_i)_{x_0} = v^i(\partial_i)_{x_0} + \underbrace{\frac{\partial a_k^i}{\partial x^j}(x_0)}_{=:\Gamma_{jk}^i} \cdot (x^j - x_0^j)v^k(\partial_i)_{x_0} + o\left(\sum_{i=1}^n |x^i - x_0^i|\right).$

$\ddot{x}_F(t_0)$  ist bereits durch  $\Gamma_{jk}^i$  bestimmt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_F(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \dot{x}^i(t_0 + h) + \Gamma_{jk}^i \cdot (x^j(t_0 + h) - x_0^j) \dot{x}^k(t_0 + h) - \dot{x}^i(t_0) + o(h) \right] (\partial_i)_{x_0} = \\ &= [\ddot{x}^i(t_0) + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j(t_0) \dot{x}^k(t_0)] (\partial_i)_{x_0} \in T_{x_0} M, \text{ kurz} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{x}_F = (\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k) \partial_i}$$

Dies führt zur

**Def.:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 2$ .

- 1) Die Tangentialtransporte  $F, \tilde{F}$  bei  $x_0$  heißen äquivalent : $\iff \exists (\forall) \text{ Karte(n)} \varphi :$   $\forall i, j, k : \Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i$ .

- 2) Eine Äquivalenzklasse von Tangentialtransporten bei  $x_0$  heißt (affiner) Zusammenhang bei  $x_0$ .
- 3)  $F : W \rightarrow TM, C^{k-2}, W \subset M \times TM$  offen, heißt Tangentialtransport : $\iff \forall x_0 \in M : \exists x_0 \in U \subset M$  offen:  $\{x_0\} \times TU \subset W$  und  $F|_{\{x_0\} \times TU}$  Tangentialtransport bei  $x_0$  und die  $\Gamma_{jk}^i$  sind  $C^{k-2}$ .
- 4)  $F, \tilde{F}$  wie in 3) heißen äquivalent : $\iff \forall x_0 \in M : F|_{\{x_0\} \times TU}, \tilde{F}|_{\{x_0\} \times T\tilde{U}}$  sind äquivalente Tangentialtransporte bei  $x_0 \iff \forall x_0 \in M : \exists (\forall) \text{ Karte(n)} \varphi : \forall i, j, k : \Gamma_{jk}^i(x_0) = \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x_0)$ .
- 5) Eine Äquivalenzklasse von Tangentialtransporten heißt (affiner) Zusammenhang auf  $M$ .  $Z(M) := \{ \Gamma := [F] : F \text{ Tangentialtransport auf } M \}$ .
- 6) Ein Paar  $(M, \Gamma), \Gamma \in Z(M)$ , heißt Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang.

**Bsp.:** 1) Wenn  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist, so ist

$$F : V \times TV \rightarrow TV : (x_0, (x, \underbrace{v}_{\in T_x V \simeq V})) \mapsto (x_0, \underbrace{v}_{\in T_{x_0} V \simeq V})$$

ein Tangentialtransport.  $[F]$  heißt Standardzusammenhang auf  $V$ . (Beachte, dass es aber keine „Standardmetrik“ auf  $V$  gibt!)

Wenn  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis ist und  $x^i e_i \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  die entsprechende lineare Karte, so ist  $a_k^i = \delta_k^i$  und  $\Gamma_{jk}^i = 0$ . In anderen Koordinaten muss dies nicht gelten, da  $\Gamma_{jk}^i$  kein Tensor ist (vgl. S. 117).

2)  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  sei eine Untermannigfaltigkeit. Wir definieren

$$F : M \times TM \rightarrow TM : (x_0, (x, v)) \mapsto (x_0, \text{pr}_{x_0} v),$$

wobei  $v \in T_x M \hookrightarrow T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  und  $\text{pr}_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0} M \leq \mathbb{R}^n$  die orthogonale Projektion ist.

Wenn  $x(t)$  eine Kurve in  $M$  ist und  $x_0 = x(t_0)$ , so ist  $\dot{x}(t) = y_1(t) + y_2(t)$  mit  $y_i(t) \in \mathbb{R}^n, y_1(t) \in T_{x_0} M \leq \mathbb{R}^n, y_2(t) \perp T_{x_0} M$ , d.h.  $y_1(t) = F(x_0, \dot{x}(t))$  und daher  $\ddot{x}_F(t_0) = \dot{y}_1(t_0)$  und  $\dot{y}_2(t_0) \perp T_{x_0} M$  und somit  $\ddot{x}_F(t_0)$  = Projektion des Beschleunigungsvektors  $\ddot{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$  auf  $T_{x_0} M$ .

Wenn  $x_0 \in U \xrightarrow{\varphi} V : x \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$  eine Karte auf  $M$  ist und  $g := i^*(\sum_{k=1}^n dx^k \otimes dx^k)$  die von  $\mathbb{R}^n$  auf  $M$  induzierte Metrik, so ist  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi^i}, \frac{\partial x}{\partial \xi^j} \right\rangle$ , wobei  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$  für  $u, v \in \mathbb{R}^n$  (vgl. S. 87). Für  $v \in \mathbb{R}^n$  ist  $\text{pr}_{x_0} v = \alpha^i \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_{x_0}$  mit

$$\left\langle v, \frac{\partial x}{\partial \xi^j}(x_0) \right\rangle = \alpha^i \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi^i}(x_0), \frac{\partial x}{\partial \xi^j}(x_0) \right\rangle = \alpha^i g_{ij}(x_0) \text{ und daher } \alpha^i = g^{ij}(x_0) \left\langle v, \frac{\partial x}{\partial \xi^j}(x_0) \right\rangle.$$

Daraus folgt:

$$a_k^i \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_{x_0} = F \left( x_0, \left( x, \left( \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right)_x \right) \right) = \left( \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)_{x_0} \cdot g^{il}(x_0) \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi^k}(x), \frac{\partial x}{\partial \xi^l}(x_0) \right\rangle \text{ und}$$

$$\Gamma_{jk}^i(x_0) = g^{il}(x_0) \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^j \partial \xi^k}(x_0), \frac{\partial x}{\partial \xi^l}(x_0) \right\rangle.$$

In S. 122 werden wir sehen, dass  $[F]$  der „Levi-Civit -Zusammenhang“ zu  $g$  ist.

3) Speziell sei  $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  mit Kugelkoordinaten  $x(\vartheta, \varphi) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T$ .

Dann ist  $g_{\vartheta\vartheta} = 1$ ,  $g_{\vartheta\varphi} = 0$ ,  $g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \vartheta$  (vgl. S. 87),  $g^{\vartheta\vartheta} = 1$ ,  $g^{\vartheta\varphi} = 0$ ,

$$g^{\varphi\varphi} = \sin^{-2} \vartheta \implies \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}, \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right\rangle = 0 \quad \left( \text{da } \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} \perp T_x \mathbb{S}^2 \right),$$

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi = \sin^{-2} \vartheta \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\rangle = 0 \quad (\text{ebenso}), \quad \Gamma_{\vartheta\varphi}^\vartheta = \Gamma_{\varphi\vartheta}^\vartheta = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right\rangle = 0,$$

$$\Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi = \sin^{-2} \vartheta \left\langle \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{ctg} \vartheta,$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}, \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right\rangle = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0.$$

Für eine Kurve  $x(\vartheta, \varphi)$  gilt also  $\ddot{x}_F = \ddot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \ddot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2 \operatorname{ctg} \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ .

Transformationsformel für  $\Gamma_{jk}^i$ :

$\psi : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  sei eine weitere Karte,  $[F] \in Z(M)$ . Dann ist für  $x$  bei  $x_0 \in M$  und  $v = v^i \partial_i = v^{i'} \partial'_i \in T_x M : F(x_0, (x, v^i \partial_i)) = F(x_0, (x, v^{i'} \partial'_i)) \in T_{x_0} M$ , d.h.

$$\begin{aligned} a_k^{i'}(x_0, x) v^{k'}(\partial'_i)_{x_0} &= a_l^m(x_0, x) v^l(\partial_m)_{x_0} \\ &= a_l^m(x_0, x) v^{k'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}(x) (\partial'_i)_{x_0} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}(x_0) \\ \implies a_k^{i'} &= a_l^m \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}(x) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}(x_0) \implies \Gamma_{jk}^i(x_0)' = \left. \frac{\partial a_k^{i'}}{\partial x^{j'}} \right|_{x=x_0} = \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}}(x_0)}_{\Gamma_{rl}^m(x_0)} \underbrace{\left. \frac{\partial a_l^m}{\partial x^r} \right|_{x=x_0}}_{\delta_l^m} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}(x_0) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}(x_0) + \underbrace{a_l^m(x_0, x_0)}_{\delta_l^m} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}(x_0) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}(x_0), \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma_{jk}^{i'} = \Gamma_{rl}^m \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}} \quad (*)$$

Wegen des 2. Terms ist  $\Gamma \notin \mathcal{T}_2^1(M)$ .

**Bsp.:** Es soll mit (\*)  $\Gamma_{jk}^i$  für den Standardzusammenhang auf  $\mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten  $x \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$  berechnet werden. Von (\*) bleibt dann nur der rechte Teil (den man auch aus der Formel in Bsp. 2, S. 116 herleiten könnte). Dieser Teil ist symmetrisch in den unteren Indices  $j, k$ . Es folgt:  $\Gamma_{rr}^r = \frac{\partial^2 x^i}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x^i} = 0 = \Gamma_{rr}^\varphi$ ,

$$\Gamma_{r\varphi}^r = \Gamma_{\varphi r}^r = \frac{\partial^2 x^i}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \cdot \frac{x^i}{r} = \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{\partial r^2}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{\partial^2 x^i}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^2 (-x^i) \frac{x^i}{r} = -r,$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^2 (-x^i) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0 \quad (\varphi \text{ homogen vom Grad 0}).$$

Somit gilt für eine Kurve  $x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} :$

$$\dot{x} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_\varphi, \quad \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\partial_r + \left(\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}\right)\partial_\varphi.$$

**Notation:** Wenn  $[F] \in Z(M)$ , so nennt man  $\Gamma_{jk}^i$  wie in S. 115 seine Koordinaten (bzgl. der Karte  $\varphi$ ). Sie erfüllen (\*) bei Kartenwechseln.

Umgekehrt, wenn zu jeder Karte  $(\varphi : U \longrightarrow V) \in \mathfrak{A}$   $(\Gamma_{jk}^i) : U \xrightarrow{\mathcal{C}^{k-2}} \mathbb{R}^{3n}$  gegeben sind, sodass (\*) gilt, wenn  $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ ,  $(\varphi_m : U_m \longrightarrow V_m) \in \mathfrak{A}$ ,  $\chi_m$  eine lokalendliche  $\mathcal{C}^k$ -Zerlegung der 1 zu  $U_m$  (S. 59), so kann man durch

$$F : M \times TM \longrightarrow TM : (x_0, (x, v)) \longmapsto \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) \chi_m(x_0) [v^i + \Gamma_{jk}^i(x_0)(x^j - x_0^j)v^k](\partial_i)_{x_0}$$

einen Tangentialtransport definieren (wobei  $\Gamma_{jk}^i, v^k, (\partial_i)_{x_0}$  bzgl.  $\varphi_m$  zu nehmen sind und  $\psi_m \in \mathcal{C}^k(M)$ ,  $\text{supp } \psi_m \subset U_m$ ,  $\psi_m|_{\text{supp } \chi_m} \equiv 1$ ). Wegen (\*) sind dann die Koordinaten von  $[F]$  gerade  $\Gamma_{jk}^i$ . Für  $\Gamma := [F]$  schreibt man daher auch  $\underline{\Gamma} = (\underline{\Gamma}_{jk}^i)$ .

**Definition und Hilfssatz:**  $(M, \Gamma)$  Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang.

- 1)  $\overset{s}{\Gamma} \in Z(M)$  sei definiert durch  $\overset{s}{\Gamma}_{jk}^i := \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i)$  und heißt symmetrischer Anteil von  $\Gamma$ .
- 2)  $T(\Gamma) \in \mathcal{T}_2^1(M$  als  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit) sei in einer Karte definiert durch  $T(\Gamma) := (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i)\partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k$  und heißt Torsion von  $\Gamma$ .
- 3)  $\Gamma$  heißt torsionsfrei oder symmetrisch  $\iff T(\Gamma) = 0$ .

- Beweis:** 1) Offenbar erfüllt  $\overset{s}{\Gamma}_{jk}^i$  wieder (\*) und definiert (nach dem vorigen) wieder einen Zusammenhang.  
 2) Aus (\*) folgt  $(\overset{i}{\Gamma}_{jk}' - \overset{i}{\Gamma}_{kj}') \partial_i' \otimes dx^{j'} \otimes dx^{k'} = (\overset{m}{\Gamma}_{rl}^m - \overset{m}{\Gamma}_{lr}^m) \partial_m \otimes dx^r \otimes dx^l$  und daher ist  $T(\Gamma)$  wohldefiniert.  $\square$

**Bemerkung:** Wegen  $\overset{i}{\Gamma}_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = \overset{i}{\Gamma}_{kj}^i \dot{x}^j \dot{x}^k$  ist zur Berechnung von  $\ddot{x}$  nur  $\overset{s}{\Gamma}$  von Bedeutung.

Nach S. 71 ergibt die Ableitung eines Tensors nach den Koordinaten keinen Tensor. Auf einer Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang können wir Tensorfelder differenzieren:

**Hilfsatz und Definition:**  $(M, \Gamma)$  Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $\Gamma = [F]$ .

- 1) Für  $x$  bei  $x_0 \in M$  sei  $F_{x_0,x} := F|_{\{x_0\} \times T_x M} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x M, T_{x_0} M)$ .  
 Wegen  $F_{x_0,x_0} = \text{id}_{T_{x_0} M}$  ist  $F_{x_0,x}$  für  $x$  nahe bei  $x_0$  invertierbar und wir erhalten mit  $T_{q,x}^m M := (T_x M)^{\otimes m} \otimes (T_x^* M)^{\otimes q}$ :  
 $(F_{x_0,x})_q^m : T_{q,x}^m M \longrightarrow T_{q,x_0}^m M : t \longmapsto (F_{x_0,x})^{\otimes m} \otimes (F_{x_0,x}^{-1})^{\otimes q} t$ .
- 2)  $\nabla : \mathcal{T}_q^m(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{q+1}^m(M$  als  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit):  $X \longmapsto (x_0 \longmapsto (\nabla X)(x_0))$   
 wobei  $\nabla X(x_0) \in T_{q+1,x_0}^m M \simeq T_{x_0}^* M \otimes T_{q,x_0}^m M \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x M, T_{q,x_0}^m M)$  (vgl. S. 44)  
 definiert ist durch:

$$\nabla X(x_0) \left( \underbrace{[x(t)]}_{\in T_{x_0} M} \right) := \left( (F_{x_0,x(t)})_q^m X(x(t)) \right)'(0) \in T_{q,x_0}^m M.$$

$\nabla$  heißt kovariante Ableitung und hängt nur von  $\Gamma = [F]$  ab. In Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} X &= (X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}) \implies (\nabla X)_{j_0 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m} = \\ &= \frac{\partial X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{j_0}} + \sum_{r=1}^m X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_m} \Gamma_{j_0 k}^{i_r} - \sum_{r=1}^q X_{j_1 \dots j_{r-1} l j_{r+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_m} \Gamma_{j_0 j_r}^l. \end{aligned}$$

**Beweis:**  $\varphi : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  sei eine Karte bei  $x_0$ ,  $[x(t)] = u^j(\partial_j)_{x_0} \in T_{x_0} M$ . Bzgl. der Basen  $(\partial_i)_{x(t)}$  und  $(\partial_i)_{x_0}$  hat  $F_{x_0,x(t)}$  dann die Matrix  $\delta_k^i + t \Gamma_{jk}^i(x_0) u^j + o(t)$  und  $(F_{x_0,x(t)})^{-1T}$  die Matrix  $\delta_i^k - t \Gamma_{ji}^k(x_0) u^j + o(t)$ .

Für  $X \in \mathcal{T}_q^m(M)$  gilt daher  $(F_{x_0,x(t)})_q^m (X(x(t))) =$   
 $= \left[ X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}(x(t)) + t \sum_{r=1}^m X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{r-1} k i_{r+1} \dots i_m}(x_0) \Gamma_{j_0 k}^{i_r}(x_0) u^{j_0} - \right.$   
 $- t \sum_{r=1}^q X_{j_1 \dots j_{r-1} l j_{r+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}(x_0) \Gamma_{j_0 j_r}^l(x_0) u^{j_0} + o(t) \left] \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_m} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \right.$  und es folgt  
 die Koordinatendarstellung von  $\nabla X$ . Insbesondere sehen wir daraus, dass  $\nabla X \in \mathcal{C}^{k-2}$  ist und nur von  $\Gamma = [F]$  abhängt.  $\square$

**Notation:** Wenn  $X \in \mathcal{T}_q^m(M)$  und in einer Karte  $X = (X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m})$ , so setzt man  $\nabla_{j_0} X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m} := (\nabla X)_{j_0 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}$ , d.h.  $\nabla X = (\nabla_{j_0} X_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m})$ .

**Bsp.:** 1) Wenn  $(M, \Gamma)$  Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $U \subset M$  offen, so lässt sich  $\Gamma$  auf  $U$  einschränken. Speziell sei  $U \xrightarrow{\varphi} V$  eine Karte,  $1 \leq k \leq n = \dim M$  und  $X = \partial_k \in \mathcal{T}^1(U)$ , d.h.  $X = (\delta_k^i)$ . Dann ist  $\nabla_j X^i = (\nabla X)_j^i = X^m \Gamma_{jm}^i = \Gamma_{jk}^i$  bzw. ausgeschrieben  $\nabla \partial_k = \Gamma_{jk}^i \partial_i \otimes dx^j$ . Ebenso ergibt sich  $\nabla dx^i = -\Gamma_{jk}^i dx^j \otimes dx^k$ .

2)  $M \subset \mathbb{R}^n$  sei eine Untermannigfaltigkeit mit Zusammenhang wie in S. 116,  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  (der Einfachheit halber),  $x \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^p)$  eine Karte auf  $M$ . Für  $x_0 \in M$  kann man  $X(x) = X_1(x) + X_2(x) \in \mathbb{R}^n$  schreiben mit  $X_1(x) \in T_{x_0} M$  und  $X_2(x) \perp T_{x_0} M$ , d.h.  $X_1(x) = F_{x_0, x}(X(x))$ . Wenn für  $i = 1, \dots, p$   $\nabla_i X := \nabla_i X^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} \in T_x M$ , so ist

$$\nabla_i X(x_0) = \left. \frac{\partial F_{x_0, x}(X(x))}{\partial \xi^i} \right|_{x=x_0} = \frac{\partial X_1}{\partial \xi^i}(x_0) = \text{Projektion von } \frac{\partial X}{\partial \xi^i}(x_0) \text{ in } T_{x_0} M.$$

3) Wenn  $S \in \mathcal{T}_{q_1}^{m_1}(M)$ ,  $T \in \mathcal{T}_{q_2}^{m_2}(M)$ ,  $m = m_1 + m_2$ ,  $q = q_1 + q_2$ , so ist

$$\begin{aligned} \nabla(S \otimes T)(x_0)[x(t)] &= (F_{x_0, x(t)})_q^m S \otimes T(x(t))'(0) = \\ &= [(F_{x_0, x(t)})_{q_1}^{m_1} S(x(t)) \otimes (F_{x_0, x(t)})_{q_2}^{m_2} T(x(t))]'(0) = \\ &= \nabla S(x_0)([x(t)]) \otimes T(x_0) + S(x_0) \otimes \nabla T(x_0)([x(t)]) \in T_{x_0} M^{\otimes m} \otimes T_{x_0}^* M^{\otimes (q+1)} \end{aligned}$$

oder kurz  $\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T$ .

Weiters ist  $\nabla$  mit der Verjüngung vertauschbar (da auch  $(F_{x_0, x})_q^m$  mit der Verjüngung kommutiert) und daher z.B. für  $X \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $\Omega \in \mathcal{T}_1(M)$ :

$d\langle X, \Omega \rangle = \nabla \langle X, \Omega \rangle = \langle \nabla X, \Omega \rangle + \langle X, \nabla \Omega \rangle = (\nabla_j X^i \cdot \Omega_i + X^i \cdot \nabla_j \Omega_i) dx^j$ , wovon man sich auch durch Ausrechnen überzeugen kann.

4) Für  $f \in \mathcal{C}^k(M)$  ist  $\nabla f = df$  (wenn man der Vollständigkeit halber  $(F_{x_0, x})_0^0 := \text{id}_{\mathbb{R}}$  definiert).

Für  $\Omega \in \mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$  gilt in einer Karte  $\Omega = \omega_k dx^k \implies d\Omega = d\omega_k \wedge dx^k = \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k = \left( \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} \right) dx^j \otimes dx^k$ , d.h.  $(d\Omega)_{jk} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k}$ .

Andererseits ist  $(\nabla \Omega)_{jk} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - \omega_i \Gamma_{jk}^i$ , d.h.  $(\nabla \Omega)_{jk} - (\nabla \Omega)_{kj} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \omega_i (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) \implies d\Omega = 2A(\nabla \Omega) + \langle T(\Omega), \Omega \rangle$ , wobei

$A : \mathcal{T}_2(M) \longrightarrow \Omega^2(M) : T \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_2} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma(T)$  (vgl. S. 45) und

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{T}_2^1(M) \times \mathcal{T}_1(M) \longrightarrow \mathcal{T}_2(M)$ , vgl. S. 49. Zur entsprechenden Formel für  $\Omega^q(M)$  siehe Üb. 8.1, S. 128.

**Hilfssatz und Definition:**  $(M, g)$   $\mathcal{C}^k$ -RR,  $k \geq 3$ . Dann gilt:

1)  $\exists! \Gamma \in Z(M) : (i) T(\Gamma) = 0$ , d.h.  $\Gamma$  symmetrisch,

(ii)  $\nabla g = 0$ , d.h. wenn  $\Gamma = [F]$ , so ist  $F_{x_0, x}$  für  $x$  bei  $x_0$  in 1. Ordnung ein Isomorphismus der IPR  $(T_x M, g(x)), (T_x M, g(x_0))$ . Dieses  $\Gamma$  heißt **Levi-Civit -Zusammenhang** oder **Riemannscher Zusammenhang** von  $(M, g)$ .

2) Für  $\Gamma$  wie in 1) gilt:

a)  $\Gamma_{jk}^i$  sind die Christoffel-Symbole von  $g$ ;

b) wenn  $U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  geod atische Normalkoordinaten bei  $x_0 \in M$  sind, so ist  $\Gamma(x_0)$  die Äquivalenzklasse des Tangentialtransportes bei  $x_0$

$$TU \rightarrow T_{x_0} M : (x, \underbrace{v^i \partial_i}_{\in T_x M}) \mapsto (x_0, \underbrace{v^i \partial_i}_{\in T_{x_0} M}).$$

**Beweis:**  $\varphi : U \rightarrow V : x \mapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  seien geod atische Normalkoordinaten bei  $x_0 \in M$ ,  $\overset{c}{\Gamma}$  bezeichne die Christoffel-Symbole.

$\alpha)$  In  $x_0$  gilt  $\forall i, j, k$  (vgl. S. 102, 106):

$$\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = 0 \implies \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \implies (i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i)$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \implies (\text{Subtraktion}) \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \implies \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x_0) = 0.$$

Wenn also  $\Gamma \in Z(M)$ , so ist bzgl.  $\varphi$  in  $x_0$ :

$$(\nabla g)_{j_0 j_1 j_2} = -g_{l j_2} \overset{c}{\Gamma}_{j_0 j_1}^l - g_{j_1 l} \overset{c}{\Gamma}_{j_0 j_2}^l = -\overset{c}{\Gamma}_{j_0 j_1}^{j_2} - \overset{c}{\Gamma}_{j_0 j_2}^{j_1}.$$

Falls  $(\nabla g)(x_0) = 0$  und  $T(\Gamma)(x_0) = 0$ , gilt also in  $x_0 : \forall i, j, k : \overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = -\overset{c}{\Gamma}_{ji}^k = -\overset{c}{\Gamma}_{ij}^k = +\overset{c}{\Gamma}_{ik}^j = -\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ , d.h.  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = 0$ . Daher müssen die Koordinaten von  $\Gamma$  bzgl.  $\varphi$  in  $x_0$  verschwinden und gibt es höchstens ein  $\Gamma \in Z(M)$  mit  $T(\Gamma) = 0$  und  $\nabla g = 0$ .

Falls  $\Gamma$  existiert, ist dann auch 2 b) erfüllt.

$\beta)$  Es bleibt noch zu zeigen, dass die Christoffel-Symbole  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$  bzgl.  $g$  einen Zusammenhang definieren. Wenn  $[F]$  der Zusammenhang bei  $x_0$  entsprechend 2 b) ist und somit  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = 0$  bzgl.  $\varphi$ , so gilt in einer anderen Karte  $\psi : x \mapsto (x^{1'}, \dots, x^{n'})^T$ :

$$\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i' = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \quad (\text{vgl. } (*), \text{ S. 117}).$$

Andererseits ist  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i' = \frac{1}{2} g^{im'} \left( \frac{\partial g_{mk'}}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial g_{mj'}}{\partial x^{k'}} - \frac{\partial g_{jk'}}{\partial x^{m'}} \right)$  nach S. 102.

Wegen  $g_{rs}(x_0) = \delta_{rs}$ ,  $g^{rs}(x_0) = \delta^{rs}$  und  $\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t}(x_0) = 0$  (vgl.  $\alpha$ ) gilt in  $x_0$ :

$$\frac{\partial g_{mk'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left( g_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^s}{\partial x^{k'}} \right) = \sum_r \left( \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{m'}} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} \right).$$

Das ergibt in  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \overset{c}{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{im'} \sum_r \left( \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{m'}} \cdot \cancel{\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} + \cancel{\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{k'} \partial x^{m'}}} \cdot \cancel{\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} - \cancel{\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{m'} \partial x^{j'}}} \cdot \cancel{\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}} - \cancel{\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}}} \cdot \cancel{\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}}} \right) = \\ &= \sum_{r,l} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x^{m'}} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} = \overset{c}{\Gamma}_{jk}^i. \end{aligned}$$

□

**Bsp.:** 1) Für  $M \subset \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeit wurde in S. 116 ein Zusammenhang  $\Gamma$  definiert. Es ergab sich  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = g^{il} \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^j \partial \xi^k}, \frac{\partial x}{\partial \xi^l} \right\rangle$ , wobei  $g$  die von  $\sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$  auf  $M$  induzierte Metrik ist. Dies zeigt, dass  $T(\Gamma) = 0$ . Eine ähnliche Rechnung wie oben würde zeigen, dass  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$  gleich  $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l} \right)$  ist, d.h. dass  $\Gamma$  der Levi-Civit-Zusammenhang zu  $g$  ist. Es folgt dies auch aus  $\nabla g = 0$ , was man so sieht:

Für  $v, w \in T_{x_0} M$  ist  $F_{x_0, x}^{-1}(v) = v_1$ , wenn  $v = v_1 + v_2$ ,  $v_1 \in T_x M$ ,  $v_2 \perp T_{x_0} M$  und ähnlich  $F_{x_0, x}^{-1}(w) = w_1$  und daher  $g(x_0)(v, w) = \langle v, w \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle - \langle v_2, w_2 \rangle = g(x)(F_{x_0, x}^{-1}(v), F_{x_0, x}^{-1}(w)) + O(|x - x_0|^2)$  (da  $v_2, w_2 \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$ ), d.h.

$$(F_{x_0, x}^{T-1})^{\otimes 2} g(x) = g(x_0) + O(|x - x_0|^2), \quad \nabla g(x_0) = 0.$$

2) Z.B. für  $M = \mathbb{S}^2$  können wir nach 1)  $\Gamma$  auch aus der Formel für die Christoffel-Symbole berechnen.  $g_{\vartheta\vartheta} = 1$ ,  $g_{\vartheta\varphi} = 0$ ,  $g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \vartheta \implies$  nur  $\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \vartheta} = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \neq 0 \implies \overset{\vartheta}{\Gamma}_{\vartheta\vartheta}^\varphi = \overset{\varphi}{\Gamma}_{\vartheta\vartheta}^\varphi = \overset{\varphi}{\Gamma}_{\vartheta\vartheta}^\varphi = 0$ ,  $\overset{\varphi}{\Gamma}_{\vartheta\varphi}^\varphi = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \cot \vartheta$ ,  $\overset{\vartheta}{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\vartheta = -\frac{1}{2} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = -\sin \vartheta \cos \vartheta$ .

**Notation:** Entsprechend Definition und Hilfssatz in S. 49 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{q+1}^m(M) &\simeq \left\{ \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}_q^m(M) \text{ } \mathcal{C}^{k-1}(M) \text{- linear} \right\} \\ U &\longmapsto (X \longmapsto \langle X, U \rangle) \end{aligned}$$

bzw. in Koordinaten  $(U_{j_0 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}) \longmapsto ((X^i) \longmapsto (X^l U_{l j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m}))$ . Speziell für  $U = \nabla Y$ ,  $Y \in \mathcal{T}_q^m(M)$  schreibt man  $\nabla_X Y := \langle X, \nabla Y \rangle$ . In Koordinaten ist also  $\nabla_X Y = (X^l \nabla_l Y_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_m})$ . Man kann  $\nabla_X$  als Richtungsableitung in Richtung des Vektorfeldes  $X$  bezeichnen. Im  $\mathcal{C}^\infty$ -Fall ist also  $\nabla : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}_q^m(M) \longrightarrow \mathcal{T}_q^m(M) : (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ .

**Bsp.:** Bei Einschränkung von  $\Gamma$  auf ein Kartengebiet (vgl. Bsp. 1, S. 120) gilt:

$$\nabla_{\partial_j} \partial_k = \langle \partial_j, \nabla \partial_k \rangle = \langle \partial_j, \overset{i}{\Gamma}_{lk}^i \partial_i \otimes dx^l \rangle = \overset{i}{\Gamma}_{jk}^i \partial_i.$$

Beachte, dass  $\nabla_i X$  in Bsp. 2, S. 120 eigentlich  $\nabla_{\partial/\partial \xi^i} X$  ist.

**Satz (Koszul 1950)**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 2$ . Dann gilt:

$Z(M) \simeq \{\nabla : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M)$   $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit)  $\mathbb{R}$ -bilinear:

$\forall f \in \mathcal{C}^{k-1}(M), \forall X, Y \in \mathcal{T}^1(M) : (\text{i}) \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY \quad (\text{ii}) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y\}$ .

**Beweis:** 1) Es seien  $\Gamma \in Z(M)$ ,  $\nabla$  wie in der Notation,  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ ,  $X, Y \in \mathcal{T}^1(M)$ . Dann gilt in einer Karte:

$$\nabla_XY = \langle X, \nabla Y \rangle = \left\langle X, \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + Y^k \Gamma_{jk}^i \right) \partial_i \otimes dx^j \right\rangle = X^j \left( \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + Y^k \Gamma_{jk}^i \right) \partial_i$$

und daher  $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$  und  $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X^j Y^i \frac{\partial f}{\partial x^j} \partial_i = f\nabla_XY + X(f)Y$ .

2) Umgekehrt sei  $\nabla : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M)$  wie im Satz gegeben.

Wenn  $X$  oder  $Y$  in einer Umgebung von  $x_0 \in M$  verschwinden, so auch  $\nabla_XY$ , denn für  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ ,  $f = 2$  bei  $x_0$  und  $f = 0$  auf  $\text{supp } X$  bzw.  $\text{supp } Y$  ist  $\nabla_XY = \nabla_{(1-f)X}Y = (1-f)\nabla_XY$  bzw.  $\nabla_XY = \nabla_X(1-f)Y = (1-f)\nabla_XY + X(1-f) \cdot \nabla_XY \implies \nabla_XY(x_0) = -\nabla_XY(x_0)$  (da  $X(1-f)(x_0) = 0$ )  $\implies \nabla_XY(x_0) = 0$ . Daher kann man für  $U \subset M$  offen

$$\nabla|_U : \mathcal{T}^1(U) \times \mathcal{T}^1(U) \longrightarrow \mathcal{T}^1(U)$$
  $\mathcal{C}^{k-1}$ -M.) :  $(X, Y) \longmapsto (x_0 \longmapsto \nabla_{X_1}Y_1(x_0))$

definieren, wobei  $X_1, Y_1 \in \mathcal{T}^1(M)$  mit  $X_1 = X$  bei  $x_0$ ,  $Y_1 = Y$  bei  $x_0$ . Dann werde  $\Gamma_{jk}^i$  in einer Karte durch  $\nabla_{\partial_j}\partial_k = \Gamma_{jk}^i\partial_i$  bestimmt (vgl. Bsp. in S. 122). Es folgt

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i \partial'_i &= \nabla_{\partial'_j}\partial'_k = \nabla_{\partial'_j} \left( \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \partial_l \right) = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \partial_l + \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}}_{=\frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}} \partial_r} \nabla_{\partial'_j} (\partial_l) = \\ &= \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \partial_l + \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}} \Gamma_{rl}^m \partial_m = \left( \Gamma_{rl}^m \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \right) \partial'_i, \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$\Gamma$  erfüllt (\*) in S. 117 und liefert also einen Zusammenhang, vgl. S. 118.  $\square$

**Bsp.:** 1)  $(M, \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang. Dann lässt sich  $T(\Gamma) \in \mathcal{T}_2^1(M) \simeq \{T : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M)$   $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -bilinear} (vgl. S. 49) koordinatenfrei durch

$$T(\Gamma)(X, Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y] \in \mathcal{T}^1(M), \quad X, Y \in \mathcal{T}^1(M),$$

darstellen, denn in Koordinaten ist  $T(\Gamma)(X^j \partial_j, Y^k \partial_k) = X^j Y^k (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) \partial_i$  und

$$\begin{aligned} \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y] &= X^j \nabla_{\partial_j}(Y^k \partial_k) - Y^k \nabla_{\partial_k}(X^j \partial_j) - [X, Y] = \\ &= X^j Y^k (\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_k}\partial_j) + \underbrace{X^j \partial_j(Y^k \partial_k - Y^k \partial_k(X^j \partial_j) - [X, Y])}_0 = X^j Y^k (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) \partial_i. \end{aligned}$$

2) Wenn speziell  $T(\Gamma) = 0$  (z.B. Riemannscher Zusammenhang), so gilt

$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ , d.h.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X$  ist unabhängig von der Wahl des symmetrischen Zusammenhangs  $\Gamma$  (bzw. der Riemannschen Metrik  $g$ ). Im Allgemeinen ist der symmetrische Anteil  $\overset{s}{\Gamma}$  von  $\Gamma$  (vgl. S. 118) gegeben durch

$$\overset{s}{\nabla} : (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y - \frac{1}{2} T(\Gamma)(X, Y) = \frac{1}{2} (\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X, Y]).$$

**Bemerkung:** Die Definition des Zusammenhangs in S. 115 entspricht der des Tangentialvektors bzw. Vektorfeldes, der Satz von Koszul entspricht der Darstellung von Vektorfeldern als Derivationen, vgl. S. 25. Das Analogon der Integralkurven bzw. Flüsse sind Geodäten bzw. Paralleltransport.

**Definition und Hilfssatz:**  $M$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang  $\Gamma = [F]$ ,  $k \geq 3$ ,  $C : I \longrightarrow M : t \longmapsto x(t)$  sei eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve.

- 1) Für  $t_0 \in I$  sei  $\ddot{x}_\Gamma(t_0) := \ddot{x}_F(t_0)$ , vgl. S. 115.
- 2)  $C$  heißt Geodäte (bzgl.  $\Gamma$ ) : $\iff \forall t \in I : \ddot{x}_\Gamma(t) = 0 \iff$  (in Koordinaten)  $\forall t \in I, \forall i : \ddot{x}^i(t) + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \dot{x}^j(t) \dot{x}^k(t) = 0$ .
- 3) Es gilt alles analog zum Hilfssatz in S. 105. Speziell:  $\forall x_0 \in M : \exists 0 \in W \subset T_{x_0} M$  offen,  $\exists x_0 \in U \subset M$  offen und  $\exp_{x_0} : W \longrightarrow U : v \longmapsto x_v(1)$  ist ein  $\mathcal{C}^{k-2}$ -Diffeomorphismus und heißt Exponentialabbildung.
- 4) Es sei  $I = [a, b]$ ,  $x_0 := x(a)$ ,  $x_1 := x(b)$  und  $\mathbb{T}^C : T_{x_0} M \longrightarrow T_{x_1} M : v(a) \longmapsto v(b)$ , wobei  $I \longrightarrow TM : t \longmapsto (x(t), v(t))$  erfüllt:  $\forall a \leq t_0 \leq b : \frac{dF_{x(t_0), x(t)}(v(t))}{dt}(t_0) = 0$  bzw. in Koordinaten  $\forall i : \dot{v}^i(t_0) + \Gamma_{jk}^i(x(t_0)) \dot{x}^j(t_0) v^k(t_0) = 0$ .  $\mathbb{T}^C$  heißt Paralleltransport entlang  $C$  und ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

**Beweis:** 3) wird analog zum Beweis in S. 105, 106 gezeigt.

- 4) In einer Karte ist  $\frac{dF_{x(t_0), x(t)}(v(t))}{dt}(t_0) = \frac{d}{dt} \left[ a_k^i(x(t_0), x(t)) v^k(t) \right](t_0) (\partial_i)_{x(t_0)} = = [\dot{v}^i(t_0) + \Gamma_{jk}^i(x(t_0)) \dot{x}^j(t_0) v^k(t_0)] \partial_i \in T_{x(t_0)} M$ . Daher erfüllen  $(v^1, \dots, v^n)(t)$  in einer Karte ein **lineares** Differentialgleichungssystem, das eine eindeutige, im gesamten Kartengebiet existierende Lösung hat. (Wegen der Linearität des Differentialgleichungssystems ist kein ‘blow-up’ (S. 110) möglich.) Durch Überdeckung der Kurve  $C$  mit endlich vielen Kartengebieten folgt die Aussage.  $\square$

**Bemerkungen:** 1) Ebenso kann man  $\mathbb{T}_{m,q}^C : T_{q,x_0}^m M = T_{x_0} M^{\otimes m} \otimes T_{x_0}^* M^{\otimes q} \longrightarrow T_{q,x_1}^m M$  definieren und erhält  $\mathbb{T}_{m,q}^C = \mathbb{T}^{C \otimes m} \otimes \mathbb{T}^{CT^{-1} \otimes q}$ .  
2) Wenn  $F \in \mathcal{C}^2$ ,  $C$  fest,  $a < \alpha < b$ ,  $C_\alpha := C|_{[a,\alpha]}$ , so gilt in einer Karte für  $\alpha \searrow a$

(beachte, dass  $v(t)$  nach SLLD S. 105  $\mathcal{C}^2$  ist):

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^{C_\alpha}(v^i(\partial_i)_{x_0}) &= \left[ v^i + (\alpha - a)\dot{v}^i + O((\alpha - a)^2) \right] \partial_i = \\ &= \left[ v^i - (\alpha - a)\Gamma_{jk}^i \dot{x}^j(a)v^k + O((\alpha - a)^2) \right] \partial_i \in T_{x(\alpha)}M \\ \text{und } F_{x(\alpha),x_0}(v^i(\partial_i)_{x_0}) &= \left[ v^i + \Gamma_{jk}^i(x(\alpha))(x_0^j - x(\alpha)^j)v^k + O((\alpha - a)^2) \right] \partial_i = \\ &= \left[ v^i - (\alpha - a)\Gamma_{jk}^i \dot{x}^j(a)v^k + O((\alpha - a)^2) \right] \partial_i \in T_{x(\alpha)}M.\end{aligned}$$

Somit ist  $\mathbb{T}^{C_\alpha} = F_{x(\alpha),x_0} + O((\alpha - a)^2)$  für  $\alpha \searrow a$ .

**Bsp.:** 1) Wenn  $C : t \mapsto x(t)$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Kurve ist und  $X \in \mathcal{T}^1(M)$  mit  $\forall t : \dot{x}(t) = X(x(t))$ , d.h.  $C$  eine Integralkurve zu  $X$ , so gilt für  $t \in I$ :

$$\nabla_X X(x(t)) = \left[ \dot{x}^j(t) \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x(t)) + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \dot{x}^j(t) \dot{x}^k(t) \right] \partial_i = \ddot{x}_\Gamma(t).$$

Daher schreibt man auch manchmal  $\nabla_{\dot{x}} \dot{x}$  für  $\ddot{x}_\Gamma$ . Geodäten erfüllen in dieser Schreibweise  $\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0$ . Ebenso, wenn  $v(t) = V(x(t))$ ,  $V \in \mathcal{T}^1(M)$ , so gilt beim Paralleltransport in 4)  $\nabla_X V(x(t)) = 0$ .

2) Für einen Riemannschen Zusammenhang stimmen die Geodäten der Metrik mit denen des Zusammenhangs überein (vgl. S. 102). (Physikalisch bedeutet das: Die Bahnlinien unter kräftefreier Bewegung sind lokal nach der Bogenlänge parametrisierte Minimallinien.)

Weiters ist  $\mathbb{T}^C$  dann orthogonal, denn wenn  $X, V_1, V_2$  wie in 1) zu  $x(t), v_1(t), v_2(t)$ , so ist  $\langle X, d(g(V_1, V_2)) \rangle = \nabla_X(g(V_1, V_2)) = \text{Verjüngung}(X \otimes \nabla(V_1 \otimes V_2 \otimes g)) = 0$  auf  $C$ , vgl. S. 120 Bsp. 3), 4) und S. 121 1), (ii), und daher  $\frac{d}{dt} g(x(t))(v_1(t), v_2(t)) = 0$ .

3) Auf einem Vektorraum  $V$  mit Standardzusammenhang ist  $\mathbb{T}^C : T_{x_0}V \simeq V \simeq T_{x_1}V$  nur von den Endpunkten von  $C$  abhängig. Im Allgemeinen ist dies nicht so (näheres s. § 9). Auf  $\mathbb{S}^2$  z.B. gilt in Kugelkoordinaten, wenn  $x(t) = \begin{pmatrix} \vartheta(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$  und  $v = v^\vartheta \partial_\vartheta + v^\varphi \partial_\varphi$  (vgl. S. 122, Bsp. 2):

$$\dot{v}^\vartheta = \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi} v^\varphi, \quad \dot{v}^\varphi = -\cot \vartheta (\dot{\varphi} v^\vartheta + \dot{\vartheta} v^\varphi),$$

wenn  $v$  entlang  $x(t)$  parallel verschoben wird.

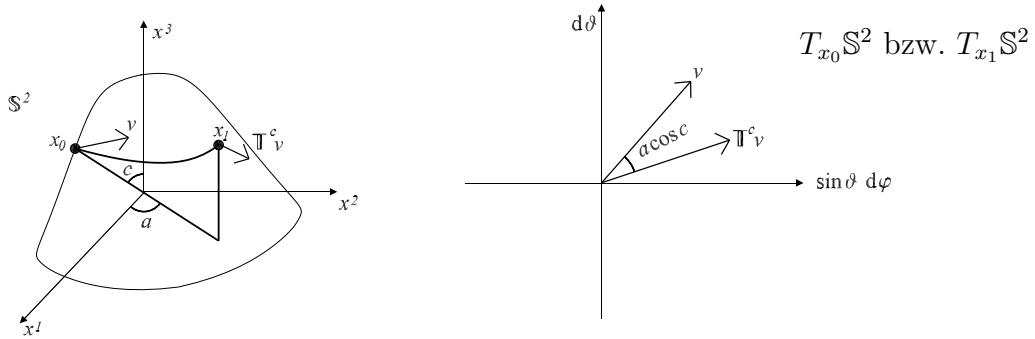
Speziell, wenn  $C$  der Kreis  $\vartheta = c \in (0, \pi)$ ,  $\varphi(t) = t$  um die  $x^3$ -Achse ist:

$$\dot{v}^\vartheta = \sin c \cos c v^\varphi, \quad \dot{v}^\varphi = -\cot c v^\vartheta, \quad \ddot{v}^\vartheta = -\cos^2 c v^\vartheta, \quad \ddot{v}^\varphi = -\cos^2 c v^\varphi \implies$$

$$\begin{pmatrix} v^\vartheta(t) \\ v^\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t \cos c) & \sin c \sin(t \cos c) \\ -\frac{\sin(t \cos c)}{\sin c} & \cos(t \cos c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\vartheta(0) \\ v^\varphi(0) \end{pmatrix}$$

Wenn  $C : [0, a] \rightarrow \mathbb{S}^2$ , so ist  $x_0 = (\sin c, 0, \cos c)^T$ ,  $x_1 = (\cos a \sin c, \sin a \sin c, \cos c)^T$  und  $\mathbb{T}^C : T_{x_0} \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{x_1} \mathbb{S}^2$  hat bzgl. der Basen  $\partial_\vartheta, \partial_\varphi$  die Matrix

$\begin{pmatrix} \cos(a \cos c) & \sin c \sin(a \cos c) \\ -\frac{\sin(a \cos c)}{\sin c} & \cos(a \cos c) \end{pmatrix}$ . In den ONB  $\partial_\vartheta, \frac{1}{\sin c} \partial_\varphi$  hat  $\mathbb{T}^C$  die Matrix  $\begin{pmatrix} \cos(a \cos c) & \sin(a \cos c) \\ -\sin(a \cos c) & \cos(a \cos c) \end{pmatrix}$  und ist also eine Drehung um den Winkel  $a \cos c$ .



Speziell für  $a = 2\pi$  erhalten wir  $\mathbb{T}^C \neq \text{id}$ , obwohl  $x_0 = x_1$ . Dies hängt mit der Krümmung der Kugel zusammen, vgl. § 9.

Schließlich sollen noch Zusammenhänge auf Liegruppen untersucht werden.

**Definition und Hilfssatz:**  $G$  Liegruppe mit Einselement  $I$ .

- 1) a)  $\Gamma \in Z(G)$  heißt linksinvariant : $\iff \forall X, Y \in \mathcal{T}^1(G), \forall x \in G : \nabla_{l^x(X)} l^x(Y) = l^x(\nabla_X Y) \in \mathcal{T}^1(G)$ .
- b)  $Z_l(G) := \{\Gamma \in Z(G) \text{ linksinvariant}\}$ .
- 2)  $L : T_I G \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_l^1(G)$  sei wie in S. 34. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha : Z_l(G) &\longrightarrow \{f : T_I G \times T_I G \longrightarrow T_I G \text{ bilinear}\} \simeq T_{2,I}^1 G \\ \Gamma &\longmapsto (\alpha_\Gamma : (v, w) \mapsto \nabla_{L(v)} L(w)(I)) \end{aligned}$$

bijektiv. Wenn  $\forall v \in T_I G : \alpha_\Gamma(v, v) = 0$ , so sind die Geodäten von  $\Gamma$  durch  $t \mapsto x \cdot \text{Exp}(vt)$ ,  $x \in G$ ,  $v \in T_I G$  gegeben und speziell ist  $\exp_I = \text{Exp}$ .

**Beweis:** a) Da  $\nabla$   $\mathbb{R}$ -bilinear ist, ist  $\alpha$  wohldefiniert.

b)  $\alpha$  injektiv: Wenn  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis in  $T_I G$  ist und  $X_i := L(e_i) \in T_l^1(G)$ , so ist  $X_1, \dots, X_n$  eine Basis von  $T^1(G)$  über  $\mathcal{C}^\infty(G)$  (vgl. S. 36)  $\implies$

$$\forall X = f^i X_i, Y = g^j X_j \in T^1(G) : \nabla_X(Y) = f^i X_i(g^j) Y_j + f^i g_j \nabla_{X_i} X_j.$$

Da  $\Gamma \in Z_l(G)$ , ist  $\nabla_{X_i} X_j \in T_l^1(G) \implies \nabla_{X_i} X_j = L(\alpha_\Gamma(e_i, e_j)) \implies \nabla_X Y$  und damit  $\Gamma$  sind durch  $\alpha_\Gamma$  bereits festgelegt.

c)  $\alpha$  surjektiv: Für  $\beta \in T_I G \otimes T_I^* G^{\otimes 2}$  und  $X, Y$  wie oben sei  $\nabla_X Y = X(g^j) Y_j + f^i g_j L(\beta(e_i, e_j))$ . Dies erfüllt (i), (ii) im Satz von Koszul in S. 122 und definiert daher einen Zusammenhang  $\Gamma \in Z(G)$ . Offenbar ist  $\Gamma \in Z_l(G)$  und  $\beta = \alpha_\Gamma$ .

d) Wenn  $\forall v \in T_I G : \alpha_\Gamma(v, v) = 0$ , so folgt  $\forall v \in T_I G : \nabla_{L(v)} L(v) = 0$ . Eine Integralkurve von  $L(v)$  ist dann eine Geodäte von  $\Gamma$  (vgl. Bsp. 1, S. 125).

Nach S. 109 4) und S. 110 sind die Integralkurven von  $L(v)$ ,  $v \in T_I G$ , durch  $t \mapsto x \text{Exp}(vt)$ ,  $x \in G$ , gegeben und daher folgt die Aussage daraus, dass Geodäten  $x(t)$  durch  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$  eindeutig bestimmt sind.  $\square$

**Bsp.:** Es sei  $G = \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ . Wir wollen  $\Gamma \in Z_l(G)$  mit  $\alpha_\Gamma = 0$  bestimmen.

$$\left( \frac{\partial}{\partial a_s^r} \right)_I \simeq (\delta_r^i \delta_j^s)_{ij}^r, \quad 1 \leq r, s \leq n, \text{ bilden eine Basis in } T_I \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \simeq \text{gl}_n(\mathbb{R}).$$

Die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder  $X_{(s)} := L\left(\frac{\partial}{\partial a_s^r}\right)$  sind (vgl. S. 35):

$$X_{(s)} : G \longrightarrow TG : A \longmapsto \left( A, \underbrace{A \cdot (\delta_r^i \delta_j^s)}_{=(a_r^i \delta_j^s) \in T_A G \simeq \text{gl}_n(\mathbb{R})} \right).$$

Andererseits ist in der Karte  $\text{id} : A \longmapsto (a_j^i) : \frac{\partial}{\partial a_l^m} \simeq (\delta_m^i \delta_j^l) \in T_A G \simeq \text{gl}_n(\mathbb{R})$  und daher

$$X_{(s)}(A) = a_r^m \frac{\partial}{\partial a_s^m} \text{ und } \frac{\partial}{\partial a_s^m} = (A^{-1})_m^r X_{(s)} \implies \Gamma_{(j_1)(k_2)}^{(i_1)} =$$

$$= \left\langle \nabla_{\partial/\partial a_{j_2}^{i_1}} \frac{\partial}{\partial a_{k_2}^{i_1}}, da_{i_2}^{i_1} \right\rangle = (\text{wegen } \nabla_{X_{(s)}} X_{(s')} = 0)$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_{j_2}^{i_1}} ((A^{-1})_k^{i_1}) \langle X_{(k_2)}, da_{i_2}^{i_1} \rangle = \frac{\partial}{\partial a_{j_2}^{i_1}} ((A^{-1})_k^{i_1}) \cdot a_r^{i_1} \delta_{i_2}^{k_2}.$$

$$\text{Wegen } dA^{-1} = -A^{-1} \cdot dA \cdot A^{-1} \text{ gilt } \frac{\partial}{\partial a_{j_2}^{i_1}} ((A^{-1})_k^{i_1}) = -(A^{-1})_{j_1}^r (A^{-1})_{k_1}^{j_2}$$

$$\implies \Gamma_{(j_1)(k_2)}^{(i_1)} = -\delta_{j_1}^{i_1} \delta_{i_2}^{k_2} (A^{-1})_{k_1}^{j_2}.$$

$$\text{Das liefert } (\ddot{A}_\Gamma)_{i_2}^{i_1} = \ddot{a}_{i_2}^{i_1} + \Gamma_{(j_1)(k_2)}^{(i_1)} \dot{a}_{j_2}^{j_1} \dot{a}_{k_2}^{k_1} = \ddot{a}_{i_2}^{i_1} - \dot{a}_{j_2}^{i_1} \dot{a}_{i_2}^{k_1} (A^{-1})_{k_1}^{j_2} \text{ d.h. } \ddot{A}_\Gamma = \ddot{A} - \dot{A} A^{-1} \dot{A}.$$

Geodäten müssen  $\ddot{A} = \dot{A} A^{-1} \dot{A}$  erfüllen und das ist für die Kurven  $t \mapsto A \cdot e^{B \cdot t}$  der Fall. (Aufgrund der eindeutigen Festlegung der Lösungen durch Anfangswert und Geschwindigkeit sind es die einzigen.)

## Übungen

Üb. 8.1 ( $M, \Gamma$ )  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $\Omega \in \Omega^q(M)$ ,

$$A : \mathcal{T}_{q+1}(M) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M) : T \longmapsto \frac{1}{(q+1)!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign}(\sigma) \sigma(T) \quad (\text{vgl. S. 45}),$$

$$\langle , \rangle : \mathcal{T}_2^1(M) \times \mathcal{T}_q(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{q+1}(M) : ((s_{j_0 j_1}^i), (t_{j_1 \dots j_q})) \longmapsto (s_{j_0 j_1}^i t_{ij_2 \dots j_q}).$$

Zeige, dass  $d\Omega = (q+1)A(\nabla\Omega) + \binom{q+1}{2} A(\langle T(\Gamma), \Omega \rangle)$ .

Hinweis: Verwende, dass in Koordinaten gilt

$$(d\Omega)_{j_0 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \text{sign}(\sigma) \frac{\partial \omega_{j\sigma(1)\dots j\sigma(q)}}{\partial x^{j\sigma(0)}} \left( = \sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial \omega_{j_0 \dots \hat{j}_i \dots j_q}}{\partial x^{ji}} \right) \quad \text{vgl. S. 72.}$$

Üb. 8.2  $G$  sei eine Liegruppe.

- a) Zeige, dass  $T(\Gamma) \in \mathcal{T}_{2,l}^1(G)$ , wenn  $\Gamma \in Z_l(G)$ .
- b) Zeige, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$Z_l(G) \longrightarrow \mathcal{T}_{2,l}^1(G) : \Gamma \longmapsto T(\Gamma)$$

$$\text{s. 126} \quad | \wr \quad \text{s. 51} \quad | \wr$$

$$T_{2,I}^1(G) \longrightarrow \mathcal{T}_{2,I}^1(G) : \alpha \longmapsto ((v, w) \mapsto \alpha(v, w) - \alpha(w, v) - [v, w])$$

- c) Folgere unter Beachtung von S. 124 oben, dass auch

$$Z_l(G) \longrightarrow Z_l(G) : \Gamma \longmapsto \overset{s}{\Gamma}$$

$$\text{s. 126} \quad | \wr \quad \text{s. 126} \quad | \wr$$

$$T_{2,I}^1(G) \longrightarrow \mathcal{T}_{2,I}^1(G) : \alpha \longmapsto \left( (v, w) \mapsto \frac{1}{2} (\alpha(v, w) + \alpha(w, v) + [v, w]) \right)$$

kommutiert.

Üb. 8.3 a) ( $M, g$ ) sei ein  $\mathcal{C}^\infty$ -RR. Zeige, dass der Levi-Civit -Zusammenhang von  $g$  für

$$X, Y, Z \in \mathcal{T}^1(M) \text{ die Gleichung } g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left\{ X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \right\} \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ erfüllt.}$$

Hinweis: Verwende  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ , vgl. S. 125 und  $\nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$ , vgl. S. 123, Bsp. 2.

- b)  $G$  sei eine Liegruppe mit linksinvariante Metrik  $g$  und es werde  $\langle , \rangle$  für das Skalarprodukt  $g(I)$  auf  $T_I G$  geschrieben.  $\Gamma$  sei der Levi-Civit -Zusammenhang von  $g$  und  $\alpha_\Gamma$  wie in S. 126. Zeige, dass für  $u, v, w \in T_I G$  gilt:

$$\langle \alpha_\Gamma(u, v), w \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle [u, v], w \rangle - \langle [v, w], u \rangle + \langle [w, u], v \rangle \right\}$$

- c) Es sei speziell  $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  mit  $g(A_0) = \sum_{i,j} d(A_0^{-1}A)_j^i \otimes d(A_0^{-1}A)_j^i$ , vgl. S. 88,  
d.h.  $\langle B, C \rangle = g(I)(B, C) = \mathrm{tr}(BC^T)$ .  
Bestimme mittels b)  $\alpha_\Gamma(B, C)$  für  $B, C \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ .
- d) Berechne  $\Gamma_{(j_1)(k_2)}^{(i_1)(i_2)}$  für die Metrik in c) und überprüfe die Geodätengleichung  
in Üb. 7.3 a), S. 112.

- Üb. 8.4 a) Berechne die Christoffelsymbole in Kugelkoordinaten am  $\mathbb{R}^3$  mittels der Transformationsformel (\*) in S. 117.  
b) Überprüfe, dass sich dasselbe (und schneller) ergibt, wenn man die Differentialgleichung der Geodäten als Eulersche Differentialgleichung der Lagrangefunktion  $L(x, \dot{x}) = g(x)(\dot{x}, \dot{x}) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$  aufstellt.

Üb. 8.5  $G$  sei eine Liegruppe,  $\alpha$  wie in S. 126.

- a) Es sei  $F : G \times TG \longrightarrow TG : (x_0, (x, v)) \longmapsto (x_0, Tl^{x_0 x^{-1}} v)$  und  $\Gamma_0 := [F] \in Z(G)$ . Zeige, dass  $\Gamma_0 \in Z_l(G)$  und  $\alpha_{\Gamma_0} = 0$ .
- b) Es sei  $C : [a, b] \longrightarrow G : t \longmapsto x(t) \in \mathcal{C}^2$ . Zeige, dass  $\mathbb{T}^C = F_{x(b), x(a)} = Tl^{x(b)x(a)^{-1}} : T_{x(a)}G \longrightarrow T_{x(b)}G$  und insbesondere nur von den Endpunkten von  $C$  abhängt.
- c) Nun sei  $\Gamma \in Z_l(G)$  und  $C : [a, b] \longrightarrow G : t \longmapsto x(t)$  eine Geodäte mit  $x(a) = I$ ,  $\dot{x}(a) =: v \in T_I G$  und  $\beta := \alpha_\Gamma(v, -) \in \mathrm{gl}_{\mathbb{R}}(T_I G)$ . Zeige, dass  $\mathbb{T}^C = Tl^{x(b)} \circ e^{-b\beta} : T_I G \longrightarrow T_{x(b)}G$ .
- d) Speziell sei  $G = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$  und  $\Gamma_0$  wie in a).  
Zeige mittels  $\ddot{A}_{\Gamma_0}(t_0) = \frac{d}{dt} (F_{A(t_0), A(t)} \dot{A}(t))(t_0)$  (vgl. S. 115), dass  $\ddot{A}_{\Gamma_0} = \ddot{A} - \dot{A} A^{-1} \dot{A}$  (vgl. S. 127).

## § 9 Der Krümmungstensor

In Analogie zu den Isometrien, welche als Isomorphismen Riemannscher Räume eingeführt wurden (vgl. S. 99), definiert man:

**Def.:**

- 1)  $(M_i, \Gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang.  
 $f : M_1 \rightarrow M_2$  heißt affine Transformation : $\iff$ 
  - (i)  $f$   $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus
  - (ii)  $\forall X, Y \in \mathcal{T}^1(M_1) : \nabla_{f(X)} f(Y) = f(\nabla_X Y) \in \mathcal{T}^1(M_2)$ .
(Zur Definition von  $f(X)$  siehe S. 35, 50).
- 2)  $(M, [\mathfrak{A}], \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang heißt flach : $\iff \forall x \in M : \exists \varphi \in \mathfrak{A}_{\max} : \varphi : (U, \Gamma|_U) \rightarrow (V, \Gamma_1|_V)$  ist eine affine Transformation, wenn  $\Gamma_1$  der Standardzusammenhang auf  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Bsp.:** 1) Wenn  $\Gamma \in Z_l(G)$ ,  $G$  Liegruppe, und  $x \in G$ , so ist  $l^x : G \rightarrow G$  eine affine Transformation.

2) Wenn  $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  eine Isometrie ist, so ist  $f$  auch eine affine Transformation der Riemannschen Zusammenhänge, da  $\nabla$  durch  $\Gamma$  und  $\Gamma$  durch  $g$  bestimmt sind. (Genau: Wenn  $\varphi : U_2 \rightarrow V_2$  eine Karte auf  $M_2$  ist, so ist  $\varphi \circ f$  eine auf  $M_1$  und in den entsprechenden Koordinaten ist  $g_{2,ij}(f(x)) = g_{1,ij}(x) \implies \overset{2}{\Gamma}_{jk}^i(f(x)) = \overset{1}{\Gamma}_{jk}^i(x) \implies \overset{2}{\nabla}_{f(X)} f(Y) = f(\overset{1}{\nabla}_X Y)$ .)

3) In einem Vektorraum  $V = M$  ist der Standardzusammenhang durch  $F : V \times TV \rightarrow TV : (x_0, (x, v)) \mapsto (x_0, v)$  gegeben (vgl. S. 116, Bsp. 1).  $V$  ist flach und es gilt  $F_{x_0, x_1} \circ F_{x_1, x_2} = F_{x_0, x_2}$  und daher verschwindet auch  $R_C := \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F_{x_0, x(0,t)} \circ F_{x(0,t), x(s,t)} \circ F_{x(s,t), x(s,0)} \circ F_{x(s,0), x_0}](0,0)$ , wenn  $C : [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^2} M : (s,t) \mapsto x(s,t)$  ein parametrisiertes Flächenstück ist und  $x_0 := x(0,0)$ .  $R_C$  kann als Tangentialtransport entlang des „idealisierten“ Parallelogramms mit den Kanten  $\frac{\partial x}{\partial s}(0,0)$ ,  $\frac{\partial x}{\partial t}(0,0) \in T_{x_0}M$  aufgefasst werden.

**Definition und Hilfssatz:**  $(M, \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $k \geq 4$ ,  $\Gamma = [F]$ .

- 1)  $C, R_C$  seien wie oben. Dann hängt  $R_C \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{x_0}M, T_{x_0}M)$  nur von  $\Gamma$ ,  $v := \frac{\partial x}{\partial t}(0,0)$  und  $w := \frac{\partial x}{\partial s}(0,0)$  ab und heißt Krümmung von  $\Gamma$  in  $v, w$ -Richtung  $=: R_{v,w}$ .

- 2)  $T_{x_0}M \times T_{x_0}M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_{x_0}M, T_{x_0}M) : (v, w) \longmapsto R_{v,w}$  ist bilinear und daher  $R(x_0) := ((v^*, u, v, w) \mapsto \langle v^*, R_{v,w}u \rangle) \in \text{Mul}(T_{x_0}^*M, T_{x_0}M, T_{x_0}M, T_{x_0}M) = T_{x_0}M \otimes T_{x_0}^*M^{\otimes 3} = T_{3,x_0}^1M$ .  
 $R(\Gamma) = R : M \longrightarrow T_3^1M$  ist  $\mathcal{C}^{k-3}$ , d.h.  $R \in T_3^1(M)$   $\mathcal{C}^{k-2}$ -Mannigfaltigkeit und heißt Krümmungstensor. In Koordinaten gilt

$$R_{bcd}^a = \frac{\partial \Gamma_{db}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d} + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e$$

Speziell ist  $R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a$ , d.h.  $R$  ist in den hinteren zwei Indices antisymmetrisch.

- 3) Wenn  $f : (M_1, \Gamma_1) \longrightarrow (M_2, \Gamma_2)$  affin ist, so ist  $f(R_1) = R_2$ .

**Beweis:** Für  $y \rightarrow x \in M$  gilt in einer Karte, s. S. 115:

$$F_{x,y} : T_y M \longrightarrow T_x M : u^i \partial_i \longmapsto [u^i + \Gamma_{jk}^i(x)(y^j - x^j)u^k + O(|y - x|^2)] \partial_i$$

und daher für  $s \searrow 0$ :

$$F_{x(s,0),x_0}(u^i \partial_i) = [u^i - s\Gamma_{jk}^i(x(s,0))w^j u^k + O(s^2)] \partial_i.$$

Ebenso ist  $F_{x(s,t),x(s,0)}(z^i \partial_i) = \left[ z^i - t\Gamma_{jk}^i(x(s,t)) \left( v^j + s \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t}(0,0) \right) z^k + O(s^2) + O(t^2) \right] \partial_i$

und daher  $F_{x(s,t),x(s,0)} \circ F_{x(s,0),x_0}(u^i \partial_i)$

$$= \underbrace{[u^i - s\Gamma_{jk}^i(x(s,0))w^j u^k - t\Gamma_{jk}^i(x(s,t))v^j u^k + st\Gamma_{jk}^i(x(s,t))\Gamma_{lm}^k(x(s,0))v^j w^l u^m - s\Gamma_{jk}^i(x(s,t)) \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t}(0,0)u^k + O(s^2) + O(t^2)]}_{z^i} \partial_i.$$

Aus  $F_{x(0,t),x(s,t)}(y^i \partial_i) = \left[ y^i + s\Gamma_{jk}^i(x(0,t)) \left( w^j + t \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t}(0,0) \right) y^k + O(s^2) + O(t^2) \right] \partial_i$  folgt

dann:  $A := F_{x(0,t),x(s,t)} \circ F_{x(s,t),x(s,0)} \circ F_{x(s,0),x_0}(u^i \partial_i) =$

$$= [u^i - s\Gamma_{jk}^i(x(s,0))w^j u^k - t\Gamma_{jk}^i(x(s,t))v^j u^k + st\Gamma_{jk}^i(x(s,t))\Gamma_{lm}^k(x(s,0))v^j w^l u^m + s\Gamma_{jk}^i(x(0,t))w^j u^k - st\Gamma_{jk}^i(x(0,t))\Gamma_{lm}^k(x(s,t))w^j v^l u^m + O(s^2) + O(t^2)] \partial_i.$$

Wegen  $s\Gamma_{jk}^i(x(s,0)) = s\Gamma_{jk}^i(x_0) + O(s^2)$  ist

$$s\Gamma_{jk}^i(x(0,t)) - s\Gamma_{jk}^i(x(s,0)) = st \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}(x_0)v^l + O(s^2) + O(t^2) \text{ und analog}$$

$$t\Gamma_{jk}^i(x(s,t)) = t\Gamma_{jk}^i(x_0) + st \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}(x_0)w^l + O(s^2) + O(t^2).$$

$$\text{Also: } A = \left[ u^i - t\Gamma_{jk}^i(x_0)v^j u^k + st \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}(x_0)(w^j u^k v^l - v^j u^k w^l) + \right. \right.$$

$$+ \Gamma_{jk}^i(x_0) \Gamma_{lm}^k(x_0) (v^j w^l u^m - w^j v^l u^m) \Big\} + O(s^2) + O(t^2) \Big] \partial_i.$$

Schließlich liefert  $F_{x_0,x(0,t)}(\xi^i \partial_i) = [\xi^i + t \Gamma_{jk}^i(x_0) v^j \xi^k + O(t^2)] \partial_i$ , dass  $F_{x_0,x(0,t)} A = u^i \partial_i + s t R_C(u) + O(s^2) + O(t^2)$ , wobei  $R_C(u) = u^b v^c w^d \left\{ \frac{\partial \Gamma_{db}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d} + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e \right\} \frac{\partial}{\partial x^a}$ . Daraus folgen 1) und 2). Wenn  $f$  affin ist, bleiben  $\Gamma_{jk}^i$  und damit  $R_{bcd}^a$  erhalten.  $\square$

Der Krümmungstensor kann auch (weniger anschaulich) mittels der kovarianten Ableitung definiert werden (vgl. S. 123 für  $T(\Gamma)$ ):

**Hilfssatz:** ( $M, \Gamma$ )  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $k \geq 4$ . Dann gilt für  $R(\Gamma) \in \mathcal{T}_3^1(M)$   $\mathcal{C}^{k-2}$ -Mannigfaltigkeit)  $\simeq$  (s. S. 49)  
 $\simeq \{T : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}^1(M)$   $\mathcal{C}^{k-2}$ :  $T$   $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -trilinear $\} : \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}^1(M) : R(\Gamma)(X, Y, Z) = \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_{[Y, Z]} X$ .

**Beweis:** Beide Seiten der Gleichung hängen für  $x_0 \in M$  nur von den Werten von  $X, Y, Z$  auf einer Umgebung von  $x_0$  ab. In Koordinaten ist:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_c}(\nabla_{\partial_d} \partial_b) - \nabla_{\partial_d}(\nabla_{\partial_c} \partial_b) - \nabla_{[\partial_c, \partial_d]} \partial_b &= \nabla_{\partial_c}(\Gamma_{db}^a \partial_a) - \nabla_{\partial_d}(\Gamma_{cb}^a \partial_a) = \\ &= \left\{ \frac{\partial \Gamma_{db}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d} + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e \right\} \partial_a. \end{aligned}$$

Wenn wir noch zeigen, dass

$$T(X, Y, Z) := \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_{[Y, Z]} X$$

$\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -trilinear ist, sind wir fertig.

Wegen  $\nabla_{fY}(\nabla_Z X) = f \nabla_Y(\nabla_Z X)$ ,  $\nabla_Z(\nabla_{fY} X) = f \nabla_Z(\nabla_Y X) + Z(f) \nabla_Y X$  und  $\nabla_{[fY, Z]} X = \nabla_{f[Y, Z] - Z(f)Y} X = f \nabla_{[Y, Z]} X - Z(f) \nabla_Y X$  ist  $T$  in  $Y$   $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -linear. Aus Symmetriegründen ist  $T$  auch in  $Z$   $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -linear. Schließlich ist

$$\nabla_Y(\nabla_Z f X) = \nabla_Y(Z(f)X + f \nabla_Z X) = f \nabla_Y \nabla_Z X + Y(f) \nabla_Z X + Z(f) \nabla_Y X + Y(Z(f))X$$

und daher  $T(fX, Y, Z) = fT(X, Y, Z)$ .  $\square$

**Bsp.:**  $G$  sei eine Liegruppe und  $\Gamma \in Z_l(G)$  mit  $\alpha = \alpha_\Gamma \in T_{2,I}^1(G)$  wie in S. 126. Dann ist  $R(\Gamma) \in \mathcal{T}_{3,l}^1(G)$  nach 3) in S. 131. Es genügt also  $R(\Gamma)(I) \in T_{3,I}^1(G)$  zu bestimmen. Für  $u, v, w \in T_I G$  gilt:

$$\begin{aligned} R(\Gamma)(I)(u, v, w) &= R(\Gamma)(L(u), L(v), L(w))(I) = \\ &= (\nabla_{L(v)} \nabla_{L(w)} L(u) - \nabla_{L(w)} \nabla_{L(v)} L(u) - \nabla_{[L(v), L(w)]} L(u))(I) \\ &= (\nabla_{L(v)} L(\alpha(w, u)) - \nabla_{L(w)} L(\alpha(v, u)) - \nabla_{L([v, w])} L(u))(I) \\ &= \alpha(v, \alpha(w, u)) - \alpha(w, \alpha(v, u)) - \alpha([v, w], u) \in T_I G. \end{aligned}$$

Nun können wir auch die flachen Räume charakterisieren:

**Satz**  $(M, \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $k \geq 4$ . Dann gilt:  
 $M$  flach  $\iff T(\Gamma) = 0$  und  $R(\Gamma) = 0$ .

**Beweis:** “ $\implies$ ” folgt daraus, dass der Standardzusammenhang eines Vektorraums verschwindende Torsion und Krümmung hat.

“ $\iff$ ” a) Es sei  $x_0 \in M$ ,  $\varphi : U \longrightarrow V : x \longmapsto (x^1, \dots, x^n)^T$  geodätische Normalkoordinaten bei  $x_0$ ,  $X := x^k \partial_k \in \mathcal{T}^1(U)$ . Dann ist  $\nabla_X X = x^j \nabla_{\partial_j}(x^k \partial_k) = x^j \partial_j + x^j x^k \Gamma_{jk}^i(x) \partial_i$ ; nach S. 106 c) ist  $\forall i : \forall x \in U : x^j x^k \Gamma_{jk}^i(x) = 0$  und daher  $\nabla_X X = X$ .

b) Wegen  $R(\Gamma) = 0$  gilt (vgl. S. 132):

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_{\partial_j} X - \nabla_{\partial_j} \nabla_X X &= \nabla_{[X, \partial_j]} X; [X, \partial_j] = -\partial_j(x^k) \partial_k = -\partial_j \\ \implies \nabla_X (\nabla_{\partial_j} X) &= \nabla_{\partial_j} X - \nabla_{\partial_j} X = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_j} X &= \nabla_{\partial_j}(x^k \partial_k) = \partial_j + x^k \Gamma_{jk}^i \partial_i \\ \implies 0 &= \nabla_X(\partial_j + x^k \Gamma_{jk}^i \partial_i) = x^k \nabla_{\partial_k} \partial_j + X(x^k \Gamma_{jk}^i) \partial_i + x^k \Gamma_{jk}^m x^l \nabla_{\partial_l} \partial_m \\ &= [X(x^k \Gamma_{jk}^i) + x^k \Gamma_{kj}^i + x^k \Gamma_{jk}^m x^l \Gamma_{lm}^i] \partial_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } T(\Gamma) = 0 \text{ ist } f_j^i &:= x^k \Gamma_{jk}^i = x^k \Gamma_{kj}^i \in \mathcal{C}^{k-2}(U) \\ \implies \forall i, j : X(f_j^i) &= -f_j^i - f_m^i f_j^m. \end{aligned}$$

Für  $v \in \mathbb{R}^n$  sei  $x(t)$  die Geodäte mit  $x^k(t) = v^k \cdot t$  und  $a_j^i(t) := t f_j^i(x(t))$ . Dann ist  $\dot{a}_j^i = t v^k \frac{\partial f_j^i}{\partial x^k}(x(t)) + f_j^i(x(t)) = X(f_j^i)(x(t)) + f_j^i(x(t)) = -f_m^i(x(t)) f_j^m(x(t)) = -\frac{1}{t^2} a_m^i a_j^m$ , d.h. für  $A(t) = (a_j^i(t))$  gilt  $\dot{A} = -\frac{1}{t^2} A^2$ .

Die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems sind analytisch für  $t > 0$ . Wegen  $f_j^i(x_0) = 0$  gilt:  $\exists t_0 : \forall 0 < t < t_0 : \|A(t)\| \leq \frac{1}{2} t$ . Daher  $\|A(t)\| = \left\| \int_0^t A(s)^2 ds / s^2 \right\| \leq \frac{t}{4}$  und induktiv  $A(t) = 0$  für  $0 < t < t_0$  und damit auch in der ganzen Karte. Das ergibt  $\nabla_{\partial_j} X = \partial_j$ .

c) Wegen  $T(\Gamma) = 0$  ist  $\nabla_X \partial_j - \nabla_{\partial_j} X = [X, \partial_j] = -\partial_j$  (s. S. 123)  
 $\implies \forall j : \nabla_X \partial_j = 0$ . Mit  $R(\Gamma) = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla_{\partial_j} \nabla_X \partial_k - \nabla_X \nabla_{\partial_j} \partial_k}_{0} &= \nabla_{[\partial_j, X]} \partial_k = \nabla_{\partial_j} \partial_k = \Gamma_{jk}^i \partial_i \\ \implies -\Gamma_{jk}^i \partial_i &= \nabla_X(\Gamma_{jk}^i \partial_i) = X(\Gamma_{jk}^i) \partial_i + \Gamma_{jk}^m x^l \nabla_{\partial_l} \partial_m \\ \implies \forall i, j, k : X(\Gamma_{jk}^i) &= -\Gamma_{jk}^i - x^l \Gamma_{jk}^m \Gamma_{lm}^i. \end{aligned}$$

Wieder sei  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $x(t)$  die Geodäte mit  $x^k(t) = v^k t$  und  $b_{jk}^i(t) := t \Gamma_{jk}^i(x(t))$ .

Dann ist  $\dot{b}_{jk}^i = -\frac{v^l}{t} b_{lm}^i b_{jk}^m$  und mit demselben Argument wie in b) folgt  $\forall x \in U, \forall i, j, k : \Gamma_{jk}^i(x) = 0$ , d.h.  $M$  ist flach.  $\square$

Im folgenden betrachten wir hauptsächlich den Krümmungstensor für einen Riemannschen Zusammenhang. Wenn  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  eine Riemannsche Metrik in Koordinaten ist, so gilt:

$$\frac{\partial \Gamma_{db}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d} = \frac{1}{2} g^{as} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^c} \left( \frac{\partial g_{sd}}{\partial x^b} + \cancel{\frac{\partial g_{sb}}{\partial x^d}} - \frac{\partial g_{db}}{\partial x^s} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x^d} \left( \cancel{\frac{\partial g_{sb}}{\partial x^c}} + \frac{\partial g_{sc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^s} \right) \right\} + \frac{\partial g^{as}}{\partial x^c} g_{se} \Gamma_{db}^e - \frac{\partial g^{as}}{\partial x^d} g_{se} \Gamma_{cb}^e.$$

Wegen  $0 = \frac{\partial(g^{as} g_{se})}{\partial x^c} = \frac{\partial g^{as}}{\partial x^c} g_{se} + \frac{\partial g_{se}}{\partial x^c} g^{as}$  folgt:

$$R_{bcd}^a = \frac{1}{2} g^{as} \left( \frac{\partial^2 g_{sd}}{\partial x^b \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial x^s \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{sc}}{\partial x^b \partial x^d} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial x^s \partial x^d} \right) -$$

$$- \frac{\partial g_{se}}{\partial x^c} g^{as} \Gamma_{db}^e + \frac{\partial g_{se}}{\partial x^d} g^{as} \Gamma_{cb}^e + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e.$$

Wegen  $\Gamma_{ce}^a - g^{as} \frac{\partial g_{se}}{\partial x^c} = \frac{1}{2} g^{as} \left( \frac{\partial g_{sc}}{\partial x^e} + \cancel{\frac{\partial g_{se}}{\partial x^c}} - \frac{\partial g_{ce}}{\partial x^s} - \cancel{\frac{\partial g_{se}}{\partial x^c}} \right) = -g^{as} g_{ef} \Gamma_{sc}^f$  ergibt sich schließlich für den rein kovarianten Tensor  $\tilde{R} := \tilde{g} R \in \mathcal{T}_4(M)$ , d.h.  $\tilde{R}_{abcd} = g_{as} R_{bcd}^s$ :

$$\boxed{\tilde{R}_{abcd} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial x^b \partial x^c} - \frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial x^b \partial x^d} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial x^a \partial x^d} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial x^a \partial x^c} \right) + g_{ef} (\Gamma_{bc}^e \Gamma_{ad}^f - \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ac}^f)}$$

Dies zeigt, dass  $\tilde{R}_{abcd} = \tilde{R}_{cdab}$ . Von früher wissen wir bereits, dass  $\tilde{R}_{abcd} = -\tilde{R}_{abdc}$ , d.h.  $\tilde{R}$  ist sowohl in den 2 vorderen als auch in den 2 hinteren Komponenten antisymmetrisch. Daher ist für  $x \in M$   $\tilde{R}(x)$  durch die folgende symmetrische Bilinearform auf  $\Lambda^2(T_x M)$  festgelegt:  $\tilde{R}(x) : \Lambda^2(T_x M) \times \Lambda^2(T_x M) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t \wedge u, v \wedge w) \longmapsto \tilde{R}(x)(t, u, v, w).$$

Wir betrachten  $\Lambda^2(T_x M)$  als IPR mit der Metrik  $G(x) = \frac{1}{2} \Lambda^2(g(x))$ , d.h. (vgl. S. 90):

$$G(x)(t \wedge u, v \wedge w) = \det \begin{pmatrix} g(t, v) & g(t, w) \\ g(u, v) & g(u, w) \end{pmatrix}.$$

Da eindimensionale Riemannsche Räume flach sind, untersuchen wir als erstes den Fall  $\dim M = 2$ . Dann ist  $\Lambda^2(T_x M)$  eindimensional  $\implies \exists! K \in \mathcal{C}^{k-3}(M) : \tilde{R} = K \cdot G$ .

**Def.:**  $K$  heißt Gauß'sche Krümmung der Fläche  $M$ .

In Koordinaten ist  $K = \frac{\tilde{R}_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \tilde{R}_{1212}/\det(g)$ .

Falls  $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$  und  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x_0) = 0$  (z.B. geodätische Normalkoordinaten bzgl.  $x_0$ ), so folgt aus der obigen Formel für  $\tilde{R}$ , dass in  $x_0$  gilt:  $K = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2}$ .

**Bsp.:** 1)  $r > 0$ ,  $\mathbb{S}_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$  mit der Metrik  $\sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$ , d.h. mit der von  $\mathbb{R}^3$  induzierten Metrik. Da Drehungen isometrisch sind, erhalten sie  $\tilde{R}$  und  $G$  und ist  $K$  konstant. Es genügt also,  $x_0 = (0, 0, r)^T$  zu betrachten. In der Karte  $x \mapsto (x^1, x^2)^T$  ist  $g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{(x^3)^2}$ ,  $i, j = 1, 2$  (vgl. auch Üb. 7.2, S. 112) und daher die Bedingung oben erfüllt. Also ist  $K = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0) = \frac{1}{r^2}$ .

2) Ebenso ist  $K$  für die Poincarésche Metrik

$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ ,  $g = (1 - |x|^2)^{-2} \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i$  (vgl. S. 103) konstant. In 0 ist die Bedingung oben wieder erfüllt und daher

$$K = -\frac{1}{2} \Delta (1 - |x|^2)^{-2} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} \Delta \left( 1 + 2|x|^2 + O(|x|^4) \right) \Big|_{x=0} = -4. \text{ Somit ist } (D, g) \text{ eine Fläche mit konstanter negativer Krümmung } -4.$$

**Erinnerung:** Für eine in  $\mathbb{R}^3$  eingebettete Fläche  $M$  wird die Gauß'sche Krümmung gewöhnlich als  $K = \kappa_1 \kappa_2$  definiert, wobei  $\kappa_i$  die Krümmungen der Hauptnormalschnitte sind, d.h. wenn oEdA  $x_0 = 0$  und  $M$  bei  $x_0$  durch  $x^3 = f(x^1, x^2)$  mit  $f(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x^1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(0, 0)$  gegeben ist, so sind  $\kappa_i$  die Eigenwerte der Hessematrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} \end{pmatrix}(0).$$

Andererseits gilt für die von  $\sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$  auf  $M$  induzierte Metrik  $g$  bzgl. der Karte  $x \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ :  $g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Daher ist die Bedingung oben erfüllt und  $K(x_0) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x^2} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \right)^2 \right) \right](0)$   
 $= \left[ \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2 \right](0) = \det A = \kappa_1 \kappa_2$ .

Dies zeigt, dass die beiden Definitionen übereinstimmen und insbesondere, dass  $\kappa_1 \kappa_2$  nur vom RR  $(M, g)$  abhängt und unter Isometrie erhalten bleibt, das sogenannte "Theorema

egregium" von C.F. Gauß. (Für eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  ist  $\begin{Bmatrix} \kappa_1 \cdots \kappa_n \\ |\kappa_1 \cdots \kappa_n| \end{Bmatrix}$  für  $n \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$  durch  $(M, i^*(\sum_{j=1}^m dx^j \otimes dx^j))$  bestimmt.)

Zum Verständnis der Krümmung auf nicht eingebetteten Flächen ist der folgende Satz wesentlich:

**Satz**  $(M, g)$  2-dimensionaler  $C^k$ -Riemannscher Raum,  $k \geq 4$ ,  $x_0 \in M$ ,  $\varrho > 0$ .

$D_\varrho(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) < \varrho\}$ ,  $S_\varrho(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) = \varrho\}$ . Dann ist für kleines  $\varrho$   $S_\varrho(x_0)$  eine eindimensionale  $C^{k-2}$ -Mannigfaltigkeit.

Wenn  $U(\varrho) := \int_{S_\varrho(x_0)} \hat{\Omega}_{i^*g}$  und  $F(\varrho) := \int_{D_\varrho(x_0)} \hat{\Omega}_g$ , so ist  $U(\varrho)$  bei 0  $C^{k-2}$  und in 0  $C^{k-1}$  und

$F(\varrho)$  bei 0  $C^{k-1}$  und in 0  $C^k$  und es gilt:

$$F(\varrho) = \varrho^2 \pi - \varrho^4 \frac{\pi K(x_0)}{12} + o(\varrho^4), \quad \varrho \searrow 0, \text{ und}$$

$$U(\varrho) = F(\varrho)' = \varrho \cdot 2\pi - \varrho^3 \frac{\pi K(x_0)}{3} + o(\varrho^3), \quad \varrho \searrow 0.$$

**Beweis:**  $\varphi : x \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$  seien geodätische Normalkoordinaten. Dann ist für  $\varrho$  klein genug (s. S. 106):  $D_\varrho(x_0) = \{x : |\varphi(x)| < \varrho\}$  und  $S_\varrho(x_0) = \{x : |\varphi(x)| = \varrho\}$ . Insbesondere ist  $S_\varrho(x_0)$  eine eindimensionale  $C^{k-2}$ -Mannigfaltigkeit diffeomorph zu  $\mathbb{S}^1$ .  $\hat{\Omega}_g = \sqrt{\det g} dx^1 dx^2 \implies F(\varrho) = \iint_{|x|<\varrho} \sqrt{\det g} dx^1 dx^2$ .

In Polarkoordinaten  $r, \varphi$  ist  $g = dr \otimes dr + r^2 h_\varphi(r) d\varphi \otimes d\varphi$  (vgl. S. 107), d.h.  $F(\varrho) = \int_0^{2\pi} \int_0^\varrho r \sqrt{h_\varphi(r)} dr d\varphi$ ,  $U(\varrho) = F(\varrho)'$ . Wenn man  $r, \varphi$  durch  $x^1, x^2$  ausdrückt, ergibt sich

$$g = \left( \frac{x^1}{r} dx^1 + \frac{x^2}{r} dx^2 \right)^{\otimes 2} + r^2 h_\varphi(r) \left( -\frac{x^2}{r^2} dx^1 + \frac{x^1}{r^2} dx^2 \right)^{\otimes 2} = \frac{(x^1)^2 + h_\varphi(r)(x^2)^2}{r^2} dx^1 \otimes dx^1 + \frac{(x^2)^2 + h_\varphi(r)(x^1)^2}{r^2} dx^2 \otimes dx^2 + \frac{x^1 x^2}{r^2} (1 - h_\varphi(r)) [dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1].$$

Speziell ist  $\cos^2 \varphi + h_\varphi(r) \sin^2 \varphi = g_{11}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ,  $\sin^2 \varphi + h_\varphi(r) \cos^2 \varphi = g_{22}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  und daher  $h_\varphi(r) C^{k-2}$  bzgl.  $(r, \varphi)$ ,  $h_\varphi(0) = 1$ ,  $h'_\varphi(0) = 0$ . Das gibt  $g_{12}(x) = x^1 x^2 (-\frac{1}{2} h''_\varphi(0) + o(r))$ , d.h.  $\forall \varphi : h''_\varphi(0) = -2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0)$ . Wegen  $h_{\pi/2}(r) = g_{11}(0, r)$ ,  $h_0(r) = g_{22}(r, 0)$  folgt  $K(x_0) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2}(x_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2}(x_0) = -\frac{3}{2} h''_\varphi(0)$  (vgl. S. 135 oben).

Das liefert  $\sqrt{h_\varphi(r)} = 1 + \frac{h''_\varphi(0)}{4} r^2 + o(r^2) = 1 - \frac{K(x_0)}{6} r^2 + o(r^2)$  für  $r \searrow 0$  und damit das Ergebnis.  $\square$

**Bsp.:** Auf  $\mathbb{S}^2$  ist  $S_\varrho(x_0)$  ein Kreis mit Radius  $\sin \varrho$ , d.h.  $U(\varrho) = 2\pi \sin \varrho$ ,  $F(\varrho) = \text{Fläche}$

einer Kugelkappe  $= \int_0^\varrho U(t) dt = 2\pi(1 - \cos \varrho)$ . Aus  $U(\varrho) = 2\pi \sin \varrho = 2\pi \varrho - \frac{\pi}{3} \varrho^3 + o(\varrho^3)$  erhalten wir  $K = 1$ . Ähnlich könnte die Krümmung der Poincaréschen Metrik mittels Üb. 6.2, S. 96 berechnet werden.

Schließlich untersuchen wir noch, wie die Metrik  $g$  aus der Gauß'schen Krümmung  $K$  bestimmt wird. In geodätischen Polarkoordinaten (s. S. 107, Bsp. 2) ist

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} =: f \text{ und daher } \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x^1},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2f} \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2f} \frac{\partial f}{\partial x^2}. \text{ Die Formel in S. 134 liefert dann}$$

$$\tilde{R}_{1212} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{4f} \left( \frac{\partial f}{\partial x^1} \right)^2 \text{ und } K = \frac{1}{f} \tilde{R}_{1212}.$$

Wenn wir  $x^2$  festhalten, ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung  $\left( ' := \frac{\partial}{\partial x^1} \right) :$

$$2ff'' - f'^2 + 4K \cdot f^2 = 0 \text{ bzw. } \sqrt{f}'' + K\sqrt{f} = 0, \quad \sqrt{f}(0) = 0, \quad \sqrt{f}'(0) = 1.$$

Für  $K = 1 = \text{const.}$  hat dies die Lösung  $f = \sin^2(x^1)$ , was zur Metrik  $d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi$  der Kugel führt. Man sieht auch, dass die Funktionen  $\tilde{R}_{1212}$  bzw.  $K$  beliebig vorgegeben werden dürfen. Das ist für  $n \geq 3$  falsch, vgl. die Bianchi-Identität, S. 138.

Als nächstes befassen wir uns mit dem Fall  $n = \dim M = 3$ .

Dann ist  $\dim T_x M = 3$ . Allgemein, wenn  $(V, g)$  ein dreidimensionaler euklidischer Raum ist, so ist

$$*: \Lambda^2(V) \xrightarrow[\Lambda^2(\tilde{g})]{} \sim \Lambda^2(V^*) \xrightarrow[\sim]{} \widehat{\Lambda^1}(V) = \hat{V},$$

vgl. S. 92.

Eine symmetrische Bilinearform  $\tilde{R}$  auf  $\Lambda^2(V)$  ergibt also eine auf  $\hat{V}$  und damit ein  $\tilde{\tilde{R}}$  auf  $V$ :

$$\tilde{\tilde{R}} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \longmapsto \tilde{\tilde{R}}(*^{-1}([v, o]), *^{-1}([w, o])),$$

wobei  $o \in \mathcal{O}(V)$  beliebig ist. Wenn  $e_1, e_2, e_3$  eine ONB in  $V$ ,  $e^1, e^2, e^3$  die duale Basis in  $V^*$ ,  $o = [e^1 \wedge e^2 \wedge e^3]$ , so ist  $\Lambda^2(V) \xrightarrow[\sim]{} \hat{V} : e_1 \wedge e_2 \longmapsto [e_3, o], e_2 \wedge e_3 \longmapsto [e_1, o], e_3 \wedge e_1 \longmapsto [e_2, o]$  und daher  $\tilde{\tilde{R}}(e_i, e_j) = \tilde{\tilde{R}}(e_{i+1} \wedge e_{i+2}, e_{j+1} \wedge e_{j+2})$ , wenn  $e_4 := e_1$  und  $e_5 := e_2$ . Wenn  $\tilde{R} \in V^{*\otimes 4}$  durch  $\tilde{R}(e_a, e_b, e_c, e_d) = \tilde{R}_{abcd}$  und  $\tilde{\tilde{R}}$  durch  $\tilde{\tilde{R}}(t \wedge u, v \wedge w) = \tilde{R}(t, u, v, w)$  gegeben sind (vgl. S. 134), so erhalten wir in der Basis  $e_1, e_2, e_3$  und daher auch allgemein  $\tilde{\tilde{R}}_{ij} = \frac{1}{2} s g_{ij} - r_{ij}$ , wobei  $r_{ij} = g^{ac} \tilde{R}_{aicj}$  und  $s = g^{ij} r_{ij}$ .

Dies führt zur

**Def.:**

- 1)  $(M, \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $k \geq 4$ ,  $R = R(\Gamma)$ .  
 $r :=$  Verjüngung<sub>2</sub>( $R$ ), d.h.  $r_{ij} = R_{iaj}^a$  heißt Ricci-Tensor.
- 2)  $(M, g)$   $\mathcal{C}^k$ -RR,  $k \geq 4$ ,  $\Gamma$  Levi-Civit  -Zusammenhang von  $g$ .  
 $s :=$  Verjüngung ( $\tilde{g}^{-1}r$ ), d.h.  $s = g^{ij}r_{ij}$  heißt Kr  ummungsskalar.

**Bsp.:** 1) Im Fall  $n = 2$  gilt  $\tilde{R}_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$  (s. S. 134) und daher  $R_{bcd}^a = K(\delta_c^a g_{bd} - \delta_d^a g_{bc})$ ,  $r_{ij} = K(\delta_a^i g_{ij} - \delta_j^a g_{ia}) = K g_{ij}$ , d.h.  $r = K \cdot g$ ,  $s = 2K$ .

2) Im Fall  $n = 3$  können wir nach dem obigen  $\tilde{R}$  durch  $\tilde{\tilde{R}}$  und damit durch  $r$  und  $s$  ausdrücken. Nachrechnen in der Basis  $e_1, e_2, e_3$  ergibt:

$$\tilde{R}_{abcd} = g_{ac}r_{bd} - g_{ad}r_{bc} + g_{bd}r_{ac} - g_{bc}r_{ad} - \frac{1}{2}s(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$$

Wir untersuchen als nächstes, wie im Fall  $n = 3$  die Metrik  $g$  durch  $R$  bestimmt wird. Wenn wir, wie in S. 137 für  $n = 2$ , geodätische Polarkoordinaten verwenden, so sind noch die 3 Funktionen  $g_{22}, g_{23}, g_{33}$  unbekannt. Die Formel in S. 134 liefert dafür 6 partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit linker Seite

$$\tilde{R}_{abcd}, abcd \in \{1212, 1213, 1223, 1313, 1323, 2323\}.$$

(Die übrigen ergeben nichts Neues, vgl. auch S. 137.) Diese Differentialgleichungen sind nicht voneinander unabhängig. Dies liegt daran, dass die  $R_{bcd}^a$  aufgrund der Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen von  $\Gamma_{jk}^i$  die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung erfüllen müssen:

**Lemma (Bianchi-Gleichungen)**  $(M, \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $k \geq 4$ ,  $R = R(\Gamma) \in T_3^1(M)$   $\mathcal{C}^{k-2}$ -Mannigfaltigkeit).

Dann gilt  $\forall a, b, c, d, e : \nabla_e R_{bcd}^a + \nabla_c R_{bde}^a + \nabla_d R_{bec}^a = 0$ .

**Beweis:** Wir rechnen in geodätischen Normalkoordinaten bzgl.  $x_0 \in M$ .

$$\text{Dann gilt in } x_0 \text{ (s. S. 131): } \frac{\partial R_{bcd}^a}{\partial x^e} + \frac{\partial R_{bde}^a}{\partial x^c} + \frac{\partial R_{bec}^a}{\partial x^d} =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 \Gamma_{db}^a}{\partial x^e \partial x^c}} - \cancel{\frac{\partial^2 \Gamma_{cb}^a}{\partial x^e \partial x^d}} + \cancel{\frac{\partial^2 \Gamma_{eb}^a}{\partial x^c \partial x^d}} - \cancel{\frac{\partial^2 \Gamma_{db}^a}{\partial x^c \partial x^e}} + \cancel{\frac{\partial^2 \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d \partial x^e}} - \cancel{\frac{\partial^2 \Gamma_{eb}^a}{\partial x^d \partial x^c}} = 0 \quad \square$$

Außerdem gilt noch eine algebraische Identität:

**Lemma**  $(M, \Gamma)$   $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang,  $k \geq 4$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ ,  
 $\sigma : T_3^1(M) \longrightarrow T_3^1(M) : T \longmapsto \left( (\underbrace{x}_{\in M}, (\underbrace{\omega}_{\in T_x^* M}, \underbrace{u, v, w}_{\in T_x M}) \longmapsto T(x)(\omega, v, w, u) \right)$

$S := \text{id} + \sigma + \sigma^2 : \mathcal{T}_3^1(M) \longrightarrow \mathcal{T}_3^1(M)$ . Dann gilt:

$S(R(\Gamma)) = S(\nabla T(\Gamma))$ . Speziell ist  $S(R(\Gamma)) = 0$ , wenn  $\Gamma$  symmetrisch ist.

Für einen Riemannschen Zusammenhang ist  $R(\Gamma)$  bereits durch die Angabe von

$$\frac{1}{6} \binom{n^2}{2} = \begin{cases} 1 & : n = 2 \\ 6 & : n = 3 \\ 20 & : n = 4 \end{cases} \quad \text{Komponenten bestimmt.}$$

**Beweis:** In Normalkoordinaten ist  $R_{bcd}^a = \frac{\partial \Gamma_{db}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d}$  und daher

$$S(R(\Gamma))_{bcd}^a = R_{bcd}^a + R_{cdb}^a + R_{dbc}^a = \frac{\partial \Gamma_{db}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{cb}^a}{\partial x^d} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} - \frac{\partial \Gamma_{dc}^a}{\partial x^b} + \frac{\partial \Gamma_{cd}^a}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial x^c} = S(\nabla T(\Gamma))_{bcd}^a. \quad \text{Daher ist } S(R(\Gamma)) = S(\nabla T(\Gamma)).$$

Im Riemannschen Fall ist  $\tilde{R}$  bereits durch die Angabe der  $\tilde{R}_{abcd}$  mit  $a < b, c < d, a \leq c$  bestimmt. (Dies sind  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} (\binom{n}{2} + 1)$  Komponenten.) Die Identität  $S(R(\Gamma)) = 0$ , d.h.  $\tilde{R}_{abcd} + \tilde{R}_{acdb} + \tilde{R}_{adbc} = 0$  liefert für  $b = c, b = d$  oder  $a = c$  nichts Neues. Wenn  $a < b < c < d$ , so ist  $\tilde{R}_{abcd} = \tilde{R}_{acbd} - \tilde{R}_{adbc}$ , d.h. durch die anderen Fälle (d.h.  $a < c < d < b$  bzw.  $a < c < b < d$ ) festgelegt. Daher sind höchstens

$$\frac{1}{2} \binom{n}{2} \left( \binom{n}{2} + 1 \right) - \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)}{24} [3n^2 - 3n + 6 - (n-2)(n-3)] = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Komponenten von  $\tilde{R}$  unabhängig wählbar.  $\square$

Um die Krümmung im Fall  $n = \dim M > 2$  zu interpretieren, führen wir sie auf den Fall  $n = 2$  zurück.

**Definition und Hilfssatz:**  $\mathbb{R}V$  endlich dimensionaler Vektorraum,  $0 \leq k \leq \dim V$ .

$\mathcal{G}_k(V) := \{W \leq \mathbb{R}V : \dim W = k\}$ . Dann ist

$i : \mathcal{G}_k(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k(V)) : \mathbb{R}\langle v_1, \dots, v_k \rangle \longmapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$  wohldefiniert und injektiv.

( $i$  heißt „Plückersche Abbildung“).

**Beweis:**  $i$  wohldefiniert: Wenn  $\mathbb{R}\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \mathbb{R}\langle v'_1, \dots, v'_k \rangle$ , so ist  $v'_j = a_j^i v_i$ ,  $\det(a_j^i) \neq 0 \implies v'_1 \wedge \dots \wedge v'_k = \det(a_j^i) v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ ,  $[v'_1 \wedge \dots \wedge v'_k] = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$ .

$i$  injektiv:  $W := \mathbb{R}\langle v_1, \dots, v_k \rangle \neq \mathbb{R}\langle v'_1, \dots, v'_k \rangle \implies \exists v^* \in V^* : \langle v'_i, v^* \rangle = 0$  und oEdA  $\langle v_1, v^* \rangle \neq 0$ . Dann ist  $\dim(\ker v^* \cap W) = k-1$ . OEdA  $v_2, \dots, v_k \in \ker v^* \implies \forall v_2^*, \dots, v_k^* \in V^* : (v'_1 \wedge \dots \wedge v'_k)(v^*, v_2^*, \dots, v_k^*) = 0$  aber  $(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(v^*, v_2^*, \dots, v_k^*) = \langle v_1, v^* \rangle (v_2 \wedge \dots \wedge v_k)(v_2^*, \dots, v_k^*) \neq 0$  bei geeigneter Wahl der  $v_2^*, \dots, v_k^*$ .

Also ist  $[v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \neq [v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*]$ .  $\square$

**Bemerkung:** Entsprechend Üb. 1.7, S. 14, ist  $\mathcal{G}_k(V)$  eine  $k(n-k)$ -dimensionale  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit, eine „Grassmann-Mannigfaltigkeit“. Dann ist  $i$  sogar eine Immersion.

Für  $x \in M$  ist  $R(x)$  durch die symmetrische Bilinearform  $\tilde{R}(x) : \Lambda^2(T_x M) \times \Lambda^2(T_x M) \longrightarrow$

$\mathbb{R}$  bestimmt, vgl. S. 134.  $\tilde{\tilde{R}}(x)$  ist durch die Werte auf der Diagonale und hier schon durch die Werte auf der Einheitskugel bzgl.  $G(x)$  festgelegt. Anders gesagt:

$$\bar{R}(x) : \mathbb{P}(\Lambda^2(T_x M)) \longrightarrow \mathbb{R} : [\underbrace{w}_{\in \Lambda^2(T_x M)}] \longmapsto \frac{\tilde{\tilde{R}}(x)(w, w)}{G(x)(w, w)}$$

bestimmt bereits  $R(x)$ . Der nächste Satz zeigt, dass zur Kenntnis von  $R(x)$  bereits  $\bar{R}(x)|_{\mathcal{G}_2(T_x M)}$  genügt. Hierzu benötigt man das 2. Lemma in S. 138.

**Definition und Satz:**  $(M, g)$   $\mathcal{C}^4$ -Riemannscher Raum,  
 $\mathcal{G}_2(M) := \{(x, W) : x \in M, W \in \mathcal{G}_2(T_x M)\}$ .

$$K : \mathcal{G}_2(M) \longrightarrow \mathbb{R} : (x, \mathbb{R}\langle v_1, v_2 \rangle) \longmapsto \frac{\tilde{\tilde{R}}(x)(v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2)}{G(x)(v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2)}$$

heißt Schnittkrümmung. Es gilt:

- 1) Wenn  $(M, g_1), (M, g_2)$   $\mathcal{C}^4$ -Riemannsche Räume und  $x \in M$  mit  $g_1(x) = g_2(x)$  und  $\forall W \in \mathcal{G}_2(T_x M) : K_1(x, W) = K_2(x, W)$ , so ist  $R_1(x) = R_2(x)$ .
- 2) Wenn  $(M, g)$   $\mathcal{C}^5$ -Riemannscher Raum,  $x_0 \in M, W \in \mathcal{G}_2(T_x M)$ , so ist  $K(x_0, W)$  die Gauß'sche Krümmung im Punkt  $x_0$  der  $\mathcal{C}^{k-2}$ -Fläche  $(N, i^*g)$ , wobei  
 $i : N := \{x_v(t) : v \in W, g(x_0)(v, v) < \epsilon^2, |t| < 1\} \hookrightarrow M$ ,  $\epsilon$  klein und  
 $x_v = [\text{Geodäte in } M \text{ mit } x_v(0) = x_0, \dot{x}_v(0) = v]$ .

**Beweis:** 1) Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für  $X := \tilde{R}_1(x) - \tilde{R}_2(x) \in T_x^* M^{\otimes 4} : \forall v_1, v_2 \in T_x M : X(v_1, v_2, v_1, v_2) = 0$ . Da für festes  $v \in T_x M$   $X(v, -, v, -) \in T_x^* M^{\otimes 2}$  symmetrisch ist (vgl. S. 134), folgt:  $\forall v_1, v_2, v_3 \in T_x M : X(v_1, v_2, v_1, v_3) = 0$ . Das impliziert  $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_x M : X(v_1, v_2, v_3, v_4) = -X(v_3, v_2, v_1, v_4)$  und daher ist  $X$  alternierend, d.h.  $X \in \Lambda^4(T_x^* M)$ . S. 138 ergibt  $0 = S(X) = 3X$ , d.h.  $X = 0$ .

2) Es seien  $v_1, v_2$  eine ONB von  $W$  und  $\varphi$  Normalkoordinaten bei  $x_0$  mit  $\varphi(x_{v_1}(t)) = (t, 0, \dots, 0)^T$  und  $\varphi(x_{v_2}(t)) = (0, t, 0, \dots, 0)^T$  (s. S. 106).

Dann ist  $N = \varphi^{-1}\left(\{(x^1, x^2, 0, \dots, 0) : (x^1)^2 + (x^2)^2 < \epsilon^2\}\right)$  eine  $\mathcal{C}^{k-2}$ -Fläche. Für  $v \in W$ ,  $g(x_0)(v, v) < \epsilon^2$ , ist  $x_v(t)$ ,  $|t| < 1$ , in  $N$  und dort eine Geodäte, da  $x_v(t)$  stationär bzgl.  $(x, \dot{x}) \mapsto g(x)(\dot{x}, \dot{x})$  ist. Also liefert  $\varphi|_N$  geodätische Normalkoordinaten auf  $N$  und hat  $N$  in  $x_0$  die Krümmung  $\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}(x_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2}(x_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2}(x_0) = \tilde{R}_{1212}(x_0) = \tilde{\tilde{R}}(x_0)(\partial_1 \wedge \partial_2, \partial_1 \wedge \partial_2) = K(x_0, W)$ .  $\square$

**Bemerkung:** Wenn  $v_1, v_2$  eine ONB in  $W \in \mathcal{G}_2(T_x M)$  ist, so ist  $K(x, W) = \tilde{R}(x)(v_1, v_2, v_1, v_2)$ , da  $g(x)(v_i, v_j) = \delta_{ij}$  und folglich  $G(x)(v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2) = 1$ .

**Bsp.:** Für  $M = \mathbb{S}^n$  mit der Standardmetrik ist  $\forall(x, W) \in \mathcal{G}_2(M) : K(x, W) = 1$ , da  $N$  wie oben ein Teil der zweidimensionalen Kugel  $\mathbb{S}^n \cap (W + \mathbb{R}x)$  (wobei  $W \leq T_x \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ) mit Radius 1 ist.

**Def.:**  $(M, g)$   $\mathcal{C}^4$ -Riemannscher Raum.

- 1)  $x_0 \in M$  heißt isotrop : $\iff K|_{\mathcal{G}_2(T_{x_0}M)}$  ist konstant.
- 2)  $(M, g)$  heißt isotrop : $\iff \forall x_0 \in M : x_0$  isotrop.
- 3)  $(M, g)$  hat konstante Krümmung : $\iff K : \mathcal{G}_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$  ist konstant.

**Bsp.:** 1) Jeder zweidimensionale Riemannsche Raum ist isotrop.  
2)  $\mathbb{S}^n$  hat konstante Krümmung  $K = 1$ .

**Satz** 1)  $(M, g)$   $\mathcal{C}^4$ -Riemannscher Raum,  $x_0 \in M$  isotrop,  $K|_{\mathcal{G}_2(T_{x_0}M)} = K_0$ .

Dann gilt:  $\tilde{R}(x_0) = K_0 G(x_0)$ .

2) (Ein Satz von Schur)  $(M, g)$   $\mathcal{C}^4$ -Riemannscher Raum,  $\dim M \geq 3$ .  
Dann gilt:  $(M, g)$  isotrop  $\implies (M, g)$  hat konstante Krümmung.

**Beweis:** 1) Wenn  $X \in T_{x_0}^* M^{\otimes 4}$  mit

$$X(v_1, \dots, v_4) = \tilde{R}(x_0)(v_1, \dots, v_4) - K_0 G(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4),$$

so folgt aus dem Beweis in S. 140, dass  $X = 0$ .

2) Nach 1) gilt für isotropes  $g : \tilde{R} = K(x)G$ , d.h.

$$R_{bcd}^a(x) = K(x) \underbrace{(\delta_c^a g_{bd}(x) - \delta_d^a g_{bc}(x))}_{=: \overline{G}_{bcd}^a}.$$

In geodätischen Normalkoordinaten bei  $x_0$  ergeben die Bianchi-Gleichungen (s. S. 138) in  $x_0$ :

$$0 = \frac{\partial K}{\partial x^e} \overline{G}_{bcd}^a + \frac{\partial K}{\partial x^c} \overline{G}_{bde}^a + \frac{\partial K}{\partial x^d} \overline{G}_{bec}^a.$$

Verjüngen über  $a$  und  $e$  liefert in  $x_0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial K}{\partial x^c} g_{bd} - \frac{\partial K}{\partial x^d} g_{bc} + \frac{\partial K}{\partial x^c} g_{bd} - n \frac{\partial K}{\partial x^c} g_{bd} + n \frac{\partial K}{\partial x^d} g_{bc} - \frac{\partial K}{\partial x^d} g_{bc} \\ &= (2-n) \left( \frac{\partial K}{\partial x^c} g_{bd} - \frac{\partial K}{\partial x^d} g_{bc} \right). \end{aligned}$$

Wegen  $n > 2$  folgt mit  $b = d \neq c : \frac{\partial K}{\partial x^c} = 0$ , d.h.  $K = \text{konstant}$ .  $\square$